



정답과 해설

대수

I. 지수함수와 로그함수

I-1. 지수

01 지수

개념 확인

11쪽

001 ㉠ (1) 2, $-1 \pm \sqrt{3}i$

(2) $\pm\sqrt{6}$, $\pm\sqrt{6}i$

(1) 8의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=8$
 $x^3-8=0$, $(x-2)(x^2+2x+4)=0$
 $\therefore x=2$ 또는 $x=-1 \pm \sqrt{3}i$

(2) 36의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=36$
 $x^4-36=0$, $(x^2-6)(x^2+6)=0$
 $\therefore x=\pm\sqrt{6}$ 또는 $x=\pm\sqrt{6}i$

002 ㉠ (1) 5 (2) -3 (3) $\frac{1}{2}$ (4) -0.1

003 ㉠ (1) 4 (2) $\frac{1}{3}$ (3) 11 (4) 3

(1) $5\sqrt{8} \times 5\sqrt{128} = 5\sqrt{8 \times 128} = 5\sqrt{1024} = 5 \times 32 = 160$
(2) $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{243}} = \sqrt[3]{\frac{9}{243}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \frac{1}{3}$
(3) $(\sqrt[4]{121})^2 = \sqrt[4]{121^2} = \sqrt[4]{(11^2)^2} = \sqrt[4]{11^4} = 11$
(4) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$

004 ㉠ (1) $\sqrt[6]{23} < \sqrt[3]{5}$ (2) $\sqrt[4]{7} < \sqrt[6]{20}$

(1) $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[6]{23}$ 에서 3, 6의 최소공배수가 6이므로
 $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$
이때 $23 < 25$ 이므로
 $\sqrt[6]{23} < \sqrt[6]{25}$
 $\therefore \sqrt[6]{23} < \sqrt[3]{5}$
(2) $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[6]{20}$ 에서 4, 6의 최소공배수가 12이므로
 $\sqrt[4]{7} = \sqrt[12]{7^3} = \sqrt[12]{343}$, $\sqrt[6]{20} = \sqrt[12]{20^2} = \sqrt[12]{400}$
이때 $343 < 400$ 이므로
 $\sqrt[12]{343} < \sqrt[12]{400}$
 $\therefore \sqrt[4]{7} < \sqrt[6]{20}$

유제

13~17쪽

005 ㉠ ④

① 0의 제곱근은 0이다.
② 제곱근 49는 $\sqrt{49}=7$ 이다.
③ -125 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=-125$
 $x^3+125=0$
 $(x+5)(x^2-5x+25)=0$
 $\therefore x=-5$ 또는 $x=\frac{5 \pm 5\sqrt{3}i}{2}$
따라서 -125 의 세제곱근은 -5 , $\frac{5 \pm 5\sqrt{3}i}{2}$ 이다.
④ 81의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=81$
 $x^4-81=0$
 $(x+3)(x-3)(x^2+9)=0$
 $\therefore x=\pm 3$ 또는 $x=\pm 3i$
따라서 81의 네제곱근 중 실수인 것은 ± 3 의 2개이다.
⑤ -9 의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-9}$ 이다.
따라서 옳은 것은 ④이다.

006 ㉠ $6\sqrt{3}$

$\sqrt{81}=9$ 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=9$
 $x^4-9=0$
 $(x^2-3)(x^2+3)=0$
 $\therefore x=\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}i$
이때 음의 실수인 것은 $-\sqrt{3}$ 이므로
 $a=-\sqrt{3}$
 -216 의 세제곱근을 y 라 하면 $y^3=-216$
 $y^3+216=0$
 $(y+6)(y^2-6y+36)=0$
 $\therefore y=-6$ 또는 $y=3 \pm 3\sqrt{3}i$
이때 실수인 것은 -6 이므로
 $b=-6$
 $\therefore ab=-\sqrt{3} \times (-6)=6\sqrt{3}$

007 ㉠ ②

① $\sqrt[3]{-5}$ 는 실수이므로 $(-5, 3) \in S$
② $\sqrt{-3}$ 은 실수가 아니므로 $(-3, 2) \notin S$
③ $\sqrt[3]{-3}$ 은 실수이므로 $(-3, 3) \in S$
④ $\sqrt{3}$ 은 실수이므로 $(3, 2) \in S$
⑤ $\sqrt[3]{5}$ 는 실수이므로 $(5, 3) \in S$
따라서 집합 S 의 원소가 아닌 것은 ②이다.

008 ㉔ 3

$n=2$ 일 때, $5n-16=-6<0$ 이고 n 은 짝수이므로

$$f(2)=0$$

$n=3$ 일 때, $5n-16=-1<0$ 이고 n 은 홀수이므로

$$f(3)=1$$

$n=4$ 일 때, $5n-16=4>0$ 이고 n 은 짝수이므로

$$f(4)=2$$

$$\therefore f(2)+f(3)+f(4)=0+1+2=3$$

009 ㉔ (1) -1 (2) 3 (3) 1

$$\begin{aligned}(1) \sqrt[8]{32} \times \sqrt[8]{8} - \sqrt[3]{729} &= \sqrt[8]{32 \times 8} - \sqrt[3]{729} \\ &= \sqrt[8]{2^8} - \sqrt[3]{3^6} \\ &= 2 - 3 = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \sqrt[6]{54} \times \sqrt[6]{27} \div \sqrt[3]{4} &= \sqrt[6]{54 \times 27} \div \sqrt[12]{2^2} \\ &= \sqrt[6]{(2 \times 3^3) \times 3^3} \div \sqrt[12]{2^2} \\ &= \sqrt[6]{2 \times 3^6} \div \sqrt[6]{2} \\ &= \sqrt[6]{\frac{2 \times 3^6}{2}} \\ &= \sqrt[6]{3^6} = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \sqrt[4]{\frac{3\sqrt{49}}{\sqrt{49}}} \times \sqrt[3]{\frac{4\sqrt{49}}{\sqrt{49}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{49}}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{49}}{\sqrt[4]{49}} \times \frac{\sqrt[3]{4\sqrt{49}}}{\sqrt[3]{\sqrt{49}}} \times \frac{\sqrt[4]{\sqrt{49}}}{\sqrt[4]{\sqrt{49}}} \\ &= \frac{\sqrt[6]{49}}{\sqrt[8]{49}} \times \frac{\sqrt[12]{49}}{\sqrt[6]{49}} \times \frac{\sqrt[8]{49}}{\sqrt[12]{49}} = 1\end{aligned}$$

010 ㉔ (1) x^5 (2) 1 (3) $\sqrt[32]{x^{15}}$

$$\begin{aligned}(1) \sqrt{x^9} \times \sqrt[9]{x^7} \div \sqrt[18]{x^5} &= \sqrt[18]{x^{81}} \times \sqrt[18]{x^{14}} \div \sqrt[18]{x^5} \\ &= \sqrt[18]{\frac{x^{81} \times x^{14}}{x^5}} \\ &= \sqrt[18]{x^{90}} = x^5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \sqrt[4]{\frac{3\sqrt{x}}{5\sqrt{x}}} \times \sqrt[5]{\frac{4\sqrt{x}}{6\sqrt{x}}} \div \sqrt[6]{\frac{\sqrt{x}}{5\sqrt{x}}} \\ &= \frac{\sqrt[4]{3\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{5\sqrt{x}}} \times \frac{\sqrt[5]{4\sqrt{x}}}{\sqrt[5]{6\sqrt{x}}} \div \frac{\sqrt[6]{\sqrt{x}}}{\sqrt[6]{5\sqrt{x}}} \\ &= \frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[20]{x}} \times \frac{\sqrt[20]{x}}{\sqrt[30]{x}} \div \frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[30]{x}} \\ &= \frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[20]{x}} \times \frac{\sqrt[20]{x}}{\sqrt[30]{x}} \times \frac{\sqrt[30]{x}}{\sqrt[12]{x}} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \sqrt[4]{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} &= \sqrt[4]{x} \times \sqrt[4]{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} \\ &= \sqrt[4]{x} \times \sqrt[8]{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \\ &= \sqrt[4]{x} \times \sqrt[8]{x} \times \sqrt[8]{\sqrt{x\sqrt{x}}} \\ &= \sqrt[4]{x} \times \sqrt[8]{x} \times \sqrt[16]{x\sqrt{x}} \\ &= \sqrt[4]{x} \times \sqrt[8]{x} \times \sqrt[16]{x} \times \sqrt[16]{\sqrt{x}} \\ &= \sqrt[4]{x} \times \sqrt[8]{x} \times \sqrt[16]{x} \times \sqrt[32]{x} \\ &= \sqrt[32]{x^8 \times x^4 \times x^2 \times x} = \sqrt[32]{x^{15}}\end{aligned}$$

011 ㉔ $\sqrt[3]{3}$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{3}}{1 + \sqrt[4]{3\sqrt{81}}} &= \frac{\sqrt[6]{81} + \sqrt[3]{3}}{1 + \sqrt[12]{81}} = \frac{\sqrt[6]{3^4} + \sqrt[3]{3}}{1 + \sqrt[12]{3^4}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3}}{1 + \sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{3} + 1)}{1 + \sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{3}\end{aligned}$$

012 ㉔ ③

$$\begin{aligned}(a^2)^3 \times (\sqrt[5]{b})^{10} \times \left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^{12} &= a^6 \times \sqrt[5]{b^{10}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{a^{12}}} \\ &= a^6 \times b^2 \times \frac{1}{a^4} \\ &= a^2 b^2 = (ab)^2\end{aligned}$$

따라서 $(ab)^2=16$ 이므로 $ab=4$ ($\because ab>0$)

013 ㉔ ⑤

$\sqrt[9]{5}$, $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[4]{2}$ 에서 9, 6, 4의 최소공배수가 36이므로

$$\sqrt[9]{5} = \sqrt[36]{5^4} = \sqrt[36]{625}, \sqrt[6]{3} = \sqrt[36]{3^6} = \sqrt[36]{729},$$

$$\sqrt[4]{2} = \sqrt[36]{2^9} = \sqrt[36]{512}$$

이때 $512 < 625 < 729$ 이므로

$$\sqrt[36]{512} < \sqrt[36]{625} < \sqrt[36]{729} \quad \therefore \sqrt[4]{2} < \sqrt[9]{5} < \sqrt[6]{3}$$

014 ㉔ $B < A < C$

$$A = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, B = \sqrt[4]{\frac{1}{5}}, C = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{1}{7}}} = \sqrt[6]{\frac{1}{7}} \text{에서}$$

3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$$A = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[12]{\left(\frac{1}{3}\right)^4} = \sqrt[12]{\frac{1}{81}},$$

$$B = \sqrt[4]{\frac{1}{5}} = \sqrt[12]{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = \sqrt[12]{\frac{1}{125}},$$

$$C = \sqrt[6]{\frac{1}{7}} = \sqrt[12]{\left(\frac{1}{7}\right)^2} = \sqrt[12]{\frac{1}{49}}$$

이때 $\frac{1}{125} < \frac{1}{81} < \frac{1}{49}$ 이므로

$$\sqrt[12]{\frac{1}{125}} < \sqrt[12]{\frac{1}{81}} < \sqrt[12]{\frac{1}{49}} \quad \therefore B < A < C$$

015 ㉠ $B < C < A$

$$A = \sqrt[9]{2} \times \sqrt[6]{3} = \sqrt[18]{2^2} \times \sqrt[18]{3^3} = \sqrt[18]{4 \times 27} = \sqrt[18]{108},$$

$$B = \sqrt[3]{2}, C = \sqrt[9]{6\sqrt{2}} = \sqrt[9]{\sqrt[6]{2^2} \times 2} = \sqrt[18]{72} \text{에서}$$

18, 3, 18의 최소공배수가 18이므로

$$B = \sqrt[3]{2} = \sqrt[18]{2^6} = \sqrt[18]{64}$$

이때 $64 < 72 < 108$ 이므로

$$\sqrt[18]{64} < \sqrt[18]{72} < \sqrt[18]{108}$$

$$\therefore B < C < A$$

016 ㉠ 108

$$\sqrt[6]{49} = \sqrt[12]{49}, \sqrt[3]{2\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2^4 \times 3} = \sqrt[12]{48},$$

$$\sqrt[4]{3\sqrt{2}} = \sqrt[4]{3\sqrt[3]{2}} = \sqrt[12]{54}$$

이때 $48 < 49 < 54$ 이므로

$$\sqrt[12]{48} < \sqrt[12]{49} < \sqrt[12]{54}$$

$$\therefore \sqrt[3]{2\sqrt{3}} < \sqrt[6]{49} < \sqrt[4]{3\sqrt{2}}$$

따라서 $a = \sqrt[4]{3\sqrt{2}} = \sqrt[12]{54}$ 이므로

$$2a^{12} = 2 \times (\sqrt[12]{54})^{12} = 2 \times 54 = 108$$

개념 확인

21쪽

017 ㉠ (1) 1 (2) $\frac{1}{25}$ (3) $\frac{81}{16}$ (4) $\frac{63}{64}$

018 ㉠ (1) 9 (2) $\frac{1}{4}$ (3) a^6 (4) $\frac{a^2}{4}$

019 ㉠ (1) $\sqrt{2}$ (2) $\frac{5}{7}$ (3) 3 (4) 32

$$(1) 2^{\frac{1}{3}} \times (2^3)^{\frac{1}{18}} = 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$(3) 3^{\frac{3}{4}} \div (3^2)^{-\frac{1}{8}} = 3^{\frac{3}{4}} \div 3^{-\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4} - (-\frac{1}{4})} = 3^1 = 3$$

$$(4) 32^{\frac{1}{5}} \times 4^2 = (2^5)^{\frac{1}{5}} \times (2^2)^2 = 2 \times 2^4 = 2^{1+4} = 2^5 = 32$$

020 ㉠ (1) $7^{4/3}$ (2) a^2

유제

23~33쪽

021 ㉠ (1) $\frac{1}{5}$ (2) 64 (3) $\frac{27}{2}$ (4) 1 (5) 3 (6) $\frac{8}{5}$

$$(1) 25^4 \times (5^3)^{-3} = (5^2)^4 \times 5^{-9} = 5^8 \times 5^{-9} = 5^{8-9} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$(2) 343^{-2} \div (14^{-2})^3 = (7^3)^{-2} \div \{(2 \times 7)^{-2}\}^3 = 7^{-6} \div (2 \times 7)^{-6} = \left(\frac{7}{2 \times 7}\right)^{-6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = (2^{-1})^{-6} = 2^6 = 64$$

$$(3) 6^{\frac{1}{3}} \div 12^{\frac{2}{3}} \times 9^{\frac{5}{3}} = (2 \times 3)^{\frac{1}{3}} \div (2^2 \times 3)^{\frac{2}{3}} \times (3^2)^{\frac{5}{3}} = (2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}) \div (2^{\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}) \times 3^{\frac{10}{3}} = 2^{\frac{1}{3} - \frac{4}{3}} \times 3^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{10}{3}} = 2^{-1} \times 3^3 = \frac{27}{2}$$

$$(4) \left\{\left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{1}{4}}\right\}^{12} \times \left(\frac{625}{16}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} \times \left\{\left(\frac{5}{2}\right)^4\right\}^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} \times \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^{-3+3} = \left(\frac{5}{2}\right)^0 = 1$$

$$(5) (3^{\sqrt{15}})^{\frac{1}{\sqrt{5}}} \times 3^{1-\sqrt{3}} = 3^{\sqrt{3}} \times 3^{1-\sqrt{3}} = 3^{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}} = 3^1 = 3$$

$$(6) (2^{3\sqrt{2}-4} \div 5^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times 4^{\sqrt{2}} = \left(\frac{2^{3\sqrt{2}-4}}{5^{\sqrt{2}}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times (2^2)^{\sqrt{2}} = \frac{2^{3-2\sqrt{2}}}{5} \times 2^{2\sqrt{2}} = \frac{2^{3-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}}{5} = \frac{2^3}{5} = \frac{8}{5}$$

022 ㉠ ②

$$\sqrt{\frac{25^{-5} + 5^{-25}}{25^{-4} + 5^{-23}}} = \sqrt{\frac{(5^2)^{-5} + 5^{-25}}{(5^2)^{-4} + 5^{-23}}} = \sqrt{\frac{5^{-10} + 5^{-25}}{5^{-8} + 5^{-23}}} = \sqrt{\frac{5^{-25}(5^{15} + 1)}{5^{-23}(5^{15} + 1)}} = \sqrt{5^{-2}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

023 ㉠ ②

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{x}{8}} = (3^{-4})^{\frac{x}{8}} = 3^{-\frac{x}{2}} = (3^x)^{-\frac{1}{2}} = 49^{-\frac{1}{2}} = (7^2)^{-\frac{1}{2}} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$$

024 ㉠ (1) $\frac{19}{24}$ (2) $\frac{5}{54}$

$$\begin{aligned} (1) \sqrt[4]{5 \times \sqrt{125} \times \sqrt[6]{625}} &= (5 \times 125^{\frac{1}{2}} \times 625^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{4}} \\ &= (5 \times 5^{\frac{3}{2}} \times 5^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}} \\ &= (5^{1+\frac{3}{2}+\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}} \\ &= (5^{\frac{19}{6}})^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{19}{24}} \end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{19}{24}$$

$$\begin{aligned} (2) \sqrt[3]{7 \sqrt[3]{7 \sqrt[3]{7}}} &= \{7 \times (7 \times 7^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{3}} = \{7 \times (7^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{3}} \\ &= (7 \times 7^{\frac{4}{9}})^{\frac{1}{3}} = (7^{\frac{13}{9}})^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{13}{27}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{49 \sqrt[6]{49}} &= (49 \times 49^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{6}} = (7^2 \times 7^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{6}} \\ &= (7^{\frac{7}{3}})^{\frac{1}{6}} = 7^{\frac{7}{18}} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\sqrt[3]{7 \sqrt[3]{7 \sqrt[3]{7}}}}{\sqrt[6]{49 \sqrt[6]{49}}} = \frac{7^{\frac{13}{27}}}{7^{\frac{7}{18}}} = 7^{\frac{13}{27} - \frac{7}{18}} = 7^{\frac{5}{54}}$$

$$\therefore k = \frac{5}{54}$$

| 다른 풀이 |

$$\begin{aligned} (1) \sqrt[4]{5 \times \sqrt{125} \times \sqrt[6]{625}} &= \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{\sqrt{125}} \times \sqrt[4]{\sqrt[6]{625}} \\ &= \sqrt[4]{5} \times \sqrt[8]{125} \times \sqrt[24]{625} \\ &= 5^{\frac{1}{4}} \times (5^3)^{\frac{1}{8}} \times (5^4)^{\frac{1}{24}} \\ &= 5^{\frac{1}{4}} \times 5^{\frac{3}{8}} \times 5^{\frac{1}{6}} \\ &= 5^{\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{6}} \\ &= 5^{\frac{19}{24}} \end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{19}{24}$$

$$\begin{aligned} (2) \sqrt[3]{7 \sqrt[3]{7 \sqrt[3]{7}}} &= \sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{7}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{7}}} \\ &= \sqrt[3]{7} \times \sqrt[9]{7} \times \sqrt[27]{7} \\ &= 7^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{1}{9}} \times 7^{\frac{1}{27}} \\ &= 7^{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}} = 7^{\frac{13}{27}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{49 \sqrt[6]{49}} &= \sqrt[6]{49} \times \sqrt[6]{\sqrt[6]{49}} = \sqrt[6]{49} \times \sqrt[36]{49} \\ &= (7^2)^{\frac{1}{6}} \times (7^2)^{\frac{1}{36}} = 7^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{1}{18}} \\ &= 7^{\frac{1}{3} + \frac{1}{18}} = 7^{\frac{7}{18}} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\sqrt[3]{7 \sqrt[3]{7 \sqrt[3]{7}}}}{\sqrt[6]{49 \sqrt[6]{49}}} = \frac{7^{\frac{13}{27}}}{7^{\frac{7}{18}}} = 7^{\frac{13}{27} - \frac{7}{18}} = 7^{\frac{5}{54}}$$

$$\therefore k = \frac{5}{54}$$

025 ㉠ $-\frac{17}{24}$

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt[3]{a^2}}} \div \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a^5}}} \div \sqrt{\frac{a^3}{\sqrt{a}}} \\ &= \left(\frac{a^{\frac{5}{4}}}{a^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} \div \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{5}{4}}}\right)^{\frac{1}{3}} \div \left(\frac{a^3}{a^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{a^{\frac{5}{8}}}{a^{\frac{1}{3}}} \div \frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{5}{12}}} \div \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{a^{\frac{5}{8}}}{a^{\frac{1}{3}}} \times \frac{a^{\frac{5}{12}}}{a^{\frac{1}{6}}} \times \frac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{a^{\frac{5}{8} + \frac{5}{12} + \frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{2}}} = \frac{a^{\frac{31}{24}}}{a^2} \\ &= a^{\frac{31}{24} - 2} = a^{-\frac{17}{24}} \end{aligned}$$

$$\therefore k = -\frac{17}{24}$$

| 다른 풀이 |

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt[3]{a^2}}} \div \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a^5}}} \div \sqrt{\frac{a^3}{\sqrt{a}}} \\ &= \frac{\sqrt{\sqrt[4]{a^5}}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}} \div \frac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^5}}} \div \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt{a}}} \\ &= \frac{\sqrt[8]{a^5}}{\sqrt[6]{a^2}} \div \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{a^5}} \div \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{a}} \\ &= \frac{\sqrt[8]{a^5}}{\sqrt[6]{a^2}} \times \frac{\sqrt[12]{a^5}}{\sqrt[6]{a}} \times \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a^3}} \\ &= \frac{a^{\frac{5}{8}} \times a^{\frac{5}{12}} \times a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{a^{\frac{5}{8} + \frac{5}{12} + \frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{2}}} = \frac{a^{\frac{31}{24}}}{a^2} \\ &= a^{\frac{31}{24} - 2} = a^{-\frac{17}{24}} \end{aligned}$$

$$\therefore k = -\frac{17}{24}$$

026 ㉠ 4

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^2 \times \sqrt{a^5}} &= (a^2 \times a^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{9}{2}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{a \times \sqrt{a^k}} &= (a \times a^{\frac{k}{2}})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{2+k}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2+k}{4}} \end{aligned}$$

따라서 $a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{2+k}{4}}$ 이므로 $\frac{3}{2} = \frac{2+k}{4}$

$$\therefore k = 4$$

| 다른 풀이 |

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^2 \times \sqrt{a^5}} &= \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{\sqrt{a^5}} = \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[6]{a^5} \\ &= a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}} = a^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{a \times \sqrt{a^k}} &= \sqrt{a} \times \sqrt{\sqrt{a^k}} = \sqrt{a} \times \sqrt[4]{a^k} \\ &= a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{k}{4}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{k}{4}} = a^{\frac{2+k}{4}}\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{2+k}{4}} \text{ 이므로 } \frac{3}{2} = \frac{2+k}{4}$$

$$\therefore k=4$$

027 ㉔ ②

$$\begin{aligned}&\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}} \\ &= [a \times [a \times \{a \times (a \times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} \\ &= [a \times [a \times \{a \times (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} \\ &= [a \times \{a \times (a \times a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} \\ &= [a \times \{a \times (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} \\ &= \{a \times (a \times a^{\frac{7}{8}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \{a \times (a^{\frac{15}{8}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} \\ &= (a \times a^{\frac{15}{16}})^{\frac{1}{2}} \\ &= (a^{\frac{31}{16}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{31}{32}}\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } p=32, q=31 \text{ 이므로 } p+q=63$$

| 다른 풀이 |

$$\begin{aligned}&\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}} \\ &= \sqrt{a} \times \sqrt{\sqrt{a}} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}} \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}} \\ &= \sqrt{a} \times \sqrt[4]{a} \times \sqrt[8]{a} \times \sqrt[16]{a} \times \sqrt[32]{a} \\ &= a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{8}} \times a^{\frac{1}{16}} \times a^{\frac{1}{32}} \\ &= a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}} = a^{\frac{31}{32}}\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } p=32, q=31 \text{ 이므로 } p+q=63$$

028 ㉔ (1) 3 (2) 8

$$\begin{aligned}(1) &\underbrace{(2^{\frac{1}{8}}-1)(2^{\frac{1}{8}}+1)}_{(A+B)(A-B)=A^2-B^2} (2^{\frac{1}{4}}+1)(2^{\frac{1}{2}}+1)(2+1) \\ &= \{(2^{\frac{1}{8}})^2-1\} (2^{\frac{1}{4}}+1)(2^{\frac{1}{2}}+1)(2+1) \\ &= (2^{\frac{1}{4}}-1)(2^{\frac{1}{4}}+1)(2^{\frac{1}{2}}+1)(2+1) \\ &= \{(2^{\frac{1}{4}})^2-1\} (2^{\frac{1}{2}}+1)(2+1) \\ &= (2^{\frac{1}{2}}-1)(2^{\frac{1}{2}}+1)(2+1) = \{(2^{\frac{1}{2}})^2-1\} (2+1) \\ &= (2-1)(2+1) = 2^2-1=3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) &(3^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}})(9^{\frac{1}{3}}-15^{\frac{1}{3}}+25^{\frac{1}{3}}) \quad \blacktriangleleft (A+B)(A^2-AB+B^2) \\ &= (3^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}})\{ (3^{\frac{1}{3}})^2-3^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} + (5^{\frac{1}{3}})^2 \} \\ &= (3^{\frac{1}{3}})^3 + (5^{\frac{1}{3}})^3 = 3+5=8\end{aligned}$$

029 ㉔ ⑤

$$\begin{aligned}3^{x+y} &= A, 3^{x-y} = B \text{로 놓으면} \\ (3^{x+y}+3^{x-y})^2 - (3^{x+y}-3^{x-y})^2 \\ &= (A+B)^2 - (A-B)^2 \\ &= (A^2+2AB+B^2) - (A^2-2AB+B^2) \\ &= 4AB = 4 \times 3^{x+y} \times 3^{x-y} = 4 \times 3^{x+y+x-y} = 4 \times 3^{2x}\end{aligned}$$

030 ㉔ ⑤

$$\begin{aligned}6^{\frac{2}{3}} &= A, 6^{-\frac{1}{3}} = B \text{로 놓으면} \\ (6^{\frac{2}{3}}+6^{-\frac{1}{3}})^3 - (6^{\frac{2}{3}}-6^{-\frac{1}{3}})^3 \\ &= (A+B)^3 - (A-B)^3 \\ &= (A^3+3A^2B+3AB^2+B^3) \\ &\quad - (A^3-3A^2B+3AB^2-B^3) \\ &= 6A^2B+2B^3 = 6 \times (6^{\frac{2}{3}})^2 \times 6^{-\frac{1}{3}} + 2 \times (6^{-\frac{1}{3}})^3 \\ &= 6^{1+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} + 2 \times 6^{-1} = 6^2 + \frac{1}{3} = \frac{109}{3}\end{aligned}$$

031 ㉔ 14

$$\begin{aligned}x &= \sqrt[3]{5} - \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \text{에서 } x = 5^{\frac{1}{3}} - 5^{-\frac{1}{3}} \\ \text{양변을 세제곱하면} \\ x^3 &= (5^{\frac{1}{3}})^3 - 3 \times (5^{\frac{1}{3}})^2 \times 5^{-\frac{1}{3}} \\ &\quad + 3 \times 5^{\frac{1}{3}} \times (5^{-\frac{1}{3}})^2 - (5^{-\frac{1}{3}})^3 \\ &= 5 - 3 \times 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{-\frac{1}{3}} (5^{\frac{1}{3}} - 5^{-\frac{1}{3}}) - 5^{-1} \\ &= 5 - 3(5^{\frac{1}{3}} - 5^{-\frac{1}{3}}) - \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$\text{이때 } 5^{\frac{1}{3}} - 5^{-\frac{1}{3}} = x \text{ 이므로 } x^3 = 5 - 3x - \frac{1}{5}$$

$$x^3 = \frac{24}{5} - 3x, x^3 + 3x = \frac{24}{5}$$

$$\text{따라서 } 5x^3 + 15x = 24 \text{ 이므로}$$

$$5x^3 + 15x - 10 = 24 - 10 = 14$$

032 ㉔ (1) 27 (2) 727 (3) 140

$$(1) x+x^{-1} = (x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2 + 2 \quad \blacktriangleleft a^2+b^2=(a-b)^2+2ab \\ = 5^2 + 2 = 27$$

$$(2) x^2+x^{-2} = (x+x^{-1})^2 - 2 \quad \blacktriangleleft a^2+b^2=(a+b)^2-2ab \\ = 27^2 - 2 = 727$$

$$\begin{aligned}(3) &\underbrace{x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}}_{a^3-b^3} = (x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^3 + 3(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}) \\ &= 5^3 + 3 \times 5 = 140 \quad \blacktriangleleft a^3-b^3 \\ &\quad = (a-b)^3 + 3ab(a-b)\end{aligned}$$

033 ㉔ ④

구하는 식의 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱하면

$$\begin{aligned}\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x-a^{-x}} &= \frac{a^x(a^{3x}+a^{-3x})}{a^x(a^x-a^{-x})} = \frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}-1} \\ &= \frac{(a^{2x})^2+(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}-1} = \frac{2^2+2^{-1}}{2-1} \\ &= 4+\frac{1}{2} = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

034 ㉔ 52

$$\begin{aligned}27^x+27^{-x} &= (3^x)^3+(3^{-x})^3 \\ &= (3^x+3^{-x})^3-3(3^x+3^{-x}) \\ &= 4^3-3 \times 4 = 52\end{aligned}$$

035 ㉔ 77

$$\begin{aligned}\frac{6^{3x}-6^{-3x}}{6^x+6^{-x}} \text{의 분모, 분자에 각각 } 6^x \text{을 곱하면} \\ \frac{6^{3x}-6^{-3x}}{6^x+6^{-x}} &= \frac{6^x(6^{3x}-6^{-3x})}{6^x(6^x+6^{-x})} = \frac{6^{4x}-6^{-2x}}{6^{2x}+1} \\ &= \frac{(36^x)^2-(36^x)^{-1}}{36^x+1} = \frac{5^2-5^{-1}}{5+1} \\ &= \frac{25-\frac{1}{5}}{6} = \frac{62}{15}\end{aligned}$$

따라서 $p=15$, $q=62$ 이므로 $p+q=77$

036 ㉔ (1) 2 (2) 0

$$(1) 75^x=25=5^2 \text{에서 } 75=5^{\frac{2}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$3^y=\frac{1}{5}=5^{-1} \text{에서 } 3=5^{-\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} \div \textcircled{B}$ 을 하면

$$25=5^{\frac{2}{x}} \div 5^{-\frac{1}{y}}$$

$$5^{\frac{2}{x}-(-\frac{1}{y})}=5^2 \quad \therefore \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=2$$

$$(2) 4^x=25^y=10^z=k(k>0) \text{로 놓으면}$$

$xyz \neq 0$ 이므로 $k \neq 1$

$$4^x=k \text{에서 } 4=k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$25^y=k \text{에서 } 25=k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$10^z=k \text{에서 } 10=k^{\frac{1}{z}}$$

$$\text{즉, } 100=k^{\frac{2}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{A} \times \textcircled{B} \div \textcircled{C}$ 을 하면

$$4 \times 25 \div 100 = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \div k^{\frac{2}{z}}$$

$$\therefore k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}}=1$$

그런데 $k \neq 1$ 이므로 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=0$

037 ㉔ ③

$$(\sqrt{5})^x=20 \text{에서 } \sqrt{5}=20^{\frac{1}{x}}, \text{ 즉 } 5=20^{\frac{2}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$49^y=20 \text{에서 } 49=20^{\frac{1}{y}}, \text{ 즉 } 7=20^{\frac{1}{2y}} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} \div \textcircled{B}$ 을 하면

$$\frac{5}{7}=20^{\frac{2}{x}} \div 20^{\frac{1}{2y}} \quad \therefore 20^{\frac{2}{x}-\frac{1}{2y}}=\frac{5}{7}$$

038 ㉔ 12

(나)에서 $2^x=6^y=12^z=k$ 이므로

$$2^x=k \text{에서 } 2=k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$6^y=k \text{에서 } 6=k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$12^z=k \text{에서 } 12=k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{A} \times \textcircled{B} \times \textcircled{C}$ 을 하면

$$2 \times 6 \times 12 = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \times k^{\frac{1}{z}} \quad \therefore k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=144$$

이때 (가)에서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ 이므로

$$k^2=144 \quad \therefore k=12 (\because k>0)$$

039 ㉔ $\frac{1}{3}$

$$18^x=\frac{1}{3} \text{에서 } 18=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}, \text{ 즉 } \frac{1}{18}=3^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$2^y=9=3^2 \text{에서 } 2=3^{\frac{2}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$a^z=3 \text{에서 } a=3^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{A} \times \textcircled{B} \div \textcircled{C}$ 을 하면

$$\frac{1}{18} \times 2 \div a = 3^{\frac{1}{x}} \times 3^{\frac{2}{y}} \div 3^{\frac{1}{z}}$$

$$\therefore 3^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}}=\frac{1}{9a}$$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=-1$ 이므로

$$3^{-1}=\frac{1}{9a}, \frac{1}{3}=\frac{1}{9a} \quad \therefore a=\frac{1}{3}$$

040 ㉔ 4배

$$\text{수심이 7 m인 곳에서의 빛의 세기는 } I_7=I_0 \times 2^{-\frac{7}{4}}$$

$$\text{수심이 15 m인 곳에서의 빛의 세기는 } I_{15}=I_0 \times 2^{-\frac{15}{4}}$$

$$\therefore \frac{I_7}{I_{15}} = \frac{I_0 \times 2^{-\frac{7}{4}}}{I_0 \times 2^{-\frac{15}{4}}} = \frac{2^{-\frac{7}{4}}}{2^{-\frac{15}{4}}} = 2^{-\frac{7}{4}-(-\frac{15}{4})} = 2^2 = 4$$

따라서 수심이 7 m인 곳에서의 빛의 세기는 수심이 15 m인 곳에서의 빛의 세기의 4배이다.

041 ㉮ 100

두 필름 A, B에 입사하는 빛의 세기를 q 라 하면

$$R_A = q \times 10^{-p}, R_B = q \times 10^{-(p+2)}$$

$$\therefore \frac{R_A}{R_B} = \frac{q \times 10^{-p}}{q \times 10^{-(p+2)}} = 10^2 = 100$$

042 ㉮ 640 hPa

해수면에서의 기압이 1000 hPa이므로

$$1000 = k \times a^0 \quad \therefore k = 1000$$

해수면으로부터의 높이가 1500 m인 산 중턱에서의 기압이 800 hPa이므로

$$800 = 1000 \times a^{1500} \quad \therefore a^{1500} = \frac{4}{5}$$

따라서 해수면으로부터의 높이가 3000 m인 산꼭대기에서의 기압은

$$1000 \times a^{3000} = 1000 \times (a^{1500})^2 = 1000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 640 \text{ (hPa)}$$

043 ㉮ 21

처음 도형의 넓이를 a 라 하고 1회 확대 복사할 때마다 r 배로 커진다고 하면 7번째로 확대 복사한 도형의 넓이는 처음 도형의 넓이의 2배이므로

$$ar^7 = 2a \quad \therefore r = 2^{\frac{1}{7}}$$

10번째로 확대 복사한 도형의 넓이는 ar^{10} 이므로

$$\frac{ar^{10}}{ar^7} = r^3 = (2^{\frac{1}{7}})^3 = 2^{\frac{3}{7}}$$

따라서 $p=7, q=3$ 이므로 $pq=21$

연습문제

34~36쪽

044 ㉮ ⑤

① $\sqrt{625}=25$ 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=25$

$$x^4 - 25 = 0, (x^2 - 5)(x^2 + 5) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{5} \text{ 또는 } x = \pm\sqrt{5}i$$

따라서 $\sqrt{625}$ 의 네제곱근은 $\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{5}i$ 이다.

② -64 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = -64$

$$x^3 + 64 = 0, (x+4)(x^2 - 4x + 16) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 2 \pm 2\sqrt{3}i$$

따라서 -64 의 세제곱근은 $-4, 2 \pm 2\sqrt{3}i$ 이다.

③ 121의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 121$

$$x^4 - 121 = 0, (x^2 - 11)(x^2 + 11) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{11} \text{ 또는 } x = \pm\sqrt{11}i$$

따라서 121의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt{11}$ 이다.

④ n 이 홀수일 때, 7의 n 제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{7}$ 의 1개이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

045 ㉮ $m=4, n=3$

구의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 108\pi, r^3 = 81 = 3^4$$

따라서 $r = \sqrt[3]{3^4}$ 이므로 $m=4, n=3$

046 ㉮ ①

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{125} \\ &= \sqrt[3]{3^3} + \sqrt[6]{2^4} \times \sqrt[3]{2 \times 3^3} - \sqrt[3]{5^3} \\ &= 3 + \sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{2 \times 3^3} - 5 \\ &= 3 + \sqrt[3]{6^3} - 5 \\ &= 3 + 6 - 5 = 4 \end{aligned}$$

047 ㉮ ①

$$\textcircled{1} \sqrt{3} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt[8]{81}$$

$$\textcircled{2} \sqrt[4]{8} = \sqrt[8]{8^2} = \sqrt[8]{64}$$

$$\textcircled{3} \sqrt[4]{3\sqrt{5}} = \sqrt[4]{3^2 \times 5} = \sqrt[8]{45}$$

$$\textcircled{4} \sqrt[4]{5\sqrt{3}} = \sqrt[4]{5^2 \times 3} = \sqrt[8]{75}$$

$$\textcircled{5} \sqrt[3]{4\sqrt{5}} = \sqrt[4]{3^4 \times 5} = \sqrt[8]{405}$$

따라서 두 번째로 큰 수는 ①이다.

048 ㉮ ④

$$\begin{aligned} & (2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{12}+4} \times (2^{\sqrt{2}})^{3\sqrt{2}-\sqrt{6}} \div (2^2)^{2+\sqrt{3}} \\ &= 2^{6+4\sqrt{3}} \times 2^{6-2\sqrt{3}} \div 2^{4+2\sqrt{3}} \\ &= 2^{6+4\sqrt{3}+6-2\sqrt{3}-4-2\sqrt{3}} = 2^8 \\ &\therefore k=8 \end{aligned}$$

049 ㉮ 6

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{a^3 \times \sqrt[3]{a}} \times \sqrt[3]{a^2} \div \sqrt{\sqrt{a^k}} \\ &= (a^3 \times a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{2}{3}} \div (a^{\frac{k}{2}})^{\frac{1}{2}} \\ &= a^{\frac{5}{6}} \times a^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{k}{4}} \\ &= a^{\frac{5}{6} + \frac{2}{3} - \frac{k}{4}} = a^{\frac{6-k}{4}} \end{aligned}$$

따라서 $a^{\frac{6-k}{4}} = 1$ 이므로

$$\frac{6-k}{4} = 0 (\because a \neq 1)$$

$\therefore k=6$

| 다른 풀이 |

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{a^3 \times \sqrt[3]{a}} \times \sqrt[3]{a^2} \div \sqrt{\sqrt{a^k}} &= \sqrt[4]{a^3} \times \sqrt[4]{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[4]{a^k} \\ &= \sqrt[4]{a^3} \times \sqrt[12]{a} \times \sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[4]{a^k} \\ &= a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{1}{12}} \times a^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{k}{4}} \\ &= a^{\frac{3}{4} + \frac{1}{12} + \frac{2}{3} - \frac{k}{4}} = a^{\frac{6-k}{4}} \end{aligned}$$

따라서 $a^{\frac{6-k}{4}} = 1$ 이므로 $\frac{6-k}{4} = 0$ ($\because a \neq 1$)

$\therefore k = 6$

050 ㉮ 9

$$\begin{aligned} x + x^{-1} &= (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 + 2 = 2^2 + 2 = 6 \\ x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} &= (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^3 + 3(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) \\ &= 2^3 + 3 \times 2 = 14 \\ \therefore \frac{x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} + 4}{x + x^{-1} - 2} &= \frac{14 + 4}{6 - 2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

051 ㉮ 11

| 접근 방법 | 집합 X 의 원소가 양수인 경우와 음수인 경우로 나누어 두 집합 A, B 의 원소의 개수를 추론한다.

집합 X 의 원소 중 양수의 개수를 m , 음수의 개수를 n 이라 하자.

$0 \notin X$ 라 하면 $n(A) = 2m$ 이므로 $n(A) = 9$ 를 만족시키지 않는다. $\therefore 0 \in X$

$$n(A) = 2m + 1 = 9 \text{에서 } m = 4$$

$$n(B) = m + n + 1 = 7 \text{에서 } n = 2$$

즉, 집합 X 의 원소는 0과 양수 4개, 음수 2개이다.

따라서 원소의 합이 최대가 되는 집합 X 는

$$X = \{-2, -1, 0, 2, 3, 4, 5\} \text{이므로 구하는 최댓값은 } -2 + (-1) + 0 + 2 + 3 + 4 + 5 = 11$$

052 ㉮ 2

$$\begin{aligned} \frac{10}{3^2 + 9^2} \times \frac{25^{-9} + 5^{-8}}{5^{-10} + 25^{-10}} &= \frac{10}{3^2 + 3^4} \times \frac{5^{-18} + 5^{-8}}{5^{-10} + 5^{-20}} \\ &= \frac{10}{3^2(1 + 3^2)} \times \frac{5^{-18}(1 + 5^{10})}{5^{-20}(5^{10} + 1)} \\ &= \frac{1}{3^2} \times 5^2 = \frac{25}{9} \end{aligned}$$

053 ㉮ 5

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 10, \alpha\beta = 5$$

$$\therefore 2^{\frac{1}{\alpha}} \times 2^{\frac{1}{\beta}} = 2^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} = 2^{\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2 = 4$$

054 ㉮ 3

$$\sqrt[3]{2} = a \text{에서 } 2 = a^3$$

$$\sqrt{3} = b \text{에서 } 3 = b^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt[18]{12} &= \sqrt[18]{2^2 \times 3} = (2^2 \times 3)^{\frac{1}{18}} \\ &= 2^{\frac{2}{9}} \times 3^{\frac{1}{18}} \\ &= (a^3)^{\frac{2}{9}} (b^2)^{\frac{1}{18}} = a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{9}} \end{aligned}$$

055 ㉮ -8

$$(n\sqrt{5})^{-4} = (5^{\frac{1}{n}})^{-4} = 5^{-\frac{4}{n}}$$

$5^{-\frac{4}{n}}$ 이 자연수가 되려면 $-\frac{4}{n}$ 가 음이 아닌 정수이어야 한다.

따라서 정수 n 의 값은 $-4, -2, -1$ 이므로 구하는 곱은

$$-4 \times (-2) \times (-1) = -8$$

056 ㉮ 4

$x = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$ 의 양변을 세제곱하면

$$\begin{aligned} x^3 &= (\sqrt[3]{4})^3 - 3 \times (\sqrt[3]{4})^2 \times \sqrt[3]{2} \\ &\quad + 3 \times \sqrt[3]{4} \times (\sqrt[3]{2})^2 - (\sqrt[3]{2})^3 \\ &= 4 - 3 \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{2} (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) - 2 \\ &= 4 - 3 \times 2 \times (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}) - 2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } x^3 = 4 - 6x - 2, x^3 + 6x = 2$$

따라서 $3x^3 + 18x = 6$ 이므로

$$3x^3 + 18x - 2 = 6 - 2 = 4$$

057 ㉮ 31/5

$\frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{2}{3}$ 의 좌변의 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^x(a^x - a^{-x})}{a^x(a^x + a^{-x})} = \frac{2}{3}, \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} = \frac{2}{3}$$

$$3a^{2x} - 3 = 2a^{2x} + 2$$

$$\therefore a^{2x} = 5$$

구하는 식의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면

$$\begin{aligned} \frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x - a^{-x}} &= \frac{a^x(a^{3x} - a^{-3x})}{a^x(a^x - a^{-x})} = \frac{a^{4x} - a^{-2x}}{a^{2x} - 1} \\ &= \frac{(a^{2x})^2 - (a^{2x})^{-1}}{a^{2x} - 1} = \frac{5^2 - 5^{-1}}{5 - 1} \\ &= \frac{25 - \frac{1}{5}}{4} = \frac{31}{5} \end{aligned}$$

058 ㉔ 49

구하는 식의 분모, 분자에 각각 a^{12} 을 곱하면

$$\begin{aligned} & \frac{a+a^2+a^3+a^4+a^5}{a^{-11}+a^{-10}+a^{-9}+a^{-8}+a^{-7}} \\ &= \frac{a^{12}(a+a^2+a^3+a^4+a^5)}{a^{12}(a^{-11}+a^{-10}+a^{-9}+a^{-8}+a^{-7})} \\ &= \frac{a^{12}(a+a^2+a^3+a^4+a^5)}{a+a^2+a^3+a^4+a^5} \\ &= a^{12} = (\sqrt[6]{7})^{12} = 7^2 = 49 \end{aligned}$$

059 ㉔ 10

$$2^x = k^{\frac{z}{x}} \text{에서 } 2 = k^{\frac{z}{x}} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$$5^y = k^{\frac{z}{y}} \text{에서 } 5 = k^{\frac{z}{y}} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$\textcircled{㉑} \times \textcircled{㉒}$ 을 하면

$$10 = k^{\frac{z}{x}} \times k^{\frac{z}{y}} \quad \therefore k^{\frac{z}{x} + \frac{z}{y}} = 10$$

이때 $zx = xy - yz$ 에서 $zx + yz = xy$ 이므로

$$k^{\frac{z}{x} + \frac{z}{y}} = k^{\frac{zx+yz}{xy}} = k^{\frac{xy}{xy}} = k \quad \therefore k = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉓}$$

단계	채점 기준	비율
①	2, 5를 k 의 거듭제곱으로 나타내기	40 %
②	양수 k 의 값 구하기	60 %

060 ㉔ ④

수면으로부터 깊이가 d (m)인 지점에서 무게가 160 kg인 폭약이 폭발했을 때의 가스버블의 최대반경이 R_1 (m), 무게가 p (kg)인 폭약이 폭발했을 때의 가스버블의 최대반경이 R_2 (m)이므로

$$\begin{aligned} R_1 &= k \left(\frac{160}{d+10} \right)^{\frac{1}{3}}, R_2 = k \left(\frac{p}{d+10} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \therefore \frac{R_1}{R_2} &= \frac{k \left(\frac{160}{d+10} \right)^{\frac{1}{3}}}{k \left(\frac{p}{d+10} \right)^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{160}{p} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \left(\frac{160}{p} \right)^{\frac{1}{3}} = 2 \text{이므로}$$

$$\frac{160}{p} = 2^3 = 8 \quad \therefore p = 20$$

061 ㉔ ②

| 접근 방법 | 거듭제곱근의 성질을 이용하여 식을 간단히 한 후 이차함수의 그래프의 대칭성을 이용한다.

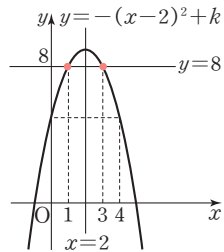
$\sqrt[3]{3^{f(n)}}$ 의 네제곱근 중 실수인 것은

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^{f(n)}}}, -\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^{f(n)}}}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^{f(n)}}} \times \{-\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^{f(n)}}}\} \\ &= -\{\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^{f(n)}}}\}^2 = -\{\sqrt[4]{3^{\frac{f(n)}{3}}}\}^2 \\ &= -\{\sqrt[8]{3^{f(n)}}\}^2 = -\sqrt[4]{3^{f(n)}} \\ &\text{즉, } -\sqrt[4]{3^{f(n)}} = -9 \text{이므로 } \sqrt[4]{3^{f(n)}} = 3^2 \\ &3^{f(n)} = 3^8 \quad \therefore f(n) = 8 \end{aligned}$$

이때 이차함수

$f(x) = -(x-2)^2 + k$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로 $f(n)=8$ 을 만족시키는 자연수 n 의 개수가 2이려면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 (1, 8)을 지나야 한다.



따라서 $f(1)=8$ 에서

$$-1+k=8 \quad \therefore k=9$$

062 ㉔ 3

| 접근 방법 | 방정식 $x^n=16$ 의 실근은 16의 n 제곱근 중 실수인 것임을 이용하여 n 의 조건을 파악한 후 $f(x)$ 의 함수식을 구한다.

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 (나)에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 음의 정수이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

즉, 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (가)에서 방정식 $(x^n-16)f(x)=0$ 이 중근인 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 방정식 $x^n-16=0$, $f(x)=0$ 은 각각 서로 다른 두 실근을 갖고, 이는 서로 같아야 한다. 이때 n 이 홀수이면 방정식 $x^n-16=0$, 즉 $x^n=16$ 의 실근은 $\sqrt[n]{16}$ 의 1개이므로 조건을 만족시키지 않는다. 따라서 n 은 짝수이므로 방정식 $x^n-16=0$, 즉 $x^n=16$ 의 실근은

$$-\sqrt[n]{16}, \sqrt[n]{16}$$

이는 방정식 $f(x)=0$ 의 두 실근과 같으므로

$$f(x) = (x + \sqrt[n]{16})(x - \sqrt[n]{16}) = x^2 - (\sqrt[n]{16})^2$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값 $-(\sqrt[n]{16})^2$ 을 갖는다.

$$\text{(나)에서 } -(\sqrt[n]{16})^2 = -\sqrt[n]{16^2} = -2^{\frac{8}{n}}$$

$-2^{\frac{8}{n}}$ 이 음의 정수가 되려면 $\frac{8}{n}$ 이 음이 아닌 정수이어야 한다.

따라서 자연수 n 은 2, 4, 8의 3개이다.

01 로그

개념 확인

41쪽

063 ㉠ (1) $5 = \log_2 32$ (2) $0 = \log_7 1$

(3) $\frac{1}{3} = \log_{27} 3$ (4) $-2 = \log_5 0.04$

064 ㉠ (1) $-5 < x < -4$ 또는 $x > -4$

(2) $x < -2$ 또는 $-2 < x < -1$

(3) $x > 6$ (4) $x < 3$

(1) 밑의 조건에서

$$x+5 > 0, x+5 \neq 1$$

$$x > -5, x \neq -4$$

$$\therefore -5 < x < -4 \text{ 또는 } x > -4$$

(2) 밑의 조건에서

$$-x-1 > 0, -x-1 \neq 1$$

$$x < -1, x \neq -2$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } -2 < x < -1$$

(3) 진수의 조건에서

$$x-6 > 0 \quad \therefore x > 6$$

(4) 진수의 조건에서

$$3-x > 0 \quad \therefore x < 3$$

065 ㉠ (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) $\frac{5}{2}$

(1) $\log_7 7 + \log_4 1 = 1 + 0 = 1$

(2) $\log_6 3 + \log_6 12 = \log_6 (3 \times 12) = \log_6 36$
 $= \log_6 6^2 = 2$

(3) $\log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 \frac{24}{3} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

(4) $\log_5 25\sqrt{5} = \log_5 (5^2 \times 5^{\frac{1}{2}}) = \log_5 5^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$

066 ㉠ (1) 2 (2) 1 (3) $\frac{4}{3}$ (4) 9

(1) $\log_3 5 \times \log_5 9 = \log_3 5 \times \frac{\log_3 9}{\log_3 5}$
 $= \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$

(2) $\log_6 3 + \frac{1}{\log_2 6} = \log_6 3 + \log_6 2$
 $= \log_6 (3 \times 2)$
 $= \log_6 6 = 1$

(3) $\log_{27} 81 = \log_{3^3} 3^4 = \frac{4}{3} \log_3 3 = \frac{4}{3}$

(4) $2^{\log_2 6} + 7^{\log_7 3} = 6^{\log_2 2} + 3^{\log_7 7} = 6 + 3 = 9$

유제

43~53쪽

067 ㉠ (1) 3 (2) 4 (3) 16 (4) 625

(1) $\log_{0.1} \frac{1}{1000} = x$ 에서

$$(0.1)^x = \frac{1}{1000} = (0.1)^3$$

$$\therefore x = 3$$

(2) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$ 에서

$$x = (\sqrt{2})^4 = 2^2 = 4$$

(3) $\log_x 128 = \frac{7}{4}$ 에서

$$x^{\frac{7}{4}} = 128 = 2^7$$

$$\therefore x = (2^7)^{\frac{4}{7}} = 2^4 = 16$$

(4) $\log_2 (\log_5 x) = 2$ 에서

$$\log_5 x = 2^2 = 4$$

$$\log_5 x = 4 \text{에서}$$

$$x = 5^4 = 625$$

068 ㉠ (1) $1 < x < 2$ (2) $-3 < x < -2$

(1) 밑의 조건에서

$$x-1 > 0, x-1 \neq 1$$

$$\therefore x > 1, x \neq 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

진수의 조건에서

$$2-x > 0$$

$$\therefore x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분은

$$1 < x < 2$$

(2) 밑의 조건에서

$$x+3 > 0, x+3 \neq 1$$

$$\therefore x > -3, x \neq -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

진수의 조건에서

$$-x^2 - 7x - 10 > 0$$

$$x^2 + 7x + 10 < 0$$

$$(x+5)(x+2) < 0$$

$$\therefore -5 < x < -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분은

$$-3 < x < -2$$

069 ㉠ ②

$$x = \log_7 125 \text{에서}$$

$$7^x = 125 = 5^3$$

$$\therefore 7^{\frac{x}{3}} = (7^x)^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5$$

070 ㉡ 18

$\log_{(9-x)}(8-x)$ 가 정의되려면

밑의 조건에서 $9-x > 0, 9-x \neq 1$

$$\therefore x < 9, x \neq 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

진수의 조건에서 $8-x > 0$

$$\therefore x < 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\log_{(x-3)}|x-1|$ 이 정의되려면

밑의 조건에서 $x-3 > 0, x-3 \neq 1$

$$\therefore x > 3, x \neq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

진수의 조건에서 $|x-1| > 0$

$$\therefore x \neq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

㉠~㉣의 공통부분은

$$3 < x < 4 \text{ 또는 } 4 < x < 8$$

따라서 정수 x 의 값은 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$$5+6+7=18$$

071 ㉡ (1) 1 (2) 2

$$\begin{aligned} (1) & \log_5 20 - \frac{1}{2} \log_5 2 - 3 \log_5 \sqrt{2} \\ &= \log_5 20 - \log_5 2^{\frac{1}{2}} - \log_5 (\sqrt{2})^3 \\ &= \log_5 20 - \log_5 \sqrt{2} - \log_5 2\sqrt{2} \\ &= \log_5 \frac{20}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \log_5 5 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & \log_2 2 + \log_2 \sqrt[4]{6} - \frac{1}{4} \log_2 \frac{3}{8} \\ &= 1 + \frac{1}{4} \log_2 6 - \frac{1}{4} \log_2 \frac{3}{8} \\ &= 1 + \frac{1}{4} (\log_2 6 - \log_2 \frac{3}{8}) \\ &= 1 + \frac{1}{4} \log_2 \frac{6}{\frac{3}{8}} \\ &= 1 + \frac{1}{4} \log_2 16 \\ &= 1 + \frac{1}{4} \log_2 2^4 \\ &= 1 + \frac{1}{4} \times 4 = 2 \end{aligned}$$

072 ㉡ (1) 3 (2) $\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} (1) & \log_3 64 \times \log_2 11 \times \log_{11} \sqrt{3} \\ &= \log_3 2^6 \times \frac{\log_3 11}{\log_3 2} \times \frac{\log_3 \sqrt{3}}{\log_3 11} \\ &= 6 \log_3 2 \times \frac{\log_3 11}{\log_3 2} \times \frac{\frac{1}{2} \log_3 3}{\log_3 11} \\ &= 6 \times \frac{1}{2} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & \log_5 49 \times \log_{7\sqrt{7}} 5 = \log_5 7^2 \times \frac{1}{\log_5 7\sqrt{7}} \\ &= 2 \log_5 7 \times \frac{1}{\frac{3}{2} \log_5 7} \\ &= 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

073 ㉡ -3

$$\begin{aligned} & \log_3 \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log_3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \log_3 \left(1 - \frac{1}{4}\right) \\ & \quad + \cdots + \log_3 \left(1 - \frac{1}{27}\right) \\ &= \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \frac{3}{4} + \cdots + \log_3 \frac{26}{27} \\ &= \log_3 \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{26}{27}\right) \\ &= \log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3 \end{aligned}$$

074 ㉡ 48

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_4 3} + \frac{1}{\log_6 3} = \log_3 k \text{에서} \\ & \log_3 2 + \log_3 4 + \log_3 6 = \log_3 k \\ & \log_3 (2 \times 4 \times 6) = \log_3 k \\ & \log_3 48 = \log_3 k \\ & \therefore k = 48 \end{aligned}$$

075 ㉡ (1) 16 (2) $\frac{1}{9}$ (3) 152

$$\begin{aligned} (1) & \log_{\sqrt{5}} 125 \times \log_{3\sqrt{3}} 81 = \log_{\frac{1}{5}} 5^3 \times \log_{\frac{1}{3}} 3^4 \\ &= \frac{3}{\frac{1}{2}} \log_5 5 \times \frac{4}{\frac{1}{3}} \log_3 3 \\ &= 6 \times \frac{8}{3} = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & 2 \log_5 6 - 2 \log_5 2 - 4 \log_5 3 \\ &= \log_5 6^2 - \log_5 2^2 - \log_5 3^4 \\ &= \log_5 \frac{6^2}{2^2 \times 3^4} = \log_5 \frac{1}{9} \\ &\therefore 5^{2 \log_5 6 - 2 \log_5 2 - 4 \log_5 3} = 5^{\log_5 \frac{1}{9}} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) & 125^{\log_3 3} + 27^{\log_5 5} = 3^{\log_3 125} + 5^{\log_5 27} = 3^{3 \log_3 5} + 5^{3 \log_5 3} \\ &= 3^3 + 5^3 = 27 + 125 = 152 \end{aligned}$$

076 ㉡ ④

81의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{81}$ 이므로

$$a = \sqrt[3]{81}$$

$$\therefore \log_9 a = \log_9 \sqrt[3]{81} = \log_9 3^{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{2} \log_3 3 = \frac{2}{3}$$

077 ㉔ ⑤

$$\log_2 5 \times \log_8 x = \log_{\sqrt{2}} 5 \text{에서}$$

$$\log_2 5 \times \log_{2^{\frac{1}{2}}} x = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 5$$

$$\log_2 5 \times \frac{1}{3} \log_2 x = 2 \log_2 5$$

$$\frac{1}{3} \log_2 x = 2, \log_2 x = 6$$

$$\therefore x = 2^6 = 64$$

078 ㉔ $C < A < B$

$$A = 7^{\log_5 5 - \log_5 2} = 7^{\log_5 \frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$$

$$B = \log_{\sqrt{11}} 121 = \log_{11^{\frac{1}{2}}} 11^2 = \frac{2}{\frac{1}{2}} \log_{11} 11 = 4$$

$$C = \log_2 (\log_3 81) = \log_2 (\log_3 3^4)$$

$$= \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

$$\therefore C < A < B$$

079 ㉔ (1) $2a - b - 1$ (2) $\frac{1+2a+b}{2+a+b}$

$$(1) \log_5 \frac{4}{15} = \log_5 4 - \log_5 15$$

$$= \log_5 2^2 - \log_5 (3 \times 5)$$

$$= 2 \log_5 2 - (\log_5 3 + \log_5 5)$$

$$= 2a - b - 1$$

$$(2) \log_{84} 126 = \frac{\log_2 126}{\log_2 84} = \frac{\log_2 (2 \times 3^2 \times 7)}{\log_2 (2^2 \times 3 \times 7)}$$

$$= \frac{\log_2 2 + \log_2 3^2 + \log_2 7}{\log_2 2^2 + \log_2 3 + \log_2 7}$$

$$= \frac{1 + 2 \log_2 3 + \log_2 7}{2 + \log_2 3 + \log_2 7}$$

$$= \frac{1+2a+b}{2+a+b}$$

080 ㉔ ⑤

$$3^a = 2 \text{에서 } a = \log_3 2$$

$$3^b = 5 \text{에서 } b = \log_3 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_3 200 &= \log_3 (2^3 \times 5^2) = \log_3 2^3 + \log_3 5^2 \\ &= 3 \log_3 2 + 2 \log_3 5 = 3a + 2b \end{aligned}$$

081 ㉔ ④

$$\log_{a^5} \sqrt[4]{ab^3} = \frac{\log_2 \sqrt[4]{ab^3}}{\log_2 a^5} = \frac{\frac{1}{4} \log_2 ab^3}{5 \log_2 a}$$

$$= \frac{1}{20} \times \frac{\log_2 a + 3 \log_2 b}{\log_2 a} = \frac{x+3y}{20x}$$

082 ㉔ $\frac{6c}{a+b}$

$$10^a = x \text{에서 } a = \log_{10} x$$

$$10^b = y \text{에서 } b = \log_{10} y$$

$$10^c = z \text{에서 } c = \log_{10} z$$

$$\therefore \log_{\sqrt{xy}} z^3 = \frac{\log_{10} z^3}{\log_{10} \sqrt{xy}} = \frac{3 \log_{10} z}{\frac{1}{2} \log_{10} xy}$$

$$= 6 \times \frac{\log_{10} z}{\log_{10} x + \log_{10} y}$$

$$= \frac{6c}{a+b}$$

083 ㉔ 2

$$4^x = 10 \text{에서 } x = \log_4 10$$

$$25^y = 10 \text{에서 } y = \log_{25} 10$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{\log_4 10} + \frac{1}{\log_{25} 10}$$

$$= \log_{10} 4 + \log_{10} 25$$

$$= \log_{10} (4 \times 25) = \log_{10} 10^2 = 2$$

| 다른 풀이 |

$$4^x = 10 \text{에서 } 4 = 10^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$25^y = 10 \text{에서 } 25 = 10^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} \times \textcircled{B}$ 을 하면

$$4 \times 25 = 10^{\frac{1}{x}} \times 10^{\frac{1}{y}}, 10^2 = 10^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$$

084 ㉔ ②

$$2 \log_c a = 3 \log_c b \text{에서 } \log_c b = \frac{2}{3} \log_c a$$

$$\log_c b = \log_c a^{\frac{2}{3}} \quad \therefore b = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \log_a b + \log_b a = \log_a a^{\frac{2}{3}} + \log_{a^{\frac{2}{3}}} a$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$$

085 ㉔ $\frac{7}{12}$

$$\sqrt{a} = c^6 \text{에서 } c = a^{\frac{1}{12}}$$

$$b^3 = c^6 \text{에서 } c = b^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \log_a c + \log_b c = \log_a a^{\frac{1}{12}} + \log_b b^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

086 ㉔ $\frac{26}{5}$

$\log_2 a \times \log_b 32 = 1$ 에서

$$\log_2 a \times \frac{\log_2 32}{\log_2 b} = 1$$

$$\log_2 a \times \frac{5}{\log_2 b} = 1$$

$$5 \log_2 a = \log_2 b$$

$$\log_2 a^5 = \log_2 b$$

$$\therefore b = a^5$$

$$\therefore \log_a b + \log_b a = \log_a a^5 + \log_{a^5} a = 5 + \frac{1}{5} = \frac{26}{5}$$

087 ㉔ ③

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_{10} \alpha + \log_{10} \beta = -8, \log_{10} \alpha \times \log_{10} \beta = 4$$

$$\therefore \log_a \alpha \beta^2 + \log_\beta \alpha^2 \beta$$

$$= (\log_a \alpha + \log_a \beta^2) + (\log_\beta \alpha^2 + \log_\beta \beta)$$

$$= (1 + 2 \log_a \beta) + (2 \log_\beta \alpha + 1)$$

$$= 2(\log_a \beta + \log_\beta \alpha) + 2$$

$$= 2 \left(\frac{\log_{10} \beta}{\log_{10} \alpha} + \frac{\log_{10} \alpha}{\log_{10} \beta} \right) + 2$$

$$= 2 \times \frac{(\log_{10} \beta)^2 + (\log_{10} \alpha)^2}{\log_{10} \alpha \times \log_{10} \beta} + 2$$

$$= 2 \times \frac{(\log_{10} \alpha + \log_{10} \beta)^2 - 2 \times \log_{10} \alpha \times \log_{10} \beta}{\log_{10} \alpha \times \log_{10} \beta} + 2$$

$$= 2 \times \frac{(-8)^2 - 2 \times 4}{4} + 2 = 30$$

088 ㉔ $\frac{49}{9}$

$\log_3 9 < \log_3 21 < \log_3 27$ 에서

$$2 < \log_3 21 < 3$$

즉, $\log_3 21$ 의 정수 부분은 2이므로

$$a = \log_3 21 - 2 = \log_3 21 - \log_3 9 = \log_3 \frac{7}{3}$$

$$\therefore 9^a = 9^{\log_3 \frac{7}{3}} = \left(\frac{7}{3} \right)^{\log_3 9} = \left(\frac{7}{3} \right)^2 = \frac{49}{9}$$

089 ㉔ 2

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 5, \alpha \beta = 5$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 5^2 - 4 \times 5 = 5$$

이때 $\alpha > \beta$ 이므로 $\alpha - \beta = \sqrt{5}$

$$\therefore \log_{(\alpha-\beta)} \alpha + \log_{(\alpha-\beta)} \beta = \log_{(\alpha-\beta)} \alpha \beta$$

$$= \log_{\sqrt{5}} 5 = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5 = 2$$

090 ㉔ 69

$\log_5 125 < \log_5 500 < \log_5 625$ 에서

$$3 < \log_5 500 < 4$$

즉, $\log_5 500$ 의 정수 부분은 3이므로 $x = 3$

$$\therefore y = \log_5 500 - 3 = \log_5 500 - \log_5 125 = \log_5 4$$

$$\therefore 4^x + 4^{\frac{1}{y}} = 4^3 + 4^{\frac{1}{\log_5 4}} = 64 + 4^{\log_4 5} = 64 + 5 = 69$$

연습문제

54~55쪽

091 ㉔ ①

$\log_{\sqrt{3}} a = 6$ 에서 $a = (\sqrt{3})^6 = 3^3 = 27$

$$\log_{\frac{1}{8}} 2 = b \text{에서 } 2 = \left(\frac{1}{8} \right)^b = 2^{-3b}$$

$$-3b = 1 \text{이므로 } b = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore ab = 27 \times \left(-\frac{1}{3} \right) = -9$$

092 ㉔ 8

$\log_5 \{ \log_3 (\log_2 x) \} = 0$ 에서

$$\log_3 (\log_2 x) = 5^0 = 1$$

$\log_3 (\log_2 x) = 1$ 에서

$$\log_2 x = 3^1 = 3$$

$$\log_2 x = 3 \text{에서}$$

$$x = 2^3 = 8$$

093 ㉔ ①

$$\log_3 (\log_5 6) + \log_3 (\log_6 66) + \log_3 (\log_{66} 125)$$

$$= \log_3 (\log_5 6 \times \log_6 66 \times \log_{66} 125)$$

$$= \log_3 \left(\log_5 6 \times \frac{\log_5 66}{\log_5 6} \times \frac{\log_5 125}{\log_5 66} \right)$$

$$= \log_3 (\log_5 125) = \log_3 3 = 1$$

094 ㉔ ⑤

$$\log_2 3 \times \log_a 4 = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\frac{1}{\log_2 2} \times \frac{\log_2 4}{\log_3 a} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\log_2 2} \times \frac{2 \log_3 2}{\log_3 a} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{\log_3 a} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \log_3 a = 4$$

095 ㉔ $\frac{a+4b}{2a+2}$

$$3^a=4 \text{에서 } a=\log_3 4=2\log_3 2$$

$$\therefore \log_3 2 = \frac{a}{2} \quad \text{..... ①}$$

$$3^b=5 \text{에서 } b=\log_3 5 \quad \text{..... ②}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_{12} 50 &= \frac{\log_3 50}{\log_3 12} = \frac{\log_3 (2 \times 5^2)}{\log_3 (2^2 \times 3)} \\ &= \frac{\log_3 2 + \log_3 5^2}{\log_3 2^2 + \log_3 3} \\ &= \frac{\log_3 2 + 2\log_3 5}{2\log_3 2 + 1} \\ &= \frac{\frac{a}{2} + 2b}{2 \times \frac{a}{2} + 1} \\ &= \frac{a+4b}{2a+2} \quad \text{..... ③} \end{aligned}$$

단계	채점 기준	비율
①	$\log_3 2$ 를 a 에 대한 식으로 나타내기	30 %
②	$\log_3 5$ 를 b 에 대한 식으로 나타내기	20 %
③	$\log_{12} 50$ 을 a, b 에 대한 식으로 나타내기	50 %

096 ㉔ ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 23, \alpha\beta = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_{\alpha\beta} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \\ &= \log_{\alpha\beta} \left(\frac{\alpha+1}{\alpha} \times \frac{\beta+1}{\beta}\right) \\ &= \log_{\alpha\beta} \frac{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}{\alpha\beta} \\ &= \log_3 \frac{3 + 23 + 1}{3} \\ &= \log_3 9 \\ &= 2 \end{aligned}$$

097 ㉔ 4

$$\log_2 x + 3\log_8 y + 5\log_{32} z = 1 \text{에서}$$

$$\log_2 x + 3\log_{2^3} y + 5\log_{2^5} z = 1$$

$$\log_2 x + \log_2 y + \log_2 z = 1$$

$$\log_2 xyz = 1$$

$$\therefore xyz = 2^1 = 2$$

$$\therefore \{(2^x)^y\}^z = 2^{xyz} = 2^2 = 4$$

098 ㉔ ③

두 점 $(0, 0), (\log_2 9, k)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{k}{\log_2 9} = \frac{k}{2\log_2 3}$$

직선 $(\log_4 3)x + (\log_9 8)y - 2 = 0$ 의 기울기는

$$-\frac{\log_4 3}{\log_9 8} = -\frac{\frac{1}{2}\log_2 3}{\frac{3}{2}\log_3 2} = -\frac{\log_2 3}{3\log_3 2}$$

이때 두 직선이 서로 수직이므로

$$\frac{k}{2\log_2 3} \times \left(-\frac{\log_2 3}{3\log_3 2}\right) = -1$$

$$-\frac{k}{6\log_3 2} = -1 \quad \therefore k = 6\log_3 2$$

$$\therefore 3^k = 3^{6\log_3 2} = 3^{\log_3 2^6} = 2^6 = 64$$

099 ㉔ 100

$$\log_3 \sqrt{a} = \log_3 b \text{에서}$$

$$\log_3 b = \frac{1}{2}\log_3 a$$

$$\log_3 b = \log_3 a^{\frac{1}{4}} \quad \therefore b = a^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore 50 \times \log_b \sqrt{a} = 50 \times \log_{a^{\frac{1}{4}}} a^{\frac{1}{2}} = 50 \times \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 100$$

100 ㉔ -3

$$\log_5 a + \log_5 b + \log_5 c = 0 \text{에서}$$

$$\log_5 abc = 0 \quad \therefore abc = 5^0 = 1$$

$$\log_a b + \log_b a + \log_a c + \log_c a + \log_b c + \log_c b$$

$$= \log_a b + \log_a c + \log_b a + \log_b c + \log_c a + \log_c b$$

$$= \log_a bc + \log_b ac + \log_c ab$$

$$= \log_a \frac{1}{a} + \log_b \frac{1}{b} + \log_c \frac{1}{c} \quad (\because abc = 1)$$

$$= -1 + (-1) + (-1) = -3$$

101 ㉔ $\frac{4}{3}$

$$\log_3 3 < \log_3 6 < \log_3 9 \text{에서}$$

$$1 < \log_3 6 < 2$$

즉, $\log_3 6$ 의 정수 부분은 1이므로 $x = 1$

$$\therefore y = \log_3 6 - 1 = \log_3 6 - \log_3 3 = \log_3 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{3^x + 3^{-x}}{3^y + 3^{-y}} &= \frac{3 + 3^{-1}}{3^{\log_3 2} + 3^{-\log_3 2}} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{2 + 3^{\log_3 \frac{1}{2}}} \\ &= \frac{3 + \frac{1}{3}}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

102 ㉡ 13

▶ 접근 방법 | 밑의 조건과 진수의 조건을 이용하여 n 의 값에 따른 a 의 값의 범위를 구한다.

