

정답친해





I 함수의 극한과 연속

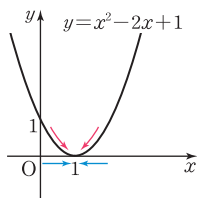
Plus 연습

1 함수의 극한

01 함수의 극한 9~17쪽

- 01 (1) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ 이라고 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 1) = 0$$

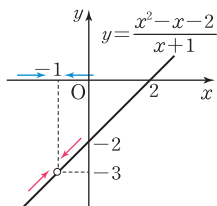


- (2) $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$ 라고 하면 $x \neq -1$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} \\ &= \frac{(x + 1)(x - 2)}{x + 1} \\ &= x - 2 \end{aligned}$$

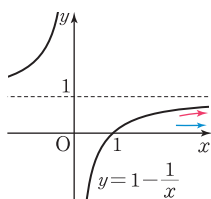
함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = -3$$



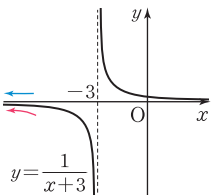
- 02 (1) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ 이라고 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$$



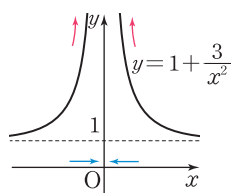
- (2) $f(x) = \frac{1}{x + 3}$ 이라고 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + 3} = 0$$



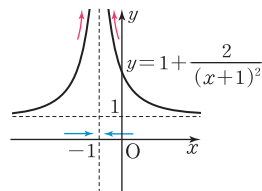
- 03 (1) $f(x) = 1 + \frac{3}{x^2}$ 이라고 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) = \infty$$



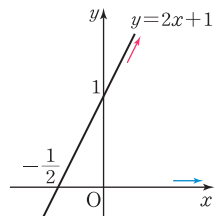
- (2) $f(x) = 1 + \frac{2}{(x + 1)^2}$ 라고 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \left\{1 + \frac{2}{(x + 1)^2}\right\} \\ = \infty \end{aligned}$$



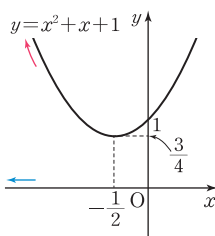
- 04 (1) $f(x) = 2x + 1$ 이라고 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 1) = \infty$$



- (2) $f(x) = x^2 + x + 1$ 이라고 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 1) = \infty$$



- 05 (1) $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (2x - 1) = 1$

- (2) $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x + 3) = 2$

- 06 (1) $x = 5$ 에서 우극한과 좌극한을 구하면

$$\lim_{x \rightarrow 5+} \frac{x - 5}{|x - 5|} = \lim_{x \rightarrow 5+} \frac{x - 5}{x - 5} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 5-} \frac{x - 5}{|x - 5|} = \lim_{x \rightarrow 5-} \frac{x - 5}{-(x - 5)} = -1$$

따라서 우극한과 좌극한이 다르므로 극한

$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{|x - 5|}$ 는 존재하지 않는다.

- (2) $x = -2$ 에서 우극한과 좌극한을 구하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x^2 + 4x + 4}{|x + 2|} &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{(x + 2)^2}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+} (x + 2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{x^2 + 4x + 4}{|x + 2|} &= \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{(x + 2)^2}{-(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2-} (-x - 2) = 0 \end{aligned}$$

따라서 우극한과 좌극한이 0으로 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{|x + 2|} = 0$$

02 함수의 극한값의 계산 18~27쪽

- 01 (1) $\lim_{x \rightarrow 1} (5x+1) = 5 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1$
 $= 5 \times 1 + 1 = 6$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 1) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 4 \lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 1$
 $= 2^2 - 4 \times 2 + 1 = -3$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} (x-4)(x+1)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} (x-4) \times \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)$
 $= (\lim_{x \rightarrow 0} x - \lim_{x \rightarrow 0} 4) (\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 1)$
 $= (0-4)(0+1) = -4$
- (4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{x^2+x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x+1)}$
 $= \frac{2 \lim_{x \rightarrow 1} x - \lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1}$
 $= \frac{2 \times 1 - 1}{1^2 + 1 + 1} = \frac{1}{3}$
- 02 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x-1} = 0$
- (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right) \left(2 + \frac{1}{x-2} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right) \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x-2} \right)$
 $= \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-2} \right)$
 $= (1-0)(2+0) = 2$
- 03 (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+2x+4) = 12$
- (2) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+5}-2}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}{x+1}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt{x+5}+2) = 4$
- 04 (1) 분자, 분모를 각각 분모의 최고차항인 x 로 나누어 극한값을 구하면
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5+\frac{1}{x}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{5}{2}$$
- (2) 분자, 분모를 각각 분모의 최고차항인 x^2 으로 나누어 극한값을 구하면
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{x^2+3x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}} = 0$$

- 05 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-ax-b}{x+2} = 2$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -2} (x+2) = 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2-ax-b) = 0$
 즉, $4+2a-b=0$ 이므로 $b=2a+4$ ①
- ①을 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-ax-b}{x+2}$ 에 대입하면
 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-ax-2a-4}{x+2}$
 $= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-a-2)}{x+2}$
 $= \lim_{x \rightarrow -2} (x-a-2) = -a-4$
 즉, $-a-4=2$ 이므로 $a=-6$
 $a=-6$ 을 ①에 대입하면 $b=-8$
- 06 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2-1} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+1} = 0$
 따라서 함수의 극한의 대소 관계를 이용하면
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

- 07 모든 양의 실수 x 에 대하여 $2x+1 > 0$ 이므로 각 변을 $2x+1$ 로 나누면
 $\frac{x}{2x+1} < \frac{f(x)}{2x+1} < \frac{x+1}{2x+1}$
- 이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$
- 따라서 함수의 극한의 대소 관계를 이용하면
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x+1} = \frac{1}{2}$

2 함수의 연속

01 함수의 연속 35~40쪽

- 01 (1) (i) $f(1) = 2$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 정의된다.
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$ 이므로 극한값 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 가 존재한다.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2$
 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.
- (2) (i) $f(1) = 2$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 정의된다.
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+3) = 4$ 이므로 극한값 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 가 존재한다.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$
 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

02 (1) 함수 $f(x) = \frac{1}{x-2}$ 의 정의역은 $\{x | x \neq 2 \text{인 실수}\}$

이므로 구간의 기호로 나타내면

$$(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$$

(2) 함수 $f(x) = \sqrt{2x-3}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \geq \frac{3}{2}\right\}$ 이

므로 구간의 기호로 나타내면 $\left[\frac{3}{2}, \infty\right)$

03 (1) 함수 $f(x) = \frac{1}{x+4}$ 은 $x \neq -4$ 인 모든 실수 x 에서

연속이므로 연속인 구간은

$$(-\infty, -4), (-4, \infty)$$

(2) 함수 $f(x) = \sqrt{x-3}$ 은 구간 $(3, \infty)$ 에서 연속이

고, $\lim_{x \rightarrow 3+} \sqrt{x-3} = f(3) = 0$ 이므로 연속인 구간은

$$[3, \infty)$$

04 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속하려면 $x=2$ 에서
연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax - 2}{x - 2} = b \quad \dots\dots ①$$

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax - 2}{x - 2}$ 가 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax - 2) = 0$$

즉, $4 + 2a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$

$a = -1$ 을 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3 \end{aligned}$$

즉, $b = 3$

05 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속하려면 $x=1$ 에서

연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - a}{x-1} = 1 - b \quad \dots\dots ①$$

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - a}{x-1}$ 가 존재하고

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+3} - a) = 0$$

즉, $2 - a = 0$ 이므로 $a = 2$

$a = 2$ 를 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

즉, $\frac{1}{4} = 1 - b$ 이므로 $b = \frac{3}{4}$

02 연속함수의 성질 41~45쪽

01 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

(1) 연속함수의 성질에 따라 함수

$f(x)g(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

(2) 연속함수의 성질에 따라 함수 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-1}{x^2-4}$ 은

$x^2 - 4 \neq 0$, 즉 $x \neq -2, x \neq 2$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다.

