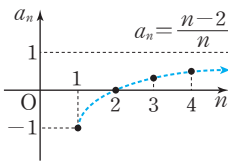


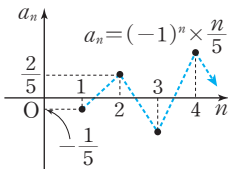
- 1 (1) 수렴 (2) 발산

- 2 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
 $= -2 + 5 = 3$
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - b_n) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
 $= 2 \times (-2) - 5 = -9$
 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3a_n b_n = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
 $= 3 \times (-2) \times 5 = -30$
 (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5a_n}{b_n} = \frac{5 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{5 \times (-2)}{5} = -2$

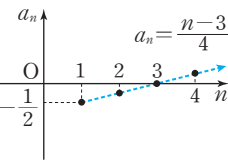
- 1 (1) 주어진 수열의 일반항을
 $a_n = \frac{n-2}{n}$ 라고 하면 오른쪽
 그림과 같이 n 의 값이 한없이
 커질 때, a_n 의 값은 1에 한없이
 가까워지므로 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은
 1이다.



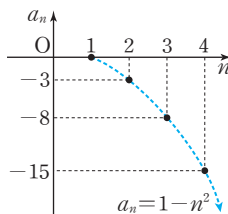
- (2) 주어진 수열의 일반항을
 $a_n = (-1)^n \times \frac{n}{5}$ 이라고 하면
 오른쪽 그림과 같이 n 의 값이
 한없이 커질 때, a_n 의 절댓값
 은 한없이 커지고 그 부호는
 양과 음이 교대로 나타나므로 주어진 수열은 발산(진동)
 한다.



- 2 ㄱ. 주어진 수열의 일반항을
 $a_n = \frac{n-3}{4}$ 이라고 하면 오른
 쪽 그림과 같이 n 의 값이 한
 없이 커질 때, a_n 의 값은 한
 없이 커지므로 주어진 수열은 발산한다.

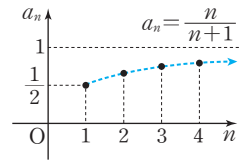


- ㄴ. 주어진 수열의 일반항을
 $a_n = 1 - n^2$ 이라고 하면 오른
 쪽 그림과 같이 n 의 값이 한
 없이 커질 때, a_n 의 값은 한
 없이 작아지므로 주어진 수열
 은 발산한다.



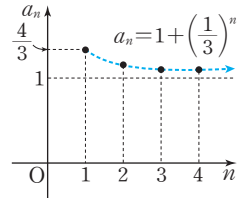
- ㄷ. 주어진 수열의 일반항을

$a_n = \frac{n}{n+1}$ 이라고 하면 오른
 쪽 그림과 같이 n 의 값이 한
 없이 커질 때, a_n 의 값은 1에
 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한
 값은 1이다.



- ㄹ. 주어진 수열의 일반항을

$a_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ 이라고 하면
 오른쪽 그림과 같이 n 의 값
 이 한없이 커질 때, a_n 의 값
 은 1에 한없이 가까워지므로
 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 1이다.



따라서 보기 중 발산하는 수열은 ㄱ, ㄴ이다.

- 3 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n^2 + n - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n}}{2 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} = 0$ (수렴)

- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5n + 1}{5n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{5 + \frac{2}{n^2}} = \frac{3}{5}$ (수렴)

- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-4)(2n+3)}{(2n+1)(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + n - 12}{2n^2 - n - 1}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{1}{n} - \frac{12}{n^2}}{2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{6}{2} = 3$ (수렴)

- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3}{4n^2 - 16n + 15} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{4 - \frac{16}{n} + \frac{15}{n^2}} = \infty$ (발산)

- 4 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n - 3}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n - 3}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{6}{n^2} - \frac{18}{n^3}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{6}{2} = 3$$

따라서 구하는 값은 ④이다.

- 5 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 5n} - n)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - 5n} - n)(\sqrt{n^2 - 5n} + n)}{\sqrt{n^2 - 5n} + n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n}{\sqrt{n^2 - 5n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5}{\sqrt{1 - \frac{5}{n}} + 1} = -\frac{5}{2}$

$$\begin{aligned}
 (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{4n^2 - n} - 2n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{4n^2 - n} + 2n)}{(\sqrt{4n^2 - n} - 2n)(\sqrt{4n^2 - n} + 2n)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{4n^2 - n} + 2n)}{-n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(\sqrt{4 - \frac{1}{n}} + 2\right)}{-1} = \frac{2 \times 4}{-1} = -8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+4} + \sqrt{n+3})}{(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3})(\sqrt{n+4} + \sqrt{n+3})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + \sqrt{1 + \frac{3}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1}} = \frac{2}{2} = 1
 \end{aligned}$$

2 수열의 극한의 대소 관계 / 등비수열의 극한

확인 문제

p. 8

$$\begin{aligned}
 1 \quad (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{1}{n}\right) &= 5, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{n}\right) = 5 \text{이므로} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= 5 \\
 (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1, \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+4}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right) = 1 \text{이므로} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= 1
 \end{aligned}$$

- 2 (1) 주어진 등비수열의 공비는 $\frac{1}{7}$ 이고, $-1 < \frac{1}{7} < 1$ 이므로 수렴하고, 그 극한값은 0이다.
 (2) 주어진 등비수열의 공비는 $\sqrt{5}$ 이고 $\sqrt{5} > 1$ 이므로 발산한다.
 (3) 주어진 등비수열의 공비는 $-\frac{4}{9}$ 이고 $-1 < -\frac{4}{9} < 1$ 이므로 수렴하고, 그 극한값은 0이다.
 (4) 주어진 등비수열의 공비는 $-\frac{5}{2}$ 이고 $-\frac{5}{2} < -1$ 이므로 발산한다.

핵심 유형 + 실전 문제

p. 9

$$1 \quad (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-2}{2n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{2}{n}}{2 + \frac{5}{n}} = 3,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{2n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{2 + \frac{5}{n}} = 3 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

(2) 주어진 부등식의 각 변을 n 으로 나누면

$$\frac{4n^2}{n^2+3} < a_n < \frac{4n^2+3}{n^2+1}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{1 + \frac{3}{n^2}} = 4,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+3}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = 4 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$$

2 주어진 부등식의 각 변을 n^2 으로 나누면

$$\frac{2n^2-4n-6}{n^2} < \frac{a_n}{n^2} < \frac{2n^2+5n+7}{n^2}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-4n-6}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{4}{n} - \frac{6}{n^2}\right) = 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+5n+7}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2}\right) = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 2$$

3 (1) 주어진 등비수열의 공비는 $3x$ 이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < 3x \leq 1 \quad \therefore -\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3}$$

(2) 주어진 등비수열의 공비는 $-\frac{x}{2}$ 이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < -\frac{x}{2} \leq 1 \quad \therefore -2 \leq x < 2$$

(3) 주어진 등비수열의 첫째항은 $x+1$, 공비는 $\frac{5x-1}{9}$ 이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$x+1=0 \text{ 또는 } -1 < \frac{5x-1}{9} \leq 1$$

$$\therefore -\frac{8}{5} < x \leq 2$$

4 주어진 등비수열의 첫째항은 $x+2$, 공비는 $\frac{x-x^2}{6}$ 이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$x+2=0 \text{ 또는 } -1 < \frac{x-x^2}{6} \leq 1$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } -6 < x-x^2 \leq 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

(i) $-6 < x - x^2$ 에서 $x^2 - x - 6 < 0$

$(x+2)(x-3) < 0 \quad \therefore -2 < x < 3$

(ii) $x - x^2 \leq 6$ 에서 $x^2 - x + 6 \geq 0$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} \geq 0 \quad \therefore x$ 는 모든 실수

(i), (ii)에서 $-2 < x < 3$

즉, ㉠을 만족하는 x 의 값의 범위는

$-2 \leq x < 3$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.

5 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{2^n - 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1} = \frac{3}{0-1} = -3$ (수렴)

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - 3^n}{5^n + 7^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\left(\frac{5}{7}\right)^n - \left(\frac{3}{7}\right)^n}{\left(\frac{5}{7}\right)^n + 7} = \frac{0-0}{0+7} = 0$ (수렴)

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (6^n - 2^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 6^n \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} = \infty$ (발산)

6 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1} + 2^n}{6^n - 5^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n} = \frac{6+0}{1-0} = 6$

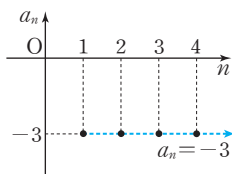
따라서 구하는 극한값은 ⑤이다.

계산력 자기

p. 10~11

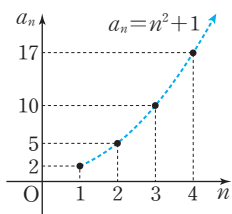
1 (1) 주어진 수열의 일반항을

$a_n = -3$ 이라고 하면 오른쪽 그림과 같이 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 -3 이므로 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 -3 이다.



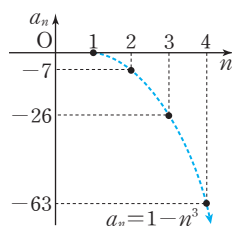
(2) 주어진 수열의 일반항을

$a_n = n^2 + 1$ 이라고 하면 오른쪽 그림과 같이 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 한없이 커지므로 주어진 수열은 발산한다.



(3) 주어진 수열의 일반항을

$a_n = 1 - n^3$ 이라고 하면 오른쪽 그림과 같이 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 한없이 작아지므로 주어진 수열은 발산한다.



(4) 주어진 수열의 일반항을

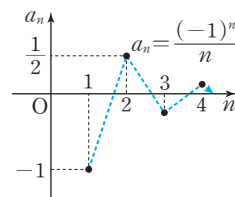
$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ 이라고 하면 오

른쪽 그림과 같이 n 의 값이

한없이 커질 때, a_n 의 값은 0

에 한없이 가까워지므로 주

어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 0이다.



2 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 4) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 4$
 $= 3 + 4 = 7$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
 $= 3 - 2 \times (-1) = 5$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3a_n^2 b_n^3 = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
 $= 3 \times 3 \times 3 \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -27$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2b_n^2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$
 $= \frac{3}{2 \times (-1) \times (-1)} = \frac{3}{2}$

3 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} = 0$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{4n^3 + n^2 - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^3}} = \frac{1}{4}$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 5n + 1}{3n - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n} - 1} = -2$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+5)(3n-5)}{(n+2)(2n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 5n - 25}{2n^2 + 3n - 2}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{5}{n} - \frac{25}{n^2}}{2 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}} = 3$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\log_3 (3n+1) - \log_3 (n+2)\}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \frac{3n+1}{n+2}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 3 = 1$

(6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\log_2 (4n^2 - 2n + 1) - \log_2 (n^2 + 2)\}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4n^2 - 2n + 1}{n^2 + 2}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 4 = 2$

$$(7) 1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^n k=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2 \times 2n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{4n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$(8) 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^n k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$$= \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4+1}{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4(n^4+1)}{n^4+2n^3+n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4+4}{n^4+2n^3+n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+\frac{4}{n^4}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 4\end{aligned}$$

4 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - 3n})$

$$\begin{aligned}&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \sqrt{n^2 - 3n})(n + \sqrt{n^2 - 3n})}{n + \sqrt{n^2 - 3n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n + \sqrt{n^2 - 3n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{1 + \sqrt{1 - \frac{3}{n}}} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+n})$

$$\begin{aligned}&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+n})(\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+n})}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-n}{\sqrt{n^2+2} + \sqrt{n^2+n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}-n}$

$$\begin{aligned}&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{2} = 1\end{aligned}$$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-3}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned}&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n-3}-\sqrt{n})(\sqrt{n-3}+\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})(\sqrt{n-3}+\sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{3(\sqrt{n-3}+\sqrt{n})} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}{\sqrt{1-\frac{3}{n}}+1} = -1\end{aligned}$$

5 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = 2,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+9}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+\frac{9}{n}}{2-\frac{1}{n}} = 2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

(3) 주어진 부등식의 각 변을 n 으로 나누면

$$\frac{3n-4}{n} < a_n < \frac{3n+3}{n}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-4}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{4}{n}\right) = 3,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+3}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{3}{n}\right) = 3 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

(4) 주어진 부등식의 각 변을 $2n^2+1$ 로 나누면

$$\frac{n^3-5}{2n^3+n} < a_n < \frac{n^3-2}{2n^3+n}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-5}{2n^3+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{5}{n^3}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-2}{2n^3+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{2}{n^3}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$$

6 (1) 주어진 등비수열의 공비는 $2x$ 이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < 2x \leq 1 \quad \therefore -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$$

(2) 주어진 등비수열의 첫째항은 $-\frac{x}{3}$, 공비는 $-\frac{x}{3}$ 이므로

이 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < -\frac{x}{3} \leq 1 \quad \therefore -3 \leq x < 3$$

(3) 주어진 등비수열의 첫째항은 x , 공비는 $x-1$ 이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$x=0 \text{ 또는 } -1 < x-1 \leq 1 \quad \therefore 0 \leq x \leq 2$$

(4) 주어진 등비수열의 첫째항은 $x+1$, 공비는 $\frac{4x-1}{3}$ 이므로

이 등비수열이 수렴하려면

$$x+1=0 \text{ 또는 } -1 < \frac{4x-1}{3} \leq 1$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } -\frac{1}{2} < x \leq 1$$

- 7 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{4^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n} = 1$ (수렴)
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2$ (수렴)
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n + 6^n}{6^n - 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{7}{6}\right)^n + 1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \infty$ (발산)
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n - 5^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5^n \left\{ \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1 \right\} = -\infty$ (발산)

01~02강

즉답게 기출문제

p. 12~15

- 1 ⑤ 2 ③ 3 ④ 4 6 5 35
- 6 ④ 7 ③ 8 12 9 ④ 10 ①
- 11 ④ 12 ② 13 1 14 ④ 15 ④
- 16 3 17 ② 18 ③ 19 ② 20 ③
- 21 ① 22 π 23 $\frac{1}{2}$
- 24 (1) $2n^2 + 2n < a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n < 2n^2 + 3n$ (2) $\frac{1}{4}$
- 25 $\frac{2}{3}$

1 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (a_n + b_n)^2 - 2a_n b_n \}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \times \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$
 $= 4 \times 4 - 2 \times 2 = 12$

2 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$ (α 는 실수)라고 하자.
 $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 5$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 5$
 $\alpha = \frac{2}{3}\alpha + 5 \quad \therefore \alpha = 15$
따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 15$ 이므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n - 15) = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 15 = 4 \times 15 - 15 = 45$

3 ① $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n}}{3 + \frac{1}{n^2}} = 0$

② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n}{n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 4}{1 - \frac{1}{n}} = \infty$

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\} = 1$

④ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 0$

⑤ $\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \log_3(n+1) - \log_3(n^2+1) + \log_3(3n+1) \}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \frac{(n+1)(3n+1)}{n^2+1}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \frac{3n^2 + 4n + 1}{n^2 + 1}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \frac{3 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}$
 $= \log_3 3 = 1$

따라서 옳은 것은 ④이다.

4 $a \neq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 + bn^2 - 3n + 1}{3n^2 + 2n - 1} = \infty$ (또는 $-\infty$)이므로
 $a = 0$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3 + bn^2 - 3n + 1}{3n^2 + 2n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^2 - 3n + 1}{3n^2 + 2n - 1} = \frac{b}{3}$
즉, $\frac{b}{3} = 2$ 에서 $b = 6$
 $\therefore a + b = 6$

5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(10n+1)b_n}{a_n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(n^2+1)b_n}{(n+1)a_n} \times \frac{(n+1)(10n+1)}{n^2+1} \right\}$
 $= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2+1)b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)a_n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^2 + 11n + 1}{n^2 + 1}$
 $= \frac{7}{2} \times 10 = 35$

6 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+2n} + \dots + \sqrt{n^2+100n} - 100n)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (\sqrt{n^2+n} - n) + (\sqrt{n^2+2n} - n) + \dots + (\sqrt{n^2+100n} - n) \}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n)}{\sqrt{n^2+n} + n} + \frac{(\sqrt{n^2+2n} - n)(\sqrt{n^2+2n} + n)}{\sqrt{n^2+2n} + n} + \dots + \frac{(\sqrt{n^2+100n} - n)(\sqrt{n^2+100n} + n)}{\sqrt{n^2+100n} + n} \right\}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2+n} + n} + \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n} + n} + \dots + \frac{100n}{\sqrt{n^2+100n} + n} \right)$
 $= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{100}{2}$
 $= \frac{1}{2} (1 + 2 + 3 + \dots + 100)$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{100 \times 101}{2} = 2525$

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} (an - \sqrt{4n^2 - 3n}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an - \sqrt{4n^2 - 3n})(an + \sqrt{4n^2 - 3n})}{an + \sqrt{4n^2 - 3n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a^2 - 4)n^2 + 3n}{an + \sqrt{4n^2 - 3n}} \\
&a^2 - 4 \neq 0 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a^2 - 4)n^2 + 3n}{an + \sqrt{4n^2 - 3n}} = \infty (\text{또는 } -\infty) \text{ 이므로} \\
&a^2 - 4 = 0 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{an + \sqrt{4n^2 - 3n}} = \frac{3}{a+2} \text{ 이므로 } \frac{3}{a+2} = \frac{3}{4} \text{ 에서} \\
&a+2=4 \quad \therefore a=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \\
&\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{ 에서 } a=2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 8 \quad f(x) = 2x^2 - 2nx + \frac{n^2}{2} + 6n + 1 = 2\left(x - \frac{n}{2}\right)^2 + 6n + 1 \text{ 이므로 } P\left(\frac{n}{2}, 6n + 1\right) \\
&\text{따라서 } x_n = \frac{n}{2}, y_n = 6n + 1 \text{ 이므로} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n + 1}{\frac{n}{2}} = 12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 9 \quad \text{직각삼각형 } ABC_n \text{ 에서 } \overline{AC_n} = \sqrt{n^2 + 12^2} \\
&\triangle AP_n D_1 \sim \triangle AC_n D_n \text{ 이고 닮음비가 } 1 : n \text{ 이므로} \\
&1 : n = \overline{D_1 P_n} : 12 \quad \therefore \overline{D_1 P_n} = \frac{12}{n} \\
&\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{AC_n} - \overline{BC_n}}{\overline{D_1 P_n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 12^2} - n}{\frac{12}{n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^2 + 12^2} - n)(\sqrt{n^2 + 12^2} + n)}{12(\sqrt{n^2 + 12^2} + n)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n}{\sqrt{n^2 + 12^2} + n} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 10 \quad \text{모든 자연수 } n \text{ 에 대하여 } -1 \leq \cos n\pi \leq 1 \text{ 이므로 각 변을 } \sqrt{n} \text{ 으로 나누면} \\
&-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ 이므로} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 11 \quad 1 \leq n < 10 \text{ 일 때, } a_n = 1, 0 \leq \log n < 1 \\
&10 \leq n < 100 \text{ 일 때, } a_n = 2, 1 \leq \log n < 2 \\
&100 \leq n < 1000 \text{ 일 때, } a_n = 3, 2 \leq \log n < 3 \\
&\vdots \\
&\therefore a_n - 1 \leq \log n < a_n \\
&\text{위의 부등식의 각 변을 } a_n \text{ 으로 나누면} \\
&1 - \frac{1}{a_n} \leq \frac{\log n}{a_n} < 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = 1 \\
&\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{a_n} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 12 \quad \neg. [\text{반례}] \{a_n\}: 1, 0, 1, 0, \dots \\
&\quad \{b_n\}: 0, 1, 0, 1, \dots \\
&\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0 \text{ 이지만 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \text{ 이다.} \\
&\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{a_n} = 0 \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{b_n}{a_n}\right) = 0 \\
&\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1 \\
&\neg. [\text{반례}] a_n = 1 - \frac{1}{n}, b_n = 1 + \frac{1}{n} \text{ 이면 } a_n < b_n \text{ 이지만} \\
&\quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \text{ 이다.} \\
&\neg. [\text{반례}] a_n = n - \frac{1}{n}, b_n = n, c_n = n + \frac{1}{n} \text{ 이면} \\
&\quad a_n < b_n < c_n \text{ 이고 } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{n}\right) = 0 \text{ 이지만} \\
&\quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ 이므로 수열 } \{b_n\} \text{ 은 발산한다.} \\
&\text{따라서 보기 중 옳은 것은 } \neg \text{ 이다.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 13 \quad \text{등비수열 } \{(x-1)^n\} \text{ 의 첫째항은 } x-1, \text{ 공비는 } x-1 \text{ 이므로 이 등비수열이 수렴하려면} \\
&-1 < x-1 \leq 1 \quad \therefore 0 < x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \\
&\text{등비수열 } \left\{\frac{(2x+1)^n}{3^{n+1}}\right\} \text{ 의 첫째항은 } \frac{2x+1}{9}, \text{ 공비는 } \frac{2x+1}{3} \\
&\text{이므로 이 등비수열이 수렴하려면} \\
&-1 < \frac{2x+1}{3} \leq 1 \quad \therefore -2 < x \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \\
&\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{ 에서 } 0 < x \leq 1 \text{ 이므로 정수 } x \text{ 는 } 1 \text{ 이다.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 14 \quad \text{등비수열 } \{r^n\} \text{ 이 수렴하므로 } -1 < r \leq 1 \\
&\textcircled{1} \quad 0 \leq r^2 \leq 1 \text{ 이므로 수열 } \{r^{2n}\} \text{ 은 수렴한다.} \\
&\textcircled{2} \quad -\frac{1}{5} < \frac{r}{5} \leq \frac{1}{5} \text{ 이므로 수열 } \left\{\left(\frac{r}{5}\right)^n\right\} \text{ 은 수렴한다.} \\
&\textcircled{3} \quad -\frac{1}{2} \leq -\frac{r}{2} < \frac{1}{2} \text{ 이므로 수열 } \left\{\left(-\frac{r}{2}\right)^n\right\} \text{ 은 수렴한다.} \\
&\textcircled{4} \quad 0 < r+1 \leq 2 \text{ 이므로 수열 } \{(r+1)^n\} \text{ 은 수렴하지 않는 경우가 있다.} \\
&\textcircled{5} \quad 0 \leq \frac{1-r}{2} < 1 \text{ 이므로 수열 } \left\{\left(\frac{1-r}{2}\right)^n\right\} \text{ 은 수렴한다.} \\
&\text{따라서 항상 수렴하는 수열이 아닌 것은 } \textcircled{4} \text{ 이다.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 15 \quad 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^n = \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} = \frac{4}{3} \times 4^n - \frac{1}{3} \\
&\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1} - 3^n}{1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 4^n - 3^n}{\frac{4}{3} \times 4^n - \frac{1}{3}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$16 \quad f(4, 5) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \times 4^n + 4 \times 5^n}{4^n + 5^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\left(\frac{4}{5}\right)^n + 4}{\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1} = 4$$

$$\therefore f(f(4, 5), 3) = f(4, 3)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 4^n + 4 \times 3^n}{4^n + 3^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 4\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n} = 3$$

$$17 \quad \frac{5^n \times a_n + 3^n}{3^n \times a_n - 5^n} = b_n \text{이라고 하면}$$

$$5^n \times a_n + 3^n = b_n(3^n \times a_n - 5^n)$$

$$\therefore a_n = \frac{3^n + 5^n \times b_n}{3^n \times b_n - 5^n}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n \times b_n}{3^n \times b_n - 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n + b_n}{\left(\frac{3}{5}\right)^n \times b_n - 1}$$

$$= \frac{0 + 1}{0 \times 1 - 1} = -1$$

$$18 \quad (i) |r| > 1 \text{일 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r}\right)^{2n} = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n}}{1 + r^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^{2n} + 1} = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

$$(ii) |r| < 1 \text{일 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n}}{1 + r^{2n}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

$$(iii) |r| = 1 \text{일 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n}}{1 + r^{2n}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

따라서 $-1 < r < 0$ 일 때, 0으로 수렴하므로 옳지 않은 것은 ③이다.

$$19 \quad (i) |x| > 1 \text{일 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 2}{x^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x - 2\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

$$= \frac{x - 0}{1 + 0} = x$$

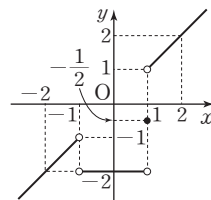
$$(ii) |x| < 1 \text{일 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 2}{x^n + 1} = \frac{0 - 2}{0 + 1} = -2$$

$$(iii) x = 1 \text{일 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1 \text{이므로}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 2}{x^n + 1} = \frac{1 - 2}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



20 이차방정식 $x^2 - 2a_{2n}x + a_n + 6 = 0$ 이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (-a_{2n})^2 - a_n - 6 = 0$$

$$\therefore a_{2n}^2 - a_n - 6 = 0$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n}^2 - a_n - 6) = 0$ 이고 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \alpha \text{ (}\alpha \text{는 실수)라고 하면}$$

$$\alpha^2 - \alpha - 6 = 0, (\alpha + 2)(\alpha - 3) = 0$$

$$\therefore \alpha = -2 \text{ 또는 } \alpha = 3$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항이 양수이므로 $\alpha = 3$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_{n+1} + 1} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

$$21 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+k^3} - \sqrt{4n+l^3}}{\sqrt{16n+k^2} - \sqrt{16n+l^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(\sqrt{4n+k^3} - \sqrt{4n+l^3})(\sqrt{4n+k^3} + \sqrt{4n+l^3})}{(\sqrt{16n+k^2} - \sqrt{16n+l^2})(\sqrt{16n+k^2} + \sqrt{16n+l^2})} \right. \\ \left. \times \frac{\sqrt{16n+k^2} + \sqrt{16n+l^2}}{\sqrt{4n+k^3} + \sqrt{4n+l^3}} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k^3 - l^3)(\sqrt{16n+k^2} + \sqrt{16n+l^2})}{(k^2 - l^2)(\sqrt{4n+k^3} + \sqrt{4n+l^3})}$$

$$= \frac{(k-l)(k^2+kl+l^2)}{(k-l)(k+l)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16n+k^2} + \sqrt{16n+l^2}}{\sqrt{4n+k^3} + \sqrt{4n+l^3}}$$

$$= \frac{k^2+kl+l^2}{k+l} \times 2$$

$$= \frac{2}{3}(k^2+kl+l^2)$$

$$\text{즉, } \frac{2}{3}(k^2+kl+l^2) = 8 \text{에서}$$

$$k^2+kl+l^2=12, (k+l)^2-kl=12$$

$$\text{이때 } k+l=3 \text{이므로}$$

$$9-kl=12 \quad \therefore kl=-3$$

$$\therefore k^2+l^2=(k+l)^2-2kl=9-2 \times (-3)=15$$

22 원 $x^2+y^2=n^2$ 에 접하고 기울기가 n , y 절편이 양수인 직선의 방정식은

$$y = nx + n\sqrt{n^2+1}$$

$$\therefore P_n(-\sqrt{n^2+1}, 0), Q_n(0, n\sqrt{n^2+1})$$

$$l_n = \overline{P_n Q_n} = \sqrt{(\sqrt{n^2+1})^2 + (n\sqrt{n^2+1})^2}$$

$$= \sqrt{n^4+2n^2+1} = \sqrt{(n^2+1)^2} = n^2+1$$

$$S_n = \pi n^2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{l_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi n^2}{n^2+1} = \pi$$

23 $n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$ 에서
 $n < \sqrt{n^2 + n + 1} < n+1$
 즉, $n < a_n < n+1$ 이므로 $[a_n] = n$ (가)
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - [a_n])$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n + 1} - n)(\sqrt{n^2 + n + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n}$
 $= \frac{1}{2}$ (나)

채점 기준	배점
(가) $[a_n]$ 을 구한다.	3점
(나) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - [a_n])$ 의 값을 구한다.	3점

24 (1) $4n < a_n < 4n+1$ 에서
 $\sum_{k=1}^n 4k < \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n (4k+1)$
 $4 \times \frac{n(n+1)}{2} < \sum_{k=1}^n a_k < 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$
 $\therefore 2n^2 + 2n < a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n < 2n^2 + 3n$ (가)
 (2) (1)에서 구한 부등식의 각 변을 $8n^2+5$ 로 나누면
 $\frac{2n^2+2n}{8n^2+5} < \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{8n^2+5} < \frac{2n^2+3n}{8n^2+5}$ (나)
 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+2n}{8n^2+5} = \frac{1}{4}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n}{8n^2+5} = \frac{1}{4}$ 이므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{8n^2+5} = \frac{1}{4}$ (다)

채점 기준	배점
(가) $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 의 값의 범위를 구한다.	2점
(나) $\frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{8n^2+5}$ 의 값의 범위를 구한다.	1점
(다) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{8n^2+5}$ 의 값을 구한다.	3점

25 $a_n = 4 \times 3^{n-1}$ (가)
 $S_n = \frac{4(3^n - 1)}{3 - 1} = 2(3^n - 1)$ (나)
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 3^{n-1}}{2(3^n - 1)}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{3}}{2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n}$
 $= \frac{2}{3}$ (다)

채점 기준	배점
(가) 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구한다.	1점
(나) S_n 을 구한다.	2점
(다) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n}$ 의 값을 구한다.	2점

확인 문제 p. 16

1 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

(1) $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$

$$= \sum_{k=1}^n (2k-1)$$

$$= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(2) $S_n = 1 + \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right\}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right\} = \frac{5}{4}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{5}{4}$ 이다.

2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{6n-7} = \frac{1}{6} \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

3 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
 $= 2 \times 2 + (-5) = -1$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n) = 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
 $= 3 \times 2 - 2 \times (-5) = 16$

핵심 유형 실전 문제

p. 17

1 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

(1) $\frac{1}{n^2+3n} = \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right)$ 이므로

$$S_n = \frac{1}{3} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) \right.$$

$$\left. + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

$$= \frac{11}{18}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{11}{18}$ 이다.

$$(2) \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} \text{이므로}$$

$$S_n = (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + (\sqrt{5}-\sqrt{4})$$

$$+ \cdots + (\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$$

$$= \sqrt{n+2}-\sqrt{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2}-\sqrt{2}) = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

2 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

이때 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$$S_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)$$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$$

따라서 주어진 급수의 합은 ③이다.

3 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-2n+6}{3n^2+n-5} = 1 \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n-2}} = \infty$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n-2}} \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n}{3n+1} \text{은 발산(진동)한다.}$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n}{3n+1} \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

4 ㄱ. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{4n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.
 ㄴ. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ 은 발산(진동)한다.
 즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.
 ㄷ. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+6n}-n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{\sqrt{n^2+6n}+n} = 3 \neq 0$ 이므로
 주어진 급수는 발산한다.
 ㄹ. $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{3n^2}{n^2+2} = \ln 3 \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.
 따라서 보기 중 발산하는 급수의 개수는 4이다.

$$5 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 7b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 7 \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 7 \times 2 = -15$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -1$$

$$6 \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta \ (\alpha, \beta \text{는 실수}) \text{라고 하면}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n) = 5 \text{에서}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 5 \quad \therefore \alpha + 2\beta = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (4a_n + 5b_n) = 8 \text{에서}$$

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 5 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 8 \quad \therefore 4\alpha + 5\beta = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $\alpha = -3, \beta = 4$
 즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -3, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 4$ 이므로
 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = -3 - 2 \times 4 = -11$
 따라서 구하는 값은 ②이다.

4 광 등비급수

확인 문제 p. 18

- 1 (1) 주어진 등비급수의 공비는 1이고, $|1| \geq 1$ 이므로 이 등비급수는 발산한다.
 (2) 주어진 등비급수의 첫째항은 1, 공비는 $\frac{3}{5}$ 이고, $\left|\frac{3}{5}\right| < 1$ 이므로 이 등비급수는 수렴한다.
 따라서 그 합은 $\frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}$
 (3) 주어진 등비급수의 공비는 -1 이고, $|-1| \geq 1$ 이므로 이 등비급수는 발산한다.
 (4) 주어진 등비급수의 첫째항은 1, 공비는 $-\frac{2}{3}$ 이고,
 $\left|-\frac{2}{3}\right| < 1$ 이므로 이 등비급수는 수렴한다.
 따라서 그 합은 $\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{5}$

해심 유형 실전 문제

교/과/서/숙

p. 19

- 1 (1) 주어진 등비급수의 첫째항은 4, 공비는 $1-x$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면
 $-1 < 1-x < 1 \quad \therefore 0 < x < 2$
 (2) 주어진 등비급수의 첫째항은 x , 공비는 $x-3$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면
 $x=0$ 또는 $-1 < x-3 < 1 \quad \therefore x=0$ 또는 $2 < x < 4$

- 2 주어진 등비급수의 첫째항은 $(x-1)(x-5)$, 공비는 $x-5$
 이므로 이 등비급수가 수렴하려면
 $(x-1)(x-5)=0$ 또는 $-1 < x-5 < 1$
 $\therefore x=1$ 또는 $4 < x < 6$
 따라서 정수 x 는 1, 5의 2개이다.

3 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{7^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n$

$$= \frac{\frac{2}{7}}{1 - \frac{2}{7}} + \frac{\frac{3}{7}}{1 - \frac{3}{7}}$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{23}{20}$$

 (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^n + 4^n}{(-8)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} + \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 3 + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + (-1)^{n+1}}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^n$

$$= \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{5}{6}} - \frac{-\frac{1}{6}}{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)}$$

$$= 5 - \left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{36}{7}$$

따라서 주어진 급수의 합은 ④이다.