밑의 조건에서

$$|a-n| > 0, |a-n| \neq 1$$

$$\therefore a \neq n-1, a \neq n, a \neq n+1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

진수의 조건에서

모든 실수 x 에 대하여 $x^2+ax+2a>0$ 이어야 하므로
이차방정식 $x^2+ax+2a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=a^2-8a<0$$

$$a(a-8)<0$$

$$\therefore 0<a<8 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

즉, $f(n)$ 의 값은 ㉠, ㉡의 공통부분에서의 정수 a 의 개수이다.

(i) $n=1$ 이면

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } a \neq 0, a \neq 1, a \neq 2$$

즉, 정수 a 는 3, 4, 5, 6, 7의 5개이므로

$$f(1)=5$$

(ii) $n=3$ 이면

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } a \neq 2, a \neq 3, a \neq 4$$

즉, 정수 a 는 1, 5, 6, 7의 4개이므로

$$f(3)=4$$

(iii) $n=5$ 이면

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } a \neq 4, a \neq 5, a \neq 6$$

즉, 정수 a 는 1, 2, 3, 7의 4개이므로

$$f(5)=4$$

(i)~(iii)에서

$$f(1)+f(3)+f(5)=5+4+4=13$$

I-2. 로그

02 상용로그

개념 확인

57쪽

103 ㉡ (1) 3 (2) $-\frac{1}{3}$

$$(1) \log 1000 = \log 10^3 = 3$$

$$(2) \log \frac{1}{\sqrt[3]{10}} = \log 10^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$$

104 ㉡ (1) 정수 부분: 0, 소수 부분: 0.8457

(2) 정수 부분: -3, 소수 부분: 0.6232

$$(1) \log 7.01 = 0.8457 = 0 + 0.8457$$

따라서 $\log 7.01$ 의 정수 부분은 0, 소수 부분은 0.8457이다.

$$(2) \log 0.0042 = -2.3768 = -2 - 0.3768$$

$$= (-2-1) + (1-0.3768)$$

$$= -3 + 0.6232$$

따라서 $\log 0.0042$ 의 정수 부분은 -3, 소수 부분은 0.6232이다.

유제

59~66쪽

105 ㉡ (1) 1.8751 (2) -0.1761 (3) 0.7101

$$(1) \log 75 = \log (3 \times 5^2)$$

$$= \log 3 + \log 5^2$$

$$= \log 3 + 2 \log 5$$

$$= 0.4771 + 2 \times 0.6990$$

$$= 1.8751$$

$$(2) \log \frac{2}{3} = \log \frac{10}{3 \times 5}$$

$$= \log 10 - \log (3 \times 5)$$

$$= 1 - (\log 3 + \log 5)$$

$$= 1 - (0.4771 + 0.6990)$$

$$= -0.1761$$

$$(3) \log \sqrt[3]{135} = \frac{1}{3} \log 135$$

$$= \frac{1}{3} \log (3^3 \times 5)$$

$$= \frac{1}{3} (\log 3^3 + \log 5)$$

$$= \frac{1}{3} (3 \log 3 + \log 5)$$

$$= \frac{1}{3} (3 \times 0.4771 + 0.6990)$$

$$= 0.7101$$

106 ㉡ (1) 3.4502 (2) -3.5498

$$(1) \log 2820 = \log (10^3 \times 2.82)$$

$$= \log 10^3 + \log 2.82$$

$$= 3 + 0.4502 = 3.4502$$

$$(2) \log 0.000282 = \log (10^{-4} \times 2.82)$$

$$= \log 10^{-4} + \log 2.82$$

$$= -4 + 0.4502 = -3.5498$$

107 ㉡ 1.5104

$$\begin{aligned}\log 54 + \log \frac{3}{5} &= \log (2 \times 3^3) + \log \frac{2 \times 3}{10} \\ &= \log 2 + \log 3^3 + \log (2 \times 3) - \log 10 \\ &= \log 2 + 3 \log 3 + \log 2 + \log 3 - 1 \\ &= 2 \log 2 + 4 \log 3 - 1 \\ &= 2 \times 0.3010 + 4 \times 0.4771 - 1 \\ &= 1.5104\end{aligned}$$

108 ㉡ ⑤

상용로그표에서 $\log 5.17 = 0.7135$ 이므로

$$\begin{aligned}\log 517 &= \log (10^2 \times 5.17) \\ &= \log 10^2 + \log 5.17 \\ &= 2 + 0.7135 = 2.7135\end{aligned}$$

109 ㉡ 정수 부분: -3, 소수 부분: 0.55

$$\begin{aligned}\log \sqrt[6]{x} + \log \frac{1}{x^6} &= \frac{1}{6} \log x - 6 \log x \\ &= -\frac{35}{6} \log x \\ &= -\frac{35}{6} \times 0.42 \\ &= -2.45 \\ &= -2 - 0.45 \\ &= (-2-1) + (1-0.45) \\ &= -3 + 0.55\end{aligned}$$

따라서 $\log \sqrt[6]{x} + \log \frac{1}{x^6}$ 의 정수 부분은 -3, 소수 부분은 0.55이다.

110 ㉡ (1) 617 (2) 0.0000617

$$\begin{aligned}(1) \log N &= 2.7903 \\ &= 2 + 0.7903 \\ &= \log 10^2 + \log 6.17 \\ &= \log (10^2 \times 6.17) \\ &= \log 617 \\ \therefore N &= 617 \\ (2) \log N &= -4.2097 \\ &= -4 - 0.2097 \\ &= (-4-1) + (1-0.2097) \\ &= -5 + 0.7903 \\ &= \log 10^{-5} + \log 6.17 \\ &= \log (10^{-5} \times 6.17) \\ &= \log 0.0000617 \\ \therefore N &= 0.0000617\end{aligned}$$

111 ㉡ -5.3160

$$\begin{aligned}\log x^2 &= 2 \log x \\ &= 2 \times (-2.6840) \\ &= -5.3680 \\ &= -5 - 0.3680 \\ &= (-5-1) + (1-0.3680) \\ &= -6 + 0.6320\end{aligned}$$

따라서 $\log x^2$ 의 정수 부분은 -6이므로

$$\begin{aligned}n &= -6 \\ \log \frac{1}{x} &= -\log x \\ &= -(-2.6840) \\ &= 2.6840 \\ &= 2 + 0.6840\end{aligned}$$

따라서 $\log \frac{1}{x}$ 의 소수 부분은 0.6840이므로

$$\begin{aligned}\alpha &= 0.6840 \\ \therefore n + \alpha &= -6 + 0.6840 = -5.3160\end{aligned}$$

112 ㉡ 0.000567

$$\begin{aligned}\log 567 &= 2.7536 \text{에서} \\ \log (10^2 \times 5.67) &= 2.7536 \\ 2 + \log 5.67 &= 2.7536 \quad \therefore \log 5.67 = 0.7536 \\ \log N &= -3.2464 \\ &= -3 - 0.2464 \\ &= (-3-1) + (1-0.2464) \\ &= -4 + 0.7536 \\ &= \log 10^{-4} + \log 5.67 \\ &= \log (10^{-4} \times 5.67) \\ &= \log 0.000567 \\ \therefore N &= 0.000567\end{aligned}$$

113 ㉡ $10^3 \sqrt[3]{10}$

$$\begin{aligned}\log N^2 + \log \frac{1}{\sqrt{N}} &= 2 \log N - \frac{1}{2} \log N \\ &= \frac{3}{2} \log N \leftarrow \text{정수}\end{aligned}$$

$$10 < N < 100 \text{에서 } 1 < \log N < 2$$

$$\therefore \frac{3}{2} < \frac{3}{2} \log N < 3$$

이때 $\frac{3}{2} \log N$ 이 정수이므로

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} \log N &= 2 \quad \therefore \log N = \frac{4}{3} \\ \therefore N &= 10^{\frac{4}{3}} = 10^3 \sqrt[3]{10}\end{aligned}$$

114 ㉡ 1, $\sqrt{10}$

$$\log N - \log \frac{1}{N} = \log N + \log N \\ = 2 \log N \leftarrow \text{정수}$$

$\log N$ 의 정수 부분이 0이므로

$$0 \leq \log N < 1$$

$$\therefore 0 \leq 2 \log N < 2$$

이때 $2 \log N$ 이 정수이므로

$$2 \log N = 0 \text{ 또는 } 2 \log N = 1$$

$$\log N = 0 \text{ 또는 } \log N = \frac{1}{2}$$

$$\therefore N = 10^0 = 1 \text{ 또는 } N = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$$

115 ㉡ ③

두 상용로그의 소수 부분이 같으면 두 상용로그의 차이가 정수이므로

$$\log x^7 - \log x^5 = 7 \log x - 5 \log x \\ = 2 \log x \leftarrow \text{정수}$$

$$100 < x < 1000 \text{에서 } 2 < \log x < 3$$

$$\therefore 4 < 2 \log x < 6$$

이때 $2 \log x$ 가 정수이므로 $2 \log x = 5$

$$\therefore \log x = \frac{5}{2}$$

116 ㉡ $10^{\frac{9}{2}}$

두 상용로그의 소수 부분의 합이 1이면 두 상용로그의 합이 정수이므로

$$\log x^3 + \log \sqrt[3]{x} = 3 \log x + \frac{1}{3} \log x \\ = \frac{10}{3} \log x \leftarrow \text{정수}$$

$$10 < x < 100 \text{에서 } 1 < \log x < 2$$

$$\therefore \frac{10}{3} < \frac{10}{3} \log x < \frac{20}{3}$$

이때 $\frac{10}{3} \log x$ 가 정수이므로

$$\frac{10}{3} \log x = 4 \text{ 또는 } \frac{10}{3} \log x = 5 \text{ 또는 } \frac{10}{3} \log x = 6$$

$$\log x = \frac{6}{5} \text{ 또는 } \log x = \frac{3}{2} \text{ 또는 } \log x = \frac{9}{5}$$

$$\therefore x = 10^{\frac{6}{5}} \text{ 또는 } x = 10^{\frac{3}{2}} \text{ 또는 } x = 10^{\frac{9}{5}}$$

따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은

$$10^{\frac{6}{5}} \times 10^{\frac{3}{2}} \times 10^{\frac{9}{5}} = 10^{\frac{9}{2}}$$

117 ㉡ 1000

소리의 크기가 80 dB일 때의 소리의 세기가 $I_1 \text{ W/m}^2$ 이므로

$$80 = 10 \log \frac{I_1}{10^{-12}} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

소리의 크기가 50 dB일 때의 소리의 세기가 $I_2 \text{ W/m}^2$ 이므로

$$50 = 10 \log \frac{I_2}{10^{-12}} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} - \textcircled{B}$ 을 하면

$$30 = 10 \left(\log \frac{I_1}{10^{-12}} - \log \frac{I_2}{10^{-12}} \right)$$

$$30 = 10 \log \frac{I_1}{I_2}, \log \frac{I_1}{I_2} = 3$$

$$\therefore \frac{I_1}{I_2} = 10^3 = 1000$$

118 ㉡ 2배

현재 빵 판매량을 A 라 하면 매년 전년도 대비 6 %씩 증가시키므로 12년 후의 빵 판매량은

$$A \left(1 + \frac{6}{100} \right)^{12} = A \times 1.06^{12}$$

1.06^{12} 에 상용로그를 취하면

$$\log 1.06^{12} = 12 \log 1.06 = 12 \times 0.025 = 0.3 = \log 2$$

즉, $1.06^{12} = 2$ 이므로 12년 후의 빵 판매량은 $A \times 2$ 이다. 따라서 12년 후의 빵 판매량은 현재 빵 판매량의 2배이다.

119 ㉡ $\frac{1}{3}$

53개월 후의 기억 상태는 P_{53} , 1개월 후의 기억 상태는 P_1 이므로

$$P_{53} = \frac{1}{3} P_1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\log P_0 - \log P_{53} = c \log (53 + 1) \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\log P_0 - \log P_1 = c \log (1 + 1) \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{B} - \textcircled{C}$ 을 하면

$$\log P_1 - \log P_{53} = c (\log 54 - \log 2)$$

$$\log \frac{P_1}{P_{53}} = c \log 27$$

이때 $\textcircled{A}$ 에 의하여

$$\log \frac{P_1}{P_{53}} = \log \frac{P_1}{\frac{1}{3} P_1} = \log 3 \text{이므로}$$

$$\log 3 = c \times 3 \log 3$$

$$\therefore c = \frac{1}{3}$$

120 ㉮ 15 %

올해의 판매량을 A , 매년 증가시키는 일정한 비율을 r %라 하면 10년 후의 판매량은 현재 판매량의 4배가 되므로

$$A\left(1+\frac{r}{100}\right)^{10}=4A \quad \therefore \left(1+\frac{r}{100}\right)^{10}=4$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log\left(1+\frac{r}{100}\right)^{10}=\log 4, \quad 10\log\left(1+\frac{r}{100}\right)=2\log 2$$

$$\log\left(1+\frac{r}{100}\right)=\frac{1}{5}\log 2=\frac{1}{5}\times 0.3=0.06$$

$$\text{이때 } \log 1.15=0.06 \text{이므로 } \log\left(1+\frac{r}{100}\right)=\log 1.15$$

$$1+\frac{r}{100}=1.15 \quad \therefore r=15$$

따라서 매년 15 %씩 판매량을 증가시켜야 한다.

121 ㉮ (1) 5자리의 정수 (2) 5

3^{10} 에 상용로그를 취하면

$$\log 3^{10}=10\log 3=10\times 0.4771=4.771=4+0.771$$

(1) $\log 3^{10}$ 의 정수 부분이 4이므로 3^{10} 은 5자리의 정수이다.

(2) $\log 3^{10}$ 의 소수 부분이 0.771이고

$$\log 5=\log \frac{10}{2}=1-\log 2=1-0.3010=0.6990,$$

$$\begin{aligned} \log 6 &= \log (2 \times 3) = \log 2 + \log 3 \\ &= 0.3010 + 0.4771 = 0.7781 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \log 5 < 0.771 < \log 6$$

$$\text{각 변에 4를 더하면 } 4 + \log 5 < 4.771 < 4 + \log 6$$

$$\log 10^4 + \log 5 < 4.771 < \log 10^4 + \log 6$$

$$\begin{aligned} \text{즉, } \log (10^4 \times 5) &< \log 3^{10} < \log (10^4 \times 6) \text{이므로} \\ 5 \times 10^4 &< 3^{10} < 6 \times 10^4 \end{aligned}$$

따라서 3^{10} 의 최고 자리의 숫자는 5이다.

연습문제

67-68쪽

122 ㉮ ①

$$\log 24 + \log 5 - \log \sqrt{2}$$

$$= \log (2^3 \times 3) + \log \frac{10}{2} - \log 2^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3\log 2 + \log 3 + 1 - \log 2 - \frac{1}{2}\log 2$$

$$= \frac{3}{2}\log 2 + \log 3 + 1$$

$$= \frac{3}{2} \times 0.30 + 0.48 + 1 = 1.93$$

123 ㉮ ㄱ, ㄷ

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } \log 5160 &= \log (10^3 \times 5.16) = \log 10^3 + \log 5.16 \\ &= 3 + 0.7126 = 3.7126 \end{aligned}$$

따라서 $\log 5160$ 의 정수 부분은 3이다.

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \log 0.0516 &= \log (10^{-2} \times 5.16) \\ &= \log 10^{-2} + \log 5.16 = -2 + 0.7126 \end{aligned}$$

따라서 $\log 0.0516$ 의 소수 부분은 0.7126이다.

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \log 20.64 &= \log (2^2 \times 5.16) = \log 2^2 + \log 5.16 \\ &= 2\log 2 + \log 5.16 \\ &= 2 \times 0.3010 + 0.7126 \\ &= 1.3146 = 1 + 0.3146 \end{aligned}$$

따라서 $\log 20.64$ 의 소수 부분은 0.3146이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

124 ㉮ 0.0776

상용로그표에서 $\log 7.57 = 0.8791$ 이므로

$$\begin{aligned} \log 7570 &= \log (10^3 \times 7.57) \\ &= \log 10^3 + \log 7.57 \\ &= 3 + 0.8791 = 3.8791 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \log 7570 + \log N = 2.7690 \text{에서}$$

$$3.8791 + \log N = 2.7690$$

$$\log N = 2.7690 - 3.8791 = -1.1101$$

$$= -1 - 0.1101$$

$$= (-1-1) + (1-0.1101)$$

$$= -2 + 0.8899$$

이때 상용로그표에서 $\log 7.76 = 0.8899$ 이므로

$$\log N = \log 10^{-2} + \log 7.76$$

$$= \log (10^{-2} \times 7.76)$$

$$= \log 0.0776$$

$$\therefore N = 0.0776$$

125 ㉮ 159광년

겉보기 등급이 2, 절대 등급이 -4인 별의 지구로부터의 거리를 x 광년이라 하면

$$2 - (-4) = 5\log x - 5$$

$$11 = 5\log x \quad \therefore \log x = \frac{11}{5} = 2.2$$

$$\log x = 2.2 = 2 + 0.2 = \log 10^2 + \log 1.59$$

$$= \log (10^2 \times 1.59) = \log 159$$

$$\therefore x = 159$$

따라서 겉보기 등급이 2, 절대 등급이 -4인 별의 지구로부터의 거리는 159광년이다.

126 ㉮ 30.2

$3.02^x = 63100$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$x \log 3.02 = \log 63100$$

$$0.48x = \log(10^4 \times 6.31)$$

$$0.48x = \log 10^4 + \log 6.31, \quad 0.48x = 4 + 0.8$$

$$0.48x = 4.8 \quad \therefore x = 10 \quad \gggggg \textcircled{1}$$

따라서 바르게 계산하면

$$3.02x = 3.02 \times 10 = 30.2 \quad \gggggg \textcircled{2}$$

단계	채점 기준	비율
①	x 의 값 구하기	80 %
②	바르게 계산한 답 구하기	20 %

127 ㉮ ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$n + \alpha = \frac{19}{3} = 6 + \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$n\alpha = \frac{k}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } n=6, \alpha=\frac{1}{3}$$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } 6 \times \frac{1}{3} = \frac{k}{3} \quad \therefore k=6$$

128 ㉮ 14

$$2 \log N = m \log 4 + n \log 9 \text{에서}$$

$$\log N^2 = \log 4^m + \log 9^n$$

$$\log N^2 = \log(4^m \times 9^n) \text{이므로}$$

$$N^2 = 4^m \times 9^n = 2^{2m} \times 3^{2n} = (2^m \times 3^n)^2$$

$$\therefore N = 2^m \times 3^n$$

이때 $1 \leq N \leq 36$ 이므로 자연수 N 은

1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, 36의 14개이다.

129 ㉮ ③

(나)에서

$$\log 125x^2 - \log \frac{\sqrt[3]{x}}{8}$$

$$= \log 125 + \log x^2 - (\log \sqrt[3]{x} - \log 8)$$

$$= \log 125 + \log 8 + 2 \log x - \frac{1}{3} \log x$$

$$= \log 1000 + \frac{5}{3} \log x$$

$$= 3 + \frac{5}{3} \log x \leftarrow \text{정수}$$

따라서 $\frac{5}{3} \log x$ 는 정수이다.

$$(가) \text{에서 } \frac{10}{3} < \frac{5}{3} \log x < 5$$

이때 $\frac{5}{3} \log x$ 가 정수이므로

$$\frac{5}{3} \log x = 4, \quad \log x = \frac{12}{5}$$

$$\therefore 10 \log x = 10 \times \frac{12}{5} = 24$$

130 ㉮ ③

원본 사진 A에서 $P = P_A, E = E_A$ 이므로

$$P_A = 20 \log 255 - 10 \log E_A \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원본 사진 B에서 $P = P_B, E = E_B = 100E_A$ 이므로

$$P_B = 20 \log 255 - 10 \log E_B$$

$$\therefore P_B = 20 \log 255 - 10 \log 100E_A \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$P_A - P_B = 10 \log 100E_A - 10 \log E_A$$

$$= 10(\log 100E_A - \log E_A)$$

$$= 10 \log \frac{100E_A}{E_A}$$

$$= 10 \log 100$$

$$= 10 \log 10^2 = 20$$

131 ㉮ 5984

빛이 유리판 한 장을 통과할 때마다 그 빛의 밝기가 5%씩 감소하므로 밝기가 10000인 빛이 유리판 10장을 통과했을 때의 빛의 밝기를 A라 하면

$$A = 10000 \times \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{10} = 10000 \times 0.95^{10}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log A = \log(10^4 \times 0.95^{10})$$

$$= \log 10^4 + \log 0.95^{10}$$

$$= 4 + 10 \log 0.95$$

$$= 4 + 10 \log(10^{-1} \times 9.5)$$

$$= 4 + 10(\log 10^{-1} + \log 9.5)$$

$$= 4 + 10(-1 + \log 9.5)$$

$$= 4 + 10(-1 + 0.9777)$$

$$= 3.7770 = 3 + 0.7770$$

$$= \log 10^3 + \log 5.984$$

$$= \log(10^3 \times 5.984)$$

$$= \log 5984$$

$$\therefore A = 5984$$

따라서 밝기가 10000인 빛이 유리판 10장을 통과했을 때의 빛의 밝기는 5984이다.

| 접근 방법 | $\log A = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 < \alpha < 1$)라 하고 로그의 성질을 이용하여 보기에서 로그의 정수 부분과 소수 부분을 구한다.

$\log A = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 < \alpha < 1$)라 하자.

$$\text{ㄱ. } \log A + 100 = (n + \alpha) + 100 = (n + 100) + \alpha$$

따라서 $\log A + 100$ 의 소수 부분은 α 이다.

$$\text{ㄴ. } \log A - 5 = (n + \alpha) - 5 = (n - 5) + \alpha$$

따라서 $\log A - 5$ 의 소수 부분은 α 이다.

$$\text{ㄷ. } 5 - \log A = 5 - (n + \alpha) = 5 - n - \alpha$$

$$= (5 - n - 1) + (1 - \alpha)$$

$$= (4 - n) + (1 - \alpha)$$

따라서 $5 - \log A$ 의 소수 부분은 $1 - \alpha$ 이다.

$$\text{ㄹ. } 10 \log A = 10(n + \alpha) = 10n + 10\alpha$$

그런데 $0 < 10\alpha < 10$ 이므로

$10 \log A$ 의 소수 부분은 알 수 없다.

$$\text{ㅁ. } \log 10A = \log 10 + \log A = 1 + \log A$$

$$= 1 + (n + \alpha) = (n + 1) + \alpha$$

따라서 $\log 10A$ 의 소수 부분은 α 이다.

$$\text{ㅂ. } \log \frac{A}{100} = \log A - \log 100 = \log A - 2$$

$$= (n + \alpha) - 2 = (n - 2) + \alpha$$

따라서 $\log \frac{A}{100}$ 의 소수 부분은 α 이다.

따라서 보기에서 $\log A$ 와 소수 부분이 같은 것은

ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅂ이다.

133 **답** $20\sqrt{6}$

| 접근 방법 | 주어진 그래프에서 $\log x$ 와 $\log y$ 사이의 관계를 나타내는 일차식을 구한 후 로그의 성질을 이용하여 x 와 y 사이의 관계식을 나타낸다. 그리고 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 최솟값을 구한다.

주어진 그래프의 기울기가 -1 이고 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$\log y = -\log x + 2$$

$$\text{즉, } \log y = \log \frac{1}{x} + \log 100 = \log \frac{100}{x} \text{이므로}$$

$$y = \frac{100}{x}$$

이때 $x > 0$, $y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2x + 3y \geq 2\sqrt{6xy} = 2\sqrt{6x \times \frac{100}{x}} = 20\sqrt{6}$$

(단, 등호는 $2x = 3y$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $20\sqrt{6}$ 이다.

01 지수함수

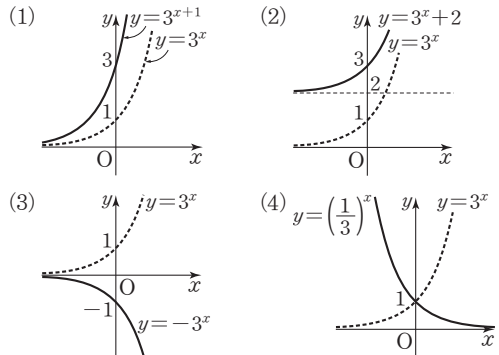
개념 확인

73쪽

134 **답** ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅂ

$$\text{135 **답** (1) 2 (2) } \frac{1}{16} \text{ (3) } \frac{1}{625} \text{ (4) 125}$$

136 **답** 풀이 참조



$$\text{137 **답** (1) } \sqrt[9]{125} < \sqrt{5} \text{ (2) } \left(\frac{1}{7}\right)^{0.01} < \left(\frac{1}{7}\right)^{-10}$$

$$\text{(1) } \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}, \sqrt[9]{125} = \sqrt[9]{5^3} = 5^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} \text{ 이고, 밑이 1보다 크므로}$$

$$5^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \sqrt[9]{125} < \sqrt{5}$$

$$\text{(2) } -10 < 0.01 \text{ 이고, 밑이 1보다 작으므로}$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{0.01} < \left(\frac{1}{7}\right)^{-10}$$

유제

75~81쪽

138 **답** ④

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

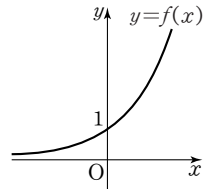
① $f(x)=2^x$ 에서 밑이 1보다 크므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

따라서 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

② $f(0)=1$ 이므로 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지난다.

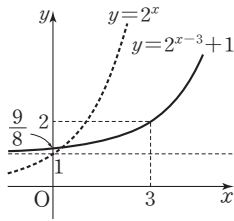
③, ④ 그래프의 점근선이 x 축(직선 $y=0$)이므로 그래프는 x 축과 만나지 않는다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.



139 ㉠ 풀이 참조

- (1) 함수 $y=2^{x-3}+1$ 의 그래프는 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

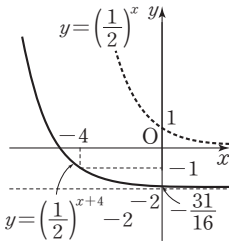


$\therefore$ 치역: $\{y|y>1\}$,

점근선의 방정식: $y=1$

- (2) 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+4}-2$ 의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 치역: $\{y|y>-2\}$,

점근선의 방정식: $y=-2$

140 ㉠ $0 < a < 1$

$y=(a^2-a+1)^x$ 에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소하려면 $0 < (\text{밑}) < 1$ 이어야 하므로

$$0 < a^2 - a + 1 < 1$$

- (i) $0 < a^2 - a + 1$ 에서

$$a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

따라서 모든 실수 a 에 대하여 성립한다.

- (ii) $a^2 - a + 1 < 1$ 에서 $a^2 - a < 0$

$$a(a-1) < 0 \quad \therefore 0 < a < 1$$

- (i), (ii)에서 실수 a 의 값의 범위는 $0 < a < 1$

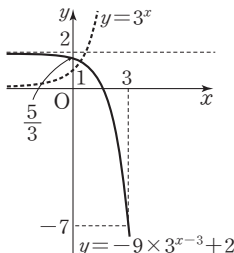
141 ㉠ 제1, 2, 4사분면

$$y = -9 \times 3^{x-3} + 2 = -3^2 \times 3^{x-3} + 2 = -3^{x-1} + 2$$

함수 $y = -9 \times 3^{x-3} + 2$ 의 그래프는 함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수

$y = -9 \times 3^{x-3} + 2$ 의 그래프가 지나는 사분면은 제 1, 2, 4사분면이다.



142 ㉠ -12

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y+3=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} \quad \therefore y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-3$$

이 함수의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x-2}-3$$

$$y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{-x-2}+3 \quad \therefore y=-4 \times 2^x+3$$

이 식이 $y=a \times 2^x+b$ 와 일치하므로

$$a=-4, b=3 \quad \therefore ab=-12$$

143 ㉠ -2

$$y=25 \times 5^x-7=5^{x+2}-7$$

함수 $y=5^{x+2}-7$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=5^{(x-3)+2}-7 \quad \therefore y=5^{x-1}-7$$

이 함수의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=5^{-x-1}-7$$

이 함수의 그래프가 점 $(-2, k)$ 를 지나므로

$$k=5^{2-1}-7=-2$$

144 ㉠ ③

함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼,

y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-n=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-m}$$

$$\therefore y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-m}+n$$

이 함수의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x-m}+n$$

$$y=-\left(\frac{1}{5}\right)^{-x-m}-n$$

$$\therefore y=-5^m \times 5^x-n$$

이 식이 $y=-\frac{1}{5} \times 5^x-2=-5^{-1} \times 5^x-2$ 와 일치하

므로

$$m=-1, n=2$$

$$\therefore m+n=1$$

145 ㉠ $a=1, b=5$

함수 $y=-3^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=-3^{-x}$$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-b=-3^{-(x-a)}$$

$$\therefore y=-3^{-x+a}+b$$

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $y=5$ 이므로 $b=5$

따라서 함수 $y=-3^{-x+a}+5$ 의 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2=-3^a+5$$

$$3^a=3$$

$$\therefore a=1$$

146 ㉠ ③

$$f(b)=3 \text{에서 } a^b=3$$

$$f(c)=6 \text{에서 } a^c=6$$

$$\begin{aligned} \therefore f\left(\frac{b+c}{2}\right) &= a^{\frac{b+c}{2}} = (a^{b+c})^{\frac{1}{2}} \\ &= (a^b \times a^c)^{\frac{1}{2}} = (3 \times 6)^{\frac{1}{2}} \\ &= 18^{\frac{1}{2}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

147 ㉠ $\frac{81}{4}$

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프와 직선 $y=27$ 이 만나는 점의 x 좌표는

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x=27=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \text{에서}$$

$$x=-3$$

$$\therefore A(-3, 27)$$

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ 의 그래프와 직선 $y=27$ 이 만나는 점의 x 좌표는

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}=27=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \text{에서}$$

$$2x=-3 \quad \therefore x=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore B\left(-\frac{3}{2}, 27\right)$$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left\{ -\frac{3}{2} - (-3) \right\} \times 27 = \frac{81}{4}$$

148 ㉠ 16

함수 $y=2^x$ 의 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$a=1$$

함수 $y=2^x$ 의 그래프는 점 $(1, b)$ 를 지나므로

$$b=2^1=2$$

함수 $y=2^x$ 의 그래프는 점 $(2, c)$ 를 지나므로

$$c=2^2=4$$

$$\therefore b^{ac}=2^{1 \times 4}=16$$

149 ㉠ 4

함수 $y=5^{x-2}$ 의 그래프는 함수 $y=5^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

즉, 오른쪽 그림에서 빗금

친 두 부분의 넓이가 서로

같으므로 두 함수 $y=5^x$,

$y=5^{x-2}$ 의 그래프와 두 직

선 $y=1, y=3$ 으로 둘러

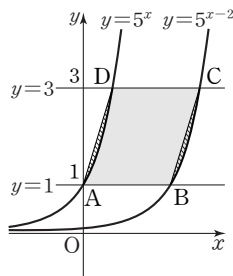
싸인 부분의 넓이는 평행

사변형 ABCD의 넓이와

같다.

이때 $\overline{AB}=2$ 이고 두 직선 $y=1, y=3$ 사이의 거리는 2이므로

구하는 넓이는 $2 \times 2 = 4$



150 ㉠ (1) $9^{\frac{1}{3}} < \sqrt[4]{27} < 3^{0.9}$

$$(2) \sqrt[3]{0.25} < \sqrt[5]{0.125} < \sqrt{0.5}$$

$$(1) 3^{0.9} = 3^{\frac{9}{10}}, 9^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}, \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3^3} = 3^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{9}{10} \text{ 이고, 밑이 1보다 크므로}$$

$$3^{\frac{2}{3}} < 3^{\frac{3}{4}} < 3^{\frac{9}{10}} \quad \therefore 9^{\frac{1}{3}} < \sqrt[4]{27} < 3^{0.9}$$

$$(2) \sqrt{0.5} = 0.5^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{0.25} = \sqrt[3]{0.5^2} = 0.5^{\frac{2}{3}},$$

$$\sqrt[5]{0.125} = \sqrt[5]{0.5^3} = 0.5^{\frac{3}{5}}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} \text{ 이고, 밑이 1보다 작으므로}$$

$$0.5^{\frac{2}{3}} < 0.5^{\frac{3}{5}} < 0.5^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \sqrt[3]{0.25} < \sqrt[5]{0.125} < \sqrt{0.5}$$

151 ㉠ $\frac{1}{125}$

$$0.2^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = 5^{-\frac{2}{3}}, \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^5 = (5^{-\frac{1}{2}})^5 = 5^{-\frac{5}{2}},$$

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{4}} = (5^{-2})^{\frac{1}{4}} = 5^{-\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{5}{2} < -\frac{2}{3} < -\frac{3}{5} < -\frac{1}{2} \text{ 이고, 밑이 1보다 크므로}$$

$$5^{-\frac{5}{2}} < 5^{-\frac{2}{3}} < 5^{-\frac{3}{5}} < 5^{-\frac{1}{2}}$$

따라서 가장 큰 수는 $5^{-\frac{1}{2}}$ 이고 가장 작은 수는 $5^{-\frac{5}{2}}$ 이므로 두 수의 곱은

$$5^{-\frac{1}{2}} \times 5^{-\frac{5}{2}} = 5^{-3} = \frac{1}{125}$$

152 ㉢ ㉢

$0 < a < 1$ 에서 $0 < a^2 < a$ 이므로 $a^2 < a < 1$
 이때 a^x 의 밑이 1보다 작으므로 $a^1 < a^a < a^{a^2}$
 $\therefore a < a^a < a^{a^2}$

153 ㉢ ㉢

$a^2 < a < b < b^2$ 에서 $0 < a < 1$, $1 < b$ 이므로
 $0 < a < 1 < b$
 ㄱ. $a < b$ 이고, a^x 의 밑이 1보다 작으므로
 $a^b < a^a$
 ㄴ. $a^2 < a$ 에서 $a < \sqrt{a}$ 이고,
 a^x 의 밑이 1보다 작으므로 $a^{\sqrt{a}} < a^a$
 ㄷ. $b < b^2$ 에서 $\sqrt{b} < b$ 이고,
 b^x 의 밑이 1보다 크므로 $b^{\sqrt{b}} < b^b$
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

개념 확인

83쪽

154 ㉢ (1) 최댓값: 9, 최솟값: 1

(2) 최댓값: 64, 최솟값: $\frac{1}{4}$

(3) 최댓값: 없다., 최솟값: 125

(4) 최댓값: 없다., 최솟값: 49

(1) 함수 $y=3^x$ 의 밑이 1보다 크므로

$0 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $y=3^x$ 은

$x=2$ 에서 최댓값 $3^2=9$,

$x=0$ 에서 최솟값 $3^0=1$ 을 갖는다.

(2) 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 의 밑이 1보다 작으므로

$-3 \leq x \leq 1$ 일 때 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 은

$x=-3$ 에서 최댓값 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}=64$,

$x=1$ 에서 최솟값 $\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{1}{4}$ 을 갖는다.

(3) 함수 $y=5^x$ 의 밑이 1보다 크므로

$x \geq 3$ 일 때 함수 $y=5^x$ 은

최댓값을 갖지 않고,

$x=3$ 에서 최솟값 $5^3=125$ 를 갖는다.

(4) 함수 $y=\left(\frac{1}{7}\right)^x$ 의 밑이 1보다 작으므로

$x \leq -2$ 일 때 함수 $y=\left(\frac{1}{7}\right)^x$ 은

최댓값을 갖지 않고,

$x=-2$ 에서 최솟값 $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}=49$ 를 갖는다.

유제

85~89쪽

155 ㉢ (1) 최댓값: 35, 최솟값: 0

(2) 최댓값: $\frac{64}{25}$, 최솟값: $\frac{5}{8}$

(1) $y=6^{-x}-1=\left(\frac{1}{6}\right)^x-1$

함수 $y=\left(\frac{1}{6}\right)^x-1$ 의 밑이 1보다 작으므로

$-2 \leq x \leq 0$ 일 때

함수 $y=\left(\frac{1}{6}\right)^x-1$ 은

$x=-2$ 에서 최댓값 $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}-1=35$,

$x=0$ 에서 최솟값 $\left(\frac{1}{6}\right)^0-1=0$ 을 갖는다.

(2) $y=2^{3x}5^{-x}=8^x \times \left(\frac{1}{5}\right)^x=\left(\frac{8}{5}\right)^x$

함수 $y=\left(\frac{8}{5}\right)^x$ 의 밑이 1보다 크므로

$-1 \leq x \leq 2$ 일 때

함수 $y=\left(\frac{8}{5}\right)^x$ 은

$x=2$ 에서 최댓값 $\left(\frac{8}{5}\right)^2=\frac{64}{25}$,

$x=-1$ 에서 최솟값 $\left(\frac{8}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{8}$ 을 갖는다.

156 ㉢ -15

함수 $y=5^{x-1}+k$ 의 밑이 1보다 크므로

$1 \leq x \leq 3$ 일 때 함수 $y=5^{x-1}+k$ 는

$x=3$ 에서 최댓값 $5^2+k=25+k$ 를 갖는다.

따라서 $25+k=10$ 이므로

$k=-15$

157 ㉔ ④

함수 $y = a \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 2$ 의 밑이 1보다 작으므로
 $-5 \leq x \leq -3$ 일 때 함수 $y = a \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 2$ 는
 $x = -5$ 에서 최댓값 $a \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} - 2 = 16a - 2$,
 $x = -3$ 에서 최솟값 $a \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - 2 = 4a - 2$
 를 갖는다.
 즉, $4a - 2 = 6$ 이므로 $a = 2$
 따라서 함수 $y = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 2$ 의 최댓값은
 $16 \times 2 - 2 = 30$

158 ㉔ $\frac{20}{3}$

- (i) $\frac{2}{a} > 1$, 즉 $0 < a < 2$ 일 때,
 함수 $f(x) = \left(\frac{2}{a}\right)^x$ 의 밑이 1보다 크므로
 $-2 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $f(x) = \left(\frac{2}{a}\right)^x$ 은
 $x = 2$ 에서 최댓값 $\left(\frac{2}{a}\right)^2 = \frac{4}{a^2}$ 를 갖는다.
 즉, $\frac{4}{a^2} = 9$ 이므로 $a^2 = \frac{4}{9}$
 $\therefore a = \frac{2}{3}$ ($\because 0 < a < 2$)
 (ii) $0 < \frac{2}{a} < 1$, 즉 $a > 2$ 일 때,
 함수 $f(x) = \left(\frac{2}{a}\right)^x$ 의 밑이 1보다 작으므로
 $-2 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $f(x) = \left(\frac{2}{a}\right)^x$ 은
 $x = -2$ 에서 최댓값 $\left(\frac{2}{a}\right)^{-2} = \frac{a^2}{4}$ 을 갖는다.
 즉, $\frac{a^2}{4} = 9$ 이므로 $a^2 = 36$
 $\therefore a = 6$ ($\because a > 2$)
 (i), (ii)에서 모든 양수 a 의 값의 합은
 $6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$

159 ㉔ (1) 최댓값: 5, 최솟값: $\frac{1}{125}$

(2) 최댓값: 16, 최솟값: $\frac{1}{32}$

- (1) $y = 5^{-x^2+6x-8}$ 에서 $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ 이라 하면
 $f(x) = -(x-3)^2 + 1$

$1 \leq x \leq 5$ 에서

$f(1) = -3, f(3) = 1, f(5) = -3$ 이므로
 $-3 \leq f(x) \leq 1$

이때 함수 $y = 5^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 크므로

함수 $y = 5^{f(x)}$ 은

$f(x) = 1$ 에서 최댓값 $5^1 = 5$,

$f(x) = -3$ 에서 최솟값 $5^{-3} = \frac{1}{125}$ 을 갖는다.

(2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x}$ 에서 $f(x) = x^2 + 4x$ 라 하면

$f(x) = (x+2)^2 - 4$

$-4 \leq x \leq 1$ 에서

$f(-4) = 0, f(-2) = -4, f(1) = 5$ 이므로

$-4 \leq f(x) \leq 5$

이때 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 작으므로

함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은

$f(x) = -4$ 에서 최댓값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$,

$f(x) = 5$ 에서 최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ 을 갖는다.

160 ㉔ 36

$y = 27^{2x-2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} = 3^{6x-6} \times 3^{-x^2} = 3^{-x^2+6x-6}$ 에서

$f(x) = -x^2 + 6x - 6$ 이라 하면

$f(x) = -(x-3)^2 + 3$

$2 \leq x \leq 4$ 에서

$f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 2$ 이므로

$2 \leq f(x) \leq 3$

이때 함수 $y = 3^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 크므로

함수 $y = 3^{f(x)}$ 은

$f(x) = 3$ 에서 최댓값 $3^3 = 27$,

$f(x) = 2$ 에서 최솟값 $3^2 = 9$ 를 갖는다.

따라서 주어진 함수의 치역은 $\{y | 9 \leq y \leq 27\}$ 이므로

$a = 9, b = 27$

$\therefore a + b = 36$

161 ㉔ $\frac{1}{2}$

$y = a^{x^2-8x+19}$ 에서 $f(x) = x^2 - 8x + 19$ 라 하면

$f(x) = (x-4)^2 + 3 \quad \therefore f(x) \geq 3$

이때 함수 $y = a^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 작으므로

함수 $y = a^{f(x)}$ 은 $f(x) = 3$ 에서 최댓값 a^3 을 갖는다.

따라서 $a^3 = \frac{1}{8}$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$ ($\because 0 < a < 1$)

162 ㉮ ③

$y=a^{x^2-4x+b}$ 에서 $f(x)=x^2-4x+b$ 라 하면

$$f(x)=(x-2)^2+b-4$$

$0 \leq x \leq 3$ 에서

$$f(0)=b, f(2)=b-4, f(3)=b-3 \text{이므로}$$

$$b-4 \leq f(x) \leq b$$

이때 함수 $y=a^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 작으므로

함수 $y=a^{f(x)}$ 은

$$f(x)=b-4 \text{에서 최댓값 } a^{b-4},$$

$$f(x)=b \text{에서 최솟값 } a^b \text{을 갖는다.}$$

따라서 $M=a^{b-4}, m=a^b$ 이므로

$$\frac{M}{m}=81 \text{에서 } \frac{a^{b-4}}{a^b}=81$$

$$a^{-4}=81=\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$$

$$\therefore a=\frac{1}{3} (\because 0 < a < 1)$$

163 ㉮ 36

$$y=9^{-x}-2 \times 3^{-x+1}-1=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2-6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x-1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t (t>0) \text{로 놓으면}$$

$-2 \leq x \leq -1$ 에서

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \leq t \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$\therefore 3 \leq t \leq 9$$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-6t-1=(t-3)^2-10$$

즉, $3 \leq t \leq 9$ 일 때 함수 $y=(t-3)^2-10$ 은

$t=9$ 에서 최댓값 26,

$t=3$ 에서 최솟값 -10을 갖는다.

따라서 $M=26, m=-10$ 이므로

$$M-m=36$$

164 ㉮ 6

$7^x+7^{-x}=t$ 로 놓으면

$7^x>0, 7^{-x}>0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t=7^x+7^{-x}$$

$$\geq 2\sqrt{7^x \times 7^{-x}}$$

=2 (단, 등호는 $7^x=7^{-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립)

$$\therefore t \geq 2$$

49^x+49^{-x} 을 t 에 대한 식으로 나타내면

$$49^x+49^{-x}=(7^x+7^{-x})^2-2=t^2-2$$

이때 주어진 함수는

$$y=4t-(t^2-2)=-(t-2)^2+6$$

따라서 $t \geq 2$ 일 때 함수 $y=-(t-2)^2+6$ 은

$t=2$ 에서 최댓값 6을 갖는다.

165 ㉮ ②

$$y=4^x-2^{x+3}+a=(2^x)^2-8 \times 2^x+a$$

$$2^x=t (t>0) \text{로 놓으면}$$

주어진 함수는

$$y=t^2-8t+a=(t-4)^2+a-16$$

즉, 함수 $y=(t-4)^2+a-16$ 은

$t=4$ 에서 최솟값 $a-16$ 을 갖는다.

따라서 $2^b=4=2^2, a-16=3$ 이므로

$$b=2, a=19$$

$$\therefore ab=38$$

166 ㉮ 3

$5^{a+x}>0, 5^{a-x}>0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$y=5^{a+x}+5^{a-x}$$

$$\geq 2\sqrt{5^{a+x} \times 5^{a-x}}$$

$$=2 \times 5^a$$

(단, 등호는 $5^{a+x}=5^{a-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립)

$$\therefore y \geq 2 \times 5^a$$

따라서 주어진 함수의 최솟값은 2×5^a 이므로

$$2 \times 5^a=250$$

$$5^a=125=5^3 \quad \therefore a=3$$

연습문제

90~92쪽

167 ㉮ ④

$$y=2^{2x-2}-5=4^{x-1}-5$$

즉, 함수 $y=2^{2x-2}-5$ 의

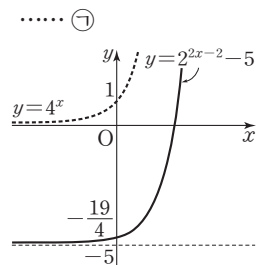
그래프는 오른쪽 그림과 같다.

② ㉮에서 밑이 1보다

크므로 x 의 값이 증

가하면 y 의 값도 증

가한다.



④ ㉠은 $y=2^x$ 과 밑이 다르므로 함수 $y=2^{2x-2}-5$ 의 그래프는 평행이동하여 함수 $y=2^x$ 의 그래프와 겹쳐질 수 없다.

⑤ 함수 $y=4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=4^{x-1}-5$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

168 ㉡ ③

①, ② $0 < \frac{1}{a} < 1$ 이므로 $a > 1$

③, ④, ⑤ $\frac{1}{a} > 1$ 이므로 $0 < a < 1$

이때 함수 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 의 밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{a}$ 의 값이 클수록 y 축에 가깝다.

즉, ③의 $\frac{1}{a}$ 의 값이 가장 크다.

따라서 a 의 값이 가장 작은 것은 ③이다.

169 ㉡ 6

함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-b=3^{x+a} \quad \therefore y=3^{x+a}+b$$

함수 $y=3^{x+a}+b$ 의 그래프의 점근선이 직선 $y=4$ 이므로 $b=4$

즉, 함수 $y=3^{x+a}+4$ 의 그래프가 점 $(1, 31)$ 을 지나므로 $31=3^{1+a}+4$

$$3^{1+a}=27=3^3, 1+a=3 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore a+b=2+4=6$$

170 ㉡ ④

$g(x)=4^x$ 라 하면 $f(x)$ 는 $g(x)$ 의 역함수이므로 $f(k)=2$ 에서 $g(2)=k$

$$\therefore k=4^2=16$$

171 ㉡ $B < C < A$

$$A=3\sqrt{3}=\sqrt{3^3}=3^{\frac{3}{2}},$$

$$B=\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{4}}=(3^{-3})^{-\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}},$$

$$C=\sqrt[3]{81}=3\sqrt[3]{3^4}=3^{\frac{4}{3}}$$

$\frac{3}{4} < \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$ 이고, 밑이 1보다 크므로

$$3^{\frac{3}{4}} < 3^{\frac{4}{3}} < 3^{\frac{3}{2}} \quad \therefore B < C < A$$

172 ㉡ $\frac{25}{4}$

$$y=9^x-3^x+1=(3^x)^2-3^x+1$$

$3^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$-2 \leq x \leq 1 \text{에서 } 3^{-2} \leq t \leq 3^1 \quad \therefore \frac{1}{9} \leq t \leq 3$$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

즉, $\frac{1}{9} \leq t \leq 3$ 일 때 함수 $y=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ 은

$t=3$ 에서 최댓값 7, $t=\frac{1}{2}$ 에서 최솟값 $\frac{3}{4}$ 을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 차는 $7-\frac{3}{4}=\frac{25}{4}$

173 ㉡ ㄱ, ㄴ

$$\text{ㄱ. } f(x+y)=a^{x+y}=a^x \times a^y=f(x)f(y)$$

$$\text{ㄴ. } f(x-y)=a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y}, f(x)-f(y)=a^x-a^y$$

$$\therefore f(x-y) \neq f(x)-f(y)$$

$$\text{ㄷ. } f(x^2)=a^{x^2}, \{f(x)\}^2=(a^x)^2=a^{2x}$$

$$\therefore f(x^2) \neq \{f(x)\}^2$$

$$\text{ㄹ. } f\left(\frac{x}{2}\right)=a^{\frac{x}{2}}=(a^x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{f(x)}$$

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

174 ㉡ -11

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼,

y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-4=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} \quad \therefore y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}+4$$

이 함수의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+2}+4 \quad \therefore y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+2}-4$$

이 함수의 그래프가 점 $(3, m)$ 을 지나므로

$$m=-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3+2}-4=-6$$

또 점 $(n, -12)$ 를 지나므로

$$-12=-\left(\frac{1}{2}\right)^{-n+2}-4$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-n+2}=8=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}, -n+2=-3$$

$$\therefore n=5$$

$$\therefore m-n=-6-5=-11$$

175 ㉠ ㄱ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. 함수 $y = \frac{1}{25} \times 5^x = 5^{x-2}$ 의 그래프는 함수 $y = 5^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄴ. $y = 5^{2x} = 25^x$
즉, $y = 5^{2x}$ 은 $y = 5^x$ 과 밑이 다르므로 함수 $y = 5^{2x}$ 의 그래프는 함수 $y = 5^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄷ. 함수 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = 5^{-x-1}$ 의 그래프는 함수 $y = 5^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄹ. 함수 $y = \frac{5^x - 2}{5} = 5^{x-1} - \frac{2}{5}$ 의 그래프는 함수 $y = 5^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 $-\frac{2}{5}$ 만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 보기의 함수에서 그 그래프가 함수 $y = 5^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

176 ㉠ 3

$$y = -3^{-x+1} + k = -\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + k$$

즉, 함수 $y = -3^{-x+1} + k$ 의 그래프는 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것과 같다.

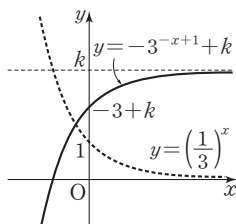
이때 이 함수의 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$-3 + k \geq 0$$

└ $x=0$ 일 때의 함수값

$$\therefore k \geq 3$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 3이다.



177 ㉠ ③

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 $a(a > 0)$, b 라 하면

$$A(a, 3^a), B\left(b, \left(\frac{1}{3}\right)^b - 6\right)$$

선분 AB의 중점의 좌표가 $(0, 2)$ 이므로

$$\frac{a+b}{2} = 0, \frac{3^a + \left(\frac{1}{3}\right)^b - 6}{2} = 2$$

$$a+b=0, 3^a + \left(\frac{1}{3}\right)^b = 10$$

$$\text{즉, } b = -a \text{이므로 } 3^a + \left(\frac{1}{3}\right)^{-a} = 10$$

$$2 \times 3^a = 10 \quad \therefore 3^a = 5$$

따라서 점 A의 y 좌표는 $3^a = 5$

178 ㉠ -1

함수 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+b} + 3$ 의 밑이 1보다 작으므로

$-3 \leq x \leq a$ 일 때 함수 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+b} + 3$ 은

$x = -3$ 에서 최댓값 $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3+b} + 3$,

$x = a$ 에서 최솟값 $\left(\frac{1}{5}\right)^{a+b} + 3$ 을 갖는다. ▶▶▶▶▶ ①

즉, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3+b} + 3 = 28$ 이므로

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-3+b} = 25 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \text{에서}$$

$$-3+b = -2 \quad \therefore b = 1 \quad \text{▶▶▶▶▶ ②}$$

또 $\left(\frac{1}{5}\right)^{a+1} + 3 = 4$ 이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^{a+1} = 1$ 에서

$$a+1 = 0 \quad \therefore a = -1 \quad \text{▶▶▶▶▶ ③}$$

$$\therefore ab = -1 \times 1 = -1 \quad \text{▶▶▶▶▶ ④}$$

단계	채점 기준	비율
①	주어진 범위에서 함수 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+b} + 3$ 의 최댓값과 최솟값 구하기	30%
②	b 의 값 구하기	30%
③	a 의 값 구하기	30%
④	ab 의 값 구하기	10%

179 ㉠ 18

$A(1, n)$, $B(1, 2)$, $C(2, n^2)$, $D(2, 4)$ 이므로

사다리꼴 ABDC의 넓이가 18 이하가 되려면

$$\frac{1}{2} \times \{(n-2) + (n^2-4)\} \times (2-1) \leq 18$$

$$n^2 + n - 42 \leq 0, (n+7)(n-6) \leq 0$$

$$\therefore -7 \leq n \leq 6$$

따라서 이 부등식을 만족시키는 3 이상의 자연수 n 의 값은 3, 4, 5, 6이므로 구하는 합은 $3+4+5+6=18$

I 접근 방법 | a 의 값의 범위를 나누어 밑의 값에 따른 합성함수의 최대, 최소를 구한다.

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$$

$$-1 \leq x \leq 2 \text{에서}$$

$$f(-1)=2, f(1)=-2, f(2)=-1 \text{이므로}$$

$$-2 \leq f(x) \leq 2$$

$$\text{함수 } (g \circ f)(x) = a^{f(x)} \text{은}$$

(i) $a > 1$ 이면

$$f(x) = 2 \text{에서 최댓값 } a^2 \text{을 갖는다.}$$

$$\text{즉, } a^2 = 16 \text{이므로}$$

$$a = 4 \quad (\because a > 1)$$

(ii) $0 < a < 1$ 이면

$$f(x) = -2 \text{에서 최댓값 } a^{-2} \text{을 갖는다.}$$

$$\text{즉, } a^{-2} = 16 \text{이므로 } \frac{1}{a^2} = 16$$

$$a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \frac{1}{4} \quad (\because 0 < a < 1)$$

(i), (ii)에서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

181 ②

I 접근 방법 | k 의 값의 범위를 나누어 주어진 함수의 최댓값을 구한다.

$$3^x + 3^{-x} = t \text{로 놓으면 } 3^x > 0, 3^{-x} > 0 \text{이므로}$$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \times 3^{-x}} = 2$$

(단, 등호는 $3^x = 3^{-x}$, 즉 $x = 0$ 일 때 성립)

$$\therefore t \geq 2$$

$9^x + 9^{-x}$ 을 t 에 대한 식으로 나타내면

$$9^x + 9^{-x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$$

이때 주어진 함수는

$$y = 2kt - (t^2 - 2) = -(t - k)^2 + 2 + k^2$$

$$t \geq 2 \text{일 때 함수 } y = -(t - k)^2 + 2 + k^2 \text{은}$$

(i) $k \geq 2$ 이면

$$t = k \text{에서 최댓값 } 2 + k^2 \text{을 갖는다.}$$

$$\text{즉, } 2 + k^2 = 2 \text{이므로 } k = 0$$

그런데 $k \geq 2$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k < 2$ 이면

$$t = 2 \text{에서 최댓값 } 4k - 2 \text{를 갖는다.}$$

$$\text{즉, } 4k - 2 = 2 \text{이므로 } k = 1$$

(i), (ii)에서 $k = 1$

02 지수함수의 활용

개념 확인

95쪽

$$182 \quad \textcircled{1} \quad (1) x = -1 \quad (2) x = -5$$

$$(3) x = 2 \quad (4) x = -\frac{3}{2}$$

$$(1) \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} = 25 \text{에서 } \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \text{이므로}$$

$$2x = -2 \quad \therefore x = -1$$

$$(2) 3^{x+1} = \frac{1}{81} \text{에서 } 3^{x+1} = 3^{-4} \text{이므로}$$

$$x + 1 = -4 \quad \therefore x = -5$$

$$(3) 4^x = 2^{6-x} \text{에서 } 2^{2x} = 2^{6-x} \text{이므로}$$

$$2x = 6 - x$$

$$3x = 6 \quad \therefore x = 2$$

$$(4) \left(\frac{1}{7}\right)^{3x+5} = 7^{x+1} \text{에서 } 7^{-3x-5} = 7^{x+1} \text{이므로}$$

$$-3x - 5 = x + 1$$

$$4x = -6 \quad \therefore x = -\frac{3}{2}$$

$$183 \quad \textcircled{1} \quad 3^x, 3^x, 1, 1, 1, 1, 0$$

$$184 \quad \textcircled{1} \quad (1) x \geq -3 \quad (2) x < \frac{5}{2}$$

$$(3) x \geq 4 \quad (4) x > 1$$

$$(1) 3^x \geq \frac{1}{27} \text{에서 } 3^x \geq 3^{-3}$$

밑이 1보다 크므로 $x \geq -3$

$$(2) 4^x < 32 \text{에서 } 2^{2x} < 2^5$$

밑이 1보다 크므로 $2x < 5$

$$\therefore x < \frac{5}{2}$$

$$(3) 25^{-3x+1} \leq 5^{-3x-10} \text{에서 } 5^{-6x+2} \leq 5^{-3x-10}$$

밑이 1보다 크므로

$$-6x + 2 \leq -3x - 10$$

$$3x \geq 12 \quad \therefore x \geq 4$$

$$(4) \left(\frac{1}{7}\right)^{2-x} > \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{2x} \text{에서 } \left(\frac{1}{7}\right)^{2-x} > \left(\frac{1}{7}\right)^x$$

밑이 1보다 작으므로

$$2 - x < x$$

$$2x > 2 \quad \therefore x > 1$$

$$185 \quad \textcircled{1} \quad 2^x, 2^x, 2, 8, 2, 2, 2, 1$$

186 ㉡ (1) $x=2$ 또는 $x=4$ (2) $x=5$ (1) $(\sqrt{5})^{2x^2+16}=25^{3x}$ 에서 $5^{x^2+8}=5^{6x}$ 이므로

$$x^2+8=6x$$

$$x^2-6x+8=0, (x-2)(x-4)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=4$$

(2) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2-x}=3^{x+4}$ 에서 $3^{-6+3x}=3^{x+4}$ 이므로

$$-6+3x=x+4, 2x=10 \quad \therefore x=5$$

187 ㉡ (1) $x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$ (2) $x=-3$ (1) $\left(\frac{4}{5}\right)^{3x^2-1}=\left(\frac{5}{4}\right)^{2x}$ 에서 $\left(\frac{4}{5}\right)^{3x^2-1}=\left(\frac{4}{5}\right)^{-2x}$ 이므로

$$3x^2-1=-2x$$

$$3x^2+2x-1=0, (x+1)(3x-1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=\frac{1}{3}$$

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x}=\left(\frac{9}{4}\right)^{3-x}$ 에서 $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-6+2x}$ 이므로

$$4x=-6+2x, 2x=-6 \quad \therefore x=-3$$

188 ㉡ ①

$$a=\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}} \text{이므로}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}=a \text{에서 } \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}=2^{\frac{2}{3}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}, x+1=-\frac{2}{3} \quad \therefore x=-\frac{5}{3}$$

189 ㉡ 45

$$\frac{7^{x^2}}{7^{3x+16}}=49 \text{에서 } 7^{x^2-3x-16}=7^2 \text{이므로}$$

$$x^2-3x-16=2$$

$$x^2-3x-18=0, (x+3)(x-6)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=6$$

따라서 $\alpha=-3, \beta=6$ 또는 $\alpha=6, \beta=-3$ 이므로

$$\alpha^2+\beta^2=(-3)^2+6^2=45$$

190 ㉡ (1) $x=2$ 또는 $x=4$ (2) $x=-1$ (1) $4^x-5 \times 2^{x+2}+64=0$ 에서

$$(2^x)^2-20 \times 2^x+64=0$$

$$2^x=t (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-20t+64=0, (t-4)(t-16)=0$$

$$\therefore t=4 \text{ 또는 } t=16$$

$$t=2^x \text{이므로 } 2^x=4=2^2 \text{ 또는 } 2^x=16=2^4$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=4$$

(2) $\left(\frac{1}{25}\right)^x+\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}=50$ 에서

$$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2+5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^x-50=0$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x=t (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2+5t-50=0$$

$$(t+10)(t-5)=0$$

$$\therefore t=5 (\because t>0)$$

$$t=\left(\frac{1}{5}\right)^x \text{이므로 } \left(\frac{1}{5}\right)^x=5=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$$

$$\therefore x=-1$$

191 ㉡ (1) $x=0$ (2) $x=1$ 또는 $x=2$ (1) $7^x+7^{-x}=2$ 의 양변에 7^x 을 곱하면

$$7^{2x}+1=2 \times 7^x$$

$$7^{2x}-2 \times 7^x+1=0$$

$$7^x=t (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-2t+1=0$$

$$(t-1)^2=0$$

$$\therefore t=1$$

$$t=7^x \text{이므로 } 7^x=1=7^0$$

$$\therefore x=0$$

(2) $3^x+3^{3-x}-12=0$ 의 양변에 3^x 을 곱하면

$$3^{2x}+27-12 \times 3^x=0$$

$$3^{2x}-12 \times 3^x+27=0$$

$$3^x=t (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-12t+27=0$$

$$(t-3)(t-9)=0$$

$$\therefore t=3 \text{ 또는 } t=9$$

$$t=3^x \text{이므로 } 3^x=3 \text{ 또는 } 3^x=9=3^2$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

192 ㉡ 32

$$a^{2x}-a^x=2 \text{에서}$$

$$(a^x)^2-a^x-2=0$$

$$a^x=t (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-t-2=0, (t+1)(t-2)=0$$

$$\therefore t=2 (\because t>0)$$

$$t=a^x \text{이므로 } a^x=2$$

$$\text{이때 } x=\frac{1}{5} \text{이므로 } a^{\frac{1}{5}}=2$$

$$\therefore a=2^5=32$$

193 ㉮ 6

$$\begin{cases} 2^{x-2} + 3^{y-1} = 5 \\ 2^{x+3} - 3^{y+2} = -17 \end{cases} \text{에서}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \times 2^x + \frac{1}{3} \times 3^y = 5 \\ 8 \times 2^x - 9 \times 3^y = -17 \end{cases}$$

$2^x = X (X > 0), 3^y = Y (Y > 0)$ 로 놓으면

$$\begin{cases} \frac{1}{4}X + \frac{1}{3}Y = 5 \\ 8X - 9Y = -17 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $X=8, Y=9$

즉, $2^x = 8 = 2^3, 3^y = 9 = 3^2$ 이므로

$$x=3, y=2$$

따라서 $\alpha=3, \beta=2$ 이므로 $\alpha\beta=6$

194 ㉮ (1) $x=1$ (2) $x=-1$ 또는 $x=4$

(1) $x^{5x+4} = x^{2x+3}$ 에서

(i) 밑이 같으면

$$5x+4=2x+3, 3x=-1 \quad \therefore x=-\frac{1}{3}$$

그런데 $x > 0$ 이므로 해는 없다.

