

자습서
정답친해

／
고등
수학 I
／





I 지수함수와 로그함수

Plus 연습

1 지수와 로그

01 거듭제곱과 거듭제곱근 9~14쪽

- 01 (1) $x^4 y^3 \times x^2 y \times y^2 = x^{4+2} y^{3+1+2} = x^6 y^6$
 (2) $(x^3)^2 \times (x^2)^3 = x^{3 \times 2} \times x^{2 \times 3} = x^{6+6} = x^{12}$
 (3) $x \times \left(\frac{x}{y^2}\right)^2 = x \times \frac{x^2}{y^2 \times 2} = \frac{x^3}{y^4}$

- 02 (1) 64의 세제곱근을 x 라고 하면 $x^3=64$ 이므로
 $x^3-64=0, (x-4)(x^2+4x+16)=0$
 $x=4$ 또는 $x=-2 \pm 2\sqrt{3}i$
 따라서 64의 세제곱근 중에서 실수인 것은 4이다.
 (2) 0.0001의 네제곱근을 x 라고 하면 $x^4=0.0001$ 이므로
 $x^4-0.0001=0, (x^2-0.01)(x^2+0.01)=0$
 $(x-0.1)(x+0.1)(x^2+0.01)=0$
 $x=\pm 0.1$ 또는 $x=\pm 0.1i$
 따라서 0.0001의 네제곱근 중에서 실수인 것은 -0.1, 0.1이다.

- 03 (1) 0.001의 세제곱근 중에서 실수인 것은 0.1이므로
 $\sqrt[3]{0.001}=0.1$
 (2) 32의 다섯제곱근 중에서 실수인 것은 2이므로
 $-\sqrt[5]{32}=-2$
 (3) -216의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -6이므로
 $\sqrt[3]{-216}=-6$
 (4) $\frac{16}{81}$ 의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}$ 이고,
 $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ 은 양수이므로
 $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}=\frac{2}{3}$

- 04 (1) $\sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3 \times 27} = \sqrt[4]{3^4} = 3$
 (2) $\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{32}{4}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$
 (3) $(\sqrt[5]{5})^{15} = 5^{\sqrt[5]{5^{15}}} = 5^{\sqrt[5]{(5^3)^5}} = 5^{\sqrt[5]{125^5}} = 125$
 (4) $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{9^3} = 9$

$$\begin{aligned} 05 \quad & \sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{128} - 8 \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^2 \times 3} \times \sqrt[3]{2^7} - 8 \times \sqrt[3]{3} \\ & = \sqrt[3]{2^2 \times 3} \times \sqrt[3]{2^3 \times 2^4} - 8 \times \sqrt[3]{3} \\ & = \sqrt[3]{2^9 \times 3} - 8 \times \sqrt[3]{3} \\ & = \sqrt[3]{(2^3)^3 \times 3} - 8 \times \sqrt[3]{3} \\ & = 8 \times \sqrt[3]{3} - 8 \times \sqrt[3]{3} = 0 \end{aligned}$$

02 지수의 확장 15~23쪽

01 (1) $0.1^0=1$ (2) $5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$

(3) $(-7)^{-3}=\frac{1}{(-7)^3}=-\frac{1}{343}$

(4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}=(-2)^3=-8$

02 (1) $11^8 \times 11^{-6} = 11^{8+(-6)} = 11^2 = 121$
 (2) $6^{-4} \div 6^{-5} = 6^{-4-(-5)} = 6$
 (3) $(xy^2)^{-2} = x^{-2} y^{-4} = \frac{1}{x^2 y^4}$
 (4) $9^2 \div 9^5 \times 9^3 = 9^{2-5+3} = 9^0 = 1$
 (5) $(x^2)^3 \times (x^{-1})^2 = x^6 \times x^{-2} = x^{6+(-2)} = x^4$
 (6) $(xy^{-1})^{-2} \div (x^{-3}y^2)^3 = x^{-2} y^2 \div x^{-9} y^6$
 $= x^{-2-(-9)} y^{2-6}$
 $= x^7 y^{-4} = \frac{x^7}{y^4}$

03 (1) $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$ (2) $a^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^{-1}}$
 (3) $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$ (4) $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$

04 (1) $8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4} = \sqrt[3]{(2^3)^4} = \sqrt[3]{2^{12}} = 2^4 = 16$
 (2) $9^{-0.5} = 9^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{9^{-1}} = \sqrt{(3^2)^{-1}}$
 $= \sqrt{(3^{-1})^2} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

(3) $25^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3} = \sqrt{(5^2)^3} = \sqrt{5^6} = 5^3 = 125$

(4) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0.75} = 16^{0.75} = 16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3}$
 $= \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8$

05 (1) $5^{\frac{1}{3}} \times 5^{-\frac{4}{3}} = 5^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

(2) $(32^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{5}} = \{(2^5)^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{3}{5}} = 2^{5 \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{5}} = 2$

(3) $6^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{3}{4}} = (2 \times 3)^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{3}{4}}$
 $= 2^{\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{3}{4}}$
 $= 2^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} 3^{\frac{3}{4}-\frac{3}{4}} = 2 \times 3^0 = 2$

(4) $2^{\frac{6}{5}} \times 7^{-\frac{4}{5}} \div 14^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{6}{5}} \times 7^{-\frac{4}{5}} \div (2 \times 7)^{\frac{1}{5}}$
 $= 2^{\frac{6}{5}} \times 7^{-\frac{4}{5}} \div (2^{\frac{1}{5}} \times 7^{\frac{1}{5}})$
 $= 2^{\frac{6}{5}} \times 7^{-\frac{4}{5}} \div 2^{\frac{1}{5}} \div 7^{\frac{1}{5}}$
 $= 2^{\frac{6}{5}-\frac{1}{5}} \times 7^{-\frac{4}{5}-\frac{1}{5}}$
 $= 2 \times 7^{-1} = \frac{2}{7}$

$$\begin{aligned}
 06 \quad (1) & \quad {}^{12}\sqrt{a^4b^7} \div \sqrt[3]{a^5b^2} \times {}^4\sqrt{a^2b} \\
 & = a^{\frac{4}{12}}b^{\frac{7}{12}} \div (a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{2}{4}}b^{\frac{1}{4}} \\
 & = a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{7}{12}} \div a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}} \\
 & = a^{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}}b^{\frac{7}{12}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} \\
 & = a^0b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \quad (a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)(a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b) \\
 & = (a+b)^2 - (a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})^2 \\
 & = a^2 + ab + b^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 07 \quad & \sqrt[3]{a} \times a^{\frac{5}{2}} \div a^{-0.25} + (1 - a^{\frac{3}{2}})(1 + a^{\frac{3}{2}}) \\
 & = (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{5}{2}} \div a^{-\frac{1}{4}} + \{1^2 - (a^{\frac{3}{2}})^2\} \\
 & = a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{5}{2}} \div a^{-\frac{1}{4}} + 1 - a^3 \\
 & = a^{\frac{1}{4}+\frac{5}{2}-(-\frac{1}{4})} + 1 - a^3 \\
 & = a^3 + 1 - a^3 = 1
 \end{aligned}$$

따라서 $a^k = 1$ 이므로 $k=0$

$$\begin{aligned}
 08 \quad & 9g = 9 \times 10^{-3} \text{ kg이므로 물 } 9g \text{에 포함된 물 분자의 수는} \\
 & \frac{9 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-26}} = 3 \times 10^{-3-(-26)} = 3 \times 10^{23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 09 \quad (1) & \quad {}^3\sqrt{2^\pi} \times 4^{\frac{\pi}{3}} = 2^{\frac{\pi}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}\pi} = 2^{\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi} = 2^\pi \\
 (2) & \quad 6^{\sqrt{18}} \div 6^{\sqrt{8}} = 6^{3\sqrt{2}-2\sqrt{2}} = 6^{\sqrt{2}} \\
 (3) & \quad (5^{-\sqrt{3}})^{\frac{1}{\sqrt{12}}} = 5^{-\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{12}}} = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\
 (4) & \quad (3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 3^{\frac{1}{2} \times \sqrt{2}} \times 2^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 3 \times 2^2 = 12
 \end{aligned}$$

03 로그의 뜻과 성질 24~31쪽

$$\begin{aligned}
 01 \quad (1) & \quad -1 = \log_7 \frac{1}{7} & (2) & \quad \frac{1}{2} = \log_3 \sqrt{3} \\
 (3) & \quad 3^3 = 27 & (4) & \quad \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 02 \quad (1) & \quad 4^3 = 64 \text{이므로 로그의 정의에 따라} \\
 & \quad \log_4 64 = 3 \\
 (2) & \quad 7^0 = 1 \text{이므로 로그의 정의에 따라} \\
 & \quad \log_7 1 = 0 \\
 (3) & \quad \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \text{이므로 로그의 정의에 따라} \\
 & \quad \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2 \\
 (4) & \quad (0.5)^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \text{이므로 로그의 정의에 따라} \\
 & \quad \log_{0.5} 4 = -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 03 \quad (1) & \quad \log_6 3 + \log_6 12 = \log_6 (3 \times 12) = \log_6 36 \\
 & \quad = \log_6 6^2 = 2 \log_6 6 = 2 \\
 (2) & \quad \log_7 63 - \log_7 9 = \log_7 \frac{63}{9} = \log_7 7 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 04 \quad (1) & \quad \log_5 75 + \log_5 \frac{5}{3} = \log_5 \left(75 \times \frac{5}{3}\right) = \log_5 125 \\
 & \quad = \log_5 5^3 = 3 \log_5 5 = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \quad \log_2 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} \log_2 10 - \log_2 \frac{1}{\sqrt{5}} \\
 & = \log_2 2\sqrt{2} - \log_2 \sqrt{10} - \log_2 \frac{1}{\sqrt{5}} \\
 & = \log_2 \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10} \times \frac{1}{\sqrt{5}}} = \log_2 2 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 05 \quad (1) & \quad \log_5 24 = \log_5 (2^3 \times 3) \\
 & \quad = \log_5 2^3 + \log_5 3 \\
 & \quad = 3 \log_5 2 + \log_5 3 \\
 & \quad = 3a + b \\
 (2) & \quad \log_5 {}^4\sqrt{3.6} = \log_5 \left(\frac{36}{10}\right)^{\frac{1}{4}} \\
 & \quad = \frac{1}{4} \log_5 \left(\frac{2 \times 3^2}{5}\right) \\
 & \quad = \frac{1}{4} (\log_5 2 + \log_5 3^2 - \log_5 5) \\
 & \quad = \frac{\log_5 2 + 2 \log_5 3 - \log_5 5}{4} \\
 & \quad = \frac{a + 2b - 1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 06 \quad (1) & \quad \log_{27} 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3} = \frac{4}{3} \\
 (2) & \quad \log_{\sqrt{2}} 36 \times \log_6 \frac{1}{4} = \frac{\log_6 36}{\log_6 \sqrt{2}} \times \log_6 \frac{1}{4} \\
 & \quad = \frac{2 \log_6 6}{\frac{1}{2} \log_6 2} \times (-2 \log_6 2) \\
 & \quad = -8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 07 \quad & 3^a = 2, 3^b = 5 \text{에서 } a = \log_3 2, b = \log_3 5 \\
 & \log_{30} 75 = \frac{\log_3 75}{\log_3 30} = \frac{\log_3 (3 \times 5^2)}{\log_3 (2 \times 3 \times 5)} \\
 & = \frac{\log_3 3 + 2 \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 5} \\
 & = \frac{2b+1}{a+b+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 08 \quad (1) & \quad \frac{1}{\log_3 2} \times \frac{1}{\log_4 3} = \frac{1}{\log_3 2} \times \log_3 4 \\
 & \quad = \frac{1}{\log_3 2} \times \log_3 2^2 \\
 & \quad = \frac{1}{\log_3 2} \times 2 \log_3 2 \\
 & \quad = 2 \\
 (2) & \quad \log_2 9 \times \log_3 5 \times \log_{25} 4 \\
 & \quad = \log_2 3^2 \times \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 2^2}{\log_2 5^2} \\
 & \quad = 2 \log_2 3 \times \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \times \frac{2 \log_2 2}{2 \log_2 5} \\
 & \quad = 2
 \end{aligned}$$

04 상용로그 32~36쪽

- 01 (1) $\log 100\sqrt{10} = \log 10^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$
 (2) $\log \frac{1}{\sqrt{10}} = \log 10^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$
- 02 (1) 2.5의 가로줄과 1의 세로줄이 만나는 곳에 있는 수는 0.3997이므로
 $\log 2.51 = 0.3997$
 (2) 5.9의 가로줄과 3의 세로줄이 만나는 곳에 있는 수는 0.7731이므로
 $\log 5.93 = 0.7731$
- 03 $\log 8.28 = 0.918$ 이므로
 (1) $\log 828 = \log (10^2 \times 8.28)$
 $= \log 10^2 + \log 8.28$
 $= 2 + 0.918 = 2.918$
 (2) $\log 0.00828 = \log (10^{-3} \times 8.28)$
 $= \log 10^{-3} + \log 8.28$
 $= -3 + 0.918 = -2.082$
- 04 벽을 투과하기 전 전파의 세기를 A , 투과한 전파의 세기를 B 라고 하면 $B = 0.2A$ 이므로
 $F = 10 \log \frac{0.2A}{A} = 10 \log 0.2$
 $= 10 \log (10^{-1} \times 2) = 10 (\log 10^{-1} + \log 2)$
 $= 10 (-1 + 0.30) = -7$
 따라서 전파 감쇄비는 -7 dB이다.
- 05 $C = 1.4C_0$ 이면
 $k \log \frac{1.4C_0}{C_0} = k \log 1.4 = 0.15k$
 $0.21 = 0.15k$ 이므로 $k = 1.4$
 $C = 14C_0$ 이면
 $E = 1.4 \log \frac{14C_0}{C_0} = 1.4 \log 14$
 $= 1.4 \log (10 \times 1.4) = 1.4 (\log 10 + \log 1.4)$
 $= 1.4 (1 + 0.15) = 1.61$
 따라서 필요한 에너지는 1.61 kcal이다.