5 (1) $0.0\dot{2} = 0.02 + 0.002 + 0.0002 + \dots = \frac{\frac{2}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{45}$

(2) $0.\dot{4}1\dot{6} = 0.416 + 0.000416 + 0.00000416 + \dots$

$$= \frac{\frac{416}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{416}{999}$$

6 $1.1\dot{5}\dot{7} = 1.1 + 0.057 + 0.00057 + 0.0000057 + \dots$

$$= \frac{11}{10} + \frac{\frac{57}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{11}{10} + \frac{19}{330} = \frac{191}{165}$$

따라서 $p=165$, $q=191$ 이므로 $p+q=356$

- 7 직각이등변삼각형 ABC에서
 $\overline{AC} : \overline{BC} = \sqrt{2} : 1$, $2 : \overline{BC} = \sqrt{2} : 1$
 $\therefore \overline{BC} = \sqrt{2}$
 $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$ 이고 닮음비는 $2 : 1$ 이므로
 $\overline{BC} : \overline{B_1C_1} = 2 : 1$
 $\therefore \overline{B_1C_1} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \sqrt{2} \times \frac{1}{2}$

같은 방법으로

$$\overline{B_2C_2} = \frac{1}{2} \overline{B_1C_1} = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\overline{B_3C_3} = \frac{1}{2} \overline{B_2C_2} = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{\overline{B_nC_n}\}$ 은 첫째항이 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열
 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{B_nC_n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

8 $\overline{A_1B_1} = \frac{1}{2} \overline{AB}$, $\overline{B_1C_1} = \frac{1}{2} \overline{BC}$, $\overline{A_1C_1} = \frac{1}{2} \overline{AC}$
 $\overline{A_2B_2} = \frac{1}{2} \overline{A_1B_1}$, $\overline{B_2C_2} = \frac{1}{2} \overline{B_1C_1}$, $\overline{A_2C_2} = \frac{1}{2} \overline{A_1C_1}$
 $\vdots$
 $\overline{A_{n+1}B_{n+1}} = \frac{1}{2} \overline{A_nB_n}$, $\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = \frac{1}{2} \overline{B_nC_n}$,
 $\overline{A_{n+1}C_{n+1}} = \frac{1}{2} \overline{A_nC_n}$

즉, $\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1} \sim \triangle A_nB_nC_n$ 이고 닮음비는 $1 : 2$ 이므로
 $\triangle A_nB_nC_n$ 의 넓이를 S_n , $\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ 의 넓이를 S_{n+1}
 이라고 하면

$$S_{n+1} : S_n = 1 : 2^2 \quad \therefore S_{n+1} = \frac{1}{4} S_n$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $S_1 = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{4}$
 인 등비수열이므로 구하는 삼각형의 넓이의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

계산력 자기

p. 20~21

- 1 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$$(1) S_n = \sum_{k=1}^n 4k^2 = 4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

$$(2) S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{3} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} - n \right\} = \frac{n^2 - n}{6}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{6} = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \frac{1}{n(n+2)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \text{이므로} \\
 S_n &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} \\
 \text{따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 } \frac{3}{4} \text{이다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \frac{1}{9n^2 - 3n - 2} &= \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) \\
 \text{이므로} \\
 S_n &= \frac{1}{3} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3} \\
 \text{따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 } \frac{1}{3} \text{이다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad S_n &= (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{6} - \sqrt{4}) \\
 &\quad + \cdots + (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}) \\
 &= \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} - \sqrt{2} - \sqrt{3}) = \infty \\
 \text{따라서 주어진 급수는 발산한다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \frac{2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} &= \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1} \text{이므로} \\
 S_n &= (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) \\
 &\quad + \cdots + (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \\
 &= \sqrt{2n+1} - 1 \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+1} - 1) = \infty \\
 \text{따라서 주어진 급수는 발산한다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} &= \frac{1}{\sum_{k=1}^n k} = \frac{2}{n(n+1)} \\
 &= 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
 \text{이므로} \\
 S_n &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\
 &= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2 \\
 \text{따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 2이다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad \log_2 \frac{n^2}{n^2-1} &= \log_2 \left(\frac{n}{n-1} \times \frac{n}{n+1} \right) \text{이므로 } n \geq 2 \text{일 때} \\
 S_n &= \log_2 \left(2 \times \frac{2}{3} \right) + \log_2 \left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \right) + \log_2 \left(\frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \right) \\
 &\quad + \cdots + \log_2 \left(\frac{n}{n-1} \times \frac{n}{n+1} \right) \\
 &= \log_2 \left(2 \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \right. \\
 &\quad \left. \times \cdots \times \frac{n}{n-1} \times \frac{n}{n+1} \right) \\
 &= \log_2 \frac{2n}{n+1}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{2n}{n+1} = \log_2 2 = 1$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

- 2** (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n+1) = \infty$
 즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n+1) \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2} \right)^n = \infty$
 즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2} \right)^n \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1 \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+5}{(n+1)(2n-3)} = \frac{1}{2} \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

3 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} (7a_n + 2b_n) = 7 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
 $= 7 \times (-3) + 2 \times 1 = -19$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 4b_n) = 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 4 \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
 $= 3 \times (-3) - 4 \times 1 = -13$

- 4** (1) 주어진 등비급수의 공비는 -1 이고, $|-1| \geq 1$ 이므로 이 등비급수는 발산한다.
- (2) 주어진 등비급수의 첫째항은 1, 공비는 $-\frac{1}{4}$ 이고,
 $\left| -\frac{1}{4} \right| < 1$ 이므로 이 등비급수는 수렴한다.
 따라서 그 합은 $\frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{4} \right)} = \frac{4}{5}$
- (3) 주어진 등비급수의 첫째항은 $\frac{36}{7}$, 공비는 $\frac{6}{7}$ 이고,
 $\left| \frac{6}{7} \right| < 1$ 이므로 이 등비급수는 수렴한다.
 따라서 그 합은 $\frac{\frac{36}{7}}{1 - \frac{6}{7}} = 36$
- (4) 주어진 등비급수의 첫째항은 $1 - \sqrt{2}$, 공비는 $1 - \sqrt{2}$ 이고,
 $|1 - \sqrt{2}| < 1$ 이므로 이 등비급수는 수렴한다.
 따라서 그 합은 $\frac{1 - \sqrt{2}}{1 - (1 - \sqrt{2})} = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

- 5 (1) 주어진 등비급수의 첫째항은 1, 공비는 $2x$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < 2x < 1 \quad \therefore -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

- (2) 주어진 등비급수의 첫째항은 1, 공비는 $-\frac{x}{3}$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < -\frac{x}{3} < 1 \quad \therefore -3 < x < 3$$

- (3) 주어진 등비급수의 첫째항은 1, 공비는 $x-2$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < x-2 < 1 \quad \therefore 1 < x < 3$$

- (4) 주어진 등비급수의 첫째항은 $(x+3)(2x-1)$, 공비는 $2x-1$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$(x+3)(2x-1)=0 \text{ 또는 } -1 < 2x-1 < 1$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } 0 < x < 1$$

- (5) 주어진 등비급수의 첫째항은 $(5-3x)^2$, 공비는 $5-3x$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$(5-3x)^2=0 \text{ 또는 } -1 < 5-3x < 1 \quad \therefore \frac{4}{3} < x < 2$$

- (6) 주어진 등비급수의 첫째항은 1, 공비는 x^2+3x+1 이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < x^2+3x+1 < 1$$

$$x^2+3x+1 > -1 \text{에서 } x^2+3x+2 > 0$$

$$(x+2)(x+1) > 0$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2+3x+1 < 1 \text{에서 } x^2+3x < 0$$

$$x(x+3) < 0 \quad \therefore -3 < x < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 모두 만족하는 x 의 값의 범위는

$$-3 < x < -2 \text{ 또는 } -1 < x < 0$$

6 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (2^n-1) \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$

$$= \frac{2}{1-\frac{2}{3}} - \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - (-4)^n}{(-6)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{6} \right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n$

$$= \frac{-\frac{5}{6}}{1-\left(-\frac{5}{6}\right)} - \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= -\frac{5}{11} - 2 = -\frac{27}{11}$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \times \cos n\pi}{4^n}$

$$= \frac{3}{4} \cos \pi + \left(\frac{3}{4} \right)^2 \cos 2\pi + \left(\frac{3}{4} \right)^3 \cos 3\pi + \cdots$$

$$= -\frac{3}{4} + \left(-\frac{3}{4} \right)^2 + \left(-\frac{3}{4} \right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{-\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)} = -\frac{3}{7}$$

03~04장 **즉집게** 기출문제

p. 22~25

1 ③	2 4	3 1	4 ①	5 1
6 $\frac{3}{2}$	7 $\cong$	8 ②	9 21	10 ①
11 ③	12 ③	13 ②	14 $-\frac{2}{3}$	15 $\frac{36}{5}$
16 ④	17 $\frac{1}{6}$	18 ①	19 $\frac{9}{2}\pi$	
20 24억 원	21 $\frac{100}{9}$	22 6	23 $\frac{1}{2}$	24 $\frac{5}{3}$
25 $\frac{45}{41}$				

1 $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 = 3 - 2 = 1$

- 2 주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라고 하면

$$a_n = \frac{n(n+1)}{\sum_{k=1}^n k^3} = \frac{n(n+1)}{\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2} = \frac{4}{n(n+1)}$$

$$= 4 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

이때 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$$S_n = 4 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right.$$

$$\left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\}$$

$$= 4 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

따라서 구하는 급수의 합은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 4$$

- 3 $(4n^2-1)x^2-4nx+1=0$ 에서

$$\{(2n-1)x-1\} \{(2n+1)x-1\} = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2n-1} \text{ 또는 } x = \frac{1}{2n+1}$$

이때 $\alpha_n > \beta_n$ 이고 n 이 자연수이므로

$$\alpha_n = \frac{1}{2n-1}, \beta_n = \frac{1}{2n+1}$$

$$\therefore \alpha_n - \beta_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

이때 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n+1} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = 1 \end{aligned}$$

4 $\log_2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \log_2 \frac{n^2-1}{n^2} = \log_2 \left(\frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}\right)$

이때 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면 $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} S_n &= \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\right) + \log_2 \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3}\right) + \log_2 \left(\frac{3}{4} \times \frac{5}{4}\right) \\ &\quad + \cdots + \log_2 \left(\frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}\right) \\ &= \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}\right) \\ &= \log_2 \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

따라서 구하는 급수는

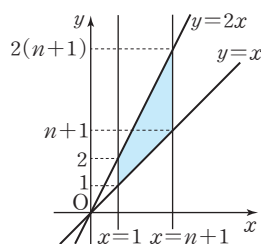
$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \log_2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{n+1}{2n} \\ &= \log_2 \frac{1}{2} = -1 \end{aligned}$$

5 $S_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ 이므로 $S_1=1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}}{\sqrt{S_n} \sqrt{S_{n+1}}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{S_n}} - \frac{1}{\sqrt{S_{n+1}}}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{S_k}} - \frac{1}{\sqrt{S_{k+1}}}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{S_1}} - \frac{1}{\sqrt{S_2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{S_2}} - \frac{1}{\sqrt{S_3}}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{S_n}} - \frac{1}{\sqrt{S_{n+1}}}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{S_1}} - \frac{1}{\sqrt{S_{n+1}}}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{S_{n+1}}}\right) = 1 \end{aligned}$$

6 오른쪽 그림과 같이 네 직선으로 둘러싸인 사각형은 평행인 두 변의 길이가 각각 1, $n+1$ 이고 높이가 n 인 사다리꼴이므로

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \{1 + (n+1)\}n \\ &= \frac{n(n+2)}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

7 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \alpha$ (α 는 실수)일 때 급수는 α 로 수렴한다.

ㄱ. $S_1=1, S_2=0, S_3=1, S_4=0, S_5=1, S_6=0, \dots$ 이므로 $S_{2n-1}=1, S_{2n}=0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 0$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $S_1=1, S_2=-1, S_3=2, S_4=-2, S_5=3, S_6=-3, \dots$ 이므로

$$S_{2n-1}=n, S_{2n}=-n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = -\infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

ㄷ. $S_1=\frac{1}{2}, S_2=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}, S_3=\frac{1}{2}, S_4=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}, S_5=\frac{1}{2},$

$$S_6=\frac{1}{2}-\frac{4}{5}, \dots$$
이므로

$$S_{2n-1}=\frac{1}{2}, S_{2n}=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = -\frac{1}{2}$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

ㄹ. $S_1=1, S_2=1-\frac{1}{2}, S_3=1, S_4=1-\frac{1}{3}, S_5=1,$

$$S_6=1-\frac{1}{4}, \dots$$
이므로

$$S_{2n-1}=1, S_{2n}=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 1$$

따라서 주어진 급수는 1로 수렴한다.

따라서 보기 중 수렴하는 급수는 ㄹ이다.

다른 풀이

ㄱ. $1-1+1-1+1-1+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \neq 0$$
이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $1-2+3-4+5-6+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \{(-1)^{n-1} \times n\}$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{(-1)^{n-1} \times n\} \neq 0$$
이므로 주어진 급수는 발산한다.

8 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{3n}{n+1}\right)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{3n}{n+1}\right) = 0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{3n}{n+1} + \frac{3n}{n+1}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{3n}{n+1}\right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n+1} \\ &= 0 + 3 = 3 \end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n - a_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ &= 0 - 3 = -3 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-b_n}{a_n} = \frac{3-(-3)}{3} = 2$$

9 $\frac{a_n}{2} - b_n = c_n$ 이라고 하면 $a_n = 2b_n + 2c_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3, \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 6 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} (2b_n + 2c_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (3b_n + 2c_n) \\ &= 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 3 \times 3 + 2 \times 6 = 21 \end{aligned}$$

10 $\neg$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+2n} = \frac{1}{2} \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$\neg$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(n-3)(n+3)} = \infty$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(n-3)(n+3)} \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$\neg$. 주어진 등비급수의 공비는 $-\frac{1}{3}$ 이고, $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ 이므로 이 급수는 수렴한다.

$\neg$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1 \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

따라서 보기 중 수렴하는 급수는 $\neg$ 이다.

11 등비수열 $\left\{\left(\frac{x+1}{2}\right)^n\right\}$ 이 수렴하려면

$$-1 < \frac{x+1}{2} \leq 1 \quad \therefore -3 < x \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2-2x}{3}\right)^n$ 이 수렴하려면

$$-1 < \frac{x^2-2x}{3} < 1, \quad -3 < x^2-2x < 3$$

(i) $-3 < x^2-2x$ 에서 $x^2-2x+3 > 0$
 $(x-1)^2+2 > 0 \quad \therefore x$ 는 모든 실수

(ii) $x^2-2x < 3$ 에서 $x^2-2x-3 < 0$
 $(x+1)(x-3) < 0 \quad \therefore -1 < x < 3$

(i), (ii)에서 $-1 < x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 모두 만족하는 x 의 값의 범위는
 $-1 < x \leq 1$

따라서 $a = -1, b = 1$ 이므로 $a+b=0$

12 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라고 하자.

$\neg$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $-1 < r < 1$

이때 $0 \leq r^2 < 1$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 도 수렴한다.

$\neg$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 발산하면 $r \leq -1$ 또는 $r \geq 1$

이때 $r^2 \geq 1$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 도 발산한다.

$\neg$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n-1}{2} = -\frac{1}{2} \neq 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n-1}{2}$ 은 발산한다.

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

13 $\log_2 2 + \log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt[4]{2} + \log_2 \sqrt[8]{2} + \dots$

$$= \log_2 2 + \frac{1}{2} \log_2 2 + \frac{1}{4} \log_2 2 + \frac{1}{8} \log_2 2 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

14 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1-x}{2}$ 인 등비급수의 합이 6이므로

$$\frac{1}{1-\frac{1-x}{2}} = 6, \quad \frac{2}{1+x} = 6 \quad \therefore x = -\frac{2}{3}$$

15 나머지정리에 의하여

$$a_n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} + \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{9}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{\frac{36}{25}}{1-\frac{4}{5}} = \frac{36}{5}$$

16 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 \text{에서} \quad \frac{a}{1-r} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{4}{3} \text{에서} \quad \frac{a^2}{1-r^2} = \frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면} \quad \frac{a}{1+r} = \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, r = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{a^3}{1-r^3} = \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{8}{7}$$

$$\begin{aligned}
 17 \quad a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= (2^{n+1} - 2) - (2^n - 2) = (2 - 1)2^n \\
 &= 2^n \quad (\text{단, } n \geq 2) \\
 \text{이때 } a_1 &= S_1 = 2 \text{이므로} \\
 a_n &= 2^n \\
 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n 2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\
 &= \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18 \quad 0.\dot{6} &= 0.6 + 0.06 + 0.006 + \cdots \\
 &= \frac{\frac{6}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{2}{3} \\
 0.5\dot{4} &= 0.54 + 0.0054 + 0.000054 + \cdots \\
 &= \frac{\frac{54}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{6}{11} \\
 \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= 0.5\dot{4} \text{에서} \\
 \frac{a_1}{1 - \frac{2}{3}} &= \frac{6}{11} \quad \therefore a_1 = \frac{2}{11}
 \end{aligned}$$

19 길이가 6인 반원의 지름을 1:2로 내분하여 만든 두 반원의 지름의 길이는 각각 2, 4이므로 두 반원의 넓이의 합 S_1 은 $S_1 = \frac{1}{2}(\pi \times 1^2 + \pi \times 2^2) = \frac{5}{2}\pi$
 첫 번째 만들어진 두 반원 중 큰 반원의 지름을 1:2로 내분하여 만든 두 반원의 지름의 길이는 각각 $\frac{4}{3}, \frac{8}{3}$ 이고, 첫 번째 만들어진 도형과 두 번째 만들어진 도형은 닮음이다. 이때 닮음비는 3:2이므로 넓이의 비는 9:4이다.
 따라서 $S_{n+1} = \frac{4}{9}S_n$ 이므로

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \cdots = \frac{\frac{5}{2}\pi}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{2}\pi$$

20 첫 번째 해에 지급하는 장학금은

($14 \times 1.2 \times 0.4$)억 원

두 번째 해에 지급하는 장학금은

($14 \times 1.2 \times 0.6 \times 1.2 \times 0.4$)억 원

세 번째 해에 지급하는 장학금은

($14 \times 1.2 \times 0.6 \times 1.2 \times 0.6 \times 1.2 \times 0.4$)억 원

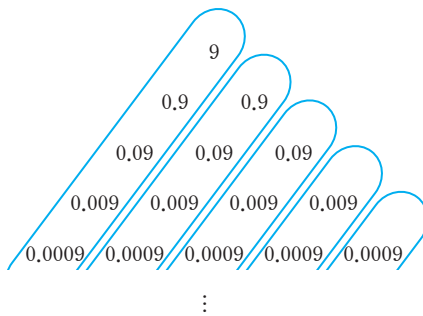
⋮

따라서 해마다 지급하는 장학금의 총액은 첫째항이

($14 \times 1.2 \times 0.4$)억 원, 공비가 1.2×0.6 인 등비급수이므로

$$\frac{14 \times 1.2 \times 0.4}{1 - 1.2 \times 0.6} = 24 \text{ (억 원)}$$

21



위와 같이 수를 묶어서 계산하면

$$\begin{aligned}
 &(9 + 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots) \\
 &\quad + (0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots) \\
 &\quad + (0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots) \\
 &\quad + (0.009 + 0.0009 + \cdots) + \cdots \\
 &= \frac{9}{1 - \frac{1}{10}} + \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} + \frac{\frac{9}{100}}{1 - \frac{1}{10}} + \frac{\frac{9}{1000}}{1 - \frac{1}{10}} + \cdots \\
 &= 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots = \frac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9}
 \end{aligned}$$

22 오른쪽 그림과 같이 정사각형

$A_1B_1C_1D_1$ 의 한 변의 길이를 a 라고

하면 $\overline{AA_1} = \frac{1-a}{2}$

$\overline{AC_1} = 1$ 이므로 직각삼각형 AB_1C_1 에

서 $\left(\frac{1-a}{2} + a\right)^2 + a^2 = 1^2$

$$5a^2 + 2a - 3 = 0, (a+1)(5a-3) = 0$$

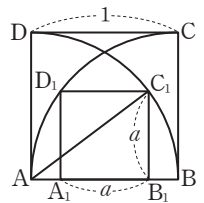
$$\therefore a = \frac{3}{5} \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore l_1 = 4 \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$

이때 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$ 과 정사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 의 닮음비는 정사각형 $ABCD$ 와 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 의 닮음비와 같으므로 5:3이다.

따라서 $l_{n+1} = \frac{3}{5}l_n$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\frac{12}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = 6$$



23 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 에서 $a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$ 이므로

$$\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1}a_{n+2}} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}} \quad \dots\dots (가)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+2}} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} \right) + \left(\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_5} \right) \\
 &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) \\
 &= \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_{n+2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a_{n+2}} \quad \dots\dots (나)
 \end{aligned}$$

이때 $a_1=1, a_2=2$ 에서 $a_3=3, a_4=5, a_5=8, \dots$ 이므로

$$a_{n+1} > a_n$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+2}} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a_{n+2}} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \dots\dots (다)$$

채점 기준	배점
(가) $\frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}$ 을 두 분수의 차로 나타낸다.	1점
(나) $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}}$ 를 간단히 한다.	2점
(다) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}a_{n+2}}$ 의 값을 구한다.	3점

24 $\frac{13}{99} = 0.\dot{1}\dot{3}$ 이므로

$$a_1=1, a_2=3, a_3=1, a_4=3, \dots \quad \dots\dots (가)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{3}{2^6} + \dots \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots \right) + \left(\frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^4} + \frac{3}{2^6} + \dots \right) \end{aligned} \quad \dots\dots (나)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \quad \dots\dots (다)$$

채점 기준	배점
(가) $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 를 구한다.	1점
(나) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 을 두 급수의 합으로 나타낸다.	3점
(다) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 의 값을 구한다.	2점

25 $x = \overline{OP_1} - \overline{P_2P_3} + \overline{P_4P_5} - \overline{P_6P_7} + \dots$

$$\begin{aligned} &= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^4 - \left(\frac{4}{5}\right)^6 + \dots \\ &= \frac{1}{1 - \left(-\frac{16}{25}\right)} = \frac{25}{41} \end{aligned} \quad \dots\dots (가)$$

$$\begin{aligned} y &= \overline{P_1P_2} - \overline{P_3P_4} + \overline{P_5P_6} - \overline{P_7P_8} + \dots \\ &= \frac{4}{5} - \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^5 - \left(\frac{4}{5}\right)^7 + \dots \\ &= \frac{\frac{4}{5}}{1 - \left(-\frac{16}{25}\right)} = \frac{20}{41} \end{aligned} \quad \dots\dots (나)$$

$$\therefore x + y = \frac{25}{41} + \frac{20}{41} = \frac{45}{41} \quad \dots\dots (다)$$

채점 기준	배점
(가) 점 P_n 의 x 좌표를 구한다.	3점
(나) 점 P_n 의 y 좌표를 구한다.	3점
(다) $x+y$ 의 값을 구한다.	1점

5강 | 지수함수와 로그함수의 극한

확인 문제 p. 26

- $(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$
 $(2) \lim_{x \rightarrow 2} 3^x = 3^2 = 9$
 $(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \log_5 x = \infty$
 $(4) \lim_{x \rightarrow 4} \log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$

- $(1) \ln \frac{1}{e^2} = \ln e^{-2} = -2$
 $(2) \ln \sqrt[3]{e} = \ln e^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

- $(1) 5x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{1}{5x}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$
 $(2) 2x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$

해심 유형 + 실전 문제

p. 27

- (1) 분모, 분자를 4^x 으로 나누면
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{4^x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^x} = \frac{0}{1-0} = 0$ (수렴)
 $(2) \lim_{x \rightarrow 0+} (4^x + 5^x) = 4^0 + 5^0 = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 0+} (4^x - 5^x) = 4^0 - 5^0 = 0$
 그런데 $x > 0$ 일 때 $4^x < 5^x$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{4^x + 5^x}{4^x - 5^x} = -\infty$ (발산)

- (1) 분모, 분자를 3^x 으로 나누면
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x - 3^x}{2^{x+1} - 3^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1}{2\left(\frac{2}{3}\right)^x - 3} = \frac{0-1}{0-3} = \frac{1}{3}$
 따라서 구하는 값은 ④이다.

- $(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_2 (2x+1) - \log_2 x\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{2x+1}{x}$
 $= \log_2 2 = 1$ (수렴)
 $(2) \lim_{x \rightarrow 1+} \log_3 (4x-1) = \log_3 3 = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 1+} \log_5 x = \log_5 1 = 0$
 그런데 $x > 1$ 일 때 $\log_5 x > 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\log_3 (4x-1)}{\log_5 x} = \infty$ (발산)

4 $\lim_{x \rightarrow 1} (\log_2 |x^2 - 1| - \log_2 |x - 1|)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \log_2 \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \log_2 \left| \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \log_2 |x+1| = \log_2 2 = 1 \end{aligned}$$

따라서 구하는 값은 ②이다.

5 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^4$

$$\begin{aligned} &= e^4 \\ (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^{-3x} \right\}^{-\frac{1}{3}} \\ &= e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \end{aligned}$$

6 $\lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1-4x)^{-\frac{1}{4x}}\}^{-2}$

$$\begin{aligned} &= e^{-2} = \frac{1}{e^2} \\ \therefore k &= 2 \end{aligned}$$

따라서 구하는 값은 ①이다.

06

강 지수함수와 로그함수의 미분

확인 문제

p. 28

1 (1) $-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{-x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

(2) $4x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+4x)}{4x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+t)}{t} = \frac{1}{\ln 3}$$

(3) $5x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{5x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

(4) $2x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{2x} - 1}{2x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{7^t - 1}{t} = \ln 7$$

2 (1) $y' = -2(e^x)' = -2e^x$

(2) $y' = 3^x \ln 3$

(3) $y = \ln x^4 = 4 \ln x$ 이므로

$$y' = 4(\ln x)' = 4 \times \frac{1}{x} = \frac{4}{x}$$

(4) $y' = \frac{1}{x \ln 5}$

핵심 유형 실전 문제

p. 29

1 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{7x} \times \frac{7}{4}$

$$= 1 \times \frac{7}{4} = \frac{7}{4}$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\log_5(1+2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\log_5(1+2x)} \times \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\log_5(1+2x)} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\ln 5}} \times \frac{1}{2} = \frac{\ln 5}{2} \end{aligned}$$

2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{\ln(1-x)}{-x}} \times (-1)$

$$= 1 \times (-1) = -1$$

3 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times \frac{3}{2} = 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3^{2x} - 1} \times \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{3^{2x} - 1}{2x}} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{\ln 3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \ln 3} \end{aligned}$$

4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 5^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) - (5^{-x} - 1)}{x}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} - \frac{5^{-x} - 1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{5^{-x} - 1}{-x} \right) \\ &= 1 + \ln 5 \end{aligned}$$

5 (1) $y = e^{x-1} = \frac{1}{e} \times e^x$ 이므로 $y' = \frac{1}{e} \times (e^x)' = \frac{1}{e} \times e^x = e^{x-1}$

(2) $y = 5^{2x} = 25^x$ 이므로 $y' = 25^x \ln 25 = 2 \times 5^{2x} \ln 5$

6 $f(x) = xe^x + 3^{x+1} = xe^x + 3 \times 3^x$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)'e^x + x(e^x)' + 3 \times 3^x \ln 3 \\ &= e^x + xe^x + 3^{x+1} \ln 3 \\ &= (x+1)e^x + 3^{x+1} \ln 3 \\ \therefore f'(0) &= 1 + 3 \ln 3 \end{aligned}$$

7 (1) $y = \ln(3x)^4 = 4 \ln 3x = 4(\ln 3 + \ln x)$ 이므로 $y' = \frac{4}{x}$

(2) $y = \log_2 8x = \log_2 8 + \log_2 x$ 이므로 $y' = \frac{1}{x \ln 2}$

8 $f'(x) = (x)' \log_2 x + x(\log_2 x)'$
 $= \log_2 x + x \times \frac{1}{x \ln 2} = \log_2 x + \frac{1}{\ln 2}$
 $\therefore f'(e) = \log_2 e + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{2}{\ln 2}$
 $\therefore a = 2$

계산력 다지기

p. 30~31

- 1 (1) 분모, 분자를 4^x 으로 나누면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^{x+1} - 3^x}{4^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \left(\frac{3}{4}\right)^x}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^x} = \frac{4-0}{1+0} = 4$$

- (2) $\lim_{x \rightarrow 0+} 2^{-x} = 2^0 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0+} (1 - 2^x) = 1 - 2^0 = 0$

그런데 $x > 0$ 일 때 $1 - 2^x < 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2^{-x}}{1 - 2^x} = -\infty$$

- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (5^x - 3^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 5^x \left\{ 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^x \right\}$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^x \right\} = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 5^x \left\{ 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^x \right\} = \infty$$

- (4) 분모, 분자에 6^x 을 곱하면

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6^x + 6^{-x}}{6^x - 6^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6^{2x} + 1}{6^{2x} - 1} = \frac{0+1}{0-1} = -1$$

- 2 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} (-\log x) = -\infty$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4x-1}{x} = \log_2 4 = 2$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \{ \log_3 (x^2+1) - \log_3 (3x^2-1) \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{x^2+1}{3x^2-1} = \log_3 \frac{1}{3} = -1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2+} \{ \log_3 (x^2-4) - \log_3 (x-2) \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \log_3 \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \log_3 \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \log_3 (x+2) = \log_3 4 = 2 \log_3 2$$

- 3 (1) $\ln 1 = 0$

$$(2) \ln e = 1$$

$$(3) \ln e^4 = 4 \ln e = 4$$

$$(4) \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$$

$$(5) e^{\ln 2} = 2^{\ln e} = 2^1 = 2$$

$$(6) \frac{1}{\log_2 e} + \frac{1}{\log_3 e} = \ln 2 + \ln 3 = \ln 6$$

4 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+4x)^{\frac{1}{8x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{ (1+4x)^{\frac{1}{4x}} \}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{ (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \}^{-2} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (1-5x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{ (1-5x)^{-\frac{1}{5x}} \}^{-10} = e^{-10} = \frac{1}{e^{10}}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right\}^3 = e^3$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{5x} \right)^{5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{2}{5x} \right)^{\frac{5x}{2}} \right\}^2 = e^2$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{3}{x} \right)^{-\frac{x}{3}} \right\}^{-6} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

5 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times 2 = 1 \times 2 = 2$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}{\frac{x}{3}} \times \frac{1}{3} = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\log_5(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\log_5(1-x)} \times (-2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log_5(1-x)}{-x}} \times (-2)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\ln 5}} \times (-2) = -2 \ln 5$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+x)^6}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \log_3(1+x)}{3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \log_3(1+x)}{x} = \frac{2}{\ln 3}$$

6 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{e^{4x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{e^{4x}-1} \times \frac{5}{4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^{4x}-1}{4x}} \times \frac{5}{4}$

$$= 1 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x}-1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x}-1}{-3x} \times \left(-\frac{3}{2} \right)$$

$$= 1 \times \left(-\frac{3}{2} \right) = -\frac{3}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x}-1}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x}-1}{2x} \times \frac{1}{2} = \ln 3 \times \frac{1}{2} = \frac{\ln 3}{2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{-x}-1}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{-x}-1}{-x} \times \left(-\frac{1}{5} \right)$$

$$= \ln 2 \times \left(-\frac{1}{5} \right) = -\frac{\ln 2}{5}$$

7 (1) $y' = 5 \times e^x = 5e^x$

$$(2) y = e^{x+1} = e \times e^x \text{이므로 } y' = e \times e^x = e^{x+1}$$

$$(3) y = e^{x-3} = \frac{1}{e^3} \times e^x \text{이므로 } y' = \frac{1}{e^3} \times e^x = e^{x-3}$$

$$(4) y' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)'$$

$$= 2x \times e^x + x^2 \times e^x = (x^2 + 2x) e^x$$

$$(5) y' = 2^x \ln 2$$

$$(6) y = 3^{x-2} = \frac{1}{3^2} \times 3^x \text{이므로 } y' = \frac{1}{3^2} \times 3^x \ln 3 = 3^{x-2} \ln 3$$

$$(7) y' = 5^{-x} \ln 5^{-1} = -5^{-x} \ln 5$$

$$(8) y = e^x + 3^{2x} = e^x + 9^x \text{이므로}$$

$$y' = e^x + 9^x \ln 9 = e^x + 2 \times 3^{2x} \ln 3$$

8 (1) $y' = \frac{1}{4x}$

(2) $y = \ln 2x = \ln 2 + \ln x$ 이므로 $y' = \frac{1}{x}$

(3) $y = \ln x^3 = 3 \ln x$ 이므로 $y' = \frac{3}{x}$

(4) $y' = (x+3)' \ln x + (x+3)(\ln x)' = \ln x + 1 + \frac{3}{x}$

(5) $y = \log 7x = \log 7 + \log x$ 이므로 $y' = \frac{1}{x \ln 10}$

(6) $y' = (x)' \log_3 x + x(\log_3 x)'$

$$= \log_3 x + x \times \frac{1}{x \ln 3}$$

$$= \log_3 x + \frac{1}{\ln 3}$$

(7) $y = (\log_5 x)^2 = \log_5 x \times \log_5 x$ 이므로

$$y' = (\log_5 x)' \log_5 x + \log_5 x (\log_5 x)'$$

$$= \frac{1}{x \ln 5} \times \log_5 x + \log_5 x \times \frac{1}{x \ln 5} = \frac{2 \log_5 x}{x \ln 5}$$

(8) $y' = (e^x)' \log_2 x + e^x (\log_2 x)'$

$$= e^x \log_2 x + e^x \times \frac{1}{x \ln 2}$$

$$= e^x \left(\log_2 x + \frac{1}{x \ln 2} \right)$$

3 $\neg$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_2 x = -\infty$

$$\neg$$
. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_2 x}{\log_4 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_2 x}{\frac{1}{2} \log_2 x} = 2$

$$\neg$$
. $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{x^2}{x-1} = \infty$

$$\neg$$
. $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{2x+1}{x+3} = \log_2 2 = 1$

따라서 보기 중 극한값이 존재하는 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

4 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \{\log_3 (x^2 + ax + b) - \log_3 (x^2 - 4x + 3)\} = 1$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \log_3 \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4x + 3} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 4x + 3) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax + b) = 0, 1 + a + b = 0$$

$$\therefore b = -a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \log_3 \frac{x^2 + ax - a - 1}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \log_3 \frac{(x-1)(x+a+1)}{(x-1)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \log_3 \frac{x+a+1}{x-3}$$

$$= \log_3 \frac{a+2}{-2}$$

$$\text{즉, } \log_3 \frac{a+2}{-2} = 1 \text{에서}$$

$$-\frac{a+2}{2} = 3 \quad \therefore a = -8$$

$$a = -8 \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } b = 7 \quad \therefore b - a = 15$$

5 $x - 2 = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{1}{2-x}} &= \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{-t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1} \\ &= e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

6 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{2x} \right) \left(1 + \frac{1}{2x+1} \right) \left(1 + \frac{1}{2x+2} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{3x} \right) \right\}^{3x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \times \frac{2x+1}{2x} \times \frac{2x+2}{2x+1} \times \frac{2x+3}{2x+2} \right.$$

$$\left. \times \cdots \times \frac{2x+x+1}{2x+x} \right)^{3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \times \frac{3x+1}{2x} \right)^{3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x} \right)^{3x}$$

$$= e$$

7 $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x-a}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left\{ \left(1 - \frac{a}{x} \right)^{-\frac{x}{a}} \right\}^{-a}$

$$= \ln e^{-a} = -a$$

$$\text{즉, } -a = 4 \text{에서 } a = -4$$

05~06월 **즉답게** 기출문제

p. 32~35

1 ④	2 ②	3 $\neg$, $\neg$	4 15	5 ②
6 ③	7 ①	8 ⑤	9 ②	10 ③
11 ④	12 ③	13 ⑤	14 $\frac{5}{2}$	15 3
16 ④	17 $a = \ln 3, b = -1$	18 ④	19 ③	
20 $\frac{1}{4} \left(e^5 + \frac{1}{\ln 5} \right)$	21 ④	22 ②	23 12	
24 2	25 $\frac{\sqrt{10}}{3}$	26 4	27 3	28 e

1 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 2^x + 3^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 3^x \left(\frac{1}{3^x} - \frac{2^x}{3^x} + 1 \right) \right\}^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 3 \left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^x - \left(\frac{2}{3} \right)^x + 1 \right\}^{\frac{1}{x}}$$

$$= 3 \times 1 = 3$$

2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \times 5^{x+1} - 2}{5^{x-1} + 3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5a - 2 \left(\frac{1}{5} \right)^x}{\frac{1}{5} + \left(\frac{3}{5} \right)^x} = 25a$

$$\text{즉, } 25a = 75 \text{에서 } a = 3$$

$$\begin{aligned}
 8 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{1+5x}{1-4x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \{ \ln(1+5x) - \ln(1-4x) \} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+5x)}{x} - \frac{\ln(1-4x)}{x} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+5x)}{5x} \times 5 + \frac{\ln(1-4x)}{-4x} \times 4 \right\} \\
 &= 1 \times 5 + 1 \times 4 = 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+3x) + \log_3(1-3x)}{3x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3 \{ (1+3x)(1-3x) \}}{3x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1-9x^2)}{-9x^2} \times (-3) \\
 &= \frac{1}{\ln 3} \times (-3) = -\frac{3}{\ln 3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^{4x} - 2e^{2x} + 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(e^{2x} - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4 \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \right)^2} \\
 &= \frac{1}{4 \times 1^2} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11 \quad x+1=t \text{로 놓으면 } x \rightarrow -1 \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{x+1} + x}{x+1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t + t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} + 1 \right) \\
 &= 1 + 1 = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 2^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(8^x - 1) - (2^x - 1)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{8^x - 1}{x} - \frac{2^x - 1}{x} \right) \\
 &= \ln 8 - \ln 2 = \ln 4 \\
 \therefore a &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13 \quad S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(1-3x)}{(1-x)^n} = \ln(1-3x) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1-x} \right)^n \\
 \text{이때 } \left| \frac{1}{1-x} \right| &< 1 \text{이므로} \\
 S(x) &= \frac{\ln(1-3x)}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{(x-1)\ln(1-3x)}{x} \\
 \therefore \lim_{x \rightarrow 0} S(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)\ln(1-3x)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1-3x)}{-3x} \times (-3x+3) \right\} \\
 &= 1 \times 3 = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{e^{3x} - 1} \times \frac{e^{3x} - 1}{x} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{e^{3x} - 1} \times \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3 \right\} \\
 &= \frac{5}{6} \times 1 \times 3 = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15 \quad y = \ln \left(\frac{x}{3} + 1 \right) \text{에서 } \frac{x}{3} + 1 &= e^y, \frac{x}{3} = e^y - 1 \\
 \therefore x &= 3(e^y - 1)
 \end{aligned}$$

따라서 $g(x) = 3(e^x - 1)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(e^x - 1)}{x} = 3$$

$$\begin{aligned}
 16 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x + b}{\ln(1+2x)} &= 3 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+2x) = 0 \text{이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} (ae^x + b) &= 0, a + b = 0 \quad \therefore b = -a \quad \dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

①을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x + b}{\ln(1+2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^x - a}{\ln(1+2x)} \\
 &= a \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{\frac{\ln(1+2x)}{2x}} \times \frac{1}{2} \right\} \\
 &= a \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2}a = 3 \text{에서 } a = 6$$

$$a = 6 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = -6 \quad \therefore a - b = 12$$

17 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=0$ 에서 연속
이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - a \ln(1+x) + b}{x} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①에서 $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{3^x - a \ln(1+x) + b\} = 0, 1 + b = 0 \quad \therefore b = -1$$

$b = -1$ 을 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - a \ln(1+x) + b}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - a \ln(1+x) - 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{3^x - 1}{x} - \frac{a \ln(1+x)}{x} \right\} \\
 &= \ln 3 - a
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \ln 3 - a = 0 \text{에서 } a = \ln 3$$

18 $C(t, \ln(1+2t)), D(3t, \ln(1+6t))$ 이므로

$$f(t) = \frac{1}{2}t \ln(1+2t)$$

$$g(t) = \frac{1}{2} \{ \ln(1+2t) + \ln(1+6t) \} \times 2t$$

$$= t \{ \ln(1+2t) + \ln(1+6t) \}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{f(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \{ \ln(1+2t) + \ln(1+6t) \}}{\frac{1}{2}t \ln(1+2t)}$$

$$= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2t) + \ln(1+6t)}{\ln(1+2t)}$$

$$= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ 1 + \frac{\ln(1+6t)}{\ln(1+2t)} \right\}$$

$$= 2 \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ 1 + \frac{\frac{\ln(1+6t)}{6t}}{\frac{\ln(1+2t)}{2t}} \times 3 \right\}$$

$$= 2(1 + 1 \times 3) = 8$$

19 $f'(x) = \{(a^2)^x\}'(x^3+1) + (a^2)^x(x^3+1)'$
 $= (a^2)^x \ln a^2 \times (x^3+1) + (a^2)^x \times 3x^2$
 $= 2(x^3+1)a^{2x} \ln a + 3x^2 a^{2x}$
 $f'(-1) = \frac{3}{4}$ 에서 $3a^{-2} = \frac{3}{4}$
 $a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$

20 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \times \frac{1}{x + 2} \right\}$
 $= \frac{1}{4} f'(2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$

이때 $f(x) = e^3 \times e^x + \log_{\sqrt{5}} e + \log_{\sqrt{5}} x$ 이므로 $f'(x)$ 를 구하면

$$f'(x) = e^3 \times e^x + \frac{1}{x \ln \sqrt{5}} = e^{x+3} + \frac{2}{x \ln 5}$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서 구하는 극한값은

$$\frac{1}{4} f'(2) = \frac{1}{4} \left(e^5 + \frac{1}{\ln 5} \right)$$

21 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e+h) - f(e-h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(e+h) - f(e)}{h} + \frac{f(e-h) - f(e)}{-h} \right\}$
 $= f'(e) + f'(e) = 2f'(e) \quad \dots\dots \textcircled{1}$

이때 $f'(x)$ 를 구하면

$$f'(x) = (x)' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서 구하는 극한값은

$$2f'(e) = 2(1+1) = 4$$

22 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -1$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0, f(1) = 0, a + b \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0 \quad \therefore a = 0$

한편 $f(1) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -1 \quad \therefore f'(1) = -1$$

이때 $f(x) = -b \log_3 x$ 이므로 $f'(x)$ 를 구하면

$$f'(x) = -\frac{b}{x \ln 3}$$

$$\text{따라서 } f'(1) = -1 \text{에서 } -\frac{b}{\ln 3} = -1 \quad \therefore b = \ln 3$$

$$\therefore a + b = \ln 3$$

23 (i) $-\frac{1}{4} < x < 0$ 일 때, 주어진 부등식의 각 변을 x 로 나누면

$$\frac{2(e^{2x}-1)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\ln(1+4x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(e^{2x}-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x} \times 4 = 1 \times 4 = 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+4x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+4x)}{4x} \times 4 = 1 \times 4 = 4$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 4$$

(ii) $x > 0$ 일 때, 주어진 부등식의 각 변을 x 로 나누면

$$\frac{\ln(1+4x)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{2(e^{2x}-1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+4x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+4x)}{4x} \times 4 = 1 \times 4 = 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(e^{2x}-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x}-1}{2x} \times 4 = 1 \times 4 = 4$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 4$$

(i), (ii)에 의하여 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$

$3x = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{\frac{t}{3}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \times 3 = 4 \times 3 = 12$$

24 $a_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{nx} - n}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{2x} - 1}{x} + \frac{e^{3x} - 1}{x} + \dots + \frac{e^{nx} - 1}{x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2 + \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3 \right.$
 $\left. + \dots + \frac{e^{nx} - 1}{nx} \times n \right)$

$$= 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + \dots + 1 \times n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

 $= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\}$
 $= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2$

25 점 P의 좌표를 $(t, \ln(1+3t))$ 라고 하면

$$\overline{OP} = \sqrt{t^2 + \{\ln(1+3t)\}^2}$$

중심이 원점이고 선분 OP를 반지름으로 하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 = t^2 + \{\ln(1+3t)\}^2$$

이때 점 P에서의 원의 접선의 방정식은

$$tx + y \ln(1+3t) = t^2 + \{\ln(1+3t)\}^2$$

따라서 점 Q의 좌표는 $\left(t + \frac{\{\ln(1+3t)\}^2}{t}, 0 \right)$ 이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{\frac{\{\ln(1+3t)\}^4}{t^2} + \{\ln(1+3t)\}^2}$$

 $= \frac{1}{t} \ln(1+3t) \sqrt{\{\ln(1+3t)\}^2 + t^2}$

점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t + \frac{\{\ln(1+3t)\}^2}{t}}{\frac{1}{t} \ln(1+3t) \sqrt{\{\ln(1+3t)\}^2 + t^2}}$$

 $= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 + \{\ln(1+3t)\}^2}{\ln(1+3t) \sqrt{\{\ln(1+3t)\}^2 + t^2}}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t^2 + \{\ln(1+3t)\}^2}}{\ln(1+3t)}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{\left\{ \frac{t}{\ln(1+3t)} \right\}^2 + 1}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{\left\{ \frac{3t}{\ln(1+3t)} \right\}^2 \times \frac{1}{9} + 1}$
 $= \sqrt{1^2 \times \frac{1}{9} + 1} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

26 (i) $0 < a < 2$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^{x+1} - 2^{x+1}}{a^x + 2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a\left(\frac{a}{2}\right)^x - 2}{\left(\frac{a}{2}\right)^x + 1} = -2 \neq 4$$

따라서 주어진 식을 만족하지 않는다.