(ii) 밑이 1이면

$$x=1$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=1$

(2) $(2x+3)^{x+4} = (2x+3)^{x^2-8}$ 에서

(i) 지수가 같으면

$$x+4=x^2-8$$

$$x^2-x-12=0, (x+3)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=4$$

그런데 $x > -\frac{3}{2}$ 이므로 $x=4$

(ii) 밑이 1이면

$$2x+3=1 \quad \therefore x=-1$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x=-1 \text{ 또는 } x=4$$

195 ㉮ (1) $x=6$ (2) $x=1$ 또는 $x=2$

(1) $6^{3x+2} = x^{3x+2}$ 에서

(i) 밑이 같으면 $x=6$

(ii) 지수가 0이면

$$3x+2=0 \quad \therefore x=-\frac{2}{3}$$

그런데 $x > 0$ 이므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=6$

(2) $(x+1)^{x-2} = (3x-1)^{x-2}$ 에서

(i) 밑이 같으면

$$x+1=3x-1, 2x=2 \quad \therefore x=1$$

(ii) 지수가 0이면

$$x-2=0 \quad \therefore x=2$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x=1 \text{ 또는 } x=2$$

196 ㉮ $x=1$ 또는 $x=2$

$(x^x)^x = x^x \times x^x$ 에서 $x^x = x^{2x}$

(i) 지수가 같으면

$$x^2=2x$$

$$x^2-2x=0, x(x-2)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x=2$

(ii) 밑이 1이면 $x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x=1 \text{ 또는 } x=2$$

197 ㉮ ⑤

$2^{2x-4} = (6x+7)^{x-2}$ 에서 $(x^2)^{x-2} = (6x+7)^{x-2}$

(i) 밑이 같으면

$$x^2=6x+7$$

$$x^2-6x-7=0, (x+1)(x-7)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=7$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x=7$

(ii) 지수가 0이면

$$x-2=0 \quad \therefore x=2$$

(i), (ii)에서 모든 실근의 합은

$$2+7=9$$

198 ㉮ ④

$$16^x - 4^{x+3} + 169 = 0 \text{에서}$$

$$(4^x)^2 - 64 \times 4^x + 169 = 0$$

$4^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$t^2 - 64t + 169 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

주어진 방정식의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식 ⑦

의 두 근은 $4^\alpha, 4^\beta$

⑦에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$4^\alpha \times 4^\beta = 169$$

$$4^{\alpha+\beta} = 2^{2(\alpha+\beta)} = 13^2$$

$$\therefore 2^{\alpha+\beta} = 13$$

199 ㉡ 4

$9^x - 18 \times 3^{x-1} - 2k = 0$ 에서 $(3^x)^2 - 6 \times 3^x - 2k = 0$

$3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 6t - 2k = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$t = 3^x > 0$ 이므로 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 은 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 + 2k > 0 \quad \therefore k > -\frac{9}{2}$$

(ii) (두 근의 합) > 0 이어야 하므로 $6 > 0$

(iii) (두 근의 곱) > 0 이어야 하므로

$$-2k > 0 \quad \therefore k < 0$$

(i)~(iii)에서 k 의 값의 범위는 $-\frac{9}{2} < k < 0$

따라서 정수 k 는 $-4, -3, -2, -1$ 의 4개이다.

200 ㉡ 2

$2a^{2x} - 7a^x + 16 = 0$ 에서

$$2 \times (a^x)^2 - 7 \times a^x + 16 = 0$$

$a^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$2t^2 - 7t + 16 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 a^α, a^β

$\textcircled{1}$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a^\alpha \times a^\beta = 8, \quad a^{\alpha+\beta} = 2^3$$

이때 $\alpha + \beta = 3$ 이므로 $a^3 = 2^3$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

201 ㉡ 26

두 함수 $f(x) = 25^x + a, g(x) = 2 \times 5^{x+1} + 2$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식

$$25^x + a = 2 \times 5^{x+1} + 2, \text{ 즉 } (5^x)^2 - 10 \times 5^x + a - 2 = 0$$

이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$5^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 10t + a - 2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

방정식 $(5^x)^2 - 10 \times 5^x + a - 2 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 은 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-5)^2 - (a-2) > 0 \quad \therefore a < 27$$

(ii) (두 근의 합) > 0 이어야 하므로 $10 > 0$

(iii) (두 근의 곱) > 0 이어야 하므로

$$a - 2 > 0 \quad \therefore a > 2$$

(i)~(iii)에서 a 의 값의 범위는 $2 < a < 27$

따라서 정수 a 의 최댓값은 26이다.

202 ㉡ (1) $x \geq -5$ (2) $\frac{1}{2} < x < 3$

$$(1) 3^{2x+1} \leq (3\sqrt{3})^{6x+24} \text{에서 } 3^{2x+1} \leq 3^{9x+36}$$

밑이 1보다 크므로

$$2x+1 \leq 9x+36$$

$$7x \geq -35 \quad \therefore x \geq -5$$

$$(2) 7^{x-3} > 49^{x(x-3)} \text{에서 } 7^{x-3} > 7^{2x(x-3)}$$

밑이 1보다 크므로

$$x-3 > 2x(x-3)$$

$$2x^2 - 7x + 3 < 0, (2x-1)(x-3) < 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} < x < 3$$

203 ㉡ (1) $x > 4$ (2) $x \leq -8$ 또는 $x \geq 0$

$$(1) \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} > \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-3}$$

밑이 1보다 작으므로

$$2x+1 < 3x-3$$

$$\therefore x > 4$$

$$(2) \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} - 0.04^{-4x} \leq 0 \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}, \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-8x}$$

밑이 1보다 작으므로

$$x^2 \geq -8x$$

$$x^2 + 8x \geq 0, x(x+8) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -8 \text{ 또는 } x \geq 0$$

204 ㉡ ②

$$4^x \times 5^{2x-1} \leq 2 \times 10^{x+3} \text{에서}$$

$$2^{2x} \times 5^{2x} \leq 10 \times 10^{x+3}$$

$$10^{2x} \leq 10^{x+4}$$

밑이 1보다 크므로

$$2x \leq x+4 \quad \therefore x \leq 4$$

따라서 자연수 x 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

205 ㉮ $-\frac{1}{2} \leq x < 3$

(i) $3^{x^2-4x} < (\sqrt{3})^{6-4x}$ 에서
 $3^{x^2-4x} < 3^{3-2x}$

밑이 1보다 크므로

$$x^2 - 4x < 3 - 2x$$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$(x+1)(x-3) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 3$$

(ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^{5x-4} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{5-3x}$ 에서

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{5x-4} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{-5+3x}$$

밑이 1보다 작으므로

$$5x - 4 \geq -5 + 3x$$

$$2x \geq -1 \quad \therefore x \geq -\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 연립부등식의 해는

$$-\frac{1}{2} \leq x < 3$$

206 ㉮ (1) $1 < x < 2$ (2) $x < 1$ 또는 $x > 2$

(1) $9^x - 4 \times 3^{x+1} + 27 < 0$ 에서

$$(3^x)^2 - 12 \times 3^x + 27 < 0$$

$$3^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 12t + 27 < 0$$

$$(t-3)(t-9) < 0$$

$$\therefore 3 < t < 9$$

$$t = 3^x \text{이므로 } 3 < 3^x < 9$$

$$3^1 < 3^x < 3^2$$

밑이 1보다 크므로

$$1 < x < 2$$

(2) $25^x - 6 \times 5^{x+1} + 125 > 0$ 에서

$$(5^x)^2 - 30 \times 5^x + 125 > 0$$

$$5^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 30t + 125 > 0$$

$$(t-5)(t-25) > 0$$

$$\therefore t < 5 \text{ 또는 } t > 25$$

그런데 $t > 0$ 이므로

$$0 < t < 5 \text{ 또는 } t > 25$$

$$t = 5^x \text{이므로 } 0 < 5^x < 5 \text{ 또는 } 5^x > 25$$

$$5^x < 5^1 \text{ 또는 } 5^x > 5^2$$

밑이 1보다 크므로

$$x < 1 \text{ 또는 } x > 2$$

207 ㉮ (1) $-3 \leq x \leq -2$

(2) $x < -2$ 또는 $x > -1$

(1) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} + 32 \leq 0$ 에서

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 32 \leq 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 12t + 32 \leq 0, \ (t-4)(t-8) \leq 0$$

$$\therefore 4 \leq t \leq 8$$

$$t = \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{이므로 } 4 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 8$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

밑이 1보다 작으므로

$$-3 \leq x \leq -2$$

(2) $\left(\frac{1}{36}\right)^x - 42 \times \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^{2x} + 216 > 0$ 에서

$$\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^x\right\}^2 - 42 \times \left(\frac{1}{6}\right)^x + 216 > 0$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 42t + 216 > 0, \ (t-6)(t-36) > 0$$

$$\therefore t < 6 \text{ 또는 } t > 36$$

그런데 $t > 0$ 이므로

$$0 < t < 6 \text{ 또는 } t > 36$$

$$t = \left(\frac{1}{6}\right)^x \text{이므로 } 0 < \left(\frac{1}{6}\right)^x < 6 \text{ 또는 } \left(\frac{1}{6}\right)^x > 36$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^x < \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} \text{ 또는 } \left(\frac{1}{6}\right)^x > \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$$

밑이 1보다 작으므로

$$x < -2 \text{ 또는 } x > -1$$

208 ㉮ ④

$$4^x - 10 \times 2^x + 16 \leq 0 \text{에서}$$

$$(2^x)^2 - 10 \times 2^x + 16 \leq 0$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 10t + 16 \leq 0$$

$$(t-2)(t-8) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq t \leq 8$$

$$t = 2^x \text{이므로 } 2 \leq 2^x \leq 8$$

$$2^1 \leq 2^x \leq 2^3$$

밑이 1보다 크므로

$$1 \leq x \leq 3$$

따라서 자연수 x 의 값은 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$$1 + 2 + 3 = 6$$

209 ㉠ -25

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} + a \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + b < 0 \text{에서}$$

$$4 \times \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^x \right\} + a \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + b < 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$4t^2 + at + b < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

주어진 부등식의 해가 $-3 < x < 2$ 이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \text{에서 } \frac{1}{4} < t < 8$$

즉, 이차방의 계수가 4이고 해가 $\frac{1}{4} < t < 8$ 인 t 에 대한 이차부등식은

$$4\left(t - \frac{1}{4}\right)(t - 8) < 0$$

$$\therefore 4t^2 - 33t + 8 < 0$$

이 부등식이 $\textcircled{1}$ 과 일치하므로

$$a = -33, b = 8 \quad \therefore a + b = -25$$

210 ㉠ $0 < x < 1$ 또는 $x > 2$

$$x^{2x-1} > x^{x+1} \text{에서}$$

(i) $0 < x < 1$ 일 때,

$$2x - 1 < x + 1 \quad \therefore x < 2$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$

(ii) $x = 1$ 일 때,

$1 > 1$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

따라서 해는 없다.

(iii) $x > 1$ 일 때,

$$2x - 1 > x + 1 \quad \therefore x > 2$$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$0 < x < 1 \text{ 또는 } x > 2$$

211 ㉠ $k > \frac{9}{2}$

$$3^{2x} - 2 \times 3^{x+1} + 2k > 0 \text{에서}$$

$$(3^x)^2 - 6 \times 3^x + 2k > 0$$

$$3^x = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 6t + 2k > 0$$

$$f(t) = t^2 - 6t + 2k \text{라 하면}$$

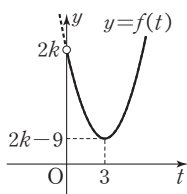
$$f(t) = (t - 3)^2 + 2k - 9$$

$t > 0$ 에서 $f(t)$ 의 최솟값은

$$2k - 9 \text{이므로 부등식 } f(t) > 0$$

이 항상 성립하려면

$$2k - 9 > 0 \quad \therefore k > \frac{9}{2}$$



212 ㉠ ④

$$(x-2)^{2x-5} \leq (x-2)^7 \text{에서}$$

(i) $0 < x - 2 < 1$, 즉 $2 < x < 3$ 일 때,

$$2x - 5 \geq 7 \quad \therefore x \geq 6$$

그런데 $2 < x < 3$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x - 2 = 1$, 즉 $x = 3$ 일 때,

$1 \leq 1$ 이므로 부등식이 성립한다.

따라서 $x = 3$ 은 해이다.

(iii) $x - 2 > 1$, 즉 $x > 3$ 일 때,

$$2x - 5 \leq 7 \quad \therefore x \leq 6$$

그런데 $x > 3$ 이므로 $3 < x \leq 6$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$3 \leq x \leq 6$$

따라서 자연수 x 는 3, 4, 5, 6의 4개이다.

213 ㉠ 16

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + k \geq 0 \text{에서}$$

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^x \right\}^2 - 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + k \geq 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 8t + k \geq 0$$

$$f(t) = t^2 - 8t + k \text{라 하면}$$

$$f(t) = (t - 4)^2 + k - 16$$

$t > 0$ 에서 $f(t)$ 의 최솟값은

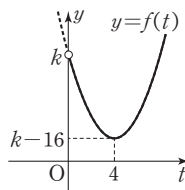
$$k - 16 \text{이므로 부등식 } f(t) \geq 0$$

이 항상 성립하려면

$$k - 16 \geq 0$$

$$\therefore k \geq 16$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 16이다.



214 ㉠ ④

미생물의 양이 2시간이 지나면 초기 양의 8배가 되므로

$$A \times 2^{2k} = 8A, 2^{2k} = 2^3$$

$$\therefore k = \frac{3}{2}$$

즉, $f(t) = A \times 2^{\frac{3}{2}t}$ 이므로

$$A \times 2^{\frac{3}{2}a} = 512A \text{에서}$$

$$2^{\frac{3}{2}a} = 2^9, \frac{3}{2}a = 9$$

$$\therefore a = 6$$

215 ㉮ 10장

공기청정기로 유입된 오염 물질의 양을 P ($P > 0$)라 하면

필터 A를 20장 사용한 후 남아 있는 오염 물질의 양은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}P$

필터 B를 n 장 사용한 후 남아 있는 오염 물질의 양은 $\left(\frac{1}{4}\right)^nP$

즉, $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}P = \left(\frac{1}{4}\right)^nP$ 이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}, 20 = 2n$$

$$\therefore n = 10$$

따라서 필터 A를 20장 사용하는 것과 동일한 효과를 얻기 위해서는 필터 B를 10장 사용해야 한다.

216 ㉮ 4

최초 구매 가격이 20만 원인 A제품의 1년 후의 거래 가격이 15만 원이므로

$$15 = 20k$$

$$\therefore k = \frac{3}{4}$$

최초 구매 가격이 256만 원인 B제품의 n 년 후의 거래 가격이 81만 원 이하로 떨어진다고 하면

$$256 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 81$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{81}{256}, \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

밑이 1보다 작으므로 $n \geq 4$

따라서 B제품의 거래 가격이 81만 원 이하로 떨어지는 것은 최소 4년 후이므로

$$m = 4$$

217 ㉮ ②

처음 혈중 농도가 $1.25 \mu\text{g/mL}$ 인 치료제의 x 시간 후 혈중 농도가 $0.64 \mu\text{g/mL}$ 이하가 된다고 하면

$$1.25 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right)^x = 1.25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^x \leq 0.64$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x \leq \frac{64}{125}, \left(\frac{4}{5}\right)^x \leq \left(\frac{4}{5}\right)^3$$

밑이 1보다 작으므로 $x \geq 3$

따라서 치료제의 혈중 농도가 처음으로 $0.64 \mu\text{g/mL}$ 이하가 되는 것은 3시간 후이다.

연습문제

112~114쪽

218 ㉮ ①

주어진 방정식의 한 근이 4이므로

$$3^{x^2-3x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x+k} \text{에 } x=4 \text{를 대입하면}$$

$$3^{16-12} = \left(\frac{1}{9}\right)^{4+k}$$

$$3^4 = 3^{-8-2k}$$

$$4 = -8 - 2k, 2k = -12$$

$$\therefore k = -6$$

219 ㉮ $-\frac{11}{3}$

$$4^{-x+2} - 8^{x^2+3x} = 0 \text{에서 } 2^{-2x+4} = 2^{3x^2+9x} \text{이므로}$$

$$-2x+4 = 3x^2+9x$$

$$3x^2+11x-4=0, (x+4)(3x-1)=0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = \frac{1}{3}$$

따라서 구하는 모든 실근의 합은

$$-4 + \frac{1}{3} = -\frac{11}{3}$$

220 ㉮ ③

$$(2x)^{x^2-15} = (2x)^{5x+9} \text{에서}$$

(i) 지수가 같으면

$$x^2 - 15 = 5x + 9$$

$$x^2 - 5x - 24 = 0, (x+3)(x-8) = 0$$

$$\therefore x = 8 (\because x > 0)$$

(ii) 밑이 1이면

$$2x = 1 \quad \therefore x = \frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 8$$

따라서 구하는 모든 실근의 곱은

$$\frac{1}{2} \times 8 = 4$$

221 ㉮ ②

$$\frac{81^x}{27} \geq 3^x \text{에서 } 3^{4x-3} \geq 3^x$$

밑이 1보다 크므로

$$4x - 3 \geq x$$

$$x^2 - 4x + 3 \leq 0, (x-1)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 3$$

따라서 $\alpha = 1, \beta = 3$ 이므로 $\alpha + \beta = 4$

222 ㉡ 0, 1

$$3^{2x+1} - 28 \times 3^x + 9 < 0 \text{에서}$$

$$3 \times (3^x)^2 - 28 \times 3^x + 9 < 0$$

$$3^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$3t^2 - 28t + 9 < 0$$

$$(3t-1)(t-9) < 0 \quad \therefore \frac{1}{3} < t < 9$$

$$t = 3^x \text{이므로}$$

$$\frac{1}{3} < 3^x < 9$$

$$3^{-1} < x < 3^2$$

밑이 1보다 크므로

$$-1 < x < 2$$

따라서 구하는 정수 x 의 값은 0, 1이다.

223 ㉡ $-3 < x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$

$$(x+3)^{2x+7} \leq (x+3)^{6x-5} \text{에서}$$

(i) $0 < x+3 < 1$, 즉 $-3 < x < -2$ 일 때,

$$2x+7 \geq 6x-5$$

$$4x \leq 12 \quad \therefore x \leq 3$$

그런데 $-3 < x < -2$ 이므로

$$-3 < x < -2$$

(ii) $x+3=1$, 즉 $x=-2$ 일 때,

$$1 \leq 1 \text{이므로 부등식이 성립한다.}$$

따라서 $x=-2$ 는 해이다.

(iii) $x+3 > 1$, 즉 $x > -2$ 일 때,

$$2x+7 \leq 6x-5$$

$$4x \geq 12 \quad \therefore x \geq 3$$

그런데 $x > -2$ 이므로

$$x \geq 3$$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$-3 < x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 3$$

224 ㉡ $x=0$

$$5^x + 5^{-x} = t \ (t \geq 2) \text{로 놓으면} \quad \blacktriangleleft 5^x + 5^{-x} \geq 2\sqrt{5^x \times 5^{-x}} = 2$$

$$25^x + 25^{-x} = (5^x + 5^{-x})^2 - 2 \quad (\text{단, 등호는 } x=0 \text{일 때 성립})$$

$$= t^2 - 2$$

$$\text{이므로 주어진 방정식은 } (t^2 - 2) + 2t - 6 = 0$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$(t+4)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 2 \ (\because t \geq 2)$$

$$\text{따라서 } 5^x + 5^{-x} = 2 \text{이므로 } x = 0$$

|다른 풀이|

$$5^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면 주어진 방정식은}$$

$$t^2 + \frac{1}{t^2} + 2\left(t + \frac{1}{t}\right) - 6 = 0$$

$$t^4 + 2t^3 - 6t^2 + 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2(t^2 + 4t + 1) = 0$$

$$\therefore t = 1 \ (\because t > 0)$$

$$t = 5^x \text{이므로}$$

$$5^x = 1 = 5^0 \quad \therefore x = 0$$

225 ㉡ 1

점 A의 x 좌표를 a ($a > 0$)라 하면

$$2\overline{AP} = \overline{BQ} \text{이므로 점 B의 } x \text{좌표는 } 2a$$

두 점 A, B는 함수 $y=3^x$ 의 그래프 위에 있으므로

$$A(a, 3^a), B(2a, 3^{2a})$$

$$\text{이때 } \overline{PQ} = 3^{2a} - 3^a \text{이므로 } 3^{2a} - 3^a = 6$$

$$3^a = t \ (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 - t - 6 = 0$$

$$(t+2)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 3 \ (\because t > 0)$$

$$\text{즉, } 3^a = 3 \text{이므로 } a = 1$$

$$\text{따라서 } \overline{AP} = a = 1$$

226 ㉡ ④

$$4^x - 2^{x+3} + 10 = 0 \text{에서}$$

$$(2^x)^2 - 8 \times 2^x + 10 = 0$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 8t + 10 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

주어진 방정식의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식 ①

의 두 근은 $2^\alpha, 2^\beta$

①에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2^\alpha + 2^\beta = 8, 2^\alpha \times 2^\beta = 10$$

$$\begin{aligned} \therefore 4^\alpha + 4^\beta &= (2^\alpha)^2 + (2^\beta)^2 \\ &= (2^\alpha + 2^\beta)^2 - 2 \times 2^\alpha \times 2^\beta \\ &= 8^2 - 2 \times 10 = 44 \end{aligned}$$

227 ㉡ ④

$$4^x - k \times 2^{x+1} + 16 = 0 \text{에서}$$

$$(2^x)^2 - 2k \times 2^x + 16 = 0$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2kt + 16 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$t = 2^x > 0$ 이므로 주어진 방정식이 오직 하나의 실근을

가지면 이차방정식 ①은 양수인 중근을 갖는다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 16 = 0 \quad \therefore k = -4 \text{ 또는 } k = 4$$

(ii) (두 근의 합) > 0 이어야 하므로

$$2k > 0 \quad \therefore k > 0$$

(iii) (두 근의 곱) > 0 이어야 하므로 $16 > 0$

(i)~(iii)에서 $k=4$

즉, ㉠에서 $t^2 - 8t + 16 = 0$

$$(t-4)^2 = 0 \quad \therefore t = 4$$

$$t = 2^x \text{이므로 } 2^x = 4 = 2^2 \quad \therefore x = 2 \quad \therefore a = 2$$

따라서 $k=4$, $a=2$ 이므로 $k+a=6$

228 ㉠ 8

$$(2^x - 64) \left\{ 125 - \left(\frac{1}{5} \right)^x \right\} < 0 \text{에서}$$

(i) $2^x - 64 > 0$, $125 - \left(\frac{1}{5} \right)^x < 0$ 일 때,

$$2^x > 64 \text{에서 } 2^x > 2^6$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x > 6 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$125 < \left(\frac{1}{5} \right)^x \text{에서 } \left(\frac{1}{5} \right)^{-3} < \left(\frac{1}{5} \right)^x$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } x < -3 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분은 없다.

(ii) $2^x - 64 < 0$, $125 - \left(\frac{1}{5} \right)^x > 0$ 일 때,

$$2^x < 64 \text{에서 } 2^x < 2^6$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x < 6 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$125 > \left(\frac{1}{5} \right)^x \text{에서 } \left(\frac{1}{5} \right)^{-3} > \left(\frac{1}{5} \right)^x$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } x > -3 \quad \dots\dots \text{㉣}$$

㉢, ㉣의 공통부분은 $-3 < x < 6$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$-3 < x < 6$$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, \dots, 5$ 의 8개이다.

229 ㉠ $a < 1$

주어진 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 이차방정식 $x^2 - 2(2^a + 1)x - 3(2^a - 5) = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-2^a - 1)^2 + 3(2^a - 5) < 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$(2^a)^2 + 5 \times 2^a - 14 < 0$$

$$2^a = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 + 5t - 14 < 0, \ (t+7)(t-2) < 0$$

$$\therefore 0 < t < 2 \ (\because t > 0) \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$t = 2^a \text{이므로 } 0 < 2^a < 2$$

$$2^a < 2^1$$

밑이 1보다 크므로

$$a < 1 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

단계	채점 기준	비율
①	주어진 부등식이 성립할 조건을 이용하여 2^a 꼴이 반복되는 지수부등식 세우기	30 %
②	$2^a = t \ (t > 0)$ 로 놓고 t 에 대한 부등식 풀기	40 %
③	실수 a 의 값의 범위 구하기	30 %

230 ㉠ ⑤

x 년 후 ^{14}C 의 남아 있는 양이 처음으로 62.5 g 이하가 된다고 하면

$$1000 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{x}{5730}} \leq 62.5, \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{x}{5730}} \leq \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{x}{5730}} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^4, \frac{x}{5730} \geq 4$$

밑이 1보다 작으므로 $x \geq 22920$

따라서 ^{14}C 의 남아 있는 양이 처음으로 62.5 g 이하가 되는 것은 22920년 후이다.

231 ㉠ 16

$A(-a, k) \ (a > 0)$, $B(b, k)$ 라 하면

$$\overline{AC} : \overline{CB} = 1 : 5 \text{에서 } a : b = 1 : 5$$

$$\therefore b = 5a \quad \dots\dots \text{㉠}$$

두 점 A, B의 y 좌표가 같으므로

$$f(-a) = g(b) \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{-a-1} = 4^{b-1}, 2^{a+1} = 2^{2b-2}$$

$$a+1 = 2b-2$$

$$\therefore a-2b = -3 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = \frac{1}{3}, b = \frac{5}{3}$$

$$\therefore A\left(-\frac{1}{3}, k\right), B\left(\frac{5}{3}, k\right)$$

따라서 점 $B\left(\frac{5}{3}, k\right)$ 가 함수 $g(x) = 4^{x-1}$ 의 그래프 위에 있으므로

$$k = 4^{\frac{5}{3}-1} = 4^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore k^3 = \left(4^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 4^2 = 16$$

232 ㉔ ⑤

$$4^x - k \times 2^{x+2} + 4k + 44 = 0 \text{에서}$$

$$(2^x)^2 - 4k \times 2^x + 4k + 44 = 0$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 4kt + 4k + 44 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

주어진 방정식의 두 실근을 $\alpha, 2\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라 하면 이차방정식 ①의 두 근은 $2^\alpha, 2^{2\alpha}$

①에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2^\alpha + 2^{2\alpha} = 4k, \quad 2^\alpha \times 2^{2\alpha} = 4k + 44$$

$$2^\alpha = m \ (m > 0) \text{으로 놓으면}$$

$$m + m^2 = 4k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$m^3 = 4k + 44 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②을 ③에 대입하여 정리하면

$$m^3 - m^2 - m - 44 = 0$$

$$(m-4)(m^2+3m+11)=0$$

$$\therefore m=4 \ (\because m^2+3m+11 > 0)$$

이를 ②에 대입하면

$$4k = 4 + 4^2 = 20 \quad \therefore k=5$$

233 ㉔ 3

㉔ 접근 방법 a 의 값의 범위를 나누어 주어진 부등식이 성립하도록 하는 조건을 구한다.

$$9^x - 2a \times 3^{x+1} \geq -81 \text{에서}$$

$$(3^x)^2 - 6a \times 3^x + 81 \geq 0$$

$$3^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 6at + 81 \geq 0$$

$$f(t) = t^2 - 6at + 81 \text{이라 하면}$$

$$f(t) = (t-3a)^2 + 81 - 9a^2$$

$t > 0$ 에서 부등식 $f(t) \geq 0$ 이 항상 성립하려면

(i) $3a \geq 0$, 즉 $a \geq 0$ 일 때,

$$81 - 9a^2 \geq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$-3 \leq a \leq 3$$

그런데 $a \geq 0$ 이므로

$$0 \leq a \leq 3$$

(ii) $3a < 0$, 즉 $a < 0$ 일 때,

$$f(0) \geq 0 \text{이어야 한다.}$$

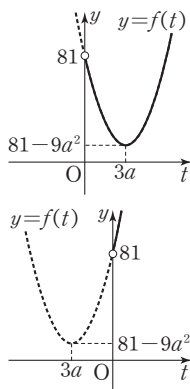
$$\text{이때 } f(0) = 81 \geq 0 \text{이므로}$$

모든 실수 t 에 대하여 성립한다.

$$\therefore a < 0$$

(i), (ii)에서 $a \leq 3$

따라서 실수 a 의 최댓값은 3이다.



01 로그함수

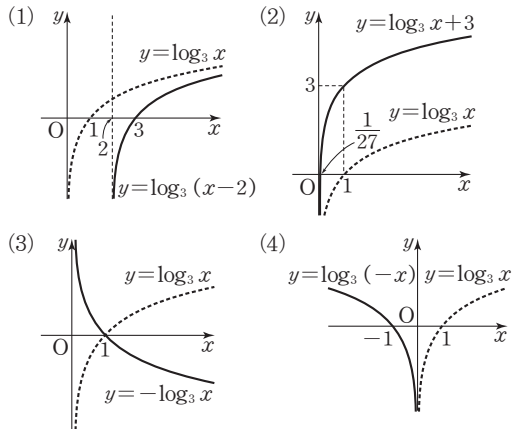
개념 확인

119쪽

234 ㉔ ㉒, ㉓, ㉔

235 ㉔ (1) -1 (2) 0 (3) 4 (4) -6

236 ㉔ 풀이 참조



237 ㉔ (1) $\log_4 \sqrt{32} < \log_4 6$

$$(2) \log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{9} < \log_{\frac{1}{6}} 0.01$$

(1) $\sqrt{32} < 6$ 이고, 밑이 1보다 크므로

$$\log_4 \sqrt{32} < \log_4 6$$

(2) $0.01 < \frac{1}{9}$ 이고, 밑이 1보다 작으므로

$$\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{9} < \log_{\frac{1}{6}} 0.01$$

유제

121~129쪽

238 ㉔ ③

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

② 함수 $y=\log_5 x$ 의 역함수는

$$y=5^x \text{이므로 함수}$$

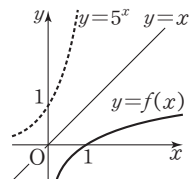
$$y=\log_5 x \text{의 그래프는 함수}$$

$$y=5^x \text{의 그래프와 직선 } y=x \text{에 대하여 대칭이다.}$$

③ $f(x)=\log_5 x$ 에서 밑이 1보다 크므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

$$\text{따라서 } x_1 < x_2 \text{이면 } f(x_1) < f(x_2) \text{이다.}$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

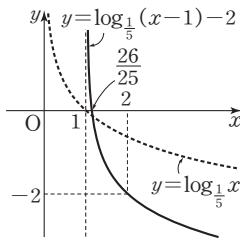


239 ㉮ 풀이 참조

(1) 함수 $y = \log_{\frac{1}{5}}(x-1) - 2$ 의 그래프는 함수

$y = \log_{\frac{1}{5}} x$ 의 그래프

를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

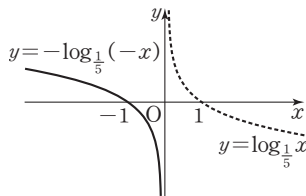


$\therefore$ 정의역: $\{x | x > 1\}$, 점근선의 방정식: $x = 1$

(2) 함수 $y = -\log_{\frac{1}{5}}(-x)$ 의 그래프는 함수

$y = \log_{\frac{1}{5}} x$ 의 그

래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x | x < 0\}$, 점근선의 방정식: $x = 0$

240 ㉮ 6

$y = \log_4(-x^2 + x + 12)$ 에서

$-x^2 + x + 12 > 0$ 이므로

$x^2 - x - 12 < 0$, $(x+3)(x-4) < 0$

$\therefore A = \{x | -3 < x < 4\}$

따라서 집합 A 의 원소 중 정수는

$-2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 6개이다.

241 ㉮ 제2사분면

$y = \log_{\frac{1}{3}}(-9x+18)$

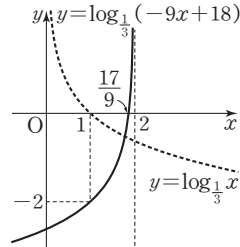
$= \log_{\frac{1}{3}} 9 + \log_{\frac{1}{3}}(-x+2)$

$= \log_{\frac{1}{3}}(-x+2) - 2$

함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(-9x+18)$ 의 그래프는 함수

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프를 y

축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(-9x+18)$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은 제2사분면이다.

242 ㉮ -12

함수 $y = \log_5 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y - b = \log_5(x - a) \quad \therefore y = \log_5(x - a) + b$

이 식이 $y = \log_5(125x + 500)$ 과 일치하므로

$y = \log_5(125x + 500)$

$= \log_5 125 + \log_5(x + 4) = \log_5(x + 4) + 3$

따라서 $a = -4$, $b = 3$ 이므로 $ab = -12$

243 ㉮ 9

함수 $y = \log_3 9x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y - (-4) = \log_3 9x \quad \therefore y = \log_3 9x - 4$

이 함수의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$y = -\log_3 9x + 4 = \log_3 81 - \log_3 9x = \log_3 \frac{9}{x}$

이 식이 $y = \log_3 \frac{a}{x}$ 와 일치하므로 $a = 9$

244 ㉮ 5

주어진 함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = -3$ 이므로

$a = 3$

따라서 함수 $y = \log_3(x+3) + b$ 의 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$3 = \log_3(0+3) + b$, $3 = 1 + b \quad \therefore b = 2$

$\therefore a + b = 3 + 2 = 5$

245 ㉮ ㄱ, ㄴ

ㄱ. $y = \log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$

즉, 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의

그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

ㄴ. $y = -\log_{\frac{1}{2}} 2x = \log_2 2x = \log_2 x + 1$

즉, 함수 $y = -\log_{\frac{1}{2}} 2x$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의

그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

ㄷ. $y = 2 \log_2 x = \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\sqrt{2}} x$

즉, $y = 2 \log_2 x$ 는 $y = \log_2 x$ 와 밑이 다르므로 함수 $y = 2 \log_2 x$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

$$\therefore y = \frac{1}{2} \log_4 (x+2) - 1 = \log_{4^2} (x+2) - 1$$

$$= \log_{16} (x+2) - 1$$

즉, $y = \frac{1}{2} \log_4 (x+2) - 1$ 은 $y = \log_2 x$ 와 밀이

다르므로 함수 $y = \frac{1}{2} \log_4 (x+2) - 1$ 의 그래프는

함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

따라서 보기의 함수에서 그 그래프가 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

246 ㉓ ③

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프

는 점 (a, c) 를 지나므로

$$c = \log_{\frac{1}{2}} a$$

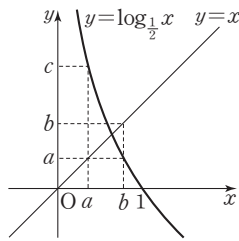
$$\therefore a = \left(\frac{1}{2}\right)^c = 2^{-c}$$

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프

는 점 (b, a) 를 지나므로

$$a = \log_{\frac{1}{2}} b \quad \therefore b = \left(\frac{1}{2}\right)^a = 2^{-a}$$

$$\therefore 2^{-a-c} = 2^{-a} \times 2^{-c} = ab$$

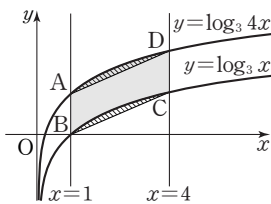


247 ㉓ ②

$$y = \log_3 4x = \log_3 x + \log_3 4$$

즉, 함수 $y = \log_3 4x$ 의 그래프는 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\log_3 4$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는 평행사변형 ABCD의 넓이와 같다.



이때 $\overline{AB} = \log_3 4$ 이고 두 직선 $x=1$, $x=4$ 사이의 거리는 3이므로 구하는 넓이는

$$\log_3 4 \times 3 = 3 \log_3 4$$

248 ㉓ 27

$$A(k, \log_3 k), B(k, \log_{27} k)$$

이때 $\overline{AB} = 2$ 이므로 $\log_3 k - \log_{27} k = 2$

$$\log_3 k - \frac{1}{3} \log_3 k = 2, \quad \frac{2}{3} \log_3 k = 2, \quad \log_3 k = 3$$

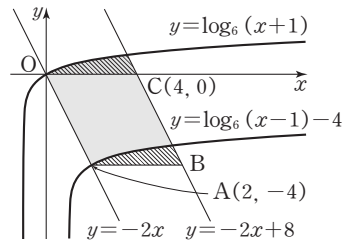
$$\therefore k = 3^3 = 27$$

249 ㉓ 16

함수 $y = \log_6 (x-1) - 4$ 의 그래프는 함수

$y = \log_6 (x+1)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이다.

직선 $y = -2x$ 와 함수 $y = \log_6 (x-1) - 4$ 의 그래프의 교점을 A, 점 A를 지나고 x 축에 평행한 직선과 직선 $y = -2x + 8$ 의 교점을 B, 직선 $y = -2x + 8$ 과 x 축의 교점을 C라 하자.



이때 위의 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는 평행사변형 OABC의 넓이와 같다. 점 A는 점 O를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이므로 $A(2, -4)$ 이고, 점 C의 x 좌표는 $-2x + 8 = 0$ 에서 $x = 4$ 이므로 $C(4, 0)$ 이다.

따라서 $\overline{CO} = 4$ 이고 점 A의 y 좌표는 -4 이므로

구하는 넓이는 $4 \times 4 = 16$

250 ㉓ (1) $y = \log_3 \left(\frac{x+1}{2}\right) + 2$

$$(2) y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-6} + 4$$

$$(1) y = 2 \times 3^{x-2} - 1 \text{에서 } y+1 = 2 \times 3^{x-2}$$

$$\frac{y+1}{2} = 3^{x-2}$$

로그의 정의에 의하여

$$x-2 = \log_3 \left(\frac{y+1}{2}\right)$$

$$\therefore x = \log_3 \left(\frac{y+1}{2}\right) + 2$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \log_3 \left(\frac{x+1}{2}\right) + 2$$

$$(2) y = \log_{\frac{1}{5}} (x-4) + 6 \text{에서 } y-6 = \log_{\frac{1}{5}} (x-4)$$

로그의 정의에 의하여

$$x-4 = \left(\frac{1}{5}\right)^{y-6} \quad \therefore x = \left(\frac{1}{5}\right)^{y-6} + 4$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-6} + 4$$

251 ㉮ ⑤

$$y = \log_7(x-1) + 6 \text{에서 } y-6 = \log_7(x-1)$$

로그의 정의에 의하여

$$x-1 = 7^{y-6} \quad \therefore x = 7^{y-6} + 1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = 7^{x-6} + 1$

이 식이 $y = a^{x+b} + c$ 와 일치하므로

$$a=7, b=-6, c=1 \quad \therefore a+b+c=2$$

252 ㉮ 3

함수 $y = \log_6(x+k) + 2$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수 $y = \log_6(x+k) + 2$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같으므로 함수

$y = \log_6(x+k) + 2$ 의 그래프는 점 (3, 3)을 지난다.

$$3 = \log_6(3+k) + 2 \text{에서 } \log_6(3+k) = 1$$

$$3+k=6 \quad \therefore k=3$$

253 ㉮ 28

$g(x)$ 는 $f(x) = 2^x$ 의 역함수

이므로 $y = 2^x$ 에서 $x = \log_2 y$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \log_2 x, \text{ 즉 } g(x) = \log_2 x$$

점 A의 y 좌표가 4이므로

$$2^x = 4 \text{에서 } x=2 \quad \therefore A(2, 4)$$

점 B의 y 좌표가 4이므로 $\log_2 x = 4$ 에서

$$x = 2^4 = 16 \quad \therefore B(16, 4)$$

따라서 삼각형 OBA의 넓이는 $\frac{1}{2} \times (16-2) \times 4 = 28$

254 ㉮ (1) $\log_9 75 < 3 < \log_3 30$

$$(2) \log_{\frac{1}{2}} 10 < \log_{\frac{1}{4}} 80 < -3$$

$$(1) 3 = \log_3 3^3 = \log_3 27$$

$$\log_9 75 = \log_{3^2} 75 = \frac{1}{2} \log_3 75 = \log_3 \sqrt{75}$$

$\sqrt{75} < 27 < 30$ 이고, 밑이 1보다 크므로

$$\log_3 \sqrt{75} < \log_3 27 < \log_3 30$$

$$\therefore \log_9 75 < 3 < \log_3 30$$

$$(2) \log_{\frac{1}{4}} 80 = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} 80 = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 80 = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{80}$$

$$-3 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \log_{\frac{1}{2}} 8$$

$8 < \sqrt{80} < 10$ 이고, 밑이 1보다 작으므로

$$\log_{\frac{1}{2}} 10 < \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{80} < \log_{\frac{1}{2}} 8$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{2}} 10 < \log_{\frac{1}{4}} 80 < -3$$

255 ㉮ $B < A < C$

$$A = 2 \log_a 7 = \log_a 7^2 = \log_a 49$$

$$B = -4 \log_{\frac{1}{a}} 4 = 4 \log_a 4 = \log_a 4^4 = \log_a 256$$

$$C = \frac{3}{\log_3 a} = 3 \log_a 3 = \log_a 3^3 = \log_a 27$$

$27 < 49 < 256$ 이고, $0 < a < 1$ 이므로

$$\log_a 256 < \log_a 49 < \log_a 27$$

$$\therefore B < A < C$$

256 ㉮ $\log_a x^2$

$$\log_a x = \frac{1}{2} \log_a x^2, \log_a x^2 = 2 \log_a x$$

$a > 1$ 이므로 $a \leq x < a^2$ 의 각 변에 밑이 a 인 로그를 취하면

$$1 \leq \log_a x < 2$$

이때 $\log_a x > 0$ 이므로 각 변에 $\log_a x$ 를 곱하면

$$\log_a x \leq (\log_a x)^2 < 2 \log_a x$$

$$\therefore \frac{1}{2} \log_a x < (\log_a x)^2 < 2 \log_a x$$

따라서 $\log_a x < (\log_a x)^2 < \log_a x^2$ 이므로

가장 큰 수는 $\log_a x^2$ 이다.

257 ㉮ $\log_a b < -1 < \log_b a < 0$

$$\frac{1}{a} < 1 \text{에서 } a > 1 \text{이므로 } b < \frac{1}{a} < 1 \text{의 각 변에 밑이}$$

a 인 로그를 취하면 $\log_a b < -1 < 0$

$$\text{또 } 0 < b < 1 \text{이므로 } b < \frac{1}{a} < 1 \text{의 각 변에 밑이 } b \text{인}$$

로그를 취하면 $0 < -\log_b a < 1$

$$\therefore -1 < \log_b a < 0$$

$$\therefore \log_a b < -1 < \log_b a < 0$$

개념 확인

131쪽

258 ㉮ (1) 최댓값: 2, 최솟값: -1

$$(2) \text{ 최댓값: 2, 최솟값: -2}$$

$$(3) \text{ 최댓값: 없다., 최솟값: 1}$$

$$(4) \text{ 최댓값: 3, 최솟값: 없다.}$$

(1) 함수 $y = \log_3 x$ 의 밑이 1보다 크므로

$$\frac{1}{3} \leq x \leq 9 \text{일 때 함수 } y = \log_3 x \text{는}$$

$$x=9 \text{에서 최댓값 } \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2,$$

$x = \frac{1}{3}$ 에서 최솟값 $\log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$ 을 갖는다.

(2) 함수 $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 의 밑이 1보다 작으므로

$\frac{1}{16} \leq x \leq 16$ 일 때 함수 $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 는

$x = \frac{1}{16}$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16} = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 2$,

$x = 16$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{4}} 16 = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = -2$

를 갖는다.

(3) 함수 $y = \log_5 x$ 의 밑이 1보다 크므로

$x \geq 5$ 일 때 함수 $y = \log_5 x$ 는

최댓값을 갖지 않고,

$x = 5$ 에서 최솟값 $\log_5 5 = 1$ 을 갖는다.

(4) 함수 $y = \log_{\frac{1}{7}} x$ 의 밑이 1보다 작으므로

$x \geq \frac{1}{343}$ 일 때 함수 $y = \log_{\frac{1}{7}} x$ 는

$x = \frac{1}{343}$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{343} = \log_{\frac{1}{7}} \left(\frac{1}{7}\right)^3 = 3$

을 갖고, 최솟값은 갖지 않는다.

유제

133-137쪽

259 ㉠ 최댓값: 4, 최솟값: 0

함수 $y = \log_2(x-2)$ 의 밑이 1보다 크므로

$3 \leq x \leq 18$ 일 때 함수 $y = \log_2(x-2)$ 는

$x = 18$ 에서 최댓값 $\log_2 16 = 4$,

$x = 3$ 에서 최솟값 $\log_2 1 = 0$ 을 갖는다.

260 ㉠ ①

함수 $y = \log_{\frac{1}{5}}(x+3) + 1$ 의 밑이 1보다 작으므로

$-2 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $y = \log_{\frac{1}{5}}(x+3) + 1$ 은

$x = -2$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{5}} 1 + 1 = 1$,

$x = 2$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{5}} 5 + 1 = 0$ 을 갖는다.

따라서 $M = 1$, $m = 0$ 이므로 $M + m = 1$

261 ㉠ 1

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) + k$ 의 밑이 1보다 작으므로

$\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$ 일 때 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) + k$ 는

$x = \frac{5}{2}$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}} 4 + k = -2 + k$,

$x = \frac{9}{2}$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}} 8 + k = -3 + k$ 를 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 차는

$(-2 + k) - (-3 + k) = 1$

262 ㉠ -4

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+a) + 2$ 의 밑이 1보다 작으므로

$-2 \leq x \leq 4$ 일 때 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+a) + 2$ 는

$x = -2$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}}(-2+a) + 2$,

$x = 4$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}}(4+a) + 2$ 를 갖는다.

즉, $\log_{\frac{1}{2}}(-2+a) + 2 = 1$ 이므로

$\log_{\frac{1}{2}}(-2+a) = -1$

$-2+a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$-2+a = 2$

$\therefore a = 4$

따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+4) + 2$ 의 최솟값은

$\log_{\frac{1}{2}}(4+4) + 2 = -1$ 이므로

$b = -1$

$\therefore ab = 4 \times (-1) = -4$

263 ㉠ -1

$y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 31)$ 에서

$f(x) = x^2 - 4x + 31$ 이라 하면

$f(x) = (x-2)^2 + 27$

$\therefore f(x) \geq 27$

이때 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$ 의 밑이 1보다 작으므로

함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$ 는

$f(x) = 27$, 즉 $x = 2$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$ 을 갖

는다.

따라서 $a = 2$, $b = -3$ 이므로

$a + b = -1$

264 ㉠ 최댓값: 2, 최솟값: 0

$y = \log_3(-x^2 + 2x + 9)$ 에서

$f(x) = -x^2 + 2x + 9$ 라 하면

$f(x) = -(x-1)^2 + 10$

$2 \leq x \leq 4$ 에서 $f(2) = 9$, $f(4) = 1$ 이므로

$1 \leq f(x) \leq 9$

이때 함수 $y = \log_3 f(x)$ 의 밑이 1보다 크므로

함수 $y = \log_3 f(x)$ 는

$f(x) = 9$ 에서 최댓값 $\log_3 9 = 2$,

$f(x) = 1$ 에서 최솟값 $\log_3 1 = 0$ 을 갖는다.

265 ㉟ 0

진수의 조건에서 $-x > 0, x+4 > 0$

$$\therefore -4 < x < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$y = \log_2(-x) + \log_2(x+4) = \log_2(-x^2-4x)$
에서

$$f(x) = -x^2 - 4x \text{라 하면}$$

$$f(x) = -(x+2)^2 + 4$$

$\textcircled{1}$ 에서 $f(-4)=0, f(-2)=4, f(0)=0$ 이므로
 $0 < f(x) \leq 4$

이때 함수 $y = \log_2 f(x)$ 의 밑이 1보다 크므로

함수 $y = \log_2 f(x)$ 는

$f(x)=4$, 즉 $x=-2$ 에서 최댓값 $\log_2 4=2$ 를 갖는다.

따라서 $a=-2, M=2$ 이므로

$$a+M=0$$

266 ㉟ ④

$y = \log_a(x^2-4x+13)$ 에서

$f(x) = x^2-4x+13$ 이라 하면

$$f(x) = (x-2)^2 + 9$$

$$-1 \leq x \leq 6 \text{에서}$$

$$f(-1)=18, f(2)=9, f(6)=25 \text{이므로}$$

$$9 \leq f(x) \leq 25$$

이때 함수 $y = \log_a f(x)$ 에서 $0 < a < 1$ 이므로

함수 $y = \log_a f(x)$ 는

$f(x)=25$ 에서 최솟값 $\log_a 25$ 를 갖는다.

즉, $\log_a 25 = -2$ 이므로

$$a^{-2} = 25$$

$$\therefore a = 25^{-\frac{1}{2}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

267 ㉟ 10

$$y = (\log_{\frac{1}{2}} 4x) \left(\log_{\frac{1}{2}} \frac{8}{x} \right)$$

$$= (-2 + \log_{\frac{1}{2}} x) (-3 - \log_{\frac{1}{2}} x)$$

$$= -(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + 6$$

$\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 놓으면

$$2 \leq x \leq 4 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 4 \leq t \leq \log_{\frac{1}{2}} 2$$

$$\therefore -2 \leq t \leq -1$$

이때 주어진 함수는

$$y = -t^2 - t + 6$$

$$= -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$$

즉, $-2 \leq t \leq -1$ 일 때

$$\text{함수 } y = -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \text{는}$$

$t=-1$ 에서 최댓값 6,

$t=-2$ 에서 최솟값 4를 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $6+4=10$

268 ㉟ ③

$$y = \log_6 x + \log_x 36$$

$$= \log_6 x + 2 \log_x 6$$

$$= \log_6 x + \frac{2}{\log_6 x}$$

$x > 1$ 에서 $\log_6 x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의
관계에 의하여

$$y = \log_6 x + \frac{2}{\log_6 x} \geq 2\sqrt{\log_6 x \times \frac{2}{\log_6 x}} = 2\sqrt{2}$$

(단, 등호는 $\log_6 x = \sqrt{2}$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{2}$ 이다.

269 ㉟ $a=2, b=5$

$$y = (\log_3 x)^2 + a \log_3 x^2 + b$$

$$= (\log_3 x)^2 + 2a \log_3 x + b$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$y = t^2 + 2at + b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 함수가 $x = \frac{1}{9}$, 즉 $t = \log_3 \frac{1}{9} = -2$ 에서 최솟값

1을 가지므로 t^2 의 계수가 1인 이차함수의 식은

$$y = (t+2)^2 + 1$$

$$y = t^2 + 4t + 5$$

이 식이 $\textcircled{1}$ 과 일치하므로

$$2a=4, b=5 \quad \therefore a=2$$

270 ㉟ 2

$(\log_x y)^2 > 0, (\log_y x)^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하
평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} (\log_x y)^2 + (\log_y x)^2 &\geq 2\sqrt{(\log_x y)^2 \times (\log_y x)^2} \\ &= 2\sqrt{(\log_x y)^2 \times \left(\frac{1}{\log_x y}\right)^2} = 2 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $\log_x y = \log_y x$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

271 ㉡ ⑤

$$⑤ y = \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$$

즉, 함수 $y = \log_a x$ 의 그래프와 함수 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 의 그래프는 x 축에 대하여 대칭이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

272 ㉡ ⑤

$$① y = 7^{x-1} \text{에서 } x-1 = \log_7 y \quad \therefore x = \log_7 y + 1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \log_7 x + 1 = \log_7 7x$$

따라서 함수 $y = 7^{x-1}$ 의 그래프는 함수 $y = \log_7 7x$ 의 그래프를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

$$② y = \log_7 \frac{1}{x} = -\log_7 x$$

$$= -(\log_7 x + 1) + 1 = -\log_7 7x + 1$$

따라서 함수 $y = \log_7 \frac{1}{x}$ 의 그래프의 함수

$y = \log_7 7x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

$$③ y = \log_{\frac{1}{7}}(x+1) = -\log_7(x+1)$$

$$= -\{\log_7(x+1) + 1\} + 1$$

$$= -\log_7 7(x+1) + 1$$

따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{7}}(x+1)$ 의 그래프는 함수

$y = \log_7 7x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것과 같다.

$$④ y = 7^x + 1 \text{에서 } 7^x = y - 1 \quad \therefore x = \log_7(y-1)$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \log_7(x-1) = \{\log_7(x-1) + 1\} - 1$$

$$= \log_7 7(x-1) - 1$$

따라서 함수 $y = 7^x + 1$ 의 그래프는 함수 $y = \log_7 7x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 후 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

$$⑤ y = \log_7 \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_7 x = \log_{49} x$$

따라서 $y = \log_7 \sqrt{x}$ 는 $y = \log_7 7x$ 와 밑이 다르므로 함수 $y = \log_7 \sqrt{x}$ 의 그래프는 함수 $y = \log_7 7x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

따라서 함수 $y = \log_7 7x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없는 것은 ⑤이다.

273 ㉡ $a=2, b=-2$

함수 $y = \log_2(ax+6) + b$ 의 그래프의 점근선의 방정식이

$$x = -\frac{6}{a} \text{이므로 } -\frac{6}{a} = -3$$

$$\therefore a = 2$$

따라서 함수 $y = \log_2(2x+6) + b$ 의 그래프가

점 $(5, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \log_2 16 + b, 2 = 4 + b$$

$$\therefore b = -2$$

274 ㉡ $(19, 2)$

$B(a, 0) (a > 2)$ 이라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로

$$A(a, 2), C(a+2, 0), D(a+2, 2)$$

이때 점 A는 함수 $y = \log_4(x-1)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$2 = \log_4(a-1)$$

$$a-1 = 4^2, a-1 = 16 \quad \therefore a = 17$$

따라서 점 D의 좌표는 $(19, 2)$

275 ㉡ ③

$$y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+2} - 4 \text{에서 } y+4 = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+2}$$

$$x+2 = \log_{\frac{1}{5}}(y+4) \quad \therefore x = \log_{\frac{1}{5}}(y+4) - 2$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \log_{\frac{1}{5}}(x+4) - 2$$

$$y = -\log_5(x+4) - 2$$

이 식이 $y = a \log_5(x-b) - c$ 와 일치하므로

$$a = -1, b = -4, c = 2$$

$$\therefore a+b+c = -3$$

276 ㉡ 2

$$y = \log_3 x \times (2 - \log_3 x)$$

$$= \log_3 x \times \left(2 - \frac{1}{2} \log_3 x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}(\log_3 x)^2 + 2 \log_3 x$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$1 \leq x \leq 27 \text{에서 } \log_3 1 \leq t \leq \log_3 27$$

$$\therefore 0 \leq t \leq 3$$

이때 주어진 함수는

$$y = -\frac{1}{2}t^2 + 2t = -\frac{1}{2}(t-2)^2 + 2$$

▶▶▶▶▶ ①

즉, $0 \leq t \leq 3$ 일 때 함수 $y = -\frac{1}{2}(t-2)^2 + 2$ 는

$t=2$ 에서 최댓값 2, $t=0$ 에서 최솟값 0을 갖는다.

따라서 $M=2$, $m=0$ 이므로

$$M+m=2$$

단계	채점 기준	비율
①	$\log_3 x = t$ 로 놓고 주어진 함수를 t 에 대한 식으로 나타내기	40 %
②	M, m 의 값 구하기	50 %
③	$M+m$ 의 값 구하기	10 %

277 ㉔ ④

두 함수 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$, $y = \log_{\frac{1}{b}} x$ 의 그래프는 x 의 값이

증가하면 y 의 값도 증가하므로

$$\frac{1}{a} > 1, \frac{1}{b} > 1 \quad \therefore 0 < a < 1, 0 < b < 1$$

또 $x > 1$ 에서 함수 $y = \log_{\frac{1}{b}} x$ 의 그래프가 함수

$y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 의 그래프보다 x 축에 가까우므로

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \quad \therefore b < a$$

두 함수 $y = \log_{\frac{1}{c}} x$, $y = \log_{\frac{1}{d}} x$ 의 그래프는 x 의 값이

증가하면 y 의 값은 감소하므로

$$0 < \frac{1}{c} < 1, 0 < \frac{1}{d} < 1 \quad \therefore c > 1, d > 1$$

또 $x > 1$ 에서 함수 $y = \log_{\frac{1}{c}} x$ 의 그래프가 함수

$y = \log_{\frac{1}{d}} x$ 의 그래프보다 x 축에 가까우므로

$$\frac{1}{c} < \frac{1}{d} \quad \therefore d < c$$

$$\therefore b < a < d < c$$

278 ㉔ ⑤

함수 $y = 2 + \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -8 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y - k = 2 + \log_2(x+8)$

$$\therefore y = \log_2(x+8) + k + 2$$

즉, 이 함수의 그래프가 $y = \log_2(x+8) + k + 2$

제4사분면을 지나지 않

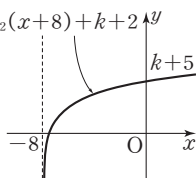
으려면 오른쪽 그림과

같아야 하므로

$$k+5 \geq 0 \quad \therefore k \geq -5$$

$x=0$ 일 때의 함수값

따라서 실수 k 의 최솟값은 -5 이다.



279 ㉔ 6

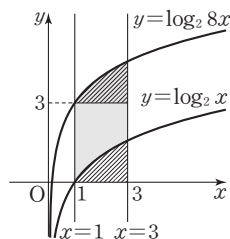
$$y = \log_2 8x = \log_2 x + 3$$

즉, 함수 $y = \log_2 8x$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

구하는 넓이는

$$(3-1) \times 3 = 6$$



280 ㉔ 1

$(f \circ g)(x) = x$ 이므로 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 서로 역함수 관계이다.

즉, $g(a) = 4$, $g(\beta) = 11$ 에서

$$f(4) = a, f(11) = \beta$$

$$\therefore a + \beta = f(4) + f(11)$$

$$= \log_2 \frac{5}{3} + \log_2 \frac{6}{5}$$

$$= \log_2 \left(\frac{5}{3} \times \frac{6}{5} \right)$$

$$= \log_2 2 = 1$$

281 ㉔ 21

두 함수

$$y = \log_3(x+1),$$

$y = 3^x - 1$ 은 서로 역함수 관계이므로 두 함수

의 그래프는 직선 $y = x$

에 대하여 대칭이다.

이때 두 점 P, Q는 기

울기가 -1 인 직선 위

의 점이므로 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

즉, $P(8, 2)$ 이므로 $Q(2, 8)$ 이다.

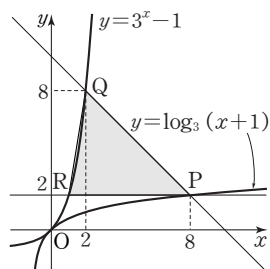
$R(k, 2)$ ($k > 0$)라 하면 점 R는 함수 $y = 3^x - 1$ 의 그

래프 위의 점이므로

$$2 = 3^k - 1, 3^k = 3 \quad \therefore k = 1$$

따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (8-k) \times (8-2) = \frac{1}{2} \times 7 \times 6 = 21$$



282 ㉮ $\log_b ab$

$0 < a < 1$ 이므로

$a < b$ 의 양변에 밑이 a 인 로그를 취하면

$$1 > \log_a b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$0 < b < 1$ 이므로

$a < b$ 의 양변에 밑이 b 인 로그를 취하면

$$\log_b a > 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서

$$\log_a b < \log_b a$$

$$\log_b ab = \log_b a + 1, \log_a \frac{b}{a} = \log_a b - 1 \text{이므로}$$

$$\log_b a < \log_b ab, \log_a \frac{b}{a} < \log_a b$$

$$\therefore \log_a \frac{b}{a} < \log_a b < \log_b a < \log_b ab$$

따라서 네 수 중 가장 큰 수는 $\log_b ab$ 이다.

283 ㉮ 2

함수 $(f \circ g)(x) = \log_5(2x - a)$ 의 밑이 1보다 크므로

$3 \leq x \leq 15$ 일 때 함수 $(f \circ g)(x) = \log_5(2x - a)$ 는

$x = 15$ 에서 최댓값 $\log_5(30 - a)$,

$x = 3$ 에서 최솟값 $\log_5(6 - a)$ 를 갖는다.

즉, $\log_5(6 - a) = 0$ 이므로

$$6 - a = 5^0 = 1$$

$$\therefore a = 5$$

따라서 함수 $(f \circ g)(x) = \log_5(2x - 5)$ 의 최댓값은

$$\log_5 25 = 2$$

284 ㉮ 36

$y = \log_a(x^2 - 2x + 7)$ 에서

$f(x) = x^2 - 2x + 7$ 이라 하면

$$f(x) = (x - 1)^2 + 6$$

$$\therefore f(x) \geq 6$$

이때 주어진 함수 $y = \log_a f(x)$ 의 그래프에서

함수 $y = \log_a f(x)$ 가 최솟값 $\frac{3}{2}$ 을 가지므로

$$a > 1$$

따라서 $f(x) \geq 6$ 일 때, 함수 $y = \log_a f(x)$ 는

$f(x) = 6$ 에서 최솟값 $\frac{3}{2}$ 을 가지므로

$$\log_a 6 = \frac{3}{2}$$

$$a^{\frac{3}{2}} = 6$$

$$\therefore a^3 = 6^2 = 36$$

285 ㉮ $\log_3 10$

$a > 1, b > 1$ 에서 $\log_3 a > 0, \log_3 b > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\log_3 a + \log_3 b \geq 2\sqrt{\log_3 a \times \log_3 b}$$

(단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립)

$$\text{이때 } \log_3 a + \log_3 b = \log_3 ab = \log_3 100 = 2\log_3 10$$

이므로

$$2\log_3 10 \geq 2\sqrt{\log_3 a \times \log_3 b}$$

$$\therefore \sqrt{\log_3 a \times \log_3 b} \leq \log_3 10$$

따라서 구하는 최댓값은 $\log_3 10$ 이다.

286 ㉮ ②

| 접근 방법 | 곡선 $y = a^x - 1$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면 곡선 $y = \log_a(x + 1)$ 임을 이용하여 점 P의 좌표를 구한다.

곡선 $y = a^x - 1$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하면 곡선 $y = \log_a(x + 1)$ 이므로 점 P는 직선 $y = x$ 위의 점이다.

