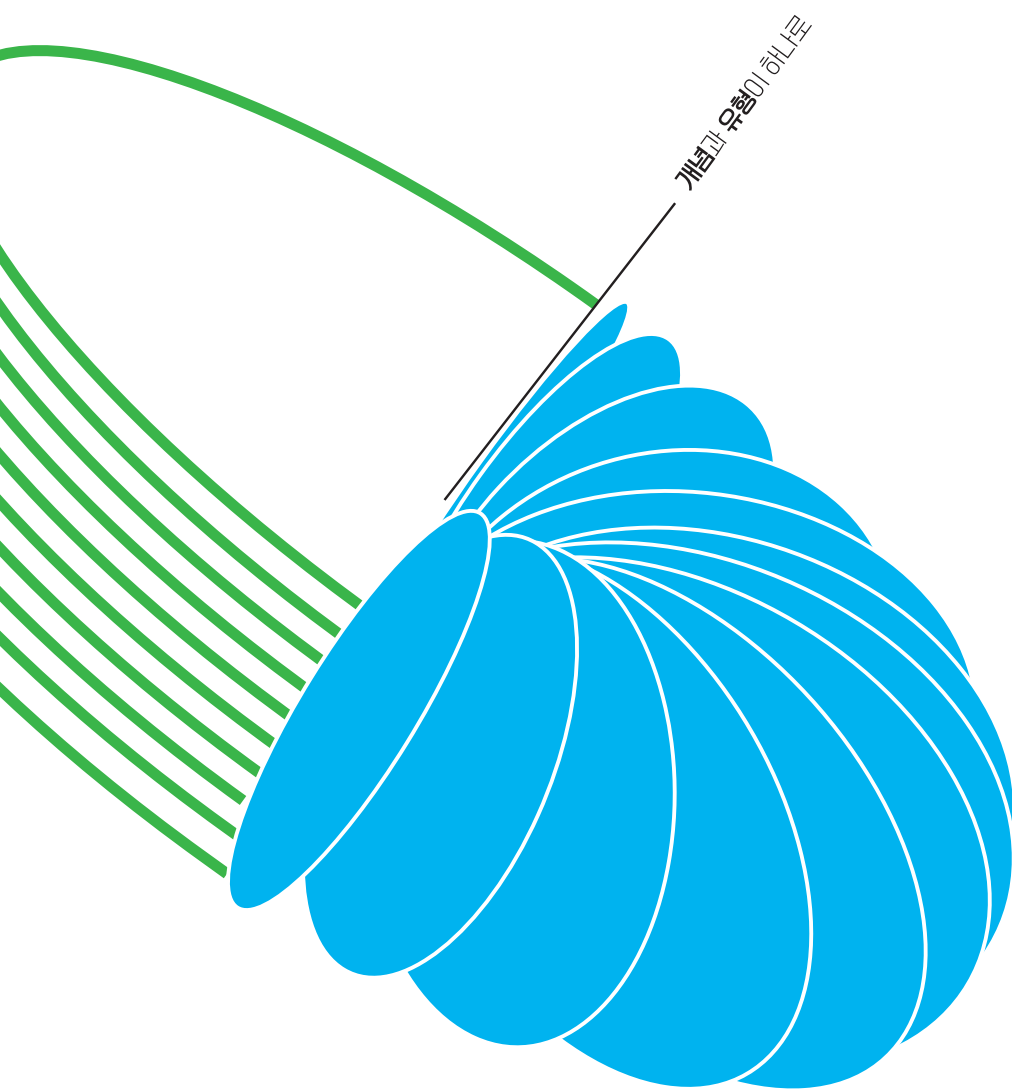


개념+유형

공통수학1

정답과 해설



개념편

정답과 해설

I-1 01 다항식의 연산

다항식의 덧셈과 뺄셈

개념 Check

8쪽

- 1 답 내림차순: $-3y^2 + (x+1)y + 2x^2 - 5x - 2$
오름차순: $2x^2 - 5x - 2 + (x+1)y - 3y^2$
- 2 답 (1) $3x^2 - x + 5$
(2) $x^2 - 5x - 3$
(3) $x^2 - 12x - 10$

문제

9쪽

01-1 답 $12x^2 - 7x + 3$
 $2(A+B) - 3(B-C)$
 $= 2A + 2B - 3B + 3C$
 $= 2A - B + 3C$
 $= 2(2x^2 - x + 1) - (x^2 + 2x - 1) + 3(3x^2 - x)$
 $= 4x^2 - 2x + 2 - x^2 - 2x + 1 + 9x^2 - 3x$
 $= 12x^2 - 7x + 3$

01-2 답 $x^2 + 3xy + y^2$
 $A - 2(X - B) = 3A$ 에서
 $A - 2X + 2B = 3A, 2X = -2A + 2B$
 $\therefore X = -A + B$
 $= -(x^2 - 2xy - 2y^2) + 2x^2 + xy - y^2$
 $= -x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x^2 + xy - y^2$
 $= x^2 + 3xy + y^2$

01-3 답 3

$A + B = 3x^2 - 3xy \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $A - B = x^2 - xy + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면
 $2A = 4x^2 - 4xy + 2$
 $\therefore A = 2x^2 - 2xy + 1$

㉠에서

$B = 3x^2 - 3xy - A$
 $= 3x^2 - 3xy - (2x^2 - 2xy + 1)$
 $= 3x^2 - 3xy - 2x^2 + 2xy - 1$
 $= x^2 - xy - 1$
 $\therefore A - 2B = 2x^2 - 2xy + 1 - 2(x^2 - xy - 1)$
 $= 2x^2 - 2xy + 1 - 2x^2 + 2xy + 2$
 $= 3$

2 다항식의 곱셈

개념 Check

11쪽

- 1 답 (1) $32x^5$ (2) $-2a^5b^6$
- 2 답 (1) $2x^3 - 7x^2 + 10x - 8$
(2) $3x^2 + xy - x - 2y^2 + 9y - 10$
- 3 답 (1) $x^2 + 4xy + 4y^2$ (2) $a^2 - ab + \frac{b^2}{4}$
(3) $4x^2 - 9y^2$ (4) $a^2 - 5a - 14$
(5) $6x^2 + 23x + 20$ (6) $2a^2 - 5ab + 2b^2$

문제

12~14쪽

02-1 답 11
 $(x^4 - 2x^2 + x - 3)(x^3 + 4x^2 - 5x + 1)$ 의 전개식에서 x^3 항은
 $-2x^2 \times (-5x) + x \times 4x^2 + (-3) \times x^3$
 $= 10x^3 + 4x^3 - 3x^3$
 $= 11x^3$
따라서 x^3 의 계수는 11이다.

02-2 답 -5

$(3x^2 - 4x - 1)(x^2 + kx + 2)$ 의 전개식에서 x 항은
 $-4x \times 2 + (-1) \times kx = -8x - kx = -(8+k)x$
이때 x 의 계수가 -3 이므로
 $-(8+k) = -3 \quad \therefore k = -5$

02-3 답 2

$(1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 + x^4)^2$ 의 전개식에서 x^2 항은
 $1 \times (-3x^2) + 2x \times 2x + (-3x^2) \times 1$
 $= -3x^2 + 4x^2 - 3x^2$
 $= -2x^2$
 x^2 의 계수는 -2 이므로 $a = -2$

또 x^3 항은

$$\begin{aligned} & 1 \times 4x^3 + 2x \times (-3x^2) + (-3x^2) \times 2x + 4x^3 \times 1 \\ &= 4x^3 - 6x^3 - 6x^3 + 4x^3 \\ &= -4x^3 \end{aligned}$$

x^3 의 계수는 -4 이므로 $b = -4$

$$\therefore a - b = -2 - (-4) = 2$$

03-1 [답] (1) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$

(2) $4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy - 6yz + 4zx$

(3) $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$

(4) $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$

(5) $64x^3 + 27y^3$

(6) $8x^3 - 1$

(7) $x^3 + 5x^2 + 2x - 8$

(8) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10$

(1) $(a - b - c)^2$

$$\begin{aligned} &= a^2 + (-b)^2 + (-c)^2 \\ &\quad + 2 \times a \times (-b) + 2 \times (-b) \times (-c) + 2 \times (-c) \times a \\ &= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca \end{aligned}$$

(2) $(2x - 3y + z)^2$

$$\begin{aligned} &= (2x)^2 + (-3y)^2 + z^2 \\ &\quad + 2 \times 2x \times (-3y) + 2 \times (-3y) \times z + 2 \times z \times 2x \\ &= 4x^2 + 9y^2 + z^2 - 12xy - 6yz + 4zx \end{aligned}$$

(3) $(a + 2b)^3 = a^3 + 3 \times a^2 \times 2b + 3 \times a \times (2b)^2 + (2b)^3$

$$= a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$$

(4) $(3x - 2)^3 = (3x)^3 - 3 \times (3x)^2 \times 2 + 3 \times 3x \times 2^2 - 2^3$

$$= 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$$

(5) $(4x + 3y)(16x^2 - 12xy + 9y^2)$

$$= (4x + 3y) \{ (4x)^2 - 4x \times 3y + (3y)^2 \}$$

$$= (4x)^3 + (3y)^3$$

$$= 64x^3 + 27y^3$$

(6) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

$$= (2x - 1) \{ (2x)^2 + 2x \times 1 + 1^2 \}$$

$$= (2x)^3 - 1^3$$

$$= 8x^3 - 1$$

(7) $(x - 1)(x + 2)(x + 4)$

$$= x^3 + (-1 + 2 + 4)x^2$$

$$+ \{ -1 \times 2 + 2 \times 4 + 4 \times (-1) \} x + (-1) \times 2 \times 4$$

$$= x^3 + 5x^2 + 2x - 8$$

(8) $(x + 1)(x - 2)(x - 5)$

$$= x^3 + \{ 1 + (-2) + (-5) \} x^2$$

$$+ \{ 1 \times (-2) + (-2) \times (-5) + (-5) \times 1 \} x$$

$$+ 1 \times (-2) \times (-5)$$

$$= x^3 - 6x^2 + 3x + 10$$

03-2 [답] (1) $x^3 + y^3 - z^3 + 3xyz$

(2) $a^4 + 4a^2b^2 + 16b^4$

(3) $a^8 - 1$

(4) $x^6 - 16x^3 + 64$

(1) $(x + y - z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy + yz + zx)$

$$= \{ x + y + (-z) \}$$

$$\times \{ x^2 + y^2 + (-z)^2 - xy - y \times (-z) - (-z) \times x \}$$

$$= x^3 + y^3 + (-z)^3 - 3 \times x \times y \times (-z)$$

$$= x^3 + y^3 - z^3 + 3xyz$$

(2) $(a^2 + 2ab + 4b^2)(a^2 - 2ab + 4b^2)$

$$= \{ a^2 + a \times 2b + (2b)^2 \} \{ a^2 - a \times 2b + (2b)^2 \}$$

$$= a^4 + a^2 \times (2b)^2 + (2b)^4$$

$$= a^4 + 4a^2b^2 + 16b^4$$

(3) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)$

$$= (a^2 - 1)(a^2 + 1)(a^4 + 1)$$

$$= (a^4 - 1)(a^4 + 1)$$

$$= a^8 - 1$$

(4) $(x - 2)^2(x^2 + 2x + 4)^2 = \{ (x - 2)(x^2 + x \times 2 + 2^2) \}^2$

$$= (x^3 - 2^3)^2 = (x^3 - 8)^2$$

$$= x^6 - 16x^3 + 64$$

04-1 [답] (1) $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x - 4$

(2) $x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 3$

(3) $x^4 + 3x^2 + 4$

(4) $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$

(1) $x^2 - x = X$ 로 놓으면

$$(x^2 - x + 1)(x^2 - x - 4)$$

$$= (X + 1)(X - 4) = X^2 - 3X - 4$$

$$= (x^2 - x)^2 - 3(x^2 - x) - 4$$

$$\blacktriangleleft X = x^2 - x$$

$$= x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x^2 + 3x - 4$$

$$= x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x - 4$$

(2) $x^2 + 3x = X$ 로 놓으면

$$(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3)$$

$$= (X + 1)(X + 3) = X^2 + 4X + 3$$

$$= (x^2 + 3x)^2 + 4(x^2 + 3x) + 3$$

$$\blacktriangleleft X = x^2 + 3x$$

$$= x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 4x^2 + 12x + 3$$

$$= x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 12x + 3$$

(3) $x^2 + 2 = X$ 로 놓으면

$$(x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2)$$

$$= (x^2 + 2 - x)(x^2 + 2 + x)$$

$$= (X - x)(X + x) = X^2 - x^2$$

$$= (x^2 + 2)^2 - x^2$$

$$\blacktriangleleft X = x^2 + 2$$

$$= x^4 + 4x^2 + 4 - x^2$$

$$= x^4 + 3x^2 + 4$$

(4) $b-c=X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} & (a+b-c)(a-b+c) \\ &= \{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\} \\ &= (a+X)(a-X)=a^2-X^2 \\ &= a^2-(b-c)^2 \quad \blacktriangleleft X=b-c \\ &= a^2-(b^2-2bc+c^2) \\ &= a^2-b^2-c^2+2bc \end{aligned}$$

04-2 [답] (1) $x^4-2x^3-7x^2+8x+12$

(2) $x^4+14x^3+41x^2-56x-180$

$$\begin{aligned} (1) & (x+1)(x+2)(x-2)(x-3) \\ &= \{(x+1)(x-2)\}\{(x+2)(x-3)\} \\ &= (x^2-x-2)(x^2-x-6) \\ & \quad x^2-x=X \text{로 놓으면} \\ &= (X-2)(X-6) \\ &= X^2-8X+12 \\ &= (x^2-x)^2-8(x^2-x)+12 \quad \blacktriangleleft X=x^2-x \\ &= x^4-2x^3+x^2-8x^2+8x+12 \\ &= x^4-2x^3-7x^2+8x+12 \\ (2) & (x-2)(x+2)(x+5)(x+9) \\ &= \{(x-2)(x+9)\}\{(x+2)(x+5)\} \\ &= (x^2+7x-18)(x^2+7x+10) \\ & \quad x^2+7x=X \text{로 놓으면} \\ &= (X-18)(X+10) \\ &= X^2-8X-180 \\ &= (x^2+7x)^2-8(x^2+7x)-180 \quad \blacktriangleleft X=x^2+7x \\ &= x^4+14x^3+49x^2-8x^2-56x-180 \\ &= x^4+14x^3+41x^2-56x-180 \end{aligned}$$

3 곱셈 공식의 변형

개념 Check

15쪽

1 [답] (1) 5 (2) 9

$$\begin{aligned} (1) & x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=3^2-2 \times 2=5 \\ (2) & x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y) \\ &= 3^3-3 \times 2 \times 3=9 \end{aligned}$$

2 [답] (1) 22 (2) -100

$$\begin{aligned} (1) & x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(-4)^2+2 \times 3=22 \\ (2) & x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y) \\ &= (-4)^3+3 \times 3 \times (-4)=-100 \end{aligned}$$

3 [답] (1) 7 (2) 18

$$\begin{aligned} (1) & x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7 \\ (2) & x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= 3^3-3 \times 3=18 \end{aligned}$$

문제

16~19쪽

05-1 [답] (1) 25 (2) 52

$$\begin{aligned} (1) & x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y) \circ | \text{므로} \\ & 37=1^3-3xy \times 1, 3xy=-36 \\ & \therefore xy=-12 \\ & \therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy \\ &= 1^2-2 \times (-12)=25 \\ (2) & \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=(2\sqrt{3})^2+4=16 \\ & \text{그런데 } x>0 \text{에서 } x+\frac{1}{x}>0 \circ | \text{므로} \\ & x+\frac{1}{x}=4 \\ & \therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= 4^3-3 \times 4=52 \end{aligned}$$

05-2 [답] $14\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} x-y &= (2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2} \\ xy &= (2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=4-2=2 \\ \therefore \frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x} &= \frac{x^3-y^3}{xy}=\frac{(x-y)^3+3xy(x-y)}{xy} \\ &= \frac{(2\sqrt{2})^3+3 \times 2 \times 2\sqrt{2}}{2}=14\sqrt{2} \end{aligned}$$

05-3 [답] 36

$$\begin{aligned} x^2-3x-1 &= 0 \text{에서 } x \neq 0 \circ | \text{므로 양변을 } x \text{로 나누면} \\ x-3-\frac{1}{x} &= 0 \quad \therefore x-\frac{1}{x}=3 \\ \therefore x^3-\frac{1}{x^3} &= \left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right) \\ &= 3^3+3 \times 3=36 \end{aligned}$$

06-1 [답] (1) 11 (2) 27

$$\begin{aligned} (1) & a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ &= 3^2-2 \times (-1)=11 \\ (2) & a^3+b^3+c^3 \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc \\ &= 3 \times \{11-(-1)\}+3 \times (-3)=27 \end{aligned}$$

06-2 ㉡ 64

$$\begin{aligned} & a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \\ &= (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \\ &= (ab+bc+ca)^2 - 2(ab^2c + abc^2 + a^2bc) \\ &= (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c) \\ &= 0 - 2 \times (-8) \times 4 = 64 \end{aligned}$$

06-3 ㉡ 2

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{이므로} \\ & 9 = 1^2 - 2(ab+bc+ca) \\ & \therefore ab+bc+ca = -4 \\ & \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{-4}{-2} = 2 \end{aligned}$$

07-1 ㉡ 27

$$\begin{aligned} & a-b = -6, c-b = -3 \text{의 변끼리 빼면} \\ & a-c = -3 \quad \therefore c-a = 3 \\ & \therefore a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \\ &= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \\ &= \frac{1}{2} \{ (-6)^2 + 3^2 + 3^2 \} \\ &= 27 \end{aligned}$$

07-2 ㉡ 19

$$\begin{aligned} & a+b+c=1 \text{에서} \\ & a+b=1-c, b+c=1-a, c+a=1-b \\ & \text{이를 } (a+b)(b+c)(c+a) = -12 \text{에 대입하면} \\ & (1-c)(1-a)(1-b) = -12 \\ & 1^3 + (-c-a-b) \times 1^2 + (ca+ab+bc) \times 1 - abc = -12 \\ & 1 - (a+b+c) + (ab+bc+ca) - abc = -12 \\ & a+b+c=1, abc=3 \text{을 대입하면} \\ & 1-1+(ab+bc+ca)-3 = -12 \\ & \therefore ab+bc+ca = -9 \\ & \therefore a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= 1^2 - 2 \times (-9) = 19 \end{aligned}$$

08-1 ㉡ 48

$$\begin{aligned} & \text{직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 } a, b \text{라 하면} \\ & \text{직사각형의 둘레의 길이가 28이므로} \\ & 2(a+b) = 28 \quad \therefore a+b = 14 \\ & \text{직사각형의 대각선의 길이는 원의 지름의 길이와 같으므로} \\ & a^2 + b^2 = 100 \\ & a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \text{에서} \\ & 100 = 14^2 - 2ab \quad \therefore ab = 48 \\ & \text{따라서 구하는 직사각형의 넓이는} \\ & ab = 48 \end{aligned}$$

08-2 ㉡ $5\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} & \text{직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 } a, b, \\ & c \text{라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 48이므로} \\ & 4(a+b+c) = 48 \quad \therefore a+b+c = 12 \\ & \text{또 겉넓이가 94이므로} \\ & 2(ab+bc+ca) = 94 \quad \therefore ab+bc+ca = 47 \\ & \therefore a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= 12^2 - 2 \times 47 = 50 \\ & \text{따라서 구하는 직육면체의 대각선의 길이는} \\ & \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

08-3 ㉡ 12

$$\begin{aligned} & \overline{OA} = \overline{OD} = a, \overline{OB} = b, \overline{OC} = c \text{라 하자.} \\ & \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = 12 \text{에서 } a+b+c = 12 \\ & \text{직각삼각형 OAB에서} \\ & \overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = a^2 + b^2 \\ & \text{직각삼각형 OBC에서} \\ & \overline{BC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = b^2 + c^2 \\ & \text{직각삼각형 OCD에서} \\ & \overline{CD}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = c^2 + a^2 \\ & \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = 192 \text{에서} \\ & (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) = 192 \\ & \therefore a^2 + b^2 + c^2 = 96 \\ & a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{이므로} \\ & 96 = 12^2 - 2(ab+bc+ca) \\ & \therefore ab+bc+ca = 24 \\ & \text{따라서 세 삼각형 OAB, OBC, OCD의 넓이의 합은} \\ & \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}ca = \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \\ &= \frac{1}{2} \times 24 = 12 \end{aligned}$$

4 다항식의 나눗셈

개념 Check

21쪽

1 ㉡ (1) $2x, 2x, 9x, 9, 3$

몫: $2x+9$, 나머지: 3

(2) $3x, 3x^2, 6x, x^2, 12x, x, 2, 11x, 3$

몫: $3x-1$, 나머지: $-11x-3$

2 ㉡ (1) $-1, -3, 4, -1$

몫: x^2-4x+2 , 나머지: -1

(2) $7, 0, 6, -6, -3, -10$

몫: $2x^3-3x^2-2x-6$, 나머지: -10

09-1 [답] (1) 몫: $x^2 - x - 2$, 나머지: 5

(2) 몫: $x^2 + 2x - 4$, 나머지: $-14x + 6$

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad \begin{array}{r} x^2 - x - 2 \\ 3x - 1 \overline{) 3x^3 - 4x^2 - 5x + 7} \\ \underline{3x^3 - x^2} \\ -3x^2 - 5x \\ \underline{-3x^2 + x} \\ -6x + 7 \\ \underline{-6x + 2} \\ 5 \end{array}
 \end{array}$$

따라서 몫은 $x^2 - x - 2$, 나머지는 5이다.

$$\begin{array}{r}
 (2) \quad \begin{array}{r} x^2 + 2x - 4 \\ x^2 - 3x + 1 \overline{) x^4 - x^3 - 9x^2 + 2} \\ \underline{x^4 - 3x^3 + x^2} \\ 2x^3 - 10x^2 \\ \underline{2x^3 - 6x^2 + 2x} \\ -4x^2 - 2x + 2 \\ \underline{-4x^2 + 12x - 4} \\ -14x + 6 \end{array}
 \end{array}$$

따라서 몫은 $x^2 + 2x - 4$, 나머지는 $-14x + 6$ 이다.

09-2 [답] 10

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} 4x^2 - x - 2 \\ x^2 - x + 1 \overline{) 4x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 1} \\ \underline{4x^4 - 4x^3 + 4x^2} \\ -x^3 - x^2 - 4x \\ \underline{-x^3 + x^2 - x} \\ -2x^2 - 3x + 1 \\ \underline{-2x^2 + 2x - 2} \\ -5x + 3 \end{array}
 \end{array}$$

따라서 $Q(x) = 4x^2 - x - 2$, $R(x) = -5x + 3$ 이므로

$$Q(2) + R(1) = (16 - 2 - 2) + (-5 + 3) = 10$$

10-1 [답] $3x^2 + 1$

$$3x^4 - 5x^2 + 4x - 7 = A(x^2 - 2) + 4x - 5 \text{이므로}$$

$$A(x^2 - 2) = 3x^4 - 5x^2 - 2$$

$$\therefore A = (3x^4 - 5x^2 - 2) \div (x^2 - 2)$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} 3x^2 + 1 \\ x^2 - 2 \overline{) 3x^4 - 5x^2 - 2} \\ \underline{3x^4 - 6x^2} \\ x^2 - 2 \\ \underline{x^2 - 2} \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

$$\therefore A = 3x^2 + 1$$

10-2 [답] -1

$$2x^4 - 5x^3 + x^2 + 1 = A(2x^2 - 3x - 4) - x + 5 \text{이므로}$$

$$A(2x^2 - 3x - 4) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 + x - 4$$

$$\therefore A = (2x^4 - 5x^3 + x^2 + x - 4) \div (2x^2 - 3x - 4)$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} x^2 - x + 1 \\ 2x^2 - 3x - 4 \overline{) 2x^4 - 5x^3 + x^2 + x - 4} \\ \underline{2x^4 - 3x^3 - 4x^2} \\ -2x^3 + 5x^2 + x \\ \underline{-2x^3 + 3x^2 + 4x} \\ 2x^2 - 3x - 4 \\ \underline{2x^2 - 3x - 4} \\ 0 \end{array}
 \end{array}$$

$$\therefore A = x^2 - x + 1$$

따라서 다항식 A 의 x 의 계수는 -1이다.

10-3 [답] 13

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)(2x + 3) + 5x - 2$$

$$= 2x^3 - x^2 + 3x + 4$$

다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + x + 3$ 으로 나누면

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r} 2x - 3 \\ x^2 + x + 3 \overline{) 2x^3 - x^2 + 3x + 4} \\ \underline{2x^3 + 2x^2 + 6x} \\ -3x^2 - 3x + 4 \\ \underline{-3x^2 - 3x - 9} \\ 13 \end{array}
 \end{array}$$

따라서 구하는 나머지는 13이다.

11-1 [답] 몫: $\frac{1}{5}Q(x)$, 나머지: R

$f(x)$ 를 $x - \frac{1}{5}$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R

이므로

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left(x - \frac{1}{5}\right)Q(x) + R \\
 &= \frac{1}{5} \times 5 \left(x - \frac{1}{5}\right)Q(x) + R \\
 &= (5x - 1) \times \frac{1}{5}Q(x) + R
 \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 를 $5x - 1$ 로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{5}Q(x)$, 나머지는 R 이다.

11-2 [답] 몫: $xQ(x) + R$, 나머지: $-R$

$f(x)$ 를 $x + 1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로

$$f(x) = (x + 1)Q(x) + R$$

양변에 x 를 곱하면

$$\begin{aligned} xf(x) &= x(x+1)Q(x) + Rx \\ &= x(x+1)Q(x) + R(x+1) - R \\ &= (x+1)\{xQ(x) + R\} - R \end{aligned}$$

따라서 $xf(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫은 $xQ(x) + R$, 나머지는 $-R$ 이다.

12-1 ㉠ (1) 몫: x^2+3x+1 , 나머지: 0

(2) 몫: $2x^2-4x+7$, 나머지: -4

(3) 몫: x^2-2x+1 , 나머지: -7

(4) 몫: $2x^2-2x$, 나머지: 1

$$(1) \begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ & & 1 & 3 & 1 \\ \hline & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

따라서 몫은 x^2+3x+1 , 나머지는 0이다.

$$(2) \begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 0 & -1 & 10 \\ & & -4 & 8 & -14 \\ \hline & 2 & -4 & 7 & -4 \end{array}$$

따라서 몫은 $2x^2-4x+7$, 나머지는 -4 이다.

$$(3) \begin{array}{r|rrrr} -\frac{3}{2} & 2 & -1 & -4 & -4 \\ & & -3 & 6 & -3 \\ \hline & 2 & -4 & 2 & -7 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2x^3-x^2-4x-4 &= \left(x+\frac{3}{2}\right)(2x^2-4x+2)-7 \\ &= 2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x^2-2x+1)-7 \\ &= (2x+3)(x^2-2x+1)-7 \end{aligned}$$

따라서 몫은 x^2-2x+1 , 나머지는 -7 이다.

$$(4) \begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 4 & -6 & 2 & 1 \\ & & 2 & -2 & 0 \\ \hline & 4 & -4 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore 4x^3-6x^2+2x+1 &= \left(x-\frac{1}{2}\right)(4x^2-4x)+1 \\ &= 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-2x)+1 \\ &= (2x-1)(2x^2-2x)+1 \end{aligned}$$

따라서 몫은 $2x^2-2x$, 나머지는 1이다.

12-2 ㉠ 21

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -3 & -5 & -6 \\ & & 6 & 9 & 12 \\ \hline & 2 & 3 & 4 & 6 \end{array}$$

따라서 $a=3$, $b=3$, $c=9$, $d=6$ 이므로

$$a+b+c+d=21$$

연습문제

26~28쪽

1 ③	2 ②	3 19	4 ④	5 x^6-y^6
6 2	7 ⑤	8 ②	9 65	10 ②
11 14	12 56	13 ④	14 8	15 ③
16 -54	17 ⑤	18 ①	19 4	20 ④

$$\begin{aligned} 1 \quad & 2(3A-4B)+3(-A+2B) \\ &= 6A-8B-3A+6B=3A-2B \\ &= 3(3x^2-4xy-y^2)-2(4x^2-3xy-2y^2) \\ &= 9x^2-12xy-3y^2-8x^2+6xy+4y^2 \\ &= x^2-6xy+y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad & A+B=2x^2+3x-7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ & A-2B=5x^2-6x-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{을 하면 } 3B=-3x^2+9x-6$$

$$\therefore B=-x^2+3x-2$$

$\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned} A &= 2x^2+3x-7-B \\ &= 2x^2+3x-7-(-x^2+3x-2) \\ &= 2x^2+3x-7+x^2-3x+2=3x^2-5 \end{aligned}$$

$$3(X+B)=2(X-2A-B) \text{에서}$$

$$3X+3B=2X-4A-2B$$

$$\begin{aligned} \therefore X &= -4A-5B \\ &= -4(3x^2-5)-5(-x^2+3x-2) \\ &= -12x^2+20+5x^2-15x+10 \\ &= -7x^2-15x+30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad & (x^2+ax+2)(x^2+bx-3) \text{의 전개식에서 } x^3 \text{항은} \\ & x^2 \times bx + ax \times x^2 = bx^3 + ax^3 = (a+b)x^3 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } x^3 \text{의 계수가 9이므로 } a+b=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

주어진 다항식의 전개식에서 x 항은

$$ax \times (-3) + 2 \times bx = -3ax + 2bx = (-3a+2b)x$$

$$\text{이때 } x \text{의 계수가 } -2 \text{이므로 } -3a+2b=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=4, b=5$$

따라서 주어진 다항식은 $(x^2+4x+2)(x^2+5x-3)$ 이므로 전개식에서 x^2 항은

$$\begin{aligned} x^2 \times (-3) + 4x \times 5x + 2 \times x^2 &= -3x^2 + 20x^2 + 2x^2 \\ &= 19x^2 \end{aligned}$$

따라서 x^2 의 계수는 19이다.

$$\begin{aligned} 4 \quad & \neg. (a-2b-3c)^2 \\ &= a^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2 \times a \times (-2b) \\ &\quad + 2 \times (-2b) \times (-3c) + 2 \times (-3c) \times a \\ &= a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 4ab + 12bc - 6ca \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } & (a-b)^2(a+b)^2(a^2+b^2)^2 \\ & = \{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)\}^2 \\ & = \{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\}^2 \\ & = (a^4-b^4)^2 \\ & = a^8-2a^4b^4+b^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } & (2a-3b)^3 \\ & = (2a)^3-3 \times (2a)^2 \times 3b+3 \times 2a \times (3b)^2-(3b)^3 \\ & = 8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄹ. } & (a-b-1)(a^2+b^2+ab+a-b+1) \\ & = a^3+(-b)^3+(-1)^3-3a \times (-b) \times (-1) \\ & = a^3-b^3-3ab-1 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

$$\begin{aligned} 5 \quad & (x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2) \\ & = \{(x-y)(x^2+xy+y^2)\} \{(x+y)(x^2-xy+y^2)\} \\ & = (x^3-y^3)(x^3+y^3) \\ & = x^6-y^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad & (3x+ay)^3 \\ & = (3x)^3+3 \times (3x)^2 \times ay+3 \times 3x \times (ay)^2+(ay)^3 \\ & = 27x^3+27ax^2y+9a^2xy^2+a^3y^3 \end{aligned}$$

이때 x^2y 의 계수가 54이므로

$$27a=54 \quad \therefore a=2$$

$$\begin{aligned} 7 \quad & (x+3)(x+1)(x-2)(x-4) \\ & = \{(x+3)(x-4)\} \{(x+1)(x-2)\} \\ & = (x^2-x-12)(x^2-x-2) \\ & \quad x^2-x=X \text{로 놓으면} \\ & (x+3)(x+1)(x-2)(x-4) \\ & = (X-12)(X-2) \\ & = X^2-14X+24 \\ & = (x^2-x)^2-14(x^2-x)+24 \quad \blacktriangleleft X=x^2-x \\ & = x^4-2x^3+x^2-14x^2+14x+24 \\ & = x^4-2x^3-13x^2+14x+24 \end{aligned}$$

따라서 $a=-13$, $b=14$ 이므로

$$b-a=27$$

$$\begin{aligned} 8 \quad & \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = \frac{x^3+y^3}{xy} = \frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy} \\ & = \frac{(\sqrt{2})^3-3 \times (-2) \times \sqrt{2}}{-2} = -4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \quad & a^2+b^2=(a+b)^2-2ab \circlearrowleft \text{이므로} \\ & 7=3^2-2ab \quad \therefore ab=1 \\ & a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=3^3-3 \times 1 \times 3=18 \\ & a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=7^2-2 \times 1^2=47 \\ & \therefore a^3+b^3+a^4+b^4=18+47=65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 \quad & \left(x-\frac{3}{x}\right)^2 + \left(3x+\frac{1}{x}\right)^2 = 20 \text{에서} \\ & x^2-6+\frac{9}{x^2}+9x^2+6+\frac{1}{x^2}=20 \\ & 10x^2+\frac{10}{x^2}=20 \quad \therefore x^2+\frac{1}{x^2}=2 \\ & \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+\frac{1}{x^2}+2=2+2=4 \circlearrowleft \text{이므로} \\ & x+\frac{1}{x}=2 \quad (\because x>0) \\ & \text{또 } x^4+\frac{1}{x^4} = \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=2^2-2=2 \circlearrowleft \text{이므로} \\ & x+x^4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4} = \left(x+\frac{1}{x}\right) + \left(x^4+\frac{1}{x^4}\right) \\ & = 2+2=4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11 \quad & (3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1) \\ & = \frac{1}{2}(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1) \\ & = \frac{1}{2}(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1) \\ & = \frac{1}{2}(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1) \\ & = \frac{1}{2}(3^8-1)(3^8+1) \\ & = \frac{1}{2}(3^{16}-1) \end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=16$ 이므로 $b-a=14$

$$\begin{aligned} 12 \quad & \overline{BC}=a, \overline{CD}=b, \overline{CG}=c \text{라 하면 겹넓이가 128이므로} \\ & 2(ab+bc+ca)=128 \quad \therefore ab+bc+ca=64 \\ & \text{직각삼각형 BCG에서 } \overline{BG}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CG}^2 = a^2+c^2 \\ & \text{직각삼각형 GCD에서 } \overline{GD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{CG}^2 = b^2+c^2 \\ & \text{직각삼각형 BCD에서 } \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 = a^2+b^2 \\ & \text{이때 } \overline{BG}^2 + \overline{GD}^2 + \overline{BD}^2 = 136 \circlearrowleft \text{이므로} \\ & (a^2+c^2) + (b^2+c^2) + (a^2+b^2) = 136 \\ & 2(a^2+b^2+c^2) = 136 \quad \therefore a^2+b^2+c^2 = 68 \\ & \therefore (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ca) \\ & = 68 + 2 \times 64 = 196 \end{aligned}$$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$ 이므로 $a+b+c>0$

$$\therefore a+b+c=14$$

따라서 구하는 모든 모서리의 길이의 합은

$$4(a+b+c)=4 \times 14=56$$

$$\begin{array}{r} 13 \quad \quad \quad 2x+1 \\ x^2-x+2 \overline{) 2x^3-x^2+5x+1} \\ \underline{2x^3-2x^2+4x} \\ x^2+x+1 \\ \underline{x^2-x+2} \\ 2x-1 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=2x+1$, $R(x)=2x-1$ 이므로

$$Q(x)+R(x)=4x$$

따라서 $a=4$, $b=0$ 이므로 $a+b=4$

- 14 $12x^3+24x^2-15x+14=A(2x+5)-4x+4$ 이므로

$$A(2x+5)=12x^3+24x^2-11x+10$$

$$\therefore A=(12x^3+24x^2-11x+10)\div(2x+5)$$

$$\begin{array}{r} 6x^2-3x+2 \\ 2x+5 \overline{) 12x^3+24x^2-11x+10} \\ \underline{12x^3+30x^2} \\ -6x^2-11x \\ \underline{-6x^2-15x} \\ 4x+10 \\ \underline{4x+10} \\ 0 \end{array}$$

즉, $A=6x^2-3x+2$ 이므로 A 를 $2x+1$ 로 나누면

$$\begin{array}{r} 3x-3 \\ 2x+1 \overline{) 6x^2-3x+2} \\ \underline{6x^2+3x} \\ -6x+2 \\ \underline{-6x-3} \\ 5 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=3x-3$, $R=5$ 이므로

$$Q(2)+R=(6-3)+5=8$$

- 15 주어진 조립제법에서

$$a \times 2 = 2 \quad \therefore a = 1$$

조립제법을 이용하여 $(2x^3+3x+4)\div(x-1)$ 을 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ & & 2 & 2 & 5 \\ \hline & 2 & 2 & 5 & 9 \end{array}$$

$$\therefore b=9$$

$$\therefore a+b=1+9=10$$

- 16 $m+n=ax+by+bx+ay$

$$=(a+b)x+(a+b)y$$

$$=-2x-2y=-2(x+y)$$

$$=-2 \times 3 = -6$$

$$mn=(ax+by)(bx+ay)$$

$$=abx^2+a^2xy+b^2xy+aby^2$$

$$=x^2-a^2-b^2+y^2$$

$$=(x+y)^2-2xy-(a+b)^2+2ab$$

$$=3^2-2 \times (-1)-(-2)^2+2 \times 1=9$$

$$\therefore m^3+n^3=(m+n)^3-3mn(m+n)$$

$$=(-6)^3-3 \times 9 \times (-6)=-54$$

- 17 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$ 이므로

$$3=0-2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

$$=(ab+bc+ca)^2-2(ab^2c+abc^2+a^2bc)$$

$$=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$$

$$=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2abc \times 0 = \frac{9}{4}$$

$$\therefore a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$=3^2-2 \times \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$$

- 18 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$$=(-1)^2-2 \times (-9)=19$$

$$a^3+b^3+c^3$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$

이므로

$$-1=-1 \times \{19-(-9)\}+3abc$$

$$\therefore abc=9$$

$$a+b+c=-1 \text{에서}$$

$$a+b=-1-c, \quad b+c=-1-a, \quad c+a=-1-b$$

$$\therefore ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

$$=ab(-1-c)+bc(-1-a)+ca(-1-b)$$

$$=-(ab+bc+ca)-3abc$$

$$=-(-9)-3 \times 9 = -18$$

- 19

$$\begin{array}{r} 2x-1 \\ x^2+x-3 \overline{) 2x^3+x^2-7x+7} \\ \underline{2x^3+2x^2-6x} \\ -x^2-x+7 \\ \underline{-x^2-x+3} \\ 4 \end{array}$$

$$\therefore 2x^3+x^2-7x+7=(x^2+x-3)(2x-1)+4$$

이때 $x^2+x-3=0$ 이므로

$$2x^3+x^2-7x+7=4$$

- 20 $f(x)$ 를 $x-a$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로

$$f(x)=(x-a)Q(x)+R$$

양변에 x^2 을 곱하면

$$x^2f(x)=x^2(x-a)Q(x)+x^2R$$

$$=x^2(x-a)Q(x)+(x^2-a^2)R+a^2R$$

$$=x^2(x-a)Q(x)+(x+a)(x-a)R+a^2R$$

$$=(x-a)\{x^2Q(x)+(x+a)R\}+a^2R$$

따라서 $x^2f(x)$ 를 $x-a$ 로 나누었을 때의 몫은

$$x^2Q(x)+(x+a)R$$

I-2 01 나머지 정리

항등식

개념 Check

31쪽

1 답 나, 르

2 답 (1) $a=1, b=-2, c=4$ (2) $a=1, b=5, c=3$

3 답 (1) $a=-1, b=2$ (2) $a=-1, b=2$

(1) 주어진 등식의 좌변을 x 에 대하여 정리하면

$$(a+b)x - a + 2b = x + 5$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a+b=1, -a+2b=5$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=2$

(2) 주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$\text{양변에 } x=1 \text{을 대입하면 } 3b=6 \quad \therefore b=2$$

$$\text{양변에 } x=-2 \text{를 대입하면 } -3a=3 \quad \therefore a=-1$$

문제

32~35쪽

01-1 답 $x=-3, y=-1$

주어진 등식의 좌변을 k 에 대하여 정리하면

$$(x-y+2)k - 2x + 3y - 3 = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$x-y+2=0, -2x+3y-3=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-3, y=-1$

01-2 답 $a=4, b=7$

주어진 등식의 좌변을 x, y 에 대하여 정리하면

$$(2a-b-1)x + (-3a+2b-2)y = 0$$

이 등식이 x, y 에 대한 항등식이므로

$$2a-b-1=0, -3a+2b-2=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4, b=7$

01-3 답 2

이차방정식 $x^2 + (k+1)x - (k+3)m + n = 0$ 이 1을 근으

로 가지므로 $x=1$ 을 대입하면

$$1 + (k+1) - (k+3)m + n = 0$$

이 등식의 좌변을 k 에 대하여 정리하면

$$(1-m)k - 3m + n + 2 = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$1-m=0, -3m+n+2=0$$

$$\therefore m=1, n=1 \quad \therefore m+n=2$$

02-1 답 (1) $a=1, b=2, c=1$

$$(2) a=2, b=-2, c=1$$

(1) 주어진 등식의 좌변을 전개한 후 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$2x^3 + (2a-3)x^2 + (2b-3a)x - 3b$$

$$= 2x^3 - x^2 + cx - 6$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$2a-3=-1, 2b-3a=c, -3b=-6$$

$$\therefore a=1, b=2, c=1$$

(2) 주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$b \times 1 \times (-2) = 4$$

$$-2b=4 \quad \therefore b=-2$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$c \times (-1) \times (-3) = 1 - 2 + 4$$

$$3c=3 \quad \therefore c=1$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$a \times 2 \times 3 = 4 + 4 + 4$$

$$6a=12 \quad \therefore a=2$$

02-2 답 $a=-3, b=2$

주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$0=1+a+b \quad \therefore a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

양변에 $x^2=2$ 를 대입하면

$$0=4+2a+b \quad \therefore 2a+b=-4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-3, b=2$$

02-3 답 64

주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$(2-1+3)^3 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_6$$

$$\therefore a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 64$$

03-1 답 $a=-1, b=3$

$x^3 + ax^2 + b$ 를 $x^2 - 2x$, 즉 $x(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $2x+3$ 이므로

$$x^3 + ax^2 + b = x(x-2)Q(x) + 2x + 3$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로 양변에 $x=0, x=2$ 를 각각 대입하면

$$b=3, 8+4a+b=7$$

$$\therefore a=-1, b=3$$

03-2 ㉡ 14

$2x^3+ax^2+bx+5$ 를 x^2+x+5 로 나누었을 때의 몫은 최고차항의 계수가 2인 일차식이다.

따라서 몫을 $2x+c$ (c 는 상수)라 하면 나머지는 0이므로

$$2x^3+ax^2+bx+5=(x^2+x+5)(2x+c)$$

이 등식의 우변을 전개한 후 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$2x^3+ax^2+bx+5=2x^3+(c+2)x^2+(c+10)x+5c$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=c+2, b=c+10, 5=5c$$

$$\therefore a=3, b=11, c=1$$

$$\therefore a+b=14$$

04-1 ㉡ -30

x^3-3x^2-4x+1 을 $x+1$ 로 나누는 조립제법을 몫에 대하여 연속으로 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & -4 & 1 \\ & & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 0 & 1 \leftarrow d \\ & & -1 & 5 & \\ -1 & 1 & -5 & 5 & c \\ & & -1 & & \\ a \rightarrow 1 & & -6 & b \end{array}$$

$$\therefore x^3-3x^2-4x+1$$

$$=(x+1)^3-6(x+1)^2+5(x+1)+1$$

따라서 $a=1, b=-6, c=5, d=1$ 이므로

$$abcd=-30$$

04-2 ㉡ (1) $a=5, b=8, c=8$ (2) 8,851

(1) x^3-x^2+4 를 $x-2$ 로 나누는 조립제법을 몫에 대하여 연속으로 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ & & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 8 \leftarrow c \\ & & 2 & 6 & \\ 2 & 1 & 3 & 8 & b \\ & & 2 & & \\ 1 & & 5 & a \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-2)^3+5(x-2)^2+8(x-2)+8$$

$$\therefore a=5, b=8, c=8$$

$$(2) f(2.1)=0.1^3+5 \times 0.1^2+8 \times 0.1+8=8.851$$

2 나머지 정리와 인수 정리

개념 Check

36쪽

1 ㉡ (1) -5 (2) -2

2 ㉡ 1

$f(x)=2x^2+3x+a$ 라 하면 인수 정리에 의하여

$$f(-1)=0 \text{이므로}$$

$$2-3+a=0 \quad \therefore a=1$$

문제

37~42쪽

05-1 ㉡ (1) 5 (2) $a=4, b=2$

(1) 나머지 정리에 의하여 $f(2)=-1$ 이므로

$$16-8a+12-4a-5=-1$$

$$-12a=-24 \quad \therefore a=2$$

따라서 $f(x)=x^4-2x^3+3x^2-4x-5$ 이므로 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(-1)=1+2+3+4-5=5$$

(2) $f(x)=-x^3+ax^2+bx-3$ 이라 하면 나머지 정리에 의하여

$$f(1)=2, f(3)=12$$

$$f(1)=2 \text{에서 } -1+a+b-3=2$$

$$\therefore a+b=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(3)=12 \text{에서 } -27+9a+3b-3=12$$

$$\therefore 3a+b=14 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a=4, b=2$$

05-2 ㉡ 32

$f(x)=x^3+2x^2-ax+2$ 라 하면 나머지 정리에 의하여

$$f(-1)=f(2) \text{이므로}$$

$$-1+2+a+2=8+8-2a+2$$

$$3a=15 \quad \therefore a=5$$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-5x+2$ 이므로 $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$f(3)=27+18-15+2=32$$

05-3 ㉡ 11

나머지 정리에 의하여

$$f(2)=5, g(2)=-1$$

따라서 $3f(x)+4g(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$3f(2)+4g(2)=3 \times 5+4 \times (-1)=11$$

06-1 ㉡ 1

나머지 정리에 의하여

$$f(-1)=4, f(1)=2$$

$f(x)$ 를 x^2-1 , 즉 $(x+1)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을

$Q(x)$, 나머지 $R(x)$ 를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$$

양변에 $x=-1, x=1$ 을 각각 대입하면

$$f(-1)=-a+b, f(1)=a+b$$

$$\therefore -a+b=4, a+b=2$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=3$

따라서 $R(x)=-x+3$ 이므로

$$R(2)=-2+3=1$$

06-2 ㉡ $x+11$

나머지 정리에 의하여

$$f(-3)=4, f(1)=2$$

$(x^2+3x+2)f(x)$ 를 x^2+2x-3 , 즉 $(x+3)(x-1)$ 로

나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$(x^2+3x+2)f(x)=(x+3)(x-1)Q(x)+ax+b$$

양변에 $x=-3, x=1$ 을 각각 대입하면

$$2f(-3)=-3a+b, 6f(1)=a+b$$

$$\therefore -3a+b=8, a+b=12$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=11$

따라서 구하는 나머지는 $x+11$ 이다.

06-3 ㉡ $x+1$

$(x-2)f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$$-4f(-2)=4 \quad \therefore f(-2)=-1$$

$(3x-1)f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 15이므로

$$5f(2)=15 \quad \therefore f(2)=3$$

$f(x)$ 를 x^2-4 , 즉 $(x+2)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을

$Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x+2)(x-2)Q(x)+ax+b$$

양변에 $x=-2, x=2$ 를 각각 대입하면

$$f(-2)=-2a+b, f(2)=2a+b$$

$$\therefore -2a+b=-1, 2a+b=3$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=1$

따라서 구하는 나머지는 $x+1$ 이다.

07-1 ㉡ $3x^2-5x-7$

$f(x)$ 를 $(x^2-1)(x-3)$, 즉 $(x+1)(x-1)(x-3)$ 으로

나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-3)Q(x)+ax^2+bx+c$$

($x+1)(x-3$)으로 나누어떨어진다. ㉡

$f(x)$ 를 $(x+1)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 나머지 $x+2$ 는 ax^2+bx+c 를 $(x+1)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 나머지와 같으므로

$$ax^2+bx+c=a(x+1)(x-3)+x+2 \quad \dots\dots ㉢$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x-3)Q(x)+a(x+1)(x-3)+x+2$$

한편 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 -9 이므로 나머지 정리에 의하여

$$f(1)=-9$$

$$a \times 2 \times (-2) + 1 + 2 = -9$$

$$-4a + 3 = -9 \quad \therefore a = 3$$

따라서 구하는 나머지는 ㉢에서

$$3(x+1)(x-3)+x+2=3x^2-5x-7$$

07-2 ㉡ 1

$f(x)$ 를 $(x^2-x+1)(x+1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

나머지 $R(x)$ 를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x)=\frac{(x^2-x+1)(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c}{x^2-x+1 \text{로 나누어떨어진다.}} \quad \dots\dots ㉣$$

$f(x)$ 를 x^2-x+1 로 나누었을 때의 나머지 $2x-3$ 은

ax^2+bx+c 를 x^2-x+1 로 나누었을 때의 나머지와 같으므로

$$ax^2+bx+c=a(x^2-x+1)+2x-3 \quad \dots\dots ㉤$$

㉤을 ㉣에 대입하면

$$f(x)=(x^2-x+1)(x+1)Q(x)+a(x^2-x+1)+2x-3$$

한편 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지가 1이므로 나머지 정리에 의하여

$$f(-1)=1$$

$$a(1+1+1)-2-3=1$$

$$3a-5=1 \quad \therefore a=2$$

따라서 $R(x)=2(x^2-x+1)+2x-3=2x^2-1$ 이므로

$$R(1)=2-1=1$$

08-1 ㉡ 15

$(x^2+1)f(x^2+1)$ 을 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여

$$\{(-2)^2+1\}f((-2)^2+1)=5f(5)$$

$f(x)$ 를 $x-5$ 로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 나머지 정리에 의하여

$$f(5)=3$$

따라서 구하는 나머지는

$$5f(5)=5 \times 3 = 15$$

08-2 ㉡ -4

$f(3-x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여 $f(3-(-1))=f(4)$
 $f(x)$ 를 $(x+1)(x-4)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $-2x+4$ 이므로
 $f(x)=(x+1)(x-4)Q(x)-2x+4$
 양변에 $x=4$ 를 대입하면 $f(4)=-8+4=-4$
 따라서 구하는 나머지는 -4 이다.

08-3 ㉡ -2

$xf(3x+4)$ 를 $3x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여
 $-\frac{2}{3}f\left(3\times\left(-\frac{2}{3}\right)+4\right)=-\frac{2}{3}f(2)$
 $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $2x-1$ 이므로
 $f(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+2x-1$
 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $f(2)=4-1=3$
 따라서 구하는 나머지는
 $-\frac{2}{3}f(2)=-\frac{2}{3}\times 3=-2$

09-1 ㉡ 3

$f(x)$ 를 $x+3$ 으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -2 이므로
 $f(x)=(x+3)Q(x)-2 \quad \dots\dots ㉠$
 $Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 1이므로 나머지 정리에 의하여 $Q(2)=1$
 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 $f(2)$ 이므로 ㉠의 양변에 $x=2$ 를 대입하면
 $f(2)=5Q(2)-2=5\times 1-2=3$

09-2 ㉡ 1

$f(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로
 $f(x)=(x+1)Q(x)+2 \quad \dots\dots ㉠$
 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 4이므로 나머지 정리에 의하여 $f(1)=4$
 $Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 $Q(1)$ 이므로 ㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $f(1)=2Q(1)+2$
 $2Q(1)+2=4 \quad \therefore Q(1)=1$

09-3 ㉡ -1

$f(x)=x^{12}+x^4-3x^3+2x$ 라 하면 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여
 $f(-1)=1+1+3-2=3$

$x^{12}+x^4-3x^3+2x$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이므로
 $x^{12}+x^4-3x^3+2x=(x+1)Q(x)+3 \quad \dots\dots ㉠$
 $Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 $Q(1)$ 이므로 ㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $1+1-3+2=2Q(1)+3$
 $\therefore Q(1)=-1$

10-1 ㉡ (1) $a=-2, b=-3$ (2) $a=-6, b=8$

(1) $f(x)$ 가 $x+1, x-2$ 로 각각 나누어떨어지므로 인수 정리에 의하여 $f(-1)=0, f(2)=0$
 $f(-1)=0$ 에서 $1+a-b-2=0$
 $\therefore a-b=1 \quad \dots\dots ㉠$
 $f(2)=0$ 에서 $16+4a+2b-2=0$
 $\therefore 2a+b=-7 \quad \dots\dots ㉡$
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2, b=-3$
 (2) $f(x)$ 가 x^2+x-2 , 즉 $(x+2)(x-1)$ 로 나누어떨어지므로 $f(x)$ 는 $x+2, x-1$ 로 각각 나누어떨어진다.
 따라서 인수 정리에 의하여 $f(-2)=0, f(1)=0$
 $f(-2)=0$ 에서 $-8-12-2a+b=0$
 $\therefore 2a-b=-20 \quad \dots\dots ㉠$
 $f(1)=0$ 에서 $1-3+a+b=0$
 $\therefore a+b=2 \quad \dots\dots ㉡$
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-6, b=8$

10-2 ㉡ 40

$f(x)$ 가 $x-3$ 을 인수로 가지므로 $f(3)=0$
 $27-36+3+a=0 \quad \therefore a=6$
 $\therefore f(x)=x^3-4x^2+x+6$
 $xf(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여
 $-2f(-2)=-2\times(-8-16-2+6)=40$

10-3 ㉡ 1

$f(x)=x^{99}-ax^2+bx-1$ 이라 하면 $f(x)$ 는 x^2-1 , 즉 $(x+1)(x-1)$ 로 나누어떨어지므로 $f(x)$ 는 $x+1, x-1$ 로 각각 나누어떨어진다.
 따라서 인수 정리에 의하여 $f(-1)=0, f(1)=0$
 $f(-1)=0$ 에서 $-1-a-b-1=0$
 $\therefore a+b=-2 \quad \dots\dots ㉠$
 $f(1)=0$ 에서 $1-a+b-1=0$
 $\therefore a-b=0 \quad \dots\dots ㉡$
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1, b=-1$
 $\therefore ab=1$

1 ③	2 ①	3 6	4 32	5 ②
6 40	7 ④	8 ②	9 ①	10 34
11 $a=-9, b=9$	12 ②	13 ③	14 ④	
15 14	16 ⑤	17 -10	18 118	19 ④

- 1 주어진 등식의 좌변을 k 에 대하여 정리하면

$$(x+y-3)k+xy+1=0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$x+y-3=0, xy+1=0$$

$$\therefore x+y=3, xy=-1$$

$$\begin{aligned}\therefore x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\ &= 3^3-3 \times (-1) \times 3 \\ &= 36\end{aligned}$$

- 2 주어진 등식의 좌변을 전개한 후 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2+3x+2=x^2+ax+b$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=3, b=2$$

$$\therefore a-b=1$$

다른 풀이

주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로

양변에 $x=0$ 을 대입하면 $2=b$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $0=1-a+b$

$$0=1-a+2 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore a-b=3-2=1$$

- 3 등식 $x^3+ax^2+bx+2=(x^2-2x-1)f(x)+2x+5$ 가 x 에 대한 항등식이므로 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 일차식이어야 한다.

$f(x)=x+c$ (c 는 상수)라 하면

$$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-2x-1)(x+c)+2x+5$$

$$\therefore x^3+ax^2+bx+2$$

$$=x^3+(c-2)x^2+(-2c+1)x-c+5$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=c-2, b=-2c+1, 2=-c+5$$

$$\therefore a=1, b=-5, c=3$$

$$\therefore a-b=6$$

- 4 주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$(4-5+3)^5=a_{10}-a_9+a_8-\cdots+a_0$$

$$\therefore a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}=32$$

- 5 ax^3+2x^2+bx+3 을 $(x+3)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $4x+9$ 이므로

$$ax^3+2x^2+bx+3=(x+3)(x-2)Q(x)+4x+9$$

양변에 $x=-3, x=2$ 를 각각 대입하면

$$-27a+18-3b+3=-3, 8a+8+2b+3=17$$

$$\therefore 9a+b=8, 4a+b=3$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=-1$$

$$\therefore ab=-1$$

- 6 나머지 정리에 의하여 $P(k)+P(-k)=8$ 이므로

$$(k^3+k^2+k+1)+(-k^3+k^2-k+1)=8$$

$$2k^2+2=8$$

$$\therefore k^2=3$$

따라서 $P(x)$ 를 $x-k^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$P(k^2)=P(3)=27+9+3+1=40$$

- 7 나머지 정리에 의하여

$$f(-1)=2, g(-1)=3, f(3)=1, g(3)=-2$$

$f(x)g(x)$ 를 x^2-2x-3 , 즉 $(x+1)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)$ 를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)g(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$$

양변에 $x=-1, x=3$ 을 각각 대입하면

$$f(-1)g(-1)=-a+b, f(3)g(3)=3a+b$$

$$\therefore -a+b=6, 3a+b=-2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=4$$

따라서 $R(x)=-2x+4$ 이므로

$$R(-2)=4+4=8$$

- 8 나머지 정리에 의하여

$$f(0)=5, f(-1)=4, f(1)=8$$

$f(x)$ 를 $x(x+1)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x)=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$$

양변에 $x=0, x=-1, x=1$ 을 각각 대입하면

$$f(0)=c, f(-1)=a-b+c, f(1)=a+b+c$$

$$c=5, a-b+c=4, a+b+c=8$$

$$\therefore a-b=-1, a+b=3$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=2$$

따라서 구하는 나머지는 x^2+2x+5 이다.

- 9 $f(x+3)$ 을 $(x+2)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $3x+8$ 이므로
 $f(x+3)=(x+2)(x-1)Q(x)+3x+8$ ㉠
 $f(x^2)$ 을 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여
 $f((-2)^2)=f(4)$
 ㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $f(4)=3+8=11$

- 10 $P(x)$ 를 $2x+3$ 으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -2 이므로
 $P(x)=(2x+3)Q(x)-2$ ㉠
 $Q(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지가 4이므로 나머지 정리에 의하여
 $Q(3)=4$
 $P(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $P(3)$ 이므로
 ㉠의 양변에 $x=3$ 을 대입하면
 $P(3)=9Q(3)-2$
 $=9 \times 4 - 2 = 34$

- 11 $f(x-1)$ 이 $x+2$ 로 나누어떨어지므로 인수 정리에 의하여
 $f(-2-1)=f(-3)=0$
 또 $f(x+1)$ 이 $x-2$ 로 나누어떨어지므로 인수 정리에 의하여
 $f(2+1)=f(3)=0$
 $f(-3)=0$ 에서
 $-27-9-3a+b=0$
 $\therefore 3a-b=-36$ ㉠
 $f(3)=0$ 에서
 $27-9+3a+b=0$
 $\therefore 3a+b=-18$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $a=-9, b=9$

- 12 ㉠, ㉡에서 $x-2, x^2-2$ 는 $f(x)$ 의 인수이므로 $f(x)$ 를 $(x-2)(x^2-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면
 $x^4+px^2+q=(x-2)(x^2-2)Q(x)$
 양변에 $x=2, x^2=2$ 를 각각 대입하면
 $16+4p+q=0, 4+2p+q=0$
 $\therefore 4p+q=-16, 2p+q=-4$
 두 식을 연립하여 풀면
 $p=-6, q=8$
 $\therefore p+q=2$

- 13 $\frac{ax+2y+6}{x+by-3}=k$ (k 는 상수)라 하면
 $ax+2y+6=kx+bky-3k$
 $\therefore (a-k)x+(2-bk)y+6+3k=0$
 이 등식이 x, y 에 대한 항등식이므로
 $a-k=0, 2-bk=0, 6+3k=0$
 $\therefore k=-2, a=-2, b=-1$
 $\therefore ab=2$

- 14 주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $(1+1+1)^3=a_0+a_1+a_2+\dots+a_6$ ㉠
 양변에 $x=-1$ 을 대입하면
 $(1-1+1)^3=a_0-a_1+a_2-\dots+a_6$ ㉡
 ㉠+㉡을 하면 $28=2(a_0+a_2+a_4+a_6)$
 $\therefore a_0+a_2+a_4+a_6=14$

- 15 $27x^3+9x^2-9x-4$ 를 $x-\frac{1}{3}$ 로 나누는 조립제법을 몫에 대하여 연속으로 이용하면
- | | | | | |
|---------------|----|----|----|----|
| $\frac{1}{3}$ | 27 | 9 | -9 | -4 |
| | | 9 | 6 | -1 |
| $\frac{1}{3}$ | 27 | 18 | -3 | -5 |
| | | 9 | 9 | |
| $\frac{1}{3}$ | 27 | 27 | 6 | |
| | | 9 | | |
| | 27 | 36 | | |
- $\therefore 27x^3+9x^2-9x-4$
 $=27\left(x-\frac{1}{3}\right)^3+36\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+6\left(x-\frac{1}{3}\right)-5$
 $= (3x-1)^3+4(3x-1)^2+2(3x-1)-5$
 따라서 $a=1, b=4, c=2, d=-5$ 이므로
 $ab-cd=4-(-10)=14$

- 16 ㉠의 $g(x)=x^2f(x)$ 를 ㉡에 대입하면
 $x^2f(x)+(3x^2+4x)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$
 $4x(x+1)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$ ㉠
 양변에 $x=0, x=-1$ 을 각각 대입하면
 $0=b, 0=-1+a-2+b$
 $\therefore a=3, b=0$
 이를 ㉠에 대입하면
 $4x(x+1)f(x)=x^3+3x^2+2x$ ㉡
 $g(x)$ 를 $x-4$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여 $g(4)$ 이고 ㉡에서 $g(x)=x^2f(x)$ 이므로
 $g(4)=16f(4)$

㉔의 양변에 $x=4$ 를 대입하면

$$16 \times 5f(4) = 64 + 48 + 8$$

$$80f(4) = 120 \quad \therefore f(4) = \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 나머지는

$$g(4) = 16f(4) = 16 \times \frac{3}{2} = 24$$

- 17 $f(x)$ 를 $(x^2-1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 ax^2+bx+c 이므로

$$f(x) = \frac{(x^2-1)(x-2)Q(x) + ax^2+bx+c}{x^2-1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(x)$ 를 x^2-1 로 나누었을 때의 나머지 $2x+4$ 는

ax^2+bx+c 를 x^2-1 로 나누었을 때의 나머지와 같으므로

$$ax^2+bx+c = a(x^2-1) + 2x+4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉔을 ㉔에 대입하면

$$f(x) = (x^2-1)(x-2)Q(x) + a(x^2-1) + 2x+4$$

한편 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 5이므로

$$\text{나머지 정리에 의하여 } f(2) = 5$$

$$3a+4+4=5 \quad \therefore a=-1$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } -(x^2-1) + 2x+4 = -x^2+2x+5$$

따라서 $b=2, c=5$ 이므로

$$abc = -1 \times 2 \times 5 = -10$$

- 18 $120=x$ 로 놓으면 $121=x+1$

$x^{25}+x^{15}+x^5$ 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$x^{25}+x^{15}+x^5 = (x+1)Q(x) + R$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $R=-3$ 이므로

$$x^{25}+x^{15}+x^5 = (x+1)Q(x) - 3$$

$$x=120 \text{이므로}$$

$$120^{25}+120^{15}+120^5 = 121Q(120) - 3$$

그런데 $0 \leq (\text{나머지}) < 121$ 이어야 하므로

$$\begin{aligned} 120^{25}+120^{15}+120^5 &= 121Q(120) - 121 + 121 - 3 \\ &= 121\{Q(120) - 1\} + 118 \end{aligned}$$

따라서 구하는 나머지는 118이다.

- 19 $P(a)=P(b)=P(c)=0$ 에서 $P(x)$ 는 $x-a, x-b, x-c$ 를 인수로 갖고, 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식 이므로

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

$$P(0) = -6 \text{에서 } -abc = -6 \quad \therefore abc = 6$$

이때 a, b, c 는 서로 다른 세 자연수이므로 각각 1, 2, 3 중에서 하나의 값을 갖는다.

따라서 $P(x)$ 를 $x-6$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$P(6) = (6-a)(6-b)(6-c) = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

I-2 02 인수분해

인수분해

개념 Check

47쪽

1 답 (1) $(a-b)(x-y)$ (2) $(ax+1)(x-1)$

(3) $(m+1)(a+b-1)$ (4) $(a-1)(x-1)y$

2 답 (1) $(3x+2)^2$ (2) $(4y-1)^2$

(3) $(a+2)(a-2)$ (4) $(2x+3y)(2x-3y)$

(5) $(a+6b)(a-b)$ (6) $(ax+5)(x+a)$

3 답 $(3a+2b)(3a-2b)(x-y)$

$$\begin{aligned} 9a^2(x-y) + 4b^2(y-x) &= 9a^2(x-y) - 4b^2(x-y) \\ &= (9a^2 - 4b^2)(x-y) \\ &= \{(3a)^2 - (2b)^2\}(x-y) \\ &= (3a+2b)(3a-2b)(x-y) \end{aligned}$$

문제

48~49쪽

01-1 답 (1) $(a-b-2c)^2$

(2) $(2x+3y-1)^2$

(3) $(x+2y)^3$

(4) $(-2a+3b)^3$

(5) $(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$

(6) $(4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2)$

$$\begin{aligned} (1) \quad a^2+b^2+4c^2-2ab+4bc-4ca \\ &= a^2 + (-b)^2 + (-2c)^2 + 2 \times a \times (-b) \\ &\quad + 2 \times (-b) \times (-2c) + 2 \times (-2c) \times a \\ &= (a-b-2c)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 4x^2+9y^2+1+12xy-4x-6y \\ &= (2x)^2 + (3y)^2 + (-1)^2 + 2 \times 2x \times 3y \\ &\quad + 2 \times 3y \times (-1) + 2 \times (-1) \times 2x \\ &= (2x+3y-1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3 \\ &= x^3 + 3 \times x^2 \times 2y + 3 \times x \times (2y)^2 + (2y)^3 \\ &= (x+2y)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad -8a^3+36a^2b-54ab^2+27b^3 \\ &= (-2a)^3 + 3 \times (-2a)^2 \times 3b + 3 \times (-2a) \times (3b)^2 \\ &\quad + (3b)^3 \\ &= (-2a+3b)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad 27a^3 + 8b^3 &= (3a)^3 + (2b)^3 \\
 &= (3a+2b)\{(3a)^2 - 3a \times 2b + (2b)^2\} \\
 &= (3a+2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2) \\
 (6) \quad 64x^3 - 125y^3 &= (4x)^3 - (5y)^3 \\
 &= (4x-5y)\{(4x)^2 + 4x \times 5y + (5y)^2\} \\
 &= (4x-5y)(16x^2 + 20xy + 25y^2)
 \end{aligned}$$

01-2 ㉡ (1) $(a+b-1)(a^2+b^2-ab+a+b+1)$ 또는 $\frac{1}{2}(a+b-1)\{(a-b)^2+(a+1)^2+(b+1)^2\}$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad &(9x^2+3x+1)(9x^2-3x+1) \\
 (1) \quad &a^3+b^3+3ab-1 \\
 &= a^3+b^3+(-1)^3-3 \times a \times b \times (-1) \\
 &= (a+b-1) \\
 &\quad \times \{a^2+b^2+(-1)^2-a \times b-b \times (-1)-(-1) \times a\} \\
 &= (a+b-1)(a^2+b^2-ab+a+b+1) \\
 &\text{또는} \\
 &a^3+b^3+3ab-1 \\
 &= a^3+b^3+(-1)^3-3 \times a \times b \times (-1) \\
 &= \frac{1}{2}(a+b-1)\{(a-b)^2+(b+1)^2+(-1-a)^2\} \\
 &= \frac{1}{2}(a+b-1)\{(a-b)^2+(a+1)^2+(b+1)^2\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad &81x^4+9x^2+1 \\
 &= (3x)^4+(3x)^2 \times 1^2+1^4 \\
 &= \{(3x)^2+3x \times 1+1^2\}\{(3x)^2-3x \times 1+1^2\} \\
 &= (9x^2+3x+1)(9x^2-3x+1)
 \end{aligned}$$

02-1 ㉡ (1) $(3x+y-1)(3x-y-1)$
 (2) $(z+x-y)(z-x+y)$
 (3) $(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
 (4) $-8xy(x^2+y^2)$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &9x^2-y^2-6x+1 = (9x^2-6x+1)-y^2 \\
 &= (3x-1)^2-y^2 \\
 &= (3x-1+y)(3x-1-y) \\
 &= (3x+y-1)(3x-y-1) \\
 (2) \quad &2xy+z^2-x^2-y^2 = z^2-(x^2-2xy+y^2) \\
 &= z^2-(x-y)^2 \\
 &= (z+x-y)(z-x+y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad &a^6-b^6 \\
 &= (a^3)^2-(b^3)^2 \\
 &= (a^3+b^3)(a^3-b^3) \\
 &= (a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2) \\
 &= (a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad &(x-y)^4-(x+y)^4 \\
 &= \{(x-y)^2\}^2-\{(x+y)^2\}^2 \\
 &= \{(x-y)^2+(x+y)^2\}\{(x-y)^2-(x+y)^2\} \\
 &= (x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2) \\
 &\quad \times (x^2-2xy+y^2-x^2-2xy-y^2) \\
 &= (2x^2+2y^2) \times (-4xy) \\
 &= -8xy(x^2+y^2)
 \end{aligned}$$

02-2 ㉡ (1) $(a+b)(a-b)^2$
 (2) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2+z^2)$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &a^3+b^3-ab(a+b) \\
 &= (a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b) \\
 &= (a+b)(a^2-2ab+b^2) \\
 &= (a+b)(a-b)^2 \\
 (2) \quad &x^4-y^4+x^2z^2-y^2z^2 = (x^2)^2-(y^2)^2+(x^2-y^2)z^2 \\
 &= (x^2+y^2)(x^2-y^2)+(x^2-y^2)z^2 \\
 &= (x^2-y^2)(x^2+y^2+z^2) \\
 &= (x+y)(x-y)(x^2+y^2+z^2)
 \end{aligned}$$

2 복잡한 식의 인수분해

개념 Check

51쪽

1 ㉡ (1) $(x+2)(x-1)$ (2) $(x+y+1)(x+y-5)$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &x+1=X \text{로 놓으면} \\
 &(x+1)^2-(x+1)-2 \\
 &= X^2-X-2 \\
 &= (X+1)(X-2) \\
 &= (x+1+1)(x+1-2) \quad \blacktriangleleft X=x+1 \\
 &= (x+2)(x-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad &x+y=X \text{로 놓으면} \\
 &(x+y)^2-4(x+y)-5 \\
 &= X^2-4X-5 \\
 &= (X+1)(X-5) \\
 &= (x+y+1)(x+y-5) \quad \blacktriangleleft X=x+y
 \end{aligned}$$

2 ㉡ $(x^2+z)(y-xz)$

$$\begin{aligned}
 x^2y-x^3z+yz-xz^2 &= (x^2+z)y-x^3z-xz^2 \\
 &= (x^2+z)y-xz(x^2+z) \\
 &= (x^2+z)(y-xz)
 \end{aligned}$$

3 ㉡ $0, x-1, x^2+x-6, x-2$

03-1 ㉞ (1) $(x-1)(x-3)(x^2-4x-4)$

(2) $(x+1)^2(2x^2+4x+1)$

(3) $(x+2)^2(x^2+4x-6)$

(1) $x^2-4x=X$ 로 놓으면

$$(x^2-4x-5)(x^2-4x+4)+8$$

$$=(X-5)(X+4)+8$$

$$=X^2-X-12=(X+3)(X-4)$$

$$=(x^2-4x+3)(x^2-4x-4) \quad \blacktriangleleft X=x^2-4x$$

$$=(x-1)(x-3)(x^2-4x-4)$$

(2) $2x^2(x+2)^2+3x^2+6x+1$

$$=2\{x(x+2)\}^2+3x(x+2)+1$$

 $x(x+2)=X$ 로 놓으면

$$2x^2(x+2)^2+3x^2+6x+1$$

$$=2X^2+3X+1=(X+1)(2X+1)$$

$$=\{x(x+2)+1\}\{2x(x+2)+1\} \quad \blacktriangleleft X=x(x+2)$$

$$=(x^2+2x+1)(2x^2+4x+1)$$

$$=(x+1)^2(2x^2+4x+1)$$

(3) $(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)-9$

$$=\{(x-1)(x+5)\}\{(x+1)(x+3)\}-9$$

$$=(x^2+4x-5)(x^2+4x+3)-9$$

 $x^2+4x=X$ 로 놓으면

$$(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)-9$$

$$=(X-5)(X+3)-9$$

$$=X^2-2X-24=(X+4)(X-6)$$

$$=(x^2+4x+4)(x^2+4x-6) \quad \blacktriangleleft X=x^2+4x$$

$$=(x+2)^2(x^2+4x-6)$$

04-1 ㉞ (1) $(x^2+5)(x+2)(x-2)$

(2) $(2x^2+3)(x+1)(x-1)$

(3) $(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$

(4) $(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

(1) $x^2=X$ 로 놓으면

$$x^4+x^2-20=X^2+X-20=(X+5)(X-4)$$

$$=(x^2+5)(x^2-4) \quad \blacktriangleleft X=x^2$$

$$=(x^2+5)(x+2)(x-2)$$

(2) $x^2=X$ 로 놓으면

$$2x^4+x^2-3=2X^2+X-3=(2X+3)(X-1)$$

$$=(2x^2+3)(x^2-1) \quad \blacktriangleleft X=x^2$$

$$=(2x^2+3)(x+1)(x-1)$$

(3) $x^4-6x^2+1=(x^4-2x^2+1)-4x^2$

$$=(x^2-1)^2-(2x)^2$$

$$=(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$$

(4) $x^4+3x^2+4=(x^4+4x^2+4)-x^2$

$$=(x^2+2)^2-x^2$$

$$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$$

04-2 ㉞ 2

$$x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2$$

$$=(x^2+2)^2-(2x)^2$$

$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

따라서 $a=2$, $b=-2$, $c=2$ 이므로

$$a+b+c=2$$

05-1 ㉞ (1) $(2y+1)(x+y-1)$

(2) $(x+2y+1)(x+2y-5)$

(3) $(a-b)(a^2+b^2+c^2)$

(4) $(a+b)(a+c)(b+c)$

(1) 주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$2y^2+2xy+x-y-1=(2y+1)x+2y^2-y-1$$

$$=(2y+1)x+(2y+1)(y-1)$$

$$=(2y+1)(x+y-1)$$

(2) 주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2+4y^2+4xy-4x-8y-5$$

$$=x^2+(4y-4)x+4y^2-8y-5$$

$$=x^2+(4y-4)x+(2y+1)(2y-5)$$

$$=(x+2y+1)(x+2y-5)$$

(3) 주어진 식을 c 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$a^3-a^2b+ab^2+ac^2-b^3-bc^2$$

$$=(a-b)c^2+a^3-a^2b+ab^2-b^3$$

$$=(a-b)c^2+a^2(a-b)+b^2(a-b)$$

$$=(a-b)(a^2+b^2+c^2)$$

(4) 주어진 식을 a 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$$

$$=a^2b+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+2abc$$

$$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2$$

$$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$$

$$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$$

$$=(b+c)(a+b)(a+c)$$

$$=(a+b)(a+c)(b+c)$$

05-2 ㉞ -6

주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2+4xy+3y^2-3x-7y+2$$

$$=x^2+(4y-3)x+3y^2-7y+2$$

$$=x^2+(4y-3)x+(3y-1)(y-2)$$

$$=(x+3y-1)(x+y-2)$$

따라서 $a=3$, $b=1$, $c=-2$ 이므로 $abc=-6$

06-1 ㉡ (1) $(x+4)(x-1)^2$

(2) $(x-2)(x+4)(x+3)$

(3) $(x+2)(x+1)(x-1)^2$

(4) $(x-1)(x-2)(x+3)(2x-1)$

(1) $f(x)=x^3+2x^2-7x+4$ 라 하면 $f(1)=0$

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -7 & 4 \\ & & 1 & 3 & -4 \\ \hline & 1 & 3 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3+2x^2-7x+4 &= (x-1)(x^2+3x-4) \\ &= (x-1)(x+4)(x-1) \\ &= (x+4)(x-1)^2 \end{aligned}$$

(2) $f(x)=x^3+5x^2-2x-24$ 라 하면 $f(2)=0$

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 5 & -2 & -24 \\ & & 2 & 14 & 24 \\ \hline & 1 & 7 & 12 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3+5x^2-2x-24 &= (x-2)(x^2+7x+12) \\ &= (x-2)(x+4)(x+3) \end{aligned}$$

(3) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-x+2$ 라 하면

$f(1)=0, f(-1)=0$

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ & & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ & & -1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^4+x^3-3x^2-x+2 &= (x-1)(x+1)(x^2+x-2) \\ &= (x-1)(x+1)(x+2)(x-1) \\ &= (x+2)(x+1)(x-1)^2 \end{aligned}$$

(4) $f(x)=2x^4-x^3-14x^2+19x-6$ 이라 하면

$f(1)=0, f(2)=0$

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & -1 & -14 & 19 & -6 \\ & & 2 & 1 & -13 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & -13 & 6 & 0 \\ & & 4 & 10 & -6 & \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2x^4-x^3-14x^2+19x-6 &= (x-1)(x-2)(2x^2+5x-3) \\ &= (x-1)(x-2)(x+3)(2x-1) \end{aligned}$$

06-2 ㉡ $(x-1)(x+1)(x^2+2x+3)$

$f(x)$ 가 $x-1, x+1$ 을 인수로 가지므로

$f(1)=0, f(-1)=0$

$f(1)=0$ 에서

$1+a+b-2-3=0$

$\therefore a+b=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$

$f(-1)=0$ 에서

$1-a+b+2-3=0$

$\therefore a-b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$a=2, b=2$

따라서 $f(x)=x^4+2x^3+2x^2-2x-3$ 이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & 2 & -2 & -3 \\ & & 1 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 & 3 & 0 \\ & & -1 & -2 & -3 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= x^4+2x^3+2x^2-2x-3 \\ &= (x-1)(x+1)(x^2+2x+3) \end{aligned}$$

07-1 ㉡ (1) $\frac{5}{4}$ (2) 106

(1) $x^2+2xy+y^2-x^2y-xy^2$

$= (1-y)x^2 + (2y-y^2)x + y^2$

$= (x+y)\{(1-y)x+y\}$

$= (x+y)(x+y-xy) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$

$x+y, xy$ 의 값을 구하면

$x+y = \frac{1+\sqrt{2}}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2} = 1$

$xy = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \times \frac{1-\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{4}$

이를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} x^2+2xy+y^2-x^2y-xy^2 &= (x+y)(x+y-xy) \\ &= 1 \times \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{4} \right) \right\} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

(2) $107=x$ 로 놓으면

$\frac{107^3-3 \times 107^2+3 \times 107-1}{106^2} = \frac{x^3-3x^2+3x-1}{(x-1)^2}$

$= \frac{(x-1)^3}{(x-1)^2}$

$= x-1$

$= 107-1 \quad \blacktriangleleft x=107$

$= 106$

07-2 ㉡ 898

$30^2=x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} & \frac{30^8-1}{30^4+1} - \frac{30^8+30^4+1}{30^4+30^2+1} \\ &= \frac{x^4-1}{x^2+1} - \frac{x^4+x^2+1}{x^2+x+1} \\ &= \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1} - \frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2+x+1} \\ &= x^2-1 - (x^2-x+1) \\ &= x-2 \\ &= 30^2-2 \quad \blacktriangleleft x=30^2 \\ &= 898 \end{aligned}$$

08-1 ㉡ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형

$$\begin{aligned} & a(a^2+ab-c^2)+b(b^2+ab-c^2) \\ &= a^3+a^2b-ac^2+b^3+ab^2-bc^2 \\ &= -(a+b)c^2+a^3+a^2b+ab^2+b^3 \\ &= -(a+b)c^2+a^2(a+b)+b^2(a+b) \\ &= (a+b)(a^2+b^2-c^2)=0 \\ & \text{이때 } a, b, c \text{는 삼각형의 세 변의 길이이므로 } a+b>0 \\ & \text{따라서 } a^2+b^2-c^2=0 \text{이므로} \\ & a^2+b^2=c^2 \\ & \text{따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가} \\ & c \text{인 직각삼각형이다.} \end{aligned}$$

08-2 ㉡ 정삼각형

$$\begin{aligned} & a^3+b^3+c^3=3abc \text{에서 } a^3+b^3+c^3-3abc=0 \\ & \text{좌변을 인수분해하면} \\ & a^3+b^3+c^3-3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0 \\ & \text{이때 } a, b, c \text{는 삼각형의 세 변의 길이이므로 } a+b+c>0 \\ & \text{따라서 } (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \text{이므로} \\ & a-b=0, b-c=0, c-a=0 \quad \therefore a=b, b=c, c=a \\ & \therefore a=b=c \\ & \text{따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 정삼각형이다.} \end{aligned}$$

연습문제

58~60쪽

- 1 ③ 2 ① 3 $(x+2y-3z)(x-2y-3z)$
 4 ④ 5 -1 6 ③ 7 -9 8 2
 9 $(x+1)(x-3)(x^2+x+1)$ 10 ② 11 ④
 12 ③ 13 176 14 -9 15 ⑤ 16 ①
 17 ⑤ 18 13 19 $a=16, b=10, c=10$

1 $\neg$. $ax-ay+2bx-2by+cx-cy$
 $= a(x-y)+2b(x-y)+c(x-y)$
 $= (x-y)(a+2b+c)$
 $\sqcup$. $a^6-a^4+2a^3-2a^2$
 $= a^2(a^4-a^2+2a-2)$
 $= a^2\{a^2(a^2-1)+2(a-1)\}$
 $= a^2\{a^2(a+1)(a-1)+2(a-1)\}$
 $= a^2(a-1)\{a^2(a+1)+2\}$
 $= a^2(a-1)(a^3+a^2+2)$
 $\sqsubset$. $27x^3-y^3=(3x)^3-y^3$
 $= (3x-y)\{(3x)^2+3x \times y+y^2\}$
 $= (3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$
 $\sqsupset$. $x^3-8y^3+6xy+1$
 $= x^3+(-2y)^3+1^3-3 \times x \times (-2y) \times 1$
 $= (x-2y+1)\{x^2+(-2y)^2+1^2-x \times (-2y)$
 $\quad \quad \quad -(-2y) \times 1-1 \times x\}$
 $= (x-2y+1)(x^2+4y^2+2xy-x+2y+1)$
 따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\sqsupset$ 이다.

2 $16x^4+36x^2+81$
 $= (2x)^4+(2x)^2 \times 3^2+3^4$
 $= \{(2x)^2+2x \times 3+3^2\}\{(2x)^2-2x \times 3+3^2\}$
 $= (4x^2+6x+9)(4x^2-6x+9)$
 따라서 $a=6, b=-6$ 또는 $a=-6, b=6$ 이므로
 $ab=-36$

3 $x^2-4y^2+9z^2-6xz=(x^2-6xz+9z^2)-4y^2$
 $= (x-3z)^2-(2y)^2$
 $= (x+2y-3z)(x-2y-3z)$

4 $x^2+x=X$ 로 놓으면
 $(x^2+x)(x^2+x+1)-6$
 $= X(X+1)-6$
 $= X^2+X-6$
 $= (X+3)(X-2)$
 $= (x^2+x+3)(x^2+x-2) \quad \blacktriangleleft X=x^2+x$
 $= (x+2)(x-1)(x^2+x+3)$
 따라서 $a=1, b=3$ 이므로
 $a+b=4$

5 $(x^2+3x+2)(x^2-5x+6)-60$
 $= (x+2)(x+1)(x-2)(x-3)-60$
 $= \{(x+2)(x-3)\}\{(x+1)(x-2)\}-60$
 $= (x^2-x-6)(x^2-x-2)-60$

$x^2 - x = X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} & (x^2 + 3x + 2)(x^2 - 5x + 6) - 60 \\ &= (X - 6)(X - 2) - 60 \\ &= X^2 - 8X - 48 = (X + 4)(X - 12) \\ &= (x^2 - x + 4)(x^2 - x - 12) \quad \blacktriangleleft X = x^2 - x \\ &= (x + 3)(x - 4)(x^2 - x + 4) \end{aligned}$$

따라서 $a = -4$, $b = -1$, $c = 4$ 이므로
 $a + b + c = -1$

6 $x^2 = X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} x^4 - 10x^2 + 9 &= X^2 - 10X + 9 \\ &= (X - 1)(X - 9) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 - 9) \quad \blacktriangleleft X = x^2 \\ &= (x + 1)(x - 1)(x + 3)(x - 3) \end{aligned}$$

④ $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$

⑤ $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

7 $x^4 + 5x^2 + 9 = (x^4 + 6x^2 + 9) - x^2$

$$\begin{aligned} &= (x^2 + 3)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x + 3)(x^2 - x + 3) \end{aligned}$$

따라서 $a = 3$, $b = -1$, $c = 3$ 이므로 $abc = -9$

8 주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} & x^2 + kxy - 3y^2 + x + 11y - 6 \\ &= x^2 + (ky + 1)x - (3y^2 - 11y + 6) \\ &= x^2 + (ky + 1)x - (3y - 2)(y - 3) \end{aligned}$$

이 식이 x , y 에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되므로

$$ky + 1 = (3y - 2) + \{-(y - 3)\}$$

$$ky + 1 = 2y + 1 \quad \therefore k = 2$$

9 $f(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx - 3$ 이라 하면 $f(-1) = 0$,

$$f(1) = -12 \text{이므로}$$

$$1 + 1 + a - b - 3 = 0, \quad 1 - 1 + a + b - 3 = -12$$

$$\therefore a - b = 1, \quad a + b = -9$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -4, \quad b = -5$$

따라서 $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - 5x - 3$ 이고 $f(-1) = 0$,

$f(3) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -1 & -4 & -5 & -3 \\ & & -1 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & -2 & -2 & -3 & 0 \\ & & 3 & 3 & 3 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\therefore x^4 - x^3 - 4x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x - 3)(x^2 + x + 1)$$

10 나무 블록의 부피를 $f(x)$ 라 하면

$$f(x) = x^2(x + 3) - 2 \times 1^3 = x^3 + 3x^2 - 2$$

$f(-1) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ & & -1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x + 1)(x^2 + 2x - 2)$$

따라서 $a = 1$, $b = 2$, $c = -2$ 이므로

$$a \times b \times c = -4$$

11 $ab(a + b) - ac(a + c) + bc(b - c)$

$$\begin{aligned} &= a^2b + ab^2 - a^2c - ac^2 + b^2c - bc^2 \\ &= (b - c)a^2 + (b^2 - c^2)a + b^2c - bc^2 \\ &= (b - c)a^2 + (b + c)(b - c)a + bc(b - c) \\ &= (b - c)\{a^2 + (b + c)a + bc\} \\ &= (b - c)(a + b)(a + c) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$a + b = 4$, $a + c = 3$ 을 변끼리 빼면 $b - c = 1$

따라서 ①에서

$$(b - c)(a + b)(a + c) = 1 \times 4 \times 3 = 12$$

12 $14 = x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} & (14^2 + 2 \times 14)^2 - 18 \times (14^2 + 2 \times 14) + 45 \\ &= (x^2 + 2x)^2 - 18(x^2 + 2x) + 45 \end{aligned}$$

$x^2 + 2x = X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} & (14^2 + 2 \times 14)^2 - 18 \times (14^2 + 2 \times 14) + 45 \\ &= X^2 - 18X + 45 = (X - 3)(X - 15) \\ &= (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x - 15) \quad \blacktriangleleft X = x^2 + 2x \\ &= (x + 3)(x - 1)(x + 5)(x - 3) \\ &= 17 \times 13 \times 19 \times 11 \quad \blacktriangleleft x = 14 \end{aligned}$$

$$\therefore a + b + c + d = 17 + 13 + 19 + 11 = 60$$

13 $10 = x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} & 10 \times 13 \times 14 \times 17 + 36 \\ &= x(x + 3)(x + 4)(x + 7) + 36 \\ &= \{x(x + 7)\} \{(x + 3)(x + 4)\} + 36 \\ &= (x^2 + 7x)(x^2 + 7x + 12) + 36 \end{aligned}$$

$x^2 + 7x = X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} & 10 \times 13 \times 14 \times 17 + 36 \\ &= X(X + 12) + 36 \\ &= X^2 + 12X + 36 = (X + 6)^2 \\ &= (x^2 + 7x + 6)^2 \quad \blacktriangleleft X = x^2 + 7x \\ &= (10^2 + 7 \times 10 + 6)^2 \quad \blacktriangleleft x = 10 \\ &= 176^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{10 \times 13 \times 14 \times 17 + 36} = \sqrt{176^2} = 176$$

14 $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)-a$
 $=\{(x+1)(x-4)\}\{(x-1)(x-2)\}-a$
 $=\underline{(x^2-3x-4)}\underline{(x^2-3x+2)}-a$
 $x^2-3x=X$ 로 놓으면
 $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)-a$
 $=\underline{(X-4)}\underline{(X+2)}-a$
 $=X^2-2X-8-a$
 $=\underline{(X-1)^2-a-9}$
 이 식이 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면
 $-a-9=0$
 $\therefore a=-9$

15 $x^4-5x^3+6x^2-5x+1$
 $=x^2\left(x^2-5x+6-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$
 $=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6\right\}$
 $=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+4\right\}$
 $=x^2\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}-4\right)$
 $=\left\{x\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\right\}\left\{x\left(x+\frac{1}{x}-4\right)\right\}$
 $=\underline{(x^2-x+1)}\underline{(x^2-4x+1)}$
 따라서 구하는 두 이차식의 합은
 $(x^2-x+1)+(x^2-4x+1)=2x^2-5x+2$

16 $P(x)=x^4+ax^3+11x^2+11x+b$ 라 하면 $P(x)$ 가 $x+1$ 을 인수로 가지므로 $P(-1)=0$
 $1-a+11-11+b=0$
 $\therefore b=a-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $P(x)=x^4+ax^3+11x^2+11x+a-1$ 이고 $P(x)$ 는 $(x+1)^2$ 으로 나누어떨어지므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	a	11	11	$a-1$
		-1	$-a+1$	$a-12$	$-a+1$
-1	1	$a-1$	$-a+12$	$a-1$	0
		-1	$-a+2$	$2a-14$	
	1	$a-2$	$-2a+14$	$3a-15$	

이때 $3a-15=0$ 이어야 하므로
 $a=5$
 따라서 $P(x)=(x+1)^2(x^2+3x+4)$ 이므로
 $f(x)=x^2+3x+4$
 한편 $a=5$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $b=4$
 $\therefore a+b+f(1)=5+4+(1+3+4)=17$

17 $f(n)=n^3+7n^2+14n+8$ 이라 하면 $f(-1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	7	14	8
		-1	-6	-8
	1	6	8	0

$\therefore n^3+7n^2+14n+8=(n+1)(n^2+6n+8)$
 $=\underline{(n+1)}\underline{(n+2)}\underline{(n+4)}$
 따라서 가로의 길이는 $(n+1)(n+2)(n+4)$
 한편 세로의 길이는 $n^2+4n+3=\underline{(n+1)}\underline{(n+3)}$ 이므로 한 변의 길이가 $n+1$ 인 정사각형 모양의 타일이 가로에 $(n+2)(n+4)$ 개, 세로에 $(n+3)$ 개씩 놓인다.
 따라서 필요한 타일의 개수는
 $(n+2)(n+3)(n+4)$

18 $7=x$ 로 놓으면
 $7^6-1=x^6-1=\underline{(x^3)^2-1^2}$
 $=\underline{(x^3+1)}\underline{(x^3-1)}$
 $=\underline{(x+1)}\underline{(x^2-x+1)}\underline{(x-1)}\underline{(x^2+x+1)}$
 $=\underline{(7+1)}\underline{(7^2-7+1)}\underline{(7-1)}\underline{(7^2+7+1)} \quad \blacktriangleleft x=7$
 $=8 \times 43 \times 6 \times 57$
 $=2^4 \times 3^2 \times 19 \times 43$
 두 자리의 자연수 n 의 값은
 $2^4=16, 2^4 \times 3=48$
 $2^3 \times 3=24, 2^3 \times 3^2=72$
 $2^2 \times 3=12, 2^2 \times 3^2=36, 2^2 \times 19=76$
 $2 \times 3^2=18, 2 \times 19=38, 2 \times 43=86$
 $3 \times 19=57, 19, 43$
 따라서 구하는 자연수 n 의 개수는 13이다.