(ii) $a = 2$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^{x+1} - 2^{x+1}}{a^x + 2^x} = 0 \neq 4$$

따라서 주어진 식을 만족하지 않는다.

(iii) $a > 2$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^{x+1} - 2^{x+1}}{a^x + 2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a - 2\left(\frac{2}{a}\right)^x}{1 + \left(\frac{2}{a}\right)^x} = a = 4 \quad \dots\dots (가)$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $a = 4 \quad \dots\dots (나)$

채점 기준	배점
(가) a 의 값의 범위에 따른 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^{x+1} - 2^{x+1}}{a^x + 2^x}$ 의 값을 구한다.	4점
(나) a 의 값을 구한다.	2점

27 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{ax} - 1}{ax} \times \frac{a}{x + 3} \right)$
 $= 1 \times \frac{a}{3} = \frac{a}{3}$

즉, $\frac{a}{3} = 2$ 에서 $a = 6 \quad \dots\dots (가)$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{6x} \times 3 \\ &= 1 \times 3 = 3 \quad \dots\dots (나) \end{aligned}$$

채점 기준	배점
(가) a 의 값을 구한다.	4점
(나) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{2x}$ 의 값을 구한다.	2점

28 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & (x > 1) \\ (x+1)e^x & (x < 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a}{x} = \lim_{x \rightarrow 1-} (x+1)e^x \quad \therefore a = 2e \quad \dots\dots (가)$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} a \ln x = \lim_{x \rightarrow 1-} (xe^x + b)$$

$$0 = e + b \quad \therefore b = -e \quad \dots\dots (나)$$

$$\therefore a + b = e \quad \dots\dots (다)$$

채점 기준	배점
(가) a 의 값을 구한다.	3점
(나) b 의 값을 구한다.	3점
(다) $a+b$ 의 값을 구한다.	1점



7 장 삼각함수의 덧셈정리

확인 문제

p. 36

1 (1) $\csc 45^\circ = \frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$

$$\sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\cot 45^\circ = \frac{1}{\tan 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

(2) $\csc 120^\circ = \frac{1}{\sin 120^\circ} = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\sec 120^\circ = \frac{1}{\cos 120^\circ} = \frac{1}{-\cos 60^\circ} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$\cot 120^\circ = \frac{1}{\tan 120^\circ} = \frac{1}{-\tan 60^\circ} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(3) $\csc \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{\sin \frac{5}{6}\pi} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$$\sec \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{\cos \frac{5}{6}\pi} = \frac{1}{-\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{\tan \frac{5}{6}\pi} = \frac{1}{-\tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\sqrt{3}$$

(4) $\csc \frac{4}{3}\pi = \frac{1}{\sin \frac{4}{3}\pi} = \frac{1}{-\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\sec \frac{4}{3}\pi = \frac{1}{\cos \frac{4}{3}\pi} = \frac{1}{-\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$\cot \frac{4}{3}\pi = \frac{1}{\tan \frac{4}{3}\pi} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2 (1) $\sin 15^\circ = \sin (45^\circ - 30^\circ)$

$$\begin{aligned} &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

(2) $\cos 105^\circ = \cos (60^\circ + 45^\circ)$

$$\begin{aligned} &= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

(3) $\tan 75^\circ = \tan (45^\circ + 30^\circ)$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

1 $\overline{OP} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이므로

(1) $\csc \theta = \frac{5}{4}$

(2) $\sec \theta = \frac{5}{3}$

(3) $\cot \theta = \frac{3}{4}$

2 $\overline{OP} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$ 이므로

$\csc \theta = -\frac{13}{5}, \cot \theta = -\frac{12}{5}$

$\therefore \csc \theta + \cot \theta = -\frac{13}{5} - \frac{12}{5} = -5$

3 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ 에서 $\cos \alpha < 0$ 이므로

$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \beta > 0$ 이므로

$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$

(1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $= \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \times \frac{4}{5} = \frac{3 - 8\sqrt{2}}{15}$

(2) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
 $= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4 - 6\sqrt{2}}{15}$

4 $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\cos \alpha < 0$ 이므로

$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$ 에서 $\sin \beta < 0$ 이므로

$\sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
 $= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + (-\sqrt{3})}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \times (-\sqrt{3})} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

5 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \alpha > 0$ 이므로

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$

$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

(1) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

(2) $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$

(3) $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7}$

6 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \alpha > 0$ 이므로

$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$

$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{9}$

$\therefore \sin 2\alpha - \cos 2\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{9} - \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{4\sqrt{5} + 1}{9}$

7 두 직선 $y = -2x + 1, y = -\frac{1}{3}x - 1$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라고 하면

$\tan \alpha = -2, \tan \beta = -\frac{1}{3}$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ 라고 하면
 $\theta = \beta - \alpha$

$\therefore \tan \theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha}$
 $= \frac{-\frac{1}{3} - (-2)}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-2)} = 1$

따라서 구하는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$ 이다.

8 두 직선 $y = 3x - 4, y = \frac{1}{2}x + 1$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라고 하면

$\tan \alpha = 3, \tan \beta = \frac{1}{2}$

이때 $\theta = \alpha - \beta$ 이므로

$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$
 $= \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \times \frac{1}{2}} = 1$

따라서 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$\csc \theta = \csc \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$

확인 문제

p. 38

- 1 (1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \sin x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (2) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{6}} 4 \cos x = 4 \cos \left(-\frac{\pi}{6}\right)$
 $= 4 \cos \frac{\pi}{6}$
 $= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{4}\pi} 2 \tan x = 2 \tan \frac{3}{4}\pi$
 $= -2 \tan \frac{\pi}{4}$
 $= -2 \times 1 = -2$

- 2 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = 1$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{1}{2}$
 $= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x} \times \frac{3}{2}$
 $= 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

- 3 (1) $y' = 2 + 3 \cos x$
- (2) $y' = -\sin x - 2 \cos x$

교/과/서/속

핵심
유형

실전 문제

p. 39

- 1 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 - \cos x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)$
 $= 1 + 1 = 2$
- (2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x - \cos x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x (\sin x - \cos x)}$
 $= -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} = -\sqrt{2}$

- 2 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\cos x (1 + \sin x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x (1 + \sin x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{0}{2} = 0$

따라서 구하는 극한값은 ②이다.

- 3 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos x} \right\}$
 $= 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- (2) $x - \pi = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + t)}{t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = -1$
- (3) $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x \tan \frac{1}{x} = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 2 \times 1 = 2$

- 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan(\sin x)}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{2} \right\}$
 $= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

따라서 구하는 극한값은 ②이다.

- 5 (1) $y = \sin x \times \sin x$ 이므로
 $y' = (\sin x)' \sin x + \sin x (\sin x)'$
 $= \cos x \times \sin x + \sin x \times \cos x = 2 \sin x \cos x$
- (2) $y' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)'$
 $= 2x \sin x + x^2 \cos x$
- (3) $y' = (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)'$
 $= \cos x \times \cos x + \sin x \times (-\sin x)$
 $= \cos^2 x - \sin^2 x$

- 6 $f'(x) = (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)'$
 $= e^x \times \cos x + e^x \times (-\sin x)$
 $= e^x (\cos x - \sin x)$
 $\therefore f'(0) = 1 \times (1 - 0) = 1$
 따라서 구하는 값은 ④이다.

$$1 \quad (1) \csc 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(2) \csc 330^\circ = \frac{1}{\sin 330^\circ} = \frac{1}{-\sin 30^\circ} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$\sec 330^\circ = \frac{1}{\cos 330^\circ} = \frac{1}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot 330^\circ = \frac{1}{\tan 330^\circ} = \frac{1}{-\tan 30^\circ} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\sqrt{3}$$

$$(3) \csc \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sin \frac{3}{4}\pi} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\sec \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\cos \frac{3}{4}\pi} = \frac{1}{-\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2}$$

$$\cot \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\tan \frac{3}{4}\pi} = \frac{1}{-\tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$(4) \csc \frac{7}{6}\pi = \frac{1}{\sin \frac{7}{6}\pi} = \frac{1}{-\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

$$\sec \frac{7}{6}\pi = \frac{1}{\cos \frac{7}{6}\pi} = \frac{1}{-\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot \frac{7}{6}\pi = \frac{1}{\tan \frac{7}{6}\pi} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$$

$$2 \quad (1) \sin 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \sin 40^\circ = \sin (20^\circ + 40^\circ) \\ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \cos 85^\circ \cos 40^\circ + \sin 85^\circ \sin 40^\circ = \cos (85^\circ - 40^\circ) \\ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(3) \frac{\tan 10^\circ + \tan 35^\circ}{1 - \tan 10^\circ \tan 35^\circ} = \tan (10^\circ + 35^\circ) \\ = \tan 45^\circ = 1$$

$$(4) \frac{\tan 55^\circ - \tan 25^\circ}{1 + \tan 55^\circ \tan 25^\circ} = \tan (55^\circ - 25^\circ) \\ = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3 \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \cos \alpha > 0 \text{이므로}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$$

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \sin \beta > 0 \text{이므로}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$(1) \sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ = \frac{12}{13} \times \frac{4}{5} + \frac{5}{13} \times \frac{3}{5} = \frac{63}{65}$$

$$(2) \sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ = \frac{12}{13} \times \frac{4}{5} - \frac{5}{13} \times \frac{3}{5} = \frac{33}{65}$$

$$(3) \cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ = \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} - \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} = -\frac{16}{65}$$

$$(4) \tan (\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ = \frac{\frac{12}{5} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{12}{5} \times \frac{3}{4}} = \frac{33}{56}$$

$$4 \quad (1) \text{ 각 } \alpha \text{가 제2사분면의 각이면 } \cos \alpha < 0 \text{이므로}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

따라서 구하는 값은

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \left(-\frac{4}{3}\right)}{1 - \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{24}{7}$$

$$(2) \text{ 각 } \alpha \text{가 제2사분면의 각이면 } \cos \alpha < 0 \text{이므로}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{5}} = -2$$

따라서 구하는 값은

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = -\frac{3}{5}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times (-2)}{1 - (-2)^2} = \frac{4}{3}$$

(3) 각 α 가 제2사분면의 각이면 $\sin \alpha > 0$ 이므로

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{-\frac{1}{5}} = -2\sqrt{6}$$

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 2 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} \times \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{4\sqrt{6}}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ &= 2 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{23}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ &= \frac{2 \times (-2\sqrt{6})}{1 - (-2\sqrt{6})^2} = \frac{4\sqrt{6}}{23} \end{aligned}$$

(4) 각 α 가 제2사분면의 각이면 $\sin \alpha > 0$ 이므로

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{5}}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 2 \cos^2 \alpha - 1 \\ &= 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ &= \frac{2 \times \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

5 (1) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos 3x = \cos \pi = -1$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\tan x} = \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\tan \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\begin{aligned} (4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{1 - \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-1}{1 + \sin x} \\ &= \frac{-1}{1 + 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1 - \tan^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x (\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x (\cos x - \sin x)}{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{\cos x + \sin x} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}{2 \sin x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

6 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{4x}{\sin 4x} \times \frac{1}{4} \right)$
 $= 1 \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin 3x)}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(\sin 3x)}{\sin 3x} \times \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{3}{2} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x - \tan 2x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 5x}{x} - \frac{\tan 2x}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 5x}{5x} \times 5 - \frac{\tan 2x}{2x} \times 2 \right) \\ &= 1 \times 5 - 1 \times 2 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x^2 + x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan(x^2 + x)}{x^2 + x} \times (x + 1) \right\} \\ &= 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x \sin x (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{1 + \cos x} \right) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 4x)(1 + \cos 4x)}{x^2(1 + \cos 4x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 4x}{x^2(1 + \cos 4x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 4x}{x^2(1 + \cos 4x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin 4x}{4x} \right)^2 \times \frac{16}{1 + \cos 4x} \right\} \\
 &= 1^2 \times 8 = 8
 \end{aligned}$$

(7) $\frac{\pi}{2} - x = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi - 2x}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{\tan t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} \times 2 \\
 &= 1 \times 2 = 2
 \end{aligned}$$

(8) $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

7 (1) $y' = 2 \cos x - 2x$

(2) $y' = e^x + 5 \cos x$

(3) $y = \cos x \times \cos x$ 이므로

$$\begin{aligned}
 y' &= (\cos x)' \cos x + \cos x (\cos x)' \\
 &= -\sin x \times \cos x + \cos x \times (-\sin x) \\
 &= -2 \sin x \cos x
 \end{aligned}$$

(4) $y' = (x^3)' \cos x + x^3 (\cos x)'$

$$= 3x^2 \cos x - x^3 \sin x$$

(5) $y' = (\ln x)' \sin x + \ln x (\sin x)'$

$$= \frac{\sin x}{x} + \ln x \cos x$$

(6) $y' = (e^x)' (\cos x - 1) + e^x (\cos x - 1)'$

$$= e^x \times (\cos x - 1) + e^x \times (-\sin x)$$

$$= e^x (\cos x - \sin x - 1)$$

1 각 θ 가 제3사분면의 각이면 $\sec \theta < 0$ 이므로

$$\sec \theta = -\sqrt{1 + \tan^2 \theta} = -\sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{5}{3}$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{3}{5}$$

한편 $\cot \theta = \frac{3}{4}$ 이고, 각 θ 가 제3사분면의 각이면 $\csc \theta < 0$

이므로

$$\csc \theta = -\sqrt{1 + \cot^2 \theta} = -\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{5}{4}$$

$$\therefore \cos \theta + \csc \theta = -\frac{3}{5} + \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{37}{20}$$

2 $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \tan^2 \theta + \cot^2 \theta &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\
 &= \frac{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\
 &= \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\
 &= \frac{1 - 2(\sin \theta \cos \theta)^2}{(\sin \theta \cos \theta)^2} \\
 &= \frac{1 - 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = 7
 \end{aligned}$$

3 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \alpha > 0$ 이므로

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{4 - \sqrt{2}}{6}
 \end{aligned}$$

4 $\sin \alpha + \cos \beta = -\frac{2}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = \frac{4}{9} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\cos \alpha + \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \frac{5}{9} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$2 + 2(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = 1$$

$$2 + 2 \sin(\alpha + \beta) = 1$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = -\frac{1}{2}$$

07~08강 족집게 기출문제

p. 42~45

- | | | | | |
|--------------------|------------------------|----------------------|-----------------------------|------------------|
| 1 $-\frac{37}{20}$ | 2 7 | 3 ① | 4 $-\frac{1}{2}$ | 5 $-\frac{3}{2}$ |
| 6 ③ | 7 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ | 8 ③ | 9 ② | 10 ④ |
| 11 ⑤ | 12 55 | 13 ④ | 14 ③ | 15 ① |
| 16 1 | 17 ③ | 18 ③ | 19 $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ | 20 ① |
| 21 $-\sqrt{3}$ | 22 ④ | 23 ⑤ | 24 $\frac{6 + \sqrt{6}}{5}$ | 25 $\frac{1}{2}$ |
| 26 -1 | 27 6 | 28 (1) $\frac{1}{4}$ | (2) 2 | |

5 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\tan \alpha + \tan \beta = 3a$, $\tan \alpha \tan \beta = 2a + 1$
 $\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
 $= \frac{3a}{1 - (2a + 1)} = -\frac{3}{2} \quad (\because a \neq 0)$

6 두 직선 $y = 2x + 3$, $y = ax - 1$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라고 하면
 $\tan \alpha = 2$, $\tan \beta = a$
두 직선이 이루는 예각의 크기가 45° 이므로
 $\alpha - \beta = 45^\circ \quad (\because 0 < a < 2)$
 $\therefore \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{2 - a}{1 + 2a}$
즉, $\frac{2 - a}{1 + 2a} = \tan 45^\circ$ 이므로 $\frac{2 - a}{1 + 2a} = 1$
 $2 - a = 1 + 2a \quad \therefore a = \frac{1}{3}$

7 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{AC} = \sqrt{6}$, $\overline{AD} = 2\sqrt{2}$
 $\angle CAB = \alpha$, $\angle DAC = \beta$ 라고 하면
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin \beta = \frac{1}{2}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
삼각형 AED에서
 $\overline{AE} = \overline{AD} \cos(\alpha + \beta)$
 $= \overline{AD}(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$
 $= 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} \right) = 2 - \frac{\sqrt{6}}{3}$
 $\therefore \overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE} = 2 - \left(2 - \frac{\sqrt{6}}{3} \right) = \frac{\sqrt{6}}{3}$

8 $A = \cos 80^\circ \cos 20^\circ + \sin 80^\circ \sin 20^\circ$
 $= \cos(80^\circ - 20^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
 $B = \sin 75^\circ \cos 75^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \sin 75^\circ \cos 75^\circ$
 $= \frac{1}{2} \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
 $\therefore A + B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

9 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{2}{3}$ 의 양변을 제곱하면
 $\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{4}{9}$
 $1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$, $1 + \sin 2\theta = \frac{4}{9}$
 $\therefore \sin 2\theta = -\frac{5}{9}$
따라서 $\cos 4\theta = 1 - 2 \sin^2 2\theta = 1 - 2 \times \left(-\frac{5}{9} \right)^2 = \frac{31}{81}$ 이므로
 $\sin 2\theta + \cos 4\theta = -\frac{5}{9} + \frac{31}{81} = -\frac{14}{81}$

10 $\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$ 이므로
 $y = 2\sqrt{3} \sin x + 2 \cos x + 2$
 $= 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) + 2$
 $= 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} \sin x + \sin \frac{\pi}{6} \cos x \right) + 2$
 $= 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + 2$
따라서 주어진 함수의 최댓값은 $M = 4 + 2 = 6$ 이고, 최솟값은 $m = -4 + 2 = -2$ 이므로
 $M - m = 8$

11 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{\cos x - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos^2 x)}{\cos x(1 - \cos x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\cos x(1 - \cos x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 + \cos x)}{\cos x}$
 $= \frac{2(1 + 1)}{1} = 4$

12 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin 10x}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 2x}{x} + \frac{\sin 3x}{x} + \cdots + \frac{\sin 10x}{x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 2x}{2x} \times 2 + \frac{\sin 3x}{3x} \times 3 \right.$
 $\left. + \cdots + \frac{\sin 10x}{10x} \times 10 \right)$
 $= 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + \cdots + 1 \times 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$

13 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \tan 3x}{\sin 2x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\sin 2x} + \frac{\tan 3x}{\sin 2x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{1}{2} + \frac{\tan 3x}{3x} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{3}{2} \right)$
 $= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 \times \frac{3}{2} = 2$

14 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2 + 2x)}{2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(3x^2 + 2x)}{3x^2 + 2x} \times \frac{3x^2 + 2x}{2x^2 + x} \right\}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(3x^2 + 2x)}{3x^2 + 2x} \times \frac{3x + 2}{2x + 1} \right\}$
 $= 1 \times 2 = 2$

15 $x - \pi = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 2x}{(\pi - x) \tan x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2\pi + 2t)}{-t \tan(\pi + t)}$
 $= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2t}{t \tan t}$
 $= -\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin 2t}{2t} \right)^2 \times \frac{t}{\tan t} \times 4 \right\}$
 $= -1^2 \times 1 \times 4 = -4$

16 $\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x \sin \left(\tan \frac{1}{x} \right) \cos \frac{1}{x} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{t} \sin (\tan t) \cos t \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin (\tan t)}{\tan t} \times \frac{\tan t}{t} \times \cos t \right\} \\ &= 1 \times 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

17 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{f(x)} = 2$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin 3x} = \frac{1}{2}$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^{2x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{\sin 3x} \times \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{2x}{e^{2x}-1} \times \frac{3}{2} \right\}$
 $= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

18 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx^2}{a - \cos x} = 4$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} bx^2 = 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} (a - \cos x) = 0, a - 1 = 0 \quad \therefore a = 1$
 $a = 1$ 을 주어진 식의 좌변에 대입하면
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{bx^2}{1 - \cos x} = b \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$
 $= b \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1 + \cos x)}{\sin^2 x}$
 $= b \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \times (1 + \cos x) \right\}$
 $= b \times 1^2 \times 2 = 2b$
 $\therefore 2b = 4$ 에서 $b = 2$
 $\therefore a + b = 3$

19 $f(x) = 2x^2 \sin x \cos x + a \cos x$ 이므로
 $f'(x) = (2x^2)' \sin x \cos x + 2x^2 (\sin x)' \cos x$
 $+ 2x^2 \sin x (\cos x)' - a \sin x$
 $= 4x \sin x \cos x + 2x^2 \cos^2 x - 2x^2 \sin^2 x - a \sin x$
 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ 에서
 $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}a = 0 \quad \therefore a = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

20 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3h) - f(-h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(3h) - f(0)}{h} - \frac{f(-h) - f(0)}{h} \right\}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(3h) - f(0)}{3h} \times 3 + \frac{f(-h) - f(0)}{-h} \right\}$
 $= 3f'(0) + f'(0) = 4f'(0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 이때 $f'(x)$ 를 구하면
 $f'(x) = (x)' \sin x + x(\sin x)' - (e^x)' \cos x - e^x(\cos x)'$
 $= \sin x + x \cos x - e^x \cos x + e^x \sin x$
 따라서 $\textcircled{1}$ 에서 구하는 극한값은
 $4f'(0) = 4 \times (-1) = -4$

21 $f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{\cos(x+h) - \cos x}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}}{\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}}$
 $= \frac{(\sin x)'}{(\cos x)'} = \frac{\cos x}{-\sin x}$
 $= -\frac{1}{\tan x}$
 $\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$

22 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로
 $f'(x) = \begin{cases} \cos x - x \sin x & (x > 0) \\ ae^x & (x < 0) \end{cases}$ 에서
 $\lim_{x \rightarrow 0+} (\cos x - x \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0+} ae^x \quad \therefore a = 1$
 한편 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속
 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$
 $\lim_{x \rightarrow 0+} x \cos x = \lim_{x \rightarrow 0-} (ae^x + b)$
 $\therefore a + b = 0$
 $a = 1$ 을 대입하여 풀면 $b = -1$
 $\therefore 3a - b = 4$

23 $\sin \theta + \sin 7\theta = \sin(4\theta - 3\theta) + \sin(4\theta + 3\theta)$
 $= (\sin 4\theta \cos 3\theta - \cos 4\theta \sin 3\theta)$
 $+ (\sin 4\theta \cos 3\theta + \cos 4\theta \sin 3\theta)$
 $= 2 \sin 4\theta \cos 3\theta$
 $\cos \theta + \cos 7\theta = \cos(4\theta - 3\theta) + \cos(4\theta + 3\theta)$
 $= (\cos 4\theta \cos 3\theta + \sin 4\theta \sin 3\theta)$
 $+ (\cos 4\theta \cos 3\theta - \sin 4\theta \sin 3\theta)$
 $= 2 \cos 4\theta \cos 3\theta$
 $\therefore \frac{\sin \theta + \sin 7\theta}{\cos \theta + \cos 7\theta} = \frac{2 \sin 4\theta \cos 3\theta}{2 \cos 4\theta \cos 3\theta}$
 $= \frac{\sin 4\theta}{\cos 4\theta} = \tan 4\theta$
 $= \tan(4 \times 15^\circ)$
 $= \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

24 $0 < 2x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos 2x > 0$ 이므로
 $\cos 2x = \sqrt{1 - \sin^2 2x} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$
 $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ 이므로
 $1 - 2 \sin^2 x = \frac{2}{3}, 2 \sin^2 x = \frac{1}{3}$
 $\therefore \sin^2 x = \frac{1}{6}$
 이때 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 에서 $\sin x > 0$ 이므로
 $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{6}$

따라서 $1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots$ 는 공비가 $\sin x$ 인 등비급수이고, $|\sin x| < 1$ 이므로

$$\begin{aligned} 1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots &= \frac{1}{1 - \sin x} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{6}}{6}} \\ &= \frac{6 + \sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

25 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$, $\overline{AB} = 2a$ 이므로

오른쪽 그림과 같이 $\angle PAB = \theta$

라고 하면

$$\overline{AP} = 2a \cos \theta$$

$$\overline{BP} = 2a \sin \theta$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \overline{AP} \times \overline{BP}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2a \cos \theta \times 2a \sin \theta$$

$$= a^2 \sin \theta \cos \theta$$

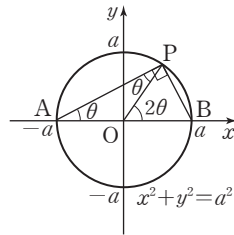
또 $\angle POB = 2\theta$ 이므로

$$T = \frac{1}{2} a^2 \times 2\theta$$

$$= a^2 \theta$$

점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 $\theta \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{T}{S} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{a^2 \theta}{2a^2 \sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left(\frac{\theta}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



26 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x - 2 \sin x}{x^3} \quad \dots\dots (가)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (\cos x - 1)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^3 (\cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (\cos^2 x - 1)}{x^3 (\cos x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^3 x}{x^3 (\cos x + 1)}$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 \times \frac{1}{\cos x + 1} \right\} \quad \dots\dots (나)$$

$$= -2 \times 1^3 \times \frac{1}{2}$$

$$= -1 \quad \dots\dots (다)$$

채점 기준	배점
(가) 배각의 공식을 이용하여 x 에 대한 삼각함수로 나타낸다.	1점
(나) 극한값을 구할 수 있도록 식을 변형한다.	3점
(다) 극한값을 구한다.	2점

27 $\angle BAC = \pi - 5\theta$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{10}{\sin(\pi - 5\theta)} = \frac{\overline{AC}}{\sin 3\theta}$$

$$\frac{10}{\sin 5\theta} = \frac{\overline{AC}}{\sin 3\theta}$$

$$\therefore \overline{AC} = \frac{10 \sin 3\theta}{\sin 5\theta}$$

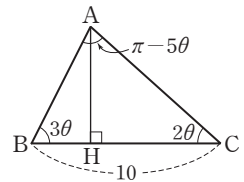
$$\frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} = \cos 2\theta \text{에서}$$

$$\overline{CH} = \overline{AC} \cos 2\theta = \frac{10 \sin 3\theta \cos 2\theta}{\sin 5\theta} \quad \dots\dots (나)$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \overline{CH} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{10 \sin 3\theta \cos 2\theta}{\sin 5\theta}$$

$$= 10 \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin 3\theta}{3\theta} \times \frac{5\theta}{\sin 5\theta} \times \cos 2\theta \times \frac{3}{5} \right)$$

$$= 10 \times 1 \times 1 \times 1 \times \frac{3}{5} = 6 \quad \dots\dots (다)$$



채점 기준	배점
(가) $\overline{AC}$ 를 sin을 이용하여 나타낸다.	2점
(나) $\overline{CH}$ 를 sin, cos을 이용하여 나타낸다.	2점
(다) $\lim_{\theta \rightarrow 0+} \overline{CH}$ 의 값을 구한다.	3점

28 (1) 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ 의 값은

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin 2x}{3x + \tan 5x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{\sin 2x}{2x} \times 2}{3 + \frac{\tan 5x}{5x} \times 5} \\ &= \frac{1 \times 2}{3 + 1 \times 5} = \frac{1}{4} \quad \dots\dots (가) \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0) \text{에서 } a = \frac{1}{4} \quad \dots\dots (나)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1 - \cos x}{x \tan bx}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x \tan bx (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin^2 x}{x \tan bx (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{bx}{\tan bx} \times \frac{1}{1 + \cos x} \times \frac{1}{b} \right\}$$

$$= 1^2 \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{2b} \quad \dots\dots (다)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$ 에서

$$\frac{1}{2b} = \frac{1}{4} \quad \therefore b = 2 \quad \dots\dots (라)$$

채점 기준	배점
(가) $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ 의 값을 구한다.	2점
(나) a 의 값을 구한다.	1점
(다) $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ 의 값을 b 에 대한 식으로 나타낸다.	2점
(라) b 의 값을 구한다.	1점

확인 문제

p. 46

1 (1) $y' = -\frac{(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

다른 풀이 함수 $y = x^n$ (n 은 정수)의 도함수 이용하기

$$y' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$(2) y' = \frac{(x)'(x+3) - x(x+3)'}{(x+3)^2} \\ = \frac{(x+3) - x}{(x+3)^2} = \frac{3}{(x+3)^2}$$

2 (1) $y' = \frac{1}{x \ln 2}$

$$(2) y' = (x^{\frac{3}{4}})' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$$

3 $\frac{dx}{dt} = 3, \frac{dy}{dt} = 4t + 5$ 이므로
 $\frac{dy}{dx} = \frac{4t+5}{3}$

핵심 유형

실전 문제

교/과/서/속

p. 47

1 (1) $y' = -\frac{(3x^3-1)'}{(3x^3-1)^2} \\ = -\frac{9x^2}{(3x^3-1)^2}$

$$(2) y' = \frac{(x^2+5x-9)'(x+2) - (x^2+5x-9)(x+2)'}{(x+2)^2} \\ = \frac{(2x+5)(x+2) - (x^2+5x-9)}{(x+2)^2} \\ = \frac{x^2+4x+19}{(x+2)^2}$$

2 $f'(x) = \frac{(x^2-3)'(x+2) - (x^2-3)(x+2)'}{(x+2)^2} \\ = \frac{2x(x+2) - (x^2-3)}{(x+2)^2} \\ = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2} \\ = \frac{(x+2)^2-1}{(x+2)^2} \\ = 1 - \frac{1}{(x+2)^2}$

따라서 $a=1, b=-1$ 이므로

$$a+b=0$$

따라서 $a+b$ 의 값은 ③이다.

3 (1) $y' = (\sec x)' + (\csc x)'$

$$= \sec x \tan x - \csc x \cot x$$

(2) $y' = (\sin x)' \tan x + \sin x (\tan x)'$

$$= \cos x \tan x + \sin x \sec^2 x$$

$$= \sin x + \sin x \sec^2 x$$

4 $f'(x) = (3x)' \cot x + 3x(\cot x)'$

$$= 3 \cot x - 3x \csc^2 x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \cot \frac{\pi}{6} - 3 \times \frac{\pi}{6} \csc^2 \frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3} - 2\pi$$

5 (1) $y' = 3(2x+1)^2(2x+1)' = 6(2x+1)^2$

(2) $y' = \cos(3x-1) \times (3x-1)' = 3 \cos(3x-1)$

(3) $y' = 3^{2x-1} \ln 3 \times (2x-1)' = 2 \times 3^{2x-1} \ln 3$

(4) $y' = \frac{(4x+1)'}{4x+1} = \frac{4}{4x+1}$

6 $f'(x) = \{(3x+1)^{\frac{1}{2}}\}' = \frac{1}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}}(3x+1)'$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

$$\therefore f'(1) = \frac{3}{4}$$

따라서 $f'(1)$ 의 값은 ④이다.

7 (1) $\frac{dx}{dt} = 3t^2 + e^t, \frac{dy}{dt} = e^t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t}{3t^2 + e^t}$$

(2) $\frac{dx}{dt} = 2t - \cos t, \frac{dy}{dt} = \sin t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{2t - \cos t} \quad (\text{단, } 2t \neq \cos t)$$

8 $\frac{dx}{dt} = \frac{(1-t^2)'(1+t^2) - (1-t^2)(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}$

$$= \frac{-2t(1+t^2) - (1-t^2) \times 2t}{(1+t^2)^2}$$

$$= -\frac{4t}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(2t)'(1+t^2) - 2t(1+t^2)'}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{2(1+t^2) - 2t \times 2t}{(1+t^2)^2}$$

$$= -\frac{2t^2-2}{(1+t^2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{2t^2-2}{(1+t^2)^2}}{-\frac{4t}{(1+t^2)^2}} = \frac{t^2-1}{2t} \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

따라서 $t=3$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{3^2-1}{2 \times 3} = \frac{4}{3}$$

10 | 여러 가지 미분법 (2)

확인 문제

p. 48

- 1 $2x^2 + 3y^2 = 6$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$4x + 6y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

- 2 $x = y^2$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = 2y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y}$$

- 3 (1) $y = x^3 + 5x^2$ 에서 $y' = 3x^2 + 10x$ 이므로

$$y'' = 6x + 10$$

- (2) $y = -x^5 + 2x^2 - 3x$ 에서 $y' = -5x^4 + 4x - 3$ 이므로

$$y'' = -20x^3 + 4$$

교/과/서/속

핵심 유형

실전 문제

p. 49

- 1 (1) $(2x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2(2x-3) \times 2 + 2(y-1) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2(2x-3)}{y-1} \quad (\text{단, } y \neq 1)$$

- (2) $x^2 + y + 3y^3 = 8$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + \frac{dy}{dx} + 9y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{9y^2 + 1}$$

- (3) $x^2 = xy + \sin y$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x = y + x \frac{dy}{dx} + \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x+\cos y} \quad (\text{단, } x \neq -\cos y)$$

- (4) $\frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 1$ 의 양변에 xy 를 곱하면

$$y^2 - x^2 = xy$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2y \frac{dy}{dx} - 2x = y + x \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x-2y} \quad (\text{단, } x \neq 2y)$$

- 2 $x^2 + 3xy - y^3 = 5$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 3y + 3x \frac{dy}{dx} - 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y}{3y^2-3x} \quad (\text{단, } y^2 \neq x)$$

$$x=4, y=-1 \text{에서의 } \frac{dy}{dx} \text{의 값은 } \frac{8-3}{3-12} = -\frac{5}{9}$$

따라서 점 $(4, -1)$ 에서의 접선의 기울기는 ②이다.

