

최고특전 유학

정답과 해설

정답과 해설

I. 실수와 그 연산

1 제곱근과 실수

1 주제별 유형 불러오기

7~13쪽

유제 1	④	유제 2	-5	유제 3	③	유제 4	-2b
유제 5	③	유제 6	15	유제 7	④	유제 8	17
유제 9	①, ③	유제 10	90개	유제 11	①	유제 12	$2+\sqrt{8}$
유제 13	⑤	유제 14	18				

유제 1 ㄱ. 제곱근 0.16 은 $\sqrt{0.16}=\sqrt{(0.4)^2}=0.4$
 0.16 의 제곱근은 $\pm\sqrt{0.16}=\pm\sqrt{(0.4)^2}=\pm 0.4$
 ㄴ. $\sqrt{(-9)^2}=\sqrt{81}=\sqrt{9^2}=9$ 이므로
 9 의 제곱근은 $\pm\sqrt{9}=\pm\sqrt{3^2}=\pm 3$
 ㄷ. m, n 은 서로 부호가 다르고, 절댓값은 같은 수이므로
 $m+n=0$
 ㄹ. $\sqrt{(-6)^4}=\sqrt{\{(-6)^2\}^2}=(-6)^2=36$ 이므로
 36 의 양의 제곱근은 $\sqrt{36}=\sqrt{6^2}=6$
 $(-\sqrt{16})^2=(-\sqrt{4^2})^2=(-4)^2=16$ 이므로
 16 의 음의 제곱근은 $-\sqrt{16}=-\sqrt{4^2}=-4$
 $\therefore 6+(-4)=2$
 따라서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

유제 2 $a=\sqrt{(-8)^2}-(\sqrt{10})^2=8-10=-2$
 $b=(-\sqrt{32})^2\div\sqrt{2^4}=32\div\sqrt{16}=32\div 4=8$
 $c=\frac{1}{\sqrt{225}+\sqrt{(-5)^2}}=\frac{1}{15+5}=\frac{1}{20}$
 $\therefore a\div b\div c=-2\div 8\div\frac{1}{20}$
 $=-2\times\frac{1}{8}\times 20=-5$

유제 3 ㄱ. $x\geq 5$ 이면 $-2x<0, 5-x\leq 0$ 이므로
 $A=-(-2x)-\{-(5-x)\}$
 $=2x+5-x=x+5$
 ㄴ. $0\leq x<5$ 이면 $-2x\leq 0, 5-x>0$ 이므로
 $A=-(-2x)-(5-x)$
 $=2x-5+x=3x-5$
 ㄷ. $x<0$ 이면 $-2x>0, 5-x>0$ 이므로
 $A=-2x-(5-x)$
 $=-2x-5+x=-x-5$
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

유제 4 $a-b>0, ab<0$ 이므로 $a>0, b<0$

따라서 $b-a<0, -b>0$ 이므로
 $\sqrt{(b-a)^2}-\sqrt{a^2}+\sqrt{(-b)^2}=-(b-a)-a+(-b)$
 $=-b+a-a-b$
 $=-2b$

유제 5 $\sqrt{\frac{126}{x}}=\sqrt{\frac{2\times 3^2\times 7}{x}}$ 이 자연수가 되려면 x 는 126 의 약수이면서 $2\times 7\times(\text{자연수})^2$ 꼴이어야 한다.
 따라서 가장 작은 자연수 x 의 값은
 $2\times 7\times 1^2=14$
 $\sqrt{\frac{8}{3}}y=\sqrt{\frac{2^3\times y}{3}}$ 가 자연수가 되려면
 $y=2\times 3\times(\text{자연수})^2$ 꼴이어야 한다.
 따라서 가장 작은 자연수 y 의 값은
 $2\times 3\times 1^2=6$
 $\therefore x+y=14+6=20$

유제 6 $\sqrt{\frac{n}{12}}=\sqrt{\frac{n}{2^2\times 3}}$ 이 유리수가 되려면 n 은
 $3\times(\text{유리수})^2$ 꼴이어야 한다.
 이때 n 은 자연수이므로 가장 작은 수 $a=3\times 1^2=3$,
 두 번째로 작은 수 $b=3\times 2^2=12$ 이므로
 $a+b=3+12=15$

유제 7 $\sqrt{180+3x}$ 가 자연수가 되려면 $180+3x$ 가 180 보다 큰
 $(\text{자연수})^2$ 꼴인 수이어야 하므로
 $180+3x=196, 225, \dots$
 $\therefore x=\frac{16}{3}, 15, \dots$
 따라서 가장 작은 자연수 x 의 값은 15 이다.

유제 8 $\frac{102}{x}=\frac{2\times 3\times 17}{x}$ 이 자연수가 되려면 x 는 102 의 약수이어야 하므로 $x=1, 2, 3, 6, 17, 34, 51, 102$
 $\sqrt{50-2x}$ 가 자연수가 되려면 $50-2x$ 가 50 보다 작은
 $(\text{자연수})^2$ 꼴인 수이어야 하므로
 $50-2x=1, 4, 9, 16, 25, 36, 49$
 $\therefore x=\frac{49}{2}, 23, \frac{41}{2}, 17, \frac{25}{2}, 7, \frac{1}{2}$
 이때 x 는 자연수이므로 $x=23, 17, 7$
 따라서 구하는 자연수 x 의 값은 17 이다.

유제 9 $a=\sqrt{2}, b=2$ 이면
 ② $\sqrt{b}-a=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ 이므로 유리수이다.
 ④ $a\times\sqrt{b}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2=2$ 이므로 유리수이다.
 ⑤ $\frac{b}{a^2}=\frac{2}{(\sqrt{2})^2}=\frac{2}{2}=1$ 이므로 유리수이다.
 따라서 항상 무리수인 것은 ①, ③이다.

[참고] 계산 결과가 항상 무리수인 경우는 다음과 같다.

- ① (유리수)±(무리수)
- ② (0이 아닌 유리수)×(무리수)
- ③ (0이 아닌 유리수)÷(무리수)
- ④ (무리수)÷(0이 아닌 유리수)

유제 10 $\sqrt{a}$ 가 무리수가 되려면 a 는 (자연수)² 꼴인 수가 아니어야 한다.

100 이하의 자연수 중 (자연수)² 꼴인 수는 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100의 10개이므로 (자연수)² 꼴인 수가 아닌 수의 개수는 $100-10=90$ (개)
따라서 구하는 자연수 a 의 개수는 90개이다.

유제 11 $\triangle ACD$ 에서 $\overline{AC}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$
 $\overline{AE}=\overline{AC}=\sqrt{2}$ 이고, 점 E에 대응하는 수가 $3-\sqrt{2}$ 이므로
점 A에 대응하는 수는 3이다.
따라서 점 D에 대응하는 수는 $3-1=2$ 이다.

유제 12 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 a 라 하면
 $\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{8}$ 이므로 $\sqrt{2a^2}=\sqrt{8}$, $2a^2=8$
 $a^2=4$ $\therefore a=\pm 2$
그런데 $a>0$ 이므로 $a=2$
이때 $\overline{CB}=\overline{CP}=2$ 이므로 점 P에 대응하는 수는
 $1-2=-1$ 이고, $\overline{CA}=\overline{CQ}=\sqrt{8}$ 이므로
점 Q에 대응하는 수는 $1+\sqrt{8}$ 이다.
따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는
 $1+\sqrt{8}-(-1)=2+\sqrt{8}$

유제 13 $a-b=2-\sqrt{7}-(-1)=3-\sqrt{7}=\sqrt{9}-\sqrt{7}>0$ 이므로
 $a>b$
 $b-c=-1-(-5+\sqrt{15})=4-\sqrt{15}=\sqrt{16}-\sqrt{15}>0$
이므로 $b>c$
 $\therefore c<b<a$

유제 14 $\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}$ 에서 $3<\sqrt{10}<4$ 이므로
 $-4<-\sqrt{10}<-3$ $\therefore 4<8-\sqrt{10}<5$
또 $\sqrt{4}<\sqrt{8}<\sqrt{9}$ 에서 $2<\sqrt{8}<3$ 이므로 $7<\sqrt{8}+5<8$
따라서 $8-\sqrt{10}$ 과 $\sqrt{8}+5$ 사이에 있는 정수는 5, 6, 7이
므로 그 합은 $5+6+7=18$

2 최고 유형 탐험하기

14~16쪽

- | | | | |
|-----|---------|------|------|
| 1 ③ | 2 ③ | 3 ④ | 4 ⑤ |
| 5 ④ | 6 ① | 7 ③ | 8 ② |
| 9 ④ | 10 ①, ⑤ | 11 ④ | 12 ⑤ |

1 $\neg$. 0의 제곱근의 개수는 1개, 양수의 제곱근의 개수는 2개이지만, 음수의 제곱근의 개수는 0개이다.

$$\neg. \text{ 제곱근 } \left(-\frac{4}{9}\right)^4 \Rightarrow \sqrt{\left(-\frac{4}{9}\right)^4} = \sqrt{\left\{\left(-\frac{4}{9}\right)^2\right\}^2} \\ = \left(-\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

ㄷ. $\{\sqrt{(-6)^2}\}^2 = (\sqrt{6^2})^2 = 6^2 = 36$ 이므로 36의 음의 제곱근은 -6 이다.

ㄹ. $1.\dot{7} = \frac{16}{9}$ 이므로 $\frac{16}{9}$ 의 제곱근은 $\pm\frac{4}{3}$ 이다.

ㅁ. $\sqrt{\sqrt{625}} = \sqrt{\sqrt{25^2}} = \sqrt{25} = 5$ 이므로 5의 양의 제곱근은 $\sqrt{5}$ 이고, 25의 양의 제곱근은 5이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

2 처음의 정사각형의 넓이는 120 cm^2 이고, 정사각형을 한 번 접으면 그 넓이는 전 단계 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이 되므로

[1단계]에서 만들어지는 정사각형의 넓이는

$$120 \times \frac{1}{2} = 60 (\text{cm}^2)$$

[2단계]에서 만들어지는 정사각형의 넓이는

$$60 \times \frac{1}{2} = 30 (\text{cm}^2)$$

[3단계]에서 만들어지는 정사각형의 넓이는

$$30 \times \frac{1}{2} = 15 (\text{cm}^2)$$

따라서 [3단계]에서 만들어지는 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{15} \text{ cm}$ 이다.

3 $a:b=3:4$ 이므로

$a=3k$, $b=4k$ ($k>0$)라 하면

$\sqrt{a+b}=\sqrt{7k}$ 가 자연수가 되어야 하므로 $k=7 \times (\text{자연수})^2$ 이어야 한다.

$$\therefore k=7 \times 1^2, 7 \times 2^2, 7 \times 3^2, 7 \times 4^2, \dots$$

이때 $3k$ 는 두 자리의 자연수이고, $4k$ 는 세 자리의 자연수이므로 $k=7 \times 2^2=28$

따라서 $a=3 \times 28=84$, $b=4 \times 28=112$ 이므로

$$a+b=84+112=196$$

4 ① $a<0$ 에서 $-a>0$ 이므로

$$-\sqrt{(-a)^2} = -(-a) = a$$

② $a<0$ 에서 $a-1<0$ 이므로

$$-\sqrt{(a-1)^2} = -\{-(a-1)\} = a-1$$

③ $-1<b$ 에서 $b+1>0$ 이므로 $\sqrt{(b+1)^2}=b+1$

④ $-1<a$ 에서 $a+1>0$ 이므로 $\sqrt{(a+1)^2}=a+1$

⑤ $b<0$ 에서 $-b>0$, 즉 $1-b>0$ 이므로

$$\sqrt{(1-b)^2}=1-b$$

이때 $-1<b<a<0$ 이므로

$$a-1<a<0<b+1<a+1<1-b$$

따라서 가장 큰 수는 ⑤이다.

[다른 풀이]

$a=-\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{2}$ 을 주어진 식에 각각 대입하면

$$\textcircled{1} -\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{1}{4} \quad \textcircled{2} -\sqrt{\left(-\frac{5}{4}\right)^2} = -\frac{5}{4}$$

$$\textcircled{3} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{4} \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}$$

$$\textcircled{5} \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$$

따라서 가장 큰 수는 ⑤이다.

- 5 $\sqrt{26} < a < \sqrt{35}$ 에서 $\sqrt{25} < \sqrt{26} < a < \sqrt{35} < \sqrt{36}$ 이므로 $5 < a < 6$

∴ (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= (a-1) + (a-2) + \cdots + (a-5) + \{-(a-6)\} \\ &\quad + \cdots + \{-(a-10)\} \\ &= (a-1) + (a-2) + \cdots + (a-5) + (6-a) \\ &\quad + \cdots + (10-a) \\ &= -1-2-3-4-5+6+7+8+9+10=25 \end{aligned}$$

- 6 (가)에서 $3 < \sqrt{2x-1} < 5$ 이므로 $3^2 < (\sqrt{2x-1})^2 < 5^2$
 $9 < 2x-1 < 25$, $10 < 2x < 26$ ∴ $5 < x < 13$

이때 x 는 자연수이므로

$$x=6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(나)에서 \sqrt{6} < \frac{x}{2} < \sqrt{13} \text{이므로 } (\sqrt{6})^2 < \left(\frac{x}{2}\right)^2 < (\sqrt{13})^2$$

$$6 < \frac{x^2}{4} < 13 \quad \therefore 24 < x^2 < 52$$

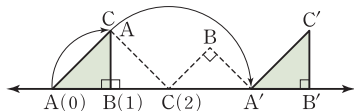
이때 x 는 자연수이므로 $x^2=25, 36, 49$

$$x=5, 6, 7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

따라서 ①, ②를 동시에 만족시키는 자연수 x 는 6, 7의 2개이다.

- 7 $\sqrt{1}=1, \sqrt{4}=2, \sqrt{9}=3, \sqrt{16}=4, \sqrt{25}=5, \sqrt{36}=6$ 이므로
 $x=1, 2, 3$ 일 때, $N(x)=1 \Rightarrow 1 \times 3=3$
 $x=4, \cdots, 8$ 일 때, $N(x)=2 \Rightarrow 2 \times 5=10$
 $x=9, \cdots, 15$ 일 때, $N(x)=3 \Rightarrow 3 \times 7=21$
 $x=16, \cdots, 24$ 일 때, $N(x)=4 \Rightarrow 4 \times 9=36$
 이때 $3+10+21+36=70$ 이고, $N(25)=N(26)=5$ 이므로
 $70+5 \times 2=80$
 따라서 구하는 x 의 값은 26이다.

- 8 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AC} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
 이때 $\triangle ABC$ 가 1회전하는 동안 점 A는 다음 그림과 같이 이동한다.



따라서 점 A'에 대응하는 수는 $2+\sqrt{2}$ 이다.

- 9 $2 \leq \sqrt{\frac{y}{x}} < 3$ 에서 $2^2 \leq \left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 < 3^2$ 이므로

$$4 \leq \frac{y}{x} < 9 \quad \therefore 4x \leq y < 9x$$

각 변에 x 를 더하면 $5x \leq x+y < 10x$

이때 $x+y=20$ 이므로 $5x \leq 20 < 10x$

그런데 x 는 자연수이므로 $x=3$ 또는 $x=4$

- (i) $x=3$ 일 때, $x+y=20$ 에서 $y=17$

x, y 는 서로소이므로 조건을 만족시킨다.

- (ii) $x=4$ 일 때, $x+y=20$ 에서 $y=16$

x, y 는 서로소가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 (i), (ii)에 의해 $x=3, y=17$ 이므로

$$y-x=17-3=14$$

- 10 $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$ 에서 $2 < \sqrt{5} < 3$ 이고, $\sqrt{16} < \sqrt{17} < \sqrt{25}$ 에서 $4 < \sqrt{17} < 5$ 이다.

- ① $\sqrt{5}$ 와 $\sqrt{17}$ 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.

- ② $\sqrt{5}$ 와 $\sqrt{17}$ 사이에 있는 정수는 3, 4의 2개이다.

- ③ $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{17}}{2}$ 은 $\sqrt{5}$ 와 $\sqrt{17}$ 의 평균이므로
 $\sqrt{5} < \frac{\sqrt{5}+\sqrt{17}}{2} < \sqrt{17}$

- ④ $1 < \sqrt{2} < 2$ 에서 $3 < \sqrt{2}+2 < 4$

이때 $\sqrt{5} < 3, 4 < \sqrt{17}$ 이므로 $\sqrt{5} < \sqrt{2}+2 < \sqrt{17}$

- ⑤ $-5 < -\sqrt{17} < -4$ 에서 $5 < 10-\sqrt{17} < 6$ 이므로
 $5 < 10-\sqrt{17}$

따라서 옳지 않은 것은 ①, ⑤이다.

- 11 (i) $\sqrt{3n}$ 이 유리수인 경우는 $n=3 \times (\text{자연수})^2$ 꼴인 경우이므로
 $n=3k^2$ (k 는 자연수)이라 하면

$$3k^2 \leq 150 \quad \therefore k^2 \leq 50$$

따라서 k 가 될 수 있는 수는 1, 2, ..., 7의 7개이다.

- (ii) $\sqrt{8n} = \sqrt{2^2 \times 2n}$ 이 유리수인 경우는 $n=2 \times (\text{자연수})^2$ 꼴인 경우이므로

$$n=2l^2$$
 (l 은 자연수)이라 하면

$$2l^2 \leq 150 \quad \therefore l^2 \leq 75$$

따라서 l 이 될 수 있는 수는 1, 2, ..., 8의 8개이다.

- (iii) $\sqrt{12n} = \sqrt{2^2 \times 3n}$ 이 유리수인 경우는 $n=3 \times (\text{자연수})^2$ 꼴인 경우이므로 (i)과 같다.

따라서 (i)~(iii)에 의해 $3k^2$ 과 $2l^2$ 이 일치하는 경우는 없으므로 $\sqrt{3n}, \sqrt{8n}, \sqrt{12n}$ 이 모두 무리수가 되도록 하는 자연수 n 의 개수는

$$150 - (7+8) = 135(\text{개})$$

- 12 자연수의 양의 제곱근 중 무리수에 대응하는 점의 개수는 다음과 같다.

$$1 \text{과 } 2 \text{ 사이에는 } 2 \text{ 개} \Rightarrow 2 \times 1 = 2$$

$$2 \text{와 } 3 \text{ 사이에는 } 4 \text{ 개} \Rightarrow 2 \times 2 = 4$$

$$3 \text{과 } 4 \text{ 사이에는 } 6 \text{ 개} \Rightarrow 2 \times 3 = 6$$

⋮

즉, 연속하는 두 자연수 n 과 $n+1$ 사이에는 무리수에 대응하는 점의 개수가 $2n$ 개 있다.

따라서 49와 50 사이에 있는 자연수의 양의 제곱근 중 무리수에 대응하는 점의 개수는 $2 \times 49 = 98(\text{개})$

[다른 풀이]

$$49 = \sqrt{49^2} = \sqrt{2401}, 50 = \sqrt{50^2} = \sqrt{2500}$$

$$\therefore 2500 - 2401 - 1 = 98(\text{개})$$

3 최고 유형 정복하기

17~19쪽

- 01 337 02 -32 03 0 04 $\frac{1}{6}$
 05 7 06 (2, 3, 4), (11, 12, 13), (26, 27, 28)
 07 20 08 4개 09 55 10 6개
 11 76 12 10

01 (가)에서 $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \sqrt{a_4}, \sqrt{a_5}$ 가 자연수이므로
 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 는 모두 (자연수)² 꼴인 수이어야 한다.
 또 (다)에서 $a_1 + a_2 + a_3 = 29$ 이고,
 (나)에서 $a_1 < a_2 < a_3$ 이므로
 $a_1 = 4, a_2 = 9, a_3 = 16$
 이때 $a_2 = \sqrt{a_4}, a_3 = \sqrt{a_5}$ 이므로
 $\sqrt{a_4} = 9, \sqrt{a_5} = 16$
 따라서 $a_4 = 81, a_5 = 256$ 이므로
 $a_4 + a_5 = 81 + 256 = 337$

02 $(-8)^2 = 64$ 의 제곱근은 ± 8 이므로
 $p = 8, q = -8$ ($\because p > q$)
 $\sqrt{(p-q+a)^2} = \sqrt{\{8 - (-8) + a\}^2} = \sqrt{(16+a)^2}$ 이므로
 $\sqrt{(16+a)^2} = 8$ 에서
 (i) $16+a \geq 0$, 즉 $a \geq -16$ 일 때
 $16+a = 8 \quad \therefore a = -8$
 (ii) $16+a < 0$, 즉 $a < -16$ 일 때
 $-(16+a) = 8, -a = 24$
 $\therefore a = -24$
 따라서 (i), (ii)에 의해 모든 정수 a 의 값의 합은
 $-8 + (-24) = -32$

03 $ab < 0$ 이므로 a 와 b 는 서로 다른 부호이고,
 $a+b > 0, |a| < |b|$ 이므로 $a < 0, b > 0$
 또 $|a| < |b|$ 이므로 $a^2 - b^2 < 0$
 $\therefore a|a| - \sqrt{(a^2 - b^2)^2} + b|b|$
 $= a \times (-a) - \{-(a^2 - b^2)\} + b \times b$
 $= -a^2 + a^2 - b^2 + b^2 = 0$

04 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$
 $\sqrt{72ab} = \sqrt{2^3 \times 3^2 \times ab}$ 가 자연수가 되려면
 $ab = 2 \times (\text{자연수})^2$ 꼴이어야 한다.
 이때 ab 가 될 수 있는 수는
 $2 \times 1^2 = 2, 2 \times 2^2 = 8, 2 \times 3^2 = 18$
 이므로 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 다음과 같다.
 (i) $ab = 2$ 일 때, (1, 2), (2, 1)의 2가지
 (ii) $ab = 8$ 일 때, (2, 4), (4, 2)의 2가지
 (iii) $ab = 18$ 일 때, (3, 6), (6, 3)의 2가지
 따라서 (i)~(iii)에 의해 $\sqrt{72ab}$ 가 자연수가 되는 경우의 수는
 $2 + 2 + 2 = 6$ 이므로 구하는 확률은 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

05 $\sqrt{\frac{10a}{b}} = \sqrt{\frac{2 \times 5 \times a}{b}}$ 가 자연수가 되려면 b 는 $10a$ 의 약수이어야 한다.
 (i) $b = 1$ 일 때, $a = 2 \times 5 \times (\text{자연수})^2$ 꼴이므로
 가장 작은 자연수 a 의 값은 $2 \times 5 \times 1^2 = 10$
 $\therefore a + b = 11$
 (ii) $b = 2$ 일 때, $a = 5 \times (\text{자연수})^2$ 꼴이므로
 가장 작은 자연수 a 의 값은 $5 \times 1^2 = 5$
 $\therefore a + b = 7$
 (iii) $b = 5$ 일 때, $a = 2 \times (\text{자연수})^2$ 꼴이므로
 가장 작은 자연수 a 의 값은 $2 \times 1^2 = 2$
 $\therefore a + b = 7$
 (iv) $b = 2 \times 5 = 10$ 일 때, $a = (\text{자연수})^2$ 꼴이므로
 가장 작은 자연수 a 의 값은 $1^2 = 1$
 $\therefore a + b = 11$
 (v) b 가 1, 2, 5 이외의 자연수일 때,
 $a = 2 \times 5 \times b \times (\text{자연수})^2$ 꼴이므로
 $a + b \geq 14$
 따라서 (i)~(v)에 의해 $a + b$ 의 값 중 가장 작은 값은 7이다.

06 $a = x - 1, b = x, c = x + 1$ ($x > 2$)라 하면
 $a + b + c < 99$ 에서
 $(x - 1) + x + (x + 1) < 99$
 $3x < 99 \quad \therefore 2 < x < 33$
 이때 $\sqrt{a + b + c} = \sqrt{3x}$ 가 자연수가 되려면
 $x = 3 \times (\text{자연수})^2$ 꼴이어야 한다.
 $x = 3k^2$ (k 는 자연수)이라 하면
 $2 < 3k^2 < 33 \quad \therefore \frac{2}{3} < k^2 < 11$
 즉, $k^2 = 1, 4, 9$ 이므로 $x = 3, 12, 27$
 따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c) 는
 (2, 3, 4), (11, 12, 13), (26, 27, 28)이다.

07 c 의 값이 가장 작은 정수가 되려면
 $\sqrt{250+a}$ 는 가장 작은 정수이고, $\sqrt{130-b}$ 는 가장 큰 정수이어야 한다.
 $\sqrt{250+a}$ 가 정수가 되려면 $250+a$ 가 250보다 큰 (자연수)² 꼴인 수이어야 하므로 $250+a = 256, 289, \dots$
 이때 $\sqrt{250+a}$ 가 가장 작은 정수가 되는 경우는
 $250+a = 256 \quad \therefore a = 6$
 또 $\sqrt{130-b}$ 가 정수가 되려면 $130-b$ 가 130보다 작은 (자연수)² 꼴인 수이어야 하므로
 $130-b = 1, 4, \dots, 121$
 이때 $\sqrt{130-b}$ 가 가장 큰 정수가 되는 경우는
 $130-b = 121 \quad \therefore b = 9$
 즉, $\sqrt{250+6} - \sqrt{130-9} = \sqrt{256} - \sqrt{121} = 16 - 11 = 5$
 이므로 $c = 5$
 $\therefore a + b + c = 6 + 9 + 5 = 20$

08 $1.3 < \sqrt{x} < 2.5$ 에서 $1.3^2 < (\sqrt{x})^2 < 2.5^2$
 $\therefore 1.69 < x < 6.25$

이때 x 는 자연수이므로 $x=2, 3, 4, 5, 6$

$$\therefore m=2, n=6$$

즉, $\sqrt{\frac{n}{m}} \times k = \sqrt{\frac{6}{2}} \times k = \sqrt{3k}$ 가 자연수가 되려면

$k=3 \times (\text{자연수})^2$ 꼴이어야 하고, k 는 두 자리의 자연수이므로

$$k=3 \times 2^2, 3 \times 3^2, 3 \times 4^2, 3 \times 5^2$$

따라서 구하는 두 자리의 자연수 k 는 12, 27, 48, 75의 4개이다.

- 09 $\sqrt{11a} + \sqrt{b} = 13$ 에서 $11a$ 와 b 는 모두 (자연수)² 꼴인 수이어야 한다.

이때 $11a$ 는 $13^2=169$ 보다 작은 (자연수)² 꼴인 수이어야 하므로 $a=11$

$$\text{즉, } \sqrt{11^2} + \sqrt{b} = 13 \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{b} = 13 - 11 = 2 \quad \therefore b=4$$

따라서 $a=11, b=4$ 이므로

$$\sqrt{a^2 - 2b} = \sqrt{11^2 - 2 \times 4} = \sqrt{113}$$

이때 $\sqrt{100} < \sqrt{113} < \sqrt{121}$ 에서 $10 < \sqrt{113} < 11$ 이므로

구하는 자연수의 합은

$$1+2+3+\cdots+10=55$$

- 10 $a.b = a + \frac{b}{9} = \frac{9a+b}{9}$ 이므로

$$\sqrt{a.b} = \sqrt{\frac{9a+b}{9}}$$

따라서 $\sqrt{\frac{9a+b}{9}}$ 가 유리수가 되려면 $9a+b$ 가 (유리수)² 꼴인 수이어야 한다.

이때 a 와 b 는 한 자리의 자연수이므로 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 7), (2, 7), (3, 9), (5, 4), (7, 1), (8, 9)$ 의 6개이다.

- 11 $4.5 \leq \sqrt{\frac{y}{x}} < 5.5$ 이므로

$$\frac{9}{2} \leq \sqrt{\frac{y}{x}} < \frac{11}{2} \text{에서 각 변을 제곱하면}$$

$$\left(\frac{9}{2}\right)^2 \leq \left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 < \left(\frac{11}{2}\right)^2$$

$$\therefore \frac{81}{4} \leq \frac{y}{x} < \frac{121}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 $\frac{y}{x} > 1$ 이므로 $y > x$ 에서 $x-y < 0$

$$\sqrt{(x-y)^2} = 70 \text{에서 } -(x-y) = 70, -x+y=70$$

$$\therefore y=x+70$$

①에 $y=x+70$ 을 대입하면

$$\frac{81}{4} \leq \frac{x+70}{x} < \frac{121}{4}, \frac{81}{4} \leq 1 + \frac{70}{x} < \frac{121}{4}$$

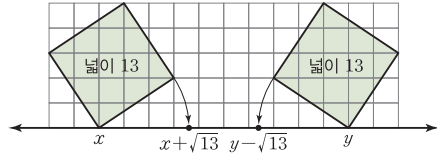
$$\frac{4}{117} < \frac{x}{70} \leq \frac{4}{77}, \frac{280}{117} < x \leq \frac{40}{11}$$

$$\therefore 2.39 \cdots < x \leq 3.63 \cdots$$

따라서 x 는 자연수이므로 $x=3$

이때 $y=73$ 이므로 $x+y=76$

- 12 $3 < \sqrt{13} < 4$ 이므로 두 정수 x, y 와 $x+\sqrt{13}, y-\sqrt{13}$ 을 넓이가 13인 정사각형을 이용하여 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 x 와 $x+\sqrt{13}$ 사이에 있는 정수의 개수는 3개, $x+\sqrt{13}$ 과 $y-\sqrt{13}$ 사이에 있는 정수의 개수는 3개, $y-\sqrt{13}$ 과 y 사이에 있는 정수의 개수는 3개이므로 x, y 사이에 있는 정수의 개수는 $3+3+3=9$ (개)이다.

따라서 $y=x+10$ 이므로 $y-x=10$

[다른 풀이]

$$3 < \sqrt{13} < 4 \text{이므로 } x+3 < x+\sqrt{13} < x+4$$

$$-4 < -\sqrt{13} < -3 \text{이므로 } y-4 < y-\sqrt{13} < y-3$$

이때 $x+\sqrt{13}$ 보다 크고 $y-\sqrt{13}$ 보다 작은 정수를 m 이라 하면 $x+\sqrt{13} < x+4 \leq m \leq y-4 < y-\sqrt{13}$

이 식을 만족시키는 정수 n 이 3개이므로

$$y-4-(x+4)+1=3 \quad \therefore y-x=10$$

2 근호를 포함한 식의 계산

1 주제별 유형 불러오기

21~27쪽

유제 1	④	유제 2	ㄴ, ㄷ, ㄹ	유제 3	②, ③
유제 4	22.80, 0.10818	유제 5	④		
유제 6	$\frac{13}{2}$	유제 7	②	유제 8	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
				유제 9	⑤
유제 10	$4-3\sqrt{2}$	유제 11	⑤		
유제 12	$12-2\sqrt{10}$	유제 13	④		
유제 14	$(38+6\sqrt{70})\text{cm}^2$				

$$\text{유제 1 } \sqrt{180} = \sqrt{6^2 \times 5} = 6\sqrt{5} \quad \therefore a=6$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \div \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{21}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{8}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2} \times \frac{21}{8} \times \frac{5}{20}}$$

$$= \sqrt{\frac{63}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\therefore b = \frac{3}{8}$$

$$\therefore \sqrt{ab} = \sqrt{6 \times \frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

유제 2 ㄱ. $ab < 0$ 이므로 $\sqrt{a^2b^2} = \sqrt{(ab)^2} = -ab$
 ㄴ. $-a > 0$ 이므로 $\sqrt{(-a)^2b} = -a\sqrt{b}$
 ㄷ. $b^2 > 0$ 이고 $ab^2 < 0$ 이므로 $\sqrt{a^2b^4} = \sqrt{(ab^2)^2} = -ab^2$
 ㄹ. $a^2 > 0$ 이고 $a^2b > 0$ 이므로
 $-\sqrt{a^4b^2} = -\sqrt{(a^2b)^2} = -a^2b$
 ㅁ. $a < 0$ 이므로 $\sqrt{\frac{b}{a^2}} = -\frac{\sqrt{b}}{a}$
 ㅂ. $a < 0, b > 0$ 이므로 $-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = -\frac{-a}{b} = \frac{a}{b}$
 따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㅁ이다.