19 (가)에서
 $b^2+ca-ba-c^2=-(b-c)a+b^2-c^2$
 $=-(b-c)a+(b+c)\underline{(b-c)}$
 $=\underline{(b-c)}\underline{(b+c-a)}=0$
 이때 a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $b+c>a$ 에
 서 $b+c-a>0$
 따라서 $b-c=0$ 이므로 $b=c$
 (나)에서 $3b+5c=5a$ 이므로
 $3b+5b=5a \quad \therefore 5a-8b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 또 삼각형의 둘레의 길이가 36이므로
 $a+b+c=36, a+b+b=36$
 $\therefore a+2b=36 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면
 $a=16, b=10$
 $b=c$ 이므로 $c=10$

II-1 01 복소수의 뜻과 사칙연산

복소수의 뜻과 사칙연산

개념 Check

64쪽

1 답 (1) 5, -2 (2) -1, 1 (3) $\sqrt{3}$, 0 (4) 0, -4

2 답 허수: $\neg$, $\angle$, $\angle$, 순허수: $\angle$

3 답 (1) $x=-5$, $y=2$ (2) $x=1$, $y=3$

4 답 (1) $4-2i$ (2) $-1-\sqrt{5}i$ (3) $3i$ (4) -7

문제

65~70쪽

01-1 답 (1) $-5-2i$ (2) $23+7i$ (3) $-16-7i$ (4) -2

(1) $(2-3i)-(7-i)=2-3i-7+i=-5-2i$

(2) $(5+3i)(4-i)=20-5i+12i-3i^2=23+7i$

(3) $(1-4i)^2 + \frac{2+4i}{1-3i} = 1-8i+16i^2 + \frac{(2+4i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}$
 $= -15-8i + \frac{2+6i+4i+12i^2}{1-9i^2}$
 $= -15-8i + \frac{-10+10i}{10}$
 $= -15-8i-1+i$
 $= -16-7i$

(4) $\frac{2(1+\sqrt{3}i)}{1-\sqrt{3}i} + \frac{\sqrt{3}-i}{i}$
 $= \frac{2(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} + \frac{(\sqrt{3}-i)i}{i^2}$
 $= \frac{2(1+2\sqrt{3}i+3i^2)}{1-3i^2} + \frac{\sqrt{3}i-i^2}{-1}$
 $= \frac{2(-2+2\sqrt{3}i)}{4} - (\sqrt{3}i+1)$
 $= -1+\sqrt{3}i-\sqrt{3}i-1=-2$

01-2 답 30

$(1+2i)(2i+3) + \frac{2i}{1-i}$
 $= (1+2i)(3-2i) + \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}$
 $= 3-2i+6i-4i^2 + \frac{2i+2i^2}{1-i^2}$
 $= 7+4i + \frac{2i-2}{2}$
 $= 7+4i+i-1$
 $= 6+5i$
 따라서 $a=6$, $b=5$ 이므로 $ab=30$

02-1 답 (1) $-\frac{1}{3}$ (2) 1

(1) $(1-3i)(x-i)=(x-3)+(-3x-1)i$
 이 복소수가 실수이므로

$-3x-1=0 \quad \therefore x=-\frac{1}{3}$

(2) $(1+i)x^2-(4+5i)x+3+6i$

$= (x^2-4x+3) + (x^2-5x+6)i$

이 복소수가 순허수이므로

$x^2-4x+3=0$, $x^2-5x+6 \neq 0$

$x^2-4x+3=0$ 에서 $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$x^2-5x+6 \neq 0$ 에서 $(x-2)(x-3) \neq 0$

$\therefore x \neq 2, x \neq 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $x=1$

02-2 답 10

$z=x(x+1-i)-2(1+i)$

$=x^2+x-xi-2-2i$

$= (x^2+x-2) + (-x-2)i \quad \dots\dots \textcircled{1}$

z^2 이 음수가 되려면 z 가 순허수이어야 하므로

$x^2+x-2=0$, $-x-2 \neq 0$

$x^2+x-2=0$ 에서 $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$-x-2 \neq 0$ 에서 $x \neq -2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 $x=1$ 이므로 $a=1$

$x=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$z=-3i \quad \therefore \beta=-3i$

$\therefore a^2-\beta^2=1-(-3i)^2=1-(-9)=10$

02-3 답 -3, 0

$z=6(x+i)-x(1-i)^2$

$=6x+6i-x(1-2i-1)$

$=6x+(2x+6)i$

z^2 이 실수이면 z 는 실수 또는 순허수이므로

$6x=0$ 또는 $2x+6=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$

03-1 답 (1) $x=-2$, $y=4$ (2) $x=3$, $y=1$

(1) $(1+i)x+(1-i)y=2-6i$ 에서

$(x+y) + (x-y)i = 2-6i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=2$, $x-y=-6$

두 식을 연립하여 풀면

$x=-2$, $y=4$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \frac{x}{1+i} + \frac{y}{1-i} = \frac{5}{2+i} \text{에서} \\
 & \frac{x(1-i) + y(1+i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} \\
 & \frac{(x+y) + (-x+y)i}{1+1} = \frac{5(2-i)}{4+1} \\
 & \frac{x+y}{2} + \frac{-x+y}{2}i = 2-i \\
 & \text{복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\
 & \frac{x+y}{2} = 2, \quad \frac{-x+y}{2} = -1 \\
 & \therefore x+y=4, \quad x-y=2 \\
 & \text{두 식을 연립하여 풀면 } x=3, y=1
 \end{aligned}$$

03-2 ㉡ $x=-2, y=3$

$$\begin{aligned}
 & (x+i)(1+4i) = 2+3yi \text{에서} \\
 & (x+i)(1-4i) = 2+3yi, \quad x-4xi+i+4 = 2+3yi \\
 & (x+4) + (-4x+1)i = 2+3yi \\
 & \text{복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\
 & x+4=2, \quad -4x+1=3y \quad \therefore x=-2, y=3
 \end{aligned}$$

04-1 ㉡ (1) $-\frac{2}{3}$ (2) $2+i$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & x+y = (1+\sqrt{2}i) + (1-\sqrt{2}i) = 2 \\
 & xy = (1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i) = 1+2=3 \\
 & \therefore \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} \\
 & = \frac{2^2 - 2 \times 3}{3} = -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad x = \frac{3-i}{2} \text{에서 } 2x-3 = -i$$

$$\begin{aligned}
 & \text{양변을 제곱하면} \\
 & 4x^2 - 12x + 9 = -1 \quad \therefore 2x^2 - 6x + 5 = 0 \\
 & \therefore 2x^3 - 6x^2 + 3x + 5 = x(2x^2 - 6x + 5) - 2x + 5 \\
 & = -2x + 5 \\
 & = -2 \times \frac{3-i}{2} + 5 \\
 & = 2+i
 \end{aligned}$$

04-2 ㉡ 2

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} \\
 &= \frac{1+2\sqrt{3}i-3}{1+3} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{즉, } 2x+1 = \sqrt{3}i \text{이므로 양변을 제곱하면} \\
 & 4x^2 + 4x + 1 = -3 \quad \therefore x^2 + x + 1 = 0 \\
 & \therefore x^4 + x^3 - x + 1 = x^2(x^2 + x + 1) - x^2 - x + 1 \\
 & = -x^2 - x + 1 \\
 & = -(x^2 + x + 1) + 2 = 2
 \end{aligned}$$

05-1 ㉡ 13

$$\begin{aligned}
 \alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta} &= \alpha(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) - \beta(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \\
 &= (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \\
 &= (\alpha - \beta)(\overline{\alpha - \beta}) \\
 \text{이때 } \alpha - \beta &= (3+5i) - (1+2i) = 2+3i \text{이므로} \\
 \alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta} &= (\alpha - \beta)(\overline{\alpha - \beta}) \\
 &= (2+3i)(2-3i) \\
 &= 4+9=13
 \end{aligned}$$

05-2 ㉡ $8+5i$

$$\begin{aligned}
 \bar{z}_1 + \bar{z}_2 &= \overline{z_1 + z_2} = 1+2i \text{이므로 } z_1 + z_2 = 1-2i \\
 \bar{z}_1 \times \bar{z}_2 &= \overline{z_1 z_2} = 2+i \text{이므로 } z_1 z_2 = 2-i \\
 \therefore (z_1-3)(z_2-3) &= z_1 z_2 - 3(z_1 + z_2) + 9 \\
 &= (2-i) - 3(1-2i) + 9 \\
 &= 8+5i
 \end{aligned}$$

06-1 ㉡ i

$$\begin{aligned}
 z &= a+bi \quad (a, b \text{는 실수}) \text{라 하면 } \bar{z} = a-bi \\
 \text{이를 } (1+i)z + 3i\bar{z} &= 2+i \text{에 대입하면} \\
 (1+i)(a+bi) + 3i(a-bi) &= 2+i \\
 a+bi+ai-b+3ai+3b &= 2+i \\
 (a+2b) + (4a+b)i &= 2+i \\
 \text{복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\
 a+2b &= 2, \quad 4a+b=1 \\
 \text{두 식을 연립하여 풀면 } a=0, b &= 1 \\
 \text{따라서 구하는 복소수 } z &= i \text{이다.}
 \end{aligned}$$

06-2 ㉡ $-2+i, 2+i$

$$\begin{aligned}
 z &= a+bi \quad (a, b \text{는 실수}) \text{라 하면 } \bar{z} = a-bi \\
 z - \bar{z} &= 2i \text{에서 } (a+bi) - (a-bi) = 2i \\
 2bi &= 2i \\
 \text{복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\
 2b &= 2 \quad \therefore b=1 \\
 z\bar{z} &= 5 \text{에서 } (a+bi)(a-bi) = 5 \\
 a^2 + b^2 &= 5 \\
 b=1 \text{을 대입하면 } a^2 + 1 &= 5 \\
 a^2 &= 4 \quad \therefore a=-2 \text{ 또는 } a=2 \\
 \text{따라서 구하는 복소수 } z &= -2+i, 2+i \text{이다.}
 \end{aligned}$$

06-3 ㉡ $-1-2i, 3-2i$

$$\begin{aligned}
 z &= a+bi \quad (a, b \text{는 실수}) \text{라 하면 } \bar{z} = a-bi \\
 \text{주어진 등식의 좌변을 정리하면} \\
 z(\bar{z}-2) &= z\bar{z} - 2z \\
 &= (a+bi)(a-bi) - 2(a+bi) \\
 &= (a^2+b^2-2a) - 2bi
 \end{aligned}$$

따라서 주어진 등식은 $(a^2+b^2-2a)-2bi=7+4i$ 이므로
 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $a^2+b^2-2a=7, -2b=4$
 $-2b=4$ 에서 $b=-2$
 이를 $a^2+b^2-2a=7$ 에 대입하면 $a^2+4-2a=7$
 $a^2-2a-3=0, (a+1)(a-3)=0$
 $\therefore a=-1$ 또는 $a=3$
 따라서 구하는 복소수 z 는 $-1-2i, 3-2i$ 이다.

2 i 의 거듭제곱, 음수의 제곱근

개념 Check

71쪽

- 1 [답] (1) i (2) 1 (3) i (4) -1
 (3) $(-i)^{83} = -i^{83} = -(i^4)^{20} \times i^3 = -1 \times (-i) = i$
 (4) $(-i)^{130} = i^{130} = (i^4)^{32} \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$

- 2 [답] (1) $2i$ (2) $-3\sqrt{2}i$ (3) $\frac{1}{4}i$ (4) $-\frac{3}{5}i$

- 3 [답] (1) $2\sqrt{10}i$ (2) -4 (3) $-\frac{6}{5}i$ (4) $2i$
 (1) $\sqrt{5}\sqrt{-8} = \sqrt{5 \times (-8)} = \sqrt{-40} = 2\sqrt{10}i$
 (2) $\sqrt{-2}\sqrt{-8} = -\sqrt{-2 \times (-8)} = -\sqrt{16} = -4$
 (3) $\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{-75}} = -\sqrt{-\frac{108}{75}} = -\sqrt{-\frac{36}{25}} = -\frac{6}{5}i$
 (4) $\frac{\sqrt{-72}}{\sqrt{18}} = \sqrt{-\frac{72}{18}} = \sqrt{-4} = 2i$

문제

72~74쪽

- 07-1 [답] (1) $1+i$ (2) $-1-i$ (3) i (4) 256

- (1) $i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$ 이므로
 $1+i+i^2+i^3+i^4+\dots+i^{81}$
 $=1+(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)$
 $+\dots+i^{76}(i+i^2+i^3+i^4)+i^{80} \times i$
 $=1+0+0+\dots+0+i=1+i$
 (2) $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1=0$ 이므로
 $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\dots+\frac{1}{i^{102}}$
 $=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)$
 $+\dots+\frac{1}{i^{96}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^{100}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}\right)$
 $=0+0+\dots+0+\left(\frac{1}{i}-1\right)=-1-i$

- (3) $\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i-1}{1+1} = -i$ 이므로
 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{123} = (-i)^{123} = -i^{123} = -(i^4)^{30} \times i^3$
 $= -1 \times (-i) = i$
 (4) $(1+i)^2 = 1+2i-1=2i$ 이므로
 $(1+i)^{16} = \{(1+i)^2\}^8 = (2i)^8 = 2^8 \times i^8$
 $= 256 \times (i^4)^2 = 256$

- 07-2 [답] 51-50i

$$\begin{aligned} & 1+2i+3i^2+4i^3+\dots+100i^{99}+101i^{100} \\ &= 1+(2i+3i^2+4i^3+5i^4)+i^4(6i+7i^2+8i^3+9i^4) \\ & \quad +\dots+i^{96}(98i+99i^2+100i^3+101i^4) \\ &= 1+(2i-3-4i+5)+(6i-7-8i+9) \\ & \quad +\dots+(98i-99-100i+101) \\ &= 1+(2-2i)+(2-2i)+\dots+(2-2i) \\ &= 1+25(2-2i)=51-50i \end{aligned}$$

- 07-3 [답] 8

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1+2i-1}{2} = i \text{이므로} \\ z^3 &= \frac{i-1}{\sqrt{2}}, z^4 = -1, z^5 = -z = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \dots \\ \therefore z^8 &= 1 \end{aligned}$$

따라서 $z^n=1$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 8이다.

- 08-1 [답] (1) -1 (2) $9+3i$

- (1) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}+\sqrt{-2}\sqrt{2}+\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}+\frac{\sqrt{-50}}{\sqrt{-2}}$
 $= -\sqrt{36}+\sqrt{-4}-\sqrt{-4}+\sqrt{25}$
 $= -6+5 = -1$
 (2) $(\sqrt{5}+\sqrt{-5})(2\sqrt{5}-\sqrt{-5})+\sqrt{-6}\sqrt{-6}+\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{-7}}$
 $= 2\sqrt{25}-\sqrt{-25}+2\sqrt{-25}+\sqrt{25}-\sqrt{36}-\sqrt{-4}$
 $= 10-5i+10i+5-6-2i$
 $= 9+3i$

다른 풀이

- (1) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}+\sqrt{-2}\sqrt{2}+\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}+\frac{\sqrt{-50}}{\sqrt{-2}}$
 $= \sqrt{3}i \times \sqrt{12}i + \sqrt{2}i \times \sqrt{2} + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}i} + \frac{\sqrt{50}i}{\sqrt{2}i}$
 $= -6+2i-2i+5 = -1$
 (2) $(\sqrt{5}+\sqrt{-5})(2\sqrt{5}-\sqrt{-5})+\sqrt{-6}\sqrt{-6}+\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{-7}}$
 $= (\sqrt{5}+\sqrt{5}i)(2\sqrt{5}-\sqrt{5}i) + \sqrt{6}i \times \sqrt{6}i + \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}i}$
 $= 10-5i+10i+5-6-2i$
 $= 9+3i$

08-2 ㉔ 0

$$\frac{\sqrt{2a}\sqrt{-2a}+\sqrt{-2a}\sqrt{-2a}}{2a}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-a}}+\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{(-a)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{-4a^2}-\sqrt{4a^2}}{2a}-\sqrt{-1}+\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2}}=\frac{2ai-2a}{2a}-i+1$$

$$=i-1-i+1=0$$

09-1 ㉔ -b

$$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}\text{에서 } a<0, b<0 \quad \therefore a+b<0$$

$$\therefore \sqrt{(a+b)^2}-\sqrt{a^2}=|a+b|-|a|$$

$$=-(a+b)-(-a)$$

$$=-a-b+a=-b$$

09-2 ㉔ -a-c

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}\text{에서 } a<0, b>0$$

따라서 $ab<0$ 이므로 $abc>0$ 에서 $c<0$

$b>0, c<0$ 이므로 $b-c>0$

$$\therefore |a|-|b|+\sqrt{(b-c)^2}=-a-b+|b-c|$$

$$=-a-b+(b-c)$$

$$=-a-c$$

09-3 ㉔ 3

$$\frac{\sqrt{4-a}}{\sqrt{1-a}}=-\sqrt{\frac{4-a}{1-a}}\text{에서}$$

(i) $4-a>0, 1-a<0$ 인 경우

$$a-4<0, a-1>0\text{이므로}$$

$$|a-1|+|a-4|=(a-1)-(a-4)=3$$

(ii) $4-a=0$ 인 경우

$$a=4\text{이므로 } |a-1|+|a-4|=3+0=3$$

(i), (ii)에서 $|a-1|+|a-4|=3$

연습문제

75~77쪽

1 ⑤	2 ④	3 ④	4 -1	5 $-\frac{1}{3}$
6 ⑤	7 ①	8 ②	9 -i	10 ⑤
11 ⑤	12 -2i	13 ④	14 ③	15 $-3\sqrt{5}i$
16 ③	17 ①	18 $\frac{1}{2}$	19 25	

1 ⑤ $a=i, b=-1$ 이면 $a+bi=i-i=0$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

2 ① $3i-(2+5i)=3i-2-5i=-2-2i$

② $(1+3i)-(-2+i)=1+3i+2-i=3+2i$

③ $(4-i)(-2+3i)=-8+12i+2i+3=-5+14i$

$$\textcircled{4} \frac{5i}{1+2i}=\frac{5i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5i+10}{1+4}=2+i$$

$$\textcircled{5} \frac{1-2i}{1-i}=\frac{(1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i-2i+2}{1+1}=\frac{3-i}{2}$$

따라서 옳은 것은 ④이다.

$$3 \frac{a+3i}{2-i}=\frac{(a+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2a+ai+6i-3}{4+1}$$

$$=\frac{2a-3}{5}+\frac{a+6}{5}i$$

실수부분과 허수부분의 합이 3이므로

$$\frac{2a-3}{5}+\frac{a+6}{5}=3, \frac{3a+3}{5}=3$$

$$3a+3=15 \quad \therefore a=4$$

$$4 z=(a+2i)(1+3i)+a(-4+ai)$$

$$=a+3ai+2i-6-4a+a^2i$$

$$=(-3a-6)+(a^2+3a+2)i$$

z^2 이 양수이면 z 는 0이 아닌 실수이므로

$$-3a-6 \neq 0, a^2+3a+2=0$$

$$-3a-6 \neq 0\text{에서 } a \neq -2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$a^2+3a+2=0\text{에서 } (a+2)(a+1)=0$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=-1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8}\text{에서 } a=-1$$

5 0이 아닌 복소수 z 에 대하여 $z=-\bar{z}$ 이면 z 는 순허수이므로

$$3x^2-2x-1=0, x^2-1 \neq 0$$

$$3x^2-2x-1=0\text{에서 } (3x+1)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } x=1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$x^2-1 \neq 0\text{에서 } x^2 \neq 1$$

$$\therefore x \neq -1, x \neq 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8}\text{에서 } x=-\frac{1}{3}$$

$$6 \frac{x}{1-3i}+\frac{y}{1+3i}=-2+3i\text{에서}$$

$$\frac{x(1+3i)+y(1-3i)}{(1-3i)(1+3i)}=-2+3i$$

$$\frac{(x+y)+(3x-3y)i}{1+9}=-2+3i$$

$$\therefore \frac{x+y}{10}+\frac{3x-3y}{10}i=-2+3i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{x+y}{10}=-2, \frac{3x-3y}{10}=3$$

$$x+y=-20, x-y=10$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=-5, y=-15 \quad \therefore xy=75$$

$$\begin{aligned}
 7 \quad x+y &= (1-2i) + (1+2i) = 2 \\
 xy &= (1-2i)(1+2i) = 1+4=5 \\
 \therefore x^3y+xy^3-x^2-y^2 &= xy(x^2+y^2)-(x^2+y^2) \\
 &= (xy-1)(x^2+y^2) \\
 &= (xy-1)\{(x+y)^2-2xy\} \\
 &= (5-1)(2^2-2 \times 5) \\
 &= -24
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8 \quad x &= \frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\
 &= \frac{1+i+2i-2}{1+1} = \frac{-1+3i}{2} \\
 \text{즉, } 2x+1 &= 3i \text{ 이므로 양변을 제곱하면} \\
 4x^2+4x+1 &= -9 \quad \therefore 2x^2+2x+5=0 \\
 \therefore 2x^3+4x^2+7x+9 &= x(2x^2+2x+5)+2x^2+2x+9 \\
 &= 2x^2+2x+9 \\
 &= (2x^2+2x+5)+4 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9 \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} &= \frac{\bar{\alpha}+\bar{\beta}}{\alpha \times \beta} = \frac{\overline{\alpha+\beta}}{\alpha\beta} = \frac{\overline{3+2i}}{2-3i} \\
 &= \frac{3-2i}{2+3i} = \frac{(3-2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} \\
 &= \frac{6-9i-4i-6}{4+9} = -i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10 \quad z &= a+bi \text{ (} a, b \text{는 실수)라 하면 } \bar{z} = a-bi \\
 \neg. z-\bar{z} &= (a+bi)-(a-bi) = 2bi \quad \blacktriangleleft \text{ 허수 또는 0} \\
 \neg. z\bar{z} &= (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 \quad \blacktriangleleft \text{ 실수} \\
 \neg. \frac{\bar{z}}{z} &= \frac{a-bi}{a+bi} = \frac{(a-bi)^2}{(a+bi)(a-bi)} \\
 &= \frac{a^2-2abi-b^2}{a^2+b^2} \\
 &= \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2}i \quad \blacktriangleleft \text{ 실수 또는 허수} \\
 \text{르. } \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} &= \frac{1}{a+bi} + \frac{1}{a-bi} \\
 &= \frac{(a-bi)+(a+bi)}{(a+bi)(a-bi)} \\
 &= \frac{2a}{a^2+b^2} \quad \blacktriangleleft \text{ 실수}
 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 항상 실수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

$$\begin{aligned}
 11 \quad z &= a+bi \text{에서 } \bar{z} = a-bi \\
 \text{이를 } iz &= \bar{z} \text{에 대입하면} \\
 i(a+bi) &= a-bi \\
 -b+ai &= a-bi \\
 \text{복소수가 서로 같을 조건에 의하여 } b &= -a \\
 \therefore z &= a-ai
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \neg. z+\bar{z} &= (a-bi)+(a+bi) = 2a = -2b \\
 \neg. i\bar{z} &= i(a+bi) = -a+bi \\
 &= -(a-bi) = -z \\
 \neg. iz &= \bar{z} \text{에서 } z \neq 0, \bar{z} \neq 0 \text{ 이므로 } \frac{\bar{z}}{z} = i, \frac{z}{\bar{z}} = \frac{1}{i} \\
 \therefore \frac{\bar{z}}{z} + \frac{z}{\bar{z}} &= i + \frac{1}{i} = i - i = 0
 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 \neg. iz &= \bar{z} \text{의 양변을 제곱하면} \\
 -z^2 &= \bar{z}^2 \quad \therefore z^2 + \bar{z}^2 = 0 \\
 \text{이때 } z\bar{z} &= (a-bi)(a+bi) = 2a^2 \neq 0 \text{ 이므로} \\
 \frac{\bar{z}}{z} + \frac{z}{\bar{z}} &= \frac{z^2 + \bar{z}^2}{z\bar{z}} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12 \quad z &= a+bi \text{ (} a, b \text{는 실수)라 하면 } \bar{z} = a-bi \\
 \text{이를 } z\bar{z} + 3(z-\bar{z}) &= 4-12i \text{에 대입하면} \\
 (a+bi)(a-bi) + 3\{(a+bi)-(a-bi)\} &= 4-12i \\
 (a^2+b^2) + 6bi &= 4-12i \\
 \text{복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\
 a^2+b^2 &= 4, 6b = -12 \\
 \therefore a &= 0, b = -2 \\
 \text{따라서 구하는 복소수 } z &= -2i \text{이다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13 \quad \frac{1}{i} &= -i, \frac{1}{i^2} = -1, \frac{1}{i^3} = i, \frac{1}{i^4} = 1 \text{ 이므로} \\
 \frac{1}{i} + \frac{2}{i^2} + \frac{3}{i^3} + \frac{4}{i^4} + \dots + \frac{20}{i^{20}} \\
 &= \left(\frac{1}{i} + \frac{2}{i^2} + \frac{3}{i^3} + \frac{4}{i^4} \right) + \frac{1}{i^4} \left(\frac{5}{i} + \frac{6}{i^2} + \frac{7}{i^3} + \frac{8}{i^4} \right) \\
 &\quad + \dots + \frac{1}{i^{16}} \left(\frac{17}{i} + \frac{18}{i^2} + \frac{19}{i^3} + \frac{20}{i^4} \right) \\
 &= (-i-2+3i+4) + (-5i-6+7i+8) \\
 &\quad + \dots + (-17i-18+19i+20) \\
 &= 5(2+2i) = 10+10i \\
 \text{따라서 } a &= 10, b = 10 \text{ 이므로} \\
 a+b &= 20
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14 \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i} \right)^2 &= \frac{2}{1+2i-1} = \frac{1}{i} = -i, \\
 \frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{1+1} = i \text{ 이므로} \\
 f\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i} \right) + f\left(\frac{1+i}{1-i} \right) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i} \right)^{1520} - 1 + \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{1520} - 1 \\
 &= (-i)^{760} + i^{1520} - 2 \\
 &= i^{760} + i^{1520} - 2 \\
 &= (i^4)^{190} + (i^4)^{380} - 2 \\
 &= 1+1-2=0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15 \quad & \sqrt{-1}\sqrt{-5} + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-2}} \times \sqrt{(-3)^2} + \frac{\sqrt{-15}}{\sqrt{-3}} \\
 &= -\sqrt{5} - \sqrt{-5} \times 3 + \sqrt{5} \\
 &= -3\sqrt{5}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16 \quad & \sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{에서 } a < 0, b < 0 \\
 & \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{c}{b}} \text{에서 } c > 0, b < 0 \\
 & \therefore a+b < 0, c-b > 0, 2a < 0 \\
 & \therefore \sqrt{(a+b)^2} - |c-b| - |2a| \\
 &= -(a+b) - (c-b) - (-2a) \\
 &= -a-b-c+b+2a \\
 &= a-c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17 \quad & \alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta} = 4 \text{에서 } \alpha = \frac{4}{\bar{\alpha}}, \beta = \frac{4}{\bar{\beta}} \\
 & \text{이를 } \alpha + \beta = i \text{에 대입하면} \\
 & \frac{4}{\alpha} + \frac{4}{\beta} = i, \frac{4(\bar{\alpha} + \bar{\beta})}{\alpha \times \beta} = i \\
 & \frac{4(\bar{\alpha} + \bar{\beta})}{\alpha\beta} = i \\
 & \therefore \bar{\alpha}\bar{\beta} = \frac{4(\bar{\alpha} + \bar{\beta})}{i} = \frac{4 \times (-i)}{i} = -4 \\
 & \therefore \alpha\beta = -4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18 \quad & z = a + bi \text{ (} a, b \text{는 실수, } b \neq 0 \text{)} \text{라 하면} \\
 & 2z + \frac{1}{z} = 2(a + bi) + \frac{1}{a + bi} \\
 &= 2a + 2bi + \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} \\
 &= \left(2a + \frac{a}{a^2 + b^2}\right) + \left(2b - \frac{b}{a^2 + b^2}\right)i \\
 & 2z + \frac{1}{z} \text{이 실수이므로} \\
 & 2b - \frac{b}{a^2 + b^2} = 0, 2 - \frac{1}{a^2 + b^2} = 0 \quad (\because b \neq 0) \\
 & \frac{1}{a^2 + b^2} = 2 \quad \therefore a^2 + b^2 = \frac{1}{2} \\
 & \therefore z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) \\
 &= a^2 + b^2 = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19 \quad & (1-i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i \text{이므로 } (1-i)^{2n} = 2^n i \text{에서} \\
 & (-2i)^n = 2^n i, 2^n \times (-i)^n = 2^n i \\
 & \therefore (-i)^n = i \quad \dots\dots \text{㉠} \\
 & (-i)^1 = -i, (-i)^2 = -1, (-i)^3 = i, (-i)^4 = 1, \dots\text{이} \\
 & \text{므로 ㉠을 만족시키는 자연수 } n \text{은} \\
 & n = 4k + 3 \text{ (} k \text{는 음이 아닌 정수) 꼴이다.} \\
 & \text{따라서 100 이하의 자연수 } n \text{은 3, 7, 11, } \dots, 99 \text{의 25개} \\
 & \text{이다.}
 \end{aligned}$$

II-1 02 이차방정식의 판별식

이차방정식

개념 Check

79쪽

$$\begin{aligned}
 1 \quad & \text{답 (1) } x=3 \text{ 또는 } x=5 \quad (2) \quad x = \frac{1}{3} \text{ (중근)} \\
 & (3) \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (4) \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{4} \\
 & (1) \quad x^2 - 8x + 15 = 0 \text{에서 } (x-3)(x-5) = 0 \\
 & \quad \therefore x=3 \text{ 또는 } x=5 \\
 & (2) \quad 9x^2 - 6x + 1 = 0 \text{에서 } (3x-1)^2 = 0 \\
 & \quad \therefore x = \frac{1}{3} \text{ (중근)} \\
 & (3) \quad x^2 - 3x + 1 = 0 \text{에서} \\
 & \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\
 & (4) \quad 4x^2 - 2x + 1 = 0 \text{에서} \\
 & \quad x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{4}
 \end{aligned}$$

문제

80~82쪽

$$\begin{aligned}
 01-1 \quad & \text{답 (1) } x = \frac{-1 \pm 3\sqrt{3}i}{2} \\
 & (2) \quad x = -1 \text{ 또는 } x = 3 + \sqrt{3} \\
 & (1) \quad 3(x+2)(x+3) = 2x(x+7) + 11 \text{에서} \\
 & \quad 3x^2 + 15x + 18 = 2x^2 + 14x + 11 \\
 & \quad x^2 + x + 7 = 0 \\
 & \quad \therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2} = \frac{-1 \pm 3\sqrt{3}i}{2} \\
 & (2) \quad \text{주어진 이차방정식의 양변에 } \sqrt{3} + 2 \text{를 곱하면} \\
 & \quad (\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2)x^2 + (\sqrt{3} + 2)x + (\sqrt{3} + 2)(3 - \sqrt{3}) = 0 \\
 & \quad x^2 - (\sqrt{3} + 2)x - (3 + \sqrt{3}) = 0 \\
 & \quad (x+1)\{x - (3 + \sqrt{3})\} = 0 \\
 & \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3 + \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

01-2 답 5

$$\begin{aligned}
 & 2x - 7 = (2 - x)^2 \text{에서} \\
 & 2x - 7 = 4 - 4x + x^2 \\
 & x^2 - 6x + 11 = 0 \\
 & \therefore x = -(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 1 \times 11} = 3 \pm \sqrt{2}i \\
 & \text{따라서 } p=3, q=2 \text{이므로} \\
 & p+q=5
 \end{aligned}$$

01-3 ㉡ 1

주어진 이차방정식의 양변에 $\sqrt{2}-1$ 을 곱하면

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2 - (\sqrt{2}-1)(3+\sqrt{2})x + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 0$$

$$x^2 - (2\sqrt{2}-1)x + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 0$$

$$\{x - (\sqrt{2}-1)\}(x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore x = \sqrt{2}-1 \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$

$$\alpha > \beta \text{이므로 } \alpha = \sqrt{2}, \beta = \sqrt{2}-1$$

$$\therefore \alpha - \beta = 1$$

02-1 ㉡ (1) $-\frac{4}{3}$ (2) 2, $-\frac{3}{2}$

(1) 이차방정식 $3x^2 - 2x + k = 0$ 의 한 근이 2이므로 $x=2$ 를 대입하면

$$12 - 4 + k = 0 \quad \therefore k = -8$$

이를 주어진 이차방정식에 대입하면

$$3x^2 - 2x - 8 = 0, (3x+4)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{4}{3} \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 다른 한 근은 $-\frac{4}{3}$ 이다.

(2) 이차방정식 $mx^2 - 3x - 4m - 1 = 0$ 의 한 근이 3이므로 $x=3$ 을 대입하면

$$9m - 9 - 4m - 1 = 0 \quad \therefore m = 2$$

이를 주어진 이차방정식에 대입하면

$$2x^2 - 3x - 9 = 0, (2x+3)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 다른 한 근은 $-\frac{3}{2}$ 이다.

02-2 ㉡ -3

$(m+2)x^2 + x - (m^2-3) = 0$ 이 이차방정식이므로

$$m+2 \neq 0 \quad \therefore m \neq -2$$

이 이차방정식의 한 근이 1이므로 $x=1$ 을 대입하면

$$m+2+1-(m^2-3)=0$$

$$m^2-m-6=0, (m+2)(m-3)=0$$

$$\therefore m = -2 \text{ 또는 } m = 3$$

그런데 $m \neq -2$ 이므로

$$m = 3$$

이를 주어진 이차방정식에 대입하면

$$5x^2 + x - 6 = 0, (5x+6)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{6}{5} \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 $n = -\frac{6}{5}$ 이므로

$$m+5n = 3+5 \times \left(-\frac{6}{5}\right) = -3$$

03-1 ㉡ (1) $x=-2$ 또는 $x=2$ (2) $x=-5$ 또는 $x=4$

(1) (i) $x < 0$ 일 때

$$x^2 - x - 6 = 0, (x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -2$

(ii) $x \geq 0$ 일 때

$$x^2 + x - 6 = 0, (x+3)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x = 2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

(2) (i) $x < 1$ 일 때

$$x^2 + 3(x-1) - 7 = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0, (x+5)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $x = -5$

(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$x^2 - 3(x-1) - 7 = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0, (x+1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 4$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 4$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -5 \text{ 또는 } x = 4$$

03-2 ㉡ -2

(i) $x < -1$ 일 때

$$\{-(x+1)\}^2 + 3(x+1) - 4 = 0$$

$$x^2 + 5x = 0, x(x+5) = 0$$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 0$$

그런데 $x < -1$ 이므로 $x = -5$

(ii) $x \geq -1$ 일 때

$$(x+1)^2 - 3(x+1) - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0, (x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

그런데 $x \geq -1$ 이므로 $x = 3$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -5 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 모든 근의 합은 $-5+3=-2$

다른 풀이

$$|x+1| = t (t \geq 0) \text{로 놓으면 } t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$(t+1)(t-4) = 0 \quad \therefore t = 4 (\because t \geq 0)$$

$$|x+1| = 4 \text{이므로 } x+1 = -4 \text{ 또는 } x+1 = 4$$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 모든 근의 합은 $-5+3=-2$

2 이차방정식의 판별식

개념 Check

85쪽

- 1 답 (1) 서로 다른 두 실근
(2) 중근
(3) 서로 다른 두 허근

문제

86~87쪽

- 04-1 답 (1) $a < 1$ (2) $a = 1$ (3) $a > 1$

이차방정식 $x^2 - 2ax + a^2 + a - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - (a^2 + a - 1) = -a + 1$$

- (1) $D > 0$ 이어야 하므로 $-a + 1 > 0 \quad \therefore a < 1$
(2) $D = 0$ 이어야 하므로 $-a + 1 = 0 \quad \therefore a = 1$
(3) $D < 0$ 이어야 하므로 $-a + 1 < 0 \quad \therefore a > 1$

- 04-2 답 $a \geq \frac{7}{4}$

이차방정식 $x^2 - (2a+1)x + a^2 + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$D = \{-(2a+1)\}^2 - 4(a^2 + 2) \geq 0$$

$$4a - 7 \geq 0, 4a \geq 7 \quad \therefore a \geq \frac{7}{4}$$

- 04-3 답 $-4 < k < -2$ 또는 $k > -2$

$(k+2)x^2 + 2kx + k - 4 = 0$ 이 이차방정식이므로

$$k+2 \neq 0 \quad \therefore k \neq -2$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k+2)(k-4) > 0$$

$$2k+8 > 0, 2k > -8 \quad \therefore k > -4$$

그런데 $k \neq -2$ 이므로

$$-4 < k < -2 \text{ 또는 } k > -2$$

- 05-1 답 (1) $-1, 3$ (2) $a=1, b=-2$

(1) 주어진 이차식이 완전제곱식이면 이차방정식

$$x^2 - (k+3)x + 2k+3 = 0 \text{이 중근을 갖는다.}$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이므로

$$D = \{-(k+3)\}^2 - 4(2k+3) = 0$$

$$k^2 - 2k - 3 = 0, (k+1)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 3$$

(2) 이차방정식 $x^2 - 2(k+a)x + (k+1)^2 + a^2 - b - 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = \{-(k+a)\}^2 - \{(k+1)^2 + a^2 - b - 3\} = 0$$

$$\therefore 2(a-1)k + b + 2 = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$a-1=0, b+2=0 \quad \therefore a=1, b=-2$$

- 05-2 답 1

주어진 이차식이 $3(x-k)^2$ 으로 인수분해되면 이차방정식

$$3x^2 - 2(a+3)x + a^2 + 2a - 3 = 0 \text{이 중근을 갖는다.}$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = \{-(a+3)\}^2 - 3(a^2 + 2a - 3) = 0$$

$$-2a^2 + 18 = 0, a^2 = 9 \quad \therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 3$$

그런데 a 는 양수이므로 $a=3$

따라서 주어진 이차식은 $3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2$ 이므로 $k=2$

$$\therefore a-k = 3-2 = 1$$

연습문제

88~89쪽

- | | | | |
|-----|------|------|-------------------|
| 1 ② | 2 3 | 3 ② | 4 $x=-1$ 또는 $x=2$ |
| 5 ④ | 6 6 | 7 ⑤ | 8 서로 다른 두 실근 |
| 9 ② | 10 ④ | 11 3 | 12 ⑤ 13 8 |

- 1 $2x^2 + 4x + 3 = 0$ 에서

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 2 \times 3}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}i}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

따라서 $a = -1, b = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$a+b^2 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

- 2 $(a-1)x^2 - (a^2+1)x + 2(a+1) = 0$ 이 이차방정식이므로 $a-1 \neq 0 \quad \therefore a \neq 1$

이 이차방정식의 한 근이 2이므로 $x=2$ 를 대입하면

$$4(a-1) - 2(a^2+1) + 2(a+1) = 0$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0, (a-1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 2$$

그런데 $a \neq 1$ 이므로 $a=2$

이를 주어진 이차방정식에 대입하면

$$x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 다른 한 근은 3이다.

- 3 이차방정식 $x^2 + k(2p-3)x - (p^2-2)k + q + 2 = 0$ 의 한 근이 1이므로 $x=1$ 을 대입하면

$$1 + k(2p-3) - (p^2-2)k + q + 2 = 0$$

$$-(p^2-2p+1)k + q + 3 = 0$$

$$\therefore -(p-1)^2k+q+3=0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$(p-1)^2=0, q+3=0$$

$$\therefore p=1, q=-3 \quad \therefore p+q=-2$$

4 $x \odot x = |2 \odot x|$ 에서 $x^2 - x - x = |2x - 2 - x|$
 $x^2 - 2x - |x - 2| = 0$

(i) $x < 2$ 일 때

$$x^2 - 2x + (x - 2) = 0, x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $x < 2$ 이므로 $x = -1$

(ii) $x \geq 2$ 일 때

$$x^2 - 2x - (x - 2) = 0, x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 $x = 2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x = -1$ 또는 $x = 2$

5 ㄱ. 이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$$

ㄴ. 이차방정식 $3x^2 + 5x + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 5^2 - 4 \times 3 \times 2 = 1 > 0$$

ㄷ. 이차방정식 $2x^2 + 6x + 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 3^2 - 2 \times 5 = -1 < 0$$

ㄹ. 이차방정식 $3x^2 + 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (\sqrt{6})^2 - 3 \times 2 = 0$$

따라서 보기에서 실근을 갖는 것은 ㄴ, ㄹ이다.

6 이차방정식 $x^2 + 2(k-2)x + k^2 - 24 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - (k^2 - 24) > 0$$

$$-4k + 28 > 0, -4k > -28 \quad \therefore k < 7$$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

7 이차방정식 $x^2 + 2kx + k^2 + 2k - 6 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1 < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D_1}{4} = k^2 - (k^2 + 2k - 6) < 0$$

$$-2k + 6 < 0, -2k < -6 \quad \therefore k > 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2 - 2kx + 3k + 10 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$D_2 = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D_2}{4} = (-k)^2 - (3k + 10) = 0, k^2 - 3k - 10 = 0$$

$$(k+2)(k-5) = 0 \quad \therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 5$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에서 $k > 3$ 이므로 $k = 5$

8 이차방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 1 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1 = 0$ 이므로

$$\frac{D_1}{4} = (-a)^2 - (b^2 + 1) = 0$$

$$a^2 - b^2 - 1 = 0 \quad \therefore a^2 = b^2 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2 + 4ax + 2b + 1 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (2a)^2 - (2b + 1)$$

$$= 4a^2 - 2b - 1 = 4(b^2 + 1) - 2b - 1 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 4b^2 - 2b + 3 = 4\left(b - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0$$

따라서 이차방정식 $x^2 + 4ax + 2b + 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

9 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 에서 $a < 0, b > 0$

① 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 4b$$

$a^2 - 4b$ 의 값의 부호는 알 수 없으므로 이 이차방정식의 근은 판별할 수 없다.

② 이차방정식 $x^2 + ax - b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 + 4b > 0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

③ 이차방정식 $x^2 + bx - a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = b^2 + 4a$$

$b^2 + 4a$ 의 값의 부호는 알 수 없으므로 이 이차방정식의 근은 판별할 수 없다.

④ 이차방정식 $ax^2 + bx - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = b^2 + 4a$$

③과 마찬가지로 이 이차방정식의 근은 판별할 수 없다.

⑤ 이차방정식 $bx^2 + ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 4b$$

①과 마찬가지로 이 이차방정식의 근은 판별할 수 없다.

따라서 항상 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식은 ②이다.

10 $x^2 = \sqrt{x^2} + |x-1| + 2$ 에서

$$x^2 - |x| - |x-1| - 2 = 0$$

(i) $x < 0$ 일 때

$$x^2 + x + (x-1) - 2 = 0, x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -3$

(ii) $0 \leq x < 1$ 일 때

$$x^2 - x + (x-1) - 2 = 0, x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3 \quad \therefore x = -\sqrt{3} \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

그런데 $0 \leq x < 1$ 이므로 해는 없다.

(iii) $x \geq 1$ 일 때

$$x^2 - x - (x-1) - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \therefore x = 1 \pm \sqrt{2}$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 1 + \sqrt{2}$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -3 \text{ 또는 } x = 1 + \sqrt{2}$$

따라서 모든 근의 합은

$$-3 + (1 + \sqrt{2}) = -2 + \sqrt{2}$$

11 이차방정식 $ax^2 + 2(a+1)x - k(a-2) = 0$ 의 판별식을

D_1 이라 하면 $D_1 = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D_1}{4} = (a+1)^2 + ak(a-2) = 0$$

$$\therefore (k+1)a^2 + 2(1-k)a + 1 = 0$$

이 방정식을 만족시키는 실수 a 가 하나뿐이므로 a 에 대한 이차방정식 $(k+1)a^2 + 2(1-k)a + 1 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2 = 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D_2}{4} = (1-k)^2 - (k+1) = 0$$

$$k^2 - 3k = 0, k(k-3) = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 3$$

그런데 k 는 양수이므로 $k = 3$

12 이차방정식 $x^2 + 2(2a+k)x - ak^2 + bk + c + k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = (2a+k)^2 - (-ak^2 + bk + c + k) = 0$$

$$\therefore (a+1)k^2 + (4a-b-1)k + 4a^2 - c = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$a+1=0, 4a-b-1=0, 4a^2-c=0$$

$$\therefore a = -1, b = -5, c = 4 \quad \therefore abc = 20$$

13 이차식 $(b+c)x^2 - 2ax + b - c$ 가 완전제곱식이면 이차방정식 $(b+c)x^2 - 2ax + b - c = 0$ 이 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1 = 0$ 이므로

$$\frac{D_1}{4} = (-a)^2 - (b+c)(b-c) = 0$$

$$a^2 - b^2 + c^2 = 0 \quad \therefore a^2 + c^2 = b^2$$

즉, 이 삼각형은 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형이다.

이차식 $ax^2 + 8x + c$ 가 완전제곱식이면 이차방정식

$$ax^2 + 8x + c = 0 \text{이 중근을 갖는다.}$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2 = 0$ 이므로

$$\frac{D_2}{4} = 4^2 - ac = 0 \quad \therefore ac = 16$$

직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이가 a, c 이므로 이 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}ac = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

II-1 03 이차방정식의 근과 계수의 관계

이차방정식의 근과 계수의 관계

개념 Check

91쪽

1 ㉠ (1) $2, -2$ (2) $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$

2 ㉠ (1) $x^2 + x - 6 = 0$ (2) $x^2 - 4x + 5 = 0$

3 ㉠ (1) $(x-1+i)(x-1-i)$

(2) $(x+1+\sqrt{5}i)(x+1-\sqrt{5}i)$

(1) 이차방정식 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 의 해는 $x = 1 \pm i$ 이므로

$$x^2 - 2x + 2 = (x-1+i)(x-1-i)$$

(2) 이차방정식 $x^2 + 2x + 6 = 0$ 의 해는 $x = -1 \pm \sqrt{5}i$ 이므로

$$x^2 + 2x + 6 = (x+1+\sqrt{5}i)(x+1-\sqrt{5}i)$$

문제

92~97쪽

01-1 ㉠ (1) -3 (2) 12 (3) 20 (4) -4

이차방정식 $x^2 - 2x - 2 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -2$

(1) $(\alpha-1)(\beta-1) = \alpha\beta - (\alpha+\beta) + 1$

$$= -2 - 2 + 1 = -3$$

(2) $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$

$$= 2^2 - 4 \times (-2) = 12$$

(3) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$= 2^3 - 3 \times (-2) \times 2 = 20$$

(4) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$$= \frac{2^2 - 2 \times (-2)}{-2} = -4$$

01-2 ㉠ (1) $\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{5}$

이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$

(1) $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = 3^2 - 4 \times 1 = 5$

$$\alpha > \beta \text{에서 } \alpha - \beta > 0 \text{이므로 } \alpha - \beta = \sqrt{5}$$

(2) 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-3)^2 - 4 = 5 > 0 \text{이므로 } \alpha, \beta \text{는 모두 실수이다.}$$

$$\text{또 } \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0 \text{이므로 } \alpha > 0, \beta > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}$$

$$= \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 3 + 2 \times 1 = 5$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} > 0 \text{이므로 } \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{5}$$

01-3 ㉡ 15

α, β 가 이차방정식 $x^2-5x+1=0$ 의 두 근이므로
 $\alpha^2-5\alpha+1=0, \beta^2-5\beta+1=0$
 $\therefore \alpha^2=5\alpha-1, \beta^2=5\beta-1$
 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=5, \alpha\beta=1$ 이므로
 $(\alpha^2-3\alpha+2)(\beta^2-3\beta+2)$
 $= (5\alpha-1-3\alpha+2)(5\beta-1-3\beta+2)$
 $= (2\alpha+1)(2\beta+1)$
 $= 4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$
 $= 4 \times 1 + 2 \times 5 + 1$
 $= 15$

02-1 ㉡ $\frac{1}{2}$

이차방정식 $ax^2+x+b=0$ 의 두 근이 $-1, 2$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $-1+2=-\frac{1}{a}, -1 \times 2 = \frac{b}{a}$
 $\therefore a=-1, b=2$
 따라서 이차방정식 $bx^2+ax+a+b=0$ 의 두 근의 곱은
 $\frac{a+b}{b} = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$

02-2 ㉡ $a=-1, b=-3$

이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta=a, \alpha\beta=b$ ㉠
 이차방정식 $x^2-(a-3)x+a+4=0$ 의 두 근이 $\alpha+\beta, \alpha\beta$
 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $(\alpha+\beta)+\alpha\beta=a-3, (\alpha+\beta)\alpha\beta=a+4$
 이 두 식에 ㉠을 각각 대입하면
 $a+b=a-3, ab=a+4$
 $\therefore a=-1, b=-3$

02-3 ㉡ 3

이차방정식 $x^2+bx+a=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta=-b, \alpha\beta=a$ ㉠
 이차방정식 $x^2-bx-a+2=0$ 의 두 근이 $\alpha+2, \beta+2$ 이
 므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $(\alpha+2)+(\beta+2)=b, (\alpha+2)(\beta+2)=-a+2$
 $\therefore \alpha+\beta+4=b, \alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=-a+2$
 이 두 식에 ㉠을 각각 대입하면
 $-b+4=b, a-2b+4=-a+2$
 $\therefore a=1, b=2$
 $\therefore a+b=3$

03-1 ㉡ 2, 12

이차방정식 $x^2-(a+5)x+6a=0$ 의 두 근이 연속인 정수이므로 두 근을 $\alpha, \alpha+1$ 이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$\alpha+(\alpha+1)=a+5 \quad \therefore \alpha=\frac{a}{2}+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 근의 곱은 $\alpha(\alpha+1)=6a$

$$\textcircled{1} \text{을 대입하면 } \left(\frac{a}{2}+2\right)\left(\frac{a}{2}+3\right)=6a$$

$$a^2-14a+24=0, (a-2)(a-12)=0$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=12$$

다른 풀이

이차방정식 $x^2-(a+5)x+6a=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a+5, \alpha\beta=6a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 근이 연속인 정수이면 두 근의 차는 1이므로

$$|\alpha-\beta|=1$$

$$\text{양변을 제곱하면 } (\alpha-\beta)^2=1$$

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1$$

$$\textcircled{1} \text{을 대입하면 } (a+5)^2-4 \times 6a=1$$

$$a^2-14a+24=0, (a-2)(a-12)=0$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=12$$

03-2 ㉡ 24

이차방정식 $x^2+mx+135=0$ 의 두 근의 비가 5 : 3이므로 두 근을 $5\alpha, 3\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$5\alpha+3\alpha=-m \quad \therefore m=-8\alpha \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{두 근의 곱은 } 5\alpha \times 3\alpha=135$$

$$\alpha^2=9 \quad \therefore \alpha=-3 \text{ 또는 } \alpha=3$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\alpha=-3 \text{ 일 때, } m=24$$

$$\alpha=3 \text{ 일 때, } m=-24$$

그런데 m 은 자연수이므로 $m=24$

03-3 ㉡ -3

이차방정식 $2x^2+3x+a=0$ 의 한 근이 다른 한 근의 2배이므로 두 근을 $\alpha, 2\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$\alpha+2\alpha=-\frac{3}{2} \quad \therefore \alpha=-\frac{1}{2}$$

$$\text{두 근의 곱은 } \alpha \times 2\alpha=\frac{a}{2} \quad \therefore a=4\alpha^2$$

$$\alpha=-\frac{1}{2} \text{을 대입하면 } a=4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2=1$$

따라서 이차방정식 $x^2+3ax-2a+1=0$ 의 두 근의 합은
 $-3a=-3$

04-1 ㉡ 두 근의 합: 3, 두 근의 곱: $\frac{3}{4}$

이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$f(\alpha)=0, f(\beta)=0, \alpha+\beta=6, \alpha\beta=3$$

이차방정식 $f(2x)=0$ 의 두 근을 구하면

$$2x=\alpha \text{ 또는 } 2x=\beta$$

$$\therefore x=\frac{\alpha}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\beta}{2}$$

이차방정식 $f(2x)=0$ 의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{6}{2}=3$$

이차방정식 $f(2x)=0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha}{2} \times \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha\beta}{4} = \frac{3}{4}$$

04-2 ㉡ 2

이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$f(\alpha)=0, f(\beta)=0, \alpha+\beta=6$$

이차방정식 $f(4x-1)=0$ 의 두 근을 구하면

$$4x-1=\alpha \text{ 또는 } 4x-1=\beta$$

$$\therefore x=\frac{\alpha+1}{4} \text{ 또는 } x=\frac{\beta+1}{4}$$

따라서 이차방정식 $f(4x-1)=0$ 의 두 근의 합은

$$\begin{aligned} \frac{\alpha+1}{4} + \frac{\beta+1}{4} &= \frac{\alpha+\beta+2}{4} \\ &= \frac{6+2}{4} = 2 \end{aligned}$$

04-3 ㉡ $\frac{7}{9}$

이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$f(\alpha)=0, f(\beta)=0, \alpha+\beta=4, \alpha\beta=2$$

이차방정식 $f(3x-1)=0$ 의 두 근을 구하면

$$3x-1=\alpha \text{ 또는 } 3x-1=\beta$$

$$\therefore x=\frac{\alpha+1}{3} \text{ 또는 } x=\frac{\beta+1}{3}$$

따라서 이차방정식 $f(3x-1)=0$ 의 두 근의 곱은

$$\begin{aligned} \frac{\alpha+1}{3} \times \frac{\beta+1}{3} &= \frac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{9} \\ &= \frac{2+4+1}{9} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

05-1 ㉡ (1) $x^2-3x+2=0$ (2) $2x^2+3x+2=0$

이차방정식 $x^2-x+2=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=2$$

(1) 두 근 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 의 합과 곱은 각각

$$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=1+2=3$$

$$(\alpha+\beta)\alpha\beta=1 \times 2 = 2$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-3x+2=0$

(2) 두 근 $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}$ 의 합과 곱은 각각

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{1^2-2 \times 2}{2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} \times \frac{\alpha}{\beta} = 1$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$2\left(x^2+\frac{3}{2}x+1\right)=0$$

$$\therefore 2x^2+3x+2=0$$

다른 풀이

(1) $\alpha+\beta, \alpha\beta$, 즉 1, 2를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$(x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore x^2-3x+2=0$$

05-2 ㉡ -50

이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=3$$

두 근 α^3+1, β^3+1 의 합과 곱은 각각

$$\begin{aligned} (\alpha^3+1)+(\beta^3+1) &= \alpha^3+\beta^3+2 \\ &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+2 \\ &= (-2)^3-3 \times 3 \times (-2)+2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha^3+1)(\beta^3+1) &= \alpha^3\beta^3+\alpha^3+\beta^3+1 \\ &= (\alpha\beta)^3+(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+1 \\ &= 3^3+(-2)^3-3 \times 3 \times (-2)+1 \\ &= 38 \end{aligned}$$

α^3+1, β^3+1 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-12x+38=0$$

따라서 $a=-12, b=38$ 이므로

$$a-b=-50$$

06-1 ㉡ (1) $a=-6, b=-1$ (2) $a=-6, b=10$

(1) 계수가 유리수이므로 $3+2\sqrt{2}$ 가 근이면 다른 한 근은 $3-2\sqrt{2}$ 이다.

이차방정식 $x^2+ax-b=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=-a$$

$$(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=-b$$

$$\therefore a=-6, b=-1$$

(2) 계수가 실수이므로 $3+i$ 가 근이면 다른 한 근은 $3-i$ 이다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(3+i)+(3-i)=-a, (3+i)(3-i)=b$$

$$\therefore a=-6, b=10$$

06-2 ㉡ $p=-4, q=2$

계수가 유리수이므로 $q-\sqrt{3}i$ 가 근이면 다른 한 근은 $q+\sqrt{3}i$ 이다.

이차방정식 $x^2+px+1=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$(q-\sqrt{3}i)+(q+\sqrt{3}i)=-p$$

$$\therefore p=-2q \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 근의 곱은 $(q-\sqrt{3}i)(q+\sqrt{3}i)=1$

$$q^2=4 \quad \therefore q=-2 \text{ 또는 } q=2$$

그런데 $q>0$ 이므로 $q=2$

이를 ㉠에 대입하면 $p=-4$

06-3 ㉡ $x=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$

$$\frac{3}{1+\sqrt{2}i}=\frac{3(1-\sqrt{2}i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}=1-\sqrt{2}i$$

계수가 실수이므로 $1-\sqrt{2}i$ 가 근이면 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}i$ 이다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 $(1-\sqrt{2}i)+(1+\sqrt{2}i)=-a, (1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)=b$

$$\therefore a=-2, b=3$$

이를 $x^2-bx-a+1=0$ 에 대입하면

$$x^2-3x+3=0 \quad \therefore x=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$$

연습문제

98~100쪽

- | | | | | |
|---------------|------|------|-----------------------|------|
| 1 ㉠ | 2 9 | 3 ㉠ | 4 3 | 5 5 |
| 6 ㉡ | 7 ㉠ | 8 ㉠ | 9 $x=3\pm 2\sqrt{2}i$ | |
| 10 ㉢ | 11 ㉠ | 12 ㉡ | 13 ㉡ | 14 ㉡ |
| 15 x^2-2x-1 | 16 ㉡ | 17 ㉡ | 18 ㉠ | |

1 이차방정식 $x^2-3x-2=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3 \text{ (㉠)}, \alpha\beta=-2$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} (\alpha-3)(\beta-3) &= \alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9 \\ &= -2-3\times 3+9=-2 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=3^2-4\times(-2)=17$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \alpha^3+\beta^3+4\alpha\beta &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta \\ &= 3^3-3\times(-2)\times 3+4\times(-2)=37 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1+\beta} &= \frac{1+\beta+1+\alpha}{(1+\alpha)(1+\beta)}=\frac{\alpha+\beta+2}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta} \\ &= \frac{3+2}{1+3+(-2)}=\frac{5}{2} \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ㉤이다.

2 이차방정식 $x^2-x-3=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-3$$

$$\begin{aligned} \therefore \beta f(\alpha)+\alpha f(\beta) &= \beta(\alpha^2-2\alpha)+\alpha(\beta^2-2\beta) \\ &= \alpha^2\beta-2\alpha\beta+\alpha\beta^2-2\alpha\beta \\ &= \alpha\beta(\alpha+\beta-4) \\ &= -3\times(1-4)=9 \end{aligned}$$

3 α, β 가 이차방정식 $x^2+x-1=0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2+\alpha-1=0, \beta^2+\beta-1=0$$

$$\therefore \alpha^2+\alpha=1, \beta^2+\beta=1$$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=-1$ 이므로

$$\begin{aligned} (1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)(1+\beta+\beta^2+\beta^3) &= \{1+\alpha+\alpha(\alpha+\alpha^2)\}\{1+\beta+\beta(\beta+\beta^2)\} \\ &= (1+\alpha+\alpha)(1+\beta+\beta) \\ &= (1+2\alpha)(1+2\beta) \\ &= 1+2(\alpha+\beta)+4\alpha\beta \\ &= 1+2\times(-1)+4\times(-1)=-5 \end{aligned}$$

4 이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 두 근이 $-6, 2$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-6+2=a, -6\times 2=b$$

$$\therefore a=-4, b=-12$$

따라서 이차방정식 $ax^2+2x+b=0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{b}{a}=\frac{-12}{-4}=3$$

5 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-a, \alpha\beta=b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2-(2a+1)x+2=0$ 의 두 근이 $\alpha-1, \beta-1$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha-1)+(\beta-1)=2a+1, (\alpha-1)(\beta-1)=2$$

$$\therefore \alpha+\beta-2=2a+1, \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=2$$

이 두 식에 ㉠을 각각 대입하면

$$-a-2=2a+1, b+a+1=2$$

$$\therefore a=-1, b=2$$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2=1+4=5$$

- 6 이차방정식 $x^2 - ax - 4 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = -4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = -6 \text{에서 } \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = -6$$

$$\frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = -6$$

①을 대입하면

$$\frac{a^2 - 2 \times (-4)}{-4} = -6, a^2 + 8 = 24$$

$$a^2 = 16 \quad \therefore a = -4 \text{ 또는 } a = 4$$

그런데 a 는 양수이므로 $a = 4$

- 7 이차방정식 $x^2 + (k^2 - 5k + 4)x - k + 2 = 0$ 의 두 실근을 $\alpha, -\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$\alpha + (-\alpha) = -(k^2 - 5k + 4)$$

$$k^2 - 5k + 4 = 0, (k-1)(k-4) = 0$$

$$\therefore k = 1 \text{ 또는 } k = 4$$

그런데 두 근의 부호가 서로 다르면 두 근의 곱이 음수이므로 $-k + 2 < 0$ 에서 $k > 2$

$$\therefore k = 4$$

따라서 이차방정식 $x^2 + (k+3)x + 3 = 0$ 의 두 근의 합은 $-(k+3) = -7$

- 8 이차방정식 $x^2 - (k^2 - 4k)x + 27 = 0$ 의 두 실근을 α, α^2 ($\alpha \neq 0$)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$\alpha + \alpha^2 = k^2 - 4k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{두 근의 곱은 } \alpha \times \alpha^2 = 27, \alpha^3 = 3^3 \quad \therefore \alpha = 3$$

이를 ①에 대입하면

$$12 = k^2 - 4k, k^2 - 4k - 12 = 0$$

$$(k+2)(k-6) = 0 \quad \therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 6$$

그런데 k 는 양수이므로 $k = 6$

- 9 태윤이는 b 를 잘못 보고 풀었지만 a 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$$(3+2i) + (3-2i) = -a$$

$$\therefore a = -6$$

혜영이는 a 를 잘못 보고 풀었지만 b 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$$(4+i)(4-i) = b$$

$$\therefore b = 17$$

따라서 원래의 이차방정식은 $x^2 - 6x + 17 = 0$ 이므로

$$x = 3 \pm 2\sqrt{2}i$$

- 10 이차방정식 $x^2 - 6x - 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = -1$$

두 근 $\alpha^2 + \frac{1}{\beta}, \beta^2 + \frac{1}{\alpha}$ 의 합과 곱은 각각

$$\begin{aligned} \left(\alpha^2 + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta^2 + \frac{1}{\alpha}\right) &= \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \\ &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \\ &= 6^2 - 2 \times (-1) + \frac{6}{-1} = 32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\alpha^2 + \frac{1}{\beta}\right) \left(\beta^2 + \frac{1}{\alpha}\right) &= (\alpha\beta)^2 + \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha\beta} \\ &= (-1)^2 + 6 + \frac{1}{-1} = 6 \end{aligned}$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$x^2 - 32x + 6 = 0$$

- 11 이차방정식 $2x^2 - x + 2 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}, \alpha\beta = 1$$

두 근 $(\alpha-1)(\beta-1), \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ 는

$$(\alpha-1)(\beta-1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times 1}{1} = -\frac{7}{4} \end{aligned}$$

$\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 8인 이차방정식은

$$8 \left[x^2 - \left\{ \frac{3}{2} + \left(-\frac{7}{4} \right) \right\} x + \frac{3}{2} \times \left(-\frac{7}{4} \right) \right] = 0$$

$$\therefore 8x^2 + 2x - 21 = 0$$

따라서 $a = 2, b = -21$ 이므로

$$a - b = 23$$

- 12 이차방정식 $x^2 - 2x + 5 = 0$ 의 해는

$$x = 1 \pm 2i$$

$$\therefore x^2 - 2x + 5 = (x - 1 + 2i)(x - 1 - 2i)$$

- 13 $\frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$

계수가 실수이므로 $2-i$ 가 근이면 다른 한 근은 $2+i$ 이다.

이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(2-i) + (2+i) = a, (2-i)(2+i) = b$$

$$\therefore a = 4, b = 5$$

$$\therefore ab = 20$$

- 14 이차방정식 $x^2+mx+n=0$ 의 계수가 실수이므로

$-1+2i$ 가 근이면 다른 한 근은 $-1-2i$ 이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$(-1+2i)+(-1-2i)=-m$$

$$(-1+2i)(-1-2i)=n$$

$$\therefore m=2, n=5$$

$\frac{1}{m}, \frac{1}{n}$, 즉 $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)x+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=0 \quad \therefore x^2-\frac{7}{10}x+\frac{1}{10}=0$$

따라서 $a=-\frac{7}{10}, b=\frac{1}{10}$ 이므로 $a+b=-\frac{3}{5}$

- 15 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하자.

이차방정식 $x^2-2x-4=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2, \alpha\beta=-4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(\alpha)=f(\beta)=3 \text{이므로 } f(\alpha)-3=0, f(\beta)-3=0$$

따라서 이차방정식 $f(x)-3=0$, 즉 $ax^2+bx+c-3=0$

의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c-3}{a}$$

이 두 식에 $\textcircled{1}$ 을 각각 대입하면

$$2=-\frac{b}{a}, -4=\frac{c-3}{a}$$

$$\therefore b=-2a, c=-4a+3$$

$$\therefore f(x)=ax^2-2ax-4a+3$$

이때 $f(1)=-2$ 에서

$$a-2a-4a+3=-2 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore f(x)=x^2-2x-1$$

- 16 이차방정식 $2x^2-4x+k=0$ 의 두 실근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2, \alpha\beta=\frac{k}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$|\alpha|+|\beta|=4$ 이므로 양변을 제곱하면

$$\alpha^2+2|\alpha\beta|+\beta^2=16$$

$$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=16$$

$\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$2^2-2\times\frac{k}{2}+2\left|\frac{k}{2}\right|=16$$

$$\therefore |k|-k=12 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

그런데 $k \geq 0$ 이면 $k-k=12$ 이므로 이를 만족시키는 k 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 $k < 0$ 이므로 $\textcircled{2}$ 에서

$$-k-k=12 \quad \therefore k=-6$$

- 17 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라 하자.

(가)에서 이차방정식 $f(3x)=0$ 의 두 근을 구하면

$$3x=\alpha \text{ 또는 } 3x=\beta$$

$$\therefore x=\frac{\alpha}{3} \text{ 또는 } x=\frac{\beta}{3}$$

이차방정식 $f(3x)=0$ 의 두 근의 합이 3이므로

$$\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}=3 \quad \therefore \alpha+\beta=9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(나)에서 이차방정식 $f(2x-1)=0$ 의 두 근을 구하면

$$2x-1=\alpha \text{ 또는 } 2x-1=\beta$$

$$\therefore x=\frac{\alpha+1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\beta+1}{2}$$

이차방정식 $f(2x-1)=0$ 의 두 근의 곱이 4이므로

$$\frac{\alpha+1}{2}\times\frac{\beta+1}{2}=4$$

$$\frac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{4}=4$$

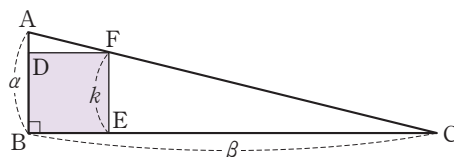
$$\textcircled{1} \text{을 대입하면 } \frac{\alpha\beta+10}{4}=4 \quad \therefore \alpha\beta=6$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$x^2-9x+6=0$$

- 18 이차방정식 $x^2-4x+2=0$ 의 두 실근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4, \alpha\beta=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$



위의 그림과 같이 직각삼각형 ABC에 내접하는 정사각형 DBEF의 한 변의 길이를 k 라 하면

$\triangle ABC \sim \triangle ADF$ (AA 답음)이므로

$$\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{BC} : \overline{DF}$$

$$\alpha : (\alpha - k) = \beta : k$$

$$\alpha k = \beta(\alpha - k), \alpha k = \alpha\beta - \beta k$$

$$(\alpha + \beta)k = \alpha\beta$$

$$\therefore k = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad (\because \textcircled{1})$$

한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 정사각형의 넓이는 $\frac{1}{4}$, 둘레의 길이는

2이므로 $\frac{1}{4}, 2$ 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 4인 이차방정식은

$$4\left\{x^2-\left(\frac{1}{4}+2\right)x+\frac{1}{4}\times 2\right\}=0$$

$$\therefore 4x^2-9x+2=0$$

따라서 $m=-9, n=2$ 이므로

$$m+n=-7$$

II-2 01 이차방정식과 이차함수의 관계

이차방정식과 이차함수의 관계

개념 Check

102쪽

- 1 [답] (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
 (2) 한 점에서 만난다(접한다).
 (3) 만나지 않는다.
- (1) 이차방정식 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4 - 2 = 2 > 0$$

 따라서 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
- (2) 이차방정식 $-x^2 + 4x - 4 = 0$, 즉 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4 - 4 = 0$$

 따라서 x 축과 한 점에서 만난다(접한다).
- (3) 이차방정식 $x^2 - 3x + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 9 - 12 = -3 < 0$$

 따라서 x 축과 만나지 않는다.

- 2 [답] (1) 2 (2) 1 (3) 0
- (1) $-x^2 + x - 1 = 2x - 3$ 에서 $x^2 + x - 2 = 0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1 + 8 = 9 > 0$$

 따라서 교점은 2개이다.
- (2) $-x^2 + x - 1 = -5x + 8$ 에서 $x^2 - 6x + 9 = 0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - 9 = 0$$

 따라서 교점은 1개이다.
- (3) $-x^2 + x - 1 = 2x + 4$ 에서 $x^2 + x + 5 = 0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1 - 20 = -19 < 0$$

 따라서 교점은 0개이다.

문제

103~106쪽

01-1 [답] 5

이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-1, 2$ 이므로
 $-1, 2$ 는 이차방정식 $-x^2 + ax + b = 0$, 즉
 $x^2 - ax - b = 0$ 의 두 근이다.
 근과 계수의 관계에 의하여
 $-1 + 2 = a$, $-1 \times 2 = -b$
 $\therefore a = 1, b = 2 \quad \therefore a + 2b = 1 + 4 = 5$

01-2 [답] 7

이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-2, b$ 이므로
 $-2, b$ 는 이차방정식 $3x^2 + 3x + a = 0$ 의 두 근이다.
 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} -2 + b &= -1, \quad -2 \times b = \frac{a}{3} \\ \therefore a &= -6, b = 1 \quad \therefore b - a = 7 \end{aligned}$$

[다른 풀이]

이차함수 $y = 3x^2 + 3x + a$ 가 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로
 $0 = 12 - 6 + a \quad \therefore a = -6$
 이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는 이차방정식
 $3x^2 + 3x - 6 = 0$, 즉 $x^2 + x - 2 = 0$ 의 두 근이므로
 $(x + 2)(x - 1) = 0 \quad \therefore x = -2$ 또는 $x = 1$
 $\therefore b = 1$
 $\therefore b - a = 1 - (-6) = 7$

01-3 [답] 2

이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표를 α, β 라 하면
 α, β 는 이차방정식 $x^2 + ax - 3 = 0$ 의 두 근이므로 근과
 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -a, \quad \alpha\beta = -3 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ \text{두 교점 사이의 거리가 4이므로 } |\alpha - \beta| &= 4 \\ \text{양변을 제곱하면 } (\alpha - \beta)^2 &= 16 \\ (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta &= 16 \\ \textcircled{1} \text{을 대입하면} \\ (-a)^2 - 4 \times (-3) &= 16, \quad a^2 = 4 \\ \therefore a &= -2 \text{ 또는 } a = 2 \\ \text{그런데 } a \text{는 양수이므로 } a &= 2 \end{aligned}$$

[다른 풀이]

이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표를 $\alpha, \alpha + 4$ 라
 하면 $\alpha, \alpha + 4$ 는 이차방정식 $x^2 + ax - 3 = 0$ 의 두 근이므
 로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은
 $\alpha + (\alpha + 4) = -a \quad \therefore a = -2\alpha - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 두 근의 곱은 $\alpha(\alpha + 4) = -3, \alpha^2 + 4\alpha + 3 = 0$
 $(\alpha + 3)(\alpha + 1) = 0 \quad \therefore \alpha = -3$ 또는 $\alpha = -1$
 이를 각각 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a = 2$ 또는 $a = -2$
 그런데 a 는 양수이므로 $a = 2$

02-1 [답] (1) $k < 1$ (2) $k = 1$ (3) $k > 1$

이차방정식 $x^2 - 2x + k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 1 - k \\ (1) D > 0 \text{이어야 하므로 } 1 - k &> 0 \quad \therefore k < 1 \\ (2) D = 0 \text{이어야 하므로 } 1 - k &= 0 \quad \therefore k = 1 \\ (3) D < 0 \text{이어야 하므로 } 1 - k &< 0 \quad \therefore k > 1 \end{aligned}$$

02-2 ㉡ 4

이차방정식 $x^2 - kx + k = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면
 $D_1 = 0$ 이므로
 $D_1 = k^2 - 4k = 0$
 $k(k-4) = 0 \quad \therefore k=0$ 또는 $k=4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 이차방정식 $-2x^2 + 3x - k = 0$, 즉 $2x^2 - 3x + k = 0$ 의 판
 별식을 D_2 라 하면 $D_2 < 0$ 이므로
 $D_2 = 9 - 8k < 0 \quad \therefore k > \frac{9}{8} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $k=4$

03-1 ㉡ 2

이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x 좌표는 이차방정식
 $x^2 + ax - 5 = x + b$, 즉 $x^2 + (a-1)x - b - 5 = 0$ 의 두 근
 과 같다.
 즉, 두 근의 합이 3이고, 곱이 -4 이므로 근과 계수의 관
 계에 의하여
 $3 = -(a-1), -4 = -b-5$
 $\therefore a = -2, b = -1 \quad \therefore ab = 2$

03-2 ㉡ 6

이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x 좌표가 $-\frac{1}{2}, 1$ 이므
 로 $-\frac{1}{2}, 1$ 은 이차방정식 $2x^2 - ax + 2 = -2x + b$, 즉
 $2x^2 - (a-2)x - b + 2 = 0$ 의 두 근이다.
 근과 계수의 관계에 의하여
 $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{a-2}{2}, -\frac{1}{2} \times 1 = \frac{-b+2}{2}$
 $\therefore a=3, b=3 \quad \therefore a+b=6$

03-3 ㉡ (3, 2)

점 B의 x 좌표를 a 라 하면 $-2, a$ 는 이차방정식
 $-2x^2 + x + k = -x + 5$, 즉 $2x^2 - 2x - k + 5 = 0$ 의 두 근
 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $-2 + a = 1 \quad \therefore a = 3$
 즉, 점 B의 x 좌표는 3이고 점 B는 직선 $y = -x + 5$ 위의
 점이므로 점 B의 y 좌표는 $y = -3 + 5 = 2$
 따라서 점 B의 좌표는 (3, 2)이다.

다른 풀이

이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x 좌표는 이차방정식
 $-2x^2 + x + k = -x + 5$, 즉 $2x^2 - 2x - k + 5 = 0$ 의 두 근
 과 같다.
 즉, 이차방정식 $2x^2 - 2x - k + 5 = 0$ 의 한 근이 -2 이므로
 $x = -2$ 를 대입하면
 $8 + 4 - k + 5 = 0 \quad \therefore k = 17$

$k=17$ 을 $2x^2 - 2x - k + 5 = 0$ 에 대입하면
 $2x^2 - 2x - 12 = 0, x^2 - x - 6 = 0$
 $(x+2)(x-3) = 0 \quad \therefore x = -2$ 또는 $x = 3$
 따라서 점 B의 x 좌표는 3이고 점 B는 직선 $y = -x + 5$
 위의 점이므로 점 B의 y 좌표는 $y = -3 + 5 = 2$
 따라서 점 B의 좌표는 (3, 2)이다.

04-1 ㉡ (1) $k > -\frac{9}{4}$ (2) $k = \frac{1}{4}$ (3) $k < -\frac{3}{2}$

(1) 이차방정식 $-x^2 + 2x + k = 3x - 2$, 즉
 $x^2 + x - k - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야
 하므로
 $D = 1 - 4(-k-2) > 0$
 $4k + 9 > 0 \quad \therefore k > -\frac{9}{4}$
 (2) 이차방정식 $-x^2 + 2x + k = x + 2k$, 즉 $x^2 - x + k = 0$
 의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로
 $D = 1 - 4k = 0 \quad \therefore k = \frac{1}{4}$
 (3) 이차방정식 $-x^2 + 2x + k = -2x - k + 1$, 즉
 $x^2 - 4x - 2k + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어
 야 하므로
 $\frac{D}{4} = 4 - (-2k+1) < 0$
 $2k + 3 < 0 \quad \therefore k < -\frac{3}{2}$

04-2 ㉡ $a \geq -3$

이차방정식 $x^2 + 4x - a = 2x + 2$, 즉 $x^2 + 2x - a - 2 = 0$ 의
 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4} = 1 - (-a-2) \geq 0$
 $a + 3 \geq 0 \quad \therefore a \geq -3$

연습문제

107~108쪽

- | | | | | |
|-------|---------------------|-----|------|------|
| 1 ④ | 2 -4 | 3 ③ | 4 -1 | 5 ② |
| 6 ④ | 7 1 | 8 ④ | 9 ① | 10 ② |
| 11 13 | 12 $\frac{25}{4}$ m | | | |

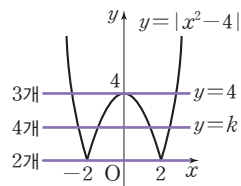
1 이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-3, b$ 이므
 로 $-3, b$ 는 이차방정식 $2x^2 + ax - 3 = 0$ 의 두 근이다.
 근과 계수의 관계에 의하여
 $-3 + b = -\frac{a}{2}, -3 \times b = -\frac{3}{2}$
 $\therefore a=5, b=\frac{1}{2} \quad \therefore 2ab=5$

- 2 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-4, 2$ 이므로 $-4, 2$ 는 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이다.
따라서 방정식 $f(x+1)=0$ 의 두 근을 구하면
 $x+1=-4$ 또는 $x+1=2$
 $\therefore x=-5$ 또는 $x=1$
따라서 방정식 $f(x+1)=0$ 의 모든 실근의 합은
 $-5+1=-4$
- 3 이차함수 $y=x^2+ax+b$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$ 에서 x 축과 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 은 1을 중근으로 갖는다.
즉, $x^2+ax+b=(x-1)^2$ 이므로
 $x^2+ax+b=x^2-2x+1 \quad \therefore a=-2, b=1$
이차함수 $y=x^2+bx+a$, 즉 $y=x^2+x-2$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2+x-2=0$ 의 두 근이므로
 $(x+2)(x-1)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$
따라서 두 점 사이의 거리는
 $|-2-1|=3$
- 4 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k^2=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D<0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4}=(k+1)^2-k^2<0$
 $2k+1<0 \quad \therefore k<-\frac{1}{2}$
따라서 정수 k 의 최댓값은 -1 이다.
- 5 이차방정식 $x^2+2ax+am+m+b=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이므로
 $\frac{D}{4}=a^2-(am+m+b)=0$
 $\therefore -(a+1)m+a^2-b=0$
이 등식이 m 에 대한 항등식이므로
 $a+1=0, a^2-b=0$
 $\therefore a=-1, b=1 \quad \therefore ab=-1$
- 6 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x 좌표가 $-2, 3$ 이므로 $-2, 3$ 은 이차방정식 $2x^2+3x+1=ax+b$, 즉
 $2x^2-(a-3)x-b+1=0$ 의 두 근이다.
근과 계수의 관계에 의하여
 $-2+3=\frac{a-3}{2}, -2 \times 3=\frac{-b+1}{2}$
 $\therefore a=5, b=13 \quad \therefore a+b=18$
- 7 이차함수의 그래프와 직선의 한 교점의 x 좌표가 $3+\sqrt{5}$ 이므로 $3+\sqrt{5}$ 는 이차방정식 $x^2+px+q=2x+1$, 즉
 $x^2+(p-2)x+q-1=0$ 의 한 근이다.

이때 p, q 가 유리수이므로 다른 한 근은 $3-\sqrt{5}$ 이다.
근과 계수의 관계에 의하여
 $(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})=-(p-2)$
 $(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=q-1$
 $\therefore p=-4, q=5$
 $\therefore p+q=1$

- 8 이차방정식 $x^2+5x+9=x+k$, 즉 $x^2+4x-k+9=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D<0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4}=4-(-k+9)<0$
 $k-5<0 \quad \therefore k<5$
따라서 자연수 k 는 $1, 2, 3, 4$ 의 4개이다.
- 9 이차방정식 $x^2+ax+a+2=-x+1$, 즉
 $x^2+(a+1)x+a+1=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1=0$ 이어야 하므로
 $D_1=(a+1)^2-4(a+1)=0$
 $(a+1)(a-3)=0$
 $\therefore a=-1$ 또는 $a=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
이차방정식 $x^2+ax+a+2=5x+4$, 즉
 $x^2+(a-5)x+a-2=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2=0$ 이어야 하므로
 $D_2=(a-5)^2-4(a-2)=0$
 $a^2-14a+33=0$
 $(a-3)(a-11)=0$
 $\therefore a=3$ 또는 $a=11 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a=3$

- 10 방정식 $|x^2-4|=k$ 의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-4|$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같다.
 $y=|x^2-4|$ 에서 $x=-2, x=2$ 를 기준으로 x 의 값의 범위를 나누어 함수의 식을 구하면
 $y=|x^2-4|=\begin{cases} x^2-4 & (x<-2 \text{ 또는 } x>2) \\ -(x^2-4) & (-2 \leq x \leq 2) \end{cases}$
이때 교점이 4개이라면 다음 그림과 같이 직선 $y=k$ 가 원점을 지나는 직선 $y=0$ 과 점 $(0, 4)$ 를 지나는 직선 $y=4$ 사이에 있어야 한다.



따라서 $0 < k < 4$ 이므로 정수 k 는 $1, 2, 3$ 의 3개이다.

- 11 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β ($\beta < 0 < \alpha$)라 하면
 $A(\alpha, \alpha^2), B(\beta, \beta^2)$
 α, β 는 이차방정식 $x^2=x+k$, 즉 $x^2-x-k=0$ 의 두 근
 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\overline{OC}=\alpha, \overline{AC}=\alpha^2$ 이므로 삼각형 AOC의 넓이는
 $S_1=\frac{1}{2} \times \overline{OC} \times \overline{AC}=\frac{1}{2} \times \alpha \times \alpha^2=\frac{1}{2} \alpha^3$
 $\overline{OD}=|\beta|=-\beta, \overline{BD}=\beta^2$ 이므로 삼각형 DOB의 넓이는
 $S_2=\frac{1}{2} \times \overline{OD} \times \overline{BD}=\frac{1}{2} \times (-\beta) \times \beta^2=-\frac{1}{2} \beta^3$
 $S_1-S_2=20$ 에서
 $\frac{1}{2} \alpha^3+\frac{1}{2} \beta^3=20, \alpha^3+\beta^3=40$
 $(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=40$
 $\textcircled{1}$ 을 대입하면
 $1^3-3 \times (-k) \times 1=40$
 $\therefore k=13$

- 12 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 지면과 가로등을 각각 x 축, y 축으로 놓으면 지점 A는 원점이 된다.
 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(2, 4)$ 이므로 포물선의 방정식을 $y=a(x-2)^2+4$ ($a \neq 0$)로 놓을 수 있다.
 포물선이 원점을 지나므로
 $0=4a+4 \quad \therefore a=-1$
 $\therefore y=-(x-2)^2+4=-x^2+4x$
 또 가로등의 불빛이 나타내는 직선의 기울기를 m ($m < 0$)이라 하면 직선의 방정식은
 $y=mx+\frac{25}{4}$
 포물선과 직선이 접하면 이차방정식
 $-x^2+4x=mx+\frac{25}{4}$, 즉 $x^2+(m-4)x+\frac{25}{4}=0$ 의 판별식을 D 라 할 때, $D=0$ 이어야 하므로
 $D=(m-4)^2-25=0$
 $m^2-8m-9=0$
 $(m+1)(m-9)=0$
 $\therefore m=-1$ 또는 $m=9$
 그런데 $m < 0$ 이므로 $m=-1$
 따라서 직선 $y=-x+\frac{25}{4}$ 가 x 축과 만나는 점 C의 좌표는 $(\frac{25}{4}, 0)$
 따라서 두 지점 A, C 사이의 거리는 $\frac{25}{4}$ m이다.

II-2 02 이차함수의 최대, 최소

이차함수의 최대, 최소

개념 Check

109쪽

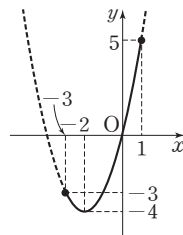
- 1 답 (1) 최댓값: 없다., 최솟값: -4
 (2) 최댓값: 3, 최솟값: 없다.
 (3) 최댓값: 없다., 최솟값: 1
 (4) 최댓값: 3, 최솟값: 없다.
 (3) $y=3x^2+6x+4=3(x+1)^2+1$ 이므로 최댓값은 없고 $x=-1$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.
 (4) $y=-x^2+4x-1=-(x-2)^2+3$ 이므로 $x=2$ 일 때 최댓값 3을 갖고 최솟값은 없다.

문제

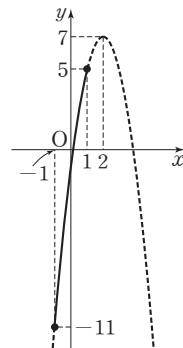
110~114쪽

- 01-1 답 (1) 최댓값: 5, 최솟값: -4
 (2) 최댓값: 5, 최솟값: -11

- (1) $y=x^2+4x=(x+2)^2-4$
 따라서 꼭짓점의 x 좌표 -2가
 $-3 \leq x \leq 1$ 에 포함되므로
 $x=1$ 일 때, 최댓값 5
 $x=-2$ 일 때, 최솟값 -4



- (2) $y=-2x^2+8x-1=-2(x-2)^2+7$
 따라서 꼭짓점의 x 좌표 2가
 $-1 \leq x \leq 1$ 에 포함되지 않으므로
 $x=1$ 일 때, 최댓값 5
 $x=-1$ 일 때, 최솟값 -11



- 01-2 답 -8

- $y=-2x^2+4x-5=-2(x-1)^2-3$
 꼭짓점의 x 좌표 1이 $-2 \leq x \leq 4$ 에 포함되므로
 $x=1$ 일 때 최댓값 -3을 갖는다. $\therefore a=-3$
 꼭짓점의 x 좌표 1이 $-3 \leq x \leq 0$ 에 포함되지 않으므로
 $x=0$ 일 때 최댓값 -5를 갖는다. $\therefore b=-5$
 $\therefore a+b=-3+(-5)=-8$

01-3 ㉡ 7

$y = x^2 + 4x - a^2 + 4a + 7 = (x+2)^2 - a^2 + 4a + 3$
 꼭짓점의 x 좌표 -2 가 $-4 \leq x \leq 0$ 에 포함되므로 $x = -2$
 일 때 최솟값 $-a^2 + 4a + 3$ 을 갖는다.
 $\therefore f(a) = -a^2 + 4a + 3 = -(a-2)^2 + 7$
 따라서 $f(a)$ 는 $a=2$ 일 때 최댓값 7을 갖는다.

02-1 ㉡ (1) -6 (2) -1

(1) $y = x^2 - 4x + k = (x-2)^2 + k - 4$
 꼭짓점의 x 좌표 2가 $3 \leq x \leq 5$ 에 포함되지 않으므로
 $x=5$ 일 때 최댓값 $k+5$ 를 갖는다.
 이때 주어진 조건에서 최댓값이 2이므로
 $k+5=2 \quad \therefore k=-3$
 따라서 $y = (x-2)^2 - 7$ 은 $x=3$ 일 때 최솟값 -6 을
 갖는다.
 (2) $y = -3x^2 - 6x + k = -3(x+1)^2 + k + 3$
 꼭짓점의 x 좌표 -1 이 $-3 \leq x \leq 0$ 에 포함되므로
 $x=-1$ 일 때 최댓값 $k+3$ 을 갖는다.
 이때 주어진 조건에서 최댓값이 11이므로
 $k+3=11 \quad \therefore k=8$
 따라서 $y = -3(x+1)^2 + 11$ 은 $x=-3$ 일 때 최솟값
 -1 을 갖는다.

02-2 ㉡ 11

$f(x) = -3x^2 + 12x - 5 = -3(x-2)^2 + 7$ 이라 하자.
 꼭짓점의 x 좌표 2가 $1 \leq x \leq a$ ($a > 2$)에 포함되므로
 $x=2$ 일 때 최댓값 7을 갖는다. $\therefore b=7$
 $f(1)=4$ 이고 최솟값은 -5 이므로 $x=a$ 일 때 최솟값을
 갖는다.
 즉, $f(a) = -5$ 이므로 $-3a^2 + 12a - 5 = -5$
 $a(a-4)=0 \quad \therefore a=0$ 또는 $a=4$
 그런데 $a > 2$ 이므로 $a=4$
 $\therefore a+b=4+7=11$

03-1 ㉡ (1) 최댓값: 없다., 최솟값: -2

(2) 최댓값: 10, 최솟값: -54

(1) $y = (x^2 + 4x + 1)^2 - 2(x^2 + 4x + 1) - 1$ 에서
 $x^2 + 4x + 1 = t$ 로 놓으면
 $t = (x+2)^2 - 3$
 $x = -2$ 일 때 최솟값 -3 을 가지므로 t 의 값의 범위는
 $t \geq -3$
 주어진 함수는
 $y = t^2 - 2t - 1 = (t-1)^2 - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 따라서 $t \geq -3$ 에서 $\textcircled{1}$ 의 최댓값은 없고, $t=1$ 일 때 최
 솟값 -2 를 갖는다.

(2) $y = -2(x^2 - 6x + 12)^2 + 4(x^2 - 6x + 12) + 16$ 에서

$x^2 - 6x + 12 = t$ 로 놓으면
 $t = (x-3)^2 + 3$
 $1 \leq x \leq 3$ 에서 $x=1$ 일 때 최댓값 7, $x=3$ 일 때 최솟값
 3을 가지므로 t 의 값의 범위는
 $3 \leq t \leq 7$
 주어진 함수는
 $y = -2t^2 + 4t + 16 = -2(t-1)^2 + 18 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 따라서 $3 \leq t \leq 7$ 에서 $\textcircled{2}$ 은 $t=3$ 일 때 최댓값 10, $t=7$
 일 때 최솟값 -54 를 갖는다.

03-2 ㉡ 3

$y = (x^2 - 2x)^2 + 6(x^2 - 2x + 1) + 2$ 에서
 $x^2 - 2x = t$ 로 놓으면
 $t = (x-1)^2 - 1$
 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $x=3$ 일 때 최댓값 3, $x=1$ 일 때 최솟값 -1
 을 가지므로 t 의 값의 범위는
 $-1 \leq t \leq 3$
 주어진 함수는
 $y = t^2 + 6(t+1) + 2 = t^2 + 6t + 8$
 $= (t+3)^2 - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $-1 \leq t \leq 3$ 에서 $\textcircled{1}$ 은 $t=-1$ 일 때 최솟값 3을 갖는다.
 $\therefore b=3$
 이때 $t=-1$ 에서 $x^2 - 2x = -1$
 $x^2 - 2x + 1 = 0, (x-1)^2 = 0$
 $\therefore x=1 \quad \therefore a=1$
 $\therefore ab = 1 \times 3 = 3$

04-1 ㉡ 최댓값: 10, 최솟값: 1

$x+y=1$ 에서 $y=-x+1$ 이므로
 $2x^2 + 2y^2 = 2x^2 + 2(-x+1)^2 = 4x^2 - 4x + 2$
 $= 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$
 따라서 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $x=-1$ 일 때 최댓값 10,
 $x=\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.

04-2 ㉡ 75

$x+2y=5$ 에서 $x=-2y+5$ 이므로
 $x^2 + y^2 + 1 = (-2y+5)^2 + y^2 + 1 = 5y^2 - 20y + 26$
 $= 5(y-2)^2 + 6$
 따라서 $3 \leq y \leq 6$ 에서 $y=6$ 일 때 최댓값 86, $y=3$ 일 때
 최솟값 11을 가지므로
 $M=86, m=11$
 $\therefore M-m=75$

04-3 ㉮ 최댓값: 6, 최솟값: -10

점 (a, b) 는 이차함수 $y=x^2-4x+3$ 의 그래프 위의 점이므로

$$b=a^2-4a+3$$

$$\begin{aligned}\therefore 2a-b &= 2a-(a^2-4a+3) \\ &= -a^2+6a-3 \\ &= -(a-3)^2+6\end{aligned}$$

따라서 $-1 \leq a \leq 3$ 에서 $a=3$ 일 때 최댓값 6, $a=-1$ 일 때 최솟값 -10을 갖는다.

