

최고특전 유학

정답과 해설

정답과 해설

I. 삼각비

1 삼각비

1 주제별 유형 불러오기

7~13쪽

유제 1 ②	유제 2 $\frac{\sqrt{6}}{3}$	유제 3 ②	유제 4 $\frac{3\sqrt{34}}{34}$
유제 5 ②	유제 6 -2	유제 7 $\frac{12}{5}$	유제 8 ③
유제 9 $\frac{15}{17}$	유제 10 ③	유제 11 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 0	
유제 12 ②	유제 13 $2-\sqrt{3}$	유제 14 ③	유제 15 $\sqrt{2}$

유제 1 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{BC} = \sqrt{(4\sqrt{13})^2 - 8^2} = 12$ 이므로
 $\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$
 $\triangle ABD$ 에서 $\overline{AD} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$
 $\therefore \sin x = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

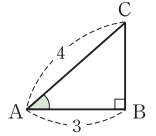
유제 2 $\triangle EFG$ 에서 $\overline{EG} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$
 이때 $\triangle CEG$ 는 $\angle CGE = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로
 $\overline{CE} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 4^2} = 4\sqrt{3}$
 $\therefore \cos x = \frac{\overline{EG}}{\overline{CE}} = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

유제 3 $\cos B = \frac{6}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 에서 $\overline{AB} = 9\sqrt{2}$
 $\therefore \overline{AC} = \sqrt{(9\sqrt{2})^2 - 6^2} = 3\sqrt{14}$
 따라서 $\tan A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{6}{3\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$,
 $\sin B = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{3\sqrt{14}}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ 이므로
 $\tan A \times \sin B = \frac{\sqrt{14}}{7} \times \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

유제 4 $\tan B = \frac{10}{\overline{BC}} = \frac{5}{4}$ 에서 $\overline{BC} = 8$
 $\therefore \overline{CD} = \frac{3}{4}\overline{BC} = \frac{3}{4} \times 8 = 6$
 $\triangle ADC$ 에서 $\overline{AD} = \sqrt{6^2 + 10^2} = 2\sqrt{34}$
 $\therefore \sin x = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{6}{2\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$

유제 5 $16x^2 - 24x + 9 = 0$ 에서 $(4x - 3)^2 = 0 \quad \therefore x = \frac{3}{4}$

즉, $\cos A = \frac{3}{4}$ 이므로 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC 를 생각할 수 있다.
 이때 $\overline{BC} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$ 이므로
 $\sin A = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan A = \frac{\sqrt{7}}{3}$
 $\therefore \sin A \times \tan A = \frac{\sqrt{7}}{4} \times \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{7}{12}$



유제 6 $3 \tan A - 1 = 0$ 에서 $\tan A = \frac{1}{3}$

이므로 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC 를 생각할 수 있다.

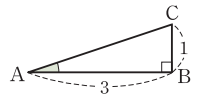
이때 $\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ 이므로

$$\sin A = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos A = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore \frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A} = \left(\frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{3\sqrt{10}}{10} \right) \div \left(\frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{3\sqrt{10}}{10} \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{10}}{5} \div \left(-\frac{\sqrt{10}}{5} \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{10}}{5} \times \left(-\frac{5}{\sqrt{10}} \right) = -2$$



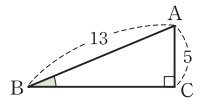
유제 7 $\triangle ABC$ 에서 $\angle C = 90^\circ$ 이므로 $\angle A + \angle B = 90^\circ$

$$\therefore \sin(90^\circ - A) = \sin B = \frac{5}{13}$$

따라서 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC 를 생각할 수 있다.

이때 $\overline{BC} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ 이므로

$$\tan A = \frac{12}{5}$$



유제 8 $\triangle ABD \sim \triangle HAD$ (AA 닮음)

이므로 $\angle ABD = \angle HAD = x$

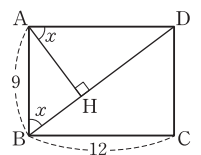
$\triangle ABD$ 에서

$$\overline{BD} = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 \text{이므로}$$

$$\sin x = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\cos x = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \sin x + \cos x = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$



유제 9 $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ (AA 닮음)이므로

$$\angle ABC = \angle EDC = x$$

$\triangle ABC$ 에서 $\overline{BC} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ 이므로

$$\cos x = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{8}{17}, \tan x = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{15}{8}$$

$$\therefore \cos x \times \tan x = \frac{8}{17} \times \frac{15}{8} = \frac{15}{17}$$

유제 10 $\frac{\tan 30^\circ}{\cos 30^\circ} \times (\sin 60^\circ + \sqrt{2} \sin 45^\circ - 2 \cos 60^\circ)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \times \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - 1 \right)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

① $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ② $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

④ $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

따라서 주어진 식의 값과 같은 것은 ③이다.

유제 11 (1) $0^\circ < x < 30^\circ$ 에서 $0^\circ < 2x < 60^\circ$

$$\therefore 30^\circ < 2x + 30^\circ < 90^\circ$$

이때 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ 이므로 $2x + 30^\circ = 60^\circ$

$$2x = 30^\circ \quad \therefore x = 15^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan 3x - \sin(x + 15^\circ) &= \tan 45^\circ - \sin 30^\circ \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2) $5^\circ < x < 35^\circ$ 에서 $15^\circ < 3x < 105^\circ$

$$\therefore 0^\circ < 3x - 15^\circ < 90^\circ$$

이때 $\tan 45^\circ = 1$ 이므로 $3x - 15^\circ = 45^\circ$

$$3x = 60^\circ \quad \therefore x = 20^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin 3x - \cos(x + 10^\circ) &= \sin 60^\circ - \cos 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{aligned}$$

유제 12 $\triangle ADC$ 에서 $\tan 45^\circ = \frac{\overline{AC}}{3\sqrt{3}} = 1 \quad \therefore \overline{AC} = 3\sqrt{3}$

$\triangle ABC$ 에서 $\tan 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \therefore \overline{BC} = 9$

유제 13 $\triangle ADC$ 에서

$$\sin 30^\circ = \frac{2}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$$

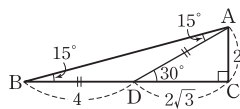
$$\therefore \overline{AD} = 4$$

$$\tan 30^\circ = \frac{2}{\overline{CD}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \therefore \overline{CD} = 2\sqrt{3}$$

이때 $\triangle ABD$ 에서 $15^\circ + \angle BAD = 30^\circ$ 이므로 $\angle BAD = 15^\circ$

즉, $\triangle ABD$ 는 $\overline{BD} = \overline{AD} = 4$ 인 이등변삼각형이므로

$\triangle ABC$ 에서 $\tan 15^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{2}{4 + 2\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$



유제 14 $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ 인 범위에서 x 의 크기가 커지면

$\sin x, \tan x$ ($x \neq 90^\circ$)의 값은 각각 증가하므로

$$\sin 25^\circ < \sin 45^\circ = \cos 45^\circ < 1,$$

$$1 = \tan 45^\circ < \tan 50^\circ < \tan 65^\circ$$

이때 $\cos 0^\circ = 1$ 이므로

$$\sin 25^\circ < \cos 45^\circ < \cos 0^\circ < \tan 50^\circ < \tan 65^\circ$$

따라서 삼각비의 값을 작은 것부터 차례로 나열하면
 $\cos 0^\circ < \sin 25^\circ < \cos 45^\circ < \tan 50^\circ < \tan 65^\circ$ 이다.

유제 15 $45^\circ < x < 90^\circ$ 일 때, $0 < \sin 45^\circ < \sin x < 1$ 이므로

$$\sin x + \sin 45^\circ > 0, \sin 45^\circ - \sin x < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{(\sin x + \sin 45^\circ)^2} - \sqrt{(\sin 45^\circ - \sin x)^2} \\ = (\sin x + \sin 45^\circ) + (\sin 45^\circ - \sin x) \end{aligned}$$

$$= 2 \sin 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

2. 최고 유형 탐험하기

14~16쪽

1 ⑤	2 ③	3 ②	4 ④
5 ⑤	6 ④	7 ②	8 ④
9 ①	10 ⑤	11 ④	12 ④

1 오른쪽 그림과 같이 점 F에서 $\overline{DE}$ 에

내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle DEF = \angle BEF \text{ (접은 각)},$$

$$\angle EFB = \angle DEF \text{ (엇각)}$$

이므로 $\triangle BFE$ 는 이등변삼각형이다.

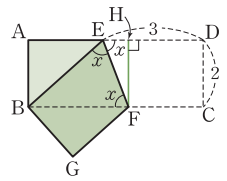
즉, $\overline{BF} = \overline{BE} = \overline{DE} = 3$, $\overline{BG} = \overline{DC} = 2$ 이므로

$$\triangle BGF \text{에서 } \overline{GF} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

이때 $\overline{HD} = \overline{FC} = \overline{GF} = \sqrt{5}$ 이므로

$$\overline{EH} = \overline{ED} - \overline{HD} = 3 - \sqrt{5}$$

따라서 $\triangle EFH$ 에서 $\tan x = \frac{\overline{HF}}{\overline{EH}} = \frac{2}{3 - \sqrt{5}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$



2 오른쪽 그림과 같이 $\overline{DH}$ 의 연장선과

$\overline{BC}$ 의 교점을 M이라 하면

$$\overline{CM} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$$

$\triangle DMC$ 에서

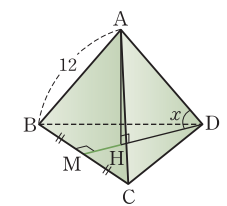
$$\overline{DM} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$$

이때 점 H는 $\triangle BCD$ 의 무게중심이므로

$$\overline{DH} = \frac{2}{3} \overline{DM} = \frac{2}{3} \times 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

따라서 $\triangle AHD$ 에서 $\overline{AH} = \sqrt{12^2 - (4\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{6}$

$$\therefore \tan x = \frac{\overline{AH}}{\overline{DH}} = \frac{4\sqrt{6}}{4\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$



3 $\triangle ABC$ 에서 $\tan B = \frac{\overline{AC}}{4} = \sqrt{5} \quad \therefore \overline{AC} = 4\sqrt{5}$

이때 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{DE} : \overline{BC} = \overline{AE} : \overline{AC} \text{에서}$$

$$\sqrt{5} : 4 = \overline{AE} : 4\sqrt{5}, 4\overline{AE} = 20 \quad \therefore \overline{AE} = 5$$

$$\therefore \overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE} = 4\sqrt{5} - 5$$

- 4 $\triangle ADC$ 에서 $\sin y = \frac{3}{AD} = \frac{1}{3} \quad \therefore AD=9$
 $\therefore AC = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$
 이때 $BC = 3 + 3 = 6$ 이므로
 $\triangle ABC$ 에서 $AB = \sqrt{6^2 + (6\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{3}$
 $\triangle ACD \sim \triangle BED$ (AA 답음)이므로
 $AD : BD = DC : DE$ 에서
 $9 : 3 = 3 : DE, 9DE = 9 \quad \therefore DE = 1$
 $\therefore AE = AD + DE = 9 + 1 = 10$
 따라서 $\triangle ABE$ 에서 $\cos x = \frac{AE}{AB} = \frac{10}{6\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$

- 5 $2 \cos A - 3 = -3 \cos A$ 에서 $5 \cos A = 3$
 $\therefore \cos A = \frac{3}{5}$

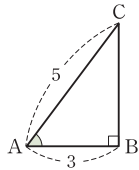
따라서 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC 를 생각할 수 있다.

이때 $BC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ 이므로

$$\tan A = \frac{4}{3}, \cos(90^\circ - A) = \cos C = \frac{4}{5}$$

$$\tan(90^\circ - A) = \tan C = \frac{3}{4}, \sin A = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan A \times \frac{1}{\cos(90^\circ - A)} + \frac{1}{\tan(90^\circ - A)} \times \sin A \\ = \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} + \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{5}{3} + \frac{16}{15} = \frac{41}{15} \end{aligned}$$



- 6 $\triangle ADC$ 에서 $DE^2 = AE \times CE = 6 \times 9 = 54$
 $\therefore DE = 3\sqrt{6}$ ($\because DE > 0$)

$$\triangle EDC$$
에서 $CD = \sqrt{(3\sqrt{6})^2 + 9^2} = 3\sqrt{15}$

이때 $\triangle ADC \sim \triangle BDA$ (AA 답음)이므로

$$\angle ACD = \angle BAD = x$$

$$\triangle EDC$$
에서 $\sin x = \frac{DE}{CD} = \frac{3\sqrt{6}}{3\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

또 $\triangle EDC \sim \triangle DAC$ (AA 답음)이므로

$$\angle EDC = \angle DAC = y$$

$$\triangle EDC$$
에서 $\cos y = \frac{DE}{CD} = \frac{3\sqrt{6}}{3\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

$$\therefore \sin x + \cos y = \frac{\sqrt{10}}{5} + \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

- 7 $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ 에서 $(x - \frac{1}{2})^2 = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{2}$
 즉, $\sin a = \frac{1}{2}$ 이므로 $a = 30^\circ$ ($\because 0^\circ < a < 90^\circ$)
 $\therefore \frac{\sqrt{3} \tan a}{\tan 2a} - 3 \tan a = \frac{\sqrt{3} \tan 30^\circ}{\tan 60^\circ} - 3 \tan 30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}} - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

- 8 $\triangle FAE$ 에서 $\cos 30^\circ = \frac{AE}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore AE = 8\sqrt{3} \text{ (cm)}$
 $\triangle EAD$ 에서 $\cos 30^\circ = \frac{AD}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore AD = 12 \text{ (cm)}$
 $\triangle DAC$ 에서 $\cos 30^\circ = \frac{AC}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore AC = 6\sqrt{3} \text{ (cm)}$
 따라서 $\triangle CAB$ 에서
 $\cos 30^\circ = \frac{AB}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore AB = 9 \text{ (cm)}$
 $\sin 30^\circ = \frac{BC}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \quad \therefore BC = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$
 $\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 9 \times 3\sqrt{3} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$

- 9 $\triangle AEB$ 에서
 $\sin 30^\circ = \frac{4}{AB} = \frac{1}{2} \quad \therefore AB = 8$
 $\tan 30^\circ = \frac{4}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \therefore AE = 4\sqrt{3}$
 $\triangle EAD$ 에서 $AD = DE$ 이므로
 $\angle EAD = \angle AED = 45^\circ$
 $\sin 45^\circ = \frac{DE}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore DE = 2\sqrt{6}$

이때 $\angle AEF = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ 이므로

$$\angle BEF = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

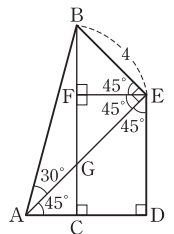
$$\triangle BFE$$
에서 $\sin 45^\circ = \frac{BF}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore BF = 2\sqrt{2}$

즉, $CD = FE = BF = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$AC = AD - CD = DE - CD = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

따라서 $\triangle BAC$ 에서

$$\cos 75^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{2(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{8} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$



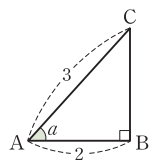
- 10 $\cos a = \frac{2}{3}$ 이므로 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC 를 생각할 수 있다.
 이때 $BC = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ 이므로
 $\tan a = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$mx - 2y + 1 = 0 \text{에서 } 2y = mx + 1$$

$$\therefore y = \frac{m}{2}x + \frac{1}{2}$$

이때 직선의 기울기는 $\tan a$ 의 값과 같으므로

$$\frac{m}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \therefore m = \sqrt{5}$$



- 11 $\triangle AOB$ 에서 $\sin a = \frac{AB}{12} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \therefore AB = 3\sqrt{7}$
 $\therefore OB = \sqrt{12^2 - (3\sqrt{7})^2} = 9$
 이때 $BD = OD - OB = 12 - 9 = 3$ 이므로
 $AE = BD = 3$
 또 $\triangle CAE \sim \triangle AOB$ (AA 답음)이므로
 $AE : OB = CE : AB$ 에서

$$3:9=\overline{CE}:3\sqrt{7}, 9\overline{CE}=9\sqrt{7} \quad \therefore \overline{CE}=\sqrt{7}$$

$$\therefore \triangle CAE=\frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{7}=\frac{3\sqrt{7}}{2}$$

12 $45^\circ < A < 90^\circ$ 일 때, $0 < \cos A < \sin A$ 이므로

$$\sin A + \cos A > 0, \cos A - \sin A < 0$$

$$\therefore \sqrt{(\sin A + \cos A)^2} - \sqrt{(\cos A - \sin A)^2}$$

$$= \sin A + \cos A + (\cos A - \sin A)$$

$$= 2 \cos A$$

$$\text{즉, } 2 \cos A = \frac{6}{7} \text{ 이므로 } \cos A = \frac{3}{7}$$

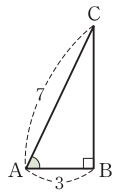
따라서 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC를 생각할 수 있다.

$$\text{이때 } \overline{BC} = \sqrt{7^2 - 3^2} = 2\sqrt{10} \text{ 이므로}$$

$$\cos(90^\circ - A) \times \tan A = \cos C \times \tan A$$

$$= \frac{2\sqrt{10}}{7} \times \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$$= \frac{40}{21}$$



3 최고 유형 정복하기

17~19쪽

01 $\frac{1}{4}$

02 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

03 $\frac{4}{3}$

04 $\frac{5\sqrt{2}}{27}$

05 8

06 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

07 $\frac{77}{15}$

08 $2\sqrt{2}$

09 1

10 $2 - \sqrt{3}$

11 $\frac{1}{3}$

12 OF

01 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형
이므로

$$\angle B = \angle C = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 36^\circ) = 72^\circ$$

이때 $\overline{BD}$ 가 $\angle B$ 의 이등분선이므로

$$\angle DBA = \angle DBC = \frac{1}{2} \times 72^\circ = 36^\circ$$

즉, $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ 는 이등변삼각형이다.

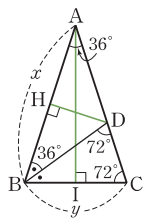
꼭짓점 D에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하고,
 $\overline{AB} = \overline{AC} = x$, $\overline{BC} = \overline{BD} = \overline{AD} = y$ 라 하면

$$\triangle AHD \text{에서 } \cos 36^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{AD}} = \frac{x}{2} \div y = \frac{x}{2y}$$

또 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 I라 하면

$$\triangle ABI \text{에서 } \cos 72^\circ = \frac{\overline{BI}}{\overline{AB}} = \frac{y}{2} \div x = \frac{y}{2x}$$

$$\therefore \cos 36^\circ \times \cos 72^\circ = \frac{x}{2y} \times \frac{y}{2x} = \frac{1}{4}$$



02 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$ 가 내접
하도록 각 변이 모두 x 축 또는 y 축
에 평행한 직사각형을 그린 후 꼭짓
점을 각각 D, E, F라 하면

$\triangle ADB$ 에서

$$\overline{BD} = -1 - (-4) = 3,$$

$$\overline{AD} = 5 - (-1) = 6 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$$

$\triangle BEC$ 에서

$$\overline{BE} = 2 - (-1) = 3, \overline{CE} = 3 - (-1) = 4 \text{ 이므로}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$\triangle ACF$ 에서

$$\overline{AF} = 2 - (-4) = 6, \overline{CF} = 5 - 3 = 2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$$

$\triangle ABC$ 의 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\triangle ABH \text{에서 } \overline{AH}^2 = (3\sqrt{5})^2 - (5 - \overline{CH})^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

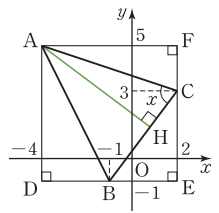
$$\triangle AHC \text{에서 } \overline{AH}^2 = (2\sqrt{10})^2 - \overline{CH}^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } (3\sqrt{5})^2 - (5 - \overline{CH})^2 = (2\sqrt{10})^2 - \overline{CH}^2$$

$$10\overline{CH} = 20 \quad \therefore \overline{CH} = 2$$

$$\text{이때 } \triangle AHC \text{에서 } \overline{AH} = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - 2^2} = 6$$

$$\therefore \sin x = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{6}{2\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$



03 빛의 입사각과 반사각의 크기는 같으므로

$$\angle QPC = \angle APD = \angle QRB = x$$

정사각형 ABCD의 한 변의 길이를
 $2a$ ($a > 0$)라 하면

$$\overline{BR} = \frac{1}{2} \overline{AB} = a \text{ 이므로}$$

$$\triangle BQR \text{에서 } \tan x = \frac{\overline{BQ}}{\overline{BR}} = \frac{\overline{BQ}}{a}$$

이때 $\overline{BQ} = k$ ($k > 0$)라 하면

$\triangle DAP \sim \triangle BQR$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{DA} : \overline{BQ} = \overline{DP} : \overline{BR} \text{에서}$$

$$2a : k = \overline{DP} : a \quad \therefore \overline{DP} = \frac{2a^2}{k}$$

또 $\triangle CQP \sim \triangle BQR$ (AA 닮음)이므로

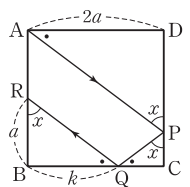
$$\overline{CP} : \overline{BR} = \overline{CQ} : \overline{BQ} \text{에서}$$

$$\left(2a - \frac{2a^2}{k}\right) : a = (2a - k) : k, 2ak - 2a^2 = 2a^2 - ak$$

$$3ak = 4a^2 \quad \therefore k = \frac{4}{3}a$$

$$\text{따라서 } \overline{BQ} = \frac{4}{3}a \text{ 이므로}$$

$$\tan x = \frac{\overline{BQ}}{a} = \frac{4}{3}a \div a = \frac{4}{3}$$



04 $\triangle DHG$ 에서 $\overline{DG} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ (cm)

이때 $\overline{AM} = \overline{DM} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ (cm) 이므로

$$\triangle GDM \text{에서 } \overline{GM} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 3^2} = 9 \text{ (cm)}$$

오른쪽 그림과 같이 점 M에서
 $\overline{AG}$ 에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\triangle GDA$ 에서

$$\overline{GA} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 6^2} = 6\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

이므로 $\triangle GMA$ 에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{MA} \times \overline{GD} = \frac{1}{2} \times \overline{GA} \times \overline{MI}$$

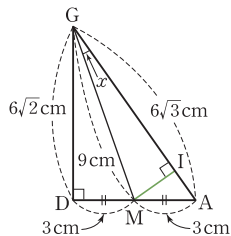
$$\text{즉, } \frac{1}{2} \times 3 \times 6\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times \overline{MI} \text{ 이므로}$$

$$3\sqrt{3} \overline{MI} = 9\sqrt{2} \quad \therefore \overline{MI} = \sqrt{6} \text{ (cm)}$$

따라서 $\triangle GMI$ 에서 $\overline{GI} = \sqrt{9^2 - (\sqrt{6})^2} = 5\sqrt{3} \text{ (cm)}$ 이므로

$$\sin x = \frac{\overline{MI}}{\overline{GM}} = \frac{\sqrt{6}}{9}, \quad \cos x = \frac{\overline{GI}}{\overline{GM}} = \frac{5\sqrt{3}}{9}$$

$$\therefore \sin x \times \cos x = \frac{\sqrt{6}}{9} \times \frac{5\sqrt{3}}{9} = \frac{5\sqrt{2}}{27}$$



05 $7 \sin A = 9 \cos A$ 에서 $\sin A : \cos A = 9 : 7$

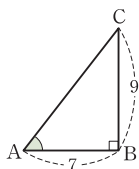
$\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형에서

$$\sin A : \cos A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \overline{BC} : \overline{AB}$$

즉, $\overline{BC} : \overline{AB} = 9 : 7$ 이므로 오른쪽 그림과
 같은 직각삼각형 ABC를 생각할 수 있다.