유제 3 ① $\sqrt{0.0606} = \sqrt{\frac{6.06}{100}} = \sqrt{\frac{6.06}{10^2}}$
 $= \frac{\sqrt{6.06}}{10} = \frac{2.462}{10} = 0.2462$
 ② $\sqrt{0.246} = \sqrt{\frac{24.6}{100}} = \sqrt{\frac{24.6}{10^2}}$
 $= \frac{\sqrt{24.6}}{10} = \frac{4.960}{10} = 0.4960$
 ③ $\sqrt{0.00624} = \sqrt{\frac{62.4}{10000}} = \sqrt{\frac{62.4}{100^2}}$
 $= \frac{\sqrt{62.4}}{100} = \frac{7.899}{100} = 0.07899$
 ④ $\sqrt{612000} = \sqrt{61.2 \times 10000} = \sqrt{61.2 \times 100^2}$
 $= 100\sqrt{61.2} = 100 \times 7.823 = 782.3$
 ⑤ $\sqrt{2530} = \sqrt{25.3 \times 100} = \sqrt{25.3 \times 10^2}$
 $= 10\sqrt{25.3} = 10 \times 5.030 = 50.30$
 $\therefore 2\sqrt{2530} = 100.60$
 따라서 옳지 않은 것은 ②, ③이다.

유제 4 $\sqrt{520} = \sqrt{2^2 \times 130} = 2\sqrt{130} = 2\sqrt{1.3 \times 100} = 2\sqrt{1.3 \times 10^2}$
 $= 2 \times 10 \times \sqrt{1.3} = 20 \times 1.140 = 22.80$
 $\sqrt{0.0117} = \sqrt{\frac{117}{10000}} = \sqrt{\frac{3^2 \times 13}{100^2}} = \frac{3\sqrt{13}}{100}$
 $= \frac{3 \times 3.606}{100} = 0.10818$

유제 5 ㄱ. $\sqrt{300} = \sqrt{3 \times 100} = \sqrt{3 \times 10^2} = 10\sqrt{3} = 5 \times 2\sqrt{3} = 5a$
 ㄴ. $\sqrt{84} = \sqrt{2^2 \times 3 \times 7} = 2\sqrt{3 \times 7} = \sqrt{7}a$
 ㄷ. $a = 2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{12}$ 이므로
 $\sqrt{1.44} = \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{\sqrt{12^2}}{\sqrt{10^2}} = \frac{(\sqrt{12})^2}{10} = \frac{a^2}{10}$
 ㄹ. $2\sqrt{3} = a$ 에서 $\sqrt{3} = \frac{a}{2}$ 이므로
 $\sqrt{0.27} = \sqrt{\frac{27}{100}} = \frac{\sqrt{3^3}}{\sqrt{10^2}} = \frac{3\sqrt{3}}{10}$
 $= \frac{3}{10} \times \frac{a}{2} = \frac{3}{20}a$
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

유제 6 $\sqrt{280} = \sqrt{2^3 \times 5 \times 7} = \sqrt{2^2 \times 5 \times 7} = \sqrt{2} \times \sqrt{5 \times 7}$
 $= (\sqrt{2})^3 \times \sqrt{5 \times 7} = z^3 \times \frac{x}{2} \times 3y = \frac{3}{2}xyz^3$

$ax^by^cz^d = \frac{3}{2}xyz^3$ 에서
 $a = \frac{3}{2}, b = 1, c = 1, d = 3$
 $\therefore a + b + c + d = \frac{3}{2} + 1 + 1 + 3 = \frac{13}{2}$

유제 7 $-\frac{5}{\sqrt{15}} \div \frac{10}{\sqrt{3}} \times \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{5}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{3}}{10} \times \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$
 $= \frac{3}{2\sqrt{10}} = \frac{3 \times \sqrt{10}}{2\sqrt{10} \times \sqrt{10}}$
 $= \frac{3\sqrt{10}}{20}$

따라서 $m = 20, n = 3$ 이므로
 $\sqrt{mn} = \sqrt{20 \times 3} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$

유제 8 $\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}\sqrt{b}} = \frac{a+b}{\sqrt{ab}}$
 이때 $a + b = 12, ab = 32$ 이므로
 $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} = \frac{12}{\sqrt{32}} = \frac{12}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

유제 9 $A = \frac{3\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{5} - \sqrt{3}) \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$
 $= \frac{3\sqrt{15} - 3}{3} = \sqrt{15} - 1$
 $B = \frac{5\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{(5\sqrt{3} + \sqrt{5}) \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$
 $= \frac{5\sqrt{15} + 5}{5} = \sqrt{15} + 1$

따라서 $A + B = 2\sqrt{15}, A - B = -2$ 이므로

$$\frac{A-B}{A+B} = \frac{-2}{2\sqrt{15}} = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}$$

유제 10 $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ 이고, $2 < \sqrt{8} < 3$ 이므로 $a = 2\sqrt{2} - 2$
 $1 < \sqrt{2} < 2$ 에서 $-2 < -\sqrt{2} < -1$ 이므로 $1 < 3 - \sqrt{2} < 2$
 $\therefore b = (3 - \sqrt{2}) - 1 = 2 - \sqrt{2}$
 이때 a, b 는 소수 부분이므로
 $0 \leq a < 1, 0 \leq b < 1$ 에서 $1 - a > 0, b - 1 < 0$
 $\therefore \sqrt{(1-a)^2} - \sqrt{(b-1)^2}$
 $= 1 - a - \{-(b-1)\}$
 $= 1 - a + b - 1$
 $= -a + b$
 $= -(2\sqrt{2} - 2) + (2 - \sqrt{2})$
 $= -2\sqrt{2} + 2 + 2 - \sqrt{2}$
 $= 4 - 3\sqrt{2}$

유제 11 $\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{5}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\sqrt{45}}{4\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{12}}{4} - 5 - \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{6}{\sqrt{5}}$
 $= \frac{2\sqrt{3}}{4} - 5 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$
 $= -5 - \sqrt{3}$

따라서 $a = -5, b = -1$ 이므로
 $ab = -5 \times (-1) = 5$

$$\begin{aligned}\text{유제 12 } 3\sqrt{2}\triangle(3-\sqrt{10}) &= \frac{\sqrt{180} + \{3\sqrt{2} - \sqrt{2}(3-\sqrt{10})\}}{3\sqrt{2}-\sqrt{2}} \\ &= \frac{6\sqrt{5} + (3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \sqrt{20})}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{6\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{10}\end{aligned}$$

이때 $\sqrt{36} < \sqrt{40} < \sqrt{49}$ 에서 $6 < 2\sqrt{10} < 7$ 이므로

$$a=6, b=2\sqrt{10}-6$$

$$\therefore a-b=6-(2\sqrt{10}-6)=12-2\sqrt{10}$$

$$\begin{aligned}\text{유제 13 (상자의 밑면의 가로 길이)} &= \sqrt{147}-2\sqrt{3} \\ &= 7\sqrt{3}-2\sqrt{3}=5\sqrt{3}(\text{cm}) \\ \text{(상자의 밑면의 세로 길이)} &= \sqrt{108}-2\sqrt{3} \\ &= 6\sqrt{3}-2\sqrt{3}=4\sqrt{3}(\text{cm})\end{aligned}$$

이때 상자의 높이는 $\sqrt{3}\text{cm}$ 이므로

$$\text{(상자의 부피)} = 5\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 60\sqrt{3}(\text{cm}^3)$$

$$\begin{aligned}\text{유제 14 직육면체의 높이를 } h\text{cm라 하면} \\ \sqrt{14} \times \sqrt{5} \times h &= 14\sqrt{5} + 5\sqrt{14} \text{에서} \\ h &= \frac{14\sqrt{5} + 5\sqrt{14}}{\sqrt{14} \times \sqrt{5}} = \sqrt{14} + \sqrt{5} \\ \therefore \text{(직육면체의 겉넓이)} \\ &= 2 \times \{ \sqrt{14} \times \sqrt{5} + \sqrt{14} \times (\sqrt{14} + \sqrt{5}) \\ &\quad + \sqrt{5} \times (\sqrt{14} + \sqrt{5}) \} \\ &= 2 \times (19 + 3\sqrt{70}) = 38 + 6\sqrt{70}(\text{cm}^2)\end{aligned}$$

2 최고 유형 탐험하기

28~30쪽

- | | | | |
|-----|------|------|-----|
| 1 ④ | 2 ② | 3 ② | 4 ② |
| 5 ② | 6 ③ | 7 ① | 8 ③ |
| 9 ② | 10 ④ | 11 ④ | |

$$\begin{aligned}1 \quad pq=3 \text{이므로} \\ p\sqrt{\frac{3q}{p}} + q\sqrt{\frac{12p}{q}} - \frac{1}{p}\sqrt{\frac{27p}{q}} \\ = \sqrt{\frac{3q}{p} \times p^2} + \sqrt{\frac{12p}{q} \times q^2} - \sqrt{\frac{27p}{q} \times \frac{1}{p^2}} \\ = \sqrt{3pq} + \sqrt{12pq} - \sqrt{\frac{27}{pq}} \\ = \sqrt{9} + \sqrt{36} - \sqrt{9} = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \quad \sqrt{0.12} + \sqrt{0.0018} \\ = \sqrt{\frac{12}{100}} + \sqrt{\frac{18}{10000}} = \sqrt{\frac{2^2 \times 3}{10^2}} + \sqrt{\frac{2 \times 3^2}{100^2}} \\ = \frac{2\sqrt{3}}{10} + \frac{3\sqrt{2}}{100} = \frac{2 \times 1.732}{10} + \frac{3 \times 1.414}{100} \\ = \frac{3.464}{10} + \frac{4.242}{100} = 0.3464 + 0.04242 = 0.38882\end{aligned}$$

따라서 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림하여 구한 값은 0.39이다.

$$\begin{aligned}3 \quad \sqrt{148} &= \sqrt{1.48 \times 100} = \sqrt{1.48 \times 10^2} \\ &= 10\sqrt{1.48} = 10 \times 1.217 = 12.17 \\ \sqrt{148} - \sqrt{x} &= 11.098 \text{에서} \\ \sqrt{x} &= \sqrt{148} - 11.098 = 12.17 - 11.098 = 1.072 \\ \text{이때 제곱근표에서 } 1.072 \text{의 값을 갖는 제곱근은 } \sqrt{1.15} \text{이다.} \\ \therefore x &= 1.15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4 \quad \neg. \sqrt{0.72} &= \sqrt{\frac{72}{100}} = \sqrt{\frac{2 \times 6^2}{10^2}} = \frac{6\sqrt{2}}{10} = \frac{3\sqrt{2}}{5} = \frac{3}{5}a \\ \neg. \sqrt{2.42} &= \sqrt{\frac{242}{100}} = \sqrt{\frac{2 \times 11^2}{10^2}} = \frac{11\sqrt{2}}{10} = \frac{11}{10}a \\ \neg. a\sqrt{0.05} &= \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{5}{100}} = \sqrt{2 \times \frac{5}{100}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \\ \neg. \sqrt{50} - \frac{4}{\sqrt{2}} &= 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} = 3a \\ \text{따라서 옳은 것은 } \neg, \neg \text{이다.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5 \quad \overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} = \sqrt{x} - \sqrt{48} = \sqrt{x} - 4\sqrt{3} \\ \overline{BC} &= \overline{OC} - \overline{OB} = \sqrt{108} - \sqrt{x} = 6\sqrt{3} - \sqrt{x} \\ \text{이때 } \overline{AB} &= \overline{BC} \text{이므로 } \sqrt{x} - 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3} - \sqrt{x} \\ 2\sqrt{x} &= 10\sqrt{3}, \sqrt{x} = 5\sqrt{3} = \sqrt{75} \quad \therefore x = 75\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6 \quad \sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})x - \sqrt{3} &> 3\sqrt{2}x - 1 \text{에서} \\ 3\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}x - 3\sqrt{2}x &> -1 + \sqrt{3} \\ -2\sqrt{3}x &> -1 + \sqrt{3} \\ \therefore x &< \frac{-1 + \sqrt{3}}{-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-3}{6} \\ \text{이때 } 1 &< \sqrt{3} < 2 \text{이므로 } -\frac{1}{3} < \frac{\sqrt{3}-3}{6} < -\frac{1}{6} \\ \text{따라서 주어진 부등식을 만족시키는 } x \text{의 값 중 가장 큰 정수} &\text{는 } -1 \text{이다.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7 \quad \sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{\sqrt{12}} + \sqrt{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} + \sqrt{3} \\ &= \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{3} + 6\sqrt{3}}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{6} = \frac{4}{3}\sqrt{3} \\ \therefore a &= 3 \\ 4\sqrt{3}(2-\sqrt{3}) + \frac{9}{\sqrt{3}} - \sqrt{108} &= 8\sqrt{3} - 12 + 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} \\ &= 5\sqrt{3} - 12 \\ \therefore b &= 5, c = -12 \\ \therefore a+b+c &= 3+5+(-12) = -4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8 \quad 7\sqrt{2} &= \sqrt{98} \text{이므로 } 9 < \sqrt{98} < 10 \\ \therefore a_7 &= 7\sqrt{2} - 9 \\ \frac{10}{\sqrt{2}} &= \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} = \sqrt{50} \text{이므로 } 7 < \sqrt{50} < 8 \\ \therefore b_{10} &= \frac{10}{\sqrt{2}} - 7 = 5\sqrt{2} - 7 \\ \therefore a_7 - b_{10} &= (7\sqrt{2} - 9) - (5\sqrt{2} - 7) \\ &= 7\sqrt{2} - 9 - 5\sqrt{2} + 7 = 2\sqrt{2} - 2\end{aligned}$$

9 $2 < \sqrt{8} < 3$ 이므로 $\sqrt{8}$ 의 소수 부분은 $\sqrt{8}-2$
 $\therefore f(8) = 2\sqrt{2}-2$
 또 $4 < \sqrt{18} < 5$ 이므로 $\sqrt{18}$ 의 소수 부분은 $\sqrt{18}-4$
 $\therefore f(18) = 3\sqrt{2}-4$
 $\therefore \frac{6f(8)}{f(18)+4} = \frac{6(2\sqrt{2}-2)}{(3\sqrt{2}-4)+4} = \frac{12\sqrt{2}-12}{3\sqrt{2}}$
 $= \frac{4\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}} = \frac{(4\sqrt{2}-4) \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$
 $= \frac{8-4\sqrt{2}}{2} = 4-2\sqrt{2}$

10 $\overline{OD} = \frac{1}{2}\overline{OA} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$ (cm)
 $\overline{CD} = x$ cm라 하면 $\overline{OC} = \overline{OA} = 12$ cm이므로
 $\triangle COD$ 에서 $6^2 + x^2 = 12^2$, $x^2 = 108$
 이때 $x > 0$ 이므로 $x = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$
 $\therefore \square ODCE = 6 \times 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$ (cm²)

11 세 정사각형의 넓이가 각각 2 cm², 6 cm², 24 cm²이므로 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{2}$ cm, $\sqrt{6}$ cm, $2\sqrt{6}$ cm이다.
 ④ $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ (cm)

3 최고 유형 정복하기

31~33쪽

01 $\frac{8}{21}$ 02 $(x+2)(y+6)$ 03 9개
 04 $\frac{11\sqrt{6}}{6}$ 05 $56-7\sqrt{2}$ 06 $-7+2\sqrt{6}$
 07 A: 5개, B: 3개 08 140
 09 $10\sqrt{5}-21$ 10 3 11 $\frac{24\sqrt{5}}{5}$ 12 $6\sqrt{3}+10\sqrt{5}$

01 $\frac{\sqrt{3}}{7} < \frac{x}{21} < \frac{\sqrt{2}}{3}$ (x 는 자연수)라 하면
 $\frac{\sqrt{3}}{7} = \frac{3\sqrt{3}}{21} = \frac{\sqrt{27}}{21}$, $\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{7\sqrt{2}}{21} = \frac{\sqrt{98}}{21}$ 이므로
 $\frac{\sqrt{27}}{21} < \frac{x}{21} < \frac{\sqrt{98}}{21}$
 이때 $5 < \sqrt{27} < 6$, $9 < \sqrt{98} < 10$ 이므로 x 가 될 수 있는 수는 6, 7, 8, 9이다.
 따라서 구하는 기약분수는 $\frac{8}{21}$ 이다.

02 $2 < \sqrt{8} < 3$ 에서 $x = \sqrt{8}-2 = 2\sqrt{2}-2$ 이므로 $\sqrt{2} = \frac{x+2}{2}$
 $6 < \sqrt{45} < 7$ 에서 $y = \sqrt{45}-6 = 3\sqrt{5}-6$ 이므로 $\sqrt{5} = \frac{y+6}{3}$
 $\therefore \sqrt{360} = \sqrt{6^2 \times 10} = 6\sqrt{10} = 6 \times \sqrt{2} \times \sqrt{5}$
 $= 6 \times \frac{x+2}{2} \times \frac{y+6}{3} = (x+2)(y+6)$

03 세 자연수 a, b, c 에 대하여 $2\sqrt{a}+b\sqrt{2}=\sqrt{c}$ 가 성립하려면
 $a=2 \times m^2$ (m 은 자연수) 꼴이어야 한다.
 $2\sqrt{a}+b\sqrt{2}=2m\sqrt{2}+b\sqrt{2}=(2m+b)\sqrt{2}$
 $=\sqrt{2(2m+b)^2}$
 $\therefore c=2(2m+b)^2$
 이때 $2m+b \geq 3$ 이므로
 (i) $c=2 \times 3^2=18$ 일 때, $(m, b)=(1, 1)$
 $\therefore (a, b, c)=(2, 1, 18)$
 (ii) $c=2 \times 4^2=32$ 일 때, $(m, b)=(1, 2)$
 $\therefore (a, b, c)=(2, 2, 32)$
 (iii) $c=2 \times 5^2=50$ 일 때, $(m, b)=(1, 3), (2, 1)$
 $\therefore (a, b, c)=(2, 3, 50), (8, 1, 50)$
 (iv) $c=2 \times 6^2=72$ 일 때, $(m, b)=(1, 4), (2, 2)$
 $\therefore (a, b, c)=(2, 4, 72), (8, 2, 72)$
 (v) $c=2 \times 7^2=98$ 일 때, $(m, b)=(1, 5), (2, 3), (3, 1)$
 $\therefore (a, b, c)=(2, 5, 98), (8, 3, 98), (18, 1, 98)$
 따라서 (i)~(v)에 의해 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는
 $1+1+2+2+3=9$ (개)

04 두 무리수 a, b 를 순서쌍 (a, b) 로 나타내면
 $(\sqrt{2}, \sqrt{3}), (\sqrt{2}, \sqrt{5}), (\sqrt{3}, \sqrt{2}), (\sqrt{3}, \sqrt{5}), (\sqrt{5}, \sqrt{2}),$
 $(\sqrt{5}, \sqrt{3})$

이때 $x=ab$ 에서 $x=\sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}$ 이므로 가장 작은 x 의 값은 $\sqrt{6}$ 이다.

또 $y = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab}$ 에서 $y = \frac{5}{\sqrt{6}}, \frac{7}{\sqrt{10}}, \frac{8}{\sqrt{15}}$ 이므로
 각각 제곱하면 $\frac{25}{6}, \frac{49}{10}, \frac{64}{15}$

즉, 가장 작은 y 의 값은 $\frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$ 이다.

따라서 $x+y$ 의 값 중 가장 작은 값은

$$\sqrt{6} + \frac{5\sqrt{6}}{6} = \frac{11\sqrt{6}}{6}$$

05 $f(x) = \frac{x(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} = \frac{x(\sqrt{x}-1) \times \sqrt{x}}{x} = x - \sqrt{x}$
 $\therefore f(2)+f(4)+f(8)+f(16)+f(32)$
 $= (2-\sqrt{2}) + (4-\sqrt{4}) + (8-\sqrt{8}) + (16-\sqrt{16})$
 $+ (32-\sqrt{32})$
 $= (2+4+8+16+32) - (\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{8}+\sqrt{16}+\sqrt{32})$
 $= 62 - (\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}+4+4\sqrt{2})$
 $= 62 - (7\sqrt{2}+6)$
 $= 62 - 7\sqrt{2} - 6$
 $= 56 - 7\sqrt{2}$

06 $a \circ b = \frac{b\sqrt{3}+\sqrt{2}}{a+1} = \sqrt{2}$ 이므로
 $b\sqrt{3}+\sqrt{2}=a\sqrt{2}+\sqrt{2} \quad \therefore b\sqrt{3}=a\sqrt{2} \quad \dots \textcircled{1}$
 $1 \circ b = \frac{b\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1+1} = \sqrt{3}$ 이므로
 $b\sqrt{3}+\sqrt{2}=2\sqrt{3}, b\sqrt{3}=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$
 $\therefore b = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2 - \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \dots \textcircled{2}$

㉠에 ㉡을 대입하면

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\sqrt{3} &= a\sqrt{2}, \quad a\sqrt{2} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \therefore a &= \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6} - 1 \\ \therefore a - 3b &= \sqrt{6} - 1 - 3\left(2 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \\ &= \sqrt{6} - 1 - 6 + \sqrt{6} = -7 + 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

07 사용한 나무막대 A, B의 개수를 각각 x 개, y 개라 하면

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})x + (3 - \sqrt{3})y &= 2x + \sqrt{3}x + 3y - \sqrt{3}y \\ &= (2x + 3y) + (x - y)\sqrt{3} \\ &= 19 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

즉, $2x + 3y = 19$, $x - y = 2$ 이므로

두 식을 연립하여 풀면 $x = 5$, $y = 3$

따라서 나무막대 A는 5개, 나무막대 B는 3개를 사용하여 연결하였다.

08 $\sqrt{2} = 1.414$ 이므로 자연수 n 에 대하여

(i) $1 \leq n \leq 58$ 일 때

$$1 < \sqrt{2} + \frac{n}{100} < 2 \quad \therefore \left\lceil \sqrt{2} + \frac{n}{100} \right\rceil = 1$$

(ii) $59 \leq n \leq 99$ 일 때

$$2 < \sqrt{2} + \frac{n}{100} < 3 \quad \therefore \left\lceil \sqrt{2} + \frac{n}{100} \right\rceil = 2$$

따라서 (i), (ii)에 의해

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \overbrace{(1 + \dots + 1)}^{58\text{개}} + \overbrace{(2 + \dots + 2)}^{41\text{개}} \\ &= 1 \times 58 + 2 \times 41 = 140 \end{aligned}$$

09 (가)에서 a, b, c, d 는 모두 (자연수)² 꼴인 수이므로

(나)에서 $2a + b = 17$ 을 만족시키는 a, b 의 값은 $a = 4$, $b = 9$

$3c + d = 129$ 를 만족시키는 c, d 의 값은 $c = 16$, $d = 81$

이때 $2\sqrt{a+c} = 2\sqrt{4+16} = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$ 이고,

$8 < \sqrt{80} < 9$ 이므로 $8 < 4\sqrt{5} < 9$

$$\therefore x = 4\sqrt{5} - 8$$

또 $\sqrt{2(b+d)} = \sqrt{2 \times (9+81)} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ 이고,

$13 < \sqrt{180} < 14$ 이므로 $13 < 6\sqrt{5} < 14$

$$\therefore y = 6\sqrt{5} - 13$$

$$\therefore x + y = (4\sqrt{5} - 8) + (6\sqrt{5} - 13) = 10\sqrt{5} - 21$$

10 nx 가 자연수이므로 $nx = 1, 2, 3, 4, \dots$

$$\therefore x = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \dots \quad \dots \textcircled{1}$$

$\sqrt{nx}$ 의 정수 부분이 2이므로

$$2 \leq \sqrt{nx} < 3 \text{에서 } 4 \leq nx < 9$$

$$\therefore \frac{4}{n} \leq x < \frac{9}{n} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } x = \frac{4}{n}, \frac{5}{n}, \frac{6}{n}, \frac{7}{n}, \frac{8}{n}$$

이때 모든 x 의 값의 합이 10이므로

$$\frac{1}{n}(4+5+6+7+8) = 10, \quad \frac{30}{n} = 10 \quad \therefore n = 3$$

11 정사각형의 한 변의 길이를 x 라 하면 이 정사각형의 넓이가 180이므로 $x^2 = 180$

이때 $x > 0$ 이므로 $x = 6\sqrt{5}$

즉, 사다리꼴의 높이가 $6\sqrt{5}$ 이므로 윗변의 길이를

$3a$ ($a > 0$), 아랫변의 길이를 $7a$ 라 하면

$$\frac{1}{2} \times (3a + 7a) \times 6\sqrt{5} = 180, \quad 30\sqrt{5}a = 180$$

$$\therefore a = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

따라서 사다리꼴의 윗변의 길이와 아랫변의 길이의 차는

$$7a - 3a = 4a = 4 \times \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{24\sqrt{5}}{5}$$

12 오른쪽 그림과 같이 넓이

가 각각 3, 5, 12, 20인

정사각형의 한 변의 길이는

차례로 $\sqrt{3}, \sqrt{5},$

$$\sqrt{12} (=2\sqrt{3}),$$

$$\sqrt{20} (=2\sqrt{5}) \text{이고, 겹치는}$$

부분인 정사각형의 한 변의 길이는 차례로

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1}{2} \times \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3} \text{이므로}$$

(주어진 도형의 둘레의 길이)

= (처음 네 정사각형의 둘레의 길이)

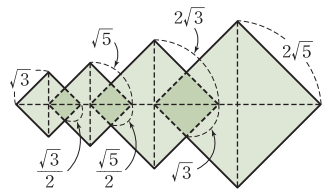
− (겹치는 부분인 세 정사각형의 둘레의 길이)

$$= 4 \times (\sqrt{3} + \sqrt{5} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5}) - 4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{3} \right)$$

$$= 4 \times (3\sqrt{3} + 3\sqrt{5}) - 4 \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$= 12\sqrt{3} + 12\sqrt{5} - 6\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$$

$$= 6\sqrt{3} + 10\sqrt{5}$$



대단원 마무리하기

34~36쪽

01 ② 02 ④ 03 ② 04 $-\sqrt{2} + 8$

05 $\angle, \square$ 06 1.127 07 $\frac{\sqrt{70}}{5}$ 08 $4 - 2\sqrt{2}$

09 ② 10 90 11 $-2x$ 12 4

13 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 14 ④ 15 ④

서술형 문제 <과정은 풀이 참조>

16 $-4a - 3b$ 17 $2\sqrt{3} - \sqrt{2}$ 18 -10 19 $12\sqrt{2}$

01 ㄱ. 제곱근 0.25는 $\sqrt{0.25} = \sqrt{(0.5)^2} = 0.5$ 이다.

ㄴ. $(-4)^2 = 16$ 이므로 16의 제곱근은 ± 4 이다.

ㄷ. 유리수 0과 무리수 $\sqrt{2}$ 의 곱은 $0 \times \sqrt{2} = 0$ 으로 유리수이다.

ㄹ. 정사각형의 한 변의 길이를 a 라 하면 $a^2 = 8$

이때 $a > 0$ 이므로 $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

ㄱ. $0 < a < 1$ 일 때, $a-1 < 0$ 이므로

$$\sqrt{(a-1)^2} + \sqrt{a^2} = -(a-1) + a = -a + 1 + a = 1$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

- 02** (i) $\sqrt{45n} = \sqrt{3^2 \times 5 \times n}$ 이 자연수가 되려면 $n = 5 \times (\text{자연수})^2$ 이어야 한다.

(ii) $\sqrt{\frac{180}{n}} = \sqrt{\frac{2^2 \times 3^2 \times 5}{n}}$ 가 자연수가 되려면 n 은 180의 약수이면서 $5 \times (\text{자연수})^2$ 이어야 한다.

따라서 (i), (ii)에 의해 두 수를 모두 자연수가 되도록 하는 n 의 값은 $5 \times 1^2 = 5$, $5 \times 2^2 = 20$, $5 \times 3^2 = 45$, $5 \times 2^2 \times 3^2 = 180$ 이다.

- 03** $-3.3 < -\sqrt{3x} \leq -2.1$ 에서
 $(-2.1)^2 \leq (-\sqrt{3x})^2 < (-3.3)^2$
 $4.41 \leq 3x < 10.89 \quad \therefore 1.47 \leq x < 3.63$
 따라서 구하는 정수 x 는 2, 3의 2개이다.

- 04** 정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 a 라 하면 $a^2 = 32$ 이때 $a > 0$ 이므로 $a = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
 점 C에 대응하는 수가 $3\sqrt{2}$ 이므로
 점 B에 대응하는 수는 $3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = -\sqrt{2}$
 $\triangle BCD$ 에서 $\overline{BD} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{64} = 8$
 따라서 $\overline{BE} = \overline{BD} = 8$ 이므로 점 E에 대응하는 수는 $-\sqrt{2} + 8$ 이다.