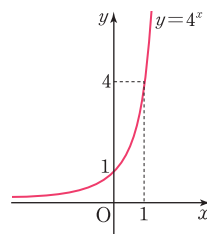
2 지수함수와 로그함수

01 지수함수의 뜻과 그래프 43~48쪽

- 01 실수 a ($a > 0$, $a \neq 1$)에 대하여 $y = a^x$ 꼴인 함수를 모두 고르면 (1), (2), (3)이다.
- 02 (1) 함수 $y = 4^x$ 에서 실수 x 의 값에 대응하는 y 의 값을 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

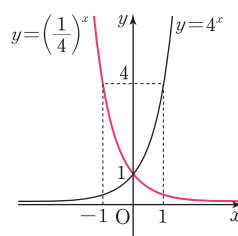
x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16	...

x , y 의 값의 순서쌍 (x, y) 를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내고 매끄러운 곡선으로 연결하면 함수 $y = 4^x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

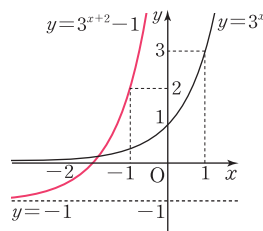


- (2) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x = (4^{-1})^x = 4^{-x}$ 이므로 함수 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 의 그래프는 함수 $y = 4^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

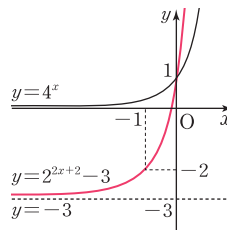
따라서 함수 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



- 03 (1) 함수 $y = 3^{x+2} - 1$ 의 그래프는 함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것과 같다.
 따라서 함수 $y = 3^{x+2} - 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같고, 점근선은 직선 $y = -1$ 이다.



- (2) $y = 2^{2x+2} - 3 = 2^{2(x+1)} - 3 = 4^{x+1} - 3$ 이므로 함수 $y = 2^{2x+2} - 3$ 의 그래프는 함수 $y = 4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것과 같다.
 따라서 함수 $y = 2^{2x+2} - 3$ 의 그래프는 다음 그림과 같고, 점근선은 직선 $y = -3$ 이다.

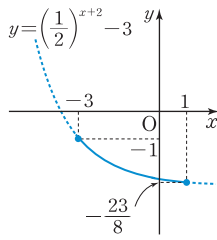


- 04 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 3$ 은 밑이 1보다 작으므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다. 따라서 이 함수에서 $x = -3$ 일 때, 최댓값은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3+2} - 3 = 2 - 3 = -1$$

$x = 1$ 일 때, 최솟값은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1+2} - 3 = \frac{1}{8} - 3 = -\frac{23}{8}$$



- 05 함수 $y = 2^{x^2+2x-1}$ 은 밑이 1보다 크므로 x^2+2x-1 이 최댓일 때 최댓값을 갖고, 최소일 때 최솟값을 가진다. $x^2+2x-1 = (x+1)^2 - 2$ 이므로 $x = 2$ 일 때, 최댓값이 7이고, $x = -1$ 일 때, 최솟값이 -2 이다. 따라서 함수 $y = 2^{x^2+2x-1}$ 에서 $x = 2$ 일 때, 최댓값은

$$2^7 = 128$$

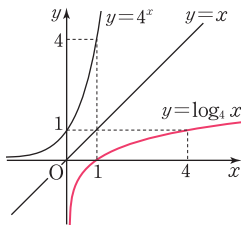
$x = -1$ 일 때, 최솟값은

$$2^{-2} = \frac{1}{4}$$

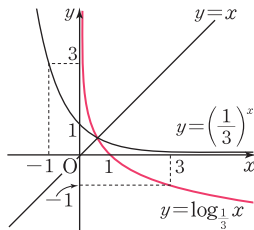
02 로그함수의 뜻과 그래프 49~56쪽

- 01 실수 $a(a > 0, a \neq 1)$ 에 대하여 $y = \log_a x$ 꼴인 함수를 모두 고르면 (2), (4)이다.

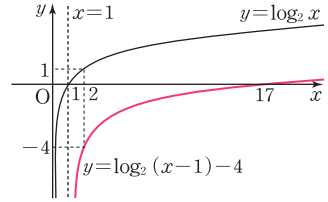
- 02 (1) 로그함수 $y = \log_4 x$ 의 그래프는 지수함수 $y = 4^x$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다. 따라서 함수 $y = \log_4 x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



- (2) 로그함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프는 지수함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다. 따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

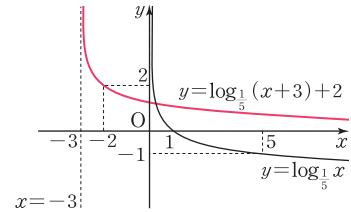


- 03 (1) 함수 $y = \log_2(x-1) - 4$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것과 같다. 따라서 함수 $y = \log_2(x-1) - 4$ 의 그래프는 다음 그림과 같고, 점근선은 직선 $x = 1$ 이다.



- (2) 함수 $y = \log_{\frac{1}{5}}(x+3) + 2$ 의 그래프는 함수

$y = \log_{\frac{1}{5}} x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것과 같다. 따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{5}}(x+3) + 2$ 의 그래프는 다음 그림과 같고, 점근선은 직선 $x = -3$ 이다.



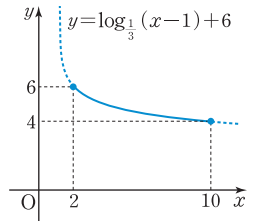
- 04 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-1) + 6$ 은 밑이 1보다 작으므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다. 따라서 이 함수에서

$x = 2$ 일 때, 최댓값은

$$\log_{\frac{1}{3}}(2-1) + 6 = 0 + 6 = 6$$

$x = 10$ 일 때, 최솟값은

$$\log_{\frac{1}{3}}(10-1) + 6 = -2 + 6 = 4$$



- 05 함수 $y = \log_2(-x^2+2x+15)$ 는 밑이 1보다 크므로 $-x^2+2x+15$ 가 최댓일 때 최댓값을 가진다. 진수의 조건에서 $-x^2+2x+15 > 0$ 이므로

$$x^2 - 2x - 15 < 0, \quad -3 < x < 5$$

$-x^2+2x+15 = -(x-1)^2 + 16$ 이므로 $x = 1$ 일 때, 최댓값이 16이다.

따라서 함수 $y = \log_2(-x^2+2x+15)$ 에서

$x = 1$ 일 때, 최댓값은 $\log_2 16 = 4$

03 지수함수와 로그함수의 활용 57~64쪽

- 01 (1) 양변의 밑을 같게 하면 $25 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ 이므로

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$$

$$3x+1 = -2 \text{에서 } x = -1$$

(2) 양변의 밑을 같게 하면

$$(\text{좌변}) = 4^{-x+3} = (2^2)^{-x+3} = 2^{-2x+6}$$

$$(\text{우변}) = \left(\frac{1}{8}\right)^{x-4} = (2^{-3})^{x-4} = 2^{-3x+12}$$

$$\text{이므로 } 2^{-2x+6} = 2^{-3x+12}$$

$$-2x+6 = -3x+12 \text{에서 } x=6$$

02 (1) 양변의 밑을 같게 하면 $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

이므로

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1}$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } 2x > 3x-1$$

$$\text{따라서 } x < 1$$

(2) 양변의 밑을 같게 하면

$$(\text{좌변}) = 81^x = (3^4)^x = 3^{4x}$$

$$(\text{우변}) = \sqrt{3} \times 3^{2x} = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{2x} = 3^{\frac{1}{2}+2x}$$

$$\text{이므로 } 3^{4x} \geq 3^{\frac{1}{2}+2x}$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } 4x \geq \frac{1}{2} + 2x$$

$$\text{따라서 } x \geq \frac{1}{4}$$

03 n 년 후의 염소의 수를 y 마리라고 하면

$$y = 100 \times 2^{\frac{n}{3}}$$

$$100 \times 2^{\frac{n}{3}} \geq 1600 \text{에서 } 2^{\frac{n}{3}} \geq 2^4$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{n}{3} \geq 4, n \geq 12$$

따라서 최소 12년 후이다.

04 (1) 양변의 밑을 같게 하면 $3 = \log_3 3^3 = \log_3 27$ 이므로

$$\log_3 (-2x+3) = \log_3 27$$

$$-2x+3=27 \text{에서 } x=-12 \quad \dots\dots ①$$

진수의 조건에서 $-2x+3 > 0$ 이므로

$$x < \frac{3}{2} \quad \dots\dots ②$$

$$\text{①, ②에서 } x = -12$$

(2) $2 \log_4 (x-3) = \log_4 (x-3)^2$ 이므로

$$\log_4 (x-3)^2 = \log_4 (x-1)$$

$$(x-3)^2 = x-1 \text{에서 } x^2 - 7x + 10 = 0 \text{이므로}$$

$$x=2 \text{ 또는 } x=5 \quad \dots\dots ①$$

진수의 조건에서 $x-3 > 0, x-1 > 0$ 이므로

$$x > 3 \quad \dots\dots ②$$

$$\text{①, ②에서 } x=5$$

(3) 양변의 밑을 같게 하면 $\frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$

이므로

$$\log_{\frac{1}{4}} (x+3) \leq \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } x+3 \geq \frac{1}{2}$$

$$x \geq -\frac{5}{2} \quad \dots\dots ①$$

진수의 조건에서 $x+3 > 0$ 이므로

$$x > -3 \quad \dots\dots ②$$

$$\text{①, ②에서 } x \geq -\frac{5}{2}$$

(4) 밑이 1보다 크므로 $x+1 > 2x-1$

$$x < 2 \quad \dots\dots ①$$

진수의 조건에서 $x+1 > 0, 2x-1 > 0$ 이므로

$$x > \frac{1}{2} \quad \dots\dots ②$$

$$\text{①, ②에서 } \frac{1}{2} < x < 2$$

05 (1) $5.1 = \log A$ 에서 $A = 10^{5.1}$

따라서 지진파의 최대 진폭은 $10^{5.1} \mu\text{m}$ 이다.

(2) $4 \leq \log A < 5$ 에서

$$\log 10^4 \leq \log A < \log 10^5$$

밑이 1보다 크므로

$$10^4 \leq A < 10^5$$

즉, $10000 \leq A < 100000$

따라서 지진파의 최대 진폭은 $10000 \mu\text{m}$ 이상

$100000 \mu\text{m}$ 미만이다.