02 (1) 함수 $f(x) = x^2 - x$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속

이고 $f(x) = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ 이므로 $x = 2$

에서 최댓값은 2, $x = \frac{1}{2}$ 에서 최솟값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

(2) 함수 $f(x) = \frac{1}{x-2}$ 은 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속

이고 감소하는 함수이므로 $x = 0$ 에서 최댓값은 $-\frac{1}{2}$, $x = 1$ 에서 최솟값은 -1 이다.

03 $f(x) = x^3 + x - 1$ 이라고 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고

$$f(0) = -1 < 0, f(1) = 1 > 0$$

이므로 사잇값의 정리에 따라 $f(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3 + x - 1 = 0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

시험 대비 대단원 TEST 64~66쪽

- | | | | |
|--------------------------|-----------------|-------|-----------------------|
| 1 -7 | 2 $\frac{1}{2}$ | 3 ③ | 4 ④ |
| 5 $f(x) = 2x^2 - 8x + 8$ | 6 ② | 7 1 | |
| 8 ③ | 9 ⑤ | 10 5 | 11 $\neg, \cup, \cap$ |
| 12 ① | 13 존재하지 않는다. | 14 1 | 15 -2 |
| 16 $a = -1, b = 1$ | 17 -3 또는 3 | 18 3개 | |

$$\begin{aligned} 1 \quad \lim_{x \rightarrow 5-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5-} \frac{(x-5)(x+2)}{-(x-5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5-} (-x-2) = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- 3 ③ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \infty$
따라서 옳지 않은 것은 ③이다.
- 4 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)f(x)}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2)f(x) = 4 \times 1 = 4$
따라서 ④이다.
- 5 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2+3x+2} = 2$ 에서 $f(x)$ 는 x^2 의 계수가 2인
이차함수이어야 한다.
따라서 $f(x) = 2x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라고 하면
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + ax + b}{x-2} = 0 \quad \dots\dots ①$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$ 이므로
$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + ax + b) = 0$$

즉, $8 + 2a + b = 0$ 이므로 $b = -2a - 8$
이것을 ①에 대입하면
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + ax - 2a - 8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 4 + a) = 8 + a = 0$$

따라서 $a = -8, b = 8$ 이므로
$$f(x) = 2x^2 - 8x + 8$$
- 6 부등식의 각 변을 x^2 ($x^2 > 0$)으로 나누면
$$3 - \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq 3 + \frac{1}{x^2}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{x^2}\right) = 3, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{x^2}\right) = 3$ 이므로
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$$

따라서 ②이다.
- 7 곡선과 직선의 교점의 x 좌표를 구하면
$$2\sqrt{x} = tx, x(t^2x - 4) = 0$$

이때 점 P는 원점이 아닌 점이므로 점 P의 좌표는
$$\left(\frac{4}{t^2}, \frac{4}{t}\right)$$

즉, 점 H의 좌표는 $\left(\frac{4}{t^2}, 0\right)$
이때 $\overline{OP}^2 = \frac{16}{t^4} + \frac{16}{t^2}, \overline{OH}^2 = \frac{16}{t^4}$
따라서 $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OH}^2} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{16}{t^4} + \frac{16}{t^2}}{\frac{16}{t^4}} = \lim_{t \rightarrow 0+} (1 + t^2) = 1$
- 8 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = a$
이때 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$
따라서 $a = \frac{1}{4}$ 이므로 ③이다.

- 9 $x \neq -1$ 일 때, $f(x) = \frac{x^3+ax+1}{x+1}$
극한값 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 가 존재하고 $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$ 이므로
$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^3+ax+1) = 0$$

즉, $-1 - a + 1 = 0$ 에서 $a = 0$ 이므로
$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3$$

따라서 ⑤이다.
- 10 $f(0) = 0$ 이므로 $f(x) = f(x+3)$ 에서 $f(3) = 0$
이때 $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3-} (-ax^2 + b) = -9a + b$
즉, $-9a + b = 0$ 이므로 $b = 9a \quad \dots\dots ①$
또 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 연속이므로
$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (-ax^2 + b)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} (-ax^2 + 9a) = 8a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} 8x = 8$$

$$f(1) = -a + b = -a + 9a = 8a$$

즉, $8a = 8$ 이므로 $a = 1$
이것을 ①에 대입하면 $b = 9$
즉,
$$f(x) = \begin{cases} 8x & (0 \leq x < 1) \\ -x^2 + 9 & (1 \leq x < 3) \end{cases}$$

따라서 $f(5) = f(2) = -2^2 + 9 = 5$
- 11 $f(x) = 8x^3 + 12x^2 - 2x - 3$ 이라고 하면
$$f(-2) < 0, f(-1) > 0, f(0) < 0$$

$$f(1) > 0, f(2) > 0$$

이므로 사잇값의 정리에 따라 방정식 $f(x) = 0$ 은 열
린구간 $(-2, -1), (-1, 0), (0, 1)$ 에서 각각 적
어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 보기 중 실근이 속하는 구간은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
- 12 $f(x) = x^3 - 4x + a$ 라고 하면 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간
 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 $f(-1)f(1) < 0$ 일 때 사잇값
의 정리에 따라 방정식 $f(x) = 0$ 이 열린구간 $(-1, 1)$
에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
즉, $f(-1)f(1) < 0$ 에서
$$(a+3)(a-3) < 0, -3 < a < 3$$

따라서 ①이다.
- 13 $x = 4$ 에서 우극한과 좌극한을 구하면
$$\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4+} \frac{(x-4)(x+5)}{x-4} = 9 \quad \blacktriangleright 40\%$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{-(x-4)(x+5)}{x-4}$$

$$= -9 \quad \blacktriangleright 40\%$$

따라서 우극한과 좌극한이 다르므로 극한
$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x^2+x-20|}{x-4}$$
은 존재하지 않는다. ▶ 20%

14 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ 에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{g(x)} = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{g(x)} \{f(x) - g(x)\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right\} = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 이므로 ▶ 50%

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + g(x)}{-f(x) + 3g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} + 1}{-\frac{f(x)}{g(x)} + 3} = \frac{1+1}{-1+3} = 1 \quad \text{▶ 50\%}$$

15 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = \alpha$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha$ 이므로 ▶ 50%

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) + x}{f(x) - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\frac{f(x)}{x} + 1}{\frac{f(x)}{x} - 1} = \frac{2\alpha + 1}{\alpha - 1}$$

이때 $\frac{2\alpha + 1}{\alpha - 1} = 1$ 이므로 $\alpha = -2$ ▶ 50%

16 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2 + ax}{x-1} = b$ ▶ 40%

이때 $\lim_{x \rightarrow 1-} (x-1) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1-} (x^2 + ax) = 0$

즉, $1+a=0$ 이므로 $a=-1$ ▶ 30%

따라서 $b = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2 - x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} x = 1$ ▶ 30%

17 $f(x)g(x) = \begin{cases} (2x+3)(x^2-a^2) & (|x| \geq 3) \\ (x-1)(x^2-a^2) & (|x| < 3) \end{cases}$ 이고,

함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)g(x) = f(3)g(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x)g(x) = 9(9-a^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x)g(x) = 2(9-a^2)$$

$$f(3)g(3) = 9(9-a^2) \quad \text{▶ 50\%}$$

즉, $9(9-a^2) = 2(9-a^2)$ 이므로 $a^2=9$

따라서 $a=-3$ 또는 $a=3$ ▶ 50%

18 $g(x)=f(x)-x-1$ 이라고 하면 $g(x)$ 는 연속함수이고 $g(-1)>0$, $g(0)<0$, $g(1)>0$, $g(2)<0$ 이므로 사잇값의 정리에 따라 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=x+1$ 은 열린구간 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. ▶ 70%

