



정답과 해설

수학 I



001 답 ②

① 8의 세제곱근은 방정식 $x^3=8$ 의 근이므로

$$x^3-8=0, (x-2)(x^2+2x+4)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=-1\pm\sqrt{3}i$$

따라서 8의 세제곱근은 2, $-1\pm\sqrt{3}i$ 의 3개이다.

② $(-4)^2=16$ 의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[4]{16}=\pm 2$ 이다.

③ $\sqrt{25}=5$ 의 제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt{5}$ 이다.

④ -81 의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.

⑤ n 이 짝수일 때, -36 의 n 제곱근 중 실수인 것은 없다.

002 답 ⑤

$$\textcircled{1} \sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$$

$$\textcircled{2} \frac{\sqrt[3]{75}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{\frac{75}{5}}=\sqrt[3]{15}$$

$$\textcircled{3} \sqrt[3]{\sqrt{6}}=\sqrt[6]{6}$$

$$\textcircled{4} \sqrt[8]{4^3}=\sqrt[8]{(2^2)^3}=\sqrt[8]{2^6}=\sqrt[4]{2^3}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \left(\sqrt{7}\times\frac{1}{\sqrt[3]{7}}\right)^6 &= (\sqrt{7})^6 \times \left(\frac{1}{\sqrt[3]{7}}\right)^6 \\ &= \sqrt{7^6} \times \frac{1}{\sqrt[3]{7^6}} \\ &= 7^3 \times \frac{1}{7^2} = 7 \end{aligned}$$

003 답 ②

$$\begin{aligned} \frac{4^{-3}+2^{-3}}{9} \times \frac{10}{27^2+3^8} &= \frac{(2^2)^{-3}+2^{-3}}{9} \times \frac{10}{(3^3)^2+3^8} \\ &= \frac{2^{-6}+2^{-3}}{9} \times \frac{10}{3^6+3^8} \\ &= \frac{2^{-6}(1+2^3)}{9} \times \frac{10}{3^6(1+3^2)} \\ &= 2^{-6} \times 3^{-6} = 6^{-6} \end{aligned}$$

004 답 10

$$\begin{aligned} \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{8}{3}} \times 125^{-\frac{2}{3}} \times 100^{\frac{3}{2}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4} \times \frac{8}{3}} \times (5^3)^{-\frac{2}{3}} \times (10^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 5^{-2} \times 10^3 \\ &= 2^{-2} \times 5^{-2} \times 10^3 \\ &= 10^{-2} \times 10^3 \\ &= 10^{-2+3} = 10 \end{aligned}$$

005 답 $\frac{1}{8}$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} &= \sqrt[12]{a} \times \sqrt[24]{a} \\ &= a^{\frac{1}{12}} \times a^{\frac{1}{24}} \\ &= a^{\frac{1}{12}+\frac{1}{24}} = a^{\frac{1}{8}} \end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{1}{8}$$

006 답 ④

$$4^3=a \text{에서 } (2^2)^3=a, 2^6=a \quad \therefore 2=a^{\frac{1}{6}}$$

$$27^2=b \text{에서 } (3^3)^2=b, 3^6=b \quad \therefore 3=b^{\frac{1}{6}}$$

$$\begin{aligned} \therefore 36^5 &= (2^2 \times 3^2)^5 = 2^{10} \times 3^{10} \\ &= (a^{\frac{1}{6}})^{10} \times (b^{\frac{1}{6}})^{10} = a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

007 답 4

$\left(\frac{1}{256}\right)^{\frac{1}{n}} = (2^{-8})^{\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{8}{n}}$ 이 자연수가 되려면 $-\frac{8}{n}$ 이 음이 아닌 정수이어야 한다.

따라서 구하는 정수 n 은 $-8, -4, -2, -1$ 의 4개이다.

008 답 ①

$$\begin{aligned} (a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}) \\ &= \{(a^{\frac{1}{4}})^2-(b^{\frac{1}{4}})^2\}(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}) \\ &= (a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}) \\ &= (a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{\frac{1}{2}})^2 \\ &= a-b \end{aligned}$$

009 답 ③

$$\begin{aligned} a+a^{-1} &= (a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2 \\ &= (\sqrt{5})^2-2=3 \\ \therefore a^2+a^{-2} &= (a+a^{-1})^2-2 \\ &= 3^2-2=7 \end{aligned}$$

010 답 $\frac{3}{2}$

구하는 식의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면

$$\begin{aligned} \frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}} &= \frac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})} = \frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1} \\ &= \frac{5+1}{5-1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

011 답 $\frac{1}{3}$

$$2^x=216 \text{에서 } 2=216^{\frac{1}{x}}=(6^3)^{\frac{1}{x}}=6^{\frac{3}{x}} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$3^y=216 \text{에서 } 3=216^{\frac{1}{y}}=(6^3)^{\frac{1}{y}}=6^{\frac{3}{y}} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times \textcircled{2}$ 을 하면

$$6=6^{\frac{3}{x}} \times 6^{\frac{3}{y}}, 6^{\frac{3}{x}+\frac{3}{y}}=6$$

$$3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1 \quad \therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$$

012 답 ⑤

$$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{4}=4^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}, \sqrt[6]{6}=6^{\frac{1}{6}}$$

2, 3, 6의 최소공배수가 6이므로

$$3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{6}}=(3^2)^{\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{6}}$$

$$2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{6}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{6}}$$

이때 $6^{\frac{1}{6}} < 8^{\frac{1}{6}} < 9^{\frac{1}{6}}$ 이므로 $\sqrt[6]{6} < \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9}$

013 답 2배

수심이 8m인 곳에서의 빛의 세기는 $I_8 = I_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$

수심이 12m인 곳에서의 빛의 세기는 $I_{12} = I_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$$\therefore \frac{I_8}{I_{12}} = \frac{I_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{I_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3} = 2$$

따라서 수심이 8m인 곳에서의 빛의 세기는 수심이 12m인 곳에서의 빛의 세기의 2배이다.

014 답 ⑤

① 27의 세제곱근은 방정식 $x^3=27$ 의 근이므로

$$x^3 - 27 = 0, (x-3)(x^2+3x+9) = 0$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 27의 세제곱근은 3, $\frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$ 의 3개이다.

② $-\sqrt{64} = -8$ 의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-8} = -2$ 이다.

③ $0.1^2 = 0.01$ 의 제곱근 중 실수인 것은 ± 0.1 이다.

④ n 이 홀수일 때, -5 의 n 제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{-5}$ 이다.

⑤ n 이 짝수일 때, -9 의 n 제곱근 중 실수인 것은 없다.

015 답 -30

$\sqrt[4]{625} = 25$ 의 네제곱근 중 양의 실수인 것은 $\sqrt[4]{25} = \sqrt{5}$ 이므로

$$a = \sqrt{5}$$

-216 의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-216} = -6$ 이므로

$$b = -6$$

$$\therefore a^2b = (\sqrt{5})^2 \times (-6) = -30$$

016 답 ②

① $\sqrt[3]{-5}$ 는 실수이므로 $(-5, 3) \in S$

② $\sqrt{-3}$ 은 실수가 아니므로 $(-3, 2) \notin S$

③ $\sqrt[3]{-3}$ 은 실수이므로 $(-3, 3) \in S$

④ $\sqrt{3}$ 은 실수이므로 $(3, 2) \in S$

⑤ $\sqrt[3]{5}$ 는 실수이므로 $(5, 3) \in S$

017 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. 6의 제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^2=6$ 의 실근이므로 $\pm\sqrt{6}$ 의 2개이고, -7 의 세제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^3=-7$ 의 실근이므로 $\sqrt[3]{-7}$ 의 1개이다.

$$\therefore N(6, 2) + N(-7, 3) = 2 + 1 = 3$$

ㄴ. n 이 홀수일 때, $N(x, n) = 1$

ㄷ. n 이 짝수일 때

$$x > 0 \text{ 이면 } N(x, n) = 2$$

$$x = 0 \text{ 이면 } N(x, n) = 1$$

$$x < 0 \text{ 이면 } N(x, n) = 0$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

018 답 ④

$$\textcircled{1} \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

$$\textcircled{2} \frac{\sqrt[3]{0.01}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\frac{0.01}{10}} = \sqrt[3]{0.001} = \sqrt[3]{0.1^3} = 0.1$$

$$\textcircled{3} \sqrt[3]{2^6} \div (\sqrt[5]{32})^2 = \sqrt[3]{4^3} \div (\sqrt[5]{2^5})^2 = 4 \div 2^2 = 1$$

$$\textcircled{4} \sqrt{\sqrt{81}} \times \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[4]{81} \times \sqrt[6]{64} = \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[6]{2^6} = 3 \times 2 = 6$$

$$\textcircled{5} \sqrt[9]{4^6} \times \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[3]{4^2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

019 답 ④

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{54} - \sqrt[6]{16} \times \sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} &= \sqrt[3]{2 \times 3^3} - \sqrt[6]{2^4} \times \sqrt[3]{2^2} + 3\sqrt[3]{2} \\ &= 3\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{2^2} + 3\sqrt[3]{2} \\ &= 3\sqrt[3]{2} - 2^3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} \\ &= 4\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

020 답 $\sqrt[3]{3}$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{81} + \sqrt[6]{36}}{\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}} &= \frac{\sqrt[3]{3^3 \times 3} + \sqrt[6]{2^2}}{\sqrt[3]{3^2 \times 3} + \sqrt[6]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3^3} + \sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{3(3+2)}}{3+\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

021 답 1

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{3\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{4\sqrt{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{a}} &= \frac{\sqrt[4]{\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{3\sqrt{a}}} \times \frac{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[4]{4\sqrt{a}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{a}} \\ &= \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[12]{a}} \times \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[8]{a}} \times \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[6]{a}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

022 답 7

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^3b^4} \times \sqrt{a^5b^2} \div \sqrt[4]{a^9b^5} &= \sqrt[3]{a^3b^4} \times \sqrt{a^5b^2} \div \sqrt[4]{a^9b^5} \\ &= \sqrt[6]{a^6b^4} \times \sqrt[4]{a^5b^2} \div \sqrt[12]{a^9b^5} \\ &= \frac{\sqrt[12]{a^6b^8} \times \sqrt[12]{a^{15}b^6}}{\sqrt[12]{a^9b^5}} \\ &= \sqrt[12]{\frac{a^6b^8 \times a^{15}b^6}{a^9b^5}} \\ &= \sqrt[12]{a^{12}b^9} = a^4\sqrt[3]{b^3} \end{aligned}$$

따라서 $p=4, q=3$ 이므로 $p+q=7$

023 답 ①

$$\begin{aligned} \frac{25^{-2} + 5^{-5}}{3} \times \frac{5}{3^7 + 3^5} &= \frac{(5^2)^{-2} + 5^{-5}}{3} \times \frac{5}{3^7 + 3^5} \\ &= \frac{5^{-4} + 5^{-5}}{3} \times \frac{5}{3^7 + 3^5} \\ &= \frac{5^{-5}(5+1)}{3} \times \frac{5}{3^5(3^2+1)} \\ &= 5^{-5} \times 3^{-5} = 15^{-5} \end{aligned}$$

024 답 -3

$$\begin{aligned} 3^{-3} \div (3^{-2})^{-4} \times 3^8 &= 3^{-3} \div 3^8 \times 3^8 = 3^{-3-8+8} = 3^{-3} \\ \therefore k &= -3 \end{aligned}$$

025 답 ④

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{8^{-4}+4^{-11}}{8^{-10}+4^{-10}}} &= \sqrt{\frac{(2^3)^{-4}+(2^2)^{-11}}{(2^3)^{-10}+(2^2)^{-10}}} = \sqrt{\frac{2^{-12}+2^{-22}}{2^{-30}+2^{-20}}} \\ &= \sqrt{\frac{2^{-22}(2^{10}+1)}{2^{-30}(1+2^{10})}} = \sqrt{2^{-22-(-30)}} \\ &= \sqrt{2^8} = 2^4 = 16\end{aligned}$$

026 답 2

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{-3}+1} + \frac{1}{2^{-1}+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^3+1} \\ &= \frac{2^3}{2^3(2^{-3}+1)} + \frac{2}{2(2^{-1}+1)} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^3+1} \\ &= \frac{2^3}{1+2^3} + \frac{2}{1+2} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^3+1} \\ &= \frac{2^3+1}{2^3+1} + \frac{2+1}{2+1} = 1+1=2\end{aligned}$$

027 답 ③

$$\begin{aligned}\left\{\left(\frac{16}{9}\right)^{-\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{4}} \times \left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{6}{5}}\right\}^{-\frac{5}{2}} &= \left(\frac{16}{9}\right)^{-\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{6}{5} \times \left(-\frac{5}{2}\right)} \\ &= \left(\frac{16}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \\ &= \left\{\left(\frac{4}{3}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \times 4^3 \\ &= \frac{3}{4} \times 4^3 = 48\end{aligned}$$

028 답 1

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt{81}} \times 3^{-\frac{1}{3}} \div \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{3}} &= 4\sqrt{3^4} \times 3^{-\frac{1}{3}} \div 9^{\frac{1}{3}} \\ &= 3 \times 3^{-\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{2}{3}} \\ &= 3^{1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} = 3^0 = 1\end{aligned}$$

029 답 ④

$$\begin{aligned}(a^{\sqrt{3}})^{3\sqrt{2}} \times (a^{\frac{1}{3}})^{6\sqrt{6}} \div a^{4\sqrt{6}} &= a^{3\sqrt{6}} \times a^{2\sqrt{6}} \div a^{4\sqrt{6}} \\ &= a^{3\sqrt{6}+2\sqrt{6}-4\sqrt{6}} = a^{\sqrt{6}}\end{aligned}$$

$$\therefore k = \sqrt{6}$$

030 답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 3, \quad \alpha\beta = \frac{1}{2} \\ \therefore \{2^\alpha \times 2^\beta + (49^\alpha)^\beta + 1\}^{\alpha\beta} &= (2^{\alpha+\beta} + 7^{2\alpha\beta} + 1)^{\alpha\beta} \\ &= (2^3 + 7^{2 \times \frac{1}{2}} + 1)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2^3 + 8)^{\frac{1}{2}} = (2 \times 2^3)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^2 = 4\end{aligned}$$

031 답 ③

$$\begin{aligned}\sqrt{a^3 \sqrt[3]{a} \times a^2} &= \sqrt{a} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[3]{\sqrt{a^2}} = \sqrt{a} \times \sqrt[18]{a} \times \sqrt[3]{a} \\ &= a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{18}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{18} + \frac{1}{3}} = a^{\frac{8}{9}}\end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{8}{9}$$

032 답 $\frac{29}{24}$

$$\begin{aligned}\sqrt{3 \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[4]{27}} &= \sqrt{3} \times \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[4]{3^3} = \sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[8]{3^3} \\ &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{8}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{8}} = 3^{\frac{29}{24}} \\ \therefore k &= \frac{29}{24}\end{aligned}$$