05-1 ㉮ 9

점 P는 직선 $y=-x+6$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를

$(a, -a+6)$ ($0 < a < 6$)이라 하면

$$\overline{OQ}=a, \overline{PQ}=-a+6$$

직사각형 ROQP의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}S &= a(-a+6) \\ &= -a^2+6a \\ &= -(a-3)^2+9\end{aligned}$$

따라서 $0 < a < 6$ 에서 $a=3$ 일 때 최댓값 9를 가지므로 직사각형 ROQP의 넓이의 최댓값은 9이다.

05-2 ㉮ 98m^2

답장의 세로의 길이를 $x\text{m}$ ($0 < x < 14$)라 하면 철망 전체의 길이가 28m 이므로 가로 길이는

$$(28-2x)\text{m}$$

답장의 넓이를 $S\text{m}^2$ 라 하면

$$\begin{aligned}S &= x(28-2x) \\ &= -2x^2+28x \\ &= -2(x-7)^2+98\end{aligned}$$

따라서 $0 < x < 14$ 에서 $x=7$ 일 때 최댓값 98을 가지므로 답장의 최대 넓이는 98m^2 이다.

연습문제

115~116쪽

- | | | | | |
|-------|------|-----|-------|-------|
| 1 ② | 2 -1 | 3 ② | 4 -60 | 5 ③ |
| 6 ④ | 7 9 | 8 ② | 9 ② | 10 18 |
| 11 12 | | | | |

- 1 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표 -1이 $-2 \leq x \leq 3$ 에 포함되므로 $x=3$ 일 때 최댓값 14, $x=-1$ 일 때 최솟값 -2를 갖는다.

따라서 $M=14$, $m=-2$ 이므로

$$M+m=12$$

- 2 $y=2x^2-4ax+3=2(x-a)^2-2a^2+3$ 은 $x=a$ 일 때 최솟값 $-2a^2+3$ 을 갖는다.

이때 주어진 조건에서 최솟값이 1이므로

$$-2a^2+3=1, a^2=1 \quad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=1$$

그런데 a 는 양수이므로 $a=1$

$$\begin{aligned}\therefore y &= -x^2-2ax+1 = -x^2-2x+1 \\ &= -(x+1)^2+2\end{aligned}$$

꼭짓점의 x 좌표 -1이 $1 \leq x \leq 3$ 에 포함되지 않으므로 $x=1$ 일 때 최댓값 -2를 갖는다.

$$\therefore M=-2$$

$$\therefore a+M=1+(-2)=-1$$

- 3 $y=3x^2-6x+k=3(x-1)^2+k-3$

꼭짓점의 x 좌표 1이 $0 \leq x \leq 3$ 에 포함되므로 $x=1$ 일 때 최솟값 $k-3$ 을 갖는다.

이때 주어진 조건에서 최솟값이 -8이므로

$$k-3=-8 \quad \therefore k=-5$$

따라서 $y=3(x-1)^2-8$ 은 $x=3$ 일 때 최댓값 4를 갖는다.

- 4 $y=-2x^2+12x+k=-2(x-3)^2+k+18$

꼭짓점의 x 좌표 3이 $4 \leq x \leq 6$ 에 포함되지 않으므로 $x=4$ 일 때 최댓값 $k+16$, $x=6$ 일 때 최솟값 k 을 갖는다.

이때 최댓값과 최솟값의 합이 -4이므로

$$(k+16)+k=-4 \quad \therefore k=-10$$

따라서 최댓값은 6, 최솟값은 -10이므로 그 곱은

$$6 \times (-10) = -60$$

- 5 $y=-(x^2-4x+1)^2-4(x^2-4x+1)+3$ 에서

$x^2-4x+1=t$ 로 놓으면

$$t=(x-2)^2-3$$

$1 \leq x \leq 4$ 에서 $x=4$ 일 때 최댓값 1, $x=2$ 일 때 최솟값 -3을 가지므로 t 의 값의 범위는

$$-3 \leq t \leq 1$$

주어진 함수는

$$y=-t^2-4t+3=-(t+2)^2+7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

따라서 $-3 \leq t \leq 1$ 에서 $\textcircled{1}$ 은 $t=-2$ 일 때 최댓값 7,

$t=1$ 일 때 최솟값 -2를 가지므로 그 합은

$$7+(-2)=5$$

- 6 $2x+y=3$ 에서 $y=-2x+3$ 이므로

$$\begin{aligned}y^2-x^2 &= (-2x+3)^2-x^2=3x^2-12x+9 \\ &= 3(x-2)^2-3\end{aligned}$$

따라서 $0 \leq x \leq 5$ 에서 $x=5$ 일 때 최댓값 24, $x=2$ 일 때 최솟값 -3을 가지므로

$$M=24, m=-3 \quad \therefore M-m=27$$

II-3 01 삼차방정식과 사차방정식

삼차방정식과 사차방정식

개념 Check

118쪽

- 1 [답] (1) $x=2$ 또는 $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$
 (2) $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$
 (3) $x=-1$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$
 (4) $x=\pm 2$ 또는 $x=\pm 2i$

문제

119~125쪽

- 01-1 [답] (1) $x=-1$ 또는 $x=-3\pm\sqrt{15}$
 (2) $x=2$ 또는 $x=2\pm i$
 (3) $x=-4$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=5$
 (4) $x=-2$ (중근) 또는 $x=1$ 또는 $x=3$
- (1) $f(x)=x^3+7x^2-6$ 이라 하면
 $f(-1)=-1+7-6=0$
 $x+1$ 은 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면
- $$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 7 & 0 & -6 \\ & & -1 & -6 & 6 \\ \hline & 1 & 6 & -6 & 0 \end{array}$$
- $\therefore f(x)=(x+1)(x^2+6x-6)$
 주어진 방정식은
 $(x+1)(x^2+6x-6)=0$
 $\therefore x=-1$ 또는 $x=-3\pm\sqrt{15}$
- (2) $f(x)=x^3-6x^2+13x-10$ 이라 하면
 $f(2)=8-24+26-10=0$
 $x-2$ 는 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면
- $$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -6 & 13 & -10 \\ & & 2 & -8 & 10 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}$$
- $\therefore f(x)=(x-2)(x^2-4x+5)$
 주어진 방정식은
 $(x-2)(x^2-4x+5)=0$
 $\therefore x=2$ 또는 $x=2\pm i$
- (3) $f(x)=x^4-4x^3-15x^2+58x-40$ 이라 하면
 $f(1)=1-4-15+58-40=0$
 $f(2)=16-32-60+116-40=0$

$x-1$, $x-2$ 는 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -4 & -15 & 58 & -40 \\ & & 1 & -3 & -18 & 40 \\ \hline 2 & 1 & -3 & -18 & 40 & 0 \\ & & 2 & -2 & -40 & \\ \hline & 1 & -1 & -20 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= (x-1)(x-2)(x^2-x-20) \\ &= (x+4)(x-1)(x-2)(x-5) \end{aligned}$$

주어진 방정식은

$$(x+4)(x-1)(x-2)(x-5)=0$$

$$\therefore x=-4 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=5$$

- (4) $f(x)=x^4-9x^2-4x+12$ 라 하면

$$f(1)=1-9-4+12=0$$

$$f(-2)=16-36+8+12=0$$

$x-1$, $x+2$ 는 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & -9 & -4 & 12 \\ & & 1 & 1 & -8 & -12 \\ \hline -2 & 1 & 1 & -8 & -12 & 0 \\ & & -2 & 2 & 12 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= (x-1)(x+2)(x^2-x-6) \\ &= (x+2)^2(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

주어진 방정식은

$$(x+2)^2(x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-2(\text{중근}) \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

01-2 [답] 5

$$f(x)=x^3+2x^2-5x-6 \text{이라 하면}$$

$$f(-1)=-1+2+5-6=0$$

$x+1$ 은 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= (x+1)(x^2+x-6) \\ &= (x+3)(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

주어진 방정식은

$$(x+3)(x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=-3$ 이므로

$$\alpha-\beta=5$$

02-1 ㉔ (1) $x = -4$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = \frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2}$

(2) $x = -1 \pm \sqrt{2}$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{2}i$

(3) $x = 1$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$

(4) $x = -4$ 또는 $x = 3$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

(1) $(x^2 + 3x + 4)(x^2 + 3x - 3) = 8$ 에서

$x^2 + 3x = t$ 로 놓으면

$(t+4)(t-3) = 8$

$t^2 + t - 20 = 0, (t+5)(t-4) = 0$

$\therefore t = -5$ 또는 $t = 4$

(i) $t = -5$ 일 때

$x^2 + 3x + 5 = 0 \quad \therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2}$

(ii) $t = 4$ 일 때

$x^2 + 3x - 4 = 0, (x+4)(x-1) = 0$

$\therefore x = -4$ 또는 $x = 1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x = -4$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = \frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2}$

(2) $(x^2 + 2x)^2 + 2x^2 + 4x - 3 = 0$ 에서

$(x^2 + 2x)^2 + 2(x^2 + 2x) - 3 = 0$

$x^2 + 2x = t$ 로 놓으면

$t^2 + 2t - 3 = 0, (t+3)(t-1) = 0$

$\therefore t = -3$ 또는 $t = 1$

(i) $t = -3$ 일 때

$x^2 + 2x + 3 = 0 \quad \therefore x = -1 \pm \sqrt{2}i$

(ii) $t = 1$ 일 때

$x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \therefore x = -1 \pm \sqrt{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x = -1 \pm \sqrt{2}$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{2}i$

(3) $x(x-2)(x-3)(x-5) + 8 = 0$ 에서

$\{x(x-5)\}\{(x-2)(x-3)\} + 8 = 0$

$(x^2 - 5x)(x^2 - 5x + 6) + 8 = 0$

$x^2 - 5x = t$ 로 놓으면

$t(t+6) + 8 = 0, t^2 + 6t + 8 = 0$

$(t+4)(t+2) = 0 \quad \therefore t = -4$ 또는 $t = -2$

(i) $t = -4$ 일 때

$x^2 - 5x + 4 = 0, (x-1)(x-4) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = 4$

(ii) $t = -2$ 일 때

$x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \therefore x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x = 1$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$

(4) $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3) = 60$ 에서

$\{(x-1)(x+2)\}\{(x-2)(x+3)\} = 60$

$(x^2 + x - 2)(x^2 + x - 6) = 60$

$x^2 + x = t$ 로 놓으면

$(t-2)(t-6) = 60, t^2 - 8t - 48 = 0$

$(t+4)(t-12) = 0 \quad \therefore t = -4$ 또는 $t = 12$

(i) $t = -4$ 일 때

$x^2 + x + 4 = 0 \quad \therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

(ii) $t = 12$ 일 때

$x^2 + x - 12 = 0, (x+4)(x-3) = 0$

$\therefore x = -4$ 또는 $x = 3$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x = -4$ 또는 $x = 3$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

02-2 ㉔ -6

$(x^2 - x - 1)^2 - 2(x^2 - x) - 13 = 0$ 에서 $x^2 - x = t$ 로 놓으면

$(t-1)^2 - 2t - 13 = 0, t^2 - 4t - 12 = 0$

$(t+2)(t-6) = 0 \quad \therefore t = -2$ 또는 $t = 6$

(i) $t = -2$ 일 때

$x^2 - x + 2 = 0$ 이므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$D_1 = 1 - 8 = -7 < 0$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $t = 6$ 일 때

$x^2 - x - 6 = 0$ 이므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2 이라 하면

$D_2 = 1 + 24 = 25 > 0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 이차방정식

$x^2 - x - 6 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 곱은 -6 이다.

03-1 ㉔ (1) $x = \pm i$ 또는 $x = \pm \sqrt{3}$

(2) $x = -1 \pm \sqrt{2}$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}$

(1) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ 에서 $x^2 = t$ 로 놓으면

$t^2 - 2t - 3 = 0, (t+1)(t-3) = 0$

$\therefore t = -1$ 또는 $t = 3$

즉, $x^2 = -1$ 또는 $x^2 = 3$ 이므로

$x = \pm i$ 또는 $x = \pm \sqrt{3}$

(2) $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ 에서 $(x^4 - 2x^2 + 1) - 4x^2 = 0$

$(x^2 - 1)^2 - (2x)^2 = 0$

$(x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$

$\therefore x = -1 \pm \sqrt{2}$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}$

03-2 ㉔ $2\sqrt{2}$

$x^4+5x^2-14=0$ 에서 $x^2=t$ 로 놓으면

$$t^2+5t-14=0, (t+7)(t-2)=0$$

$$\therefore t=-7 \text{ 또는 } t=2$$

즉, $x^2=-7$ 또는 $x^2=2$ 이므로

$$x=\pm\sqrt{7}i \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{2}$$

α, β 는 실수이고, $\alpha>\beta$ 이므로

$$\alpha=\sqrt{2}, \beta=-\sqrt{2}$$

$$\therefore \alpha-\beta=2\sqrt{2}$$

03-3 ㉔ $x=-1\pm i$ 또는 $x=1\pm i$

$x^4+4=0$ 에서 $(x^4+4x^2+4)-4x^2=0$

$$(x^2+2)^2-(2x)^2=0$$

$$(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=0$$

$$\therefore x=-1\pm i \text{ 또는 } x=1\pm i$$

04-1 ㉔ $x=-2\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

$x\neq 0$ 이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2+7x+14+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+7\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+7\left(x+\frac{1}{x}\right)+12=0$$

$x+\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면

$$t^2+7t+12=0, (t+4)(t+3)=0$$

$$\therefore t=-4 \text{ 또는 } t=-3$$

(i) $t=-4$ 일 때

$$x+\frac{1}{x}+4=0, x^2+4x+1=0$$

$$\therefore x=-2\pm\sqrt{3}$$

(ii) $t=-3$ 일 때

$$x+\frac{1}{x}+3=0, x^2+3x+1=0$$

$$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x=-2\pm\sqrt{3} \text{ 또는 } x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

04-2 ㉔ $\frac{3}{2}$

$x\neq 0$ 이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2 으로 나누면

$$2x^2-7x+10-\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2}=0$$

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+10=0$$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$$

$x+\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면

$$2t^2-7t+6=0, (2t-3)(t-2)=0$$

$$\therefore t=\frac{3}{2} \text{ 또는 } t=2$$

(i) $t=\frac{3}{2}$ 일 때

$$x+\frac{1}{x}-\frac{3}{2}=0, 2x^2-3x+2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1=9-16=-7<0$$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $t=2$ 일 때

$$x+\frac{1}{x}-2=0, x^2-2x+1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=1-1=0$$

따라서 중근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 허근은 이차방정식

$2x^2-3x+2=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하

여 두 허근의 합은 $\frac{3}{2}$ 이다.

05-1 ㉔ $1-2i, 1+2i$

삼차방정식 $x^3+kx^2-(3k+2)x-5=0$ 의 한 근이 1이

므로 $x=1$ 을 대입하면

$$1+k-(3k+2)-5=0$$

$$-2k-6=0 \quad \therefore k=-3$$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^3-3x^2+7x-5=0$$

이 방정식의 한 근이 1이므로 조립제법을 이용하여 좌변을

인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 7 & -5 \\ & & 1 & -2 & 5 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & 0 \end{array}$$

$$\therefore (x-1)(x^2-2x+5)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=1\pm 2i$$

따라서 나머지 두 근은 $1-2i, 1+2i$ 이다.

05-2 ㉔ -2

삼차방정식 $x^3+ax^2+(a+1)x+4a=0$ 의 한 근이 2이

므로 $x=2$ 를 대입하면

$$8+4a+2(a+1)+4a=0$$

$$10a+10=0 \quad \therefore a=-1$$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^3 - x^2 - 4 = 0$$

이 방정식의 한 근이 2이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & 0 & -4 \\ & & 2 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\therefore (x-2)(x^2+x+2)=0$$

따라서 나머지 두 근 α, β 는 이차방정식 $x^2+x+2=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -1$$

$$\therefore \alpha + \alpha + \beta = -1 + (-1) = -2$$

05-3 ㉡ 3

사차방정식 $x^4 + ax^3 + 2x^2 - 5x - b = 0$ 의 두 근이 $-1, 1$

이므로 $x = -1, x = 1$ 을 각각 대입하면

$$1 - a + 2 + 5 - b = 0, 1 + a + 2 - 5 - b = 0$$

$$\therefore a + b = 8, a - b = 2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 5, b = 3$$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

이 방정식의 두 근이 $-1, 1$ 이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 5 & 2 & -5 & -3 \\ & & -1 & -4 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 4 & -2 & -3 & 0 \\ & & 1 & 5 & 3 & \\ \hline & 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\therefore (x+1)(x-1)(x^2+5x+3)=0$$

따라서 주어진 방정식의 나머지 두 근은 이차방정식

$x^2+5x+3=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 3이다.

06-1 ㉡ $a \leq 3$

$$f(x) = x^3 - 8x^2 + 3(a+4)x - 6a \text{라 하면}$$

$$f(2) = 8 - 32 + 6a + 24 - 6a = 0$$

$x=2$ 는 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -8 & 3a+12 & -6a \\ & & 2 & -12 & 6a \\ \hline & 1 & -6 & 3a & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x-2)(x^2-6x+3a)$$

이때 주어진 방정식의 근이 모두 실수이려면 이차방정식

$$x^2 - 6x + 3a = 0 \text{이 실근을 가져야 한다.}$$

이차방정식 $x^2 - 6x + 3a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - 3a \geq 0 \quad \therefore a \leq 3$$

06-2 ㉡ $k > \frac{1}{4}$

$$f(x) = x^3 + (1-k)x^2 - k^2 \text{이라 하면}$$

$$f(k) = k^3 + (1-k)k^2 - k^2 = 0$$

$x=k$ 는 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} k & 1 & 1-k & 0 & -k^2 \\ & & k & k & k^2 \\ \hline & 1 & 1 & k & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x-k)(x^2+x+k)$$

이때 k 는 실수이므로 주어진 방정식이 허근을 가지려면

이차방정식 $x^2+x+k=0$ 이 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+x+k=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1 - 4k < 0 \quad \therefore k > \frac{1}{4}$$

06-3 ㉡ 14

$$f(x) = x^3 + 10x^2 + 2(m+8)x + 4m \text{이라 하면}$$

$$f(-2) = -8 + 40 - 4m - 32 + 4m = 0$$

$x+2$ 는 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 10 & 2m+16 & 4m \\ & & -2 & -16 & -4m \\ \hline & 1 & 8 & 2m & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x+2)(x^2+8x+2m)$$

이때 주어진 방정식이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

이차방정식 $x^2+8x+2m=0$ 이 -2 와 다른 한 실근을 갖거나 -2 가 아닌 중근을 가져야 한다.

(i) $x^2+8x+2m=0$ 이 -2 를 근으로 갖는 경우

$$x = -2 \text{를 대입하면}$$

$$4 - 16 + 2m = 0 \quad \therefore m = 6$$

(ii) $x^2+8x+2m=0$ 이 -2 가 아닌 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+8x+2m=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 16 - 2m = 0 \quad \therefore m = 8$$

(i), (ii)에서

$$m = 6 \text{ 또는 } m = 8$$

따라서 모든 m 의 값의 합은

$$6 + 8 = 14$$

07-1 ㉡ 3

뚜껑 없는 직육면체 모양의 상자의 부피가 420cm^3 이므로

$$(20-2x)(16-2x)x=420$$

$$x^3-18x^2+80x-105=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(x)=x^3-18x^2+80x-105$ 라 하면

$$f(3)=27-162+240-105=0$$

$x-3$ 은 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -18 & 80 & -105 \\ & & 3 & -45 & 105 \\ \hline & 1 & -15 & 35 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-3)(x^2-15x+35)$$

$$\text{따라서 } \textcircled{1} \text{은 } (x-3)(x^2-15x+35)=0$$

그런데 x 는 자연수이므로 $x=3$

07-2 ㉡ 8m

원기둥의 밑면의 반지름의 길이와 높이를 $x\text{m}$ 라 하자.

$320\pi\text{m}^3$ 의 물을 부었을 때 물의 높이가 $(x-3)\text{m}$ 이므로

$$\pi x^2 \times (x-3)=320\pi$$

$$x^3-3x^2-320=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(x)=x^3-3x^2-320$ 이라 하면

$$f(8)=512-192-320=0$$

$x-8$ 은 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 8 & 1 & -3 & 0 & -320 \\ & & 8 & 40 & 320 \\ \hline & 1 & 5 & 40 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-8)(x^2+5x+40)$$

$$\text{따라서 } \textcircled{1} \text{은 } (x-8)(x^2+5x+40)=0$$

그런데 $x>3$ 이므로 $x=8$

따라서 수족관의 높이는 8m 이다.

2 삼차방정식의 근과 계수의 관계

문제

127~129쪽

08-1 ㉡ 1

삼차방정식 $2x^3-6x^2-5x+4=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 합은

$$m=-\frac{-6}{2}=3$$

$$\text{세 근의 곱은 } n=-\frac{4}{2}=-2$$

$$\therefore m+n=3+(-2)=1$$

08-2 ㉡ (1) 5 (2) 14 (3) $\frac{3}{2}$ (4) $-\frac{5}{2}$

삼차방정식 $x^3+x^2+3x-2=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-1, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3, \alpha\beta\gamma=2$$

$$(1) (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$$

$$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$$

$$=2+3+(-1)+1=5$$

$$(2) \alpha^3+\beta^3+\gamma^3$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}$$

$$+3\alpha\beta\gamma$$

$$=-1 \times \{(-1)^2-3 \times 3\}+3 \times 2=14$$

$$(3) \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{3}{2}$$

$$(4) \frac{\gamma}{\alpha\beta}+\frac{\alpha}{\beta\gamma}+\frac{\beta}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma}$$

$$=\frac{(-1)^2-2 \times 3}{2}=-\frac{5}{2}$$

08-3 ㉡ $a=14, b=-8$

삼차방정식 $x^3-7x^2+ax+b=0$ 의 세 근을

$$\alpha, 2\alpha, 4\alpha (\alpha \neq 0)$$

라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 합은

$$\alpha+2\alpha+4\alpha=7 \quad \therefore \alpha=1$$

따라서 세 근이 1, 2, 4이므로 두 근끼리의 곱의 합은

$$1 \times 2+2 \times 4+4 \times 1=a \quad \therefore a=14$$

세 근의 곱은

$$1 \times 2 \times 4=-b \quad \therefore b=-8$$

09-1 ㉡ $3x^3-x^2+2x+1=0$

삼차방정식 $x^3+2x^2-x+3=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1, \alpha\beta\gamma=-3$$

세 근 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 에 대하여

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \times \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = -\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$$3\left(x^3-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)=0$$

$$\therefore 3x^3-x^2+2x+1=0$$

09-2 ㉔ $x^3+x+3=0$

삼차방정식 $x^3+x-3=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1, \alpha\beta\gamma=3$$

$$\alpha+\beta+\gamma=0\text{에서}$$

$$\alpha+\beta=-\gamma, \beta+\gamma=-\alpha, \gamma+\alpha=-\beta$$

즉, $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 를 세 근으로 하는 삼차방정식은 $-\gamma, -\alpha, -\beta$ 를 세 근으로 하는 삼차방정식과 같다.

세 근 $-\alpha, -\beta, -\gamma$ 에 대하여

$$-\alpha+(-\beta)+(-\gamma)=-(\alpha+\beta+\gamma)=0$$

$$-\alpha\times(-\beta)+(-\beta)\times(-\gamma)+(-\gamma)\times(-\alpha)$$

$$=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

$$=1$$

$$-\alpha\times(-\beta)\times(-\gamma)=-\alpha\beta\gamma=-3$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$$x^3+x+3=0$$

10-1 ㉔ $a=5, b=-26$

계수가 실수이므로 $-2+3i$ 가 근이면 $-2-3i$ 도 근이다.

나머지 한 근을 α 라 하면 삼차방정식 $x^3+2x^2+ax+b=0$

에서 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 합은

$$(-2+3i)+(-2-3i)+\alpha=-2 \quad \therefore \alpha=2$$

즉, 세 근이 $-2+3i, -2-3i, 2$ 이므로 두 근끼리의 곱의 합은

$$(-2+3i)(-2-3i)+(-2-3i)\times 2+2(-2+3i)=a$$

$$\therefore a=5$$

세 근의 곱은

$$(-2+3i)(-2-3i)\times 2=-b$$

$$\therefore b=-26$$

10-2 ㉔ -14

계수가 유리수이므로 $2-\sqrt{2}$ 가 근이면 $2+\sqrt{2}$ 도 근이다.

나머지 한 근이 c 이므로 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+6=0$

에서 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 곱은

$$(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})c=-6$$

$$\therefore c=-3$$

즉, 세 근이 $2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, -3$ 이므로 세 근의 합은

$$(2-\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})+(-3)=-a$$

$$\therefore a=-1$$

두 근끼리의 곱의 합은

$$(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})\times(-3)$$

$$+(-3)\times(2-\sqrt{2})=b$$

$$\therefore b=-10$$

$$\therefore a+b+c=-1+(-10)+(-3)=-14$$

3 방정식 $x^3=1$ 의 허근의 성질

개념 Check

130쪽

1 ㉔ (1) 1 (2) 0 (3) -1 (4) 1

$$x^3=1\text{에서 } x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$$

ω 는 $x^3=1$ 의 한 허근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로 다른 한 근은 $\bar{\omega}$ 이다.

$$\therefore \omega+\bar{\omega}=-1, \omega\bar{\omega}=1$$

$$(1) \omega^{12}=(\omega^3)^4=1$$

$$(2) \omega^5+\omega^4+\omega^3=\omega^3(\omega^2+\omega+1)=1\times 0=0$$

$$(3) \frac{\omega\bar{\omega}}{\omega+\bar{\omega}}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$(4) (\omega+1)(\bar{\omega}+1)=\omega\bar{\omega}+\omega+\bar{\omega}+1=1+(-1)+1=1$$

문제

131쪽

11-1 ㉔ (1) -1 (2) 2 (3) -2 (4) -1

$$x^3-1=0\text{에서 } (x-1)(x^2+x+1)=0$$

ω 는 방정식 $x^3-1=0$ 의 한 허근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로 다른 한 근은 $\bar{\omega}$ 이다.

$$\therefore \omega+\bar{\omega}=-1, \omega\bar{\omega}=1$$

$$(1) \omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\cdots+\omega^{200}$$

$$=\omega+\omega^2+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\omega^6(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{198}(1+\omega+\omega^2)$$

$$=\omega+\omega^2+1\times 0+1\times 0+\cdots+1\times 0$$

$$=\omega+\omega^2=-1$$

$$(2) (1+\omega^{1000})(1+\omega^{1001})(1+\omega^{1002})$$

$$=\{1+(\omega^3)^{333}\times\omega\}\{1+(\omega^3)^{333}\times\omega^2\}\{1+(\omega^3)^{334}\}$$

$$=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+1)$$

$$=-\omega^2\times(-\omega)\times 2$$

$$=2\omega^3=2$$

$$(3) \frac{2\omega\bar{\omega}}{\omega^2+\bar{\omega}^2}=\frac{2\omega\bar{\omega}}{(\omega+\bar{\omega})^2-2\omega\bar{\omega}}$$

$$=\frac{2\times 1}{(-1)^2-2\times 1}=-2$$

$$(4) \frac{\omega}{1-\omega}+\frac{\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}}=\frac{\omega(1-\bar{\omega})+\bar{\omega}(1-\omega)}{(1-\omega)(1-\bar{\omega})}$$

$$=\frac{\omega+\bar{\omega}-2\omega\bar{\omega}}{1-(\omega+\bar{\omega})+\omega\bar{\omega}}$$

$$=\frac{-1-2\times 1}{1-(-1)+1}=-1$$

11-2 ㉡ 2

$$x^3 = -1 \text{에서 } x^3 + 1 = 0, (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$$

ω 는 방정식 $x^3 + 1 = 0$ 의 한 허근이므로

$$\omega^3 = -1, \omega^2 - \omega + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\omega^{17}}{1+\omega^{16}} - \frac{\omega^{16}}{1-\omega^{17}} &= \frac{(\omega^3)^5 \times \omega^2}{1+(\omega^3)^5 \times \omega} - \frac{(\omega^3)^5 \times \omega}{1-(\omega^3)^5 \times \omega^2} \\ &= \frac{-\omega^2}{1-\omega} - \frac{-\omega}{1+\omega^2} \\ &= \frac{-\omega^2}{-\omega^2} - \frac{-\omega}{\omega} \\ &= 1 - (-1) = 2 \end{aligned}$$

연습문제

132~134쪽

- | | | | | |
|----------------|-----------------|------|------|--------|
| 1 ③ | 2 $\frac{5}{2}$ | 3 ① | 4 ⑤ | 5 -4 |
| 6 $1+\sqrt{2}$ | 7 ② | 8 10 | 9 ③ | 10 6 |
| 11 ④ | 12 36 | 13 3 | 14 ② | 15 200 |
| 16 ④ | 17 ③ | 18 1 | 19 ② | 20 -21 |
| 21 -10 | | | | |

- 1 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ 이라 하면 $f(1) = 0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= (x-1)(x^2 - x - 6) \\ &= (x+2)(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

주어진 방정식은

$$(x+2)(x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

$\alpha < \beta < \gamma$ 이므로

$$\alpha = -2, \beta = 1, \gamma = 3$$

$$\therefore \alpha + \beta + 2\gamma = -2 + 1 + 6 = 5$$

- 2 $f(x) = 2x^4 + x^3 - 9x^2 - 4x + 4$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & 1 & -9 & -4 & 4 \\ & & -2 & 1 & 8 & -4 \\ \hline 2 & 2 & -1 & -8 & 4 & 0 \\ & & 4 & 6 & -4 & \\ \hline & 2 & 3 & -2 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= (x+1)(x-2)(2x^2 + 3x - 2) \\ &= (x+2)(x+1)(2x-1)(x-2) \end{aligned}$$

주어진 방정식은

$$(x+2)(x+1)(2x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 모든 양의 근의 합은

$$\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

- 3 $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 3$ 이라 하면 $f(-1) = 0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ & & -2 & 1 & -3 \\ \hline & 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x+1)(2x^2 - x + 3)$$

주어진 방정식은

$$(x+1)(2x^2 - x + 3) = 0$$

이 방정식의 한 허근 α 는 이차방정식 $2x^2 - x + 3 = 0$ 의 근이므로

$$2\alpha^2 - \alpha + 3 = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore 4\alpha^2 - 2\alpha + 7 &= 2(2\alpha^2 - \alpha + 3) + 1 \\ &= 2 \times 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

- 4 $(x+5)(x+3)(x+1)(x-1) + 15 = 0$ 에서 $\{(x+5)(x-1)\}\{(x+3)(x+1)\} + 15 = 0$

$$(x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) + 15 = 0$$

$x^2 + 4x = t$ 로 놓으면

$$(t-5)(t+3) + 15 = 0$$

$$t^2 - 2t = 0, t(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = 2$$

(i) $t = 0$ 일 때

$$x^2 + 4x = 0, x(x+4) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 0$$

(ii) $t = 2$ 일 때

$$x^2 + 4x - 2 = 0 \quad \therefore x = -2 \pm \sqrt{6}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$$x = -4 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = -2 \pm \sqrt{6}$$

따라서 근이 아닌 것은 ⑤이다.

- 5 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ 에서 $x^2 = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 5t + 4 = 0, (t-1)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 4$$

즉, $x^2 = 1$ 또는 $x^2 = 4$ 이므로

$$x = -2 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 네 근 중 가장 큰 근은 2, 가장 작은 근은 -2이므로 그 곱은 -4이다.

- 6 삼차방정식 $x^3+ax^2-3x-1=0$ 의 한 근이 -1 이므로 $x=-1$ 을 대입하면

$$-1+a+3-1=0 \quad \therefore a=-1$$

주어진 방정식은 $x^3-x^2-3x-1=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ & & -1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\therefore (x+1)(x^2-2x-1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1\pm\sqrt{2}$$

따라서 나머지 두 근 중 큰 근은 $1+\sqrt{2}$ 이다.

- 7 $f(x)=x^3+(k-1)x^2-k$ 라 하면 $f(1)=0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & k-1 & 0 & -k \\ & & 1 & k & k \\ \hline & 1 & k & k & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+kx+k)$$

주어진 방정식은

$$(x-1)(x^2+kx+k)=0$$

이 방정식의 한 허근 z 는 이차방정식 $x^2+kx+k=0$ 의 한 근이다.

계수가 실수이므로 다른 한 허근은 $\bar{z}$ 이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$z+\bar{z}=-k$$

$$\text{이때 } z+\bar{z}=-2 \text{에서}$$

$$-k=-2 \quad \therefore k=2$$

- 8 $f(x)=x^3-8x^2+(a+12)x-2a$ 라 하면 $f(2)=0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -8 & a+12 & -2a \\ & & 2 & -12 & 2a \\ \hline & 1 & -6 & a & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-2)(x^2-6x+a)$$

주어진 방정식은

$$(x-2)(x^2-6x+a)=0$$

이 방정식의 서로 다른 실근이 한 개이려면 이차방정식 $x^2-6x+a=0$ 이 $x=2$ 를 중근으로 갖거나 허근을 가져야 한다.

- (i) $x^2-6x+a=0$ 이 $x=2$ 를 중근으로 갖는 경우

이를 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

- (ii) $x^2-6x+a=0$ 이 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-6x+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=9-a<0 \quad \therefore a>9$$

- (i), (ii)에서 $a>9$

따라서 정수 a 의 최솟값은 10이다.

- 9 $f(x)=x^4+x^3+(k-1)x^2-x-k$ 라 하면 $f(1)=0$, $f(-1)=0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & k-1 & -1 & -k \\ & & 1 & 2 & k+1 & k \\ \hline -1 & 1 & 2 & k+1 & k & 0 \\ & & -1 & -1 & -k & \\ \hline & 1 & 1 & k & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x+1)(x-1)(x^2+x+k)$$

이때 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+x+k=0$ 이 -1 , 1 이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

- (i) $x^2+x+k=0$ 에서 $x \neq -1$ 이어야 하므로

$$1-1+k \neq 0$$

$$\therefore k \neq 0$$

- (ii) $x^2+x+k=0$ 에서 $x \neq 1$ 이어야 하므로

$$1+1+k \neq 0$$

$$\therefore k \neq -2$$

- (iii) 이차방정식 $x^2+x+k=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=1-4k>0$$

$$\therefore k<\frac{1}{4}$$

- (i), (ii), (iii)에서 k 의 값의 범위는

$$k<-2 \text{ 또는 } -2<k<0 \text{ 또는 } 0<k<\frac{1}{4}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -1 이다.

- 10 구멍을 파내고 남은 부분의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{1}{2}$ 보다 12만큼 작으므로

$$x^3-5 \times 4 \times x = \frac{1}{2}x^3-12$$

$$x^3-40x+24=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$f(x)=x^3-40x+24 \text{라 하면 } f(6)=0 \text{이므로}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 6 & 1 & 0 & -40 & 24 \\ & & 6 & 36 & -24 \\ \hline & 1 & 6 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-6)(x^2+6x-4)$$

$$\text{따라서 } \textcircled{7} \text{은 } (x-6)(x^2+6x-4)=0$$

$$\text{그런데 } x>5 \text{이므로 } x=6$$

- 11 삼차방정식 $x^3+2x^2+5x+3=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5, \alpha\beta\gamma=-3$$

$$\alpha+\beta+\gamma=-2 \text{에서}$$

$$\alpha+\beta=-2-\gamma, \beta+\gamma=-2-\alpha, \gamma+\alpha=-2-\beta$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma} \\ = \frac{-2-\alpha}{\alpha} + \frac{-2-\beta}{\beta} + \frac{-2-\gamma}{\gamma} \\ = -\frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\beta} - \frac{2}{\gamma} - 3 \\ = -2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) - 3 \\ = -2 \times \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} - 3 \\ = -2 \times \frac{5}{-3} - 3 \\ = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

12 $f(a)=f(b)=f(c)=-3$ 에서

$$f(a)+3=f(b)+3=f(c)+3=0$$

따라서 a, b, c 는 삼차방정식 $f(x)+3=0$, 즉

$x^3-4x^2-10x+12=0$ 의 세 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+b+c=4, ab+bc+ca=-10$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= 4^2 - 2 \times (-10) = 36 \end{aligned}$$

13 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+6=0$ 의 한 근이 1이므로 나머지 두 근을 α, β 라 하면 제곱의 합이 13이므로

$$\alpha^2+\beta^2=13$$

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+6=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 합은

$$1+\alpha+\beta=-a$$

$$\therefore \alpha+\beta=-a-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

두 근끼리의 곱의 합은

$$1 \times \alpha + \alpha\beta + \beta \times 1 = b$$

$$\therefore \alpha+\beta+\alpha\beta=b \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

세 근의 곱은

$$1 \times \alpha \times \beta = -6 \quad \therefore \alpha\beta = -6 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

이때 $\alpha^2+\beta^2=13$ 에서

$$(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 13$$

$\textcircled{A}, \textcircled{C}$ 을 대입하면

$$(-a-1)^2 - 2 \times (-6) = 13$$

$$a^2+2a=0, a(a+2)=0$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=0$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $a=-2$

이를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면 $\alpha+\beta=1$

따라서 $\textcircled{B}$ 에서

$$b=\alpha+\beta+\alpha\beta=1+(-6)=-5$$

$$\therefore a-b=-2-(-5)=3$$

14 삼차방정식 $x^3-2x^2+4x+3=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4, \alpha\beta\gamma=-3$$

세 근 $\alpha-2, \beta-2, \gamma-2$ 에 대하여

$$\begin{aligned} (\alpha-2)+(\beta-2)+(\gamma-2) &= (\alpha+\beta+\gamma)-6 \\ &= 2-6=-4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha-2)(\beta-2)+(\beta-2)(\gamma-2)+(\gamma-2)(\alpha-2) \\ = (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-4(\alpha+\beta+\gamma)+12 \\ = 4-4 \times 2+12=8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2) \\ = \alpha\beta\gamma-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4(\alpha+\beta+\gamma)-8 \\ = -3-2 \times 4+4 \times 2-8=-11 \end{aligned}$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$$a(x^3+4x^2+8x+11)=0(a \neq 0) \text{ 꼴이므로 } \textcircled{2} \text{이다.}$$

15 계수가 유리수이므로 $3-2\sqrt{2}$ 가 근이면 $3+2\sqrt{2}$ 도 근이다.

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+2=0$ 의 세 근이 $-1,$

$3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 곱은

$$-1 \times (3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = -\frac{2}{a} \quad \therefore a=2$$

세 근의 합은

$$-1+(3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2}) = -\frac{b}{a}$$

$$5 = -\frac{b}{2} \quad \therefore b=-10$$

두 근끼리의 곱의 합은

$$\begin{aligned} -1 \times (3-2\sqrt{2}) + (3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) \\ + (3+2\sqrt{2}) \times (-1) = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

$$-5 = \frac{c}{2} \quad \therefore c=-10$$

$$\therefore abc=2 \times (-10) \times (-10)=200$$

$$16 \quad \frac{3}{1+\sqrt{2}i} = \frac{3(1-\sqrt{2}i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)} = 1-\sqrt{2}i$$

계수가 실수이므로 한 근이 $1-\sqrt{2}i$ 이면 $1+\sqrt{2}i$ 도 근이다.

나머지 한 근이 α 이므로 삼차방정식 $x^3+ax^2+9x+b=0$

에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근끼리의 곱의 합은

$$(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i) + (1+\sqrt{2}i)\alpha + \alpha(1-\sqrt{2}i) = 9$$

$$\therefore \alpha=3$$

즉, 세 근이 $1-\sqrt{2}i, 1+\sqrt{2}i, 3$ 이므로 세 근의 합은

$$(1-\sqrt{2}i)+(1+\sqrt{2}i)+3 = -a \quad \therefore a=-5$$

세 근의 곱은

$$(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i) \times 3 = -b \quad \therefore b=-9$$

$$\therefore ab+a=-5 \times (-9)+3=48$$

17 $x^3=1$ 에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω 는 방정식 $x^3=1$ 의 한 허근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로 다른 한 근은 $\bar{\omega}$ 이다.

$$\therefore \omega+\bar{\omega}=-1, \omega\bar{\omega}=1$$

$$\textcircled{1} (1+\omega)^3=(-\omega^2)^3=-\omega^6$$

$$=-(\omega^3)^2=-1$$

$$\textcircled{2} \omega^2\bar{\omega}+\omega\bar{\omega}^2=\omega\bar{\omega}(\omega+\bar{\omega})$$

$$=1 \times (-1)=-1$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$$

$$\textcircled{4} \omega^{500}=(\omega^3)^{166} \times \omega^2=\omega^2 \text{이므로}$$

$$\omega^{500}+\frac{1}{\omega^{500}}=\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\omega^2+\frac{\omega^3}{\omega^2}$$

$$=\omega^2+\omega=-1$$

$$\textcircled{5} \omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\cdots+\omega^{101}$$

$$=\omega+\omega^2+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{99}(1+\omega+\omega^2)$$

$$=\omega+\omega^2=-1$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

18 $x \neq 0$ 이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$x+\frac{1}{x}=t \text{로 놓으면}$$

$$t^2+2t-3=0, (t+3)(t-1)=0$$

$$\therefore t=-3 \text{ 또는 } t=1$$

(i) $t=-3$ 일 때

$$x+\frac{1}{x}+3=0, x^2+3x+1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1=9-4=5>0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $t=1$ 일 때

$$x+\frac{1}{x}-1=0, x^2-x+1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2=1-4=-3<0$$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 한 허근 α 는 방정식

$$x+\frac{1}{x}-1=0 \text{의 근이므로}$$

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}-1=0 \quad \therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=1$$

19 $f(x)=x^3-3x^2+(k+2)x-k$ 라 하면 $f(1)=0$ 이므로

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & k+2 & -k \\ & & 1 & -2 & k \\ \hline & 1 & -2 & k & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-1)(x^2-2x+k)$$

$$\text{주어진 방정식은 } (x-1)(x^2-2x+k)=0$$

이차방정식 $x^2-2x+k=0$ 이 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=1-k>0 \quad \therefore k<1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2-2x+k=0$ 의 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha>\beta)$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2, \alpha\beta=k$$

1, α, β 는 직각삼각형의 세 변의 길이이므로 빗변의 길이가 1, α 인 경우로 나누어 생각하자.

(i) 빗변의 길이가 1인 경우

$$\alpha^2+\beta^2=1 \text{이므로 } (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1$$

$$2^2-2k=1 \quad \therefore k=\frac{3}{2}$$

이는 ①을 만족시키지 않는다.

(ii) 빗변의 길이가 α 인 경우

$$1+\beta^2=\alpha^2 \text{이므로 } \alpha^2-\beta^2=1$$

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=1$$

$$2(\alpha-\beta)=1 \quad \therefore \alpha-\beta=\frac{1}{2}$$

이를 $\alpha+\beta=2$ 와 연립하여 풀면

$$\alpha=\frac{5}{4}, \beta=\frac{3}{4} \quad \therefore k=\alpha\beta=\frac{15}{16}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } k=\frac{15}{16}$$

다른 풀이

$f(x)=x^3-3x^2+(k+2)x-k$ 라 하면 $f(1)=0$ 이므로

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & k+2 & -k \\ & & 1 & -2 & k \\ \hline & 1 & -2 & k & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-1)(x^2-2x+k)$$

$$\text{주어진 방정식은 } (x-1)(x^2-2x+k)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=1 \pm \sqrt{1-k} \quad (k<1)$$

세 실근 1, $1-\sqrt{1-k}$, $1+\sqrt{1-k}$ 가 직각삼각형의 세 변의 길이이고, 가장 큰 근이 빗변의 길이이므로

$$(1+\sqrt{1-k})^2=1^2+(1-\sqrt{1-k})^2$$

$$1+2\sqrt{1-k}+1-k=1+1-2\sqrt{1-k}+1-k$$

$$4\sqrt{1-k}=1, \sqrt{1-k}=\frac{1}{4}$$

양변을 제곱하면

$$1-k=\frac{1}{16} \quad \therefore k=\frac{15}{16}$$

20 삼차방정식 $x^3-ax^2+bx-c=0$ 의 계수가 실수이고, (㉞)에서 $1-i$ 가 근이므로 $1+i$ 도 근이다.

나머지 한 근을 α 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 합은

$$(1-i)+(1+i)+\alpha=a$$

$$\therefore a=a+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉞}$$

두 근끼리의 곱의 합은

$$(1-i)(1+i)+(1+i)\alpha+\alpha(1-i)=b$$

$$\therefore b=2a+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉟}$$

세 근의 곱은

$$(1-i)(1+i)\alpha=c$$

$$\therefore c=2a \quad \cdots \cdots \textcircled{㊱}$$

(㉞)에서 $f(1)=6$ 이므로

$$1-a+b-c=6 \quad \therefore a-b+c=-5$$

㉞, ㉟, ㊱을 대입하면

$$a+2-(2a+2)+2a=-5$$

$$\therefore a=-5$$

이를 ㉞, ㉟, ㊱에 각각 대입하면

$$a=-3, b=-8, c=-10$$

$$\therefore a+b+c=-21$$

21 $x^3=1$ 에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω 는 방정식 $x^3=1$ 의 한 허근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

음이 아닌 정수 k 에 대하여

(i) $n=3k+1$ 일 때

$$\omega^n=\omega^{3k+1}=(\omega^3)^k \times \omega=\omega$$

$$\omega^{2n}=(\omega^n)^2=\omega^2$$

$$\therefore f(n)=\frac{\omega^n}{1+\omega^{2n}}=\frac{\omega}{1+\omega^2}=\frac{\omega}{-\omega}=-1$$

(ii) $n=3k+2$ 일 때

$$\omega^n=\omega^{3k+2}=(\omega^3)^k \times \omega^2=\omega^2$$

$$\omega^{2n}=(\omega^n)^2=\omega^4=\omega$$

$$\therefore f(n)=\frac{\omega^n}{1+\omega^{2n}}=\frac{\omega^2}{1+\omega}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$$

(iii) $n=3k+3$ 일 때

$$\omega^n=\omega^{3k+3}=(\omega^3)^{k+1}=1$$

$$\omega^{2n}=(\omega^n)^2=1$$

$$\therefore f(n)=\frac{\omega^n}{1+\omega^{2n}}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(19)$$

$$=\{f(1)+f(2)+f(3)\}+\{f(4)+f(5)+f(6)\}$$

$$+\cdots+\{f(16)+f(17)+f(18)\}+f(19)$$

$$=6 \times \left\{ -1+(-1)+\frac{1}{2} \right\} + (-1)$$

$$=-10$$

II-3 02 연립이차방정식

미지수가 2개인 연립이차방정식

문제

137~141쪽

01-1 ㉞ (1) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

(1) $2x-y=1$ 에서 $y=2x-1$

이를 $3x^2-y^2=2$ 에 대입하면

$$3x^2-(2x-1)^2=2, x^2-4x+3=0$$

$$(x-1)(x-3)=0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

이를 각각 $y=2x-1$ 에 대입하면

$$x=1 \text{ 일 때 } y=1, x=3 \text{ 일 때 } y=5$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

(2) $x-y=3$ 에서 $y=x-3$

이를 $x^2+2xy+y^2=1$ 에 대입하면

$$x^2+2x(x-3)+(x-3)^2=1$$

$$x^2-3x+2=0, (x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

이를 각각 $y=x-3$ 에 대입하면

$$x=1 \text{ 일 때 } y=-2, x=2 \text{ 일 때 } y=-1$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

01-2 ㉞ 6

$$x-2y=3 \text{ 에서 } x=2y+3$$

이를 $x^2+2y^2=99$ 에 대입하면

$$(2y+3)^2+2y^2=99, y^2+2y-15=0$$

$$(y+5)(y-3)=0 \quad \therefore y=-5 \text{ 또는 } y=3$$

그런데 y 는 양수이므로 $y=3$

이를 $x=2y+3$ 에 대입하면 $x=9$

$$\therefore x-y=9-3=6$$

01-3 ㉞ 15

$$3x-y-1=0 \text{ 에서 } y=3x-1$$

이를 $x^2-3xy+y^2=5$ 에 대입하면

$$x^2-3x(3x-1)+(3x-1)^2=5$$

$$x^2-3x-4=0, (x+1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=4$$

이를 각각 $y=3x-1$ 에 대입하면
 $x=-1$ 일 때 $y=-4$, $x=4$ 일 때 $y=11$
 $\therefore x+y=-5$ 또는 $x+y=15$
따라서 $x+y$ 의 최댓값은 15이다.

02-1 ㉠ (1) $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$
또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$
(2) $\begin{cases} x=-2\sqrt{3}i \\ y=\sqrt{3}i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{3}i \\ y=-\sqrt{3}i \end{cases}$
또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

(1) $x^2-2xy-3y^2=0$ 에서 $(x+y)(x-3y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=-y$ 일 때

이를 $x^2+y^2=10$ 에 대입하면

$y^2+y^2=10$, $y^2=5$ $\therefore y=-\sqrt{5}$ 또는 $y=\sqrt{5}$

이를 각각 $x=-y$ 에 대입하면

$y=-\sqrt{5}$ 일 때 $x=\sqrt{5}$, $y=\sqrt{5}$ 일 때 $x=-\sqrt{5}$

(ii) $x=3y$ 일 때

이를 $x^2+y^2=10$ 에 대입하면

$9y^2+y^2=10$, $y^2=1$ $\therefore y=-1$ 또는 $y=1$

이를 각각 $x=3y$ 에 대입하면

$y=-1$ 일 때 $x=-3$, $y=1$ 일 때 $x=3$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

(2) $x^2-4y^2=0$ 에서 $(x+2y)(x-2y)=0$

$\therefore x=-2y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-2y$ 일 때

이를 $x^2+xy-3y^2=3$ 에 대입하면

$4y^2-2y^2-3y^2=3$, $y^2=-3$

$\therefore y=-\sqrt{3}i$ 또는 $y=\sqrt{3}i$

이를 각각 $x=-2y$ 에 대입하면

$y=-\sqrt{3}i$ 일 때 $x=2\sqrt{3}i$, $y=\sqrt{3}i$ 일 때 $x=-2\sqrt{3}i$

(ii) $x=2y$ 일 때

이를 $x^2+xy-3y^2=3$ 에 대입하면

$4y^2+2y^2-3y^2=3$, $y^2=1$

$\therefore y=-1$ 또는 $y=1$

이를 각각 $x=2y$ 에 대입하면

$y=-1$ 일 때 $x=-2$, $y=1$ 일 때 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$\begin{cases} x=-2\sqrt{3}i \\ y=\sqrt{3}i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{3}i \\ y=-\sqrt{3}i \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

02-2 ㉠ $(-2, -2), (2, 2)$

$x^2+xy-2y^2=0$ 에서 $(x+2y)(x-y)=0$

$\therefore x=-2y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-2y$ 일 때

이를 $x^2+2xy-y^2=8$ 에 대입하면

$4y^2-4y^2-y^2=8$, $y^2=-8$

$\therefore y=-2\sqrt{2}i$ 또는 $y=2\sqrt{2}i$

그런데 y 는 실수이므로 해는 없다.

(ii) $x=y$ 일 때

이를 $x^2+2xy-y^2=8$ 에 대입하면

$y^2+2y^2-y^2=8$, $y^2=4$

$\therefore y=-2$ 또는 $y=2$

이를 각각 $x=y$ 에 대입하면

$y=-2$ 일 때 $x=-2$, $y=2$ 일 때 $x=2$

(i), (ii)에서 실수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는

$(-2, -2), (2, 2)$

02-3 ㉠ -3

$x^2-3xy+2y^2=0$ 에서 $(x-y)(x-2y)=0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=y$ 일 때

이를 $x^2+y^2+3x+1=0$ 에 대입하면

$y^2+y^2+3y+1=0$, $2y^2+3y+1=0$

$(y+1)(2y+1)=0$ $\therefore y=-1$ 또는 $y=-\frac{1}{2}$

이를 각각 $x=y$ 에 대입하면

$y=-1$ 일 때 $x=-1$, $y=-\frac{1}{2}$ 일 때 $x=-\frac{1}{2}$

$\therefore x+y=-2$ 또는 $x+y=-1$

(ii) $x=2y$ 일 때

이를 $x^2+y^2+3x+1=0$ 에 대입하면

$4y^2+y^2+6y+1=0$, $5y^2+6y+1=0$

$(y+1)(5y+1)=0$ $\therefore y=-1$ 또는 $y=-\frac{1}{5}$

이를 각각 $x=2y$ 에 대입하면

$y=-1$ 일 때 $x=-2$, $y=-\frac{1}{5}$ 일 때 $x=-\frac{2}{5}$

$\therefore x+y=-3$ 또는 $x+y=-\frac{3}{5}$

(i), (ii)에서 $x+y$ 의 최솟값은 -3이다.

03-1 ㉔ $\begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$

주어진 연립방정식에서 $x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u-v=13 \\ 3u+v=-9 \end{cases}$$

이를 연립하여 풀면 $u=1$, $v=-12$

$$\therefore x+y=1, xy=-12$$

x, y 는 이차방정식 $t^2-t-12=0$ 의 두 근이므로

$$(t+3)(t-4)=0 \quad \therefore t=-3 \text{ 또는 } t=4$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases}$$

03-2 ㉔ $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 이므로 주어진 연립방정식에서

$x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} v+u=11 \\ u^2-2v=13 \end{cases}$$

$v+u=11$ 에서 $v=-u+11$

이를 $u^2-2v=13$ 에 대입하면

$$u^2-2(-u+11)=13, u^2+2u-35=0$$

$$(u+7)(u-5)=0 \quad \therefore u=-7 \text{ 또는 } u=5$$

이를 각각 $v=-u+11$ 에 대입하면

$$u=-7 \text{ 일 때 } v=18, u=5 \text{ 일 때 } v=6$$

(i) $u=-7$, $v=18$, 즉 $x+y=-7$, $xy=18$ 일 때

x, y 는 이차방정식 $t^2+7t+18=0$ 의 두 근이므로

$$t=\frac{-7 \pm \sqrt{23}i}{2}$$

(ii) $u=5$, $v=6$, 즉 $x+y=5$, $xy=6$ 일 때

x, y 는 이차방정식 $t^2-5t+6=0$ 의 두 근이므로

$$(t-2)(t-3)=0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=3$$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 정수인 해는

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

04-1 ㉔ 2

$y=x+a$ 를 $x^2+y^2=a$ 에 대입하면

$$x^2+(x+a)^2=a$$

$$2x^2+2ax+a^2-a=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 ㉑

이 중근을 가져야 하므로 ㉑의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-2(a^2-a)=0$$

$$a^2-2a=0, a(a-2)=0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } a=2$$

그런데 a 는 양수이므로 $a=2$

04-2 ㉔ 1

$x+y=1$ 에서 $y=-x+1$

이를 $x^2+2xy+a=2$ 에 대입하면

$$x^2+2x(-x+1)+a=2$$

$$x^2-2x-a+2=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지면 이차방정식 ㉑이

중근을 가지므로 ㉑의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=1-(-a+2)=0$$

$$a-1=0 \quad \therefore a=1$$

이를 ㉑에 대입하면 $x^2-2x+1=0$

$$(x-1)^2=0 \quad \therefore x=1$$

이를 $y=-x+1$ 에 대입하면 $y=0$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=0$ 이므로

$$\alpha-\beta=1$$

04-3 ㉔ 0

$x-y=2$ 에서 $y=x-2$

이를 $x^2+xy-a=0$ 에 대입하면

$$x^2+x(x-2)-a=0$$

$$2x^2-2x-a=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

연립방정식이 실근을 가지려면 이차방정식 ㉑이 실근을

가져야 하므로 ㉑의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=1+2a \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{1}{2}$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 0이다.

05-1 ㉔ 7m

밭의 가로, 세로의 길이를 x m, y m라 하면 대각

선의 길이가 $\sqrt{65}$ m이므로

$$x^2+y^2=65 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

밭의 넓이가 28m^2 이므로

$$xy=28 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 이므로 ㉑, ㉒에서 $x+y=u$,

$xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u^2-2v=65 \\ v=28 \end{cases}$$

$v=28$ 을 $u^2-2v=65$ 에 대입하면

$$u^2-56=65, u^2=121 \quad \therefore u=-11 \text{ 또는 } u=11$$

그런데 $x>0$, $y>0$ 이므로 $x+y=u>0$

따라서 $u=11$ 이므로

$$x+y=11, xy=28$$

x, y 는 이차방정식 $t^2-11t+28=0$ 의 두 근이므로

$$(t-4)(t-7)=0 \quad \therefore t=4 \text{ 또는 } t=7$$

$$\therefore x=4, y=7 \text{ 또는 } x=7, y=4$$

따라서 밭의 긴 변의 길이는 7m이다.

05-2 ㉡ 3

두 원의 반지름의 길이를 각각 x, y 라 하면 둘레의 길이의 합이 20π 이므로

$$2\pi x + 2\pi y = 20\pi \quad \therefore y = -x + 10 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

넓이의 합이 58π 이므로

$$\pi x^2 + \pi y^2 = 58\pi \quad \therefore x^2 + y^2 = 58 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉡을 ㉢에 대입하면

$$x^2 + (-x + 10)^2 = 58, x^2 - 10x + 21 = 0$$

$$(x-3)(x-7) = 0 \quad \therefore x = 3 \text{ 또는 } x = 7$$

이를 각각 ㉡에 대입하면

$$x = 3 \text{ 일 때 } y = 7, x = 7 \text{ 일 때 } y = 3$$

따라서 작은 원의 반지름의 길이는 3이다.

05-3 ㉡ 10 m

긴 철사의 길이를 x m, 짧은 철사의 길이를 y m라 하면 두 철사의 길이의 차가 12 m이므로

$$x - y = 12 \quad \therefore x = y + 12 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

각 철사로 만든 두 정사각형의 넓이의 차가 24 m^2 이므로

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 24 \quad \therefore x^2 - y^2 = 384 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉡을 ㉢에 대입하면

$$(y+12)^2 - y^2 = 384, 24y = 240 \quad \therefore y = 10$$

따라서 짧은 철사의 길이는 10 m이다.

2 부정방정식

개념 Check

143쪽

1 ㉡ (4, 3)

$$3x + 4y = 24 \text{ 에서 } x = \frac{-4y + 24}{3}$$

x, y 는 자연수이므로 $y = 3$ 일 때, $x = 4$

따라서 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 (4, 3)

2 ㉡ (-2, 0), (0, 2), (2, -4), (4, -2)

x, y 는 정수이므로 $x-1, y+1$ 도 정수이다.

따라서 $(x-1)(y+1) = -3$ 인 경우는

(i) $x-1 = -3, y+1 = 1$ 일 때

$$x = -2, y = 0$$

(ii) $x-1 = -1, y+1 = 3$ 일 때

$$x = 0, y = 2$$

(iii) $x-1 = 1, y+1 = -3$ 일 때

$$x = 2, y = -4$$

(iv) $x-1 = 3, y+1 = -1$ 일 때

$$x = 4, y = -2$$

(i)~(iv)에서 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는

$(-2, 0), (0, 2), (2, -4), (4, -2)$

3 ㉡ $x = -2, y = 3$

$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 0$ 에서 x, y 는 실수이므로

$$x+2=0, y-3=0 \quad \therefore x = -2, y = 3$$

문제

144~145쪽

06-1 ㉡ (1) (4, 6), (6, 4) (2) (3, 6), (4, 4), (6, 3)

(1) $xy - 3x - 3y + 6 = 0$ 에서

$$x(y-3) - 3(y-3) - 3 = 0$$

$$(x-3)(y-3) = 3$$

x, y 가 양의 정수이므로 $x-3, y-3$ 은 $x-3 \geq -2, y-3 \geq -2$ 인 정수이다.

따라서 $(x-3)(y-3) = 3$ 인 경우는

(i) $x-3 = 1, y-3 = 3$ 일 때

$$x = 4, y = 6$$

(ii) $x-3 = 3, y-3 = 1$ 일 때

$$x = 6, y = 4$$

(i), (ii)에서 순서쌍 (x, y) 는

(4, 6), (6, 4)

(2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ 에서 $\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2}$

$$xy - 2x - 2y = 0, x(y-2) - 2(y-2) - 4 = 0$$

$$(x-2)(y-2) = 4$$

x, y 가 양의 정수이므로 $x-2, y-2$ 는 $x-2 \geq -1, y-2 \geq -1$ 인 정수이다.

따라서 $(x-2)(y-2) = 4$ 인 경우는

(i) $x-2 = 1, y-2 = 4$ 일 때

$$x = 3, y = 6$$

(ii) $x-2 = 2, y-2 = 2$ 일 때

$$x = 4, y = 4$$

(iii) $x-2 = 4, y-2 = 1$ 일 때

$$x = 6, y = 3$$

(i), (ii), (iii)에서 순서쌍 (x, y) 는

(3, 6), (4, 4), (6, 3)

06-2 ㉡ -4, -2

정수인 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha \leq \beta)$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = m + 1 \quad \therefore m = \alpha + \beta - 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\alpha\beta = -m - 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉡을 ㉢에 대입하면 $\alpha\beta = -(\alpha + \beta - 1) - 4$

$$\alpha\beta + \alpha + \beta = -3, \alpha(\beta + 1) + (\beta + 1) - 1 = -3$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)=-2$$

α, β 가 정수이므로 $\alpha+1, \beta+1$ 도 정수이고 $\alpha+1 \leq \beta+1$ 이다.

따라서 $(\alpha+1)(\beta+1)=-2$ 인 경우는

(i) $\alpha+1=-2, \beta+1=1$ 일 때

$$\alpha=-3, \beta=0$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } m=-3+0-1=-4$$

(ii) $\alpha+1=-1, \beta+1=2$ 일 때

$$\alpha=-2, \beta=1$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } m=-2+1-1=-2$$

(i), (ii)에서 $m=-4$ 또는 $m=-2$

07-1 **답** (1) $x=6, y=3$ (2) $x=-1, y=-2$

(1) $x^2+5y^2-4xy-6y+9=0$ 에서

$$(x^2-4xy+4y^2)+(y^2-6y+9)=0$$

$$(x-2y)^2+(y-3)^2=0$$

x, y 가 실수이므로 $x-2y=0, y-3=0$

$$\therefore x=6, y=3$$

(2) $x^2-2xy+2y^2-2x+6y+5=0$ 에서

$$\{x^2-2x(y+1)+y^2+2y+1\}+(y^2+4y+4)=0$$

$$\{x^2-2x(y+1)+(y+1)^2\}+(y^2+4y+4)=0$$

$$(x-y-1)^2+(y+2)^2=0$$

x, y 가 실수이므로 $x-y-1=0, y+2=0$

$$\therefore x=-1, y=-2$$

다른 풀이

(1) 좌변을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2-4yx+5y^2-6y+9=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

x 가 실수이므로 x 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을

D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4y^2-(5y^2-6y+9) \geq 0$$

$$y^2-6y+9 \leq 0 \quad \therefore (y-3)^2 \leq 0$$

y 는 실수이므로 $y=3$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x^2-12x+36=0$

$$(x-6)^2=0 \quad \therefore x=6$$

(2) 좌변을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2-2(y+1)x+2y^2+6y+5=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

x 가 실수이므로 x 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을

D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(y+1)^2-(2y^2+6y+5) \geq 0$$

$$y^2+4y+4 \leq 0 \quad \therefore (y+2)^2 \leq 0$$

y 는 실수이므로 $y=-2$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x^2+2x+1=0$

$$(x+1)^2=0 \quad \therefore x=-1$$

연습문제

146~148쪽

1 24	2 ②	3 $3\sqrt{2}$	4 ⑤	5 ②
6 24	7 ①	8 5	9 ①	10 3
11 ④	12 ③	13 ①	14 ③	15 2
16 25	17 ①	18 39		

1 $x-3y=1$ 에서 $x=3y+1$

이를 $x^2-4xy+5y^2=13$ 에 대입하면

$$(3y+1)^2-4(3y+1)y+5y^2=13$$

$$y^2+y-6=0, (y+3)(y-2)=0$$

$$\therefore y=-3 \text{ 또는 } y=2$$

이를 각각 $x=3y+1$ 에 대입하면

$$y=-3 \text{ 일 때 } x=-8, y=2 \text{ 일 때 } x=7$$

$$\therefore xy=24 \text{ 또는 } xy=14$$

따라서 xy 의 최댓값은 24이다.

2 두 연립방정식의 해가 일치하므로 그 해는 연립방정식

$$\begin{cases} 2x+2y=1 \\ x^2-y^2=-1 \end{cases} \text{의 해와 같다.}$$

$$2x+2y=1 \text{에서 } y=-x+\frac{1}{2}$$

이를 $x^2-y^2=-1$ 에 대입하면

$$x^2-\left(-x+\frac{1}{2}\right)^2=-1, x-\frac{1}{4}=-1 \quad \therefore x=-\frac{3}{4}$$

$$\text{이를 } y=-x+\frac{1}{2} \text{에 대입하면 } y=\frac{5}{4}$$

$$x=-\frac{3}{4}, y=\frac{5}{4} \text{를 } 3x+y=a, x-y=b \text{에 각각 대입하면}$$

$$-\frac{9}{4}+\frac{5}{4}=a, -\frac{3}{4}-\frac{5}{4}=b$$

$$\therefore a=-1, b=-2 \quad \therefore ab=2$$

3 $2x^2-5xy+2y^2=0$ 에서 $(x-2y)(2x-y)=0$

$$\therefore x=2y \text{ 또는 } y=2x$$

(i) $x=2y$ 일 때

이를 $x^2-3xy+2y^2=6$ 에 대입하면

$$4y^2-6y^2+2y^2=6, 0 \times y^2=6$$

이를 만족시키는 y 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $y=2x$ 일 때

이를 $x^2-3xy+2y^2=6$ 에 대입하면

$$x^2-6x^2+8x^2=6, x^2=2$$

$$\therefore x=-\sqrt{2} \text{ 또는 } x=\sqrt{2}$$

그런데 $x>0$ 이므로 $x=\sqrt{2}$

이를 $y=2x$ 에 대입하면 $y=2\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $x=\sqrt{2}, y=2\sqrt{2}$

$$\therefore x+y=3\sqrt{2}$$

4 $x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$ 에서 $(x-y)(x-4y) = 0$

$\therefore x=y$ 또는 $x=4y$

(i) $x=y$ 일 때

이를 $x^2 + 2y^2 = 18$ 에 대입하면

$y^2 + 2y^2 = 18, y^2 = 6$

$\therefore y = -\sqrt{6}$ 또는 $y = \sqrt{6}$

그런데 y 는 정수이므로 해는 없다.

(ii) $x=4y$ 일 때

이를 $x^2 + 2y^2 = 18$ 에 대입하면

$16y^2 + 2y^2 = 18, y^2 = 1$

$\therefore y = -1$ 또는 $y = 1$

이를 각각 $x=4y$ 에 대입하면

$y = -1$ 일 때 $x = -4, y = 1$ 일 때 $x = 4$

$\therefore xy = 4$

(i), (ii)에서 xy 의 값은 4이다.

5 $3x^2 + 8xy - 3y^2 = 0$ 에서 $(x+3y)(3x-y) = 0$

$\therefore x = -3y$ 또는 $y = 3x$

(i) $x = -3y$ 일 때

이를 $x^2 + y^2 = 10$ 에 대입하면

$9y^2 + y^2 = 10, y^2 = 1$

$\therefore y = -1$ 또는 $y = 1$

이를 각각 $x = -3y$ 에 대입하면

$y = -1$ 일 때 $x = 3, y = 1$ 일 때 $x = -3$

(ii) $y = 3x$ 일 때

이를 $x^2 + y^2 = 10$ 에 대입하면

$x^2 + 9x^2 = 10, x^2 = 1$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = 1$

이를 각각 $y = 3x$ 에 대입하면

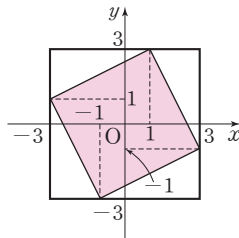
$x = -1$ 일 때 $y = -3, x = 1$ 일 때 $y = 3$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식을 만족시키는 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는

$(-3, 1), (3, -1), (-1, -3), (1, 3)$

따라서 구하는 사각형의 넓이는

$36 - 4 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 4\right) = 20$



6 $x=2$ 를 $x^2 + xy - 2y^2 = 0$ 에 대입하면

$4 + 2y - 2y^2 = 0, y^2 - y - 2 = 0$

$(y+1)(y-2) = 0$

$\therefore y = -1$ 또는 $y = 2$

(i) $y = -1$ 일 때

$x=2, y=-1$ 을 $2x^2 - xy + 2y^2 = a$ 에 대입하면

$8 - (-2) + 2 = a \quad \therefore a = 12$

이때 $b = -1$ 이므로 $ab = 12 \times (-1) = -12$

(ii) $y = 2$ 일 때

$x=2, y=2$ 를 $2x^2 - xy + 2y^2 = a$ 에 대입하면

$8 - 4 + 8 = a \quad \therefore a = 12$

이때 $b = 2$ 이므로 $ab = 12 \times 2 = 24$

(i), (ii)에서 ab 의 최댓값은 24이다.

7 주어진 연립방정식에서 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u+v=8 \\ 2u-v=4 \end{cases}$$

이를 연립하여 풀면 $u=4, v=4$

$\therefore x+y=4, xy=4$

x, y 는 이차방정식 $t^2 - 4t + 4 = 0$ 의 두 근이므로

$(t-2)^2 = 0 \quad \therefore t = 2$

따라서 $x=2, y=2$ 이므로

$\alpha=2, \beta=2$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 4 + 4 = 8$

다른 풀이

주어진 연립방정식에서 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u+v=8 \\ 2u-v=4 \end{cases}$$

이를 연립하여 풀면 $u=4, v=4$

$\therefore x+y=4, xy=4$

즉, $\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 4$ 이므로

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4^2 - 2 \times 4 = 8$

8 $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ 이므로 주어진 연립방정식에서

$x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u+2v=-13 \\ u^2-2v-3u=16 \end{cases}$$

$u+2v=-13$ 에서 $2v=-u-13$

이를 $u^2 - 2v - 3u = 16$ 에 대입하면

$u^2 - (-u-13) - 3u = 16$

$u^2 - 2u - 3 = 0, (u+1)(u-3) = 0$

$\therefore u = -1$ 또는 $u = 3$

이를 각각 $2v = -u - 13$ 에 대입하여 풀면

$u = -1$ 일 때 $v = -6, u = 3$ 일 때 $v = -8$

(i) $u = -1, v = -6$, 즉 $x+y=-1, xy=-6$ 일 때

x, y 는 이차방정식 $t^2 + t - 6 = 0$ 의 두 근이므로

$(t+3)(t-2) = 0 \quad \therefore t = -3$ 또는 $t = 2$

그런데 $x > y$ 이므로 $x=2, y=-3$

$\therefore x-y=5$

(ii) $u=3, v=-8$, 즉 $x+y=3, xy=-8$ 일 때
 x, y 는 이차방정식 $t^2-3t-8=0$ 의 두 근이므로

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}$$

그런데 x, y 는 정수이므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 $x-y$ 의 값은 5이다.

9 $x+y=k$ 에서 $y=-x+k$

이를 $x^2+2x+y=1$ 에 대입하면

$$x^2+2x+(-x+k)=1$$

$$x^2+x+k-1=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이
 중근을 가지므로 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=1-4(k-1)=0 \quad \therefore k=\frac{5}{4}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x^2+x+\frac{1}{4}=0$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0 \quad \therefore x=-\frac{1}{2} \quad \therefore \alpha=-\frac{1}{2}$$

$k=\frac{5}{4}, x=-\frac{1}{2}$ 을 $y=-x+k$ 에 대입하면

$$y=-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{4}=\frac{7}{4} \quad \therefore \beta=\frac{7}{4}$$

$$\therefore k+\alpha-\beta=\frac{5}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{7}{4}=-1$$

10 밑면의 가로 길이를 x , 밑면의 세로 길이를 y
 라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 20이므로

$$8x+4y=20 \quad \therefore y=-2x+5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

옆면의 넓이의 합이 12이므로

$$2x^2+2xy=12 \quad \therefore x^2+xy-6=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$x^2+x(-2x+5)-6=0, x^2-5x+6=0$$

$$(x-2)(x-3)=0 \quad \therefore x=2 \text{ 또는 } x=3$$

이를 각각 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x=2 \text{ 일 때 } y=1, x=3 \text{ 일 때 } y=-1$$

그런데 $y>0$ 이므로 $x=2, y=1$

따라서 밑면의 가로 길이의 길이와 세로의 길이의 합은

$$x+y=3$$

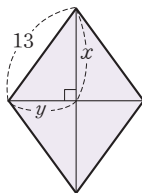
11 오른쪽 그림과 같이 마름모의 두 대각선
 의 길이를 각각 $2x, 2y(x \geq y)$ 라 하면
 한 변의 길이가 13이므로

$$x^2+y^2=13^2$$

$$\therefore x^2+y^2=169 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

마름모의 넓이가 120이므로

$$\frac{1}{2} \times 2x \times 2y = 120 \quad \therefore xy=60 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$



$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 이므로 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $x+y=u,$
 $xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u^2-2v=169 \\ v=60 \end{cases}$$

$v=60$ 을 $u^2-2v=169$ 에 대입하면

$$u^2-120=169, u^2=289$$

$$\therefore u=-17 \text{ 또는 } u=17$$

그런데 $x>0, y>0$ 이므로 $x+y=u>0$

따라서 $u=17$ 이므로

$$x+y=17, xy=60$$

x, y 는 이차방정식 $t^2-17t+60=0$ 의 두 근이므로

$$(t-5)(t-12)=0 \quad \therefore t=5 \text{ 또는 } t=12$$

이때 $x \geq y$ 이므로 $x=12, y=5$

따라서 긴 대각선의 길이는 $2 \times 12=24$

12 $xy-2x-2y+3=0$ 에서

$$x(y-2)-2(y-2)-1=0$$

$$(x-2)(y-2)=1$$

x, y 가 정수이므로 $x-2, y-2$ 도 정수이다.

따라서 $(x-2)(y-2)=1$ 인 경우는

(i) $x-2=-1, y-2=-1$ 일 때

$$x=1, y=1 \quad \therefore x-y=0$$

(ii) $x-2=1, y-2=1$ 일 때

$$x=3, y=3 \quad \therefore x-y=0$$

(i), (ii)에서 $x-y=0$

13 정수인 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha \leq \beta)$ 라 하면 근과 계수의 관계에
 의하여

$$\alpha+\beta=-m-3 \quad \therefore m=-\alpha-\beta-3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta=2m+7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\alpha\beta=2(-\alpha-\beta-3)+7, \alpha(\beta+2)+2(\beta+2)=5$$

$$(\alpha+2)(\beta+2)=5$$

α, β 가 정수이므로 $\alpha+2, \beta+2$ 도 정수이고 $\alpha+2 \leq \beta+2$
 이다.

따라서 $(\alpha+2)(\beta+2)=5$ 인 경우는

(i) $\alpha+2=-5, \beta+2=-1$ 일 때

$$\alpha=-7, \beta=-3$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } m=-(-7)-(-3)-3=7$$

(ii) $\alpha+2=1, \beta+2=5$ 일 때

$$\alpha=-1, \beta=3$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } m=-(-1)-3-3=-5$$

(i), (ii)에서 $m=7$ 또는 $m=-5$

따라서 모든 정수 m 의 값의 합은 $7+(-5)=2$

14 $2x^2+9y^2+6xy-2x+1=0$ 에서
 $(x^2-2x+1)+(x^2+6xy+9y^2)=0$
 $(x-1)^2+(x+3y)^2=0$
 x, y 가 실수이므로 $x-1=0, x+3y=0$
 $\therefore x=1, y=-\frac{1}{3}$
 $\therefore 3xy=-1$

15 (i) $x \geq y$ 일 때
 $[x, y]=2y, \langle x, y \rangle=x$ 이므로 주어진 연립방정식은
 $\begin{cases} x+y=4y+2 \\ x^2+xy+y^2=2x+5 \end{cases}$
 $x+y=4y+2$ 에서 $x=3y+2$
이를 $x^2+xy+y^2=2x+5$ 에 대입하면
 $(3y+2)^2+(3y+2)y+y^2=2(3y+2)+5$
 $13y^2+8y-5=0, (y+1)(13y-5)=0$
 $\therefore y=-1$ 또는 $y=\frac{5}{13}$
그런데 y 는 정수이므로 $y=-1$
이를 $x=3y+2$ 에 대입하면 $x=-1$
 $x=-1, y=-1$ 은 $x \geq y$ 를 만족시키므로
 $\alpha=-1, \beta=-1 \quad \therefore |\alpha-\beta|=0$

(ii) $x < y$ 일 때
 $[x, y]=x, \langle x, y \rangle=-2y$ 이므로 주어진 연립방정식은
 $\begin{cases} x+y=2x+2 \\ x^2+xy+y^2=-4y+5 \end{cases}$
 $x+y=2x+2$ 에서 $y=x+2$
이를 $x^2+xy+y^2=-4y+5$ 에 대입하면
 $x^2+x(x+2)+(x+2)^2=-4(x+2)+5$
 $3x^2+10x+7=0, (3x+7)(x+1)=0$
 $\therefore x=-\frac{7}{3}$ 또는 $x=-1$
그런데 x 는 정수이므로 $x=-1$
이를 $y=x+2$ 에 대입하면 $y=1$
 $x=-1, y=1$ 은 $x < y$ 를 만족시키므로
 $\alpha=-1, \beta=1 \quad \therefore |\alpha-\beta|=2$
(i), (ii)에서 $|\alpha-\beta|$ 의 최댓값은 2이다.

16 $x^2-y^2=6$ 에서 $(x+y)(x-y)=6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $(x+y)^2-2(x+y)=3$ 에서 $x+y=t$ 로 놓으면
 $t^2-2t-3=0, (t+1)(t-3)=0$
 $\therefore t=-1$ 또는 $t=3$
 $\therefore x+y=-1$ 또는 $x+y=3$
(i) $x+y=-1$ 일 때
이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $-(x-y)=6 \quad \therefore x-y=-6$

$x+y=-1, x-y=-6$ 을 연립하여 풀면
 $x=-\frac{7}{2}, y=\frac{5}{2}$
그런데 x, y 는 양수이므로 해는 없다.

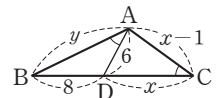
(ii) $x+y=3$ 일 때
이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $3(x-y)=6 \quad \therefore x-y=2$
 $x+y=3, x-y=2$ 를 연립하여 풀면
 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $x=\frac{5}{2}, y=\frac{1}{2}$
 $\therefore 20xy=20 \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2}=25$

17 $x^2+y^2=2a^2-16a+16$ 에서
 $(x+y)^2-2xy=2a^2-16a+16$
이때 $xy=a^2$ 이므로
 $(x+y)^2-2a^2=2a^2-16a+16$
 $(x+y)^2=4(a-2)^2$
 $\therefore x+y=-2(a-2)$ 또는 $x+y=2(a-2)$
 x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2+2(a-2)t+a^2=0$ 또는
 $t^2-2(a-2)t+a^2=0$ 의 두 실근이므로 두 이차방정식의
판별식을 각각 D_1, D_2 라 하면
 $\frac{D_1}{4}=\frac{D_2}{4}=(a-2)^2-a^2 \geq 0$
 $-4a+4 \geq 0 \quad \therefore a \leq 1$
그런데 a 는 자연수이므로 $a=1$

18 $\overline{CD}=x, \overline{AB}=y$ 라 하면 $\overline{AC}=x-1$

두 삼각형 ABC, DBA에서
 $\angle BCA = \angle BAD, \angle B$ 는 공통
이므로



$\triangle ABC \sim \triangle DBA$
 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DB} : \overline{DA}$ 이므로 $y : (x-1) = 8 : 6$
 $\therefore x = \frac{3}{4}y + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DB} : \overline{BA}$ 이므로 $y : (8+x) = 8 : y$
 $\therefore y^2 = 8x + 64 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $y^2 = 8\left(\frac{3}{4}y + 1\right) + 64, y^2 - 6y - 72 = 0$
 $(y+6)(y-12) = 0 \quad \therefore y = -6$ 또는 $y = 12$
그런데 $y > 0$ 이므로 $y = 12$
이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x = 10$
 $\therefore \overline{AB} = 12, \overline{BC} = 8 + 10 = 18, \overline{AC} = 10 - 1 = 9$
따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는
 $12 + 18 + 9 = 39$

II-4 01 연립일차부등식

일차부등식

개념 Check

150쪽

1 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $a > b$ 의 양변에 1을 더하면

$$a+1 > b+1$$

ㄴ. $a > b$ 의 양변에서 3을 빼면

$$a-3 > b-3$$

ㄷ. $a > 0$ 이므로 $a > b$ 의 양변에 a 를 곱하면

$$a^2 > ab$$

ㄹ. $b < 0$ 이므로 $a > b$ 의 양변을 b 로 나누면

$$\frac{a}{b} < 1$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

문제

151쪽

01-1 답 $\begin{cases} a > 4 \text{ 일 때, } x \leq 2 \\ a = 4 \text{ 일 때, 모든 실수} \\ a < 4 \text{ 일 때, } x \geq 2 \end{cases}$

$$ax - 2a \leq 4x - 8 \text{ 에서 } (a-4)x \leq 2(a-4)$$

(i) $a-4 > 0$, 즉 $a > 4$ 일 때

$$x \leq 2$$

(ii) $a-4 = 0$, 즉 $a = 4$ 일 때

$$0 \times x \leq 0 \text{ 이므로 해는 모든 실수이다.}$$

(iii) $a-4 < 0$, 즉 $a < 4$ 일 때

$$x \geq 2$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$\begin{cases} a > 4 \text{ 일 때, } x \leq 2 \\ a = 4 \text{ 일 때, 모든 실수} \\ a < 4 \text{ 일 때, } x \geq 2 \end{cases}$$

01-2 답 -5

$$ax+1 > a^2-x \text{ 에서 } (a+1)x > a^2-1$$

$$\therefore (a+1)x > (a+1)(a-1) \quad \dots\dots ㉠$$

이 부등식의 해가 $x < -6$ 이므로 $a+1 < 0$

㉠의 양변을 $a+1$ 로 나누면 $x < a-1$

따라서 $a-1 = -6$ 이므로 $a = -5$

01-3 답 $x \leq -1$

$$(a+2b)x + a - b \geq 0 \text{ 에서 } (a+2b)x \geq b-a \quad \dots\dots ㉠$$

$$\text{이 부등식의 해가 } x \leq 2 \text{ 이므로 } a+2b < 0 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠ \text{의 양변을 } a+2b \text{로 나누면 } x \leq \frac{b-a}{a+2b}$$

$$\text{따라서 } \frac{b-a}{a+2b} = 2 \text{ 이므로}$$

$$b-a = 2a+4b \quad \therefore a = -b \quad \dots\dots ㉢$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$-b+2b < 0 \quad \therefore b < 0$$

㉢을 $b(2x-1) \geq 3a$ 에 대입하면

$$b(2x-1) \geq -3b$$

양변을 b 로 나누면 $2x-1 \leq -3$

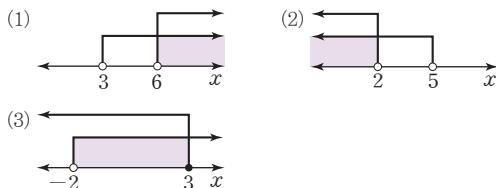
$$2x \leq -2 \quad \therefore x \leq -1$$

2 연립일차부등식

개념 Check

152쪽

1 답 (1) $x > 6$ (2) $x < 2$ (3) $-2 < x \leq 3$



문제

153~158쪽

02-1 답 (1) $x < 1$ (2) $-5 \leq x < -2$

$$(3) x \geq -5 \quad (4) 7 < x \leq 9$$

(1) $3x-1 < 5$ 를 풀면

$$3x < 6 \quad \therefore x < 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$4x-5 < 2x-3 \text{ 을 풀면}$$

$$2x < 2 \quad \therefore x < 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진

연립부등식의 해는

$$x < 1$$

(2) $2(x+1) \geq x-3$ 을 풀면

$$2x+2 \geq x-3 \quad \therefore x \geq -5 \quad \dots\dots ㉢$$

$$3x-2 < -2(x+6) \text{ 을 풀면}$$

$$3x-2 < -2x-12$$

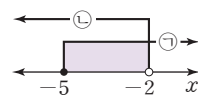
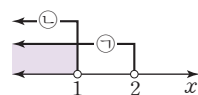
$$5x < -10 \quad \therefore x < -2 \quad \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진

연립부등식의 해는

$$-5 \leq x < -2$$



(3) $5x-6(x-3)>3(1-x)-1$ 을 풀면

$$5x-6x+18>3-3x-1$$

$$2x>-16 \quad \therefore x>-8 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$0.2x\leq 0.3x+\frac{1}{2}\text{을 풀면}$$

$$2x\leq 3x+5, -x\leq 5$$

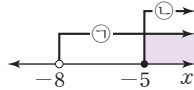
$$\therefore x\geq -5 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진

연립부등식의 해는

$$x\geq -5$$



(4) $\frac{x+2}{3}-\frac{x-3}{4}>2$ 를 풀면

$$4(x+2)-3(x-3)>24$$

$$4x+8-3x+9>24 \quad \therefore x>7 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$$\frac{3x-2}{5}\leq 5\text{를 풀면}$$

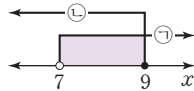
$$3x-2\leq 25, 3x\leq 27 \quad \therefore x\leq 9 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{9}$, $\textcircled{10}$ 을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진

연립부등식의 해는

$$7<x\leq 9$$



02-2 ㉞ (1) $-2<x\leq 2$ (2) $1\leq x<2$

(1) 주어진 부등식은 $\begin{cases} 6x-3\leq 4x+1 \\ 4x+1<9x+11 \end{cases}$ 로 나타낼 수 있다.

$$6x-3\leq 4x+1\text{을 풀면}$$

$$2x\leq 4 \quad \therefore x\leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{11}$$

$$4x+1<9x+11\text{을 풀면}$$

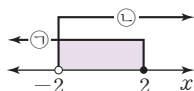
$$-5x<10 \quad \therefore x>-2 \quad \dots\dots \textcircled{12}$$

$\textcircled{11}$, $\textcircled{12}$ 을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진

부등식의 해는

$$-2<x\leq 2$$



(2) 주어진 부등식은 $\begin{cases} 2(x-4)+x<-x \\ -x\leq x-2 \end{cases}$ 로 나타낼 수 있다.

다.

$$2(x-4)+x<-x\text{를 풀면}$$

$$2x-8+x<-x$$

$$4x<8 \quad \therefore x<2 \quad \dots\dots \textcircled{13}$$

$$-x\leq x-2\text{를 풀면}$$

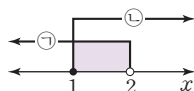
$$-2x\leq -2 \quad \therefore x\geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{14}$$

$\textcircled{13}$, $\textcircled{14}$ 을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진

부등식의 해는

$$1\leq x<2$$



03-1 ㉞ (1) $x=1$ (2) 해는 없다.

(3) $x=-1$ (4) 해는 없다.

(5) 해는 없다. (6) $x=2$

(1) $3x-2\leq 1$ 을 풀면

$$3x\leq 3 \quad \therefore x\leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{15}$$

$$2x+5\leq 4x+3\text{을 풀면}$$

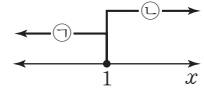
$$-2x\leq -2 \quad \therefore x\geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{16}$$

$\textcircled{15}$, $\textcircled{16}$ 을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진

연립부등식의 해는

$$x=1$$



(2) $2x-3<5x+3$ 을 풀면

$$-3x<6 \quad \therefore x>-2 \quad \dots\dots \textcircled{17}$$

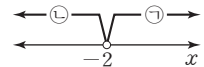
$$6x+7<x-3\text{을 풀면}$$

$$5x<-10 \quad \therefore x<-2 \quad \dots\dots \textcircled{18}$$

$\textcircled{17}$, $\textcircled{18}$ 을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진

연립부등식의 해는 없다.



(3) $5x-1\geq 6x$ 를 풀면

$$-x\geq 1 \quad \therefore x\leq -1 \quad \dots\dots \textcircled{19}$$

$$13x+1\geq 2x-10\text{을 풀면}$$

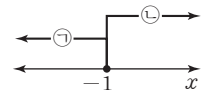
$$11x\geq -11 \quad \therefore x\geq -1 \quad \dots\dots \textcircled{20}$$

$\textcircled{19}$, $\textcircled{20}$ 을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진

연립부등식의 해는

$$x=-1$$



(4) $8x+3\leq 6x+1$ 을 풀면

$$2x\leq -2 \quad \therefore x\leq -1 \quad \dots\dots \textcircled{21}$$

$$2x-5\geq 1-x\text{를 풀면}$$

$$3x\geq 6 \quad \therefore x\geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{22}$$

$\textcircled{21}$, $\textcircled{22}$ 을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진

연립부등식의 해는 없다.



(5) $2(x+1)\geq 5x-7$ 을 풀면

$$2x+2\geq 5x-7, -3x\geq -9$$

$$\therefore x\leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{23}$$

$$0.7x+1>3.1\text{을 풀면}$$

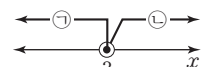
$$7x+10>31, 7x>21$$

$$\therefore x>3 \quad \dots\dots \textcircled{24}$$

$\textcircled{23}$, $\textcircled{24}$ 을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진

연립부등식의 해는 없다.



(6) 주어진 부등식은 $\begin{cases} x+5\leq 4x-1 \\ 4x-1\leq 2x+3 \end{cases}$ 으로 나타낼 수 있다.

$x+5 \leq 4x-1$ 을 풀면

$$-3x \leq -6 \quad \therefore x \geq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$4x-1 \leq 2x+3$ 을 풀면

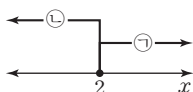
$$2x \leq 4 \quad \therefore x \leq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진

부등식의 해는

$$x=2$$



04-1 ㉢ 7

$5x+a > x-11$ 을 풀면

$$4x > -a-11 \quad \therefore x > -\frac{a+11}{4}$$

$-2(x+2) \geq x+a$ 를 풀면

$$-2x-4 \geq x+a, -3x \geq a+4$$

$$\therefore x \leq -\frac{a+4}{3}$$

주어진 연립부등식의 해가 $b < x \leq 1$ 이므로

$$-\frac{a+11}{4} = b, -\frac{a+4}{3} = 1$$

$$\therefore a = -7, b = -1$$

$$\therefore ab = 7$$

04-2 ㉢ 8

주어진 부등식은 $\begin{cases} 3x-a < 2x-7 \\ 2x-7 \leq 4x-b \end{cases}$ 로 나타낼 수 있다.