따라서 방정식 $f(x)=x+1$ 은 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 적어도 3개의 실근을 갖는다. ▶ 30%

II 미분

Plus 연습

1 미분계수와 도함수

01 미분계수 69~78쪽

01 (1) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{15 - 1}{2} = 7$

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-3 + \Delta x) - f(-3)}{\Delta x} = \frac{-\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = -1 + \Delta x$

02 $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = \frac{20 - 15}{1} = 5$

03 (1) $f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x} = 5$

(2) $f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + 2\Delta x) = 1$

다른 풀이 (1) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)}{x-1} = 5$

(2) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (2x-1) = 1$

04 $-3\Delta x = t$ 로 놓으면 $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a - 3\Delta x) - f(a)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a - 3\Delta x) - f(a)}{-3\Delta x} \times (-3) \\ &= -3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t) - f(a)}{t} \\ &= -3f'(a) \end{aligned}$$

05 (1) $f(x) = x^2 - x$ 라고 하면 구하는 접선의 기울기는 함수 $f(x)$ 의 $x=2$ 에서 미분계수 $f'(2)$ 와 같으므로

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3 + \Delta x) = 3 \end{aligned}$$

(2) $f(x) = x^3 + 4x - 2$ 라고 하면 구하는 접선의 기울기는 함수 $f(x)$ 의 $x=1$ 에서 미분계수 $f'(1)$ 과 같으므로

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{7\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{7 + 3\Delta x + (\Delta x)^2\} = 7 \end{aligned}$$

06 $f(0)=0$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.
한편

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x^3}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} (-x^2) = 0 \end{aligned}$$

에서 $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ 은 존재하지 않으므로

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 함수 $f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ |x|^3 & (x < 0) \end{cases}$ 은 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

02 도함수 79~85쪽

01 (1) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = 2$$

(2) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2x-1)h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x-1+h) = 2x-1 \end{aligned}$$

02 (1) $y' = 0$

(2) $y' = 7x^{7-1} = 7x^6$

03 (1) $y' = 2 \times 3x^2 - 4 \times 1 - 0$

$$= 6x^2 - 4$$

(2) $y' = (-1) \times 8x^7 + 3 \times 3x^2 - 0$

$$= -8x^7 + 9x^2$$

04 (1) $y' = 2(x+4) + (2x-3) \times 1$

$$= 4x + 5$$

(2) $y' = (2x+1)(3x-5) + (x^2+x-1) \times 3$

$$= 9x^2 - 4x - 8$$

2 도함수의 활용

01 접선의 방정식 94~98쪽

01 (1) $f(x) = -x^2 + x - 7$ 이라고 하면

$$f'(x) = -2x + 1$$

점 $(1, -7)$ 에서 접하는 접선의 기울기는

$$f'(1) = -1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - (-7) = -(x - 1), y = -x - 6$$

(2) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 3$ 이라고 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

점 $(1, 4)$ 에서 접하는 접선의 기울기는

$$f'(1) = 4$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - 4 = 4(x - 1), y = 4x$$

02 (1) $f(x) = x^2 - 2x - 9$ 라고 하면

$$f'(x) = 2x - 2$$

접점의 좌표를 $(t, t^2 - 2t - 9)$ 라고 하면 접선의 기울기가 2이므로 $f'(t) = 2$ 에서

$$2t - 2 = 2, t = 2$$

따라서 접점의 좌표는 $(2, -9)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - (-9) = 2(x - 2), y = 2x - 13$$

(2) $f(x) = x^3 - 10x + 7$ 이라고 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 10$$

접점의 좌표를 $(t, t^3 - 10t + 7)$ 이라고 하면 접선의 기울기가 2이므로 $f'(t) = 2$ 에서

$$3t^2 - 10 = 2, t^2 = 4$$

$$t = -2 \text{ 또는 } t = 2$$

따라서 접점의 좌표는 $(-2, 19)$ 또는 $(2, -5)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - 19 = 2\{x - (-2)\}$$

$$\text{또는 } y - (-5) = 2(x - 2)$$

즉, $y = 2x + 23$ 또는 $y = 2x - 9$

03 (1) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ 라고 하면

$$f'(x) = 2x - 4$$

접점의 좌표를 $(t, t^2 - 4t + 2)$ 라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t) = 2t - 4$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = (2t - 4)x - t^2 + 2 \quad \dots\dots ①$$

이 접선이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 = -t^2 + 2, t^2 = 1$$

$$t = -1 \text{ 또는 } t = 1$$

따라서 t 의 값을 ①에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y = -6x + 1 \text{ 또는 } y = -2x + 1$$

- (2) $f(x)=x^3-5x$ 라고 하면 $f'(x)=3x^2-5$
 점점의 좌표를 (t, t^3-5t) 라고 하면 점선의 기울
 기는 $f'(t)=3t^2-5$ 이므로 점선의 방정식은
 $y=(3t^2-5)x-2t^3$ ①
 이 점선이 $(-2, 10)$ 을 지나므로
 $0=-2t^3-6t^2, 2t^2(t+3)=0$
 $t=-3$ 또는 $t=0$
 따라서 t 의 값을 ①에 대입하면 구하는 점선의 방
 정식은 $y=22x+54$ 또는 $y=-5x$

02 평균값 정리 99~102쪽

- 01 (1) $f'(x)=-2x+1$ 이므로 $f'(c)=0$ 에서
 $-2c+1=0, c=\frac{1}{2}$
 (2) $f'(x)=4x^3-8x$ 이므로 $f'(c)=0$ 에서
 $4c^3-8c=0, 4c(c+\sqrt{2})(c-\sqrt{2})=0$
 $c=-\sqrt{2}$ 또는 $c=0$ 또는 $c=\sqrt{2}$
 그런데 $-1 < c < 1$ 이므로 $c=0$
 02 (1) $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$ 에서 $f'(x)=2x-3$ 이므로
 $-2=2c-3, c=\frac{1}{2}$
 (2) $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$ 에서 $f'(x)=3x^2-4$ 이므로
 $-3=3c^2-4, c^2=\frac{1}{3}$
 $c=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $c=\frac{\sqrt{3}}{3}$
 그런데 $0 < c < 1$ 이므로 $c=\frac{\sqrt{3}}{3}$

03 함수의 증가와 감소, 극대와 극소 103~112쪽

- 01 (1) $0 \leq x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여
 $f(x_2)-f(x_1)$
 $=x_2^4-x_1^4$
 $=(x_2^2+x_1^2)(x_2+x_1)(x_2-x_1) > 0$
 이므로 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.
 따라서 함수 $f(x)=x^4$ 은 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가
 한다.
 (2) $1 < x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여
 $f(x_2)-f(x_1)$
 $=\frac{1}{x_2^2-1}-\frac{1}{x_1^2-1}$
 $=\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{(x_2+1)(x_2-1)(x_1+1)(x_1-1)} < 0$
 이므로 $f(x_1) > f(x_2)$ 이다.
 따라서 함수 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ 은 구간 $(1, \infty)$ 에서
 감소한다.

- 02 (1) $f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$ 이므로
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	9	↘	1	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -2], [0, \infty)$
 에서 증가하고, 구간 $[-2, 0]$ 에서 감소한다.

- (2) $f'(x)=-4x^3+8x=-4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ 이
 므로 $f'(x)=0$ 에서
 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

x	...	$-\sqrt{2}$	...	0	...	$\sqrt{2}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗	4	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -\sqrt{2}], [0, \sqrt{2}]$
 에서 증가하고, 구간 $[-\sqrt{2}, 0], [\sqrt{2}, \infty)$ 에서
 감소한다.