033 답 59

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2^3 \sqrt[3]{2^3} \sqrt[3]{2}} &= \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}} \times \sqrt[3]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[9]{2} \times \sqrt[27]{2} \\ &= 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{9}} \times 2^{\frac{1}{27}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}} = 2^{\frac{13}{27}} \\ \sqrt[6]{4^6 \sqrt[4]{4}} &= \sqrt[6]{4} \times \sqrt[6]{\sqrt[4]{4}} = \sqrt[6]{2^2} \times \sqrt[6]{\sqrt[4]{2^2}} = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[18]{2} \\ &= 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{18}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{18}} = 2^{\frac{7}{18}} \\ \therefore \frac{\sqrt[3]{2^3 \sqrt[3]{2^3} \sqrt[3]{2}}}{\sqrt[6]{4^6 \sqrt[4]{4}}} &= 2^{\frac{13}{27}} \div 2^{\frac{7}{18}} = 2^{\frac{13}{27} - \frac{7}{18}} = 2^{\frac{5}{54}}\end{aligned}$$

따라서 $p=54$, $q=54$ 이므로

$$p+q=59$$

034 답 14

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^4 \sqrt{a^3} \sqrt{a}} \div \sqrt[6]{\sqrt[4]{a^k} \times a} \\ &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}} \times \sqrt[3]{\sqrt{a}} \div (\sqrt[6]{\sqrt[4]{a^k}} \times \sqrt[6]{a}) \\ &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[4]{a} \times \sqrt[6]{a} \div \sqrt[24]{a^k} \div \sqrt[6]{a} \\ &= a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{6}} \div a^{\frac{k}{24}} \div a^{\frac{1}{6}} \\ &= a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{k}{24} - \frac{1}{6}} = a^{\frac{14-k}{24}}\end{aligned}$$

따라서 $a^{\frac{14-k}{24}} = 1$ 이므로

$$\frac{14-k}{24} = 0 \quad \therefore k = 14$$

035 답 $\frac{4}{33}$

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{m \sqrt{a}} &= a^{\frac{1}{mn}} \text{이므로 } f(m, n) = \frac{1}{mn} \\ \therefore f(3, 5) + f(5, 7) + f(7, 9) + f(9, 11) \\ &= \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \frac{1}{9 \times 11} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11} \right) = \frac{4}{33}\end{aligned}$$

036 답 ③

$$\begin{aligned}3^5 &= a \text{에서 } 3 = a^{\frac{1}{5}} \\ 16^2 &= b \text{에서 } (2^4)^2 = b, \quad 2^8 = b \quad \therefore 2 = b^{\frac{1}{8}} \\ \therefore 18^6 &= (2 \times 3^2)^6 = 2^6 \times 3^{12} \\ &= (b^{\frac{1}{8}})^6 \times (a^{\frac{1}{5}})^{12} = a^{\frac{12}{5}} b^{\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

037 답 ④

$$\begin{aligned}25^2 &= a \text{에서 } (5^2)^2 = a, \quad 5^4 = a \quad \therefore 5 = a^{\frac{1}{4}} \\ \therefore 125^{10} &= (5^3)^{10} = 5^{30} = (a^{\frac{1}{4}})^{30} = a^{\frac{15}{2}}\end{aligned}$$

038 답 7/12

$$a = \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \text{에서 } a^3 = 5$$

$$b = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \text{에서 } b^2 = 3$$

$$\therefore \sqrt[12]{45} = \sqrt[12]{3^2 \times 5} = 3^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{1}{12}} = 3^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{1}{12}} = (b^2)^{\frac{1}{6}} \times (a^3)^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{따라서 } m = \frac{1}{4}, n = \frac{1}{3} \text{이므로 } m+n = \frac{7}{12}$$

039 답 ①

$\left(\frac{1}{729}\right)^{\frac{1}{n}} = (3^{-6})^{\frac{1}{n}} = 3^{-\frac{6}{n}}$ 이 자연수가 되려면 $-\frac{6}{n}$ 이 음이 아닌 정수이어야 한다.

따라서 정수 n 은 $-6, -3, -2, -1$ 이므로 구하는 합은

$$-6 + (-3) + (-2) + (-1) = -12$$

040 답 42

$$a^3 = 5, b^6 = 7, c^7 = 13 \text{에서 } a = 5^{\frac{1}{3}}, b = 7^{\frac{1}{6}}, c = 13^{\frac{1}{7}}$$

$$\therefore (abc)^n = (5^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{1}{6}} \times 13^{\frac{1}{7}})^n = 5^{\frac{n}{3}} \times 7^{\frac{n}{6}} \times 13^{\frac{n}{7}}$$

따라서 $(abc)^n$, 즉 $5^{\frac{n}{3}} \times 7^{\frac{n}{6}} \times 13^{\frac{n}{7}}$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 값은 3, 6, 7의 공배수이므로 자연수 n 의 최솟값은 42이다.

041 답 ③

$$\sqrt[6]{3\sqrt{5}} = \sqrt[6]{3} \times \sqrt[6]{\sqrt{5}} = 3^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{1}{12}}$$

즉, $3^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{1}{12}}$ 이 자연수 N 의 n 제곱근이라 하면

$$(3^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{1}{12}})^n = 3^{\frac{n}{6}} \times 5^{\frac{n}{12}} = N$$

따라서 $3^{\frac{n}{6}} \times 5^{\frac{n}{12}}$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 값은 6, 12의 공배수이어야 한다.

이때 $2 \leq n \leq 150$ 이므로 n 은 12, 24, 36, ..., 144의 12개이다.

042 답 ⑤

$$(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) + (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$$

$$= \{(a^{\frac{1}{3}})^3 - (b^{\frac{1}{3}})^3\} + \{(a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{\frac{1}{2}})^2\}$$

$$= (a-b) + (a-b) = 2a-2b$$

043 답 ④

$$5^{2+\sqrt{2}} = A, 5^{2-\sqrt{2}} = B \text{라 하면}$$

$$(5^{2+\sqrt{2}} + 5^{2-\sqrt{2}})^2 - (5^{2+\sqrt{2}} - 5^{2-\sqrt{2}})^2$$

$$= (A+B)^2 - (A-B)^2$$

$$= \{(A+B) + (A-B)\} \{(A+B) - (A-B)\}$$

$$= 2A \times 2B = 4AB$$

$$= 4 \times 5^{2+\sqrt{2}} \times 5^{2-\sqrt{2}} = 4 \times 5^{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}} = 4 \times 5^4$$

044 답 4

$$a = \sqrt[3]{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 4^{\frac{1}{3}} - 4^{-\frac{1}{3}} \text{의 양변을 세제곱하면}$$

$$a^3 = (4^{\frac{1}{3}} - 4^{-\frac{1}{3}})^3 = 4 - 3(4^{\frac{1}{3}} - 4^{-\frac{1}{3}}) - \frac{1}{4}$$

$$\text{이때 } 4^{\frac{1}{3}} - 4^{-\frac{1}{3}} = a \text{이므로 } a^3 = 4 - 3a - \frac{1}{4}$$

$$\therefore a^3 + 3a + \frac{1}{4} = 4$$

045 답 4

$$\frac{1}{1-a^{-1}} + \frac{1}{1+a^{-1}} + \frac{2}{1+a^{-2}} + \frac{4}{1-a^4}$$

$$= \frac{1+a^{-1}+1-a^{-1}}{(1-a^{-1})(1+a^{-1})} + \frac{2}{1+a^{-2}} + \frac{4}{1-a^4}$$

$$= \frac{2}{1-a^{-2}} + \frac{2}{1+a^{-2}} + \frac{4}{1-a^4}$$

$$= \frac{2+2a^{-2}+2-2a^{-2}}{(1-a^{-2})(1+a^{-2})} + \frac{4}{1-a^4}$$

$$= \frac{4}{1-a^{-4}} + \frac{4}{1-a^4}$$

$$= \frac{4(1-a^4)+4(1-a^{-4})}{(1-a^4)(1-a^{-4})}$$

$$= \frac{8-4a^4-4a^{-4}}{2-a^4-a^{-4}}$$

$$= \frac{4(2-a^4-a^{-4})}{2-a^4-a^{-4}} = 4$$

046 답 ⑤

$$a+a^{-1} = (a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2 - 2 = (\sqrt{6})^2 - 2 = 4$$

$$\therefore a^3+a^{-3} = (a+a^{-1})^3 - 3(a+a^{-1})$$

$$= 4^3 - 3 \times 4 = 52$$

047 답 18

$$8^x + 8^{-x} = (2^3)^x + (2^3)^{-x} = (2^x)^3 + (2^{-x})^3$$

$$= (2^x + 2^{-x})^3 - 3(2^x + 2^{-x})$$

$$= 3^3 - 3 \times 3 = 18$$

048 답 ②

$$x^2 + x^{-2} = (x+x^{-1})^2 - 2 = 14 \text{이므로}$$

$$(x+x^{-1})^2 = 16$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x+x^{-1} = 4$

$$x+x^{-1} = (x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2 - 2 = 4 \text{이므로}$$

$$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2 = 6$$

$$\text{그런데 } x > 0 \text{이므로 } x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$$

$$\therefore x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+x+x^{-1} = 4+\sqrt{6}$$

$$\text{따라서 } a=4, b=1 \text{이므로 } a+b=5$$

049 답 3

$$a^{3x} - a^{-3x} = 4 \text{에서}$$

$$(a^x - a^{-x})^3 + 3(a^x - a^{-x}) = 4$$

이때 $a^x - a^{-x} = t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$t^3 + 3t = 4, t^3 + 3t - 4 = 0$$

$$(t-1)(t^2+t+4) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ (}\because t \text{는 실수)}$$

$$\text{즉, } a^x - a^{-x} = 1 \text{이므로}$$

$$a^{2x} + a^{-2x} = (a^x - a^{-x})^2 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$\therefore \frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{3}{1} = 3$$

050 답 ④

구하는 식의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x-a^{-x}} = \frac{a^x(a^{3x}+a^{-3x})}{a^x(a^x-a^{-x})} = \frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}-1}$$

$$= \frac{(a^{2x})^2+(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}-1} = \frac{2^2+2^{-1}}{2-1} = \frac{9}{2}$$

051 답 $\frac{3}{5}$

$$4^{\frac{1}{x}}=9 \text{에서 } 4=9^x \quad \therefore 3^{2x}=4$$

구하는 식의 분모, 분자에 3^x 을 곱하면

$$\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}} = \frac{3^x(3^x-3^{-x})}{3^x(3^x+3^{-x})} = \frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}$$

052 답 ③

$\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=3$ 에서 좌변의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})} = 3, \quad \frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1} = 3$$

$$a^{2x}+1=3a^{2x}-3, \quad 2a^{2x}=4 \quad \therefore a^{2x}=2$$

$$\therefore a^{2x}+a^{-2x}=a^{2x}+(a^{2x})^{-1}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

053 답 5

구하는 식의 분모, 분자에 3^x 을 곱하면

$$\frac{9^x-3^{-x}}{3^x-1} = \frac{3^x(3^{2x}-3^{-x})}{3^x(3^x-1)} = \frac{3^{3x}-1}{3^x(3^x-1)}$$

$$= \frac{(3^x-1)(3^{2x}+3^x+1)}{3^x(3^x-1)} = \frac{3^{2x}+3^x+1}{3^x}$$

$$= 3^x+1+3^{-x}$$

이때 $9^x+9^{-x}=3^{2x}+3^{-2x}=(3^x+3^{-x})^2-2=14$ 이므로

$$(3^x+3^{-x})^2=16$$

그런데 $3^x>0$ 이므로 $3^x+3^{-x}=4$

$$\therefore 3^x+1+3^{-x}=4+1=5$$

054 답 1

$$3^x=15 \text{에서 } 3=15^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$5^y=15 \text{에서 } 5=15^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times \textcircled{2}$ 을 하면

$$15=15^{\frac{1}{x}} \times 15^{\frac{1}{y}}, \quad 15^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=15$$

$$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$$

055 답 ④

$$45^x=27 \text{에서 } 45=27^{\frac{1}{x}}=(3^3)^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{3}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$5^y=3 \text{에서 } 5=3^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$9=3^{\frac{3}{x}} \div 3^{\frac{1}{y}}, \quad 3^{\frac{3}{x}-\frac{1}{y}}=3^2$$

$$\therefore \frac{3}{x}-\frac{1}{y}=2$$

056 답 ②

$$2 \cdot 16^a=10 \text{에서 } 2 \cdot 16=10^{\frac{1}{a}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$216^b=10 \text{에서 } 216=10^{\frac{1}{b}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$100=10^{\frac{1}{b}} \div 10^{\frac{1}{a}}, \quad 10^{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=100=10^2$$

$$\therefore \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=2$$

057 답 6

$$3^x=k \text{에서 } 3=k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$8^y=k \text{에서 } 8=k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$9^z=k \text{에서 } 9=k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1} \times \textcircled{2} \times \textcircled{3}$ 을 하면

$$3 \times 8 \times 9 = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \times k^{\frac{1}{z}}, \quad k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=6^3$$

$$\text{이때 } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3 \text{이므로}$$

$$k^3=6^3 \quad \therefore k=6$$

058 답 ①

$2^x=3^y=6^z=k(k>0)$ 로 놓으면 $xyz \neq 0$ 에서 $k \neq 1$

$$2^x=k \text{에서 } 2=k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$3^y=k \text{에서 } 3=k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$6^z=k \text{에서 } 6=k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1} \times \textcircled{2} \div \textcircled{3}$ 을 하면

$$2 \times 3 \div 6 = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \div k^{\frac{1}{z}}, \quad k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}=1$$

그런데 $k \neq 1$ 이므로

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$$

059 답 49

$a^x=b^y=7^z=k(k>0)$ 로 놓으면 $xyz \neq 0$ 에서 $k \neq 1$

$$a^x=k \text{에서 } a=k^{\frac{1}{x}}$$

$$b^y=k \text{에서 } b=k^{\frac{1}{y}}$$

$$7^z=k \text{에서 } 7=k^{\frac{1}{z}}$$

$$\text{이때 } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{z}=0, \quad \text{즉 } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z} \text{이므로}$$

$$ab=k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}}=k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=k^{\frac{2}{z}}=(k^{\frac{1}{z}})^2=7^2=49$$

060 답 ⑤

$$3^a=7^c \text{에서 } (3^a)^b=(7^c)^b \quad \therefore 3^{ab}=7^{bc}$$

$$4^b=7^c \text{에서 } (4^b)^a=(7^c)^a \quad \therefore 4^{ab}=7^{ac}$$

이때 $ab=2$ 이므로

$$3^2=7^{bc}, \quad 4^2=7^{ac}$$

$$\therefore 7^{ac-bc}=7^{ac} \div 7^{bc}=4^2 \div 3^2=\frac{16}{9}$$

다른 풀이 $7^{ac-bc}=(7^c)^a \div (7^c)^b=(4^b)^a \div (3^a)^b$

$$=\left(\frac{4}{3}\right)^{ab}=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$$

061 답 ④

$$^3\sqrt{27}=^6\sqrt{27}=27^{\frac{1}{6}}=(3^3)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}}, \quad ^3\sqrt{5}=5^{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt[3]{20}=^6\sqrt{20}=20^{\frac{1}{6}}$$

2, 3, 6의 최소공배수가 6이므로

$$3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{6}}=(3^3)^{\frac{1}{6}}=27^{\frac{1}{6}}, \quad 5^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{6}}=(5^2)^{\frac{1}{6}}=25^{\frac{1}{6}}$$