- 05** ㄱ. $\sqrt{0.058} = \sqrt{\frac{5.8}{100}} = \sqrt{\frac{5.8}{10^2}} = \frac{\sqrt{5.8}}{10} = \frac{2.408}{10} = 0.2408$
 ㄴ. $\sqrt{0.0058} = \sqrt{\frac{58}{10000}} = \sqrt{\frac{58}{100^2}} = \frac{\sqrt{58}}{100}$
 이므로 $\sqrt{58}$ 의 값이 주어져야 한다.
 ㄷ. $\sqrt{580000} = \sqrt{58 \times 10000} = \sqrt{58 \times 100^2} = 100\sqrt{58}$
 이므로 $\sqrt{58}$ 의 값이 주어져야 한다.
 ㄹ. $\sqrt{58000} = \sqrt{5.8 \times 10000} = \sqrt{5.8 \times 100^2} = 100\sqrt{5.8}$
 $= 100 \times 2.408 = 240.8$
 ㅁ. $\sqrt{2320} = \sqrt{2^2 \times 580} = \sqrt{2^2 \times 5.8 \times 10^2} = 20\sqrt{5.8}$
 $= 20 \times 2.408 = 48.16$
 ㅂ. $\frac{\sqrt{2320}}{2} = \frac{20\sqrt{5.8}}{2} = 10\sqrt{5.8}$
 $= 10 \times 2.408 = 24.08$
 따라서 그 값을 구할 수 없는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

- 06** $\sqrt{1.18} = 1.086$ 이므로 $a = 1.18$,
 $\sqrt{1.36} = 1.166$ 이므로 $b = 1.36$
 따라서 $\frac{a+b}{2} = \frac{1.18+1.36}{2} = \frac{2.54}{2} = 1.27$ 이므로
 $\sqrt{\frac{a+b}{2}} = \sqrt{1.27} = 1.127$

- 07** $a : b : c = (\sqrt{5} + \sqrt{2}) : (\sqrt{3} - \sqrt{2}) : (\sqrt{5} - \sqrt{3})$ 이므로
 $a = (\sqrt{5} + \sqrt{2})k$, $b = (\sqrt{3} - \sqrt{2})k$, $c = (\sqrt{5} - \sqrt{3})k$ ($k > 0$)로 놓고, $a + b + c = \sqrt{7}$ 에 각각 대입하면

$$(\sqrt{5} + \sqrt{2})k + (\sqrt{3} - \sqrt{2})k + (\sqrt{5} - \sqrt{3})k = \sqrt{7}$$

$$2\sqrt{5}k = \sqrt{7} \quad \therefore k = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{35}}{10}$$

$$\therefore a - b - c$$

$$= (\sqrt{5} + \sqrt{2})\frac{\sqrt{35}}{10} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})\frac{\sqrt{35}}{10} - (\sqrt{5} - \sqrt{3})\frac{\sqrt{35}}{10}$$

$$= \frac{2\sqrt{70}}{10} = \frac{\sqrt{70}}{5}$$

- 08** $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ 이고, $4 < \sqrt{18} < 5$ 이므로

$$m = 3\sqrt{2} - 4$$

$$5\sqrt{2} = \sqrt{50}$$
이고, $7 < \sqrt{50} < 8$ 에서

$$-8 < -\sqrt{50} < -7$$
이므로 $2 < 10 - 5\sqrt{2} < 3$

$$\therefore n = (10 - 5\sqrt{2}) - 2 = 8 - 5\sqrt{2}$$

$$\therefore m + n = (3\sqrt{2} - 4) + (8 - 5\sqrt{2}) = 4 - 2\sqrt{2}$$

- 09** $p = \sqrt{32} + 2 = 4\sqrt{2} + 2$,
 $q = \sqrt{121} - \sqrt{8} = 11 - 2\sqrt{2}$,
 $r = 1 + \sqrt{50} = 1 + 5\sqrt{2}$ 이므로
 $p - q = 4\sqrt{2} + 2 - (11 - 2\sqrt{2})$
 $= 4\sqrt{2} + 2 - 11 + 2\sqrt{2}$
 $= 6\sqrt{2} - 9 = \sqrt{72} - \sqrt{81} < 0$
 $\therefore p < q$
 $q - r = 11 - 2\sqrt{2} - (1 + 5\sqrt{2})$
 $= 11 - 2\sqrt{2} - 1 - 5\sqrt{2}$
 $= 10 - 7\sqrt{2} = \sqrt{100} - \sqrt{98} > 0$
 $\therefore q > r$
 $p - r = 4\sqrt{2} + 2 - (1 + 5\sqrt{2})$
 $= 4\sqrt{2} + 2 - 1 - 5\sqrt{2}$
 $= 1 - \sqrt{2} < 0$
 $\therefore p < r$
 $\therefore p < r < q$

- 10** $1 \times 3 + 1 = 4 = 2^2$, $3 \times 5 + 1 = 16 = 4^2$, $5 \times 7 + 1 = 36 = 6^2$,
 $\dots$, $17 \times 19 + 1 = 324 = 18^2$ 이므로
 (주어진 식)
 $= 2 + 4 + 6 + \dots + 18$
 $= (2+18) + (4+16) + (6+14) + (8+12) + 10$
 $= 20 \times 4 + 10 = 90$

- 11** $-1 < x < 0$ 이므로 $\frac{1}{x} < -1$

따라서 $x + \frac{1}{x} < 0$, $x - \frac{1}{x} > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} - \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} &= -\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x - \frac{1}{x}\right) \\ &= -x - \frac{1}{x} - x + \frac{1}{x} \\ &= -2x \end{aligned}$$

- 12** $\sqrt{144} < \sqrt{145} < \sqrt{169}$ 이므로 $12 < \sqrt{145} < 13$
 $f(145) = (\sqrt{145} \text{ 이하의 자연수의 개수}) = 12$
 $\sqrt{64} < \sqrt{80} < \sqrt{81}$ 이므로 $8 < \sqrt{80} < 9$

$$f(80) = (\sqrt{80} \text{ 이하의 자연수의 개수}) = 8$$

$$\therefore f(145) - f(80) = 12 - 8 = 4$$

$$13 \quad \frac{\sqrt{4^6 + 8^8}}{\sqrt{32^5 + 2 \times 16^3}} = \sqrt{\frac{(2^2)^6 + (2^3)^8}{(2^5)^5 + 2 \times (2^4)^3}}$$

$$= \sqrt{\frac{2^{12} + 2^{24}}{2^{25} + 2^{13}}} = \sqrt{\frac{2^{12} \times (1 + 2^{12})}{2^{13} \times (2^{12} + 1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

14 한 변의 길이가 6cm인 정사각형 안에 그린 세 정사각형의 넓이는 각각

$$36 \times \frac{1}{2} = 18 (\text{cm}^2), 18 \times \frac{1}{2} = 9 (\text{cm}^2), 9 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2} (\text{cm}^2)$$

이므로 세 정사각형의 한 변의 길이는 각각

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ cm}, \sqrt{9} = 3 \text{ cm}, \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ cm이다.}$$

따라서 색칠한 부분의 둘레의 길이의 합은 세 정사각형의 둘레의 길이의 합과 같으므로

$$4 \left(3\sqrt{2} + 3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) = 4 \left(\frac{9\sqrt{2}}{2} + 3 \right) = 18\sqrt{2} + 12 (\text{cm})$$

$$15 \quad \frac{5x-2y}{4x+7y} = \frac{1}{3} \text{ 이므로}$$

$$3(5x-2y) = 4x+7y, 15x-6y=4x+7y$$

$$11x=13y \quad \therefore x = \frac{13}{11}y$$

$$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \sqrt{\frac{\frac{13}{11}y+y}{\frac{13}{11}y-y}} = \sqrt{\frac{24}{11}y \div \frac{2}{11}y} = \sqrt{12}$$

이때 $3 < \sqrt{12} < 4$ 이므로

$$a=3, b=\sqrt{12}-3=2\sqrt{3}-3$$

$$\therefore \frac{a}{b+3} = \frac{3}{(2\sqrt{3}-3)+3} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

16 $ab < 0$ 에서 a 와 b 는 서로 다른 부호이고, $a-b > 0$ 이므로 $a > b$

즉, $a > 0, b < 0, b-a < 0$ 이므로

$$-3\sqrt{a^2 - \sqrt{(b-a)^2}} + 4|b|$$

$$= -3a - \{-(b-a)\} + 4 \times (-b)$$

$$= -3a - a + b - 4b$$

$$= -4a - 3b$$

채점 요소	비율
① $a, b, b-a$ 의 부호를 각각 구하기	60 %
② 주어진 식을 간단히 하기	40 %

$$17 \quad 2\sqrt{3}x + 3\sqrt{2} = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \text{에서}$$

$$\sqrt{3}x = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$$

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{6 - 3\sqrt{6}}{3} = 2 - \sqrt{6}$$

$$\sqrt{6}(x+1) - (k-6) = \sqrt{2}(x-1) + 3\sqrt{6} \text{에 } x=2-\sqrt{6} \text{을 대입하면}$$

$$\sqrt{6}(2-\sqrt{6}+1) - (k-6) = \sqrt{2}(2-\sqrt{6}-1) + 3\sqrt{6}$$

$$3\sqrt{6} - 6 - k + 6 = \sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$$

$$\therefore k = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}$$

채점 요소	비율
① 일차방정식의 해 구하기	50 %
② 상수 k 의 값 구하기	50 %

$$18 \quad 1 < \sqrt{2} < 2 \text{이므로 } a = \sqrt{2} - 1, b = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

주어진 식에 $a = \sqrt{2} - 1, b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 를 대입하면

$$2(\sqrt{2}-1-1) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+3\right)c + 3\sqrt{2}$$

$$= 2\sqrt{2} - 4 + \frac{\sqrt{2}}{2}c + 3c + 3\sqrt{2}$$

$$= -4 + 3c + \left(5 + \frac{c}{2}\right)\sqrt{2}$$

이 식의 값이 유리수가 되려면 $5 + \frac{c}{2} = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{c}{2} = -5 \quad \therefore c = -10$$

채점 요소	비율
① a, b 의 값 각각 구하기	30 %
② 주어진 식을 간단히 나타내기	30 %
③ c 의 값 구하기	40 %

19 주어진 직육면체의 겉넓이는

$$2(\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}\sqrt{c} + \sqrt{c}\sqrt{a}) = 12\sqrt{2} + 8\sqrt{3} + 4\sqrt{6} \text{이므로}$$

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$$

$$= \sqrt{72} + \sqrt{48} + \sqrt{24}$$

이때 $a < b < c$ 에서 $ab < ac < bc$ 이므로

$$ab=24, ac=48, bc=72$$

$$(ab) \times (ac) \times (bc) = (abc)^2$$

$$= 24 \times 48 \times 72$$

$$= 2^{10} \times 3^4$$

$$= (2^5 \times 3^2)^2$$

그런데 $abc > 0$ 이므로 $abc = 2^5 \times 3^2$

따라서 직육면체의 부피는

$$\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c} = \sqrt{abc} = \sqrt{2^5 \times 3^2} = 12\sqrt{2}$$

채점 요소	비율
① 주어진 조건을 식으로 나타내기	20 %
② ab, ac, bc 의 값 각각 구하기	30 %
③ abc 의 값 구하기	20 %
④ 직육면체의 부피 구하기	30 %

II. 다항식의 곱셈과 인수분해

1 다항식의 곱셈

1 주제별 유형 불러오기

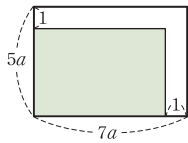
39~44쪽

유제 1 ①	유제 2 8	유제 3 ③	유제 4 32
유제 5 ④	유제 6 $\frac{9+3\sqrt{5}}{4}$	유제 7 ⑤	
유제 8 $x^4+2x^3-21x^2-22x+48$	유제 9 ④		
유제 10 -6	유제 11 ㄱ, ㄴ	유제 12 ④	유제 13 5
유제 14 1			

유제 1 $(2x-ay+1)(bx+3y-2)$ 에서
 xy 항이 나오는 부분만 전개하면
 $2x \times 3y + (-ay) \times bx = 6xy - abxy = (6-ab)xy$
 즉, $6-ab = -4$ 이므로 $ab=10$
 또 x^2 항이 나오는 부분만 전개하면
 $2x \times bx = 2bx^2$
 y^2 항이 나오는 부분만 전개하면
 $-ay \times 3y = -3ay^2$
 이때 x^2 의 계수와 y^2 의 계수의 곱은
 $2b \times (-3a) = -6ab = -6 \times 10 = -60$

유제 2 $x^2(-3x+1)(x^2-4) = (-3x^3+x^2)(x^2-4)$ 에서
 x^3 항이 나오는 부분만 전개하면
 $-3x^3 \times (-4) = 12x^3 \quad \therefore a=12$
 x^2 항이 나오는 부분만 전개하면
 $x^2 \times (-4) = -4x^2 \quad \therefore b=-4$
 $\therefore a+b=12+(-4)=8$

유제 3 주어진 그림에서 길을 제외한 땅의
 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분
 과 같으므로
 $(7a-1)(5a-1) = 35a^2 - 12a + 1$



유제 4 $(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)$
 $= (x^2-4)(x^2+4)(x^4+16)$
 $= (x^4-16)(x^4+16) = x^8 - 256$
 즉, $x^8 - 256 = x^p - q$ 이므로 $p=8, q=256$
 $\therefore \frac{q}{p} = \frac{256}{8} = 32$

유제 5 $\frac{2019 \times 2021 - 2020^2 + 2018}{2017}$
 $= \frac{(2020-1)(2020+1) - 2020^2 + 2018}{2017}$
 $= \frac{2020^2 - 1 - 2020^2 + 2018}{2017} = 1$

유제 6 $2 < \sqrt{5} < 3$ 에서 $3 < 6 - \sqrt{5} < 4$ 이므로 $a=3$
 $\therefore b = (6 - \sqrt{5}) - 3 = 3 - \sqrt{5}$
 $\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{3 - \sqrt{5}} = \frac{3(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})}$
 $= \frac{9 + 3\sqrt{5}}{3^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{9 + 3\sqrt{5}}{4}$

유제 7 $3x-y=A$ 로 놓으면
 $(3x-y+2)^2 = (A+2)^2$
 $= A^2 + 4A + 4$
 $= (3x-y)^2 + 4(3x-y) + 4$
 $= 9x^2 - 6xy + y^2 + 12x - 4y + 4$
 따라서 $a=-6, b=12$ 이므로
 $a+b = -6+12=6$

유제 8 $(x-1)(x-4)(x+2)(x+5)+8$
 $= \{(x-1)(x+2)\} \{(x-4)(x+5)\} + 8$
 $= (x^2+x-2)(x^2+x-20)+8$
 $x^2+x=A$ 로 놓으면
 $(A-2)(A-20)+8$
 $= A^2 - 22A + 48$
 $= (x^2+x)^2 - 22(x^2+x) + 48$
 $= x^4 + 2x^3 + x^2 - 22x^2 - 22x + 48$
 $= x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 48$

유제 9 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2y^2} = \frac{(x-y)^2+2xy}{(xy)^2}$
 $= \frac{(2\sqrt{7})^2+2 \times 4}{4^2} = \frac{9}{4}$

유제 10 $(x-4)(y+4) = xy + 4(x-y) - 16$ 이므로
 $14 + 4(x-y) - 16 = 22, 4(x-y) = 24$
 $\therefore x-y=6$
 $\therefore x^2 - 5xy + y^2 = (x-y)^2 - 3xy$
 $= 6^2 - 3 \times 14 = -6$

유제 11 ㄱ. $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = (-2)^2 + 2 = 6$
 ㄴ. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 6 + 2 = 8$
 ㄷ. $x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 6^2 - 2 = 34$
 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

유제 12 $x = -3 - 2\sqrt{5}$ 에서 $x+3 = -2\sqrt{5}$
 양변을 제곱하면
 $(x+3)^2 = (-2\sqrt{5})^2, x^2+6x+9=20$
 $\therefore x^2+6x=11$
 $\therefore \sqrt{2x^2+12x+5} = \sqrt{2(x^2+6x)+5}$
 $= \sqrt{2 \times 11 + 5}$
 $= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

유제 13 $2\sqrt{6}=\sqrt{24}$ 이고, $4<\sqrt{24}<5$ 이므로 $1<2\sqrt{6}-3<2$
 이때 $x=(2\sqrt{6}-3)-1=2\sqrt{6}-4$ 이므로
 $x+4=2\sqrt{6}$
 양변을 제곱하면
 $(x+4)^2=(2\sqrt{6})^2, x^2+8x+16=24$
 $\therefore x^2+8x=8$
 $\therefore x^2+8x-3=8-3=5$

유제 14 $x+y=\frac{\sqrt{2}+1}{2}+\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\sqrt{2}$
 $xy=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\times\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\frac{1}{4}$
 $\therefore x^2+y^2-2xy=(x+y)^2-4xy$
 $=(\sqrt{2})^2-4\times\frac{1}{4}$
 $=2-1=1$

2 최고 유형 탐험하기

45~47쪽

- | | | | |
|-----|------|------|------|
| 1 ④ | 2 ③ | 3 ① | 4 ① |
| 5 ② | 6 ② | 7 ③ | 8 ② |
| 9 ③ | 10 ⑤ | 11 ③ | 12 ③ |

1 (직육면체의 부피) $= (2x-3)(x+4)(5x-y+a)$
 $= (2x^2+5x-12)(5x-y+a)$
 위의 식에서 x^2 항이 나오는 부분만 전개하면
 $2x^2\times a+5x\times 5x=(2a+25)x^2$
 이때 x^2 의 계수가 7이므로 $2a+25=7$
 $2a=-18 \quad \therefore a=-9$
 또 상수항이 나오는 부분만 전개하면 $-12\times a=-12a$
 따라서 상수항은 $-12a=-12\times(-9)=108$

2 $1<\sqrt{2}<2$ 에서 $1<3-\sqrt{2}<2$ 이므로
 $a=(3-\sqrt{2})-1=2-\sqrt{2}$
 또 $2\sqrt{2}=\sqrt{8}$ 이고, $2<\sqrt{8}<3$ 이므로
 $b=2\sqrt{2}-2$
 $\therefore (3a+b)^2=\{3(2-\sqrt{2})+(2\sqrt{2}-2)\}^2$
 $= (6-3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2)^2$
 $= (4-\sqrt{2})^2$
 $= 16-8\sqrt{2}+2$
 $= 18-8\sqrt{2}$

3 $2020=a$ 라 하면
 $2\times 2020^2-2020\times 2021-2019\times 2022+3$
 $= 2a^2-a(a+1)-(a-1)(a+2)+3$
 $= 2a^2-a^2-a-(a^2+a-2)+3$
 $= 2a^2-a^2-a-a^2-a+2+3$
 $= -2a+5$
 $= -2\times 2020+5=-4035$

4 $(\sqrt{3}+2)^{11}(\sqrt{3}-2)^{13}$
 $= (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{11}(\sqrt{3}-2)^{11}(\sqrt{3}-2)^2$
 $= \{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)\}^{11}(\sqrt{3}-2)^2$
 $= \{(\sqrt{3})^2-2^2\}^{11}(\sqrt{3}-2)^2$
 $= (-1)^{11}(\sqrt{3}-2)^2$
 $= -(3-4\sqrt{3}+4)$
 $= -7+4\sqrt{3}$
 따라서 $a=-7, b=4$ 이므로
 $a+b=-7+4=-3$

5 $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}$
 $=\frac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$
 $=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+2-3}$
 $=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
 $=\frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$
 $=\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

따라서 $a=2, b=1, c=-1$ 이므로
 $a+b+c=2+1+(-1)=2$

6 $\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}$
 $=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n})^2-(\sqrt{n+1})^2}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)}$
 $=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{-1}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$
 $\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(15)}$
 $= (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})$
 $+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})$
 $= \sqrt{16}-1$
 $= 4-1=3$

7 $x^2+2x-13=0$ 에서 $x^2+2x=13$
 $(x-4)(x-1)(x+3)(x+6)+100$
 $= \{(x-1)(x+3)\}\{(x-4)(x+6)\}+100$
 $= (x^2+2x-3)(x^2+2x-24)+100$
 $= (13-3)\times(13-24)+100$
 $= 10\times(-11)+100$
 $= -10$

8 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a-b}$ 에서 $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a-b}$
 $(a+b)(a-b)=ab \quad \therefore a^2-b^2=ab$
 $\therefore \frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}=\frac{a^4+b^4}{a^2b^2}=\frac{(a^2-b^2)^2+2a^2b^2}{a^2b^2}$
 $=\frac{(ab)^2+2a^2b^2}{a^2b^2}=\frac{3a^2b^2}{a^2b^2}=3$

9
$$x = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= 3 - 2\sqrt{6} + 2$$

$$= 5 - 2\sqrt{6}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= 3 + 2\sqrt{6} + 2$$

$$= 5 + 2\sqrt{6}$$

$$\therefore x+y = (5-2\sqrt{6}) + (5+2\sqrt{6}) = 10$$

$$x-y = (5-2\sqrt{6}) - (5+2\sqrt{6}) = -4\sqrt{6}$$

$$xy = (5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6}) = 5^2 - (2\sqrt{6})^2 = 1$$

$$\therefore x+y=10$$

$$\therefore (x-y)^2 = (-4\sqrt{6})^2 = 96$$

$$\therefore x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 10^2 - 2 \times 1 = 98$$

따라서 옳지 않은 것은 ㄷ이다.

10 $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 7^2 - 4 \times 9 = 13$
그런데 $x > y$ 에서 $x-y > 0$ 이므로
 $x-y = \sqrt{13}$

$$\therefore \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$

$$= \frac{(\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + (\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2}$$

$$= \frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y} = \frac{7+2\sqrt{9}}{\sqrt{13}}$$

$$= \frac{7+2 \times 3}{\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

11 $x \neq 0$ 이므로 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면
 $x - 2 - \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x - \frac{1}{x} = 2$
이때 $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 2^2 + 2 = 6$,
 $x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 6^2 - 2 = 34$
이므로
 $x^8 + \frac{1}{x^8} = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 - 2 = 34^2 - 2 = 1154$
따라서 일의 자리의 숫자는 4이다.

12 $2^{10x} \times 2^{10y} = (12-4\sqrt{7})(12+4\sqrt{7})$

$$= 12^2 - (4\sqrt{7})^2 = 144 - 112$$

$$= 32 = 2^5$$

즉, $2^{10x} \times 2^{10y} = 2^{10x+10y} = 2^{10(x+y)} = 2^5$ 이므로
 $10(x+y) = 5 \quad \therefore x+y = \frac{1}{2}$

$$\therefore (x+y)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

3 최고 유형 정복하기

48~50쪽

01 -7 02 98 03 12 04 $-\frac{1}{4}$
05 $\sqrt{7}$ 06 8 07 $\frac{18+7\sqrt{2}}{6}$ 08 95
09 60 10 ㄷ, ㄹ 11 0

01 $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{1}{2}$ 에서 $\frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{2}$
이때 $abc = 2$ 이므로 $a+b+c = 1$
즉, $a+b = 1-c$, $b+c = 1-a$, $c+a = 1-b$ 이므로
 $(a+b)(b+c)(c+a)$
 $= (1-c)(1-a)(1-b)$
 $= 1 - (a+b+c) + (ab+bc+ca) - abc$
 $= 1 - 1 + (-5) - 2 = -7$

02 주어진 조건에서 $ax+by$ 의 x, y 의 지수가 1씩 커지므로
 $x+y$ 와의 곱을 생각한다.
 $(ax^2+by^2)(x+y) = ax^3+by^3+xy(ax+by)$ 에서
 $10 \times 1 = 26 + xy \times 8$
 $\therefore xy = -2$
 $(ax^3+by^3)(x+y) = ax^4+by^4+xy(ax^2+by^2)$ 에서
 $26 \times 1 = ax^4+by^4 + (-2) \times 10$
 $\therefore ax^4+by^4 = 46$
 $(ax^4+by^4)(x+y) = ax^5+by^5+xy(ax^3+by^3)$ 에서
 $46 \times 1 = ax^5+by^5 + (-2) \times 26$
 $\therefore ax^5+by^5 = 98$

03 $a^2 - ab + b^2 = 16 \quad \dots \textcircled{1}$
 $a^2 + ab + b^2 = 24 \quad \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면 $2(a^2+b^2) = 40$
 $\therefore a^2+b^2 = 20$
 $\textcircled{2}$ 에 $a^2+b^2 = 20$ 을 대입하면 $ab = 4$
 $\therefore (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 20 - 2 \times 4 = 12$

04 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 에서
 $a+b = 2$, $a^2 - b^2 = -1$ 이므로
 $2 \times (a-b) = -1 \quad \therefore a-b = -\frac{1}{2}$

$$\therefore (a+b)^{199}(a-b)^{201} = (a+b)^{199}(a-b)^{199}(a-b)^2$$

$$= \{(a+b)(a-b)\}^{199}(a-b)^2$$

$$= (a^2 - b^2)^{199}(a-b)^2$$

$$= -1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$$

05 $a^2 = 8 + 2\sqrt{7}$, $b^2 = 8 - 2\sqrt{7}$ 이므로
 $a^2 + b^2 = (8 + 2\sqrt{7}) + (8 - 2\sqrt{7}) = 16$
 $a^2 b^2 = (8 + 2\sqrt{7})(8 - 2\sqrt{7}) = 8^2 - (2\sqrt{7})^2 = 36$
이때 $a > 0$, $b > 0$ 이므로 $ab = 6$

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &= 16 + 2 \times 6 = 28 \\ a+b > 0 \text{이므로 } a+b &= 2\sqrt{7} \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ &= 16 - 2 \times 6 = 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a > b \text{에서 } a-b > 0 \text{이므로 } a-b &= 2 \\ \therefore \frac{a+b}{a-b} &= \frac{2\sqrt{7}}{2} = \sqrt{7}\end{aligned}$$

06 $(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1) = \frac{1}{2} \times 3^a - b$ 의 양변에

$$\begin{aligned}(3-1) \text{을 곱하면} \\ (3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1) \\ &= (3-1)\left(\frac{1}{2} \times 3^a - b\right) \\ (3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1) &= 3^a - 2b \\ (3^4-1)(3^4+1)(3^8+1) &= 3^a - 2b \\ (3^8-1)(3^8+1) &= 3^a - 2b \\ 3^{16}-1 &= 3^a - 2b \\ \text{즉, } 16 &= a, -1 = -2b \text{이므로} \\ a &= 16, b = \frac{1}{2} \\ \therefore ab &= 16 \times \frac{1}{2} = 8\end{aligned}$$

07 $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$ 이고, $4 < \sqrt{18} < 5$ 이므로

$$\begin{aligned}2 < 3\sqrt{2} - 2 < 3 \\ \therefore [a] &= 2 \\ \therefore \frac{a}{[a]+a} - \frac{1}{[a]-a} \\ &= \frac{3\sqrt{2}-2}{2+(3\sqrt{2}-2)} - \frac{1}{2-(3\sqrt{2}-2)} \\ &= \frac{3\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{4-3\sqrt{2}} \\ &= \frac{(3\sqrt{2}-2) \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} - \frac{4+3\sqrt{2}}{(4-3\sqrt{2})(4+3\sqrt{2})} \\ &= \frac{6-2\sqrt{2}}{6} - \frac{4+3\sqrt{2}}{16-18} \\ &= \frac{6-2\sqrt{2}}{6} + \frac{4+3\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{6-2\sqrt{2}+12+9\sqrt{2}}{6} \\ &= \frac{18+7\sqrt{2}}{6}\end{aligned}$$

08 $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{5}$ 의 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 &= (\sqrt{5})^2, x + \frac{1}{x} + 2 = 5 \\ \therefore x + \frac{1}{x} &= 3 \\ \text{이 식의 양변에 } x \text{를 곱하면} \\ x^2 + 1 &= 3x \text{에서 } x^2 - 3x = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore (x+3)(x+1)(x-4)(x-6) \\ &= \{(x+3)(x-6)\} \{(x+1)(x-4)\} \\ &= (x^2-3x-18)(x^2-3x-4) \\ &= (-1-18) \times (-1-4) \\ &= -19 \times (-5) = 95\end{aligned}$$

09 $1 < \sqrt{3} < 2$ 이므로 $\sqrt{3}$ 의 소수 부분은

$$\begin{aligned}f(1) &= \sqrt{3} - 1 \\ \frac{1}{f(1)} &= \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \text{이고,} \\ 2 < \sqrt{3}+1 < 3 \text{에서 } 1 < \frac{\sqrt{3}+1}{2} < \frac{3}{2} \text{이므로}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(1)} \text{의 소수 부분은} \\ f(2) &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{1}{f(2)} &= \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{3}+1 \text{이고,} \\ 2 < \sqrt{3}+1 < 3 \text{이므로}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(2)} \text{의 소수 부분은} \\ f(3) &= (\sqrt{3}+1) - 2 = \sqrt{3} - 1 \\ \text{같은 방법으로 계속하면} \\ f(1) &= f(3) = f(5) = \dots = f(39) = \sqrt{3} - 1, \\ f(2) &= f(4) = f(6) = \dots = f(40) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \therefore f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(40) \\ &= (\sqrt{3}-1) \times 20 + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times 20 \\ &= 20\sqrt{3} - 20 + 10\sqrt{3} - 10 \\ &= -30 + 30\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{따라서 } a &= -30, b = 30 \text{이므로} \\ b-a &= 30 - (-30) = 60\end{aligned}$$

10 $x \neq 0$ 이므로 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$\begin{aligned}x-3+\frac{1}{x} &= 0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=3 \\ \neg. \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 &= 3^2=9 \\ \neg. x^2+\frac{1}{x^2} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 \\ &= 3^2-2=7 \\ \neg. \frac{x^4}{3}+\frac{1}{3x^4} &= \frac{1}{3}\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right) = \frac{1}{3}\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2\right] \\ &= \frac{1}{3} \times (7^2-2) = \frac{47}{3} \\ \neg. \frac{1}{2}x^2-3x+\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{x} &= \frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 7 - 3 \times 3 = -\frac{11}{2}\end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

$$\begin{aligned}11 \quad ab &= (-5+\sqrt{26})(-5-\sqrt{26}) \\ &= (-5)^2 - (\sqrt{26})^2 = -1 \\ \text{이때 } a^{3m} &= A, b^{3m} = B \text{라 하면}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (a^{3n} + b^{3n})^2 - (a^{3n} - b^{3n})^2 \\
 &= (A+B)^2 - (A-B)^2 \\
 &= A^2 + 2AB + B^2 - (A^2 - 2AB + B^2) \\
 &= 4AB = 4a^{3n}b^{3n} = 4(ab)^{3n} = 4 \times (-1)^{3n}
 \end{aligned}$$

따라서

$$f(1) = 4 \times (-1)^3 = -4$$

$$f(2) = 4 \times (-1)^6 = 4$$

$$f(3) = 4 \times (-1)^9 = -4$$

⋮

$$f(100) = 4 \times (-1)^{300} = 4$$

이므로 $f(n)$ 의 값은 n 이 홀수일 때 -4 , n 이 짝수일 때 4 이다.

$$\begin{aligned}
 \therefore f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(100) \\
 = (-4) + 4 + (-4) + \cdots + 4 = 0
 \end{aligned}$$

2 인수분해

1 주제별 유형 불러오기

52~58쪽

유제 1	③, ④	유제 2	ㄷ	유제 3	③	유제 4	36
유제 5	$3x-9$	유제 6	①	유제 7	$(2x-3)(3x+1)$		
유제 8	①	유제 9	-55	유제 10	⑤	유제 11	9
유제 12	②	유제 13	$2x-3y-3$	유제 14	④		
유제 15	$2\sqrt{5}-5$	유제 16	$20\sqrt{5}-21$				

유제 1 $2(x+2)^2 - 3(x+2) = (x+2)\{2(x+2)-3\}$
 $= (x+2)(2x+4-3)$
 $= (x+2)(2x+1)$

따라서 인수인 것은 ③, ④이다.