06 $T_0 = 80, T_1 = 20$ 이고 $10 \leq t \leq 20$ 이므로

$$10 \leq -10 \log \frac{T-20}{80-20} \leq 20$$

$$-2 \leq \log \frac{T-20}{60} \leq -1$$

$$\log 10^{-2} \leq \log \frac{T-20}{60} \leq \log 10^{-1}$$

밑이 1보다 크므로

$$10^{-2} \leq \frac{T-20}{60} \leq 10^{-1}$$

$$20.6 \leq T \leq 26$$

따라서 물체의 온도는 20.6°C 이상 26°C 이하이다.

시험 대비 대단원 TEST

..... 82~84쪽

- | | | | | |
|--|-----------------------|-----------------------------|----------------------|-----------------|
| 1 29 | 2 ④ | 3 6 | 4 81 | 5 6 |
| 6 $\frac{30}{31}$ | 7 $a=1, b=-2$ | 8 $\neg, \cup, \cap$ | | |
| 9 $4\sqrt{5}$ | 10 ⑤ | 11 19 | 12 $x \geq 2$ | 13 $x=8$ |
| 14 5.9 % | 15 (1) 6 (2) 5 | 16 14 dB | | |
| 17 (1) -1 (2) $-\frac{35}{9}$ | | | | |
| 18 (1) (8, 3) (2) $p=32, q=5$ | | | | |

1 $3\sqrt{a} \times \frac{a}{5\sqrt{a^2}} = a^{\frac{1}{3}} \times a \times a^{-\frac{2}{5}} = a^{\frac{1}{3}+1-\frac{2}{5}} = a^{\frac{14}{15}}$ 이므로

$$\frac{n}{m} = \frac{14}{15}$$

따라서 $m+n=29$

- 2 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 의 양변을 제곱하여 정리하면
 $a + a^{-1} + 2 = 16$, 즉 $a + a^{-1} = 14$
 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 의 양변을 세제곱하여 정리하면
 $a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 3 \times 4 = 64$, 즉 $a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = 52$
 $\frac{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{2}{3}} + 5}{a + a^{-1} + 5} = \frac{52 + 5}{14 + 5} = 3$
따라서 ④이다.
- 3 $9^x = a$ 에서 $a^{\frac{1}{x}} = 9$, $4^y = a$ 에서 $a^{\frac{1}{y}} = 4$ 이므로
 $a^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = a^{\frac{1}{x}} a^{\frac{1}{y}} = 9 \times 4 = 36$
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$ 이므로 $a^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = a^2 = 36$
 $a > 0$ 이므로 $a = 6$
- 4 $(3^x)^y = \frac{1}{3} = 3^{-1}$ 이므로 $xy = -1$
 $3^x \times 3^y = 3^{x+y} = 3$ 이므로 $x + y = 1$
 $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$
 $= 1^3 - 3 \times (-1) \times 1 = 4$
따라서 $3^x \times 3^y = 3^{x+y} = 3^4 = 81$
- 5 진수의 조건에서 모든 실수 x 에 대하여
 $x^2 + ax + 2a > 0$ 이어야 하므로 이차방정식
 $x^2 + ax + 2a = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면
 $D = a^2 - 8a < 0$, $a(a-8) < 0$
 $0 < a < 8$ ①
밀의 조건에서 $a \neq 1$, $a > 0$ ②
①, ②에서 구하는 정수 a 의 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7이
므로 6개이다.
- 6 $\log_x a = \frac{1}{2}$, $\log_x b = \frac{1}{3}$, $\log_x c = \frac{1}{5}$ 이므로
 $\log_{abc} x = \frac{1}{\log_x abc}$
 $= \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c}$
 $= \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}} = \frac{30}{31}$
- 7 점근선이 직선 $y = -2$ 이므로 $b = -2$
함수 $y = 2^{x+a} - 2$ 의 그래프가 원점을 지나므로
 $0 = 2^a - 2$, $2^a = 2$
따라서 $a = 1$
- 8 ㄱ. 함수 $y = 4^{x-1} + 1$ 의 그래프는 함수 $y = 4^x$ 의 그래프
를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼
평행이동한 것과 같다.
ㄴ. 함수 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-x}$ 의 그래프는 함수 $y = 4^x$ 의 그
래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.
ㄷ. 함수 $y = 2^{2x} + 2 = 4^x + 2$ 의 그래프는 함수 $y = 4^x$ 의
그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과
같다.
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

- 9 밑을 모두 5로 같게 하면
 $\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}} = (5^{-1})^{\frac{3}{4}} = 5^{-\frac{3}{4}}$
함수 $y = 5^x$ 은 밑이 1보다 크므로 x 의 값이 증가하면
 y 의 값도 증가한다.
따라서 $-\frac{3}{4} < \frac{2}{3} < 1$ 이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}} < \sqrt[3]{25} < 5$
가장 큰 수는 5, 가장 작은 수는 $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$ 이므로 구하는
두 수의 곱은
 $5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}} = 5^{1-\frac{3}{4}} = 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$
- 10 $(g \circ f)(x) = x$ 를 만족시키는 함수 $y = g(x)$ 는 함수
 $y = f(x)$ 의 역함수이다.
 $g(1) = a$ 라고 하면 $f(a) = 1$ 이므로
 $\log_5 a - 1 = 1$, $\log_5 a = 2$
 $a = 5^2 = 25$
따라서 $g(1) = 25$ 이므로 ⑤이다.
- 11 $\log_2 x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{4} \leq x \leq 16$ 에서
 $\log_2 \frac{1}{4} \leq \log_2 x \leq \log_2 16$ 이므로 $-2 \leq t \leq 4$
 $y = (\log_2 x)^2 + \log_2 x^2 - 2$
 $= t^2 + 2t - 2 = (t+1)^2 - 3$
 $t = 4$ 일 때, 최댓값은 $M = (4+1)^2 - 3 = 22$
 $t = -1$ 일 때, 최솟값은 $N = (-1+1)^2 - 3 = -3$
따라서 $M + N = 19$
- 12 양변의 밑을 같게 하면 $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = (2^{-2})^{x-2} = 2^{-2x+4}$ 이
므로
 $2^{x-2} \geq 2^{-2x+4}$
밑이 1보다 크므로 $x-2 \geq -2x+4$, $x \geq 2$
- 13 $\log_4(x+8) = \frac{\log_2(x+8)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(x+8)}{2}$ 이므로
 $\log_2(x-4) = \frac{\log_2(x+8)}{2}$
 $2 \log_2(x-4) = \log_2(x+8)$
 $\log_2(x-4)^2 = \log_2(x+8)$
 $(x-4)^2 = x+8$
 $x^2 - 9x + 8 = 0$, $(x-1)(x-8) = 0$
 $x = 1$ 또는 $x = 8$ ①
진수의 조건에서 $x-4 > 0$, $x+8 > 0$ 이므로
 $x > 4$ ②
①, ②에서 $x = 8$
- 14 현재 생산량을 a 라 하고, 매달 $x\%$ 씩 늘린다고 하면
 $a\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{12} = 2a$, $\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{12} = 2$
양변에 상용로그를 취하면
 $12 \log\left(1 + \frac{x}{100}\right) = \log 2$

$$\log 2 = 0.3 \text{이므로}$$

$$12 \log \left(1 + \frac{x}{100} \right) = 0.3$$

$$\log \left(1 + \frac{x}{100} \right) = 0.025$$

$$\log 1.059 = 0.025 \text{이므로}$$

$$\log \left(1 + \frac{x}{100} \right) = \log 1.059$$

$$1 + \frac{x}{100} = 1.059, x = 5.9$$

따라서 매달 5.9 %씩 늘려야 한다.

- 15 (1) $3^{2x} - 2 \times 3^{x+1} + 1 = 0$ 의 양변을 3^x 으로 나누면

$$3^x - 2 \times 3 + 3^{-x} = 0$$

$$\text{따라서 } 3^x + 3^{-x} = 6 \quad \blacktriangleright 60\%$$

$$(2) 9^x + 9^{-x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2 \times 3^x \times 3^{-x}$$

$$= 36 - 2 = 34$$

$$\text{따라서 } \frac{9^x + 9^{-x} - 4}{3^x + 3^{-x}} = \frac{34 - 4}{6} = 5 \quad \blacktriangleright 40\%$$

- 16 벽의 단위 면적당 질량이 $m_0 \text{ kg/m}^2$ 에서 $5m_0 \text{ kg/m}^2$ 로 증가할 때, 음향 투과 손실이 $a \text{ dB}$ 만큼 증가한다고 하면

$$20 \log 5m_0 f - 48 = 20 \log m_0 f - 48 + a \quad \blacktriangleright 40\%$$

$$a = (20 \log 5m_0 f - 48) - (20 \log m_0 f - 48)$$

$$= 20 \log 5 + 20 \log m_0 f - 20 \log m_0 f$$

$$= 20 \log 5 = 20 \log \frac{10}{2}$$

$$= 20(1 - \log 2) = 20(1 - 0.3) = 14$$

따라서 14 dB만큼 증가한다. $\blacktriangleright 60\%$

- 17 (1) $y = 3^{-x+a} - 4 = \left(\frac{1}{3} \right)^{x-a} - 4$ 에서 밑이 1보다 작으

므로 함수 $y = 3^{-x+a} - 4$ 는 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소한다. $\blacktriangleright 20\%$

따라서 $x = -3$ 일 때, 최댓값이 5이므로

$$3^{-(-3)+a} - 4 = 5, 3^{3+a} = 9$$

양변의 밑을 같게 하면 $3^{3+a} = 3^2$

$$3 + a = 2 \text{에서 } a = -1 \quad \blacktriangleright 40\%$$

- (2) 함수 $y = 3^{-x-1} - 4$ 에서 $x = 1$ 일 때, 최솟값은

$$3^{-1-1} - 4 = \frac{1}{9} - 4 = -\frac{35}{9} \quad \blacktriangleright 40\%$$

- 18 (1) 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 3이므로 점 D의 y 좌표는 3이다.

점 D의 좌표를 $(a, 3)$ 이라고 하면

$$\log_2 a = 3, a = 8$$

따라서 점 D의 좌표는 $(8, 3)$ $\blacktriangleright 30\%$

- (2) 점 C(8, 0), B(5, 0)이므로 점 E의 좌표는

$$(5, \log_2 5) \quad \blacktriangleright 30\%$$

즉, 정사각형 FGBE의 한 변의 길이가 $\log_2 5$ 이므로 점 G의 x 좌표는

$$5 - \log_2 5 = \log_2 2^5 - \log_2 5 = \log_2 \frac{32}{5}$$

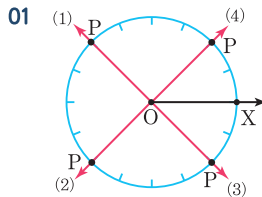
따라서 $p = 32, q = 5$ $\blacktriangleright 40\%$

Ⅱ 삼각함수

Plus 연습

1 삼각함수

01 일반각과 호도법 87~94쪽



- 02 (1) $450^\circ = 360^\circ \times 1 + 90^\circ$ 이므로 일반각은 $360^\circ \times n + 90^\circ$ (단, n 은 정수)
 (2) $750^\circ = 360^\circ \times 2 + 30^\circ$ 이므로 일반각은 $360^\circ \times n + 30^\circ$ (단, n 은 정수)
 (3) $-140^\circ = 360^\circ \times (-1) + 220^\circ$ 이므로 일반각은 $360^\circ \times n + 220^\circ$ (단, n 은 정수)
 (4) $-420^\circ = 360^\circ \times (-2) + 300^\circ$ 이므로 일반각은 $360^\circ \times n + 300^\circ$ (단, n 은 정수)

- 03 (1) $480^\circ = 360^\circ \times 1 + 120^\circ$
 따라서 480° 는 제2사분면의 각이다.
 (2) $805^\circ = 360^\circ \times 2 + 85^\circ$
 따라서 805° 는 제1사분면의 각이다.
 (3) $1030^\circ = 360^\circ \times 2 + 310^\circ$
 따라서 1030° 는 제4사분면의 각이다.
 (4) $-880^\circ = 360^\circ \times (-3) + 200^\circ$
 따라서 -880° 는 제3사분면의 각이다.

- 04 ① $120^\circ = 120 \times 1^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{3}\pi$
 ② $210^\circ = 210 \times 1^\circ = 210 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7}{6}\pi$
 ③ $-75^\circ = -75 \times 1^\circ = -75 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{5}{12}\pi$
 ④ $-225^\circ = -225 \times 1^\circ = -225 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{5}{4}\pi$
 따라서 ①-㉠, ②-㉡, ③-㉢, ④-㉣이다.

