



정답과 해설

미적분

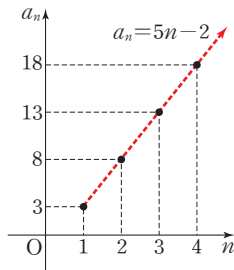


001 답 ③

① 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 5n - 2$$

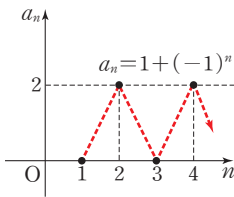
오른쪽 그림에서 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값도 한없이 커지므로 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.



② 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 1 + (-1)^n$$

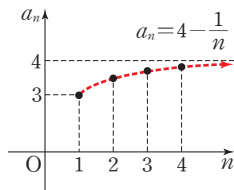
오른쪽 그림에서 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 이 수열은 발산(진동)한다.



③ 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 4 - \frac{1}{n}$$

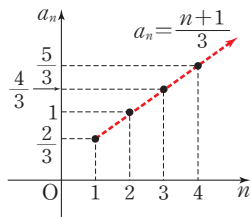
오른쪽 그림에서 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 4에 한없이 가까워지므로 이 수열은 4에 수렴한다.



④ 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{n+1}{3}$$

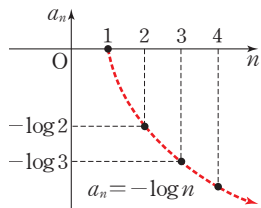
오른쪽 그림에서 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값도 한없이 커지므로 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.



⑤ 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \log \frac{1}{n} = -\log n$$

오른쪽 그림에서 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 이 수열은 음의 무한대로 발산한다.



002 답 ③

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (a_n + b_n)^2 - 2a_nb_n \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \times \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_nb_n \\ &= 4 \times 4 - 2 \times 2 = 12 \end{aligned}$$

003 답 12

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 2}{3a_{n+1} + 4} = \frac{1}{4} \text{에서 } \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 2}{3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} + 4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\alpha - 2}{3\alpha + 4} = \frac{1}{4}, 4\alpha - 8 = 3\alpha + 4$$

$$\therefore \alpha = 12$$

004 답 ㄱ, ㄷ

$$\text{ㄱ. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + n}{2n^2 - n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{5}{2}$$

$$\text{ㄴ. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+5)}{n^2 - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5n}{n^2 - 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{n}}{1 - \frac{2}{n^2}} = 1$$

$$\text{ㄷ. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n}}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ㄹ. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{4n^2 + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{4 + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{2}{3}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

005 답 ①

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \log_2 (n^2 - n + 1) - \log_2 (2n + 3)^2 \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{n^2 - n + 1}{(2n + 3)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{n^2 - n + 1}{4n^2 + 12n + 9} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{12}{n} + \frac{9}{n^2}} \\ &= \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2 \end{aligned}$$

006 답 -4

$$a \neq 0 \text{이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + 2}{2n - 3} = \infty (\text{또는 } -\infty) \text{ 이므로 } a = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + bn + 2}{2n - 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn + 2}{2n - 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{2}{n}}{2 - \frac{3}{n}} = \frac{b}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{b}{2} = -2 \text{ 이므로 } b = -4$$

$$\therefore a + b = -4$$

007 답 ④

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 3n} - n)(\sqrt{n^2 + 3n} + n)}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

008 답 ⑤

$a \leq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n^2+n} - (an+b)\} = \infty$ 이므로 $a > 0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n^2+n} - (an+b)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{\sqrt{n^2+n} - (an+b)\} \{\sqrt{n^2+n} + (an+b)\}}{\sqrt{n^2+n} + (an+b)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-a^2)n^2 + (1-2ab)n - b^2}{\sqrt{n^2+n} + an + b} \end{aligned}$$

이때 $1-a^2 \neq 0$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로

$$1-a^2=0 \quad \therefore a=1 \quad (\because a>0)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-a^2)n^2 + (1-2ab)n - b^2}{\sqrt{n^2+n} + an + b} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-2b)n - b^2}{\sqrt{n^2+n} + n + b} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-2b) - \frac{b^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1 + \frac{b}{n}} \\ &= \frac{1-2b}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{1-2b}{2} = \frac{3}{2} \text{ 이므로 } 1-2b=3 \quad \therefore b=-1$$

$$\therefore a-b=1-(-1)=2$$

009 답 ④

$$\frac{a_n+2}{3a_n+10} = b_n \text{ 으로 놓으면 } a_n+2=3a_nb_n+10b_n$$

$$(1-3b_n)a_n=10b_n-2 \quad \therefore a_n=\frac{10b_n-2}{1-3b_n}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10b_n-2}{1-3b_n} = \frac{10 \times \frac{1}{4} - 2}{1 - 3 \times \frac{1}{4}} = 2$$

010 답 2

$$4n^2-n \leq a_n \leq 4n^2+n \text{ 에서}$$

$$\frac{4n^2-n}{2n^2+3} \leq \frac{a_n}{2n^2+3} \leq \frac{4n^2+n}{2n^2+3}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-n}{2n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+n}{2n^2+3} = 2 \text{ 이므로 수열의 극한의 대소}$$

$$\text{관계에 의하여 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n^2+3} = 2$$

011 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n - (a_n - b_n)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \\ &= \alpha - \beta \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 도 수렴한다.

ㄴ. [반례] $a_n = n$, $b_n = \frac{1}{n}$ 이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

$$\text{이지만 } a_nb_n=1 \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_nb_n=1$$

ㄷ. $a_n < b_n$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

012 답 $\frac{1}{2}$

곡선 $y=x^2+3x$ 와 직선 $y=x+n$ 이 만나는 두 점의 x 좌표는

$$x^2+3x=x+n \text{ 에서 } x^2+2x-n=0 \quad \therefore x=-1 \pm \sqrt{n+1}$$

따라서 $P_n(-1-\sqrt{n+1}, -1-\sqrt{n+1}+n)$,

$Q_n(-1+\sqrt{n+1}, -1+\sqrt{n+1}+n)$ 이므로

$$\begin{aligned} P_nQ_n &= \sqrt{(2\sqrt{n+1})^2 + (2\sqrt{n+1})^2} \\ &= \sqrt{4(n+1) + 4(n+1)} = \sqrt{8n+8} \end{aligned}$$

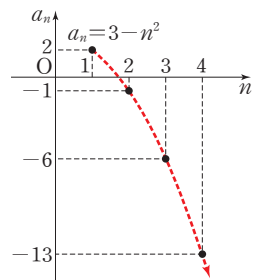
$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{P_nQ_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{8n+8}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2+\frac{3}{n}}}{\sqrt{8+\frac{8}{n}}} = \frac{1}{2}$$

013 답 ③

① 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 3 - n^2$$

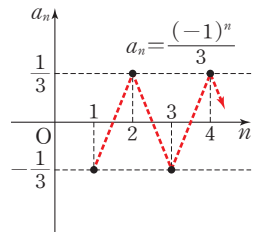
오른쪽 그림에서 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 이 수열은 음의 무한대로 발산한다.



② 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{(-1)^n}{3}$$

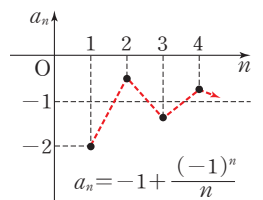
오른쪽 그림에서 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 이 수열은 발산(진동)한다.



③ 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

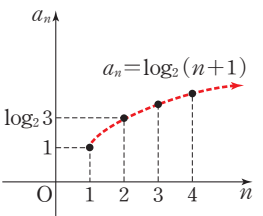
오른쪽 그림에서 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 -1 에 한없이 가까워지므로 이 수열은 -1 에 수렴한다.



④ 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \log_2(n+1)$$

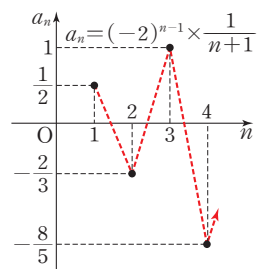
오른쪽 그림에서 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값도 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.



⑤ 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = (-2)^{n-1} \times \frac{1}{n+1}$$

오른쪽 그림에서 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 절댓값은 한없이 커지고 그 부호는 양과 음이 교대로 나타나므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.



014 ㉔ ②

ㄱ. $\frac{2n+1}{n}$ 에 $n=1, 2, 3, 4, \dots$ 를 차례대로 대입하면

$$3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \dots$$

즉, n 의 값이 한없이 커질 때 $\frac{2n+1}{n}$ 의 값은 2에 한없이 가까

워지므로 수열 $\left\{\frac{2n+1}{n}\right\}$ 은 2에 수렴한다.

ㄴ. $\frac{1}{n^2}$ 에 $n=1, 2, 3, 4, \dots$ 를 차례대로 대입하면

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$$

즉, n 의 값이 한없이 커질 때 $\frac{1}{n^2}$ 의 값은 0에 한없이 가까워지

므로 수열 $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ 은 0에 수렴한다.

ㄷ. $\frac{1}{4^n}$ 에 $n=1, 2, 3, 4, \dots$ 를 차례대로 대입하면

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \dots$$

즉, n 의 값이 한없이 커질 때 $\frac{1}{4^n}$ 의 값은 0에 한없이 가까워지

므로 수열 $\left\{\frac{1}{4^n}\right\}$ 은 0에 수렴한다.

ㄹ. $\sin \frac{2n-1}{2}\pi$ 에 $n=1, 2, 3, 4, \dots$ 를 차례대로 대입하면

$$1, -1, 1, -1, \dots$$

즉, 수열 $\left\{\sin \frac{2n-1}{2}\pi\right\}$ 는 발산(진동)한다.

따라서 보기의 수열 중 발산하는 것은 ㄹ이다.

015 ㉔ ⑤

ㄱ. $a_{2n+1}=(-1)^{2n+1}$ 에 $n=1, 2, 3, 4, \dots$ 를 차례대로 대입하면

$$-1, -1, -1, -1, \dots$$

즉, 수열 $\{a_{2n+1}\}$ 은 -1 에 수렴한다.

ㄴ. $\frac{a_{2n}}{\log 2n} = \frac{(-1)^{2n}}{\log 2n}$ 에 $n=1, 2, 3, 4, \dots$ 를 차례대로 대입하면

$$\frac{1}{\log 2}, \frac{1}{\log 4}, \frac{1}{\log 6}, \frac{1}{\log 8}, \dots$$

즉, 수열 $\left\{\frac{a_{2n}}{\log 2n}\right\}$ 은 0에 수렴한다.

ㄷ. $a_{3n} \cos n\pi = (-1)^{3n} \cos n\pi$ 에 $n=1, 2, 3, 4, \dots$ 를 차례대로 대입하면 $1, 1, 1, 1, \dots$

즉, 수열 $\{a_{3n} \cos n\pi\}$ 은 1에 수렴한다.

따라서 보기의 수열 중 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

016 ㉔ 45

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^3 + b_n^3) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n + b_n)^3 - 3a_nb_n(a_n + b_n)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)^3 - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_nb_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \\ &= 3^3 - 3 \times (-2) \times 3 = 45 \end{aligned}$$

017 ㉔ ③

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(3 - \frac{5}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{5}{n}\right) \\ &= 1 \times 3 = 3 \end{aligned}$$

018 ㉔ $-\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_nb_n+1}{3a_n-5b_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_nb_n+1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n-5b_n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + 1}{3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 5 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \\ &= \frac{5 \times (-1) + 1}{3 \times 5 - 5 \times (-1)} = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

019 ㉔ ⑤

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + 1) = 2 \text{에서 } 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2b_n}{3a_n-1} = 5 \text{에서 } \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 1} = 5$$

$$\frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{3 \times \frac{1}{2} - 1} = 5, \quad 4 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{5}{4}$$

020 ㉔ ③

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+2} = \alpha$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8a_{n+2}+7}{3a_n+1} = 3 \text{에서 } \frac{8 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+2}+7}{3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n+1} = 3$$

$$\frac{8\alpha+7}{3\alpha+1} = 3, \quad 8\alpha+7=9\alpha+3$$

$$\therefore \alpha = 4$$

021 ㉔ ①

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n+12} \text{에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n+12} \text{이므로}$$

$$\alpha = \sqrt{\alpha+12}, \quad \alpha^2 = \alpha+12$$

$$\alpha^2 - \alpha - 12 = 0, \quad (\alpha+3)(\alpha-4) = 0$$

$$\therefore \alpha = -3 \text{ 또는 } \alpha = 4$$

$$\text{그런데 } \alpha = \sqrt{\alpha+12} > 0 \text{이므로 } \alpha = 4$$

022 ㉔ 3

이차방정식 $x^2 - a_n x + a_{n+1} + 8 = 0$ 이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-a_n)^2 - 4(a_{n+1} + 8) = 0 \quad \therefore a_n^2 - 4a_{n+1} - 32 = 0$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 - 4a_{n+1} - 32) = 0$ 이고 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha \text{ (α 는 실수)라 하면}$$

$$\alpha^2 - 4\alpha - 32 = 0, \quad (\alpha+4)(\alpha-8) = 0$$

$$\therefore \alpha = -4 \text{ 또는 } \alpha = 8$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로 $\alpha = 8$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n+1} = \sqrt{8+1} = 3$$

023 ㉓ ③

$$\begin{aligned} ① \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2+n}{2n^2-3n+10} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6+\frac{1}{n}}{2-\frac{3}{n}+\frac{10}{n^2}} = 3 \\ ② \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-2)^2}{(n+1)^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2-12n+4}{n^2+2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9-\frac{12}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 9 \\ ③ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2+1}{(n+1)(2n+3)-n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2+1}{n^2+5n+3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}} = 7 \\ ④ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}+3n}{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+3}{2} = 2 \\ ⑤ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{4n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{4-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

024 ㉓ ②

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+n}{1+2+3+\cdots+n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(5n+1)}{\frac{n(n+1)}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(5n+1)}{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 10 \end{aligned}$$

025 ㉓ $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} &\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) \\ &\quad \cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{n+1}{2n} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

026 ㉓ $\frac{3}{2}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \alpha_n + \beta_n &= 3n^2 + 2n - 1, \quad \alpha_n \beta_n = 2n^2 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

027 ㉓ ②

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &= \sum_{k=1}^n (4k+3) \\ &= 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + 3n \\ &= 2n^2 + 5n \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{3n^2 - 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5n}{3n^2 - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{n}}{3 - \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

028 ㉓ 1

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \{\log_4(2n+1) + \log_4(2n-1) - \log_4(n^2+3n-2)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_4 \frac{(2n+1)(2n-1)}{n^2+3n-2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_4 \frac{4n^2-1}{n^2+3n-2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_4 \frac{4-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}} = \log_4 4 = 1 \end{aligned}$$

029 ㉓ ②

$$\begin{aligned} &\log_2 a_n + \log_2 a_{n+1} + \log_2 a_{n+2} = 2 \text{에서} \\ &\log_2 a_n a_{n+1} a_{n+2} = 2 \quad \therefore a_n a_{n+1} a_{n+2} = 4 \\ &\text{이때 } a_1=2, a_2=3 \text{이므로} \\ &a_3=\frac{2}{3}, a_4=2, a_5=3, a_6=\frac{2}{3}, \cdots \\ &\text{즉, 수열 } \{a_n\} \text{은 } 2, 3, \frac{2}{3} \text{가 이 순서대로 반복되므로} \\ &\sum_{k=1}^n a_{3k} = \frac{2}{3}n \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{3k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3}n}{n} = \frac{2}{3}$$

030 ㉓ 10

$$\begin{aligned} a_n &= \log_3(n+2) - \log_3(n+1) = \log_3 \frac{n+2}{n+1} \text{이므로} \\ a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n &= \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{4}{3} + \log_3 \frac{5}{4} + \cdots + \log_3 \frac{n+2}{n+1} \\ &= \log_3 \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{n+2}{n+1} \right) \\ &= \log_3 \frac{n+2}{2} \\ \therefore 3^{a_1} \times 3^{a_2} \times 3^{a_3} \times \cdots \times 3^{a_n} &= 3^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n} \\ &= 3^{\log_3 \frac{n+2}{2}} = \frac{n+2}{2} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{3^{a_1} \times 3^{a_2} \times 3^{a_3} \times \cdots \times 3^{a_n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{\frac{n+2}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n}{n+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{1+\frac{2}{n}} = 10 \end{aligned}$$

031 ㉮ 9

$a \neq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{an^2-bn-3} = 0$ 이므로 $a=0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{an^2-bn-3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{-bn-3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{4}{n}}{-b-\frac{3}{n}} = -\frac{3}{b} \end{aligned}$$

따라서 $-\frac{3}{b} = \frac{1}{3}$ 이므로 $b=-9$

$$\therefore a-b=9$$

032 ㉮ 3

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+2)(2n+1)}{an^2+3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2+15n+6}{an^2+3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6+\frac{15}{n}+\frac{6}{n^2}}{a+\frac{3}{n}} = \frac{6}{a} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{6}{a} = 2$ 이므로 $a=3$

033 ㉮ 4

$a \neq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2-6n-1}}{an^2+n} = 0$ 이므로 $a=0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2-6n-1}}{an^2+n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2-6n-1}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{9-\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}} = 3 \end{aligned}$$

따라서 $b=3$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+12n-3}{\sqrt{b^2n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n-3}{\sqrt{9n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12-\frac{3}{n}}{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}} = 4$$

034 ㉮ $\frac{3}{2}$

(i) $a \neq 0, b=0$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^2-3n+1}{an^2+2n-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n+1}{an^2+2n-5} = 0$$

(ii) $a=0, b \neq 0$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^2-3n+1}{an^2+2n-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^2-3n+1}{2n-5} = \infty \text{ (또는 } -\infty \text{)}$$

(iii) $a=0, b=0$ 이면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^2-3n+1}{an^2+2n-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n+1}{2n-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3+\frac{1}{n}}{2-\frac{5}{n}} = -\frac{3}{2}$$

(i), (ii), (iii)에서 $a \neq 0, b \neq 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^2-3n+1}{an^2+2n-5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{a+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}} = \frac{b}{a}$$

따라서 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3an+b}{4bn-a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a+\frac{b}{n}}{4b-\frac{a}{n}} = \frac{3a}{4b} = \frac{3a}{4b} = \frac{3}{4} \times 2 = \frac{3}{2}$$

035 ㉮ ①

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n+1} (\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1} (\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}) (\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n})}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{n}}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

036 ㉮ ⑤

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2}-n}{n-\sqrt{n^2-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+2}-n)(\sqrt{n^2+2}+n)(n+\sqrt{n^2-1})}{(n-\sqrt{n^2-1})(n+\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+2}+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+2}+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}})}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1} = 2 \end{aligned}$$

037 ㉮ ⑤

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \lim_{n \rightarrow \infty} (3n-\sqrt{9n^2+n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-\sqrt{9n^2+n})(3n+\sqrt{9n^2+n})}{3n+\sqrt{9n^2+n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{3n+\sqrt{9n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{3+\sqrt{9+\frac{1}{n}}} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+4}-\sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} (\sqrt{n+4}-\sqrt{n}) (\sqrt{n+4}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-\sqrt{n^2+3n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+\sqrt{n^2+3n}}{(n-\sqrt{n^2+3n})(n+\sqrt{n^2+3n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+\sqrt{n^2+3n}}{-3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{-3} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1 \right) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{2(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}{2\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1\right)} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

038 ④

$$\begin{aligned}
 1+3+5+\cdots+(2n-1) &= \sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 \\
 2+4+6+\cdots+2n &= \sum_{k=1}^n 2k = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n^2 + n \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{1+3+5+\cdots+(2n-1)} - \sqrt{2+4+6+\cdots+2n} \} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2+n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \sqrt{n^2+n})(n + \sqrt{n^2+n})}{n + \sqrt{n^2+n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{n + \sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

039 ⑤

$$\begin{aligned}
 (3n)^2 &< 9n^2 + 5n + 1 < (3n+1)^2 \text{ 이므로} \\
 3n &< \sqrt{9n^2 + 5n + 1} < 3n+1 \\
 \therefore a_n &= \sqrt{9n^2 + 5n + 1} - 3n \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{9n^2 + 5n + 1} - 3n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9n^2 + 5n + 1} - 3n)(\sqrt{9n^2 + 5n + 1} + 3n)}{\sqrt{9n^2 + 5n + 1} + 3n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + 1}{\sqrt{9n^2 + 5n + 1} + 3n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{n}}{\sqrt{9 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} + 3} = \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

040 ①

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{n\{2 \times 3 + (n-1) \times 2\}}{2} = \frac{n(2n+4)}{2} = n^2 + 2n \text{ 이므로} \\
 S_{n+1} &= (n+1)^2 + 2(n+1) = n^2 + 4n + 3 \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n + 3} - \sqrt{n^2 + 2n}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 4n + 3} - \sqrt{n^2 + 2n})(\sqrt{n^2 + 4n + 3} + \sqrt{n^2 + 2n})}{\sqrt{n^2 + 4n + 3} + \sqrt{n^2 + 2n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3}{\sqrt{n^2 + 4n + 3} + \sqrt{n^2 + 2n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}} = 1
 \end{aligned}$$

041 ①

수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\sqrt{n(n+2)} - n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n} \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n} + n}{(\sqrt{n^2 + 2n} - n)(\sqrt{n^2 + 2n} + n)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 2n} + n}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}{2} = 1
 \end{aligned}$$

042 ③

$$\begin{aligned}
 b \geq 0 \text{ 이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{an^2 + 4n} + bn} &= 0 \text{ 이므로 } b < 0 \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{an^2 + 4n} + bn} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{an^2 + 4n} - bn}{(\sqrt{an^2 + 4n} + bn)(\sqrt{an^2 + 4n} - bn)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{an^2 + 4n} - bn}{(a - b^2)n^2 + 4n} \\
 \text{이때 } a - b^2 \neq 0 \text{ 이면 극한값이 } 0 \text{ 이므로} \\
 a - b^2 &= 0 \quad \therefore a = b^2 \quad \dots\dots ① \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{an^2 + 4n} - bn}{(a - b^2)n^2 + 4n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{an^2 + 4n} - bn}{4n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a + \frac{4}{n}} - b}{4} = \frac{\sqrt{a} - b}{4}
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{\sqrt{a} - b}{4} = 3$ 이므로 $\sqrt{a} = b + 12 \quad \dots\dots ②$

①을 ②에 대입하면 $b < 0$ 이므로

$$-b = b + 12, \quad -2b = 12 \quad \therefore b = -6$$

이를 ①에 대입하면 $a = (-6)^2 = 36$

$$\therefore a + b = 36 - 6 = 30$$

043 ④

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + kn} - n)(\sqrt{n^2 + kn} + n)}{\sqrt{n^2 + kn} + n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{kn}{\sqrt{n^2 + kn} + n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}} + 1} = \frac{k}{2}
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{k}{2} = 3$ 이므로 $k = 6$

044 ④

(*)에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 - bn - 3}{2n^2 + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a - \frac{b}{n} - \frac{3}{n^2}}{2 + \frac{7}{n^2}} = \frac{a}{2}$

따라서 $\frac{a}{2} = 4$ 이므로 $a = 8$

(*)에서

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{an+b} - \sqrt{an-b}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{8n+b} - \sqrt{8n-b}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{8n+b} - \sqrt{8n-b})(\sqrt{8n+b} + \sqrt{8n-b})}{\sqrt{8n+b} + \sqrt{8n-b}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2b\sqrt{n}}{\sqrt{8n+b} + \sqrt{8n-b}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2b}{\sqrt{8 + \frac{b}{n}} + \sqrt{8 - \frac{b}{n}}} = \frac{b}{2\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{b}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ 이므로 $b = 4$

$$\therefore a - b = 8 - 4 = 4$$

045 ㉮ 4

$k \geq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 이므로 $k < 0$

$$a_n = \sqrt{(2n+3)(2n+5)} + kn = \sqrt{4n^2 + 16n + 15} + kn$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{4n^2 + 16n + 15} + kn \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{ \sqrt{4n^2 + 16n + 15} + kn \} \{ \sqrt{4n^2 + 16n + 15} - kn \}}{\sqrt{4n^2 + 16n + 15} - kn} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4-k^2)n^2 + 16n + 15}{\sqrt{4n^2 + 16n + 15} - kn}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $4-k^2=0 \quad \therefore k=-2 (\because k < 0)$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4-k^2)n^2 + 16n + 15}{\sqrt{4n^2 + 16n + 15} - kn}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16n + 15}{\sqrt{4n^2 + 16n + 15} + 2n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16 + \frac{15}{n}}{\sqrt{4 + \frac{16}{n} + \frac{15}{n^2}} + 2} = 4$$

046 ㉮ 2

$$\frac{3+2a_n}{2-3a_n} = b_n \text{으로 놓으면 } 3+2a_n = 2b_n - 3a_n b_n$$

$$(2+3b_n)a_n = 2b_n - 3 \quad \therefore a_n = \frac{2b_n - 3}{2+3b_n}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2b_n - 3}{2+3b_n} = \frac{2 \times 2 - 3}{2+3 \times 2} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (8a_n + 1) = 8 \times \frac{1}{8} + 1 = 2$$

047 ㉮ ⑤

$$(2n^2 - n)a_n = b_n \text{으로 놓으면 } a_n = \frac{b_n}{2n^2 - n}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 6$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \times \frac{b_n}{2n^2 - n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2 - n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \end{aligned}$$

048 ㉮ $\frac{3}{10}$

$$(2n+1)a_n = c_n \text{으로 놓으면 } a_n = \frac{c_n}{2n+1}$$

$$(n^2-1)b_n = d_n \text{으로 놓으면 } b_n = \frac{d_n}{n^2-1}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 5$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(n+2)b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{c_n}{2n+1}}{(n+2) \times \frac{d_n}{n^2-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{2n^2+5n+2} \times \frac{c_n}{d_n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{2n^2+5n+2} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{d_n} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

049 ㉮ $\frac{16}{7}$

$$2a_n - 5b_n = c_n \text{으로 놓으면 } -5b_n = c_n - 2a_n$$

$$\therefore b_n = \frac{2a_n - c_n}{5}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 3$ 이고, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 3b_n}{a_n + b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 3 \times \frac{2a_n - c_n}{5}}{a_n + \frac{2a_n - c_n}{5}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10a_n + 6a_n - 3c_n}{5a_n + 2a_n - c_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16a_n - 3c_n}{7a_n - c_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16 - 3 \times \frac{c_n}{a_n}}{7 - \frac{c_n}{a_n}} = \frac{16}{7}$$

050 ㉮ $\frac{4}{5}$

$$3n^2 + 4n - 3 < a_n < 3n^2 + 4n + 5 \text{에서}$$

$$\frac{4n-3}{5n+1} < \frac{a_n-3n^2}{5n+1} < \frac{4n+5}{5n+1}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-3}{5n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+5}{5n+1} = \frac{4}{5}$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 3n^2}{5n+1} = \frac{4}{5}$$

051 ㉮ ④

$$\sqrt{9n^2 - n} < (n+1)a_n < \sqrt{9n^2 + 2n} \text{에서}$$

$$\frac{\sqrt{9n^2 - n}}{n+1} < a_n < \frac{\sqrt{9n^2 + 2n}}{n+1}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 - n}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 2n}}{n+1} = 3$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

052 ㉮ $\frac{1}{2}$

$$n < a_n < n+1 \text{에서 } \sum_{k=1}^n k < \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{k=1}^n (k+1)$$

$$\frac{n(n+1)}{2} < \sum_{k=1}^n a_k < \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$\frac{n^2+n}{2} < \sum_{k=1}^n a_k < \frac{n^2+3n}{2}$$

$$\therefore \frac{n^2+n}{2n^2} < \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{n^2} < \frac{n^2+3n}{2n^2}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3n}{2n^2} = \frac{1}{2}$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{n^2} = \frac{1}{2}$$

053 답 ③

$$-1 \leq \sin \frac{n\pi}{2} \leq 1 \text{이므로 } -\frac{2}{n+3} \leq \frac{2}{n+3} \sin \frac{n\pi}{2} \leq \frac{2}{n+3}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{n+3}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+3} = 0$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+3} \sin \frac{n\pi}{2} = 0$$

054 답 $\frac{1}{4}$

곡선 $y = x^2 - (n+1)x + a_n$ 이 x 축과 만나므로 이차방정식 $x^2 - (n+1)x + a_n = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = (n+1)^2 - 4a_n \geq 0$$

$$\therefore a_n \leq \frac{(n+1)^2}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

곡선 $y = x^2 - nx + a_n$ 이 x 축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2 - nx + a_n = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = n^2 - 4a_n < 0$$

$$\therefore a_n > \frac{n^2}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에 의하여 } \frac{n^2}{4} < a_n \leq \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{4} < \frac{a_n}{n^2} \leq \frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{4}$$

055 답 ③

$$\frac{n}{7} - 1 < \left\lceil \frac{n}{7} \right\rceil \leq \frac{n}{7} \text{이므로 } n > 0 \text{일 때,}$$

$$\frac{7}{n+4} \left(\frac{n}{7} - 1 \right) < \frac{7}{n+4} \left\lceil \frac{n}{7} \right\rceil \leq \frac{7}{n+4} \times \frac{n}{7}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n+4} \left(\frac{n}{7} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{n+4} \times \frac{n}{7} \right) = 1$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n+4} \left\lceil \frac{n}{7} \right\rceil = 1$$

056 답 ③

$$\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\alpha \text{이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = \alpha^2$$

$$\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta \text{ (}\beta \text{는 실수)라 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |\beta| \text{이므로 수열 } \{|a_n|\} \text{도 수렴한다.}$$

$$\neg. \text{ [반례] } a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1} \text{이면 두 수열 } \{a_n\}, \{b_n\} \text{이 모두 발산(진동)하지만 수열 } \{a_n + b_n\} \text{은 0으로 수렴한다.}$$

$$\neg. \text{ [반례] } a_n = \frac{1}{n}, b_n = n \text{이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1 \text{이지만 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{이므로 수열 } \{b_n\} \text{은 발산한다.}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

057 답 ③

$$\textcircled{1} \text{ [반례] } a_n = n, b_n = -n^2 \text{이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty \text{이지만}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

$$\textcircled{2} \text{ [반례] } \{a_n\}: 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

$$\{b_n\}: 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$$

이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ 이지만 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ 이다.

$$\textcircled{3} a_n < b_n \text{이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{이므로 } \alpha \leq \beta$$

$$\textcircled{4} \text{ [반례] } a_n = (-1)^n \text{이면 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = -1 \text{이므로 두 수열 } \{a_{2n}\}, \{a_{2n-1}\} \text{은 모두 수렴하지만 수열 } \{a_n\} \text{은 발산(진동)한다.}$$

$$\textcircled{5} \text{ [반례] } a_n = n - \frac{1}{n}, b_n = n + \frac{1}{n}, c_n = n \text{이면 } a_n < c_n < b_n \text{이고 } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0 \text{이지만 } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty \text{이므로 수열 } \{c_n\} \text{은 발산한다.}$$

058 답 ④

곡선 $y = \frac{1}{x}$ 과 직선 $y = nx$ 가 만나는 두 점의 x 좌표는

$$nx = \frac{1}{x} \text{에서 } x^2 = \frac{1}{n}$$

$$\therefore x = -\frac{\sqrt{n}}{n} \text{ 또는 } x = \frac{\sqrt{n}}{n}$$

따라서 만나는 두 점의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{n}}{n}, -\sqrt{n}\right), \left(\frac{\sqrt{n}}{n}, \sqrt{n}\right)$ 이므로 두 점 사이의 거리 a_n 은

$$a_n = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{n}}{n}\right)^2 + (2\sqrt{n})^2} = \sqrt{\frac{4}{n} + 4n} = 2\sqrt{\frac{1}{n} + n}$$

$$\sqrt{n} a_n = 2\sqrt{n^2 + 1} \text{이므로}$$

$$\sqrt{n+1} a_{n+1} = 2\sqrt{(n+1)^2 + 1} = 2\sqrt{n^2 + 2n + 2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} a_{n+1} - \sqrt{n} a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2(\sqrt{n^2 + 2n + 2} - \sqrt{n^2 + 1}) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 2n + 2} - \sqrt{n^2 + 1})(\sqrt{n^2 + 2n + 2} + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 + 2n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{\sqrt{n^2 + 2n + 2} + \sqrt{n^2 + 1}} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \\ &= 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

059 답 1

$$P_n(n, 3n^2), P_{n+1}(n+1, 3(n+1)^2) \text{에서}$$

$$a_n = \sqrt{P_n P_{n+1}} = \sqrt{1^2 + \{3(n+1)^2 - 3n^2\}^2} = \sqrt{36n^2 + 36n + 10}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{6n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{36n^2 + 36n + 10}}{6n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{36 + \frac{36}{n} + \frac{10}{n^2}}}{6} = 1 \end{aligned}$$

060 ㉮ ⑤

$y=nx$ 를 $x^2+y^2=4$ 에 대입하면

$$x^2+(nx)^2=4, x^2=\frac{4}{n^2+1}$$

$$\therefore x=-\frac{2}{\sqrt{n^2+1}} \text{ 또는 } x=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}$$

그런데 점 P_n 은 제1사분면 위의 점이므로

$$P_n\left(\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}, \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}\right), Q_n\left(\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}, 0\right)$$

따라서 $\triangle P_n O Q_n$ 의 넓이 S_n 은

$$S_n=\frac{1}{2} \times \overline{OQ_n} \times \overline{P_nQ_n}=\frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{n^2+1}} \times \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{2n}{n^2+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n^2}} = 2$$

061 ㉮ 2

$a_1=4, a_2=4+8, a_3=4+8+12, \dots$ 에서

$$a_n=4+8+12+\dots+4n=\sum_{k=1}^n 4k$$

$$=4 \times \frac{n(n+1)}{2}=2n^2+2n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+2n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2+\frac{2}{n}\right) = 2$$

062 ㉮ $\frac{2}{3}$

$P_n\left(\alpha_n, \frac{\alpha_n}{n}+1\right), Q_n\left(\beta_n, \frac{\beta_n}{n}+1\right)$ 이라 하면 α_n, β_n 은 이차방정식

$$x^2-\left(3+\frac{1}{n}\right)x+\frac{3}{n}=\frac{1}{n}x+1, \text{ 즉 } x^2-\left(3+\frac{2}{n}\right)x+\frac{3}{n}-1=0 \text{의}$$

두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n+\beta_n=3+\frac{2}{n} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\triangle O P_n Q_n$ 의 무게중심의 y 좌표 a_n 은

$$a_n=\frac{1}{3}\left\{0+\left(\frac{\alpha_n}{n}+1\right)+\left(\frac{\beta_n}{n}+1\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{n}+2\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{3+\frac{2}{n}}{n}+2\right) (\because \textcircled{1})$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+2\right)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}\left(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+2\right)$$

$$=\frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+2\right)$$

$$=\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$$

063 ㉮ ④

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 5^n + 2^{n+1}}{5^{n+1} - 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 5^n + 2 \times 2^n}{5 \times 5^n - 2^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n}{5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{2}{5}$$

064 ㉮ 3

공비가 $\frac{2x-1}{3}$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < \frac{2x-1}{3} \leq 1, -3 < 2x-1 \leq 3$$

$$-2 < 2x \leq 4 \quad \therefore -1 < x \leq 2$$

따라서 모든 정수 x 의 값의 합은 $0+1+2=3$

065 ㉮ -3

(i) $|r| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2r^n-4}{r^n+1} = -4$$

(ii) $r=1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2r^n-4}{r^n+1} = \frac{2-4}{1+1} = -1$$

(iii) $|r| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2r^n-4}{r^n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{4}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}} = 2$$

따라서 $a=-4, b=-1, c=2$ 이므로

$$a+b+c=-3$$

066 ㉮ $\frac{7}{4}$

$$f(-2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3 \times (-2) - (-2)^{n-1}}{2+(-2)^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5 - \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-2)^n}{2+(-2)^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3 \times \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{2+\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2+\left(\frac{1}{3}\right)^n} = 1$$

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3 \times 1 - 1^{n-1}}{2+1^n} = \frac{1+3-1}{2+1} = 1$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3 \times \frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}}{2+\left(\frac{4}{3}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5-\frac{3}{4} \times \left(\frac{4}{3}\right)^n}{2+\left(\frac{4}{3}\right)^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{3}{4}}{2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore f(-2) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f(1) + f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} + 1 + 1 + \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4}$$

다른 풀이

(i) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n-1} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3x-x^{n-1}}{2+x^n} = \frac{1+3x}{2}$$

(ii) $x=1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n-1} = 1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3x-x^{n-1}}{2+x^n} = \frac{1+3-1}{2+1} = 1$$

(iii) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3x-x^{n-1}}{2+x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^n} + \frac{3x}{x^n} - \frac{1}{x}}{\frac{2}{x^n} + 1} = -\frac{1}{x}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$\begin{aligned} f(-2) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f(1) + f\left(\frac{4}{3}\right) &= \frac{1}{2} + 1 + 1 + \left(-\frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

067 답 4

$P_n(n, 2^n)$, $Q_n(n, 4^n)$ 이므로 $\overline{P_n Q_n} = 4^n - 2^n$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{P_{n+1} Q_{n+1}}}{\overline{P_n Q_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} - 2^{n+1}}{4^n - 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 4$$

068 답 ③

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+2} - 3^{n+1}}{4^{n-1} + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 4^n - 3 \times 3^n}{\frac{1}{4} \times 4^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^n} = 16$$

069 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

ㄱ. 수열 $\{0.5^n\}$ 은 공비가 0.5이고, $-1 < 0.5 < 1$ 이므로 0에 수렴한다.

따라서 수열 $\{1 + 0.5^n\}$ 은 1에 수렴한다.

ㄴ. 수열 $\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}$ 은 공비가 $-\frac{1}{5}$ 이고, $-1 < -\frac{1}{5} < 1$ 이므로 0에 수렴한다.

따라서 수열 $\left\{3 + \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}$ 은 3에 수렴한다.

ㄷ. 수열 $\left\{\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^n\right\}$ 은 공비가 $\frac{3}{\sqrt{5}}$ 이고, $\frac{3}{\sqrt{5}} > 1$ 이므로 발산한다.

따라서 수열 $\left\{\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^n - 2\right\}$ 는 발산한다.

ㄹ. $3^{-n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ 에서 공비가 $\frac{1}{3}$ 이고, $-1 < \frac{1}{3} < 1$ 이므로 수열 $\{3^{-n}\}$ 은 0에 수렴한다.

$4^{-n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 에서 공비가 $\frac{1}{4}$ 이고, $-1 < \frac{1}{4} < 1$ 이므로 수열 $\{4^{-n}\}$ 은 0에 수렴한다.

따라서 수열 $\{3^{-n} - 4^{-n}\}$ 은 0에 수렴한다.

따라서 보기의 수열 중 수렴하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

070 답 4

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \times a_n - 3^{n+1}}{3^n \times a_n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5a_n - 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n}{\left(\frac{3}{5}\right)^n \times a_n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 5a_n = 5\alpha$$

따라서 $5\alpha = 20$ 이므로 $\alpha = 4$

071 답 $\frac{1}{3}$

$$a_n = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}, S_n = \frac{2\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1\right\}}{\frac{3}{2} - 1} = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n - 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n - 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n}{2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n - 2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{3}}{2 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

072 답 ③

$x^2 - 6x + 4 = 0$ 에서 $x = 3 \pm \sqrt{5}$

$a = 3 - \sqrt{5}$, $b = 3 + \sqrt{5}$ 라 하면

$0 < \frac{a}{b} < 1$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^n}{\frac{1}{a} \times a^n + \frac{1}{b} \times b^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1}{\frac{1}{a} \times \left(\frac{a}{b}\right)^n + \frac{1}{b}} = b = 3 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

073 답 ④

$3 \times 4^n - 3^n < (2^{n+1} + 4^{n-1})a_n < 2^n + 3 \times 4^n$ 에서

$$\frac{3 \times 4^n - 3^n}{2^{n+1} + 4^{n-1}} < a_n < \frac{2^n + 3 \times 4^n}{2^{n+1} + 4^{n-1}}$$

이때

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 4^n - 3^n}{2^{n+1} + 4^{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 4^n - 3^n}{2 \times 2^n + \frac{1}{4} \times 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4}} = 12, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3 \times 4^n}{2^{n+1} + 4^{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3 \times 4^n}{2 \times 2^n + \frac{1}{4} \times 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3}{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4}} = 12 \end{aligned}$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 12$$

074 ㉮ ③

$10^n = 2^n \times 5^n$ 이므로

$$a_n = (1+2+2^2+\cdots+2^n)(1+5+5^2+\cdots+5^n)$$

$$= \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \times \frac{5^{n+1}-1}{5-1}$$

$$= \frac{1}{4}(2^{n+1}-1)(5^{n+1}-1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{10^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}(2^{n+1}-1)(5^{n+1}-1) \times \frac{1}{2^{n+1} \times 5^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

075 ㉮ $\frac{21}{4}$

(㉶)에서 $a_1+a_2+a_3=1+4+9=14$

(㉷)에서

$$a_4+a_5+a_6=3(a_1+a_2+a_3)=3 \times 14$$

$$a_7+a_8+a_9=3(a_4+a_5+a_6)=3^2 \times 14$$

⋮

$$\therefore a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}=3^{n-1} \times 14$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{3n} a_k &= (a_1+a_2+a_3) + (a_4+a_5+a_6) + \cdots + (a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}) \\ &= 14 + 3 \times 14 + 3^2 \times 14 + \cdots + 3^{n-1} \times 14 \\ &= \frac{14(3^n-1)}{3-1} = 7(3^n-1) \end{aligned}$$

이때 $a_2=4$, $a_5=3 \times 4$, $a_8=3^2 \times 4$, $\cdots$, $a_{3n-1}=3^{n-1} \times 4$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{3n-1}} \sum_{k=1}^{3n} a_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7(3^n-1)}{4 \times 3^{n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{4} \left(3 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) = \frac{21}{4} \end{aligned}$$

076 ㉮ 5

공비가 $\frac{4x-x^2}{5}$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < \frac{4x-x^2}{5} \leq 1$$

$$(i) -1 < \frac{4x-x^2}{5} \text{에서 } x^2-4x-5 < 0$$

$$(x+1)(x-5) < 0 \quad \therefore -1 < x < 5$$

$$(ii) \frac{4x-x^2}{5} \leq 1 \text{에서 } x^2-4x+5 \geq 0$$

이때 $x^2-4x+5=(x-2)^2+1 > 0$ 이므로 항상 성립한다.

(i), (ii)에서 $-1 < x < 5$

따라서 정수 x 는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

077 ㉮ ④

첫째항이 $x-2$, 공비가 $\log_2 x - 2$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$x-2=0 \text{ 또는 } -1 < \log_2 x - 2 \leq 1$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } 1 < \log_2 x \leq 3$$

이때 $1 < \log_2 x \leq 3$ 에서 $\log_2 2 < \log_2 x \leq \log_2 8$

$$\therefore 2 < x \leq 8$$

따라서 $2 \leq x \leq 8$ 이므로 정수 x 는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 7개이다.

078 ㉮ $-2 < x \leq -\frac{2}{3}$

(i) 등비수열 $\left\{(x-1)\left(\frac{x}{2}\right)^n\right\}$ 의 첫째항이 $(x-1) \times \frac{x}{2}$, 공비가 $\frac{x}{2}$

이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$(x-1) \times \frac{x}{2} = 0 \text{ 또는 } -1 < \frac{x}{2} \leq 1$$

$$(x-1) \times \frac{x}{2} = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } x=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$-1 < \frac{x}{2} \leq 1 \text{에서 } -2 < x \leq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $-2 < x \leq 2$

(ii) 등비수열 $\left\{\left(\frac{3x-2}{4}\right)^{n-1}\right\}$ 의 공비가 $\frac{3x-2}{4}$ 이므로 이 등비수열

이 수렴하려면 $-1 < \frac{3x-2}{4} \leq 1$

$$-4 < 3x-2 \leq 4, -2 < 3x \leq 6$$

$$\therefore -\frac{2}{3} < x \leq 2$$

(i), (ii)에서 두 등비수열 중 어느 하나만 수렴하도록 하는 실수 x 의 값의 범위는 $-2 < x \leq -\frac{2}{3}$

079 ㉮ ㄴ, ㄷ

등비수열 $\{r^n\}$ 이 수렴하므로 $-1 < r \leq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$

ㄱ. 공비가 $-r$ 이고 ㉠에서 $-1 \leq -r < 1$

이때 $-r=-1$, 즉 $r=1$ 이면 수열 $\{(-r)^n\}$ 은 수렴하지 않는다.

ㄴ. 공비가 $\frac{r+1}{3}$ 이고 ㉠에서 $0 < r+1 \leq 2$

$$\therefore 0 < \frac{r+1}{3} \leq \frac{2}{3}$$

즉, 수열 $\left\{\left(\frac{r+1}{3}\right)^n\right\}$ 은 수렴한다.

ㄷ. 공비가 r^2 이고 ㉠에서 $0 \leq r^2 \leq 1$

즉, 수열 $\{r^{2n}\}$ 은 수렴한다.

ㄹ. 공비가 $\frac{1}{r}$ 이고 ㉠에서 $\frac{1}{r} < -1$ 또는 $\frac{1}{r} \geq 1$

즉, 수열 $\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$ 은 $\frac{1}{r}=1$ 일 때만 수렴한다.

따라서 보기의 수열 중 항상 수렴하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

080 ㉮ 7

(i) $|r| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{3r^n+1} = 0$$

(ii) $r=1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{3r^n+1} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$$

(iii) $|r| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{3r^n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3+\frac{1}{r^n}} = \frac{1}{3}$$

따라서 $a=0$, $b=\frac{1}{4}$, $c=\frac{1}{3}$ 이므로

$$12(a+b+c) = 12\left(0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = 7$$

081 답 ③

ㄱ. $|r| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - r - 2}{r^n + 1} = -r - 2$$

ㄴ. $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - r - 2}{r^n + 1} = \frac{1 - 1 - 2}{1 + 1} = -1$$

ㄷ. $|r| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - r - 2}{r^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{r}{r^n} - \frac{2}{r^n}}{1 + \frac{1}{r^n}} = 1$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

082 답 ⑤

(i) $0 < r < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + r + 3}{r^n + 2} = \frac{r + 3}{2}$$

따라서 $\frac{r + 3}{2} = \frac{7}{4}$ 이므로 $2r + 6 = 7 \quad \therefore r = \frac{1}{2}$

(ii) $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + r + 3}{r^n + 2} = \frac{1 + 1 + 3}{1 + 2} = \frac{5}{3}$$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $r > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + r + 3}{r^n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r + \frac{r}{r^n} + \frac{3}{r^n}}{1 + \frac{2}{r^n}} = r \quad \therefore r = \frac{7}{4}$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 실수 r 의 값의 합은 $\frac{1}{2} + \frac{7}{4} = \frac{9}{4}$

083 답 9

(i) $|r| < 5$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{5}\right)^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 5^n}{r^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{r}{5}\right)^n - 1}{\left(\frac{r}{5}\right)^n + 1} = -1$$

(ii) $r = 5$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 5^n}{r^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 5^n}{5^n + 5^n} = 0$$

(iii) $|r| > 5$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{r}\right)^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 5^n}{r^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{5}{r}\right)^n}{1 + \left(\frac{5}{r}\right)^n} = 1$$

(i), (ii), (iii)에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 5^n}{r^n + 5^n} = -1$ 을 만족시키는 r 의 값의 범위는 $|r| < 5$

따라서 정수 r 는 $-4, -3, -2, \dots, 4$ 의 9개이다.

084 답 $-\frac{11}{3}$

$$f(-2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^{2n+1} - 2}{(-2)^{2n} + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}}{1 + 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}} = -2$$

$$f(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n+1} - 2}{(-1)^{2n} + 3} = \frac{-1 - 2}{1 + 3} = -\frac{3}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} - 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + 3} = -\frac{2}{3}$$

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2n+1} - 2}{1^{2n} + 3} = \frac{1 - 2}{1 + 3} = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(-2) + f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \\ = -2 + \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{11}{3} \end{aligned}$$

다른 풀이

(i) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} - 2}{x^{2n} + 3} = -\frac{2}{3}$$

(ii) $x = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = 1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} - 2}{x^{2n} + 3} = \frac{1 - 2}{1 + 3} = -\frac{1}{4}$$

(iii) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} - 2}{x^{2n} + 3} = \frac{x - \frac{2}{x^{2n}}}{1 + \frac{3}{x^{2n}}} = x$$

(iv) $x = -1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = -1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} - 2}{x^{2n} + 3} = \frac{-1 - 2}{1 + 3} = -\frac{3}{4}$$

(i)~(iv)에서

$$\begin{aligned} f(-2) + f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \\ = -2 + \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{11}{3} \end{aligned}$$

085 답 ③

ㄱ. $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n-1} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^{2n-1}}{3 + x^{2n}} = \frac{1}{3}x^2$$

ㄴ. $x = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n-1} = 1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^{2n-1}}{3 + x^{2n}} = \frac{1 + 1}{3 + 1} = \frac{1}{2}$$

$x = -1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n-1} = -1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^{2n-1}}{3 + x^{2n}} = \frac{1 + (-1)}{3 + 1} = 0$$

ㄷ. $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^{2n-1}}{3 + x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^{2n}} + \frac{1}{x}}{\frac{3}{x^{2n}} + 1} = \frac{1}{x}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

086 ㉔ 2

직선 $y=g(x)$ 는 원점과 점 $(6, 6)$ 을 지나므로 $g(x)=x$
 $f(4)=8, g(4)=4$ 이므로

$$\begin{aligned} h(4) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(4)\}^{n+1} + \{g(4)\}^{n+1}}{\{f(4)\}^n + \{g(4)\}^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^{n+1} + 4^{n+1}}{8^n + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \times 8^n + 4 \times 4^n}{8^n + 4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 8 \end{aligned}$$

$f(6)=6, g(6)=6$ 이므로

$$\begin{aligned} h(6) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{f(6)\}^{n+1} + \{g(6)\}^{n+1}}{\{f(6)\}^n + \{g(6)\}^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1} + 6^{n+1}}{6^n + 6^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \times 6^n + 6 \times 6^n}{6^n + 6^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12 \times 6^n}{2 \times 6^n} = 6 \\ \therefore h(4) - h(6) &= 8 - 6 = 2 \end{aligned}$$

087 ㉔ 3

(i) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^n}{2+x^n} = \frac{1}{2}$$

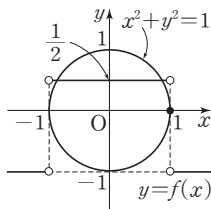
(ii) $x=1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^n}{2+x^n} = \frac{1-1}{2+1} = 0$$

(iii) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^n}{2+x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^n} - 1}{\frac{2}{x^n} + 1} = -1$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽
 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프
 와 원 $x^2+y^2=1$ 의 교점의 개수는 3이다.



088 ㉔ ②

(i) $0 < x < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+3} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+3} + ax^2 + bx}{x^n + 1} = ax^2 + bx$$

(ii) $x=1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+3} = 1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+3} + ax^2 + bx}{x^n + 1} = \frac{1+a+b}{1+1} = \frac{a+b+1}{2}$$

(iii) $x > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+3} + ax^2 + bx}{x^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^3 + \frac{ax^2}{x^n} + \frac{bx}{x^n}}{1 + \frac{1}{x^n}} = x^3$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & (0 < x < 1) \\ \frac{a+b+1}{2} & (x=1) \\ x^3 & (x > 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=1$ 에서
 도 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x^3 = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + bx) = \frac{a+b+1}{2}$$

$$1 = a+b = \frac{a+b+1}{2} \quad \therefore a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 $f'(1)$ 이 존재하므로 $f'(x) = \begin{cases} 2ax+b & (0 < x < 1) \\ 3x^2 & (x > 1) \end{cases}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 3x^2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2ax+b) \quad \therefore 2a+b=3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a=2, b=-1$

$$\therefore a^2 - b^2 = 3$$

089 ㉔ 4

$P_n(4^n, 2^n), P_{n+1}(4^{n+1}, 2^{n+1})$ 이므로

$$\begin{aligned} l_n &= \sqrt{(4^{n+1}-4^n)^2 + (2^{n+1}-2^n)^2} \\ &= \sqrt{\{(4-1) \times 4^n\}^2 + \{(2-1) \times 2^n\}^2} \\ &= \sqrt{9 \times 16^n + 4^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 \times 16^{n+1} + 4^{n+1}}}{\sqrt{9 \times 16^n + 4^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9 \times 16^{n+1} + 4^{n+1}}{9 \times 16^n + 4^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9 \times 16 + 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n}{9 + \left(\frac{1}{4}\right)^n}} = \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

090 ㉔ ②

$2x+y=4^n, x-2y=2^n$ 을 연립하여 풀면

$$x = \frac{1}{5}(2 \times 4^n + 2^n), y = \frac{1}{5}(4^n - 2^{n+1})$$

두 직선 $2x+y=4^n, x-2y=2^n$ 이 만나는 점의 좌표는
 $\left(\frac{1}{5}(2 \times 4^n + 2^n), \frac{1}{5}(4^n - 2^{n+1})\right)$

따라서 $a_n = \frac{1}{5}(2 \times 4^n + 2^n), b_n = \frac{1}{5}(4^n - 2^{n+1})$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{5}(4^n - 2^{n+1})}{\frac{1}{5}(2 \times 4^n + 2^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2^{n+1}}{2 \times 4^n + 2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

091 ㉔ 3

$\log_2 x = n$ 에서 $x=2^n, \log_3 x - 1 = n$ 에서 $x=3^{n+1}$ 이므로

$$A_n(2^n, n), B_n(3^{n+1}, n)$$

$$\therefore \overline{A_n B_n} = 3^{n+1} - 2^n, \overline{A_n C_n} = n$$

따라서 사각형 $A_n C_n D_n B_n$ 의 넓이 S_n 은

$$S_n = n(3^{n+1} - 2^n)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(3^{n+2} - 2^{n+1})}{n(3^{n+1} - 2^n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}{3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &= 1 \times 3 = 3 \end{aligned}$$

092 답 ⑤

- ① n 의 값이 한없이 커질 때 $10-3n$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 수열 $\{10-3n\}$ 은 음의 무한대로 발산한다.
- ② n 의 값이 한없이 커질 때 $2 \times (-1)^n$ 의 값은 홀수 번째 항 $-2, -2, -2, \dots$ 는 -2 에 수렴하고, 짝수 번째 항 $2, 2, 2, \dots$ 는 2 에 수렴하므로 수열 $\{2 \times (-1)^n\}$ 은 발산(진동)한다.
- ③ n 의 값이 한없이 커질 때 $\frac{n^2-1}{3n+2}$ 의 값도 한없이 커지므로 수열 $\left\{\frac{n^2-1}{3n+2}\right\}$ 은 양의 무한대로 발산한다.
- ④ n 의 값이 한없이 커질 때 $\frac{n}{\sqrt{n+1}}$ 의 값도 한없이 커지므로 수열 $\left\{\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right\}$ 은 양의 무한대로 발산한다.
- ⑤ n 의 값이 한없이 커질 때, $\frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}$ 의 값은 0 에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right\}$ 은 0 에 수렴한다.

093 답 $\frac{5}{4}$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \{ (a_n + b_n)^2 - (a_n - b_n)^2 \} \\ &= \frac{1}{4} \{ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)^2 \} \\ &= \frac{1}{4} (3^2 - 2^2) = \frac{5}{4}\end{aligned}$$

094 답 ③

수열 $\{a_n\}$ 이 0 이 아닌 실수에 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a (a \neq 0)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= a \\ \frac{1}{a_{n+1}} &= 4 - 4a_n \text{에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (4 - 4a_n) \text{이므로} \\ \frac{1}{a} &= 4 - 4a, \quad 4a^2 - 4a + 1 = 0 \\ (2a-1)^2 &= 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

095 답 $\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 &= \sum_{k=1}^n (2k)^2 = 4 \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= 4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n}{3} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2}{2n^3 - 3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n}{3(2n^3 - 3n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n}{6n^3 - 9n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}}{6 - \frac{9}{n^2}} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

096 답 4

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - 3n - \{2(n-1)^2 - 3(n-1)\} = 4n - 5\end{aligned}$$

따라서 $a_{2n} = 4 \times 2n - 5 = 8n - 5$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{2n}}{a_n - 2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n - 5}{2n - 5} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{5}{n}}{2 - \frac{5}{n}} = 4\end{aligned}$$

097 답 ③

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\log_2 \sqrt{2n^2 + n - 3} - \log_2 \sqrt{4n^2 - n + 1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{\sqrt{2n^2 + n - 3}}{\sqrt{4n^2 - n + 1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}}}{\sqrt{4 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} \\ &= \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \log_2 2^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

098 답 6

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + an^2 + bn}{a_n + 3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2a_n}{n} + an + \frac{b}{n}}{\frac{a_n}{n} + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b + 2}{4} \quad \dots\dots ㉠\end{aligned}$$

$a \neq 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b + 2}{4}$ 는 발산하므로 $a = 0$

따라서 ㉠에서 $\frac{b+2}{4} = 2$ 이므로 $b = 6$

$$\therefore b - a = 6$$

099 답 ②

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1})}{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-1})}{3(\sqrt{n+3} + \sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} = 1\end{aligned}$$

100 답 4

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{an^2+bn}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{an^2+bn}}{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{an^2+bn})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{an^2+bn})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{an^2+bn}}{(1-a)n^2+(1-b)n} \\ & \text{이때 } 1-a \neq 0 \text{ 이면 극한값이 } 0 \text{ 이므로 } 1-a=0 \quad \therefore a=1 \\ & \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{an^2+bn}}{(1-a)n^2+(1-b)n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+bn}}{(1-b)n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{b}{n}}}{1-b} \\ &= \frac{2}{1-b} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{2}{1-b} = \frac{1}{2}$ 이므로 $b = -3$

$$\therefore a-b = 1 - (-3) = 4$$

101 답 ②

$a_n - b_n = c_n$ 으로 놓으면 $b_n = a_n - c_n$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2$ 이고, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{a_n - 2b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + (a_n - c_n)}{a_n - 2(a_n - c_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n - c_n}{-a_n + 2c_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{c_n}{a_n}}{-1 + 2 \times \frac{c_n}{a_n}} = -2 \end{aligned}$$

102 답 $\frac{1}{3}$

$(a_n - n^2)(a_n - n^2 + n) < 0$ 에서 $n^2 - n < a_n < n^2$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (k^2 - k) &< S_n < \sum_{k=1}^n k^2 \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} &< S_n < \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \frac{n^3 - n}{3} &< S_n < \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \quad \therefore \frac{n^3 - n}{3n^3} < \frac{S_n}{n^3} < \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} \end{aligned}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - n}{3n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3}$ 이므로 수열의 극한의

대소 관계에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^3} = \frac{1}{3}$

103 답 ㄱ, ㄴ

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n - (a_n - b_n)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \alpha - 0 = \alpha \end{aligned}$$

ㄴ. [반례] $a_n = b_n = (-1)^n$ 이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 1$ 이므로 수열 $\{a_n b_n\}$ 이 수렴하지만 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 모두 발산(진동)한다.

ㄷ. [반례] $a_n = (-1)^n$ 이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$ 이므로 수열 $\{|a_n|\}$ 은 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$ 은 발산(진동)한다.

ㄹ. $|a_n| < |b_n|$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄹ 이다.

104 답 ①

곡선 $y = x^2$ 과 직선 $y = nx + n$ 이 만나는 두 점의 x 좌표는

$$x^2 = nx + n \text{ 에서 } x^2 - nx - n = 0$$

$$\therefore x = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4n}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{n - \sqrt{n^2 + 4n}}{2}$$

따라서 만나는 두 점의 y 좌표는

$$\frac{n^2 + n\sqrt{n^2 + 4n}}{2} + n, \frac{n^2 - n\sqrt{n^2 + 4n}}{2} + n \text{ 이므로}$$

$$a_n = |p_n - q_n| = n\sqrt{n^2 + 4n}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{(n+1)^2 + 4(n+1)} - \sqrt{n^2 + 4n} \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 6n + 5} - \sqrt{n^2 + 4n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 6n + 5} - \sqrt{n^2 + 4n})(\sqrt{n^2 + 6n + 5} + \sqrt{n^2 + 4n})}{\sqrt{n^2 + 6n + 5} + \sqrt{n^2 + 4n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 5}{\sqrt{n^2 + 6n + 5} + \sqrt{n^2 + 4n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{n}}{\sqrt{1 + \frac{6}{n} + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{n}}} = 1 \end{aligned}$$

105 답 3

$$y = \frac{2n}{n+2}x \text{ 에서 } x = \frac{n+2}{2n}y$$

이를 $x + y = 3$ 에 대입하면

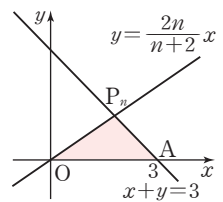
$$\frac{n+2}{2n}y + y = 3, \frac{3n+2}{2n}y = 3 \quad \therefore y = \frac{6n}{3n+2}$$

따라서 점 P_n 의 y 좌표가 $\frac{6n}{3n+2}$ 이고

$A(3, 0)$ 이므로

$$S_n = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{6n}{3n+2} = \frac{9n}{3n+2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{3 + \frac{2}{n}} = 3$$



106 답 ①

$2a_n + b_n = 3^n$, $a_n + 2b_n = 2^n$ 을 연립하여 풀면

$$a_n = \frac{1}{3}(2 \times 3^n - 2^n), \quad b_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} - 3^n)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3}(2 \times 3^n - 2^n)}{\frac{1}{3}(2^{n+1} - 3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 3^n - 2^n}{2^{n+1} - 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1} = -2 \end{aligned}$$

107 답 $\frac{2}{5}$

$$S_n = \frac{a_1(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{a_1(3^n - 1)}{2} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 3^{n+1}}{a_1(3^n - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{a_1 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}} = \frac{6}{a_1}$$

따라서 $\frac{6}{a_1} = 15$ 이므로 $a_1 = \frac{2}{5}$

108 답 14

(i) 등비수열 $\left\{\left(\frac{x-1}{4}\right)^n\right\}$ 이 수렴하려면

$$-1 < \frac{x-1}{4} \leq 1 \quad \therefore -3 < x \leq 5$$

(ii) 등비수열 $\{(-1 + \log_3 x)^n\}$ 이 수렴하려면

$$-1 < -1 + \log_3 x \leq 1, \quad 0 < \log_3 x \leq 2$$

$$\log_3 1 < \log_3 x \leq \log_3 9 \quad \therefore 1 < x \leq 9$$

(i), (ii)에서 $1 < x \leq 5$

따라서 모든 정수 x 의 값의 합은 $2+3+4+5=14$

109 답 8

(i) $\left|\frac{r}{4}\right| < 1$, 즉 $-4 < r < 4$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{4}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{4}\right)^{2n+1} = 0 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \left(\frac{r}{4}\right)^{2n+1}}{1 + \left(\frac{r}{4}\right)^{2n}} = 2$$

(ii) $\frac{r}{4} = 1$, 즉 $r = 4$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{4}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{4}\right)^{2n+1} = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \left(\frac{r}{4}\right)^{2n+1}}{1 + \left(\frac{r}{4}\right)^{2n}} = \frac{2+1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

(iii) $\left|\frac{r}{4}\right| > 1$, 즉 $r < -4$ 또는 $r > 4$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{4}\right)^{2n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \left(\frac{r}{4}\right)^{2n+1}}{1 + \left(\frac{r}{4}\right)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{r}{4}\right)^{2n} + \frac{r}{4}}{\left(\frac{r}{4}\right)^{2n} + 1} = \frac{r}{4}$$

이때 $\frac{r}{4} = 2$ 에서 $r = 8$

(iv) $\frac{r}{4} = -1$, 즉 $r = -4$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{4}\right)^{2n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{4}\right)^{2n+1} = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \left(\frac{r}{4}\right)^{2n+1}}{1 + \left(\frac{r}{4}\right)^{2n}} = \frac{2 + (-1)}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

(i)~(iv)에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \left(\frac{r}{4}\right)^{2n+1}}{1 + \left(\frac{r}{4}\right)^{2n}} = 2$ 를 만족시키는 r 의 값의 범위는

$-4 < r < 4$ 또는 $r = 8$

따라서 정수 r 는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 8$ 의 8개이다.

110 답 ①

(i) $x = 1, 2, 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} - x^{n+1}}{4^n + x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - x \times \left(\frac{x}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{x}{4}\right)^n} = 4$$

(ii) $x = 4$ 일 때,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} - 4^{n+1}}{4^n + 4^n} = 0$$

(iii) $x = 5, 6, 7, \dots, 10$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{x}\right)^n = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} - x^{n+1}}{4^n + x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times \left(\frac{4}{x}\right)^n - x}{\left(\frac{4}{x}\right)^n + 1} = -x$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{x=1}^{10} f(x) &= f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(10) \\ &= 4 \times 3 + 0 - (5 + 6 + 7 + \dots + 10) \\ &= -33 \end{aligned}$$

111 답 $-\frac{1}{2}$

(i) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{x^{2n} + 1} = 0$$

(ii) $x = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = 1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{x^{2n} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(iii) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0$ 이므로

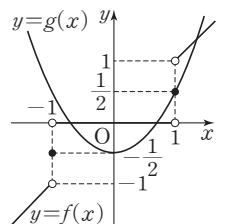
$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{x^{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = x$$

(iv) $x = -1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = -1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{x^{2n} + 1} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프의 교점이 4개려면 $y = g(x)$ 의 그래프가 점 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 을 지나야 한다.

따라서 $\frac{1}{2} = 1^2 + k$ 이므로 $k = -\frac{1}{2}$



112 답 1

$A_n(n, 2^n), B_n(n, 3^n)$ 이므로 삼각형 OA_nC 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times n = \frac{n}{2}$$

삼각형 A_nB_nC 의 넓이 T_n 은

$$T_n = \frac{1}{2} \times (3^n - 2^n) \times n = \frac{n}{2} (3^n - 2^n)$$

사각형 OA_nB_nC 의 넓이 S_n 은 삼각형 OA_nC 의 넓이와 삼각형 A_nB_nC 의 넓이의 합과 같으므로

$$S_n = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} (3^n - 2^n) = \frac{n}{2} (1 + 3^n - 2^n)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{2} (3^n - 2^n)}{\frac{n}{2} (1 + 3^n - 2^n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{1 + 3^n - 2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1 \end{aligned}$$

001 답 ①

주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

002 답 ②

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \log_2 \frac{n^2-1}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \log_2 \frac{(k-1)(k+1)}{k \times k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \log_2 \left(\frac{k-1}{k} \times \frac{k+1}{k} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \right) + \log_2 \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \right) + \log_2 \left(\frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \log_2 \left(\frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{n+1}{2n} = \log_2 \frac{1}{2} \\ &= \log_2 2^{-1} = -1 \end{aligned}$$

003 답 ㄴ

주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

ㄱ. $S_1=1, S_2=0, S_3=1, S_4=0, S_5=1, S_6=0, \dots$ 이므로

$$S_{2n-1}=1, S_{2n}=0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=0$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $S_1=1, S_2=\frac{1}{2}, S_3=1, S_4=\frac{2}{3}, S_5=1, S_6=\frac{3}{4}, \dots$ 이므로

$$S_{2n-1}=1, S_{2n}=\frac{n}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}=1$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 1에 수렴한다.

ㄷ. $S_1=1, S_2=-1, S_3=2, S_4=-2, S_5=3, S_6=-3, \dots$ 이므로

$$S_{2n-1}=n, S_{2n}=-n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=\lim_{n \rightarrow \infty} n=\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=\lim_{n \rightarrow \infty} (-n)=-\infty$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

따라서 보기의 급수 중 수렴하는 것은 ㄴ이다.

004 답 7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1} + a_n \right) \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{n+1} + a_n \right) = 0$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (3-2a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3 - 2 \times (-2) = 7$$

005 답 ㄴ

ㄱ. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} &= \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1 + \sqrt{n+1}) = \infty \text{ (발산)} \end{aligned}$$

따라서 보기의 급수 중 수렴하는 것은 ㄴ이다.

006 답 -9

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + 3b_n) = 13 \text{에서 } 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 13$$

$$\therefore 2\alpha + 3\beta = 13 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (4a_n - b_n) = 5 \text{에서 } 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 5$$

$$\therefore 4\alpha - \beta = 5 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=2, \beta=3$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 5b_n) = 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 5 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3 \times 2 - 5 \times 3 = -9$$

007 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \{ a_n - (a_n - b_n) \} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 수렴한다.

ㄷ. [반례] $\{a_n\}: 1, 0, 1, 0, 1, \dots, \{b_n\}: 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 0$ 으로 수렴하고, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 이지만

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \text{이다.}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

008 **답** $\frac{3}{4}$

원의 중심을 P라 하면 $P(n, n)$ 이

므로 $OP = \sqrt{2}n$

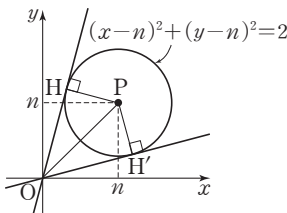
이때 $PH = PH' = \sqrt{2}$ 이므로

$$OH = OH' = \sqrt{OP^2 - PH^2}$$

$$= \sqrt{2n^2 - 2}$$

$$\therefore a_n = 2\sqrt{2n^2 - 2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{8}{a_n^2} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{8}{(2\sqrt{2n^2 - 2})^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$



009 **답** ①

주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{3}{1+2+3+\cdots+n+(n+1)} = \frac{3}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

$$= \frac{6}{(n+1)(n+2)} = 6 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n 6 \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= 6 \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= 6 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = 3$$

010 **답** $\frac{3}{2}$

주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sqrt{n^2 + 3n} - n$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 3n} - n)(\sqrt{n^2 + 3n} + n)}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

011 **답** 5

주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) \\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) \\ &= a_{n+1} - a_1 \end{aligned}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 8$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 = 8 - 3 = 5 \end{aligned}$$

012 **답** ①

$$S_n = \frac{n\{2 \times 3 + (n-1) \times 3\}}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{3} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

013 **답** ④

$$a_n = \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n (k^2 + k)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+2)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

014 **답** 3

다항식 $ax^2 - a_n - 6$ 을 $x - 2n$ 으로 나누었을 때의 나머지가 0이므로

$$4n^2a_n - a_n - 6 = 0, (4n^2 - 1)a_n = 6$$

$$(2n-1)(2n+1)a_n = 6 \quad \therefore a_n = \frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 3 \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = 3 \end{aligned}$$

015 [답] ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \alpha_n + \beta_n &= \frac{4n+2}{\{n(n+1)\}^2} = \frac{2(2n+1)}{n^2(n+1)^2} = 2 \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2 \left\{ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left[\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left\{ 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} = 2 \end{aligned}$$

016 [답] $\frac{21}{2}$

$$a_1 = 4 \text{이고, } a_1 + 2a_2 = 7 \text{이므로 } a_2 = \frac{3}{2}$$

수열 $\{na_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = 3n + 1$$

$$n \geq 2 \text{일 때, } na_n = S_n - S_{n-1} = (3n+1) - \{3(n-1)+1\} = 3$$

$$\therefore a_n = \frac{3}{n} \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} &= a_1 a_2 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{n} \times \frac{3}{n+1} \right) \\ &= a_1 a_2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n 9 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= a_1 a_2 + \lim_{n \rightarrow \infty} 9 \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= a_1 a_2 + \lim_{n \rightarrow \infty} 9 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) = 4 \times \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = \frac{21}{2} \end{aligned}$$

017 [답] ②

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log \left(\frac{k}{k+1} \times \frac{k+2}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \right) + \log \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \right) + \log \left(\frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \log \left(\frac{n}{n+1} \times \frac{n+2}{n+1} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n+2}{n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n+2}{2(n+1)} = \log \frac{1}{2} = \log 2^{-1} = -\log 2 \end{aligned}$$

018 [답] -2

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \log_2 a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log_2 a_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \log_2 a_3 + \cdots + \log_2 a_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 (a_1 a_2 a_3 \cdots a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{n+1}{4n-3} \\ &= \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2 \end{aligned}$$

019 [답] ④

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\log_{n+1} 4 - \log_{n+2} 4) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\log_{k+1} 4 - \log_{k+2} 4) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{\log_4(k+1)} - \frac{1}{\log_4(k+2)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{\log_4 2} - \frac{1}{\log_4 3} \right) + \left(\frac{1}{\log_4 3} - \frac{1}{\log_4 4} \right) + \left(\frac{1}{\log_4 4} - \frac{1}{\log_4 5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left\{ \frac{1}{\log_4(n+1)} - \frac{1}{\log_4(n+2)} \right\} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\log_4 2} - \frac{1}{\log_4(n+2)} \right\} \\ &= \frac{1}{\log_4 2} = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \end{aligned}$$

020 [답] ㄴ, ㄹ

주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\neg. S_1=1, S_2=-1, S_3=1, S_4=-2, S_5=1, S_6=-3, \dots \text{이므로}$$

$$S_{2n-1}=1, S_{2n}=-n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=-\infty$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$\begin{aligned} \hookrightarrow. S_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$$

즉, 주어진 급수는 $\frac{1}{2}$ 에 수렴한다.

$$\sqsubset. S_1=\frac{1}{2}, S_2=-\frac{1}{6}, S_3=\frac{1}{2}, S_4=-\frac{1}{4}, S_5=\frac{1}{2}, S_6=-\frac{3}{10}, \dots$$

$$\text{이므로 } S_{2n-1}=\frac{1}{2}, S_{2n}=-\frac{n}{2n+4}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=\frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{2n+4} \right) = -\frac{1}{2}$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$\rceil. S_1=1, S_2=\frac{1}{2}, S_3=1, S_4=\frac{3}{4}, S_5=1, S_6=\frac{5}{6}, \dots \text{이므로}$$

$$S_{2n-1}=1, S_{2n}=\frac{2n-1}{2n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n}=1$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 1에 수렴한다.