- 3 (1) $x = 5y^2 + e^y - 1$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = 10y + e^y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{10y + e^y}$$

- (2) $x = y + \sqrt{y}$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = 1 + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\sqrt{y}}} = \frac{2\sqrt{y}}{2\sqrt{y} + 1}$$

- 4 $x = \sqrt[3]{y} - 8$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = 3\sqrt[3]{y^2}$$

따라서 $y=8$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은 $3 \times 4 = 12$

- 5 (1) $g(3) = a$ 라고 하면 $f(a) = 3$ 에서

$$a^3 + 5a - 3 = 3, \quad a^3 + 5a - 6 = 0$$

$$(a-1)(a^2+a+6) = 0 \quad \therefore a = 1 \quad (\because a^2+a+6 > 0)$$

따라서 $g(3) = 1$ 이고, $f'(x) = 3x^2 + 5$ 이므로

$$\frac{1}{g'(3)} = f'(1) = 8$$

- (2) $g(-3) = a$ 라고 하면 $f(a) = -3$ 에서

$$a^3 + 5a - 3 = -3, \quad a^3 + 5a = 0$$

$$a(a^2+5) = 0 \quad \therefore a = 0 \quad (\because a^2+5 > 0)$$

따라서 $g(-3) = 0$ 이고, $f'(x) = 3x^2 + 5$ 이므로

$$g'(-3) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5}$$

- 6 $g\left(\frac{1}{2}\right) = a$ 라고 하면 $f(a) = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{a^2}{a^2+4} = \frac{1}{2}, \quad 2a^2 = a^2+4 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

따라서 $g\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ 이고,

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+4) - x^2 \times 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{8x}{(x^2+4)^2} \text{이므로}$$

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'(2)} = 4 \quad \therefore g\left(\frac{1}{2}\right)g'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times 4 = 8$$

7 (1) $y = \frac{1}{x}$ 에서 $y' = -\frac{1}{x^2}$ 이므로

$$y'' = \frac{2}{x^3}$$

(2) $y = e^{4x}$ 에서 $y' = 4e^{4x}$ 이므로

$$y'' = 16e^{4x}$$

(3) $y = \cos(3x+1)$ 에서 $y' = -3\sin(3x+1)$ 이므로

$$y'' = -9\cos(3x+1)$$

(4) $y = \ln(x-1)$ 에서 $y' = \frac{1}{x-1}$ 이므로

$$y'' = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

8 $f(x) = x^2 \sin x$ 에서 $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$ 이므로

$$f''(x) = 2 \sin x + 2x \cos x + 2x \cos x - x^2 \sin x$$

$$= (2 - x^2) \sin x + 4x \cos x$$

$$\therefore f''(\pi) = (2 - \pi^2) \sin \pi + 4\pi \cos \pi = -4\pi$$

계산력 다지기

p. 50~51

1 (1) $y' = -\frac{(x^2+3x+7)'}{(x^2+3x+7)^2}$

$$= -\frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^2}$$

(2) $y' = -\frac{(3x^4+x^2-4)'}{(3x^4+x^2-4)^2}$

$$= -\frac{12x^3+2x}{(3x^4+x^2-4)^2}$$

(3) $y' = \frac{(x+1)'(x^3-8) - (x+1)(x^3-8)'}{(x^3-8)^2}$

$$= \frac{x^3-8 - (x+1) \times 3x^2}{(x^3-8)^2}$$

$$= -\frac{2x^3+3x^2+8}{(x^3-8)^2}$$

(4) $y' = \frac{(3x^2+x)'(x^2+3) - (3x^2+x)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$

$$= \frac{(6x+1)(x^2+3) - (3x^2+x) \times 2x}{(x^2+3)^2}$$

$$= -\frac{x^2-18x-3}{(x^2+3)^2}$$

(5) $y' = (x^{-8})' = -8x^{-9} = -\frac{8}{x^9}$

(6) $y' = (2x^2 - x^{-1} + 4x^{-4})'$

$$= 4x - (-x^{-2}) + (-16x^{-5})$$

$$= 4x + \frac{1}{x^2} - \frac{16}{x^5}$$

(7) $y' = (\tan x)' + (\csc x)' = \sec^2 x - \csc x \cot x$

(8) $y' = (\cos x)' - 2(\cot x)' = -\sin x + 2\csc^2 x$

2 (1) $y' = 4(3x^2-5)^3(3x^2-5)' = 24x(3x^2-5)^3$

(2) $y' = 5(x^3+6x)^4(x^3+6x)' = 5(x^3+6x)^4(3x^2+6)$
 $= 15(x^2+2)(x^3+6x)^4$

(3) $y' = e^{x^2-5}(x^2-5)' = 2xe^{x^2-5}$

(4) $y' = \frac{(5x-2)'}{(5x-2) \ln 3} = \frac{5}{(5x-2) \ln 3}$

(5) $y' = (x^{-\frac{5}{4}})' = -\frac{5}{4}x^{-\frac{9}{4}} = -\frac{5}{4x^{\frac{9}{4}}\sqrt{x}}$

(6) $y' = \{(2x-9)^{\frac{1}{3}}\}' = \frac{1}{3}(2x-9)^{-\frac{2}{3}}(2x-9)'$
 $= \frac{2}{3^{\frac{3}{2}}\sqrt{(2x-9)^2}}$

3 (1) $\frac{dx}{dt} = 2t-3, \frac{dy}{dt} = 10t$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{10t}{2t-3} \quad \left(\text{단, } t \neq \frac{3}{2} \right)$$

(2) $\frac{dx}{dt} = -2\cos t, \frac{dy}{dt} = -2\sin t$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin t}{-2\cos t} = \tan t$$

(3) $\frac{dx}{dt} = -\frac{2 \times 2t}{(t^2+2)^2} = -\frac{4t}{(t^2+2)^2}$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(t^2+2) - (t-1) \times 2t}{(t^2+2)^2} = -\frac{t^2-2t-2}{(t^2+2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{t^2-2t-2}{(t^2+2)^2}}{-\frac{4t}{(t^2+2)^2}} = \frac{t^2-2t-2}{4t} \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

(4) $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

$$\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{t}}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = 2\sqrt{t} - 1$$

4 (1) $x^2-4x-10y^2=0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x-4-20y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{x-2}{10y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

(2) $x^2+2y^4=4$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x+8y^3 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y^3} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

(3) $2x^2+xy-y^2=3$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$4x+y+x \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{4x+y}{x-2y} \quad (\text{단, } x \neq 2y)$$

(4) $x^3 - xy^2 + 2y^3 = 2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 - y^2 - x \times 2y \frac{dy}{dx} + 6y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y^2}{2xy - 6y^2} \quad (\text{단, } xy \neq 3y^2)$$

(5) $e^x + \sin y = 2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$e^x + \cos y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{e^x}{\cos y} \quad (\text{단, } \cos y \neq 0)$$

(6) $xy - \frac{y}{x} = 3$ 의 양변에 x 를 곱하면

$$x^2y - y = 3x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2xy + x^2 \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy - 3}{x^2 - 1} \quad (\text{단, } x^2 \neq 1)$$

5 (1) $x = y^5 + 6y$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = 5y^4 + 6$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{5y^4 + 6}$$

(2) $x = y^3 + y + \cos y$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = 3y^2 + 1 - \sin y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{3y^2 + 1 - \sin y}$$

(3) $x = \sqrt{y} + 3y$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} + 3 = \frac{1}{2\sqrt{y}} + 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{y}} + 3} = \frac{2\sqrt{y}}{1 + 6\sqrt{y}}$$

(4) $x = \frac{y-4}{y+1}$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y+1 - (y-4)}{(y+1)^2} = \frac{5}{(y+1)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{(y+1)^2}{5}$$

6 (1) $y = x^3 + 2x^2 + 3x$ 에서 $y' = 3x^2 + 4x + 3$ 이므로

$$y'' = 6x + 4$$

(2) $y = (2x-1)^5$ 에서

$$y' = 5(2x-1)^4 \times 2 = 10(2x-1)^4 \text{이므로}$$

$$y'' = 40(2x-1)^3 \times 2 = 80(2x-1)^3$$

(3) $y = \sin x$ 에서 $y' = \cos x$ 이므로

$$y'' = -\sin x$$

(4) $y = \cos 3x$ 에서 $y' = -3 \sin 3x$ 이므로

$$y'' = -9 \cos 3x$$

(5) $y = xe^x$ 에서 $y' = e^x + xe^x$ 이므로

$$y'' = e^x + e^x + xe^x = (x+2)e^x$$

(6) $y = x \sin 2x$ 에서 $y' = \sin 2x + 2x \cos 2x$ 이므로

$$y'' = 2 \cos 2x + 2 \cos 2x - 4x \sin 2x \\ = 4(\cos 2x - x \sin 2x)$$

(7) $y = \sqrt{x}$ 에서 $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ 이므로

$$y'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

(8) $y = \frac{1}{x^2+1}$ 에서 $y' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ 이므로

$$y'' = -\frac{2(x^2+1)^2 - 2x \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4} \\ = \frac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3}$$

09~10장

죽집게

기출문제

p. 52~55

1 1 2 $\frac{3}{2}$ 3 -2 4 ③ 5 ④

6 30 7 ③ 8 ④ 9 ② 10 ⑤

11 ⑤ 12 1 13 ⑤ 14 ② 15 ④

16 ③ 17 ② 18 ① 19 5 20 ④

21 7 22 -2 23 14 24 ③ 25 $\frac{6}{5}$

26 (1) $f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2}$, $g'(x) = -\frac{4}{(x-1)^2}$ (2) $-\frac{16}{5}$

27 $\frac{\pi}{4}$ 28 $\frac{9}{16}$

1 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ 이므로

$$g'(2) = \frac{2f'(2) - f(2)}{4} \\ = \frac{2 \times 3 - 2}{4} = 1$$

2 $f(1) = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $f'(x)$ 를 구하면

$$f'(x) = \frac{(4x^3 + 3)(x^2 + 1) - (x^4 + 3x) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ = \frac{2x^5 + 4x^3 - 3x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

따라서 ㉠에서 구하는 극한값은

$$f'(1) = \frac{3}{2}$$

3 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$ 이고, $f(0)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$$

이때 $f'(x)$ 를 구하면

$$f'(x) = \frac{3(ax+1)-3x \times a}{(ax+1)^2} = \frac{3}{(ax+1)^2}$$

$f'(1)=f'(0)$ 이므로

$$\frac{3}{(a+1)^2} = 3, (a+1)^2 = 1, a(a+2) = 0$$

$$\therefore a = -2 (\because a \neq 0)$$

4 $f(x) = \frac{4x^5-7x^2+1}{x^3} = 4x^2-7x^{-1}+x^{-3}$ 이므로

$$f'(x) = 8x+7x^{-2}-3x^{-4}$$

$$\therefore f'(1) = 12$$

5 $f'(x) = e^x \sec x + e^x \sec x \tan x$
 $= e^x \sec x (1 + \tan x)$

$$\therefore f'(-\pi)f'(\pi) = -e^{-\pi} \times (-e^{\pi}) = 1$$

6 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)-f(2-h)+f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(2+h)-f(2)}{h} + \frac{f(2-h)-f(2)}{-h} \right\}$$

$$= f'(2) + f'(2) = 2f'(2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $f'(x)$ 를 구하면

$$f'(x) = 5(3x-5)^4 \times 3 = 15(3x-5)^4$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서 구하는 극한값은

$$2f'(2) = 2 \times 15 = 30$$

7 $f'(x) = (2x+2a) \cos(x^2+2ax)$

$$f'(0) = 5 \text{에서 } 2a = 5 \quad \therefore a = \frac{5}{2}$$

8 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)+3}{x-3} = 2$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x)+3\} = 0 \quad \therefore f(3) = -3$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)+3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3) \text{이므로}$$

$$f'(3) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)+1}{x+3} = 6 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \{g(x)+1\} = 0 \quad \therefore g(-3) = -1$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)+1}{x+3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)-g(-3)}{x-(-3)} = g'(-3) \text{이}$$

$$\text{므로 } g'(-3) = 6$$

이때 함수 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ 에서

$$\{g(f(x))\}' = g'(f(x))f'(x)$$

따라서 $x=3$ 에서의 미분계수는

$$g'(f(3))f'(3) = g'(-3)f'(3) = 6 \times 2 = 12$$

9 $f'(x) = \frac{(2 \cos^2 x)'}{2 \cos^2 x} = \frac{4 \cos x \times (-\sin x)}{2 \cos^2 x}$

$$= -\frac{2 \sin x}{\cos x} = -2 \tan x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$$

10 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$$

$$\therefore a = 1 + 1 + 3 = 5$$

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{3x+1} & (x > 0) \\ 2be^{2bx} - \pi \sin \pi x & (x < 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{3}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow 0-} (2be^{2bx} - \pi \sin \pi x)$$

$$3 = 2b \quad \therefore b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 4ab = 4 \times 5 \times \frac{3}{2} = 30$$

11 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln |f(x)| = 2 \ln |x^3+2| - \ln |2x+1| - 4 \ln |3x+2|$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{6x^2}{x^3+2} - \frac{2}{2x+1} - \frac{12}{3x+2}$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$\frac{f'(-1)}{f(-1)} = 6 + 2 + 12 = 20$$

$$\text{따라서 } f'(-1) = 20f(-1) \text{이므로 } k = 20$$

12 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = \sin x \ln x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \sin x \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = f(x) \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$= x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = 1$$

13 $f(1) = \sqrt{2}$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-\sqrt{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $f'(x)$ 를 구하면

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^3+x)^{-\frac{1}{2}}(3x^2+1)$$

$$= \frac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x}}$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서 구하는 극한값은

$$f'(1) = \sqrt{2}$$

14 $\frac{dx}{dt} = 3t^2 - 2t - 1, \frac{dy}{dt} = 12t^2 - 36t + 24$ |므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12t^2 - 36t + 24}{3t^2 - 2t - 1} = \frac{12(t-1)(t-2)}{(3t+1)(t-1)}$$
$$= \frac{12(t-2)}{3t+1} \left(\cancel{t-1}, t \neq -\frac{1}{3}, t \neq 1 \right)$$
$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{12(t-2)}{3t+1} = \frac{-12}{4} = -3$$

15 $\frac{dx}{dt} = 2 \times \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} - a = 3\sqrt{t} - a$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} + a$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{t} + a}{3\sqrt{t} - a} = \frac{1 + at}{3t\sqrt{t} - at} \quad (\text{단, } 3\sqrt{t} \neq a)$$

$t=1$ 일 때, 접선의 기울기는 $\tan 45^\circ = 1$ 이므로

$$\frac{1+a}{3-a} = 1 \quad \therefore a = 1$$

16 $(3x-2y)^2+y^2=5$ 를 전개하여 정리하면
 $9x^2-12xy+5y^2-5=0$
 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $18x-12y-12x\frac{dy}{dx}+10y\frac{dy}{dx}=0$
 $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{9x-6y}{6x-5y}$ (단, $6x-5y\neq 0$)
 따라서 $a=6$, $b=-5$, $c=9$ 이므로
 $a+b+c=10$

17 점 $(1, 1)$ 이 곡선 $axy + 3y^2 + \ln y = b$ 위의 점이므로
 $a + 3 = b$ ㉠

주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$ay + ax \frac{dy}{dx} + 6y \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{ay}{ax + 6y + \frac{1}{y}}$$

$$= -\frac{ay^2}{axy + 6y^2 + 1} \quad (\text{단, } axy + 6y^2 + 1 \neq 0)$$

$x=1, y=1$ 일 때 접선의 기울기가 6이므로

$$-\frac{a}{a+7} = 6, \quad -a = 6a + 42 \quad \therefore a = -6$$

이것을 ㉠에 대입하면 $b = -3$

$$\therefore a + b = -9$$

18 주어진 식의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \frac{2\cos y (y - \sin y) - 2\sin y (1 - \cos y)}{(y - \sin y)^2} \\ &= \frac{2(y\cos y - \sin y)}{(y - \sin y)^2} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{(y - \sin y)^2}{2(y\cos y - \sin y)}\end{aligned}$$

따라서 $y = \pi$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은 $\frac{\pi^2}{-2\pi} = -\frac{\pi}{2}$

19 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-3}{x-1} = \frac{1}{4}$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x)-3\} = 0$$

따라서 $g(1)=3$ 이므로 $f(3)=1$

이때 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1)$ 이므로

$$g'(1) = \frac{1}{4} \quad \therefore f'(3) = \frac{1}{g'(1)} = 4$$
$$\therefore f(3)+f'(3) = 1+4 = 5$$

20 $f'(x) = (\ln x)^2 + x \times 2 \ln x \times \frac{1}{x} = (\ln x)^2 + 2 \ln x$
 $f''(x) = 2 \ln x \times \frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(\ln x + 1)$
 $\therefore f''(e) = \frac{2}{e} \times 2 = \frac{4}{e}$

$$\begin{aligned} 21 \quad f'(x) &= e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x \\ &= e^x (\sin 2x + 2 \cos 2x) \\ f''(x) &= e^x (\sin 2x + 2 \cos 2x) + e^x (2 \cos 2x - 4 \sin 2x) \\ &= e^x (-3 \sin 2x + 4 \cos 2x) \quad \cdots \cdots \textcircled{7} \\ af'(x) + bf(x) &= ae^x (\sin 2x + 2 \cos 2x) + be^x \sin 2x \\ &= e^x \{ (a+b) \sin 2x + 2a \cos 2x \} \quad \cdots \cdots \textcircled{8} \\ \textcircled{7} &= \textcircled{8} \text{에서 } a+b=-3, 2a=4 \\ \text{두 식을 연립하여 풀면} \\ a=2, b &= -5 \quad \therefore a-b=7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+a)(x-1) - (x^2+ax+b)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2-2x-a-b}{(x-1)^2} \\ f''(x) &= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-a-b) \times 2(x-1)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{2(a+b+1)}{(x-1)^3} \\ f''(2) &= 6 \text{ 이므로 } 2(a+b+1) = 6 \\ \text{따라서 } a+b &= 2 \text{ 이므로} \\ f'(2) &= -(a+b) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+x+x^2+\dots+x^{2n-1}+x^{2n}}{x^{2n}} \\ &= 1+x^{-1}+x^{-2}+\dots+x^{-2n+1}+x^{-2n} \\ &\circlearrowleft \text{따라서} \\ f'(x) &= -x^{-2}-2x^{-3}-3x^{-4} \\ &\quad -\dots-(2n-1)x^{-2n}-2nx^{-2n-1} \\ \therefore f'(-1) &= -1+2-3+4-\dots-(2n-1)+2n \\ &= (-1+2)+(-3+4)+\dots+\{-(2n-1)+2n\} \\ &= n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
24 \quad f_n(x) &= (f \circ f_{n-1})(x) = f(f_{n-1}(x)) \text{이므로} \\
f'_n(x) &= f'(f_{n-1}(x)) \times f'_{n-1}(x) \\
\therefore f'_6(x) &= f'(f_5(x)) \times f'_5(x) \\
&= f'(f_5(x)) \times f'(f_4(x)) \times f'_4(x) \\
&= f'(f_5(x)) \times f'(f_4(x)) \times f'(f_3(x)) \times f'_3(x) \\
&= f'(f_5(x)) \times f'(f_4(x)) \times f'(f_3(x)) \\
&\quad \times f'(f_2(x)) \times f'_2(x) \\
&= f'(f_5(x)) \times f'(f_4(x)) \times f'(f_3(x)) \\
&\quad \times f'(f_2(x)) \times f'(f_1(x)) \times f'_1(x)
\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}
f_1(1) &= f(1) = -1, \\
f_2(1) &= f(f_1(1)) = f(-1) = 1, \\
f_3(1) &= f(f_2(1)) = f(1) = -1, \\
f_4(1) &= f(f_3(1)) = f(-1) = 1,
\end{aligned}$$

:

이므로 자연수 k 에 대하여

$$\begin{aligned}
f_n(1) &= \begin{cases} -1 & (n=2k-1) \\ 1 & (n=2k) \end{cases} \\
\therefore f'_6(1) &= f'(f_5(1)) \times f'(f_4(1)) \times f'(f_3(1)) \\
&\quad \times f'(f_2(1)) \times f'(f_1(1)) \times f'_1(1) \\
&= f'(-1) \times f'(1) \times f'(-1) \times f'(1) \times f'(-1) \\
&\quad \times f'(1) \\
&= q \times p \times q \times p \times q \times p \\
&= p^3 q^3
\end{aligned}$$

25 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
f'(\sqrt{x}+2x) \times (\sqrt{x}+2x)' &= 1 + \frac{2}{x^2} \\
f'(\sqrt{x}+2x) \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\right) &= 1 + \frac{2}{x^2} \\
\therefore f'(\sqrt{x}+2x) &= \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) \times \frac{2\sqrt{x}}{1+4\sqrt{x}} \quad \dots\dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

$\sqrt{x}+2x=3$ 일 때, $\sqrt{x}=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$2t^2+t-3=0, (2t+3)(t-1)=0$$

$$\therefore t=1 \quad (\because t>0)$$

따라서 $x=1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(3) = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$$

$$26 \quad (1) f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x-3)}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2} \quad \dots\dots (가)$$

$$g'(x) = \frac{-(x-1)-(5-x)}{(x-1)^2} = -\frac{4}{(x-1)^2} \quad \dots\dots (나)$$

$$\begin{aligned}
(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{h(x)-h(2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{h(x)-h(2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{\frac{h(x)-h(2)}{x-2}} \\
&= \frac{4}{h'(2)} \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots (다)
\end{aligned}$$

이때 $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ 에서

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서 구하는 극한값은

$$\begin{aligned}
\frac{4}{h'(2)} &= \frac{4}{f'(g(2))g'(2)} \\
&= \frac{4}{f'(3)g'(2)} \\
&= \frac{4}{\frac{5}{16} \times (-4)} = -\frac{16}{5} \quad \dots\dots (라)
\end{aligned}$$

채점 기준	배점
(가) $f'(x)$ 를 구한다.	1점
(나) $g'(x)$ 를 구한다.	1점
(다) 주어진 극한을 미분계수를 이용하여 나타낸다.	2점
(라) 극한값을 구한다.	3점

$$\begin{aligned}
27 \quad f(x) &= \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \\
&= \ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x) \\
\therefore f'(x) &= \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x} \\
&= \frac{\cos x(1-\sin x) + \cos x(1+\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)} \\
&= \frac{2\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{2\cos x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{2}{\cos x} \quad \dots\dots (가)
\end{aligned}$$

$$f'(a) = 2\sqrt{2} \text{에서} \quad \frac{2}{\cos a} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{4} \quad \left(\because 0 < a < \frac{\pi}{2} \right) \quad \dots\dots (나)$$

채점 기준	배점
(가) $f'(x)$ 를 구한다.	4점
(나) a 의 값을 구한다.	2점

28 $g(8)=a$ 라고 하면 $f(a)=8$ 에서

$$\frac{2a^2}{a+3} = 8, 2a^2 = 8(a+3)$$

$$a^2 - 4a - 12 = 0, (a+2)(a-6) = 0$$

$$\therefore a = 6 \quad (\because a > 0) \quad \dots\dots (가)$$

따라서 $g(8)=6$ 이고,

$$f'(x) = \frac{4x(x+3)-2x^2}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+12x}{(x+3)^2} \text{이므로} \quad \dots\dots (나)$$

$$g'(8) = \frac{1}{f'(6)} = \frac{1}{\frac{16}{9}} = \frac{9}{16} \quad \dots\dots (다)$$

채점 기준	배점
(가) $g(8)=a$ 를 만족하는 a 의 값을 구한다.	2점
(나) $f'(x)$ 를 구한다.	2점
(다) $g'(8)$ 의 값을 구한다.	2점

확인 문제

p. 56

- 1 (1)
- $f(x) = \sqrt{x^2+7}$
- 이라고 하면

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+7}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+7}}$$

점 (3, 4)에서의 접선의 기울기는 $f'(3) = \frac{3}{4}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-4 = \frac{3}{4}(x-3) \quad \therefore y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$$

- (2)
- $f(x) = \ln(x+1)$
- 이라고 하면
- $f'(x) = \frac{1}{x+1}$

점 (0, 0)에서의 접선의 기울기는 $f'(0) = 1$ 따라서 구하는 접선의 방정식은 $y = x$

- 2 (1)
- $f(x) = 2x^2e^x$
- 에서

$$f'(x) = 4xe^x + 2x^2e^x = 2x(x+2)e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0 (\because e^x > 0)$$

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -2]$ 와 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $[-2, 0]$ 에서 감소한다.

- (2)
- $f(x) = \sin x + \cos x$
- 에서

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \sin x = \cos x$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} (\because 0 < x < \pi)$$

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗		↘	

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, \frac{\pi}{4}]$ 에서 증가하고, 구간 $[\frac{\pi}{4}, \pi)$ 에서 감소한다.

- 3 (1)
- $f(x) = \frac{x-2}{x^2+5}$
- 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2+5-(x-2) \times 2x}{(x^2+5)^2} = -\frac{x^2-4x-5}{(x^2+5)^2} \\ &= -\frac{(x+1)(x-5)}{(x^2+5)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 5$$

x	...	-1	...	5	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$ 극소	↗	$\frac{1}{10}$ 극대	↘

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $\frac{1}{10}$, 극솟값은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

- (2)
- $f(x) = xe^x$
- 에서

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x = -1 (\because e^x > 0)$$

x	...	-1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$-\frac{1}{e}$ 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $-\frac{1}{e}$ 이다.

교/과/서/속

핵심
유형+

실전 문제

p. 57

- 1 (1)
- $f(x) = e^x - 3x$
- 라고 하면

$$f'(x) = e^x - 3$$

접점의 좌표를 $(t, e^t - 3t)$ 라고 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$$f'(t) = e^t - 3 = -1$$

$$e^t = 2 \quad \therefore t = \ln 2$$

따라서 접점의 좌표는 $(\ln 2, 2 - 3\ln 2)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - (2 - 3\ln 2) = -(x - \ln 2)$$

$$\therefore y = -x + 2 - 2\ln 2$$

- (2)
- $f(x) = \sin 2x$
- 라고 하면

$$f'(x) = 2\cos 2x$$

접점의 좌표를 $(t, \sin 2t)$ 라고 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$$f'(t) = 2\cos 2t = -1$$

$$\cos 2t = -\frac{1}{2}$$

이때 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 \leq 2t \leq \pi$ 이므로

$$2t = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore t = \frac{\pi}{3}$$

따라서 접점의 좌표는 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 이므로 구하는 접선의

방정식은

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore y = -x + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- 2
- $f(x) = -x + x \ln x$
- 라고 하면

$$f'(x) = -1 + \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x$$

접점의 좌표를 $(t, -t + t \ln t)$ 라고 하면 접선의 기울기가 1이므로

$$f'(t) = \ln t = 1 \quad \therefore t = e$$

즉, 접점의 좌표는 $(e, 0)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = x - e$$

따라서 $a=1$, $b=-e$ 이므로

$$ab = -e$$

3 (1) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 라고 하면

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

접점의 좌표를 $(t, \frac{\ln t}{t})$ 라고 하면 접선의 기울기는

$$f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - \frac{\ln t}{t} = \frac{1 - \ln t}{t^2}(x - t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$-\frac{\ln t}{t} = \frac{1 - \ln t}{t^2} \times (-t)$$

$$\frac{1 - 2 \ln t}{t} = 0, \ln t = \frac{1}{2}$$

$$\therefore t = \sqrt{e}$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y - \frac{1}{2\sqrt{e}} = \frac{1}{2e}(x - \sqrt{e})$$

$$\therefore y = \frac{1}{2e}x$$

(2) $f(x) = e^{-2x+3}$ 이라고 하면

$$f'(x) = -2e^{-2x+3}$$

접점의 좌표를 (t, e^{-2t+3}) 이라고 하면 접선의 기울기는

$$f'(t) = -2e^{-2t+3} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - e^{-2t+3} = -2e^{-2t+3}(x - t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$-e^{-2t+3} = -2e^{-2t+3}(1 - t)$$

$$(2t - 1)e^{-2t+3} = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{2} (\because e^{-2t+3} > 0)$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y - e^2 = -2e^2(x - \frac{1}{2})$$

$$\therefore y = -2e^2x + 2e^2$$

4 $f(x) = \sqrt{x-2}$ 라고 하면

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t-2})$ 라고 하면 접선의 기울기는

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t-2}} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - \sqrt{t-2} = \frac{1}{2\sqrt{t-2}}(x - t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$-\sqrt{t-2} = \frac{1}{2\sqrt{t-2}}(-2 - t)$$

$$2(t-2) = t+2 \quad \therefore t=6$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 6) \quad \therefore y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

이 직선이 점 $(a, 1)$ 을 지나므로

$$1 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2} \quad \therefore a=2$$

따라서 a 의 값은 $\textcircled{5}$ 이다.

5 (1) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 1$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 3 = (3x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } x=3$$

$$f''(x) = 6x - 8 \text{이므로}$$

$$f''(-\frac{1}{3}) = -10 < 0, f''(3) = 10 > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{1}{3}$ 에서 극대이고 극댓값은

$$f(-\frac{1}{3}) = \frac{41}{27}, x=3 \text{에서 극소이고 극솟값은}$$

$$f(3) = -17 \text{이다.}$$

(2) $f(x) = e^{-x} \sin x$ 에서

$$f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x \\ = -e^{-x}(\sin x - \cos x)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \sin x - \cos x = 0 (\because e^{-x} > 0)$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} (\because 0 < x < \pi)$$

$$f''(x) = e^{-x}(\sin x - \cos x) - e^{-x}(\cos x + \sin x) \\ = -2e^{-x} \cos x$$

$$\text{이므로 } f''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{\pi}{4}}} < 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 극대이고 극댓값은

$$f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}} \text{이다.}$$

6 $f(x) = 2x - 2 \cos 2x$ 에서

$$f'(x) = 2 + 4 \sin 2x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

이때 $0 < x < \pi$ 에서 $0 < 2x < 2\pi$ 이므로

$$2x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } 2x = \frac{11}{6}\pi$$

$$\therefore x = \frac{7}{12}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{12}\pi$$

$$f''(x) = 8 \cos 2x \text{이므로}$$

$$f''(\frac{7}{12}\pi) = -4\sqrt{3} < 0, f''(\frac{11}{12}\pi) = 4\sqrt{3} > 0$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{7}{12}\pi$ 에서 극대이고 극댓값은

$$f(\frac{7}{12}\pi) = \frac{7}{6}\pi + \sqrt{3}, x = \frac{11}{12}\pi \text{에서 극소이고 극솟값은}$$

$$f(\frac{11}{12}\pi) = \frac{11}{6}\pi - \sqrt{3} \text{이다.}$$

따라서 모든 극값의 합은

$$(\frac{7}{6}\pi + \sqrt{3}) + (\frac{11}{6}\pi - \sqrt{3}) = 3\pi$$

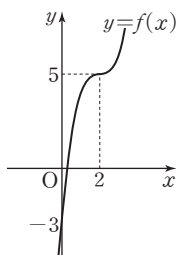
확인 문제

p. 58

- 1 (1) $f(x) = -x^3 + 3$ 이라고 하면 $f'(x) = -3x^2$ 이므로
 $f''(x) = -6x$
 $f''(x) = 0$ 에서 $x = 0$
따라서 곡선 $y = f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 0)$ 에서
 $f''(x) > 0$ 이므로 아래로 볼록하고, 구간 $(0, \infty)$ 에서
 $f''(x) < 0$ 이므로 위로 볼록하다.
- (2) $f(x) = x^4 - 12x^2 + 13$ 이라고 하면 $f'(x) = 4x^3 - 24x$ 이
므로
 $f''(x) = 12x^2 - 24 = 12(x^2 - 2)$
 $= 12(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$
 $f''(x) = 0$ 에서 $x = -\sqrt{2}$ 또는 $x = \sqrt{2}$
따라서 곡선 $y = f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -\sqrt{2})$ 와 구간
 $(\sqrt{2}, \infty)$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 아래로 볼록하고, 구간
 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 위로 볼록하다.

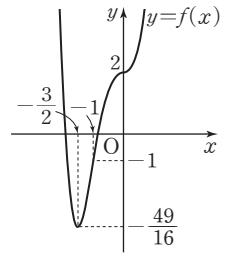
- 2 (1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$ 에서
 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = 2$
 $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$
 $f''(x) = 0$ 에서 $x = 2$

x	...	2	...
$f'(x)$	+	0	+
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	↖	5 변곡점	↗

또 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

- (2) $f(x) = 3x^4 + 6x^3 + 2$ 에서
 $f'(x) = 12x^3 + 18x^2 = 6x^2(2x + 3)$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -\frac{3}{2}$ 또는 $x = 0$
 $f''(x) = 36x^2 + 36x = 36x(x + 1)$
 $f''(x) = 0$ 에서 $x = -1$ 또는 $x = 0$

x	...	$-\frac{3}{2}$	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	+
$f''(x)$	+	+	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{49}{16}$ 극소	↗	-1 변곡점	↖	2 변곡점	↗

또 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

해심 유형 실전 문제

p. 59

- 1 (1) $f(x) = 2x + \cos \frac{x}{2}$ 라고 하면 $f'(x) = 2 - \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$ 이

므로 $f''(x) = -\frac{1}{4} \cos \frac{x}{2}$ $f''(x) = 0$ 에서 $\cos \frac{x}{2} = 0$ 이때 $0 < x < 2\pi$ 에서 $0 < \frac{x}{2} < \pi$ 이므로

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore x = \pi$$

따라서 곡선 $y = f(x)$ 는 구간 $(0, \pi)$ 에서 $f''(x) < 0$ 이
므로 위로 볼록하고, 구간 $(\pi, 2\pi)$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므
로 아래로 볼록하다.

- (2) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ 이라고 하면

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} \text{이므로}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2-4x) \times 2(x-2)}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{8}{(x-2)^3}$$

따라서 곡선 $y = f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 2)$ 에서 $f''(x) < 0$
이므로 위로 볼록하고, 구간 $(2, \infty)$ 에서 $f''(x) > 0$ 이
므로 아래로 볼록하다.

- 2 $f(x) = \ln x + 3x^2 + 2x$ 라고 하면 $f'(x) = \frac{1}{x} + 6x + 2$ 이므

로 $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + 6$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } x^2 = \frac{1}{6} \quad \therefore x = \frac{\sqrt{6}}{6} (\because x > 0)$$

따라서 곡선 $y = f(x)$ 는 구간 $(\frac{\sqrt{6}}{6}, \infty)$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므
로 아래로 볼록하다.

따라서 구하는 구간은 ⑤이다.

- 3 (1) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 2$ 라고 하면

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 1 \text{이므로}$$

$$f''(x) = -6x + 6$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } x = 1$$

이때 $x = 1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 곡선
 $y = f(x)$ 의 변곡점의 좌표는 (1, 1)

(2) $f(x) = \sin 3x$ 라고 하면 $f'(x) = 3 \cos 3x$ 이므로

$$f''(x) = -9 \sin 3x$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } \sin 3x = 0$$

$$0 < x < \pi \text{에서 } 0 < 3x < 3\pi \text{이므로}$$

$$3x = \pi \text{ 또는 } 3x = 2\pi$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}\pi$$

이때 $x = \frac{\pi}{3}$ 와 $x = \frac{2}{3}\pi$ 의 좌우에서 각각 $f''(x)$ 의 부호

가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 좌표는

$$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{2}{3}\pi, 0\right)$$

4 $f(x) = \ln(x^2+5)$ 라고 하면 $f'(x) = \frac{2x}{x^2+5}$ 이므로

$$f''(x) = \frac{2(x^2+5) - 2x \times 2x}{(x^2+5)^2} = \frac{-2x^2+10}{(x^2+5)^2}$$

$$= \frac{-2(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}{(x^2+5)^2}$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } x = -\sqrt{5} \text{ 또는 } x = \sqrt{5}$$

이때 $x = -\sqrt{5}$, $x = \sqrt{5}$ 의 좌우에서 각각 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점은 $(-\sqrt{5}, \ln 10)$, $(\sqrt{5}, \ln 10)$ 의 2개이다.

따라서 구하는 개수는 ③이다.

5 (1) $f(x) = 2xe^x$ 에서

$$f'(x) = 2e^x + 2xe^x = 2(x+1)e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 (\because e^x > 0)$$

$$f''(x) = 2e^x + 2(x+1)e^x = 2(x+2)e^x$$

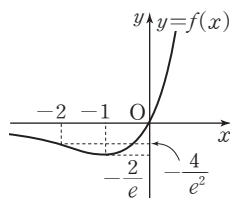
$$f''(x) = 0 \text{에서 } x = -2 (\because e^x > 0)$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{4}{e^2}$ 변곡점	$\searrow$	$-\frac{2}{e}$ 극소	$\nearrow$

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{이므로 함수}$$

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽
그림과 같다.



(2) $f(x) = x - 2 \sin x$ 에서

$$f'(x) = 1 - 2 \cos x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = -\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{3} \left(\because -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$f''(x) = 2 \sin x$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } \sin x = 0$$

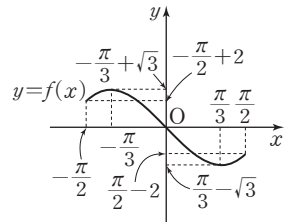
$$\therefore x = 0 \left(\because -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

이때 $f(-x) = -f(x)$, 즉 이 그래프는 원점에 대하여
대칭이므로 $x \geq 0$ 인 경우만 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	0 변곡점	$\searrow$	$\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$ 극소	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2} - 2$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의

그래프는 오른쪽 그림과
같다.



6 $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$ 에서

$$f'(x) = \frac{3(x^2+1) - 3x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-3(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

$$f''(x) = \frac{-6x(x^2+1)^2 - (-3x^2+3) \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4}$$

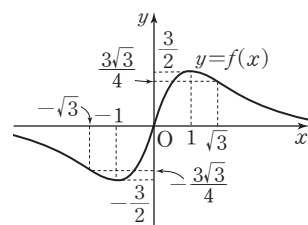
$$= \frac{6x^3-18x}{(x^2+1)^3} = \frac{6x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } x = -\sqrt{3} \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

이때 $f(-x) = -f(x)$, 즉 이 그래프는 원점에 대하여 대
칭이므로 $x \geq 0$ 인 경우만 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0 변곡점	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$ 극대	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 변곡점	$\searrow$

또 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의
그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. 원점 $(0, 0)$ 을 지난다.

ㄴ. 구간 $(-\infty, -\sqrt{3})$ 과 구간 $(0, \sqrt{3})$ 에서 $f''(x) < 0$ 이
므로 위로 볼록하고, 구간 $(-\sqrt{3}, 0)$ 과 구간 $(\sqrt{3}, \infty)$
에서 $f''(x) > 0$ 이므로 아래로 볼록하다.

ㄷ. 변곡점은 $(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4})$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$ 의 3개
이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

확인 문제

p. 60

- 1 (1) 주어진 방정식을 $e^x - 4x = 0$ 으로 놓으면 이 방정식의 실근의 개수는 함수 $y = e^x - 4x$ 의 그래프와 x 축의 교점의 개수와 같다.

$$f(x) = e^x - 4x \text{라고 하면}$$

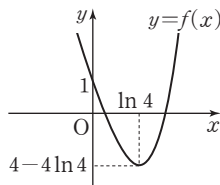
$$f'(x) = e^x - 4$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$e^x = 4 \quad \therefore x = \ln 4$$

x	...	$\ln 4$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\	$4 - 4\ln 4$	/

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



- (2) 주어진 방정식을 $\ln x - x + 1 = 0$ 으로 놓으면 이 방정식의 실근의 개수는 함수 $y = \ln x - x + 1$ 의 그래프와 x 축의 교점의 개수와 같다.

$$f(x) = \ln x - x + 1 \text{이라고 하면}$$

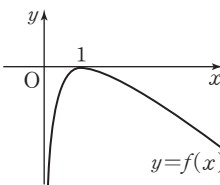
$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\frac{1}{x} = 1 \quad \therefore x = 1$$

x	0	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		/	0	\

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



- 2 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = \sin t + t \cos t$$

따라서 $t = \pi$ 에서 점 P의 속도는 $-\pi$

시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라고 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = \cos t + \cos t - t \sin t = 2 \cos t - t \sin t$$

따라서 $t = \pi$ 에서 점 P의 가속도는 -2

- 3 $\frac{dx}{dt} = -6t + 2$, $\frac{dy}{dt} = 3t^2 + 6$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는 $(-6t + 2, 3t^2 + 6)$

따라서 $t = 2$ 에서 점 P의 속도는 $(-10, 18)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -6, \frac{d^2y}{dt^2} = 6t \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의 가속도는 } (-6, 6t)$$

따라서 $t = 2$ 에서 점 P의 가속도는 $(-6, 12)$

핵심+ 실전 문제

p. 61

- 1 주어진 방정식의 실근의 개수는 함수 $y = e^x + e^{-x}$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점의 개수와 같다.

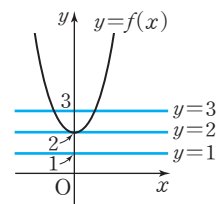
$$f(x) = e^x + e^{-x} \text{이라고 하면}$$

$$f'(x) = e^x - e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } e^x = e^{-x} \quad \therefore x = 0$$

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\	2	/

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



- (1) $a = 1$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 은 만나지 않으므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 0이다.
- (2) $a = 2$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 2$ 는 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.
- (3) $a = 3$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 3$ 은 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

- 2 주어진 방정식을 $\ln x - 2x = a$ 로 놓으면 이 방정식의 실근의 개수는 함수 $y = \ln x - 2x$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점의 개수와 같다.

$$f(x) = \ln x - 2x \text{라고 하면}$$

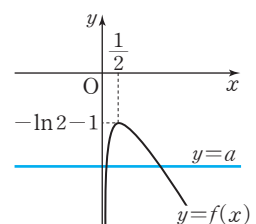
$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{1}{2}$$

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		/	$-\ln 2 - 1$	\

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 상수 a 의 값의 범위는

$$a < -\ln 2 - 1$$



3 $f(x) = e^x - x - 1$ 이라고 하면

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } e^x = 1 \quad \therefore x = 0$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 0이므로

$$f(x) = e^x - x - 1 \geq 0$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $e^x - x - 1 \geq 0$, 즉 $e^x \geq x + 1$ 이 성립한다.

