

자습서
정답친해

／
고등
기하
／





I 이차곡선

Plus 연습

1 이차곡선

01 포물선 9~16쪽

01 (1) $y^2=4px$ 에서 $p=6$ 이므로

$$y^2=24x$$

(2) $y^2=4px$ 에서 $p=-4$ 이므로

$$y^2=-16x$$

02 (1) $y^2=6x=4 \times \frac{3}{2}x$ 이므로

$$p=\frac{3}{2}$$

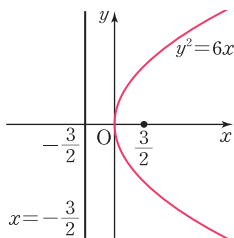
따라서 초점의 좌표는

$$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

준선의 방정식은

$$x=-\frac{3}{2}$$

또 포물선은 오른쪽 그림과 같다.



(2) $y^2=-3x=4 \times \left(-\frac{3}{4}\right)x$ 이므로

$$p=-\frac{3}{4}$$

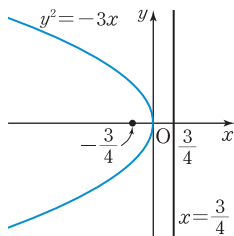
따라서 초점의 좌표는

$$\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$$

준선의 방정식은

$$x=\frac{3}{4}$$

또 포물선은 오른쪽 그림과 같다.



03 (1) $x^2=4py$ 에서 $p=4$ 이므로 $x^2=16y$

(2) $x^2=4py$ 에서 $p=-\frac{1}{2}$ 이므로 $x^2=-2y$

04 원 $x^2+(y-3)^2=0$ 의 중심의 좌표는 $(0, 3)$ 이므로 초점의 좌표는 $(0, 3)$

이때 꼭짓점이 원점이고, $x^2=4py$ 에서 $p=3$ 이므로 구하는 포물선의 방정식은

$$x^2=12y$$

05 (1) $x^2=12y=4 \times 3y$ 이므로

$$p=3$$

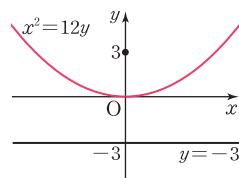
따라서 초점의 좌표는

$$(0, 3)$$

준선의 방정식은

$$y=-3$$

또 포물선은 오른쪽 그림과 같다.



(2) $x^2=-5y=4 \times \left(-\frac{5}{4}\right)y$ 이므로

$$p=-\frac{5}{4}$$

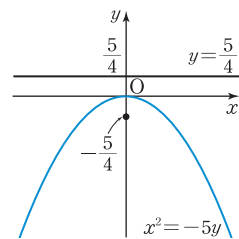
따라서 초점의 좌표는

$$\left(0, -\frac{5}{4}\right)$$

준선의 방정식은

$$y=\frac{5}{4}$$

또 포물선은 오른쪽 그림과 같다.



06 $y^2=16x=4 \times 4x$ 에서 $p=4$ 이므로 준선의 방정식은 $x=-4$

두 점 A, B에서 준선 $x=-4$ 에 내린 수선의 발을 각각 C', D'이라고 하면

$$\overline{AC'}=\overline{AF},$$

$$\overline{BD'}=\overline{BF}$$

이므로

$$\overline{AC'}+\overline{BD'}$$

$$=\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AB}$$

$$\overline{AC}=\overline{AC'}-4, \overline{BD}=\overline{BD'}-4 \text{이므로}$$

사다리꼴 ACDB의 둘레의 길이는

$$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{BD}$$

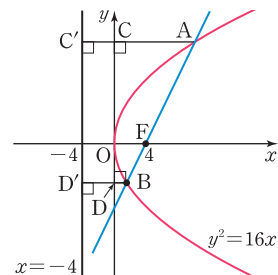
$$=\overline{AB}+(\overline{AC'}-4)+12+(\overline{BD'}-4)$$

$$=\overline{AB}+(\overline{AC'}+\overline{BD'})+4$$

$$=2\overline{AB}+4$$

이때 사다리꼴 ACDB의 둘레의 길이가 30이므로

$$2\overline{AB}+4=30, \overline{AB}=13$$



02 타원 17~24쪽

01 (1) $2a=8$ 에서 $a=4$

$$c=\sqrt{2} \text{에서 } b^2=a^2-c^2=16-2=14$$

따라서 구하는 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{14}=1$

(2) $2a=6$ 에서 $a=3$

$$c=1 \text{에서 } b^2=a^2-c^2=9-1=8$$

따라서 구하는 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$

- 02 (1) $a=7, b=5$ 이므로

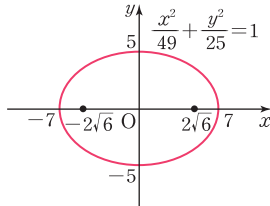
$$c = \sqrt{7^2 - 5^2} = 2\sqrt{6}$$

따라서 초점의 좌표는 $(2\sqrt{6}, 0), (-2\sqrt{6}, 0)$

장축의 길이는 $2a=14$

단축의 길이는 $2b=10$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(7, 0), (-7, 0), (0, 5), (0, -5)$ 이고, 타원은 다음 그림과 같다.



- (2) 주어진 타원의 방정식을 변형하면 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 12$

$a=2, b=\sqrt{3}$ 이므로

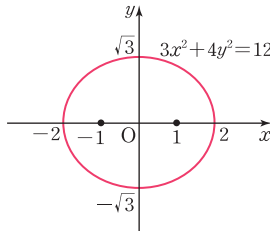
$$c = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$$

따라서 초점의 좌표는 $(1, 0), (-1, 0)$

장축의 길이는 $2a=4$

단축의 길이는 $2b=2\sqrt{3}$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(2, 0), (-2, 0), (0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$ 이고, 타원은 다음 그림과 같다.

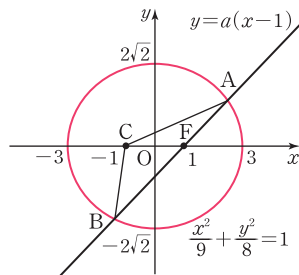


- 03 타원의 방정식 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ 에서 $a=3, b=2\sqrt{2}$ 이므로

$$c = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 1$$

이때 한 초점을 F라고 하면 두 초점의 좌표는

$F(1, 0), C(-1, 0)$



한편 직선 $y=a(x-1)$ 은 a 의 값에 관계없이 점

$(1, 0)$, 즉 점 F를 지나므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{AC} + \overline{AF} = \overline{BC} + \overline{BF} = (\text{장축의 길이}) = 2a = 6$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} &= \overline{AF} + \overline{BF} + \overline{BC} + \overline{CA} \\ &= (\overline{AC} + \overline{AF}) + (\overline{BC} + \overline{BF}) \\ &= 6 + 6 = 12 \end{aligned}$$

- 04 (1) $2b=6$ 에서 $b=3$

$$c = \sqrt{3} \text{에서 } a^2 = b^2 - c^2 = 9 - 3 = 6$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$$

- (2) $2b=12$ 에서 $b=6$

$$c=5 \text{에서 } a^2 = b^2 - c^2 = 36 - 25 = 11$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{36} = 1$$

- 05 (1) $a=2\sqrt{6}, b=7$ 이므로

$$c = \sqrt{7^2 - (2\sqrt{6})^2} = 5$$

따라서 초점의 좌표는 $(0, 5), (0, -5)$

장축의 길이는 $2b=14$

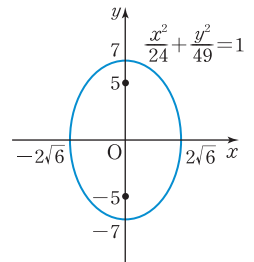
단축의 길이는 $2a=4\sqrt{6}$

이때 꼭짓점의 좌표는

$(2\sqrt{6}, 0), (-2\sqrt{6}, 0),$

$(0, 7), (0, -7)$ 이고,

타원은 오른쪽 그림과 같다.



- (2) 주어진 타원의 방정식을 변형하면 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$

$a=\sqrt{7}, b=4$ 이므로

$$c = \sqrt{4^2 - (\sqrt{7})^2} = 3$$

따라서 초점의 좌표는 $(0, 3), (0, -3)$

장축의 길이는 $2b=8$

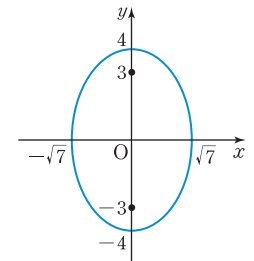
단축의 길이는 $2a=2\sqrt{7}$

이때 꼭짓점의 좌표는

$(\sqrt{7}, 0), (-\sqrt{7}, 0),$

$(0, 4), (0, -4)$ 이고,

타원은 오른쪽 그림과 같다.



- 06 주어진 타원의 장축이 선분 AB와 평행하므로 이 타원의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > a > 0)$$

이라고 하자.

장축의 길이는 직사각형 ABCD의 세로의 길이와 같으므로 $2b=12, b=6$

단축의 길이는 직사각형 ABCD의 가로의 길이와 같으므로 $2a=8, a=4$

한편 $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$ 이므로 두 초점의 좌표는 $(0, 2\sqrt{5}), (0, -2\sqrt{5})$

따라서 두 초점 사이의 거리는 $4\sqrt{5}$ 이다.

- 01 (1) $2a=12$ 에서 $a=6$
 $c=8$ 에서 $b^2=c^2-a^2=64-36=28$
 따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{28}=1$$
- (2) $2a=6$ 에서 $a=3$
 $c=5$ 에서 $b^2=c^2-a^2=25-9=16$
 따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$
- 02 (1) $a=2\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{2}$ 이므로
 $c=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{5}$
 따라서 초점의 좌표는 $(2\sqrt{5}, 0)$, $(-2\sqrt{5}, 0)$
 꼭짓점의 좌표는 $(2\sqrt{3}, 0)$, $(-2\sqrt{3}, 0)$
 주축의 길이는 $2a=4\sqrt{3}$
- (2) 주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1$$

 $a=3$, $b=\sqrt{2}$ 이므로
 $c=\sqrt{3^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{11}$
 따라서 초점의 좌표는 $(\sqrt{11}, 0)$, $(-\sqrt{11}, 0)$
 꼭짓점의 좌표는 $(3, 0)$, $(-3, 0)$
 주축의 길이는 $2a=6$
- 03 (1) $2b=6$ 에서 $b=3$
 $c=4$ 에서 $a^2=c^2-b^2=16-9=7$
 따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=-1$$
- (2) $2b=2$ 에서 $b=1$
 $c=\sqrt{6}$ 에서 $a^2=c^2-b^2=6-1=5$
 따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{5}-y^2=-1$$
- 04 (1) $a=2$, $b=\sqrt{3}$ 이므로
 $c=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$
 따라서 초점의 좌표는 $(0, \sqrt{7})$, $(0, -\sqrt{7})$
 꼭짓점의 좌표는 $(0, \sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$
 주축의 길이는 $2b=2\sqrt{3}$
- (2) 주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면

$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{9}=-1$$

 $a=\sqrt{5}$, $b=3$ 이므로
 $c=\sqrt{(\sqrt{5})^2+3^2}=\sqrt{14}$
 따라서 초점의 좌표는 $(0, \sqrt{14})$, $(0, -\sqrt{14})$
 꼭짓점의 좌표는 $(0, 3)$, $(0, -3)$
 주축의 길이는 $2b=6$

- 05 타원의 방정식 $5x^2+2y^2=10$ 을 변형하면

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5}=1$$

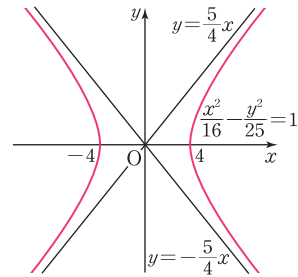
 이때 타원의 초점의 좌표는 $(0, \sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$
 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 의 주축의 길이가 2이므로
 $2b=2$, $b=1$
 이 쌍곡선이 주어진 타원과 초점을 공유하므로
 $(\sqrt{3})^2=a^2+b^2$
 $b=1$ 이므로 $3=a^2+1$, $a^2=2$
 따라서 $a^2-b^2=2-1=1$

- 06 두 점 C, D는 두 점 A, B를 초점으로 하는 쌍곡선 위의 점이므로 이 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0, b>0)$$

 이라고 하자.
 두 초점의 좌표는 $A(-8, 0)$, $B(8, 0)$ 이므로
 $c=8$
 이때 $\overline{BC}=\overline{AC}+10$, $\overline{AD}=\overline{BD}+10$, 즉
 $\overline{BC}-\overline{AC}=10$, $\overline{AD}-\overline{BD}=10$ 이므로 이 쌍곡선은
 두 초점 A, B로부터 거리의 차이가 10이다.
 $2a=10$ 에서 $a=5$
 $c=8$ 에서 $b^2=c^2-a^2=64-25=39$
 따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{39}=1$

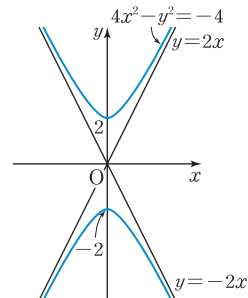
- 07 (1) $a=4$, $b=5$ 이므로 점근선의 방정식은 $y=\pm\frac{5}{4}x$
 이고, 쌍곡선은 다음 그림과 같다.