- 05 부채꼴의 호의 길이는

$$6 \times \frac{5}{6}\pi = 5\pi$$

따라서 $5\pi \text{ cm}$ 이다.

부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{5}{6}\pi = 15\pi$$

따라서 $15\pi \text{ cm}^2$ 이다.

- 06 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ 라고 하면 $r\theta = 9\pi$, $\frac{1}{2}r^2\theta = 36\pi$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } r=8, \theta=\frac{9}{8}\pi$$

따라서 반지름의 길이는 8 cm, 중심각의 크기는 $\frac{9}{8}\pi$ 이다.

- 07 색칠한 부분의 넓이는 부채꼴 OCD의 넓이에서 부채꼴 OAB의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\frac{1}{2} \times 16^2 \times \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \times 7^2 \times \frac{2}{3}\pi = 69\pi$$

따라서 $69\pi \text{ cm}^2$ 이다.

02 삼각함수의 뜻 95~101쪽

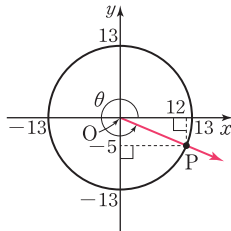
01 $OP = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$

이므로

$$\sin \theta = -\frac{5}{13}$$

$$\cos \theta = \frac{12}{13}$$

$$\tan \theta = -\frac{5}{12}$$



- 02 (1) 오른쪽 그림과 같이

$$\theta = \frac{2}{3}\pi \text{를 나타내는 동}$$

경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

$\angle POH = \frac{\pi}{3}$ 이므로 점 P의 좌표는

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

따라서 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, $\tan \theta = -\sqrt{3}$

- (2) 오른쪽 그림과 같이

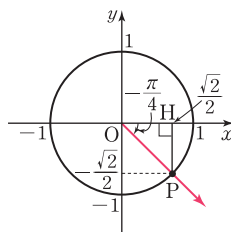
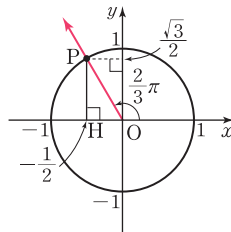
$$\theta = -\frac{\pi}{4} \text{를 나타내는 동}$$

경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

$\angle POH = \frac{\pi}{4}$ 이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

따라서 $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan \theta = -1$



- 03 (1) 170° 는 제2사분면의 각이므로
 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$, $\tan \theta < 0$

- (2) -40° 는 제4사분면의 각이므로
 $\sin \theta < 0$, $\cos \theta > 0$, $\tan \theta < 0$

- (3) $\frac{2}{7}\pi$ 는 제1사분면의 각이므로
 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta > 0$, $\tan \theta > 0$

- (4) $-\frac{4}{5}\pi$ 는 제3사분면의 각이므로
 $\sin \theta < 0$, $\cos \theta < 0$, $\tan \theta > 0$

- 04 각 θ 가 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

따라서

$$\begin{aligned} & |\cos \theta - \sin \theta| - \sqrt{\cos^2 \theta} - |\sin \theta - \tan \theta| \\ &= -(\cos \theta - \sin \theta) - (-\cos \theta) \\ &\quad -(\sin \theta - \tan \theta) \\ &= \tan \theta \end{aligned}$$

- 05 $\sin \theta > 0$ 이면 각 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고, $\cos \theta < 0$ 이면 각 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

따라서 각 θ 는 제2사분면의 각이다.

- 06 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

그런데 θ 가 제3사분면의 각이면 $\sin \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

또 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ 에서

$$\tan \theta = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

- 07 (1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{2}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{4}{9}$$

이때 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

따라서 $\sin \theta \cos \theta = -\frac{5}{18}$

- (2) $(\sin \theta - \cos \theta)^2$

$$= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 - 2 \times \left(-\frac{5}{18}\right) = \frac{14}{9}$$

따라서 $\sin \theta - \cos \theta$ 의 값은

$$-\frac{\sqrt{14}}{3} \text{ 또는 } \frac{\sqrt{14}}{3}$$

01 (1) $\cos \frac{9}{4}\pi = \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\sin \frac{7}{3}\pi = \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\cos \frac{23}{6}\pi = \cos \left(4\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right)$
 $= \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\sin \frac{15}{4}\pi = \sin \left(4\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right)$
 $= -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

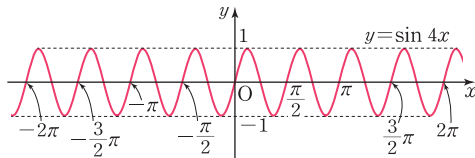
02 $\sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \times \cos \frac{7}{3}\pi - \sin \frac{11}{6}\pi \times \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right)$
 $= \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \times \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{3} \right)$
 $= -\sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) \times \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right)$
 $= -\sin \frac{\pi}{2} \times \cos \frac{\pi}{3} - \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \times \cos \frac{\pi}{3}$
 $= -\sin \frac{\pi}{2} \times \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} \times \cos \frac{\pi}{3}$
 $= (-1) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$
 $= -\frac{1}{4}$

03 (1) $f(x) = \sin 4x$ 라고 하면
 $f(x) = \sin 4x = \sin (4x + 2\pi)$
 $= \sin 4 \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = f \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$

이므로 함수 $y = \sin 4x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

또 $-1 \leq \sin 4x \leq 1$ 이므로 치역은

$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 이고, 함수 $y = \sin 4x$ 의 그래프는 다음과 같다.



(2) $f(x) = -\cos \frac{x}{3}$ 라고 하면

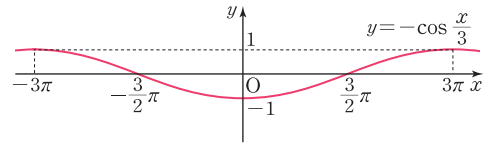
$$f(x) = -\cos \frac{x}{3} = -\cos \left(\frac{x}{3} + 2\pi \right)$$

$$= -\cos \frac{1}{3}(x + 6\pi) = f(x + 6\pi)$$

이므로 함수 $y = -\cos \frac{x}{3}$ 의 주기는 6π 이다.

또 $-1 \leq -\cos \frac{x}{3} \leq 1$ 이므로 치역은

$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 이고, 함수 $y = -\cos \frac{x}{3}$ 의 그래프는 다음과 같다.



04 (1) $f(x) = \frac{1}{3} \cos x$ 라고 하면

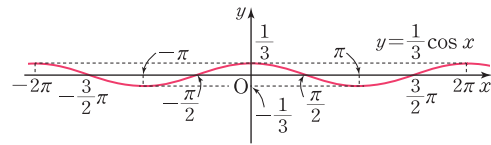
$$f(x) = \frac{1}{3} \cos x = \frac{1}{3} \cos (x + 2\pi)$$

$$= f(x + 2\pi)$$

이므로 함수 $y = \frac{1}{3} \cos x$ 의 주기는 2π 이다.

또 $-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} \cos x \leq \frac{1}{3}$ 이므로 치역은

$\left\{ y \mid -\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{1}{3} \right\}$ 이고, 함수 $y = \frac{1}{3} \cos x$ 의 그래프는 다음과 같다.



(2) $f(x) = 2 \sin x - 1$ 이라고 하면

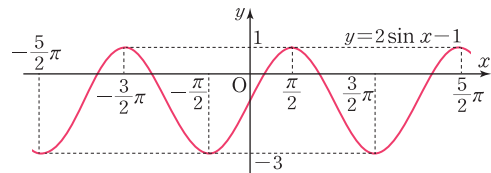
$$f(x) = 2 \sin x - 1 = 2 \sin (x + 2\pi) - 1$$

$$= f(x + 2\pi)$$

이므로 함수 $y = 2 \sin x - 1$ 의 주기는 2π 이다.

또 $-3 \leq 2 \sin x - 1 \leq 1$ 이므로 치역은

$\{y \mid -3 \leq y \leq 1\}$ 이고, 함수 $y = 2 \sin x - 1$ 의 그래프는 다음과 같다.



05 ①-㉔-㉕, ②-㉔-㉖, ③-㉗-㉕

06 ①-㉗-㉖, ②-㉔-㉕, ③-㉔-㉕, ④-㉔-㉕

07 (1) $\tan \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\tan \frac{5}{4}\pi = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

08 (1) $f(x) = \tan \frac{x}{3}$ 라고 하면

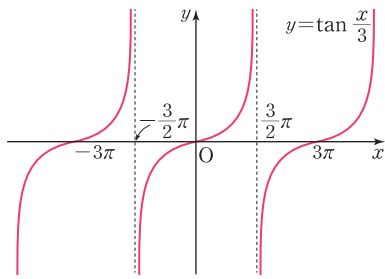
$$f(x) = \tan \frac{x}{3} = \tan \left(\frac{x}{3} + \pi \right)$$

$$= \tan \frac{1}{3}(x + 3\pi) = f(x + 3\pi)$$

이므로 $f(x) = \tan \frac{x}{3}$ 의 주기는 3π 이고, 점근선은

직선 $x = 3 \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = 3n\pi + \frac{3}{2}\pi$ (n 은 정수)이

며, 함수 $y = \tan \frac{x}{3}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



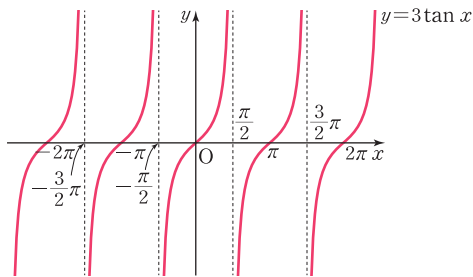
(2) $f(x) = 3 \tan x$ 라고 하면

$$f(x) = 3 \tan x = 3 \tan(x + \pi) = f(x + \pi)$$

이므로 $f(x) = 3 \tan x$ 의 주기는 π 이고, 점근선은

직선 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)이며, 함수

$y = 3 \tan x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

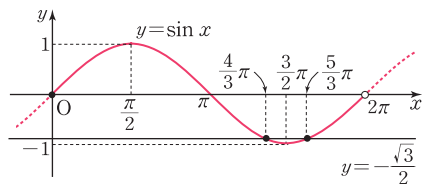


09 (1) $\sin(-153^\circ) = -\sin 153^\circ = -\sin(180^\circ - 27^\circ)$
 $= -\sin 27^\circ = -0.4540$

(2) $\cos 710^\circ = \cos(720^\circ - 10^\circ) = \cos(-10^\circ)$
 $= \cos 10^\circ = 0.9848$

(3) $\tan 430^\circ = \tan(360^\circ + 70^\circ) = \tan 70^\circ$
 $= 2.7475$

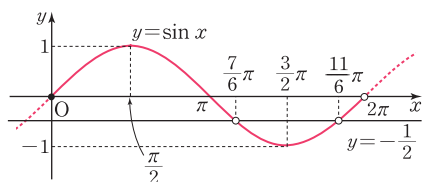
10 (1) 방정식 $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는 다음 그림에서 함수
 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x
 좌표와 같으므로 $x = \frac{4}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$



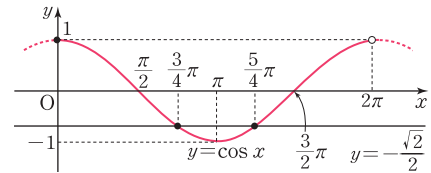
(2) 부등식 $\sin x > -\frac{1}{2}$ 의 해는 다음 그림에서 함수

$y = \sin x$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 보다 위쪽에 있
 는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$0 \leq x < \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$$



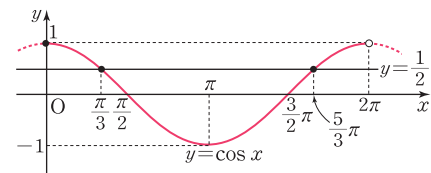
11 (1) 방정식 $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는 다음 그림에서 함수
 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 교점의 x
 좌표와 같으므로 $x = \frac{3}{4}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{4}\pi$



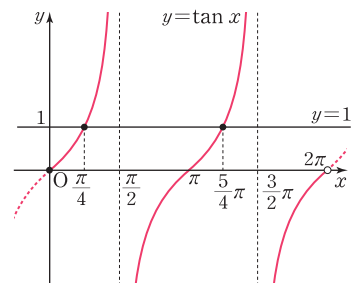
(2) 부등식 $\cos x \leq \frac{1}{2}$ 의 해는 다음 그림에서 함수