$3x-a < 2x-7$ 을 풀면

$$x < a-7$$

$2x-7 \leq 4x-b$ 를 풀면

$$-2x \leq -b+7 \quad \therefore x \geq \frac{b-7}{2}$$

주어진 부등식의 해가 $-3 \leq x < 2$ 이므로

$$a-7=2, \frac{b-7}{2} = -3$$

$$\therefore a=9, b=1$$

$$\therefore a-b=8$$

04-3 ㉢ 4

$6x-13 \geq 4x+a$ 를 풀면

$$2x \geq a+13 \quad \therefore x \geq \frac{a+13}{2}$$

$2(x-2) \leq x+b$ 를 풀면

$$2x-4 \leq x+b \quad \therefore x \leq b+4$$

주어진 연립부등식의 해가 $x=5$ 이므로

$$\frac{a+13}{2} = 5, b+4 = 5$$

$$\therefore a = -3, b = 1$$

$$\therefore b-a=4$$

05-1 ㉢ $a > -14$

$3(4-x) > -x$ 를 풀면

$$12-3x > -x, -2x > -12$$

$$\therefore x < 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$2x+4 \leq 5x+a$ 를 풀면

$$-3x \leq a-4 \quad \therefore x \geq -\frac{a-4}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

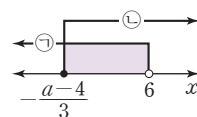
주어진 연립부등식이 해를 갖도록

①, ②을 수직선 위에 나타내면 오

른쪽 그림과 같으므로

$$-\frac{a-4}{3} < 6, a-4 > -18$$

$$\therefore a > -14$$



05-2 ㉢ 2

$x+1 \geq \frac{2x+a}{3}$ 를 풀면

$$3x+3 \geq 2x+a \quad \therefore x \geq a-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$5x-2 < 3x-4$ 를 풀면

$$2x < -2 \quad \therefore x < -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

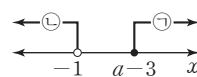
주어진 연립부등식이 해를 갖지 않

도록 ①, ②을 수직선 위에 나타내

면 오른쪽 그림과 같으므로

$$a-3 \geq -1 \quad \therefore a \geq 2$$

따라서 상수 a 의 최솟값은 2이다.



06-1 ㉢ $-4 \leq a < -3$

주어진 부등식은 $\begin{cases} 3x-2 < x+4 \\ x+4 < 2x-a \end{cases}$ 로 나타낼 수 있다.

$3x-2 < x+4$ 를 풀면

$$2x < 6 \quad \therefore x < 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$x+4 < 2x-a$ 를 풀면

$$-x < -a-4 \quad \therefore x > a+4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

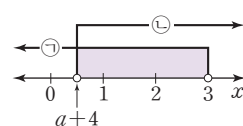
주어진 부등식을 만족시키는

정수 x 가 2개가 되도록 ①, ②

을 수직선 위에 나타내면 오른

쪽 그림과 같으므로

$$0 \leq a+4 < 1 \quad \therefore -4 \leq a < -3$$



06-2 ㉢ $10 \leq a < 12$

$2(x-3) < 3x-8$ 을 풀면

$$2x-6 < 3x-8$$

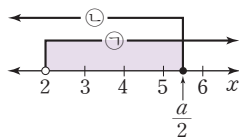
$$-x < -2 \quad \therefore x > 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$a-x \geq x$ 를 풀면

$$-2x \geq -a \quad \therefore x \leq \frac{a}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 의 값의 합이 12가 되도록 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$5 \leq \frac{a}{2} < 6 \quad \therefore 10 \leq a < 12$$



07-1 ㉡ 20 cm 이상 25 cm 이하

세로의 길이를 x cm라 하면 가로 길이는 $(2x-5)$ cm
이므로

$$110 \leq 2\{x + (2x-5)\} \leq 140$$

$$110 \leq 6x - 10 \leq 140$$

$$120 \leq 6x \leq 150 \quad \therefore 20 \leq x \leq 25$$

따라서 세로의 길이는 20 cm 이상 25 cm 이하이다.

07-2 ㉡ 7

만들 수 있는 아이스크림 A의 개수를 x 라 하면 아이스크림 B의 개수는 $10-x$ 이므로

$$\begin{cases} 70x + 50(10-x) \leq 640 & \dots\dots \textcircled{㉠} \\ 10x + 15(10-x) \leq 130 & \dots\dots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉠을 풀면

$$70x + 500 - 50x \leq 640$$

$$20x \leq 140 \quad \therefore x \leq 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡을 풀면

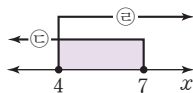
$$10x + 150 - 15x \leq 130$$

$$-5x \leq -20 \quad \therefore x \geq 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

㉢, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$4 \leq x \leq 7$$

따라서 만들 수 있는 아이스크림 A의 최대 개수는 7이다.



07-3 ㉡ 5

방의 개수를 x 라 하면 학생 수는 $7x+14$

한 방에 학생을 9명씩 배정하면 4명 이상 6명 미만의 학생이 남으므로

$$9x + 4 \leq 7x + 14 < 9x + 6$$

$$9x + 4 \leq 7x + 14 \text{를 풀면}$$

$$2x \leq 10 \quad \therefore x \leq 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

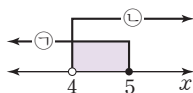
$$7x + 14 < 9x + 6 \text{을 풀면}$$

$$-2x < -8 \quad \therefore x > 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$4 < x \leq 5$$

이때 방의 개수는 자연수이므로 5이다.



3 절댓값 기호를 포함한 일차부등식

개념 Check

159쪽

1 ㉡ (1) $-5 < x < 5$

$$(2) x \leq -5 \text{ 또는 } x \geq 5$$

$$(3) -3 \leq x \leq 7$$

$$(4) x < -3 \text{ 또는 } x > 7$$

$$(3) |x-2| \leq 5 \text{에서}$$

$$-5 \leq x-2 \leq 5 \quad \therefore -3 \leq x \leq 7$$

$$(4) |x-2| > 5 \text{에서}$$

$$x-2 < -5 \text{ 또는 } x-2 > 5 \quad \therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 7$$

문제

160쪽

08-1 ㉡ (1) $x < 1$ 또는 $x > \frac{7}{5}$

$$(2) -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } 2 < x < 3$$

$$(3) x > 2$$

$$(4) x < 6$$

$$(1) |6-5x| > 1 \text{에서}$$

$$6-5x < -1 \text{ 또는 } 6-5x > 1$$

$$(i) 6-5x < -1 \text{에서}$$

$$-5x < -7 \quad \therefore x > \frac{7}{5}$$

$$(ii) 6-5x > 1 \text{에서}$$

$$-5x > -5 \quad \therefore x < 1$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$x < 1 \text{ 또는 } x > \frac{7}{5}$$

$$(2) 5 < |4x-3| < 9 \text{에서}$$

$$-9 < 4x-3 < -5 \text{ 또는 } 5 < 4x-3 < 9$$

$$(i) -9 < 4x-3 < -5 \text{에서}$$

$$-6 < 4x < -2 \quad \therefore -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$$

$$(ii) 5 < 4x-3 < 9 \text{에서}$$

$$8 < 4x < 12 \quad \therefore 2 < x < 3$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } 2 < x < 3$$

$$(3) (i) x < -\frac{2}{3} \text{일 때}$$

$$|3x+2| = -(3x+2) \text{이므로}$$

$$-(3x+2) < 4x, -7x < 2 \quad \therefore x > -\frac{2}{7}$$

그런데 $x < -\frac{2}{3}$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x \geq -\frac{2}{3}$ 일 때

$$|3x+2|=3x+2 \text{이므로}$$

$$3x+2 < 4x, -x < -2 \quad \therefore x > 2$$

$$\text{그런데 } x \geq -\frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$x > 2$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$x > 2$$

(4) (i) $x < -\frac{3}{2}$ 일 때

$$|2x+3| = -(2x+3) \text{이므로}$$

$$4x-9 < -(2x+3), 6x < 6 \quad \therefore x < 1$$

$$\text{그런데 } x < -\frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$x < -\frac{3}{2}$$

(ii) $x \geq -\frac{3}{2}$ 일 때

$$|2x+3| = 2x+3 \text{이므로}$$

$$4x-9 < 2x+3, 2x < 12 \quad \therefore x < 6$$

$$\text{그런데 } x \geq -\frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$-\frac{3}{2} \leq x < 6$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$x < 6$$

08-2 ㉠ (1) $-8 < x < 2$ (2) $-2 < x < 18$

(1) (i) $x < -1$ 일 때

$$|x+1| = -(x+1), |x-1| = -(x-1) \text{이므로}$$

$$-2(x+1) + (x-1) < 5$$

$$-x < 8 \quad \therefore x > -8$$

$$\text{그런데 } x < -1 \text{이므로}$$

$$-8 < x < -1$$

(ii) $-1 \leq x < 1$ 일 때

$$|x+1| = x+1, |x-1| = -(x-1) \text{이므로}$$

$$2(x+1) + (x-1) < 5, 3x < 4 \quad \therefore x < \frac{4}{3}$$

$$\text{그런데 } -1 \leq x < 1 \text{이므로}$$

$$-1 \leq x < 1$$

(iii) $x \geq 1$ 일 때

$$|x+1| = x+1, |x-1| = x-1 \text{이므로}$$

$$2(x+1) - (x-1) < 5 \quad \therefore x < 2$$

$$\text{그런데 } x \geq 1 \text{이므로}$$

$$1 \leq x < 2$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$-8 < x < 2$$

(2) (i) $x < 7$ 일 때

$$|7-x| = 7-x, |x-9| = -(x-9) \text{이므로}$$

$$(7-x) - (x-9) < 20$$

$$-2x < 4 \quad \therefore x > -2$$

$$\text{그런데 } x < 7 \text{이므로}$$

$$-2 < x < 7$$

(ii) $7 \leq x < 9$ 일 때

$$|7-x| = -(7-x), |x-9| = -(x-9) \text{이므로}$$

$$-(7-x) - (x-9) < 20$$

$$0 \times x < 18 \text{이므로 해는 모든 실수이다.}$$

$$\text{그런데 } 7 \leq x < 9 \text{이므로}$$

$$7 \leq x < 9$$

(iii) $x \geq 9$ 일 때

$$|7-x| = -(7-x), |x-9| = x-9 \text{이므로}$$

$$-(7-x) + (x-9) < 20$$

$$2x < 36 \quad \therefore x < 18$$

$$\text{그런데 } x \geq 9 \text{이므로}$$

$$9 \leq x < 18$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$-2 < x < 18$$

연습문제

161~163쪽

1 $x < -1$	2 ④	3 ①	4 ②	5 21
6 12	7 ③	8 ③	9 9	10 3
11 ③	12 ②	13 ②	14 ②	
15 $\frac{1}{4} \leq x \leq 2$	16 $\frac{25}{2}$	17 ⑤	18 ①	

1 $ax < 2a + bx$ 에서 $(a-b)x < 2a$ ㉠

이 부등식의 해가 $x > 1$ 이므로

$$a-b < 0$$

$$\text{㉠의 양변을 } a-b \text{로 나누면 } x > \frac{2a}{a-b}$$

$$\text{따라서 } \frac{2a}{a-b} = 1 \text{이므로}$$

$$2a = a-b \quad \therefore a = -b \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$(a-b)x + 3a + b > 0 \text{에서}$$

$$(a-b)x > -(3a+b)$$

$$\text{양변을 } a-b \text{로 나누면 } x < -\frac{3a+b}{a-b}$$

$$\text{㉡을 대입하면 } x < -\frac{-3b+b}{-b-b}$$

$$x < -\frac{-2b}{-2b} \quad \therefore x < -1$$

- 2 $a^2x-1>x+3a$ 에서 $(a^2-1)x>3a+1$
이 부등식이 해를 갖지 않으므로
 $a^2-1=0$, $3a+1\geq 0$
(i) $a^2-1=0$ 에서
 $(a+1)(a-1)=0 \quad \therefore a=-1$ 또는 $a=1$
(ii) $3a+1\geq 0$ 에서
 $3a\geq -1 \quad \therefore a\geq -\frac{1}{3}$
(i), (ii)에서 $a=1$

- 3 $3(x-2)\geq -15$ 를 풀면
 $3x-6\geq -15$, $3x\geq -9 \quad \therefore x\geq -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $\frac{4-x}{2}\leq 4-x$ 를 풀면
 $4-x\leq 8-2x \quad \therefore x\leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 의 공통부분은 $-3\leq x\leq 4$
따라서 $a=-3$, $b=4$ 이므로 $a\beta=-12$

- 4 $x-1\leq 2(1-x)$ 를 풀면
 $x-1\leq 2-2x$, $3x\leq 3 \quad \therefore x\leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $2(1-x)\leq \frac{5-5x}{3}$ 를 풀면
 $6-6x\leq 5-5x$, $-x\leq -1 \quad \therefore x\geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 의 공통부분은 $x=1$

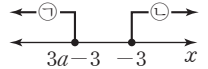
- 5 $x-1>8$ 을 풀면
 $x>9$
 $2x-16\leq x+a$ 를 풀면
 $x\leq a+16$
주어진 연립부등식의 해가 $b<x\leq 28$ 이므로
 $b=9$, $a+16=28 \quad \therefore a=12$, $b=9$
 $\therefore a+b=21$

- 6 $3x-4<\frac{x+a}{2}$ 를 풀면
 $6x-8<x+a$, $5x<a+8 \quad \therefore x<\frac{a+8}{5}$
 $4x+b\leq 3-2x$ 를 풀면
 $6x\leq -b+3 \quad \therefore x\leq \frac{-b+3}{6}$
주어진 그림에서 $x<1$, $x\leq -1$ 이므로
 $\frac{a+8}{5}=1$, $\frac{-b+3}{6}=-1 \quad \therefore a=-3$, $b=9$
 $\therefore b-a=12$

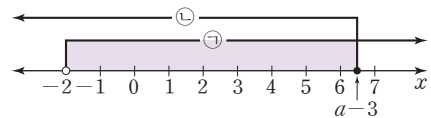
- 7 $3(x-1)\leq a+4$ 를 풀면
 $3x-3\leq a+4$, $3x\leq a+7 \quad \therefore x\leq \frac{a+7}{3}$

- $\frac{5x-b}{7}\geq 1$ 을 풀면
 $5x-b\geq 7$, $5x\geq b+7 \quad \therefore x\geq \frac{b+7}{5}$
주어진 연립부등식의 해가 $x=3$ 이므로
 $\frac{a+7}{3}=3$, $\frac{b+7}{5}=3 \quad \therefore a=2$, $b=8$
 $\therefore ab=16$

- 8 $x+3\leq 3a$ 를 풀면
 $x\leq 3a-3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $-3x+1\leq 2x+16$ 을 풀면
 $-5x\leq 15 \quad \therefore x\geq -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
주어진 연립부등식이 해를 갖지 않도록 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
 $3a-3<-3$, $3a<0 \quad \therefore a<0$
따라서 정수 a 의 최댓값은 -1 이다.



- 9 $3x-1<5x+3$ 을 풀면
 $-2x<4 \quad \therefore x>-2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $5x+3\leq 4x+a$ 를 풀면
 $x\leq a-3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 가 8개가 되도록 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



- 따라서 $6\leq a-3<7$ 이어야 하므로 $9\leq a<10$
따라서 조건을 만족시키는 자연수 a 의 값은 9이다.

- 10 어떤 자연수를 x 라 하면
 $\begin{cases} 5(x-1)>5 \\ x-4<4-x \end{cases}$
 $5(x-1)>5$ 를 풀면
 $5x-5>5$, $5x>10 \quad \therefore x>2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $x-4<4-x$ 를 풀면
 $2x<8 \quad \therefore x<4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 의 공통부분은 $2<x<4$
따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수는 3이다.

- 11 $|x-7|\leq a+1$ 에서 $-(a+1)\leq x-7\leq a+1$
 $\therefore -a+6\leq x\leq a+8$
주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 가 9개가 되려면
 $a+8-(-a+6)+1=9 \quad \therefore a=3$

12 (i) $x < -1$ 일 때

$$|2x+2| = -(2x+2) \text{이므로} \\ -(2x+2) \leq x+10, -3x \leq 12 \quad \therefore x \geq -4 \\ \text{그런데 } x < -1 \text{이므로 } -4 \leq x < -1$$

(ii) $x \geq -1$ 일 때

$$|2x+2| = 2x+2 \text{이므로} \\ 2x+2 \leq x+10 \quad \therefore x \leq 8 \\ \text{그런데 } x \geq -1 \text{이므로 } -1 \leq x \leq 8$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-4 \leq x \leq 8$ 따라서 $M=8, m=-4$ 이므로 $M+m=4$ 13 (i) $x < -3$ 일 때

$$|x+3| = -(x+3), |x-5| = -(x-5) \text{이므로} \\ -(x+3) - 2(x-5) < 10, -3x < 3 \quad \therefore x > -1 \\ \text{그런데 } x < -3 \text{이므로 해는 없다.}$$

(ii) $-3 \leq x < 5$ 일 때

$$|x+3| = x+3, |x-5| = -(x-5) \text{이므로} \\ (x+3) - 2(x-5) < 10, -x < -3 \quad \therefore x > 3 \\ \text{그런데 } -3 \leq x < 5 \text{이므로 } 3 < x < 5$$

(iii) $x \geq 5$ 일 때

$$|x+3| = x+3, |x-5| = x-5 \text{이므로} \\ (x+3) + 2(x-5) < 10, 3x < 17 \quad \therefore x < \frac{17}{3} \\ \text{그런데 } x \geq 5 \text{이므로 } 5 \leq x < \frac{17}{3}$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $3 < x < \frac{17}{3}$ 따라서 정수 x 는 4, 5의 2개이다.14 $\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ 이므로 주어진 부등식은 $2|x-1| + |x+1| \leq 6$ (i) $x < -1$ 일 때

$$|x-1| = -(x-1), |x+1| = -(x+1) \text{이므로} \\ -2(x-1) - (x+1) \leq 6, -3x \leq 5 \quad \therefore x \geq -\frac{5}{3} \\ \text{그런데 } x < -1 \text{이므로 } -\frac{5}{3} \leq x < -1$$

(ii) $-1 \leq x < 1$ 일 때

$$|x-1| = -(x-1), |x+1| = x+1 \text{이므로} \\ -2(x-1) + (x+1) \leq 6, -x \leq 3 \quad \therefore x \geq -3 \\ \text{그런데 } -1 \leq x < 1 \text{이므로 } -1 \leq x < 1$$

(iii) $x \geq 1$ 일 때

$$|x-1| = x-1, |x+1| = x+1 \text{이므로} \\ 2(x-1) + (x+1) \leq 6, 3x \leq 7 \quad \therefore x \leq \frac{7}{3} \\ \text{그런데 } x \geq 1 \text{이므로 } 1 \leq x \leq \frac{7}{3}$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$ 따라서 $\alpha = -\frac{5}{3}, \beta = \frac{7}{3}$ 이므로 $\beta - \alpha = 4$ 15 $4x - b \leq x + 2a$ 를 풀면

$$3x \leq 2a + b \quad \therefore x \leq \frac{2a+b}{3}$$

 $4x - b \leq 5x + a$ 를 풀면

$$-x \leq a + b \quad \therefore x \geq -a - b$$

연립부등식의 해가 $-5 \leq x \leq 2$ 이므로

$$\frac{2a+b}{3} = 2, -a-b = -5$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=4$ 따라서 처음 부등식은 $4x - 4 \leq x + 2 \leq 5x + 1$ 이므로 $4x - 4 \leq x + 2$ 를 풀면

$$3x \leq 6 \quad \therefore x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

 $x + 2 \leq 5x + 1$ 을 풀면

$$-4x \leq -1 \quad \therefore x \geq \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 의 공통부분은 $\frac{1}{4} \leq x \leq 2$

16 삼각형의 세 변의 길이는

 $3x \text{ cm}, 3x \text{ cm}, (30-6x) \text{ cm}$ (i) 가장 긴 변의 길이가 $(30-6x) \text{ cm}$ 일 때

$$3x < 30 - 6x \text{이므로}$$

$$9x < 30 \quad \therefore x < \frac{10}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$30 - 6x < 3x + 3x \text{이므로}$$

$$-12x < -30 \quad \therefore x > \frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣} \text{의 공통부분은 } \frac{5}{2} < x < \frac{10}{3}$$

(ii) 세 변의 길이가 같을 때

$$3x = 30 - 6x \text{이므로}$$

$$9x = 30 \quad \therefore x = \frac{10}{3}$$

(iii) 가장 긴 변의 길이가 $3x \text{ cm}$ 일 때

$$30 - 6x < 3x \text{이므로}$$

$$-9x < -30 \quad \therefore x > \frac{10}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉤}$$

$$3x < (30 - 6x) + 3x \text{이므로}$$

$$6x < 30 \quad \therefore x < 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉥}$$

$$\textcircled{㉤}, \textcircled{㉥} \text{의 공통부분은 } \frac{10}{3} < x < 5$$

(i), (ii), (iii)에서 x 의 값의 범위는 $\frac{5}{2} < x < 5$ 따라서 $\alpha = \frac{5}{2}, \beta = 5$ 이므로 $\alpha\beta = \frac{25}{2}$

17 의자의 개수를 x 라 하면 학생 수는 $7x+5$

한 의자에 8명씩 앉아서 의자 5개가 남으면 의자 $(x-6)$ 개에는 8명씩 앉고 마지막 의자에는 최소 1명, 최대 8명이 앉으므로

$$8(x-6)+1 \leq 7x+5 \leq 8(x-6)+8$$

$$8(x-6)+1 \leq 7x+5 \text{를 풀면}$$

$$8x-48+1 \leq 7x+5 \quad \therefore x \leq 52 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$7x+5 \leq 8(x-6)+8 \text{을 풀면}$$

$$7x+5 \leq 8x-48+8$$

$$-x \leq -45 \quad \therefore x \geq 45 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 의 공통부분은 $45 \leq x \leq 52$

따라서 의자의 개수가 될 수 없는 것은 $\textcircled{5}$ 이다.

18 $||x+2|+|x-1|| \leq 4$ 에서

$$-4 \leq |x+2|+|x-1| \leq 4$$

이때 $|x+2| \geq 0$, $|x-1| \geq 0$ 이므로

$$|x+2|+|x-1| \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq |x+2|+|x-1| \leq 4$$

(i) $x < -2$ 일 때

$$|x+2| = -(x+2), |x-1| = -(x-1) \text{이므로}$$

$$0 \leq -(x+2)-(x-1) \leq 4$$

$$0 \leq -2x-1 \leq 4, 1 \leq -2x \leq 5$$

$$\therefore -\frac{5}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$$

그런데 $x < -2$ 이므로

$$-\frac{5}{2} \leq x < -2$$

(ii) $-2 \leq x < 1$ 일 때

$$|x+2| = x+2, |x-1| = -(x-1) \text{이므로}$$

$$0 \leq (x+2)-(x-1) \leq 4$$

$$0 \leq 0 \times x + 3 \leq 4 \text{이므로 해는 모든 실수이다.}$$

그런데 $-2 \leq x < 1$ 이므로

$$-2 \leq x < 1$$

(iii) $x \geq 1$ 일 때

$$|x+2| = x+2, |x-1| = x-1 \text{이므로}$$

$$0 \leq (x+2)+(x-1) \leq 4$$

$$0 \leq 2x+1 \leq 4, -1 \leq 2x \leq 3$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로

$$1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1$ 이므로 구하는 합은

$$-2+(-1)+0+1=-2$$

II-4 02 이차부등식

이차부등식

개념 Check

165쪽

- 1 답 (1) $-1 < x < 2$ (2) $-1 \leq x \leq 2$
(3) $x < -1$ 또는 $x > 2$ (4) $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$
- 2 답 (1) 해는 없다. (2) $x=1$
(3) $x \neq 1$ 인 모든 실수 (4) 모든 실수
- 3 답 (1) 해는 없다. (2) 해는 없다.
(3) 모든 실수 (4) 모든 실수

문제

166~168쪽

01-1 답 (1) $-1 \leq x \leq 5$

$$(2) -3 < x < 0 \text{ 또는 } 4 < x < 6$$

(1) 부등식 $f(x) \leq g(x)$ 의 해는 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위이므로
 $-1 \leq x \leq 5$

(2) $f(x)g(x) > 0$ 이면

$$f(x) > 0, g(x) > 0 \text{ 또는 } f(x) < 0, g(x) < 0$$

(i) $f(x) > 0, g(x) > 0$ 일 때

$f(x) > 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$x < -3 \text{ 또는 } x > 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$g(x) > 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$0 < x < 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 의 공통부분은 $4 < x < 6$

(ii) $f(x) < 0, g(x) < 0$ 일 때

$f(x) < 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$-3 < x < 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

$g(x) < 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$x < 0 \text{ 또는 } x > 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{10}$$

$\textcircled{9}$, $\textcircled{10}$ 의 공통부분은 $-3 < x < 0$

(i), (ii)에서 부등식 $f(x)g(x) > 0$ 의 해는

$$-3 < x < 0 \text{ 또는 } 4 < x < 6$$

01-2 답 $x < -2$ 또는 $x > 2$

$$ax^2 + (b-m)x + c - n < 0 \text{에서 } ax^2 + bx + c < mx + n$$

따라서 이 부등식의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 직선 $y=mx+n$ 보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$x < -2 \text{ 또는 } x > 2$$

02-1 ㉡ (1) $x \leq 3$ 또는 $x \geq 4$ (2) $-1 < x < 7$

(3) $x \neq -4$ 인 모든 실수 (4) $x = \frac{3}{2}$

(5) 모든 실수 (6) 해는 없다.

(1) $x^2 - 7x + 12 \geq 0$ 에서

$$(x-3)(x-4) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 3 \text{ 또는 } x \geq 4$$

(2) $-x^2 + 7 > -6x$ 에서

$$x^2 - 6x - 7 < 0$$

$$(x+1)(x-7) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 7$$

(3) $x^2 + 8x + 16 > 0$ 에서 $(x+4)^2 > 0$

따라서 주어진 부등식의 해는

$x \neq -4$ 인 모든 실수이다.

(4) $4x^2 \leq 12x - 9$ 에서

$$4x^2 - 12x + 9 \leq 0$$

$$(2x-3)^2 \leq 0 \quad \therefore x = \frac{3}{2}$$

(5) $x^2 + 4x + 6 > 0$ 에서

$$(x+2)^2 + 2 > 0$$

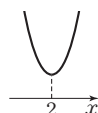
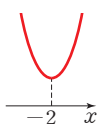
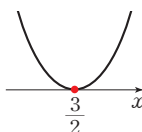
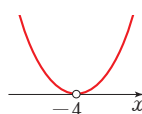
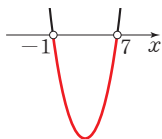
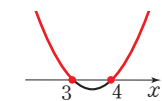
따라서 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

(6) $-2x^2 + 8x \geq 9$ 에서

$$2x^2 - 8x + 9 \leq 0$$

$$2(x-2)^2 + 1 \leq 0$$

따라서 주어진 부등식의 해는 없다.



02-2 ㉡ (1) $x \leq -4$ 또는 $x \geq 4$ (2) $-3 < x < 5$

(1) (i) $x < 0$ 일 때

$$|x| = -x \text{이므로}$$

$$x^2 + 3x - 4 \geq 0, (x+4)(x-1) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 1$$

그런데 $x < 0$ 이므로

$$x \leq -4$$

(ii) $x \geq 0$ 일 때

$$|x| = x \text{이므로}$$

$$x^2 - 3x - 4 \geq 0, (x+1)(x-4) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 4$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로

$$x \geq 4$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 4$$

(2) (i) $x < 1$ 일 때

$$|x-1| = -(x-1) \text{이므로}$$

$$x^2 - 2x - 3 < -3(x-1)$$

$$x^2 + x - 6 < 0, (x+3)(x-2) < 0$$

$$\therefore -3 < x < 2$$

그런데 $x < 1$ 이므로

$$-3 < x < 1$$

(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$|x-1| = x-1 \text{이므로}$$

$$x^2 - 2x - 3 < 3(x-1)$$

$$x^2 - 5x < 0, x(x-5) < 0$$

$$\therefore 0 < x < 5$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로

$$1 \leq x < 5$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$-3 < x < 5$$

03-1 ㉡ 4초

물체의 높이가 60 m 이상이면

$$40t - 5t^2 \geq 60, 5t^2 - 40t + 60 \leq 0$$

$$t^2 - 8t + 12 \leq 0$$

$$(t-2)(t-6) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq t \leq 6$$

따라서 물체의 높이가 60 m 이상인 시간은 $6-2=4$ (초) 동안이다.

03-2 ㉡ 4 이상 14 이하

직사각형의 가로의 길이를 x , 세로의 길이를 y 라 하면 둘레의 길이가 36이므로

$$2x + 2y = 36 \quad \therefore y = 18 - x$$

이 직사각형의 넓이가 56 이상이므로

$$x(18-x) \geq 56, -x^2 + 18x - 56 \geq 0$$

$$x^2 - 18x + 56 \leq 0$$

$$(x-4)(x-14) \leq 0$$

$$\therefore 4 \leq x \leq 14$$

따라서 직사각형의 가로의 길이의 범위는 4 이상 14 이하이다.

03-3 ㉡ 500원

빵 한 개의 가격을 $20x$ 원 내릴 때, 하루 판매액이 75000원 이상이 되어야 하므로

$$(600 - 20x)(100 + 10x) \geq 75000$$

$$-200x^2 + 4000x - 15000 \geq 0$$

$$x^2 - 20x + 75 \leq 0$$

$$(x-5)(x-15) \leq 0$$

$$\therefore 5 \leq x \leq 15$$

따라서 빵 한 개의 최대 가격은

$$600 - 20 \times 5 = 500(\text{원})$$

2 이차부등식의 해의 조건

개념 Check

170쪽

1 답 (1) $x^2+x-6<0$ (2) $x^2-3x-4>0$

(1) 해가 $-3<x<2$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+3)(x-2)<0 \quad \therefore x^2+x-6<0$$

(2) 해가 $x<-1$ 또는 $x>4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+1)(x-4)>0 \quad \therefore x^2-3x-4>0$$

문제

171~174쪽

04-1 답 -5

해가 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 6$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+1)(x-6) \geq 0 \quad \therefore x^2-5x-6 \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑦과 $ax^2+bx+6 \leq 0$ 의 부등호의 방향이 다르므로 $a < 0$

⑦의 양변에 a 를 곱하면 $ax^2-5ax-6a \leq 0$ 이므로

$$b = -5a, 6 = -6a \quad \therefore a = -1, b = 5$$

$$\therefore ab = -5$$

04-2 답 $-\frac{1}{4} < x < 1$

해가 $-1 < x < 3$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+1)(x-3) < 0 \quad \therefore x^2-2x-3 < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑦과 $ax^2+bx+c > 0$ 의 부등호의 방향이 다르므로 $a < 0$

⑦의 양변에 a 를 곱하면 $ax^2-2ax-3a > 0$ 이므로

$$b = -2a, c = -3a$$

이를 $2bx^2-cx+a < 0$ 에 대입하면

$$-4ax^2+3ax+a < 0$$

$-a > 0$ 이므로 양변을 $-a$ 로 나누면

$$4x^2-3x-1 < 0, (4x+1)(x-1) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{4} < x < 1$$

05-1 답 $a \leq -1$

모든 실수 x 에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하려면

$$a < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

또 이차방정식 $ax^2+6x+a-8=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - a(a-8) \leq 0$$

$$-a^2+8a+9 \leq 0, a^2-8a-9 \geq 0$$

$$(a+1)(a-9) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -1 \text{ 또는 } a \geq 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧의 공통부분은 $a \leq -1$

05-2 답 $4 \leq a \leq 5$

(i) $a-4=0$, 즉 $a=4$ 일 때

$0 \times x^2 + 0 \times x + 1 \geq 0$ 에서 $1 \geq 0$ 이므로 주어진 부등식은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

(ii) $a-4 \neq 0$, 즉 $a \neq 4$ 일 때

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$$a-4 > 0 \quad \therefore a > 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

또 이차방정식 $(a-4)x^2+2(a-4)x+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-4)^2 - (a-4) \leq 0$$

$$(a-4)\{(a-4)-1\} \leq 0, (a-4)(a-5) \leq 0$$

$$\therefore 4 < a \leq 5 (\because a \neq 4) \quad \cdots \cdots \textcircled{10}$$

⑨, ⑩의 공통부분은 $4 < a \leq 5$

(i), (ii)에서 $4 \leq a \leq 5$

05-3 답 $a < -1$ 또는 $a > 4$

이차함수 $y = x^2 - 2ax + a$ 의 그래프

가 직선 $y = 4x - 2a^2$ 보다 항상 위쪽에

있으려면 모든 실수 x 에 대하여 이

차부등식 $x^2 - 2ax + a > 4x - 2a^2$, 즉

$x^2 - 2(a+2)x + 2a^2 + a > 0$ 이 성립

해야 한다.

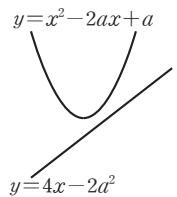
따라서 이차방정식 $x^2 - 2(a+2)x + 2a^2 + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+2)^2 - (2a^2 + a) < 0$$

$$-a^2 + 3a + 4 < 0, a^2 - 3a - 4 > 0$$

$$(a+1)(a-4) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 4$$



06-1 답 3

(i) $a > 0$ 일 때

이차방정식 $ax^2 + (a-3)x + a-3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (a-3)^2 - 4a(a-3) \geq 0$$

$$(a-3)\{(a-3)-4a\} \geq 0$$

$$-3(a+1)(a-3) \geq 0$$

$$(a+1)(a-3) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 3$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $0 < a \leq 3$

(ii) $a < 0$ 일 때

주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(i), (ii)에서 $a < 0$ 또는 $0 < a \leq 3$

따라서 a 의 최댓값은 3이다.

06-2 ㉡ $1 < a < 4$

주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + 2(a-2)x + 1 > 0$ 이 성립해야 하므로

$$a > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 이차방정식 $ax^2 + 2(a-2)x + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-2)^2 - a < 0, \quad a^2 - 5a + 4 < 0$$

$$(a-1)(a-4) < 0 \quad \therefore 1 < a < 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분은 $1 < a < 4$

07-1 ㉡ $-2 \leq a \leq 2$

$f(x) = x^2 - 8x - a^2 + 20$ 이라 하면

$$f(x) = (x-4)^2 - a^2 + 4$$

$-1 \leq x \leq 6$ 에서 이차부등식

$f(x) \geq 0$ 이 항상 성립하려면

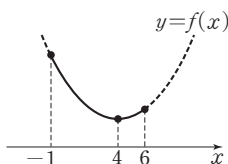
이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가

오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$f(4) \geq 0$$

$$-a^2 + 4 \geq 0, \quad a^2 - 4 \leq 0$$

$$(a+2)(a-2) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq a \leq 2$$



07-2 ㉡ 5

$a^2x^2 + ax < -3x + 4a^2 + 6$ 에서

$$a^2x^2 + (a+3)x - 4a^2 - 6 < 0$$

$$f(x) = a^2x^2 + (a+3)x - 4a^2 - 6$$

이라 할 때, $-2 \leq x \leq 2$ 에서 이차

부등식 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하러

면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가

오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$f(-2) < 0, \quad f(2) < 0$$

$$f(-2) < 0 \text{에서 } 4a^2 - 2(a+3) - 4a^2 - 6 < 0$$

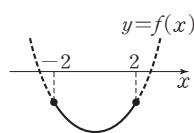
$$-2a < 12 \quad \therefore a > -6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(2) < 0 \text{에서 } 4a^2 + 2(a+3) - 4a^2 - 6 < 0$$

$$2a < 0 \quad \therefore a < 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분은 $-6 < a < 0$

따라서 정수 a 는 $-5, -4, -3, -2, -1$ 의 5개이다.



연습문제

175~177쪽

- | | | | | |
|----------------------|---------------|------|------|-------|
| 1 ② | 2 ④ | 3 3 | 4 ② | 5 5 m |
| 6 ③ | 7 ④ | 8 ③ | 9 12 | 10 2 |
| 11 5 | 12 $m < -4$ | 13 ⑤ | | |
| 14 $1 \leq a \leq 9$ | 15 ② | 16 ③ | 17 ① | |
| 18 ③ | 19 $k \leq 2$ | | | |

- 1 부등식 $f(x) - g(x) > 0$, 즉 $f(x) > g(x)$ 의 해는 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로 $x < -2$ 또는 $x > 3$

- 2 ① $x^2 - 2x - 35 < 0$ 에서
 $(x+5)(x-7) < 0 \quad \therefore -5 < x < 7$

- ② $x^2 - 6x + 9 > 0$ 에서

$$(x-3)^2 > 0$$

따라서 주어진 부등식의 해는 $x \neq 3$ 인 모든 실수이다.

- ③ $2x^2 - 2x > -5$ 에서

$$2x^2 - 2x + 5 > 0, \quad 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} > 0$$

따라서 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

- ④ $4x - 1 > 4x^2$ 에서

$$4x^2 - 4x + 1 < 0, \quad (2x-1)^2 < 0$$

따라서 주어진 부등식의 해는 없다.

- ⑤ $-9x^2 + 4x - 1 \geq -2x$ 에서

$$9x^2 - 6x + 1 \leq 0, \quad (3x-1)^2 \leq 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{3}$$

따라서 해가 없는 것은 ④이다.

- 3 $(x+3)(x-5) \leq -7$ 에서

$$x^2 - 2x - 15 \leq -7, \quad x^2 - 2x - 8 \leq 0$$

$$(x+2)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$|x-a| \leq b \text{에서 } -b \leq x-a \leq b \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore a-b \leq x \leq a+b$$

이는 $\textcircled{1}$ 과 같으므로

$$a-b = -2, \quad a+b = 4$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=3$

$$\therefore ab=3$$

- 4 (i) $x < 1$ 일 때

$$|x-1| = -(x-1) \text{이므로}$$

$$x^2 - 2x - 5 < -(x-1), \quad x^2 - x - 6 < 0$$

$$(x+2)(x-3) < 0 \quad \therefore -2 < x < 3$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $-2 < x < 1$

- (ii) $x \geq 1$ 일 때

$$|x-1| = x-1 \text{이므로}$$

$$x^2 - 2x - 5 < x-1, \quad x^2 - 3x - 4 < 0$$

$$(x+1)(x-4) < 0 \quad \therefore -1 < x < 4$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $1 \leq x < 4$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2 < x < 4$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

- 5 도로의 폭을 x m라 하면 도로를 제외한 땅의 넓이는 가로
의 길이와 세로의 길이가 각각 $(25-x)$ m, $(15-x)$ m
인 직사각형의 넓이와 같고, 그 넓이가 200 m^2 이상이 되
어야 하므로

$$(25-x)(15-x) \geq 200, x^2 - 40x + 175 \geq 0$$

$$(x-5)(x-35) \geq 0 \quad \therefore x \leq 5 \text{ 또는 } x \geq 35$$

그런데 $0 < x < 15$ 이므로 $0 < x \leq 5$
따라서 도로의 최대 폭은 5 m이다.

- 6 해가 $x \leq b$ 또는 $x \geq 5$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x-b)(x-5) \geq 0 \quad \therefore x^2 - (b+5)x + 5b \geq 0$
따라서 $a = -(b+5)$, $-15 = 5b$ 이므로

$$a = -2, b = -3 \quad \therefore a - b = 1$$

- 7 해가 $2 < x < 3$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x-2)(x-3) < 0 \quad \therefore x^2 - 5x + 6 < 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 $\textcircled{7}$ 과 $ax^2 + 5x + b > 0$ 의 부등호의 방향이 다르므로
 $a < 0$

$$\textcircled{7} \text{의 양변에 } a \text{를 곱하면 } ax^2 - 5ax + 6a > 0 \text{이므로}$$

$$5 = -5a, b = 6a \quad \therefore a = -1, b = -6$$

$$\text{이를 } bx^2 + ax + 1 < 0 \text{에 대입하면}$$

$$-6x^2 - x + 1 < 0, 6x^2 + x - 1 > 0$$

$$(2x+1)(3x-1) > 0$$

$$\therefore x < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x > \frac{1}{3}$$

- 8 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 의 그래프가 직선 $y = -2x + 1$
보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위는 이차부등식
 $x^2 + ax + b > -2x + 1$, 즉 $x^2 + (a+2)x + b - 1 > 0$ 의 해
와 같다.

해가 $x < -2$ 또는 $x > 3$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등
식은

$$(x+2)(x-3) > 0 \quad \therefore x^2 - x - 6 > 0$$

$$\text{따라서 } a+2 = -1, b-1 = -6 \text{이므로}$$

$$a = -3, b = -5 \quad \therefore a - b = 2$$

- 9 $f(x) < 0$ 의 해가 $-3 < x < 6$ 이므로

$$f(x) = a(x+3)(x-6) \quad (a > 0) \text{이라 하면}$$

$$f(3-x) = a(3-x+3)(3-x-6)$$

$$= a(6-x)(-3-x)$$

$$= a(x-6)(x+3)$$

따라서 $f(3-x) < 0$, 즉 $a(x-6)(x+3) < 0$ 에서

$$(x+3)(x-6) < 0 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore -3 < x < 6$$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, \dots, 5$ 이므로 구하는 합은
 $-2 + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 12$

다른 풀이

$$f(3-x) < 0 \text{에서 } 3-x = t \text{로 놓으면}$$

$$f(t) < 0 \text{의 해가 } -3 < t < 6 \text{이므로}$$

$$-3 < 3-x < 6$$

$$-6 < -x < 3$$

$$\therefore -3 < x < 6$$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, \dots, 5$ 이므로 구하는 합은

$$-2 + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 12$$

- 10 이차부등식 $x^2 - (a+3)x + 2a + 6 \leq 0$ 의 해가 오직 한 개
이므로 이차방정식 $x^2 - (a+3)x + 2a + 6 = 0$ 의 판별식을
 D 라 하면

$$D = (a+3)^2 - 4(2a+6) = 0$$

$$(a+3)\{(a+3)-8\} = 0$$

$$(a+3)(a-5) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 5$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$-3 + 5 = 2$$

- 11 (i) $a-1=0$, 즉 $a=1$ 일 때

$0 \times x^2 - 0 \times x + 5 > 0$ 에서 $5 > 0$ 이므로 주어진 부등식
은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

- (ii) $a-1 \neq 0$, 즉 $a \neq 1$ 일 때

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$$a-1 > 0 \quad \therefore a > 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 이차방정식 $(a-1)x^2 - 2(a-1)x + 5 = 0$ 의 판별
식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - 5(a-1) < 0$$

$$(a-1)\{(a-1)-5\} < 0$$

$$(a-1)(a-6) < 0$$

$$\therefore 1 < a < 6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 의 공통부분은 $1 < a < 6$

- (i), (ii)에서 $1 \leq a < 6$

따라서 정수 a 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

- 12 이차함수 $y = -x^2 - x + 2m$ 의 그래프가 직선

$y = x + m - 3$ 보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x
에 대하여 이차부등식 $-x^2 - x + 2m < x + m - 3$, 즉
 $x^2 + 2x - m - 3 > 0$ 이 성립해야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2 + 2x - m - 3 = 0$ 의 판별식을 D 라
하면

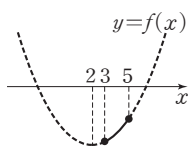
$$\frac{D}{4} = 1 - (-m-3) < 0$$

$$\therefore m < -4$$

- 13 $x^2-6x+5 \leq k(x-a)$ 에서
 $x^2-(k+6)x+ak+5 \leq 0$
 이 이차부등식이 항상 해를 가지므로 이차방정식
 $x^2-(k+6)x+ak+5=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면
 $D_1=(k+6)^2-4(ak+5) \geq 0$
 $k^2-4(a-3)k+16 \geq 0$
 k 의 값에 관계없이 이 부등식이 항상 성립하므로 k 에 대
 한 이차방정식 $k^2-4(a-3)k+16=0$ 의 판별식을 D_2 라
 하면
 $\frac{D_2}{4}=4(a-3)^2-16 \leq 0$
 $4a^2-24a+20 \leq 0, a^2-6a+5 \leq 0$
 $(a-1)(a-5) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq a \leq 5$
 따라서 $a=1, \beta=5$ 이므로 $\alpha+\beta=6$

- 14 주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에
 대하여 $ax^2-2(a-3)x+4 \geq 0$ 이 성립해야 하므로
 $a > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 또 이차방정식 $ax^2-2(a-3)x+4=0$ 의 판별식을 D 라
 하면
 $\frac{D}{4}=(a-3)^2-4a \leq 0$
 $a^2-10a+9 \leq 0, (a-1)(a-9) \leq 0$
 $\therefore 1 \leq a \leq 9 \quad \dots\dots \textcircled{8}$
 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 의 공통부분은 $1 \leq a \leq 9$

- 15 $f(x)=x^2-4x-4k+3$ 이라 하면
 $f(x)=(x-2)^2-4k-1$
 $3 \leq x \leq 5$ 에서 이차부등식 $f(x) \leq 0$
 이 항상 성립하려면 이차함수
 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림
 과 같아야 하므로
 $f(5) \leq 0$
 $8-4k \leq 0 \quad \therefore k \geq 2$
 따라서 k 의 최솟값은 2이다.



- 16 원래의 수강료를 p 원, 그때의 회원 수를 q 라 하면 한 달
 수업은 pq (원)
 원래의 수강료보다 $x\%$ 인상한 가격은
 $p\left(1+\frac{x}{100}\right)$ (원)
 원래의 회원 수보다 $0.5x\%$ 감소한 회원 수는
 $q\left(1-\frac{x}{200}\right)$
 이때의 한 달 수업은
 $pq\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{200}\right)$ (원)

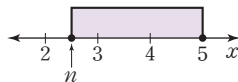
한 달 수업이 8% 이상 증가하려면
 $pq\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{200}\right) \geq pq\left(1+\frac{8}{100}\right)$
 $x^2-100x+1600 \leq 0 \quad (\because pq > 0)$
 $(x-20)(x-80) \leq 0 \quad \therefore 20 \leq x \leq 80$
 따라서 x 의 최댓값과 최솟값의 합은
 $80+20=100$

- 17 $P(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면
 $\textcircled{7}$ 의 $P(x) \geq -2x-3$ 에서 $ax^2+bx+c \geq -2x-3$
 $ax^2+(b+2)x+c+3 \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{9}$
 해가 $0 \leq x \leq 1$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $x(x-1) \leq 0 \quad \therefore x^2-x \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{10}$
 $\textcircled{9}$ 과 $\textcircled{10}$ 의 부등호의 방향이 다르므로 $a < 0$
 $\textcircled{10}$ 의 양변에 a 를 곱하면 $ax^2-ax \geq 0$ 이므로
 $b+2=-a, c+3=0 \quad \therefore b=-a-2, c=-3$
 $\therefore P(x)=ax^2-(a+2)x-3 \quad \dots\dots \textcircled{11}$
 $\textcircled{11}$ 의 $P(x)=-3x-2$ 에서 $ax^2-(a+2)x-3=-3x-2$
 $ax^2-(a-1)x-1=0$
 이 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D 라 하면
 $D=(a-1)^2+4a=0, a^2+2a+1=0$
 $(a+1)^2=0 \quad \therefore a=-1$
 이를 $\textcircled{11}$ 에 대입하면
 $P(x)=-x^2-x-3$
 $\therefore P(-1)=-1+1-3=-3$

다른 풀이

$\textcircled{7}$ 에서 $P(x) \geq -2x-3$, 즉 $P(x)+2x+3 \geq 0$ 의 해가
 $0 \leq x \leq 1$ 이므로 $P(x)+2x+3=ax(x-1)$ ($a < 0$)로
 놓으면
 $P(x)=ax^2-(a+2)x-3$
 $\textcircled{11}$ 에서 $P(x)=-3x-2$, 즉 $ax^2-(a-1)x-1=0$ 이 중
 근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D=(a-1)^2+4a=0, (a+1)^2=0 \quad \therefore a=-1$
 따라서 $P(x)=-x^2-x-3$ 이므로
 $P(-1)=-1+1-3=-3$

- 18 $x^2-(n+5)x+5n \leq 0$ 에서 $(x-n)(x-5) \leq 0$
 (i) $n < 5$ 일 때
 $n \leq x \leq 5$
 주어진 이차부등식을 만족
 시키는 정수 x 가 3개이려
 면 오른쪽 그림과 같아야
 하므로
 $2 < n \leq 3$
 n 은 자연수이므로 $n=3$



(ii) $n=5$ 일 때

$x=5$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $n>5$ 일 때

$$5 \leq x \leq n$$

주어진 이차부등식을 만족

시키는 정수 x 가 3개이러

면 오른쪽 그림과 같아야

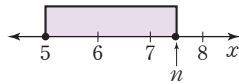
하므로

$$7 \leq n < 8$$

n 은 자연수이므로 $n=7$

(i), (ii), (iii)에서 $n=3$ 또는 $n=7$

따라서 모든 n 의 값의 합은 $3+7=10$



19 $f(x)=x^2-2kx+3=(x-k)^2-k^2+3$

$0 < x < 1$ 에서 이차부등식 $f(x) > 0$ 이 항상 성립해야 하므로 k 의 값의 범위를 $0 < x < 1$ 을 기준으로 나누어 생각하면

(i) $k \leq 0$ 일 때

$0 < x < 1$ 에서 이차부등식

$f(x) > 0$ 이 항상 성립하려면 이

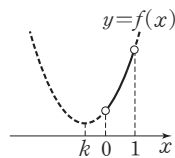
차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오

른쪽 그림과 같아야 하므로

$$f(0)=3 \geq 0$$

즉, k 의 값에 관계없이 $0 < x < 1$ 에서 $f(x) > 0$ 이다.

그런데 $k \leq 0$ 이므로 $k \leq 0$



(ii) $0 < k < 1$ 일 때

$0 < x < 1$ 에서 이차부등식

$f(x) > 0$ 이 항상 성립하려면 이

차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오

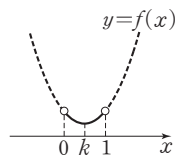
른쪽 그림과 같아야 하므로

$$f(k) > 0$$

$$-k^2+3 > 0, k^2-3 < 0$$

$$(k+\sqrt{3})(k-\sqrt{3}) < 0 \quad \therefore -\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$$

그런데 $0 < k < 1$ 이므로 $0 < k < 1$



(iii) $k \geq 1$ 일 때

$0 < x < 1$ 에서 이차부등식

$f(x) > 0$ 이 항상 성립하려면 이

차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오

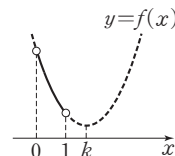
른쪽 그림과 같아야 하므로

$$f(1) \geq 0$$

$$1-2k+3 \geq 0$$

$$-2k+4 \geq 0 \quad \therefore k \leq 2$$

그런데 $k \geq 1$ 이므로 $1 \leq k \leq 2$



(i), (ii), (iii)에서 $k \leq 2$

II-4 03 연립이차부등식

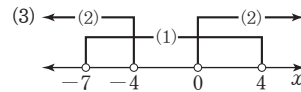
연립이차부등식

개념 Check

178쪽

1 답 (1) $-7 < x < 4$

(2) $x < -4$ 또는 $x > 0$



(4) $-7 < x < -4$ 또는 $0 < x < 4$

문제

179~181쪽

01-1 답 (1) $x < -2$ 또는 $-1 < x < 2$ (2) $-1 < x \leq \frac{1}{2}$

(3) $-4 \leq x < -1$ (4) $-1 < x \leq 2$

(1) $2(x-1) < -x+4$ 를 풀면

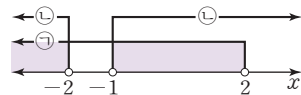
$$3x < 6 \quad \therefore x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$-x^2 < 3x+2 \text{를 풀면}$$

$$x^2+3x+2 > 0, (x+2)(x+1) > 0$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$x < -2 \text{ 또는 } -1 < x < 2$$

(2) $|2x+3| \leq 4$ 를 풀면

$$-4 \leq 2x+3 \leq 4, -7 \leq 2x \leq 1$$

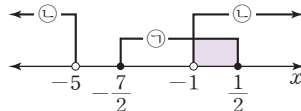
$$\therefore -\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x^2+6x+5 > 0 \text{을 풀면}$$

$$(x+5)(x+1) > 0$$

$$\therefore x < -5 \text{ 또는 } x > -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$-1 < x \leq \frac{1}{2}$$

(3) $x^2 > 1$ 을 풀면

$$x^2-1 > 0, (x+1)(x-1) > 0$$

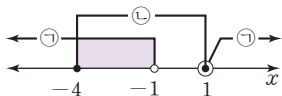
$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x^2+3x\leq 4$ 를 풀면

$$x^2+3x-4\leq 0, (x+4)(x-1)\leq 0$$

$$\therefore -4\leq x\leq 1 \quad \cdots \textcircled{L}$$

⑦, ①을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$-4\leq x<-1$$

(4) $x^2+8x+7>0$ 을 풀면

$$(x+7)(x+1)>0$$

$$\therefore x<-7 \text{ 또는 } x>-1 \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$x^2+|x|-6\leq 0 \text{을 풀면}$$

(i) $x<0$ 일 때

$$|x|=-x \text{이므로}$$

$$x^2-x-6\leq 0, (x+2)(x-3)\leq 0$$

$$\therefore -2\leq x\leq 3$$

$$\text{그런데 } x<0 \text{이므로 } -2\leq x<0$$

(ii) $x\geq 0$ 일 때

$$|x|=x \text{이므로}$$

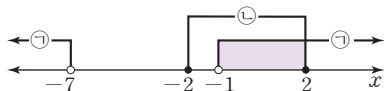
$$x^2+x-6\leq 0, (x+3)(x-2)\leq 0$$

$$\therefore -3\leq x\leq 2$$

$$\text{그런데 } x\geq 0 \text{이므로 } 0\leq x\leq 2$$

(i), (ii)에서 $-2\leq x\leq 2 \quad \cdots \textcircled{L}$

⑦, ①을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 주어진 연립부등식의 해는 $-1<x\leq 2$

02-1 ㉡ $a\geq 0$

$$x^2-3x\leq 0 \text{을 풀면}$$

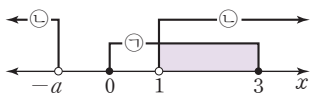
$$x(x-3)\leq 0 \quad \therefore 0\leq x\leq 3 \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$x^2+(a-1)x-a>0 \text{을 풀면}$$

$$(x+a)(x-1)>0$$

$$\therefore \begin{cases} -a<1 \text{ 일 때, } x<-a \text{ 또는 } x>1 \\ -a=1 \text{ 일 때, } x\neq 1 \text{ 인 모든 실수} \\ -a>1 \text{ 일 때, } x<1 \text{ 또는 } x>-a \end{cases} \quad \cdots \textcircled{L}$$

⑦, ①의 공통부분이 $1<x\leq 3$ 이 되도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 ①은 $x<-a$ 또는 $x>1$ 이고 a 의 값의 범위는

$$-a\leq 0 \quad \therefore a\geq 0$$

02-2 ㉡ $-2<a\leq 3$

$$x^2+x-2>0 \text{을 풀면}$$

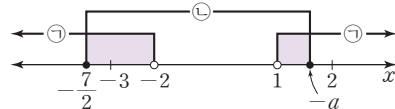
$$(x+2)(x-1)>0 \quad \therefore x<-2 \text{ 또는 } x>1 \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$2x^2+(2a+7)x+7a\leq 0 \text{을 풀면}$$

$$(x+a)(2x+7)\leq 0$$

$$\therefore \begin{cases} -a<-\frac{7}{2} \text{ 일 때, } -a\leq x\leq -\frac{7}{2} \\ -a=-\frac{7}{2} \text{ 일 때, } x=-\frac{7}{2} \\ -a>-\frac{7}{2} \text{ 일 때, } -\frac{7}{2}\leq x\leq -a \end{cases} \quad \cdots \textcircled{L}$$

⑦, ①의 공통부분에 속하는 정수가 -3뿐이도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 ①은 $-\frac{7}{2}\leq x\leq -a$ 이고 a 의 값의 범위는

$$-3\leq -a<2 \quad \therefore -2<a\leq 3$$

02-3 ㉡ $a\leq -\frac{2}{3}$

$$x^2-9x+14<0 \text{을 풀면}$$

$$(x-2)(x-7)<0 \quad \therefore 2<x<7 \quad \cdots \textcircled{7}$$

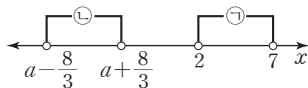
$$3|x-a|<8 \text{을 풀면}$$

$$-8<3(x-a)<8$$

$$-\frac{8}{3}<x-a<\frac{8}{3} \quad \therefore a-\frac{8}{3}<x<a+\frac{8}{3} \quad \cdots \textcircled{L}$$

이때 a 가 음수이므로 $a-\frac{8}{3}<0$

⑦, ①의 공통부분이 존재하지 않도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $a+\frac{8}{3}\leq 2$ 이므로 $a\leq -\frac{2}{3}$

03-1 ㉡ 2m 이상 4m 이하

보행자 통로의 폭을 x m라 하면 보행자 통로의 넓이는

$$(6+2x)(4+2x)-6\times 4=4x^2+20x(\text{m}^2)$$

보행자 통로의 넓이가 56m^2 이상 144m^2 이하이므로

$$56\leq 4x^2+20x\leq 144$$

$$\therefore 14\leq x^2+5x\leq 36$$

$$14\leq x^2+5x \text{를 풀면}$$

$$x^2+5x-14\geq 0, (x+7)(x-2)\geq 0$$

$$\therefore x\leq -7 \text{ 또는 } x\geq 2$$

$$\text{그런데 } x>0 \text{이므로 } x\geq 2 \quad \cdots \textcircled{7}$$

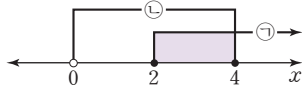
$$x^2+5x\leq 36 \text{을 풀면}$$

$$x^2+5x-36\leq 0, (x+9)(x-4)\leq 0$$

$$\therefore -9\leq x\leq 4$$

그런데 $x>0$ 이므로 $0<x\leq 4$ ㉔

㉓, ㉔을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 x 의 값의 범위는 $2\leq x\leq 4$ 이므로 보행자 통로의 폭의 범위는 2m 이상 4m 이하이다.

03-2 ㉔ $x>3$

삼각형의 세 변의 길이는 양수이므로

$$x>0 \quad \text{..... ㉓}$$

삼각형의 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로

$$x+2<x+(x+1) \quad \therefore x>1 \quad \text{..... ㉔}$$

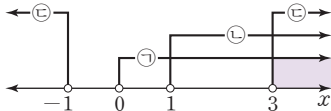
예각삼각형이 되려면

$$(x+2)^2<x^2+(x+1)^2$$

$$x^2-2x-3>0, (x+1)(x-3)>0$$

$$\therefore x<-1 \text{ 또는 } x>3 \quad \text{..... ㉔}$$

㉓, ㉔, ㉔을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore x>3$$

2 이차방정식의 실근의 조건

문제

183~184쪽

04-1 ㉔ (1) $k\geq \frac{1}{4}$ (2) $-2< k\leq -1$ (3) $k<-2$

이차방정식 $x^2-2(2k+1)x+k+2=0$ 의 두 실근을 α, β , 판별식을 D 라 하면

$$\alpha+\beta=2(2k+1), \alpha\beta=k+2$$

$$\frac{D}{4}=(2k+1)^2-(k+2)=4k^2+3k-1$$

$$=(k+1)(4k-1)$$

(1) (i) $D\geq 0$ 이어야 하므로

$$(k+1)(4k-1)\geq 0$$

$$\therefore k\leq -1 \text{ 또는 } k\geq \frac{1}{4} \quad \text{..... ㉓}$$

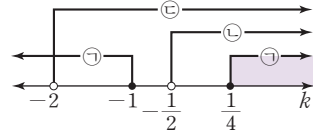
(ii) $\alpha+\beta>0$ 이어야 하므로

$$2(2k+1)>0 \quad \therefore k>-\frac{1}{2} \quad \text{..... ㉔}$$

(iii) $\alpha\beta>0$ 이어야 하므로

$$k+2>0 \quad \therefore k>-2 \quad \text{..... ㉔}$$

㉓, ㉔, ㉔을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore k\geq \frac{1}{4}$$

(2) (i) $D\geq 0$ 이어야 하므로

$$(k+1)(4k-1)\geq 0$$

$$\therefore k\leq -1 \text{ 또는 } k\geq \frac{1}{4} \quad \text{..... ㉓}$$

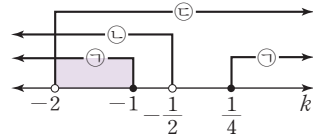
(ii) $\alpha+\beta<0$ 이어야 하므로

$$2(2k+1)<0 \quad \therefore k<-\frac{1}{2} \quad \text{..... ㉔}$$

(iii) $\alpha\beta>0$ 이어야 하므로

$$k+2>0 \quad \therefore k>-2 \quad \text{..... ㉔}$$

㉓, ㉔, ㉔을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore -2< k\leq -1$$

(3) $\alpha\beta<0$ 이어야 하므로

$$k+2<0 \quad \therefore k<-2$$

04-2 ㉔ 2

이차방정식 $x^2+(a^2-4)x+a^2-2a-3=0$ 의 두 실근을

α, β 라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로 $\alpha\beta<0$ 에서

$$a^2-2a-3<0, (a+1)(a-3)<0$$

$$\therefore -1< a<3 \quad \text{..... ㉓}$$

또 두 근의 절댓값이 같으므로 $\alpha+\beta=0$ 에서

$$-(a^2-4)=0, a^2=4$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=2 \quad \text{..... ㉔}$$

㉓, ㉔에서 $a=2$

05-1 ㉔ $-2< a<-1$

$f(x)=x^2-(a-2)x+a^2-1$ 이라 할

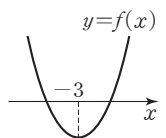
때, 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근 사이에 -3 이 있으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$f(-3)<0$$

$$9+3(a-2)+a^2-1<0$$

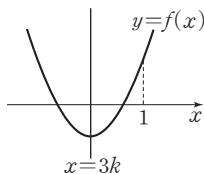
$$a^2+3a+2<0, (a+2)(a+1)<0$$

$$\therefore -2< a<-1$$



05-2 ㉔ $k \leq -1$

$f(x) = x^2 - 6kx - 4k + 5$ 라 할 때, 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이 모두 1보다 작으므로 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9k^2 - (-4k + 5) \geq 0$$

$$9k^2 + 4k - 5 \geq 0, (k+1)(9k-5) \geq 0$$

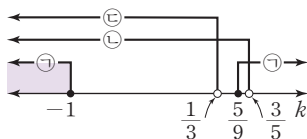
$$\therefore k \leq -1 \text{ 또는 } k \geq \frac{5}{9} \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

(ii) $f(1) > 0$ 에서

$$1 - 6k - 4k + 5 > 0 \quad \therefore k < \frac{3}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

(iii) $3k < 1$ 에서 $k < \frac{1}{3}$ ㉖

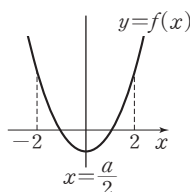
㉔, ㉕, ㉖을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore k \leq -1$$

05-3 ㉕ $-3 < a \leq -2\sqrt{2}$ 또는 $2\sqrt{2} \leq a < 3$

$f(x) = x^2 - ax + 2$ 라 할 때, 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이 모두 -2 와 2 사이에 있으므로 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 8 \geq 0$$

$$(a + 2\sqrt{2})(a - 2\sqrt{2}) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -2\sqrt{2} \text{ 또는 } a \geq 2\sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

(ii) $f(-2) > 0$ 에서

$$4 + 2a + 2 > 0 \quad \therefore a > -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

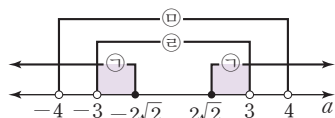
$f(2) > 0$ 에서

$$4 - 2a + 2 > 0 \quad \therefore a < 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉖}$$

$$\textcircled{㉔}, \textcircled{㉕} \text{의 공통부분은 } -3 < a < 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉗}$$

(iii) $-2 < \frac{a}{2} < 2$ 에서 $-4 < a < 4$ ㉘

㉔, ㉖, ㉘을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore -3 < a \leq -2\sqrt{2} \text{ 또는 } 2\sqrt{2} \leq a < 3$$

연습문제

185~186쪽

- | | | | | |
|-------------------------------|---------------|------|-----|-----|
| 1 ⑤ | 2 5 | 3 ④ | 4 ④ | 5 ④ |
| 6 4 | 7 6m 초과 7m 이하 | 8 -1 | | |
| 9 $2 < a < 6$ | 10 3 | | | |
| 11 $-1 \leq a < 0$ 또는 $a > 2$ | 12 18 | 13 ② | | |

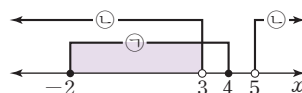
1 $|x-1| \leq 3$ 을 풀면

$$-3 \leq x-1 \leq 3 \quad \therefore -2 \leq x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$x^2 - 8x + 15 > 0$ 을 풀면

$$(x-3)(x-5) > 0 \quad \therefore x < 3 \text{ 또는 } x > 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

㉔, ㉕을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



주어진 연립부등식의 해는 $-2 \leq x < 3$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.

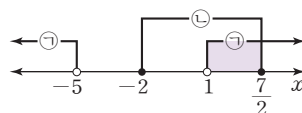
2 $x^2 + 4x - 5 > 0$ 을 풀면

$$(x+5)(x-1) > 0 \quad \therefore x < -5 \text{ 또는 } x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$2x^2 - 3x - 14 \leq 0$ 을 풀면

$$(x+2)(2x-7) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq x \leq \frac{7}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

㉔, ㉕을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



주어진 연립부등식의 해는 $1 < x \leq \frac{7}{2}$

따라서 정수 x 는 $2, 3$ 이므로 구하는 합은 $2+3=5$

3 $x^2 + 3 \geq 4x$ 를 풀면

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0, (x-1)(x-3) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$x^2 - 7x + 10 \leq 0$ 을 풀면

$$x^2 - 7x + 10 \leq 0, (x-2)(x-5) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq x \leq 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

㉔, ㉕을 수직선 위에 나타내

면 오른쪽 그림과 같으므로

주어진 연립부등식의 해는

$$3 \leq x \leq 5$$

해가 $3 \leq x \leq 5$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-3)(x-5) \leq 0 \quad \therefore x^2 - 8x + 15 \leq 0$$

양변에 -1 을 곱하면 $-x^2 + 8x - 15 \geq 0$

이 부등식이 $ax^2 + bx - 15 \geq 0$ 과 같으므로

$$a = -1, b = 8 \quad \therefore a + b = 7$$

- 4 $x^2-10x+a>0$ 은 해가 $x<4$ 또는 $x>6$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식이므로

$$(x-4)(x-6)>0 \quad \therefore x^2-10x+24>0$$

$$\therefore a=24$$

$x^2-9x+b\leq 0$ 은 해가 $2\leq x\leq 7$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식이므로

$$(x-2)(x-7)\leq 0 \quad \therefore x^2-9x+14\leq 0$$

$$\therefore b=14$$

$$\therefore a-b=24-14=10$$

- 5 $|x-k|\leq 5$ 를 풀면

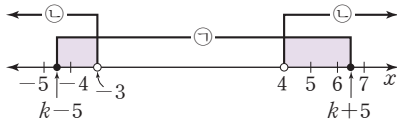
$$-5\leq x-k\leq 5 \quad \therefore k-5\leq x\leq k+5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$x^2-x-12>0$ 을 풀면

$$(x+3)(x-4)>0$$

$$\therefore x<-3 \text{ 또는 } x>4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②의 공통부분에 속하는 정수 x 의 값의 합이 7이 되도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $-5<k-5\leq -4$, $6\leq k+5<7$ 이므로

$$0<k\leq 1, 1\leq k<2$$

$$\therefore k=1$$

- 6 $x^2+x-20\leq 0$ 을 풀면

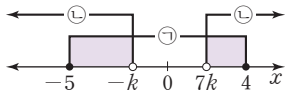
$$(x+5)(x-4)\leq 0 \quad \therefore -5\leq x\leq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$x^2-6kx-7k^2>0$ 을 풀면

$$(x+k)(x-7k)>0$$

$$\therefore x<-k \text{ 또는 } x>7k \quad (\because k>0) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②의 공통부분이 존재하도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $-5<-k<0$ 또는 $0<7k<4$ 이므로

$$0<k<5 \text{ 또는 } 0<k<\frac{4}{7}$$

$$\therefore 0<k<5$$

따라서 양의 정수 k 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

- 7 출입문의 가로 길이 x m, 세로 길이 y m라 하면

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } 2x+2y=18 \quad \therefore y=9-x$$

$y>0$ 이므로 $9-x>0$

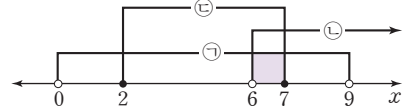
$$\therefore 0<x<9 \quad (\because x>0) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉢} \text{에서 } x>2(9-x) \quad \therefore x>6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉢} \text{에서 } x(9-x)\geq 14, x^2-9x+14\leq 0$$

$$(x-2)(x-7)\leq 0 \quad \therefore 2\leq x\leq 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

①, ②, ③을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 x 의 값의 범위는 $6\leq x\leq 7$ 이므로 가로의 길이의 범위는 6m 초과 7m 이하이다.

- 8 이차방정식 $x^2-kx-k(k-1)=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1=k^2+4k(k-1)>0$$

$$5k^2-4k>0, k(5k-4)>0$$

$$\therefore k<0 \text{ 또는 } k>\frac{4}{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

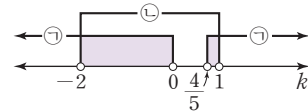
한편 $(2-k)x^2+2kx+1=0$ 이 이차방정식이므로 $k\neq 2$ 이고, 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=k^2-(2-k)<0$$

$$k^2+k-2<0, (k+2)(k-1)<0$$

$$\therefore -2<k<1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore -2<k<0 \text{ 또는 } \frac{4}{5}<k<1$$

이때 k 는 정수이므로 $k=-1$

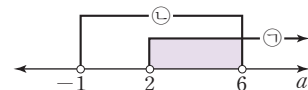
- 9 이차방정식 $x^2-(a^2-5a-6)x-a+2=0$ 의 두 실근을 α, β 라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로 $\alpha\beta<0$ 에서

$$-a+2<0 \quad \therefore a>2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크므로 $\alpha+\beta<0$ 에서 $a^2-5a-6<0, (a+1)(a-6)<0$

$$\therefore -1<a<6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore 2<a<6$$

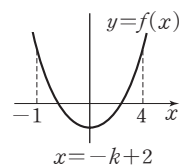
- 10 $f(x)=x^2+2(k-2)x-k+2$ 라 할

때, 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이

모두 -1 과 4 사이에 있으므로 이차

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(-k+2)\geq 0$$

$$k^2-3k+2\geq 0, (k-1)(k-2)\geq 0$$

$$\therefore k\leq 1 \text{ 또는 } k\geq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) $f(-1)>0$ 에서

$$1-2(k-2)-k+2>0$$

$$\therefore k<\frac{7}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$f(4)>0$ 에서

$$16+8(k-2)-k+2>0$$

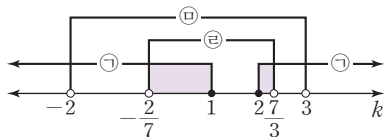
$$\therefore k>-\frac{2}{7} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡}, \textcircled{㉢} \text{의 공통부분은 } -\frac{2}{7}<k<\frac{7}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

(iii) $-1<-k+2<4$ 에서

$$-2<k<3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉤}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉣}, \textcircled{㉤}$ 을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore -\frac{2}{7}<k\leq 1 \text{ 또는 } 2\leq k<\frac{7}{3}$$

이때 정수 k 는 0, 1, 2의 3개이다.

11 $x^2-x-6<0$ 을 풀면

$$(x+2)(x-3)<0 \quad \therefore -2<x<3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

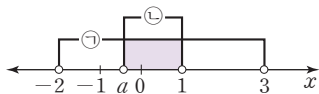
$x^2-(a+1)x+a<0$ 을 풀면

$$(x-a)(x-1)<0$$

$$\therefore \begin{cases} a<1 \text{ 일 때, } a<x<1 \\ a=1 \text{ 일 때, 해는 없다.} \\ a>1 \text{ 일 때, } 1<x<a \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

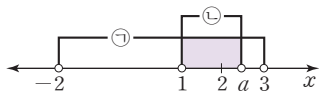
$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 의 공통부분에 속하는 정수 x 가 단 하나 존재하도록 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.

(i) $a<1$ 일 때



$$\therefore -1\leq a<0$$

(ii) $a>1$ 일 때



$$\therefore a>2$$

(i), (ii)에서

$$-1\leq a<0 \text{ 또는 } a>2$$

12 오른쪽 그림에서 세 삼각형

ABC, APR, PBQ 는 모두 직각

이등변삼각형이다.

$$\overline{QC}=a \text{ 이므로}$$

$$0<a<12$$

$$\overline{PR}=a, \overline{BQ}=12-a \text{ 이므로}$$

$$\overline{AR}=\overline{PR}=a, \overline{PQ}=\overline{BQ}=12-a$$

따라서 사각형 $PQCR$ 의 넓이는 $a(12-a)$, 삼각형 APR

의 넓이는 $\frac{1}{2}a^2$, 삼각형 PBQ 의 넓이는 $\frac{1}{2}(12-a)^2$ 이므로

$$\begin{cases} a(12-a)>\frac{1}{2}a^2 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ a(12-a)>\frac{1}{2}(12-a)^2 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

$\textcircled{㉠}$ 을 풀면

$$\frac{3}{2}a^2-12a<0, a(a-8)<0$$

$$\therefore 0<a<8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

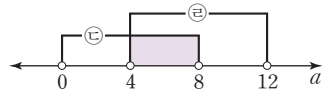
$\textcircled{㉡}$ 을 풀면

$$\left\{a-\frac{1}{2}(12-a)\right\}(12-a)>0$$

$$\left(\frac{3}{2}a-6\right)(a-12)<0$$

$$\therefore 4<a<12 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣}$ 을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore 4<a<8$$

이때 자연수 a 는 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$$5+6+7=18$$

13 $x^2-5x+6=0$ 을 풀면

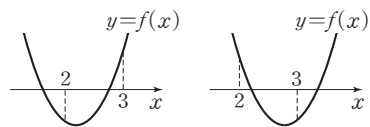
$$(x-2)(x-3)=0 \quad \therefore x=2 \text{ 또는 } x=3$$

이차방정식 $x^2-(a-1)x+a+8=0$ 의 한 근만이 2와 3

사이에 있어야 하므로 $f(x)=x^2-(a-1)x+a+8$ 이라

할 때, 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야

한다.



따라서 $f(2)f(3)<0$ 이므로

$$\{4-2(a-1)+a+8\}\{9-3(a-1)+a+8\}<0$$

$$(-a+14)(-2a+20)<0$$

$$(a-14)(a-10)<0$$

$$\therefore 10<a<14$$

따라서 정수 a 는 11, 12, 13의 3개이다.

III-1 01 합의 법칙과 곱의 법칙

합의 법칙과 곱의 법칙

개념 Check

189쪽

1 답 9

2 답 (1) 5 (2) 6

- (1) (i) 3의 배수가 적힌 카드가 나오는 경우
3, 6, 9의 3가지
(ii) 4의 배수가 적힌 카드가 나오는 경우
4, 8의 2가지
(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
 $3+2=5$
- (2) (i) 5의 배수가 적힌 카드가 나오는 경우
5, 10의 2가지
(ii) 홀수가 적힌 카드가 나오는 경우
1, 3, 5, 7, 9의 5가지
(iii) 5의 배수이면서 홀수가 적힌 카드가 나오는 경우
5의 1가지
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
 $2+5-1=6$

3 답 15

4 답 12

문제

190~196쪽

01-1 답 12

- 나오는 두 눈의 수의 차가 3 이상인 경우는 두 눈의 수의 차가 3 또는 4 또는 5인 경우이다.
- (i) 두 눈의 수의 차가 3인 경우
(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)의 6가지
- (ii) 두 눈의 수의 차가 4인 경우
(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)의 4가지
- (iii) 두 눈의 수의 차가 5인 경우
(1, 6), (6, 1)의 2가지
- (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
 $6+4+2=12$

01-2 답 10

- 꺼낸 공에 적힌 세 수의 합이 5 이하인 경우는 세 수의 합이 3 또는 4 또는 5인 경우이다.
- (i) 세 수의 합이 3인 경우
(1, 1, 1)의 1가지
- (ii) 세 수의 합이 4인 경우
(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)의 3가지
- (iii) 세 수의 합이 5인 경우
(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)의 6가지
- (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
 $1+3+6=10$

01-3 답 32

- 1부터 100까지의 자연수 중에서
- (i) 5로 나누어떨어지는 수
5의 배수이므로 5, 10, 15, ..., 100의 20개
- (ii) 7로 나누어떨어지는 수
7의 배수이므로 7, 14, 21, ..., 98의 14개
- (iii) 5와 7로 모두 나누어떨어지는 수
5와 7의 최소공배수인 35의 배수이므로 35, 70의 2개
- (i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는
 $20+14-2=32$

02-1 답 8

- x, y, z 가 자연수이므로 $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$
 $2x+3y+z=13$ 에서 $3y < 13$
 $\therefore y=1$ 또는 $y=2$ 또는 $y=3$ 또는 $y=4$
- (i) $y=1$ 일 때
 $2x+z=10$ 이므로 순서쌍 (x, z) 는 (1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)의 4개
- (ii) $y=2$ 일 때
 $2x+z=7$ 이므로 순서쌍 (x, z) 는 (1, 5), (2, 3), (3, 1)의 3개
- (iii) $y=3$ 일 때
 $2x+z=4$ 이므로 순서쌍 (x, z) 는 (1, 2)의 1개
- (iv) $y=4$ 일 때
 $2x+z=1$ 이므로 순서쌍 (x, z) 는 없다.
- (i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는
 $4+3+1=8$

02-2 답 4

- x, y 가 자연수이므로 $x \geq 1, y \geq 1$
 $2x+y \leq 5$ 에서 $2x < 5 \therefore x=1$ 또는 $x=2$

- (i) $x=1$ 일 때
 $y \leq 3$ 이므로 y 는 1, 2, 3의 3개
 (ii) $x=2$ 일 때
 $y \leq 1$ 이므로 y 는 1의 1개
 (i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는
 $3+1=4$

02-3 ㉡ 16

한 개의 가격이 100원, 500원, 1000원인 학용품을 각각 x 개, y 개, z 개 산다고 할 때, 그 금액의 합이 5000원이므로

$$100x + 500y + 1000z = 5000$$

$$\therefore x + 5y + 10z = 50 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

이때 3종류의 학用品을 적어도 하나씩 사야 하므로 x, y, z 는 $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ 인 자연수이어야 한다.

즉, 구하는 경우의 수는 방정식 ㉡을 만족시키는 자연수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수와 같다.

$$\textcircled{7} \text{에서 } 10z < 50$$

$$\therefore z=1 \text{ 또는 } z=2 \text{ 또는 } z=3 \text{ 또는 } z=4$$

(i) $z=1$ 일 때

$$x + 5y = 40 \text{이므로 순서쌍 } (x, y) \text{는 } (35, 1), (30, 2), (25, 3), \dots, (5, 7) \text{의 7개}$$

(ii) $z=2$ 일 때

$$x + 5y = 30 \text{이므로 순서쌍 } (x, y) \text{는 } (25, 1), (20, 2), (15, 3), (10, 4), (5, 5) \text{의 5개}$$

(iii) $z=3$ 일 때

$$x + 5y = 20 \text{이므로 순서쌍 } (x, y) \text{는 } (15, 1), (10, 2), (5, 3) \text{의 3개}$$

(iv) $z=4$ 일 때

$$x + 5y = 10 \text{이므로 순서쌍 } (x, y) \text{는 } (5, 1) \text{의 1개}$$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$7+5+3+1=16$$

03-1 ㉡ 100

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 5, 7의 4가지
 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지
 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6, 8의 5가지
 따라서 구하는 자연수의 개수는
 $4 \times 5 \times 5 = 100$

03-2 ㉡ (1) 12 (2) 8

- (1) $(a+b)(p+q)(x+y+z)$ 를 전개하면 a, b 에 p, q 를 각각 곱하여 항이 만들어지고, 그것에 다시 x, y, z 를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 구하는 항의 개수는
 $2 \times 2 \times 3 = 12$

- (2) $(a+b)(p+q)$ 를 전개하면 a, b 에 p, q 를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 항의 개수는 $2 \times 2 = 4$
 $(x+y)(m+n)$ 을 전개하면 x, y 에 m, n 을 각각 곱하여 항이 만들어지므로 항의 개수는 $2 \times 2 = 4$
 이때 곱해지는 각 항이 모두 서로 다른 문자이므로 구하는 항의 개수는
 $4+4=8$

04-1 ㉡ 15

400을 소인수분해하면

$$400 = 2^4 \times 5^2$$

2^4 의 양의 약수는 1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 의 5개

5^2 의 양의 약수는 1, 5, 5^2 의 3개

2^4 의 양의 약수와 5^2 의 양의 약수에서 각각 하나씩 택하여 곱한 것이 400의 양의 약수이므로 구하는 약수의 개수는
 $5 \times 3 = 15$

04-2 ㉡ 12

120과 420을 각각 소인수분해하면

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5, 420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

120과 420의 최대공약수는 $2^2 \times 3 \times 5$

2^2 의 양의 약수는 1, 2, 2^2 의 3개

3의 양의 약수는 1, 3의 2개

5의 양의 약수는 1, 5의 2개

2^2 의 양의 약수, 3의 양의 약수, 5의 양의 약수에서 각각 하나씩 택하여 곱한 것이 120과 420의 양의 공약수이므로 구하는 공약수의 개수는

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

04-3 ㉡ 12

2250을 소인수분해하면

$$2250 = 2 \times 3^2 \times 5^3$$

이때 2250의 홀수인 양의 약수는 3^2 의 양의 약수와 5^3 의 양의 약수의 곱으로 이루어진다.

3^2 의 양의 약수는 1, 3, 3^2 의 3개

5^3 의 양의 약수는 1, 5, 5^2 , 5^3 의 4개

3^2 의 양의 약수와 5^3 의 양의 약수에서 각각 하나씩 택하여 곱한 것이 2250의 홀수인 양의 약수이므로 구하는 약수의 개수는

$$3 \times 4 = 12$$

05-1 ㉡ 7

- (i) $A \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 1
 (ii) $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 3 = 6$
 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $1+6=7$

05-2 ㉔ 22

- (i) $A \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 2
 (ii) $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $3 \times 2 = 6$
 (iii) $A \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $1 \times 3 = 3$
 (iv) $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는
 $3 \times 1 \times 3 = 9$
 (v) $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는
 $1 \times 1 \times 2 = 2$
 (i)~(v)에서 구하는 경우의 수는
 $2 + 6 + 3 + 9 + 2 = 22$

05-3 ㉔ 144

- (i) 지원이가 $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는
 $2 \times 3 = 6$
 민정이가 $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는
 $3 \times 4 = 12$
 따라서 지원이는 P 지점을 거쳐서 가고 민정이는 Q 지점을 거쳐서 가는 경우의 수는
 $6 \times 12 = 72$
 (ii) 지원이가 $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는
 $3 \times 4 = 12$
 민정이가 $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는
 $2 \times 3 = 6$
 따라서 지원이는 Q 지점을 거쳐서 가고 민정이는 P 지점을 거쳐서 가는 경우의 수는
 $12 \times 6 = 72$
 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
 $72 + 72 = 144$

06-1 ㉔ 48

주어진 그림에서 B 또는 D가 가장 많은 영역과 인접하고 있으므로 D부터 칠한다.
 D에 칠할 수 있는 색은 4가지
 A에 칠할 수 있는 색은 D에 칠한 색을 제외한
 $4 - 1 = 3$ (가지)
 B에 칠할 수 있는 색은 A와 D에 칠한 색을 제외한
 $4 - 2 = 2$ (가지)
 C에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한
 $4 - 2 = 2$ (가지)
 따라서 구하는 경우의 수는
 $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$

06-2 ㉔ 84

같은 색을 중복하여 칠할 수 있으므로 칠하는 경우의 수는 다음과 같이 두 경우로 나누어 구할 수 있다.

- (i) B와 D에 서로 다른 색을 칠하는 경우
 B에 칠할 수 있는 색은 4가지
 A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한
 $4 - 1 = 3$ (가지)
 D에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한
 $4 - 2 = 2$ (가지)
 C에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한
 $4 - 2 = 2$ (가지)
 따라서 B와 D에 서로 다른 색을 칠하는 경우의 수는
 $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$

- (ii) B와 D에 서로 같은 색을 칠하는 경우
 B에 칠할 수 있는 색은 4가지
 D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색인 1가지
 A에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한
 $4 - 1 = 3$ (가지)
 C에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한
 $4 - 1 = 3$ (가지)
 따라서 B와 D에 서로 같은 색을 칠하는 경우의 수는
 $4 \times 1 \times 3 \times 3 = 36$
 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
 $48 + 36 = 84$

07-1 ㉔ (1) 47 (2) 31

- (1) 10원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 방법은
 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
 50원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 방법은
 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
 100원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 방법은
 0개, 1개, 2개의 3가지
 이때 0원을 지불하는 1가지 경우를 빼주어야 하므로
 지불할 수 있는 방법의 수는 $4 \times 4 \times 3 - 1 = 47$
 (2) 50원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 100원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 중복된다.
 따라서 100원짜리 동전 2개를 50원짜리 동전 4개로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 10원짜리 동전 3개와 50원짜리 동전 7개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
 10원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액은
 0원, 10원, 20원, 30원의 4가지
 50원짜리 동전 7개로 지불할 수 있는 금액은
 0원, 50원, 100원, ..., 350원의 8가지
 이때 0원을 지불하는 1가지 경우를 빼주어야 하므로
 지불할 수 있는 금액의 수는 $4 \times 8 - 1 = 31$

연습문제

197~199쪽

1 ②	2 ②	3 ①	4 14	5 ②
6 19	7 ②	8 ②	9 45	10 189
11 ④	12 10000	13 ④	14 48	15 ③
16 40	17 20	18 81	19 ④	20 6

1 나오는 두 눈의 수의 합이 소수인 경우의 수는 두 눈의 수의 합이 2, 3, 5, 7, 11인 경우이다.

(i) 두 눈의 수의 합이 2인 경우

(1, 1)의 1가지

(ii) 두 눈의 수의 합이 3인 경우

(1, 2), (2, 1)의 2가지

(iii) 두 눈의 수의 합이 5인 경우

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지

(iv) 두 눈의 수의 합이 7인 경우

(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)의 6가지

(v) 두 눈의 수의 합이 11인 경우

(5, 6), (6, 5)의 2가지

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

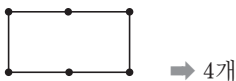
$$1+2+4+6+2=15$$

2 일정한 간격의 길이를 a 라 하면

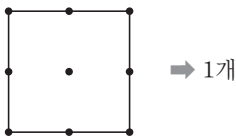
(i) 네 변의 길이가 모두 a 인 직사각형



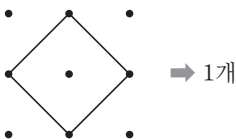
(ii) 두 변의 길이가 각각 $a, 2a$ 인 직사각형



(iii) 네 변의 길이가 모두 $2a$ 인 직사각형



(iv) 네 변의 길이가 모두 $\sqrt{2}a$ 인 직사각형



(i)~(iv)에서 구하는 직사각형의 개수는

$$4+4+1+1=10$$

3 x, y, z 가 자연수이므로

$$x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$$

$$x+5y+2z=17 \text{에서 } 5y < 17$$

$$\therefore y=1 \text{ 또는 } y=2 \text{ 또는 } y=3$$

(i) $y=1$ 일 때

$$x+2z=12 \text{이므로 순서쌍 } (x, z) \text{는 } (10, 1), (8, 2),$$

$$(6, 3), (4, 4), (2, 5) \text{의 5개}$$

(ii) $y=2$ 일 때

$$x+2z=7 \text{이므로 순서쌍 } (x, z) \text{는 } (5, 1), (3, 2),$$

$$(1, 3) \text{의 3개}$$

(iii) $y=3$ 일 때

$$x+2z=2 \text{이므로 순서쌍 } (x, z) \text{는 없다.}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$$5+3=8$$

4 $3 \leq x+y \leq 6$ 을 만족시키는 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는

(i) $x+y=3$ 일 때

$$(1, 2), (2, 1) \text{의 2개}$$

(ii) $x+y=4$ 일 때

$$(1, 3), (2, 2), (3, 1) \text{의 3개}$$

(iii) $x+y=5$ 일 때

$$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) \text{의 4개}$$

(iv) $x+y=6$ 일 때

$$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) \text{의 5개}$$

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$2+3+4+5=14$$

5 50원, 100원, 500원짜리 동전을 각각 x 개, y 개, z 개 사용한다고 할 때, 그 금액의 합이 600원이므로

$$50x+100y+500z=600$$

$$\therefore x+2y+10z=12 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

이때 각 동전은 사용하지 않는 경우도 있으므로 x, y, z 는 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 인 정수이어야 한다.

즉, 구하는 경우의 수는 방정식 ⑦을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수와 같다.

$$\textcircled{7} \text{에서 } 10z \leq 12 \quad \therefore z=0 \text{ 또는 } z=1$$

(i) $z=0$ 일 때

$$x+2y=12 \text{이므로 순서쌍 } (x, y) \text{는 } (12, 0), (10, 1),$$

$$(8, 2), (6, 3), (4, 4), (2, 5), (0, 6) \text{의 7개}$$

(ii) $z=1$ 일 때

$$x+2y=2 \text{이므로 순서쌍 } (x, y) \text{는 } (2, 0), (0, 1) \text{의}$$

$$2 \text{개}$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$7+2=9$$

- 6 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=a^2-4b \geq 0$$

$$\therefore a^2 \geq 4b$$

(i) $b=1$ 일 때

$$a^2 \geq 4, \text{ 즉 } a \geq 2 \text{이므로 } a \text{는 } 2, 3, 4, 5, 6 \text{의 } 5 \text{개}$$

(ii) $b=2$ 일 때

$$a^2 \geq 8, \text{ 즉 } a \geq 2\sqrt{2} \text{이므로 } a \text{는 } 3, 4, 5, 6 \text{의 } 4 \text{개}$$

(iii) $b=3$ 일 때

$$a^2 \geq 12, \text{ 즉 } a \geq 2\sqrt{3} \text{이므로 } a \text{는 } 4, 5, 6 \text{의 } 3 \text{개}$$

(iv) $b=4$ 일 때

$$a^2 \geq 16, \text{ 즉 } a \geq 4 \text{이므로 } a \text{는 } 4, 5, 6 \text{의 } 3 \text{개}$$

(v) $b=5$ 일 때

$$a^2 \geq 20, \text{ 즉 } a \geq 2\sqrt{5} \text{이므로 } a \text{는 } 5, 6 \text{의 } 2 \text{개}$$

(vi) $b=6$ 일 때

$$a^2 \geq 24, \text{ 즉 } a \geq 2\sqrt{6} \text{이므로 } a \text{는 } 5, 6 \text{의 } 2 \text{개}$$

(i)~(vi)에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$5+4+3+3+2+2=19$$

- 7 $(a+b+c)(x+y)^2=(a+b+c)(x^2+2xy+y^2)$ 이므로 전개하면 a, b, c 에 $x^2, 2xy, y^2$ 을 각각 곱하여 항이 만들어진다.

따라서 구하는 항의 개수는

$$3 \times 3 = 9$$

- 8 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 6, 8의 4가지
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지
일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 5, 7의 4가지
따라서 구하는 자연수의 개수는

$$4 \times 5 \times 4 = 80$$

- 9 십의 자리의 숫자를 a , 일의 자리의 숫자를 b 라 할 때, $a+b$ 가 짝수인 경우는

(i) a 가 짝수, b 가 0 또는 짝수인 경우

a 에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 6, 8의 4가지

b 에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6, 8의 5가지

$$\therefore 4 \times 5 = 20$$

(ii) a 가 홀수, b 가 홀수인 경우

a 에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지

b 에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지

$$\therefore 5 \times 5 = 25$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$20+25=45$$

- 10 나오는 세 눈의 수의 곱이 짝수인 경우의 수는 모든 경우의 수에서 세 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수, 즉 세 눈의 수가 모두 홀수인 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 서로 다른 세 개의 주사위를 던져서 나올 수 있는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

(ii) 주사위에서 홀수인 눈의 수는 1, 3, 5의 3가지이므로 세 눈의 수가 모두 홀수인 경우의 수는

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$216 - 27 = 189$$

- 11 150을 소인수분해하면

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2 = 3 \times (2 \times 5^2)$$

2의 양의 약수는 1, 2의 2개

5^2 의 양의 약수는 1, 5, 5^2 의 3개

150의 양의 약수 중에서 3의 배수는 3을 소인수로 갖는 수이므로 2의 양의 약수와 5^2 의 양의 약수에서 각각 하나씩 택하여 곱한 것에 3을 곱한 것과 같다.