- (2) 주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면

$$x^2-\frac{y^2}{4}=-1$$

- $a=1$, $b=2$ 이므로 점근선의 방정식은 $y=\pm 2x$ 이고, 쌍곡선은 다음 그림과 같다.



08 구하는 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (a > 0, b > 0)$$

이라고 하자.

두 초점의 좌표가 $F(0, 4)$, $F'(0, -4)$ 이므로

$$4^2 = a^2 + b^2 \quad \dots\dots ①$$

또 점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, a = \sqrt{3}b \quad \dots\dots ②$$

②를 ①에 대입하면

$$16 = (\sqrt{3}b)^2 + b^2, b^2 = 4$$

$b^2 = 4$ 를 ①에 대입하면

$$16 = a^2 + 4, a^2 = 12$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = -1$$

09 (1) 주어진 포물선의 방정식을 변형하면

$$(y+1)^2 = 4(x-1)$$

이 포물선은 포물선 $y^2 = 4x$ 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점의 좌표는 $(1, 0)$ 이므로 구하는 포물선의 초점의 좌표는 $(2, -1)$

(2) 주어진 타원의 방정식을 변형하면

$$3(x+2)^2 + 4(y-1)^2 = 12$$

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$$

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 의 초점의 좌표는 $(1, 0)$,

$(-1, 0)$ 이므로 구하는 타원의 초점의 좌표는 $(-1, 1)$, $(-3, 1)$

(3) 주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면

$$2(x-3)^2 - 5(y+1)^2 = -10$$

$$\frac{(x-3)^2}{5} - \frac{(y+1)^2}{2} = -1$$

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = -1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = -1$ 의 초점의 좌표는 $(0, \sqrt{7})$,

$(0, -\sqrt{7})$ 이므로 구하는 쌍곡선의 초점의 좌표는 $(3, -1+\sqrt{7})$, $(3, -1-\sqrt{7})$

10 (1) $4x - y^2 - 16y - 64 = 0$ 을 변형하면

$$(y+8)^2 = 4x$$

따라서 주어진 방정식이 나타내는 도형은 포물선이다.

(2) $x^2 - 2y^2 - 4x - 12y - 18 = 0$ 을 변형하면

$$(x-2)^2 - 2(y+3)^2 = 4$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{2} = 1$$

따라서 주어진 방정식이 나타내는 도형은 쌍곡선이다.

(3) $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$ 을 변형하면

$$(x+3)^2 + y^2 = 25$$

따라서 주어진 방정식이 나타내는 도형은 원이다.

(4) $3x^2 + y^2 + 12x - 8y + 19 = 0$ 을 변형하면

$$3(x+2)^2 + (y-4)^2 = 9$$

$$\frac{(x+2)^2}{3} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

따라서 주어진 방정식이 나타내는 도형은 타원이다.

2 이차곡선과 직선

01 이차곡선과 직선 46~57쪽

01 (1) $x = -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$ 를 $y^2 = -4x$ 에 대입하여 정리하면

$$y^2 = -4\left(-\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}\right), 3y^2 - 4y + 8 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 3 \times 8 = -20 < 0$$

따라서 직선 $3x + y = 2$ 와 포물선 $y^2 = -4x$ 는 만나지 않는다.

(2) $y = -3x + 2$ 를 $3x^2 - y^2 = -6$ 에 대입하여 정리하면

$$3x^2 - (-3x + 2)^2 = -6, 3x^2 - 6x - 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 3 \times (-1) = 12 > 0$$

따라서 직선 $3x + y = 2$ 와 쌍곡선 $3x^2 - y^2 = -6$ 은 서로 다른 두 점에서 만난다.

다른 풀이 (1) $y = -3x + 2$ 를 $y^2 = -4x$ 에 대입하여 정리하면

$$(-3x + 2)^2 = -4x, 9x^2 - 8x + 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-4)^2 - 9 \times 4 = -20 < 0$$

따라서 직선 $3x + y = 2$ 와 포물선 $y^2 = -4x$ 는 만나지 않는다.

02 $y = x + k$ 를 $5x^2 + 8y^2 = 40$ 에 대입하여 정리하면

$$5x^2 + 8(x+k)^2 = 40$$

$$13x^2 + 16kx + 8k^2 - 40 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (8k)^2 - 13(8k^2 - 40) \\ = -40k^2 + 520$$

타원과 직선이 만나지 않으려면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$-40k^2 + 520 < 0, k^2 > 13$$

따라서 $k < -\sqrt{13}$ 또는 $k > \sqrt{13}$

- 03 (1) $y^2 = -4x = 4 \times (-1)x$ 이므로 $p = -1$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{-1}{\frac{1}{2}}, y = \frac{1}{2}x - 2$$

- (2) 주어진 타원의 방정식을 변형하면

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

이때 구하는 직선이 직선 $y = -2x - 1$ 과 평행하므로 기울기는 -2 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = -2x \pm \sqrt{25 \times (-2)^2 + 4} \\ y = -2x \pm 2\sqrt{26}$$

- (3) 주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면

$$\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{2} = 1$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{7 \times 3^2 - 2} \\ y = 3x \pm \sqrt{61}$$

- 04 (1) $y^2 = -\frac{1}{2}x = 4 \times \left(-\frac{1}{8}\right)x$ 이므로 $p = -\frac{1}{8}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$-2y = 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right)(x - 8), y = \frac{1}{8}x - 1$$

- (2) 구하는 접선의 방정식은

$$2 \times 5x + 5 \times 2y = 70, x + y - 7 = 0$$

- (3) 구하는 접선의 방정식은

$$\frac{-6x}{4} - \frac{4y}{2} = 1, 3x + 4y + 2 = 0$$

- 05 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(4, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} = 1, y = \frac{2b^2}{a^2}x - \frac{b^2}{2}$$

이때 접선의 기울기가 2이므로

$$\frac{2b^2}{a^2} = 2, a^2 = b^2 \quad \dots\dots ①$$

또 점 $P(4, 2)$ 가 쌍곡선 위의 점이므로

$$\frac{16}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \quad \dots\dots ②$$

①을 ②에 대입하면 $\frac{16}{a^2} - \frac{4}{a^2} = 1, a^2 = 12$

$a^2 = 12$ 를 ①에 대입하면 $b^2 = 12$

따라서 $a^2 + b^2 = 24$

- 06 쌍곡선 $5x^2 - y^2 = 10$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$5ax - by = 10$$

이 직선이 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는 각각

$$\left(\frac{2}{a}, 0\right), \left(0, -\frac{10}{b}\right)$$

이때 $a > 0, b > 0$ 이고, 접선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 5이므로

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{a} \times \frac{10}{b} = 5, ab = 2$$

- 07 접점을 $P(x_1, y_1)$ 이라고 하면 구하는 접선의 방정식은

$$5x_1x + 9y_1y = 180$$

이 직선이 점 $(6, -5)$ 를 지나므로

$$30x_1 - 45y_1 = 180, 2x_1 - 3y_1 = 12 \quad \dots\dots ①$$

또 점 $P(x_1, y_1)$ 은 타원 위의 점이므로

$$5x_1^2 + 9y_1^2 = 180 \quad \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$x_1 = 6, y_1 = 0 \text{ 또는 } x_1 = -\frac{2}{3}, y_1 = -\frac{40}{9}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$30x = 180 \text{ 또는 } -\frac{10}{3}x - 40y = 180$$

즉, $x = 6$ 또는 $x + 12y + 54 = 0$

시험 대비 대단원 TEST

..... 76~78쪽

1 8	2 10	3 10	4 15	5 12
6 ③	7 ④	8 ㄱ, ㄴ	9 6	10 43
11 $-\sqrt{6}$	12 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$	13 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$	14 -2	15 $3\sqrt{2}$
16 $16\sqrt{6}$	17 $2\sqrt{2}$	18 2	19 -3	20 $\frac{16\sqrt{3}}{3}$
21 $-\frac{9}{16}$				

- 1 점 $P(x, y)$ 가 나타내는 도형은 초점이 $F(2, 0)$ 이고 준선이 $x = -2$ 인 포물선이므로

$$y^2 = 4 \times 2x = 8x$$

이때 이 포물선이 점 $(a, 8)$ 을 지나므로

$$8^2 = 8a, a = 8$$

다른 풀이 점 $P(x, y)$ 에서 직선 $x = -2$ 에 내린 수선의 발을 H 라고 하면 점 H 의 좌표는 $(-2, y)$

이때 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = |x+2|$$

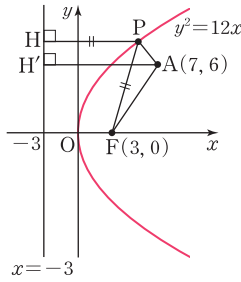
위의 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$(x-2)^2 + y^2 = (x+2)^2, y^2 = 8x$$

이때 이 도형이 점 $(a, 8)$ 을 지나므로

$$8^2 = 8a, a = 8$$

- 2 포물선의 방정식 $y^2=12x=4 \times 3x$ 에서 $p=3$ 이므로 초점의 좌표는 $F(3, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-3$ 이다. 다음 그림과 같이 두 점 P, A에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라고 하자.



포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로
 $\overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PH}$
 $\geq \overline{AH'}$
 따라서 $\overline{AP} + \overline{PF}$ 의 최솟값은
 $\overline{AH'} = |7 - (-3)| = 10$

- 3 포물선의 방정식 $x^2=-16y=4 \times (-4)y$ 에서 $p=-4$ 이므로 초점의 좌표는 $(0, -4)$ 타원의 한 초점이 포물선의 초점과 일치하므로 타원의 초점은 y 축 위에 있다.

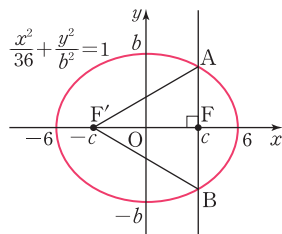
이때 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 초점의 좌표는
 $(0, \sqrt{b^2-9}), (0, -\sqrt{b^2-9})$
 이므로 $-4 = -\sqrt{b^2-9}$
 양변을 제곱하여 정리하면
 $16 = b^2 - 9, b^2 = 25$
 $b > 0$ 이므로 $b = 5$
 따라서 구하는 장축의 길이는 $2b = 10$

- 4 초점이 y 축 위에 있고, 두 초점 사이의 거리가 $2\sqrt{6}$ 이므로 두 초점의 좌표는

$(0, \sqrt{6}), (0, -\sqrt{6})$
 장축의 길이가 6이므로 $2b = 6, b = 3$
 $a^2 = b^2 - (\sqrt{6})^2$ 이므로 $a^2 = 9 - 6 = 3$
 따라서 $2a^2 + b^2 = 2 \times 3 + 3^2 = 15$

- 5 $\overline{AF} = \overline{BF}$ 이므로 $\overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ 이고, 삼각형 $AF'B$ 가 정삼각형이므로

$$\overline{AF'} = \overline{AB} = 2\overline{AF} \quad \dots\dots ①$$



한편 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 즉 $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 장축의 길이는 $2 \times 6 = 12$ 이므로 타원의 정의에 의하여
 $\overline{AF} + \overline{AF'} = 12 \quad \dots\dots ②$

①, ②에서 $\overline{AF} = 4, \overline{AF'} = 8$
 $\angle AFF' = 90^\circ$ 이므로 직각삼각형 $AF'F$ 에서
 $\overline{FF'} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$

즉, 두 초점 사이의 거리가 $4\sqrt{3}$ 이므로 $c = 2\sqrt{3}$
 $b^2 = 6^2 - c^2$ 이므로 $b^2 = 36 - 12 = 24$
 따라서 $b^2 - c^2 = 24 - (2\sqrt{3})^2 = 12$

- 6 $\overline{AF} - \overline{AF'} = 8$ 이므로 $2a = 8, a = 4$
 이때 두 초점 F, F'의 좌표는 $(\sqrt{4^2+9}, 0), (-\sqrt{4^2+9}, 0)$, 즉 $(5, 0), (-5, 0)$ 이다.
 따라서 $\overline{FF'} = |5 - (-5)| = 10$
 그러므로 ③이다.