- 03 (1) $f'(x)=3x^2+3x-6=3(x+2)(x-1)$ 이므로
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	9	↘	$-\frac{9}{2}$	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극대이고 극댓
 값은 9, $x=1$ 에서 극소이고 극솟값은 $-\frac{9}{2}$ 이다.

- (2) $f'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$ 이므로
 $f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	↘	23	↘	-4	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 극댓값은 없고, $x=2$ 에서 극
 소이고 극솟값은 -4이다.

- 04 $f'(x)=-12x^3+12x^2+24x$
 $=-12x(x+1)(x-2)$

이므로 $0 \leq x \leq 3$ 일 때, $f'(x)=0$ 에서
 $x=0$ 또는 $x=2$

x	0	...	2	...
$f'(x)$	0	+	0	-
$f(x)$	5	↗	37	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이고 극댓값은 37
 이므로 데이터 전송량의 극댓값은 37이다.

- 05 $f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$ 이고, 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극소이고 극솟값이 -12 이므로 $f'(2)=0$ 에서
 $-12 + 4a + b = 0$ ①

$$f(2) = -12 \text{에서}$$

$$-8 + 4a + 2b + 20 = -12 \quad \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=12, b=-36$

즉, $f(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x + 20$ 이므로

$$f'(x) = -3x^2 + 24x - 36$$

$$= -3(x-2)(x-6)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=2 \text{ 또는 } x=6$$

x	...	2	...	6	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	-12	/	20	\

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=6$ 에서 극대이고 극댓값은 20이다.

04 함수의 그래프 113~120쪽

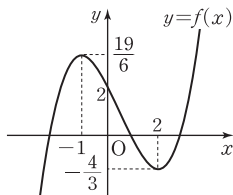
- 01 (1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ 라고 하면

$$f'(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	$\frac{19}{6}$	\	$-\frac{4}{3}$	/

또 $f(0)=2$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



- (2) $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 3$ 이라고 하면

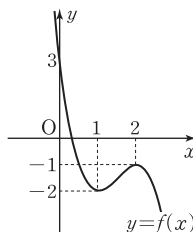
$$f'(x) = -6x^2 + 18x - 12$$

$$= -6(x-1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	-2	/	-1	\

또 $f(0)=3$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



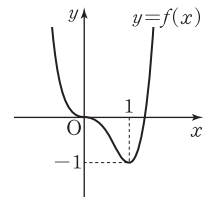
- 02 (1) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ 이라고 하면

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	\	0	\	-1	/

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



- (2) $f(x) = -x^4 + 6x^2 - 4$ 라고 하면

$$f'(x) = -4x^3 + 12x$$

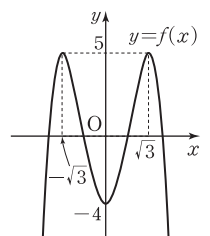
$$= -4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$x=-\sqrt{3} \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=\sqrt{3}$$

x	...	$-\sqrt{3}$	...	0	...	$\sqrt{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	/	5	\	-4	/	5	\

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



- 03 (1) $f'(x) = -6x^2 + 6x + 12$

$$= -6(x+1)(x-2)$$

이므로 $-2 \leq x \leq 0$ 일 때, $f'(x)=0$ 에서

$$x=-1$$

x	-2	...	-1	...	0
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	5	\	-6	/	1

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 최대이고 최댓값은 5, $x=-1$ 에서 최소이고 최솟값은 -6 이다.

- (2) $f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$

$$= 4(x-1)^2(x+2)$$

이므로 $0 \leq x \leq 2$ 일 때, $f'(x)=0$ 에서

$$x=1$$

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	1	/	4	/	9

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최대이고 최댓값은 9, $x=0$ 에서 최소이고 최솟값은 1이다.

- 04 $f'(x) = 3x^2 + 2ax$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이므로 $f'(2)=0$ 에서

$$12 + 4a = 0, a = -3$$

즉, $f(x) = x^3 - 3x^2 + b$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$-2 \leq x \leq 2$ 일 때, $f'(x) = 0$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

x	-2	...	0	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	$b-20$	↗	b	↘	$b-4$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최대이고, $x=-2$ 에서 최소이다.

이때 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -10 이므로

$$b-20 = -10, b=10$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 10 이다.

- 05 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r cm, 높이를 h cm라고 하면

$$r^2 + h^2 = 36, \text{ 즉 } r^2 = 36 - h^2$$

원뿔의 부피를 $V(h)$ cm³라고 하면

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(36 - h^2)h$$

$$= -\frac{1}{3}\pi h^3 + 12\pi h$$

$$V'(h) = -\pi h^2 + 12\pi$$

$$= -\pi(h+2\sqrt{3})(h-2\sqrt{3})$$

$h > 0$ 일 때, $V'(h) = 0$ 에서 $h = 2\sqrt{3}$

h	0	...	$2\sqrt{3}$	...
$V'(h)$		+	0	-
$V(h)$		↗	극대	↘

따라서 $V(h)$ 는 $h = 2\sqrt{3}$ 에서 최대이므로 부피가 최대일 때 원뿔의 높이는 $2\sqrt{3}$ cm이다.

05 방정식과 부등식의 활용 121~127쪽

- 01 (1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ 라고 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

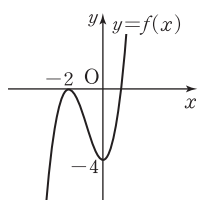
$f'(x) = 0$ 에서 $x = -2$ 또는 $x = 0$

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



- (2) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$ 이라고 하면

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x-1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 2$

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그

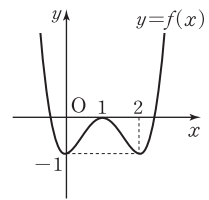
래프는 x 축과 서로 다른 세

점에서 만나므로 방정식

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1 = 0$$

의 서로 다른 실근의 개수는 3이

다.



- 02 $x^4 - 2x^2 - 1 - a = 0$ 에서 $x^4 - 2x^2 - 1 = a$

$f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$ 이라고 하면

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 1$

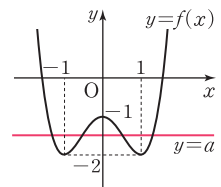
x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗

따라서 서로 다른 네 실근을

갖도록 하는 상수 a 의 값의

범위는

$$-2 < a < -1$$



- 03 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 5$ 라고 하면

$$f'(x) = 6x^2 + 2x - 8 = 2(3x+4)(x-1)$$

$x \geq 0$ 일 때, $f'(x) = 0$ 에서 $x = 1$

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	0	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 최소이고 최솟값은 0 이므로

$x \geq 0$ 인 모든 x 에 대하여

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 5 \geq 0$$

따라서 $x \geq 0$ 일 때, 부등식 $2x^3 + x^2 - 8x + 5 \geq 0$ 이

성립한다.

- 04 $x^4 + 3x^2 + 4 \geq 3x^2 - 4x + 1$ 에서 $x^4 + 4x + 3 \geq 0$

$f(x) = x^4 + 4x + 3$ 이라고 하면

$$f'(x) = 4x^3 + 4 = 4(x+1)(x^2 - x + 1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$

x	...	-1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	0	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최소이고 최솟값은 0이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = x^4 + 4x + 3 \geq 0$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$x^4 + 3x^2 + 4 \geq 3x^2 - 4x + 1$$
이 성립한다.

06 속도와 가속도 128~132쪽

- 01 (1) 시각 t 에서 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라고 하면
 $v = 6t^2 - 15t + 9$, $a = 12t - 15$

따라서 $t = 3$ 일 때, 점 P의 속도와 가속도는 각각

$$v = 18, a = 21$$

- (2) 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v = 0$ 에서

$$6t^2 - 15t + 9 = 0, 3(t-1)(2t-3) = 0$$

따라서 $0 < t < 1$, $t > \frac{3}{2}$ 일 때 $v > 0$ 이고, $1 < t < \frac{3}{2}$

일 때 $v < 0$ 이므로 점 P가 운동 방향을 처음으로 바꾸는 시각은 1이다.