따라서 보기의 급수 중 수렴하는 것은 ㄴ, ㄹ이다.

021 [답] ㄱ

주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\neg. S_1=2, S_2=0, S_3=2, S_4=0, S_5=2, S_6=0, \dots \text{이므로}$$

$$S_{2n-1}=2, S_{2n}=0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=2, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=0$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$\hookrightarrow. S_n = (2-2) + (2-2) + (2-2) + \cdots + (2-2) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$$

즉, 주어진 급수는 0에 수렴한다.

∴ $S_n = 2 + (-2+2) + (-2+2) + (-2+2) + \cdots + (-2+2) = 2$
 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2$
 즉, 주어진 급수는 2에 수렴한다.
 따라서 보기의 급수 중 발산하는 것은 ㄱ이다.

022 답 ①

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면
 $S_1=1, S_2=\frac{2}{3}, S_3=1, S_4=\frac{4}{5}, S_5=1, S_6=\frac{6}{7}, \dots$ 이므로
 $S_{2n-1}=1, S_{2n}=\frac{2n}{2n+1}$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}=1, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}=\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n+1}=1$
 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 제 n 항까지의 부분합을 T_n 이라 하면
 $T_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$
 $= 1 - \frac{1}{2n+1}$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = 1$
 따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 각각 1에 수렴한다.

023 답 ④

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{n^2}{1+2+3+\cdots+n}\right)$ 이 수렴하므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{n^2}{1+2+3+\cdots+n}\right) = 0$
 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{1+2+3+\cdots+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2$
 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

024 답 $\frac{5}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2)$ 가 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - 2) = 0$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 6}{3a_n + 2} = \frac{\frac{2}{3} + 6}{3 \times \frac{2}{3} + 2} = \frac{5}{3}$

025 답 ②

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2} = 0$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + n}{b_n + 4n^2 - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{n^2} + \frac{1}{n}}{\frac{b_n}{n^2} + 4 - \frac{3}{n^2}} = \frac{5+0}{0+4-0} = \frac{5}{4}$

026 답 $-\frac{3}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이고, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2}{3}$ 이므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n - 9S_n}{2a_n + 6S_n} = \frac{3 \times 0 - 9 \times \frac{2}{3}}{2 \times 0 + 6 \times \frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$

027 답 ③

$(a_1 - 1) + \left(\frac{a_2}{2} - 1\right) + \left(\frac{a_3}{3} - 1\right) + \left(\frac{a_4}{4} - 1\right) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - 1\right)$
 즉, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - 1\right)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n} - 1\right) = 0$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 1$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3a_n}{4n + a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 3 \times \frac{a_n}{n}}{4 + \frac{a_n}{n}} = \frac{2 + 3 \times 1}{4 + 1} = 1$

028 답 $\frac{1}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4a_n - 1}{2a_n + 3}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4a_n - 1}{2a_n + 3} = 0$
 $\frac{4a_n - 1}{2a_n + 3} = b_n$ 으로 놓으면
 $4a_n - 1 = (2a_n + 3)b_n$
 $(4 - 2b_n)a_n = 3b_n + 1$
 $\therefore a_n = \frac{3b_n + 1}{4 - 2b_n}$
 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3b_n + 1}{4 - 2b_n} = \frac{3 \times 0 + 1}{4 - 2 \times 0} = \frac{1}{4}$

029 답 -4

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 24$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 24$
 또 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 0$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} + 10a_{2n}}{a_n - 6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{2n} + 9a_{2n}}{a_n - 6}$
 $= \frac{24 + 9 \times 0}{0 - 6} = -4$

030 답 $-\frac{6}{5}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n^2} - \alpha\right)$ 가 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n^2} - \alpha\right) = 0$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \alpha$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{2 - 5a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\frac{2}{n^2} - 5 \times \frac{a_n}{n^2}} = \frac{3}{0 - 5 \times \alpha} = -\frac{3}{5\alpha}$
 따라서 $-\frac{3}{5\alpha} = \frac{1}{2}$ 이므로 $\alpha = -\frac{6}{5}$

031 ㉮ 1

$\sum_{n=1}^{\infty} na_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(a_n - a_{n+1})$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$S_n = 2(a_1 - a_2) + 3(a_2 - a_3) + 4(a_3 - a_4) + \cdots + (n+1)(a_n - a_{n+1})$$

$$= 2a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n - (n+1)a_{n+1}$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^n a_k - (n+1)a_{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(a_n - a_{n+1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ a_1 + \sum_{k=1}^n a_k - (n+1)a_{n+1} \right\}$$

$$= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)a_{n+1}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 0 = 1$$

032 ㉮ ④

ㄱ. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ 은 발산한다.

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ㄷ. $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{n+1}{2n+5} = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1 \neq 0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} \log_2 \frac{n+1}{2n+5}$ 은 발산한다.

$$\begin{aligned} \text{ㄹ. } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{\sqrt{k}} - \frac{2}{\sqrt{k+1}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(2 - \frac{2}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{4}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \right) = 2 \end{aligned}$$

따라서 보기의 급수 중 수렴하는 것은 ㄴ, ㄹ이다.

033 ㉮ ⑤

$$\begin{aligned} \text{① } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \\ > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty \end{aligned}$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

$$\text{② } \frac{1}{3} + \frac{2}{7} + \frac{3}{11} + \frac{4}{15} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n-1}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n-1} = \frac{1}{4} \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$\text{③ } 2 + \frac{5}{4} + \frac{10}{9} + \frac{17}{16} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1 \neq 0$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$\begin{aligned} \text{④ } \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{4}} + \cdots \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \infty \end{aligned}$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

$$\begin{aligned} \text{⑤ } 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2 \end{aligned}$$

034 ㉮ 9

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2b_n) = 11 \text{에서 } 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 11$$

$$\therefore 3\alpha - 2\beta = 11 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 3b_n) = -1 \text{에서 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = -1$$

$$\therefore \alpha - 3\beta = -1 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha = 5$, $\beta = 2$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 5 + 2 \times 2 = 9$$

035 ㉮ ④

$$4a_n - 3b_n = c_n \text{으로 놓으면 } 3b_n = 4a_n - c_n \quad \therefore b_n = \frac{4}{3}a_n - \frac{1}{3}c_n$$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 6$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 30$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}a_n - \frac{1}{3}c_n \right) = \frac{4}{3} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \\ &= \frac{4}{3} \times 6 - \frac{1}{3} \times 30 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 5b_n) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 5 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 2 \times 6 - 5 \times (-2) = 22 \end{aligned}$$

036 ㉮ 4

$\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} \log b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n b_n = 2 \text{에서 } \sum_{n=1}^{\infty} (\log a_n + \log b_n) = 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n + \sum_{n=1}^{\infty} \log b_n = 2 \quad \therefore \alpha + \beta = 2 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{a_n^2}{b_n^3} = 9 \text{에서 } \sum_{n=1}^{\infty} (2 \log a_n - 3 \log b_n) = 9$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \log a_n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \log b_n = 9 \quad \therefore 2\alpha - 3\beta = 9 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha = 3$, $\beta = -1$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{a_n}{b_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (\log a_n - \log b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \log a_n - \sum_{n=1}^{\infty} \log b_n \\ &= 3 - (-1) = 4 \end{aligned}$$

037 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

- ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$
- ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$
 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하면
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n - (a_n - b_n)\} = \alpha - 0 = \alpha$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n) = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - b_n) = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n + 2b_n) + 2(2a_n - b_n)}{5}$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n) + \frac{2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - b_n) = \frac{1}{5} \alpha + \frac{2}{5} \beta$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(a_n + 2b_n) - (2a_n - b_n)}{5}$$

$$= \frac{2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2b_n) - \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - b_n) = \frac{2}{5} \alpha - \frac{1}{5} \beta$$
 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 도 모두 수렴한다.
- ㄹ. [반례] $a_n = \frac{1}{n(n+1)}, b_n = n^2$ 이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right.$$

$$\left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$
 즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 1에 수렴하고, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ 이지만
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = 1 \neq 0$ 이다.
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

038 답 ㄱ

- ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이다.
- ㄴ. [반례] $a_n = \frac{1}{n}$ 이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이지만 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$
- ㄷ. [반례] $\{a_n\}: 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots$ 이라 하고 급수
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면
 $S_{2n-1} = 1, S_{2n} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 1$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 1에 수렴한다.
 $\{a_n^2\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$
 즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴하지만 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 은 발산한다.
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.

039 답 ⑤

- 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2), \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - 2)$ 가 수렴하므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - 2) = 0$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -2, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -4$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -2 \neq 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.
 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n + 2) + (b_n - 2)\}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 2) + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - 2)$$
 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 은 수렴한다.
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

040 답 ②

- 원의 중심을 P라 하면 $P(2n, 0)$ 이고, 원과 직선이 만나는 점을 Q라 하면 원의 반지름의 길이는 1이므로 $PQ = 1$
 $\therefore OQ = \sqrt{OP^2 - PQ^2} = \sqrt{(2n)^2 - 1^2}$

$$= \sqrt{4n^2 - 1}$$
 기울기 a_n 은 $a_n = \tan(\angle POQ) = \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}}$ 이므로
 $a_n^2 = \frac{1}{4n^2 - 1}$
 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

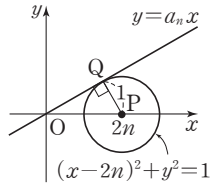
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right.$$

$$\left. + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$$



041 답 $\frac{1}{2}$

- 직선 $(n+1)x + ny = 1$ 에서 $y=0$ 일 때 $x = \frac{1}{n+1}$ 이고, $x=0$ 일 때 $y = \frac{1}{n}$ 이므로 주어진 직선의 x 절편은 $\frac{1}{n+1}$, y 절편은 $\frac{1}{n}$ 이다.
 $\therefore S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{2n(n+1)}$
 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

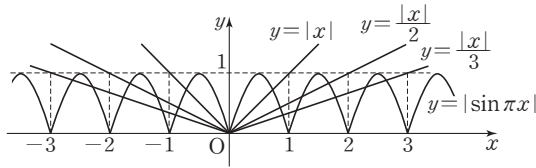
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right.$$

$$\left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

042 답 $\frac{1}{4}$



위의 그림에서 $a_1=3, a_2=7, a_3=11, \dots$ 이므로 $a_n=4n-1$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{a_n a_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(4n-1)(4n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{15} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

043 답 ⑤

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} + (-3)^{n+1}}{12^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-1} \times 2^n}{12^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3) \times (-3)^n}{12^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6} \right)^n \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-3) \times \left(-\frac{1}{4} \right)^n \right\} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} + (-3) \times \frac{-\frac{1}{4}}{1 - \left(-\frac{1}{4} \right)} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{3}{5} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

044 답 $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sqrt{2} \text{에서 } \frac{a_1}{1-r} = \sqrt{2}$$

$$\therefore a_1 = \sqrt{2}(1-r) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

수열 $\{a_n^2\}$ 의 첫째항은 a_1^2 , 공비는 r^2 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{2} \text{에서 } \frac{a_1^2}{1-r^2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{a_1^2}{(1+r)(1-r)} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\frac{2(1-r)^2}{(1+r)(1-r)} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2(1-r)}{1+r} = \frac{1}{2} \quad (\because -1 < r < 1)$$

$$4(1-r) = 1+r, \quad 5r = 3 \quad \therefore r = \frac{3}{5}$$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } a_1 = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

045 답 $x = \frac{1}{2}$ 또는 $3 < x < 5$

첫째항이 $(2x-1)(x-4)$, 공비가 $x-4$ 이므로 주어진 급수가 수렴하려면 $(2x-1)(x-4)=0$ 또는 $-1 < x-4 < 1$

$$(i) (2x-1)(x-4)=0 \text{에서 } x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 4$$

$$(ii) -1 < x-4 < 1 \text{에서 } 3 < x < 5$$

$$(i), (ii) \text{에서 } x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } 3 < x < 5$$

046 답 ㄱ, ㄴ

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하므로 $-1 < r < 1$ ㉠

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n-1}$ 은 공비가 r^2 인 등비급수이고 ㉠에서 $0 \leq r^2 < 1$ 이므로 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} \right)^n$ ($r \neq 0$)은 공비가 $\frac{1}{r}$ 인 등비급수이고 ㉠에서 $\frac{1}{r} < -1$

또는 $\frac{1}{r} > 1$ 이므로 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2} - 1 \right)^n$ 은 공비가 $\frac{r}{2} - 1$ 인 등비급수이고 ㉠에서 $-\frac{3}{2} < \frac{r}{2} - 1 < -\frac{1}{2}$ 이므로 항상 수렴한다고 할 수 없다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r-1}{2} \right)^n$ 은 공비가 $\frac{r-1}{2}$ 인 등비급수이고 ㉠에서 $-1 < \frac{r-1}{2} < 0$ 이므로 수렴한다.

따라서 보기의 급수 중 항상 수렴하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

047 답 $\frac{19}{45}$

$$0.4\dot{2} = 0.4222\cdots = 0.4 + 0.02 + 0.002 + 0.0002 + \cdots$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{2}{10000} + \cdots$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{\frac{2}{100}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{2}{90} = \frac{19}{45}$$

048 답 $\left(\frac{16}{25}, \frac{12}{25} \right)$

점 P가 한없이 가까워지는 점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \overline{OP_1 - P_2P_3 + P_4P_5 - P_6P_7 + \cdots}$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^2 + \left(\frac{3}{4} \right)^4 - \left(\frac{3}{4} \right)^6 + \cdots$$

$$= \frac{1}{1 - \left\{ -\left(\frac{3}{4} \right)^2 \right\}} = \frac{16}{25}$$

$$y = \overline{P_1P_2 - P_3P_4 + P_5P_6 - P_7P_8 + \cdots}$$

$$= \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4} \right)^3 + \left(\frac{3}{4} \right)^5 - \left(\frac{3}{4} \right)^7 + \cdots$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{1 - \left\{ -\left(\frac{3}{4} \right)^2 \right\}} = \frac{12}{25}$$

따라서 점 P가 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $\left(\frac{16}{25}, \frac{12}{25} \right)$ 이다.

049 답 $32(\sqrt{2}+1)$

$\overline{A_1B} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$ 이고 $\triangle A_1BB_1$ 은 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{A_1B_1} = \sqrt{2}\overline{A_1B} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore l_1 = 4 \times 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$$

$\overline{A_2B_1} = \frac{1}{2} \overline{A_1B_1} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ 이고 $\triangle A_2B_1B_2$ 는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{A_2B_2} = \sqrt{2} \overline{A_2B_1} = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$$

$$\therefore l_2 = 4 \times 4 = 16$$

$\overline{A_3B_2} = \frac{1}{2} \overline{A_2B_2} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$ 이고 $\triangle A_3B_2B_3$ 은 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{A_3B_3} = \sqrt{2} \overline{A_3B_2} = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore l_3 = 4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

⋮

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = 16\sqrt{2} + 16 + 8\sqrt{2} + \cdots = \frac{16\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 32(\sqrt{2} + 1)$$

050 답 12

n 번째 얻은 정사각형의 넓이를 S_n 이라 하면

$$S_1 = \overline{A_1B_1}^2 = \left(\frac{1}{2} \overline{AC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \times 6\right)^2 = 3^2 = 9,$$

$$S_2 = \overline{A_2B_2}^2 = \left(\frac{1}{2} \overline{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \times 3\right)^2 = \frac{9}{4},$$

$$S_3 = \overline{A_3B_3}^2 = \left(\frac{1}{2} \overline{A_2B_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{16},$$

⋮

따라서 구하는 합은

$$S_1 + S_2 + S_3 + \cdots = 9 + \frac{9}{4} + \frac{9}{16} + \cdots = \frac{9}{1 - \frac{1}{4}} = 12$$

051 답 750 kg

n 번째 수거하여 재생산되는 종이의 양을 a_n kg이라 하면

$$a_1 = 500 \times 0.8 \times 0.75 = 500 \times \frac{3}{5},$$

$$a_2 = a_1 \times 0.8 \times 0.75 = 500 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2,$$

$$a_3 = a_2 \times 0.8 \times 0.75 = 500 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3,$$

⋮

따라서 재생산되는 종이의 양의 합은

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots &= 500 \times \frac{3}{5} + 500 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 500 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \cdots \\ &= \frac{500 \times \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = 750 \text{ (kg)} \end{aligned}$$

052 답 ④

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1} - 5^n}{10^{n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \times 4^n}{10 \times 10^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{10 \times 10^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 20 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n \right\} - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} \\ &= 20 \times \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} - 10 \times \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{40}{3} - 10 = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

053 답 ③

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \frac{a_4}{3^4} + \cdots &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5 \times 3^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{5} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right\} \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{20} \end{aligned}$$

054 답 $\frac{13}{10}$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cos n\pi + \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin \frac{n\pi}{2} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cos n\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin \frac{n\pi}{2} \\ &= \left\{ -\frac{1}{2} \cos \pi + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cos 2\pi + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cos 3\pi + \cdots \right\} \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \sin \pi + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \sin \frac{3\pi}{2} + \cdots \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots \right\} + \left\{ \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 - \cdots \right\} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{9}\right)} = 1 + \frac{3}{10} = \frac{13}{10} \end{aligned}$$

055 답 $\frac{3}{2}$

$a_1 = 1$ 이므로

$$a_1 a_2 = \frac{1}{3} \text{에서 } a_2 = \frac{1}{3}$$

$$a_2 a_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \text{에서 } a_3 = \frac{1}{3}$$

$$a_3 a_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \text{에서 } a_4 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$a_4 a_5 = \left(\frac{1}{3}\right)^4 \text{에서 } a_5 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

⋮

따라서 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

056 답 ③

$\log_2(S_n + 1) = 2n$ 에서 $S_n + 1 = 2^{2n}$

$$\therefore S_n = 2^{2n} - 1$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = 2^{2n} - 1 - (2^{2n-2} - 1) \\ &= 2^{2n} - 2^{2n-2} = 3 \times 4^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{7} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$

이때 ⑧은 ⑦에 $n = 1$ 을 대입한 값과 같으므로 $a_n = 3 \times 4^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3 \times 4^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right\} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{9}$$

057 ㉔ 4

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = -\frac{2\sqrt{5}}{2^n}, \quad \alpha_n \beta_n = \frac{1}{2^{2n}}$$

$$(\alpha_n - \beta_n)^2 = (\alpha_n + \beta_n)^2 - 4\alpha_n \beta_n = \frac{20}{2^{2n}} - \frac{4}{2^{2n}} = \frac{16}{2^{2n}} \text{이므로}$$

$$|\alpha_n - \beta_n| = \frac{4}{2^n} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} = 4 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4$$

058 ㉔ ②

$a_1=9, a_2=1, a_3=9, a_4=1, a_5=9, a_6=1, \dots$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{5^n} &= \frac{a_1}{5} + \frac{a_2}{5^2} + \frac{a_3}{5^3} + \frac{a_4}{5^4} + \frac{a_5}{5^5} + \frac{a_6}{5^6} + \dots \\ &= \frac{9}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{9}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{9}{5^5} + \frac{1}{5^6} + \dots \\ &= \left(\frac{9}{5} + \frac{9}{5^3} + \frac{9}{5^5} + \dots \right) + \left(\frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^6} + \dots \right) \\ &= \frac{\frac{9}{5}}{1 - \frac{1}{25}} + \frac{\frac{1}{25}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{15}{8} + \frac{1}{24} = \frac{23}{12} \end{aligned}$$

059 ㉔ $\frac{1}{6}$

$x^n = (-3)^{n-1}$ 에서

(i) $n=2k$ ($k=1, 2, 3, \dots$)일 때,

$$x^n = (-3)^{2k-1} = -3^{2k-1} < 0$$

이때 n 은 짝수이므로 실근의 개수는 0이다.

$$\therefore a_{2k} = 0$$

(ii) $n=2k+1$ ($k=1, 2, 3, \dots$)일 때,

$$x^n = (-3)^{2k} = 3^{2k} > 0$$

이때 n 은 홀수이므로 실근의 개수는 1이다.

$$\therefore a_{2k+1} = 1$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a_n = \begin{cases} 0 & (n=2k) \\ 1 & (n=2k+1) \end{cases} \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} &= \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \frac{a_4}{2^4} + \frac{a_5}{2^5} + \dots \\ &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \dots \\ &= \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

060 ㉔ $\frac{16}{7}$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 \text{에서 } \frac{a}{1-r} = 1 \quad \therefore a = 1-r \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

등비수열 $\{a_n^2\}$ 의 첫째항은 a^2 , 공비는 r^2 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 2 \text{에서 } \frac{a^2}{1-r^2} = 2 \quad \therefore \frac{a^2}{(1+r)(1-r)} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉔을 ㉔에 대입하면

$$\frac{(1-r)^2}{(1+r)(1-r)} = 2, \quad \frac{1-r}{1+r} = 2 \quad (\because -1 < r < 1)$$

$$2(1+r) = 1-r \quad \therefore r = -\frac{1}{3}$$

$$\text{이를 ㉔에 대입하면 } a = \frac{4}{3}$$

따라서 등비수열 $\{a_n^3\}$ 의 첫째항은 $a^3 = \frac{64}{27}$, 공비는 $r^3 = -\frac{1}{27}$ 이

므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = \frac{\frac{64}{27}}{1 - \left(-\frac{1}{27}\right)} = \frac{16}{7}$$

061 ㉔ $\frac{6}{7}$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 \text{에서 } \frac{\frac{1}{2}}{1-r} = 2$$

$$2(1-r) = \frac{1}{2} \quad \therefore r = \frac{3}{4}$$

따라서 $a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 이므로 $a_{2n} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{2n-1} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{9}{16}\right)^n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{2}{3} \times \frac{\frac{9}{16}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{6}{7}$$

062 ㉔ ①

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{4^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x}{4}\right)^n \\ &= \frac{\frac{x}{4}}{1 - \frac{x}{4}} + \frac{-\frac{x}{4}}{1 - \left(-\frac{x}{4}\right)} \\ &= \frac{x}{4-x} - \frac{x}{4+x} = \frac{2x^2}{16-x^2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{2x^2}{16-x^2} = \frac{2}{3}$ 이므로

$$3x^2 = 16 - x^2, \quad 4x^2 = 16, \quad x^2 = 4$$

$$\therefore x = 2 \quad (\because 0 < x < 4)$$

063 ㉔ 16

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($0 < r < 1$)라 하면

$$a_1 + a_2 = 20 \text{에서 } a_1 + a_1 r = 20$$

$$\therefore a_1 = \frac{20}{1+r} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2} = \frac{4}{3} \text{에서 } a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \dots = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{a_1 r^2}{1-r} = \frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉔을 ㉔에 대입하면

$$\frac{20r^2}{(1+r)(1-r)} = \frac{4}{3}, \quad 15r^2 = 1 - r^2, \quad 16r^2 = 1$$

$$r^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore r = \frac{1}{4} \quad (\because 0 < r < 1)$$

이를 ㉔에 대입하면 $a_1 = 16$

064 답 ④

첫째항이 $(x+2) \times \frac{x-1}{3}$, 공비가 $\frac{x-1}{3}$ 이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$$(x+2) \times \frac{x-1}{3} = 0 \text{ 또는 } -1 < \frac{x-1}{3} < 1$$

$$(i) (x+2) \times \frac{x-1}{3} = 0 \text{에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

$$(ii) -1 < \frac{x-1}{3} < 1 \text{에서 } -2 < x < 4$$

(i), (ii)에서 $-2 \leq x < 4$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 6개이다.

065 답 $\frac{1}{2} < x < 1$

(i) 수열 $\{(x-2)(4x-3)^{n-1}\}$ 의 첫째항이 $x-2$, 공비가 $4x-3$ 이므로 이 수열이 수렴하려면

$$x-2=0 \text{ 또는 } -1 < 4x-3 \leq 1$$

$$\text{이때 } -1 < 4x-3 \leq 1 \text{에서 } \frac{1}{2} < x \leq 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} < x \leq 1 \text{ 또는 } x = 2$$

(ii) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (x^2+x-1)^n$ 의 공비가 x^2+x-1 이므로 이 급수가 수렴하려면

$$-1 < x^2+x-1 < 1$$

$$x^2+x-1 > -1 \text{에서 } x(x+1) > 0 \quad \therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 0$$

$$x^2+x-1 < 1 \text{에서 } (x+2)(x-1) < 0 \quad \therefore -2 < x < 1$$

$$\therefore -2 < x < -1 \text{ 또는 } 0 < x < 1$$

(i), (ii)에서 $\frac{1}{2} < x < 1$

066 답 ②

공비가 $2\log_9(x+2)$ 이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$$-1 < 2\log_9(x+2) < 1$$

$$-\frac{1}{2} < \log_9(x+2) < \frac{1}{2}$$

$$\log_9 9^{-\frac{1}{2}} < \log_9(x+2) < \log_9 9^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{3} < x+2 < 3 \quad \therefore -\frac{5}{3} < x < 1$$

따라서 정수 x 는 $-1, 0$ 이므로 구하는 합은 $-1+0=-1$

067 답 ④

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하므로 $-1 < r < 1$ ㉠

① $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2}$ 은 공비가 r 인 등비급수이므로 수렴한다.

② $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (r^2)^n$ 은 공비가 r^2 인 등비급수이고 ㉠에서 $0 \leq r^2 < 1$ 이므로 수렴한다.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r+2}{3}\right)^n$ 은 공비가 $\frac{r+2}{3}$ 인 등비급수이고 ㉠에서 $\frac{1}{3} < \frac{r+2}{3} < 1$ 이므로 수렴한다.

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2}+1\right)^n$ 은 공비가 $\frac{r}{2}+1$ 인 등비급수이고 ㉠에서

$$\frac{1}{2} < \frac{r}{2}+1 < \frac{3}{2} \text{이므로 항상 수렴한다고 할 수 없다.}$$

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} \{r^n + (-r)^n\} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n$ 에서 $\sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n$ 은 공비가 $-r$ 인 등비급수이고 ㉠에서 $-1 < -r < 1$ 이므로 주어진 급수는 수렴한다.

068 답 ③

두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 첫째항을 각각 a, b , 공비를 각각 r_1, r_2 라 하면

$$a_n = ar_1^{n-1}, b_n = br_2^{n-1}$$

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $-1 < r_1 < 1$

$$a_{2n} = ar_1^{2n-1} = ar_1 \times (r_1^2)^{n-1} \text{은 공비가 } r_1^2 \text{이고 } 0 \leq r_1^2 < 1 \text{이므로}$$

로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 도 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로 $-1 < r_1 < 1, -1 < r_2 < 1$

$$a_nb_n = ab(r_1r_2)^{n-1} \text{은 공비가 } r_1r_2 \text{이고 } -1 < r_1r_2 < 1 \text{이므로}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ 도 수렴한다.

ㄷ. [반례] $a_n = -2^n, b_n = 2^n$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 발산하지만

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0$$

따라서 보기 중 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

069 답 ①

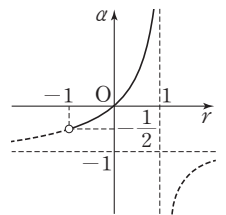
등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하므로 $-1 < r < 1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{r}{1-r} = -1 - \frac{1}{r-1}$$

$-1 < r < 1$ 에서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 α 로 수렴한다고 하면

$$\alpha = -1 - \frac{1}{r-1} \quad (-1 < r < 1) \text{이고, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로}$$

$$\alpha > -\frac{1}{2}$$



070 답 $\frac{1}{6}$

$$0.1\dot{6} = 0.1666\cdots = 0.1 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + \cdots$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{6}{10000} + \cdots$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{\frac{6}{100}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{6}{90}$$

$$= \frac{1}{6}$$

071 [답] ②

$a_1=0.0\dot{4}=\frac{4}{90}=\frac{2}{45}$, $a_3=0.0\dot{1}=\frac{1}{90}$ 이므로 공비를 r 라 하면

$$\frac{2}{45}r^2=\frac{1}{90}, r^2=\frac{1}{4}$$

$$\therefore r=\frac{1}{2} (\because r>0)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{2}{45}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4}{45}$$

072 [답] ②

$0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, $0.\dot{2}1\dot{6}=\frac{216}{999}=\frac{8}{37}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{8}{37}$$

$$\therefore a_1 = \frac{8}{37} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{111} = 0.\dot{1}4\dot{4}$$

073 [답] 5

$$a = \overline{OP_1} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_4P_5} + \overline{P_6P_7} + \dots$$

$$= 1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^4 + \left(\frac{4}{5}\right)^6 + \dots$$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{25}{9}$$

$$b = \overline{P_1P_2} + \overline{P_3P_4} + \overline{P_5P_6} + \overline{P_7P_8} + \dots$$

$$= \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^5 + \left(\frac{4}{5}\right)^7 + \dots$$

$$= \frac{\frac{4}{5}}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{20}{9}$$

$$\therefore a+b = \frac{25}{9} + \frac{20}{9} = 5$$

074 [답] $\sqrt{2}$

원 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ 에 접하고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y = -x \pm \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \sqrt{(-1)^2+1}$$

$$\therefore y = -x \pm \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

이때 제1사분면을 지나는 직선의 방정식은

$$y = -x + \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore a_n = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sqrt{2} \times \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

075 [답] $\left(\frac{9\sqrt{2}}{2}, \frac{9\sqrt{2}}{10}\right)$

점 P_n 이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \overline{OP_1} \cos 45^\circ + \overline{P_1P_2} \cos 45^\circ + \overline{P_2P_3} \cos 45^\circ + \dots$$

$$= 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3} \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \dots$$

$$= \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$y = \overline{OP_1} \sin 45^\circ - \overline{P_1P_2} \sin 45^\circ + \overline{P_2P_3} \sin 45^\circ - \dots$$

$$= 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \dots$$

$$= \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{9\sqrt{2}}{10}$$

따라서 점 P_n 이 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $\left(\frac{9\sqrt{2}}{2}, \frac{9\sqrt{2}}{10}\right)$ 이다.

076 [답] $\frac{5}{7}$

점 P_n 이 한없이 가까워지는 점의 y 좌표는

$$\overline{OP_1} - \overline{P_1P_2} \cos 60^\circ - \overline{P_2P_3} \cos 60^\circ + \overline{P_3P_4}$$

$$- \overline{P_4P_5} \cos 60^\circ - \overline{P_5P_6} \cos 60^\circ + \overline{P_6P_7} - \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1}{2}$$

$$- \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^6 - \dots$$

$$= \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots\right\} - \frac{1}{4} \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots\right\}$$

$$- \frac{1}{8} \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots\right\}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots\right\}$$

$$= \frac{5}{8} \times \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{5}{7}$$

077 [답] $18(2+\sqrt{3})$

$\triangle AB_1C_1$ 에서 $l_1 = 3 \times 3 = 9$

$\triangle AB_1C_1 \sim \triangle AB_2C_2$ 이고 닮음비는 $\overline{AB_1} : \overline{AB_2} = 2 : \sqrt{3}$ 이므로

$$3 : \overline{AB_2} = 2 : \sqrt{3} \quad \therefore \overline{AB_2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{즉, } \triangle AB_2C_2 \text{에서 } l_2 = 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$\triangle AB_2C_2 \sim \triangle AB_3C_3$ 이고 닮음비는 $\overline{AB_2} : \overline{AB_3} = 2 : \sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} : \overline{AB_3} = 2 : \sqrt{3} \quad \therefore \overline{AB_3} = \frac{9}{4}$$

$$\text{즉, } \triangle AB_3C_3 \text{에서 } l_3 = 3 \times \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$$

$\vdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = 9 + \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{27}{4} + \dots$$

$$= \frac{9}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = 18(2+\sqrt{3})$$

078 답 $\frac{1}{2}$

$$\overline{AB_2} : \overline{B_1B_2} = 4 : 1 \text{ 이므로 } \overline{AB_1} : \overline{B_1B_2} = 3 : 1$$

$$\therefore \overline{B_1B_2} = \frac{1}{3} \overline{AB_1} = \frac{1}{3}$$

$$\overline{B_1B_3} : \overline{B_2B_3} = 4 : 1 \text{ 이므로 } \overline{B_1B_2} : \overline{B_2B_3} = 3 : 1$$

$$\therefore \overline{B_2B_3} = \frac{1}{3} \overline{B_1B_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\overline{B_2B_4} : \overline{B_3B_4} = 4 : 1 \text{ 이므로 } \overline{B_2B_3} : \overline{B_3B_4} = 3 : 1$$

$$\therefore \overline{B_3B_4} = \frac{1}{3} \overline{B_2B_3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

⋮

$$\therefore \overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3} + \overline{B_3B_4} + \cdots = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

079 답 $\sqrt{2} + 1$

$$\triangle OP_1P_2 \text{에서 } \overline{OP_1} = 1, \angle OP_1P_2 = \angle OP_2P_1 = 45^\circ \text{ 이므로}$$

$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP_1} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\triangle OP_2P_3 \text{에서 } \overline{OP_2} = \overline{P_1P_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \angle OP_2P_3 = 45^\circ \text{ 이므로}$$

$$\overline{P_2P_3} = \overline{OP_2} \cos 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\triangle OP_3P_4 \text{에서 } \overline{OP_3} = \overline{P_2P_3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \angle OP_3P_4 = 45^\circ \text{ 이므로}$$

$$\overline{P_3P_4} = \overline{OP_3} \cos 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

⋮

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \overline{P_nP_{n+1}} = \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4} + \cdots$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \cdots$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} + 1$$

080 답 $\frac{4}{9}\pi$

원 C_n 의 반지름의 길이를 r_n 이라 하면

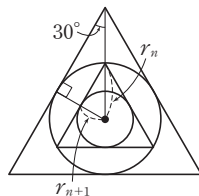
$$r_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{따라서 원 } C_1 \text{의 넓이는 } \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\pi}{3}$$

오른쪽 그림에서 $r_n : r_{n+1} = 2 : 1$, 즉 두 원 C_n, C_{n+1} 은 닮음이고, 닮음비는 2 : 1이므로 넓이의 비는 4 : 1이다.

따라서 구하는 합은 첫째항이 $\frac{\pi}{3}$, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비급수의 합이므로

$$\frac{\frac{\pi}{3}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{9}\pi$$



081 답 $\frac{1}{2}$

$\triangle ABC$ 의 한 변의 길이를 a 라 하면

$$\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 $\overline{AB}, \overline{CA}$ 를 2 : 1로 각각 내분하는 점 A_1, C_1 에 대하여

$$\overline{AA_1} = \frac{2}{3}a, \overline{AC_1} = \frac{1}{3}a \text{ 이므로}$$

$$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC - 3\triangle AA_1C_1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 - 3 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}a \times \frac{1}{3}a \times \sin 60^\circ\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 - \frac{\sqrt{3}}{6} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{1}{3} \quad (\because \textcircled{1})$$

두 정삼각형 $ABC, A_1B_1C_1$ 은 닮음이고 넓이의 비는 3 : 1이므로

두 정삼각형 $A_nB_nC_n, A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ 의 넓이의 비도 3 : 1이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

082 답 ⑤

$$\text{오른쪽 그림에서 } S_1 = \pi \times 12^2 \times \frac{60}{360} = 24\pi$$

선분 B_1B_2 를 그으면 삼각형 $B_1B_2C_2$ 에서

$$\overline{B_1C_2} : \overline{B_2C_2} = \sqrt{3} : 1 \text{ 이므로}$$

$$12 : \overline{B_2C_2} = \sqrt{3} : 1 \quad \therefore \overline{B_2C_2} = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore S_2 = \pi \times (4\sqrt{3})^2 \times \frac{60}{360} = 8\pi$$

선분 B_2B_3 을 그으면 삼각형 $B_2B_3C_3$ 에서

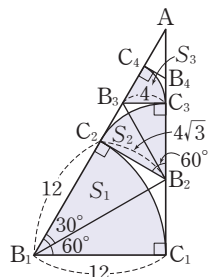
$$\overline{B_2C_3} : \overline{B_3C_3} = \sqrt{3} : 1 \text{ 이므로}$$

$$4\sqrt{3} : \overline{B_3C_3} = \sqrt{3} : 1 \quad \therefore \overline{B_3C_3} = 4$$

$$\therefore S_3 = \pi \times 4^2 \times \frac{60}{360} = \frac{8}{3}\pi$$

⋮

$$\therefore S_1 + S_2 + S_3 + \cdots = 24\pi + 8\pi + \frac{8}{3}\pi + \cdots = \frac{24\pi}{1 - \frac{1}{3}} = 36\pi$$



083 답 $\frac{1}{4}$

정사각형 T_1 의 한 변의 길이가 r 이므로

$$S_1 = r^2$$

정사각형 T_2 의 한 변의 길이가 $(1-r) \times r$ 이므로

$$S_2 = \{(1-r) \times r\}^2 = r^2(1-r)^2$$

정사각형 T_3 의 한 변의 길이가

$$\{(1-r) - (1-r) \times r\} \times r = (1-r)^2 \times r \text{ 이므로}$$

$$S_3 = \{(1-r)^2 \times r\}^2 = r^2(1-r)^4$$

⋮

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 r^2 , 공비가 $(1-r)^2$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{r^2}{1 - (1-r)^2} = \frac{r}{2-r}$$

$$\text{이때 } \frac{r}{2-r} = \frac{1}{7} \text{ 이므로 } 7r = 2 - r$$

$$8r = 2 \quad \therefore r = \frac{1}{4}$$

084 **답** $\frac{9}{2}\pi$

n 번째 큰 반원과 n 번째 작은 반원의 지름의 길이를 각각 a_n, b_n 이라 하고 넓이를 각각 A_n, B_n 이라 하면

$$a_1 = 6 \times \frac{2}{3} = 4 \text{이므로}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 2\pi,$$

$$b_1 = 6 - 4 = 2 \text{이므로 } B_1 = \frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{2}$$

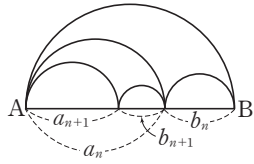
$$\text{이때 } a_n : a_{n+1} = 1 : \frac{2}{3} \text{이므로 } A_n : A_{n+1} = 1 : \frac{4}{9},$$

$$b_n : b_{n+1} = 1 : \frac{2}{3} \text{이므로 } B_n : B_{n+1} = 1 : \frac{4}{9}$$

따라서 수열 $\{A_n\}$ 과 $\{B_n\}$ 은 첫째항이 각각 $A_1 = 2\pi, B_1 = \frac{\pi}{2}$ 이

고 공비가 모두 $\frac{4}{9}$ 인 등비수열이다.

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \\ &= \frac{2\pi}{1-\frac{4}{9}} + \frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{18}{5}\pi + \frac{9}{10}\pi = \frac{9}{2}\pi \end{aligned}$$



085 **답** $\frac{112\sqrt{3}}{15}$

$$\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2} = \overline{C_1C_2} = 3, \overline{A_1C_2} = \overline{B_1A_2} = \overline{C_1B_2} = 5,$$

$$\angle C_2A_1A_2 = \angle A_2B_1B_2 = \angle B_2C_1C_2 = 60^\circ \text{이므로}$$

$$\triangle A_1A_2C_2 \cong \triangle B_1B_2A_2 \cong \triangle C_1C_2B_2 \text{ (SAS 합동)}$$

즉, $\overline{A_2C_2} = \overline{A_2B_2} = \overline{B_2C_2}$ 이므로 삼각형 $A_2B_2C_2$ 는 정삼각형이다.

삼각형 $A_1A_2C_2$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{A_2C_2}^2 = \overline{A_1A_2}^2 + \overline{A_1C_2}^2 - 2 \times \overline{A_1A_2} \times \overline{A_1C_2} \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \frac{1}{2} = 19$$

$$\therefore \overline{A_2C_2} = \sqrt{19}$$

$$\text{또 } \overline{A_1G_1} = \overline{B_1H_1} = \overline{C_1I_1} = 2, \overline{A_1F_1} = \overline{B_1D_1} = \overline{C_1E_1} = 4 \text{이므로}$$

$$S_1 = \triangle A_1B_1C_1 - \triangle A_2B_2C_2 - 3\triangle A_1G_1F_1$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{19})^2 - 3 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 16\sqrt{3} - \frac{19\sqrt{3}}{4} - 6\sqrt{3} = \frac{21\sqrt{3}}{4}$$

두 정삼각형 $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ 는 닮음이고, 닮음비는

$$\overline{A_1C_1} : \overline{A_2C_2} = 8 : \sqrt{19} \text{이므로 넓이의 비는 } 64 : 19 \text{이다.}$$

즉, 두 정삼각형 $A_nB_nC_n, A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ 의 넓이의 비는 $64 : 19$ 이므로 그림 R_n 에 새로 색칠된 부분과 그림 R_{n+1} 에 새로 색칠된 부분의 넓이의 비도 $64 : 19$ 이다.

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 은 첫째항이 $\frac{21\sqrt{3}}{4}$, 공비가 $\frac{19}{64}$ 인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{21\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{19}{64}} = \frac{112\sqrt{3}}{15}$$

086 **답** 5625 kg

n 번째 수거하여 재생산되는 비닐의 양을 a_n kg이라 하면

$$a_1 = 10000 \times 0.6 \times 0.6 = 3600,$$

$$a_2 = a_1 \times 0.6 \times 0.6 = 3600 \times 0.36,$$

$$a_3 = a_2 \times 0.6 \times 0.6 = 3600 \times 0.36^2,$$

$\vdots$

따라서 재생산되는 비닐의 양의 합은

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots &= 3600 + 3600 \times 0.36 + 3600 \times 0.36^2 + \cdots \\ &= \frac{3600}{1 - 0.36} = 5625 \text{ (kg)} \end{aligned}$$

087 **답** 64 cm

추가 멈출 때까지 움직인 거리는

$$16 + 16 \times \frac{3}{4} + 16 \times \left(\frac{3}{4} \right)^2 + \cdots = \frac{16}{1 - \frac{3}{4}} = 64 \text{ (cm)}$$

088 **답** 60 mg

한 번에 복용하는 약의 양을 a mg이라 하면 약을 복용하고 24시간 후 체내에 남아 있는 약의 양은

$$a + \frac{1}{2}a$$

48시간 후 체내에 남아 있는 약의 양은

$$a + \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{2}a \right) = a + \frac{1}{2}a + \left(\frac{1}{2} \right)^2 a$$

이와 같은 방법으로 $24n$ 시간 후 체내에 남아 있는 약의 양은

$$a + \frac{1}{2}a + \left(\frac{1}{2} \right)^2 a + \cdots + \left(\frac{1}{2} \right)^n a$$

이 약을 장기간 복용할 때, 체내에 남아 있는 약의 양은

$$\frac{a}{1 - \frac{1}{2}} = 2a$$

$$\text{즉, } 2a \leq 120 \text{이므로 } a \leq 60$$

따라서 매회 최대 복용할 수 있는 약의 양은 60 mg이다.

089 **답** 30억 원

기금을 운용하여 n 번째 지급하는 장학금을 a_n 억 원이라 하면

$$a_1 = 20 \times 1.2 \times 0.5 = 12,$$

$$a_2 = a_1 \times 1.2 \times 0.5 = 12 \times 0.6,$$

$$a_3 = a_2 \times 1.2 \times 0.5 = 12 \times 0.6^2,$$

$\vdots$

따라서 해마다 지급하는 장학금의 총액은

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots &= 12 + 12 \times 0.6 + 12 \times 0.6^2 + \cdots \\ &= \frac{12}{1 - 0.6} = 30 \text{ (억 원)} \end{aligned}$$

090 **답** ③

주어진 급수의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{4}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

이때 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 \end{aligned}$$

091 답 ③

$S_n = 2n^2 + n$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 + n) - \{2(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 4n - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$\begin{aligned} a_n &= 4n - 1 \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{15} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

092 답 ⑤

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} (\log_{2n+1} \sqrt{3} - \log_{2n+3} \sqrt{3}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\log_{2k+1} \sqrt{3} - \log_{2k+3} \sqrt{3}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}(2k+1)} - \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}(2k+3)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 3} - \frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 5} \right) + \left(\frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 5} - \frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 7} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{\log_{\sqrt{3}}(2n+1)} - \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}(2n+3)} \right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 3} - \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}(2n+3)} \right\} \\ &= \frac{1}{\log_{\sqrt{3}} 3} = \frac{1}{2 \log_3 3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

093 답 ④

주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\textcircled{1} S_1 = 3, S_2 = \frac{11}{4}, S_3 = 3, S_4 = \frac{17}{6}, S_5 = 3, S_6 = \frac{23}{8}, \dots \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} S_{2n-1} &= 3, S_{2n} = \frac{6n+5}{2(n+1)} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 3 \end{aligned}$$

즉, 주어진 급수는 3에 수렴한다.

$$\textcircled{2} S_n = 3 + 0 + 0 + \cdots + 0 = 3 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3$$

즉, 주어진 급수는 3에 수렴한다.

$$\begin{aligned} \textcircled{3} S_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} \right) + \cdots + \left\{ \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} \right\} = \frac{1}{2}$$

즉, 주어진 급수는 $\frac{1}{2}$ 에 수렴한다.

$$\textcircled{4} S_1 = 3, S_2 = \frac{9}{4}, S_3 = 3, S_4 = \frac{13}{6}, S_5 = 3, S_6 = \frac{17}{8}, \dots \text{이므로}$$

$$S_{2n-1} = 3, S_{2n} = \frac{4n+5}{2(n+1)}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 2$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

$$\textcircled{5} S_n = 3 - 0 - 0 - \cdots - 0 = 3 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3$$

즉, 주어진 급수는 3에 수렴한다.

094 답 $\frac{3}{10}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n - a_n}{n} \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - a_n}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{a_n}{n} \right) = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{n^2 + a_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{n}}{1 + \left(\frac{a_n}{n} \right)^2} = \frac{3}{1 + 3^2} = \frac{3}{10}$$

095 답 ②

$$\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{n^2+1} = -1 \neq 0 \text{이므로 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n^2}{n^2+1} \text{은 발산한다.}$$

$$\begin{aligned} \neg. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n-3} = \frac{1}{4} \neq 0 \text{이므로 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n-3} \text{은 발산한다.}$$

$$\begin{aligned} \neg. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+3} - \sqrt{k+2}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + (\sqrt{6} - \sqrt{5}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{3}) = \infty \end{aligned}$$

따라서 보기 중 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하는 것은 ㄴ이다.

096 ㉠ ①

$$3a_n - \frac{b_n}{2} = c_n \text{으로 놓으면 } \frac{b_n}{2} = 3a_n - c_n$$

$$\therefore b_n = 6a_n - 2c_n$$

$$\text{이때 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{5}{2}, \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 7 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (6a_n - 2c_n) = 6 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \\ &= 6 \times \frac{5}{2} - 2 \times 7 = 1 \end{aligned}$$

097 ㉠ ③

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 이 수렴하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이다.

ㄴ. [반례] $\{a_n\}: 1, 1, 1, 1, \dots, \{b_n\}: -1, -1, -1, -1, \dots$ 이
면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 발산하지만 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 은 0에 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \{ (a_n + b_n) + (a_n - b_n) \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \beta \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \{ (a_n + b_n) - (a_n - b_n) \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \beta \end{aligned}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 도 모두 수렴한다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 과 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 모두 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

098 ㉠ $\frac{9}{4}$

직선 $(2n-1)x + (2n+1)y = 3$ 에서 $y=0$ 일 때 $x = \frac{3}{2n-1}$ 이고,

$x=0$ 일 때 $y = \frac{3}{2n+1}$ 이므로

$$P_n\left(\frac{3}{2n-1}, 0\right), Q_n\left(0, \frac{3}{2n+1}\right)$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2n-1} \times \frac{3}{2n+1} = \frac{9}{2(2n-1)(2n+1)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{2(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{4} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{9}{4} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{4} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

099 ㉠ ①

수열 $\{5^n a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = 2^n - 1$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$5^n a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n - 1 - (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n=1$ 일 때, $5a_1 = S_1 = 1$

$\dots\dots \textcircled{2}$

이때 ①은 ②에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$5^n a_n = 2^{n-1} \quad \therefore a_n = \frac{2^{n-1}}{5^n}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

100 ㉠ ③

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3 \text{에서 } \frac{a}{1-r} = 3$$

$$\therefore a = 3(1-r) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

등비수열 $\{a_{2n}\}$ 의 첫째항은 $a_2 = ar$, 공비는 r^2 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{3}{4} \text{에서 } \frac{ar}{1-r^2} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{ar}{(1-r)(1+r)} = \frac{3}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } \frac{3(1-r) \times r}{(1-r)(1+r)} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{r}{1+r} = \frac{1}{4} \quad (\because -1 < r < 1), 1+r=4r \quad \therefore r = \frac{1}{3}$$

이를 ①에 대입하면 $a=2$

따라서 등비수열 $\{a_n^2\}$ 은 첫째항이 $a^2=4$, 공비가 $r^2=\frac{1}{9}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{4}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{2}$$

101 ㉠ $\frac{9}{4}$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r , 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 s 라 하면 두 수열의 첫째항이 모두 2이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5 \text{에서 } \frac{2}{1-r} = 5, 5(1-r) = 2 \quad \therefore r = \frac{3}{5}$$

$$\therefore a_n = 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 3 \text{에서 } \frac{2}{1-s} = 3, 3(1-s) = 2 \quad \therefore s = \frac{1}{3}$$

$$\therefore b_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \frac{b_4}{a_4} + \dots &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} = \frac{1}{1 - \frac{5}{9}} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

102 ㉠ $1 \leq x < 3$

(i) 수열 $\{(1 - \log_2 x)^n\}$ 의 공비가 $1 - \log_2 x$ 이므로 이 수열이 수렴하려면

$$-1 < 1 - \log_2 x \leq 1, 0 \leq \log_2 x < 2 \quad \therefore 1 \leq x < 4$$

(ii) 주어진 등비급수는 공비가 $\frac{x}{3}$ 이므로 이 급수가 수렴하려면

$$-1 < \frac{x}{3} < 1 \quad \therefore -3 < x < 3$$

(i), (ii)에서 구하는 실수 x 의 값의 범위는 $1 \leq x < 3$

103 답 ㄴ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \text{이 수렴하므로 } -1 < a < 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b^{n-1} \text{이 수렴하므로 } -1 < b < 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

㉑. $\sum_{n=1}^{\infty} (a+b)^n$ 은 공비가 $a+b$ 인 등비급수이고 ㉑, ㉒에서 $-2 < a+b < 2$ 이므로 주어진 급수는 항상 수렴한다고 할 수 없다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} (ab)^n$ 은 공비가 ab 인 등비급수이고 ㉑, ㉒에서 $-1 < ab < 1$ 이므로 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄷ. [반례] $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$ 이면 $\frac{a}{b} = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n \text{은 공비가 } \frac{a}{b} \text{인 등비급수이므로 주어진 급수는 발산한다.}$$

따라서 보기의 급수 중 항상 수렴하는 것은 ㄴ이다.

104 답 ①

$$0.\dot{0}\dot{2} = 0.020202\dots \text{이므로}$$

$$a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 0, a_4 = 2, \dots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^6} + \dots = \frac{\frac{2}{3^2}}{1 - \frac{1}{3^2}} = \frac{1}{4}$$

105 답 $\frac{63}{64}$

$$a = \overline{OP_1} \cos 30^\circ - \overline{P_1P_2} \cos 30^\circ + \overline{P_2P_3} \cos 30^\circ - \overline{P_3P_4} \cos 30^\circ + \dots$$

$$= 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \dots$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$b = \overline{OP_1} \sin 30^\circ + \overline{P_1P_2} \sin 30^\circ + \overline{P_2P_3} \sin 30^\circ + \overline{P_3P_4} \sin 30^\circ + \dots$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{2} + \dots$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64} + \frac{9}{16} = \frac{63}{64}$$

106 답 $2\sqrt{2}$

직선 $y = x + 2$ 와 y 축의 교점을 P라 하면 $\angle PA_1B_1 = 45^\circ$ 이므로

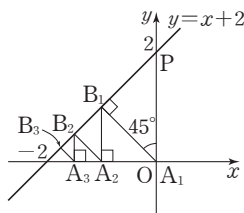
$$\overline{A_1B_1} = \overline{PA_1} \cos 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$\angle A_1B_1A_2 = 45^\circ$ 이므로

$$\overline{B_1A_2} = \overline{A_1B_1} \cos 45^\circ = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$\angle B_1A_2B_2 = 45^\circ$ 이므로

$$\overline{A_2B_2} = \overline{B_1A_2} \cos 45^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\angle A_2B_2A_3 = 45^\circ \text{이므로}$$

$$\overline{B_2A_3} = \overline{A_2B_2} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\angle B_2A_3B_3 = 45^\circ \text{이므로}$$

$$\overline{A_3B_3} = \overline{B_2A_3} \cos 45^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \overline{A_nB_n} &= \overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \overline{A_3B_3} + \dots \\ &= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \dots \\ &= \frac{\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

107 답 $\frac{11+7\sqrt{3}}{32}$

정사각형 A_n 의 한 변의 길이를 a_n 이라 하면

$$a_1 = 1, S_1 = 1$$

정삼각형 B_n 의 한 변의 길이도 a_n 이므로

$$a_1 = 1, T_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

오른쪽 그림에서

$$\left(\frac{a_n}{2} - \frac{a_{n+1}}{2}\right) : a_{n+1} = 1 : \sqrt{3}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} a_n - \frac{\sqrt{3}}{2} a_{n+1}}{2} = a_{n+1}$$

$$(2 + \sqrt{3})a_{n+1} = \sqrt{3}a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} a_n = (2\sqrt{3} - 3)a_n$$

따라서 $a_n : a_{n+1} = 1 : (2\sqrt{3} - 3)$ 이므로

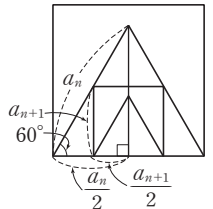
$$S_n : S_{n+1} = T_n : T_{n+1} = 1 : (2\sqrt{3} - 3)^2 = 1 : (21 - 12\sqrt{3})$$

$$\therefore S_{n+1} = (21 - 12\sqrt{3})S_n, T_{n+1} = (21 - 12\sqrt{3})T_n$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 과 $\{T_n\}$ 은 첫째항이 각각 $S_1 = 1, T_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이고

공비가 모두 $(21 - 12\sqrt{3})$ 인 등비수열이다.

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (S_n - T_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n - \sum_{n=1}^{\infty} T_n \\ &= \frac{1}{1 - (21 - 12\sqrt{3})} - \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - (21 - 12\sqrt{3})} \\ &= \frac{11 + 7\sqrt{3}}{32} \end{aligned}$$



108 답 96 m

땅에 떨어질 때마다 공이 움직인 거리는

$$32, \left(32 \times \frac{1}{2}\right) \times 2, \left\{32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} \times 2, \dots$$

따라서 공이 정지할 때까지 움직인 거리는

$$32 + 2 \left\{32 \times \frac{1}{2} + 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots\right\}$$

$$= 32 + 64 \left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots\right\}$$

$$= 32 + 64 \times \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 96(\text{m})$$



001 답 ③

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{x+1} + 2^x}{3^x - 2^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \left(\frac{2}{3}\right)^x}{1 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^x} = \frac{3+0}{1-0} = 3$$

002 답 ⑤

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} (\log_2 |x^3 - 8| - \log_2 |3x - 6|) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \left| \frac{x^3 - 8}{3x - 6} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \left| \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{3(x-2)} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \log_2 \left| \frac{x^2 + 2x + 4}{3} \right| \\ &= \log_2 \lim_{x \rightarrow 2} \left| \frac{x^2 + 2x + 4}{3} \right| \\ &= \log_2 4 = 2 \end{aligned}$$

003 답 ④

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{x}} + \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^6 + \lim_{x \rightarrow 0} \{(1-3x)^{-\frac{1}{3x}}\}^{-3} \\ &= e^6 + e^{-3} = e^6 + \frac{1}{e^3} \end{aligned}$$

004 답 $\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2x}\right) \left(1 - \frac{1}{4x}\right) \right\}^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x \times \left(1 - \frac{1}{4x}\right)^x \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left\{ \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} \right\}^{\frac{1}{2}} \times \left\{ \left(1 - \frac{1}{4x}\right)^{-4x} \right\}^{-\frac{1}{4}} \right] \\ &= e^{\frac{1}{2}} \times e^{-\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}} \\ \therefore a &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

005 답 ⑤

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{2x^2+3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+6x)}{6x} \times \frac{6}{2x+3} \right\} = 1 \times 2 = 2$$

006 답 ①

$$\begin{aligned} x-1=t \text{로 놓으면 } x=1+t \text{이고, } x \rightarrow 1 \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_2 x}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+t)}{t} = \frac{1}{\ln 2} \end{aligned}$$

007 답 $\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{\ln(1+4x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{3x}-1}{3x} \times \frac{4x}{\ln(1+4x)} \times \frac{3}{4} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

008 답 ④

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2^{-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - 2^{-x} + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{2^{-x} - 1}{-x} \right) = 1 + \ln 2 \end{aligned}$$

009 답 ①

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax+b}{\ln(1+x)} &= 3 \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{이다.} \\ \text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} (ax+b) &= 0 \text{이므로 } 0+b=0 \quad \therefore b=0 \\ \text{이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\ln(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} \times a = 1 \times a = a \\ \therefore a &= 3 \quad \therefore a+b=3 \end{aligned}$$

010 답 2

$$\begin{aligned} \text{함수 } f(x) \text{가 } x=0 \text{에서 연속이면 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= f(0) \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}+a}{x} &= b \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ x \rightarrow 0 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{이다.} \\ \text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x}+a) &= 0 \text{이므로 } 1+a=0 \quad \therefore a=-1 \\ \text{이를 } \textcircled{1} \text{의 좌변에 대입하면} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{3x} \times 3 = 1 \times 3 = 3 \quad \therefore b=3 \\ \therefore a+b &= -1+3=2 \end{aligned}$$

011 답 4

$$\begin{aligned} \text{점 A의 좌표를 } (t, \ln(1+4t)) \text{ } (t>0) \text{라 하면} \\ \overline{OH}=t, \overline{AH}=\ln(1+4t) \\ \text{이때 점 A가 원점 O에 한없이 가까워지면 } t \rightarrow 0+ \text{이므로} \\ \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{AH}}{\overline{OH}} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+4t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+4t)}{4t} \times 4 = 1 \times 4 = 4 \end{aligned}$$

012 답 1

$$\begin{aligned} f(x) &= (4x^2+1)e^x \text{에서} \\ f'(x) &= 8xe^x + (4x^2+1)e^x = (4x^2+8x+1)e^x \\ \therefore f'(0) &= 1 \end{aligned}$$

013 답 3

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times 2 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)-f(1-h)}{-h} \\ &= 2f'(1)+f'(1)=3f'(1) \\ \text{이때 } f(x) &= x^2 \ln x \text{에서} \\ f'(x) &= 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x \\ \therefore f'(1) &= 1 \\ \text{따라서 구하는 극한값은 } 3f'(1) &= 3 \times 1 = 3 \end{aligned}$$

014 답 ④

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \ln ax = \lim_{x \rightarrow 1-} (bx+1) = f(1)$$

$$\therefore \ln a = b+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $f'(1)$ 이 존재하므로 $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x>1) \\ b & (x<1) \end{cases}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1-} b \quad \therefore b=1$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \ln a = 2 \quad \therefore a = e^2$$

$$\therefore ab = e^2$$

015 답 49

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^{x+2} - 2^{2x}}{7^x + 2^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{49 - \left(\frac{4}{7}\right)^x}{1 + 2 \times \left(\frac{2}{7}\right)^x} = \frac{49-0}{1+0} = 49$$

016 답 ③

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (5^x - 4^x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[5^x \left\{ 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^x \right\} \right]^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 5 \left\{ 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^x \right\}^{\frac{1}{x}} \\ &= 5 \times 1 = 5 \end{aligned}$$

017 답 2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \times 9^x + 1}{9^{x-1} - 2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \left(\frac{1}{9}\right)^x}{\frac{1}{9} - \left(\frac{2}{9}\right)^x} = \frac{a+0}{\frac{1}{9}-0} = 9a$$

따라서 $9a=18$ 이므로 $a=2$

018 답 ①

$x=-t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2^{-t} - 2^t}{2^{-t} + 2^t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^t - 1}{\left(\frac{1}{4}\right)^t + 1} \\ &= \frac{0-1}{0+1} = -1 \end{aligned}$$

019 답 ㄱ, ㄴ

$$\text{ㄱ. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1} - 4^x}{5^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^x - \left(\frac{4}{5}\right)^x}{1} = 0$$

ㄴ. $x=-t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{2^x - 3^{-x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3^{-t}}{2^{-t} - 3^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^t}{\left(\frac{1}{6}\right)^t - 1} = 0$$

ㄷ. $\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4^x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{1}{4^t - 1} = -\infty$$

ㄹ. $\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{7^{\frac{1}{x}}}{7^{\frac{1}{x}} - 7^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{7^t}{7^t - 7^{-t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{49}\right)^t} = 1$$

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow -\infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{7^{\frac{1}{x}}}{7^{\frac{1}{x}} - 7^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{7^t}{7^t - 7^{-t}}$$

$t=-s$ 로 놓으면 $t \rightarrow -\infty$ 일 때 $s \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{7^t}{7^t - 7^{-t}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{7^{-s}}{7^{-s} - 7^s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{49}\right)^s}{\left(\frac{1}{49}\right)^s - 1} = 0$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{7^{\frac{1}{x}}}{7^{\frac{1}{x}} - 7^{-\frac{1}{x}}} \neq \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{7^{\frac{1}{x}}}{7^{\frac{1}{x}} - 7^{-\frac{1}{x}}}$ 이므로 극한값은 존재하지 않는다.

따라서 보기 중 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

다른 풀이 ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} 7^{\frac{1}{x}} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} 7^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} 7^{\frac{1}{x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} 7^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{x}} = \infty$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{7^{\frac{1}{x}}}{7^{\frac{1}{x}} - 7^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1 - 7^{-\frac{2}{x}}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{7^{\frac{1}{x}}}{7^{\frac{1}{x}} - 7^{-\frac{1}{x}}} = 0$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{7^{\frac{1}{x}}}{7^{\frac{1}{x}} - 7^{-\frac{1}{x}}} \neq \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{7^{\frac{1}{x}}}{7^{\frac{1}{x}} - 7^{-\frac{1}{x}}}$ 이므로 극한값은 존재하지 않는다.