$y = \cos x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$ 과 만나거나 아래
 쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5}{3}\pi$$

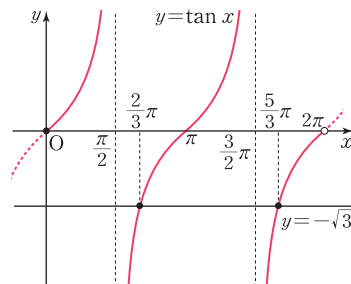


12 (1) 방정식 $\tan x = 1$ 의 해는 다음 그림에서 함수
 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의 x 좌표
 와 같으므로 $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{5}{4}\pi$



(2) 부등식 $\tan x \leq -\sqrt{3}$ 의 해는 다음 그림에서 함수
 $y = \tan x$ 의 그래프가 직선 $y = -\sqrt{3}$ 과 만나거나
 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < x \leq \frac{5}{3}\pi$$

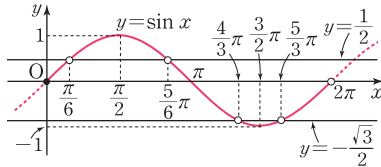


13 $(2 \sin x - 1)(2 \sin x + \sqrt{3}) < 0$ 을 풀면
 $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$

따라서 주어진 부등식의 해는 다음 그림에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 보다 위쪽에 있고 직선 $y = \frac{1}{2}$ 보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi < x < \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{또는 } \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$$



2 사인법칙과 코사인법칙

01 사인법칙과 코사인법칙 126~138쪽

01 사인법칙에서 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ 이므로 $\frac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R$

따라서 $R = \frac{3\sqrt{3}}{2 \sin 60^\circ} = 3$

또 $\frac{c}{\sin C} = 2R$ 에서 $\frac{c}{\sin 45^\circ} = 2 \times 3$

따라서 $c = 2 \times 3 \times \sin 45^\circ = 3\sqrt{2}$

02 삼각형 ABC에서 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하자.

(1) 사인법칙에서 $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$,

$\sin C = \frac{c}{2R}$ 이므로

$$a \times \frac{a}{2R} = b \times \frac{b}{2R} = c \times \frac{c}{2R}$$

즉, $a^2 = b^2 = c^2$

$a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ 이므로 $a = b = c$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

(2) 사인법칙에서 $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\sin B = \frac{b}{2R}$,

$\sin C = \frac{c}{2R}$ 이므로 $\left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2$

즉, $a^2 = b^2 + c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

03 삼각형 ABC에서

$$C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (77^\circ + 39^\circ) = 64^\circ$$

사인법칙에서 $\frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{\overline{AC}}{\sin B}$ 이므로

$$\frac{2000}{\sin 64^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\sin 39^\circ}, \overline{AC} = \frac{2000 \sin 39^\circ}{\sin 64^\circ} = 1400$$

따라서 지점 A에서 섬 C까지의 거리는 1400 m이다.

04 삼각형 ABC에서 $C = 37^\circ - 23^\circ = 14^\circ$

사인법칙에서 $\frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{\overline{BC}}{\sin A}$ 이므로

$$\frac{100}{\sin 14^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 23^\circ}, \overline{BC} = \frac{100 \sin 23^\circ}{\sin 14^\circ}$$

지점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 삼각형 CHB에서

$$\overline{CH} = \overline{BC} \times \sin 37^\circ$$

$$= \frac{100 \sin 23^\circ}{\sin 14^\circ} \times \sin 37^\circ = 97.5$$

따라서 지점 C의 높이는 97.5 m이다.

05 (1) 코사인법칙에서 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ 이므로

$$b^2 = (2\sqrt{3})^2 + 3^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 3 \times \cos 30^\circ = 3$$

그런데 $b > 0$ 이므로 $b = \sqrt{3}$

(2) 코사인법칙에서 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{6^2 + (5\sqrt{2})^2 - (\sqrt{26})^2}{2 \times 6 \times 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

그런데 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 45^\circ$

06 코사인법칙에서

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos A \\ &= 200^2 + 500^2 - 2 \times 200 \times 500 \times \cos 120^\circ \\ &= 390000 \end{aligned}$$

$$\overline{BC} = 624.4 \dots$$

따라서 두 나무 B, C 사이의 거리는 624 m이다.

07 삼각형 ABC에서

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \cos B$$

이므로

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{BC}} \\ &= \frac{8^2 + 9^2 - 5^2}{2 \times 8 \times 9} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

삼각형 ABD에서

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BD} \cos B \\ &= 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \frac{5}{6} = 20 \end{aligned}$$

$\overline{AD} > 0$ 이므로 $\overline{AD} = 2\sqrt{5}$

08 삼각형 ABC의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \sin 150^\circ = \frac{15}{2}$$

09 코사인법칙에서 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 이므로

$$\cos A = \frac{14^2 + 15^2 - 13^2}{2 \times 14 \times 15} = \frac{3}{5}$$

$\sin A > 0$ 이므로

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 14 \times 15 \times \frac{4}{5} = 84$$

10 삼각형 ABC에서

$$\begin{aligned} C &= 180^\circ - (A + B) \\ &= 180^\circ - (21^\circ + 122^\circ) = 37^\circ \end{aligned}$$

사인법칙에서 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 이므로

$$\frac{a}{\sin 21^\circ} = \frac{20}{\sin 37^\circ}$$

$$a = \frac{20 \sin 21^\circ}{\sin 37^\circ} = 12$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ac \sin B \\ &= \frac{1}{2} \times 12 \times 20 \times \sin 122^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 12 \times 20 \times \sin 58^\circ = 102 \end{aligned}$$

시험 대비 대단원 TEST

..... 154~156쪽

- | | | | | |
|---|-------------------|--------------------------------|---------------------|------|
| 1 ⑤ | 2 32 | 3 $\frac{\sqrt{7}}{2}$ | 4 $-\frac{1}{3}$ | 5 ② |
| 6 ③ | 7 9π | 8 10 | 9 $1 + \sin \theta$ | |
| 10 ⑤ | 11 ④ | 12 ③ | 13 $\frac{25}{4}$ | 14 4 |
| 15 $\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$ | 16 $-\frac{1}{8}$ | 17 $(\sqrt{10} - \sqrt{2})$ km | | |
| 18 $2\sqrt{3}$ | | | | |

- 1 ① $690^\circ = 360^\circ \times 1 + 330^\circ$
 ② $-120^\circ = 360^\circ \times (-1) + 240^\circ$
 $-240^\circ = 360^\circ \times (-1) + 120^\circ$
 ③ $-\frac{\pi}{3} = 2\pi \times (-1) + \frac{5}{3}\pi$
 $\frac{13}{3}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{\pi}{3}$
 ④ $\frac{5}{2}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{\pi}{2}$
 $540^\circ = 360^\circ \times 1 + 180^\circ = 3\pi = 2\pi \times 1 + \pi$
 ⑤ $\frac{8}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 480^\circ = 360^\circ \times 1 + 120^\circ$
 따라서 ⑤이다.

- 2 $OP = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ 이므로
 $\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = -\frac{3}{5}, \tan \theta = -\frac{4}{3}$

$$\frac{36(\sin \theta + \tan \theta)}{\cos \theta} = \frac{36\left(\frac{4}{5} - \frac{4}{3}\right)}{-\frac{3}{5}} = 32$$

- 3 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로 } 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\sin \theta - \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$0 < \theta < \pi$ 이고 $\sin \theta \cos \theta < 0$ 이므로 θ 는 제2사분면의 각이다.

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \text{이므로 } \sin \theta - \cos \theta > 0$$

$$\text{따라서 } \sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

- 4 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} &= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} \\ &= \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = 2 \end{aligned}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \cos \theta \neq 0 \text{이므로}$$

$$\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} = 2$$

$$1 - \tan \theta = 2 + 2 \tan \theta$$

$$\text{따라서 } \tan \theta = -\frac{1}{3}$$

- 5 ② 함수 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 함수 $y = \sin x$

의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것과 같으므로 함수 $y = -\cos x$ 의 그래프와 일치한다.

따라서 ②이다.

- 6 ① $y = 2 \cos x$ 의 주기는 2π 이다.

② $y = 3 \tan x$ 의 주기는 π 이다.

③ $y = -3 \sin \frac{1}{2}x + 1$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$ 이다.

④ $y = \cos(2x + \pi) + 1 = \cos 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$ 이다.

⑤ $y = \tan \frac{1}{3}x - 1$ 의 주기는 $\frac{\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 3\pi$ 이다.

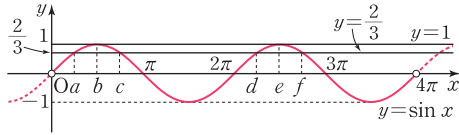
따라서 ③이다.

- 7 $3 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$

$$(3 \sin x - 2)(\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = \frac{2}{3} \text{ 또는 } \sin x = 1$$

다음 그림과 같이 함수 $y=\sin x$ 의 그래프와 두 직선 $y=1$, $y=\frac{2}{3}$ 의 교점의 x 좌표를 각각 a, b, c, d, e, f 라고 하자.



$a < b < c < d < e < f$ 라고 하면

$$b = \frac{\pi}{2}, c = \pi - a, d = 2\pi + a, e = \frac{5}{2}\pi, f = 3\pi - a$$

따라서 $a + b + c + d + e + f = 9\pi$

8 $\sin 10\theta = \sin \pi = 0, \sin 20\theta = \sin 2\pi = 0$

$$\sin 11\theta = \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

$$\sin 12\theta = \sin(\pi + 2\theta) = -\sin 2\theta$$

⋮

$$\sin 19\theta = \sin(\pi + 9\theta) = -\sin 9\theta$$

$$\text{또 } \sin 5\theta = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \text{이고,}$$

$$\sin 6\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

$$\sin 7\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right) = \cos 2\theta$$

$$\sin 8\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3\theta\right) = \cos 3\theta$$

$$\sin 9\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4\theta\right) = \cos 4\theta$$

이므로

$$\begin{aligned} & \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \cdots + \sin^2 9\theta + \sin^2 10\theta \\ & \quad + \sin^2 11\theta + \cdots + \sin^2 19\theta + \sin^2 20\theta \\ & = 2(\sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \cdots + \sin^2 9\theta) \\ & = 2(\sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \sin^2 4\theta + 1 \\ & \quad + \cos^2 \theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta + \cos^2 4\theta) \\ & = 10 \end{aligned}$$

9 오른쪽 그래프에서

$$\frac{3}{4}\pi < \theta < \pi \text{ 일 때,}$$

$$-1 < \tan \theta < 0$$

$$\cos \theta < 0$$

$$\cos \theta < -\sin \theta$$

이므로

$$\begin{aligned} & \sqrt{(1 + \tan \theta)^2} + |\cos \theta + \tan \theta| - \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} \\ & = 1 + \tan \theta - (\cos \theta + \tan \theta) + (\sin \theta + \cos \theta) \\ & = 1 + \sin \theta \end{aligned}$$

10 오른쪽 그림과 같이

두 함수 $y = \cos x$,

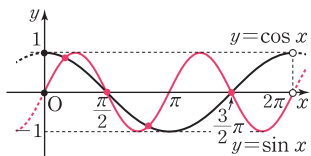
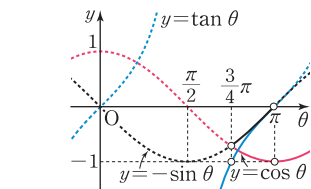
$y = \sin 2x$ 의 그래프

의 교점은 4개이므로

방정식

$\sin 2x = \cos x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

따라서 ⑤이다.



11 $\frac{3}{\sin 120^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\sin 40^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 20^\circ}$ 이므로
 $\frac{\overline{AC}}{\sin 40^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 20^\circ} = 2\sqrt{3}$

한편 $\cos 50^\circ = \cos(90^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ$ 이므로

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 20^\circ} + \frac{\overline{AC}}{\cos 50^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 20^\circ} + \frac{\overline{AC}}{\sin 40^\circ} = 4\sqrt{3}$$

따라서 ④이다.