- 7 쌍곡선의 방정식을
 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$

이라고 하면
 $5 = \sqrt{a^2 + b^2}, a^2 + b^2 = 25$
 주축의 길이가 6이므로 $2a = 6, a = 3$
 $a = 3$ 을 $a^2 + b^2 = 25$ 에 대입하면
 $3^2 + b^2 = 25, b^2 = 16$
 이때 $b > 0$ 이므로 $b = 4$

직선 l 은 기울기가 양수인 쌍곡선의 점근선이므로 직선 l 의 방정식은

$$y = \frac{4}{3}x, 4x - 3y = 0$$

따라서 점 $F(5, 0)$ 과 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|20|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 4$$

그러므로 ④이다.

- 8 주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면
 $4(x-3)^2 - (y-1)^2 = 4$
 $(x-3)^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

즉, 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 에서
 초점의 좌표는 $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$
 꼭짓점의 좌표는 $(1, 0), (-1, 0)$
 주축의 길이는 2
 점근선의 방정식은 $y = \pm 2x$

따라서 쌍곡선 $4x^2 - y^2 - 24x + 2y + 31 = 0$ 에서
 ㄱ. 초점의 좌표는 $(3 + \sqrt{5}, 1), (3 - \sqrt{5}, 1)$
 ㄴ. 꼭짓점의 좌표는 $(4, 1), (2, 1)$
 ㄷ. 주축의 길이는 변하지 않으므로 2이다.
 ㄹ. 점근선의 방정식은 $y - 1 = \pm 2(x - 3)$ 이므로
 $y = 2x - 5, y = -2x + 7$

그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

- 9 쌍곡선 $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ 의 초점 F의 좌표는

$(\sqrt{64+36}, 0)$, 즉 $(10, 0)$ 이다.

또 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{6}{8}x, y = \pm \frac{3}{4}x$$

두 직선 $y = \frac{3}{4}x, y = -\frac{3}{4}x$ 는 x 축에 대하여 서로 대칭이므로 x 축 위의 점에서 두 점근선에 이르는 거리는 같다.

따라서 초점 F(10, 0)을 중심으로 하고 두 점근선에 접하는 원의 반지름의 길이는 점 (10, 0)에서 직선

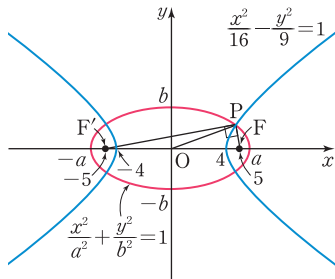
$y = \frac{3}{4}x$, 즉 $3x - 4y = 0$ 에 이르는 거리와 같으므로

$$\frac{|30|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 6$$

- 10 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 $c = \sqrt{16+9} = 5$

이므로 초점의 좌표는 F(5, 0), F(-5, 0)이다.

이때 $\overline{OP} = 5, \overline{OF} = \overline{OF'} = 5$ 이므로 삼각형 PF'F는 직각삼각형이다.



타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a \quad \dots\dots ①$$

쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 8 \quad \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$\overline{PF'} = a + 4, \overline{PF} = a - 4$$

직각삼각형 PF'F에서 $\overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 = \overline{FF'}^2$ 이므로

$$(a + 4)^2 + (a - 4)^2 = 10^2$$

$$2a^2 + 32 = 100, a^2 = 34$$

한편 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서 $b^2 = a^2 - c^2$ 이므로

$$b^2 = 34 - 5^2, b^2 = 9$$

따라서 $a^2 + b^2 = 43$

- 11 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{4 \times 3^2 - 12}, y = 3x \pm 2\sqrt{6}$$

이 직선이 점 (k, k) 를 지나므로

$$k = 3k \pm 2\sqrt{6}, k = \pm \sqrt{6}$$

이때 $k < 0$ 이므로 $k = -\sqrt{6}$

- 12 타원 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{6 \times 2^2 + 12}, y = 2x \pm 6$$

따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는 직선

$y = 2x + 6$ 위의 한 점 (0, 6)과 직선 $y = 2x - 6$, 즉

$2x - y - 6 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-6-6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

- 13 포물선의 방정식 $x^2 = 8y = 4 \times 2y$ 에서 $p = 2$ 이므로

포물선 위의 점 $(2, \frac{1}{2})$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x = 2 \times 2(y + \frac{1}{2}), y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

이 접선과 평행하고 점 $(-4, 2)$ 를 지나는 직선 l 의 방정식은

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x + 4), x - 2y + 8 = 0$$

한편 포물선 $x^2 = 8y$ 의 초점의 좌표는 F(0, 2)이므로

점 F와 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|-4+8|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

- 14 직선 $y = -x + 1$ 에 수직인 직선의 기울기를 m 이라고 하면

$$m \times (-1) = -1, m = 1$$

포물선의 방정식 $y^2 = 12x = 4 \times 3x$ 에서 $p = 3$ 이므로

포물선에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y = x + 3$$

이 직선이 점 $(a, 1)$ 을 지나므로

$$1 = a + 3, a = -2$$

다른 풀이 접점 $P(x_1, y_1)$ 이라고 하면 포물선의 방정식

$y^2 = 12x = 4 \times 3x$ 에서 $p = 3$ 이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y_1 y = 2 \times 3(x + x_1), y = \frac{6}{y_1}x + \frac{6x_1}{y_1} \quad (\text{단, } y_1 \neq 0)$$

이 접선이 직선 $y = -x + 1$ 에 수직이므로

$$\frac{6}{y_1} \times (-1) = -1, y_1 = 6$$

점 P($x_1, 6$)은 포물선 $y^2 = 12x$ 위의 점이므로

$$36 = 12x_1, x_1 = 3$$

즉, 접선의 방정식은 $y = x + 3$

이 접선이 점 $(a, 1)$ 을 지나므로

$$1 = a + 3, a = -2$$

- 15 점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 이라고 하면 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은
- $$\frac{x_1 x}{9} + \frac{y_1 y}{4} = 1$$
- 이 접선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로
- $$\frac{ax_1}{9} = 1, x_1 = \frac{9}{a} \quad \dots\dots ①$$
- $\overline{OP} = \overline{AP}$ 이므로
- $$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{(x_1 - a)^2 + y_1^2}$$
- 양변을 제곱하여 정리하면
- $$x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 - 2ax_1 + a^2 + y_1^2$$
- $$2ax_1 = a^2, x_1 = \frac{a}{2} \quad \dots\dots ②$$
- ①, ②에서 $\frac{9}{a} = \frac{a}{2}, a^2 = 18$
 이때 $a > 0$ 이므로 $a = 3\sqrt{2}$
- 16 포물선의 방정식 $y^2 = 4x$ 에서 $p = 1$ 이므로 초점의 좌표는 $F(1, 0)$, 준선의 방정식은 $x = -1$ 이다. ▶ 10%
- 점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H라고 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{AH} = \overline{AF} = 3$ 이므로
- $$2 + \overline{FH_1} = 3, \overline{FH_1} = 1 \quad \text{▶ 15\%}$$
- 이때 직각삼각형 $\triangle AFH_1$ 에서
- $$\overline{AH_1} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2} \quad \text{▶ 15\%}$$
- 같은 방법으로 하면
- $$\overline{FH_2} = 4 - 2 = 2, \overline{FH_3} = 5 - 2 = 3$$
- 이고, 두 직각삼각형 $\triangle BFH_2, \triangle CFH_3$ 에서
- $$\overline{BH_2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$
- $$\overline{CH_3} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \quad \text{▶ 50\%}$$
- 따라서 $\overline{AH_1} \times \overline{BH_2} \times \overline{CH_3} = 16\sqrt{6}$ ▶ 10%
- 17 타원의 두 초점이 x축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 초점의 좌표를 $(c, 0), (-c, 0)$ 이라고 하자. ▶ 10%
- 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 과 두 초점을 공유하므로
- $$5 = 9 - c^2, c^2 = 4$$
- 이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서 $c^2 = a^2 + b^2$ 이므로
- $$a^2 + b^2 = 4 \quad \dots\dots ① \quad \text{▶ 30\%}$$
- 또 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 이고, 두 점근선이 서로 수직이므로
- $$\frac{b}{a} \times \left(-\frac{b}{a}\right) = -1$$
- $$b^2 = a^2 \quad \dots\dots ② \quad \text{▶ 30\%}$$
- ①, ②를 연립하여 풀면 $a^2 = 2, b^2 = 2$ ▶ 10%
- 따라서 $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$ 이므로 주축의 길이는 $2a = 2\sqrt{2}$ ▶ 20%

- 18 $\overline{PF'}, \overline{PF}$ 의 길이를 각각 구하면
- $$\overline{PF'} = \sqrt{(-3-3)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{10}$$
- $$\overline{PF} = 2 \quad \text{▶ 20\%}$$
- 타원의 장축의 길이는 $\overline{PF'} + \overline{PF} = 2\sqrt{10} + 2$ 이므로
- $$\overline{OB} = \sqrt{10} + 1 \quad \text{▶ 30\%}$$
- 또 쌍곡선의 주축의 길이는 $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2\sqrt{10} - 2$ 이므로
- $$\overline{OA} = \sqrt{10} - 1 \quad \text{▶ 30\%}$$
- 따라서 $\overline{AB}$ 의 길이는
- $$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (\sqrt{10} + 1) - (\sqrt{10} - 1) = 2 \quad \text{▶ 20\%}$$
- 19 $\overline{FF'} = 2\sqrt{5}$ 이고, 삼각형 $\triangle PF'F$ 는 직각삼각형이므로
- $$\overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 = 20 \quad \text{▶ 20\%}$$
- 또 삼각형 $\triangle PF'F$ 의 넓이가 4이므로
- $$\frac{1}{2} \times \overline{PF'} \times \overline{PF} = 4$$
- $$\overline{PF'} \times \overline{PF} = 8 \quad \text{▶ 20\%}$$
- 이때 점 P가 제1사분면 위의 점이므로
- $$\overline{PF'} - \overline{PF} = \sqrt{\overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2} - 2\overline{PF'} \times \overline{PF} = \sqrt{20 - 2 \times 8} = 2 \quad \text{▶ 30\%}$$
- 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서 $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$ 이므로
- $$2 = 2a, a = 1$$
- 또 $(\sqrt{5})^2 = a^2 + b^2$ 이므로
- $$5 = 1 + b^2, b^2 = 4 \quad \text{▶ 20\%}$$
- 따라서 $a^2 - b^2 = -3$ ▶ 10%
- 20 포물선의 방정식 $y^2 = 8\sqrt{3}x = 4 \times 2\sqrt{3}x$ 에서 $p = 2\sqrt{3}$ 이므로 초점의 좌표는
- $$F(2\sqrt{3}, 0) \quad \text{▶ 10\%}$$
- 한편 이 포물선과 접하고 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식은
- $$y = \sqrt{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x + 2 \quad \text{▶ 30\%}$$
- $y = \sqrt{3}x + 2$ 를 $y^2 = 8\sqrt{3}x$ 에 대입하여 정리하면
- $$(\sqrt{3}x + 2)^2 = 8\sqrt{3}x, 3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$$
- $$(\sqrt{3}x - 2)^2 = 0$$
- 이 이차방정식을 풀면 $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
- $$x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{을 } y = \sqrt{3}x + 2 \text{에 대입하면}$$
- $$y = \sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2, y = 4$$
- 즉, 점 A의 좌표는 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 4\right)$ ▶ 30%
- 또 직선 $y = \sqrt{3}x + 2$ 가 x축과 만나는 점 B의 좌표는
- $$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right) \quad \text{▶ 10\%}$$