이때 $20^{\frac{1}{6}} < 25^{\frac{1}{6}} < 27^{\frac{1}{6}}$ 이므로 $\sqrt[3]{20} < ^3\sqrt{5} < \sqrt[3]{27}$

062 답 ⑤

$$^3\sqrt{16}=^6\sqrt{16}=16^{\frac{1}{6}}=(2^4)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt{3^3 \cdot 2}=\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2}=3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt{2^3 \cdot 6}=\sqrt{2} \times \sqrt[3]{6}=2^{\frac{1}{2}} \times 6^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}}$$

2, 3, 6의 최소공배수가 6이므로

$$2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{4}{6}}=(2^4)^{\frac{1}{6}}=16^{\frac{1}{6}}$$

$$3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{3}{6}} \times 2^{\frac{1}{6}}=(3^3)^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{1}{6}}=(3^3 \times 2)^{\frac{1}{6}}=54^{\frac{1}{6}}$$

$$2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{4}{6}} \times 3^{\frac{1}{6}}=(2^4)^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{6}}=(2^4 \times 3)^{\frac{1}{6}}=48^{\frac{1}{6}}$$

이때 $16^{\frac{1}{6}} < 48^{\frac{1}{6}} < 54^{\frac{1}{6}}$ 이므로 $^3\sqrt{16} < \sqrt{2^3 \cdot 6} < \sqrt{3^3 \cdot 2}$

따라서 $a=^3\sqrt{16}$, $b=\sqrt{3^3 \cdot 2}$ 이므로

$$ab^2=^3\sqrt{16} \times (\sqrt{3^3 \cdot 2})^2=2^{\frac{2}{3}} \times (3 \times 2^{\frac{1}{3}})$$

$$=2 \times 3=6$$

063 답 ①

(i) $A-B=(2\sqrt{2}+^3\sqrt{3})-(\sqrt{2}+2^3\sqrt{3})=\sqrt{2}-^3\sqrt{3}$

$$=2^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{6}}-9^{\frac{1}{6}} < 0$$

$\therefore A < B$

(ii) $B-C=(\sqrt{2}+2^3\sqrt{3})-(2^4\sqrt{5}+\sqrt{2})=2(^3\sqrt{3}-^4\sqrt{5})$

$$=2(3^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{4}})=2(81^{\frac{1}{12}}-125^{\frac{1}{12}}) < 0$$

$\therefore B < C$

(i), (ii)에서 $A < B < C$

064 답 $\frac{6}{5}$

$$P=A \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{4}} \text{에서}$$

$$A=80, t=7 \text{일 때, } P_1=80 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{7}{4}}$$

$$A=100, t=3 \text{일 때, } P_2=100 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$\therefore \frac{P_1}{P_2}=\frac{80 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{7}{4}}}{100 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}}=\frac{4}{5} \times \frac{3}{2}=\frac{6}{5}$$

065 답 640 hPa

해수면에서의 기압이 1000 hPa이므로

$$1000=k \times a^0 \quad \therefore k=1000$$

$$\therefore P=1000a^x$$

해수면으로부터의 높이가 1500 m인 산 중턱에서의 기압이 800 hPa이므로

$$800=1000 \times a^{1500} \quad \therefore a^{1500}=\frac{4}{5}$$

따라서 해수면으로부터의 높이가 3000 m인 산꼭대기에서의 기압은

$$1000a^{3000}=1000 \times (a^{1500})^2=1000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2=640(\text{hPa})$$

066 답 ①

증식하기 전 박테리아 A, B의 개체 수를 a 마리라 하면 박테리아 A는 3분마다 4배로 증가하므로 30분 후 A의 개체 수는

$$a \times 4^{10}=a \times 2^{20}(\text{마리})$$

박테리아 B는 2분마다 2배로 증가하므로 30분 후 B의 개체 수는

$$a \times 2^{15}(\text{마리})$$

따라서 30분 후 A의 개체 수는 B의 개체 수의 $\frac{a \times 2^{20}}{a \times 2^{15}}=2^5(\text{배})$ 가 된다.

067 답 4

6의 세제곱근 중 실수인 것은 $^3\sqrt{6}$ 의 1개이므로

$$a=1$$

-7의 네제곱근 중 실수인 것은 없으므로

$$b=0$$

-27의 세제곱근은 방정식 $x^3=-27$ 의 근이므로 3개이다.

$$\therefore c=3$$

$$\therefore a+b+c=1+0+3=4$$

068 답 ②

$$^4\sqrt{\frac{^3\sqrt{81}}{81}} \times \sqrt{\frac{\sqrt{81}}{^3\sqrt{81}}}=\frac{^{12}\sqrt{3^4}}{^4\sqrt{3^4}} \times \frac{^4\sqrt{3^4}}{^6\sqrt{3^4}}=\frac{^3\sqrt{3}}{3} \times \frac{3}{^3\sqrt{3^2}}$$

$$=\frac{^3\sqrt{3}}{^3\sqrt{3^2}}=^3\sqrt{\frac{3}{3^2}}=\frac{1}{^3\sqrt{3}}$$

069 답 ①

$$\sqrt{a^3 \sqrt{a^4 \sqrt{a^3}}}=\sqrt{a} \times ^6\sqrt{a} \times ^{24}\sqrt{a^3}$$

$$=^{24}\sqrt{a^{12} \times a^4 \times a^3}=^{24}\sqrt{a^{19}}$$

따라서 $p=24$, $q=19$ 이므로 $p+q=43$

070 답 ②

$$(a^{-3}b^4)^{-2} \times (ab^{-2})^3=a^6b^{-8} \times a^3b^{-6}$$

$$=a^9b^{-14}$$

따라서 $m=9$, $n=-14$ 이므로 $m+n=-5$

071 답 ④

① $a^2 \div a^{-4} \times a^3=a^{2-(-4)+3}=a^9$

② $81^{0.75}=81^{\frac{3}{4}}=(3^4)^{\frac{3}{4}}=3^3=27$

③ $\frac{\sqrt{8}}{9} \times 3^{\frac{5}{2}} \times 2^{-1}=\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3^2} \times 3^{\frac{5}{2}} \times 2^{-1}=2^{\frac{3}{2}-1} \times 3^{-2+\frac{5}{2}}$

$$=2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}=(2 \times 3)^{\frac{1}{2}}=6^{\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$$

④ $^3\sqrt{\frac{^4\sqrt{a^3}}{\sqrt{a^4}}}=\frac{^3\sqrt{^4\sqrt{a^3}}}{^3\sqrt{\sqrt{a^4}}}=\frac{^{12}\sqrt{a^3}}{^6\sqrt{a^4}}=\frac{^4\sqrt{a}}{^3\sqrt{a^2}}=\frac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{2}{3}}}=a^{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}}=a^{-\frac{5}{12}}$

⑤ $(a^{\sqrt{2}}b^{\frac{\sqrt{2}}{2}})^{-\sqrt{2}}=a^{-2}b^{-1}=(a^2b)^{-1}=\frac{1}{a^2b}$

072 답 ④

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{xy^2} \div \sqrt{xy} \times \sqrt[4]{x^3y} &= \sqrt[3]{xy^2} \div \sqrt{xy} \times \sqrt[4]{x^3y} \\ &= \sqrt[6]{xy^2} \div \sqrt[4]{xy} \times \sqrt[4]{x^3y} \\ &= x^{\frac{1}{6}} y^{\frac{1}{3}} \div x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} \times x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{4}} \\ &= x^{\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} y^{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \\ &= x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}\end{aligned}$$

073 답 3

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^2 \times \sqrt{a}} \times \sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[4]{a^3} &= \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{\sqrt{a}} \times \sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[4]{a^3} \\ &= \sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[6]{a} \times \sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[4]{a^3} \\ &= a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{3}{4}} \\ &= a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

$$\sqrt[6]{a^3 \sqrt{a^k}} = \sqrt[6]{a^3} \times \sqrt[6]{\sqrt{a^k}} = \sqrt[6]{a^3} \times \sqrt[12]{a^k} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{k}{12}} = a^{\frac{6+k}{12}}$$

따라서 $a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{6+k}{12}}$ 이므로

$$\frac{3}{4} = \frac{6+k}{12} \quad \therefore k=3$$

074 답 ④

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}\right)^{m-2n} &= 3^{-m+2n} = 3^{-m} \times 3^{2n} = (3^m)^{-1} \times (3^n)^2 \\ &= a^{-1} \times b^2 = \frac{b^2}{a}\end{aligned}$$

075 답 2

$$\begin{aligned}a^6=3, b^{12}=27=3^3 \text{에서 } a &= 3^{\frac{1}{6}}, b = 3^{\frac{1}{4}} \\ \therefore (4\sqrt[3]{a^3b^6})^k &= (a^3b^6)^{\frac{k}{4}} = \{(3^{\frac{1}{6}})^3 \times (3^{\frac{1}{4}})^6\}^{\frac{k}{4}} \\ &= (3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}})^{\frac{k}{4}} = (3^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}})^{\frac{k}{4}} = (3^2)^{\frac{k}{4}} = 3^{\frac{k}{2}}\end{aligned}$$

따라서 $(4\sqrt[3]{a^3b^6})^k$, 즉 $3^{\frac{k}{2}}$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수 k 의 값은 2의 배수이므로 자연수 k 의 최솟값은 2이다.

076 답 ⑤

$$\begin{aligned}a^{-\frac{1}{3}} &= A, a^{\frac{2}{3}} = B \text{라 하면} \\ (a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}})^3 &+ (a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{2}{3}})^3 \\ &= (A+B)^3 + (A-B)^3 \\ &= (A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3) + (A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3) \\ &= 2(A^3 + 3AB^2) \\ &= 2\{(a^{-\frac{1}{3}})^3 + 3 \times a^{-\frac{1}{3}} \times (a^{\frac{2}{3}})^2\} \\ &= 2(a^{-1} + 3 \times a^{-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}}) \\ &= 2(a^{-1} + 3a) = 2\left(\frac{1}{2} + 6\right) = 13\end{aligned}$$

077 답 ②

$$\begin{aligned}a + a^{-1} &= (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7 \\ a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} &= (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^3 - 3(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}) = 3^3 - 3 \times 3 = 18 \\ \therefore \frac{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}}{a + a^{-1} + 2} &= \frac{18}{7+2} = 2\end{aligned}$$

078 답 ②

$\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 5$ 에서 좌변의 분모, 분자에 a^x 를 곱하면

$$\frac{a^x(a^x + a^{-x})}{a^x(a^x - a^{-x})} = 5, \frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1} = 5$$

$$a^{2x} + 1 = 5a^{2x} - 5, 4a^{2x} = 6 \quad \therefore a^{2x} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a^{4x} - a^{-2x} = (a^{2x})^2 - (a^{2x})^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{2}{3} = \frac{19}{12}$$

079 답 $\frac{2}{3}$

$$a^x = 216 = 6^3 \text{에서 } a = 6^{\frac{3}{x}} \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$b^y = 216 = 6^3 \text{에서 } b = 6^{\frac{3}{y}} \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$c^z = 216 = 6^3 \text{에서 } c = 6^{\frac{3}{z}} \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{A} \times \textcircled{B} \times \textcircled{C} \text{을 하면 } abc = 6^{\frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{3}{z}}$$

$$\text{이때 } abc = 36 \text{이므로 } 6^{\frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{3}{z}} = 36 = 6^2$$

$$3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 2 \quad \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$$

080 답 $\frac{3}{4}$

$9^x = 16^y = a^z = k$ ($k > 0$)로 놓으면 $xyz \neq 0$ 에서 $k \neq 1$

$$9^x = k \text{에서 } 9 = k^{\frac{1}{x}}$$

$$16^y = k \text{에서 } 16 = k^{\frac{1}{y}}$$

$$a^z = k \text{에서 } a = k^{\frac{1}{z}}$$

$$\text{이때 } \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \text{이므로}$$

$$\frac{9}{16} = k^{\frac{1}{x}} \div k^{\frac{1}{y}} = k^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = k^{\frac{2}{z}} = (k^{\frac{1}{z}})^2 = a^2$$

$$\therefore a = \frac{3}{4} \quad (\because a > 0)$$

081 답 ⑤

$$A = 4\sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}}, B = 3\sqrt[3]{10} = 6\sqrt[3]{10} = 10^{\frac{1}{6}}, C = 4\sqrt[4]{98} = 12\sqrt[4]{98} = 98^{\frac{1}{12}}$$

4, 6, 12의 최소공배수가 12이므로

$$5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{12}} = (5^3)^{\frac{1}{12}} = 125^{\frac{1}{12}}, 10^{\frac{1}{6}} = 10^{\frac{2}{12}} = (10^2)^{\frac{1}{12}} = 100^{\frac{1}{12}}$$

$$\text{이때 } 98^{\frac{1}{12}} < 100^{\frac{1}{12}} < 125^{\frac{1}{12}} \text{이므로 } 4\sqrt[4]{98} < 3\sqrt[3]{10} < 4\sqrt[4]{5}$$

$$\therefore C < B < A$$

082 답 2

$$m_t = m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}} \text{에서}$$

$$t = 30 \text{일 때, } m_{30} = m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{15}} = m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$t = 45 \text{일 때, } m_{45} = m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{45}{15}} = m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\therefore \frac{m_{30}}{m_{45}} = \frac{m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3} = 2$$

001 답 192

$$\log_a 16 = \frac{2}{3} \text{에서 } a^{\frac{2}{3}} = 16 = 4^2$$

$$\therefore a = (4^2)^{\frac{3}{2}} = 4^3 = 64$$

$$\log_{\sqrt{3}} b = -2 \text{에서 } b = (\sqrt{3})^{-2} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{64}{\frac{1}{3}} = 192$$

002 답 2

밑의 조건에서 $x-1 > 0$, $x-1 \neq 1$ 이므로

$$x > 1, x \neq 2$$

$$\therefore 1 < x < 2 \text{ 또는 } x > 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

진수의 조건에서 $-x^2 + 5x > 0$ 이므로

$$x^2 - 5x < 0, x(x-5) < 0$$

$$\therefore 0 < x < 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통 범위를 구하면

$$1 < x < 2 \text{ 또는 } 2 < x < 5$$

따라서 구하는 정수 x 는 3, 4의 2개이다.