12 직선 $x=3$ 과 두 직선

$$y=2x, y=\frac{1}{3}x \text{의 교점을}$$

각각 A, B이라고 하면

$$A(3, 6), B(3, 1)$$

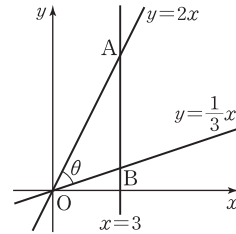
이므로 삼각형 AOB에서

$$\overline{AB}=5, \overline{OA}=3\sqrt{5},$$

$$\overline{OB}=\sqrt{10} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - \overline{AB}^2}{2 \times \overline{OA} \times \overline{OB}} \\ &= \frac{(3\sqrt{5})^2 + (\sqrt{10})^2 - 5^2}{2 \times 3\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

따라서 ③이다.



13 $\angle AOB = \theta, \overline{OA} = r_1, \overline{OC} = r_2$ 라고 하면

$$\widehat{AB} : \widehat{CD} = r_1\theta : r_2\theta = 2 : 3 \text{이므로}$$

$$r_1 : r_2 = 2 : 3$$

▶ 10%

$$\overline{OA} = 2k, \overline{OC} = 3k(k > 0) \text{라고 하면 } \overline{AC} = k$$

색칠한 도형의 둘레의 길이가 10이므로

$$2k + 2k\theta + 3k\theta = 10$$

$$2k + 5k\theta = 10 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

▶ 20%

색칠한 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (3k)^2 \times \theta - \frac{1}{2} \times (2k)^2 \times \theta = \frac{5}{2}k^2\theta$$

$$\text{①에서 } k\theta = 2 - \frac{2}{5}k$$

▶ 20%

따라서 색칠한 도형의 넓이는

$$\frac{5}{2}k\left(2 - \frac{2}{5}k\right) = -k^2 + 5k$$

$$= -\left(k - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$$

▶ 30%

즉, 구하는 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이다.

▶ 20%

14 $f(x) = a \cos(bx + 1) + c = a \cos b\left(x + \frac{1}{b}\right) + c$

(가)에서 함수 $y=f(x)$ 의 주기가 3π 이고, $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 3\pi, b = \frac{2}{3}$$

▶ 40%

(나)에서 함수 $y=f(x)$ 의 최솟값은 -1 , 최댓값은 5 이

고, $a > 0, c > 0$ 이므로

$$-a + c = -1, a + c = 5$$

▶ 30%

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 3, c = 2$$

▶ 20%

따라서 $abc = 4$

▶ 10%

- 15 $x^2 - 2x \sin \theta + \cos^2 \theta - \cos \theta > 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2x \sin \theta + \cos^2 \theta - \cos \theta = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = \sin^2 \theta - (\cos^2 \theta - \cos \theta) < 0 \quad \blacktriangleright 40\%$$

이때 $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ 이므로

$$2 \cos^2 \theta - \cos \theta - 1 > 0$$

$$(2 \cos \theta + 1)(\cos \theta - 1) > 0$$

$$\cos \theta < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos \theta > 1 \quad \blacktriangleright 30\%$$

따라서 $\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi \quad \blacktriangleright 30\%$

- 16 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 $\frac{2}{\sin 30^\circ} = 2R$ 이므로

$$R = \frac{2}{2 \sin 30^\circ} = 2 \quad \blacktriangleright 30\%$$

삼각형 ABC의 외심을 O라고 하면

$$\angle BOC = 2\theta \quad \blacktriangleright 30\%$$

삼각형 OBC에서 $\overline{OB} = \overline{OC} = 2$ 이므로

$$\overline{BC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - 2 \times \overline{OB} \times \overline{OC} \times \cos 2\theta$$

$$3^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \cos 2\theta \quad \blacktriangleright 30\%$$

따라서 $\cos 2\theta = -\frac{1}{8} \quad \blacktriangleright 10\%$

- 17 지점 B에서 지면에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{BH} = h$ 라고 하면 삼각형 AHB에서

$$\overline{AB} = \frac{h}{\sin 30^\circ} = 2h \quad \blacktriangleright 20\%$$

삼각형 BCH에서

$$\overline{BC} = \frac{h}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}h \quad \blacktriangleright 20\%$$

삼각형 ACB에서

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{BC} \times \cos C$$

$$(2h)^2 = 4^2 + (\sqrt{2}h)^2 - 2 \times 4 \times \sqrt{2}h \times \cos 60^\circ$$

$$h^2 + 2\sqrt{2}h - 8 = 0 \quad \blacktriangleright 30\%$$

$$h = -\sqrt{2} - \sqrt{10} \text{ 또는 } h = -\sqrt{2} + \sqrt{10} \quad \blacktriangleright 20\%$$

따라서 지점 B의 높이는 $(\sqrt{10} - \sqrt{2})$ km $\blacktriangleright 10\%$

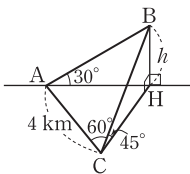
- 18 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2} \quad \blacktriangleright 30\%$

$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = 1 : 2$ 이므로 각의 이등분선의 성질에 따라 $\angle BAD = \angle CAD = 30^\circ$

$\triangle ABC + \triangle ABD + \triangle ADC$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{9\sqrt{3}}{2} &= \frac{1}{2} \times 3 \times \overline{AD} \times \sin 30^\circ \\ &+ \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times 6 \times \sin 30^\circ \quad \blacktriangleright 60\% \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AD} = 2\sqrt{3} \quad \blacktriangleright 10\%$



III 수열

Plus 연습

1 등차수열과 등비수열

01 수열의 뜻 159~161쪽

01 첫째항: 1, 제4항: $\frac{1}{7}$

02 (1) 일반항을 a_n 이라고 하면 $a_n = n^3 - 1$ 이므로

$$a_1 = 1^3 - 1 = 0, a_2 = 2^3 - 1 = 7,$$

$$a_3 = 3^3 - 1 = 26, a_4 = 4^3 - 1 = 63$$

따라서 0, 7, 26, 63

(2) 일반항을 a_n 이라고 하면 $a_n = n(n+2)$ 이므로

$$a_1 = 1 \times (1+2) = 3, a_2 = 2 \times (2+2) = 8,$$

$$a_3 = 3 \times (3+2) = 15, a_4 = 4 \times (4+2) = 24$$

따라서 3, 8, 15, 24

(3) 일반항을 a_n 이라고 하면 $a_n = \frac{1}{2-3n}$ 이므로

$$a_1 = \frac{1}{2-3 \times 1} = -1, a_2 = \frac{1}{2-3 \times 2} = -\frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{2-3 \times 3} = -\frac{1}{7}, a_4 = \frac{1}{2-3 \times 4} = -\frac{1}{10}$$

따라서 $-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{10}$

(4) 일반항을 a_n 이라고 하면 $a_n = \sqrt{2n+1}$ 이므로

$$a_1 = \sqrt{2 \times 1 + 1} = \sqrt{3}, a_2 = \sqrt{2 \times 2 + 1} = \sqrt{5}$$

$$a_3 = \sqrt{2 \times 3 + 1} = \sqrt{7}, a_4 = \sqrt{2 \times 4 + 1} = 3$$

따라서 $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, 3$

02 등차수열 162~174쪽

01 (1) $3 - 1 = 5 - 3 = 7 - 5 = 9 - 7 = \dots = 2$ 이므로 공차는 2이다.

$$(2) -\frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{7}{6} - \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= -\frac{5}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \dots = -\frac{1}{2}$$

이므로 공차는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

02 (1) $a_n = 19 + (n-1) \times (-3) = -3n + 22$

$$(2) a_n = -32 + (n-1) \times 6 = 6n - 38$$

(3) 첫째항이 3, 공차가 -6 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 + (n-1) \times (-6) = -6n + 9$$

(4) 첫째항이 10, 공차가 -4 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 10 + (n-1) \times (-4) = -4n + 14$$

- 03 (1) 첫째항이 17, 공차가 -4인 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n = 17 + (n-1) \times (-4) = -4n + 21$
 따라서 제5항은 $a_5 = -4 \times 5 + 21 = 1$
 (2) -23을 이 수열의 제 n 항이라고 하면
 $-4n + 21 = -23, n = 11$
 따라서 제11항이다.
- 04 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면
 $a_4 = a + (4-1)d = 3$
 즉, $a + 3d = 3$ ①
 $a_{12} = a + (12-1)d = 35$
 즉, $a + 11d = 35$ ②
 ①, ②를 연립하여 풀면 $a = -9, d = 4$
 따라서 첫째항이 -9, 공차가 4이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = -9 + (n-1) \times 4 = 4n - 13$
- 05 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면
 $a_3 + a_7 = a + (3-1)d + a + (7-1)d = 24$
 즉, $2a + 8d = 24$ ①
 $a_{14} + a_{18} = a + (14-1)d + a + (18-1)d = 68$
 즉, $2a + 30d = 68$ ②
 ①, ②를 연립하여 풀면 $a = 4, d = 2$
 따라서 첫째항이 4, 공차가 2이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 4 + (n-1) \times 2 = 2n + 2$
- 06 첫째항이 -22, 공차가 5이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = -22 + (n-1) \times 5 = 5n - 27$
 a_n 이 처음으로 양수가 되는 것은 $a_n > 0$ 을 만족시키는
 자연수 n 의 값이 최소일 때이다.
 즉, $a_n > 0$ 에서 $5n - 27 > 0, n > \frac{27}{5} = 5.4$ 이므로 자연
 수 n 의 최솟값은 6이다.
 따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제6항이다.
- 07 (1) x 는 -2와 14의 등차중항이므로
 $x = \frac{-2+14}{2} = 6$
 y 는 14와 30의 등차중항이므로 $y = \frac{14+30}{2} = 22$
 따라서 $x = 6, y = 22$
 (2) x 는 11과 3의 등차중항이므로 $x = \frac{11+3}{2} = 7$
 y 는 3과 -5의 등차중항이므로
 $y = \frac{3+(-5)}{2} = -1$
 따라서 $x = 7, y = -1$
- 08 6, a , b , c , 22가 등차수열이므로 6, b , 22도 등차수
 열이다.
 이때 b 는 6과 22의 등차중항이므로
 $b = \frac{6+22}{2} = 14$
 따라서 등차수열 6, a , 14, c , 22에서 a 는 6과 14의 등
 차중항이므로 $a = \frac{6+14}{2} = 10$

c 는 14와 22의 등차중항이므로 $c = \frac{14+22}{2} = 18$
 따라서 세 수 a, b, c 를 순서대로 구하면 10, 14, 18

- 09 (1) $\frac{10(-7+29)}{2} = 110$
 (2) $\frac{7\{2 \times 5 + (7-1) \times (-3)\}}{2} = -28$
 (3) 첫째항이 11, 공차가 4이므로 첫째항부터 제10항까
 지의 합은 $\frac{10\{2 \times 11 + (10-1) \times 4\}}{2} = 290$
- 10 조건을 만족시키는 자연수를 작은 것부터 차례로 나열
 하면 1, 4, 7, ..., 100
 이 수열은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로 일
 반항 a_n 은 $a_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$
 $3n - 2 = 100$ 에서 $n = 34$ 이므로 100은 제34항이다.
 따라서 구하는 합은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제34항까
 지의 합이므로
 $\frac{34(1+100)}{2} = 1717$
- 11 $100 = 2^2 \times 5^2$ 이므로 100과 서로소인 수는 2의 배수도
 아니고 5의 배수도 아닌 수이다.
 즉, 100 이하의 홀수 중 5의 배수를 제외한 수의 합과
 같다.
 100 이하의 홀수를 작은 것부터 차례로 나열하면
 1, 3, 5, ..., 99
 이 수열은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이고,
 $99 = 1 + (n-1) \times 2, n = 50$
 이므로 100 이하의 홀수의 합은
 $\frac{50(1+99)}{2} = 2500$
 100 이하의 홀수 중에서 5의 배수를 작은 것부터 차례
 로 나열하면 5, 15, 25, ..., 95
 이 수열은 첫째항이 5, 공차가 10인 등차수열이고,
 $95 = 5 + (n-1) \times 10, n = 10$
 이므로 100 이하의 홀수 중에서 5의 배수의 합은
 $\frac{10(5+95)}{2} = 500$
 따라서 구하는 합은 $2500 - 500 = 2000$
- 12 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을
 S_n 이라고 하면
 $S_4 = \frac{4(2a+3d)}{2} = 38$
 즉, $2a + 3d = 19$ ①
 $S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = 185$
 즉, $2a + 9d = 37$ ②
 ①, ②를 연립하여 풀면 $a = 5, d = 3$
 따라서 첫째항부터 제20항까지의 합은
 $S_{20} = \frac{20(2 \times 5 + 19 \times 3)}{2} = 670$

13 $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - n - \{(n-1)^2 - (n-1)\} \\ = 2n - 2 \quad \dots\dots ①$$

$$n=1 \text{ 일 때, } a_1 = S_1 = 1^2 - 1 = 0 \quad \dots\dots ②$$

그런데 ①에 $n=1$ 을 대입하면 $a_1 = 2 \times 1 - 2 = 0$ 이므로 ②와 일치한다.