따라서 구하는 3의 배수의 개수는

$$2 \times 3 = 6$$

- 12 10^n 을 소인수분해하면

$$10^n = 2^n \times 5^n$$

2^n 의 양의 약수는 1, 2, $2^2, \dots, 2^n$ 의 $(n+1)$ 개

5^n 의 양의 약수는 1, 5, $5^2, \dots, 5^n$ 의 $(n+1)$ 개

이때 2^n 의 양의 약수와 5^n 의 양의 약수에서 각각 하나씩 택하여 곱한 것이 10^n 의 양의 약수이고, 10^n 의 양의 약수가 25개이므로

$$(n+1)^2 = 25$$

$$n+1=5 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

$$\therefore n=4$$

따라서 구하는 수는

$$10^4 = 10000$$

- 13 (i) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ 로 가는 경우의 수는

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

(ii) $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ 로 가는 경우의 수는

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$12+12=24$$

- 14 주어진 그림에서 B 또는 D가 가장 많은 영역과 인접하고 있으므로 D부터 칠한다.

D에 칠할 수 있는 색은 4가지

A에 칠할 수 있는 색은 D에 칠한 색을 제외한

$$4-1=3(\text{가지})$$

B에 칠할 수 있는 색은 A와 D에 칠한 색을 제외한

$$4-2=2(\text{가지})$$

C에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한

$$4-2=2(\text{가지})$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$$

- 15 (가), (나)에서 1, 6, 2, 3, 5, 4의 순서대로 색을 칠한다.

1이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 4가지

6이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1이 적힌 정사각형에 칠한 색과 같은 색인 1가지

2가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한

$$4-1=3(\text{가지})$$

3이 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2와 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한

$$4-2=2(\text{가지})$$

5가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 2와 6이 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한

$$4-2=2(\text{가지})$$

4가 적힌 정사각형에 칠할 수 있는 색은 1과 5가 적힌 정사각형에 칠한 색을 제외한

$$4-2=2(\text{가지})$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 1 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 96$$

- 16 (i) 지불할 수 있는 방법의 수

100원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개의 2가지

50원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

10원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

이때 0원을 지불하는 1가지 경우를 빼주어야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는

$$a = 2 \times 4 \times 3 - 1 = 23$$

- (ii) 지불할 수 있는 금액의 수

50원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 100원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 중복된다.

따라서 100원짜리 동전 1개를 50원짜리 동전 2개로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 5개와 10원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

50원짜리 동전 5개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원, 150원, 200원, 250원의 6가지

10원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원의 3가지

이때 0원을 지불하는 1가지 경우를 빼주어야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$$b = 6 \times 3 - 1 = 17$$

- (i), (ii)에서

$$a + b = 23 + 17 = 40$$

- 17 (i) 꽃병 A에 장미를 꽂은 경우

꽃병 B에는 카네이션과 백합 중에서 9송이를 꽂아야 한다.

꽃병 B에 카네이션을 a 송이, 백합을 b 송이 꽂는다고 하면 $a+b=9$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)의 6개

- (ii) 꽃병 A에 카네이션을 꽂은 경우

꽃병 B에는 장미와 백합 중에서 9송이를 꽂아야 한다.

꽃병 B에 장미를 a 송이, 백합을 b 송이 꽂는다고 하면 $a+b=9$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1)의 8개

- (iii) 꽃병 A에 백합을 꽂은 경우

꽃병 B에는 장미와 카네이션 중에서 9송이를 꽂아야 한다.

꽃병 B에 장미를 a 송이, 카네이션을 b 송이 꽂는다고 하면 $a+b=9$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1)의 6개

- (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$6 + 8 + 6 = 20$$

- 18 $a+b+c+abc$ 의 값이 홀수가 되려면 $a+b+c$ 의 값과 abc 의 값의 합이 홀수이어야 한다.

- (i) $a+b+c$ 의 값은 짝수, abc 의 값은 홀수인 경우

abc 의 값이 홀수이므로 a, b, c 가 모두 홀수이다.

그런데 a, b, c 가 모두 홀수이면 $a+b+c$ 의 값은 홀수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a+b+c$ 의 값은 홀수, abc 의 값은 짝수인 경우
 abc 의 값이 짝수이므로 a, b, c 중에서 1개 이상이 짝수이다.

이때 $a+b+c$ 의 값이 홀수이므로 a, b, c 중에서 1개만 홀수이어야 한다.

세 수 a, b, c 가 각각

① 홀수, 짝수, 짝수인 경우의 수는

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

② 짝수, 홀수, 짝수인 경우의 수는

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

③ 짝수, 짝수, 홀수인 경우의 수는

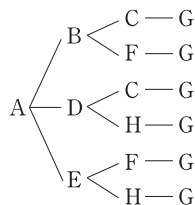
$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

①, ②, ③에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$27 + 27 + 27 = 81$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 81이다.

19 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 G까지 최단 거리로 가는 길을 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 6이다.

20 B 지점과 D 지점 사이에 x 개의 도로를 추가한다고 하면

(i) $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는

$$3 \times 2 = 6$$

(ii) $A \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는

$$2 \times 3 = 6$$

(iii) $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는

$$3 \times x \times 3 = 9x$$

(iv) $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는

$$2 \times x \times 2 = 4x$$

(i)~(iv)에서 A 지점에서 출발하여 C 지점으로 가는 경우의 수는

$$6 + 6 + 9x + 4x = 13x + 12$$

이때 A 지점에서 출발하여 C 지점으로 가는 경우의 수가 90이려면

$$13x + 12 = 90$$

$$\therefore x = 6$$

따라서 추가해야 하는 도로의 개수는 6이다.

III-1 02 순열

순열

개념 Check

201쪽

1 ④ (1) 3 (2) 90 (3) 360 (4) 1

2 ④ (1) 1 (2) 6 (3) 120 (4) 5040

문제

202~208쪽

01-1 ④ (1) 5 (2) 3 (3) 6 (4) 6

(1) ${}_nP_3 = 12n$ 에서 $n(n-1)(n-2) = 12n$

이때 $n \geq 3$ 이므로 양변을 n 으로 나누면

$$(n-1)(n-2) = 12 = 4 \times 3 \quad \therefore n = 5$$

(2) ${}_7P_r \times 3! = 1260$ 에서 ${}_7P_r \times 6 = 1260$

$$\therefore {}_7P_r = 210$$

이때 $210 = 7 \times 6 \times 5 = {}_7P_3$ 이므로 $r = 3$

(3) ${}_nP_3 : {}_nP_2 = 4 : 1$ 에서 ${}_nP_3 = 4 \times {}_nP_2$

$$n(n-1)(n-2) = 4n(n-1)$$

이때 $n \geq 3$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$$n-2 = 4 \quad \therefore n = 6$$

(4) ${}_nP_3 + 3 \times {}_nP_2 = 5 \times {}_{n+1}P_2$ 에서

$$n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) = 5(n+1)n$$

이때 $n \geq 3$ 이므로 양변을 n 으로 나누면

$$(n-1)(n-2) + 3(n-1) = 5(n+1)$$

$$n^2 - 5n - 6 = 0, (n+1)(n-6) = 0$$

$$\therefore n = 6 (\because n \geq 3)$$

01-2 ④ 6

$${}_6P_r \geq 4 \times {}_6P_{r-1}$$

$$\frac{6!}{(6-r)!} \geq 4 \times \frac{6!}{\{6-(r-1)\}!}$$

$$\frac{(7-r)!}{(6-r)!} \geq 4, 7-r \geq 4$$

$$\therefore r \leq 3$$

따라서 자연수 r 는 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$$1 + 2 + 3 = 6$$

01-3 ④ (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

$$(1) n \times {}_{n-1}P_{r-1} = n \times \frac{(n-1)!}{\{n-1-(r-1)\}!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} = {}_nP_r$$

$$\therefore {}_nP_r = n \times {}_{n-1}P_{r-1} \text{ (단, } 1 \leq r \leq n)$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & {}_{n-1}P_r + r \times {}_{n-1}P_{r-1} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!} + r \times \frac{(n-1)!}{\{n-1-(r-1)\}!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} + r \times \frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\
 &= (n-r) \times \frac{(n-1)!}{(n-r)!} + r \times \frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\
 &= (n-r+r) \times \frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\
 &= \frac{n!}{(n-r)!} = {}_nP_r \\
 \therefore {}_nP_r &= {}_{n-1}P_r + r \times {}_{n-1}P_{r-1} \quad (\text{단, } 1 \leq r < n)
 \end{aligned}$$

02-1 ㉡ 210

서로 다른 7개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로
 ${}_7P_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$

02-2 ㉡ 720

서로 다른 10개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로
 ${}_{10}P_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

02-3 ㉡ 4

서로 다른 n 개를 일렬로 나열하는 경우의 수가 24이므로
 ${}_nP_n = 24$ 에서 $n! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \quad \therefore n = 4$

03-1 ㉡ 240

모음 e와 i를 한 묶음으로 생각하여 나머지 4개의 문자와
 함께 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5! = 120$
 e와 i가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $120 \times 2 = 240$

03-2 ㉡ 720

3권의 수학책을 한 묶음으로 생각하여 4권의 영어책과 함
 께 책꽂이에 일렬로 꽂는 경우의 수는 $5! = 120$
 수학책 3권의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3! = 6$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $120 \times 6 = 720$

03-3 ㉡ 1728

1반 학생 3명을 한 묶음으로, 2반 학생 4명을 한 묶음으로,
 3반 학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 세우는 경
 우의 수는 $3! = 6$
 1반 학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3! = 6$
 2반 학생 4명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $4! = 24$
 3반 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $6 \times 6 \times 24 \times 2 = 1728$

03-4 ㉡ 4

여학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 남학생 n 명과 함께
 일렬로 세우는 경우의 수는 $(n+1)!$
 여학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$
 이때 여학생 2명이 서로 이웃하도록 세우는 경우의 수가
 240이므로
 $(n+1)! \times 2 = 240$
 $(n+1)! = 120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
 $n+1 = 5 \quad \therefore n = 4$

04-1 ㉡ 72

이웃해도 되는 배구 선수 3명을 일렬로 세우는 경우의 수
 는 $3! = 6$
 배구 선수 사이사이와 양 끝의 4개의 자리 중에서 2개의
 자리에 농구 선수 2명을 세우는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$
 따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 12 = 72$

04-2 ㉡ 72

자음 r, n, g와 모음 o, a, e의 개수가 같으므로 자음과
 모음을 교대로 나열하는 경우는 자음이 맨 앞에 오거나
 모음이 맨 앞에 오는 2가지가 있다.
 각각의 경우에 대하여 자음 3개를 일렬로 나열하는 경우
 의 수는 $3! = 6$
 모음 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$
 따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times 6 \times 6 = 72$

04-3 ㉡ 144

선생님과 학생을 교대로 세우려면 학생이 맨 앞에 와야
 한다.
 학생 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$
 선생님 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$
 따라서 구하는 경우의 수는 $24 \times 6 = 144$

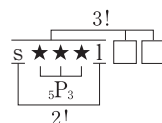
05-1 ㉡ (1) 120 (2) 720 (3) 4320

(1) s를 맨 처음에, l을 맨 마지막에 고정시키고 그 사이에
 나머지 p, e, c, i, a의 5개의 문자를 일렬로 나열하는
 경우의 수이므로

$$5! = 120$$

(2) p, e, c, i, a의 5개의 문자 중에서
 3개를 택하여 s와 l 사이에 일렬로
 나열하는 경우의 수는 ${}_5P_3 = 60$
 s와 l의 자리를 바꾸는 경우의 수는
 $2! = 2$

s★★l을 한 묶음으로 생각하여 나머지 2개의 문자
 와 함께 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$
 따라서 구하는 경우의 수는 $60 \times 2 \times 6 = 720$



(3) 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수에서 양 끝에 모음만 오도록 나열하는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $7! = 5040$

(ii) 양 끝에 모음인 e, i, a의 3개의 문자 중에서 2개를 택하여 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

나머지 자리에 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5! = 120$

따라서 양 끝에 모음만 오도록 나열하는 경우의 수는 $6 \times 120 = 720$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$5040 - 720 = 4320$$

06-1 [답] (1) 96 (2) 36

(1) 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지

나머지 자리에 천의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_3 = 24$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$4 \times 24 = 96$$

(2) 홀수이려면 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3이다.

각각의 경우에 대하여 천의 자리에는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자가 올 수 있고, 백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리에 온 숫자와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 구하는 홀수의 개수는

$$2 \times (3 \times {}_3P_2) = 2 \times (3 \times 6) = 36$$

06-2 [답] (1) 96 (2) 108

(1) 4의 배수는 끝의 두 자리의 수가 4의 배수이므로

$\square\square 12, \square\square 16, \square\square 24, \square\square 32, \square\square 36, \square\square 52, \square\square 56, \square\square 64$

각각의 경우에 대하여 천의 자리와 백의 자리에는 끝의 두 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 구하는 4의 배수의 개수는

$$8 \times {}_4P_2 = 8 \times 12 = 96$$

(2) 5의 배수이려면 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 5이다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

나머지 자리에 0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_5P_3 = 60$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자가 올 수 있고, 백의 자리와 십의 자리에는 천의 자리에 온 숫자와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$$4 \times {}_4P_2 = 4 \times 12 = 48$$

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$$60 + 48 = 108$$

07-1 [답] 54번째

$\neg\square\square\square\square, \neg\square\square\square\square$ 꼴인 문자열의 개수는

$$2 \times 4! = 48$$

$\neg\neg\square\square, \neg\neg\square\square$ 꼴인 문자열의 개수는

$$2 \times 2! = 4$$

$\neg\neg\square\square$ 으로 시작하는 문자열을 순서대로 나열하면

$\neg\neg\square\square, \neg\neg\square\square$

즉, $\neg\neg\square\square$ 꼴인 문자열에서 $\neg\neg\square\square$ 의 순서는 두 번째이다.

따라서 $\neg\neg\square\square$ 이 나타나는 순서는

$$48 + 4 + 2 = 54(\text{번째})$$

07-2 [답] 51342

$1\square\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $4! = 24$

$2\square\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $4! = 24$

$3\square\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $4! = 24$

$4\square\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $4! = 24$

이때 $24 + 24 + 24 + 24 = 96$ 이므로 100번째로 나타나는 수는 $5\square\square\square\square$ 꼴인 자연수 중에서 네 번째 수이다.

5로 시작하는 다섯 자리의 자연수를 순서대로 나열하면

51234, 51243, 51324, 51342, ...

따라서 100번째 수는 51342이다.

연습문제

209~210쪽

1 ③	2 624	3 ③	4 28800	5 ⑤
6 ③	7 84	8 ③	9 20	10 84
11 ⑤	12 ⑤	13 ①	14 336	

1 ${}_nP_3 + 12 \times {}_{n-1}P_2 - {}_nP_4 < 0$ 에서

$$n(n-1)(n-2) + 12(n-1)(n-2)$$

$$-n(n-1)(n-2)(n-3) < 0$$

이때 $n \geq 4$ 이므로 양변을 $(n-1)(n-2)$ 로 나누면
 $n+12-n(n-3) < 0$
 $n^2-4n-12 > 0, (n+2)(n-6) > 0$
 $\therefore n > 6 (\because n \geq 4)$
 따라서 자연수 n 의 최솟값은 7이다.

2 $a = {}_5P_4 = 120, b = {}_9P_3 = 504$
 $\therefore a+b=624$

3 여학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 남학생 5명과 함께 일렬로 세우는 경우의 수는 $6! = 720$
 여학생 2명이 순서를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$
 따라서 구하는 경우의 수는 $720 \times 2 = 1440$

4 한국 선수와 중국 선수의 수가 같으므로 한국 선수와 중국 선수를 교대로 세우는 경우는 한국 선수가 맨 앞에 오거나 중국 선수가 맨 앞에 오는 2가지가 있다.
 각각의 경우에 대하여 한국 선수 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5! = 120$
 중국 선수 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5! = 120$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $2 \times 120 \times 120 = 28800$

5 이웃해도 되는 3개의 홀수 1, 3, 5가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$
 홀수가 적힌 카드 사이사이와 양 끝의 4개의 자리 중에서 2개의 자리에 짝수 2, 4가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$
 따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 12 = 72$

6 2학년 학생 4명이 일렬로 앉는 경우의 수는 $4! = 24$
 2학년 학생 사이사이의 3개의 자리 중에서 2개의 자리에 1학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$
 따라서 구하는 경우의 수는 $24 \times 6 = 144$

다른 풀이

양 끝에 있는 의자에 2학년 학생 4명 중에서 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$
 나머지 4개의 의자에 1학년 학생끼리는 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우는 3가지가 있다.
 각각의 경우에 대하여 1학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 $2! = 2$
 2학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 $2! = 2$
 따라서 구하는 경우의 수는 $12 \times 3 \times 2 \times 2 = 144$

7 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수에서 양 끝에 자음만 오도록 나열하는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $5! = 120$

(ii) 양 끝에 자음인 d, r, m의 3개의 문자 중에서 2개를 택하여 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$
 나머지 자리에 3개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$
 따라서 양 끝에 자음만 오도록 나열하는 경우의 수는
 $6 \times 6 = 36$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $120 - 36 = 84$

8 6명을 일렬로 세우는 경우의 수에서 선생님 사이에 학생을 세우지 않거나 1명만 세우는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는
 $6! = 720$

(ii) 선생님 사이에 학생을 세우지 않는 경우
 선생님끼리 이웃하도록 세우는 경우와 같으므로 선생님 2명을 한 묶음으로 생각하여 학생 4명과 함께 일렬로 세우는 경우의 수는 $5! = 120$
 선생님 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$
 따라서 선생님 사이에 학생을 세우지 않는 경우의 수는
 $120 \times 2 = 240$

(iii) 선생님 사이에 학생 1명만 세우는 경우
 학생 4명 중에서 1명을 택하여 선생님 사이에 세우는 경우의 수는 4
 선생님 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$
 선생님과 선생님 사이의 학생 1명을 한 묶음으로 생각하여 나머지 3명의 학생과 함께 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$
 따라서 선생님 사이에 학생 1명만 세우는 경우의 수는
 $4 \times 2 \times 24 = 192$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
 $720 - 240 - 192 = 288$

9 3의 배수는 모든 자리의 숫자의 합이 3의 배수이므로 5개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 3개를 택할 때, 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

(0, 1, 2), (0, 2, 4), (1, 2, 3), (2, 3, 4)

각각의 경우에서 만들 수 있는 자연수의 개수를 구하면

(i) (0, 1, 2)의 경우

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 $2 \times 2! = 4$

(ii) (0, 2, 4)의 경우

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 $2 \times 2! = 4$

(iii) (1, 2, 3)의 경우

$$3! = 6$$

(iv) (2, 3, 4)의 경우

$$3! = 6$$

(i)~(iv)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$$4 + 4 + 6 + 6 = 20$$

10 $1\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_5P_3 = 60$

$20\square\square$, $21\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는

$$2 \times {}_4P_2 = 2 \times 12 = 24$$

따라서 2300보다 작은 자연수의 개수는 $60 + 24 = 84$

11 $a\square\square\square\square\square$ 꼴인 문자열의 개수는 $5! = 120$

$b\square\square\square\square\square$ 꼴인 문자열의 개수는 $5! = 120$

$c\square\square\square\square\square$ 꼴인 문자열의 개수는 $5! = 120$

이때 $120 + 120 + 120 = 360$ 이므로 363번째로 나타나는 문자열은 $d\square\square\square\square\square$ 꼴인 문자열 중에서 세 번째 문자열이다.

d 로 시작하는 문자열을 순서대로 나열하면

$dabcef, dabcf, dabecf, \dots$

따라서 363번째로 나타나는 문자열은 $dabecf$ 이다.

12 아이 3명을 한 묶음으로 생각하여 어른 3명과 함께 의자

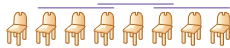
$(8-2)$ 개에 앉는 경우의 수는 ${}_6P_4 = 360$

아이 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는 $360 \times 6 = 2160$

다른 풀이

8개의 의자 중에서 아이 3명이 서로 이웃하도록 앉는 의자 3개를 고르는 경우의 수는 6



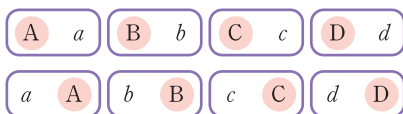
아이 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3! = 6$

남은 5개의 의자에 어른 3명이 앉는 경우의 수는 ${}_5P_3 = 60$

따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 6 \times 60 = 2160$

13 각각의 부부를 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$

남편 A, B, C, D의 아내를 각각 a, b, c, d 라 할 때, 남편들을 먼저 앉히면 아내들은 모두 자기 남편의 오른쪽 또는 왼쪽에 앉으면 된다.



즉, 남녀가 교대로 앉는 경우의 수는 2이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $24 \times 2 = 48$

14 9개의 숫자 중에서 3개를 택하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수에서 각 자리의 수 중 두 수의 합이 9가 되는 자연수의 개수를 빼면 된다.

(i) 9개의 숫자 중에서 3개를 택하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는 ${}_9P_3 = 504$

(ii) 두 수의 합이 9가 되는 경우는 (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5)의 4가지

각각의 경우에 대하여 이미 택한 2개의 숫자를 제외하고 나머지 7개의 숫자 중에서 1개를 택하여 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$$4 \times {}_7P_1 \times 3! = 4 \times 7 \times 6 = 168$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$504 - 168 = 336$$

III-1 03 조합

조합

개념 Check

211쪽

1 답 (1) 1 (2) 1 (3) 21 (4) 6

문제

212~217쪽

01-1 답 (1) 5 (2) 9 (3) 7 (4) 5

$$(1) {}_nC_2 = 10 \text{에서 } \frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 10$$

$$n(n-1) = 20 = 5 \times 4$$

$$\therefore n = 5$$

$$(2) {}_nC_5 = {}_nC_{n-5} \text{이므로 } {}_nC_{n-5} = {}_nC_4 \text{에서}$$

$$n-5=4 \quad \therefore n=9$$

$$(3) {}_{n+3}C_n = {}_{n+3}C_{(n+3)-n} \text{이므로 } {}_{n+3}C_3 = 120 \text{에서}$$

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

$$(n+3)(n+2)(n+1) = 720 = 10 \times 9 \times 8$$

$$\therefore n = 7$$

$$(4) {}_{n+1}C_{n-1} = {}_{n+1}C_{(n+1)-(n-1)} \text{이므로}$$

$${}_{n+2}C_3 = 2 \times {}_nC_2 + {}_{n+1}C_2 \text{에서}$$

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{3 \times 2 \times 1} = 2 \times \frac{n(n-1)}{2 \times 1} + \frac{(n+1)n}{2 \times 1}$$

이때 $n \geq 2$ 이므로 양변을 n 으로 나누면

$$\frac{(n+2)(n+1)}{6} = n-1 + \frac{n+1}{2}$$

$$n^2 - 6n + 5 = 0, (n-1)(n-5) = 0$$

$$\therefore n = 5 \quad (\because n \geq 2)$$

01-2 ㉡ 5

$${}_nP_2 + 4 \times {}_nC_3 = {}_nP_3 \text{에서}$$

$$n(n-1) + 4 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = n(n-1)(n-2)$$

이때 $n \geq 3$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$$1 + \frac{2}{3}(n-2) = n-2$$

$$\frac{1}{3}n = \frac{5}{3} \quad \therefore n = 5$$

01-3 ㉡ (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

$$(1) n \times {}_{n-1}C_{r-1} = n \times \frac{(n-1)!}{(r-1)!\{n-1-(r-1)\}!}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$$

$$= r \times \frac{n!}{r!(n-r)!} = r \times {}_nC_r$$

$$\therefore r \times {}_nC_r = n \times {}_{n-1}C_{r-1} \quad (\text{단, } 1 \leq r \leq n)$$

$$(2) {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$$

$$= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\{n-1-(r-1)\}!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}$$

$$= r \times \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!} + (n-r) \times \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!}$$

$$= (r+n-r) \times \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_nC_r$$

$$\therefore {}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r \quad (\text{단, } 1 \leq r < n)$$

02-1 ㉡ 45

꽃 10송이 중에서 8송이를 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

02-2 ㉡ 280

우유 5가지 중에서 2가지를 구매하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

주스 8가지 중에서 2가지를 구매하는 경우의 수는

$${}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 28 = 280$$

02-3 ㉡ 7

사탕과 초콜릿 $(n+2)$ 개 중에서 3개를 택하는 경우의 수가 84이므로 ${}_{n+2}C_3 = 84$ 에서

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

$$(n+2)(n+1)n = 504 = 9 \times 8 \times 7$$

$$\therefore n = 7$$

03-1 ㉡ (1) 165 (2) 455

(1) 특정한 여학생 1명을 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 학생 11명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수이므로

$${}_{11}C_3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

(2) 모든 학생 12명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수에서 4명을 모두 남학생만 뽑거나 모두 여학생만 뽑는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 12명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{12}C_4 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

(ii) 4명을 모두 남학생만 뽑거나 모두 여학생만 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_4 + {}_5C_4 = {}_7C_3 + {}_5C_1 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} + 5 = 35 + 5 = 40$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$495 - 40 = 455$$

03-2 ㉡ 112

A와 B 중에서 1명을 뽑고 A, B를 제외한 나머지 8명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_8C_3 = 2 \times \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 112$$

03-3 ㉡ 81

9권의 책 중에서 4권을 고르는 경우의 수에서 소설책을 1권 이하로 고르는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 9권의 책 중에서 4권을 고르는 경우의 수는

$${}_9C_4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

(ii) 4권을 모두 만화책만 고르는 경우의 수는

$${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

소설책 4권 중에서 1권, 만화책 5권 중에서 3권을 고르는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_5C_3 = {}_4C_1 \times {}_5C_2 = 4 \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 40$$

따라서 소설책을 1권 이하로 고르는 경우의 수는

$$5 + 40 = 45$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$126 - 45 = 81$$

04-1 ㉡ (1) 7200 (2) 5760

- (1) 어른 4명 중에서 3명, 아이 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_3 \times {}_6C_2 = {}_4C_1 \times {}_6C_2 = 4 \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 60$$

뽑은 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5! = 120$

따라서 구하는 경우의 수는

$$60 \times 120 = 7200$$

- (2) 어른 4명 중에서 2명, 아이 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_6C_3 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

어른 2명을 한 묶음으로 생각하여 아이 3명과 함께 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$

어른 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$$120 \times 24 \times 2 = 5760$$

04-2 ㉡ 36

숫자 1을 이미 택하였다고 생각하고 숫자 1, 2를 제외한 나머지 4개의 숫자 3, 4, 5, 6 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

택한 2개의 숫자와 숫자 1을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$6 \times 6 = 36$$

04-3 ㉡ 180

혜선이와 미림이를 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 6명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

혜선이와 미림이를 한 묶음으로 생각하여 다른 2명과 함께 일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$

혜선이와 미림이가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \times 6 \times 2 = 180$$

05-1 ㉡ (1) 36 (2) 110

- (1) 10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

그런데 한 직선 위에 있는 점으로는 1개의 직선만 만들 수 있으므로 구하는 직선의 개수는

$$45 - 10 + 1 = 36$$

- (2) 10개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

그런데 한 직선 위에 있는 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$$120 - 10 = 110$$

05-2 ㉡ 190

12개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 경우에는 삼각형을 만들 수 없고, 삼각형을 만들 수 없는 직선이 3개 있으므로

$$3 \times {}_5C_3 = 3 \times {}_5C_2 = 3 \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 30$$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$$220 - 30 = 190$$

05-3 ㉡ 9

육각형의 6개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하여 이으면 변 또는 대각선이 그려진다.

6개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

육각형의 변의 개수는 6이므로 구하는 대각선의 개수는

$$15 - 6 = 9$$

06-1 ㉡ 60

두 직선에서 각각 2개의 점을 택하여 4개의 점을 이으면 사각형이 만들어진다.

위쪽 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

아래쪽 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$$6 \times 10 = 60$$

06-2 ㉔ 210

가로 방향의 5개의 직선 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

세로 방향의 7개의 직선 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

$$10 \times 21 = 210$$

06-3 ㉔ (1) 20 (2) 40

(1) 간격 하나의 길이를 a 라 하자.

한 변의 길이가 a 인 정사각형의 개수는 $4 \times 3 = 12$

한 변의 길이가 $2a$ 인 정사각형의 개수는 $3 \times 2 = 6$

한 변의 길이가 $3a$ 인 정사각형의 개수는 $2 \times 1 = 2$

따라서 모든 정사각형의 개수는

$$12 + 6 + 2 = 20$$

(2) 4개의 가로줄 중에서 2개를, 5개의 세로줄 중에서 2개를 택하면 하나의 직사각형이 만들어지므로 직사각형의 개수는

$${}_4C_2 \times {}_5C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 60$$

이 중 정사각형이 20개 있으므로 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$$60 - 20 = 40$$

연습문제

219~220쪽

1 10	2 60	3 ③	4 ④	5 ⑤
6 ③	7 665	8 144	9 122	10 ③
11 ③	12 ③	13 72	14 15	

1 $3 \times {}_nC_3 = 4 \times {}_nP_2$ 에서

$$3 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 4n(n-1)$$

이때 $n \geq 3$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$$\frac{n-2}{2} = 4, n-2=8 \quad \therefore n=10$$

2 1학년 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

2학년 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \times 4 = 60$$

3 10명 중에서 2명을 뽑아 한 모듬을 만들고, 나머지 8명 중에서 3명을 뽑아 한 모듬을 만든 후 남은 5명이 한 모듬을 이루면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_{10}C_2 \times {}_8C_3 \times {}_5C_5 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} \times \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times 1 = 2520$$

4 n 개의 팀 중에서 2개의 팀을 뽑는 경우의 수가 120이므로

$${}_nC_2 = 120 \text{에서 } \frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 120$$

$$n(n-1) = 240 = 16 \times 15 \quad \therefore n = 16$$

5 아홉 자리의 자연수의 맨 앞 자리에는 0이 올 수 없으므로 1이어야 한다.

이웃해도 되는 1의 사이사이와 맨 끝의 6개의 자리 중에서 3개를 뽑아 0을 배열하면 되므로 구하는 자연수의 개수는

$${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

6 (i) $a=5$ 일 때

$c < b < 5$ 이므로 1, 2, 3, 4 중에서 2개를 뽑아 큰 수를 b , 작은 수를 c 라 하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

(ii) $a=6$ 일 때

$c < b < 6$ 이므로 1, 2, 3, 4, 5 중에서 2개를 뽑아 큰 수를 b , 작은 수를 c 라 하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$6 + 10 = 16$$

7 (i) 13명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{13}C_4 = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 715$$

(ii) 4명을 모두 가수만 뽑거나 모두 모델만 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_4 + {}_6C_4 = {}_7C_3 + {}_6C_2 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} + \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 35 + 15 = 50$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$715 - 50 = 665$$

8 부모님 2명을 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

뽑은 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 24 = 144$$

9 (i) 서로 다른 직선의 개수

10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

위쪽 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경

$$\text{우의 수는 } {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

아래쪽 직선 위에 있는 6개의 점 중에서 2개를 택하는

$$\text{경우의 수는 } {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

그런데 한 직선 위에 있는 점으로는 1개의 직선만 만
들 수 있으므로 직선의 개수 m 은

$$m = 45 - 6 - 15 + 2 = 26$$

(ii) 삼각형의 개수

10개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

위쪽 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경

$$\text{우의 수는 } {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

아래쪽 직선 위에 있는 6개의 점 중에서 3개를 택하는

$$\text{경우의 수는 } {}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

그런데 한 직선 위에 있는 점으로는 삼각형을 만들 수
없으므로 삼각형의 개수 n 은

$$n = 120 - 4 - 20 = 96$$

(i), (ii)에서

$$m + n = 26 + 96 = 122$$

10 팔각형의 8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하여 이으면 변
또는 대각선이 그려진다.

8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

팔각형의 변의 개수는 8이므로 구하는 대각선의 개수는

$$28 - 8 = 20$$

11 (i) 첫째 날 2팀, 둘째 날 3팀이 공연하는 경우

5개의 팀 중에서 첫째 날 공연하는 2팀을 택하고, 둘째
날 공연하는 3팀을 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_3 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 1 = 10$$

첫째 날과 둘째 날의 공연 순서를 정하는 경우의 수는

$$2! \times 3! = 2 \times 6 = 12$$

따라서 첫째 날 2팀, 둘째 날 3팀이 공연하도록 순서
를 정하는 경우의 수는

$$10 \times 12 = 120$$

(ii) 첫째 날 3팀, 둘째 날 2팀이 공연하는 경우

5개의 팀 중에서 첫째 날 공연하는 3팀을 택하고, 둘
째 날 공연하는 2팀을 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3 \times {}_2C_2 = {}_5C_2 \times {}_2C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 1 = 10$$

첫째 날과 둘째 날의 공연 순서를 정하는 경우의 수는

$$3! \times 2! = 6 \times 2 = 12$$

따라서 첫째 날 3팀, 둘째 날 2팀이 공연하도록 순서
를 정하는 경우의 수는 $10 \times 12 = 120$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $120 + 120 = 240$

12 계단을 두 단씩 올라가는 횟수는 0, 1, 2, 3의 4가지이고
그 각각에 대하여 나머지는 모두 한 단씩 올라가면 된다.

(i) 두 단씩 올라가는 횟수가 0인 경우

계단을 오르는 7번 중에서 두 단을 오르는 경우는 없
으므로 경우의 수는 1

(ii) 두 단씩 올라가는 횟수가 1인 경우

계단을 오르는 6번 중에서 두 단을 오르는 1번을 고르
는 경우의 수는 ${}_6C_1 = 6$

(iii) 두 단씩 올라가는 횟수가 2인 경우

계단을 오르는 5번 중에서 두 단을 오르는 2번을 고르
는 경우의 수는 ${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

(iv) 두 단씩 올라가는 횟수가 3인 경우

계단을 오르는 4번 중에서 두 단을 오르는 3번을 고르
는 경우의 수는 ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는 $1 + 6 + 10 + 4 = 21$

13 평행사변형이 아닌 사다리꼴은 서로 평행한 2개의 직선과
평행하지 않은 2개의 직선을 택하여 만들 수 있으므로 구
하는 사다리꼴의 개수는

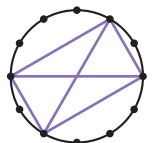
$$\begin{aligned} & {}_4C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 + {}_3C_2 \times {}_4C_1 \times {}_2C_1 + {}_2C_2 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \\ &= {}_4C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 + {}_3C_1 \times {}_4C_1 \times {}_2C_1 + {}_2C_2 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \\ &= \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 3 \times 2 + 3 \times 4 \times 2 + 1 \times 4 \times 3 \\ &= 36 + 24 + 12 = 72 \end{aligned}$$

14 오른쪽 그림과 같이 서로 다른 원의 지름

2개가 직사각형의 대각선이 되도록 하
는 원 위의 4개의 점을 이으면 직사각형
을 만들 수 있다.

따라서 원의 지름 6개 중에서 2개를 택하여 이를 두 대각
선으로 하는 직사각형을 만들 수 있으므로 구하는 직사각
형의 개수는

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$



IV-1 01 행렬의 덧셈, 뺄셈과 실수배

행렬

개념 Check

223쪽

1 답 (1) 1, 4, 5 (2) 1, 5, 0 (3) 1 (4) 1 (5) 4 (6) 6

2 답 $a=2, b=1, c=-2$

두 행렬이 서로 같으면 대응하는 성분이 각각 같으므로

$$3a=6, -2=c, b+1=2$$

$$\therefore a=2, b=1, c=-2$$

문제

224~226쪽

01-1 답 $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

행렬 A 는 2×3 행렬이므로 $a_{ij}=ij-2$ 에 $i=1, 2$,
 $j=1, 2, 3$ 을 각각 대입하면

$$a_{11}=1 \times 1 - 2 = -1, a_{12}=1 \times 2 - 2 = 0$$

$$a_{13}=1 \times 3 - 2 = 1, a_{21}=2 \times 1 - 2 = 0$$

$$a_{22}=2 \times 2 - 2 = 2, a_{23}=2 \times 3 - 2 = 4$$

따라서 구하는 행렬은

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

01-2 답 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ $i \neq j$ 이면 $a_{ij}=2i$ 이므로

$$a_{12}=2 \times 1 = 2, a_{21}=2 \times 2 = 4$$

$$a_{31}=2 \times 3 = 6, a_{32}=2 \times 3 = 6$$

 $i=j$ 이면 $a_{ij}=j$ 이므로

$$a_{11}=1, a_{22}=2$$

따라서 구하는 행렬은

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

01-3 답 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $i \geq j$ 이면 $a_{ij}=(-1)^{i+j}$ 이므로

$$a_{11}=(-1)^{1+1}=1, a_{21}=(-1)^{2+1}=-1$$

$$a_{22}=(-1)^{2+2}=1, a_{31}=(-1)^{3+1}=1$$

$$a_{32}=(-1)^{3+2}=-1, a_{33}=(-1)^{3+3}=1$$

 $i < j$ 이면 $a_{ij}=2^i$ 이므로

$$a_{12}=2^1=2, a_{13}=2^1=2, a_{23}=2^2=4$$

따라서 구하는 행렬은

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

02-1 답 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 건물 A_1 에서 A_1 로 가는 도로의 수는 1이므로 $a_{11}=1$ 건물 A_1 에서 A_2 로 가는 도로의 수는 1이므로 $a_{12}=1$ 건물 A_1 에서 A_3 으로 가는 도로의 수는 2이므로

$$a_{13}=2$$

건물 A_2 에서 A_1 로 가는 도로는 없으므로 $a_{21}=0$ 건물 A_2 에서 A_2 로 가는 도로는 없으므로 $a_{22}=0$ 건물 A_2 에서 A_3 으로 가는 도로의 수는 1이므로

$$a_{23}=1$$

건물 A_3 에서 A_1 로 가는 도로의 수는 1이므로 $a_{31}=1$ 건물 A_3 에서 A_2 로 가는 도로의 수는 1이므로 $a_{32}=1$ 건물 A_3 에서 A_3 으로 가는 도로는 없으므로 $a_{33}=0$

따라서 구하는 행렬은

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

02-2 답 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 1번 버스는 정류장 P_1 에 정차하므로 $a_{11}=1$ 1번 버스는 정류장 P_2 에 정차하지 않으므로 $a_{12}=0$ 1번 버스는 정류장 P_3 에 정차하므로 $a_{13}=1$ 2번 버스는 정류장 P_1 에 정차하지 않으므로 $a_{21}=0$ 2번 버스는 정류장 P_2 에 정차하므로 $a_{22}=1$ 2번 버스는 정류장 P_3 에 정차하므로 $a_{23}=1$ 3번 버스는 정류장 P_1 에 정차하므로 $a_{31}=1$ 3번 버스는 정류장 P_2 에 정차하므로 $a_{32}=1$ 3번 버스는 정류장 P_3 에 정차하므로 $a_{33}=1$

따라서 구하는 행렬은

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

03-1 ㉔ -8

두 행렬이 서로 같으면 대응하는 성분이 각각 같으므로

$$a=2c+1 \quad \cdots \textcircled{㉔}$$

$$-b=2 \quad \cdots \textcircled{㉕}$$

$$3c=2a \quad \cdots \textcircled{㉖}$$

$$bd-1=1 \quad \cdots \textcircled{㉗}$$

㉔, ㉕을 연립하여 풀면

$$a=-3, c=-2$$

$$\textcircled{㉕} \text{에서 } b=-2$$

이를 ㉖에 대입하면

$$-2d-1=1 \quad \therefore d=-1$$

$$\therefore a+b+c+d=-3+(-2)+(-2)+(-1)=-8$$

03-2 ㉔ 4

두 행렬이 서로 같으면 대응하는 성분이 각각 같으므로

$$x^2=1 \quad \cdots \textcircled{㉔}$$

$$xy=z \quad \cdots \textcircled{㉕}$$

$$-2=x+y \quad \cdots \textcircled{㉖}$$

$$y^2=9 \quad \cdots \textcircled{㉗}$$

$$\textcircled{㉔} \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1 \quad \cdots \textcircled{㉘}$$

$$\textcircled{㉕} \text{에서 } y=-3 \text{ 또는 } y=3 \quad \cdots \textcircled{㉙}$$

㉘, ㉙에서 ㉖을 만족시키는 x, y 의 값은

$$x=1, y=-3$$

이를 ㉕에 대입하면 $z=-3$

$$\therefore x-2y+z=1-2 \times (-3)+(-3)=4$$

2 행렬의 덧셈, 뺄셈과 실수배

개념 Check

228쪽

$$1 \quad \textcircled{㉔} (1) \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 5 & 3 & -5 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & -1+2 \\ 2+0 & 1+(-2) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 3-(-2) & 4-1 & -3-2 \\ 2-1 & 1-5 & 4-1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -5 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 & 1-3 \\ 2-(-1) & -2-4 \\ 3-(-2) & 0-1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

문제

229~231쪽

$$04-1 \quad \textcircled{㉔} (1) \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(1) A-2B-(2A-3B)=A-2B-2A+3B \\ =-A+B \\ =-\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ =\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ =\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) 2(A-B)+3(A+2B)-(A+6B) \\ =2A-2B+3A+6B-A-6B \\ =4A-2B \\ =4\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ =\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \\ =\begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$04-2 \quad \textcircled{㉔} \begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$5A+2X=2(3B-2A)-X \text{에서}$$

$$5A+2X=6B-4A-X, 3X=-9A+6B$$

$$\therefore X=-3A+2B$$

$$=-3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ =\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ =\begin{pmatrix} -9 & 4 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$$

05-1 ㉔ $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

$\textcircled{㉔} + \textcircled{㉕}$ 을 하면

$$(A+B) + (A-B) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

이를 $\textcircled{㉔}$ 에 대입하면

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore B &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

05-2 ㉔ $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$A-3B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$2A-B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

$3 \times \textcircled{㉕} - \textcircled{㉔}$ 을 하면

$$3(2A-B) - (A-3B) = 3 \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6A-3B-A+3B = \begin{pmatrix} 15 & 18 \\ 12 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5A = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

이를 $\textcircled{㉕}$ 에 대입하면

$$2 \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore B &= \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore A+B &= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

06-1 ㉔ 16

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ c & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 3 \\ 2 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & c \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} a-1 & 5 \\ b+c & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-3 & 3+c \\ 6 & a+8 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a-1=b-3, 5=3+c, b+c=6, 10=a+8$$

$$\therefore a=2, b=4, c=2$$

$$\therefore abc=16$$

06-2 ㉔ 5

$$xA+yB = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} \text{을 만족시키므로}$$

$$x \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x & 3x \\ 3x & 5x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4y & 3y \\ 2y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 2x+4y & 3x+3y \\ 3x+2y & 5x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2x+4y=-2, 3x+3y=3$$

$$\therefore x+2y=-1, x+y=1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=3, y=-2$$

$$\therefore x-y=5$$

06-3 ㉔ 4

$$xA+yB=C \text{이므로}$$

$$x \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -13 \\ -11 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x & x \\ -x & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2y & ay \\ 2y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -13 \\ -11 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 3x-2y & x+ay \\ -x+2y & 2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -13 \\ -11 & 2 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$3x-2y=17 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$x+ay=-13 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

$$-x+2y=-11 \quad \dots\dots \textcircled{㉖}$$

$\textcircled{㉔}, \textcircled{㉖}$ 을 연립하여 풀면

$$x=3, y=-4$$

이를 $\textcircled{㉕}$ 에 대입하면

$$3-4a=-13$$

$$4a=16 \quad \therefore a=4$$

1 ⑤	2 ③	3 1	4 ②	5 3
6 0	7 ①	8 $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$	9 19	
10 ②	11 ③	12 20		

- 1 ㄱ. 3×2 행렬이다.
 ㄴ. 제2열의 성분은 $-1, 4, 2$ 이다.
 ㄷ. $i=1$ 이면 제1행이고, 제1행의 성분은 $5, -1$ 이므로 그 합은
 $5 + (-1) = 4$
 ㄹ. $i=j$ 인 성분은 $a_{11}=5, a_{22}=4$ 이므로 그 곱은
 $5 \times 4 = 20$
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.
- 2 i 가 홀수이면 $a_{ij}=3i+j$ 이므로
 $a_{11}=3 \times 1 + 1 = 4$
 $a_{12}=3 \times 1 + 2 = 5$
 i 가 짝수이면 $a_{ij}=3i-j$ 이므로
 $a_{21}=3 \times 2 - 1 = 5$
 $a_{22}=3 \times 2 - 2 = 4$
 따라서 행렬 A 의 모든 성분의 합은
 $4 + 5 + 5 + 4 = 18$
- 3 $a_{ij}=(i^2-1)(j+k)$ 에 $i=1, 2, j=1, 2, 3$ 을 각각 대입
 하면
 $a_{11}=(1^2-1)(1+k)=0$
 $a_{12}=(1^2-1)(2+k)=0$
 $a_{13}=(1^2-1)(3+k)=0$
 $a_{21}=(2^2-1)(1+k)=3+3k$
 $a_{22}=(2^2-1)(2+k)=6+3k$
 $a_{23}=(2^2-1)(3+k)=9+3k$
 행렬 A 의 모든 성분의 합이 27이므로
 $0+0+0+(3+3k)+(6+3k)+(9+3k)=27$
 $9k+18=27, 9k=9$
 $\therefore k=1$
- 4 (가)에서 $i=j$ 일 때, $a_{ij}=0$ 이므로
 $a_{11}=0, a_{22}=0, a_{33}=0$
 (나)에서 $i \neq j$ 일 때, a_{ij} 는 도형 P_i 와 P_j 의 교점의 개수이므로
 $a_{12}=a_{21}, a_{13}=a_{31}, a_{23}=a_{32}$
 도형 P_1 과 P_2 의 교점의 개수는 6이므로
 $a_{12}=6, a_{21}=6$

도형 P_1 과 P_3 의 교점의 개수는 2이므로

$$a_{13}=2, a_{31}=2$$

도형 P_2 와 P_3 의 교점의 개수는 2이므로

$$a_{23}=2, a_{32}=2$$

따라서 구하는 행렬은

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- 5 두 행렬이 서로 같으면 대응하는 성분이 각각 같으므로

$$5x = x^2 + 6 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$xy = -2 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$2y + 3 = y^2 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=3$$

$$\textcircled{㉢} \text{에서 } y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$(y+1)(y-3) = 0$$

$$\therefore y=-1 \text{ 또는 } y=3$$

이때 $\textcircled{㉡}$ 을 만족시키는 x, y 의 값은

$$x=2, y=-1$$

$$\therefore x-y=3$$

- 6 $3(A+2B)-2(2A+B)+5A-B$

$$= 3A + 6B - 4A - 2B + 5A - B$$

$$= 4A + 3B$$

$$= 4 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -16 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -13 & 11 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$10 + (-8) + (-13) + 11 = 0$$

- 7 $A=2B-X$ 에서

$$X = -A + 2B$$

$$= - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- 8 $X-Y=2A \quad \cdots \textcircled{㉠}$

$$X+2Y=B \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠-㉡을 하면

$$(X-Y)-(X+2Y)=2A-B$$

$$-3Y=2A-B$$

$$\therefore Y=-\frac{2}{3}A+\frac{1}{3}B$$

이를 ㉠에 대입하면

$$X-\left(-\frac{2}{3}A+\frac{1}{3}B\right)=2A$$

$$\therefore X=2A+\left(-\frac{2}{3}A+\frac{1}{3}B\right)=\frac{4}{3}A+\frac{1}{3}B$$

$$\therefore X+Y=\frac{4}{3}A+\frac{1}{3}B+\left(-\frac{2}{3}A+\frac{1}{3}B\right)$$

$$=\frac{2}{3}A+\frac{2}{3}B=\frac{2}{3}(A+B)$$

$$=\frac{2}{3}\left\{\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

- 9 이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a, \alpha\beta=b \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 0 & 2\alpha\beta \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \alpha\beta \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \beta & \beta^2 \\ 0 & \alpha\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 0 & 2\alpha\beta \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha^2+\beta^2 \\ 0 & 2\alpha\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 0 & 2\alpha\beta \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\alpha+\beta=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\alpha^2+\beta^2=29 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a=3$$

$$\textcircled{㉢} \text{에서 } (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=29$$

$$\textcircled{㉡} \text{을 대입하면 } 3^2-2\alpha\beta=29$$

$$\therefore \alpha\beta=-10 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉣} \text{에서 } b=-10$$

$$\therefore 3a-b=3\times 3-(-10)=19$$

- 10 $xA+yC=B$ 이므로

$$x\begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & ax \\ 2x & bx \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -y & by \\ 0 & ay \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x-y & ax+by \\ 2x & bx+ay \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x-y=5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$ax+by=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$2x=4 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$bx+ay=-7 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉢} \text{에서 } x=2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$2-y=5 \quad \therefore y=-3$$

$x=2, y=-3$ 을 ㉡, ㉣에 각각 대입하면

$$2a-3b=3, 2b-3a=-7$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=3, b=1$$

$$\therefore a+b+x+y=3+1+2+(-3)=3$$

- 11 ㉠에서 $a_{ij}=-a_{ji}$ 이므로 $i=j$ 이면

$$a_{ii}=-a_{ii}, 2a_{ii}=0 \quad \therefore a_{ii}=0$$

$$\therefore a_{11}=0, a_{22}=0, a_{33}=0$$

또 $a_{12}=x$ 라 하면 $a_{21}=-a_{12}=-x$

$$a_{13}=y \text{라 하면 } a_{31}=-a_{13}=-y$$

$$a_{23}=z \text{라 하면 } a_{32}=-a_{23}=-z$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}$$

㉡에서 행렬 A 의 모든 성분의 제곱의 합이 6이므로

$$x^2+y^2+x^2+z^2+y^2+z^2=6$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2=3$$

이때 x, y, z 는 정수이므로 $x^2=1, y^2=1, z^2=1$

즉, x, y, z 는 각각 -1 또는 1 을 값으로 갖는다.

따라서 행렬 A 의 개수는

$$2\times 2\times 2=8$$

- 12 (i) $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_1$ 로 가는 경우

도시 P_1 에서 P_2 로 가는 직항 노선의 수는 $a_{12}=4$

도시 P_2 에서 P_3 으로 가는 직항 노선의 수는 $a_{23}=1$

도시 P_3 에서 P_1 로 가는 직항 노선의 수는 $a_{31}=2$

따라서 $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_1$ 로 가는 경우의 수는

$$4\times 1\times 2=8$$

- (ii) $P_1 \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1$ 로 가는 경우

도시 P_1 에서 P_3 으로 가는 직항 노선의 수는 $a_{13}=2$

도시 P_3 에서 P_2 로 가는 직항 노선의 수는 $a_{32}=2$

도시 P_2 에서 P_1 로 가는 직항 노선의 수는 $a_{21}=3$

따라서 $P_1 \rightarrow P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1$ 로 가는 경우의 수는

$$2\times 2\times 3=12$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$8+12=20$$

행렬의 곱셈

개념 Check

235쪽

- 1 답 (1) 14 (2) -7
- (3) $\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$
- (5) $\begin{pmatrix} 9 & -4 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 4 & -7 \end{pmatrix}$
- (7) $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (9) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ (10) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$
- (1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \times 4 + 2 \times 1 = 14$
- (2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \times (-3) + (-1) \times 1 = -7$
- (3) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 & 3 \times 4 \\ 0 \times 1 & 0 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (4) $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \times 4 & -1 \times (-2) \\ 5 \times 4 & 5 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 20 & -10 \end{pmatrix}$
- (5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 4 & 1 \times 0 + 2 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \end{pmatrix}$
- (6) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times (-1) + (-3) \times (-2) & 2 \times 1 + (-3) \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \end{pmatrix}$
- (7) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 3 \times 0 \\ 4 \times 2 + (-2) \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$
- (8) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 3 + (-2) \times (-1) \\ 0 \times 3 + (-1) \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 0 & 1 \times (-1) + 2 \times 1 \\ 2 \times 2 + 4 \times 0 & 2 \times (-1) + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
- (10) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 3 + (-1) \times 2 & 1 \times (-1) + (-1) \times (-1) \\ -2 \times 3 + 1 \times 2 & -2 \times (-1) + 1 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

문제

236~238쪽

01-1 답 (1) $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$

(1) $2A - B = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore (2A - B)A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore AB + 2BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$

01-2 답 1

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2a & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & b+5 \\ 10 & 3-c \end{pmatrix}$ 에서

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2a+12 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & b+5 \\ 10 & 3-c \end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$1 = b + 5, 2a + 12 = 10, -3 = 3 - c$

$\therefore a = -1, b = -4, c = 6$

$\therefore a + b + c = 1$

02-1 답 -28

$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$\therefore A^n = \begin{pmatrix} 1 & -3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (단, n 은 자연수)

따라서 $A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & -30 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로 A^{10} 의 모든 성분의 합은

$1 + (-30) + 0 + 1 = -28$

02-2 답 256

$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 4A$

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 A = (4A)A = 4A^2 = 4(4A) = 4^2 A \\ A^4 &= A^3 A = (4^2 A)A = 4^2 A^2 = 4^2(4A) = 4^3 A \\ A^5 &= 4^4 A = 256A \\ \therefore k &= 256 \end{aligned}$$

03-1 ㉔ ⑤

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 400 & 500 \\ 350 & 600 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 400 \times 6 + 500 \times 3 & 400 \times 4 + 500 \times 5 \\ 350 \times 6 + 600 \times 3 & 350 \times 4 + 600 \times 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{이므로}$$

a = (갑이 P에서 연필과 볼펜을 구입하고 지불한 금액)

b = (을이 P에서 연필과 볼펜을 구입하고 지불한 금액)

c = (갑이 Q에서 연필과 볼펜을 구입하고 지불한 금액)

d = (을이 Q에서 연필과 볼펜을 구입하고 지불한 금액)

따라서 갑과 을이 문구점 Q에서 연필과 볼펜을 구입하고 지불한 금액의 합은

$$c + d$$

2 행렬의 곱셈에 대한 성질

문제

240~241쪽

04-1 ㉔ (1) $\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -22 & -4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 15 & 19 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$

(1) $CAC - BAC = (C - B)AC$

$$C - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore CAC - BAC = (C - B)AC$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -22 & -4 \end{pmatrix}$$

(2) $A(B + C) + B(A + C) - (A + B)C$

$$= AB + AC + BA + BC - AC - BC$$

$$= AB + BA$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A(B + C) + B(A + C) - (A + B)C \\ &= AB + BA \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 19 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

04-2 ㉔ $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$X + AB^2 = ABA \text{에서}$$

$$X = ABA - AB^2 = ABA - ABB = AB(A - B)$$

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X = AB(A - B)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

05-1 ㉔ $x = 3, y = 3$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \text{에서}$$

$$(A - B)(A - B) = A^2 - 2AB + B^2$$

$$A^2 - AB - BA + B^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$\therefore AB = BA$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2y & 11 \\ 2 + xy & 6 + 4x \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ y & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 + 3x \\ y + 8 & 2y + 4x \end{pmatrix}$$

$$AB = BA \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} 1 + 2y & 11 \\ 2 + xy & 6 + 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 + 3x \\ y + 8 & 2y + 4x \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$1 + 2y = 7, 11 = 2 + 3x \quad \therefore x = 3, y = 3$$

05-2 ㉔ 1

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 \text{에서}$$

$$A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$$

$$\therefore AB = BA$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ x + 2 & y - 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y & y \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = BA \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ x + 2 & y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y & y \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2x = 2x + y, x + 2 = 3$$

$$\therefore x = 1, y = 0 \quad \therefore x + y = 1$$

3 단위행렬

개념 Check

242쪽

1 답 (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
 (3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

문제

243~244쪽

06-1 답 $\begin{pmatrix} 65 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$
 $(2A+E)(4A^2-2A+E)$
 $=8A^3-4A^2+2AE+E(4A^2)-E(2A)+E^2$
 $=8A^3-4A^2+2A+4A^2-2A+E=8A^3+E$
 $A^2=AA=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\therefore (2A+E)(4A^2-2A+E)=8A^3+E$
 $=8\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $=\begin{pmatrix} 65 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

06-2 답 $\begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$
 $(A-E)(A^2+A+E)-(A+E)(A-E)$
 $=A^3+A^2+AE-EA^2-EA-E^2$
 $\quad -(A^2-AE+EA-E^2)$
 $=A^3+A^2+A-A^2-A-E-(A^2-A+A-E)$
 $=A^3-E-(A^2-E)=A^3-A^2$
 $A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$
 $A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}$
 $\therefore (A-E)(A^2+A+E)-(A+E)(A-E)$
 $=A^3-A^2$
 $=\begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$

06-3 답 -2

$(A^2-A+E)(A^2+A+E)$
 $=A^4+A^3+A^2E-A^3-A^2-AE+EA^2+EA+E^2$
 $=A^4+A^3+A^2-A^3-A^2-A+A^2+A+E$
 $=A^4+A^2+E$

$A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
 $\therefore (A^2-A+E)(A^2+A+E)$
 $=A^4+A^2+E$
 $=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

따라서 $(A^2-A+E)(A^2+A+E)$ 의 모든 성분의 합은
 $1+(-4)+2+(-1)=-2$

07-1 답 3

$A^2=AA=\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
 $A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$

따라서 $A^n=E$ 를 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 3이다.

07-2 답 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$
 $\therefore A^{100}+A^{101}=(A^2)^{50}+(A^2)^{50}A=E+EA=E+A$
 $=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

07-3 답 100

$A^2=AA=\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
 $=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=2E$
 $\therefore A^{200}=(A^2)^{100}=(2E)^{100}=2^{100}E$
 $\therefore n=100$

연습문제

246~248쪽

- | | | | | |
|------|------|------|------|-------|
| 1 ③ | 2 ③ | 3 13 | 4 ① | 5 ② |
| 6 34 | 7 ② | 8 12 | 9 ① | 10 16 |
| 11 ④ | 12 ② | 13 ⑤ | 14 ③ | 15 ② |
| 16 ③ | | | | |

1 두 행렬 A, B 의 곱 AB 는 행렬 A 의 열의 개수와 행렬 B 의 행의 개수가 같을 때 정의된다.

① 1×2 행렬과 2×1 행렬의 곱이므로 1×1 행렬로 정의된다.

② 2×1 행렬과 1×2 행렬의 곱이므로 2×2 행렬로 정의된다.

③ 2×1 행렬과 2×2 행렬의 곱은 정의되지 않는다.

④ 2×2 행렬과 2×1 행렬의 곱이므로 2×1 행렬로 정의된다.

⑤ 2×2 행렬과 2×2 행렬의 곱이므로 2×2 행렬로 정의된다.

따라서 곱이 정의되지 않는 것은 ③이다.

$$\begin{aligned} 2 \quad AB &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} \\ \therefore 3AB - 2BA &= 3 \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ -4 & -20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 행렬 $3AB - 2BA$ 의 모든 성분의 합은
 $24 + 6 + (-4) + (-20) = 6$

$$\begin{aligned} 3 \quad a_{ij} &= i - j + 1 \text{에서} \\ a_{11} &= 1 - 1 + 1 = 1, \quad a_{12} = 1 - 2 + 1 = 0 \\ a_{21} &= 2 - 1 + 1 = 2, \quad a_{22} = 2 - 2 + 1 = 1 \\ \therefore A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ b_{ij} &= i + j + 1 \text{에서} \\ b_{11} &= 1 + 1 + 1 = 3, \quad b_{12} = 1 + 2 + 1 = 4 \\ b_{21} &= 2 + 1 + 1 = 4, \quad b_{22} = 2 + 2 + 1 = 5 \\ \therefore B &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ \therefore AB &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 10 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 행렬 AB 의 $(2, 2)$ 성분은 13이다.

$$\begin{aligned} 4 \quad AB &= \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & b \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+2c & ab+2 \\ -3-c & 3b-1 \end{pmatrix} \\ AB &= O \text{에서} \\ \begin{pmatrix} -a+2c & ab+2 \\ -3-c & 3b-1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{행렬이 서로 같을 조건에 의하여} \\ -a+2c &= 0, \quad -3-c = 0, \quad 3b-1 = 0 \\ \therefore a &= -6, \quad b = \frac{1}{3}, \quad c = -3 \\ \therefore a-bc &= -6 - (-1) = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad A^2 &= AA = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= -A \\ A^3 &= A^2 A = (-A)A = -A^2 = -(-A) = A \\ A^4 &= A^3 A = AA = A^2 = -A \\ &\vdots \\ \therefore A^{30} + A^{31} + A^{32} &= -A + A + (-A) \\ &= -A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad A^2 &= AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \\ A^4 &= A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ \therefore A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix} \\ \text{행렬 } A^n \text{의 } (2, 1) \text{ 성분은 } 3n \text{이므로} \\ a_n &= 3n \\ a_n > 100 \text{에서} \\ 3n > 100 \quad \therefore n &> \frac{100}{3} \end{aligned}$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 34이다.

$$\begin{aligned} 7 \quad YX &= \begin{pmatrix} 37 & 46 \\ 89 & 92 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17000 & 15000 \\ 14000 & 16000 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 37 \times 17000 + 46 \times 14000 & 37 \times 15000 + 46 \times 16000 \\ 89 \times 17000 + 92 \times 14000 & 89 \times 15000 + 92 \times 16000 \end{pmatrix} \\ \text{따라서 행렬 } YX \text{의 } (2, 1) \text{ 성분은} \\ 89 \times 17000 + 92 \times 14000 \\ \text{이므로 가게 A의 4월의 축구공과 농구공의 판매 총액이다.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \quad (A+B)^2 - (A-B)^2 \\ &= (A+B)(A+B) - (A-B)(A-B) \\ &= A^2 + AB + BA + B^2 - (A^2 - AB - BA + B^2) \\ &= 2AB + 2BA \\ AB &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -7 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore (A+B)^2 - (A-B)^2 &= 2AB + 2BA \\ &= 2 \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -7 & -7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 $(A+B)^2 - (A-B)^2$ 의 모든 성분의 합은
 $8+16+(-4)+(-8)=12$

9 $(A-2B)^2 = A^2 - 4AB + 4B^2$ 에서
 $(A-2B)(A-2B) = A^2 - 4AB + 4B^2$
 $A^2 - 2AB - 2BA + 4B^2 = A^2 - 4AB + 4B^2$
 $2AB = 2BA$
 $\therefore AB = BA$
 $AB = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b & 2a-8 \\ 3-b & 2 \end{pmatrix}$
 $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+6 & -4 \\ ab+12 & -2b-4 \end{pmatrix}$
 $AB = BA$ 에서
 $\begin{pmatrix} a-2b & 2a-8 \\ 3-b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+6 & -4 \\ ab+12 & -2b-4 \end{pmatrix}$
행렬이 서로 같을 조건에 의하여
 $2a-8 = -4, 2 = -2b-4$
 $\therefore a=2, b=-3$
 $\therefore a-b=5$

10 $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$
 $\therefore (3A+E)^2 = (3A+E)(3A+E)$
 $= 9A^2 + 3AE + 3EA + E^2$
 $= 9E + 3A + 3A + E$
 $= 6A + 10E$
따라서 $x=6, y=10$ 이므로
 $x+y=16$

11 $A^2 = AA = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$
 $\therefore A^{2012} = (A^2)^{1006} = E$
 $A^{2012} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 에서
 $E \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
따라서 $p=-2, q=3$ 이므로
 $p+q=1$

12 a_{11} 은 1 지점에서 1 지점으로 가는 코스의 수
 a_{12} 은 1 지점에서 2 지점으로 가는 코스의 수
 a_{21} 은 2 지점에서 1 지점으로 가는 코스의 수
 a_{22} 은 2 지점에서 2 지점으로 가는 코스의 수
 i 지점을 출발하여 두 코스를 이어 관광하고 j 지점에서 관광을 마치는 경우의 수를 (i, j) 성분으로 하는 행렬을 $B = (b_{ij})$ 라 하자.

(i) 1 지점을 출발하여 1 지점에서 관광을 마치는 경우
1 지점 $\rightarrow$ 1 지점 $\rightarrow$ 1 지점인 경우의 수는

$$a_{11} \times a_{11}$$

1 지점 $\rightarrow$ 2 지점 $\rightarrow$ 1 지점인 경우의 수는

$$a_{12} \times a_{21}$$

$$\therefore b_{11} = a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21}$$

(ii) 1 지점을 출발하여 2 지점에서 관광을 마치는 경우
1 지점 $\rightarrow$ 1 지점 $\rightarrow$ 2 지점인 경우의 수는

$$a_{11} \times a_{12}$$

1 지점 $\rightarrow$ 2 지점 $\rightarrow$ 2 지점인 경우의 수는

$$a_{12} \times a_{22}$$

$$\therefore b_{12} = a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22}$$

(iii) 2 지점을 출발하여 1 지점에서 관광을 마치는 경우
2 지점 $\rightarrow$ 1 지점 $\rightarrow$ 1 지점인 경우의 수는

$$a_{21} \times a_{11}$$

2 지점 $\rightarrow$ 2 지점 $\rightarrow$ 1 지점인 경우의 수는

$$a_{22} \times a_{21}$$

$$\therefore b_{21} = a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21}$$

(iv) 2 지점을 출발하여 2 지점에서 관광을 마치는 경우
2 지점 $\rightarrow$ 1 지점 $\rightarrow$ 2 지점인 경우의 수는

$$a_{21} \times a_{12}$$

2 지점 $\rightarrow$ 2 지점 $\rightarrow$ 2 지점인 경우의 수는

$$a_{22} \times a_{22}$$

$$\therefore b_{22} = a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22}$$

(i)~(iv)에서

$$\begin{aligned}B &= \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= AA = A^2\end{aligned}$$

13 $A \begin{pmatrix} 4a-c \\ 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ 에서

$$A \left\{ \begin{pmatrix} 4a \\ 2b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \left\{ 2 \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 2A \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \therefore A \begin{pmatrix} c \\ -d \end{pmatrix} &= 2A \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14 \quad A^2 &= AA = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \\
 A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -E \\
 A^4 &= A^3 A = -EA = -A \\
 A^6 &= (A^3)^2 = (-E)^2 = E \\
 \therefore E + A^2 + A^4 + A^6 + \cdots + A^{100} \\
 &= E + A^2 + A^4 + A^6(E + A^2 + A^4) \\
 &\quad + A^{12}(E + A^2 + A^4) + \cdots + A^{96}(E + A^2 + A^4) \\
 &= 17(E + A^2 + A^4) \\
 &= 17(E + A^2 - A) \\
 E + A^2 - A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \\
 \therefore E + A^2 + A^4 + A^6 + \cdots + A^{100} &= 17(E + A^2 - A) \\
 &= O
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15 \quad A + B &= E \text{에서 } B = -A + E \\
 \text{이를 } AB = E \text{에 대입하면} \\
 A(-A + E) &= E, \quad -A^2 + A = E \\
 \therefore A^2 - A + E &= O \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\
 \text{양변에 } A + E \text{를 곱하면} \\
 (A + E)(A^2 - A + E) &= (A + E)O \\
 A^3 + E &= O \quad \therefore A^3 = -E \\
 \text{또 } A + B &= E \text{에서 } A = -B + E \\
 \text{이를 } AB = E \text{에 대입하면} \\
 (-B + E)B &= E, \quad -B^2 + B = E \\
 \therefore B^2 - B + E &= O \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\
 \text{양변에 } B + E \text{를 곱하면} \\
 (B + E)(B^2 - B + E) &= (B + E)O \\
 B^3 + E &= O \quad \therefore B^3 = -E \\
 \therefore A^{2012} + B^{2012} &= (A^3)^{670} A^2 + (B^3)^{670} B^2 \\
 &= (-E)^{670} A^2 + (-E)^{670} B^2 \\
 &= A^2 + B^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{이때 } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } A^2 &= A - E, \quad B^2 = B - E \text{이므로} \\
 A^{2012} + B^{2012} &= A^2 + B^2 = A - E + (B - E) \\
 &= A + B - 2E = E - 2E \\
 &= -E
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 A + B &= E \text{에서 } B = -A + E \\
 \text{이를 } AB = E \text{에 대입하면} \\
 A(-A + E) &= E \\
 -A^2 + A &= E \quad \therefore A^2 = A - E \\
 \therefore A^3 &= A^2 A = (A - E)A = A^2 - A \\
 &= (A - E) - A = -E \\
 \text{같은 방법으로 하면} \\
 B^2 &= B - E, \quad B^3 = -E \\
 \therefore A^{2012} + B^{2012} &= (A^3)^{670} A^2 + (B^3)^{670} B^2 \\
 &= (-E)^{670} A^2 + (-E)^{670} B^2 \\
 &= A^2 + B^2 \\
 &= A - E + (B - E) \\
 &= A + B - 2E \\
 &= E - 2E = -E
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16 \quad \neg. \quad AB + BA &= O \text{에서 } AB = -BA \\
 \therefore A^2 B &= AAB = A(-BA) \\
 &= -ABA = -(-BA)A \\
 &= BAA = BA^2 \\
 \sqcup. \quad A^2 &= A \text{이면} \\
 A^3 &= A^2 A = AA = A^2 = A \\
 (A + E)^3 &= A^3 + 3A^2 + 3A + E \\
 &= A + 3A + 3A + E \\
 &= 7A + E \\
 -(A - E)^3 &= -(A^3 - 3A^2 + 3A - E) \\
 &= -A + 3A - 3A + E \\
 &= -A + E \\
 \text{이때 } A &\neq O \text{이므로} \\
 (A + E)^3 &\neq -(A - E)^3 \\
 \sqcap. \quad A + B &= E \text{에서 } B = -A + E \\
 \text{이를 } AB = O \text{에 대입하면} \\
 A(-A + E) &= O \\
 -A^2 + A &= O \quad \therefore A^2 = A \\
 A + B &= E \text{에서 } A = -B + E \\
 \text{이를 } AB = O \text{에 대입하면} \\
 (-B + E)B &= O \\
 -B^2 + B &= O \quad \therefore B^2 = B \\
 \therefore A^2 + B^2 &= A + B = E \\
 \text{따라서 보기에서 옳은 것은 } \neg, \sqcap \text{이다.}
 \end{aligned}$$

유형편

정답과 해설

I-1. 다항식

01 다항식의 연산

4~10쪽

1 ②	2 17	3 ③	4 $5x^2+11xy-19y^2$
5 5	6 18	7 3	8 ⑤
10 100	11 $7x^3+28y^3$	12 3	13 ②
14 ②	15 -304	16 ②	17 80
19 32	20 108	21 116	22 ④
24 ④	25 2	26 7	27 ④
29 ②	30 ①	31 15	32 16
34 6	35 156	36 -6	37 ⑤
39 x^2+1	40 $x+1$	41 몫: x^2+3x-1 , 나머지: -21	38 ⑤
42 ⑤	43 3	44 ④	45 ①
		46 ①	

1 $A+B=x^2-2xy+y^2+(x^2+2xy+y^2)=2x^2+2y^2$

2 $A+B-2(B-2C)$
 $=A-B+4C$
 $=-3x^3-x^2+7-(x^2-3x)+4(3x^3-2x)$
 $=9x^3-2x^2-5x+7$
 따라서 $a=9$, $b=-2$, $c=-5$, $d=7$ 이므로
 $ab-cd=-18-(-35)=17$

3 $2(X-2A)=X-3B$ 에서 $2X-4A=X-3B$
 $\therefore X=4A-3B$
 $=4(2x^2+3xy+y^2)-3(x^2+4xy+y^2)$
 $=5x^2+y^2$

4 $2A+B=x^2-xy+y^2$ ㉠
 $A-B=2x^2+4xy-7y^2$ ㉡
 ㉠+㉡을 하면 $3A=3x^2+3xy-6y^2$
 $\therefore A=x^2+xy-2y^2$
 ㉡에서
 $B=A-(2x^2+4xy-7y^2)$
 $=x^2+xy-2y^2-(2x^2+4xy-7y^2)$
 $=-x^2-3xy+5y^2$

$\therefore 2A-3B=2(x^2+xy-2y^2)-3(-x^2-3xy+5y^2)$
 $=5x^2+11xy-19y^2$

5 $(x+4)(2x^2-3x+1)$ 의 전개식에서 x^2 항은
 $x \times (-3x) + 4 \times 2x^2 = -3x^2 + 8x^2 = 5x^2$
 따라서 x^2 의 계수는 5이다.

6 $(1+x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})^2$ 의 전개식에서 x^4 항은
 $1 \times 4x^4 + x \times 3x^3 + 2x^2 \times 2x^2 + 3x^3 \times x + 4x^4 \times 1$
 $=4x^4 + 3x^4 + 4x^4 + 3x^4 + 4x^4 = 18x^4$
 따라서 x^4 의 계수는 18이다.

7 $(x^3+2x^2+kx-1)^2$ 의 전개식에서 x^2 항은
 $2x^2 \times (-1) + kx \times kx + (-1) \times 2x^2$
 $=-2x^2 + k^2x^2 - 2x^2 = (k^2-4)x^2$
 이때 x^2 의 계수가 5이므로
 $k^2-4=5$, $k^2=9$ $\therefore k=3$ ($\because k>0$)

8 $\langle x^2-3, x^2+x-1 \rangle$
 $= (x^2-3)^2 - (x^2-3)(x^2+x-1) + (x^2+x-1)^2$
 $(x^2-3)^2$ 의 전개식에서 x 항은 존재하지 않는다.
 $(x^2-3)(x^2+x-1)$ 의 전개식에서 x 항은
 $(-3) \times x = -3x$
 $(x^2+x-1)^2$ 의 전개식에서 x 항은
 $x \times (-1) + (-1) \times x = -x - x = -2x$
 즉, $\langle x^2-3, x^2+x-1 \rangle$ 의 전개식에서 x 항은
 $-(-3x) - 2x = x$ 이므로 x 의 계수는 1이다.

9 ① $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$
 ② $(x-1)(x+2)(x-3)$
 $=x^3+(-1+2-3)x^2+(-2-6+3)x+6$
 $=x^3-2x^2-5x+6$
 ③ $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2+1$
 ④ $(x-y-1)^2=x^2+(-y)^2+(-1)^2+2 \times x \times (-y)$
 $+2 \times (-y) \times (-1)+2 \times (-1) \times x$
 $=x^2+y^2-2xy-2x+2y+1$
 ⑤ $(x-y+2)(x^2+y^2+xy-2x+2y+4)$
 $=x^3+(-y)^3+2^3-3 \times x \times (-y) \times 2$
 $=x^3-y^3+6xy+8$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

10 $(3x-4)^3=27x^3-108x^2+144x-64$
 따라서 $a=-108$, $b=144$, $c=-64$ 이므로
 $a+b-c=100$

11 $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)-(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$
 $=8x^3+y^3-(x^3-27y^3)=7x^3+28y^3$

$$12 \quad (x+a)^3 + x(x-4) = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 + x^2 - 4x$$

$$= x^3 + (3a+1)x^2 + (3a^2-4)x + a^3$$

이때 x^2 의 계수가 10이므로

$$3a+1=10 \quad \therefore a=3$$

$$13 \quad (2x-y)^3(2x+y)^3 = \{(2x-y)(2x+y)\}^3 = (4x^2-y^2)^3$$

$$= 64x^6 - 48x^4y^2 + 12x^2y^4 - y^6$$

따라서 $a=4, b=-48, c=12$ 이므로

$$a+b+c=-32$$

$$14 \quad (x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

$$= \{(x+1)(x^2-x+1)\} \{(x-1)(x^2+x+1)\}$$

$$= (x^3+1)(x^3-1) = (x^3)^2 - 1$$

$$= 2^2 - 1 \quad \blacktriangleleft x^3=2$$

$$= 3$$

$$15 \quad (x+a)^2(4x-1)^3$$

$$= (x^2+2ax+a^2)(64x^3-48x^2+12x-1)$$

이 다항식의 전개식에서 x^5 항은

$$2ax \times (-1) + a^2 \times 12x = -2ax + 12a^2x = (12a^2-2a)x$$

이때 x 의 계수가 52이므로

$$12a^2-2a=52, \quad 6a^2-a-26=0$$

$$(a+2)(6a-13)=0$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=\frac{13}{6} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

x^2 항은

$$x^2 \times (-1) + 2ax \times 12x + a^2 \times (-48x^2)$$

$$= -x^2 + 24ax^2 - 48a^2x^2 = (-48a^2 + 24a - 1)x^2$$

이때 x^2 의 계수가 -241 이므로

$$-48a^2 + 24a - 1 = -241, \quad 2a^2 - a - 10 = 0$$

$$(a+2)(2a-5)=0$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=\frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $a=-2$

따라서 $(x^2-4x+4)(64x^3-48x^2+12x-1)$ 의 전개식에서 x^4 항은

$$x^2 \times (-48x^2) + (-4x) \times 64x^3 = -48x^4 - 256x^4$$

$$= -304x^4$$

따라서 x^4 의 계수는 -304 이다.

$$16 \quad (x-2y+z)(x+2y-z)$$

$$= \{x-(2y-z)\} \{x+(2y-z)\}$$

$$= (x-X)(x+X) \quad \blacktriangleleft 2y-z=X$$

$$= x^2 - X^2$$

$$= x^2 - (2y-z)^2 \quad \blacktriangleleft X=2y-z$$

$$= x^2 - 4y^2 - z^2 + 4yz$$

$$17 \quad (x^2-x+1)(x^2-3x+1)$$

$$= \{(x^2+1)-x\} \{(x^2+1)-3x\}$$

$$= (X-x)(X-3x) \quad \blacktriangleleft x^2+1=X$$

$$= X^2 - 4xX + 3x^2$$

$$= (x^2+1)^2 - 4x(x^2+1) + 3x^2 \quad \blacktriangleleft X=x^2+1$$

$$= x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1$$

따라서 $a=-4, b=5, c=-4$ 이므로

$$abc=80$$

$$18 \quad (x-1)(x+1)(x+3)(x+5)$$

$$= \{(x-1)(x+5)\} \{(x+1)(x+3)\}$$

$$= (x^2+4x-5)(x^2+4x+3)$$

$$= (X-5)(X+3) \quad \blacktriangleleft x^2+4x=X$$

$$= X^2 - 2X - 15$$

$$= (x^2+4x)^2 - 2(x^2+4x) - 15 \quad \blacktriangleleft X=x^2+4x$$

$$= x^4 + 8x^3 + 14x^2 - 8x - 15$$

$$19 \quad x=\sqrt{5}+1, y=\sqrt{5}-1 \text{에서 } x-y=2, xy=4$$

$$\therefore x^3-y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$$

$$= 2^3 + 3 \times 4 \times 2 = 32$$

$$20 \quad 8x^3 + \frac{27}{x^3} = (2x)^3 + \left(\frac{3}{x}\right)^3$$

$$= \left(2x + \frac{3}{x}\right)^3 - 3 \times 2x \times \frac{3}{x} \left(2x + \frac{3}{x}\right)$$

$$= 6^3 - 18 \times 6 = 108$$

$$21 \quad x^4 - 11x^2 + 1 = 0 \text{에서 } x \neq 0 \text{이므로 양변을 } x^2 \text{으로 나누면}$$

$$x^2 - 11 + \frac{1}{x^2} = 0 \quad \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 11$$

$$\therefore \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 11 - 2 = 9$$

$$0 < x < 1 \text{에서 } \frac{1}{x} > 1 \text{이므로 } x - \frac{1}{x} < 0$$

$$\therefore x - \frac{1}{x} = -3$$

$$\text{또 } x^4 + \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 11^2 - 2 = 119 \text{이므로}$$

$$x^4 + x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} = \left(x - \frac{1}{x}\right) + \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)$$

$$= -3 + 119 = 116$$

$$22 \quad x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy \text{이므로}$$

$$6 = 2^2 - 2xy \quad \therefore xy = -1$$

$$x^7+y^7 = (x^3+y^3)(x^4+y^4) - x^3y^3(x+y) \text{에서}$$

$$x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$

$$= 2^3 - 3 \times (-1) \times 2 = 14$$

$$\begin{aligned}x^4+y^4 &= (x^2+y^2)^2-2x^2y^2 \\&= 6^2-2 \times (-1)^2=34 \\ \therefore x^7+y^7 &= (x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^3(x+y) \\&= 14 \times 34 - (-1)^3 \times 2 = 478\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}23 \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= -1 \text{에서 } \frac{ab+bc+ca}{abc} = -1 \\ \frac{ab+bc+ca}{4} &= -1 \quad \therefore ab+bc+ca = -4 \\ \therefore a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\&= (-1)^2-2 \times (-4) = 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}24 \quad a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \text{이므로} \\ 14 &= 2^2-2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca = -5 \\ \therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \\&= (ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c) \\&= (-5)^2-2 \times (-6) \times 2 = 49\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}25 \quad a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \text{이므로} \\ 6 &= 4^2-2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca = 5 \\ a^3+b^3+c^3 \\&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc \\&\text{이므로} \\ 10 &= 4 \times (6-5) + 3abc \quad \therefore abc = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}26 \quad x+y=2, \quad x+z=3 \text{의 각 변끼리 빼면} \\ y-z &= -1 \\ \therefore x^2+y^2+z^2+xy-yz+zx \\&= (-x)^2+y^2+z^2+xy-yz+zx \\&= \frac{1}{2}\{(-x-y)^2+(y-z)^2+(z+x)^2\} \\&= \frac{1}{2}\{(-2)^2+(-1)^2+3^2\} = 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}27 \quad a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \text{이므로} \\ 7 &= 3^2-2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca = 1 \\ a+b+c &= 3 \text{에서 } a+b=3-c, \quad b+c=3-a, \\ c+a &= 3-b \text{이므로} \\ (a+b)(b+c)(c+a) \\&= (3-c)(3-a)(3-b) \\&= 3^3+(-a-b-c) \times 3^2+(ab+bc+ca) \times 3-abc \\&= 27-3 \times 9+1 \times 3-(-1) = 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}28 \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 2 \text{에서 } \frac{xy+yz+zx}{xyz} = 2 \\ \frac{xy+yz+zx}{8} &= 2 \quad \therefore xy+yz+zx = 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x+y+z &= k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면 } x+y=k-z, \\ y+z &= k-x, \quad z+x=k-y \text{이므로} \\ (x+y)(y+z)(z+x) \\&= (k-z)(k-x)(k-y) \\&= k^3+(-x-y-z) \times k^2+(xy+yz+zx) \times k-xyz \\&= k^3-k \times k^2+16k-8=16k-8 \\ \text{즉, } 16k-8 &= 136 \text{이므로 } k=9 \\ \therefore x+y+z &= 9 \\ \therefore x^2+y^2+z^2 &= (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx) \\&= 9^2-2 \times 16 = 49\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}29 \quad 2019 &= x \text{로 놓으면 주어진 등식은} \\ (x-3) \times x \times (x+3) &= x^3-9a \\ x(x^2-9) &= x^3-9a, \quad x^3-9x = x^3-9a \\ 9x &= 9a \quad \therefore a = x = 2019\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}30 \quad 511 &= x \text{로 놓으면} \\ \frac{512(511^2-510)-1}{511^3} &= \frac{(x+1)\{x^2-(x-1)\}-1}{x^3} \\&= \frac{x^3+1-1}{x^3} = \frac{x^3}{x^3} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}31 \quad \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right) \\&= 2\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right) \\&= 2\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right) \\&= 2\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right) \\&= 2\left(1-\frac{1}{2^8}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right) \\&= 2\left(1-\frac{1}{2^{16}}\right) = 2-\frac{1}{2^{15}} \\ \therefore n &= 15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}32 \quad 3 \times 5 \times 17 \times 257 + 1 \\&= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)+1 \\&= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)+1 \\&= (2^8-1)(2^8+1)+1 \\&= (2^{16}-1)+1 = 2^{16} \\ \therefore n &= 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}33 \quad \overline{AC}=a, \quad \overline{BC}=b \text{라 하면 직각삼각형 ABC에서} \\ a^2+b^2 &= (2\sqrt{6})^2 = 24 \\ \text{삼각형 ABC의 넓이가 3이므로} \\ \frac{1}{2}ab &= 3 \quad \therefore ab=6 \\ \therefore (a+b)^2 &= a^2+b^2+2ab = 24+2 \times 6 = 36 \\ \text{이때 } a>0, \quad b>0 \text{이므로 } a+b > 0 \quad \therefore a+b &= 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AC}^3 + \overline{BC}^3 &= a^3 + b^3 \\ &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\ &= 6^3 - 3 \times 6 \times 6 = 108\end{aligned}$$

- 34** 직육면체의 가로 길이, 세로 길이, 높이를 각각 a, b, c 라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 40이므로

$$4(a+b+c) = 40 \quad \therefore a+b+c = 10$$

또 겹넓이가 64이므로

$$2(ab+bc+ca) = 64 \quad \therefore ab+bc+ca = 32$$

$$\begin{aligned}\therefore a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= 10^2 - 2 \times 32 = 36\end{aligned}$$

따라서 구하는 직육면체의 대각선의 길이는

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{36} = 6$$

- 35** 두 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 a, b 라 하면

$$\overline{AB} = 5\sqrt{2} \text{에서 } a+b = 5\sqrt{2}$$

또 두 정육면체의 부피의 합이 $70\sqrt{2}$ 이므로

$$a^3 + b^3 = 70\sqrt{2}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) \text{이므로}$$

$$70\sqrt{2} = (5\sqrt{2})^3 - 3ab \times 5\sqrt{2} \quad \therefore ab = 12$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$= (5\sqrt{2})^2 - 2 \times 12 = 26$$

따라서 구하는 두 정육면체의 겹넓이의 합은

$$6(a^2 + b^2) = 6 \times 26 = 156$$

$$\begin{array}{r} 36 \quad \quad \quad x^2 - 2x + 2 \\ x+1 \overline{) x^3 - x^2 - 4} \\ \underline{x^3 + x^2} \\ -2x^2 \\ \underline{-2x^2 - 2x} \\ 2x - 4 \\ \underline{2x + 2} \\ -6 \end{array}$$

따라서 $a = -2, b = -2, c = 4, d = -6$ 이므로

$$a+b+c+d = -6$$

$$\begin{array}{r} 37 \quad \quad \quad x^2 + x + 5 \\ x^2 - x - 1 \overline{) x^4 + 3x^2 - 2x + 1} \\ \underline{x^4 - x^3 - x^2} \\ x^3 + 4x^2 - 2x \\ \underline{x^3 - x^2 - x} \\ 5x^2 - x + 1 \\ \underline{5x^2 - 5x - 5} \\ 4x + 6 \end{array}$$

따라서 $Q(x) = x^2 + x + 5, R(x) = 4x + 6$ 이므로

$$Q(-1) + R(1) = (1 - 1 + 5) + (4 + 6) = 15$$

$$\begin{array}{r} 38 \quad \quad \quad x + 1 \\ x^2 + x + 2 \overline{) x^3 + 2x^2 + 3x + a} \\ \underline{x^3 + x^2 + 2x} \\ x^2 + x + a \\ \underline{x^2 + x + 2} \\ a - 2 \end{array}$$

나누어떨어지면 나머지가 0이므로

$$a - 2 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

- 39** $4x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = A(4x - 3) + x + 1$ 이므로

$$A = (4x^3 - 3x^2 + 4x - 3) \div (4x - 3)$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 1 \\ 4x - 3 \overline{) 4x^3 - 3x^2 + 4x - 3} \\ \underline{4x^3 - 3x^2} \\ 4x - 3 \\ \underline{4x - 3} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore A = x^2 + 1$$

- 40** 직사각형의 세로 길이를 A 라 하면

$$(x^2 + x - 6)A = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

$$\therefore A = (x^3 + 2x^2 - 5x - 6) \div (x^2 + x - 6)$$

$$\begin{array}{r} x + 1 \\ x^2 + x - 6 \overline{) x^3 + 2x^2 - 5x - 6} \\ \underline{x^3 + x^2 - 6x} \\ x^2 + x - 6 \\ \underline{x^2 + x - 6} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore A = x + 1$$

따라서 구하는 세로 길이는 $x + 1$ 이다.

- 41** $f(x) = (x^2 - x - 2)(2x + 6) + 2x - 7$

$$= 2x^3 + 4x^2 - 8x - 19$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x - 1 \\ 2x - 2 \overline{) 2x^3 + 4x^2 - 8x - 19} \\ \underline{2x^3 - 2x^2} \\ 6x^2 - 8x \\ \underline{6x^2 - 6x} \\ -2x - 19 \\ \underline{-2x + 2} \\ -21 \end{array}$$

따라서 $f(x)$ 를 $2x - 2$ 로 나누었을 때의 몫은 $x^2 + 3x - 1$,

나머지는 -21 이다.

$$\begin{array}{r}
 42 \quad \begin{array}{r} 2x^2 \quad -1 \\ x^2-4x+2 \overline{) 2x^4-8x^3+3x^2+4x+1} \\ \underline{2x^4-8x^3+4x^2} \\ x^2+4x+1 \\ \underline{-x^2+4x-2} \\ 3 \end{array}
 \end{array}$$

$\therefore 2x^4-8x^3+3x^2+4x+1=(x^2-4x+2)(2x^2-1)+3$
 이때 $x^2-4x+2=0$ 이므로
 $2x^4-8x^3+3x^2+4x+1=3$

43 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x-2)Q(x) + R = \frac{1}{2} \times 2(x-2)Q(x) + R \\
 &= (2x-4) \times \frac{1}{2}Q(x) + R
 \end{aligned}$$

따라서 $Q'(x) = \frac{1}{2}Q(x)$, $R' = R$ 이므로

$$\frac{Q(x)}{Q'(x)} + \frac{R}{R'} = \frac{Q(x)}{\frac{1}{2}Q(x)} + \frac{R}{R} = 2+1=3$$

44 $f(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (2x-1)Q(x) + R \\
 \therefore xf(x) &= x(2x-1)Q(x) + Rx \\
 &= 2x\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x) + R\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}R \\
 &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\{2xQ(x) + R\} + \frac{1}{2}R
 \end{aligned}$$

따라서 $xf(x)$ 를 $x-\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫은

$2xQ(x) + R$, 나머지는 $\frac{1}{2}R$ 이다.

$$45 \quad -1 \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 5 \\ & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \end{array} \right.$$

따라서 $a=-1$, $b=0$, $c=-1$, $d=3$, $e=2$ 이므로
 $a+b+c+d+e=3$

46 주어진 조립제법에서 $f(x)$ 를 $x+\frac{2}{3}$ 로 나누었을 때의 몫이

$$\begin{aligned}
 3x^2-3x+6, \text{ 나머지가 } -6 \text{이므로} \\
 f(x) &= \left(x+\frac{2}{3}\right)(3x^2-3x+6) - 6 \\
 &= 3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x^2-x+2) - 6 \\
 &= (3x+2)(x^2-x+2) - 6
 \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 를 $3x+2$ 로 나누었을 때의 몫은 x^2-x+2 , 나머지는 -6 이다.

I-2. 나머지 정리와 인수분해

01 나머지 정리

12~18쪽

1 ③	2 ②	3 10	4 ②	5 31
6 19	7 ②	8 ③	9 5	10 128
11 120	12 -2	13 7	14 10	15 3
16 2	17 ①	18 ①	19 ④	20 ①
21 ②	22 ①	23 4	24 ①	25 ①
26 ④	27 9	28 ⑤	29 ④	30 ⑤
31 ②	32 2	33 ①	34 ①	35 28
36 ⑤	37 ②	38 -9	39 ②	40 13
41 ②	42 ②			

1 ③ $2(x+4)+3x=5(x+1)+3$ 에서

$$5x+8=5x+8$$

④ $(x+1)(x-1)=x^2+1$ 에서

$$x^2-1=x^2+1$$

⑤ $(x-3)^2=x^2+6x+9$ 에서

$$x^2-6x+9=x^2+6x+9$$

따라서 항등식인 것은 ③이다.