유제 2 $(z-y)^2 = \{-(y-z)\}^2 = (y-z)^2$ 이므로
 $(x-y)(y-z)^2 - (z-y)^2(x-z)$
 $= (x-y)(y-z)^2 - (y-z)^2(x-z)$
 $= (y-z)^2\{x-y-(x-z)\}$
 $= (y-z)^2(x-y-x+z)$
 $= (y-z)^2(-y+z)$
 $= -(y-z)^3$

따라서 인수가 아닌 것은 ㄷ이다.

유제 3 $0 < 4a < 1$ 에서 $0 < 2a < \frac{1}{2}$, $0 < a < \frac{1}{4}$ 이므로
 $2a - \frac{1}{2} < 0$, $a - \frac{1}{4} < 0$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sqrt{4a^2 - 2a + \frac{1}{4}} - \sqrt{a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{16}} \\
 = \sqrt{\left(2a - \frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(a - \frac{1}{4}\right)^2} \\
 = -\left(2a - \frac{1}{2}\right) + \left(a - \frac{1}{4}\right) \\
 = -2a + \frac{1}{2} + a - \frac{1}{4} \\
 = -a + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

유제 4 $(3x+5)(3x-7) + k = 9x^2 - 6x + k - 35$
 $= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + k - 35$

이 식이 완전제곱식이 되려면

$$k - 35 = 1^2 \quad \therefore k = 36$$

유제 5 (도형 ㉠의 넓이) $= (3x-4)^2 - 5^2$
 $= (3x-4+5)(3x-4-5)$
 $= (3x+1)(3x-9)$

따라서 두 도형 ㉠, ㉡의 넓이가 서로 같으므로 도형 ㉡의 가로 길이는 $3x-9$ 이다.

유제 6 $x^2 - 8x + 15 = (x-5)(x-3)$ 이고,
 $2x^2 - 9x - 5 = (2x+1)(x-5)$ 이므로 두 다항식의 공통인 인수는 $x-5$ 이다.
 이때 $3x^2 + ax - 30 = (x-5)(3x+m)$ (m 은 상수)으로 놓으면
 $3x^2 + ax - 30 = 3x^2 + (m-15)x - 5m$
 따라서 $a = m-15$, $-30 = -5m$ 이므로
 $m = 6$, $a = -9$

유제 7 선영이는 상수항을 제대로 보았으므로
 $3(x+1)(2x-1) = 6x^2 + 3x - 3$
 에서 처음 이차식의 상수항은 -3 이다.
 $\therefore b = -3$
 유진이는 x 의 계수를 제대로 보았으므로
 $(2x-1)(3x-2) = 6x^2 - 7x + 2$
 에서 처음 이차식의 x 의 계수는 -7 이다.
 $\therefore a = -7$
 따라서 처음 이차식은 $6x^2 - 7x - 3$ 이므로 바르게 인수분해하면
 $6x^2 - 7x - 3 = (2x-3)(3x+1)$

유제 8 $\sqrt{\frac{2019 \times 2020 + 2019}{2020^2 - 1}} = \sqrt{\frac{2019(2020+1)}{(2020+1)(2020-1)}}$
 $= \sqrt{\frac{2019 \times 2021}{2021 \times 2019}} = 1$

유제 9 $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2 - 8^2 + 9^2 - 10^2$
 $= (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + (5-6)(5+6)$
 $+ (7-8)(7+8) + (9-10)(9+10)$
 $= -3 - 7 - 11 - 15 - 19 = -55$

유제 10 $x-2y=A$, $x+2y=B$ 로 놓으면
 $2(x-2y)^2-3(x-2y)(x+2y)-5(x+2y)^2$
 $=2A^2-3AB-5B^2$
 $=(A+B)(2A-5B)$
 $=(x-2y+x+2y)\{2(x-2y)-5(x+2y)\}$
 $=2x(-3x-14y)$
 $=-2x(3x+14y)$
따라서 $a=3$, $b=14$ 이므로
 $a+b=3+14=17$

유제 11 $(x-3)(x-2)(x+3)(x+4)+a$
 $=\{(x-3)(x+4)\}\{(x-2)(x+3)\}+a$
 $=(x^2+x-12)(x^2+x-6)+a$
 $x^2+x=A$ 로 놓으면
 $(A-12)(A-6)+a$
 $=A^2-18A+72+a$
이 식이 완전제곱식이 되려면
 $72+a=\left(-\frac{18}{2}\right)^2$, $72+a=81$
 $\therefore a=9$

유제 12 $a^3-a^2b-a+b=a^2(a-b)-(a-b)$
 $=(a^2-1)(a-b)$
 $=(a+1)(a-1)(a-b)$
 $ac-bc-a^2+2ab-b^2=(a-b)c-(a^2-2ab+b^2)$
 $=(a-b)c-(a-b)^2$
 $=(a-b)c-(a+b)(a-b)$
 $=(a-b)(c-a-b)$
따라서 두 다항식의 공통인 인수는 $a-b$ 이다.

유제 13 $x^2-3xy+2y^2-3x-y-28$
 $=x^2-3(y+1)x+2y^2-y-28$
 $=x^2-3(y+1)x+(y-4)(2y+7)$
 $=\{x-(y-4)\}\{x-(2y+7)\}$
 $=(x-y+4)(x-2y-7)$
따라서 두 일차식의 합은
 $(x-y+4)+(x-2y-7)=2x-3y-3$

유제 14 $a=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{3}+1$
 $b=\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
 $\therefore a^2-2a+1-4b^2$
 $=(a^2-2a+1)-4b^2$
 $=(a-1)^2-(2b)^2$
 $=(\sqrt{3}+1-1)^2-\left(2\times\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2$
 $=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3}-1)^2$
 $=(\sqrt{3}+\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{3}+1)$
 $=2\sqrt{3}-1$

유제 15 $4<2\sqrt{5}<5$ 이므로 $x=2\sqrt{5}-4$
 $\therefore \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2+1}=\frac{x^2(x-1)+(x-1)}{x^2+1}$
 $=\frac{(x-1)(x^2+1)}{x^2+1}$
 $=x-1$
 $=(2\sqrt{5}-4)-1$
 $=2\sqrt{5}-5$

유제 16 $x^2-y^2+2x+1=(x^2+2x+1)-y^2$
 $=(x+1)^2-y^2$
 $=(x+y+1)(x-y+1)$
즉, $(x+y+1)(x-y+1)=80$ 이므로
 $(\sqrt{5}+1)(x-y+1)=80$ 에서
 $x-y+1=\frac{80}{\sqrt{5}+1}=\frac{80(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$
 $=\frac{80\sqrt{5}-80}{4}$
 $=20\sqrt{5}-20$
 $\therefore x-y=20\sqrt{5}-21$

2 최고 유형 탐험하기

59~61쪽

1 ③	2 ④	3 ①	4 ①
5 ③	6 ⑤	7 ④	8 ⑤
9 ③	10 ①, ④	11 ②	12 ③

1 $(x^2-ax+3b)-(-3ax+b)=x^2-ax+3b+3ax-b$
 $=x^2+2ax+2b$

이 식이 완전제곱식이 되려면 $2b=\left(\frac{2a}{2}\right)^2=a^2$, 즉 $b=\frac{a^2}{2}$ 이
어야 하므로 이를 만족시키는 10보다 작은 자연수 a , b 의 순
서쌍 (a, b) 는 $(2, 2)$, $(4, 8)$ 이다.
따라서 $a+b$ 의 값 중 가장 큰 값은 $4+8=12$ 이다.

2 $0<a<1$ 에서 $\frac{1}{a}>1$ 이므로 $0<a<\frac{1}{a}$
즉, $a+\frac{1}{a}>0$, $a-\frac{1}{a}<0$, $-a<0$
 $\therefore \sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}-\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-4}+\sqrt{(-a)^2}$
 $=\sqrt{a^2-2+\frac{1}{a^2}+4}-\sqrt{a^2+2+\frac{1}{a^2}-4}+\sqrt{(-a)^2}$
 $=\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}+\sqrt{(-a)^2}$
 $=a+\frac{1}{a}+\left(a-\frac{1}{a}\right)-(-a)$
 $=a+\frac{1}{a}+a-\frac{1}{a}+a=3a$

3 $256=2^8$ 이므로

$$\begin{aligned}x^8-2^8 &= (x^4+2^4)(x^4-2^4) \\ &= (x^4+16)(x^2+2^2)(x^2-2^2) \\ &= (x^4+16)(x^2+4)(x+2)(x-2)\end{aligned}$$

따라서 인수가 아닌 것은 ①이다.

4 $\overline{AD}$ 를 지름으로 하는 원의 반지름의

길이를 r cm라 하면

$$2\pi r = 10\pi \quad \therefore r = 5$$

$$\therefore \overline{AD} = 10 \text{ cm}$$

이때 색칠한 부분의 넓이는 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원의 넓이에서 $\overline{AC}$ 를 지름으로 하는 원의 넓이를 뺀 것과 같으므로

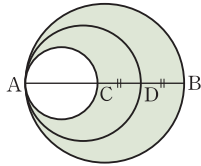
$$\overline{CD} = \overline{BD} = a \text{ cm라 하면}$$

(색칠한 부분의 넓이)

$$\begin{aligned}&= \pi \left(\frac{10+a}{2} \right)^2 - \pi \left(\frac{10-a}{2} \right)^2 \\ &= \pi \left(\frac{10+a}{2} + \frac{10-a}{2} \right) \left(\frac{10+a}{2} - \frac{10-a}{2} \right) \\ &= \pi \times 10 \times a = 10a\pi \text{ (cm}^2\text{)}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } 10a\pi = 35\pi \text{이므로 } a = \frac{7}{2}$$

따라서 $\overline{CD}$ 의 길이는 $\frac{7}{2}$ cm이다.



5 $12x^2+20xy+ky^2=(6x+ay)(2x+by)$ 에서
 $12x^2+20xy+ky^2=12x^2+(2a+6b)xy+aby^2$
 즉, $20=2a+6b$, $k=ab$ 이므로

$$a+3b=10, k=ab$$

이때 a, b 는 자연수이므로

$$b=1 \text{ 일 때, } a=7 \quad \therefore k=7 \times 1=7$$

$$b=2 \text{ 일 때, } a=4 \quad \therefore k=4 \times 2=8$$

$$b=3 \text{ 일 때, } a=1 \quad \therefore k=1 \times 3=3$$

따라서 k 의 값 중 가장 큰 수는 8이다.

6 $x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$ 이므로 $2x^2-ax-30$ 이 $x-2$ 와 $x+5$ 를 각각 공통인 인수로 가지는 경우로 나누어 생각한다.

(i) $x-2$ 가 공통인 인수일 때

$$2x^2-ax-30=(x-2)(2x+k) \text{ (} k \text{는 상수)로 놓으면}$$

$$2x^2-ax-30=2x^2+(k-4)x-2k$$

$$\text{즉, } -a=k-4, -30=-2k \text{이므로}$$

$$k=15, a=-11$$

(ii) $x+5$ 가 공통인 인수일 때

$$2x^2-ax-30=(x+5)(2x+l) \text{ (} l \text{는 상수)로 놓으면}$$

$$2x^2-ax-30=2x^2+(l+10)x+5l$$

$$\text{즉, } -a=l+10, -30=5l \text{이므로}$$

$$l=-6, a=-4$$

따라서 (i), (ii)에 의해 모든 a 의 값의 합은

$$-11+(-4)=-15$$

$$\begin{aligned}7 \quad 3^{12}-1 &= (3^6+1)(3^6-1) \\ &= (3^6+1)(3^3+1)(3^3-1) \\ &= 730 \times 28 \times 26 \\ &= 2^4 \times 5 \times 7 \times 13 \times 73\end{aligned}$$

따라서 $3^{12}-1$ 은 두 자연수 $2 \times 13=26$, $2^2 \times 7=28$ 로 나누어 떨어지므로 두 자연수의 합은

$$26+28=54$$

$$\begin{aligned}8 \quad &80 \left(1-\frac{1}{2^2}\right) \left(1-\frac{1}{3^2}\right) \left(1-\frac{1}{4^2}\right) \times \cdots \times \left(1-\frac{1}{20^2}\right) \\ &= 80 \left(1-\frac{1}{2}\right) \left(1+\frac{1}{2}\right) \left(1-\frac{1}{3}\right) \left(1+\frac{1}{3}\right) \left(1-\frac{1}{4}\right) \left(1+\frac{1}{4}\right) \\ &\quad \times \cdots \times \left(1-\frac{1}{19}\right) \left(1+\frac{1}{19}\right) \left(1-\frac{1}{20}\right) \left(1+\frac{1}{20}\right) \\ &= 80 \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \right. \\ &\quad \left. \times \cdots \times \frac{18}{19} \times \frac{20}{19} \times \frac{19}{20} \times \frac{21}{20}\right) \\ &= 80 \times \frac{1}{2} \times \frac{21}{20} = 42\end{aligned}$$

9 $x+y=A$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}(x+y)^2-4(x+y)-21 &= A^2-4A-21 \\ &= (A+3)(A-7) \\ &= (x+y+3)(x+y-7)\end{aligned}$$

이때 x, y 는 자연수이고, $x+y+3 > x+y-7$ 이므로

$(x+y+3)(x+y-7)$ 이 소수가 되려면 $x+y-7=1$ 이어야 한다.

즉, $x+y-7=1$ 에서 $x+y=8$ 이므로

$$(x+y+3)(x+y-7) = (8+3) \times (8-7) = 11$$

따라서 주어진 식의 값은 11이고, 소수이므로 구하는 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는

$$(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1)$$

의 7개이다.

10 $x^2=t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}x^4-2x^2+1 &= t^2-2t+1 = (t-1)^2 \\ &= (x^2-1)^2 = \{(x+1)(x-1)\}^2 \\ &= (x+1)^2(x-1)^2\end{aligned}$$

이때 삼차식인 인수는

$$(x+1)^2(x-1), (x+1)(x-1)^2$$

사차식인 인수는

$$(x+1)^2(x-1)^2$$

$$\begin{aligned}\therefore A &= (x+1)^2(x-1) + (x+1)(x-1)^2 + (x+1)^2(x-1)^2 \\ &= (x+1)(x-1)\{(x+1) + (x-1) + (x+1)(x-1)\} \\ &= (x+1)(x-1)(x^2+2x-1)\end{aligned}$$

따라서 A 의 인수가 아닌 것은 ①, ④이다.

$$\begin{aligned}11 \quad (a-b)^2 &= (a+b)^2-4ab \\ &= 3^2-4 \times 1 = 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\therefore a^2(a-b)+b^2(b-a)-10 \\
 &=a^2(a-b)-b^2(a-b)-10 \\
 &=(a-b)(a^2-b^2)-10 \\
 &=(a-b)^2(a+b)-10 \\
 &=5 \times 3 - 10 = 5
 \end{aligned}$$

- 12** $1+x+y+z+xy+yz+zx+xyz$
 $=x(yz+y+z+1)+(yz+y+z+1)$
 $=(x+1)(yz+y+z+1)$
 $=(x+1)\{y(z+1)+(z+1)\}$
 $=(x+1)(y+1)(z+1)$
 즉, $(x+1)(y+1)(z+1)=70=2 \times 5 \times 7$ 이고,
 $x < y < z$ 이므로
 $x+1=2, y+1=5, z+1=7$
 $\therefore x=1, y=4, z=6$
 $\therefore x+y+z=1+4+6=11$

3 최고 유형 정복하기

62~64쪽

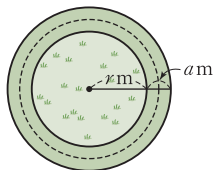
- 01** 3개 **02** $al \text{ m}^2$ **03** $\frac{23}{5}$ **04** 8개
05 $(xy-x-y+1)^2$ **06** $\frac{5}{36}$ **07** $\neg, \sqsubset$
08 -1 **09** $-20\sqrt{2}$ **10** 30 **11** 50
12 10

- 01** $8n^3-2n=2n(4n^2-1)=(2n-1) \times 2n \times (2n+1)$
 이므로 $8n^3-2n$ 은 연속하는 세 자연수 $2n-1, 2n, 2n+1$ 의 곱이다.
 $n=2$ 일 때, $3 \times 4 \times 5=60$
 $n=3$ 일 때, $5 \times 6 \times 7=210$
 $n=4$ 일 때, $7 \times 8 \times 9=504$
 $n=5$ 일 때, $9 \times 10 \times 11=990$
 $n=6$ 일 때, $11 \times 12 \times 13=1716$
 따라서 구하는 세 자리의 자연수의 개수는 210, 504, 990의 3개이다.

- 02** 잔디밭의 반지름의 길이를 r m라 하면 산책로의 한가운데를 지나는 원의 반지름의 길이는 $(r+\frac{a}{2})$ m
 이므로

$$2\pi \times (r+\frac{a}{2})=l, 2\pi r+\pi a=l \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore (\text{산책로의 넓이}) &= \pi(r+a)^2 - \pi r^2 = \pi\{(r+a)^2 - r^2\} \\
 &= \pi(r+a+r)(r+a-r) \\
 &= \pi(2r+a) \times a \\
 &= (2\pi r + \pi a) \times a \\
 &= al(\text{m}^2) \quad (\because \textcircled{1})
 \end{aligned}$$



03 $x^2+(k-5)x-2(k-3)=(x-2)(x+k-3)$
 $x^2-5kx+4k^2=(x-k)(x-4k)$

(i) $x-2$ 를 공통인 인수로 가질 때
 $x-k=x-2$ 또는 $x-4k=x-2$ 이므로

$$k=2 \text{ 또는 } k=\frac{1}{2}$$

(ii) $x+k-3$ 을 공통인 인수로 가질 때
 $x-k=x+k-3$ 또는 $x-4k=x+k-3$ 이므로

$$k=\frac{3}{2} \text{ 또는 } k=\frac{3}{5}$$

따라서 (i), (ii)에 의해 모든 k 의 값의 합은

$$2+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{5}=\frac{23}{5}$$

- 04** 주어진 다항식이 $(x+a)(x+b)$ 로 인수분해된다고 하면
 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ 에서
 $a+b=-4$ 이고 $-100 \leq ab \leq -1$
 이때 a, b 는 서로 다른 부호이므로 이를 만족시키는 두 정수 a, b 를 순서쌍 (a, b) 로 나타내면
 $(1, -5), (2, -6), (3, -7), (4, -8), (5, -9),$
 $(6, -10), (7, -11), (8, -12)$
 따라서 구하는 다항식의 개수는 8개이다.

- 05** $x+y=A, xy=B$ 로 놓으면
 $(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)$
 $=(B-1)^2+(A-2)(A-2B)$
 $=(B^2-2B+1)+(A^2-2AB-2A+4B)$
 $=B^2-2AB+2B+A^2-2A+1$
 $=B^2-2(A-1)B+(A-1)^2$
 $=(B-A+1)^2$
 $=\{xy-(x+y)+1\}^2$
 $=(xy-x-y+1)^2$

- 06** 모든 경우의 수는 $6 \times 6=36$

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{xy-2x-3y+6} \\
 &= \sqrt{x(y-2)-3(y-2)} \\
 &= \sqrt{(x-3)(y-2)}
 \end{aligned}$$

이므로 이 식이 자연수가 되려면 근호 안의 수가 (자연수)² 꼴이어야 한다.

이때 $1 \leq x \leq 6, 1 \leq y \leq 6$ 이므로 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 다음과 같다.

(i) $(x-3)(y-2)=1$ 일 때,
 (x, y) 는 $(2, 1), (4, 3)$

(ii) $(x-3)(y-2)=4$ 일 때,
 (x, y) 는 $(4, 6), (5, 4)$

(iii) $(x-3)(y-2)=9$ 일 때,
 (x, y) 는 $(6, 5)$

(i)~(iii)에 의해 주어진 식의 값이 자연수가 되는 경우의 수는 $2+2+1=5$

따라서 구하는 확률은 $\frac{5}{36}$

07 $a < b < c$ 이고, $ab < 0$ 이므로 $a < 0 < b < c$

$$\neg, ab - ac - bc + c^2$$

$$= a(b - c) - c(b - c)$$

$$= (a - c)(b - c) > 0$$

$$\neg, a^2 - ab - ac + bc$$

$$= a(a - b) - c(a - b)$$

$$= (a - b)(a - c) > 0$$

$$\neg, a^3c - a^2bc + ab^2c + ac^3 - b^3c - bc^3$$

$$= a^3c - a^2bc + ab^2c - b^3c + ac^3 - bc^3$$

$$= a^2c(a - b) + b^2c(a - b) + c^3(a - b)$$

$$= c(a - b)(a^2 + b^2 + c^2) < 0$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

$$\begin{aligned} 08 \quad & \frac{a^2}{(a-b)(c-a)} + \frac{b^2}{(b-c)(a-b)} + \frac{c^2}{(c-a)(b-c)} \\ &= \frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \end{aligned}$$

이때 분자를 a 에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$(b-c)a^2 - (b^2 - c^2)a + b^2c - bc^2$$

$$= (b-c)a^2 - (b-c)(b+c)a + bc(b-c)$$

$$= (b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\}$$

$$= (b-c)(a-b)(a-c)$$

$$= -(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\therefore \frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= -1$$

$$09 \quad \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = 6^2 - 4 = 32$$

이때 $0 < x < 1$ 에서 $\frac{1}{x} > 1$ 이므로

$$0 < x < \frac{1}{x}$$

즉, $x - \frac{1}{x} < 0$ 이므로

$$x - \frac{1}{x} = -\sqrt{32} = -4\sqrt{2}$$

$$\therefore x^2 - x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = x^2 - \frac{1}{x^2} - x + \frac{1}{x}$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) - \left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x} - 1\right)$$

$$= -4\sqrt{2} \times (6 - 1)$$

$$= -20\sqrt{2}$$

10 $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ 이므로 x, y, a, b 의 값은 순서에 관계없이 1, 2, 3, 4이다.

$$y^2 + 2ya + a^2 + xy + ab + yb + xa + xb$$

$$= (y+a)^2 + x(y+a) + b(y+a) + xb$$

$$= (y+a)^2 + (x+b)(y+a) + xb$$

$$= (y+a+x)(y+a+b)$$

이때 $x+y+a+b=10$ 이므로

$$y+a+x=10-b, y+a+b=10-x$$

$$\therefore (y+a+x)(y+a+b) = (10-b)(10-x)$$

즉, 주어진 식의 값 중

가장 큰 값은 $b=1, x=2$ 또는 $b=2, x=1$ 일 때이므로

$$(10-1)(10-2) = 9 \times 8 = 72$$

가장 작은 값은 $b=3, x=4$ 또는 $b=4, x=3$ 일 때이므로

$$(10-3)(10-4) = 7 \times 6 = 42$$

따라서 구하는 두 값의 차는

$$72 - 42 = 30$$

$$11 \quad x^2 + xy + y^2 = 5 \text{에서 } (x+y)^2 = 5 + xy$$

$$\therefore x^4 + y^4 + (x+y)^4$$

$$= x^4 + y^4 + (5 + xy)^2$$

$$= x^4 + y^4 + x^2y^2 + 10xy + 25$$

$$= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - x^2y^2 + 10xy + 25$$

$$= (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 + 10xy + 25$$

$$= (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) + 10xy + 25$$

$$= 5(x^2 - xy + y^2) + 10xy + 25$$

$$= 5(x^2 - xy + y^2 + 2xy) + 25$$

$$= 5(x^2 + xy + y^2) + 25$$

$$= 5 \times 5 + 25 = 50$$

$$12 \quad p+q+pq=11 \text{에서 양변에 } 1 \text{을 더하면}$$

$$pq+p+q+1=12$$

$$\therefore (p+1)(q+1)=12 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$q+r+qr=23 \text{에서 양변에 } 1 \text{을 더하면}$$

$$qr+q+r+1=24$$

$$\therefore (q+1)(r+1)=24 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$$r+p+rp=17 \text{에서 양변에 } 1 \text{을 더하면}$$

$$rp+r+p+1=18$$

$$\therefore (r+1)(p+1)=18 \quad \dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠} \times \textcircled{㉡} \times \textcircled{㉢} \text{을 하면}$$

$$\{(p+1)(q+1)(r+1)\}^2$$

$$= 12 \times 24 \times 18$$

$$= 2^2 \times 3 \times 2^3 \times 3 \times 2 \times 3^2$$

$$= 2^6 \times 3^4$$

이때 $p > 0, q > 0, r > 0$ 이므로

$$(p+1)(q+1)(r+1) = 2^3 \times 3^2$$

$$= 72 \quad \dots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서

$$r+1 = \frac{72}{12} = 6 \quad \therefore r=5$$

$\textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서

$$p+1 = \frac{72}{24} = 3 \quad \therefore p=2$$

$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣}$ 에서

$$q+1 = \frac{72}{18} = 4 \quad \therefore q=3$$

$$\therefore p+q+r=2+3+5=10$$

대답원 마무리하기

65~68쪽

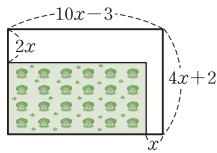
- 01 ④ 02 24 03 -1 04 4
 05 $(3\sqrt{2}-3)$ cm 06 47 07 ⑤
 08 ① 09 ② 10 395 11 -5
 12 ② 13 $\sqrt{3}-2$ 14 ③
 15 $A=48, B=42$
 16 $a^2-b^2+c^2-d^2+2ac-2bd$ 17 105
 18 2개 19 ③ 20 0 21 $\frac{93}{100}$

서술형 문제 (과정은 풀이 참조)

- 22 6개 23 $\frac{43}{3}$ 24 $(2x+1)(x-3)$
 25 $k=x^2+3x+1$

- 01 a 를 6으로 나눈 몫을 p , b 를 9로 나눈 몫을 q 라 하면
 $a=6p+2$, $b=9q+8$ 이므로
 $ab=(6p+2)(9q+8)$
 $=54pq+48p+18q+16$
 $=6(9pq+8p+3q+2)+4$
 따라서 ab 를 6으로 나눈 나머지는 4이다.

- 02 오른쪽 그림에서 발의 넓이는
 $(10x-3-x)(4x+2-2x)$
 $= (9x-3)(2x+2)$
 $= 18x^2+12x-6$
 따라서 $a=18$, $b=12$, $c=-6$ 이므로
 $a+b+c=18+12+(-6)=24$



- 03
$$\frac{3720}{3726^2-3724 \times 3729}$$

$$= \frac{3720}{3726^2-(3726-2)(3726+3)}$$

$$= \frac{3720}{3726^2-(3726^2+3726-6)}$$

$$= \frac{3720}{3726^2-3726^2-3726+6}$$

$$= \frac{3720}{-3720} = -1$$

- 04 $1 < \sqrt{3} < 2$ 에서
 $-2 < -\sqrt{3} < -1$ 이므로 $2 < 4-\sqrt{3} < 3$
 $\therefore a=2$, $b=(4-\sqrt{3})-2=2-\sqrt{3}$
 $\therefore \frac{1}{b} + \frac{1}{2a-b} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2 \times 2 - (2-\sqrt{3})}$

$$= \frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} + \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$

$$= 2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$$

- 05 두 정삼각형의 넓이의 비가 1:2이므로 둘레의 길이의 비는 $1:\sqrt{2}$ 이다.

이때 작은 정삼각형의 둘레의 길이는

$$9 \times \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{9(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 9\sqrt{2}-9 \text{ (cm)}$$

따라서 작은 정삼각형의 한 변의 길이는

$$\frac{1}{3} \times (9\sqrt{2}-9) = 3\sqrt{2}-3 \text{ (cm)}$$

- 06 $x \neq 0$ 이므로 $x^2+7x+1=0$ 의 양변을 x 로 나누면

$$x+7+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=-7$$

$$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=(-7)^2-2=47$$

- 07 $0 < a < \frac{1}{2}$ 이므로 $a+\frac{1}{2} > 0$, $a-\frac{1}{2} < 0$

$$\begin{aligned} \therefore & \sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+2a}-\sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2-2a} \\ &= \sqrt{a^2-a+\frac{1}{4}+2a}-\sqrt{a^2+a+\frac{1}{4}-2a} \\ &= \sqrt{a^2+a+\frac{1}{4}}-\sqrt{a^2-a+\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\left(a+\frac{1}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \left(a+\frac{1}{2}\right)+\left(a-\frac{1}{2}\right)=2a \end{aligned}$$

- 08 $-4ax^2+bx+30=k(x+2)(4x-5)$ (k 는 상수)로 놓으면
 $-4ax^2+bx+30=k(4x^2+3x-10)$
 $=4kx^2+3kx-10k$

$$\text{즉, } -4a=4k, b=3k, 30=-10k \text{이므로}$$

$$k=-3, a=3, b=-9$$

$$\therefore a+b=3+(-9)=-6$$

- 09 꽃밭의 가로 길이를 $2x+a$ (a 는 상수)로 놓으면

$$2x^2-\frac{1}{6}x+A=(2x+a)\left(x-\frac{1}{3}\right)=2x^2+\left(a-\frac{2}{3}\right)x-\frac{a}{3}$$

$$\text{즉, } a-\frac{2}{3}=-\frac{1}{6} \text{이므로 } a=\frac{1}{2}$$

따라서 가로의 길이가 $2x+\frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} (\text{울타리의 길이}) &= \left(2x+\frac{1}{2}\right)+\left(x-\frac{1}{3}\right) \times 2 \\ &= 2x+\frac{1}{2}+2x-\frac{2}{3}=4x-\frac{1}{6} \end{aligned}$$

- 10 $20=t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} & \sqrt{17 \times 19 \times 21 \times 23+16} \\ &= \sqrt{(t-3)(t-1)(t+1)(t+3)+16} \\ &= \sqrt{(t^2-1)(t^2-9)+16} \\ &= \sqrt{t^4-10t^2+9+16} \\ &= \sqrt{t^4-10t^2+25} \\ &= \sqrt{(t^2-5)^2} \\ &= t^2-5 \quad (\because t^2-5 > 0) \\ &= 20^2-5=395 \end{aligned}$$

11 $3x-2=A$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} 3(3x-2)^2 - (3x-2) - 2 &= 3A^2 - A - 2 \\ &= (A-1)(3A+2) \\ &= (3x-3)(9x-4) \\ &= 3(x-1)(9x-4) \end{aligned}$$

따라서 $a=-1$, $b=-4$ 이므로
 $a+b=-1+(-4)=-5$

12 ㄱ. $2x^2-y^2-xy-x+y$

$$\begin{aligned} &= 2x^2 - (y+1)x - y(y-1) \\ &= (x-y)(2x+y-1) \end{aligned}$$

ㄴ. $x^2+2x+2y-y^2$

$$\begin{aligned} &= x^2 - y^2 + 2(x+y) \\ &= (x+y)(x-y) + 2(x+y) \\ &= (x+y)(x-y+2) \end{aligned}$$

ㄷ. $x-y=A$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} &(x-y)(x-y-4)+3 \\ &= A(A-4)+3 \\ &= A^2-4A+3 \\ &= (A-1)(A-3) \\ &= (x-y-1)(x-y-3) \end{aligned}$$

ㄹ. $xy^2+2x^2z-x^2y-2y^2z$

$$\begin{aligned} &= xy(y-x) + 2z(x^2-y^2) \\ &= -xy(x-y) + 2z(x+y)(x-y) \\ &= (x-y)\{-xy+2z(x+y)\} \\ &= (x-y)(-xy+2xz+2yz) \\ &= -(x-y)(xy-2xz-2yz) \end{aligned}$$

따라서 $x-y$ 를 인수로 갖는 다항식은 ㄱ, ㄴ이다.