따라서 일반항 a_n 은 $a_n = 2n - 2$

03 등비수열 175~185쪽

01 (1) $6 \div 2 = 18 \div 6 = 54 \div 18 = 162 \div 54 = \dots = 3$ 이므로 공비는 3이다.

$$(2) \frac{4}{3} \div \frac{16}{9} = 1 \div \frac{4}{3} = \frac{3}{4} \div 1 = \frac{9}{16} \div \frac{3}{4} = \dots = \frac{3}{4} \text{ 이므로 공비는 } \frac{3}{4} \text{이다.}$$

02 (1) $a_n = 5^{n-1}$

(2) 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{1}{2} \times 2^{n-1}$$

03 첫째항이 3, 공비가 -2인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 \times (-2)^{n-1}$$

따라서 제5항은 $a_5 = 3 \times (-2)^4 = 48$

04 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_2 = ar = 12 \quad \dots\dots ①$$

$$a_5 = ar^4 = 324 \quad \dots\dots ②$$

② $\div$ ①을 하면 $r^3 = 27$

r 는 실수이므로 $r = 3$

$r = 3$ 을 ①에 대입하여 풀면 $a = 4$

따라서 첫째항이 4, 공비가 3이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 4 \times 3^{n-1}$$

05 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_1 + a_2 = a + ar = a(1+r) = 30 \quad \dots\dots ①$$

$$a_3 + a_4 = ar^2 + ar^3 = ar^2(1+r) = 120 \quad \dots\dots ②$$

② $\div$ ①을 하면 $r^2 = 4$

$a_2 a_3 = ar \times ar^2 = a^2 r^3 > 0$ 에서 $r > 0$ 이므로 $r = 2$

$r = 2$ 를 ①에 대입하여 풀면 $a = 10$

따라서 첫째항과 공비의 합은 $10 + 2 = 12$

06 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 \times 2^{n-1}$$

$2 \times 2^{n-1} \geq 2000$ 에서 $2^n \geq 2000$

이때 $2^{10} = 1024$, $2^{11} = 2048$ 이므로 $n \geq 11$

따라서 처음으로 2000 이상이 되는 항은 제11항이다.

07 (1) x 는 18과 2의 등비중항이므로

$$x^2 = 18 \times 2 = 36, \quad x = -6 \text{ 또는 } x = 6$$

(i) $x = -6$ 일 때, 공비는 $-\frac{1}{3}$ 이므로

$$y = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

(ii) $x = 6$ 일 때, 공비는 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$y = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

따라서 $x = -6, y = -\frac{2}{3}$ 또는 $x = 6, y = \frac{2}{3}$

(2) x 는 3과 12의 등비중항이므로

$$x^2 = 3 \times 12 = 36, \quad x = -6 \text{ 또는 } x = 6$$

(i) $x = -6$ 일 때, 공비는 -2 이므로

$$y = 12 \times (-2) = -24$$

(ii) $x = 6$ 일 때, 공비는 2이므로

$$y = 12 \times 2 = 24$$

따라서 $x = -6, y = -24$ 또는 $x = 6, y = 24$

08 첫째항을 5, 공비를 r 라고 하면 80은 제5항이므로

$$80 = 5r^4, \quad r^4 = 16$$

r 는 실수이므로 $r = -2$ 또는 $r = 2$

(i) $r = -2$ 일 때, 세 수 a, b, c 를 순서대로 구하면

$$-10, 20, -40$$

(ii) $r = 2$ 일 때, 세 수 a, b, c 를 순서대로 구하면

$$10, 20, 40$$

09 (1) $\frac{4\{1 - (-2)^{10}\}}{1 - (-2)} = \frac{4}{3}(1 - 2^{10}) = -1364$

(2) 첫째항이 3, 공비가 $\sqrt{3}$ 이므로 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{3\{(\sqrt{3})^{10} - 1\}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3^6 - 3}{\sqrt{3} - 1} = 363 + 363\sqrt{3}$$

10 첫째항을 a , 공비를 r ($r \neq 1$), 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라고 하면

$$S_4 = \frac{a(r^4 - 1)}{r - 1} = 30 \quad \dots\dots ①$$

$$S_8 = \frac{a(r^8 - 1)}{r - 1} = 90 \quad \dots\dots ②$$

②를 변형하면 $\frac{a(r^4 - 1)(r^4 + 1)}{r - 1} = 90$

①을 위의 식에 대입하면 $30(r^4 + 1) = 90, \quad r^4 = 2$

따라서 첫째항부터 제12항까지의 합은

$$S_{12} = \frac{a(r^{12} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^4 - 1)(r^8 + r^4 + 1)}{r - 1} \\ = 30(2^2 + 2 + 1) = 210$$

11 $30(1 + 0.06) + 30(1 + 0.06)^2 + \dots$
 $+ 30(1 + 0.06)^9 + 30(1 + 0.06)^{10}$
 $= \frac{30(1 + 0.06)\{(1 + 0.06)^{10} - 1\}}{(1 + 0.06) - 1}$
 $= \frac{30 \times 1.06(1.79 - 1)}{0.06} = 418.7$

따라서 4187000원이다.

2 수열의 합과 수학적 귀납법

01 수열의 합 193-201쪽

01 (1) $\sum_{k=1}^{10} (3k+1) = (3 \times 1 + 1) + (3 \times 2 + 1) + (3 \times 3 + 1) + \dots + (3 \times 10 + 1)$
 $= 4 + 7 + 10 + \dots + 31$

(2) $\sum_{k=4}^{12} \frac{1}{2k-2} = \frac{1}{2 \times 4 - 2} + \frac{1}{2 \times 5 - 2} + \frac{1}{2 \times 6 - 2} + \dots + \frac{1}{2 \times 12 - 2}$
 $= \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{22}$

02 (1) 수열 1, 3, 5, ..., 99는 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로 일반항 a_k 는

$$a_k = 1 + (k-1) \times 2 = 2k-1$$

$$99 = 2k-1 \text{에서 } k=50$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{50} (2k-1)$$

(2) 수열 $\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{3 \times 4}, \dots, \frac{1}{11 \times 12}$ 의 일반항

$$a_k \text{는 } a_k = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{11 \times 12} = \frac{1}{k(k+1)} \text{에서 } k=11$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{11} \frac{1}{k(k+1)}$$

03 (1) $\sum_{k=1}^{10} (-3a_k + 4b_k) = \sum_{k=1}^{10} (-3)a_k + \sum_{k=1}^{10} 4b_k$
 $= -3 \sum_{k=1}^{10} a_k + 4 \sum_{k=1}^{10} b_k$
 $= (-3) \times 5 + 4 \times 15 = 45$

(2) $\sum_{k=1}^{10} (3a_k - 2) = \sum_{k=1}^{10} 3a_k - \sum_{k=1}^{10} 2 = 3 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} 2$
 $= 3 \times 5 - 2 \times 10 = -5$

04 (1) $\sum_{k=1}^{30} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{30}$
 $= (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{29}) + (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{30})$
 $= \sum_{k=1}^{15} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{15} a_{2k} = 30 + 20 = 50$

(2) $\sum_{k=1}^{30} (-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{30}$
 $= -(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{29}) + (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{30})$
 $= -\sum_{k=1}^{15} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{15} a_{2k}$
 $= -30 + 20 = -10$

05 (1) $1 + 2 + 3 + \dots + 12 = \frac{12 \times 13}{2} = 78$

(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 12^2 = \frac{12 \times 13 \times 25}{6} = 650$

(3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 12^3 = \left(\frac{12 \times 13}{2} \right)^2 = 6084$

06 (1) $1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \dots + n(n+2)$
 $= \sum_{k=1}^n k(k+2) = \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k$
 $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \times \frac{n(n+1)}{2}$
 $= \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

(2) $\sum_{k=1}^n k^2(k+1)$
 $= \sum_{k=1}^n (k^3 + k^2) = \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n k^2$
 $= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 $= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$

07 $4^3 + 5^3 + 6^3 + \dots + 10^3$
 $= \sum_{k=1}^{10} k^3 - \sum_{k=1}^3 k^3 = \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 - \left(\frac{3 \times 4}{2} \right)^2$
 $= 2989$

08 $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)}$
 $= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$
 $= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots \right.$
 $\left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\}$
 $= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

02 수학적 귀납법 202-210쪽

01 (1) $a_1 = 1$
 $a_2 = 3 \times a_1 - 1 = 3 \times 1 - 1 = 2$
 $a_3 = 3 \times a_2 - 1 = 3 \times 2 - 1 = 5$
 $a_4 = 3 \times a_3 - 1 = 3 \times 5 - 1 = 14$
 $a_5 = 3 \times a_4 - 1 = 3 \times 14 - 1 = 41$
 따라서 1, 2, 5, 14, 41

(2) $a_1 = 1$
 $a_2 = \frac{1}{2} \times a_1 + 1 = \frac{1}{2} \times 1 + 1 = \frac{3}{2}$
 $a_3 = \frac{1}{2} \times a_2 + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{4}$
 $a_4 = \frac{1}{2} \times a_3 + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{7}{4} + 1 = \frac{15}{8}$
 $a_5 = \frac{1}{2} \times a_4 + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{15}{8} + 1 = \frac{31}{16}$
 따라서 $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}$

02 (1) ㉠ $a_1=5, a_{n+1}=a_n+3 (n=1, 2, 3, \dots)$

(2) ㉡ $a_1=6, a_{n+1}=2a_n (n=1, 2, 3, \dots)$

03 길이가 1인 막대를 3등분하여 가운데 부분을 잘라 내고 남은 막대의 길이의 합은

$$a_1=1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

위의 과정을 n 번 반복했을 때 남은 막대의 길이의 합이 a_n 인 막대를 각각 3등분하여 가운데 부분을 잘라 내고 남은 막대의 길이의 합 a_{n+1} 은 길이가 a_n 인 하나의 막대를 3등분하여 가운데 부분을 잘라 내고 남은 막대의 길이의 합이므로

$$a_{n+1}=a_n \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}a_n (n=1, 2, 3, \dots)$$

04 a_1 은 4 m인 대나무를 그 높이의 $\frac{1}{4}$ 만큼 잘라낸 후 1년 뒤에 측정한 높이이므로

$$a_1=4 \times \frac{3}{4} + 2 = 5$$

a_{n+1} 은 n 년 후에 측정한 대나무의 높이의 $\frac{1}{4}$ 만큼 잘라낸 후 1년 뒤에 측정한 높이이므로

$$a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+2 (n=1, 2, 3, \dots)$$

05 (1) (가)-(다)-(라)-(나)

(2) (가) $n=1$ 일 때, (좌변) $=\boxed{1}$, (우변) $=1^2=\boxed{1}$ 이므로 등식 ①이 성립한다.

(라) 양변에 $\boxed{2k+1}$ 을 더하면

$$1+3+5+7+\dots+(2k-1)+\boxed{2k+1}$$

$$=k^2+\boxed{2k+1}=(k+1)^2$$

즉, $n=\boxed{k+1}$ 일 때도 등식 ①이 성립한다.

06 (i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변})=\frac{1}{1 \times 3}=\frac{1}{3}, (\text{우변})=\frac{1}{2 \times 1+1}=\frac{1}{3}$$

따라서 $n=1$ 일 때 등식 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 등식 ①이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\frac{k}{2k+1} \quad \dots\dots ②$$

등식 ②의 양변에 $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ 을 더하면

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$+ \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k+1}{2k+3} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 등식 ①이 성립한다.