따라서 $\tan A = \frac{9}{7}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1 + \tan A}{\tan A - 1} &= \left(1 + \frac{9}{7}\right) \div \left(\frac{9}{7} - 1\right) \\ &= \frac{16}{7} \times \frac{7}{2} = 8 \end{aligned}$$



06 $\triangle AEC$ 에서 $\overline{AE} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\triangle ADE$ 와 $\triangle BAE$ 에서

$$\overline{AE} : \overline{BE} = \sqrt{2} : 2 = 1 : \sqrt{2}, \quad \overline{DE} : \overline{AE} = 1 : \sqrt{2}$$

$\angle BEA$ 는 공통이므로

$\triangle ADE \sim \triangle BAE$ (SAS 닮음)

$$\therefore \angle DAE = \angle ABE = x$$

이때 $\triangle ADE$ 에서 $\angle AEC = x + y$ 이므로

$$\cos(x + y) = \frac{\overline{EC}}{\overline{AE}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

07 $\triangle AOB \sim \triangle OCB$ (AA 닮음)이므로

$$\angle BAO = \angle BOC$$

$$\text{즉, } \tan(\angle BAO) = \tan(\angle BOC) = \frac{8}{15} \text{ 이므로}$$

$$a = \tan(\angle BAO) = \frac{8}{15}$$

$$\triangle BCO \text{에서 } \tan(\angle BOC) = \frac{\overline{BC}}{5} = \frac{8}{15} \quad \therefore \overline{BC} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore \overline{OB} = \sqrt{5^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{17}{3}$$

이때 직선 $y = \frac{8}{15}x + b$ 가 점 $\left(0, \frac{17}{3}\right)$ 을 지나므로 $b = \frac{17}{3}$

$$\therefore b - a = \frac{17}{3} - \frac{8}{15} = \frac{77}{15}$$

08 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BE}$ 를 그으면

$\triangle ABE$ 와 $\triangle C'BE$ 에서

$$\angle BAE = \angle BC'E = 90^\circ,$$

$$\overline{AB} = \overline{C'B} = 2\sqrt{6},$$

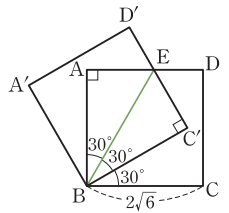
$\overline{BE}$ 는 공통이므로

$\triangle ABE \cong \triangle C'BE$ (RHS 합동)

$$\therefore \angle ABE = \angle C'BE = \frac{1}{2} \times (90^\circ - 30^\circ) = 30^\circ$$

따라서 $\triangle ABE$ 에서

$$\tan 30^\circ = \frac{\overline{AE}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \therefore \overline{AE} = 2\sqrt{2}$$



09 $\overline{OA} = 1$ 이므로

$$\tan 1^\circ = \frac{\overline{OP_1}}{\overline{OA}} = \overline{OP_1}, \quad \tan 2^\circ = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OA}} = \overline{OP_2},$$

$$\dots, \tan 89^\circ = \frac{\overline{OP_{89}}}{\overline{OA}} = \overline{OP_{89}}$$

$$\therefore \overline{OP_1} \times \overline{OP_2} \times \dots \times \overline{OP_{89}} = \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \dots \times \tan 89^\circ$$

그런데

$$\triangle AOP_1 \text{에서 } \tan 89^\circ = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP_1}} = \frac{1}{\tan 1^\circ},$$

$$\triangle AOP_2 \text{에서 } \tan 88^\circ = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP_2}} = \frac{1}{\tan 2^\circ},$$

$\vdots$

$$\triangle AOP_{44} \text{에서 } \tan 46^\circ = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP_{44}}} = \frac{1}{\tan 44^\circ}$$

이므로

$$\tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \dots \times \tan 89^\circ$$

$$= \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \dots \times \tan 44^\circ \times \tan 45^\circ$$

$$\times \frac{1}{\tan 44^\circ} \times \dots \times \frac{1}{\tan 2^\circ} \times \frac{1}{\tan 1^\circ}$$

$$= \tan 45^\circ = 1$$

10 $\triangle BFE$ 에서

$$\sin 60^\circ = \frac{\overline{BE}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \overline{BE} = 2\sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{EF}}{4} = \frac{1}{2} \quad \therefore \overline{EF} = 2$$

$\triangle ABE$ 에서

$$\cos 45^\circ = \frac{\overline{AB}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \overline{AB} = \sqrt{6}$$

이때 $\triangle ABE$ 는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{AE} = \overline{AB} = \sqrt{6}$$

또 $\angle DEF = 180^\circ - (45^\circ + 90^\circ) = 45^\circ$ 이므로

$\triangle DEF$ 는 직각이등변삼각형이다.

$$\cos 45^\circ = \frac{\overline{DE}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \overline{DE} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{DF} = \overline{DE} = \sqrt{2}$$

따라서 $\triangle EBF$ 에서 $\angle EBF = 180^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 30^\circ$ 이고,

$\triangle BCF$ 에서 $\angle FBC = 90^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 15^\circ$ 이므로

$$\tan 15^\circ = \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DC} - \overline{DF}}{\overline{AE} + \overline{DE}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

- 11 $\triangle BCD$ 는 $\overline{BC} = \overline{CD} = 1$ 인 직각이등변삼각형이므로

$$\angle BDC = \angle DBC = 45^\circ$$

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BD}$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 E라 하면
 $\angle ADE = \angle BDC = 45^\circ$ (맞꼭지각)

즉, $\triangle ADE$ 는 직각이등변삼각형이다.

$$\triangle BCD \text{에서 } \overline{BD} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\triangle ADE \text{에서 } \cos 45^\circ = \frac{\overline{DE}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \overline{DE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \overline{BE} = \overline{BD} + \overline{DE} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $\triangle ABE$ 에서 $\overline{AE} = \overline{DE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$\tan x = \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3}$$

- 12 $\triangle EOF$ 에서 $\tan x = \frac{\overline{OF}}{5}$

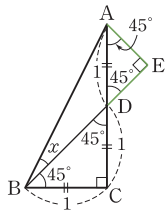
이때 $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ 이므로

$$\angle OAB = \angle OEF = x \text{ (동위각)}$$

따라서 $\triangle AOB$ 에서

$$\sin x = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{5}, \quad \cos y = \frac{\overline{OB}}{5} \text{이므로}$$

$$5(\tan x - \sin x + \cos y) = 5\left(\frac{\overline{OF}}{5} - \frac{\overline{OB}}{5} + \frac{\overline{OB}}{5}\right) = \overline{OF}$$



2 삼각비의 활용

1 주제별 유형 불러오기

21~26쪽

유제 1 ② 유제 2 $20(\sqrt{3}-1)$ m

유제 3 (1) $3\sqrt{5}$ (2) $5(\sqrt{2}+\sqrt{6})$

유제 4 (1) $5(\sqrt{3}-1)$ (2) $2(3+\sqrt{3})$

유제 5 ⑤ 유제 6 18 cm^2

유제 7 ④

유제 8 $200\sqrt{2} \text{ cm}^2$ 유제 9 ③

유제 10 $4\sqrt{7} \text{ cm}$

유제 1 $\triangle CFG$ 에서

$$\overline{FG} = 8 \cos 30^\circ = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} (\text{cm})$$

$$\overline{CG} = 8 \sin 30^\circ = 8 \times \frac{1}{2} = 4 (\text{cm})$$

$$\therefore (\text{직육면체의 부피}) = 4\sqrt{3} \times 7 \times 4 = 112\sqrt{3} (\text{cm}^3)$$

유제 2 $\triangle DAC$ 에서 $\overline{CD} = 20 \tan 45^\circ = 20 \times 1 = 20 (\text{m})$

$\triangle BAC$ 에서 $\angle BAC = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ$ 이므로

$$\overline{BC} = 20 \tan 60^\circ = 20 \times \sqrt{3} = 20\sqrt{3} (\text{m})$$

$$\therefore \overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD} = 20\sqrt{3} - 20 = 20(\sqrt{3}-1) (\text{m})$$

유제 3 (1) 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 C에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle BCH$ 에서

$$\overline{CH} = 6\sqrt{2} \sin 45^\circ$$

$$= 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$$

$$\overline{BH} = 6\sqrt{2} \cos 45^\circ = 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$$

$$\therefore \overline{AH} = \overline{AB} - \overline{BH} = 9 - 6 = 3$$

따라서 $\triangle AHC$ 에서 $x = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$

(2) 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle ABH$ 에서

$$\overline{AH} = 10\sqrt{2} \sin 30^\circ = 10\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 5\sqrt{2}$$

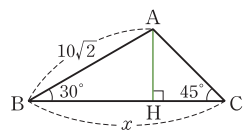
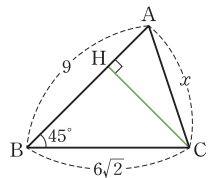
$$\overline{BH} = 10\sqrt{2} \cos 30^\circ = 10\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{6}$$

$$\triangle AHC \text{에서 } \overline{CH} = \frac{5\sqrt{2}}{\tan 45^\circ} = \frac{5\sqrt{2}}{1} = 5\sqrt{2}$$

$$\therefore x = \overline{BH} + \overline{CH} = 5\sqrt{6} + 5\sqrt{2} = 5(\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

유제 4 (1) $\overline{AH} = h$ 라 하면

$$\triangle ABH \text{에서 } \overline{BH} = \frac{h}{\tan 45^\circ} = \frac{h}{1} = h$$



$$\begin{aligned} \triangle AHC \text{에서 } \overline{CH} &= \frac{h}{\tan 30^\circ} = h \div \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}h \\ \text{이때 } \overline{BC} &= \overline{BH} + \overline{CH} \text{이므로 } 10 = h + \sqrt{3}h \\ (1 + \sqrt{3})h &= 10 \quad \therefore h = \frac{10}{1 + \sqrt{3}} = 5(\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

(2) $\overline{AH} = h$ 라 하면

$$\begin{aligned} \triangle ABH \text{에서 } \overline{BH} &= \frac{h}{\tan 45^\circ} = \frac{h}{1} = h \\ \triangle ACH \text{에서 } \overline{CH} &= \frac{h}{\tan 60^\circ} = \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}h \\ \text{이때 } \overline{BC} &= \overline{BH} - \overline{CH} \text{이므로 } 4 = h - \frac{\sqrt{3}}{3}h \end{aligned}$$

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{3}h = 4 \quad \therefore h = \frac{12}{3 - \sqrt{3}} = 2(3 + \sqrt{3})$$

[다른 풀이]

$\overline{AH} = h$ 라 하면

$\angle BAH = 45^\circ$ 이므로 $\triangle ABH$ 는 직각이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{BH} = \overline{AH} = h$

$$\triangle ACH \text{에서 } \tan 60^\circ = \frac{h}{h - 4} = \sqrt{3} \text{이므로}$$

$$\sqrt{3}h - 4\sqrt{3} = h, (\sqrt{3} - 1)h = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore h = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = 2(3 + \sqrt{3})$$

$$\begin{aligned} \text{유제 5 } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times 8 \times 13 \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 13 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 26\sqrt{3} (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ADG &= \frac{1}{2} \triangle ABG \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \triangle ABC \\ &= \frac{1}{6} \triangle ABC \\ &= \frac{1}{6} \times 26\sqrt{3} = \frac{13\sqrt{3}}{3} (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{유제 6 } \triangle ABC \text{에서 } \overline{BC} &= 12 \text{ cm이므로} \\ \overline{AB} &= 12 \sin 30^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6 (\text{cm}) \end{aligned}$$

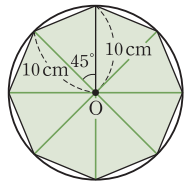
이때 $\angle ABC = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$ 이므로
 $\angle ABD = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABD &= \frac{1}{2} \times 6 \times 12 \times \sin (180^\circ - 150^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 12 \times \frac{1}{2} = 18 (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{유제 7 } \triangle ABC \text{에서} \\ \overline{AC} &= 8 \tan 60^\circ = 8 \times \sqrt{3} = 8\sqrt{3} (\text{cm}) \\ \therefore \square ABCD &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 8\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times 12 \times \sin 30^\circ \\ &= 32\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times 12 \times \frac{1}{2} \\ &= 32\sqrt{3} + 24\sqrt{3} \\ &= 56\sqrt{3} (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

유제 8 오른쪽 그림과 같이 정팔각형은 꼭
 지각의 크기가 $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ 이고, 합
 동인 8개의 이등변삼각형으로 나누
 어진다.

$$\begin{aligned} \therefore (\text{정팔각형의 넓이}) \\ &= 8 \times \left(\frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \sin 45^\circ \right) \\ &= 8 \times \left(\frac{1}{2} \times 10 \times 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= 200\sqrt{2} (\text{cm}^2) \end{aligned}$$



유제 9 $\angle BAD : \angle B = 3 : 1$ 이므로

$$\angle B = 180^\circ \times \frac{1}{3+1} = 45^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle AMC &= \frac{1}{2} \triangle ABC \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \square ABCD \\ &= \frac{1}{4} \square ABCD \\ &= \frac{1}{4} \times (8 \times 14 \times \sin 45^\circ) \\ &= \frac{1}{4} \times \left(8 \times 14 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 14\sqrt{2} (\text{cm}^2) \end{aligned}$$

유제 10 등변사다리꼴의 두 대각선의 길이는 같으므로

$\overline{AC} = \overline{BD} = x$ cm라 하면

$$\square ABCD = \frac{1}{2} \times x \times x \times \sin (180^\circ - 120^\circ) = 28\sqrt{3} \text{에서}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} x^2 = 28\sqrt{3}, x^2 = 112 \quad \therefore x = 4\sqrt{7} (\because x > 0)$$

$$\therefore \overline{AC} = 4\sqrt{7} \text{ cm}$$

2 최고 유형 탐험하기

27~29쪽

1 ④	2 ③	3 ③	4 ③
5 ④	6 ②	7 ⑤	8 ②
9 ④	10 ①	11 ①	

1 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서

$\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle ABH$ 에서

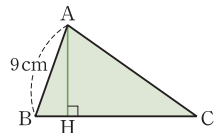
$$\overline{BH} = 9 \cos B = 9 \times \frac{1}{3} = 3 (\text{cm})$$

$$\therefore \overline{AH} = \sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2} (\text{cm})$$

$\triangle AHC$ 에서

$$\overline{AC} = \frac{6\sqrt{2}}{\sin C} = 6\sqrt{2} \div \frac{\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{6} (\text{cm}) \text{이므로}$$

$$\overline{CH} = \sqrt{(6\sqrt{6})^2 - (6\sqrt{2})^2} = 12 (\text{cm})$$



$$\therefore \overline{BC} = \overline{BH} + \overline{CH} = 3 + 12 = 15(\text{cm})$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 15 \times 6\sqrt{2} = 45\sqrt{2}(\text{cm}^2)$$

- 2 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle AHC$ 에서

$$\sin(\angle ACH) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle ACH = 30^\circ$$

$$\angle DAC = \angle BCA = 30^\circ \text{ (엇각),}$$

$$\angle BAC = \angle DAC = 30^\circ \text{ (접은 각)이므로}$$

$$\angle BAC = \angle BCA$$

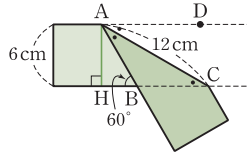
즉, $\triangle ABC$ 는 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이다.

$$\therefore \angle ABH = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$$

$$\triangle AHB \text{에서 } \overline{AB} = \frac{6}{\sin 60^\circ} = 6 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}(\text{cm}) \text{이므로}$$

$$\overline{BC} = \overline{AB} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 6 = 12\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$



- 3 $\widehat{AP} = \widehat{PQ} = \widehat{QB}$ 이므로

$$\angle AOP = \angle POQ = \angle QOB = \frac{1}{3} \times 90^\circ = 30^\circ$$

$$\triangle POR \text{에서 } \angle POR = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ \text{이므로}$$

$$\overline{PR} = 4\sqrt{3} \sin 60^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$

$$\overline{OR} = 4\sqrt{3} \cos 60^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\triangle QOS \text{에서 } \angle QOS = 30^\circ \text{이므로}$$

$$\overline{QS} = 4\sqrt{3} \sin 30^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\overline{OS} = 4\sqrt{3} \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$

$$\triangle TOR \text{에서 } \overline{TR} = 2\sqrt{3} \tan 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2$$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)

$$= (\text{사분원 AOB의 넓이}) - \triangle POR - \triangle QOS + \triangle TOR$$

$$= \frac{1}{4} \times \pi \times (4\sqrt{3})^2 - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6 - \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{3}$$

$$+ \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2$$

$$= 12\pi - 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$

$$= 12\pi - 10\sqrt{3}$$

- 4 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AC} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}(\text{cm})$ 이므로

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}(\text{cm})$$

$\triangle OAH$ 에서

$$\overline{OA} = \frac{4\sqrt{2}}{\cos 60^\circ} = 4\sqrt{2} \div \frac{1}{2} = 8\sqrt{2}(\text{cm})$$

$$\overline{OH} = 4\sqrt{2} \tan 60^\circ = 4\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{6}(\text{cm})$$

따라서 $\triangle OAH$ 의 둘레의 길이는

$$8\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{6} = 12\sqrt{2} + 4\sqrt{6}(\text{cm})$$

- 5 오른쪽 그림의 $\triangle GAH$ 에서

$$\overline{AH} = 6 \text{ m이므로}$$

$$\overline{GH} = 6 \tan 30^\circ$$

$$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}(\text{m})$$

$$\triangle CDF \text{에서 } \overline{DF} = 4 \text{ m이므로}$$

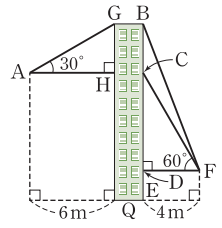
$$\overline{CD} = 4 \tan 60^\circ$$

$$= 4 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}(\text{m})$$

$$\text{이때 } \overline{BC} = \overline{GH} = 2\sqrt{3} \text{ m이므로}$$

$$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}(\text{m})$$

$$\text{따라서 } \triangle BDF \text{에서 } \overline{BF} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 4^2} = 2\sqrt{31}(\text{m})$$



- 6 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$ 에

내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle ABH$ 에서

$$\overline{AH} = 36 \sin 45^\circ$$

$$= 36 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}(\text{m})$$

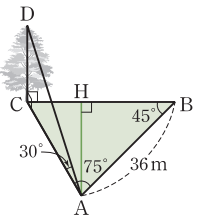
$\triangle AHC$ 에서

$$\angle CAH = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ \text{이므로}$$

$$\overline{AC} = \frac{18\sqrt{2}}{\cos 30^\circ} = 18\sqrt{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{6}(\text{m})$$

따라서 $\triangle ADC$ 에서

$$\overline{CD} = 12\sqrt{6} \tan 30^\circ = 12\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 12\sqrt{2}(\text{m})$$



- 7 오른쪽 그림과 같이 점 E에서 $\overline{BC}$

에 내린 수선의 발을 H라 하고,

$\overline{EH} = h$ 라 하면

$\triangle BCD$ 에서

$$\overline{BC} = \frac{6\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = 6\sqrt{2} \div \frac{\sqrt{2}}{2} = 12$$

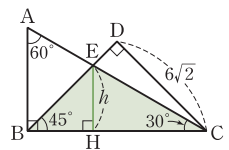
$$\triangle EBH \text{에서 } \overline{BH} = \frac{h}{\tan 45^\circ} = \frac{h}{1} = h$$

$$\triangle EHC \text{에서 } \overline{CH} = \frac{h}{\tan 30^\circ} = h \div \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}h$$

$$\text{이때 } \overline{BC} = \overline{BH} + \overline{CH} \text{이므로 } 12 = h + \sqrt{3}h$$

$$(1 + \sqrt{3})h = 12 \quad \therefore h = \frac{12}{1 + \sqrt{3}} = 6(\sqrt{3} - 1)$$

$$\therefore \triangle EBC = \frac{1}{2} \times 12 \times 6(\sqrt{3} - 1) = 36(\sqrt{3} - 1)$$



- 8 $\overline{CD} = x \text{ cm}$ 라 하면 $\triangle ABC = \triangle BCD + \triangle ADC$ 이고,

$$\angle ACB = 30^\circ + 120^\circ = 150^\circ \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 12 \times \sin(180^\circ - 150^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times x \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times x \times 12 \times \sin(180^\circ - 120^\circ)$$

$$18\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x + 3\sqrt{3}x, \quad \frac{9\sqrt{3}}{2}x = 18\sqrt{3} \quad \therefore x = 4$$

$$\therefore \triangle ADC = \frac{1}{2} \times 4 \times 12 \times \sin(180^\circ - 120^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

- 9 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\triangle ABH \text{에서}$$

$$\overline{AH} = 10 \sin 45^\circ$$

$$= 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\overline{BH} = 10 \cos 45^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\therefore \overline{CH} = \overline{BC} - \overline{BH} = 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

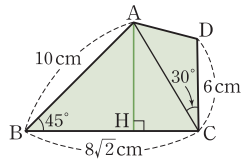
$$\triangle AHC \text{에서 } \overline{AC} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{17} \text{ (cm)}$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \times 8\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{17} \times 6 \times \sin 30^\circ$$

$$= 40 + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{17} \times 6 \times \frac{1}{2}$$

$$= 40 + 3\sqrt{17} \text{ (cm}^2\text{)}$$



- 10 오른쪽 그림과 같이 $\overline{PQ}$ 를 긋고,

$$\overline{AB} = 3a \text{라 하면}$$

$$\overline{BP} = \overline{DQ} = 2a,$$

$$\overline{CP} = \overline{CQ} = a \text{이므로}$$

$$\overline{AP} = \overline{AQ} = \sqrt{(3a)^2 + (2a)^2} = \sqrt{13}a$$

$$\therefore \square ABCD$$

$$= \triangle ABP + \triangle APQ + \triangle PCQ + \triangle AQC$$

$$= \frac{1}{2} \times 3a \times 2a + \frac{1}{2} \times \sqrt{13}a \times \sqrt{13}a \times \sin x + \frac{1}{2} \times a \times a$$

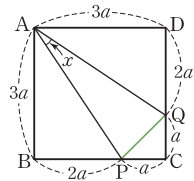
$$+ \frac{1}{2} \times 3a \times 2a$$

$$= 3a^2 + \frac{13}{2}a^2 \sin x + \frac{1}{2}a^2 + 3a^2$$

$$= \frac{13}{2}a^2 + \frac{13}{2}a^2 \sin x$$

$$\therefore 9a^2 = \frac{13}{2}a^2 + \frac{13}{2}a^2 \sin x \text{이므로}$$

$$\frac{13}{2} \sin x = \frac{5}{2} \quad \therefore \sin x = \frac{5}{13}$$



- 11 $\square OABC = \triangle OAB + \triangle OBC$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 + \frac{1}{2} \times 3 \times 4$$

$$= 12 + 6 = 18$$

$$\triangle OAC \text{에서 } \overline{AC} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$$

오른쪽 그림과 같이 점 B에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{OH} = 4, \overline{BH} = 4 \text{이므로}$$

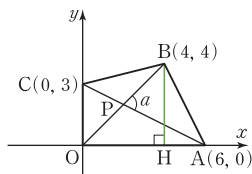
$$\triangle BOH \text{에서}$$

$$\overline{BO} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \square OABC = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times 4\sqrt{2} \times \sin a$$

$$= 6\sqrt{10} \sin a$$

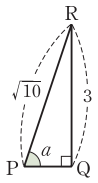
$$\therefore 6\sqrt{10} \sin a = 18 \text{이므로 } \sin a = \frac{3}{\sqrt{10}}$$



따라서 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 PQR을 생각할 수 있다.

$$\text{이때 } \overline{PQ} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 3^2} = 1 \text{이므로}$$

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$



3 최고 유형 정복하기

30~32쪽

01 $54\sqrt{5}$

02 $\frac{2}{3}$

03 $\frac{\sqrt{21}}{14}$

04 $\frac{\sqrt{10}}{4}$

05 11.6 m

06 $20\sqrt{13}$ km

07 $9\sqrt{3}$ m

08 7

09 $\sqrt{3}$ cm

10 $(8\sqrt{3} - 12)$ cm²

11 $84\sqrt{3}$

- 01 오른쪽 그림에서

$$\overline{PQ} \parallel \overline{SR} \parallel \overline{CB} \text{이므로}$$

$$\angle APQ = \angle ACB$$

$$= \angle ASR = x$$

$$\triangle AQP \text{에서}$$

$$\overline{AQ} = 3 \tan x = 3 \times 2 = 6$$

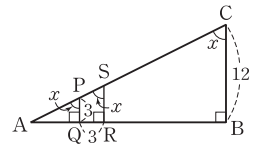
$$\therefore \overline{AR} = \overline{AQ} + \overline{QR} = 6 + 3 = 9$$

$$\triangle ARS \text{에서 } \overline{SR} = \frac{9}{\tan x} = \frac{9}{2}$$

$$\triangle ABC \text{에서 } \overline{AB} = 12 \tan x = 12 \times 2 = 24$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{24^2 + 12^2} = 12\sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{SR} \times \overline{AC} = \frac{9}{2} \times 12\sqrt{5} = 54\sqrt{5}$$



- 02 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 B에서

$\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하고,

$\overline{BC} = a$ 라 하면

$\triangle BCH$ 에서

$$\overline{BH} = a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

이때 $\triangle ABH$ 는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{AH} = \overline{BH} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

$\triangle ABP$ 와 $\triangle CBA$ 에서

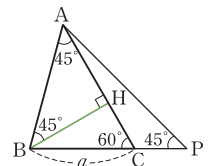
$$\angle APB = \angle CAB, \angle B \text{는 공통이므로}$$

$\triangle ABP \sim \triangle CBA$ (AA 답음)

$$\therefore \overline{AB} : \overline{CB} = \overline{BP} : \overline{BA} \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2}a : a = \overline{BP} : \frac{\sqrt{6}}{2}a \quad \therefore \overline{BP} = \frac{3}{2}a$$

$$\therefore \frac{\overline{BC}}{\overline{BP}} = a \div \frac{3}{2}a = \frac{2}{3}$$



- 03 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 $2a$ 라 하면

점 D는 AC의 중점이므로

$$\overline{AD} = \overline{CD} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 2a = a$$

$$\triangle BCD \text{에서 } \overline{BD} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$$

$$\therefore \overline{BE} = \overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\triangle ECD \text{에서 } \overline{CE} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a$$

이때 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이므로

$$\angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2} \angle B = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

오른쪽 그림과 같이 점 E에서 BC

에 내린 수선의 발을 F라 하면

$\triangle BFE$ 에서

$$\begin{aligned} \overline{EF} &= \overline{BE} \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a \end{aligned}$$

따라서 $\triangle EFC$ 에서

$$\sin x = \frac{\overline{EF}}{\overline{CE}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a}{\frac{\sqrt{7}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{4}a \div \frac{\sqrt{7}}{2}a = \frac{\sqrt{21}}{14}$$

[다른 풀이]

정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 $2a$ 라 하면

$$\overline{AD} = \overline{CD} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 2a = a$$

$$\triangle BCD \text{에서 } \overline{BD} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$$

$$\therefore \overline{BE} = \overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

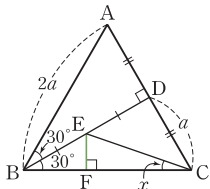
$$\triangle ECD \text{에서 } \overline{CE} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a$$

이때

$$\triangle BCE = \frac{1}{2} \times \overline{BE} \times \overline{CD} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CE} \times \sin x \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times a = \frac{1}{2} \times 2a \times \frac{\sqrt{7}}{2}a \times \sin x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{7}}{2}a^2 \sin x \quad \therefore \sin x = \frac{\sqrt{21}}{14}$$



- 04 오른쪽 그림의 $\triangle DGH$ 에서

$$\overline{DH} = 2 \tan 60^\circ = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\overline{DG} = \frac{2}{\cos 60^\circ} = 2 \div \frac{1}{2} = 4$$

이때 $\triangle BFG$ 는 직각이등변삼각형

이므로 $\overline{FG} = \overline{BF} = \overline{DH} = 2\sqrt{3}$

$$\therefore \overline{BG} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$$

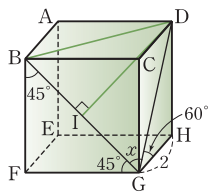
$$\overline{BD} \text{를 그으면 } \triangle BCD \text{에서 } \overline{BD} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$$

즉, $\triangle DBG$ 는 $\overline{DB} = \overline{DG}$ 인 이등변삼각형이므로 점 D에서 $\overline{BG}$ 에 내린 수선의 발을 I라 하면

$$\overline{IG} = \frac{1}{2} \overline{BG} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$$

따라서 $\triangle DIG$ 에서 $\overline{DI} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{10}$ 이므로

$$\sin x = \frac{\overline{DI}}{\overline{DG}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$



- 05 오른쪽 그림과 같이 바이킹의 중심 기둥이 처음 위치에서 점 O를 중심으로 왼쪽으로 60° 만큼 회전하였을 때 A, B, C 지점의 변화된 위치를 각각 A', B', C'이라 하고, 점 B'에서 바이킹의 중심 기둥의 처음 위치인 $\overline{OB}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

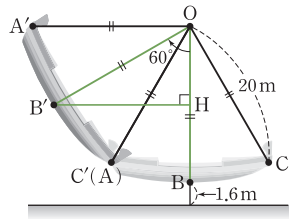
$$\triangle OB'H \text{에서 } \overline{OH} = 20 \cos 60^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10(\text{m})$$

$$\therefore \overline{BH} = \overline{OB} - \overline{OH} = 20 - 10 = 10(\text{m})$$

이때 지면으로부터 점 B'까지의 높이는

$$\overline{BH} + 1.6 = 10 + 1.6 = 11.6(\text{m})$$

따라서 바이킹이 움직이기 시작하여 중심 기둥이 처음 위치에서 점 O를 중심으로 왼쪽으로 60° 만큼 회전하였을 때, 중심 기둥의 B 지점은 지면으로부터 11.6 m 높이에 있다.