13 $1 < \sqrt{3} < 2$ 에서 $3 < \sqrt{3}+2 < 4$ 이므로

$$\begin{aligned} x &= (\sqrt{3}+2) - 3 = \sqrt{3} - 1 \\ \therefore \frac{x^3-5x^2-x+5}{x^2-4x-5} &= \frac{x^2(x-5)-(x-5)}{(x+1)(x-5)} \\ &= \frac{(x^2-1)(x-5)}{(x+1)(x-5)} \\ &= \frac{(x+1)(x-1)(x-5)}{(x+1)(x-5)} \\ &= x-1 \\ &= (\sqrt{3}-1)-1 \\ &= \sqrt{3}-2 \end{aligned}$$

14 $x = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} x+y &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ x-y &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2}-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^2-y^2+4x-2y+3 &= x^2+4x-(y^2+2y-3) \\ &= x^2+4x-(y-1)(y+3) \\ &= (x-y+1)(x+y+3) \\ &= (\sqrt{2}-1+1)(\sqrt{3}+3) \\ &= \sqrt{6}+3\sqrt{2} \end{aligned}$$

15 0 또는 한 자리의 자연수 a, b 에 대하여

$A=40+a$, $B=40+b$ 라 하면

$C=10a+4$, $D=10b+4$ 이고,

$AB=CD$ 이므로

$$(40+a)(40+b) = (10a+4)(10b+4)$$

즉, $1600+40(a+b)+ab=100ab+40(a+b)+16$

따라서 $ab=16$ 이고, $a>b$ 이므로 $a=8$, $b=2$

$$\therefore A=48, B=42$$

16 $(a+b+c+d)(a-b+c-d)$

$$= \{(a+c)+(b+d)\} \{(a+c)-(b+d)\}$$

이때 $a+c=A$, $b+d=B$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} (A+B)(A-B) &= A^2-B^2 \\ &= (a+c)^2 - (b+d)^2 \\ &= a^2-b^2+c^2-d^2+2ac-2bd \end{aligned}$$

17 $(a+1)(b+1)(a-1)(b-1)$

$$= (a+1)(a-1)(b+1)(b-1)$$

$$= (a^2-1)(b^2-1)$$

$$= a^2b^2 - (a^2+b^2) + 1$$

$$= 12^2 - (a^2+b^2) + 1$$

$$= 145 - (a^2+b^2) \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=8^2-2 \times 12=40$ 이므로

이를 ①에 대입하면

$$145-40=105$$

18 $\sqrt{4b^2+77}=a$ 의 양변을 제곱하면 $4b^2+77=a^2$

$$a^2-4b^2=77 \quad \therefore (a+2b)(a-2b)=77$$

이때 $77=1 \times 77=7 \times 11$ 이고, $a+2b>a-2b$ 이므로

$$\begin{cases} a+2b=77 \\ a-2b=1 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} a+2b=11 \\ a-2b=7 \end{cases}$$

위의 두 연립방정식의 해를 순서쌍 (a, b) 로 각각 나타내면
 $(39, 19)$, $(9, 1)$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 2개이다.

19 $16a^2-24a+9=(4a-3)^2$ 이므로 이 정사각형의 한 변의 길이는 $4a-3$ 또는 $-4a+3$ 이다.

이때 정사각형의 둘레의 길이가 100이므로

$$(i) 4(4a-3)=100, 4a=28 \quad \therefore a=7$$

$$(ii) 4(-4a+3)=100, -4a=22 \quad \therefore a=-\frac{11}{2}$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=7$

$$\begin{aligned}
 20 \quad & a^{2019} - a^{2020} - a^{2021} + a^{2022} - a^{2023} - a^{2024} + a^{2025} - a^{2026} - a^{2027} \\
 &= -a^{2019}(-1+a+a^2-a^3+a^4+a^5-a^6+a^7+a^8) \\
 &= -a^{2019}\{(-1+a+a^2)+a^3(-1+a+a^2) \\
 &\quad +a^6(-1+a+a^2)\} \\
 &= -a^{2019}(-1+a+a^2)(1+a^3+a^6) \\
 &= 0 \quad (\because a^2+a-1=0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21 \quad & f(x) = \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+2x^2} = \frac{x^2(x+2)-(x+2)}{x^2(x+2)} \\
 &= \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} \\
 \therefore & f(10) \times f(11) \times f(12) \times \cdots \times f(30) \\
 &= \frac{9 \times 11}{10 \times 10} \times \frac{10 \times 12}{11 \times 11} \times \frac{11 \times 13}{12 \times 12} \\
 &\quad \times \cdots \times \frac{28 \times 30}{29 \times 29} \times \frac{29 \times 31}{30 \times 30} \\
 &= \frac{9}{10} \times \frac{31}{30} = \frac{93}{100}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 22 \quad & a + \sqrt{b} + \frac{1}{a + \sqrt{b}} = a + \sqrt{b} + \frac{a - \sqrt{b}}{(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})} \\
 &= a + \sqrt{b} + \frac{a - \sqrt{b}}{a^2 - b} \\
 &= \left(a + \frac{a}{a^2 - b}\right) + \left(1 - \frac{1}{a^2 - b}\right)\sqrt{b} \quad \cdots \text{㉠}
 \end{aligned}$$

이 식이 유리수가 되려면 $1 - \frac{1}{a^2 - b} = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{1}{a^2 - b} = 1 \quad \therefore b = a^2 - 1 \quad \cdots \text{㉡}$$

따라서 이를 만족시키는 50 이하의 두 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 은 $(2, 3), (3, 8), (4, 15), (5, 24), (6, 35), (7, 48)$ 의 6개이다. $\cdots \text{㉢}$

채점 요소	비율
㉠ 주어진 조건을 식으로 나타내기	30 %
㉡ 유리수가 되는 조건 구하기	30 %
㉢ 순서쌍 (a, b) 의 개수 구하기	40 %

$$\begin{aligned}
 23 \quad & (3x-1)(3y-1)=7 \text{에서} \\
 & 9xy-3(x+y)-6=0, \quad 3xy-(x+y)-2=0 \quad \cdots \text{㉠} \\
 & \text{이때 } xy=3 \text{이므로 } 9-(x+y)-2=0 \\
 & \therefore x+y=7 \quad \cdots \text{㉡} \\
 \therefore & \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy} \\
 &= \frac{(x+y)^2-2xy}{xy} \\
 &= \frac{7^2-2 \times 3}{3} = \frac{43}{3} \quad \cdots \text{㉢}
 \end{aligned}$$

채점 요소	비율
㉠ 주어진 식을 전개하여 간단히 나타내기	30 %
㉡ $x+y$ 의 값 구하기	35 %
㉢ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 의 값 구하기	35 %

$$\begin{aligned}
 24 \quad & \text{윤이는 } x \text{의 계수와 상수항을 제대로 보았으므로} \\
 & (x-1)(8x+3)=8x^2-5x-3 \text{에서} \\
 & \text{처음 이차식의 } x \text{의 계수는 } -5, \text{ 상수항은 } -3 \text{이다.} \quad \cdots \text{㉠} \\
 & \text{도희는 } x^2 \text{의 계수와 } x \text{의 계수를 제대로 보았으므로} \\
 & (2x+5)(x-5)=2x^2-5x-25 \text{에서} \\
 & \text{처음 이차식의 } x^2 \text{의 계수는 } 2, x \text{의 계수는 } -5 \text{이다.} \quad \cdots \text{㉡} \\
 & \text{따라서 처음 이차식은 } 2x^2-5x-3 \text{이므로 바르게 인수분해} \\
 & \text{하면} \\
 & 2x^2-5x-3=(2x+1)(x-3) \quad \cdots \text{㉢}
 \end{aligned}$$

채점 요소	비율
㉠ 처음 이차식의 x 의 계수와 상수항 구하기	30 %
㉡ 처음 이차식의 x^2 의 계수 구하기	30 %
㉢ 처음 이차식을 바르게 인수분해하기	40 %

$$\begin{aligned}
 25 \quad & \text{연속하는 네 자연수 중에 가장 작은 수가 } x \text{이므로} \\
 & x(x+1)(x+2)(x+3)+1=k^2 \quad \cdots \text{㉠} \\
 & \text{이때} \\
 & x(x+1)(x+2)(x+3)+1 \\
 &= \{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1 \\
 &= (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 \\
 & x^2+3x=A \text{로 놓으면} \\
 & A(A+2)+1=A^2+2A+1 \\
 &= (A+1)^2 \\
 &= (x^2+3x+1)^2 \quad \cdots \text{㉡} \\
 & \text{따라서 } k^2=(x^2+3x+1)^2 \text{이고, } k \text{는 자연수이므로} \\
 & k=x^2+3x+1 \quad \cdots \text{㉢}
 \end{aligned}$$

채점 요소	비율
㉠ 연속하는 네 자연수의 곱을 x 를 사용하여 나타내기	30 %
㉡ ㉠의 좌변을 인수분해하기	40 %
㉢ k 를 x 를 사용한 식으로 나타내기	30 %

Ⅲ. 이차방정식

1 이차방정식의 풀이

1 주제별 유형 불러오기

71~77쪽

유제 1	④	유제 2	2	유제 3	④	유제 4	12
유제 5	⑤	유제 6	(1) 5 (2) $x=26$	유제 7	③		
유제 8	-12	유제 9	①	유제 10	6	유제 11	②
유제 12	-138	유제 13	⑤	유제 14	$x=\frac{7}{2}, y=\frac{1}{2}$		

유제 1 $x=\frac{1}{2}$ 이 두 이차방정식의 공통인 근이므로

$$2x^2-5x-a=0 \text{에 } x=\frac{1}{2} \text{을 대입하면}$$

$$2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \times \frac{1}{2} - a = 0$$

$$-2-a=0 \quad \therefore a=-2$$

$$4x^2+bx+5=0 \text{에 } x=\frac{1}{2} \text{을 대입하면}$$

$$4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + b \times \frac{1}{2} + 5 = 0$$

$$\frac{b}{2} + 6 = 0, \frac{b}{2} = -6 \quad \therefore b = -12$$

$$\therefore a+b = -2 + (-12) = -14$$

유제 2 $3x^2+(a+1)x-4a+3=0$ 에 $x=-1$ 을 대입하면

$$3 \times (-1)^2 + (a+1) \times (-1) - 4a + 3 = 0$$

$$-5a+5=0, 5a=5 \quad \therefore a=1$$

$$2x^2+4x-3k=0 \text{에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$2+4-3k=0, -3k=-6 \quad \therefore k=2$$

유제 3 $2x^2-x-2=0$ 에 $x=a$ 를 대입하면

$$2a^2-a-2=0$$

$a \neq 0$ 이므로 양변을 a 로 나누면

$$2a-1-\frac{2}{a}=0, 2\left(a-\frac{1}{a}\right)=1 \quad \therefore a-\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = \left(a-\frac{1}{a}\right)^2 + 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 = \frac{17}{4}$$

$$\therefore a+\frac{1}{a} = \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$

유제 4 $2x^2-x-5=0$ 에 $x=a$ 를 대입하면

$$2a^2-a-5=0 \quad \therefore 2a^2-a=5$$

$$x^2-2x-3=0 \text{에 } x=\beta \text{를 대입하면}$$

$$\beta^2-2\beta-3=0 \quad \therefore \beta^2-2\beta=3$$

$$\therefore 2a^2+2\beta^2-a-4\beta+1$$

$$= 2a^2-a+2(\beta^2-2\beta)+1$$

$$= 5+2 \times 3+1=12$$

유제 5 $3x^2-x-2=0$ 에서 $(3x+2)(x-1)=0$

$$\therefore x = -\frac{2}{3} \text{ 또는 } x=1$$

따라서 $2x^2+3x-a=0$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$2+3-a=0 \quad \therefore a=5$$

유제 6 (1) $x^2-a^2x-(4a+6)=0$ 에 $x=-1$ 을 대입하면

$$(-1)^2-a^2 \times (-1)-(4a+6)=0$$

$$1+a^2-4a-6=0, a^2-4a-5=0$$

$$(a+1)(a-5)=0 \quad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=5$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=5$

(2) 주어진 방정식에 $a=5$ 를 대입하면

$$x^2-25x-26=0 \text{에서 } (x+1)(x-26)=0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x=26$$

따라서 다른 한 근은 $x=26$ 이다.

유제 7 $x^2-ax-2a=0$ 이 중근을 가지므로

$$-2a = \left(\frac{-a}{2}\right)^2, a^2+8a=0$$

$$a(a+8)=0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } a=-8$$

$$(i) a=0 \text{일 때, } x^2=0 \quad \therefore x=0$$

$$(ii) a=-8 \text{일 때, } x^2+8x+16=0$$

$$(x+4)^2=0 \quad \therefore x=-4$$

따라서 (i), (ii)에 의해 $a=-8, x=-4$ 이다.

$$\therefore a-m = -8 - (-4) = -4$$

유제 8 $3x^2+12x+k^2+k=0$ 의 양변을 3으로 나누면

$$x^2+4x+\frac{k^2+k}{3}=0 \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 $\textcircled{1}$ 이 중근을 가지므로

$$\frac{k^2+k}{3} = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4 \text{에서 } k^2+k=12$$

$$k^2+k-12=0, (k+4)(k-3)=0$$

$$\therefore k = -4 \text{ 또는 } k=3$$

따라서 모든 k 의 값의 곱은

$$(-4) \times 3 = -12$$

유제 9 $\frac{1}{2}x^2-3x-6=0$ 의 양변에 2를 곱하면

$$x^2-6x-12=0, x^2-6x=12$$

$$x^2-6x+(-3)^2=12+(-3)^2$$

$$\therefore (x-3)^2=21$$

따라서 $a=3, b=21$ 이므로

$$a-b = 3-21 = -18$$

유제 10 $3x^2-12x=a$ 의 양변을 3으로 나누면

$$x^2-4x=\frac{a}{3}, x^2-4x+(-2)^2=\frac{a}{3}+(-2)^2$$

$$(x-2)^2=\frac{a+12}{3}, x-2=\pm\sqrt{\frac{a+12}{3}}$$

$$\therefore x=2\pm\sqrt{\frac{a+12}{3}}$$

$$\text{즉, } \frac{a+12}{3}=6 \text{이므로 } a+12=18 \quad \therefore a=6$$

유제 11 $5x^2-4x+p=0$ 에서 x 의 계수가 짝수이므로

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 5p}}{5} = \frac{2 \pm \sqrt{4-5p}}{5}$$

$$\text{즉, } \frac{2 \pm \sqrt{4-5p}}{5} = \frac{q \pm 2\sqrt{6}}{5} \text{이므로}$$

$$q=2, 4-5p=24 \quad \therefore p=-4, q=2$$

$$\therefore \frac{q}{p} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

유제 12 $x^2-6x+3k=0$ 이 중근을 가지므로

$$3k = \left(\frac{-6}{2}\right)^2 = 9 \quad \therefore k=3$$

$$(1-k)x^2-22x+3=0 \text{에 } k=3 \text{을 대입하면}$$

$$-2x^2-22x+3=0$$

$$\text{즉, } 2x^2+22x-3=0 \text{에서 } x \text{의 계수가 짝수이므로}$$

$$\therefore x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 2 \times (-3)}}{2} = \frac{-11 \pm \sqrt{127}}{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{-11 \pm \sqrt{127}}{2} = \frac{A \pm \sqrt{B}}{2} \text{이므로}$$

$$A=-11, B=127$$

$$\therefore A-B=-11-127=-138$$

유제 13 주어진 이차방정식의 양변에 10을 곱하면

$$(x-2)^2+3=2(2x-1)(x-1)+5x$$

$$x^2-4x+7=2(2x^2-3x+1)+5x$$

$$x^2-4x+7=4x^2-x+2$$

$$3x^2+3x-5=0$$

$$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4 \times 3 \times (-5)}}{2 \times 3} = \frac{-3 \pm \sqrt{69}}{6}$$

$$\text{따라서 } p=-3, q=69 \text{이므로}$$

$$p+q=-3+69=66$$

유제 14 (나)에서 $x-y=A$ 로 놓으면

$$2A^2-5A-3=0, (2A+1)(A-3)=0$$

$$\therefore A=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } A=3$$

$$\text{즉, } x-y=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } x-y=3$$

(가)에서 $x>y$, 즉 $x-y>0$ 이므로 $x-y=3 \quad \dots \textcircled{1}$

(다)에서 $x+y=4$ 이므로 $\textcircled{1}$ 과 연립하여 풀면

$$x=\frac{7}{2}, y=\frac{1}{2}$$

2 최고 유형 탐험하기

78~80쪽

- | | | | |
|-----|------|------|--------|
| 1 ② | 2 ① | 3 ② | 4 ② |
| 5 ⑤ | 6 ③ | 7 ③ | 8 ②, ③ |
| 9 ④ | 10 ② | 11 ② | 12 ③ |

1 $x^2+ax=5x+b$ 에 $x=-1$ 을 대입하면

$$(-1)^2+a \times (-1)=5 \times (-1)+b$$

$$1-a=-5+b \quad \therefore a+b=6$$

$$2x^2-abx-6=0 \text{에 } x=3 \text{을 대입하면}$$

$$2 \times 3^2-ab \times 3-6=0$$

$$-3ab=-12 \quad \therefore ab=4$$

$$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=6^2-2 \times 4=28$$

2 $kx^2+(a-3)x-2kb=0$ 에 $x=-2$ 를 대입하면

$$k \times (-2)^2+(a-3) \times (-2)-2kb=0$$

$$4k-2a+6-2kb=0, 2k-a+3-kb=0$$

$$\therefore (2-b)k-(a-3)=0$$

이 식이 k 에 대한 항등식이므로

$$2-b=0, a-3=0 \quad \therefore a=3, b=2$$

$$\therefore a+b=3+2=5$$

3 $x^2-x+1=0$ 에 $x=a$ 를 대입하면

$$a^2-a+1=0$$

$$a \neq 0 \text{이므로 양변을 } a \text{로 나누면}$$

$$a-1+\frac{1}{a}=0 \quad \therefore a+\frac{1}{a}=1$$

$$\therefore a^2-3a-\frac{3}{a}+\frac{1}{a^2}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-3\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$$=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2-3\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$$=1^2-2-3 \times 1=-4$$

4 주어진 이차방정식의 x^2 의 계수와 상수항을 바꾼 식은

$$-(a-1)x^2-(a^2-3a+4)x+(a+1)=0 \text{이므로}$$

이 이차방정식에 $x=1$ 을 대입하면

$$-(a-1)-(a^2-3a+4)+(a+1)=0$$

$$-a+1-a^2+3a-4+a+1=0$$

$$a^2-3a+2=0, (a-1)(a-2)=0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=2$$

이때 $a-1 \neq 0$ 이므로 $a \neq 1 \quad \therefore a=2$

따라서 처음 이차방정식에 $a=2$ 를 대입하면

$$3x^2-2x-1=0, (3x+1)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } x=1$$

5 두 근이 모두 정수이려면 주어진 이차방정식의 좌변이 인수 분해되어야 하므로 곱이 -12가 되는 두 정수를 순서쌍으로 나타내면 $(-12, 1), (-6, 2), (-4, 3), (-3, 4), (-2, 6), (-1, 12)$

따라서 a 의 값이 될 수 있는 수는 -11, -4, -1, 1, 4, 11의 6개이다.

6 $x^2-2kx+k+6=0$ 이 중근을 가지므로 $k+6=\left(\frac{-2k}{2}\right)^2$

$$k^2-k-6=0, (k+2)(k-3)=0$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=3$$

즉, $x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 $-2, 3$ 이므로

$$4-2a+b=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$9+3a+b=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1, b=-6$

7 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

$x^2-2ax+b^2=0$ 이 중근을 가지려면

$$b^2 = \left(\frac{-2a}{2}\right)^2 = a^2 \quad \therefore a=b \quad (\because a, b \text{는 자연수})$$

즉, $a=b$ 를 만족시키는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ 의 6가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

8 $x^2+2ax-3(2a+3)=0$ 에서 $(x+2a+3)(x-3)=0$

$$\therefore x = -2a-3 \text{ 또는 } x=3$$

$$x^2+(a-5)x-5a=0 \text{에서 } (x+a)(x-5)=0$$

$$\therefore x = -a \text{ 또는 } x=5$$

두 이차방정식이 공통인 근을 가지므로

(i) 공통인 근이 $x=3$ 일 때

$$-a=3 \quad \therefore a=-3$$

(ii) 공통인 근이 $x=5$ 일 때

$$-2a-3=5, -2a=8 \quad \therefore a=-4$$

(iii) 공통인 근이 $x=-a$ 또는 $x=-2a-3$ 일 때

$$-2a-3=-a \quad \therefore a=-3$$

따라서 (i)~(iii)에 의해 구하는 a 의 값은 -3 또는 -4 이다.

9 $9(x-2)^2=a^2$ 에 $x=-2$ 를 대입하면

$$9 \times (-2-2)^2 = a^2, a^2=144 \quad \therefore a=\pm 12$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=12$

$$\text{즉, } 9(x-2)^2=144 \text{이므로}$$

$$(x-2)^2=16, x-2=\pm 4$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x=6$$

따라서 $m=6$ 이므로

$$a+m=12+6=18$$

10 $2x^2-x-2=0$ 에서

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\text{이때 } 4 < \sqrt{17} < 5 \text{이므로 } \frac{5}{4} < \frac{1+\sqrt{17}}{4} < \frac{3}{2},$$

$$-5 < -\sqrt{17} < -4 \text{이므로 } -1 < \frac{1-\sqrt{17}}{4} < -\frac{3}{4}$$

따라서 $\frac{1-\sqrt{17}}{4}$ 과 $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ 사이에 있는 정수는 0, 1의 2개이다.

11 $6x^2+4x-3=0$ 에서 x 의 계수가 짝수이므로

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 6 \times (-3)}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{22}}{6}$$

$$\therefore a = \frac{-2 + \sqrt{22}}{6}$$

이때 $4 < \sqrt{22} < 5$ 이므로 $2 < -2 + \sqrt{22} < 3$

$$\therefore \frac{1}{3} < \frac{-2 + \sqrt{22}}{6} < \frac{1}{2}$$

따라서 $\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$ 이므로 $0 < a < 1$

$$\therefore n=0$$

12 (i) $x \geq 1$ 일 때, $|x-1|=x-1$ 이므로

$$(x-1)^2 + (x-1) + 1 = 3$$

$$x^2 - x - 2 = 0, (x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x=2$

(ii) $x < 1$ 일 때, $|x-1|=-(x-1)$ 이므로

$$(x-1)^2 - (x-1) + 1 = 3$$

$$x^2 - 3x = 0, x(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $x=0$

따라서 (i), (ii)에 의해 두 근은 $x=0$ 또는 $x=2$ 이므로 그 합은 2이다.

3 최고 유형 정복하기

81~83쪽

01 $(3, 1, 10), (11, 1, 2)$

02 $\frac{1}{2}$

03 $x = -\frac{1}{3}$ 또는 $x=0$

04 $-1, 6$

05 $-\frac{1}{5}$

06 $\frac{5}{3}$

07 $-\frac{1}{2}$

08 $\frac{3}{2}$

09 4

10 2, 4

11 4개

01 $xy+yz=13$, 즉 $y(x+z)=13$ 에서

x, y, z 는 자연수이므로

$$y=1, x+z=13 \text{ 또는 } y=13, x+z=1$$

그런데 x, y, z 가 모두 자연수이므로

$$y=1, x+z=13$$

이때 $xy+xz=33$ 에 $y=1$ 을 대입하면

$$x+xz=33$$

이 식에 $z=13-x$ 를 대입하면

$$x+x(13-x)=33, x^2-14x+33=0$$

$$(x-3)(x-11)=0 \quad \therefore x=3 \text{ 또는 } x=11$$

따라서 $x=3$ 일 때 $z=10$ 이고, $x=11$ 일 때 $z=2$ 이므로

주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z) 는

$(3, 1, 10), (11, 1, 2)$ 이다.

- 02 직선 $\frac{1}{2}mx - 3y + 1 = 0$ 이 점 $(m-3, \frac{m^2}{2})$ 을 지나므로

$$\frac{1}{2}m(m-3) - 3 \times \frac{m^2}{2} + 1 = 0$$

위의 식의 양변에 2를 곱하면

$$m(m-3) - 3m^2 + 2 = 0$$

$$2m^2 + 3m - 2 = 0, (2m-1)(m+2) = 0$$

$$\therefore m = \frac{1}{2} \text{ 또는 } m = -2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{2}mx - 3y + 1 = 0 \text{에서 } y = \frac{1}{6}mx + \frac{1}{3}$$

이때 이 직선이 제4사분면을 지나지 않으려면

(기울기) > 0 , (y 절편) ≥ 0 이어야 하므로

$$\frac{1}{6}m > 0 \text{에서 } m > 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

따라서 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의해 $m = \frac{1}{2}$

- 03 (i) $-1 < 2x < 0$, 즉 $-\frac{1}{2} < x < 0$ 일 때

$[2x] = -1$ 이므로 주어진 이차방정식은

$$3x^2 = -4x - 1, 3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$(3x+1)(x+1) = 0 \quad \therefore x = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } x = -1$$

그런데 $-\frac{1}{2} < x < 0$ 이므로 이를 만족시키는 해는

$$x = -\frac{1}{3}$$

- (ii) $0 \leq 2x < 1$, 즉 $0 \leq x < \frac{1}{2}$ 일 때

$[2x] = 0$ 이므로 주어진 이차방정식은

$$3x^2 = -4x, 3x^2 + 4x = 0, x(3x+4) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = -\frac{4}{3}$$

그런데 $0 \leq x < \frac{1}{2}$ 이므로 이를 만족시키는 해는

$$x = 0$$

따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 해는

$$x = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 0$$

- 04 주어진 이차방정식이 중근을 가지므로

$$6(a^2 - 5a) = \left(-\frac{a^2 - 5a + 6}{2}\right)^2 \text{에서}$$

$$a^2 - 5a = A \text{로 놓으면}$$

$$6A = \left(-\frac{A+6}{2}\right)^2, A^2 - 12A + 36 = 0$$

$$(A-6)^2 = 0 \quad \therefore A = 6$$

따라서 $a^2 - 5a = 6$ 이므로

$$a^2 - 5a - 6 = 0, (a+1)(a-6) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 6$$

[다른 풀이]

주어진 이차방정식의 좌변을 인수분해하면

$$(x-6)\{x-(a^2-5a)\} = 0$$

$$\therefore x = 6 \text{ 또는 } x = a^2 - 5a$$

이때 두 근이 같아야 하므로 $a^2 - 5a = 6$

$$a^2 - 5a - 6 = 0, (a+1)(a-6) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 6$$

$$\begin{aligned} 05 \quad f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})} \\ &= \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\therefore m = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(34) + f(35)$$

$$= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3})$$

$$+ \cdots + (\sqrt{35} - \sqrt{34}) + (\sqrt{36} - \sqrt{35})$$

$$= -\sqrt{1} + \sqrt{36} = -1 + 6 = 5$$

주어진 이차방정식에 $x=5$ 를 대입하면

$$(a^2 + 1) \times 5^2 + (a-3) \times 5 + 5a - 9 = 0$$

$$25a^2 + 10a + 1 = 0, (5a+1)^2 = 0 \quad \therefore a = -\frac{1}{5}$$

$$06 \quad x^2 - (p-3)x - 3p = 0 \text{에서 } (x-p)(x+3) = 0$$

$$\therefore x = p \text{ 또는 } x = -3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 - 2(q+1)x + 4q = 0 \text{에서 } (x-2q)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 2q \text{ 또는 } x = 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$x^2 + (5p-6q)x - 30pq = 0 \text{에서 } (x+5p)(x-6q) = 0$$

$$\therefore x = -5p \text{ 또는 } x = 6q \quad \cdots \textcircled{3}$$

세 이차방정식의 공통인 근 $x=a$ 는 양수이므로

$$\textcircled{1} \text{에서 공통인 근은 } x=p \quad \therefore p > 0$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } -5p < 0 \text{이므로 공통인 근은 } x=6q \quad \therefore q > 0$$

$$\textcircled{3} \text{에서 } 6q \neq 2q \text{이므로 공통인 근은 } x=2$$

$$\text{즉, } a=2 \text{이므로 } p=2, 6q=2 \text{에서 } q=\frac{1}{3}$$

$$\therefore p-q = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$07 \quad P+Q = (x^2 - 7x + 12) + (x^2 + 2x - 15) = 0 \text{이므로}$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0, (2x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

또 $PQ \neq 0$ 이므로 $P \neq 0$ 이고, $Q \neq 0$ 이다.

$$P = x^2 - 7x + 12 \neq 0 \text{에서 } (x-3)(x-4) \neq 0$$

$$\therefore x \neq 3 \text{이고 } x \neq 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$Q = x^2 + 2x - 15 \neq 0 \text{에서 } (x+5)(x-3) \neq 0$$

$$\therefore x \neq -5 \text{이고 } x \neq 3 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{따라서 } \textcircled{1} \sim \textcircled{3} \text{에 의해 } x = -\frac{1}{2}$$

$$08 \quad x^2 + 4px + a = (x+b)^2 = x^2 + 2bx + b^2 \text{이므로}$$

$$p = \frac{1}{2}b, a = b^2$$

이때 $a+b=12$ 에서 $a=12-b$ 이므로

$$a=b^2 \text{에 대입하면 } 12-b=b^2, b^2+b-12=0$$

$$(b+4)(b-3)=0 \quad \therefore b=-4 \text{ 또는 } b=3$$

$$(i) b=-4 \text{일 때, } p = \frac{1}{2} \times (-4) = -2$$

$$(ii) b=3 \text{일 때, } p = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 (i), (ii)에 의해 } p > 0 \text{이므로 } p = \frac{3}{2}$$

09 $\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{a} = -\frac{2}{3}, \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{a} = 6$ 이므로

$$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{1}{2} \times \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

$$= -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -\frac{1}{2} \times \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

$$= -\frac{1}{2} \times 6 = -3$$

$$\therefore 3\alpha - \beta = 3 \times \frac{1}{3} - (-3) = 4$$

10 $x^2+3x+k-2=0$ 에서

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (k-2)}}{2 \times 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{17-4k}}{2}$$
 이때 x 가 유리수가 되려면 근호 안의 수인 $17-4k$ 의 값이 0 또는 (자연수)² 꼴이 되어야 한다.