2 $(2x+3y+5)k+3x-y-9=0$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$2x+3y+5=0, 3x-y-9=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=2, y=-3$$

$$\therefore x+y=-1$$

3 $(a+b-6)x-4ab+16=0$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a+b-6=0, -4ab+16=0$$

$$\therefore a+b=6, ab=4$$

$$\begin{aligned}
 \therefore (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 &= a+b+2\sqrt{ab} \\
 &= 6+2 \times 2 = 10
 \end{aligned}$$

4 주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a-1=2, -1=b$$

$$\therefore a=3, b=-1$$

$$\therefore a+b=2$$

5 $x^3-ax^2-bx+8=x^3-(c-2)x^2-(2c+1)x+c$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=c-2, b=2c+1, 8=c$$

$$\therefore a=6, b=17, c=8$$

$$\therefore a+b+c=31$$

- 6 주어진 등식의 좌변에 $x=y+1$ 을 대입하면
 $(y+1)^3+3(y+1)-14=y^3+ay^2+by+c$
 $\therefore y^3+3y^2+6y-10=y^3+ay^2+by+c$
 이 등식이 y 에 대한 항등식이므로
 $a=3, b=6, c=-10$
 $\therefore a+b-c=19$
- 7 양변에 $x=-1$ 을 대입하면
 $4b=5+2+5, 4b=12 \quad \therefore b=3$
 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $4a=5-2+5, 4a=8 \quad \therefore a=2$
 $\therefore ab=2 \times 3=6$
- 8 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $4=2c \quad \therefore c=2$
 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $3+a+4=0 \quad \therefore a=-7$
 양변에 $x=2$ 를 대입하면
 $12+2a+4=2b, 2=2b \quad \therefore b=1$
 $\therefore a+b+c=-7+1+2=-4$
- 9 양변에 $x=-1$ 을 대입하면
 $1-1+3=-a+b \quad \therefore a-b=-3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $1+1-3=a+b \quad \therefore a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$
 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a=-2, b=1$
 $\therefore a^2+b^2=4+1=5$
- 10 양변에 $x=-1$ 을 대입하면
 $(1+2-1)^7=a_0-a_1+a_2-a_3+\dots+a_{14}$
 $\therefore a_0-a_1+a_2-a_3+\dots+a_{14}=128$
- 11 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $(1-3-2)^4=a_0+a_1+a_2+\dots+a_8 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 양변에 $x=-1$ 을 대입하면
 $(1+3-2)^4=a_0-a_1+a_2-\dots+a_8 \quad \dots\dots \textcircled{8}$
 $\textcircled{7}-\textcircled{8}$ 을 하면 $240=2(a_1+a_3+a_5+a_7)$
 $\therefore a_1+a_3+a_5+a_7=120$
- 12 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $(-2+4-1)^5=a_0 \quad \therefore a_0=1$
 양변에 $x=2$ 를 대입하면
 $(-8+8-1)^5=a_0+a_1+a_2+\dots+a_{10} \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $(-1)^5=a_0-a_1+a_2-\dots+a_{10} \quad \dots\dots \textcircled{8}$

$\textcircled{7}+\textcircled{8}$ 을 하면
 $-2=2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})$
 $\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=-1$
 $\therefore a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=-1-a_0=-2$

- 13 x^3+2 를 $(x+1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $ax+b$ 이므로
 $x^3+2=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$
 양변에 $x=-1, x=2$ 를 각각 대입하면
 $-1+2=-a+b, 8+2=2a+b$
 $\therefore -a+b=1, 2a+b=10$
 두 식을 연립하여 풀면 $a=3, b=4$
 $\therefore a+b=7$

- 14 x^3+ax^2+bx-6 을 x^2-3x-4 , 즉 $(x+1)(x-4)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 2이므로
 $x^3+ax^2+bx-6=(x+1)(x-4)Q(x)+2$
 양변에 $x=-1, x=4$ 를 각각 대입하면
 $-1+a-b-6=2, 64+16a+4b-6=2$
 $\therefore a-b=9, 4a+b=-14$
 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=-10$
 $\therefore ab=10$

다른 풀이

x^3+ax^2+bx-6 을 x^2-3x-4 로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c 는 상수)라 하면 나머지는 2이므로
 $x^3+ax^2+bx-6=(x^2-3x-4)(x+c)+2$
 $=x^3+(c-3)x^2-(3c+4)x-4c+2$
 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 $a=c-3, b=-(3c+4), -6=-4c+2$
 따라서 $a=-1, b=-10, c=2$ 이므로 $ab=10$

- 15 $f(x)$ 를 x^2-4x+3 , 즉 $(x-1)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)$ 를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $f(x)=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$
 양변에 $x=1, x=3$ 을 각각 대입하면
 $f(1)=a+b, f(3)=3a+b \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 $\textcircled{7}$ 에서 $f(1)=0$ 이므로 $\textcircled{7}$ 의 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $f(3)=f(1)+2+4$
 $\therefore f(3)=6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$
 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 $a+b=0, 3a+b=6$
 두 식을 연립하여 풀면 $a=3, b=-3$
 따라서 $R(x)=3x-3$ 이므로
 $R(2)=6-3=3$

16 $f(x^2) = (x^2 - 3x + 8)f(x) - 12x - 28 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

⑦의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = (1 - 3 + 8)f(1) - 12 - 28$$

$$\therefore f(1) = 8$$

⑦의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$f(1) = (1 + 3 + 8)f(-1) + 12 - 28$$

$$8 = 12f(-1) - 16 \quad \therefore f(-1) = 2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -8 & 17 & -5 \\ & & 2 & -12 & 10 \\ \hline 2 & 1 & -6 & 5 & 5 \quad \leftarrow d \\ & & 2 & -8 & \\ \hline 2 & 1 & -4 & -3 & \leftarrow c \\ & & 2 & & \\ \hline a \rightarrow 1 & & -2 & \leftarrow b \end{array}$$

$$\therefore x^3 - 8x^2 + 17x - 5$$

$$= (x-2)^3 - 2(x-2)^2 - 3(x-2) + 5$$

따라서 $a=1, b=-2, c=-3, d=5$ 이므로

$$ad + bc = 5 + 6 = 11$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 18 & -\frac{1}{2} & 16 & 28 & 22 & 11 \\ & & & -8 & -10 & -6 \\ \hline & -\frac{1}{2} & 16 & 20 & 12 & 5 \\ & & & -8 & -6 & \\ \hline & -\frac{1}{2} & 16 & 12 & 6 & \\ & & & -8 & & \\ \hline & & 16 & 4 & & \end{array}$$

$$\therefore 16x^3 + 28x^2 + 22x + 11$$

$$= 16\left(x + \frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(x + \frac{1}{2}\right) + 5$$

$$= 2(2x+1)^3 + (2x+1)^2 + 3(2x+1) + 5$$

따라서 $a=2, b=1, c=3, d=5$ 이므로

$$a - b - c + d = 3$$

19 $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ 이라 하면 구하는 나머지는 나머지 정리에 의하여

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{15}{8}$$

20 나머지 정리에 의하여 $f(2) = 3$ 이므로

$$8 + 2a - 3 = 3 \quad \therefore a = -1$$

따라서 $f(x) = x^3 - x - 3$ 이므로 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여

$$f(-1) = -1 + 1 - 3 = -3$$

21 ㉞에서 나머지 정리에 의하여 $P(1) = 1$

또 ㉞에서 나머지 정리에 의하여

$$2P(2) = 2 \quad \therefore P(2) = 1$$

$P(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차다항식이므로

$$P(x) = x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$P(1) = 1 \text{에서 } 1 + a + b = 1$$

$$\therefore a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$P(2) = 1 \text{에서 } 4 + 2a + b = 1$$

$$\therefore 2a + b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $a = -3, b = 3$

따라서 $P(x) = x^2 - 3x + 3$ 이므로

$$P(4) = 16 - 12 + 3 = 7$$

22 나머지 정리에 의하여

$$f(-4) = 8, f(2) = 2$$

$f(x)$ 를 $x^2 + 2x - 8$, 즉 $(x+4)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x+4)(x-2)Q(x) + ax + b$$

양변에 $x = -4, x = 2$ 를 각각 대입하면

$$f(-4) = -4a + b, f(2) = 2a + b$$

$$\therefore -4a + b = 8, 2a + b = 2$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 4$

따라서 구하는 나머지는 $-x + 4$ 이다.

23 나머지 정리에 의하여 $f(5) = 4$

이때 $f(3+x) = f(3-x)$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(5) = f(1)$$

$$\therefore f(1) = 4$$

$f(x)$ 를 $(x-1)(x-5)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x-1)(x-5)Q(x) + ax + b$$

양변에 $x=1, x=5$ 를 각각 대입하면

$$f(1) = a + b, f(5) = 5a + b$$

$$\therefore a + b = 4, 5a + b = 4$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 0, b = 4$$

따라서 구하는 나머지는 4이다.

24 나머지 정리에 의하여 $f(-1) = 8$

$f(x)$ 를 $x^2 - 4$, 즉 $(x+2)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면 나머지가 $2x - 5$ 이므로

$$f(x) = (x+2)(x-2)Q_1(x) + 2x - 5$$

양변에 $x = -2, x = 2$ 를 각각 대입하면

$$f(-2) = -9, f(2) = -1$$

$f(x)$ 를 x^2-x-2 , 즉 $(x+1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$, 나머지 $R(x)$ 를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $f(x)=(x+1)(x-2)Q_2(x)+ax+b$
 양변에 $x=-1, x=2$ 를 각각 대입하면
 $f(-1)=-a+b, f(2)=2a+b$
 $\therefore -a+b=8, 2a+b=-1$
 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3, b=5$
 따라서 $R(x)=-3x+5$ 이므로
 $R(1)=-3+5=2$
 $\therefore f(-2)+R(1)=-9+2=-7$

- 25** $f(x)$ 를 $x(x-3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면
 나머지가 $-2x+2$ 이므로
 $f(x)=x(x-3)Q_1(x)-2x+2$
 양변에 $x=0, x=3$ 을 각각 대입하면
 $f(0)=2, f(3)=-4$
 $f(x)$ 를 $(x+2)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면 나머지가 $-4x+8$ 이므로
 $f(x)=(x+2)(x-3)Q_2(x)-4x+8$
 양변에 $x=-2$ 를 대입하면
 $f(-2)=16$
 한편 $f(x)$ 를 $x(x+2)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_3(x)$, 나머지 $R(x)$ 를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면
 $f(x)=x(x+2)(x-3)Q_3(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $f(0)=c \quad \therefore c=2$
 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면
 $f(-2)=4a-2b+c$
 $4a-2b+c=16 \quad \therefore 2a-b=7 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=3$ 을 대입하면
 $f(3)=9a+3b+c$
 $9a+3b+c=-4 \quad \therefore 3a+b=-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=-5$
 따라서 $R(x)=x^2-5x+2$ 이므로 $R(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는
 $R(1)=1-5+2=-2$

- 26** $f(x)$ 를 $(x^2+1)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)$ 를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면
 $f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $f(x)$ 를 x^2+1 로 나누었을 때의 나머지 $x+1$ 은
 ax^2+bx+c 를 x^2+1 로 나누었을 때의 나머지와 같으므로
 $ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+x+1$
 한편 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 4이므로
 $f(1)=4$
 $2a+2=4 \quad \therefore a=1$
 따라서 $\textcircled{2}$ 에서 $R(x)=x^2+x+2$ 이므로
 $R(2)=4+2+2=8$

- 27** $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면
 나머지가 $3x-5$ 이므로
 $f(x)=(x-2)^2Q_1(x)+3x-5$
 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $f(2)=1$
 또 $f(x)$ 를 $(x+1)^3$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면 나머지가 $(x-1)^2$ 이므로
 $f(x)=(x+1)^3Q_2(x)+(x-1)^2$
 $= (x+1)^3Q_2(x)+x^2-2x+1$
 $= (x+1)^2(x+1)Q_2(x)+(x+1)^2-4x$
 $= (x+1)^2\{(x+1)Q_2(x)+1\}-4x$
 따라서 $f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $-4x$ 이다.
 $f(x)$ 를 $(x+1)^2(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_3(x)$, 나머지 $R(x)$ 를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면
 $f(x)=(x+1)^2(x-2)Q_3(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 이때 $f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지 $-4x$ 는
 ax^2+bx+c 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지와 같으므로
 $ax^2+bx+c=a(x+1)^2-4x \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $f(x)=(x+1)^2(x-2)Q_3(x)+a(x+1)^2-4x$
 $f(2)=1$ 에서
 $9a-8=1 \quad \therefore a=1$
 따라서 $\textcircled{2}$ 에서 $R(x)=(x+1)^2-4x$ 이므로 $R(x)$ 를
 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는
 $R(-2)=1+8=9$

- 28** 나머지 정리에 의하여 $f(-1)=3$
 따라서 $f(2x-7)$ 을 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는
 $f(2 \times 3-7)=f(-1)=3$

- 29** 나머지 정리에 의하여 $f(2)=2$
 따라서 $(x^2+2)f(x^2-2)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는
 $\{(-2)^2+2\}f((-2)^2-2)=6f(2)=6 \times 2=12$

30 $xf(4x+5)$ 를 $2x+3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$-\frac{3}{2}f\left(4\times\left(-\frac{3}{2}\right)+5\right)=-\frac{3}{2}f(-1)$$

 $f(x)$ 를 x^2-2x-3 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $x-1$ 이므로

$$f(x)=(x^2-2x-3)Q(x)+x-1$$

 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $f(-1)=-2$
 따라서 구하는 나머지는

$$-\frac{3}{2}f(-1)=-\frac{3}{2}\times(-2)=3$$

31 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이므로

$$f(x)=(x-2)Q(x)+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지가 2이므로

$$f(3)=2$$

 $Q(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $Q(3)$ 이므로
 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$2=Q(3)+3 \quad \therefore Q(3)=-1$$

32 $f(x)=x^{16}+3x^7-x^3$ 이라 하면 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는 $f(-1)=-1$
 $x^{16}+3x^7-x^3$ 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -1 이므로

$$x^{16}+3x^7-x^3=(x+1)Q(x)-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 $Q(1)$ 이므로 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1+3-1=2Q(1)-1 \quad \therefore Q(1)=2$$

33 $P(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 3이므로

$$P(x)=(x-2)Q(x)+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 2이므로

$$Q(1)=2$$

 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$P(1)=-Q(1)+3 \quad \therefore P(1)=1$$

 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $P(2)=3$
 $P(x)$ 를 $(x-1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$, 나머지 $R(x)$ 를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$P(x)=(x-1)(x-2)Q'(x)+ax+b$$

 양변에 $x=1, x=2$ 를 각각 대입하면

$$P(1)=a+b, P(2)=2a+b$$

$$\therefore a+b=1, 2a+b=3$$

 두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=-1$
 따라서 $R(x)=2x-1$ 이므로

$$R(3)=6-1=5$$

34 $99=x$ 로 놓고, x^{30} 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$x^{30}=(x-1)Q(x)+R$$

 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $R=1$ 이므로

$$x^{30}=(x-1)Q(x)+1$$

 $x=99$ 이므로

$$99^{30}=98Q(99)+1$$

 따라서 구하는 나머지는 1이다.

35 $123=x$ 로 놓고, x^9 을 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$x^9=(x-2)Q(x)+R$$

 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $R=2^9=512$ 이므로

$$x^9=(x-2)Q(x)+512$$

 $x=123$ 이므로

$$123^9=121Q(123)+512$$

$$=121\{Q(123)+4\}+28$$

 따라서 구하는 나머지는 28이다.

36 $8=x$ 로 놓고, $x^{79}+x^{80}+x^{81}$ 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$x^{79}+x^{80}+x^{81}=(x+1)Q(x)+R$$

 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $R=-1$ 이므로

$$x^{79}+x^{80}+x^{81}=(x+1)Q(x)-1$$

 $x=8$ 이므로

$$8^{79}+8^{80}+8^{81}=9Q(8)-1$$

$$=9\{Q(8)-1\}+8$$

 따라서 구하는 나머지는 8이다.

37 $f(x)=3x^3+2kx^2-kx-12$ 라 하면 인수 정리에 의하여

$$f(2)=0$$

$$24+8k-2k-12=0$$

$$\therefore k=-2$$

38 $f(x)=x^3+ax^2+bx-12$ 라 하면 인수 정리에 의하여

$$f(-1)=0, f(3)=0$$

 $f(-1)=0$ 에서

$$-1+a-b-12=0$$

$$\therefore a-b=13 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $f(3)=0$ 에서

$$27+9a+3b-12=0$$

$$\therefore 3a+b=-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=2, b=-11$

$$\therefore a+b=-9$$

39 $f(2x-1)$ 이 x^2-1 , 즉 $(x+1)(x-1)$ 로 나누어떨어지므로

$$f(2 \times (-1) - 1) = f(-3) = 0, f(2 \times 1 - 1) = f(1) = 0$$

$$f(-3)=0 \text{에서 } -27+9a-3b+3=0$$

$$\therefore 3a-b=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(1)=0 \text{에서 } 1+a+b+3=0$$

$$\therefore a+b=-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{을 연립하여 풀면 } a=1, b=-5$$

$$\therefore a-b=6$$

40 ㉠에서 $(-2+1)f(-2)=-5 \quad \therefore f(-2)=5$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } (3-2)f(3)=0 \quad \therefore f(3)=0$$

$$f(-2)=5 \text{에서 } 4-2a+b=5$$

$$\therefore 2a-b=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$f(3)=0 \text{에서 } 9+3a+b=0$$

$$\therefore 3a+b=-9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣} \text{을 연립하여 풀면 } a=-2, b=-3$$

$$\therefore a^2+b^2=4+9=13$$

41 $P(x)$ 가 삼차식이므로 $P(x)+2x$ 도 삼차식이다.

$P(x)+2x$ 가 $(x-1)^2$ 으로 나누어떨어지므로 몫을

$ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$P(x)+2x=(x-1)^2(ax+b)$$

$$\therefore P(x)=(x-1)^2(ax+b)-2x \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$4-P(x)$ 가 x^2-4 , 즉 $(x+2)(x-2)$ 로 나누어떨어지므로

$$4-P(-2)=0, 4-P(2)=0$$

$$\therefore P(-2)=4, P(2)=4$$

$\textcircled{㉠}$ 의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$P(-2)=9(-2a+b)+4$$

$$4=-18a+9b+4 \quad \therefore 2a-b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$P(2)=2a+b-4$$

$$4=2a+b-4 \quad \therefore 2a+b=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 을 연립하여 풀면 $a=2, b=4$

따라서 $P(x)=(x-1)^2(2x+4)-2x$ 이므로 $P(x)$ 를

$x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$P(3)=4 \times (6+4)-6=34$$

42 $f(2)=f(4)=f(8)=3$ 에서

$$f(2)-3=0, f(4)-3=0, f(8)-3=0$$

즉, $f(x)-3$ 은 $x-2, x-4, x-8$ 을 인수로 갖고, 최고

차항의 계수가 1인 삼차식이므로

$$f(x)-3=(x-2)(x-4)(x-8)$$

$$\therefore f(x)=(x-2)(x-4)(x-8)+3$$

$$\therefore f(9)=7 \times 5 \times 1+3=38$$

02 인수분해

19~24쪽

1 ⑤	2 ④	3 ①	4 ⑤	5 ④
6 ②	7 ⑤	8 -2	9 -3	10 15
11 ②	12 6	13 ①	14 $2x^2+16$	
15 ⑤	16 ③	17 ⑤	18 ②	19 ④
20 ①	21 ③	22 ⑤	23 6	24 ②
25 ⑤	26 ②	27 ③	28 ⑤	29 2
30 ④	31 ⑤	32 9	33 ③	34 998
35 ②	36 ③	37 ①	38 ⑤	

1 ⑤ $x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$

2 $8x^3+y^3-27z^3+18xyz$
 $= (2x)^3+y^3+(-3z)^3-3 \times 2x \times y \times (-3z)$
 $= (2x+y-3z)(4x^2+y^2+9z^2-2xy+3yz+6zx)$

3 $x^4+4x^2+16=x^4+x^2 \times 2^2+2^4$
 $= (x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
 따라서 $a=2, b=4, c=2, d=4$ 이므로
 $a+b+c+d=12$

4 $x(x+2y)-(x^2-1)y^2=x^2+2xy-x^2y^2+y^2$
 $= (x+y)^2-(xy)^2$
 $= (x+xy+y)(x-xy+y)$

5 $x^6-64=(x^3)^2-(2^3)^2$
 $= (x^3+2^3)(x^3-2^3)$
 $= (x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$
 따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ④이다.

6 $x^3+8y^3-3xy(x+2y)$
 $= x^3+(2y)^3-3xy(x+2y)$
 $= (x+2y)(x^2-2xy+4y^2)-3xy(x+2y)$
 $= (x+2y)(x^2-5xy+4y^2)$
 $= (x+2y)(x-y)(x-4y)$
 따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ②이다.

7 $(x^2+1)^2+3(x^2+1)+2$
 $= X^2+3X+2 \quad \blacktriangleleft x^2+1=X$
 $= (X+2)(X+1)$
 $= (x^2+3)(x^2+2) \quad \blacktriangleleft X=x^2+1$
 따라서 $a=3, b=2$ 또는 $a=2, b=3$ 이므로
 $a+b=5$

- 8 $(x^2-4x+1)(x^2-4x+7)+8$
 $= (X+1)(X+7)+8$ ◀ $x^2-4x=X$
 $= X^2+8X+15=(X+5)(X+3)$
 $= (x^2-4x+5)(x^2-4x+3)$ ◀ $X=x^2-4x$
 $= (x-1)(x-3)(x^2-4x+5)$
따라서 $a=-3, b=-4, c=5$ 이므로
 $a+b+c=-2$
- 9 $(x+1)(x+2)(x+4)(x-1)+9$
 $= \{(x+1)(x+2)\}\{(x+4)(x-1)\}+9$
 $= (x^2+3x+2)(x^2+3x-4)+9$
 $= (X+2)(X-4)+9$ ◀ $x^2+3x=X$
 $= X^2-2X+1=(X-1)^2$
 $= (x^2+3x-1)^2$ ◀ $X=x^2+3x$
따라서 $a=3, b=-1$ 이므로 $ab=-3$
- 10 $(x^2+3x+2)(x^2+9x+20)-10$
 $= (x+2)(x+1)(x+5)(x+4)-10$
 $= \{(x+2)(x+4)\}\{(x+1)(x+5)\}-10$
 $= (x^2+6x+8)(x^2+6x+5)-10$
 $= (X+8)(X+5)-10$ ◀ $x^2+6x=X$
 $= X^2+13X+30=(X+10)(X+3)$
 $= (x^2+6x+10)(x^2+6x+3)$ ◀ $X=x^2+6x$
따라서 $a=6, b=6, c=3$ 이므로
 $a+b+c=15$
- 11 $x^4-x^2-12=X^2-X-12$ ◀ $x^2=X$
 $= (X+3)(X-4)$
 $= (x^2+3)(x^2-4)$ ◀ $X=x^2$
 $= (x^2+3)(x+2)(x-2)$
따라서 $a=2, b=3$ 이므로
 $a+b=5$
- 12 $x^4-18x^2+81=X^2-18X+81$ ◀ $x^2=X$
 $= (X-9)^2$
 $= (x^2-9)^2$ ◀ $X=x^2$
 $= (x+3)^2(x-3)^2$
 $a>b$ 이므로 $a=3, b=-3$
 $\therefore a-b=6$
- 13 $x^4+7x^2+16=(x^4+8x^2+16)-x^2$
 $= (x^2+4)^2-x^2$
 $= (x^2+x+4)(x^2-x+4)$
따라서 $a=1, b=4$ 이므로
 $a+b=5$

- 14 $x^4+64=(x^4+16x^2+64)-16x^2$
 $= (x^2+8)^2-(4x)^2$
 $= (x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$
따라서 구하는 두 이차식의 합은
 $(x^2+4x+8)+(x^2-4x+8)=2x^2+16$
- 15 $2x^2-3xy-2y^2+7x+11y-15$
 $= 2x^2-(3y-7)x-(2y^2-11y+15)$
 $= 2x^2-(3y-7)x-(2y-5)(y-3)$
 $= (2x+y-3)(x-2y+5)$
따라서 $a=-3, b=-2, c=5$ 이므로 $abc=30$
- 16 $x^2-y^2-z^2+2yz+x+y-z$
 $= x^2+x-(y^2-2yz+z^2)+(y-z)$
 $= x^2+x-(y-z)^2+(y-z)$
 $= x^2+x-(y-z)(y-z-1)$
 $= (x+y-z)(x-y+z+1)$
- 17 $(a+b)c^3-(a^2+ab+b^2)c^2+a^2b^2$
 $= ac^3+bc^3-a^2c^2-abc^2-b^2c^2+a^2b^2$
 $= (b^2-c^2)a^2+(c^3-bc^2)a+bc^3-b^2c^2$
 $= (b+c)(b-c)a^2-c^2(b-c)a-bc^2(b-c)$
 $= (b-c)\{(b+c)a^2-c^2a-bc^2\}$
 $= (b-c)\{(a^2-c^2)b+ac(a-c)\}$
 $= (b-c)\{(a+c)(a-c)b+ac(a-c)\}$
 $= (b-c)(a-c)\{(a+c)b+ac\}$
 $= (b-c)(a-c)(ab+bc+ca)$
따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ⑤이다.
- 18 $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$
 $= ab^2-ac^2+bc^2-a^2b+a^2c-b^2c$
 $= -(b-c)a^2+(b^2-c^2)a+bc^2-b^2c$
 $= -(b-c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b-c)$
 $= -(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
 $= -(b-c)(a-b)(a-c)$
따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ②이다.
- 19 $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$
 $= (b+c)\{(a+b)(c+a)\}+abc$
 $= (b+c)(ac+a^2+bc+ab)+abc$
 $= (b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)+abc$
 $= (a+b+c)\{(b+c)a+bc\}$
 $= (a+b+c)(ab+bc+ca)$

20 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
 $=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$
 $=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$
 $=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$
 $=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
 $=(b-c)(a-b)(a-c)$
 $=-(a-b)(b-c)(c-a)$
 $\therefore \frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
 $=\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
 $=-1$

21 $f(x)=2x^3-3x^2-12x-7$ 이라 하면 $f(-1)=0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 2x^3-3x^2-12x-7 & -1 & 2 & -3 & -12 & -7 \\ & & -2 & 3 & 5 & 7 \\ \hline & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

 $= (x+1)(2x^2-5x-7)$
 $= (x+1)^2(2x-7)$
따라서 $a=1, b=2, c=-7$
이므로
 $a+b+c=-4$

22 $f(x)=x^4+2x^3+x^2-4$ 라 하면 $f(1)=0, f(-2)=0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & -4 \\ & & 1 & 3 & 4 & 4 \\ \hline -2 & 1 & 3 & 4 & 4 & 0 \\ & & -2 & -2 & -4 & \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$x^4+2x^3+x^2-4=(x-1)(x+2)(x^2+x+2)$
따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ⑤이다.

23 $f(x)=x^3-x^2-x+10$ 이라 하면 $f(-2)=0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} x^3-x^2-x+10 & -2 & 1 & -1 & -1 & 10 \\ & & -2 & 6 & -10 & \\ \hline & & 1 & -3 & 5 & 0 \end{array}$$

 $\therefore b=2$
 $g(x)=x^3-2x+a$ 라 하면
 $g(x)$ 가 $x+2$ 를 인수로 가지므로 $g(-2)=0$
 $-8+4+a=0 \quad \therefore a=4$
 $\therefore a+b=4+2=6$

24 직원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면
부피가 $(x^3+x^2-5x+3)\pi$ 이므로
 $\pi r^2 h = (x^3+x^2-5x+3)\pi$
 $\therefore r^2 h = x^3+x^2-5x+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$f(x)=x^3+x^2-5x+3$ 이라 하면 $f(1)=0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} x^3+x^2-5x+3 & 1 & 1 & -5 & 3 \\ & & 1 & 2 & -3 \\ \hline & & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

 $= (x-1)(x^2+2x-3)$
 $= (x-1)^2(x+3)$
 $\textcircled{1}$ 에서 $r^2 h = (x-1)^2(x+3)$
이므로 $r=x-1, h=x+3$
따라서 구하는 직원기둥의 겉넓이는
 $2\pi r^2 + 2\pi r h = 2r(r+h)\pi = 2(x-1)(2x+2)\pi$
 $= 4(x^2-1)\pi$

25 $f(x)=x^3-3ax^2-a^2x+3a^3$ 이라 하면 $f(a)=0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} x^3-3ax^2-a^2x+3a^3 & a & 1 & -3a & -a^2 & 3a^3 \\ & & a & -2a^2 & -3a^3 & \\ \hline & & 1 & -2a & -3a^2 & 0 \end{array}$$

 $x^3-3ax^2-a^2x+3a^3=(x-a)(x^2-2ax-3a^2)$
 $= (x-a)(x+a)(x-3a)$
따라서 세 일차식의 합은
 $(x-a)+(x+a)+(x-3a)=3x-3a$
즉, $3x-3a=3x-12$ 이므로
 $-3a=-12 \quad \therefore a=4$

26 $h(x)=x^4+3x^3-3x^2-11x-6$ 이라 하면 $h(-1)=0, h(2)=0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 3 & -3 & -11 & -6 \\ & & -1 & -2 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 2 & -5 & -6 & 0 \\ & & 2 & 8 & 6 & \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 & \end{array}$$

$x^4+3x^3-3x^2-11x-6=(x+1)(x-2)(x^2+4x+3)$
 $= (x+1)^2(x+3)(x-2)$
 $f(x), g(x)$ 는 각각 x^2 의 계수가 1인 이차식이고
 $f(-3) \neq 0, g(2) \neq 0$ 이므로
 $f(x)=(x+1)(x-2), g(x)=(x+3)(x+1)$
 $\therefore f(1)=2 \times (-1)=-2$

27 $x^4+3x^3-2x^2+3x+1=x^2\left(x^2+3x-2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$
 $=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\right\}$
 $=x^2\left(x+\frac{1}{x}+4\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right)$
 $= (x^2+4x+1)(x^2-x+1)$
따라서 $a=4, b=1, c=-1$ 또는 $a=-1, b=1, c=4$
이므로
 $a^2+b^2+c^2=18$

$$\begin{aligned}
 28 \quad x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 &= x^2 \left(x^2 + 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \\
 &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 3 \right\} \\
 &= x^2 \left(x + \frac{1}{x} + 3 \right) \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right) \\
 &= (x^2 + 3x + 1)(x^2 - x + 1)
 \end{aligned}$$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ⑤이다.

$$\begin{aligned}
 29 \quad x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 4x + 1 &= x^2 \left(x^2 - 4x - 3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \\
 &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 4 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 5 \right\} \\
 &= x^2 \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) \left(x + \frac{1}{x} - 5 \right) \\
 &= (x^2 + x + 1)(x^2 - 5x + 1)
 \end{aligned}$$

$$f(x) + g(x) = 2x^2 - 4x + 2 \text{ 이므로}$$

$$f(2) + g(2) = 8 - 8 + 2 = 2$$

$$\begin{aligned}
 30 \quad x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 &= x^2(x-y) - y^2(x-y) \\
 &= (x-y)(x^2 - y^2) \\
 &= (x-y)^2(x+y) \quad \dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

이때 $x+y=2$, $x-y=2\sqrt{3}$ 이므로 ①에서

$$(x-y)^2(x+y) = (2\sqrt{3})^2 \times 2 = 24$$

$$\begin{aligned}
 31 \quad ab(a-b) - ac(a-c) + bc(b-c) \\
 &= a^2b - ab^2 - a^2c + ac^2 + b^2c - bc^2 \\
 &= (b-c)a^2 - (b^2 - c^2)a + b^2c - bc^2 \\
 &= (b-c)a^2 - (b+c)(b-c)a + bc(b-c) \\
 &= (b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\} \\
 &= (b-c)(a-b)(a-c) \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
 a-b &= 2 - \sqrt{3}, \quad b-c = 2 + \sqrt{3} \text{을 변끼리 더하면} \\
 a-c &= 4 \\
 \text{따라서 ①에서} \\
 (b-c)(a-b)(a-c) &= (2 + \sqrt{3}) \times (2 - \sqrt{3}) \times 4 = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 32 \quad a^3 + b^3 + c^3 &= 3abc \text{에서 } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \\
 \therefore \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} &= 0 \\
 \text{그런데 } a+b+c > 0 \text{ 이므로 } a=b=c \\
 \therefore \frac{2b}{a} + \frac{3c}{b} + \frac{4a}{c} &= \frac{2a}{a} + \frac{3a}{a} + \frac{4a}{a} = 2 + 3 + 4 = 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 33 \quad 101 &= x \text{로 놓으면} \\
 101^3 - 3 \times 101^2 + 3 \times 101 - 1 &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\
 &= (x-1)^3 \\
 &= (101-1)^3 \quad \blacktriangleleft x=101 \\
 &= 100^3 = 10^6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 34 \quad 999 &= x \text{로 놓으면} \\
 \frac{999^3 - 1}{1000 \times 999 + 1} &= \frac{x^3 - 1}{(x+1)x + 1} \\
 &= \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} \\
 &= x - 1 \\
 &= 999 - 1 \quad \blacktriangleleft x=999 \\
 &= 998
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 35 \quad 11 &= x, \quad 6 = y \text{로 놓으면} \\
 11^4 - 6^4 &= x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \\
 &= (x^2 + y^2)(x+y)(x-y) \\
 &= (11^2 + 6^2)(11+6)(11-6) \quad \blacktriangleleft x=11, y=6 \\
 &= 5 \times 17 \times 157
 \end{aligned}$$

$$a < b \text{ 이므로 } a=5, b=17 \quad \therefore a+b=22$$

$$\begin{aligned}
 36 \quad 10 &= x \text{로 놓으면} \\
 10 \times 11 \times 12 \times 13 + 1 \\
 &= x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 \\
 &= \{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\} + 1 \\
 &= (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1 \\
 &= X(X+2) + 1 \quad \blacktriangleleft x^2 + 3x = X \\
 &= X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2 \\
 &= (x^2 + 3x + 1)^2 \quad \blacktriangleleft X = x^2 + 3x \\
 &= (100 + 30 + 1)^2 = 131^2 \quad \blacktriangleleft x=10 \\
 \therefore \sqrt{10 \times 11 \times 12 \times 13 + 1} &= \sqrt{131^2} = 131
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 37 \quad (b+c)(a^2 - bc) - a(b^2 - c^2) \\
 &= (b+c)(a^2 - bc) - a(b+c)(b-c) \\
 &= (b+c)\{a^2 - bc - a(b-c)\} \\
 &= (b+c)\{a^2 - (b-c)a - bc\} \\
 &= (b+c)(a+c)(a-b) = 0 \\
 \text{이때 } b+c > 0, a+c > 0 \text{ 이므로} \\
 a-b &= 0 \quad \therefore a=b
 \end{aligned}$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

$$\begin{aligned}
 38 \quad f(x) &= x^3 - bx^2 + (b^2 - c^2)x - b^3 + bc^2 \text{이라 하면 } f(x) \text{가} \\
 x-a \text{를 인수로 가지므로 } f(a) &= 0 \text{에서} \\
 a^3 - a^2b + (b^2 - c^2)a - b^3 + bc^2 &= 0 \\
 \text{좌변을 인수분해하면} \\
 a^3 - a^2b + (b^2 - c^2)a - b^3 + bc^2 \\
 &= a^3 - a^2b + ab^2 - ac^2 - b^3 + bc^2 \\
 &= -(a-b)c^2 + a^2(a-b) + b^2(a-b) \\
 &= (a-b)(a^2 + b^2 - c^2) = 0 \\
 \text{이때 } a \neq b \text{ 이므로 } a^2 + b^2 - c^2 &= 0 \quad \therefore a^2 + b^2 = c^2 \\
 \text{따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가} \\
 c \text{인 직각삼각형이다.}
 \end{aligned}$$

II-1. 복소수와 이차방정식

01 복소수의 뜻과 사칙연산

26~31쪽

1 ⑤	2 ㄷ	3 4	4 ⑤	5 ①
6 1	7 $7+2i$	8 3	9 ②	10 -2
11 ③	12 ②	13 18	14 -1	15 ③
16 ①	17 ①	18 ⑤	19 ③	20 ②
21 20	22 ③	23 2	24 $4i$	25 ②
26 ⑤	27 -5	28 $8i$	29 1	30 ①
31 ⑤	32 13	33 ④	34 ①	35 ③
36 8	37 ④	38 ⑤	39 ③	40 64
41 35	42 ②	43 ④		

- 1 ① 실수부분은 0, 허수부분은 -3 이므로 그 합은 -3 이다.
 ② 실수부분은 -1 , 허수부분은 -2 이므로 그 합은 -3 이다.
 ③ 실수부분은 1, 허수부분은 -2 이므로 그 합은 -1 이다.
 ④ 실수부분은 2, 허수부분은 -1 이므로 그 합은 1이다.
 ⑤ 실수부분은 3, 허수부분은 0이므로 그 합은 3이다.
 따라서 실수부분과 허수부분의 합이 3인 것은 ⑤이다.

- 2 ㄱ. 실수부분은 a , 허수부분은 b 이다.
 ㄴ. $a=0$ 이고 $b=0$ 이면 $a+bi=0$ 이므로 실수이다.
 ㄷ. $b=0$ 이면 $a+bi=a$ 이므로 실수이다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

- 3 실수는 $2-3\sqrt{5}$, 0 , $\frac{\pi}{2}-1$ 의 3개이므로 $a=3$
 순허수는 $-7i$, $\frac{1+\sqrt{2}}{3}i$ 의 2개이므로 $b=2$
 순허수가 아닌 허수는 $\sqrt{3}-\frac{i}{2}$, $2-2i$, $-3+\sqrt{3}i$ 의 3개이
 므로 $c=3$
 $\therefore a-b+c=3-2+3=4$

- 4 ① $(-1+4i)+(3i-1)=-2+7i$
 ② $(-2+3i)-(3+i)=-5+2i$
 ③ $(2i-3)^2=5-12i$
 ④ $(2-3i)(3+i)=9-7i$
 ⑤ $\frac{7-i}{i-1}=\frac{(7-i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=-4-3i$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

- 5 $(1+2i)\bar{z}=(1+2i)(2+3i)$
 $=-4+7i$

$$\begin{aligned} 6 \quad \frac{1}{z}+\frac{1}{w} &= \frac{1}{3+i}+\frac{1}{2+i} \\ &= \frac{3-i}{(3+i)(3-i)}+\frac{2-i}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{3-i}{10}+\frac{2-i}{5} \\ &= \frac{7}{10}-\frac{3}{10}i \end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{7}{10}$, $b=-\frac{3}{10}$ 이므로

$$a-b=1$$

$$\begin{aligned} 7 \quad (1+i) \odot (2-3i) &= (1+i)(2-3i) + \{(1+i)+(2-3i)\}i \\ &= 5-i+(3-2i)i \\ &= 5-i+3i+2 \\ &= 7+2i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \quad i(a-i)^2-8i &= 2a+(a^2-9)i \\ \text{이 복소수가 실수이므로} \\ a^2-9 &= 0, a^2=9 \\ \therefore a &= 3 \quad (\because a>0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \quad z &= (1+i)a-2a+3-i = (-a+3)+(a-1)i \\ z \text{가 순허수이려면} \\ -a+3 &= 0, a-1 \neq 0 \\ \therefore a &= 3, a \neq 1 \quad \therefore a=3 \\ \text{이때 } z &= 2i \text{이므로 } \beta=2i \\ \therefore a+\beta^2 &= 3+(2i)^2 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 \quad z &= 6+5i+k(2-5i) = (2k+6)+(-5k+5)i \\ z^2 \text{이 실수이면 } z \text{는 실수 또는 순허수이므로} \\ 2k+6 &= 0 \text{ 또는 } -5k+5=0 \\ \therefore k &= -3 \text{ 또는 } k=1 \\ \text{따라서 모든 실수 } k \text{의 값의 합은 } &-3+1=-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11 \quad z &= (2-k-i)^2 = 4+k^2-1-4k+2ki-4i \\ &= (k^2-4k+3)+(2k-4)i \\ z \text{를 제곱하여 음수가 되려면 } z &\text{가 순허수이어야 하므로} \\ k^2-4k+3 &= 0, 2k-4 \neq 0 \\ k^2-4k+3=0 \text{에서 } (k-1)(k-3) &= 0 \\ \therefore k &= 1 \text{ 또는 } k=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ 2k-4 \neq 0 \text{에서 } k &\neq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } k &= 1 \text{ 또는 } k=3 \\ k=1 \text{일 때, } z &= -2i \text{이므로 } x=z^2=-4 \\ k=3 \text{일 때, } z &= 2i \text{이므로 } x=z^2=-4 \\ \therefore x &= -4 \end{aligned}$$

12 주어진 등식에서

$$(3x-y)+(-2x+y)i=7-5i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$3x-y=7, -2x+y=-5$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=2, y=-1$

$$\therefore x^2+y^2=4+1=5$$

13 주어진 등식에서

$$(a+6)+(2a-3)i=13+bi$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a+6=13, 2a-3=b$$

$$\therefore a=7, b=11$$

$$\therefore a+b=18$$

14 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$|x-y|-2=0, x+y=0$$

$$\therefore |x-y|=2, x+y=0$$

(i) $x-y=-2$ 일 때

$x-y=-2, x+y=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=-1, y=1 \quad \therefore xy=-1$$

(ii) $x-y=2$ 일 때

$x-y=2, x+y=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=1, y=-1 \quad \therefore xy=-1$$

(i), (ii)에서 $xy=-1$

15 주어진 등식에서

$$(x^2+2x-2)+(y^2-3y-2)i=1+2i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x^2+2x-2=1, y^2-3y-2=2$$

$$x^2+2x-2=1 \text{에서 } x^2+2x-3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

$$y^2-3y-2=2 \text{에서 } y^2-3y-4=0$$

$$(y+1)(y-4)=0 \quad \therefore y=-1 \text{ 또는 } y=4$$

$$x=-3, y=-1 \text{일 때, } x^2+y^2=9+1=10 \quad \blacktriangleleft \textcircled{2}$$

$$x=-3, y=4 \text{일 때, } x^2+y^2=9+16=25 \quad \blacktriangleleft \textcircled{5}$$

$$x=1, y=-1 \text{일 때, } x^2+y^2=1+1=2 \quad \blacktriangleleft \textcircled{1}$$

$$x=1, y=4 \text{일 때, } x^2+y^2=1+16=17 \quad \blacktriangleleft \textcircled{4}$$

따라서 x^2+y^2 의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

16 $x+y=6i, x-y=-4$

$$\therefore x^3+x^2y-xy^2-y^3=x^2(x+y)-y^2(x+y)$$

$$=(x^2-y^2)(x+y)$$

$$=(x+y)^2(x-y)$$

$$=(6i)^2 \times (-4)$$

$$=144$$

17 $x+y=1, xy=2$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y} &= \frac{x^3+y^3}{xy} \\ &= \frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy} \\ &= \frac{1^3-3 \times 2 \times 1}{2} \\ &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$18 \quad x = \frac{3-i}{1+i} = \frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-2i$$

즉, $x-1=-2i$ 이므로 양변을 제곱하면

$$x^2-2x+1=-4 \quad \therefore x^2-2x+5=0$$

$$\therefore x^3-2x^2+6x+5=x(x^2-2x+5)+x+5$$

$$=x+5$$

$$=(1-2i)+5$$

$$=6-2i$$

19 $z+\bar{z}, z\bar{z}$ 는 실수이다.

① $z^2+\bar{z}^2=(z+\bar{z})^2-2z\bar{z}$ 이므로 실수이다.

② $z^3+\bar{z}^3=(z+\bar{z})^3-3z\bar{z}(z+\bar{z})$ 이므로 실수이다.

③ $(z+1)^2-(\bar{z}+1)^2=(z+\bar{z}+2)(z-\bar{z})$

이때 $z+\bar{z}+2$ 는 실수이고 $z-\bar{z}$ 는 순허수 또는 0이므로 주어진 식은 순허수 또는 0이다.

④ $(2z+1)(\bar{z}+1)-z=2z\bar{z}+(z+\bar{z})+1$ 이므로 실수이다.

⑤ $(z^2+\bar{z}+1)+(\bar{z}^2+z+1)=(z^2+\bar{z}+1)+(\bar{z}^2+\bar{z}+1)$ 이므로 실수이다.

따라서 항상 실수인 것이 아닌 것은 ③이다.

20 $z+\bar{w}=0$ 에서 $\bar{w}=-z$

$$\therefore w=\overline{-z}=-\bar{z}$$

ㄱ. $z+w=z-\bar{z}$ 이므로 순허수이다.

ㄴ. $zw=z \times (-\bar{z})=-z\bar{z}$ 이므로 실수이다.

ㄷ. $\frac{\bar{z}}{w}=\frac{\bar{z}}{-\bar{z}}=-1$ 이므로 실수이다.

ㄹ. $i(z-\bar{w})=i\{z-(-z)\}=2iz$ 이므로 실수가 아닌 경우가 있다.

따라서 보기에서 항상 실수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

21 $\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta}=(\alpha+\beta)\bar{\alpha}+(\alpha+\beta)\bar{\beta}$

$$=(\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$$

$$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$$

$$=(4-2i)(4+2i)$$

$$=20$$

22 $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1 - z_2} = 2 + 5i$ 이므로 $z_1 - z_2 = 2 - 5i$
 $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1 z_2} = 6 - 3i$ 이므로 $z_1 z_2 = 6 + 3i$
 $\therefore (z_1 - 2)(z_2 + 2) = z_1 z_2 + 2(z_1 - z_2) - 4$
 $= (6 + 3i) + 2(2 - 5i) - 4$
 $= 6 - 7i$

23 $\overline{z\bar{z}} = \frac{a+1}{a-1} \times \overline{\left(\frac{a+1}{a-1}\right)} = \frac{a+1}{a-1} \times \frac{\bar{a}+1}{\bar{a}-1}$
 $= \frac{a\bar{a} + (a+\bar{a}) + 1}{a\bar{a} - (a+\bar{a}) + 1} = \frac{2+1+1}{2-1+1} = 2$

24 $\overline{a\beta} = 3$ 에서 $\frac{3}{a} = \beta$
 또 $\overline{a\beta} = 3$ 에서 $\overline{a\beta} = \overline{3}$ 이므로
 $a\bar{\beta} = 3 \quad \therefore a = \frac{3}{\beta}$

$\therefore \bar{a} + \frac{3}{a} = \overline{\left(a + \frac{3}{a}\right)} = \overline{\left(\frac{3}{\beta} + \beta\right)}$
 $= -4i = 4i$

25 $z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로
 $4iz + (2-i)\bar{z} = 4i - 1$ 에서
 $4i(a+bi) + (2-i)(a-bi) = 4i - 1$
 $(2a-5b) + (3a-2b)i = -1 + 4i$
 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $2a-5b = -1, 3a-2b = 4$
 두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=1$
 $\therefore z = 2 + i$

26 $z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면
 $\overline{z+iz} = z + 1 + 4i$ 에서
 $\overline{(a+bi) + i(a+bi)} = (a+bi) + 1 + 4i$
 $(a-b) - (a+b)i = (a+1) + (b+4)i$
 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $a-b = a+1, -a-b = b+4$
 $\therefore a = -2, b = -1$
 따라서 $z = -2 - i$ 이므로
 $\overline{z\bar{z}} = (-2-i)(-2+i) = 5$

27 $z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z} = a - bi$ 이므로
 $z + \bar{z} = 4$ 에서 $(a+bi) + (a-bi) = 4$
 $2a = 4 \quad \therefore a = 2$
 $\overline{z\bar{z}} = 5$ 에서 $(a+bi)(a-bi) = 5$
 $a^2 + b^2 = 5, 4 + b^2 = 5$
 $b^2 = 1 \quad \therefore b = -1$ 또는 $b = 1$
 따라서 $z = 2 \pm i$ 이므로 $z - 2 = \pm i$

양변을 제곱하면 $(z-2)^2 = (\pm i)^2$
 $z^2 - 4z + 4 = -1 \quad \therefore z^2 - 4z = -5$

28 $z = a + ai$ ($a \neq 0$)라 하면 $\bar{z} = a - ai$
 주어진 등식의 좌변을 정리하면
 $\overline{(z+2)(z-1) + 3\bar{z} + 2}$
 $= (\bar{z}+2)(\bar{z}-1) + 3\bar{z} + 2$
 $= \bar{z}\bar{z} + 2(\bar{z}+\bar{z})$
 $= (a+ai)(a-ai) + 2(a+ai+a-ai)$
 $= 2a^2 + 4a$
 따라서 $2a^2 + 4a = 0$ 이므로
 $2a(a+2) = 0 \quad \therefore a = -2$ ($\because a \neq 0$)
 따라서 $z = -2 - 2i$ 이므로
 $z^2 = (-2-2i)^2 = 8i$

29 $1 - i + i^2 - i^3 + \dots + i^{100}$
 $= 1 + (-i - 1 + i + 1) + (-i - 1 + i + 1)$
 $+ \dots + (-i - 1 + i + 1)$
 $= 1$

30 $2i + 4i^2 + 6i^3 + 8i^4 + \dots + 100i^{50}$
 $= (2i - 4 - 6i + 8) + (10i - 12 - 14i + 16)$
 $+ \dots + (90i - 92 - 94i + 96) + 98i - 100$
 $= 12(4 - 4i) + 98i - 100$
 $= -52 + 50i$
 따라서 $a = -52, b = 50$ 이므로
 $a - b = -102$

31 $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} = \frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 = 0$
 음이 아닌 정수 k 에 대하여
 (i) $n = 4k + 1$ 일 때, 주어진 식은
 $1 + \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \dots + \frac{1}{i^{4k+1}}\right) = 1 + \frac{1}{i}$
 $= 1 - i \quad \blacktriangleleft ④$
 (ii) $n = 4k + 2$ 일 때, 주어진 식은
 $1 + \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \dots + \frac{1}{i^{4k+2}}\right) = 1 + \left(\frac{1}{i} - 1\right)$
 $= -i \quad \blacktriangleleft ①$
 (iii) $n = 4k + 3$ 일 때, 주어진 식은
 $1 + \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \dots + \frac{1}{i^{4k+3}}\right) = 1 + \left(\frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i}\right)$
 $= 0 \quad \blacktriangleleft ②$
 (iv) $n = 4k + 4$ 일 때, 주어진 식은
 $1 + \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \dots + \frac{1}{i^{4k+4}}\right) = 1 + 0 = 1 \quad \blacktriangleleft ③$
 (i)~(iv)에서 주어진 식의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

32 $f(1)=i+(-i)=0$

$f(2)=i^2+(-i)^2=-1-1=-2$

$f(3)=i^3+(-i)^3=-i+i=0$

$f(4)=i^4+(-i)^4=1+1=2$

$f(5)=i^5+(-i)^5=i-i=0$

$f(6)=i^6+(-i)^6=-1-1=-2$

⋮

즉, $f(n)=-2$ 를 만족시키는 자연수 n 은

$n=4k+2$ (k 는 음이 아닌 정수) 꼴이다.

따라서 50 이하의 자연수 n 은 2, 6, 10, ..., 50의 13개이다.

33 $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=i$ 이므로 $f(n)=i^n$

$\therefore 1+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(96)$

$=1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{96}$

$=1+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)$

$=1$

34 $(1+i)^2=2i, (1-i)^2=-2i$ 이므로

$(1+i)^{30}+(1-i)^{30}=(2i)^{15}+(-2i)^{15}$

$=(2i)^{15}-(2i)^{15}=0$

35 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=i, \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2=-\frac{1}{i}=i$ 이므로

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}-\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}=i^n-i^n=0$

36 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로

$(1+i)z+i\bar{z}=1+i$ 에서

$(1+i)(a+bi)+i(a-bi)=1+i$

$a+(2a+b)i=1+i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=1, 2a+b=1$

$\therefore a=1, b=-1$

따라서 $z=1-i$ 이므로

$z^2=(1-i)^2=-2i$

$z^4=(1-i)^4=(-2i)^2=-4$

$\therefore z^8=(-4)^2=16$

따라서 z^n 이 양수가 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값은 8이다.

37 ① $\sqrt{-2}\sqrt{5}=\sqrt{-10}$

② $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=-\sqrt{10}$

③ $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{-2}}=-\sqrt{\frac{5}{-2}}$

④ $\frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}=\sqrt{-\frac{5}{2}}$

⑤ $\frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$

따라서 옳은 것은 ④이다.

38 $(\sqrt{2}+\sqrt{-2})^2=2+2\sqrt{-4}-\sqrt{4}$
 $=4i$

39 주어진 등식에서

$(x+y)+(-2x+y)i=-3$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=-3, -2x+y=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1, y=-2$

$\therefore \sqrt{3x}\sqrt{y}+\frac{\sqrt{12x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{-3}\sqrt{-2}+\frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{-2}}$
 $=-\sqrt{6}+\sqrt{6}=0$

40 $z=\sqrt{-10}\times\sqrt{\frac{1}{5}}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}=\sqrt{-2}+\sqrt{-2}=2\sqrt{2}i$ 이므로

$z^2=(2\sqrt{2}i)^2=-8$

$\therefore z^4=(z^2)^2=(-8)^2=64$

41 (가)에서 $m-7\leq 0$ 이므로 $m\leq 7 \quad \therefore M=7$

(나)에서 $n-6<0$ 이므로 $n<6 \quad \therefore N=5$

$\therefore MN=7\times 5=35$

42 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 에서 $a<0, b<0$

ㄱ. $a<0$ 이므로

$\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}=-a\sqrt{b}$

ㄴ. $-a>0, -b>0$ 이므로

$\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{-a\times(-b)}=\sqrt{ab}$

ㄷ. $a<0, b<0$ 이므로

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

ㄹ. $-a>0, b<0$ 이므로

$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{-a}{b}}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

43 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 에서 $a<0, b<0$

$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{c}{b}}$ 에서 $b<0, c>0$

$\therefore -a>0, -b>0, c-b>0, b-c<0$

$\therefore \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{-b}}-\frac{\sqrt{c-b}}{\sqrt{b-c}}=-\sqrt{-1}+\sqrt{-1}+\sqrt{-1}=i$

1 ②	2 -1	3 $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$	4 -2
5 ②	6 ①	7 ①	8 ④
10 ②	11 ③	12 ③	13 실근
14 서로 다른 두 실근	15 ③	16 1	17 ①
18 ⑤			

- 1 $x^2 - 2x + 4 = 0$ 에서 $x = 1 \pm \sqrt{3}i$
따라서 $a=1$, $b=3$ 이므로
 $a+b=4$
- 2 양변에 $\sqrt{3}+1$ 을 곱하여 정리하면
 $2x^2 - (\sqrt{3}-1)x - \sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = 0$
 $(2x + \sqrt{3} + 1)(x - \sqrt{3}) = 0$
 $\therefore x = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 또는 $x = \sqrt{3}$
 $\alpha > \beta$ 이므로 $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
 $\therefore \alpha + 2\beta = \sqrt{3} - (\sqrt{3}+1) = -1$
- 3 $(x \circ x) + (2 \circ x) - 4 = 0$ 에서
 $(x + x - x^2) + (2 + x - 2x) - 4 = 0$
 $x^2 - x + 2 = 0$
 $\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$
- 4 이차방정식 $x^2 + 2ax - 3a^2 = 0$ 의 한 근이 1이므로 $x=1$ 을 대입하면
 $1 + 2a - 3a^2 = 0$, $(3a+1)(a-1) = 0$
 $\therefore a=1$ ($\because a > 0$)
주어진 이차방정식은 $x^2 + 2x - 3 = 0$
 $(x+3)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -3$ 또는 $x=1$
 $\therefore \alpha = -3$
 $\therefore \alpha + \alpha = 1 + (-3) = -2$
- 5 $(a-1)x^2 + x + a^2 - 3 = 0$ 이 이차방정식이므로
 $a-1 \neq 0 \quad \therefore a \neq 1$
이 이차방정식의 한 근이 2이므로 $x=2$ 를 대입하면
 $4(a-1) + 2 + a^2 - 3 = 0$
 $a^2 + 4a - 5 = 0$, $(a+5)(a-1) = 0$
 $\therefore a = -5$ ($\because a \neq 1$)
주어진 이차방정식은 $-6x^2 + x + 22 = 0$
 $(6x+11)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -\frac{11}{6}$ 또는 $x=2$
따라서 다른 한 근은 $-\frac{11}{6}$ 이다.

- 6 이차방정식 $ax^2 + x + b = 0$ 의 한 근이 1이므로 $x=1$ 을 대입하면

$$a+1+b=0 \quad \therefore a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이차방정식 $bx^2 + x + a = 0$ 의 한 근이 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$x = -\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$\frac{b}{4} - \frac{1}{2} + a = 0 \quad \therefore 4a + b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{을 연립하여 풀면 } a=1, b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉢}$ 을 $ax^2 + x + b = 0$ 에 대입하면

$$x^2 + x - 2 = 0, (x+2)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x=1 \quad \therefore m = -2$$

$\textcircled{㉢}$ 을 $bx^2 + x + a = 0$ 에 대입하면

$$-2x^2 + x + 1 = 0, (2x+1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=1 \quad \therefore n = 1$$

$$\therefore m - n = -2 - 1 = -3$$

- 7 (i) $x < 1$ 일 때

$$x^2 + 2(x-1) - 1 = 0, x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -3 \text{ 또는 } x=1$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $x = -3$

- (ii) $x \geq 1$ 일 때

$$x^2 - 2(x-1) - 1 = 0, x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \quad \therefore x = 1$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 모든 근의 곱은 $-3 \times 1 = -3$

- 8 (i) $x < -2$ 일 때

$$\{-(x+2)\}^2 - (x+2) - 20 = 0, x^2 + 3x - 18 = 0$$

$$(x+6)(x-3) = 0 \quad \therefore x = -6 \text{ 또는 } x=3$$

그런데 $x < -2$ 이므로 $x = -6$

- (ii) $x \geq -2$ 일 때

$$(x+2)^2 + (x+2) - 20 = 0, x^2 + 5x - 14 = 0$$

$$(x+7)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -7 \text{ 또는 } x=2$$

그런데 $x \geq -2$ 이므로 $x = 2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -6 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\alpha > \beta \text{이므로 } \alpha = 2, \beta = -6 \quad \therefore \alpha - \beta = 8$$

다른 풀이

$$|x+2| = t (t \geq 0) \text{로 놓으면 } t^2 + t - 20 = 0$$

$$(t+5)(t-4) = 0 \quad \therefore t = 4 (\because t \geq 0)$$

$$|x+2| = 4 \text{이므로 } x+2 = -4 \text{ 또는 } x+2 = 4$$

$$\therefore x = -6 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\alpha > \beta \text{이므로 } \alpha = 2, \beta = -6 \quad \therefore \alpha - \beta = 8$$

- 9 $|x+1| + \sqrt{(x-1)^2} = 4 - 2x^2$ 에서
 $2x^2 + |x+1| + |x-1| - 4 = 0$
 (i) $x < -1$ 일 때
 $2x^2 - (x+1) - (x-1) - 4 = 0, x^2 - x - 2 = 0$
 $(x+1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$
 그런데 $x < -1$ 이므로 해는 없다.
- (ii) $-1 \leq x < 1$ 일 때
 $2x^2 + (x+1) - (x-1) - 4 = 0, x^2 = 1$
 $\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1$
 그런데 $-1 \leq x < 1$ 이므로 $x = -1$
- (iii) $x \geq 1$ 일 때
 $2x^2 + (x+1) + (x-1) - 4 = 0, x^2 + x - 2 = 0$
 $(x+2)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1$
 그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 1$
- (i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 해는
 $x = -1$ 또는 $x = 1$
 따라서 모든 근의 합은 $-1 + 1 = 0$
- 10 이차방정식 $x^2 + 2(1-2m)x + 4m^2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4} = (1-2m)^2 - 4m^2 > 0$
 $-4m + 1 > 0 \quad \therefore m < \frac{1}{4}$
- 11 이차방정식 $x^2 - kx + k - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = 0$ 이므로
 $D = (-k)^2 - 4(k-1) = 0$
 $k^2 - 4k + 4 = 0$
 $(k-2)^2 = 0 \quad \therefore k = 2$
 이를 주어진 이차방정식에 대입하면
 $x^2 - 2x + 1 = 0, (x-1)^2 = 0$
 $\therefore x = 1 \quad \therefore a = 1$
 $\therefore k + a = 2 + 1 = 3$
- 12 이차방정식 $x^2 - 3x + a = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면
 $D_1 > 0$ 이어야 하므로
 $D_1 = (-3)^2 - 4a > 0$
 $9 - 4a > 0 \quad \therefore a < \frac{9}{4} \quad \therefore M = 2$
 이차방정식 $x^2 - 6x + 3b + 1 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면
 $D_2 < 0$ 이어야 하므로
 $\frac{D_2}{4} = (-3)^2 - (3b+1) < 0$
 $8 - 3b < 0 \quad \therefore b > \frac{8}{3} \quad \therefore m = 3$
 $\therefore M + m = 2 + 3 = 5$

- 13 이차방정식 $4ax^2 + 2bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = b^2 - 4ac$
 $= (a+c)^2 - 4ac \quad (\because b = a+c)$
 $= (a-c)^2 \geq 0$
 따라서 주어진 이차방정식은 실근을 갖는다.
- 14 이차방정식 $x^2 - ax + \frac{b^2}{4} - 1 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면
 $D_1 = 0$ 이므로
 $D_1 = (-a)^2 - 4\left(\frac{b^2}{4} - 1\right) = 0$
 $a^2 - b^2 + 4 = 0 \quad \therefore a^2 = b^2 - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 이차방정식 $x^2 + 2ax - 2b - 7 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면
 $\frac{D_2}{4} = a^2 - (-2b-7)$
 $= (b^2 - 4) + 2b + 7 \quad (\because \textcircled{1})$
 $= b^2 + 2b + 3$
 $= (b+1)^2 + 2 > 0$
 따라서 이차방정식 $x^2 + 2ax - 2b - 7 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- 15 이차방정식 $ax^2 - 2bx - a + 2b - \frac{c}{a} = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (-b)^2 - a\left(-a + 2b - \frac{c}{a}\right)$
 $= b^2 + a^2 - 2ab + c = (a-b)^2 + c$
 $\neg. (a-b)^2 \geq 0$ 이므로 $c > 0$ 이면 $\frac{D}{4} > 0$
 따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- $\sqcup. c = 0$ 이면 $\frac{D}{4} = (a-b)^2 \geq 0$
 $a \neq b$ 이면 $\frac{D}{4} > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- $\sqsubset. a = b, c < 0$ 이면 $\frac{D}{4} = c < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.
- 따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \sqsubset$ 이다.
- 16 주어진 이차식이 완전제곱식이면 이차방정식
 $x^2 - 2(1-k)x + k^2 - 3k + 2 = 0$ 이 중근을 갖는다.
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이므로
 $\frac{D}{4} = \{-(1-k)\}^2 - (k^2 - 3k + 2) = 0$
 $k - 1 = 0 \quad \therefore k = 1$
- 17 이차방정식 $x^2 - 2(m+a)x + m^2 + m + b = 0$ 의 판별식을
 D 라 하면 $D = 0$ 이므로
 $\frac{D}{4} = \{-(m+a)\}^2 - (m^2 + m + b) = 0$
 $\therefore (2a-1)m + a^2 - b = 0$

이 등식이 m 에 대한 항등식이므로
 $2a-1=0, a^2-b=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{4}$
 $\therefore 12(a+b)=12 \times \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=9$

- 18** 주어진 이차식이 완전제곱식이면 이차방정식
 $(a+b)x^2+2cx+a-b=0$ 이 중근을 갖는다.
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이므로
 $\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)=0$
 $c^2-a^2+b^2=0 \quad \therefore a^2=b^2+c^2$
 따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가
 a 인 직각삼각형이다.

03 이차방정식의 근과 계수의 관계

35~40쪽

1 ⑤	2 ③	3 -14	4 $\sqrt{10}$	5 48
6 ④	7 -7	8 ④	9 ①	10 ④
11 ①	12 ①	13 ②	14 6	15 ⑤
16 7	17 ②	18 ①	19 ①	20 ②
21 $x^2-3x+1=0$	22 ②	23 17	24 ①	
25 503	26 ①	27 ②	28 $x^2-6x+9=0$	
29 $x^2-10x+16=0$	30 ④	31 ③	32 ④	
33 ④	34 10	35 ⑤	36 25	37 ②
38 ③				

- 1** 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-6, \alpha\beta=7$
 $\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-6)^2-2 \times 7=22$
- 2** 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4, \alpha\beta=1$
 $\therefore \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$
 $= \frac{4^3-3 \times 1 \times 4}{1} = 52$
- 3** 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=-4$
 $\therefore \frac{\beta}{\alpha-1} + \frac{\alpha}{\beta-1} = \frac{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$
 $= \frac{\alpha^2+\beta^2-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$
 $= \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$
 $= \frac{(-2)^2-2 \times (-4)-(-2)}{-4-(-2)+1}$
 $= -14$

- 4** 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=(-3)^2-4=5>0$ 이므로 α, β 는 모두 실수이다.
 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6>0, \alpha\beta=4>0$ 이
 므로 $\alpha>0, \beta>0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$
 $=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta} (\because \textcircled{1})$
 $=6+2 \times 2=10$
 $\textcircled{1}$ 에서 $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}>0$ 이므로 $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{10}$

- 5** α 가 이차방정식 $x^2+7x+1=0$ 의 근이므로
 $\alpha^2+7\alpha+1=0 \quad \therefore \alpha^2=-7\alpha-1$
 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-7$ 이므로
 $\alpha^2-7\beta=-7\alpha-1-7\beta$
 $=-7(\alpha+\beta)-1$
 $=-7 \times (-7)-1=48$

- 6** α, β 가 이차방정식 $x^2-2x+5=0$ 의 두 근이므로
 $\alpha^2-2\alpha+5=0, \beta^2-2\beta+5=0$
 $\therefore \alpha^2=2\alpha-5, \beta^2=2\beta-5$
 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2, \alpha\beta=5$ 이므로
 $(\alpha^2-3\alpha+7)(\beta^2-\beta+3)$
 $=(2\alpha-5-3\alpha+7)(2\beta-5-\beta+3)$
 $=(-\alpha+2)(\beta-2)$
 $=-\alpha\beta+2(\alpha+\beta)-4$
 $=-5+2 \times 2-4=-5$

- 7** α, β 가 이차방정식 $x^2+x-3=0$ 의 두 근이므로
 $\alpha^2+\alpha-3=0, \beta^2+\beta-3=0$
 $\therefore \alpha^2=-\alpha+3, \beta^2=-\beta+3$
 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1$ 이므로
 $\frac{\alpha^2}{3+\beta-\alpha^2} + \frac{\beta^2}{3+\alpha-\beta^2} = \frac{-\alpha+3}{\alpha+\beta} + \frac{-\beta+3}{\alpha+\beta}$
 $= \frac{-(\alpha+\beta)+6}{\alpha+\beta}$
 $= \frac{-(-1)+6}{-1} = -7$

- 8** α, β 가 이차방정식 $x^2-6x+1=0$ 의 두 근이므로
 $\alpha^2-6\alpha+1=0, \beta^2-6\beta+1=0$
 $\therefore \alpha^2+1=6\alpha, \beta^2+1=6\beta$
 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=(-3)^2-1=8>0$ 이므로 α, β 는 모두 실수이다.
 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6>0, \alpha\beta=1>0$ 이므
 로 $\alpha>0, \beta>0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned}\therefore (\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1})^2 &= (\sqrt{6\alpha}+\sqrt{6\beta})^2 \\ &= 6\alpha+6\beta+2\sqrt{6\alpha}\sqrt{6\beta} \\ &= 6(\alpha+\beta)+12\sqrt{\alpha\beta} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= 6 \times 6 + 12 \times 1 = 48\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{1}\text{에서 } \sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1} &> 0 \text{이므로} \\ \sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1} &= \sqrt{48}=4\sqrt{3}\end{aligned}$$

- 9 이차방정식 $ax^2+2x+b=0$ 의 두 근이 $-1, \frac{1}{3}$ 이므로 근

과 계수의 관계에 의하여

$$-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{a}, \quad -1 \times \frac{1}{3}=\frac{b}{a} \quad \therefore a=3, b=-1$$

따라서 이차방정식 $bx^2+ax+a-b=0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{a-b}{b}=\frac{3-(-1)}{-1}=-4$$

- 10 두 이차방정식에서 각각 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{1}{4}, \quad \alpha\beta=\frac{a}{8} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=\frac{b}{4}, \quad (\alpha+\beta)\alpha\beta=\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 각각 대입하면

$$\frac{1}{4}+\frac{a}{8}=\frac{b}{4}, \quad \frac{1}{4} \times \frac{a}{8}=\frac{1}{2} \quad \therefore a=16, b=9$$

$$\therefore a+b=25$$

- 11 두 이차방정식에서 각각 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a, \quad \alpha\beta=b$$

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=-b, \quad \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{\alpha}{\beta}=1=a$$

$$\text{따라서 } \alpha+\beta=1 \text{이므로 } \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=-b \text{에서}$$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=-b, \quad \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=-b$$

$$\frac{1^2-2b}{b}=-b, \quad b^2-2b+1=0$$

$$(b-1)^2=0 \quad \therefore b=1$$

$$\therefore a^2+b^2=1+1=2$$

- 12 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-k, \alpha\beta=1-2k$

$$\alpha^2+\beta^2=0 \text{에서 } (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=0$$

$$(-k)^2-2(1-2k)=0, \quad k^2+4k-2=0$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은 -4 이다.

- 13 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=a, \alpha\beta=b$

$$(\alpha+1)(\beta+1)=1 \text{에서 } \alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=1$$

$$b+a+1=1 \quad \therefore a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(2\alpha+1)(2\beta+1)=-1 \text{에서 } 4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1=-1$$

$$4b+2a+1=-1 \quad \therefore a+2b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=-1$

$$\therefore a^2+b^2=1+1=2$$

- 14 α, β 가 이차방정식 $x^2-3x+k=0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2-3\alpha+k=0, \quad \beta^2-3\beta+k=0$$

$$\therefore \alpha^2=3\alpha-k, \quad \beta^2=3\beta-k$$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3, \alpha\beta=k$ 이므로

$$\frac{1}{\alpha^2-\alpha+k}+\frac{1}{\beta^2-\beta+k}=\frac{1}{4} \text{에서 } \frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\frac{1}{4}, \quad \frac{3}{2k}=\frac{1}{4} \quad \therefore k=6$$

- 15 두 근을 $\alpha, 3\alpha (\alpha \neq 0)$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{두 근의 합은 } \alpha+3\alpha=-m$$

$$\therefore \alpha=-\frac{m}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{두 근의 곱은 } \alpha \times 3\alpha=m-1$$

$$\textcircled{1}\text{을 대입하면 } 3 \times \left(-\frac{m}{4}\right)^2=m-1$$

$$3m^2-16m+16=0, \quad (3m-4)(m-4)=0$$

$$\therefore m=\frac{4}{3} \text{ 또는 } m=4$$

그런데 m 은 정수이므로 $m=4$

- 16 두 근을 $\alpha, \alpha+1$ 이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{두 근의 합은 } \alpha+(\alpha+1)=m$$

$$\therefore \alpha=\frac{m-1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{두 근의 곱은 } \alpha(\alpha+1)=m+5$$

$$\textcircled{1}\text{을 대입하면 } \frac{m-1}{2} \times \frac{m+1}{2}=m+5$$

$$m^2-4m-21=0, \quad (m+3)(m-7)=0$$

$$\therefore m=-3 \text{ 또는 } m=7$$

그런데 m 은 양수이므로 $m=7$

- 17 두 근을 $2\alpha, 3\alpha (\alpha \neq 0)$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{두 근의 합은 } 2\alpha+3\alpha=k+1$$

$$\therefore \alpha=\frac{k+1}{5} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{두 근의 곱은 } 2\alpha \times 3\alpha=k$$

$$\textcircled{1}\text{을 대입하면 } 6 \times \left(\frac{k+1}{5}\right)^2=k$$

$$6k^2-13k+6=0$$

$$\text{따라서 모든 상수 } k \text{의 값의 곱은 } \frac{6}{6}=1$$

- 18 두 근을 $\alpha, -\alpha (\alpha \neq 0)$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{두 근의 합은}$$

$$\alpha+(-\alpha)=-(m^2+m-2), \quad m^2+m-2=0$$

$$(m+2)(m-1)=0 \quad \therefore m=-2 \text{ 또는 } m=1$$

그런데 두 근의 곱은 음수이므로 $m+1 < 0$ 에서 $m < -1$

$$\therefore m=-2$$

- 19 두 근을 $\alpha, \alpha+3$ 이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
 두 근의 합은 $\alpha + (\alpha+3) = -(1-2m)$
 $\therefore \alpha = m-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 두 근의 곱은 $\alpha(\alpha+3) = 3m^2+8m-10$
 $\textcircled{1}$ 을 대입하면
 $(m-2)(m+1) = 3m^2+8m-10$
 $2m^2+9m-8=0$
 따라서 모든 상수 m 의 값의 합은 $-\frac{9}{2}$ 이다.

- 20 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $\frac{-3k}{k} = -3 < 0$
 이므로 두 근의 부호가 서로 다르다.
 두 근의 절댓값의 비가 1:3이므로 두 근을 $\alpha, -3\alpha (\alpha \neq 0)$
 라 하면 두 근의 합은
 $\alpha + (-3\alpha) = -\frac{-(k-1)}{k}$
 $\therefore -2\alpha = \frac{k-1}{k} \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 두 근의 곱은 $\alpha \times (-3\alpha) = -3$
 $\alpha^2 = 1 \quad \therefore \alpha = -1$ 또는 $\alpha = 1$
 (i) $\alpha = -1$ 일 때
 $\textcircled{1}$ 에서 $2 = \frac{k-1}{k}$
 $2k = k-1 \quad \therefore k = -1$
 (ii) $\alpha = 1$ 일 때
 $\textcircled{1}$ 에서 $-2 = \frac{k-1}{k}$
 $-2k = k-1 \quad \therefore k = \frac{1}{3}$
 그런데 k 는 정수이므로 $k = -1$

- 21 원래의 이차방정식을 $x^2+ax+b=0 (a, b \text{는 상수})$ 이라 하면 A는 상수항을 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은
 $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = b \quad \therefore b = 1$
 B는 x 의 계수를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은
 $-1+4 = -a \quad \therefore a = -3$
 따라서 원래의 이차방정식은
 $x^2-3x+1=0$

- 22 민지는 b 를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은
 $-2 \times 6 = b \quad \therefore b = -12$
 은주는 a 를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은
 $(-2-2\sqrt{3}i) + (-2+2\sqrt{3}i) = -a \quad \therefore a = 4$
 원래의 이차방정식은 $x^2+4x-12=0$ 이므로
 $(x+6)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -6$ 또는 $x = 2$
 따라서 양수인 근은 2이다.

- 23 잘못 적용한 근의 공식이 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}$ 이고 두 근이
 $-4, 2$ 이므로 두 근의 합은
 $\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a} + \frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a} = -4+2$
 $-\frac{2b}{a} = -2 \quad \therefore b = a \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 두 근의 곱은
 $\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{a} \times \frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a} = -4 \times 2$
 $\frac{ac}{a^2} = -8 \quad \therefore c = -8a \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 $ax^2+bx+c=0$ 에 대입하면
 $ax^2+ax-8a=0$
 이 이차방정식의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에
 의하여
 $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = -8$
 $\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
 $= (-1)^2 - 2 \times (-8) = 17$

- 24 이차방정식 $f(3x+1)=0$ 의 두 근을 구하면
 $3x+1=\alpha$ 또는 $3x+1=\beta$
 $\therefore x = \frac{\alpha-1}{3}$ 또는 $x = \frac{\beta-1}{3}$
 이때 $\alpha + \beta = 7, \alpha\beta = -3$ 이므로 이차방정식
 $f(3x+1)=0$ 의 두 근의 곱은
 $\frac{\alpha-1}{3} \times \frac{\beta-1}{3} = \frac{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1}{9}$
 $= \frac{-3-7+1}{9} = -1$

- 25 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
 $\alpha + \beta = 16$
 이차방정식 $f(2020-8x)=0$ 의 두 근을 구하면
 $2020-8x=\alpha$ 또는 $2020-8x=\beta$
 $\therefore x = \frac{2020-\alpha}{8}$ 또는 $x = \frac{2020-\beta}{8}$
 따라서 이차방정식 $f(2020-8x)=0$ 의 두 근의 합은
 $\frac{2020-\alpha}{8} + \frac{2020-\beta}{8} = \frac{4040 - (\alpha + \beta)}{8}$
 $= \frac{4040-16}{8} = 503$

- 26 이차방정식 $f(2x-3)=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
 $\alpha + \beta = 3$
 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근은
 $x=2\alpha-3$ 또는 $x=2\beta-3$
 따라서 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근의 합은
 $(2\alpha-3) + (2\beta-3) = 2(\alpha + \beta) - 6 = 2 \times 3 - 6 = 0$

27 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -4$, $\alpha\beta = 5$ 이므로
 $(\alpha + \beta) + \alpha\beta = -4 + 5 = 1$
 $(\alpha + \beta)\alpha\beta = -4 \times 5 = -20$
따라서 구하는 이차방정식은 $x^2 - x - 20 = 0$

28 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = 1$ 이므로

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = (\alpha + \beta) + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

$$= 3 + \frac{3}{1} = 6$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \alpha\beta + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= \alpha\beta + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{\alpha\beta}$$

$$= \alpha\beta + \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 1}{\alpha\beta}$$

$$= 1 + \frac{3^2 - 2 \times 1 + 1}{1} = 9$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2 - 6x + 9 = 0$

29 지름에 대한 원주각의 크기는 90° 이므로 $\angle ACB = 90^\circ$
직각삼각형 AHC에서 $\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2 = a^2 + 16$
직각삼각형 CHB에서 $\overline{BC}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = b^2 + 16$
직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ 이므로
 $(a+b)^2 = (a^2 + 16) + (b^2 + 16) \quad \therefore ab = 16$
 $\overline{AB} = 10$ 이므로 $a + b = 10$
따라서 구하는 이차방정식은 $x^2 - 10x + 16 = 0$

30 이차방정식 $x^2 + 2x + 9 = 0$ 의 해는 $x = -1 \pm 2\sqrt{2}i$ 이므로
 $x^2 + 2x + 9 = (x + 1 + 2\sqrt{2}i)(x + 1 - 2\sqrt{2}i)$

31 이차방정식 $x^2 + 2x + 2 = 0$ 의 해는 $x = -1 \pm i$ 이므로
 $x^2 + 2x + 2 = (x + 1 + i)(x + 1 - i)$
따라서 구하는 두 일차식의 합은
 $(x + 1 + i) + (x + 1 - i) = 2x + 2$

32 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6 = 0$, 즉 $x^2 + 6x + 12 = 0$ 의 해는
 $x = -3 \pm \sqrt{3}i$ 이므로

$$\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6 = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 12)$$

$$= \frac{1}{2}(x + 3 + \sqrt{3}i)(x + 3 - \sqrt{3}i)$$
 $\therefore a = 3, b = \sqrt{3} \quad (\because b > 0)$
 $\therefore a + b^2 = 3 + 3 = 6$

33 $2 - i$ 가 근이면 다른 한 근은 $2 + i$ 이므로
 $(2 - i) + (2 + i) = -\frac{a}{2}, (2 - i)(2 + i) = \frac{b}{2}$
 $\therefore a = -8, b = 10 \quad \therefore b - a = 18$

34 $b - \sqrt{2}$ 가 근이면 다른 한 근은 $b + \sqrt{2}$ 이므로
 $(b - \sqrt{2}) + (b + \sqrt{2}) = 6, (b - \sqrt{2})(b + \sqrt{2}) = a$
 $\therefore a = 7, b = 3 \quad \therefore a + b = 10$

35
$$\frac{2 + 4i}{1 - i} = \frac{(2 + 4i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = -1 + 3i$$
 $-1 + 3i$ 가 근이면 다른 한 근은 $-1 - 3i$ 이므로
 $(-1 + 3i) + (-1 - 3i) = a + b$
 $(-1 + 3i)(-1 - 3i) = -ab$
 $\therefore a + b = -2, ab = -10$
 $\therefore a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = (-2)^2 - 2 \times (-10) = 24$

36 $2 - \sqrt{3}i$ 가 근이면 다른 한 근은 $2 + \sqrt{3}i$ 이므로
 $(2 - \sqrt{3}i) + (2 + \sqrt{3}i) = -a, (2 - \sqrt{3}i)(2 + \sqrt{3}i) = b$
 $\therefore a = -4, b = 7$
 $-4, 7$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은
 $x^2 - (-4 + 7)x + (-4) \times 7 = 0 \quad \therefore x^2 - 3x - 28 = 0$
따라서 $m = -3, n = -28$ 이므로
 $m - n = 25$

37 b 를 잘못 보고 풀었을 때의 한 근이 $4 + 2\sqrt{2}i$ 이므로 다른 한 근은 $4 - 2\sqrt{2}i$ 이고, a 와 c 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은
 $(4 + 2\sqrt{2}i)(4 - 2\sqrt{2}i) = \frac{c}{a} \quad \therefore c = 8a \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 c 를 잘못 보고 풀었을 때의 한 근이 $-3 + \sqrt{2}i$ 이므로 다른 한 근은 $-3 - \sqrt{2}i$ 이고, a 와 b 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은
 $(-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -\frac{b}{a} \quad \therefore b = 6a \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 $ax^2 + bx + c = 0$ 에 대입하면
 $ax^2 + 6ax + 8a = 0, x^2 + 6x + 8 = 0 \quad (\because a \neq 0)$
 $(x + 4)(x + 2) = 0 \quad \therefore x = -4 \text{ 또는 } x = -2$

38 $\textcircled{A}$ 에서 $f(4) = 4$ 이므로
 $16 + 4p + q = 4 \quad \therefore q = -4p - 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\textcircled{B}$ 에서 $k - 2i$ 가 근이면 다른 한 근은 $k + 2i$ 이므로 두 근의 합은
 $(k - 2i) + (k + 2i) = -p \quad \therefore k = -\frac{p}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$
두 근의 곱은 $(k - 2i)(k + 2i) = q, k^2 + 4 = q$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 대입하면
 $\left(-\frac{p}{2}\right)^2 + 4 = -4p - 12, p^2 + 16p + 64 = 0$
 $(p + 8)^2 = 0 \quad \therefore p = -8$
이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $q = 20$
 $\therefore p + q = 12$

II-2. 이차방정식과 이차함수

01 이차방정식과 이차함수의 관계

42~44쪽

1 ⑤	2 ③	3 8	4 6	5 3
6 ④	7 -1	8 ④	9 ②	10 ④
11 5	12 ②	13 4	14 6	15 ③
16 $m \geq -1$	17 ⑤	18 ④	19 -8	
20 ②	21 ③			

1 이차방정식 $2x^2+ax-1=0$ 의 두 근의 합이 -1 이므로
 $-1 = -\frac{a}{2} \quad \therefore a=2$

2 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 $-1, \frac{3}{2}$ 이므로
 $-1 + \frac{3}{2} = -a, -1 \times \frac{3}{2} = b$
 $\therefore a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$
 $\therefore a-b=1$

3 이차방정식 $2x^2-ax-5=0$ 의 두 근이 $-1, b$ 이므로
 $-1+b = \frac{a}{2}, -1 \times b = -\frac{5}{2}$
 $\therefore a=3, b=\frac{5}{2}$
 $\therefore a+2b=3+5=8$

4 이차방정식 $-x^2+ax+2a-1=0$ 의 두 근의 합이 3이므로
 $a=3$
 이를 $y=x^2-(a-1)x-a^2+1$ 에 대입하면
 $y=x^2-2x-8$
 $x^2-2x-8=0$ 에서
 $(x+2)(x-4)=0$
 $\therefore x=-2$ 또는 $x=4$
 따라서 두 교점 사이의 거리는
 $|-2-4|=6$

5 이차방정식 $x^2+2kx+2k+1=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
 $\alpha+\beta=-2k, \alpha\beta=2k+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 이때 $|\alpha-\beta|=2\sqrt{2}$ 이므로 양변을 제곱하면
 $(\alpha-\beta)^2=8, (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=8$
 $\textcircled{1}$ 을 대입하면
 $(-2k)^2-4(2k+1)=8$
 $k^2-2k-3=0, (k+1)(k-3)=0$
 $\therefore k=-1$ 또는 $k=3$
 그런데 k 는 양수이므로 $k=3$

6 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 점 $(0, -4)$ 를 지나므로

$$c=-4$$

$$\therefore y=ax^2+bx-4$$

이차방정식 $ax^2+bx-4=0$ 의 한 근이 $-1-\sqrt{5}$ 이고 다른 한 근은 $-1+\sqrt{5}$ 이므로

$$(-1-\sqrt{5})+(-1+\sqrt{5})=-\frac{b}{a}$$

$$(-1-\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})=-\frac{4}{a}$$

$$\therefore a=1, b=2$$

$$\therefore a+b+c=1+2+(-4)=-1$$

7 방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 $-1, 2$ 이므로 방정식 $f(3x+2)=0$ 의 두 근을 구하면

$$3x+2=-1 \text{ 또는 } 3x+2=2$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0$$

따라서 모든 실근의 합은

$$-1+0=-1$$

8 ① 이차방정식 $x^2-2x+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=1-1=0$

따라서 x 축과 한 점에서 만난다.

② 이차방정식 $x^2-3x-6=0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D=9+24=33>0$

따라서 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

③ 이차방정식 $2x^2-12x+16=0$, 즉 $x^2-6x+8=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=9-8=1>0$$

따라서 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

④ 이차방정식 $3x^2-3x+7=0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D=9-84=-75<0$

따라서 x 축과 만나지 않는다.

⑤ 이차방정식 $3x^2-18x+27=0$, 즉 $x^2-6x+9=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=9-9=0$$

따라서 x 축과 한 점에서 만난다.

따라서 x 축과 만나지 않는 것은 ④이다.

9 이차방정식 $x^2-5x+k=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D>0$ 이어야 하므로

$$D=25-4k>0 \quad \therefore k<\frac{25}{4}$$

따라서 자연수 k 의 최댓값은 6이다.

- 10 이차방정식 $-x^2+3x-2k=0$, 즉 $x^2-3x+2k=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1>0$ 이므로

$$D_1=9-8k>0 \quad \therefore k<\frac{9}{8} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

이차방정식 $x^2+2kx+4k-3=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2=0$ 이므로

$$\frac{D_2}{4}=k^2-(4k-3)=0$$

$$k^2-4k+3=0, (k-1)(k-3)=0$$

$$\therefore k=1 \text{ 또는 } k=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $k=1$

- 11 $x^2-2x-7=2x+5$ 에서

$$x^2-4x-12=0, (x+2)(x-6)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=6$$

따라서 두 교점의 좌표는 $(-2, 1), (6, 17)$ 이고 a, c 는 두 교점의 x 좌표, b, d 는 두 교점의 y 좌표이므로

$$ac+bd=-2 \times 6 + 1 \times 17 = 5$$

- 12 이차방정식 $2x^2-5x+a=x+12$, 즉

$$2x^2-6x+a-12=0$$
의 두 근의 곱이 -4 이므로

$$\frac{a-12}{2}=-4$$

$$\therefore a=4$$

- 13 이차방정식 $2x^2+ax-1=3x+b$, 즉

$$2x^2+(a-3)x-b-1=0$$
의 두 근이 $-1, 3$ 이므로

$$-1+3=-\frac{a-3}{2}, -1 \times 3 = \frac{-b-1}{2}$$

$$\therefore a=-1, b=5$$

$$\therefore a+b=4$$

- 14 이차방정식 $x^2-(a+1)x-2=-4x+1$, 즉

$$x^2-(a-3)x-3=0$$
의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha+\beta=a-3, \alpha\beta=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$|\alpha-\beta|=4$ 이므로 양변을 제곱하면

$$(\alpha-\beta)^2=16$$

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16$$

$\textcircled{㉠}$ 을 대입하면

$$(a-3)^2-4 \times (-3)=16$$

$$a^2-6a+5=0$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은 6이다.

- 15 이차방정식 $x^2-3x+2k=3x+k$, 즉 $x^2-6x+k=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D>0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=9-k>0 \quad \therefore k<9$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 8이다.

- 16 이차방정식 $x^2+2(m+2)x+m^2=-2x-3$, 즉

$$x^2+2(m+3)x+m^2+3=0$$
의 판별식을 D 라 하면

$$D \geq 0$$
이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(m+3)^2-(m^2+3) \geq 0$$

$$6m+6 \geq 0 \quad \therefore m \geq -1$$

- 17 직선 $y=ax-6$ 이 직선 $y=2x+3$ 에 평행하므로

$$a=2$$

이차방정식 $2x-6=x^2-4x+b$, 즉 $x^2-6x+b+6=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이므로

$$\frac{D}{4}=9-(b+6)=0$$

$$3-b=0 \quad \therefore b=3$$

$$\therefore a+b=2+3=5$$

- 18 점 $(-1, 0)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y=m(x+1)$$

$$\therefore y=mx+m$$

이차방정식 $x^2+x+4=mx+m$, 즉

$$x^2+(-m+1)x-m+4=0$$
의 판별식을 D 라 하면

$$D=0$$
이므로

$$D=(-m+1)^2-4(-m+4)=0$$

$$m^2+2m-15=0$$

$$(m+5)(m-3)=0$$

$$\therefore m=-5 \text{ 또는 } m=3$$

그런데 m 은 양수이므로 $m=3$

- 19 이차방정식 $2x+k=x^2+x+3$, 즉 $x^2-x-k+3=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1<0$ 이므로

$$D_1=1-4(-k+3)<0$$

$$4k-11<0 \quad \therefore k<\frac{11}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

이차방정식 $2x+k=x^2+kx-k+9$, 즉

$$x^2+(k-2)x-2k+9=0$$
의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2=0$ 이므로

$$D_2=(k-2)^2-4(-2k+9)=0$$

$$k^2+4k-32=0$$

$$(k+8)(k-4)=0$$

$$\therefore k=-8 \text{ 또는 } k=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $k=-8$

- 20 이차방정식 $x^2-4kx+4k^2+k=2ax+b$, 즉

$$x^2-2(2k+a)x+4k^2+k-b=0$$
의 판별식을 D 라 하면

$$D=0$$
이므로

$$\frac{D}{4}=(2k+a)^2-(4k^2+k-b)=0$$

$$\therefore (4a-1)k+a^2+b=0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$4a-1=0, a^2+b=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{4}, b=-\frac{1}{16}$$

$$\therefore a+b=-\frac{3}{16}$$

- 21** 방정식 $x^2-3|x|-x+k=0$, 즉 $x^2-3|x|-x=-k$ 의 실근의 개수는 함수 $y=x^2-3|x|-x$ 의 그래프와 직선 $y=-k$ 의 교점의 개수와 같다.

$$y=x^2-3|x|-x$$

$$=\begin{cases} x^2+2x & (x<0) \\ x^2-4x & (x\geq 0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} (x+1)^2-1 & (x<0) \\ (x-2)^2-4 & (x\geq 0) \end{cases}$$

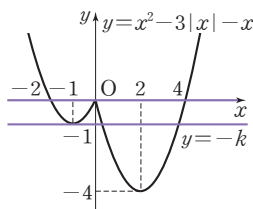
교점이 3개이려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-k$ 가 원점을 지나거나 점 $(-1, -1)$ 을 지나야 하므로

$$-k=0 \text{ 또는 } -k=-1$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=1$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은

$$0+1=1$$



02 이차함수의 최대, 최소

45~48쪽

1 -19	2 ④	3 ③	4 ②	5 ⑤
6 -2	7 22	8 4	9 ③	10 2
11 12	12 54	13 ①	14 ④	15 ④
16 11	17 ①	18 ④	19 20m	20 ⑤
21 162π	22 ③	23 100		

- 1** $y=-3x^2+12x-8=-3(x-2)^2+4$
 $-1\leq x\leq 3$ 에서 $x=2$ 일 때 최댓값 4, $x=-1$ 일 때 최솟값 -23을 가지므로
 $M=4, m=-23$
 $\therefore M+m=-19$
- 2** $y=\frac{1}{2}x^2-x+k=\frac{1}{2}(x-1)^2+k-\frac{1}{2}$
 $2\leq x\leq 4$ 에서 $x=4$ 일 때 최댓값 $k+4$, $x=2$ 일 때 최솟값 k 를 가지므로 최댓값과 최솟값의 차는
 $(k+4)-k=4$

- 3** (i) $p=-1$ 일 때

$$f(x)=x^2+4x=(x+2)^2-4$$

$0\leq x\leq 2$ 에서 $x=0$ 일 때 최솟값 0을 가지므로

$$g(-1)=0$$

- (ii) $p=\frac{1}{2}$ 일 때

$$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$$

$0\leq x\leq 2$ 에서 $x=1$ 일 때 최솟값 -1을 가지므로

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=-1$$

(i), (ii)에서

$$g(-1)+g\left(\frac{1}{2}\right)=0+(-1)=-1$$

- 4** $y=2x^2-4kx+k^2-12k+30$

$$=2(x-k)^2-k^2-12k+30$$

$x=k$ 일 때 최솟값 $-k^2-12k+30$ 을 가지므로

$$f(k)=-k^2-12k+30=-(k+6)^2+66$$

$-2\leq k\leq 4$ 에서 $k=-2$ 일 때 최댓값 50을 가지므로

$$a=-2, b=50$$

$$\therefore a+b=48$$

- 5** $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$$f(0)=-1 \text{에서 } c=-1$$

$$\therefore f(x)=ax^2+bx-1$$

$$f(x-1)-f(x)=-2x+3 \text{에서}$$

$$\{a(x-1)^2+b(x-1)-1\}-(ax^2+bx-1)=-2x+3$$

$$\therefore -2ax+a-b=-2x+3$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$-2a=-2, a-b=3 \quad \therefore a=1, b=-2$$

$$\therefore f(x)=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$$

$0\leq x\leq 4$ 에서 $x=4$ 일 때 최댓값 7, $x=1$ 일 때 최솟값

-2를 가지므로 그 합은

$$7+(-2)=5$$

- 6** ㉠에서 $f(0)=2$ 이므로

$$f(x)=ax^2+bx+2 \text{ (} a, b \text{는 유리수, } a\neq 0 \text{)라 하자.}$$

㉡에서 이차방정식 $ax^2+bx+2=-2x+6$, 즉

$ax^2+(b+2)x-4=0$ 의 한 근이 $1-\sqrt{5}$ 이고 다른 한 근은 $1+\sqrt{5}$ 이므로

$$(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})=-\frac{b+2}{a}$$

$$(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})=-\frac{4}{a}$$

$$\therefore a=1, b=-4$$

$$\therefore f(x)=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$$

따라서 $-2\leq x\leq 4$ 에서 $x=2$ 일 때 최솟값 -2를 갖는다.