따라서 삼각형 ABF의 넓이는

$$\begin{aligned}\triangle ABF &= \frac{1}{2} \times \overline{BF} \times 4 \\ &= \frac{1}{2} \times \left\{ 2\sqrt{3} - \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \right\} \times 4 \\ &= \frac{16\sqrt{3}}{3} \quad \blacktriangleright 20\%\end{aligned}$$

다른 풀이 포물선의 방정식 $y^2 = 8\sqrt{3}x = 4 \times 2\sqrt{3}x$ 에서 $p = 2\sqrt{3}$ 이므로 초점의 좌표는 $F(2\sqrt{3}, 0)$ ▶ 10%
점 A의 좌표를 (x_1, y_1) 이라고 하면 포물선 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$$\begin{aligned}y_1 y &= 2 \times 2\sqrt{3}(x + x_1) \\ y &= \frac{4\sqrt{3}}{y_1}x + \frac{4\sqrt{3}x_1}{y_1} \quad (\text{단, } y_1 \neq 0) \quad \blacktriangleright 20\%\end{aligned}$$

이때 접선의 기울기가 $\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{4\sqrt{3}}{y_1} = \sqrt{3}, y_1 = 4$$

점 A($x_1, 4$)는 포물선 $y^2 = 8\sqrt{3}x$ 위의 점이므로

$$4^2 = 8\sqrt{3}x_1, x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

즉, 점 A의 좌표는 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 4\right)$ 이다. ▶ 20%

또 접선의 방정식은

$$\begin{aligned}y &= \frac{4\sqrt{3}}{4}x + \frac{4\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}}{4} \\ y &= \sqrt{3}x + 2 \quad \blacktriangleright 20\%\end{aligned}$$

한편 접선 $y = \sqrt{3}x + 2$ 가 x 축과 만나는 점 B의 좌표는

$$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right) \quad \blacktriangleright 10\%$$

따라서 삼각형 ABF의 넓이는

$$\begin{aligned}\triangle ABF &= \frac{1}{2} \times \overline{BF} \times 4 \\ &= \frac{1}{2} \times \left\{ 2\sqrt{3} - \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \right\} \times 4 \\ &= \frac{16\sqrt{3}}{3} \quad \blacktriangleright 20\%\end{aligned}$$

21 타원과 쌍곡선의 한 교점을 $P(x_1, y_1)$ 이라고 하자.

타원 $4x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$4x_1x + y_1y = 1 \quad \blacktriangleright 30\%$$

쌍곡선 $3x^2 - y^2 = a$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$3x_1x - y_1y = a \quad \blacktriangleright 30\%$$

두 접선이 서로 수직이므로

$$\begin{aligned}4x_1 \times 3x_1 + y_1 \times (-y_1) &= 0 \\ 12x_1^2 - y_1^2 &= 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

점 P는 타원 $4x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$4x_1^2 + y_1^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$x_1^2 = \frac{1}{16}, y_1^2 = \frac{3}{4} \quad \blacktriangleright 20\%$$

또 점 P는 쌍곡선 $3x^2 - y^2 = a$ 위의 점이므로

$$3x_1^2 - y_1^2 = a$$

$x_1^2 = \frac{1}{16}, y_1^2 = \frac{3}{4}$ 을 위의 식에 대입하면

$$\frac{3}{16} - \frac{3}{4} = a, a = -\frac{9}{16} \quad \blacktriangleright 20\%$$

II 평면벡터

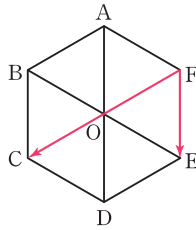
Plus 연습

1 벡터의 연산

01 벡터의 뜻 81~86쪽

01 (1) $|\overrightarrow{FE}| = 1$

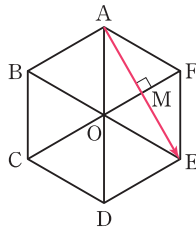
(2) 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라고 하자. 이때 6개의 삼각형 ABO, BCO, CDO, DEO, EFO, FAO는 모두 정삼각형이다.
따라서 $|\overrightarrow{FC}| = 2$



02 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O, $\overrightarrow{AE}$ 와 $\overrightarrow{CF}$ 의 교점을 M이라고 하자. 삼각형 AOF는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이므로

$$|\overrightarrow{AM}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

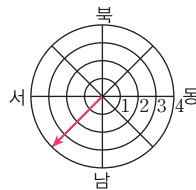
따라서 $|\overrightarrow{AE}| = 2|\overrightarrow{AM}| = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$



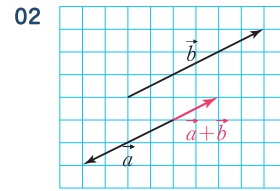
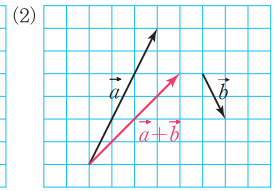
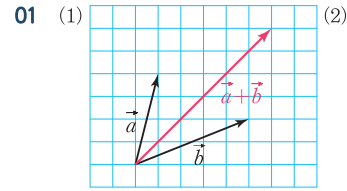
03 (1) $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EC}$
(2) $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EF}$

04 (1) $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{IH}, \overrightarrow{KJ}, \overrightarrow{LI}$
(2) $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{LA} = -\overrightarrow{AL} = -\vec{b}$
 $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$
 $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$
 $\overrightarrow{KI} = \overrightarrow{AC} = \vec{c}$

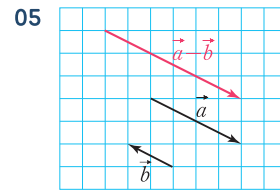
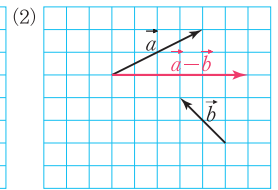
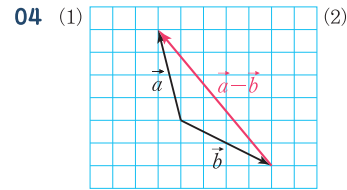
05 예 '북동풍 4 m/s'는 북동쪽에 서 4 m/s의 속력으로 불어 오는 바람을 말한다. 따라서 광주의 바람의 속도를 벡터로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



02 벡터의 덧셈과 뺄셈 87~92쪽



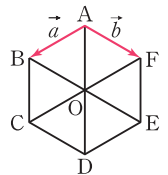
03 (1) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$
 $= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}$
 $= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$
 $= \overrightarrow{AD}$
(2) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}$
 $= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA})$
 $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$
 $= \overrightarrow{AA} = \vec{0}$



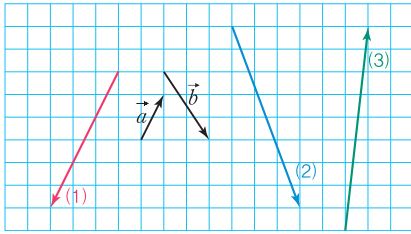
06 (1) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$
 $= \overrightarrow{OC} + (-\overrightarrow{OB})$
 $= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$
 $= -\vec{a} + \vec{b}$
(2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
 $= -\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$
 $= -\vec{b} - \vec{a}$

07 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라고 하자.

(1) $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF}$
 $= \overrightarrow{AF} - (-\overrightarrow{AB})$
 $= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$
(2) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC}$
 $= \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$
 $= -\vec{a} + \vec{b}$



01



$$\begin{aligned} 02 \quad (1) \quad -\vec{b} + 2(\vec{a} - 3\vec{b}) &= -\vec{b} + 2\vec{a} - 6\vec{b} \\ &= 2\vec{a} + (-1-6)\vec{b} \\ &= 2\vec{a} - 7\vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 3(\vec{a} - 2\vec{b}) - 2(-\vec{a} + 2\vec{b}) &= 3\vec{a} - 6\vec{b} + 2\vec{a} - 4\vec{b} \\ &= (3+2)\vec{a} + (-6-4)\vec{b} \\ &= 5\vec{a} - 10\vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 03 \quad (1) \quad 3\vec{x} - \vec{a} &= 2\vec{a} + 3\vec{b} \text{에서} \\ 3\vec{x} &= 3\vec{a} + 3\vec{b}, \quad \vec{x} = \vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 2\vec{b} + \vec{x} &= 3(\vec{x} + 2\vec{a}) \text{에서} \\ 2\vec{b} + \vec{x} &= 3\vec{x} + 6\vec{a}, \quad -2\vec{x} = 6\vec{a} - 2\vec{b} \\ \vec{x} &= -3\vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 04 \quad \vec{p} + \vec{q} &= (9\vec{a} - 3\vec{b}) + (-2\vec{a} - 4\vec{b}) \\ &= (9-2)\vec{a} + (-3-4)\vec{b} \\ &= 7\vec{a} - 7\vec{b} \\ \vec{q} + \vec{r} &= (-2\vec{a} - 4\vec{b}) + (4\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= (-2+4)\vec{a} + (-4+2)\vec{b} \\ &= 2\vec{a} - 2\vec{b} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \vec{p} + \vec{q} = \frac{7}{2}(\vec{q} + \vec{r})$$

따라서 두 벡터 $\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{q} + \vec{r}$ 는 서로 평행하다.

05 두 벡터 $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ 를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타내면

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} \\ &= (\vec{a} - \vec{b}) - (2\vec{a} + \vec{b}) \\ &= -\vec{a} - 2\vec{b} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{BC} &= \vec{OC} - \vec{OB} \\ &= (4\vec{a} + 5\vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= 3\vec{a} + 6\vec{b} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

$$\text{①, ②에서 } \vec{BC} = -3\vec{AB}$$

따라서 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

06 두 벡터 $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ 를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 로 나타내면

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a} \\ \vec{AC} &= \vec{OC} - \vec{OA} \\ &= (3\vec{a} + m\vec{b}) - \vec{a} = 2\vec{a} + m\vec{b} \end{aligned}$$

$\vec{AC} = t\vec{AB}$ 를 만족시키는 0이 아닌 실수 t 가 존재해야 하므로 $2\vec{a} + m\vec{b} = t(\vec{b} - \vec{a})$

$$\text{즉, } -t = 2, \quad m = t$$

$$\text{따라서 } t = -2, \quad m = -2$$

2 평면벡터의 성분과 내적

01 평면벡터의 성분

109~121쪽

$$\begin{aligned} 01 \quad 3\vec{AB} + 2\vec{BC} &= 3(\vec{OB} - \vec{OA}) + 2(\vec{OC} - \vec{OB}) \\ &= 3(\vec{b} - \vec{a}) + 2(\vec{c} - \vec{b}) \\ &= -3\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} \end{aligned}$$

02 점 M은 선분 AB를 1 : 1로 내분하는 점이므로

$$\vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{1+1} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

$$03 \quad (1) \quad \frac{2\vec{b} + 3\vec{a}}{2+3} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$$

$$(2) \quad \frac{\vec{b} - 3\vec{a}}{1-3} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

04 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 라고 하면

점 G의 위치벡터 $\vec{g}$ 는

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

세 점 P, Q, R의 위치벡터를 각각 $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ 라고 하면

$$\vec{p} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \quad \vec{q} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \quad \vec{r} = \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2}$$

이므로 점 H의 위치벡터 $\vec{h}$ 는

$$\begin{aligned} \vec{h} &= \frac{\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}}{3} \\ &= \frac{\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2}}{3} \\ &= \frac{2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}{6} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \end{aligned}$$

따라서 $\vec{g} = \vec{h}$

$$05 \quad (1) \quad \vec{a} = (3, 2), \quad \vec{b} = (-1, 3), \quad \vec{c} = (2, -3)$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \vec{a} &= (3, 2) = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 \\ \vec{b} &= (-1, 3) = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \\ \vec{c} &= (2, -3) = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 \end{aligned}$$

$$06 \quad (1) \quad |\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$(2) \quad |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

07 $\vec{a} = \vec{b}$ 이므로

$$2 = m - 1, \quad n - 3 = 3 - 2n$$

$$\text{따라서 } m = 3, \quad n = 2$$

$$08 \quad (1) \quad \vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c} = (1, 3) + 3(0, -1) - 2(-2, 1)$$

$$= (5, -2)$$

$$(2) \quad 2(2\vec{a} - 3\vec{c}) + 3\vec{b} + 2(\vec{b} + 2\vec{c})$$

$$= 4\vec{a} + 5\vec{b} - 2\vec{c}$$

$$= 4(1, 3) + 5(0, -1) - 2(-2, 1)$$

$$= (8, 5)$$

- 09 $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$ 를 성분으로 나타내면
 $(5, 6) = k(1, 2) + l(-1, 2)$
 $= (k, 2k) + (-l, 2l)$
 $= (k-l, 2k+2l)$
두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여
 $k-l=5, 2k+2l=6$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $k=4, l=-1$
- 10 $\overrightarrow{AB} = (-3-2, 1-(-1)) = (-5, 2)$
 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