020 답 ④

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\log_4 |x^2 + 4x - 5| - \log_4 |x^2 + x - 2|)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \log_4 \left| \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + x - 2} \right|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \log_4 \left| \frac{(x+5)(x-1)}{(x+2)(x-1)} \right|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \log_4 \left| \frac{x+5}{x+2} \right|$$

$$= \log_4 \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x+5}{x+2} \right|$$

$$= \log_4 2 = \frac{1}{2}$$

021 답 -1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{4x^2 + x} - \log_{\frac{1}{2}} x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{4x^2 + x}}{x}$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x}}{x}$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{x}}}{1}$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$$

022 답 27

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_3(ax+2) - \log_3(3x+1)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{ax+2}{3x+1} = \log_3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+2}{3x+1} \\ &= \log_3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a+\frac{2}{x}}{3+\frac{1}{x}} = \log_3 \frac{a}{3} \end{aligned}$$

따라서 $\log_3 \frac{a}{3} = 2$ 이므로 $\frac{a}{3} = 9 \quad \therefore a = 27$

023 답 ③

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \log_2(8^x + 3^x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2(8^x + 3^x)^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \left[8^x \left\{ 1 + \left(\frac{3}{8} \right)^x \right\} \right]^{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 8 \left\{ 1 + \left(\frac{3}{8} \right)^x \right\}^{\frac{1}{x}} \\ &= \log_2 \lim_{x \rightarrow \infty} 8 \left\{ 1 + \left(\frac{3}{8} \right)^x \right\}^{\frac{1}{x}} \\ &= \log_2(8 \times 1) = \log_2 8 = 3 \end{aligned}$$

024 답 ④

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} (1+4x)^{\frac{1}{2x}} + \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x}{3} \right)^{\frac{9}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+4x)^{\frac{1}{4x}} \right\}^2 + \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(1 - \frac{x}{3} \right)^{-\frac{3}{x}} \right\}^{-3} \\ &= e^2 + e^{-3} = e^2 + \frac{1}{e^3} \end{aligned}$$

따라서 $m=2, n=3$ 이므로 $m+n=5$

025 답 ③

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+x)(1-x)\}^{\frac{2}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+x)^{\frac{2}{x}} \times (1-x)^{\frac{2}{x}}\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}^2 \times \{(1-x)^{-\frac{1}{x}}\}^{-2} \right] \\ &= e^2 \times e^{-2} = 1 \end{aligned}$$

026 답 e^2

$x-1=t$ 로 놓으면 $x=1+t$ 이고, $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{2}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^2 = e^2$$

027 답 7

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+x)(1+2x)(1+3x) \cdots (1+nx)\}^{\frac{2}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+x)^{\frac{2}{x}} \times (1+2x)^{\frac{2}{x}} \times (1+3x)^{\frac{2}{x}} \times \cdots \times (1+nx)^{\frac{2}{x}}\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}^2 \times \{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^4 \times \{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\}^6 \right. \\ & \quad \left. \times \cdots \times \{(1+nx)^{\frac{1}{nx}}\}^{2n} \right] \\ &= e^2 \times e^4 \times e^6 \times \cdots \times e^{2n} = e^{2+4+6+\cdots+2n} = e^{n(n+1)} \\ & \text{따라서 } e^{n(n+1)} = e^{56} \text{이므로} \\ & n(n+1) = 56 = 7 \times 8 \quad \therefore n = 7 \end{aligned}$$

028 답 e

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3x} \right) \left(1 + \frac{1}{2x} \right) \right\}^{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3x} \right)^{6x} \times \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{6x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left\{ \left(1 - \frac{1}{3x} \right)^{-3x} \right\}^{-2} \times \left\{ \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{2x} \right\}^3 \right] \\ &= e^{-2} \times e^3 = e \end{aligned}$$

029 답 ①

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{a}{x} \right)^{3x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{t} \right)^{-3t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{a}{t} \right)^{\frac{t}{a}} \right\}^{-3a} = e^{-3a} \\ & \text{따라서 } e^{-3a} = e^{-9} \text{이므로 } -3a = -9 \quad \therefore a = 3 \end{aligned}$$

030 답 ④

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(2x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x} \right)^{-2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x} \right)^{-2x} = e \end{aligned}$$

031 답 $\sqrt{e}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \left(1 + \frac{1}{n+2} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{4n} \right) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \frac{n+3}{n+2} \times \cdots \times \frac{4n+1}{4n} = \frac{4n+1}{4n} \\ &\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \left(1 + \frac{1}{n+2} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{4n} \right) \right\}^{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+1}{4n} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{4n} \right)^{4n} \right\}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \end{aligned}$$

032 답 ②

ㄱ. $x-2=t$ 로 놓으면 $x=2+t$ 이고, $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{1}{2-x}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2}} = e$

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x}{\left(1 - \frac{1}{x} \right)^x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x}{\left\{ \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-x} \right\}^{-1}} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2$$

ㄹ. $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right)^{-t} = e$$

따라서 보기 중 극한값이 e 인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

033 답 ⑤

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2x}{\ln(1+5x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{5x}{\ln(1+5x)} \times \frac{x-2}{5} \right\} \\ &= 1 \times \left(-\frac{2}{5} \right) = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

034 답 ③

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)(1+2x)(1+3x)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1+2x) + \ln(1+3x)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times 2 + \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times 3 \right\} \\
 &= 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 = 6
 \end{aligned}$$

035 답 $\frac{7}{8}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\ln(1+4x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\ln(1+4x)} \times \frac{a}{4} = 1 \times \frac{a}{4} = \frac{a}{4} \\
 \text{따라서 } \frac{a}{4} &= 2 \text{ 이므로 } a = 8 \\
 \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{\ln(1+ax)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{\ln(1+8x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+7x)}{7x} \times \frac{8x}{\ln(1+8x)} \times \frac{7}{8} \right\} \\
 &= 1 \times 1 \times \frac{7}{8} = \frac{7}{8}
 \end{aligned}$$

036 답 ④

$y = e^{\frac{x}{5}} - 1$ 이라 하면

$$e^{\frac{x}{5}} = y + 1, \quad \frac{x}{5} = \ln(1+y) \quad \therefore x = 5 \ln(1+y)$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = 5 \ln(1+x)$

따라서 $g(x) = 5 \ln(1+x)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \ln(1+x)}{x} = 5 \times 1 = 5$$

037 답 2

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} x \{ \ln(x+2) - \ln x \} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+2}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right)
 \end{aligned}$$

$\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{1}{t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln(1+2t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2t)}{2t} \times 2 = 1 \times 2 = 2
 \end{aligned}$$

다른 풀이 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \{ \ln(x+2) - \ln x \}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x+2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left\{ \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2}} \right\}^2 \\
 &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2}} \right\}^2 = \ln e^2 = 2
 \end{aligned}$$

038 답 ⑤

$x-1=t$ 로 놓으면 $x=1+t$ 이고, $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_5(2x-1)}{x-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_5(1+2t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_5(1+2t)}{2t} \times 2 \\
 &= \frac{1}{\ln 5} \times 2 = \frac{2}{\ln 5}
 \end{aligned}$$

039 답 ①

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_4(1+4x)}{\log_3(1-2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log_4(1+4x)}{4x} \times \frac{-2x}{\log_3(1-2x)} \times (-2) \right\} \\
 &= \frac{1}{\ln 4} \times \ln 3 \times (-2) \\
 &= -\frac{2 \ln 3}{\ln 4} = -\frac{\ln 3}{\ln 2}
 \end{aligned}$$

040 답 ①

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(5+x) - \log_2 5}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2 \frac{5+x}{5}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2 \left(1 + \frac{x}{5} \right)}{\frac{x}{5}} \times \frac{1}{5} \\
 &= \frac{1}{\ln 2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5 \ln 2}
 \end{aligned}$$

041 답 $-\frac{2}{\ln 3}$

$\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{1}{t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} x \log_9 \left(1 - \frac{4}{x} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \log_9(1-4t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_9(1-4t)}{-4t} \times (-4) \\
 &= \frac{1}{\ln 9} \times (-4) = -\frac{2}{\ln 3}
 \end{aligned}$$

042 답 ②

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x+1)}{e^{6x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(2x+1)}{2x} \times \frac{6x}{e^{6x}-1} \times \frac{1}{3} \right\} \\
 &= 1 \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

043 답 ①

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{2x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1 - e^{2x} + 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{4x} - 1}{x} - \frac{e^{2x} - 1}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{4x} - 1}{4x} \times 4 - \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2 \right) \\
 &= 1 \times 4 - 1 \times 2 = 2
 \end{aligned}$$

044 답 -3

$x-2=t$ 로 놓으면 $x=2+t$ 이고, $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2} - (x-1)^2}{x-2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - (t+1)^2}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - (t^2 + 2t + 1)}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-t} - 1}{t} - t - 2 \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{-t} - 1}{-t} \times (-1) - t - 2 \right\} \\
 &= 1 \times (-1) - 2 = -3
 \end{aligned}$$

045 ③

$\ln(1+3x) \leq f(x) \leq e^{3x}-1$ 에서

(i) $x > 0$ 일 때

$$\frac{\ln(1+3x)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{e^{3x}-1}{x}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times 3 = 1 \times 3 = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x}-1}{3x} \times 3 = 1 \times 3 = 3$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 3$$

(ii) $-\frac{1}{3} < x < 0$ 일 때

$$\frac{e^{3x}-1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\ln(1+3x)}{x}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{3x}-1}{3x} \times 3 = 1 \times 3 = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times 3 = 1 \times 3 = 3$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 3$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$$

046 ②

$$f(n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{nx} - n}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1 + e^{2x} - 1 + e^{3x} - 1 + \dots + e^{nx} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{2x} - 1}{2x} + \frac{e^{3x} - 1}{3x} + \dots + \frac{e^{nx} - 1}{nx}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2 + \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3 + \dots + \frac{e^{nx} - 1}{nx} \times n}$$

$$= \frac{1}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} f(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2(1-0) = 2$$

047 ②

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{2x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 1 - 3^x + 1}{x(2-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{6^x - 1}{x} - \frac{3^x - 1}{x} \right) \times \frac{1}{2-x} \right\}$$

$$= (\ln 6 - \ln 3) \times \frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{2}$$

048 ②

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(9^x - 1) \log_3(1+x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{9^x - 1}{x} \times \frac{\log_3(1+x)}{x} \right\} \\ &= \ln 9 \times \frac{1}{\ln 3} = 2 \ln 3 \times \frac{1}{\ln 3} = 2 \end{aligned}$$

049 ②

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+4)^x - a^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+4)^x - 1 - a^x + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{(a+4)^x - 1}{x} - \frac{a^x - 1}{x} \right\} \\ &= \ln(a+4) - \ln a = \ln \frac{a+4}{a} \end{aligned}$$

따라서 $\ln \frac{a+4}{a} = \ln 3$ 이므로

$$\frac{a+4}{a} = 3, a+4=3a \quad \therefore a=2$$

050 ⑤

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x - 2^x + 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1)(3^x - 1)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x - 1}{x} \times \frac{3^x - 1}{x} \right) = \ln 2 \times \ln 3 \end{aligned}$$

따라서 $a=2, b=3$ 이므로 $a-b=-1$

051 ①

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2^{x+2} - 1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2^{x+2} - 1}{(x+2)(x-2)}$$

$x+2=t$ 로 놓으면 $x=-2+t$ 이고, $x \rightarrow -2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2^{x+2} - 1}{(x+2)(x-2)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{2^t - 1}{t} \times \frac{1}{t-4} \right) \\ &= \ln 2 \times \left(-\frac{1}{4} \right) = -\frac{\ln 2}{4} \end{aligned}$$

052 ⑤

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{e^x-1} = 5$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{ax+b}-2) = 0 \text{이므로 } \sqrt{b}-2=0 \quad \therefore b=4$$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+4}-2}{e^x-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{ax+4}-2)(\sqrt{ax+4}+2)}{(e^x-1)(\sqrt{ax+4}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{(e^x-1)(\sqrt{ax+4}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{e^x-1} \times \frac{a}{\sqrt{ax+4}+2} \right) = 1 \times \frac{a}{4} = \frac{a}{4} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{4} = 5$ 이므로 $a=20$

$$\therefore a+b=20+4=24$$

053 ④

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+6x)}{4^x-1} = \frac{b}{\ln 2}$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \ln(a+6x) = 0 \text{이므로 } \ln a = 0 \quad \therefore a=1$$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{4^x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+6x)}{6x} \times \frac{x}{4^x-1} \times 6 \right\} \\ = 1 \times \frac{1}{\ln 4} \times 6 = \frac{3}{\ln 2}$$

따라서 $\frac{3}{\ln 2} = \frac{b}{\ln 2}$ 이므로 $b=3$

$$\therefore ab = 1 \times 3 = 3$$

054 답 3

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{e^{bx+c}-1} = 3$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} (e^{bx+c}-1) = 0 \text{ 이므로 } e^c - 1 = 0 \quad \therefore c = 0$$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ax)}{e^{bx}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+ax)}{ax} \times \frac{bx}{e^{bx}-1} \times \frac{a}{b} \right\} \\ = 1 \times 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

따라서 $\frac{a}{b} = 3$ 이므로 $\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} = 3$

055 답 $\frac{5}{4}$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2}-a}{x^2-4} = b$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (e^{x-2}-a) = 0 \text{ 이므로 } 1-a=0 \quad \therefore a=1$$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2}-1}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2}-1}{(x-2)(x+2)} \\ x-2=t \text{로 놓으면 } x=2+t \text{이고, } x \rightarrow 2 \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{ 이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x-2}-1}{(x-2)(x+2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t-1}{t} \times \frac{1}{t+4} \right) = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ \therefore b = \frac{1}{4} \quad \therefore a+b = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

056 답 -3

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-e^{a+1}}{ax} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x}-e^{a+1}) = 0 \text{ 이므로 } 1-e^{a+1} = 0 \quad \therefore a = -1$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} \times (-2) = 1 \times (-2) = -2 \\ \therefore b = -2 \\ \therefore a+b = -1 + (-2) = -3$$

057 답 9

함수 $f(x)$ 가 구간 $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$ 에서 연속이면 $x=0$ 에서도 연속이

$$\text{므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\ln(1+3x)} = 3$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\ln(1+3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\ln(1+3x)} \times \frac{a}{3} = 1 \times \frac{a}{3} = \frac{a}{3}$$

$$\text{이므로 } \frac{a}{3} = 3 \quad \therefore a = 9$$

058 답 ②

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=2$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{\ln(2x-3)}{e^{x-2}-1} = \lim_{x \rightarrow 2-} (ax^2+x+4) = 4a+6$$

$x-2=t$ 로 놓으면 $x=2+t$ 이고, $x \rightarrow 2+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{\ln(2x-3)}{e^{x-2}-1} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+2t)}{e^t-1} \\ = \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\ln(1+2t)}{2t} \times \frac{t}{e^t-1} \times 2 \right\} \\ = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

따라서 $4a+6=2$ 이므로 $a=-1$

059 답 ③

$$x \neq \frac{1}{2} \text{일 때, } f(x) = \frac{\ln 2x}{2x-1}$$

함수 $f(x)$ 가 $x>0$ 인 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=\frac{1}{2}$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\ln 2x}{2x-1} = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$x-\frac{1}{2}=t$ 로 놓으면 $x=\frac{1}{2}+t$ 이고, $x \rightarrow \frac{1}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\ln 2x}{2x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2t)}{2t} = 1 \\ \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

060 답 $\frac{1}{\ln 2}$

점 P의 좌표를 $(t, 2^t-1)$ ($t>0$)이라 하면

$$\overline{OQ} = 2^t-1, \overline{PQ} = t$$

이때 점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t}{2^t-1} = \frac{1}{\ln 2}$$

061 답 1

$P(t, e^t), Q(t, e^{-t})$ 이므로

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times t = \frac{1}{2} \times (e^t - e^{-t}) \times t$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^t - e^{-t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^t - 1 - e^{-t} + 1}{2t} \\ = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{e^t - 1}{t} + \frac{e^{-t} - 1}{-t} \right) \\ = \frac{1}{2} (1+1) = 1$$

062 ㉓ ③

$A(0, 2^{-t}), B(0, 2^t)$ 이므로

$$f(t) = 2^t - 2^{-t}$$

두 곡선의 교점 C의 x 좌표는 $2^{x-t} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-t}$ 에서

$$x=t \quad \therefore C(t, 1)$$

$$\therefore g(t) = t$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t)}{g(t)} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2^t - 2^{-t}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2^t - 1 - 2^{-t} + 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{2^t - 1}{t} + \frac{2^{-t} - 1}{-t} \right) = \ln 2 + \ln 2 = 2 \ln 2 \end{aligned}$$

063 ㉓ $e-1$

$S_1(t) = \frac{1}{2} \times (e-1) \times \ln t, S_2(t) = \frac{1}{2} \times 1 \times (t-1)$ 이므로

$$\frac{S_1(t)}{S_2(t)} = \frac{(e-1) \ln t}{t-1}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{S_1(t)}{S_2(t)} = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{(e-1) \ln t}{t-1}$$

$t-1=s$ 로 놓으면 $t=1+s$ 이고, $t \rightarrow 1+$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{(e-1) \ln t}{t-1} &= \lim_{s \rightarrow 0+} \left\{ (e-1) \times \frac{\ln(1+s)}{s} \right\} \\ &= (e-1) \times 1 = e-1 \end{aligned}$$

064 ㉓ $\frac{1}{3} \ln 10$

두 점 $A(1, 0), B(t, 3 \log t)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{3 \log t}{t-1}$

선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+t}{2}, \frac{3}{2} \log t\right)$

따라서 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은

$$y = -\frac{t-1}{3 \log t} \left(x - \frac{1+t}{2} \right) + \frac{3}{2} \log t$$

이 직선이 y 축과 만나는 점의 y 좌표 $f(t)$ 는

$$f(t) = -\frac{t-1}{3 \log t} \times \left(-\frac{1+t}{2} \right) + \frac{3}{2} \log t = \frac{t-1}{\log t} \times \frac{1+t}{6} + \frac{3}{2} \log t$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1+} \left(\frac{t-1}{\log t} \times \frac{1+t}{6} + \frac{3}{2} \log t \right)$$

$t-1=s$ 로 놓으면 $t=1+s$ 이고, $t \rightarrow 1+$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) &= \lim_{s \rightarrow 0+} \left\{ \frac{s}{\log(1+s)} \times \frac{2+s}{6} + \frac{3}{2} \log(1+s) \right\} \\ &= \ln 10 \times \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3} \ln 10 \end{aligned}$$

065 ㉓ ①

$f(x) = (e^x + 3x)(x^2 - e^x)$ 에서

$$f'(x) = (e^x + 3)(x^2 - e^x) + (e^x + 3x)(2x - e^x)$$

$$\therefore f'(0) = 4 \times (-1) + 1 \times (-1) = -5$$

066 ㉓ 3

$f(x) = 3^x(2x+1)$ 에서

$$f'(x) = 3^x \ln 3 \times (2x+1) + 3^x \times 2$$

$$\therefore f'(1) = 9 \ln 3 + 6$$

따라서 $a=9, b=6$ 이므로 $\frac{2a}{b} = \frac{18}{6} = 3$

067 ㉓ ④

$f(x) = 2^{x+1} = 2 \times 2^x$ 이므로 $f'(x) = 2 \times 2^x \ln 2 = 2^{x+1} \ln 2$

따라서 점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = 2^2 \times \ln 2 = 4 \ln 2$$

068 ㉓ ④

$f(0)=5$ 에서 $a=5$

따라서 $f(x) = (x+5)e^x + bx$ 이므로

$$f'(x) = e^x + (x+5)e^x + b = (x+6)e^x + b$$

$$f'(0) = 2 \text{에서 } 6+b=2 \quad \therefore b=-4$$

$$\therefore a-b = 5 - (-4) = 9$$

069 ㉓ ④

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h)}{-h}$$

$$= f'(1) + f'(1) = 2f'(1)$$

이때 $f(x) = 3^x + 3^{2x} = 3^x + 9^x$ 에서 $f'(x) = 3^x \ln 3 + 9^x \ln 9$

$$\therefore f'(1) = 3 \ln 3 + 9 \ln 9 = 21 \ln 3$$

따라서 구하는 극한값은 $2f'(1) = 2 \times 21 \ln 3 = 42 \ln 3$

070 ㉓ $10 \ln 5 + 18$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 3$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재

하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 2\} = 0$ 이므로 $f(1) = 2$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 3$$

이때 $g(x) = (5^x + 1)f(x)$ 에서

$$g'(x) = 5^x \ln 5 \times f(x) + (5^x + 1)f'(x)$$

$$\therefore g'(1) = 5 \ln 5 \times f(1) + 6f'(1) = 10 \ln 5 + 18$$

071 ㉓ ③

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2 - 1} \times (x+1) \right\}$$

$$= f'(1) \times 2 = 2f'(1)$$

이때 $f(x) = (x+2) \ln x$ 에서 $f'(x) = \ln x + \frac{x+2}{x}$

$$\therefore f'(1) = 3$$

따라서 구하는 극한값은 $2f'(1) = 2 \times 3 = 6$

072 ㉓ $7 + \frac{2}{\ln 2}$

$$f(x) = x^2 + 3 \ln x \text{에서 } f'(x) = 2x + \frac{3}{x}$$

$$g(x) = 2x \log_2 x \text{에서}$$

$$g'(x) = 2 \log_2 x + 2x \times \frac{1}{x \ln 2} = 2 \log_2 x + \frac{2}{\ln 2}$$

$$\therefore f'(3) + g'(1) = 7 + \frac{2}{\ln 2}$$

073 **답 4e**

$$f(x) = x^2 \log_3 2x = x^2 (\log_3 2 + \log_3 x) \text{에서}$$

$$f'(x) = 2x (\log_3 2 + \log_3 x) + x^2 \times \frac{1}{x \ln 3}$$

$$= 2x \log_3 2x + \frac{x}{\ln 3}$$

$$\text{따라서 } f'(1) = 2 \log_3 2 + \frac{1}{\ln 3} = \log_3 4 + \log_3 e = \log_3 4e \text{이므로}$$

$$a = 4e$$

074 **답 2**

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = 4$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-1\} = 0 \text{이므로 } f(1) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 4$$

$$f(1) = 1 \text{에서 } b = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = a \ln x + x \text{이므로 } f'(x) = \frac{a}{x} + 1$$

$$f'(1) = 4 \text{에서 } a + 1 = 4 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore a - b = 3 - 1 = 2$$

075 **답 ④**

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (e^x + a) = \lim_{x \rightarrow 0-} (bx + 5) = f(0)$$

$$\text{즉, } 1 + a = 5 \text{이므로 } a = 4$$

$$\text{또 } f'(0) \text{이 존재하므로 } f'(x) = \begin{cases} e^x & (x > 0) \\ b & (x < 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} e^x = \lim_{x \rightarrow 0-} b \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore a + b = 4 + 1 = 5$$

076 **답 ①**

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서도 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (2x + 3 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (ax^2 + bx) = f(1)$$

$$\therefore a + b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } f'(1) \text{이 존재하므로 } f'(x) = \begin{cases} 2 + \frac{3}{x} & (x > 1) \\ 2ax + b & (x < 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \left(2 + \frac{3}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 1-} (2ax + b)$$

$$\therefore 2a + b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = 3, b = -1 \quad \therefore ab = -3$$

077 **답 ③**

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서도 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} a \ln x = \lim_{x \rightarrow 1-} (e^x + b) = f(1)$$

$$0 = e + b \quad \therefore b = -e$$

$$\text{또 } f'(1) \text{이 존재하므로 } f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & (x > 1) \\ e^x & (x < 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a}{x} = \lim_{x \rightarrow 1-} e^x \quad \therefore a = e$$

$$\therefore a + b = e + (-e) = 0$$

078 **답 15**

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^{x+1} - 3^{x+1}}{5^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^x}{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^x} = \frac{5-0}{1+0} = 5$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \infty} (9^x - 7^x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[9^x \left\{ 1 - \left(\frac{7}{9}\right)^x \right\} \right]^{\frac{1}{2x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (3^{2x})^{\frac{1}{2x}} \left\{ 1 - \left(\frac{7}{9}\right)^x \right\}^{\frac{1}{2x}} = 3 \times 1 = 3$$

$$\therefore \alpha\beta = 5 \times 3 = 15$$

079 **답 3**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{ \log_2 (4x+1) - \log_2 (x^2+2) + \log_2 (2x-1) \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{(4x+1)(2x-1)}{x^2+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{8x^2 - 2x - 1}{x^2+2}$$

$$= \log_2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 2x - 1}{x^2+2} = \log_2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}}$$

$$= \log_2 8 = 3$$

080 **답 5**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{b}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{ (1+ax)^{\frac{1}{ax}} \}^{ab} = e^{ab}$$

$$\text{따라서 } e^{ab} = e^5 \text{이므로 } ab = 5$$

081 **답 ⑤**

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{-\frac{1}{x}} = e$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3+x}{3} \right)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{3} \right)^{\frac{3}{x}} = e$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

$$\textcircled{4} x = -t \text{로 놓으면 } x \rightarrow -\infty \text{일 때 } t \rightarrow \infty \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^t = e$$

$$\textcircled{5} x-1=t \text{로 놓으면 } x=1+t \text{이고, } x \rightarrow 1 \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \}^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

082 **답 ①**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln x}{x-1} \times \frac{1}{x^2+x+1} \right) = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$$

$$x-1=t \text{로 놓으면 } x=1+t \text{이고, } x \rightarrow 1 \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{1}{3} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln (1+t)}{t} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

083 ③

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+6x)}{\ln(1+2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log_2(1+6x)}{6x} \times \frac{2x}{\ln(1+2x)} \times 3 \right\}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{\ln 2}$$

따라서 $\frac{3}{\ln 2} = \frac{a}{\ln 2}$ 이므로 $a=3$

084 ④

$y = \frac{1}{2} \ln(x+3)$ 이라 하면

$$\ln(x+3) = 2y, x+3 = e^{2y} \quad \therefore x = e^{2y} - 3$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = e^{2x} - 3 \quad \therefore g(x) = e^{2x} - 3$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)+2}{f(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\frac{1}{2} \ln(1+x)}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{2x}-1}{2x} \times \frac{x}{\ln(1+x)} \times 2 \right\}$$

$$= 2(1 \times 1 \times 2) = 4$$

085 ④

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x + 3^x + 4^x - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1) + (3^x - 1) + (4^x - 1)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x - 1}{x} + \frac{3^x - 1}{x} + \frac{4^x - 1}{x} \right)$$

$$= \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 = \ln 24$$

따라서 $\ln 24 = \ln a$ 이므로 $a=24$

086 ①

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b}{\ln(2x+1)} = \ln 4$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이

존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} (a^x + b) = 0 \text{ 이므로 } 1 + b = 0 \quad \therefore b = -1$$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{\ln(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{a^x - 1}{x} \times \frac{2x}{\ln(1+2x)} \times \frac{1}{2} \right\}$$

$$= \ln a \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{\ln a}{2}$$

따라서 $\frac{\ln a}{2} = \ln 4$ 이므로 $a=16$

$$\therefore a+b=16+(-1)=15$$

087 ⑤

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{ax} - b}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} (3x+5) = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0+$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0+} (e^{ax} - b) = 0 \text{ 이므로 } 1 - b = 0 \quad \therefore b = 1$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{ax} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{ax} - 1}{ax} \times a = 1 \times a = a \quad \therefore a = 5$$

$$\therefore ab = 5 \times 1 = 5$$

088 ②

함수 $y = |1 - \ln x|$ 의 그래프가 직선 $y=t$ 와 만나는 점의 x 좌표는 $|1 - \ln x| = t$ 에서 $1 - \ln x = \pm t$

$$\ln x = 1 - t \text{ 또는 } \ln x = 1 + t$$

$$\therefore x = e^{1-t} \text{ 또는 } x = e^{1+t}$$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $P(e^{1-t}, t), Q(e^{1+t}, t)$ 이므로

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times t = \frac{1}{2} \times (e^{1+t} - e^{1-t}) \times t$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S(t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^{1+t} - e^{1-t}}{2t}$$

$$= \frac{e}{2} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^t - e^{-t}}{t}$$

$$= \frac{e}{2} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^t - 1 - e^{-t} + 1}{t}$$

$$= \frac{e}{2} \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{e^t - 1}{t} + \frac{e^{-t} - 1}{-t} \right)$$

$$= \frac{e}{2} (1 + 1) = e$$

089 ⑤

$f(x) = 2^x + 4^x$ 이라 하면 $f(1) = 6$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x + 4^x - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

$f'(x) = 2^x \ln 2 + 4^x \ln 4$ 이므로

$$f'(1) = 2 \ln 2 + 4 \ln 4 = 2 \ln 2 + 8 \ln 2 = 10 \ln 2$$

090 ②

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e+3h) - f(e-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e+3h) - f(e) + f(e) - f(e-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e+3h) - f(e)}{3h} \times 3 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e) - f(e-h)}{-h}$$

$$= 3f'(e) + f'(e) = 4f'(e)$$

이때 $f(x) = x^2 + x \ln x$ 에서

$$f'(x) = 2x + \ln x + 1$$

$$\therefore f'(e) = 2e + 1 + 1 = 2e + 2$$

따라서 구하는 극한값은

$$4f'(e) = 4(2e + 2) = 8e + 8$$

091 ②

함수 $f(x)$ 가 모든 양수 x 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서도 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} ae^{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \ln bx = f(1)$$

$$\therefore a = \ln b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } f'(1) \text{이 존재하므로 } f'(x) = \begin{cases} ae^{x-1} & (x > 1) \\ \frac{1}{x} & (0 < x < 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} ae^{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{x} \quad \therefore a = 1$$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } \ln b = 1 \quad \therefore b = e$$

$$\therefore ab = 1 \times e = e$$

001 답 ②

θ 가 제2사분면의 각이면 $\sin \theta > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \\ \therefore \csc \theta + \cot \theta &= \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{1 + \left(-\frac{3}{5}\right)}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

002 답 ⑤

$$\begin{aligned}&\frac{\csc \theta}{\sec \theta - \tan \theta} + \frac{\csc \theta}{\sec \theta + \tan \theta} \\ &= \frac{\csc \theta (\sec \theta + \tan \theta) + \csc \theta (\sec \theta - \tan \theta)}{(\sec \theta - \tan \theta)(\sec \theta + \tan \theta)} \\ &= \frac{\csc \theta \sec \theta + \csc \theta \tan \theta + \csc \theta \sec \theta - \csc \theta \tan \theta}{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta} \\ &= \frac{2 \csc \theta \sec \theta}{(1 + \tan^2 \theta) - \tan^2 \theta} = 2 \csc \theta \sec \theta\end{aligned}$$

003 답 ①

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 에서 $\cos \alpha > 0$, $\sin \beta > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \sin \beta &= \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \therefore \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{3}\end{aligned}$$

004 답 $\frac{1}{8}$

이차방정식 $3x^2 - x - 5 = 0$ 의 두 근이 $\tan \alpha$, $\tan \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\tan \alpha + \tan \beta &= \frac{1}{3}, \tan \alpha \tan \beta = -\frac{5}{3} \\ \therefore \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{5}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

005 답 3

두 직선 $y = x + 3$, $y = -2x + 6$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = 1, \tan \beta = -2$$

$$\begin{aligned}\therefore \tan \theta &= |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| \\ &= \left| \frac{1 - (-2)}{1 + 1 \times (-2)} \right| = 3\end{aligned}$$

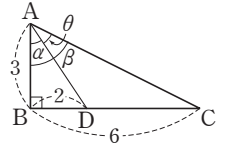
006 답 $\frac{4}{7}$

$\angle BAD = \alpha$, $\angle BAC = \beta$ 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{2}{3}, \tan \beta = \frac{6}{3} = 2$$

이때 $\theta = \beta - \alpha$ 이므로

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{2 - \frac{2}{3}}{1 + 2 \times \frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{4}{7}\end{aligned}$$



007 답 ②

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}$$

008 답 -18

$$\begin{aligned}y &= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \cos x + 1 \\ &= 2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6}\right) + 3 \cos x + 1 \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x\right) + 3 \cos x + 1 \\ &= \sqrt{3} \sin x + 4 \cos x + 1 \\ &= \sqrt{19} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}} \sin x + \frac{4}{\sqrt{19}} \cos x\right) + 1 \\ &= \sqrt{19} \sin(x + \alpha) + 1 \quad \left(\text{단, } \sin \alpha = \frac{4}{\sqrt{19}}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\right)\end{aligned}$$

이때 $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$ 이므로

$$-\sqrt{19} + 1 \leq \sqrt{19} \sin(x + \alpha) + 1 \leq \sqrt{19} + 1$$

따라서 $M = \sqrt{19} + 1$, $m = -\sqrt{19} + 1$ 이므로

$$Mm = (\sqrt{19} + 1)(-\sqrt{19} + 1) = -18$$

009 답 $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

θ 가 제3사분면의 각이면 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sec \theta + \cot \theta &= \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= -\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{4} + 2\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

010 ㉮ ③

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{4}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{16}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{16} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{15}{32}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sec \theta - \csc \theta &= \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{15}{32}} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

011 ㉮ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan \theta + \cot \theta = 3$ 에서

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 3, \quad \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 3$$

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 3 \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore |\sin \theta - \cos \theta| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

012 ㉮ $\sqrt{3}$

이차방정식 $x^2 - kx - 3 = 0$ 의 두 근이 $\csc \theta, \sec \theta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\csc \theta + \sec \theta = \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = k \quad \dots\dots ㉠$$

$$\csc \theta \sec \theta = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -3 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠ \text{에서 } \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = k$$

이 식에 ㉡을 대입하면 $-3(\sin \theta + \cos \theta) = k$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\frac{k}{3}$$

양변을 제곱하면 $\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{k^2}{9}$

$$㉡ \text{에서 } 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{k^2}{9}, \quad k^2 = 3$$

$$\therefore k = \sqrt{3} \quad (\because k > 0)$$

013 ㉮ ④

$$\begin{aligned} \frac{\tan \theta}{1 + \sec \theta} + \frac{1 + \sec \theta}{\tan \theta} &= \frac{\tan^2 \theta + (1 + \sec \theta)^2}{(1 + \sec \theta) \tan \theta} \\ &= \frac{\tan^2 \theta + 1 + 2 \sec \theta + \sec^2 \theta}{(1 + \sec \theta) \tan \theta} \\ &= \frac{\sec^2 \theta + 2 \sec \theta + \sec^2 \theta}{(1 + \sec \theta) \tan \theta} \\ &= \frac{2 \sec \theta (1 + \sec \theta)}{(1 + \sec \theta) \tan \theta} \\ &= \frac{2 \sec \theta}{\tan \theta} = \frac{2}{\sin \theta} \\ &= 2 \csc \theta \end{aligned}$$

014 ㉮ $-\frac{4}{5}$

θ 가 제3사분면의 각이면 $\csc \theta < 0$ 이므로

$$\csc \theta = -\sqrt{1 + \cot^2 \theta} = -\sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{5}{4}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{\csc \theta} = -\frac{4}{5}$$

015 ㉮ 3

$$\frac{1 - \tan^2 \theta}{\sec^2 \theta} = \frac{1}{3} \text{에서 } \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{3}$$

$$3 - 3 \tan^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta \quad \therefore \tan^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta = 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = 1 + 2 = 3$$

016 ㉮ ②

$$\begin{aligned} \neg. (1 - \sin^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) &= \cos^2 \theta \sec^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta \times \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. (1 + \cot \theta)^2 + (1 - \cot \theta)^2 &= 1 + 2 \cot \theta + \cot^2 \theta + 1 - 2 \cot \theta + \cot^2 \theta \\ &= 2 + 2 \cot^2 \theta = 2(1 + \cot^2 \theta) \\ &= 2 \csc^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \frac{1}{1 + \sin \theta} + \frac{1}{1 - \sin \theta} &= \frac{1 - \sin \theta + 1 + \sin \theta}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} \\ &= \frac{2}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta} \\ &= 2 \sec^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \frac{\sec \theta}{\csc \theta - \cot \theta} + \frac{\sec \theta}{\csc \theta + \cot \theta} &= \frac{\sec \theta (\csc \theta + \cot \theta) + \sec \theta (\csc \theta - \cot \theta)}{(\csc \theta - \cot \theta)(\csc \theta + \cot \theta)} \\ &= \frac{2 \sec \theta \csc \theta}{\csc^2 \theta - \cot^2 \theta} = \frac{2 \sec \theta \csc \theta}{(1 + \cot^2 \theta) - \cot^2 \theta} \\ &= 2 \sec \theta \csc \theta \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

017 ㉮ ①

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{1 - \cos \theta} &= \frac{1 - \cos \theta + 1 + \cos \theta}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{2}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2}{\sin^2 \theta} \\ &= 2 \csc^2 \theta \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 2 \csc^2 \theta = \frac{5}{2} \text{이므로 } \csc^2 \theta = \frac{5}{4}$$

$\csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$ 이므로

$$\frac{5}{4} = 1 + \cot^2 \theta \quad \therefore \cot^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{이때 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{에서 } \cot \theta < 0 \text{이므로 } \cot \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan \theta - \cot \theta = \frac{1}{\cot \theta} - \cot \theta = -2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

018 답 $\frac{33}{65}$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$ 에서 $\cos \alpha > 0$, $\sin \beta < 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

$$\sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{12}{13} \times \frac{4}{5} + \frac{5}{13} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{33}{65} \end{aligned}$$

019 답 ⑤

$$\begin{aligned} \frac{\sin 145^\circ \cos 25^\circ - \cos 145^\circ \sin 25^\circ}{\cos 55^\circ \cos 10^\circ + \sin 55^\circ \sin 10^\circ} &= \frac{\sin(145^\circ - 25^\circ)}{\cos(55^\circ - 10^\circ)} \\ &= \frac{\sin 120^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

020 답 ④

$\tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ 이므로 $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1$ 에서

$$\tan \alpha + \tan \beta = 1 - \tan \alpha \tan \beta$$

$$\begin{aligned} \therefore (1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) &= 1 + \tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta \\ &= 1 + (1 - \tan \alpha \tan \beta) + \tan \alpha \tan \beta \\ &= 2 \end{aligned}$$

021 답 $-\frac{3}{8}$

$\sin \alpha + \cos \beta = 1$, $\cos \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 각각 제곱하면

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = 1 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \frac{1}{4} \quad \text{..... ㉡}$$

㉠+㉡을 하면

$$2 + 2(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = \frac{5}{4}$$

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = -\frac{3}{8}$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{8}$$

022 답 $\frac{1}{17}$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{4} \text{에서 } \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{4} \quad \text{..... ㉠}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{2}{3} \text{에서 } \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{2}{3} \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠} + \text{㉡을 하면 } 2 \sin \alpha \cos \beta = \frac{17}{12} \quad \therefore \sin \alpha \cos \beta = \frac{17}{24}$$

$$\text{㉠} - \text{㉡을 하면 } 2 \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{12} \quad \therefore \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{24}$$

$$\therefore \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{\frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{17}{24}} = \frac{1}{17}$$

023 답 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

$(\tan \alpha + 2)(\tan \beta - 2) = -5$ 에서

$$\tan \alpha \tan \beta - 2(\tan \alpha - \tan \beta) = -1$$

$$1 + \tan \alpha \tan \beta = 2(\tan \alpha - \tan \beta)$$

이때 $1 + \tan \alpha \tan \beta > 0$ ($\because \tan \alpha > 0$, $\tan \beta > 0$)이므로

$$\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$$

이때 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$ 이고,

$\tan(\alpha - \beta) > 0$ 이므로 $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$

$$\sec^2(\alpha - \beta) = 1 + \tan^2(\alpha - \beta) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \text{이므로}$$

$$\cos^2(\alpha - \beta) = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha - \beta) \left\{ 1 + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} \right\} \\ &= \cos(\alpha - \beta) \{1 + \tan(\alpha - \beta)\} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

024 답 ①

이차방정식 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 의 두 근이 $\tan \alpha$, $\tan \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = -2, \tan \alpha \tan \beta = -5$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-2}{1 - (-5)} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \sec^2(\alpha + \beta) = 1 + \tan^2(\alpha + \beta) = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$$

025 답 2

이차방정식 $x^2 - 4x + a = 0$ 의 두 근이 $\tan \alpha$, $\tan \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = 4, \tan \alpha \tan \beta = a$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{4}{1 - a}$$

$$\text{따라서 } \frac{4}{1 - a} = -4 \text{이므로 } 4a - 4 = 4 \quad \therefore a = 2$$

026 답 $\frac{3}{4}$

이차방정식 $2x^2 - 5x + 2 = 0$ 의 두 근이 $\tan \alpha$, $\tan \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{5}{2}, \tan \alpha \tan \beta = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore (\tan \alpha - \tan \beta)^2 &= (\tan \alpha + \tan \beta)^2 - 4 \tan \alpha \tan \beta \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

이때 $\tan \alpha > \tan \beta$ 이므로 $\tan \alpha - \tan \beta = \frac{3}{2}$

$$\therefore \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{3}{2}}{1 + 1} = \frac{3}{4}$$

027 답 $\frac{1}{5}$

이차방정식 $x^2 - 10x - 4 = 0$ 의 두 근이 $\tan \alpha, \tan \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\tan \alpha + \tan \beta = 10, \tan \alpha \tan \beta = -4$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{10}{1 - (-4)} = 2$$

$$\sec^2(\alpha + \beta) = 1 + \tan^2(\alpha + \beta) = 1 + 4 = 5 \text{이므로}$$

$$\cos^2(\alpha + \beta) = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \cos^2(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin^2(\alpha + \beta)$$

$$= \cos^2(\alpha + \beta) \left\{ 1 - \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} + \frac{1}{2} \times \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\cos^2(\alpha + \beta)} \right\}$$

$$= \cos^2(\alpha + \beta) \left\{ 1 - \tan(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \tan^2(\alpha + \beta) \right\}$$

$$= \frac{1}{5} \left(1 - 2 + \frac{1}{2} \times 2^2 \right) = \frac{1}{5}$$

028 답 $\frac{4}{5}$

두 직선 $y = \frac{1}{2}x + 1, y = 2x + 1$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의

크기를 각각 α, β 라 하면 $\tan \alpha = \frac{1}{2}, \tan \beta = 2$

$$\therefore \tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2} - 2}{1 + \frac{1}{2} \times 2} \right| = \frac{3}{4}$$

$$\text{이때 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} = \frac{4}{5}$$

029 답 $\frac{\pi}{4}$

두 직선 $x - 2y + 1 = 0, 3x - y - 2 = 0$, 즉 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, y = 3x - 2$

가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{1}{2}, \tan \beta = 3$$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2} - 3}{1 + \frac{1}{2} \times 3} \right| = 1$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

030 답 ②

두 직선 $ax - y + 2 = 0, 2x + y - 2 = 0$, 즉 $y = ax + 2, y = -2x + 2$

가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라 하면

$$\tan \alpha = a, \tan \beta = -2$$

이때 두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$|\tan(\alpha - \beta)| = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{에서 } \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| = 1$$

$$\frac{a + 2}{1 - 2a} = \pm 1, a + 2 = 1 - 2a \text{ 또는 } a + 2 = -1 + 2a$$

$$\therefore a = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } a = 3$$

이때 $a > 0$ 이므로 $a = 3$

031 답 3

직선 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 이 x 축의 양의 방향과

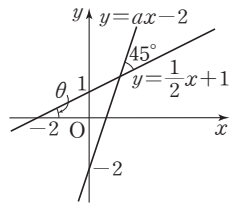
이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\tan \theta = \frac{1}{2}$$

직선 $y = ax - 2$ 가 x 축의 양의 방향과

이루는 각의 크기는 $\theta + 45^\circ$ 이므로

$$a = \tan(\theta + 45^\circ) = \frac{\tan \theta + \tan 45^\circ}{1 - \tan \theta \tan 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2} \times 1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$$



032 답 $\frac{12}{5}$

$\angle CAB = \alpha, \angle EAD = \beta$ 라 하면

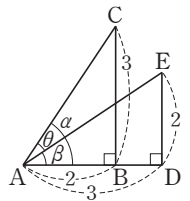
$$\tan \alpha = \frac{3}{2}, \tan \beta = \frac{2}{3}$$

이때 $\theta = \alpha - \beta$ 이므로

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{3}{2} \times \frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{2} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{12}{5}$$



033 답 $\frac{24}{5}$

$\angle BAH = \alpha, \angle CAH = \beta, \overline{CH} = x$ 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \tan \beta = \frac{x}{8}$$

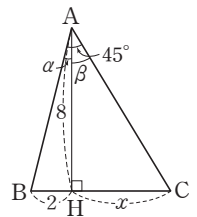
이때 $\alpha + \beta = 45^\circ$ 이므로

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan 45^\circ = 1 \text{에서}$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1, \frac{\frac{1}{4} + \frac{x}{8}}{1 - \frac{1}{4} \times \frac{x}{8}} = 1$$

$$\frac{8 + 4x}{32 - x} = 1, 8 + 4x = 32 - x \quad \therefore x = \frac{24}{5}$$

$$\therefore \overline{CH} = \frac{24}{5}$$



034 답 ⑤

점 D에서 직선 BC에 내린 수선의 발

을 H라 하면

$$\angle DCH = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$$

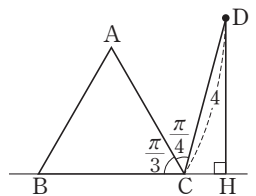
$$\therefore \overline{DH} = \overline{CD} \sin(\angle DCH)$$

$$= 4 \sin \left\{ \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \right\}$$

$$= 4 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= 4 \left(\sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$



035 **답** $\frac{3}{4}$

$\angle CPE = \alpha$, $\angle CPB = \beta$, $\overline{CP} = x$ 라 하면
 $\overline{CE} = 2$ 이므로

$$\tan \alpha = \frac{2}{x}, \tan \beta = \frac{8}{x}$$

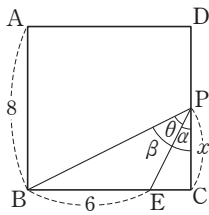
$\theta = \beta - \alpha$ 이므로

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{\frac{8}{x} - \frac{2}{x}}{1 + \frac{8}{x} \times \frac{2}{x}} = \frac{\frac{6}{x}}{\frac{x^2 + 16}{x}} = \frac{6}{x + \frac{16}{x}} \end{aligned}$$

이때 $x + \frac{16}{x}$ 에서 $x > 0$, $\frac{16}{x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x + \frac{16}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{16}{x}} = 8 \quad (\text{단, 등호는 } x = \frac{16}{x}, \text{ 즉 } x = 4 \text{일 때 성립})$$

따라서 $\tan \theta$ 의 최댓값은 $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$



036 **답** ③

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3} \quad \therefore 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \cos^2 2\theta = 1 - \sin^2 2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

037 **답** $\frac{12}{5}$

$3 \sin \theta - 2 \cos \theta = 0$ 에서

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{3} \quad \therefore \tan \theta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \times \frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{12}{5}$$

038 **답** $\frac{7}{5}$

$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta = 1 + 4 = 5$ 이므로

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \theta > 0$, $\sin \theta > 0$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin 2\theta - \cos 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta - (2 \cos^2 \theta - 1) \\ &= 2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} - \left(2 \times \frac{1}{5} - 1\right) \\ &= \frac{4}{5} - \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{7}{5} \end{aligned}$$

039 **답** 2

$$\begin{aligned} f(x) &= 8 \sin x + 2 \cos 2x + k \\ &= 8 \sin x + 2(1 - 2 \sin^2 x) + k \\ &= -4 \sin^2 x + 8 \sin x + 2 + k \\ &= -4(\sin x - 1)^2 + 6 + k \end{aligned}$$

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $\sin x = 1$ 일 때 최댓값 $6 + k$ 를 갖는다.

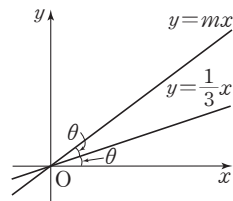
따라서 $6 + k = 8$ 이므로 $k = 2$

040 **답** ⑤

직선 $y = \frac{1}{3}x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 직선 $y = mx$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 2θ 이므로

$$\tan \theta = \frac{1}{3}, \tan 2\theta = m$$

$$\begin{aligned} \therefore m &= \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \\ &= \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$



041 **답** ①

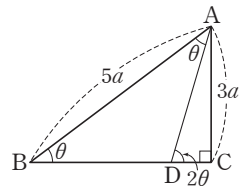
$\angle ABD = \theta$, $\overline{AB} = 5a$, $\overline{AC} = 3a$ ($a > 0$)

라 하면

$$\sin \theta = \frac{3}{5}$$

이때 $\angle ADC = 2\theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos(\angle ADC) &= \cos 2\theta \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25} \end{aligned}$$



042 **답** $8\sqrt{7}$

$$\begin{aligned} y &= 4 \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 4\sqrt{3} \sin x + 3 \\ &= 4 \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3}\right) + 4\sqrt{3} \sin x + 3 \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right) + 4\sqrt{3} \sin x + 3 \\ &= 2 \cos x + 6\sqrt{3} \sin x + 3 \\ &= 4\sqrt{7} \left(\frac{1}{2\sqrt{7}} \cos x + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \sin x\right) + 3 \\ &= 4\sqrt{7} \sin(x + \alpha) + 3 \quad \left(\text{단, } \sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{7}}, \cos \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right) \end{aligned}$$

이때 $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$ 이므로

$$-4\sqrt{7} + 3 \leq 4\sqrt{7} \sin(x + \alpha) + 3 \leq 4\sqrt{7} + 3$$

따라서 $M = 4\sqrt{7} + 3$, $m = -4\sqrt{7} + 3$ 이므로

$$M - m = 4\sqrt{7} + 3 - (-4\sqrt{7} + 3) = 8\sqrt{7}$$

043 답 $\frac{\sqrt{55}}{8}$

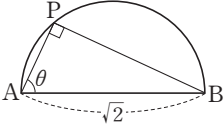
$$\begin{aligned}\sin \theta - \sqrt{3} \cos \theta &= 2 \left(\frac{1}{2} \sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) \\ &= 2 \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{3} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) \\ \text{따라서 } 2 \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) &= \frac{3}{4} \text{ 이므로 } \sin \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{3}{8} \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 에서 } -\frac{\pi}{3} < \theta - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6} \text{ 이므로 } \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) > 0 \\ \therefore \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) &= \sqrt{1 - \sin^2 \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{8} \right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{8}\end{aligned}$$

044 답 3

$$\begin{aligned}y &= \sqrt{3}a \sin x + a \cos x - 2 \\ &= 2a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) - 2 \\ &= 2a \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} \right) - 2 \\ &= 2a \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - 2 \\ \text{이때 } a > 0 \text{ 이고 } -1 &\leq \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1 \text{ 이므로} \\ -2a - 2 &\leq 2a \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - 2 \leq 2a - 2 \\ \text{따라서 최댓값이 } 2a - 2 \text{ 이므로} \\ 2a - 2 &= 4 \quad \therefore a = 3\end{aligned}$$

045 답 2

$\angle APB = 90^\circ$ 이므로
 $\angle PAB = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) 라 하면
 $\overline{AP} = \sqrt{2} \cos \theta$, $\overline{BP} = \sqrt{2} \sin \theta$
 $\therefore \overline{AP} + \overline{BP} = \sqrt{2} \cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta$

$$\begin{aligned}&= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right) \\ &= 2 \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \theta + \cos \frac{\pi}{4} \sin \theta \right) \\ &= 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$


$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$ 이므로
 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \quad \therefore \sqrt{2} < 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 2$
 따라서 구하는 최댓값은 2이다.

046 답 ①

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x (\sin x - \cos x)}{\cos x - \sin x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

047 답 ⑤

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin (2x^3 + 3x^2 + 4x)}{3x^3 + 2x^2 + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin (2x^3 + 3x^2 + 4x)}{2x^3 + 3x^2 + 4x} \times \frac{2x^2 + 3x + 4}{3x^2 + 2x + 1} \right\} \\ &= 1 \times 4 = 4\end{aligned}$$

048 답 ③

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan (\tan 3x)}{\tan 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan (\tan 3x)}{\tan 3x} \times \frac{2x}{\tan 2x} \times \frac{\tan 3x}{3x} \times \frac{3}{2} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

049 답 ①

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{4x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{4x \sin x (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{4x \sin x (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{4(1 + \cos x)} \right\} \\ &= 1 \times \frac{1}{4 \times 2} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

050 답 ⑤

$x - \pi = t$ 로 놓으면 $x = \pi + t$ 이고, $x \rightarrow \pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan 2x}{x - \pi} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 2(\pi + t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan (2\pi + 2t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 2t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 2t}{2t} \times 2 = 1 \times 2 = 2\end{aligned}$$

051 답 ④

$\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{1}{t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} \left(\sin \frac{1}{x} + \tan \frac{3}{x} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t} (\sin t + \tan 3t) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} + \frac{\tan 3t}{3t} \times 3 \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 + 1 \times 3) = 2\end{aligned}$$

052 답 ②

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 5 \cos x + a}{bx \sin x} = \frac{5}{2}$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 0} (3 - 5 \cos x + a) = 0$ 이므로 $-2 + a = 0 \quad \therefore a = 2$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 - 5 \cos x}{bx \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{bx \sin x (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin^2 x}{bx \sin x (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin x}{bx(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin x}{x} \times \frac{5}{b(1 + \cos x)} \right\} = 1 \times \frac{5}{2b} = \frac{5}{2b}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{5}{2b} = \frac{5}{2}$ 이므로 $b = 1$
 $\therefore a + b = 2 + 1 = 3$

053 ⑤

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 4(x-2)}{x-2} = k$$

$x-2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 4(x-2)}{x-2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 4t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 4t}{4t} \times 4$$

$$= 1 \times 4 = 4$$

$$\therefore k = 4$$

054 ⑥

$\triangle ABC$ 에서 $\overline{AC} = 6 \sin \theta$

$\angle HAC = \angle ABC$ 이므로 $\triangle AHC$ 에서

$$\overline{CH} = \overline{AC} \sin \theta = 6 \sin^2 \theta$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{CH}}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{6 \sin^2 \theta}{\theta^2} = 6 \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2$$

$$= 6 \times 1^2 = 6$$

055 ⑥

$f(x) = 2e^x(1+2\cos x)$ 에서

$$f'(x) = 2e^x(1+2\cos x) + 2e^x \times (-2\sin x)$$

$$= 2e^x(1+2\cos x - 2\sin x)$$

$$\therefore f'(0) = 2 \times (1+2-0) = 6$$

056 ①

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서도 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0+} (a \sin x + 3) = \lim_{x \rightarrow 0-} (e^x + b) = f(0) \text{이므로}$$

$$3 = 1 + b \quad \therefore b = 2$$

또 $f'(0)$ 이 존재하므로 $f'(x) = \begin{cases} a \cos x & (x > 0) \\ e^x & (x < 0) \end{cases}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} a \cos x = \lim_{x \rightarrow 0-} e^x \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a + b = 1 + 2 = 3$$

057 ② $2\sqrt{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1}{\sin x - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x (\sin x - \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)}{\cos^2 x (\sin x - \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}$$

058 ③

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x - 2 \cos x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x - 2 \cos x}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos x (\sin x - 1)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-2 \cos x}{1 + \sin x}$$

$$= \frac{-2 \times 0}{1 + 1} = 0$$

059 ① $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x - \cot x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$= \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

060 ②

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\cos x (1 + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$= \frac{0}{1 + 1} = 0$$

061 ③

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin 3x)}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(\sin 3x)}{\sin 3x} \times \frac{4x}{\sin 4x} \times \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{3}{4} \right\}$$

$$= 1 \times 1 \times 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

062 ④

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin 3x} + \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{1}{3} + \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{2}{3} \right)$$

$$= 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times 1 \times \frac{2}{3} = 1$$

063 ㉮ ①

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \frac{4x}{\sin 4x} \times \frac{1}{2} \right) \\ = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

064 ㉮ ③

$$f(x) = 4x, g(x) = \sin x \text{에서} \\ f(g(x)) = f(\sin x) = 4 \sin x \\ g(f(x)) = g(4x) = \sin 4x \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(g(x))}{g(f(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x}{\sin 4x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{4x}{\sin 4x} \right) \\ = 1 \times 1 = 1$$

065 ㉮ ③

$$f(n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 2x}{x} + \dots + \frac{\sin nx}{x}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 2x}{2x} \times 2 + \dots + \frac{\sin nx}{nx} \times n} \\ = \frac{3}{1 + 2 + \dots + n} = \frac{3}{\frac{n(n+1)}{2}} \\ = \frac{6}{n(n+1)} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n(n+1)} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{6}{k(k+1)} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 6 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 6$$

066 ㉮ ②

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x^2 + x)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan(3x^2 + x)}{3x^2 + x} \times \frac{3x + 1}{x - 1} \right\} \\ = 1 \times \frac{1}{-1} = -1$$

067 ㉮ ①

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{\ln(1+8x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan 4x}{4x} \times \frac{8x}{\ln(1+8x)} \times \frac{1}{2} \right\} \\ = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

068 ㉮ ②

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin 2x)}{\tan(\tan 5x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan(\sin 2x)}{\sin 2x} \times \frac{\tan 5x}{\tan(\tan 5x)} \times \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{5x}{\tan 5x} \times \frac{2}{5} \right\} \\ = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

069 ㉮ 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \tan^2 x + 2 \tan x}{k \tan(6x^2 + 2x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x (3 \tan x + 1)}{k \tan(6x^2 + 2x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan x}{x} \times \frac{6x^2 + 2x}{\tan(6x^2 + 2x)} \times \frac{2(3 \tan x + 1)}{k(6x + 2)} \right\} \\ = 1 \times 1 \times \frac{1}{k} = \frac{1}{k}$$

따라서 $\frac{1}{k} = \frac{1}{2}$ 이므로 $k = 2$

070 ㉮ ③

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1 - \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(1 + \cos 3x)}{(1 - \cos 3x)(1 + \cos 3x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(1 + \cos 3x)}{\sin^2 3x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{3x}{\sin 3x} \right)^2 \times \frac{2(1 + \cos 3x)}{9} \right\} \\ = 1^2 \times \frac{2 \times 2}{9} = \frac{4}{9}$$

071 ㉮ ③

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos kx}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos kx)(1 + \cos kx)}{\sin^2 x (1 + \cos kx)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 kx}{\sin^2 x (1 + \cos kx)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin kx}{kx} \right)^2 \times \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \times \frac{k^2}{1 + \cos kx} \right\} \\ = 1^2 \times 1^2 \times \frac{k^2}{2} = \frac{k^2}{2}$$

따라서 $\frac{k^2}{2} = 8$ 이므로 $k^2 = 16$

$\therefore k = 4$ ($\because k > 0$)

072 ㉮ 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\tan x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x}{\sin x (1 - \cos x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x (1 + \cos x)}{\sin x (1 - \cos x) (1 + \cos x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cos x (1 + \cos x)}{\sin^3 x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{x}{\sin x} \right)^3 \times \cos x (1 + \cos x) \right\} \\ = 1^3 \times 1 \times 2 = 2$$

073 답 8

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(1 + \cos x^3)}{(1 - \cos x^3)(1 + \cos x^3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(1 + \cos x^3)}{\sin^2 x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{x^3}{\sin x^3} \right)^2 \times (1 + \cos x^3) \times \frac{f(x)}{x^6} \right\} \\ &= 1^2 \times 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^6} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^6} \\ 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^6} &= 4 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^6} = 2 \\ \text{따라서 } p &= 6, q = 2 \text{ 이므로 } p + q = 8\end{aligned}$$

074 답 ②

$x - \frac{\pi}{2} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{\pi}{2} + t$ 이고, $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{t} \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = -1\end{aligned}$$

075 답 -1

$x - \frac{\pi}{2} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{\pi}{2} + t$ 이고, $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \tan x &= \lim_{t \rightarrow 0} t \tan \left(\frac{\pi}{2} + t \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \{ t \times (-\cot t) \} \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} = -1\end{aligned}$$

076 답 ④

$x - 2 = t$ 로 놓으면 $x = 2 + t$ 이고, $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sin \pi x} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{\sin \pi x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(4 + t)}{\sin \pi(2 + t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(4 + t)}{\sin(2\pi + \pi t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(4 + t)}{\sin \pi t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\pi t}{\sin \pi t} \times \frac{4 + t}{\pi} \right) = 1 \times \frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi}\end{aligned}$$

077 답 $-\frac{1}{2}$

$x - \pi = t$ 로 놓으면 $x = \pi + t$ 이고, $x \rightarrow \pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi) \sin x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(\pi + t)}{t \sin(\pi + t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{-t \sin t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{-t \sin t (1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{-t \sin t (1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{-t(1 + \cos t)} \\ &= -\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \times \frac{1}{1 + \cos t} \right) \\ &= -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

078 답 $-\frac{\pi}{2}$

$x - 1 = t$ 로 놓으면 $x = 1 + t$ 이고, $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin\left(\cos \frac{\pi}{2} x\right)}{x - 1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left\{\cos \frac{\pi}{2}(1 + t)\right\}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t\right)\right\}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(-\sin \frac{\pi}{2}t\right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin\left(-\sin \frac{\pi}{2}t\right)}{-\sin \frac{\pi}{2}t} \times \frac{\sin \frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t} \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

079 답 1

$\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\tan \frac{1}{x}\right) \csc \frac{1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \sin(\tan t) \csc t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \sin(\tan t) \times \frac{1}{\sin t} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(\tan t)}{\tan t} \times \frac{t}{\sin t} \times \frac{\tan t}{t} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times 1 = 1\end{aligned}$$

080 답 ②

$x^\circ = \frac{\pi}{180}x$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x^\circ \sin \frac{2}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{180} x \sin \frac{2}{x} \\ \frac{1}{x} = t \text{로 놓으면 } x &= \frac{1}{t} \text{이고, } x \rightarrow \infty \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{180} x \sin \frac{2}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{180} \times \frac{\sin 2t}{t} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{180} \times \frac{\sin 2t}{2t} \times 2 \right) \\ &= \frac{\pi}{180} \times 1 \times 2 = \frac{\pi}{90}\end{aligned}$$

081 답 9

$\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{1}{t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 \left(1 - \cos \frac{3}{x} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{t^2} (1 - \cos 3t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos 3t)(1 + \cos 3t)}{t^2(1 + \cos 3t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 3t}{t^2(1 + \cos 3t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin 3t}{3t} \right)^2 \times \frac{18}{1 + \cos 3t} \right\} \\ &= 1^2 \times \frac{18}{2} = 9\end{aligned}$$

082 ④

$$\frac{1}{2x^2+1}=t \text{로 놓으면 } x^2=\frac{1-t}{2t} \text{이고, } x \rightarrow \infty \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{1}{2x^2+1} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1-t}{2t} \times \sin t \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1-t}{2} \times \frac{\sin t}{t} \right) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

083 ③

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x \sin ax+b} = \frac{1}{6}$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin ax+b) = 0$ 이므로 $b=0$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x \sin ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x \sin ax (1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \sin ax (1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{ax}{\sin ax} \times \frac{1}{a(1+\cos x)} \right\}$$

$$= 1^2 \times 1 \times \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a}$$

따라서 $\frac{1}{2a} = \frac{1}{6}$ 이므로 $a=3$

$$\therefore a+b=3+0=3$$

084 ⑤

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+2x)}{\sin x} = b$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(a+2x) = 0$ 이므로 $\ln a = 0 \quad \therefore a=1$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \frac{x}{\sin x} \times 2 \right\} = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

$$\therefore b=2 \quad \therefore ab=1 \times 2=2$$

085 ⑨

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-1}{\sin 4x} = 1$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{ax+b}-1) = 0$ 이므로 $\sqrt{b}-1=0 \quad \therefore b=1$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+1}-1}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{ax+1}-1)(\sqrt{ax+1}+1)}{\sin 4x (\sqrt{ax+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin 4x (\sqrt{ax+1}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{4x}{\sin 4x} \times \frac{a}{4(\sqrt{ax+1}+1)} \right\}$$

$$= 1 \times \frac{a}{4 \times 2} = \frac{a}{8}$$

따라서 $\frac{a}{8} = 1$ 이므로 $a=8$

$$\therefore a+b=8+1=9$$

086 ④

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a-b \cos x}{x^2} = 2$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} (a-b \cos x) = 0$ 이므로 $a-b=0 \quad \therefore b=a \quad \dots\dots ①$

①을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a-a \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{a}{1+\cos x} \right\} = 1^2 \times \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2} = 2$ 이므로 $a=4$

이를 ①에 대입하면 $b=4$

$$\therefore ab=4 \times 4=16$$

087 ①

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{3^x-1}{4 \tan(x-a)} = b \ln 3$ 에서 $x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow a} (3^x-1) = 0$ 이므로 $3^a-1=0 \quad \therefore a=0$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x-1}{4 \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3^x-1}{x} \times \frac{x}{\tan x} \times \frac{1}{4} \right) = \ln 3 \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{\ln 3}{4}$$

따라서 $\frac{\ln 3}{4} = b \ln 3$ 이므로 $b=\frac{1}{4}$

$$\therefore b-a = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

088 ②

$f(x)=ax+b$ ($a \neq 0$, a, b 는 상수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\sin(\pi+x)}{ax+b} = 1 \quad \dots\dots ①$$

$x \rightarrow -\pi$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -\pi} (ax+b) = 0$ 이므로 $-a\pi+b=0$

$$\therefore b=a\pi \quad \dots\dots ②$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\sin(\pi+x)}{ax+a\pi} = \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\sin(\pi+x)}{a(x+\pi)}$$

$x+\pi=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\sin(\pi+x)}{a(x+\pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{at} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \times \frac{1}{a} = 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

즉, $\frac{1}{a} = 1$ 이므로 $a=1$

이를 ②에 대입하면 $b=\pi$

따라서 $f(x)=x+\pi$ 이므로 $f(\pi)=\pi+\pi=2\pi$

089 ④

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=f(-1)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\tan 2(x+1)}{x+1} = k$$

$x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\tan 2(x+1)}{x+1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 2t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan 2t}{2t} \times 2 = 1 \times 2 = 2$$

$\therefore k=2$

090 답 5

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 에서 연속이면 $x=0$ 에서도 연속이

$$\text{므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax}-b}{\sin x} = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} (e^{ax}-b) = 0 \text{이므로 } 1-b=0 \quad \therefore b=1$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax}-1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{ax}-1}{ax} \times \frac{x}{\sin x} \times a \right)$$

$$= 1 \times 1 \times a = a$$

$$\therefore a=5$$

$$\therefore ab=5 \times 1=5$$

091 답 $\frac{45}{2}$

$$x \neq 0 \text{일 때, } f(x) = \frac{a-5 \cos 3x}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=0$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a-5 \cos 3x}{x^2} = f(0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} (a-5 \cos 3x) = 0 \text{이므로 } a-5=0 \quad \therefore a=5$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5-5 \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{x^2(1+\cos 3x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 \times \frac{45}{1+\cos 3x} \right\}$$

$$= 1^2 \times \frac{45}{2} = \frac{45}{2}$$

$$\therefore f(0) = \frac{45}{2}$$

092 답 4

$$\triangle ABC \text{에서 } \overline{BC} = 4 \tan \theta$$

$\angle BCH = \angle BAC = \theta$ 이므로 $\triangle BCH$ 에서

$$\overline{BH} = \overline{BC} \sin \theta = 4 \tan \theta \sin \theta$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{BH}}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{4 \tan \theta \sin \theta}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left(4 \times \frac{\tan \theta}{\theta} \times \frac{\sin \theta}{\theta} \right) = 4 \times 1 \times 1 = 4$$

093 답 ②

$\triangle OHB$ 에서 $\overline{OH} = 3 \cos \theta$, $\overline{BH} = 3 \sin \theta$ 이고

$\overline{AH} = \overline{OA} - \overline{OH} = 3 - 3 \cos \theta = 3(1 - \cos \theta)$ 이므로

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{BH} = \frac{9}{2} (1 - \cos \theta) \sin \theta$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{9(1 - \cos \theta) \sin \theta}{2\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{9(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) \sin \theta}{2\theta^3(1 + \cos \theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{9 \sin^3 \theta}{2\theta^3(1 + \cos \theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^3 \times \frac{9}{2(1 + \cos \theta)} \right\}$$

$$= 1^3 \times \frac{9}{2 \times 2} = \frac{9}{4}$$

094 답 $2 + \sqrt{2}$

$\triangle OHP$ 에서 $\overline{OP} = 1$ 이므로 $\overline{OH} = \cos \theta$

$$\therefore \overline{HA} = \overline{OA} - \overline{OH} = 1 - \cos \theta$$

$\triangle AQH$ 가 직각이등변삼각형이므로 $\overline{QH} = \overline{HA} = 1 - \cos \theta$,

$$\overline{AQ} = \sqrt{(1 - \cos \theta)^2 + (1 - \cos \theta)^2} = \sqrt{2} (1 - \cos \theta)$$

$$\therefore L(\theta) = \overline{QH} + \overline{HA} + \overline{AQ}$$

$$= (1 - \cos \theta) + (1 - \cos \theta) + \sqrt{2} (1 - \cos \theta)$$

$$= (2 + \sqrt{2}) (1 - \cos \theta)$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2L(\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2(2 + \sqrt{2})(1 - \cos \theta)}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2(2 + \sqrt{2})(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\theta^2(1 + \cos \theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2(2 + \sqrt{2}) \sin^2 \theta}{\theta^2(1 + \cos \theta)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \times \frac{2(2 + \sqrt{2})}{1 + \cos \theta} \right\}$$

$$= 1^2 \times (2 + \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2}$$

095 답 $\frac{4}{3}$

$\overline{OP} = \overline{OA} = 1$ 이므로 $\angle OPA = \angle OAP = \theta$

따라서 $\angle POC = 2\theta$ 이므로

$\triangle POC$ 에서 $\angle OCP = \pi - 3\theta$

$\triangle POC$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{OC}}{\sin \theta} = \frac{\overline{OP}}{\sin(\pi - 3\theta)}, \quad \frac{\overline{OC}}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin 3\theta} \quad \therefore \overline{OC} = \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta}$$

$$\therefore \overline{AC} = \overline{AO} + \overline{OC} = 1 + \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta}$$

또 $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\triangle PAB$ 에서

$$\overline{AP} = \overline{AB} \cos \theta = 2 \cos \theta$$

$$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{AP} \times \sin \theta$$

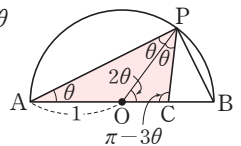
$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta} \right) \times 2 \cos \theta \sin \theta$$

$$= \left(1 + \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta} \right) \sin \theta \cos \theta$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\left(1 + \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta} \right) \sin \theta \cos \theta}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \left(1 + \frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{3\theta}{\sin 3\theta} \times \frac{1}{3} \right) \times \frac{\sin \theta}{\theta} \times \cos \theta \right\}$$

$$= \left(1 + 1 \times 1 \times \frac{1}{3} \right) \times 1 \times 1 = \frac{4}{3}$$



096 ①

△OPH에서 $\overline{OP}=1$ 이므로

$$\overline{PH}=\sin \theta, \overline{OH}=\cos \theta$$

$$\therefore g(\theta)=\frac{1}{2} \times \overline{OH} \times \overline{PH}=\frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta$$

$$\angle OPQ=\frac{\pi}{2} \text{이므로 } \angle PQO=\frac{\pi}{2}-\theta$$

$$\triangle PQO \text{에서 } \overline{QO}=\frac{1}{\cos \theta} \text{이므로}$$

$$\overline{QB}=\overline{QO}-\overline{BO}=\frac{1}{\cos \theta}-1=\frac{1-\cos \theta}{\cos \theta}$$

$$\therefore f(\theta)=\frac{1}{2} \times \overline{QB}^2 \times \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{2} \left(\frac{1-\cos \theta}{\cos \theta}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\therefore \lim _{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{f(\theta)}}{2 \theta \times g(\theta)}$$

$$=\lim _{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{1-\cos \theta}{\cos \theta} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}}{2 \theta \times \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta}$$

$$=\lim _{\theta \rightarrow 0+} \left(\sqrt{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} \times \frac{1-\cos \theta}{\theta \sin \theta \cos ^2 \theta}\right)$$

$$=\lim _{\theta \rightarrow 0+} \left\{\sqrt{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} \times \frac{(1-\cos \theta)(1+\cos \theta)}{\theta \sin \theta \cos ^2 \theta(1+\cos \theta)}\right\}$$

$$=\lim _{\theta \rightarrow 0+} \left\{\sqrt{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin ^2 \theta}{\theta \sin \theta \cos ^2 \theta(1+\cos \theta)}\right\}$$

$$=\lim _{\theta \rightarrow 0+} \left\{\sqrt{\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{1}{\cos ^2 \theta(1+\cos \theta)}\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{4}} \times 1 \times \frac{1}{1^2 \times 2}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

097 ①

$$f(x)=e^x(\sin x-\cos x) \text{에서}$$

$$f'(x)=e^x(\sin x-\cos x)+e^x(\cos x+\sin x)$$

$$=2e^x \sin x$$

$$\therefore f'(\pi)=0$$

098 ④

$$f(x)=\sin x+\cos x \text{에서 } f'(x)=\cos x-\sin x$$

$$f'(a)=0 \text{에서 } \cos a-\sin a=0 \quad \therefore \sin a=\cos a$$

$$\therefore a=\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } a=\frac{5}{4} \pi \quad (\because 0 \leq a \leq 2 \pi)$$

$$\text{따라서 모든 } a \text{의 값의 합은 } \frac{\pi}{4}+\frac{5}{4} \pi=\frac{3}{2} \pi$$

099 ②

$$f(\pi)=\frac{\pi}{2} \text{에서 } a \sin \pi+\frac{\pi}{2} \cos \pi+b \pi=\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2}+b \pi=\frac{\pi}{2} \quad \therefore b=1$$

$$\text{따라서 } f(x)=a \sin x+\frac{\pi}{2} \cos x+x \text{이므로}$$

$$f'(x)=a \cos x-\frac{\pi}{2} \sin x+1$$

$$f'(0)=0 \text{에서 } a+1=0 \quad \therefore a=-1$$

$$\therefore b-a=1-(-1)=2$$

100 ③ -3

$$\lim _{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+2 h)-f(\pi-h)}{h}$$

$$=\lim _{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+2 h)-f(\pi)+f(\pi)-f(\pi-h)}{h}$$

$$=\lim _{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+2 h)-f(\pi)}{2 h} \times 2+\lim _{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}$$

$$=2 f'(\pi)+f'(\pi)=3 f'(\pi)$$

$$\text{이때 } f(x)=x \cos x \text{에서 } f'(x)=\cos x-x \sin x$$

$$\therefore f'(\pi)=\cos \pi-\pi \sin \pi=-1$$

$$\text{따라서 구하는 극한값은 } 3 f'(\pi)=3 \times(-1)=-3$$

101 ②

$$f(x)=\sin ^2 x=\sin x \sin x \text{에서}$$

$$f'(x)=\cos x \sin x+\sin x \cos x=2 \sin x \cos x=\sin 2 x$$

$$\therefore \lim _{x \rightarrow \pi} \frac{f'(x)}{x-\pi}=\lim _{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2 x}{x-\pi}$$

$$x-\pi=t \text{로 놓으면 } x=\pi+t \text{이고, } x \rightarrow \pi \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로}$$

$$\lim _{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2 x}{x-\pi}=\lim _{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2(\pi+t)}{t}=\lim _{t \rightarrow 0} \frac{\sin (2 \pi+2 t)}{t}$$

$$=\lim _{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2 t}{t}=\lim _{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2 t}{2 t} \times 2=1 \times 2=2$$

102 ②

$$\lim _{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}=3 \text{에서 } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이 존재}$$

$$\text{재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{이다.}$$

$$\text{즉, } \lim _{x \rightarrow \frac{\pi}{2}}\{f(x)-1\}=0 \text{이므로 } f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$\therefore \lim _{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim _{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$$

$$\text{이때 } f(x)=a \sin x+b \cos x \text{에서}$$

$$f'(x)=a \cos x-b \sin x$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \text{에서 } a \sin \frac{\pi}{2}+b \cos \frac{\pi}{2}=1 \quad \therefore a=1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3 \text{에서 } \cos \frac{\pi}{2}-b \sin \frac{\pi}{2}=3 \quad \therefore b=-3$$

$$\text{따라서 } f(x)=\sin x-3 \cos x \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin \frac{\pi}{4}-3 \cos \frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$$

103 ③ $-\frac{1}{2}$

$$f(x)=\lim _{h \rightarrow 0} \frac{x \sin (x+h)-x \sin x}{2 h}$$

$$=\frac{x}{2} \lim _{h \rightarrow 0} \frac{\sin (x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\frac{x}{2}(\sin x)'=\frac{x}{2} \cos x$$

$$\text{따라서 } f'(x)=\frac{1}{2} \cos x-\frac{x}{2} \sin x \text{이므로}$$

$$f'(\pi)=\frac{1}{2} \cos \pi-\frac{\pi}{2} \sin \pi=-\frac{1}{2}$$

104 답 ②

$f(0) = \cos 0 - \sin 0 = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - f(0)}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(\sin x) - f(0)}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x} \right\}$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(\sin x) - f(0)}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x} \right\} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin x) - f(0)}{\sin x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} \times 1 = f'(0)$$

이때 $f(x) = \cos x - \sin x$ 에서 $f'(x) = -\sin x - \cos x$

따라서 구하는 극한값은 $f'(0) = -1$

105 답 ①

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서도 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (3 + ax \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (b + 5 \sin x) = f(0) \\ \therefore b = 3$$

또 $f'(0)$ 이 존재하므로 $f'(x) = \begin{cases} a \cos x - ax \sin x & (x > 0) \\ 5 \cos x & (x < 0) \end{cases}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (a \cos x - ax \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0-} 5 \cos x \\ \therefore a = 5 \\ \therefore a - b = 5 - 3 = 2$$

106 답 e

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (a \sin x + \cos x) = \lim_{x \rightarrow 0-} b e^{x-1} = f(0) \\ 1 = \frac{b}{e} \quad \therefore b = e$$

또 $f'(0)$ 이 존재하므로 $f'(x) = \begin{cases} a \cos x - \sin x & (x > 0) \\ e^x & (x < 0) \end{cases}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (a \cos x - \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0-} e^x \\ \therefore a = 1 \\ \therefore ab = 1 \times e = e$$

107 답 10

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서도 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (-3 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (ax^3 + bx^2 + cx) = f(1) \\ \therefore a + b + c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $f'(0), f'(1)$ 이 존재하므로

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{3}{x} & (x > 1) \\ 3ax^2 + 2bx + c & (0 < x < 1) \\ 4 \cos x & (x < 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (3ax^2 + 2bx + c) = \lim_{x \rightarrow 0-} 4 \cos x \\ \therefore c = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \left(-\frac{3}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 1-} (3ax^2 + 2bx + c) \\ \therefore 3a + 2b + c = -3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

①을 ①, ②에 대입하여 정리하면 $a + b = -4, 3a + 2b = -7$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 1, b = -5$

$$\therefore a - b + c = 10$$

108 답 ②

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{5}{3} \text{이므로 } \sin \theta = \frac{3}{5}$$

θ 가 제2사분면의 각이면 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

$$\therefore \cot \theta - \sec \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} - \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{1}{12}$$

109 답 ①

$$(\tan \theta + \cot \theta)^2 - (\sin \theta + \csc \theta)^2 - (\cos \theta + \sec \theta)^2 \\ = (\tan^2 \theta + 2 + \cot^2 \theta) - (\sin^2 \theta + 2 + \csc^2 \theta) \\ \quad \quad \quad - (\cos^2 \theta + 2 + \sec^2 \theta) \\ = (\tan^2 \theta - \sec^2 \theta) + (\cot^2 \theta - \csc^2 \theta) - (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 2 \\ = -1 - 1 - 1 - 2 = -5$$

110 답 ①

$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{을 하면 } 2 + 2(\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta) = \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta = -\frac{5}{8}$$

$$\therefore \cos(\alpha - \beta) = -\frac{5}{8}$$

111 답 ③

이차방정식 $2x^2 + 2ax + a = 0$ 의 두 근이 $\tan \alpha, \tan \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = -a, \tan \alpha \tan \beta = \frac{a}{2}$$

이때 $\tan(\alpha + \beta) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ 에서

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1, \frac{-a}{1 - \frac{a}{2}} = 1$$

$$-a = 1 - \frac{a}{2} \quad \therefore a = -2$$

112 ㉮ 34/15

두 직선 $x-y-2=0$, $ax-y+2=0$, 즉 $y=x-2$, $y=ax+2$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = 1, \tan \beta = a$$

$$\tan \theta = \frac{1}{4} \text{에서 } |\tan(\alpha - \beta)| = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$\left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| = \frac{1}{4}, \frac{1-a}{1+a} = \pm \frac{1}{4}$$

$$4-4a=1+a \text{ 또는 } 4-4a=-1-a \quad \therefore a=\frac{3}{5} \text{ 또는 } a=\frac{5}{3}$$

$$\text{따라서 구하는 모든 } a \text{의 값의 합은 } \frac{3}{5} + \frac{5}{3} = \frac{34}{15}$$