- 06 자동차 P가 40분 동안 달린 거리는 $120 \times \frac{40}{60} = 80(\text{km})$

$$\therefore \overline{OA} = 80 \text{ km}$$

$$\text{자동차 Q가 40분 동안 달린 거리는 } 90 \times \frac{40}{60} = 60(\text{km})$$

$$\therefore \overline{OC} = 60 \text{ km}$$

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 $\overline{OA}$ 에

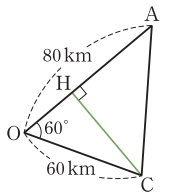
내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle OCH$ 에서

$$\overline{CH} = 60 \sin 60^\circ = 60 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}(\text{km})$$

$$\overline{OH} = 60 \cos 60^\circ = 60 \times \frac{1}{2} = 30(\text{km})$$

$$\therefore \overline{AH} = \overline{OA} - \overline{OH} = 80 - 30 = 50(\text{km})$$

$$\text{따라서 } \triangle AHC \text{에서 } \overline{AC} = \sqrt{50^2 + (30\sqrt{3})^2} = 20\sqrt{13}(\text{km})$$



- 07 1초에 0.2° 씩 시계 방향으로 회전하므로 5분, 즉 300초 후에는 $0.2^\circ \times 300 = 60^\circ$ 만큼 회전한다.

오른쪽 그림과 같이 관람차의 중심을

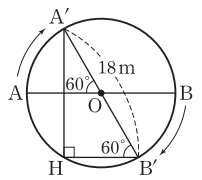
O, 5분 후 A, B의 위치를 각각 A', B'이라 하고, $\overline{AB}$ 와 $\overline{HB'}$ 이 평행하도록 점 H를 원 O 위에 잡으면

$$\angle A'B'H = \angle A'OA = 60^\circ \text{ (동위각)}$$

이므로

$$\triangle A'HB' \text{에서 } \overline{A'H} = 18 \sin 60^\circ = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}(\text{m})$$

따라서 $\overline{AB}$ 와 지면이 평행할 때부터 5분 후에 A칸은 B칸보다 $9\sqrt{3}$ m만큼 더 높은 곳에 있다.



- 08 $\triangle BML = \frac{1}{2} \times \overline{BL} \times \overline{BM} \times \sin B$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \overline{AB} \times \frac{1}{2} \overline{BC} \times \sin B$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin B \right)$$

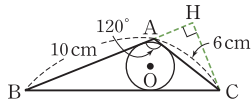
$$= \frac{1}{3} \triangle ABC = \frac{1}{3} \times 24 = 8$$

$$\begin{aligned}
 \triangle MCN &= \frac{1}{2} \times \overline{CM} \times \overline{CN} \times \sin C \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \overline{BC} \times \frac{1}{4} \overline{AC} \times \sin C \\
 &= \frac{1}{8} \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AC} \times \sin C \right) \\
 &= \frac{1}{8} \triangle ABC = \frac{1}{8} \times 24 = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \triangle ALN &= \frac{1}{2} \times \overline{AL} \times \overline{AN} \times \sin A \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \overline{AB} \times \frac{3}{4} \overline{AC} \times \sin A \\
 &= \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A \right) \\
 &= \frac{1}{4} \triangle ABC = \frac{1}{4} \times 24 = 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \triangle LMN &= \triangle ABC - \triangle BML - \triangle MCN - \triangle ALN \\
 &= 24 - 8 - 3 - 6 \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

- 09 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 내접원의 중심을 O 라 하고, 꼭짓점 C 에서 $\overline{BA}$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 H 라 하면



$\triangle ACH$ 에서 $\angle CAH = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ 이므로

$$\overline{CH} = 6 \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

$$\overline{AH} = 6 \cos 60^\circ = 6 \times \frac{1}{2} = 3 \text{ (cm)}$$

$$\triangle BCH \text{에서 } \overline{BC} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + (10+3)^2} = 14 \text{ (cm)}$$

이때

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 10 \times 6 \times \sin (180^\circ - 120^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 15\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$$

이므로 내접원의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$$\triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA \text{에서}$$

$$15\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times r \times (10 + 14 + 6)$$

$$15r = 15\sqrt{3} \quad \therefore r = \sqrt{3}$$

따라서 내접원의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$ cm이다.

- 10 오른쪽 그림과 같이 점 F 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하고,

$\overline{BH} = x$ cm라 하면

$$\overline{CH} = 4 - x \text{ (cm)}$$

이때 $\angle DBC = 45^\circ$ 이므로

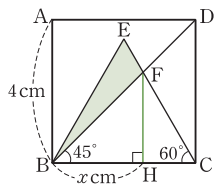
$\triangle FBH$ 는 직각이등변삼각형이다.

$$\therefore \overline{FH} = \overline{BH} = x \text{ cm}$$

$\triangle FHC$ 에서 $\angle FCH = 60^\circ$ 이므로

$$\tan 60^\circ = \frac{x}{4-x} = \sqrt{3} \text{에서 } x = 4\sqrt{3} - \sqrt{3}x$$

$$(\sqrt{3}+1)x = 4\sqrt{3} \quad \therefore x = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = 2(3-\sqrt{3})$$



$$\therefore \triangle EBF = \triangle EBC - \triangle FBC$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 60^\circ - \frac{1}{2} \times 4 \times 2(3-\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 4(3-\sqrt{3})$$

$$= 4\sqrt{3} - 12 + 4\sqrt{3}$$

$$= 8\sqrt{3} - 12 \text{ (cm}^2\text{)}$$

- 11 정육각형의 한 내각의 크기는 $\frac{180^\circ \times (6-2)}{6} = 120^\circ$

오른쪽 그림과 같이 큰 정육각형의

한 꼭짓점을 A , 이웃하는 두 변의

중점을 각각 B , C 라 하고,

$\triangle ABC$ 의 꼭짓점 A 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ 이고,}$$

$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ \text{ 이므로}$$

$$\triangle ABH \text{에서 } \overline{BH} = 2\sqrt{2} \cos 30^\circ = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \overline{BC} = 2\overline{BH} = 2\sqrt{6}$$

즉, 작은 정육각형의 한 변의 길이는 $2\sqrt{6}$ 이다.

이때 정육각형은 꼭지각의 크기가 $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ 이고, 합동인

6개의 정삼각형으로 나누어진다.

$\therefore$ (두 정육각형의 넓이의 합)

$$= 6 \times \left(\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} \times \sin 60^\circ \right)$$

$$+ 6 \times \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{6} \times \sin 60^\circ \right)$$

$$= 6 \times \left(\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$+ 6 \times \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 48\sqrt{3} + 36\sqrt{3} = 84\sqrt{3}$$

대단원 마무리하기

33~36쪽

01 $\frac{\sqrt{7}}{4}$

02 5

03 ②

04 $\frac{1}{5}$

05 ④

06 $\frac{9}{2}$

07 $y = \sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$

08 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$

09 ④

10 $(144 - 42\sqrt{3}) \text{ cm}^2$

11 $4\sqrt{19}$

12 $(9\sqrt{6} + 27\sqrt{2}) \text{ m}$

13 ③

14 $39\sqrt{3}$

15 ③

16 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

17 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

18 $6\sqrt{3}$

19 ③

서술형 문제 (과정은 풀이 참조)

20 $\frac{5}{6}$

21 $\sqrt{2} + 1$

22 $50\sqrt{6} \text{ m}$

23 $\frac{\sqrt{3}}{6}$

01 점 M은 $\triangle ABC$ 의 외심이므로

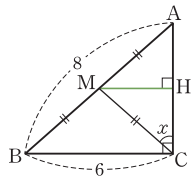
$$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

오른쪽 그림과 같이 점 M에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\triangle ABC \text{에서 } \overline{MH} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$\text{따라서 } \triangle MCH \text{에서 } \overline{CH} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

$$\therefore \cos x = \frac{\overline{CH}}{\overline{CM}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$



02 $\triangle PQH$ 에서 $\tan a = \frac{10}{\overline{QH}} = \frac{5}{2}$

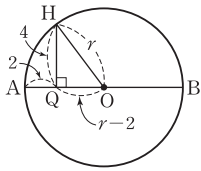
$$5\overline{QH} = 20 \quad \therefore \overline{QH} = 4$$

오른쪽 그림과 같이 밑면인 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\triangle HQO \text{에서 } r^2 = 4^2 + (r-2)^2$$

$$4r = 20 \quad \therefore r = 5$$

따라서 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 5이다.



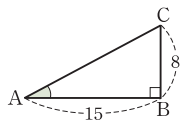
03 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형에서

$$\sin A : \cos A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \overline{BC} : \overline{AB}$$

즉, $\overline{BC} : \overline{AB} = 8 : 15$ 이므로 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC를 생각할 수 있다.

$$\text{이때 } \overline{AC} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 \text{이므로}$$

$$\cos(90^\circ - A) = \cos C = \frac{8}{17}$$



04 $\overline{BD} : \overline{DC} = 16 : 9$ 이므로

$$\overline{BD} = 16k, \overline{DC} = 9k \quad (k > 0) \text{라 하면}$$

$$\overline{AD}^2 = 16k \times 9k = 144k^2 \quad \therefore \overline{AD} = 12k \quad (\because k > 0)$$

$$\text{따라서 } \triangle ADC \text{에서 } \overline{AC} = \sqrt{(9k)^2 + (12k)^2} = 15k$$

$$\therefore \cos x - \sin x = \frac{12k}{15k} - \frac{9k}{15k} = \frac{1}{5}$$

05 $x = a, y = 2a, z = 3a \quad (a > 0)$ 라 하면

$$a + 2a + 3a = 180^\circ, 6a = 180^\circ \quad \therefore a = 30^\circ$$

$$\text{즉, } x = 30^\circ, y = 60^\circ, z = 90^\circ \text{이므로}$$

$$\tan x : \cos y : \sin z = \tan 30^\circ : \cos 60^\circ : \sin 90^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} : \frac{1}{2} : 1$$

$$= 2 : \sqrt{3} : 2\sqrt{3}$$

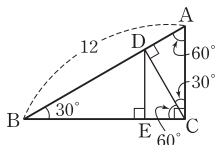
06 오른쪽 그림의 $\triangle ABC$ 에서

$$\angle A = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$$

이므로

$$\angle ACD = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$$

$$\therefore \angle DCE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$



$$\triangle ABC \text{에서 } \overline{AC} = 12 \sin 30^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

$$\triangle ADC \text{에서 } \overline{CD} = 6 \cos 30^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\triangle DEC \text{에서 } \overline{DE} = 3\sqrt{3} \sin 60^\circ = 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}$$

07 $\sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로 $a = 60^\circ$

구하는 직선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라 하면

$$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

직선 $y = \sqrt{3}x + n$ 이 점 $(-4, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -4\sqrt{3} + n \quad \therefore n = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore y = \sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$$

$$08 \sin 60^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{CD}}{1} = \overline{CD} = \sqrt{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB}}{1} = \overline{OB} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \square ABDC = \triangle COD - \triangle AOB$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

09 $3x^2 - 2x - 1 = 0$ 에서 $(3x+1)(x-1) = 0$

$$\therefore x = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 1$$

그런데 $0^\circ < B < 90^\circ$ 에서 $\tan B > 0$ 이므로 $x = 1$

$$\therefore \tan B = 1$$

$$\text{즉, } B = 45^\circ \text{이므로 } 0^\circ < A < 45^\circ$$

$$\text{이때 } \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{이므로}$$

$$0 < \sin A < \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos A < 1$$

따라서 $\cos A + \sin A > 0, \cos A - \sin A > 0$ 이므로

$$\sqrt{(\cos A + \sin A)^2} - \sqrt{(\cos A - \sin A)^2}$$

$$= \cos A + \sin A - (\cos A - \sin A)$$

$$= \cos A + \sin A - \cos A + \sin A$$

$$= 2 \sin A$$

10 $\triangle BCE$ 에서 $\angle EBC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ 이므로

$$\overline{CE} = 6\sqrt{3} \tan 30^\circ = 6\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 6(\text{cm})$$

$$\therefore \overline{DE} = \overline{CD} - \overline{CE}$$

$$= 6\sqrt{3} - 6 = 6(\sqrt{3} - 1)(\text{cm})$$

이때 $\angle DEH = 180^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 30^\circ$ 이므로

$$\overline{DH} = \overline{DE} \tan 30^\circ$$

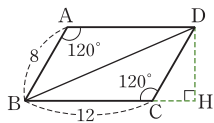
$$= 6(\sqrt{3} - 1) \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= 2(3 - \sqrt{3})(\text{cm})$$

$$\begin{aligned}
 &\therefore \square ABEH \\
 &= \square ABCD - \triangle BCE - \triangle EDH \\
 &= 6\sqrt{3} \times 6\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \times 6(\sqrt{3}-1) \times 2(3-\sqrt{3}) \\
 &= 108 - 18\sqrt{3} - 24\sqrt{3} + 36 \\
 &= 144 - 42\sqrt{3} (\text{cm}^2)
 \end{aligned}$$

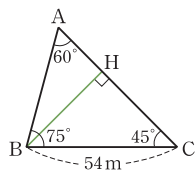
- 11 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 D에서 $\overline{BC}$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned}
 &\triangle DCH \text{에서} \\
 &\angle DCH = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \text{이므로} \\
 &\overline{DH} = 8 \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \\
 &\overline{CH} = 8 \cos 60^\circ = 8 \times \frac{1}{2} = 4 \\
 &\therefore \overline{BH} = \overline{BC} + \overline{CH} = 12 + 4 = 16 \\
 &\text{따라서 } \triangle DBH \text{에서} \\
 &\overline{BD} = \sqrt{16^2 + (4\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{19}
 \end{aligned}$$



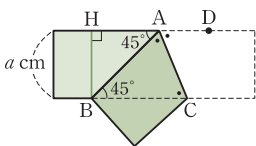
- 12 오른쪽 그림과 꼭짓점 B에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned}
 &\triangle BCH \text{에서} \\
 &\overline{BH} = 54 \sin 45^\circ \\
 &\quad = 54 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 27\sqrt{2} (\text{m}) \\
 &\overline{CH} = 54 \cos 45^\circ = 54 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 27\sqrt{2} (\text{m}) \\
 &\text{이때 } \angle A = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ \text{이므로} \\
 &\triangle ABH \text{에서 } \overline{AH} = \frac{27\sqrt{2}}{\tan 60^\circ} = \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 9\sqrt{6} (\text{m}) \\
 &\therefore \overline{AC} = \overline{AH} + \overline{CH} = 9\sqrt{6} + 27\sqrt{2} (\text{m})
 \end{aligned}$$



- 13 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 $\overline{AD}$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned}
 &\angle BAH = \angle ABC = 45^\circ (\text{엇각}) \\
 &\text{이므로} \\
 &\triangle BAH \text{에서 } \overline{AB} = \frac{a}{\sin 45^\circ} = a \div \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}a (\text{cm}) \\
 &\text{이때 } \angle BAC = \angle DAC (\text{접은 각}), \angle DAC = \angle BCA (\text{엇각}) \\
 &\text{이므로 } \angle BAC = \angle BCA \\
 &\text{즉, } \triangle ABC \text{는 } \overline{AB} = \overline{BC} \text{인 이등변삼각형이다.} \\
 &\therefore \overline{BC} = \overline{AB} = \sqrt{2}a \text{ cm} \\
 &\text{따라서 } \frac{1}{2} \times \sqrt{2}a \times \sqrt{2}a \times \sin 45^\circ = 18\sqrt{2} \text{이므로} \\
 &\frac{1}{2} \times \sqrt{2}a \times \sqrt{2}a \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2} \\
 &\frac{\sqrt{2}}{2} a^2 = 18\sqrt{2}, a^2 = 36 \\
 &\therefore a = 6 (\because a > 0)
 \end{aligned}$$



- 14 $\angle BOC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ 이므로

$$\triangle OBC = \frac{1}{2} \times \overline{BO} \times 5 \times \sin 60^\circ = 10\sqrt{3} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times \overline{BO} \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{4} \overline{BO} = 10\sqrt{3} \quad \therefore \overline{BO} = 8$$

이때 $\overline{AC} + \overline{BD} = 25$ 이므로

$$\overline{AC} + (8+5) = 25 \quad \therefore \overline{AC} = 12$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \square ABCD &= \frac{1}{2} \times (8+5) \times 12 \times \sin 60^\circ \\
 &= \frac{1}{2} \times 13 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 39\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

- 15 $c = \frac{a}{2} + b$ 의 양변을 제곱하면 $c^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2$

$$\therefore c^2 = \frac{a^2}{4} + ab + b^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 $\triangle ABC$ 는 직각삼각형이므로

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a^2 + b^2 = \frac{a^2}{4} + ab + b^2$$

$$\frac{3}{4}a^2 = ab, 3a = 4b \quad \therefore \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \tan B = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$$

- 16 $\triangle ABC$ 에서

$$\overline{BC} = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$$

이때 $\triangle ABC \sim \triangle EBD$ (AA 닮음)

이므로 $\angle ACB = \angle EDB = x$

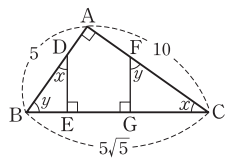
또 $\triangle ABC \sim \triangle GFC$ (AA 닮음)이므로

$$\angle ABC = \angle GFC = y$$

따라서 $\triangle ABC$ 에서

$$\cos x = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos y = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \cos x - \cos y = \frac{2\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$



- 17 $\overline{EC} = a$ 라 하면

$\angle ABC = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ$ 이므로 $\triangle ABC$ 는 직각이등변삼각형이다.

$$\therefore \overline{AC} = \overline{BC} = a + 1$$

$$\triangle AEC \text{에서 } \tan 75^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{EC}} = \frac{a+1}{a}$$

$$\text{이때 } \tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3} \text{이므로 } \frac{a+1}{a} = 2 + \sqrt{3}$$

$$2a + \sqrt{3}a = a + 1, (1 + \sqrt{3})a = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\therefore \overline{AC} = \overline{BC} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

따라서 $\triangle BCD$ 에서

$$\overline{CD} = \overline{BC} \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$$

$$\therefore \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CD} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{3+\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- 18 $\square ADPF$ 에서 $\angle ADP = \angle AFP = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$ 이므로
 $\angle DPF = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 60^\circ) = 120^\circ$

마찬가지 방법으로 하면 $\angle DPE = 120^\circ$, $\angle EPF = 120^\circ$

$$\triangle PDE = \frac{1}{2} \times x \times y \times \sin(180^\circ - 120^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \times x \times y \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} xy$$

$$\triangle PEF = \frac{1}{2} \times y \times z \times \sin(180^\circ - 120^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \times y \times z \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} yz$$

$$\triangle PFD = \frac{1}{2} \times z \times x \times \sin(180^\circ - 120^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \times z \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} zx$$

$$\therefore \triangle DEF = \triangle PDE + \triangle PEF + \triangle PFD$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (xy + yz + zx)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 24 = 6\sqrt{3}$$

- 19 $\triangle ABM = \frac{1}{2} \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \square ABCD = \frac{1}{4} \square ABCD$

$$\triangle AND = \frac{1}{2} \triangle ACD = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \square ABCD = \frac{1}{4} \square ABCD$$

$$\triangle MCN = \frac{1}{2} \triangle BCN = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \triangle BCD = \frac{1}{4} \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \square ABCD = \frac{1}{8} \square ABCD$$

이므로

$$\triangle AMN$$

$$= \square ABCD - (\triangle ABM + \triangle AND + \triangle MCN)$$

$$= \square ABCD - \left(\frac{1}{4} \square ABCD + \frac{1}{4} \square ABCD + \frac{1}{8} \square ABCD \right)$$

$$= \square ABCD - \frac{5}{8} \square ABCD$$

$$= \frac{3}{8} \square ABCD$$

$$= \frac{3}{8} \times (6 \times 6 \times \sin 45^\circ)$$

$$= \frac{3}{8} \times \left(6 \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{27\sqrt{2}}{4} (\text{cm}^2)$$

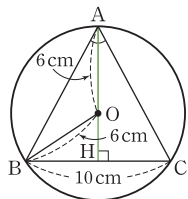
- 20 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\triangle ABC$ 는 원에 내접하는 이등변삼각형이므로 $\overline{AH}$ 는 원의 중심 O를 지난다. 이때 $\overline{OA} = \overline{OB} = 6 \text{ cm}$ 이므로 $\triangle ABO$ 는 이등변삼각형이다.

$$\therefore \angle ABO = \angle BAH$$

$$\text{또 } \angle BAH = \angle CAH \text{이므로}$$

$$\triangle ABO \text{에서}$$

$$\angle BOH = \angle ABO + \angle BAO = 2\angle BAH = \angle A$$



... ㉠

이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분하므로

$$\overline{BH} = \overline{CH} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 10 = 5 (\text{cm})$$

... ㉡

따라서 $\triangle OBH$ 에서

$$\sin A = \sin(\angle BOH) = \frac{\overline{BH}}{\overline{OB}} = \frac{5}{6}$$

... ㉢

채점 요소	비율
㉠ $\angle ABO = \angle BAH$ 임을 알기	20 %
㉡ $\angle BOH = \angle A$ 임을 알기	30 %
㉢ BH의 길이 구하기	20 %
㉣ $\sin A$ 의 값 구하기	30 %

- 21 $\overline{OA} = \overline{OC} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$... ㉠

$\triangle COD$ 에서 $\angle COD = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ 이므로

$$\overline{CD} = 2\sqrt{3} \sin 45^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$$

$$\overline{OD} = 2\sqrt{3} \cos 45^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$$

... ㉡

이때 $\triangle AOC$ 는 이등변삼각형이므로

$$\angle OAC = \angle OCA$$

$$= \frac{1}{2} \times (180^\circ - 135^\circ) = 22.5^\circ$$

... ㉢

따라서 $\triangle ADC$ 에서

$$\angle ACD = 180^\circ - (22.5^\circ + 90^\circ) = 67.5^\circ \text{이므로}$$

$$\tan 67.5^\circ = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \sqrt{2} + 1$$

... ㉣

채점 요소	비율
㉠ $\overline{OA}$, $\overline{OC}$ 의 길이 구하기	20 %
㉡ $\overline{CD}$, $\overline{OD}$ 의 길이 구하기	30 %
㉢ $\angle OAC$ 의 크기 구하기	20 %
㉣ $\tan 67.5^\circ$ 의 값 구하기	30 %

- 22 $\triangle BDC$ 에서

$$\angle BCD = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$$

... ㉠

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 B에서

$\overline{CD}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle BDH$ 에서

$$\overline{BH} = 50 \sin 45^\circ$$

$$= 50 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 25\sqrt{2} (\text{m})$$

$\triangle BHC$ 에서

$$\overline{BC} = \frac{25\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = 25\sqrt{2} \div \frac{1}{2} = 50\sqrt{2} (\text{m})$$

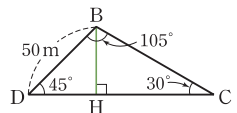
... ㉡

따라서 $\triangle ABC$ 에서

$$\overline{AC} = 50\sqrt{2} \tan 60^\circ = 50\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 50\sqrt{6} (\text{m})$$

... ㉢

채점 요소	비율
㉠ $\angle BCD$ 의 크기 구하기	20 %
㉡ $\overline{BC}$ 의 길이 구하기	50 %
㉢ $\overline{AC}$ 의 길이 구하기	30 %



23 $\overline{PD}=x$, $\overline{PE}=y$ 라 하면

$\triangle ABC$ 는 정삼각형이고,

$\triangle ABC = \triangle ABP + \triangle APC$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times x + \frac{1}{2} \times 2 \times y$$

$$x+y = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore x+y = \sqrt{3} \quad \dots \textcircled{㉠} \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{이때 } \overline{PD}^2 + \overline{PE}^2 = \frac{5}{3} \text{이므로 } x^2 + y^2 = \frac{5}{3} \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ 에 대입하면

$$\frac{5}{3} = (\sqrt{3})^2 - 2xy \quad \therefore xy = \frac{2}{3} \quad \dots \textcircled{㉢} \quad \dots \textcircled{㉢}$$

$\square ADPE$ 에서

$$\angle DPE = 360^\circ - (60^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 120^\circ$$

$$\therefore \triangle DPE = \frac{1}{2} \times x \times y \times \sin (180^\circ - 120^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \times x \times y \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} xy = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{3} \quad (\because \textcircled{㉢})$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \dots \textcircled{㉣}$$

채점 요소	비율
㉠ $\overline{PD} + \overline{PE}$ 의 값 구하기	40 %
㉢ $\overline{PD} \times \overline{PE}$ 의 값 구하기	30 %
㉣ $\triangle DPE$ 의 넓이 구하기	30 %

II. 원의 성질

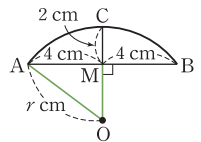
1 원과 직선

1 주제별 유형 불러오기

39~44쪽

유제 1	④	유제 2	8 cm	유제 3	⑤
유제 4	$36\sqrt{3} \text{ cm}^2$	유제 5	③		
유제 6	24 cm	유제 7	②		
유제 8	$(24 - 4\pi) \text{ cm}^2$	유제 9	①	유제 10	13 cm
유제 11	⑤	유제 12	$(20 - 4\sqrt{21}) \text{ cm}$		

유제 1 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지나므로 원의 중심을 O라 하고, 원 O의 반지름의 길이를 $r \text{ cm}$ 라 하면



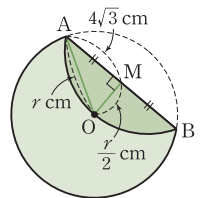
$$\overline{OA} = r \text{ cm}, \overline{OM} = (r-2) \text{ cm} \text{이므로}$$

$$\triangle AOM \text{에서 } r^2 = (r-2)^2 + 4^2$$

$$4r = 20 \quad \therefore r = 5$$

따라서 원의 반지름의 길이는 5 cm이다.