- 02 시각 t 에서 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P , v_Q 라고 하면 $v_P = 3t + 3$, $v_Q = 2t - 4$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면

$$(3t+3)(2t-4) < 0, 6(t+1)(t-2) < 0$$

즉, $-1 < t < 2$

그런데 $t > 0$ 이므로 $0 < t < 2$

- 03 (1) 물체의 t 초 후의 속도를 v m/s라고 하면

$$v = 40 - 10t$$

물체가 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0이므로 $v = 0$ 에서 $40 - 10t = 0$, $t = 4$

따라서 물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은 4초이고, 그때의 높이는

$$x = 40 \times 4 - 5 \times 4^2 = 80$$

즉, 80 m이다.

- (2) 물체가 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0이므로

$$x = 0 \text{에서 } 40t - 5t^2 = 0, -5t(t-8) = 0$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $t = 8$

따라서 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속도는

$$40 - 10 \times 8 = -40$$

즉, -40 m/s이다.

- 04 수면으로부터 높이가 5 m일 때의 시각을 구하면

$x = 5$ 에서

$$-5t^2 + 5t + 15 = 5, 5(t+1)(t-2) = 0$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $t = 2$

t 초 후의 다이빙 선수의 속도를 v m/s라고 하면

$$v = -10t + 5$$

따라서 구하는 다이빙 선수의 속도는

$$(-10) \times 2 + 5 = -15$$

즉, -15 m/s이다.

시험 대비 대안원 TEST

..... 152~154쪽

1 2

2 ⑤

3 6

4 20

5 $a = 3, b = 6$

6 $y = 5x$ 7 $-\sqrt{3}$ 8 ③

9 π, κ 10 최댓값: 23, 최솟값: -4 11 ④

12 6

13 $\frac{4}{5}$

14 9

15 -12

16 $2\sqrt{2}$ cm

17 풀이 참고

- 1 $\frac{f(a)-f(1)}{a-1} = 6$ 에서

$$a^2 + a - 6 = 0, (a+3)(a-2) = 0$$

$$a = -3 \text{ 또는 } a = 2$$

그런데 $a > 1$ 이므로 $a = 2$

- 2 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 3\} = 0, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 미분가능하면 연속이므로

$$f(1) = 3$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{2} f'(1) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} f'(1) = 5 \text{이므로 } f'(1) = 10$$

따라서 $f'(1) + f(1) = 13$ 이므로 ⑤이다.

- 3 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 4xy$ 에 $x = 0, y = 0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0), f(0) = 0$$

$$\text{따라서 } f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4) + f(h) + 16h - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} + 16$$

$$= f'(0) + 16 = 6$$

- 4 함수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 미분가능하면 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2) \text{에서}$$

$$2a + b = 8 \quad \dots\dots ①$$

함수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 미분하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \text{에서}$$

$$a = 12$$

$a = 12$ 를 ①에 대입하여 풀면 $b = -16$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} 12x - 16 & (x \geq 2) \\ x^3 & (x < 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(3) = 20$$

- 5 다항식 x^4+ax+b 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때, 몫을 $Q(x)$ 라고 하면

$$x^4+ax+b=(x+1)^2Q(x)-x+3 \quad \cdots \cdots ①$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $1-a+b=4 \quad \cdots \cdots ②$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$4x^3+a=(2x+2)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)-1$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하여 풀면 $a=3$

$a=3$ 을 ②에 대입하여 풀면 $b=6$

- 6 $f(x)=x^3-2x^2+x+8$ 이라고 하면

$$f'(x)=3x^2-4x+1$$

점점의 좌표를 (t, t^3-2t^2+t+8) 이라고 하면 점점의 방정식은

$$y=(3t^2-4t+1)x-2t^3+2t^2+8 \quad \cdots \cdots ①$$

이 접선이 원점을 지나므로

$$0=-2t^3+2t^2+8$$

$$2(t-2)(t^2+t+2)=0$$

즉, $t=2$ 를 ①에 대입하면 점점의 방정식은 $y=5x$

- 7 $f'(x)=3x^2-4$ 이고 $\frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)}=f'(c)$ 에서

$$5=3c^2-4, c^2=3$$

그런데 $-3<c<0$ 이므로 $c=-\sqrt{3}$

- 8 $f'(x)=3x^2+2ax+3$ 이고, 함수 $f(x)$ 가 열린구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-9 \leq 0, (a+3)(a-3) \leq 0$$

$$-3 \leq a \leq 3$$

따라서 정수 a 의 개수는 7이므로 ③이다.

- 9 ㄱ. $f(0)$ 의 값이 항상 0인 것은 아니다.
ㄴ. $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 0]$ 에서 감소하고, 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가한다.

따라서 보기 중 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

- 10 $f(x)=-x^4+6x^2+8x-1$ 에서

$$f'(x)=-4x^3+12x+8$$

$$=-4(x+1)^2(x-2)$$

$-1 \leq x \leq 3$ 일 때, $f'(x)=0$ 에서

$$x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

x	-1	...	2	...	3
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	-4	/	23	\	-4

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최대이고 최댓값은 23, $x=-1$ 과 $x=3$ 에서 최소이고 최솟값은 -4이다.

- 11 $2x^3-3x^2-12x-a=0$ 에서

$$2x^3-3x^2-12x=a$$

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$ 라고 하면

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	7	\	-20	/

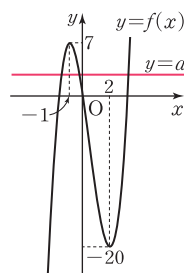
또 $f(0)=0$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, 서로 다른 두 개의 음의 근과 한 개의 양의 근을 갖도록 하는 상수 a 의 값의 범위는

$$0 < a < 7$$

따라서 ④이다.



- 12 시각 t 에서 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라고 하면

$$v=t^2-4t-5, a=2t-4$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$t^2-4t-5=0, (t+1)(t-5)=0$$

그런데 $t>0$ 이므로 $t=5$

이때 $0 < t < 5$ 일 때 $v < 0$ 이고, $t > 5$ 일 때 $v > 0$ 이므로 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은 5이다.

따라서 $t=5$ 일 때 점 P의 가속도는

$$2 \times 5 - 4 = 6$$

- 13 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)-f(1-2h)}{-2h} \times 2$
 $= f'(1) + 2f'(1)$
 $= 3f'(1)$

즉, $3f'(1)=15$ 이므로 $f'(1)=5$

▶ 50%

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{f(x)-f(1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{f(x)-f(1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{f(x)-f(1)} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) \\ &= \frac{4}{f'(1)} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

▶ 50%

- 14 $f(x)=-x^3+3x^2-2xf'(3)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=-3x^2+6x-2f'(3)$$

▶ 40%

양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$f'(3)=-27+18-2f'(3)$$

즉, $f'(3)=-3$

▶ 30%

따라서 $f'(x)=-3x^2+6x+6$ 이므로

$$f'(1)=9$$

▶ 30%

- 15 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + a$ 에서
 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 3$

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$a+5$	↘	$a-27$	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극대이고 극댓값은 $a+5$,
 $x = 3$ 에서 극소이고 극솟값은 $a-27$ 이다.