(i) $17-4k=0$ 에서 $4k=17 \quad \therefore k=\frac{17}{4}$
 (ii) $17-4k=1$ 에서 $4k=16 \quad \therefore k=4$
 (iii) $17-4k=4$ 에서 $4k=13 \quad \therefore k=\frac{13}{4}$
 (iv) $17-4k=9$ 에서 $4k=8 \quad \therefore k=2$
 (v) $17-4k=16$ 에서 $4k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{4}$

따라서 (i)~(v)에 의해 해가 유리수가 되도록 하는 자연수 k 의 값은 2, 4이다.

11 $x^2+y^2+2xy-4x-4y-5=0$ 에서
 $(x+y)^2-4(x+y)-5=0$
 $x+y=A$ 로 놓으면 $A^2-4A-5=0$
 $(A+1)(A-5)=0 \quad \therefore A=-1$ 또는 $A=5$
 즉, $x+y=-1$ 또는 $x+y=5$
 그런데 x, y 는 자연수이므로 $x+y=5$
 따라서 순서쌍 (x, y) 는 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4개이다.

2 이차방정식의 활용

1 주제별 유형 불러오기

85~89쪽

- 유제 1 ① 유제 2 $\frac{5}{2}$ 유제 3 -8 유제 4 ①
 유제 5 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$ 유제 6 $2x^2+x-6=0$
 유제 7 ① 유제 8 19 유제 9 ②
 유제 10 (1) (n^2+n) 개 (2) 12단계 유제 11 ③
 유제 12 4 m

유제 1 $(k+1)x^2-(2k-1)x+k-1=0$ 의 해가 없으려면
 $\{-(2k-1)\}^2-4(k+1)(k-1)<0$ 이므로
 $-4k+5<0 \quad \therefore k>\frac{5}{4}$
 따라서 k 의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

유제 2 $x^2+kx+k+3=0$ 이 중근을 가지므로
 $k^2-4 \times 1 \times (k+3)=0$
 $k^2-4k-12=0, (k+2)(k-6)=0$
 $\therefore k=-2$ 또는 $k=6$
 그런데 k 는 자연수이므로 $k=6$
 즉, $2x^2-7x+3=0$ 이므로
 $(2x-1)(x-3)=0 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$
 따라서 두 근의 차는 $3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

유제 3 $9x^2-3ax-a+8=0$ 이 중근을 가지므로
 $(-3a)^2-4 \times 9 \times (-a+8)=0$
 $a^2+4a-32=0, (a+8)(a-4)=0$
 $\therefore a=-8$ 또는 $a=4$
 (i) $a=-8$ 일 때, $9x^2+24x+16=0$ 이므로
 $(3x+4)^2=0 \quad \therefore x=-\frac{4}{3}$
 (ii) $a=4$ 일 때, $9x^2-12x+4=0$ 이므로
 $(3x-2)^2=0 \quad \therefore x=\frac{2}{3}$
 따라서 (i), (ii)에 의해 $a=-8$

유제 4 두 근이 $\frac{3}{2}, \frac{1}{3}$ 이고 x^2 의 계수가 a 인 이차방정식은
 $a\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=0, a\left(x^2-\frac{11}{6}x+\frac{1}{2}\right)=0$
 $\therefore ax^2-\frac{11}{6}ax+\frac{1}{2}a=0$
 즉, $\frac{1}{2}a=2, \frac{11}{6}a=b$ 이므로
 $a=4, b=\frac{22}{3}$
 따라서 $2x^2+bx+a=0$ 에서 $2x^2+\frac{22}{3}x+4=0$
 $3x^2+11x+6=0, (x+3)(3x+2)=0$
 $\therefore x=-3$ 또는 $x=-\frac{2}{3}$

유제 5 중근이 2이고 x^2 의 계수가 3인 이차방정식은
 $3(x-2)^2=0, 3(x^2-4x+4)=0$
 $\therefore 3x^2-12x+12=0$
 따라서 $a=-12, b=12$ 이므로
 $12x^2-18x-12=0$ 에서
 $2x^2-3x-2=0, (2x+1)(x-2)=0$
 $\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

유제 6 $2x^2 - 3x - 5 = 0$, $(x+1)(2x-5) = 0$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = \frac{5}{2}$$

따라서 $-1-1 = -2$, $\frac{5}{2}-1 = \frac{3}{2}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 2인 이차방정식은

$$2(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right) = 0, 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 3\right) = 0$$

$$\therefore 2x^2 + x - 6 = 0$$

유제 7 두 근을 a , $3a$ ($a > 0$)라 하면

$$(x-a)(x-3a) = 0, x^2 - 4ax + 3a^2 = 0$$

이때 상수항이 48이므로

$$3a^2 = 48, a^2 = 16 \quad \therefore a = \pm 4$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 4$

따라서 $-2k = -4a$ 이므로

이 식에 $a = 4$ 를 대입하면

$$-2k = -16 \quad \therefore k = 8$$

유제 8 두 근을 k , $2k$ 라 하면

$$2k - k = 3 \quad \therefore k = 3$$

따라서 두 근은 3, 6이므로

$$(x-3)(x-6) = 0, x^2 - 9x + 18 = 0$$

이때 $-3(a+1) = -9$ 이므로

$$a+1 = 3 \quad \therefore a = 2$$

$$\text{또 } -b+1 = 18 \text{이므로 } -b = 17 \quad \therefore b = -17$$

$$\therefore a-b = 2 - (-17) = 19$$

[다른 풀이]

두 근 중 작은 근을 k 라 하면 큰 근은 $k+3$ 이므로

$$k+3 = 2k \quad \therefore k = 3$$

따라서 두 근은 3, 6이므로

$$(x-3)(x-6) = 0, x^2 - 9x + 18 = 0$$

$$\text{이때 } -3(a+1) = -9 \text{이므로 } a+1 = 3 \quad \therefore a = 2$$

$$\text{또 } -b+1 = 18 \text{이므로 } -b = 17 \quad \therefore b = -17$$

$$\therefore a-b = 2 - (-17) = 19$$

유제 9 영어 캠프의 날짜를 $(x-1)$ 일, x 일, $(x+1)$ 일이라 하면

$$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = 365$$

$$3x^2 = 363, x^2 = 121 \quad \therefore x = \pm 11$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $x = 11$

따라서 영어 캠프가 시작되는 날짜는 8월 10일이다.

유제 10 (1) 사용된 바둑돌의 개수는

1단계에는 (1×2) 개

2단계에는 (2×3) 개

3단계에는 (3×4) 개

4단계에는 (4×5) 개

$\vdots$

이므로 n 단계에 사용된 바둑돌의 개수는

$n(n+1)$ 개, 즉 (n^2+n) 개이다.

$$(2) n^2 + n = 156 \text{에서 } n^2 + n - 156 = 0$$

$$(n+13)(n-12) = 0 \quad \therefore n = -13 \text{ 또는 } n = 12$$

그런데 n 은 자연수이므로 $n = 12$

따라서 156개의 바둑돌로 만든 직사각형 모양은 12단계이다.

유제 11 x 초 후에 새로 만들어진 삼각형의 밑변의 길이는

$(10+x)$ cm, 높이는 $(10-2x)$ cm이므로

$$\frac{1}{2}(10+x)(10-2x) = 14$$

$$x^2 + 5x - 36 = 0, (x+9)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -9 \text{ 또는 } x = 4$$

그런데 $0 < x < 5$ 이므로 $x = 4$

따라서 4초 후에 삼각형의 넓이는 14cm^2 가 된다.

유제 12 산책로의 폭을 x m라 하면

$$(16+2x)(10+2x) - 16 \times 10 = 272$$

$$x^2 + 13x - 68 = 0, (x+17)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -17 \text{ 또는 } x = 4$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 4$

따라서 산책로의 폭은 4m이다.

2 최고 유형 탐험하기

90~91쪽

1 ①

2 ②

3 ③

4 ⑤

5 ②

6 ④

7 ③

8 ②

1 (가)에서 $x^2 + 2kx + k^2 - k - 3 = 0$ 이 근을 갖지 않고, x 의 계수가 짝수이므로

$$k^2 - 1 \times (k^2 - k - 3) < 0, k + 3 < 0 \quad \therefore k < -3$$

(나)에서 $x^2 - (k+2)x + 4 = 0$ 이 중근을 가지므로

$$\{-(k+2)\}^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0, k^2 + 4k + 4 - 16 = 0$$

$$k^2 + 4k - 12 = 0, (k+6)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = -6 \text{ 또는 } k = 2$$

따라서 (가), (나)를 모두 만족시키는 k 의 값은 -6 이다.

2 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

$ax^2 + 2bx + 1 = 0$ 이 중근을 가지려면

$$b^2 - a \times 1 = 0 \quad \therefore a = b^2$$

즉, $a = b^2$ 을 만족시키는 a , b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 1)$, $(4, 2)$ 의 2가지

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

3 $1 < \sqrt{3} < 2$ 이므로 $-2 < -\sqrt{3} < -1$

$$\therefore 1 < 3 - \sqrt{3} < 2$$

즉, $3 - \sqrt{3}$ 의 정수 부분이 1이므로 소수 부분은

$$(3 - \sqrt{3}) - 1 = 2 - \sqrt{3}$$

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 한 근이 $x=2-\sqrt{3}$ 이면
 다른 한 근은 $x=2+\sqrt{3}$ 이므로
 $\{x-(2-\sqrt{3})\}\{x-(2+\sqrt{3})\}=0$ 에서
 $x^2-4x+1=0 \quad \therefore a=-4, b=1$
 $\therefore a+b=-4+1=-3$

4 두 근을 $k, -k$ 라 하면

$(x-k)(x+k)=0, x^2-k^2=0$
 이때 x 의 계수가 a^2-3a-4 이므로
 $a^2-3a-4=0, (a+1)(a-4)=0$
 $\therefore a=-1$ 또는 $a=4$
 그런데 $-k^2<0$ 이므로 $-a+2<0$ 에서 $a>2$
 $\therefore a=4$

5 시우가 푼 이차방정식은

$(x-2)(x+9)=0 \quad \therefore x^2+7x-18=0$
 그런데 시우는 x 의 계수를 제대로 보았으므로 처음 이차방정식의 x 의 계수는 7이다.
 민아가 푼 이차방정식은
 $(x-2)(x+4)=0 \quad \therefore x^2+2x-8=0$
 그런데 민아는 상수항을 제대로 보았으므로 처음 이차방정식의 상수항은 -8 이다.
 따라서 처음 이차방정식은 $x^2+7x-8=0$ 이므로
 $(x+8)(x-1)=0 \quad \therefore x=-8$ 또는 $x=1$

6 (판매 금액) $=5000\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)=5000-\frac{x^2}{2}$ (원)

이때 800원의 손해를 보았으므로
 (판매 금액)-(원가) $= -800$ (원)
 즉, $\left(5000-\frac{x^2}{2}\right)-5000=-800$ 이므로
 $x^2=1600 \quad \therefore x=\pm 40$
 그런데 $x>0$ 이므로 $x=40$

7 $65t-5t^2=150$ 이므로 $t^2-13t+30=0$

$(t-3)(t-10)=0 \quad \therefore t=3$ 또는 $t=10$
 따라서 높이가 150m 이상인 지점을 지나는 시간은 던져 올린 지 3초 후부터 10초 후까지이므로 7초 동안이다.

8 두 점 P, Q가 출발한 지 x 초 후에 오각형 APQCD의 넓이가 268cm^2 가 된다고 하면 그때의 $\triangle PBQ$ 의 넓이는 $300-268=32(\text{cm}^2)$ 이다.

이때 $\overline{AP}=3x\text{cm}$ 이므로 $\overline{PB}=(20-3x)\text{cm}$ 이고,
 $\overline{BQ}=2x\text{cm}$ 이다.

즉, $\frac{1}{2} \times (20-3x) \times 2x=32$ 이므로
 $3x^2-20x+32=0, (3x-8)(x-4)=0$
 $\therefore x=\frac{8}{3}$ 또는 $x=4$

따라서 오각형 APQCD의 넓이가 처음으로 268cm^2 가 되는 것은 출발한 지 $\frac{8}{3}$ 초 후이다.

3 최고 유형 정복하기

92~93쪽

- 01 2개 02 $a=-4$ 일 때 $x=-2$, $a=1$ 일 때 $x=\frac{1}{2}$
 03 1 04 98 05 2 06 20분 후
 07 7 cm 또는 8 cm

01 $x^2+ax+b=0$ 이 서로 다른 두 근을 가지므로

$$a^2-4b>0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2+(a-2c)x+b-ac=0\text{에서}$$

$$(a-2c)^2-4(b-ac)=a^2-4ac+4c^2-4b+4ac$$

$$=a^2-4b+4c^2$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에서 $a^2-4b>0$ 이고, $4c^2\geq 0$ 이므로
 $a^2-4b+4c^2>0$

따라서 $x^2+(a-2c)x+b-ac=0$ 은 서로 다른 두 개의 근을 가진다.

02 $(a+3)x^2-4x+a=0$ 이 중근을 가지고, x 의 계수가 짝수이므로

$$(-2)^2-(a+3)\times a=0$$

$$a^2+3a-4=0, (a+4)(a-1)=0$$

$$\therefore a=-4 \text{ 또는 } a=1$$

(i) $a=-4$ 일 때, $-x^2-4x-4=0$
 $(x+2)^2=0 \quad \therefore x=-2$

(ii) $a=1$ 일 때, $4x^2-4x+1=0$
 $(2x-1)^2=0 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$

따라서 (i), (ii)에 의해 $a=-4$ 일 때 $x=-2$ 이고, $a=1$ 일 때 $x=\frac{1}{2}$ 이다.

03 두 근의 비가 1 : 2이므로

두 근을 $a, 2a$ ($a\neq 0$)라 하면
 $(x-a)(x-2a)=0, x^2-3ax+2a^2=0$

이때 $-3a=-3(k+1)$ 이므로

$$a=k+1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$2a^2=k+7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$2(k+1)^2=k+7$$

$$2k^2+3k-5=0, (2k+5)(k-1)=0$$

$$\therefore k=-\frac{5}{2} \text{ 또는 } k=1$$

그런데 k 는 정수이므로 $k=1$

04 $\sqrt{m^2-44}=n$ 의 양변을 제곱하면

$$m^2-44=n^2$$

즉, $m^2-n^2=44$ 이므로

$$(m+n)(m-n)=44 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때 m, n 은 자연수이므로 $m+n>0$ 이고

$$\textcircled{1}\text{에서 } m-n>0 \quad \therefore m>n$$

즉, $m+n > m-n$ 이므로 ㉠을 만족시키는 두 자연수 $m+n$, $m-n$ 의 값과 이를 만족시키는 m , n 의 값은 다음과 같다.

$m+n$	44	22	11
$m-n$	1	2	4
m	$\frac{45}{2}$	12	$\frac{15}{2}$
n	$\frac{43}{2}$	10	$\frac{7}{2}$

∴ $m=12$, $n=10$

한편, x^2 의 계수가 1이고 두 근이 12, 10인 이차방정식은 $(x-12)(x-10)=0$ ∴ $x^2-22x+120=0$

따라서 $a=-22$, $b=120$ 이므로

$$a+b=-22+120=98$$

- 05 점 P는 $y=-x+3$ 의 그래프 위의 점이므로 $P(k, -k+3)$
 점 Q는 $y=2x-6$ 의 그래프 위의 점이므로 $Q(k, 2k-6)$
 ∴ $PQ=(-k+3)-(2k-6)=9-3k$

이때 $\square ABQP$ 는 사다리꼴이므로

$$\begin{aligned}\square ABQP &= \frac{1}{2} \times (PQ + \overline{AB}) \times k \\ &= \frac{1}{2} \times \{(9-3k)+9\} \times k \\ &= \frac{1}{2} k(18-3k)\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} k(18-3k)=12 \text{이므로 } 18k-3k^2=24$$

$$3k^2-18k+24=0, \quad k^2-6k+8=0$$

$$(k-2)(k-4)=0 \quad \therefore k=2 \text{ 또는 } k=4$$

그런데 $k < 3$ 이므로 $k=2$

- 06 달린 시간을 t 분이라 하면

고속열차가 달린 거리는 at^2 km, 고속버스가 달린 거리는 bt km로 놓을 수 있다. (단, a , b 는 상수)

달린 시간이 5분, 10분일 때, 고속버스의 처음 위치를 기준으로 고속열차와 고속버스의 위치가 같으므로

$$t=5 \text{일 때, } 25a+5=5b \quad \dots \text{㉠}$$

$$t=10 \text{일 때, } 100a+5=10b \quad \dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } a=\frac{1}{10}, b=\frac{3}{2}$$

즉, 고속열차가 고속버스보다 15 km 앞서 있을 때는

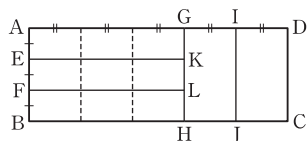
$$\left(\frac{1}{10}t^2+5\right)-\frac{3}{2}t=15, \quad t^2-15t-100=0$$

$$(t+5)(t-20)=0 \quad \therefore t=-5 \text{ 또는 } t=20$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $t=20$

따라서 고속열차가 고속버스보다 15 km 앞서는 것은 출발한 지 20분 후이다.

- 07 $\overline{AB}=x$ cm라 하면
 $\overline{AB}=\overline{GH}=\overline{IJ}=\overline{DC}$
 이므로
 $\overline{AB}+\overline{GH}+\overline{IJ}+\overline{DC}$
 $=4x$ (cm)



이때 $\square ABHG=\frac{3}{5}\square ABCD$ 이므로

$$\overline{AG}=\overline{EK}=\overline{FL}=\overline{BH}=\frac{3}{5}\overline{AD},$$

$$\overline{GI}=\overline{ID}=\overline{HJ}=\overline{JC}=\frac{1}{5}\overline{AD}$$

$$\therefore \overline{AG}=\overline{EK}=\overline{FL}=\overline{BH}=3\overline{ID}$$

따라서 $\overline{AD}=\frac{5}{16}(\overline{AD}+\overline{EK}+\overline{FL}+\overline{BC})$ 이고,

$$\overline{AD}+\overline{EK}+\overline{FL}+\overline{BC}=60-4x(\text{cm}) \text{이므로}$$

$$\overline{AD}=\frac{5}{16}(60-4x)=\frac{75-5x}{4}(\text{cm})$$

$$\therefore \square ABCD=\overline{AB} \times \overline{AD}$$

$$=x \times \frac{75-5x}{4}=\frac{75x-5x^2}{4}$$

$$\text{즉, } \frac{75x-5x^2}{4}=70 \text{이므로 } 75x-5x^2=280$$

$$5x^2-75x+280=0, \quad x^2-15x+56=0$$

$$(x-7)(x-8)=0 \quad \therefore x=7 \text{ 또는 } x=8$$

따라서 $\overline{AB}$ 의 길이는 7 cm 또는 8 cm이다.

대단원 마무리하기

94~96쪽

01 ㉠ 02 3 03 6 04 ㉢

05 48 06 12 07 ㉤ 08 9

09 $2x^2-10x+12=0$ 10 ㉡ 11 2

12 -20 13 -4 14 $\frac{5}{216}$ 15 50

16 $(5-\sqrt{13})$ cm

서술형 문제 <과정은 풀이 참조>

17 2개 18 $x=-2 \pm \sqrt{3}$

19 $P(\frac{5}{3}, 12)$ 또는 $P(4, 5)$ 20 35 cm^2

01 $\frac{1}{6}x-\frac{x+2}{4} > -1$ 에서 $x < 6$

x 의 값이 1, 2, 3, 4, 5이므로 이를 이차방정식

$x^2-9x+18=0$ 에 각각 대입하여 등식이 성립하는 것을 찾는다.

$$x=1 \text{일 때, } 1^2-9 \times 1+18=10 \neq 0$$

$$x=2 \text{일 때, } 2^2-9 \times 2+18=4 \neq 0$$

$$x=3 \text{일 때, } 3^2-9 \times 3+18=0$$

$$x=4 \text{일 때, } 4^2-9 \times 4+18=-2 \neq 0$$

$$x=5 \text{일 때, } 5^2-9 \times 5+18=-2 \neq 0$$

따라서 주어진 이차방정식의 해는 $x=3$ 이다.

02 $x^2 - px + 1 = 0$ 에 $x = a$ 를 대입하면
 $a^2 - ap + 1 = 0 \quad \therefore a^2 - ap = -1 \quad \dots \textcircled{1}$
 $a - \frac{1}{a} = p - 2$ 의 양변에 a 를 곱하면
 $a^2 - 1 = ap - 2a \quad \therefore a^2 - ap = 1 - 2a \quad \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $-1 = 1 - 2a \quad \therefore a = 1$
따라서 $\textcircled{1}$ 에 $a = 1$ 을 대입하면
 $1 - p = -1 \quad \therefore p = 2$
 $\therefore a + p = 1 + 2 = 3$

03 $x^2 + ax - 6 = 0$ 에 $x = 3$ 을 대입하면
 $3^2 + a \times 3 - 6 = 0$
 $3a + 3 = 0 \quad \therefore a = -1$
즉, $x^2 - x - 6 = 0$ 이므로 $(x+2)(x-3) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 3$
따라서 다른 한 근은 $x = -2$ 이므로
 $2x^2 + 8x + b = 0$ 에 대입하면
 $2 \times (-2)^2 + 8 \times (-2) + b = 0$
 $8 - 16 + b = 0 \quad \therefore b = 8$
 $\therefore 2a + b = 2 \times (-1) + 8 = 6$

04 $x + y = 3$ 에서 $y = 3 - x \quad \dots \textcircled{1}$
 $2x^2 + y^2 = 6$ 에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면
 $2x^2 + (3 - x)^2 = 6, 2x^2 + 9 - 6x + x^2 = 6$
 $3x^2 - 6x + 3 = 0, x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x - 1)^2 = 0 \quad \therefore x = 1$
따라서 $y = 3 - 1 = 2$ 이므로
 $x - y = 1 - 2 = -1$

05 (i) $x \geq 0$ 일 때, $|x| = x$ 이므로
 $2x^2 - 3x - 20 = 0, (2x+5)(x-4) = 0$
 $\therefore x = -\frac{5}{2}$ 또는 $x = 4$
그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x = 4$
(ii) $x < 0$ 일 때, $|x| = -x$ 이므로
 $2x^2 + 3x - 20 = 0, (x+4)(2x-5) = 0$
 $\therefore x = -4$ 또는 $x = \frac{5}{2}$
그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -4$
따라서 (i), (ii)에 의해 $x = 4$ 또는 $x = -4$ 이므로
 $\alpha = 4, \beta = -4$ 또는 $\alpha = -4, \beta = 4$
 $\therefore \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = 16 - (-16) + 16 = 48$

06 $\begin{vmatrix} x-1 & -3 \\ 2x & 3x-4 \end{vmatrix} = -2x+5$ 에서
 $(x-1)(3x-4) + 6x = -2x+5$
 $3x^2 + x - 1 = 0$
 $\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 3 \times (-1)}}{2 \times 3} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$
따라서 $A = -1, B = 13$ 이므로
 $A + B = -1 + 13 = 12$

07 $3(x^2 - 2x)^2 - x^2 + 2x - 24 = 0$ 에서
 $3(x^2 - 2x)^2 - (x^2 - 2x) - 24 = 0$
이때 $x^2 - 2x = A$ 로 놓으면
 $3A^2 - A - 24 = 0, (3A+8)(A-3) = 0$
 $\therefore A = -\frac{8}{3}$ 또는 $A = 3$
즉, $x^2 - 2x = -\frac{8}{3}$ 또는 $x^2 - 2x = 3$
이때 x 는 정수이므로 $x^2 - 2x = 3$

08 $x^2 - (m+3n)x + 4mn - 4n^2 = 0$ 이 중근을 가지므로
 $(m+3n)^2 - 4(4mn - 4n^2) = 0$
 $m^2 - 10mn + 25n^2 = 0, (m-5n)^2 = 0$
즉, $m = 5n$ 이므로 $p = 5$
주어진 이차방정식에 $m = 5n$ 을 대입하면
 $x^2 - 8nx + 16n^2 = 0$ 에서 $(x-4n)^2 = 0$
즉, $x = 4n$ 이므로 $q = 4$
 $\therefore p + q = 5 + 4 = 9$

09 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프에서 a 는 기울기이므로
 $a = \frac{0-2}{-\frac{2}{3}-0} = 2 \div \frac{2}{3} = 2 \times \frac{3}{2} = 3$
 b 는 y 절편이므로 $b = 2$
따라서 3, 2를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 2인 이차방정식은
 $2(x-3)(x-2) = 0$
 $\therefore 2x^2 - 10x + 12 = 0$

10 p 가 소수이므로 $p = 1 \times p$ 로만 소인수분해된다.
즉, $x^2 - 12x + p = 0$ 의 두 근은 1, p 이므로
 $(x-1)(x-p) = 0$
 $\therefore x^2 - (1+p)x + p = 0$
따라서 $1+p = 12$ 이므로 $p = 11$

11 길을 제외한 땅의 넓이가 80 m^2 이므로
 $(16-3x)(12-2x) = 80, 192 - 68x + 6x^2 = 80$
 $3x^2 - 34x + 56 = 0, (x-2)(3x-28) = 0$
 $\therefore x = 2$ 또는 $x = \frac{28}{3}$
그런데 $0 < x < \frac{16}{3}$ 이므로 $x = 2$

12 $ax^2 + bx + c = 0$ 에 $x = 2$ 를 대입하면
 $4a + 2b + c = 0 \quad \dots \textcircled{1}$
 $bx^2 + cx + a = 0$ 에 $x = 3$ 을 대입하면
 $9b + 3c + a = 0 \quad \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2}$ 을 하면 $11a = 3b$
그런데 a, b 는 서로소이므로
 $a = 3, b = 11 \quad \dots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}$ 에 $\textcircled{3}$ 을 대입하면
 $12 + 22 + c = 0 \quad \therefore c = -34$
 $\therefore a + b + c = 3 + 11 - 34 = -20$

13 $F(a+2, a-1)$
 $= 2f(a+2) - f(a-1)$
 $= 2\{(a+2)^2 - 2(a+2) - 15\} - \{(a-1)^2 - 2(a-1) - 15\}$
 $= 2(a^2 + 2a - 15) - (a^2 - 4a - 12)$
 $= a^2 + 8a - 18$
 즉, $a^2 + 8a - 18 = -34$ 이므로
 $a^2 + 8a + 16 = 0, (a+4)^2 = 0$
 $\therefore a = -4$

14 모든 경우의 수는 $6 \times 6 \times 6 = 216$
 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 이 중근을 가지려면
 $b^2 - 4ac = 0$, 즉 $b^2 = 4ac$ 이어야 한다.
 그런데 a, b, c 는 주사위의 눈의 수이므로 1부터 6까지의 자연수이다.
 따라서 $b^2 = 4ac$ 를 만족시키는 a, b, c 는
 $b=2$ 일 때, $a=1, c=1$
 $b=4$ 일 때, $a=2, c=2$ 또는 $a=1, c=4$ 또는 $a=4, c=1$
 $b=6$ 일 때, $a=3, c=3$
 의 5가지이므로 중근을 가질 확률은 $\frac{5}{216}$ 이다.

15 농도가 40%인 소금물 100g에서 x g의 소금물을 퍼내면 남아 있는 소금물의 양은 $(100-x)$ g이므로 소금의 양은
 $\frac{40}{100}(100-x)(g)$
 이 소금물에 물 x g을 넣으면 소금물의 양은 100g이므로 소금물의 농도는
 $\frac{40}{100}(100-x)(\%)$
 이 소금물에서 다시 x g의 소금물을 퍼내면 남아 있는 소금물의 양은 $(100-x)$ g이므로 소금의 양은
 $\frac{40}{100}(100-x) \times \frac{1}{100} \times (100-x) = \frac{1}{250}(100-x)^2(g)$
 이 소금물에 물 x g을 넣으면 소금물의 양은 100g이므로 소금물의 농도는
 $\frac{1}{250}(100-x)^2(\%)$
 이때 이 소금물의 농도가 10%이므로
 $\frac{1}{250}(100-x)^2 = 10$
 $(100-x)^2 = 2500, 100-x = \pm 50$
 $\therefore x = 50$ 또는 $x = 150$
 그런데 $0 < x < 100$ 이므로 $x = 50$

16 $\overline{EP} = x$ cm라 하면
 $\overline{PC} = (6-x)$ cm, $\overline{PB} = (18-x)$ cm
 $\triangle QCP : \square ABCQ = 1 : 12$ 이므로
 $\triangle QCP : \triangle ABP = 1 : 13$
 이때 $\triangle QCP \sim \triangle ABP$ (AA 답음)이므로
 $(6-x)^2 : (18-x)^2 = 1 : 13$
 $(18-x)^2 = 13(6-x)^2, 12x^2 - 120x + 144 = 0$
 $x^2 - 10x + 12 = 0$

$\therefore x = -(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 1 \times 12} = 5 \pm \sqrt{13}$
 그런데 $0 < x < 6$ 이므로 $x = 5 - \sqrt{13}$
 따라서 $\overline{EP}$ 의 길이는 $(5 - \sqrt{13})$ cm이다.