이때 점 P의 좌표를 (k, k) ($k > 0$)라 하면 삼각형

OHP의 넓이가 2이므로

$$\frac{1}{2} \times k \times k = 2, k^2 = 4$$

$$\therefore k = 2 \quad (\because k > 0)$$

$$\therefore P(2, 2)$$

따라서 점 P(2, 2)가 곡선 $y = a^x - 1$ 위에 있으므로

$$2 = a^2 - 1, a^2 = 3$$

$$\therefore a = \sqrt{3} \quad (\because a > 1)$$

287 ㉮ 5

$f(x) = |x| + 3$ 이라 하면

$$-2 \leq x \leq 1 \text{에서 } 3 \leq f(x) \leq 5$$

(i) $a > 1$ 이면

함수 $y = \log_a f(x)$ 는 $f(x) = 5$ 에서 최댓값 $\log_a 5$ 를 가지므로

$$\log_a 5 = 1 \quad \therefore a = 5$$

(ii) $0 < a < 1$ 이면

함수 $y = \log_a f(x)$ 는 $f(x) = 3$ 에서 최댓값 $\log_a 3$ 을 가지므로

$$\log_a 3 = 1 \quad \therefore a = 3$$

그런데 $0 < a < 1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a = 5$

02 로그함수의 활용

개념 확인

143쪽

288 ㉡ (1) $x = \frac{8}{3}$ (2) $x = 5$ (3) $x = 3$ (4) $x = \sqrt{2}$ (2) 진수의 조건에서 $x+4 > 0$

$$\therefore x > -4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $\log_3(x+4) = 2$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$x+4 = 3^2 = 9 \quad \therefore x = 5$$

따라서 ㉡에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = 5$ (3) 밑의 조건에서 $x+1 > 0$, $x+1 \neq 1$

$$\therefore -1 < x < 0 \text{ 또는 } x > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $\log_{(x+1)} 16 = 2$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$(x+1)^2 = 16$$

$$x+1 = -4 \text{ 또는 } x+1 = 4$$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 ㉡에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = 3$ (4) 밑의 조건에서 $3x > 0$, $3x \neq 1$

$$\therefore 0 < x < \frac{1}{3} \text{ 또는 } x > \frac{1}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $\log_{3x} 18 = 2$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$(3x)^2 = 18$$

$$3x = -3\sqrt{2} \text{ 또는 } 3x = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$

따라서 ㉡에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = \sqrt{2}$ 289 ㉡ $\log_2 x$, 2, 1, -1, -1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ 290 ㉡ (1) $0 < x < 1$ (2) $x \geq 4$

$$(3) \frac{3}{2} < x \leq 4 \quad (4) \frac{9}{5} < x < 11$$

(1) 진수의 조건에서 $x > 0$ $\cdots \cdots \textcircled{1}$ $\log_7 x < 0$ 에서 $\log_7 x < \log_7 1$ 밑이 1보다 크므로 $x < 1$ $\cdots \cdots \textcircled{2}$ $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분은 $0 < x < 1$ (2) 진수의 조건에서 $3x+1 > 0$

$$\therefore x > -\frac{1}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $\log_{\frac{1}{5}}(3x+1) \leq \log_{\frac{1}{5}} 13$ 에서밑이 1보다 작으므로 $3x+1 \geq 13$

$$3x \geq 12 \quad \therefore x \geq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분은 $x \geq 4$ (3) 진수의 조건에서 $x+1 > 0$, $2x-3 > 0$

$$\therefore x > \frac{3}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $\log_2(x+1) \geq \log_2(2x-3)$ 에서밑이 1보다 크므로 $x+1 \geq 2x-3$

$$\therefore x \leq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분은 $\frac{3}{2} < x \leq 4$ (4) 진수의 조건에서 $11-x > 0$, $4x+2 > 0$

$$\therefore -\frac{1}{2} < x < 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $\log_{\frac{1}{3}}(11-x) > \log_{\frac{1}{3}}(4x+2)$ 에서밑이 1보다 작으므로 $11-x < 4x+2$

$$5x > 9$$

$$\therefore x > \frac{9}{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분은 $\frac{9}{5} < x < 11$ 291 ㉡ $\log_{\frac{1}{3}} x$, 3, 4, 4, 4, $\frac{1}{81}$, 3, $\frac{1}{81}$, 3

유제

145~161쪽

292 ㉡ (1) $x = 6$ (2) $x = 7$ (1) 진수의 조건에서 $x-5 > 0$, $x+3 > 0$

$$\therefore x > 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $\log_2(x-5) + \log_2(x+3) = \log_2 9$ 에서

$$\log_2(x-5)(x+3) = \log_2 9$$

$$\log_2(x^2 - 2x - 15) = \log_2 9$$

$$x^2 - 2x - 15 = 9, x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$(x+4)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 6$$

따라서 ㉡에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = 6$ (2) 진수의 조건에서 $x+3 > 0$, $x-4 > 0$, $4x+2 > 0$

$$\therefore x > 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $\log_{\frac{1}{5}}(x+3) + \log_{\frac{1}{5}}(x-4) = \log_{\frac{1}{5}}(4x+2)$ 에서

$$\log_{\frac{1}{5}}(x+3)(x-4) = \log_{\frac{1}{5}}(4x+2)$$

$$\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - x - 12) = \log_{\frac{1}{5}}(4x+2)$$

$$x^2 - x - 12 = 4x+2, x^2 - 5x - 14 = 0$$

$$(x+2)(x-7) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 7$$

따라서 ㉡에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = 7$

293 ㉡ (1) $x=7$ (2) $x=9$

(1) 진수의 조건에서 $x+9>0$, $x-3>0$

$$\therefore x>3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_2(x+9)=\log_{\sqrt{2}}(x-3)\text{에서}$$

$$\log_2(x+9)=\log_2(x-3)^2$$

$$\log_2(x+9)=\log_2(x^2-6x+9)$$

$$x+9=x^2-6x+9, x^2-7x=0$$

$$x(x-7)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=7$$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=7$

(2) 진수의 조건에서 $x^2>0$, $x-6>0$

$$\therefore x>6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_3 x^2 + \log_3(x-6) = 3 \text{에서}$$

$$\log_3 x + \log_3(x-6) = \log_3 27$$

$$\log_3 x(x-6) = \log_3 27, \log_3(x^2-6x) = \log_3 27$$

$$x^2-6x=27, x^2-6x-27=0$$

$$(x+3)(x-9)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=9$$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=9$

294 ㉡ ㉢

밑과 진수의 조건에서 $a>0$, $a \neq 1$

$$\therefore 0 < a < 1 \text{ 또는 } a > 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_2 8a = \frac{2}{\log_a 2} \text{에서}$$

$$\log_2 8a = 2 \log_2 a$$

$$\log_2 8a = \log_2 a^2$$

$$8a = a^2, a^2 - 8a = 0$$

$$a(a-8)=0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } a=8$$

따라서 ㉠에 의하여 $a=8$

295 ㉡ $x=-1$ 또는 $x=3$

밑과 진수의 조건에서

$$x^2-x+1>0, x^2-x+1 \neq 1, 2x+3>0$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < x < 0 \text{ 또는 } 0 < x < 1 \text{ 또는 } x > 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_{(x^2-x+1)}(2x+3) = \log_7(2x+3) \text{에서}$$

(i) 밑이 같으면 $x^2-x+1=7$

$$x^2-x-6=0, (x+2)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=3$$

그런데 ㉠에 의하여 $x=3$

(ii) 진수가 1이면 $2x+3=1$

$$2x=-2 \quad \therefore x=-1$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

296 ㉡ (1) $x=4$ 또는 $x=64$

$$(2) x=1 \text{ 또는 } x=\sqrt{5}$$

$$(3) x=\frac{1}{6} \text{ 또는 } x=36$$

$$(4) x=\frac{1}{8} \text{ 또는 } x=8$$

$$(5) x=3 \text{ 또는 } x=9$$

(1) 진수의 조건에서 $x>0$, $x^8>0$

$$\therefore x>0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x^8 + 12 = 0 \text{에서}$$

$$(\log_2 x)^2 - 8 \log_2 x + 12 = 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 8t + 12 = 0$$

$$(t-2)(t-6)=0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=6$$

$$t=\log_2 x \text{이므로 } \log_2 x=2 \text{ 또는 } \log_2 x=6$$

$$\therefore x=2^2=4 \text{ 또는 } x=2^6=64$$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=4 \text{ 또는 } x=64$$

(2) 진수의 조건에서 $x>0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$$\log_5 x - \log_{25} x = 2(\log_5 x)(\log_{25} x) \text{에서}$$

$$\log_5 x - \frac{1}{2} \log_5 x = \log_5 x \times \log_5 x$$

$$\frac{1}{2} \log_5 x = (\log_5 x)^2$$

$$\log_5 x = t \text{로 놓으면 } \frac{t}{2} = t^2$$

$$t\left(t-\frac{1}{2}\right)=0 \quad \therefore t=0 \text{ 또는 } t=\frac{1}{2}$$

$$t=\log_5 x \text{이므로 } \log_5 x=0 \text{ 또는 } \log_5 x=\frac{1}{2}$$

$$\therefore x=5^0=1 \text{ 또는 } x=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=1 \text{ 또는 } x=\sqrt{5}$$

(3) 진수의 조건에서 $x>0$, $x^2>0$, $36x^3>0$

$$\therefore x>0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(\log_6 x)^2 + \log_6 x^2 = \log_6 36x^3 \text{에서}$$

$$(\log_6 x)^2 + 2 \log_6 x = 2 + 3 \log_6 x$$

$$\log_6 x = t \text{로 놓으면 } t^2 + 2t = 2 + 3t$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t+1)(t-2)=0 \quad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=2$$

$$t=\log_6 x \text{이므로 } \log_6 x=-1 \text{ 또는 } \log_6 x=2$$

$$\therefore x=6^{-1}=\frac{1}{6} \text{ 또는 } x=6^2=36$$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=\frac{1}{6} \text{ 또는 } x=36$$

(4) 진수의 조건에서 $2x > 0, \frac{x}{2} > 0$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$(\log_2 2x) \left(\log_2 \frac{x}{2} \right) = 8 \text{에서}$$

$$(\log_2 x + 1)(\log_2 x - 1) = 8$$

$$(\log_2 x)^2 - 1 = 8, (\log_2 x)^2 = 9$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } t^2 = 9$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 3$$

$$t = \log_2 x \text{이므로}$$

$$\log_2 x = -3 \text{ 또는 } \log_2 x = 3$$

$$\therefore x = 2^{-3} = \frac{1}{8} \text{ 또는 } x = 2^3 = 8$$

따라서 $\textcircled{7}$ 에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{1}{8} \text{ 또는 } x = 8$$

(5) 밑과 진수의 조건에서 $x^2 > 0, x > 0, x \neq 1$

$$\therefore 0 < x < 1 \text{ 또는 } x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_9 x^2 + \log_x 9 - 3 = 0 \text{에서}$$

$$2 \log_9 x + \frac{1}{\log_9 x} - 3 = 0$$

$$\log_9 x = t \ (t \neq 0) \text{로 놓으면 } 2t + \frac{1}{t} - 3 = 0$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0, (2t - 1)(t - 1) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = 1$$

$$t = \log_9 x \text{이므로}$$

$$\log_9 x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \log_9 x = 1$$

$$\therefore x = 9^{\frac{1}{2}} = 3 \text{ 또는 } x = 9^1 = 9$$

따라서 $\textcircled{7}$ 에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = 3 \text{ 또는 } x = 9$$

297 $\boxtimes \frac{1}{64}$

진수의 조건에서 $4x > 0, 16x > 0$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_4 4x \times \log_4 16x = 6 \text{에서}$$

$$(1 + \log_4 x)(2 + \log_4 x) = 6$$

$$(\log_4 x)^2 + 3 \log_4 x - 4 = 0$$

$$\log_4 x = t \text{로 놓으면 } t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$(t + 4)(t - 1) = 0 \quad \therefore t = -4 \text{ 또는 } t = 1$$

$$t = \log_4 x \text{이므로}$$

$$\log_4 x = -4 \text{ 또는 } \log_4 x = 1$$

$$\therefore x = 4^{-4} = \frac{1}{256} \text{ 또는 } x = 4^1 = 4$$

따라서 $\textcircled{7}$ 에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{1}{256} \text{ 또는 } x = 4 \text{이므로 구하는 곱은}$$

$$\frac{1}{256} \times 4 = \frac{1}{64}$$

298 $\boxtimes \textcircled{5}$

진수의 조건에서 $x > 0, y > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_5 y = 3 \\ \log_3 x \times \log_5 y = 2 \end{cases} \text{에서}$$

$$\log_3 x = X, \log_5 y = Y \text{로 놓으면}$$

$$\begin{cases} X + Y = 3 \\ XY = 2 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면

$$X = 1, Y = 2 \text{ 또는 } X = 2, Y = 1$$

$$X = \log_3 x, Y = \log_5 y \text{이므로}$$

(i) $X = 1, Y = 2$ 일 때,

$$\log_3 x = 1, \log_5 y = 2$$

$$\therefore x = 3^1 = 3, y = 5^2 = 25$$

(ii) $X = 2, Y = 1$ 일 때,

$$\log_3 x = 2, \log_5 y = 1$$

$$\therefore x = 3^2 = 9, y = 5^1 = 5$$

(i), (ii)에서 $\textcircled{7}$ 에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = 3, y = 25 \text{ 또는 } x = 9, y = 5$$

$$\text{그런데 } \alpha < \beta \text{이므로 } \alpha = 3, \beta = 25$$

$$\therefore \alpha + \beta = 28$$

299 $\boxtimes x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 32$

진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

$$x^{\log_5 x} = 32x^4 \text{의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면}$$

$$(\log_2 x)^2 = 5 + 4 \log_2 x$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } t^2 = 5 + 4t$$

$$t^2 - 4t - 5 = 0$$

$$(t + 1)(t - 5) = 0 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 5$$

$$t = \log_2 x \text{이므로 } \log_2 x = -1 \text{ 또는 } \log_2 x = 5$$

$$\therefore x = 2^{-1} = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 2^5 = 32$$

따라서 $\textcircled{7}$ 에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 32$$

300 $\boxtimes x = 3 \text{ 또는 } x = 9$

진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

$$2^{\log_5 x} \times x^{\log_5 2} - 6 \times 2^{\log_3 x} + 8 = 0 \text{에서}$$

$$(2^{\log_3 x})^2 - 6 \times 2^{\log_3 x} + 8 = 0$$

$2^{\log_3 x} = t (t > 0)$ 로 놓으면 $t^2 - 6t + 8 = 0$
 $(t-2)(t-4) = 0 \quad \therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 4$
 $t = 2^{\log_3 x}$ 이므로 $2^{\log_3 x} = 2^1$ 또는 $2^{\log_3 x} = 2^2$
 즉, $\log_3 x = 1$ 또는 $\log_3 x = 2$ 이므로
 $x = 3^1 = 3$ 또는 $x = 3^2 = 9$
 따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는
 $x = 3$ 또는 $x = 9$

301 ㉡ $x = \frac{1}{20}$

$(5x)^{\log 5} = (4x)^{\log 4}$ 의 양변에 상용로그를 취하면
 $\log 5 (\log 5 + \log x) = \log 4 (\log 4 + \log x)$
 $(\log 5 - \log 4) \log x = (\log 4)^2 - (\log 5)^2$
 $\therefore \log x = \frac{(\log 4 + \log 5)(\log 4 - \log 5)}{\log 5 - \log 4}$
 $= -(\log 4 + \log 5) = -\log 20$
 $= \log \frac{1}{20}$
 $\therefore x = \frac{1}{20}$

302 ㉡ 110

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠
 $3^{\log x} \times x^{\log 3} - 6(3^{\log x} + x^{\log 3}) + 27 = 0$ 에서
 $(3^{\log x})^2 - 12 \times 3^{\log x} + 27 = 0$
 $3^{\log x} = t (t > 0)$ 로 놓으면 $t^2 - 12t + 27 = 0$
 $(t-3)(t-9) = 0 \quad \therefore t = 3 \text{ 또는 } t = 9$
 $t = 3^{\log x}$ 이므로 $3^{\log x} = 3^1$ 또는 $3^{\log x} = 3^2$
 즉, $\log x = 1$ 또는 $\log x = 2$ 이므로
 $x = 10^1 = 10$ 또는 $x = 10^2 = 100$
 따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는
 $x = 10$ 또는 $x = 100$ 이므로 구하는 합은
 $10 + 100 = 110$

303 ㉡ 27

$(\log_3 x)^2 - 6 \log_3 \sqrt{x} - 5 = 0$ 에서
 $(\log_3 x)^2 - 3 \log_3 x - 5 = 0$
 $\log_3 x = t$ 로 놓으면 $t^2 - 3t - 5 = 0$ ㉠
 주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면
 이차방정식 ㉠의 두 근은 $\log_3 \alpha, \log_3 \beta$
 ㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\log_3 \alpha + \log_3 \beta = 3$
 $\log_3 \alpha \beta = 3$
 $\therefore \alpha \beta = 3^3 = 27$
 따라서 주어진 방정식의 두 근의 곱은 27이다.

304 ㉡ $a < \frac{1}{3}$ 또는 $a > \frac{2}{3}$

$(\log_2 x)^2 - 3a \log_{\sqrt{2}} x + 9a - 2 = 0$ 에서
 $(\log_2 x)^2 - 6a \log_2 x + 9a - 2 = 0$
 $\log_2 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 6at + 9a - 2 = 0$ ㉠
 이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하
 므로

$$\frac{D}{4} = (-3a)^2 - (9a - 2) > 0$$

$$9a^2 - 9a + 2 > 0$$

$$(3a - 1)(3a - 2) > 0$$

$$\therefore a < \frac{1}{3} \text{ 또는 } a > \frac{2}{3}$$

305 ㉡ $\frac{3}{2}$

$(\log x)^2 - k \log x - 7 = 0$ 에서
 $\log x = t$ 로 놓으면
 $t^2 - kt - 7 = 0$ ㉠
 주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면
 이차방정식 ㉠의 두 근은 $\log \alpha, \log \beta$
 ㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\log \alpha + \log \beta = k$
 $\log \alpha \beta = k$
 이때 $\alpha \beta = 10 \sqrt{10}$ 이므로
 $k = \log 10 \sqrt{10} = \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

306 ㉡ 11

두 함수 $f(x) = (\log_5 x)^2 + a^2 + 3$, $g(x) = 7\sqrt{a} \log_5 x$
 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식
 $(\log_5 x)^2 + a^2 + 3 = 7\sqrt{a} \log_5 x$, 즉
 $(\log_5 x)^2 - 7\sqrt{a} \log_5 x + a^2 + 3 = 0$ 이 서로 다른 두
 실근을 가져야 한다.
 $\log_5 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 7\sqrt{a}t + a^2 + 3 = 0$ ㉠
 이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하
 므로
 $D = (-7\sqrt{a})^2 - 4(a^2 + 3) > 0$
 $4a^2 - 49a + 12 < 0$
 $(4a - 1)(a - 12) < 0$
 $\therefore \frac{1}{4} < a < 12$
 따라서 정수 a 는 1, 2, 3, ..., 11의 11개이다.

307 ㉡ (1) $3 < x \leq 5$ (2) $2 < x < 5$

(1) 진수의 조건에서 $x-3 > 0$, $x-1 > 0$

$$\therefore x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2\log_3(x-3) \leq \log_3(x-1) \text{에서}$$

$$\log_3(x-3)^2 \leq \log_3(x-1)$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } (x-3)^2 \leq x-1$$

$$x^2 - 7x + 10 \leq 0, (x-2)(x-5) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq x \leq 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{의 공통부분은 } 3 < x \leq 5$$

(2) 진수의 조건에서 $x > 0$, $5-x > 0$, $4x-2 > 0$

$$\therefore \frac{1}{2} < x < 5 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\log_{\frac{1}{5}}x + \log_{\frac{1}{5}}(5-x) > \log_{\frac{1}{5}}(4x-2) \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{5}}x(5-x) > \log_{\frac{1}{5}}(4x-2)$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로}$$

$$x(5-x) < 4x-2$$

$$x^2 - x - 2 > 0, (x+1)(x-2) > 0$$

$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{의 공통부분은 } 2 < x < 5$$

308 ㉡ (1) $x > 8$ (2) $0 < x \leq 2$

(1) 진수의 조건에서 $x+8 > 0$, $x-4 > 0$

$$\therefore x > 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_{25}(x+8) < \log_{25}(x-4) \text{에서}$$

$$\log_{25}(x+8) < \log_{25}(x-4)^2$$

$$\text{밑이 1보다 크므로}$$

$$x+8 < (x-4)^2$$

$$x^2 - 9x + 8 > 0, (x-1)(x-8) > 0$$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{의 공통부분은 } x > 8$$

(2) 진수의 조건에서 $x > 0$, $x+6 > 0$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}x - 1 \geq \log_{\frac{1}{2}}(x+6) \text{에서}$$

$$2\log_{\frac{1}{2}}x + \log_{\frac{1}{2}}2 \geq \log_{\frac{1}{2}}(x+6)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}2x^2 \geq \log_{\frac{1}{2}}(x+6)$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로}$$

$$2x^2 \leq x+6$$

$$2x^2 - x - 6 \leq 0, (2x+3)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{3}{2} \leq x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{의 공통부분은 } 0 < x \leq 2$$

309 ㉡ ㉢

진수의 조건에서 $x^2 - x - 6 > 0$

$$(x+2)(x-3) > 0$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_2(x^2 - x - 6) \leq 1 + \frac{2}{\log_3 4} \text{에서}$$

$$\log_2(x^2 - x - 6) \leq 1 + 2\log_4 3$$

$$\log_2(x^2 - x - 6) \leq 1 + \log_2 3$$

$$\log_2(x^2 - x - 6) \leq \log_2 6$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x^2 - x - 6 \leq 6$$

$$x^2 - x - 12 \leq 0, (x+3)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{의 공통부분은 } -3 \leq x < -2 \text{ 또는 } 3 < x \leq 4$$

따라서 정수 x 는 -3 , 4 의 2개이다.

310 ㉡ $\frac{1}{2} < x < \frac{9}{2}$

진수의 조건에서 $2x > 0$, $\log_3 2x > 0$

$$x > 0, \log_3 2x > \log_3 1$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } 2x > 1 \quad \therefore x > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 2x) > -1 \text{에서 } \log_{\frac{1}{2}}(\log_3 2x) > \log_{\frac{1}{2}} 2$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로}$$

$$\log_3 2x < 2, \log_3 2x < \log_3 9$$

$$\text{밑이 1보다 크므로}$$

$$2x < 9 \quad \therefore x < \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{의 공통부분은 } \frac{1}{2} < x < \frac{9}{2}$$

311 ㉡ (1) $0 < x < 4$ 또는 $x > 16$

(2) $4 \leq x \leq 16$

(1) 진수의 조건에서 $x > 0$, $x^6 > 0$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x^6 + 8 > 0 \text{에서}$$

$$(\log_2 x)^2 - 6\log_2 x + 8 > 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 6t + 8 > 0$$

$$(t-2)(t-4) > 0 \quad \therefore t < 2 \text{ 또는 } t > 4$$

$$t = \log_2 x \text{이므로 } \log_2 x < 2 \text{ 또는 } \log_2 x > 4$$

$$\log_2 x < \log_2 4 \text{ 또는 } \log_2 x > \log_2 16$$

$$\text{밑이 1보다 크므로}$$

$$x < 4 \text{ 또는 } x > 16 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{의 공통부분은 } 0 < x < 4 \text{ 또는 } x > 16$$

(2) 진수의 조건에서 $x > 0, \frac{x^3}{16} > 0$

$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$

$(\log_{\frac{1}{4}} x)^2 + \log_{\frac{1}{4}} \frac{x^3}{16} \leq 0$ 에서

$(\log_{\frac{1}{4}} x)^2 + 3\log_{\frac{1}{4}} x + 2 \leq 0$

$\log_{\frac{1}{4}} x = t$ 로 놓으면 $t^2 + 3t + 2 \leq 0$

$(t+2)(t+1) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq t \leq -1$

$t = \log_{\frac{1}{4}} x$ 이므로 $-2 \leq \log_{\frac{1}{4}} x \leq -1$

$\log_{\frac{1}{4}} 16 \leq \log_{\frac{1}{4}} x \leq \log_{\frac{1}{4}} 4$

밑이 1보다 작으므로

$4 \leq x \leq 16 \quad \dots\dots \textcircled{B}$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 의 공통부분은 $4 \leq x \leq 16$

312 $\textcircled{B}$ (1) $\frac{1}{625} \leq x \leq \frac{1}{5}$ (2) $\frac{1}{9} < x < \sqrt{3}$

(1) 진수의 조건에서 $25x > 0, 125x > 0$

$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$

$\log_5 25x \times \log_5 125x \leq 2$ 에서

$(2 + \log_5 x)(3 + \log_5 x) \leq 2$

$(\log_5 x)^2 + 5\log_5 x + 4 \leq 0$

$\log_5 x = t$ 로 놓으면 $t^2 + 5t + 4 \leq 0$

$(t+4)(t+1) \leq 0 \quad \therefore -4 \leq t \leq -1$

$t = \log_5 x$ 이므로

$-4 \leq \log_5 x \leq -1$

$\log_5 \frac{1}{625} \leq \log_5 x \leq \log_5 \frac{1}{5}$

밑이 1보다 크므로

$\frac{1}{625} \leq x \leq \frac{1}{5} \quad \dots\dots \textcircled{B}$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 의 공통부분은 $\frac{1}{625} \leq x \leq \frac{1}{5}$

(2) 진수의 조건에서 $27x^2 > 0, \frac{1}{x} > 0$

$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$

$\log_{\frac{1}{3}} 27x^2 \times \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x} > -2$ 에서

$(-3 + 2\log_{\frac{1}{3}} x)(-\log_{\frac{1}{3}} x) > -2$

$-2(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 + 3\log_{\frac{1}{3}} x + 2 > 0$

$\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓으면 $-2t^2 + 3t + 2 > 0$

$2t^2 - 3t - 2 < 0, (2t+1)(t-2) < 0$

$\therefore -\frac{1}{2} < t < 2$

$t = \log_{\frac{1}{3}} x$ 이므로 $-\frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{3}} x < 2$

$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3} < \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$

밑이 1보다 작으므로

$\frac{1}{9} < x < \sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{B}$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 의 공통부분은 $\frac{1}{9} < x < \sqrt{3}$

313 $\textcircled{B}$ 1

진수의 조건에서 $\frac{4}{x} > 0, \frac{x}{8} > 0$

$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$

$(\log_2 \frac{4}{x})(\log_2 \frac{x}{8}) < -2$ 에서

$(2 - \log_2 x)(\log_2 x - 3) < -2$

$(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 4 > 0$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 $t^2 - 5t + 4 > 0$

$(t-1)(t-4) > 0 \quad \therefore t < 1 \text{ 또는 } t > 4$

$t = \log_2 x$ 이므로 $\log_2 x < 1$ 또는 $\log_2 x > 4$

$\log_2 x < \log_2 2$ 또는 $\log_2 x > \log_2 16$

밑이 1보다 크므로

$x < 2$ 또는 $x > 16 \quad \dots\dots \textcircled{B}$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 의 공통부분은 $0 < x < 2$ 또는 $x > 16$

따라서 정수 x 의 최솟값은 1이다.

314 $\textcircled{B}$ ①

$(\log_{\frac{1}{9}} x)(\log_3 \frac{x}{9}) \geq a$ 에서

$(-\frac{1}{2} \log_3 x)(\log_3 x - 2) \geq a$

$-\frac{1}{2}(\log_3 x)^2 + \log_3 x \geq a$

$(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x + 2a \leq 0$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 $t^2 - 2t + 2a \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$

주어진 부등식의 해가 $\frac{1}{9} \leq x \leq 81$ 이므로

$\log_3 \frac{1}{9} \leq \log_3 x \leq \log_3 81$ 에서 $-2 \leq t \leq 4$

즉, 이차방의 계수가 1이고 해가 $-2 \leq t \leq 4$ 인 t 에 대한 이차부등식은

$(t+2)(t-4) \leq 0$

$\therefore t^2 - 2t - 8 \leq 0$

이 부등식이 $\textcircled{A}$ 과 일치하므로

$2a = -8 \quad \therefore a = -4$

315 ㉮ $\frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4}$

진수의 조건에서

$x > 0$ ㉮

$x^{\log_{\frac{1}{2}} x} \geq 64x^5$ 의 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$ 인 로그를 취하면

$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 \leq -6 + 5 \log_{\frac{1}{2}} x$

$\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 놓으면

$t^2 \leq -6 + 5t$

$t^2 - 5t + 6 \leq 0$

$(t-2)(t-3) \leq 0$

$\therefore 2 \leq t \leq 3$

$t = \log_{\frac{1}{2}} x$ 이므로

$2 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq 3$

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$

밑이 1보다 작으므로

$\frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4}$ ㉮

㉮, ㉮의 공통부분은

$\frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4}$

316 ㉮ 45

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉮

$x^{\log_3 x} \leq 9x$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$(\log_3 x)^2 \leq 2 + \log_3 x$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$t^2 \leq 2 + t$

$t^2 - t - 2 \leq 0$

$(t+1)(t-2) \leq 0$

$\therefore -1 \leq t \leq 2$

$t = \log_3 x$ 이므로

$-1 \leq \log_3 x \leq 2$

$\log_3 \frac{1}{3} \leq \log_3 x \leq \log_3 9$

밑이 1보다 크므로

$\frac{1}{3} \leq x \leq 9$ ㉮

㉮, ㉮의 공통부분은

$\frac{1}{3} \leq x \leq 9$

따라서 정수 x 의 값은 1, 2, 3, ..., 9이므로

구하는 합은 $1+2+3+\dots+9=45$

317 ㉮ $0 < x \leq 10$ 또는 $x \geq 1000$

진수의 조건에서

$x > 0$ ㉮

$2^{\log x} \times x^{\log 2} - 10 \times 2^{\log x} + 16 \geq 0$ 에서

$(2^{\log x})^2 - 10 \times 2^{\log x} + 16 \geq 0$

$2^{\log x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$t^2 - 10t + 16 \geq 0$

$(t-2)(t-8) \geq 0$

$\therefore t \leq 2$ 또는 $t \geq 8$

그런데 $t > 0$ 이므로

$0 < t \leq 2$ 또는 $t \geq 8$

$t = 2^{\log x}$ 이므로

$0 < 2^{\log x} \leq 2$ 또는 $2^{\log x} \geq 8$

$2^{\log x} \leq 2^1$ 또는 $2^{\log x} \geq 2^3$

지수의 밑이 1보다 크므로

$\log x \leq 1$ 또는 $\log x \geq 3$

$\log x \leq \log 10$ 또는 $\log x \geq \log 1000$

로그의 밑이 1보다 크므로

$x \leq 10$ 또는 $x \geq 1000$ ㉮

㉮, ㉮의 공통부분은

$0 < x \leq 10$ 또는 $x \geq 1000$

318 ㉮ ③

진수의 조건에서

$x > 0$ ㉮

$5^{\log_5 x} \times x^{\log_5 5} - 26 \times 5^{\log_5 x} + 25 < 0$ 에서

$(5^{\log_5 x})^2 - 26 \times 5^{\log_5 x} + 25 < 0$

$5^{\log_5 x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$t^2 - 26t + 25 < 0$

$(t-1)(t-25) < 0$

$\therefore 1 < t < 25$

$t = 5^{\log_5 x}$ 이므로 $1 < 5^{\log_5 x} < 25$

$5^0 < 5^{\log_5 x} < 5^2$

지수의 밑이 1보다 크므로

$0 < \log_5 x < 2$

$\log_5 1 < \log_5 x < \log_5 9$

로그의 밑이 1보다 크므로

$1 < x < 9$ ㉮

㉮, ㉮의 공통부분은

$1 < x < 9$

따라서 자연수 x 는 2, 3, 4, ..., 8의 7개이다.

319 ㉮ $k > \sqrt{2}$

진수의 조건에서

$$k > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

$$(\log_2 x)^2 + 2\log_2 kx > 0 \text{에서}$$

$$(\log_2 x)^2 + 2(\log_2 x + \log_2 k) > 0$$

$$(\log_2 x)^2 + 2\log_2 x + 2\log_2 k > 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 + 2t + 2\log_2 k > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

모든 양수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

모든 실수 t 에 대하여 부등식 ㉮이 성립해야 한다.

이차방정식 $t^2 + 2t + 2\log_2 k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 2\log_2 k < 0$$

$$\log_2 k > \frac{1}{2}$$

$$\log_2 k > \log_2 \sqrt{2}$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } k > \sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

㉮, ㉮의 공통부분은

$$k > \sqrt{2}$$

320 ㉮ 7^8

진수의 조건에서

$$a > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$(\log_7 a)^2 - 4(3 + \log_7 a) > 0$$

$$(\log_7 a)^2 - 4\log_7 a - 12 > 0$$

$$\log_7 a = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 4t - 12 > 0$$

$$(t+2)(t-6) > 0$$

$$\therefore t < -2 \text{ 또는 } t > 6$$

$$t = \log_7 a \text{이므로}$$

$$\log_7 a < -2 \text{ 또는 } \log_7 a > 6$$

$$\log_7 a < \log_7 7^{-2} \text{ 또는 } \log_7 a > \log_7 7^6$$

밑이 1보다 크므로

$$a < 7^{-2} \text{ 또는 } a > 7^6 \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

㉮, ㉮의 공통부분은

$$0 < a < 7^{-2} \text{ 또는 } a > 7^6$$

따라서 $\alpha = 7^{-2}$, $\beta = 7^6$ 이므로

$$\frac{\beta}{\alpha} = 7^8$$

321 ㉮ 81

$$(\log_3 x)^2 \geq \log_3 \frac{x^4}{k} \text{에서}$$

$$(\log_3 x)^2 \geq 4\log_3 x - \log_3 k$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 \geq 4t - \log_3 k$$

$$t^2 - 4t + \log_3 k \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

모든 양수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

모든 실수 t 에 대하여 부등식 ㉮이 성립해야 한다.

이차방정식 $t^2 - 4t + \log_3 k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D \leq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - \log_3 k \leq 0$$

$$\log_3 k \geq 4$$

$$\log_3 k \geq \log_3 81$$

밑이 1보다 크므로

$$k \geq 81$$

따라서 양수 k 의 최솟값은 81이다.

322 ㉮ $\frac{1}{100} < a < \frac{1}{10}$

진수의 조건에서 $a > 0$

$$\text{그런데 } a \neq \frac{1}{100} \text{이므로}$$

$$0 < a < \frac{1}{100} \text{ 또는 } a > \frac{1}{100} \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-\log a - 2)^2 - (\log a + 2) < 0$$

$$(\log a)^2 + 3\log a + 2 < 0$$

$$\log a = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 + 3t + 2 < 0$$

$$(t+2)(t+1) < 0$$

$$\therefore -2 < t < -1$$

$$t = \log a \text{이므로}$$

$$-2 < \log a < -1$$

$$\log \frac{1}{100} < \log a < \log \frac{1}{10}$$

밑이 1보다 크므로

$$\frac{1}{100} < a < \frac{1}{10} \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

㉮, ㉮의 공통부분은

$$\frac{1}{100} < a < \frac{1}{10}$$

323 ㉮ 20번

현재 불순물의 양을 A 라 하면 정수 필터를 n 번 통과한 후의 불순물의 양은 $A \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$ 이므로

$$A \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = A \times \frac{1}{100} \quad \left[A \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^n \right]$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{100}$$

$$\text{양변에 상용로그를 취하면 } n(\log 3 - 2\log 2) = -2$$

$$n(0.5 - 2 \times 0.3) = -2$$

$$-0.1n = -2 \quad \therefore n = 20$$

따라서 불순물의 양이 처음으로 현재 양의 $\frac{1}{100}$ 이 되려면 정수 필터를 20번 통과시켜야 한다.

324 ㉮ ④

대역폭이 15, 신호전력이 186, 잡음전력이 a 인 채널 용량이 75이므로

$$75 = 15 \log_2 \left(1 + \frac{186}{a}\right)$$

$$5 = \log_2 \left(1 + \frac{186}{a}\right), 1 + \frac{186}{a} = 2^5$$

$$\frac{186}{a} = 31 \quad \therefore a = 6$$

325 ㉮ ②

n 번째 주에 달린 거리는 $5 \times (1.1)^{n-1}$ km이므로

$$5 \times (1.1)^{n-1} \geq 20, (1.1)^{n-1} \geq 4 \quad \left[5 \times (1+0.1)^{n-1} \text{ km} \right]$$

$$\text{양변에 상용로그를 취하면 } (n-1) \log 1.1 \geq 2 \log 2$$

$$(n-1) \times 0.0414 \geq 2 \times 0.3010, 0.0414n \geq 0.6434$$

$$\therefore n \geq 15.541 \dots$$

따라서 달린 거리가 처음으로 20 km 이상이 되는 주는 16번째 주이다.

326 ㉮ 12.5 %

전자 기기로부터의 거리가 90 cm 이상인 지점에서 측정되는 전자파의 양 T 가 방출되는 전자파의 양 T_0 의 x %라 하면 $T = \frac{x}{100} T_0$ 이므로

$$30 \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{100} \geq 90, \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{100} \geq 3, \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{100} \geq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } \frac{x}{100} \leq \frac{1}{8} \quad \therefore x \leq 12.5$$

따라서 전자 기기로부터의 거리가 90 cm 이상인 지점에서 측정되는 전자파의 양은 방출되는 전자파의 양의 12.5 % 이하이다.

연습문제

162~164쪽

327 ㉮ $x=5$

진수의 조건에서 $x-2 > 0, 14-x > 0$

$$\therefore 2 < x < 14 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log_6(x-2) = \log_{36}(14-x)$ 에서

$$\log_{36}(x-2)^2 = \log_{36}(14-x)$$

$$(x-2)^2 = 14-x$$

$$x^2 - 4x + 4 = 14 - x, x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x+2)(x-5) = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 5$$

따라서 ㉮에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = 5$$

328 ㉮ $\frac{1}{100}$

진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$x^{\log x} = \frac{1000}{x^2}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$(\log x)^2 = 3 - 2 \log x$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 = 3 - 2t$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$(t+3)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

$t = \log x$ 이므로

$$\log x = -3 \text{ 또는 } \log x = 1$$

$$\therefore x = 10^{-3} = \frac{1}{1000} \text{ 또는 } x = 10$$

따라서 ㉮에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{1}{1000} \text{ 또는 } x = 10 \text{이므로 구하는 곱은}$$

$$\frac{1}{1000} \times 10 = \frac{1}{100}$$

329 ㉮ ①

진수의 조건에서 $2x+4 > 0, x-1 > 0$

$$\therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_a(2x+4) - \log_a(x-1) \leq \log_a 3 \text{에서}$$

$$\log_a(2x+4) \leq \log_a 3 + \log_a(x-1)$$

$$\log_a(2x+4) \leq \log_a 3(x-1)$$

$$0 < a < 1 \text{이므로}$$

$$2x+4 \geq 3(x-1) \quad \therefore x \leq 7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉮, ㉮의 공통부분은 $1 < x \leq 7$

따라서 정수 x 의 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7이므로

$$\text{구하는 합은 } 2+3+4+5+6+7=27$$

330 ㉡ 625

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠
 $x^{\log_5 x} \leq 625x^3$ 의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$$(\log_5 x)^2 \leq 4 + 3 \log_5 x$$

$$\log_5 x = t \text{로 놓으면 } t^2 \leq 4 + 3t$$

$$t^2 - 3t - 4 \leq 0$$

$$(t+1)(t-4) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq t \leq 4$$

$$t = \log_5 x \text{이므로 } -1 \leq \log_5 x \leq 4$$

$$\log_5 \frac{1}{5} \leq \log_5 x \leq \log_5 625$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{5} \leq x \leq 625 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{의 공통부분은 } \frac{1}{5} \leq x \leq 625$$

따라서 자연수 x 는 1, 2, 3, ..., 625의 625개이다.

331 ㉡ ④

이차방정식 $x^2 - 2x \log_2 a + 4 \log_2 a - 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-\log_2 a)^2 - (4 \log_2 a - 3) < 0$$

$$(\log_2 a)^2 - 4 \log_2 a + 3 < 0$$

$$\log_2 a = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 4t + 3 < 0$$

$$(t-1)(t-3) < 0 \quad \therefore 1 < t < 3$$

$$t = \log_2 a \text{이므로 } 1 < \log_2 a < 3$$

$$\log_2 2 < \log_2 a < \log_2 8$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } 2 < a < 8$$

332 ㉡ 5년

현재의 인구 양을 A 라 하면 n 년 후의 인구 양은

$$A \times \left(\frac{96}{100} \right)^n \text{이므로 } A \times \left(1 - \frac{4}{100} \right)^n$$

$$A \times \left(\frac{96}{100} \right)^n \leq A \times \frac{80}{100}$$

$$\left(\frac{96}{100} \right)^n \leq \frac{8}{10}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$n(\log 96 - 2) \leq \log 8 - 1$$

$$\text{이때 } \log 96 = 5 \log 2 + \log 3 = 5 \times 0.3 + 0.48 = 1.98,$$

$$\log 8 = 3 \log 2 = 3 \times 0.3 = 0.9 \text{이므로}$$

$$n(1.98 - 2) \leq 0.9 - 1, 0.02n \geq 0.1$$

$$\therefore n \geq 5$$

따라서 인구가 현재의 80 % 이하가 되는 것은 최소 5년 후이다.

333 ㉡ 2

$$\overline{AB} = \log_2 k - \log_4 \frac{1}{k} = \frac{3}{2} \log_2 k,$$

$$\overline{CD} = \log_2 (k+2) - \log_4 \frac{1}{k+2} = \frac{3}{2} \log_2 (k+2)$$

이므로 사다리꼴 ABDC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left\{ \frac{3}{2} \log_2 k + \frac{3}{2} \log_2 (k+2) \right\} \times 2$$

$$= \frac{3}{2} \{ \log_2 k + \log_2 (k+2) \} = \frac{3}{2} \log_2 k(k+2)$$

$$\text{따라서 } \frac{3}{2} \log_2 k(k+2) = \frac{9}{2} \text{이므로}$$

$$\log_2 k(k+2) = 3, \log_2 k(k+2) = \log_2 8$$

$$k(k+2) = 8, k^2 + 2k - 8 = 0$$

$$(k+4)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = 2 (\because k > 1)$$

334 ㉡ 2

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$5^{\log_5 x + 1} \times x^{\log_5 5} - 126 \times 5^{\log_5 x} + 25 = 0 \text{에서}$$

$$5 \times (5^{\log_5 x})^2 - 126 \times 5^{\log_5 x} + 25 = 0$$

$$5^{\log_5 x} = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$5t^2 - 126t + 25 = 0$$

$$(5t-1)(t-25) = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{5} \text{ 또는 } t = 25$$

$$t = 5^{\log_5 x} \text{이므로}$$

$$5^{\log_5 x} = \frac{1}{5} \text{ 또는 } 5^{\log_5 x} = 25$$

$$5^{\log_5 x} = 5^{-1} \text{ 또는 } 5^{\log_5 x} = 5^2$$

$$\log_2 x = -1 \text{ 또는 } \log_2 x = 2$$

$$\therefore x = 2^{-1} = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 2^2 = 4$$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 4 \text{이므로 구하는 곱은}$$

$$\frac{1}{2} \times 4 = 2$$

335 ㉡ 15

$$(\log x)^2 - 5 \log x + 3 = 0 \text{에서 } \log x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 5t + 3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식의 두 근이 α, β 이므로

이차방정식 ㉠의 두 근은 $\log \alpha, \log \beta$

㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log \alpha + \log \beta = 5, \log \alpha \times \log \beta = 3$$

$$(\log x)^2 + p \log x + q = 0 \text{에서 } \log x = k \text{로 놓으면}$$

$$k^2 + pk + q = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이차방정식 ㉠의 두 근은 $\log \frac{1}{\alpha}, \log \frac{1}{\beta}$, 즉
 $-\log \alpha, -\log \beta$ 이므로
 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $p = -\{-\log \alpha + (-\log \beta)\} = \log \alpha + \log \beta = 5$,
 $q = (-\log \alpha) \times (-\log \beta) = \log \alpha \times \log \beta = 3$
 $\therefore pq = 15$

336 ㉡ $x=125$

진수의 조건에서 $\log_9(\log_5 x) > 0, x > 0$
 $\log_9(\log_5 x) > \log_9 1$
 밑이 1보다 크므로 $\log_5 x > 1$
 $\log_5 x > \log_5 5$
 밑이 1보다 크므로 $x > 5$ ㉠
 $\log_2\{\log_9(\log_5 x)\} = -1$ 에서 로그의 정의에 의하여
 $\log_9(\log_5 x) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
 $\log_9(\log_5 x) = \frac{1}{2}$ 에서 로그의 정의에 의하여
 $\log_5 x = 9^{\frac{1}{2}} = 3$
 $\log_5 x = 3$ 에서 로그의 정의에 의하여 $x = 5^3 = 125$
 따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = 125$

337 ㉢ ㉡

진수의 조건에서 $f(x) > 0, g(x) > 0$ ㉠
 $\log_{\frac{1}{5}} f(x) < \log_{\frac{1}{5}} g(x)$ 에서
 밑이 1보다 작으므로 $f(x) > g(x)$ ㉡
 주어진 그래프에서 ㉠, ㉡의 공통부분은
 $-2 < x < -1$

338 ㉣ ㉢

진수의 조건에서 $-x-8 > 0, -\frac{x}{3} + k > 0$
 $x < -8, x < 3k$
 $\therefore x < -8$ ($\because k$ 는 자연수) ㉠
 $\log_{\frac{1}{3}}(-x-8) \geq \log_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{x}{3} + k\right)$ 에서
 밑이 1보다 작으므로 $-x-8 \leq -\frac{x}{3} + k$
 $\therefore x \geq -12 - \frac{3}{2}k$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분은 $-12 - \frac{3}{2}k \leq x < -8$
 이 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 13이므로
 $-22 < -12 - \frac{3}{2}k \leq -21 \quad \therefore 6 \leq k < \frac{20}{3}$
 따라서 k 는 자연수이므로 $k = 6$

339 ㉤ 20

진수의 조건에서 $a > 0$ ㉠
 주어진 이차방정식의 두 근이 모두 양수일 조건은
 (i) 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D \geq 0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4} = (-\log_5 a)^2 - (2 - \log_5 a) \geq 0$
 $\log_5 a = t$ 로 놓으면 $t^2 + t - 2 \geq 0$
 $(t+2)(t-1) \geq 0 \quad \therefore t \leq -2$ 또는 $t \geq 1$
 $t = \log_5 a$ 이므로 $\log_5 a \leq -2$ 또는 $\log_5 a \geq 1$
 $\log_5 a \leq \log_5 \frac{1}{25}$ 또는 $\log_5 a \geq \log_5 5$
 밑이 1보다 크므로 $a \leq \frac{1}{25}$ 또는 $a \geq 5$ ㉡
 (ii) (두 근의 합) > 0 이어야 하므로
 $2\log_5 a > 0, \log_5 a > 0, \log_5 a > \log_5 1$
 밑이 1보다 크므로 $a > 1$ ㉢
 (iii) (두 근의 곱) > 0 이어야 하므로
 $2 - \log_5 a > 0, \log_5 a < 2, \log_5 a < \log_5 25$
 밑이 1보다 크므로 $a < 25$ ㉣
 (i)~(iii)에서 $5 \leq a < 25$ ㉤
 ㉠, ㉤의 공통부분은 $5 \leq a < 25$
 따라서 자연수 a 는 5, 6, 7, ..., 24의 20개이다.
 ㉥

단계	채점 기준	비율
①	주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때 $D \geq 0$ 을 만족시키는 a 의 값의 범위 구하기	50%
②	(두 근의 합) > 0 을 만족시키는 a 의 값의 범위 구하기	20%
③	(두 근의 곱) > 0 을 만족시키는 a 의 값의 범위 구하기	20%
④	자연수 a 의 개수 구하기	10%

340 ㉦ 9 g

20 g의 황성탄 A를 염료 B의 농도가 8%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때, 황성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 4 g이므로
 $\log \frac{4}{20} = -1 + k \log 8, \log \frac{1}{5} = \log \frac{8^k}{10}$
 즉, $\frac{1}{5} = \frac{8^k}{10}$ 이므로 $8^k = 2 \quad \therefore k = \log_8 2 = \frac{1}{3}$
 30 g의 황성탄 A를 염료 B의 농도가 27%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때, 황성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량을 x g이라 하면

$$\log \frac{x}{30} = -1 + \frac{1}{3} \log 27, \log \frac{x}{30} = \log \frac{3}{10}$$

$$\text{즉, } \frac{x}{30} = \frac{3}{10} \text{ 이므로 } x=9$$

따라서 구하는 염료 B의 질량은 9 g이다.

341 ㉮ ①

| 접근 방법 | 두 집합 A, B를 각각 구한 후 $A \cap B \neq \emptyset$ 이 되도록 하는 x의 값의 범위를 추론한다.

$$A = \{x \mid 1 \leq x \leq 4\}$$

$$(\log_2 x)^2 - 2k \log_2 x + k^2 - 1 \leq 0 \text{에서}$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 2kt + k^2 - 1 \leq 0$$

$$(t-k+1)(t-k-1) \leq 0 \quad \therefore k-1 \leq t \leq k+1$$

$$t = \log_2 x \text{이므로 } 2^{k-1} \leq x \leq 2^{k+1}$$

$$\therefore B = \{x \mid 2^{k-1} \leq x \leq 2^{k+1}\}$$

$A \cap B \neq \emptyset$ 이 되려면 $1 \leq 2^{k+1}$ 이고 $2^{k-1} \leq 4$ 이어야 한다.

$$0 \leq k+1 \text{이고 } k-1 \leq 2 \quad \therefore -1 \leq k \leq 3$$

따라서 정수 k는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

342 ㉮ 19

$$3^{2x} - \frac{2}{3} \log_3 a \times 3^{x+1} + \log_3 \frac{a^5}{81} = 0 \text{에서}$$

$$3^{2x} - 2 \log_3 a \times 3^x + 5 \log_3 a - 4 = 0$$

$$3^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2t \log_3 a + 5 \log_3 a - 4 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차 방정식 ①은 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ①의 판별식을 D라 하면

$$D > 0 \text{이어야 하므로}$$

$$\frac{D}{4} = (-\log_3 a)^2 - (5 \log_3 a - 4) > 0$$

$$\log_3 a = k \text{로 놓으면 } k^2 - 5k + 4 > 0$$

$$(k-1)(k-4) > 0 \quad \therefore k < 1 \text{ 또는 } k > 4$$

$$k = \log_3 a \text{이므로}$$

$$\log_3 a < \log_3 3 \text{ 또는 } \log_3 a > \log_3 81$$

$$\therefore a < 3 \text{ 또는 } a > 81$$

(ii) (두 근의 합) > 0이어야 하므로

$$2 \log_3 a > 0, \log_3 a > \log_3 1 \quad \therefore a > 1$$

(iii) (두 근의 곱) > 0이어야 하므로

$$5 \log_3 a - 4 > 0, \log_3 a > \log_3 3^{\frac{4}{5}} \quad \therefore a > 3^{\frac{4}{5}}$$

$$(i) \sim (iii) \text{에서 } 3^{\frac{4}{5}} < a < 3 \text{ 또는 } a > 81$$

따라서 100 이하의 자연수 a는

82, 83, 84, ..., 100의 19개이다.

II. 삼각함수

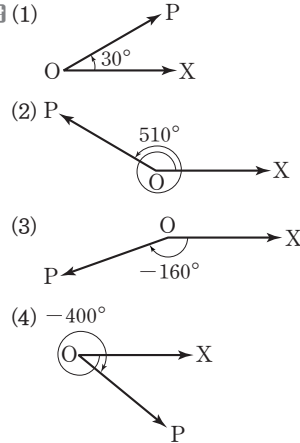
II-1. 삼각함수

01 일반각과 호도법

개념 확인

169쪽

343 ㉮ (1)



$$344 \text{ ㉮ (1) } 360^\circ \times n + 75^\circ \quad (2) 360^\circ \times n + 20^\circ$$

$$(3) 360^\circ \times n + 220^\circ \quad (4) 360^\circ \times n + 340^\circ$$

$$345 \text{ ㉮ (1) 제2사분면 (2) 제1사분면}$$

$$(3) 제3사분면 (4) 제2사분면$$

$$(5) 제4사분면 (6) 제1사분면$$

유제

171~175쪽

346 ㉮ ④

$$\textcircled{1} -660^\circ = 360^\circ \times (-2) + 60^\circ$$

$$\textcircled{2} -510^\circ = 360^\circ \times (-2) + 210^\circ$$

$$\textcircled{3} 420^\circ = 360^\circ \times 1 + 60^\circ$$

$$\textcircled{4} 750^\circ = 360^\circ \times 2 + 30^\circ$$

$$\textcircled{5} 1040^\circ = 360^\circ \times 2 + 320^\circ$$

따라서 30°를 나타내는 동경과 동경이 일치하는 각은 ④이다.

347 ㉮ ③

$$\textcircled{1} 405^\circ = 360^\circ \times 1 + 45^\circ$$

$$\textcircled{2} 765^\circ = 360^\circ \times 2 + 45^\circ$$

$$\textcircled{3} 1005^\circ = 360^\circ \times 2 + 285^\circ$$

$$\textcircled{4} -315^\circ = 360^\circ \times (-1) + 45^\circ$$

$$\textcircled{5} -675^\circ = 360^\circ \times (-2) + 45^\circ$$

따라서 동경 OP가 나타낼 수 없는 각은 ③이다.

348 ㉔ ⑤

- ① $330^\circ = 360^\circ \times 0 + 330^\circ$
- ② $690^\circ = 360^\circ \times 1 + 330^\circ$
- ③ $1050^\circ = 360^\circ \times 2 + 330^\circ$
- ④ $-30^\circ = 360^\circ \times (-1) + 330^\circ$
- ⑤ $-780^\circ = 360^\circ \times (-3) + 300^\circ$

따라서 각을 나타내는 동경이 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

349 ㉔ ③

- ① $-540^\circ = 360^\circ \times (-2) + 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180$
- ② $-260^\circ = 360^\circ \times (-1) + 100^\circ \Rightarrow \alpha = 100$
- ③ $430^\circ = 360^\circ \times 1 + 70^\circ \Rightarrow \alpha = 70$
- ④ $620^\circ = 360^\circ \times 1 + 260^\circ \Rightarrow \alpha = 260$
- ⑤ $810^\circ = 360^\circ \times 2 + 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90$

따라서 α 의 값이 가장 작은 것은 ③이다.

350 ㉔ 제2사분면, 제4사분면

θ 가 제3사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$\therefore 180^\circ \times n + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 135^\circ$$

(i) $n = 2k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 135^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n = 2k + 1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 270^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 315^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면 또는 제4사분면이다.

351 ㉔ 제1사분면

3θ 가 제4사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 270^\circ < 3\theta < 360^\circ \times n + 360^\circ \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$\therefore 120^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 120^\circ \times n + 120^\circ$$

(i) $n = 3k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 120^\circ$$

따라서 θ 는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n = 3k + 1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 210^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 240^\circ$$

따라서 θ 는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n = 3k + 2$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 330^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 360^\circ$$

따라서 θ 는 제4사분면의 각이다.

(i)~(iii)에서 각 θ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면 또는 제3사분면 또는 제4사분면이다.

따라서 각 θ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제1사분면이다.

352 ㉔ ②

$$\textcircled{1} 175^\circ = 360^\circ \times 0 + 175^\circ \Rightarrow \text{제2사분면}$$

$$\textcircled{2} 600^\circ = 360^\circ \times 1 + 240^\circ \Rightarrow \text{제3사분면}$$

$$\textcircled{3} 840^\circ = 360^\circ \times 2 + 120^\circ \Rightarrow \text{제2사분면}$$

$$\textcircled{4} -205^\circ = 360^\circ \times (-1) + 155^\circ \Rightarrow \text{제2사분면}$$

$$\textcircled{5} -580^\circ = 360^\circ \times (-2) + 140^\circ \Rightarrow \text{제2사분면}$$

따라서 각을 나타내는 동경이 존재하는 사분면이 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다.

353 ㉔ ⑤

θ 가 제1사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 0^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 90^\circ \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

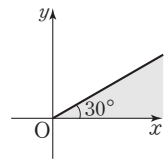
$$\therefore 120^\circ \times n + 0^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 30^\circ$$

(i) $n = 3k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 0^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 30^\circ$$

따라서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경

이 속하는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

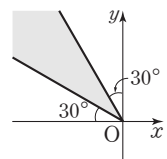


(ii) $n = 3k + 1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 120^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 150^\circ$$

따라서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경

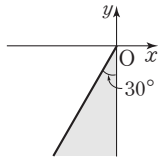
이 속하는 영역을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



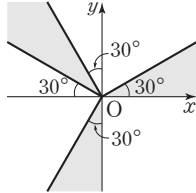
(iii) $n = 3k + 2$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 240^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 270^\circ$$

따라서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경
이 속하는 영역을 좌표평면 위
에 나타내면 오른쪽 그림과 같
다.



(i)~(iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내
는 동경이 속하는 모든 영역을
좌표평면 위에 나타내면 오른
쪽 그림과 같다.



354 ㉡ 216°

각 θ 를 나타내는 동경과 각 6θ 를 나타내는 동경이 일
치하므로

$$6\theta - \theta = 360^\circ \times n \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$5\theta = 360^\circ \times n \quad \therefore \theta = 72^\circ \times n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

그런데 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$0^\circ < 72^\circ \times n < 180^\circ \quad \therefore 0 < n < \frac{5}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=1$ 또는 $n=2$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=72^\circ$ 또는 $\theta=144^\circ$

따라서 모든 각 θ 의 크기의 합은

$$72^\circ + 144^\circ = 216^\circ$$

355 ㉡ 210°

각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 y 축
에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 5\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$6\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ \times n + 30^\circ \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

그런데 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ 이므로

$$180^\circ < 60^\circ \times n + 30^\circ < 270^\circ \quad \therefore \frac{5}{2} < n < 4$$

이때 n 은 정수이므로 $n=3$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=210^\circ$

356 ㉡ 150°

각 θ 를 나타내는 동경과 각 7θ 를 나타내는 동경이 일
직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$$7\theta - \theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$6\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ \times n + 30^\circ \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

그런데 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$90^\circ < 60^\circ \times n + 30^\circ < 180^\circ \quad \therefore 1 < n < \frac{5}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=2$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=150^\circ$

357 ㉡ 270°

각 θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 직
선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 4\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$5\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ$$

$$\therefore \theta = 72^\circ \times n + 18^\circ \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

그런데 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$0^\circ < 72^\circ \times n + 18^\circ < 180^\circ \quad \therefore -\frac{1}{4} < n < \frac{9}{4}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$

이를 ㉠에 대입하면

$$\theta=18^\circ \text{ 또는 } \theta=90^\circ \text{ 또는 } \theta=162^\circ$$

따라서 모든 각 θ 의 크기의 합은

$$18^\circ + 90^\circ + 162^\circ = 270^\circ$$

개념 확인

177쪽

$$358 \text{ ㉡ (1) } \frac{2}{3}\pi \text{ (2) } \frac{9}{5}\pi \text{ (3) } 3\pi \text{ (4) } -\frac{15}{4}\pi$$

$$359 \text{ ㉡ (1) } 54^\circ \text{ (2) } 160^\circ \text{ (3) } 300^\circ \text{ (4) } -210^\circ$$

$$360 \text{ ㉡ 호의 길이: } 2\pi, \text{ 넓이: } 8\pi$$

유제

179~181쪽

361 ㉡ ㄱ, ㄷ, ㄹ

$$\text{ㄱ. } 75^\circ = 75 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{12}\pi$$

$$\text{ㄴ. } 100^\circ = 100 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{9}\pi$$

$$\text{ㄷ. } 320^\circ = 320 \times \frac{\pi}{180} = \frac{16}{9}\pi$$

$$\text{ㄹ. } -\frac{\pi}{15} = -\frac{\pi}{15} \times \frac{180^\circ}{\pi} = -12^\circ$$

$$\text{ㅁ. } -\frac{4}{3}\pi = -\frac{4}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -240^\circ$$

$$\text{ㅂ. } \frac{5}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 225^\circ$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

362 ㉡ (1) $2n\pi + \frac{8}{9}\pi$ (2) $2n\pi + \frac{\pi}{2}$

(1) $160^\circ = 160 \times \frac{\pi}{180} = \frac{8}{9}\pi$

이므로 $2n\pi + \frac{8}{9}\pi$

(2) $-270^\circ = -270 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{3}{2}\pi$

$= 2\pi \times (-1) + \frac{\pi}{2}$

이므로 $2n\pi + \frac{\pi}{2}$

363 ㉡ ①

① $45^\circ = 45 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4}$

② $120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi$

③ $\frac{4}{9}\pi = \frac{4}{9}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 80^\circ$

④ $-\frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{5} \times \frac{180^\circ}{\pi} = -36^\circ$

⑤ $-\frac{13}{6}\pi = -\frac{13}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -390^\circ$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

364 ㉡ ④

① $-240^\circ = -240 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{4}{3}\pi$

$= 2\pi \times (-1) + \frac{2}{3}\pi$

② $\frac{2}{3}\pi = 2\pi \times 0 + \frac{2}{3}\pi$

③ $480^\circ = 480 \times \frac{\pi}{180} = \frac{8}{3}\pi$

$= 2\pi \times 1 + \frac{2}{3}\pi$

④ $\frac{10}{3}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{4}{3}\pi$

⑤ $1200^\circ = 1200 \times \frac{\pi}{180} = \frac{20}{3}\pi$

$= 2\pi \times 3 + \frac{2}{3}\pi$

따라서 각을 나타내는 동경이 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

365 ㉡ 중심각의 크기: $\frac{3}{4}\pi$, 넓이: 6π

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 $r=4$, $l=3\pi$

이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면 $l=r\theta$ 에서 $3\pi=4\theta \quad \therefore \theta=\frac{3}{4}\pi$

또 부채꼴의 넓이를 S 라 하면 $S=\frac{1}{2}rl$ 에서

$S=\frac{1}{2} \times 4 \times 3\pi=6\pi$

따라서 부채꼴의 중심각의 크기는 $\frac{3}{4}\pi$ 이고 넓이는 6π 이다.

366 ㉡ 5

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 20이므로

$2r+l=20 \quad \therefore l=20-2r$

이때 $r>0$, $20-2r>0$ 이므로 $0<r<10$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(20-2r)=-r^2+10r$

$=-(r-5)^2+25 \quad (0<r<10)$

즉, S 는 $r=5$ 에서 최댓값 25를 갖는다.

따라서 구하는 반지름의 길이는 5이다.

367 ㉡ ⑤

부채꼴의 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면

$l=3\pi$, $S=9\pi$

이때 부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 $S=\frac{1}{2}rl$ 에서

$9\pi=\frac{1}{2} \times r \times 3\pi \quad \therefore r=6$

또 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면 $l=r\theta$ 에서

$3\pi=6\theta \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{2}$

따라서 부채꼴의 중심각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

368 ㉡ 2

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 24이므로

$2r+l=24 \quad \therefore l=24-2r$

이때 $r>0$, $24-2r>0$ 이므로 $0<r<12$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(24-2r)=-r^2+12r$

$=-(r-6)^2+36 \quad (0<r<12)$

즉, S 는 $r=6$ 에서 최댓값 36을 갖는다.

이때의 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$S=\frac{1}{2}r^2\theta$ 에서 $36=\frac{1}{2} \times 6^2 \times \theta \quad \therefore \theta=2$

따라서 구하는 중심각의 크기는 2이다.

369 ㉮ ㄴ, ㄷ, ㄹ

$$\neg. 265^\circ = 360^\circ \times 0 + 265^\circ$$

$$\neg. 455^\circ = 360^\circ \times 1 + 95^\circ$$

$$\neg. 1175^\circ = 360^\circ \times 3 + 95^\circ$$

$$\neg. -275^\circ = 360^\circ \times (-1) + 85^\circ$$

$$\neg. -625^\circ = 360^\circ \times (-2) + 95^\circ$$

$$\neg. -975^\circ = 360^\circ \times (-3) + 105^\circ$$

따라서 보기에서 동경 OP가 나타낼 수 있는 각은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

370 ㉮ 180°

각 θ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 3\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 90^\circ \times n + 45^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$0^\circ < 90^\circ \times n + 45^\circ < 180^\circ \quad \therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

이를 ㉮에 대입하면 $\theta=45^\circ$ 또는 $\theta=135^\circ$

따라서 모든 각 θ 의 크기의 합은

$$45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$$

371 ㉮ 116

$$300^\circ = 300 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{3}\pi \text{이므로 } a=3, b=5$$

$$\frac{3}{5}\pi = \frac{3}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 108^\circ \text{이므로 } c=108$$

$$\therefore a+b+c=3+5+108=116$$

372 ㉮ ⑤

$$\begin{aligned} \textcircled{1} -\frac{9}{4}\pi &= -\frac{9}{4}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -405^\circ \\ &= 360^\circ \times (-2) + 315^\circ \Rightarrow \text{제4사분면} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} -80^\circ = 360^\circ \times (-1) + 280^\circ \Rightarrow \text{제4사분면}$$

$$\textcircled{3} \frac{4}{5}\pi = \frac{4}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 144^\circ \Rightarrow \text{제2사분면}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \frac{7}{3}\pi &= \frac{7}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 420^\circ \\ &= 360^\circ \times 1 + 60^\circ \Rightarrow \text{제1사분면} \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} 620^\circ = 360^\circ \times 1 + 260^\circ \Rightarrow \text{제3사분면}$$

따라서 각을 나타내는 동경이 제3사분면에 존재하는 것은 ⑤이다.

373 ㉮ ②

2θ 가 제1사분면의 각이라면

$$360^\circ \times n + 0^\circ < 2\theta < 360^\circ \times n + 90^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$\therefore 180^\circ \times n + 0^\circ < \theta < 180^\circ \times n + 45^\circ$$

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 0^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 45^\circ$$

따라서 θ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 225^\circ$$

따라서 θ 는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이므로

$$a=1 \text{ 또는 } a=3$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$1+3=4$$

374 ㉮ 108°

각 2θ 를 나타내는 동경과 각 7θ 를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로 두 동경은 일직선 위에 있고 방향이 반대이다.

$$7\theta - 2\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$5\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 72^\circ \times n + 36^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$90^\circ < 72^\circ \times n + 36^\circ < 180^\circ \quad \therefore \frac{3}{4} < n < 2$$

이때 n 은 정수이므로 $n=1$

이를 ㉮에 대입하면 $\theta=108^\circ$

375 ㉮ $\frac{1}{2}$

각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 5\theta = 2\pi \times n \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$6\theta = 2\pi \times n \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3} \times n \quad \dots\dots \textcircled{1} \gggggg \textcircled{1}$$

그런데 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{3} \times n < \pi \quad \therefore \frac{3}{2} < n < 3$$

이때 n 은 정수이므로 $n=2$

$$\text{이를 ㉮에 대입하면 } \theta = \frac{2}{3}\pi \quad \gggggg \textcircled{2}$$

$$\therefore \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

gggggg ③

단계	채점 기준	비율
①	각 θ 를 정수 n 에 대한 식으로 나타내기	30%
②	각 θ 의 크기 구하기	30%
③	$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 값 구하기	40%

376 ▣ ㄱ, ㄷ

$$\text{ㄱ. } 10^\circ = 10 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{18}$$

$$\text{ㄴ. } -\frac{5}{4}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{3}{4}\pi$$

$$\frac{13}{4}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{5}{4}\pi$$

따라서 $-\frac{5}{4}\pi$ 를 나타내는 동경과 $\frac{13}{4}\pi$ 를 나타내는 동경은 일치하지 않는다.

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } -210^\circ &= -210 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{7}{6}\pi \\ &= 2\pi \times (-1) + \frac{5}{6}\pi \end{aligned}$$

이므로 일반각은 $2n\pi + \frac{5}{6}\pi$ (n 은 정수)이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

377 ▣ 33 π

주어진 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 옆면인 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$$2\pi \times 3 = 6\pi$$

즉, 옆면인 부채꼴의 넓이는

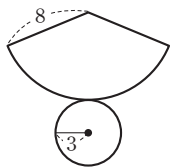
$$\frac{1}{2} \times 8 \times 6\pi = 24\pi$$

또 밑면인 원의 넓이는

$$\pi \times 3^2 = 9\pi$$

따라서 원뿔의 겉넓이는

$$24\pi + 9\pi = 33\pi$$



378 ▣ ⑤

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 부채꼴의 둘레의 길이가 $2n$ 이므로

$$2r + l = 2n \quad \therefore l = 2n - 2r$$

이때 $r > 0$, $2n - 2r > 0$ 이므로

$$0 < r < n$$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(2n - 2r) = -r^2 + nr \\ &= -\left(r - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{n^2}{4} \quad (0 < r < n) \end{aligned}$$

즉, S 는 $r = \frac{n}{2}$ 에서 최댓값 $\frac{n^2}{4}$ 을 가지므로

$$f(n) = \frac{n^2}{4}$$

$$\therefore f(2) + f(4) = \frac{2^2}{4} + \frac{4^2}{4} = 5$$

379 ▣ $\frac{25}{36}$ 배

부채꼴의 넓이를 S 라 하면 $S = \frac{1}{2}r^2\theta$

부채꼴의 반지름의 길이를 20% 늘였을 때의 반지름의 길이를 r' , 중심각의 크기를 θ' , 넓이를 S' 이라 하면

$$r' = (1 + 0.2)r = 1.2r$$

$$S' = \frac{1}{2}(r')^2\theta' = \frac{1}{2} \times (1.2r)^2\theta'$$

$$\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times (1.2r)^2\theta'$$

$$\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 1.44r^2 \times \theta'$$

$$\theta = 1.44\theta' \quad \therefore \theta' = \frac{25}{36}\theta$$

따라서 부채꼴의 중심각의 크기는 처음의 $\frac{25}{36}$ 배이다.

380 ▣ ③

| 접근 방법 | 부채꼴의 둘레의 길이를 반지름의 길이에 대한 식으로 나타낸 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 넓이가 24이므로

$$24 = \frac{1}{2}rl \quad \therefore l = \frac{48}{r}$$

즉, 부채꼴의 둘레의 길이는

$$2r + l = 2r + \frac{48}{r}$$

이때 $2r > 0$, $\frac{48}{r} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 2r + \frac{48}{r} &\geq 2\sqrt{2r \times \frac{48}{r}} \\ &= 2 \times 4\sqrt{6} = 8\sqrt{6} \end{aligned}$$

(단, 등호는 $2r = \frac{48}{r}$, 즉 $r = 2\sqrt{6}$ 일 때 성립)

따라서 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 $8\sqrt{6}$ 이다.

02 삼각함수

개념 확인

187쪽

381 ㉡ (1) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ (2) $-\frac{2}{3}$ (3) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

382 ㉡ (1) $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$
 (2) $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$
 (3) $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$
 (4) $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$

383 ㉡ (1) 제1사분면 (2) 제2사분면

384 ㉡ $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = 1$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

이때 θ 가 제3사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0$

$\therefore \sin \theta = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

유제

189~199쪽

385 ㉡ ④

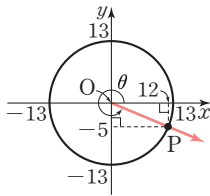
$\overline{OP} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$

이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin \theta = \frac{-5}{13} = -\frac{5}{13},$

$\cos \theta = \frac{12}{13}$

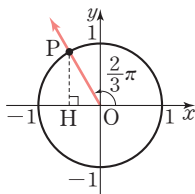
$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\frac{5}{13} + \frac{12}{13} = \frac{7}{13}$



386 ㉡ -1

오른쪽 그림과 같이 $\frac{2}{3}\pi$ 를 나

타내는 동경과 단위원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



삼각형 PHO에서

$\overline{OP} = 1, \angle POH = \pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$\overline{PH} = \overline{OP} \sin \frac{\pi}{3} = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{OH} = \overline{OP} \cos \frac{\pi}{3} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

이때 점 P가 제2사분면의 점이므로 $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

따라서 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = -\frac{1}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3}$

$\therefore \sin \theta \tan \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-\sqrt{3}) - \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

387 ㉡ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

삼각함수의 정의에 의하여 $\tan \theta = \frac{2}{a}$ 이므로

$-\frac{1}{2} = \frac{2}{a} \quad \therefore a = -4$

즉, $P(-4, 2)$ 이므로

$\overline{OP} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

따라서 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin \theta = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{-4}{2\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore a(\sin \theta + \cos \theta) = -4 \times \left\{ \frac{\sqrt{5}}{5} + \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \right\} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

388 ㉡ ④

직선 $y=2x (x \geq 0)$ 위의 임의의 한 점 P에 대하여 반

직선 OP를 동경으로 하는 각 θ 의 크기는 항상 일정하다.

즉, 점 P의 좌표를 $(t, 2t) (t > 0)$ 라 하면

$\overline{OP} = \sqrt{t^2 + (2t)^2} = \sqrt{5}t$

따라서 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin \theta = \frac{2t}{\sqrt{5}t} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{t}{\sqrt{5}t} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{5}$

389 ㉡ ②

(i) $\sin \theta \tan \theta < 0$ 에서

$\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$ 또는 $\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$

$\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$ 일 때, θ 는 제2사분면의 각이다.

$\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$ 일 때, θ 는 제3사분면의 각이다.

따라서 $\sin \theta \tan \theta < 0$ 을 만족시키는 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\cos \theta \tan \theta > 0$ 에서

$\cos \theta > 0, \tan \theta > 0$ 또는 $\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$
 $\cos \theta > 0, \tan \theta > 0$ 일 때, θ 는 제1사분면의 각이다.
 $\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$ 일 때, θ 는 제2사분면의 각이다.
따라서 $\cos \theta \tan \theta > 0$ 을 만족시키는 θ 는 제1사
분면 또는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제2사분면의 각이다.

390 $\square -2\sin \theta + 2\cos \theta$

θ 가 제4사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$

따라서 $\cos \theta - \sin \theta > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sin^2 \theta} + |\cos \theta| + \sqrt{(\cos \theta - \sin \theta)^2} \\ &= -\sin \theta + \cos \theta + (\cos \theta - \sin \theta) \\ &= -2\sin \theta + 2\cos \theta \end{aligned}$$

391 $\square$ 제1사분면, 제3사분면

(i) $\sin \theta \cos \theta < 0$ 에서

$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$ 또는 $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$
 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$ 일 때, θ 는 제2사분면의 각이다.
 $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$ 일 때, θ 는 제4사분면의 각이다.
따라서 $\sin \theta \cos \theta < 0$ 을 만족시키는 θ 는 제2사
분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\sin \theta \tan \theta < 0$ 에서

$\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$ 또는 $\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$
 $\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$ 일 때, θ 는 제2사분면의 각이다.
 $\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$ 일 때, θ 는 제3사분면의 각이다.
따라서 $\sin \theta \tan \theta < 0$ 을 만족시키는 θ 는 제2사
분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제2사분면의 각이다.