7 $f(x)=2x^2-4x+k=2(x-1)^2+k-2$
 $-2 \leq x \leq 3$ 에서 $x=1$ 일 때 최솟값 $k-2$ 를 가지므로
 $k-2=1 \quad \therefore k=3$
따라서 $f(x)=2(x-1)^2+1$ 은 $x=-2$ 일 때 최댓값 19를 가지므로
 $M=19$
 $\therefore k+M=3+19=22$

8 $y=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$
 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $x=-1$ 일 때 최댓값 $a+5$, $x=1$ 일 때 최솟값 $a-3$ 을 갖는다.
이때 최댓값과 최솟값의 곱이 9이므로
 $(a+5)(a-3)=9$
 $a^2+2a-24=0$
 $(a+6)(a-4)=0$
 $\therefore a=-6$ 또는 $a=4$
그런데 a 는 양수이므로 $a=4$

9 $y=-ax^2+2ax+b=-a(x-1)^2+a+b$
 $-a < 0$ 이므로 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $x=1$ 일 때 최댓값 $a+b$,
 $x=-1$ 일 때 최솟값 $-3a+b$ 를 갖는다.
 $\therefore a+b=8, -3a+b=-8$
두 식을 연립하여 풀면
 $a=4, b=4$
 $\therefore a-b=0$

10 $f(x)=3x^2-6x+2=3(x-1)^2-1$ 이라 하면
 $f(0)=2, f(1)=-1$
 $0 \leq x \leq a$ 에서 최댓값이 11이므로
 $f(a)=11$
 $3a^2-6a+2=11, a^2-2a-3=0$
 $(a+1)(a-3)=0$
 $\therefore a=-1$ 또는 $a=3$
그런데 $a > 0$ 이므로 $a=3$
따라서 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $x=1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로
 $b=-1$
 $\therefore a+b=3+(-1)=2$

11 (가)에서 $f(-1)=f(3)$ 이므로
 $1-a+b=9+3a+b$
 $4a=-8 \quad \therefore a=-2$
 $\therefore f(x)=x^2-2x+b$
 $= (x-1)^2+b-1$

$-2 \leq x \leq 5$ 에서 $x=1$ 일 때 최솟값 $b-1$ 을 가지므로 (나)에서
 $b-1=-4 \quad \therefore b=-3$
따라서 $f(x)=(x-1)^2-4$ 는 $x=5$ 일 때 최댓값 12를 갖는다.

12 (가)에서 $f(x)=a(x+2)(x-4) (a \neq 0)$ 라 하면
 $f(x)=a(x+2)(x-4)=a(x^2-2x-8)$
 $=a(x-1)^2-9a$
(i) $a > 0$ 일 때
 $5 \leq x \leq 8$ 에서 $x=8$ 일 때 최댓값 $40a$ 를 가지므로 (나)에서
 $40a=80 \quad \therefore a=2$
(ii) $a < 0$ 일 때
 $5 \leq x \leq 8$ 에서 $x=5$ 일 때 최댓값 $7a$ 를 가지므로 (나)에서
 $7a=80 \quad \therefore a=\frac{80}{7}$
그런데 $a < 0$ 이므로 조건을 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=2$
따라서 $f(x)=2(x-1)^2-18$ 이므로
 $f(-5)=2 \times 36-18=54$

13 $f(x)=x^2-8x+a+6=(x-4)^2+a-10$
(i) $0 < a < 4$ 일 때
 $0 \leq x \leq a$ 에서 $x=a$ 일 때 최솟값 a^2-7a+6 을 가지므로
 $a^2-7a+6=0, (a-1)(a-6)=0$
 $\therefore a=1$ 또는 $a=6$
그런데 $0 < a < 4$ 이므로 $a=1$
(ii) $a \geq 4$ 일 때
 $0 \leq x \leq a$ 에서 $x=4$ 일 때 최솟값 $a-10$ 을 가지므로
 $a-10=0 \quad \therefore a=10$
(i), (ii)에서 모든 a 의 값의 합은
 $1+10=11$

14 $x^2+2x=t$ 로 놓으면 $t=(x+1)^2-1$
 $x=-1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로
 $t \geq -1$
주어진 함수는
 $y=-t^2+2t+3=-(t-1)^2+4$
따라서 $t \geq -1$ 에서 $t=1$ 일 때 최댓값 4를 갖는다.

15 $x^2-2x+1=t$ 로 놓으면 $t=(x-1)^2$
 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $x=3$ 일 때 최댓값 4, $x=1$ 일 때 최솟값 0을 가지므로
 $0 \leq t \leq 4$

주어진 함수는

$$y=2t^2-4(t+1)-1=2t^2-4t-5$$

$$=2(t-1)^2-7$$

$0 \leq t \leq 4$ 에서 $t=4$ 일 때 최댓값 11, $t=1$ 일 때 최솟값

-7을 가지므로 그 합은

$$11+(-7)=4$$

16 $4x^2+4x=t$ 로 놓으면 $t=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-1$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $x=1$ 일 때 최댓값 8, $x=-\frac{1}{2}$ 일 때 최솟

값 -1을 가지므로

$$-1 \leq t \leq 8$$

주어진 함수는

$$y=t^2-6t+k=(t-3)^2+k-9$$

$-1 \leq t \leq 8$ 에서 $t=3$ 일 때 최솟값 $k-9$ 를 가지므로

$$k-9=2 \quad \therefore k=11$$

17 $x+y=4$ 에서 $y=-x+4$ 이므로

$$x^2+xy+y^2=x^2+x(-x+4)+(-x+4)^2$$

$$=x^2-4x+16$$

$$=(x-2)^2+12$$

$0 \leq x \leq 4$ 에서 $x=0$ 또는 $x=4$ 일 때 최댓값 16, $x=2$ 일

때 최솟값 12를 가지므로 그 합은

$$16+12=28$$

18 A(0, 1), B(4, 0)이고 점 P(a, b)가 점 A에서 직선을 따라 점 B까지 움직이므로

$$0 \leq a \leq 4$$

점 P(a, b)는 직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$ 위의 점이므로

$$b=-\frac{1}{4}a+1$$

$$\therefore a^2+8b=a^2+8\left(-\frac{1}{4}a+1\right)$$

$$=a^2-2a+8$$

$$=(a-1)^2+7$$

따라서 $0 \leq a \leq 4$ 에서 $a=1$ 일 때 최솟값 7을 갖는다.

19 $h=-5t^2+30t+5$

$$=-5(t-3)^2+50$$

$2 \leq t \leq 5$ 에서 $t=3$ 일 때 최댓값 50, $t=5$ 일 때 최솟값 30

을 가지므로 최고 높이와 최소 높이의 차는

$$50-30=20(\text{m})$$

20 $f(x)=x^2-2ax+5a=(x-a)^2-a^2+5a$

$$\therefore A(a, -a^2+5a), B(a, 0)$$

$$\text{즉, } \overline{OB}=a, \overline{AB}=-a^2+5a \text{이므로}$$

$$\overline{OB}+\overline{AB}=a+(-a^2+5a)$$

$$=-a^2+6a$$

$$=-(a-3)^2+9$$

따라서 $0 < a < 5$ 에서 $a=3$ 일 때 최댓값 9를 가지므로

$\overline{OB}+\overline{AB}$ 의 최댓값은 9이다.

21 t 초 후의 원기둥의 밑면의 넓이는 $4\pi+2\pi t$ 이고 높이는

$16-t$ ($0 < t < 16$)이므로 원기둥의 부피를 V 라 하면

$$V=(4\pi+2\pi t)(16-t)$$

$$=-2\pi t^2+28\pi t+64\pi$$

$$=-2\pi(t-7)^2+162\pi$$

따라서 $0 < t < 16$ 에서 $t=7$ 일 때 최댓값 162π 를 가지므로

원기둥의 부피의 최댓값은 162π 이다.

22 세 우리의 넓이의 비가

1 : 1 : 2이므로 오른쪽 그림과

같이 작은 우리의 가로, 세로의

길이를 각각 x m, y m라 하면

$$3x+6y=18$$

$$\therefore x=-2y+6 \text{ (단, } 0 < y < 3)$$

우리 전체의 넓이를 S 라 하면

$$S=2x \times 2y$$

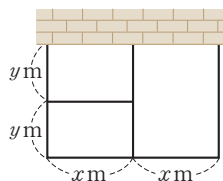
$$=4y(-2y+6)$$

$$=-8y^2+24y$$

$$=-8\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+18$$

따라서 $0 < y < 3$ 에서 $y=\frac{3}{2}$ 일 때 최댓값 18을 가지므로

우리 전체의 넓이의 최댓값은 18m^2 이다.



23 두 삼각형 ABC, ADE는 닮음

이고 삼각형 ABC에서 밑변의

길이와 높이가 같으므로 삼각

형 ADE도 밑변의 길이와 높

이가 같다.

삼각형 ADE의 밑변의 길이는

직사각형의 가로의 길이와 같으

므로 $\overline{DE}=x$ ($0 < x < 20$)라 하면 직사각형의 세로의 길

이는 $20-x$ 이다.

직사각형의 넓이를 S 라 하면

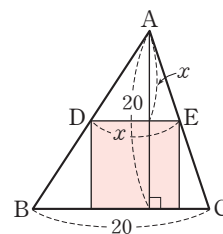
$$S=x(20-x)$$

$$=-x^2+20x$$

$$=-(x-10)^2+100$$

따라서 $0 < x < 20$ 에서 $x=10$ 일 때 최댓값 100을 가지므로

직사각형의 넓이의 최댓값은 100이다.



II-3. 여러 가지 방정식

01 삼차방정식과 사차방정식

50~56쪽

1 23	2 ③	3 ③	4 -1	5 2
6 ①	7 9	8 ①	9 ②	10 ⑤
11 0	12 ④	13 -1	14 ①	15 0
16 ④	17 ③	18 1	19 $k \leq \frac{1}{2}$	20 ③
21 7	22 7	23 6	24 4cm 또는 8cm	
25 3cm	26 ①	27 ⑤	28 ④	29 2
30 7	31 35	32 ③	33 ④	34 26
35 $x^3-2x^2-1=0$	36 5	37 ④	38 ①	
39 ⑤	40 ①	41 ②	42 ④	43 1
44 ⑤	45 6	46 $\frac{3}{7}$	47 ②	48 27

- 1 $f(x)=x^3-9x^2+13x+23$ 이라 하면 $f(-1)=0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -9 & 13 & 23 \\ & & -1 & 10 & -23 \\ \hline & 1 & -10 & 23 & 0 \end{array}$$

주어진 방정식은 $(x+1)(x^2-10x+23)=0$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=5 \pm \sqrt{2}$$

따라서 모든 양의 근의 곱은 $(5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})=23$

- 2 $f(x)=x^4+2x^3+x^2-2x-2$ 라 하면 $f(-1)=0$,
 $f(1)=0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ & & -1 & -1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ & & 1 & 2 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 0 & \end{array}$$

주어진 방정식은 $(x+1)(x-1)(x^2+2x+2)=0$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=-1 \pm i$$

따라서 모든 실근의 합은 $-1+1=0$

- 3 $f(x)=x^3+2x^2-3x-10$ 이라 하면 $f(2)=0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & -3 & -10 \\ & & 2 & 8 & 10 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & 0 \end{array}$$

주어진 방정식은 $(x-2)(x^2+4x+5)=0$

두 허근 α, β 는 이차방정식 $x^2+4x+5=0$ 의 근이므로

$$\alpha+\beta=-4, \alpha\beta=5$$

$$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$=(-4)^3-3 \times 5 \times (-4)=-4$$

- 4 $f(x)=x^4-3x^3+3x^2+x-6$ 이라 하면 $f(-1)=0$,
 $f(2)=0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -3 & 3 & 1 & -6 \\ & & -1 & 4 & -7 & 6 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 7 & -6 & 0 \\ & & 2 & -4 & 6 & \\ \hline & 1 & -2 & 3 & 0 & \end{array}$$

주어진 방정식은 $(x+1)(x-2)(x^2-2x+3)=0$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=1 \pm \sqrt{2}i$$

두 실근은 $-1, 2$ 이므로

$$\alpha+\beta=1$$

두 허근 γ, δ 는 이차방정식 $x^2-2x+3=0$ 의 근이므로

$$\gamma+\delta=2, \gamma\delta=3$$

$$\therefore \gamma^2+\delta^2=(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta$$

$$=2^2-2 \times 3=-2$$

$$\therefore \alpha+\beta+\gamma^2+\delta^2=1+(-2)=-1$$

- 5 $x^2-x=t$ 로 놓으면 $t^2-5t+6=0$

$$(t-2)(t-3)=0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=3$$

(i) $t=2$ 일 때

$$x^2-x-2=0, (x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

(ii) $t=3$ 일 때

$$x^2-x-3=0 \quad \therefore x=\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

(i), (ii)에서 모든 실근의 합은

$$-1+2+\frac{1-\sqrt{13}}{2}+\frac{1+\sqrt{13}}{2}=2$$

- 6 $x^2+2x=t$ 로 놓으면 $(t-2)(t-6)+3=0$

$$t^2-8t+15=0, (t-3)(t-5)=0$$

$$\therefore t=3 \text{ 또는 } t=5$$

(i) $t=3$ 일 때

$$x^2+2x-3=0, (x+3)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

(ii) $t=5$ 일 때

$$x^2+2x-5=0 \quad \therefore x=-1 \pm \sqrt{6}$$

(i), (ii)에서 모든 음의 근의 합은

$$-3+(-1-\sqrt{6})=-4-\sqrt{6}$$

- 7 $\{(x+1)(x+3)\}(x+2)^2=20$

$$(x^2+4x+3)(x^2+4x+4)=20$$

$$x^2+4x=t \text{로 놓으면 } (t+3)(t+4)=20$$

$$t^2+7t-8=0, (t+8)(t-1)=0$$

$$\therefore t=-8 \text{ 또는 } t=1$$

(i) $t = -8$ 일 때

$x^2 + 4x + 8 = 0$ 이므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = 4 - 8 = -4 < 0$$

따라서 두 허근의 곱은 8이므로 $b = 8$

(ii) $t = 1$ 일 때

$x^2 + 4x - 1 = 0$ 이므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2 이라 하면

$$\frac{D_2}{4} = 4 + 1 = 5 > 0$$

따라서 두 실근의 곱은 -1 이므로 $a = -1$

(i), (ii)에서 $b - a = 8 - (-1) = 9$

8 $(x-1)(x-3)(x-2)(x-4) = 120$

$$\{(x-1)(x-4)\}\{(x-3)(x-2)\} = 120$$

$$(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 120$$

$$x^2 - 5x = t \text{로 놓으면 } (t+4)(t+6) = 120$$

$$t^2 + 10t - 96 = 0, (t+16)(t-6) = 0$$

$$\therefore t = -16 \text{ 또는 } t = 6$$

(i) $t = -16$ 일 때

$x^2 - 5x + 16 = 0$ 이므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = 25 - 64 = -39 < 0$$

(ii) $t = 6$ 일 때

$x^2 - 5x - 6 = 0$ 이므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2 이라 하면

$$D_2 = 25 + 24 = 49 > 0$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 한 허근 ω 는 이차방정식

$$x^2 - 5x + 16 = 0 \text{의 한 허근이므로}$$

$$\omega^2 - 5\omega + 16 = 0 \quad \therefore \omega^2 - 5\omega = -16$$

9 $x^2 = t$ 로 놓으면 $t^2 + 9t - 36 = 0$

$$(t+12)(t-3) = 0 \quad \therefore t = -12 \text{ 또는 } t = 3$$

$$\text{즉, } x^2 = -12 \text{ 또는 } x^2 = 3 \text{이므로}$$

$$x = \pm 2\sqrt{3}i \text{ 또는 } x = \pm \sqrt{3}$$

$$\text{따라서 모든 실근의 곱은 } -\sqrt{3} \times \sqrt{3} = -3$$

10 $(x^4 - 4x^2 + 4) - 4x^2 = 0, (x^2 - 2)^2 - (2x)^2 = 0$

$$(x^2 + 2x - 2)(x^2 - 2x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \pm \sqrt{3} \text{ 또는 } x = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } \alpha = 1 + \sqrt{3}, \beta = -1 - \sqrt{3} \text{이므로 } \alpha + \beta = 0$$

11 $(x^4 + 8x^2 + 16) - 4x^2 = 0, (x^2 + 4)^2 - (2x)^2 = 0$

$$(x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$\therefore x^2 + 2x + 4 = 0 \text{ 또는 } x^2 - 2x + 4 = 0$$

이차방정식 $x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β , 이차방정식

$x^2 - 2x + 4 = 0$ 의 두 근을 γ, δ 로 생각하면

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = 4, \gamma + \delta = 2, \gamma\delta = 4$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \frac{\gamma + \delta}{\gamma\delta} = \frac{-2}{4} + \frac{2}{4} = 0$$

12 $x \neq 0$ 이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 - 3x + 2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = t \text{로 놓으면 } t^2 - 3t = 0$$

$$t(t-3) = 0 \quad \therefore t = 0 \text{ 또는 } t = 3$$

(i) $t = 0$ 일 때

$$x + \frac{1}{x} = 0, x^2 + 1 = 0 \quad \therefore x = \pm i$$

(ii) $t = 3$ 일 때

$$x + \frac{1}{x} - 3 = 0, x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 실근은 $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ 이다.

13 $x \neq 0$ 이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2 으로 나누면

$$2x^2 + 3x - 1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = t \text{로 놓으면 } 2t^2 + 3t - 5 = 0$$

$$(2t+5)(t-1) = 0 \quad \therefore t = -\frac{5}{2} \text{ 또는 } t = 1$$

(i) $t = -\frac{5}{2}$ 일 때

$$x + \frac{1}{x} + \frac{5}{2} = 0, 2x^2 + 5x + 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = 25 - 16 = 9 > 0$$

(ii) $t = 1$ 일 때

$$x + \frac{1}{x} - 1 = 0, x^2 - x + 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = 1 - 4 = -3 < 0$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 허근 α, β 는 이차방정식

$$x^2 - x + 1 = 0 \text{의 두 근이므로}$$

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{1^2 - 2 \times 1}{1} = -1 \end{aligned}$$

14 $x \neq 0$ 이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 + 6x + 11 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = t \text{로 놓으면 } t^2 + 6t + 9 = 0$$

$$(t+3)^2 = 0 \quad \therefore t = -3$$

$$\text{따라서 } x + \frac{1}{x} = -3 \text{이므로 } \alpha + \frac{1}{\alpha} = -3$$

$$\therefore \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 4 = (-3)^2 - 4 = 5$$

$$\therefore \left|\alpha - \frac{1}{\alpha}\right| = \sqrt{5}$$

15 $x=1$ 을 주어진 방정식에 대입하면

$$1 - (a+1) + 2a - 1 = 0 \quad \therefore a = 1$$

$$\text{주어진 방정식은 } x^3 - 2x + 1 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ & & 1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\therefore (x-1)(x^2+x-1)=0$$

따라서 α, β 는 이차방정식 $x^2+x-1=0$ 의 두 근이므로 $\alpha+\beta=-1$

$$\therefore \alpha + \alpha + \beta = 1 + (-1) = 0$$

16 $x=-2$ 를 주어진 방정식에 대입하면

$$16 + 8 + 4a - 2 + 6 = 0 \quad \therefore a = -7$$

$$\text{주어진 방정식은 } x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$$

$$f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 \text{이라 하면 } f(1) = 0 \text{이므로}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ & & -2 & 6 & 2 & -6 \\ \hline 1 & 1 & -3 & -1 & 3 & 0 \\ & & 1 & -2 & -3 & \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$(x+2)(x-1)(x^2-2x-3)=0 \text{이므로}$$

$$(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 가장 큰 실근은 3이므로 $b=3$

$$\therefore a+b = -7+3 = -4$$

17 $x=-2, x=3$ 을 주어진 방정식에 각각 대입하면

$$-8 + 4a - 2a + 6 + b = 0, 27 + 9a + 3a - 9 + b = 0$$

$$\therefore 2a+b=2, 12a+b=-18$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2, b=6$

$$\text{주어진 방정식은 } x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & -2 & 8 & -6 \\ \hline 3 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ & & 3 & -3 & \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\therefore (x+2)(x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 나머지 한 근은 1이다.

18 $x=-1, x=2$ 를 주어진 방정식에 각각 대입하면

$$1+6+a-b-2=0, 16-48+4a+2b-2=0$$

$$\therefore a-b=-5, 2a+b=17$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4, b=9$

$$\text{주어진 방정식은 } x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 9x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -6 & 4 & 9 & -2 \\ & & -1 & 7 & -11 & 2 \\ \hline 2 & 1 & -7 & 11 & -2 & 0 \\ & & 2 & -10 & 2 & \\ \hline & 1 & -5 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\therefore (x+1)(x-2)(x^2-5x+1)=0$$

따라서 주어진 방정식의 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2-5x+1=0$ 의 두 근이므로 그 곱은 1이다.

19 $f(x) = x^3 + x^2 + 2(k-1)x - 2k$ 라 하면 $f(1) = 0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 2k-2 & -2k \\ & & 1 & 2 & 2k \\ \hline & 1 & 2 & 2k & 0 \end{array}$$

$$\text{주어진 방정식은 } (x-1)(x^2+2x+2k)=0$$

이 방정식의 근이 모두 실수이려면 이차방정식 $x^2+2x+2k=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = 1 - 2k \geq 0 \quad \therefore k \leq \frac{1}{2}$$

20 $f(x) = x^3 - 4x^2 + (3k-1)x - 6k + 10$ 이라 하면

$$f(2) = 0 \text{이므로}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 3k-1 & -6k+10 \\ & & 2 & -4 & 6k-10 \\ \hline & 1 & -2 & 3k-5 & 0 \end{array}$$

$$\text{주어진 방정식은 } (x-2)(x^2-2x+3k-5)=0$$

이 방정식이 한 실근과 두 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2-2x+3k-5=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = 1 - (3k-5) < 0 \quad \therefore k > 2$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 3이다.

21 $f(x) = x^3 - 7x^2 + (a+6)x - a$ 라 하면 $f(1) = 0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -7 & a+6 & -a \\ & & 1 & -6 & a \\ \hline & 1 & -6 & a & 0 \end{array}$$

주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-6x+a)=0$
 이 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2-6x+a=0$ 이 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-6x+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=9-a>0 \quad \therefore a<9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$x^2-6x+a=0$ 에서 $x \neq 1$ 이어야 하므로

$$1-6+a \neq 0 \quad \therefore a \neq 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒}$ 에서 $a < 5$ 또는 $5 < a < 9$

따라서 자연수 a 는 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8의 7개이다.

- 22** $f(x)=x^3-5x^2+(a+4)x-a$ 라 하면 $f(1)=0$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & a+4 & -a \\ & & 1 & -4 & a \\ \hline & 1 & -4 & a & 0 \end{array}$$

주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-4x+a)=0$

이 방정식이 중근을 가지려면 이차방정식

$x^2-4x+a=0$ 이 1과 다른 한 실근을 갖거나 1이 아닌 중근을 가져야 한다.

(i) $x^2-4x+a=0$ 이 1을 근으로 갖는 경우

$x=1$ 을 대입하면

$$1-4+a=0 \quad \therefore a=3 \quad \blacktriangleleft x^2-4x+3=0 \text{의 근은 } 1, 3$$

(ii) $x^2-4x+a=0$ 이 1이 아닌 중근을 갖는 경우

판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4-a=0 \quad \therefore a=4 \quad \blacktriangleleft x^2-4x+4=0 \text{의 근은 } 2(\text{중근})$$

(i), (ii)에서 모든 실수 a 의 값의 합은 $3+4=7$

- 23** 모서리의 길이를 x 만큼 늘인다고 하면

$$(3+x)(2+x)(1+x)=3 \times 2 \times 1 \times 20$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 6 & 11 & -114 \\ & & 3 & 27 & 114 \\ \hline & 1 & 9 & 38 & 0 \end{array}$$

따라서 새로운 직육면체의 가로의 길이는 6이다.

- 24** 그릇 A의 밑면의 반지름의 길이를 x cm라 하면 높이는 $2x$ cm이므로

$$\pi x^2 \times 2x + 16\pi = \frac{1}{2} \times \pi (x+2)^2 \times 2x$$

$$x^3-4x^2-4x+16=0$$

$$x^2(x-4)-4(x-4)=0, (x^2-4)(x-4)=0$$

$$(x+2)(x-2)(x-4)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=4 (\because x>0)$$

따라서 그릇 A의 높이는 4cm 또는 8cm이다.

- 25** 쌓기나무 한 개의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면

$$a=3x^3, b=14x^2$$

$$b-a=45 \text{에서 } 14x^2-3x^3=45$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 3 & -14 & 0 & 45 \\ & & 9 & -15 & -45 \\ \hline & 3 & -5 & -15 & 0 \end{array}$$

$$\therefore x=3 (\because x \text{는 자연수})$$

따라서 쌓기나무 한 개의 한 모서리의 길이는 3cm이다.

- 26** $\alpha+\beta+\gamma=-1, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2, \alpha\beta\gamma=-3$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} + \frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma} + \frac{\gamma+\alpha}{\gamma\alpha} &= \frac{2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma} \\ &= \frac{2 \times 2}{-3} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

- 27** $\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2, \alpha\beta\gamma=-1$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 &= (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) \\ &= 2^2 - 2 \times (-1) \times \frac{3}{2} \\ &= 7 \end{aligned}$$

- 28** $\alpha+\beta+\gamma=0, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5, \alpha\beta\gamma=6$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 &= (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma \\ &= 0+3 \times 6 \\ &= 18 \end{aligned}$$

- 29** $\alpha+\beta+\gamma=2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3, \alpha\beta\gamma=4$

$\alpha+\beta+\gamma=2$ 에서 $\alpha+\beta=2-\gamma, \beta+\gamma=2-\alpha, \gamma+\alpha=2-\beta$ 이므로

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) &= (2-\gamma)(2-\alpha)(2-\beta) \\ &= 8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma \\ &= 8-4 \times 2+2 \times 3-4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

- 30** $\alpha+\beta+\gamma=-a, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1, \alpha\beta\gamma=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=1$ 에서

$$\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1=1$$

$\textcircled{㉑}$ 을 대입하면

$$2+1+(-a)+1=1 \quad \therefore a=3$$

따라서 $\alpha+\beta+\gamma=-3$ 이므로

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 &= (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\ &= (-3)^2 - 2 \times 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

- 31 정수인 세 근을 $\alpha-1$, α , $\alpha+1$ (α 는 정수)이라 하면

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)=60$$

$$\alpha^3-\alpha-60=0$$

$$(\alpha-4)(\alpha^2+4\alpha+15)=0$$

$$\therefore \alpha=4 (\because \alpha \text{는 정수})$$

따라서 주어진 삼차방정식의

세 근이 3, 4, 5이므로

$$3+4+5=-a \quad \therefore a=-12$$

$$3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 3 = b \quad \therefore b=47$$

$$\therefore a+b=-12+47=35$$

- 32 이차방정식 $x^2-2x-2b=0$ 의 두 근을 α , β , 삼차방정식

$$2x^3-5x^2-2ax+8=0$$
의 나머지 한 근을 γ 라 하면

$$\alpha+\beta=2, \alpha+\beta+\gamma=\frac{5}{2} \quad \therefore \gamma=\frac{1}{2}$$

$x=\frac{1}{2}$ 을 주어진 삼차방정식에 대입하면

$$\frac{1}{4}-\frac{5}{4}-a+8=0 \quad \therefore a=7$$

$$\alpha\beta=-2b, \alpha\beta\gamma=-4$$
이므로

$$-2b \times \frac{1}{2} = -4 \quad \therefore b=4$$

$$\therefore a-b=7-4=3$$

- 33 $\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$, $\alpha\beta\gamma=-2$ 이므로

세 근 $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \alpha\beta \times \beta\gamma + \beta\gamma \times \gamma\alpha + \gamma\alpha \times \alpha\beta &= \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) \\ &= -2 \times (-1) = 2 \end{aligned}$$

$$\alpha\beta \times \beta\gamma \times \gamma\alpha = (\alpha\beta\gamma)^2 = (-2)^2 = 4$$

따라서 구하는 삼차방정식은 $x^3+2x-4=0$

- 34 $\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$, $\alpha\beta\gamma=-4$ 이므로

세 근 $\frac{1}{\alpha\beta}$, $\frac{1}{\beta\gamma}$, $\frac{1}{\gamma\alpha}$ 에 대하여

$$\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma} = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha\beta} \times \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma} \times \frac{1}{\gamma\alpha} + \frac{1}{\gamma\alpha} \times \frac{1}{\alpha\beta} &= \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(\alpha\beta\gamma)^2} \\ &= \frac{-2}{(-4)^2} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\alpha\beta} \times \frac{1}{\beta\gamma} \times \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{1}{(\alpha\beta\gamma)^2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$$

따라서 x^3 의 계수가 a 인 삼차방정식은

$$a\left(x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\right) = 0$$

$$\therefore ax^3 + \frac{3}{4}ax^2 - \frac{a}{8}x - \frac{a}{16} = 0$$

$$\text{따라서 } b = \frac{3}{4}a, c = -\frac{a}{8}, -1 = -\frac{a}{16} \text{이므로}$$

$$a=16, b=12, c=-2 \quad \therefore a+b+c=26$$

- 35 $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=-1$

$$\alpha+\beta+\gamma=0 \text{에서 } \alpha+\beta=-\gamma, \beta+\gamma=-\alpha,$$

$$\gamma+\alpha=-\beta \text{이므로}$$

$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2} = \frac{-\alpha}{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha}, \frac{\gamma+\alpha}{\beta^2} = \frac{-\beta}{\beta^2} = -\frac{1}{\beta},$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2} = \frac{-\gamma}{\gamma^2} = -\frac{1}{\gamma}$$

세 근 $-\frac{1}{\alpha}$, $-\frac{1}{\beta}$, $-\frac{1}{\gamma}$ 에 대하여

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\alpha} + \left(-\frac{1}{\beta}\right) + \left(-\frac{1}{\gamma}\right) &= -\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \\ &= -\frac{2}{-1} = 2 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\alpha} \times \left(-\frac{1}{\beta}\right) + \left(-\frac{1}{\beta}\right) \times \left(-\frac{1}{\gamma}\right) + \left(-\frac{1}{\gamma}\right) \times \left(-\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma} = 0$$

$$-\frac{1}{\alpha} \times \left(-\frac{1}{\beta}\right) \times \left(-\frac{1}{\gamma}\right) = -\frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 1$$

따라서 구하는 삼차방정식은 $x^3-2x^2-1=0$

- 36 $1-\sqrt{2}$ 가 근이면 $1+\sqrt{2}$ 도 근이므로 세 근 $1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$,
2에 대하여

$$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2}) \times 2 + 2(1-\sqrt{2}) = \frac{b}{a}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = 3$$

$$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) \times 2 = -\frac{c}{a} \quad \therefore \frac{c}{a} = 2$$

$$\therefore \frac{b+c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 3+2=5$$

- 37 $2-\sqrt{3}$ 이 근이면 $2+\sqrt{3}$ 도 근이므로 나머지 한 근을 α 라
하면

$$(2-\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3}) + \alpha = 5 \quad \therefore \alpha = 1$$

따라서 나머지 두 근의 곱은 $(2+\sqrt{3}) \times 1 = 2+\sqrt{3}$

- 38 $\frac{1+\sqrt{7}i}{2}$ 가 근이면 $\frac{1-\sqrt{7}i}{2}$ 도 근이고 나머지 한 근은 α 이
므로

$$\frac{1+\sqrt{7}i}{2} + \frac{1-\sqrt{7}i}{2} + \alpha = 0 \quad \therefore \alpha = -1$$

$$\frac{1+\sqrt{7}i}{2} \times \frac{1-\sqrt{7}i}{2} \times (-1) = -k \quad \therefore k=2$$

$$\therefore k+\alpha=2+(-1)=1$$

- 39 $4-2\sqrt{2}$ 가 근이면 $4+2\sqrt{2}$ 도 근이므로 나머지 한 근을 α
라 하면

$$(4-2\sqrt{2}) + (4+2\sqrt{2}) + \alpha = m$$

$$\therefore \alpha = m-8 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$(4-2\sqrt{2})(4+2\sqrt{2})\alpha=2m-4$$

$$\therefore 4\alpha=m-2 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $\alpha=2, m=10$

40 $1-i$ 가 근이면 $1+i$ 도 근이고 나머지 한 근은 c 이므로

$$(1-i)+(1+i)+c=4 \quad \therefore c=2$$

$$(1-i)(1+i)+(1+i)\times 2+2(1-i)=a \quad \therefore a=6$$

$$(1-i)(1+i)\times 2=-b \quad \therefore b=-4$$

세 근 6, -4, 2에 대하여

$$6+(-4)+2=4$$

$$6\times(-4)+(-4)\times 2+2\times 6=-20$$

$$6\times(-4)\times 2=-48$$

따라서 구하는 삼차방정식은 $x^3-4x^2-20x+48=0$

41 방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 에서 $1+\sqrt{3}i$ 가 근이면

$1-\sqrt{3}i$ 도 근이다.

이때 이차방정식 $x^2+ax+2=0$ 의 계수가 실수이므로 한 근이 $1+\sqrt{3}i$ 이면 $1-\sqrt{3}i$ 도 근이다.

그런데 $(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=4\neq 2$ 이므로 $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i$ 는 이차방정식 $x^2+ax+2=0$ 의 두 근이 될 수 없다.

이차방정식 $x^2+ax+2=0$ 의 한 근이 m 이므로 다른 한 근을 n 이라 하면

$$m+n=-a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

공통인 근이 m 이므로 방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 의 세 근 $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, m$ 에 대하여

$$(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)+m=-a$$

$$\therefore 2+m=-a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$m+n=2+m \quad \therefore n=2$$

따라서 이차방정식 $x^2+ax+2=0$ 의 두 근이 $m, 2$ 이므로 $m\times 2=2 \quad \therefore m=1$

42 $\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0, \omega+\bar{\omega}=-1, \omega\bar{\omega}=1$

$$\textcircled{1} \quad \omega^2+\omega=-1$$

$$\textcircled{2} \quad \omega+\bar{\omega}=-1$$

$$\textcircled{3} \quad \omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$$

$$\textcircled{4} \quad \omega^2+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^3+1}{\omega}=\frac{2}{\omega}$$

$$\textcircled{5} \quad \omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\omega^2+\frac{\omega^3}{\omega^2}=\omega^2+\omega=-1$$

따라서 그 값이 다른 하나는 ④이다.

43 $\omega^2-\omega+1=0, \bar{\omega}^2-\bar{\omega}+1=0, \omega+\bar{\omega}=1$ 이므로

$$\frac{\omega^2}{\omega^2+1}+\frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}^2+1}=\frac{\omega^2}{\omega}+\frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}}=\omega+\bar{\omega}=1$$

44 $\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$ 이므로

$$\begin{aligned} (\omega^2-2\omega+1)^{60}+(\omega^2-\omega-1)^{60} &= (-3\omega)^{60}+(2\omega^2)^{60} \\ &= 3^{60}(\omega^3)^{20}+2^{60}(\omega^3)^{40} \\ &= 3^{60}+2^{60} \end{aligned}$$

45 $\omega^3=-1, \omega^2-\omega+1=0$ 이므로

$$\begin{aligned} \omega^4-2\omega^3+3\omega^2-4\omega+5 &= \omega^3\times\omega-2\times(-1)+3(\omega-1)-4\omega+5 \\ &= -\omega+2+3\omega-3-4\omega+5=-2\omega+4 \end{aligned}$$

따라서 $a=-2, b=4$ 이므로 $b-a=6$

46 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로

$$\omega^2+\omega+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \omega+\bar{\omega}=-1, \omega\bar{\omega}=1$$

①의 양변에 $\omega-1$ 을 곱하면

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0, \omega^3-1=0 \quad \therefore \omega^3=1$$

$$\therefore z=\frac{\omega^3+2\omega}{\omega^3+3\omega}=\frac{1+2\omega}{1+3\omega}$$

$$\begin{aligned} \therefore z\bar{z} &= \frac{1+2\omega}{1+3\omega} \times \overline{\left(\frac{1+2\omega}{1+3\omega}\right)} = \frac{1+2\omega}{1+3\omega} \times \frac{1+2\bar{\omega}}{1+3\bar{\omega}} \\ &= \frac{1+2(\omega+\bar{\omega})+4\omega\bar{\omega}}{1+3(\omega+\bar{\omega})+9\omega\bar{\omega}} \\ &= \frac{1+2\times(-1)+4\times 1}{1+3\times(-1)+9\times 1} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

47 $\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$

$$\textcircled{1}. \quad \frac{\omega}{\omega+1}-\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega}{\omega+1}-\frac{1}{-\omega-1}=\frac{\omega+1}{\omega+1}=1$$

$$\textcircled{2}. \quad (\omega^3+1)(\omega^2+1)(\omega+1) \\ = (1+1)\times(-\omega)\times(-\omega^2)=2\omega^3=2$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3}. \quad \frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{\omega^3+1}+\dots+\frac{1}{\omega^{20}+1} \\ = \left(\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{2}\right) \\ +\dots+\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1} \end{aligned}$$

$$= 6\left(\frac{1}{-\omega^2}+\frac{1}{-\omega}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{-\omega^2}+\frac{1}{-\omega}$$

$$= 6\left(\frac{1+\omega}{-\omega^2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1+\omega}{-\omega^2}$$

$$= 6\left(\frac{\omega+1}{\omega+1}+\frac{1}{2}\right)+\frac{\omega+1}{\omega+1}=6\times\frac{3}{2}+1=10$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ③이다.

48 $\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$ 이므로

$$\begin{aligned} \omega^{4n}+(\omega+1)^{4n}+1 &= (\omega^4)^n+(-\omega^2)^n+1 \\ &= (\omega^3\times\omega)^n+(\omega^3)^n+1 \\ &= \omega^n+\omega^{2n}+1 \\ &= \omega^{2n}+\omega^n+1 \end{aligned}$$

음이 아닌 정수 k 에 대하여

(i) $n=3k+1$ 일 때

$$\omega^n = \omega^{3k+1} = (\omega^3)^k \times \omega = \omega$$

$$\omega^{2n} = (\omega^n)^2 = \omega^2$$

$$\therefore \omega^{2n} + \omega^n + 1 = \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

(ii) $n=3k+2$ 일 때

$$\omega^n = \omega^{3k+2} = (\omega^3)^k \times \omega^2 = \omega^2$$

$$\omega^{2n} = (\omega^n)^2 = (\omega^2)^2 = \omega^4 = \omega$$

$$\therefore \omega^{2n} + \omega^n + 1 = \omega + \omega^2 + 1 = 0$$

(iii) $n=3k+3$ 일 때

$$\omega^n = \omega^{3k+3} = (\omega^3)^{k+1} = 1$$

$$\omega^{2n} = (\omega^n)^2 = 1^2 = 1$$

$$\therefore \omega^{2n} + \omega^n + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

(i), (ii), (iii)에서 $\omega^{4n} + (\omega+1)^{4n} + 1 = 0$ 을 만족시키는 자연수 n 은 $n=3k+1$ 또는 $n=3k+2$ 꼴이다.

따라서 40 이하의 자연수 n 의 개수는

$$40 - (40 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수의 개수}) = 40 - 13 = 27$$

02 연립이차방정식

57~60쪽

1 ③	2 1	3 ②	4 (-3, -1), (3, 1)
5 ①	6 6	7 ②	8 ④
10 ③	11 ⑤	12 24	13 ②
15 ②	16 ④	17 5	18 4
20 15	21 ③	22 40	23 ②
25 ②	26 $x=-1, y=3$		

1 $x-y+1=0$ 에서 $y=x+1$

이를 $x^2-2y^2-2=0$ 에 대입하면

$$x^2-2(x+1)^2-2=0$$

$$x^2+4x+4=0, (x+2)^2=0 \quad \therefore x=-2$$

이를 $y=x+1$ 에 대입하면 $y=-1$

$$\therefore \alpha=-2, \beta=-1$$

$$\therefore \alpha+\beta=-3$$

2 $2x-y=4$ 에서 $y=2x-4$

이를 $x^2+2xy-2y^2=13$ 에 대입하면

$$x^2+2x(2x-4)-2(2x-4)^2=13$$

$$x^2-8x+15=0, (x-3)(x-5)=0$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=5$$

이를 각각 $y=2x-4$ 에 대입하면

$$x=3 \text{ 일 때 } y=2, x=5 \text{ 일 때 } y=6$$

$$\therefore x-y=1 \text{ 또는 } x-y=-1$$

따라서 $x-y$ 의 최댓값은 1이다.

3 두 연립방정식의 공통인 해는 $\begin{cases} x-y=4 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$ 의 해와 같다.

$$x-y=4 \text{ 에서 } y=x-4$$

이를 $x^2+y^2=10$ 에 대입하면

$$x^2+(x-4)^2=10, x^2-4x+3=0$$

$$(x-1)(x-3)=0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

이를 각각 $y=x-4$ 에 대입하면

$$x=1 \text{ 일 때 } y=-3, x=3 \text{ 일 때 } y=-1$$

$$\text{이때 } ab=xy\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=x+y \text{ 이므로}$$

$$ab=-2 \text{ 또는 } ab=2$$

따라서 모든 ab 의 값의 합은 $-2+2=0$

4 $3x^2-8xy-3y^2=0$ 에서 $(3x+y)(x-3y)=0$

$$\therefore y=-3x \text{ 또는 } x=3y$$

(i) $y=-3x$ 일 때

이를 $x^2+3y^2=12$ 에 대입하면

$$x^2+27x^2=12, x^2=\frac{3}{7}$$

$$\therefore x=-\frac{\sqrt{21}}{7} \text{ 또는 } x=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

그런데 x 는 정수이므로 해는 없다.

(ii) $x=3y$ 일 때

이를 $x^2+3y^2=12$ 에 대입하면

$$9y^2+3y^2=12, y^2=1 \quad \therefore y=-1 \text{ 또는 } y=1$$

이를 각각 $x=3y$ 에 대입하면

$$y=-1 \text{ 일 때 } x=-3, y=1 \text{ 일 때 } x=3$$

(i), (ii)에서 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는

$$(-3, -1), (3, 1)$$

5 $x^2-3xy+2y^2=0$ 에서 $(x-y)(x-2y)=0$

$$\therefore x=y \text{ 또는 } x=2y$$

(i) $x=y$ 일 때

이를 $x^2-y^2=9$ 에 대입하면

$$y^2-y^2=9, 0 \times y^2=9$$

이를 만족시키는 y 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $x=2y$ 일 때

이를 $x^2-y^2=9$ 에 대입하면

$$4y^2-y^2=9, y^2=3 \quad \therefore y=-\sqrt{3} \text{ 또는 } y=\sqrt{3}$$

이를 각각 $x=2y$ 에 대입하면

$$y=-\sqrt{3} \text{ 일 때 } x=-2\sqrt{3}, y=\sqrt{3} \text{ 일 때 } x=2\sqrt{3}$$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=-2\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\therefore \alpha_1=-2\sqrt{3}, \beta_1=-\sqrt{3}, \alpha_2=2\sqrt{3}, \beta_2=\sqrt{3} (\because \alpha_1 < \alpha_2)$$

$$\therefore \beta_1-\beta_2=-\sqrt{3}-\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$$

6 $2x^2+3xy-2y^2=0$ 에서 $(x+2y)(2x-y)=0$

$\therefore x=-2y$ 또는 $y=2x$

(i) $x=-2y$ 일 때

이를 $x^2+xy=12$ 에 대입하면

$4y^2-2y^2=12, y^2=6 \quad \therefore y=-\sqrt{6}$ 또는 $y=\sqrt{6}$

그런데 y 는 자연수이므로 해는 없다.

(ii) $y=2x$ 일 때

이를 $x^2+xy=12$ 에 대입하면

$x^2+2x^2=12, x^2=4 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=2$

그런데 x 는 자연수이므로 $x=2$

이를 $y=2x$ 에 대입하면 $y=4$

$\therefore x+y=6$

(i), (ii)에서 $x+y=6$

7 $x^2-xy-6y^2=0$ 에서 $(x+2y)(x-3y)=0$

$\therefore x=-2y$ 또는 $x=3y$

(i) $x=-2y$ 일 때

이를 $x^2+2xy-3y^2=24$ 에 대입하면

$4y^2-4y^2-3y^2=24, y^2=-8$

$\therefore y=-2\sqrt{2}i$ 또는 $y=2\sqrt{2}i$

그런데 y 는 실수이므로 해는 없다.

(ii) $x=3y$ 일 때

이를 $x^2+2xy-3y^2=24$ 에 대입하면

$9y^2+6y^2-3y^2=24, y^2=2$

$\therefore y=-\sqrt{2}$ 또는 $y=\sqrt{2}$

이를 각각 $x=3y$ 에 대입하면

$y=-\sqrt{2}$ 일 때 $x=-3\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$ 일 때 $x=3\sqrt{2}$

$\therefore xy=6$

(i), (ii)에서 $xy=6$

8 $12x^2+7xy-12y^2=0$ 에서 $(3x+4y)(4x-3y)=0$

$\therefore x=-\frac{4}{3}y$ 또는 $x=\frac{3}{4}y$

(i) $x=-\frac{4}{3}y$ 일 때

이를 $x^2+y^2=25$ 에 대입하면

$\frac{16}{9}y^2+y^2=25, y^2=9 \quad \therefore y=-3$ 또는 $y=3$

이를 각각 $x=-\frac{4}{3}y$ 에 대입하면

$y=-3$ 일 때 $x=4$, $y=3$ 일 때 $x=-4$

$\therefore x+y=1$ 또는 $x+y=-1$

(ii) $x=\frac{3}{4}y$ 일 때

이를 $x^2+y^2=25$ 에 대입하면

$\frac{9}{16}y^2+y^2=25, y^2=16 \quad \therefore y=-4$ 또는 $y=4$

이를 각각 $x=\frac{3}{4}y$ 에 대입하면

$y=-4$ 일 때 $x=-3$, $y=4$ 일 때 $x=3$

$\therefore x+y=-7$ 또는 $x+y=7$

(i), (ii)에서 $x+y$ 의 최댓값은 7이다.

9 두 연립방정식의 공통인 해는 $\begin{cases} 2x^2-xy+y^2=16 \\ 6x^2-5xy+y^2=0 \end{cases}$ 의 해와 같다.

$6x^2-5xy+y^2=0$ 에서 $(2x-y)(3x-y)=0$

$\therefore y=2x$ 또는 $y=3x$

(i) $y=2x$ 일 때

이를 $2x^2-xy+y^2=16$ 에 대입하면

$2x^2-2x^2+4x^2=16, x^2=4$

$y=2x$ 에서 $y^2=4x^2$ 이므로 $y^2=16$

$x^2=4, y^2=16$ 을 각각 $ax^2+by^2=-8$,

$ax^2-by^2=28$ 에 대입하면

$4a+16b=-8, 4a-16b=28$

$\therefore a+4b=-2, a-4b=7$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{5}{2}, b=-\frac{9}{8}$

(ii) $y=3x$ 일 때

이를 $2x^2-xy+y^2=16$ 에 대입하면

$2x^2-3x^2+9x^2=16, x^2=2$

$y=3x$ 에서 $y^2=9x^2$ 이므로 $y^2=18$

$x^2=2, y^2=18$ 을 각각 $ax^2+by^2=-8$,

$ax^2-by^2=28$ 에 대입하면

$2a+18b=-8, 2a-18b=28$

$\therefore a+9b=-4, a-9b=14$

두 식을 연립하여 풀면 $a=5, b=-1$

(i), (ii)에서 정수 a, b 의 값은 $a=5, b=-1$

$\therefore ab=-5$

10 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면 $\begin{cases} u^2-2v=17 \\ v=4 \end{cases}$

$v=4$ 를 $u^2-2v=17$ 에 대입하면

$u^2-8=17, u^2=25 \quad \therefore u=-5$ 또는 $u=5$

그런데 x, y 가 자연수이면 $x+y=u$ 이므로 $u>0$

$\therefore u=5, v=4 \quad \therefore x+y=5, xy=4$

x, y 는 이차방정식 $t^2-5t+4=0$ 의 두 근이므로

$(t-1)(t-4)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=4$

따라서 순서쌍 (x, y) 는 $(1, 4), (4, 1)$ 의 2개이다.

11 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면 $\begin{cases} v+u=-1 \\ u^2+v=5 \end{cases}$

$v+u=-1$ 에서 $v=-u-1$

이를 $u^2+v=5$ 에 대입하면

$$u^2+(-u-1)=5, u^2-u-6=0$$

$$(u+2)(u-3)=0 \quad \therefore u=-2 \text{ 또는 } u=3$$

이를 각각 $v=-u-1$ 에 대입하면

$$u=-2 \text{ 일 때 } v=1, u=3 \text{ 일 때 } v=-4$$

(i) $u=-2, v=1$, 즉 $x+y=-2, xy=1$ 일 때

x, y 는 이차방정식 $t^2+2t+1=0$ 의 두 근이므로

$$(t+1)^2=0 \quad \therefore t=-1$$

$$\therefore x=-1, y=-1 \quad \therefore x-y=0$$

(ii) $u=3, v=-4$, 즉 $x+y=3, xy=-4$ 일 때

x, y 는 이차방정식 $t^2-3t-4=0$ 의 두 근이므로

$$(t+1)(t-4)=0 \quad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=4$$

$$\therefore x=-1, y=4 \text{ 또는 } x=4, y=-1$$

$$\therefore x-y=-5 \text{ 또는 } x-y=5$$

(i), (ii)에서 $x-y$ 의 값은 $-5, 0, 5$ 이다.

따라서 $x-y$ 의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

12 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면
$$\begin{cases} 2u+v=-7 \\ u^2-2v+u=20 \end{cases}$$

$$2u+v=-7 \text{에서 } v=-2u-7$$

이를 $u^2-2v+u=20$ 에 대입하면

$$u^2-2(-2u-7)+u=20, u^2+5u-6=0$$

$$(u+6)(u-1)=0 \quad \therefore u=-6 \text{ 또는 } u=1$$

이를 각각 $v=-2u-7$ 에 대입하면

$$u=-6 \text{ 일 때 } v=5, u=1 \text{ 일 때 } v=-9$$

(i) $u=-6, v=5$, 즉 $x+y=-6, xy=5$ 일 때

x, y 는 이차방정식 $t^2+6t+5=0$ 의 두 근이므로

$$(t+5)(t+1)=0 \quad \therefore t=-5 \text{ 또는 } t=-1$$

$$\therefore x=-5, y=-1 \text{ 또는 } x=-1, y=-5$$

$$\therefore x^2-y^2=24 \text{ 또는 } x^2-y^2=-24$$

(ii) $u=1, v=-9$, 즉 $x+y=1, xy=-9$ 일 때,

x, y 는 이차방정식 $t^2-t-9=0$ 의 두 근이므로

$$t=\frac{1\pm\sqrt{37}}{2}$$

그런데 x, y 는 정수이므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 x^2-y^2 의 최댓값은 24이다.

13 $2x+y=1$ 에서 $y=-2x+1$

이를 $x^2-ky=-6$ 에 대입하면

$$x^2-k(-2x+1)=-6, x^2+2kx-k+6=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-(-k+6)=0, k^2+k-6=0$$

$$(k+3)(k-2)=0 \quad \therefore k=-3 \text{ 또는 } k=2$$

그런데 k 는 양수이므로 $k=2$

14 x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2+(2a-1)t+a^2+1=0$ 의 두 근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(2a-1)^2-4(a^2+1)\geq 0 \quad \therefore a\leq -\frac{3}{4}$$

따라서 a 의 값이 될 수 있는 것은 ①이다.

15 $x+y=2k-1$ 을 $xy+x+y=k^2-2k$ 에 대입하면

$$xy+2k-1=k^2-2k \quad \therefore xy=k^2-4k+1$$

x, y 는 t 에 대한 이차방정식

$t^2-(2k-1)t+k^2-4k+1=0$ 의 두 근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(2k-1)^2-4(k^2-4k+1)<0 \quad \therefore k<\frac{1}{4}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 0이다.

16 오른쪽 그림과 같이 원에 내접하는 직사각형의 가로의 길이를 x , 세로의 길이를 y 라 하면

$$\begin{cases} x+y=31 \\ x^2+y^2=625 \end{cases}$$

$$x+y=31 \text{에서 } y=-x+31$$

이를 $x^2+y^2=625$ 에 대입하면

$$x^2+(-x+31)^2=625, x^2-31x+168=0$$

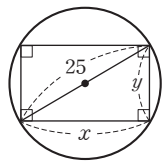
$$(x-7)(x-24)=0 \quad \therefore x=7 \text{ 또는 } x=24$$

이를 각각 $y=-x+31$ 에 대입하면

$$x=7 \text{ 일 때 } y=24, x=24 \text{ 일 때 } y=7$$

그런데 $x>y$ 이므로 $x=24, y=7$

따라서 가로의 길이는 24이다.



17 오른쪽 그림과 같이 A의 한 변의 길이를 x , D의 한 변의 길이를 y 라 하면 B의 한 변의 길이는

$$8-x, C \text{의 한 변의 길이는}$$

$$8-x-y \text{이다.}$$

$$8-x-y \text{이다.}$$

B와 C의 한 변의 길이의 합이 A의 한 변의 길이와 같으므로

$$(8-x)+(8-x-y)=x$$

$$\therefore y=-3x+16 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

A, D의 넓이의 차이가 24이므로

$$x^2-y^2=24$$

①을 대입하면

$$x^2-(-3x+16)^2=24, x^2-12x+35=0$$

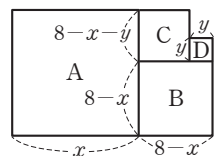
$$(x-5)(x-7)=0 \quad \therefore x=5 \text{ 또는 } x=7$$

이를 각각 ①에 대입하면

$$x=5 \text{ 일 때 } y=1, x=7 \text{ 일 때 } y=-5$$

그런데 $y>0$ 이므로 $x=5, y=1$

따라서 정사각형 A의 한 변의 길이는 5이다.



- 18 두 원의 반지름의 길이를 각각 x, y 라 하자.

정사각형의 대각선의 길이가

$$12\sqrt{2}+12 \text{이므로}$$

$$\sqrt{2}x+x+y+\sqrt{2}y=12\sqrt{2}+12$$

$$(\sqrt{2}+1)(x+y)=12(\sqrt{2}+1)$$

$$\therefore x+y=12 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 원의 넓이의 합이 80π 이므로

$$\pi x^2+\pi y^2=80\pi \quad \therefore x^2+y^2=80 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$u=12, u^2-2v=80$$

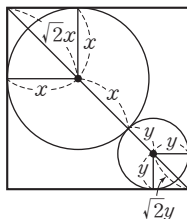
$$\therefore v=32 \quad \therefore x+y=12, xy=32$$

x, y 는 이차방정식 $t^2-12t+32=0$ 의 두 근이므로

$$(t-4)(t-8)=0 \quad \therefore t=4 \text{ 또는 } t=8$$

$$\therefore x=4, y=8 \text{ 또는 } x=8, y=4$$

따라서 작은 원의 반지름의 길이는 4이다.



- 19 $xy-2x-y+3=0$ 에서 $(x-1)(y-2)=-1$

$x-1, y-2$ 가 정수이므로

$$x-1=-1, y-2=1 \text{ 또는 } x-1=1, y-2=-1$$

$$\therefore x=0, y=3 \text{ 또는 } x=2, y=1$$

$$\therefore x+y=3$$

- 20 $\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=1$ 에서 $\frac{4n+2m}{mn}=1$

$$mn-2m-4n=0, (m-4)(n-2)=8$$

m, n 이 자연수이므로 $m-4, n-2$ 는 $m-4 \geq -3, n-2 \geq -1$ 인 정수이다.

- (i) $m-4=1, n-2=8$ 일 때

$$m=5, n=10 \quad \therefore m+n=15$$

- (ii) $m-4=2, n-2=4$ 일 때

$$m=6, n=6 \quad \therefore m+n=12$$

- (iii) $m-4=4, n-2=2$ 일 때

$$m=8, n=4 \quad \therefore m+n=12$$

- (iv) $m-4=8, n-2=1$ 일 때

$$m=12, n=3 \quad \therefore m+n=15$$

(i)~(iv)에서 $m+n$ 의 최댓값은 15이다.

- 21 자연수인 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha \leq \beta)$ 라 하면

$$\alpha+\beta=2p, \alpha\beta=5p$$

$p=\frac{\alpha+\beta}{2}$ 를 $\alpha\beta=5p$ 에 대입하면

$$\alpha\beta=\frac{5}{2}(\alpha+\beta), 2\alpha\beta-5\alpha-5\beta=0$$

$$(2\alpha-5)(2\beta-5)=25$$

α, β 가 자연수이므로 $2\alpha-5, 2\beta-5$ 는 $2\alpha-5 \geq -3, 2\beta-5 \geq -3$ 인 정수이다.

- (i) $2\alpha-5=1, 2\beta-5=25$ 일 때

$$\alpha=3, \beta=15 \quad \therefore p=\frac{3+15}{2}=9$$

- (ii) $2\alpha-5=5, 2\beta-5=5$ 일 때

$$\alpha=5, \beta=5 \quad \therefore p=\frac{5+5}{2}=5$$

(i), (ii)에서 정수 p 의 최솟값은 5이다.

- 22 두 직각삼각형 ABD, BCD에서

$$\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2 \text{이므로}$$

$$a^2+5^2=7^2+b^2, a^2-b^2=24 \quad \therefore (a+b)(a-b)=24$$

a, b 는 자연수이므로 $a+b > 0$ 이고 $a+b$ 가 자연수이므로

$a-b$ 도 자연수이다.

이때 $a+b > a-b$ 이므로

- (i) $a+b=24, a-b=1$ 일 때

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a=\frac{25}{2}, b=\frac{23}{2}$$

- (ii) $a+b=12, a-b=2$ 일 때

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a=7, b=5$$

- (iii) $a+b=8, a-b=3$ 일 때

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a=\frac{11}{2}, b=\frac{5}{2}$$

- (iv) $a+b=6, a-b=4$ 일 때

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a=5, b=1$$

(i)~(iv)에서 자연수 a, b 의 값은

$$a=7, b=5 \text{ 또는 } a=5, b=1$$

따라서 모든 ab 의 값의 합은 $7 \times 5 + 5 \times 1 = 40$

- 23 x, y 가 실수이므로 $x+2y-1=0, x-y+2=0$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } x=-1, y=1 \quad \therefore xy=-1$$

- 24 $(x+1)^2+(y-2)^2=0$

x, y 가 실수이므로 $x+1=0, y-2=0$

$$\therefore x=-1, y=2 \quad \therefore x^2+y^2=1+4=5$$

- 25 $(x+1)^2+(x+2y)^2=0$

x, y 가 실수이므로 $x+1=0, x+2y=0$

$$\therefore x=-1, y=\frac{1}{2} \quad \therefore x+y=-\frac{1}{2}$$

- 26 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2+2(y-2)x+2y^2-10y+13=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(y-2)^2-(2y^2-10y+13) \geq 0$$

$$y^2-6y+9 \leq 0, (y-3)^2 \leq 0$$

y 는 실수이므로 $y=3$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x^2+2x+1=0, (x+1)^2=0 \quad \therefore x=-1$$

II-4. 여러 가지 부등식

01 연립일차부등식

62~67쪽

1 $x < -7$	2 -4	3 ①	4 $x < 2$	5 ①
6 ④	7 15	8 2	9 ④	10 -1
11 ③	12 ⑤	13 ③	14 -1	15 5
16 ③	17 ①	18 8	19 ②	20 ②
21 ①	22 -4	23 ②	24 ⑤	25 5
26 ④	27 10	28 ③	29 20명	30 ④
31 ③	32 7	33 15	34 ③	35 ⑤
36 ⑤	37 6	38 ①	39 ③	40 $a \geq 4$

- $ax-7b > bx-7a$ 에서 $(a-b)x > -7(a-b)$
 $a < b$ 에서 $a-b < 0$ 이므로 양변을 $a-b$ 로 나누면
 $x < -7$
- $a^2x - a \geq 16x + 3$ 에서 $(a^2-16)x \geq a+3$
이 부등식의 해가 모든 실수이므로
 $a^2-16=0, a+3 \leq 0$
 $\therefore a = -4$
- $(a+b)x + a - b < 0$ 에서 $(a+b)x < -a+b$
이 부등식의 해가 $x > \frac{1}{2}$ 이므로
 $a+b < 0, \frac{-a+b}{a+b} = \frac{1}{2}$
 $\frac{-a+b}{a+b} = \frac{1}{2}$ 에서 $-2a+2b=a+b \quad \therefore b=3a$
이를 $a+b < 0$ 에 대입하면
 $a+3a < 0 \quad \therefore a < 0$
 $bx+3a+4b > 0$ 에서
 $3ax+3a+12a > 0, 3ax > -15a$
 $\therefore x < -5 (\because a < 0)$
- $(a-b)x + 2a - 3b \leq 0$ 에서 $(a-b)x \leq -2a+3b$
이 부등식이 해를 갖지 않으므로
 $a-b=0, -2a+3b < 0$
 $a-b=0$ 에서 $b=a$ 이므로 $-2a+3b < 0$ 에 대입하면
 $-2a+3a < 0 \quad \therefore a < 0$
 $2ax-5b+a > 0$ 에서
 $2ax-5a+a > 0, 2ax > 4a$
 $\therefore x < 2 (\because a < 0)$
- $x+3 < 3x$ 를 풀면
 $-2x < -3 \quad \therefore x > \frac{3}{2}$

$3x+4 < 2x+8$ 을 풀면

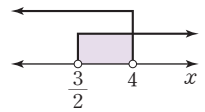
$$x < 4$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$\frac{3}{2} < x < 4$$

즉, $a = \frac{3}{2}, b = 4$ 이므로

$$ab = 6$$



- $5x-4 \leq 3x-2$ 를 풀면

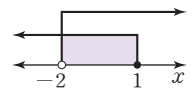
$$2x \leq 2 \quad \therefore x \leq 1$$

$3x-2 < 10x+12$ 를 풀면

$$-7x < 14 \quad \therefore x > -2$$

따라서 주어진 부등식의 해는

$$-2 < x \leq 1$$



- $3x+8 > x-4$ 를 풀면

$$2x > -12 \quad \therefore x > -6$$

$2(x-3) \leq x+3$ 을 풀면

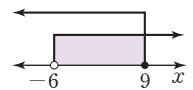
$$2x-6 \leq x+3 \quad \therefore x \leq 9$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$-6 < x \leq 9$$

따라서 정수 x 의 개수는

$$9 - (-6) = 15$$



- $4x-3 < 6(x-1)$ 을 풀면

$$4x-3 < 6x-6, -2x < -3 \quad \therefore x > \frac{3}{2}$$

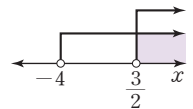
$6(x-1) < 7x-2$ 를 풀면

$$6x-6 < 7x-2, -x < 4 \quad \therefore x > -4$$

따라서 주어진 부등식의 해는

$$x > \frac{3}{2}$$

따라서 정수 x 의 최솟값은 2이다.



- $x-1 < 1 - \frac{2-x}{2}$ 를 풀면

$$2x-2 < 2-2+x \quad \therefore x < 2$$

$\frac{2x+1}{3} \geq \frac{x}{2}$ 를 풀면

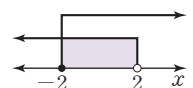
$$4x+2 \geq 3x \quad \therefore x \geq -2$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$-2 \leq x < 2$$

즉, $\alpha = -2, \beta = 2$ 이므로

$$\beta - \alpha = 4$$



- $x-3 < \frac{2}{3}x-1$ 을 풀면

$$3x-9 < 2x-3 \quad \therefore x < 6$$

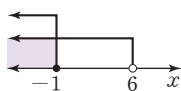
$$1-0.6x \geq 0, 1x+1.7 \text{을 풀면}$$

$$10-6x \geq x+17, -7x \geq 7 \quad \therefore x \leq -1$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$x \leq -1$$

따라서 x 의 최댓값은 -1 이다.



11 $\frac{2x+1}{3}-1 \leq \frac{3x+2}{2}$ 를 풀면

$$4x+2-6 \leq 9x+6, -5x \leq 10 \quad \therefore x \geq -2$$

$$0.4x+1 > 0.5(x+1)+0.2 \text{를 풀면}$$

$$4x+10 > 5x+5+2, -x > -3 \quad \therefore x < 3$$

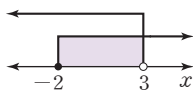
따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$-2 \leq x < 3$$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1,$

2이므로 구하는 합은

$$-2+(-1)+0+1+2=0$$



12 $4x+8 \leq 3(x+3)$ 을 풀면

$$4x+8 \leq 3x+9 \quad \therefore x \leq 1$$

$$x-4 > -3x+8 \text{을 풀면}$$

$$4x > 12 \quad \therefore x > 3$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

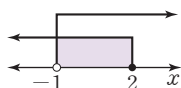
없다.



13 ㄱ. $2x \leq 4$ 를 풀면 $x \leq 2$

$$x+3 > 2 \text{를 풀면 } x > -1$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $-1 < x \leq 2$

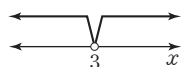


ㄴ. $-2x+1 < -5$ 를 풀면

$$-2x < -6 \quad \therefore x > 3$$

$$x-1 < 2 \text{를 풀면 } x < 3$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



ㄷ. $\frac{1}{2}x+3 \leq \frac{5}{2}$ 를 풀면

$$x+6 \leq 5 \quad \therefore x \leq -1$$

$$3+x \leq 2x \text{를 풀면}$$

$$-x \leq -3 \quad \therefore x \geq 3$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.

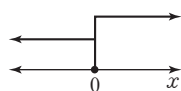


ㄹ. $-4x+2 \geq 2$ 를 풀면

$$-4x \geq 0 \quad \therefore x \leq 0$$

$$2x-9 \geq x-9 \text{를 풀면 } x \geq 0$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $x=0$



따라서 보기에서 해가 없는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

14 $\frac{x-9}{3} \leq x+1$ 을 풀면

$$x-9 \leq 3x+3, -2x \leq 12 \quad \therefore x \geq -6$$

$$x+1 \leq \frac{x}{2}-2 \text{를 풀면}$$

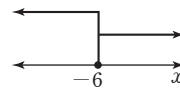
$$2x+2 \leq x-4 \quad \therefore x \leq -6$$

따라서 주어진 부등식의 해는

$$x = -6$$

이를 $ax-4=2$ 에 대입하면

$$-6a-4=2 \quad \therefore a=-1$$



15 $5x-3 \leq 2x+3$ 을 풀면

$$3x \leq 6 \quad \therefore x \leq 2$$

$$3(x+2) > 2x+a \text{를 풀면}$$

$$3x+6 > 2x+a \quad \therefore x > a-6$$

주어진 그림에서 연립부등식의 해가 $-1 < x \leq 2$ 이므로

$$a-6 = -1 \quad \therefore a = 5$$

16 $6x-5 \leq 2x+7$ 을 풀면

$$4x \leq 12 \quad \therefore x \leq 3$$

$$x+7 > -3x+a \text{를 풀면}$$

$$4x > a-7 \quad \therefore x > \frac{a-7}{4}$$

따라서 $3=b, \frac{a-7}{4} = -2$ 이므로

$$a = -1, b = 3 \quad \therefore a+b = 2$$

17 $7x+a < 5(x+2)$ 를 풀면

$$7x+a < 5x+10$$

$$2x < -a+10 \quad \therefore x < \frac{-a+10}{2}$$

$$5(x+2) < 6x+b \text{를 풀면}$$

$$5x+10 < 6x+b$$

$$-x < b-10 \quad \therefore x > -b+10$$

따라서 $\frac{-a+10}{2} = 7, -b+10 = 4$ 이므로

$$a = -4, b = 6 \quad \therefore ab = -24$$

18 $\frac{2x+a}{3} \geq \frac{3}{2}x - \frac{5}{3}$ 를 풀면

$$4x+2a \geq 9x-10$$

$$-5x \geq -2a-10 \quad \therefore x \leq \frac{2a+10}{5}$$

$$7x+14 \leq 9x+b \text{를 풀면}$$

$$-2x \leq b-14 \quad \therefore x \geq -\frac{b-14}{2}$$

따라서 $\frac{2a+10}{5} = 6, -\frac{b-14}{2} = 6$ 이므로

$$a = 10, b = 2 \quad \therefore a-b = 8$$

19 $2x+3 < 3x+a$ 를 풀면

$$-x < a-3 \quad \therefore x > -a+3$$

$$-x+2a+4 < x+2 \text{를 풀면}$$

$$-2x < -2a-2 \quad \therefore x > a+1$$

(i) $-a+3 < a+1$, 즉 $a > 1$ 일 때

$$a+1=4 \text{이므로 } a=3$$

(ii) $-a+3 \geq a+1$, 즉 $a \leq 1$ 일 때

$$-a+3=4 \text{이므로 } a=-1$$

(i), (ii)에서 모든 a 의 값의 합은

$$3+(-1)=2$$

20 $ax+b \leq 0$ 에서 $ax \leq -b$

주어진 그림에서 이 부등식의 해가 $x \leq 2$ 이므로

$$a > 0, -\frac{b}{a}=2 \quad \therefore b=-2a$$

$$cx-d > 0 \text{에서 } cx > d$$

주어진 그림에서 이 부등식의 해가 $x < -3$ 이므로

$$c < 0, \frac{d}{c}=-3 \quad \therefore d=-3c$$

$$ax-b \geq 0 \text{에 } b=-2a \text{를 대입하면}$$

$$ax+2a \geq 0, ax \geq -2a \quad \therefore x \geq -2 (\because a > 0)$$

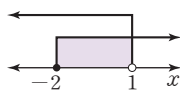
$$-cx+d < -4c \text{에 } d=-3c \text{를 대입하면}$$

$$-cx-3c < -4c$$

$$-cx < -c \quad \therefore x < 1 (\because -c > 0)$$

따라서 구하는 연립부등식의 해는

$$-2 \leq x < 1$$



21 $3x+5 > 2x+a$ 를 풀면

$$x > a-5$$

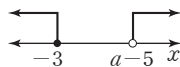
$$4x \leq 2x-6 \text{을 풀면}$$

$$2x \leq -6 \quad \therefore x \leq -3$$

주어진 연립부등식이 해를 갖지

않으려면

$$a-5 \geq -3 \quad \therefore a \geq 2$$



22 $\frac{2-3x}{2} \geq a$ 를 풀면

$$2-3x \geq 2a, -3x \geq 2a-2 \quad \therefore x \leq -\frac{2a-2}{3}$$

$$4x-5 \geq x+7 \text{을 풀면}$$

$$3x \geq 12 \quad \therefore x \geq 4$$

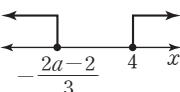
주어진 연립부등식이 해를 갖지 않

으려면

$$-\frac{2a-2}{3} < 4, 2a-2 > -12$$

$$2a > -10 \quad \therefore a > -5$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 -4 이다.



23 $5x+a \leq 3x-2$ 를 풀면

$$2x \leq -a-2 \quad \therefore x \leq -\frac{a+2}{2}$$

$$3x-2 < 10x+12 \text{를 풀면}$$

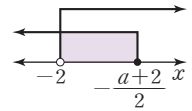
$$-7x < 14 \quad \therefore x > -2$$

주어진 부등식이 해를 가지려면

$$-\frac{a+2}{2} > -2, a+2 < 4$$

$$\therefore a < 2$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 1이다.



24 $x+2 > 3$ 을 풀면 $x > 1$

$$3x < a+1 \text{을 풀면 } x < \frac{a+1}{3}$$

주어진 연립부등식을 만족

시키는 정수 x 의 값의 합

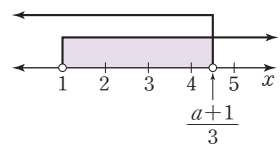
이 9이려면

$$4 < \frac{a+1}{3} \leq 5$$

$$12 < a+1 \leq 15$$

$$\therefore 11 < a \leq 14$$

따라서 자연수 a 의 최댓값은 14이다.



25 $2x-5 < 5x+1$ 을 풀면

$$-3x < 6 \quad \therefore x > -2$$

$$3(x+1) \leq 2x+a \text{를 풀면}$$

$$3x+3 \leq 2x+a \quad \therefore x \leq a-3$$

주어진 연립부등식을 만족

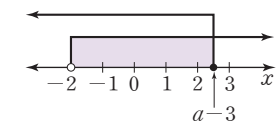
시키는 자연수 x 가 1과 2

뿐이므로

$$2 \leq a-3 < 3$$

$$\therefore 5 \leq a < 6$$

따라서 정수 a 의 값은 5이다.



26 $8x-1 < 8+5x$ 를 풀면

$$3x < 9 \quad \therefore x < 3$$

$$\frac{a-3x}{2} \leq 4 \text{를 풀면}$$

$$a-3x \leq 8, -3x \leq -a+8$$

$$\therefore x \geq \frac{a-8}{3}$$

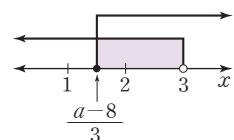
주어진 연립부등식을 만족시

키는 정수 x 가 1개뿐이므로

$$1 < \frac{a-8}{3} \leq 2$$

$$3 < a-8 \leq 6$$

$$\therefore 11 < a \leq 14$$



27 연속하는 세 정수를 $x-1, x, x+1$ 이라 하면

$$\begin{cases} (x-1)+x+(x+1)>30 \\ \{(x-1)+x\}-(x+1)\leq 9 \end{cases}$$
 $(x-1)+x+(x+1)>30$ 을 풀면
 $3x>30 \quad \therefore x>10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$
 $\{(x-1)+x\}-(x+1)\leq 9$ 를 풀면
 $x-2\leq 9 \quad \therefore x\leq 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$
 $\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒}$ 에서 $10<x\leq 11$
 이때 x 는 정수이므로 $x=11$
 따라서 연속하는 세 정수는 10, 11, 12이므로 가장 작은 수는 10이다.

28 섞어야 하는 5%의 소금물의 양을 x g이라 하면

$$(200+x)\times\frac{10}{100}\leq 200\times\frac{20}{100}+x\times\frac{5}{100}$$

$$< (200+x)\times\frac{15}{100}$$

 $2000+10x\leq 4000+5x<3000+15x$
 $2000+10x\leq 4000+5x$ 를 풀면
 $5x\leq 2000 \quad \therefore x\leq 400 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$
 $4000+5x<3000+15x$ 를 풀면
 $-10x<-1000 \quad \therefore x>100 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$
 $\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒}$ 에서 $100<x\leq 400$
 따라서 섞어야 하는 5%의 소금물의 양은 100g 초과 400g 이하이다.

29 학생 수를 x 라 하면 초콜릿의 개수는
 $5x+13$
 학생 한 명에게 초콜릿을 7개씩 주면 받지 못한 학생 3명을 제외한 마지막 학생은 최소 1개, 최대 7개 받을 수 있으므로
 $7(x-4)+1\leq 5x+13\leq 7(x-4)+7$
 $7(x-4)+1\leq 5x+13$ 을 풀면
 $7x-28+1\leq 5x+13$
 $2x\leq 40 \quad \therefore x\leq 20 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$
 $5x+13\leq 7(x-4)+7$ 을 풀면
 $5x+13\leq 7x-28+7$
 $-2x\leq -34 \quad \therefore x\geq 17 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$
 $\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒}$ 에서 $17\leq x\leq 20$
 따라서 학생은 최대 20명이다.

30 $|x+4|>3$ 에서
 $x+4<-3$ 또는 $x+4>3$
 $\therefore x<-7$ 또는 $x>-1$
 따라서 $\alpha=-7, \beta=-1$ 이므로
 $\alpha\beta=7$

31 $|2x-1|\leq 5$ 에서
 $-5\leq 2x-1\leq 5$
 $-4\leq 2x\leq 6$
 $\therefore -2\leq x\leq 3$
 따라서 정수 x 의 개수는
 $3-(-2)+1=6$

32 $2x+5\leq 9$ 를 풀면
 $2x\leq 4 \quad \therefore x\leq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$
 $|x-3|\leq 7$ 을 풀면
 $-7\leq x-3\leq 7$
 $\therefore -4\leq x\leq 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$
 $\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒}$ 에서 $-4\leq x\leq 2$
 따라서 정수 x 의 개수는
 $2-(-4)+1=7$

33 $|ax+3|<b$ 에서
 $-b<ax+3<b \quad (\because b>0)$
 $-b-3<ax<b-3$
 $\therefore -\frac{b+3}{a}<x<\frac{b-3}{a} \quad (\because a>0)$
 따라서 $-\frac{b+3}{a}=-2, \frac{b-3}{a}=1$ 이므로
 $2a-b=3, a-b=-3$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a=6, b=9$
 $\therefore a+b=15$

34 (i) $x<1$ 일 때
 $-(x-1)>3x-5$
 $-4x>-6 \quad \therefore x<\frac{3}{2}$
 그런데 $x<1$ 이므로 $x<1$
 (ii) $x\geq 1$ 일 때
 $x-1>3x-5$
 $-2x>-4 \quad \therefore x<2$
 그런데 $x\geq 1$ 이므로 $1\leq x<2$
 (i), (ii)에서 $x<2$

35 (i) $x<-\frac{1}{3}$ 일 때
 $x>-(3x+1)-7$
 $4x>-8 \quad \therefore x>-2$
 그런데 $x<-\frac{1}{3}$ 이므로 $-2<x<-\frac{1}{3}$

(ii) $x \geq -\frac{1}{3}$ 일 때

$$x > (3x+1) - 7$$

$$-2x > -6 \quad \therefore x < 3$$

그런데 $x \geq -\frac{1}{3}$ 이므로 $-\frac{1}{3} \leq x < 3$

(i), (ii)에서 $-2 < x < 3$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2$ 이므로 구하는 합은

$$-1+0+1+2=2$$

36 (i) $x < \frac{1}{3}$ 일 때

$$-(3x-1) < x+a$$

$$-4x < a-1 \quad \therefore x > -\frac{a-1}{4}$$

$a > 0$ 에서 $-\frac{a-1}{4} < \frac{1}{4}$ 이고 $x < \frac{1}{3}$ 이므로

$$-\frac{a-1}{4} < x < \frac{1}{3}$$

(ii) $x \geq \frac{1}{3}$ 일 때

$$3x-1 < x+a$$

$$2x < a+1 \quad \therefore x < \frac{a+1}{2}$$

$a > 0$ 에서 $\frac{a+1}{2} > \frac{1}{2}$ 이고 $x \geq \frac{1}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{3} \leq x < \frac{a+1}{2}$$

(i), (ii)에서 $-\frac{a-1}{4} < x < \frac{a+1}{2}$

따라서 $\frac{a+1}{2} = 3$ 이므로

$$a=5$$

37 (i) $x < 0$ 일 때

$$-x - (x-2) < 6$$

$$-2x < 4 \quad \therefore x > -2$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $-2 < x < 0$

(ii) $0 \leq x < 2$ 일 때

$$x - (x-2) < 6$$

$0 \times x < 4$ 이므로 해는 모든 실수이다.

그런데 $0 \leq x < 2$ 이므로 $0 \leq x < 2$

(iii) $x \geq 2$ 일 때

$$x + (x-2) < 6$$

$$2x < 8 \quad \therefore x < 4$$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 $2 \leq x < 4$

(i), (ii), (iii)에서 $-2 < x < 4$

따라서 $\alpha = -2, \beta = 4$ 이므로

$$\beta - \alpha = 6$$

38 (i) $x < -\frac{1}{2}$ 일 때

$$-(2x-3) - 2(2x+1) \geq 5$$

$$-6x \geq 4 \quad \therefore x \leq -\frac{2}{3}$$

그런데 $x < -\frac{1}{2}$ 이므로 $x \leq -\frac{2}{3}$

(ii) $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}$ 일 때

$$-(2x-3) + 2(2x+1) \geq 5$$

$$2x \geq 0 \quad \therefore x \geq 0$$

그런데 $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}$ 이므로 $0 \leq x < \frac{3}{2}$

(iii) $x \geq \frac{3}{2}$ 일 때

$$(2x-3) + 2(2x+1) \geq 5$$

$$6x \geq 6 \quad \therefore x \geq 1$$

그런데 $x \geq \frac{3}{2}$ 이므로 $x \geq \frac{3}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 $x \leq -\frac{2}{3}$ 또는 $x \geq 0$

따라서 자연수 x 의 최솟값은 1이다.

39 $\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$ 이므로 주어진 부등식은 $|x+1| + |x-2| \leq x+3$

(i) $x < -1$ 일 때

$$-(x+1) - (x-2) \leq x+3$$

$$-3x \leq 2 \quad \therefore x \geq -\frac{2}{3}$$

그런데 $x < -1$ 이므로 해는 없다.

(ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때

$$(x+1) - (x-2) \leq x+3$$

$$-x \leq 0 \quad \therefore x \geq 0$$

그런데 $-1 \leq x < 2$ 이므로 $0 \leq x < 2$

(iii) $x \geq 2$ 일 때

$$(x+1) + (x-2) \leq x+3$$

$$\therefore x \leq 4$$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 $2 \leq x \leq 4$

(i), (ii), (iii)에서 $0 \leq x \leq 4$

40 (i) $x < -2$ 일 때

$$-3(x+2) - (x-2) \leq a$$

$$-4x \leq a+4 \quad \therefore x \geq -\frac{a+4}{4}$$

그런데 $x < -2$ 이므로 해를 가지려면

$$-\frac{a+4}{4} < -2$$

$$a+4 > 8 \quad \therefore a > 4$$

(ii) $-2 \leq x < 2$ 일 때

$$3(x+2) - (x-2) \leq a$$

$$2x \leq a-8 \quad \therefore x \leq \frac{a-8}{2}$$

그런데 $-2 \leq x < 2$ 이므로 해를 가지려면

$$\frac{a-8}{2} \geq -2$$

$$a-8 \geq -4 \quad \therefore a \geq 4$$

(iii) $x \geq 2$ 일 때

$$3(x+2) + (x-2) \leq a$$

$$4x \leq a-4 \quad \therefore x \leq \frac{a-4}{4}$$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 해를 가지려면

$$\frac{a-4}{4} \geq 2$$

$$a-4 \geq 8 \quad \therefore a \geq 12$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식이 해를 가지려면 어느 한 구간에서만 해를 가져도 되므로

$$a \geq 4$$

02 이차부등식

68~72쪽

1 ② 2 $x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$

3 $1 < x < 2$ 또는 $3 < x < 4$ 4 ③ 5 ③

6 8 7 ③ 8 $x=1$ 9 $x < -3$ 또는 $x > 2$

10 ④ 11 3초 12 8 13 ③ 14 16

15 14 16 ② 17 $-\frac{5}{3} < x < 1$

18 $x \leq -4$ 또는 $x \geq 8$ 19 $-4 < x < 3$ 20 2

21 ③ 22 ① 23 12 24 ③ 25 ②

26 -3 27 1 28 $-1 < m \leq 3$ 29 22

30 $a \leq -6$ 또는 $a \geq -1$

31 $-2 < a < 0$ 또는 $a > 0$ 32 ④ 33 ①

34 7 35 ③

1 부등식 $f(x) < g(x)$ 의 해는 $y=f(x)$ 의 그래프가 $y=g(x)$ 의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로
 $-1 < x < 3$

2 $ax^2 + (b-m)x + c - n \geq 0$ 에서
 $ax^2 + bx + c \geq mx + n$
 따라서 이 부등식의 해는 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 직선 $y=mx+n$ 보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위이므로
 $x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$

3 $f(x)g(x) > 0$ 이면

$$f(x) > 0, g(x) > 0 \text{ 또는 } f(x) < 0, g(x) < 0$$

(i) $f(x) > 0, g(x) > 0$ 일 때

$y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 모두 x 축보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$1 < x < 2$$

(ii) $f(x) < 0, g(x) < 0$ 일 때

$y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 모두 x 축보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$3 < x < 4$$

(i), (ii)에서 부등식 $f(x)g(x) > 0$ 의 해는

$$1 < x < 2 \text{ 또는 } 3 < x < 4$$

4 $x^2 + 4x > x + 10$ 에서

$$x^2 + 3x - 10 > 0, (x+5)(x-2) > 0$$

$$\therefore x < -5 \text{ 또는 } x > 2$$

따라서 $\alpha = -5, \beta = 2$ 이므로

$$\alpha + \beta = -3$$

5 $-x^2 + 4x - 2 \geq 0$ 에서

$$x^2 - 4x + 2 \leq 0, \{x - (2 - \sqrt{2})\}\{x - (2 + \sqrt{2})\} \leq 0$$

$$\therefore 2 - \sqrt{2} \leq x \leq 2 + \sqrt{2}$$

6 $(x+2)(x-1) < 4x+16$ 에서

$$x^2 - 3x - 18 < 0, (x+3)(x-6) < 0$$

$$\therefore -3 < x < 6$$

따라서 정수 x 의 개수는

$$6 - (-3) - 1 = 8$$

7 $\neg, x^2 + 2x + 1 < 0$ 에서

$$(x+1)^2 < 0$$

따라서 주어진 부등식의 해는 없다.

ㄴ. $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ 에서

$$(x-2)^2 \geq 0$$

따라서 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

ㄷ. $x^2 + 16 > 8x$ 에서

$$x^2 - 8x + 16 > 0, (x-4)^2 > 0$$

따라서 주어진 부등식의 해는 $x \neq 4$ 인 모든 실수이다.

ㄹ. $x^2 - 3x - 5 > 3x^2$ 에서

$$2x^2 + 3x + 5 < 0$$

$$2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{8} < 0$$

따라서 주어진 부등식의 해는 없다.

따라서 보기에서 해가 없는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

- 8 $ax-b < 0$ 에서 $ax < b$
이 부등식의 해가 $x < \frac{1}{9}$ 이므로
 $a > 0, \frac{b}{a} = \frac{1}{9}$
 $9b = a$ 이므로 이를 $ax^2 - 2ax + 9b \leq 0$ 에 대입하면
 $ax^2 - 2ax + a \leq 0$
 $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ ($\because a > 0$)
 $(x-1)^2 \leq 0 \quad \therefore x=1$
- 9 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 두 교점의 x 좌표가 $-2, 1$ 이므로 $f(x)=a(x+2)(x-1)$ ($a > 0$)이라 하자.
이때 $f(0)=-2$ 이므로
 $-2a=-2 \quad \therefore a=1$
 $\therefore f(x)=(x+2)(x-1)$
 $f(x) > 4$ 에서 $(x+2)(x-1) > 4$
 $x^2+x-6 > 0, (x+3)(x-2) > 0$
 $\therefore x < -3$ 또는 $x > 2$
- 10 (i) $x < 0$ 일 때
 $x^2+4x-5 < 0$
 $(x+5)(x-1) < 0 \quad \therefore -5 < x < 1$
그런데 $x < 0$ 이므로 $-5 < x < 0$
(ii) $x \geq 0$ 일 때
 $x^2-4x-5 < 0$
 $(x+1)(x-5) < 0 \quad \therefore -1 < x < 5$
그런데 $x \geq 0$ 이므로 $0 \leq x < 5$
(i), (ii)에서 $-5 < x < 5$
따라서 $a=-5, b=5$ 이므로
 $b-a=10$
- 11 $20+25t-5t^2 \geq 40$ 에서
 $t^2-5t+4 \leq 0, (t-1)(t-4) \leq 0$
 $\therefore 1 \leq t \leq 4$
따라서 물체의 높이가 40m 이상인 시간은 $4-1=3$ (초) 동안이다.
- 12 새로 만든 직사각형의 가로와 세로의 길이는 각각 $(5+x)$ cm, $(9-x)$ cm이므로
 $(5+x)(9-x) \geq 13$
 $x^2-4x-32 \leq 0, (x+4)(x-8) \leq 0$
 $\therefore -4 \leq x \leq 8$
그런데 $0 < x < 9$ 이므로 $0 < x \leq 8$
따라서 x 의 최댓값은 8이다.

- 13 라면 한 그릇의 가격을 $100x$ 원 내릴 때마다 판매량은 $20x$ 그릇씩 늘어나므로
 $(2000-100x)(200+20x) \geq 442000$
 $x^2-10x+21 \leq 0, (x-3)(x-7) \leq 0$
 $\therefore 3 \leq x \leq 7$
따라서 라면 한 그릇의 가격의 최댓값은 $x=3$ 일 때이므로
 $2000-100 \times 3 = 1700$ (원)
- 14 해가 $-2 \leq x \leq 4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x+2)(x-4) \leq 0$
 $\therefore x^2-2x-8 \leq 0$
따라서 $a=-2, b=-8$ 이므로
 $ab=16$
- 15 해가 $x \leq -4$ 또는 $x \geq a$ 이고 x^2 의 계수가 2인 이차부등식은
 $2(x+4)(x-a) \geq 0$
 $\therefore 2x^2+2(4-a)x-8a \geq 0$
따라서 $2a=2(4-a), b=8a$ 이므로
 $a=2, b=16 \quad \therefore b-a=14$
- 16 해가 $x=-3$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x+3)^2 \leq 0 \quad \therefore x^2+6x+9 \leq 0$
 $\therefore a=6, b=9$
이를 $bx^2-ax-24 < 0$ 에 대입하면
 $9x^2-6x-24 < 0$
 $3x^2-2x-8 < 0, (3x+4)(x-2) < 0$
 $\therefore -\frac{4}{3} < x < 2$
따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1$ 이므로 구하는 합은
 $-1+0+1=0$
- 17 해가 $2 < x < 3$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x-2)(x-3) < 0$
 $\therefore x^2-5x+6 < 0 \quad \dots\dots ㉠$
 $ax^2+bx+c > 0$ 과 부등호의 방향이 다르므로 $a < 0$
㉠의 양변에 a 를 곱하면
 $ax^2-5ax+6a > 0$
 $\therefore b=-5a, c=6a$
이를 $cx^2+4ax+2b > 0$ 에 대입하면
 $6ax^2+4ax-10a > 0$
 $3x^2+2x-5 < 0$ ($\because a < 0$)
 $(3x+5)(x-1) < 0$
 $\therefore -\frac{5}{3} < x < 1$

- 18 주어진 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 위로 볼록하고 x 축과 두 점 $(-1, 0)$, $(3, 0)$ 에서 만나므로
 $f(x)=a(x+1)(x-3)$ ($a<0$)이라 하면
 $f\left(\frac{x+1}{3}\right)\leq 0$ 에서 $a\left(\frac{x+1}{3}+1\right)\left(\frac{x+1}{3}-3\right)\leq 0$
 $\frac{a}{9}(x+4)(x-8)\leq 0$, $(x+4)(x-8)\geq 0$ ($\because a<0$)
 $\therefore x\leq -4$ 또는 $x\geq 8$

다른 풀이

$f\left(\frac{x+1}{3}\right)\leq 0$ 에서 $\frac{x+1}{3}=t$ 로 놓으면 주어진 그래프에서 $f(t)\leq 0$ 을 만족시키는 t 의 값의 범위는 $t\leq -1$ 또는 $t\geq 3$ 이므로
 $\frac{x+1}{3}\leq -1$ 또는 $\frac{x+1}{3}\geq 3$
 $\therefore x\leq -4$ 또는 $x\geq 8$

- 19 $f(x)>0$ 의 해가 $x<-3$ 또는 $x>4$ 이므로
 $f(x)=a(x+3)(x-4)$ ($a>0$)라 하면
 $f(-x)<0$ 에서 $a(-x+3)(-x-4)<0$
 $a(x-3)(x+4)<0$, $(x+4)(x-3)<0$ ($\because a>0$)
 $\therefore -4<x<3$

- 20 $f(x)<0$ 의 해가 $-2<x<6$ 이므로
 $f(x)=a(x+2)(x-6)$ ($a>0$)이라 하면
 $f(3x+1)<0$ 에서 $a(3x+1+2)(3x+1-6)<0$
 $3a(x+1)(3x-5)<0$
 $(x+1)(3x-5)<0$ ($\because a>0$)
 $\therefore -1<x<\frac{5}{3}$

따라서 정수 x 는 0, 1의 2개이다.