113 ㉮ 1

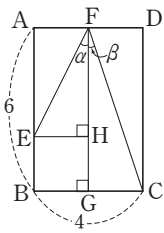
점 F에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 G, 점 E에서 선분 FG에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle EFG = \alpha$, $\angle GFC = \beta$ 라 하면

$$\overline{EH} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 2, \overline{FH} = \frac{2}{3} \overline{AB} = 4 \text{이므로}$$

$$\tan \alpha = \frac{\overline{EH}}{\overline{FH}} = \frac{1}{2}$$

$$\overline{GC} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 2, \overline{FG} = 6 \text{이므로 } \tan \beta = \frac{\overline{GC}}{\overline{FG}} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \tan \theta = \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1$$



114 ㉮ ③

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \theta > 0$ 이므로

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

115 ㉮ 4

$$y = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos x - 1$$

$$= 2 \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} \right) - 2 \cos x - 1$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) - 2 \cos x - 1$$

$$= \sqrt{3} \sin x - \cos x - 1 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) - 1$$

$$= 2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} \right) - 1 = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$$

이때 $-1 \leq \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ 이므로 $-3 \leq 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1 \leq 1$

따라서 $M=1$, $m=-3$ 이므로 $M-m=4$

116 ㉮ ⑤

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x + 1}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - 2 \sin^2 x) + 1}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2(1 - \sin^2 x)}{1 - \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2(1 + \sin x)(1 - \sin x)}{1 - \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 2(1 + \sin x) = 2 \times (1 + 1) = 4$$

117 ㉮ ④

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x - \cos x}{2x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} - \cos x}{2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{2x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x^2 \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{2 \cos x} \right\} \\ &= 1^2 \times \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

118 ㉮ ②

$f(x) = x^2 - 2x$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin f(x)}{f(\tan x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 - 2x)}{\tan^2 x - 2 \tan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 - 2x)}{\tan x (\tan x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(x^2 - 2x)}{x^2 - 2x} \times \frac{x}{\tan x} \times \frac{x-2}{\tan x - 2} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{-2}{-2} = 1 \end{aligned}$$

119 ㉮ -7/2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos^2 x + 3 \cos x - 5}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \cos x + 5)(\cos x - 1)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \cos x + 5)(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x^2(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin^2 x}{x^2} \times \frac{2 \cos x + 5}{\cos x + 1} \right) \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{2 \cos x + 5}{\cos x + 1} \right\} \\ &= -1^2 \times \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

120 ㉮ 1/4

$x + \frac{\pi}{2} = t$ 로 놓으면 $x = -\frac{\pi}{2} + t$ 이고, $x \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{(2x + \pi) \cos x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \sin \left(-\frac{\pi}{2} + t\right)}{2t \cos \left(-\frac{\pi}{2} + t\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sin \left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{2t \cos \left(\frac{\pi}{2} - t\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{2t \sin t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{2t \sin t (1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{2t \sin t (1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin t}{t} \times \frac{1}{2(1 + \cos t)} \right\} \\ &= 1 \times \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

121 답 1/8

$\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \tan \frac{1}{2x} \csc \frac{4}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \tan \frac{t}{2} \csc 4t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{t}{2}}{\sin 4t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\tan \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} \times \frac{4t}{\sin 4t} \times \frac{1}{8} \right) \\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

122 답 ②

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - b}{ax \sin x - x^2} = \frac{1}{4}$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - b) = 0$ 이므로 $b = 1$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{ax \sin x - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{(ax \sin x - x^2)(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{(ax \sin x - x^2)(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-\sin^2 x}{x^2} \times \frac{x^2}{ax \sin x - x^2} \times \frac{1}{\cos x + 1} \right) \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{\frac{a \sin x}{x} - 1} \times \frac{1}{\cos x + 1} \right\} \\ &= -1^2 \times \frac{1}{a-1} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2(a-1)}\end{aligned}$$

따라서 $-\frac{1}{2(a-1)} = \frac{1}{4}$ 이므로 $a = -1$

$$\therefore a - b = -1 - 1 = -2$$

123 답 ③

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 5e^x + a}{2x} = b \quad \dots\dots ①$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 3x - 5e^x + a) = 0$ 이므로

$$-5 + a = 0 \quad \therefore a = 5$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 5e^x + 5}{2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin 3x}{2x} - \frac{5(e^x - 1)}{2x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{3}{2} - \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{5}{2} \right) \\ &= 1 \times \frac{3}{2} - 1 \times \frac{5}{2} = -1\end{aligned}$$

$$\therefore b = -1$$

$$\therefore a + b = 5 + (-1) = 4$$

124 답 ②

$\overline{OP}$ 를 그으면

$\overline{OP} = \overline{OA} = 1$ 이므로

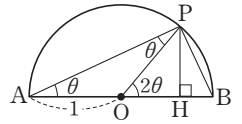
$\angle OPA = \angle OAP = \theta$

따라서 $\angle POH = 2\theta$ 이므로

$\triangle POH$ 에서 $\overline{OH} = \overline{OP} \cos 2\theta = \cos 2\theta$

$$\therefore \overline{BH} = \overline{OB} - \overline{OH} = 1 - \cos 2\theta$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{BH}}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos 2\theta}{\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{(1 - \cos 2\theta)(1 + \cos 2\theta)}{\theta^2(1 + \cos 2\theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 2\theta}{\theta^2(1 + \cos 2\theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \right)^2 \times \frac{4}{1 + \cos 2\theta} \right\} \\ &= 1^2 \times \frac{4}{2} = 2\end{aligned}$$



125 답 ②

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - 2h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - 2h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-2h} \times (-2) \\ &= -2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

이때 $f(x) = x^2 \sin x$ 에서

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} = \pi$$

따라서 구하는 극한값은 $-2f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi$

126 답 $2\pi - 2$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서도 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (2x + a) \cos x = \lim_{x \rightarrow 0-} b \sin x = f(0)$$

$$\therefore a = 0$$

또 $f'(0)$ 이 존재하므로 $f'(x) = \begin{cases} 2 \cos x - 2x \sin x & (x > 0) \\ b \cos x & (x < 0) \end{cases}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (2 \cos x - 2x \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0-} b \cos x$$

$$\therefore b = 2$$

따라서 $f(x) = \begin{cases} 2x \cos x & (x \geq 0) \\ 2 \sin x & (x < 0) \end{cases}$ 이므로

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times (-1) = -2,$$

$$f(\pi) = 2\pi \cos \pi = 2\pi \times (-1) = -2\pi$$

$$\therefore f\left(-\frac{\pi}{2}\right) - f(\pi) = -2 - (-2\pi) = 2\pi - 2$$



001 답 ①

$$f(x) = \frac{x^2+1}{e^x} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{2x \times e^x - (x^2+1) \times e^x}{e^{2x}} = \frac{-x^2+2x-1}{e^x}$$

$$\therefore f'(-1) = \frac{-4}{e^{-1}} = -4e$$

002 답 ③

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$$

이때 $f(x) = \sec x \tan x$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sec x \tan x \times \tan x + \sec x \times \sec^2 x \\ &= \sec x (\tan^2 x + \sec^2 x) \end{aligned}$$

따라서 구하는 극한값은 $f'(0) = 1 \times (0+1) = 1$

003 답 15

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1}{x} = 3$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+1\} = 0 \text{이므로 } f(0) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 3$$

또 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)-1}{x+1} = 5$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값

이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} \{g(x)-1\} = 0 \text{이므로 } g(-1) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = g'(-1) = 5$$

이때 $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ 이므로 $y' = g'(f(x))f'(x)$

따라서 $x=0$ 에서의 미분계수는

$$g'(f(0))f'(0) = g'(-1)f'(0) = 5 \times 3 = 15$$

004 답 ③

$f(0) = 1$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0)$$

이때 $f(x) = (x^3+x+1)^5$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(x^3+x+1)^4(x^3+x+1)' \\ &= 5(x^3+x+1)^4(3x^2+1) \end{aligned}$$

따라서 구하는 극한값은 $f'(0) = 5 \times 1 \times 1 = 5$

005 답 -1

$$f(x) = 2e^x \text{에서 } f'(x) = 2e^x$$

$$g(x) = \sin \frac{x}{2} \text{에서 } g'(x) = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{이므로}$$

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\therefore h'(2\pi) = f'(g(2\pi))g'(2\pi) = f'(0)g'(2\pi)$$

$$= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

006 답 ⑤

$$f(x) = \ln |\sin x| \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

007 답 ②

$f(x) = x^{\ln x}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = \ln x^{\ln x} = (\ln x)^2$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$\therefore \frac{f'(e)}{f(e)} = \frac{2 \ln e}{e} = \frac{2}{e}$$

008 답 ①

$$f(x) = (x+2)\sqrt{2x^2+1} = (x+2)(2x^2+1)^{\frac{1}{2}} \text{이므로}$$

$$f'(x) = (2x^2+1)^{\frac{1}{2}} + (x+2) \times \left\{ \frac{1}{2}(2x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \times 4x \right\}$$

$$= \sqrt{2x^2+1} + \frac{2x(x+2)}{\sqrt{2x^2+1}}$$

$$= \frac{4x^2+4x+1}{\sqrt{2x^2+1}}$$

$$\therefore f'(-1) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

009 답 $\frac{3}{5}$

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{1}{t^2}, \quad \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - \frac{1}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{t^2-1}{t^2+1}$$

따라서 $t=2$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은 $\frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$

010 답 $\frac{11}{3}$

$x^3 - xy^2 + y = 7$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 - y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2xy-1) \frac{dy}{dx} = 3x^2 - y^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y^2}{2xy - 1} \quad (\text{단, } 2xy \neq 1)$$

따라서 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{3 \times 2^2 - 1^2}{2 \times 2 \times 1 - 1} = \frac{11}{3}$$

011 답 ①

$g(1)=a$ 라 하면 $f(a)=1$ 이므로
 $a^3+3a-3=1$, $a^3+3a-4=0$, $(a-1)(a^2+a+4)=0$
 $\therefore a=1$ ($\because a^2+a+4>0$) $\therefore g(1)=1$
 이때 $f'(x)=3x^2+3$ 이므로 $f'(1)=6$
 $\therefore g'(1)=\frac{1}{f'(g(1))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{6}$

012 답 ③

$f(x)=xe^{ax+2}$ 에서
 $f'(x)=e^{ax+2}+x \times ae^{ax+2}=(ax+1)e^{ax+2}$
 $f''(x)=ae^{ax+2}+(ax+1) \times ae^{ax+2}=(ax+2)ae^{ax+2}$
 $f''(0)=30e^2$ 에서 $2ae^2=30e^2$
 $2a=30 \quad \therefore a=15$

013 답 ②

$f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$ 에서
 $f'(x)=\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x \times \cos x}{(1+\sin x)^2}$
 $=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$
 $=\frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}=-\frac{1}{1+\sin x}$
 $\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{1+\sin \frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}$

014 답 ①

$f(x)=\frac{1}{3x-1}$ 에서
 $f'(x)=-\frac{(3x-1)'}{(3x-1)^2}=-\frac{3}{(3x-1)^2}$
 $\therefore f'\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{3}{(2-1)^2}=-3$

015 답 4

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$
 $=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$
 $=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)-f(1-h)}{-h}$
 $=f'(1)+f'(1)=2f'(1)$
 이때 $f(x)=\frac{3x-4}{x^2+1}$ 에서
 $f'(x)=\frac{3(x^2+1)-(3x-4) \times 2x}{(x^2+1)^2}$
 $=\frac{-3x^2+8x+3}{(x^2+1)^2}$
 $\therefore f'(1)=\frac{-3+8+3}{(1+1)^2}=2$
 따라서 구하는 극한값은 $2f'(1)=2 \times 2=4$

016 답 4

$f(x)=\frac{x}{x^2+x+4}$ 에서
 $f'(x)=\frac{x^2+x+4-x(2x+1)}{(x^2+x+4)^2}=\frac{-x^2+4}{(x^2+x+4)^2}$
 $(x^2+x+4)^2>0$ 이므로 $f'(x)>0$ 에서
 $-x^2+4>0$, 즉 $x^2-4<0$
 $(x+2)(x-2)<0 \quad \therefore -2<x<2$
 따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$ 이므로 $\beta-\alpha=4$

017 답 ④

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\}$
 $=f'(1) \times \frac{1}{2}=\frac{1}{2}f'(1)$
 즉, $\frac{1}{2}f'(1)=-1$ 이므로 $f'(1)=-2$
 이때 $f(x)=\frac{ax^2-3x+2}{x-2}$ 에서
 $f'(x)=\frac{(2ax-3)(x-2)-(ax^2-3x+2) \times 1}{(x-2)^2}$
 $=\frac{ax^2-4ax+4}{(x-2)^2}$
 $f'(1)=-2$ 에서 $-3a+4=-2$
 $-3a=-6 \quad \therefore a=2$

018 답 3

$g(x)=\frac{f(x)-3}{2x}$ 에서
 $g'(x)=\frac{f'(x) \times 2x - \{f(x)-3\} \times 2}{4x^2}$
 $\therefore g'(1)=\frac{2f'(1)-2\{f(1)-3\}}{4}$
 $=\frac{f'(1)-f(1)+3}{2}$
 $=\frac{3+3}{2}=3$

019 답 ④

$g(x)=\frac{f(x) \cos x}{e^x}$ 에서
 $g'(x)=\frac{\{f'(x) \cos x - f(x) \sin x\} \times e^x - f(x) \cos x \times e^x}{e^{2x}}$
 $=\frac{f'(x) \cos x - f(x) (\sin x + \cos x)}{e^x}$
 $\therefore g'(\pi)=\frac{-f'(\pi)+f(\pi)}{e^\pi} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 한편 $g'(\pi)=-e^\pi g(\pi)$ 이고, $g(\pi)=\frac{-f(\pi)}{e^\pi}$ 이므로
 $g'(\pi)=-e^\pi \times \frac{-f(\pi)}{e^\pi}=f(\pi) \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서
 $\frac{-f'(\pi)+f(\pi)}{e^\pi}=f(\pi)$
 $-f'(\pi)+f(\pi)=e^\pi f(\pi)$
 즉, $f'(\pi)=(1-e^\pi)f(\pi)$ 이므로
 $k=1-e^\pi$

020 ㉮ ⑤

$f(0)=0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h)-f(0)}{2h} \times 2 \\ &= 2f'(0)\end{aligned}$$

이때 $f(x)=(2e^x-1)\tan x$ 에서

$$f'(x)=2e^x \tan x + (2e^x-1)\sec^2 x$$

$$\therefore f'(0)=0+1=1$$

따라서 구하는 극한값은 $2f'(0)=2 \times 1=2$

021 ㉮ ②

$f(x)=(2+\csc x)\cot x$ 에서

$$f'(x)=(-\csc x \cot x)\cot x + (2+\csc x)(-\csc^2 x)$$

$$\begin{aligned}\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \left(-\csc \frac{\pi}{6} \cot \frac{\pi}{6}\right)\cot \frac{\pi}{6} + \left(2+\csc \frac{\pi}{6}\right)(-\csc^2 \frac{\pi}{6}) \\ &= (-2 \times \sqrt{3}) \times \sqrt{3} + (2+2) \times (-4) \\ &= -22\end{aligned}$$

022 ㉮ $\frac{3}{2}\pi$

$f(x)=\frac{1+\tan x}{\sec x}$ 에서

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\sec^2 x \times \sec x - (1+\tan x)(\sec x \tan x)}{\sec^2 x} \\ &= \frac{\sec^2 x - \tan x - \tan^2 x}{\sec x} \\ &= \frac{1+\tan^2 x - \tan x - \tan^2 x}{\sec x} \\ &= \frac{1-\tan x}{\sec x}\end{aligned}$$

$f'(a)=0$ 에서

$$1-\tan a=0, \tan a=1$$

$$\therefore a=\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } a=\frac{5}{4}\pi \quad (\because 0 < a < 2\pi)$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{4} + \frac{5}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

023 ㉮ -12

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1}=4$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-2\}=0 \text{이므로 } f(1)=2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)=4$$

또 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-1}{x-2}=-3$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \{g(x)-1\}=0 \text{이므로 } g(2)=1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2)=-3$$

이때 $y=(g \circ f)(x)=g(f(x))$ 이므로 $y'=g'(f(x))f'(x)$

따라서 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$g'(f(1))f'(1)=g'(2)f'(1)=-3 \times 4=-12$$

024 ㉮ -2

$h(x)=f(g(x))$ 라 하면

$$h(2)=f(g(2))=f(3)=-1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(g(x))+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = h'(2)$$

이때 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$ 이므로 구하는 극한값은

$$\begin{aligned}h'(2) &= f'(g(2))g'(2)=f'(3)g'(2) \\ &= 1 \times (-2) = -2\end{aligned}$$

025 ㉮ ③

$f(g(x))=f(x)g(x)-3x^2+2x+2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-6x+2$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(g(1))g'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)-4$$

$$\therefore f'(2)g'(1)=2f'(1)+f(1)g'(1)-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $f(x)=x^2+3x+1$ 에서 $f'(x)=2x+3$

$$\therefore f(1)=5, f'(1)=5, f'(2)=7$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$7g'(1)=10+5g'(1)-4$$

$$2g'(1)=6 \quad \therefore g'(1)=3$$

026 ㉮ 6

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)-3}{x-2}=10$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \{h(x)-3\}=0 \text{이므로 } h(2)=3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)-3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = h'(2)=10$$

이때 $h(x)=(f \circ g)(x)=f(g(x))$ 이므로

$$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$$

$$h(2)=3 \text{에서 } h(2)=f(g(2))=f(3) \text{이므로 } f(3)=3$$

$$h'(2)=10 \text{에서 } h'(2)=f'(g(2))g'(2)=5f'(3) \text{이므로}$$

$$5f'(3)=10 \quad \therefore f'(3)=2$$

$$\therefore f(3) \times f'(3)=3 \times 2=6$$

027 ㉮ ②

$f(x)=\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^3$ 에서

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^2 \times \frac{2x+1-(x+1) \times 2}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{-3(x+1)^2}{(2x+1)^4}\end{aligned}$$

$$\therefore f'(0)=-3$$

028 답 ④

$$y = \{xf(x)\}^2 \text{에서}$$

$$y' = 2\{xf(x)\} \{xf(x)\}'$$

$$= 2\{xf(x)\} \{f(x) + xf'(x)\}$$

따라서 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$2f(1)\{f(1)+f'(1)\} = 2 \times 1 \times (1+2) = 6$$

029 답 1

$$g(x) = f(2x-3) \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$g'(x) = f'(2x-3)(2x-3)' = 2f'(2x-3)$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$g'(1) = 2f'(-1)$$

이때 $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ 에서

$$f'(x) = \frac{x^2+1-(x+1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$\therefore f'(-1) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore g'(1) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

030 답 3

$$f(\tan x + x - 1) = x^3 - 3x^2 + 9x + 4 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(\tan x + x - 1)(\tan x + x - 1)' = 3x^2 - 6x + 9$$

$$(\sec^2 x + 1)f'(\tan x + x - 1) = 3x^2 - 6x + 9$$

$\sec^2 x + 1 \neq 0$ 이므로

$$f'(\tan x + x - 1) = \frac{3x^2 - 6x + 9}{\sec^2 x + 1} \quad \dots \textcircled{1}$$

방정식 $\tan x + x - 1 = 0$ 의 해를 α (는 실수)라 하면

$$\tan \alpha + \alpha - 1 = 0$$

$$\therefore \tan \alpha = 1 - \alpha \quad \dots \textcircled{2}$$

①의 양변에 $x = \alpha$ 를 대입하면

$$f'(0) = \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 9}{\sec^2 \alpha + 1} = \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 9}{(1 + \tan^2 \alpha) + 1}$$

$$= \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 9}{2 + \tan^2 \alpha} = \frac{3\alpha^2 - 6\alpha + 9}{2 + (1 - \alpha)^2} \quad (\because \textcircled{2})$$

$$= \frac{3(\alpha^2 - 2\alpha + 3)}{\alpha^2 - 2\alpha + 3} = 3$$

031 답 -1

$$f(x) = \tan 2x \text{에서 } f'(x) = 2 \sec^2 2x$$

$$g(x) = \frac{x}{x^2+1} \text{에서}$$

$$g'(x) = \frac{x^2+1-x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$h(x) = g(f(x)) \text{에서}$$

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

$$\therefore h'\left(\frac{\pi}{6}\right) = g'\left(f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = g'(\sqrt{3})f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\frac{1}{8} \times 8 = -1$$

032 답 ①

$$f(x) = \sec\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right) \text{에서}$$

$$f'(x) = \sec\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right)\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right)'$$

$$= \pi \sec\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore f'(1) = \pi \sec\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \pi \left(-\sec \frac{\pi}{3}\right) \tan \frac{\pi}{3}$$

$$= \pi \times (-2) \times \sqrt{3} = -2\sqrt{3}\pi$$

033 답 $-\frac{2}{e}$

$$f(1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = e^2$$

이때 $f(x) = (x-1)e^{3x+a}$ 에서

$$f'(x) = e^{3x+a} + 3(x-1)e^{3x+a} = (3x-2)e^{3x+a}$$

$$f'(1) = e^2 \text{에서 } e^{3+a} = e^2 \quad \therefore a = -1$$

따라서 $f'(x) = (3x-2)e^{3x-1}$ 이므로

$$f'(0) = -2e^{-1} = -\frac{2}{e}$$

034 답 $3e^6$

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} e^{ax+b} = \lim_{x \rightarrow 0-} (x^2 + 3x + 1) = f(0) \text{에서}$$

$$e^b = 1 \quad \therefore b = 0$$

또 $f'(0)$ 이 존재하므로 $f'(x) = \begin{cases} ae^{ax} & (x > 0) \\ 2x+3 & (x < 0) \end{cases}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} ae^{ax} = \lim_{x \rightarrow 0-} (2x+3)$$

$$\therefore a = 3$$

따라서 $f'(x) = \begin{cases} 3e^{3x} & (x > 0) \\ 2x+3 & (x < 0) \end{cases}$ 이므로

$$f'(2) = 3e^6$$

035 답 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-\sin x} \times \frac{-\sin x}{x} \right\}$$

$$= f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times (-1) = -f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

이때 $f(x) = \sin^2 x \cos x$ 에서

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x \times \cos x + \sin^2 x \times (-\sin x)$$

$$= 2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos^2 \frac{\pi}{2} - \sin^3 \frac{\pi}{2}$$

$$= 2 \times 1 \times 0 - 1^3 = -1$$

따라서 구하는 극한값은 $-f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -(-1) = 1$

036 ㉮ 2x-1

$(f \circ g)(0)=1$ 에서 $f(g(0))=1$ 이고, $g(0)=2^0=1$ 이므로

$$f(1)=1 \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

또 $(f \circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$ 이므로

$$(f \circ g)'(0)=f'(g(0))g'(0)=f'(1)g'(0)$$

이때 $g(x)=2^{\tan x}$ 에서

$$g'(x)=2^{\tan x} \ln 2 \times \sec^2 x$$

$$\therefore g'(0)=2^0 \ln 2 \times 1^2 = \ln 2$$

$$(f \circ g)'(0)=\ln 4 \text{에서 } f'(1) \times \ln 2 = \ln 4$$

$$\therefore f'(1)=\frac{\ln 4}{\ln 2}=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x-1)^2 Q(x)+ax+b \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

㉮의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1)=a+b \quad \therefore a+b=1 \quad (\because \textcircled{㉮}) \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

㉮의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2 Q'(x)+a$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(1)=a \quad \therefore a=2 \quad (\because \textcircled{㉮})$$

이를 ㉮에 대입하여 풀면 $b=-1$

따라서 구하는 나머지는 $2x-1$ 이다.

037 ㉮ ㉮

$f(0)=3$ 이므로 $f(x)=ax^2+bx+3$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면

$$f'(x)=2ax+b \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

한편 $g(x)=\frac{e^{f(x)}}{x-1}$ 에서

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{e^{f(x)} f'(x)(x-1) - e^{f(x)}}{(x-1)^2} \\ &= \frac{e^{f(x)} \{f'(x)(x-1) - 1\}}{(x-1)^2} \\ &= \frac{e^{f(x)} \{(2ax+b)(x-1) - 1\}}{(x-1)^2} \quad (\because \textcircled{㉮}) \\ &= \frac{e^{f(x)} \{2ax^2 + (-2a+b)x - b - 1\}}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

이때 $e^{f(x)} > 0$ 이고, 방정식 $g'(x)=0$ 의 해가 $x=-1$ 또는 $x=3$ 이므로

$$\begin{aligned} 2ax^2 + (-2a+b)x - b - 1 &= 2a(x+1)(x-3) \\ &= 2a(x^2 - 2x - 3) \\ &= 2ax^2 - 4ax - 6a \end{aligned}$$

즉, $-2a+b=-4a$, $-b-1=-6a$ 이므로

$$2a+b=0, \quad 6a-b=1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{8}, \quad b=-\frac{1}{4}$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + 3$ 이므로

$$f(4)=2-1+3=4$$

038 ㉮ ㉮

$f(x)=\log_2 |x^2-5|$ 에서

$$f'(x)=\frac{(x^2-5)'}{(x^2-5)\ln 2}=\frac{2x}{(x^2-5)\ln 2}$$

$$\therefore f'(3)=\frac{6}{4\ln 2}=\frac{3}{2\ln 2}$$

039 ㉮ $y'=\frac{2x}{x^2+2}$

$$y=\ln(x^2+2) \text{에서 } y'=\frac{(x^2+2)'}{x^2+2}=\frac{2x}{x^2+2}$$

040 ㉮ ㉮

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \\ &= \frac{1}{2} \{ \ln(1-\sin x) - \ln(1+\sin x) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos x}{1-\sin x} - \frac{\cos x}{1+\sin x} \right) \\ &= \frac{-\cos x(1+\sin x) - \cos x(1-\sin x)}{2(1-\sin^2 x)} \\ &= \frac{-2\cos x}{2\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } x=\frac{\pi}{4} \text{에서의 미분계수는 } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = -\sqrt{2}$$

041 ㉮ ㉮

$f(x)=\ln|x^2+x|$ 에서 $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x}$ 이므로 $f'(n)=\frac{2n+1}{n^2+n}$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(n)}{2n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 \end{aligned}$$

042 ㉮ ㉮

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n}\right) \right\}$ 에서 $\frac{1}{n}=t$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이고,

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{n}\right) \right\} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + 2t\right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + 2t\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2t} \times 2 = 2f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

이때 $f(x)=\ln(\sqrt{2}\cos x)$ 에서

$$f'(x)=\frac{-\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{2}\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

따라서 구하는 극한값은 $2f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times (-1) = -2$

043 [답] ③

$$f(x) = \log_2 (2^x + 2^{2x} + 2^{3x} + \dots + 2^{9x}) \text{ 이라 하면 } f(0) = \log_2 9$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_2 \frac{2^x + 2^{2x} + 2^{3x} + \dots + 2^{9x}}{9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \{ \log_2 (2^x + 2^{2x} + 2^{3x} + \dots + 2^{9x}) - \log_2 9 \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

이때

$$f'(x) = \frac{(2^x + 2^{2x} + 2^{3x} + \dots + 2^{9x})'}{(2^x + 2^{2x} + 2^{3x} + \dots + 2^{9x}) \times \ln 2}$$

$$= \frac{2^x \ln 2 + 2^{2x} \ln 2 \times 2 + 2^{3x} \ln 2 \times 3 + \dots + 2^{9x} \ln 2 \times 9}{(2^x + 2^{2x} + 2^{3x} + \dots + 2^{9x}) \times \ln 2}$$

이므로 구하는 극한값은

$$f'(0) = \frac{1+2+3+\dots+9}{9} = \frac{1}{9} \times \frac{9 \times 10}{2} = 5$$

044 [답] ④

$f(x) = x^{\sin x}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = \ln x^{\sin x} = \sin x \ln x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\therefore f'(x) = f(x) \times \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

이때 $f(\pi) = \pi^{\sin \pi} = 1$ 이므로

$$f'(\pi) = 1 \times \left(\cos \pi \ln \pi + \frac{\sin \pi}{\pi} \right) = -\ln \pi$$

045 [답] ②

$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2(x-3)}$ 의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln |f(x)| = 3 \ln |x+1| - 2 \ln |x| - \ln |x-3|$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x-3}$$

$$\therefore f'(x) = f(x) \times \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x-3} \right)$$

이때 $f(2) = \frac{(2+1)^3}{2^2 \times (2-3)} = -\frac{27}{4}$ 이므로

$$f'(2) = -\frac{27}{4} \times (1-1+1) = -\frac{27}{4}$$

046 [답] $4 \ln 2 + 10$

$f(x) = x^x$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = \ln x^x = x \ln x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$\therefore f'(x) = f(x)(\ln x + 1)$$

이때 $f(2) = 2^2 = 4$ 이므로 $f'(2) = 4(\ln 2 + 1)$

$$g(x) = 2x \ln x \text{에서 } g'(x) = 2 \ln x + 2x \times \frac{1}{x} = 2 \ln x + 2$$

$$\therefore g'(e^2) = 2 \ln e^2 + 2 = 6$$

$$\therefore f'(2) + g'(e^2) = 4(\ln 2 + 1) + 6 = 4 \ln 2 + 10$$

047 [답] ④

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} = (x-1)(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \text{이므로}$$

$$f'(x) = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} + (x-1) \left\{ -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \times 2x \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x(x-1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$\therefore f'(1) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

048 [답] -6

$$f(x) = \frac{2x^4+3x+2}{x^2} = 2x^2+3x^{-1}+2x^{-2} \text{이므로}$$

$$f'(x) = 4x - 3x^{-2} - 4x^{-3} = 4x - \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3}$$

$$\therefore f'(-1) + f'(1) = (-4-3+4) + (4-3-4) = -6$$

049 [답] -110

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h)}{-h}$$

$$= f'(1) + f'(1) = 2f'(1)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^{10}}$$

$$= x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + \dots + x^{-10}$$

이므로

$$f'(x) = -x^{-2} - 2x^{-3} - 3x^{-4} - \dots - 10x^{-11}$$

$$\therefore f'(1) = -(1+2+3+\dots+10) = -\frac{10 \times 11}{2} = -55$$

따라서 구하는 극한값은 $2f'(1) = 2 \times (-55) = -110$

050 [답] $\frac{128}{3}$

$$f(x) = (x - \sqrt{x^2+2})^4 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4(x - \sqrt{x^2+2})^3 (x - \sqrt{x^2+2})'$$

$$= 4(x - \sqrt{x^2+2})^3 \left\{ 1 - \frac{1}{2}(x^2+2)^{-\frac{1}{2}} \times 2x \right\}$$

$$= 4(x - \sqrt{x^2+2})^3 \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \right)$$

이므로

$$a = f'(2) = 4(2 - \sqrt{6})^3 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

$$b = f'(-2) = 4(-2 - \sqrt{6})^3 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

$$\therefore ab = 4(2 - \sqrt{6})^3 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \times 4(-2 - \sqrt{6})^3 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

$$= 16 \{ (2 - \sqrt{6})(-2 - \sqrt{6}) \}^3 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \left(1 + \frac{2}{\sqrt{6}} \right)$$

$$= 16 \times 2^3 \times \frac{1}{3} = \frac{128}{3}$$

051 답 $\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{-4t(1+t^2) - (2-2t^2) \times 2t}{(1+t^2)^2} = -\frac{8t}{(1+t^2)^2} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{4(1+t^2) - 4t \times 2t}{(1+t^2)^2} = -\frac{4(t^2-1)}{(1+t^2)^2} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{4(t^2-1)}{(1+t^2)^2}}{-\frac{8t}{(1+t^2)^2}} = \frac{t^2-1}{2t} \quad (\text{단, } t \neq 0)\end{aligned}$$

따라서 $t=2$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은 $\frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$

052 답 ③

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \sin \theta \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta\end{aligned}$$

053 답 $2e$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2te^t + (t^2+1)e^t = (t^2+2t+1)e^t, \quad \frac{dy}{dt} = 2e^{2t+1} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2e^{2t+1}}{(t^2+2t+1)e^t} \quad (\text{단, } t \neq -1)\end{aligned}$$

따라서 $t=0$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 $2e$ 이다.

054 답 $\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= t^2+t+1, \quad \frac{dy}{dt} = a \cos(t-1) \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \cos(t-1)}{t^2+t+1}\end{aligned}$$

$t=1$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값이 $\frac{2}{9}$ 이므로

$$\frac{a}{3} = \frac{2}{9} \quad \therefore a = \frac{2}{3}$$

055 답 ②

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4) + f(4) - f(4-h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4-h) - f(4)}{-h} \\ &= \frac{1}{2} f'(4) + \frac{1}{2} f'(4) = f'(4)\end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} = 3, \quad \frac{dy}{dt} = 2t \quad \text{이므로 } f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{3}$$

$x=3t+1=4$ 에서 $t=1$

따라서 구하는 극한값은 $f'(4) = \frac{2}{3}$

056 답 $\frac{8\sqrt{3}}{9}$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= \sec \theta \tan \theta - \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \sec^2 \theta \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sec^2 \theta}{\sec \theta \tan \theta - \sin \theta} = \frac{1}{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \sin \theta} \times \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta - \sin \theta \cos^2 \theta} = \frac{1}{\sin \theta (1 - \cos^2 \theta)} \\ &= \frac{1}{\sin^3 \theta} = \csc^3 \theta\end{aligned}$$

$x = \frac{5}{2}, y = \sqrt{3}$ 일 때, $\sec \theta + \cos \theta = \frac{5}{2}, \tan \theta = \sqrt{3}$ 에서

$$\theta = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서 점 $\left(\frac{5}{2}, \sqrt{3} \right)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\csc^3 \frac{\pi}{3} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

057 답 ①

$x^3 + y^3 - 3x^2y = 1$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 6xy - 3x^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(3x^2 - 3y^2) \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6xy$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 6xy}{3x^2 - 3y^2} = \frac{x^2 - 2xy}{x^2 - y^2} \quad (\text{단, } x^2 \neq y^2)$$

따라서 점 $(-1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{1+4}{1-4} = -\frac{5}{3}$$

058 답 $\frac{dy}{dx} = -y \ln y$

$e^x \ln y = e$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$e^x \ln y + \frac{e^x}{y} \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -y \ln y$$

059 답 ①

$\frac{\pi}{2}x = y + \sin xy$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{\pi}{2} = \frac{dy}{dx} + \cos xy \times \left(y + x \frac{dy}{dx} \right)$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{dy}{dx} + y \cos xy + x \cos xy \times \frac{dy}{dx}$$

$$(1 + x \cos xy) \frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{2} - y \cos xy$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\pi}{2} - y \cos xy}{1 + x \cos xy} \quad (\text{단, } 1 + x \cos xy \neq 0)$$

따라서 점 $(2, \pi)$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \pi \cos 2\pi}{1 + 2 \cos 2\pi} = \frac{\frac{\pi}{2} - \pi}{1 + 2} = -\frac{\pi}{6}$$

060 답 10

$3x^2+5y^2+axy-2x+b=0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$6x+10y\frac{dy}{dx}+ay+ax\frac{dy}{dx}-2=0$$

$$(ax+10y)\frac{dy}{dx}=-6x-ay+2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-6x-ay+2}{ax+10y} \quad (\text{단, } ax+10y \neq 0)$$

점 (1, 1)에서의 접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{-a-4}{a+10}=-\frac{1}{2}, \quad 2a+8=a+10 \quad \therefore a=2$$

또 주어진 곡선이 점 (1, 1)을 지나므로

$$6+a+b=0, \quad 8+b=0 \quad \therefore b=-8$$

$$\therefore a-b=2-(-8)=10$$

061 답 3

$(x^2+1)y^3=-x^2+2x+1$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2xy^3+(x^2+1) \times 3y^2\frac{dy}{dx}=-2x+2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-2x+2-2xy^3}{3y^2(x^2+1)} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

$$\frac{dy}{dx} > 0 \text{ 이려면 } -2x+2-2xy^3 > 0$$

$$\text{이때 } y^3=\frac{-x^2+2x+1}{x^2+1} \text{ 이므로}$$

$$-2x+2-2x \times \frac{-x^2+2x+1}{x^2+1} > 0$$

$$(-2x+2)(x^2+1)-2x(-x^2+2x+1) > 0$$

$$x^2+2x-1 < 0 \quad \therefore -1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2}$$

따라서 정수 x 는 -2, -1, 0의 3개이다.

062 답 1

$g(0)=a$ 라 하면 $f(a)=0$ 이므로

$$\frac{e^a-e^{-a}}{2}=0, \quad e^a=e^{-a}, \quad a=-a \quad \therefore a=0$$

$$\therefore g(0)=0$$

$$\text{이때 } f'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \text{ 이므로 } f'(0)=1$$

$$\therefore g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'(0)}=1$$

063 답 ④

$x=\sqrt{y^2+1}=(y^2+1)^{\frac{1}{2}}$ 의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2}(y^2+1)^{-\frac{1}{2}}(y^2+1)'$$

$$=\frac{2y}{2\sqrt{y^2+1}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{\sqrt{y^2+1}}{y}$$

064 답 4

$f(3)=5$ 이므로 $g(5)=3$

$$\therefore g'(5)=\frac{1}{f'(g(5))}=\frac{1}{f'(3)}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore g(5)g'(5)=3 \times \frac{4}{3}=4$$

065 답 5

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)+2}{x-3}=\frac{1}{5}$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} \{g(x)+2\}=0 \text{ 이므로 } g(3)=-2$$

$$\therefore f(-2)=3$$

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)+2}{x-3}=\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)-g(3)}{x-3}=g'(3) \text{ 이므로}$$

$$g'(3)=\frac{1}{5}$$

$$\therefore f'(-2)=\frac{1}{g'(f(-2))}=\frac{1}{g'(3)}=5$$

066 답 $\frac{11}{4}$

$f(x)=x^3+x-3$ 에서 $f(-1)=-5$

$g(-1)=a$ 라 하면 $f(a)=-1$ 이므로

$$a^3+a-3=-1, \quad a^3+a-2=0$$

$$(a-1)(a^2+a+2)=0 \quad \therefore a=1 \quad (\because a^2+a+2 > 0)$$

$$\therefore g(-1)=1$$

$F(x)=f(x)g(x)$ 라 하면

$$F(-1)=f(-1)g(-1)=-5 \times 1=-5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)g(x)+5}{x+1}=\lim_{x \rightarrow -1} \frac{F(x)-F(-1)}{x-(-1)}=F'(-1)$$

이때 $F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 이므로

$$F'(-1)=f'(-1)g(-1)+f(-1)g'(-1)$$

한편 $f'(x)=3x^2+1$ 이므로 $f'(-1)=f'(1)=4$

$$\therefore g'(-1)=\frac{1}{f'(g(-1))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 극한값은

$$F'(-1)=4 \times 1 + (-5) \times \frac{1}{4}=\frac{11}{4}$$

067 답 2

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (3, 1)에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$f(3)=1, \quad f'(3)=1$$

$f(3x)=h(x)$ 라 하면 $g(1)=a$ 에서 $h(a)=1$ 이고

$$h(1)=f(3)=1 \text{ 이므로 } a=1 \quad \therefore g(1)=1$$

이때 $h'(x)=3f'(3x)$ 이므로

$$h'(1)=3f'(3)=3$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는

$$g'(1)=\frac{1}{h'(g(1))}=\frac{1}{h'(1)}=\frac{1}{3} \quad \therefore b=\frac{1}{3}$$

$$\therefore a+3b=1+3 \times \frac{1}{3}=2$$

068 ㉮ 5

$$\begin{aligned}
 g(4) &= -1 \text{ 이므로 } f(-1) = 4 \\
 f'(x) &= -3 + \frac{\{f(x)\}^2}{2} \text{ 에서} \\
 f'(-1) &= -3 + \frac{\{f(-1)\}^2}{2} = -3 + \frac{16}{2} = 5 \\
 \therefore g'(4) &= \frac{1}{f'(g(4))} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{5} \\
 (h \circ g)'(4) &= 1 \text{ 에서 } h'(g(4))g'(4) = 1 \\
 \frac{1}{5}h'(-1) &= 1 \quad \therefore h'(-1) = 5
 \end{aligned}$$

069 ㉮ $-\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}
 \frac{9-2x}{4} &= 2 \text{ 에서 } 9-2x=8 \quad \therefore x=\frac{1}{2} \\
 g\left(\frac{9-2x}{4}\right) &= f^{-1}(x) \text{ 의 양변에 } x=\frac{1}{2} \text{ 을 대입하면} \\
 g(2) &= f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\
 g\left(\frac{9-2x}{4}\right) &= f^{-1}(x) \text{ 의 양변을 } x \text{ 에 대하여 미분하면} \\
 g'\left(\frac{9-2x}{4}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\
 \text{양변에 } x=\frac{1}{2} \text{ 을 대입하면} \\
 -\frac{1}{2}g'(2) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)} = \frac{1}{f'(0)} \\
 \text{이때 } f(x) &= (x^2+3)e^x \text{ 에서} \\
 f'(x) &= 2xe^x + (x^2+3)e^x = (x^2+2x+3)e^x \\
 f'(0) &= 3 \text{ 이므로 } -\frac{1}{2}g'(2) = \frac{1}{3} \\
 \therefore g'(2) &= -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

070 ㉮ ③

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x \sin ax \text{ 에서} \\
 f'(x) &= \sin ax + ax \cos ax \\
 f''(x) &= a \cos ax + a \cos ax - a^2 x \sin ax \\
 &= 2a \cos ax - a^2 x \sin ax \\
 f''(0) &= 6 \text{ 에서 } 2a = 6 \quad \therefore a = 3
 \end{aligned}$$

071 ㉮ ①

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{2x+1} = (2x+1)^{\frac{1}{2}} \text{ 이므로} \\
 f'(x) &= \frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} \times 2 = (2x+1)^{-\frac{1}{2}} \\
 f''(x) &= -\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{3}{2}} \times 2 = -\frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} \\
 \therefore f''(0) &= -1
 \end{aligned}$$

072 ㉮ 1

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x(a+b \ln x) \text{ 에서} \\
 f'(x) &= a+b \ln x + x \times \frac{b}{x} = a+b \ln x + b \\
 f''(x) &= \frac{b}{x} \\
 f'(1) &= 5 \text{ 에서 } a+b=5 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
 f''(2) &= 1 \text{ 에서 } \frac{b}{2}=1 \quad \therefore b=2 \\
 \text{이를 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하여 풀면 } &a=3 \\
 \therefore a-b &= 1
 \end{aligned}$$

073 ㉮ $-\frac{5}{4}$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{2} \cos x - \cot x \text{ 에서} \\
 f'(x) &= -\sqrt{2} \sin x + \csc^2 x \\
 f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} + \csc^2 \frac{\pi}{4} = 1 \text{ 이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f'(x)-1}{4x-\pi} &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f'(x)-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} f''\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 \text{이때} \\
 f''(x) &= -\sqrt{2} \cos x + 2 \csc x \times (-\csc x \cot x) \\
 &= -\sqrt{2} \cos x - 2 \csc^2 x \cot x \\
 \text{이므로 } f''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} - 2 \csc^2 \frac{\pi}{4} \cot \frac{\pi}{4} = -5 \\
 \text{따라서 구하는 극한값은 } &\frac{1}{4} f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \times (-5) = -\frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

074 ㉮ 1

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{x-x^2} \text{ 에서} \\
 f'(x) &= (1-2x)e^{x-x^2} \\
 f''(x) &= -2e^{x-x^2} + (1-2x)^2 e^{x-x^2} \\
 &= (4x^2-4x-1)e^{x-x^2} \\
 f''(a) &= 0 \text{ 에서 } 4a^2-4a-1=0 \quad (\because e^{a-a^2} > 0) \\
 \text{따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 상수 } a \text{ 의} \\
 \text{값의 합은 } &1 \text{ 이다.}
 \end{aligned}$$

075 ㉮ ⑤

$$\begin{aligned}
 y &= e^{2x} \cos x \text{ 에서} \\
 y' &= 2e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x = e^{2x}(2 \cos x - \sin x) \\
 y'' &= 2e^{2x}(2 \cos x - \sin x) + e^{2x}(-2 \sin x - \cos x) \\
 &= e^{2x}(3 \cos x - 4 \sin x) \\
 y'' - ay' - by &= 0 \text{ 에서} \\
 e^{2x}(3 \cos x - 4 \sin x) - ae^{2x}(2 \cos x - \sin x) - be^{2x} \cos x &= 0 \\
 e^{2x}\{(-2a-b+3) \cos x + (a-4) \sin x\} &= 0 \\
 \text{이 등식이 } x \text{ 의 값에 관계없이 항상 성립하므로} \\
 -2a-b+3 &= 0, \quad a-4=0 \\
 \text{따라서 } a=4, \quad b=-5 \text{ 이므로} \\
 a-b &= 9
 \end{aligned}$$

076 답 8

$(f \circ g)(x) = x + \ln(x^2 + 1)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $f'(g(0))g'(0) = 1$

$$f'(3)g'(0) = 1, \quad \frac{1}{2}f'(3) = 1$$

$$\therefore f'(3) = 2$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f''(g(x))\{g'(x)\}^2 + f'(g(x))g''(x) &= \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f''(g(0))\{g'(0)\}^2 + f'(g(0))g''(0) = 2$$

$$\frac{1}{4}f''(3) - f'(3) = 2, \quad \frac{1}{4}f''(3) - 2 = 2$$

$$\frac{1}{4}f''(3) = 4 \quad \therefore f''(3) = 16$$

한편 $f'(g(0)) = f'(3) = 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(g(x)) - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(g(x)) - f'(g(0))}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f'(g(x)) - f'(g(0))}{g(x) - g(0)} \times \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right\} \\ &= f''(g(0))g'(0) \\ &= f''(3) \times \frac{1}{2} = 16 \times \frac{1}{2} = 8 \end{aligned}$$

077 답 ③

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-3h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1) + f(1) - f(1-3h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-3h)}{-3h} \times 3 \\ &= f'(1) + 3f'(1) = 4f'(1) \end{aligned}$$

이때 $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ 에서

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

$$\therefore f'(1) = \frac{e}{(1+1)^2} = \frac{e}{4}$$

따라서 구하는 극한값은 $4f'(1) = 4 \times \frac{e}{4} = e$

078 답 1

$$f(x) = \frac{1}{a + \cot x} \text{에서}$$

$$f'(x) = -\frac{(a + \cot x)'}{(a + \cot x)^2} = \frac{\csc^2 x}{(a + \cot x)^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \text{에서 } \frac{2}{(a+1)^2} = \frac{1}{2}, \quad (a+1)^2 = 4$$

$$a+1 = -2 \text{ 또는 } a+1 = 2$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$

079 답 5

$f(g(x)) = -3x^2 + 4x - 2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(g(x))g'(x) = -6x + 4$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$f'(g(-1))g'(-1) = 10$$

$$f'(1)g'(-1) = 10, \quad 2g'(-1) = 10$$

$$\therefore g'(-1) = 5$$

080 답 ②

$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ 이므로

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$h'(0) = 12 \text{에서 } f'(g(0))g'(0) = 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $g(x) = \frac{\cos x}{(x+1)^2}$ 에서

$$g'(x) = \frac{-\sin x \times (x+1)^2 - \cos x \times 2(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$\therefore g(0) = 1, \quad g'(0) = -2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $f'(1) \times (-2) = 12$

$$\therefore f'(1) = -6$$

081 답 ④

$$f(x) = \left(\frac{4x+a}{x+1}\right)^3 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\left(\frac{4x+a}{x+1}\right)^2 \times \frac{4(x+1) - (4x+a) \times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{3(4x+a)^2(4-a)}{(x+1)^4} \end{aligned}$$

$$f'(0) = 0 \text{에서 } 3a^2(4-a) = 0$$

$$\therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$

082 답 2e

$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ 이므로

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$\therefore h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

이때 $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = \sin^2 x$ 에서

$$f'(x) = 2e^{2x}, \quad g'(x) = 2 \sin x \cos x$$

$$\therefore f'\left(g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2e \times 1 = 2e$$

083 답 ②

$f(x) = \ln(\tan x)$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\tan x)'}{\tan x} = \frac{\sec^2 x}{\tan x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} \\ &= \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x} \end{aligned}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}} = 4$$

084 [답] ③

$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)^2}{(x+1)^4}$ 의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln |f(x)| = \ln |x-1| + 2\ln |x+2| - 4\ln |x+1|$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x+1}$$

$$\therefore f'(x) = f(x) \times \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{x+1} \right)$$

이때 $f(0) = -4$ 이므로 $x=0$ 에서의 미분계수는

$$f'(0) = -4 \times (-1 + 1 - 4) = 16$$

085 [답] $-\frac{2}{3}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} = (2x-1)^{-\frac{1}{3}} \text{이므로}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{4}{3}} \times 2 = -\frac{2}{3(2x-1)^{\frac{4}{3}}\sqrt[3]{2x-1}}$$

$$\text{따라서 } g(x) = -\frac{2}{3(2x-1)} \text{이므로}$$

$$g(1) = -\frac{2}{3}$$

086 [답] ②

$$\frac{dx}{d\theta} = \sin \theta, \frac{dy}{d\theta} = 1 - \cos \theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \quad (\text{단, } \sin \theta \neq 0)$$

$$\text{따라서 } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ 일 때, } \frac{dy}{dx} \text{의 값은 } \frac{1 - \cos \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

087 [답] 7

점 $(2, a)$ 가 곡선 $e^{3x} - 3e^{2y} + 2e^6 = 0$ 위의 점이므로

$$e^6 - 3e^{2a} + 2e^6 = 0, 3e^{2a} = 3e^6 \quad \therefore a = 3$$

$e^{3x} - 3e^{2y} + 2e^6 = 0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3e^{3x} - 6e^{2y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^{3x}}{2e^{2y}}$$

$$\text{점 } (2, 3) \text{에서의 접선의 기울기는 } \frac{e^6}{2e^6} = \frac{1}{2} \text{이므로 } b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 2(a+b) = 2\left(3 + \frac{1}{2}\right) = 7$$

088 [답] $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = a \text{라 하면 } f(a) = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\sin a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{\pi}{6} \left(\because -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \right) \quad \therefore g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{이때 } f(x) = \sin x \text{에서 } f'(x) = \cos x \text{이므로 } f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(g\left(\frac{1}{2}\right)\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b \text{라 하면 } f(b) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로}$$

$$\sin b = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore b = \frac{\pi}{3} \left(\because -\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2} \right) \quad \therefore g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \text{이므로 } g'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 2$$

$$\therefore g'\left(\frac{1}{2}\right)g'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

089 [답] $\frac{1}{2}$

(가)에서 $f(-x) = -f(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$-f'(-x) = -f'(x) \quad \therefore f'(-x) = f'(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(나)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 3\} = 0 \text{이므로 } f(1) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 2$$

$$f(-1) = -f(1) = -3 \text{이므로 } g(-3) = -1 \text{이고}$$

$$f'(-1) = f'(1) = 2 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore g'(-3) = \frac{1}{f'(g(-3))} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{2}$$

090 [답] ⑤

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(e+h) - f'(e-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(e+h) - f'(e) + f'(e) - f'(e-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(e+h) - f'(e)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(e) - f'(e-h)}{-h}$$

$$= f''(e) + f''(e) = 2f''(e)$$

이때 $f(x) = x^2 \ln x$ 에서

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$$

$$f''(x) = 2 \ln x + 2x \times \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln x + 3$$

$$\therefore f''(e) = 2 \ln e + 3 = 5$$

$$\text{따라서 구하는 극한값은 } 2f''(e) = 2 \times 5 = 10$$

091 [답] $\frac{5}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(f(x)) - 3}{x - 1} = 5 \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이}$$

존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f'(f(x)) - 3\} = 0 \text{이므로 } f'(f(1)) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(f(x)) - 3}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(f(x)) - f'(f(1))}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f'(f(x)) - f'(f(1))}{f(x) - f(1)} \times \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right\}$$

$$= f''(f(1))f'(1) = f''(3) \times 2 = 2f''(3)$$

$$\text{따라서 } 2f''(3) = 5 \text{이므로 } f''(3) = \frac{5}{2}$$



001 답 ①

$f(x) = \frac{2x+6}{x+1}$ 이라 하면

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x+6)}{(x+1)^2} = -\frac{4}{(x+1)^2}$$

점 (1, 4)에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 4 = -(x - 1)$$

$$\therefore y = -x + 5$$

따라서 $a = -1$, $b = 5$ 이므로

$$a - b = -6$$

002 답 $-e$

$f(x) = x \ln x + x$ 라 하면

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} + 1 = \ln x + 2$$

점점의 좌표를 $(t, t \ln t + t)$ 라 하면 직선 $3x - y + 7 = 0$, 즉 $y = 3x + 7$ 에 평행한 직선의 기울기는 3이므로 $f'(t) = 3$ 에서 $\ln t + 2 = 3$, $\ln t = 1$

$$\therefore t = e$$

즉, 점점의 좌표는 $(e, 2e)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 2e = 3(x - e)$$

$$\therefore y = 3x - e$$

따라서 구하는 y 절편은 $-e$ 이다.

003 답 ④

$f(x) = 2e^{x-1}$ 이라 하면

$$f'(x) = 2e^{x-1}$$

점점의 좌표를 $(t, 2e^{t-1})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = 2e^{t-1}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 2e^{t-1} = 2e^{t-1}(x - t)$$

$$\therefore y = 2e^{t-1}x + 2e^{t-1}(1 - t) \quad \dots\dots ①$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = 2e^{t-1}(1 - t)$$

$$\therefore t = 1 (\because e^{t-1} > 0)$$

이를 ①에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$$y = 2x$$

이 직선이 점 $(2, a)$ 를 지나므로

$$a = 2 \times 2 = 4$$

004 답 $k < 0$ 또는 $k > 4$

$f(x) = 3xe^{-x}$ 이라 하면

$$f'(x) = 3e^{-x} - 3xe^{-x} = 3e^{-x}(1 - x)$$

점점의 좌표를 $(t, 3te^{-t})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = 3e^{-t}(1 - t)$$
이므로 접선의 방정식은

$$y - 3te^{-t} = 3e^{-t}(1 - t)(x - t)$$

이 직선이 점 $(k, 0)$ 을 지나므로

$$-3te^{-t} = 3e^{-t}(1 - t)(k - t), \quad 3e^{-t}(t^2 - kt + k) = 0$$

$$\therefore t^2 - kt + k = 0 (\because e^{-t} > 0) \quad \dots\dots ①$$

점 $(k, 0)$ 에서 곡선 $y = 3xe^{-x}$ 에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ①이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

①의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-k)^2 - 4k > 0$$

$$k(k - 4) > 0$$

$$\therefore k < 0 \text{ 또는 } k > 4$$

005 답 ③

$f(x) = ax^2 + e^{x-1}$, $g(x) = 2 \ln x + b$ 라 하면

$$f'(x) = 2ax + e^{x-1}, \quad g'(x) = \frac{2}{x}$$

두 곡선이 $x = 1$ 인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$$f(1) = g(1) \text{에서 } a + 1 = b \quad \dots\dots ①$$

$$f'(1) = g'(1) \text{에서 } 2a + 1 = 2 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a + b = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

006 답 $-\frac{2}{3}$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t$$

$t = \frac{\pi}{3}$ 일 때 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{dy}{dx} = -\cot \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

따라서 $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이므로 $ab = -\frac{2}{3}$

007 답 $y = -x + 1$

$x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 2y + 2x \frac{dy}{dx} + 4y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2(x + 2y) \frac{dy}{dx} = -2(x + y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{x+2y} \quad (\text{단, } x+2y \neq 0)$$

점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+0}{1+0} = -1$$

따라서 점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = -(x - 1) \quad \therefore y = -x + 1$$

008 ㉮ $\frac{\pi}{2}$

$g(0)=k$ 라 하면 $f(k)=0$ 이므로

$$\cos k=0 \quad \therefore k=\frac{\pi}{2} \quad (\because 0 < k < \pi)$$

이때 $f'(x)=-\sin x$ 이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin \frac{\pi}{2}=-1$$

$$\therefore g'(0)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}=-1$$

즉, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-\frac{\pi}{2}=-x \quad \therefore y=-x+\frac{\pi}{2}$$

따라서 구하는 x 절편은 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

009 ㉮ ④

$f(x)=\sqrt{x^2+5}$ 라 하면

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

점 $(-2, 3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=-\frac{2}{3}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-3=-\frac{2}{3}(x+2) \quad \therefore y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$$

따라서 $a=-\frac{2}{3}$, $b=\frac{5}{3}$ 이므로 $a+b=1$

010 ㉮ -1

$f(x)=x^2e^{1-x}+1$ 이라 하면

$$f'(x)=2xe^{1-x}-x^2e^{1-x}=x(2-x)e^{1-x}$$

점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-2=x-1 \quad \therefore y=x+1$$

따라서 구하는 x 절편은 -1 이다.

011 ㉮ ③

$f(x)=x \ln x-3x$ 라 하면

$$f'(x)=\ln x+x \times \frac{1}{x}-3=\ln x-2$$

x 좌표가 e 인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(e)=-1$

$f(e)=-2e$ 이므로 점 $(e, -2e)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y+2e=-(x-e) \quad \therefore y=-x-e$$

이 직선이 점 $(a, -3e)$ 를 지나므로

$$-3e=-a-e \quad \therefore a=2e$$

012 ㉮ 3

$f(x)=\frac{1-x}{1+x^2}$ 라 하면

$$f'(x)=\frac{-(1+x^2)-(1-x) \times 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$$

점 $(-1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=\frac{1}{2}$ 이므로 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$$-\frac{1}{f'(-1)}=-2$$

즉, 점 $(-1, 1)$ 을 지나고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$$y-1=-2(x+1) \quad \therefore 2x+y+1=0$$

따라서 $a=2$, $b=1$ 이므로 $a+b=3$

013 ㉮ ①

$f(x)=(x-1)e^x$ 이라 하면 $f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=e$ 이므로 접선의 방정식은

$$y=e(x-1) \quad \therefore y=ex-e$$

이 접선의 x 절편은 1 , y 절편은 $-e$ 이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times e = \frac{e}{2}$$

014 ㉮ ④

$g(x)=\cos x$ 라 하면 $g'(x)=-\sin x$

점 $(t, \cos t)$ 에서의 접선의 기울기는 $g'(t)=-\sin t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-\cos t=-\sin t(x-t) \quad \therefore y=-x \sin t+t \sin t+\cos t$$

$$-x \sin t+t \sin t+\cos t=0 \text{에서 } x \sin t=t \sin t+\cos t$$

$$\therefore x=t+\cot t \quad (\because \sin t \neq 0)$$

따라서 접선의 x 절편은 $t+\cot t$, 즉 $f(t)=t+\cot t$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} t f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} t(t+\cot t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t\left(t+\frac{1}{\tan t}\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(t^2+\frac{t}{\tan t}\right) = 0+1=1 \end{aligned}$$

015 ㉮ ②

$f(x)=\sqrt{2x+3}$ 이라 하면

$$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

점점의 좌표를 $(t, \sqrt{2t+3})$ 이라 하면 점점의 기울기가 1 이므로

$f'(t)=1$ 에서

$$\frac{1}{\sqrt{2t+3}}=1, \sqrt{2t+3}=1 \quad \therefore t=-1$$

즉, 점점의 좌표는 $(-1, 1)$ 이므로 점점의 방정식은

$$y-1=x+1 \quad \therefore y=x+2$$

따라서 구하는 x 절편은 -2 이다.

016 ㉮ ③

$f(x)=e^{2x}-2$ 라 하면 $f'(x)=2e^{2x}$

점점의 좌표를 $(t, e^{2t}-2)$ 라 하면 직선 $x+2y-5=0$, 즉

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \text{에 수직인 직선의 기울기는 } 2 \text{이므로 } f'(t)=2 \text{에서}$$

$$2e^{2t}=2, e^{2t}=1 \quad \therefore t=0$$

즉, 점점의 좌표는 $(0, -1)$ 이므로 점점의 방정식은

$$y+1=2x \quad \therefore y=2x-1$$

이 직선이 점 $(3, k)$ 를 지나므로 $k=6-1=5$

017 ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$

$f(x) = \sin 2x$ 라 하면 $f'(x) = 2 \cos 2x$

접점의 좌표를 $(t, \sin 2t)$ 라 하면 접선의 기울기가 $\tan 45^\circ = 1$ 이므로 $f'(t) = 1$ 에서

$$2 \cos 2t = 1, \cos 2t = \frac{1}{2} \quad \therefore t = \frac{\pi}{6} \left(\because 0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$$

즉, 접점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = x - \frac{\pi}{6} \quad \therefore y = x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

따라서 구하는 y 절편은 $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$ 이다.

018 ④

$f(x) = ke^{x-1}$ 이라 하면 $f'(x) = ke^{x-1}$

접점의 y 좌표가 a 이고 직선 $y = 2x$ 가 이 접점을 지나므로 접점의 좌표는 $\left(\frac{a}{2}, a \right)$ 이다.

점 $\left(\frac{a}{2}, a \right)$ 가 곡선 $y = ke^{x-1}$ 위의 점이므로 $f\left(\frac{a}{2}\right) = a$ 에서

$$ke^{\frac{a}{2}-1} = a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 $\left(\frac{a}{2}, a \right)$ 에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'\left(\frac{a}{2}\right) = 2$ 에서

$$ke^{\frac{a}{2}-1} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $a = 2, k = 2$

$$\therefore k + a = 2 + 2 = 4$$

019 ⑤ $(\ln 2)^2$

$f(x) = \ln(x+2)$ 라 하면 $f'(x) = \frac{1}{x+2}$

접점의 좌표를 $(t, \ln(t+2))$ 라 하면 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$f'(t) = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\frac{1}{t+2} = \frac{1}{2} \quad \therefore t = 0$$

즉, 접점의 좌표는 $(0, \ln 2)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \ln 2 = \frac{1}{2}x \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + \ln 2$$

이 접선의 x 절편은 $-2 \ln 2$, y 절편은 $\ln 2$ 이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \ln 2 \times \ln 2 = (\ln 2)^2$$

020 ④

$f(x) = \ln x$ 라 하면 $f'(x) = \frac{1}{x}$

곡선 $y = f(x)$ 의 접선 중에서 직선 $y = x + 3$ 과 평행한 접선의 접점의 좌표를 $(t, \ln t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(t) = 1$ 에서

$$\frac{1}{t} = 1 \quad \therefore t = 1$$

따라서 접점의 좌표는 $(1, 0)$ 이고, 구하는 최솟값은 점 $(1, 0)$ 과 직선 $y = x + 3$, 즉 $x - y + 3 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|1+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

021 ⑤

$f(x) = 2x \ln x$ 라 하면

$$f'(x) = 2 \ln x + 2x \times \frac{1}{x} = 2 \ln x + 2$$

접점의 좌표를 $(t, 2t \ln t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = 2 \ln t + 2 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - 2t \ln t = (2 \ln t + 2)(x - t)$$

$$\therefore y = 2(\ln t + 1)x - 2t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(0, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = -2t \quad \therefore t = 1$$

이를 ①에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$$y = 2x - 2$$

이 직선이 점 $(a, 4)$ 를 지나므로 $4 = 2a - 2 \quad \therefore a = 3$

022 ①

$f(x) = \sqrt{x} + 3$ 이라 하면 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t} + 3)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - (\sqrt{t} + 3) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(x - t)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2\sqrt{t}}x + \frac{\sqrt{t}}{2} + 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로

$$3 = -\frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{t}}{2} + 3$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} \quad \therefore t = 1$$

이를 ①에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

따라서 구하는 x 절편은 -7 이다.

023 ②

$f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ 이라 하면 $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$

접점의 좌표를 $(t, e^{\frac{1}{2}t})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - e^{\frac{1}{2}t} = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}(x - t)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}x + \left(1 - \frac{1}{2}t\right)e^{\frac{1}{2}t} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -e^{\frac{1}{2}t} + \left(1 - \frac{1}{2}t\right)e^{\frac{1}{2}t}$$

$$-\frac{1}{2}te^{\frac{1}{2}t} = 0 \quad \therefore t = 0 \left(\because e^{\frac{1}{2}t} > 0 \right)$$

이를 ①에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

따라서 점 Q의 좌표는 $(0, 1)$ 이므로 삼각형 POQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$

024 **답** e^4

$f(x) = xe^{2x} + 1$ 이라 하면

$$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = (2x+1)e^{2x}$$

접점의 좌표를 $(t, te^{2t} + 1)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = (2t+1)e^{2t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (te^{2t} + 1) = (2t+1)e^{2t}(x-t)$$

$$\therefore y = (2t+1)e^{2t}x - 2t^2e^{2t} + 1$$

이 직선이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$1 = (2t+1)e^{2t} \times 2 - 2t^2e^{2t} + 1, \quad -2e^{2t}(t^2 - 2t - 1) = 0$$

$$\therefore t^2 - 2t - 1 = 0 \quad (\because e^{2t} > 0)$$

이 이차방정식의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -1$$

이때 접선의 기울기는 각각 $(2\alpha+1)e^{2\alpha}, (2\beta+1)e^{2\beta}$ 이므로

$$m_1m_2 = (2\alpha+1)e^{2\alpha} \times (2\beta+1)e^{2\beta}$$

$$= (2\alpha+1)(2\beta+1)e^{2\alpha+2\beta}$$

$$= \{4\alpha\beta + 2(\alpha+\beta) + 1\}e^{2(\alpha+\beta)}$$

$$= \{4 \times (-1) + 2 \times 2 + 1\}e^{2 \times 2}$$

$$= e^4$$

025 **답** ①

$$f(x) = \ln x \text{라 하면 } f'(x) = \frac{1}{x}$$

접점의 좌표를 $(t, \ln t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = \frac{1}{t} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - \ln t = \frac{1}{t}(x-t) \quad \therefore y = \frac{1}{t}x - 1 + \ln t \quad \dots\dots ①$$

이 직선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -1 + \ln t, \quad \ln t = 1 \quad \therefore t = e$$

이를 ①에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$$y = \frac{1}{e}x$$

이 직선이 곡선 $y = x^2 + k$ 에 접하므로

$$x^2 + k = \frac{1}{e}x \quad \therefore x^2 - \frac{1}{e}x + k = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$D = \left(-\frac{1}{e}\right)^2 - 4k = 0, \quad 4k = \frac{1}{e^2} \quad \therefore k = \frac{1}{4e^2}$$

026 **답** ③

$$f(x) = x - \ln x \text{라 하면 } f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

점 $(0, 1 + \ln 3)$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를

$$(t, t - \ln t) \text{라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 } f'(t) = 1 - \frac{1}{t} \text{이}$$

므로 접선의 방정식은

$$y - (t - \ln t) = \left(1 - \frac{1}{t}\right)(x-t) \quad \therefore y = \left(1 - \frac{1}{t}\right)x + 1 - \ln t$$

이 직선이 점 $(0, 1 + \ln 3)$ 을 지나므로

$$1 + \ln 3 = 1 - \ln t, \quad -\ln t = \ln 3 \quad \therefore t = \frac{1}{3}$$

따라서 점 $(0, 1 + \ln 3)$ 에서 그은 접선의 기울기는 $f'\left(\frac{1}{3}\right) = -2$

이므로 점 $(a, 1)$ 에서 그은 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

점 $(a, 1)$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를

$$(s, s - \ln s) \text{라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 } f'(s) = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$1 - \frac{1}{s} = \frac{1}{2} \quad \therefore s = 2$$

즉, 접점의 좌표는 $(2, 2 - \ln 2)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (2 - \ln 2) = \frac{1}{2}(x-2) \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + 1 - \ln 2$$

$$\text{이 직선이 점 } (a, 1) \text{을 지나므로 } 1 = \frac{1}{2}a + 1 - \ln 2$$

$$\frac{1}{2}a = \ln 2 \quad \therefore a = 2 \ln 2$$

027 **답** ③

$f(x) = (x-3)e^x$ 이라 하면

$$f'(x) = e^x + (x-3)e^x = (x-2)e^x$$

접점의 좌표를 $(t, (t-3)e^t)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울

기는 $f'(t) = (t-2)e^t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (t-3)e^t = (t-2)e^t(x-t)$$

이 직선이 점 $(k, 0)$ 을 지나므로

$$-(t-3)e^t = (t-2)e^t(k-t)$$

$$e^t\{t^2 - (k+3)t + 2k+3\} = 0$$

$$\therefore t^2 - (k+3)t + 2k+3 = 0 \quad (\because e^t > 0) \quad \dots\dots ①$$

점 $(k, 0)$ 에서 곡선 $y = (x-3)e^x$ 에 서로 다른 두 개의 접선을 그

을 수 있으려면 이차방정식 ①이 서로 다른 두 실근을 가져야 하

므로 ①의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(k+3)\}^2 - 4(2k+3) > 0$$

$$k^2 - 2k - 3 > 0, \quad (k+1)(k-3) > 0$$

$$\therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 3$$

따라서 양의 정수 k 의 최솟값은 4이다.

028 **답** 2

$$f(x) = \frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x} \text{라 하면 } f'(x) = \frac{2}{x^2}$$

접점의 좌표를 $\left(t, 1 - \frac{2}{t}\right)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = \frac{2}{t^2} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - \left(1 - \frac{2}{t}\right) = \frac{2}{t^2}(x-t)$$

이 직선이 점 $(3, 3)$ 을 지나므로

$$3 - \left(1 - \frac{2}{t}\right) = \frac{2}{t^2}(3-t)$$

$t \neq 0$ 이므로 양변에 t^2 을 곱하여 정리하면

$$t^2 + 2t - 3 = 0, \quad (t+3)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

따라서 접점의 개수가 2이므로 점 $(3, 3)$ 에서 그을 수 있는 접선

의 개수는 2이다.