이때 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 20이므로

$$a+5=20, a=15 \quad \blacktriangleright 60\%$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 -12 이다. $\blacktriangleright 40\%$

- 16 정사각기둥의 밑면의 한 변의 길이를 x cm, 높이를 h cm라고 하면

$$6 : 6 - h = 3 : \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$$h = 6 - \sqrt{2}x$$

이때 원뿔에 내접하는 정사각기둥의 부피를 $V(x)$ cm³라고 하면

$$V(x) = x^2 h = x^2 (6 - \sqrt{2}x) \\ = -\sqrt{2}x^3 + 6x^2 \quad (\text{단, } 0 < x < 3\sqrt{2}) \quad \blacktriangleright 50\%$$

$$V'(x) = -3\sqrt{2}x^2 + 12x \\ = -3\sqrt{2}x(x - \sqrt{2})$$

이므로 $0 < x < 3\sqrt{2}$ 일 때, $V'(x) = 0$ 에서

$$x = 2\sqrt{2}$$

x	0	...	$2\sqrt{2}$	...	$3\sqrt{2}$
$V'(x)$		+	0	-	0
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(x)$ 는 $x = 2\sqrt{2}$ 일 때 최대이므로 부피가 최대인 정사각기둥의 밑면의 한 변의 길이는 $2\sqrt{2}$ cm이다. $\blacktriangleright 50\%$

- 17 $4x^3 + 5x^2 - 2 \leq 2x^2 + 6x + 3$ 에서
 $4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 \leq 0$
 $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5$ 라고 하면
 $f'(x) = 12x^2 + 6x - 6 \\ = 6(x+1)(2x-1)$
 $x \leq 0$ 일 때, $f'(x) = 0$ 에서 $x = -1$

x	...	-1	...	0
$f'(x)$	+	0	-	
$f(x)$	↗	0	↘	-5

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최대이고 최댓값은 0이므로 $x \leq 0$ 인 모든 x 에 대하여

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 \leq 0$$

따라서 $x \leq 0$ 일 때, 부등식

$$4x^3 + 5x^2 - 2 \leq 2x^2 + 6x + 3 \text{이 성립한다.} \quad \blacktriangleright 40\%$$

III 적분

Plus 연습

1 부정적분과 정적분

01 부정적분 157~162쪽

01 (1) $(3x)' = 3$ 이므로 $\int 3 dx = 3x + C$

(2) $(x^5)' = 5x^4$ 이므로 $\int 5x^4 dx = x^5 + C$

02 (1) $\int 7 dx = 7x + C$

(2) $\int x^{12} dx = \frac{1}{12+1} x^{12+1} + C = \frac{1}{13} x^{13} + C$

03 (1) $\int (4x^3 - 2x) dx = 4 \int x^3 dx - 2 \int x dx \\ = 4 \left(\frac{1}{4} x^4 + C_1 \right) - 2 \left(\frac{1}{2} x^2 + C_2 \right) \\ = x^4 - x^2 + C$

(2) $\int (x-4)(2x-1) dx \\ = \int (2x^2 - 9x + 4) dx \\ = 2 \int x^2 dx - 9 \int x dx + 4 \int dx \\ = 2 \left(\frac{1}{3} x^3 + C_1 \right) - 9 \left(\frac{1}{2} x^2 + C_2 \right) + 4(x + C_3) \\ = \frac{2}{3} x^3 - \frac{9}{2} x^2 + 4x + C$

04 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx \\ = \int (3x^2 - 4x + 5) dx \\ = x^3 - 2x^2 + 5x + C$$

이때 $f(1) = 0$ 에서 $C = -4$ 이므로

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 4$$

02 정적분 163~170쪽

01 (1) $\int_1^2 6x^5 dx = \left[x^6 \right]_1^2 = 2^6 - 1^6 = 63$

(2) $\int_{-2}^{-1} (5x^3 - 2x + 5) dx = 0$

02 (1) $\int_3^1 2x \, dx = \left[x^2 \right]_3^1 = 1^2 - 3^2 = -8$

(2) $\int_1^{-1} 7x^6 \, dx = \left[x^7 \right]_1^{-1} = (-1)^7 - 1^7 = -2$

03 (1) $\frac{d}{dx} \int_2^x (3t^2 - 2t + 3) \, dt = 3x^2 - 2x + 3$

(2) $\frac{d}{dx} \int_1^x (t^3 - 5t) \, dt = x^3 - 5x$

04 $f(x) = 2x^4 - ax^2 + C$ 이므로

$f'(x) = 8x^3 - 2ax$

이때 $f'(2) = 8$ 이므로

$64 - 4a = 8, a = 14$

즉, $f(x) = 2x^4 - 14x^2 + C$

$f(-1) = 3$ 에서

$2 - 14 + C = 3, C = 15$

따라서 $f(x) = 2x^4 - 14x^2 + 15$

05 $\int_1^x f(t) \, dt = x^4 - x^3 + 4x + a$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4$

또 $\int_1^x f(t) \, dt = x^4 - x^3 + 4x + a$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$0 = 1 - 1 + 4 + a$

따라서 $a = -4$

06 (1) $\int_{-1}^2 (3x^2 - 2x + 5) \, dx$

$= 3 \int_{-1}^2 x^2 \, dx - 2 \int_{-1}^2 x \, dx + \int_{-1}^2 5 \, dx$

$= 3 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^2 - 2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^2 + \left[5x \right]_{-1}^2$

$= 3 \left\{ \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \right\} - 2 \left(2 - \frac{1}{2} \right) + \{ 10 - (-5) \}$

$= 21$

(2) $\int_1^3 (-2x^2 + 1) \, dx + 2 \int_1^3 (x^2 - x) \, dx$

$= \int_1^3 \{ (-2x^2 + 1) + 2(x^2 - x) \} \, dx$

$= \int_1^3 (-2x + 1) \, dx = -2 \int_1^3 x \, dx + \int_1^3 1 \, dx$

$= -2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^3 + \left[x \right]_1^3$

$= -2 \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) + (3 - 1) = -6$

07 $\int_0^2 (x^3 - 2x) \, dx + \int_2^4 (x^3 - 2x) \, dx$

$= \int_0^4 (x^3 - 2x) \, dx$

$= \left[\frac{1}{4} x^4 - x^2 \right]_0^4 = 48$

08 $f(x) = |x - 2|$ 라고 하면 $0 \leq x \leq 2$ 에서

$f(x) = -x + 2, 2 \leq x \leq 4$ 에서 $f(x) = x - 2$ 이므로

$\int_0^4 |x - 2| \, dx$

$= \int_0^2 (-x + 2) \, dx + \int_2^4 (x - 2) \, dx$

$= \left[-\frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_0^2 + \left[\frac{1}{2} x^2 - 2x \right]_2^4$

$= 2 + 2 = 4$

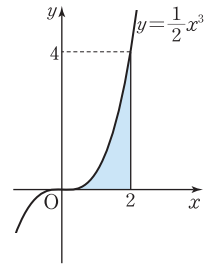
2 정적분의 활용

01 넓이 178~187쪽

01 (1) 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서

$y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$\int_0^2 \frac{1}{2} x^3 \, dx$
 $= \left[\frac{1}{8} x^4 \right]_0^2 = 2$



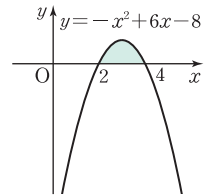
(2) 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표는

$x = 2, x = 4$

닫힌구간 $[2, 4]$ 에서

$y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$\int_2^4 (-x^2 + 6x - 8) \, dx$
 $= \left[-\frac{1}{3} x^3 + 3x^2 - 8x \right]_2^4$
 $= \frac{4}{3}$



02 (1) 곡선과 x 축의 교점의

x 좌표는

$x = -3, x = 1$

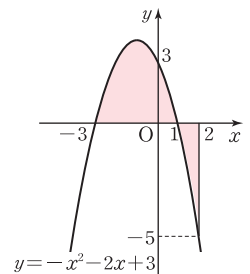
닫힌구간 $[-3, 1]$ 에서

$y \geq 0$, 닫힌구간 $[1, 2]$

에서 $y \leq 0$ 이므로 구하

는 넓이는

$\int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) \, dx$

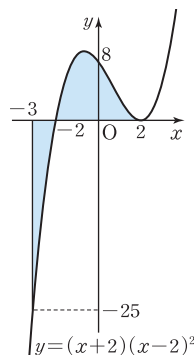


$+ \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) \, dx$

$= \left[-\frac{1}{3} x^3 - x^2 + 3x \right]_{-3}^1 + \left[\frac{1}{3} x^3 + x^2 - 3x \right]_1^2$