(i), (ii)에서 등식 ①은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

07 (i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변})=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$(\text{우변})=\frac{2 \times 2}{2+1}=\frac{4}{3}$$

이므로 (좌변) > (우변)

따라서 $n=2$ 일 때 부등식 ①이 성립한다.

(ii) $n=k (k \geq 2)$ 일 때, 부등식 ①이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1} \quad \dots\dots ②$$

부등식 ②의 양변에 $\frac{1}{k+1}$ 을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}$$

$$> \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{2k+1}{k+1}$$

그런데 $k \geq 2$ 이므로

$$\frac{2k+1}{k+1} - \frac{2(k+1)}{k+2}$$

$$= \frac{(2k+1)(k+2)-2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{(k+1)(k+2)} > 0$$

즉, $\frac{2k+1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2}$ 이므로

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 ①이 성립한다.

(i), (ii)에서 부등식 ①은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

시험 대비 대단원 TEST

..... 228~230쪽

- | | | | | |
|---|------------------------------|--------------------------------|---------------------------|-----|
| 1 ㉠ | 2 196 | 3 324 | 4 ㉡ | 5 ㉢ |
| 6 ㉠ | 7 ㉡ | 8 440 | 9 $\frac{10-\sqrt{2}}{2}$ | |
| 10 ㉠ | 11 68 | 12 $\frac{5}{6}, \frac{3}{2k}$ | 13 -4 | |
| 14 192 | 15 $\frac{n(n+1)(4n+5)}{36}$ | 16 415 | | |
| 17 $a_4=11, a_{n+1}=a_n+n+1 (n=1, 2, 3, \dots)$ | | | | |
| 18 풀이 참고 | | | | |

1 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_3 + a_8 = (a + 2d) + (a + 7d) = 2a + 9d = 46$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$$

$$= \frac{10(2a + 9d)}{2} = \frac{10 \times 46}{2} = 230$$

따라서 ④이다.

2 $n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n^2 - 3n - \{(n-1)^2 - 3(n-1)\}$$

$$= 2n - 4$$

따라서 $a_{100} = 2 \times 100 - 4 = 196$

3 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_2 + a_4 = ar + ar^3 = ar(1 + r^2) = 120 \quad \cdots \cdots ①$$

$$a_3 + a_5 = ar^2 + ar^4 = ar^2(1 + r^2) = 360 \quad \cdots \cdots ②$$

② ÷ ①을 하면 $r = 3$

$r = 3$ 을 ①에 대입하여 풀면 $a = 4$

따라서 $a_5 = ar^4 = 4 \times 3^4 = 324$

4 $a, 1, b$ 가 이 순서대로 등차수열이므로

$$\frac{a+b}{2} = 1 \quad \cdots \cdots ①$$

$a, b, 4$ 가 이 순서대로 등비수열이므로

$$b^2 = 4a \quad \cdots \cdots ②$$

①을 ②에 대입하여 정리하면

$$b^2 + 4b - 8 = 0$$

$b > 0$ 이므로 $b = -2 + 2\sqrt{3}$

$b = -2 + 2\sqrt{3}$ 을 ①에 대입하여 풀면 $a = 4 - 2\sqrt{3}$

따라서 $a - b = 6 - 4\sqrt{3}$ 이므로 ⑤이다.

5 $x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1$ 을 $x - 1$ 로 나눈 나머지는 11이므로

$$x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1 = (x - 1)f(x) + 11 \quad \cdots \cdots ①$$

$f(x)$ 를 $x - 2$ 로 나눈 나머지는 $f(2)$ 이므로 ①에

$x = 2$ 를 대입하면

$$2^{10} + 2^9 + \cdots + 2 + 1 = f(2) + 11$$

$$f(2) = \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} - 11 = 2^{11} - 12$$

따라서 ③이다.

6 $\sum_{k=21}^{30} a_k = C$ 라 하고, 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$A = \sum_{k=1}^{10} a_k$$

$$= \frac{10\{a + (a + 9d)\}}{2}$$

$$= 10a + 45d$$

$$B = \sum_{k=11}^{20} a_k$$

$$= \frac{10\{(a + 10d) + (a + 19d)\}}{2}$$

$$= 10a + 145d$$

$$C = \sum_{k=21}^{30} a_k$$

$$= \frac{10\{(a + 20d) + (a + 29d)\}}{2}$$

$$= 10a + 245d$$

따라서 A, B, C 는 이 순서대로 등차수열이므로

$$\frac{A+C}{2} = B, C = 2B - A$$

즉, $\sum_{k=21}^{30} a_k = -A + 2B$ 이므로 ①이다.

7 $\sum_{k=1}^{10} (k+1)^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} (k+2) + \sum_{k=1}^{10} 3$

$$= \sum_{k=1}^{10} \{(k+1)^2 - 2(k+2) + 3\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$$

따라서 ⑤이다.

8 두 점 A_n, B_n 은 곡선 $y = x^2$ 과 직선 $y = x + n$ 의 교점
이므로 a_n, b_n 은 $x^2 = x + n$, 즉, $x^2 - x - n = 0$ 의 두
근이다.

근과 계수의 관계에 따라 $a_n + b_n = 1, a_n b_n = -n$ 이
므로

$$a_n^2 + b_n^2 = (a_n + b_n)^2 - 2a_n b_n = 1 + 2n$$

따라서 $\sum_{k=1}^{20} (a_k^2 + b_k^2) = \sum_{k=1}^{20} (1 + 2k)$

$$= \sum_{k=1}^{20} 1 + 2 \sum_{k=1}^{20} k$$

$$= 1 \times 20 + 2 \times \frac{20 \times 21}{2} = 440$$

9 $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{6}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{98} + \sqrt{100}}$

$$= \sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k+2}}$$

$$= \sum_{k=1}^{49} \frac{\sqrt{2k} - \sqrt{2k+2}}{(\sqrt{2k} + \sqrt{2k+2})(\sqrt{2k} - \sqrt{2k+2})}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{49} (\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k})$$

$$= \frac{1}{2} \{(\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{4}) + (\sqrt{8} - \sqrt{6}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{98})\}$$

$$= \frac{10 - \sqrt{2}}{2}$$

10 $\neg. a_2 + a_4 + \cdots + a_{2(n-1)} + a_{2n} = 4n^2 + 8n \quad \cdots \cdots ①$

$$a_2 + a_4 + \cdots + a_{2(n-1)} = 4(n-1)^2 + 8(n-1) \quad \cdots \cdots ②$$

① - ②를 하면 $a_{2n} = 8n + 4$

$\neg, \neg. [반례] a_{2n-1} = 1$ 인 경우

$$\{a_n\}: 1, 12, 1, 20, 1, 28, \cdots$$

이므로 $a_n \neq 4n + 4$

$$\text{또 } \sum_{k=1}^n a_{2k-1} = n \neq 4n^2 + 4n$$

따라서 옳은 것은 $\neg$ 이므로 ①이다.

- 11 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 의 값 중에서 1이 m 개, 2가 n 개라고 하자.

$$\sum_{k=1}^n a_k = 20 \text{에서 } 1 \times m + 2 \times n = 20$$

$$m + 2n = 20 \quad \dots\dots ①$$

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = 36 \text{에서 } 1^2 \times m + 2^2 \times n = 36$$

$$m + 4n = 36 \quad \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$m = 4, n = 8$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^n a_k^3 = 1^3 \times m + 2^3 \times n = 4 + 64 = 68$$

- 12 (i) $a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{1+1} = 1$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2+1} = \left[\frac{5}{6}\right]$$

(ii) $\frac{3}{k+1} - a_{k+1} = \frac{3}{k+1} - \left(\frac{1}{2}a_k + \frac{1}{k+1}\right)$

$$= \frac{2}{k+1} - \frac{1}{2}a_k$$

$$a_k \leq \frac{3}{k} \text{에서 } -\frac{1}{2}a_k \geq -\frac{3}{2k} \text{이므로}$$

$$\frac{2}{k+1} - \frac{1}{2}a_k \geq \frac{2}{k+1} - \left[\frac{3}{2k}\right]$$

$$= \frac{2 \times 2k - 3(k+1)}{2k(k+1)}$$

$$= \frac{k-3}{2k(k+1)} \geq 0$$

- 13 첫째항을 52라고 하면 16은 제 $(n+2)$ 항이므로

$$\frac{(n+2)(52+16)}{2} = 340, n=8 \quad \blacktriangleright 60\%$$

공차를 d 라고 하면 $52+9d=16$ 에서

$$d = -4$$

따라서 공차는 -4 이다. $\blacktriangleright 40\%$

- 14 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면 (가)에서

$$ar^4 : a^2r^3 = 2 : 3$$

$$r : a = 2 : 3 \text{이므로}$$

$$2a = 3r \quad \dots\dots ① \quad \blacktriangleright 40\%$$

(나)에서 $\frac{ar^5 + ar^8}{ar^2 + ar^5} = \frac{ar^5(1+r^3)}{ar^2(1+r^3)} = r^3 = 8$

r 는 실수이므로 $r=2$ $\blacktriangleright 40\%$

$r=2$ 를 ①에 대입하여 풀면 $a=3$

따라서 $a_7 = ar^6 = 3 \times 2^6 = 192$ $\blacktriangleright 20\%$

- 15 $a_n = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n+1}$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)}$$

$$= \frac{n(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{6}n \quad \blacktriangleright 40\%$$

$$\text{따라서 } S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}k^2 + \frac{1}{6}k\right) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n k$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)\{2(2n+1)+3\}}{36}$$

$$= \frac{n(n+1)(4n+5)}{36} \quad \blacktriangleright 60\%$$

- 16 (i) $n=2k-1$ (k 는 자연수)일 때,

$$\left(2k - \frac{3}{4}\right)^2 = 4k^2 - 3k + \frac{9}{16} \text{이므로}$$

$$a_{2k-1} = 4k^2 - 3k + 1 \quad \blacktriangleright 30\%$$

- (ii) $n=2k$ (k 는 자연수)일 때,

$$\left(2k + \frac{1}{4}\right)^2 = 4k^2 + k + \frac{1}{16} \text{이므로}$$

$$a_{2k} = 4k^2 + k \quad \blacktriangleright 30\%$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^5 (a_{2k-1} + a_{2k})$$

$$= \sum_{k=1}^5 (8k^2 - 2k + 1)$$

$$= 8 \sum_{k=1}^5 k^2 - 2 \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 1$$

$$= 8 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} - 2 \times \frac{5 \times 6}{2} + 1 \times 5 = 415 \quad \blacktriangleright 40\%$$

- 17 a_4 는 4개의 현으로 나누어지는 조각의 최대 개수이므로

$$a_4 = a_3 + 4 = 7 + 4 = 11 \quad \blacktriangleright 30\%$$

원의 내부를 n 개의 현으로 나누어 생기는 조각의 개수는 어느 두 현도 평행하지 않고 어느 세 현도 한 점에서 만나지 않을 때 최대가 된다.

n 개의 현으로 나누어진 원의 내부에서 하나의 현을 더 그으면 이 현은 기존의 n 개의 현과 각각 한 번씩 만나므로 $(n+1)$ 개의 새로운 조각이 생긴다.

따라서 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식은

$$a_{n+1} = a_n + n + 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \blacktriangleright 70\%$$

- 18 (i) $n=1$ 일 때, $2^2+3=7$ 이므로 $2^{n+1}+3^{2n-1}$ 은 7의 배수이다. $\blacktriangleright 20\%$

- (ii) $n=k$ 일 때, $2^{n+1}+3^{2n-1}$ 이 7의 배수라고 가정하면 $2^{k+1}+3^{2k-1}=7m$ (단, m 은 자연수) $\blacktriangleright 20\%$

$n=k+1$ 일 때,

$$2^{(k+1)+1} + 3^{2(k+1)-1} = 2^{k+2} + 3^{2k+1} = 2 \times 2^{k+1} + 3^2 \times 3^{2k-1}$$

$$= 2 \times 2^{k+1} + (2+7) \times 3^{2k-1}$$

$$= 2(2^{k+1} + 3^{2k-1}) + 7 \times 3^{2k-1}$$

$$= 2 \times 7m + 7 \times 3^{2k-1} = 7(2m + 3^{2k-1})$$

이므로 $n=k+1$ 일 때도 $2^{n+1}+3^{2n-1}$ 은 7의 배수이다. $\blacktriangleright 50\%$

- (i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{n+1}+3^{2n-1}$ 은 7의 배수이다. $\blacktriangleright 10\%$