유제 2 오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 M이라 하면



$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

$$= \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} = 4\sqrt{3} (\text{cm})$$

원 O의 반지름의 길이를 $r \text{ cm}$ 라 하면

$$\overline{OM} = \frac{1}{2} \overline{OA} = \frac{r}{2} (\text{cm}) \text{이므로}$$

$$\triangle AOM \text{에서 } r^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + (4\sqrt{3})^2$$

$$r^2 = 64 \quad \therefore r = 8 (\because r > 0)$$

따라서 원 O의 반지름의 길이는 8 cm이다.

유제 3 $\overline{OM} = \overline{ON}$ 이므로 $\overline{AB} = \overline{CD} = 9 \text{ cm}$

$$\therefore \overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 9 = \frac{9}{2} (\text{cm})$$

$$\triangle BOM \text{에서 } \overline{OB} = \frac{\overline{BM}}{\cos 30^\circ} = \frac{9}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} (\text{cm})$$

$$\therefore (\text{원 O의 넓이}) = \pi \times (3\sqrt{3})^2 = 27\pi (\text{cm}^2)$$

유제 4 $\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR}$ 이므로 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$

이때 $\overline{AB} = 2\overline{AP} = 2 \times 6 = 12 (\text{cm})$ 이므로 $\triangle ABC$ 는 한 변의 길이가 12 cm인 정삼각형이다.

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3} (\text{cm}^2)$$

유제 5 □APBO에서

$\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$ 이므로

$\angle AOB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{PO}$ 를 그으면

$\triangle PAO \cong \triangle PBO$ (RHS 합동)

이므로

$$\begin{aligned}\angle APO &= \angle BPO = \frac{1}{2} \angle APB \\ &= \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ\end{aligned}$$

$$\triangle PAO \text{에서 } \overline{OA} = 4\sqrt{3} \tan 30^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 4(\text{cm})$$

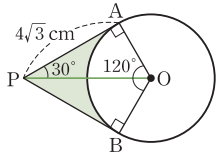
$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)

$= \square APBO - (\text{부채꼴 } OAB \text{의 넓이})$

$= 2\triangle PAO - (\text{부채꼴 } OAB \text{의 넓이})$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4 \right) - \pi \times 4^2 \times \frac{120}{360}$$

$$= 16\sqrt{3} - \frac{16}{3}\pi (\text{cm}^2)$$



유제 6 $\angle PAO = 90^\circ$ 이므로

$$\triangle PAO \text{에서 } \overline{PA} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12(\text{cm})$$

이때 $\overline{AQ} = \overline{CQ}$, $\overline{BR} = \overline{CR}$ 이므로

$$\begin{aligned}(\triangle PQR \text{의 둘레의 길이}) &= \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{PR} \\ &= \overline{PA} + \overline{PB} = 2\overline{PA} \\ &= 2 \times 12 = 24(\text{cm})\end{aligned}$$

유제 7 $\overline{AD} = \overline{AF} = x$ 라 하면

$\overline{BE} = \overline{BD} = 6$, $\overline{CE} = \overline{CF} = 5$ 이므로

$$2(x + 6 + 5) = 30, x + 11 = 15 \quad \therefore x = 4$$

$$\therefore \overline{AD} = 4$$

유제 8 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10(\text{cm})$

원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면

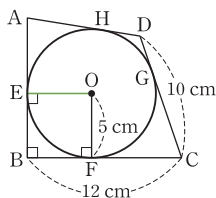
$\overline{CE} = \overline{CF} = r$ cm이므로

$\overline{BD} = \overline{BE} = (8 - r)$ cm, $\overline{AD} = \overline{AF} = (6 - r)$ cm

이때 $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BD}$ 이므로

$$10 = (6 - r) + (8 - r), 2r = 4 \quad \therefore r = 2$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{색칠한 부분의 넓이}) &= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 - \pi \times 2^2 \\ &= 24 - 4\pi (\text{cm}^2)\end{aligned}$$



유제 9 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OE}$ 를 그으면 □OEBF는 정사각형이므로

$\overline{BF} = \overline{OF} = 5$ cm

$\overline{CG} = \overline{CF} = 12 - 5 = 7(\text{cm})$

$\therefore \overline{DH} = \overline{DG}$

$$= 10 - 7 = 3(\text{cm})$$

유제 10 $\overline{DE} = x$ cm라 하면 □ABED가 원 O에 외접하므로

$\overline{AB} + \overline{DE} = \overline{AD} + \overline{BE}$ 에서

$$12 + x = 15 + \overline{BE} \quad \therefore \overline{BE} = x - 3(\text{cm})$$

이때 $\overline{CE} = 15 - (x - 3) = 18 - x(\text{cm})$ 이므로

$$\triangle DEC \text{에서 } x^2 = (18 - x)^2 + 12^2$$

$$36x = 468 \quad \therefore x = 13$$

$$\therefore \overline{DE} = 13 \text{ cm}$$

[다른 풀이]

$$\overline{AI} = \overline{AF} = \overline{BF} = \overline{BG} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 12 = 6(\text{cm}) \text{이므로}$$

$$\overline{DH} = \overline{DI} = \overline{CG} = 15 - 6 = 9(\text{cm})$$

$\overline{EG} = \overline{EH} = x$ cm라 하면

$$\overline{DE} = (9 + x) \text{ cm}, \overline{CE} = (9 - x) \text{ cm} \text{이므로}$$

$$\triangle DEC \text{에서 } (9 + x)^2 = (9 - x)^2 + 12^2$$

$$36x = 144 \quad \therefore x = 4$$

$$\therefore \overline{DE} = 9 + 4 = 13(\text{cm})$$

유제 11 오른쪽 그림과 같이 원 O

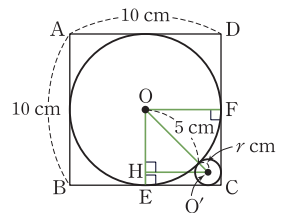
의 중심에서 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ 에

내린 수선의 발을 각각 E,

F라 하고, 원 O'의 중심

에서 $\overline{OE}$ 에 내린 수선의

발을 H라 하자.



원 O의 반지름의 길이가 $\frac{1}{2} \times 10 = 5(\text{cm})$ 이므로

원 O'의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$$\overline{OO'} = (5 + r) \text{ cm}, \overline{OH} = (5 - r) \text{ cm},$$

$$\overline{OH} = (5 - r) \text{ cm} \text{이므로}$$

$$\triangle OHO' \text{에서 } (5 + r)^2 = (5 - r)^2 + (5 - r)^2$$

$$r^2 - 30r + 25 = 0 \quad \therefore r = 15 - 10\sqrt{2} \quad (\because 0 < r < 5)$$

따라서 원 O'의 반지름의 길이는 $(15 - 10\sqrt{2})$ cm이다.

유제 12 오른쪽 그림에서

$\overline{CD} = \overline{DE} = x$ cm라 하면

$$\pi \times x^2 \times \frac{1}{4} = 9\pi \text{이므로}$$

$$x^2 = 36$$

$$\therefore x = 6 \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore \overline{BC} = \overline{AD} = 2 + 6 = 8(\text{cm})$$

이때 원 O의 중심에서 $\overline{CD}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하고,

원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면

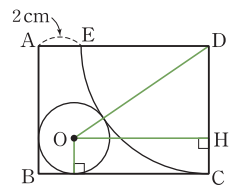
$$\overline{DO} = (6 + r) \text{ cm}, \overline{DH} = (6 - r) \text{ cm}, \overline{OH} = (8 - r) \text{ cm}$$

이므로

$$\triangle DOH \text{에서 } (6 + r)^2 = (6 - r)^2 + (8 - r)^2$$

$$r^2 - 40r + 64 = 0 \quad \therefore r = 20 - 4\sqrt{21} \quad (\because 0 < r < 3)$$

따라서 원 O의 반지름의 길이는 $(20 - 4\sqrt{21})$ cm이다.



2. 최고 유형 탐험하기

45~47쪽

1 ⑤

2 ①

3 ③

4 ②

5 ⑤

6 ②

7 ③

8 ①

9 ②

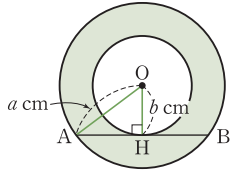
10 ⑤

11 ①

12 ④

- 1 $\overline{AB} \perp \overline{OM}$, $\overline{AC} \perp \overline{ON}$ 이므로 $\overline{AM} = \overline{BM}$, $\overline{AN} = \overline{CN}$
 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 12 = 6(\text{cm})$

- 2 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하고, 큰 원의 반지름의 길이를 $a \text{ cm}$, 작은 원의 반지름의 길이를 $b \text{ cm}$ 라 하면



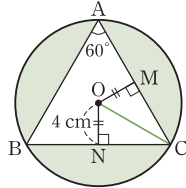
$$\pi a^2 - \pi b^2 = 16\pi \quad \therefore a^2 - b^2 = 16$$

$$\triangle OAH \text{에서}$$

$$\overline{AH} = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16} = 4(\text{cm})$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 4 = 8(\text{cm})$$

- 3 $\overline{OM} = \overline{ON}$ 이므로 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 이고,
 $\angle ABC = \angle BAC = 60^\circ$ 이므로 $\angle ACB = 60^\circ$
 즉, $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.
 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OC}$ 를 그으면
 $\triangle OMC \equiv \triangle ONC$ (RHS 합동)
 이므로



$$\angle OCN = \frac{1}{2} \angle ACB$$

$$= \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

$$\triangle ONC \text{에서}$$

$$\overline{OC} = \frac{4}{\sin 30^\circ} = 4 \div \frac{1}{2} = 8(\text{cm})$$

$$\overline{CN} = \frac{4}{\tan 30^\circ} = 4 \div \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}(\text{cm})$$

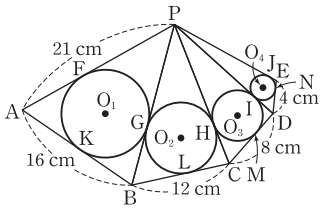
$$\therefore \overline{BC} = 2\overline{CN} = 2 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}(\text{cm})$$

$$\therefore (\text{색칠한 부분의 넓이}) = \pi \times 8^2 - \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times 8\sqrt{3} \times \sin 60^\circ$$

$$= 64\pi - \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times 8\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 64\pi - 48\sqrt{3}(\text{cm}^2)$$

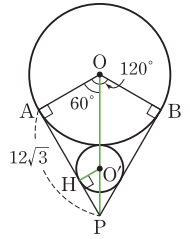
4



위의 그림과 같이 원과 접선의 접점을 각각 F, G, H, I, J, K, L, M, N이라 하고, $\overline{AF} = \overline{AK} = a \text{ cm}$ 라 하면
 $\overline{BK} = (16 - a) \text{ cm}$
 $\overline{BL} = \overline{BG} = \overline{BK} = (16 - a) \text{ cm}$ 이므로
 $\overline{CL} = 12 - (16 - a) = a - 4(\text{cm})$
 $\overline{CM} = \overline{CH} = \overline{CL} = (a - 4) \text{ cm}$ 이므로
 $\overline{DM} = 8 - (a - 4) = 12 - a(\text{cm})$
 $\overline{DN} = \overline{DI} = \overline{DM} = (12 - a) \text{ cm}$ 이므로
 $\overline{EN} = 4 - (12 - a) = a - 8(\text{cm})$
 $\therefore \overline{EJ} = \overline{EN} = (a - 8) \text{ cm}$

이때 $\overline{PJ} = \overline{PI} = \overline{PH} = \overline{PG} = \overline{PF} = (21 - a) \text{ cm}$ 이므로
 $\overline{PE} = \overline{PJ} + \overline{EJ} = (21 - a) + (a - 8) = 13(\text{cm})$

- 5 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OP}$ 를 그으면
 $\triangle OAP \equiv \triangle OBP$ (RHS 합동)이므로
 $\angle AOP = \angle BOP = \frac{1}{2} \angle AOB$
 $= \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$



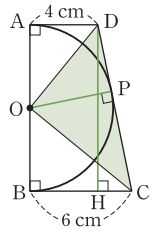
$$\triangle OAP \text{에서}$$

$$\overline{OA} = \frac{12\sqrt{3}}{\tan 60^\circ} = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 12$$

$$\overline{OP} = \frac{12\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 12\sqrt{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 24$$

원 O'의 반지름의 길이를 r 라 하면
 $\overline{O'P} = \overline{OP} - \overline{OO'} = 24 - (12 + r) = 12 - r$
 이때 점 O'에서 $\overline{PA}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면
 $\triangle OAP \sim \triangle O'HP$ (AA 닮음)이므로
 $12 : r = 24 : (12 - r)$
 $36r = 144 \quad \therefore r = 4$
 $\therefore$ (원 O'의 둘레의 길이) $= 2\pi \times 4 = 8\pi$

- 6 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 D에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면
 $\overline{CH} = 6 - 4 = 2(\text{cm})$
 $\overline{CD} = \overline{DP} + \overline{CP} = \overline{DA} + \overline{CB}$
 $= 4 + 6 = 10(\text{cm})$



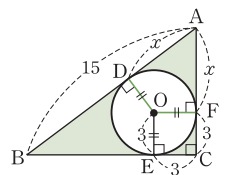
$$\triangle DHC \text{에서}$$

$$\overline{DH} = \sqrt{10^2 - 2^2} = 4\sqrt{6}(\text{cm})$$

이때 $\overline{OP}$ 를 그으면 $\overline{AB} = \overline{DH} = 4\sqrt{6} \text{ cm}$ 이므로
 $\overline{OP} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{6} = 2\sqrt{6}(\text{cm})$
 $\therefore \triangle OCD = \frac{1}{2} \times 10 \times 2\sqrt{6} = 10\sqrt{6}(\text{cm}^2)$

- 7 $\overline{AD} = \overline{AE}$, $\overline{CE} = \overline{CF}$, $\overline{BD} = \overline{BF}$ 이므로
 $\overline{AD} + \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$
 $= 12 + 13 + 15 = 40$
 $\therefore \overline{AE} = \frac{1}{2} \times 40 = 20$
 $\therefore \overline{CF} = \overline{CE} = \overline{AE} - \overline{AC} = 20 - 15 = 5$
 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{CP} = \overline{CR} = x$ 라 하면
 $\overline{AQ} = \overline{AP} = 15 - x$, $\overline{BQ} = \overline{BR} = 13 - x$
 이때 $\overline{AB} = \overline{AQ} + \overline{BQ}$ 이므로
 $12 = (15 - x) + (13 - x)$
 $2x = 16 \quad \therefore x = 8$
 $\therefore \overline{FR} = \overline{CR} - \overline{CF} = 8 - 5 = 3$

- 8 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OD}$, $\overline{OF}$ 를 그으면 $\overline{CE} = \overline{CF} = \overline{OE} = 3$
 $\overline{AF} = \overline{AD} = x$ 라 하면
 $\overline{BE} = \overline{BD} = 15 - x$, $\overline{AC} = x + 3$
 $\overline{BC} = (15 - x) + 3 = 18 - x$



$$\triangle ABC \text{에서 } 15^2 = (18-x)^2 + (x+3)^2$$

$$x^2 - 15x + 54 = 0, (x-6)(x-9) = 0$$

$$\therefore x=6 \text{ 또는 } x=9$$

그런데 $\overline{AC} < \overline{BC}$ 이므로

$$x+3 < 18-x \text{에서 } x < \frac{15}{2}$$

$$\therefore x=6$$

따라서 $\overline{AC} = 6+3=9$, $\overline{BC} = 18-6=12$ 이므로

$$(\text{색칠한 부분의 넓이}) = \frac{1}{2} \times 12 \times 9 - \pi \times 3^2$$

$$= 54 - 9\pi$$

9 $\triangle ABE$ 에서 $\overline{AE} = \overline{AD} = 12$ cm이므로

$$\overline{BE} = \sqrt{12^2 - 10^2} = 2\sqrt{11} \text{ (cm)}$$

오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABE$ 와

내접원의 세 접점을 각각 P, Q,

R라 하고, 내접원의 반지름의 길

이를 r cm라 하면

$$\overline{AR} = \overline{AP} = (10-r) \text{ cm},$$

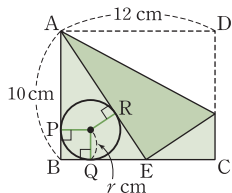
$$\overline{ER} = \overline{EQ} = (2\sqrt{11}-r) \text{ cm}$$

이때 $\overline{AE} = \overline{AR} + \overline{ER}$ 이므로

$$12 = (10-r) + (2\sqrt{11}-r), 2r = 2\sqrt{11}-2$$

$$\therefore r = \sqrt{11}-1$$

따라서 $\triangle ABE$ 의 내접원의 반지름의 길이는 $(\sqrt{11}-1)$ cm이다.



10 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서

$\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하고,

원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하

면

$$\overline{AH} = \overline{CD} = 2r \text{ cm}$$

$$\overline{BH} = 10 - 6 = 4 \text{ (cm)}$$

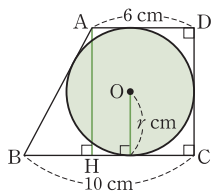
이때 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ 이므로

$$\overline{AB} + 2r = 6 + 10 \quad \therefore \overline{AB} = (16-2r) \text{ cm}$$

$$\triangle ABH \text{에서 } (16-2r)^2 = (2r)^2 + 4^2$$

$$64r = 240 \quad \therefore r = \frac{15}{4}$$

$$\therefore (\text{원 O의 넓이}) = \pi \times \left(\frac{15}{4}\right)^2 = \frac{225}{16}\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$



11 오른쪽 그림과 같이 $\overline{O'C}$, $\overline{O'D}$,

$\overline{OO'}$ 을 긋고 원 O'의 반지름의

길이를 r cm라 하면

$\triangle O'OC \equiv \triangle O'OD$ (RHS 합동)

이므로

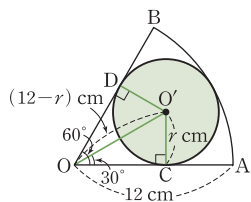
$$\angle O'OC = \frac{1}{2} \angle BOA = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

이때 $\triangle O'OC$ 에서 $\overline{OO'} = (12-r)$ cm이고,

$$r = (12-r) \sin 30^\circ \text{이므로}$$

$$r = (12-r) \times \frac{1}{2} \quad \therefore r = 4$$

$$\therefore (\text{원 O'의 넓이}) = \pi \times 4^2 = 16\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$



12 오른쪽 그림과 같이 점 Q에서

$\overline{OP}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하

고, 원 Q의 반지름의 길이를

r cm라 하자.

원 P의 반지름의 길이는 4 cm이므로

$$\overline{QP} = (4+r) \text{ cm}, \overline{QO} = (8-r) \text{ cm},$$

$$\overline{PH} = \overline{PO} - \overline{HO} = (4-r) \text{ cm}$$

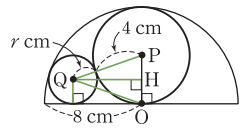
$$\triangle PQH \text{에서 } \overline{QH}^2 = (4+r)^2 - (4-r)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\triangle QOH \text{에서 } \overline{QH}^2 = (8-r)^2 - r^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } (4+r)^2 - (4-r)^2 = (8-r)^2 - r^2$$

$$32r = 64 \quad \therefore r = 2$$

따라서 원 Q의 반지름의 길이는 2 cm이다.



3 최고 유형 정복하기

48~50쪽

01 125π 02 $52\pi \text{ cm}^2$ 03 $36\sqrt{3} + 66\pi$

04 16 cm 05 $10(2\sqrt{3}-3) \text{ cm}$ 06 54 cm^2

07 25 08 $\sqrt{30} \text{ cm}$ 09 1 10 $24\sqrt{2} \text{ cm}^2$

11 $\left(\frac{56}{3}\pi + 16\sqrt{3}\right) \text{ cm}$

01 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 에 내린 수선의 발을 각각

M, N이라 하면

$$\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{AB}$$

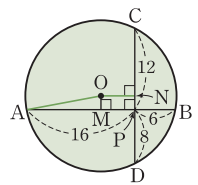
$$= \frac{1}{2} \times (16+6) = 11$$

$$\overline{CN} = \overline{DN} = \frac{1}{2} \overline{CD} = \frac{1}{2} \times (12+8) = 10$$

$$\therefore \overline{OM} = \overline{NP} = 10 - 8 = 2$$

$$\triangle OAM \text{에서 } \overline{OA} = \sqrt{11^2 + 2^2} = 5\sqrt{5}$$

$$\therefore (\text{원 O의 넓이}) = \pi \times (5\sqrt{5})^2 = 125\pi$$



02 오른쪽 그림과 같이 점 O의 중심을 O, 점 O에서 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ 에

내린 수선의 발을 각각 M, N

이라 하고, $\overline{ON} = x$ cm라 하면

$$\overline{EM} = \frac{1}{2} \overline{EH} = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ (cm)},$$

$$\overline{OM} = (x+2) \text{ cm이므로}$$

$$\triangle EOM \text{에서 } \overline{OE}^2 = 4^2 + (x+2)^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\overline{BN} = \overline{AM} = 6 + 4 = 10 \text{ (cm)이므로}$$

$$\overline{FN} = 10 - 4 = 6 \text{ (cm)}$$

$$\triangle FON \text{에서 } \overline{OF}^2 = 6^2 + x^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

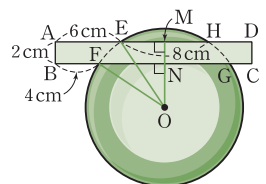
이때 $\overline{OE} = \overline{OF}$ 이므로

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 4^2 + (x+2)^2 = 6^2 + x^2$$

$$4x = 16 \quad \therefore x = 4$$

$$\therefore \overline{OE} = \overline{OF} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13} \text{ (cm)} (\because \overline{OE} > 0, \overline{OF} > 0)$$

$$\therefore (\text{점 O의 넓이}) = \pi \times (2\sqrt{13})^2 = 52\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$



- 03 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$, $\overline{OC}$ 를 그으면

$\triangle AOM$ 에서

$$\overline{AM} = \sqrt{12^2 - (6\sqrt{3})^2} = 6$$

이때 $\overline{OM} = \overline{ON}$ 이므로 $\overline{AB} = \overline{CD}$

$$\therefore \overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CN} = \overline{DN} = 6$$

$\triangle AOM$ 에서

$$\cos(\angle AOM) = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

그런데 $\angle AOM < 90^\circ$ 이므로 $\angle AOM = 30^\circ$

$\triangle OAM \equiv \triangle OCN$ (RHS 합동)이므로

$$\angle CON = \angle AOM = 30^\circ$$

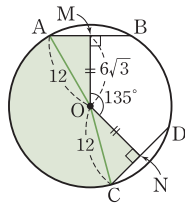
$$\therefore \angle AOC = 360^\circ - (30^\circ + 135^\circ + 30^\circ) = 165^\circ$$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)

$$= \triangle AOM + \triangle CON + (\text{부채꼴 } AOC \text{의 넓이})$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{3} + \pi \times 12^2 \times \frac{165}{360}$$

$$= 36\sqrt{3} + 66\pi$$



- 04 $\overline{DA} = \overline{DG}$, $\overline{CB} = \overline{CG}$ 이므로

$$\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PC} + \overline{CD} + \overline{PD} = 14 + 13 + 11 = 38(\text{cm})$$

$$\text{이때 } \overline{PA} = \overline{PB} \text{이므로 } \overline{PA} = \frac{1}{2} \times 38 = 19(\text{cm})$$

$$\therefore \overline{DA} = 19 - 11 = 8(\text{cm})$$

따라서 $\overline{EA} = \overline{EH}$, $\overline{FG} = \overline{FH}$ 이므로

($\triangle DFE$ 의 둘레의 길이)

$$= \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{DF} = \overline{DA} + \overline{DG}$$

$$= 2\overline{DA} = 2 \times 8 = 16(\text{cm})$$

- 05 오른쪽 그림과 같이 세 원 P, Q, R

가 접하는 점을 각각 A, B, C라 하고,

점 O에서 세 접선 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$,

$\overline{OC}$ 를 그으면

$$\overline{OA} \perp \overline{PQ}, \overline{OB} \perp \overline{QR}, \overline{OC} \perp \overline{PR}$$

이때 세 원 P, Q, R가 합동이므로

$\triangle PQR$ 는 정삼각형이고, $\overline{OA} = \overline{OB}$ 이므로

$$\triangle OAP \equiv \triangle OCP \text{ (RHS 합동)}$$

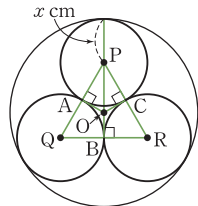
$$\therefore \angle CPO = \frac{1}{2} \angle QPR = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

원 P의 반지름의 길이를 x cm라 하면 $\overline{OP} = (10 - x)$ cm

$$\text{따라서 } \triangle OPC \text{에서 } \cos 30^\circ = \frac{x}{10 - x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로}$$

$$(2 + \sqrt{3})x = 10\sqrt{3} \quad \therefore x = \frac{10\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 10(2\sqrt{3} - 3)$$

따라서 원 P의 반지름의 길이는 $10(2\sqrt{3} - 3)$ cm이다.