02 평면벡터의 내적 122~129쪽

- 01 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ$
 $= 2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$
(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ$
 $= 2 \times \sqrt{2} \times 0 = 0$
(3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}| \cos (180^\circ - 150^\circ)$
 $= -2 \times \sqrt{2} \times \cos 30^\circ$
 $= -2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{6}$
- 02 (1) $|\overrightarrow{AB}| = 1, |\overrightarrow{AD}| = 2$ 이고, 두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면 $\theta = 90^\circ$ 이므로
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \cos \theta$
 $= 1 \times 2 \times \cos 90^\circ$
 $= 1 \times 2 \times 0 = 0$
(2) $|\overrightarrow{AB}| = 1, |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ 이고, 두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면
 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 이므로
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos \theta$
 $= 1 \times \sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = 1$
- 03 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-3) \times 2 = -4$
(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} + (-3) \times (-2) = 12$
- 04 (1) $\vec{a} + \vec{b} = (2, 6), \vec{a} - \vec{b} = (4, -2)$ 이므로
 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2 \times 4 + 6 \times (-2)$
 $= -4$
(2) $\vec{a} + \vec{b} = (-9, 6), \vec{a} - \vec{b} = (-1, 6)$ 이므로
 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (-9) \times (-1) + 6 \times 6$
 $= 45$

- 05 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 수직이 되려면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 이어야
하므로 $(3, k) \cdot (4, 3) = 0$
 $3 \times 4 + k \times 3 = 0, k = -4$
- 06 $\vec{b} = (x, y)$ 라고 하면 $\vec{a} \perp \vec{b}$ 일 때, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 이므로
 $(3, -1) \cdot (x, y) = 0$
 $3x - y = 0 \quad \dots\dots ①$
또 $|\vec{b}| = \sqrt{10}$ 이므로 $|\vec{b}|^2 = 10$
 $x^2 + y^2 = 10 \quad \dots\dots ②$
①, ②를 연립하여 풀면
 $x = -1, y = -3$ 또는 $x = 1, y = 3$
따라서 구하는 벡터는
 $\vec{b} = (-1, -3)$ 또는 $\vec{b} = (1, 3)$
- 07 (1) $|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$
 $= \vec{a} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) - 2\vec{b} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$
 $= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot 2\vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{a} + 2\vec{b} \cdot 2\vec{b}$
 $= |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$
(2) $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$
 $= \vec{a} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) + 2\vec{b} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$
 $= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot 2\vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{a} - 2\vec{b} \cdot 2\vec{b}$
 $= |\vec{a}|^2 - 4|\vec{b}|^2$
- 08 $|4\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = (4\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (4\vec{a} - 3\vec{b})$
 $= 16|\vec{a}|^2 - 24\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2$
 $= 16 \times 12 - 24 \times 2\sqrt{3} \times 2 \times \cos 30^\circ + 9 \times 4$
 $= 84$
따라서 $|4\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$
- 09 (1) $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$ 이므로
 $25 = 1 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 16, \vec{a} \cdot \vec{b} = -4$
(2) $|\vec{a} + 3\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2$
 $= 1 + 6 \times (-4) + 9 \times 16 = 121$
따라서 $|\vec{a} + 3\vec{b}| = 11$

03 직선과 원의 방정식 130~136쪽

- 01 (1) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{3}$
(2) 직선 $\frac{x}{3} = \frac{2-y}{2}$ 에 평행하므로 구하는 직선의 방향 벡터는 $\vec{u} = (3, -2)$
따라서 구하는 직선의 방정식은
 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{-2}$
(3) 점 $(2, 3)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (3, 0)$ 인 직선
이므로 $y = 3$

- 02 (1) 구하는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB} = (-1-1, 4-3) = (-2, 1)$$

이 직선이 점 A(1, 3)을 지나므로 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{-2} = y-3$$

- (2) 구하는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB} = (3-1, 1-(-5)) = (2, 6)$$

이 직선이 점 A(1, -5)를 지나므로 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{6}$$

- 03 (1) $(x-1)-3(y+2)=0$, $x-3y-7=0$

- (2) 점 (3, 1)을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(-1, 2)$ 인 직선이므로

$$-(x-3)+2(y-1)=0, x-2y-1=0$$

- 04 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라고 하면

$$\vec{u} = (5, 2), \vec{v} = (-k, 4)$$

- (1) $l \parallel m$ 이므로 $\vec{u} \parallel \vec{v}$

즉, $\vec{v} = t\vec{u}$ 를 만족시키는 0이 아닌 실수 t 가 존재하므로 $(-k, 4) = t(5, 2)$

$$-k = 5t, 4 = 2t \text{에서}$$

$$t = 2, k = -10$$

- (2) $l \perp m$ 이므로 $\vec{u} \perp \vec{v}$

$$\text{즉, } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{이므로}$$

$$(5, 2) \cdot (-k, 4) = 0$$

$$-5k + 8 = 0 \text{에서 } k = \frac{8}{5}$$

- 05 반지름의 길이가 3인 원 위의 점 P(x, y)에 대하여

두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{p}$ 이므로

$$|\vec{p} - \vec{a}| = 3$$

양변을 제곱하면 $|\vec{p} - \vec{a}|^2 = 3^2$ 이므로

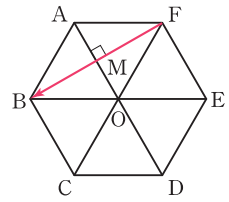
$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 3^2$$

이를 성분으로 나타내면

$$(x-1, y+2) \cdot (x-1, y+2) = 3^2$$

$$\text{즉, } (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$$

- 1 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O, $\overrightarrow{AD}$ 와 $\overrightarrow{FB}$ 의 교점을 M이라고 하자.



삼각형 FAO는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로

$$|\overrightarrow{FM}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } |\overrightarrow{FB}| = 2|\overrightarrow{FM}| = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

그러므로 ②이다.

- 2 $(x+2y)\vec{a} + (2x-y)\vec{b} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ 에서

$$x+2y=3, 2x-y=-4$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=-1, y=2$

$$\text{따라서 } x^2 + y^2 = 5$$

그러므로 ①이다.

- 3 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
 $= (-\vec{a} - 3\vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b})$
 $= -2\vec{a} - 2\vec{b}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \\ &= (k\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= (k-1)\vec{a} + 2\vec{b} \end{aligned}$$

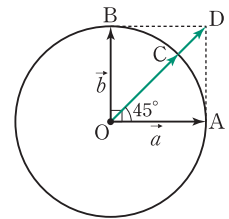
세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$ 를 만족시키는 0이 아닌 실수 t 가 존재해야 하므로

$$(k-1)\vec{a} + 2\vec{b} = t(-2\vec{a} - 2\vec{b})$$

$$\text{즉, } k-1 = -2t, 2 = -2t$$

$$\text{따라서 } t = -1, k = 3$$

- 4 오른쪽 그림에서 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$ 가 되도록 점 D를 잡으면 사각형 OADB는 정사각형이고,



$\angle AOC = 45^\circ$ 이므로 점 C는 대각선 OD 위에 있다.

이때 $\overrightarrow{OC} : \overrightarrow{OD} = 1 : \sqrt{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \overrightarrow{OD} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{a} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{b} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } m = \frac{\sqrt{2}}{2}, n = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{이므로}$$

$$m^2 + n^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$$

- 5 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 라고 하자.

이때 점 G는 삼각형 OAB의 두 중선의 교점이므로 무게중심이다.

$$\overrightarrow{AB} \text{의 중점을 L이라고 하면 } \overrightarrow{OL} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

시험 대비 대단원 TEST

..... 154~156쪽

1 ②	2 ①	3 3	4 1	5 $\frac{1}{3}$
6 36	7 -2	8 -10	9 ③	10 ⑤
11 -4	12 ③	13 $16\sqrt{10}$	14 6	
15 $\frac{4}{9}$	16 0	17 4	18 $\frac{11\sqrt{5}}{5}$	19 $\frac{\pi}{2} - 1$

이때 무게중심 G는 $\overline{OL}$ 을 2:1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OL} = \frac{2}{3}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right) = \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$$

$\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GB} &= \vec{b} - \frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}) = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

따라서 $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ 이므로 $x+y = \frac{1}{3}$

- 6 $\overline{AB}$ 가 원 O의 지름이므로 $\angle APB = 90^\circ$
직각삼각형 ABP에서

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BP}^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AP}$ 가 이루는 각의 크기를 $\theta (0^\circ < \theta < 90^\circ)$ 라고 하면

$$\cos \theta = \frac{3}{5}$$

따라서 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AP}| \cos \theta$
 $= 10 \times 6 \times \frac{3}{5} = 36$

- 7 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (x, -3) \cdot (2, 3x-1)$
 $= 2x - 3(3x-1)$
 $= -7x + 3$

따라서 $-7x + 3 = 17$ 에서 $x = -2$

- 8 두 벡터 $\vec{x}$ 와 $\vec{p}$ 는 서로 수직이므로 $\vec{x} \cdot \vec{p} = 0$
 $(1, 2) \cdot (a, b) = 0$
 $a + 2b = 0 \quad \dots\dots ①$

한편 벡터 $\vec{p}$ 의 크기가 5이므로

$$|\vec{p}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$$

즉, $a^2 + b^2 = 25 \quad \dots\dots ②$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = 2\sqrt{5}, b = -\sqrt{5} \text{ 또는 } a = -2\sqrt{5}, b = \sqrt{5}$$

따라서 $ab = -10$

- 9 $|\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b})$
 $= |\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2$
 $(\sqrt{13})^2 = 4^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9 \times 1^2$ 이므로
 $6\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 에서

$$2 = 4 \times 1 \times \cos \theta, \cos \theta = \frac{1}{2}$$

따라서 ③이다.

- 10 점 (4, 5)를 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (2, -3)$ 인 직선
이므로 $\frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{-3}$

y축 위의 점은 x좌표가 0이므로

$$\frac{0-4}{2} = \frac{y-5}{-3}$$

즉, $y-5 = 6$ 이므로 $y = 11$

따라서 ⑤이다.

- 11 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라고 하면

$$\vec{u} = (2, k), \vec{v} = (k, k+2)$$

두 직선이 서로 수직이므로 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$(2, k) \cdot (k, k+2) = 0$$

$$2k + k(k+2) = 0, k(k+4) = 0$$

이때 $k \neq 0$ 이므로 $k = -4$

- 12 점 P의 좌표를 (x, y) 라고 하면

$$\overrightarrow{AP} = (x, y-1), \overrightarrow{BP} = (x-2, y-3)$$

이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} &= (x, y-1) \cdot (x-2, y-3) \\ &= x(x-2) + (y-1)(y-3) \\ &= x^2 - 2x + y^2 - 4y + 3 \\ &= (x-1)^2 + (y-2)^2 - 2\end{aligned}$$

이때 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ 이므로

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 2 = 0$$

즉, $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원이므로 구하는 도형의 길이는

$$2 \times \pi \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\pi$$

그러므로 ③이다.

- 13 $\overline{AB}$ 의 중점을 N이라고 하면 점 N의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{3-1}{2}\right), \text{ 즉 } (3, 1)$$

또 $\frac{\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}}{2} = \overrightarrow{NP}$ 이므로

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{NP}$$

즉, $|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}| = 2|\overrightarrow{NP}|$ 이므로 양변을 제곱하면

$$|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}|^2 = 4|\overrightarrow{NP}|^2$$

오른쪽 그림과 같이 점 N

과 원의 중심인 원점을

지나는 직선이 원과 만

나는 두 점을 각각 C, D

라고 하자.

이때 원의 반지름의 길이는

1이고 $|\overrightarrow{NO}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ 이다.