4 $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ 라고 하면

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \sqrt{x} = 2 \quad \therefore x = 4$$

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$2 - 2\ln 2$	$\nearrow$

$x > 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $2 - 2\ln 2$ 이므로

$f(x) > a$ 가 성립하려면

$$a < 2 - 2\ln 2$$

5 (1) $\frac{dx}{dt} = 2e^{2t}$, $\frac{dy}{dt} = e^{2t}$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는 $(2e^{2t}, e^{2t})$

따라서 $t=1$ 에서 점 P의 속도는 $(2e^2, e^2)$

이때 점 P의 속력은

$$\sqrt{(2e^2)^2 + (e^2)^2} = \sqrt{5}e^2$$

(2) $\frac{d^2x}{dt^2} = 4e^{2t}$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 2e^{2t}$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 가속도는 $(4e^{2t}, 2e^{2t})$

따라서 $t=1$ 에서 점 P의 가속도는 $(4e^2, 2e^2)$

이때 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{(4e^2)^2 + (2e^2)^2} = 2\sqrt{5}e^2$$

6 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t+1}$, $\frac{dy}{dt} = 2t$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는 $(\frac{1}{t+1}, 2t)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{(t+1)^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2 \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의}$$

$$\text{가속도는 } \left(-\frac{1}{(t+1)^2}, 2\right)$$

$$\text{가속도가 } \left(-\frac{1}{4}, 2\right) \text{이므로 } -\frac{1}{(t+1)^2} = -\frac{1}{4} \text{에서}$$

$$(t+1)^2 = 4, \quad t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$(t+3)(t-1) = 0 \quad \therefore t = 1 (\because t > 0)$$

$$\text{따라서 } t=1 \text{에서 점 P의 속도는 } \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

11~13장

족집게

기출문제

p. 62~65

1 ③

$$2 y = \frac{1}{2}x + 3$$

3 ①

4 ③

5 ③

$$6 y = -\frac{3}{4}x + 3$$

7 3

$$8 \frac{1}{9}$$

$$9 -\frac{\pi}{2}$$

10 ⑤

11 ⑤

12 1

$$13 2\sqrt{2}$$

$$14 a < 2$$

15 ④

$$16 3\sqrt{3}$$

17 ⑤

$$18 0 < a < \frac{1}{e}$$

$$19 a < -1$$

$$20 2e$$

21 ②

$$22 (8, 20)$$

23 ③

$$24 -6$$

$$25 \perp, \sqsubset$$

$$26 \sqrt{10} \text{ m}$$

$$27 \sqrt{2}$$

$$28 (1) f''(x) = \frac{2ax(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \quad (2) 4 \quad 29 (4, 6)$$

1 $f(x) = \frac{2x-5}{x-2}$ 라고 하면

$$f'(x) = \frac{2(x-2) - (2x-5)}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

점 (3, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(3) = 1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 1 = x - 3 \quad \therefore y = x - 2$$

따라서 접선의 y 절편은 -2 이다.

2 $f(x) = 3 - 2\sin x$ 라고 하면

$$f'(x) = -2\cos x$$

$f(0) = 3$ 이므로 곡선 $y = f(x)$ 와 y 축의 교점의 좌표는 (0, 3)

점 (0, 3)에서의 접선의 기울기는 $f'(0) = -2$ 이므로 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고 점 (0, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

3 직선 $x + y - 1 = 0$, 즉 $y = -x + 1$ 에 평행한 접선의 기울기는 -1 이다.

$f(x) = x - e^x$ 이라고 하면

$$f'(x) = 1 - e^x$$

접점의 좌표를 $(t, t - e^t)$ 이라고 하면 접선의 기울기가 -1 이므로

$$f'(t) = 1 - e^t = -1$$

$$e^t = 2 \quad \therefore t = \ln 2$$

즉, 접점의 좌표는 $(\ln 2, \ln 2 - 2)$ 이므로 접선의 방정식은 $y - (\ln 2 - 2) = -(x - \ln 2)$

$$\therefore y = -x + 2\ln 2 - 2$$

따라서 접선의 x 절편은 $2\ln 2 - 2$ 이다.

4 $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ 이라고 하면 $f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

점점의 좌표를 $(t, e^{\sqrt{t}})$ 이라고 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=\frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-e^{\sqrt{t}}=\frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}(x-t) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-e^{\sqrt{t}}=-\frac{\sqrt{t}e^{\sqrt{t}}}{2}, \left(\frac{\sqrt{t}}{2}-1\right)e^{\sqrt{t}}=0$$

$$\sqrt{t}=2 (\because e^{\sqrt{t}}>0) \quad \therefore t=4$$

이것을 ①에 대입하면

$$y-e^2=\frac{e^2}{4}(x-4) \quad \therefore y=\frac{e^2}{4}x$$

이 직선이 점 $(8, a)$ 를 지나므로 $a=2e^2$

5 $f(x)=\ln(2x+1), g(x)=-3\ln x+k$ 라고 하면

$$f'(x)=\frac{2}{2x+1}, g'(x)=-\frac{3}{x}$$

두 곡선의 교점의 x 좌표를 t 라고 하면 교점에서의 접선이 서로 수직이므로 $f'(t)g'(t)=-1$

$$\frac{2}{2t+1} \times \left(-\frac{3}{t}\right)=-1, 2t^2+t-6=0$$

$$(t+2)(2t-3)=0 \quad \therefore t=\frac{3}{2} (\because t>0)$$

$$\text{따라서 } f\left(\frac{3}{2}\right)=g\left(\frac{3}{2}\right) \text{이므로}$$

$$\ln 4=-3\ln \frac{3}{2}+k \quad \therefore k=\ln \frac{27}{2}$$

6 점 $(0, 3)$ 이 곡선 위에 있으므로 $1+2t-3t^2=0$ 에서

$$(3t+1)(t-1)=0$$

$$\therefore t=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } t=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2-t+2t^2=3 \text{에서 } (2t+1)(t-1)=0$$

$$\therefore t=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } t=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $t=1$

$$\frac{dx}{dt}=2-6t, \frac{dy}{dt}=-1+4t \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1+4t}{2-6t} \left(\text{단, } t \neq \frac{1}{3} \right)$$

따라서 $t=1$ 일 때, 접선의 기울기는 $-\frac{3}{4}$ 이므로 구하는 접

$$\text{선의 방정식은 } y=-\frac{3}{4}x+3$$

7 $x^2y+\ln y-1=0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2xy+x^2\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx}=0 \quad \therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2xy^2}{x^2y+1}$$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 -1 이므로 접선의 방정식은

$$y-1=-(x-1) \quad \therefore y=-x+2$$

이 직선이 점 $(-1, k)$ 를 지나므로 $k=3$

8 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$f'(x)=3-\frac{2x}{x^2+a}=\frac{3x^2-2x+3a}{x^2+a} \text{에서}$$

$$3x^2-2x+3a \geq 0 (\because x^2+a > 0)$$

이차방정식 $3x^2-2x+3a=0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=1-9a \leq 0 \quad \therefore a \geq \frac{1}{9}$$

따라서 양수 a 의 최솟값은 $\frac{1}{9}$ 이다.

9 $f'(x)=-e^{-x}(\sin x-\cos x)+e^{-x}(\cos x+\sin x)$

$$=2e^{-x}\cos x$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$\cos x=0 (\because e^{-x}>0)$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{2} (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

$$f''(x)=-2e^{-x}\cos x-2e^{-x}\sin x$$

$$=-2e^{-x}(\cos x+\sin x)$$

$$\text{이므로 } f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2e^{-\frac{\pi}{2}}<0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{2}$ 에서 극대이고 극댓값이 0이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}-a=0, a=e^{-\frac{\pi}{2}} \quad \therefore \ln a=-\frac{\pi}{2}$$

10 $f'(x)=\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+a$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극값을 가지므로 $f'(1)=0$

$$3-2+a=0 \quad \therefore a=-1$$

$$\therefore f'(x)=\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-1=-\frac{x^2-3x+2}{x^2} \\ =-\frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

$$f''(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3} \text{이므로}$$

$$f''(1)=1>0, f''(2)=-\frac{1}{4}<0$$

따라서 함수 $f(x)=3\ln x+\frac{2}{x}-x$ 는 $x=2$ 에서 극대이고 극댓값은 $f(2)=3\ln 2-1$

11 $f'(x)=(4x-3a)e^{2x}+(2x^2-3ax+5) \times 2e^{2x}$

$$=\{4x^2+2(2-3a)x-3a+10\}e^{2x}$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식

$$4x^2+2(2-3a)x-3a+10=0 \text{이 중근 또는 허근을 가져야}$$

하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=(2-3a)^2-4(-3a+10) \leq 0$$

$$a^2-4 \leq 0, (a+2)(a-2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 2$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.

12 $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$ 이라고 하면 $f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}$ 이므로

$$f''(x)=2-\frac{2}{x^3}=\frac{2x^3-2}{x^3} \\ =\frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$$

$f''(x)=0$ 에서 $x=1$ ($\because x^2+x+1>0$)

구간 $(1, \infty)$ 에서 $f''(x)>0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

따라서 a 의 최솟값은 1이다.

13 $f(x)=\frac{1}{x^2+6}$ 이라고 하면 $f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+6)^2}$ 이므로

$$f''(x)=-\frac{2(x^2+6)^2-2x \times 2(x^2+6) \times 2x}{(x^2+6)^4} \\ =\frac{6x^2-12}{(x^2+6)^3} \\ =\frac{6(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{(x^2+6)^3}$$

$f''(x)=0$ 에서

$$x=-\sqrt{2} \text{ 또는 } x=\sqrt{2}$$

이때 $x=-\sqrt{2}$ 와 $x=\sqrt{2}$ 의 좌우에서 각각 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 좌표는 $(-\sqrt{2}, \frac{1}{8})$,

$(\sqrt{2}, \frac{1}{8})$ 이다.

따라서 두 변곡점 사이의 거리는 $2\sqrt{2}$ 이다.

14 $f(x)=(x^2+a)e^x$ 이라고 하면

$$f'(x)=2xe^x+(x^2+a)e^x=(x^2+2x+a)e^x$$

$$f''(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x+a)e^x \\ =(x^2+4x+2+a)e^x$$

곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이 2개하려면 이차방정식

$x^2+4x+2+a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=4-(2+a)>0 \quad \therefore a<2$$

15 $f'(x)=2x+\frac{1}{x}$ 이므로

$$f''(x)=2-\frac{1}{x^2}$$

① $f'(x)=0$ 인 x 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.

② $f''(x)=0$ 에서 $x^2=\frac{1}{2}$

$$\therefore x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because x>0)$$

이때 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변

곡점은 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때의 1개이다.

③ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=\infty$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선은 y 축이다.

④ 구간 $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 에서 $f''(x)<0$ 이므로 위로 볼록하다.

⑤ 구간 $(0, \infty)$ 에서 $f'(x)>0$ 이므로 구간 $[2, 4]$ 에서 증가한다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

$$16 \quad f'(x)=\sqrt{ax-x^2}+\frac{x(a-2x)}{2\sqrt{ax-x^2}}=\frac{x(3a-4x)}{2\sqrt{ax-x^2}}$$

이때 $ax-x^2>0$, 즉 $0<x<a$ ($\because a>0$)이고

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=\frac{3}{4}a$$

x	0	...	$\frac{3}{4}a$	...	a
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			$\frac{3\sqrt{3}}{16}a^2$ 극대		

함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{3}{4}a$ 일 때, 극대이면서 최대이므로

$$\frac{3}{4}a=\frac{3}{2} \quad \therefore a=2$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$b=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{16} \times 2^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore 2ab=2 \times 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}$$

17 주어진 방정식을 $e^{-x}+x=a$ 로 놓으면 이 방정식의 실근의 개수는 함수 $y=e^{-x}+x$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=e^{-x}+x$ 라고 하면

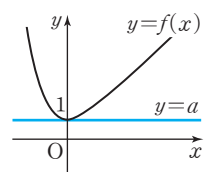
$$f'(x)=-e^{-x}+1$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$e^{-x}=1 \quad \therefore x=0$$

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 하나의 실근만을 갖도록 하는 상수 a 의 값은 $a=1$



18 주어진 방정식을 $\frac{\ln x}{x}=a$ 로 놓으면 이 방정식의 실근의 개수는 함수 $y=\frac{\ln x}{x}$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 라고 하면

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0$ 에서
 $\ln x=1 \quad \therefore x=e$

x	0	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

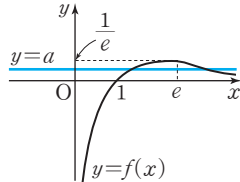
이때 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 상수 a 의 값의 범위는

$$0 < a < \frac{1}{e}$$



19 주어진 부등식을 $2x^2 - \cos x > a$ 로 놓고,

$f(x) = 2x^2 - \cos x$ 라고 하면

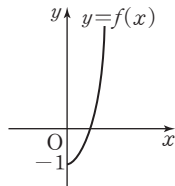
$$f'(x) = 4x + \sin x$$

이때 $x > 0$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x \geq 0$ 에서 증가한다.

$f(0) = -1$ 이고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x) > a$

를 만족하는 상수 a 의 값의 범위는

$$a < -1$$



20 모든 실수 x 에 대하여 $e^{2x} \geq ax$ 가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=e^{2x}$ 의 그래프가 직선 $y=ax$ 보다 위쪽에 있거나 접해야 한다.

$f(x) = e^{2x}$, $g(x) = ax$ 라고 하면

$$f'(x) = 2e^{2x}, \quad g'(x) = a$$

접점의 x 좌표를 t 라고 하면

$$f(t) = g(t) \text{이므로 } e^{2t} = at \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(t) = g'(t) \text{이므로 } 2e^{2t} = a$$

위의 식을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

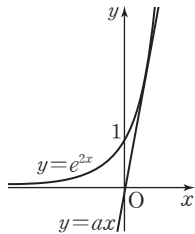
$$e^{2t} = 2te^{2t}, \quad (2t-1)e^{2t} = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2} \quad (\because e^{2t} > 0)$$

$$\therefore a = 2e$$

주어진 부등식을 만족하는 a 의 값의 범위는 $0 \leq a \leq 2e$ 이므로 a 의 최댓값은 $2e$, 최솟값은 0 이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $2e$ 이다.



21 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 1 + 2 \sin 2t$$

운동 방향이 바뀌는 순간의 속도는 0 이므로

$$1 + 2 \sin 2t = 0, \quad \sin 2t = -\frac{1}{2}$$

이때 $t > 0$ 이므로

$$2t = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } 2t = \frac{11}{6}\pi \text{ 또는 } \dots$$

$$\therefore t = \frac{7}{12}\pi \text{ 또는 } t = \frac{11}{12}\pi \text{ 또는 } \dots$$

따라서 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $\frac{11}{12}\pi$ 이다.

22 $\frac{dx}{dt} = 2t$, $\frac{dy}{dt} = \frac{5}{2}t\sqrt{t}$ 이므로 시각 t 에서 점 P가 나타내는 곡선의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{5}{2}t\sqrt{t}}{2t} = \frac{5}{4}\sqrt{t} \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

접선의 기울기가 $\frac{5}{2}$ 이므로

$$\frac{5}{4}\sqrt{t} = \frac{5}{2}, \quad \sqrt{t} = 2 \quad \therefore t = 4$$

시각 t 에서의 점 P의 속도는 $\left(2t, \frac{5}{2}t\sqrt{t}\right)$ 이므로 $t=4$ 에서

점 P의 속도는

$$(8, 20)$$

23 $\frac{dx}{dt} = -3 \sin t$, $\frac{dy}{dt} = 2 \cos t$ 이므로

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -3 \cos t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -2 \sin t$$

따라서 시각 t 에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\begin{aligned} \sqrt{(-3 \cos t)^2 + (-2 \sin t)^2} &= \sqrt{9 \cos^2 t + 4 \sin^2 t} \\ &= \sqrt{9 \cos^2 t + 4(1 - \cos^2 t)} \\ &= \sqrt{5 \cos^2 t + 4} \end{aligned}$$

이때 $0 \leq \cos^2 t \leq 1$ 이므로 $\cos^2 t = 1$ 일 때 최댓값은 $M=3$, $\cos^2 t = 0$ 일 때 최솟값은 $m=2$ 이다.

$$\therefore M+m=5$$

24 $f(x) = \frac{2x-a}{e^{2x}} = (2x-a)e^{-2x}$ 이라고 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{-2x} - 2(2x-a)e^{-2x} \\ &= -2(2x-a-1)e^{-2x} \end{aligned}$$

접점의 좌표를 $(t, (2t-a)e^{-2t})$ 이라고 하면 접선의 기울기가 $f'(t) = -2(2t-a-1)e^{-2t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (2t-a)e^{-2t} = -2(2t-a-1)e^{-2t}(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나면

$$\begin{aligned} -(2t-a)e^{-2t} &= 2t(2t-a-1)e^{-2t} \\ (4t^2 - 2at - a)e^{-2t} &= 0 \end{aligned}$$

이때 원점에서 주어진 곡선에 접선을 그을 수 없으려면 위의 식을 만족하는 실수 t 가 존재하지 않아야 한다.

이차방정식 $4t^2 - 2at - a = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 + 4a < 0$$

$$a(a+4) < 0 \quad \therefore -4 < a < 0$$

따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1$ 이므로 구하는 합은

$$-3 + (-2) + (-1) = -6$$

25 ㄱ. 구간 (b, d) 와 구간 $(0, e)$ 에서 $g''(x) > 0$ 이므로 아래로 볼록하다.

ㄴ. $g''(x) = 0$ 에서

$x = b$ 또는 $x = d$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = e$

이때 $x = b, x = d, x = 0, x = e$ 의 좌우에서 각각 $g''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점은 4개이다.

ㄷ. $g'(x) = 0$ 에서 $x = c$ 또는 $x = 0$

x	a	...	c	...	0	...	f
$g'(x)$		-	0	+	0	+	
$g(x)$		\	극소	/		/	

함수 $g(x)$ 는 $x = c$ 일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $g(c)$ 이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

26 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\tan \theta$ 의 값이

최대일 때 θ 의 값도 최대가 된다.

오른쪽 그림과 같이 안내판의 아

래쪽을 바라본 각의 크기를 α ,

사람과 안내판 사이의 거리를 x m라고 하면

$$\tan \alpha = \frac{2}{x}, \tan(\theta + \alpha) = \frac{5}{x}$$

$$\therefore \tan \theta = \tan(\theta + \alpha - \alpha) = \frac{\tan(\theta + \alpha) - \tan \alpha}{1 + \tan(\theta + \alpha) \tan \alpha}$$

$$= \frac{\frac{5}{x} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{5}{x} \times \frac{2}{x}} = \frac{3x}{x^2 + 10}$$

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 10} \quad (x > 0) \text{라고 하면}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(x^2 + 10) - 3x \times 2x}{(x^2 + 10)^2} \\ &= \frac{-3x^2 + 30}{(x^2 + 10)^2} = \frac{-3(x + \sqrt{10})(x - \sqrt{10})}{(x^2 + 10)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = \sqrt{10} \quad (\because x > 0)$$

x	0	...	$\sqrt{10}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		/	$\frac{3\sqrt{10}}{20}$ 극대	\

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \sqrt{10}$ 일 때 극대이면서 최대이므로 안내판으로부터 $\sqrt{10}$ m 전방에 있어야 안내판이 가장 잘 보인다.

27 선분 PQ의 길이의 최솟값은 곡선

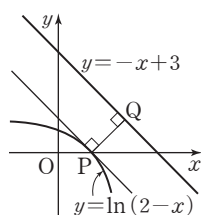
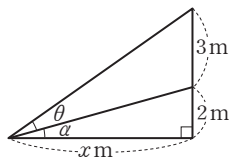
$y = \ln(2-x)$ 의 접선 중 기울기가

-1인 접선과 직선 $y = -x + 3$ 사

이의 거리와 같다. (가)

$f(x) = \ln(2-x)$ 라고 하면

$$f'(x) = \frac{1}{x-2}$$



접점의 좌표를 $(t, \ln(2-t))$ 라고 하면 접선의 기울기가 -1이므로

$$f'(t) = \frac{1}{t-2} = -1 \quad \therefore t = 1$$

즉, 접점의 좌표는 $(1, 0)$

..... (나)

따라서 점 $(1, 0)$ 과 직선 $y = -x + 3$, 즉 $x + y - 3 = 0$ 사이의 거리를 구하면

$$\frac{|1+0-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2} \quad \text{..... (다)}$$

채점 기준	배점
(가) 선분 PQ의 길이의 최솟값의 기하적 의미를 안다.	2점
(나) 주어진 곡선의 접선의 기울기가 -1일 때의 접점의 좌표를 구한다.	2점
(다) 선분 PQ의 길이의 최솟값을 구한다.	2점

$$28 (1) f'(x) = \frac{a(x^2+1) - ax \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2+a}{(x^2+1)^2} \quad \text{..... (가)}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2ax(x^2+1)^2 - (-ax^2+a) \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{2ax(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \quad \text{..... (나)} \end{aligned}$$

$$(2) f''(x) = 0 \text{에서 } x = \sqrt{3} \quad (\because x > 0)$$

$x = \sqrt{3}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x 좌표는 $\sqrt{3}$ 이다. (다)

이때 변곡점에서의 접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$$f'(\sqrt{3}) = \frac{-3a+a}{(3+1)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore a = 4 \quad \text{..... (라)}$$

채점 기준	배점
(가) $f'(x)$ 를 구한다.	1점
(나) $f''(x)$ 를 구한다.	1점
(다) 변곡점의 x 좌표를 구한다.	2점
(라) a 의 값을 구한다.	2점

$$29 \frac{dx}{dt} = 4t, \frac{dy}{dt} = t^2 - 4 \text{이므로 시간 } t \text{에서의 점 P의 속력은}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(4t)^2 + (t^2 - 4)^2} &= \sqrt{(t^2 + 4)^2} \\ &= t^2 + 4 \quad \text{..... (가)} \end{aligned}$$

점 P의 속력이 13이므로

$$t^2 + 4 = 13, t^2 = 9$$

$$\therefore t = 3 \quad (\because t > 0)$$

즉, 점 P의 속력이 13이 되는 시각은 3이다. (나)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4, \frac{d^2y}{dt^2} = 2t \text{이므로 } t = 3 \text{에서 점 P의 가속도는}$$

$$(4, 6) \quad \text{..... (다)}$$

채점 기준	배점
(가) 점 P의 속력을 t 에 대한 식으로 나타낸다.	1점
(나) 점 P의 속력이 13이 되는 시각을 구한다.	2점
(다) 속력이 13일 때 점 P의 가속도를 구한다.	2점

확인 문제

p. 66

- 1 (1) $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = -\frac{1}{2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$
 (2) $\int x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$
 (3) $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$
 (4) $\int (x^2 + 3\cos x) dx = \frac{1}{3}x^3 + 3\sin x + C$
- 2 (1) $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_1^2 = \ln 2$
 (2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \csc x \cot x dx = [-\csc x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2} - (-2) = 2 - \sqrt{2}$

교/과/서/속

핵심
유형+

실전 문제

p. 67

- 1 (1) $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x} - x^{-2}\right) dx$
 $= x + 2\ln |x| + x^{-1} + C$
 $= x + 2\ln |x| + \frac{1}{x} + C$
 (2) $\int \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}) dx$
 $= 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$
 $= 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$
- 2 $f(x) = \int \frac{x^5 - 2x + 6}{x^4} dx = \int (x - 2x^{-3} + 6x^{-4}) dx$
 $= \frac{1}{2}x^2 + x^{-2} - 2x^{-3} + C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + C$
 $f(1) = \frac{1}{2}$ 에서
 $\frac{1}{2} + 1 - 2 + C = \frac{1}{2} \quad \therefore C = 1$
 따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + 1$ 이므로 $f(-1) = \frac{9}{2}$
- 3 (1) $\int e^{x+2} dx = e^2 \int e^x dx = e^2 \times e^x + C = e^{x+2} + C$
 (2) $\int \frac{9^x - 1}{3^x - 1} dx = \int \frac{(3^x + 1)(3^x - 1)}{3^x - 1} dx$
 $= \int (3^x + 1) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + x + C$

$$\begin{aligned} 4 \quad \int \frac{e^{2x} - x^2}{e^x + x} dx &= \int \frac{(e^x + x)(e^x - x)}{e^x + x} dx \\ &= \int (e^x - x) dx \\ &= e^x - \frac{1}{2}x^2 + C \end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=-\frac{1}{2}$ 이므로 $a+b=\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 5 \quad (1) \int \tan^2 x dx &= \int (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \tan x - x + C \\ (2) \int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} dx \\ &= \int \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 + \cos x} dx \\ &= \int (1 - \cos x) dx \\ &= x - \sin x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad f(x) &= \int \frac{1 + 4\sin^2 x}{1 - \cos^2 x} dx = \int \frac{1 + 4\sin^2 x}{\sin^2 x} dx \\ &= \int (\csc^2 x + 4) dx \\ &= -\cot x + 4x + C \\ \therefore f\left(\frac{5}{4}\pi\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= (-1 + 5\pi + C) - (-1 + \pi + C) \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \quad (1) \int_1^8 (\sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt[3]{x} - 1) dx &= \int_1^8 (\sqrt[3]{x^2} - 1) dx \\ &= \int_1^8 (x^{\frac{2}{3}} - 1) dx \\ &= \left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - x \right]_1^8 \\ &= \frac{56}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{58}{5} \\ (2) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x + 1}{\sin^2 x} dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + \csc^2 x) dx \\ &= \left[-\cos x - \cot x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \quad \int_0^1 (1 + 2^x)^2 dx &= \int_0^1 (1 + 2 \times 2^x + 4^x) dx \\ &= \left[x + \frac{2 \times 2^x}{\ln 2} + \frac{4^x}{\ln 4} \right]_0^1 \\ &= \left(1 + \frac{6}{\ln 2}\right) - \frac{5}{2\ln 2} \\ &= 1 + \frac{7}{2\ln 2} \end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=7$ 이므로 $ab=7$

확인 문제

p. 68

- 1 $3x+1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = [3]$ 이므로

$$\int (3x+1)^4 dx = \int [t^4] \times \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int [t^4] dt$$

$$= \frac{1}{15} t^5 + C = \boxed{\frac{1}{15} (3x+1)^5} + C$$
 $\therefore$ (가) 3 (나) t^4 (다) $\frac{1}{15} (3x+1)^5$
- 2 $\sin x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = [\cos x]$ 이고, $x=0$ 일 때 $t = [0]$,
 $x = \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x dx = \int_0^1 [t^3] dt = \left[\frac{1}{4} t^4 \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{4}}$$
 $\therefore$ (가) $\cos x$ (나) 0 (다) t^3 (라) $\frac{1}{4} t^4$ (마) $\frac{1}{4}$

교/과/서/속

핵심
유형+

실전 문제

p. 69

- 1 (1) $-3x+1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -3$ 이므로

$$\int e^{-3x+1} dx = \int e^t \times \left(-\frac{1}{3}\right) dt = -\frac{1}{3} \int e^t dt$$

$$= -\frac{1}{3} e^t + C$$

$$= -\frac{1}{3} e^{-3x+1} + C$$
(2) $x^2+1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2x$ 이므로

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C$$

$$= 2\sqrt{x^2+1} + C$$
- 2 $\ln x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$\int \frac{6(\ln x)^2}{x} dx = \int 6t^2 dt = 2t^3 + C = 2(\ln x)^3 + C$$
따라서 $a=2$, $n=3$ 이므로 $a+n=5$
- 3 (1) $\int \frac{x^2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{(x^3+1)'}{x^3+1} dx$

$$= \frac{1}{3} \ln |x^3+1| + C$$
(2) $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + C$

4 $f(x) = \int \frac{e^x}{e^x-3} dx = \int \frac{(e^x-3)'}{e^x-3} dx$
 $= \ln |e^x-3| + C$
 $f(\ln 4) = 2$ 에서 $C=2$
 $\therefore f(x) = \ln |e^x-3| + 2$

5 (1) $\frac{x^2-2x+3}{x-2} = x + \frac{3}{x-2}$ 이므로

$$\int \frac{x^2-2x+3}{x-2} dx = \int \left(x + \frac{3}{x-2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + 3 \ln |x-2| + C$$
(2) $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$ 이므로

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} (\ln |x-1| - \ln |x+1|) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

6 $\frac{3}{x^2-x-2} = \frac{3}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{3}{x^2-x-2} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \ln |x-2| - \ln |x+1| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C$$
 $f(3) = 0$ 에서
 $\ln \frac{1}{4} + C = 0 \quad \therefore C = 2 \ln 2$
따라서 $f(x) = \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + 2 \ln 2$ 이므로 $f(1) = \ln 2$

7 (1) $2x-\pi=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=-\pi$,
 $x = \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x-\pi) dx = \int_{-\pi}^0 \sin t \times \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^0 \sin t dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\cos t \right]_{-\pi}^0$$

$$= \frac{1}{2} \times (-1-1) = -1$$
(2) $x^2-2=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2x$ 이고, $x=1$ 일 때 $t=-1$,
 $x=2$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\int_1^2 x(x^2-2)^5 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 (x^2-2)^5 \times 2x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 t^5 dt$$

$$= \left[\frac{1}{12} t^6 \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{1}{12} = \frac{21}{4}$$

- 8 $x^2=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=2$ 일 때 $t=4$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 x e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_0^4 e^t \times 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 e^t dt \\ &= \frac{1}{2} \left[e^t \right]_0^4 = \frac{e^4-1}{2} = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$ 이므로
 $a+b=0$

- 9 (1) $x=2\sin\theta$ ($-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$ 이고,

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{3}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}} \times 2\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}} \times 2\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2\cos\theta} \times 2\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\ &= \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

- (2) $x=\tan\theta$ ($-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$ 이고,

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1} \times \sec^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec^2\theta} \times \sec^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

- 10 $x=3\tan\theta$ ($-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=3\sec^2\theta$ 이고,

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{3}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+9} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{9\tan^2\theta+9} \times 3\sec^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{9(\tan^2\theta+1)} \times 3\sec^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{9\sec^2\theta} \times 3\sec^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3} d\theta \\ &= \left[\frac{1}{3}\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{18}\pi\end{aligned}$$

$\therefore a=\frac{1}{18}$

확인 문제

p. 70

- 1 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= \boxed{x e^x} - \int e^x dx \\ &= \boxed{x e^x - e^x} + C\end{aligned}$$

$\therefore$ (가) e^x (나) $x e^x$ (다) $x e^x - e^x$

- 2 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$ 로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_1^e x \ln x dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left[\frac{1}{x} \right] \times \frac{1}{2}x^2 dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{1}{2}x dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{1}{4}x^2 \right]_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \boxed{\frac{e^2+1}{4}}\end{aligned}$$

$\therefore$ (가) $\frac{1}{x}$ (나) $\frac{1}{4}x^2$ (다) $\frac{e^2+1}{4}$

교/과/서/속 해심 유형+ 실전 문제

p. 71

- 1 (1) $f(x)=x-2$, $g'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int (x-2)e^x dx &= (x-2)e^x - \int e^x dx \\ &= (x-2)e^x - e^x + C \\ &= (x-3)e^x + C\end{aligned}$$

- (2) $f(x)=x$, $g'(x)=\sin 2x$ 로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int x \sin 2x dx &= -\frac{1}{2}x \cos 2x + \int \frac{1}{2} \cos 2x dx \\ &= -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C\end{aligned}$$

2 $g(x)=\ln(x+1)$, $h'(x)=1$ 로 놓으면
 $g'(x)=\frac{1}{x+1}$, $h(x)=x$ 이므로

$$f(x)=\int \ln(x+1)dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx$$

$$= x\ln(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= x\ln(x+1) - \{x - \ln(x+1)\} + C$$

$$= (x+1)\ln(x+1) - x + C$$
 $f(1)=2\ln 2$ 에서 $2\ln 2 - 1 + C = 2\ln 2 \quad \therefore C=1$
 즉, $f(x)=(x+1)\ln(x+1) - x + 1$ 이므로
 $f(3)=4\ln 4 - 2 = 8\ln 2 - 2$
 따라서 구하는 값은 ③이다.

3 $f(x)=e^x$, $g'(x)=\cos x$ 로 놓으면
 $f'(x)=e^x$, $g(x)=\sin x$ 이므로

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\int e^x \sin x dx$$
에서 $u(x)=e^x$, $v'(x)=\sin x$ 로 놓으면
 $u'(x)=e^x$, $v(x)=-\cos x$ 이므로

$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \quad \dots\dots \textcircled{2}$$
 ①을 ②에 대입하면

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\right)$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x(\sin x + \cos x) + C_1$$

$$\therefore \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$$

4 $f'(x)=e^x \sin x$ 에서 $f(x)=\int e^x \sin x dx$
 $g(x)=e^x$, $h'(x)=\sin x$ 로 놓으면
 $g'(x)=e^x$, $h(x)=-\cos x$ 이므로

$$f(x)=\int e^x \sin x dx$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\int e^x \cos x dx$$
에서 $u(x)=e^x$, $v'(x)=\cos x$ 로 놓으면
 $u'(x)=e^x$, $v(x)=\sin x$ 이므로

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

$$= e^x \sin x - f(x) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$
 ①을 ②에 대입하면
 $f(x) = -e^x \cos x + \{e^x \sin x - f(x)\}$
 $2f(x) = e^x(\sin x - \cos x) + C_1$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$
 $f(0)=\frac{1}{2}$ 에서 $-\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \quad \therefore C=1$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + 1$$

5 (1) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$ 로 놓으면
 $f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$ 이므로

$$\int_1^e \ln x dx = \left[x \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times x dx$$

$$= e - \int_1^e dx$$

$$= e - \left[x\right]_1^e$$

$$= e - (e - 1) = 1$$
 (2) $f(x)=2x+1$, $g'(x)=\cos x$ 로 놓으면
 $f'(x)=2$, $g(x)=\sin x$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+1) \cos x dx$$

$$= \left[(2x+1) \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx$$

$$= \pi + 1 + \left[2 \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi + 1 + (-2) = \pi - 1$$

6 $f(x)=x^2$, $g'(x)=e^x$ 으로 놓으면
 $f'(x)=2x$, $g(x)=e^x$ 이므로

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = \left[x^2 e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx$$

$$= e - \int_0^1 2x e^x dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\int_0^1 2x e^x dx$$
에서 $u(x)=2x$, $v'(x)=e^x$ 으로 놓으면
 $u'(x)=2$, $v(x)=e^x$ 이므로

$$\int_0^1 2x e^x dx = \left[2x e^x\right]_0^1 - \int_0^1 2 e^x dx$$

$$= 2e - \left[2e^x\right]_0^1$$

$$= 2e - (2e - 2) = 2$$
 이것을 ①에 대입하면

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$$
 따라서 구하는 정적분의 값은 ①이다.