θ 가 제2사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 180^\circ \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$\therefore 180^\circ \times n + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 90^\circ$$

(iii) $n = 2k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 90^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제1사분면의 각이다.

(iv) $n = 2k + 1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 225^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 270^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제3사분면의 각이다.

(iii), (iv)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는
사분면은 제1사분면 또는 제3사분면이다.

392 $\square -\cos \theta$

$\sin \theta \cos \theta \neq 0$ 이고 $\frac{\sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{\cos \theta}} = -\sqrt{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$ 이므로

$$\cos \theta < 0, \sin \theta > 0$$

즉, θ 는 제2사분면의 각이므로

$$\tan \theta < 0$$

따라서 $\cos \theta + \tan \theta < 0, \tan \theta - \sin \theta < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} & |\cos \theta + \tan \theta| - \sqrt{(\tan \theta - \sin \theta)^2} + \sin \theta \\ &= -(\cos \theta + \tan \theta) - \{-(\tan \theta - \sin \theta)\} + \sin \theta \\ &= -\cos \theta - \tan \theta + \tan \theta - \sin \theta + \sin \theta \\ &= -\cos \theta \end{aligned}$$

393 $\square 0$

$$\begin{aligned} & \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 + 2\sin \theta \cos \theta} - \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} - \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \\ &= \frac{(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} - \frac{1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\ &= \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} - \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \\ &= 0 \end{aligned}$$

394 $\square \sqcup, \sqsubset$

$$\begin{aligned} \sqcup. & \frac{\cos^2 \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta(1 + \sin \theta) + \cos^2 \theta(1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{2\cos^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 2 \\ \sqsubset. & \sin^4 \theta - \cos^4 \theta \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\ &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= (1 - \cos^2 \theta) - \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2\cos^2 \theta \\ \sqsubset. & \tan^2 \theta + (1 - \tan^4 \theta)\cos^2 \theta \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^4 \theta - \sin^4 \theta}{\cos^4 \theta} \times \cos^2 \theta \\ &= \frac{\sin^2 \theta + (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\sqcup, \sqsubset$ 이다.

395 ㉒ 2

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \theta \cos \theta}{1+\cos \theta} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{1-\cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta \cos \theta (1-\cos \theta) + \sin \theta \cos \theta (1+\cos \theta)}{(1+\cos \theta)(1-\cos \theta)} \\ &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{1-\cos^2 \theta} \\ &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{2}{\tan \theta} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{2}{\tan \theta} = \frac{a}{\tan \theta}$ 이므로 $a=2$

396 ㉒ $-\sin \theta$

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-2 \sin \theta \cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\tan \theta} \\ &= \sqrt{\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} - \frac{\sin \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\ &= \sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2} - \cos \theta \\ &\text{이때 } 0 < \sin \theta < \cos \theta \text{ 이므로} \\ &\sin \theta - \cos \theta < 0 \\ &\therefore \sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2} - \cos \theta \\ &= -(\sin \theta - \cos \theta) - \cos \theta \\ &= -\sin \theta \end{aligned}$$

397 ㉒ -3

$$\begin{aligned} & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로} \\ & \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \\ & \text{이때 } \theta \text{가 제2사분면의 각이므로} \\ & \cos \theta < 0 \\ & \therefore \cos \theta = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5} \\ & \text{또 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ 이므로} \\ & \tan \theta = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3} \\ & \therefore \frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta = -\frac{5}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right) = -3 \end{aligned}$$

398 ㉒ ①

$$\begin{aligned} & \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ 이므로} \\ & \cos \theta \tan \theta = \frac{1}{2} \text{ 에서} \\ & \cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{2} \\ & \therefore \sin \theta = \frac{1}{2} \\ & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로} \\ & \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \\ & \text{이때 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{ 이므로} \\ & \cos \theta < 0 \\ & \therefore \cos \theta = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ & \text{따라서 } \tan \theta = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 이므로} \\ & \cos \theta + \tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= -\frac{5\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

399 ㉒ $-\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned} & \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ 이므로} \\ & \tan \theta = -\frac{4}{3} \text{ 에서} \\ & \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{4}{3} \\ & \therefore \sin \theta = -\frac{4}{3} \cos \theta \\ & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로} \\ & \left(-\frac{4}{3} \cos \theta\right)^2 + \cos^2 \theta = 1 \\ & \frac{25}{9} \cos^2 \theta = 1 \\ & \therefore \cos^2 \theta = \frac{9}{25} \\ & \text{이때 } \theta \text{가 제4사분면의 각이므로} \\ & \cos \theta > 0 \\ & \therefore \cos \theta = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \\ & \text{따라서 } \sin \theta = -\frac{4}{3} \times \frac{3}{5} = -\frac{4}{5} \text{ 이므로} \\ & \sin \theta + \cos \theta = -\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

400 ㉡ 1

$$\frac{\cos \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{\cos \theta}{1 + \cos \theta} = 2 \text{에서}$$

$$\frac{\cos \theta (1 + \cos \theta) - \cos \theta (1 - \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} = 2$$

$$\frac{2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 2, \frac{2}{\tan^2 \theta} = 2$$

$$\therefore \tan^2 \theta = 1$$

$$\text{이때 } \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{이므로 } \tan \theta > 0$$

$$\therefore \tan \theta = 1$$

$$401 \text{ ㉡ (1) } \frac{1}{4} \quad (2) -\frac{\sqrt{6}}{2} \quad (3) \frac{7}{8}$$

$$(1) \sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$(2) (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\text{이때 } \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{이므로 } \sin \theta < 0, \cos \theta < 0$$

$$\text{따라서 } \sin \theta + \cos \theta < 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$(3) \sin^4 \theta + \cos^4 \theta$$

$$= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$= 1^2 - 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{8} \quad \begin{array}{l} \text{---} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \text{---} = (\sin \theta \cos \theta)^2 \end{array}$$

$$402 \text{ ㉡ } \frac{13}{27}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

$$\therefore \sin^3 \theta + \cos^3 \theta$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left\{ 1 - \left(-\frac{4}{9}\right) \right\} = \frac{1}{3} \times \frac{13}{9} = \frac{13}{27}$$

403 ㉡ 40

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{7}{18} \text{이므로}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 + 2 \times \frac{7}{18} = \frac{16}{9}$$

$$\text{이때 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \sin \theta > 0, \cos \theta > 0$$

$$\text{따라서 } \sin \theta + \cos \theta > 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore 30(\sin \theta + \cos \theta) = 30 \times \frac{4}{3} = 40$$

404 ㉡ -2

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 2$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = 2$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -2$$

$$405 \text{ ㉡ } -\frac{8}{5}$$

$$\text{이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{5} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{5} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{9}{25}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{8}{25} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{B}, \textcircled{C} \text{에서 } \frac{k}{5} = -\frac{8}{25} \quad \therefore k = -\frac{8}{5}$$

$$406 \text{ ㉡ } -\frac{11}{16}$$

$$\text{이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= -\frac{1}{2} \times \left[1 - \left(-\frac{3}{8} \right) \right] = -\frac{11}{16} \end{aligned}$$

407 ㉠ - $\frac{7}{4}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta - \cos \theta) = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) = \frac{k}{2} \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } 2 \sin \theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \sin \theta = \frac{1}{4} \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉡}$ 의 좌변을 간단히 하면

$$\begin{aligned} &(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) \\ &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) \\ &= 2 \sin^2 \theta - 1 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2 \sin^2 \theta - 1 = \frac{k}{2} \text{ 이므로}$$

$$2 \times \left(\frac{1}{4} \right)^2 - 1 = \frac{k}{2} \quad (\because \textcircled{㉢})$$

$$\frac{k}{2} = -\frac{7}{8} \quad \therefore k = -\frac{7}{4}$$

408 ㉠ ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -k \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\sin \theta \cos \theta = -k \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = k^2$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = k^2$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{k^2 - 1}{2} \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡}, \textcircled{㉢} \text{에서 } \frac{k^2 - 1}{2} = -k$$

$$k^2 + 2k - 1 = 0$$

$$\therefore k = -1 + \sqrt{2} \quad (\because k > 0)$$

연습문제

200~202쪽

409 ㉠ ③

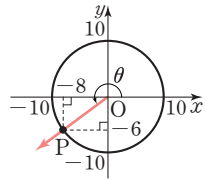
$$\overline{OP} = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = 10 \text{ 이}$$

므로 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin \theta = \frac{-6}{10} = -\frac{3}{5},$$

$$\tan \theta = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore 5 \sin \theta + 4 \tan \theta &= 5 \times \left(-\frac{3}{5} \right) + 4 \times \frac{3}{4} \\ &= -3 + 3 = 0 \end{aligned}$$



410 ㉠ 제1사분면

(i) $\sin \theta \cos \theta > 0$ 에서

$$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0 \text{ 또는 } \sin \theta < 0, \cos \theta < 0$$

$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 일 때, θ 는 제1사분면의 각이다.

$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$ 일 때, θ 는 제3사분면의 각이다.

따라서 $\sin \theta \cos \theta > 0$ 을 만족시키는 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\cos \theta \tan \theta > 0$ 에서

$$\cos \theta > 0, \tan \theta > 0 \text{ 또는 } \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

$\cos \theta > 0, \tan \theta > 0$ 일 때, θ 는 제1사분면의 각이다.

$\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$ 일 때, θ 는 제2사분면의 각이다.

따라서 $\cos \theta \tan \theta > 0$ 을 만족시키는 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제1사분면의 각이다.

411 ㉠ 1

$$(1 - \sin^2 \theta) \tan^2 \theta + \cos^2 \theta$$

$$= \cos^2 \theta \times \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

412 ㉠ ②

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{이때 } \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \text{ 이므로 } \sin \theta < 0$$

$$\therefore \sin \theta = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

413 ㉡ ①

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \therefore (2 \sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta + 2 \cos \theta) \\ &= 2 \sin^2 \theta + 5 \sin \theta \cos \theta + 2 \cos^2 \theta \\ &= 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 5 \sin \theta \cos \theta \\ &= 2 \times 1 + 5 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

414 ㉡ $3\sqrt{5}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{k}{5} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{2}{5} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{k^2}{25}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{k^2}{25}$$

$$1 + 2 \times \frac{2}{5} = \frac{k^2}{25} \quad (\because \textcircled{2})$$

$$k^2 = 45$$

$$\therefore k = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \quad (\because k > 0)$$

415 ㉡ $-\frac{8\sqrt{2}}{9}$

$$\sin \theta = \frac{1}{3} \text{이므로 } \frac{b}{OP} = \frac{1}{3}$$

이때 $OP = 2$ 이므로

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{3} \quad \therefore b = \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 P가 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 4$$

이 식에 ①을 대입하면

$$a^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 4$$

$$a^2 = \frac{32}{9}$$

이때 점 P가 제2사분면 위에 있으므로

$$a < 0$$

$$\therefore a = -\sqrt{\frac{32}{9}} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore ab = -\frac{4\sqrt{2}}{3} \times \frac{2}{3} = -\frac{8\sqrt{2}}{9}$$

416 ㉡ $\frac{1}{3}$

점 P의 좌표를 $(a, b) (a > 0, b > 0)$ 라 하면

$\overline{OH} = a, \overline{PH} = b, \overline{OP} = 1$ 이므로

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{OP}} = a, \cos \beta = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}} = b,$$

$$\tan \alpha = \frac{\overline{PH}}{\overline{OH}} = \frac{b}{a}$$

이를 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \tan^2 \alpha = 9$ 에 대입하면

$$a^2 + b^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 점 P가 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이 식을 ①에 대입하면

$$1 + \frac{b^2}{a^2} = 9, \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 9$$

$$\frac{1}{a^2} = 9 \quad (\because \textcircled{2})$$

$$a^2 = \frac{1}{9} \quad \therefore a = \frac{1}{3} \quad (\because a > 0)$$

따라서 선분 OH의 길이는 $\frac{1}{3}$ 이다.

417 ㉡ ㄴ, ㄷ

(i) $\sin \theta \tan \theta > 0$ 에서

$\sin \theta > 0, \tan \theta > 0$ 또는 $\sin \theta < 0, \tan \theta < 0$

$\sin \theta > 0, \tan \theta > 0$ 일 때, θ 는 제1사분면의 각이다.

$\sin \theta < 0, \tan \theta < 0$ 일 때, θ 는 제3사분면의 각이다.

따라서 $\sin \theta \tan \theta > 0$ 을 만족시키는 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\tan \theta \cos \theta < 0$ 에서

$\tan \theta > 0, \cos \theta < 0$ 또는 $\tan \theta < 0, \cos \theta > 0$

$\tan \theta > 0, \cos \theta < 0$ 일 때, θ 는 제2사분면의 각이다.

$\tan \theta < 0, \cos \theta > 0$ 일 때, θ 는 제4사분면의 각이다.

따라서 $\tan \theta \cos \theta < 0$ 을 만족시키는 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제1사분면의 각이다.

$$\therefore \sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$$

ㄱ. $\sin \theta - \tan \theta$ 의 부호는 알 수 없다.

ㄷ. $\cos \theta + \tan \theta$ 의 부호는 알 수 없다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

418 $\square -\frac{1}{\cos \theta}$

$\sin \theta \cos \theta \neq 0$ 이고

$\sqrt{\sin \theta} \sqrt{\cos \theta} = -\sqrt{\sin \theta \cos \theta}$ 이므로

$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$

▶▶▶▶▶ ①

따라서 θ 는 제3사분면의 각이므로

$\tan \theta > 0$

▶▶▶▶▶ ②

$$\begin{aligned} \therefore \frac{|\cos \theta|}{1-\sqrt{\sin^2 \theta}} &= |\tan \theta| \\ &= \frac{-\cos \theta}{1-(-\sin \theta)} = -\tan \theta \\ &= \frac{-\cos \theta}{1+\sin \theta} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{-\cos^2 \theta - (1+\sin \theta)\sin \theta}{(1+\sin \theta)\cos \theta} \\ &= \frac{-\sin \theta - 1}{(1+\sin \theta)\cos \theta} \\ &= -\frac{1}{\cos \theta} \end{aligned}$$

▶▶▶▶▶ ③

단계	채점 기준	비율
①	$\sin \theta, \cos \theta$ 의 부호 구하기	20 %
②	$\tan \theta$ 의 부호 구하기	10 %
③	주어진 식 간단히 하기	70 %

419 $\square -2$

$$\begin{aligned} \frac{\tan \theta \sin \theta}{1+\cos \theta} - \frac{\tan \theta \sin \theta}{1-\cos \theta} &= \frac{\tan \theta \sin \theta (1-\cos \theta) - \tan \theta \sin \theta (1+\cos \theta)}{(1+\cos \theta)(1-\cos \theta)} \\ &= \frac{-2 \tan \theta \sin \theta \cos \theta}{1-\cos^2 \theta} \\ &= \frac{-2 \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{-2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = -2 \end{aligned}$$

420 $\square -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{1-\cos \theta} + \frac{1-\cos \theta}{\sin \theta} &= 4 \text{에서} \\ \frac{\sin^2 \theta + (1-\cos \theta)^2}{(1-\cos \theta)\sin \theta} &= 4 \\ \frac{2-2\cos \theta}{(1-\cos \theta)\sin \theta} &= 4 \end{aligned}$$

$\frac{2}{\sin \theta} = 4 \quad \therefore \sin \theta = \frac{1}{2}$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

이때 θ 가 제2사분면의 각이므로 $\cos \theta < 0$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore \tan \theta &= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

421 $\square -2\sqrt{6}$

$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

이때 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이므로 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$

따라서 $\sin \theta + \cos \theta < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin \theta + \cos \theta &= -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \\ \therefore \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} &= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{1}{4}} = -2\sqrt{6} \end{aligned}$$

422 $\square \sqrt{2}$

$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 2$ 에서 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 2$

$\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 2$

$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 2$

$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$

따라서 $\sin \theta + \cos \theta > 0$ 이므로

$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$

423 $\square -4\sqrt{3}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = -k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 6 \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$

따라서 $\sin \theta + \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = -k$$

$$\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{6}} = -k \quad \therefore k = -4\sqrt{3}$$

424 $\square \frac{1}{5}$

| 접근 방법 | $\tan \alpha$ 의 값을 이용하여 두 점 A, P를 지나는 직선의 방정식을 구한다.

$\tan \alpha = \frac{1}{2}$ 이므로 두 점 A, P를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

점 P를 원점 O에 대하여 대칭이동한 점이 Q이므로 선분 PQ는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 지름이다.

선분 AQ를 그으면 원주각의 성질에 의하여 직선 AP와 직선 AQ는 서로 수직이므로 직선 AQ의 기울기는 -2

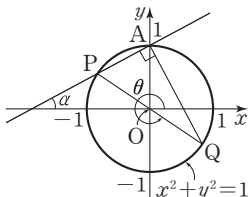
따라서 직선 AQ의 방정식은

$$y = -2x + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 점 Q는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 직선 $\textcircled{1}$ 의 교점이므로 점 Q의 x좌표는 $x^2 + (-2x + 1)^2 = 1$ 에서

$$5x^2 - 4x = 0, x(5x - 4) = 0$$

$$\therefore x = \frac{4}{5} (\because x \neq 0)$$



이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 점 Q의 y좌표는

$$y = -2 \times \frac{4}{5} + 1 = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore Q\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

이때 $\overline{OQ} = 1$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

425 $\square 8\sqrt{3}$

| 접근 방법 | 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여

$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta}, \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta}$ 의 값을 구한 후

$\frac{1}{\sin \theta}, \frac{1}{\cos \theta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식을 추론한다.

이차방정식 $2x^2 - \sqrt{3}x + k = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{3}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{8} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{에서 } -\frac{1}{8} = \frac{k}{2}$$

$$\therefore k = -\frac{1}{4}$$

이때 $\frac{1}{\sin \theta}, \frac{1}{\cos \theta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식에서 두 근의 합은

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{8}} = -4\sqrt{3}$$

두 근의 곱은

$$\frac{1}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -8$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2 + 4\sqrt{3}x - 8 = 0$$

$$\therefore a = 4\sqrt{3}, b = -8$$

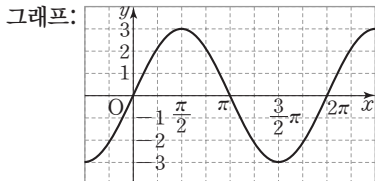
$$\therefore abk = 4\sqrt{3} \times (-8) \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 8\sqrt{3}$$

01 삼각함수의 그래프

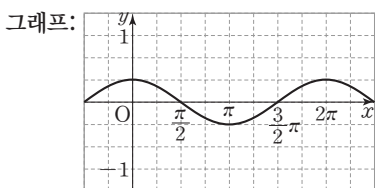
개념 확인

209쪽

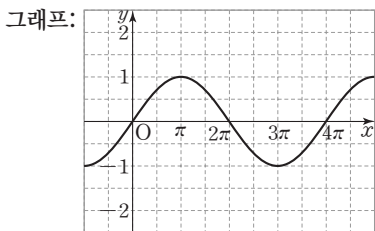
426 ㉡ (1) 최댓값: 3, 최솟값: -3, 주기: 2π ,



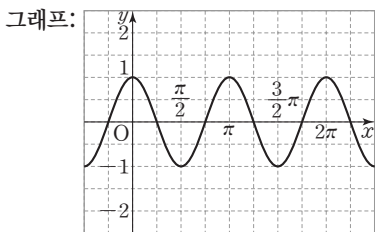
(2) 최댓값: $\frac{1}{3}$, 최솟값: $-\frac{1}{3}$, 주기: 2π ,



(3) 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: 4π ,



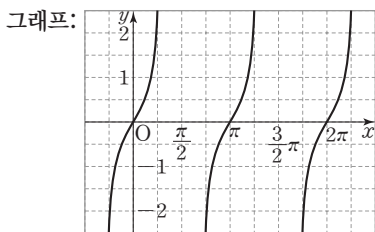
(4) 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: π ,



427 ㉡ (1) 주기: π ,

점근선의 방정식: $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$

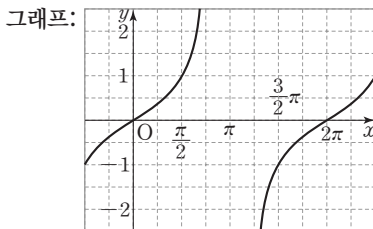
(단, n 은 정수),



(2) 주기: 2π ,

점근선의 방정식: $x=2n\pi+\pi$

(단, n 은 정수),



유제

211~221쪽

428 ㉡ $\frac{\pi}{2}$

$$y = -\frac{1}{2} \sin(3x - \pi) + 1 = -\frac{1}{2} \sin 3\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$$

$$\text{최댓값은 } \left| -\frac{1}{2} \right| + 1 = \frac{3}{2} \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

$$\text{최솟값은 } -\left| -\frac{1}{2} \right| + 1 = \frac{1}{2} \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

$$\text{주기는 } \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore c = \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore abc = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{2}$$

429 ㉡ ③

① 함수 $y = \sin(4x - \pi) = \sin 4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 의 그래프

는 함수 $y = \sin 4x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

$\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동한 것이다.

② 함수 $y = \sin 4x - 1$ 의 그래프는 함수 $y = \sin 4x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

③ 함수 $y = 4\sin x + 1$ 의 그래프는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 4배 한 후 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

④ 함수 $y = -\sin(4x - \pi) = -\sin 4\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 의 그래프는 함수 $y = \sin 4x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동한 것이다.

⑤ 함수 $y = \sin(-4x) + 2$ 의 그래프는 함수 $y = \sin 4x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y = \sin 4x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지지 않는 것은 ③이다.

430 ㉡ 4

함수 $y=2\sin x-1$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이
동한 그래프의 식은

$$-y=2\sin x-1 \quad \therefore y=-2\sin x+1$$

이 함수의 그래프를 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이
동한 그래프의 식은

$$y-(-3)=-2\sin x+1 \quad \therefore y=-2\sin x-2$$

따라서 $a=-2, b=-2$ 이므로 $ab=4$

431 ㉡ ③

$$\textcircled{1} \text{ 최댓값은 } \left| -\frac{3}{2} \right| + 2 = \frac{7}{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ 최솟값은 } -\left| -\frac{3}{2} \right| + 2 = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{3} \text{ 주기는 } \frac{2\pi}{\left| \frac{1}{2} \right|} = 4\pi$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} f\left(\frac{2}{3}\pi\right) &= -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{2}{3}\pi \times \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 2 \\ &= -\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{6} + 2 \\ &= -\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} f(x) &= -\frac{3}{2}\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 2 \\ &= -\frac{3}{2}\sin\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2 \end{aligned}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수

$$y = -\frac{3}{2}\sin\frac{x}{2} \text{의 그래프를 } x\text{축의 방향으로 } \frac{\pi}{3}$$

만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

432 ㉡ -16π

$$\text{최댓값은 } |3|+1=4 \quad \therefore a=4$$

$$\text{최솟값은 } -|3|+1=-2 \quad \therefore b=-2$$

$$\text{주기는 } \frac{2\pi}{|1|}=2\pi \quad \therefore c=2\pi$$

$$\therefore abc=4 \times (-2) \times 2\pi = -16\pi$$

433 ㉡ 2π

함수 $y=\cos(2x+\pi)-4=\cos 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-4$ 의 그
래프는 함수 $y=\cos 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로
 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=-\frac{\pi}{2}, n=-4$ 이므로 $mn=2\pi$

434 ㉡ ⑤

② 최댓값은 $|-2|-1=1$, 최솟값은
 $-|-2|-1=-3$ 이므로 치역은
 $\{y|-3 \leq y \leq 1\}$ 이다.

$$\textcircled{3} \text{ 주기는 } \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2}{3}\pi$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= -2\cos\left(3 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) - 1 \\ &= -2\cos\frac{\pi}{2} - 2 \\ &= -2 \times 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{3}, -1\right)$ 을
지난다.

$$\begin{aligned} \textcircled{5} f(x) &= -2\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 \\ &= -2\cos 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1 \end{aligned}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수

$$y = -2\cos 3x \text{의 그래프를 } x\text{축의 방향으로 } \frac{\pi}{6} \text{ 만}$$

큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

435 ㉡ ③

함수 $y=\cos x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한
그래프의 식은

$$y=\cos(-x)$$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{3}{2}\pi$ 만큼, y 축의
방향을 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-2=\cos\left\{-\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)\right\}$$

$$\therefore y=\cos\left(-x+\frac{3}{2}\pi\right)+2$$

따라서 $f(x)=\cos\left(-x+\frac{3}{2}\pi\right)+2$ 이므로

$$\begin{aligned} f\left(\frac{7}{6}\pi\right) &= \cos\left(-\frac{7}{6}\pi + \frac{3}{2}\pi\right) + 2 \\ &= \cos\frac{\pi}{3} + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

436 ㉡ 주기: 2,

접근선의 방정식: $x=2n-1$ (단, n 은 정수)

$$y=\tan\left(\frac{\pi}{2}x+\pi\right)+4=\tan\frac{\pi}{2}(x+2)+4$$

$$\text{이 함수의 주기는 } \frac{\pi}{\left|\frac{\pi}{2}\right|} = 2$$

한편 이 함수의 그래프의 점근선의 방정식은

$$\frac{\pi}{2}x + \pi = n\pi + \frac{\pi}{2} \text{에서 } \frac{\pi}{2}x = n\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore x = 2n - 1 \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

437 ㉡ ⑤

주어진 함수의 주기를 각각 구해 보면 다음과 같다.

$$\textcircled{1} \frac{\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 3\pi$$

$$\textcircled{2} \frac{2\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|} = 3\pi$$

$$\textcircled{3} \frac{2\pi}{\left|-\frac{2}{3}\right|} = 3\pi$$

$$\textcircled{4} \frac{\pi}{\left|-\frac{1}{3}\right|} = 3\pi$$

$$\textcircled{5} \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$$

따라서 주기가 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

438 ㉡ -1

함수 $y = \tan 3x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$ 만큼,

y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y - (-2) = \tan 3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore y = \tan(3x - \pi) - 2$$

따라서 함수 $y = \tan(3x - \pi) - 2$ 의 그래프가 점

$$\left(\frac{5}{12}\pi, a\right) \text{를 지나므로}$$

$$a = \tan\left(3 \times \frac{5}{12}\pi - \pi\right) - 2$$

$$= \tan \frac{\pi}{4} - 2 = 1 - 2 = -1$$

439 ㉡ ㄴ, ㄷ

$$\text{ㄴ. 주기는 } \frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$$

ㄴ. 그래프의 점근선의 방정식은

$$2x - \frac{\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2} \text{에서 } 2x = n\pi + \pi$$

$$\therefore x = \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{n+1}{2}\pi \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$\text{ㄷ. } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \tan\left(2 \times \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) - 3$$

$$= 4 \tan 0 - 3 = 4 \times 0 - 3 = -3$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{4}, -3\right)$ 을 지난다.

$$\text{ㄷ. } f(x) = 4 \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 3$$

$$= 4 \tan 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수

$$y = 4 \tan 2x \text{의 그래프를 } x \text{축의 방향으로 } \frac{\pi}{4} \text{만큼,}$$

y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

440 ㉡ $\frac{23}{2}$

$$\text{최댓값이 } 5 \text{이고 } a > 0 \text{이므로 } a + c = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

주기가 4π 이고 $b < 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{-b} = 4\pi \quad \therefore b = -\frac{1}{2}$$

$$\text{즉, 주어진 함수의 식은 } y = a \sin\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + c$$

$$\text{이므로 } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \text{에서}$$

$$a \sin\left(-\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + c = 1$$

$$a \sin \frac{\pi}{6} + c = 1, \frac{a}{2} + c = 1$$

$$\therefore a + 2c = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = 8, c = -3$$

$$\therefore a - b - c = 8 - \left(-\frac{1}{2}\right) - (-3) = \frac{23}{2}$$

441 ㉡ $-\sqrt{3}\pi$

$$y = a \tan(bx + c) + d$$

$$= a \tan b\left(x + \frac{c}{b}\right) + d \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$b > 0 \text{이므로 (가)에서 } \frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b = 2$$

(나)에서 함수 $y = a \tan bx$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

$-\frac{\pi}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그

래프의 식은

$$y - (-1) = a \tan b\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore y = a \tan b\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$$

$$\text{이 식이 } \textcircled{1} \text{과 일치하므로 } \frac{c}{b} = \frac{\pi}{4}, d = -1$$

$$\frac{c}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \therefore c = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{즉, } y = a \tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \text{이므로}$$

$$\text{(다)에서 } a \tan\left\{2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} - 1 = 0$$

$$a \tan \frac{\pi}{6} = 1, \frac{\sqrt{3}}{3}a = 1 \quad \therefore a = \sqrt{3}$$

$$\therefore abcd = \sqrt{3} \times 2 \times \frac{\pi}{2} \times (-1) = -\sqrt{3}\pi$$

442 ㉔ ④

최댓값이 2이고 $a < 0$ 이므로 $-a + b = 2$ ㉔

$$f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2} \text{에서 } a \cos\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{2}\right) + b = \frac{1}{2}$$

$$a \cos \frac{\pi}{3} + b = \frac{1}{2}, \frac{a}{2} + b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 1 \quad \dots\dots ㉕$$

㉔, ㉕을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 1$

따라서 주어진 함수의 식은

$$f(x) = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \text{이므로 구하는 최솟값은}$$

$$-|-1| + 1 = 0$$

443 ㉔ ①

주기가 4π 이고 $a > 0$ 이므로 $\frac{\pi}{a} = 4\pi \quad \therefore a = \frac{1}{4}$

즉, 함수 $y = 2 \tan\left(\frac{x}{4} + b\right) + 3$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$\frac{x}{4} + b = m\pi + \frac{\pi}{2} \text{에서 } \frac{x}{4} = m\pi + \frac{\pi}{2} - b$$

$$\therefore x = 4m\pi + 2\pi - 4b \text{ (단, } m \text{은 정수)}$$

이 방정식이 $x = 4n\pi$ (n 은 정수)와 일치하므로

$$2\pi - 4b = 4k\pi \text{ (단, } k \text{는 정수)} \quad \dots\dots ㉔$$

이때 $0 < b < \pi$ 이므로 $-2\pi < 2\pi - 4b < 2\pi$

따라서 ㉔을 만족시키려면

$$2\pi - 4b = 0 \quad \therefore b = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore ab = \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

444 ㉔ $\frac{4}{3}\pi$

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a > 0$ 이므로 $a = 2$

또 주기가 $\frac{17}{12}\pi - \frac{5}{12}\pi = \pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

즉, 주어진 함수의 식은 $y = 2 \sin(2x - c)$ 이고, 그 그래프가 점 $\left(\frac{5}{12}\pi, 2\right)$ 를 지나므로

$$2 = 2 \sin\left(2 \times \frac{5}{12}\pi - c\right), \sin\left(\frac{5}{6}\pi - c\right) = 1$$

이때 $0 < c \leq \pi$ 에서 $-\frac{\pi}{6} \leq \frac{5}{6}\pi - c < \frac{5}{6}\pi$ 이므로

$$\frac{5}{6}\pi - c = \frac{\pi}{2} \quad \therefore c = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore (a+b)c = (2+2) \times \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

445 ㉔ π

주어진 그래프에서 함수의 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 $a > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore a = 2$$

즉, 주어진 함수의 식은 $y = \tan(2x - b)$ 이고, 그 그

래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ 을 지나므로

$$0 = \tan\left(2 \times \frac{\pi}{4} - b\right)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = 0$$

이때 $0 < b \leq \pi$ 에서 $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - b < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\frac{\pi}{2} - b = 0 \quad \therefore b = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore ab = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$$

446 ㉔ $\frac{20}{3}\pi$

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 5, 최솟값이 -3이고 $a > 0$ 이므로

$$a + d = 5, -a + d = -3$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 4, d = 1$

또 주기가 $\frac{7}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

즉, 주어진 함수의 식은 $y = 4 \sin(2x - c) + 1$ 이고,

그 그래프가 점 $\left(\frac{2}{3}\pi, 5\right)$ 를 지나므로

$$5 = 4 \sin\left(2 \times \frac{2}{3}\pi - c\right) + 1$$

$$\sin\left(\frac{4}{3}\pi - c\right) = 1$$

이때 $0 < c \leq \pi$ 에서 $\frac{\pi}{3} \leq \frac{4}{3}\pi - c < \frac{4}{3}\pi$ 이므로

$$\frac{4}{3}\pi - c = \frac{\pi}{2} \quad \therefore c = \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore abcd = 4 \times 2 \times \frac{5}{6}\pi \times 1 = \frac{20}{3}\pi$$

447 ㉔ ②

주어진 그래프가 점 $(0, -3)$ 을 지나므로

$$f(0) = -3 \text{에서 } a \cos 0 = -3 \quad \therefore a = -3$$

또 주기가 π 이고 $b > 0$ 이므로 $\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$

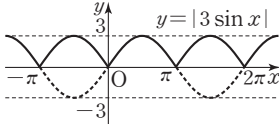
따라서 함수 $g(x) = 2 \sin x - 3$ 이므로 구하는 최댓값은

$$2 - 3 = -1$$

448 ㉡ (1) 최댓값: 3, 최솟값: 0, 주기: π

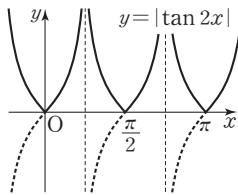
(2) 최댓값: 없다., 최솟값: 0, 주기: $\frac{\pi}{2}$

- (1) 함수 $y=|3\sin x|$ 의 그래프는 함수 $y=3\sin x$ 의 그래프를 그린 후 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 최댓값: 3, 최솟값: 0, 주기: π

- (2) 함수 $y=|\tan 2x|$ 의 그래프는 함수 $y=\tan 2x$ 의 그래프를 그린 후 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

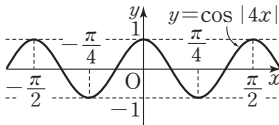


$\therefore$ 최댓값: 없다., 최솟값: 0, 주기: $\frac{\pi}{2}$

449 ㉡ (1) 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: $\frac{\pi}{2}$

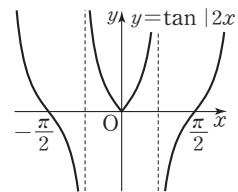
(2) 최댓값: 없다., 최솟값: 없다., 주기: 없다.

- (1) 함수 $y=\cos |4x|$ 의 그래프는 함수 $y=\cos 4x$ 의 그래프를 $x \geq 0$ 인 부분만 그린 후 $x < 0$ 인 부분은 $x \geq 0$ 인 부분을 y 축에 대하여 대칭이동하여 그린 것이므로 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: $\frac{\pi}{2}$

- (2) 함수 $y=\tan |2x|$ 의 그래프는 함수 $y=\tan 2x$ 의 그래프를 $x \geq 0$ 인 부분만 그린 후 $x < 0$ 인 부분은 $x \geq 0$ 인 부분을 y 축에 대하여 대칭이동하여 그린 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

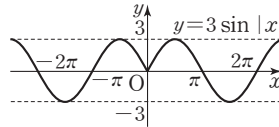


$\therefore$ 최댓값: 없다., 최솟값: 없다., 주기: 없다.

450 ㉡ (1) 최댓값: 3, 최솟값: -3, 주기: 없다.

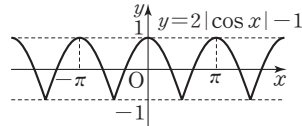
(2) 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: π

- (1) 함수 $y=3\sin |x|$ 의 그래프는 함수 $y=3\sin x$ 의 그래프를 $x \geq 0$ 인 부분만 그린 후 $x < 0$ 인 부분은 $x \geq 0$ 인 부분을 y 축에 대하여 대칭이동하여 그린 것이므로 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 최댓값: 3, 최솟값: -3, 주기: 없다.

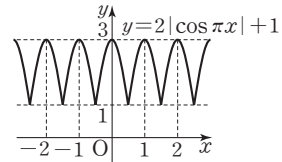
- (2) 함수 $y=2|\cos x| - 1$ 의 그래프는 함수 $y=2\cos x$ 의 그래프를 그린 후 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: π

451 ㉡ 5

함수 $y=2|\cos \pi x| + 1$ 의 그래프는 함수 $y=2\cos \pi x$ 의 그래프를 그린 후 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고 $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 후, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 최댓값은 3, 최솟값은 1, 주기는 1이므로 $M=3, m=1, a=1 \quad \therefore M+m+a=5$

개념 확인

225쪽

452 ㉡ (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 1

453 ㉡ (1) -1 (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $-\sqrt{3}$

454 ㉡ (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

455 $\frac{7}{4}$

$$\begin{aligned}
 \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) &= -\sin\frac{2}{3}\pi = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\
 &= -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \cos\frac{19}{6}\pi &= \cos\left(2\pi + \frac{7}{6}\pi\right) = \cos\frac{7}{6}\pi \\
 &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right) &= -\tan\frac{3}{4}\pi = -\tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \tan\frac{\pi}{4} = 1 \\
 \therefore (\text{주어진 식}) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = \frac{7}{4}
 \end{aligned}$$

456 -2

$$\begin{aligned}
 \cos(-210^\circ) &= \cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) \\
 &= -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \tan 240^\circ &= \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \\
 \sin 390^\circ &= \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\
 \therefore (\text{주어진 식}) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} - \frac{1}{2} = -2
 \end{aligned}$$

457 -1

$$\begin{aligned}
 \sin(\pi - \theta)\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cos(\pi + \theta) \\
 &= \sin\theta \times (-\sin\theta) + \cos\theta \times (-\cos\theta) \\
 &= -\sin^2\theta - \cos^2\theta \\
 &= -(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -1
 \end{aligned}$$

458 -2.1047

$$\begin{aligned}
 \sin 100^\circ + \cos 250^\circ + \tan 290^\circ \\
 &= \sin(180^\circ - 80^\circ) + \cos(180^\circ + 70^\circ) \\
 &\quad + \tan(360^\circ - 70^\circ) \\
 &= \sin 80^\circ + (-\cos 70^\circ) + \tan(-70^\circ) \\
 &= \sin 80^\circ - \cos 70^\circ + (-\tan 70^\circ) \\
 &= \sin 80^\circ - \cos 70^\circ - \tan 70^\circ \\
 &= 0.9848 - 0.3420 - 2.7475 \\
 &= -2.1047
 \end{aligned}$$

459 $\frac{91}{2}$

$$\begin{aligned}
 \cos^2 0^\circ + \cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cdots + \cos^2 89^\circ + \cos^2 90^\circ \\
 &= (\cos^2 0^\circ + \cos^2 90^\circ) + (\cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ) \\
 &\quad + \cdots + (\cos^2 44^\circ + \cos^2 46^\circ) + \cos^2 45^\circ \\
 \cos(90^\circ - x) &= \sin x \text{ 이므로} \\
 \cos 90^\circ &= \cos(90^\circ - 0^\circ) = \sin 0^\circ \\
 \cos 89^\circ &= \cos(90^\circ - 1^\circ) = \sin 1^\circ \\
 &\vdots \\
 \cos 46^\circ &= \cos(90^\circ - 44^\circ) = \sin 44^\circ \\
 \therefore (\text{주어진 식}) \\
 &= (\cos^2 0^\circ + \sin^2 0^\circ) + (\cos^2 1^\circ + \sin^2 1^\circ) \\
 &\quad + \cdots + (\cos^2 44^\circ + \sin^2 44^\circ) + \cos^2 45^\circ \\
 &= \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{45\text{개}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{91}{2}
 \end{aligned}$$

460 1

$$\begin{aligned}
 \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \cdots \times \tan 88^\circ \times \tan 89^\circ \\
 &= (\tan 1^\circ \times \tan 89^\circ) \times (\tan 2^\circ \times \tan 88^\circ) \\
 &\quad \times \cdots \times (\tan 44^\circ \times \tan 46^\circ) \times \tan 45^\circ \\
 \tan(90^\circ - x) &= \frac{1}{\tan x} \text{ 이므로} \\
 \tan 89^\circ &= \tan(90^\circ - 1^\circ) = \frac{1}{\tan 1^\circ} \\
 \tan 88^\circ &= \tan(90^\circ - 2^\circ) = \frac{1}{\tan 2^\circ} \\
 &\vdots \\
 \tan 46^\circ &= \tan(90^\circ - 44^\circ) = \frac{1}{\tan 44^\circ} \\
 \therefore (\text{주어진 식}) \\
 &= \left(\tan 1^\circ \times \frac{1}{\tan 1^\circ}\right) \times \left(\tan 2^\circ \times \frac{1}{\tan 2^\circ}\right) \\
 &\quad \times \cdots \times \left(\tan 44^\circ \times \frac{1}{\tan 44^\circ}\right) \times \tan 45^\circ \\
 &= \underbrace{1 \times 1 \times 1 \times \cdots \times 1 \times 1}_{44\text{개}} = 1
 \end{aligned}$$

461 77

$$\begin{aligned}
 \therefore \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \sin 3^\circ + \cdots + \sin 359^\circ + \sin 360^\circ \\
 &= (\sin 1^\circ + \sin 359^\circ) + (\sin 2^\circ + \sin 358^\circ) \\
 &\quad + \cdots + (\sin 179^\circ + \sin 181^\circ) \\
 &\quad + \sin 180^\circ + \sin 360^\circ
 \end{aligned}$$

$$\sin(360^\circ - x) = -\sin x \text{ 이므로}$$

$$\sin 359^\circ = \sin(360^\circ - 1^\circ) = -\sin 1^\circ$$

$$\sin 358^\circ = \sin(360^\circ - 2^\circ) = -\sin 2^\circ$$

⋮

$$\sin 181^\circ = \sin(360^\circ - 179^\circ) = -\sin 179^\circ$$

∴ (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= (\sin 1^\circ - \sin 1^\circ) + (\sin 2^\circ - \sin 2^\circ) \\ &\quad + \cdots + (\sin 179^\circ - \sin 179^\circ) \\ &\quad + \sin 180^\circ + \sin 360^\circ \\ &= \sin 180^\circ + \sin 360^\circ \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ \\ \quad + \cdots + \cos 179^\circ + \cos 180^\circ \\ &= (\cos 1^\circ + \cos 179^\circ) + (\cos 2^\circ + \cos 178^\circ) \\ &\quad + \cdots + (\cos 89^\circ + \cos 91^\circ) \\ &\quad + \cos 90^\circ + \cos 180^\circ \end{aligned}$$

$$\cos(180^\circ - x) = -\cos x \text{ 이므로}$$

$$\cos 179^\circ = \cos(180^\circ - 1^\circ) = -\cos 1^\circ$$

$$\cos 178^\circ = \cos(180^\circ - 2^\circ) = -\cos 2^\circ$$

⋮

$$\cos 91^\circ = \cos(180^\circ - 89^\circ) = -\cos 89^\circ$$

∴ (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= (\cos 1^\circ - \cos 1^\circ) + (\cos 2^\circ - \cos 2^\circ) \\ &\quad + \cdots + (\cos 89^\circ - \cos 89^\circ) \\ &\quad + \cos 90^\circ + \cos 180^\circ \\ &= \cos 90^\circ + \cos 180^\circ = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \sin^2 1^\circ + \sin^2 3^\circ + \sin^2 5^\circ \\ \quad + \cdots + \sin^2 87^\circ + \sin^2 89^\circ \\ &= (\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ) + (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) \\ &\quad + \cdots + (\sin^2 43^\circ + \sin^2 47^\circ) + \sin^2 45^\circ \end{aligned}$$

$$\sin(90^\circ - x) = \cos x \text{ 이므로}$$

$$\sin 89^\circ = \sin(90^\circ - 1^\circ) = \cos 1^\circ$$

$$\sin 87^\circ = \sin(90^\circ - 3^\circ) = \cos 3^\circ$$

⋮

$$\sin 47^\circ = \sin(90^\circ - 43^\circ) = \cos 43^\circ$$

∴ (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) \\ &\quad + \cdots + (\sin^2 43^\circ + \cos^2 43^\circ) + \sin^2 45^\circ \\ &= 1 + 1 + \cdots + 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{45}{2} \end{aligned}$$

22개

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

462 0

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{11} + \sin \frac{2}{11}\pi + \sin \frac{3}{11}\pi \\ \quad + \cdots + \sin \frac{20}{11}\pi + \sin \frac{21}{11}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sin \frac{\pi}{11} + \sin \frac{21}{11}\pi\right) + \left(\sin \frac{2}{11}\pi + \sin \frac{20}{11}\pi\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\sin \frac{10}{11}\pi + \sin \frac{12}{11}\pi\right) + \sin \pi \end{aligned}$$

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x \text{ 이므로}$$

$$\sin \frac{21}{11}\pi = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{11}\right) = -\sin \frac{\pi}{11}$$

$$\sin \frac{20}{11}\pi = \sin\left(2\pi - \frac{2}{11}\pi\right) = -\sin \frac{2}{11}\pi$$

⋮

$$\sin \frac{12}{11}\pi = \sin\left(2\pi - \frac{10}{11}\pi\right) = -\sin \frac{10}{11}\pi$$

∴ (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \left(\sin \frac{\pi}{11} - \sin \frac{\pi}{11}\right) + \left(\sin \frac{2}{11}\pi - \sin \frac{2}{11}\pi\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\sin \frac{10}{11}\pi - \sin \frac{10}{11}\pi\right) + \sin \pi \\ &= \sin \pi = 0 \end{aligned}$$

유제

233~235쪽

463 -2

$$\cos(x - \pi) = \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

$$\therefore y = \cos(x - \pi) - 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$$

$$= -\cos x - 2(-\cos x) - 1 = \cos x - 1$$

$$\text{이때 } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ 이므로 } -2 \leq \cos x - 1 \leq 0$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 0, 최솟값은 -2이므로 구하는 합은

$$0 + (-2) = -2$$

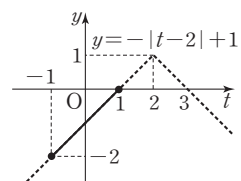
464 2

$$\cos x = t \text{ 로 놓으면 } y = -|t - 2| + 1 \text{ 이고 } -1 \leq t \leq 1$$

$$\text{이때 } y = -|t - 2| + 1 = \begin{cases} t - 1 & (t < 2) \\ -t + 3 & (t \geq 2) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수의 그

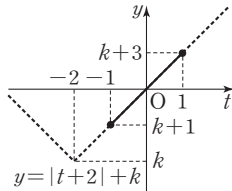
래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주어진 함수는 $t=1$ 에서 최댓값 0, $t=-1$ 에서 최솟값 -2 를 가지므로
 $M=0, m=-2 \quad \therefore M-m=2$

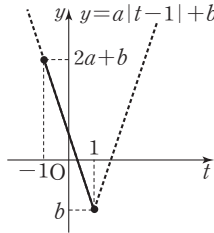
465 ㉠ -2

$\cos x=t$ 로 놓으면 $y=|t+2|+k$ 이고 $-1 \leq t \leq 1$
 이때 $y=|t+2|+k=\begin{cases} -t-2+k & (t < -2) \\ t+2+k & (t \geq -2) \end{cases}$ 이므로
 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 따라서 주어진 함수는
 $t=1$ 에서 최댓값 $k+3$,
 $t=-1$ 에서 최솟값 $k+1$
 을 갖고, 그 합이 0이므로
 $k+3+k+1=0 \quad \therefore k=-2$



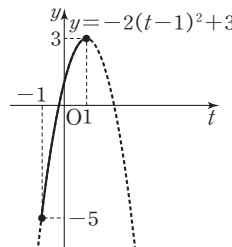
466 ㉠ 1

$\sin x=t$ 로 놓으면 $y=a|t-1|+b$ 이고 $-1 \leq t \leq 1$
 이때 $y=a|t-1|+b=\begin{cases} a(1-t)+b & (t < 1) \\ a(t-1)+b & (t \geq 1) \end{cases}$ 이므로
 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 따라서 주어진 함수는
 $t=-1$ 에서 최댓값 $2a+b$,
 $t=1$ 에서 최솟값 b 를 가지므로
 $2a+b=4, b=-2 \quad \therefore a=3$
 $\therefore a+b=3+(-2)=1$



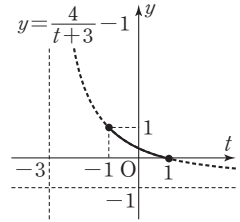
467 ㉠ 최댓값: 3, 최솟값: -5

$y=\sin^2 x - \cos^2 x + 4\cos x$
 $= (1 - \cos^2 x) - \cos^2 x + 4\cos x$
 $= -2\cos^2 x + 4\cos x + 1$
 $\cos x=t$ 로 놓으면
 $y=-2t^2+4t+1=-2(t-1)^2+3$ 이고
 $-1 \leq t \leq 1$
 즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=1$ 에서 최댓값 3, $t=-1$ 에서 최솟값 -5 를 갖는다.



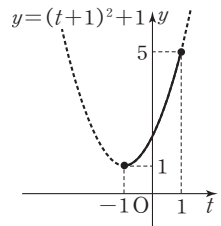
468 ㉠ 최댓값: 1, 최솟값: 0

$\sin x=t$ 로 놓으면
 $y=\frac{-t+1}{t+3}=\frac{4}{t+3}-1$ 이고
 $-1 \leq t \leq 1$
 즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
 $t=-1$ 에서 최댓값 1,
 $t=1$ 에서 최솟값 0을 갖는다.



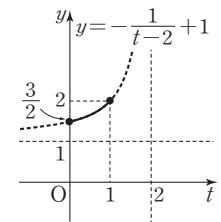
469 ㉠ 4

$y=-\cos^2 x + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+3$
 $= -(1 - \sin^2 x) + 2\sin x + 3$
 $= \sin^2 x + 2\sin x + 2$
 $\sin x=t$ 로 놓으면
 $y=t^2+2t+2=(t+1)^2+1$ 이고
 $-1 \leq t \leq 1$
 즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=1$ 에서 최댓값 5, $t=-1$ 에서 최솟값 1을 갖는다.
 따라서 $M=5, m=1$ 이므로
 $M-m=4$



470 ㉠ $\frac{\pi}{2}$

$\tan x=t$ 로 놓으면
 $y=\frac{t-3}{t-2}=-\frac{1}{t-2}+1$ 이고
 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $0 \leq t \leq 1$
 즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=1$ 에서 최댓값 2를 갖는다.
 $\therefore b=2$
 한편 $t=1$, 즉 $\tan x=1$ 에서
 $x=\frac{\pi}{4} \left(\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right)$
 $\therefore a=\frac{\pi}{4}$
 $\therefore ab=\frac{\pi}{4} \times 2=\frac{\pi}{2}$



471 ㉠ ①

함수 $f(x)$ 는 주기가 2인 주기함수이다.

주어진 함수의 주기를 각각 구해 보면 다음과 같다.

$$\textcircled{1} \frac{2\pi}{\pi}=2 \quad \textcircled{2} \frac{2\pi}{2}=\pi \quad \textcircled{3} \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$$

$$\textcircled{4} \frac{\pi}{\pi}=1 \quad \textcircled{5} \frac{\pi}{\frac{\pi}{4}}=4$$

따라서 $f(x+2)=f(x)$ 를 만족시키는 함수는 ①이다.

472 ㉠ ㄴ, ㄷ

ㄴ. 함수 $y=2\cos 2x-1$ 의 그래프는 함수

$y=\cos 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 후
 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. 함수 $y=\cos(2x+\pi)-4=\cos 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-4$
의 그래프는 함수 $y=\cos 2x$ 의 그래프를 x 축의
방향으로 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평
행이동한 것이다.

ㄷ. 함수 $y=-\cos 2x+2$ 의 그래프는 함수
 $y=\cos 2x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한
후 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. 함수 $y=2\cos\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)$ 의 그래프는 함수
 $y=\cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 후
 x 축의 방향으로 $\frac{3}{2}\pi$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 보기의 함수에서 그 그래프가 함수 $y=\cos 2x$
의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수
있는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

473 ㉠ ③

$\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2}$ 이므로 세 함수

$$f(x)=\sin x,$$

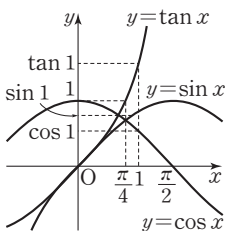
$$g(x)=\cos x,$$

$$h(x)=\tan x \text{의 그래프를}$$

그리면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $\cos 1 < \sin 1 < \tan 1$

이므로 $g(1) < f(1) < h(1)$



474 ㉠ ②

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -1
이고 $a > 0$ 이므로 $a+c=3$, $-a+c=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=1$

또 주기가 $\frac{5}{4}\pi - \frac{\pi}{4} = \pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b=2$$

$$\therefore a+b+c=2+2+1=5$$

475 ㉠ ③

$$\textcircled{1} \sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\textcircled{2} \sin 390^\circ = \sin(360^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \cos\left(-\frac{7}{6}\pi\right) &= \cos \frac{7}{6}\pi = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \tan(-210^\circ) &= -\tan 210^\circ \\ &= -\tan(180^\circ + 30^\circ) \\ &= -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} \tan \frac{10}{3}\pi = \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

따라서 옳은 것은 ③이다.

476 ㉠ $\frac{4}{9}$

$\cos x = t$ 로 놓으면

$$y = \frac{t-1}{t-2} = \frac{1}{t-2} + 1 \text{이고 } -1 \leq t \leq 1$$

즉, 함수의 그래프는 오른쪽

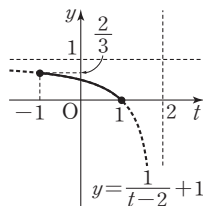
그림과 같으므로 $t=-1$ 에서

최댓값 $\frac{2}{3}$, $t=1$ 에서 최솟값

0을 갖는다.

따라서 $a=0$, $b=\frac{2}{3}$ 이므로

$$a^2+b^2=\frac{4}{9}$$



477 ㉠ ④

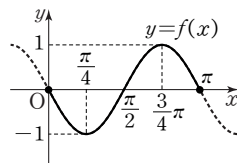
$0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수

$$f(x) = -\sin 2x \text{의 그래}$$

프는 오른쪽 그림과 같으

므로 $x=\frac{3}{4}\pi$ 에서 최댓값

1, $x=\frac{\pi}{4}$ 에서 최솟값 -1 을 갖는다.



따라서 $a = \frac{3}{4}\pi$, $f(a) = 1$, $b = \frac{\pi}{4}$, $f(b) = -1$ 이므로 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{-1 - 1}{\frac{\pi}{4} - \frac{3}{4}\pi} = \frac{4}{\pi}$$

478 ㉠

(가)에서 함수 $f(x)$ 는 주기가 π 인 주기함수이다.
(나)에서 함수의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

이를 만족시키는 함수는

① $f(x) = 3\cos 2x$ 또는 ⑤ $f(x) = \cos 2x$

이때 함수 $f(x) = 3\cos 2x$ 의 최댓값은 3, 최솟값은 -3이므로 그 차는

$$3 - (-3) = 6$$

또 함수 $f(x) = \cos 2x$ 의 최댓값은 1, 최솟값은 -1이므로 그 차는

$$1 - (-1) = 2$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는

① $f(x) = 3\cos 2x$

479 ㉡ $\frac{3}{2}$

함수 $y = a\sin x$ 의 그래프에서 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a > 0$ 이므로 $a = 2$

함수 $y = b\cos cx$ 의 그래프에서 최댓값이 $\frac{1}{2}$, 최솟값

이 $-\frac{1}{2}$ 이고 $b > 0$ 이므로 $b = \frac{1}{2}$

또 주기가 2π 이고 $c < 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{-c} = 2\pi \quad \therefore c = -1$$

$$\therefore a + b + c = 2 + \frac{1}{2} + (-1) = \frac{3}{2}$$

480 ㉢ 18

최댓값이 4이고 $a > 0$ 이므로 $a + c = 4$ ㉠

주기가 $\frac{\pi}{6}$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{6} \quad \therefore b = 6$$

즉, 주어진 함수의 식은 $f(x) = a|\cos 6x| + c$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{18}\right) = \frac{5}{2} \text{에서 } a\left|\cos \frac{\pi}{3}\right| + c = \frac{5}{2}$$

$$\frac{a}{2} + c = \frac{5}{2} \quad \therefore a + 2c = 5 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 3$, $c = 1$

$$\therefore abc = 3 \times 6 \times 1 = 18$$

481 ㉣ $\frac{10}{3}$

$$\frac{\sin(\pi - \theta)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{1 + \cos(\pi + \theta)}$$

$$= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$= \frac{2\sin \theta}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2\sin \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{2}{\sin \theta}$$

..... ①

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

이때 θ 가 제2사분면의 각이므로 $\sin \theta > 0$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

..... ②

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{2}{\sin \theta} = \frac{2}{\frac{3}{5}} = \frac{10}{3}$$

..... ③

단계	채점 기준	비율
①	주어진 식 간단히 하기	50%
②	$\sin \theta$ 의 값 구하기	30%
③	주어진 식의 값 구하기	20%

482 ㉤ ②

$\overline{AB}$ 가 원의 지름이므로 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{삼각형 ABC에서 } \overline{AB} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{5})^2} = 6$$

$$\therefore \cos(\alpha + 2\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\sin \beta$$

$$= -\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

483 ㉥ 6

$\tan x = t$ 로 놓으면 $y = -|t - 2| + k$ 이고

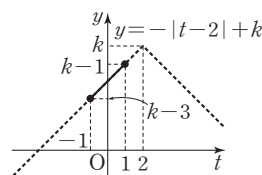
$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{에서 } -1 \leq t \leq 1$$

$$\text{이때 } y = -|t - 2| + k = \begin{cases} t - 2 + k & (t < 2) \\ -t + 2 + k & (t \geq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수의

그래프는 오른쪽 그림

과 같다.



따라서 $t=1$ 에서 최댓값 $k-1$, $t=-1$ 에서 최솟값 $k-3$ 을 갖고, 그 합이 8이므로
 $k-1+k-3=8 \quad \therefore k=6$

484 ㉮ $\frac{3}{4}$

$$y = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(x - \frac{3}{2}\pi\right) + k$$

$$= \cos^2 x - \cos x + k \quad \left[\sin\left(x - \frac{3}{2}\pi\right) = -\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) \right]$$

$$\cos x = t \text{로 놓으면} \quad = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$y = t^2 - t + k = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + k - \frac{1}{4} \quad = \cos x$$

이고 $-1 \leq t \leq 1$

즉, 함수의 그래프

가 오른쪽 그림과

같으므로 $t=-1$ 에

서 최댓값 $k+2$,

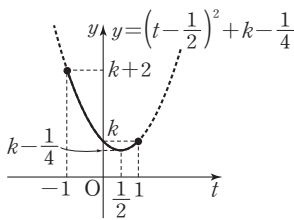
$t=\frac{1}{2}$ 에서 최솟값

$k-\frac{1}{4}$ 을 갖는다.

$k+2=3$ 이므로 $k=1$

따라서 구하는 최솟값은

$$k - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



485 ㉮ 1

㉮ 접근 방법 삼각함수의 성질을 이용할 수 있도록 삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$ 임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$A+B+C=\pi$ 이므로

$$\begin{aligned} & \sin\left(\pi - \frac{A}{2}\right) \cos \frac{B+C}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B+C}{2} \\ &= \sin \frac{A}{2} \cos \frac{\pi - A}{2} + \cos \frac{A}{2} \sin \frac{\pi - A}{2} \\ &= \sin \frac{A}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) + \cos \frac{A}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) \\ &= \sin \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \\ &= \sin^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} = 1 \end{aligned}$$

486 ㉮ 0

$$\begin{aligned} & \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos 9\theta + \cos 10\theta \\ &= (\cos \theta + \cos 9\theta) + (\cos 2\theta + \cos 8\theta) \\ & \quad + (\cos 3\theta + \cos 7\theta) + (\cos 4\theta + \cos 6\theta) \\ & \quad + \cos 5\theta + \cos 10\theta \end{aligned}$$

$10\theta=2\pi$, $\cos(2\pi-x)=\cos x$ 이므로

$$\cos 9\theta = \cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos 8\theta = \cos(2\pi - 2\theta) = \cos 2\theta$$

$$\cos 7\theta = \cos(2\pi - 3\theta) = \cos 3\theta$$

$$\cos 6\theta = \cos(2\pi - 4\theta) = \cos 4\theta$$

$\therefore$ (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= (\cos \theta + \cos \theta) + (\cos 2\theta + \cos 2\theta) \\ & \quad + (\cos 3\theta + \cos 3\theta) + (\cos 4\theta + \cos 4\theta) \\ & \quad + \cos 5\theta + \cos 10\theta \\ &= 2\cos \theta + 2\cos 2\theta + 2\cos 3\theta + 2\cos 4\theta \\ & \quad + \cos 5\theta + \cos 10\theta \\ &= 2\{\cos \theta + \cos 2\theta + \cos(\pi - 2\theta) + \cos(\pi - \theta)\} \\ & \quad + \cos \pi + \cos 2\pi \\ &= 2(\cos \theta + \cos 2\theta - \cos 2\theta - \cos \theta) + (-1) + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

II-2. 삼각함수의 그래프

02 삼각함수의 그래프의 활용

개념 확인

241쪽

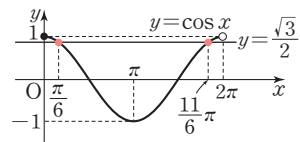
487 ㉮ $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

오른쪽 그림과 같이

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함

수 $y = \cos x$ 의 그

래프와 직선



$y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{11}{6}\pi$ 이므로 주어진

방정식의 해는 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

488 ㉮ $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

$\tan x - 1 > 0$ 에서 $\tan x > 1$

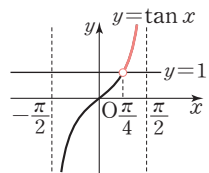
오른쪽 그림과 같이

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 부등식

$\tan x > 1$ 의 해는 함수

$y = \tan x$ 의 그래프가 직선 $y=1$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로 주어진 부등식의 해는

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$$



489 ㉡ (1) $x = \frac{5}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

(2) $x = \frac{13}{12}\pi$ 또는 $x = \frac{19}{12}\pi$

(3) $x = \frac{7}{12}\pi$ 또는 $x = \frac{23}{12}\pi$

(1) $\sqrt{3} \tan x = -1$ 에서 $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

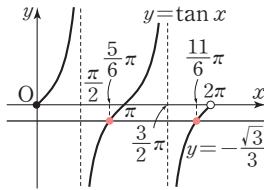
오른쪽 그림과 같

이 $0 \leq x < 2\pi$ 에

서 함수

$y = \tan x$ 의 그래

프와 직선



$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$ 이므로

주어진 방정식의 해는

$x = \frac{5}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

(2) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 $x + \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓으면

$\sin t = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

한편 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$

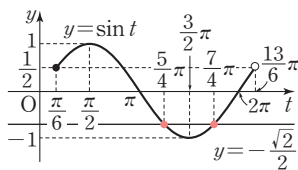
$\therefore \frac{\pi}{6} \leq t < \frac{13}{6}\pi$

오른쪽 그림과

같이

$\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{13}{6}\pi$

에서 함수



$y = \sin t$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 교점의 t

좌표는 $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$ 이므로

$x + \frac{\pi}{6} = \frac{5}{4}\pi$ 또는 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{4}\pi$

$\therefore x = \frac{13}{12}\pi$ 또는 $x = \frac{19}{12}\pi$

(3) $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ 에서 $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$x - \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓으면 $\cos t = \frac{1}{2}$

한편 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} < \frac{7}{4}\pi$

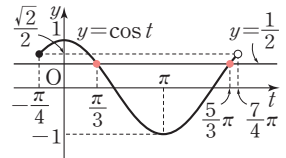
$\therefore -\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{7}{4}\pi$

오른쪽 그림과 같이

$-\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{7}{4}\pi$ 에

서 함수 $y = \cos t$

의 그래프와 직선



$y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 t 좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$ 이므로

$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x - \frac{\pi}{4} = \frac{5}{3}\pi$

$\therefore x = \frac{7}{12}\pi$ 또는 $x = \frac{23}{12}\pi$

490 ㉡ 3

$2 \cos \frac{\pi}{2}x = \sqrt{2}$ 에서 $\cos \frac{\pi}{2}x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{2}x = t$ 로 놓으면 $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

한편 $0 \leq x < 4$ 에서 $0 \leq \frac{\pi}{2}x < 2\pi$

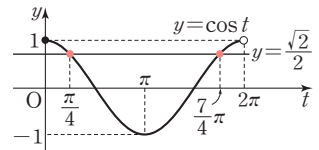
$\therefore 0 \leq t < 2\pi$

오른쪽 그림과 같

이 $0 \leq t < 2\pi$ 에서

함수 $y = \cos t$ 의

그래프와 직선



$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 교점의 t 좌표는 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7}{4}\pi$ 이므로

$\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{\pi}{2}x = \frac{7}{4}\pi$

$\therefore x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{7}{2}$

이때 $\alpha < \beta$ 이므로 $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{7}{2}$

$\therefore \beta - \alpha = 3$

491 ㉡ $x = \frac{\pi}{3}$

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos x \neq 0$ 이므로 주어진 방정식의

양변을 $\cos x$ 로 나누면

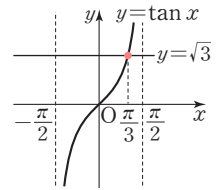
$\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3} \quad \therefore \tan x = \sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수

$y = \tan x$ 의 그래프와 직선

$y = \sqrt{3}$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{3}$



이므로 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{\pi}{3}$

492 ㉔ ②

$\sin x + |\sin x| = 1$ 에서

(i) $0 \leq x < \pi$ 일 때,

$$\sin x \geq 0 \text{이므로 } \sin x + \sin x = 1$$

$$2\sin x = 1 \quad \therefore \sin x = \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림과 같이

$0 \leq x < \pi$ 에서 함수

$y = \sin x$ 의 그래프와 직

선 $y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표

는 $\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ 이므로 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

(ii) $\pi \leq x < 2\pi$ 일 때,

$$\sin x \leq 0 \text{이므로 } \sin x + (-\sin x) = 1$$

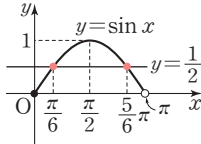
즉, 주어진 방정식의 해는 없다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

따라서 모든 해의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5}{6}\pi = \pi$$



493 ㉔ (1) $x = \pi$

$$(2) x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

(1) $\sin^2 x - 3\cos x - 3 = 0$ 에서

$$(1 - \cos^2 x) - 3\cos x - 3 = 0$$

$$\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$$

$$(\cos x + 2)(\cos x + 1) = 0$$

$$\therefore \cos x = -2 \text{ 또는 } \cos x = -1$$

그런데 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

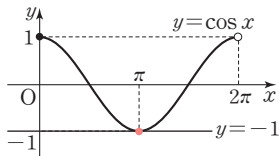
$$\cos x = -1$$

이때 $0 \leq x < 2\pi$

이므로 주어진 방

정식의 해는

$$x = \pi$$



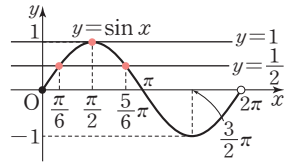
(2) $2\cos^2 x - 3\sin(\pi + x) - 3 = 0$ 에서

$$2(1 - \sin^2 x) - 3(-\sin x) - 3 = 0$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

$$(2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = 1$$



(i) $\sin x = \frac{1}{2}$ 일 때, $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

(ii) $\sin x = 1$ 일 때, $x = \frac{\pi}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

494 ㉔ $\frac{3}{2}\pi$

$\tan x + \frac{1}{\tan x} = 2$ 의 양변에 $\tan x$ 를 곱하면

$$\tan^2 x + 1 = 2\tan x$$

$$\tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0$$

$$(\tan x - 1)^2 = 0 \quad \therefore \tan x = 1$$

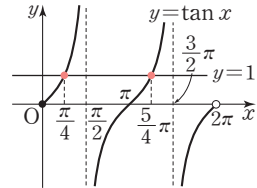
이때 $0 \leq x < 2\pi$ 이므로

주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{5}{4}\pi$$

따라서 모든 x 의 값의 합

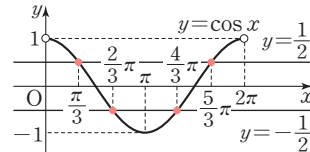
$$\text{은 } \frac{\pi}{4} + \frac{5}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi$$



495 ㉔ ②

$4\cos^2 x - 1 = 0$ 에서 $(2\cos x + 1)(2\cos x - 1) = 0$

$$\therefore \cos x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2}$$



(i) $\cos x = -\frac{1}{2}$ 일 때, $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

(ii) $\cos x = \frac{1}{2}$ 일 때, $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

이때 $\sin x \cos x < 0$ 에서 x 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이므로 주어진 방정식과 부등식을 동시에 만

족시키는 x 의 값은 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

따라서 모든 x 의 값의 합은 $\frac{2}{3}\pi + \frac{5}{3}\pi = \frac{7}{3}\pi$

496 ㉔ $\frac{2}{3}\pi$

$a \sin^2 x - 3 \cos x - 3 = 0$ 에 $x = \frac{\pi}{3}$ 를 대입하면

$$a \sin^2 \frac{\pi}{3} - 3 \cos \frac{\pi}{3} - 3 = 0$$

$$a \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3 \times \frac{1}{2} - 3 = 0$$

$$\frac{3}{4}a - \frac{9}{2} = 0 \quad \therefore a = 6$$

$6 \sin^2 x - 3 \cos x - 3 = 0$ 에서

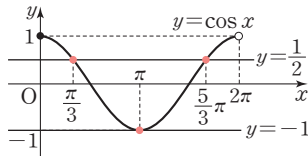
$$6(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x - 3 = 0$$

$$6 \cos^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$$

$$3(2 \cos^2 x + \cos x - 1) = 0$$

$$3(\cos x + 1)(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\therefore \cos x = -1 \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2}$$



(i) $\cos x = -1$ 일 때, $x = \pi$

(ii) $\cos x = \frac{1}{2}$ 일 때, $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5\pi}{3}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \pi \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{3}$$

이때 $\alpha < \beta$ 이므로 $\alpha = \pi$, $\beta = \frac{5\pi}{3}$

$$\therefore \beta - \alpha = \frac{2}{3}\pi$$

497 ㉔ $\frac{9}{2}\pi$

오른쪽 그림과 같이

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 부

등식 $\tan x < -1$ 의

해는 함수

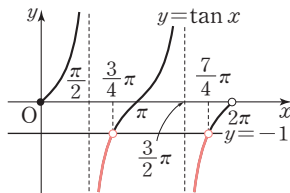
$y = \tan x$ 의 그래프

가 직선 $y = -1$ 보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$$

따라서 $a = \frac{\pi}{2}$, $b = \frac{3}{4}\pi$, $c = \frac{3}{2}\pi$, $d = \frac{7}{4}\pi$ 이므로

$$a + b + c + d = \frac{9}{2}\pi$$



498 ㉔ ④

$$2 \cos \frac{x}{2} - \sqrt{3} < 0 \text{에서 } \cos \frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{x}{2} = t \text{로 놓으면 } \cos t < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

한편 $0 < x < 4\pi$ 에서 $0 < \frac{x}{2} < 2\pi$

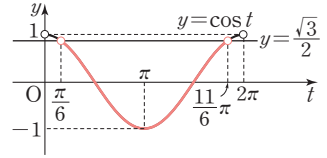
$$\therefore 0 < t < 2\pi$$

오른쪽 그림과 같

이 $0 < t < 2\pi$ 에

서 부등식

$$\cos t < \frac{\sqrt{3}}{2} \text{의 해}$$



는 함수 $y = \cos t$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 보다 아

래쪽에 있는 t 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{\pi}{6} < t < \frac{11}{6}\pi$$

$$\frac{\pi}{6} < \frac{x}{2} < \frac{11}{6}\pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} < x < \frac{11}{3}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{11}{3}\pi$ 이므로 $\frac{\beta}{\alpha} = 11$

499 ㉔ $-\frac{1}{2}$

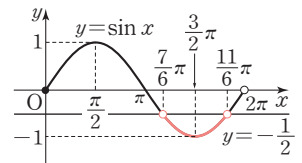
$$2 \sin x + 1 < 0 \text{에서 } \sin x < -\frac{1}{2}$$

오른쪽 그림과 같이

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 부

등식 $\sin x < -\frac{1}{2}$

의 해는 함수



$y = \sin x$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 보다 아래쪽에 있

는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{7}{6}\pi$, $\beta = \frac{11}{6}\pi$ 이므로

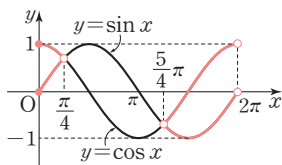
$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\left(\frac{11}{6}\pi - \frac{7}{6}\pi\right)$$

$$= \cos \frac{2}{3}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

500 $\square 0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi < x < 2\pi$

오른쪽 그림과 같이
 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 부등
 식 $\sin x < \cos x$ 의
 해는 함수 $y = \sin x$
 의 그래프가 함수



$y = \cos x$ 의 그래프보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범
 위와 같으므로

$0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi < x < 2\pi$

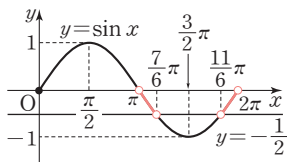
501 $\square \pi < x < \frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$

$2\sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) < 0$ 에서

$2\sin^2 x + \sin x < 0$

$\sin x(2\sin x + 1) < 0 \quad \therefore -\frac{1}{2} < \sin x < 0$

따라서 오른쪽 그림
 에서 주어진 부등식
 의 해는



$\pi < x < \frac{7}{6}\pi$ 또는

$\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$

502 $\square -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

$\tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x \leq \sqrt{3}$ 에서

$\tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} \leq 0$

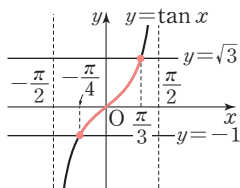
$(\tan x + 1)(\tan x - \sqrt{3}) \leq 0$

$\therefore -1 \leq \tan x \leq \sqrt{3}$

따라서 오른쪽 그림에서

주어진 부등식의 해는

$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$



503 $\square \frac{11}{6}\pi$

$4\sin^2 x + 2\cos x - 4 > 2\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}$ 에서

$4(1 - \cos^2 x) + 2\cos x - 4 > 2\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}$

$4\cos^2 x + (2\sqrt{2} - 2)\cos x - \sqrt{2} < 0$

$(2\cos x + \sqrt{2})(2\cos x - 1) < 0$

$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$

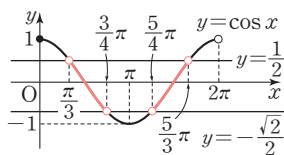
즉, 오른쪽 그림에서
 주어진 부등식의 해는

$\frac{\pi}{3} < x < \frac{3}{4}\pi$

또는 $\frac{5}{4}\pi < x < \frac{5}{3}\pi$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{3}{4}\pi$, $\gamma = \frac{5}{4}\pi$, $\delta = \frac{5}{3}\pi$ 이므로

$\delta + \gamma - \alpha - \beta = \frac{11}{6}\pi$



504 $\square 6$

$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 \leq 0$ 에서

$(2\sin x - 1)(\sin x - 2) \leq 0$

그런데 $\sin x - 2 < 0$ 이므로

$2\sin x - 1 \geq 0 \quad \therefore \sin x \geq \frac{1}{2}$

즉, 오른쪽 그림에서
 주어진 부등식의 해

는 $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$

이때 $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

에서 $x - \frac{\pi}{2} = t$ 로 놓으면

$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$ 에서 $-\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3}$

$\therefore -\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$

즉, $-\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ 에서 함수

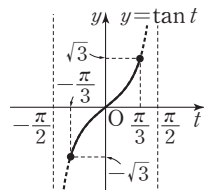
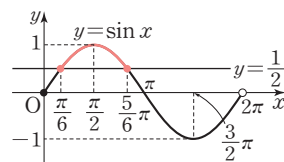
$y = \tan t$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로 최댓값은

$\sqrt{3}$, 최솟값은 $-\sqrt{3}$ 이다.