003 답 ④

$$\log_3 12 + \log_3 3\sqrt{2} - \frac{5}{2} \log_3 2$$

$$= \log_3 12 + \log_3 3\sqrt{2} - \log_3 2^{\frac{5}{2}}$$

$$= \log_3 12 + \log_3 3\sqrt{2} - \log_3 4\sqrt{2}$$

$$= \log_3 \frac{12 \times 3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \log_3 9$$

$$= \log_3 3^2 = 2$$

004 답 18

$$\log_2 125 \times \log_3 8 \times \log_5 9$$

$$= \log_2 125 \times \frac{\log_2 8}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 9}{\log_2 5}$$

$$= \log_2 5^3 \times \frac{\log_2 2^3}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 3^2}{\log_2 5}$$

$$= 3 \log_2 5 \times \frac{3}{\log_2 3} \times \frac{2 \log_2 3}{\log_2 5}$$

$$= 18$$

005 답 ④

$$(\log_3 4 + \log_3 8)(\log_2 27 - \log_4 9)$$

$$= (\log_3 2^2 + \log_3 2^3)(\log_2 3^3 - \log_2 3^2)$$

$$= \left(2 \log_3 2 + \frac{3}{2} \log_3 2\right)(3 \log_2 3 - \log_2 3)$$

$$= \frac{7}{2} \log_3 2 \times 2 \log_2 3$$

$$= 7 \log_3 2 \times \frac{1}{\log_3 2} = 7$$

006 답 ③

$\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$ 이므로

$$\begin{aligned} \log_{10} 40 &= \frac{\log_3 40}{\log_3 10} = \frac{\log_3 (2^3 \times 5)}{\log_3 (2 \times 5)} \\ &= \frac{\log_3 2^3 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 5} = \frac{3 \log_3 2 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 5} \\ &= \frac{3a + b}{a + b} \end{aligned}$$

007 답 $\frac{3}{2}$

$a^4 b^3 = 1$ 의 양변에 b 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_b a^4 b^3 = \log_b 1, \log_b a^4 + \log_b b^3 = 0$$

$$4 \log_b a + 3 = 0 \quad \therefore \log_b a = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_b a^2 b^3 &= \log_b a^2 + \log_b b^3 = 2 \log_b a + 3 \\ &= 2 \times \left(-\frac{3}{4}\right) + 3 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

다른 풀이 $a^4 b^3 = 1$ 에서 $a^4 = \frac{1}{b^3} = b^{-3} \quad \therefore a = b^{-\frac{3}{4}}$

$$\begin{aligned} \therefore \log_b a^2 b^3 &= \log_b \{(b^{-\frac{3}{4}})^2 \times b^3\} = \log_b (b^{-\frac{3}{2}} \times b^3) \\ &= \log_b b^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

008 답 ①

$\log_2 4 < \log_2 7 < \log_2 8$, 즉 $2 < \log_2 7 < 3$ 이므로

$$a = 2, b = \log_2 7 - 2 = \log_2 7 - \log_2 4 = \log_2 \frac{7}{4}$$

$$\therefore 4(a + 2^b) = 4(2 + 2^{\log_2 \frac{7}{4}}) = 4\left(2 + \frac{7}{4}\right) = 15$$

009 답 6

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 a + \log_2 b = 4, \log_2 a \times \log_2 b = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a b + \log_b a &= \frac{\log_2 b}{\log_2 a} + \frac{\log_2 a}{\log_2 b} = \frac{(\log_2 b)^2 + (\log_2 a)^2}{\log_2 a \times \log_2 b} \\ &= \frac{(\log_2 a + \log_2 b)^2 - 2 \log_2 a \times \log_2 b}{\log_2 a \times \log_2 b} \\ &= \frac{4^2 - 2 \times 2}{2} = 6 \end{aligned}$$

010 답 $\sqrt{3}$

$$\log_a 2 = 4 \text{에서 } a^4 = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_2 9 = b \text{에서 } 2^b = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면 $(a^4)^b = 9$

$$(a^b)^4 = 9$$

$$\therefore a^b = \sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3} \quad (\because a > 0)$$

011 답 ④

$$\textcircled{4} \quad 3^{-1} = \frac{1}{3} \iff \log_3 \frac{1}{3} = -1$$

012 답 25

$$\begin{aligned} \log_2(\log_3 a) &= 1 \text{에서 } \log_3 a = 2^1 = 2 \\ \therefore a &= 3^2 = 9 \\ \log_3\{\log_2(\log_4 b)\} &= 0 \text{에서 } \log_2(\log_4 b) = 3^0 = 1 \\ \log_4 b &= 2^1 = 2 \quad \therefore b = 4^2 = 16 \\ \therefore a + b &= 9 + 16 = 25 \end{aligned}$$

013 답 ④

$$\begin{aligned} x &= \log_5(1 + \sqrt{2}) \text{에서 } 5^x = 1 + \sqrt{2} \\ \therefore 5^x + 5^{-x} &= 5^x + \frac{1}{5^x} = (1 + \sqrt{2}) + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \\ &= (1 + \sqrt{2}) + (-1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

014 답 ①

밑의 조건에서 $x - 3 > 0$, $x - 3 \neq 1$ 이므로 $x > 3$, $x \neq 4$
 $\therefore 3 < x < 4$ 또는 $x > 4$ ㉠
 진수의 조건에서 $-x^2 + 7x + 8 > 0$ 이므로
 $x^2 - 7x - 8 < 0$, $(x + 1)(x - 8) < 0$
 $\therefore -1 < x < 8$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
 $3 < x < 4$ 또는 $4 < x < 8$
 따라서 구하는 정수 x 는 5, 6, 7의 3개이다.

015 답 3

$\log_x(x - 2)^2$ 의 밑의 조건에서 $x > 0$, $x \neq 1$ 이므로
 $0 < x < 1$ 또는 $x > 1$ ㉠
 $\log_x(x - 2)^2$ 의 진수의 조건에서 $(x - 2)^2 > 0$ 이므로
 $x \neq 2$ ㉡
 $\log_{5-x}|x - 5|$ 의 밑의 조건에서 $5 - x > 0$, $5 - x \neq 1$ 이므로
 $x < 5$, $x \neq 4$
 $\therefore x < 4$ 또는 $4 < x < 5$ ㉢
 $\log_{5-x}|x - 5|$ 의 진수의 조건에서 $|x - 5| > 0$ 이므로
 $x \neq 5$ ㉣
 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면
 $0 < x < 1$ 또는 $1 < x < 2$ 또는 $2 < x < 4$ 또는 $4 < x < 5$
 따라서 구하는 정수 x 의 값은 3이다.

016 답 ①

밑의 조건에서 $a > 0$, $a \neq 1$ 이므로
 $0 < a < 1$ 또는 $a > 1$ ㉠
 진수의 조건에서 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - ax + 2a > 0$ 이어야 하
 므로 이차방정식 $x^2 - ax + 2a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = a^2 - 4 \times 2a < 0$, $a(a - 8) < 0$
 $\therefore 0 < a < 8$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
 $0 < a < 1$ 또는 $1 < a < 8$
 따라서 정수 a 는 2, 3, 4, 5, 6, 7이므로 구하는 합은
 $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$

017 답 1

$$\begin{aligned} 2\log_2 \sqrt{6} + \frac{1}{2}\log_2 5 - \log_2 3\sqrt{5} \\ &= \log_2 (\sqrt{6})^2 + \log_2 5^{\frac{1}{2}} - \log_2 3\sqrt{5} \\ &= \log_2 6 + \log_2 \sqrt{5} - \log_2 3\sqrt{5} \\ &= \log_2 \frac{6 \times \sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \log_2 2 = 1 \end{aligned}$$

018 답 ②

$\log_4 x + \log_4 2y + \log_4 4z = 1$ 에서
 $\log_4(x \times 2y \times 4z) = 1$, $\log_4 8xyz = 1$
 $8xyz = 4 \quad \therefore xyz = \frac{1}{2}$

019 답 2

$$\begin{aligned} \log_5\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_5\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \log_5\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \log_5\left(1 + \frac{1}{49}\right) \\ &= \log_5 \frac{3}{2} + \log_5 \frac{4}{3} + \log_5 \frac{5}{4} + \cdots + \log_5 \frac{50}{49} \\ &= \log_5 \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{50}{49}\right) \\ &= \log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \end{aligned}$$

020 답 9

$36 = 6^2$ 이므로 36의 양의 약수를 작은 것부터 차례대로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 라 하면
 $a_1 a_9 = a_2 a_8 = a_3 a_7 = a_4 a_6 = 6^2$, $a_5 = 6$
 $\therefore \log_6 a_1 + \log_6 a_2 + \log_6 a_3 + \cdots + \log_6 a_9$
 $= \log_6 (a_1 a_9 \times a_2 a_8 \times a_3 a_7 \times a_4 a_6 \times a_5)$
 $= \log_6 \{(6^2)^4 \times 6\} = \log_6 6^9 = 9$

021 답 ④

$$\begin{aligned} \log_3 25 \times \log_5 \sqrt{7} \times \log_7 27 \\ &= \log_3 25 \times \frac{\log_3 \sqrt{7}}{\log_3 5} \times \frac{\log_3 27}{\log_3 7} \\ &= \log_3 5^2 \times \frac{\log_3 7^{\frac{1}{2}}}{\log_3 5} \times \frac{\log_3 3^3}{\log_3 7} \\ &= 2\log_3 5 \times \frac{\frac{1}{2}\log_3 7}{\log_3 5} \times \frac{3}{\log_3 7} \\ &= 3 \end{aligned}$$

022 답 10

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_{10} x} \\ &= \log_x 2 + \log_x 5 + \log_x 10 \\ &= \log_x (2 \times 5 \times 10) \\ &= \log_x 10^2 \\ &= 2\log_x 10 \\ \text{즉, } 2\log_x 10 &= 2 \text{이므로 } \log_x 10 = 1 \\ \therefore x &= 10 \end{aligned}$$

023 답 ③

$$\begin{aligned}
 & (\log_{10} 5)^2 + \frac{\log_{10} 50}{1 + \log_2 5} \\
 &= (\log_{10} 5)^2 + \frac{\log_{10} 25 + \log_{10} 2}{\log_2 2 + \log_2 5} \\
 &= (\log_{10} 5)^2 + \frac{2 \log_{10} 5 + \log_{10} 2}{\log_2 10} \\
 &= (\log_{10} 5)^2 + (\log_{10} 2) \times (2 \log_{10} 5 + \log_{10} 2) \\
 &= (\log_{10} 5)^2 + 2 \log_{10} 5 \times \log_{10} 2 + (\log_{10} 2)^2 \\
 &= (\log_{10} 5 + \log_{10} 2)^2 \\
 &= (\log_{10} 10)^2 = 1
 \end{aligned}$$

024 답 2

$$\begin{aligned}
 & \log_3 (\log_2 3) + \log_3 (\log_3 4) + \log_3 (\log_4 5) + \cdots + \log_3 (\log_{511} 512) \\
 &= \log_3 (\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5 \times \cdots \times \log_{511} 512) \\
 &= \log_3 \left(\log_2 3 \times \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \times \cdots \times \frac{\log_2 512}{\log_2 511} \right) \\
 &= \log_3 (\log_2 512) = \log_3 (\log_2 2^9) \\
 &= \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2
 \end{aligned}$$

025 답 8

$$\begin{aligned}
 & \log_a b = \log_b a \text{에서 } \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \\
 & (\log_a b)^2 = 1 \quad \therefore \log_a b = 1 \text{ 또는 } \log_a b = -1 \\
 & \text{이때 } a \neq b \text{이므로 } \log_a b = -1 \quad \therefore b = \frac{1}{a} \\
 & a > 0, b > 0 \text{이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여} \\
 & 2a + 8b = 2a + \frac{8}{a} \\
 & \geq 2\sqrt{2a \times \frac{8}{a}} = 8 \text{ (단, 등호는 } a=2 \text{일 때 성립)} \\
 & \text{따라서 } 2a + 8b \text{의 최솟값은 8이다.}
 \end{aligned}$$

026 답 $\frac{25}{4}$

$$\begin{aligned}
 & (\log_3 2 + \log_9 \sqrt{2})(\log_2 3 + \log_{\sqrt{2}} 9) \\
 &= (\log_3 2 + \log_3 2^{\frac{1}{2}})(\log_2 3 + \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^2) \\
 &= \left(\log_3 2 + \frac{1}{4} \log_3 2 \right) (\log_2 3 + 4 \log_2 3) \\
 &= \frac{5}{4} \log_3 2 \times 5 \log_2 3 \\
 &= \frac{25}{4} \log_3 2 \times \frac{1}{\log_3 2} \\
 &= \frac{25}{4}
 \end{aligned}$$

027 답 25

$$\begin{aligned}
 & \text{주어진 식의 지수에서} \\
 & 3 \log_2 5 + \log_2 3 - \log_2 15 \\
 &= \log_2 5^3 + \log_2 3 - \log_2 15 \\
 &= \log_2 \frac{5^3 \times 3}{15} = \log_2 5^2 \\
 &= \log_2 25 \\
 & \therefore 2^{3 \log_2 5 + \log_2 3 - \log_2 15} = 2^{\log_2 25} = 25
 \end{aligned}$$

028 답 ①

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{2}{\log_3 16} + \log_{16} 27 - \frac{\log_{\sqrt{5}} 3}{\log_{\sqrt{5}} 2} \\
 &= 2 \log_{16} 3 + \log_{16} 27 - \log_2 3 \\
 &= \log_{16} 3^2 + \log_{16} 3^3 - \log_{16} 3^4 \\
 &= \log_{16} \frac{3^2 \times 3^3}{3^4} = \log_{16} 3 \\
 \therefore 16^x &= 16^{\log_{16} 3} = 3
 \end{aligned}$$

029 답 ①

$$\begin{aligned}
 A &= 4^{\log_2 8 - \log_2 12} = 4^{\log_2 \frac{8}{12}} = 4^{\log_2 \frac{2}{3}} = 4^{\log_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \\
 B &= \log_9 \sqrt{3} - \log_{16} \frac{1}{2} = \log_{3^2} 3^{\frac{1}{2}} - \log_{2^4} 2^{-1} \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\
 C &= \log_{\frac{1}{2}} \{ \log_9 (\log_4 64) \} = \log_{\frac{1}{2}} \{ \log_9 (\log_4 4^3) \} \\
 &= \log_{\frac{1}{2}} (\log_9 3) = \log_{\frac{1}{2}} (\log_{3^2} 3) \\
 &= \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1 \\
 \therefore A &< B < C
 \end{aligned}$$

030 답 ④

$$\begin{aligned}
 \log_{20} \sqrt{50} &= \log_{20} 50^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{20} 50 \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{\log_6 50}{\log_6 20} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{\log_6 (2 \times 5^2)}{\log_6 (2^2 \times 5)} \\
 &= \frac{\log_6 2 + 2 \log_6 5}{2(2 \log_6 2 + \log_6 5)} \\
 &= \frac{a + 2b}{2(2a + b)} = \frac{a + 2b}{4a + 2b}
 \end{aligned}$$

031 답 $\frac{2a+3}{ab+1}$

$$\begin{aligned}
 \log_3 2 &= \frac{1}{a}, \log_3 15 = b \text{이므로} \\
 \log_{30} 72 &= \frac{\log_3 72}{\log_3 30} = \frac{\log_3 (2^3 \times 3^2)}{\log_3 (2 \times 15)} \\
 &= \frac{3 \log_3 2 + 2}{\log_3 2 + \log_3 15} \\
 &= \frac{\frac{3}{a} + 2}{\frac{1}{a} + b} = \frac{2a + 3}{ab + 1}
 \end{aligned}$$

032 답 ②

$$\begin{aligned}
 5^a &= x, 5^b = y \text{에서 } \log_5 x = a, \log_5 y = b \text{이므로} \\
 \log_{xy^2} \sqrt{xy} &= \log_{xy^2} (xy)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{xy^2} xy \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{\log_5 xy}{\log_5 xy^2} \\
 &= \frac{\log_5 x + \log_5 y}{2(\log_5 x + 2 \log_5 y)} \\
 &= \frac{a + b}{2(a + 2b)} = \frac{a + b}{2a + 4b}
 \end{aligned}$$