계산력 다지기

p. 72~73

1 (1) $\int \frac{3}{x^4} dx = \int 3x^{-4} dx = -x^{-3} + C = -\frac{1}{x^3} + C$
 (2) $\int \sqrt[4]{x^3} dx = \int x^{\frac{3}{4}} dx = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + C = \frac{4}{7} x \sqrt[4]{x^3} + C$
 (3) $\int \frac{x^3 - 5x - 3}{x^3} dx = \int (1 - 5x^{-2} - 3x^{-3}) dx$

$$= x + 5x^{-1} + \frac{3}{2}x^{-2} + C$$

$$= x + \frac{5}{x} + \frac{3}{2x^2} + C$$

$$\begin{aligned}
 (4) \int \frac{\sqrt[3]{x-x^2}}{\sqrt{x}} dx &= \int (x^{-\frac{1}{6}} - x^{\frac{3}{2}}) dx \\
 &= \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C \\
 &= \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} - \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C
 \end{aligned}$$

2 (1) $\int e^{x-3} dx = \frac{1}{e^3} \int e^x dx = \frac{1}{e^3} \times e^x + C = e^{x-3} + C$

(2) $\int (10^x - x^2) dx = \frac{10^x}{\ln 10} - \frac{1}{3} x^3 + C$

(3) $\int (3^x - 2)^2 dx = \int (9^x - 4 \times 3^x + 4) dx$
 $= \frac{9^x}{\ln 9} - \frac{4 \times 3^x}{\ln 3} + 4x + C$
 $= \frac{3^{2x}}{2 \ln 3} - \frac{4 \times 3^x}{\ln 3} + 4x + C$

(4) $\int \frac{25^x - 4^x}{5^x + 2^x} dx = \int \frac{5^{2x} - 2^{2x}}{5^x + 2^x} dx$
 $= \int \frac{(5^x + 2^x)(5^x - 2^x)}{5^x + 2^x} dx$
 $= \int (5^x - 2^x) dx$
 $= \frac{5^x}{\ln 5} - \frac{2^x}{\ln 2} + C$

3 (1) $\int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$

(2) $\int (2 - \sec^2 x) dx = 2x - \tan x + C$

(3) $\int \cot^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1) dx = -\cot x - x + C$

(4) $\int \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} dx$
 $= \int \frac{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}{1 - \sin x} dx$
 $= \int (1 + \sin x) dx$
 $= x - \cos x + C$

4 (1) $\int_1^3 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^3 x^{-2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^3$
 $= -\frac{1}{3} - (-1) = \frac{2}{3}$

(2) $\int_1^4 \frac{x + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 (x^{\frac{1}{2}} + 1 - x^{-\frac{1}{2}}) dx$
 $= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + x - 2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^4$
 $= \frac{16}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{17}{3}$

(3) $\int_{-1}^2 \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} dx = \int_{-1}^2 \frac{(e^x + 1)(e^x - 1)}{e^x + 1} dx$
 $= \int_{-1}^2 (e^x - 1) dx$
 $= \left[e^x - x \right]_{-1}^2$
 $= (e^2 - 2) - \left(\frac{1}{e} + 1 \right) = e^2 - \frac{1}{e} - 3$

(4) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + 2x \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + 2x \cos^2 x}{\cos^2 x} dx$
 $= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x + 2x) dx$
 $= \left[\tan x + x^2 \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$
 $= \left(1 + \frac{\pi^2}{16} \right) - \left(-1 + \frac{\pi^2}{16} \right) = 2$

5 (1) $3x - 5 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 3$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int (3x - 5)^6 dx &= \int t^6 \times \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int t^6 dt \\
 &= \frac{1}{21} t^7 + C = \frac{1}{21} (3x - 5)^7 + C
 \end{aligned}$$

(2) $1 - 2x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -2$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int \sin(1 - 2x) dx &= \int \sin t \times \left(-\frac{1}{2} \right) dt \\
 &= -\frac{1}{2} \int \sin t dt \\
 &= \frac{1}{2} \cos t + C = \frac{1}{2} \cos(1 - 2x) + C
 \end{aligned}$$

(3) $x^2 + 2 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2x$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int 4x \sqrt{x^2 + 2} dx &= \int 2\sqrt{t} dt = 2 \int t^{\frac{1}{2}} dt \\
 &= \frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{3} t \sqrt{t} + C \\
 &= \frac{4}{3} (x^2 + 2) \sqrt{x^2 + 2} + C
 \end{aligned}$$

(4) $\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$\int \frac{(\ln x)^5}{x} dx = \int t^5 dt = \frac{1}{6} t^6 + C = \frac{1}{6} (\ln x)^6 + C$$

6 (1) $\int \frac{3x^3 + x}{x^4 + x^2} dx = \int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x} dx = \int \frac{(x^3 + x)'}{x^3 + x} dx$
 $= \ln |x^3 + x| + C$

(2) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$
 $= - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + C$

(3) $\frac{2x^2 + 2x - 4}{x + 1} = 2x - \frac{4}{x + 1}$ 이므로
 $\int \frac{2x^2 + 2x - 4}{x + 1} dx = \int \left(2x - \frac{4}{x + 1} \right) dx$
 $= x^2 - 4 \ln |x + 1| + C$

(4) $\frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x(x + 1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1}$ 이므로
 $\int \frac{1}{x^2 + x} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1} \right) dx$
 $= \ln |x| - \ln |x + 1| + C$
 $= \ln \left| \frac{x}{x + 1} \right| + C$

7 (1) $3x+4=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3$ 이고, $x=-1$ 일 때 $t=1$,

$x=0$ 일 때 $t=4$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 3\sqrt{3x+4} dx &= \int_1^4 \sqrt{t} dt = \int_1^4 t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\ &= \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}\end{aligned}$$

(2) $x^3-1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3x^2$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=-1$,

$x=1$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 e^{x^3-1} dx &= \int_{-1}^0 e^t \times \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int_{-1}^0 e^t dt \\ &= \frac{1}{3} \left[e^t \right]_{-1}^0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3e}\end{aligned}$$

8 (1) $f(x)=2x$, $g'(x)=e^{-x}$ 으로 놓으면

$f'(x)=2$, $g(x)=-e^{-x}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int 2xe^{-x} dx &= -2xe^{-x} + \int 2e^{-x} dx \\ &= -2xe^{-x} - 2e^{-x} + C \\ &= -2(x+1)e^{-x} + C\end{aligned}$$

(2) $f(x)=4x$, $g'(x)=\cos 2x$ 로 놓으면

$f'(x)=4$, $g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int 4x \cos 2x dx &= 2x \sin 2x - \int 2 \sin 2x dx \\ &= 2x \sin 2x + \cos 2x + C\end{aligned}$$

(3) $f(x)=\ln 2x$, $g'(x)=1$ 로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \ln 2x dx &= x \ln 2x - \int \frac{1}{x} \times x dx \\ &= x \ln 2x - \int dx \\ &= x \ln 2x - x + C\end{aligned}$$

(4) $f(x)=x^2+1$, $g'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=-\cos x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int (x^2+1) \sin x dx \\ &= -(x^2+1) \cos x + \int 2x \cos x dx \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$\int 2x \cos x dx$ 에서 $u(x)=2x$, $v'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=\sin x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int 2x \cos x dx &= 2x \sin x - \int 2 \sin x dx \\ &= 2x \sin x + 2 \cos x + C \quad \dots\dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

①을 ②에 대입하면

$$\begin{aligned}\int (x^2+1) \sin x dx \\ &= -(x^2+1) \cos x + (2x \sin x + 2 \cos x + C) \\ &= 2x \sin x - (x^2-1) \cos x + C\end{aligned}$$

9 (1) $f(x)=x$, $g'(x)=e^{3x}$ 으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\frac{1}{3}e^{3x}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{3x} dx &= \left[\frac{1}{3}xe^{3x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}e^{3x} dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \left[\frac{1}{9}e^{3x} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{e^3}{9} - \frac{1}{9} \right) = \frac{2e^3+1}{9}\end{aligned}$$

(2) $f(x)=(\ln x)^2$, $g'(x)=1$ 로 놓으면

$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}$, $g(x)=x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx &= \left[x(\ln x)^2 \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{2\ln x}{x} \times x dx \\ &= 4e^2 - \int_1^{e^2} 2 \ln x dx \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$\int_1^{e^2} 2 \ln x dx$ 에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=2$ 로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=2x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} 2 \ln x dx &= \left[2x \ln x \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \times 2x dx \\ &= 4e^2 - \int_1^{e^2} 2 dx \\ &= 4e^2 - \left[2x \right]_1^{e^2} \\ &= 4e^2 - (2e^2 - 2) = 2e^2 + 2\end{aligned}$$

이것을 ①에 대입하면

$$\int_1^{e^2} (\ln x)^2 dx = 4e^2 - (2e^2 + 2) = 2e^2 - 2$$

14~16장

즉집게

기출문제

p. 74~77

1 ④	2 ③	3 $-\cot x - \csc x + C$	4 ③
5 ④	6 2	7 ②	8 $\frac{4}{5}$
10 $4+2\sqrt{2}$	11 ①	12 5	13 ⑤
15 ④	16 ④	17 ②	18 2
19 $-\frac{\ln 2}{2}$	20 6	21 $-2e+2$	22 ②
24 4	25 ②	26 $\frac{1}{4}$	27 $\frac{7}{3}$
28 (1) $f'(x)=\frac{1}{x(x+1)}$	(2) $-\ln 3$	29 1	

$$\begin{aligned}1 \quad f(x) &= \int \frac{3x^4-2}{x^2} dx = \int (3x^2-2x^{-2}) dx \\ &= x^3+2x^{-1}+C = x^3+\frac{2}{x}+C \\ \therefore f(2)-f(1) &= (9+C)-(3+C)=6\end{aligned}$$

$$2 \quad f'(x) = \frac{4-e^{2x}}{2+e^x} = \frac{(2+e^x)(2-e^x)}{2+e^x} = 2-e^x \text{이므로}$$

$$f(x) = \int (2-e^x) dx = 2x - e^x + C$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$-1+C=1 \quad \therefore C=2$$

따라서 $f(x)=2x-e^x+2$ 이므로

$$f(\ln 2)=2\ln 2-2+2=2\ln 2$$

$$\begin{aligned} 3 \quad \int \frac{1}{1-\cos x} dx &= \int \frac{1+\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} dx \\ &= \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} dx = \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} \right) dx \\ &= \int (\csc^2 x + \csc x \cot x) dx \\ &= -\cot x - \csc x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad \int_0^1 (3^x-1)(9^x+3^x+1) dx &= \int_0^1 (27^x-1) dx \\ &= \left[\frac{27^x}{\ln 27} - x \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{27}{\ln 27} - 1 \right) - \frac{1}{\ln 27} \\ &= \frac{26}{\ln 27} - 1 \end{aligned}$$

따라서 $a=26, b=1$ 이므로 $a-b=25$

$$\begin{aligned} 5 \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x + \tan x) \sec x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \sec x \tan x) dx \\ &= \left[x + \sec x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(\frac{\pi}{3} + 2 \right) - 1 = \frac{\pi}{3} + 1 \end{aligned}$$

6 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} \\ &= F'(0) = f(0) = 2 \end{aligned}$$

$$7 \quad x^2=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int x f(x^2) dx &= \frac{1}{2} \int f(t) dt = \frac{1}{2} F(t) + C \\ &= \frac{1}{2} F(x^2) + C \end{aligned}$$

$$8 \quad f'(x) = (2x+1)^4 \text{에서 } f(x) = \int (2x+1)^4 dx$$

$$2x+1=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (2x+1)^4 dx = \frac{1}{2} \int t^4 dt \\ &= \frac{1}{10} t^5 + C = \frac{1}{10} (2x+1)^5 + C \end{aligned}$$

$f(0)=1$ 에서

$$\frac{1}{10} + C = 1 \quad \therefore C = \frac{9}{10}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{10} (2x+1)^5 + \frac{9}{10}$ 이므로

$$f(-1) = \frac{4}{5}$$

$$9 \quad \ln x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \int \cos t dt \\ &= \sin t + C = \sin(\ln x) + C \end{aligned}$$

$f(1)=3$ 에서 $C=3$

따라서 $f(x) = \sin(\ln x) + 3$ 이므로

$$f(\sqrt{e^{3\pi}}) = \sin \frac{3}{2} \pi + 3 = 2$$

$$10 \quad 1+e^x=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = e^x \text{이고, } e^x = t-1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{3e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}} dx = \int \frac{3e^x}{\sqrt{1+e^x}} \times e^x dx \\ &= \int \frac{3(t-1)}{\sqrt{t}} dt = \int (3t^{\frac{1}{2}} - 3t^{-\frac{1}{2}}) dt \\ &= 2t^{\frac{3}{2}} - 6t^{\frac{1}{2}} + C = 2t\sqrt{t} - 6\sqrt{t} + C \\ &= 2(t-3)\sqrt{t} + C \\ &= 2(e^x-2)\sqrt{1+e^x} + C \end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$ 가 원점을 지나므로

$$-2\sqrt{2} + C = 0 \quad \therefore C = 2\sqrt{2}$$

따라서 $f(x) = 2(e^x-2)\sqrt{1+e^x} + 2\sqrt{2}$ 이므로

$$f(\ln 3) = 4 + 2\sqrt{2}$$

$$11 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \text{이므로}$$

$$f'(x) = x \times 2^{x^2+1} = 2x \times 2^{x^2}$$

$$x^2=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int 2x \times 2^{x^2} dx = \int 2^t dt \\ &= \frac{2^t}{\ln 2} + C = \frac{2^{x^2}}{\ln 2} + C \end{aligned}$$

$$f(0) = \frac{1}{\ln 2} \text{에서 } C=0$$

따라서 $f(x) = \frac{2^{x^2}}{\ln 2}$ 이므로

$$f(1) = \frac{2}{\ln 2}$$

$$12 \quad \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1}{x+1} dx &= \int \left(2 - \frac{3}{x+1} \right) dx \\ &= 2x - 3 \ln |x+1| + C \end{aligned}$$

따라서 $a=2, b=-3$ 이므로 $a-b=5$

- 13 $\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이고, $x=1$ 일 때 $t=0$, $x=e$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^2 + \ln x}{x} dx = \int_0^1 (t^2 + t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{5}{6}$$

- 14 $6x^2 + 2 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 12x$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=2$,

$x=1$ 일 때 $t=8$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{5x}{\sqrt{6x^2+2}} dx &= \frac{5}{12} \int_2^8 \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{5}{12} \int_2^8 t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{5}{6} \left[t^{\frac{1}{2}} \right]_2^8 \\ &= \frac{5}{6} (2\sqrt{2} - \sqrt{2}) = \frac{5\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

따라서 $p=6$, $q=5$ 이므로 $p+q=11$

15 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \sin x dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos^2 x) \sin x dx$

이때 $\cos x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ 이고, $x=0$ 일 때

$t=1$, $x=\frac{\pi}{3}$ 일 때 $t=\frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x dx &= \int_1^{\frac{1}{2}} (1 - t^2) \sin x dx \\ &= - \int_1^{\frac{1}{2}} (1 - t^2) dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - t^2) dt \\ &= \left[t - \frac{1}{3}t^3 \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{11}{24} = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

16 $\int_1^2 \frac{x-1}{x^2+3x} dx + \int_1^2 \frac{x-4}{x^2+3x} dx$
 $= \int_1^2 \frac{x-1}{x^2+3x} dx - \int_1^2 \frac{x-4}{x^2+3x} dx$
 $= \int_1^2 \left(\frac{x-1}{x^2+3x} - \frac{x-4}{x^2+3x} \right) dx$
 $= \int_1^2 \frac{3}{x^2+3x} dx = \int_1^2 \frac{3}{x(x+3)} dx$
 $= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right) dx$
 $= \left[\ln |x| - \ln |x+3| \right]_1^2$
 $= (\ln 2 - \ln 5) - (-\ln 4)$
 $= \ln \frac{8}{5}$

- 17 $\int_0^2 f(t) dt = k$ (k 는 상수)라고 하면 $f(x) = \frac{x}{1+x^2} + k$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(t) dt &= \int_0^2 \left(\frac{t}{1+t^2} + k \right) dt \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{2t}{1+t^2} + k \right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln(1+t^2) + kt \right]_0^2 \\ &= \frac{\ln 5}{2} + 2k \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{\ln 5}{2} + 2k = k \text{이므로 } k = -\frac{\ln 5}{2}$$

따라서 $f(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{\ln 5}{2}$ 이므로

$$f(1) = \frac{1 - \ln 5}{2}$$

- 18 $x = a \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = a \sec^2 \theta$ 이고,

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=a$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1}{x^2+a^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^2(\tan^2 \theta + 1)} \times a \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a} d\theta \\ &= \left[\frac{1}{a} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4a} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{\pi}{4a} = \frac{\pi}{8} \text{에서 } a=2$$

- 19 $g(x) = x$, $h'(x) = \sec^2 x$ 로 놓으면

$g'(x) = 1$, $h(x) = \tan x$ 이므로

$$f(x) = \int x \sec^2 x dx = x \tan x - \int \tan x dx$$

$$= x \tan x + \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$

$$= x \tan x + \ln |\cos x| + C$$

$$f(0) = -\frac{\pi}{4} \text{에서 } C = -\frac{\pi}{4}$$

따라서 $f(x) = x \tan x + \ln |\cos x| - \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \ln 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\ln 2}{2}$$

- 20 $f(x) = e^{2x}$, $g'(x) = \sin x$ 로 놓으면

$f'(x) = 2e^{2x}$, $g(x) = -\cos x$ 이므로

$$\int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + \int 2e^{2x} \cos x dx \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\int 2e^{2x} \cos x dx$ 에서 $u(x) = 2e^{2x}$, $v'(x) = \cos x$ 로 놓으면

$u'(x) = 4e^{2x}$, $v(x) = \sin x$ 이므로

$$\int 2e^{2x} \cos x dx = 2e^{2x} \sin x - \int 4e^{2x} \sin x dx \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - \int 4e^{2x} \sin x dx$$

$$5 \int e^{2x} \sin x dx = e^{2x} (2 \sin x - \cos x) + C_1$$

$$\therefore \int e^{2x} \sin x dx = e^{2x} \left(\frac{2}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x \right) + C$$

따라서 $a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{1}{5}$ 이므로 $10(a-b) = 6$

21 $f'(x) = (x^2-3)e^x$ 이므로 $f(x) = \int (x^2-3)e^x dx$

$g(x) = x^2-3$, $h'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$g'(x) = 2x$, $h(x) = e^x$ 이므로

$$f(x) = \int (x^2-3)e^x dx$$

$$= (x^2-3)e^x - \int 2xe^x dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\int 2xe^x dx$ 에서 $u(x) = 2x$, $v'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$u'(x) = 2$, $v(x) = e^x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int 2xe^x dx &= 2xe^x - \int 2e^x dx \\ &= 2xe^x - 2e^x + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3)e^x - (2xe^x - 2e^x + C_1) \\ &= (x^2-2x-1)e^x + C \end{aligned}$$

한편 $x=0$ 에서의 접점의 좌표는 $(0, 1)$ 이므로 곡선

$y=f(x)$ 는 점 $(0, 1)$ 을 지난다.

즉, $-1+C=1$ 이므로 $C=2$

따라서 $f(x) = (x^2-2x-1)e^x + 2$ 이므로 $f(1) = -2e + 2$

22 $f(x) = x$, $g'(x) = \cos 2x$ 로 놓으면

$f'(x) = 1$, $g(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx &= \left[\frac{1}{2} x \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x dx \\ &= \left[\frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

23 $\int_1^x \frac{f(t)}{t^2} dt = \frac{1}{2} (\ln x)^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \ln x$$

$\therefore f(x) = x \ln x$

$g(x) = \ln x$, $h'(x) = x$ 로 놓으면

$g'(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = \frac{1}{2} x^2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{e}} f(x) dx &= \int_1^{\sqrt{e}} x \ln x dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{2} x dx \\ &= \frac{e}{4} - \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{e}{4} - \left(\frac{e}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

24 $\int_0^4 \{f(x) + f(4-x)\} dx = \int_0^4 \pi \sin \frac{\pi}{4} x dx$ 이므로

$$\int_0^4 f(x) dx + \int_0^4 f(4-x) dx = \int_0^4 \pi \sin \frac{\pi}{4} x dx$$

$\dots\dots \textcircled{1}$

$\int_0^4 f(4-x) dx$ 에서 $4-x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -1$ 이고,

$x=0$ 일 때 $t=4$, $x=4$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(4-x) dx &= - \int_4^0 f(t) dt \\ &= \int_0^4 f(t) dt = \int_0^4 f(x) dx \end{aligned}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^4 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx = \int_0^4 \pi \sin \frac{\pi}{4} x dx$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^4 f(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^4 \pi \sin \frac{\pi}{4} x dx \\ &= \frac{1}{2} \left[-4 \cos \frac{\pi}{4} x \right]_0^4 = \frac{1}{2} \{4 - (-4)\} = 4 \end{aligned}$$

25 $\int_0^1 f(x)g'(x) dx = \frac{3}{16}$ 에서

$$\left[f(x)g(x) \right]_0^1 - \int_0^1 f'(x)g(x) dx = \frac{3}{16}$$

$$f(1)g(1) - f(0)g(0) - \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^4} dx = \frac{3}{16}$$

$$f(1) - \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^4} dx = \frac{3}{16} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^4} dx$ 에서 $1+x^2=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2x$ 이고,

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^4} dx &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{t^4} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 t^{-4} dt \\ &= -\frac{1}{6} \left[t^{-3} \right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{6} \left(\frac{1}{8} - 1 \right) = \frac{7}{48} \end{aligned}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$f(1) - \frac{7}{48} = \frac{3}{16} \quad \therefore f(1) = \frac{1}{3}$$

26 $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x \cos x dx$ 에서

$f(x) = \cos^3 x$, $g'(x) = \cos x$ 로 놓으면

$f'(x) = -3 \cos^2 x \sin x$, $g(x) = \sin x$ 이므로

$$I_4 = \left[\cos^3 x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3 \cos^2 x \sin^2 x dx$$

$$= \frac{1}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 3 \cos^2 x (1 - \cos^2 x) dx$$

$$= \frac{1}{4} + 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx - 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx$$

$$= \frac{1}{4} + 3I_2 - 3I_4$$

$$\therefore 4I_4 - 3I_2 = \frac{1}{4}$$

27 $\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{5}$ 에서 $\sqrt{x^4 - x^2} = x\sqrt{x^2 - 1}$
 $x^2 - 1 = t$ 로 놓으면 (가)
 $\frac{dt}{dx} = 2x$ 이고, $x = \sqrt{2}$ 일 때 $t = 1$, $x = \sqrt{5}$ 일 때 $t = 4$ 이므로
 $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \sqrt{x^4 - x^2} dx = \int_1^4 x\sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{t} dt$ (나)
 $= \frac{1}{2} \int_1^4 t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} \left[t^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{7}{3}$ (다)

채점 기준	배점
(가) $x^2 - 1 = t$ 로 놓는다.	2점
(나) t 에 대한 정적분으로 나타낸다.	2점
(다) 정적분의 값을 구한다.	2점

28 (1) $F(x) = xf(x) - \ln(x+1)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - \frac{1}{x+1}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$
 (가)

(2) $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ 이므로

$$f(x) = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \ln x - \ln(x+1) + C$$
 ㉠

한편 $F(x) = xf(x) - \ln(x+1)$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$F(1) = f(1) - \ln 2$$

이때 $F(1) = -3 \ln 2$ 이고 ㉠에서 $f(1) = -\ln 2 + C$ 이므로

$$-3 \ln 2 = (-\ln 2 + C) - \ln 2 \quad \therefore C = -\ln 2$$

따라서 $f(x) = \ln x - \ln(x+1) - \ln 2$ 이므로 (나)

$$f(2) = \ln 2 - \ln 3 - \ln 2 = -\ln 3$$
 (다)

채점 기준	배점
(가) $f'(x)$ 를 구한다.	2점
(나) $f(x)$ 를 구한다.	4점
(다) $f(2)$ 의 값을 구한다.	1점

29 $f(x) = x$, $g'(x) = e^{-nx}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = 1, g(x) = -\frac{e^{-nx}}{n}$$
이므로

$$a_n = \int_0^1 x e^{-nx} dx = \left[-\frac{x e^{-nx}}{n} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{n} dx$$

$$= -\frac{1}{n e^n} - \left[\frac{e^{-nx}}{n^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{n e^n} - \frac{1}{n^2 e^n} + \frac{1}{n^2}$$
 (가)

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{e^n} - \frac{1}{e^n} + 1 \right)$$

$$= 0 + 0 + 1 = 1$$
 (나)

채점 기준	배점
(가) a_n 을 구한다.	4점
(나) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n$ 의 값을 구한다.	2점

확인 문제 p. 78

1 $f(x) = x^3$, $a=0$, $b=2$ 로 놓으면
 $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$, $x_k = a + k\Delta x = \frac{2k}{n}$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n} \right)^3 \times \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$
 $= \int_0^2 f(x) dx$
 $= \int_0^2 x^3 dx$
 $= \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 = 4$

2 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos x \geq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[\sin x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - (-1) = 2$$

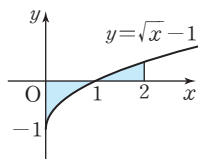
교/과/서/속 핵심 유형 + 실전 문제

p. 79

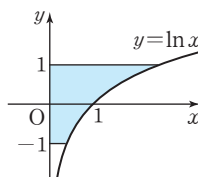
1 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \{ (n+1)^3 + (n+2)^3 + \cdots + (n+n)^3 \}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^3 + \left(1 + \frac{2}{n} \right)^3 + \cdots + \left(1 + \frac{n}{n} \right)^3 \right\} \times \frac{1}{n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right)^3 \times \frac{1}{n}$
 이때 $f(x) = x^3$, $a=1$, $b=2$ 로 놓으면
 $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$, $x_k = a + k\Delta x = 1 + \frac{k}{n}$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \{ (n+1)^3 + (n+2)^3 + \cdots + (n+n)^3 \}$
 $= \int_1^2 x^3 dx$
 $= \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_1^2 = \frac{15}{4}$
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n} \left\{ \left(4 + \frac{2}{n} \right)^2 + \left(4 + \frac{4}{n} \right)^2 + \cdots + \left(4 + \frac{2n}{n} \right)^2 \right\}$
 $= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(4 + \frac{2k}{n} \right)^2 \times \frac{2}{n}$
 이때 $f(x) = x^2$, $a=4$, $b=6$ 으로 놓으면
 $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$, $x_k = a + k\Delta x = 4 + \frac{2k}{n}$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n} \left\{ \left(4 + \frac{2}{n} \right)^2 + \left(4 + \frac{4}{n} \right)^2 + \cdots + \left(4 + \frac{2n}{n} \right)^2 \right\}$
 $= 3 \int_4^6 x^2 dx$
 $= 3 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_4^6 = 152$

2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left\{ \ln \left(2 + \frac{2}{n} \right) + \ln \left(2 + \frac{4}{n} \right) + \cdots + \ln \left(2 + \frac{2n}{n} \right) \right\}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \ln \left(2 + \frac{2k}{n} \right) \right\} \times \frac{2}{n}$
 이때 $f(x) = \ln x$, $a=2$, $b=4$ 로 놓으면
 $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$, $x_k = a + k\Delta x = 2 + \frac{2k}{n}$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \left\{ \ln \left(2 + \frac{2}{n} \right) + \ln \left(2 + \frac{4}{n} \right) + \cdots + \ln \left(2 + \frac{2n}{n} \right) \right\}$
 $= \int_2^4 \ln x dx$
 $g(x) = \ln x$, $h'(x) = 1$ 로 놓으면
 $g'(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = x$ 이므로
 $\int_2^4 \ln x dx = \left[x \ln x \right]_2^4 - \int_2^4 dx$
 $= 4 \ln 4 - 2 \ln 2 - \left[x \right]_2^4$
 $= 6 \ln 2 - 2$
 따라서 구하는 값은 ④이다.

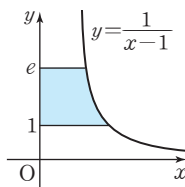
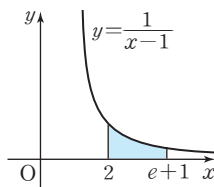
3 (1) 곡선 $y = \sqrt{x} - 1$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $\sqrt{x} - 1 = 0$ 에서 $x=1$
 따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는
 $\int_0^1 (-\sqrt{x} + 1) dx$
 $+ \int_1^2 (\sqrt{x} - 1) dx$
 $= \left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x \right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x \right]_1^2$
 $= \frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{2}-5}{3} = \frac{4\sqrt{2}-4}{3}$



(2) $y = \ln x$ 에서 $x = e^y$
 따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는
 $\int_{-1}^1 e^y dy = \left[e^y \right]_{-1}^1 = e - \frac{1}{e}$



4 오른쪽 그림에서 넓이 S_1 은
 $S_1 = \int_2^{e+1} \frac{1}{x-1} dx$
 $= \left[\ln |x-1| \right]_2^{e+1} = 1$
 한편 $y = \frac{1}{x-1}$ 에서 $y(x-1) = 1$
 $xy = y + 1 \quad \therefore x = 1 + \frac{1}{y}$
 따라서 오른쪽 그림에서 넓이 S_2 는
 $S_2 = \int_1^e \left(1 + \frac{1}{y} \right) dy$
 $= \left[y + \ln |y| \right]_1^e = e$
 $\therefore S_1 + S_2 = 1 + e$

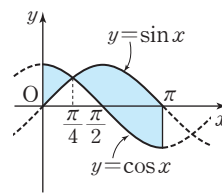


5 (1) $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, 두 곡선의 교점의 x 좌표는
 $\sin x = \cos x$ 에서

$x = \frac{\pi}{4}$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx$
 $+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx$

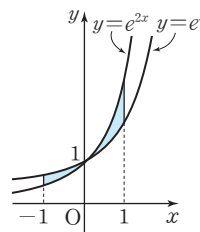


$= \left[\sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\cos x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$
 $= (\sqrt{2} - 1) + (1 + \sqrt{2})$
 $= 2\sqrt{2}$

(2) 두 곡선의 교점의 x 좌표는 $e^x = e^{2x}$ 에서
 $x = 0$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^0 (e^x - e^{2x}) dx$
 $+ \int_0^1 (e^{2x} - e^x) dx$
 $= \left[e^x - \frac{1}{2}e^{2x} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}e^{2x} - e^x \right]_0^1$
 $= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e} + \frac{1}{2e^2} \right) + \left(\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} \right)$
 $= \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{e} + \frac{1}{2e^2} + 1$

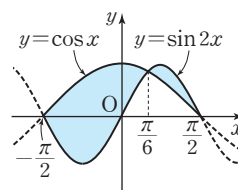


6 두 곡선의 교점의 x 좌표는 $\cos x = \sin 2x$ 에서
 $\cos x = \sin(x+x)$
 $\cos x = 2 \sin x \cos x$
 $\cos x(1 - 2 \sin x) = 0$
 $\cos x = 0$ 또는 $\sin x = \frac{1}{2}$

$\therefore x = -\frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{\pi}{2}$ ($\because -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \sin 2x) dx$
 $+ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - \cos x) dx$
 $= \left[\sin x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}$
 $+ \left[-\frac{1}{2} \cos 2x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$



$= \frac{9}{4} + \frac{1}{4}$
 $= \frac{5}{2}$

따라서 구하는 도형의 넓이는 ⑤이다.

확인 문제

p. 80

- 1 단면과 밑면의 닮음비가
- $x : h$
- 이므로 넓이의 비는

$$S(x) : S = x^2 : h^2 \quad \therefore S(x) = \frac{S}{h^2} x^2$$

따라서 구하는 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^h S(x) dx &= \int_0^h \frac{S}{h^2} x^2 dx \\ &= \frac{S}{h^2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^h \\ &= \frac{S}{h^2} \times \frac{1}{3} h^3 = \frac{1}{3} Sh \end{aligned}$$

$$\therefore \textcircled{7} x^2 \quad \textcircled{8} \frac{S}{h^2} x^2 \quad \textcircled{9} \frac{1}{3} Sh$$

- 2 (1)
- $0 + \int_0^2 \sin \pi t dt = \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_0^2 = 0$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^2 |\sin \pi t| dt &= \int_0^1 \sin \pi t dt + \int_1^2 (-\sin \pi t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_0^1 + \left[\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_1^2 \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

핵심 유형

실전 문제

교/과/서/속

p. 81

- 1 물의 깊이가
- x
- 일 때, 수면의 넓이를
- $S(x)$
- 라고 하면

$$S(x) = x^2 + 2$$

따라서 구하는 물의 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^3 S(x) dx &= \int_0^3 (x^2 + 2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 + 2x \right]_0^3 = 15 \end{aligned}$$

- 2
- x
- 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면은 한 변의 길이가
- $\tan x$
- 인 정삼각형이므로 단면의 넓이를
- $S(x)$
- 라고 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \tan^2 x$$

따라서 구하는 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} S(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3}}{4} \tan^2 x dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

- 3 (1)
- $\frac{dx}{dt} = 4t, \frac{dy}{dt} = -3t$
- 이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_1^3 \sqrt{(4t)^2 + (-3t)^2} dt &= \int_1^3 \sqrt{25t^2} dt \\ &= \int_1^3 5t dt \\ &= \left[\frac{5}{2} t^2 \right]_1^3 = 20 \end{aligned}$$

- (2)
- $\frac{dx}{dt} = t^2 - 2, \frac{dy}{dt} = 2\sqrt{2}t$
- 이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_1^3 \sqrt{(t^2 - 2)^2 + (2\sqrt{2}t)^2} dt &= \int_1^3 \sqrt{t^4 + 4t^2 + 4} dt \\ &= \int_1^3 (t^2 + 2) dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 + 2t \right]_1^3 = \frac{38}{3} \end{aligned}$$

- 4
- $\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t, \frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t$
- 이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2} dt \\ = \int_0^2 \sqrt{2e^{2t}(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt \\ = \int_0^2 \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2} \int_0^2 e^t dt \\ = \sqrt{2} \left[e^t \right]_0^2 = \sqrt{2}(e^2 - 1) \end{aligned}$$

- 5 (1)
- $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \left(x - \frac{4}{9} \right)^{\frac{1}{2}}$
- 이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_1^3 \sqrt{1 + \left\{ \frac{3}{2} \left(x - \frac{4}{9} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2} dx &= \int_1^3 \sqrt{1 + \frac{9}{4} \left(x - \frac{4}{9} \right)} dx \\ &= \int_1^3 \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} dx = \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 \\ &= 3\sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

- (2)
- $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}} \times 2x = x(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}}$
- 이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_1^3 \sqrt{1 + \{x(x^2 + 2)^{\frac{1}{2}}\}^2} dx &= \int_1^3 \sqrt{1 + x^2(x^2 + 2)} dx \\ &= \int_1^3 \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1} dx \\ &= \int_1^3 (x^2 + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 + x \right]_1^3 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

- 6
- $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$
- 이므로 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_2^4 \sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right) \right\}^2} dx &= \int_2^4 \sqrt{\frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{x} \right)^2} dx \\ &= \int_2^4 \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 + \ln x \right]_2^4 = 3 + \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

1 ③	2 ㄱ, ㄴ, ㄷ	3 $\ln 3$	4 1
5 ④	6 4	7 $\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}$	8 43
10 $\frac{14}{3} - 2\ln 2$	11 $\frac{e}{2} - 1$	12 9	13 $\frac{2}{3}$
14 $\frac{3}{2}$	15 ②	16 $\sqrt{3}(e^2+1)$	17 ①
18 2	19 3	20 $\frac{1}{2}\left(e^3 - \frac{1}{e^3}\right)$	21 ②
22 $\frac{3}{4}$	23 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$	24 $\frac{3}{4}$	25 $-\frac{2}{3}$
27 $\frac{32}{3}$			

1 색칠한 직사각형의 넓이의 합을 S_n 이라고 하면

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \times \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \times \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \times \left(\frac{n}{n}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \\
 \therefore S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \boxed{\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

$$\therefore (7) k^2 \quad (4) 2 + \frac{1}{n} \quad (4) \frac{1}{3}$$

2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)^4 + (3n+2)^4 + \cdots + (3n+n)^4}{n^5}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(3 + \frac{1}{n}\right)^4 + \left(3 + \frac{2}{n}\right)^4 + \cdots + \left(3 + \frac{n}{n}\right)^4 \right\} \times \frac{1}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(3 + \frac{k}{n}\right)^4 \times \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

ㄱ. $f(x) = x^4$, $a=3$, $b=4$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}, \quad x_k = a + k\Delta x = 3 + \frac{k}{n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(3 + \frac{k}{n}\right)^4 \times \frac{1}{n} = \int_3^4 x^4 dx$$

ㄴ. $f(x) = (x+3)^4$, $a=0$, $b=1$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}, \quad x_k = a + k\Delta x = \frac{k}{n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(3 + \frac{k}{n}\right)^4 \times \frac{1}{n} = \int_0^1 (x+3)^4 dx$$

ㄷ. $f(x) = (x-3)^4$, $a=6$, $b=7$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}, \quad x_k = a + k\Delta x = 6 + \frac{k}{n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(3 + \frac{k}{n}\right)^4 \times \frac{1}{n} = \int_6^7 (x-3)^4 dx$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

3 $a=1$, $b=2$ 로 놓으면

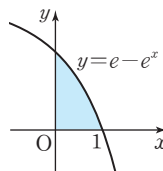
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}, \quad x_k = a + k\Delta x = 1 + \frac{k}{n}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) &= \int_1^2 f(x) dx \\
 &= \int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x} dx \\
 &= \left[\ln |x^2+x| \right]_1^2 = \ln 3
 \end{aligned}$$

4 곡선 $y=e-e^x$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $e-e^x=0$ 에서 $e^x=e \quad \therefore x=1$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 (e-e^x) dx = \left[ex - e^x \right]_0^1 = 1$$



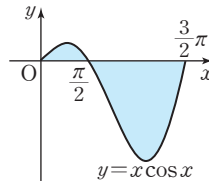
5 곡선 $y=x \cos x$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $x \cos x=0$ 에서 $x=0$ 또는 $\cos x=0$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3\pi}{2} \quad (\because 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2})$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는

넓이는

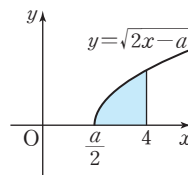
$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \\
 &\quad + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-x \cos x) dx \\
 &= \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - \left[x \sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\
 &\quad + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{\pi}{2} + \left[\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi - \left[\cos x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi - 0 = \frac{5}{2}\pi - 1
 \end{aligned}$$

6 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{a}{2}}^4 \sqrt{2x-a} dx &= \left[\frac{1}{3} (2x-a)^{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{a}{2}}^4 \\
 &= \frac{1}{3} (8-a)^{\frac{3}{2}}
 \end{aligned}$$



$$\text{즉, } \frac{1}{3} (8-a)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} \text{에서}$$

$$8-a=4$$

$$\therefore a=4$$

7 곡선 $y=\sin \frac{\pi}{2}x$ ($0 \leq x \leq 2$)와

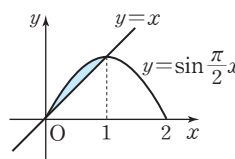
직선 $y=x$ 는 오른쪽 그림과 같

고 교점의 x 좌표는

$$x=0 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \left(\sin \frac{\pi}{2}x - x \right) dx &= \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\
 &= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$



- 8 두 곡선 $y = \frac{1}{x+1}$, $y = -\frac{2}{x-8}$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{x+1} = -\frac{2}{x-8} \text{에서 } 2(x+1) = -(x-8)$$

$$3x=6 \quad \therefore x=2$$

오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

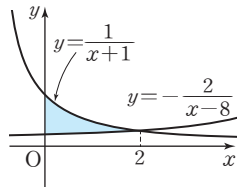
$$\int_0^2 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-8} \right) dx$$

$$= \left[\ln|x+1| + 2\ln|x-8| \right]_0^2$$

$$= \ln 3 + 2\ln 6 - 2\ln 8$$

$$= \ln \frac{27}{16}$$

따라서 $a=16$, $b=27$ 이므로 $a+b=43$



- 9 곡선 $y = \sqrt{x}$ 과 직선 $y = ax$ 의 교점의 x 좌표는 $\sqrt{x} = ax$ 에서

$$x = a^2 x^2, x(a^2 x - 1) = 0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x = \frac{1}{a^2}$$

오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이는

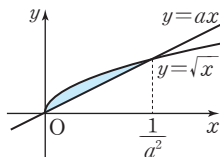
$$\int_0^{\frac{1}{a^2}} (\sqrt{x} - ax) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{a}{2} x^2 \right]_0^{\frac{1}{a^2}}$$

$$= \frac{2}{3a^3} - \frac{1}{2a^3} = \frac{1}{6a^3}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{6a^3} = \frac{4}{3} \text{에서}$$

$$a^3 = \frac{1}{8} \quad \therefore a = \frac{1}{2} (\because a > 0)$$



- 10 두 곡선 $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2 = \frac{1}{x}$ 에서

$$x^3 = 1 \quad \therefore x=1 (\because x \geq 0)$$

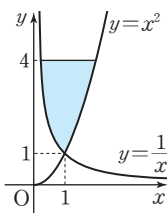
따라서 두 곡선의 교점의 y 좌표는 $y=1$

$$y = x^2, y = \frac{1}{x} \text{에서 각각 } x = \sqrt{y}, x = \frac{1}{y}$$

이므로 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_1^4 \left(\sqrt{y} - \frac{1}{y} \right) dy = \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \ln y \right]_1^4$$

$$= \frac{14}{3} - 2\ln 2$$



- 11 $f(x) = \ln x$ 라고 하면 $f'(x) = \frac{1}{x}$

점점의 좌표를 $(t, \ln t)$ 라고 하면 접선의 방정식은

$$y - \ln t = \frac{1}{t}(x - t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-\ln t = -1 \quad \therefore t = e$$

이것을 ①에 대입하면 접선의 방정식은

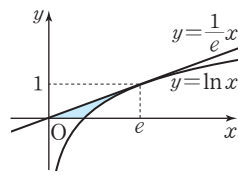
$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \quad \therefore y = \frac{1}{e}x$$

$$y = \ln x, y = \frac{1}{e}x \text{에서 각각}$$

$x = e^y, x = ey$ 이므로 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\int_0^1 (e^y - ey) dy = \left[e^y - \frac{e}{2} y^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{e}{2} - 1$$



- 12 $\int_0^a (\sqrt{x} - 2) dx = 0$ 이므로 $\left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x \right]_0^a = 0$

$$\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} - 2a = 0, \frac{2}{3} a(\sqrt{a} - 3) = 0$$

$$\therefore \sqrt{a} = 3 (\because a > 4) \quad \therefore a = 9$$

- 13 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는 곡선 $y = f(x)$ 과 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

곡선 $y = f(x)$ 과 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\sqrt{4x-3} = x \text{에서}$$

$$4x - 3 = x^2, x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

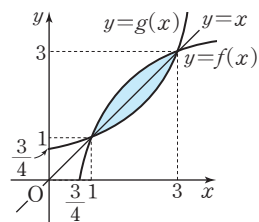
따라서 오른쪽 그림에서 구하는

넓이는

$$2 \int_1^3 (\sqrt{4x-3} - x) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{6} (4x-3)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 \right]_1^3$$

$$= 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



- 14 $S(a) = \int_1^a \frac{3 \ln x}{x} dx$ 에서 $\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이

고, $x=1$ 일 때 $t=0$, $x=a$ 일 때 $t=\ln a$ 이므로

$$S(a) = \int_0^{\ln a} 3t dt = \left[\frac{3}{2} t^2 \right]_0^{\ln a} = \frac{3}{2} (\ln a)^2$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow 1^+} \frac{S(a)}{(a-1)^2} = \frac{3}{2} \lim_{a \rightarrow 1^+} \left(\frac{\ln a}{a-1} \right)^2$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\ln(1+x)}{x} \right\}^2 = \frac{3}{2} \times 1^2 = \frac{3}{2}$$

- 15 물의 깊이가 x 일 때, 수면의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면

$$S(x) = \pi(e^{\sin x} \cos x + 1)$$

따라서 구하는 물의 부피는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} \cos x + 1) dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx \text{에서 } \sin x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \cos x \text{이}$$

고 $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx = \int_0^1 e^t dt = \left[e^t \right]_0^1 = e - 1$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x) dx &= \pi(e-1) + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \pi(e-1) + \pi \left[x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi(e-1) + \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

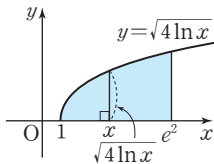
16 곡선 $y = \sqrt{4 \ln x}$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x=1$

x 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{4 \ln x})^2 = \sqrt{3} \ln x$$

따라서 구하는 부피는

$$\begin{aligned}\int_1^e S(x) dx &= \int_1^e \sqrt{3} \ln x dx \\ &= \sqrt{3} \left(\left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e dx \right) \\ &= \sqrt{3} \left(2e^2 - \left[x \right]_1^e \right) = \sqrt{3}(e^2 + 1)\end{aligned}$$



17 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ 와 y 축의 교점의 y 좌표는 $y=2$

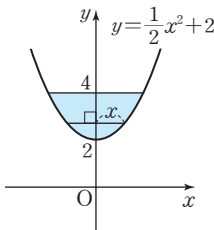
$$y = \frac{1}{2}x^2 + 2 \text{에서 } x^2 = 2(y-2)$$

y 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(y)$ 라고 하면

$$S(y) = \frac{\pi}{2} x^2 = \pi(y-2)$$

따라서 구하는 부피는

$$\begin{aligned}\int_2^4 S(y) dy &= \int_2^4 \pi(y-2) dy \\ &= \pi \left[\frac{1}{2}y^2 - 2y \right]_2^4 = 2\pi\end{aligned}$$



18 운동 방향이 바뀌는 순간의 속도는 0이므로 $\cos \frac{t}{2} = 0$

이때 $t > 0$ 이므로 $t = \pi$ 또는 $t = 3\pi$ 또는 ...