- 06 오른쪽 그림에서 원 O의 반지름의

길이가 3 cm이므로

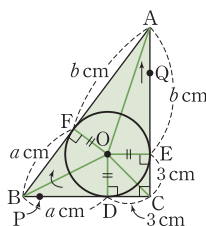
$$\overline{OF} = \overline{OE} = \overline{OD} = \overline{CD} = \overline{CE} = 3 \text{ cm}$$

이때 $\overline{BD} = \overline{BF} = a$ cm,

$\overline{AE} = \overline{AF} = b$ cm라 하면

(점 P가 움직인 거리) = $(2a + b)$ cm,

(점 Q가 움직인 거리) = b cm이므로



두 점 P, Q가 점 A에 도착할 때까지 걸린 시간을 t 라 하면

$$\frac{2a+b}{t} = \frac{7}{3} \times \frac{b}{t}, 2a+b = \frac{7}{3}b \quad \therefore b = \frac{3}{2}a \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(i) \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times (a+3) \times (b+3)$$

$$= \frac{1}{2} (ab + 3a + 3b + 9)$$

$$= \frac{3}{4}a^2 + \frac{15}{4}a + \frac{9}{2} (\because \textcircled{1})$$

$$(ii) \triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$$

$$= \frac{1}{2} \times (a+b) \times 3 + \frac{1}{2} \times (a+3) \times 3$$

$$+ \frac{1}{2} \times (b+3) \times 3$$

$$= 3a + 3b + 9 = \frac{15}{2}a + 9 (\because \textcircled{1})$$

$$\text{따라서 (i), (ii)에서 } \frac{3}{4}a^2 + \frac{15}{4}a + \frac{9}{2} = \frac{15}{2}a + 9,$$

$$a^2 - 5a - 6 = 0, (a-6)(a+1) = 0$$

$$\therefore a = 6 (\because a > 0)$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{15}{2} \times 6 + 9 = 54(\text{cm}^2)$$

- 07 $\square ABCD$ 의 둘레의 길이가 70이므로

$$\overline{AB} + \overline{BC} = 35$$

오른쪽 그림과 같이 원 O와

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 의 접점을 각각 G, H라

하고, $\overline{AB} = x$ 라 하면

$$\overline{BC} = 35 - x$$

이때 $\overline{OG} = \overline{OH} = \overline{OE} = 5$ 이므로

$$\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC} = \overline{AG} + \overline{CH}$$

$$= (\overline{AB} - \overline{BG}) + (\overline{BC} - \overline{BH})$$

$$= (x - 5) + (35 - x - 5) = 25$$

$$\triangle ABC \text{에서 } 25^2 = x^2 + (35 - x)^2$$

$$x^2 - 35x + 300 = 0, (x - 15)(x - 20) = 0$$

$$\therefore x = 15 \text{ 또는 } x = 20$$

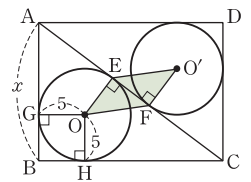
그런데 $\overline{AB} < \overline{BC}$ 이므로 $\overline{AB} = 15$, $\overline{BC} = 20$

$$\therefore \overline{AE} = \overline{AG} = 15 - 5 = 10$$

마찬가지 방법으로 하면 $\overline{CF} = 10$ 이므로

$$\overline{EF} = \overline{AC} - (\overline{AE} + \overline{CF}) = 25 - (10 + 10) = 5$$

$$\therefore \square EOFO' = 2\triangle EOF = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 5 \times 5 \right) = 25$$



- 08 오른쪽 그림과 같이 두 꼭짓점

A, D에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의

발을 각각 E, F라 하고,

$\overline{BE} = x$ cm라 하면

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC} \text{이므로}$$

$$13 + 11 = 8 + \overline{BC} \quad \therefore \overline{BC} = 16(\text{cm})$$

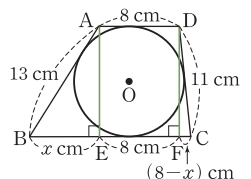
$$\triangle ABE \text{에서 } \overline{AE}^2 = 13^2 - x^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\triangle DFC \text{에서 } \overline{DF}^2 = 11^2 - (8 - x)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

이때 $\overline{AE} = \overline{DF}$ 이므로

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 13^2 - x^2 = 11^2 - (8 - x)^2$$

$$16x = 112 \quad \therefore x = 7$$



$$\therefore \overline{AE} = \sqrt{13^2 - 7^2} = 2\sqrt{30}(\text{cm})$$

따라서 원 O의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AE} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{30} = \sqrt{30}(\text{cm})$$

- 09 오른쪽 그림과 같이 원 O와 □ABED의 접점을 각각 P, Q, R, S라 하고, 원 O의 반지름의 길이를 x 라 하면

$$\overline{AP} = \overline{AS} = \overline{DR} = \overline{DS} = x \text{이므로}$$

$$\overline{AD} = \overline{BC} = 2x$$

$$\overline{DE} = 12 - 8 = 4$$

이때 □ABED가 원 O에 외접하므로

$$\overline{AB} + \overline{DE} = \overline{AD} + \overline{BE} \text{에서}$$

$$12 + 4 = 2x + \overline{BE}$$

$$\therefore \overline{BE} = 16 - 2x$$

$$\triangle BCE \text{에서 } (16 - 2x)^2 = 8^2 + (2x)^2$$

$$64x = 192 \quad \therefore x = 3 \quad \therefore \overline{BC} = 6$$

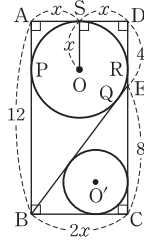
이때 원 O'의 반지름의 길이를 y 라 하면

$$\triangle BCE = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = \frac{1}{2} \times y \times (8 + 6 + 10) = 24$$

$$12y = 24 \quad \therefore y = 2$$

따라서 두 원 O, O'의 반지름의 길이의 차는

$$3 - 2 = 1$$



$$\angle O'OH' = 30^\circ, \angle OO'H' = 60^\circ$$

따라서 $\angle AOB = 360^\circ - (2 \times 30^\circ + 2 \times 90^\circ) = 120^\circ$,

$$\angle DO'C = 2 \times 60^\circ = 120^\circ \text{이므로}$$

(필요한 끈의 최소 길이)

$$= \widehat{AB} + \widehat{CFD} + \overline{AD} + \overline{BC}$$

$$= 2\pi \times 4 \times \frac{120}{360} + 2\pi \times 12 \times \frac{240}{360} + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$$

$$= \frac{8}{3}\pi + 16\pi + 16\sqrt{3}$$

$$= \left(\frac{56}{3}\pi + 16\sqrt{3}\right)(\text{cm})$$

- 10 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OP}$, $\overline{O'Q}$ 를 긋고, 점 O'에서 $\overline{OP}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{HP} = \overline{O'Q} = 4 \text{cm이므로}$$

$$\overline{OH} = 8 - 4 = 4(\text{cm})$$

$\triangle OHO'$ 에서

$$\overline{OO'} = 8 + 4 = 12(\text{cm}) \text{이므로}$$

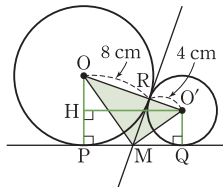
$$\overline{HO'} = \sqrt{12^2 - 4^2} = 8\sqrt{2}(\text{cm})$$

이때 $\triangle OPM \equiv \triangle ORM$ (SSS 합동),

$\triangle O'RM \equiv \triangle O'QM$ (SSS 합동)이므로

$$\triangle OMO' = \frac{1}{2} \square OPQO'$$

$$= \frac{1}{2} \times \left\{ \frac{1}{2} \times (8 + 4) \times 8\sqrt{2} \right\} = 24\sqrt{2}(\text{cm}^2)$$



- 11 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 $\overline{O'D}$, $\overline{O'C}$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면

$$\overline{O'H} = \overline{O'D} - \overline{DH}$$

$$= 12 - 4 = 8(\text{cm})$$

$\triangle OO'H$ 에서 $\overline{OO'} = 4 + 12 = 16(\text{cm})$ 이므로

$$\overline{OH} = \sqrt{16^2 - 8^2} = 8\sqrt{3}(\text{cm}) \quad \therefore \overline{AD} = \overline{OH} = 8\sqrt{3} \text{cm}$$

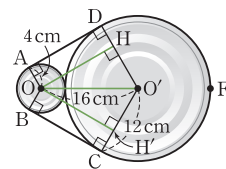
이때 $\triangle OO'H$ 에서 $\cos(\angle O'OH) = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이고

$$\angle O'OH < 90^\circ \text{이므로 } \angle O'OH = 30^\circ$$

$$\therefore \angle OO'H = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$$

마찬가지 방법으로 하면

$$\overline{BC} = \overline{OH'} = 8\sqrt{3} \text{cm이고,}$$



2 원주각

1 주제별 유형 불러오기

52~58쪽

유제 1	⑤	유제 2	24°	유제 3	④	유제 4	$\frac{\sqrt{5}}{3}$
유제 5	③	유제 6	50°	유제 7	③	유제 8	76°
유제 9	③	유제 10	85°	유제 11	②	유제 12	38°
유제 13	②	유제 14	47°				

유제 1 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ 를
그으면

$$\angle AOB = 2\angle ACB$$

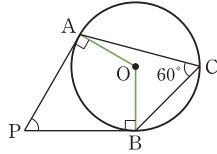
$$= 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

$$\text{이때 } \angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$$

이므로

$$\angle APB = 180^\circ - \angle AOB$$

$$= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$



유제 2 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$ 를 그
으면

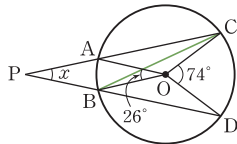
$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$$

$$= \frac{1}{2} \times 26^\circ = 13^\circ$$

$$\angle CBD = \frac{1}{2}\angle COD = \frac{1}{2} \times 74^\circ = 37^\circ$$

따라서 $\triangle PBC$ 에서

$$\angle x + 13^\circ = 37^\circ \quad \therefore \angle x = 24^\circ$$



유제 3 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$ 를 그으면

$$\angle DAC = \frac{1}{2}\angle DOC$$

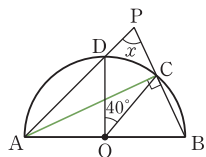
$$= \frac{1}{2} \times 40^\circ = 20^\circ$$

이때 $\overline{AB}$ 가 반원 O의 지름이므로

$$\angle ACB = 90^\circ$$

따라서 $\triangle PAC$ 에서

$$\angle x = 180^\circ - (20^\circ + 90^\circ) = 70^\circ$$



유제 4 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BO}$ 의 연장선이
원 O와 만나는 점을 D라 하면

$$\angle BDC = \angle BAC$$

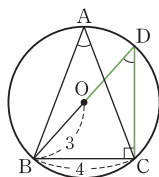
이때 $\overline{BD}$ 가 원 O의 지름이므로

$$\angle BCD = 90^\circ$$

$$\triangle BCD \text{에서 } \overline{BD} = 2\overline{BO} = 2 \times 3 = 6,$$

$$\overline{CD} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \cos A = \cos D = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



유제 5 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$ 를 그으면

$$\angle ADB = 90^\circ \text{이므로}$$

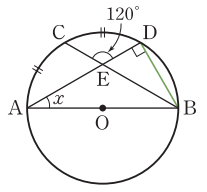
$$\triangle DEB \text{에서 } 120^\circ = 90^\circ + \angle EBD$$

$$\therefore \angle EBD = 30^\circ$$

$$\text{이때 } \widehat{AC} = \widehat{CD} \text{이므로}$$

$$\angle ABC = \angle CBD = 30^\circ$$

$$\text{따라서 } \triangle DAB \text{에서 } \angle x = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$$



유제 6 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$ 를 그으면

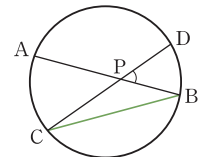
$$\angle ABC = 180^\circ \times \frac{1}{6} = 30^\circ$$

$$\text{이때 } \widehat{AC} : \widehat{BD} = 3 : 2 \text{이므로}$$

$$\angle ABC : \angle BCD = 3 : 2$$

$$\text{즉, } 30^\circ : \angle BCD = 3 : 2 \text{이므로 } \angle BCD = 20^\circ$$

$$\text{따라서 } \triangle PCB \text{에서 } \angle DPB = 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ$$



유제 7 $\square ABCD$ 가 원에 내접하므로

$$(55^\circ + \angle x) + 105^\circ = 180^\circ \quad \therefore \angle x = 20^\circ$$

$$\triangle ABD \text{에서 } \angle y = 180^\circ - (55^\circ + 20^\circ + 50^\circ) = 55^\circ$$

$$\text{이때 } \angle DBC = \angle x = 20^\circ \text{이므로}$$

$$\angle ABC = 55^\circ + 20^\circ = 75^\circ \quad \therefore \angle z = \angle ABC = 75^\circ$$

$$\therefore \angle x + \angle y + \angle z = 20^\circ + 55^\circ + 75^\circ = 150^\circ$$

유제 8 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CE}$ 를 그으면

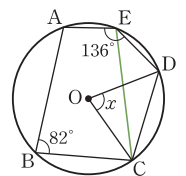
$\square ABCE$ 가 원에 내접하므로

$$82^\circ + \angle AEC = 180^\circ$$

$$\therefore \angle AEC = 98^\circ$$

$$\text{따라서 } \angle CED = 136^\circ - 98^\circ = 38^\circ$$

$$\text{이므로 } \angle x = 2\angle CED = 2 \times 38^\circ = 76^\circ$$



유제 9 ① $\angle ABP = \angle ADC$ 이면 한 외각의 크기가 그와 이웃한
내각의 대각의 크기와 같으므로 $\square ABCD$ 는 원에 내
접한다.

② $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ 이면 한 쌍의 대각의 크기의
합이 180° 이므로 $\square ABCD$ 는 원에 내접한다.

③ $\angle AQB = 90^\circ$ 인 사각형 중에서 마름모는 원에 내접하
지 않는다.

④ $\triangle ACD \equiv \triangle BDC$ 이면 $\angle CAD = \angle DBC$ 이므로
 $\square ABCD$ 는 원에 내접한다.

⑤ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 이고, $\angle ADC = \angle BCD$ 이면 $\square ABCD$ 는
등변사다리꼴이므로 항상 원에 내접한다.

따라서 $\square ABCD$ 가 원에 내접하기 위한 조건으로 옳지
않은 것은 ③이다.

유제 10 $\angle CAD = \angle CBD = 35^\circ$ 이므로 $\square ABCD$ 는 원에 내접한
다.

$$\text{이때 } \angle ADB = \angle ACB = 30^\circ \text{이고, } \overline{AB} = \overline{AD} \text{이므로}$$

$$\angle ABD = \angle ADB = 30^\circ$$

$$\text{따라서 } \triangle ABC \text{에서 } \angle x = 180^\circ - (30^\circ + 35^\circ + 30^\circ) = 85^\circ$$

- 유제 11** 원주각의 크기는 호의 길이에 정비례하므로
 $\angle ACB : \angle BAC : \angle ABC = \widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA}$
 $= 4 : 3 : 5$
 따라서 $\angle BAC = 180^\circ \times \frac{3}{4+3+5} = 45^\circ$ 이므로
 $\angle CBT = \angle BAC = 45^\circ$

- 유제 12** 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AT}$ 를 그으면

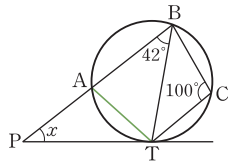
$\angle ATP = \angle ABT = 42^\circ$ 이고,
 $\square ATCB$ 에서
 $\angle BAT = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

이므로

$\triangle APT$ 에서 $80^\circ = \angle x + 42^\circ \quad \therefore \angle x = 38^\circ$

[다른 풀이]

$\angle BTP = \angle BCT = 100^\circ$ 이므로 $\triangle BPT$ 에서
 $\angle x = 180^\circ - (42^\circ + 100^\circ) = 38^\circ$



- 유제 13** ① $\angle ABP = \angle APE = \angle CPF = \angle CDP$
 ② $\angle BAP = \angle BPF = \angle DPE = \angle DCP$
 ③ $\angle ABP = \angle CDP$ (엇각)이므로 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
 ④, ⑤ $\triangle ABP$ 와 $\triangle CDP$ 에서 $\angle ABP = \angle CDP$,
 $\angle APB = \angle CPD$ 이므로 $\triangle ABP \sim \triangle CDP$ (AA 답음)
 $\therefore \overline{AP} : \overline{CP} = \overline{BP} : \overline{DP}$
 따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

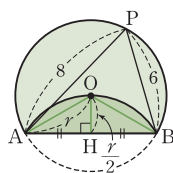
- 유제 14** $\angle BAP = \angle BPT = \angle CDP = 68^\circ$ 이므로
 $\triangle DCP$ 에서 $68^\circ + \angle x = 115^\circ \quad \therefore \angle x = 47^\circ$

2 최고 유형 탐험하기

59~61쪽

- | | | | |
|-----|------|------|------|
| 1 ② | 2 ③ | 3 ⑤ | 4 ③ |
| 5 ④ | 6 ② | 7 ⑤ | 8 ③ |
| 9 ③ | 10 ④ | 11 ② | 12 ① |

- 1** 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원 O의 반지름의 길이를 r라 하면
 $\overline{OA} = r$, $\overline{OH} = \frac{r}{2}$ 이므로



$\triangle OAH$ 에서 $\cos(\angle AOH) = \frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2}$

그런데 $\angle AOH < 90^\circ$ 이므로 $\angle AOH = 60^\circ$

이때 $\triangle OAH \cong \triangle OBH$ (RHS 합동)이므로

$\angle AOB = 2\angle AOH = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$

$\therefore \angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$

$\therefore \triangle PAB = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sin 60^\circ$
 $= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$

- 2** $\widehat{BCE}$ 의 길이가 원주의 $\frac{4}{9}$ 이므로

$$\angle BOE = 360^\circ \times \frac{4}{9} = 160^\circ$$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$ 를 그으면

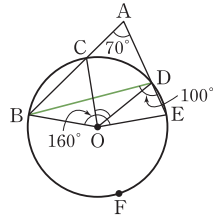
$\angle BDE$ 는 $\widehat{BFE}$ 에 대한 원주각이므로

$$\angle BDE = \frac{1}{2} \times (360^\circ - 160^\circ) = 100^\circ$$

$\triangle ABD$ 에서

$$100^\circ = \angle ABD + 70^\circ \quad \therefore \angle ABD = 30^\circ$$

$$\therefore \angle COD = 2\angle CBD = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$$



- 3** $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이고, $\angle C < 90^\circ$ 이므로 $\angle C = 60^\circ$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AO}$ 의 연장선이

원 O와 만나는 점을 D라 하고,

$\overline{BO}$, $\overline{BD}$ 를 그으면

$$\angle ACB = \angle ADB = 60^\circ$$

$$\therefore \angle AOB = 2\angle ACB$$

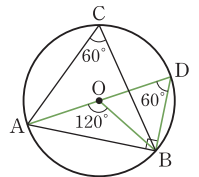
$$= 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

$$\text{이때 } \widehat{AB} = 2\pi \times \overline{OA} \times \frac{120}{360} = 8\pi \text{이므로 } \overline{OA} = 12$$

$$\therefore \overline{AD} = 2\overline{OA} = 2 \times 12 = 24$$

따라서 $\triangle ABD$ 는 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AB} = 24 \sin 60^\circ = 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$



- 4** 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$ 를 그으면

$$\angle ABD : \angle CAD : \angle BAC$$

$$= \widehat{AD} : \widehat{DC} : \widehat{CB} = 3 : 4 : 2$$

이때 $\angle ADB = 90^\circ$ 이므로

$$\angle ABD + \angle CAD + \angle BAC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ABD = 90^\circ \times \frac{3}{9} = 30^\circ, \angle BAC = 90^\circ \times \frac{2}{9} = 20^\circ$$

따라서 $\triangle ABP$ 에서

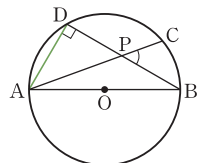
$$\angle CPB = 30^\circ + 20^\circ = 50^\circ$$

[다른 풀이]

$$\angle CPB = \angle ABD + \angle BAC \text{이고,}$$

모든 호에 대한 원주각의 크기의 합은 180° 이므로

$$\angle CPB = \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} \times 180^\circ = 50^\circ$$



- 5** 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BN}$, $\overline{CM}$ 을 긋고,

$$\angle ACM = \angle BNM = \angle a,$$

$$\angle ABN = \angle CMN = \angle b \text{라 하면}$$

한 원에서 모든 호에 대한 원주각의

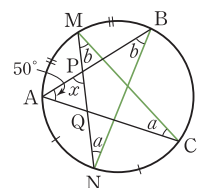
크기의 합은 180° 이므로

$$2\angle a + 2\angle b + 50^\circ = 180^\circ$$

$$2(\angle a + \angle b) = 130^\circ \quad \therefore \angle a + \angle b = 65^\circ$$

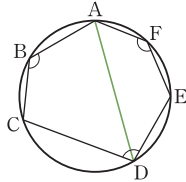
따라서 $\triangle PNB$ 에서

$$\angle x = \angle a + \angle b = 65^\circ$$



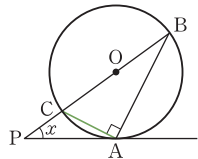
- 6 $\angle ABC = 180^\circ \times \frac{3}{4} = 135^\circ$ 이므로
 $\square ABCD$ 에서 $135^\circ + \angle ADC = 180^\circ$
 $\therefore \angle ADC = 45^\circ$
 $\angle BAD = 180^\circ \times \frac{1}{3} = 60^\circ$ 이므로
 $\square ABCD$ 에서 $\angle DCE = \angle BAD = 60^\circ$
 $\therefore \angle ADC + \angle DCE = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$

- 7 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AD}$ 를 그으면
 $\square ABCD$ 는 원에 내접하므로
 $\angle B + \angle CDA = 180^\circ$
또 $\square ADEF$ 도 원에 내접하므로
 $\angle F + \angle ADE = 180^\circ$
 $\therefore \angle B + \angle D + \angle F$
 $= \angle B + \angle CDA + \angle ADE + \angle F$
 $= 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$

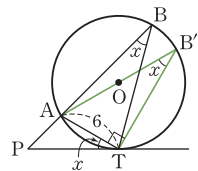


- 8 $\square ABCD$ 가 원에 내접하려면
 $\angle ABC + 126^\circ = 180^\circ \quad \therefore \angle ABC = 54^\circ$
 $\triangle ABF$ 에서 $\angle EAD = 54^\circ + 32^\circ = 86^\circ$
따라서 $\triangle ADE$ 에서
 $126^\circ = \angle x + 86^\circ \quad \therefore \angle x = 40^\circ$

- 9 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$ 를 그으면
 $\angle CAB = 90^\circ$ 이고,
 $\widehat{AC} : \widehat{AB} = \angle ABC : \angle ACB$
 $= 3 : 7$
이므로 $\angle ABC = 90^\circ \times \frac{3}{10} = 27^\circ$
 $\therefore \angle CAP = \angle ABC = 27^\circ$
따라서 $\triangle PAB$ 에서
 $\angle x = 180^\circ - (27^\circ + 90^\circ + 27^\circ) = 36^\circ$

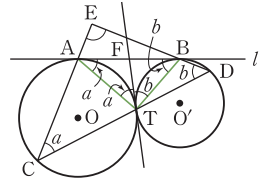


- 10 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 원 O의 지름 $\overline{AB'}$ 을 그으면
 $\angle AB'T = \angle ABT = \angle ATP = x$
이때 $\angle ATB' = 90^\circ$ 이므로
 $\triangle AB'T$ 에서
 $\overline{B'T} = \frac{6}{\tan x} = 6 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$
 $\therefore \overline{AB'} = \sqrt{6^2 + (4\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{21}$
 $\therefore$ (원 O의 둘레의 길이) $= 2\pi \times \sqrt{21} = 2\sqrt{21}\pi$



- 11 $\angle ATE = \angle ACT = 70^\circ$ 이므로
 $\angle BTD = 180^\circ - (45^\circ + 70^\circ) = 65^\circ$
이때 $\triangle DBT$ 에서 $\overline{DB} = \overline{DT}$ 이므로
 $\angle DBT = \angle DTB = 65^\circ$
따라서 $\triangle ATB$ 에서
 $65^\circ = \angle TAB + 45^\circ \quad \therefore \angle TAB = 20^\circ$

- 12 오른쪽 그림과 같이
 $\angle ACT = \angle a, \angle BDT = \angle b$
라 하고, 점 T를 지나는 공통인 접선이 직선 l과 만나는 점을 F라 하자.



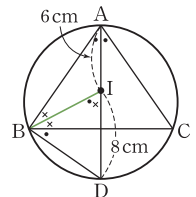
$\overline{AT}, \overline{BT}$ 를 그으면
 $\angle FAT = \angle FTA = \angle ACT = \angle a,$
 $\angle FBT = \angle FTB = \angle BDT = \angle b$
 $\triangle ATB$ 에서
 $\angle a + (\angle a + \angle b) + \angle b = 2(\angle a + \angle b) = 180^\circ$ 이므로
 $\angle a + \angle b = 90^\circ$
따라서 $\triangle ECD$ 에서
 $\angle CED = 180^\circ - (\angle a + \angle b) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

3 최고 유형 정복하기

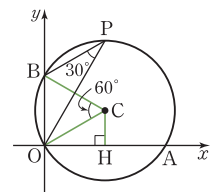
62~64쪽

- | | | | |
|---------------|---------------------|---------------------|----------------------------|
| 01 8 cm | 02 $(6\sqrt{3}, 6)$ | 03 $\frac{9}{2}$ cm | 04 $2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$ |
| 05 15° | 06 119° | 07 8π | 08 70° |
| 09 80° | 10 60° | 11 94° | 12 6 |

- 01 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BI}$ 를 그으면 점 I가 $\triangle ABC$ 의 내심이므로
 $\angle BAI = \angle CAI, \angle ABI = \angle CBI$
 $\triangle ABI$ 에서
 $\angle BID = \angle BAI + \angle ABI$
이때 $\angle DBC = \angle DAC$ 이므로
 $\angle BID = \angle DBI$
따라서 $\triangle BDI$ 는 $\overline{DB} = \overline{DI}$ 인 이등변삼각형이므로
 $\overline{BD} = \overline{DI} = 8$ cm



- 02 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하고, $\overline{BC}, \overline{OC}$ 를 그으면
 $\angle BCO = 2\angle BPO = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$
이때 $\overline{BC} = \overline{OC}$ 이므로
 $\angle OBC = \angle BOC$



$$= \frac{1}{2} \times (180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$$

즉, $\triangle BOC$ 는 정삼각형이므로 $\overline{OC} = \overline{BC} = \overline{OB} = 12$
이때 점 C에서 $\overline{OA}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면
 $\angle COH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ 이므로

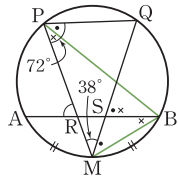
$$\triangle COH \text{에서 } \overline{OH} = 12 \cos 30^\circ = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$\overline{CH} = 12 \sin 30^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(6\sqrt{3}, 6)$ 이다.