029 답 ④

$f(x) = xe^{ax}$ 이라 하면

$$f'(x) = e^{ax} + axe^{ax} = (1+ax)e^{ax}$$

점점의 좌표를 (t, te^{at}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = (1+at)e^{at} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - te^{at} = (1+at)e^{at}(x-t)$$

이 직선이 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$-te^{at} = (1+at)e^{at}(2-t)$$

$$(at^2 - 2at - 2)e^{at} = 0$$

$$\therefore at^2 - 2at - 2 = 0 \quad (\because e^{at} > 0) \quad \dots\dots ㉠$$

점 $(2, 0)$ 에서 곡선 $y = xe^{ax}$ 에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 중근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - (-2a) = 0$$

$$a(a+2) = 0$$

$$\therefore a = -2 \quad (\because a \neq 0)$$

030 답 ③

$f(x) = e^{x+1}$, $g(x) = \sqrt{ax+b}$ 라 하면

$$f'(x) = e^{x+1}, g'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$$

두 곡선이 $x = -1$ 인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$$f(-1) = g(-1) \text{에서}$$

$$1 = \sqrt{-a+b} \quad \dots\dots ㉠$$

$$f'(-1) = g'(-1) \text{에서}$$

$$1 = \frac{a}{2\sqrt{-a+b}} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$1 = \frac{a}{2} \quad \therefore a = 2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$1 = \sqrt{-2+b}, 1 = -2+b \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore a+b = 2+3 = 5$$

031 답 ③

$f(x) = \ln 4x$, $g(x) = 8x^2 + a$ 라 하면

$$f'(x) = \frac{1}{x}, g'(x) = 16x$$

두 곡선이 $x=t(t>0)$ 인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서 } \ln 4t = 8t^2 + a \quad \dots\dots ㉠$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } \frac{1}{t} = 16t$$

$$t^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore t = \frac{1}{4} \quad (\because t > 0)$$

이를 ㉠에 대입하면

$$0 = \frac{1}{2} + a \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

032 답 $-\frac{5}{4}$

$f(x) = a + \cos^2 x$, $g(x) = -\sin x$ 라 하면

$$f'(x) = -2\sin x \cos x, g'(x) = -\cos x$$

두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 서로 접한다고 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서 } a + \cos^2 t = -\sin t$$

$$a + 1 - \sin^2 t = -\sin t$$

$$\therefore a = \sin^2 t - \sin t - 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } -2\sin t \cos t = -\cos t$$

$$\cos t(1-2\sin t) = 0$$

$$\therefore \cos t = 0 \text{ 또는 } \sin t = \frac{1}{2}$$

(i) $\cos t = 0$ 일 때

$\sin t = -1$ 또는 $\sin t = 1$ 이므로 이를 ㉠에 대입하면

$$a = 1 \text{ 또는 } a = -1$$

(ii) $\sin t = \frac{1}{2}$ 일 때

$$\sin t = \frac{1}{2} \text{을 ㉠에 대입하면 } a = -\frac{5}{4}$$

(i), (ii)에서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$1 + (-1) + \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{5}{4}$$

033 답 ③

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2(1+t^2) - 2t \times 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-2t(1+t^2) - (1-t^2) \times 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{-4t}{(1+t^2)^2}}{\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}} = \frac{2t}{t^2-1} \quad (\text{단, } t \neq \pm 1)$$

$t=2$ 일 때

$$x = \frac{2 \times 2}{1+2^2} = \frac{4}{5}, y = \frac{1-2^2}{1+2^2} = -\frac{3}{5}, \frac{dy}{dx} = \frac{2 \times 2}{2^2-1} = \frac{4}{3}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y + \frac{3}{5} = \frac{4}{3} \left(x - \frac{4}{5}\right) \quad \therefore y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{4}{3}, b = -\frac{5}{3} \text{이므로 } a-b = 3$$

034 답 ③

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{dy}{dt} = 2t-6$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t-6}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = 4\sqrt{t}(t-3)$$

$t=4$ 일 때

$$x = \sqrt{4} + 1 = 3, y = 4^2 - 6 \times 4 = -8, \frac{dy}{dx} = 4\sqrt{4}(4-3) = 8$$

이므로 접선의 방정식은

$$y + 8 = 8(x-3) \quad \therefore y = 8x - 32$$

이 직선이 점 $(a, 8)$ 을 지나므로

$$8 = 8a - 32 \quad \therefore a = 5$$

035 ㉮ ㉮ $y = -4x + 1$

$$\frac{dx}{dt} = 2t - 4, \frac{dy}{dt} = 3t^2 - k$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - k}{2t - 4} \quad (\text{단, } t \neq 2)$$

$$t=1 \text{ 일 때 } \frac{dy}{dx} = -4 \text{ 이므로}$$

$$\frac{3-k}{2-4} = -4, 3-k=8 \quad \therefore k=-5$$

$t=1$ 일 때 $x=-1, y=5$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-5 = -4(x+1)$$

$$\therefore y = -4x + 1$$

036 ㉮ $\frac{32}{15}$

$$\frac{dx}{dt} = e^t + e^{-t}, \frac{dy}{dt} = e^t - e^{-t}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

$t = \ln 2$ 일 때

$$x = e^{\ln 2} - e^{-\ln 2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, y = e^{\ln 2} + e^{-\ln 2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}$$

이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{5}{2} = \frac{3}{5} \left(x - \frac{3}{2} \right) \quad \therefore y = \frac{3}{5}x + \frac{8}{5}$$

이 접선의 x 절편은 $-\frac{8}{3}$, y 절편은 $\frac{8}{5}$ 이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times \frac{8}{5} = \frac{32}{15}$$

037 ㉮ ㉮

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\sec^2 \theta, \frac{dy}{d\theta} = 4\sec \theta \tan \theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{4\sec \theta \tan \theta}{2\sec^2 \theta} = 2\sin \theta$$

이때 $2\tan \theta = 2\sqrt{3}$, $4\sec \theta = 8$ 에서

$$\tan \theta = \sqrt{3}, \sec \theta = 2$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ 일 때 } \frac{dy}{dx} = 2\sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

즉, 점 $(2\sqrt{3}, 8)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이

므로 직선의 방정식은

$$y - 8 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2\sqrt{3}) \quad \therefore y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 10$$

따라서 구하는 y 절편은 10이다.

038 ㉮ ㉮

$y^3 = \ln(5-x^2) + 3xy + 5$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{5-x^2} + 3y + 3x \frac{dy}{dx}$$

$$(3y^2 - 3x) \frac{dy}{dx} = \frac{-2x + 15y - 3x^2y}{5-x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-2x + 15y - 3x^2y}{3(y^2 - x)(5-x^2)} \quad (\text{단, } y^2 \neq x)$$

점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2 \times 2 + 15 \times (-1) - 3 \times 2^2 \times (-1)}{3\{(-1)^2 - 2\}(5-2^2)} = \frac{7}{3}$$

즉, 점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y + 1 = \frac{7}{3}(x - 2) \quad \therefore y = \frac{7}{3}x - \frac{17}{3}$$

따라서 $a = \frac{7}{3}$, $b = -\frac{17}{3}$ 이므로

$$a - b = 8$$

039 ㉮ ㉮

$xy + e^y = e$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$y + x \frac{dy}{dx} + e^y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x + e^y) \frac{dy}{dx} = -y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x + e^y} \quad (\text{단, } x + e^y \neq 0)$$

점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{0 + e} = -\frac{1}{e}$$

즉, 점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 1 = -\frac{1}{e}x \quad \therefore y = -\frac{1}{e}x + 1$$

따라서 구하는 x 절편은 e 이다.

040 ㉮ ㉮

$x^2 - \cos y + xy = 0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + \sin y \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x + \sin y) \frac{dy}{dx} = -2x - y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + \sin y} \quad (\text{단, } x + \sin y \neq 0)$$

점 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{0 + \frac{\pi}{2}}{0 + \sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2}$$

즉, 점 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}x \quad \therefore y = -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}$$

이 직선이 점 $(1, a)$ 를 지나므로

$$a = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$$

041 답 ②

$x^2+2xy-y^3=1$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x+2y+2x\frac{dy}{dx}-3y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$(3y^2-2x)\frac{dy}{dx}=2x+2y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x+2y}{3y^2-2x} \quad (\text{단, } 3y^2 \neq 2x)$$

점 (1, 0)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2+0}{0-2}=-1$$

즉, 점 (1, 0)에서의 접선의 방정식은

$$y=-(x-1) \quad \therefore x+y-1=0$$

따라서 이 직선과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

042 답 3

$3x^2+5y^2+2xy-10=0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$6x+10y\frac{dy}{dx}+2y+2x\frac{dy}{dx}=0$$

$$2(x+5y)\frac{dy}{dx}=-2(3x+y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{3x+y}{x+5y} \quad (\text{단, } x+5y \neq 0)$$

점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3 \times 1 + 1}{1 + 5 \times 1}=-\frac{2}{3}$$

이므로 이 접선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{3}{2}$ 이다.

기울기가 $\frac{3}{2}$ 이고 점 (4, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{3}{2}(x-4) \quad \therefore y=\frac{3}{2}x-3$$

따라서 A(2, 0), B(0, -3)이므로 삼각형 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$$

043 답 $\frac{\pi}{4}-1$

$g(\sqrt{2})=k$ 라 하면 $f(k)=\sqrt{2}$ 이므로

$$2\sin k=\sqrt{2}, \sin k=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore k=\frac{\pi}{4} \quad \left(\because -\frac{\pi}{2} < k < \frac{\pi}{2} \right)$$

이때 $f'(x)=2\cos x$ 이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$$

$$\therefore g'(\sqrt{2})=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

즉, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\sqrt{2}) \quad \therefore y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\pi}{4}-1$$

따라서 구하는 y 절편은 $\frac{\pi}{4}-1$ 이다.

044 답 ①

$g(0)=k$ 라 하면 $f(k)=0$ 이므로

$$\ln(3k-2)=0, 3k-2=1$$

$$\therefore k=1$$

$$\text{이때 } f'(x)=\frac{3}{3x-2} \text{이므로 } f'(1)=3$$

$$\therefore g'(0)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3}$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 (0, 1)에서의 접선의 방정식은

$$y-1=\frac{1}{3}x \quad \therefore y=\frac{1}{3}x+1$$

045 답 ①

$$f(x)=2x-\ln x \text{에서 } x>0 \text{이고 } f'(x)=2-\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=\frac{1}{2}$$

$x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$1+\ln 2$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 에서 감소한다.

046 답 ①

$$f(x)=(x^2-ax+2)e^{-x} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-a)e^{-x} - (x^2-ax+2)e^{-x} \\ &= \{-x^2+(a+2)x-a-2\}e^{-x} \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이때 $e^{-x} > 0$ 이므로

$$-x^2+(a+2)x-a-2 \leq 0$$

이차방정식 $-x^2+(a+2)x-a-2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=(a+2)^2-4(a+2) \leq 0$$

$$a^2-4 \leq 0, (a+2)(a-2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 2$$

따라서 정수 a 는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

047 답 ⑤

$$f(x)=ax+5-2\ln x \text{에서}$$

$$f'(x)=a-\frac{2}{x}$$

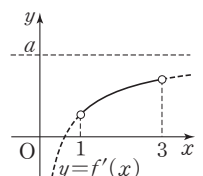
함수 $f(x)$ 가 구간 (1, 3)에서 증가하려면

$1 < x < 3$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 오른

쪽 그림에서

$$f'(1) \geq 0$$

$$a-2 \geq 0 \quad \therefore a \geq 2$$



048 [답] -4

$$f(x) = \frac{3-x^2}{x+2} \text{에서 } x \neq -2 \text{이고}$$

$$f'(x) = \frac{-2x(x+2) - (3-x^2)}{(x+2)^2} = \frac{-x^2-4x-3}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{-(x+3)(x+1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-3 \text{ 또는 } x=-1$$

$x \neq -2$ 인 모든 실수에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	-2	...	-1	...
$f'(x)$	-	0	+		+	0	-
$f(x)$	\	6 극소	/		/	2 극대	\

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(-1)=2$, 극솟값은 $f(-3)=6$ 이므로

$$M=2, m=6$$

$$\therefore M-m=-4$$

[다른 풀이] $f'(x) = \frac{-x^2-4x-3}{(x+2)^2}$ 에서

$$f''(x) = \frac{(-2x-4) \times (x+2)^2 - (-x^2-4x-3) \times 2(x+2)}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{-2(x+2)}{(x+2)^4} = -\frac{2}{(x+2)^3}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-3 \text{ 또는 } x=-1$$

$$\therefore f''(-3)=2>0, f''(-1)=-2<0$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(-1)=2$, 극솟값은 $f(-3)=6$ 이므로

$$M=2, m=6 \quad \therefore M-m=-4$$

049 [답] 4π

$$f(x) = 2x + 4 \sin x \text{에서}$$

$$f'(x) = 2 + 4 \cos x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 4 \cos x = -2, \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	$\frac{4}{3}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		/	$\frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$ 극대	\	$\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ 극소	/	

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(\frac{2}{3}\pi) = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$, 극솟값은

$$f(\frac{4}{3}\pi) = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$M = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}, m = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$$

$$\therefore M+m=4\pi$$

[다른 풀이] $f'(x) = 2 + 4 \cos x$ 에서

$$f''(x) = -4 \sin x$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$$\therefore f''(\frac{2}{3}\pi) = -2\sqrt{3} < 0, f''(\frac{4}{3}\pi) = 2\sqrt{3} > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(\frac{2}{3}\pi) = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}$, 극솟값은

$$f(\frac{4}{3}\pi) = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$M = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}, m = \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$$

$$\therefore M+m=4\pi$$

050 [답] 4

$$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+3} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{a(x^2+3) - (ax+b) \times 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-ax^2-2bx+3a}{(x^2+3)^2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값 -1 을 가지므로

$$f'(1)=0, f(1)=-1$$

$$f'(1)=0 \text{에서 } \frac{2a-2b}{16}=0 \quad \therefore a-b=0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$f(1)=-1 \text{에서 } \frac{a+b}{4}=-1 \quad \therefore a+b=-4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=-2$$

$$\therefore ab=4$$

051 [답] ②

$$f(x) = (x^2+kx+5)e^x \text{에서}$$

$$f'(x) = (2x+k)e^x + (x^2+kx+5)e^x$$

$$= \{x^2 + (k+2)x + k+5\}e^x$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식

$$x^2 + (k+2)x + k+5=0 \text{이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로}$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (k+2)^2 - 4(k+5) > 0$$

$$k^2 - 16 > 0, (k+4)(k-4) > 0$$

$$\therefore k < -4 \text{ 또는 } k > 4$$

따라서 $a=-4, \beta=4$ 이므로 $a\beta=-16$

052 [답] ①

$$f(x) = ax + \sin x \text{에서}$$

$$f'(x) = a + \cos x$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) \leq 0 \text{ 또는 } f'(x) \geq 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\text{이때 } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로 } a-1 \leq a+\cos x \leq a+1$$

즉, $a-1 \leq f'(x) \leq a+1$ 에서 $a+1 \leq 0$ 또는 $a-1 \geq 0$ 이어야 하므로

$$a \leq -1 \text{ 또는 } a \geq 1$$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 1이다.

053 답 ②

$$f(x) = x + \sqrt{16 - x^2} \text{에서 } 0 < x \leq 4 \text{이고}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{\sqrt{16 - x^2} - x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\sqrt{16 - x^2} = x, \quad 16 - x^2 = x^2$$

$$x^2 = 8 \quad \therefore x = 2\sqrt{2} \quad (\because 0 < x \leq 4)$$

$0 < x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$2\sqrt{2}$	...	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	$4\sqrt{2}$	↘	4

따라서 함수 $f(x)$ 가 증가하는 구간은 $(0, 2\sqrt{2}]$ 이므로 이 구간에 속하는 모든 정수 x 의 값의 합은

$$1 + 2 = 3$$

054 답 0

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	-1	↗	1	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$ 에서 감소하고 구간 $[-1, 1]$ 에서 증가하므로

$$a = -1, \quad b = 1$$

$$\therefore a + b = 0$$

055 답 ①

$$f(x) = (x^2 - 8)e^x \text{에서}$$

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2 - 8)e^x = (x^2 + 2x - 8)e^x$$

$$= (x + 4)(x - 2)e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -4 \text{ 또는 } x = 2 \quad (\because e^x > 0)$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-4	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{8}{e^4}$	↘	$-4e^2$	↗

따라서 함수 $f(x)$ 가 감소하는 x 의 값의 범위가 $-4 \leq x \leq 2$ 이므로

$$a = -4, \quad b = 2$$

$$\therefore ab = -8$$

056 답 1

$$f(x) = \ln(x^2 + a) + x \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + a} + 1 = \frac{x^2 + 2x + a}{x^2 + a}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$$\text{이때 } x^2 + a > 0 \text{이므로 } x^2 + 2x + a \geq 0$$

이차방정식 $x^2 + 2x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - a \leq 0 \quad \therefore a \geq 1$$

따라서 a 의 최솟값은 1이다.

057 답 ①

$$f(x) = ax - \cos 2x \text{에서}$$

$$f'(x) = a + 2 \sin 2x$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

$$\text{이때 } -1 \leq \sin 2x \leq 1 \text{이므로}$$

$$-2 \leq 2 \sin 2x \leq 2$$

$$\therefore a - 2 \leq a + 2 \sin 2x \leq a + 2$$

즉, $a - 2 \leq f'(x) \leq a + 2$ 에서 $a + 2 \leq 0$ 이어야 하므로

$$a \leq -2$$

058 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f(x) = \ln(x^2 + 2) - kx \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 2} - k = \frac{-kx^2 + 2x - 2k}{x^2 + 2}$$

$x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) > f(x_2)$ 가 성립하려면 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

$$\text{이때 } x^2 + 2 > 0 \text{이므로}$$

$$-kx^2 + 2x - 2k \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $k = 0$ 일 때, $2x \leq 0$ 이므로 부등식 ①이 모든 실수 x 에 대하여 성립하는 것은 아니다.

(ii) $k \neq 0$ 일 때, 이차부등식 ①이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $k > 0$ 이어야 하고, 이차방정식 $-kx^2 + 2x - 2k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - 2k^2 \leq 0$$

$$k^2 - \frac{1}{2} \geq 0, \quad \left(k + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(k - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \geq 0$$

$$\therefore k \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because k > 0)$$

(i), (ii)에서 $k \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 k 의 최솟값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

059 ㉔ 4

$$f(x) = (x^2 + ax + 5)e^x \text{에서}$$

$$f'(x) = (2x + a)e^x + (x^2 + ax + 5)e^x \\ = \{x^2 + (a+2)x + 5 + a\}e^x$$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하고 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이때 $e^x > 0$ 이므로 $x^2 + (a+2)x + 5 + a \geq 0$

이차방정식 $x^2 + (a+2)x + 5 + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (a+2)^2 - 4(5+a) \leq 0, \quad a^2 - 16 \leq 0$$

$$(a+4)(a-4) \leq 0 \quad \therefore -4 \leq a \leq 4$$

따라서 a 의 최댓값은 4이다.

060 ㉔ $a \geq \frac{1}{2}$

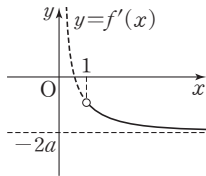
$$f(x) = \ln x - 2ax \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2a$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(1, \infty)$ 에서 감소하려면 $x > 1$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$f'(1) \leq 0$$

$$1 - 2a \leq 0 \quad \therefore a \geq \frac{1}{2}$$



061 ㉔ 3

$$f(x) = ax - 3 \sin x \text{에서 } f'(x) = a - 3 \cos x$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(0, \frac{\pi}{2})$ 에서 증가하려면 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이때 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 < \cos x < 1$ 이므로

$$-3 < -3 \cos x < 0$$

$$\therefore a - 3 < a - 3 \cos x < a$$

즉, $a - 3 < f'(x) < a$ 에서

$$a - 3 \geq 0 \quad \therefore a \geq 3$$

따라서 a 의 최솟값은 3이다.

062 ㉔ 9

$$f(x) = a^2 \ln x - 4x \text{에서 } f'(x) = \frac{a^2}{x} - 4$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(4, \infty)$ 에서 감소하려면 $x > 4$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

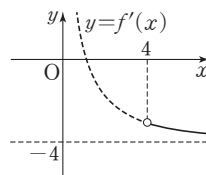
(i) $a=0$ 일 때, $-4 < 0$ 이므로 $f'(x) \leq 0$ 은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때, 오른쪽 그림에서 $f'(4) \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{a^2}{4} - 4 \leq 0, \quad a^2 - 16 \leq 0$$

$$(a+4)(a-4) \leq 0 \quad \therefore -4 \leq a \leq 4$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $-4 \leq a < 0$ 또는 $0 < a \leq 4$



(i), (ii)에서 $-4 \leq a \leq 4$

따라서 정수 a 는 $-4, -3, -2, \dots, 4$ 의 9개이다.

063 ㉔ ④

$$f(x) = (a - x^2)e^{2x} \text{에서}$$

$$f'(x) = -2xe^{2x} + 2(a - x^2)e^{2x} \\ = (-2x^2 - 2x + 2a)e^{2x}$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-2, 0)$ 에서 증가하려면 $-2 < x < 0$ 에서

$f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이때 $e^{2x} > 0$ 이므로 $-2x^2 - 2x + 2a \geq 0$, 즉 $-x^2 - x + a \geq 0$ 이어야 한다.

$g(x) = -x^2 - x + a$ 라 하면 $-2 < x < 0$ 에서

$g(x) \geq 0$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$g(-2) \geq 0, \quad g(0) \geq 0$$

$$g(-2) \geq 0 \text{에서 } -2 + a \geq 0$$

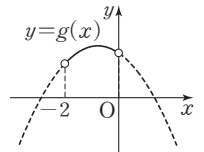
$$\therefore a \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$$g(0) \geq 0 \text{에서 } a \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

㉑, ㉒을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$a \geq 2$$

따라서 a 의 최솟값은 2이다.



064 ㉔ 8

$$f(x) = x + \frac{4}{x-1} \text{에서 } x \neq 1 \text{이고}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} \\ = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 3$

$x \neq 1$ 인 모든 실수에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$	3	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-3 극대	$\searrow$		$\searrow$	5 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(-1) = -3$, 극솟값은 $f(3) = 5$ 이므로 극댓값과 극솟값의 차는

$$5 - (-3) = 8$$

다른 풀이 $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$ 에서

$$f''(x) = \frac{(2x-2) \times (x-1)^2 - (x^2 - 2x - 3) \times 2(x-1)}{(x-1)^4} \\ = \frac{8(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{8}{(x-1)^3}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 3$

$$\therefore f''(-1) = -1 < 0, \quad f''(3) = 1 > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(-1) = -3$, 극솟값은 $f(3) = 5$ 이므로 극댓값과 극솟값의 차는

$$5 - (-3) = 8$$

065 답 -5

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+3} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+3-(x+1) \times 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{-(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	극소	/	극대	\

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이고, $x=-3$ 에서 극소이므로

$$\alpha=1, \beta=-3$$

$$\therefore \alpha+2\beta=-5$$

066 답 ③

$$f(x) = \frac{x^2-6x+10}{x-3} \text{에서 } x \neq 3 \text{이고}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-6)(x-3)-(x^2-6x+10)}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=2 \text{ 또는 } x=4$$

$x \neq 3$ 인 모든 실수에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	2	...	3	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	/	-2 극대	\		\	2 극소	/

따라서 A(2, -2), B(4, 2)이므로

$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + \{2-(-2)\}^2} = 2\sqrt{5}$$

067 답 4

$$f(x) = x + \sqrt{4-x^2} \text{에서 } 0 < x \leq 2 \text{이고}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \sqrt{4-x^2}=x, 4-x^2=x^2$$

$$x^2=2 \quad \therefore x=\sqrt{2} \quad (\because 0 < x \leq 2)$$

$0 < x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\sqrt{2}$	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		/	$2\sqrt{2}$ 극대	\	2

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\sqrt{2}$ 에서 극댓값 $2\sqrt{2}$ 를 가지므로

$$a=\sqrt{2}, b=2\sqrt{2}$$

$$\therefore ab=4$$

068 답 ㄱ, ㄷ

$$\text{ㄱ. } f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{8-x} \text{에서 } x-2 \geq 0, 8-x \geq 0 \text{이므로}$$

$$2 \leq x \leq 8$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 정의역은 $\{x | 2 \leq x \leq 8\}$ 이다.

$$\text{ㄴ. } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{2\sqrt{8-x}} = \frac{\sqrt{8-x}-\sqrt{x-2}}{2\sqrt{x-2}\sqrt{8-x}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \sqrt{8-x}=\sqrt{x-2}$$

$$8-x=x-2 \quad \therefore x=5$$

$2 \leq x \leq 8$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	2	...	5	...	8
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\sqrt{6}$	/	$2\sqrt{3}$ 극대	\	$\sqrt{6}$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(5)=2\sqrt{3}$

ㄷ. ㄴ의 표에 의하여 구간 $[2, 5]$ 에서 증가한다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

069 답 2π

$$f(x) = x \sin x + \cos x \text{에서}$$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \cos x=0$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		/	$\frac{\pi}{2}$ 극대	\	$-\frac{3}{2}\pi$ 극소	/	

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, 극솟값은

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -\frac{3}{2}\pi \text{이므로}$$

$$M = \frac{\pi}{2}, m = -\frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore M - m = 2\pi$$

다른 풀이 $f'(x) = x \cos x$ 에서

$$f''(x) = \cos x - x \sin x$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$$\therefore f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0, f''\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{3}{2}\pi > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, 극솟값은

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -\frac{3}{2}\pi \text{이므로}$$

$$M = \frac{\pi}{2}, m = -\frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore M - m = 2\pi$$

070 ㉡ ④

$f(x) = \frac{e^x}{x}$ 에서 $x \neq 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{e^x \times x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x=1$ ($\because e^x > 0$)

$x \neq 0$ 인 모든 실수에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-		-	0	+
$f(x)$	\		\	e 극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $f(1) = e$

071 ㉡ ④

$f(x) = x \ln x - 3x$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 3 = \ln x - 2$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$\ln x = 2 \quad \therefore x = e^2$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	e^2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = e^2$ 에서 극솟값을 가지므로
 $a = e^2$

072 ㉡ $\frac{3}{4}\pi - 1$

$f(x) = 2x - \tan x$ 에서

$$f'(x) = 2 - \sec^2 x$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$\sec^2 x = 2, \cos^2 x = \frac{1}{2}, \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		/	$\frac{\pi}{2} - 1$ 극대	\	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{4}$ 에서 극댓값 $\frac{\pi}{2} - 1$ 을 가지므로

$$a = \frac{\pi}{4}, b = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\therefore a + b = \frac{3}{4}\pi - 1$$

073 ㉡ $-\frac{32}{e^2}$

$f(x) = (x^2 - 8)e^{-x}$ 에서

$$f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2 - 8)e^{-x} = (-x^2 + 2x + 8)e^{-x}$$

$$= -(x+2)(x-4)e^{-x}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -2$ 또는 $x = 4$ ($\because e^{-x} > 0$)

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	$-4e^2$ 극소	/	$\frac{8}{e^4}$ 극대	\

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(4) = \frac{8}{e^4}$, 극솟값은 $f(-2) = -4e^2$

이므로 극댓값과 극솟값의 곱은

$$\frac{8}{e^4} \times (-4e^2) = -\frac{32}{e^2}$$

074 ㉡ $\neg$

$f(x) = x(\ln x)^2$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = (\ln x)^2 + x \times 2 \ln x \times \frac{1}{x}$$

$$= (\ln x + 2) \ln x$$

$f'(x) = 0$ 에서 $\ln x = -2$ 또는 $\ln x = 0$

$$\therefore x = \frac{1}{e^2} \text{ 또는 } x = 1$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{e^2}$	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		/	$\frac{4}{e^2}$ 극대	\	0 극소	/

ㄱ. $x = \frac{1}{e^2}$ 에서 극댓값을 갖고 $x = 1$ 에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $f(1) = 0$

ㄷ. 구간 $\left[\frac{1}{e^2}, 1\right]$ 에서 감소한다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.

075 ㉡ ①

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos \theta, \frac{dy}{d\theta} = -\sin \theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-\sin \theta}{1 - \cos \theta} \quad (\text{단, } \cos \theta \neq 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{에서 } \sin \theta = 0 \quad \therefore \theta = \pi \quad (\because 0 < \theta < 2\pi)$$

또 $0 < \theta < \pi$ 일 때 $\frac{dy}{dx} < 0$, $\pi < \theta < 2\pi$ 일 때 $\frac{dy}{dx} > 0$ 이므로 주어진 함수는 $\theta = \pi$ 에서 극솟값을 갖는다.

따라서 구하는 극솟값은 $1 + \cos \pi = 0$

076 **답** $\frac{\sqrt{e}}{e-1}$

$f(x) = \sin(\pi \ln x)$ 에서

$$f'(x) = \cos(\pi \ln x) \times \frac{\pi}{x} = \frac{\pi \cos(\pi \ln x)}{x}$$

$x > 1$ 이므로 $f'(x) = 0$ 에서

$$\cos(\pi \ln x) = 0, \pi \ln x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

$$\ln x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$$

$$\therefore x = e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{3}{2}}, e^{\frac{5}{2}}, \dots$$

$x > 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	$e^{\frac{1}{2}}$	...	$e^{\frac{3}{2}}$	...	$e^{\frac{5}{2}}$	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값을 작은 수부터 차례대로 나열하면 $e^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{3}{2}}, e^{\frac{5}{2}}, \dots$ 이므로

$$a_1 = e^{\frac{1}{2}}, a_2 = e^{\frac{3}{2}}, a_3 = e^{\frac{5}{2}}, \dots$$

따라서 $a_n = e^{\frac{2n-1}{2}} = e^{n-\frac{1}{2}}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{2}-n} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e-1}$$

077 **답** ①

$$f(x) = \frac{\cos x}{e^{2x}} = e^{-2x} \cos x \text{이므로}$$

$$f'(x) = -2e^{-2x} \cos x - e^{-2x} \sin x \\ = e^{-2x}(-2 \cos x - \sin x)$$

$$f''(x) = -2e^{-2x}(-2 \cos x - \sin x) + e^{-2x}(2 \sin x - \cos x) \\ = e^{-2x}(3 \cos x + 4 \sin x)$$

함수 $f(x)$ 가 $x=k$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f'(k) = 0, f''(k) < 0$$

$$f'(k) = 0 \text{에서}$$

$$e^{-2k}(-2 \cos k - \sin k) = 0$$

$$-2 \cos k - \sin k = 0 \quad (\because e^{-2k} > 0)$$

$$\therefore \sin k = -2 \cos k \quad \dots\dots ㉠$$

$$f''(k) < 0 \text{에서}$$

$$e^{-2k}(3 \cos k + 4 \sin k) < 0$$

$$\therefore 3 \cos k + 4 \sin k < 0 \quad (\because e^{-2k} > 0) \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$3 \cos k - 8 \cos k < 0, -5 \cos k < 0$$

$$\therefore \cos k > 0$$

㉠에 의하여 $\sin k < 0, \cos k > 0$ 이므로 $\frac{3}{2}\pi < k < 2\pi$

㉠의 양변을 $\cos k$ 로 나누면

$$\frac{\sin k}{\cos k} = -2 \quad \therefore \tan k = -2$$

한편 $\sec^2 k = 1 + \tan^2 k = 1 + (-2)^2 = 5$ 이므로

$$\sec k = \sqrt{5} \quad \left(\because \frac{3}{2}\pi < k < 2\pi \right)$$

$$\therefore \cos k = \frac{1}{\sec k} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

078 **답** ①

$$f(x) = \frac{4x^2 + ax + b}{x^2 + 1} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{(8x+a)(x^2+1) - (4x^2+ax+b) \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ = \frac{-ax^2 + 2(4-b)x + a}{(x^2+1)^2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값 5를 가지므로 $f'(1)=0, f(1)=5$

$$f'(1)=0 \text{에서 } \frac{8-2b}{4} = 0 \quad \therefore b=4$$

$$f(1)=5 \text{에서 } \frac{4+a+b}{2} = 5, a+b=6 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore a-b=2-4=-2$$

079 **답** $\frac{3}{e}$

$$f(x) = (x^2 + ax + a)e^{-x} \text{에서}$$

$$f'(x) = (2x+a)e^{-x} - (x^2+ax+a)e^{-x} \\ = \{-x^2 + (2-a)x\}e^{-x}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극댓값 b 를 가지므로 $f'(1)=0, f(1)=b$

$$f'(1)=0 \text{에서 } \frac{1-a}{e} = 0 \quad \therefore a=1$$

$$f(1)=b \text{에서 } \frac{1+2a}{e} = b \quad \therefore b = \frac{3}{e}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{3}{e}$$

080 **답** ⑤

$$f(x) = a \sin x + b \cos x \text{에서 } f'(x) = a \cos x - b \sin x$$

함수 $f(x)$ 가 $x = \frac{4}{3}\pi$ 에서 극솟값 -2 를 가지므로

$$f'\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 0, f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -2$$

$$f'\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 0 \text{에서}$$

$$-\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \quad \therefore a - \sqrt{3}b = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -2 \text{에서}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b = -2 \quad \therefore \sqrt{3}a + b = 4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \sqrt{3}, b = 1$

따라서 $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ 이므로 $f'(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \sqrt{3} \cos x - \sin x = 0, \sqrt{3} \cos x = \sin x, \tan x = \sqrt{3}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{4}{3}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$

081 [답] ③

$f(x)=ax^2+bx+\ln x$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=2ax+b+\frac{1}{x}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=\frac{1}{2}$, $x=1$ 에서 극값을 가지므로

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0, f'(1)=0$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \text{에서 } a+b+2=0 \quad \therefore a+b=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f'(1)=0 \text{에서 } 2a+b+1=0 \quad \therefore 2a+b=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$

따라서 $g(x)=\sin x+\cos x+x$ 이므로

$$g'(x)=\cos x-\sin x+1$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } \cos x=\sin x-1$$

양변을 각각 제곱하면

$$\cos^2 x=(\sin x-1)^2, 1-\sin^2 x=\sin^2 x-2\sin x+1$$

$$2\sin^2 x-2\sin x=0, 2\sin x(\sin x-1)=0$$

$$\sin x=0 \text{ 또는 } \sin x=1$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\pi (\because 0<x<2\pi)$$

$0<x<2\pi$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π	...	2π
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$		$\nearrow$	$1+\frac{\pi}{2}$ 극대	$\searrow$	$-1+\pi$ 극소	$\nearrow$	

따라서 함수 $g(x)$ 의 극솟값은 $g(\pi)=-1+\pi$

082 [답] $a<-6$ 또는 $a>6$

$f(x)=\frac{3x+a}{x^2-4}$ 에서 $x^2\neq 4$, 즉 $x\neq \pm 2$ 이고

$$f'(x)=\frac{3(x^2-4)-(3x+a)\times 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-3x^2-2ax-12}{(x^2-4)^2}$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $-3x^2-2ax-12=0$ 이 $x\neq \pm 2$ 인 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $a\neq \pm 6$

이차방정식 $-3x^2-2ax-12=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-36>0, (a+6)(a-6)>0$$

$$\therefore a<-6 \text{ 또는 } a>6$$

083 [답] ④

$f(x)=(3x-a)e^{2x^2}$ 에서

$$f'(x)=3e^{2x^2}+(3x-a)e^{2x^2}\times 4x=(12x^2-4ax+3)e^{2x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x)\geq 0 \text{ 이어야 한다.}$$

이때 $e^{2x^2}>0$ 이므로 이차방정식 $12x^2-4ax+3=0$ 은 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $12x^2-4ax+3=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2a)^2-36\leq 0, a^2-9\leq 0$$

$$(a+3)(a-3)\leq 0 \quad \therefore -3\leq a\leq 3$$

따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 7개이다.

084 [답] ⑤

$f(x)=x-3\ln x-\frac{a}{x}$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=1-\frac{3}{x}+\frac{a}{x^2}=\frac{x^2-3x+a}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $x^2-3x+a=0$ 이 $x>0$ 인 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2-3x+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-3)^2-4a>0 \quad \therefore a<\frac{9}{4}$$

(ii) (두 근의 합) $=3>0$

(iii) (두 근의 곱) $=a>0$

(i), (ii), (iii)에서 $0<a<\frac{9}{4}$

따라서 정수 a 는 1, 2이므로 구하는 합은 $1+2=3$

085 [답] ①

$f(x)=kx+4\cos x$ 에서 $f'(x)=k-4\sin x$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x)\leq 0 \text{ 또는 } f'(x)\geq 0 \text{ 이어야 한다.}$$

이때 $-1\leq \sin x\leq 1$ 이므로

$$-4\leq k-4\sin x\leq 4$$

$$\therefore k-4\leq k-4\sin x\leq k+4$$

즉, $k-4\leq f'(x)\leq k+4$ 에서 $k+4\leq 0$ 또는 $k-4\geq 0$ 이어야 하므로 $k\leq -4$ 또는 $k\geq 4$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=4$ 이므로 $\alpha\beta=-16$

086 [답] ④

$f(x)=(x^3-4x^2+a)e^{-x}$ 에서

$$f'(x)=(3x^2-8x)e^{-x}-(x^3-4x^2+a)e^{-x} \\ =(-x^3+7x^2-8x-a)e^{-x}$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식

$-x^3+7x^2-8x-a=0$, 즉 $x^3-7x^2+8x+a=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$g(x)=x^3-7x^2+8x+a$ 라 하면

$$g'(x)=3x^2-14x+8=(3x-2)(x-4)$$

$$g'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=\frac{2}{3} \text{ 또는 } x=4$$

삼차방정식 $g(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

(극댓값) $\times$ (극솟값) <0 이어야 하므로

$$g\left(\frac{2}{3}\right)g(4)<0, \left(\frac{68}{27}+a\right)(-16+a)<0$$

$$\therefore -\frac{68}{27}<a<16$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0, \dots, 15$ 의 18개이다.

087 답 ②

$$f(x) = \ln(x-2) + 1 \text{ 이라 하면 } f'(x) = \frac{1}{x-2}$$

점 (3, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(3) = 1$ 이므로 접선의 방정식은 $y - 1 = x - 3 \quad \therefore y = x - 2$

따라서 $a = 1, b = -2$ 이므로 $a + b = -1$

088 답 $\frac{1}{4e^2}$

$$f(x) = 2e^x \text{ 이라 하면 } f'(x) = 2e^x$$

점 (1, 2e)에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 2e$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 2e = 2e(x - 1) \quad \therefore y = 2ex$$

이 직선이 곡선 $y = 2\sqrt{x-k}$ 에 접하므로 $2\sqrt{x-k} = 2ex$ 에서

$$x - k = e^2 x^2 \quad \therefore e^2 x^2 - x + k = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-1)^2 - 4e^2 k = 0$$

$$4e^2 k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{4e^2}$$

089 답 16

$$f(x) = \frac{x-1}{x+3} \text{ 이라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{(x+3) - (x-1)}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2}$$

점점의 좌표를 $(t, \frac{t-1}{t+3})$ 이라 하면 접선의 기울기가 4이므로

$$f'(t) = 4 \text{에서}$$

$$\frac{4}{(t+3)^2} = 4, (t+3)^2 = 1$$

$$t+3 = \pm 1 \quad \therefore t = -4 \text{ 또는 } t = -2$$

따라서 점점의 좌표는 $(-4, 5)$ 또는 $(-2, -3)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 5 = 4(x + 4) \text{ 또는 } y + 3 = 4(x + 2)$$

$$\therefore y = 4x + 21 \text{ 또는 } y = 4x + 5$$

이때 $a > b$ 이므로 $a = 21, b = 5$

$$\therefore a - b = 16$$

090 답 $-e$

$$f(x) = e^x + ax \text{ 라 하면 } f'(x) = e^x + a$$

곡선 $y = f(x)$ 가 x 축과 점 $(t, 0)$ 에서 접한다고 하면 $f(t) = 0$ 에서 $e^t + at = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

또 점 $(t, 0)$ 에서의 접선의 기울기가 0이므로 $f'(t) = 0$ 에서

$$e^t + a = 0 \quad \therefore a = -e^t \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$e^t - e^t \times t = 0, e^t(1 - t) = 0$$

$$\therefore t = 1 (\because e^t > 0)$$

이를 ②에 대입하면 $a = -e$

091 답 ⑤

$$f(x) = e^{-x-1} \text{ 이라 하면}$$

$$f'(x) = -e^{-x-1}$$

점점의 좌표를 (t, e^{-t-1}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = -e^{-t-1} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - e^{-t-1} = -e^{-t-1}(x - t)$$

$$\therefore y = -e^{-t-1}x + (t+1)e^{-t-1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = (t+1)e^{-t-1} \quad \therefore t = -1 (\because e^{-t-1} > 0)$$

이를 ①에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$$y = -x$$

이 직선이 점 $(-2, a)$ 를 지나므로 $a = 2$

092 답 $a < -\sqrt{3}$ 또는 $a > \sqrt{3}$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \text{ 이라 하면}$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

점점의 좌표를 $(t, \frac{1}{t^2+1})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = -\frac{2t}{(t^2+1)^2} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - \frac{1}{t^2+1} = -\frac{2t}{(t^2+1)^2}(x - t)$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$-\frac{1}{t^2+1} = -\frac{2t}{(t^2+1)^2}(a - t)$$

$(t^2+1)^2 \neq 0$ 이므로 양변에 $(t^2+1)^2$ 을 곱하여 정리하면

$$3t^2 - 2at + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(a, 0)$ 에서 곡선 $y = \frac{1}{x^2+1}$ 에 서로 다른 두 개의 접선을 그을

수 있으려면 이차방정식 ①이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

①의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - 3 > 0, (a + \sqrt{3})(a - \sqrt{3}) > 0$$

$$\therefore a < -\sqrt{3} \text{ 또는 } a > \sqrt{3}$$

093 답 ③

$$f(x) = 2\cos^2 x + k, g(x) = 2\cos x \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = -4\sin x \cos x, g'(x) = -2\sin x$$

두 곡선이 $x = t$ 인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서}$$

$$2\cos^2 t + k = 2\cos t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서}$$

$$-4\sin t \cos t = -2\sin t, \sin t(1 - 2\cos t) = 0$$

$$\therefore \cos t = \frac{1}{2} (\because 0 < t < \frac{\pi}{2})$$

이를 ①에 대입하면

$$\frac{1}{2} + k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

094 ㉮ 4√2

$$\frac{dx}{d\theta} = -2\sqrt{3} \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 2 \cos \theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{2 \cos \theta}{-2\sqrt{3} \sin \theta} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cot \theta$$

접선의 기울기가 -1이므로 $-\frac{1}{\sqrt{3}} \cot \theta = -1$ 에서

$$\cot \theta = \sqrt{3} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ 일 때 $x = 2\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} = 3$, $y = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 1 = -(x - 3)$$

$$\therefore y = -x + 4$$

따라서 A(4, 0), B(0, 4)이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-4)^2 + (4-0)^2} = 4\sqrt{2}$$

095 ㉮ ③

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \quad (\text{단, } x \neq 0)$$

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ 에 $x=9$ 를 대입하면

$$3 + \sqrt{y} = 4 \quad \therefore y = 1$$

따라서 점 (9, 1)에서의 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 9)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x + 4$$

이 접선의 x 절편은 12, y 절편은 4이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 4 = 24$$

096 ㉮ $-\frac{2}{5}$

$g(-2) = k$ 라 하면 $f(k) = -2$ 이므로

$$k^3 + 2k + 1 = -2, \quad k^3 + 2k + 3 = 0$$

$$(k+1)(k^2 - k + 3) = 0$$

$$\therefore k = -1 \quad (\because k^2 - k + 3 > 0)$$

이때 $f'(x) = 3x^2 + 2$ 이므로 $f'(-1) = 5$

$$\therefore g'(-2) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{5}$$

즉, 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(-2, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y + 1 = \frac{1}{5}(x + 2)$$

$$\therefore y = \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$$

따라서 $a = \frac{1}{5}$, $b = -\frac{3}{5}$ 이므로 $a + b = -\frac{2}{5}$

097 ㉮ ⑤

$f(x) = x^2 e^{-x}$ 에서

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$ ($\because e^{-x} > 0$)

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 가 증가하는 x 의 값의 범위가 $0 \leq x \leq 2$ 이므로
 $a=0$, $b=2$ $\therefore b-a=2$

098 ㉮ ②

$f(x) = (1+ax^2)e^{-x}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2axe^{-x} - (1+ax^2)e^{-x} \\ &= (-ax^2 + 2ax - 1)e^{-x} \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이때 $e^{-x} > 0$ 이므로 $-ax^2 + 2ax - 1 \leq 0$ ㉠

(i) $a=0$ 일 때, $-1 \leq 0$ 이므로 부등식 ㉠은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때, 이차부등식 ㉠이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $a > 0$ 이어야 하고, 이차방정식 $-ax^2 + 2ax - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - a \leq 0, \quad a(a-1) \leq 0$$

$$\therefore 0 < a \leq 1 \quad (\because a > 0)$$

(i), (ii)에서 $0 \leq a \leq 1$

따라서 정수 a 는 0, 1의 2개이다.

099 ㉮ 1

$f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x^2 + 1}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2)(x^2+1) - (x^2+2x+a) \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 2(1-a)x + 2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-1, 1)$ 에서 증가하려면 $-1 < x < 1$ 에서

$f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이때 $(x^2+1)^2 > 0$ 이므로 $-2x^2 + 2(1-a)x + 2 \geq 0$ 이어야 한다.

$g(x) = -2x^2 + 2(1-a)x + 2$ 라 하면 $-1 < x < 1$ 에서 $g(x) \geq 0$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$g(-1) \geq 0, \quad g(1) \geq 0$$

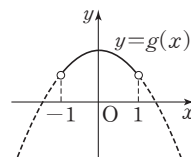
$$g(-1) \geq 0 \text{에서 } -2 - 2(1-a) + 2 \geq 0$$

$$\therefore a \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g(1) \geq 0 \text{에서 } -2 + 2(1-a) + 2 \geq 0$$

$$\therefore a \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 a 의 값은 1이다.



100 답 ④

$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$ 에서 $x > 2$ 이고

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x-2} - (x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x-2}}}{x-2} = \frac{x-5}{2\sqrt{x-2}(x-2)}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 5$

$x > 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	2	...	5	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$2\sqrt{3}$ 극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $f(5) = 2\sqrt{3}$

101 답 ①

$f(x) = e^x(\sin x + \cos x)$ 에서

$$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$$

$f'(x) = 0$ 에서 $\cos x = 0$ ($\because e^x > 0$)

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		/	$e^{\frac{\pi}{2}}$ 극대	\	$-e^{\frac{3}{2}\pi}$ 극소	/	

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$, 극솟값은

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -e^{\frac{3}{2}\pi} \text{이므로 극댓값과 극솟값의 곱은}$$

$$e^{\frac{\pi}{2}} \times (-e^{\frac{3}{2}\pi}) = -e^{2\pi}$$

102 답 1

$f(x) = n \ln x + \frac{n+1}{x} - n$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{n}{x} - \frac{n+1}{x^2} = \frac{nx - (n+1)}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = \frac{n+1}{n}$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{n+1}{n}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$n \ln \frac{n+1}{n}$ 극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은

$$a_n = f\left(\frac{n+1}{n}\right) = n \ln \frac{n+1}{n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1$$

103 답 ⑤

$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x+1}$ 에서

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x+1) - (x^2 + ax + b)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + a - b}{(x+1)^2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값 -2 를 가지므로

$$f'(1) = 0, f(1) = -2$$

$f'(1) = 0$ 에서

$$\frac{3+a-b}{4} = 0 \quad \therefore a-b = -3 \quad \dots\dots ㉠$$

$f(1) = -2$ 에서

$$\frac{1+a+b}{2} = -2 \quad \therefore a+b = -5 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -4, b = -1$$

$$\therefore ab = 4$$

104 답 ④

$f(x) = \frac{a}{x} - 2x + a \ln x$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} - 2 + \frac{a}{x} = \frac{-2x^2 + ax - a}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식

$-2x^2 + ax - a = 0$ 이 $x > 0$ 인 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $-2x^2 + ax - a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 8a > 0, a(a-8) > 0$$

$$\therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 8$$

$$(ii) \text{ (두 근의 합)} = \frac{a}{2} > 0 \quad \therefore a > 0$$

$$(iii) \text{ (두 근의 곱)} = \frac{a}{2} > 0 \quad \therefore a > 0$$

(i), (ii), (iii)에서 $a > 8$

따라서 정수 a 의 최솟값은 9이다.

105 답 $-1 \leq a \leq 1$

$f(x) = x + a \sin x$ 에서

$$f'(x) = 1 + a \cos x$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$f'(x) \leq 0$ 또는 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$-|a| \leq a \cos x \leq |a|$$

$$\therefore 1 - |a| \leq 1 + a \cos x \leq 1 + |a|$$

즉, $1 - |a| \leq f'(x) \leq 1 + |a|$ 에서 $1 + |a| > 0$ 이므로 $1 - |a| \geq 0$ 이어야 한다.

$$1 - |a| \geq 0 \text{에서 } |a| \leq 1$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 1$$



001 답 ⑤

$f(x) = x - 2\sin x$ 라 하면

$$f'(x) = 1 - 2\cos x, \quad f''(x) = 2\sin x$$

곡선 $y=f(x)$ 가 위로 볼록하려면 $f''(x) < 0$ 이어야 하므로

$$2\sin x < 0, \quad \sin x < 0$$

$$\therefore \pi < x < 2\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 가 위로 볼록한 구간은 $(\pi, 2\pi)$ 이다.

002 답 ③

$f(x) = \ln(x^2 + 1)$ 이라 하면

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2 + 1)^2}$$

$f''(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 1$

$x < -1, x > 1$ 에서 $f''(x) < 0$

$-1 < x < 1$ 에서 $f''(x) > 0$

즉, $x = -1, x = 1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x 좌표는 $-1, 1$ 이다.

따라서 모든 변곡점의 x 좌표의 합은 $-1 + 1 = 0$

003 답 18

$f(x) = x^2 + ax + b \ln x$ 에서

$$f'(x) = 2x + a + \frac{b}{x}, \quad f''(x) = 2 - \frac{b}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=4$ 에서 극값을 가지므로 $f'(4) = 0$ 에서

$$8 + a + \frac{b}{4} = 0 \quad \therefore 4a + b = -32 \quad \dots\dots ㉠$$

또 변곡점의 x 좌표가 2이므로 $f''(2) = 0$ 에서

$$2 - \frac{b}{4} = 0 \quad \therefore b = 8$$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $a = -10$

$$\therefore b - a = 8 - (-10) = 18$$

004 답 ㄴ, ㄷ

$f'(x), f''(x)$ 의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...	0	...	b	...	c	...	d	...
$f'(x)$	-	0	-	-	-	0	+	+	+	0	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+	+	+	0	-	0	+

ㄱ. $x=b$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌므로 $f(x)$ 가 극값을 갖는 x 의 값은 1개이다.

ㄴ. $x=a, x=0, x=c, x=d$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점은 4개이다.

ㄷ. 구간 $(0, c)$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

005 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

$f(x) = e^{-x^2}$ 에서

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)^2 e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$$

$$= 2(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1)e^{-x^2}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 0$ ($\because e^{-x^2} > 0$)

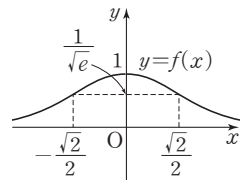
$f''(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ 변곡점	↘	1 극대	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ 변곡점	↗

또 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 치역은 $\{y | 0 < y \leq 1\}$ 이다.

ㄴ. $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점은 점

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right), \text{ 점 } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \text{의 2개이다.}$$

ㄷ. 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$$

이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

ㄹ. 구간 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 이 구간에서 위로 볼록하다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

006 답 $\frac{9}{8}$

$f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+2}$ 에서

$$f'(x) = \frac{x^2+x+2-(x-1)(2x+1)}{(x^2+x+2)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+x+2)^2}$$

$$= \frac{-(x+1)(x-3)}{(x^2+x+2)^2}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ ($\because -2 \leq x \leq 2$)

구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-\frac{3}{4}$	↘	-1 극소	↗	$\frac{1}{8}$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(2) = \frac{1}{8}$, 최솟값은 $f(-1) = -1$

이므로 구하는 차는

$$\frac{1}{8} - (-1) = \frac{9}{8}$$

007 답 7

$f(x) = ax - a \sin 2x$ 에서

$$f'(x) = a - 2a \cos 2x = a(1 - 2 \cos 2x)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \cos 2x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{\pi}{6} \left(\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	\	$\frac{a}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}a$ 극소	/	$\frac{a}{2}\pi$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{2}\pi$ 이므로

$$\frac{a}{2}\pi = \frac{7}{2}\pi \quad \therefore a = 7$$

008 답 $\frac{1}{e}$

두 곡선 $y = \frac{1}{2}e^x$, $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ 위의 두 점을 각각 A, D라 하고, x 축 위에 있는 직사각형의 한 변을 BC라 하자.

점 D의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{2}e^{-t}\right)$ ($t > 0$)이라

$$\text{하면 } \overline{AD} = 2t, \overline{CD} = \frac{1}{2}e^{-t}$$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = 2t \times \frac{1}{2}e^{-t} = te^{-t}$$

$$\therefore S'(t) = e^{-t} - te^{-t} = (1-t)e^{-t}$$

$$S'(t) = 0 \text{인 } t \text{의 값은 } t = 1 \left(\because e^{-t} > 0 \right)$$

$t > 0$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	1	...
$S'(t)$		+	0	-
$S(t)$		/	$\frac{1}{e}$ 극대	\

따라서 $S(t)$ 의 최댓값은 $S(1) = \frac{1}{e}$ 이므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{e}$ 이다.

009 답 ①

$f(x) = 2x \ln x - x^2$ 이라 하면 $x > 0$ 이고

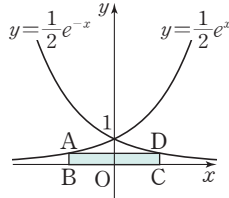
$$f'(x) = 2 \ln x + 2x \times \frac{1}{x} - 2x = 2 \ln x + 2 - 2x$$

$$f''(x) = \frac{2}{x} - 2$$

곡선 $y = f(x)$ 가 아래로 볼록하려면 $f''(x) > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{2}{x} - 2 > 0, x < 1 \quad \therefore 0 < x < 1$$

따라서 곡선 $y = f(x)$ 가 아래로 볼록한 구간은 $(0, 1)$ 이다.



010 답 $\frac{\pi}{2}$

$f(x) = \sin^2 x$ 라 하면

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x, f''(x) = 2 \cos 2x$$

곡선 $y = f(x)$ 가 위로 볼록하려면 $f''(x) < 0$ 이어야 하므로

$$2 \cos 2x < 0, \cos 2x < 0$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi \left(\because 0 < x < \pi \right)$$

$$\text{따라서 } a = \frac{\pi}{4}, b = \frac{3}{4}\pi \text{이므로 } b - a = \frac{\pi}{2}$$

011 답 $-\frac{1}{10}$

$f(x) = \ln(x^2 + 4)$ 에서

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2(x^2 + 4) - 2x \times 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-2x^2 + 8}{(x^2 + 4)^2} \\ &= \frac{-2(x+2)(x-2)}{(x^2 + 4)^2} \end{aligned}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래로 볼록하려면 $f''(x) > 0$ 이어야 하므로

$$-2(x+2)(x-2) > 0, (x+2)(x-2) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 2$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 구간 $(-2, 2)$ 에서 아래로 볼록하다.

즉, $-2 \leq a \leq 1$ 이므로 정수 a 는 $-2, -1, 0, 1$ 이다.

$$\therefore f'(-2) = -\frac{1}{2}, f'(-1) = -\frac{2}{5}, f'(0) = 0, f'(1) = \frac{2}{5}$$

따라서 $f'(a)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은

$$\frac{2}{5} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{10}$$

012 답 ④

$f(x) = (ax^2 + 3)e^x$ 이라 하면

$$f'(x) = 2axe^x + (ax^2 + 3)e^x = (ax^2 + 2ax + 3)e^x$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2ax + 2a)e^x + (ax^2 + 2ax + 3)e^x \\ &= (ax^2 + 4ax + 2a + 3)e^x \end{aligned}$$

곡선 $y = f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 아래로 볼록하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f''(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$$\text{이때 } e^x > 0 \text{이므로 } ax^2 + 4ax + 2a + 3 \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(i) $a = 0$ 일 때, $3 \geq 0$ 이므로 부등식 ①이 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때

이차부등식 ①이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $a > 0$ 이어야 하고, 이차방정식 $ax^2 + 4ax + 2a + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2a)^2 - a(2a + 3) \leq 0, 2a^2 - 3a \leq 0$$

$$a(2a - 3) \leq 0 \quad \therefore 0 < a \leq \frac{3}{2} \left(\because a > 0 \right)$$

$$(i), (ii) \text{에서 } 0 \leq a \leq \frac{3}{2}$$

따라서 상수 a 의 최댓값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

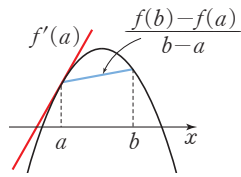
013 **답** ㄷ, ㄴ

$f(b) < f'(a)(b-a) + f(a)$ 에서

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(a)$$

이때 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 는 함수 $y=f(x)$ 에서

x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 평균 변화율이고, $f'(a)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기
이므로 주어진 부등식을 만족시키려면
곡선 $y=f(x)$ 는 위의 그림과 같이 $0 < x < 1$ 에서 위로 볼록해야 한다.



즉, $0 < x < 1$ 에서 $f''(x) < 0$ 이어야 한다.

ㄱ. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$

$0 < x < 1$ 에서 $f''(x) > 0$

ㄴ. $f'(x) = e^x + e^{-x}$, $f''(x) = e^x - e^{-x}$

$0 < x < 1$ 에서 $e^x > e^{-x}$ 이므로 $f''(x) > 0$

ㄷ. $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$0 < x < 1$ 에서 $f''(x) < 0$

ㄹ. $f'(x) = 1 - \sin x$, $f''(x) = -\cos x$

$0 < x < 1$ 에서 $f''(x) < 0$

따라서 보기의 함수 중 주어진 부등식을 만족시키는 것은 ㄷ, ㄴ이다.

014 **답** ⑤

$f(x) = (x^2+1)e^{-x}$ 이라 하면

$$f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2+1)e^{-x}$$

$$= (-x^2+2x-1)e^{-x}$$

$$f''(x) = (-2x+2)e^{-x} - (-x^2+2x-1)e^{-x}$$

$$= (x^2-4x+3)e^{-x} = (x-1)(x-3)e^{-x}$$

$$f''(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \text{ 또는 } x=3 \text{ } (\because e^{-x} > 0)$$

$$x < 1, x > 3 \text{에서 } f''(x) > 0$$

$$1 < x < 3 \text{에서 } f''(x) < 0$$

즉, $x=1, x=3$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x 좌표는 1, 3이다.

따라서 모든 변곡점의 x 좌표의 합은

$$1+3=4$$

015 **답** 2

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 3x$ 라 하면

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 3$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x+1)(x-1)$$

$$f''(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

$$x < -1, x > 1 \text{에서 } f''(x) > 0$$

$$-1 < x < 1 \text{에서 } f''(x) < 0$$

따라서 $x=-1, x=1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 2이다.

016 **답** ③

$f(x) = 2x^2 + \ln x$ 라 하면 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = 4x + \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = 4 - \frac{1}{x^2} = \frac{(2x+1)(2x-1)}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = \frac{1}{2} \text{ } (\because x > 0)$$

$$0 < x < \frac{1}{2} \text{에서 } f''(x) < 0$$

$$x > \frac{1}{2} \text{에서 } f''(x) > 0$$

즉, $x = \frac{1}{2}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x 좌표는 $\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 변곡점에서의 접선의 기울기는 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2+2=4$

017 **답** $\frac{1}{4}$

$f(x) = \frac{1}{x^2+3}$ 이라 하면

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2(x^2+3)^2 - 2x \times 2(x^2+3) \times 2x}{(x^2+3)^4}$$

$$= \frac{6x^2-6}{(x^2+3)^3} = \frac{6(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$$

$$f''(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

$$x < -1, x > 1 \text{에서 } f''(x) > 0$$

$$-1 < x < 1 \text{에서 } f''(x) < 0$$

즉, $x=-1, x=1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 두 변곡점의 좌표는 $\left(-1, \frac{1}{4}\right), \left(1, \frac{1}{4}\right)$ 이다.

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

018 **답** 54

$$f(2) = f'(2) = 0 \text{이므로}$$

$f(x) = (x-2)^2(x+a)$ (a 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 2(x-2)(x+a) + (x-2)^2$$

$$f''(x) = 2(x+a) + 2(x-2) + 2(x-2)$$

$$= 6x + 2a - 8$$

$$f''(1) = 12 \text{에서 } 6+2a-8=12$$

$$2a=14 \quad \therefore a=7$$

$$\therefore f''(x) = 6x+6$$

$$f''(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1$$

$$x < -1 \text{에서 } f''(x) < 0, x > -1 \text{에서 } f''(x) > 0$$

즉, $x=-1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 점 $(-1, f(-1))$ 이 변곡점이다.

따라서 변곡점의 y 좌표는

$$f(-1) = (-1-2)^2(-1+7) = 54$$

019 답 ④

$f(x)=e^{-x}\cos x$ 라 하면

$$f'(x)=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x=-e^{-x}(\sin x+\cos x)$$

$$f''(x)=e^{-x}(\sin x+\cos x)-e^{-x}(\cos x-\sin x) \\ =2e^{-x}\sin x$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } \sin x=0 (\because e^{-x}>0)$$

$$\therefore x=k\pi (k=1, 2, 3, \dots)$$

이때 $x=k\pi (k=1, 2, 3, \dots)$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x 좌표는

$$x_1=\pi, x_2=2\pi, x_3=3\pi, x_4=4\pi, \dots$$

따라서 변곡점의 y 좌표는

$$y_1=-e^{-\pi}, y_2=e^{-2\pi}, y_3=-e^{-3\pi}, y_4=e^{-4\pi}, \dots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} y_{2n}=y_2+y_4+y_6+\dots \\ =e^{-2\pi}+e^{-4\pi}+e^{-6\pi}+\dots \\ =\frac{e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}=\frac{1}{e^{2\pi}-1}$$

020 답 $\frac{1}{2}$

$f(x)=a\sin x+\cos x+bx$ 에서

$$f'(x)=a\cos x-\sin x+b$$

$$f''(x)=-a\sin x-\cos x$$

함수 $f(x)$ 가 $x=\frac{\pi}{6}$ 에서 극대이므로 $f'(\frac{\pi}{6})=0$ 에서

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}+b=0 \quad \therefore \sqrt{3}a+2b=1 \quad \dots\dots ㉠$$

변곡점의 x 좌표가 $\frac{\pi}{2}$ 이므로 $f''(\frac{\pi}{2})=0$ 에서

$$-a=0 \quad \therefore a=0$$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=\frac{1}{2}$

$$\therefore a+b=\frac{1}{2}$$

021 답 ④

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 에서

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$$f''(x)=6x+2a$$

$x=1$ 인 점에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(1)=4$ 에서

$$3+2a+b=4$$

$$\therefore 2a+b=1 \quad \dots\dots ㉠$$

변곡점의 좌표가 $(-1, 12)$ 이므로

$$f(-1)=12, f''(-1)=0$$

$$f(-1)=12 \text{에서}$$

$$-1+a-b+c=12$$

$$\therefore a-b+c=13 \quad \dots\dots ㉡$$

$$f''(-1)=0 \text{에서}$$

$$-6+2a=0 \quad \therefore a=3$$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-5$

$a=3, b=-5$ 를 ㉡에 대입하여 풀면 $c=5$

$$\therefore a+b+c=3$$

022 답 $\frac{e}{2}$

$f(x)=(\ln ax)^2$ 이라 하면 $x>0$ 이고

$$f'(x)=2\ln ax \times \frac{1}{ax} \times a = \frac{2\ln ax}{x}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x} \times x - 2\ln ax}{x^2} = \frac{2(1-\ln ax)}{x^2}$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } \ln ax=1, ax=e \quad \therefore x=\frac{e}{a}$$

$$0 < x < \frac{e}{a} \text{에서 } f''(x) > 0, x > \frac{e}{a} \text{에서 } f''(x) < 0$$

즉, $x=\frac{e}{a}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(\frac{e}{a}, 1)$ 이다.

이때 변곡점이 직선 $y=2x-3$ 위에 있으므로

$$1=\frac{2e}{a}-3, \frac{2e}{a}=4 \quad \therefore a=\frac{e}{2}$$

023 답 5

$f(x)=ax^2+6\sin x+3$ 이라 하면

$$f'(x)=2ax+6\cos x$$

$$f''(x)=2a-6\sin x$$

곡선 $y=f(x)$ 가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$ 이 실근을 갖고, 그 근의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌어야 한다.

$$f''(x)=0 \text{에서 } 2a-6\sin x=0 \quad \therefore \sin x=\frac{a}{3}$$

이때 이 방정식이 실근을 가지려면 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq \frac{a}{3} \leq 1 \quad \therefore -3 \leq a \leq 3$$

$$a=-3 \text{이면 } f''(x)=-6-6\sin x \leq 0$$

$$a=3 \text{이면 } f''(x)=6-6\sin x \geq 0$$

즉, $a=-3, a=3$ 이면 $f''(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 곡선 $y=f(x)$ 가 변곡점을 가질 수 없다.

따라서 a 의 값의 범위는 $-3 < a < 3$ 이므로 구하는 정수 a 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.

024 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

$f'(x), f''(x)$ 의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	0	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$	f	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

ㄱ. 구간 (d, f) 에서 $f'(x)<0$ 이므로 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.

ㄴ. $x=d$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 $+$ 에서 $-$ 로 바뀌므로 $f(x)$ 가 극대가 되는 x 의 값은 1개이다.

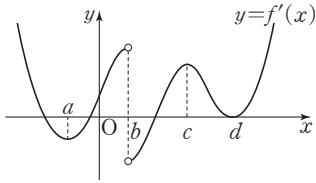
ㄷ. $x=b, x=0, x=c, x=e$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점은 4개이다.

ㄹ. 구간 (c, e) 에서 $f''(x)<0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 이 구간에서 위로 볼록하다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

025 답 3

아래 그림과 같이 a, b, c, d 를 정하고 $f''(x)$ 의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.



x	...	a	...	b	...	c	...	d	...
$f''(x)$	-	0	+		+	0	-	0	+

$x=a, x=c, x=d$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점은 3개이다.

026 답 C, F

여섯 개의 점 A, B, C, D, E, F의 x 좌표를 각각 a, b, c, d, e, f 라 하고 $f'(x), f''(x)$ 의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	a	b	c	d	e	f
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-

따라서 $f'(x)f''(x)>0$ 인 점은 C, F이다.

027 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

$f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ 에서

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x \times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-4x(x^2+1)^2-(-2x^2+2) \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}=\frac{4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

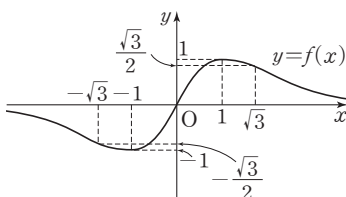
$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\sqrt{3}$	...	-1	...	0	...	1	...	$\sqrt{3}$	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 변곡점	↘	-1 극소	↗	0 변곡점	↗	1 극대	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 변곡점	↘

또 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $x=1$ 에서 극대이다.

ㄴ. $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점은 점 $(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, 점 $(0, 0)$,

점 $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 의 3개이다.

ㄷ. 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x)=\frac{-2x}{(-x)^2+1}=-\frac{2x}{x^2+1}=-f(x)$$

이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄹ. $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$ 이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

028 답 ㄱ, ㄷ

$f(x)=(1-x)e^x$ 에서

$$f'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$$

$$f''(x)=-e^x-xe^x=-(x+1)e^x$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$

$f''(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	+	+	+	0	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-
$f(x)$	↗	$\frac{2}{e}$ 변곡점	↘	1 극대	↘

또 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=-\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0$ 이

므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

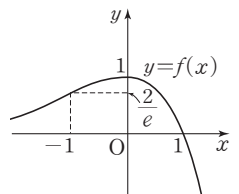
ㄱ. 치역은 $\{y|y \leq 1\}$ 이다.

ㄴ. $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점의 좌표

는 $(-1, \frac{2}{e})$ 이다.

ㄷ. $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선은 x 축이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.



029 답 ④

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - (1-\ln x) \times 2x}{x^4}$$

$$=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=e$

$$f''(x)=0 \text{에서 } 2\ln x-3=0, \ln x=\frac{3}{2}$$

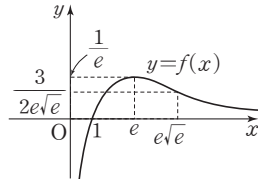
$$\therefore x=e\sqrt{e}$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	e	...	$e\sqrt{e}$	...
$f'(x)$		+	0	-	-	-
$f''(x)$		-	-	-	0	+
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$ 극대	↘	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$ 변곡점	↘

또 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 극댓값은 $f(e) = \frac{1}{e}$ 이다.

② 치역은 $\{y \mid y \leq \frac{1}{e}\}$ 이다.

③ $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점은 점 $(e\sqrt{e}, \frac{3}{2e\sqrt{e}})$ 의 1개이다.

④ 구간 $(e\sqrt{e}, \infty)$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

⑤ $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0$, $y=0$ 이다.

030 답 ①

$f(x) = 2x \ln x - 4x$ 에서

$$f'(x) = 2 \ln x + 2x \times \frac{1}{x} - 4 = 2 \ln x - 2$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \ln x = 1 \quad \therefore x = e$$

구간 $[1, e^2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	e	...	e^2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	-4	↘	$-2e$ 극소	↗	0

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(e^2) = 0$, 최솟값은 $f(e) = -2e$ 이므로 구하는 값은 $-2e$ 이다.

031 답 2

$f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ 에서

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 4$ ($\because x > 2$)

$x > 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	2	...	4	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	8 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 최솟값 8을 가지므로

$$a=4, m=8 \quad \therefore \frac{m}{a} = 2$$

032 답 ①

$f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$ 에서

$$f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2 - 3)e^{-x} = -(x^2 - 2x - 3)e^{-x} = -(x+1)(x-3)e^{-x}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 3$ ($\because 0 \leq x \leq 4$)

구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	3	...	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	-3	↗	$\frac{6}{e^3}$ 극대	↘	$\frac{13}{e^4}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최댓값을 갖고, $x=0$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$\alpha = 3, \beta = 0 \quad \therefore \alpha + \beta = 3$$

033 답 ⑤

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{6-x}$ 에서 $0 \leq x \leq 6$ 이고

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{6-x}} = \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{6-x}}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \sqrt{6-x} = \sqrt{x}$$

$$6-x = x \quad \therefore x = 3$$

$0 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	3	...	6
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\sqrt{6}$	↗	$2\sqrt{3}$ 극대	↘	$\sqrt{6}$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(3) = 2\sqrt{3}$, 최솟값은

$$f(0) = f(6) = \sqrt{6} \text{이므로}$$

$$M = 2\sqrt{3}, m = \sqrt{6}$$

$$\therefore Mm = 6\sqrt{2}$$

034 답 ②

$f(x) = \frac{\ln x - 1}{x}$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (\ln x - 1)}{x^2} = \frac{2 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \ln x = 2 \quad \therefore x = e^2$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	e^2	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e^2}$ 극대	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=e^2$ 에서 최댓값 $\frac{1}{e^2}$ 을 가지므로

$$a = e^2, M = \frac{1}{e^2} \quad \therefore aM = 1$$

035 ④

$$f(x) = \cos x + x \sin x \text{에서}$$

$$f'(x) = -\sin x + \sin x + x \cos x = x \cos x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \text{ 또는 } \cos x=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}\pi (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

구간 $[0, 2\pi]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	1	↗	$\frac{\pi}{2}$ 극대	↘	$-\frac{3}{2}\pi$ 극소	↗	1

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, 최솟값은

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -\frac{3}{2}\pi \text{이므로}$$

$$M = \frac{\pi}{2}, m = -\frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore M - m = 2\pi$$

036 ④

$$f(x) = 3\cos^3 x + 9\sin^2 x + 5$$

$$= 3\cos^3 x + 9(1 - \cos^2 x) + 5$$

$$= 3\cos^3 x - 9\cos^2 x + 14$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고, 주어진 함수 $f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타내면

$$g(t) = 3t^3 - 9t^2 + 14$$

$$\therefore g'(t) = 9t^2 - 18t = 9t(t-2)$$

$$g'(t) = 0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=0 (\because -1 \leq t \leq 1)$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	...	0	...	1
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$	2	↗	14 극대	↘	8

따라서 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 $g(0) = 14$, 최솟값은 $g(-1) = 2$ 이므로

$$M = 14, m = 2$$

$$\therefore M + m = 16$$

037 ④ $\frac{1}{e^4}$

$$g(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right)$$

$$= 2\left(\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$g(x) = t$ 로 놓으면 $-2 \leq t \leq 2$ 이고

$$(f \circ g)(x) = f(t) = e^{-t^2}$$

$$\therefore f'(t) = -2te^{-t^2}$$

$$f'(t) = 0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=0 (\because e^{-t^2} > 0)$$

$-2 \leq t \leq 2$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-2	...	0	...	2
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	$\frac{1}{e^4}$	↗	1 극대	↘	$\frac{1}{e^4}$

따라서 함수 $f(t)$ 의 최댓값은 $f(0) = 1$, 최솟값은

$$f(-2) = f(2) = \frac{1}{e^4} \text{이므로 구하는 곱은}$$

$$1 \times \frac{1}{e^4} = \frac{1}{e^4}$$

038 ①

$$f(x) = x \ln x + 2x + a \text{에서 } x > 0 \text{이고}$$

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} + 2 = \ln x + 3$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \ln x = -3 \quad \therefore x = \frac{1}{e^3}$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{e^3}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e^3} + a$ 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f\left(\frac{1}{e^3}\right) = -\frac{1}{e^3} + a$ 이므로

$$-\frac{1}{e^3} + a = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{e^3}$$

039 ①

$$f(x) = axe^{-x} \text{에서}$$

$$f'(x) = ae^{-x} - axe^{-x} = a(1-x)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 (\because e^{-x} > 0)$$

구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-ae$	↗	$\frac{a}{e}$ 극대	↘	$\frac{2a}{e^2}$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(1) = \frac{a}{e}$, 최솟값은 $f(-1) = -ae$

이고 그 곱이 -4 이므로

$$\frac{a}{e} \times (-ae) = -4, a^2 = 4$$

$$\therefore a = 2 (\because a > 0)$$

040 ④

$f(x) = x\sqrt{a-x^2}$ 에서 $-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$ 이고

$$f'(x) = \sqrt{a-x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{a-x^2}} = \frac{-2x^2+a}{\sqrt{a-x^2}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 2x^2=a$$

$$\therefore x = -\sqrt{\frac{a}{2}} \text{ 또는 } x = \sqrt{\frac{a}{2}}$$

$-\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\sqrt{a}$	$\dots$	$-\sqrt{\frac{a}{2}}$	$\dots$	$\sqrt{\frac{a}{2}}$	$\dots$	$\sqrt{a}$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{a}{2}$ 극소	$\nearrow$	$\frac{a}{2}$ 극대	$\searrow$	0

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = \frac{a}{2}$, 최솟값은

$$f\left(-\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = -\frac{a}{2} \text{이므로}$$

$$M = \frac{a}{2}, m = -\frac{a}{2}$$

$$\text{이때 } M - m = 8 \text{이므로 } \frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right) = 8$$

$$\therefore a = 8$$

041 ③ $\frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}$

$f(x) = ax + 2a \cos x$ 에서

$$f'(x) = a - 2a \sin x = a(1 - 2 \sin x)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \left(\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\dots$	$\frac{\pi}{6}$	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$2a$	$\nearrow$	$\frac{a}{6}\pi + \sqrt{3}a$ 극대	$\searrow$	$\frac{a}{2}\pi$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{2}\pi$ 이므로

$$\frac{a}{2}\pi = \pi \quad \therefore a = 2$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}$$

042 ②

점 A의 좌표를 $(t, \sqrt{t+3})$ ($-3 < t < 0$)이라 하면

$$\overline{AC} = -t, \overline{AB} = \sqrt{t+3}$$

직사각형 ABOC의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = -t\sqrt{t+3}$$

$$\therefore S'(t) = -\sqrt{t+3} - t \times \frac{1}{2\sqrt{t+3}} = -\frac{3(t+2)}{2\sqrt{t+3}}$$

$$S'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t = -2$$

$-3 < t < 0$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-3	$\dots$	-2	$\dots$	0
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		$\nearrow$	2 극대	$\searrow$	

따라서 $S(t)$ 의 최댓값은 $S(-2) = 2$ 이므로 직사각형 ABOC의 넓이의 최댓값은 2이다.