따라서 $M = \sqrt{3}$, $m = -\sqrt{3}$

이므로 $M^2 + m^2 = (\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2 = 6$



505 $\square 0 < \theta < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi < \theta < \pi$

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어
 야 하므로

$\frac{D}{4} = (2\sin \theta)^2 - 2\sin \theta < 0$

$4\sin^2 \theta - 2\sin \theta < 0$

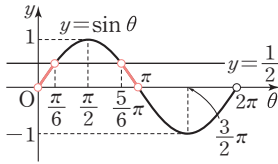
$2\sin \theta(2\sin \theta - 1) < 0$

$\therefore 0 < \sin \theta < \frac{1}{2}$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 θ 의 값의 범위는

$$0 < \theta < \frac{\pi}{6} \text{ 또는}$$

$$\frac{5}{6}\pi < \theta < \pi$$



506 $\frac{\pi}{3}$

이차방정식 $x^2 + 4x \cos \theta + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (2 \cos \theta)^2 - 1 < 0$$

$$4 \cos^2 \theta - 1 < 0$$

$$(2 \cos \theta + 1)(2 \cos \theta - 1) < 0$$

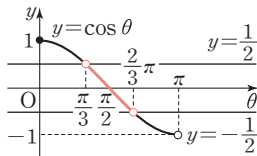
$$\therefore -\frac{1}{2} < \cos \theta < \frac{1}{2}$$

즉, 오른쪽 그림에서 구하는 θ 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{이므로 } \beta - \alpha = \frac{\pi}{3}$$



507 $-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - (9 \tan^2 \theta - 2) > 0$$

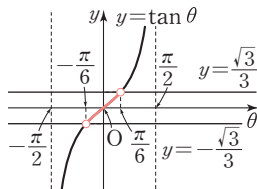
$$-9 \tan^2 \theta + 3 > 0, 3 \tan^2 \theta - 1 < 0$$

$$(\sqrt{3} \tan \theta + 1)(\sqrt{3} \tan \theta - 1) < 0$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3} < \tan \theta < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 θ 의 값의 범위는

$$-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$$



508 $\sqrt{3}$

이차방정식 $x^2 + 2x \sin \theta + \frac{3}{4} = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \sin^2 \theta - \frac{3}{4} \leq 0$$

$$\left(\sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \leq 0$$

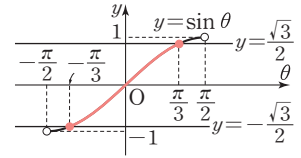
$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

즉, 오른쪽 그림에서

구하는 θ 의 값의 범

위는

$$-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

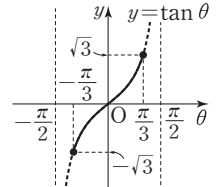


따라서 $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ 에서

함수 $y = \tan \theta$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

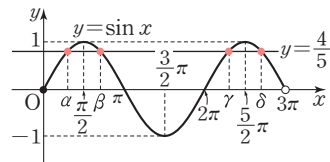
$\tan \theta$ 의 최댓값은 $\sqrt{3}$ 이다.



509 6π

다음 그림과 같이 $0 \leq x < 3\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{4}{5}$ 의 교점의 x 좌표를 작은 것부터

차례로 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 하자.



함수 $y = \sin x$ 의 그래프는 직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대

칭이므로 $\beta = \pi - \alpha$

또 함수 $y = \sin x$ 는 주기가 2π 인 주기함수이므로

$$\gamma = 2\pi + \alpha, \delta = 2\pi + \beta = 3\pi - \alpha$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$= \alpha + (\pi - \alpha) + (2\pi + \alpha) + (3\pi - \alpha)$$

$$= 6\pi$$

연습문제

253~254쪽

510 $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}\pi$

$$2 \cos \frac{x-\pi}{2} = \sqrt{2} \text{에서 } \cos \frac{x-\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{x-\pi}{2} = t \text{로 놓으면 } \cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{한편 } 0 \leq x < 2\pi \text{에서 } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{x-\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore -\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{\pi}{2}$$

오른쪽 그림과 같이

$-\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수

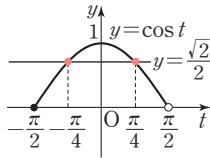
$y = \cos t$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 교점의 t 좌표는

$-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ 이므로

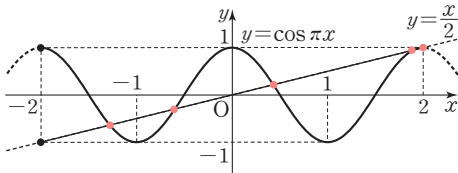
$\frac{x-\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{x-\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}\pi$



511 ㉔ ④

방정식 $\cos \pi x = \frac{x}{2}$ 의 실근은 함수 $y = \cos \pi x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

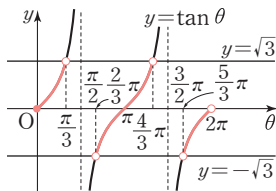


위의 그림과 같이 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y = \cos \pi x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{2}$ 의 교점의 개수는 5이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

512 ㉔ ②

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 부등식 $-\sqrt{3} < \tan \theta < \sqrt{3}$ 을 만족시키는 θ 의 값의 범위는

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{3}$



또는 $\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$

따라서 주어진 부등식을 만족시키지 않는 θ 의 값은

② $\frac{7}{12}\pi$ 이다.

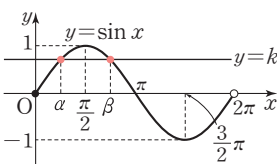
513 ㉔ ①

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

$y = \sin x$ 의 그래프와 직선

$y = k$ ($0 < k < 1$)의 교점의 x 좌표가 α, β

이므로 $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2}$



$\therefore \alpha + \beta = \pi$

즉, $\beta = \pi - \alpha$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin \frac{\beta - \alpha}{2} &= \sin \frac{(\pi - \alpha) - \alpha}{2} \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{5}{7}$$

이때 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 이므로

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{7} \right)^2 = \frac{24}{49}$$

$$\therefore k = \sin \alpha = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \quad (\because 0 < k < 1)$$

514 ㉔ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ 에서

$$(\sin x + 3)(2\sin x - 1) = 0$$

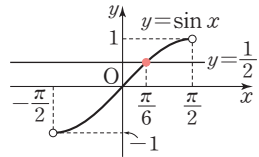
그런데 $\sin x + 3 > 0$ 이므로

$$2\sin x - 1 = 0 \quad \therefore \sin x = \frac{1}{2}$$

따라서 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서

방정식 $\sin x = \frac{1}{2}$ 의 해는

$x = \frac{\pi}{6}$ 이므로



$$\sin \left(\frac{\pi}{12} + x \right) = \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

515 ㉔ $x = \frac{7}{6}\pi$

$$2\cos x + 3\tan x = 0 \text{에서 } 2\cos x + 3 \times \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

이때 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\cos x \neq 0$ 이므로

$$\text{양변에 } \cos x \text{를 곱하면 } 2\cos^2 x + 3\sin x = 0$$

$$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x = 0$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$$

$$(2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$$

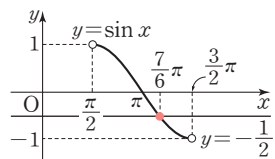
그런데 $\sin x - 2 < 0$ 이므로 $2\sin x + 1 = 0$

$$\therefore \sin x = -\frac{1}{2}$$

따라서 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$

에서 방정식

$\sin x = -\frac{1}{2}$ 의 해는



$x = \frac{7}{6}\pi$ 이므로 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{7}{6}\pi$ 이다.

516 ㉮ $\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \pi$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\cos \alpha + \sin \beta \leq 1 \text{ 에서}$$

$$\cos \alpha + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \leq 1$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha$$

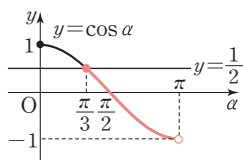
$$2 \cos \alpha \leq 1 \quad \therefore \cos \alpha \leq \frac{1}{2}$$

따라서 $0 \leq \alpha < \pi$ 에서 부

등식 $\cos \alpha \leq \frac{1}{2}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \pi \text{ 이므로 주어진}$$

부등식을 만족시키는 α 의 값의 범위는 $\frac{\pi}{3} \leq \alpha < \pi$ 이다.



517 ㉮ ②

$$\sin^2 x + 2 \cos x \geq a \text{ 에서}$$

$$(1 - \cos^2 x) + 2 \cos x \geq a$$

$$\therefore \cos^2 x - 2 \cos x + a - 1 \leq 0$$

$$\cos x = t \text{ 로 놓으면}$$

$$t^2 - 2t + a - 1 \leq 0 \text{ 이고 } -1 \leq t \leq 1$$

오른쪽 그림에서 함수

$$y = t^2 - 2t + a - 1$$

$$= (t-1)^2 + a - 2$$

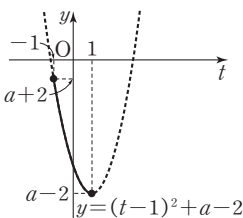
는 $t = -1$ 에서 최댓값

$a+2$ 를 가지므로 부등식

이 항상 성립하려면

$$a+2 \leq 0 \quad \therefore a \leq -2$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 -2 이다.



518 ㉮ $0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi < \theta < \pi$

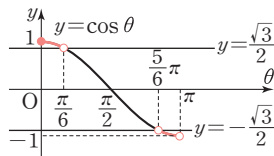
주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta > 0 \quad \text{..... ①}$$

$$\cos^2 \theta - 3(1 - \cos^2 \theta) > 0, \quad 4 \cos^2 \theta - 3 > 0$$

$$(2 \cos \theta + \sqrt{3})(2 \cos \theta - \sqrt{3}) > 0$$

$$\therefore \cos \theta < -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } \cos \theta > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{..... ②}$$



$$(i) \cos \theta < -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 일 때, } \frac{5}{6}\pi < \theta < \pi$$

$$(ii) \cos \theta > \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 일 때, } 0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}$$

(i), (ii)에서 θ 의 값의 범위는

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi < \theta < \pi$$

..... ③

단계	채점 기준	비율
①	주어진 조건을 이용하여 삼각함수를 포함한 부등식 세우기	20 %
②	$\cos \theta$ 의 값의 범위 구하기	30 %
③	θ 의 값의 범위 구하기	50 %

519 ㉮ $-\frac{3}{4}$

▶ 접근 방법 f 의 역함수 f^{-1} 에 대하여 $f^{-1}(a) = b$ 이면 $f(b) = a$ 임을 이용하여 주어진 방정식의 두 근을 구한다.

$$f^{-1}(x) = t \text{ 로 놓으면}$$

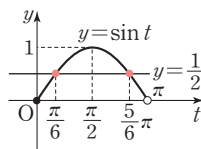
$$g(f^{-1}(x)) = g(t) = \frac{1}{2} \text{ 이고}$$

$$0 \leq t < \pi$$

즉, $0 \leq t < \pi$ 에서 방정식

$$\sin t = \frac{1}{2} \text{ 의 해는}$$

$$t = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } t = \frac{5}{6}\pi$$



$$(i) t = \frac{\pi}{6} \text{ 즉, } f^{-1}(x) = \frac{\pi}{6} \text{ 일 때,}$$

$$x = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(ii) t = \frac{5}{6}\pi \text{ 즉, } f^{-1}(x) = \frac{5}{6}\pi \text{ 일 때,}$$

$$x = f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \cos \frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \alpha\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{4}$$

520 ㉮ 8

▶ 접근 방법 방정식 $f(x) = g(x)$ 의 실근은 두 함수

$y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같음을 이용한다.

$$\sin^2 x + 2 \cos x + a = 0 \text{ 에서}$$

$$(1 - \cos^2 x) + 2 \cos x + a = 0$$

$$\therefore \cos^2 x - 2 \cos x - 1 = a$$

01 사인법칙과 코사인법칙

개념 확인

257쪽

522 ㉠ (1) $4\sqrt{2}$ (2) $3\sqrt{3}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{5}{8}$

(1) 사인법칙에 의하여 $\frac{4}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ}$ 이므로

$$c = \frac{4 \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$$

(2) 사인법칙에 의하여 $\frac{9}{\sin 120^\circ} = \frac{b}{\sin 30^\circ}$ 이므로

$$b = \frac{9 \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{9 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3\sqrt{3}$$

(3) 사인법칙에 의하여 $\frac{3\sqrt{2}}{\sin A} = \frac{6}{\sin 45^\circ}$ 이므로

$$\sin A = \frac{3\sqrt{2} \sin 45^\circ}{6} = \frac{3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{6} = \frac{1}{2}$$

(4) 사인법칙에 의하여 $\frac{4\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = \frac{5}{\sin C}$ 이므로

$$\sin C = \frac{5 \sin 120^\circ}{4\sqrt{3}} = \frac{5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{5}{8}$$

즉, 주어진 방정식을 만족시키는 해가 존재하면 함수 $y = \cos^2 x - 2 \cos x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점이 존재해야 한다.

$\cos x = t$ 로 놓으면

$$y = t^2 - 2t - 1 = (t-1)^2 - 2 \text{이고}$$

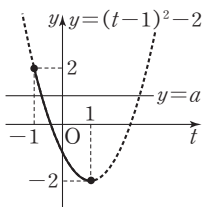
$$-1 \leq t \leq 1$$

즉, 오른쪽 그림에서 주어진 방정식을 만족시키는 해가 존재하도록 하는 a 의 값의 범위는

$$-2 \leq a \leq 2$$

따라서 $M=2$, $m=-2$ 이므로

$$M^2 + m^2 = 2^2 + (-2)^2 = 8$$



521 ㉠ 32

| 접근 방법 | 주어진 부등식을 삼각함수의 성질을 이용하여 코사인함수에 대한 부등식으로 나타내고 코사인함수의 그래프를 그려 부등식의 해를 구한다.

$$f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4} \text{에서}$$

$$\sin \left\{ \frac{\pi}{4}(2+x) \right\} \sin \left\{ \frac{\pi}{4}(2-x) \right\} < \frac{1}{4}$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x \right) < \frac{1}{4}$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x \right) = \cos \frac{\pi}{4}x, \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x \right) = \cos \frac{\pi}{4}x$$

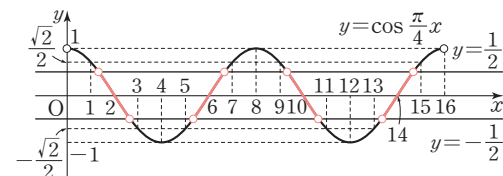
$$\cos^2 \frac{\pi}{4}x < \frac{1}{4}$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < \cos \frac{\pi}{4}x < \frac{1}{2}$$

즉, $0 < x < 16$ 에서 부등식 $f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4}$ 의

해는 함수 $y = \cos \frac{\pi}{4}x$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 보다

위쪽에 있고 직선 $y = \frac{1}{2}$ 보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같다.



따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x 의 값은

2, 6, 10, 14이므로 구하는 합은

$$2+6+10+14=32$$

유제

259~265쪽

523 ㉠ ③

$$\angle C = 180^\circ - (45^\circ + 15^\circ) = 120^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ} = \frac{8}{\sin 120^\circ}$ 이므로

$$\overline{BC} = \frac{8 \sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{8 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

524 ㉠ $30^\circ, 90^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin B}$ 이므로

$$\sin B = \frac{2\sqrt{3} \sin 30^\circ}{2} = \frac{2\sqrt{3} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로

$B = 60^\circ$ 또는 $B = 120^\circ$

(i) $B = 60^\circ$ 일 때,

$$C = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$$

(ii) $B = 120^\circ$ 일 때,

$$C = 180^\circ - (30^\circ + 120^\circ) = 30^\circ$$

(i), (ii)에서 $C = 30^\circ$ 또는 $C = 90^\circ$

525 $\frac{7}{32}$

사인법칙에 의하여 $\frac{5}{\sin A} = \frac{4}{\sin 45^\circ}$ 이므로

$$\sin A = \frac{5 \sin 45^\circ}{4} = \frac{5 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$$

이때 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 이므로

$$\cos^2 A = 1 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{8}\right)^2 = \frac{7}{32}$$

526 $\frac{4}{3}\pi$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin 60^\circ} = 2R$ 이므로

$$R = \frac{2}{2 \sin 60^\circ} = \frac{2}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi R^2 = \pi \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}\pi$$

527 $\frac{3}{4} : \frac{4}{5}$

$(a+b) : (b+c) : (c+a) = 7 : 9 : 8$ 이므로

$$a+b=7k, b+c=9k, c+a=8k \quad (k>0)$$

라 하고, 세 식을 변끼리 더하면

$$2a+2b+2c=24k$$

$$\therefore a+b+c=12k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$b+c=9k$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면 $a=3k$

$c+a=8k$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면 $b=4k$

$a+b=7k$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면 $c=5k$

따라서 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \sin A : \sin B : \sin C &= a : b : c \\ &= 3k : 4k : 5k \\ &= 3 : 4 : 5 \end{aligned}$$

528 $\frac{1}{1} : \frac{1}{1} : \frac{1}{\sqrt{3}}$

$A+B+C=180^\circ$ 이므로

$$A = 180^\circ \times \frac{1}{1+1+4} = 30^\circ$$

$$B = 180^\circ \times \frac{1}{1+1+4} = 30^\circ$$

$$C = 180^\circ \times \frac{4}{1+1+4} = 120^\circ$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a : b : c &= \sin A : \sin B : \sin C \\ &= \sin 30^\circ : \sin 30^\circ : \sin 120^\circ \\ &= \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 : 1 : \sqrt{3} \end{aligned}$$

529 $\frac{20}{9}$

사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4 \text{에서}$$

$$a : b : c = 2 : 3 : 4$$

따라서 $a=2k, b=3k, c=4k \quad (k>0)$ 라 하면

$$\frac{a^2+c^2}{b^2} = \frac{(2k)^2+(4k)^2}{(3k)^2} = \frac{20}{9}$$

530 $\frac{6}{5}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{5}{3}$ 에 대입하면

$$\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{5}{3}, \frac{a+b+c}{2R} = \frac{5}{3}$$

이때 $a+b+c=20$ 이므로

$$\frac{20}{2R} = \frac{5}{3} \quad \therefore R = 6$$

531 $\frac{3}{4}$ 정삼각형

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 $a \sin A = b \sin B = c \sin C$ 에 대입하면

$$a \times \frac{a}{2R} = b \times \frac{b}{2R} = c \times \frac{c}{2R}$$

$$\frac{a^2}{2R} = \frac{b^2}{2R} = \frac{c^2}{2R} \quad \therefore a^2 = b^2 = c^2$$

이때 $a>0, b>0, c>0$ 이므로 $a=b=c$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

532 ㉔ ②

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면
사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}$$

이를 $a \sin^2 A = b \sin^2 B$ 에 대입하면

$$a \times \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = b \times \left(\frac{b}{2R}\right)^2$$

$$\frac{a^3}{4R^2} = \frac{b^3}{4R^2}, a^3 = b^3$$

$$a^3 - b^3 = 0 \quad \therefore (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 0$$

$$\text{이때 } a > 0, b > 0 \text{이므로 } a - b = 0 \quad \therefore a = b$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

533 ㉔ $b=c$ 인 이등변삼각형

$$A + B + C = 180^\circ \text{이므로}$$

$$\sin(A + C) = \sin(180^\circ - B) = \sin B$$

$$\sin(A + B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$$

$$\text{즉, } b \sin(A + C) = c \sin(A + B) \text{에서}$$

$$b \sin B = c \sin C$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면
사인법칙에 의하여

$$\sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 $b \sin B = c \sin C$ 에 대입하면

$$b \times \frac{b}{2R} = c \times \frac{c}{2R}$$

$$\frac{b^2}{2R} = \frac{c^2}{2R}, b^2 = c^2$$

$$b^2 - c^2 = 0 \quad \therefore (b+c)(b-c) = 0$$

$$\text{이때 } b > 0, c > 0 \text{이므로 } b - c = 0 \quad \therefore b = c$$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

534 ㉔ ④

$$\sin^2 A + \cos^2 B = \cos^2 C \text{에서}$$

$$\sin^2 A + (1 - \sin^2 B) = 1 - \sin^2 C$$

$$\sin^2 A + \sin^2 C = \sin^2 B$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면
사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 $\sin^2 A + \sin^2 C = \sin^2 B$ 에 대입하면

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2$$

$$\frac{a^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} = \frac{b^2}{4R^2} \quad \therefore a^2 + c^2 = b^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

535 ㉔ $5\sqrt{6}$ m

$$C = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$$

$$\text{사인법칙에 의하여 } \frac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ} = \frac{15}{\sin 60^\circ} \text{이므로}$$

$$\overline{BC} = \frac{15 \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{15 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 5\sqrt{6}(\text{m})$$

따라서 두 지점 B, C 사이의 거리는 $5\sqrt{6}$ m이다.

536 ㉔ $10\sqrt{2}$ km

$$C = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$$

$$\text{사인법칙에 의하여 } \frac{\overline{BC}}{\sin 30^\circ} = \frac{20}{\sin 45^\circ} \text{이므로}$$

$$\overline{BC} = \frac{20 \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{20 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10\sqrt{2}(\text{km})$$

따라서 두 지점 B, C 사이의 거리는 $10\sqrt{2}$ km이다.

537 ㉔ 6π m

$$A = 180^\circ - (50^\circ + 100^\circ) = 30^\circ$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\text{사인법칙에 의하여 } \frac{3}{\sin 30^\circ} = 2R \text{이므로}$$

$$R = \frac{3}{2 \sin 30^\circ} = \frac{3}{2 \times \frac{1}{2}} = 3(\text{m})$$

따라서 연못의 둘레의 길이는

$$2\pi R = 2\pi \times 3 = 6\pi(\text{m})$$

538 ㉔ $30\sqrt{2}$ m

$$\angle AQB = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$$

삼각형 ABQ에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BQ}}{\sin 45^\circ} = \frac{90}{\sin 60^\circ} \text{이므로}$$

$$\overline{BQ} = \frac{90 \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{90 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 30\sqrt{6}(\text{m})$$

이때 삼각형 PBQ에서

$$\overline{PQ} = \overline{BQ} \tan 30^\circ = 30\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 30\sqrt{2}(\text{m})$$

따라서 건물의 높이는 $30\sqrt{2}$ m이다.

539 ㉡ (1) $\sqrt{5}$ (2) 14 (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 &= (\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 3 \times \cos 45^\circ \\ &= 2 + 9 - 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

이때 $a > 0$ 이므로 $a = \sqrt{5}$

(2) 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} c^2 &= 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos 120^\circ \\ &= 36 + 100 - 120 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 196 \end{aligned}$$

이때 $c > 0$ 이므로 $c = \sqrt{196} = 14$

(3) 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 8} = \frac{1}{2}$$

(4) 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2^2}{2 \times 2 \times 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

유제

269~273쪽

540 ㉡ 7

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} c^2 &= 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos \frac{2}{3}\pi \\ &= 9 + 25 - 30 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \left[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3}\right] \\ &= 49 \end{aligned}$$

이때 $c > 0$ 이므로 $c = \sqrt{49} = 7$

541 ㉡ 12 : 9 : 2

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \times 5 \times 6} = \frac{3}{4}$$

$$\cos B = \frac{6^2 + 4^2 - 5^2}{2 \times 6 \times 4} = \frac{9}{16}$$

$$\cos C = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos A : \cos B : \cos C &= \frac{3}{4} : \frac{9}{16} : \frac{1}{8} \\ &= 12 : 9 : 2 \end{aligned}$$

542 ㉡ ④

사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $B + D = 180^\circ$

$$\therefore \cos D = \cos(180^\circ - B) = -\cos B = -\frac{1}{6}$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos D \\ &= 4 + 9 - 12 \times \left(-\frac{1}{6}\right) = 15 \end{aligned}$$

이때 $\overline{AC} > 0$ 이므로 $\overline{AC} = \sqrt{15}$

543 ㉡ 120°

삼각형에서 길이가 가장 긴 변의 대각이 세 내각 중 크기가 가장 크므로 가장 큰 내각의 크기는 A이다.

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{2^2 + 2^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \times 2 \times 2} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 120^\circ$

544 ㉡ $\frac{3}{5}$

사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 4 : 5$$

$$a : b : c = 3 : 4 : 5$$

따라서 $a = 3k$, $b = 4k$, $c = 5k$ ($k > 0$)라 하면 코사인 법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{(5k)^2 + (3k)^2 - (4k)^2}{2 \times 5k \times 3k} = \frac{3}{5}$$

545 ㉡ $\frac{1}{5}$

$A + B + C = 180^\circ$ 이므로

$$\sin(B + C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A$$

$$\sin(C + A) = \sin(180^\circ - B) = \sin B$$

$$\sin(A + B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$$

$$\begin{aligned} \sin(B + C) : \sin(C + A) : \sin(A + B) \\ = 5 : 6 : 7 \end{aligned}$$

에서

$$\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 6 : 7$$

즉, 사인법칙에 의하여

$$a : b : c = 5 : 6 : 7$$

따라서 $a = 5k$, $b = 6k$, $c = 7k$ ($k > 0$)라 하면 코사인 법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{(5k)^2 + (6k)^2 - (7k)^2}{2 \times 5k \times 6k} = \frac{1}{5}$$

546 ㉔ ②

$$2\sqrt{5} \sin A = \sqrt{5} \sin B = 2 \sin C \text{에서}$$

$$\sin A : \sin B : \sin C = 1 : 2 : \sqrt{5}$$

즉, 사인법칙에 의하여

$$a : b : c = 1 : 2 : \sqrt{5}$$

이때 $a=k$, $b=2k$, $c=\sqrt{5}k$ ($k>0$)라 하면 삼각형에서 길이가 가장 긴 변의 대각이 세 내각 중 크기가 가장 크므로 가장 큰 내각의 크기는 C 이다.

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{k^2 + (2k)^2 - (\sqrt{5}k)^2}{2 \times k \times 2k} = 0$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C=90^\circ$

547 ㉔ ④

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 &= 10^2 + 8^2 - 2 \times 10 \times 8 \times \cos 60^\circ \\ &= 100 + 64 - 160 \times \frac{1}{2} = 84 \end{aligned}$$

이때 $a>0$ 이므로 $a=\sqrt{84}=2\sqrt{21}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{2\sqrt{21}}{\sin 60^\circ} = 2R$ 이므로

$$R = \frac{2\sqrt{21}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{21}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{7}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 둘레의 길이는

$$2\pi R = 2\pi \times 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}\pi$$

548 ㉔ ⑤

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 $\cos A \sin B = \sin C$ 에 대입하면

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \frac{b}{2R} = \frac{c}{2R}$$

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2c^2 \quad \therefore b^2 = a^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $B=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

549 ㉔ 70 m

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= 30^2 + 50^2 - 2 \times 30 \times 50 \times \cos 120^\circ \\ &= 900 + 2500 - 3000 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 4900 \end{aligned}$$

이때 $\overline{AB}>0$ 이므로 $\overline{AB}=\sqrt{4900}=70(\text{m})$

따라서 두 나무 A, B 사이의 거리는 70 m이다.

550 ㉔ $a=b$ 인 이등변삼각형

$\cos A : \cos B = a : b$ 에서 $a \cos B = b \cos A$

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이를 $a \cos B = b \cos A$ 에 대입하면

$$a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = b^2 + c^2 - a^2$$

$$a^2 - b^2 = 0 \quad \therefore (a+b)(a-b) = 0$$

이때 $a>0$, $b>0$ 이므로 $a-b=0 \quad \therefore a=b$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

551 ㉔ $\frac{140\sqrt{3}}{3}\pi \text{ m}$

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= 50^2 + 80^2 - 2 \times 50 \times 80 \times \cos 60^\circ \\ &= 2500 + 6400 - 8000 \times \frac{1}{2} = 4900 \end{aligned}$$

이때 $\overline{BC}>0$ 이므로 $\overline{BC}=\sqrt{4900}=70(\text{m})$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{70}{\sin 60^\circ} = 2R$ 이므로

$$R = \frac{70}{2 \sin 60^\circ} = \frac{70}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{70\sqrt{3}}{3}(\text{m})$$

따라서 울타리의 길이는

$$2\pi R = 2\pi \times \frac{70\sqrt{3}}{3} = \frac{140\sqrt{3}}{3}\pi(\text{m})$$

연습문제

274~276쪽

552 ㉔ ②

사인법칙에 의하여 $\frac{\sqrt{2}}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$ 이므로

$$\sin A = \frac{\sqrt{2} \sin 60^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A=45^\circ$ 또는 $A=135^\circ$

그런데 $A=135^\circ$ 이면 $A+B>180^\circ$ 이므로

$A=45^\circ$

553 ㉑ 14

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로
사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2 \times 4} = \frac{a}{8}$$

$$\sin B = \frac{b}{2 \times 4} = \frac{b}{8}$$

$$\sin C = \frac{c}{2 \times 4} = \frac{c}{8}$$

이때 $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{7}{4}$ 에서

$$\frac{a}{8} + \frac{b}{8} + \frac{c}{8} = \frac{7}{4} \quad \therefore a + b + c = 14$$

따라서 삼각형의 둘레의 길이는 14이다.

554 ㉒ ②

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 &= 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \cos 120^\circ \\ &= 64 + 36 - 96 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 148 \end{aligned}$$

이때 $a > 0$ 이므로 $a = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$

555 ㉒ ③

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로
사인법칙에 의하여

$$\frac{4\sqrt{5}}{\sin A} = 2 \times 6 = 12 \quad \therefore \sin A = \frac{4\sqrt{5}}{12} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 에서

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

이때 $0^\circ < A < 90^\circ$ 이므로 $\cos A > 0$

$$\therefore \cos A = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

556 ㉒ $4\sqrt{3}$

(가)에서

$$\sin(A+B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C \text{이므로}$$

$$\sin^2 C = \frac{3}{4} \quad \text{..... ①}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $\sin C > 0$

$$\therefore \sin C = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{..... ②}$$

(나)에서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4
이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2 \times 4 = 8$$

$$\therefore \overline{AB} = 8 \sin C = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \quad \text{..... ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	$\sin^2 C$ 의 값 구하기	40 %
②	$\sin C$ 의 값 구하기	20 %
③	선분 AB의 길이 구하기	40 %

557 ㉒ $a=c$ 인 이등변삼각형

$$a \sin A = c \cos \left(\frac{\pi}{2} - C\right) \text{에서}$$

$$a \sin A = c \sin C \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \left(\frac{\pi}{2} - C\right) = \sin C \end{array} \right.$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면
사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 $a \sin A = c \sin C$ 에 대입하면

$$a \times \frac{a}{2R} = c \times \frac{c}{2R}$$

$$a^2 = c^2, a^2 - c^2 = 0 \quad \therefore (a+c)(a-c) = 0$$

이때 $a > 0, c > 0$ 이므로 $a - c = 0 \quad \therefore a = c$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

558 ㉒ 41

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{6^2 + 6^2 - (\sqrt{15})^2}{2 \times 6 \times 6} = \frac{19}{24}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= 10^2 + 6^2 - 2 \times 10 \times 6 \times \cos A \\ &= 100 + 36 - 120 \times \frac{19}{24} \\ &= 41 \end{aligned}$$

$$\therefore k^2 = \overline{BC}^2 = 41$$

559 ㉒ ②

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{에서}$$

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

$$\therefore \cos A = -\sqrt{\frac{25}{36}} = -\frac{5}{6}$$

$$\text{또는 } \cos A = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$$

(i) $\cos A = -\frac{5}{6}$ 일 때,

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{3^2 + 6^2 - a^2}{2 \times 3 \times 6}$$

$$-\frac{5}{6} = \frac{45-a^2}{36}, a^2=75$$

$$\therefore a=5\sqrt{3} \quad (\because a>0)$$

그런데 $3 < a < 6$ 이므로 a 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $\cos A = \frac{5}{6}$ 일 때,

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{3^2+6^2-a^2}{2 \times 3 \times 6}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{45-a^2}{36}, a^2=15$$

$$\therefore a=\sqrt{15} \quad (\because a>0)$$

(i), (ii)에서 $a=\sqrt{15}$

560 ㉡ 4

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4이므로
사인법칙에 의하여

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin C} = 2 \times 4 = 8$$

$$\therefore \sin C = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1 \text{에서}$$

$$\cos^2 C = 1 - \sin^2 C = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

이때 $0^\circ < C < 90^\circ$ 이므로 $\cos C > 0$

$$\therefore \cos C = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

한편 $a:b=1:2$ 에서 $b=2a$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$(4\sqrt{3})^2 = a^2 + (2a)^2 - 2 \times a \times 2a \times \cos C$$

$$48 = a^2 + 4a^2 - 4a^2 \times \frac{1}{2}$$

$$3a^2 = 48, a^2 = 16$$

$$\therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$

561 ㉡ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

$A+B+C=180^\circ$ 이므로

$$A = 180^\circ \times \frac{3}{3+4+5} = 45^\circ$$

$$B = 180^\circ \times \frac{4}{3+4+5} = 60^\circ$$

$$C = 180^\circ \times \frac{5}{3+4+5} = 75^\circ$$

코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{2})^2 + c^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times c \times \cos 45^\circ$$

$$12 = 18 + c^2 - 6\sqrt{2}c \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c^2 - 6c + 6 = 0 \quad \therefore c = 3 \pm \sqrt{3}$$

이때 C 가 가장 크므로 c 의 값이 가장 커야 한다.

$$\therefore c = 3 + \sqrt{3}$$

즉, 사인법칙에 의하여 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 45^\circ} = \frac{3+\sqrt{3}}{\sin C}$ 이므로

$$\sin C = \frac{(3+\sqrt{3}) \sin 45^\circ}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(3+\sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

562 ㉡ $A=90^\circ$ 인 직각삼각형

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

이를 $a \cos B - b \cos A = c$ 에 대입하면

$$a \times \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} - b \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = c$$

$$c^2+a^2-b^2 - (b^2+c^2-a^2) = 2c^2$$

$$2a^2 - 2b^2 = 2c^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

563 ㉡ $\frac{8\sqrt{15}}{15}$

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{4^2+3^2-2^2}{2 \times 4 \times 3} = \frac{7}{8}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{에서}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{15}{64}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $\sin A > 0$

$$\therefore \sin A = \sqrt{\frac{15}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin A} = 2R$ 이므로

$$R = \frac{2}{2 \sin A} = \frac{2}{2 \times \frac{\sqrt{15}}{8}} = \frac{8\sqrt{15}}{15}$$

따라서 그릇의 반지름의 길이는 $\frac{8\sqrt{15}}{15}$ 이다.

564 ㉮ $6\sqrt{7}$

| 접근 방법 | 원뿔의 전개도를 그리고 옆면인 부채꼴의 호의 길이가 밑면인 원의 둘레의 길이와 같음을 이용하여 부채꼴의 중심각의 크기를 구한다.

주어진 원뿔의 전개도를 그리면 오른쪽 그림과 같고 부채꼴의 호의 길이는 원뿔의 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$$\widehat{BB'} = 2\pi \times 4 = 8\pi$$

부채꼴 ABB' 의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$12\theta = 8\pi \quad \therefore \theta = \frac{2}{3}\pi$$

점 M은 모선 AB의 중점이므로

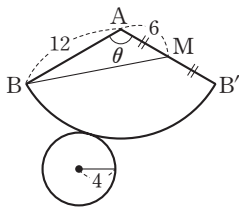
$$\overline{AM} = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BM}^2 &= 12^2 + 6^2 - 2 \times 12 \times 6 \times \cos \frac{2}{3}\pi \\ &= 144 + 36 - 144 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 252 \end{aligned}$$

이때 $\overline{BM} > 0$ 이므로 $\overline{BM} = \sqrt{252} = 6\sqrt{7}$

따라서 구하는 최단 거리는 $6\sqrt{7}$ 이다.



565 ㉮ ⑤

| 접근 방법 | $\cos A$ 의 값이 최소일 때 A 가 최대가 됨을 이용한다.

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{6^2 + c^2 - 4^2}{2 \times 6 \times c} = \frac{20 + c^2}{12c} = \frac{5}{3c} + \frac{c}{12}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $\cos A$ 의 값이 최소일 때 A 가 최대가 된다.

이때 $\frac{5}{3c} > 0$, $\frac{c}{12} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{5}{3c} + \frac{c}{12} &\geq 2\sqrt{\frac{5}{3c} \times \frac{c}{12}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \left(\text{단, 등호는 } \frac{5}{3c} = \frac{c}{12}, \text{ 즉 } c = 2\sqrt{5} \text{ 일 때 성립} \right) \end{aligned}$$

따라서 $\cos A$ 는 $c = 2\sqrt{5}$ 에서 최솟값 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 를 가지므로 구하는 c 의 값은 $2\sqrt{5}$ 이다.

566 ㉮ ②

| 접근 방법 | 사인법칙을 이용하여 $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ 의 길이를 구한 후 코사인법칙을 이용하여 $\overline{CD}$ 의 길이를 구한다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2 \times 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$$

$$\therefore \overline{BC} = 4\sqrt{7} \sin \frac{\pi}{3} = 4\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{21}$$

또 삼각형 BDC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin (\angle BCD)} = 2 \times 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$$

$$\therefore \overline{BD} = 4\sqrt{7} \sin (\angle BCD) = 4\sqrt{7} \times \frac{2\sqrt{7}}{7} = 8$$

이때 사각형 ABDC가 원에 내접하므로

$$\angle BDC = \pi - \angle BAC = \frac{2}{3}\pi$$

$\overline{CD} = x$ ($x > 0$)라 하면 삼각형 BDC에서 코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{21})^2 = 8^2 + x^2 - 2 \times 8 \times x \times \cos \frac{2}{3}\pi$$

$$84 = 64 + x^2 - 16x \times \left(-\frac{1}{2}\right), x^2 + 8x - 20 = 0$$

$$(x+10)(x-2) = 0 \quad \therefore x = 2 \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore \overline{CD} = 2$$

$$\therefore \overline{BD} + \overline{CD} = 8 + 2 = 10$$

567 ㉮ $a=b$ 인 이등변삼각형

| 접근 방법 | $\tan B = \frac{\sin B}{\cos B}$ 임을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

$$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} \text{이므로 } \sin A = \tan B \cos A \text{에서}$$

$$\sin A = \frac{\sin B}{\cos B} \times \cos A$$

$$\sin A \cos B = \sin B \cos A$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R},$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이를 $\sin A \cos B = \sin B \cos A$ 에 대입하면

$$\frac{a}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{b}{2R} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = b^2 + c^2 - a^2$$

$$a^2 - b^2 = 0 \quad \therefore (a+b)(a-b) = 0$$

$$\text{이때 } a > 0, b > 0 \text{이므로 } a - b = 0 \quad \therefore a = b$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

02 삼각형의 넓이

유제

281~288쪽

568 ㉡ 30°

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ 에서

$$10 = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \sin A \quad \therefore \sin A = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 90^\circ$ 이므로 $A = 30^\circ$

569 ㉡ 2√5

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면 $S = \frac{1}{2}ca \sin B$ 에서

$$6 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times a \times \sin 45^\circ$$

$$6 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times a \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore a = 6$$

코사인법칙에 의하여

$$b^2 = (2\sqrt{2})^2 + 6^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 6 \times \cos 45^\circ$$

$$= 8 + 36 - 24\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20$$

$$\therefore b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} (\because b > 0)$$

570 ㉡ ②

$A + B + C = 180^\circ$ 이므로

$$\sin(A + B) = \frac{1}{3} \text{에서 } \sin(180^\circ - C) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \sin C = \frac{1}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{1}{3} = 8$$

571 ㉡ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

$\overline{AB} = x$ ($0 < x < 6$)라 하면 $\overline{AC} = 6 - x$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$(3\sqrt{3})^2 = (6 - x)^2 + x^2 - 2 \times (6 - x) \times x \times \cos 120^\circ$$

$$27 = x^2 - 12x + 36 + x^2 - (12x - 2x^2) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0, (x - 3)^2 = 0$$

$$\therefore x = 3$$

따라서 $\overline{AB} = 3, \overline{AC} = 3$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin 120^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

572 ㉡ $\frac{15\sqrt{7}}{4}$

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2 \times 5 \times 4} = \frac{1}{8}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{에서}$$

$$\sin^2 A = 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{63}{64}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$\sin A > 0$$

$$\therefore \sin A = \sqrt{\frac{63}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

573 ㉡ $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{abc}{4R}$ 이므로

$$\frac{5 \times 3 \times 7}{4R} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore R = \frac{5 \times 3 \times 7 \times 4}{4 \times 15\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

574 ㉡ 18

(가)에서 $a = 2k, b = 3k, c = 4k$ ($k > 0$)라 하면

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{(2k)^2 + (3k)^2 - (4k)^2}{2 \times 2k \times 3k} = -\frac{1}{4}$$

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1 \text{에서}$$

$$\sin^2 C = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로

$$\sin C > 0$$

$$\therefore \sin C = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

(나)에서

$$\frac{1}{2} \times 2k \times 3k \times \frac{\sqrt{15}}{4} = 3\sqrt{15}$$

$$k^2 = 4$$

$$\therefore k = 2 (\because k > 0)$$

$$\therefore a + b + c = 2k + 3k + 4k = 9k = 18$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 18이다.

575 ㉡ ③

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 5 \times 7} = \frac{1}{7}$$

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1 \text{에서}$$

$$\sin^2 C = 1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{48}{49}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $\sin C > 0$

$$\therefore \sin C = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

즉, 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = 10\sqrt{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라

하면 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}r(a+b+c)$ 이므로

$$\frac{1}{2}r(5+7+8) = 10\sqrt{3}$$

$$\therefore r = \sqrt{3}$$

576 ㉡ ③

오른쪽 그림과 같이

선분 AC를 그으면

삼각형 ABC에서 코

사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= (2\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 4 \times \cos 30^\circ \\ &= 12 + 16 - 16\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{4} = 2 (\because \overline{AC} > 0)$$

$\overline{AD} = x (x > 0)$ 라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$2^2 = x^2 + 2^2 - 2 \times x \times 2 \times \cos 45^\circ$$

$$4 = x^2 + 4 - 4x \times \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x^2 - 2\sqrt{2}x = 0$$

$$x(x - 2\sqrt{2}) = 0 \quad \therefore x = 2\sqrt{2} (\because x > 0)$$

삼각형 ABC의 넓이는

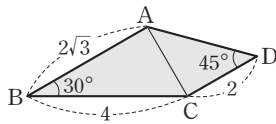
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 4 \times \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 4 \times \frac{1}{2} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

삼각형 ACD의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} \times \sin 45^\circ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$2\sqrt{3} + 2$$



577 ㉡ ③

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

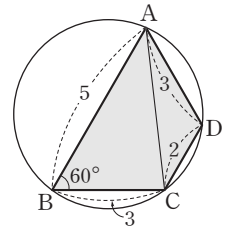
$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

오른쪽 그림과 같이 선분

AC를 그으면 삼각형 ABC

의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{15\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$



삼각형 ACD의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin 120^\circ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{4}$$

578 ㉡ ③

오른쪽 그림과 같이 선분 AC를

그으면 삼각형 ABC는 직각삼각

형이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos D = \frac{8^2 + 12^2 - 10^2}{2 \times 8 \times 12} = \frac{9}{16}$$

$$\sin^2 D + \cos^2 D = 1 \text{에서}$$

$$\sin^2 D = 1 - \left(\frac{9}{16}\right)^2 = \frac{175}{256}$$

이때 $0^\circ < D < 180^\circ$ 이므로 $\sin D > 0$

$$\therefore \sin D = \sqrt{\frac{175}{256}} = \frac{5\sqrt{7}}{16}$$

삼각형 ABC의 넓이는

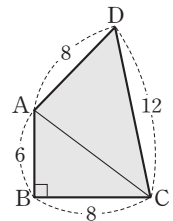
$$\frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$$

삼각형 ACD의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \sin D &= \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \frac{5\sqrt{7}}{16} \\ &= 15\sqrt{7} \end{aligned}$$

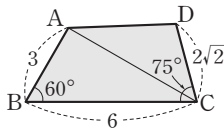
따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$24 + 15\sqrt{7}$$



579 ㉮ $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

오른쪽 그림과 같이 선분 AC를 그으면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여



$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \cos 60^\circ \\ &= 9 + 36 - 36 \times \frac{1}{2} = 27\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\sin(\angle ACB)} \quad \text{이므로}$$

$$\sin(\angle ACB) = \frac{3 \sin 60^\circ}{3\sqrt{3}} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < \angle ACB < 75^\circ$ 이므로 $\angle ACB = 30^\circ$

$$\therefore \angle ACD = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times \sin 60^\circ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

삼각형 ACD의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} \times \sin 45^\circ &= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{9\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{3} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

580 ㉮ $30^\circ, 150^\circ$

평행사변형 ABCD의 넓이가 35이므로

$$10 \times 7 \times \sin C = 35 \quad \therefore \sin C = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로

$$C = 30^\circ \text{ 또는 } C = 150^\circ$$

581 ㉮ 6

등변사다리꼴의 대각선의 길이를 x ($x > 0$)라 하면 넓이가 9이므로

$$\frac{1}{2} \times x \times x \times \sin 30^\circ = 9$$

$$\frac{1}{2} x^2 \times \frac{1}{2} = 9, x^2 = 36 \quad \therefore x = 6 \quad (\because x > 0)$$

582 ㉮ $10\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{4^2 + 5^2 - (\sqrt{21})^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B = 60^\circ$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$4 \times 5 \times \sin 60^\circ = 4 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

583 ㉮ ②

사각형 ABCD의 넓이가 $10\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \sin \theta = 10\sqrt{3} \quad \therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $\theta = 60^\circ$ 또는 $\theta = 120^\circ$

$$(i) \theta = 60^\circ \text{ 일 때, } \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$(ii) \theta = 120^\circ \text{ 일 때, } \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$(i), (ii) \text{ 에서 } \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

따라서 모든 $\cos \theta$ 의 값의 곱은

$$\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

584 ㉮ $6\sqrt{6}$

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면 헤론의 공식에서

$$s = \frac{5+6+7}{2} = 9 \text{ 이므로}$$

$$S = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$$

$$= \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2} = 6\sqrt{6}$$

연습문제

289~290쪽

585 ㉮ 60°

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면 $S = \frac{1}{2} bc \sin A$ 에서

$$3 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 \times \sin A$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 90^\circ$ 이므로 $A = 60^\circ$

586 ㉮ ④

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{4^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 4 \times 5} = -\frac{1}{5}$$

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1 \text{에서}$$

$$\sin^2 C = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $\sin C > 0$

$$\therefore \sin C = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6}$$

|다른 풀이|

삼각형의 넓이를 S라 하면 헤론의 공식에서

$$s = \frac{4+5+7}{2} = 8 \text{이므로}$$

$$S = \sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)} \\ = \sqrt{8 \times 4 \times 3 \times 1} = 4\sqrt{6}$$

587 ▣ 30√2

사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 10 \times \sin 135^\circ = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ = 30\sqrt{2}$$

588 ▣ 4√2

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r라 하면 부채꼴의 호의 길이가 π이므로

$$r \times \frac{\pi}{4} = \pi \quad \therefore r = 4$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ = 4\sqrt{2}$$

589 ▣ 3+√3

$\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = 3 : 4 : 5$ 이므로 원의 중심을 O라 하면

$$\angle AOB = 360^\circ \times \frac{3}{3+4+5} = 90^\circ$$

$$\angle BOC = 360^\circ \times \frac{4}{3+4+5} = 120^\circ$$

$$\angle COA = 360^\circ \times \frac{5}{3+4+5} = 150^\circ \quad \text{..... ①}$$

삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 1 = 2$$

삼각형 OBC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ = \sqrt{3}$$

삼각형 OCA의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} \\ = 1 \quad \text{..... ②}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$2 + \sqrt{3} + 1 = 3 + \sqrt{3} \quad \text{..... ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	$\angle AOB, \angle BOC, \angle COA$ 의 크기 구하기	30 %
②	세 삼각형 OAB, OBC, OCA의 넓이 구하기	50 %
③	삼각형 ABC의 넓이 구하기	20 %

590 ▣ ④

삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $A = 60^\circ$

$\overline{AD} = \overline{CE} = a$ ($a > 0$)라 하면

$$\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{CE} = 1 + a$$

삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{13})^2 = a^2 + (1+a)^2 - 2 \times a \times (1+a) \times \cos 60^\circ$$

$$13 = a^2 + 1 + 2a + a^2 - (2a + 2a^2) \times \frac{1}{2}$$

$$a^2 + a - 12 = 0$$

$$(a+4)(a-3) = 0 \quad \therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore \overline{AD} = 3, \overline{AE} = 1 + 3 = 4$$

삼각형 ADE의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ = 3\sqrt{3}$$

삼각형 ABE의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 1 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 4 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ = \sqrt{3}$$

따라서 삼각형 BDE의 넓이는

$$3\sqrt{3} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

591 ▣ $\frac{7\sqrt{15}}{5}$

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{6^2 + 8^2 - 4^2}{2 \times 6 \times 8} = \frac{7}{8}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{에서}$$

$$\sin^2 A = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{15}{64}$$

$$\text{이때 } 0^\circ < A < 180^\circ \text{이므로 } \sin A > 0$$

$$\therefore \sin A = \sqrt{\frac{15}{64}} = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin A = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \frac{\sqrt{15}}{8} = 3\sqrt{15}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2}r(4+6+8) = 3\sqrt{15} \text{이므로}$$

$$r = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\text{또 } \frac{4 \times 6 \times 8}{4R} = 3\sqrt{15} \text{이므로}$$

$$R = \frac{4 \times 6 \times 8}{4 \times 3\sqrt{15}} = \frac{16\sqrt{15}}{15}$$

$$\therefore r + R = \frac{\sqrt{15}}{3} + \frac{16\sqrt{15}}{15} = \frac{7\sqrt{15}}{5}$$

592 ▣ 6√5

오른쪽 그림과 같이 선분

AC를 그으면 삼각형 ABC

에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 3^2 + 5^2$$

$$- 2 \times 3 \times 5 \times \cos B$$

$$= 34 - 30 \cos B$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 2^2 + 6^2 - 2 \times 2 \times 6 \times \cos D$$

$$\text{이때 } \cos D = \cos(180^\circ - B) = -\cos B \text{이므로}$$

$$\overline{AC}^2 = 4 + 36 - 24 \times (-\cos B) = 40 + 24 \cos B$$

$$\text{즉, } 34 - 30 \cos B = 40 + 24 \cos B \text{이므로}$$

$$\cos B = -\frac{1}{9}$$

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \text{에서}$$

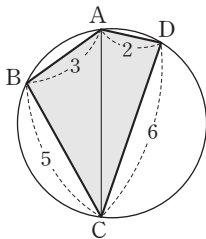
$$\sin^2 B = 1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{80}{81}$$

$$\text{이때 } 0^\circ < B < 180^\circ \text{이므로 } \sin B > 0$$

$$\therefore \sin B = \sqrt{\frac{80}{81}} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin B &= \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{4\sqrt{5}}{9} \\ &= \frac{10\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$



이때 $\sin D = \sin(180^\circ - B) = \sin B$ 이므로 삼각형 ACD의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin D &= \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin B \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \frac{4\sqrt{5}}{9} = \frac{8\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{10\sqrt{5}}{3} + \frac{8\sqrt{5}}{3} = 6\sqrt{5}$$

593 ▣ 12√3

$\overline{BC} = x (x > 0)$ 라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos 60^\circ = \frac{4^2 + x^2 - (2\sqrt{7})^2}{2 \times 4 \times x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x^2 - 12}{8x}, \quad x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x+2)(x-6) = 0 \quad \therefore x = 6 (\because x > 0)$$

$$\therefore \overline{BC} = 6$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$4 \times 6 \times \sin 60^\circ = 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$$

594 ▣ 12√3

▶ 접근 방법 두 삼각형 ABC, ACD에서 코사인법칙을 이용하여 $\overline{CD} \times \overline{DA}$ 의 값을 구한다.

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 60^\circ$$

오른쪽 그림과 같이 선분

AC를 그으면 삼각형 ABC

의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times \cos 120^\circ$$

$$= 16 + 16 - 32 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 48$$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

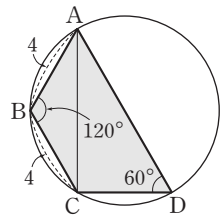
$$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 - 2 \times \overline{CD} \times \overline{DA} \times \cos 60^\circ$$

$$= \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 - 2 \times \overline{CD} \times \overline{DA} \times \frac{1}{2}$$

$$= \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 - \overline{CD} \times \overline{DA}$$

$$= (\overline{CD} + \overline{DA})^2 - 3\overline{CD} \times \overline{DA}$$

$$= 12^2 - 3\overline{CD} \times \overline{DA} = 144 - 3\overline{CD} \times \overline{DA}$$



즉, $144 - 3\overline{CD} \times \overline{DA} = 48$ 이므로

$$\overline{CD} \times \overline{DA} = 32$$

삼각형 ACD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{DA} \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 32 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$4\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

595 ㉔ 2

[접근 방법] 원에 내접하는 사각형의 대각의 크기의 합은 180° 임을 이용하여 $\cos A$, $\sin A$ 를 x 에 대한 식으로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 선분

BD를 그으면 삼각형

ABD에서 코사인법칙에

의하여

$$\overline{BD}^2 = x^2 + 3^2$$

$$- 2 \times x \times 3 \times \cos A$$

$$= x^2 + 9 - 6x \cos A$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 1^2 + x^2 - 2 \times 1 \times x \times \cos C$$

$$= 1 + x^2 - 2x \cos C$$

이때 $\cos C = \cos(180^\circ - A) = -\cos A$ 이므로

$$\overline{BD}^2 = 1 + x^2 - 2x \times (-\cos A)$$

$$= 1 + x^2 + 2x \cos A$$

즉, $x^2 + 9 - 6x \cos A = 1 + x^2 + 2x \cos A$ 이므로

$$8 = 8x \cos A \quad \therefore \cos A = \frac{1}{x}$$

삼각형 ABD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times x \times 3 \times \sin A = \frac{3}{2} x \sin A$$

$\sin C = \sin(180^\circ - A) = \sin A$ 이므로 삼각형

BCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times x \times 1 \times \sin C = \frac{x}{2} \sin C = \frac{x}{2} \sin A$$

사각형 ABCD의 넓이가 $2\sqrt{3}$ 이므로

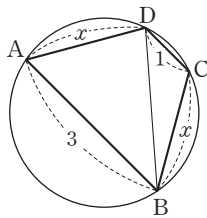
$$\frac{3}{2} x \sin A + \frac{x}{2} \sin A = 2\sqrt{3}$$

$$2x \sin A = 2\sqrt{3} \quad \therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{x}$$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 에서

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1$$

$$\frac{4}{x^2} = 1, x^2 = 4 \quad \therefore x = 2 (\because x > 0)$$



III. 수열

III-1. 등차수열과 등비수열

01 등차수열

개념 확인

295쪽

$$596 \text{ ㉔ (1) } a_n = \frac{1}{n} \quad (2) a_n = (-1)^n$$

$$(3) a_n = 4n(n+1)$$

$$(1) a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, \dots$$

이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$(2) a_1 = -1 = (-1)^1, a_2 = 1 = (-1)^2,$$

$$a_3 = -1 = (-1)^3, a_4 = 1 = (-1)^4, \dots$$

이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = (-1)^n$$

$$(3) a_1 = 2 \times 4 = (2 \times 1) \times (2 \times 2),$$

$$a_2 = 4 \times 6 = (2 \times 2) \times (2 \times 3),$$

$$a_3 = 6 \times 8 = (2 \times 3) \times (2 \times 4),$$

$$a_4 = 8 \times 10 = (2 \times 4) \times (2 \times 5), \dots$$

이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2n \times \{2(n+1)\} = 4n(n+1)$$

$$597 \text{ ㉔ (1) } -5 \quad (2) \frac{3}{2} \quad (3) -1.4$$

(1) $3 - (-1) = 4$ 에서 공차가 4이므로

$$x = -9 + 4 = -5$$

(2) $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 에서 공차가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

(3) $-0.8 - (-0.5) = -0.3$ 에서

공차가 -0.3 이므로

$$x = -1.1 + (-0.3) = -1.4$$

$$598 \text{ ㉔ (1) } a_n = 3n - 5 \quad (2) a_n = -2n + 7$$

$$(3) a_n = 3n - 11 \quad (4) a_n = -6n + 17$$

$$(1) a_n = -2 + (n-1) \times 3 = 3n - 5$$

$$(2) a_n = 5 + (n-1) \times (-2) = -2n + 7$$

(3) 첫째항이 -8 , 공차가 $-5 - (-8) = 3$ 인 등차수

열의 일반항 a_n 은

$$a_n = -8 + (n-1) \times 3 = 3n - 11$$

- (4) 첫째항이 11, 공차가 $5-11=-6$ 인 등차수열의
일반항 a_n 은
 $a_n=11+(n-1)\times(-6)=-6n+17$

599 ㉡ (1) $x=1, y=13$ (2) $x=4, y=16$

- (1) x 는 -5 와 7 의 등차중항이므로

$$x=\frac{-5+7}{2}=1$$

7 은 1 과 y 의 등차중항이므로

$$7=\frac{1+y}{2}$$

$$1+y=14$$

$$\therefore y=13$$

- (2) $\log_8 x$ 는 $\log_8 2$ 와 1 의 등차중항이므로

$$\log_8 x=\frac{\log_8 2+1}{2}=\frac{\frac{1}{3}+1}{2}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore x=4$$

1 은 $\log_8 4$ 와 $\log_8 y$ 의 등차중항이므로

$$1=\frac{\log_8 4+\log_8 y}{2}$$

$$2=\log_8 4y$$

$$4y=8^2$$

$$\therefore y=16$$

유제

297~306쪽

600 ㉡ (1) $a_n=6n-10$ (2) $a_n=-3n+1$

- (1) 공차를 d 라 하면 $a_1=-4, a_{11}=56$ 이므로
 $-4+10d=56, 10d=60$

$$\therefore d=6$$

따라서 첫째항이 -4 , 공차가 6 이므로

일반항 a_n 은

$$a_n=-4+(n-1)\times 6=6n-10$$

- (2) 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_5=-14, a_8=-23$$
이므로

$$a+4d=-14, a+7d=-23$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-2, d=-3$$

따라서 첫째항이 -2 , 공차가 -3 이므로

일반항 a_n 은

$$a_n=-2+(n-1)\times(-3)=-3n+1$$

601 ㉡ 33

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

제4항이 15 , 제9항이 45 이므로

$$a+3d=15, a+8d=45$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-3, d=6$$

따라서 첫째항이 -3 , 공차가 6 이므로 제7항은

$$-3+6\times 6=33$$

602 ㉡ 9

첫째항을 a 라 하면 제5항이 -24 이므로

$$a+4\times(-7)=-24 \quad \therefore a=4$$

따라서 첫째항이 4 , 공차가 -7 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n=4+(n-1)\times(-7)=-7n+11$$

$a_k=-52$ 에서

$$-7k+11=-52$$

$$-7k=-63 \quad \therefore k=9$$

603 ㉡ 제13항

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_3=1, a_7=-7$ 이므로

$$a+2d=1, a+6d=-7$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=5, d=-2$$

따라서 첫째항이 5 , 공차가 -2 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n=5+(n-1)\times(-2)=-2n+7$$

이때 -19 를 제 k 항이라 하면

$$-2k+7=-19$$

$$-2k=-26$$

$$\therefore k=13$$

따라서 -19 는 제13항이다.