따라서 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t = \pi$ 이므로 구하는 거리는

$$\int_0^{\pi} \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt = \int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2} dt = \left[2 \sin \frac{t}{2} \right]_0^{\pi} = 2$$

19 $\frac{dx}{dt} = t^2 - 1$, $\frac{dy}{dt} = 2t$ 이므로 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{(t^2-1)^2 + (2t)^2} dt &= \int_0^a \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} dt \\ &= \int_0^a (t^2 + 1) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 + t \right]_0^a = \frac{1}{3}a^3 + a\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{3}a^3 + a = 12 \text{에서 } a^3 + 3a - 36 = 0$$

$$(a-3)(a^2 + 3a + 12) = 0$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a^2 + 3a + 12 > 0)$$

20 $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 이므로 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2} dx &= \int_0^3 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2} dx \\ &= \int_0^3 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[e^x - e^{-x} \right]_0^3 = \frac{1}{2} \left(e^3 - \frac{1}{e^3} \right)\end{aligned}$$

21 $\frac{dx}{dt} = 6t^2$, $\frac{dy}{dt} = 6t$ 이므로 곡선의 길이를 l 이라고 하면

$$\begin{aligned}l &= \int_0^1 \sqrt{(6t^2)^2 + (6t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{36t^2(t^2 + 1)} dt \\ &= \int_0^1 6t\sqrt{t^2 + 1} dt\end{aligned}$$

$t^2 + 1 = s$ 로 놓으면 $\frac{ds}{dt} = 2t$ 이고, $t=0$ 일 때 $s=1$, $t=1$ 일 때 $s=2$ 이므로

$$l = \int_0^1 6t\sqrt{t^2 + 1} dt = \int_1^2 3\sqrt{s} ds = \left[2s^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = 4\sqrt{2} - 2$$

22 두 곡선 $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$),

$y = a \sin x$ 의 교점의 x 좌표를 θ

라고 하면

$$\cos \theta = a \sin \theta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변을 제곱하면

$$\cos^2 \theta = a^2 \sin^2 \theta, \cos^2 \theta = a^2(1 - \cos^2 \theta)$$

$$(1 + a^2) \cos^2 \theta = a^2, \cos^2 \theta = \frac{a^2}{1 + a^2}$$

$$\text{이때 } \cos \theta > 0 \text{이므로 } \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하여 풀면 } \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

곡선 $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라고 하면

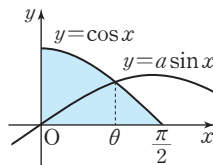
$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

두 곡선 $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$), $y = a \sin x$ 와 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라고 하면

$$\begin{aligned}S_2 &= \int_0^{\theta} (\cos x - a \sin x) dx \\ &= \left[\sin x + a \cos x \right]_0^{\theta} = \sin \theta + a \cos \theta - a\end{aligned}$$

이때 $S_2 = \frac{1}{2} S_1$ 이므로

$$\sin \theta + a \cos \theta - a = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$



㉔에 ㉓, ㉔을 대입하면

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{1+a^2}} - a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1+a^2}{\sqrt{1+a^2}} = a + \frac{1}{2}, \sqrt{1+a^2} = a + \frac{1}{2}$$

양변을 제곱하면

$$1+a^2 = a^2 + a + \frac{1}{4} \quad \therefore a = \frac{3}{4}$$

23 오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을

원점 O, 밑면의 지름을 포함하는

직선을 x축으로 하고, x축 위의 점

P(x, 0) (-1 ≤ x ≤ 1)을 지나고 x

축에 수직인 평면으로 입체도형을

자른 단면을 삼각형 PQR라고 하면

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\overline{RQ} = \overline{PQ} \tan 60^\circ = \sqrt{3}(1-x^2)$$

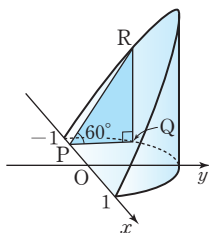
삼각형 PQR의 넓이를 S(x)라고 하면

$$S(x) = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{RQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_{-1}^1 S(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2) dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$



24 곡선의 길이가 $2\sqrt{t} + f(t) + 2$ 이므로

$$\int_1^t \sqrt{1+\{f'(x)\}^2} dx = 2\sqrt{t} + f(t) + 2$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$\sqrt{1+\{f'(t)\}^2} = \frac{1}{\sqrt{t}} + f'(t)$$

$$1+\{f'(t)\}^2 = \frac{1}{t} + \frac{2}{\sqrt{t}}f'(t) + \{f'(t)\}^2$$

$$1 = \frac{1}{t} + \frac{2}{\sqrt{t}}f'(t)$$

위 식의 양변에 t=4를 대입하면

$$1 = \frac{1}{4} + f'(4) \quad \therefore f'(4) = \frac{3}{4}$$

25 곡선 $y = \frac{2x}{x^2+3}$ 와 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 의 교점의 x좌표는

$$\frac{2x}{x^2+3} = \frac{1}{2}x \text{에서 } 4x = x^3 + 3x, x(x+1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1 \quad \dots\dots (가)$$

곡선과 직선으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로 구

하는 넓이는

$$2 \int_0^1 \left(\frac{2x}{x^2+3} - \frac{1}{2}x \right) dx = 2 \left[\ln(x^2+3) - \frac{1}{4}x^2 \right]_0^1$$

$$= 2 \left(\ln 4 - \frac{1}{4} - \ln 3 \right)$$

$$= -\frac{1}{2} + 2 \ln \frac{4}{3} \quad \dots\dots (나)$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{1}{2}, b = \frac{4}{3} \text{이므로 } ab = -\frac{2}{3} \quad \dots\dots (다)$$

채점 기준	배점
(가) 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구한다.	2점
(나) 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.	3점
(다) ab의 값을 구한다.	1점

$$26 S_A = \int_e^{e^2} \log_3 x dx$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \int_e^{e^2} \ln x dx$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \left(\left[x \ln x \right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} dx \right)$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \left(2e^2 - e - \left[x \right]_e^{e^2} \right) = \frac{e^2}{\ln 3} \quad \dots\dots (가)$$

$$S_B = \int_e^{e^2} (\log_2 x - \log_3 x) dx$$

$$= \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} \right) \int_e^{e^2} \ln x dx$$

$$= \frac{e^2}{\ln 2} - \frac{e^2}{\ln 3} \quad \dots\dots (나)$$

$$\therefore \frac{S_B}{S_A} = \frac{\frac{e^2}{\ln 2} - \frac{e^2}{\ln 3}}{\frac{e^2}{\ln 3}} = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1$$

$$= \log_2 3 - 1 = \log_2 \frac{3}{2}$$

$$\therefore k = \frac{3}{2} \quad \dots\dots (다)$$

채점 기준	배점
(가) S_A 의 값을 구한다.	2점
(나) S_B 의 값을 구한다.	2점
(다) k의 값을 구한다.	2점

27 오른쪽 그림과 같이 반원의 지름

의 중심을 원점 O, 지름을 포함

하는 직선을 x축으로 하고, x축

위의 점 P(x, 0) (-2 ≤ x ≤ 2)

을 지나고 x축에 수직인 평면으

로 입체도형을 자를 때 반원과 만나는 P가 아닌 점을 Q라

고 하면

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{4-x^2}$$

점 P를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단

면의 넓이를 S(x)라고 하면

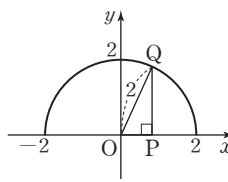
$$S(x) = \overline{PQ}^2 = (\sqrt{4-x^2})^2 = 4-x^2 \quad \dots\dots (가)$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_{-2}^2 S(x) dx = \int_{-2}^2 (4-x^2) dx$$

$$= \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-2}^2 = \frac{32}{3} \quad \dots\dots (나)$$

채점 기준	배점
(가) 단면의 넓이를 식으로 나타낸다.	4점
(나) 입체도형의 부피를 구한다.	3점



01~02 내공 점검

p. 88~89

1 ②	2 ⑤	3 ⑤	4 ⑤	5 ①
6 ④	7 ②	8 ③	9 ②	10 3
11 1	12 2	13 (1) 2 (2) $\frac{5}{4}$	14 2	

1 ㄱ. 수열 $\{3-5n\}$ 은 발산($-\infty$)한다.

ㄴ. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ (수렴)

ㄷ. 수열 $\{2+(-1)^n\}$ 은 발산(진동)한다.

ㄹ. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+3} = 2$ (수렴)

따라서 보기 중 수렴하는 수열은 ㄴ, ㄹ이다.

2 수열 $\{a_n\}$ 이 0이 아닌 실수에 수렴하므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$ ($\alpha \neq 0$)라고 하면

$a_n + \frac{4}{a_{n+1}} + 4 = 0$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{4}{a_{n+1}} + 4\right) = 0$ 이므로

$\alpha + \frac{4}{\alpha} + 4 = 0, \alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0$

$(\alpha+2)^2 = 0 \therefore \alpha = -2$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -2$ 이므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 6) = -2 + 6 = 4$

3 ① $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{2n^2-1} = 0$ ② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 0$

③ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2-3} = 1$ ④ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+4}} = 1$

⑤ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}}{3n+2} = \infty$

따라서 극한값이 존재하지 않는 것은 ⑤이다.

4 $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)$

$= \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3}{n(n+1)(n+2)} = 3$

5 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+4)a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (2n+3)a_n \times \frac{n+4}{2n+3} \right\} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

6 $b \geq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+an}+bn) = \infty$ 이므로 $b < 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+an}+bn)$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+an}+bn)(\sqrt{n^2+an}-bn)}{\sqrt{n^2+an}-bn}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-b^2)n^2+an}{\sqrt{n^2+an}-bn}$

$1-b^2 \neq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-b^2)n^2+an}{\sqrt{n^2+an}-bn} = \infty$ (또는 $-\infty$)이므로

$1-b^2=0 \therefore b=-1$ ($\because b < 0$)

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an}{\sqrt{n^2+an}+n} = \frac{a}{2} = 4$ 이므로 $a=8$

$\therefore a+b=7$

7 $n > 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$0 < 2n^2-4n < a_n < 2n^2+4n$ 이므로

$\frac{1}{2n^2+4n} < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{2n^2-4n}$

위의 부등식의 각 변에 n^2 을 곱하면

$\frac{n^2}{2n^2+4n} < \frac{n^2}{a_n} < \frac{n^2}{2n^2-4n}$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2+4n} = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2-4n} = \frac{1}{2}$ 이므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a_n} = \frac{1}{2}$

8 주어진 등비수열의 첫째항은 $(x-1)(2x-1)$, 공비는

$2x-1$ 이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$(x-1)(2x-1) = 0$ 또는 $-1 < 2x-1 \leq 1$

$(x-1)(2x-1) = 0$ 에서 $x=1$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ ㉠

$-1 < 2x-1 \leq 1$ 에서 $0 < x \leq 1$ ㉡

㉠, ㉡에서 $0 < x \leq 1$

9 $\log_2 a_n = n$ 에서 $a_n = 2^n$

$\log_3 b_n = n+1$ 에서 $b_n = 3^{n+1}$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 3^{n+1}}{2^n + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3} = -1$

10 (i) $0 < r < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+2} + 2r + 5}{r^n + 1} = 2r + 5 = 4$

그런데 $0 < r < 1$ 이므로 이를 만족하는 실수 r 는 없다.

(ii) $r=1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ 이므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+2} + 2r + 5}{r^n + 1} = \frac{1+2+5}{1+1} = 4$

$\therefore r=1$

(iii) $r > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n = 0$ 이므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+2} + 2r + 5}{r^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^2 + 2\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} + 5\left(\frac{1}{r}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{r}\right)^n}$
 $= r^2 = 4$

$\therefore r=2$ ($\because r > 1$)

(i), (ii), (iii)에서 실수 r 는 1, 2이므로 $1+2=3$

11 $\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{2}{3}, \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{2}{3}, \frac{a_4}{a_3} \leq \frac{2}{3}, \dots, \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{2}{3}$ 이므로

$$0 < \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \dots \times \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$0 < \frac{a_n}{a_1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$a_1 > 0$ 이므로 위의 부등식의 각 변에 a_1 을 곱하면

$$\therefore 0 < a_n \leq a_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4a_n + n + 3}{a_n + n + 2} = 1$$

12 이차방정식 $x^2 + 2a_n x + a_{n+1} + 2 = 0$ 이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = a_n^2 - (a_{n+1} + 2) = 0$$

$$\therefore a_n^2 - a_{n+1} - 2 = 0 \quad \dots\dots (가)$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 - a_{n+1} - 2) = 0$ 이고 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha \quad (\alpha \text{ 는 실수}) \text{ 라고 하면} \quad \dots\dots (나)$$

$$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0, (\alpha + 1)(\alpha - 2) = 0$$

$$\therefore \alpha = 2 \quad (\because a_n > 0) \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2 \quad \dots\dots (다)$$

채점 기준	배점
(가) 판별식을 이용하여 a_n 에 대한 식을 세운다.	2점
(나) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}$ 의 값이 서로 같음을 알고 한 문자로 놓는다.	3점
(다) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구한다.	3점

13 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - b_n) = 3$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \left(2 - \frac{b_n}{a_n}\right) = 3$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{b_n}{a_n}\right) \neq 0 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \left(2 - \frac{b_n}{a_n}\right) = \infty \text{ (또는 } -\infty \text{)}$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{b_n}{a_n}\right) = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 2 \quad \dots\dots (가)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 2b_n}{2a_n + b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 \times \frac{b_n}{a_n}}{2 + \frac{b_n}{a_n}} = \frac{1 + 4}{2 + 2} = \frac{5}{4} \quad \dots\dots (나)$$

채점 기준	배점
(가) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ 의 값을 구한다.	4점
(나) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 2b_n}{2a_n + b_n}$ 의 값을 구한다.	3점

14 등비수열 $\left\{\left(\frac{2x-1}{3}\right)^n\right\}$ 의 첫째항은 $\frac{2x-1}{3}$, 공비는

$$\frac{2x-1}{3} \text{ 이므로 이 등비수열이 수렴하려면}$$

$$-1 < \frac{2x-1}{3} \leq 1 \quad \therefore -1 < x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \quad \dots\dots (가)$$

등비수열 $\left\{\left(\frac{\log_3 x}{2}\right)^n\right\}$ 의 첫째항은 $\frac{\log_3 x}{2}$, 공비는 $\frac{\log_3 x}{2}$

이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < \frac{\log_3 x}{2} \leq 1 \quad \therefore \frac{1}{9} < x \leq 9 \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \quad \dots\dots (나)$$

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{9} < x \leq 2$ 이므로 두 등비수열이 모두 수렴하기 위한 정수 x 는 1, 2의 2개이다. $\dots\dots (다)$

채점 기준	배점
(가) 수열 $\left\{\left(\frac{2x-1}{3}\right)^n\right\}$ 이 수렴하기 위한 x 의 값의 범위를 구한다.	3점
(나) 수열 $\left\{\left(\frac{\log_3 x}{2}\right)^n\right\}$ 이 수렴하기 위한 x 의 값의 범위를 구한다.	3점
(다) 조건을 만족하는 정수 x 의 개수를 구한다.	2점

03~04권 내공 점검

p. 90~91

1 ㉔	2 ㉠	3 ㉡	4 ㄴ	5 ㄷ
6 3	7 $\frac{3}{2}$	8 $\frac{7}{8}$	9 ㉣	10 4
11 3	12 $\frac{35}{6}$	13 3		

$$\begin{aligned} 1 \quad & \frac{3}{1^2 \times 2^2} + \frac{5}{2^2 \times 3^2} + \frac{7}{3^2 \times 4^2} + \frac{9}{4^2 \times 5^2} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) \right. \\ & \quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} = 1$$

$$2 \quad a_n = S_n - S_{n-1} = (2n^2 + 5n) - \{2(n-1)^2 + 5(n-1)\} = 4n + 3 \quad (\text{단, } n \geq 2)$$

이때 $a_1 = S_1 = 7$ 이므로 $a_n = 4n + 3$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k+3)(4k+7)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4k+3} - \frac{1}{4k+7} \right) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{15} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{19} \right) + \dots + \left(\frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n+7} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{4n+7} \right) = \frac{1}{28} \end{aligned}$$

3 $\sum_{n=1}^{\infty} (4-2a_n)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (4-2a_n) = 0$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n+2}{a_n+2} = \frac{3 \times 2 + 2}{2 + 2} = 2$

4 $\neg$. [반례] $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ 이면

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$ 이지만

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3})$
 $\quad \quad \quad + \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - 1) = \infty$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n - 2b_n) + 2b_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 2b_n) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 도 수렴한다.

$\square$. [반례] $a_n = n$, $b_n = n$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = 0$ 이지만

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 보기 중 옳은 것은 $\square$ 이다.

5 $\neg$. $1+3+5+7+9+11+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)$ 에서

$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n-1) = \infty \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$\square$. $S_1=2$, $S_2=-2$, $S_3=4$, $S_4=-4$, $S_5=6$, $S_6=-6$, $\cdots$

이므로 $S_{2n-1}=2n$, $S_{2n}=-2n$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = -\infty$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

$\square$. 주어진 등비급수의 공비는 $-\frac{1}{2}$ 이고 $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$ 이므로

이 급수는 수렴한다.

따라서 보기 중 수렴하는 급수는 $\square$ 이다.

6 주어진 등비급수의 공비는 $\frac{x^2}{3}$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$-1 < \frac{x^2}{3} < 1$, $x^2 < 3$ $\therefore -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다.

7 $6x^2-5x+1=0$ 에서 $(3x-1)(2x-1)=0$

$\therefore x = \frac{1}{3}$ 또는 $x = \frac{1}{2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha^n + \beta^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 $= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

8 $a_1^2+a_1=6$ 이므로 $a_2=1$, $a_2^2+a_2=2$ 이므로 $a_3=2$, $\cdots$
 따라서 $a_1=2$, $a_2=1$, $a_3=2$, $a_4=1$, $\cdots$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \frac{1}{3^6} + \cdots$
 $= \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^5} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \cdots\right)$
 $= \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} + \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

9 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$a_2=0.3\dot{5}$ 에서 $ar = \frac{16}{45}$ $\cdots \cdots \textcircled{1}$

$a_5=0.04\dot{4}$ 에서 $ar^4 = \frac{2}{45}$ $\cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면 $r^3 = \frac{1}{8}$ $\therefore r = \frac{1}{2}$

$r = \frac{1}{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $a = \frac{32}{45}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{32}{45}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{64}{45} = 1.4\dot{2}$

10 정삼각형 $A_{n-1}A_nB_n$ 의 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{4^{n-1}}$ 이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4} \overline{A_{n-1}A_n}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4^{n-1}}$ $\therefore \overline{A_{n-1}A_n} = \frac{1}{2^{n-2}}$

따라서 점 B_n 의 x 좌표는

$x_1 = \frac{1}{2} \overline{A_0A_1} = 1$

$x_2 = \overline{A_0A_1} + \frac{1}{2} \overline{A_1A_2} = 2 + \frac{1}{2}$

$x_3 = \overline{A_0A_2} + \frac{1}{2} \overline{A_2A_3} = (2+1) + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\vdots$

$x_n = \overline{A_0A_{n-1}} + \frac{1}{2} \overline{A_{n-1}A_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k-2}} + \frac{1}{2^{n-1}}$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} \right)$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-2}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} + 0 = 4$

11 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k(a_k - a_{k+1})$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4)$
 $\quad \quad \quad + \cdots + n(a_n - a_{n+1})\}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) - na_{n+1}\}$ $\cdots \cdots \textcircled{1}$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k - \lim_{n \rightarrow \infty} na_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (n-1)a_n$

$= 5 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (2n-1)a_n \times \frac{n-1}{2n-1} \right\}$

$= 5 - 4 \times \frac{1}{2} = 3$ $\cdots \cdots \textcircled{2}$

채점 기준	배점
(가) $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 을 극한을 이용하여 나타낸다.	4점
(나) $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 의 값을 구한다.	6점

12 $\sum_{n=1}^{\infty} \{2(2a_n + b_n) - (a_n + 2b_n)\} = 2 \times 7 - 8 = 6$ 에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3a_n = 6 \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 \quad \dots\dots (가)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{(2a_n + b_n) - 2a_n\} = 7 - 2 \times 2 = 3$$
에서
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3 \quad \dots\dots (나)$$
두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공비를 각각 r , s 라고 하면
$$\frac{1}{1-r} = 2, \frac{2}{1-s} = 3 \quad \therefore r = \frac{1}{2}, s = \frac{1}{3} \quad \dots\dots (다)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{4}{1-\frac{1}{9}}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{9}{2} = \frac{35}{6} \quad \dots\dots (라)$$

채점 기준	배점
(가) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 값을 구한다.	2점
(나) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 값을 구한다.	2점
(다) 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공비를 각각 구한다.	3점
(라) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ 의 값을 구한다.	3점

13 $\overline{AA_1} = \frac{2}{m+1} = \overline{BB_1}$, $\overline{A_1B} = \frac{2m}{m+1}$ 이므로

$$\overline{A_1B_1} = \sqrt{\left(\frac{2}{m+1}\right)^2 + \left(\frac{2m}{m+1}\right)^2} = \frac{2\sqrt{m^2+1}}{m+1}$$

$$\therefore S_1 = \frac{4(m^2+1)}{(m+1)^2} \quad \dots\dots (가)$$

$$\square A_n B_n C_n D_n \sim \square A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1} D_{n+1}$$
이고 닮음비가
$$1 : \frac{\sqrt{m^2+1}}{m+1}$$
이므로
$$S_{n+1} = \frac{m^2+1}{(m+1)^2} S_n \quad \dots\dots (나)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{4(m^2+1)}{(m+1)^2}}{1 - \frac{m^2+1}{(m+1)^2}} = \frac{2(m^2+1)}{m}$$

$$\approx \frac{2(m^2+1)}{m} = \frac{20}{3}$$
에서
$$3(m^2+1) = 10m, (3m-1)(m-3) = 0$$

$$\therefore m = 3 (\because m > 1) \quad \dots\dots (다)$$

채점 기준	배점
(가) S_1 을 m 에 대한 식으로 나타낸다.	3점
(나) S_n 과 S_{n+1} 사이의 관계식을 구한다.	3점
(다) m 의 값을 구한다.	4점

05~06월 내공 점검

p. 92~93

1 -5	2 ②	3 ③	4 ④	5 ⑤
6 5	7 ②	8 ⑤	9 ④	10 ②
11 (1) 3 (2) e^9	12 1	13 -3		

1 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1} + 5^{x+1}}{2^x - 5^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\left(\frac{2}{5}\right)^x + 5}{\left(\frac{2}{5}\right)^x - 1} = -5$

2 $\lim_{x \rightarrow 2+} \{\ln(2x-4) - \ln(2x^2-5x+2)\}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \ln \frac{2(x-2)}{(2x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \ln \frac{2}{2x-1}$$

$$= \ln \frac{2}{3}$$

3 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right\}^2 = e^2$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right\}^{\frac{\sqrt{2}}{x}} = e^0 = 1$

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right\}^{2x} = \infty$

따라서 보기 중 극한값이 존재하는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

4 $f(n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2nx} - e^x}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2nx} - 1 - (e^x - 1)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2nx} - 1}{2nx} \times 2n - \frac{e^x - 1}{x} \right)$$

$$= 2n - 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} f(n) = \sum_{n=1}^{10} (2n - 1)$$

$$= 2 \times \frac{10 \times 11}{2} - 10 = 100$$

5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - ae^{3x} + 1}{x \ln(1+2x)} = b$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(1+2x) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{6x} - ae^{3x} + 1) = 0, 2 - a = 0$$

$$\therefore a = 2$$

$$a = 2$$
를 주어진 식에 대입하면
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 2e^{3x} + 1}{x \ln(1+2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x} - 1)^2}{x \ln(1+2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{e^{3x} - 1}{3x} \right)^2 \times \frac{2x}{\ln(1+2x)} \times \frac{9}{2} \right\}$$

$$= 1^2 \times 1 \times \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\therefore b = \frac{9}{2}$$

$$\therefore a + b = \frac{13}{2}$$

6 점 P의 좌표를 $(t, e^{2t}-1)$ 이라고 하면

$$H(t, 0), Q\left(t, \frac{1}{3}t\right)$$

따라서 $\overline{OH}=t, \overline{PQ}=e^{2t}-1-\frac{1}{3}t, \overline{QH}=\frac{1}{3}t$ 이므로

$$S=\frac{1}{2}t\left(e^{2t}-1-\frac{1}{3}t\right), T=\frac{1}{2}\times t\times \frac{1}{3}t=\frac{1}{6}t^2$$

점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t\rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\rightarrow 0+}\frac{S}{T}&=\lim_{t\rightarrow 0+}\frac{\frac{1}{2}t\left(e^{2t}-1-\frac{1}{3}t\right)}{\frac{1}{6}t^2} \\&=\lim_{t\rightarrow 0+}\left(\frac{e^{2t}-1}{2t}\times 6-1\right)=1\times 6-1=5\end{aligned}$$

7 $f(x)=2^x-e^{x-2}\ln x=2^x-\frac{1}{e^2}\times e^x\ln x$ 이므로

$$f'(x)=2^x\ln 2-\frac{1}{e^2}\left(e^x\ln x+e^x\times \frac{1}{x}\right)$$

$$=2^x\ln 2-e^{x-2}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore f'(2)=4\ln 2-\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)=3\ln 2-\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}8 \quad a_n&=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h} \\&=\lim_{h\rightarrow 0}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right\} \\&=f'(1)+f'(1)=2f'(1)\end{aligned}$$

이때 $f'(x)=2nx^{2n-1}e^x+x^{2n}e^x$ 이므로

$$a_n=2f'(1)=2(2en+e)=4en+2e$$

$$\therefore \lim_{n\rightarrow \infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\rightarrow \infty}\frac{4en+2e}{n}=4e$$

9 $f(x)=e^x\ln 3x=e^x(\ln 3+\ln x)$ 이므로

$$f'(x)=e^x(\ln 3+\ln x)+e^x\times \frac{1}{x}$$

$$=f(x)+\frac{e^x}{x}$$

따라서 $f'(x)-f(x)=\frac{e^x}{x}$ 이므로 $g(x)=\frac{1}{x}$

$$\therefore g\left(\frac{1}{2}\right)=2$$

$$10 \quad f'(x)=(4x+a)\ln x+2x+a$$

이때 $\lim_{x\rightarrow 1}\frac{f'(x)}{x-1}=b$ 에서 $\lim_{x\rightarrow 1}(x-1)=0$ 이므로

$$\lim_{x\rightarrow 1}f'(x)=0, 2+a=0 \quad \therefore a=-2$$

$x-1=t$ 로 놓으면 $x\rightarrow 1$ 일 때 $t\rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\rightarrow 1}\frac{f'(x)}{x-1}&=\lim_{x\rightarrow 1}\frac{(4x-2)\ln x+2x-2}{x-1} \\&=\lim_{t\rightarrow 0}\frac{(4t+2)\ln(1+t)+2t}{t} \\&=\lim_{t\rightarrow 0}\left\{(4t+2)\times \frac{\ln(1+t)}{t}+2\right\} \\&=2\times 1+2=4\end{aligned}$$

$$\therefore b=4 \quad \therefore a+b=2$$

11 (1) $x-1=t$ 로 놓으면 $x\rightarrow 1$ 일 때 $t\rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\rightarrow 1}x^{\frac{3}{x-1}}&=\lim_{t\rightarrow 0}(1+t)^{\frac{3}{t}} \\&=\lim_{t\rightarrow 0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^3=e^3\end{aligned}\quad \dots\dots (가)$$

$$\text{즉, } e^a=e^3 \text{에서 } a=3 \quad \dots\dots (나)$$

$$\begin{aligned}(2) \quad \lim_{x\rightarrow \infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{ax}&=\lim_{x\rightarrow \infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{3x} \\&=\lim_{x\rightarrow \infty}\left\{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^9=e^9\end{aligned}\quad \dots\dots (다)$$

채점 기준	배점
(가) $\lim_{x\rightarrow 1}x^{\frac{3}{x-1}}$ 의 값을 구한다.	4점
(나) a 의 값을 구한다.	2점
(다) $\lim_{x\rightarrow \infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{ax}$ 의 값을 구한다.	4점

12 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x\rightarrow 0}f(x)=f(0)$ 에서

$$\lim_{x\rightarrow 0}\frac{e^x+e^{-x}-a}{2x^2}=b$$

이때 $\lim_{x\rightarrow 0}2x^2=0$ 이므로

$$\lim_{x\rightarrow 0}(e^x+e^{-x}-a)=0, 2-a=0$$

$$\therefore a=2 \quad \dots\dots (가)$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\rightarrow 0}\frac{e^x+e^{-x}-a}{2x^2}&=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2x^2} \\&=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{e^{2x}-2e^x+1}{2x^2e^x}=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{(e^x-1)^2}{2x^2e^x} \\&=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{1}{2e^x}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2 \\&=\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{1}{2}\end{aligned}\quad \dots\dots (나)$$

$$\therefore b=\frac{1}{2} \quad \dots\dots (다)$$

$$\therefore ab=1 \quad \dots\dots (라)$$

채점 기준	배점
(가) a 의 값을 구한다.	2점
(나) $\lim_{x\rightarrow 0}f(x)$ 의 값을 구한다.	5점
(다) b 의 값을 구한다.	2점
(라) ab 의 값을 구한다.	1점

$$\begin{aligned}13 \quad f'(x)&=(3x^2-4)e^x+(x^3-4x+4)e^x \\&=(x^3+3x^2-4x)e^x\end{aligned}\quad \dots\dots (가)$$

$$f'(a)=0 \text{에서 } (a^3+3a^2-4a)e^a=0$$

$$a^3+3a^2-4a=0 \quad (\because e^a>0)$$

$$a(a+4)(a-1)=0$$

$$\therefore a=-4 \text{ 또는 } a=0 \text{ 또는 } a=1 \quad \dots\dots (나)$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$-4+0+1=-3 \quad \dots\dots (다)$$

채점 기준	배점
(가) $f'(x)$ 를 구한다.	6점
(나) a 의 값을 구한다.	2점
(다) a 의 값의 합을 구한다.	2점

1 ①	2 3	3 ②	4 ①	5 ③
6 ②	7 ⑤	8 ④	9 ④	10 ①
11 ①	12 2	13 2	14 -4	

- 1 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \therefore \csc \theta + \sec \theta &= \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

- 2 $\overline{OP} = \sqrt{5}$ 이므로 $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{10} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) &= \sqrt{10} \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{10} \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \sqrt{10} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = 3 \end{aligned}$$

- 3 $\tan x + 3 \cot x = \frac{15}{4}$ 에서

$$\tan x + \frac{3}{\tan x} = \frac{15}{4}$$

$$\tan x = X \text{로 놓으면 } X + \frac{3}{X} = \frac{15}{4}$$

$$4X^2 - 15X + 12 = 0$$

위의 이차방정식의 두 근은 $\tan \alpha$, $\tan \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{15}{4}, \tan \alpha \tan \beta = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{15}{4}}{1 - 3} = -\frac{15}{8} \end{aligned}$$

- 4 두 직선 $y = x + 2$, $y = 3x - 1$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라고 하면

$$\tan \alpha = 1, \tan \beta = 3$$

이때 $\theta = \beta - \alpha$ 이므로

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\beta - \alpha) \\ &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{3 - 1}{1 + 3 \times 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- 5 점 P에서 변 AD에 내린 수선의 발을 R라 하고, $\angle PAR = \alpha$ 라고 하면 직각삼각형 PAR에서

$$\overline{AR} = 4, \overline{PR} = 4$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{\overline{PR}}{\overline{AR}} = \frac{4}{4} = 1$$

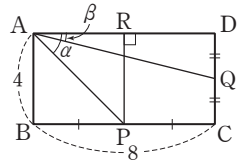
$\angle QAD = \beta$ 라고 하면 직각삼각형 QAD에서

$$\overline{AD} = 8, \overline{QD} = 2$$

$$\therefore \tan \beta = \frac{\overline{QD}}{\overline{AD}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

이때 $\theta = \alpha - \beta$ 이므로

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + 1 \times \frac{1}{4}} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$



- 6 $3 \sin \theta - 4 \cos \theta = 0$ 에서 $3 \sin \theta = 4 \cos \theta$ ㉠

양변을 제곱하면

$$9 \sin^2 \theta = 16 \cos^2 \theta, 9 \sin^2 \theta = 16(1 - \sin^2 \theta)$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{16}{25}$$

$$0 < \theta < \pi \text{에서 } \sin \theta > 0 \text{이므로 } \sin \theta = \frac{4}{5}$$

$$\text{이것을 ㉠에 대입하여 풀면 } \cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore 50 \sin 2\theta &= 50 \times 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 50 \times 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = 48 \end{aligned}$$

- 7 $f(x) = \cos 2x + 4 \cos x - 3$

$$= (2 \cos^2 x - 1) + 4 \cos x - 3$$

$$= 2 \cos^2 x + 4 \cos x - 4$$

$$= 2(\cos x + 1)^2 - 6$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $f(x)$ 는 $\cos x = 1$ 일 때 최댓값

이 $M = 2$, $\cos x = -1$ 일 때 최솟값이 $m = -6$ 이다.

$$\therefore M - m = 8$$

- 8 $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sec x - 1}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sec x - 1}{\sec^2 x - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sec x - 1}{(\sec x + 1)(\sec x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{1}{\sec x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{1}{\frac{1}{\cos x} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\cos x}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 9 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - 2 \sin x \cos x}{x(1 - \cos^2 x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x(1 - \cos x)}{x(1 + \cos x)(1 - \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{2}{1 + \cos x} \right) \\
 &= 1 \times 1 = 1
 \end{aligned}$$

$$10 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{6x+a}+b}{\tan x} = \frac{3}{2} \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{6x+a}+b) = 0, \sqrt{a}+b=0$$

$$\therefore b = -\sqrt{a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{6x+a}+b}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{6x+a}-\sqrt{a}}{\tan x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\tan x(\sqrt{6x+a}+\sqrt{a})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\tan x} \times \frac{6}{\sqrt{6x+a}+\sqrt{a}} \right) \\
 &= 1 \times \frac{3}{\sqrt{a}} = \frac{3}{\sqrt{a}}
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{3}{\sqrt{a}} = \frac{3}{2} \text{에서 } \sqrt{a}=2 \quad \therefore a=4$$

$$a=4 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b=-2$$

$$\therefore ab = -8$$

$$\begin{aligned}
 11 \quad g(x) &= f'(x) \\
 &= e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) \\
 &= 2e^x \cos x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(x) &= g'(x) \\
 &= 2e^x \cos x - 2e^x \sin x \\
 &= 2e^x(\cos x - \sin x)
 \end{aligned}$$

$$h(x) = af(x) + bg(x) \text{에서}$$

$$\begin{aligned}
 2e^x(\cos x - \sin x) &= ae^x(\sin x + \cos x) + 2be^x \cos x \\
 e^x(-2 \sin x + 2 \cos x) &= e^x\{a \sin x + (a+2b) \cos x\}
 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a = -2, a+2b=2 \text{이므로 } b=2$$

$$\therefore a+b=0$$

$$12 \quad \angle GPH = \theta \text{라고 하면 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\overline{PF} = \overline{PG} = \overline{PH} = a \text{이므로}$$

$$S = \frac{1}{2}a^2\theta \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