17 $\langle x \rangle^2 + 2\langle x \rangle - 15 = 0$ 에서
 $(\langle x \rangle + 5)(\langle x \rangle - 3) = 0$
 $\therefore \langle x \rangle = -5$ 또는 $\langle x \rangle = 3$... ①
 그런데 $\langle x \rangle$ 는 자연수 x 의 약수의 개수이므로
 $\langle x \rangle = 3$... ②
 따라서 약수의 개수가 3개인 10 이하의 자연수는 4, 9의 2개이다. ... ③

채점 요소	비율
① $\langle x \rangle^2 + 2\langle x \rangle - 15 = 0$ 의 해 구하기	35 %
② $\langle x \rangle$ 의 값 구하기	35 %
③ 자연수 x 의 개수 구하기	30 %

18 $\frac{7}{3-\sqrt{2}} = \frac{7(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$
 $= \frac{7(3+\sqrt{2})}{9-2}$
 $= 3 + \sqrt{2}$... ①
 이때 $1 < \sqrt{2} < 2$ 에서 $4 < 3 + \sqrt{2} < 5$ 이므로
 $a = 4, b = (3 + \sqrt{2}) - 4 = \sqrt{2} - 1$... ②
 즉, $x^2 + 4x + (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 0$ 이므로
 $x^2 + 4x + 1 = 0$... ③
 따라서 이차방정식의 x 의 계수가 짝수이므로
 $x = -2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \times 1} = -2 \pm \sqrt{3}$... ④

채점 요소	비율
① 주어진 무리수의 분모를 유리화 하기	20 %
② a, b 의 값 구하기	30 %
③ 이차방정식 구하기	20 %
④ 이차방정식의 해 구하기	30 %

19 점 $P(a, b)$ 가 $y = -3x + 17$ 의 그래프 위에 있으므로
 $b = -3a + 17$... ①
 $\square OQPR$ 의 넓이가 20이므로
 $a(-3a + 17) = 20$... ②
 $3a^2 - 17a + 20 = 0, (3a-5)(a-4) = 0$
 $\therefore a = \frac{5}{3}$ 또는 $a = 4$... ③
 따라서 $a = \frac{5}{3}$ 일 때 $b = -3 \times \frac{5}{3} + 17 = 12$,
 $a = 4$ 일 때 $b = -3 \times 4 + 17 = 5$ 이므로
 점 P 의 좌표는 $(\frac{5}{3}, 12)$ 또는 $(4, 5)$ 이다. ... ④

채점 요소	비율
① b 를 a 에 대한 식으로 나타내기	20 %
② 이차방정식 세우기	20 %
③ 이차방정식의 해 구하기	30 %
④ 점 P 의 좌표 구하기	30 %

20 타일의 긴 변의 길이를 x cm라 하면

타일의 짧은 변의 길이는

$$\frac{2x+6}{4} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \text{ (cm)} \quad \dots \text{ ㉠}$$

$$\text{이때 } (2x+6)\left(x+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)=240 \text{ 이므로} \quad \dots \text{ ㉡}$$

$$3x^2+12x-231=0, x^2+4x-77=0$$

$$(x+11)(x-7)=0 \quad \therefore x=-11 \text{ 또는 } x=7 \quad \dots \text{ ㉢}$$

그런데 $x>0$ 이므로 $x=7$

따라서 타일 한 장의 긴 변의 길이는 7cm, 짧은 변의 길이는

$$\frac{1}{2} \times 7 + \frac{3}{2} = 5 \text{ (cm)} \text{ 이므로 타일 한 장의 넓이는}$$

$$7 \times 5 = 35 \text{ (cm}^2\text{)} \quad \dots \text{ ㉣}$$

채점 요소	비율
㉠ 타일의 긴 변, 짧은 변의 길이를 문자를 사용하여 나타내기	30 %
㉡ 이차방정식 세우기	20 %
㉢ 이차방정식의 해 구하기	30 %
㉣ 타일 한 장의 넓이 구하기	20 %

IV. 이차함수

1 이차함수와 그 그래프

1 주제별 유형 불러오기

99~105쪽

유제 1	①, ⑤	유제 2	$\frac{1}{2}$	유제 3	①	유제 4	50
유제 5	③	유제 6	2	유제 7	②	유제 8	$\frac{1}{8}$
유제 9	④	유제 10	$-\frac{5}{4}$	유제 11	②	유제 12	8
유제 13	⑤	유제 14	ㄴ, ㄹ, ㄴ				

유제 1 ① $y=85x \Rightarrow$ 일차함수

② $y=6x^2 \Rightarrow$ 이차함수

③ $y=2\pi x^2+2\pi x \times 5=2\pi x^2+10\pi x \Rightarrow$ 이차함수

④ $y=(x-2)(x+3)=x^2+x-6 \Rightarrow$ 이차함수

⑤ $y=\frac{1}{2} \times \{4x+(x+2)\} \times 6=15x+6 \Rightarrow$ 일차함수

따라서 y 가 x 에 대한 이차함수가 아닌 것은 ①, ⑤이다.

유제 2 $f(x)=-3x^2-2x+1$ 에서 $f(a)=-3a^2-2a+1$

즉, $-3a^2-2a+1=-\frac{3}{4}$ 이므로 $12a^2+8a-7=0$

$(6a+7)(2a-1)=0 \quad \therefore a=-\frac{7}{6} \text{ 또는 } a=\frac{1}{2}$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=\frac{1}{2}$

유제 3 $y=ax^2$ 의 그래프가 색칠한 부분을 지나려면

(i) $a>0$ 인 경우

$y=ax^2$ 의 그래프의 폭이 $y=2x^2$ 의 그래프보다 넓어야
하므로 $0<a<2$

(ii) $a<0$ 인 경우

$y=ax^2$ 의 그래프의 폭이 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프보다 넓

어야 하므로 $-\frac{1}{3}<a<0$

따라서 (i), (ii)에 의해 $-\frac{1}{3}<a<0$ 또는 $0<a<2$ 이므로
색칠한 부분을 지나지 않는 것은 ①이다.

유제 4 $y=ax^2$ 의 그래프가 점 $(2, -10)$ 을 지나므로

$$-10=4a \quad \therefore a=-\frac{5}{2}$$

즉, $y=-\frac{5}{2}x^2$ 의 그래프가 점 $(-2\sqrt{2}, b)$ 를 지나므로

$$b=-\frac{5}{2} \times (-2\sqrt{2})^2 = -\frac{5}{2} \times 8 = -20$$

$$\therefore ab = -\frac{5}{2} \times (-20) = 50$$

유제 5 주어진 그래프는 $y = -\frac{2}{3}x^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 식은

$$y = -\frac{2}{3}x^2 + 6$$

$$\text{즉, } f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 6 \text{ 이므로}$$

$$f(-1) = -\frac{2}{3} \times (-1)^2 + 6 = \frac{16}{3}$$

$$f(2) = -\frac{2}{3} \times 2^2 + 6 = \frac{10}{3}$$

$$\therefore f(-1) - f(2) = \frac{16}{3} - \frac{10}{3} = 2$$

유제 6 $y = ax^2 + q$ 의 그래프가 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$2 = a \times (-1)^2 + q \quad \therefore a + q = 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

또 $y = ax^2 + q$ 의 그래프가 점 $(2, -7)$ 을 지나므로

$$-7 = a \times 2^2 + q \quad \therefore 4a + q = -7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -3$, $q = 5$

$$\therefore a + q = -3 + 5 = 2$$

유제 7 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-3, 0)$ 이므로

$$p = -3$$

즉, $y = a(x+3)^2$ 의 그래프가 점 $(0, 6)$ 을 지나므로

$$6 = a \times (0+3)^2, 9a = 6 \quad \therefore a = \frac{2}{3}$$

$$\therefore a + p = \frac{2}{3} - 3 = -\frac{7}{3}$$

유제 8 $y = ax^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y = a(x-p)^2$

이 그래프의 축의 방정식이 $x = \frac{1}{2}$ 이므로 $p = \frac{1}{2}$

즉, $y = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$ 을 지나므로

$$1 = a \times \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)^2, 4a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

$$\therefore ap = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

유제 9 구하는 이차함수의 식을 $y = a(x-p)^2 + q$ 로 놓으면

(가), (바)에서 $a = -3 \Rightarrow \textcircled{4}, \textcircled{5}$

(나)에서 꼭짓점이 제2사분면 위에 있으므로 $\textcircled{4}, \textcircled{5}$ 의 꼭짓점의 좌표를 각각 구하면

$\textcircled{4} (-4, 2) \Rightarrow$ 제2사분면

$\textcircled{5} (2, 5) \Rightarrow$ 제1사분면

따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 이차함수의 식은 $\textcircled{4}$ 이다.

유제 10 꼭짓점의 좌표가 $(p, 4p^2)$ 이고, 이 점이 직선 $y = -x + 5$ 위에 있으므로

$$4p^2 = -p + 5, 4p^2 + p - 5 = 0$$

$$(4p+5)(p-1) = 0 \quad \therefore p = -\frac{5}{4} \text{ 또는 } p = 1$$

$$\text{그런데 } p < 0 \text{ 이므로 } p = -\frac{5}{4}$$

유제 11 $y = (x+2)^2 - 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 k 만큼, y 축의 방향으로 $3k$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = (x-k+2)^2 - 3 + 3k$$

이 그래프가 점 $(-1, 4)$ 를 지나므로

$$4 = (-1-k+2)^2 - 3 + 3k$$

$$k^2 + k - 6 = 0, (k+3)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = -3 \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = 2$

유제 12 $y = -\frac{1}{4}(x-1)^2 - 5$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = -\frac{1}{4}(x-1)^2 - 5$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 5$$

다시 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{1}{4}(x-3-1)^2 + 5 - 6$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}(x-4)^2 - 1$$

이 그래프가 점 $(-2, k)$ 를 지나므로

$$k = \frac{1}{4} \times (-2-4)^2 - 1 = 8$$

유제 13 $y = a(x+p)^2 - q$ 의 그래프가 제1, 3, 4사분면만을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 위로 볼록하고, 꼭짓점 $(-p, -q)$ 가 제1사분면 위에 있어야 하므로

$$a < 0, -p > 0, -q > 0$$

$$\therefore a < 0, p < 0, q < 0$$

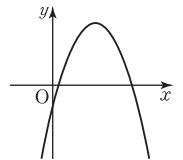
$$\textcircled{1} a + p < 0$$

$$\textcircled{2} a - q < 0 \text{의 부호는 알 수 없다.}$$

$$\textcircled{3} p + q < 0$$

$$\textcircled{4} ap > 0$$

따라서 항상 옳은 것은 $\textcircled{5}$ 이다.



유제 14 그래프가 아래로 볼록한 포물선이므로 $a > 0$

꼭짓점 (p, q) 가 제3사분면 위에 있으므로

$$p < 0, q < 0$$

ㄱ. $a + q$ 의 부호는 알 수 없다.

$$\text{ㄴ. } q^2 > 0 \text{ 이므로 } a + q^2 > 0$$

$$\text{ㄷ. } apq > 0$$

$$\text{ㄹ. } -p > 0, -q > 0 \text{ 이므로 } a - p - q > 0$$

ㅁ. $pq > 0, -a < 0$ 이므로 $pq - a$ 의 부호는 알 수 없다.

$$\text{ㅂ. } -2a < 0, p + q < 0 \text{ 이므로 } -2a(p + q) > 0$$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ, ㅂ이다.

2 최고 유형 탐험하기

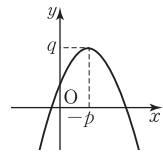
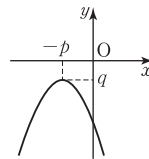
106~107쪽

- 1 ⑤ 2 ③ 3 ④ 4 ④
5 ⑤ 6 ⑤ 7 ③ 8 ①, ③

- 1 $f(x)=2x^2+ax+b$ 에서 $f(-1)=8$ 이므로
 $2 \times (-1)^2 + a \times (-1) + b = 8$
 $\therefore -a + b = 6 \quad \dots \textcircled{1}$
 또 $f(2)=11$ 이므로
 $2 \times 2^2 + a \times 2 + b = 11$
 $\therefore 2a + b = 3 \quad \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 5$
 따라서 $f(x) = 2x^2 - x + 5$ 이므로
 $f(-3) = 2 \times (-3)^2 - (-3) + 5 = 26$
- 2 $\square ABCD$ 가 평행사변형이므로 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}, \overline{AD} = \overline{BC}$
 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 에서 $\overline{BC}$ 는 x 축에 평행하므로 두 점 B, C의 y 좌표는 -12 이다.
 또 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AD} = 8$ 이므로 $\overline{BC} = 8$
 이때 $y = ax^2$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로
 $B(-4, -12), C(4, -12)$
 따라서 점 $C(4, -12)$ 가 $y = ax^2$ 의 그래프 위의 점이므로
 $-12 = a \times 4^2, 16a = -12 \quad \therefore a = -\frac{3}{4}$
- 3 점 A의 x 좌표가 4이므로 $\overline{AC} = 4$
 $\therefore \overline{AB} = 3\overline{AC} = 3 \times 4 = 12$
 이때 직선 BC는 x 축에 평행하고,
 $\overline{BC} = \overline{AC} + \overline{AB} = 4 + 12 = 16$ 이므로
 점 B의 x 좌표는 16이다.
 또 점 A는 $y = -x^2$ 의 그래프 위의 점이고, x 좌표가 4이므로
 $A(4, -16)$
 $\therefore B(16, -16), C(0, -16)$
 따라서 점 $B(16, -16)$ 이 $y = ax^2$ 의 그래프 위의 점이므로
 $-16 = a \times 16^2 \quad \therefore a = -\frac{1}{16}$
- 4 점 P가 $y = x^2 + 3$ 의 그래프 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a, a^2 + 3)$ 이라 하면
 $\overline{PQ} = 8$ 이고, 두 점 P, Q의 y 좌표는 같으므로
 $Q(a+8, a^2+3)$
 이때 점 Q는 $y = x - 3$ 의 그래프 위의 점이므로
 $a^2 + 3 = (a+8) - 3, a^2 - a - 2 = 0$
 $(a+1)(a-2) = 0 \quad \therefore a = -1$ 또는 $a = 2$
 따라서 점 P의 x 좌표는 -1 또는 2 이다.
- 5 $y = (x-3)^2$ 의 그래프는 $y = (x+2)^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로
 $\overline{AB} = \overline{BC} = 5$
 $\therefore \overline{AC} = 2 \times 5 = 10$

- 6 $y = (x-a)^2 - a^2 + 2b$ 의 그래프가 점 $(3, 1)$ 을 지나므로
 $1 = (3-a)^2 - a^2 + 2b, 1 = 9 - 6a + 2b$
 $6a - 2b = 8 \quad \therefore 3a - b = 4 \quad \dots \textcircled{1}$
 또 그래프의 꼭짓점이 x 축 위에 있으므로
 $-a^2 + 2b = 0 \quad \therefore b = \frac{a^2}{2} \quad \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 에 $\textcircled{2}$ 을 대입하면 $3a - \frac{a^2}{2} = 4$
 $a^2 - 6a + 8 = 0, (a-2)(a-4) = 0$
 $\therefore a = 2$ 또는 $a = 4$
 그런데 $a > 2$ 이므로 $a = 4$ 이고 $b = \frac{a^2}{2} = \frac{4^2}{2} = 8$
 $\therefore a + b = 4 + 8 = 12$

- 7 $y = -\frac{1}{3}(x+2)^2 + 4$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
 $-y = -\frac{1}{3}(x+2)^2 + 4 \quad \therefore y = \frac{1}{3}(x+2)^2 - 4$
 다시 y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y = \frac{1}{3}(x+2)^2 - 4 + q \quad \dots \textcircled{1}$
 이때 $\textcircled{1}$ 의 그래프는 직선 $x = -2$ 에 대하여 대칭이고, x 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $6\sqrt{3}$ 이므로
 x 축과 만나는 두 점의 좌표는 각각 $(-2-3\sqrt{3}, 0), (-2+3\sqrt{3}, 0)$ 이다.
 따라서 $\textcircled{1}$ 에 $x = -2+3\sqrt{3}, y = 0$ 을 대입하면
 $0 = \frac{1}{3} \times (-2+3\sqrt{3}+2)^2 - 4 + q$
 $0 = 5 + q \quad \therefore q = -5$
- 8 $y = ax + pq$ 의 그래프에서 $a < 0, pq < 0$ 이다.
 $y = a(x+p)^2 + q$ 의 그래프는 위로 볼록한 포물선이고, 꼭짓점의 좌표는 $(-p, q)$ 이다.
 (i) $p > 0, q < 0$ 인 경우 (ii) $p < 0, q > 0$ 인 경우

따라서 $y = a(x+p)^2 + q$ 의 그래프로 적당한 것은 ①, ③이다.

3 최고 유형 정복하기

108~109쪽

- 01 $\frac{\sqrt{5}}{10}$ 02 44개 03 2 04 $\frac{27}{4}\pi$
 05 $\frac{1}{2}$ 06 18 07 2 08 □, ▨

- 01 $f(x)=2ax^2-\sqrt{5}$ 에서
 $f(\sqrt{5})=2a \times (\sqrt{5})^2 - \sqrt{5} = 10a - \sqrt{5}$
 즉, $f(f(\sqrt{5}))=f(10a-\sqrt{5})=-\sqrt{5}$ 이므로
 $2a(10a-\sqrt{5})^2 - \sqrt{5} = -\sqrt{5}$
 $\therefore 2a(10a-\sqrt{5})^2 = 0$
 그런데 $a \neq 0$ 이므로 $(10a-\sqrt{5})^2 = 0$
 $10a-\sqrt{5}=0, 10a=\sqrt{5} \quad \therefore a=\frac{\sqrt{5}}{10}$

- 02 $y=\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프와 직선 $y=9$ 가

만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{2}x^2=9, x^2=18$$

$$\therefore x=\pm 3\sqrt{2}$$

이 부분에 있는 점의 x 좌표의 범위는 $-3\sqrt{2} < x < 3\sqrt{2}$

이때 정수인 x 좌표는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ 이므로 두 그래프로 둘러싸인 부분에 있는 점 중에서 정수인 y 좌표를 구하면 다음과 같다.

(i) $x=\pm 4$ 일 때, 정수인 y 는 없다.

(ii) $x=\pm 3$ 일 때, $y=5, 6, 7, 8$

(iii) $x=\pm 2$ 일 때, $y=3, 4, 5, 6, 7, 8$

(iv) $x=\pm 1$ 일 때, $y=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

(v) $x=0$ 일 때, $y=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

따라서 (i)~(v)에 의해 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수는 $18 \times 2 + 8 = 44$ (개)

- 03 점 A의 x 좌표를 k ($k>0$)라 하면

$$A(k, k^2), D(k, 9k^2)$$

두 점 C, D의 y 좌표가 같으므로

점 C의 x 좌표를 m ($m>0$)이라 하면

y 좌표는 m^2 이고, $m^2=9k^2$ 이므로 $m=3k$

$$\therefore C(3k, 9k^2)$$

이때 $\overline{BC}$ 와 $\overline{AB}$ 는 각각 y 축과 x 축에 평행하므로 $B(3k, k^2)$

$$\overline{AD}=9k^2-k^2=8k^2, \overline{AB}=3k-k=2k \text{ 이고,}$$

$$\overline{AD}=\overline{AB} \text{ 이므로}$$

$$8k^2=2k, 4k^2-k=0, k(4k-1)=0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=\frac{1}{4}$$

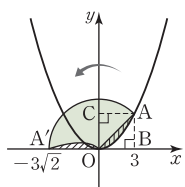
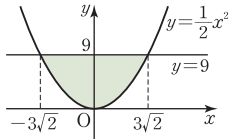
$$\text{그런데 } k>0 \text{ 이므로 } k=\frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } \overline{AB}=2 \times \frac{1}{4}=\frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$\square ABCD \text{의 둘레의 길이는 } 4 \times \frac{1}{2}=2$$

- 04 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$ 를 그으면 빗금친 부분의 넓이는 서로 같으므로 색칠한 부분의 넓이는 부채꼴 $A'OA$ 의 넓이와 같다.

점 A는 $y=\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프 위의 점이고, x 좌표가 3이므로 $A(3, 3)$



이때 점 A에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하면 $\square OBAC$ 는 한 변의 길이가 3인 정사각형이고, $\angle AOB=45^\circ$ 이다.

따라서 부채꼴 $A'OA$ 의 반지름의 길이는 $\triangle AOB$ 에서 $\overline{OA}=\overline{OA'}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$ 이고,

중심각의 크기가 $\angle AOA'=180^\circ-45^\circ=135^\circ$ 이므로 (색칠한 부분의 넓이)=(부채꼴 $A'OA$ 의 넓이)

$$=\pi \times (3\sqrt{2})^2 \times \frac{135}{360} = \frac{27}{4}\pi$$

- 05 점 P와 점 Q의 x 좌표는 m 으로 같으므로

점 P의 y 좌표는 $\frac{7}{2}m^2 + \frac{3}{4}$ 이고,

점 Q의 y 좌표는 $\frac{1}{2}(m-2)^2$ 이다.

이때 $\square RSQP$ 는 한 변의 길이가 m 인 정사각형이므로 $\overline{PQ}=m$

$$\text{즉, } \frac{7}{2}m^2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}(m-2)^2 = m \text{ 이므로}$$

$$12m^2 + 4m - 5 = 0, (6m+5)(2m-1)=0$$

$$\therefore m = -\frac{5}{6} \text{ 또는 } m = \frac{1}{2}$$

$$\text{그런데 } m>0 \text{ 이므로 } m = \frac{1}{2}$$

- 06 $y=\frac{2}{3}(x-3)^2-6$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(3, -6)$ 이고, 축의 방정식은 $x=3$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 주어진 두

이차함수의 그래프와 x 축, y 축

및 두 직선 $x=3, y=6$ 에 의해

나누어지는 각 영역을 A, B,

C, D라 하자.

$y=\frac{2}{3}(x-3)^2-6$ 의 그래프는

직선 $x=3$ 에 대칭이므로 B와

C의 넓이는 같다.

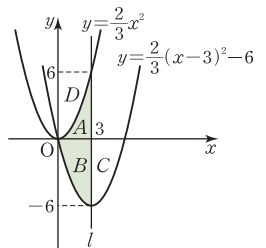
또 $y=\frac{2}{3}(x-3)^2-6$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼,

y 축의 방향으로 6만큼 평행이동하면 $y=\frac{2}{3}x^2$ 의 그래프와 포

개어지므로 C와 D의 넓이는 같다.

따라서 B와 D의 넓이가 같으므로 구하는 넓이는 A와 D의 넓이의 합과 같다.

$$\therefore 3 \times 6 = 18$$



- 07 $y=-2(x+3)^2+1$ 의 그래프를 직

선 $y=-2$ 에 대하여 대칭이동한 그

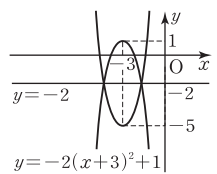
래프의 식은 오른쪽 그림과 같이 꼭

짓점의 좌표가 $(-3, -5)$ 이고, 대

칭이동하기 전의 그래프와 폭은 같

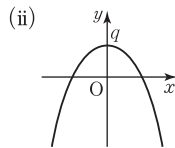
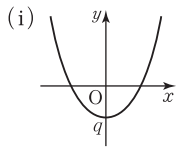
으나 모양은 아래로 볼록하므로

$$y=2(x+3)^2-5 \text{ 이다.}$$



다시 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y=2(x-4+3)^2-5 \quad \therefore y=2(x-1)^2-5$
 이 그래프가 점 $(m, -1)$ 을 지나므로
 $-1=2 \times (m-1)^2-5, 2(m-1)^2=4$
 $(m-1)^2=2 \quad \therefore m=1 \pm \sqrt{2}$
 따라서 모든 실수 m 의 값의 합은
 $(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})=2$

08 $y=ax^2+q$ 의 그래프가 모든 사분면을 지나는 경우는 다음 그림과 같다.



ㄱ. (ii)에서 $a < 0, q > 0$ 인 경우에는 $a-q < 0$ 이다.
 ㄴ. ㄷ. $a+q$ 의 부호는 알 수 없다.
 ㄹ. ㄴ. a 와 q 는 항상 서로 다른 부호를 가지므로 $aq < 0$ 이다.
 ㅁ. $a^2 > 0, \frac{a}{q} < 0$ 이므로 $a^2 - \frac{a}{q} > 0$ 이다.
 따라서 옳은 것은 ㄴ, ㅁ이다.

2 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프

1 주제별 유형 불러오기

111~116쪽

유제 1	④	유제 2	-7	유제 3	①, ⑤	유제 4	$-\frac{7}{4}$
유제 5	④, ⑤	유제 6	제1사분면	유제 7	③		
유제 8	22	유제 9	③				
유제 10	$y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{11}{4}$	유제 11	②				
유제 12	8						

유제 1 $y=-\frac{1}{3}x^2+4x+2a-7=-\frac{1}{3}(x^2-12x)+2a-7$
 $=-\frac{1}{3}(x^2-12x+36-36)+2a-7$
 $=-\frac{1}{3}(x-6)^2+2a+5$
 즉, 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(6, 2a+5)$ 이므로
 $y=-x-5$ 에 $x=6, y=2a+5$ 를 대입하면
 $2a+5=-6-5, 2a=-16 \quad \therefore a=-8$

유제 2 $y=-\frac{1}{4}x^2+x+5=-\frac{1}{4}(x^2-4x)+5$
 $=-\frac{1}{4}(x^2-4x+4-4)+5$
 $=-\frac{1}{4}(x-2)^2+6$
 이므로 이 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y=-\frac{1}{4}(x-3-2)^2+6-4=-\frac{1}{4}(x-5)^2+2$
 이 그래프가 점 $(-1, k)$ 를 지나므로
 $k=-\frac{1}{4} \times (-1-5)^2+2=-7$

유제 3 $y=\frac{1}{3}x^2-2x-9=\frac{1}{3}(x-3)^2-12$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

② y 의 값의 범위는 $y \geq -12$ 이다.

③ $\frac{1}{3}x^2-2x-9=0$ 에서

$$x^2-6x-27=0$$

$$(x+3)(x-9)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=9$$

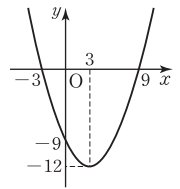
즉, x 축과의 교점의 좌표는 $(-3, 0), (9, 0)$ 이다.

④ $x > 3$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

⑤ $\left|\frac{1}{3}\right| < \left|-\frac{3}{4}\right|$ 이므로 $y=\frac{1}{3}x^2-2x-9$ 의 그래프가

$$y=-\frac{3}{4}x^2 \text{의 그래프보다 폭이 넓다.}$$

따라서 옳은 것은 ①, ⑤이다.



유제 4 $y=2x^2-5x+4=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=2\left(x-k-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{7}{8} \quad \dots \textcircled{1}$$

이 그래프가 $x < -\frac{1}{2}$ 이면 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소하고, $x > -\frac{1}{2}$ 이면 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하므로 축의 방정식은 $x = -\frac{1}{2}$ 이다.

①에서 그래프의 축의 방정식이 $x=k+\frac{5}{4}$ 이므로

$$k+\frac{5}{4}=-\frac{1}{2} \quad \therefore k=-\frac{7}{4}$$

유제 5 그래프가 아래로 볼록하므로 $a > 0$

그래프의 축이 y 축의 오른쪽에 있으므로

$$ab < 0 \quad \therefore b < 0$$

y 축과의 교점이 x 축보다 아래쪽에 있으므로 $c < 0$

① $-b > 0$ 이므로 $a-b > 0$

② $ac < 0$

③ $x=1$ 일 때, $y < 0$ 이므로 $a+b+c < 0$

④ $x=-1$ 일 때, $y=0$ 이므로 $a-b+c=0$

⑤ $x=-2$ 일 때, $y > 0$ 이므로 $4a-2b+c > 0$

따라서 옳은 것은 ④, ⑤이다.

유제 6 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$
그래프의 축이 y 축의 왼쪽에 있으므로

$$ab>0 \quad \therefore b>0$$

y 축과의 교점이 x 축보다 아래쪽에 있으므로 $c<0$

$y=cx^2+bx+a$ 의 그래프는

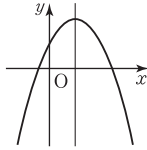
(i) $c<0$ 이므로 위로 볼록하다.

(ii) $bc<0$ 이므로 축은 y 축의 오른쪽에 있다.

(iii) $a>0$ 이므로 y 축과의 교점은 x 축보다 위쪽에 있다.

따라서 (i)~(iii)에 의해

$y=cx^2+bx+a$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 꼭짓점은 제1사분면 위에 있다.



유제 7 $y=\frac{1}{2}x^2+3x-3=\frac{1}{2}(x+3)^2-\frac{15}{2}$ 이므로

꼭짓점의 좌표는 $C(-3, -\frac{15}{2})$ 이다.

$y=\frac{1}{2}x^2+3x-3$ 에 $x=0$ 을 대입하면 $y=-3$

$\therefore D(0, -3)$

이때 $\triangle ACB$ 와 $\triangle ADB$ 의 밑변을 $\overline{AB}$ 라 하면 두 삼각형의 밑변의 길이가 같으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 높이의 비와 같다.

따라서 두 삼각형의 높이의 비가 $\frac{15}{2} : 3 = 5 : 2$ 이므로

$$\triangle ACB : \triangle ADB = 5 : 2$$

유제 8 $y=-x^2-2x+8=-(x+1)^2+9$ 이므로

꼭짓점의 좌표는 $A(-1, 9)$ 이다.

$y=-x^2-2x+8$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$-x^2-2x+8=0, \quad x^2+2x-8=0$$

$$(x+4)(x-2)=0 \quad \therefore x=-4 \text{ 또는 } x=2$$

$\therefore B(-4, 0)$

$y=-x^2-2x+8$ 에 $x=0$ 을 대입하면 $y=8$

$\therefore C(0, 8)$

$$\therefore \square ABOC = \triangle ABO + \triangle AOC$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 9 + \frac{1}{2} \times 8 \times 1 \\ = 18 + 4 = 22$$

유제 9 축의 방정식이 $x=-2$ 이므로 이차함수의 식을

$y=a(x+2)^2+q$ 로 놓을 수 있다.

이 그래프가 점 $(-3, -1)$ 을 지나므로

$$-1=a(-3+2)^2+q \quad \therefore a+q=-1 \quad \dots \textcircled{1}$$

또 점 $(0, 5)$ 를 지나므로

$$5=a(0+2)^2+q \quad \therefore 4a+q=5 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=2, \quad q=-3$$

$$\therefore y=2(x+2)^2-3=2x^2+8x+5$$

따라서 $a=2, b=8, c=5$ 이므로

$$a+b-c=2+8-5=5$$

유제 10 $y=-\frac{1}{2}x^2+x-3=-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{5}{2}$ 이므로

꼭짓점의 좌표는 $(1, -\frac{5}{2})$ 이다.

구하는 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2-\frac{5}{2}$ 로 놓으면

이 그래프가 $(3, -\frac{7}{2})$ 을 지나므로

$$-\frac{7}{2}=a(3-1)^2-\frac{5}{2}, \quad 4a=-1 \quad \therefore a=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore y=-\frac{1}{4}(x-1)^2-\frac{5}{2}=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{11}{4}$$

유제 11 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 점 $(0, -5)$ 를 지나므로 $c=-5$

즉, $y=ax^2+bx-5$ 의 그래프가 점 $(2, 3)$ 을 지나므로

$$3=4a+2b-5 \quad \therefore 2a+b=4 \quad \dots \textcircled{1}$$

또 점 $(6, 1)$ 을 지나므로

$$1=36a+6b-5 \quad \therefore 6a+b=1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=-\frac{3}{4}, \quad b=\frac{11}{2}$$

$$\therefore 4a+2b-c=4 \times \left(-\frac{3}{4}\right) + 2 \times \frac{11}{2} - (-5) = 13$$

유제 12 그래프가 x 축과 두 점 $(-1, 0), (5, 0)$ 에서 만나므로 이차함수의 식을 $f(x)=a(x+1)(x-5)$ 로 놓을 수 있다.

$$\therefore f(x)=a(x+1)(x-5)$$

$$=a(x^2-4x-5)$$

$$=a(x-2)^2-9a$$

이때 꼭짓점 $(2, -9a)$ 가 직선 $y=2x+5$ 위에 있으므로

$$-9a=2 \times 2+5, \quad -9a=9 \quad \therefore a=-1$$

따라서 $f(x)=-x^2+4x+5$ 이므로

$$f(3)=-3^2+4 \times 3+5=8$$

2. 최고 유형 탐험하기

117~118쪽

1 ③

2 ②

3 ⑤

4 ①

5 ④

6 ④

7 ③

1 $y=ax+b$ 의 그래프가 두 점 $(3, 0), (0, -6)$ 을 지나므로

$$a=(\text{기울기})=\frac{-6-0}{0-3}=2, \quad b=(y\text{절편})=-6$$

$$\therefore y=2x^2+6x+5=2(x^2+3x)+5$$

$$=2\left(x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+5$$

$$=2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이다.