043 ① $1 - \ln 2$

$P(a, a)$, $Q(a, \ln 2a)$ ($a > 0$)이므로 선분 PQ의 길이를 $l(a)$ 라 하면

$$l(a) = a - \ln 2a$$

$$\therefore l'(a) = 1 - \frac{1}{a}$$

$$l'(a)=0 \text{인 } a \text{의 값은 } a=1$$

$a > 0$ 에서 함수 $l(a)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\dots$	1	$\dots$
$l'(a)$		-	0	+
$l(a)$		$\searrow$	$1 - \ln 2$ 극소	$\nearrow$

따라서 $l(a)$ 의 최솟값은 $l(1) = 1 - \ln 2$ 이므로 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $1 - \ln 2$ 이다.

044 ②

1 kg에 x 만 원인 상품 $\sqrt{30-x}$ kg을 팔아서 생기는 이익을 $f(x)$ 만 원이라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= x\sqrt{30-x} - 3\sqrt{30-x} \\ &= (x-3)\sqrt{30-x} \quad (0 < x < 30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{30-x} - \frac{x-3}{2\sqrt{30-x}} \\ &= \frac{2(30-x) - (x-3)}{2\sqrt{30-x}} \\ &= \frac{-3(x-21)}{2\sqrt{30-x}} \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=21$$

x	0	$\dots$	21	$\dots$	30
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	54 극대	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(21) = 54$ 이므로 구하는 최대 이익은 54만 원이다.

045 ②

$f(x) = 3e^{-x}$ 이라 하면 $f'(x) = -3e^{-x}$

점 $(t, 3e^{-t})$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = -3e^{-t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 3e^{-t} = -3e^{-t}(x - t) \quad \therefore y = -3e^{-t}x + 3e^{-t}(t+1)$$

즉, 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $P(t+1, 0)$, $Q(0, 3e^{-t}(t+1))$ 이므로 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{1}{2} \times (t+1) \times 3e^{-t}(t+1) = \frac{3}{2}e^{-t}(t+1)^2$$

$$S'(t) = -\frac{3}{2}e^{-t}(t+1)^2 + 3e^{-t}(t+1) = -\frac{3}{2}e^{-t}(t+1)(t-1)$$

$S'(t) = 0$ 인 t 의 값은 $t = 1$ ($\because t > 0$)

$t > 0$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	1	...
$S'(t)$		+	0	-
$S(t)$		↗	$\frac{6}{e}$ 극대	↘

따라서 $S(t)$ 의 최댓값은 $S(1) = \frac{6}{e}$ 이므로 삼각형 OPQ의 넓이의 최댓값은 $\frac{6}{e}$ 이다.

046 ③ $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$ 의 중점을 O,

$\angle AOD = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)라 하고, 점 D에서 선분 AO에 내린 수선의 발을 E라 하자.

$\triangle ODE$ 에서 $\overline{DE} = \sin \theta$, $\overline{OE} = \cos \theta$

$$\therefore \overline{CD} = 2\overline{OE} = 2\cos \theta$$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하면

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times (2 + 2\cos \theta) \times \sin \theta = (1 + \cos \theta) \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore S'(\theta) &= -\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta) \cos \theta \\ &= -(1 - \cos^2 \theta) + \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = (\cos \theta + 1)(2\cos \theta - 1) \end{aligned}$$

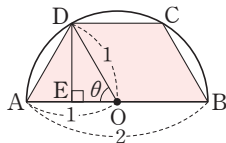
$S'(\theta) = 0$ 에서 $\cos \theta = -1$ 또는 $\cos \theta = \frac{1}{2}$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $S(\theta)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		+	0	-	
$S(\theta)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 극대	↘	

따라서 $S(\theta)$ 의 최댓값은 $S(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 이므로 사다리꼴 ABCD의 넓이의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 이다.



047 ③ $\frac{3}{5}$

$\angle BAE = \angle AED = \theta$ 이므로 $\overline{AE} = \frac{3}{\cos \theta}$, $\overline{BE} = 3 \tan \theta$

$$\therefore \overline{CE} = 5 - 3 \tan \theta$$

두 삼각형 ABC, DEC가 서로 닮음이므로

$$3 : 5 = \overline{DE} : (5 - 3 \tan \theta)$$

$$\therefore \overline{DE} = \frac{3}{5}(5 - 3 \tan \theta) = 3 - \frac{9}{5} \tan \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AE} + \overline{DE} &= \frac{3}{\cos \theta} + 3 - \frac{9}{5} \tan \theta \\ &= 3 \sec \theta - \frac{9}{5} \tan \theta + 3 \end{aligned}$$

$f(\theta) = 3 \sec \theta - \frac{9}{5} \tan \theta + 3$ 이라 하면

$$f'(\theta) = 3 \sec \theta \tan \theta - \frac{9}{5} \sec^2 \theta$$

$$= \frac{3}{5} \sec \theta (5 \tan \theta - 3 \sec \theta)$$

$f'(\theta) = 0$ 에서 $5 \tan \theta - 3 \sec \theta = 0$ ($\because \sec \theta \neq 0$)

$$\frac{5 \sin \theta - 3}{\cos \theta} = 0 \quad \therefore \sin \theta = \frac{3}{5}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 에서 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ 을 만족시키는 θ 의 값을 θ_1 이라 하고 함수 $f(\theta)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	0	...	θ_1	...	$\frac{\pi}{4}$
$f'(\theta)$		-	0	+	
$f(\theta)$		↘	극소	↗	

즉, 함수 $f(\theta)$ 는 $\theta = \theta_1$ 일 때 최솟이다.

따라서 $\overline{AE} + \overline{DE}$ 의 값이 최솟가 될 때, $\sin \theta = \frac{3}{5}$

048 ③ 3

$x - e^x + 5 - k = 0$ 에서 $x - e^x + 5 = k$

$f(x) = x - e^x + 5$ 라 하면

$$f'(x) = 1 - e^x$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 0$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	4 극대	↘

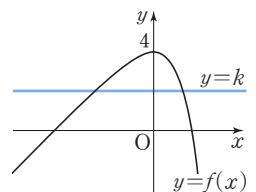
또 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ 이므로 함수 $y = f(x)$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 $k < 4$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3의 3개이다.



049 답 3

방정식 $e^x=kx$ 가 실근을 갖지 않으려면 곡선 $y=e^x$ 과 직선 $y=kx$ 가 만나지 않아야 한다.

$$f(x)=e^x, g(x)=kx \text{라 하면}$$

$$f'(x)=e^x, g'(x)=k$$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 가 접할 때의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t)=g(t) \text{에서 } e^t=kt \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f'(t)=g'(t) \text{에서 } e^t=k \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$e^t=te^t, (t-1)e^t=0$$

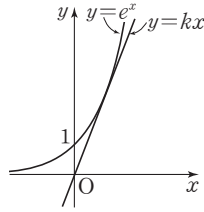
$$\therefore t=1 (\because e^t>0)$$

이를 ㉡에 대입하면 $k=e$

$k=e$ 이면 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 가 한 점에서 만나므로 방정식 $e^x=kx$ 가 실근을 갖지 않도록 하는 상수 k 의 값의 범위는

$$0 \leq k < e$$

따라서 정수 k 는 0, 1, 2의 3개이다.



050 답 ⑤

$$f(x)=x \ln x - 4x + k \text{라 하면}$$

$$f'(x)=\ln x + x \times \frac{1}{x} - 4 = \ln x - 3$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=e^3$$

$x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	e^3	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	$-e^3+k$ 극소	↗

$x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(e^3)=-e^3+k$ 이므로

$f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-e^3+k \geq 0 \quad \therefore k \geq e^3$$

따라서 k 의 최솟값은 e^3 이다.

051 답 ⑤

$0 < x < \frac{\pi}{4}$ 에서 부등식 $\sin 2x < ax$ 가 성립

하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선

$y=\sin 2x$ 가 직선 $y=ax$ 보다 아래쪽에 있어야 한다.

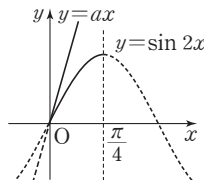
$$f(x)=\sin 2x \text{라 하면}$$

$$f'(x)=2 \cos 2x$$

이때 직선 $y=ax$ 가 원점을 지나는 직선이고 $f'(0)=2$ 이므로

$0 < x < \frac{\pi}{4}$ 에서 주어진 부등식이 성립하려면

$$a \geq 2$$



052 답 ④

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 1 - a \cos t$$

$t=\pi$ 에서 점 P의 속도가 3이므로

$$1 - a \cos \pi = 3, 1 + a = 3 \quad \therefore a = 2$$

053 답 ②

$\frac{dx}{dt}=2t+1, \frac{dy}{dt}=t+3$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$(2t+1, t+3)$$

점 P의 속력이 $5\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{(2t+1)^2 + (t+3)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$5t^2 + 10t + 10 = 50, t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$(t+4)(t-2) = 0 \quad \therefore t = 2 (\because t > 0)$$

054 답 ②

$\frac{dx}{dt}=\sqrt{3}, \frac{dy}{dt}=-3t^2+3$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$(\sqrt{3}, -3t^2+3)$$

점 P의 속력이 $\sqrt{3}$ 이므로

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3t^2+3)^2} = \sqrt{3}, (-3t^2+3)^2 = 0$$

$$-3t^2+3=0, t^2=1$$

$$\therefore t=1 (\because t > 0)$$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \frac{d^2y}{dt^2}=-6t$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$(0, -6t)$$

따라서 $t=1$ 에서 가속도는 $(0, -6)$ 이므로 구하는 가속도의 크기는

$$\sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6$$

055 답 ③

$$\ln x + \frac{1}{x} - a = 0 \text{에서 } \ln x + \frac{1}{x} = a$$

$f(x)=\ln x + \frac{1}{x}$ 이라 하면 $x>0$ 이고

$$f'(x)=\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1$$

$x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

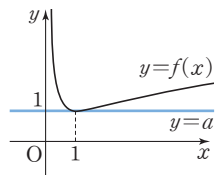
x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	1 극소	↗

또 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

주어진 방정식이 오직 한 실근만을 가지려면 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=a$ 가 한 점에서 만나야 하므로

$$a=1$$



056 ③

$f(x) = x^2 e^{-x}$ 이라 하면

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

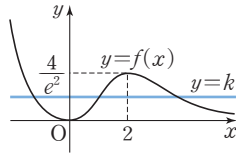
x	$\dots$	0	$\dots$	2	$\dots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$ 극대	$\searrow$

또 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 이므로

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야

하므로 $0 < k < \frac{4}{e^2}$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=\frac{4}{e^2}$ 이므로 $\beta-\alpha=\frac{4}{e^2}$



057 ② $-\frac{\pi}{2} < k \leq -1$

$x \sin x + \cos x + k = 0$ 에서 $x \sin x + \cos x = -k$

$f(x) = x \sin x + \cos x$ 라 하면

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$$

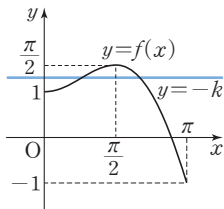
$f'(x) = 0$ 에서 $x=0$ 또는 $\cos x = 0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0 \leq x \leq \pi$)

$0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$	$\dots$	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$ 극대	$\searrow$	-1

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



$1 \leq -k < \frac{\pi}{2} \quad \therefore -\frac{\pi}{2} < k \leq -1$

058 ⑤

$2\sqrt{x+1} - x - k = 0$ 에서 $2\sqrt{x+1} - x = k$

$f(x) = 2\sqrt{x+1} - x$ 라 하면 $x \geq -1$ 이고

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1 = \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$$

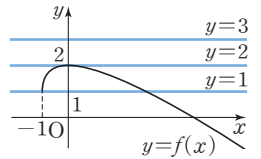
$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x=0$

$x \geq -1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\dots$	0	$\dots$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	1	$\nearrow$	2 극대	$\searrow$

또 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 방정식 $2\sqrt{x+1} - x = k$ 의 실근은 $k < 1$, $k=2$ 일 때 1개, $1 \leq k < 2$ 일 때 2개, $k \geq 2$ 일 때 0개이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

059 ③

두 곡선 $y=\sin x - \cos x$, $y=te^{-x}$ 의 서로 다른 교점의 개수는 방정식 $\sin x - \cos x = te^{-x}$ 의 실근의 개수와 같다.

$\sin x - \cos x = te^{-x}$ 에서 $e^{-x} > 0$ 이므로 $e^x(\sin x - \cos x) = t$

$g(x) = e^x(\sin x - \cos x)$ 라 하면

$$g'(x) = e^x(\sin x - \cos x) + e^x(\cos x + \sin x) = 2e^x \sin x$$

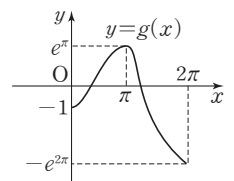
$g'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ ($\because 0 \leq x \leq 2\pi$)

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

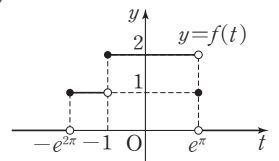
x	0	$\dots$	π	$\dots$	2π
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	e^π 극대	$\searrow$	$-e^{2\pi}$

즉, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 주어진 두 곡선의 서로 다른 교점의 개수 $f(t)$ 는 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수와 같으므로



$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < -e^{2\pi} \text{ 또는 } t > e^\pi) \\ 1 & (-e^{2\pi} \leq t < -1 \text{ 또는 } t = e^\pi) \\ 2 & (-1 \leq t < e^\pi) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 불연속인 t 의 값은 $-e^{2\pi}$, -1 , e^π 의 3개이다.



060 ② $k > 2e$

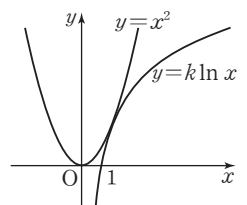
방정식 $x^2 = k \ln x$ 가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=x^2$ 과 곡선 $y=k \ln x$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x) = x^2$, $g(x) = k \ln x$ 라 하면

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = \frac{k}{x}$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 접할 때의 접점의 x 좌표를 t ($t > 0$)라 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서 } t^2 = k \ln t \quad \dots\dots ①$$



$$f'(t)=g'(t) \text{에서}$$

$$2t = \frac{k}{t} \quad \therefore k = 2t^2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

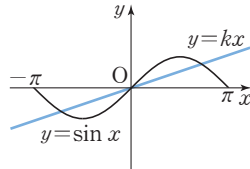
$$\textcircled{A} \text{을 } \textcircled{B} \text{에 대입하면 } t^2 = 2t^2 \ln t, \ln t = \frac{1}{2} \quad \therefore t = \sqrt{e}$$

이를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면 $k = 2e$

따라서 $k = 2e$ 이면 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 한 점에서 만나므로 방정식 $x^2 = k \ln x$ 가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 양수 k 의 값의 범위는 $k > 2e$

061 답 ③

$-\pi \leq x \leq \pi$ 에서 방정식 $\sin x = kx$ 가 서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = \sin x$ 와 직선 $y = kx$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.



$$f(x) = \sin x \text{라 하면 } f'(x) = \cos x \quad \therefore f'(0) = 1$$

즉, 곡선 $y = \sin x$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 방정식은 $y = x$
 $-\pi \leq x \leq \pi$ 에서 곡선 $y = \sin x$ 와 직선 $y = kx$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 상수 k 의 값의 범위는

$$0 \leq k < 1$$

따라서 $\alpha = 0$, $\beta = 1$ 이므로 $\alpha + \beta = 1$

062 답 ②

$$f(x) = x + \frac{4}{x} - k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 2 \quad (\because x > 0)$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$4-k$ 극소	/

따라서 $x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(2) = 4 - k$ 이므로

$f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$4 - k \geq 0 \quad \therefore k \leq 4$$

따라서 k 의 최댓값은 4이다.

063 답 $k \leq 2 - 2 \ln 2$

$$e^x - 2x \geq k \text{에서 } e^x - 2x - k \geq 0$$

$$f(x) = e^x - 2x - k \text{라 하면 } f'(x) = e^x - 2$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = \ln 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\ln 2$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\	$2 - 2 \ln 2 - k$ 극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(\ln 2) = 2 - 2 \ln 2 - k$ 이므로

$f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$2 - 2 \ln 2 - k \geq 0$$

$$\therefore k \leq 2 - 2 \ln 2$$

064 답 ②

$$(\ln x)^2 - 2 \ln x \geq k \text{에서}$$

$$(\ln x)^2 - 2 \ln x - k \geq 0$$

$$f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x - k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 2 \ln x \times \frac{1}{x} - \frac{2}{x} = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = e$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	e	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$-1-k$ 극소	/

따라서 $x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(e) = -1 - k$ 이므로

$f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-1 - k \geq 0 \quad \therefore k \leq -1$$

따라서 k 의 최댓값은 -1 이다.

065 답 $a < 0$

$$f(x) = \sin x - 2x + a \text{라 하면}$$

$$f'(x) = \cos x - 2$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$f'(x) < 0$$

즉, $x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소한다.

따라서 $f(x) < 0$ 이 성립하려면 $f(0) < 0$ 이어야 하므로

$$a < 0$$

066 답 ④

$$ae^{-x} \leq \sqrt{2-x^2} \leq be^{-x} \text{에서 } e^{-x} > 0 \text{이므로 } a \leq e^x \sqrt{2-x^2} \leq b$$

$$f(x) = e^x \sqrt{2-x^2} \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = e^x \sqrt{2-x^2} + e^x \times \frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}} \\ = \frac{-(x+2)(x-1)}{\sqrt{2-x^2}} e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1 \quad (\because -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2})$$

$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

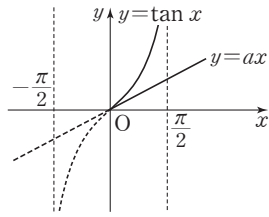
x	$-\sqrt{2}$	...	1	...	$\sqrt{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	/	e 극대	\	0

따라서 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $0 \leq f(x) \leq e$, 즉 $0 \leq e^x \sqrt{2-x^2} \leq e$ 이므로 $a \leq 0$, $b \geq e$

따라서 $b - a$ 의 최솟값은 $e - 0 = e$

067 답 ①

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 부등식 $\tan x > ax$ 가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = \tan x$ 가 직선 $y = ax$ 보다 위쪽에 있어야 한다.



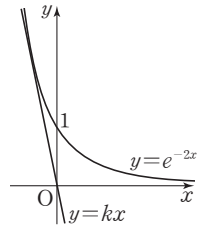
$$f(x) = \tan x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = \sec^2 x$$

직선 $y = ax$ 가 원점을 지나는 직선이고 $f'(0) = 1$ 이므로 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 주어진 부등식이 성립하려면 $a \leq 1$ 따라서 a 의 최댓값은 1이다.

068 답 ①

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $e^{-2x} \geq kx$ 가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = e^{-2x}$ 이 직선 $y = kx$ 보다 위쪽에 있거나 곡선과 직선이 접해야 한다.



$$f(x) = e^{-2x}, g(x) = kx \text{라 하면}$$

$$f'(x) = -2e^{-2x}, g'(x) = k$$

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = g(x)$ 가 접할 때의 접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서 } e^{-2t} = kt \quad \dots\dots ㉠$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } -2e^{-2t} = k \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉡ \text{을 } ㉠ \text{에 대입하면 } e^{-2t} = -2te^{-2t}$$

$$e^{-2t}(2t+1) = 0 \quad \therefore t = -\frac{1}{2}$$

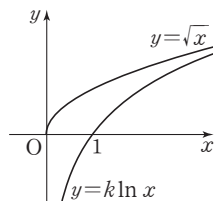
$$\text{이를 } ㉡ \text{에 대입하여 풀면 } k = -2e$$

즉, 주어진 부등식이 성립하도록 하는 상수 k 의 값의 범위는 $-2e \leq k \leq 0$

따라서 k 의 최솟값은 $-2e$ 이다.

069 답 $0 < k < \frac{e}{2}$

$x > 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $\sqrt{x} > k \ln x$ 가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{x}$ 가 곡선 $y = k \ln x$ 보다 위쪽에 있어야 한다.



$$f(x) = \sqrt{x}, g(x) = k \ln x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, g'(x) = \frac{k}{x}$$

두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 가 접할 때의 접점의 x 좌표를 t ($t > 0$)라 하면

$$f(t) = g(t) \text{에서 } \sqrt{t} = k \ln t \quad \dots\dots ㉠$$

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{k}{t} \quad \therefore k = \frac{\sqrt{t}}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉡ \text{을 } ㉠ \text{에 대입하면 } \sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{2} \ln t, \ln t = 2 \quad \therefore t = e^2$$

$$\text{이를 } ㉡ \text{에 대입하면 } k = \frac{e}{2}$$

따라서 주어진 부등식을 성립하도록 하는 양수 k 의 값의 범위는

$$0 < k < \frac{e}{2}$$

070 답 -8

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{k}{2} \sin \frac{t}{2}$$

$t = \pi$ 에서 점 P의 속도가 4이므로

$$-\frac{k}{2} \sin \frac{\pi}{2} = 4, -\frac{k}{2} = 4$$

$$\therefore k = -8$$

071 답 ①

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = (2t-1)e^t + (t^2-t-1)e^t = (t^2+t-2)e^t$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$(t^2+t-2)e^t = 0, t^2+t-2 = 0 (\because e^t > 0)$$

$$(t+2)(t-1) = 0 \quad \therefore t = 1 (\because t > 0)$$

이때 $t = 1$ 의 좌우에서 속도의 부호가 바뀌므로 $t = 1$ 일 때 점 P가 운동 방향을 바꾼다.

072 답 ⑤

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = p + \frac{q}{t}, a = \frac{dv}{dt} = -\frac{q}{t^2}$$

$t = 1$ 에서 점 P의 속도가 5이므로

$$p + q = 5 \quad \dots\dots ㉠$$

또 $t = 1$ 에서 점 P의 가속도가 2이므로

$$-q = 2 \quad \therefore q = -2$$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $p = 7$

$$\therefore p - q = 9$$

073 답 2

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = 2t - a, v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = e^t(t-3) + e^t = (t-2)e^t$$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호가 서로 반대이므로 $v_P v_Q < 0$ 에서

$$(2t-a)(t-2)e^t < 0$$

$$(2t-a)(t-2) < 0 (\because e^t > 0)$$

이 부등식의 해가 $1 < t < 2$ 이므로

$$\frac{a}{2} < t < 2$$

$$\text{따라서 } \frac{a}{2} = 1 \text{이므로 } a = 2$$

074 답 ②

$$\frac{dx}{dt} = 6, \frac{dy}{dt} = 6 - 6t \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의 속도는}$$

$$(6, 6-6t)$$

점 P의 속력이 $6\sqrt{5}$ 이므로

$$\sqrt{6^2 + (6-6t)^2} = 6\sqrt{5}, t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t+1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 3 (\because t > 0)$$

075 답 ⑤

$\frac{dx}{dt}=2\cos t, \frac{dy}{dt}=-\sin t$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는 $(2\cos t, -\sin t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{3}$ 에서 점 P의 속도는 $(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 이므로 구하는 속력은 $\sqrt{1^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

076 답 ③

$\frac{dx}{dt}=2t-5, \frac{dy}{dt}=t$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는 $(2t-5, t)$

시각 t 에서의 점 P의 속력은 $\sqrt{(2t-5)^2 + t^2} = \sqrt{5(t-2)^2 + 5}$

따라서 점 P의 속력의 최솟값은 $t=2$ 일 때 $\sqrt{5}$ 이다.

077 답 ②

$\frac{dx}{dt}=2at-1, \frac{dy}{dt}=2\sqrt{t}$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는 $(2at-1, 2\sqrt{t})$

따라서 $t=4$ 에서 점 P의 속도는 $(8a-1, 4)$ 이고, 이때의 속력이 5이므로

$$\sqrt{(8a-1)^2 + 4^2} = 5, 64a^2 - 16a - 8 = 0, 8a^2 - 2a - 1 = 0$$

$$(4a+1)(2a-1) = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2} (\because a > 0)$$

078 답 16m/s

자동차가 관찰자의 정면을 통과한 순간부터 t 초 동안 이동한 거리를 x m, t 초 후 관찰자와 자동차 사이의 거리를 y m라 하면

$$x^2 + 30^2 = y^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

각 항을 t 에 대하여 미분하면

$$2x \frac{dx}{dt} = 2y \frac{dy}{dt} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

자동차의 속도가 20m/s이므로 $\frac{dx}{dt}=20$ 이고 $t=2$ 일 때 $x=40$ 이다.

$x=40$ 을 ①에 대입하면

$$y^2 = 40^2 + 30^2 = 50^2 \quad \therefore y = 50 (\because y > 0)$$

$x=40, y=50, \frac{dx}{dt}=20$ 을 ②에 대입하면

$$80 \times 20 = 100 \times \frac{dy}{dt} \quad \therefore \frac{dy}{dt} = 16$$

따라서 구하는 속도는 16m/s이다.

079 답 (0, 2)

$\frac{dx}{dt}=e^t - e^{-t}, \frac{dy}{dt}=e^t + e^{-t}$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는 $(e^t - e^{-t}, e^t + e^{-t})$

따라서 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{(e^t - e^{-t})^2 + (e^t + e^{-t})^2} = \sqrt{2(e^{2t} + e^{-2t})}$$

$e^{2t} > 0, e^{-2t} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$e^{2t} + e^{-2t} \geq 2\sqrt{e^{2t} \times e^{-2t}} = 2$$

이때 등호는 $e^{2t} = e^{-2t}$, 즉 $t=0$ 일 때 성립하므로 구하는 속도는 $(0, 2)$

080 답 ③

$\frac{dx}{dt}=2, \frac{dy}{dt}=1-t^2$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는 $(2, 1-t^2)$

점 P의 속력이 $\sqrt{13}$ 이므로

$$\sqrt{2^2 + (1-t^2)^2} = \sqrt{13}, (1-t^2)^2 = 9$$

$$1-t^2 = \pm 3, t^2 = 4 (\because t^2 > 0)$$

$$\therefore t = 2 (\because t > 0)$$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \frac{d^2y}{dt^2}=-2t$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 가속도는 $(0, -2t)$

따라서 $t=2$ 에서 가속도는 $(0, -4)$ 이므로 구하는 가속도의 크기는

$$\sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$$

081 답 $3\sqrt{2}e^3$

$\frac{dx}{dt}=2+e^{3t}, \frac{dy}{dt}=2-e^{3t}$ 이므로

$$\frac{d^2x}{dt^2}=3e^{3t}, \frac{d^2y}{dt^2}=-3e^{3t}$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도는 $(3e^{3t}, -3e^{3t})$

따라서 $t=1$ 에서 가속도는 $(3e^3, -3e^3)$ 이므로 구하는 가속도의 크기는

$$\sqrt{(3e^3)^2 + (-3e^3)^2} = 3\sqrt{2}e^3$$

082 답 4

$\frac{dx}{dt}=2t, \frac{dy}{dt}=\frac{k}{t}$ 이므로

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2, \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{k}{t^2}$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도는 $(2, -\frac{k}{t^2})$

따라서 $t=1$ 에서 가속도는 $(2, -k)$ 이고, 이때의 가속도의 크기가 $2\sqrt{5}$ 이므로

$$\sqrt{2^2 + (-k)^2} = 2\sqrt{5}, k^2 = 16$$

$$\therefore k = 4 (\because k > 0)$$

083 답 ⑤

$\frac{dx}{dt}=4\cos 2t, \frac{dy}{dt}=-8\sin 2t$ 이므로

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-8\sin 2t, \frac{d^2y}{dt^2}=-16\cos 2t$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$(-8\sin 2t, -16\cos 2t)$$

$y=2$ 일 때 $4\cos 2t=2$ 에서 $\cos 2t=\frac{1}{2}$

$$\therefore t = \frac{\pi}{6} (\because 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$ 에서 점 P의 가속도는 $(-4\sqrt{3}, -8)$ 이므로 구하는 가속도의 크기는

$$\sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + (-8)^2} = 4\sqrt{7}$$

084 ③

ㄱ. $t=2\pi$ 에서 점 P의 위치는

$$(\cos 2\pi, 2\pi - \sin 2\pi) \quad \therefore (1, 2\pi)$$

$$\text{ㄴ. } \frac{dx}{dt} = -\sin t, \frac{dy}{dt} = 1 - \cos t \quad \dots\dots \text{㉠}$$

시각 t 에서의 점 P의 속도는 $(-\sin t, 1 - \cos t)$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{(-\sin t)^2 + (1 - \cos t)^2} = \sqrt{\sin^2 t + 1 - 2\cos t + \cos^2 t} \\ = \sqrt{2 - 2\cos t}$$

$$\text{이때 } -1 \leq \cos t \leq 1 \text{이므로 } -2 \leq -2\cos t \leq 2$$

$$\therefore 0 \leq 2 - 2\cos t \leq 4$$

따라서 속력의 최댓값은 $\sqrt{4} = 2$

$$\text{ㄷ. } \text{㉠에서 } \frac{d^2x}{dt^2} = -\cos t, \frac{d^2y}{dt^2} = \sin t \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의}$$

가속도는 $(-\cos t, \sin t)$

시각 t 에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{(-\cos t)^2 + \sin^2 t} = 1$$

따라서 가속도의 크기는 항상 1로 일정하다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

085 ③

$f(x) = x^2 + 4\sin x$ 라 하면

$$f'(x) = 2x + 4\cos x, f''(x) = 2 - 4\sin x$$

곡선 $y=f(x)$ 가 위로 볼록하려면 $f''(x) < 0$ 이어야 하므로

$$2 - 4\sin x < 0, \sin x > \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 가 위로 볼록한 구간은 $(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ 이다.

086 ② $\frac{\pi}{2}$

$f(x) = 1 + \cos^2 x$ 라 하면

$$f'(x) = -2\sin x \cos x = -\sin 2x$$

$$f''(x) = -2\cos 2x$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } -2\cos 2x = 0$$

$$\therefore x = -\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{4} \quad (\because -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \text{에서 } f''(x) > 0$$

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \text{에서 } f''(x) < 0$$

즉, $x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡

점의 좌표는 $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2}), (\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2})$ 이다.

따라서 두 변곡점 사이의 거리는 $\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$

087 ② $\frac{25}{2}e$

$f(x) = (x-1)e^{4-x}$ 이라 하면

$$f'(x) = e^{4-x} - (x-1)e^{4-x} = (2-x)e^{4-x}$$

$$f''(x) = -e^{4-x} - (2-x)e^{4-x} = (x-3)e^{4-x}$$

$f''(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x=3$ ($\because e^{4-x} > 0$)

$x < 3$ 에서 $f''(x) < 0$, $x > 3$ 에서 $f''(x) > 0$

즉, $x=3$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(3, 2e)$ 이다.

변곡점에서의 접선의 기울기가 $f'(3) = -e$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 2e = -e(x - 3) \quad \therefore y = -ex + 5e$$

따라서 $A(5, 0), B(0, 5e)$ 이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 5e = \frac{25}{2}e$$

088 ⑤

$f(x) = ax^2 + bx + 2 - \ln x$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = 2ax + b - \frac{1}{x}, f''(x) = 2a + \frac{1}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x = \frac{1}{4}$ 에서 극소이므로 $f'(\frac{1}{4}) = 0$ 에서

$$\frac{a}{2} + b - 4 = 0 \quad \therefore a + 2b = 8 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

변곡점의 x 좌표가 $\frac{1}{2}$ 이므로 $f''(\frac{1}{2}) = 0$ 에서

$$2a + 4 = 0 \quad \therefore a = -2$$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $b = 5$

$$\therefore f(x) = -2x^2 + 5x + 2 - \ln x$$

$$f'(x) = -4x + 5 - \frac{1}{x} = \frac{-4x^2 + 5x - 1}{x} \\ = \frac{-(4x-1)(x-1)}{x}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = \frac{1}{4}$ 또는 $x = 1$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{4}$	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{25}{8} + 2\ln 2$ 극소	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(1) = 5$

089 ④

$f(x) = 2x^2 + 2a\cos x + x$ 라 하면

$$f'(x) = 4x - 2a\sin x + 1$$

$$f''(x) = 4 - 2a\cos x$$

곡선 $y=f(x)$ 가 변곡점을 갖지 않으려면 방정식 $f''(x) = 0$ 이 실근을 갖지 않거나 근을 갖는 경우에는 그 근의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

$$f''(x) = 0 \text{에서 } 4 - 2a\cos x = 0$$

$$2a\cos x = 4 \quad \therefore \cos x = \frac{2}{a} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

(i) 방정식 ㉠이 실근을 갖지 않으려면 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$\left| \frac{2}{a} \right| > 1, |a| < 2$$

$$\therefore -2 < a < 0 \text{ 또는 } 0 < a < 2 \quad (\because a \neq 0)$$

(ii) $a = -2$ 이면 $f''(x) = 4 + 4\cos x \geq 0$

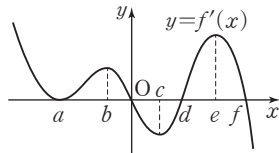
$a = 2$ 이면 $f''(x) = 4 - 4\cos x \geq 0$

즉, $a = -2, a = 2$ 이면 $f''(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 곡선 $y = f(x)$ 가 변곡점을 가질 수 없다.

(i), (ii)에서 a 의 값의 범위는 $-2 \leq a < 0$ 또는 $0 < a \leq 2$ 따라서 구하는 정수 a 는 $-2, -1, 1, 2$ 의 4개이다.

090 답 7

오른쪽 그림과 같이 a, b, c, d, e, f 를 정하고 $f'(x), f''(x)$ 의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.



x	...	a	...	b	...	0	...	c	...	d	...	e	...	f	...
$f'(x)$	+	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-
$f''(x)$	-	0	+	0	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-

$x=0, x=d, x=f$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌므로 극값을 갖는 x 의 값의 개수는 3이다. $\therefore m=3$

$x=a, x=b, x=c, x=e$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 4이다. $\therefore n=4$

$\therefore m+n=3+4=7$

091 답 ⑤

$f(x) = \ln(2x^2+1)$ 에서

$f'(x) = \frac{4x}{2x^2+1}$

$f''(x) = \frac{4(2x^2+1) - 4x \times 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{-8x^2+4}{(2x^2+1)^2}$
 $= \frac{-4(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)}{(2x^2+1)^2}$

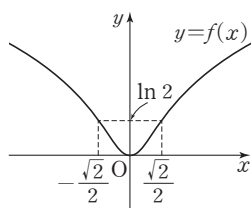
$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$

$f''(x)=0$ 인 x 의 값은 $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$\ln 2$ 변곡점	$\swarrow$	0 극소	$\searrow$	$\ln 2$ 변곡점	$\swarrow$

또 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 치역은 $\{y | y \geq 0\}$ 이다.

② 극솟값은 $f(0)=0$ 이다.

③ 모든 실수 x 에 대하여

$f(-x) = \ln(2(-x)^2+1) = \ln(2x^2+1) = f(x)$

이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

④ $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점은 점 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \ln 2)$, 점 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \ln 2)$ 의 2개이다.

⑤ 구간 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

092 답 ③

$f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$ 에서 $0 < x \leq 1$ 이고

$f'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$ 에서 $\sqrt{1-x^2}=x$

$1-x^2=x^2, x^2=\frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\because 0 < x \leq 1)$

$0 < x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	$\sqrt{2}$ 극대	$\searrow$	1

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 최댓값 $\sqrt{2}$ 를 가지므로

$a = \frac{\sqrt{2}}{2}, M = \sqrt{2}$

$\therefore aM = 1$

093 답 ②

$f(x) = e^x(x^2+ax+1)$ 에서

$f'(x) = e^x(x^2+ax+1) + e^x(2x+a)$

$= e^x\{x^2+(a+2)x+a+1\}$

$f'(2)=0$ 에서 $3e^2(a+3)=0$

$\therefore a = -3$

$\therefore f(x) = e^x(x^2-3x+1)$

$f'(x) = e^x(x^2-x-2) = e^x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 2$

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\frac{11}{e^2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{e}$ 극대	$\searrow$	$-e^2$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최댓값을 가지므로 $b = -1$

$\therefore a+b = -3-1 = -4$

094 π

$$f(x) = a + 2x \sin x + 2 \cos x \text{에서}$$

$$f'(x) = 2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x = 2x \cos x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0 \text{ 또는 } \cos x = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

구간 $[0, 2\pi]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$a+2$	$\nearrow$	$a+\pi$ 극대	$\searrow$	$a-3\pi$ 극소	$\nearrow$	$a+2$

함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a + \pi$ 이므로

$$a + \pi = 5\pi \quad \therefore a = 4\pi$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 4\pi - 3\pi = \pi$

095 $\frac{2}{e^2}$

$$f(x) = -\ln x \text{라 하면 } f'(x) = -\frac{1}{x}$$

점 $P(t, -\ln t)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = -\frac{1}{t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y + \ln t = -\frac{1}{t}(x - t) \quad \therefore y = -\frac{1}{t}x + 1 - \ln t$$

$$A(t, 0), B(t - t \ln t, 0) \text{이므로}$$

$$\overline{AB} = (t - t \ln t) - t = -t \ln t$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{1}{2} \times (-t \ln t) \times (-\ln t) = \frac{t}{2} (\ln t)^2$$

$$S'(t) = \frac{1}{2} (\ln t)^2 + \frac{t}{2} \times 2 \ln t \times \frac{1}{t} = \ln t \left(\frac{1}{2} \ln t + 1 \right)$$

$$S'(t) = 0 \text{에서 } \ln t = 0 \text{ 또는 } \frac{1}{2} \ln t + 1 = 0$$

$$\ln t = 0 \text{ 또는 } \ln t = -2 \quad \therefore t = \frac{1}{e^2} \quad (\because 0 < t < 1)$$

$0 < t < 1$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0		$\frac{1}{e^2}$		1
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{2}{e^2}$ 극대	$\searrow$	

따라서 $S(t)$ 의 최댓값은 $S\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{2}{e^2}$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은 $\frac{2}{e^2}$ 이다.

096 $\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi < k < -\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$

$$f(x) = \tan x - 4x \text{라 하면 } f'(x) = \sec^2 x - 4$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \sec^2 x = 4, \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = -\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\frac{\pi}{2}$	...	$-\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	$-\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$ 극대	$\searrow$	$\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$ 극소	$\nearrow$	

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty \text{이므로 함수}$$

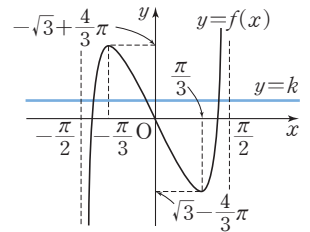
$y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주어진 방정식이 서로 다른

세 실근을 가지려면 곡선 $y = f(x)$

와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$$\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi < k < -\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$$



097 ②

$$f(x) = (x-1)e^x \text{이라 하면 } f'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$

또 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 함수 $y = |x-1|e^x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

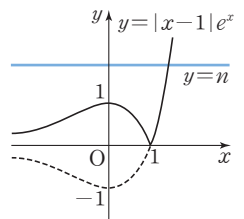
따라서 함수 $y = |x-1|e^x$ 의 그래프와

직선 $y = n$ 의 교점은 $n = 1$ 일 때 2개,

$n \geq 2$ 일 때 1개이므로

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n=1) \\ 1 & (n \geq 2) \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20} a_n = 2 + 1 \times 19 = 21$$

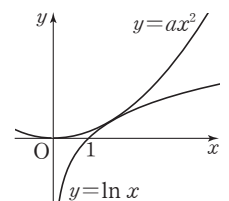


098 ①

방정식 $\ln x = ax^2$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 두 곡선 $y = \ln x$ 와 $y = ax^2$ 이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$$f(x) = \ln x, g(x) = ax^2 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, g'(x) = 2ax$$



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 접할 때의 접점의 x 좌표를 $t(t>0)$ 라 하면

$$f(t)=g(t) \text{에서 } \ln t=at^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$$f'(t)=g'(t) \text{에서 } \frac{1}{t}=2at \quad \therefore a=\frac{1}{2t^2} \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

$$\textcircled{㉑} \text{을 } \textcircled{㉒} \text{에 대입하면 } \ln t=\frac{1}{2} \quad \therefore t=\sqrt{e}$$

$$\text{이를 } \textcircled{㉒} \text{에 대입하면 } a=\frac{1}{2e}$$

$a=\frac{1}{2e}$ 이면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 한 점에서 만나므로 방정식 $\ln x=ax^2$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위는 $0 < a < \frac{1}{2e}$

따라서 a 의 값이 될 수 있는 것은 ①이다.

다른 풀이 $\ln x=ax^2$ 에서 $x>0$ 이므로 $\frac{\ln x}{x^2}=a$

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2} \text{라 하면}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } \ln x=\frac{1}{2} \quad \therefore x=\sqrt{e}$$

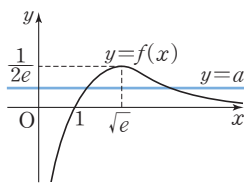
$x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\sqrt{e}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$ 극대	$\searrow$

또 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$0 < a < \frac{1}{2e}$$



099 ㉑ ①

$$f(x)=e^{x-3}-x+a \text{라 하면 } f'(x)=e^{x-3}-1$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } e^{x-3}-1=0$$

$$e^{x-3}=1 \quad \therefore x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-2+a$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(3)=-2+a$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-2+a \geq 0 \quad \therefore a \geq 2$$

따라서 a 의 최솟값은 2이다.

100 ㉑ $k \leq 1$

$$\cos x > k - x^2 \text{에서 } \cos x + x^2 - k > 0$$

$$f(x)=\cos x + x^2 - k \text{라 하면}$$

$$f'(x)=-\sin x + 2x, \quad f''(x)=-\cos x + 2$$

$x>0$ 일 때 $f''(x)>0$ 이므로 $x>0$ 에서 함수 $f'(x)$ 는 증가하고

$$f'(0)=0 \text{이므로 } f'(x)>0$$

또 $x>0$ 일 때 $f'(x)>0$ 이므로 $x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 도 증가한다.

따라서 $f(x)>0$ 이 성립하려면 $f(0) \geq 0$ 이어야 하므로

$$1-k \geq 0 \quad \therefore k \leq 1$$

101 ㉑ ③

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=e^{2t}+2(t+k)e^{2t}=(2t+2k+1)e^{2t}$$

점 P가 $t=1$ 에서 운동 방향을 바꾸고, 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$(3+2k)e^2=0 \quad \therefore k=-\frac{3}{2}$$

$v=(2t-2)e^{2t}$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a=\frac{dv}{dt}=2e^{2t}+2(2t-2)e^{2t}=(4t-2)e^{2t}$$

따라서 $t=1$ 에서 점 P의 가속도는 $2e^2$ 이다.

102 ㉑ (3, -3)

$$\frac{dx}{dt}=2t, \quad \frac{dy}{dt}=2t-4 \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의 속도는}$$

$$(2t, 2t-4)$$

시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{(2t)^2+(2t-4)^2}=\sqrt{8(t-1)^2+8}$$

따라서 점 P의 속력은 $t=1$ 일 때 최소이므로 그때의 점 P의 위치는 (3, -3)이다.

103 ㉑ ②

$$\frac{dx}{dt}=e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t),$$

$$\frac{dy}{dt}=e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t)$$

이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$(e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$$

시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\{e^t(\cos t - \sin t)\}^2 + \{e^t(\sin t + \cos t)\}^2} = e^t \sqrt{2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = \sqrt{2}e^t$$

$$\text{점 P의 속력이 } \sqrt{2}e \text{이므로 } \sqrt{2}e^t = \sqrt{2}e \quad \therefore t=1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=e^t(\cos t - \sin t) + e^t(-\sin t - \cos t) = -2e^t \sin t,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=e^t(\sin t + \cos t) + e^t(\cos t - \sin t) = 2e^t \cos t$$

이므로 시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$(-2e^t \sin t, 2e^t \cos t)$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{(-2e^t \sin t)^2 + (2e^t \cos t)^2} = 2e^t$$

따라서 $t=1$ 에서 점 P의 가속도의 크기는 $2e$ 이다.



001 답 2

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int \frac{(x-1)(x-2)}{x^2} dx = \int \frac{x^2-3x+2}{x^2} dx \\
 &= \int \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) dx = \int \left(1 - \frac{3}{x} + 2x^{-2}\right) dx \\
 &= x - 3 \ln |x| - 2x^{-1} + C \\
 &= x - 3 \ln |x| - \frac{2}{x} + C
 \end{aligned}$$

$$f(e) = e - \frac{2}{e} \text{에서 } e - 3 - \frac{2}{e} + C = e - \frac{2}{e} \quad \therefore C = 3$$

$$\text{따라서 } f(x) = x - 3 \ln |x| - \frac{2}{x} + 3 \text{이므로}$$

$$f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$$

002 답 e^2

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int \frac{e^{2x} - x^2}{e^x + x} dx = \int \frac{(e^x + x)(e^x - x)}{e^x + x} dx \\
 &= \int (e^x - x) dx = e^x - \frac{1}{2}x^2 + C
 \end{aligned}$$

$$f(0) = 3 \text{에서 } 1 + C = 3 \quad \therefore C = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + 2 \text{이므로}$$

$$f(2) = e^2 - 2 + 2 = e^2$$

003 답 ③

$$\begin{aligned}
 \int \frac{27^x - 1}{9^x + 3^x + 1} dx &= \int \frac{(3^x - 1)(9^x + 3^x + 1)}{9^x + 3^x + 1} dx \\
 &= \int (3^x - 1) dx \\
 &= \frac{3^x}{\ln 3} - x + C
 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a = \ln 3, b = -1 \text{이므로 } ab = -\ln 3$$

004 답 ①

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} dx \\
 &= \int \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 - \cos x} dx \\
 &= \int (1 + \cos x) dx = x + \sin x + C
 \end{aligned}$$

$$f(\pi) = 0 \text{에서 } \pi + C = 0 \quad \therefore C = -\pi$$

$$\text{따라서 } f(x) = x + \sin x - \pi \text{이므로}$$

$$f(0) = -\pi$$

005 답 ④

$$x^2 + 1 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \int 2x(x^2 + 1)^4 dx &= \int t^4 dt = \frac{1}{5}t^5 + C \\
 &= \frac{1}{5}(x^2 + 1)^5 + C
 \end{aligned}$$

006 답 -2

$$9 - 2x^2 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = -4x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{4x}{\sqrt{9 - 2x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t}} \times (-1) dt = -\int t^{-\frac{1}{2}} dt \\
 &= -2t^{\frac{1}{2}} + C = -2\sqrt{t} + C \\
 &= -2\sqrt{9 - 2x^2} + C
 \end{aligned}$$

$$\therefore a = -2$$

007 답 $\frac{3}{2e} - 1$

$$x^2 - 1 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2x \text{이므로}$$

$$f(x) = \int 3xe^{x^2-1} dx = \int 3e^t \times \frac{1}{2} dt = \frac{3}{2}e^t + C = \frac{3}{2}e^{x^2-1} + C$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \text{에서 } \frac{3}{2} + C = \frac{1}{2} \quad \therefore C = -1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{3}{2}e^{x^2-1} - 1 \text{이므로 } f(0) = \frac{3}{2}e^{-1} - 1 = \frac{3}{2e} - 1$$

008 답 $f(x) = (\ln x)^3$

$$\ln x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \text{이므로}$$

$$f(x) = \int \frac{3(\ln x)^2}{x} dx = \int 3t^2 dt = t^3 + C = (\ln x)^3 + C$$

$$f(e) = 1 \text{에서 } 1 + C = 1 \quad \therefore C = 0$$

$$\therefore f(x) = (\ln x)^3$$

009 답 2π

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int f'(x) dx = \int (5 - 2 \sin^2 x) dx \\
 &= \int \{(1 - 2 \sin^2 x) + 4\} dx = \int (\cos 2x + 4) dx \\
 &= \frac{1}{2} \sin 2x + 4x + C
 \end{aligned}$$

$$f(0) = 0 \text{에서 } C = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + 4x \text{이므로 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$$

010 답 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx &= \int \frac{\sin x \times \sin^2 x}{1 - \cos x} dx \\
 &= \int \frac{\sin x (1 - \cos^2 x)}{1 - \cos x} dx \\
 &= \int \frac{\sin x (1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 - \cos x} dx \\
 &= \int \sin x (1 + \cos x) dx
 \end{aligned}$$

$$1 + \cos x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = -\sin x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \int \sin x (1 + \cos x) dx &= \int t \times (-1) dt = -\frac{1}{2}t^2 + C \\
 &= -\frac{1}{2}(1 + \cos x)^2 + C
 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{1}{2}, b = 1 \text{이므로 } a + b = \frac{1}{2}$$

011 답 ③

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-1} dx = \int \frac{(x^2+x-1)'}{x^2+x-1} dx \\ = \ln |x^2+x-1| + C$$

012 답 ⑤

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y) 에서의 접선의 기울기가

$$\frac{3x+5}{x^2+2x-3} \text{ 이므로 } f'(x) = \frac{3x+5}{x^2+2x-3} \\ \frac{3x+5}{x^2+2x-3} = \frac{3x+5}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} \text{로 놓으면} \\ \frac{3x+5}{(x-1)(x+3)} = \frac{(A+B)x + (3A-B)}{(x-1)(x+3)}$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$A+B=3, 3A-B=5$$

두 식을 연립하여 풀면 $A=2, B=1$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{3x+5}{x^2+2x-3} dx \\ = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+3} \right) dx \\ = 2 \ln |x-1| + \ln |x+3| + C$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(-1, 4 \ln 2)$ 를 지나므로 $f(-1) = 4 \ln 2$ 에서

$$2 \ln 2 + \ln 2 + C = 4 \ln 2 \quad \therefore C = \ln 2$$

따라서 $f(x) = 2 \ln |x-1| + \ln |x+3| + \ln 2$ 이므로

$$f(5) = 2 \ln 4 + \ln 8 + \ln 2 = 4 \ln 2 + 3 \ln 2 + \ln 2 = 8 \ln 2$$

013 답 $-e$

$u(x) = x-2, v'(x) = e^{2x}$ 으로 놓으면

$$u'(x) = 1, v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\therefore f(x) = \int (x-2)e^{2x} dx = (x-2) \times \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x} dx \\ = \frac{1}{2}e^{2x}(x-2) - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{4}e^{2x}\{2(x-2)-1\} + C \\ = \frac{1}{4}e^{2x}(2x-5) + C$$

$$f(0) = -\frac{5}{4} \text{에서 } -\frac{5}{4} + C = -\frac{5}{4} \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{4}e^{2x}(2x-5)$ 이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -e$

014 답 $f(x) = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x$

$u(x) = x^2, v'(x) = \sin x$ 로 놓으면

$$u'(x) = 2x, v(x) = -\cos x$$

$$\therefore f(x) = \int x^2 \sin x dx \\ = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx \quad \dots\dots ㉠$$

$\int 2x \cos x dx$ 에서 $s(x) = 2x, t'(x) = \cos x$ 로 놓으면

$$s'(x) = 2, t(x) = \sin x$$

$$\therefore \int 2x \cos x dx = 2x \sin x - \int 2 \sin x dx \\ = 2x \sin x + 2 \cos x + C_1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x) = -x^2 \cos x + (2x \sin x + 2 \cos x + C_1) \\ = (2-x^2) \cos x + 2x \sin x + C$$

$$f(0) = 2 \text{에서 } 2 + C = 2 \quad \therefore C = 0$$

$$\therefore f(x) = (2-x^2) \cos x + 2x \sin x$$

015 답 $f(x) = x - 4\sqrt{x} + \ln |x| + 4$

$$f(x) = \int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x} dx = \int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x} dx \\ = \int \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) dx = \int \left(1 - 2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} \right) dx \\ = x - 4x^{\frac{1}{2}} + \ln |x| + C = x - 4\sqrt{x} + \ln |x| + C$$

$$f(1) = 1 \text{에서 } 1 - 4 + C = 1 \quad \therefore C = 4$$

$$\therefore f(x) = x - 4\sqrt{x} + \ln |x| + 4$$

016 답 ⑤

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \sqrt[3]{x}(x^2+1) dx = \int (x^{\frac{7}{3}} + x^{\frac{1}{3}}) dx \\ = \frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$$

$$f(1) = \frac{3}{2} \text{에서 } \frac{3}{10} + \frac{3}{4} + C = \frac{3}{2} \quad \therefore C = \frac{9}{20}$$

$$\therefore f(0) = C = \frac{9}{20}$$

017 답 ③

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx = \int \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1} dx \\ = \int (\sqrt{x}-1) dx = \int (x^{\frac{1}{2}}-1) dx \\ = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + C \\ \therefore F(9) - F(4) = (18-9+C) - \left(\frac{16}{3} - 4 + C \right) = \frac{23}{3}$$

018 답 ④

$$F(x) = xf(x) - \frac{1+x \ln x}{x} \text{에서 } F(x) = xf(x) - \frac{1}{x} - \ln x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx = \int (x^{-2} - x^{-3}) dx \\ = -x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-2} + C = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$$

$$f(1) = 0 \text{에서 } -1 + \frac{1}{2} + C = 0 \quad \therefore C = \frac{1}{2}$$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

019 ④

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{e^{3x}+1}{e^{2x}-e^x+1} dx \\ &= \int \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^{2x}-e^x+1} dx \\ &= \int (e^x+1) dx = e^x + x + C \end{aligned}$$

$$f(0)=2 \text{에서 } 1+C=2 \quad \therefore C=1$$

$$\text{따라서 } f(x)=e^x+x+1 \text{이므로}$$

$$f(1)=e+2$$

020 ④ $4e^x+C$

$$\begin{aligned} &\int (e^x+1)^2 dx - \int (e^x-1)^2 dx \\ &= \int (e^{2x}+2e^x+1) dx - \int (e^{2x}-2e^x+1) dx \\ &= \int 4e^x dx = 4e^x + C \end{aligned}$$

021 ④ $\frac{1}{e}-2e+2$

$$f'(x) = \begin{cases} x+2e & (x>0) \\ e^x-3 & (x<0) \end{cases} \text{에서}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2+2ex+C_1 & (x>0) \\ e^x-3x+C_2 & (x<0) \end{cases}$$

$$f(1)=\frac{1}{2} \text{에서 } \frac{1}{2}+2e+C_1=\frac{1}{2} \quad \therefore C_1=-2e$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^2+2ex-2e \quad (x>0)$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

$$C_1=1+C_2 \quad \therefore C_2=-1-2e$$

$$\text{따라서 } f(x)=e^x-3x-1-2e \quad (x<0) \text{이므로}$$

$$f(-1)=\frac{1}{e}+3-1-2e=\frac{1}{e}-2e+2$$

022 ②

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2k \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이 존재하}$$

므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{이므로 } f(0) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 2k$$

$$f'(x) = e^{x+1} + k \text{에서 } f'(0) = 2k \text{이므로}$$

$$e+k=2k \quad \therefore k=e$$

$$\text{즉, } f'(x) = e^{x+1} + e \text{이므로}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (e^{x+1} + e) dx = e^{x+1} + ex + C$$

$$f(0)=0 \text{에서 } e+C=0 \quad \therefore C=-e$$

$$\text{따라서 } f(x) = e^{x+1} + ex - e \text{이므로}$$

$$f(-1) = 1 - e - e = 1 - 2e$$

$$\therefore k + f(-1) = e + (1 - 2e) = 1 - e$$

023 ⑤

$$\begin{aligned} \int \frac{8^x-2^x}{2^x-1} dx &= \int \frac{2^{3x}-2^x}{2^x-1} dx = \int \frac{2^x(2^{2x}-1)}{2^x-1} dx \\ &= \int \frac{2^x(2^x+1)(2^x-1)}{2^x-1} dx = \int (4^x+2^x) dx \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2^x}{\ln 2} + C \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a=\ln 4, b=\ln 2 \text{이므로 } a+b=3\ln 2$$

024 ③

$$\begin{aligned} f(x) &= \int 3^x(3^x-2) dx = \int (9^x-2 \times 3^x) dx \\ &= \frac{9^x}{\ln 9} - \frac{2 \times 3^x}{\ln 3} + C = \frac{9^x}{2 \ln 3} - \frac{2 \times 3^x}{\ln 3} + C \end{aligned}$$

$$f(0)=\frac{3}{2 \ln 3} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2 \ln 3} - \frac{2}{\ln 3} + C = \frac{3}{2 \ln 3} \quad \therefore C = \frac{3}{\ln 3}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{9^x}{2 \ln 3} - \frac{2 \times 3^x}{\ln 3} + \frac{3}{\ln 3} \text{이므로}$$

$$f(1) = \frac{9}{2 \ln 3} - \frac{6}{\ln 3} + \frac{3}{\ln 3} = \frac{3}{2 \ln 3}$$

025 ④ $\ln 10$

$$y = \log x + 2 \text{라 하면 } y-2 = \log x, x=10^{y-2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y=10^{x-2}$$

$$\therefore g(x) = 10^{x-2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int g(x) dx &= \int 10^{x-2} dx = \frac{1}{100} \int 10^x dx \\ &= \frac{1}{100} \times \frac{10^x}{\ln 10} + C = \frac{10^{x-2}}{\ln 10} + C \end{aligned}$$

$$\therefore a = \ln 10$$

026 ②

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int 2^{x+1} dx = 2 \int 2^x dx \\ &= 2 \times \frac{2^x}{\ln 2} + C = \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + C \end{aligned}$$

$$f(1) = \frac{4}{\ln 2} \text{에서 } \frac{4}{\ln 2} + C = \frac{4}{\ln 2} \quad \therefore C=0$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{2^{x+1}}{\ln 2} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{f(n)} = \frac{\ln 2}{2^{n+1}} = \ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \ln 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{\ln 2}{4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{2}$$

027 ①

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x} dx \\ &= \int \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x} dx = \int \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x} dx \\ &= \int (1-\sin x) dx = x + \cos x + C \end{aligned}$$

$$f(0)=1 \text{에서 } 1+C=1 \quad \therefore C=0$$

$$\text{따라서 } f(x)=x+\cos x \text{이므로 } f(\pi)=\pi-1$$

028 답 tan x - cot x + C

$$\begin{aligned} \int (\tan x + \cot x)^2 dx &= \int (\tan^2 x + 2 + \cot^2 x) dx \\ &= \int \{(\sec^2 x - 1) + 2 + (\csc^2 x - 1)\} dx \\ &= \int (\sec^2 x + \csc^2 x) dx \\ &= \tan x - \cot x + C \end{aligned}$$

029 답 ②

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} \right) dx \\ &= \int (\csc^2 x - \csc x \cot x) dx \\ &= -\cot x + \csc x + C \\ \therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(-\frac{\pi}{3}\right) &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + C\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} + C\right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

030 답 ⑤

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx \\ &= \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + C \end{aligned}$$

$$f(0)=1 \text{에서 } -1+C=1 \quad \therefore C=2$$

$$\text{따라서 } f(x)=x-\cos x+2 \text{이므로}$$

$$f(\pi)=\pi-(-1)+2=\pi+3$$

031 답 ④

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y) 에서의 접선의 기울기가 $a \csc^2 x + b \sec^2 x$ 이므로 $f'(x)=a \csc^2 x + b \sec^2 x$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (a \csc^2 x + b \sec^2 x) dx \\ &= -a \cot x + b \tan x + C \end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$ 가 두 점 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{2}\right)$ 을 지나므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2} \text{에서 } -a+b+C=\frac{1}{2} \quad \dots\dots ①$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2} \text{에서 } a-b+C=\frac{3}{2} \quad \dots\dots ②$$

①에서 ②을 변끼리 빼면

$$2a-2b=1$$

$$\therefore a-b=\frac{1}{2}$$

032 답 2

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{-h} \\ &= f'(x) + f'(x) = 2f'(x) \\ \text{즉, } 2f'(x) &= \frac{4}{\cos 2x+1} \text{이므로 } f'(x) = \frac{2}{\cos 2x+1} \\ \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{2}{\cos 2x+1} dx \\ &= \int \frac{2}{(2\cos^2 x - 1) + 1} dx \\ &= \int \sec^2 x dx = \tan x + C \end{aligned}$$

$$f(0)=1 \text{에서 } C=1$$

$$\text{따라서 } f(x)=\tan x+1 \text{이므로 } f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+1=2$$

033 답 10

$$\begin{aligned} x^2-4x+2=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= 2x-4 \text{이므로} \\ \int (2x-4)(x^2-4x+2)^4 dx &= \int t^4 dt = \frac{1}{5} t^5 + C \\ &= \frac{1}{5} (x^2-4x+2)^5 + C \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a=5, b=5 \text{이므로 } a+b=10$$

034 답 ③

$$3x-1=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (3x-1)^6 dx = \int t^6 \times \frac{1}{3} dt \\ &= \frac{1}{21} t^7 + C = \frac{1}{21} (3x-1)^7 + C \end{aligned}$$

$$f(0)=-\frac{1}{21} \text{에서 } -\frac{1}{21} + C = -\frac{1}{21} \quad \therefore C=0$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{1}{21} (3x-1)^7 \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{21} (2-1)^7=\frac{1}{21}$$

035 답 ⑤

$$x^3-2=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 3x^2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int x^2(x^3-2)^5 dx = \int t^5 \times \frac{1}{3} dt \\ &= \frac{1}{18} t^6 + C = \frac{1}{18} (x^3-2)^6 + C \end{aligned}$$

$$f(1)=\frac{5}{9} \text{에서 } \frac{1}{18} + C = \frac{5}{9} \quad \therefore C=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{18} (x^3-2)^6 + \frac{1}{2}$$

따라서 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(-1)=\frac{1}{18} \times (-3)^6 + \frac{1}{2} = 41$$

036 답 $-\frac{5}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{(2x-7)^2}$ 이고, $2x-7=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{1}{(2x-7)^2} dx = \int \frac{1}{t^2} \times \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-2} dt = -\frac{1}{2} t^{-1} + C = -\frac{1}{2t} + C \\ &= -\frac{1}{2(2x-7)} + C \end{aligned}$$

$$f(3) = -\frac{3}{2} \text{에서 } \frac{1}{2} + C = -\frac{3}{2} \quad \therefore C = -2$$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{2(2x-7)} - 2$ 이므로

$$f(4) = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$$

037 답 $\sqrt{2}$

$ax+3=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=a$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (ax+3)^7 dx = \int t^7 \times \frac{1}{a} dt \\ &= \frac{1}{8a} t^8 + C = \frac{1}{8a} (ax+3)^8 + C \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{1}{8a} \times a^8 = \sqrt{2}, \quad a^7 = (\sqrt{2})^7 \quad \therefore a = \sqrt{2}$$

038 답 ③

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (3x^2+2x-8) dx \\ &= x^3+x^2-8x+C_1 \end{aligned}$$

$$f(0) = -12 \text{에서 } C_1 = -12$$

$$\therefore f(x) = x^3+x^2-8x-12$$

이때 $f(x)=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} g(x) &= \int f(x)f'(x) dx = \int t dt \\ &= \frac{1}{2} t^2 + C_2 = \frac{1}{2} (x^3+x^2-8x-12)^2 + C_2 \end{aligned}$$

$$g(3)=0 \text{에서 } C_2=0$$

$$\therefore g(x) = \frac{1}{2} (x^3+x^2-8x-12)^2 = \frac{1}{2} \{ (x+2)^2(x-3) \}^2$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 가 x 축과 만나는 두 점의 좌표는 $(-2, 0)$, $(3, 0)$ 이므로 선분 AB의 길이는 5이다.

039 답 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

$3x^2-7=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=6x$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{x}{\sqrt{3x^2-7}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{6} dt = \frac{1}{6} \int t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{3} t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{t} + C = \frac{1}{3} \sqrt{3x^2-7} + C \end{aligned}$$

$$\therefore f(3)-f(2) = \left(\frac{2\sqrt{5}}{3} + C \right) - \left(\frac{\sqrt{5}}{3} + C \right) = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

040 답 7

$x^2+4=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int x\sqrt{x^2+4} dx = \int \sqrt{t} \times \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} t\sqrt{t} + C = \frac{1}{3} (x^2+4)\sqrt{x^2+4} + C \end{aligned}$$

$$f(0) = \frac{2}{3} \text{에서 } \frac{8}{3} + C = \frac{2}{3} \quad \therefore C = -2$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{3} (x^2+4)\sqrt{x^2+4} - 2$ 이므로

$$f(\sqrt{5}) = \frac{1}{3} \times 9 \times 3 - 2 = 7$$

041 답 ④

$x^2-6x+11=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-6=2(x-3)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+11}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= t^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2-6x+11} + C \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq 7$ 에서 $x^2-6x+11=(x-3)^2+2$ 는 $x=3$ 일 때 최솟값,
 $x=7$ 일 때 최댓값을 가지므로

$$M=f(7)=3\sqrt{2}+C, \quad m=f(3)=\sqrt{2}+C$$

$$\therefore M-m=2\sqrt{2}$$

042 답 $\frac{62}{15}$

$x-1=t$ 로 놓으면 $x=t+1$ 이고 $\frac{dt}{dx}=1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int 2x\sqrt{x-1} dx \\ &= \int 2(t+1)\sqrt{t} dt = \int (2t\sqrt{t}+2\sqrt{t}) dt \\ &= \int (2t^{\frac{3}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}) dt = \frac{4}{5} t^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{4}{5} t^2\sqrt{t} + \frac{4}{3} t\sqrt{t} + C \\ &= \frac{4}{5} (x-1)^2\sqrt{x-1} + \frac{4}{3} (x-1)\sqrt{x-1} + C \end{aligned}$$

$$f(1)=2 \text{에서 } C=2$$

따라서 $f(x) = \frac{4}{5} (x-1)^2\sqrt{x-1} + \frac{4}{3} (x-1)\sqrt{x-1} + 2$ 이므로

$$f(2) = \frac{4}{5} + \frac{4}{3} + 2 = \frac{62}{15}$$

다른 풀이 $\sqrt{x-1}=t$ 로 놓고 양변을 제곱하면 $x-1=t^2$, 즉

$x=t^2+1$ 이고 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2t}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int 2x\sqrt{x-1} dx \\ &= \int (2t^2+2) \times t \times 2t dt = \int (4t^4+4t^2) dt \\ &= \frac{4}{5} t^5 + \frac{4}{3} t^3 + C = \frac{4}{5} (\sqrt{x-1})^5 + \frac{4}{3} (\sqrt{x-1})^3 + C \end{aligned}$$

$$f(1)=2 \text{에서 } C=2$$

따라서 $f(x) = \frac{4}{5} (\sqrt{x-1})^5 + \frac{4}{3} (\sqrt{x-1})^3 + 2$ 이므로

$$f(2) = \frac{4}{5} + \frac{4}{3} + 2 = \frac{62}{15}$$

043 답 ③

$x^2 - 2x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2x - 2 = 2(x - 1)$ 이므로

$$f(x) = \int (x-1)e^{x^2-2x} dx = \int e^t \times \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2-2x} + C$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \text{에서 } \frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \quad \therefore C = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2}e^{x^2-2x} \text{이므로 } f(1) = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e}$$

044 답 21

$e^x + 3 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = e^x$ 이므로

$$F(x) = \int 2e^x(e^x + 3) dx = \int 2t dt$$

$$= t^2 + C = (e^x + 3)^2 + C$$

$$F(0) = 12 \text{에서 } 16 + C = 12 \quad \therefore C = -4$$

따라서 $F(x) = (e^x + 3)^2 - 4$ 이므로

$$F(\ln 2) = (2 + 3)^2 - 4 = 21$$

045 답 $5\sqrt{2}$

곡선 $y = f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y) 에서의 접선의 기울기가

$$\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \text{이므로 } f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}$$

$e^x + 1 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = e^x$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2t^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{e^x+1} + C$$

곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(0, 3\sqrt{2})$ 를 지나므로 $f(0) = 3\sqrt{2}$ 에서

$$2\sqrt{2} + C = 3\sqrt{2} \quad \therefore C = \sqrt{2}$$

따라서 $f(x) = 2\sqrt{e^x+1} + \sqrt{2}$ 이므로

$$f(\ln 7) = 2\sqrt{7+1} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

046 답 ④

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2}{x} = 6$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) - 2\} = 0 \text{이므로 } f(0) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 6$$

$$f'(0) = 6 \text{이므로 } f'(x) = 3ae^{3x} \text{에서}$$

$$3a = 6 \quad \therefore f'(x) = 6e^{3x}$$

$3x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 3$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 6e^{3x} dx$$

$$= \int 2e^t dt = 2e^t + C = 2e^{3x} + C$$

$$f(0) = 2 \text{에서 } 2 + C = 2 \quad \therefore C = 0 \quad \therefore f(x) = 2e^{3x}$$

$$\therefore f'(1) - f(1) = 6e^3 - 2e^3 = 4e^3$$

047 답 ③

$\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int \frac{1}{t^2} dt = \int t^{-2} dt$$

$$= -t^{-1} + C = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$$

$$f(e) = 0 \text{에서 } -1 + C = 0 \quad \therefore C = 1$$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{\ln x} + 1$ 이므로

$$f(e^2) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

048 답 $\frac{7}{2}$

$\ln 2x + 1 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$F(x) = \int \frac{\ln 2x + 1}{x} dx = \int t dt$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(\ln 2x + 1)^2 + C$$

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \text{에서 } \frac{1}{2} + C = 2 \quad \therefore C = \frac{3}{2}$$

따라서 $F(x) = \frac{1}{2}(\ln 2x + 1)^2 + \frac{3}{2}$ 이므로

$$F\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+1)^2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

049 답 e^4

$\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= 2t^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$$

$$f(e) = 1 \text{에서 } 2 + C = 1 \quad \therefore C = -1$$

따라서 $f(x) = 2\sqrt{\ln x} - 1$ 이므로 $f(x) = 3$ 에서

$$2\sqrt{\ln x} - 1 = 3, \sqrt{\ln x} = 2, \ln x = 4 \quad \therefore x = e^4$$

050 답 ④

$$\frac{f'(x)}{x} = \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} \text{에서 } f'(x) = \frac{x \ln(x^2+1)}{x^2+1}$$

$\ln(x^2+1) = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{x^2+1}$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{x \ln(x^2+1)}{x^2+1} dx$$

$$= \int t \times \frac{1}{2} dt = \frac{1}{4}t^2 + C$$

$$= \frac{1}{4}\{\ln(x^2+1)\}^2 + C$$

$$f(0) = \frac{3}{4} \text{에서 } C = \frac{3}{4}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{4}\{\ln(x^2+1)\}^2 + \frac{3}{4}$ 이므로

$$f(\sqrt{e}-1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

051 **답** $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + 1$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$= \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$f(0) = 1$ 에서 $C = 1$

$\therefore f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + 1$

052 **답** ①

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y) 에서의 접선의 기울기가

$2 \sin \frac{x}{2}$ 이므로 $f'(x) = 2 \sin \frac{x}{2}$

$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int 2 \sin \frac{x}{2} dx = -4 \cos \frac{x}{2} + C$

$\therefore f(\pi) - f(2\pi) = C - (4 + C) = -4$

053 **답** ⑤

$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ 이므로 $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$

$\therefore f(x) = \int (2 \sin^2 x - \sin x) dx = \int (1 - \cos 2x - \sin x) dx$

$$= x - \frac{1}{2} \sin 2x + \cos x + C$$

$f(\pi) = \pi$ 에서 $\pi - 1 + C = \pi \quad \therefore C = 1$

따라서 $f(x) = x - \frac{1}{2} \sin 2x + \cos x + 1$ 이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1$

054 **답** ②

$f'(x) = \sin 2x + \cos x = 2 \sin x \cos x + \cos x$

$$= \cos x (2 \sin x + 1)$$

$f'(x) = 0$ 에서 $\cos x = 0$ 또는 $\sin x = -\frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{7}{6}\pi$ ($\because 0 < x < \frac{3}{2}\pi$)

$0 < x < \frac{3}{2}\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{7}{6}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 극대이고, $x = \frac{7}{6}\pi$ 에서 극소이다.