$= \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = 13$

(2) 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표는 $x=-2, x=2$



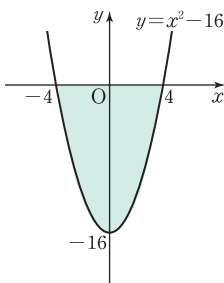
닫힌구간 $[-3, -2]$ 에서 $y \leq 0$, 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^{-2} \{-(x+2)(x-2)^2\} dx \\ & \quad + \int_{-2}^2 (x+2)(x-2)^2 dx \\ &= \int_{-3}^{-2} (-x^3 + 2x^2 + 4x - 8) dx \\ & \quad + \int_{-2}^2 (x^3 - 2x^2 - 4x + 8) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 8x \right]_{-3}^{-2} \\ & \quad + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 8x \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{131}{12} + \frac{64}{3} = \frac{129}{4} \end{aligned}$$

03 (1) 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표는

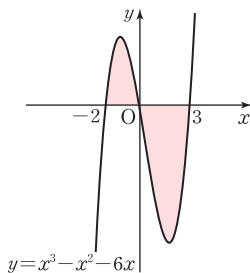
$x=-4, x=4$
닫힌구간 $[-4, 4]$ 에서
 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-4}^4 (-x^2 + 16) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 16x \right]_{-4}^4 \\ &= \frac{256}{3} \end{aligned}$$



(2) 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표는

$x=-2, x=0, x=3$

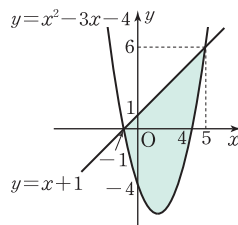


닫힌구간 $[-2, 0]$ 에서 $y \geq 0$, 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^0 (x^3 - x^2 - 6x) dx \\ & \quad + \int_0^3 (-x^3 + x^2 + 6x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 \right]_{-2}^0 \\ & \quad + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^3 \\ &= \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12} \end{aligned}$$

04 (1) 곡선과 직선의 교점의 x 좌표는

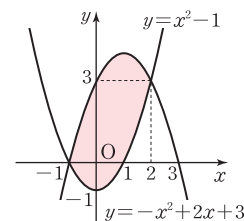
$x=-1, x=5$
닫힌구간 $[-1, 5]$ 에서
 $x^2 - 3x - 4 \leq x + 1$ 이
므로 구하는 넓이는



$$\begin{aligned} & \int_{-1}^5 (-x^2 + 4x + 5) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x \right]_{-1}^5 = 36 \end{aligned}$$

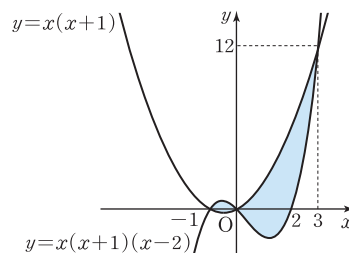
(2) 두 곡선의 교점의 x 좌표는

$x=-1, x=2$
닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서
 $-x^2 + 2x + 3 \geq x^2 - 1$
이므로 구하는 넓이는



$$\begin{aligned} & \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x \right]_{-1}^2 = 9 \end{aligned}$$

05 두 곡선의 교점의 x 좌표는 $x=-1, x=0, x=3$



닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 $x(x+1) \leq x(x+1)(x-2)$,
닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 $x(x+1) \geq x(x+1)(x-2)$ 이
므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 (x^3 - 2x^2 - 3x) dx \\ & \quad + \int_0^3 (-x^3 + 2x^2 + 3x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 \\ & \quad + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 \\ &= \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6} \end{aligned}$$

- 01 (1) $2 + \int_0^3 (12 - 3t^2) dt = 2 + \left[12t - t^3 \right]_0^3$
 $= 2 + 9 = 11$
 (2) $\int_1^3 (12 - 3t^2) dt = \left[12t - t^3 \right]_1^3$
 $= -2$
 (3) $1 \leq t \leq 2$ 에서 $v(t) \geq 0$ 이고, $2 \leq t \leq 3$ 에서
 $v(t) \leq 0$ 이므로 시각 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가
 움직인 거리는
 $\int_1^2 (12 - 3t^2) dt + \int_2^3 (-12 + 3t^2) dt$
 $= \left[12t - t^3 \right]_1^2 + \left[-12t + t^3 \right]_2^3$
 $= 5 + 7 = 12$
- 02 $0 \leq t \leq 3$ 에서 $v(t) \geq 0$, $3 \leq t \leq 4$ 에서 $v(t) \leq 0$ 이므로
 시각 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 물 로켓이 움직인 거리는
 $\int_0^3 (30 - 10t) dt + \int_3^4 (-30 + 10t) dt$
 $= \left[30t - 5t^2 \right]_0^3 + \left[-30t + 5t^2 \right]_3^4$
 $= 45 + 5 = 50$
 즉, 50 m이다.

시험 대비 대단원 TEST

..... 208~210쪽

- 1 ③ 2 -6 3 ③ 4 ④ 5 $\frac{15}{2}$
 6 3 7 ② 8 ⑤ 9 $\frac{5}{3}$ 10 $\frac{71}{6}$
 11 $\frac{22}{3}$ 12 ② 13 3 14 6 15 7
 16 -4 17 (1) $y = -2x - 1$, $y = 6x - 9$ (2) $\frac{16}{3}$
 18 (1) 2분 (2) 15 km

- 1 $F(x) + G(x) = \int \frac{1}{x^2+1} dx + \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$
 $= \int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx$
 $= \int dx$
 $= x + C$
 따라서 ③이다.

- 2 $f'(x) = -4x + 3$ 이므로
 $f(x) = \int (-4x + 3) dx$
 $= -2x^2 + 3x + C$
 이때 점 (2, 1)을 지나므로 $f(2) = 1$ 에서
 $-8 + 6 + C = 1$, $C = 3$
 따라서 $f(x) = -2x^2 + 3x + 3$ 이므로
 $f(3) = -6$

- 3 ① $\int_0^1 dx = \left[x \right]_0^1 = 1$
 ② $\int_0^1 2x dx = \left[x^2 \right]_0^1 = 1$
 ③ $\int_0^2 x dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 = 2$
 ④ $\int_1^3 \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x \right]_1^3 = 1$
 ⑤ $\int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) dx = \left[-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \right]_{-1}^1 = 1$
 따라서 ③이다.

- 4 $f(x) = |x - 3|$ 이라고 하면 $0 \leq x \leq 3$ 에서
 $f(x) = -x + 3$, $3 \leq x \leq 4$ 에서 $f(x) = x - 3$ 이므로
 $\int_0^4 |x - 3| dx$
 $= \int_0^3 (-x + 3) dx + \int_3^4 (x - 3) dx$
 $= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_0^3 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x \right]_3^4$
 $= \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5$
 따라서 ④이다.