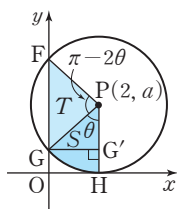
$$\angle PFG = \angle PGF = \angle GPH = \theta \text{이므로}$$

$$\angle FPG = \pi - 2\theta$$

$$\therefore T = \frac{1}{2} \times \overline{GP} \times \overline{FP} \sin(\pi - 2\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times a \sin(\pi - 2\theta)$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \sin 2\theta \quad \dots\dots \textcircled{14}$$



한편 점 G에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 G'이라고 하면

$$\text{삼각형 PGG'에서 } \sin \theta = \frac{\overline{GG'}}{\overline{PG}} = \frac{2}{a}$$

따라서 $a \rightarrow \infty$ 일 때 $\theta \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{T}{S} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2}a^2 \sin 2\theta}{\frac{1}{2}a^2\theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin 2\theta}{2\theta} \times 2 = 1 \times 2 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{14}$$

채점 기준	배점
(가) S를 식으로 나타낸다.	2점
(나) T를 식으로 나타낸다.	2점
(다) $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{T}{S}$ 의 값을 구한다.	4점

$$13 \quad f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h + h^2 \cos \frac{1}{h}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{2h} \times 2 + \lim_{h \rightarrow 0} h \cos \frac{1}{h} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$-1 < \cos \frac{1}{h} < 1 \text{에서 } -|h| < h \cos \frac{1}{h} < |h| \text{이고}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (-|h|) = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \cos \frac{1}{h} = 0$$

$$\therefore f'(0) = 1 \times 2 + 0 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{14}$$

채점 기준	배점
(가) $f'(0)$ 을 극한을 이용하여 나타낸다.	4점
(나) $f'(0)$ 의 값을 구한다.	4점

$$14 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} + \frac{f\left(\frac{\pi}{2}-h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h} \right\}$$

$$= f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \dots\dots \textcircled{7} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $f'(x)$ 를 구하면

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \cos x \times \cos x + (1 + \sin x) \times (-\sin x) \\
 &= \cos^2 x - \sin x - \sin^2 x \quad \dots\dots \textcircled{14}
 \end{aligned}$$

따라서 ⑦에서 구하는 극한값은

$$2f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2(0 - 1 - 1^2) = -4 \quad \dots\dots \textcircled{14}$$

채점 기준	배점
(가) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h} = 2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 임을 안다.	2점
(나) $f'(x)$ 를 구한다.	3점
(다) $2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 의 값을 구한다.	2점

1 ①

2 ③

3 $-\frac{1}{2}$

4 12

5 ①

6 ④

7 ①

8 ④

9 2

10 $\frac{10}{9}$

11 ③

12 -3

13 $\frac{3}{2}$

14 8

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $f'(x)$ 를 구하면

$$f'(x) = \frac{3(x^2+1) - (3x+1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2 - 2x + 3}{(x^2+1)^2}$$

따라서 ①에서 구하는 극한값은

$$f'(-1) = \frac{1}{2}$$

$$2 \quad f'(x) = \frac{e^x(\sin x - \cos x) - e^x(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} \\ = \frac{-2e^x \cos x}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$f'(\theta) = 0$ 에서 $\cos \theta = 0$ ($\because e^\theta > 0$)

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \theta = \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi)$$

따라서 모든 θ 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi = 2\pi$$

$$3 \quad f(2) = 2 \ln 3 \text{에서 } \frac{\ln 3}{2a+b} = 2 \ln 3$$

$$\therefore 4a + 2b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 $f(0) = 0$ 이고,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) \text{이므로}$$

$$f'(0) = -\frac{2}{3}$$

$$\text{이때 } f'(x) = \frac{ax+b}{x+1} - a \ln(x+1) \text{이므로}$$

$$f'(0) = \frac{b}{b^2} = -\frac{2}{3}, \quad 2b^2 = -3b$$

$$b(2b+3) = 0 \quad \therefore b = -\frac{3}{2} \quad (\because b \neq 0)$$

이것을 ①에 대입하여 풀면 $a = 1$

$$\therefore a + b = -\frac{1}{2}$$

$$4 \quad g'(x) = 3\{1+2f(x)\}^2 \times 2f'(x) \\ = 6\{1+2f(x)\}^2 f'(x) \\ \therefore g'(1) = 6\{1+2f(1)\}^2 f'(1) \\ = 6\{1+2 \times (-1)\}^2 \times 2 = 12$$

$$5 \quad f'(x) = 5(1-x^2)^4 \times (-2x) = -10x(1-x^2)^4$$

$$g'(x) = \sec x \tan x$$

$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ 이므로

$$h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= f'(\sqrt{2}) \times \sqrt{2}$$

$$= -10\sqrt{2} \times \sqrt{2} = -20$$

$$6 \quad g(x) = 1 + e^{3x} \text{이라고 하면 } g(0) = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+e^{3x}) - f(2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(g(x)) - f(g(0))}{x}$$

$h(x) = f(g(x))$ 라고 하면 $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(g(x)) - f(g(0))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = h'(0)$$

$$= f'(g(0))g'(0)$$

즉, $f'(g(0))g'(0) = 12$ 이고, $g'(x) = 3e^{3x}$ 이므로

$$f'(2) \times 3 = 12$$

$$\therefore f'(2) = 4$$

7 함수 $f(x)$ 의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln |f(x)| = \ln |3x| + 2 \ln |x-5| - 3 \ln |x+2|$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-5} - \frac{3}{x+2}$$

$$\therefore f'(x) = f(x) \times \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x-5} - \frac{3}{x+2} \right)$$

$$\text{따라서 } g(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-5} - \frac{3}{x+2} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x-5} - \frac{3}{x+2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} + (-2) - \frac{1}{2} = -\frac{9}{4}$$

$$8 \quad \frac{dx}{dt} = 1 + \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 2 + \cos t \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2 + \cos t}{1 + \sin t}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1, \quad \text{즉 } \frac{2 + \cos t}{1 + \sin t} = 1 \text{에서}$$

$$2 + \cos t = 1 + \sin t$$

$$1 + \cos t = \sin t$$

양변을 제곱하면

$$1 + 2\cos t + \cos^2 t = \sin^2 t$$

$$1 + 2\cos t + \cos^2 t = 1 - \cos^2 t$$

$$\cos^2 t + \cos t = 0$$

$$\cos t(\cos t + 1) = 0$$

$$\therefore \cos t = 0 \text{ 또는 } \cos t = -1$$

그런데 $0 < t < \pi$ 이므로 $t = \frac{\pi}{2}$

9 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \frac{e^y}{e^y + 1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{e^y + 1}{e^y} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x = \ln(e^y + 1)$ 에서 $x = \ln 2$ 일 때

$$e^y + 1 = 2, e^y = 1$$

$$\therefore y = 0$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에 $y = 0$ 을 대입하면

$$\frac{dy}{dx} = 2$$

10 곡선 $y = g(x)$ 가 점 $(5, 2)$ 를 지나므로

$$g(5) = 2 \quad \therefore f(2) = 5$$

$$\text{즉, } f(2) = 6 + a = 5 \text{이므로 } a = -1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \text{이므로}$$

$$b = g'(5) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{9}$$

$$\therefore b - a = \frac{10}{9}$$

11 $f'(x) = 2x \sin \pi x + \pi x^2 \cos \pi x$ 이므로

$$f''(x) = 2 \sin \pi x + 2\pi x \cos \pi x + 2\pi x \cos \pi x - \pi^2 x^2 \sin \pi x$$

$$= (2 - \pi^2 x^2) \sin \pi x + 4\pi x \cos \pi x$$

$$\therefore f''(1) = -4\pi$$

12 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2f'(2x-1) = 4x^3 + 2x$$

$$\therefore f'(2x-1) = 2x^3 + x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$2x-1 = -3$ 에서 $x = -1$ 이므로 위 식의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$f'(-3) = -3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

채점 기준	배점
(가) $f'(2x-1)$ 을 구한다.	3점
(나) $f'(-3)$ 의 값을 구한다.	4점

13 주어진 식에서 $f(x) > 0$ 이므로 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = \frac{5}{2} \ln(2+3x^2) - \frac{3}{2} \ln(1+x^2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{15x}{2+3x^2} - \frac{3x}{1+x^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \frac{f'(1)}{f(1)} = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

채점 기준	배점
(가) 양변에 자연로그를 취한다.	3점
(나) $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 를 구한다.	3점
(다) $\frac{f'(1)}{f(1)}$ 의 값을 구한다.	2점

14 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} - 6 = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y-6}{x+2y} \quad (\text{단, } x+2y \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \text{에서 } -\frac{2x+y-6}{x+2y} = 1$$

$$-(2x+y-6) = x+2y$$

$$\therefore y = -x+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이것을 주어진 곡선의 방정식에 대입하여 정리하면

$$x^2 - 8x + 2 = 0$$

두 점의 x 좌표는 위의 이차방정식의 두 근이므로

$$\alpha + \beta = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

채점 기준	배점
(가) $\frac{dy}{dx}$ 를 구한다.	3점
(나) $\frac{dy}{dx} = 1$ 을 만족하는 x, y 에 대한 식을 구한다.	2점
(다) $\alpha + \beta$ 의 값을 구한다.	3점

11~13 **내공 점점**

p. 98~99

- 1 $\pi - 2$ 2 ③ 3 $\frac{4}{e^3}$ 4 ③ 5 ③
- 6 ④ 7 ⑤ 8 ② 9 ⑤ 10 ②
- 11 $\frac{7}{3}$ 12 (1) $a=4, b=5$ (2) 3 13 $1 \leq a < 2$

1 $f(x) = \tan \frac{x}{4}$ 라고 하면 $f'(x) = \frac{1}{4} \sec^2 \frac{x}{4}$

점 $(\pi, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(\pi) = \frac{1}{2}$ 이므로 접선의

방정식은

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - \pi)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1$$

따라서 접선의 x 절편은

$$\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1 = 0 \quad \therefore x = \pi - 2$$

2 $f(x) = \ln(x+2)$ 라고 하면 $f'(x) = \frac{1}{x+2}$

점점의 좌표를 $(t, \ln(t+2))$ 라고 하면 점점의 기울기는

$$f'(t) = \frac{1}{t+2} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - \ln(t+2) = \frac{1}{t+2}(x-t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(-2, 2)$ 를 지나므로

$$2 - \ln(t+2) = -1, \ln(t+2) = 3$$

$$\therefore t = e^3 - 2$$

이것을 ①에 대입하면

$$y - 3 = \frac{1}{e^3}(x - e^3 + 2)$$

$$\therefore y = \frac{1}{e^3}x + \frac{2}{e^3} + 2$$

$$\text{접선의 } x\text{절편은 } \frac{1}{e^3}x + \frac{2}{e^3} + 2 = 0 \text{에서 } x = -2e^3 - 2$$

$$\text{접선의 } y\text{절편은 } y = \frac{2}{e^3} + 2$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times |-2e^3 - 2| \times \left(\frac{2}{e^3} + 2\right) &= 2(e^3 + 1) \left(\frac{1}{e^3} + 1\right) \\ &= 2e^3 + \frac{2}{e^3} + 4 \end{aligned}$$

3 $f'(x) = 2(x+1)e^x + (x+1)^2e^x = (x^2 + 4x + 3)e^x$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x^2 + 4x + 3 = 0 \quad (\because e^x > 0)$$

$$(x+3)(x+1) = 0 \quad \therefore x = -3 \text{ 또는 } x = -1$$

$$f''(x) = (2x+4)e^x + (x^2 + 4x + 3)e^x$$

$$= (x^2 + 6x + 7)e^x$$

$$\therefore f''(-3) = -\frac{2}{e^3} < 0, f''(-1) = \frac{2}{e} > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극대이고 극댓값은

$$f(-3) = \frac{4}{e^3}, x = -1 \text{에서 극소이고 극솟값은 } f(-1) = 0$$

이므로 모든 극값의 합은 $\frac{4}{e^3}$

4 $f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$

$$= -e^{-x}(\sin x - \cos x)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \sin x - \cos x = 0 \quad (\because e^{-x} > 0)$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

$$f''(x) = e^{-x}(\sin x - \cos x) - e^{-x}(\cos x + \sin x)$$

$$= -2e^{-x} \cos x$$

$$\text{이므로 } f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}} < 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 극댓값을 갖는다.

$$\therefore a = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{한편 } f''(x) = 0 \text{에서 } \cos x = 0 \quad (\because e^{-x} > 0)$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

이때 $x = \frac{\pi}{2}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 곡선

$$y = f(x) \text{의 변곡점의 } x\text{좌표는 } b = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore a + b = \frac{3}{4}\pi$$

5 $f(x) = x^2 + 4 \sin x$ 라고 하면 $f'(x) = 2x + 4 \cos x$ 이므로

$$f''(x) = 2 - 4 \sin x$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \quad \left(\because -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

곡선 $y = f(x)$ 는 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 아래로 볼록하다.

$$\text{따라서 } b - a \leq \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi \text{이므로 } b - a \text{의 최댓값은}$$

$$\frac{2}{3}\pi \text{이다.}$$

6 $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$ 이므로 $f''(x) = \frac{8}{x^3}$

ㄱ. $f'(2) = 0, f''(2) = 1 > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. $f''(x) = 0$ 을 만족하는 x 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 변곡점을 갖지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ 이므로 y 축은 함수

$y = f(x)$ 의 그래프의 점근선이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

7 $f'(x) = 2x - \frac{2x}{10-x^2} = -\frac{2x^3-18x}{10-x^2}$
 $= -\frac{2x(x+3)(x-3)}{10-x^2}$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -3 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

x	-3	...	0	...	3
$f'(x)$	0	-	0	+	0
$f(x)$	$9-a$	$\searrow$	$\ln 10 - a$ 극소	$\nearrow$	$9-a$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 과 $x = 3$ 에서 최댓값이

$$f(-3) = f(3) = 9-a, x = 0 \text{에서 최솟값이 } f(0) = \ln 10 - a \text{이다.}$$

이때 최댓값과 최솟값의 합이 $\ln 10$ 이므로

$$(9-a) + (\ln 10 - a) = \ln 10, 9-2a = 0$$

$$\therefore a = \frac{9}{2}$$

8 주어진 방정식을 $2x - x \ln x = a$ 로 놓으면 이 방정식의 실근의 개수는 함수 $y = 2x - x \ln x$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점의 개수와 같다.

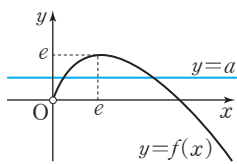
$$f(x) = 2x - x \ln x \text{라고 하면}$$

$$f'(x) = 2 - \ln x - x \times \frac{1}{x} = 1 - \ln x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \ln x = 1 \quad \therefore x = e$$

x	0	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	e	$\searrow$

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는
오른쪽 그림과 같으므로 실근을
갖도록 하는 a 의 값의 범위는
 $a \leq e$
따라서 자연수 a 는 1, 2의 2개이
다.



9 $\frac{3x+1}{2x}=t$ 로 놓으면

$$t = \frac{3x+1}{2x} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2x} > \frac{3}{2} \quad (\because x > 0)$$

$\frac{1}{x} = 2t - 3$ 이므로 주어진 부등식은 $2t \geq a \ln t$ 에서

$$\frac{2t}{\ln t} \geq a \quad (\because \ln t > 0)$$

$$f(t) = \frac{2t}{\ln t} \text{라고 하면}$$

$$f'(t) = \frac{2 \ln t - 2t \times \frac{1}{t}}{(\ln t)^2} = \frac{2(\ln t - 1)}{(\ln t)^2}$$

$$f'(t) = 0 \text{에서 } \ln t = 1 \quad \therefore t = e$$

t	$\frac{3}{2}$	...	e	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		\	$2e$	/

함수 $f(t)$ 는 최솟값이 $2e$ 이므로 $f(t) \geq a$ 를 만족하는 상수
 a 의 값의 범위는 $a \leq 2e$
따라서 a 의 최댓값은 $2e$ 이다.

10 $\frac{dx}{dt} = \cos t$, $\frac{dy}{dt} = 2 + \sin t$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속
력은

$$\sqrt{(\cos t)^2 + (2 + \sin t)^2} = \sqrt{\cos^2 t + 4 + 4 \sin t + \sin^2 t} \\ = \sqrt{5 + 4 \sin t}$$

그런데 $0 \leq t \leq 2\pi$ 에서 $-1 \leq \sin t \leq 1$ 이므로 점 P의 속력
은 $\sin t = 1$, 즉 $t = \frac{\pi}{2}$ 일 때 최대이다.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\sin t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \cos t \text{이므로 } t = \frac{\pi}{2} \text{일 때 점 P의 가속} \\ \text{도는 } (-1, 0)$$

11 $f(x) = \sqrt{2x+5}$ 라고 하면

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x+5)^{-\frac{1}{2}} \times 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+5}} \quad \dots\dots (가)$$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{2t+5})$ 라고 하면 접선의 기울기가 $\frac{1}{3}$ 이
므로

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+5}} = \frac{1}{3}$$

$$2t+5=9 \quad \therefore t=2$$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 3)$ 이다. $\dots\dots (나)$

직선 $y = \frac{1}{3}x + a$ 가 점 $(2, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \frac{2}{3} + a \quad \therefore a = \frac{7}{3} \quad \dots\dots (다)$$

채점 기준	배점
(가) $f'(x)$ 를 구한다.	3점
(나) 접점의 좌표를 구한다.	4점
(다) a 의 값을 구한다.	3점

12 (1) $f'(x) = \frac{b(x^2+a) - bx \times 2x}{(x^2+a)^2}$
 $= \frac{-bx^2+ab}{(x^2+a)^2} \quad \dots\dots (가)$

함수 $f(x)$ 가 $x = -2$ 에서 극값을 가지므로 $f'(-2) = 0$
에서

$$\frac{-4b+ab}{(4+a)^2} = 0, \quad -4b+ab=0$$

$$b(a-4)=0$$

$$\therefore a=4 \quad (\because b \neq 0) \quad \dots\dots (나)$$

곡선 $y = \frac{bx}{x^2+4}$ 가 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$\frac{b}{5} = 1 \quad \therefore b=5 \quad \dots\dots (다)$$

(2) $f(x) = \frac{5x}{x^2+4}$ 이고 $f'(x) = \frac{-5x^2+20}{(x^2+4)^2}$ 이므로

$$f''(x) = \frac{-10x(x^2+4)^2 - (-5x^2+20) \times 2(x^2+4) \times 2x}{(x^2+4)^4} \\ = \frac{10x^3-120x}{(x^2+4)^3} \\ = \frac{10x(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})}{(x^2+4)^3} \quad \dots\dots (라)$$

$f''(x) = 0$ 에서

$$x = -2\sqrt{3} \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2\sqrt{3} \quad \dots\dots (마)$$

이때 $x = -2\sqrt{3}$, $x=0$, $x=2\sqrt{3}$ 의 좌우에서 각각 $f''(x)$
의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점은 3개이다
 $\dots\dots (바)$

채점 기준	배점
(가) $f'(x)$ 를 구한다.	1점
(나) a 의 값을 구한다.	2점
(다) b 의 값을 구한다.	2점
(라) $f''(x)$ 를 구한다.	2점
(마) $f''(x)=0$ 인 x 의 값을 구한다.	1점
(바) 변곡점의 개수를 구한다.	2점

13 곡선 $y = 2\sqrt{2x+1}$ 과 직선 $y = 2x+a$ 가 서로 다른 두 점에서
만나면 방정식 $2\sqrt{2x+1} = 2x+a$, 즉 $2\sqrt{2x+1} - 2x = a$ 는
서로 다른 두 실근을 가지므로 함수 $y = 2\sqrt{2x+1} - 2x$ 의 그
래프와 직선 $y=a$ 는 서로 다른 두 점에서 만난다. $\dots\dots (가)$
 $f(x) = 2\sqrt{2x+1} - 2x$ 라고 하면

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}} - 2 \quad \dots\dots (나)$$

$f'(x)=0$ 에서
 $\sqrt{2x+1}=1 \quad \therefore x=0$

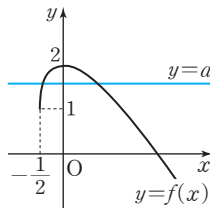
x	$-\frac{1}{2}$	$\dots$	0	$\dots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$

..... (다)

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는
 오른쪽 그림과 같으므로 서로 다른
 두 점에서 만나기 위한 상수 a 의
 값의 범위는

$1 \leq a < 2$

..... (라)



채점 기준	배점
(가) 함수 $y=2\sqrt{2x+1}-2x$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 서로 다른 두 점에서 만남을 안다.	2점
(나) $f(x)=2\sqrt{2x+1}-2x$ 로 놓고 $f'(x)$ 를 구한다.	2점
(다) $f(x)$ 의 증가, 감소를 나타낸다.	3점
(라) a 의 값의 범위를 구한다.	3점

14~16번 내공 점검

p. 100~101

- 1 ⑤ 2 ④ 3 1 4 ② 5 ②
 6 ② 7 $\ln 2$ 8 π 9 ③ 10 ①
 11 ③ 12 6 13 $2\ln 2$ 14 $-2e+2$

1 $f(x)=\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{x} dx = \int \left(x^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{x}\right) dx$
 $= 3\sqrt[3]{x} + 2\ln|x| + C$
 $f(1)=-3$ 에서 $3+C=-3 \quad \therefore C=-6$
 따라서 $f(x)=3\sqrt[3]{x}+2\ln|x|-6$ 이므로
 $f(8)=6+2\ln 8-6=6\ln 2$

2 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$
 $= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 x + \csc^2 x) dx$
 $= \left[\tan x - \cot x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

3 $\int_2^4 f(t) dt = k$ (k 는 상수)라고 하면 $f(x)=e^{x-2}+k$ 이므로
 $\int_2^4 f(t) dt = \int_2^4 (e^{t-2}+k) dt = \left[e^{t-2} + kt \right]_2^4$
 $= e^2 - 1 + 2k$
 즉, $e^2 - 1 + 2k = k$ 이므로 $k = -e^2 + 1$
 따라서 $f(x)=e^{x-2}-e^2+1$ 이므로 $f(4)=1$

4 $f'(x)=\frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}$ 이므로 $f(x)=\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx$
 $x^2+1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$ 이므로
 $f(x)=\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{2}{\sqrt{t}} dt = \int 2t^{-\frac{1}{2}} dt$
 $= 4\sqrt{t} + C = 4\sqrt{x^2+1} + C$
 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로
 $4+C=1 \quad \therefore C=-3$
 따라서 $f(x)=4\sqrt{x^2+1}-3$ 이므로 $f(\sqrt{3})=5$

5 $f(x)=\int \frac{4}{4x^2+8x+3} dx$
 $= \int \frac{4}{(2x+1)(2x+3)} dx$
 $= \int \left(\frac{2}{2x+1} - \frac{2}{2x+3} \right) dx$
 $= \ln|2x+1| - \ln|2x+3| + C$
 $= \ln \left| \frac{2x+1}{2x+3} \right| + C$
 $f(0)=-\ln 3$ 에서
 $-\ln 3 + C = -\ln 3 \quad \therefore C=0$
 따라서 $f(x)=\ln \left| \frac{2x+1}{2x+3} \right|$ 이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2$

6 $y=|\sin 3x|$ 는 주기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 주기함수이므로
 $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} |\sin 3x| dx = 6 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx$
 $= 6 \left[-\frac{1}{3} \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 6 \times \frac{2}{3} = 4$

7 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{(1+\sin x)^2} dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} + \frac{\sin x \cos x}{(1+\sin x)^2} \right\} dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$
 $= \left[\ln(1+\sin x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2$

8 $x=\sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\cos \theta$ 이고,
 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\frac{1}{2}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 이므로
 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{6}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{6}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} \times \cos \theta d\theta$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{6}{\cos \theta} \times \cos \theta d\theta$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 6 d\theta$
 $= \left[6\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \pi$

9 $g(x)=\ln x, h'(x)=3x^2$ 으로 놓으면

$$g'(x)=\frac{1}{x}, h(x)=x^3 \text{이므로}$$

$$f(x)=\int 3x^2 \ln x dx = x^3 \ln x - \int x^2 dx \\ = x^3 \ln x - \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$f(1)=-\frac{1}{3} \text{에서 } -\frac{1}{3}+C=-\frac{1}{3} \quad \therefore C=0$$

$$\text{따라서 } f(x)=x^3 \ln x - \frac{1}{3}x^3 \text{이므로 } f(e^2)=\frac{5}{3}e^6$$

10 $\frac{d}{dx}e^{f(x)}=xe^{2x+f(x)}$ 에서 $e^{f(x)} \times f'(x)=xe^{2x} \times e^{f(x)}$

$$\therefore f'(x)=xe^{2x} (\because e^{f(x)} > 0)$$

$$f(x)=\int xe^{2x} dx \text{에서 } g(x)=x, h'(x)=e^{2x} \text{으로 놓으면}$$

$$g'(x)=1, h(x)=\frac{1}{2}e^{2x} \text{이므로}$$

$$f(x)=\int xe^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} dx \\ = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

$$f(0)=-\frac{1}{4} \text{에서 } -\frac{1}{4}+C=-\frac{1}{4} \quad \therefore C=0$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} \text{이므로 } f(1)=\frac{e^2}{4}$$

11 $\int_0^x \frac{f(t)}{e^t} dt = 2 \sin x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f(x)}{e^x} = 2 \cos x \quad \therefore f(x) = 2e^x \cos x$$

$$\therefore \int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi 2e^x \cos x dx$$

$$g(x)=2e^x, h'(x)=\cos x \text{로 놓으면}$$

$$g'(x)=2e^x, h(x)=\sin x \text{이므로}$$

$$\int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi 2e^x \cos x dx \\ = \left[2e^x \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi 2e^x \sin x dx \\ = - \int_0^\pi 2e^x \sin x dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\int_0^\pi 2e^x \sin x dx \text{에서 } u(x)=2e^x, v'(x)=\sin x \text{로 놓으면}$$

$$u'(x)=2e^x, v(x)=-\cos x \text{이므로}$$

$$\int_0^\pi 2e^x \sin x dx = \left[-2e^x \cos x \right]_0^\pi + \int_0^\pi 2e^x \cos x dx \\ = 2e^\pi + 2 + \int_0^\pi f(x) dx \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\int_0^\pi f(x) dx = -2e^\pi - 2 - \int_0^\pi f(x) dx$$

$$2 \int_0^\pi f(x) dx = -2e^\pi - 2$$

$$\therefore \int_0^\pi f(x) dx = -e^\pi - 1$$

$$12 f(x)=\int (3e^{3x}+6e^{-3x}) dx$$

$$=e^{3x}-2e^{-3x}+C \quad \dots\dots \textcircled{가}$$

$$\therefore f(1)-f(-1)=(e^3-2e^{-3}+C)-(e^{-3}-2e^3+C) \\ =3e^3-3e^{-3} \quad \dots\dots \textcircled{나}$$

$$\text{따라서 } a=3, b=-3 \text{이므로 } a-b=6 \quad \dots\dots \textcircled{다}$$

채점 기준	배점
가) $f(x)$ 를 구한다.	3점
나) $f(1)-f(-1)$ 의 값을 구한다.	3점
다) $a-b$ 의 값을 구한다.	1점

13 $f(x)=\int_2^x \frac{4t}{t^2+4} dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\frac{4x}{x^2+4}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 \quad \dots\dots \textcircled{가}$$

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$f(0)=\int_2^0 \frac{4t}{t^2+4} dt = 2 \int_2^0 \frac{2t}{t^2+4} dt \\ = 2 \left[\ln(t^2+4) \right]_2^0 \\ = 2(\ln 4 - \ln 8) = -2 \ln 2 \quad \dots\dots \textcircled{나}$$

$$\text{따라서 } a=0, b=-2 \ln 2 \text{이므로 } a-b=2 \ln 2 \quad \dots\dots \textcircled{다}$$

채점 기준	배점
가) $f'(x)=0$ 을 만족하는 x 의 값을 구한다.	2점
나) 극솟값을 구한다.	4점
다) $a-b$ 의 값을 구한다.	2점

14 $\int f(x) dx = xf(x) + x^2e^x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)+2xe^x+x^2e^x \\ \therefore f'(x)=-2e^x-xe^x=-(x+2)e^x \quad \dots\dots \textcircled{가}$$

$$f(x)=\int \{-(x+2)e^x\} dx \text{에서}$$

$$g(x)=-(x+2), h'(x)=e^x \text{으로 놓으면}$$

$$g'(x)=-1, h(x)=e^x \text{이므로}$$

$$f(x)=\int \{-(x+2)e^x\} dx = -(x+2)e^x + \int e^x dx \\ = -(x+2)e^x + e^x + C = -(x+1)e^x + C$$

$$f(2)=-3e^2+2 \text{에서} \\ -3e^2+C=-3e^2+2 \quad \therefore C=2$$

$$\text{따라서 } f(x)=-(x+1)e^x+2 \text{이므로} \quad \dots\dots \textcircled{나}$$

$$f(1)=-2e+2 \quad \dots\dots \textcircled{다}$$

채점 기준	배점
가) $f'(x)$ 를 구한다.	2점
나) $f(x)$ 를 구한다.	4점
다) $f(1)$ 의 값을 구한다.	2점

1 9 2 $2\sqrt{2}-2$ 3 ④ 4 $\frac{3}{2}\pi-2$ 5 ①

6 ② 7 ④ 8 ② 9 ⑤ 10 ④

11 $-\frac{2}{\pi}$ 12 $\frac{2}{9}$ 13 $\frac{5}{6}e^2-2e-\frac{1}{2}$

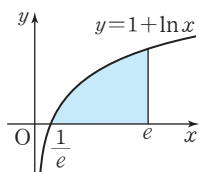
$$\begin{aligned}
 1 \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ f\left(1+\frac{2}{n}\right) + f\left(1+\frac{4}{n}\right) + \cdots + f\left(1+\frac{2n}{n}\right) \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1+\frac{2k}{n}\right) \times \frac{1}{n} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1+\frac{2k}{n}\right) \times \frac{2}{n} \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 (3x^2-2x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[x^3 - x^2 \right]_1^3 = \frac{1}{2} \times 18 = 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}} \times \frac{1}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} \times \frac{1}{n} \\
 &= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
 &= \left[2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^2 = 2\sqrt{2}-2
 \end{aligned}$$

3 곡선 $y=1+\ln x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $1+\ln x=0$ 에서 $\ln x=-1 \quad \therefore x=\frac{1}{e}$

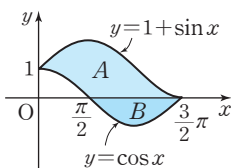
따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{1}{e}}^e (1+\ln x) dx \\
 &= \left[x(1+\ln x) \right]_{\frac{1}{e}}^e - \int_{\frac{1}{e}}^e dx \\
 &= 2e - \left[x \right]_{\frac{1}{e}}^e \\
 &= 2e - \left(e - \frac{1}{e} \right) = e + \frac{1}{e}
 \end{aligned}$$



4 오른쪽 그림과 같이 두 곡선으로 둘러싸인 도형이 x 축에 의하여 나누어질 때, x 축 위쪽의 넓이를 A , 아래쪽의 넓이를 B 라고 하면

$$\begin{aligned}
 A+B &= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \{ (1+\sin x) - \cos x \} dx \\
 &= \left[x - \cos x - \sin x \right]_0^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{3}{2}\pi + 2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 B &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (-\cos x) dx \\
 &= \left[-\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = 2
 \end{aligned}$$

$$\therefore A = (A+B) - B = \frac{3}{2}\pi$$

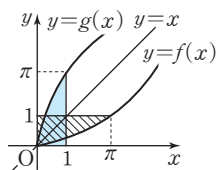
$$\therefore |A-B| = \frac{3}{2}\pi - 2$$

따라서 두 부분의 넓이의 차는 $\frac{3}{2}\pi - 2$ 이다.

5 $f(\pi)=1$ 이므로 $g(1)=\pi$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 색칠한 부분과 빗금친 부분의 넓이는 같다.

따라서 구하는 넓이는



$$\begin{aligned}
 \pi \times 1 - \int_0^\pi \tan \frac{x}{4} dx &= \pi - \int_0^\pi \frac{\sin \frac{x}{4}}{\cos \frac{x}{4}} dx \\
 &= \pi + 4 \int_0^\pi \frac{-\frac{1}{4} \sin \frac{x}{4}}{\cos \frac{x}{4}} dx \\
 &= \pi + 4 \left[\ln \left| \cos \frac{x}{4} \right| \right]_0^\pi \\
 &= \pi + 4 \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - 2 \ln 2
 \end{aligned}$$

6 $y=\sqrt{4x+4}$ 에서 $y^2=4x+4$

$$\therefore x = \frac{1}{4}y^2 - 1$$

$$y=x-2 \text{에서 } x=y+2$$

곡선 $x=\frac{1}{4}y^2-1$ 과 직선 $x=y+2$ 의 교점의 y 좌표는

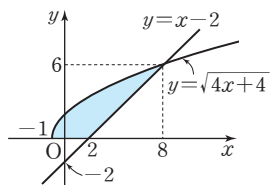
$$\frac{1}{4}y^2 - 1 = y + 2 \text{에서}$$

$$y^2 - 4y - 12 = 0$$

$$(y+2)(y-6) = 0 \quad \therefore y=6 (\because y \geq 0)$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}
 & \int_0^6 \left\{ (y+2) - \left(\frac{1}{4}y^2 - 1 \right) \right\} dy \\
 &= \int_0^6 \left(-\frac{1}{4}y^2 + y + 3 \right) dy \\
 &= \left[-\frac{1}{12}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 3y \right]_0^6 = 18
 \end{aligned}$$



7 $\int_0^4 a\sqrt{4-x} dx = 16$ 이므로

$$\left[-\frac{2a}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = 16$$

$$\frac{16}{3}a = 16 \quad \therefore a = 3$$

- 8 물의 깊이가 x 일 때, 수면의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면

$$S(x) = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{\sin 2x})^2$$

$$= 6\sqrt{3} \sin 2x$$

따라서 구하는 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} S(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6\sqrt{3} \sin 2x dx \\ &= \left[-3\sqrt{3} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

- 9 $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{t}$, $\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2}$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2} &= \sqrt{1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2} = 1 + \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

$t=a$ 에서 점 P의 속력이 $\frac{5}{4}$ 이므로

$$1 + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4}, \quad a^2 = 4$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because 0 < a < 4)$$

따라서 $t=2$ 에서 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_2^4 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = \left[t - \frac{1}{t}\right]_2^4 = \frac{9}{4}$$

- 10 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{x^2}$ 이므로 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2} dx &= \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2} dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{13}{12} \end{aligned}$$

- 11 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n^2} \sum_{k=1}^n k \cos \frac{k}{n} \pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \pi \cos \frac{k}{n} \pi \times \frac{1}{n}$

$$= \int_0^1 x \times \pi \cos \pi x dx \quad \dots\dots (가)$$

$$= \left[x \sin \pi x \right]_0^1 - \int_0^1 \sin \pi x dx$$

$$= \left[\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{\pi} \quad \dots\dots (나)$$

채점 기준	배점
(가) 정적분을 이용하여 나타낸다.	4점
(나) 극한값을 구한다.	6점

- 12 점 P의 좌표를 $(t, \sqrt[3]{t})$ 라고 하면

$$S_1 = \int_0^t \sqrt[3]{x} dx$$

$$= \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right]_0^t = \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} \quad \dots\dots (가)$$

한편 $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ 이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$$y - \sqrt[3]{t} = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x - t)$$

$$\therefore y = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}x + \frac{2}{3}\sqrt[3]{t}$$

따라서 점 Q의 좌표는 $(0, \frac{2}{3}\sqrt[3]{t})$ 이므로

$$S_2 = \frac{1}{2} \times t \times \left(\sqrt[3]{t} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{t}\right)$$

$$= \frac{1}{6} t^{\frac{4}{3}} \quad \dots\dots (나)$$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{6} t^{\frac{4}{3}}}{\frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}}} = \frac{2}{9} \quad \dots\dots (다)$$

채점 기준	배점
(가) S_1 을 식으로 나타낸다.	4점
(나) S_2 을 식으로 나타낸다.	5점
(다) $\frac{S_2}{S_1}$ 의 값을 구한다.	1점

- 13 점점의 좌표를 (t, e^t) 이라고 하면 $y' = e^x$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - e^t = e^t(x - t)$$

$$\therefore y = e^t x + (1 - t)e^t \quad \dots\dots ①$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$(1 - t)e^t = 0$$

$$\therefore t = 1 \quad (\because e^t > 0)$$

$t=1$ 을 ①에 대입하면 접선의 방정식은

$$y = ex \quad \dots\dots (가)$$

x 축에 수직인 평면으로 입체도형을

자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면

$$S(x) = (e^x - ex)^2 \quad \dots\dots (나)$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^1 S(x) dx$$

$$= \int_0^1 (e^x - ex)^2 dx$$

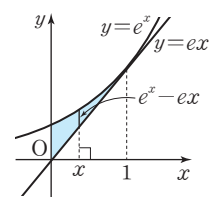
$$= \int_0^1 (e^{2x} - 2exe^x + e^2x^2) dx$$

$$= \int_0^1 e^{2x} dx - 2e \int_0^1 xe^x dx + e^2 \int_0^1 x^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 - 2e \left(\left[xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \right) + e^2 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) - 2e \left(e - \left[e^x \right]_0^1 \right) + \frac{e^2}{3}$$

$$= \frac{5}{6} e^2 - 2e - \frac{1}{2} \quad \dots\dots (다)$$



채점 기준	배점
(가) 접선의 방정식을 구한다.	3점
(나) 단면의 넓이를 x 에 대한 식으로 나타낸다.	2점
(다) 입체도형의 부피를 구한다.	5점



A series of horizontal dashed lines for writing, spanning the width of the page. The lines are evenly spaced and cover most of the page area, providing a guide for handwriting practice.





A series of horizontal dashed lines for writing, spanning the width of the page. The lines are evenly spaced and cover most of the page area.