$f(x) = \int f'(x) dx = \int (\sin 2x + \cos x) dx$

$$= -\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x + C$$

함수 $f(x)$ 의 극댓값이 2이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ 에서

$\frac{1}{2} + 1 + C = 2 \quad \therefore C = \frac{1}{2}$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x + \frac{1}{2}$ 이므로 $f(x)$ 의 극솟값은

$f\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

055 **답** $\frac{4}{3}$

$\int \cos^3 x dx = \int \cos x \times \cos^2 x dx$

$$= \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \cos x$ 이므로

$\int \cos x (1 - \sin^2 x) dx = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{1}{3} t^3 + C$

$$= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$$

따라서 $a = 1, b = -\frac{1}{3}$ 이므로 $a - b = \frac{4}{3}$

056 **답** ③

$\cot x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -\csc^2 x$ 이므로

$f(x) = \int \csc^2 x \cot x dx = \int t \times (-1) dt$

$$= -\frac{1}{2} t^2 + C = -\frac{1}{2} \cot^2 x + C$$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ 에서 $-\frac{3}{2} + C = 1 \quad \therefore C = \frac{5}{2}$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{2} \cot^2 x + \frac{5}{2}$ 이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2$

057 **답** ①

$f(x) = \int f'(x) dx = \int \sin x \cos 2x dx$

$$= \int \sin x (2 \cos^2 x - 1) dx$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$ 이므로

$f(x) = \int \sin x (2 \cos^2 x - 1) dx = \int (2t^2 - 1) \times (-1) dt$

$$= -\frac{2}{3} t^3 + t + C = -\frac{2}{3} \cos^3 x + \cos x + C$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ 에서 $C = 1$

따라서 $f(x) = -\frac{2}{3} \cos^3 x + \cos x + 1$ 이므로

$f(\pi) = \frac{2}{3} - 1 + 1 = \frac{2}{3}$

058 **답** 3

$\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$\int \frac{\sin(\ln x)}{2x} dx = \int \frac{\sin t}{2} dt = -\frac{1}{2} \cos t + C$

$$= -\frac{1}{2} \cos(\ln x) + C$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ -\frac{1}{2} \cos(\ln x) + C \right\} = 2$

$-\frac{1}{2} + C = 2 \quad \therefore C = \frac{5}{2}$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{2} \cos(\ln x) + \frac{5}{2}$ 이므로

$$f(e^\pi) = -\frac{1}{2} \cos \pi + \frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$$

059 답 ⑤

$$\int \frac{3x^2-6x}{x^3-3x^2+5} dx = \int \frac{(x^3-3x^2+5)'}{x^3-3x^2+5} dx$$

$$= \ln |x^3-3x^2+5| + C$$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ 이므로

$$f(1) = 1 - 3 + 5 = 3$$

060 답 ④

$$f(x) = \int \frac{4e^{4x}}{e^{4x}+3} dx = \int \frac{(e^{4x}+3)'}{e^{4x}+3} dx$$

$$= \ln(e^{4x}+3) + C$$

$$f(0)=0 \text{에서 } \ln 4 + C = 0 \quad \therefore C = -\ln 4$$

따라서 $f(x) = \ln(e^{4x}+3) - \ln 4$ 이므로

$$f(\ln 3) = \ln(e^{\ln 81} + 3) - \ln 4 = \ln 84 - \ln 4 = \ln 21$$

061 답 $h(x) = \ln |x^2+2x-\cos x| + 3$

$h(x) = 2f(x) + g(x)$ 이므로

$$h(x) = 2 \int \frac{x+1}{x^2+2x-\cos x} dx + \int \frac{\sin x}{x^2+2x-\cos x} dx$$

$$= \int \frac{2x+2+\sin x}{x^2+2x-\cos x} dx$$

$$= \int \frac{(x^2+2x-\cos x)'}{x^2+2x-\cos x} dx$$

$$= \ln |x^2+2x-\cos x| + C$$

$$h(0)=3 \text{에서 } C=3$$

$$\therefore h(x) = \ln |x^2+2x-\cos x| + 3$$

062 답 3

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{x-1}{x^2-2x-2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2-2x-2)'}{x^2-2x-2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x^2-2x-2| + C$$

$$f(1) = \frac{\ln 3}{2} \text{에서 } \frac{\ln 3}{2} + C = \frac{\ln 3}{2} \quad \therefore C=0$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2} \ln |x^2-2x-2|$ 이므로 $f(x)=0$ 에서

$$\frac{1}{2} \ln |x^2-2x-2| = 0 \quad \therefore |x^2-2x-2| = 1$$

(i) $x^2-2x-2=1$ 일 때

$$x^2-2x-3=0, (x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

(ii) $x^2-2x-2=-1$ 일 때

$$x^2-2x-1=0$$

$$\therefore x=1-\sqrt{2} \text{ 또는 } x=1+\sqrt{2}$$

따라서 구하는 자연수 x 의 값은 3이다.

063 답 ④

$f'(x)=f(x)$ 에서 $\frac{f'(x)}{f(x)}=1$ 이므로

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int dx$$

$$\ln f(x) = x + C \quad (\because f(x) > 0)$$

따라서 $f(x) = e^{x+C}$ 이므로

$$\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{e^{2+C}}{e^{1+C}} = e$$

064 답 $-3 \ln 2$

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \text{로 놓으면}$$

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x - (3A+2B)}{(x-2)(x-3)}$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$A+B=1, 3A+2B=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $A=-2, B=3$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int \frac{x}{x^2-5x+6} dx$$

$$= \int \left(\frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3} \right) dx$$

$$= -2 \ln |x-2| + 3 \ln |x-3| + C$$

$$f(1) = 2 \ln 2 \text{에서}$$

$$3 \ln 2 + C = 2 \ln 2 \quad \therefore C = -\ln 2$$

따라서 $f(x) = -2 \ln |x-2| + 3 \ln |x-3| - \ln 2$ 이므로

$$f(4) = -2 \ln 2 - \ln 2 = -3 \ln 2$$

065 답 ②

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) \text{이므로}$$

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} (\ln |x-1| - \ln |x+1|) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$$

066 답 $\ln 2 + 3$

$$f(x) = \int \frac{2x^2+3x+2}{x+1} dx$$

$$= \int \frac{(2x+1)(x+1)+1}{x+1} dx$$

$$= \int \left(2x+1 + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= x^2 + x + \ln |x+1| + C$$

$$f(0)=1 \text{에서 } C=1$$

따라서 $f(x) = x^2 + x + \ln |x+1| + 1$ 이므로

$$f(1) = \ln 2 + 3$$

067 ㉔ ⑤

$$\int \frac{x^2+2}{x^2-x-2} dx = \int \frac{(x^2-x-2)+x+4}{x^2-x-2} dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{x+4}{x^2-x-2}\right) dx$$

이때 $\frac{x+4}{x^2-x-2} = \frac{x+4}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$ 로 놓으면

$$\frac{x+4}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A+B}{(x+1)(x-2)}$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$A+B=1, -2A+B=4$$

두 식을 연립하여 풀면 $A=-1, B=2$

$$\therefore \int \frac{x^2+2}{x^2-x-2} dx = \int \left(1 + \frac{x+4}{x^2-x-2}\right) dx$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}\right) dx$$

$$= x - \ln|x+1| + 2\ln|x-2| + C$$

따라서 $p=1, q=-1, r=2$ 이므로 $p+q+r=2$

068 ㉔ 21

$$f(x) = \int \frac{3}{9x^2-3x-2} dx = \int \frac{3}{(3x-2)(3x+1)} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{3x-2} - \frac{1}{3x+1}\right) dx$$

$$= \ln|3x-2| - \ln|3x+1| + C = \ln\left|\frac{3x-2}{3x+1}\right| + C$$

$f(0)=\ln 2$ 에서 $\ln 2 + C = \ln 2 \quad \therefore C=0$

$$\therefore f(x) = \ln\left|\frac{3x-2}{3x+1}\right|$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n \ln\left|\frac{3k-2}{3k+1}\right|$$

$$= \ln\frac{1}{4} + \ln\frac{4}{7} + \ln\frac{7}{10} + \dots + \ln\frac{3n-2}{3n+1}$$

$$= \ln\left(\frac{1}{4} \times \frac{4}{7} \times \frac{7}{10} \times \dots \times \frac{3n-2}{3n+1}\right)$$

$$= \ln\frac{1}{3n+1} = -\ln(3n+1)$$

따라서 $-\ln(3n+1) = -6\ln 2$ 이므로

$$3n+1=2^6=64$$

$$3n=63 \quad \therefore n=21$$

069 ㉔ $\ln 3 + \frac{1}{4}$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = f(x) + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$xf'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \quad \therefore f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$
로 놓으면

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A}{x(x+1)^2}$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$A+B=0, 2A+B+C=0, A=1$$

$$A+B=0 \text{에서 } 1+B=0 \quad \therefore B=-1$$

$$2A+B+C=0 \text{에서 } 2-1+C=0 \quad \therefore C=-1$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x(x+1)^2} dx$$

$$= \int \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right\} dx$$

$$= \ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + C$$

$$f(1) = \ln 2 + \frac{1}{2} \text{에서 } -\ln 2 + \frac{1}{2} + C = \ln 2 + \frac{1}{2} \quad \therefore C = 2\ln 2$$

따라서 $f(x) = \ln x - \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + 2\ln 2$ 이므로

$$f(3) = \ln 3 - \ln 4 + \frac{1}{4} + 2\ln 2 = \ln 3 + \frac{1}{4}$$

070 ㉔ ③

$u(x)=2x+1, v'(x)=e^{x-1}$ 으로 놓으면

$$u'(x)=2, v(x)=e^{x-1}$$

$$\therefore f(x) = \int (2x+1)e^{x-1} dx = (2x+1)e^{x-1} - \int 2e^{x-1} dx$$

$$= (2x+1)e^{x-1} - 2e^{x-1} + C = (2x-1)e^{x-1} + C$$

$$f(1)=2 \text{에서 } 1+C=2 \quad \therefore C=1$$

$$\therefore f(x) = (2x-1)e^{x-1} + 1$$

071 ㉔ $\frac{e^2}{4}$

$u(x)=\ln x, v'(x)=x$ 로 놓으면

$$u'(x)=\frac{1}{x}, v(x)=\frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int x \ln x dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

$$= \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) + C$$

$$f(1) = -\frac{1}{4} \text{에서 } -\frac{1}{4} + C = -\frac{1}{4} \quad \therefore C=0$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1) \text{이므로 } f(e) = \frac{e^2}{4}$$

072 ㉔ ③

$f(x) = \int (2x+a)e^x dx$ 의 양변을 미분하면

$$f'(x) = (2x+a)e^x$$

$$f'(2)=0 \text{에서 } (4+a)e^2=0 \quad \therefore a=-4$$

$u(x)=2x-4, v'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$$u'(x)=2, v(x)=e^x$$

$$\therefore f(x) = \int (2x-4)e^x dx = (2x-4)e^x - \int 2e^x dx$$

$$= (2x-4)e^x - 2e^x + C = (2x-6)e^x + C$$

$$f(0)=0 \text{에서 } -6+C=0 \quad \therefore C=6$$

따라서 $f(x) = (2x-6)e^x + 6$ 이므로

$$f(\ln 2) = (2\ln 2 - 6) \times 2 + 6 = 4\ln 2 - 6$$

$$\therefore a+f(\ln 2) = -4 + (4\ln 2 - 6) = 4\ln 2 - 10$$

073 **답** $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} + 1$

$u(x)=x, v'(x)=\sec^2 x$ 로 놓으면

$u'(x)=1, v(x)=\tan x$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int x \sec^2 x dx = x \tan x - \int \tan x dx \\ &= x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= x \tan x + \ln |\cos x| + C\end{aligned}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$f(0)=1$ 에서 $C=1$

따라서 $f(x)=x \tan x + \ln |\cos x| + 1$ 이므로

$$k=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}+1$$

074 **답** ⑤

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = f(x) + 2x \sin x + x^2 \cos x$$

$$xf'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x = x(2 \sin x + x \cos x)$$

따라서 $f'(x)=2 \sin x + x \cos x$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2 \sin x + x \cos x) dx \\ &= \int 2 \sin x dx + \int x \cos x dx \\ &= -2 \cos x + \int x \cos x dx \quad \dots\dots ㉠\end{aligned}$$

$\int x \cos x dx$ 에서 $u(x)=x, v'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$u'(x)=1, v(x)=\sin x$

$$\begin{aligned}\therefore \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C_1 \quad \dots\dots ㉡\end{aligned}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}f(x) &= -2 \cos x + x \sin x + \cos x + C \\ &= x \sin x - \cos x + C\end{aligned}$$

$f(2\pi)=1$ 에서

$$-1+C=1 \quad \therefore C=2$$

따라서 $f(x)=x \sin x - \cos x + 2$ 이므로

$$f(\pi)=1+2=3$$

075 **답** $\frac{\pi^2}{4} - 1$

$u(x)=x^2, v'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$u'(x)=2x, v(x)=\sin x$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int x^2 \cos x dx \\ &= x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx \quad \dots\dots ㉠\end{aligned}$$

$\int 2x \sin x dx$ 에서 $s(x)=2x, t'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$s'(x)=2, t(x)=-\cos x$

$$\begin{aligned}\therefore \int 2x \sin x dx &= -2x \cos x + \int 2 \cos x dx \\ &= -2x \cos x + 2 \sin x + C_1 \quad \dots\dots ㉡\end{aligned}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 \sin x - (-2x \cos x + 2 \sin x + C_1) \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C \\ &= (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C\end{aligned}$$

$f(0)=1$ 에서 $C=1$

따라서 $f(x)=(x^2-2) \sin x + 2x \cos x + 1$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}-2+1=\frac{\pi^2}{4}-1$$

076 **답** ④

$u(x)=x^2-2x+3, v'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$u'(x)=2x-2, v(x)=e^x$

$$\begin{aligned}\therefore \int (x^2-2x+3)e^x dx \\ &= (x^2-2x+3)e^x - \int (2x-2)e^x dx \quad \dots\dots ㉠\end{aligned}$$

$\int (2x-2)e^x dx$ 에서 $s(x)=2x-2, t'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$s'(x)=2, t(x)=e^x$

$$\begin{aligned}\therefore \int (2x-2)e^x dx &= (2x-2)e^x - \int 2e^x dx \\ &= (2x-2)e^x - 2e^x + C_1 \\ &= (2x-4)e^x + C_1 \quad \dots\dots ㉡\end{aligned}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}\int (x^2-2x+3)e^x dx &= (x^2-2x+3)e^x - \{(2x-4)e^x + C_1\} \\ &= (x^2-4x+7)e^x + C\end{aligned}$$

따라서 $f(x)=x^2-4x+7$ 이므로

$$f(1)=1-4+7=4$$

077 **답** $\frac{e-2}{e-1}$

$f'(x)=(\ln x)^2$ 이고 $u(x)=(\ln x)^2, v'(x)=1$ 로 놓으면

$$u'(x)=\frac{2 \ln x}{x}, v(x)=x$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (\ln x)^2 dx \\ &= x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx \quad \dots\dots ㉠\end{aligned}$$

$\int \ln x dx$ 에서 $s(x)=\ln x, t'(x)=1$ 로 놓으면

$$s'(x)=\frac{1}{x}, t(x)=x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int \ln x dx &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C_1 \quad \dots\dots ㉡\end{aligned}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned}f(x) &= x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x + C_1) \\ &= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C\end{aligned}$$

$$\therefore f(1)=2+C, f(e)=e+C$$

따라서 두 점 $(1, f(1)), (e, f(e))$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{f(e)-f(1)}{e-1} = \frac{(e+C)-(2+C)}{e-1} = \frac{e-2}{e-1}$$

078 ㉡ 2

$u(x) = \sin x$, $v'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$u'(x) = \cos x$, $v(x) = e^x$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int e^x \sin x dx$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\int e^x \cos x dx$ 에서 $s(x) = \cos x$, $t'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$s'(x) = -\sin x$, $t(x) = e^x$

$$\therefore \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx$$

$$= e^x \cos x + f(x) + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉡을 ㉡에 대입하면

$$f(x) = e^x \sin x - (e^x \cos x + f(x) + C_1)$$

$$= e^x (\sin x - \cos x) - f(x) - C_1$$

$$2f(x) = e^x (\sin x - \cos x) - C_1$$

$$\therefore f(x) = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \text{에서 } C = 0$$

따라서 $f(x) = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x)$ 이므로 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x}{4}$ 에서

$$g(x) = \frac{4f(x)}{e^x} = \frac{2e^x (\sin x - \cos x)}{e^x} = 2(\sin x - \cos x)$$

$$\therefore g(\pi) = 2 \times 1 = 2$$

079 ㉡ 4

$$f(x) = \int \frac{3x + \sqrt{x}}{x} dx = \int (3 + x^{-\frac{1}{2}}) dx$$

$$= 3x + 2x^{\frac{1}{2}} + C = 3x + 2\sqrt{x} + C$$

$$f(1) = 3 \text{에서 } 5 + C = 3 \quad \therefore C = -2$$

따라서 $f(x) = 3x + 2\sqrt{x} - 2$ 이므로

$$f(4) = 12 + 4 - 2 = 14$$

080 ㉡ $e^{x+2} + C$

$y = \ln x - 2$ 라 하면 $y + 2 = \ln x$, $x = e^{y+2}$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = e^{x+2}$

따라서 $g(x) = e^{x+2}$ 이므로

$$\int g(x) dx = \int e^{x+2} dx = e^2 \int e^x dx = e^2 \times e^x + C = e^{x+2} + C$$

081 ㉡ $\frac{1}{4 \ln 2} - 2$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(-1+2h) - F(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(-1+2h) - F(-1)}{2h} \times 2$$

$$= 2F'(-1) = 2f(-1)$$

$$f(x) = \int \frac{8^x + 1}{2^x + 1} dx = \int \frac{(2^x + 1)(4^x - 2^x + 1)}{2^x + 1} dx$$

$$= \int (4^x - 2^x + 1) dx = \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2^x}{\ln 2} + x + C$$

$$= \frac{4^x}{2 \ln 2} - \frac{2^x}{\ln 2} + x + C$$

$$f(0) = 0 \text{에서 } \frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{\ln 2} + C = 0 \quad \therefore C = \frac{1}{2 \ln 2}$$

따라서 $f(x) = \frac{4^x}{2 \ln 2} - \frac{2^x}{\ln 2} + x + \frac{1}{2 \ln 2}$ 이므로

$$2f(-1) = 2 \left(\frac{1}{8 \ln 2} - \frac{1}{2 \ln 2} - 1 + \frac{1}{2 \ln 2} \right) = \frac{1}{4 \ln 2} - 2$$

082 ㉡ ①

$$\int \frac{1}{1 + \sin x} dx = \int \frac{1 - \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} dx$$

$$= \int \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx$$

$$= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx$$

$$= \tan x - \sec x + C$$

따라서 $a = 1$, $b = -1$ 이므로 $ab = -1$

083 ㉡ ④

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(\cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2} \right) dx$$

$$= \int \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx$$

$$= \int \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int \cos x dx$$

$$= \sin x + C$$

$$f(a) = f(0) \text{에서 } \sin a + C = C \quad \therefore \sin a = 0$$

이때 $0 < a < 2\pi$ 이므로 $a = \pi$

084 ㉡ $\frac{81}{5}$

$x^3 + 6x^2 - 4 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 3x^2 + 12x = 3x(x+4)$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int x(x+4)(x^3 + 6x^2 - 4)^4 dx$$

$$= \int t^4 \times \frac{1}{3} dt = \frac{1}{15} t^5 + C = \frac{1}{15} (x^3 + 6x^2 - 4)^5 + C$$

$$f(-1) = \frac{1}{15} \text{에서 } \frac{1}{15} + C = \frac{1}{15} \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{15} (x^3 + 6x^2 - 4)^5$ 이므로

$$f(1) = \frac{1}{15} (1 + 6 - 4)^5 = \frac{81}{5}$$

085 ㉡ ③

$4x - 1 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 4$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{1}{(4x-1)^2} dx = \int \frac{1}{t^2} \times \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} \int t^{-2} dt$$

$$= -\frac{1}{4} t^{-1} + C = -\frac{1}{4t} + C = -\frac{1}{4(4x-1)} + C$$

$$f(0) = \frac{1}{4} \text{에서 } \frac{1}{4} + C = \frac{1}{4} \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{4(4x-1)}$ 이므로

$$f(x) = 1 \text{에서 } -\frac{1}{4(4x-1)} = 1, 4x-1 = -\frac{1}{4}$$

$$4x = \frac{3}{4} \quad \therefore x = \frac{3}{16}$$

086 [답] ②

$2x+1=t$ 로 놓으면 $x=\frac{t-1}{2}$ 이고 $\frac{dt}{dx}=2$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{2x-1}{\sqrt{2x+1}} dx = \int \frac{t-2}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{2} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{2}\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt = \int \left(\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}} \right) dt \\ &= \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3}t\sqrt{t} - 2\sqrt{t} + C \\ &= \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} - 2\sqrt{2x+1} + C \\ &= \frac{1}{3}(2x-5)\sqrt{2x+1} + C \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 0 \text{에서 } C=0$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}(2x-5)\sqrt{2x+1}$$

한편 $f(x) = \int \frac{2x-1}{\sqrt{2x+1}} dx$ 에서 $x \geq -\frac{1}{2}$ 이고, 양변을 x 에 대하여

$$\text{미분하면 } f'(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = \frac{1}{2}$$

$x \geq -\frac{1}{2}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\frac{1}{2}$	$\dots$	$\frac{1}{2}$	$\dots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$

087 [답] ③

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y) 에서의 접선의 기울기가 e^{1-2x} 이므로 $f'(x) = e^{1-2x}$

$1-2x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -2$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int e^{1-2x} dx = \int e^t \times \left(-\frac{1}{2}\right) dt \\ &= -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{1-2x} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(0) - f(1) &= \left(-\frac{1}{2}e + C\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{-1} + C\right) \\ &= -\frac{1}{2}e + \frac{1}{2e} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e} - e\right) \end{aligned}$$

088 [답] $\frac{7\sqrt{2}}{3}$

$e^x - 1 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = e^x$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int e^x \sqrt{e^x - 1} dx \\ &= \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}t\sqrt{t} + C = \frac{2}{3}(e^x - 1)\sqrt{e^x - 1} + C \end{aligned}$$

$$f(0) = \sqrt{2} \text{에서 } C = \sqrt{2}$$

따라서 $f(x) = \frac{2}{3}(e^x - 1)\sqrt{e^x - 1} + \sqrt{2}$ 이므로

$$f(\ln 3) = \frac{2}{3} \times 2 \times \sqrt{2} + \sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{3}$$

089 [답] $f(x) = 2\sqrt{\ln x + 3} + 1$

$\ln x + 3 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{1}{x\sqrt{\ln x + 3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2t^{\frac{1}{2}} + C \\ &= 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x + 3} + C \end{aligned}$$

$$f(e) = 5 \text{에서 } 4 + C = 5 \quad \therefore C = 1$$

$$\therefore f(x) = 2\sqrt{\ln x + 3} + 1$$

090 [답] ⑤

$$\begin{aligned} f(x) &= \int 2 \sin 4x \cos^2 2x dx + \int 4 \sin^3 2x \cos 2x dx \\ &= \int (2 \sin 4x \cos^2 2x + 2 \sin^2 2x \sin 4x) dx \\ &= \int 2 \sin 4x (\cos^2 2x + \sin^2 2x) dx \\ &= \int 2 \sin 4x dx \\ &= -\frac{1}{2} \cos 4x + C \end{aligned}$$

$$f(\pi) = \frac{1}{2} \text{에서 } -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \quad \therefore C = 1$$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{2} \cos 4x + 1$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

091 [답] ⑤

$1 + \sin x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \cos x$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (1 + \sin x)^3 \cos x dx = \int t^3 dt \\ &= \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}(1 + \sin x)^4 + C \end{aligned}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $\left(\pi, \frac{1}{4}\right)$ 을 지나므로

$$f(\pi) = \frac{1}{4} \text{에서 } \frac{1}{4} + C = \frac{1}{4} \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{4}(1 + \sin x)^4$ 이고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가

점 $\left(\frac{\pi}{2}, a\right)$ 를 지나므로

$$a = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} \times 2^4 = 4$$

092 ㉓ ③

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{4^x \ln 2 + x}{4^x + x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{4^x \ln 4 + 2x}{4^x + x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(4^x + x^2)'}{4^x + x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(4^x + x^2) + C \end{aligned}$$

$$f(0) = \frac{\ln 5}{2} \text{에서 } C = \frac{\ln 5}{2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} \ln(4^x + x^2) + \frac{\ln 5}{2} \text{이므로}$$

$$f(-1) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{4} + 1\right) + \frac{\ln 5}{2} = \ln \frac{5}{2}$$

$$\text{따라서 } p=2, q=5 \text{이므로 } pq=10$$

093 ㉓ 7

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{1-2x}{x+1} dx \\ &= \int \left(-2 + \frac{3}{x+1}\right) dx \\ &= -2x + 3 \ln|x+1| + C \end{aligned}$$

$$f(0) = 3 \text{에서 } C = 3$$

$$\text{따라서 } f(x) = -2x + 3 \ln|x+1| + 3 \text{이므로}$$

$$f(-2) = 4 + 3 = 7$$

094 ㉓ ②

$$\begin{aligned} \int \csc x dx &= \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx \end{aligned}$$

$$\cos x = t \quad (-1 < t < 1) \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = -\sin x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx &= \int \frac{1}{1-t^2} \times (-1) dt = \int \frac{1}{t^2-1} dt \\ &= \int \frac{1}{(t-1)(t+1)} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \{ \ln(1-t) - \ln(t+1) \} + C \quad (\because t-1 < 0) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1-t}{1+t} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C \end{aligned}$$

095 ㉓ $\frac{2}{9}\pi$

$$u(x) = x, v'(x) = \sin 3x \text{로 놓으면}$$

$$u'(x) = 1, v(x) = -\frac{1}{3} \cos 3x$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int x \sin 3x dx \\ &= -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos 3x dx \\ &= -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \text{에서 } \frac{\pi}{9} + C = 0 \quad \therefore C = -\frac{\pi}{9}$$

$$\text{따라서 } f(x) = -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x - \frac{\pi}{9} \text{이므로}$$

$$f(\pi) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9} = \frac{2}{9}\pi$$

096 ㉓ $\frac{1}{8}(e^2 - 7)$

$$2x^2 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 4x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (x^3 e^{2x^2} + 3) dx \\ &= \int x^3 e^{2x^2} dx + \int 3 dx \\ &= \frac{1}{8} \int t e^t dt + 3x + C_1 \end{aligned}$$

..... ㉔

$$\int t e^t dt \text{에서 } u(t) = t, v'(t) = e^t \text{으로 놓으면}$$

$$u'(t) = 1, v(t) = e^t$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \int t e^t dt &= \frac{1}{8} \left(t e^t - \int e^t dt \right) \\ &= \frac{1}{8} e^t (t - 1) + C_2 = \frac{1}{8} (2x^2 - 1) e^{2x^2} + C_2 \end{aligned}$$

..... ㉕

$$\text{㉕을 ㉔에 대입하면}$$

$$f(x) = \frac{1}{8} (2x^2 - 1) e^{2x^2} + 3x + C$$

$$f(0) = 2 \text{에서 } -\frac{1}{8} + C = 2 \quad \therefore C = \frac{17}{8}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{8} (2x^2 - 1) e^{2x^2} + 3x + \frac{17}{8} \text{이므로}$$

$$f(-1) = \frac{1}{8} e^2 - 3 + \frac{17}{8} = \frac{1}{8} (e^2 - 7)$$

097 ㉓ ②

$$u(x) = \cos 2x, v'(x) = e^{-x} \text{으로 놓으면}$$

$$u'(x) = -2 \sin 2x, v(x) = -e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int e^{-x} \cos 2x dx \\ &= -e^{-x} \cos 2x - 2 \int e^{-x} \sin 2x dx \end{aligned}$$

..... ㉖

$$\int e^{-x} \sin 2x dx \text{에서 } s(x) = \sin 2x, t'(x) = e^{-x} \text{으로 놓으면}$$

$$s'(x) = 2 \cos 2x, t(x) = -e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int e^{-x} \sin 2x dx &= -e^{-x} \sin 2x + 2 \int e^{-x} \cos 2x dx \\ &= -e^{-x} \sin 2x + 2f(x) + C_1 \end{aligned}$$

..... ㉗

$$\text{㉗을 ㉖에 대입하면}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -e^{-x} \cos 2x - 2(-e^{-x} \sin 2x + 2f(x) + C_1) \\ &= -e^{-x} \cos 2x + 2e^{-x} \sin 2x - 4f(x) - 2C_1 \end{aligned}$$

$$5f(x) = e^{-x} (2 \sin 2x - \cos 2x) - 2C_1$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{5} e^{-x} (2 \sin 2x - \cos 2x) + C$$

$$f(0) = -\frac{1}{5} \text{에서 } -\frac{1}{5} + C = -\frac{1}{5} \quad \therefore C = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{5} e^{-x} (2 \sin 2x - \cos 2x) \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{5} e^{-\frac{\pi}{4}} \times 2 = \frac{2}{5} e^{-\frac{\pi}{4}}$$

001 답 ①

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^2-x}{x+1} dx &= \int_0^2 \frac{(x-2)(x+1)+2}{x+1} dx \\ &= \int_0^2 \left(x-2+\frac{2}{x+1}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2-2x+2\ln|x+1|\right]_0^2 \\ &= 2-4+2\ln 3=2\ln 3-2\end{aligned}$$

002 답 2

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx &= \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1} dx \\ &= \int_0^{\ln 2} (e^x-1) dx \\ &= [e^x-x]_0^{\ln 2} \\ &= (2-\ln 2)-1=1-\ln 2\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=1$ 이므로

$$a+b=2$$

003 답 $\pi-2$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x}{1+\cos x} dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1+\cos x} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x) dx \\ &= 2 \left[x-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\pi-2\end{aligned}$$

004 답 ④

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 (e^x+1) dx + \int_0^1 \frac{2}{x+1} dx \\ &= [e^x+x]_{-1}^0 + [2\ln|x+1|]_{-1}^1 \\ &= 1-\left(\frac{1}{e}-1\right)+2\ln 2 \\ &= 2-\frac{1}{e}+2\ln 2\end{aligned}$$

005 답 ⑤

$f(x)=x^2 \tan x$, $g(x)=2 \sec^2 x$ 라 하면

$$f(-x)=(-x)^2 \tan(-x)=-x^2 \tan x=-f(x)$$

$$g(-x)=2 \sec^2(-x)=2 \sec^2 x=g(x)$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x^2 \tan x + 2 \sec^2 x) dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sec^2 x dx \\ &= 4 \left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 4 \times 1 = 4\end{aligned}$$

006 답 ③

$f(x)=\left|\cos \frac{x}{2}\right|$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 주기가 2π 인 주기함수이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \left|\cos \frac{x}{2}\right| dx &= \int_{2\pi}^{4\pi} \left|\cos \frac{x}{2}\right| dx = \int_{4\pi}^{6\pi} \left|\cos \frac{x}{2}\right| dx \\ \therefore \int_0^{6\pi} \left|\cos \frac{x}{2}\right| dx &= 3 \int_0^{2\pi} \left|\cos \frac{x}{2}\right| dx \\ &= 3 \left\{ \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \left(-\cos \frac{x}{2}\right) dx \right\} \\ &= 3 \left\{ \left[2 \sin \frac{x}{2}\right]_0^{\pi} + \left[-2 \sin \frac{x}{2}\right]_{\pi}^{2\pi} \right\} \\ &= 3\{2-(-2)\}=12\end{aligned}$$

007 답 ⑤

$x-2=t$ 로 놓으면 $x=t+2$ 이고 $\frac{dt}{dx}=1$

$x=2$ 일 때 $t=0$, $x=3$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_2^3 (x+1)\sqrt{x-2} dx &= \int_0^1 (t+3)\sqrt{t} dt = \int_0^1 (t^{\frac{3}{2}}+3t^{\frac{1}{2}}) dt \\ &= \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+2t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{5}+2=\frac{12}{5}\end{aligned}$$

따라서 $p=5$, $q=12$ 이므로

$$p+q=17$$

008 답 4

$\ln x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=1$ 일 때 $t=0$, $x=e^2$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\int_1^{e^2} \frac{2 \ln x}{x} dx = \int_0^2 2t dt = [t^2]_0^2 = 4$$

009 답 $\frac{2}{3}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x) \cos x dx$$

이때 $\sin x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$

$x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x) \cos x dx &= \int_0^1 (1-t^2) dt = \left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 \\ &= 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

010 답 ①

$x=\tan \theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\sec^2 \theta$

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta+1} \times \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

011 ㉮ ⑤

$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{x-3}{x+3} dx &= \int_1^5 \frac{(x+3)-6}{x+3} dx = \int_1^5 \left(1 - \frac{6}{x+3}\right) dx \\ &= \left[x - 6\ln|x+3|\right]_1^5 = (5-6\ln 8) - (1-6\ln 4) \\ &= 4 - 18\ln 2 + 12\ln 2 = -6\ln 2 + 4\end{aligned}$$

따라서 $a = -6$, $b = 4$ 이므로 $b - a = 10$

012 ㉮ ⑤

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x} dx &= \int_1^4 \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x} dx = \int_1^4 \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \int_1^4 \left(1 + 2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \left[x + 4x^{\frac{1}{2}} + \ln|x|\right]_1^4 \\ &= (4+8+\ln 4) - (1+4) \\ &= 2\ln 2 + 7\end{aligned}$$

013 ㉮ $\frac{16}{5}$

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(x) dx - \int_4^3 f(x) dx + \int_4^1 f(x) dx \\ &= \int_0^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx + \int_4^1 f(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 3\sqrt{x}(x+1) dx = 3 \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}) dx \\ &= 3 \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 3\left(\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{16}{5}\end{aligned}$$

014 ㉮ ③

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{3}{x^2+5x+4} dx &= \int_0^a \frac{3}{(x+1)(x+4)} dx \\ &= \int_0^a \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4}\right) dx \\ &= \left[\ln|x+1| - \ln|x+4|\right]_0^a \\ &= \{\ln(a+1) - \ln(a+4)\} - (-\ln 4) \\ &= \ln \frac{4a+4}{a+4}\end{aligned}$$

따라서 $\ln \frac{4a+4}{a+4} = \ln \frac{5}{2}$ 이므로 $\frac{4a+4}{a+4} = \frac{5}{2}$

$$8a+8=5a+20, 3a=12 \quad \therefore a=4$$

015 ㉮ 3

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x) dx \\ &= \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx + \cdots + \int_n^{n+1} f(x) dx \\ &= \int_1^{n+1} f(x) dx = \int_1^{n+1} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right) dx \\ &= \int_1^{n+1} \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 1\right) dx = \left[x^{\frac{1}{2}} + x\right]_1^{n+1} \\ &= (\sqrt{n+1} + n + 1) - (1 + 1) = \sqrt{n+1} + n - 1 \\ &\therefore, \sqrt{n+1} + n - 1 = 4 \text{이므로 } \sqrt{n+1} = 5 - n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

양변을 제곱하면

$$n+1 = (5-n)^2, n^2 - 11n + 24 = 0$$

$$(n-3)(n-8) = 0 \quad \therefore n=3 \text{ 또는 } n=8$$

그런데 ㉮에서 $n=8$ 이면 우변이 음수가 되어 성립하지 않으므로 구하는 자연수 n 의 값은 3이다.

016 ㉮ ③

$F(x) = xf(x)$ 라 하면 $F'(x) = f(x) + xf'(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}F(x) &= \int \{f(x) + xf'(x)\} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2}\right) dx \\ &= \int (x^{-\frac{1}{2}} - 4x^{-2}) dx = 2x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-1} + C \\ &= 2\sqrt{x} + \frac{4}{x} + C\end{aligned}$$

이때 $F(1) = f(1) = 6$ 에서 $6 + C = 6 \quad \therefore C = 0$

따라서 $F(x) = 2\sqrt{x} + \frac{4}{x}$ 이므로 $xf(x) = 2\sqrt{x} + \frac{4}{x}$

$$\therefore f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x^2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^4 f(x) dx &= \int_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x^2}\right) dx = \int_1^4 (2x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-2}) dx \\ &= \left[4x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-1}\right]_1^4 \\ &= (8-1) - (4-4) = 7\end{aligned}$$

017 ㉮ ④

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 3} \frac{(e^x+1)^2 - (e^x+1)}{e^x} dx &= \int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x} + e^x}{e^x} dx \\ &= \int_0^{\ln 3} (e^x + 1) dx \\ &= \left[e^x + x\right]_0^{\ln 3} \\ &= (3 + \ln 3) - 1 = 2 + \ln 3\end{aligned}$$

018 ㉮ ①

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{4^x - 2^{x+1} + 1} dx &= \int_0^1 \sqrt{(2^x - 1)^2} dx \\ &= \int_0^1 (2^x - 1) dx \\ &= \left[\frac{2^x}{\ln 2} - x\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{2}{\ln 2} - 1\right) - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} - 1\end{aligned}$$

019 ㉮ $e^2 - 3$

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{e^{2x}}{e^x + x} dx + \int_2^0 \frac{t^2}{e^t + t} dt \\ &= \int_0^2 \frac{e^{2x}}{e^x + x} dx - \int_0^2 \frac{x^2}{e^x + x} dx \\ &= \int_0^2 \frac{e^{2x} - x^2}{e^x + x} dx = \int_0^2 \frac{(e^x + x)(e^x - x)}{e^x + x} dx \\ &= \int_0^2 (e^x - x) dx = \left[e^x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^2 \\ &= (e^2 - 2) - 1 = e^2 - 3\end{aligned}$$

020 답 33

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 (3^x - 2^x)(9^x + 6^x + 4^x) dx \\
 &= \int_0^1 (3^x - 2^x)(3^{2x} + 3^x \times 2^x + 2^{2x}) dx \\
 &= \int_0^1 (3^{3x} - 2^{3x}) dx = \int_0^1 (27^x - 8^x) dx \\
 &= \left[\frac{27^x}{\ln 27} - \frac{8^x}{\ln 8} \right]_0^1 = \left(\frac{27}{\ln 27} - \frac{8}{\ln 8} \right) - \left(\frac{1}{\ln 27} - \frac{1}{\ln 8} \right) \\
 &= \frac{26}{\ln 27} - \frac{7}{\ln 8} = \frac{26}{3 \ln 3} - \frac{7}{3 \ln 2} \\
 &\text{따라서 } a=26, b=7 \text{ 이므로 } a+b=33
 \end{aligned}$$

021 답 ①

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx \\
 &= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 1 = \sqrt{2} - 1
 \end{aligned}$$

022 답 ③

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - 1) dx \\
 &= [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4} \\
 &\text{따라서 } a=1, b=-\frac{1}{4} \text{ 이므로 } a+b=\frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

023 답 $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\csc^4 x}{1 + \cot^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\csc^4 x}{\csc^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \csc^2 x dx \\
 &= [-\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

024 답 2

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 - \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 \right\} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx \\
 &= [-2 \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-2) = 2
 \end{aligned}$$

025 답 $9 + 6\sqrt{3} - \frac{1}{e}$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^0 (e^x - 1) dx + \int_0^3 (x^2 + 3\sqrt{x}) dx \\
 &= [e^x - x]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3} x^3 + 2x^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 \\
 &= \left\{ 1 - \left(\frac{1}{e} + 1 \right) \right\} + (9 + 6\sqrt{3}) = 9 + 6\sqrt{3} - \frac{1}{e}
 \end{aligned}$$

026 답 $\frac{1}{\ln 2} + 4$

$$\begin{aligned}
 & |2^x - 4| = \begin{cases} 2^x - 4 & (x \geq 2) \\ 4 - 2^x & (x \leq 2) \end{cases} \text{ 이므로} \\
 & \int_0^3 |2^x - 4| dx = \int_0^2 (4 - 2^x) dx + \int_2^3 (2^x - 4) dx \\
 &= \left[4x - \frac{2^x}{\ln 2} \right]_0^2 + \left[\frac{2^x}{\ln 2} - 4x \right]_2^3 \\
 &= \left\{ \left(8 - \frac{4}{\ln 2} \right) - \left(-\frac{1}{\ln 2} \right) \right\} + \left\{ \left(\frac{8}{\ln 2} - 12 \right) - \left(\frac{4}{\ln 2} - 8 \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{\ln 2} + 4
 \end{aligned}$$

027 답 ④

$$\begin{aligned}
 & |\sin x| + |\cos x| = \begin{cases} \sin x - \cos x & \left(\frac{3}{4}\pi \leq x \leq \pi \right) \\ -\sin x - \cos x & \left(\pi \leq x \leq \frac{5}{4}\pi \right) \end{cases} \text{ 이므로} \\
 & \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (|\sin x| + |\cos x|) dx \\
 &= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx + \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (-\sin x - \cos x) dx \\
 &= [-\cos x - \sin x]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} + [\cos x - \sin x]_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \\
 &= \left\{ 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\} + \left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - (-1) \right\} = 2
 \end{aligned}$$

028 답 ②

$$\begin{aligned}
 & |e^x - e^a| = \begin{cases} e^a - e^x & (0 \leq x \leq a) \\ e^x - e^a & (a \leq x \leq 2) \end{cases} \text{ 이므로} \\
 & f(a) = \int_0^2 |e^x - e^a| dx = \int_0^a (e^a - e^x) dx + \int_a^2 (e^x - e^a) dx \\
 &= [e^a x - e^x]_0^a + [e^x - e^a x]_a^2 \\
 &= \{(ae^a - e^a) - (-1)\} + \{(e^2 - 2e^a) - (e^a - ae^a)\} \\
 &= (2a - 4)e^a + e^2 + 1
 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(a) = 2e^a + (2a - 4)e^a = (2a - 2)e^a$$

$$f'(a) = 0 \text{ 에서 } a = 1 \quad (\because e^a > 0)$$

0 ≤ a ≤ 2에서 함수 f(a)의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	1	...	2
f'(a)		-	0	+	
f(a)	e ² -3	↘	e ² -2e+1 극소	↗	e ² +1

따라서 함수 f(a)의 극솟값은 f(1) = e² - 2e + 1

029 ㉔ ⑤

$f(x) = x \sin^2 x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = x$ 라 하면

$$f(-x) = -x \sin^2(-x) = -x \sin^2 x = -f(x)$$

$$g(-x) = \cos(-x) = \cos x = g(x)$$

$$h(-x) = -x = -h(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x \sin^2 x + \cos x + x) dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= 2 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

030 ㉔ ①

$f(x) = x^2(e^x - e^{-x})$ 이라 하면

$$f(-x) = (-x)^2(e^{-x} - e^x) = -x^2(e^x - e^{-x}) = -f(x)$$

$$\therefore \int_{-2}^2 x^2(e^x - e^{-x}) dx = 0$$

031 ㉔ 12

$g(x) = f(x) \sin x$, $h(x) = xf(x)$ 라 하면 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x) = f(x) \text{ 이므로}$$

$$g(-x) = f(-x) \sin(-x) = -f(x) \sin x = -g(x)$$

$$h(-x) = -xf(-x) = -xf(x) = -h(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x - x + 3)f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) \sin x - xf(x) + 3f(x)\} dx \\ &= 2 \int_0^{\pi} 3f(x) dx \\ &= 6 \int_0^{\pi} f(x) dx \\ &= 6 \times 2 = 12 \end{aligned}$$

032 ㉔ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f(-x) = -f(x)$ 에서 $f(x) + f(-x) = 0$

$$\therefore \int_{-1}^1 \frac{f(x) + f(-x)}{2} dx = 0$$

ㄴ. $g(x) = f(x) \cos x$ 라 하면

$$g(-x) = f(-x) \cos(-x) = -f(x) \cos x = -g(x)$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx = 0$$

ㄷ. $h(x) = (2^x - 2^{-x})f(x)$ 라 하면

$$h(-x) = (2^{-x} - 2^x)f(-x) = (2^x - 2^{-x})f(x) = h(x)$$

$$\therefore \int_{-2}^2 (2^x - 2^{-x})f(x) dx = 2 \int_0^2 (2^x - 2^{-x})f(x) dx \neq 0$$

ㄹ. $r(x) = \sin f(x)$ 라 하면

$$r(-x) = \sin f(-x) = \sin\{-f(x)\} = -\sin f(x) = -r(x)$$

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin f(x) dx = 0$$

따라서 보기 중 정적분의 값이 항상 0인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

033 ㉔ ②

$f(x) = |\sin 3x|$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 주기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 주기함수이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} |\sin 3x| dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} |\sin 3x| dx = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} |\sin 3x| dx$$

$$= \dots = \int_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi} |\sin 3x| dx$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{2\pi} |\sin 3x| dx &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{3}} |\sin 3x| dx = 6 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx \\ &= 6 \left[-\frac{1}{3} \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 6 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = 4 \end{aligned}$$

034 ㉔ 0

$f(x) = \cos \frac{\pi}{2}x$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 주기가 4인 주기함수이므로

$$\begin{aligned} \int_k^{k+8} \cos \frac{\pi}{2}x dx &= \int_0^8 \cos \frac{\pi}{2}x dx \\ &= \int_0^4 \cos \frac{\pi}{2}x dx + \int_4^8 \cos \frac{\pi}{2}x dx \\ &= 2 \int_0^4 \cos \frac{\pi}{2}x dx \\ &= 2 \left[\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2}x \right]_0^4 = 2 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

035 ㉔ ④

(가)에서 $f(x+2) = f(x)$ 이므로

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_3^5 f(x) dx = \int_7^9 f(x) dx$$

(나)에서 $f(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = f(x)$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx + \int_7^9 f(x) dx &= 3 \int_{-1}^1 f(x) dx = 3 \int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx \\ &= 3 \int_0^1 (e^x + e^{-x}) dx = 3 \left[e^x - e^{-x} \right]_0^1 = 3 \left(e - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

036 ㉔ 4

$x^2 + 1 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2x$

$x=1$ 일 때 $t=2$, $x=3$ 일 때 $t=10$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{4x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} dx &= \int_2^{10} \frac{2}{t\sqrt{t}} dt = \int_2^{10} 2t^{-\frac{3}{2}} dt \\ &= \left[-4t^{-\frac{1}{2}} \right]_2^{10} \\ &= 2\sqrt{2} - \frac{2}{5}\sqrt{10} \end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=\frac{2}{5}$ 이므로 $a+5b=4$

037 ㉔ ⑤

$x^2 + 2x + 2 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2x + 2 = 2(x+1)$

$x=-1$ 일 때 $t=1$, $x=2$ 일 때 $t=10$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx &= \int_1^{10} \frac{1}{t} \times \frac{1}{2} dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln t \right]_1^{10} = \frac{1}{2} \ln 10 \end{aligned}$$

다른 풀이 $\int_{-1}^2 \frac{x+1}{x^2+2x+2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 \frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2} dx$
 $= \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+2x+2) \right]_{-1}^2$
 $= \frac{1}{2} \ln 10$

038 **답** $\frac{42}{5}$

$x+1=t$ 로 놓으면 $x=t-1$ 이고 $\frac{dt}{dx}=1$
 $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=3$ 일 때 $t=4$ 이므로
 $\int_0^3 \frac{x^2-x+3}{\sqrt{x+1}} dx = \int_1^4 \frac{(t-1)^2-(t-1)+3}{\sqrt{t}} dt$
 $= \int_1^4 \frac{t^2-3t+5}{\sqrt{t}} dt$
 $= \int_1^4 (t^{\frac{3}{2}}-3t^{\frac{1}{2}}+5t^{-\frac{1}{2}}) dt$
 $= \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-2t^{\frac{3}{2}}+10t^{\frac{1}{2}} \right]_1^4$
 $= \left(\frac{64}{5}-16+20 \right) - \left(\frac{2}{5}-2+10 \right)$
 $= \frac{42}{5}$

039 **답** 4

$x^3+8=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3x^2$
 $x=0$ 일 때 $t=8$, $x=a$ 일 때 $t=a^3+8$ 이므로
 $\int_0^a \frac{3x^2}{x^3+8} dx = \int_8^{a^3+8} \frac{1}{t} dt = \left[\ln |t| \right]_8^{a^3+8}$
 $= \ln(a^3+8) - \ln 8$
 $= \ln\left(\frac{a^3}{8}+1\right)$

따라서 $\ln\left(\frac{a^3}{8}+1\right)=2\ln 3$ 이므로

$\ln\left(\frac{a^3}{8}+1\right)=\ln 9$, $\frac{a^3}{8}+1=9$

$a^3=64 \quad \therefore a=4$

다른 풀이 $\int_0^a \frac{3x^2}{x^3+8} dx = \int_0^a \frac{(x^3+8)'}{x^3+8} dx$
 $= \left[\ln |x^3+8| \right]_0^a$
 $= \ln(a^3+8) - \ln 8$
 $= \ln\left(\frac{a^3}{8}+1\right)$

따라서 $\ln\left(\frac{a^3}{8}+1\right)=2\ln 3$ 이므로 $a=4$

040 **답** 3

(나)에서 $1-x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=2$ 일 때 $t=-1$ 이므로

$\int_0^2 f(1-x) dx = \int_1^{-1} f(t) \times (-1) dt = \int_{-1}^1 f(t) dt$

(㉠)에서 $f(-x)=f(x)$ 이므로 $\int_{-1}^1 f(t) dt = 2 \int_0^1 f(t) dt$

$\int_0^2 f(1-x) dx = 2f(2)+6$ 에서

$2 \int_0^1 f(t) dt = 2f(2)+6$, $\int_0^1 f(t) dt = f(2)+3$

$\therefore \int_0^1 f(x) dx - f(2) = 3$

041 **답** ②

$\ln x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=e$ 일 때 $t=1$, $x=e^2$ 일 때 $t=2$ 이므로

$\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx = \int_1^2 \frac{1}{t^3} dt = \int_1^2 t^{-3} dt$
 $= \left[-\frac{1}{2}t^{-2} \right]_1^2 = -\frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8}$

042 **답** ⑤

$2^x+1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2^x \ln 2$

$x=0$ 일 때 $t=2$, $x=3$ 일 때 $t=9$ 이므로

$\int_0^3 \frac{2^x \ln 2}{2^x+1} dx = \int_2^9 \frac{1}{t} dt = \left[\ln t \right]_2^9$
 $= \ln 9 - \ln 2 = \ln \frac{9}{2}$

다른 풀이 $\int_0^3 \frac{2^x \ln 2}{2^x+1} dx = \int_0^3 \frac{(2^x+1)'}{2^x+1} dx$
 $= \left[\ln(2^x+1) \right]_0^3 = \ln \frac{9}{2}$

043 **답** ⑤

$\int_1^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) e^{x^2-1} dx - \int_2^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) e^{x^2-1} dx$
 $= \int_1^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) e^{x^2-1} dx + \int_1^2 \left(x - \frac{1}{2} \right) e^{x^2-1} dx$
 $= \int_1^2 \left(x + \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2} \right) e^{x^2-1} dx$
 $= \int_1^2 2x e^{x^2-1} dx$

이때 $x^2-1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

$x=1$ 일 때 $t=0$, $x=2$ 일 때 $t=3$ 이므로

$\int_1^2 2x e^{x^2-1} dx = \int_0^3 e^t dt = \left[e^t \right]_0^3 = e^3 - 1$

044 **답** 23

$\ln x+1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$x=1$ 일 때 $t=1$, $x=e^3$ 일 때 $t=4$ 이므로

$\int_1^{e^3} \left(\frac{\sqrt{\ln x+1}}{x} + \frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}} \right) dx$
 $= \int_1^{e^3} \left(\sqrt{\ln x+1} + \frac{1}{\sqrt{\ln x+1}} \right) \times \frac{1}{x} dx$
 $= \int_1^4 \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt = \int_1^4 (t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}) dt$
 $= \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + 2t^{\frac{1}{2}} \right]_1^4 = \left(\frac{16}{3} + 4 \right) - \left(\frac{2}{3} + 2 \right) = \frac{20}{3}$
따라서 $p=3$, $q=20$ 이므로 $p+q=23$

045 [답] ⑤

$$\ln x - 1 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$x=1$ 일 때 $t=-1$, $x=e$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= \int_1^e \frac{(\ln x - 1)^n}{x} dx \\ &= \int_{-1}^0 t^n dt = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_{-1}^0 \\ &= -\frac{1}{n+1} \times (-1)^{n+1} \\ &= \frac{(-1)^n}{n+1} \end{aligned}$$

따라서 $a_n a_{n+2} = \frac{(-1)^n}{n+1} \times \frac{(-1)^{n+2}}{n+3} = \frac{1}{(n+1)(n+3)}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

046 [답] ④

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^5 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx$$

이때 $\cos x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$

$x = \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=0$, $x=\pi$ 일 때 $t=-1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx &= \int_0^{-1} (1 - t^2)^2 \times (-1) dt \\ &= \int_{-1}^0 (t^4 - 2t^2 + 1) dt \\ &= \left[\frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + t \right]_{-1}^0 \\ &= -\left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1 \right) = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

047 [답] $\ln 2$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x (1 + \tan x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x} dx$$

이때 $1 + \tan x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \sec^2 x$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{4}$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x} dx &= \int_1^2 \frac{1}{t} dt \\ &= \left[\ln |t| \right]_1^2 = \ln 2 \end{aligned}$$

048 [답] $e - \frac{1}{e}$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -\sin x$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\pi$ 일 때 $t=-1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(\cos x) \sin x dx &= \int_1^{-1} f(t) \times (-1) dt = \int_{-1}^1 f(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 e^t dt = \left[e^t \right]_{-1}^1 = e - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

049 [답] ①

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\sin^2 x) \cos x dx$$

이때 $\sin x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \cos x$

$x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\sin^2 x) \cos x dx &= \int_0^1 (1 - 2t^2) dt \\ &= \left[t - \frac{2}{3} t^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

050 [답] ①

$x = 2 \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = 2 \sec^2 \theta$

$x=2$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{4}$, $x=2\sqrt{3}$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + 4} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4 \tan^2 \theta + 4} \times 2 \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2 \sec^2 \theta}{4 \sec^2 \theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2} \theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{24} \end{aligned}$$

051 [답] $\frac{\pi}{12}$

$x = 2 \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta$

$x=1$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{6}$, $x=\sqrt{2}$ 일 때 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2 \theta}} \times 2 \cos \theta d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{4 \cos^2 \theta}} d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \left[\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

052 [답] ④

$x = a \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = a \sec^2 \theta$

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=a$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1}{a^2 + x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} \times a \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a \sec^2 \theta}{a^2 \sec^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a} d\theta = \left[\frac{1}{a} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4a} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{\pi}{4a} = \frac{\pi}{8}$ 이므로 $a=2$

053 답 8

$$2x = \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{로 놓으면 } \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{2} \cos \theta$$

$$x=0 \text{일 때 } \theta=0, x=\frac{1}{4} \text{일 때 } \theta=\frac{\pi}{6} \text{이므로}$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1-4x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \times \frac{1}{2} \cos \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{2} \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} \cos^2 \theta d\theta$$

이때 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ 에서 $\cos^2 \theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{16}$$

따라서 $a=24, b=16$ 이므로 $a-b=8$

054 답 ③

$$f(x)=x-1, g'(x)=e^{2x} \text{으로 놓으면 } f'(x)=1, g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\therefore \int_0^3 (x-1)e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}(x-1)e^{2x} \right]_0^3 - \int_0^3 \frac{1}{2}e^{2x} dx$$

$$= e^6 + \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{4}e^{2x} \right]_0^3$$

$$= e^6 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4}e^6 - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4}e^6 + \frac{3}{4}$$

055 답 $-\frac{1}{4}$

$$f(x)=\cos x, g'(x)=e^x \text{으로 놓으면 } f'(x)=-\sin x, g(x)=e^x$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \left[e^x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$$

$$= -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx$ 에서 $u(x)=\sin x, v'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$$u'(x)=\cos x, v(x)=e^x$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = \left[e^x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$$

$$= e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - 1 \quad \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$ 이므로 $ab=-\frac{1}{4}$

056 답 10-2e

$$\int_0^1 f(t) dt = k \text{ (k는 상수)로 놓으면 } f(x)=4e^x - k \text{이므로}$$

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (4e^t - k) dt = \left[4e^t - kt \right]_0^1 = (4e - k) - 4$$

즉, $4e - k - 4 = k$ 이므로 $k=2e-2$

따라서 $f(x)=4e^x - 2e + 2$ 이므로

$$f(\ln 2) = 8 - 2e + 2 = 10 - 2e$$

057 답 ③

$$\int_0^x f(t) dt = \cos x + x + a \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) = -\sin x + 1 \quad \therefore f(\pi) = 1$$

$$\int_0^x f(t) dt = \cos x + x + a \text{의 양변에 } x=0 \text{을 대입하면}$$

$$0 = 1 + a \quad \therefore a = -1$$

$$\therefore a + f(\pi) = -1 + 1 = 0$$

058 답 -1

$$\int_1^x (x-t)f(t) dt = x \ln x + ax + 1 \text{에서}$$

$$x \int_1^x f(t) dt - \int_1^x tf(t) dt = x \ln x + ax + 1$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = \ln x + 1 + a$$

$$\therefore \int_1^x f(t) dt = \ln x + 1 + a$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \therefore f(1) = 1$$

한편 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = a + 1 \quad \therefore a = -1$$

$$\therefore a \times f(1) = -1 \times 1 = -1$$

059 답 $-2\sqrt{3}\pi$

$$f(x) = \int_0^x (2 \cos t - \sqrt{3}) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x) = 2 \cos x - \sqrt{3}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\dots$	$\frac{\pi}{6}$	$\dots$	$\frac{11}{6}\pi$	$\dots$	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		/	극대	\	극소	/	

함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{6}$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$M = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 \cos t - \sqrt{3}) dt$$

$$= \left[2 \sin t - \sqrt{3}t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{11}{6}\pi$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$m = f\left(\frac{11}{6}\pi\right) = \int_0^{\frac{11}{6}\pi} (2 \cos t - \sqrt{3}) dt$$

$$= \left[2 \sin t - \sqrt{3}t \right]_0^{\frac{11}{6}\pi} = -1 - \frac{11\sqrt{3}}{6}\pi$$

$$\therefore M + m = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right) + \left(-1 - \frac{11\sqrt{3}}{6}\pi\right) = -2\sqrt{3}\pi$$

060 ㉡ 2π

$f(x) = \int_0^x (3+2\sin t) \cos t \, dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (3+2\sin x) \cos x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \cos x = 0 \quad (\because 3+2\sin x > 0)$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 < x < \pi)$$

$0 < x < \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 극대이면서 최대이므로 $a = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \therefore b &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3+2\sin t) \cos t \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t + 2\sin t \cos t) \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t + \sin 2t) \, dt \\ &= \left[3\sin t - \frac{1}{2}\cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(3 + \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right) = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore ab = \frac{\pi}{2} \times 4 = 2\pi$$

061 ㉡ ⑤

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{1-h}^{1+h} f(t) \, dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1) + F(1) - F(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1-h) - F(1)}{-h} \\ &= F'(1) + F'(1) = 2F'(1) = 2f(1) \\ &= 2 \times \frac{e+e^{-1}}{2} = e + \frac{1}{e} \end{aligned}$$

062 ㉡ 6

$f(x) = 2x$, $g'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면 $f'(x) = 2$, $g(x) = -e^{-x}$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 2xe^{-x} \, dx &= \left[-2xe^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x} \, dx \\ &= -\frac{2}{e} + \left[-2e^{-x} \right]_0^1 \\ &= -\frac{2}{e} + \left(-\frac{2}{e} + 2 \right) = 2 - \frac{4}{e} \end{aligned}$$

따라서 $a = 2$, $b = -4$ 이므로 $a - b = 6$

063 ㉡ ①

$f(x) = \ln x$, $g'(x) = \frac{1}{x^2}$ 로 놓으면 $f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} \, dx &= \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e \\ &= -\frac{1}{e} + \left(-\frac{1}{e} + 1 \right) = 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

064 ㉡ ②

$f(x) = \begin{cases} 1-x & (x \geq 0) \\ 1 & (x \leq 0) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx \\ &= \int_{-\pi}^0 \sin x \, dx + \int_0^{\pi} (1-x) \sin x \, dx \\ &= \int_{-\pi}^0 \sin x \, dx + \int_0^{\pi} \sin x \, dx - \int_0^{\pi} x \sin x \, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx - \int_0^{\pi} x \sin x \, dx \\ &= -\int_0^{\pi} x \sin x \, dx \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$ 에서 $u(x) = x$, $v'(x) = \sin x$ 로 놓으면

$$u'(x) = 1, v(x) = -\cos x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\pi} x \sin x \, dx &= \left[-x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx \\ &= \pi + \left[\sin x \right]_0^{\pi} = \pi \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx = -\pi$

065 ㉡ 1

$$\begin{aligned} \int_0^1 (e^x - 3ax)^2 \, dx &= \int_0^1 (e^{2x} - 6axe^x + 9a^2x^2) \, dx \\ &= \int_0^1 (e^{2x} + 9a^2x^2) \, dx - 6a \int_0^1 xe^x \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2x} + 3a^2x^3 \right]_0^1 - 6a \int_0^1 xe^x \, dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 + 3a^2 - \frac{1}{2} - 6a \int_0^1 xe^x \, dx \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

$\int_0^1 xe^x \, dx$ 에서 $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x) = 1, g(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 xe^x \, dx &= \left[xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx \\ &= e - \left[e^x \right]_0^1 = e - (e - 1) = 1 \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^1 (e^x - 3ax)^2 \, dx &= \frac{1}{2}e^2 + 3a^2 - \frac{1}{2} - 6a \\ &= 3(a-1)^2 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

따라서 주어진 정적분의 값이 최소가 되도록 하는 상수 a 의 값은 $a = 1$

066 ㉡ $\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} &\int_0^1 f(x)g'(x) \, dx \\ &= \left[f(x)g(x) \right]_0^1 - \int_0^1 f'(x)g(x) \, dx \\ &= \{f(1)g(1) - f(0)g(0)\} - \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2} \, dx \\ &= f(1) - \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2} \, dx \quad (\because g(1) = 1, g(0) = 0) \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx \text{에서 } 1+x^3=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx}=3x^2$$

$$x=0 \text{일 때 } t=1, x=1 \text{일 때 } t=2 \text{이므로}$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx = \int_1^2 \frac{1}{t^2} \times \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{t} \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{1}{6} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\int_0^1 f(x)g'(x) dx = f(1) - \frac{1}{6}$$

$$\text{따라서 } f(1) - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \text{이므로 } f(1) = \frac{2}{3}$$

067 답 ②

$$f(x) = \sin 2x, g'(x) = e^{-x} \text{으로 놓으면}$$

$$f'(x) = 2 \cos 2x, g(x) = -e^{-x}$$

$$\therefore \int_0^\pi e^{-x} \sin 2x dx = \left[-e^{-x} \sin 2x \right]_0^\pi + 2 \int_0^\pi e^{-x} \cos 2x dx$$

$$= 2 \int_0^\pi e^{-x} \cos 2x dx \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\int_0^\pi e^{-x} \cos 2x dx \text{에서 } u(x) = \cos 2x, v'(x) = e^{-x} \text{으로 놓으면}$$

$$u'(x) = -2 \sin 2x, v(x) = -e^{-x}$$

$$\therefore \int_0^\pi e^{-x} \cos 2x dx = \left[-e^{-x} \cos 2x \right]_0^\pi - 2 \int_0^\pi e^{-x} \sin 2x dx$$

$$= -\frac{1}{e^\pi} + 1 - 2 \int_0^\pi e^{-x} \sin 2x dx \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\int_0^\pi e^{-x} \sin 2x dx = 2 \left(-\frac{1}{e^\pi} + 1 - 2 \int_0^\pi e^{-x} \sin 2x dx \right)$$

$$5 \int_0^\pi e^{-x} \sin 2x dx = -\frac{2}{e^\pi} + 2$$

$$\therefore \int_0^\pi e^{-x} \sin 2x dx = -\frac{2}{5e^\pi} + \frac{2}{5}$$

068 답 ④

$$f(x) = x(x-1) = x^2 - x, g'(x) = e^x \text{으로 놓으면}$$

$$f'(x) = 2x-1, g(x) = e^x$$

$$\therefore \int_{-1}^1 x(x-1)e^x dx = \int_{-1}^1 (x^2-x)e^x dx$$

$$= \left[(x^2-x)e^x \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (2x-1)e^x dx$$

$$= -\frac{2}{e} - \int_{-1}^1 (2x-1)e^x dx \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\int_{-1}^1 (2x-1)e^x dx \text{에서 } u(x) = 2x-1, v'(x) = e^x \text{으로 놓으면}$$

$$u'(x) = 2, v(x) = e^x$$

$$\therefore \int_{-1}^1 (2x-1)e^x dx = \left[(2x-1)e^x \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2e^x dx$$

$$= e + \frac{3}{e} - \left[2e^x \right]_{-1}^1$$

$$= e + \frac{3}{e} - \left(2e - \frac{2}{e} \right) = -e + \frac{5}{e} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\int_{-1}^1 x(x-1)e^x dx = -\frac{2}{e} - \left(-e + \frac{5}{e} \right) = e - \frac{7}{e}$$

$$\text{따라서 } a=1, b=-7 \text{이므로 } a-b=8$$

069 답 -1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)^2 \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)^2 \cos x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x^2+2) \cos x dx$$

$$\text{이때 } f(x) = 2x^2+2, g'(x) = \cos x \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = 4x, g(x) = \sin x$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x^2+2) \cos x dx$$

$$= \left[(2x^2+2) \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4x \sin x dx$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + 2 - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \text{에서 } u(x) = x, v'(x) = \sin x \text{로 놓으면}$$

$$u'(x) = 1, v(x) = -\cos x$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \left[-x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$= \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x^2+2) \cos x dx = \frac{\pi^2}{2} + 2 - 4 = \frac{\pi^2}{2} - 2$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)^2 \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)^2 \cos x dx = \frac{\pi^2}{2} - 2$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{2}, b = -2 \text{이므로 } ab = -1$$

070 답 ①

$$\int_0^2 f(t) dt = k \text{ (} k \text{는 상수)로 놓으면 } f(x) = e^x + x + k \text{이므로}$$

$$\int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 (e^t + t + k) dt = \left[e^t + \frac{1}{2}t^2 + kt \right]_0^2$$

$$= (e^2 + 2 + 2k) - 1 = e^2 + 2k + 1$$

$$\text{즉, } e^2 + 2k + 1 = k \text{이므로 } k = -e^2 - 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = e^x + x - e^2 - 1 \text{이므로 } f(2) = 1$$

071 답 f(x)=sin x-1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos t dt = k \text{ (} k \text{는 상수)로 놓으면 } f(x) = \sin x + 2k \text{이므로}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + 2k) \cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt + 2k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt + 2k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2k \left[\sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + 2k = \frac{1}{2} + 2k$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{2} + 2k = k \text{이므로 } k = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \sin x - 1$$

072 ㉔ ①

$\int_1^3 f'(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면 $f(x) = x + \frac{1}{x} + k$ 이므로

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^3 f'(t) dt &= \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt = \left[t + \frac{1}{t}\right]_1^3 \\ &= \left(3 + \frac{1}{3}\right) - (1 + 1) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{4}{3}$$

따라서 $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{4}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^3 f(x) dx &= \int_1^3 \left(x + \frac{1}{x} + \frac{4}{3}\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + \frac{4}{3}x\right]_1^3 \\ &= \left(\frac{9}{2} + \ln 3 + 4\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{20}{3} + \ln 3 \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{20}{3}, b = 3 \text{이므로 } ab = 20$$

073 ㉔ $-\frac{e^2+1}{3}$

$$f(x) = \ln x - \int_1^{e^2} \frac{f(t)}{x} dt = \ln x - \frac{1}{x} \int_1^{e^2} f(t) dt$$

$\int_1^{e^2} f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면 $f(x) = \ln x - \frac{k}{x}$ 이므로

$$\int_1^{e^2} f(t) dt = \int_1^{e^2} \left(\ln t - \frac{k}{t}\right) dt = \int_1^{e^2} \ln t dt - k \int_1^{e^2} \frac{1}{t} dt$$

이때 $\int_1^{e^2} \ln t dt$ 에서 $u(t) = \ln t, v'(t) = 1$ 로 놓으면

$$u'(t) = \frac{1}{t}, v(t) = t$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^{e^2} \ln t dt - k \int_1^{e^2} \frac{1}{t} dt &= \left[t \ln t\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} dt - k \left[\ln |t|\right]_1^{e^2} \\ &= 2e^2 - \left[t\right]_1^{e^2} - 2k \\ &= 2e^2 - (e^2 - 1) - 2k \\ &= e^2 + 1 - 2k \end{aligned}$$

$$\therefore e^2 + 1 - 2k = k \text{이므로 } 3k = e^2 + 1 \quad \therefore k = \frac{e^2 + 1}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \ln x - \frac{e^2 + 1}{3x} \text{이므로 } f(1) = -\frac{e^2 + 1}{3}$$

074 ㉔ ②

$\int_{\pi}^x f(t) dt = x \sin x + kx - \pi$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \sin x + x \cos x + k$$

$\int_{\pi}^x f(t) dt = x \sin x + kx - \pi$ 의 양변에 $x = \pi$ 를 대입하면

$$0 = k\pi - \pi \quad \therefore k = 1$$

따라서 $f(x) = \sin x + x \cos x + 1$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2$$

075 ㉔ 1

$f(x) = x \ln x + \int_1^x t f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \ln x + 1 + x f(x) \quad \dots\dots ㉔$$

$f(x) = x \ln x + \int_1^x t f(t) dt$ 의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$f(1) = 0$$

㉔의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$f'(1) = 1 + f(1) = 1$$

076 ㉔ ④

$f(x) = e^x - \int_0^x f'(t) e^t dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = e^x - f'(x) e^x, (e^x + 1) f'(x) = e^x$$

$$\therefore f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

이때 $e^x + 1 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = e^x$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{1}{t} dt \\ &= \ln t + C = \ln(e^x + 1) + C \end{aligned}$$

한편 $f(x) = e^x - \int_0^x f'(t) e^t dt$ 의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면

$$f(0) = 1$$

$$\therefore \ln 2 + C = 1 \text{이므로 } C = 1 - \ln 2$$

따라서 $f(x) = \ln(e^x + 1) + 1 - \ln 2$ 이므로

$$f(1) = \ln(e + 1) + 1 - \ln 2 = \ln \frac{e(e + 1)}{2}$$

$$\therefore e^{f(1)} = \frac{e(e + 1)}{2}$$

077 ㉔ 5

$\int_1^2 xg(x) dx$ 에서 $u(x) = g(x), v'(x) = x$ 로 놓으면

$$u'(x) = g'(x), v(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^2 xg(x) dx &= \left[\frac{1}{2}x^2g(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2g'(x) dx \\ &= 8 - \frac{1}{2}g(1) - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2g'(x) dx \quad \dots\dots ㉔ \end{aligned}$$

$g(x) = \int_1^x \frac{f(t^2)}{t} dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = \frac{f(x^2)}{x} \quad \dots\dots ㉕$$

$g(x) = \int_1^x \frac{f(t^2)}{t} dt$ 의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$g(1) = 0 \quad \dots\dots ㉖$$