033 답 ⑤

$a^m = b^n = 2$ 에서 $\log_a 2 = m, \log_b 2 = n$ 이므로

$$\begin{aligned}\log_2 a &= \frac{1}{m}, \log_2 b = \frac{1}{n} \\ \therefore \log_a ab &= \frac{\log_2 ab}{\log_2 a^2} = \frac{\log_2 a + \log_2 b}{2 \log_2 a} \\ &= \frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{2 \times \frac{1}{m}} = \frac{m+n}{2n}\end{aligned}$$

034 답 ③

$\log_2 5 = x, \log_5 3 = y, \log_3 11 = z$ 에서

$$\begin{aligned}y &= \log_5 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = \frac{\log_2 3}{x} \quad \therefore \log_2 3 = xy \\ z &= \log_3 11 = \frac{\log_2 11}{\log_2 3} = \frac{\log_2 11}{xy} \quad \therefore \log_2 11 = xyz \\ \therefore \log_3 66 &= \frac{\log_2 66}{\log_2 3} = \frac{\log_2 (2 \times 3 \times 11)}{\log_2 3} \\ &= \frac{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 11}{\log_2 3} \\ &= \frac{1 + xy + xyz}{xy}\end{aligned}$$

035 답 $-\frac{1}{2}$

$a^3 b^2 = 1$ 의 양변에 a 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\begin{aligned}\log_a a^3 b^2 &= \log_a 1, \log_a a^3 + \log_a b^2 = 0 \\ 3 + 2 \log_a b &= 0 \quad \therefore \log_a b = -\frac{3}{2} \\ \therefore \log_a a^4 b^3 &= \log_a a^4 + \log_a b^3 = 4 + 3 \log_a b \\ &= 4 + 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

다른 풀이 $a^3 b^2 = 1$ 에서 $b^2 = \frac{1}{a^3} = a^{-3} \quad \therefore b = a^{-\frac{3}{2}}$

$$\begin{aligned}\therefore \log_a a^4 b^3 &= \log_a \{a^4 \times (a^{-\frac{3}{2}})^3\} = \log_a (a^4 \times a^{-\frac{9}{2}}) \\ &= \log_a a^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

036 답 ②

$5^x = 27$ 에서 $x = \log_5 27 = \log_5 3^3 = 3 \log_5 3$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{3}{x} &= \frac{1}{\log_5 3} = \log_3 5 \\ 45^y &= 243 \text{에서 } y = \log_{45} 243 = \log_{45} 3^5 = 5 \log_{45} 3 \text{이므로} \\ \frac{5}{y} &= \frac{1}{\log_{45} 3} = \log_3 45 \\ \therefore \frac{3}{x} - \frac{5}{y} &= \log_3 5 - \log_3 45 = \log_3 \frac{5}{45} \\ &= \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2\end{aligned}$$

다른 풀이 $5^x = 27$ 에서 $5 = 27^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{3}{x}} \quad \dots\dots ㉠$

$45^y = 243$ 에서 $45 = 243^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{5}{y}} \quad \dots\dots ㉡$

㉠ $\div$ ㉡을 하면 $\frac{5}{45} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{5}{y}}$

$$3^{-2} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{5}{y}} \quad \therefore \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = -2$$

037 답 ①

$a^2 = b^5$ 에서 $b = a^{\frac{2}{5}} \quad \therefore A = \log_a b = \log_a a^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$

$b^5 = c^7$ 에서 $c = b^{\frac{5}{7}} \quad \therefore B = \log_b c = \log_b b^{\frac{5}{7}} = \frac{5}{7}$

$a^2 = c^7$ 에서 $a = c^{\frac{7}{2}} \quad \therefore C = \log_c a = \log_c c^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{2}$

$$\therefore A < B < C$$

038 답 $\frac{7}{10}$

$\log_a x = 2, \log_b x = 7, \log_c x = 14$ 에서

$\log_x a = \frac{1}{2}, \log_x b = \frac{1}{7}, \log_x c = \frac{1}{14}$ 이므로

$$\begin{aligned}\log_x abc &= \log_x a + \log_x b + \log_x c \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \frac{5}{7}\end{aligned}$$

$$\therefore \log_{abc} x = \frac{7}{5}$$

$$\therefore \log_{abc} \sqrt{x} = \log_{abc} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{abc} x = \frac{1}{2} \times \frac{7}{5} = \frac{7}{10}$$

다른 풀이 $\log_a x = 2, \log_b x = 7, \log_c x = 14$ 에서

$a^2 = x, b^7 = x, c^{14} = x$ 이므로

$$a = x^{\frac{1}{2}}, b = x^{\frac{1}{7}}, c = x^{\frac{1}{14}}$$

$$\therefore abc = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}} = x^{\frac{5}{7}}$$

$$\therefore \log_{abc} \sqrt{x} = \log_{x^{\frac{5}{7}}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{7}} = \frac{7}{10}$$

039 답 9

(가)에서 $\sqrt[4]{a} = \sqrt[3]{b} = \sqrt{c} = k (k > 0, k \neq 1)$ 로 놓으면

$$a = k^4, b = k^3, c = k^2$$

(나)에서

$$\begin{aligned}\log_{16} a + \log_8 b + \log_4 c &= \log_{2^4} a + \log_{2^3} b + \log_{2^2} c \\ &= \log_{2^4} k^4 + \log_{2^3} k^3 + \log_{2^2} k^2 \\ &= \log_2 k + \log_2 k + \log_2 k \\ &= 3 \log_2 k\end{aligned}$$

$$\text{즉, } 3 \log_2 k = 3 \text{에서 } \log_2 k = 1 \quad \therefore k = 2$$

$$\begin{aligned}\therefore \log_2 abc &= \log_2 (k^4 \times k^3 \times k^2) \\ &= \log_2 k^9 = \log_2 2^9 = 9\end{aligned}$$

040 답 ①

$\log_3 9 < \log_3 24 < \log_3 27$, 즉 $2 < \log_3 24 < 3$ 이므로

$$a = 2, b = \log_3 24 - 2 = \log_3 24 - \log_3 9 = \log_3 \frac{8}{3}$$

$$\therefore 3^a + 3^b = 3^2 + 3^{\log_3 \frac{8}{3}} = 9 + \frac{8}{3} = \frac{35}{3}$$

041 답 ⑤

$\log_2 8 < \log_2 12 < \log_2 16$, 즉 $3 < \log_2 12 < 4$ 이므로

$$a = \log_2 12 - 3 = \log_2 12 - \log_2 8 = \log_2 \frac{3}{2}$$

$$\therefore 2^a = 2^{\log_2 \frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

042 답 4

$$\begin{aligned}\frac{\log_5 9}{\log_5 4} &= \frac{2 \log_5 3}{2 \log_5 2} = \log_2 3 \text{이고} \\ \log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4, \text{ 즉 } 1 < \log_2 3 < 2 \text{이므로} \\ a &= 1, b = \log_2 3 - 1 = \log_2 3 - \log_2 2 = \log_2 \frac{3}{2} \\ \therefore \frac{b-a}{a+b} &= \frac{\log_2 \frac{3}{2} - 1}{1 + \log_2 \frac{3}{2}} = \frac{\log_2 \frac{3}{2} - \log_2 2}{\log_2 2 + \log_2 \frac{3}{2}} = \frac{\log_2 \frac{3}{4}}{\log_2 3} \\ &= \log_3 \frac{3}{4} = \log_3 3 - \log_3 4 = 1 - \log_3 4 \\ \therefore k &= 4\end{aligned}$$

043 답 17

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\log_{10} a + \log_{10} b &= 6, \log_{10} a \times \log_{10} b = 1 \\ \therefore \log_a \sqrt{b} + \log_b \sqrt{a} \\ &= \log_a b^{\frac{1}{2}} + \log_b a^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(\log_a b + \log_b a) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} + \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{(\log_{10} b)^2 + (\log_{10} a)^2}{\log_{10} a \times \log_{10} b} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{(\log_{10} a + \log_{10} b)^2 - 2 \log_{10} a \times \log_{10} b}{\log_{10} a \times \log_{10} b} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{6^2 - 2 \times 1}{1} = 17\end{aligned}$$

044 답 -1

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 10, \alpha\beta = 4 \\ \therefore \log_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + \log_{\frac{1}{\alpha\beta}} (\alpha + \beta) \\ &= \log_{\alpha\beta} \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + \log_{\frac{1}{\alpha\beta}} (\alpha + \beta) \\ &= \log_4 \frac{10}{4} + \log_{\frac{1}{4}} 10 \\ &= \log_4 10 - \log_4 4 + \log_{4^{-1}} 10 \\ &= \log_4 10 - 1 - \log_4 10 \\ &= -1\end{aligned}$$

045 답 ⑤

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}2 + \log_3 5 &= a, 2 \times \log_3 5 = b \text{이므로} \\ a &= 2 + \log_3 5 = \log_3 3^2 + \log_3 5 = \log_3 45, \\ b &= \log_3 5^2 = \log_3 25 \\ \therefore \frac{a}{b} &= \frac{\log_3 45}{\log_3 25} = \log_{25} 45 = \log_{5^2} 45 \\ &= \frac{1}{2} \log_5 45\end{aligned}$$

046 답 ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 3 \log_6 2, \alpha\beta = -2 \log_6 3 + \log_6 2 \\ \therefore (\alpha - 1)(\beta - 1) &= \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 \\ &= -2 \log_6 3 + \log_6 2 - 3 \log_6 2 + 1 \\ &= -2 \log_6 3 - 2 \log_6 2 + 1 \\ &= -2(\log_6 3 + \log_6 2) + 1 \\ &= -2 \log_6 6 + 1 \\ &= -2 + 1 = -1\end{aligned}$$

047 답 3.3343

$$\begin{aligned}\log 12 + \log 180 &= \log (2^2 \times 3) + \log (2 \times 3^2 \times 10) \\ &= 2 \log 2 + \log 3 + \log 2 + 2 \log 3 + \log 10 \\ &= 3(\log 2 + \log 3) + 1 \\ &= 3(0.3010 + 0.4771) + 1 \\ &= 3.3343\end{aligned}$$

048 답 ②

$$\begin{aligned}\log x^2 - \log \sqrt{x} &= 2 \log x - \frac{1}{2} \log x = \frac{3}{2} \log x \\ &= \frac{3}{2} \times (-3.6) = -5.4 = -6 + 0.6\end{aligned}$$

따라서 $\log x^2 - \log \sqrt{x}$ 의 정수 부분은 -6이고, 소수 부분은 0.6이다.

049 답 ③

$$\begin{aligned}a &= \log 374 = \log (10^2 \times 3.74) = \log 10^2 + \log 3.74 \\ &= 2 + 0.5729 = 2.5729 \\ \text{한편 } \log b &= -0.4271 \text{에서} \\ \log b &= -1 + 0.5729 \\ &= \log 10^{-1} + \log 3.74 \\ &= \log (10^{-1} \times 3.74) = \log 0.374 \\ \therefore b &= 0.374 \\ \therefore a + b &= 2.5729 + 0.374 = 2.9469\end{aligned}$$

050 답 ③

$$\begin{aligned}\log 12^{20} &= 20 \log (2^2 \times 3) = 20(2 \log 2 + \log 3) \\ &= 20(2 \times 0.3010 + 0.4771) = 21.582\end{aligned}$$

따라서 $\log 12^{20}$ 의 정수 부분이 21이므로 12^{20} 은 22자리의 정수이다.

051 답 ②

$$\begin{aligned}\log 6^{30} &= 30 \log (2 \times 3) = 30(\log 2 + \log 3) \\ &= 30(0.3010 + 0.4771) = 23.343 \\ \text{이때 } \log 2 &= 0.3010, \log 3 = 0.4771 \text{이므로} \\ \log 2 &< 0.343 < \log 3 \\ 23 + \log 2 &< 23 + 0.343 < 23 + \log 3 \\ \log (10^{23} \times 2) &< \log 6^{30} < \log (10^{23} \times 3) \\ \therefore 2 \times 10^{23} &< 6^{30} < 3 \times 10^{23}\end{aligned}$$

따라서 6^{30} 의 최고 자리의 숫자는 2이다.

052 답 ③

$\log x^2$ 의 소수 부분과 $\log x^4$ 의 소수 부분이 같으므로
 $\log x^4 - \log x^2 = 4 \log x - 2 \log x = 2 \log x \rightarrow$ 정수
 $10 \leq x < 100$ 이므로
 $1 \leq \log x < 2$
 $\therefore 2 \leq 2 \log x < 4$
 이때 $2 \log x$ 가 정수이므로
 $2 \log x = 2$ 또는 $2 \log x = 3$
 $\log x = 1$ 또는 $\log x = \frac{3}{2}$
 $\therefore x = 10$ 또는 $x = 10^{\frac{3}{2}}$
 따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은
 $10 \times 10^{\frac{3}{2}} = 10^{\frac{5}{2}}$

053 답 -6

$\log N = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)라 하면 이차방정식
 $3x^2 + 7x + k = 0$ 의 두 근이 n, α 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $n + \alpha = -\frac{7}{3} = -3 + \frac{2}{3}$ ㉠
 $n\alpha = \frac{k}{3}$ ㉡
 이때 n 은 정수이고, $0 \leq \alpha < 1$ 이므로 ㉠에서
 $n = -3, \alpha = \frac{2}{3}$
 이를 ㉡에 대입하면
 $-3 \times \frac{2}{3} = \frac{k}{3}$
 $\therefore k = -6$

054 답 12

벽면의 음향 투과 손실을 L_1 , 벽의 단위 면적당 질량을 m , 음향의 주파수를 f 라 하면
 $L_1 = 20 \log mf - 48$ ㉠
 벽의 단위 면적당 질량이 4배가 되었을 때의 벽면의 음향 투과 손실을 L_2 , 벽의 단위 면적당 질량을 $4m$ 이라 하면
 $L_2 = 20 \log 4mf - 48 = 20 (\log 4 + \log mf) - 48$
 $\therefore L_2 = 40 \log 2 + 20 \log mf - 48$ ㉡
 ㉡ - ㉠을 하면
 $L_2 - L_1 = 40 \log 2 = 40 \times 0.3 = 12$
 $\therefore L_2 = L_1 + 12$
 따라서 벽면의 음향 투과 손실은 12dB만큼 증가하므로
 $k = 12$

055 답 ①

$\log 2 + \log 75 = \log \frac{10}{5} + \log (3 \times 5^2)$
 $= 1 - \log 5 + \log 3 + 2 \log 5$
 $= 1 + \log 3 + \log 5$
 $= 1 + 0.4771 + 0.6990$
 $= 2.1761$

056 답 11.9

$\log \sqrt[3]{x} = 1.32$ 에서 $\frac{1}{3} \log x = 1.32$
 $\therefore \log x = 3.96$
 $\therefore \log 100x^2 + \log \sqrt{x} = 2 + 2 \log x + \frac{1}{2} \log x = 2 + \frac{5}{2} \log x$
 $= 2 + \frac{5}{2} \times 3.96 = 11.9$

057 답 ①

$\log \frac{1}{x^2} + \log \sqrt[4]{x} = -2 \log x + \frac{1}{4} \log x = -\frac{7}{4} \log x$
 $= -\frac{7}{4} \times 2.8 = -4.9 = -5 + 0.1$

따라서 $\log \frac{1}{x^2} + \log \sqrt[4]{x}$ 의 정수 부분은 -5, 소수 부분은 0.1이다.