604 ㉡ -29

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3+a_4=-13$$
에서

$$(a+2d)+(a+3d)=-13$$

$$\therefore 2a+5d=-13 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_2+a_5+a_6=-32$$
에서

$$(a+d)+(a+4d)+(a+5d)=-32$$

$$\therefore 3a+10d=-32 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a=6, d=-5$$

따라서 첫째항이 6 , 공차가 -5 이므로

$$a_8=6+7\times(-5)=-29$$

605 ㉡ 제12항

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_4 + a_6 = 14 \text{에서}$$

$$(a + 3d) + (a + 5d) = 14$$

$$\therefore a + 4d = 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_5 + a_9 = 26 \text{에서}$$

$$(a + 4d) + (a + 8d) = 26$$

$$\therefore a + 6d = 13 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -5, d = 3$$

따라서 첫째항이 -5 , 공차가 3 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -5 + (n-1) \times 3 = 3n - 8$$

이때 28 을 제 k 항이라 하면

$$3k - 8 = 28$$

$$3k = 36$$

$$\therefore k = 12$$

따라서 28 은 제 12 항이다.

606 ㉡ 62

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = 11 \text{이므로 } a + 2d = 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_6 : a_{10} = 5 : 8 \text{에서}$$

$$5a_{10} = 8a_6 \text{이므로}$$

$$5(a + 9d) = 8(a + 5d)$$

$$\therefore 3a - 5d = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 5, d = 3$$

따라서 첫째항이 5 , 공차가 3 이므로

$$a_{20} = 5 + 19 \times 3 = 62$$

607 ㉡ 6

공차를 d 라 하면

$$a_5 = 3a_1 \text{에서 } a_1 + 4d = 3a_1$$

$$\therefore a_1 = 2d \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_1^2 + a_3^2 = 20 \text{에서}$$

$$a_1^2 + (a_1 + 2d)^2 = 20 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면

$$(2d)^2 + (2d + 2d)^2 = 20$$

$$20d^2 = 20, d^2 = 1$$

이때 $\textcircled{㉠}$ 에서 a_1 이 양수이면 d 도 양수이므로 $d = 1$

$$\therefore a_1 = 2 \times 1 = 2 \quad (\because \textcircled{㉠})$$

따라서 첫째항이 2 , 공차가 1 이므로

$$a_5 = 2 + 4 \times 1 = 6$$

608 ㉡ 제12항

주어진 등차수열의 첫째항이 -65 , 공차가

$$-59 - (-65) = 6 \text{이므로 일반항을 } a_n \text{이라 하면}$$

$$a_n = -65 + (n-1) \times 6 = 6n - 71$$

이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면

$$a_n > 0 \text{에서}$$

$$6n - 71 > 0$$

$$6n > 71 \quad \therefore n > 11.8333 \cdots$$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제 12 항이다.

609 ㉡ 제29항

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

제 4 항이 2 , 제 14 항이 22 이므로

$$a + 3d = 2, a + 13d = 22$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -4, d = 2$$

따라서 첫째항이 -4 , 공차가 2 이므로 주어진 등차수

열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -4 + (n-1) \times 2 = 2n - 6$$

이때 제 n 항에서 처음으로 50 보다 커진다고 하면

$$a_n > 50 \text{에서}$$

$$2n - 6 > 50, 2n > 56 \quad \therefore n > 28$$

따라서 처음으로 50 보다 커지는 항은 제 29 항이다.

610 ㉡ 제28항

공차를 d 라 하면 $a_{10} - a_4 = -24$ 에서

$$(5 + 9d) - (5 + 3d) = -24$$

$$6d = -24 \quad \therefore d = -4$$

따라서 첫째항이 5 , 공차가 -4 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 5 + (n-1) \times (-4) = -4n + 9$$

이때 제 n 항에서 처음으로 -100 보다 작아진다고 하면

$$a_n < -100 \text{에서}$$

$$-4n + 9 < -100$$

$$4n > 109 \quad \therefore n > 27.25$$

따라서 처음으로 -100 보다 작아지는 항은 제 28 항이다.

611 ㉡ ②

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 + a_4 = 74 \text{에서 } (a + d) + (a + 3d) = 74$$

$$\therefore 2a + 4d = 74 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_3 + a_{10} = 39 \text{에서 } (a + 2d) + (a + 9d) = 39$$

$$\therefore 2a + 11d = 39 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a = 47, d = -5$

따라서 첫째항이 47, 공차가 -5 이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 47 + (n-1) \times (-5) = -5n + 52$
 $a_k < 0$ 에서 $-5k + 52 < 0$
 $5k > 52 \quad \therefore k > 10.4$
 따라서 자연수 k 의 최솟값은 11이다.

612 ㉮ 7

공차를 d 라 하면 첫째항이 7, 제5항이 -9 이므로
 $7 + 4d = -9, 4d = -16 \quad \therefore d = -4$
 이때 x, y, z 는 각각 주어진 수열의 제2항, 제3항, 제4항
 이므로
 $x = 7 + (-4) = 3, y = 7 + 2 \times (-4) = -1,$
 $z = 7 + 3 \times (-4) = -5$
 $\therefore x + y - z = 3 + (-1) - (-5) = 7$

613 ㉮ 24

공차를 d 라 하면 첫째항이 -12 , 제12항이 54이므로
 $-12 + 11d = 54, 11d = 66 \quad \therefore d = 6$
 이때 x_6 은 주어진 수열의 제7항이므로
 $x_6 = -12 + 6 \times 6 = 24$

614 ㉮ 9

23은 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열의 제($m+2$)항
 이므로
 $3 + \{(m+2)-1\} \times 2 = 23, 2(m+1) = 20$
 $m+1 = 10$
 $\therefore m = 9$

615 ㉮ 24

공차를 d 라 하면 첫째항이 -16 , 제($m+2$)항이 34
 이므로
 $-16 + \{(m+2)-1\}d = 34$
 $\therefore (m+1)d = 50$
 이때 m, d 는 자연수이므로 $m+1$ 은 2 이상인 자연수
 이다.
 즉, $(m+1)d = 50$ 인 경우는 다음과 같다.

$m+1$	2	5	10	25	50
d	25	10	5	2	1

이때 d 는 1이 아니고 m 의 값이 최대가 되어야 하므로
 $m+1 = 25, d = 2 \quad \therefore m = 24$
 따라서 m 의 최댓값은 24이다.

616 ㉮ $-5, -\frac{3}{2}$

$x^2 + 6x$ 는 $x-18$ 과 $-2x+3$ 의 등차중항이므로
 $x^2 + 6x = \frac{(x-18) + (-2x+3)}{2}$
 $2(x^2 + 6x) = -x - 15$
 $2x^2 + 13x + 15 = 0$
 $(x+5)(2x+3) = 0$
 $\therefore x = -5$ 또는 $x = -\frac{3}{2}$

617 ㉮ 24

세 수를 $a-d, a, a+d$ 라 하면
 $(a-d) + a + (a+d) = -6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 44 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 에서 $3a = -6 \quad \therefore a = -2$
 이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $(-2-d)^2 + (-2)^2 + (-2+d)^2 = 44$
 $2d^2 + 12 = 44, 2d^2 = 32$
 $d^2 = 16 \quad \therefore d = -4$ 또는 $d = 4$
 따라서 세 수는 $-6, -2, 2$ 이므로 세 수의 곱은
 $-6 \times (-2) \times 2 = 24$

618 ㉮ 3

$f(x) = x^2 + ax - 1$ 을 $x+2, x-1, x-2$ 로 나누었을
 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여 각각 $f(-2),$
 $f(1), f(2)$ 와 같다.
 $\therefore p = f(-2) = 3 - 2a, q = f(1) = a,$
 $r = f(2) = 3 + 2a$

이때 q 는 p 와 r 의 등차중항이므로
 $q = \frac{p+r}{2}$ 에서
 $a = \frac{(3-2a) + (3+2a)}{2} = 3$

619 ㉮ -6

세 실근을 $a-d, a, a+d$ 라 하면 삼차방정식의 근과
 계수의 관계에 의하여
 $(a-d) + a + (a+d) = 3$
 $3a = 3 \quad \therefore a = 1$
 따라서 1은 주어진 삼차방정식의 한 근이므로 주어진
 삼차방정식에 $x=1$ 을 대입하면
 $1^3 - 3 \times 1^2 + k \times 1 + 8 = 0$
 $\therefore k = -6$

620 ㉡ (1) $a_n = -\frac{6}{2n-3}$ (2) 1

(1) 각 항의 역수를 구하면

$$\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}, \dots$$

즉, 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{6}$, 공차가

$$-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{3} \text{인 등차수열이므로 일반항 } \frac{1}{a_n} \text{은}$$

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{6} + (n-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}n + \frac{1}{2}$$

$$\therefore a_n = -\frac{6}{2n-3}$$

(2) 4는 $2x+1$ 과 $4x+2$ 의 조화중항이므로

$$4 = \frac{2 \times (2x+1) \times (4x+2)}{(2x+1) + (4x+2)}$$

$$24x+12=16x^2+16x+4, 16x^2-8x-8=0$$

$$2x^2-x-1=0, (2x+1)(x-1)=0$$

$$\therefore x=1 (\because x>0)$$

개념 확인

309쪽

621 ㉡ (1) 185 (2) 370 (3) -45

(4) 324 (5) -472

(1) $\frac{10(3+34)}{2} = 185$

(2) $\frac{20\{(-5)+42\}}{2} = 370$

(3) $\frac{15\{13+(-19)\}}{2} = -45$

(4) $\frac{12\{2 \times 5 + (12-1) \times 4\}}{2} = 324$

(5) $\frac{16\{2 \times (-7) + (16-1) \times (-3)\}}{2} = -472$

622 ㉡ (1) 300 (2) -460

(1) 첫째항이 -4, 공차가 $-2 - (-4) = 2$ 이므로
첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{20\{2 \times (-4) + (20-1) \times 2\}}{2} = 300$$

(2) 첫째항이 15, 공차가 $11 - 15 = -4$ 이므로
첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{20\{2 \times 15 + (20-1) \times (-4)\}}{2} = -460$$

623 ㉡ (1) $a_n = 6n - 5$

(2) $a_1 = -3, a_n = 4n - 2 (n \geq 2)$

(1) $S_n = 3n^2 - 2n$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3n^2 - 2n - \{3(n-1)^2 - 2(n-1)\} \\ &= 6n - 5 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{2}$ 이 같으므로 구하는 일반항 a_n 은

$$a_n = 6n - 5$$

(2) $S_n = 2n^2 - 5$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - 5 - \{2(n-1)^2 - 5\} \\ &= 4n - 2 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 5 = -3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{2}$ 이 같지 않으므로 구하는 일반항 a_n 은

$$a_1 = -3, a_n = 4n - 2 (n \geq 2)$$

유제

311~317쪽

624 ㉡ ⑤

첫째항이 -1, 공차가 5인 등차수열의 제 k 항이 49이므로

$$-1 + (k-1) \times 5 = 49$$

$$5(k-1) = 50, k-1 = 10 \quad \therefore k = 11$$

따라서 첫째항이 -1, 제11항이 49인 등차수열의 첫째항부터 제11항까지의 합은

$$\frac{11\{(-1) + 49\}}{2} = 264$$

| 다른 풀이 |

첫째항이 -1, 공차가 5인 등차수열의 첫째항부터 제11항까지의 합은

$$\frac{11\{2 \times (-1) + (11-1) \times 5\}}{2} = 264$$

625 ㉮ 666

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 제4항이 15, 제10항이 39이므로

$$a+3d=15, a+9d=39$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=3, d=4$$

따라서 첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열의 첫째항부터 제18항까지의 합은

$$\frac{18\{2 \times 3 + (18-1) \times 4\}}{2} = 666$$

626 ㉮ 12

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 제2항이 11, 제9항이 25이므로

$$a+d=11, a+8d=25$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=9, d=2$$

따라서 첫째항이 9, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제 k 항까지의 합은

$$\frac{k\{2 \times 9 + (k-1) \times 2\}}{2} = 240$$

$$k(8+k)=240$$

$$k^2+8k-240=0, (k+20)(k-12)=0$$

$$\therefore k=12 (\because k>0)$$

627 ㉮ -5

첫째항이 43, 제 k 항이 -2인 등차수열의 첫째항부터 제 k 항까지의 합이 205이므로

$$\frac{k\{43 + (-2)\}}{2} = 205$$

$$\frac{41}{2}k=205 \quad \therefore k=10$$

즉, 공차를 d 라 하면 제10항이 -2이므로

$$43+9d=-2, 9d=-45 \quad \therefore d=-5$$

따라서 이 등차수열의 공차는 -5이다.

628 ㉮ 14

첫째항이 -14, 끝항이 26, 항수가 $m+2$ 인 등차수열의 합이 96이므로

$$\frac{(m+2)(-14+26)}{2} = 96$$

$$6(m+2)=96, m+2=16$$

$$\therefore m=14$$

629 ㉮ -308

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_6=12, S_{18}=-180 \text{이므로}$$

$$\frac{6\{2a + (6-1)d\}}{2} = 12$$

$$\therefore 2a+5d=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{18\{2a + (18-1)d\}}{2} = -180$$

$$\therefore 2a+17d=-20 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=7, d=-2$$

$$\therefore S_{22} = \frac{22\{2 \times 7 + (22-1) \times (-2)\}}{2} = -308$$

630 ㉮ 30

$$-3+x_1+x_2+x_3+\cdots+x_m+44=-3+615+44=656$$

즉, 첫째항이 -3, 끝항이 44, 항수가 $m+2$ 인 등차수열의 합이 656이므로

$$\frac{(m+2)(-3+44)}{2} = 656$$

$$41(m+2)=1312$$

$$m+2=32 \quad \therefore m=30$$

631 ㉮ 66

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_4=-26 \text{이므로}$$

$$\frac{4\{2a + (4-1)d\}}{2} = -26$$

$$\therefore 2a+3d=-13 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

제5항부터 제15항까지의 합은 $S_{15}-S_4$ 이므로

$$S_{15}-S_4=176$$

즉, $S_{15}=S_4+176=-26+176=150$ 이므로

$$\frac{15\{2a + (15-1)d\}}{2} = 150$$

$$\therefore a+7d=10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-11, d=3$$

$$\therefore S_{12} = \frac{12\{2 \times (-11) + (12-1) \times 3\}}{2} = 66$$

632 ㉮ -338

첫째항이 -50, 공차가 4이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -50 + (n-1) \times 4 = 4n - 54$$

이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면

$a_n > 0$ 에서

$$4n - 54 > 0, 4n > 54 \quad \therefore n > 13.5$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제14항부터 양수이므로 첫째항부터 제13항까지의 합이 최소이다.

이때 $a_{13} = 4 \times 13 - 54 = -2$ 이므로 구하는 최솟값은

$$S_{13} = \frac{13\{-50 + (-2)\}}{2} = -338$$

| 다른 풀이 |

첫째항이 -50 , 공차가 4 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{n\{2 \times (-50) + (n-1) \times 4\}}{2}$$

$$= 2n^2 - 52n = 2(n-13)^2 - 338$$

따라서 S_n 은 $n=13$ 에서 최솟값 -338 을 갖는다.

633 ㉠ 689

두 자리의 자연수 중에서 7 로 나누었을 때의 나머지가 4 인 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$11, 18, 25, 32, \dots, 95$$

즉, 첫째항이 11 , 공차가 7 인 등차수열이므로 95 를 제 n 항이라 하면

$$11 + (n-1) \times 7 = 95$$

$$7(n-1) = 84, n-1 = 12$$

$$\therefore n = 13$$

따라서 구하는 합은 첫째항이 11 , 끝항이 95 , 항수가 13 인 등차수열의 합이므로

$$\frac{13(11+95)}{2} = 689$$

634 ㉠ 8

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 제3항이 36 , 제6항이 15 이므로

$$a + 2d = 36, a + 5d = 15$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 50, d = -7$$

따라서 첫째항이 50 , 공차가 -7 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 50 + (n-1) \times (-7) = -7n + 57$$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면

$a_n < 0$ 에서

$$-7n + 57 < 0, 7n > 57$$

$$\therefore n > 8.142857 \dots$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제9항부터 음수이므로 첫째항부터 제8항까지의 합이 최대이다.

$$\therefore n = 8$$

635 ㉠ 816

20 보다 크고 120 보다 작은 자연수 중에서 8 로 나누어 떨어지는 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$24, 32, 40, 48, \dots, 112$$

즉, 첫째항이 24 , 공차가 8 인 등차수열이므로 112 를 제 n 항이라 하면

$$24 + (n-1) \times 8 = 112$$

$$8(n-1) = 88, n-1 = 11 \quad \therefore n = 12$$

따라서 구하는 합은 첫째항이 24 , 끝항이 112 , 항수가 12 인 등차수열의 합이므로

$$\frac{12(24+112)}{2} = 816$$

636 ㉠ (1) 27 (2) 18

$$(1) a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 2$$

$$a_5 = S_5 - S_4$$

$$= (3 \times 5^2 - 2 \times 5 + 1) - (3 \times 4^2 - 2 \times 4 + 1)$$

$$= 66 - 41 = 25$$

$$\therefore a_1 + a_5 = 2 + 25 = 27$$

$$(2) S_n = n^2 - 2n \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 - 2n) - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\}$$

$$= 2n - 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 2 \times 1 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{8}$ 이 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2n - 3$$

$$\text{따라서 } a_k = 33 \text{에서 } 2k - 3 = 33$$

$$2k = 36 \quad \therefore k = 18$$

| 다른 풀이 |

$$(2) a_1 = S_1 = 1^2 - 2 \times 1 = -1 \text{이므로 } k \neq 1$$

$$\therefore a_k = S_k - S_{k-1}$$

$$= (k^2 - 2k) - \{(k-1)^2 - 2(k-1)\}$$

$$= 2k - 3$$

$$\text{따라서 } 2k - 3 = 33 \text{이므로 } 2k = 36 \quad \therefore k = 18$$

637 ㉔ 4

$S_n = 2n^2 - 15n$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - 15n - \{2(n-1)^2 - 15(n-1)\} \\ &= 4n - 17 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉔} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 15 \times 1 = -13 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉕}$$

이때 ㉔에 $n = 1$ 을 대입한 값과 ㉕이 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 4n - 17$$

$$a_n < 0 \text{에서 } 4n - 17 < 0$$

$$4n < 17 \quad \therefore n < 4.25$$

따라서 자연수 n 은 1, 2, 3, 4의 4개이다.

638 ㉔ 240

$S_n = n^2 + 3n$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 3n - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ &= 2n + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉔} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \times 1 = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉕}$$

이때 ㉔에 $n = 1$ 을 대입한 값과 ㉕이 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2n + 2$$

따라서 $a_2 = 6, a_4 = 10, a_6 = 14, \dots, a_{20} = 42$ 이므로

$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20}$ 의 값은 첫째항이 6, 공차가 4, 항수가 10인 등차수열의 합과 같다.

$$\begin{aligned} \therefore a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} \\ &= \frac{10\{2 \times 6 + (10-1) \times 4\}}{2} = 240 \end{aligned}$$

639 ㉔ ②

공차를 d 라 하면

$$a_6 = 2 + 5d$$

이때 $S_3 - S_2 = a_3 = 2 + 2d$ 이므로

$$a_6 = 2(S_3 - S_2) \text{에서}$$

$$2 + 5d = 2(2 + 2d)$$

$$\therefore d = 2$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10\{2 \times 2 + (10-1) \times 2\}}{2} = 110$$

연습문제

318~320쪽

640 ㉔ ④

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_3 = 9, a_8 = 49$ 이므로

$$a + 2d = 9, a + 7d = 49$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -7, d = 8$$

따라서 첫째항이 -7 , 공차가 8이므로

$$a_{15} = -7 + 14 \times 8 = 105$$

641 ㉔ ③

공차를 d 라 하면

$$a_1 = 2a_5 \text{에서 } a_1 = 2(a_1 + 4d)$$

$$\therefore a_1 = -8d \quad \cdots \cdots \textcircled{㉔}$$

$$a_8 + a_{12} = -6 \text{에서 } (a_1 + 7d) + (a_1 + 11d) = -6$$

$$\therefore a_1 + 9d = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉕}$$

㉔을 ㉕에 대입하면

$$-8d + 9d = -3 \quad \therefore d = -3$$

이를 ㉔에 대입하면

$$a_1 = -8 \times (-3) = 24$$

따라서 첫째항이 24, 공차가 -3 이므로

$$a_2 = 24 + (-3) = 21$$

642 ㉔ $x = 9, y = 5$

7은 x 와 y 의 등차중항이므로

$$7 = \frac{x+y}{2} \quad \therefore x+y=14 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉔}$$

또 7은 $-8y$ 와 $6x$ 의 등차중항이므로

$$7 = \frac{-8y+6x}{2} \quad \therefore 3x-4y=7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉕}$$

㉔, ㉕을 연립하여 풀면 $x = 9, y = 5$

643 ㉔ 25

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_6 = 56, a_{10} = 24$ 이므로

$$a + 5d = 56, a + 9d = 24$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 96, d = -8 \quad \text{▶▶▶▶▶ ①}$$

따라서 첫째항이 96, 공차가 -8 이므로

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n\{2 \times 96 + (n-1) \times (-8)\}}{2} \\ &= -4n^2 + 100n \quad \text{▶▶▶▶▶ ②} \end{aligned}$$

$$S_k = 0 \text{에서 } -4k^2 + 100k = 0$$

$$-4k(k-25) = 0$$

$$\therefore k = 25 (\because k > 0) \quad \text{▶▶▶▶▶ ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항, 공차 구하기	40 %
②	S_n 구하기	30 %
③	자연수 k 의 값 구하기	30 %

644 ㉓ ③

첫째항이 8, 끝항이 46, 항수가 $m+2$ 인 등차수열의 합이 500보다 크므로

$$\frac{(m+2)(8+46)}{2} > 500, 27(m+2) > 500$$

$$m+2 > 18.518518\cdots$$

$$\therefore m > 16.518518\cdots$$

따라서 m 의 최솟값은 17이다.

645 ㉓ ②

첫째항이 32, 공차가 -5이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 32 + (n-1) \times (-5) = -5n + 37$$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면

$$a_n < 0 \text{에서}$$

$$-5n + 37 < 0, 5n > 37 \quad \therefore n > 7.4$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제8항부터 음수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대이다.

$$\therefore k=7$$

이때 $a_7 = -5 \times 7 + 37 = 2$ 이므로

$$M = \frac{7(32+2)}{2} = 119$$

$$\therefore k+M = 7+119 = 126$$

646 ㉓ ②

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_5 + a_9 = 0 \text{에서 } (a+4d) + (a+8d) = 0$$

$$\therefore a = -6d \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$|a_4 + a_6| = 8 \text{에서 } |(a+3d) + (a+5d)| = 8$$

$$|2a+8d| = 8$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$|-12d+8d| = 8$$

$$|-4d| = 8$$

$$\therefore d=2 (\because d>0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a = -6 \times 2 = -12$$

따라서 첫째항이 -12, 공차가 2이므로

$$a_3 = -12 + 2 \times 2 = -8$$

647 ㉓ 제35항

$$A = \{ \textcircled{2} 7, 12, 17, 22, 27, \textcircled{32}, \dots \},$$

$$B = \{ \textcircled{2} 8, 14, 20, 26, \textcircled{32}, \dots \}$$

이므로

$$A \cap B = \{ 2, 32, 62, 92, \dots \}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 30인 등차수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 + (n-1) \times 30 = 30n - 28$$

이때 제 n 항에서 처음으로 1000보다 커진다고 하면

$$a_n > 1000 \text{에서}$$

$$30n - 28 > 1000$$

$$30n > 1028 \quad \therefore n > 34.2666\cdots$$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제35항이다.

648 ㉓ ④

공차를 d 라 하면 첫째항이 -8, 제25항이 64이므로

$$-8 + 24d = 64$$

$$24d = 72$$

$$\therefore d=3$$

수열 64, $y_1, y_2, \dots, y_n, 115$ 에서 64를 첫째항으로 생각하면 115는 제 $(n+2)$ 항이므로

$$64 + \{(n+2)-1\} \times 3 = 115$$

$$3(n+1) = 51, n+1 = 17$$

$$\therefore n=16$$

649 ㉓ 96

직각삼각형에서 빗변의 길이가 가장 크므로 공차를

$d (d > 0)$ 라 하면 주어진 직각삼각형의 세 변의 길이는 각각

$$20-2d, 20-d, 20$$

이때 삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계에 의하여

$$(20-2d) + (20-d) > 20$$

$$\therefore 0 < d < \frac{20}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

피타고라스 정리에 의하여

$$(20-2d)^2 + (20-d)^2 = 20^2$$

$$5d^2 - 120d + 400 = 0$$

$$5(d-4)(d-20) = 0$$

$$\therefore d=4 (\because \textcircled{1})$$

따라서 직각삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (20-2 \times 4) \times (20-4) = 96$$

650 ㉔ ⑤

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{98}, a_{99}, a_{100}, a_{101} \text{에서}$$

$\xrightarrow{+2d}$ $\xrightarrow{+2d}$
 $\xrightarrow{+2d}$ $\xrightarrow{+2d}$

S 는 첫째항이 a , 공차가 $2d$, 항수가 51인 등차수열의 합이고, T 는 첫째항이 $a+d$, 공차가 $2d$, 항수가 50인 등차수열의 합이므로

$$S = \frac{51\{2a + (51-1) \times 2d\}}{2} = 51(a+50d)$$

$$T = \frac{50\{2(a+d) + (50-1) \times 2d\}}{2} = 50(a+50d)$$

$$\therefore \frac{S}{T} = \frac{51(a+50d)}{50(a+50d)} = \frac{51}{50}$$

651 ㉔ ①

공차를 d 라 하면 첫째항이 -27 이므로

$$S_3 = \frac{3\{2 \times (-27) + (3-1)d\}}{2} = 3d - 81$$

$$S_7 = \frac{7\{2 \times (-27) + (7-1)d\}}{2} = 21d - 189$$

이때 $S_3 = S_7$ 이므로

$$3d - 81 = 21d - 189$$

$$18d = 108$$

$$\therefore d = 6$$

따라서 첫째항이 -27 , 공차가 6이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -27 + (n-1) \times 6 = 6n - 33$$

이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면

$$a_n > 0 \text{에서}$$

$$6n - 33 > 0, 6n > 33$$

$$\therefore n > 5.5$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제6항부터 양수이므로 첫째항부터 제5항까지의 합이 최소이다.

이때 $a_5 = 6 \times 5 - 33 = -3$ 이므로 구하는 최솟값은

$$S_5 = \frac{5\{(-27) + (-3)\}}{2} = -75$$

| 다른 풀이 |

첫째항이 -27 , 공차가 6인 등차수열이므로 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{n\{2 \times (-27) + (n-1) \times 6\}}{2}$$

$$= 3n^2 - 30n$$

$$= 3(n-5)^2 - 75$$

따라서 S_n 은 $n=5$ 에서 최솟값 -75 를 갖는다.

652 ㉔ 570

10 이상 50 이하의 자연수 중에서 3으로 나누어떨어지는 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$12, 15, 18, \dots, 48 \quad \cdots \textcircled{7}$$

이때 $48 = 12 + 12 \times 3$ 에서

⑦은 첫째항이 12, 끝항이 48, 항수가 13인 등차수열이므로 그 합은

$$\frac{13(12+48)}{2} = 390$$

또 10 이상 50 이하의 자연수 중에서 4로 나누어떨어지는 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$12, 16, 20, \dots, 48 \quad \cdots \textcircled{L}$$

이때 $48 = 12 + 9 \times 4$ 에서

㉔은 첫째항이 12, 끝항이 48, 항수가 10인 등차수열이므로 그 합은

$$\frac{10(12+48)}{2} = 300$$

한편 10 이상 50 이하의 자연수 중에서 12로 나누어떨어지는 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$12, 24, 36, 48 \quad \cdots \textcircled{E}$$

이때 $48 = 12 + 3 \times 12$ 에서

㉔은 첫째항이 12, 끝항이 48, 항수가 4인 등차수열이므로 그 합은

$$\frac{4(12+48)}{2} = 120$$

따라서 10 이상 50 이하의 자연수 중에서 3 또는 4로 나누어떨어지는 수의 총합은

$$390 + 300 - 120 = 570$$

653 ㉔ -22

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 $A_n = 2n^2 - 3n$, $B_n = 3n^2 + kn$ 이라 하면

$$\begin{aligned} a_{10} &= A_{10} - A_9 \\ &= (2 \times 10^2 - 3 \times 10) - (2 \times 9^2 - 3 \times 9) \\ &= 170 - 135 \\ &= 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{10} &= B_{10} - B_9 \\ &= (3 \times 10^2 + k \times 10) - (3 \times 9^2 + k \times 9) \\ &= (300 + 10k) - (243 + 9k) \\ &= k + 57 \end{aligned}$$

이때 $a_{10} = b_{10}$ 이므로

$$35 = k + 57$$

$$\therefore k = -22$$

654 ㉮ $\frac{9}{2}\pi$

▶ 접근 방법 I 큰 반원의 지름의 길이가 다섯 개의 반원 A, B, C, D, E의 지름의 길이의 합임을 이용하여 식을 세운다.

공차를 d ($d > 0$)라 하면

다섯 개의 반원 A, B, C, D, E의 지름의 길이의 합은 30이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 30$$

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 30$$

$$5a_1 + 10d = 30 \quad \therefore a_1 + 2d = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $a_4 = 2a_2$ 에서 $a_1 + 3d = 2(a_1 + d)$

$$\therefore a_1 = d$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } d + 2d = 6 \quad \therefore d = 2$$

$$\therefore a_1 = 2$$

즉, 첫째항이 2, 공차가 2이므로 $a_3 = 2 + 2 \times 2 = 6$

따라서 반원 C의 지름의 길이는 6이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{6}{2}\right)^2 = \frac{9}{2}\pi$$

655 ㉮ 3100

▶ 접근 방법 I 두 점 A_n, B_n 의 좌표를 잡고 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 l_n^2 을 구한다.

곡선 $y = x^2$ 과 직선 $y = 3x + n$ 의 두 교점을

$A_n(a_n, 3a_n + n), B_n(b_n, 3b_n + n)$ 이라 하면

이차방정식 $x^2 = 3x + n$, 즉 $x^2 - 3x - n = 0$ 의 두 근

은 a_n, b_n 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n + b_n = 3, a_n b_n = -n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore l_n^2 = (b_n - a_n)^2 + \{(3b_n + n) - (3a_n + n)\}^2$$

$$= 10(b_n - a_n)^2 = 10\{(a_n + b_n)^2 - 4a_n b_n\}$$

$$= 10\{3^2 - 4 \times (-n)\} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 40n + 90 \quad \blacktriangle \text{ 첫째항이 130, 공차가 40인 등차수열}$$

이때 $l_1^2 = 130, l_{10}^2 = 490$ 이므로

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + \cdots + l_{10}^2 = \frac{10(130 + 490)}{2} = 3100$$

656 ㉮ 15

(가), (나)에서

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + (a_{n-4} + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n)$$

$$= 80 + 380$$

$$(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2})$$

$$+ (a_4 + a_{n-3}) + (a_5 + a_{n-4})$$

$$= 460$$

이때

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = a_5 + a_{n-4}$$

이므로

$$(a_1 + a_n) \times 5 = 460$$

$$\therefore a_1 + a_n = 92 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{(다)에서 } \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 690$$

$$\text{이 식에 } \textcircled{1} \text{을 대입하면 } \frac{n \times 92}{2} = 690 \quad \therefore n = 15$$

▶ 다른 풀이

공차를 d 라 하면

(가)에서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 80$ 이므로

$$\frac{5(2a_1 + 4d)}{2} = 80$$

$$\therefore a_1 + 2d = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(나)에서 $a_{n-4} + a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 380$ 이므로

$$\frac{5(2a_n - 4d)}{2} = 380$$

$$\therefore a_n - 2d = 76 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{을 하면 } a_1 + a_n = 92 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{(다)에서 } \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 690 \text{이므로}$$

$$\frac{n \times 92}{2} = 690 \quad (\because \textcircled{3})$$

$$\therefore n = 15$$

657 ㉮ ②

▶ 접근 방법 I $S_{k+2} - S_k = a_{k+1} + a_{k+2}$ 임을 이용하여 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 k 사이의 관계식을 구한다.

$$S_{k+2} - S_k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+2}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \\ = a_{k+1} + a_{k+2}$$

이므로

$$a_{k+1} + a_{k+2} = -12 - (-16) = 4$$

이때 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$(a + k \times 2) + \{a + (k+1) \times 2\} = 4$$

$$2a + 4k + 2 = 4, a + 2k = 1$$

$$\therefore a = -2k + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$S_k = -16$ 에서

$$\frac{k\{2(-2k+1) + (k-1) \times 2\}}{2} = -16$$

$$k^2 = 16 \quad \therefore k = 4 \quad (\because k > 0)$$

$$\therefore a = -2 \times 4 + 1 = -7 \quad (\because \textcircled{1})$$

따라서 첫째항이 -7 , 공차가 2이므로

$$a_{2k} = a_8 = -7 + 7 \times 2 = 7$$

02 등비수열

개념 확인

323쪽

658 ㉡ (1) $\frac{1}{48}$ (2) 0.01 (3) -20

(1) $\frac{1}{12} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ 에서 공비가 $\frac{1}{4}$ 이므로

$$x = \frac{1}{12} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{48}$$

(2) $\frac{0.0001}{0.001} = 0.1$ 에서 공비가 0.1이므로

$$x = 0.1 \times 0.1 = 0.01$$

(3) $\frac{10}{-5} = -2$ 에서 공비가 -2이므로

$$x = 10 \times (-2) = -20$$

659 ㉡ (1) $a_n = 5 \times 3^{n-1}$ (2) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$$(3) a_n = -6 \times (-2)^{n-1}$$

$$(4) a_n = -18 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$(5) a_n = (\sqrt{2})^n$$

(3) 첫째항이 -6, 공비가 $\frac{12}{-6} = -2$ 인 등비수열의

$$\text{일반항 } a_n \text{은 } a_n = -6 \times (-2)^{n-1}$$

(4) 첫째항이 -18, 공비가 $\frac{-6}{-18} = \frac{1}{3}$ 인 등비수열의

$$\text{일반항 } a_n \text{은}$$

$$a_n = -18 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(5) 첫째항이 $\sqrt{2}$, 공비가 $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ 인 등비수열의 일

$$\text{반항 } a_n \text{은}$$

$$a_n = \sqrt{2} \times (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n$$

660 ㉡ (1) $x = -16, y = -1$ 또는 $x = 16, y = 1$

$$(2) x = -3, y = -\frac{27}{4} \text{ 또는 } x = 3, y = \frac{27}{4}$$

(1) x 는 64와 4의 등비중항이므로

$$x^2 = 64 \times 4 = 256 \quad \therefore x = \pm 16$$

$$x = -16 \text{ 일 때, 공비가 } \frac{-16}{64} = -\frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

$$y = 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -1$$

$$x = 16 \text{ 일 때, 공비가 } \frac{16}{64} = \frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

$$y = 4 \times \frac{1}{4} = 1$$

(2) x 는 -2와 $-\frac{9}{2}$ 의 등비중항이므로

$$x^2 = -2 \times \left(-\frac{9}{2}\right) = 9 \quad \therefore x = \pm 3$$

$$x = -3 \text{ 일 때, 공비가 } -\frac{9}{2} \div (-3) = \frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

$$y = -\frac{9}{2} \times \frac{3}{2} = -\frac{27}{4}$$

$$x = 3 \text{ 일 때, 공비가 } -\frac{9}{2} \div 3 = -\frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

$$y = -\frac{9}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4}$$

유제

325-333쪽

661 ㉡ (1) $a_n = 3^n$ (2) $a_n = 3 \times 2^{n-2}$

(1) 공비를 r 라 하면 $a_1 = 3, a_4 = 81$ 이므로

$$3 \times r^3 = 81, r^3 = 27 \quad \therefore r = 3$$

따라서 첫째항이 3, 공비가 3이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$$

(2) 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_4 = 12, a_7 = 96$ 이므로

$$ar^3 = 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^6 = 96 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a \times 2^3 = 12 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

따라서 첫째항이 $\frac{3}{2}$, 공비가 2이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{3}{2} \times 2^{n-1} = 3 \times 2^{n-2}$$

662 ㉡ $-\frac{1}{8}$

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 제2항이 $8\sqrt{2}$, 제6항이 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$ar = 8\sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^5 = 2\sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^4 = \frac{1}{4} \quad \therefore r = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\because r < 0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 8\sqrt{2} \quad \therefore a = -16$$

따라서 첫째항이 -16, 공비가 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 제15항은

$$-16 \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{14} = -\frac{1}{8}$$

663 ㉮ 7

첫째항을 a 라 하면 제4항이 $\frac{1}{18}$ 이므로

$$a \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{18} \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

따라서 첫째항이 $\frac{3}{2}$, 공비가 $\frac{1}{3}$ 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_k = \frac{1}{486} \text{에서 } \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{486}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{729} = \left(\frac{1}{3}\right)^6$$

$$k-1=6 \quad \therefore k=7$$

664 ㉮ 제5항

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_3=4$, $a_6=108$ 이므로

$$ar^2=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^5=108 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^3=27 \quad \therefore r=3$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a \times 3^2=4 \quad \therefore a=\frac{4}{9}$$

따라서 첫째항이 $\frac{4}{9}$, 공비가 3이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{4}{9} \times 3^{n-1}$$

이때 36을 제 k 항이라 하면

$$\frac{4}{9} \times 3^{k-1}=36$$

$$3^{k-1}=81=3^4$$

$$k-1=4 \quad \therefore k=5$$

따라서 36은 제5항이다.

665 ㉮ $\frac{175}{6}$

공비를 r 라 하면

$$a_1+a_4=7 \text{에서 } a_1+a_1r^3=7$$

$$\therefore a_1(1+r^3)=7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_4+a_7=35 \text{에서 } a_1r^3+a_1r^6=35$$

$$\therefore a_1r^3(1+r^3)=35 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^3=5$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a_1(1+5)=7 \quad \therefore a_1=\frac{7}{6}$$

$$\therefore a_7=a_1r^6=a_1(r^3)^2=\frac{7}{6} \times 5^2=\frac{175}{6}$$

666 ㉮ 16

공비를 r 라 하면

$$\frac{a_7}{a_2}=-8 \text{에서 } \frac{a_1r^6}{a_1r}=-8 \quad \therefore r^5=-8$$

$$\therefore a_{11}=a_1r^{10}=a_1(r^5)^2$$

$$=\frac{1}{4} \times (-8)^2$$

$$=16$$

667 ㉮ ①

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_5=4 \text{에서 } ar^4=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_7=4a_6-16 \text{에서}$$

$$ar^6=4ar^5-16 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$4r^2=16r-16, 4r^2-16r+16=0$$

$$4(r^2-4r+4)=0, 4(r-2)^2=0$$

$$\therefore r=2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a \times 2^4=4 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$$

따라서 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 2이므로

$$a_8=\frac{1}{4} \times 2^7=32$$

668 ㉮ 128

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2a_4=1 \text{에서 } ar \times ar^3=1$$

$$\therefore a^2r^4=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_5=4 \text{에서 } ar^4=4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } a=\frac{1}{4}$$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } \frac{1}{4}r^4=4$$

$$r^4=16 \quad \therefore r=2 (\because r>0)$$

따라서 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 2이므로

$$a_{10}=\frac{1}{4} \times 2^9=128$$

669 ㉮ 제7항

첫째항이 $\frac{1}{2000}$, 공비가 4인 등비수열의 일반항을 a_n

이라 하면

$$a_n=\frac{1}{2000} \times 4^{n-1}$$

이때 제 n 항에서 처음으로 1보다 커진다고 하면

$$a_n > 1 \text{에서 } \frac{1}{2000} \times 4^{n-1} > 1 \quad \therefore 4^{n-1} > 2000$$

그런데 n 은 자연수이고 $4^5 = 1024$, $4^6 = 4096$ 이므로
 $n-1 \geq 6 \quad \therefore n \geq 7$

따라서 처음으로 1보다 커지는 항은 제7항이다.

670 ㉮ 제9항

첫째항이 2400, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 2400 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

이때 제 n 항에서 처음으로 1보다 작아진다고 하면

$$a_n < 1 \text{에서 } 2400 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < 1$$

$$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < \frac{1}{2400}$$

그런데 n 은 자연수이고

$$\left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{2187}, \left(\frac{1}{3}\right)^8 = \frac{1}{6561} \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 8 \quad \therefore n \geq 9$$

따라서 처음으로 1보다 작아지는 항은 제9항이다.

671 ㉮ 제11항

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_2 = 3$, $a_6 = 48$ 이므로

$$ar = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^5 = 48 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^4 = 16 \quad \therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 2a = 3 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

따라서 첫째항이 $\frac{3}{2}$, 공비가 2이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{3}{2} \times 2^{n-1}$$

이때 제 n 항에서 처음으로 900 이상이 된다고 하면

$$a_n \geq 900 \text{에서 } \frac{3}{2} \times 2^{n-1} \geq 900 \quad \therefore 2^{n-1} \geq 600$$

그런데 n 은 자연수이고 $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$ 이므로
 $n-1 \geq 10 \quad \therefore n \geq 11$

따라서 처음으로 900 이상이 되는 항은 제11항이다.

672 ㉮ 10

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 + a_5 = 54 \text{에서 } ar + ar^4 = 54$$

$$\therefore ar(1+r^3) = 54 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_3 + a_6 = 108 \text{에서 } ar^2 + ar^5 = 108$$

$$\therefore ar^2(1+r^3) = 108 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r = 2$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 2a(1+2^3) = 54$$

$$18a = 54 \quad \therefore a = 3$$

따라서 첫째항이 3, 공비가 2이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

$$a_k > 1000 \text{에서}$$

$$3 \times 2^{k-1} > 1000 \quad \therefore 2^{k-1} > 333.333\dots$$

그런데 k 는 자연수이고 $2^8 = 256$, $2^9 = 512$ 이므로

$$k-1 \geq 9 \quad \therefore k \geq 10$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 10이다.

673 ㉮ 256

공비를 r 라 하면 첫째항이 4, 제8항이 64이므로

$$4r^7 = 64 \quad \therefore r^7 = 16 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 x_2 , x_5 는 각각 주어진 수열의 제3항, 제6항이므로

$$x_2 = 4r^2, x_5 = 4r^5$$

$$\therefore x_2 x_5 = 4r^2 \times 4r^5 = 16r^7 = 256 \quad (\because \textcircled{1})$$

674 ㉮ 34

y 는 8과 128의 등비중항이므로

$$y^2 = 8 \times 128 = 1024 \quad \therefore y = 32 \quad (\because y > 0)$$

8은 x 와 32의 등비중항이므로

$$8^2 = 32x \quad \therefore x = 2$$

$$\therefore x + y = 2 + 32 = 34$$

675 ㉮ 4

첫째항이 6, 공비가 3인 등비수열의 제 $(m+2)$ 항이 1458이므로

$$6 \times 3^{m+1} = 1458, 3^{m+1} = 243 = 3^5$$

$$m+1 = 5 \quad \therefore m = 4$$

676 ㉮ 20

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 10, \alpha\beta = k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\beta - \alpha$ 는 α 와 β 의 등비중항이므로

$$(\beta - \alpha)^2 = \alpha\beta$$

$$\text{이때 } (\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{이므로}$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha\beta \quad \therefore (\alpha + \beta)^2 = 5\alpha\beta$$

$$\textcircled{1} \text{을 대입하면}$$

$$10^2 = 5k \quad \therefore k = 20$$

677 ㉡ 4

세 수를 a, ar, ar^2 이라 하면

$$a + ar + ar^2 = -13$$

$$\therefore a(1+r+r^2) = -13 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a \times ar \times ar^2 = 64$$

$$(ar)^3 = 64$$

$$\therefore ar = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} \div \textcircled{㉡}$ 을 하면

$$\frac{a(1+r+r^2)}{ar} = -\frac{13}{4}$$

$$4(1+r+r^2) = -13r$$

$$4r^2 + 17r + 4 = 0$$

$$(r+4)(4r+1) = 0$$

$$\therefore r = -4 \text{ 또는 } r = -\frac{1}{4}$$

이를 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면

$$r = -4 \text{ 일 때 } a = -1, r = -\frac{1}{4} \text{ 일 때 } a = -16$$

따라서 세 수는 $-1, 4, -16$ 이므로 가장 큰 수는 4이다.

678 ㉡ $\frac{1}{16}$

정사각형 ABCD의 넓이가 4이므로 한 변의 길이는

$$\sqrt{4} = 2$$

$\overline{AA_1} = \overline{AD_1} = 1$ 이므로 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 한 변의 길이는

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1D_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$ 의

한 변의 길이는

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

$\overline{A_2A_3} = \overline{A_2D_3} = \frac{1}{2}$ 이므로 정사각형 $A_3B_3C_3D_3$ 의 한

변의 길이는

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\vdots$

정사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 의 한 변의 길이는

$$\sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 정사각형 $A_{10}B_{10}C_{10}D_{10}$ 의 한 변의 길이는

$$\sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10-1} = \frac{1}{16}$$

679 ㉡ 2

세 실근을 a, ar, ar^2 이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + ar + ar^2 = k \quad \therefore a(1+r+r^2) = k \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a \times ar \times ar^2 = 1$$

$$\therefore a^2r(1+r+r^2) = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$a \times ar \times ar^2 = \frac{1}{8}, (ar)^3 = \frac{1}{8} \quad \therefore ar = \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠}$ 을 하면

$$\frac{a^2r(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)} = \frac{1}{k} \quad \therefore ar = \frac{1}{k}$$

$$\text{이를 } \textcircled{㉢} \text{에 대입하면 } \frac{1}{k} = \frac{1}{2} \quad \therefore k = 2$$

680 ㉡ 200만 원

8년 전의 물건의 평가 금액을 a 만 원이라 하면

$$a(1-0.12)^8 = 72, a \times 0.88^8 = 72$$

$$0.36a = 72 \quad \therefore a = 200$$

따라서 8년 전의 평가 금액은 200만 원이다.

유제

337~341쪽

681 ㉡ $2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{15}\right\}$

첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{2}$ 이므로 첫째항부터 제

$$15\text{항까지의 합은 } \frac{1\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{15}\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{15}\right\}$$

682 ㉡ 8

$$\frac{6\{1 - (-2)^n\}}{1 - (-2)} = -510 \text{에서 } 1 - (-2)^n = -255$$

$$(-2)^n = 256 = (-2)^8 \quad \therefore n = 8$$

683 ㉡ $2^{12} - 1$

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 제4항이 8, 제7항이 64이므로

$$ar^3 = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$ar^6 = 64 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠} \text{을 하면 } r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$$

$$\text{이를 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } a \times 2^3 = 8 \quad \therefore a = 1$$

따라서 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제12항까지의 합은

$$\frac{1(2^{12} - 1)}{2 - 1} = 2^{12} - 1$$

684 ㉮ $\frac{1}{2}(3^{20}-1)$

공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_4 = 28 \text{에서 } a_1 + a_1 r^3 = 28$$

$$\therefore a_1(1+r^3) = 28 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a_4 + a_7 = 756 \text{에서 } a_1 r^3 + a_1 r^6 = 756$$

$$\therefore a_1 r^3(1+r^3) = 756 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠} \text{을 하면 } r^3 = 27 \quad \therefore r = 3$$

$$\text{이를 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } a_1(1+3^3) = 28 \quad \therefore a_1 = 1$$

따라서 첫째항이 1, 공비가 3인 등비수열의 첫째항부

$$\text{터 제20항까지의 합은 } \frac{1(3^{20}-1)}{3-1} = \frac{1}{2}(3^{20}-1)$$

685 ㉮ 342

첫째항을 a , 공비를 r ($r \neq 1$)라 하면

$$S_3 = 6, S_6 = -42 \text{이므로}$$

$$\frac{a(1-r^3)}{1-r} = 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{a(1-r^6)}{1-r} = -42$$

$$\therefore \frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r} = -42 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면 } 6(1+r^3) = -42$$

$$1+r^3 = -7 \quad \therefore r^3 = -8$$

$$\begin{aligned} \therefore S_9 &= \frac{a(1-r^9)}{1-r} = \frac{a(1-r^3)(1+r^3+r^6)}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^3)}{1-r} \times (1+r^3+r^6) \\ &= 6 \times \{1 + (-8) + (-8)^2\} = 342 \end{aligned}$$

686 ㉮ -6

$$S_n = 3 \times 2^{n+1} + k \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (3 \times 2^{n+1} + k) - (3 \times 2^n + k) \\ &= 3 \times 2^n \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 3 \times 2^2 + k = 12 + k \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루려면

$\textcircled{㉠}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{㉡}$ 이 같아야 하므로

$$3 \times 2 = 12 + k \quad \therefore k = -6$$

687 ㉮ 5

첫째항을 a , 공비를 r ($r \neq 1$)라 하면

$$S_{10} = 15 \text{에서 } \frac{a(1-r^{10})}{1-r} = 15$$

$$\therefore \frac{a(1-r^5)(1+r^5)}{1-r} = 15 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$S_{20} = 75 \text{에서 } \frac{a(1-r^{20})}{1-r} = 75$$

$$\therefore \frac{a(1-r^5)(1+r^5)(1+r^{10})}{1-r} = 75 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면 } 15(1+r^{10}) = 75, 1+r^{10} = 5$$

$$r^{10} = 4 \quad \therefore r^5 = 2 (\because r > 0)$$

$$\text{즉, } 1+r^5 = 3 \text{이므로 } \frac{3a(1-r^5)}{1-r} = 15 (\because \textcircled{㉠})$$

$$\therefore S_5 = \frac{a(1-r^5)}{1-r} = 5$$

688 ㉮ 3

$$S_n = 2 \times 5^{n+2} - 50 \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2 \times 5^{n+2} - 50) - (2 \times 5^{n+1} - 50) \\ &= 8 \times 5^{n+1} \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \times 5^3 - 50 = 200 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 $\textcircled{㉠}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{㉡}$ 이 같으므로

$$\text{일반항 } a_n \text{은 } a_n = 8 \times 5^{n+1}$$

$$\text{따라서 } p=8, q=5 \text{이므로 } p-q=3$$

689 ㉮ 867만 원

연이율이 2%이고, 1년마다 복리로 매년 초에 100만

원씩 8년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} &100(1+0.02) + 100(1+0.02)^2 + \dots + 100(1+0.02)^8 \\ &= \frac{100(1+0.02)\{(1+0.02)^8 - 1\}}{(1+0.02) - 1} \\ &= \frac{100 \times 1.02 \times 0.17}{0.02} = 867(\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 8년 말의 적립금의 원리합계는 867만 원이다.

690 ㉮ 160만 원

월 이율이 5%이고, 1개월마다 복리로 매월 말에 10만

원씩 1년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} &10 + 10(1+0.05) + 10(1+0.05)^2 + \dots + 10(1+0.05)^{12} \\ &= \frac{10\{(1+0.05)^{12} - 1\}}{(1+0.05) - 1} \\ &= \frac{10 \times 0.8}{0.05} = 160(\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 1년 말의 적립금의 원리합계는 160만 원이다.

691 ㉑

매년 초에 적립해야 하는 금액을 a 만 원이라 하면 연 이율이 5%이고, 1년마다 복리로 매년 초에 10년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} & a(1+0.05) + a(1+0.05)^2 + \cdots + a(1+0.05)^{10} \\ &= \frac{a(1+0.05)\{(1+0.05)^{10}-1\}}{(1+0.05)-1} \\ &= \frac{a \times 1.05 \times 0.6}{0.05} \\ &= 12.6a(\text{만 원}) \end{aligned}$$

즉, $12.6a=378$ 이므로 $a=30$

따라서 매년 초에 30만 원씩 적립해야 한다.

692 ㉒ 25만 원

매년 말에 적립해야 하는 금액을 a 만 원이라 하면 연 이율이 4%이고, 1년마다 복리로 매년 말에 8년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} & a + a(1+0.04) + a(1+0.04)^2 + \cdots + a(1+0.04)^7 \\ &= \frac{a\{(1+0.04)^8-1\}}{(1+0.04)-1} \\ &= \frac{a \times 0.4}{0.04} \\ &= 10a(\text{만 원}) \end{aligned}$$

즉, $10a=250$ 이므로 $a=25$

따라서 매년 말에 25만 원씩 적립해야 한다.

연습문제

342~344쪽

693 ㉒ ②

첫째항을 a 라 하면 제7항이 162이므로

$$a(\sqrt{3})^6=162$$

$$27a=162$$

$$\therefore a=6$$

694 ㉒ ①

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2a_4=1 \text{에서 } ar \times ar^3=1$$

$$\therefore a^2r^4=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$$a_5=9 \text{에서 } ar^4=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$$\textcircled{㉑} \div \textcircled{㉒} \text{을 하면 } a = \frac{1}{9}$$

$$\text{이를 } \textcircled{㉒} \text{에 대입하면 } \frac{1}{9}r^4=9$$

$$r^4=81 \quad \therefore r=-3 (\because r<0)$$

따라서 첫째항이 $\frac{1}{9}$, 공비가 -3 이므로

$$a_8=\frac{1}{9} \times (-3)^7=-243$$

695 ㉒ 640

공비를 r 라 하면 첫째항이 4, 제10항이 40이므로

$$4r^9=40 \quad \therefore r^9=10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

이때 x_1, x_3, x_5 는 각각 주어진 수열의 제2항, 제4항, 제6항이므로

$$\begin{aligned} x_1x_3x_5 &= 4r \times 4r^3 \times 4r^5 \\ &= 64r^9=64 \times 10=640 (\because \textcircled{㉑}) \end{aligned}$$

696 ㉒ $\frac{7}{4}$

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_4=a+3d, a_7=a+6d, a_{11}=a+10d$$

a_7 은 a_4 와 a_{11} 의 등비중항이므로 $a_7^2=a_4a_{11}$ 에서

$$(a+6d)^2=(a+3d)(a+10d)$$

$$a^2+12ad+36d^2=a^2+13ad+30d^2$$

$$6d^2-ad=0, d(6d-a)=0$$

$$\therefore a=6d (\because d \neq 0)$$

$$\therefore \frac{a_9}{a_3}=\frac{a+8d}{a+2d}=\frac{14d}{8d}=\frac{7}{4}$$

697 ㉒ ②

세 수를 a, ar, ar^2 이라 하면

$$a+ar+ar^2=7$$

$$\therefore a(1+r+r^2)=7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$$a \times ar \times ar^2=-27$$

$$(ar)^3=-27 \quad \therefore ar=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$\textcircled{㉑} \div \textcircled{㉒}$ 을 하면

$$\frac{a(1+r+r^2)}{ar}=-\frac{7}{3}$$

$$3(1+r+r^2)=-7r, 3r^2+10r+3=0$$

$$(r+3)(3r+1)=0$$

$$\therefore r=-3 \text{ 또는 } r=-\frac{1}{3}$$

이를 $\textcircled{㉒}$ 에 대입하면

$$r=-3 \text{일 때 } a=1, r=-\frac{1}{3} \text{일 때 } a=9$$

따라서 세 수는 1, -3, 9이므로 가장 작은 수는 -3이다.

698 ㉮ 2604

첫째항을 a , 공비를 r ($r \neq 1$)라 하면

$$S_n=4 \text{에서 } \frac{a(1-r^n)}{1-r}=4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$S_{2n}=104 \text{에서 } \frac{a(1-r^{2n})}{1-r}=104$$

$$\therefore \frac{a(1-r^n)(1+r^n)}{1-r}=104 \quad \dots\dots \textcircled{8} \quad \ggggg \textcircled{1}$$

㉮을 ㉮에 대입하면 $4(1+r^n)=104$

$$1+r^n=26 \quad \therefore r^n=25 \quad \ggggg \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{3n} &= \frac{a(1-r^{3n})}{1-r} = \frac{a(1-r^n)(1+r^n+r^{2n})}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \times (1+r^n+r^{2n}) \\ &= 4 \times (1+25+25^2) = 2604 \quad \ggggg \textcircled{3} \end{aligned}$$

단계	채점 기준	비율
㉮	S_n, S_{2n} 을 첫째항과 공비를 이용하여 나타내기	30 %
㉮	(공비) n 의 값 구하기	30 %
㉮	S_{3n} 구하기	40 %

699 ㉮ ①

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2=2 \text{에서 } ar=2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$a_3 : a_5 = 1 : 4 \text{에서 } a_5 = 4a_3 \text{이므로}$$

$$ar^4 = 4ar^2$$

$$ar^2(r^2-4)=0 \quad \therefore r=2 \quad (\because r>0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } 2a=2 \quad \therefore a=1$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비의 합은

$$1+2=3$$

700 ㉮ 7

첫째항이 1000, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 1000 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

주어진 수열은 공비가 $\frac{1}{3}$ 이므로 1000부터 시작하여

항의 값이 일정한 비율로 감소한다.

즉, 처음으로 1보다 작아지는 항이 나오기 전까지의 곱이 최대이다.

이때 제 n 항에서 처음으로 1보다 작아진다고 하면

$$a_n < 1 \text{에서}$$

$$1000 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < 1 \quad \therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < \frac{1}{1000}$$

$$\text{그런데 } n \text{은 자연수이고 } \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}, \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{2187}$$

$$\text{이므로 } n-1 \geq 7 \quad \therefore n \geq 8$$

따라서 처음으로 1보다 작아지는 항은 제8항이므로

$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n$ 의 값이 최대가 되는 자연수 n 의 값은 7이다.

701 ㉮ 36

a 는 3과 b 의 등비중항이므로

$$a^2=3b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

㉮을 $\log_a 3b + \log_3 b = 5$ 에 대입하면

$$\log_a a^2 + \log_3 b = 5$$

$$2 + \log_3 b = 5, \log_3 b = 3 \quad \therefore b = 3^3 = 27$$

이를 ㉮에 대입하면 $a^2=81$

$$\therefore a = -9 \text{ 또는 } a = 9$$

이때 로그의 밑의 조건에서 $a > 0, a \neq 1$ 이므로

$$a = 9$$

$$\therefore a + b = 9 + 27 = 36$$

702 ㉮ ④

$$S_{10} = 9 + 99 + 999 + \dots + 9999999999$$

$$= (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \dots + (10^{10}-1)$$

$$= (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{10}) - 10$$

$$= 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{10}$$

$$= \frac{10^2(10^9-1)}{10-1} \quad \begin{array}{l} \text{첫째항이 } 10^2, \text{ 공비가 } 10, \text{ 항수가 } 9 \text{인} \\ \text{등비수열의 합} \end{array}$$

$$= \frac{100}{9}(10^9-1)$$

$$= \frac{100(10^9-1)}{3^2}$$

따라서 $a=9, b=2$ 이므로 $a+b=11$

703 ㉮ ②

$$\text{정삼각형 } ABC \text{의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

이므로

$$T_1 = \sqrt{3} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$T_2 = T_1 \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$T_3 = T_2 \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

⋮

즉, 수열 $\{T_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이다.

$$\begin{aligned} \therefore T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_{10} \\ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{10} \right\}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{10} \right\} \end{aligned}$$

704 ㉮ 5

공비를 $r (r \neq 1)$ 라 하면

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2k-1} &= 1 + r^2 + r^4 + \cdots + r^{2k-2} \\ &= \frac{1 \{ 1 - (r^2)^k \}}{1 - r^2} \\ &= \frac{1 - r^{2k}}{1 - r^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1 - r^{2k}}{1 - r^2} = 341 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\begin{aligned} a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2k} &= r + r^3 + r^5 + \cdots + r^{2k-1} \\ &= \frac{r \{ 1 - (r^2)^k \}}{1 - r^2} \\ &= \frac{r(1 - r^{2k})}{1 - r^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{r(1 - r^{2k})}{1 - r^2} = 682 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7} \text{을 } \textcircled{8} \text{에 대입하면 } 341r = 682 \quad \therefore r = 2$$

$$\text{이를 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } \frac{1 - 2^{2k}}{1 - 2^2} = 341$$

$$2^{2k} - 1 = 1023, \quad 2^{2k} = 1024 = 2^{10}$$

$$2k = 10 \quad \therefore k = 5$$

705 ㉮ 1

$$\log_3 (S_n + k) = n \text{에서 } S_n + k = 3^n$$

$$\therefore S_n = 3^n - k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (3^n - k) - (3^{n-1} - k) \\ &= 2 \times 3^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 3 - k \quad \cdots \cdots \textcircled{8} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루려면

$\textcircled{7}$ 에 $n = 1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{8}$ 이 같아야 하므로

$$2 = 3 - k \quad \therefore k = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

단계	채점 기준	비율
①	S_n 구하기	30%
②	$a_n (n \geq 2)$ 과 a_1 구하기	40%
③	k 의 값 구하기	30%

706 ㉮ 2626000원

월 이율이 1%이고, 1개월마다 복리로 매월 초에 20만

원씩 12개월 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$20(1+0.01) + 20(1+0.01)^2 + 20(1+0.01)^3 + \cdots + 20(1+0.01)^{12}$$

$$= \frac{20(1+0.01) \{ (1+0.01)^{12} - 1 \}}{(1+0.01) - 1}$$

$$= \frac{20 \times 1.01 \times 0.13}{0.01}$$

$$= 262.6(\text{만 원})$$

따라서 올해 말의 적립금의 원리합계는 2626000원이다.

707 ㉮ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

첫째항을 $a (a < 0)$, 공비를 $r (r \neq 1)$ 라 하면

$$S_1 = a$$

$$S_2 = \frac{a(1-r^2)}{1-r}$$

$$= \frac{a(1-r)(1+r)}{1-r}$$

$$= a(1+r)$$

$$S_4 = \frac{a(1-r^4)}{1-r}$$

$$= \frac{a(1-r)(1+r)(1+r^2)}{1-r}$$

$$= a(1+r)(1+r^2)$$

S_2 는 S_1 과 S_4 의 등차중항이므로

$$S_2 = \frac{S_1 + S_4}{2} \text{에서}$$

$$a(1+r) = \frac{a + a(1+r)(1+r^2)}{2}$$

$$2(1+r) = 1 + (1+r)(1+r^2)$$

$$r^3 + r^2 - r = 0$$

$$r(r^2 + r - 1) = 0$$

$$\therefore r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} (\because r > 0)$$

708 ㉮ 9

| 접근 방법 | $S_{n+3} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$ 임을 이용한다

$S_{n+3} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}$ 이므로 모든 자연수 n

에 대하여

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 13 \times 3^{n-1}$$

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = ar^n + ar^{n+1} + ar^{n+2} \text{이므로}$$

$$ar^n(1+r+r^2) = 13 \times 3^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

01 수열의 합

개념 확인

347쪽

710 ㉠ (1) $5+8+11+14+17$

(2) $5^2+5^3+5^4+5^5+5^6+5^7$

(3) $\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+\frac{7}{8}+\frac{8}{9}+\frac{9}{10}+\frac{10}{11}$

(4) $-2+4-8+16-32+64$

$$\begin{aligned} (1) \sum_{k=1}^5 (3k+2) &= (3 \times 1 + 2) + (3 \times 2 + 2) \\ &\quad + (3 \times 3 + 2) + (3 \times 4 + 2) \\ &\quad + (3 \times 5 + 2) \\ &= 5 + 8 + 11 + 14 + 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{m=3}^8 5^{m-1} &= 5^{3-1} + 5^{4-1} + 5^{5-1} + 5^{6-1} + 5^{7-1} + 5^{8-1} \\ &= 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6 + 5^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \sum_{j=4}^{10} \frac{j}{j+1} &= \frac{4}{4+1} + \frac{5}{5+1} + \frac{6}{6+1} + \frac{7}{7+1} \\ &\quad + \frac{8}{8+1} + \frac{9}{9+1} + \frac{10}{10+1} \\ &= \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7} + \frac{7}{8} + \frac{8}{9} + \frac{9}{10} + \frac{10}{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \sum_{i=1}^6 (-2)^i &= (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 \\ &\quad + (-2)^5 + (-2)^6 \\ &= -2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 \end{aligned}$$

711 ㉠ (1) $\sum_{k=1}^{10} (2k-1)$ (2) $\sum_{k=1}^6 7$

(3) $\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k}$ (4) $\sum_{k=1}^{13} 3^k$

(1) 수열 1, 3, 5, ..., 19의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 2n - 1$$

따라서 $19 = 2 \times 10 - 1$ 이므로

$$1 + 3 + 5 + \dots + 19 = \sum_{k=1}^{10} (2k - 1)$$

712 ㉠ (1) 10 (2) 2 (3) 12 (4) -11

$$(1) \sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k = 6 + 4 = 10$$

$$(2) \sum_{k=1}^5 (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^5 a_k - \sum_{k=1}^5 b_k = 6 - 4 = 2$$

$$(3) \sum_{k=1}^5 2a_k = 2 \sum_{k=1}^5 a_k = 2 \times 6 = 12$$

$$(4) \sum_{k=1}^5 (b_k - 3) = \sum_{k=1}^5 b_k - \sum_{k=1}^5 3 = 4 - 3 \times 5 = -11$$

㉠에 $n=1$ 을 대입하면

$$ar(1+r+r^2)=13 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

㉠에 $n=2$ 를 대입하면

$$ar^2(1+r+r^2)=39 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

㉠ $\div$ ㉡을 하면 $r=3$

이를 ㉡에 대입하면 $3a(1+3+3^2)=13$

$$39a=13 \quad \therefore a=\frac{1}{3}$$

따라서 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 3이므로

$$a_4 = \frac{1}{3} \times 3^3 = 9$$

709 ㉠ 148

| 접근 방법 | $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ 임을 이용한다

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을

각각 $A_n = 3^{n-1} - \frac{1}{3}$, $B_n = -\frac{3}{2}n^2 + kn + 1$ 이라 하자.

$$\begin{aligned} a_4 &= A_4 - A_3 \\ &= \left(3^3 - \frac{1}{3}\right) - \left(3^2 - \frac{1}{3}\right) = 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= B_1 \\ &= -\frac{3}{2} \times 1^2 + k \times 1 + 1 = k - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } a_4 = b_1 \text{이므로 } 18 = k - \frac{1}{2} \quad \therefore k = \frac{37}{2}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= A_n - A_{n-1} \\ &= \left(3^{n-1} - \frac{1}{3}\right) - \left(3^{n-2} - \frac{1}{3}\right) = 2 \times 3^{n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= B_n - B_{n-1} \\ &= \left(-\frac{3}{2}n^2 + \frac{37}{2}n + 1\right) \\ &\quad - \left[-\frac{3}{2}(n-1)^2 + \frac{37}{2}(n-1) + 1\right] \\ &= -3n + 20 \end{aligned}$$

이때 $a_1 = A_1 = \frac{2}{3}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은

$$\frac{2}{3}, \textcircled{2} 6, \textcircled{18}, 54, \dots$$

또 $b_1 = B_1 = 18$ 이므로 수열 $\{b_n\}$ 은

$$\textcircled{18}, 14, 11, 8, 5, \textcircled{2} \dots$$

따라서 $a_m = b_l$ 을 만족시키는 두 자연수 m , l 의 순서쌍 (m, l) 은 $(2, 6)$, $(4, 1)$ 뿐이다.