점 P가 점 C의 위치에 있을 때 $|\overrightarrow{NP}|$ 가 최대이므로 구하는 최댓값은

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}|^2 &= 4|\overrightarrow{NP}|^2 \\ &= 4(|\overrightarrow{NO}| + 1)^2 = 4(\sqrt{10} + 1)^2 \\ &= 44 + 8\sqrt{10}\end{aligned}$$

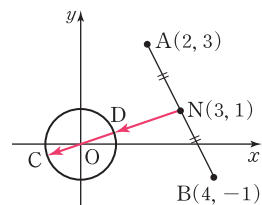
즉, $M = 44 + 8\sqrt{10}$

한편 점 P가 점 D의 위치에 있을 때 $|\overrightarrow{NP}|$ 가 최소이므로 구하는 최솟값은

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}|^2 &= 4|\overrightarrow{NP}|^2 \\ &= 4(|\overrightarrow{NO}| - 1)^2 = 4(\sqrt{10} - 1)^2 \\ &= 44 - 8\sqrt{10}\end{aligned}$$

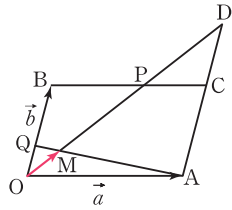
즉, $m = 44 - 8\sqrt{10}$

따라서 $M - m = 16\sqrt{10}$



14 $3\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=3\vec{AB}-\vec{AC}+\vec{AD}$
 $=3\vec{AB}+(\vec{AD}-\vec{AC})$
 $=3\vec{AB}+\vec{CD}$
 $=3\vec{AB}+\vec{BA}$
 $=3\vec{AB}-\vec{AB}$
 $=2\vec{AB}$ ▶ 70%
 이때 $|\vec{AB}|=3$ 이므로
 $|3\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|=2|\vec{AB}|$
 $=2 \times 3=6$ ▶ 30%

15 오른쪽 그림과 같이 선분 AC의 연장선이 선분 OP의 연장선과 만나는 점을 D라고 하자.
 이때 두 삼각형 OBP, DCP는 닮음이고 닮음비가 3:2이므로
 $\vec{OB}:\vec{DC}=3:2$ ▶ 30%
 또 두 삼각형 OQM, DAM은 닮음이고 닮음비가 1:5이므로
 $\vec{QM}:\vec{AM}=1:5$ ▶ 30%
 즉, 점 M은 $\vec{QA}$ 를 1:5로 내분하는 점이므로
 $\vec{OM}=\frac{5\vec{OQ}+\vec{OA}}{5+1}$
 $=\frac{5 \times \frac{1}{3}\vec{OB}+\vec{OA}}{6}$
 $=\frac{1}{6}\vec{OA}+\frac{5}{18}\vec{OB}$
 $=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{5}{18}\vec{b}$ ▶ 20%
 따라서 $m=\frac{1}{6}, n=\frac{5}{18}$ 이므로
 $m+n=\frac{4}{9}$ ▶ 20%

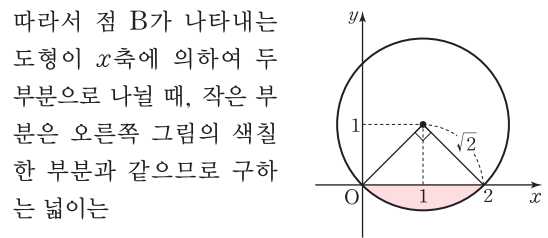


16 삼각형 BCE는 $\vec{BC}=\vec{BE}=4$ 이므로 이등변삼각형이다.
 이때 $\angle CBE=60^\circ+90^\circ=150^\circ$ 이므로
 $\angle BCE=\frac{1}{2}(180^\circ-150^\circ)=15^\circ$
 따라서 $\angle ECA=60^\circ-15^\circ=45^\circ$ 이다.
 같은 방법으로 하면 $\angle FAC=45^\circ$ ▶ 60%
 $\vec{AF}, \vec{CE}$ 의 교점을 M이라고 하면 삼각형 MCA에서
 $\angle CMA=180^\circ-45^\circ-45^\circ=90^\circ$ ▶ 20%
 따라서 두 벡터 $\vec{AF}, \vec{CE}$ 가 이루는 각의 크기를 $\theta(0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$ 라고 하면 $\theta=90^\circ$ 이므로
 $\vec{AF} \cdot \vec{CE}=0$ ▶ 20%

17 직선 $\frac{x-4}{3}=2-y$ 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라고 하면
 $\vec{u}=(3, -1)$ ▶ 40%
 점 $(1, -2)$ 를 지나고 법선벡터가 $\vec{u}=(3, -1)$ 인 직선은
 $3(x-1)-(y+2)=0$
 즉, $3x-y-5=0$ ▶ 40%
 이 직선이 점 $(3, k)$ 를 지나므로
 $3 \times 3-k-5=0$
 따라서 $k=4$ ▶ 20%

18 점 P의 좌표를 (a, b) 라고 하면 점 P는 직선
 $x=\frac{y-1}{2}$ 위의 점이므로
 $a=\frac{b-1}{2}, b=2a+1$
 즉, 점 P의 좌표는 $(a, 2a+1)$ ▶ 20%
 $\vec{PA}=(4-a, -2a), \vec{PB}=(-a, -2a-3)$ 이므로
 $\vec{PA}+\vec{PB}=(-2a+4, -4a-3)$ ▶ 30%
 이때 $|\vec{PA}+\vec{PB}|=\sqrt{(-2a+4)^2+(-4a-3)^2}$
 $=\sqrt{20a^2+8a+25}$
 $=\sqrt{20\left(a+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{121}{5}}$ ▶ 30%
 따라서 $|\vec{PA}+\vec{PB}|$ 의 최솟값은 $a=-\frac{1}{5}$ 일 때
 $\sqrt{\frac{121}{5}}=\frac{11\sqrt{5}}{5}$ 이다. ▶ 20%

19 점 A의 좌표를 (a, b) 라고 하면
 $\vec{OA} \cdot \vec{p}=(a, b) \cdot (1, 0)=a$
 $\vec{OA} \cdot \vec{q}=(a, b) \cdot (0, 1)=b$
 (가)에 의하여 $a=|\vec{p}|, b=|\vec{q}|$ 이고, $|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$ 이므로 $a=1, b=1$
 즉, 점 A의 좌표는 $(1, 1)$ ▶ 30%
 한편 점 B의 좌표를 (x, y) 라고 하면 (나)에서
 $|\vec{OB}-\vec{OA}|=|\vec{AB}|=\sqrt{2}$ 이므로
 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$
 즉, 점 B가 나타내는 도형은 중심이 $(1, 1)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원이다. ▶ 40%



따라서 점 B가 나타내는 도형이 x축에 의하여 두 부분으로 나눌 때, 작은 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로 구하는 넓이는
 $\frac{1}{4} \times \pi \times (\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \frac{\pi}{2} - 1$ ▶ 30%

III 공간도형과 공간좌표

Plus 연습

1 공간도형

01 직선과 평면의 위치 관계 159~175쪽

- 01 점 E와 평면 α 위의 두 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는 ${}_4C_2=6$
 평면 α 위의 네 점 A, B, C, D 중 세 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는 1
 따라서 구하는 평면의 개수는 $6+1=7$

- 02 (1) 직선 AC, 직선 BC, 직선 AD, 직선 BE
 (2) 직선 EF
 (3) 직선 BE, 직선 DE, 직선 EF

- 03 (1) 직선 AB와 직선 CD가 이루는 각의 크기는 $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$ 이므로 직선 AB와 직선 BE가 이루는 각의 크기와 같다.
 이때 삼각형 ABE는 정삼각형이므로 구하는 각의 크기는 60° 이다.
 (2) 직선 AD와 직선 EF가 이루는 각의 크기는 $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ 이므로 직선 AD와 직선 AC가 이루는 각의 크기와 같다.
 이때 삼각형 ACD는 정삼각형이므로 구하는 각의 크기는 60° 이다.

- 04 (1) 평면 ABCDEF, 평면 ABHG
 (2) 평면 ABHG, 평면 CIJD
 (3) 평면 AGLF, 평면 GHIJKL

- 05 삼각형 OBA에서 $\overline{OA} \perp \overline{AB}$
 삼각형 OCA에서 $\overline{OA} \perp \overline{AC}$
 $\overline{AB}$ 와 $\overline{AC}$ 는 평면 α 위에 있으므로 **예제 1**에 의하여 $\overline{OA} \perp \alpha$

- 06 $\overline{AM}$ 을 그으면 정삼각형의 성질에 의하여 $\overline{BC} \perp \overline{AM}, \overline{BC} \perp \overline{DM}$
 이므로 **예제 1**에 의하여 $\overline{BC} \perp (\text{평면 AMD})$
 이때 $\overline{AH}$ 는 평면 AMD 위에 있으므로 $\overline{BC} \perp \overline{AH}$
 이고, $\overline{AH} \perp \overline{DM}$ 이므로 **문제 06**에 의하여 $\overline{AH} \perp (\text{평면 BCD})$

- 07 (1) 평면 ABC
 (2) 직선 AD

- 08 평행하지 않은 두 평면이 만날 때 교선이 생기고, 이 교선 중에서 서로 일치하는 것이 없을 때, 교선의 개수는 최대가 된다.

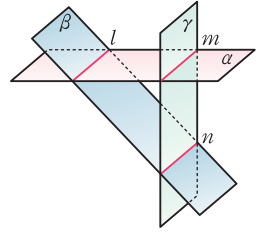
따라서 구하는 교선의 최대 개수는 ${}_5C_2=10(\text{개})$

- 09 직선 l 과 평면 γ 는 평행하므로 만나지 않는다.
 따라서 직선 l 과 평면 γ 에 포함된 직선 m 도 만나지 않는다.

그런데 두 직선 l, m 은 모두 한 평면 α 위에 있으므로 $l \parallel m$

같은 방법으로 $l \parallel n$

따라서 $m \parallel n$

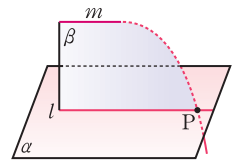


- 10 $l \parallel m$ 이므로 두 직선 l, m 은 한 평면 β 를 결정한다.
 이때 직선 l 은 두 평면 α, β 의 교선이다.

직선 m 이 평면 α 와 평행하지 않다고 가정하면 평면 α 와 직선 m 은 한 점에서 만난다. 이 점을 P라고 하면 점 P는 평면 α 와 평면 β 에 동시에 포함되므로 교선 l 위에 있다.

즉, 점 P는 두 직선 l, m 위에 있으므로 $l \parallel m$ 이라는 조건에 모순이다.

따라서 평면 α 는 직선 m 과 평행하다.



- 11 두 평면 ABCD, ABGH의 교선 AB에 대하여 $\overline{BC} \perp \overline{AB}, \overline{BG} \perp \overline{AB}$

즉, 두 평면 ABCD, ABGH가 이루는 각의 크기는 두 직선 BC, BG가 이루는 각의 크기와 같다.

삼각형 BGC는 $\overline{BC} = \overline{CG}$ 인 직각이등변삼각형이므로 $\angle CBG = 45^\circ$

따라서 두 평면 ABCD, ABGH가 이루는 각의 크기는 45° 이다.

- 12 사각형 ABCD는 정사각형이므로 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$
 그런데 평면 ABCD는 평면 BFGC와 수직이므로 $\overline{BD} \perp \overline{CG}$

따라서 $\overline{BD}$ 는 평면 AEGC 위에서 만나는 두 직선 AC, CG와 각각 수직이므로

$\overline{BD} \perp (\text{평면 AEGC})$

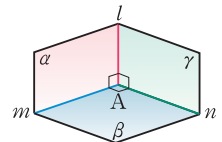
- 13 두 평면 α, β 의 교선 m 에 대하여

$l \perp m, n \perp m$

즉, 두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기는 두 직선 l, n 이 이루는 각의 크기와 같다.

따라서 $l \perp n$ 이므로 $\alpha \perp \beta$ 이다.

같은 방법으로 $\beta \perp \gamma, \gamma \perp \alpha$ 이다.