058 답 ⑤

$\log N$ 과 $\log \frac{1000}{N}$ 의 소수 부분을 각각 α, β ($0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < 1$)라 하면
 $\log N = m + \alpha, \log \frac{1000}{N} = n + \beta$
 한편 $\log N + \log \frac{1000}{N} = \log \left(N \times \frac{1000}{N} \right) = \log 1000 = 3$ 이므로
 $m + \alpha + n + \beta = 3$ ㉠
 $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < 1$ 에서
 $0 \leq \alpha + \beta < 2$ ㉡
 ㉠에 의하여 m, n 은 정수이므로 $\alpha + \beta$ 도 정수이다.
 또 ㉡에 의하여
 $\alpha + \beta = 0$ 또는 $\alpha + \beta = 1$
 이를 ㉠에 대입하면
 $m + n = 3$ 또는 $m + n = 2$

059 답 ⑤

$\log 1, \log 3, \dots, \log 9$ 의 정수 부분은 모두 0이므로
 $f(1) = f(3) = f(5) = f(7) = f(9) = 0$
 $\log 11, \log 13, \dots, \log 99$ 의 정수 부분은 모두 1이므로
 $f(11) = f(13) = f(15) = \dots = f(99) = 1$
 $\log 101, \log 103, \dots, \log 149$ 의 정수 부분은 모두 2이므로
 $f(101) = f(103) = f(105) = \dots = f(149) = 2$
 $\therefore f(1) + f(3) + f(5) + \dots + f(149)$
 $= 0 \times 5 + 1 \times 45 + 2 \times 25 = 95$

060 답 2.0949

$a = \log 121 = \log (10^2 \times 1.21) = \log 10^2 + \log 1.21$
 $= 2 + 0.0828 = 2.0828$
 한편 $\log b = -1.9172$ 에서
 $\log b = -2 + 0.0828 = \log 10^{-2} + \log 1.21$
 $= \log (10^{-2} \times 1.21) = \log 0.0121$
 $\therefore b = 0.0121$
 $\therefore a + b = 2.0828 + 0.0121 = 2.0949$

061 답 ④

- ① $\log 63.3 = \log (10 \times 6.33) = \log 10 + \log 6.33$
 $= 1 + 0.8014 = 1.8014$
 ② $\log 6330 = \log (10^3 \times 6.33) = \log 10^3 + \log 6.33$
 $= 3 + 0.8014 = 3.8014$
 ③ $\log 0.633 = \log (10^{-1} \times 6.33) = \log 10^{-1} + \log 6.33$
 $= -1 + 0.8014 = -0.1986$
 ④ $\log 0.0633 = \log (10^{-2} \times 6.33) = \log 10^{-2} + \log 6.33$
 $= -2 + 0.8014 = -1.1986$
 ⑤ $\log \sqrt{6.33} = \frac{1}{2} \log 6.33 = \frac{1}{2} \times 0.8014 = 0.4007$

062 답 ①

$\log 582 = \log (10^2 \times 5.82) = \log 10^2 + \log 5.82$
 $= 2 + \log 5.82$
 즉, $2 + \log 5.82 = 2.7649$ 이므로 $\log 5.82 = 0.7649$
 한편 $\log N = -2.2351$ 에서
 $\log N = -3 + 0.7649 = \log 10^{-3} + \log 5.82$
 $= \log (10^{-3} \times 5.82)$
 $= \log 0.00582$
 $\therefore N = 0.00582$

063 답 20.1

상용로그표에서 $\log 4.04 = 0.6064$ 이므로
 $\log \sqrt{404} = \frac{1}{2} \log 404 = \frac{1}{2} \log (10^2 \times 4.04)$
 $= \frac{1}{2} (\log 10^2 + \log 4.04) = \frac{1}{2} (2 + 0.6064)$
 $= 1 + 0.3032$
 이때 $\log 2.01 = 0.3032$ 이므로
 $\log \sqrt{404} = 1 + 0.3032 = \log 10 + \log 2.01$
 $= \log (10 \times 2.01) = \log 20.1$
 $\therefore \sqrt{404} = 20.1$

064 답 ③

$\log 15^{10} = 10 \log (3 \times 5) = 10 (\log 3 + \log 5)$
 $= 10 \left(\log 3 + \log \frac{10}{2} \right) = 10 (\log 3 + 1 - \log 2)$
 $= 10 (0.4771 + 1 - 0.3010) = 11.761$
 따라서 $\log 15^{10}$ 의 정수 부분이 11이므로 15^{10} 은 12자리의 정수이다.

065 답 2

$\log \left(\frac{3}{4} \right)^{10} = 10 \log \frac{3}{4} = 10 (\log 3 - 2 \log 2)$
 $= 10 (0.4771 - 2 \times 0.3010)$
 $= -1.249 = -2 + 0.751$
 따라서 $\log \left(\frac{3}{4} \right)^{10}$ 의 정수 부분이 -2이므로 $\left(\frac{3}{4} \right)^{10}$ 은 소수점 아래
 2째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.
 $\therefore n = 2$

066 답 ④

2^{100} 이 31자리의 정수이므로 $\log 2^{100}$ 의 정수 부분은 30이다.
 즉, $30 \leq \log 2^{100} < 31$ 에서 $30 \leq 100 \log 2 < 31$
 $\therefore 0.3 \leq \log 2 < 0.31 \dots\dots \textcircled{1}$
 한편 $\log \left(\frac{1}{5} \right)^{15} = \log \left(\frac{2}{10} \right)^{15} = 15 (\log 2 - 1)$ 이고 $\textcircled{1}$ 에서
 $-0.7 \leq \log 2 - 1 < -0.69$
 $\therefore -10.5 \leq 15 (\log 2 - 1) < -10.35$
 따라서 $\log \left(\frac{1}{5} \right)^{15}$ 의 정수 부분은 -11이므로 $\left(\frac{1}{5} \right)^{15}$ 은 소수점 아래
 11째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

067 답 3

$\log 12^{20} = 20 \log (2^2 \times 3) = 20 (2 \log 2 + \log 3)$
 $= 20 (2 \times 0.3010 + 0.4771) = 21.582$
 이때 $\log 3 = 0.4771$, $\log 4 = 2 \log 2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020$ 이므로
 $\log 3 < 0.582 < \log 4$
 $21 + \log 3 < 21 + 0.582 < 21 + \log 4$
 $\log (10^{21} \times 3) < \log 12^{20} < \log (10^{21} \times 4)$
 $\therefore 3 \times 10^{21} < 12^{20} < 4 \times 10^{21}$
 따라서 12^{20} 의 최고 자리의 숫자는 3이다.

068 답 5

$\log x = -\frac{3}{4}$ 이므로
 $\log x^2 = 2 \log x = 2 \times \left(-\frac{3}{4} \right) = -\frac{3}{2}$
 $= -1.5 = -2 + 0.5$
 따라서 $\log x^2$ 의 정수 부분이 -2이므로 x^2 은 소수점 아래 2째 자
 리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.
 $\therefore a = 2$
 또 $\log 3 = 0.4771$, $\log 4 = 2 \log 2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020$ 이므로
 $\log 3 < 0.5 < \log 4$
 $-2 + \log 3 < -2 + 0.5 < -2 + \log 4$
 $\log (10^{-2} \times 3) < \log x^2 < \log (10^{-2} \times 4)$
 $\therefore 3 \times 10^{-2} < x^2 < 4 \times 10^{-2}$
 따라서 x^2 의 소수점 아래 2째 자리의 숫자는 3이므로 $b = 3$
 $\therefore a + b = 2 + 3 = 5$

069 답 10000

$\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분과 $\log \frac{1}{x}$ 의 소수 부분이 같으므로
 $\log \sqrt{x} - \log \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \log x + \log x = \frac{3}{2} \log x \Rightarrow$ 정수
 $10 < x < 100$ 이므로 $1 < \log x < 2$
 $\therefore \frac{3}{2} < \frac{3}{2} \log x < 3$
 이때 $\frac{3}{2} \log x$ 가 정수이므로 $\frac{3}{2} \log x = 2$
 $\log x = \frac{4}{3} \therefore x = 10^{\frac{4}{3}}$
 $\therefore x^3 = (10^{\frac{4}{3}})^3 = 10^4 = 10000$

070 [답] ⑤

$\log x^2$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합이 1이므로

$$\log x^2 + \log \sqrt{x} = 2\log x + \frac{1}{2}\log x = \frac{5}{2}\log x \Rightarrow \text{정수}$$

$\log x$ 의 정수 부분이 2이므로 $2 \leq \log x < 3$

$$\therefore 5 \leq \frac{5}{2}\log x < \frac{15}{2}$$

이때 $\frac{5}{2}\log x$ 가 정수이므로

$$\frac{5}{2}\log x = 5 \text{ 또는 } \frac{5}{2}\log x = 6 \text{ 또는 } \frac{5}{2}\log x = 7$$

$$\log x = 2 \text{ 또는 } \log x = \frac{12}{5} \text{ 또는 } \log x = \frac{14}{5}$$

이때 $\log x = 2$ 이면 $\log x^2$, $\log \sqrt{x}$ 의 소수 부분이 모두 0이므로

$$x = 10^{\frac{12}{5}} \text{ 또는 } x = 10^{\frac{14}{5}}$$

따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은 $10^{\frac{12}{5}} \times 10^{\frac{14}{5}} = 10^{\frac{26}{5}}$ 이므로

$$p=5, q=26 \quad \therefore p+q=31$$

071 [답] 360

(ㄱ), (ㄴ)에서 $\log a^2$ 의 소수 부분과 $\log 3b$ 의 소수 부분이 같고

$b=3a$ 이므로

$$\log a^2 - \log 3b = \log a^2 - \log 9a = \log \frac{a}{9} \Rightarrow \text{정수}$$

즉, $\frac{a}{9}$ 는 10의 거듭제곱 꼴이다.

$$(ㄷ)에서 10 < a < 100 \text{이므로 } \frac{10}{9} < \frac{a}{9} < \frac{100}{9}$$

$$\text{따라서 } \frac{a}{9} = 10 \text{이므로 } a = 90$$

$$\therefore b = 3a = 270$$

$$\therefore a+b = 90+270 = 360$$

072 [답] ③

$\log N = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)라 하면 이차방정식

$5x^2 - 12x + k = 0$ 의 두 근이 n, α 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$n + \alpha = \frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$n\alpha = \frac{k}{5} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 n 은 정수이고, $0 \leq \alpha < 1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$n = 2, \alpha = \frac{2}{5}$$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } 2 \times \frac{2}{5} = \frac{k}{5}$$

$$\therefore k = 4$$

073 [답] ②

$\log 800 = \log (10^2 \times 8) = 2 + \log 8$ 이므로 $\log 800$ 의 정수 부분은 2, 소수 부분은 $\log 8$ 이다.

즉, 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 2, $\log 8$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$2 + \log 8 = -a, 2 \times \log 8 = b$$

$$\therefore a + b = (-2 - \log 8) + 2 \log 8 = -2 + \log 8$$

$$= \log 10^{-2} + \log 8 = \log (10^{-2} \times 8) = \log 0.08$$

074 [답] $-\frac{9}{5}$

$\log N = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 < \alpha < 1$)라 하면 이차방정식

$x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 n, α 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$n + \alpha = -a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$n\alpha = b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{한편 } \log \frac{1}{N} = -\log N = -(n + \alpha) = -n - 1 + (1 - \alpha) \text{이고}$$

$0 < 1 - \alpha < 1$ 이므로 $\log \frac{1}{N}$ 의 정수 부분은 $-n-1$, 소수 부분은 $1-\alpha$ 이다.

이차방정식 $x^2 - ax + b - \frac{8}{5} = 0$ 의 두 근이 $-n-1, 1-\alpha$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-n-1) \times (1-\alpha) = b - \frac{8}{5} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$-n + n\alpha - 1 + \alpha = n\alpha - \frac{8}{5}$$

$$n - \alpha = \frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5} \quad \therefore n = 1, \alpha = \frac{2}{5} \quad (\because n \text{은 정수, } 0 < \alpha < 1)$$

이를 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에 각각 대입하면

$$1 + \frac{2}{5} = -a, 1 \times \frac{2}{5} = b$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{7}{5}, b = \frac{2}{5} \text{이므로 } a - b = -\frac{9}{5}$$

075 [답] $\frac{1}{2}$ 배

어느 상품의 현재 수요량을 D_1 , 판매 가격을 P_1 이라 하면

$$\log_a D_1 = k - \frac{1}{3} \log_a P_1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

판매 가격이 8배 오른 후의 수요량을 D_2 라 하면 판매 가격은 $8P_1$ 이므로

$$\log_a D_2 = k - \frac{1}{3} \log_a 8P_1$$

$$\log_a D_2 = k - \frac{1}{3} (\log_a P_1 + \log_a 8)$$

$$\log_a D_2 = k - \frac{1}{3} \log_a P_1 - \log_a 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 을 하면

$$\log_a D_2 - \log_a D_1 = -\log_a 2, \log_a D_2 = \log_a D_1 - \log_a 2$$

$$\therefore \log_a D_2 = \log_a \frac{D_1}{2}$$

따라서 $D_2 = \frac{D_1}{2}$ 이므로 수요량은 현재의 $\frac{1}{2}$ 배가 된다.

076 [답] ②

pH 4.6인 용액의 수소 이온 농도를 a , pH 6.4인 용액의 수소 이온 농도를 b 라 하면

$$4.6 = -\log a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$6.4 = -\log b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{을 하면 } 1.8 = -\log b - (-\log a)$$

$$\log \frac{a}{b} = 1.8 \quad \therefore \frac{a}{b} = 10^{1.8}$$

따라서 pH 4.6인 용액의 수소 이온 농도는 pH 6.4인 용액의 수소 이온 농도의 $10^{1.8}$ 배이므로 $k = 1.8$

077 답 0.98

어느 외부 자극의 세기가 30일 때의 감각의 세기가 0.74이므로
 $0.74 = k \log 30 = k \log (10 \times 3) = k(1 + \log 3)$

$$= k(1 + 0.48) = 1.48k$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

이 외부 자극의 세기가 90일 때의 감각의 세기를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \log 90 = \frac{1}{2} \log (10 \times 3^2) = \frac{1}{2} (1 + 2 \log 3)$$

$$= \frac{1}{2} (1 + 2 \times 0.48) = 0.98$$

따라서 이 외부 자극의 세기가 90일 때의 감각의 세기는 0.98이다.