다른 풀이

$f(3x+1)<0$ 에서 $3x+1=t$ 로 놓으면 $f(t)<0$ 의 해가 $-2<t<6$ 이므로
 $-2<3x+1<6$, $-3<3x<5$
 $\therefore -1<x<\frac{5}{3}$
 따라서 정수 x 는 0, 1의 2개이다.

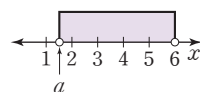
- 21 $f(x)\geq 0$ 의 해가 $1\leq x\leq 5$ 이므로
 $f(x)=a(x-1)(x-5)$ ($a<0$)라 하면
 $f(1004-x)\leq 0$ 에서
 $a(1004-x-1)(1004-x-5)\leq 0$
 $a(x-1003)(x-999)\leq 0$
 $(x-999)(x-1003)\geq 0$ ($\because a<0$)
 $\therefore x\leq 999$ 또는 $x\geq 1003$
 따라서 x 의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

- 22 $x^2-(2a+3)x+a(a+3)\leq 0$ 에서
 $(x-a)\{x-(a+3)\}\leq 0$
 $\therefore a\leq x\leq a+3$
 이때 a 는 양의 정수이므로 정수 x 는 $a, a+1, a+2, a+3$ 이고 모든 x 의 값의 합이 10이므로
 $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)=10$
 $4a+6=10$ $\therefore a=1$

- 23 $x^2-ax+2a<6x-4a$ 에서
 $x^2-(a+6)x+6a<0$
 $(x-a)(x-6)<0$
 (i) $a<6$ 일 때

$$a< x < 6$$

주어진 이차부등식을 만족시키는 정수 x 가 4개가 되려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$$1\leq a < 2$$

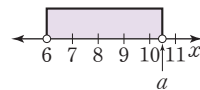
a 는 자연수이므로 $a=1$

- (ii) $a=6$ 일 때, 해는 없다.

- (iii) $a>6$ 일 때

$$6 < x < a$$

주어진 이차부등식을 만족시키는 정수 x 가 4개가 되려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$$10 < a \leq 11$$

a 는 자연수이므로 $a=11$

- (i), (ii), (iii)에서 $a=1$ 또는 $a=11$

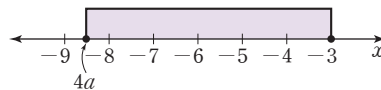
따라서 모든 자연수 a 의 값의 합은 $1+11=12$

- 24 $x^2-(4a-3)x-12a\leq 0$ 에서
 $(x-4a)(x+3)\leq 0$

- (i) $4a<-3$, 즉 $a<-\frac{3}{4}$ 일 때

$$4a\leq x\leq -3$$

주어진 이차부등식을 만족시키는 정수 x 가 6개가 되려면 다음 그림과 같아야 한다.



$$-9 < 4a \leq -8 \quad \therefore -\frac{9}{4} < a \leq -2$$

a 는 정수이므로 $a=-2$

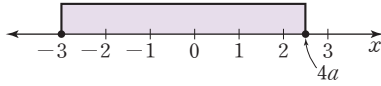
- (ii) $4a=-3$, 즉 $a=-\frac{3}{4}$ 일 때

$x=-3$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $4a > -3$, 즉 $a > -\frac{3}{4}$ 일 때

$$-3 \leq x \leq 4a$$

주어진 이차부등식을 만족시키는 정수 x 가 6개가 되려면 다음 그림과 같아야 한다.



$$2 \leq 4a < 3 \quad \therefore \frac{1}{2} \leq a < \frac{3}{4}$$

이때 정수 a 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a = -2$

25 이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 15 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - (2k + 15) \leq 0$$

$$k^2 - 2k - 15 \leq 0, (k+3)(k-5) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq k \leq 5$$

따라서 정수 k 의 개수는

$$5 - (-3) + 1 = 9$$

26 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $ax^2 - 3ax - 6 \leq 0$ 이 성립해야 하므로

$$a < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $ax^2 - 3ax - 6 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 9a^2 + 24a \leq 0$$

$$3a(3a + 8) \leq 0 \quad \therefore -\frac{8}{3} \leq a \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{의 공통부분은 } -\frac{8}{3} \leq a < 0$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1$ 이므로 구하는 합은

$$-2 + (-1) = -3$$

27 모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt{x^2 + 2kx - k + 2}$ 가 실수가 되려면 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2 + 2kx - k + 2 \geq 0$ 이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2 + 2kx - k + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - (-k + 2) \leq 0$$

$$k^2 + k - 2 \leq 0, (k+2)(k-1) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq k \leq 1$$

따라서 k 의 최댓값은 1이다.

28 (i) $m = 3$ 일 때

$0 \times x^2 + 0 \times x - 4 < 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $m \neq 3$ 일 때

$m - 3 < 0$ 이어야 하므로 $m < 3$

또 이차방정식 $(m-3)x^2 + 2(m-3)x - 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (m-3)^2 + 4(m-3) < 0$$

$$(m-3)\{(m-3) + 4\} < 0$$

$$(m+1)(m-3) < 0$$

$$\therefore -1 < m < 3 \quad \blacktriangleleft m < 3 \text{을 만족시킨다.}$$

(i), (ii)에서 $-1 < m \leq 3$

29 주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 8x + (a-6) \geq 0$ 이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 + 8x + (a-6) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 16 - (a-6) \leq 0$$

$$-a + 22 \leq 0 \quad \therefore a \geq 22$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 22이다.

30 $-x^2 + 2(a+3)x + a - 3 \geq 0$ 에서

$$x^2 - 2(a+3)x - a + 3 \leq 0$$

이차방정식 $x^2 - 2(a+3)x - a + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (-a+3) \geq 0$$

$$a^2 + 7a + 6 \geq 0$$

$$(a+6)(a+1) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -6 \text{ 또는 } a \geq -1$$

31 (i) $a > 0$ 일 때

주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a < 0$ 일 때

이차방정식 $ax^2 + 4x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4 - a^2 > 0$$

$$a^2 - 4 < 0, (a+2)(a-2) < 0$$

$$\therefore -2 < a < 2$$

그런데 $a < 0$ 이므로 $-2 < a < 0$

(i), (ii)에서

$$-2 < a < 0 \text{ 또는 } a > 0$$

32 $ax^2 - 2ax - 3 > 0$ 이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$ax^2 - 2ax - 3 \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 성립해야 한다.

(i) $a = 0$ 일 때

$0 \times x^2 - 0 \times x - 3 \leq 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때

모든 실수 x 에 대하여 ㉠이 성립하려면

$$a < 0 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

또 이차방정식 $ax^2 - 2ax - 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 + 3a \leq 0$$

$$a(a+3) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq a \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $-3 \leq a < 0$

(i), (ii)에서 $-3 \leq a \leq 0$

따라서 정수 a 의 개수는

$$0 - (-3) + 1 = 4$$

33 $f(x) = -x^2 + 3x + 2k = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 2k + \frac{9}{4}$ 라 하자.

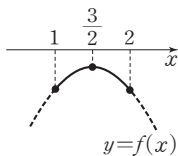
$1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이 항상 성

립하려면 $y = f(x)$ 의 그래프가 오

른쪽 그림과 같아야 하므로

$$f\left(\frac{3}{2}\right) \leq 0$$

$$2k + \frac{9}{4} \leq 0 \quad \therefore k \leq -\frac{9}{8}$$



34 $x^2 - 10x + 24 \leq 0$ 에서

$$(x-4)(x-6) \leq 0 \quad \therefore 4 \leq x \leq 6$$

$f(x) = x^2 - 6x - a^2 + 17 = (x-3)^2 - a^2 + 8$ 이라 하자.

$4 \leq x \leq 6$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이 항상 성

립하려면 $y = f(x)$ 의 그래프가 오

른쪽 그림과 같아야 하므로

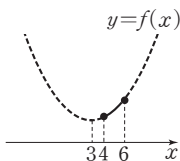
$$f(4) \geq 0$$

$$-a^2 + 9 \geq 0, \quad a^2 - 9 \leq 0$$

$$(a+3)(a-3) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq a \leq 3$$

따라서 정수 a 의 개수는

$$3 - (-3) + 1 = 7$$



35 $-1 < x < 3$ 에서 $-x^2 + kx + 2k > -x + 1$, 즉

$x^2 - (k+1)x - 2k + 1 < 0$ 이 항상 성립한다.

$f(x) = x^2 - (k+1)x - 2k + 1$ 이라 하자.

$-1 < x < 3$ 에서 $f(x) < 0$ 이 항상

성립하려면 $y = f(x)$ 의 그래프가

오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$f(-1) \leq 0, \quad f(3) \leq 0$$

$$f(-1) \leq 0 \text{에서 } -k + 3 \leq 0$$

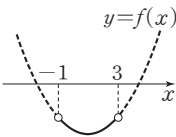
$$\therefore k \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{\Gamma}$$

$$f(3) \leq 0 \text{에서 } -5k + 7 \leq 0$$

$$\therefore k \geq \frac{7}{5} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $k \geq 3$

따라서 k 의 최솟값은 3이다.



03 연립이차부등식

73~76쪽

1 $-5 < x < -3$ 또는 $x > 2$	2 13	3 ㉡
4 ㉢	5 ㉠	6 $\frac{1}{6}$
7 ㉤	8 1	
9 $-2 \leq a < -1$	10 ㉣	11 6 이상 9 이하
12 6	13 ㉣	14 ㉤
15 ㉡	16 6	
17 ㉤	18 ㉤	19 4
20 5	21 $-2 < a < 2$	22 2
23 ㉣	24 $-\frac{1}{4}$	
25 1	26 ㉣	27 ㉡

1 $3x + 2 < 5x + 12$ 를 풀면

$$-2x < 10 \quad \therefore x > -5 \quad \dots\dots \textcircled{\Gamma}$$

$2x^2 + 2x > 12$ 를 풀면

$$x^2 + x - 6 > 0, \quad (x+3)(x-2) > 0$$

$$\therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡의 공통부분은

$$-5 < x < -3 \text{ 또는 } x > 2$$

2 $x^2 - x - 56 \leq 0$ 을 풀면

$$(x+7)(x-8) \leq 0 \quad \therefore -7 \leq x \leq 8 \quad \dots\dots \textcircled{\Gamma}$$

$2x^2 - 3x - 2 > 0$ 을 풀면

$$(2x+1)(x-2) > 0$$

$$\therefore x < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡의 공통부분은

$$-7 \leq x < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } 2 < x \leq 8$$

따라서 정수 x 는 $-7, -6, \dots, -1, 3, 4, \dots, 8$ 의 13개이다.

3 $2x + 1 < x^2 - 6x + 8$ 을 풀면

$$x^2 - 8x + 7 > 0, \quad (x-1)(x-7) > 0$$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 7 \quad \dots\dots \textcircled{\Gamma}$$

$x^2 - 6x + 8 \leq 15$ 를 풀면

$$x^2 - 6x - 7 \leq 0, \quad (x+1)(x-7) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 7 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠, ㉡의 공통부분은

$$-1 \leq x < 1$$

따라서 $\alpha = -1, \beta = 1$ 이므로 $\alpha\beta = -1$

4 $x^2 + 2|x| - 35 \geq 0$ 을 풀면

(i) $x < 0$ 일 때

$$x^2 - 2x - 35 \geq 0, \quad (x+5)(x-7) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -5 \text{ 또는 } x \geq 7$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x \leq -5$

(ii) $x \geq 0$ 일 때

$$x^2 + 2x - 35 \geq 0$$

$$(x+7)(x-5) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -7 \text{ 또는 } x \geq 5$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x \geq 5$

(i), (ii)에서 $x \leq -5$ 또는 $x \geq 5$ ㉠

$$|x-2| < 6 \text{을 풀면}$$

$$-6 < x-2 < 6$$

$$\therefore -4 < x < 8 \text{ ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $5 \leq x < 8$

따라서 정수 x 는 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$$5+6+7=18$$

5 $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ 을 풀면

$$(x+1)(x-3) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 3 \text{ ㉢}$$

$$x^2 - (a+2)x + 2a < 0 \text{을 풀면}$$

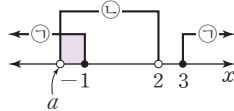
$$(x-a)(x-2) < 0$$

$$\therefore \begin{cases} a < 2 \text{일 때, } a < x < 2 \\ a = 2 \text{일 때, 해는 없다.} \\ a > 2 \text{일 때, } 2 < x < a \end{cases} \text{ ㉣}$$

㉢, ㉣의 공통부분이

$$-2 < x \leq -1 \text{이므로}$$

$$a = -2$$



6 $3x^2 + 4x + 1 < 0$ 을 풀면

$$(x+1)(3x+1) < 0$$

$$\therefore -1 < x < -\frac{1}{3} \text{ ㉤}$$

주어진 연립부등식에서 $6x^2 - x - 1 > 0$ 을 풀면

$$(3x+1)(2x-1) > 0$$

$$\therefore x < -\frac{1}{3} \text{ 또는 } x > \frac{1}{2} \text{ ㉥}$$

$$x^2 + (1-a)x - a < 0 \text{을 풀면}$$

$$(x-a)(x+1) < 0$$

$$\therefore \begin{cases} a < -1 \text{일 때, } a < x < -1 \\ a = -1 \text{일 때, 해는 없다.} \\ a > -1 \text{일 때, } -1 < x < a \end{cases} \text{ ㉦}$$

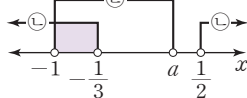
㉤, ㉦의 공통부분이 ㉢과 같

으므로

$$-\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{2}$$

따라서 a 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 $-\frac{1}{3}$ 이므로 그 합은

$$\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$



7 $x^2 + (a+b)x + ab > 0$ 을 풀면

$$(x+b)(x+a) > 0$$

$$\therefore x < -b \text{ 또는 } x > -a \text{ (} \because -b < -a \text{)}$$

이는 $x < 1$ 또는 $x > 2$ 와 같으므로

$$-b=1, -a=2 \quad \therefore a=-2, b=-1$$

$$x^2 - (a+c)x + ac \leq 0 \text{을 풀면}$$

$$(x-a)(x-c) \leq 0$$

$$\therefore a \leq x \leq c \text{ (} \because a < c \text{)}$$

이는 $-2 \leq x \leq 3$ 과 같으므로 $c=3$

$$\therefore abc = -2 \times (-1) \times 3 = 6$$

8 $x^2 - 5x - 14 > 0$ 을 풀면

$$(x+2)(x-7) > 0$$

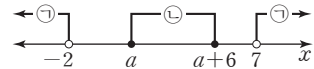
$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 7 \text{ ㉧}$$

$$x^2 - 2(a+3)x + a^2 + 6a \leq 0 \text{을 풀면}$$

$$(x-a)\{x-(a+6)\} \leq 0$$

$$\therefore a \leq x \leq a+6 \text{ ㉨}$$

㉧, ㉨의 공통부분이 존재하지 않으려면 다음 그림과 같아야 한다.



$$a \geq -2, a+6 \leq 7 \text{이어야 하므로 } -2 \leq a \leq 1$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 1이다.

9 $x^2 + x - 6 < 0$ 을 풀면

$$(x+3)(x-2) < 0$$

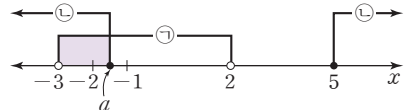
$$\therefore -3 < x < 2 \text{ ㉩}$$

$$x^2 - (a+5)x + 5a \geq 0 \text{을 풀면}$$

$$(x-a)(x-5) \geq 0$$

$$\therefore \begin{cases} a < 5 \text{일 때, } x \leq a \text{ 또는 } x \geq 5 \\ a = 5 \text{일 때, 해는 모든 실수이다.} \\ a > 5 \text{일 때, } x \leq 5 \text{ 또는 } x \geq a \end{cases} \text{ ㉪}$$

㉩, ㉪의 공통부분에 속하는 정수가 -2뿐이려면 다음 그림과 같아야 한다.



$$\therefore -2 \leq a < -1$$

10 $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ 을 풀면

$$(x+1)(x-3) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 3 \text{ ㉫}$$

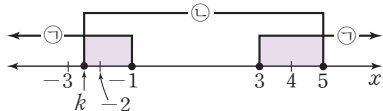
$$x^2 - (5+k)x + 5k \leq 0 \text{을 풀면}$$

$$(x-k)(x-5) \leq 0$$

$$\therefore \begin{cases} k < 5 \text{ 일 때, } k \leq x \leq 5 \\ k = 5 \text{ 일 때, } x = 5 \\ k > 5 \text{ 일 때, } 5 \leq x \leq k \end{cases} \dots\dots \textcircled{A}$$

①, ②의 공통부분에 속하는 정수 x 가 5개가 되려면 다음과 같아야 한다.

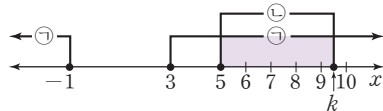
(i) $k < 5$ 일 때



$$\therefore -3 < k \leq -2$$

k 는 정수이므로 $k = -2$

(ii) $k > 5$ 일 때



$$\therefore 9 \leq k < 10$$

k 는 정수이므로 $k = 9$

(i), (ii)에서 $k = -2$ 또는 $k = 9$

따라서 모든 정수 k 의 값의 곱은 $-2 \times 9 = -18$

11 직사각형의 가로와 세로의 길이를 x 라 하면 세로의 길이는 $12 - x$ 이다.

$$\text{이때 } 12 - x > 0 \text{ 이므로 } x < 12 \dots\dots \textcircled{A}$$

직사각형의 넓이가 27 이상이므로

$$x(12 - x) \geq 27, x^2 - 12x + 27 \leq 0$$

$$(x - 3)(x - 9) \leq 0 \quad \therefore 3 \leq x \leq 9 \dots\dots \textcircled{B}$$

가로의 길이가 세로의 길이보다 길거나 같으므로

$$x \geq 12 - x \quad \therefore x \geq 6 \dots\dots \textcircled{C}$$

①, ②, ③의 공통부분은 $6 \leq x \leq 9$

따라서 가로의 길이의 범위는 6 이상 9 이하이다.

12 $\overline{AE} = x$ 라 하면 색칠한 부분의 둘레의 길이가 42 이하이므로

$$4x + 2(x + 3) \leq 42$$

$$6x \leq 36 \quad \therefore x \leq 6$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $0 < x \leq 6 \dots\dots \textcircled{A}$

넓이가 18 이상이므로

$$x^2 + 3x \geq 18, x^2 + 3x - 18 \geq 0$$

$$(x + 6)(x - 3) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -6 \text{ 또는 } x \geq 3$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x \geq 3 \dots\dots \textcircled{B}$

①, ②의 공통부분은 $3 \leq x \leq 6$

따라서 선분 AE 의 길이의 최댓값은 6이다.

13 삼각형의 변의 길이는 양수이므로

$$2x - 1 > 0 \quad \therefore x > \frac{1}{2} \dots\dots \textcircled{A}$$

$2x + 1$ 이 세 변 중 가장 긴 변의 길이이므로

$$2x + 1 < (2x - 1) + x \quad \therefore x > 2 \dots\dots \textcircled{B}$$

둔각삼각형이 되려면

$$(2x + 1)^2 > (2x - 1)^2 + x^2$$

$$x^2 - 8x < 0, x(x - 8) < 0$$

$$\therefore 0 < x < 8 \dots\dots \textcircled{C}$$

①, ②, ③의 공통부분은

$$2 < x < 8$$

14 이차방정식 $x^2 + ax + a = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = a^2 - 4a < 0$$

$$a(a - 4) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 4 \dots\dots \textcircled{A}$$

이차방정식 $x^2 + ax - a + 3 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = a^2 - 4(-a + 3) \geq 0$$

$$a^2 + 4a - 12 \geq 0, (a + 6)(a - 2) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -6 \text{ 또는 } a \geq 2 \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②의 공통부분은

$$2 \leq a < 4$$

15 이차함수 $y = x^2 + ax + 16$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2 + ax + 16 = 0$ 이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D_1 이라 할 때

$$D_1 = a^2 - 64 < 0$$

$$(a + 8)(a - 8) < 0$$

$$\therefore -8 < a < 8 \dots\dots \textcircled{A}$$

이차함수 $y = x^2 - 2ax + 16$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2 - 2ax + 16 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D_2 라 할 때

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - 16 > 0$$

$$(a + 4)(a - 4) > 0$$

$$\therefore a < -4 \text{ 또는 } a > 4 \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②의 공통부분은

$$-8 < a < -4 \text{ 또는 } 4 < a < 8$$

따라서 정수 a 는 $-7, -6, -5, 5, 6, 7$ 의 6개이다.

16 이차방정식 $x^2 + 2ax + 3a + 4 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - (3a + 4) \geq 0$$

$$a^2 - 3a - 4 \geq 0, (a + 1)(a - 4) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -1 \text{ 또는 } a \geq 4 \dots\dots \textcircled{A}$$

부등식 $(a+2)x^2-2(a+2)x+7\geq 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로

(i) $a=-2$ 일 때

$0 \times x^2 - 0 \times x + 7 \geq 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $a \neq -2$ 일 때

$a+2 > 0$ 이어야 하므로

$a > -2$ ㉔

또 이차방정식 $(a+2)x^2-2(a+2)x+7=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (a+2)^2 - 7(a+2) \leq 0$$

$$(a+2)\{(a+2)-7\} \leq 0, (a+2)(a-5) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 5 \quad \dots\dots ㉕$$

㉔, ㉕의 공통부분은 $-2 < a \leq 5$

(i), (ii)에서 $-2 \leq a \leq 5$ ㉖

㉔, ㉖의 공통부분은

$$-2 \leq a \leq -1 \text{ 또는 } 4 \leq a \leq 5$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 4, 5$ 이므로 구하는 합은

$$-2 + (-1) + 4 + 5 = 6$$

17 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+4=0$ 의 두 실근을 α, β , 판별식을 D 라 하면

(i) $D > 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = (k+1)^2 - 4 > 0$$

$$k^2+2k-3 > 0, (k+3)(k-1) > 0$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > 1 \quad \dots\dots ㉑$$

(ii) $\alpha + \beta > 0$ 에서

$$2(k+1) > 0 \quad \therefore k > -1 \quad \dots\dots ㉒$$

(iii) $\alpha\beta > 4$ 에서

㉑, ㉒의 공통부분은 $k > 1$

18 이차방정식 $x^2+(k-1)x+k+2=0$ 의 두 실근을 α, β , 판별식을 D 라 하면

(i) $D \geq 0$ 에서

$$(k-1)^2 - 4(k+2) \geq 0$$

$$k^2-6k-7 \geq 0, (k+1)(k-7) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -1 \text{ 또는 } k \geq 7 \quad \dots\dots ㉑$$

(ii) $\alpha + \beta < 0$ 에서

$$-k+1 < 0 \quad \therefore k > 1 \quad \dots\dots ㉒$$

(iii) $\alpha\beta > 0$ 에서

$$k+2 > 0 \quad \therefore k > -2 \quad \dots\dots ㉓$$

㉑, ㉒, ㉓의 공통부분은 $k \geq 7$

따라서 k 의 최솟값은 7이다.

19 이차방정식 $x^2+4(m-1)x+m^2-m-6=0$ 의 두 실근을 α, β 라 하면 $\alpha\beta < 0$ 에서

$$m^2-m-6 < 0$$

$$(m+2)(m-3) < 0 \quad \therefore -2 < m < 3$$

따라서 정수 m 은 $-1, 0, 1, 2$ 의 4개이다.

20 이차방정식 $x^2-(k^2-2k-8)x-k+3=0$ 의 두 실근을 α, β 라 하면

(i) $\alpha\beta < 0$ 에서

$$-k+3 < 0 \quad \therefore k > 3 \quad \dots\dots ㉑$$

(ii) $\alpha + \beta > 0$ 에서

$$k^2-2k-8 > 0, (k+2)(k-4) > 0$$

$$\therefore k < -2 \text{ 또는 } k > 4 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒의 공통부분은 $k > 4$

따라서 정수 k 의 최솟값은 5이다.

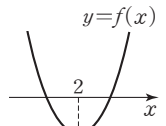
21 $f(x) = x^2 - 3x + a^2 - 2$ 라 하면

$f(2) < 0$ 이어야 하므로

$$4 - 6 + a^2 - 2 < 0, a^2 - 4 < 0$$

$$(a+2)(a-2) < 0$$

$$\therefore -2 < a < 2$$



22 $f(x) = x^2 - 2ax + 4a + 5$ 라 하고 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

(i) $D \geq 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = a^2 - (4a+5) \geq 0$$

$$a^2-4a-5 \geq 0, (a+1)(a-5) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -1 \text{ 또는 } a \geq 5 \quad \dots\dots ㉑$$

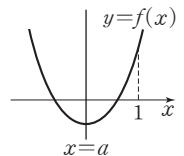
(ii) $f(1) > 0$ 에서

$$1 - 2a + 4a + 5 > 0 \quad \therefore a > -3 \quad \dots\dots ㉒$$

(iii) $a < 1$ ㉓

㉑, ㉒, ㉓의 공통부분은 $-3 < a \leq -1$

따라서 정수 a 는 $-2, -1$ 의 2개이다.



23 $f(x) = x^2 + 2(k+2)x - k - 2$ 라

하고 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별

식을 D 라 하면

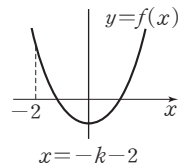
(i) $D > 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = (k+2)^2 - (-k-2) > 0$$

$$(k+2)\{(k+2)+1\} > 0$$

$$(k+2)(k+3) > 0$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > -2 \quad \dots\dots ㉑$$



(ii) $f(-2) > 0$ 에서

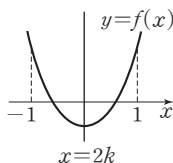
$$4 - 4(k+2) - k - 2 > 0 \quad \therefore k < -\frac{6}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

(iii) $-k-2 > -2$ 에서 $k < 0$

㉓, ㉔, ㉕의 공통부분은

$$k < -3 \text{ 또는 } -2 < k < -\frac{6}{5}$$

24 $f(x) = x^2 - 4kx + 3k + 1$ 이라 하고 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면



(i) $D \geq 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = 4k^2 - (3k+1) \geq 0$$

$$4k^2 - 3k - 1 \geq 0, (4k+1)(k-1) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -\frac{1}{4} \text{ 또는 } k \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉖}$$

(ii) $f(-1) > 0$ 에서

$$1 + 4k + 3k + 1 > 0 \quad \therefore k > -\frac{2}{7} \quad \dots\dots \textcircled{㉗}$$

$f(1) > 0$ 에서

$$1 - 4k + 3k + 1 > 0 \quad \therefore k < 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉘}$$

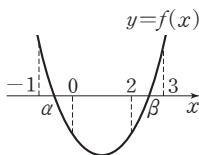
$$\textcircled{㉖}, \textcircled{㉗} \text{의 공통부분은 } -\frac{2}{7} < k < 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉙}$$

(iii) $-1 < 2k < 1$ 에서 $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$ $\dots\dots \textcircled{㉚}$

$$\textcircled{㉙}, \textcircled{㉚} \text{의 공통부분은 } -\frac{2}{7} < k \leq -\frac{1}{4}$$

따라서 k 의 최댓값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

25 $f(x) = x^2 - (k+1)x - 4k$ 라 할 때, 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 한 근이 -1 과 0 사이에 있고 다른 한 근이 2 와 3 사이에 있으려면



$$f(-1)f(0) < 0, f(2)f(3) < 0$$

$$f(-1)f(0) < 0 \text{에서}$$

$$\{1 + (k+1) - 4k\} \times (-4k) < 0$$

$$4k(3k-2) < 0 \quad \therefore 0 < k < \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉛}$$

$$f(2)f(3) < 0 \text{에서}$$

$$\{4 - 2(k+1) - 4k\} \{9 - 3(k+1) - 4k\} < 0$$

$$2(3k-1)(7k-6) < 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} < k < \frac{6}{7} \quad \dots\dots \textcircled{㉜}$$

$$\textcircled{㉛}, \textcircled{㉜} \text{의 공통부분은 } \frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}$$

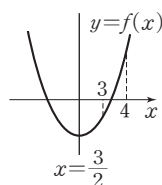
따라서 $p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3}$ 이므로

$$p+q=1$$

26 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 에서

$$(x-3)(x-4) = 0 \quad \therefore x=3 \text{ 또는 } x=4$$

$f(x) = x^2 - 3x + a + 2$ 라 할 때, 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 한 근만이 3과 4 사이에 있으려면



$$f(3)f(4) < 0$$

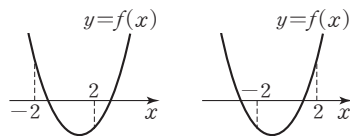
$$(9-9+a+2)(16-12+a+2) < 0$$

$$(a+2)(a+6) < 0$$

$$\therefore -6 < a < -2$$

27 $f(x) = x^2 - 2(a+2)x - a$ 라 하자.

(i) 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근 중 한 근만 $-2 \leq x \leq 2$ 에 속하는 경우



$$f(-2)f(2) \leq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$\{4 + 4(a+2) - a\} \{4 - 4(a+2) - a\} \leq 0$$

$$(3a+12)(-5a-4) \leq 0$$

$$3(a+4)(5a+4) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -4 \text{ 또는 } a \geq -\frac{4}{5}$$

(ii) 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이 모두 $-2 \leq x \leq 2$ 에 속하는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

㉑ $D \geq 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = (a+2)^2 + a \geq 0$$

$$a^2 + 5a + 4 \geq 0$$

$$(a+4)(a+1) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -4 \text{ 또는 } a \geq -1 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

㉒ $f(-2) \geq 0$ 에서

$$4 + 4(a+2) - a \geq 0 \quad \therefore a \geq -4 \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

$f(2) \geq 0$ 에서

$$4 - 4(a+2) - a \geq 0 \quad \therefore a \leq -\frac{4}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$\textcircled{㉒}, \textcircled{㉓} \text{의 공통부분은 } -4 \leq a \leq -\frac{4}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

㉕ $-2 \leq a+2 \leq 2$ 에서 $-4 \leq a \leq 0$ $\dots\dots \textcircled{㉖}$

$$\textcircled{㉕}, \textcircled{㉖} \text{의 공통부분은 } a = -4 \text{ 또는 } -1 \leq a \leq -\frac{4}{5}$$

(i), (ii)에서 $a \leq -4$ 또는 $a \geq -1$

따라서 $\alpha = -4, \beta = -1$ 이므로

$$\alpha\beta = 4$$

III-1. 경우의 수

01 합의 법칙과 곱의 법칙					78~81쪽
1 9	2 ③	3 9	4 ③	5 ③	
6 ①	7 19	8 40	9 18	10 ②	
11 ④	12 ③	13 ①	14 ⑤	15 3	
16 ③	17 9	18 ②	19 24	20 18	
21 50	22 540	23 96	24 36	25 ④	
26 35	27 66				

- 1 (i) 두 눈의 수의 합이 2인 경우
(1, 1)의 1가지
(ii) 두 눈의 수의 합이 4인 경우
(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지
(iii) 두 눈의 수의 합이 8인 경우
(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
 $1+3+5=9$
- 2 (i) 두 눈의 수의 차가 0인 경우
(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)의 6가지
(ii) 두 눈의 수의 차가 1인 경우
(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3),
(4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)의 10가지
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
 $6+10=16$
- 3 (i) 세 수의 곱이 4인 경우
(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2),
(2, 2, 1)의 6가지
(ii) 세 수의 곱이 5인 경우
(1, 1, 5), (1, 5, 1), (5, 1, 1)의 3가지
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
 $6+3=9$
- 4 1부터 100까지의 자연수 중에서
(i) 3으로 나누어떨어지는 수
3의 배수이므로 3, 6, 9, ..., 99의 33개
(ii) 5로 나누어떨어지는 수
5의 배수이므로 5, 10, 15, ..., 100의 20개
(iii) 3과 5로 모두 나누어떨어지는 수
3과 5의 최소공배수인 15의 배수이므로 15, 30, 45,
60, 75, 90의 6개

(i), (ii), (iii)에서 3 또는 5로 나누어떨어지는 수의 개수는
 $33+20-6=47$
 따라서 구하는 자연수의 개수는
 $100-47=53$

- 5 x, y, z 가 자연수이므로 $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$
 $2x+y+z=8$ 에서 $2x < 8$
 $\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$
 (i) $x=1$ 일 때
 $y+z=6$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는 (1, 5), (2, 4),
 (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5개
 (ii) $x=2$ 일 때
 $y+z=4$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는 (1, 3), (2, 2),
 (3, 1)의 3개
 (iii) $x=3$ 일 때
 $y+z=2$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는 (1, 1)의 1개
 (i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는
 $5+3+1=9$
- 6 x, y 가 음이 아닌 정수이므로 $x \geq 0, y \geq 0$
 $2x+5y \leq 15$ 에서 $5y \leq 15$
 $\therefore y=0$ 또는 $y=1$ 또는 $y=2$ 또는 $y=3$
 (i) $y=0$ 일 때
 $2x \leq 15$ 에서 $x \leq \frac{15}{2}$ 이므로 x 는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
 의 8개
 (ii) $y=1$ 일 때
 $2x \leq 10$ 에서 $x \leq 5$ 이므로 x 는 0, 1, 2, 3, 4, 5의 6개
 (iii) $y=2$ 일 때
 $2x \leq 5$ 에서 $x \leq \frac{5}{2}$ 이므로 x 는 0, 1, 2의 3개
 (iv) $y=3$ 일 때
 $2x \leq 0$ 에서 $x \leq 0$ 이므로 x 는 0의 1개
 (i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는
 $8+6+3+1=18$
- 7 이차방정식 $2x^2-ax+b=0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D=a^2-8b < 0$
 $\therefore a^2 < 8b$
 (i) $b=1$ 일 때
 $a^2 < 8$, 즉 $0 < a < 2\sqrt{2}$ 이므로 a 는 1, 2의 2개
 (ii) $b=2$ 일 때
 $a^2 < 16$, 즉 $0 < a < 4$ 이므로 a 는 1, 2, 3의 3개
 (iii) $b=3$ 일 때
 $a^2 < 24$, 즉 $0 < a < 2\sqrt{6}$ 이므로 a 는 1, 2, 3, 4의 4개

(iv) $b=4$ 일 때

$a^2 < 32$, 즉 $0 < a < 4\sqrt{2}$ 이므로 a 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개

(v) $b=5$ 일 때

$a^2 < 40$, 즉 $0 < a < 2\sqrt{10}$ 이므로 a 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개

(i)~(v)에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$2+3+4+5+5=19$$

- 8 모자, 바지, 신발을 각각 1개씩 구매하는 경우의 수는

$$4 \times 5 \times 2 = 40$$

- 9 a, b 에 x, y, z 를 각각 곱하여 항이 만들어지고, 그것에 다시 p, q, r 를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 구하는 항의 개수는

$$2 \times 3 \times 3 = 18$$

- 10 (가)에서 일의 자리에 올 수 있는 숫자는

0, 2, 4, 6, 8의 5가지

(나)에서 십의 자리에 올 수 있는 숫자는

1, 2, 3, 6의 4가지

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$5 \times 4 = 20$$

- 11 모든 경우의 수는 $6 \times 6 \times 6 = 216$

서로 다른 세 개의 주사위에서 모두 3의 배수가 아닌 수의 눈이 나오는 경우의 수는 $4 \times 4 \times 4 = 64$

따라서 구하는 경우의 수는

$$216 - 64 = 152$$

- 12 $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ 이므로 360의 양의 약수의 개수는

$$(3+1)(2+1)(1+1) = 24$$

- 13 $120 = 2^3 \times 3 \times 5$, $320 = 2^6 \times 5$ 이므로 120과 320의 최대공약수는 $2^3 \times 5$

따라서 구하는 공약수의 개수는 $2^3 \times 5$ 의 양의 약수의 개수와 같으므로

$$(3+1)(1+1) = 8$$

- 14 $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

이때 짝수는 2를 소인수로 가지므로 180의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는 $2 \times 3^2 \times 5$ 의 양의 약수의 개수와 같다.

$$\therefore a = (1+1)(2+1)(1+1) = 12$$

또 3의 배수는 3을 소인수로 가지므로 180의 양의 약수 중에서 3의 배수의 개수는 $2^2 \times 3 \times 5$ 의 양의 약수의 개수와 같다.

$$\therefore b = (2+1)(1+1)(1+1) = 12$$

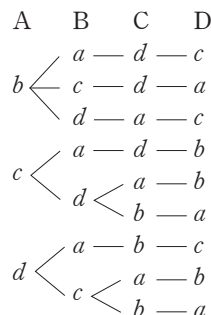
$$\therefore a+b = 12+12 = 24$$

- 15 $2^4 \times 3^3 \times 7^n$ 의 양의 약수의 개수가 80이므로

$$(4+1)(3+1)(n+1) = 80$$

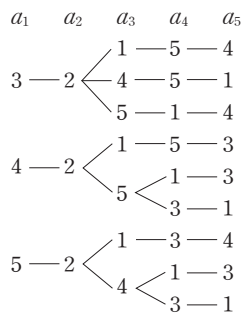
$$n+1=4 \quad \therefore n=3$$

- 16 4명의 학생을 각각 A, B, C, D라 하고, 4명의 학생이 쓴 보고서를 각각 a, b, c, d 라 할 때, 4명의 학생이 보고서를 바꿔 보는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



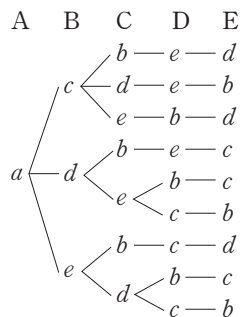
따라서 구하는 경우의 수는 9이다.

- 17 $a_2=2$, $a_k \neq k$ ($k=1, 3, 4, 5$)를 만족시키는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 자연수의 개수는 9이다.

- 18 5명의 학생 A, B, C, D, E의 가방을 각각 a, b, c, d, e 라 할 때, A만 자신의 가방을 드는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



이때 B만 자신의 가방을 드는 경우, ..., E만 자신의 가방을 드는 경우도 각각 9가지이므로 구하는 경우의 수는

$$9 \times 5 = 45$$

- 19 집 → 도서관 → 편의점 → 집으로 가는 경우의 수는

$$4 \times 2 \times 3 = 24$$

- 20 (i) $B \rightarrow A \rightarrow D$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 2 = 4$

(ii) $B \rightarrow C \rightarrow D$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 1 = 2$

(iii) $B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 2 \times 1 = 4$

(iv) $B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow D$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 2 \times 2 = 8$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$4 + 2 + 4 + 8 = 18$$

- 21 (i) $A \rightarrow C \rightarrow A$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 1 = 2$

(ii) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ 로 가는 경우의 수는

$$3 \times 4 \times 2 = 24$$

(iii) $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ 로 가는 경우의 수는

$$2 \times 4 \times 3 = 24$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$2 + 24 + 24 = 50$$

- 22 B에 칠할 수 있는 색은 5가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 B와 C에 칠한 색을 제외한 3가지, E에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 구하는 경우의 수는

$$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$$

- 23 E에 칠할 수 있는 색은 4가지, A에 칠할 수 있는 색은 E에 칠한 색을 제외한 3가지, B에 칠할 수 있는 색은 A와 E에 칠한 색을 제외한 2가지, C에 칠할 수 있는 색은 B와 E에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 C와 E에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 구하는 경우의 수는

$$4 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 96$$

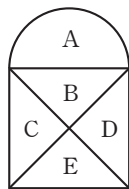
- 24 오른쪽 그림과 같이 5개의 영역을 A, B, C, D, E라 하자.

- (i) C와 D에 서로 다른 색을 칠하는 경우

B에 칠할 수 있는 색은 3가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 2가지, C에 칠할 수 있는 색은

B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 B와 C에 칠한 색을 제외한 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 C와 D에 칠한 색을 제외한 1가지이므로 C와 D에 서로 다른 색을 칠하는 경우의 수는

$$3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 12$$



- (ii) C와 D에 서로 같은 색을 칠하는 경우

B에 칠할 수 있는 색은 3가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 2가지, C와 D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 C와 D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 C와 D에 서로 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$$3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$$

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$12 + 24 = 36$$

- 25 10원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

이때 0원을 지불하는 1가지 경우를 빼주어야 하므로 구하는 방법의 수는

$$5 \times 4 \times 3 - 1 = 59$$

- 26 5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액과 10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 중복된다. 따라서 10000원짜리 지폐 3장을 5000원짜리 지폐 6장으로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 1000원짜리 지폐 3장과 5000원짜리 지폐 8장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

1000원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 1000원, 2000원, 3000원의 4가지

5000원짜리 지폐 8장으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 5000원, 10000원, ..., 40000원의 9가지

이때 0원을 지불하는 1가지 경우를 빼주어야 하므로 구하는 금액의 수는

$$4 \times 9 - 1 = 35$$

- 27 (i) 지불할 수 있는 방법의 수

1000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 방법은

0장, 1장의 2가지

500원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

이때 0원을 지불하는 1가지 경우를 빼주어야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는

$$a = 2 \times 5 \times 4 - 1 = 39$$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 중복된다. 따라서 1000원짜리 지폐 1장을 500원짜리 동전 2개로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 6개와 100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

500원짜리 동전 6개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 500원, 1000원, ..., 3000원의 7가지

100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원, 300원의 4가지

이때 0원을 지불하는 1가지 경우를 빼주어야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$$b = 7 \times 4 - 1 = 27$$

(i), (ii)에서

$$a + b = 39 + 27 = 66$$

02 순열

82~86쪽

1 3	2 ③	3 ④	4 3	5 24
6 ③	7 7	8 ②	9 ④	10 ⑤
11 ①	12 576	13 720	14 64	15 720
16 480	17 ③	18 960	19 ④	20 ④
21 2400	22 ④	23 ⑤	24 2160	25 12
26 288	27 150	28 ④	29 30	30 3
31 600	32 60	33 36	34 ③	35 40번째
36 ⑤	37 ①			

1 ${}_5P_r \times 4! = 1440$ 에서

$${}_5P_r = 60 = 5 \times 4 \times 3$$

$$\therefore r = 3$$

2 ${}_{2n}P_3 = 52 \times {}_nP_2$ 에서

$$2n(2n-1)(2n-2) = 52n(n-1)$$

$$2n-1=13 \quad (\because n \geq 2)$$

$$\therefore n = 7$$

3 ${}_{n+1}P_3 - 4 \times {}_nP_2 - 10 \times {}_{n-1}P_1 = 0$ 에서

$$(n+1)n(n-1) - 4n(n-1) - 10(n-1) = 0$$

$$n(n+1) - 4n - 10 = 0 \quad (\because n \geq 2)$$

$$n^2 - 3n - 10 = 0, \quad (n+2)(n-5) = 0$$

$$\therefore n = 5 \quad (\because n \geq 2)$$

4 ${}_5P_r \leq 12 \times {}_5P_{r-2}$ 에서

$$\frac{5!}{(5-r)!} \leq 12 \times \frac{5!}{\{5-(r-2)\}!}$$

$$\frac{(7-r)!}{(5-r)!} \leq 12$$

$$(7-r)(6-r) \leq 12, \quad r^2 - 13r + 30 \leq 0$$

$$(r-3)(r-10) \leq 0 \quad \therefore 3 \leq r \leq 10$$

그런데 $0 \leq r \leq 5, 0 \leq r-2 \leq 5$ 에서 $2 \leq r \leq 5$ 이므로

$$3 \leq r \leq 5$$

따라서 자연수 r 는 3, 4, 5의 3개이다.

5 $4! = 24$

6 ${}_5P_4 = 120$

7 ${}_nP_3 = 210$ 이므로

$$n(n-1)(n-2) = 7 \times 6 \times 5$$

$$\therefore n = 7$$

8 문학 영역의 책으로만 골라 순서대로 읽는 경우의 수는

$${}_5P_2 = 20$$

과학 영역의 책으로만 골라 순서대로 읽는 경우의 수는

$${}_4P_2 = 12$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 + 12 = 32$$

9 A, B를 한 묶음으로 생각하여 나머지 선수와 함께 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$

$$A \text{와 } B \text{가 자리를 바꾸는 경우의 수는 } 2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 2 = 48$$

10 2학년 학생 3명을 한 묶음으로 생각하여 나머지 학생과

$$\text{함께 일렬로 세우는 경우의 수는 } 6! = 720$$

$$2\text{학년 학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 } 3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$720 \times 6 = 4320$$

11 축구 선수 5명을 한 묶음으로 생각하여 야구 선수 n 명과 함께 일렬로 세우는 경우의 수는 $(n+1)!$

$$\text{축구 선수 5명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 } 5! = 120$$

이때 축구 선수끼리 서로 이웃하도록 세우는 경우의 수가 2880이므로

$$(n+1)! \times 120 = 2880$$

$$(n+1)! = 24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$n+1=4 \quad \therefore n=3$$

- 12** 같은 영역의 교재를 한 묶음으로 생각하여 3묶음을 책꽂이에 일렬로 꽂는 경우의 수는 $3! = 6$
수학 영역 교재 2권의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$
영어 영역 교재 4권의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $4! = 24$
국어 영역 교재 2권의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$
따라서 구하는 경우의 수는
 $6 \times 2 \times 24 \times 2 = 576$
- 13** e, e를 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자와 함께 일렬로 나열하는 경우의 수는 $6! = 720$
이때 e, e는 같은 문자이므로 자리를 바꾸는 경우는 없다.
따라서 구하는 경우의 수는 720이다.
- 14** 1학년 학생들과 2학년 학생들은 서로 다른 줄에 서게 되므로 한 줄에는 1학년 학생 2명과 3학년 학생 1명, 다른 한 줄에는 2학년 학생 2명과 3학년 학생 1명이 서게 된다.
1학년 학생들과 2학년 학생들을 세우는 줄을 정하는 경우의 수는 $2! = 2$
1학년 학생과 세울 3학년 학생 1명을 택하는 경우의 수는 ${}_2P_1 = 2$
1학년 학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 3학년 학생 1명과 함께 일렬로 세우는 경우의 수는 $2! = 2$
1학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$
2학년 학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 나머지 3학년 학생과 함께 일렬로 세우는 경우의 수는 $2! = 2$
2학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$
따라서 구하는 경우의 수는
 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$
- 15** 남학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 여학생 3명과 함께 의자 (7-1)개에 앉는 경우의 수는 ${}_6P_4 = 360$
남학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$
따라서 구하는 경우의 수는
 $360 \times 2 = 720$
- 16** 이웃해도 되는 자음 f, r, n, d를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$
자음 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중에서 2개의 자리에 모음 i, e를 나열하는 경우의 수는 ${}_5P_2 = 20$
따라서 구하는 경우의 수는
 $24 \times 20 = 480$
- 17** 남학생과 여학생의 수가 같으므로 남학생과 여학생을 교대로 세우는 경우는 남학생이 맨 앞에 오거나 여학생이 맨 앞에 오는 2가지가 있다.

- 각각의 경우에 대하여 남학생 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$
여학생 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$
따라서 구하는 경우의 수는
 $2 \times 6 \times 6 = 72$
- 18** 축구 선수 2명을 한 묶음으로 생각하여 농구 선수 3명과 함께 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$
축구 선수 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$
축구 선수 한 묶음 및 농구 선수 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중에서 2개의 자리에 야구 선수 2명을 세우는 경우의 수는 ${}_5P_2 = 20$
따라서 구하는 경우의 수는
 $24 \times 2 \times 20 = 960$
- 19** 접시 4개에 빵을 올려 놓으므로 빈 접시는 5개이다.
빈 접시 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 빵을 올려 놓을 접시 4개를 놓으면 되므로 구하는 경우의 수는
 ${}_6P_4 = 360$
- 20** 은혜가 4등을 하는 경우의 수는 은혜를 4등에 고정시키고 은혜를 제외한 5명의 학생을 1, 2, 3, 5, 6등에 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는
 $5! = 120$
- 21** 양 끝에 자음인 d, l, g, h, t의 5개의 문자 중에서 2개를 택하여 나열하는 경우의 수는 ${}_5P_2 = 20$
나머지 자리에 5개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $5! = 120$
따라서 구하는 경우의 수는
 $20 \times 120 = 2400$
- 22** 양 끝에 남자 4명 중에서 2명을 택하여 세우는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$
나머지 자리에 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$
따라서 구하는 경우의 수는
 $12 \times 24 = 288$
- 23** 홀수 번호가 적힌 3개의 의자 중에서 2개의 의자에 아버지, 어머니가 앉는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$
나머지 3개의 의자에 할머니, 아들, 딸이 앉는 경우의 수는 $3! = 6$
따라서 구하는 경우의 수는
 $6 \times 6 = 36$
- 24** (i) 남학생을 양 끝에 세우는 경우
양 끝에 남학생 3명 중에서 2명을 택하여 세우는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

나머지 자리에 5명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5! = 120$

따라서 남학생을 양 끝에 세우는 경우의 수는

$$6 \times 120 = 720$$

(ii) 여학생을 양 끝에 세우는 경우

양 끝에 여학생 4명 중에서 2명을 택하여 세우는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$

나머지 자리에 5명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5! = 120$

따라서 여학생을 양 끝에 세우는 경우의 수는

$$12 \times 120 = 1440$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$720 + 1440 = 2160$$

25 t, i, s를 한 묶음으로 생각하여 나머지 2개의 문자와 함께 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$

t와 s의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 2 = 12$$

26 모음인 a, i, e의 3개 중에서 2개를 택하여 c와 t 사이에 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

c와 t의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

c★t를 한 묶음으로 생각하여 나머지 3개의 문자와 함께 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 2 \times 24 = 288$$

27 (i) 7장의 카드 중에서 3장을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_7P_3 = 210$

(ii) 자음인 B, C, D, F, G가 적힌 5장의 카드 중에서 3장을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_5P_3 = 60$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$210 - 60 = 150$$

28 (i) 5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $5! = 120$

(ii) 짝수가 적힌 카드 2장을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $2! = 2$

짝수가 적힌 카드 사이와 양 끝의 3개의 자리에 홀수가 적힌 카드 3장을 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_3 = 3! = 6$

따라서 홀수가 적힌 카드가 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는

$$2 \times 6 = 12$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$120 - 12 = 108$$

29 (i) 7개의 의자에 학생 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_7P_2 = 42$

(ii) 학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 (7-1)개의 의자에 앉는 경우의 수는 ${}_6P_1 = 6$

학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 학생 2명이 서로 이웃하도록 앉는 경우의 수는

$$6 \times 2 = 12$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$42 - 12 = 30$$

다른 풀이

의자 2개에 학생이 앉으므로 빈 의자는 5개이다.

빈 의자 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 학생이 앉을 의자 2개를 놓으면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_6P_2 = 30$$

30 모음의 개수를 n 이라 하자.

(i) 6개의 알파벳을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$6! = 720$$

(ii) 양 끝에 모음 n 개 중에서 2개를 택하여 나열하는 경우의 수는 ${}_nP_2 = n(n-1)$

나머지 자리에 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$

따라서 양 끝에 모음만 오도록 나열하는 경우의 수는

$$24n(n-1)$$

이때 적어도 한쪽 끝에 자음이 오도록 나열하는 경우의 수가 576이므로

$$720 - 24n(n-1) = 576$$

$$n(n-1) = 6 = 3 \times 2 \quad \therefore n = 3$$

따라서 모음의 개수가 3이므로 자음의 개수는 $6 - 3 = 3$

31 만의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

나머지 자리에 5개의 숫자 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_5P_4 = 120$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$5 \times 120 = 600$$

32 (i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

나머지 4개의 자리에 4개의 숫자를 나열하면 되므로 그 경우의 수는 $4! = 24$

(ii) 일의 자리의 숫자가 2 또는 4인 경우

각각의 경우에 대하여 만의 자리에는 3개의 숫자가 올 수 있고, 나머지 3개의 자리에 3개의 숫자를 나열하면 되므로 그 경우의 수는 $2 \times 3 \times 3! = 36$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$$24 + 36 = 60$$

- 33 (i) 5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$${}_5P_3=60$$

- (ii) 3의 배수는 모든 자리의 숫자의 합이 3의 배수이므로 세 수의 합이 3의 배수가 되는 경우는

$$(1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)$$

각각의 경우에 대하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$3!=6$$

따라서 3의 배수의 개수는

$$4 \times 6=24$$

- (i), (ii)에서 구하는 3의 배수가 아닌 자연수의 개수는

$$60-24=36$$

- 34 (i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

나머지 자리에 4개의 숫자 중에서 2개의 숫자를 택하여 나열하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

- (ii) 일의 자리의 숫자가 1인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 4의 3가지이고, 십의 자리에는 나머지 3개의 숫자가 올 수 있으므로 그 경우의 수는 $3 \times 3=9$

- (iii) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 3, 4의 2가지이고, 십의 자리에는 나머지 3개의 숫자가 올 수 있으므로 그 경우의 수는 $2 \times 3=6$

- (iv) 일의 자리의 숫자가 3인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 4의 1가지이고, 십의 자리에는 나머지 3개의 숫자가 올 수 있으므로 그 경우의 수는 $1 \times 3=3$

- (i)~(iv)에서 구하는 자연수의 개수는

$$12+9+6+3=30$$

- 35 $1\square\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

$21\square\square\square$, $23\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는

$$2 \times 3!=12$$

$241\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $2!=2$

$243\square\square$ 꼴인 자연수를 순서대로 나열하면

24315, 24351, ...

즉, $243\square\square$ 꼴인 자연수에서 24351의 순서는 두 번째이다.

따라서 24351이 나타나는 순서는

$$24+12+2+2=40(\text{번째})$$

- 36 $A\square\square\square\square\square$ 꼴인 문자열의 개수는 $5!=120$

$B\square\square\square\square\square$ 꼴인 문자열의 개수는 $5!=120$

$CA\square\square\square\square$ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

이때 $120+120+24=264$ 이므로 267번째로 나타나는 문자열은 $CB\square\square\square\square$ 꼴인 문자열 중에서 세 번째 문자열이다.

따라서 CBADEF, CBADFE, CBAEDF, ...에서 구하는 문자열은 CBAEDF이다.

- 37 $4\square\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

$3\square\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

$24\square\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

이때 $24+24+6=54$ 이므로 56번째로 큰 수는 $23\square\square\square$

꼴인 자연수 중에서 두 번째로 큰 수이다.

따라서 23410, 23401, ...에서 구하는 수는 23401이다.

03 조합

87~90쪽

1 ④	2 10	3 ④	4 ⑤	5 94
6 31	7 224	8 ③	9 6	10 7
11 ⑤	12 ②	13 ④	14 ④	15 ④
16 5	17 226	18 ⑤	19 ①	20 ③
21 ⑤	22 24	23 412	24 150	25 ①
26 22	27 178			

- 1 ${}_nC_2+{}_n+1C_3=2 \times {}_nP_2$ 에서

$$\frac{n(n-1)}{2 \times 1} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3 \times 2 \times 1} = 2n(n-1)$$

 $3+n+1=12 (\because n \geq 2)$
 $\therefore n=8$

- 2 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-4+2=-\frac{{}_nC_r}{5}, -4 \times 2=-\frac{2 \times {}_nP_r}{5}$$

 $\therefore {}_nC_r=10, {}_nP_r=20$
 이때 ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$ 이므로

$$10=\frac{20}{r!}, r!=2 \quad \therefore r=2$$

${}_nP_2=20$ 에서

$$n(n-1)=20=5 \times 4 \quad \therefore n=5$$

$$\therefore nr=5 \times 2=10$$

- 3 $\neg, {}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$ 이므로 ${}_nP_r=r! \times {}_nC_r$

$$\begin{aligned} \therefore n \times {}_{n-1}C_{r-1} &= n \times \frac{(n-1)!}{(r-1)!\{n-1-(r-1)\}!} \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \\ &= r \times \frac{n!}{r!(n-r)!} = r \times {}_nC_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \therefore {}_nC_k \times {}_{n-k}C_{r-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(r-k)!\{n-k-(r-k)\}!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(r-k)!(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \times \frac{r!}{k!(r-k)!} \\ &= {}_nC_r \times {}_rC_k \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

4 ${}_2C_1 \times {}_6C_3 \times {}_3C_1 = 2 \times 20 \times 3 = 120$

5 A 학교 학생으로만 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$

B 학교 학생으로만 뽑는 경우의 수는 ${}_9C_3 = 84$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 + 84 = 94$$

6 토핑을 1개, 2개, 3개, 4개, 5개 선택하는 경우의 수는 각각 ${}_5C_1, {}_5C_2, {}_5C_3, {}_5C_4, {}_5C_5$ 이므로 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned} & {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_2 + {}_5C_1 + {}_5C_5 \\ &= 5 + 10 + 10 + 5 + 1 \\ &= 31 \end{aligned}$$

7 셔츠가 n 종류라 하면 ${}_{2n}C_3 = 10 \times {}_nC_3$ 이므로

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 10 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}$$

$$2(2n-1) = 5(n-2) \quad (\because n \geq 3)$$

$$\therefore n = 8$$

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_8C_1 \times {}_8C_2 = 8 \times 28 = 224$$

8 두 학생 A, B를 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 7명의 학생 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_7C_2 = 21$

9 5가 적힌 공을 이미 꺼냈다고 생각하고 짝수가 적힌 공을 제외한 1, 3, 7, 9가 적힌 나머지 4개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$

10 노란색 색종이를 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 $(n-1)$ 장의 색종이 중에서 2장을 뽑는 경우의 수가 15이므로 ${}_{n-1}C_2 = 15$ 에서

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2 \times 1} = 15$$

$$(n-1)(n-2) = 30 = 6 \times 5$$

$$\therefore n = 7$$

11 7개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 3개를 뽑으면 a, b, c 의 순서는 자동으로 정해지므로 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 ${}_7C_3 = 35$

12 (i) 짝수가 적힌 카드 3장과 홀수가 적힌 카드 2장을 택하는 경우

$${}_4C_3 \times {}_4C_2 = {}_4C_1 \times {}_4C_2 = 4 \times 6 = 24$$

(ii) 짝수가 적힌 카드 1장과 홀수가 적힌 카드 4장을 택하는 경우

$${}_4C_1 \times {}_4C_4 = 4 \times 1 = 4$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$24 + 4 = 28$$

13 3개의 가로줄 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

택한 2개의 가로줄 중 1개의 가로줄에서 숫자 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

나머지 1개의 가로줄에서 이미 택한 숫자와 다른 세로줄에 있는 숫자 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 3 \times 2 = 18$$

14 (i) 10명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}C_4 = 210$

(ii) 4명을 모두 남학생만 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$210 - 5 = 205$$

15 (i) 14명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{14}C_3 = 364$

(ii) 3명을 모두 1학년 학생만 뽑거나 모두 2학년 학생만 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_3 + {}_8C_3 = 20 + 56 = 76$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$364 - 76 = 288$$

16 여자 회원 수를 n 이라 하자.

(i) 10명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{10}C_3 = 120$

(ii) 3명을 모두 여자 회원만 뽑는 경우의 수는 ${}_nC_3$

이때 남자 회원을 적어도 1명은 포함하여 뽑는 경우의 수가 110이므로

$$120 - {}_nC_3 = 110$$

$${}_nC_3 = 10, \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

$$n(n-1)(n-2) = 60 = 5 \times 4 \times 3 \quad \therefore n = 5$$

따라서 여자 회원 수가 5이므로 남자 회원 수는

$$10 - 5 = 5$$

- 17 (i) 10장 중에서 5장을 택하는 경우의 수는 ${}_{10}C_5=252$
(ii) 5장을 모두 홀수가 적힌 카드만 택하는 경우의 수는 ${}_5C_5=1$
(iii) 짝수가 적힌 카드 5장 중에서 1장을 택하고, 홀수가 적힌 카드 5장 중에서 4장을 택하는 경우의 수는 ${}_5C_1 \times {}_5C_4 = {}_5C_1 \times {}_5C_1 = 5 \times 5 = 25$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $252 - (1 + 25) = 226$
- 18 6권의 국어책 중에서 2권을 택하는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$
4권의 수학책 중에서 2권을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$
4권의 책을 책꽂이에 일렬로 꽂는 경우의 수는 $4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는 $15 \times 6 \times 24 = 2160$
- 19 a, b 를 이미 택하였다고 생각하고 나머지 5개의 문자 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$
4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$
따라서 구하는 경우의 수는 $10 \times 24 = 240$
- 20 A, B를 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_3=20$
A, B를 한 묶음으로 생각하여 나머지 3명과 함께 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$
A, B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 경우의 수는 $20 \times 24 \times 2 = 960$
- 21 ${}_nC_2=66$ 이므로 $\frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 66$
 $n(n-1) = 132 = 12 \times 11 \quad \therefore n=12$
- 22 원의 지름과 원 위의 점으로 이어진 삼각형이 직각삼각형이므로 직각삼각형의 개수는 원의 지름 4개 중에서 1개를 택하고 지름을 이루는 2개의 점을 제외한 6개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수와 같다.
따라서 구하는 직각삼각형의 개수는 ${}_4C_1 \times {}_6C_1 = 4 \times 6 = 24$
- 23 (i) 15개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_{15}C_3=455$
(ii) 가로 방향의 직선은 3개이고 각각에 대하여 한 직선 위에 있는 5개의 점 중 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$
(iii) 세로 방향의 직선은 5개이고 각각에 대하여 한 직선 위에 있는 3개의 점 중 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_3=1$

- (iv) 3개의 점을 지나는 대각선 방향의 직선은 8개이고 각각에 대하여 한 직선 위에 있는 3개의 점 중 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_3=1$

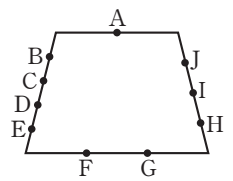
(i)~(iv)에서 구하는 삼각형의 개수는 $455 - 3 \times 10 - 5 \times 1 - 8 \times 1 = 412$

- 24 가로 방향의 6개의 직선 중에서 2개, 세로 방향의 5개의 직선 중에서 2개를 택하여 평행사변형을 만들 수 있으므로 평행사변형의 개수는 ${}_6C_2 \times {}_5C_2 = 15 \times 10 = 150$

- 25 (i) 9개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_9C_4=126$
(ii) 한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$
(iii) 한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하고 한 직선 위에 있지 않은 4개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_3 \times {}_4C_1 = {}_5C_2 \times {}_4C_1 = 10 \times 4 = 40$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 사각형의 개수는 $126 - 5 - 40 = 81$

- 26 (i) 4개의 가로줄 중에서 2개, 4개의 세로줄 중에서 2개를 택하여 직사각형을 만들 수 있으므로 직사각형의 개수는 ${}_4C_2 \times {}_4C_2 = 6 \times 6 = 36$
(ii) 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 a 라 하면 한 변의 길이가 a 인 정사각형은 9개, 한 변의 길이가 $2a$ 인 정사각형은 4개, 한 변의 길이가 $3a$ 인 정사각형은 1개이므로 정사각형의 개수는 $9 + 4 + 1 = 14$
(i), (ii)에서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는 $36 - 14 = 22$

- 27 오른쪽 그림과 같이 10개의 점을 각각 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J라 하자.



- (i) 10개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_{10}C_4=210$
(ii) B, C, D, E를 택하는 경우의 수는 1
(iii) B, C, D, E의 4개의 점 중에서 3개를 택하고 나머지 6개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_3 \times {}_6C_1 = {}_4C_1 \times {}_6C_1 = 4 \times 6 = 24$
(iv) H, I, J를 택하고 나머지 7개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_7C_1=7$
(i)~(iv)에서 구하는 사각형의 개수는 $210 - 1 - 24 - 7 = 178$

IV-1. 행렬

01 행렬의 덧셈, 뺄셈과 실수배

92~96쪽

1 6	2 ④	3 ⑤	4 ④	5 -11
6 17	7 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	8 22	9 ②	10 ⑤
11 ②	12 5	13 ③	14 36	15 -6
16 ③	17 ①	18 $\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$	19 ①	
20 ②	21 ③	22 19	23 ④	24 -20
25 ⑤	26 -8	27 3	28 6	29 14
30 ③				

1 $a_{12}=1+2^2-1 \times 2=3$, $a_{22}=2+2^2-2 \times 2=2$
 $a_{31}=3+1^2-3 \times 1=1$, $a_{42}=4+2^2-4 \times 2=0$
 $\therefore a_{12}+a_{22}+a_{31}+a_{42}=3+2+1+0=6$

2 $a_{11}=1+1=2$, $a_{12}=1-2 \times 2=-3$
 $a_{21}=2-1=1$, $a_{22}=2+2=4$
 따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은
 $2+(-3)+1+4=4$

3 ① 2×3 행렬이다.
 ② $(2, 1)$ 성분은 3이다.
 ③ $a_{12}=4$, $a_{23}=4$ 이므로 $a_{12}+a_{23}=8$
 ④ $i=j$ 인 성분은 a_{11} , a_{22} 이므로 모든 성분의 합은
 $a_{11}+a_{22}=2+(-1)=1$
 ⑤ $i+j=3$ 을 만족시키는 성분은 a_{12} , a_{21} 이므로 모든 성분의 곱은
 $a_{12}a_{21}=4 \times 3=12$
 따라서 옳은 것은 ⑤이다.

4 $a_{11}=2 \times 1-1+1=2$, $a_{12}=2 \times 1-2+1=1$
 $a_{21}=2 \times 2-1+1=4$, $a_{22}=2 \times 2-2+1=3$
 $b_{ij}=a_{ji}$ 이므로
 $b_{11}=a_{11}=2$, $b_{12}=a_{21}=4$, $b_{21}=a_{12}=1$, $b_{22}=a_{22}=3$
 $\therefore B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

5 $a_{11}=1^2-1^2=0$
 $a_{12}=-a_{21}=-(2^2-1^2)=-3$
 $a_{13}=-a_{31}=-(3^2-1^2)=-8$
 따라서 행렬 A의 제1행의 모든 성분의 합은
 $a_{11}+a_{12}+a_{13}=0+(-3)+(-8)=-11$

6 $a_{12}=p+2q-2$, $a_{13}=p+3q-2$
 이때 주어진 행렬 A에서 $a_{12}=5$, $a_{13}=7$ 이므로
 $p+2q-2=5$, $p+3q-2=7$
 $\therefore p+2q=7$, $p+3q=9$
 두 식을 연립하여 풀면
 $p=3$, $q=2$
 따라서 $i \neq j$ 이면 $a_{ij}=3i+2j-2$ 이므로
 $x=a_{21}=3 \times 2+2 \times 1-2=6$
 $z=a_{23}=3 \times 2+2 \times 3-2=10$
 $i=j$ 이면 $a_{ij}=1$ 이므로
 $y=a_{22}=1$
 $\therefore x+y+z=6+1+10=17$

7 $a_{11}=2$, $a_{12}=1$, $a_{21}=2$, $a_{22}=1$ 이므로 구하는 행렬은
 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

8 공원 P₁에서 P₂로 가는 경로의 수는 2이므로 $a_{12}=2$
 공원 P₁에서 P₃으로 가는 경로의 수는 $2 \times 3=6$ 이므로
 $a_{13}=6$
 같은 방법으로 하면
 $a_{21}=2$, $a_{23}=3$, $a_{31}=3 \times 2=6$, $a_{32}=3$
 $i=j$ 이면 $a_{ij}=0$ 이므로
 $a_{11}=0$, $a_{22}=0$, $a_{33}=0$
 따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은
 $0+2+6+2+0+3+6+3+0=22$

9 $1^2+1=2$ 의 양의 약수의 개수는 $a_{11}=2$
 $1^2+2=3$ 의 양의 약수의 개수는 $a_{12}=2$
 $1^2+3=4=2^2$ 의 양의 약수의 개수는 $a_{13}=3$
 $2^2+1=5$ 의 양의 약수의 개수는 $a_{21}=2$
 $2^2+2=6=2 \times 3$ 의 양의 약수의 개수는 $a_{22}=2 \times 2=4$
 $2^2+3=7$ 의 양의 약수의 개수는 $a_{23}=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

10 스위치 1이 닫혀 있을 때 불이 켜지는 전구의 개수는 2이므로 $a_{11}=2$
 스위치 1, 2가 닫혀 있을 때 불이 켜지는 전구의 개수는
 $2+1=3$ 이므로 $a_{12}=3$
 같은 방법으로 하면
 $a_{13}=3$, $a_{21}=3$, $a_{22}=1$, $a_{23}=2$, $a_{31}=3$, $a_{32}=2$, $a_{33}=1$
 $\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- 11 이차함수 $y=x^2-2(i+j)x+9$ 의 그래프와 x 축이 만나
는 점의 개수는 이차방정식 $x^2-2(i+j)x+9=0$ 의 서로
다른 실근의 개수와 같다.

이차방정식 $x^2-2(i+j)x+9=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(i+j)^2-9$$

$$i=1, j=1 \text{ 이면 } \frac{D}{4}=(1+1)^2-9=-5<0 \text{ 이므로 } a_{11}=0$$

$$i=1, j=2 \text{ 이면 } \frac{D}{4}=(1+2)^2-9=0 \text{ 이므로 } a_{12}=1$$

$$i=2, j=1 \text{ 이면 } \frac{D}{4}=(2+1)^2-9=0 \text{ 이므로 } a_{21}=1$$

$$i=2, j=2 \text{ 이면 } \frac{D}{4}=(2+2)^2-9=7>0 \text{ 이므로 } a_{22}=2$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 12 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$3a-1=5, 5=c+3, -1=3-d, 2b=-6$$

$$\therefore a=2, b=-3, c=2, d=4$$

$$\therefore a+b+c+d=5$$

- 13 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-7=ad-3b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2a-5b=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$c=2ad+9b \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$-a+3b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{4}$ 을 연립하여 풀면 $a=2, b=1$

이를 $\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ 에 각각 대입하면

$$-7=2d-3, c=4d+9 \quad \therefore c=1, d=-2$$

$$\therefore ab+cd=2 \times 1 + 1 \times (-2)=0$$

- 14 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\alpha\beta=-1, \alpha+\beta=3$$

$$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$=3^3-3 \times (-1) \times 3=36$$

- 15 $a_{11}=p+q, a_{12}=p+2q, a_{21}=2p+q, a_{22}=2p+2q$ 이므로

$$A=\begin{pmatrix} p+q & p+2q \\ 2p+q & 2p+2q \end{pmatrix}$$

$$b_{11}=1, b_{12}=1+(-2)^2-1=4,$$

$$b_{21}=2+(-2)-1=-1, b_{22}=2 \text{ 이므로}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$A=B$ 에서 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$p+q=1, p+2q=4$$

두 식을 연립하여 풀면 $p=-2, q=3$

$$\therefore pq=-6$$

$$16 A-B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$17 3A=3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $3A$ 의 모든 성분의 합은

$$3+0+6+3=12$$

$$18 3(A+2B)-2(A+C)-3B$$

$$=3A+6B-2A-2C-3B$$

$$=A+3B-2C$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 15 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$19 A+B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 B 의 모든 성분의 합은

$$3+2+1+1=7$$

$$20 A+X=3B+2X \text{에서}$$

$$X=A-3B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -9 & -11 \end{pmatrix}$$

$$21 a_{11}=1^2-1=0, a_{12}=2-2=0, a_{21}=2^2-1=3,$$

$$a_{22}=2^2-1=3 \text{ 이므로}$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

행렬 $3B-A$ 의 (i, j) 성분을 c_{ij} 라 하면 $c_{ij}=2a_{ji}$ 이므로

$$c_{11}=2a_{11}=2 \times 0=0, c_{12}=2a_{21}=2 \times 3=6$$

$$c_{21}=2a_{12}=2 \times 0=0, c_{22}=2a_{22}=2 \times 3=6$$

$$\therefore 3B-A=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} \text{을 대입하면 } 3B-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$3B=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 B 의 $(2, 1)$ 성분은 1이다.

22 $A+2B=\begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$ ㉠

$2A+B=\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$ ㉡

$2 \times \text{㉡} - \text{㉠}$ 을 하면

$$2(2A+B) - (A+2B) = 2\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$4A+2B-A-2B = \begin{pmatrix} 8 & 22 \\ 2 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 13 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \quad \therefore A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

이를 ㉡에 대입하면

$$2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A+B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A+B$ 의 모든 성분의 합은

$$3+8+1+7=19$$

23 $X+Y=A-3B$ ㉠, $X-Y=3A+B$ ㉡

㉠+㉡을 하면 $X+Y+(X-Y)=A-3B+(3A+B)$

$$2X=4A-2B \quad \therefore X=2A-B$$

이를 ㉠에 대입하면

$$(2A-B)+Y=A-3B \quad \therefore Y=-A-2B$$

$$\therefore X-2Y=2A-B-2(-A-2B)$$

$$=4A+3B=4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -15 & 10 \end{pmatrix}$$

24 $x_{11}=1^2-1=0$, $x_{12}=1^2-2=-1$, $x_{21}=2^2-1=3$,

$$x_{22}=2^2-2=2 \text{이므로}$$

$$X=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$y_{11}=1-1^2=0$$
, $y_{12}=1-2^2=-3$, $y_{21}=2-1^2=1$,

$$y_{22}=2-2^2=-2 \text{이므로}$$

$$Y=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X=A-B \quad \text{..... ㉠}, Y=2A+B \quad \text{..... ㉡}$$

㉠+㉡을 하면 $X+Y=A-B+(2A+B)$

$$X+Y=3A \quad \therefore A=\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}Y$$

이를 ㉠에 대입하면

$$X=\left(\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}Y\right)-B \quad \therefore B=-\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}Y$$

$$\therefore A+5B=\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}Y+5\left(-\frac{2}{3}X+\frac{1}{3}Y\right)$$

$$=-3X+2Y$$

$$=-3\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -7 & -10 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A+5B$ 의 모든 성분의 합은

$$0+(-3)+(-7)+(-10)=-20$$

25 $2A+B=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ 에서

$$2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & a+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a+2=7 \quad \therefore a=5$$

26 $\begin{pmatrix} x & 4 \\ 2 & y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & z \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y & 2 \\ x & z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & x \\ y & -4 \end{pmatrix}$ 에서

$$\begin{pmatrix} x-1 & z+4 \\ 3 & y-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y+4 & x+2 \\ x+y & z-4 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x-1=y+4 \quad \text{..... ㉠}$$

$$z+4=x+2 \quad \text{..... ㉡}$$

$$3=x+y \quad \text{..... ㉢}$$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=-1$

$x=4$ 를 ㉡에 대입하면

$$z+4=4+2 \quad \therefore z=2$$

$$\therefore xyz=4 \times (-1) \times 2=-8$$

27 $xA+yB=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ 을 만족시키므로

$$x\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 2x+y & 3x-y \\ 2y & x+3y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2x+y=3, 2y=-2$$

$$\therefore x=2, y=-1$$

$$\therefore x-y=3$$

28 $xA+yB=C$ 이므로

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x-y & 0 \\ 2x+y & -x+ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x-y=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$2x+y=7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$-x+ky=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2, y=3$

이를 ㉢에 대입하면

$$-2+3k=1 \quad \therefore k=1$$

$$\therefore k+x+y=1+2+3=6$$

29 $a_{ij}=a_{ji}$ 에서 $a_{12}=a_{21}$

$a_{11}=x, a_{12}=a_{21}=y, a_{22}=z$ 라 하면

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

$b_{ij}=-b_{ji}$ 에서 $b_{11}=-b_{11}, b_{22}=-b_{22}$ 이므로

$$b_{11}=0, b_{22}=0$$

$b_{12}=-b_{21}$ 이므로 $b_{12}=w$ 라 하면

$$B = \begin{pmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x & y+w \\ y-w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x=8, y+w=15, y-w=-1, z=7$$

$$y+w=15, y-w=-1 \text{을 연립하여 풀면 } y=7, w=8$$

$$\therefore a_{21}+a_{22}=y+z=7+7=14$$

30 행렬 A 는 A반 학생 30명의 각 과목 성적의 평균을 나타내

므로 A반의 각 과목 성적의 총점을 나타내는 행렬은 $30A$

행렬 B 는 B반 학생 20명의 각 과목 성적의 평균을 나타내

므로 B반의 각 과목 성적의 총점을 나타내는 행렬은 $20B$

두 반 A, B의 학생 전체의 총점을 나타내는 행렬은

$$30A+20B$$

두 반 A, B의 전체 학생 수는 50이므로 전체 평균을 나

타내는 행렬은

$$\frac{1}{50}(30A+20B) = \frac{3}{5}A + \frac{2}{5}B$$

$$\text{따라서 } xA+yB = \frac{3}{5}A + \frac{2}{5}B \text{이므로 } x=\frac{3}{5}, y=\frac{2}{5}$$

02 행렬의 곱셈

97~102쪽

1 ㉓	2 21	3 ㉓	4 ㉓	5 36
6 3	7 16	8 ㉓	9 ㉓	10 4
11 ㉓	12 ㉓	13 4	14 ㉓	15 ㉓
16 59:51	17 ㉓	18 ㉓	19 -2	20 ㉓
21 13	22 4	23 ㉓	24 ㉓	25 -2
26 ㉓	27 ㉓	28 1	29 ㉓	30 -2
31 2	32 ㉓	33 ㉓	34 ㉓	

$$1 \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 AB 의 모든 성분의 합은

$$1+2+2+4=9$$

$$2 \quad A-B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (A-B)C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $(A-B)C$ 의 모든 성분의 합은

$$9+12=21$$

3 행렬 A 는 2×2 행렬이고, 행렬 B 는 2×1 행렬이다.

ㄱ. AB 는 2×1 행렬로 정의된다.

ㄴ. BA 는 정의되지 않는다.

ㄷ. AB 는 2×1 행렬이지만 A 는 2×2 행렬이므로 덧셈이 정의되지 않는다.

ㄹ. AB 는 2×1 행렬이고 B 도 2×1 행렬이므로 뺄셈이 정의된다.

따라서 보기에서 연산이 정의되는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

$$4 \quad A+2B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$A-2B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠+㉡을 하면

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \quad \therefore A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + 2B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \therefore B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore AB = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

5 $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-6 & 0 \\ 3x-3y & -6+y \end{pmatrix}$
 $BA=O$ 에서 $\begin{pmatrix} x-6 & 0 \\ 3x-3y & -6+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
 $x-6=0, -6+y=0$
 $\therefore x=6, y=6 \quad \therefore xy=36$

6 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ x & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$ 에서
 $\begin{pmatrix} 2+ab & 3+a \\ -b & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ x-1 & 2-y \end{pmatrix}$
 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
 $2+ab=3, 3+a=4, -b=x-1, -1=2-y$
 $\therefore a=1, b=1, x=0, y=3$
 $\therefore x+y=3$

7 이차방정식 $x^2-4x-1=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta=4, \alpha\beta=-1$
 $AB = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta & \alpha^2+\beta^2 \\ 0 & \alpha\beta \end{pmatrix}$
 따라서 행렬 AB 의 모든 성분의 합은
 $\alpha\beta + (\alpha^2+\beta^2) + 0 + \alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
 $= (\alpha+\beta)^2 = 4^2 = 16$

8 $A^2 = AA = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$
 $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} -27 & 0 \\ -27 & 0 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = 9A$
 $\therefore k=9$

9 $A^2 = AA = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} a^2-4 & a-2 \\ -4a+8 & 0 \end{pmatrix}$
 $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} a^2-4 & a-2 \\ -4a+8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} a^3-8a+8 & a^2-2a \\ -4a^2+8a & -4a+8 \end{pmatrix}$
 $A^3=O$ 에서 $\begin{pmatrix} a^3-8a+8 & a^2-2a \\ -4a^2+8a & -4a+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
 $-4a+8=0 \quad \therefore a=2$

10 $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\vdots$
 $\therefore A^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (단, n 은 자연수)
 따라서 $A^9 = \begin{pmatrix} 1 & 9a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로
 $9a=36 \quad \therefore a=4$

11 $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
 $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$
 $A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$
 $\vdots$
 $\therefore A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$
 이때 행렬 A^n 의 모든 성분의 합이 129이므로
 $1+0+0+2^n=129$
 $2^n=128 \quad \therefore n=7$

12 $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{A}$
 $A-B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A} + \textcircled{B}$ 을 하면
 $2A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \therefore A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
 이를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면
 $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \therefore B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
 $\therefore A^2 - B^2 = AA - BB$
 $= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$

13 $AB+A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} -a & -a+2 \\ -1 & -1-2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 0 & -a+1 \\ 0 & -b-1 \end{pmatrix}$

$$AB+A=O \text{에서} \begin{pmatrix} 0 & -a+1 \\ 0 & -b-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-a+1=0, -b-1=0$$

$$\therefore a=1, b=-1$$

$$\text{따라서 } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=O$$

$$A^3=A^4=A^5=\dots=A^{2010}=O \text{이므로}$$

$$A+A^2+A^3+\dots+A^{2010}=A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

따라서 $p=1, q=-1, r=1, s=-1$ 이므로

$$p^2+q^2+r^2+s^2=1+1+1+1=4$$

$$\begin{aligned} 14 \quad PQ &= \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 250 & 150 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 300 \times 0.7 + 200 \times 0.3 & 300 \times 0.6 + 200 \times 0.4 \\ 250 \times 0.7 + 150 \times 0.3 & 250 \times 0.6 + 150 \times 0.4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QP &= \begin{pmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 300 & 200 \\ 250 & 150 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.7 \times 300 + 0.6 \times 250 & 0.7 \times 200 + 0.6 \times 150 \\ 0.3 \times 300 + 0.4 \times 250 & 0.3 \times 200 + 0.4 \times 150 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A학교에서 배드민턴을 배우는 학생 수는

$$300 \times 0.3 + 250 \times 0.4$$

따라서 이를 나타내는 행렬의 성분은 QP의 (2, 1) 성분이다.

$$\begin{aligned} 15 \quad PQ &= \begin{pmatrix} 30 & 40 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.1 & 21.4 \\ 10.7 & 11.5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 30 \times 5.1 + 40 \times 10.7 & 30 \times 21.4 + 40 \times 11.5 \\ 10 \times 5.1 + 20 \times 10.7 & 10 \times 21.4 + 20 \times 11.5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QP &= \begin{pmatrix} 5.1 & 21.4 \\ 10.7 & 11.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & 40 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5.1 \times 30 + 21.4 \times 10 & 5.1 \times 40 + 21.4 \times 20 \\ 10.7 \times 30 + 11.5 \times 10 & 10.7 \times 40 + 11.5 \times 20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(지원자 수) = (선발 인원수) × (경쟁률)이므로

A, B 두 학과의 일반 전형 지원자 수의 합은

$$m = 30 \times 5.1 + 40 \times 10.7$$

즉, m의 값은 행렬 PQ의 (1, 1) 성분과 같다.

B학과의 일반 전형과 특별 전형 지원자 수의 합은

$$n = 40 \times 10.7 + 20 \times 11.5$$

즉, n의 값은 행렬 QP의 (2, 2) 성분과 같다.

따라서 m+n의 값은 행렬 PQ의 (1, 1) 성분과 행렬 QP의 (2, 2) 성분의 합과 같다.

16 두 제품 A, B의 2년 후의 생산원가를 각각 a'' 원, b'' 원이라 하면

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.7 & 0.48 \\ 0.32 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.7a + 0.48b \\ 0.32a + 0.7b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore a'' = 0.7a + 0.48b, b'' = 0.32a + 0.7b$$

이때 $a:b=1:1$ 이므로 $a=b=k$ (k 는 상수)라 하면

$$a'' = 0.7k + 0.48k = 1.18k$$

$$b'' = 0.32k + 0.7k = 1.02k$$

$$\therefore a'' : b'' = 1.18k : 1.02k = 59 : 51$$

$$17 \quad A^2 - AB = A(A - B)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

따라서 $A^2 - AB$ 의 모든 성분의 합은

$$9 + 2 + 4 + (-3) = 12$$

$$\begin{aligned} 18 \quad A^2 - 2AB + BA - 2B^2 &= A(A - 2B) + B(A - 2B) \\ &= (A + B)(A - 2B) \end{aligned}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A^2 - 2AB + BA - 2B^2 &= (A + B)(A - 2B) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$19 \quad (A + 2B)(A - 3B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$A^2 - 3AB + 2BA - 6B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{이때 } A^2 - 6B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 3AB + 2BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore 3AB - 2BA &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore (A-2B)(A+3B) &= A^2+3AB-2BA-6B^2 \\ &= A^2-6B^2+(3AB-2BA) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

따라서 $(A-2B)(A+3B)$ 의 $(1, 2)$ 성분은 -6 이고,
 $(2, 2)$ 성분은 4 이므로 그 합은
 $-6+4=-2$

20 주어진 등식을 만족시키려면 $AB=BA$ 이어야 하므로

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x-3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-1=x-3 \quad \therefore x=2$$

21 주어진 등식을 만족시키려면 $AB=BA$ 이어야 하므로

$$\begin{pmatrix} -1 & x \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & x \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 2+xy & -2-x \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2x \\ -y-3 & xy \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-2-x=-2x, \quad -6=-y-3$$

$$\therefore x=2, y=3$$

$$\therefore x^2+y^2=4+9=13$$

22 주어진 등식을 만족시키려면 $AB=BA$ 이어야 하므로

$$\begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 1 & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 3x^2+1 & x^2+y^2 \\ 3+2x & 1+2xy^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2+1 & 3+2x \\ x^2+y^2 & 1+2xy^2 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x^2+y^2=3+2x \quad \therefore (x-1)^2+y^2=4$$

이때 x, y 는 정수이므로

$$(x-1)^2=4, y^2=0 \text{ 또는 } (x-1)^2=0, y^2=4$$

$$\therefore x-1=\pm 2, y=0 \text{ 또는 } x-1=0, y=\pm 2$$

따라서 순서쌍 (x, y) 는 $(-1, 0), (3, 0), (1, -2),$

$(1, 2)$ 의 4개이다.

23 $A \begin{pmatrix} 2a+3c \\ 2b+3d \end{pmatrix} = 2A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + 3A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$$= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

24 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$= A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

따라서 $p=0, q=7$ 이므로 $p+q=7$

25 $A \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -2A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2^2 A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2^2 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = -2^3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A^4 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -2^3 A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -2^3 \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2^4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\therefore A^n \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (\text{단, } n \text{은 자연수})$$

$$\therefore A^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2^{100} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{100} \\ -2^{101} \end{pmatrix}$$

따라서 $x=2^{100}, y=-2^{101}$ 이므로

$$\frac{y}{x} = -\frac{2^{101}}{2^{100}} = -2$$

26 $A^2 = AA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 7 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\therefore (A-E)(A^2+A+E) &= A^3-E \\ &= \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 7 & 27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 7 & 26 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

27 $(A+E)(A-E)=E$ 에서

$$A^2-E=E \quad \therefore A^2=2E$$

$$\begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a^2-1 & -a-b \\ a+b & -1+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2-1=2, \quad -1+b^2=2$$

$$\therefore a^2=3, \quad b^2=3$$

$$\therefore a^2+b^2=6$$

28 $(A^2 - A + E)(A^2 + A + E)$
 $= A^4 + A^2 + E$
 $= A^2 A^2 + A^2 + E$
 $= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 8 & 3+a \\ -3-a & -1+a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 12 & a+4 \\ -a-4 & a^2+a \end{pmatrix}$
 이때 $(A^2 - A + E)(A^2 + A + E)$ 의 모든 성분의 합이
 14이므로
 $12 + (a+4) + (-a-4) + (a^2+a) = 14$
 $a^2 + a - 2 = 0$
 $(a+2)(a-1) = 0$
 $\therefore a = 1$ ($\because a > 0$)

29 $A^2 = AA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
 $A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$
 $\therefore A^{10} + A^{30} = (A^3)^3 A + (A^3)^{10}$
 $= EA + E$
 $= A + E$

30 $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$
 $\therefore A^{99} + A^{100} = (A^2)^{49} A + (A^2)^{50}$
 $= (-E)^{49} A + (-E)^{50}$
 $= -EA + E = -A + E$
 $= -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$
 따라서 행렬 $A^{99} + A^{100}$ 의 모든 성분의 합은
 $-1 + 1 + (-5) + 3 = -2$

31 $A + B = O$ 에서 $B = -A$
 이를 $AB = E$ 에 대입하면
 $-AA = E \quad \therefore A^2 = -E$
 $\therefore A^{300} + B^{300} = A^{300} + (-A)^{300} = 2A^{300}$
 $= 2(A^2)^{150} = 2(-E)^{150}$
 $= 2E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
 따라서 행렬 $A^{300} + B^{300}$ 의 $(2, 2)$ 성분은 2이다.

32 $A + B = E$ 에서 $B = -A + E$
 이를 $AB = O$ 에 대입하면
 $A(-A + E) = O, -A^2 + A = O$
 $\therefore A^2 = A$
 $A^3 = A^2 A = AA = A^2 = A, A^4 = A^3 A = AA = A^2 = A, \dots$
 이므로 자연수 n 에 대하여
 $A^n = A$
 같은 방법으로 하면 $B^n = B$
 $\therefore A^{1000} + A^{999} B + A^{998} B^2 + \dots + AB^{999} + B^{1000}$
 $= A + AB + AB + \dots + AB + B$
 $= A + O + O + \dots + O + B$
 $= A + B = E$

33 $\neg. (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$
 $= A^2 + (-BA) + BA + B^2$
 $= A^2 + B^2$
 $\neg. (A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$
 $= A^2 - (-BA) + BA - B^2$
 $= A^2 + 2BA - B^2$
 $\neg. (AB)^2 = ABAB = A(-AB)B = -A^2 B^2$
 $\neg. A^4 B = AAAAB = AAA(-BA)$
 $= -AAABA = -AA(-BA)A$
 $= AABAA = A(-BA)AA$
 $= -ABAAA = -(-BA)AAA$
 $= BAAAA = BA^4$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \text{ㄹ}$ 이다.

34 $\neg. A^3 = A^2 A = OA = O$
 $\neg. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이면
 $A - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $(A - E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$
 즉, $(A - E)^2 = O$ 이지만 $A \neq E$ 인 경우가 있다.
 $\neg. A^5 = E$ 에서 $A^3 A^2 = E$
 $A^3 = E$ 를 대입하면 $EA^2 = E \quad \therefore A^2 = E$
 $A^3 = E$ 에서 $A^2 A = E$
 $A^2 = E$ 를 대입하면 $EA = E \quad \therefore A = E$
 $\neg. A + B = 2E$ 에서 $B = -A + 2E$ 이므로
 $AB = A(-A + 2E) = -A^2 + 2A$
 $BA = (-A + 2E)A = -A^2 + 2A$
 $\therefore AB = BA$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \text{ㄷ}, \text{ㄹ}$ 이다.