02 삼수선의 정리 176~179쪽

- 01 $\overline{AE} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{AP} \perp \overline{FH}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{EP} \perp \overline{FH}$$

삼각형 EFH는 $\overline{FH} = \sqrt{5}$ 인 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2} \overline{FH} \times \overline{EP} = \frac{1}{2} \overline{EF} \times \overline{EH}$$

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \overline{EP} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2$$

$$\overline{EP} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

직각삼각형 AEP에서

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EP}^2} \\ &= \sqrt{3^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} \\ &= \frac{7\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

따라서 삼각형 AFH의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \overline{FH} \times \overline{AP} &= \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{7\sqrt{5}}{5} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

- 02 $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PH} \perp \overline{AB}$

이때 직각삼각형 PHO에서

$$\begin{aligned} \overline{PH} &= \sqrt{\overline{PO}^2 + \overline{OH}^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \end{aligned}$$

따라서 직각삼각형 PAH에서

$$\begin{aligned} \overline{PA} &= \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{AH}^2} \\ &= \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \end{aligned}$$

03 정사영 180~187쪽

- 01 (1) 두 꼭짓점 A, B에서 평면 GHIJKL에 내린 수선의 발이 각각 두 꼭짓점 G, H이므로 선분 AB의 평면 GHIJKL 위로의 정사영은 선분 GH이다.
 (2) 꼭짓점 I에서 평면 ABCDEF에 내린 수선의 발이 꼭짓점 C이므로 선분 CI의 평면 ABCDEF 위로의 정사영은 점 C이다.
 (3) 네 꼭짓점 G, H, I, J에서 평면 ABCDEF에 내린 수선의 발이 각각 네 꼭짓점 A, B, C, D이므로 사각형 GHIJ의 평면 ABCDEF 위로의 정사영은 사각형 ABCD이다.

- 02 (1) $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 60^\circ$
 $= 6 \times \frac{1}{2} = 3$

- (2) $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\theta = 30^\circ$

- 03 선분 AG의 평면 ABFE 위로의 정사영은 선분 AF이다.

정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라고 하면 직각삼각형 ABF에서

$$\begin{aligned} \overline{AF} &= \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BF}^2} \\ &= \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a \end{aligned}$$

$$\sqrt{2}a = 5 \text{이므로 } a = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

직각삼각형 AFG에서

$$\begin{aligned} \overline{AG} &= \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{FG}^2} \\ &= \sqrt{5^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{5\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

- 04 한 변의 길이가 3인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$\frac{9\sqrt{3}}{4} \times \cos 30^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27}{8}$$

- 05 구하는 단면의 넓이를 S 라고 하면 단면의 밑면 위로의 정사영은 반지름의 길이가 1 cm인 원이므로

$$S \cos 45^\circ = \pi$$

$$S \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi, S = \sqrt{2}\pi$$

따라서 구하는 단면의 넓이는 $\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$ 이다.

- 06 사각형 ABNM의 평면 EFGH 위로의 정사영은 사각형 EFGH이므로

$$\square EFGH = \square ABNM \cos \theta \quad \dots\dots ①$$

$\overline{AB} = a$ 라고 하면 $\square EFGH$ 은 직사각형이므로

$$\square EFGH = a \times \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a^2$$

또 $\square ABNM$ 은 직사각형이고, $\overline{AM} = \overline{BN} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$ 이므로

$$\square ABNM = a \times \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{\sqrt{5}}{2}a^2$$

$$\text{①에서 } \cos \theta = \frac{\square EFGH}{\square ABNM}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{5}}{2}a^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

2 공간좌표

01 공간에서 점의 좌표 195~205쪽

- 01 점 A는 zx 평면 위에 있으므로 y 좌표는 0이고, 두 점 A, B의 x 좌표와 z 좌표가 같다.

따라서 $A(2, 0, 4)$

같은 방법으로 $F(2, 3, 0)$

또 점 D는 z 축 위에 있으므로 x 좌표와 y 좌표는 0이고, 두 점 B, D의 z 좌표가 같다.

따라서 $D(0, 0, 4)$

- 02 (1) 점 A는 y 좌표와 z 좌표가 0이므로 x 축 위에 있다.
점 B는 x 좌표와 z 좌표가 0이므로 y 축 위에 있다.
(2) 점 C는 z 좌표가 0이므로 xy 평면 위에 있다.
점 D는 x 좌표가 0이므로 yz 평면 위에 있다.

- 03 (1) 점 P의 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 대한 대칭점의 좌표는 각각

$(5, -2, -1), (-5, -2, 1), (5, 2, 1)$

- (2) 점 P의 x 축, y 축, z 축에 대한 대칭점의 좌표는 각각
 $(5, 2, -1), (-5, -2, -1), (-5, 2, 1)$

- (3) 점 P에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 P'이라고 하면 두 점 P, P'의 x 좌표와 y 좌표는 같고, z 좌표는 0이다.

따라서 점 P에서 xy 평면에 내린 수선의 발의 좌표는
 $(5, -2, 0)$

같은 방법으로 점 P에서 yz 평면, zx 평면에 내린 수선의 발의 좌표는 각각

$(0, -2, 1), (5, 0, 1)$

- (4) 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 P'이라고 하면 두 점 P, P'의 x 좌표는 같고, y 좌표와 z 좌표는 모두 0이다.

따라서 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발의 좌표는
 $(5, 0, 0)$

같은 방법으로 점 P에서 y 축, z 축에 내린 수선의 발의 좌표는 각각

$(0, -2, 0), (0, 0, 1)$

- 04 점 $(2, 3, -1)$ 을 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점 A의 좌표는 $(-2, 3, -1)$

따라서 점 A를 원점에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 $(2, -3, 1)$

- 05 (1) $\overline{AB} = \sqrt{\{3 - (-1)\}^2 + (1 - 3)^2 + (-2 - 2)^2}$
 $= 6$

(2) $\overline{OA} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$

$$06 \overline{AC} = \overline{BC} \text{이므로 } \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$9^2 + 1^2 + a^2 = 8^2 + (-3)^2 + (a-9)^2$$

$$18a = 72, a = 4$$

$$\text{또 } \overline{AD} = \overline{BD} \text{이므로 } \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2$$

$$4^2 + (b-1)^2 + 1^2 = 3^2 + (b-5)^2 + (-8)^2$$

$$8b = 80, b = 10$$

- 07 점 P의 좌표를 $P(x, 0, 0)$ 이라고 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$

$$(x-1)^2 + (-1)^2 + 0^2 = (x+2)^2 + 3^2 + 1^2$$

$$6x = -12, x = -2$$

따라서 점 P의 좌표는 $(-2, 0, 0)$

- 08 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 $P(x_1, y_1, z_1)$ 이라고 하면

$$x_1 = \frac{2 \times 2 + 1 \times (-1)}{2+1} = 1$$

$$y_1 = \frac{2 \times (-4) + 1 \times 5}{2+1} = -1$$

$$z_1 = \frac{2 \times (-3) + 1 \times 6}{2+1} = 0$$

따라서 $P(1, -1, 0)$

선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점을 $Q(x_2, y_2, z_2)$ 라고 하면

$$x_2 = \frac{2 \times 2 - 1 \times (-1)}{2-1} = 5$$

$$y_2 = \frac{2 \times (-4) - 1 \times 5}{2-1} = -13$$

$$z_2 = \frac{2 \times (-3) - 1 \times 6}{2-1} = -12$$

따라서 $Q(5, -13, -12)$

- 09 무게중심 G의 좌표를 (x, y, z) 라고 하면

$$x = \frac{3+0+(-6)}{3} = -1$$

$$y = \frac{-4+1+(-6)}{3} = -3$$

$$z = \frac{5+4+3}{3} = 4$$

따라서 무게중심 G의 좌표는 $(-1, -3, 4)$

- 10 점 C의 좌표를 (a, b, c) 라고 하면 삼각형 ABC의 무게중심 G는 선분 CM을 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\frac{2 \times (-1) + 1 \times a}{2+1} = -1$$

$$\frac{2 \times 2 + 1 \times b}{2+1} = 2$$

$$\frac{2 \times (-1) + 1 \times c}{2+1} = -2$$

즉, $a = -1, b = 2, c = -4$

따라서 점 C의 좌표는 $(-1, 2, -4)$

- 01 (1) $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=4$
 (2) 구하는 구의 반지름의 길이를 $r(r>0)$ 라고 하면
 $(x+3)^2+y^2+(z-2)^2=r^2$
 이 구가 점 $(0, 4, 2)$ 를 지나므로
 $3^2+4^2+0^2=r^2, r^2=25$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $(x+3)^2+y^2+(z-2)^2=25$
 (3) 구하는 구의 중심은 두 점 $(0, -2, 5)$,
 $(4, -6, 11)$ 의 중점과 같으므로
 $\left(\frac{0+4}{2}, \frac{-2+(-6)}{2}, \frac{5+11}{2}\right)$
 즉, $(2, -4, 8)$
 또 구하는 구의 반지름의 길이는 두 점 $(0, -2, 5)$,
 $(4, -6, 11)$ 사이의 거리의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-4)^2+6^2}=\sqrt{17}$$

따라서 구하는 구의 방정식은
 $(x-2)^2+(y+4)^2+(z-8)^2=17$

- 02 (1) 주어진 구의 방정식을 변형하면
 $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=14$
 따라서 구의 중심은 $(3, -1, 2)$ 이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{14}$ 이다.
 (2) 주어진 구의 방정식을 변형하면
 $(x-2)^2+(y+5)^2+(z-4)^2=64$
 따라서 구의 중심은 $(2, -5, 4)$ 이고, 반지름의 길이는 8이다.

- 03 주어진 구의 방정식을 변형하면
 $(x-2)^2+(y+3a)^2+(z-6)^2=9a^2-10b+40$
 $(9a^2-10b+40>0)$
 이므로 구의 중심은 $(2, -3a, 6)$ 이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{9a^2-10b+40}$ 이다.
 주어진 구는 xy 평면과 zx 평면에 동시에 접하므로 구의 중심의 y 좌표의 절댓값, z 좌표의 절댓값, 구의 반지름의 길이가 모두 같다.

즉, $|-3a|=6$ 이므로 양변을 제곱하면

$$9a^2=36, a^2=4$$

또 $\sqrt{9a^2-10b+40}=6$ 이므로 양변을 제곱하면

$$9a^2-10b+40=36$$

이때 $a^2=4$ 이므로 $-10b+40=0, b=4$

따라서 $a^2+b^2=4+4^2=20$

- 04 구하는 구의 방정식을
 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$
 이라고 하자.
 점 $(0, 0, 0)$ 을 지나므로 $D=0$
 점 $(1, 0, 0)$ 을 지나므로
 $1^2+A+D=0, A=-1$

즉, 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2-x+By+Cz=0$$

이때 점 $(0, 3, -4)$ 를 지나므로

$$3^2+(-4)^2+3B-4C=0$$

$$3B-4C=-25 \quad \dots\dots ①$$

또 점 $(1, -1, -2)$ 를 지나므로

$$1^2+(-1)^2+(-2)^2-1-B-2C=0$$

$$B+2C=5 \quad \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$B=-3, C=4$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2-x-3y+4z=0$$

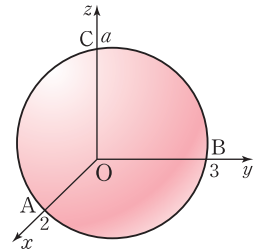
- 05 점 O를 원점, 세 선분 OA, OB, OC를 각각 x , y 축, z 축 위에 놓으면

$$O(0, 0, 0)$$

$$A(2, 0, 0)$$

$$B(0, 3, 0)$$

$$C(0, 0, a)$$



구의 방정식을

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

이라고 하면 네 점 O, A, B, C를 지나므로

$$D=0, 4+2A=0, 9+3B=0, a^2+aC=0$$

이 식을 풀면

$$A=-2, B=-3, C=-a, D=0$$

즉, 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2-2x-3y-az=0$$

이 방정식을 변형하면

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2+13}{4}$$

구의 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{22}}{2}$ 이므로

$$\frac{a^2+13}{4}=\frac{22}{4}, a^2=9$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=3$

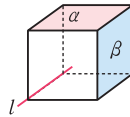
시험 대비 대단원 TEST

..... 230-232쪽

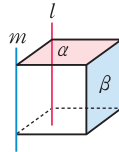
- | | | | | |
|-----------------|----------------|---------------|---------------|--------------|
| 1 ⑤ | 2 ② | 3 $\sqrt{6}$ | 4 60° | 5 30° |
| 6 ⑤ | 7 ③ | 8 $6\sqrt{2}$ | 9 $5\sqrt{2}$ | |
| 10 $(3, 2, -1)$ | 11 9π | 12 6 | 13 2 | |
| 14 60 | 15 $4\sqrt{3}$ | 16 $\sqrt{3}$ | 17 36 | 18 13 |

- 1 평면을 만들 수 있는 경우는 다음과 같다.
 (i) 네 점 B, D, F, H로 만들 수 있는 평면은 평면 BDFH
 이므로 1개
 (ii) 두 직선 AC, AG로 만들 수 있는 평면은 1개
 (iii) 직선 AC와 네 점 B, D, F, H 중 한 점으로 만들 수 있는 평면은
 평면 ABCD, 평면 AFC, 평면 ACH
 이므로 3개
 직선 AG와 네 점 B, D, F, H 중 한 점으로 만들 수 있는 평면은
 평면 ABGH, 평면 AFGD
 이므로 2개
 (i), (ii), (iii)에서 구하는 평면의 개수는
 $1+1+3+2=7$
 그러므로 ⑤이다.