078 답 ⑤

5년 전 매출액을 A 원이라 하고 매출액이 매년 $r\%$ 씩 증가했다고 하면

$$A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 2A \quad \therefore \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 2$$

양변에 상용로그를 취하면

$$5 \log \left(1 + \frac{r}{100}\right) = \log 2$$

$$\log \left(1 + \frac{r}{100}\right) = \frac{1}{5} \log 2 = \frac{1}{5} \times 0.3 = 0.06$$

이때 $\log 1.15 = 0.06$ 이므로

$$1 + \frac{r}{100} = 1.15, \quad \frac{r}{100} = 0.15$$

$$\therefore r = 15$$

따라서 매출액은 매년 15%씩 증가했다.

079 답 32.7%

현재 가격을 A 원이라 하면 중고 물품의 가격은 매년 20%씩 떨어지므로 5년 후의 가격은

$$A \left(1 - \frac{20}{100}\right)^5 = A \times 0.8^5 \text{ (원)}$$

0.8^5 에 상용로그를 취하면

$$\log 0.8^5 = 5 \log 0.8 = 5 \log \frac{8}{10} = 5(3 \log 2 - 1)$$

$$= 5(3 \times 0.301 - 1)$$

$$= -0.485 = -1 + 0.515$$

이때 $\log 3.27 = 0.515$ 이므로

$$\log 0.8^5 = -1 + 0.515 = \log 10^{-1} + \log 3.27$$

$$= \log (10^{-1} \times 3.27) = \log 0.327$$

$$\therefore 0.8^5 = 0.327$$

따라서 5년 후의 이 중고 물품의 가격은 $0.327A$ 원이므로 현재 가격의 32.7%이다.

080 답 10.4%

현재 유입되는 생활하수의 양을 a 라 하고 매년 $r\%$ 씩 줄인다고 하면 10년 후의 생활하수의 양은 $\frac{1}{3}a$ 이므로

$$a \left(1 - \frac{r}{100}\right)^{10} = \frac{1}{3}a \quad \therefore \left(1 - \frac{r}{100}\right)^{10} = \frac{1}{3}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$10 \log \left(1 - \frac{r}{100}\right) = \log \frac{1}{3}, \quad 10 \log \left(1 - \frac{r}{100}\right) = -\log 3$$

$$\log \left(1 - \frac{r}{100}\right) = -\frac{1}{10} \log 3 = -\frac{1}{10} \times 0.48$$

$$= -0.048 = -1 + 0.952$$

이때 $\log 8.96 = 0.952$ 이므로

$$\log \left(1 - \frac{r}{100}\right) = -1 + 0.952 = \log 10^{-1} + \log 8.96$$

$$= \log (10^{-1} \times 8.96) = \log 0.896$$

$$1 - \frac{r}{100} = 0.896, \quad \frac{r}{100} = 0.104 \quad \therefore r = 10.4$$

따라서 생활하수의 양을 매년 10.4%씩 줄여야 한다.

081 답 ④

$$\log_a 3 = 2 \text{에서 } a^2 = 3$$

$$\log_2 b = 2 \text{에서 } b = 2^2 = 4$$

$$\therefore a^{2b} = (a^2)^b = 3^4 = 81$$

082 답 3

밑의 조건에서 $|a-1| > 0$, $|a-1| \neq 1$ 이므로

$$a \neq 0, a \neq 1, a \neq 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

진수의 조건에서 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + ax + a > 0$ 이어야 하

므로 이차방정식 $x^2 + ax + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 4a < 0, \quad a(a-4) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통 범위를 구하면

$$0 < a < 1 \text{ 또는 } 1 < a < 2 \text{ 또는 } 2 < a < 4$$

따라서 구하는 정수 a 의 값은 3이다.

083 답 $\frac{5}{2}$

$$\log_2 24 + \log_2 \frac{2}{3} - \log_2 2\sqrt{2}$$

$$= \log_2 \left(24 \times \frac{2}{3}\right) - \log_2 2^{\frac{3}{2}}$$

$$= \log_2 16 - \frac{3}{2} = \log_2 2^4 - \frac{3}{2}$$

$$= 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

084 답 ④

$$f(n) = \frac{2 \log_3 (n+1) - \log_3 (n^2 + n)}{n+1-n}$$

$$= \log_3 (n+1)^2 - \log_3 (n^2 + n)$$

$$= \log_3 \frac{(n+1)^2}{n(n+1)} = \log_3 \frac{n+1}{n}$$

$$\therefore f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(80)$$

$$= \log_3 \frac{2}{1} + \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{4}{3} + \dots + \log_3 \frac{81}{80}$$

$$= \log_3 \left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{81}{80}\right)$$

$$= \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$$

085 답 ①

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{\log_2 7}{\log_3 7} = \frac{\log_7 3}{\log_7 2} = \log_2 3$$

086 답 ②

$$\neg. \log_{2\sqrt{2}} 8 = \log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^3 = 2$$

$$\neg. 4^{\log_5 27 - \log_5 3} = 4^{\log_5 9} = 9^{\log_5 4} = 9^{\log_5 2^2} = 9^2$$

$$\begin{aligned} \neg. \log_2 \{ \log_{16} (\log_5 25) \} &= \log_2 \{ \log_{16} (\log_5 5^2) \} \\ &= \log_2 (\log_{16} 2) \\ &= \log_2 (\log_{2^4} 2) \\ &= \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \log_2 (\log_3 7) + \log_2 (\log_7 10) + \log_2 (\log_{10} 81) \\ &= \log_2 (\log_3 7 \times \log_7 10 \times \log_{10} 81) \\ &= \log_2 \left(\log_3 7 \times \frac{\log_3 10}{\log_3 7} \times \frac{\log_3 81}{\log_3 10} \right) \\ &= \log_2 (\log_3 81) = \log_2 (\log_3 3^4) = \log_2 4 = 2 \end{aligned}$$

087 답 ③

$$\begin{aligned} &(5^{\log_5 3 + \log_5 2})^2 + (3^{\log_3 3 + \log_{\frac{3}{2}} 3\sqrt{3}})^{\log_3 2\sqrt{2}} \\ &= \{5^{\log_5 (3 \times 2)}\}^2 + (3^{\log_3 3 + \log_{\frac{3}{2}} 3^{\frac{3}{2}}})^{\log_3 2^{\frac{3}{2}}} \\ &= (5^{\log_5 6})^2 + (3^{\log_3 3 + 3 \log_3 3})^{\frac{3}{4} \log_3 2} \\ &= (6^{\log_5 5})^2 + 3^{4 \log_3 3 \times \frac{3}{4} \log_3 2} \\ &= 6^2 + 3^3 = 63 \end{aligned}$$

088 답 ④

$$\log_2 15 = a \text{에서}$$

$$\log_2 3 + \log_2 5 = a \quad \dots\dots \textcircled{+}$$

$$\log_2 \frac{3}{5} = b \text{에서}$$

$$\log_2 3 - \log_2 5 = b \quad \dots\dots \textcircled{-}$$

$$\textcircled{+} + \textcircled{-} \text{을 하면 } 2 \log_2 3 = a + b$$

$$\therefore \log_2 3 = \frac{a+b}{2}$$

$$\textcircled{+} - \textcircled{-} \text{을 하면 } 2 \log_2 5 = a - b$$

$$\therefore \log_2 5 = \frac{a-b}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_2 45 &= \log_2 (3^2 \times 5) \\ &= 2 \log_2 3 + \log_2 5 \\ &= 2 \times \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \\ &= \frac{3a+b}{2} \end{aligned}$$

089 답 $\frac{17}{4}$

$$\log_a c : \log_b c = 4 : 1 \text{에서}$$

$$\log_a c = 4 \log_b c, \frac{1}{\log_c a} = \frac{4}{\log_c b}$$

$$\log_c b = 4 \log_c a \quad \therefore b = a^4$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a b + \log_b a &= \log_a a^4 + \log_{a^4} a \\ &= 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4} \end{aligned}$$

090 답 0

$$2^x = 5^y = 50^z = k (k > 0) \text{로 놓으면 } xyz \neq 0 \text{에서 } k \neq 1$$

$$x = \log_2 k, y = \log_5 k, z = \log_{50} k \text{이므로}$$

$$\frac{1}{x} = \log_k 2, \frac{1}{y} = \log_k 5, \frac{1}{z} = \log_k 50$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} &= \log_k 2 + 2 \log_k 5 - \log_k 50 \\ &= \log_k 2 + \log_k 5^2 - \log_k 50 \\ &= \log_k \left(\frac{2 \times 5^2}{50} \right) = \log_k 1 = 0 \end{aligned}$$

091 답 4

$$\log_5 5 < \log_5 15 < \log_5 25, \text{ 즉 } 1 < \log_5 15 < 2 \text{이므로}$$

$$x = 1, y = \log_5 15 - 1 = \log_5 15 - \log_5 5 = \log_5 3$$

$$\therefore 5^x = 5^1 = 5, 5^y = 5^{\log_5 3} = 3$$

$$\therefore \frac{5^x + 5^y}{5^x - 5^y} = \frac{5 + 3}{5 - 3} = 4$$

092 답 ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 a + \log_2 b = -6, \log_2 a \times \log_2 b = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a b + \log_b a &= \frac{\log_2 b}{\log_2 a} + \frac{\log_2 a}{\log_2 b} \\ &= \frac{(\log_2 b)^2 + (\log_2 a)^2}{\log_2 a \times \log_2 b} \\ &= \frac{(\log_2 a + \log_2 b)^2 - 2 \log_2 a \times \log_2 b}{\log_2 a \times \log_2 b} \\ &= \frac{(-6)^2 - 2 \times 3}{3} = 10 \end{aligned}$$

093 답 2.0333

$$\log 108 = \log (2^2 \times 3^3) = 2 \log 2 + 3 \log 3$$

$$= 2 \times 0.3010 + 3 \times 0.4771$$

$$= 2.0333$$

094 답 ①

$$\log \frac{100x}{y^2} = \log 100x - \log y^2 = \log (10^2 \times x) - \log y^2$$

$$= 2 + \log x - 2 \log y = 2 + \frac{3}{5} - 2 \times \frac{7}{4}$$

$$= -0.9 = -1 + 0.1$$

따라서 $\log \frac{100x}{y^2}$ 의 정수 부분은 -1 이고 소수 부분은 0.1 이므로

$$a = -1, b = 0.1$$

$$\therefore a^2 + 10b = (-1)^2 + 10 \times 0.1 = 2$$

095 답 ④

$$\neg. \log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2$$

$$= 1 - 0.301 = 0.699$$

$$\begin{aligned} \neg. \log 200 &= \log (10^2 \times 2) = \log 10^2 + \log 2 \\ &= 2 + 0.301 = 2.301 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ㄷ. } \log 5000 &= \log (10^3 \times 5) = \log 10^3 + \log 5 \\ &= 3 + 0.699 = 3.699\end{aligned}$$

$$\text{ㄹ. } \log 0.5 = \log \frac{1}{2} = \log 2^{-1} = -\log 2 = -0.301$$

$$\begin{aligned}\text{ㅁ. } \log 0.005 &= \log (10^{-3} \times 5) = \log 10^{-3} + \log 5 \\ &= -3 + 0.699 = -2.301\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ㅂ. } \log 0.02 &= \log (10^{-2} \times 2) = \log 10^{-2} + \log 2 \\ &= -2 + 0.301 = -1.699\end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㅂ의 5개이다.

096 답 ⑤

a^{10} 은 16자리의 정수이므로 $\log a^{10}$ 의 정수 부분은 15이다.

즉, $15 \leq \log a^{10} < 16$ 이므로

$$1.5 \leq \log a < 1.6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

b^{10} 은 10자리의 정수이므로 $\log b^{10}$ 의 정수 부분은 9이다.

즉, $9 \leq \log b^{10} < 10$ 이므로

$$0.9 \leq \log b < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

이때 $\log a^5 b^2 = 5 \log a + 2 \log b$ 이므로

$$\textcircled{㉠} \times 5 + \textcircled{㉡} \times 2 \text{를 하면}$$

$$9.3 \leq 5 \log a + 2 \log b < 10$$

따라서 $\log a^5 b^2$ 의 정수 부분이 9이므로 $a^5 b^2$ 은 10자리의 정수이다.

097 답 8

$$\log 7^{20} = 20 \log 7 = 20 \times 0.8451 = 16.902$$

이때 $\log 7 = 0.8451$, $\log 8 = 3 \log 2 = 3 \times 0.3010 = 0.9030$ 이므로

$$\log 7 < 0.902 < \log 8$$

$$16 + \log 7 < 16 + 0.902 < 16 + \log 8$$

$$\log (10^{16} \times 7) < \log 7^{20} < \log (10^{16} \times 8)$$

$$\therefore 7 \times 10^{16} < 7^{20} < 8 \times 10^{16}$$

따라서 7^{20} 의 최고 자리의 숫자는 7이므로

$$a = 7$$

한편 $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, $7^4 = 2401$, $7^5 = 16807$, ...이므로

7^n (n 은 자연수)의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $20 = 4 \times 5$ 이므로 7^{20} 의 일의 자리의 숫자는 7^4 의 일의 자리의 숫자와 같다.

$$\therefore b = 1$$

$$\therefore a + b = 7 + 1 = 8$$

098 답 3

$2 \log x$ 와 $\log \frac{x}{2}$ 의 차가 정수이므로

$$\begin{aligned}2 \log x - \log \frac{x}{2} &= \log x^2 - \log \frac{x}{2} \\ &= \log \left(x^2 \times \frac{2}{x} \right) = \log 2x \Rightarrow \text{정수}\end{aligned}$$

이때 $\log 2x$ 가 정수이므로 $2x$ 가 10의 거듭제곱 꼴이다.

$$100 \leq x < 1000 \text{에서 } 200 \leq 2x < 2000 \text{이므로 } 2x = 1000$$

$$\therefore \log 2x = \log 1000 = \log 10^3 = 3$$

099 답 ④

$\log x$ 의 소수 부분과 $\log x\sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합이 1이므로

$$\begin{aligned}\log x + \log x\sqrt{x} &= \log x + \frac{3}{2} \log x \\ &= \frac{5}{2} \log x \Rightarrow \text{정수}\end{aligned}$$

$\log x$ 의 정수 부분이 3이므로

$$3 \leq \log x < 4$$

$$\therefore \frac{15}{2} \leq \frac{5}{2} \log x < 10$$

이때 $\frac{5}{2} \log x$ 가 정수이므로

$$\frac{5}{2} \log x = 8 \text{ 또는 } \frac{5}{2} \log x = 9$$

$$\log x = \frac{16}{5} \text{ 또는 } \log x = \frac{18}{5}$$

$$\therefore x = 10^{\frac{16}{5}} \text{ 또는 } x = 10^{\frac{18}{5}}$$

따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은

$$10^{\frac{16}{5}} \times 10^{\frac{18}{5}} = 10^{\frac{34}{5}}$$

100 답 $x^2 - 19x + 90 = 0$

$\log 900 = \log (10^2 \times 9) = 2 + \log 9$ 이므로 $\log 900$ 의 정수 부분은 2, 소수 부분은 $\log 9$ 이다.

$$\therefore a = 2, b = 2 \log 3$$

즉, $3^a = 3^2 = 9$ 이고

$$\frac{2}{b} = \frac{2}{2 \log 3} = \log_3 10 \text{에서}$$

$$3^{\frac{2}{b}} = 3^{\log_3 10} = 10^{\log_3 3} = 10$$

따라서 이차방정식의 계수가 1이고 3^a , $3^{\frac{2}{b}}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2 - (9 + 10)x + 9 \times 10 = 0$$

$$\therefore x^2 - 19x + 90 = 0$$

101 답 ③

올해 이 회사의 복지 예산이 1억 원이고 복지 예산을 매년 전년도 복지 예산의 $r\%$ 씩 늘린다고 하면 10년 후의 복지 예산은 2억 원이므로

$$1 \times \left(1 + \frac{r}{100} \right)^{10} = 2$$

양변에 상용로그를 취하면

$$10 \log \left(1 + \frac{r}{100} \right) = \log 2$$

$$\begin{aligned}\log \left(1 + \frac{r}{100} \right) &= \frac{1}{10} \log 2 \\ &= \frac{1}{10} \times 0.3 = 0.03\end{aligned}$$

이때 $\log 1.07 = 0.03$ 이므로

$$1 + \frac{r}{100} = 1.07$$

$$\frac{r}{100} = 0.07$$

$$\therefore r = 7$$

따라서 복지 예산을 매년 7%씩 늘려야 한다.