그런데 $m \neq 4$ 이므로 $m=2$, $l=6$

$$\therefore k(m+l) = \frac{37}{2}(2+6) = 148$$

713 ㉔ 16

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^8 a_{2k+1} \\
 &= (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19}) - (a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{17}) \\
 &= a_1 + a_{19} = 20 + (-4) \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

714 ㉔ 878

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{10} (a_{2k} + a_{2k+1}) \\
 &= (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + (a_6 + a_7) \\
 & \quad + \cdots + (a_{20} + a_{21}) \\
 &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20} + a_{21}) - a_1 \\
 &= \sum_{k=1}^{21} a_k - a_1 = 2 \times 21^2 - 1 - 3 \\
 &= 878
 \end{aligned}$$

715 ㉔ 11

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{10} (a_k + a_{k+1}) \\
 &= (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{10} + a_{11}) \\
 &= a_1 + 2(a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{10}) + a_{11} \\
 &= 2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}) + a_{11} - a_1 \\
 &= 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + a_{11} - a_1 \\
 &= 2 \times (-2) + a_{11} - 2 \\
 &= a_{11} - 6 \\
 &\text{따라서 } a_{11} - 6 = 5 \text{ 이므로} \\
 &a_{11} = 11
 \end{aligned}$$

716 ㉔ 50

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^n (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}) \\
 &= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9) \\
 & \quad + \cdots + (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}) \\
 &= \sum_{k=1}^{3n} a_k \\
 &\text{따라서 } \sum_{k=1}^{3n} a_k = 5n \text{ 이므로} \\
 &\sum_{k=1}^{30} a_k = 5 \times 10 = 50
 \end{aligned}$$

717 ㉔ (1) -12 (2) 230

$$\begin{aligned}
 (1) \sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k - 4) &= \sum_{k=1}^{10} a_k + 2 \sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} 4 \\
 &= 8 + 2 \times 10 - 4 \times 10 \\
 &= -12 \\
 (2) \sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3)^2 &= \sum_{k=1}^{10} (4a_k^2 + 12a_k + 9) \\
 &= 4 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + 12 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 9 \\
 &= 4 \times 11 + 12 \times 8 + 9 \times 10 \\
 &= 230
 \end{aligned}$$

718 ㉔ 24

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k = 9 + \sum_{k=1}^5 b_k \\
 \therefore 9 + \sum_{k=1}^5 b_k &= 13 \text{ 이므로 } \sum_{k=1}^5 b_k = 4 \\
 \therefore \sum_{k=1}^5 (b_k + 4) &= \sum_{k=1}^5 b_k + \sum_{k=1}^5 4 \\
 &= 4 + 4 \times 5 = 24
 \end{aligned}$$

719 ㉔ $\sum_{k=1}^{15} a_k = 9, \sum_{k=1}^{15} b_k = 11$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{15} a_k &= \alpha, \sum_{k=1}^{15} b_k = \beta \text{ 라 하면} \\
 \sum_{k=1}^{15} (a_k + b_k) &= 20 \text{ 에서 } \sum_{k=1}^{15} a_k + \sum_{k=1}^{15} b_k = 20 \\
 \therefore \alpha + \beta &= 20 \quad \text{..... ㉠} \\
 \sum_{k=1}^{15} (a_k - b_k) &= -2 \text{ 에서 } \sum_{k=1}^{15} a_k - \sum_{k=1}^{15} b_k = -2 \\
 \therefore \alpha - \beta &= -2 \quad \text{..... ㉡} \\
 \text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } \alpha &= 9, \beta = 11 \\
 \therefore \sum_{k=1}^{15} a_k &= 9, \sum_{k=1}^{15} b_k = 11
 \end{aligned}$$

720 ㉔ 660

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{10} (a_k - 1) \sum_{k=1}^{10} (a_k + 1) - \sum_{k=1}^{10} (a_k - 1)(a_k + 1) \\
 &= \left(\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} 1 \right) \left(\sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 1 \right) - \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 - 1) \\
 &= \left(\sum_{k=1}^{10} a_k - 1 \times 10 \right) \left(\sum_{k=1}^{10} a_k + 1 \times 10 \right) - \left(\sum_{k=1}^{10} a_k^2 - \sum_{k=1}^{10} 1 \right) \\
 &= \left(\sum_{k=1}^{10} a_k - 10 \right) \left(\sum_{k=1}^{10} a_k + 10 \right) - \left(\sum_{k=1}^{10} a_k^2 - 1 \times 10 \right) \\
 &= (30 - 10) \times (30 + 10) - (150 - 10) \\
 &= 660
 \end{aligned}$$

721 ㉔ (1) -550 (2) 189

(1) 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_5 = -11$,

$$a_{10} = -26 \text{이므로}$$

$$a + 4d = -11, a + 9d = -26$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 1, d = -3$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{20} a_k &= \frac{20\{2 \times 1 + (20-1) \times (-3)\}}{2} \\ &= -550 \end{aligned}$$

(2) 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_2 = 48, a_4 = 12$ 이므로

$$ar = 48 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^3 = 12 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore r = \frac{1}{2} (\because r > 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \frac{a}{2} = 48 \quad \therefore a = 96$$

$$\therefore \sum_{k=1}^6 a_k = \frac{96\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 189$$

722 ㉔ 200

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_2 = -4, a_7 = 6$ 이므로

$$a + d = -4, a + 6d = 6$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -6, d = 2$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{100} a_{2k} - \sum_{k=1}^{100} a_{2k-1} &= (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{200}) \\ &\quad - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{199}) \\ &= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) \\ &\quad + \dots + (a_{200} - a_{199}) \\ &= 100d = 100 \times 2 = 200 \end{aligned}$$

723 ㉔ -2

$$\sum_{k=1}^{30} \frac{3^k - 2^k}{4^k} = \sum_{k=1}^{30} \left(\frac{3}{4}\right)^k - \sum_{k=1}^{30} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

첫째항이 $\frac{3}{4}$, 공비가 $\frac{3}{4}$ 인 등비수열 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{3}{4}\left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{30}\right\}}{1 - \frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{30}\right\}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 3\left\{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{30}\right\} - \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{30}\right\} \\ &= 3 - 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{30} - 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{30} \\ &= 2 - 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{30} + \left(\frac{1}{2}\right)^{30} \end{aligned}$$

따라서 $a = -3, b = 1$ 이므로 $a + b = -2$

724 ㉔ -45

공비를 r ($r \neq \pm 1$)라 하면

$$a_2 + a_3 = 6 \text{에서}$$

$$a_1 r + a_1 r^2 = 6$$

$$\therefore a_1 r(1 + r) = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^{12} a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{12} a_{2k} = \sum_{k=1}^{12} a_k^2 \text{에서}$$

$$\frac{a_1\{1 - (r^2)^{12}\}}{1 - r^2} - \frac{a_1 r\{1 - (r^2)^{12}\}}{1 - r^2} = \frac{a_1^2\{1 - (r^2)^{12}\}}{1 - r^2}$$

$$\therefore 1 - r = a_1 (\because a_1 \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$(1 - r)r(1 + r) = 6$$

$$r^3 - r + 6 = 0$$

$$(r + 2)(r^2 - 2r + 3) = 0$$

$$\therefore r = -2$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$a_1 = 1 - (-2) = 3$$

$$\therefore a_5 = a_1 r^4 = 3 \times (-2)^4 = 48$$

$$\therefore a_1 - a_5 = 3 - 48 = -45$$

개념 확인

355쪽

725 ㉔ (1) 42 (2) 73 (3) 124

$$(1) \sum_{k=1}^{12} (k - 3)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{12} k - \sum_{k=1}^{12} 3 \\ &= \frac{12 \times 13}{2} - 3 \times 12 \\ &= 42 \end{aligned}$$

$$(2) \sum_{k=1}^6 (k^2 - 2k + 4)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^6 k^2 - 2 \sum_{k=1}^6 k + \sum_{k=1}^6 4 \\ &= \frac{6 \times 7 \times 13}{6} - 2 \times \frac{6 \times 7}{2} + 4 \times 6 \\ &= 73 \end{aligned}$$

$$(3) \sum_{k=1}^4 (k^3 + 2k + 1)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^4 k^3 + 2 \sum_{k=1}^4 k + \sum_{k=1}^4 1 \\ &= \left(\frac{4 \times 5}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{4 \times 5}{2} + 1 \times 4 \\ &= 124 \end{aligned}$$

726 ㉡ (1) 625 (2) 818 (3) 1296

(1) 수열 1, 3, 5, 7, ..., 49의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 2n - 1$$

즉, $49 = 2 \times 25 - 1$ 이므로

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 49$$

$$= \sum_{k=1}^{25} (2k-1) = 2 \sum_{k=1}^{25} k - \sum_{k=1}^{25} 1$$

$$= 2 \times \frac{25 \times 26}{2} - 1 \times 25$$

$$= 625$$

(2) 수열 4, 9, 16, 25, ..., 169의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = (n+1)^2$$

즉, $169 = (12+1)^2$ 이므로

$$4 + 9 + 16 + 25 + \cdots + 169$$

$$= \sum_{k=1}^{12} (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{12} (k^2 + 2k + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{12} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{12} k + \sum_{k=1}^{12} 1$$

$$= \frac{12 \times 13 \times 25}{6} + 2 \times \frac{12 \times 13}{2} + 1 \times 12$$

$$= 818$$

(3) 수열 1, 8, 27, 64, ..., 512의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n^3$$

즉, $512 = 8^3$ 이므로

$$1 + 8 + 27 + 64 + \cdots + 512$$

$$= \sum_{k=1}^8 k^3 = \left(\frac{8 \times 9}{2} \right)^2$$

$$= 1296$$

유제

357~361쪽

727 ㉡ (1) 170 (2) 240

$$(1) \sum_{k=1}^5 (k-1)(k^2+k+1) - \sum_{k=1}^5 (k+1)(k-1)$$

$$= \sum_{k=1}^5 (k^3-1) - \sum_{k=1}^5 (k^2-1)$$

$$= \sum_{k=1}^5 \{ (k^3-1) - (k^2-1) \}$$

$$= \sum_{k=1}^5 (k^3-k^2)$$

$$= \sum_{k=1}^5 k^3 - \sum_{k=1}^5 k^2$$

$$= \left(\frac{5 \times 6}{2} \right)^2 - \frac{5 \times 6 \times 11}{6}$$

$$= 170$$

$$(2) \sum_{k=1}^8 \frac{k^3}{k+1} + \sum_{k=1}^8 \frac{2k^2+k}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^8 \left(\frac{k^3}{k+1} + \frac{2k^2+k}{k+1} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^8 \frac{k^3+2k^2+k}{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^8 \frac{k(k+1)^2}{k+1} = \sum_{k=1}^8 (k^2+k)$$

$$= \sum_{k=1}^8 k^2 + \sum_{k=1}^8 k$$

$$= \frac{8 \times 9 \times 17}{6} + \frac{8 \times 9}{2} = 240$$

728 ㉡ $\frac{364}{3}$

$$\sum_{k=1}^{12} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2}{2k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{12} \frac{k(k+1)(2k+1)}{2k+1} \quad \blacktriangleleft 1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2 = \sum_{n=1}^k n^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$= \sum_{k=1}^{12} \frac{k^2+k}{6} = \frac{1}{6} \left(\sum_{k=1}^{12} k^2 + \sum_{k=1}^{12} k \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{12 \times 13 \times 25}{6} + \frac{12 \times 13}{2} \right)$$

$$= \frac{364}{3}$$

729 ㉡ 6

$$\sum_{k=1}^n (6k^2-1)$$

$$= 6 \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n 1$$

$$= 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 \times n$$

$$= n^2(2n+3)$$

따라서 $n^2(2n+3) = 540 = 6^2 \times (2 \times 6 + 3)$ 이므로
 $n = 6$

730 ㉡ 365

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_k + \beta_k = -k, \alpha_k \beta_k = 1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = \sum_{k=1}^{10} \{ (\alpha_k + \beta_k)^2 - 2\alpha_k \beta_k \}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \{ (-k)^2 - 2 \times 1 \}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (k^2 - 2) = \sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{10} 2$$

$$= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 2 \times 10$$

$$= 365$$

731 ㉮ 195

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^3 \left(\sum_{k=1}^5 3k \right) + \sum_{n=1}^5 \left\{ \sum_{k=1}^8 (k-n) \right\} \\
 &= \sum_{n=1}^3 \left(3 \sum_{k=1}^5 k \right) + \sum_{n=1}^5 \left(\sum_{k=1}^8 k - \sum_{k=1}^8 n \right) \\
 &= \sum_{n=1}^3 \left(3 \times \frac{5 \times 6}{2} \right) + \sum_{n=1}^5 \left(\frac{8 \times 9}{2} - n \times 8 \right) \\
 &= \sum_{n=1}^3 45 + \sum_{n=1}^5 (36 - 8n) \\
 &= 45 \times 3 + \sum_{n=1}^5 36 - 8 \sum_{n=1}^5 n \\
 &= 135 + 36 \times 5 - 8 \times \frac{5 \times 6}{2} = 195
 \end{aligned}$$

732 ㉮ $n(n+1)(n+2)(3n+1)$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^n \left(\sum_{m=1}^k 24mk \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(24k \sum_{m=1}^k m \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ 24k \times \frac{k(k+1)}{2} \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^n (12k^3 + 12k^2) = 12 \left(\sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\
 &= 12 \left[\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\
 &= n(n+1)(n+2)(3n+1)
 \end{aligned}$$

733 ㉮ 7

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{m=1}^k (2m-k) \right\} = \sum_{k=1}^n \left(2 \sum_{m=1}^k m - \sum_{m=1}^k k \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left\{ 2 \times \frac{k(k+1)}{2} - k \times k \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \\
 &\therefore, \frac{n(n+1)}{2} = 28 \circ \text{이므로} \\
 &n(n+1) = 56 = 7 \times 8 \quad \therefore n = 7
 \end{aligned}$$

734 ㉮ 6

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=1}^l 12 \right) \right\} \\
 &= \sum_{m=1}^n \left(\sum_{l=1}^m 12l \right) = \sum_{m=1}^n \left\{ 12 \times \frac{m(m+1)}{2} \right\} \\
 &= \sum_{m=1}^n (6m^2 + 6m) = 6 \left(\sum_{m=1}^n m^2 + \sum_{m=1}^n m \right) \\
 &= 6 \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\
 &= 2n(n+1)(n+2) \\
 &\therefore, 2n(n+1)(n+2) = 672 \circ \text{이므로} \\
 &n(n+1)(n+2) = 336 = 6 \times 7 \times 8 \\
 &\therefore n = 6
 \end{aligned}$$

735 ㉮ $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
 a_n &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) \\
 &= \sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \\
 &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - 1 \times n = n^2
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 합은

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

736 ㉮ 450

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\
 &= 2n \quad \dots\dots \textcircled{㉠}
 \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 + 1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$

이때 $\textcircled{㉠}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{㉡}$ 이 같으므로

일반항 a_n 은 $a_n = 2n$

따라서 $a_{2k-1} = 2(2k-1) = 4k-2$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{15} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{15} (4k-2) \\
 &= 4 \sum_{k=1}^{15} k - \sum_{k=1}^{15} 2 \\
 &= 4 \times \frac{15 \times 16}{2} - 2 \times 15 \\
 &= 450
 \end{aligned}$$

737 ㉮ 6036

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n(2n+1)^2$$

따라서 구하는 합은

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^8 a_k &= \sum_{k=1}^8 k(2k+1)^2 \\
 &= \sum_{k=1}^8 (4k^3 + 4k^2 + k) \\
 &= 4 \sum_{k=1}^8 k^3 + 4 \sum_{k=1}^8 k^2 + \sum_{k=1}^8 k \\
 &= 4 \times \left(\frac{8 \times 9}{2} \right)^2 + 4 \times \frac{8 \times 9 \times 17}{6} + \frac{8 \times 9}{2} \\
 &= 6036
 \end{aligned}$$

738 $\frac{63}{128}$

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2^{n+2} - 4$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2^{n+2} - 4 - (2^{n+1} - 4) \\ &= 2^{n+1} \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

(ii) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 2^3 - 4 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{B}$

이때 $\textcircled{A}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{B}$ 이 같으므로

일반항 a_n 은 $a_n = 2^{n+1}$

따라서 $\frac{1}{a_k} = \frac{1}{2^{k+1}}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^6 \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{\frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^6 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{63}{128}$$

개념 확인

363쪽

739 (1) $\frac{91}{144}$ (2) $\frac{2}{9}$ (3) $\frac{5}{21}$

$$\begin{aligned} (1) \sum_{k=1}^7 \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^7 \frac{1}{(k+2)-k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^7 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) \\ &= \frac{91}{144} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=1}^6 \frac{1}{(k+2)(k+3)} &= \sum_{k=1}^6 \frac{1}{(k+3)-(k+2)} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \sum_{k=1}^6 \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^5 \frac{1}{(k+2)-k} \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^5 \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5} \right) + \left(\frac{1}{4 \times 5} - \frac{1}{5 \times 6} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{5 \times 6} - \frac{1}{6 \times 7} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{6 \times 7} \right) = \frac{5}{21} \end{aligned}$$

740 (1) $\frac{3-\sqrt{2}+\sqrt{15}}{2}$ (2) $-\sqrt{3}+\sqrt{13}$
(3) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+3}{2}$

$$\begin{aligned} (1) \sum_{k=1}^{14} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}} &= \sum_{k=1}^{14} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{14} (\sqrt{k+2}-\sqrt{k}) \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3}-\sqrt{1}) + (\sqrt{4}-\sqrt{2}) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) \\ &\quad + \dots + (\sqrt{15}-\sqrt{13}) + (\sqrt{16}-\sqrt{14}) \} \\ &= \frac{1}{2} (-\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{15}+\sqrt{16}) = \frac{3-\sqrt{2}+\sqrt{15}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})} \\ &= \sum_{k=1}^{10} (\sqrt{k+3}-\sqrt{k+2}) \\ &= (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + (\sqrt{5}-\sqrt{4}) + (\sqrt{6}-\sqrt{5}) \\ &\quad + \dots + (\sqrt{13}-\sqrt{12}) \\ &= -\sqrt{3}+\sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \sum_{k=1}^6 \frac{1}{\sqrt{k+3}+\sqrt{k+1}} &= \sum_{k=1}^6 \frac{\sqrt{k+3}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+3}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+1})} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 (\sqrt{k+3}-\sqrt{k+1}) \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{4}-\sqrt{2}) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + (\sqrt{6}-\sqrt{4}) \\ &\quad + (\sqrt{7}-\sqrt{5}) + (\sqrt{8}-\sqrt{6}) + (\sqrt{9}-\sqrt{7}) \} \\ &= \frac{1}{2} (-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{8}+\sqrt{9}) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+3}{2} \end{aligned}$$

741 $\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)}$$

따라서 구하는 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

742 $\frac{2}{9}$

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{1}{4n(n+1)}$$

따라서 구하는 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 a_k &= \sum_{k=1}^8 \frac{1}{4k(k+1)} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^8 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{9} \right) = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

743 $\frac{11}{6}$

수열 $1, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2+3}, \cdots, \frac{1}{1+2+3+\cdots+11}$

의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$$

따라서 주어진 식의 값은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{11} a_k &= \sum_{k=1}^{11} \frac{2}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^{11} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) \right\} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{12} \right) = \frac{11}{6} \end{aligned}$$

744 $\frac{n}{6n+9}$

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 2n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 2n) - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= 2n + 1 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \times 1 = 3 \quad \cdots \textcircled{2}$

이때 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{2}$ 이 같으므로

일반항 a_n 은 $a_n = 2n + 1$

따라서 $\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) \\ &= \frac{n}{6n+9} \end{aligned}$$

745 $\sqrt{n+2} - \sqrt{2}$

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$$

따라서 구하는 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2})} \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \\ &= \sqrt{n+2} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

746 3

첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \sum_{k=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} \\
&= \sum_{k=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{24} \frac{\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{24} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \\
&= \frac{1}{2} \{(\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) \\
&\quad + \cdots + (\sqrt{49} - \sqrt{47})\} \\
&= \frac{1}{2} (-\sqrt{1} + \sqrt{49}) \\
&= 3
\end{aligned}$$

747 ㉮ 51

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\sqrt{5n-4} + \sqrt{5n+1}} \\
\therefore S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{5k-4} + \sqrt{5k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{5k-4} - \sqrt{5k+1}}{(\sqrt{5k-4} + \sqrt{5k+1})(\sqrt{5k-4} - \sqrt{5k+1})} \\
&= \frac{1}{5} \sum_{k=1}^n (\sqrt{5k+1} - \sqrt{5k-4}) \\
&= \frac{1}{5} \{(\sqrt{6} - \sqrt{1}) + (\sqrt{11} - \sqrt{6}) + (\sqrt{16} - \sqrt{11}) \\
&\quad + \cdots + (\sqrt{5n+1} - \sqrt{5n-4})\} \\
&= \frac{1}{5} (\sqrt{5n+1} - \sqrt{1}) \\
&= \frac{\sqrt{5n+1} - 1}{5}
\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{\sqrt{5n+1} - 1}{5} \geq 3 \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{5n+1} \geq 16$$

$$5n+1 \geq 256$$

$$\therefore n \geq 51$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 51이다.

748 ㉮ 99

$$x^2 - (2n+1)x + n^2 + n = 0 \text{에서}$$

$$(x-n)\{x-(n+1)\} = 0$$

$$\therefore x=n \text{ 또는 } x=n+1$$

즉, $\sqrt{\alpha_n} + \sqrt{\beta_n} = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\
&= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\
&= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) \\
&\quad + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\
&= \sqrt{n+1} - \sqrt{1}
\end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{n+1} - 1 = 9$ 이므로 $\sqrt{n+1} = 10$

$$n+1=100 \quad \therefore n=99$$

749 ㉮ -4

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{80} \log_3 \left(1 - \frac{1}{1+k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{80} \log_3 \frac{k}{1+k} \\
&= \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \frac{3}{4} + \cdots + \log_3 \frac{80}{81} \\
&= \log_3 \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{80}{81}\right) \\
&= \log_3 \frac{1}{81} = -4
\end{aligned}$$

750 ㉮ 63

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n \log_2 \sqrt{\frac{k}{k+1}} \\
&= \log_2 \sqrt{\frac{1}{2}} + \log_2 \sqrt{\frac{2}{3}} + \log_2 \sqrt{\frac{3}{4}} \\
&\quad + \cdots + \log_2 \sqrt{\frac{n}{n+1}} \\
&= \log_2 \left(\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{3}{4}} \times \cdots \times \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right) \\
&= \log_2 \frac{1}{\sqrt{n+1}} = -\frac{1}{2} \log_2 (n+1)
\end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{1}{2} \log_2 (n+1) = -3 \text{ 이므로 } \log_2 (n+1) = 6$$

$$n+1=2^6=64 \quad \therefore n=63$$

751 ㉮ 22

첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{k=1}^{12} \log_8 a_k &= \sum_{k=1}^{12} \log_8 2^{k-1} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{12} (k-1) \\
&= \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{12} k - \sum_{k=1}^{12} 1\right) \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{12 \times 13}{2} - 1 \times 12\right) = 22
\end{aligned}$$

752 ㉔ 4

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \log_2(n^2 + n)$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \log_2(n^2 + n) - \log_2\{(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= \log_2(n^2 + n) - \log_2(n^2 - n) \\ &= \log_2 \frac{n^2 + n}{n^2 - n} = \log_2 \frac{n+1}{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } a_{2n+1} = \log_2 \frac{(2n+1)+1}{(2n+1)-1} = \log_2 \frac{n+1}{n} \quad (n \geq 1)$$

이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{15} a_{2n+1} &= \sum_{n=1}^{15} \log_2 \frac{n+1}{n} \\ &= \log_2 \frac{2}{1} + \log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{4}{3} + \cdots + \log_2 \frac{16}{15} \\ &= \log_2 \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{16}{15} \right) \\ &= \log_2 16 = 4 \end{aligned}$$

753 ㉔ $7 \times 3^9 + 3$

주어진 수열의 합을 S 로 놓으면

$$S = 1 \times 3 + 3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \cdots + 15 \times 3^8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

㉑의 양변에 등비수열의 공비 3을 곱하면

$$3S = 1 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + 5 \times 3^4 + \cdots + 15 \times 3^9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

㉑ - ㉒을 하면

$$\begin{aligned} S &= 1 \times 3 + 3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \cdots + 15 \times 3^8 \\ -) \quad 3S &= \quad \quad 1 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \cdots + 13 \times 3^8 + 15 \times 3^9 \\ \hline -2S &= 1 \times 3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + \cdots + 2 \times 3^8 - 15 \times 3^9 \\ &= 3 + 2(3^2 + 3^3 + \cdots + 3^8) - 15 \times 3^9 \\ &= 3 + 2 \times \frac{3^2(3^7 - 1)}{3 - 1} - 15 \times 3^9 \\ &= -14 \times 3^9 - 6 \end{aligned}$$

$$\therefore S = 7 \times 3^9 + 3$$

754 ㉔ 6

주어진 수열을 각 묶음의 마지막 항이 1이 되도록 묶으면

$$(1), (2, 1), (3, 2, 1), (4, 3, 2, 1), \dots$$

첫 번째 묶음부터 n 번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

즉, 첫 번째 묶음부터 9번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\frac{9 \times 10}{2} = 45, \text{ 10번째 묶음까지의 항의 개수는}$$

$$\frac{10 \times 11}{2} = 55 \text{ 이므로 제 50 항은 10번째 묶음의 5번째 항이다.}$$

이때 n 번째 묶음은 $n, n-1, n-2, \dots, 1$ 이므로 10번째 묶음은 10, 9, 8, ..., 1이다.

따라서 주어진 수열의 제 50 항, 즉 10번째 묶음의 5번째 항은 6이다.

연습문제

372-374쪽

755 ㉔ ㄴ, ㄷ

$$\text{ㄱ. } \sum_{k=1}^{15} a_{2k} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{30}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \sum_{k=1}^{10} (k+1)^2 &= 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 11^2 \\ &= \sum_{k=2}^{11} k^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \sum_{k=1}^{20} a_k - \sum_{k=1}^{10} a_{2k} &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}) \\ &\quad - (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20}) \\ &= a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19} \\ &= \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

756 ㉔ ④

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{28} f(k+1) - \sum_{k=2}^{31} f(k-1) \\ &= \{f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(29)\} \\ &\quad - \{f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(30)\} \\ &= -f(1) - f(30) \\ &= -6 - 35 = -41 \end{aligned}$$

757 ㉔ ⑤

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^3 - \sum_{k=1}^{10} (a_k - 1)^3 \\ &= \sum_{k=1}^{10} \{(a_k + 1)^3 - (a_k - 1)^3\} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \{(a_k^3 + 3a_k^2 + 3a_k + 1) - (a_k^3 - 3a_k^2 + 3a_k - 1)\} \\ &= \sum_{k=1}^{10} (6a_k^2 + 2) = 6 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} 2 \\ &= 6 \times 40 + 2 \times 10 = 260 \end{aligned}$$

758 ㉓ ③

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^8 (7 \times 2^{3n+1}) &= 14 \sum_{n=1}^8 8^n = 14 \times \frac{8(8^8-1)}{8-1} \\ &= 16(8^8-1) = 2^{28} - 16\end{aligned}$$

759 ㉓ -7

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} (k+3)(k+a) &= \sum_{k=1}^{10} \{k^2 + (3+a)k + 3a\} \\ &= \sum_{k=1}^{10} k^2 + (3+a) \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 3a \\ &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + (3+a) \times \frac{10 \times 11}{2} + 3a \times 10 \\ &= 385 + 55(3+a) + 30a \\ &= 85a + 550 \\ \text{따라서 } 85a + 550 &= -45 \text{ 이므로 } a = -7\end{aligned}$$

760 ㉓ 1720

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n(n+4)$$

따라서 구하는 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15} a_k &= \sum_{k=1}^{15} k(k+4) = \sum_{k=1}^{15} (k^2 + 4k) \\ &= \sum_{k=1}^{15} k^2 + 4 \sum_{k=1}^{15} k \\ &= \frac{15 \times 16 \times 31}{6} + 4 \times \frac{15 \times 16}{2} \\ &= 1720\end{aligned}$$

단계	채점 기준	비율
①	주어진 수열의 일반항 구하기	40 %
②	주어진 수열의 첫째항부터 제15항까지의 합 구하기	60 %

761 ㉓ ②

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+3} + \sqrt{k+4}} &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+3} - \sqrt{k+4}}{(\sqrt{k+3} + \sqrt{k+4})(\sqrt{k+3} - \sqrt{k+4})} \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+4} - \sqrt{k+3}) \\ &= (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5}) + (\sqrt{7} - \sqrt{6}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}) \\ &= \sqrt{n+4} - \sqrt{4}\end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{n+4} - 2 = 3$ 이므로

$$\sqrt{n+4} = 5, n+4 = 25$$

$$\therefore n = 21$$

762 ㉓ ⑤

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k(a_{k+1} - a_k) &= (a_2 - a_1) + 2(a_3 - a_2) + 3(a_4 - a_3) \\ &\quad + \cdots + n(a_{n+1} - a_n) \\ &= na_{n+1} - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \\ &= na_{n+1} - \sum_{k=1}^n a_k \\ \text{즉, } na_{n+1} - \sum_{k=1}^n a_k &= na_{n+1} - 5n^2 \text{ 이므로} \\ \sum_{k=1}^n a_k &= 5n^2 \\ \therefore \sum_{k=1}^{12} a_k &= 5 \times 12^2 = 720\end{aligned}$$

763 ㉓ $\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{50} \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \theta\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \sin(\pi + \theta) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) \\ &\quad + \sin(2\pi + \theta) + \cdots + \sin(25\pi + \theta) \\ &= \cos \theta - \sin \theta - \cos \theta + \sin \theta \\ &\quad + \cos \theta - \sin \theta - \cos \theta + \sin \theta \\ &\quad + \cdots + \cos \theta - \sin \theta \\ &= \cos \theta - \sin \theta \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \text{ 이므로} \\ \cos^2 \theta &= 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \\ \text{이때 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \cos \theta > 0 \\ \therefore \cos \theta &= \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \\ \therefore \sum_{k=1}^{50} \sin\left(\frac{k\pi}{2} + \theta\right) &= \cos \theta - \sin \theta \\ &= \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

764 ㉓ 10

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} (a_k + 1)^2 &= 70 \text{ 에서 } \sum_{k=1}^{20} (a_k^2 + 2a_k + 1) = 70 \\ \sum_{k=1}^{20} a_k^2 + \sum_{k=1}^{20} 2a_k + \sum_{k=1}^{20} 1 &= 70 \\ \sum_{k=1}^{20} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{20} a_k + 1 \times 20 &= 70 \\ \therefore \sum_{k=1}^{20} a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{20} a_k &= 50 \quad \cdots \cdots \text{㉑}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{20} a_k(a_k+1)=40 \text{에서 } \sum_{k=1}^{20} (a_k^2+a_k)=40$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k^2 + \sum_{k=1}^{20} a_k = 40 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

①-②을 하면

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = 10$$

765 ㉡ ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_3 + a_8 = 14$$

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^8 a_n &= a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \\ &= \frac{6(a_3 + a_8)}{2} = 3 \times 14 = 42 \end{aligned}$$

| 다른 풀이 |

수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로

$$a_3 + a_8 = a_4 + a_7 = a_5 + a_6 = 14$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=3}^8 a_n &= a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \\ &= (a_3 + a_8) + (a_4 + a_7) + (a_5 + a_6) \\ &= 3 \times 14 = 42 \end{aligned}$$

766 ㉡ 3288

$a_n = 1 + 3^{n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 a_k &= \sum_{k=1}^8 (1 + 3^{k-1}) = \sum_{k=1}^8 1 + \sum_{k=1}^8 3^{k-1} \\ &= 1 \times 8 + \frac{1 \times (3^8 - 1)}{3 - 1} \\ &= 3288 \end{aligned}$$

767 ㉡ 896

$$k(k+1)(k+2)(k+3)+1$$

$$= \{k(k+3)\} \{(k+1)(k+2)\} + 1$$

$$= (k^2 + 3k)(k^2 + 3k + 2) + 1$$

$$= (k^2 + 3k + 1)^2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{12} \sqrt{k(k+1)(k+2)(k+3)+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{12} \sqrt{(k^2 + 3k + 1)^2} = \sum_{k=1}^{12} (k^2 + 3k + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{12} k^2 + 3 \sum_{k=1}^{12} k + \sum_{k=1}^{12} 1$$

$$= \frac{12 \times 13 \times 25}{6} + 3 \times \frac{12 \times 13}{2} + 1 \times 12$$

$$= 896$$

768 ㉡ ①

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n (i-j) \right\} &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n i - \sum_{j=1}^n j \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ in - \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= n \sum_{i=1}^m i - \sum_{i=1}^m \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n \times \frac{m(m+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} \times m \\ &= \frac{mn(m-n)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } (m-n)^2 = (m+n)^2 - 4mn = 5^2 - 4 \times 6 = 1 \text{이}$$

므로 $m-n=1$ ($\because m>n$)

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n (i-j) \right\} &= \frac{mn(m-n)}{2} \\ &= \frac{6 \times 1}{2} = 3 \end{aligned}$$

769 ㉡ $\frac{2}{25}$

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 4n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 4n) - \{(n-1)^2 + 4(n-1)\} \\ &= 2n + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{A} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 1^2 + 4 \times 1 = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$

이때 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 ㉡이 같으므로

$$a_n = 2n + 3 \quad \text{>>>>> ①}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{(2k+3)(2k+5)} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k+3)(2k+5)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+5} \right) \quad \text{>>>>> ②} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{23} - \frac{1}{25} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} \right) = \frac{2}{25} \quad \text{>>>>> ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	일반항 a_n 구하기	40 %
②	부분분수를 이용하여 식 변형하기	30 %
③	식의 값 구하기	30 %

770 ㉔ $\frac{10}{21}$

수열 $\frac{1}{4 \times 1^2 - 1}, \frac{1}{4 \times 2^2 - 1}, \dots, \frac{1}{4 \times 10^2 - 1}$ 의

일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

따라서 주어진 식의 값은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{10}{21} \end{aligned}$$

771 ㉔ 36

탁자를 n 개 사용한 구성을 만드는 데 필요한 의자의 개수를 a_n 이라 하면

$$a_n = 2n + 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (2k+2) = 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 2 \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + 2 \times n = n^2 + 3n \end{aligned}$$

$$\text{즉, } n^2 + 3n \leq 100 \text{에서 } n(n+3) \leq 100 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $8 \times 11 = 88$, $9 \times 12 = 108$ 이므로 부등식 $\textcircled{7}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값은 8이다.

$$\therefore 1 + 2 + 3 + \dots + 8 = \sum_{k=1}^8 k = \frac{8 \times 9}{2} = 36$$

따라서 구하는 탁자의 개수는 36이다.

772 ㉔ 3

| 접근 방법 | 주어진 식을 간단히 한 후 자연수 n 의 값을 차례로 대입하여 조건을 만족시키는지 확인한다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \log_2 \sqrt{\frac{2k}{k+1}} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \log_2 \frac{2k}{k+1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\log_2 \frac{2 \times 1}{2} + \log_2 \frac{2 \times 2}{3} + \log_2 \frac{2 \times 3}{4} \right. \\ &\quad \left. + \dots + \log_2 \frac{2 \times n}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{2 \times 1}{2} \times \frac{2 \times 2}{3} \times \frac{2 \times 3}{4} \times \dots \times \frac{2 \times n}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 \frac{2^n}{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \sum_{k=1}^n \log_2 \sqrt{\frac{2k}{k+1}} = N \quad (N \text{은 } 100 \text{ 이하의 자연수})$$

이라 하면

$$\frac{1}{2} \log_2 \frac{2^n}{n+1} = N$$

$$\frac{2^n}{n+1} = 2^{2N}$$

$$\frac{2^n}{2^{2N}} = n+1$$

$$\therefore 2^{n-2N} = n+1$$

즉, $n+1$ 은 2보다 큰 2의 거듭제곱이어야 한다.

(i) $n+1=2^2$, 즉 $n=3$ 일 때,

$$2^{3-2N} = 2^2 \text{에서}$$

$$3-2N=2$$

$$\therefore N = \frac{1}{2}$$

이는 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n+1=2^3$, 즉 $n=7$ 일 때,

$$2^{7-2N} = 2^3 \text{에서}$$

$$7-2N=3$$

$$\therefore N=2$$

(iii) $n+1=2^4$, 즉 $n=15$ 일 때,

$$2^{15-2N} = 2^4 \text{에서}$$

$$15-2N=4$$

$$\therefore N = \frac{11}{2}$$

이는 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $n+1=2^5$, 즉 $n=31$ 일 때,

$$2^{31-2N} = 2^5 \text{에서}$$

$$31-2N=5$$

$$\therefore N=13$$

(v) $n+1=2^6$, 즉 $n=63$ 일 때,

$$2^{63-2N} = 2^6 \text{에서}$$

$$63-2N=6$$

$$\therefore N = \frac{57}{2}$$

이는 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(vi) $n+1=2^7$, 즉 $n=127$ 일 때,

$$2^{127-2N} = 2^7 \text{에서 } 127-2N=7$$

$$\therefore N=60$$

(vii) $n+1 \geq 2^8$ 일 때, $N > 100$

이는 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(vii)에서 $n=7$ 또는 $n=31$ 또는 $n=127$

따라서 구하는 자연수 n 의 개수는 3이다.

01 수학적 귀납법

개념 확인

379쪽

773 ㉡ (1) 65 (2) 11

$$(1) a_2 = 4a_1 - 3 = 4 \times 2 - 3 = 5$$

$$a_3 = 4a_2 - 3 = 4 \times 5 - 3 = 17$$

$$a_4 = 4a_3 - 3 = 4 \times 17 - 3 = 65$$

$$(2) a_2 = 2a_1 + 5 = 2 \times (-3) + 5 = -1$$

$$a_3 = 2a_2 + 5 = 2 \times (-1) + 5 = 3$$

$$a_4 = 2a_3 + 5 = 2 \times 3 + 5 = 11$$

774 ㉡ (1) $a_n = -2n$ (2) $a_n = 4n - 3$

$$(3) a_n = -3^{n-1} \quad (4) a_n = 3 \times (-2)^{n-1}$$

(1) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 -2, 공차가 -2인 등차수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -2 + (n-1) \times (-2) = -2n$$

(2) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 $a_2 - a_1 = 5 - 1 = 4$ 인 등차수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3$$

(3) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 -1, 공비가 3인 등비수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -1 \times 3^{n-1} = -3^{n-1}$$

(4) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{3} = -2$

인 등비수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 \times (-2)^{n-1}$$

775 ㉡ (1) 32 (2) $-\frac{1}{360}$

(1) $a_{n+1} = a_n + 3n$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 + 3 \times 1$$

$$a_3 = a_2 + 3 \times 2 = a_1 + 3 \times 1 + 3 \times 2$$

$$a_4 = a_3 + 3 \times 3 = a_1 + 3 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3$$

$$\therefore a_5 = a_4 + 3 \times 4$$

$$= a_1 + 3 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3 + 3 \times 4$$

$$= 2 + 3(1+2+3+4)$$

$$= 2 + 3 \sum_{k=1}^4 k = 2 + 3 \times \frac{4 \times 5}{2} = 32$$

(2) $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+2}$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{a_1}{1+2} = a_1 \times \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2+2} = a_1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{3+2} = a_1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$$

$$\therefore a_5 = \frac{a_4}{4+2}$$

$$= a_1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{6}$$

$$= -1 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{6}$$

$$= -\frac{1}{360}$$

유제

381~391쪽

776 ㉡ 30

$a_{n+1} + 3 = a_n$, 즉 $a_{n+1} = a_n - 3$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 -3인 등차수열이고 첫째항이 4이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 4 + (n-1) \times (-3) = -3n + 7$$

$$a_k = -83 \text{에서 } -3k + 7 = -83$$

$$-3k = -90 \quad \therefore k = 30$$

777 ㉡ 제17항

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고 첫째항이 -5, 공차가 $a_2 - a_1 = -2 - (-5) = 3$ 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -5 + (n-1) \times 3 = 3n - 8$$

43을 제 k 항이라 하면

$$3k - 8 = 43$$

$$3k = 51 \quad \therefore k = 17$$

따라서 43은 제17항이다.

778 ㉡ 16

$a_{n+1} = a_n - 7$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 -7인 등차수열이고 첫째항이 100이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 100 + (n-1) \times (-7) = -7n + 107$$

$$a_k < 100 \text{에서 } -7k + 107 < 0$$

$$-7k < -107 \quad \therefore k > 15.285 \cdots$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 16이다.

779 ㉡ 780

$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$, 즉 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서

수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고 첫째항이 1, 공차가

$$a_2 - a_1 = 5 - 1 = 4 \text{이므로 일반항 } a_n \text{은}$$

$$a_n = 1 + (n-1) \times 4 = 4n - 3$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k &= \sum_{k=1}^{20} (4k-3) = 4 \sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} 3 \\ &= 4 \times \frac{20 \times 21}{2} - 3 \times 20 = 780\end{aligned}$$

780 ㉡ 9

$a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{5}$ 인 등비수열

이고 첫째항이 625이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 625 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-5}$$

$$a_k = \frac{1}{625} \text{에서 } \left(\frac{1}{5}\right)^{k-5} = \frac{1}{625} = \left(\frac{1}{5}\right)^4$$

$$k-5=4 \quad \therefore k=9$$

781 ㉡ 제10항

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고 첫째항

이 -3, 공비가 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{-3} = -2$ 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -3 \times (-2)^{n-1}$$

1536은 제 k 항이라 하면

$$-3 \times (-2)^{k-1} = 1536$$

$$(-2)^{k-1} = -512 = (-2)^9, k-1=9 \quad \therefore k=10$$

따라서 1536은 제10항이다.

782 ㉡ $\frac{341}{512}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$, 즉 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등

비수열이고 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$ 이므

로 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= \sum_{k=1}^5 a_k = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5 \right\}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{341}{512}\end{aligned}$$

783 ㉡ 7

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고 첫째

항이 1, 공비가 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$ 이므로 첫째항부터 제 n 항

까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{1(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$$S_k \geq 100 \text{에서 } 2^k - 1 \geq 100, 2^k \geq 101$$

$$\text{이때 } 2^6 = 64, 2^7 = 128 \text{이므로 } k \geq 7$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 7이다.

784 ㉡ 52

$a_{n+1} = a_n + 2n - 5$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 9를 차례로 대

$$a_2 = a_1 + 2 \times 1 - 5$$

$$a_3 = a_2 + 2 \times 2 - 5 = a_1 + 2 \times 1 - 5 + 2 \times 2 - 5$$

$$a_4 = a_3 + 2 \times 3 - 5$$

$$= a_1 + 2 \times 1 - 5 + 2 \times 2 - 5 + 2 \times 3 - 5$$

$\vdots$

$$\therefore a_{10} = a_9 + 2 \times 9 - 5$$

$$= a_1 + 2 \times 1 - 5 + 2 \times 2 - 5 + \cdots + 2 \times 9 - 5$$

$$= a_1 + 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 9) - 5 \times 9$$

$$= 7 + 2 \sum_{k=1}^9 k - 5 \times 9$$

$$= 7 + 2 \times \frac{9 \times 10}{2} - 45 = 52$$

785 ㉡ $\frac{1}{50}$

$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)}$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 49를 차례

로 대입하면

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{1 \times 2}$$

$$a_3 = a_2 - \frac{1}{2 \times 3} = a_1 - \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3}$$

$$a_4 = a_3 - \frac{1}{3 \times 4} = a_1 - \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4}$$

$\vdots$

$$\therefore a_{50} = a_{49} - \frac{1}{49 \times 50}$$

$$= a_1 - \frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} - \cdots - \frac{1}{49 \times 50}$$

$$\begin{aligned}&= a_1 - \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{1}{49 \times 50} \right)\end{aligned}$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{49} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \sum_{k=1}^{49} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$\begin{aligned}&= 1 - \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{50} \right) \right\}\end{aligned}$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{50} \right) = \frac{1}{50}$$

786 ㉑ 18

$a_{n+1} = a_n + 2^n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 + 2^1$$

$$a_3 = a_2 + 2^2 = a_1 + 2^1 + 2^2$$

$$a_4 = a_3 + 2^3 = a_1 + 2^1 + 2^2 + 2^3$$

⋮

$$\therefore a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}$$

$$= a_1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$$

$$= a + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = a + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$$

$$= a + 2^n - 2$$

$$a_{11} = 2064 \text{에서 } a + 2^{11} - 2 = 2064$$

$$\therefore a = 18$$

787 ㉒ ②

$a_{n+1} = a_n + f(n)$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 16을 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 + f(1)$$

$$a_3 = a_2 + f(2) = a_1 + f(1) + f(2)$$

$$a_4 = a_3 + f(3) = a_1 + f(1) + f(2) + f(3)$$

⋮

$$\therefore a_{17} = a_{16} + f(16)$$

$$= a_1 + f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(16)$$

$$= -3 + \sum_{k=1}^{16} f(k)$$

$$= -3 + 16^2 + 2 = 255$$

788 ㉓ $\frac{1}{6}$

$a_{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 35를 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} a_1$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} a_1$$

$$a_4 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} a_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} a_1$$

⋮

$$\therefore a_{36} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{36}} a_{35}$$

$$= \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{36}} \times \cdots \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} a_1$$

$$= 1 \times \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \times \cdots \times \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6}$$

789 ㉔ 190

$a_{n+1} = 9^n a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 19를 차례로 대입하면

$$a_2 = 9a_1$$

$$a_3 = 9^2 a_2 = 9^2 \times 9a_1$$

$$a_4 = 9^3 a_3 = 9^3 \times 9^2 \times 9a_1$$

⋮

$$\therefore a_{20} = 9^{19} a_{19} = 9^{19} \times \cdots \times 9^3 \times 9^2 \times 9a_1$$

$$= 1 \times 9 \times 9^2 \times 9^3 \times \cdots \times 9^{19}$$

$$= 9^{1+2+3+\cdots+19}$$

$$= 9^{\frac{19 \times 20}{2}} = 9^{190}$$

$$\therefore \log_9 a_{20} = \log_9 9^{190} = 190$$

790 ㉕ 제6항

$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{a_1}{2}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{a_1}{2}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{a_1}{2}$$

⋮

$$\therefore a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{1}{n} \times \cdots \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{a_1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \cdots \times \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n}$$

$\frac{1}{720}$ 을 제 k 항이라 하면

$$\frac{1}{2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times k} = \frac{1}{720}$$

$$2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times k = 720 \quad \therefore k = 6$$

따라서 $\frac{1}{720}$ 은 제6항이다.

791 ㉖ -110

$a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{2}{1} a_1$$

$$a_3 = \frac{3}{2} a_2 = \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} a_1$$

$$a_4 = \frac{4}{3} a_3 = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} a_1$$

⋮

$$\begin{aligned}\therefore a_n &= \frac{n}{n-1} a_{n-1} = \frac{n}{n-1} \times \cdots \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} a_1 \\ &= -2 \times \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n-1} = -2n \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} (-2k) = -2 \sum_{k=1}^{10} k \\ &= -2 \times \frac{10 \times 11}{2} = -110\end{aligned}$$

792 ㉔ ④

$a_{n+1} + (-1)^n \times a_n = 2^n$ 에서
 $a_{n+1} = -(-1)^n \times a_n + 2^n = (-1)^{n+1} \times a_n + 2^n$ 이므로 이 식의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면
 $a_2 = (-1)^2 \times a_1 + 2^1 = 1 + 2 = 3$
 $a_3 = (-1)^3 \times a_2 + 2^2 = -3 + 4 = 1$
 $a_4 = (-1)^4 \times a_3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$
 $\therefore a_5 = (-1)^5 \times a_4 + 2^4 = -9 + 16 = 7$

793 ㉔ 3

$a_{n+1} = (3^{a_n}$ 을 5로 나누었을 때의 나머지)의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면
 $a_2 = (3^1$ 을 5로 나누었을 때의 나머지) = 3
 $a_3 = (3^3$ 을 5로 나누었을 때의 나머지) = 2
 $a_4 = (3^2$ 을 5로 나누었을 때의 나머지) = 4
 $a_5 = (3^4$ 을 5로 나누었을 때의 나머지) = 1
 $a_6 = (3^1$ 을 5로 나누었을 때의 나머지) = 3
 $\vdots$
 따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 3, 2, 4가 이 순서대로 반복된다.
 이때 $50 = 4 \times 12 + 2$ 이므로 $a_{50} = 3$

794 ㉔ 9

$a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n+1}$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 8을 차례로 대입하면
 $a_2 = \frac{a_1}{3a_1+1} = \frac{1}{3 \times 1 + 1} = \frac{1}{4}$
 $a_3 = \frac{a_2}{3a_2+1} = \frac{\frac{1}{4}}{3 \times \frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{7}$
 $a_4 = \frac{a_3}{3a_3+1} = \frac{\frac{1}{7}}{3 \times \frac{1}{7} + 1} = \frac{1}{10}$
 $a_5 = \frac{a_4}{3a_4+1} = \frac{\frac{1}{10}}{3 \times \frac{1}{10} + 1} = \frac{1}{13}$

$$\begin{aligned}a_6 &= \frac{a_5}{3a_5+1} = \frac{\frac{1}{13}}{3 \times \frac{1}{13} + 1} = \frac{1}{16} \\ a_7 &= \frac{a_6}{3a_6+1} = \frac{\frac{1}{16}}{3 \times \frac{1}{16} + 1} = \frac{1}{19} \\ a_8 &= \frac{a_7}{3a_7+1} = \frac{\frac{1}{19}}{3 \times \frac{1}{19} + 1} = \frac{1}{22} \\ a_9 &= \frac{a_8}{3a_8+1} = \frac{\frac{1}{22}}{3 \times \frac{1}{22} + 1} = \frac{1}{25} \\ \therefore k &= 9\end{aligned}$$

795 ㉔ 50

$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2a_n-1} & (n \text{은 홀수}) \\ 1-a_n & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면
 $a_2 = \frac{a_1}{2a_1-1} = \frac{2}{2 \times 2 - 1} = \frac{2}{3}$
 $a_3 = 1 - a_2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
 $a_4 = \frac{a_3}{2a_3-1} = \frac{\frac{1}{3}}{2 \times \frac{1}{3} - 1} = -1$
 $a_5 = 1 - a_4 = 1 - (-1) = 2$
 $a_6 = \frac{a_5}{2a_5-1} = \frac{2}{2 \times 2 - 1} = \frac{2}{3}$
 $\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 $2, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -1$ 이 이 순서대로 반복된다.
 이때 $100 = 4 \times 25$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100} a_k &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \times 25 \\ &= \left\{ 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + (-1) \right\} \times 25 \\ &= 50\end{aligned}$$

796 ㉔ $\frac{2}{243}$

$S_n = -\frac{1}{2}a_n + 3$ 에서
 $S_{n+1} = -\frac{1}{2}a_{n+1} + 3$

한편 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_{n+1} + 3 - \left(-\frac{1}{2}a_n + 3\right)$$

$$\frac{3}{2}a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열
이므로

$$a_6 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{2}{243}$$

$$797 \quad a_1 = 8, a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

공을 지상 10 m 높이에서 떨어뜨리면 떨어진 높이의
 $\frac{4}{5}$ 배만큼 다시 튀어 오르므로 첫째항 a_1 은

$$a_1 = 10 \times \frac{4}{5} = 8$$

또 공을 a_n m 높이에서 떨어뜨리면 떨어진 높이의 $\frac{4}{5}$
배만큼 다시 튀어 오른 공의 높이가 a_{n+1} m이므로
 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식은

$$a_{n+1} = \frac{4}{5}a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$798 \quad \frac{1}{210}$$

$$S_n = n^2 a_n \text{에서 } S_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1}$$

한편 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n$$

$$(n^2 + 2n)a_{n+1} = n^2 a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{n}{n+2}a_n$$

$a_{n+1} = \frac{n}{n+2}a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 19를 차례로 대
입하면

$$a_2 = \frac{1}{3}a_1$$

$$a_3 = \frac{2}{4}a_2 = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times a_1$$

$$a_4 = \frac{3}{5}a_3 = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times a_1$$

$\vdots$

$$\therefore a_{20} = \frac{19}{21}a_{19} = \frac{19}{21} \times \dots \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times a_1$$

$$= 1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \dots \times \frac{18}{20} \times \frac{19}{21}$$

$$= \frac{1 \times 2}{20 \times 21} = \frac{1}{210}$$

$$799 \quad a_{n+1} = a_n + 2n + 4 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = a_1 + 2 \times 1 + 4$$

$$a_3 = a_2 + 2 \times 2 + 4$$

$$a_4 = a_3 + 2 \times 3 + 4$$

$\vdots$

따라서 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식은

$$a_{n+1} = a_n + 2n + 4 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

개념 확인

393쪽

$$800 \quad (1) \text{ 알 수 없다. } (2) \text{ 참 } (3) \text{ 참}$$

명제 $p(n)$ 또는 $p(n+1)$ 이 참이면 명제 $p(n+2)$ 가
참이고 $p(1)$ 이 참이므로

(1) $p(2)$ 는 알 수 없다.

(2) $p(1+2) = p(3) = p(2+1)$ 이 참이므로

$p(2+2) = p(4)$ 가 참이다.

(3) $p(4)$ 가 참이므로 $p(4+2) = p(6)$ 이 참이다.

$p(6)$ 이 참이므로 $p(6+2) = p(8)$ 이 참이다.

$p(8)$ 이 참이므로 $p(8+1) = p(9)$ 가 참이다.

$$801 \quad (가) 1 \quad (나) k+1 \quad (다) \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

(i) $n=1$ 일 때,

(좌변) = 1, (우변) = $\frac{1 \times 2}{2} = \boxed{(가) 1}$ 이므로 주어진
등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

이 등식의 양변에 $\boxed{(나) k+1}$ 을 더하면

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + \boxed{(나) k+1}$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + \boxed{(나) k+1}$$

$$= (k+1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right)$$

$$= \boxed{(다) \frac{(k+1)(k+2)}{2}}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성
립한다.

802 ㉡ 풀이 참조

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변})=2, (\text{우변})=2^2-2=2$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때,

주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$2+2^2+2^3+\cdots+2^k=2^{k+1}-2$$

이 등식의 양변에 2^{k+1} 을 더하면

$$2+2^2+2^3+\cdots+2^k+2^{k+1}=2^{k+1}-2+2^{k+1}=2^{k+2}-2$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

803 ㉡ 풀이 참조

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변})=\frac{1}{1 \times 3}=\frac{1}{3}, (\text{우변})=\frac{1}{2 \times 1+1}=\frac{1}{3}$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때,

주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \times 3}+\frac{1}{3 \times 5}+\frac{1}{5 \times 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

이 등식의 양변에 $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ 을 더하면

$$\frac{1}{1 \times 3}+\frac{1}{3 \times 5}+\frac{1}{5 \times 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k+1}{2k+3}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.804 ㉡ (가) $(-1)^{m+2}(m+1)^2$

$$(\text{나}) \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

$$(\text{다}) m+1$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변})=(-1)^2 \times 1^2=1,$$

$$(\text{우변})=(-1)^2 \times \frac{1 \times 2}{2}=1$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때,

주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{m+1} \times \frac{m(m+1)}{2}$$

이 등식의 양변에 $\boxed{(\text{가}) (-1)^{m+2}(m+1)^2}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} k^2 &= (-1)^{m+1} \times \frac{m(m+1)}{2} + \boxed{(\text{가}) (-1)^{m+2}(m+1)^2} \\ &= (-1)^{m+1}(m+1) \left\{ \frac{m}{2} + (-1)(m+1) \right\} \\ &= (-1)^{m+1}(m+1) \left(-\frac{m}{2} - 1 \right) \\ &= (-1)^{m+2} \times \boxed{(\text{나}) \frac{(m+1)(m+2)}{2}} \end{aligned}$$

$$= (-1)^{m+2} \times \boxed{(\text{다}) m+1}$$

$$= (-1)^{m+2} \times \boxed{(\text{나}) \frac{(m+1)(m+2)}{2}}$$

$$= (-1)^{m+2} \times \boxed{(\text{다}) m+1}$$

따라서 $n=\boxed{(\text{다}) m+1}$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

805 ㉡ 풀이 참조

(i) $n=1$ 일 때, $2^2+3^1=7$ 이므로 7의 배수이다.(ii) $n=k$ 일 때, $2^{k+1}+3^{2k-1}$ 이 7의 배수라 가정하면

$$2^{k+1}+3^{2k-1}=7m(m \text{은 자연수}) \text{으로 나타낼 수 있다.}$$

 $n=k+1$ 일 때,

$$\begin{aligned} 2^{k+2}+3^{2k+1} &= 2 \times 2^{k+1} + 9 \times 3^{2k-1} \\ &= 2 \times 2^{k+1} + 2 \times 3^{2k-1} + 7 \times 3^{2k-1} \\ &= 2(2^{k+1}+3^{2k-1}) + 7 \times 3^{2k-1} \\ &= 2 \times 7m + 7 \times 3^{2k-1} \\ &= 7(2m+3^{2k-1}) \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $2^{n+1}+3^{2n-1}$ 이 7의 배수이다.(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{n+1}+3^{2n-1}$ 이 7의 배수이다.

806 ㉮ 풀이 참조

(i) $n=5$ 일 때,

$$(\text{좌변})=2^5=32, (\text{우변})=5^2=25$$

즉, (좌변) > (우변)이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 5$)일 때,

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$2^k > k^2$$

이 부등식의 양변에 2를 곱하면

$$2^{k+1} > 2k^2$$

이때 $k \geq 5$ 이면

$$\begin{aligned} 2k^2 - (k+1)^2 &= k^2 - 2k - 1 \\ &= (k-1)^2 - 2 > 0 \end{aligned}$$

즉, $2k^2 > (k+1)^2$ 이므로

$$2^{k+1} > (k+1)^2$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

807 ㉮ 풀이 참조

(i) $n=1$ 일 때, $3^2-1=8$ 이므로 8로 나누어떨어진다.

(ii) $n=k$ 일 때, $3^{2k}-1$ 은 8로 나누어떨어진다고 가정하면 $3^{2k}-1=8m$ (m 은 자연수)으로 나타낼 수 있다.

$n=k+1$ 일 때,

$$\begin{aligned} 3^{2k+2}-1 &= 9 \times 3^{2k}-1 = 9(3^{2k}-1) + 8 \\ &= 9 \times 8m + 8 \\ &= 8(9m+1) \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $3^{2n}-1$ 은 8로 나누어떨어진다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $3^{2n}-1$ 은 8로 나누어떨어진다.

808 ㉮ 풀이 참조

(i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변})=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}, (\text{우변})=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

즉, (좌변) < (우변)이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때,

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2} < 2-\frac{1}{k}$$

이 부등식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$ 을 더하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$< 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$< 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{k(k+1)}$$

$$= \frac{2k^2+k}{k(k+1)}$$

$$= \frac{2k+1}{k+1}$$

$$= 2-\frac{1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

연습문제

398~400쪽

809 ㉮ ②

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고 첫째항이 -2 , 공차가 $a_2-a_1=3-(-2)=5$ 이므로

$$a_{100} = -2 + 99 \times 5 = 493$$

810 ㉮ ⑤

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$, 즉 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가

$\frac{1}{2}$ 인 등비수열이고 첫째항은 $\frac{1}{4}$ 이므로

$$a_{24} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{23} = \frac{1}{2^{25}}$$

$$\therefore k=25$$

811 ㉮ 56

$a_{n+1}=a_n-2n+1$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2=a_1-2 \times 1+1$$

$$a_3=a_2-2 \times 2+1$$

$$=a_1-2 \times 1+1-2 \times 2+1$$

$$a_4=a_3-2 \times 3+1$$

$$=a_1-2 \times 1+1-2 \times 2+1-2 \times 3+1$$

⋮

$$\begin{aligned}
\therefore a_n &= a_{n-1} - 2(n-1) + 1 \\
&= a_1 - 2 \times 1 + 1 - 2 \times 2 + 1 - \cdots - 2(n-1) + 1 \\
&= -5 - 2\{1+2+3+\cdots+(n-1)\} + 1 \times (n-1) \\
&= -5 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} k + n - 1 \\
&= -5 - 2 \times \frac{(n-1)n}{2} + n - 1 \\
&= -n^2 + 2n - 6
\end{aligned}$$

따라서 $a_6 = -6^2 + 2 \times 6 - 6 = -30$,
 $a_{10} = -10^2 + 2 \times 10 - 6 = -86$ 이므로
 $a_6 - a_{10} = 56$

812 ㉮ 7

$a_{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a_1$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} a_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a_1$$

$$a_4 = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} a_3 = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a_1$$

⋮

$$\therefore a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} a_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \times \cdots \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a_1 \\
&= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \times \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} \times \cdots \times \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}$$

$$a_k = 1 \text{에서 } \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{k+1}} = 1$$

$$\sqrt{k+1} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}, k+1=8 \quad \therefore k=7$$

813 ㉮ $\frac{1}{2}$

$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{a_1 - 1}{a_1} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{a_2 - 1}{a_2} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2}} = -1$$

$$a_4 = \frac{a_3 - 1}{a_3} = \frac{-1-1}{-1} = 2$$

$$a_5 = \frac{a_4 - 1}{a_4} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_6 = \frac{a_5 - 1}{a_5} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2}} = -1$$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 $2, \frac{1}{2}, -1$ 이 이 순서대로 반복된다.

이때 $200 = 3 \times 66 + 2$ 이므로

$$a_{200} = \frac{1}{2}$$

814 ㉮ $a_{n+1} = a_n + n (n=1, 2, 3, \dots)$

교점의 개수가 최대가 되려면 어느 두 직선도 평행하지 않아야 하고, 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않아야 한다. 이와 같은 방법으로 n 개의 직선에 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 n 개의 직선과 각각 한 번씩 만날 수 있으므로 교점은 최대 n 개가 추가로 생긴다.

따라서 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식은

$$a_{n+1} = a_n + n (n=1, 2, 3, \dots)$$

815 ㉮ ④

$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$, 즉 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 공차를 d 라 하면

$$a_2 = 2a_1 \text{에서 } a_1 + d = 2a_1$$

$$\therefore a_1 = d$$

$$a_{10} = 50 \text{에서 } a_1 + 9d = 50$$

$$10a_1 = 50 \quad \therefore a_1 = 5$$

따라서 $a_1 = d = 5$ 이므로

$$a_6 = 5 + 5 \times 5 = 30$$

816 ㉮ ②

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = (-a_{n+1})^2 - a_{n+2}a_n = 0$$

$$\therefore a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고 첫째항이 1, 공비

$$\text{가 } \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2 \text{이므로}$$

$$a_{20} = 1 \times 2^{19} = 2^{19}$$

817 ㉔ 40

$a_{n+1}=a_n+4^n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2=a_1+4$$

$$a_3=a_2+4^2=a_1+4+4^2$$

$$a_4=a_3+4^3=a_1+4+4^2+4^3$$

⋮

$$\therefore a_n=a_{n-1}+4^{n-1}=a_1+4+4^2+4^3+\cdots+4^{n-1}$$

$$=\frac{4}{3}+\sum_{k=1}^{n-1}4^k=\frac{4}{3}+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}$$

$$=\frac{4^n}{3} \quad \text{⋯⋯⋯ ①}$$

따라서 $a_{20}=\frac{4^{20}}{3}$ 이므로

$$\log_2 3a_{20}=\log_2 \left(3 \times \frac{4^{20}}{3}\right)=\log_2 4^{20}$$

$$=\log_2 2^{40}=40 \quad \text{⋯⋯⋯ ②}$$

단계	채점 기준	비율
①	일반항 a_n 구하기	70 %
②	$\log_2 3a_{20}$ 의 값 구하기	30 %

818 ㉔ 10

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+n & (a_n \text{은 짝수}) \\ a_n-1 & (a_n \text{은 홀수}) \end{cases} \text{의 } n \text{에 } 1, 2, 3, \dots, 6 \text{을}$$

차례로 대입하면

$$a_2=a_1-1=3-1=2$$

$$a_3=a_2+2=2+2=4$$

$$a_4=a_3+3=4+3=7$$

$$a_5=a_4-1=7-1=6$$

$$a_6=a_5+5=6+5=11$$

$$\therefore a_7=a_6-1=11-1=10$$

819 ㉔ $-\frac{1}{2^{15}}$

$$3S_n=a_n+5 \text{에서 } 3S_{n+1}=a_{n+1}+5$$

$$\text{한편 } a_{n+1}=S_{n+1}-S_n \ (n=1, 2, 3, \dots) \text{이므로}$$

$$3a_{n+1}=3S_{n+1}-3S_n=a_{n+1}+5-(a_n+5)$$

$$\therefore a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 첫째

항을 a 라 하면

$$a_{10}=-\frac{1}{32} \text{에서 } a \times \left(-\frac{1}{2}\right)^9=-\frac{1}{32} \quad \therefore a=16$$

$$\therefore a_{20}=16 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{19}=-\frac{1}{2^{15}}$$

820 ㉔ (가) $\frac{1}{3}$ (나) $\frac{2m+1}{3^{m+1}}$ (다) $m+2$

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변})=\frac{2 \times 1-1}{3^1}=\frac{1}{3}$$

$$(\text{우변})=1-\frac{1+1}{3^1}=\frac{1}{3}$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m \frac{2k-1}{3^k}=1-\frac{m+1}{3^m}$$

이 등식의 양변에 $\frac{2m+1}{3^{m+1}}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{2k-1}{3^k} &= 1-\frac{m+1}{3^m} + \frac{2m+1}{3^{m+1}} \\ &= 1-\frac{m+2}{3^{m+1}} \end{aligned}$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

821 ㉔ ③

(i) $n=1$ 일 때 $2 \leq \frac{1}{\sqrt{4}}$ 이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 (★)이 성립하다고 가정하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{2k-1}{2k} &< \frac{2k+1}{2k+2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \times \frac{2k+1}{2k+2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \times \frac{1}{1+\frac{1}{2k+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \times \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \times \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{2k+1}+\left(\frac{1}{2k+1}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1) \times \left(\frac{1}{2k+1}\right) + (3k+1) \times \left(\frac{1}{2k+1}\right)^2}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1) \times \left(\frac{1}{2k+1}\right) + (2k+1) \times \left(\frac{1}{2k+1}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 (★)이 성립한다.
그러므로 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 (★)
이 성립한다.

따라서 $f(k) = \frac{1}{2k+1}$, $g(k) = 2k+1$ 이므로

$$f(4) \times g(13) = \frac{1}{9} \times 27 = 3$$

822 ㉡ 42

| 접근 방법 | 주어진 식의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하여
일반항 a_n 을 구한다.

$a_{n+1} - a_n = f(n)$, 즉 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 의 n 에 1, 2,
3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 + f(1)$$

$$a_3 = a_2 + f(2) = a_1 + f(1) + f(2)$$

$$a_4 = a_3 + f(3) = a_1 + f(1) + f(2) + f(3)$$

⋮

$$\therefore a_n = a_{n-1} + f(n-1)$$

$$= a_1 + f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n-1)$$

$$= 5 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

주어진 그래프에서 $f(1)=1$, $f(2)=2$,

$f(3)=f(-1)=1$, $f(4)=f(0)=0$ 이고 함수 $f(x)$
의 주기는 4이다.

따라서 $a_{38} = 5 + \sum_{k=1}^{37} f(k)$ 이고 $37=4 \times 9 + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} a_{38} &= 5 + \{f(1) + f(2) + f(3) + f(4)\} \times 9 + f(1) \\ &= 5 + (1+2+1+0) \times 9 + 1 \\ &= 42 \end{aligned}$$

823 ㉡ ⑤

| 접근 방법 | 흰색 삼각형의 개수와 검은색 삼각형의 개수 각각
의 규칙성을 찾아 두 수열의 일반항을 구한다.

n 회 시행 후의 흰색 삼각형의 개수를 a_n , 검은색 삼각
형의 개수를 b_n 이라 하면

$$a_n + b_n = 4^n \quad \therefore b_n = 4^n - a_n$$

n 회 시행 후 만들어진 흰색 삼각형 1개와 검은색 삼각
형 1개에 대하여 1회 시행하였을 때 만들어지는 흰색
삼각형은 각각 3개, 1개이므로

$$a_{n+1} = 3a_n + b_n = 3a_n + (4^n - a_n)$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n + 4^n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

주어진 그림에서 $a_1=3$, $a_2=10$ 이므로 ⑦의 n 에 2,
3, 4를 대입하면

$$a_3 = 2a_2 + 4^2 = 36$$

$$a_4 = 2a_3 + 4^3 = 136$$

$$a_5 = 2a_4 + 4^4 = 528$$

따라서 구하는 흰색 삼각형의 개수는 528이다.