- 2 [반례] ㄱ. 오른쪽 그림에서 $l \parallel \alpha$, $\alpha \perp \beta$ 이지만 $l \not\parallel \beta$ 이다.

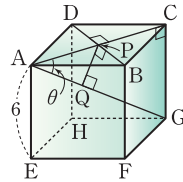


- ㄴ. 오른쪽 그림에서 $\alpha \perp \beta$, $l \perp \alpha$, $l \parallel m$ 이지만 $m \not\parallel \beta$ 이다.



따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.
 그러므로 ②이다.

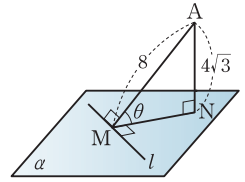
- 3 $\overline{GC} \perp$ (평면 BCD)이고 $\overline{BD}$ 는 평면 BCD 위에 있으므로
 $\overline{BD} \perp \overline{GC}$
 또 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ 이므로
 $\overline{BD} \perp$ (평면 AGC)
 두 대각선 AC, BD의 교점을 P, 점 P에서 $\overline{AG}$ 에 내린 수선의 발을 Q라고 하면
 $\overline{PQ} \perp \overline{AG}$
 $\overline{PQ}$ 는 평면 AGC 위에 있으므로 $\overline{PQ} \perp \overline{BD}$
 즉, 위의 두 점 P, Q는 주어진 조건을 만족시킨다.
 $\angle CAG = \theta$ 라고 하면



$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\overline{GC}}{\overline{AG}} \\ &= \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

- 따라서 직각삼각형 PAQ에서
 $\overline{PQ} = \overline{AP} \sin \theta$
 $= \frac{1}{2} \overline{AC} \sin \theta$
 $= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{6}$

- 4 점 A에서 직선 l과 평면 α 에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라고 하면
 $\overline{AM} \perp l$, $\overline{AN} \perp \alpha$
 이므로 삼수선의 정리에 의하여
 $\overline{MN} \perp l$



점 A와 직선 l에 의하여 결정되는 평면 β 와 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면 $\theta = \angle AMN$
 $\overline{AM} = 8$, $\overline{AN} = 4\sqrt{3}$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{\overline{AN}}{\overline{AM}} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $\theta = 60^\circ$

- 5 선분 AB와 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면
 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 이므로

$$3\sqrt{3} = 6 \cos \theta, \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $\theta = 30^\circ$

- 6 단면의 넓이를 S라고 하면 단면의 밑면 위로의 정사영은 밑면인 원이므로

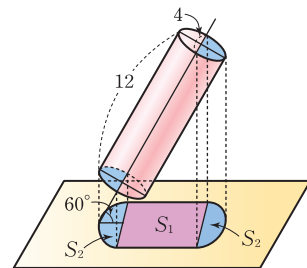
$$\pi \times 8^2 = S \times \cos 60^\circ$$

$$64\pi = \frac{1}{2} S$$

따라서 $S = 128\pi$

그러므로 ⑤이다.

- 7 다음 그림과 같이 원기둥의 옆면의 정사영의 넓이를 S_1 , 원기둥의 밑면 중 반원의 정사영의 넓이를 S_2 라고 하면 구하는 원기둥 모양의 풍선의 그림자의 넓이는 $S_1 + 2S_2$ 이다.



이때 원기둥의 옆면과 지면이 이루는 각의 크기는 60° 이고, 원기둥의 옆면의 정사영은 직사각형이므로

$$S_1 = 4 \times (12 \times \cos 60^\circ) = 24$$

원기둥의 밑면의 반원이 지면과 이루는 각의 크기는 30° 이므로

$$S_2 = \left\{ \frac{1}{2} \times (\pi \times 2^2) \right\} \times \cos 30^\circ = \sqrt{3}\pi$$

따라서 구하는 그림자의 넓이는

$$S_1 + 2S_2 = 24 + 2\sqrt{3}\pi$$

그러므로 ③이다.

- 8 점 A(4, 3, 2)를 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라고 하면

$$A'(4, 3, -2)$$

- 점 B(2, 3, 4)를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라고 하면

$$B'(-2, 3, 4)$$

- 이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$, $\overline{BQ} = \overline{B'Q}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} &= \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \\ &\geq \overline{A'B'} \\ &= \sqrt{(-6)^2 + 0^2 + 6^2} \\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $6\sqrt{2}$

- 9 점 C의 좌표를 (a, b, c) 라고 하면 평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 교점 $(0, 2, -1)$ 은 선분 AC의 중점과 같으므로

$$\frac{-2+a}{2}=0, \frac{-3+b}{2}=2, \frac{4+c}{2}=-1$$

$$a=2, b=7, c=-6$$

- 즉, 점 C의 좌표는 $(2, 7, -6)$

따라서 선분 BC의 길이는

$$\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-4)^2} = 5\sqrt{2}$$

- 10 점 $(-4, 1, -3)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 A의 좌표는

$$(4, -1, 3)$$

- 점 $(-2, 2, 4)$ 를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$$(2, 2, 4)$$

- 점 C의 좌표를 (a, b, c) 라고 하면 삼각형 ABC의 무게중심이 $G(3, 1, 2)$ 이므로

$$\frac{4+2+a}{3}=3, \frac{-1+2+b}{3}=1, \frac{3+4+c}{3}=2$$

$$a=3, b=2, c=-1$$

따라서 점 C의 좌표는 $(3, 2, -1)$

- 11 구의 중심은 두 점 $(-1, 2, 3)$, $(1, 6, -1)$ 의 중점과 같으므로

$$\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{2+6}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right), \text{ 즉 } (0, 4, 1)$$

또 구하는 구의 반지름의 길이는 두 점 $(-1, 2, 3)$,

$(1, 6, -1)$ 사이의 거리의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2} = 3$$

즉, 구의 방정식은

$$x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 9$$

이 구는 중심이 yz 평면 위에 있으므로 yz 평면과 만나서 생기는 원의 방정식은

$$(y-4)^2 + (z-1)^2 = 9$$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi \times 3^2 = 9\pi$

- 12 주어진 구의 방정식을 변형하면

$$(x-a)^2 + (y+2)^2 + (z-2b)^2 = a^2 + 4b^2 - 16$$

(단, $a^2 + 4b^2 - 16 > 0$)

즉, 구의 중심은 $(a, -2, 2b)$ 이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{a^2 + 4b^2 - 16}$ 이다.

이때 구가 xy 평면에 접하므로

$$2b = \sqrt{a^2 + 4b^2 - 16}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $a^2 = 16$

$a > 0$ 이므로 $a = 4$

또 구가 yz 평면에 접하므로

$$a = \sqrt{a^2 + 4b^2 - 16}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $b^2 = 4$

$b > 0$ 이므로 $b = 2$

따라서 $a+b=6$

- 13 오른쪽 그림과 같이 정육면

체의 한 꼭짓점을 원점 O,

세 모서리를 각각 x 축, y 축,

z 축 위에 놓고, 구의 중심을

C라고 하면

$$C(1, 1, 1)$$

이므로

$$\overline{OC} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

구의 반지름의 길이는 1이므로

$$M = \sqrt{3} + 1, m = \sqrt{3} - 1$$

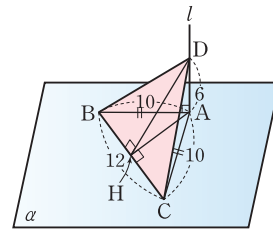
따라서 $Mm = (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) = 2$

- 14 점 D에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H라고 하면

$\overline{AD} \perp \alpha$, $\overline{DH} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{AH} \perp \overline{BC}$$

▶ 40%



이때 삼각형 ABC는 이등변삼각형이고 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ 이므로

$$\overline{BH} = \overline{CH} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 6$$

직각삼각형 AHC에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

직각삼각형 AHD에서

$$\overline{DH} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

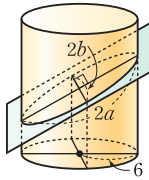
▶ 40%

따라서 삼각형 DBC의 넓이는

$$\begin{aligned}\triangle DBC &= \frac{1}{2} \overline{BC} \times \overline{DH} \\ &= \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60\end{aligned}$$

▶ 20%

- 15 잘린 단면인 타원의 밑면 위로의 정사영은 밑면인 원이므로 타원의 장축의 밑면 위로의 정사영은 밑면의 지름이다.
이때 타원의 장축의 길이를 $2a$ 라고 하면



$$12 = 2a \cos 30^\circ$$

$$12 = 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2}, a = 4\sqrt{3} \quad \blacktriangleright 40\%$$

또 타원의 단축의 길이를 $2b$ 라고 하면 단축의 길이는 밑면의 지름의 길이와 같으므로

$$2b = 12, b = 6 \quad \blacktriangleright 30\%$$

따라서 구하는 두 초점 사이의 거리는

$$2\sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 6^2} = 4\sqrt{3} \quad \blacktriangleright 30\%$$

- 16 $a^2 + b^2 = 4$ 이므로 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$$\overline{AB} = \sqrt{(b-a)^2 + a^2 + (-b)^2}$$

$$= \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 2ab}$$

$$= \sqrt{8 - 2ab}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-b)^2 + (b-a)^2 + a^2}$$

$$= \sqrt{8 - 2ab}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{a^2 + (-b)^2 + (b-a)^2}$$

$$= \sqrt{8 - 2ab} \quad \blacktriangleright 30\%$$

이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

이때 삼각형 ABC의 넓이를 구하면

$$\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} \{\sqrt{8 - 2ab}\}^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} (4 - ab) \quad \blacktriangleright 20\%$$

한편 $a > 0, b > 0$ 이고 $a^2 + b^2 = 4$ 이므로 산술평균과 기하평균 사이의 관계에 의하여

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 b^2} = 2ab$$

(단, 등호는 $2a = b$ 일 때 성립)

$$4 \geq 2ab, ab \leq 2 \quad \blacktriangleright 30\%$$

$$\text{즉, } \frac{\sqrt{3}}{2} (4 - ab) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} (4 - 2) = \sqrt{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이의 최솟값은 $\sqrt{3}$ 이다.

$\blacktriangleright 20\%$

- 17 $\overline{AB}$ 를 1 : 2로 내분하는 점을 P라고 하면 점 P는 yz 평면 위에 있으므로 x 좌표가 0이다.

$$\text{즉, } \frac{1 \times a + 2 \times 4}{1 + 2} = 0 \text{이므로}$$

$$a = -8 \quad \blacktriangleright 30\%$$

또 $\overline{AB}$ 를 2 : 3으로 외분하는 점을 Q라고 하면 점 Q는 x 축 위에 있으므로 y 좌표와 z 좌표가 0이다.

$$\text{즉, } \frac{2 \times b - 3 \times 2}{2 - 3} = 0 \text{이므로}$$

$$b = 3 \quad \blacktriangleright 30\%$$

$$\frac{2 \times c - 3 \times (-1)}{2 - 3} = 0 \text{이므로}$$

$$c = -\frac{3}{2} \quad \blacktriangleright 30\%$$

따라서 $abc = 36$

$\blacktriangleright 10\%$

- 18 구의 방정식을

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 10^2$$

으로 놓으면 xy 평면, yz 평면, zx 평면과 만나서 생기는 단면인 원의 방정식은 각각

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 100 - c^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(y-b)^2 + (z-c)^2 = 100 - a^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$(x-a)^2 + (z-c)^2 = 100 - b^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \quad \blacktriangleright 60\%$$

이때 원 ①, ②, ③의 반지름의 길이가 각각 6, 8, $\sqrt{31}$ 이므로

$$100 - c^2 = 6^2, 100 - a^2 = 8^2, 100 - b^2 = (\sqrt{31})^2$$

따라서 $a^2 = 36, b^2 = 69, c^2 = 64$ 이므로 원점에서 구의 중심까지의 거리는

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{36 + 69 + 64} = 13 \quad \blacktriangleright 40\%$$