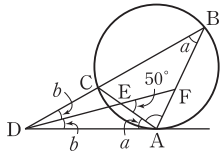
[다른 풀이]

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BP}$, $\overline{BM}$ 을 긋고,
 $\angle BPM = \angle a$ 라 하면
 $\angle ABM = \angle BPM = \angle a$ 이므로
 $\angle BMQ = \angle BPQ = 72^\circ - \angle a$
 따라서 $\triangle BRM$ 에서
 $\angle BRM = 180^\circ - (38^\circ + 72^\circ - \angle a + \angle a) = 70^\circ$
 $\therefore \angle PRA = \angle BRM = 70^\circ$ (맞꼭지각)



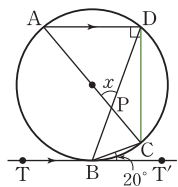
09 $\angle CBA = \angle a$, $\angle ADF = \angle b$ 라

하면
 $\angle CAD = \angle CBA = \angle a$
 $\angle BDF = \angle ADF = \angle b$
 $\triangle EDA$ 에서
 $50^\circ = \angle a + \angle b$... ㉠
 $\triangle BDF$ 에서 $\angle DFA = \angle a + \angle b$... ㉡
 ㉠, ㉡에서 $\angle DFA = 50^\circ$
 따라서 $\triangle EAF$ 에서
 $\angle BAC = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ) = 80^\circ$



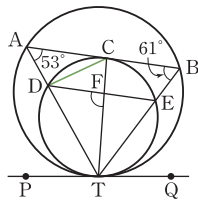
10 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CD}$ 를 그으면

$\angle ADC = 90^\circ$ 이고,
 $\angle CDB = \angle CBT' = 20^\circ$ 이므로
 $\angle ADB = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$
 이때 $\overline{AD} \parallel \overline{TT'}$ 이므로
 $\angle DBT' = \angle ADB = 70^\circ$ (엇각)
 $\therefore \angle DBC = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$
 따라서 $\angle DAC = \angle DBC = 50^\circ$ 이므로
 $\triangle APD$ 에서 $\angle x = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$



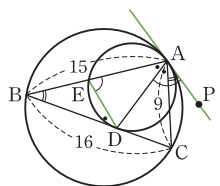
11 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CD}$ 를 그으면

$\angle ATP = \angle ABT = \angle DET = 61^\circ$
 이므로 $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$
 $\angle ACD = \angle x$ 라 하면
 $\angle DTC = \angle ACD = \angle x$ 이고,
 $\angle DCT = \angle DET = 61^\circ$ 이므로
 $\triangle ATC$ 에서
 $53^\circ + (\angle x + 61^\circ) + \angle x = 180^\circ$
 $2\angle x = 66^\circ \therefore \angle x = 33^\circ$
 $\therefore \angle DFT = \angle ACF$ ($\therefore$ 동위각)
 $= \angle ACD + \angle DCF$
 $= 33^\circ + 61^\circ = 94^\circ$



12 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 그

은 두 원의 공통인 접선을 $\overline{AP}$ 라
 하고, $\overline{DE}$ 를 그으면
 $\angle DEA = \angle DAP$,
 $\angle CBA = \angle CAP$ 이므로
 $\angle CAD = \angle DAP - \angle CAP$
 $= \angle DEA - \angle CBA$
 $= \angle EDB$



이때 $\angle EDB = \angle EAD$ 이므로 $\angle CAD = \angle EAD$
 따라서 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AD}$ 는 $\angle BAC$ 의 이등분선이므로
 $\overline{CD} = x$ 라 하면
 $15 : 9 = (16 - x) : x$, $24x = 144 \therefore x = 6$
 $\therefore \overline{CD} = 6$

대단원 마무리하기

65~68쪽

- | | | | |
|------------------------------|--------------------------|------------------------------------|----------|
| 01 2 cm | 02 ③ | 03 8 cm | 04 8 cm |
| 05 $\frac{2}{3}$ | 06 ② | 07 ④ | 08 15 cm |
| 09 142.5° | 10 50° | 11 ② | 12 ⑤ |
| 13 $\frac{15}{8}$ | 14 55° | 15 $\frac{208}{3}\pi - 64\sqrt{3}$ | |
| 16 $\frac{6\sqrt{14}}{7}$ cm | 17 $(10 - 5\sqrt{2})$ cm | 18 48° | |
| 19 72.5° | | | |

서술형 문제 <과정은 풀이 참조>

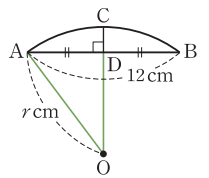
- | | | | |
|------|---------------|----------------|---------------|
| 20 3 | 21 80° | 22 112° | 23 60° |
|------|---------------|----------------|---------------|

01 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O라
 하고, 원 O의 반지름의 길이를 r cm
 라 하면 원 O의 넓이가 $100\pi \text{ cm}^2$ 이
 므로

$$\pi \times r^2 = 100 \therefore r = 10 (\because r > 0)$$

이때 $\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 12 = 6(\text{cm})$ 이므로

$\triangle AOD$ 에서
 $\overline{OD} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8(\text{cm})$
 $\therefore \overline{CD} = \overline{OC} - \overline{OD} = 10 - 8 = 2(\text{cm})$



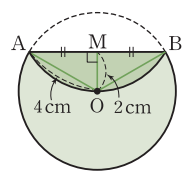
02 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O에서
 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$$\overline{OA} = 4 \text{ cm}, \overline{OM} = \frac{1}{2} \times 4 = 2(\text{cm})$$

$\triangle AOM$ 에서
 $\cos(\angle AOM) = \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ 이고,
 $\angle AOM < 90^\circ$ 이므로 $\angle AOM = 60^\circ$

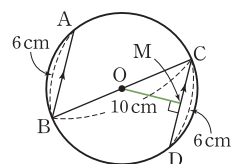
마찬가지 방법으로 하면 $\angle BOM = 60^\circ$
 따라서 $\angle AOB = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$ 이므로

$$\widehat{AB} = 2\pi \times 4 \times \frac{120}{360} = \frac{8}{3}\pi(\text{cm})$$



03 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 O
 에서 $\overline{CD}$ 에 내린 수선의 발을 M
 이라 하면

$$\overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{1}{2} \times 6 = 3(\text{cm}),$$



$$\overline{OC} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 10 = 5(\text{cm}) \text{이므로}$$

$$\triangle OMC \text{에서 } \overline{OM} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(\text{cm})$$

따라서 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 이므로 두 현 AB, CD 사이의 거리는 $2\overline{OM} = 2 \times 4 = 8(\text{cm})$

04 $\overline{AP} = \overline{AQ} = x \text{ cm}$ 라 하면

$$\overline{DS} = \overline{DP} = (6-x) \text{ cm}, \overline{ES} = \overline{EQ} = (7-x) \text{ cm}$$

이때 $\overline{DE} = \overline{DS} + \overline{ES}$ 이므로

$$5 = (6-x) + (7-x), 2x = 8 \quad \therefore x = 4$$

$$\therefore (\triangle ABC \text{의 둘레의 길이}) = \overline{AP} + \overline{AQ} = 2\overline{AP} = 2 \times 4 = 8(\text{cm})$$

05 $\overline{AG} = \overline{AE} = \overline{BE} = \overline{BF} = 2 \text{ cm}$ 이므로

$$\overline{CD} = \overline{AB} = 2 \times 2 = 4(\text{cm})$$

$$\overline{DH} = \overline{DG} = \overline{CF} = 8 - 2 = 6(\text{cm})$$

이때 $\overline{IH} = \overline{IF} = x \text{ cm}$ 이므로

$$\overline{DI} = (6+x) \text{ cm}, \overline{CI} = (6-x) \text{ cm}$$

$$\triangle DIC \text{에서 } (6+x)^2 = 4^2 + (6-x)^2$$

$$24x = 16 \quad \therefore x = \frac{2}{3}$$

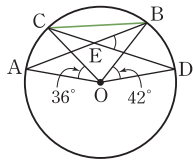
06 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BC}$ 를 그으면

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \times 36^\circ = 18^\circ$$

$$\angle BCD = \frac{1}{2} \angle BOD = \frac{1}{2} \times 42^\circ = 21^\circ$$

따라서 $\triangle BCE$ 에서

$$\angle BED = 18^\circ + 21^\circ = 39^\circ$$



07 $2\widehat{BD} : \widehat{AE}$ 에서 $\widehat{BD} : \widehat{AE} = 1 : 2$ 이므로

$$\angle BED : \angle ABE = 1 : 2 \quad \therefore \angle BEC = \frac{1}{2} \angle ABE$$

따라서 $\triangle BCE$ 에서

$$\angle ABE = 30^\circ + \frac{1}{2} \angle ABE \quad \therefore \angle ABE = 60^\circ$$

08 $\triangle ACP$ 에서 $61^\circ = \angle PAC + 25^\circ \quad \therefore \angle PAC = 36^\circ$

원의 둘레의 길이를 $x \text{ cm}$ 라 하면

$$\angle BAC : 180^\circ = \widehat{BC} : x \text{이므로}$$

$$36^\circ : 180^\circ = 3 : x \quad \therefore x = 15$$

따라서 원의 둘레의 길이는 15 cm이다.

09 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AE}$ 를 그으면

$\overline{AB}$ 는 원 O의 지름이고,

$\widehat{AD} = \widehat{DE} = \widehat{EB}$ 이므로

$$\angle x = \angle BAE = 90^\circ \times \frac{1}{3} = 30^\circ$$

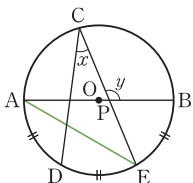
$$\widehat{AC} : \widehat{BC} = 5 : 7 \text{이므로}$$

$$\angle AEC = 90^\circ \times \frac{5}{12} = 37.5^\circ$$

$$\triangle AEP \text{에서 } \angle APE = 180^\circ - (30^\circ + 37.5^\circ) = 112.5^\circ \text{이므로}$$

$$\angle y = \angle APE = 112.5^\circ (\text{맞꼭지각})$$

$$\therefore \angle x + \angle y = 30^\circ + 112.5^\circ = 142.5^\circ$$



10 $\square ABCD$ 가 원에 내접하므로

$$\angle QAB = \angle DCB = \angle x$$

$$\triangle PBC \text{에서 } \angle PBQ = 37^\circ + \angle x$$

$$\text{따라서 } \triangle AQB \text{에서 } 43^\circ + (37^\circ + \angle x) + \angle x = 180^\circ$$

$$2\angle x = 100^\circ \quad \therefore \angle x = 50^\circ$$

11 $\angle PDC = \frac{1}{2} \angle PO'C$

$$= \frac{1}{2} \times 168^\circ = 84^\circ$$

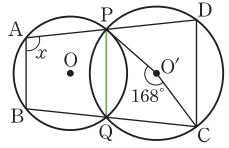
오른쪽 그림과 같이 $\overline{PQ}$ 를 그으면

$\square PQCD$ 가 원 O' 에 내접하므로

$$\angle PQB = \angle PDC = 84^\circ$$

이때 $\square ABQP$ 가 원 O에 내접하므로

$$\angle x + 84^\circ = 180^\circ \quad \therefore \angle x = 96^\circ$$



12 ① $\angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$ 이므로 네 점 A, B, D, E는 한 원 위에 있다.

즉, $\square ABDE$ 는 원에 내접한다.

② $\square AFHE$ 에서 $\angle AFH + \angle AEH = 180^\circ$ 이므로

$\square AFHE$ 는 원에 내접한다.

③ $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$ 이므로 네 점 B, C, E, F는 한 원 위에 있다.

즉, $\square BCEF$ 는 원에 내접한다.

④ $\square BDHF$ 에서 $\angle BFH + \angle BDH = 180^\circ$ 이므로

$\square BDHF$ 는 원에 내접한다.

따라서 원에 내접하는 사각형이 아닌 것은 ⑤이다.

13 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AO}$ 의 연장선이

원 O와 만나는 점을 D라 하면

$$\angle ADB = \angle ACB$$

$$= \angle ABP = \angle x$$

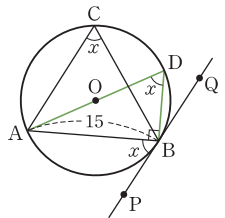
$$2\pi \times \overline{AO} = 17\pi \text{이므로 } \overline{AO} = \frac{17}{2}$$

$$\text{즉, } \overline{AD} = 2\overline{AO} = 2 \times \frac{17}{2} = 17 \text{이고,}$$

$$\angle ABD = 90^\circ \text{이므로}$$

$$\triangle ABD \text{에서 } \overline{BD} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$$

$$\therefore \tan x = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{15}{8}$$



14 $\triangle ECF$ 는 $\overline{CE} = \overline{CF}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\angle CEF = \angle CFE = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 54^\circ) = 63^\circ$$

$$\therefore \angle EDF = \angle CEF = 63^\circ$$

따라서 $\triangle DEF$ 에서

$$\angle DFE = 180^\circ - (62^\circ + 63^\circ) = 55^\circ$$

[다른 풀이]

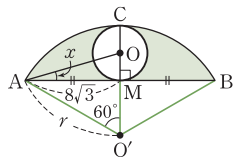
$\triangle ECF$ 는 $\overline{CE} = \overline{CF}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\angle CEF = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 54^\circ) = 63^\circ$$

$$\angle DEB = 180^\circ - (62^\circ + 63^\circ) = 55^\circ \text{이므로}$$

$$\angle DFE = \angle DEB = 55^\circ$$

- 15 오른쪽 그림과 같이 $\widehat{AB}$ 를 일부 분으로 하는 원의 중심을 O' 이라 하면 $\widehat{CM}$ 의 연장선은 원 O' 의 중심을 지난다.



$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 16\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

$$\triangle OAM \text{에서 } \tan x = \frac{\overline{OM}}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ 이므로 } \overline{OM} = 4$$

$$\therefore \overline{CM} = 2\overline{OM} = 2 \times 4 = 8$$

원 O' 의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\triangle O'AM \text{에서 } r^2 = (8\sqrt{3})^2 + (r-8)^2$$

$$16r = 256 \quad \therefore r = 16$$

이때 $\cos(\angle AO'M) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ 이고, $\angle AO'M < 90^\circ$ 이므로

$$\angle AO'M = 60^\circ$$

따라서 $\triangle O'AM \equiv \triangle O'BM$ (RHS 합동)이므로

$$\angle AO'B = 2\angle AO'M = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)

$$= (\text{부채꼴 } AO'B \text{의 넓이}) - \triangle AO'B - (\text{원 } O \text{의 넓이})$$

$$= \pi \times 16^2 \times \frac{120}{360} - \frac{1}{2} \times 16\sqrt{3} \times 8 - \pi \times 4^2$$

$$= \frac{256}{3}\pi - 64\sqrt{3} - 16\pi$$

$$= \frac{208}{3}\pi - 64\sqrt{3}$$

- 16 $\overline{AR} = \overline{AP} = 3$ cm, $\overline{BQ} = \overline{BP} = 15 - 3 = 12$ (cm)

$$\overline{CQ} = \overline{CR} = 9 - 3 = 6$$
 (cm)

$$\therefore \overline{BC} = \overline{BQ} + \overline{CQ} = 12 + 6 = 18$$
 (cm)

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에

서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H라

하고, $\overline{BH} = x$ cm라 하면

$$\overline{CH} = (18 - x)$$
 cm

$$\triangle ABH \text{에서 } \overline{AH}^2 = 15^2 - x^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\triangle ACH \text{에서 } \overline{AH}^2 = 9^2 - (18 - x)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 15^2 - x^2 = 9^2 - (18 - x)^2$$

$$36x = 468 \quad \therefore x = 13$$

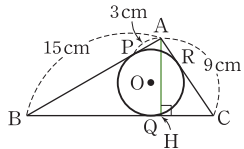
$$\therefore \overline{AH} = \sqrt{15^2 - 13^2} = 2\sqrt{14}$$
 (cm)

이때 원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 18 \times 2\sqrt{14} = \frac{1}{2} \times r \times (15 + 9 + 18)$$

$$21r = 18\sqrt{14} \quad \therefore r = \frac{6\sqrt{14}}{7}$$

따라서 원 O의 반지름의 길이는 $\frac{6\sqrt{14}}{7}$ cm이다.



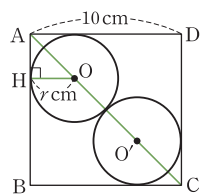
- 17 오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하고, 원 O의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$$\overline{OH} = \overline{AH} = r \text{ cm 이므로}$$

$$\overline{OA} = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}r \text{ (cm)}$$

마찬가지 방법으로 하면

$$\overline{OC} = \sqrt{2}r \text{ cm 이고, } \overline{OO'} = r + r = 2r \text{ (cm) 이므로}$$



$$\overline{AC} = 2\overline{OA} + \overline{OO'} = 2\sqrt{2}r + 2r \text{ (cm)}$$

$$\triangle ABC \text{에서 } \overline{AC} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{즉, } 2\sqrt{2}r + 2r = 10\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

$$(\sqrt{2} + 1)r = 5\sqrt{2} \quad \therefore r = 10 - 5\sqrt{2}$$

따라서 원 O의 반지름의 길이는 $(10 - 5\sqrt{2})$ cm이다.

- 18 $\angle BDC = \angle BAQ = \angle x$

$$\triangle PAC \text{에서 } \angle x = 28^\circ + \angle ACP$$

$$\therefore \angle ACP = \angle x - 28^\circ$$

$$\text{따라서 } \triangle QCD \text{에서 } 68^\circ = \angle x + (\angle x - 28^\circ)$$

$$2\angle x = 96^\circ \quad \therefore \angle x = 48^\circ$$

- 19 오른쪽 그림과 같이 두 원의 접

점 C를 지나는 공통인 접선 l 을

긋고, 직선 l 과 $\overline{ET}$ 의 교점을 R

라 하자.

$$\angle RCE = \angle CFE = 35^\circ$$

$$\overline{RC} = \overline{RE} \text{ 이므로}$$

$$\angle REC = \angle RCE = 35^\circ$$

$$\angle CAB = \angle x \text{ 라 하면 } \angle RCB = \angle CAB = \angle x$$

$$\overline{AD} \parallel \overline{BC} \text{ 이므로}$$

$$\angle ADC = \angle BCE = \angle x + 35^\circ \text{ (동위각)}$$

이때 $\square ABCD$ 는 원 O에 내접하므로

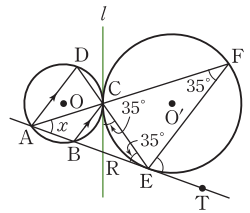
$$\angle CBE = \angle ADC = \angle x + 35^\circ$$

$$\triangle CBE \text{에서 } (\angle x + 35^\circ) + (\angle x + 35^\circ) + 35^\circ = 180^\circ$$

$$2\angle x = 75^\circ \quad \therefore \angle x = 37.5^\circ$$

따라서 $\triangle AEF$ 에서

$$\angle FET = 35^\circ + 37.5^\circ = 72.5^\circ$$



- 20 오른쪽 그림과 같이 $\overline{BE}$ 를 그으면

$$\angle BEC = 90^\circ \text{ 이고,}$$

$$\overline{BE} = \overline{AB} = 9 \text{ 이므로}$$

$\triangle BCE$ 에서

$$\overline{CE} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \quad \dots \textcircled{i}$$

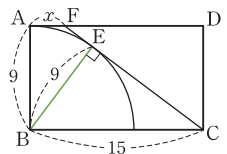
$$\overline{AF} = \overline{EF} = x \text{ 라 하면}$$

$$\overline{CF} = 12 + x, \overline{DF} = 15 - x \quad \dots \textcircled{ii}$$

$$\text{따라서 } \triangle CDF \text{에서 } (12 + x)^2 = (15 - x)^2 + 9^2$$

$$54x = 162 \quad \therefore x = 3$$

$$\therefore \overline{AF} = 3 \quad \dots \textcircled{iii}$$



채점 요소	비율
① BE를 긋고, CE의 길이 구하기	40 %
② CF, DF의 길이를 AF의 길이를 이용하여 나타내기	40 %
③ AF의 길이 구하기	20 %

- 21 $\widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE}$ 이므로

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DBE = \angle a \text{ 라 하면} \quad \dots \textcircled{i}$$

$$\triangle BPQ \text{에서 } \angle AQD = 52^\circ + \angle a \text{ 이므로}$$

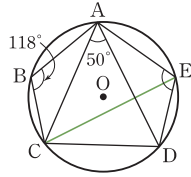
$$\triangle AQD \text{에서 } \angle a + (52^\circ + \angle a) + 48^\circ = 180^\circ$$

$$2\angle a = 80^\circ \quad \therefore \angle a = 40^\circ \quad \dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore \angle BAD = 2\angle a = 2 \times 40^\circ = 80^\circ \quad \dots \textcircled{iii}$$

채점 요소	비율
① $\angle BAC = \angle CAD = \angle DBE = \angle \alpha$ 로 놓기	40 %
② $\angle \alpha$ 의 크기 구하기	40 %
③ $\angle BAD$ 의 크기 구하기	20 %

- 22 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CE}$ 를 그으면
 $\square ABCE$ 가 원에 내접하므로
 $\angle AEC = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$... ①
 이때 $\widehat{CD}$ 에 대한 원주각의 크기는 같



으므로
 $\angle CED = \angle CAD = 50^\circ$... ②
 $\therefore \angle AED = \angle AEC + \angle CED$
 $= 62^\circ + 50^\circ = 112^\circ$... ③

채점 요소	비율
① $\overline{CE}$ 를 긋고, $\angle AEC$ 의 크기 구하기	50 %
② $\angle CED$ 의 크기 구하기	30 %
③ $\angle AED$ 의 크기 구하기	20 %

- 23 $\angle BDC = \angle BEC = 90^\circ$ 이므로 네 점 B, C, D, E는 한 원 위에 있고, $\overline{BM} = \overline{CM}$ 이므로 점 M은 원의 중심이다. ... ①
 이때 $\triangle ABD$ 에서
 $\angle ABD = 180^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 30^\circ$ 이므로 ... ②
 $\angle EMD = 2\angle ABD = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$... ③

채점 요소	비율
① 네 점 B, C, D, E가 한 원 위에 있기 위한 조건 알기	40 %
② $\angle ABD$ 의 크기 구하기	30 %
③ $\angle EMD$ 의 크기 구하기	30 %

III. 통계

1 대푯값과 산포도

1 주제별 유형 불러오기

71~75쪽

유제 1	①	유제 2	62	유제 3	④	유제 4	7.5
유제 5	③	유제 6	ㄴ, ㄷ, ㄴ	유제 7	②		
유제 8	94	유제 9	②, ④	유제 10	B반		

- 유제 1 변량을 작은 값에서부터 크기순으로 나열할 때, 중앙값은 8번째와 9번째에 있는 변량의 평균이므로

$$a = \frac{76 + 80}{2} = 78$$

80점이 가장 많이 나타나므로 $b = 80$

$$\therefore b - a = 80 - 78 = 2$$

- 유제 2 (평균) $= \frac{10 \times 4 + 20 \times 6 + 30 \times 3 + 40 \times 2}{15}$

$$= \frac{330}{15} = 22(\text{분})$$

$$\therefore a = 22$$

통학 시간이 짧은 시간부터 크기순으로 나열할 때, 중앙값은 8번째에 있는 변량이므로

$$(\text{중앙값}) = 20(\text{분}) \quad \therefore b = 20$$

20분이 가장 많이 나타나므로

$$(\text{최빈값}) = 20(\text{분}) \quad \therefore c = 20$$

$$\therefore a + b + c = 22 + 20 + 20 = 62$$

- 유제 3 최빈값이 12이므로 $a = 12$

$$(\text{평균}) = \frac{6 + 12 + 10 + 5 + 12 + 13 + 10 + 12}{8} = \frac{80}{8} = 10$$

$$\therefore b = 10$$

$$\therefore a - b = 12 - 10 = 2$$

- 유제 4 평균이 7이므로 $\frac{7 + a + 2 + 10 + b + 1 + 9 + 12}{8} = 7$

$$\therefore a + b = 15 \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 최빈값이 7이 되려면 a, b 중 적어도 하나는 7이어야 하므로 ①을 만족시키는 a, b 의 값은

$$a = 7, b = 8 (\because a < b)$$

변량을 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면

1, 2, 7, 7, 8, 9, 10, 12

따라서 중앙값은 4번째와 5번째에 있는 변량의 평균이므로

$$(\text{중앙값}) = \frac{7 + 8}{2} = 7.5$$

- 유제 5 학생 D의 편차를 x cm라 하면 편차의 총합은 0이므로

$$-2 + 4 + 1 + x + (-1) = 0 \quad \therefore x = -2$$

$$\therefore (\text{학생 D의 키}) = 165 + (-2) = 163(\text{cm})$$

- 유제 6** ㄱ. 편차의 총합은 0이므로
 $2+0+(-3)+x+4+(-1)=0 \quad \therefore x=-2$
 ㄴ. B의 편차가 0점이므로 점수는 평균과 같다.
 ㄷ. E의 점수는 알 수 없다.
 ㄹ. A와 C의 점수 차는 $2-(-3)=5$ (점)이다.
 ㅁ. 평균보다 점수가 낮은 학생은 편차가 음수인 C, D, F의 3명이다.
 ㅂ. 점수가 평균과 가장 많이 차이나는 학생은 편차의 절댓값이 가장 큰 E이다.
 따라서 옳은 것은 ㄴ, ㅁ, ㅂ이다.

- 유제 7** 평균이 5개이므로
 $\frac{2+7+6+8+x+(x+1)}{6}=5$
 $2x+24=30, 2x=6 \quad \therefore x=3$
 각 학생의 편차를 차례로 구하면
 -3개, 2개, 1개, 3개, -2개, -1개이므로
 (분산) $=\frac{(-3)^2+2^2+1^2+3^2+(-2)^2+(-1)^2}{6}$
 $=\frac{28}{6}=\frac{14}{3}$
 $\therefore (\text{표준편차})=\sqrt{\frac{14}{3}}=\frac{\sqrt{42}}{3}(\text{개})$

- 유제 8** 평균이 5이므로
 $\frac{3+7+x+y+2}{5}=5 \quad \therefore x+y=13 \quad \cdots \textcircled{1}$
 분산이 6.2이므로
 $\frac{(-2)^2+2^2+(x-5)^2+(y-5)^2+(-3)^2}{5}=6.2$
 $\therefore x^2+y^2-10(x+y)+67=31 \quad \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $x^2+y^2-10 \times 13+67=31 \quad \therefore x^2+y^2=94$

- 유제 9** ① 각 반의 학생 수는 알 수 없다.
 ② 영어 성적이 가장 고른 반은 표준편차가 가장 작은 2반이다.
 ③ 영어 성적이 가장 우수한 반은 평균이 가장 높은 4반이다.
 ④ 영어 성적의 산포도가 가장 큰 반은 표준편차가 가장 큰 3반이다.
 ⑤ 4반의 표준편차가 1반보다 작으므로 4반의 영어 성적이 1반보다 평균 가까이에 밀집되어 있다.
 따라서 옳은 것은 ②, ④이다.

- 유제 10** (A반의 평균) $=\frac{6 \times 5+7 \times 5+8 \times 5+9 \times 5+10 \times 5}{25}$
 $=\frac{200}{25}=8(\text{점})$
 (B반의 평균) $=\frac{6 \times 3+7 \times 5+8 \times 9+9 \times 5+10 \times 3}{25}$
 $=\frac{200}{25}=8(\text{점})$
 즉, A, B 두 반의 쪽지 시험 점수의 평균은 8점으로 모두 같다.

따라서 점수가 더 고른 반은 평균 8점에 학생 수가 더 밀집되어 있는 B반이다.