㉔에 ㉕, ㉖을 대입하면

$$\int_1^2 xg(x) dx = 8 - \int_1^2 \frac{1}{2}xf(x^2) dx$$

이때 $\int_1^2 \frac{1}{2}xf(x^2) dx$ 에서 $x^2 = k$ 로 놓으면 $\frac{dk}{dx} = 2x$

$x = 1$ 일 때 $k = 1, x = 2$ 일 때 $k = 4$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{2}xf(x^2) dx &= \int_1^4 \frac{1}{2}f(k) \times \frac{1}{2} dk = \frac{1}{4} \int_1^4 f(k) dk \\ &= \frac{1}{4} \times 12 = 3 \end{aligned}$$

$$\therefore \int_1^2 xg(x) dx = 8 - 3 = 5$$

078 답 e^2+1

$$\int_0^x (x-t)f(t) dt = e^x - x - k \text{에서}$$

$$x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt = e^x - x - k$$

$$\text{양변을 } x \text{에 대하여 미분하면 } \int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = e^x - 1$$

$$\therefore \int_0^x f(t) dt = e^x - 1$$

$$\text{양변을 다시 } x \text{에 대하여 미분하면 } f(x) = e^x \quad \therefore f(2) = e^2$$

$$\text{한편 주어진 등식의 양변에 } x=0 \text{을 대입하면 } 0 = 1 - k \quad \therefore k = 1$$

$$\therefore k + f(2) = e^2 + 1$$

079 답 π

$$\int_0^x (x-t)f(t) dt = x \cos x - x \text{에서}$$

$$x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt = x \cos x - x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = \cos x - x \sin x - 1$$

$$\therefore \int_0^x f(t) dt = \cos x - x \sin x - 1$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = -\sin x - \sin x - x \cos x = -2 \sin x - x \cos x$$

$$\therefore f(\pi) = \pi$$

080 답 ⑤

$$\int_1^x (x+t)f(t) dt = e^x(\ln x + 1) - e \text{에서}$$

$$x \int_1^x f(t) dt + \int_1^x tf(t) dt = e^x(\ln x + 1) - e$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t) dt + xf(x) + xf(x) = e^x(\ln x + 1) + \frac{e^x}{x}$$

$$\therefore \int_1^x f(t) dt + 2xf(x) = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} + 1 \right)$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$2f(1) = 2e \quad \therefore f(1) = e$$

081 답 3

$$\int_1^x (x-t)f(t) dt = x^2 \ln x + ax + b \text{에서}$$

$$x \int_1^x f(t) dt - \int_1^x tf(t) dt = x^2 \ln x + ax + b$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 2x \ln x + x + a$$

$$\therefore \int_1^x f(t) dt = 2x \ln x + x + a \quad \dots\dots ①$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 2 \ln x + 2 + 1 = 2 \ln x + 3 \quad \therefore f(e) = 2 + 3 = 5$$

$$① \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면 } 0 = 1 + a \quad \therefore a = -1$$

한편 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = a + b \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore a - b + f(e) = -1 - 1 + 5 = 3$$

082 답 ②

$$\int_0^x (t-x)f'(t) dt = e^{2x} + ae^x + 1 \text{에서}$$

$$\int_0^x tf'(t) dt - x \int_0^x f'(t) dt = e^{2x} + ae^x + 1$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$xf'(x) - \left\{ \int_0^x f'(t) dt + xf'(x) \right\} = 2e^{2x} + ae^x$$

$$\therefore \int_0^x f'(t) dt = -2e^{2x} - ae^x$$

$$\left[f(t) \right]_0^x = -2e^{2x} - ae^x, \quad f(x) - f(0) = -2e^{2x} - ae^x$$

$$\therefore f(x) = -2e^{2x} - ae^x + \frac{2}{e^4} \quad \left(\because f(0) = \frac{2}{e^4} \right)$$

한편 주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = 1 + a + 1 \quad \therefore a = -2$$

$$\text{따라서 } f(x) = -2e^{2x} + 2e^x + \frac{2}{e^4} \text{이므로}$$

$$f(a) = f(-2) = -\frac{2}{e^4} + \frac{2}{e^2} + \frac{2}{e^4} = \frac{2}{e^2}$$

083 답 ⑤

$$f(x) = \int_0^x (\cos 2t - \sin t) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x) = \cos 2x - \sin x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \cos 2x - \sin x = 0$$

$$(1 - 2 \sin^2 x) - \sin x = 0, \quad 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = -1$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \quad (\because 0 < x < \pi)$$

$0 < x < \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		/	극대	\	극소	/	

함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$\begin{aligned} M &= f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t - \sin t) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \sin 2t + \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 1 \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} - 1 \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{5}{6}\pi$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$\begin{aligned} m &= f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \int_0^{\frac{5}{6}\pi} (\cos 2t - \sin t) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \sin 2t + \cos t \right]_0^{\frac{5}{6}\pi} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 1 \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{4} - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore M - m = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - 1 \right) - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4} - 1 \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

084 [답] ③

$f(x) = \int_1^x \frac{4-t^2}{t} dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \frac{4-x^2}{x}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 4-x^2=0$$

$$x^2=4 \quad \therefore x=2 \quad (\because x>0)$$

$x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$\begin{aligned} f(2) &= \int_1^2 \frac{4-t^2}{t} dt = \int_1^2 \left(\frac{4}{t} - t \right) dt \\ &= \left[4 \ln |t| - \frac{1}{2} t^2 \right]_1^2 = (4 \ln 2 - 2) - \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= 4 \ln 2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

085 [답] $\frac{1}{4}$

$f(x) = \int_0^x (2t+1)e^{t^2+t} dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (2x+1)e^{x^2+x}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 2x+1=0 \quad (\because e^{x^2+x}>0)$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-\frac{1}{2}$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_0^{-\frac{1}{2}} (2t+1)e^{t^2+t} dt = -\int_{-\frac{1}{2}}^0 (2t+1)e^{t^2+t} dt$$

$$\text{이때 } t^2+t=k \text{로 놓으면 } \frac{dk}{dt} = 2t+1$$

$$t=-\frac{1}{2} \text{일 때 } k=-\frac{1}{4}, t=0 \text{일 때 } k=0 \text{이므로}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\int_{-\frac{1}{4}}^0 (2t+1)e^{t^2+t} dt$$

$$= -\int_{-\frac{1}{4}}^0 e^k dk$$

$$= -\left[e^k \right]_{-\frac{1}{4}}^0$$

$$= -(1 - e^{-\frac{1}{4}}) = e^{-\frac{1}{4}} - 1$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{1}{4}, b = -1 \text{이므로 } ab = \frac{1}{4}$$

086 [답] ①

$f(x) = \int_0^x \sin t (2 \cos t - 1) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \sin x (2 \cos x - 1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \sin x=0 \text{ 또는 } \cos x=\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{3}$ 에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t (2 \cos t - 1) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \sin t \cos t - \sin t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2t - \sin t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2t + \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

087 [답] 2

$f(x) = \int_0^x (e^t - 3) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = e^x - 3$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } e^x=3 \quad \therefore x=\ln 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\ln 3$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\ln 3$ 에서 극소이면서 최소이므로

$$a = \ln 3$$

$$\therefore b = f(\ln 3) = \int_0^{\ln 3} (e^t - 3) dt = \left[e^t - 3t \right]_0^{\ln 3}$$

$$= (3 - 3 \ln 3) - 1 = 2 - 3 \ln 3$$

$$\therefore 3a + b = 3 \ln 3 + 2 - 3 \ln 3 = 2$$

088 [답] $\frac{7}{4} - 4 \ln 2$

$f(x) = \int_2^x (t+1) \ln t dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (x+1) \ln x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1 \quad (\because x>0)$$

$x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$f(1) = \int_2^1 (t+1) \ln t dt = -\int_1^2 (t+1) \ln t dt$$

이때 $u(t) = \ln t$, $v'(t) = t+1$ 로 놓으면

$$u'(t) = \frac{1}{t}, v(t) = \frac{1}{2}t^2 + t$$

$$\begin{aligned} \therefore f(1) &= -\int_1^2 (t+1) \ln t dt \\ &= -\left[\left(\frac{1}{2}t^2 + t\right) \ln t\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t} \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right) dt \\ &= -4 \ln 2 + \left[\frac{1}{4}t^2 + t\right]_1^2 \\ &= -4 \ln 2 + \left\{(1+2) - \left(\frac{1}{4} + 1\right)\right\} \\ &= \frac{7}{4} - 4 \ln 2 \end{aligned}$$

089 답 ⑤

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{e-h}^{e+2h} f(t) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(e+2h) - F(e-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(e+2h) - F(e) + F(e) - F(e-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(e+2h) - F(e)}{2h} \times 2 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(e) - F(e-h)}{-h} \\ &= 2F'(e) + F'(e) = 3F'(e) = 3f(e) \\ &= 3 \times \frac{e(1+e)}{3e^2} = \frac{e+1}{e} \end{aligned}$$

090 답 $4e^2$

함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^{x^2} f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x^2) - F(1)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x^2) - F(1)}{x^2 - 1} \times (x+1) \\ &= F'(1) \times 2 = 2f(1) \\ &= 2 \times 2e^2 = 4e^2 \end{aligned}$$

091 답 8

$f(t) = t \cos t + a$ 라 하고, 함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \int_{\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}} (t \cos t + a) dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \int_{\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}} f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{2} = 4$ 이므로 $a = 8$

092 답 ①

함수 $g'(t)$ 의 부정적분은 $g(t)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{e-h}^{e+h} g'(t) dt &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e) + g(e) - g(e-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e+h) - g(e)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(e) - g(e-h)}{-h} \\ &= g'(e) + g'(e) = 2g'(e) \end{aligned}$$

$f(x) = x^{\ln x}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = (\ln x)^2$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2 \ln x}{x}, f'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \times f(x)$$

$$\therefore f'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \times x^{\ln x}$$

한편 $g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이고 $f(e) = e$ 이므로

$$g'(e) = \frac{1}{f'(e)}$$

따라서 $f'(e) = \frac{2}{e} \times e = 2$ 이므로

$$g'(e) = \frac{1}{f'(e)} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{e-h}^{e+h} g'(t) dt = 2g'(e) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

093 답 7

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+2} = 2x - 4 + \frac{8}{x+2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{e-2} f(x) dx &= \int_{-1}^{e-2} \left(2x - 4 + \frac{8}{x+2}\right) dx \\ &= \left[x^2 - 4x + 8 \ln |x+2|\right]_{-1}^{e-2} \\ &= \{(e-2)^2 - 4(e-2) + 8\} - (1+4) \\ &= e^2 - 8e + 15 \end{aligned}$$

따라서 $a = -8$, $b = 15$ 이므로 $a+b = 7$

094 답 ①

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(ae^x + \frac{b}{e^x}\right) dx &= \int_0^1 (ae^x + be^{-x}) dx \\ &= \left[ae^x - be^{-x}\right]_0^1 \\ &= \left(ae - \frac{b}{e}\right) - (a - b) \\ &= ae - \frac{b}{e} - a + b \end{aligned}$$

따라서 $ae - \frac{b}{e} - a + b = e + \frac{2}{e} - 3$ 이므로

$$a = 1, b = -2 \quad \therefore ab = -2$$

095 ㉔ ④

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x + 1} dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{\sin x - 1} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x + 1} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - \sin x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x} \right) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin x + 1 + \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{1 - \sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{\cos^2 x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sec^2 x dx \\
 &= \left[2 \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2
 \end{aligned}$$

096 ㉔ 1

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| &= \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & (x < -1 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -\frac{x-1}{x+1} & (-1 < x < 1) \end{cases} \quad \text{이므로} \\
 \int_0^3 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx &= \int_0^1 \left(-\frac{x-1}{x+1} \right) dx + \int_1^3 \frac{x-1}{x+1} dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} - 1 \right) dx + \int_1^3 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) dx \\
 &= \left[2 \ln |x+1| - x \right]_0^1 + \left[x - 2 \ln |x+1| \right]_1^3 \\
 &= (2 \ln 2 - 1) + \{3 - 2 \ln 4 - (1 - 2 \ln 2)\} = 1
 \end{aligned}$$

097 ㉔ $\frac{1}{2} + \frac{2}{e}$

$$\begin{aligned}
 S(n) &= \int_0^n f(x) dx \\
 &= \int_0^1 \left(-x + \frac{1}{e} + 1 \right) dx + \int_1^n e^{-x} dx \\
 &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{e} + 1 \right)x \right]_0^1 + \left[-e^{-x} \right]_1^n \\
 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{e} + 1 \right) + \left\{ -\frac{1}{e^n} - \left(-\frac{1}{e} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{e} - \frac{1}{e^n} \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{e} - \frac{1}{e^n} \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{e}
 \end{aligned}$$

098 ㉔ ④

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2^x - 2^{-x}, \quad g(x) = 3^x + 3^{-x} \text{이라 하면} \\
 f(-x) &= 2^{-x} - 2^x = -(2^x - 2^{-x}) = -f(x) \\
 g(-x) &= 3^{-x} + 3^x = g(x) \\
 \therefore \int_{-1}^1 (2^x + 3^x - 2^{-x} + 3^{-x}) dx &= 2 \int_0^1 (3^x + 3^{-x}) dx \\
 &= 2 \left[\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^{-x}}{\ln 3} \right]_0^1 \\
 &= 2 \left(\frac{3}{\ln 3} - \frac{1}{3 \ln 3} \right) = \frac{16}{3 \ln 3}
 \end{aligned}$$

099 ㉔ $12 - 4\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 3 \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3} \cos x dx \\
 &= \left[-3 \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[\sqrt{3} \sin x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + 3 \right) + \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
 &= 3 - \sqrt{3} \\
 \text{이때 } f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= f(x) \text{이므로} \\
 \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_{-\pi}^0 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx \\
 \therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 4(3 - \sqrt{3}) = 12 - 4\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

100 ㉔ $2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
 f(x) = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= f'(x) \\
 x=0 \text{일 때 } t=f(0)=2, \quad x=2 \text{일 때 } t=f(2)=8 \text{이므로} \\
 \int_0^2 \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx &= \int_2^8 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int_2^8 t^{-\frac{1}{2}} dt = \left[2t^{\frac{1}{2}} \right]_2^8 \\
 &= 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

101 ㉔ ②

$$\begin{aligned}
 x^2 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= 2x \\
 x=-1 \text{일 때 } t=1, \quad x=0 \text{일 때 } t=0, \quad x=2 \text{일 때 } t=4 \text{이므로} \\
 \int_{-1}^2 e^{x^2} f(x) dx &= \int_{-1}^0 (-xe^{x^2}) dx + \int_0^2 2xe^{x^2} dx \\
 &= \int_1^0 \left(-e^t \times \frac{1}{2} \right) dt + \int_0^4 e^t dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^t dt + \int_0^4 e^t dt = \frac{1}{2} \left[e^t \right]_0^1 + \left[e^t \right]_0^4 \\
 &= \frac{1}{2}(e-1) + (e^4-1) \\
 &= e^4 + \frac{1}{2}e - \frac{3}{2} \\
 \text{따라서 } a &= \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{3}{2} \text{이므로 } a+b = -1
 \end{aligned}$$

102 ㉔ $\frac{5}{12}$

$$\begin{aligned}
 \sin x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} &= \cos x \\
 x=0 \text{일 때 } t=0, \quad x=\frac{\pi}{2} \text{일 때 } t=1 \text{이므로} \\
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos x dx &= \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \\
 \text{따라서 } a_n &= \frac{1}{n+1} \text{이므로} \\
 \sum_{n=1}^{10} a_n a_{n+1} &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

103 답 ②

$$x=3\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)\text{로 놓으면 }\frac{dx}{d\theta}=3\cos\theta$$

$$x=0\text{일 때 }\theta=0, x=3\text{일 때 }\theta=\frac{\pi}{2}\text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\int_0^3\sqrt{9-x^2}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-9\sin^2\theta}\times 3\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2\theta\times 3\cos\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2\theta d\theta\end{aligned}$$

$$\text{이때 }\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1\text{에서 }\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}\text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2\theta d\theta &= \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{9}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{9}{4}\pi\end{aligned}$$

$$\therefore a=\frac{9}{4}$$

104 답 ③

$$\begin{aligned}f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n) \\ &= \int_1^2 xe^x dx + \int_2^3 xe^x dx + \int_3^4 xe^x dx + \cdots + \int_n^{n+1} xe^x dx \\ &= \int_1^{n+1} xe^x dx\end{aligned}$$

$$\text{이때 }u(x)=x, v'(x)=e^x\text{으로 놓으면 }u'(x)=1, v(x)=e^x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^{n+1} xe^x dx &= \left[xe^x\right]_1^{n+1} - \int_1^{n+1} e^x dx \\ &= (n+1)e^{n+1} - e - \left[e^x\right]_1^{n+1} \\ &= \{(n+1)e^{n+1} - e\} - (e^{n+1} - e) = ne^{n+1} \\ \therefore \frac{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(6)}{f(1)+f(2)+f(3)} &= \frac{6e^7}{3e^4} = 2e^3\end{aligned}$$

105 답 e^2+e-3

$$\begin{aligned}\int_1^e f(x) dx - \int_e^e f(x) dx &= \int_1^e f(x) dx + \int_e^e f(x) dx \\ &= \int_1^e f(x) dx = \int_1^e (4x+1)(\ln x)^2 dx\end{aligned}$$

$$\text{이때 }u(x)=(\ln x)^2, v'(x)=4x+1\text{로 놓으면}$$

$$u'(x)=\frac{2\ln x}{x}, v(x)=2x^2+x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^e (4x+1)(\ln x)^2 dx \\ &= \left[(2x^2+x)(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e (2x^2+x) \times \frac{2\ln x}{x} dx \\ &= 2e^2+e-2\int_1^e (2x+1)\ln x dx \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\int_1^e (2x+1)\ln x dx\text{에서 }s(x)=\ln x, t'(x)=2x+1\text{로 놓으면}$$

$$s'(x)=\frac{1}{x}, t(x)=x^2+x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^e (2x+1)\ln x dx &= \left[(x^2+x)\ln x\right]_1^e - \int_1^e (x+1) dx \\ &= e^2+e - \left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_1^e \\ &= e^2+e - \left\{\left(\frac{1}{2}e^2+e\right) - \left(\frac{1}{2}+1\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}e^2+\frac{3}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

②을 ①에 대입하면

$$\int_1^e (4x+1)(\ln x)^2 dx = 2e^2+e-2\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{2}\right) = e^2+e-3$$

106 답 ③

$$\int_1^4 f(t) dt = k \text{ (k는 상수)로 놓으면}$$

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}+k=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+k\text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\int_1^4 f(t) dt &= \int_1^4 \left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+k\right) dt \\ &= \int_1^4 \left(t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}+k\right) dt = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}+kt\right]_1^4 \\ &= \left(\frac{16}{3}+4+4k\right) - \left(\frac{2}{3}+2+k\right) = 3k+\frac{20}{3}\end{aligned}$$

$$\text{즉, }3k+\frac{20}{3}=k\text{이므로 }k=-\frac{10}{3}$$

$$\text{따라서 }f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}-\frac{10}{3}\text{이므로 }f(1)=-\frac{4}{3}$$

107 답 ①

$$xf(x)=x^2e^x+\int_1^x f(t) dt\text{의 양변을 }x\text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x)+xf'(x)=2xe^x+x^2e^x+f(x)$$

$$xf'(x)=x(x+2)e^x \quad \therefore f'(x)=(x+2)e^x$$

$$\text{이때 }u(x)=x+2, v'(x)=e^x\text{으로 놓으면}$$

$$u'(x)=1, v(x)=e^x$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (x+2)e^x dx = (x+2)e^x - \int e^x dx \\ &= (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C\end{aligned}$$

$$xf(x)=x^2e^x+\int_1^x f(t) dt\text{의 양변에 }x=1\text{을 대입하면}$$

$$f(1)=e$$

$$\text{즉, }2e+C=e\text{이므로 }C=-e$$

$$\text{따라서 }f(x)=(x+1)e^x-e\text{이므로}$$

$$f(2)=3e^2-e$$

108 답 9

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x (x-t)f(t) dt + 3x\text{에서}$$

$$\int_0^x f(t) dt = x\int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt + 3x$$

$$\text{양변을 }x\text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) = \int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) + 3$$

$$\therefore \int_0^x f(t) dt = f(x) - 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{양변을 다시 }x\text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x)=f'(x), \frac{f'(x)}{f(x)}=1$$

$$\text{따라서 }\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int dx\text{이므로}$$

$$\ln f(x)=x+C \quad \therefore f(x)=e^{x+C}$$

$$\textcircled{1}\text{의 양변에 }x=0\text{을 대입하면 }0=f(0)-3 \quad \therefore f(0)=3$$

$$\text{즉, }e^C=3\text{이므로 }C=\ln 3$$

$$\text{따라서 }f(x)=e^{x+\ln 3}\text{이므로 }f(\ln 3)=e^{2\ln 3}=9$$

109 ④ -6

$f(x) = \int_{\frac{1}{e^x}}^x \frac{3 \ln t}{t} dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \frac{3 \ln x}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \ln x = 0 \quad \therefore x = 1$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$f(1) = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{3 \ln t}{t} dt$$

$$\text{이때 } \ln t = k \text{로 놓으면 } \frac{dk}{dt} = \frac{1}{t}$$

$$t = \frac{1}{e^2} \text{일 때 } k = -2, t = 1 \text{일 때 } k = 0 \text{이므로}$$

$$f(1) = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{3 \ln t}{t} dt = \int_{-2}^0 3k dk = \left[\frac{3}{2} k^2 \right]_{-2}^0 = -6$$

110 ⑤

$f(x) = \int_x^{x+1} \left(t + \frac{12}{t} \right) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x+1 + \frac{12}{x+1} \right) - \left(x + \frac{12}{x} \right) \\ &= 1 + \frac{12}{x+1} - \frac{12}{x} = \frac{(x+4)(x-3)}{x(x+1)} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } (x+4)(x-3) = 0 \quad \therefore x = 3 (\because x > 0)$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	3	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$\begin{aligned} f(3) &= \int_3^4 \left(t + \frac{12}{t} \right) dt = \left[\frac{1}{2} t^2 + 12 \ln |t| \right]_3^4 \\ &= (8 + 12 \ln 4) - \left(\frac{9}{2} + 12 \ln 3 \right) = \frac{7}{2} + 12 \ln \frac{4}{3} \end{aligned}$$

111 ⑤

$f(t) = \left| \frac{t}{\pi} \tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$ 라 하고, 함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{\pi-h}^{\pi+3h} \left| \frac{t}{\pi} \tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{\pi-h}^{\pi+3h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\pi+3h) - F(\pi-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\pi+3h) - F(\pi) + F(\pi) - F(\pi-h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\pi+3h) - F(\pi)}{3h} \times \frac{3}{2} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\pi) - F(\pi-h)}{-h} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} F'(\pi) + \frac{1}{2} F'(\pi) = 2F'(\pi) \\ &= 2f(\pi) = 2 \left| \tan \frac{3}{4} \pi \right| = 2 \end{aligned}$$

10 정적분의 활용

180~194쪽

001 ④

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(2 + \frac{1}{n} \right)^3 + \left(2 + \frac{2}{n} \right)^3 + \left(2 + \frac{3}{n} \right)^3 + \cdots + \left(2 + \frac{n}{n} \right)^3 \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(2 + \frac{k}{n} \right)^3 \times \frac{1}{n} = \int_2^3 x^3 dx \\ &= \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_2^3 = \frac{81}{4} - 4 = \frac{65}{4} \end{aligned}$$

002 ⑤

구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \left(-\frac{2x}{x^2+2} \right) dx + \int_0^1 \frac{2x}{x^2+2} dx \\ &= \left[-\ln(x^2+2) \right]_{-2}^0 + \left[\ln(x^2+2) \right]_0^1 \\ &= (-\ln 2 + \ln 6) + (\ln 3 - \ln 2) \\ &= \ln \frac{9}{2} \end{aligned}$$

003 ②

곡선 $y = \ln(x+2)$ 와 y 축의 교점의 y 좌표는

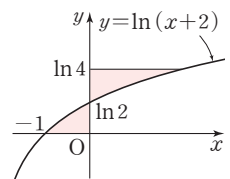
$$y = \ln 2$$

$$y = \ln(x+2) \text{에서 } x+2 = e^y$$

$$\therefore x = e^y - 2$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \{ -(e^y - 2) \} dy + \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^y - 2) dy \\ &= \left[2y - e^y \right]_0^{\ln 2} + \left[e^y - 2y \right]_{\ln 2}^{\ln 4} \\ &= (2 \ln 2 - 1) + (2 - 2 \ln 2) \\ &= 1 \end{aligned}$$



004 ④ $\ln 2 - \frac{1}{2}$

곡선 $y = \frac{x}{x^2+1}$ 와 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2}x$ 에서

$$2x = x(x^2+1), x^3 - x = 0, x(x+1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2}x - \frac{x}{x^2+1} \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \frac{1}{4}x^2 \right]_0^1 \\ &= \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \right) + \left(\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} \right) \\ &= \ln 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

005 답 ③

두 곡선 $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ 의 교점의 x 좌표

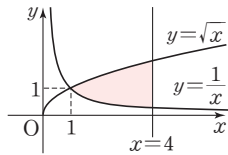
는 $\frac{1}{x} = \sqrt{x}$ 에서 $x\sqrt{x} = 1$

$$x^3 = 1, (x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\therefore x = 1 (\because x^2+x+1 > 0)$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x} \right) dx &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \ln x \right]_1^4 \\ &= \left(\frac{16}{3} - \ln 4 \right) - \frac{2}{3} \\ &= \frac{14}{3} - 2 \ln 2 \end{aligned}$$



006 답 ①

$f(x) = \ln x$ 라 하면 $f'(x) = \frac{1}{x}$

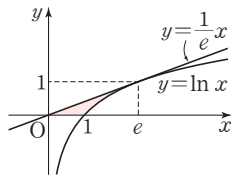
점 $(e, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$f'(e) = \frac{1}{e}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e) \quad \therefore y = \frac{1}{e}x$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times e \times 1 - \int_1^e \ln x dx &= \frac{e}{2} - \left([x \ln x]_1^e - \int_1^e dx \right) \\ &= \frac{e}{2} - \left(e - [x]_1^e \right) \\ &= \frac{e}{2} - 1 \end{aligned}$$



007 답 $\frac{4}{\pi}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^1 \left(\cos \frac{\pi}{2}x - ax \right) dx = 0$$

$$\left[\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2}x - \frac{a}{2}x^2 \right]_0^1 = 0$$

$$\frac{2}{\pi} - \frac{a}{2} = 0 \quad \therefore a = \frac{4}{\pi}$$

008 답 ③

곡선 $y = e^x$ 과 x 축, y 축 및 직선 $x = \ln 4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

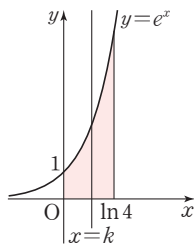
$$S_1 = \int_0^{\ln 4} e^x dx = [e^x]_0^{\ln 4} = 4 - 1 = 3$$

곡선 $y = e^x$ 과 x 축, y 축 및 직선 $x = k$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \int_0^k e^x dx = [e^x]_0^k = e^k - 1$$

이때 $S_2 = \frac{1}{2}S_1$ 이므로

$$e^k - 1 = \frac{3}{2}, e^k = \frac{5}{2} \quad \therefore k = \ln \frac{5}{2}$$



009 답 ②

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

두 곡선의 교점의 x 좌표는 곡선

$y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로

$$\sqrt{5x-4} = x \text{에서 } 5x-4 = x^2$$

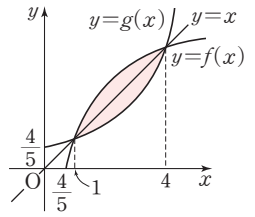
$$x^2 - 5x + 4 = 0, (x-1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선

$y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \int_1^4 (\sqrt{5x-4} - x) dx &= 2 \left[\frac{2}{15} (5x-4)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^4 \\ &= 2 \left(\frac{8}{15} + \frac{11}{30} \right) = \frac{9}{5} \end{aligned}$$



010 답 $\frac{13}{3}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{n+2}{n} \right)^2 + \left(\frac{n+4}{n} \right)^2 + \left(\frac{n+6}{n} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{3n}{n} \right)^2 \right\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(1 + \frac{2}{n} \right)^2 + \left(1 + \frac{4}{n} \right)^2 + \left(1 + \frac{6}{n} \right)^2 + \cdots + \left(1 + \frac{2n}{n} \right)^2 \right\} \\ = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n} \right)^2 \times \frac{2}{n} \\ = \frac{1}{2} \int_1^3 x^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^3 \\ = \frac{1}{2} \left(9 - \frac{1}{3} \right) = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

011 답 $\frac{10}{3}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left(2 + \frac{3k}{n} \right) &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \left(2 + \frac{3k}{n} \right) \times \frac{3}{n} \\ &= \frac{1}{3} \int_2^5 \sin x dx \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{3}, b = 2, c = 5 \text{이므로 } abc = \frac{10}{3}$$

012 답 ㄴ, ㄷ

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(2 + \frac{k}{n} \right)^5 &= \int_2^3 x^5 dx \\ &= \int_0^1 (x+2)^5 dx \\ &= \int_7^8 (x-5)^5 dx \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

013 답 $2 \ln 2 - 1$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{3}{n} \right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) \times \frac{1}{n} = \int_1^2 \ln x dx \\ = [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 dx = 2 \ln 2 - [x]_1^2 \\ = 2 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

014 답 ③

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left\{ f\left(\frac{2}{n}\right) + 2f\left(\frac{4}{n}\right) + 3f\left(\frac{6}{n}\right) + \cdots + nf\left(\frac{2n}{n}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n kf\left(\frac{2k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{2k}{n} f\left(\frac{2k}{n}\right) \times \frac{2}{n} \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 xf(x) dx = \frac{1}{4} \int_0^2 xe^x dx \\ &= \frac{1}{4} \left([xe^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx \right) \\ &= \frac{1}{4} (2e^2 - [e^x]_0^2) = \frac{e^2+1}{4} \end{aligned}$$

015 답 ②

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{3k}{n}\right) &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{3k}{n}\right) \times \frac{3}{n} \\ &= \frac{1}{3} \int_1^4 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_1^4 (ax - 3\sqrt{x}) dx \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{a}{2} x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\ &= \frac{1}{3} \left\{ (8a - 16) - \left(\frac{a}{2} - 2 \right) \right\} = \frac{5}{2}a - \frac{14}{3} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{5}{2}a - \frac{14}{3} = \frac{16}{3}$ 이므로 $\frac{5}{2}a = 10$

$\therefore a = 4$

016 답 $\frac{4}{3}$

$\triangle O A_k B_k$ 는 $\angle O A_k B_k = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned} \overline{A_k B_k}^2 &= \overline{O B_k}^2 - \overline{O A_k}^2 = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \overline{A_k B_k}^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2 \right\} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2 \right\} \times \frac{1}{n} \\ &= 2 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 2 \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

017 답 $e + \frac{1}{e^2} - 1$

구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 (e^{-x} - 1) dx + \int_0^2 \{ -(e^{-x} - 1) \} dx \\ &= \left[-e^{-x} - x \right]_{-1}^0 + \left[e^{-x} + x \right]_0^2 \\ &= (e - 2) + \left(\frac{1}{e^2} + 1 \right) = e + \frac{1}{e^2} - 1 \end{aligned}$$

018 답 ②

$\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$

$x=1$ 일 때 $t=0$, $x=e^2$ 일 때 $t=2$ 이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^2 t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^2 = 2$$

019 답 ④

$y = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$ 이고

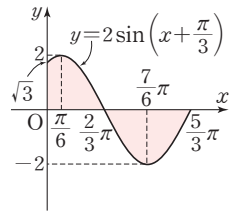
곡선 $y = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$ 와 x 축의 교점의

x 좌표는 $2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 0$ 에서

$x = \frac{2}{3}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$ ($\because 0 \leq x \leq \frac{5}{3}\pi$)

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{2}{3}\pi} 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) dx + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} \left\{ -2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right\} dx \\ &= \left[-2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} + \left[2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi} \\ &= (2+1) + (2+2) = 7 \end{aligned}$$



020 답 3

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축, y 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 7이므로

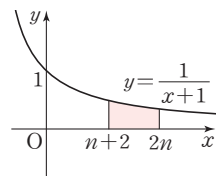
$$\int_0^2 f(x) dx = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^2 xf'(x) dx &= [xf(x)]_0^2 - \int_0^2 f(x) dx \\ &= 2f(2) - 7 \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= 2 \times 5 - 7 = 3 \end{aligned}$$

021 답 ②

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{n+2}^{2n} \frac{1}{x+1} dx = [\ln |x+1|]_{n+2}^{2n} \\ &= \ln(2n+1) - \ln(n+3) \\ &= \ln \frac{2n+1}{n+3} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{2n+1}{n+3} = \ln 2$$



022 답 ③

곡선 $y = \sqrt{x} - a$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$\sqrt{x} - a = 0$ 에서 $\sqrt{x} = a$

$\therefore x = a^2$

따라서 곡선 $y = \sqrt{x} - a$ 와 x 축, y 축 및 직

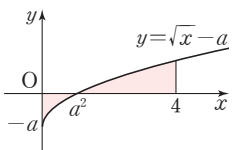
선 $x=4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{a^2} \{ -(\sqrt{x} - a) \} dx + \int_{a^2}^4 (\sqrt{x} - a) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + ax \right]_0^{a^2} + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - ax \right]_{a^2}^4 \\ &= \frac{1}{3}a^3 + \left(\frac{16}{3} - 4a + \frac{1}{3}a^3 \right) \\ &= \frac{2}{3}a^3 - 4a + \frac{16}{3} \end{aligned}$$

즉, $\frac{2}{3}a^3 - 4a + \frac{16}{3} = 2$ 이므로

$a^3 - 6a + 5 = 0$, $(a-1)(a^2+a-5) = 0$

이때 a 는 유리수이므로 $a=1$



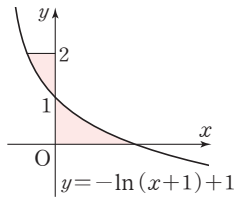
023 답 ③

$y = -\ln(x+1) + 1$ 에서 $\ln(x+1) = 1 - y$

$$x+1 = e^{1-y} \quad \therefore x = e^{1-y} - 1$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (e^{1-y} - 1) dy + \int_1^2 \{-(e^{1-y} - 1)\} dy \\ &= \left[-e^{1-y} - y\right]_0^1 + \left[e^{1-y} + y\right]_1^2 \\ &= e + \frac{1}{e} - 2 \end{aligned}$$

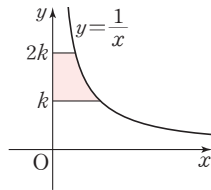


024 답 ①

$$y = \frac{1}{x} \text{에서 } x = \frac{1}{y}$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_k^{2k} \frac{1}{y} dy &= \left[\ln|y|\right]_k^{2k} = \ln 2k - \ln k \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$



025 답 ③

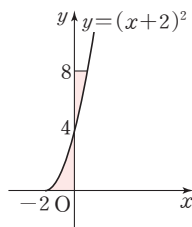
곡선 $y = (x+2)^2$ 과 y 축의 교점의 y 좌표는 $y=4$

$$y = (x+2)^2 \text{에서 } \sqrt{y} = x+2 \quad (\because x \geq -2)$$

$$\therefore x = \sqrt{y} - 2$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^4 \{-(\sqrt{y} - 2)\} dy + \int_4^8 (\sqrt{y} - 2) dy \\ &= \left[-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + 2y\right]_0^4 + \left[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - 2y\right]_4^8 \\ &= \frac{8}{3} + \left(\frac{32\sqrt{2}}{3} - \frac{40}{3}\right) = \frac{32}{3}(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$



026 답 2

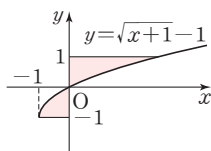
곡선 $y = \sqrt{x+1} - 1$ 과 y 축의 교점의 y 좌표는 $y=0$

$$y = \sqrt{x+1} - 1 \text{에서 } y+1 = \sqrt{x+1}$$

$$(y+1)^2 = x+1 \quad \therefore x = y^2 + 2y$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 \{-(y^2 + 2y)\} dy + \int_0^1 (y^2 + 2y) dy \\ &= \left[-\frac{1}{3}y^3 - y^2\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}y^3 + y^2\right]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2 \end{aligned}$$



027 답 2e

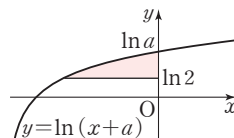
곡선 $y = \ln(x+a)$ 와 y 축의 교점의 y 좌표는 $y = \ln a$

$$y = \ln(x+a) \text{에서 } x+a = e^y$$

$$\therefore x = e^y - a$$

따라서 곡선 $y = \ln(x+a)$ 와 y 축 및 직선 $y = \ln 2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{\ln 2}^{\ln a} \{-(e^y - a)\} dy &= \left[-e^y + ay\right]_{\ln 2}^{\ln a} \\ &= (-a + a \ln a) - (-2 + a \ln 2) \\ &= a \ln \frac{a}{2} - a + 2 \end{aligned}$$



$$\text{즉, } a \ln \frac{a}{2} - a + 2 = 2 \text{이므로 } a \left(\ln \frac{a}{2} - 1\right) = 0$$

$$\ln \frac{a}{2} = 1 \quad (\because a > 2), \quad \frac{a}{2} = e \quad \therefore a = 2e$$

028 답 $\frac{2}{3}$

곡선 $y = \frac{2x}{x^2+2}$ 와 직선 $y = \frac{1}{3}x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{2x}{x^2+2} = \frac{1}{3}x \text{에서 } 6x = x^3 + 2x$$

$$x^3 - 4x = 0, \quad x(x+2)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{3}x - \frac{2x}{x^2+2}\right) dx + \int_0^2 \left(\frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{3}x\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^2 - \ln(x^2+2)\right]_{-2}^0 + \left[\ln(x^2+2) - \frac{1}{6}x^2\right]_0^2 \\ &= \left(-\ln 2 - \frac{2}{3} + \ln 6\right) + \left(\ln 6 - \frac{2}{3} - \ln 2\right) \\ &= 2\ln 6 - 2\ln 2 - \frac{4}{3} = 2\ln 3 - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } a = 2, \quad b = -\frac{4}{3} \text{이므로 } a + b = \frac{2}{3}$$

029 답 $\frac{9}{2}$

$y = x - 3$ 에서 $x = y + 3$

곡선 $x = y^2 + 1$ 과 직선 $x = y + 3$ 의 교점의 y 좌표는

$$y^2 + 1 = y + 3 \text{에서 } y^2 - y - 2 = 0$$

$$(y+1)(y-2) = 0 \quad \therefore y = -1 \text{ 또는 } y = 2$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \{(y+3) - (y^2+1)\} dy &= \int_{-1}^2 (-y^2 + y + 2) dy \\ &= \left[-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y\right]_{-1}^2 \\ &= \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

030 답 ③

곡선 $y = \frac{2}{x} \quad (x > 0)$ 와 직선 $y = 2x$ 의 교점

의 x 좌표는 $\frac{2}{x} = 2x$ 에서

$$x^2 = 1 \quad \therefore x = 1 \quad (\because x > 0)$$

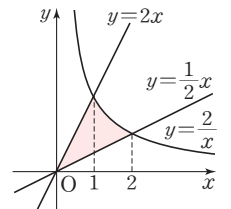
또 곡선 $y = \frac{2}{x} \quad (x > 0)$ 와 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 의

교점의 x 좌표는 $\frac{2}{x} = \frac{1}{2}x$ 에서 $x^2 = 4 \quad \therefore x = 2 \quad (\because x > 0)$

따라서 곡선 $y = \frac{2}{x} \quad (x > 0)$ 와 두 직선 $y = 2x, y = \frac{1}{2}x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(2x - \frac{1}{2}x\right) dx + \int_2^4 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2}x\right) dx &= \left[\frac{3}{4}x^2\right]_1^2 + \left[2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right]_2^4 \\ &= \frac{3}{4} + \left(2\ln 2 - \frac{3}{4}\right) = 2\ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \ln a = 2\ln 2 = \ln 4 \text{이므로 } a = 4$$



031 **답** $\frac{\pi^2}{2} - \pi$

곡선 $y = x \sin x$ 와 직선 $y = -x + \pi$ 의 교점의 x 좌표를 k ($0 < k < \pi$)라 하면

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= \int_0^k (-x + \pi - x \sin x) dx - \int_k^\pi \{x \sin x - (-x + \pi)\} dx \\ &= \int_0^k (-x + \pi - x \sin x) dx + \int_k^\pi (-x + \pi - x \sin x) dx \\ &= \int_0^\pi (-x + \pi - x \sin x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + \pi x \right]_0^\pi - \left(\left[-x \cos x \right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx \right) \\ &= \frac{\pi^2}{2} - \left(\pi + \left[\sin x \right]_0^\pi \right) = \frac{\pi^2}{2} - \pi \end{aligned}$$

032 **답** $2e^2 + 2$

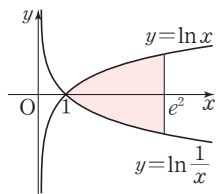
두 곡선 $y = \ln x$, $y = \ln \frac{1}{x}$ 의 교점의 x 좌

표는 $\ln x = \ln \frac{1}{x}$ 에서

$$\ln x = -\ln x, 2 \ln x = 0 \quad \therefore x = 1$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_1^{e^2} \left(\ln x - \ln \frac{1}{x} \right) dx &= \int_1^{e^2} 2 \ln x dx \\ &= 2 \left(\left[x \ln x \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} dx \right) \\ &= 2 \left(2e^2 - \left[x \right]_1^{e^2} \right) \\ &= 2(e^2 + 1) = 2e^2 + 2 \end{aligned}$$



033 **답** ④

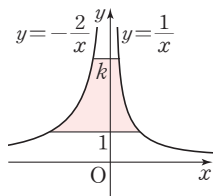
$y = \frac{1}{x}$ 에서 $x = \frac{1}{y}$, $y = -\frac{2}{x}$ 에서 $x = -\frac{2}{y}$

따라서 두 곡선 $y = \frac{1}{x}$, $y = -\frac{2}{x}$ 와 두 직선 $y = 1$, $y = k$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_1^k \left\{ \frac{1}{y} - \left(-\frac{2}{y} \right) \right\} dy &= 3 \int_1^k \frac{1}{y} dy \\ &= 3 \left[\ln |y| \right]_1^k \\ &= 3 \ln k \end{aligned}$$

즉, $3 \ln k = 6$ 이므로

$$\ln k = 2 \quad \therefore k = e^2$$



034 **답** ⑤

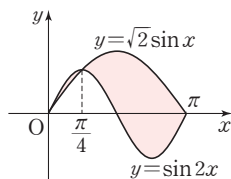
두 곡선 $y = \sqrt{2} \sin x$, $y = \sin 2x$ 의 교점의 x 좌표는 $\sqrt{2} \sin x = \sin 2x$ 에서

$$\sqrt{2} \sin x = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin x (2 \cos x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ 또는 } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \pi \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_0^{\pi/4} (\sin 2x - \sqrt{2} \sin x) dx + \int_{\pi/4}^\pi (\sqrt{2} \sin x - \sin 2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \sqrt{2} \cos x \right]_0^{\pi/4} + \left[-\sqrt{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_{\pi/4}^\pi \\ &= \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2} \right) + \left(\sqrt{2} + \frac{3}{2} \right) = 3 \end{aligned}$$

035 **답** $\frac{1}{3}$

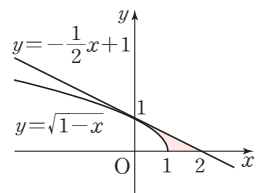
$$f(x) = \sqrt{1-x} \text{라 하면 } f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0) = -\frac{1}{2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 1 = -\frac{1}{2}x \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + 1$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \int_0^1 \sqrt{1-x} dx \\ &= 1 - \left[-\frac{2}{3} (1-x)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



036 **답** ②

$$f(x) = e^{2x} \text{이라 하면 } f'(x) = 2e^{2x}$$

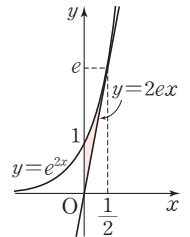
점 $(\frac{1}{2}, e)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(\frac{1}{2}) = 2e \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - e = 2e \left(x - \frac{1}{2} \right) \quad \therefore y = 2ex$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (e^{2x} - 2ex) dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x} - ex^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{e}{2} - \frac{e}{4} - \frac{1}{2} = \frac{e-2}{4}$$



037 **답** $\frac{e}{2} - \frac{3}{2e}$

$$f(x) = e^x \text{이라 하면 } f'(x) = e^x$$

점 $(1, e)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = e \text{이므로 접선의 방정식은}$$

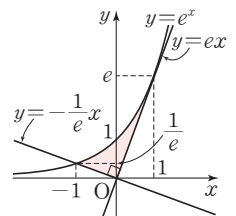
$$y - e = e(x - 1) \quad \therefore y = ex$$

이 접선과 수직이고 점 $(-1, \frac{1}{e})$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}(x + 1) \quad \therefore y = -\frac{1}{e}x$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^0 \left\{ e^x - \left(-\frac{1}{e}x \right) \right\} dx + \int_0^1 (e^x - ex) dx \\ &= \left[e^x + \frac{1}{2e}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[e^x - \frac{e}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \left(1 - \frac{3}{2e} \right) + \left(\frac{e}{2} - 1 \right) = \frac{e}{2} - \frac{3}{2e} \end{aligned}$$



038 답 ②

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \text{라 하면 } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

접점의 좌표를 $(t, \frac{\ln t}{t}) (t > 0)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울

기는 $f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{\ln t}{t} = \frac{1 - \ln t}{t^2}(x - t) \quad \therefore y = \frac{1 - \ln t}{t^2}x + \frac{2 \ln t - 1}{t}$$

이 직선이 원점을 지나므로 $2 \ln t - 1 = 0$

$$2 \ln t = 1, \ln t = \frac{1}{2} \quad \therefore t = \sqrt{e}$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

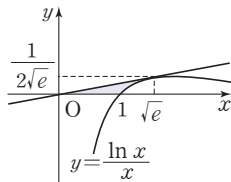
$$\frac{1}{2} \times \sqrt{e} \times \frac{1}{2\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x} dx$$

$$= \frac{1}{4} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\text{이때 } \ln x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$x = 1$ 일 때 $t = 0$, $x = \sqrt{e}$ 일 때 $t = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x} dx &= \frac{1}{4} - \int_0^{\frac{1}{2}} t dt \\ &= \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$



039 답 $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^9 (\sqrt{3x} - ax) dx = 0$$

$$\left[\frac{2\sqrt{3}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{a}{2} x^2 \right]_0^9 = 0$$

$$18\sqrt{3} - \frac{81}{2}a = 0 \quad \therefore a = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

040 답 ②

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^k (4\sqrt{x} - 2x) dx = 0$$

$$\left[\frac{8}{3} x^{\frac{3}{2}} - x^2 \right]_0^k = 0$$

$$\frac{8}{3} k\sqrt{k} - k^2 = 0, k\sqrt{k} \left(\frac{8}{3} - \sqrt{k} \right) = 0$$

$$\sqrt{k} = \frac{8}{3} (\because k > 4) \quad \therefore k = \frac{64}{9}$$

041 답 ③

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^4 (\sqrt{x} - a) dx = 0$$

$$\left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - ax \right]_0^4 = 0$$

$$\frac{16}{3} - 4a = 0 \quad \therefore a = \frac{4}{3}$$

042 답 2

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^k \{xe^x - (e^x + 1)\} dx = 0$$

$$\int_0^k \{(x-1)e^x - 1\} dx = 0$$

$$\left\{ \left[(x-1)e^x \right]_0^k - \int_0^k e^x dx \right\} - \left[x \right]_0^k = 0$$

$$\left\{ (k-1)e^k + 1 - \left[e^x \right]_0^k \right\} - k = 0$$

$$(k-2)e^k - k + 2 = 0$$

$$(k-2)(e^k - 1) = 0 \quad \therefore k = 2 (\because k > \frac{3}{2})$$

043 답 $\sqrt{e}$

곡선 $y = \frac{2}{x}$ 와 x 축 및 두 직선 $x=1, x=e$

로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_1^e \frac{2}{x} dx = \left[2 \ln |x| \right]_1^e = 2$$

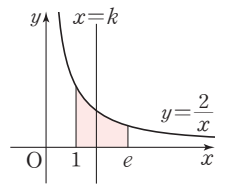
곡선 $y = \frac{2}{x}$ 와 x 축 및 두 직선 $x=1, x=k$

로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \int_1^k \frac{2}{x} dx = \left[2 \ln |x| \right]_1^k = 2 \ln k$$

이때 $S_2 = \frac{1}{2} S_1$ 이므로

$$2 \ln k = 1, \ln k = \frac{1}{2} \quad \therefore k = \sqrt{e}$$



044 답 ②

곡선 $y = \sqrt{x}$ 와 x 축 및 직선 $x=4$ 로 둘

려싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^4$$

$$= \frac{16}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

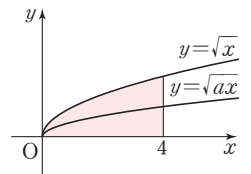
곡선 $y = \sqrt{ax}$ 와 x 축 및 직선 $x=4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2

라 하면

$$S_2 = \int_0^4 \sqrt{ax} dx = \sqrt{a} \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{16}{3} \sqrt{a} (\because \textcircled{1})$$

이때 $S_2 = \frac{1}{2} S_1$ 이므로

$$\frac{16}{3} \sqrt{a} = \frac{1}{2} \times \frac{16}{3}, \sqrt{a} = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$



045 답 $e-1$

곡선 $y = e^x$ 과 y 축 및 직선 $y=e$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라

하면

$$S_1 = \int_0^1 (e - e^x) dx = \left[ex - e^x \right]_0^1 = 1$$

직선 l 과 y 축 및 직선 $y=e$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 1 \times (e - k) = \frac{e - k}{2}$$

이때 $S_2 = \frac{1}{2} S_1$ 이므로

$$\frac{e - k}{2} = \frac{1}{2}, e - k = 1 \quad \therefore k = e - 1$$

046 ㉡ 2-√2

두 곡선 $y=2\sin x \cos x$, $y=a \sin x$ 의 교점의 x 좌표를 k 라 하면
 $2\sin k \cos k = a \sin k$ 에서

$$2\cos k = a \quad (\because \sin k \neq 0)$$

$$\therefore \cos k = \frac{a}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

곡선 $y=2\sin x \cos x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

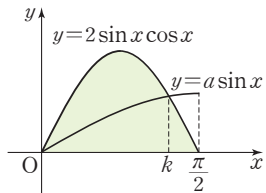
$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

곡선 $y=2\sin x \cos x$ 와 곡선 $y=a \sin x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^k (2\sin x \cos x - a \sin x) dx \\ &= \int_0^k (\sin 2x - a \sin x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x + a \cos x\right]_0^k = -\frac{1}{2}\cos 2k + a \cos k - a + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2}(2\cos^2 k - 1) + a \cos k - a + \frac{1}{2} \\ &= -\cos^2 k + a \cos k - a + 1 \\ &= -\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a \times \frac{a}{2} - a + 1 \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \frac{a^2}{4} - a + 1 \end{aligned}$$

이때 $S_2 = \frac{1}{2}S_1$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{4} - a + 1 &= \frac{1}{2}, \quad a^2 - 4a + 2 = 0 \\ \therefore a &= 2 - \sqrt{2} \quad (\because 0 < a < \sqrt{2}) \end{aligned}$$



047 ㉡ ②

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로

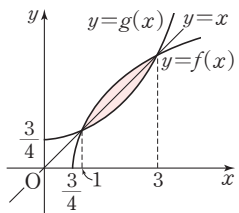
$$\sqrt{4x-3} = x \text{에서 } 4x-3 = x^2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \quad (x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 도형의 넓이는

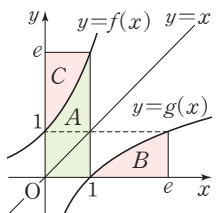
$$2 \int_1^3 (\sqrt{4x-3} - x) dx = 2 \left[\frac{1}{6}(4x-3)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^3 = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



048 ㉡ ①

함수 $y=f(x)$ 와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 $B=C$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 f(x) dx + \int_1^e g(x) dx \\ = A + B = A + C = 1 \times e = e \end{aligned}$$



049 ㉡ ④

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 서로 역함수이므로

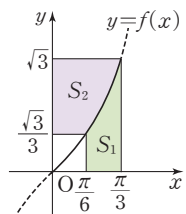
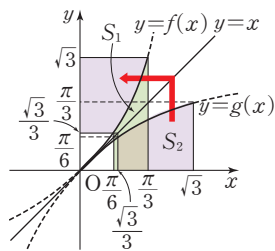
$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \text{에서}$$

$$g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}, \quad g(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{이때 } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = S_1,$$

$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} g(x) dx = S_2$ 라 하고, S_2 에 해당하는 부분을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면 구하는 값은 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx + \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} g(x) dx \\ = \frac{\pi}{3} \times \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\ = \frac{5\sqrt{3}}{18} \pi \end{aligned}$$



050 ㉡ e^4+3

밑면으로부터 높이가 x 인 지점에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = (\sqrt{e^x+1})^2 = e^x + 1$$

따라서 구하는 용기의 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^4 S(x) dx &= \int_0^4 (e^x + 1) dx \\ &= \left[e^x + x \right]_0^4 = e^4 + 3 \end{aligned}$$

051 ㉡ $\sqrt{3}$

점 $(x, 0)$ ($0 \leq x \leq \pi$)을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2\sin x})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} S(x) dx &= \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x dx \\ &= \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right]_0^{\pi} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

052 ㉡ ④

$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ 일 때 $v(t) \geq 0$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ 일 때 $v(t) \leq 0$ 이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^1 |2\pi \cos \pi t| dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} 2\pi \cos \pi t dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 2\pi \cos \pi t dt \\ &= \left[2 \sin \pi t \right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[2 \sin \pi t \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= 2 - (-2) = 4 \end{aligned}$$

053 답 5π

$$\frac{dx}{dt} = 3 \cos t + 4 \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = -3 \sin t + 4 \cos t$$

따라서 시간 $t=0$ 에서 $t=\pi$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sqrt{(3 \cos t + 4 \sin t)^2 + (-3 \sin t + 4 \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{25 \cos^2 t + 25 \sin^2 t} dt \\ &= \int_0^\pi 5 dt = [5t]_0^\pi = 5\pi \end{aligned}$$

054 답 $2\sqrt{3} - \frac{2}{3}$

$$f(x) = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2} \text{라 하면}$$

$$f'(x) = \sqrt{x-2}$$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_2^4 \sqrt{1 + (\sqrt{x-2})^2} dx &= \int_2^4 \sqrt{x-1} dx \\ &= \left[\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} \right]_2^4 = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

055 답 ⑤

밀면으로부터 높이가 x 인 지점에서 밀면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \left(\sqrt{\frac{2x+3}{x+1}} \right)^2 = \frac{2x+3}{x+1}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^2 S(x) dx &= \int_0^2 \frac{2x+3}{x+1} dx = \int_0^2 \left(2 + \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \left[2x + \ln(x+1) \right]_0^2 \\ &= \ln 3 + 4 \end{aligned}$$

056 답 ③

물의 깊이가 x cm ($0 \leq x \leq 3$)일 때 수면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\sin \frac{\pi}{4} x} \right)^2 = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4} x \text{ (cm}^2\text{)}$$

따라서 구하는 물의 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^2 S(x) dx &= \int_0^2 \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4} x dx \\ &= \left[-2 \cos \frac{\pi}{4} x \right]_0^2 = 2 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

057 답 4

깊이가 x cm일 때 수면의 넓이가 $(e^{-x} + x)$ cm²이므로 깊이가 a cm일 때의 물의 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^a (e^{-x} + x) dx &= \left[-e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^a \\ &= -\frac{1}{e^a} + \frac{1}{2}a^2 + 1 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

따라서 $-\frac{1}{e^a} + \frac{1}{2}a^2 + 1 = -\frac{1}{e^4} + 9$ 이므로 $a=4$

058 답 $\frac{1}{2}$

점 $(x, 0)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$)을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = (\sqrt{\cos 2x})^2 = \cos 2x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} S(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

059 답 ②

점 $(x, 0)$ ($0 \leq x \leq \ln 3$)을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{\pi}{2} (\sqrt{e^x + 2})^2 = \frac{\pi}{2} (e^x + 2)$$

따라서 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 3} S(x) dx &= \int_0^{\ln 3} \frac{\pi}{2} (e^x + 2) dx = \frac{\pi}{2} [e^x + 2x]_0^{\ln 3} \\ &= \frac{\pi}{2} (2 + 2 \ln 3) = \pi(1 + \ln 3) \end{aligned}$$

즉, $a=1$, $b=3$ 이므로 $a+b=4$

060 답 $\frac{26}{3 \ln 3}$

점 P의 x 좌표를 x ($-1 \leq x \leq 2$)라

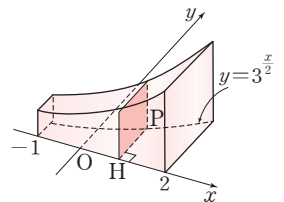
$$\text{하면 } \overline{PH} = 3^{\frac{x}{2}}$$

$\overline{PH}$ 를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \overline{PH}^2 = (3^{\frac{x}{2}})^2 = 3^x$$

점 P의 x 좌표가 -1 에서 2 까지 변화하므로 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_{-1}^2 S(x) dx = \int_{-1}^2 3^x dx = \left[\frac{3^x}{\ln 3} \right]_{-1}^2 = \frac{26}{3 \ln 3}$$



061 답 18

오른쪽 그림과 같이 구하는 입체도형의 밑면의 중심을 원점, 지름을 x 축으로 정하자. 이때 점 $P(x, 0)$ ($-3 \leq x \leq 3$)을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면을 $\triangle PQR$ 라 하면

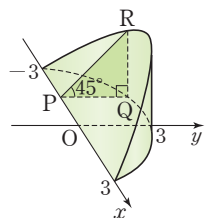
$$\overline{QR} = \overline{PQ} = \sqrt{\overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{9 - x^2}$$

$\triangle PQR$ 의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{1}{2} (\sqrt{9 - x^2})^2 = \frac{1}{2} (9 - x^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 S(x) dx &= \int_{-3}^3 \frac{1}{2} (9 - x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[9x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-3}^3 = 18 \end{aligned}$$



062 ㉮ ③

$0 \leq t \leq 1$ 일 때 $v(t) \geq 0$, $1 \leq t \leq \frac{3}{2}$ 일 때 $v(t) \leq 0$ 이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{2}} |\sin \pi t| dt &= \int_0^1 \sin \pi t dt - \int_1^{\frac{3}{2}} \sin \pi t dt \\ &= \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_0^1 - \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_1^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{\pi} - \left(-\frac{1}{\pi} \right) = \frac{3}{\pi} \end{aligned}$$

063 ㉮ ⑤

처음 위치가 0이므로 시각 $t=2$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^2 t e^t dt &= \left[t e^t \right]_0^2 - \int_0^2 e^t dt \\ &= 2e^2 - \left[e^t \right]_0^2 = 2e^2 - (e^2 - 1) \\ &= e^2 + 1 \end{aligned}$$

064 ㉮ ③

$v(t)=0$ 에서 $\cos t - \cos 2t = 0$

$$\cos t - (2\cos^2 t - 1) = 0$$

$$2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0$$

$$(2\cos t + 1)(\cos t - 1) = 0$$

$$\cos t = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos t = 1$$

$$\therefore t = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } t = \frac{5}{3}\pi \text{ 또는 } t = 2\pi \dots (\because t > 0)$$

따라서 점 P가 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은

$t = \frac{2}{3}\pi$ 이고, $0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi$ 에서 $v(t) \geq 0$ 이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\cos t - \cos 2t) dt = \left[\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

065 ㉮ 16

시각 t 에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 x_P , x_Q 라 하면

$$x_P = 0 + \int_0^t 2t dt = \left[t^2 \right]_0^t = t^2$$

$$\begin{aligned} x_Q &= 0 + \int_0^t \left(\frac{3}{2}\sqrt{t} + t \right) dt \\ &= \left[t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^t = t\sqrt{t} + \frac{1}{2}t^2 \end{aligned}$$

두 점 P, Q가 동시에 출발한 후 다시 만나려면 $x_P = x_Q$ 이어야 하므로

$$t^2 = t\sqrt{t} + \frac{1}{2}t^2, \quad t\sqrt{t} \left(1 - \frac{\sqrt{t}}{2} \right) = 0$$

$$\therefore t = 4 (\because t > 0)$$

따라서 두 점 P, Q가 처음으로 다시 만나는 시각은 $t=4$ 이므로 그때의 위치는

$$4^2 = 16$$

066 ㉮ $\frac{3}{4}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \frac{dy}{dt} = 1$$

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=\ln 2$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \sqrt{\frac{(e^t - e^{-t})^2}{4} + 1} dt &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{\frac{(e^t + e^{-t})^2}{4}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} (e^t + e^{-t}) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[e^t - e^{-t} \right]_0^{\ln 2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

067 ㉮ ②

$$\frac{dx}{dt} = t - 1, \quad \frac{dy}{dt} = 2\sqrt{t}$$

따라서 시각 $t=1$ 에서 $t=a$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_1^a \sqrt{(t-1)^2 + (2\sqrt{t})^2} dt &= \int_1^a \sqrt{(t+1)^2} dt = \int_1^a (t+1) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 + t \right]_1^a = \frac{1}{2}a^2 + a - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2}a^2 + a - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \text{이므로 } a^2 + 2a - 8 = 0$$

$$(a+4)(a-2) = 0 \quad \therefore a = 2 (\because a > 1)$$

068 ㉮ $\frac{7}{4}$

$$\frac{dx}{dt} = e^{2t} - a, \quad \frac{dy}{dt} = 2\sqrt{a}e^t$$

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{(e^{2t} - a)^2 + (2\sqrt{a}e^t)^2} dt &= \int_0^2 \sqrt{(e^{2t} + a)^2} dt \\ &= \int_0^2 (e^{2t} + a) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2t} + at \right]_0^2 \\ &= \frac{e^4}{2} + 2a - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{e^4}{2} + 2a - \frac{1}{2} = \frac{e^4}{2} + 3 \text{이므로 } 2a = \frac{7}{2}$$

$$\therefore a = \frac{7}{4}$$

069 ㉮ ③

$$\frac{dx}{dt} = -3\cos^2 t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3\sin^2 t \cos t$$

따라서 점 P의 시각 t 에서의 속력은

$$\begin{aligned} &\sqrt{(-3\cos^2 t \sin t)^2 + (3\sin^2 t \cos t)^2} \\ &= \sqrt{9\sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t)} \\ &= 3\sin t \cos t = \frac{3}{2} \sin 2t \end{aligned}$$

이때 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 속력이 최대가 되는 때는 $t = \frac{\pi}{4}$ 일 때이다.

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t = \frac{\pi}{4}$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{2} \sin 2t dt = \left[-\frac{3}{4} \cos 2t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4}$$

070 답 ③

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4x} \text{ 이라 하면 } f'(x) = x^2 - \frac{1}{4x^2}$$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_1^3 \sqrt{1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)^2} dx &= \int_1^3 \sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2} dx \\ &= \int_1^3 \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4x}\right]_1^3 = \frac{53}{6} \end{aligned}$$

071 답 $\frac{8}{3}$

$$\frac{dx}{dt} = e^t - e^{-t}, \quad \frac{dy}{dt} = 2$$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 3} \sqrt{(e^t - e^{-t})^2 + 4} dt &= \int_0^{\ln 3} \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} dt \\ &= \int_0^{\ln 3} (e^t + e^{-t}) dt \\ &= \left[e^t - e^{-t}\right]_0^{\ln 3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

072 답 ⑤

$$f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \ln x \text{ 라 하면 } f'(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{x}$$

따라서 $1 \leq x \leq a$ 에서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_1^a \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{x}\right)^2} dx &= \int_1^a \sqrt{\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{x}\right)^2} dx \\ &= \int_1^a \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{8}x^2 + \ln |x|\right]_1^a \\ &= \frac{1}{8}a^2 + \ln a - \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{8}a^2 + \ln a - \frac{1}{8} = \frac{15}{8} + 2\ln 2 \text{ 이므로 } a=4$$

073 답 ①

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \times \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \sqrt{x} dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

074 답 $\frac{5}{2}\pi - 1$

곡선 $y = x \cos x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x \cos x = 0$ 에서 $x=0$ 또는 $\cos x=0$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}\pi \left(\because 0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi \right)$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (-x \cos x) dx \\ &= \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &\quad + \left\{ \left[-x \sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (-\sin x) dx \right\} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + \left[\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) + \left(2\pi - \left[\cos x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi = \frac{5}{2}\pi - 1 \end{aligned}$$

075 답 3

곡선 $y = \frac{1}{1-x}$ 과 y 축의 교점의 y 좌표는

$$y=1$$

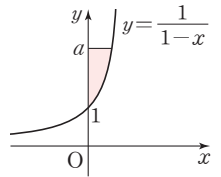
$$y = \frac{1}{1-x} \text{ 에서 } 1-x = \frac{1}{y}$$

$$\therefore x = 1 - \frac{1}{y}$$

따라서 곡선 $y = \frac{1}{1-x}$ 과 y 축 및 직선 $y=a$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_1^a \left(1 - \frac{1}{y}\right) dy &= \left[y - \ln |y| \right]_1^a \\ &= a - 1 - \ln a \end{aligned}$$

즉, $a - 1 - \ln a = 2 - \ln 3$ 이므로 $a=3$



076 답 $\frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{6}$

곡선 $y = \frac{1}{2x+1} \left(x > -\frac{1}{2} \right)$ 과 직선

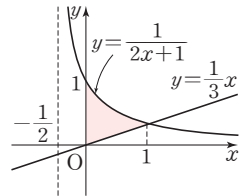
$y = \frac{1}{3}x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x+1} &= \frac{1}{3}x \text{ 에서 } 2x^2 + x - 3 = 0 \\ (2x+3)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x=1 \left(\because x > -\frac{1}{2} \right)$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{3}x \right) dx &= \left[\frac{1}{2} \ln(2x+1) - \frac{1}{6}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{1}{6} \end{aligned}$$



077 답 ⑤

두 곡선 $y = \cos x$, $y = \cos 2x$ 의 교점의

x 좌표는 $\cos x = \cos 2x$ 에서

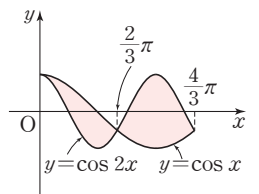
$$\cos x = 2\cos^2 x - 1$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = 1$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{4}{3}\pi \left(\because 0 \leq x \leq \frac{4}{3}\pi \right)$$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\cos x - \cos 2x) dx + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} (\cos 2x - \cos x) dx \\ &= \left[\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} + \left[\frac{1}{2} \sin 2x - \sin x \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

078 [답] ①

$f(x) = ke^{x-1}$ 이라 하면 $f'(x) = ke^{x-1}$

$g(x) = 2x$ 라 하면 $g'(x) = 2$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 의 접점의 좌표를 (t, ke^{t-1}) 이라 하면

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } ke^{t-1} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 (t, ke^{t-1}) 은 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 의 교점이므로

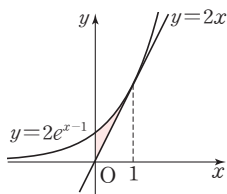
$$f(t) = g(t) \text{에서 } ke^{t-1} = 2t \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$t=1, k=2$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2e^{x-1} - 2x) dx &= \left[2e^{x-1} - x^2 \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$



079 [답] e

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{\frac{1}{e}}^a \frac{2 \ln x}{x} dx = 0$$

$$\ln x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$x = \frac{1}{e}$ 일 때 $t = -1$, $x = a$ 일 때 $t = \ln a$ 이므로

$$\int_{-1}^{\ln a} 2t dt = 0, \left[t^2 \right]_{-1}^{\ln a} = 0$$

$$(\ln a)^2 - 1 = 0, (\ln a)^2 = 1, \ln a = \pm 1$$

$$\therefore a = e \quad (\because a > 1)$$

080 [답] ⑤

곡선 $y=e^x$ 과 x 축, y 축 및 직선 $x=\ln 2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

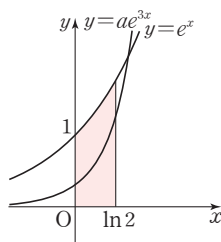
$$S_1 = \int_0^{\ln 2} e^x dx = \left[e^x \right]_0^{\ln 2} = 1$$

곡선 $y=ae^{3x}$ 과 x 축, y 축 및 직선 $x=\ln 2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \int_0^{\ln 2} ae^{3x} dx = \left[\frac{a}{3} e^{3x} \right]_0^{\ln 2} = \frac{7}{3}a$$

이때 $S_2 = \frac{1}{2}S_1$ 이므로

$$\frac{7}{3}a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{3}{14}$$



081 [답] ②

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선

$y=x$ 에 대하여 대칭이다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점의

x 좌표는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$

의 교점의 x 좌표와 같으므로 오른쪽

그림에서

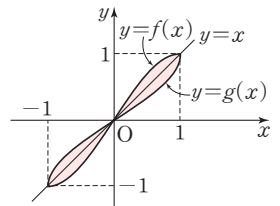
$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$ ($\because -1 \leq x \leq 1$)

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡

선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으

므로 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^1 \left| \sin \frac{\pi}{2} x - x \right| dx &= 4 \int_0^1 \left(\sin \frac{\pi}{2} x - x \right) dx \\ &= 4 \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \\ &= 4 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{8}{\pi} - 2 \end{aligned}$$



082 [답] 8

밑면으로부터 높이가 x cm인 지점에서의 수면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = (\sqrt{xe^x + 1})^2 = xe^x + 1 \text{ (cm}^2\text{)}$$

따라서 물통의 부피는

$$\begin{aligned} \int_0^4 S(x) dx &= \int_0^4 (xe^x + 1) dx \\ &= \left[xe^x \right]_0^4 - \int_0^4 e^x dx + \left[x \right]_0^4 \\ &= 4e^4 - \left[e^x \right]_0^4 + 4 \\ &= 3e^4 + 5 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

즉, $a=3$, $b=5$ 이므로 $a+b=8$

083 [답] 1

점 $(x, 0)$ ($1 \leq x \leq e$)을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면 단면인 직각이등변삼각형의 빗변의 길이

가 $\frac{2}{\sqrt{x}}$ 이므로 빗변이 아닌 두 변의 길이는

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2}{x}}$$

$$\therefore S(x) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{x}} \right)^2 = \frac{1}{x}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} \int_1^e S(x) dx &= \int_1^e \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\ln |x| \right]_1^e = 1 \end{aligned}$$

084 답 ①

$$v(t)=0 \text{에서 } e-e^t=0$$

$$e^t=e \quad \therefore t=1$$

따라서 점 P가 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=1$ 이고, $0 \leq t \leq 1$ 에서 $v(t) \geq 0$ 이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^1 (e-e^t) dt = [et-e^t]_0^1 = 1$$

085 답 11

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t$$

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=\ln 6$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^{\ln 6} \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{\ln 6} \sqrt{2e^{2t} \cos^2 t + 2e^{2t} \sin^2 t} dt = \int_0^{\ln 6} \sqrt{2} e^t dt \\ &= [\sqrt{2} e^t]_0^{\ln 6} = 6\sqrt{2} - \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

시각 $t=\ln 6$ 에서 $t=\ln a$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_{\ln 6}^{\ln a} \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2} dt \\ &= [\sqrt{2} e^t]_{\ln 6}^{\ln a} = a\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = (a-6)\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 $(a-6)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ 이므로 $a-6=5 \quad \therefore a=11$

086 답 $\frac{25}{9}$

$$f(x) = \ln(1-x^2) \text{이라 하면 } f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$$

따라서 $-\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}$ 에서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2} dx = \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x^2+1}{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{x^2+1}{1-x^2} dx \\ &= \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \left(-1 + \frac{2}{1-x^2}\right) dx \\ &= -\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} dx - \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \frac{2}{x^2-1} dx \\ &= -\left[x\right]_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} - \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= -\frac{1}{2} - \left[\ln|x-1| - \ln|x+1|\right]_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} \\ &= -\frac{1}{2} - \left(\ln \frac{3}{5} - \ln \frac{5}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} - \ln \frac{9}{25} \end{aligned}$$

$$\therefore k = -\frac{1}{2} - \ln \frac{9}{25}$$

$$\therefore e^{k+\frac{1}{2}} = e^{-\ln \frac{9}{25}} = \frac{25}{9}$$