- 2 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한

그래프의 식은 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5 + q$

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 5$ 에 $y=0$ 을 대입하면 $0 = -\frac{1}{2}x^2 + 5$

$$\frac{1}{2}x^2 = 5, x^2 = 10 \quad \therefore x = \pm\sqrt{10}$$

따라서 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5 + q$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 좌표는 $(-2\sqrt{10}, 0), (2\sqrt{10}, 0)$ 이다.

이때 점 $(2\sqrt{10}, 0)$ 은 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 5 + q$ 의 그래프 위의 점이므로

$$0 = -\frac{1}{2} \times (2\sqrt{10})^2 + 5 + q \quad \therefore q = 15$$

- 3 주어진 그래프가 $(0, -1)$ 을 지나므로 $b = -1$

꼭짓점의 좌표가 $(k, 7)$ 이므로

$$y = -\frac{1}{2}(x-k)^2 + 7 = -\frac{1}{2}x^2 + kx - \frac{1}{2}k^2 + 7$$

이 그래프가 $y = -\frac{1}{2}x^2 - ax - 1$ 의 그래프와 일치하므로

$$k = -a, -\frac{1}{2}k^2 + 7 = -1$$

$$\text{이때 } -\frac{1}{2}k^2 = -8 \text{이므로 } k^2 = 16 \quad \therefore k = \pm 4$$

그런데 $k < 0$ 이므로 $k = -4, a = 4$

$$\therefore a - b - k = 4 - (-1) - (-4) = 9$$

- 4 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$ 에 $x=0$ 을 대입하면 $y = -6$

$$\therefore A(0, -6)$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 8 \text{이므로}$$

꼭짓점의 좌표는 $B(2, -8)$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 \text{에 } y=0 \text{을 대입하면}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0, x^2 - 4x - 12 = 0, (x+2)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 6 \quad \therefore C(6, 0)$$

$$\therefore \triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OBC - \triangle OAC$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 2 + \frac{1}{2} \times 6 \times 8 - \frac{1}{2} \times 6 \times 6$$

$$= 6 + 24 - 18 = 12$$

- 5 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프에서

$$a < 0, b > 0, c \leq 0$$

이때 $y = cx^2 - bx - a$ 가 이차함수이므로 $c \neq 0$

$$\therefore a < 0, b > 0, c < 0$$

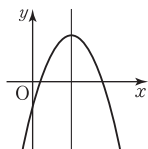
$y = cx^2 - bx - a$ 의 그래프는

(i) $c < 0$ 이므로 위로 볼록하다.

(ii) $-bc > 0$ 이므로 축은 y 축의 왼쪽에 있다.

(iii) $-a > 0$ 이므로 y 축과의 교점은 x 축보다 위쪽에 있다.

따라서 (i)~(iii)에 의해 $y = cx^2 - bx - a$ 의 그래프로 적당한 것은 ④이다.



- 6 축의 방정식이 $x = -2$ 이므로 이차함수의 식을 $y = a(x+2)^2 + q$ 로 놓을 수 있다.

이 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3 = 4a + q \quad \cdots \textcircled{1}$$

또 점 $(-3, -6)$ 을 지나므로

$$-6 = a + q \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 3, q = -9$

즉, $y = 3(x+2)^2 - 9$ 이므로

$$A(-2, -9)$$

$y = 3(x+2)^2 - 9$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$0 = 3(x+2)^2 - 9 \text{에서 } (x+2)^2 = 3$$

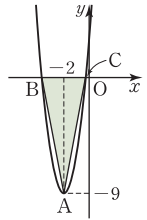
$$x+2 = \pm\sqrt{3} \quad \therefore x = -2 \pm \sqrt{3}$$

따라서 이차함수의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 좌표는

$$(-2-\sqrt{3}, 0), (-2+\sqrt{3}, 0) \text{이므로}$$

$$\overline{BC} = (-2+\sqrt{3}) - (-2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 9 = 9\sqrt{3}$$



- 7 y 는 x 의 제곱에 정비례하므로 $y = ax^2$ (a 는 상수)으로 놓을 수 있다.

$y = ax^2$ 에 $x=16, y=2$ 를 대입하면

$$2 = a \times 16^2 \quad \therefore a = \frac{1}{128}$$

즉, $y = \frac{1}{128}x^2$ 이므로 시속 80 km로 달리는 자동차의 제동

$$\text{거리는 } \frac{1}{128} \times 80^2 = 50 \text{ (m)}$$

이때 운전자가 시속 80 km로 운전하다가 위험을 감지하고 브레이크를 밟을 때까지 1초 동안 자동차가 움직인 거리는

$$0.28 \times 80 \times 1 = 22.4 \text{ (m)}$$

따라서 운전자가 위험을 감지한 후부터 자동차가 완전히 멈출 때까지 자동차가 움직인 거리는

$$50 + 22.4 = 72.4 \text{ (m)}$$

3 최고 유형 정복하기

119~120쪽

01 26

02 $\frac{7}{36}$

03 1, 4, 9

04 $D(-3, 6)$

05 $\angle, \geq, \square$

06 $P(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$

07 8

08 $g(x) = x^2 - 3x + 2$

- 01 $y = x^2 + 2ax + b$ 의 그래프가 점 $(-2, 5)$ 를 지나므로

$$5 = 4 - 4a + b \quad \therefore b = 4a + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$y = x^2 + 2ax + b = (x+a)^2 - a^2 + b \text{이므로}$$

꼭짓점의 좌표는 $(-a, -a^2 + b)$ 이다.

이때 꼭짓점이 직선 $y = x + 1$ 위의 점이므로

$$-a^2 + b = -a + 1 \quad \therefore b = a^2 - a + 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

㉔에 ㉑을 대입하면 $4a+1=a^2-a+1$

$$a^2-5a=0, a(a-5)=0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=5$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $a=5$

㉑에 $a=5$ 를 대입하면

$$b=4a+1=4 \times 5+1=21$$

$$\therefore a+b=5+21=26$$

02 $y=x^2-6x+3a+b=(x-3)^2+3a+b-9$ 이므로

꼭짓점의 좌표는 $(3, 3a+b-9)$ 이다.

이때 꼭짓점이 제4사분면 위에 있으려면 $3a+b-9 < 0$, 즉 $3a+b < 9$ 이어야 한다.

따라서 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$ 이고,

$3a+b < 9$ 가 되는 경우를 순서쌍 (a, b) 로 나타내면

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2)$

의 7가지이므로 구하는 확률은 $\frac{7}{36}$

03 $y=x^2+4x+4=(x+2)^2$ 이므로 y 축의 방향으로 $-q$ 만큼 평행이동한 그래프는 직선 $x=-2$ 에 대하여 대칭이다.

이때 직선 $x=-2$ 를 축으로 하고, x 축과 만나는 두 점의 x 좌표가 모두 정수인 점의 좌표를 구하면 다음과 같다.

(i) 두 점의 좌표가 $(-3, 0), (-1, 0)$ 일 때

$$y=(x+3)(x+1)=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$$

(ii) 두 점의 좌표가 $(-4, 0), (0, 0)$ 일 때

$$y=x(x+4)=x^2+4x=(x+2)^2-4$$

(iii) 두 점의 좌표가 $(-5, 0), (1, 0)$ 일 때

$$y=(x+5)(x-1)=x^2+4x-5=(x+2)^2-9$$

(iv) 두 점의 좌표가 $(-6, 0), (2, 0)$ 일 때

$$y=(x+6)(x-2)=x^2+4x-12=(x+2)^2-16$$

따라서 (i)~(iv)에 의해 q 의 값이 될 수 있는 한 자리의 자연수는 1, 4, 9이다.

04 $y=\frac{1}{3}x^2+x-6$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$\frac{1}{3}x^2+x-6=0, x^2+3x-18=0$$

$$(x+6)(x-3)=0 \quad \therefore x=-6 \text{ 또는 } x=3$$

$$\therefore A(-6, 0), C(3, 0)$$

$y=\frac{1}{3}x^2+x-6$ 에 $x=0$ 을 대입하면 $y=-6$

$$\therefore B(0, -6)$$

이때 $\square ABCD$ 가 평행사변형이므로

$D(a, b)$ 라 하면

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{에서 } \frac{-6-0}{0-(-6)} = \frac{b-0}{a-3}$$

$$\therefore a+b=3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\overline{AD} \parallel \overline{BC} \text{에서 } \frac{b-0}{a-(-6)} = \frac{0-(-6)}{3-0}$$

$$\therefore 2a-b=-12 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-3, b=6$

$$\therefore D(-3, 6)$$

05 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그래프가 위로 볼록하므로 $a < 0$

그래프의 축이 y 축의 왼쪽에 있으므로

$$ab > 0 \quad \therefore b < 0$$

y 축과의 교점이 x 축보다 위쪽에 있으므로 $c > 0$

$$\neg, abc > 0$$

$$\neg, 2a+b < 0$$

$$\neg, x=1 \text{ 일 때, } y < 0 \text{ 이므로 } a+b+c < 0$$

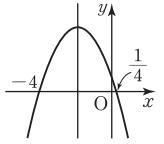
$$\neg, x=-3 \text{ 일 때, } y > 0 \text{ 이므로 } 9a-3b+c > 0$$

$$\neg, x=\frac{1}{2} \text{ 일 때, } y < 0 \text{ 이므로 } \frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c < 0$$

양변에 4를 곱하면 $a+2b+4c < 0$

$$\neg, -ac > 0 \text{ 이므로 } b^2-4ac > 0$$

따라서 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.



06 $y=-x^2-4x+5=-(x+2)^2+9$ 이므로

꼭짓점 A의 좌표는 $(-2, 9)$ 이다.

$y=-x^2-4x+5$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$-x^2-4x+5=0, x^2+4x-5=0$$

$$(x+5)(x-1)=0 \quad \therefore x=-5 \text{ 또는 } x=1$$

$$\therefore B(-5, 0), C(1, 0)$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$$

이때 직선 l 이 $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하므로

$$\triangle PBC = \frac{1}{2} \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 27 = \frac{27}{2}$$

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\triangle PBC = \frac{1}{2} \times 6 \times b = \frac{27}{2} \quad \therefore b = \frac{9}{2}$$

$$\therefore P\left(a, \frac{9}{2}\right)$$

한편, 두 점 $A(-2, 9), C(1, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y=-3x+3 \text{ 이고, 점 } P\left(a, \frac{9}{2}\right) \text{가 이 직선 위의 점이므로}$$

$$\frac{9}{2} = -3a+3, -3a = \frac{3}{2} \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore P\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

07 $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$ 이므로

꼭짓점의 좌표는 $A(1, 4)$ 이다.

$$y=-x^2+6x-5=-(x-3)^2+4 \text{ 이므로}$$

꼭짓점의 좌표는 $D(3, 4)$ 이다.

$y=-x^2+2x+3$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$-x^2+2x+3=0, x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

$$\therefore B(-1, 0)$$

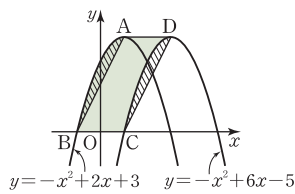
$y=-x^2+6x-5$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$-x^2+6x-5=0, x^2-6x+5=0$$

$$(x-1)(x-5)=0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=5$$

$$\therefore C(1, 0)$$

이때 $y = -x^2 + 6x - 5$ 의 그래프는 $y = -x^2 + 2x + 3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같다.



즉, 오른쪽 그림과 같이

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 를 그으면 빗금 친 부분의 넓이는 서로 같으므로 색칠한 부분의 넓이는 $\square ABCD$ 의 넓이와 같다.

따라서 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 이고, $\overline{AD} = \overline{BC} = 2$ 이므로 $\square ABCD$ 는 평행사변형이다.

$\therefore \square ABCD = 2 \times 4 = 8$

- 08** 이차함수 $y=f(x)$ 는 x^2 의 계수가 1이고, x 축과 두 점 $(2, 0)$, $(5, 0)$ 에서 만나므로

$$f(x) = (x-2)(x-5) = x^2 - 7x + 10$$

$y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 x^2 의 계수가 모두 1이므로 이차함수

$y=f(x)+g(x)$ 의 x^2 의 계수는 2이고, 그래프의 꼭짓점의

좌표가 $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ 이므로

$$f(x)+g(x) = 2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 2x^2 - 10x + 12$$

$$\therefore g(x) = f(x) + g(x) - f(x)$$

$$= (2x^2 - 10x + 12) - (x^2 - 7x + 10)$$

$$= x^2 - 3x + 2$$

따라서 $f(x) = -4x^2 - 8x - 2$ 이므로

$$f(-1) = -4 \times (-1)^2 - 8 \times (-1) - 2 = 2$$

$$\therefore f(f(-1)) = f(2) = -4 \times 2^2 - 8 \times 2 - 2 = -34$$

- 02** 점 P의 좌표를 $(a, \frac{1}{3}a^2)$ 이라 하면

$$\triangle PAB = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2 \text{이므로}$$

$$\frac{2}{3}a^2 = 6 \text{에서 } a^2 = 9 \quad \therefore a = \pm 3$$

그런데 점 P가 제2사분면 위의 점이므로 $a = -3$

$P(-3, 3)$

- 03** 두 그래프의 교점인 점 B와 점 C의 x 좌표를 구하면

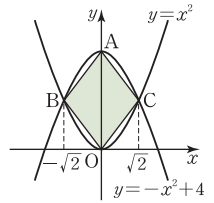
$$x^2 = -x^2 + 4 \text{에서 } 2x^2 = 4$$

$$x^2 = 2 \quad \therefore x = \pm\sqrt{2}$$

따라서 $\overline{OA} = 4$, $\overline{BC} = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$\square ABOC = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{BC}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$



- 04** x^2 의 계수의 절댓값이 클수록 그래프의 폭이 좁다.

$y = 6(x-2)^2$ 의 그래프의 폭이 $y = a(x-2)^2$ 의 그래프의 폭보다 좁으므로

$$0 < |a| < 6 \quad \therefore 0 < a < 6$$

$y = b(x+1)^2$ 의 그래프의 폭이 $y = -\frac{4}{3}(x+1)^2$ 의 그래프의 폭보다 좁으므로

$$\left| -\frac{4}{3} \right| < |b|$$

그런데 $b < 0$ 이므로 $b < -\frac{4}{3}$

- 05** $y = -2(x-p)^2 + 3p^2$ 의 그래프의 꼭짓점 $(p, 3p^2)$ 이 제2사분면 위에 있으므로 $p < 0$

이 그래프가 점 $(-1, 10)$ 을 지나므로

$$10 = -2(-1-p)^2 + 3p^2, p^2 - 4p - 12 = 0$$

$$(p+2)(p-6) = 0 \quad \therefore p = -2 \text{ 또는 } p = 6$$

그런데 $p < 0$ 이므로 $p = -2$

- 06** $y = a(x-3)^2 - 12$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(3, -12)$ 이므로 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 아래로 볼록해야 한다.

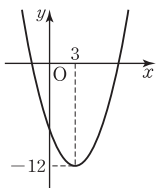
$$\therefore a > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

또 y 축과의 교점은 x 축보다 아래쪽에 있어야 하므로

$$a(0-3)^2 - 12 < 0, 9a < 12$$

$$\therefore a < \frac{4}{3} \quad \cdots \textcircled{2}$$

따라서 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에 의해 k 의 값이 될 수 있는 것은 $\textcircled{3}$ 이다.



대단원 마무리하기

121~124쪽

- 01** ⑤ **02** $P(-3, 3)$ **03** ① **04** ①
05 -2 **06** ③ **07** ④ **08** $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
09 $\frac{23}{2}$ **10** $(1, 0)$ **11** ③ **12** 3 : 5
13 ③ **14** ② **15** $(3, 1), (3, -1)$
16 256 **17** 27 **18** $\frac{1}{16} < a < 1$
19 3

서술형 문제 (과정은 풀이 참조)

- 20** 2, 8 **21** 1 **22** $a=4, b=-8$
23 $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

- 01** $f(0) = c = -2$

$$f(1) = a + b + c = -14 \text{이므로 } a + b = -12 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(-3) = 9a - 3b + c = -14 \text{이므로 } 3a - b = -4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -4, b = -8$

- 07 $y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프를 x 축 대하여 대칭이동하면
 $-y=a(x-p)^2+q$
 즉, $y=-a(x-p)^2-q$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가
 $(3, -5)$ 이므로 $p=3, q=5$
 따라서 $y=a(x-3)^2+5$ 의 그래프가 점 $(1, -3)$ 을 지나므로
 $-3=a(1-3)^2+5, 4a=-8 \quad \therefore a=-2$
 $\therefore a+p+q=-2+3+5=6$

- 08 $y=-2x^2+2kx+3k-2$
 $=-2(x^2-kx)+3k-2$
 $=-2\left(x^2-kx+\frac{k^2}{4}-\frac{k^2}{4}\right)+3k-2$
 $=-2\left(x-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{k^2}{2}+3k-2 \quad \dots \textcircled{1}$
 이 그래프가 $x<\frac{1}{2}$ 이면 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가
 하고, $x>\frac{1}{2}$ 이면 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소하므로
 축의 방정식은 $x=\frac{1}{2}$ 이다.

①에서 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{k}{2}$ 이므로

$$\frac{k}{2}=\frac{1}{2} \quad \therefore k=1$$

$$\text{즉, } y=-2x^2+2x+1=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2} \text{이므로}$$

이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 이다.

- 09 $y=4x^2+8x+1=4(x+1)^2-3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로
 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y=4(x-a+1)^2-3+b \quad \dots \textcircled{1}$

이때 ①의 그래프가 $y=4x^2-12x-3=4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-12$ 의
 그래프와 일치하므로

$$-a+1=-\frac{3}{2} \text{에서 } a=\frac{5}{2}$$

$$-3+b=-12 \text{에서 } b=-9$$

$$\therefore a-b=\frac{5}{2}-(-9)=\frac{23}{2}$$

[다른 풀이]

꼭짓점의 평행이동을 이용하면

$$(a-1, -3+b)=\left(\frac{3}{2}, -12\right)$$

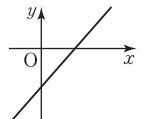
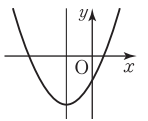
$$\text{즉, } a-1=\frac{3}{2}, -3+b=-12 \text{이므로}$$

$$a=\frac{5}{2}, b=-9$$

- 10 $y=-x(x-2)=-(x-1)^2+1$ 의 그래프를 꼭짓점을 중심
 으로 180° 만큼 회전시킨 그래프의 식은
 $y=(x-1)^2+1$
 다시 그래프의 축을 따라 k 만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y=(x-1)^2+1+k \quad \dots \textcircled{1}$

이때 ①의 그래프가 점 $(3, 4)$ 를 지나므로
 $4=(3-1)^2+1+k, 5+k=4 \quad \therefore k=-1$
 $\therefore y=(x-1)^2$
 따라서 꼭짓점의 좌표는 $(1, 0)$ 이다.

- 11 그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$
 그래프의 축이 y 축의 오른쪽에 있으므로
 $ab<0 \quad \therefore b>0$
 y 축과의 교점이 x 축보다 위쪽에 있으므로 $c>0$
 ① $abc<0$
 ② $x=-1$ 일 때, $y<0$ 이므로 $a-b+c<0$
 ③ 꼭짓점의 x 좌표가 $-\frac{b}{2a}$ 이고, $-\frac{b}{2a}>1$ 에서 $a<0$ 이므로
 $-b<2a \quad \therefore 2a+b>0$
 ④ $y=bx^2+cx+a$ 의 그래프는 오른쪽 그림
 과 같으므로 꼭짓점은 제3사분면 위에
 있다.
 ⑤ $-a>0, -b<0$ 이므로 $y=-ax-b$ 의
 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제2사분면
 을 지나지 않는다.
 따라서 옳은 것은 ③이다.



- 12 $y=\frac{1}{2}x^2-4 \quad \dots \textcircled{1}$

$$2x-2y+7=0 \text{에서 } y=x+\frac{7}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

①과 ②의 그래프의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{2}x^2-4=x+\frac{7}{2} \text{에서 } x^2-8=2x+7, x^2-2x-15=0$$

$$(x+3)(x-5)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=5$$

즉, 두 점 A, B의 x 좌표는 각각 $-3, 5$ 이다.

이때 $\triangle ACD$ 와 $\triangle BDC$ 의 밑변을 $\overline{CD}$ 라 하면 두 삼각형의
 밑변의 길이가 같으므로 두 삼각형의 넓이의 비는 높이의 비
 와 같다.

따라서 두 삼각형의 높이의 비가 $3:5$ 이므로

$$\triangle ACD : \triangle BDC = 3 : 5$$

- 13 축의 방정식이 $x=-4$ 이므로 이차함수의 식을

$$y=a(x+4)^2+q \text{로 놓을 수 있다.}$$

이 그래프가 점 $(-2, 5)$ 를 지나므로

$$5=a(-2+4)^2+q \quad \therefore 4a+q=5 \quad \dots \textcircled{1}$$

또 점 $(0, 11)$ 을 지나므로

$$11=a(0+4)^2+q \quad \therefore 16a+q=11 \quad \dots \textcircled{2}$$

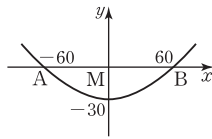
$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=\frac{1}{2}, q=3$$

따라서 $y=\frac{1}{2}(x+4)^2+3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만

큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(x-2+4)^2+3-3 = \frac{1}{2}(x+2)^2 \\ &= \frac{1}{2}(x^2+4x+4) = \frac{1}{2}x^2+2x+2 \end{aligned}$$

- 14 오른쪽 그림과 같이 점 M을 원점으로 하는 좌표평면 위에 포물선을 놓으면 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식은 $y=ax^2-30$ (a 는 상수)으로 놓을 수 있다.



B 지점의 좌표는 (60, 0)이므로

$$0 = a \times 60^2 - 30, \quad 3600a = 30 \quad \therefore a = \frac{1}{120}$$

즉, $y = \frac{1}{120}x^2 - 30$ 에 $x=30$ 을 대입하면

$$y = \frac{1}{120} \times 30^2 - 30 = -\frac{45}{2} = -22.5$$

따라서 구하는 수심은 22.5 m이다.

- 15 $f(x)=5x^2$ 이므로

$$\begin{aligned} f(a)-f(b) &= 5a^2-5b^2=5(a^2-b^2) \\ &= 5(a+b)(a-b)=40 \end{aligned}$$

즉, $(a+b)(a-b)=8$ 이고, a, b 는 $a>b$ 인 정수이므로 $a-b>0$ 이다.

$$(i) \begin{cases} a+b=8 \\ a-b=1 \end{cases} \quad \therefore a=\frac{9}{2}, b=\frac{7}{2}$$

$$(ii) \begin{cases} a+b=4 \\ a-b=2 \end{cases} \quad \therefore a=3, b=1$$

$$(iii) \begin{cases} a+b=2 \\ a-b=4 \end{cases} \quad \therefore a=3, b=-1$$

$$(iv) \begin{cases} a+b=1 \\ a-b=8 \end{cases} \quad \therefore a=\frac{9}{2}, b=-\frac{7}{2}$$

따라서 (i)~(iv)에 의해 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 $(3, 1), (3, -1)$ 이다.

- 16 점 D의 좌표를 $(-a, 0)$ ($a>0$)이라 하면

$$C(a, 0), B\left(a, -\frac{1}{4}a^2\right), A\left(-a, -\frac{1}{4}a^2\right)$$

따라서 $\overline{CD}=2a, \overline{AD}=\frac{1}{4}a^2$ 이고, $\overline{CD}=\overline{AD}$ 이므로

$$2a = \frac{1}{4}a^2, \quad 8a = a^2, \quad a^2-8a=0$$

$$a(a-8)=0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } a=8$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=8$

$$\therefore \square ABCD = (2a)^2 = 4a^2 = 4 \times 8^2 = 256$$

- 17 $y=x^2+c$ 의 그래프의 꼭짓점의 y 좌표가 -9 이므로

$$c=-9$$

$y=a(x-b)^2$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(3, 0)$ 이므로 $b=3$

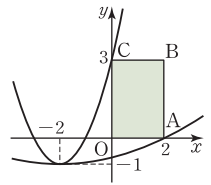
이때 $y=a(x-3)^2$ 의 그래프가 점 $(0, -9)$ 를 지나므로

$$-9=9a \quad \therefore a=-1$$

$$\therefore abc = (-1) \times 3 \times (-9) = 27$$

- 18 이차함수 $y=a(x+2)^2-1$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, -1)$ 이다.

즉, 이차함수 $y=a(x+2)^2-1$ 의 그래프와 직사각형 OABC가 서로 다른 두 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 아래로 볼록한 포물선이고, 두 점 A와 C 사이를 지나야 한다.



(i) 점 A(2, 0)을 지나는 경우

$$0 = a(2+2)^2 - 1, \quad 16a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{16}$$

(ii) 점 C(0, 3)을 지나는 경우

$$3 = a(0+2)^2 - 1, \quad 4a = 4 \quad \therefore a = 1$$

따라서 (i), (ii)에 의해 구하는 a 의 값의 범위는 $\frac{1}{16} < a < 1$

- 19 $y=-x^2+2ax-a^2+9=-(x-a)^2+9$ 이므로

꼭짓점의 좌표는 A(a, 9)

$y=-x^2+2ax-a^2+9$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$y=-a^2+9 \quad \therefore B(0, -a^2+9)$$

$y=-x^2+2ax-a^2+9$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$-x^2+2ax-a^2+9=0, \quad x^2-2ax+a^2-9=0$$

$$x^2-2ax+(a+3)(a-3)=0$$

$$\{x-(a-3)\}\{x-(a+3)\}=0$$

$$\therefore x=a-3 \text{ 또는 } x=a+3$$

$$\therefore C(a-3, 0), D(a+3, 0)$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle BCO + \triangle ABO + \triangle AOD$$

$$= \frac{1}{2} \times (-a+3) \times (-a^2+9)$$

$$+ \frac{1}{2} \times (-a^2+9) \times a + \frac{1}{2} \times (a+3) \times 9$$

$$= \frac{1}{2}(-3a^2+9a+54)$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2}(-3a^2+9a+54)=30 \text{이므로 } a^2-3a+2=0$$

$$(a-1)(a-2)=0 \quad \therefore a=1 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$1+2=3$$

- 20 $\overline{PQ}=3$ 이므로 점 Q의 x 좌표는 3

$y=ax^2$ 에 $x=3$ 을 대입하면 $y=9a$

$$\therefore Q(3, 9a) \quad \dots \textcircled{i}$$

$$\overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{QR} = 3 + (a+1) = a+4 \text{이므로}$$

점 R의 x 좌표는 $a+4$

$$y = \frac{1}{2}x^2 \text{에 } x=a+4 \text{를 대입하면 } y = \frac{1}{2}(a+4)^2$$

$$\therefore R\left(a+4, \frac{1}{2}(a+4)^2\right) \quad \dots \textcircled{ii}$$

이때 점 Q와 점 R의 y 좌표가 서로 같으므로

$$9a = \frac{1}{2}(a+4)^2, \quad a^2-10a+16=0$$

$$(a-2)(a-8)=0 \quad \therefore a=2 \text{ 또는 } a=8 \quad \dots \textcircled{iii}$$

채점 요소	비율
① 점 Q의 좌표 구하기	30 %
② 점 R의 좌표 구하기	30 %
③ a 의 값 모두 구하기	40 %

- 21 $y = -x^2 + 3$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이므로

$$B(-m, 0)$$

$$\therefore \overline{BC} = m + m = 2m$$

... ①

점 D는 $y = -x^2 + 3$ 의 그래프 위의 점이므로

$$D(m, -m^2 + 3)$$

$$\therefore \overline{CD} = -m^2 + 3$$

... ②

이때 $\square ABCD$ 가 정사각형이 되려면 $\overline{BC} = \overline{CD}$ 이어야 하므로

$$2m = -m^2 + 3, m^2 + 2m - 3 = 0$$

$$(m+3)(m-1) = 0 \quad \therefore m = -3 \text{ 또는 } m = 1$$

그런데 $m > 0$ 이므로 $m = 1$

... ③

채점 요소	비율
① $\overline{BC}$ 의 길이를 m 에 대한 식으로 나타내기	30 %
② $\overline{CD}$ 의 길이를 m 에 대한 식으로 나타내기	30 %
③ m 의 값 구하기	40 %

- 22 $y = 2x^2 + ax - 3$

$$= 2\left(x^2 + \frac{a}{2}x\right) - 3$$

$$= 2\left(x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{a^2}{16} - \frac{a^2}{16}\right) - 3$$

$$= 2\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} - 3$$

$$\text{이므로 꼭짓점의 좌표는 } \left(-\frac{a}{4}, -\frac{a^2}{8} - 3\right)$$

... ①

$$y = -3x^2 - 6x + b$$

$$= -3(x^2 + 2x) + b$$

$$= -3(x^2 + 2x + 1 - 1) + b$$

$$= -3(x+1)^2 + 3 + b$$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, b+3)$

... ②

이때 두 꼭짓점의 좌표가 서로 같으므로

$$-\frac{a}{4} = -1, -\frac{a^2}{8} - 3 = b + 3$$

... ③

따라서 $a = 4$ 이므로

$$-\frac{a^2}{8} - 3 = b + 3 \text{에서 } -\frac{4^2}{8} - 3 = b + 3$$

$$b + 3 = -5 \quad \therefore b = -8$$

... ④

채점 요소	비율
① $y = 2x^2 + ax - 3$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표 구하기	30 %
② $y = -3x^2 - 6x + b$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표 구하기	30 %
③ 두 그래프의 꼭짓점의 좌표가 서로 같음을 이용하여 식 세우기	20 %
④ a, b 의 값 구하기	20 %

- 23 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-3, 5)$ 이므로 이차함수의 식을 $y = a(x+3)^2 + 5$ 로 놓을 수 있다. ... ①

이 그래프가 점 $(-5, 1)$ 을 지나므로

$$1 = a(-5+3)^2 + 5, 4a = -4$$

$$\therefore a = -1$$

... ②

$$\therefore y = -(x+3)^2 + 5 = -x^2 - 6x - 4$$

$$\therefore b = -6, c = -4$$

... ③

즉, $y = bx^2 + cx + a = -6x^2 - 4x - 1$ 이므로

$$y = -6x^2 - 4x - 1 = -6\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) - 1$$

$$= -6\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) - 1$$

$$= -6\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$$

따라서 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ 이다. ... ④

채점 요소	비율
① 이차함수의 식을 $y = a(x-p)^2 + q$ 꼴로 나타내기	30 %
② a 의 값 구하기	20 %
③ b, c 의 값 구하기	20 %
④ $y = bx^2 + cx + a$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표 구하기	30 %

Lined area for writing the memo content.

Handwriting practice lines on a memo page. The page features a light green background with a white header area containing the text "M·E·M·O". Below the header, the page is filled with horizontal dashed lines for writing. The top-left and bottom-right corners of the page are rounded, while the top-right and bottom-left corners are sharp.