2 최고 유형 탐험하기

76~78쪽

1 ㉔	2 ㉔	3 ㉔	4 ㉔
5 ㉔, ㉕	6 ㉔, ㉕	7 ㉔	8 ㉔
9 ㉔	10 ㉔	11 ㉔	

- 1** 몸무게가 55kg인 학생을 제외한 11명의 몸무게의 총합을 Akg이라 하고, 55kg을 xkg으로 잘못 보았다고 하면
 $\frac{A+55}{12}-1=\frac{A+x}{12}$
 $A+55-12=A+x \quad \therefore x=43$
 따라서 몸무게가 55kg인 학생의 몸무게를 43kg으로 잘못 보았다.
- 2** ㄱ. 9개의 변량의 평균은
 $\frac{11+14+20+15+13+14+16+9+14}{9}=\frac{126}{9}=14$
 즉, $a=14$ 이면 평균은 변하지 않지만 $a \neq 14$ 이면 평균은 변한다.
 ㄴ. 9개의 변량을 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면
 9, 11, 13, 14, 14, 14, 15, 16, 20
 이때 $a < 14$ 이면 중앙값은 $\frac{14+14}{2}=14$,
 $a \geq 14$ 이면 중앙값은 $\frac{14+14}{2}=14$ 이므로 변량 a를 추가해도 중앙값은 변하지 않는다.
 ㄷ. 9개의 변량에서 14가 세 번으로 가장 많이 나타나고, 나머지 변량은 모두 한 번씩 나타나므로 변량 a를 추가해도 최빈값은 변하지 않는다.
 따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.
- 3** 중앙값이 $\frac{42+58}{2}=50(\text{쪽})$ 이므로 $x \geq 58$
 이때 전체 쪽수가 196쪽이므로
 $196-(42+58+34)=62$ 에서
 $x=58, 59, 60, 61, 62 \quad \cdots \textcircled{1}$
 평균이 48.5쪽 이하이므로
 $\frac{42+58+34+x}{4} \leq 48.5$
 $\therefore x \leq 60 \quad \cdots \textcircled{2}$
 따라서 ①, ②에서 조건을 만족시키는 자연수 x는 58, 59, 60의 3개이다.
- 4** 평균이 11이므로
 $\frac{8+a+12+9+12+b+13+5+c+11}{10}=11$
 $\therefore a+b+c=40 \quad \cdots \textcircled{1}$

이때 최빈값이 13이 되려면 a, b, c 중 적어도 2개는 13이어야 한다.

(i) $a=b=c=13$ 이면 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) a, b, c 중 2개가 13이면 ㉠에서 나머지 변량의 값은 14이다.

따라서 (i), (ii)에 의해 변량을 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면

5, 8, 9, 11, 12, 12, 13, 13, 13, 14

$$\therefore (\text{중앙값}) = \frac{12+12}{2} = 12$$

5 $(\text{평균}) = \frac{2+4+x+8+10}{5} = \frac{24+x}{5}$

변량을 다음과 같이 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면

(i) $x \leq 4$ 일 때

$x, 2, 4, 8, 10$ 또는 $2, x, 4, 8, 10$ 이므로 중앙값은 4이다.

$$\text{즉, } \frac{24+x}{5} = 4 \text{이므로 } x = -4$$

(ii) $4 < x < 8$ 일 때

$2, 4, x, 8, 10$ 이므로 중앙값은 x 이다.

$$\text{즉, } \frac{24+x}{5} = x \text{이므로 } x = 6$$

(iii) $x \geq 8$ 일 때

$2, 4, 8, x, 10$ 또는 $2, 4, 8, 10, x$ 이므로 중앙값은 8이다.

$$\text{즉, } \frac{24+x}{5} = 8 \text{이므로 } x = 16$$

따라서 (i)~(iii)에 의해 x 의 값이 될 수 있는 자연수는 6, 16이다.

6 편차의 총합은 0이므로

$$(-x^2+4x+3)+(-4)+(3x^2-x+2)+(x-6)+(2x-3)=0$$

$$2x^2+6x-8=0, x^2+3x-4=0$$

$$(x+4)(x-1)=0 \quad \therefore x=-4 \text{ 또는 } x=1$$

(i) $x=-4$ 일 때

$$3x^2-x+2=3 \times (-4)^2 - (-4) + 2 = 54$$

$$\text{평균이 } 30 \text{이므로 } c = 54 + 30 = 84$$

(ii) $x=1$ 일 때

$$3x^2-x+2=3 \times 1^2 - 1 + 2 = 4$$

$$\text{평균이 } 30 \text{이므로 } c = 4 + 30 = 34$$

따라서 (i), (ii)에 의해 변량 c 의 값이 될 수 있는 것은 34, 84이다.

7 민지의 수학 점수를 x 점이라 하면

학생	A	B	C	D	E
수학 점수(점)	$x-7$	$x+1$	$x-4$	$x+2$	$x+3$

$$(\text{평균}) = \frac{(x-7)+(x+1)+(x-4)+(x+2)+(x+3)}{5}$$

$$= \frac{5x-5}{5} = x-1(\text{점})$$

각 학생의 편차를 차례로 구하면

-6점, 2점, -3점, 3점, 4점

$$\therefore (\text{분산}) = \frac{(-6)^2+2^2+(-3)^2+3^2+4^2}{5} = \frac{74}{5} = 14.8$$

8 a, b, c, d 의 평균이 4이므로

$$\frac{a+b+c+d}{4} = 4 \quad \therefore a+b+c+d = 16 \quad \dots \text{㉠}$$

a, b, c, d 의 표준편차가 2이므로

$$\frac{(a-4)^2+(b-4)^2+(c-4)^2+(d-4)^2}{4} = 2^2$$

$$\therefore (a-4)^2+(b-4)^2+(c-4)^2+(d-4)^2 = 16 \quad \dots \text{㉡}$$

$-3a, -3b, -3c, -3d$ 의 평균과 분산을 각각 구하면

$$(\text{평균}) = \frac{(-3a)+(-3b)+(-3c)+(-3d)}{4}$$

$$= \frac{-3(a+b+c+d)}{4}$$

$$= \frac{-3 \times 16}{4} = -12 (\because \text{㉠})$$

$$\therefore m = -12$$

(분산)

$$= \frac{(-3a+12)^2+(-3b+12)^2+(-3c+12)^2+(-3d+12)^2}{4}$$

$$= (-3)^2 \times \frac{(a-4)^2+(b-4)^2+(c-4)^2+(d-4)^2}{4}$$

$$= 9 \times \frac{16}{4} = 36 (\because \text{㉡})$$

$$\text{즉, } (\text{표준편차}) = \sqrt{36} = 6 \text{이므로 } n = 6$$

$$\therefore m-n = -12-6 = -18$$

[다른 풀이]

a, b, c, d 의 평균이 4, 표준편차가 2이므로

$$m = -3 \times 4 = -12, n = |-3| \times 2 = 6$$

$$\therefore m-n = -12-6 = -18$$

9 A 모둠의 인터넷 사용 시간에 대한 (편차)²의 합은

$$8 \times 2^2 = 32$$

B 모둠의 인터넷 사용 시간에 대한 (편차)²의 합은

$$10 \times (\sqrt{13})^2 = 130$$

따라서 A, B 두 모둠 전체의 인터넷 사용 시간의 분산은

$$\frac{32+130}{18} = \frac{162}{18} = 9$$

10 자료 A는 1, 2, 3, ..., 100

자료 B는 101, 102, 103, ..., 200

자료 C는 2, 4, 6, ..., 200

세 자료 A, B, C의 변량의 개수는 모두 100개이다.

이때 표준편차는 자료가 평균을 중심으로 흩어진 정도를 나타내므로 자료 A와 자료 B의 표준편차는 같고, 자료 C의 표준편차는 두 자료 A, B의 표준편차보다 크다.

$$\therefore x=y < z$$

11 각 종목에서 지빈이가 얻은 점수의 편차를 구하면

수영은 $29-26=3$ (점), 사이클은 $26-17=9$ (점), 마라톤은 $27-28=-1$ (점)이므로 지빈이는 다른 선수에 비해 사이클의 성적이 가장 좋다고 할 수 있다.

또 표준편차가 작을수록 자료의 분포가 고르므로 이 대회에서 선수들의 득점이 가장 고른 종목은 수영이다.

3 최고 유형 정복하기

79~81쪽

- 01 31 02 189 03 4, 18 04 25
 05 7개 06 69.5점 07 $\perp$, $\square$ 08 $\sqrt{7}$
 09 145분 10 C와 D

- 01 가장 작은 변량을 a , 가장 큰 변량을 b , 나머지 변량을 $x_1, x_2, \dots, x_8$ 이라 하면

$$\frac{b + (x_1 + x_2 + \dots + x_8)}{9} = 33$$
에서
 $b + (x_1 + x_2 + \dots + x_8) = 297 \quad \dots \textcircled{1}$

$$\frac{a + (x_1 + x_2 + \dots + x_8)}{9} = 29$$
에서
 $a + (x_1 + x_2 + \dots + x_8) = 261 \quad \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면
 $a + b + 2(x_1 + x_2 + \dots + x_8) = 558$
 이때 $a + b = 62$ 이므로 $62 + 2(x_1 + x_2 + \dots + x_8) = 558$
 $\therefore x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 248$
 따라서 10개의 변량의 평균은

$$\frac{(a+b) + (x_1 + x_2 + \dots + x_8)}{10} = \frac{62 + 248}{10} = \frac{310}{10} = 31$$
- 02 x 를 제외한 변량을 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면
 2, 4, 5, 6, 12, 13, 18, 24이므로
 (i) $x \leq 6$ 일 때
 $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = f(6) = 6$
 (ii) $6 < x < 12$ 일 때
 $f(7) = 7, f(8) = 8, f(9) = 9, f(10) = 10, f(11) = 11$
 (iii) $x \geq 12$ 일 때
 $f(12) = 12, f(13) = 12, \dots, f(20) = 12$
 $\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(20)$
 $= 6 \times 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 \times 9 = 189$
- 03 (평균) $= \frac{3+6+3+a+3+11+5}{7} = \frac{31+a}{7}$
 이때 a 의 값에 상관없이 최빈값은 3이고, 평균, 중앙값, 최빈값이 모두 다르므로 중앙값은 a 또는 5이다.
 (i) 중앙값이 a , 즉 $3 < a < 5$ 일 때
 $3 < a < \frac{31+a}{7}$ 이므로 $a = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{31+a}{7} \right)$
 $2a = \frac{52+a}{7}, 13a = 52 \quad \therefore a = 4$
 (ii) 중앙값이 5, 즉 $a \geq 5$ 일 때
 $3 < 5 < \frac{31+a}{7}$ 이므로 $5 = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{31+a}{7} \right)$
 $10 = \frac{52+a}{7}, 52+a = 70 \quad \therefore a = 18$
 따라서 (i), (ii)에 의해 a 의 값이 될 수 있는 자연수는 4, 18이다.
- 04 (가)에서 중앙값이 19이므로 변량을 작은 값에서부터 크기순으로 나열할 때 5번째 변량의 값은 19이고, (나), (다)에서 최빈값이 17과 22이므로 17과 22는 각각 2개 또는 3개이다.

(i) 17과 22가 각각 3개인 경우

$$\frac{14+17+17+17+19+22+22+22+x}{9} = 19 \text{이므로}$$

$$150+x=171 \quad \therefore x=21$$

이때 x 는 가장 큰 변량이 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 17과 22가 각각 2개인 경우

14, 17, 17, 19, 22, 22, x 를 제외한 나머지 2개의 변량을 각각 a, b ($a < 19 < b$)라 하면

$$\frac{14+17+17+19+22+22+x+a+b}{9} = 19$$

$$111+x+a+b=171 \quad \therefore x+a+b=60$$

이때 x 가 가장 큰 변량이 되려면 a, b 는 주어진 범위에서 가장 작아야 하고, 17과 22가 아닌 서로 다른 수이어야 한다.

$$\text{즉, } a=15, b=20 \text{이므로 } x=25$$

따라서 (i), (ii)에 의해 $x=25$ 05 자료 A의 중앙값이 13이므로 $a=13$ 또는 $b=13$ 이어야 한다.(i) $a=13$ 일 때

두 자료 A, B를 합친 전체 자료에서 $b, b+1$ 을 제외한 변량을 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면

11, 12, 12, 13, 13, 14, 16, 17

이므로 중앙값이 12.5가 되려면 $b \leq 11$ 이어야 한다.

즉, 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

(13, 5), (13, 6), (13, 7), (13, 8), (13, 9), (13, 10), (13, 11)

(ii) $b=13$ 일 때

두 자료 A, B를 합친 전체 자료에서 a 를 제외한 변량을 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면

11, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 16, 17

이때 $a \leq 12$ 이므로 a 의 값에 상관없이 중앙값은

$$\frac{13+13}{2} = 13$$

즉, 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 (i), (ii)에 의해 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는 7개이다.

06 편차의 총합은 0이므로

$$-2+c+4+d=0 \quad \therefore c+d=-2 \quad \dots \textcircled{1}$$

희진이와 진수의 국어 성적의 차가 $72-64=8$ (점)이므로

$$c-d=8 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$c=3, d=-5$$

이때 희진이의 국어 성적과 편차에서

(평균) $= 72-3=69$ (점)이므로

$$a=69+(-2)=67, b=69+4=73$$

따라서 각 변량을 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면

64점, 67점, 72점, 73점

$$\text{이므로 중앙값은 } \frac{67+72}{2} = 69.5(\text{점})$$

- 07 학생 F의 편차를 x 회, 학생 G의 편차를 y 회라 하면 평균과 중앙값이 같으므로 $x=0$ 또는 $y=0$ 이다.

이때 편차의 총합은 0이므로

$$x=0, y=-1 \text{ 또는 } x=-1, y=0$$

ㄱ. B의 방문 횟수는 평균보다 3회 많으므로 중앙값보다 3회 많다.

ㄴ. C의 편차는 -4회, G의 편차는 -1회 또는 0회이므로 C의 방문 횟수는 G보다 적다.

ㄷ. 7개의 변량의 편차를 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면 -4, -1, -1, 0, 1, 2, 3이므로 최빈값은 편차가 -1회인 학생 A의 방문 횟수와 같다.

ㄹ. F의 편차가 -1회 또는 0회이므로 F의 방문 횟수는 평균과 같거나 평균보다 1회 적다.

ㅁ. 편차가 음수인 학생은 A, C, F 또는 A, C, G이므로 평균보다 적게 방문한 학생은 모두 3명이다.

따라서 옳지 않은 것은 ㄴ, ㅁ이다.

- 08 세 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 x, y, z 라 하면 한 모서리의 길이의 평균이 8이므로

$$\frac{x+y+z}{3}=8$$

$$\therefore x+y+z=24 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

또 길넓이의 평균이 426이므로

$$\frac{6(x^2+y^2+z^2)}{3}=426$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2=213 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

따라서 세 정육면체의 한 모서리의 길이의 분산은

$$\begin{aligned} & \frac{(x-8)^2+(y-8)^2+(z-8)^2}{3} \\ &= \frac{x^2+y^2+z^2-16(x+y+z)+192}{3} \\ &= \frac{213-16 \times 24+192}{3} \quad (\because \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}) \\ &= \frac{21}{3}=7 \end{aligned}$$

$$\therefore (\text{표준편차})=\sqrt{7}$$

- 09 처음 공부 시간의 평균이 120분이고, 각자의 공부 시간에 a 배를 한 후 b 분을 더한 공부 시간의 평균이 170분이므로

$$120a+b=170 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

처음 공부 시간의 표준편차가 4분이고, 각자의 공부 시간에 a 배를 한 후 b 분을 더한 공부 시간의 표준편차는 5분이므로

$$4a=5 \quad \therefore a=\frac{5}{4}$$

$a=\frac{5}{4}$ 를 ㉠에 대입하면

$$120 \times \frac{5}{4}+b=170 \quad \therefore b=20$$

따라서 원래 하루에 100분 동안 공부하는 학생의 바뀐 공부 시간은

$$100 \times \frac{5}{4}+20=145(\text{분})$$

- 10 5개의 끈 A, B, C, D, E 중 2개를 이어 붙여 4개의 끈을 만들 때, 끈의 길이의 평균은

$$\frac{12+11+4+5+8}{4}=\frac{40}{4}=10(\text{cm})$$

이때 평균보다 긴 끈 2개를 이어 붙이면 편차는 더 커지므로 네 정사각형의 한 변의 길이의 표준편차를 가능한 한 작게 하려면 10 cm보다 길이가 짧은 끈 C, D, E 중 2개의 끈을 이어 붙이면 된다.

(i) C와 D를 이어 붙인 경우

C와 D의 길이의 합은 $4+5=9(\text{cm})$ 이므로 네 변의 길이의 편차는 각각 2 cm, 1 cm, -1 cm, -2 cm

$$(\text{분산})=\frac{2^2+1^2+(-1)^2+(-2)^2}{4}=\frac{10}{4}=2.5$$

$$\therefore (\text{표준편차})=\sqrt{2.5}(\text{cm})$$

(ii) D와 E를 이어 붙인 경우

D와 E의 길이의 합은 $5+8=13(\text{cm})$ 이므로 네 변의 길이의 편차는 각각 2 cm, 1 cm, -6 cm, 3 cm

$$(\text{분산})=\frac{2^2+1^2+(-6)^2+3^2}{4}=\frac{50}{4}=12.5$$

$$\therefore (\text{표준편차})=\sqrt{12.5}(\text{cm})$$

(iii) C와 E를 이어 붙인 경우

C와 E의 길이의 합은 $4+8=12(\text{cm})$ 이므로 네 변의 길이의 편차는 각각 2 cm, 1 cm, 2 cm, -5 cm

$$(\text{분산})=\frac{2^2+1^2+2^2+(-5)^2}{4}=\frac{34}{4}=8.5$$

$$\therefore (\text{표준편차})=\sqrt{8.5}(\text{cm})$$

따라서 C와 D를 이어 붙였을 때, 네 정사각형의 한 변의 길이의 표준편차가 가장 작다.

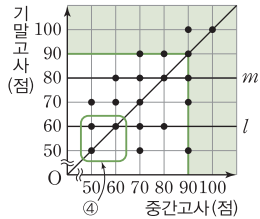
2 상관관계

1 주제별 유형 불러오기

83~85쪽

유제 1 ⑤ 유제 2 65점 유제 3 ③ 유제 4 17
유제 5 ②, ④ 유제 6 (1) D (2) D

- 유제 1** ① 기말고사 점수가 60점 이상 80점 이하인 학생은 오른쪽 그림에서 두 직선 l , m 사이(경계선 포함)에 속하므로 12명이다.



- ② 중간고사 점수와 기말고사 점수가 같은 학생은 위의 그림에서 대각선 위에 있으므로 6명이다.

$$\therefore \frac{6}{20} \times 100 = 30(\%)$$

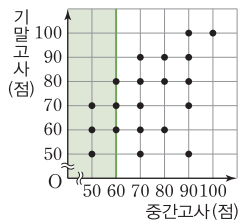
- ③ 중간고사 점수가 기말고사 점수보다 높은 학생은 위의 그림에서 대각선보다 아래쪽에 있으므로 6명이다.

- ④ 중간고사 점수와 기말고사 점수가 모두 70점 미만인 학생 수는 3명이다.

- ⑤ 중간고사 점수와 기말고사 점수 중 적어도 하나가 90점 이상인 학생은 위의 그림에서 색칠한 부분(경계선 포함)에 속하므로 8명이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

- 유제 2** 중간고사 점수가 60점 이하인 학생은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분(경계선 포함)에 속하므로 6명이다.
이 학생들의 기말고사 점수는 50점, 60점, 60점, 70점, 70점, 80점이므로

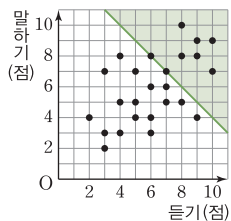


(기말고사 점수의 평균)

$$= \frac{50+60+60+70+70+80}{6}$$

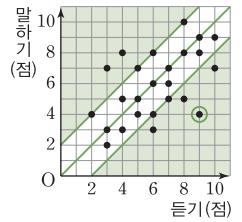
$$= \frac{390}{6} = 65(\text{점})$$

- 유제 3** 듣기 점수와 말하기 점수의 평균이 7점 이상, 즉 듣기 점수와 말하기 점수의 합이 $2 \times 7 = 14(\text{점})$ 이상인 학생은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분(경계선 포함)에 속하므로 8명이다.



$$\therefore \frac{8}{25} \times 100 = 32(\%)$$

- 유제 4** 듣기 점수와 말하기 점수의 차이가 2점 이상인 학생은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분(경계선 포함)에 속하므로 12명이다. 또 오른쪽 그림의 대각선에서 멀리 떨어져 있을수록 듣기 점수와 말하기 점수의 차이가 크므로 그 차이가 가장 큰 학생은 듣기 점수가 9점, 말하기 점수가 4점이다.



$$\therefore (\text{두 점수의 차}) = 9 - 4 = 5(\text{점})$$

$$\therefore \text{따라서 } a=12, b=5 \text{ 이므로 } a+b=12+5=17$$

- 유제 5** 물의 온도와 설탕의 용해도 사이에는 양의 상관관계가 있다.

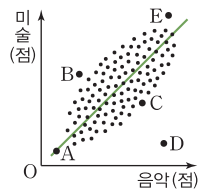
- ①, ⑤ 음의 상관관계
②, ④ 양의 상관관계
③ 상관관계가 없다.

따라서 주어진 상관관계와 같은 것은 ②, ④이다.

- 유제 6** (1) A, B, C, D, E 중에서 미술 점수에 비해 음악 점수가 가장 높은 학생은 D이다.

- (2) 오른쪽 그림과 같이 대각선을 그었을 때, 대각선에서 멀리 떨어져 있을수록 두 과목의 점수의 차이가 크다.

따라서 A, B, C, D, E 중에서 두 과목의 점수의 차이가 가장 큰 학생은 D이다.



2 최고 유형 탐험하기

86~87쪽

1 ③, ⑤ 2 ② 3 ④ 4 ③
5 ④ 6 ③ 7 ①, ④ 8 ③, ④

- 1** ① 필기 점수가 75점인 학생이 4명으로 가장 많으므로 필기 점수의 최빈값은 75점이다.

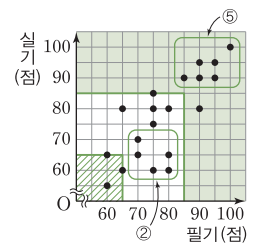
- ② 필기 점수가 70점 이상인 학생 중에서 실기 점수가 75점 미만인 학생은 5명이다.

$$\therefore \frac{5}{20} \times 100 = 25(\%)$$

- ③ 필기 점수와 실기 점수 중 적어도 하나가 85점 이상인 학생은 위의 그림에서 색칠한 부분(경계선 포함)에 속하므로 8명이다.

- ④ 필기 점수와 실기 점수가 모두 70점 미만인 학생은 위의 그림에서 빗금 친 부분(경계선 포함)에 속하므로 3명이다.

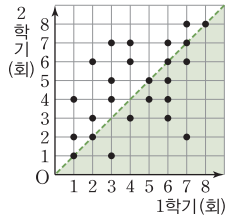
$$\therefore \frac{3}{20} \times 100 = 15(\%)$$



- ⑤ 실기 점수가 90점 이상인 학생은 6명이고, 이 학생들의 필기 점수는 85점, 90점, 90점, 95점, 95점, 100점이므로
(필기 점수의 평균) $= \frac{85+90+90+95+95+100}{6}$
 $= \frac{555}{6} = 92.5(\text{점})$

따라서 옳은 것은 ③, ⑤이다.

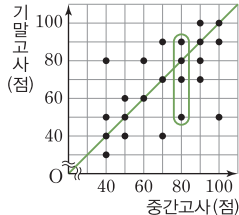
- 2 2학기보다 1학기에 도서관을 방문한 횟수가 더 많은 학생은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분(경계선 제외)에 속하므로 8명이고, 이 학생들의 1학기 동안의 도서관 방문 횟수는 3회, 4회, 5회, 6회, 6회, 6회, 7회, 7회이다.



따라서 1학기 동안의 도서관 방문 횟수의 평균은

$$\frac{3+4+5+6+6+6+7+7}{8} = \frac{44}{8} = 5.5(\text{회})$$

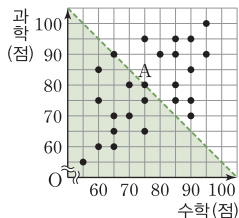
- 3 중간고사에서 시연이보다 높은 점수를 받은 학생이 7명이므로 시연이를 나타내는 점은 오른쪽 그림에 표시된 4개의 점 중 하나이다. 이때 기말고사 점수가 중간고사 점수보다 높은 학생은 대각선보다 위쪽에 있는 점이다.



즉, 시연이를 나타내는 점은 4개의 점 중에서 가장 위에 있는 점이므로 시연이의 중간고사 점수는 80점, 기말고사 점수는 90점이다.

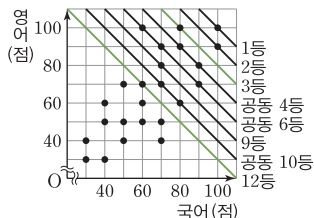
따라서 구하는 두 점수의 합은 $80+90=170(\text{점})$

- 4 두 과목의 점수의 평균이 A보다 낮은 학생은 두 과목의 점수의 합이 A보다 낮은 학생과 같다. 즉, 두 과목 점수의 합이 $75+80=155(\text{점})$ 미만인 학생은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분(경계선 제외)에 속하므로 11명이다.



$$\therefore \frac{11}{25} \times 100 = 44(\%)$$

- 5 3등인 학생의 국어 점수는 80점, 영어 점수는 100점이므로 그 평균은 $\frac{80+100}{2} = \frac{180}{2}$
 $= 90(\text{점})$



$$\therefore a=90$$

12등인 학생의 국어 점수는 60점, 영어 점수는 70점이므로 그 평균은

$$\frac{60+70}{2} = \frac{130}{2} = 65(\text{점}) \quad \therefore b=65$$

$$\therefore a-b=90-65=25$$

- 6 상위 20%와 하위 20% 이내에 드는 학생 수는 각각 $25 \times \frac{20}{100} = 5(\text{명})$

작년에 읽은 책의 수가 상위 20% 이내에 드는 학생들이 읽은 책의 수는 8권 이상이고, 이 학생들이 올해에 읽은 책의 수는 6권, 8권, 9권, 9권, 10권이므로 그 평균은

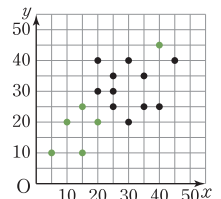
$$\frac{6+8+9+9+10}{5} = \frac{42}{5} = 8.4(\text{권})$$

또 작년에 읽은 책의 수가 하위 20% 이내에 드는 학생들이 읽은 책의 수는 3권 이하이고, 이 학생들이 올해에 읽은 책의 수는 1권, 2권, 3권, 5권, 6권이므로 그 평균은

$$\frac{1+2+3+5+6}{5} = \frac{17}{5} = 3.4(\text{권})$$

따라서 구하는 평균의 차는 $8.4-3.4=5(\text{권})$

- 7 6개의 점을 추가하면 오른쪽 그림과 같다. 이때 산점도는 x 의 값이 증가함에 따라 y 의 값도 대체로 증가하므로 두 변량 x, y 사이에는 양의 상관관계가 있다.