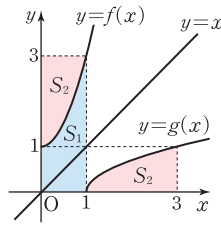
- 5 $\int_0^1 \frac{x+f(x)}{2} dx = 4$ 에서
 $\frac{1}{2} \int_0^1 \{x+f(x)\} dx = 4$
 즉, $\int_0^1 \{x+f(x)\} dx = 8$
 이때
 $\int_0^1 \{x+f(x)\} dx = \int_0^1 x dx + \int_0^1 f(x) dx$
 $= \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \int_0^1 f(x) dx$
 $= \frac{1}{2} + \int_0^1 f(x) dx$
 따라서 $\frac{1}{2} + \int_0^1 f(x) dx = 8$ 이므로
 $\int_0^1 f(x) dx = \frac{15}{2}$

- 6 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

$$S_1 = \int_0^1 f(x) dx,$$

$$S_2 = \int_1^3 g(x) dx \text{라고 하면}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 g(x) dx &= S_1 + S_2 \\ &= 1 \times 3 = 3 \end{aligned}$$



- 7 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라고 하면 $F'(x)=f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_1^{1+x} f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [F(t)]_1^{1+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(1+x) - F(1)}{x} \\ &= F'(1) = f(1) = -1 \end{aligned}$$

따라서 ②이다.

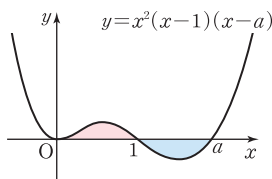
- 8 곡선 $y=-x^2+2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x=0$, $x=2$

달힌구간 $[-1, 0]$ 에서 $y \leq 0$, 달힌구간 $[0, 2]$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx \\ = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

따라서 ⑤이다.

- 9 $f(x)=x^2(x-1)(x-a)$ 라고 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



달힌구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이고, 달힌구간 $[1, a]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이다.

이때 x 축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) dx &= 0 \\ \int_0^a x^2(x-1)(x-a) dx \\ &= \int_0^a \{x^4 - (a+1)x^3 + ax^2\} dx \\ &= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}(a+1)x^4 + \frac{1}{3}ax^3 \right]_0^a \\ &= -\frac{1}{20}a^5 + \frac{1}{12}a^4 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{1}{20}a^5 + \frac{1}{12}a^4 = 0 \text{에서}$$

$$-\frac{1}{20}a^4 \left(a - \frac{5}{3} \right) = 0$$

$$\text{그런데 } a > 1 \text{이므로 } a = \frac{5}{3}$$

- 10 두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$x=0, x=1, x=4$$

달힌구간 $[0, 1]$ 에서

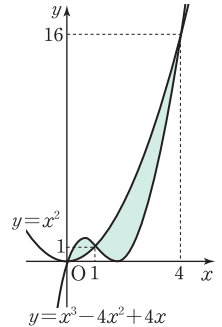
$$x^3 - 4x^2 + 4x \geq x^2 \text{이고,}$$

달힌구간 $[1, 4]$ 에서

$$x^2 \geq x^3 - 4x^2 + 4x \text{이므로}$$

구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^3 - 5x^2 + 4x) dx \\ + \int_1^4 (-x^3 + 5x^2 - 4x) dx \\ = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 \right]_1^4 \\ = \frac{7}{12} + \frac{45}{4} \\ = \frac{71}{6} \end{aligned}$$



- 11 $0 \leq t \leq 1$ 에서 $v(t) \leq 0$ 이고, $1 \leq t \leq 3$ 에서 $v(t) \geq 0$ 이므로 구하는 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^3 |t^2 - 1| dt \\ = \int_0^1 (-t^2 + 1) dt + \int_1^3 (t^2 - 1) dt \\ = \left[-\frac{1}{3}t^3 + t \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}t^3 - t \right]_1^3 \\ = \frac{2}{3} + \frac{20}{3} \\ = \frac{22}{3} \end{aligned}$$

- 12 ㄱ. $v(t)$ 의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 $t=4$ 에서 한 번 바뀐다.

ㄴ. $v(t)$ 의 그래프와 t 축 사이의 넓이는 점 P가 움직인 거리이므로 점 P가 출발하고 나서 4초 동안 움직인 거리는

$$\int_0^4 v(t) dt = \frac{1}{2} \times (2+4) \times 2 = 6$$

ㄷ. 위치의 변화량이 최대인 시간 $t=4$ 에서 점 P는 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이므로 ②이다.

- 13 $f'(x)=a(x+1)(x-1)=ax^2-a(a>0)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (ax^2 - a) dx \\ &= \frac{1}{3}ax^3 - ax + C \end{aligned}$$

▶ 30%

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대이고 극댓값이 3이므로 $f(-1)=3$ 에서

$$\frac{2}{3}a+C=3 \quad \dots\dots ①$$

또 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이고 극솟값이 -1 이므로 $f(1)=-1$ 에서

$$-\frac{2}{3}a+C=-1 \quad \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=3, C=1$

따라서 $f(x)=x^3-3x+1$ 이므로 ▶ 40%

$$f(2)=3 \quad \text{▶ 30\%}$$

- 14** $f(x)=\int(2x^3-3x^2+4)dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2x^3-3x^2+4 \quad \text{▶ 40\%}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$

$$=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1} \times (x+1)$$

$$=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)$$

$$=2f'(1) \quad \text{▶ 40\%}$$

$$=2 \times 3 = 6 \quad \text{▶ 20\%}$$

- 15** 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=6x^2-2x+2a \quad \text{▶ 40\%}$$

한편 주어진 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하여 풀면

$$0=2-1+2a$$

즉, $a=-\frac{1}{2}$ ▶ 40%

따라서 $f(x)=6x^2-2x-1$ 이므로

$$f(-1)=7 \quad \text{▶ 20\%}$$

- 16** $\int_0^2 f(t)dt=k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x)=x^3+x+k \quad \text{▶ 40\%}$$

이때

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 (t^3+t+k)dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + kt \right]_0^2$$

$$=6+2k$$

즉, $6+2k=k$ 이므로

$$k=-6 \quad \text{▶ 40\%}$$

따라서 $f(x)=x^3+x-6$ 이므로

$$f(1)=-4 \quad \text{▶ 20\%}$$

- 17** (1) $f(x)=x^2$ 이라고 하면 $f'(x)=2x$

접점의 좌표를 (t, t^2) 이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y=2tx-t^2 \quad \dots\dots ①$$

이 접선이 점 $(1, -3)$ 을 지나므로

$$-3=2t-t^2, t^2-2t-3=0$$

$$(t+1)(t-3)=0$$

$$t=-1 \text{ 또는 } t=3$$

따라서 t 의 값을 ①에 대입하면 구하는 두 접선의 방정식은

$$y=-2x-1, y=6x-9 \quad \text{▶ 40\%}$$

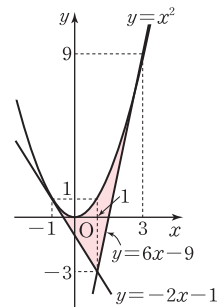
- (2) 직선 $y=-2x-1$ 과 곡선의 교점의 x 좌표는

$$x=-1$$

직선 $y=6x-9$ 과 곡선의 교점의 x 좌표는

$$x=3$$

두 직선의 교점의 x 좌표는 $x=1$



닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 $x^2 \geq -2x-1$ 이고, 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 $x^2 \geq 6x-9$ 이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^1 (x^2+2x+1)dx + \int_1^3 (x^2-6x+9)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x \right]_1^3$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{16}{3} \quad \text{▶ 60\%}$$

- 18** (1) 3 km를 달리는 데 걸린 시간을 x 분이라고 하면

$$\int_0^x \left(\frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t \right) dt = 3$$

$$\left[\frac{1}{4}t^3 + \frac{1}{4}t^2 \right]_0^x = 3$$

$$\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = 3$$

$$\frac{1}{4}(x-2)(x^2+3x+6)=0$$

그런데 $x>0$ 이므로 $x=2$

따라서 이 열차가 출발하여 3 km를 달리는 데 걸린 시간은 2분이다. ▶ 50%

- (2) 이 열차가 출발하여 2분 동안 3 km를 달리고 그 이후 3분 동안의 속도는

$$v(2)=4 \quad \text{▶ 10\%}$$

따라서 출발한 후 5분 동안 열차가 달린 거리는

$$3+4 \times 3 = 15$$

즉, 15 km이다. ▶ 40%