- ①, ④ 양의 상관관계
② 상관관계가 없다.
③, ⑤ 음의 상관관계

따라서 주어진 산점도와 상관관계가 같은 것은 ①, ④이다.

- 8 ③ B의 키는 155 cm이고, E의 키는 180 cm이므로

$$\text{두 사람의 키의 평균} = \frac{155+180}{2} = \frac{335}{2} = 167.5(\text{cm})$$

이때 D의 키는 170 cm이므로 B와 E의 키의 평균은 D보다 작다.

- ④ A, B, C, D, E 중에서 키에 비해 몸무게가 가장 적게 나가는 학생은 C이다.
⑤ A, B, C, D, E 중에서 가장 키가 크고 몸무게도 많이 나가는 학생은 E이고, 키에 비해 몸무게가 가장 많이 나가는 학생은 A이다. 이때 E의 몸무게는 75 kg이고, A의 몸무게는 70 kg이므로 $75-70=5(\text{kg})$

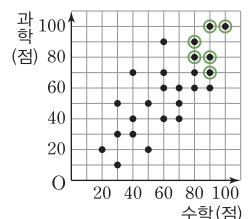
따라서 옳지 않은 것은 ③, ④이다.

3 최고 유형 정복하기

88~89쪽

- 01 15점 02 40% 03 58.3% 04 120점
05 12% 06 6가지

- 01 상위 24% 이내에 드는 학생 수는 $25 \times \frac{24}{100} = 6(\text{명})$
두 과목 점수의 합이 높은 순으로 6명의 두 점수의 합을 나열하면 $100+100=200(\text{점})$,



$$90+100=190(\text{점}), 80+90=170(\text{점}), 90+80=170(\text{점}), \\ 80+80=160(\text{점}), 90+70=160(\text{점})\text{이므로} \\ (\text{평균})=\frac{200+190+170+170+160+160}{6}$$

$$=\frac{1050}{6}=175(\text{점})$$

이때 각 변량의 편차를 차례로 구하면

25점, 15점, -5점, -5점, -15점, -15점이므로

$$(\text{분산})=\frac{25^2+15^2+(-5)^2+(-5)^2+(-15)^2+(-15)^2}{6}$$

$$=\frac{1350}{6}=225$$

$$\therefore (\text{표준편차})=\sqrt{225}=15(\text{점})$$

02 (1차 시험 점수의 평균)

$$=\frac{5 \times 1 + 6 \times 3 + 7 \times 2 + 8 \times 4 + 9 \times 2 + 10 \times 3}{15}$$

$$=\frac{117}{15}=7.8(\text{점})$$

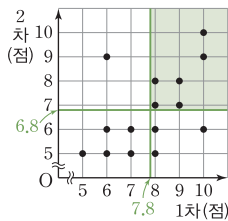
(2차 시험 점수의 평균)

$$=\frac{5 \times 4 + 6 \times 4 + 7 \times 2 + 8 \times 2 + 9 \times 2 + 10 \times 1}{15}$$

$$=\frac{102}{15}=6.8(\text{점})$$

이때 1차, 2차 모두 평균 이상의 점수를 얻은 학생은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분(경계선 포함)에 속하므로 6명이다.

$$\therefore \frac{6}{15} \times 100 = 40(\%)$$



03 각 선수가 넣은 슛의 개수를 순서쌍 (2점짜리, 3점짜리)로 나타내면 (1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 3), (5, 5), (6, 4)이므로 이를 순서쌍 (a, b)로 각각 나타내면 (2, 0), (2, 3), (4, 3), (4, 9), (6, 6), (6, 12), (8, 3), (8, 6), (8, 9), (10, 9), (10, 15), (12, 12)이다.

이때 $\frac{b}{a} \geq 1$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 (2, 3), (4, 9), (6, 6), (6, 12), (8, 9), (10, 15), (12, 12)의 7개이다.

$$\therefore \frac{7}{12} \times 100 = 58.33\cdots(\%)$$

따라서 소수점 아래 둘째 자리에서 반올림하면 58.3%이다.

04 중복된 점에 해당하는 학생의 음악 점수를 x점, 체육 점수를 y점이라 하면

음악 점수의 평균이 74점이므로

$$\frac{50 \times 2 + 60 \times 2 + 70 \times 2 + 80 \times 4 + 90 \times 3 + 100 \times 1 + x}{15} = 74$$

$$1050 + x = 1110 \quad \therefore x = 60$$

또 체육 점수의 평균이 72점이므로

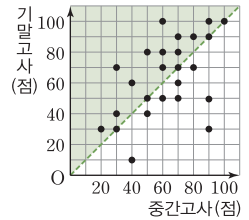
$$\frac{50 \times 2 + 60 \times 4 + 70 \times 1 + 80 \times 3 + 90 \times 3 + 100 \times 1 + y}{15} = 72$$

$$1020 + y = 1080 \quad \therefore y = 60$$

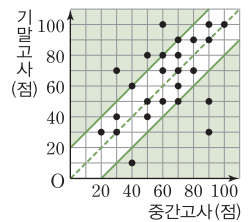
따라서 중복된 점에 해당하는 학생의 음악 점수는 60점, 체육 점수는 60점이므로 그 합은

$$60 + 60 = 120(\text{점})$$

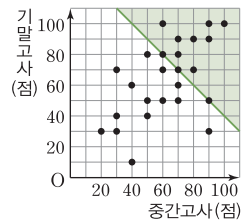
05 (가) 중간고사 점수보다 기말고사 점수가 향상된 학생은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분(경계선 제외)에 속한다.



(나) 중간고사와 기말고사의 점수의 차가 20점 이상인 학생은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분(경계선 포함)에 속한다.

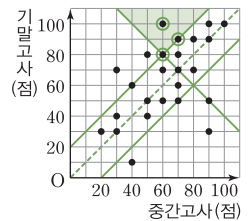


(다) 중간고사와 기말고사 점수의 평균이 70점 이상, 즉 중간고사와 기말고사 점수의 합이 70×2=140(점) 이상인 학생은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분(경계선 포함)에 속한다.

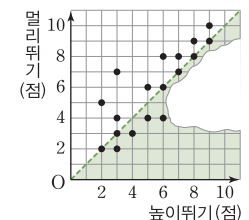


따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 학생은 오른쪽 그림에 표시한 3명이다.

$$\therefore \frac{3}{25} \times 100 = 12(\%)$$



06 멀리뛰기 점수보다 높이뛰기 점수가 높은 학생은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분(경계선 제외)에 속한다.



찢어진 부분에 있는 2명의 학생의 높이뛰기 점수를 각각

a, b (a ≤ b)라 하면 높이뛰기 점수의 평균이 6점이므로

$$\frac{3 \times 1 + 4 \times 1 + 5 \times 1 + 6 \times 1 + a + b}{6} = 6$$

$$a + b + 18 = 36 \quad \therefore a + b = 18$$

이때 찢어진 부분의 높이뛰기 점수는 7점, 8점, 9점, 10점이므로 a=8, b=10 또는 a=9, b=9

또 찢어진 부분에 있는 2명의 학생의 멀리뛰기 점수를 각각

c, d (c ≤ d)라 하면 멀리뛰기 점수의 평균이 4점이므로

$$\frac{2 \times 1 + 3 \times 1 + 4 \times 2 + c + d}{6} = 4$$

$$c + d + 13 = 24 \quad \therefore c + d = 11$$

이때 찢어진 부분의 멀리뛰기 점수는 4점, 5점, 6점, 7점, 8점이므로 c=4, d=7 또는 c=5, d=6

따라서 가능한 점수를 순서쌍

(높이뛰기 점수, 멀리뛰기 점수)로 나타내면

(8, 4)와 (10, 7), (8, 7)과 (10, 4), (8, 5)와 (10, 6),
(8, 6)과 (10, 5), (9, 4)와 (9, 7), (9, 5)와 (9, 6)의 6가지
이다.

대단원 마무리하기

90~93쪽

- 01 72점 02 ④ 03 164 cm 04 ③
05 ① 06 $\sqrt{7}$ 07 C, A, B
08 10 g, 40 kcal 09 ⑤ 10 ④
11 ㄱ, ㄹ 12 ② 13 $79 \leq A \leq 80$
14 6 15 $2\sqrt{2}$ 16 170점 17 b

서술형 문제 <과정은 풀이 참조>

- 18 40 19 A 지역 20 37.5% 21 88

- 01 (반 전체의 수학 성적의 총점) = $68 \times 35 = 2380$ (점)
(남학생 전체의 수학 성적의 총점) = $65 \times 20 = 1300$ (점)
(여학생 전체의 수학 성적의 총점) = $2380 - 1300$
= 1080(점)

$$\therefore (\text{여학생 전체의 수학 성적의 평균}) = \frac{1080}{15} = 72(\text{점})$$

- 02 평균이 5이므로

$$\frac{1+9+a+2+7+4+b}{7} = 5 \quad \therefore a+b=12 \quad \dots \textcircled{1}$$

이때 중앙값이 5이고, $a < b$ 이므로 $a=5$

$a=5$ 를 ①에 대입하면 $b=7$

따라서 7개의 변량은 1, 9, 5, 2, 7, 4, 7이고, 7이 두 번으로
가장 많이 나타나므로 최빈값은 7이다.

- 03 편차의 총합은 0이므로

$$4 + (-8) + 1 + e + 0 = 0 \quad \therefore e = 3$$

이때 학생 D의 키가 163 cm이므로

$$(\text{평균}) = 163 - 3 = 160(\text{cm})$$

$$\therefore a = 160 + 4 = 164, b = 160 - 8 = 152$$

$$c = 160 + 1 = 161, d = 160$$

따라서 학생 A의 키가 164 cm로 가장 크다.

- 04 평균이 49회이므로

$$\frac{47+50+48+x+53}{5} = 49$$

$$198 + x = 245 \quad \therefore x = 47$$

이때 각 변량의 편차는 -2회, 1회, -1회, -2회, 4회이므로

$$(\text{분산}) = \frac{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 4^2}{5} = \frac{26}{5} = 5.2$$

- 05 (평균) = $\frac{3+11+x+(8-x)+8}{5} = \frac{30}{5} = 6$

이때 분산이 9.6이므로

$$\frac{(-3)^2 + 5^2 + (x-6)^2 + (2-x)^2 + 2^2}{5} = 9.6$$

$$2x^2 - 16x + 78 = 48, x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x-3)(x-5) = 0 \quad \therefore x=3 \text{ 또는 } x=5$$

따라서 모든 x 의 값의 합은 $3+5=8$

- 06 a, b 의 평균이 4이므로 $\frac{a+b}{2} = 4$

$$\therefore a+b=8 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a, b \text{의 분산이 2이므로 } \frac{(a-4)^2 + (b-4)^2}{2} = 2$$

$$a^2 + b^2 - 8(a+b) + 32 = 4 \quad \dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$a^2 + b^2 - 8 \times 8 + 32 = 4 \quad \therefore a^2 + b^2 = 36$$

$$c, d \text{의 평균이 8이므로 } \frac{c+d}{2} = 8$$

$$\therefore c+d=16 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$c, d \text{의 분산이 4이므로 } \frac{(c-8)^2 + (d-8)^2}{2} = 4$$

$$c^2 + d^2 - 16(c+d) + 128 = 8 \quad \dots \textcircled{4}$$

③을 ④에 대입하면

$$c^2 + d^2 - 16 \times 16 + 128 = 8 \quad \therefore c^2 + d^2 = 136$$

따라서 네 변량 a, b, c, d 에 대하여

$$(\text{평균}) = \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{8+16}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

$$(\text{분산}) = \frac{(a-6)^2 + (b-6)^2 + (c-6)^2 + (d-6)^2}{4}$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 12(a+b+c+d) + 144}{4}$$

$$= \frac{36 + 136 - 12 \times (8+16) + 144}{4}$$

$$= \frac{28}{4} = 7$$

$$\therefore (\text{표준편차}) = \sqrt{7}$$

- 07 (A의 평균) = $\frac{2 \times 2 + 4 \times 3 + 6 \times 1 + 8 \times 1 + 10 \times 1}{8}$

$$= \frac{40}{8} = 5(\text{점})$$

$\therefore$ (A의 분산)

$$= \frac{(-3)^2 \times 2 + (-1)^2 \times 3 + 1^2 \times 1 + 3^2 \times 1 + 5^2 \times 1}{8}$$

$$= \frac{56}{8} = 7$$

$$(\text{B의 평균}) = \frac{2 \times 1 + 4 \times 1 + 6 \times 2 + 8 \times 1 + 10 \times 3}{8}$$

$$= \frac{56}{8} = 7(\text{점})$$

$\therefore$ (B의 분산)

$$= \frac{(-5)^2 \times 1 + (-3)^2 \times 1 + (-1)^2 \times 2 + 1^2 \times 1 + 3^2 \times 3}{8}$$

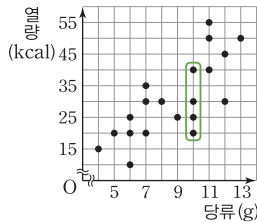
$$= \frac{64}{8} = 8$$

$$(\text{C의 평균}) = \frac{2 \times 1 + 8 \times 4 + 10 \times 3}{8} = \frac{64}{8} = 8(\text{점})$$

$$\therefore (\text{C의 분산}) = \frac{(-6)^2 \times 1 + 0^2 \times 4 + 2^2 \times 3}{8} = \frac{48}{8} = 6$$

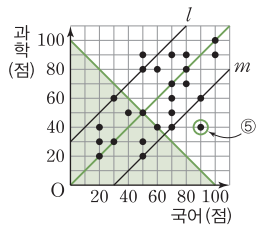
따라서 점수가 고른 사람부터 차례로 나열하면 C, A, B이다.

- 08 A 음료수보다 당류의 양이 많은 음료수가 6개이므로 A 음료수는 오른쪽 그림에 표시된 4개의 점 중 하나이다.
이때 A 음료수의 당류의 양은 10g이고, A 음료수의 열량은 당류의 양의 3배, 즉 30kcal보다 높으므로 A 음료수는 4개의 점 중 가장 위에 있는 점이고, 그 열량은 40kcal이다.

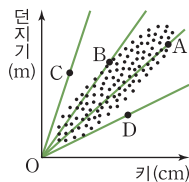


- 09 $a+b$ 의 값이 35 이하인 a, b 의 값을 순서쌍 (a, b) 로 나타내면 $(4, 15), (5, 20), (6, 10), (6, 20), (6, 25), (7, 20), (9, 25), (10, 20), (10, 25)$ 의 9가지이다.
 $\therefore \frac{9}{20} \times 100 = 45(\%)$

- 10 ① 국어 점수와 과학 점수가 같은 학생은 오른쪽 그림에서 대각선 위에 있으므로 6명이다.
② 과학 점수가 국어 점수보다 높은 학생은 오른쪽 그림에서 대각선보다 위쪽에 있으므로 9명이다.
 $\therefore \frac{9}{25} \times 100 = 36(\%)$
③ 국어 점수와 과학 점수의 차이가 30점인 학생은 위의 그림에서 두 직선 l, m 위에 있으므로 5명이다.
④ 국어 점수와 과학 점수의 평균이 50점 이하, 즉 국어 점수와 과학 점수의 합이 $50 \times 2 = 100$ (점) 이하인 학생은 위의 그림에서 색칠한 부분(경계선 포함)에 속하므로 10명이다.
⑤ 위의 그림의 대각선에서 멀리 떨어져 있을수록 국어 점수와 과학 점수의 차이가 크므로 그 차이가 가장 큰 학생은 국어 점수가 90점, 과학 점수가 40점이다.
 $\therefore$ (두 점수의 차) $= 90 - 40 = 50$ (점)
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.



- 11 ㄱ. 키가 클수록 던지기 기록이 대체로 좋아지는 경향이 있으므로 두 변량 사이에는 양의 상관관계가 있다.
ㄴ. B는 A보다 키도 작고, 던지기 기록도 좋지 않다.
ㄷ. A, B, C, D 중에서 키에 비해 던지기 기록이 가장 낮은 학생은 D이다.
ㄹ. $\frac{(\text{던지기 기록})}{(\text{키})}$ 의 값은 네 점 A, B, C, D와 원점 O를 각각 연결한 직선의 기울기를 의미한다.
각 직선을 산점도 위에 그려 보면 오른쪽 그림과 같다. 즉, 기울기가 가장 작은 직선은 점 D를 지나는 직선이므로 A, B, C, D 중에서 $\frac{(\text{던지기 기록})}{(\text{키})}$ 의 값이 가장 작은 학생은 D이다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.



- 12 A, B, C, D 네 학생의 몸무게를 각각 a kg, b kg, c kg, d kg이라 하면
 $\frac{a+b}{2} = 68 \quad \therefore a+b = 136 \quad \dots \textcircled{㉠}$
 $\frac{b+c}{2} = 67 \quad \therefore b+c = 134 \quad \dots \textcircled{㉡}$
 $\frac{c+d}{2} = 64 \quad \therefore c+d = 128 \quad \dots \textcircled{㉢}$
이때 ㉠+㉢을 하면
 $a+b+c+d = 264 \quad \dots \textcircled{㉣}$
㉡을 ㉣에 대입하면
 $a+134+d = 264 \quad \therefore a+d = 130$
따라서 A와 D의 몸무게의 평균은
 $\frac{a+d}{2} = \frac{130}{2} = 65(\text{kg})$

- 13 처음 15명의 수학 성적을 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면 중앙값이 79점이므로 8번째 변량은 79점이다.
이때 $83 \times 15 - 82 \times 15 = 15$ (점)이므로 민석이의 성적은 지형이의 성적보다 15점이 더 높다.
즉, 지형이의 성적은 $80 - 15 = 65$ (점)이므로 민석이가 전학을 오기 전의 9번째 변량을 a 점이라 하면
(i) $79 \leq a < 80$ 일 때, (중앙값) $= a$ (점)
(ii) $a \geq 80$ 일 때, (중앙값) $= 80$ (점)
따라서 (i), (ii)에 의해 A의 값의 범위는 $79 \leq A \leq 80$

- 14 잘못 측정된 학생 5명의 얇은키를 각각 x_1 cm, x_2 cm, x_3 cm, 95 cm, 83 cm로 놓으면
평균이 90 cm이므로
 $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + 95 + 83}{5} = 90$
 $\therefore x_1 + x_2 + x_3 = 272 \quad \dots \textcircled{㉠}$
분산이 20이므로
 $\frac{(x_1 - 90)^2 + (x_2 - 90)^2 + (x_3 - 90)^2 + 5^2 + (-7)^2}{5} = 20$
 $\therefore (x_1 - 90)^2 + (x_2 - 90)^2 + (x_3 - 90)^2 = 26 \quad \dots \textcircled{㉡}$
따라서 x_1 cm, x_2 cm, x_3 cm, 90 cm, 88 cm에 대하여
(실제 평균) $= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + 90 + 88}{5}$
 $= \frac{272 + 178}{5} = \frac{450}{5} = 90(\text{cm}) (\because \textcircled{㉠})$
 $\therefore$ (실제 분산)
 $= \frac{(x_1 - 90)^2 + (x_2 - 90)^2 + (x_3 - 90)^2 + 0^2 + (-2)^2}{5}$
 $= \frac{26 + 0 + 4}{5} = \frac{30}{5} = 6 (\because \textcircled{㉡})$

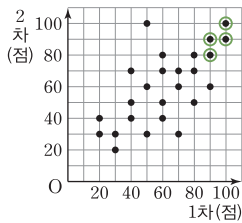
- 15 100개의 변량을 $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ 이라 하면
 $x_1 + x_2 + \dots + x_{100} = 200 \quad \dots \textcircled{㉠}$
 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2 = 1200 \quad \dots \textcircled{㉡}$
(평균) $= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{100}}{100} = \frac{200}{100} = 2 (\because \textcircled{㉠})$

$$\begin{aligned}
 & (\text{분산}) \\
 &= \frac{(x_1-2)^2 + (x_2-2)^2 + \cdots + (x_{100}-2)^2}{100} \\
 &= \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{100}^2) - 4(x_1 + x_2 + \cdots + x_{100}) + 4 \times 100}{100} \\
 &= \frac{1200 - 4 \times 200 + 400}{100} = \frac{800}{100} = 8 (\because \textcircled{7}, \textcircled{9}) \\
 &\therefore (\text{표준편차}) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

- 16 1차 점수와 2차 점수의 합이 상위 16% 이내에 드는 학생 수는

$$25 \times \frac{16}{100} = 4(\text{명})$$

1차 점수와 2차 점수의 합이 높은 순으로 4명의 점수의 합을 나열하면 $100+100=200(\text{점})$,
 $100+90=190(\text{점})$,
 $90+90=180(\text{점})$,
 $90+80=170(\text{점})$ 이므로 상장을 받는 학생의 두 점수의 최소의 합은 170점이다.



- 17 1학기와 2학기의 봉사활동 시간이 평균 4시간을 초과하는 학생은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분(경계선 제외)에 속하고, 이 중에서 점 A에 해당하는 학생을 제외한 10명의 2학기의 봉사활동 시간의 평균은

$$\frac{4+5+6+6+7+7+8+8+8+9}{10} = \frac{68}{10} (\text{시간})$$

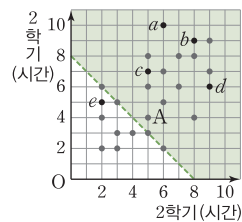
이때 점 A가 될 수 있는 점은 a, b, c, d 중 하나이다.

2학기의 봉사활동 시간의 평균이 7시간이 되기 위해 추가해야 할 시간을 x 시간이라 하면

$$\frac{4+5+6+6+7+7+8+8+8+9+x}{11} = \frac{68+x}{11} = 7$$

$$68+x=77 \quad \therefore x=9$$

따라서 점 A는 b 로 이동시켜야 한다.



- 18 a, b, c 를 제외한 자료에서 17점이 두 번으로 가장 많이 나타나고, 12점은 한 번 나타나므로 최빈값이 12점이 되려면 a, b, c 중 적어도 2개는 12이어야 한다. ... ㉠

즉, a, b, c 의 값을 12, 12, x ($x > 12$)라 하고, 중앙값이 14점이므로 주어진 변량을 작은 값에서부터 크기순으로 나열하면 10, 12, 12, 12, x , 17, 17, 19

$$\text{따라서 (중앙값)} = \frac{12+x}{2} = 14(\text{점}) \text{이므로}$$

$$12+x=28 \quad \therefore x=16 \quad \dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore a+b+c=12+12+16=40 \quad \dots \textcircled{iii}$$

채점 요소	비율
㉠ a, b, c 중 두 변량의 값 구하기	40 %
㉡ a, b, c 중 나머지 한 변량의 값 구하기	40 %
㉢ $a+b+c$ 의 값 구하기	20 %

- 19 (A 지역의 평균)

$$= \frac{12 \times 4 + 14 \times 7 + 16 \times 5 + 18 \times 3 + 20 \times 1}{20}$$

$$= \frac{300}{20} = 15(\%)$$

$\therefore$ (A 지역의 분산)

$$= \frac{(-3)^2 \times 4 + (-1)^2 \times 7 + 1^2 \times 5 + 3^2 \times 3 + 5^2 \times 1}{20}$$

$$= \frac{100}{20} = 5$$

... ㉠

(B 지역의 평균)

$$= \frac{12 \times 2 + 14 \times 6 + 16 \times 5 + 18 \times 4 + 20 \times 3}{20}$$

$$= \frac{320}{20} = 16(\%)$$

$\therefore$ (B 지역의 분산)

$$= \frac{(-4)^2 \times 2 + (-2)^2 \times 6 + 0^2 \times 5 + 2^2 \times 4 + 4^2 \times 3}{20}$$

$$= \frac{120}{20} = 6$$

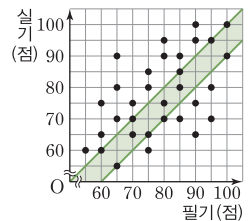
... ㉡

따라서 A 지역의 분산이 B 지역의 분산보다 작으므로 A 지역의 자료의 분포가 더 고르다. ... ㉢

채점 요소	비율
㉠ A 지역의 분산 구하기	40 %
㉡ B 지역의 분산 구하기	40 %
㉢ 자료의 분포가 더 고른 지역 말하기	20 %

- 20 $0 \leq a-b \leq 10$ 을 만족시키는 학생은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분(경계선 포함)에 속하므로 12명이다. ... ㉠

$$\therefore \frac{12}{32} \times 100 = 37.5(\%) \quad \dots \textcircled{ii}$$



채점 요소	비율
㉠ 조건을 만족시키는 학생 수 구하기	60 %
㉡ 조건을 만족시키는 학생은 전체의 몇 %인지 구하기	40 %

- 21 (가) 중간고사와 기말고사 중 적어도 하나의 점수가 60점 미만인 학생은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분(경계선 제외)에 속하므로 13명이다.

$$\therefore A=13 \quad \dots \textcircled{ii}$$

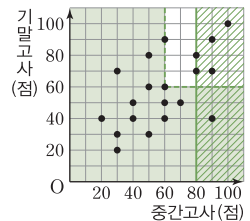
(나) 중간고사 점수가 80점 이상인 학생은 빗금 친 부분(경계선 포함)에 속하므로 6명이고, 이 학생들의 기말고사 점수는 40점, 70점, 70점, 80점, 90점, 100점이므로

$$(\text{기말고사 점수의 평균}) = \frac{40+70+70+80+90+100}{6}$$

$$= \frac{450}{6} = 75(\text{점})$$

$$\therefore B=75 \quad \dots \textcircled{iii}$$

$$\therefore A+B=13+75=88 \quad \dots \textcircled{iv}$$



채점 요소	비율
i A의 값 구하기	40 %
ii B의 값 구하기	40 %
iii A + B의 값 구하기	20 %