001 답 8

$$f(k_1)=2 \text{에서 } a^{k_1}=2$$

$$f(k_2)=4 \text{에서 } a^{k_2}=4$$

$$\therefore f(k_1+k_2)=a^{k_1+k_2}=a^{k_1} \times a^{k_2}=2 \times 4=8$$

002 답 ④

① $y=2^x$ 에서 밑이 1보다 크므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

② $x=0$ 일 때, $y=2^0=1$ 이므로 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지난다.

④ 점근선이 x 축이므로 그래프는 x 축과 만나지 않는다.

003 답 ④

$y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=3^{x-m}+n$$

이 식이 $y=\frac{1}{9} \times 3^x - 1 = 3^{x-2} - 1$ 과 일치하므로

$$m=2, n=-1 \quad \therefore m+n=1$$

004 답 4

$y=2^x$ 의 그래프가 두 점 (a, p) , (b, q) 를 지나므로

$$p=2^a, q=2^b$$

이때 $pq=16$ 이므로 $2^a \times 2^b=16$, $2^{a+b}=2^4$

$$\therefore a+b=4$$

005 답 ④

$$A=3\sqrt{3}=\sqrt{3^3}=3^{\frac{3}{2}}$$

$$B=\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{4}}=(3^{-3})^{-\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{4}}$$

$$C=\sqrt[3]{81}=3\sqrt[3]{3^4}=3^{\frac{4}{3}}$$

이때 $\frac{3}{4} < \frac{4}{3} < \frac{3}{2}$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$3^{\frac{3}{4}} < 3^{\frac{4}{3}} < 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore B < C < A$$

006 답 $\frac{15}{4}$

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}+4 \text{에서 밑이 1보다 작으므로}$$

$x=-3$ 일 때 최대이고 최댓값은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+4=4+4=8$$

$x=1$ 일 때 최소이고 최솟값은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+4=\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 차는

$$8-\frac{17}{4}=\frac{15}{4}$$

007 답 ②

$$f(x)=-x^2-2x \text{로 놓으면 } f(x)=-(x+1)^2+1$$

$$-2 \leq x \leq 1 \text{에서 } f(-2)=0, f(-1)=1, f(1)=-3 \text{이므로}$$

$$-3 \leq f(x) \leq 1$$

$$y=5^{-x^2-2x}=5^{f(x)} \text{에서 밑이 1보다 크므로}$$

$$f(x)=1 \text{일 때 최대이고 최댓값은 } 5^1=5$$

$$f(x)=-3 \text{일 때 최소이고 최솟값은 } 5^{-3}=\frac{1}{125}$$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은

$$5 \times \frac{1}{125}=\frac{1}{25}$$

008 답 36

$$y=9^{-x}-2 \times 3^{-x+1}-1=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x-1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$-2 \leq x \leq -1 \text{에서 } \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$\therefore 3 \leq t \leq 9$$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-6t-1=(t-3)^2-10$$

따라서 $t=9$ 일 때 최대이고 최댓값은 26, $t=3$ 일 때 최소이고 최솟값은 -10이므로

$$M=26, m=-10$$

$$\therefore M-m=26-(-10)=36$$

009 답 5

$2^x+2^{-x}=t$ 로 놓으면 $2^x>0$, $2^{-x}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t=2^x+2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \times 2^{-x}}=2 \text{ (단, 등호는 } x=0 \text{일 때 성립)}$$

이때 $4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$ 이므로 주어진 함수는

$$y=(t^2-2)-2t+7=t^2-2t+5$$

$$=(t-1)^2+4$$

따라서 $t \geq 2$ 이므로 주어진 함수는 $t=2$ 일 때 최솟값 5를 갖는다.

010 답 ③

$$f(4)=m \text{에서 } a^4=m$$

$$f(9)=n \text{에서 } a^9=n$$

$$\therefore f(5)=a^5=a^{9-4}=a^9 \div a^4=\frac{n}{m}$$

011 답 10

$$f(4)=\frac{1}{16} \text{에서 } a^4=\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\therefore a=\frac{1}{2} \ (\because a>0)$$

$$\begin{aligned} \therefore f(-1)+f(-3) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \\ &= 2+8=10 \end{aligned}$$

012 답 28/27

$f(2a) \times f(b) = 3^{-2a} \times 3^{-b} = 9$ 에서

$$3^{-2a-b} = 9 = 3^2$$

$$\therefore -2a-b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$f(a-b) = 3^{-(a-b)} = 3$ 에서

$$-(a-b)=1$$

$$\therefore -a+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-1, b=0$$

$$\therefore 3^{3a} + 3^{3b} = 3^{-3} + 3^0 = \frac{1}{27} + 1 = \frac{28}{27}$$

013 답 ㉤

㉠. $(a, b) \in A$ 이면 $b=2^a$ 에서

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{2} \times 2^a = 2^{a-1}$$

$$\therefore \left(a-1, \frac{b}{2}\right) \in A$$

㉡. $(a, b) \in A$ 이면 $b=2^a$ 에서

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2^a} = 2^{-a}$$

$$\therefore \left(-a, \frac{1}{b}\right) \in A$$

㉢. $(a_1, b_1) \in A, (a_2, b_2) \in A$ 이면 $b_1=2^{a_1}, b_2=2^{a_2}$ 에서

$$b_1 b_2 = 2^{a_1} \times 2^{a_2} = 2^{a_1+a_2}$$

$$\therefore (a_1+a_2, b_1 b_2) \in A$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.

014 답 ㉤

㉠. 정의역은 실수 전체의 집합이다.

㉡. $f(x)=a^x$ 은 일대일함수이므로 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.

㉢. $0 < a < 1$ 일 때, $f(x)=a^x$ 은 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값은 감소하므로 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ 이다.

㉣. $f(0)=1, f(1)=a$ 이므로 그래프는 두 점 $(0, 1), (1, a)$ 를 지난다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㉡, ㉢, ㉣이다.

015 답 ㉣

임의의 실수 a, b 에 대하여 $a < b$ 일 때, $f(a) > f(b)$ 를 만족시키는 함수는 x 의 값이 증가할 때 $f(x)$ 의 값은 감소하는 함수이므로 $0 < (\text{밑}) < 1$ 인 지수함수이다.

이때 $f(x) = \left(\frac{10}{9}\right)^{-x} = \left(\frac{9}{10}\right)^x$ 은 $0 < \frac{9}{10} < 1$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ㉣이다.

016 답 $a < -3$ 또는 $a > 2$

$y=(a^2+a-5)^x$ 에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하려면

$$a^2+a-5 > 1 \text{ 이어야 하므로}$$

$$a^2+a-6 > 0, (a+3)(a-2) > 0$$

$$\therefore a < -3 \text{ 또는 } a > 2$$

017 답 -4

함수 $y=4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 3$ 의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

$$\therefore a=2, b=-3$$

또 점근선의 방정식은 $y=-3$ 이므로

$$c=-3$$

$$\therefore a+b+c=2+(-3)+(-3)=-4$$

018 답 ㉣

㉠. $y=4^x+3$ 의 그래프는 $y=4^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

㉡. $y=-4 \times 2^{x-2} = -2^2 \times 2^{x-2} = -2^x$ 이므로 그래프는 $y=4^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

㉢. $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^x + 2 = -4^{-x} + 2$ 이므로 그래프는 $y=4^x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

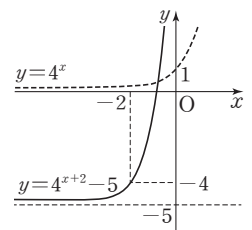
㉣. $y=2^{2x-4} - 2 = (2^2)^{x-2} - 2 = 4^{x-2} - 2$ 이므로 그래프는 $y=4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=4^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 것은 ㉠, ㉢, ㉣이다.

019 답 ㉡

$y=4^{x+2}-5$ 의 그래프는 $y=4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

㉡ 점근선의 방정식은 $y=-5$ 이다.



020 답 ㉡

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 3^x$$

이 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=3^{-a}+b$$

이 그래프의 점근선의 방정식이 $y=b$ 이므로

$$b=3$$

또 그래프가 점 $(0, 6)$ 을 지나므로

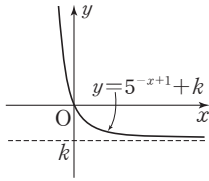
$$6=3^{-a}+3, 3^{-a}=3$$

$$\therefore a=-1$$

$$\therefore ab=-1 \times 3=-3$$

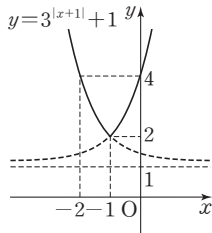
021 답 ①

$y=5^{-x+1}+k=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}+k$ 의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로
 $5+k \geq 0 \quad \therefore k \geq -5$
따라서 k 의 최솟값은 -5 이다.



022 답 $k < 2$

$x \geq -1$ 이면 $y=3^{x+1}+1$
 $x < -1$ 이면 $y=3^{-(x+1)}+1=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+1$
따라서 $y=3^{|x+1|}+1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$ 가 그래프와 만나지 않으려면
 $k < 2$

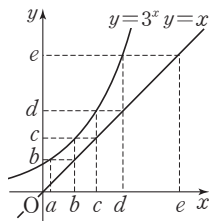


023 답 ①

$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 의 그래프가 두 점 $(1, a)$, $(b, 16)$ 을 지나므로
 $a=\frac{1}{4}, 16=\left(\frac{1}{4}\right)^b \quad \therefore b=-2$
 $\therefore \frac{b}{a}=\frac{-2}{\frac{1}{4}}=-8$

024 답 ①

오른쪽 그림에서 $b=3^a, d=3^c$ 이므로
 $bd=3^a \times 3^c=3^{a+c}$
 $\therefore k=a+c$



025 답 2

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 a, b 라 하자.
점 A($a, 4$)가 $y=2^x$ 의 그래프 위의 점이므로
 $2^a=4, 2^a=2^2 \quad \therefore a=2$
 $\therefore A(2, 4)$
또 점 B($b, 4$)가 $y=4^x$ 의 그래프 위의 점이므로
 $4^b=4 \quad \therefore b=1$
 $\therefore B(1, 4)$
따라서 $\triangle OAB$ 의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2$

026 답 ③

$\square ACDB$ 가 정사각형이고 그 넓이가 9이므로 $\square ACDB$ 의 한 변의 길이는 3이다.
점 C의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면 $\overline{CD}=3$ 이므로 $D(a+3, 0)$ 이고
 $\overline{AC}=\overline{BD}=3$ 이므로
 $A(a, 3), B(a+3, 3)$
점 A($a, 3$)이 $y=2^x$ 의 그래프 위의 점이므로
 $3=2^a \quad \dots\dots ㉠$
또 점 B($a+3, 3$)이 $y=k \times 2^x$ 의 그래프 위의 점이므로
 $3=k \times 2^{a+3}, k \times 2^a \times 8=3$
이때 ㉠에 의하여
 $k \times 3 \times 8=3 \quad \therefore k=\frac{1}{8}$

027 답 2

$A(a, 3^a), B(b, 3^b)$ 에서 직선 AB의 기울기가 2이므로
 $\frac{3^b-3^a}{b-a}=2 \quad \therefore b-a=\frac{1}{2}(3^b-3^a) \quad \dots\dots ㉠$
또 $\overline{AB}=\sqrt{5}$ 에서 $(b-a)^2+(3^b-3^a)^2=(\sqrt{5})^2$
위의 식에 ㉠을 대입하면
 $\frac{1}{4}(3^b-3^a)^2+(3^b-3^a)^2=5$
 $\frac{5}{4}(3^b-3^a)^2=5, (3^b-3^a)^2=4$
 $\therefore 3^b-3^a=2 (\because 3^a < 3^b)$

028 답 ③

$A=4\sqrt{64}=4\sqrt{2^6}=2^{\frac{3}{2}}$
 $B=16^{\frac{1}{5}}=(2^4)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{4}{5}}$
 $C=\left(\frac{1}{8}\right)^{-0.6}=(2^{-3})^{-0.6}=2^{1.8}=2^{\frac{9}{5}}$
이때 $\frac{4}{5} < \frac{3}{2} < \frac{9}{5}$ 이고 밑이 1보다 크므로 $2^{\frac{4}{5}} < 2^{\frac{3}{2}} < 2^{\frac{9}{5}}$
 $\therefore B < A < C$

029 답 $\frac{15}{2}$

$\sqrt[3]{\frac{1}{16}}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}, \sqrt[5]{\frac{1}{128}}=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^7}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{5}}$
 $\sqrt[4]{\frac{1}{32}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}}, \sqrt[6]{\frac{1}{8}}=\sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$
이때 $\frac{1}{2} < \frac{5}{4} < \frac{4}{3} < \frac{7}{5}$ 이고 밑이 1보다 작으므로
 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{5}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$
 $\therefore \sqrt[5]{\frac{1}{128}} < \sqrt[3]{\frac{1}{16}} < \sqrt[4]{\frac{1}{32}} < \sqrt[6]{\frac{1}{8}}$
따라서 $a=\sqrt[5]{\frac{1}{128}}, b=\sqrt[6]{\frac{1}{8}}$ 이므로
 $a^5b=\left(\sqrt[5]{\frac{1}{128}}\right)^5 \times \sqrt[6]{\frac{1}{8}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{5}}\right\}^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{2}}$
즉, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^k$ 이므로 $k=\frac{15}{2}$

030 답 ⑤

$$A = {}^{n+1}\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{n+1}}, B = {}^{n+2}\sqrt{a^{n+1}} = a^{\frac{n+1}{n+2}}, C = {}^{n+3}\sqrt{a^{n+2}} = a^{\frac{n+2}{n+3}}$$

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}, \frac{n+2}{n+3} = 1 - \frac{1}{n+3} \text{ 이고 } n \text{ 이 자연수이므로}$$

$$\frac{1}{n+3} < \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$$

따라서 $1 - \frac{1}{n+1} < 1 - \frac{1}{n+2} < 1 - \frac{1}{n+3}$, 즉

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+3} \text{ 이고 } 0 < a < 1 \text{ 이므로}$$

$$a^{\frac{n+2}{n+3}} < a^{\frac{n+1}{n+2}} < a^{\frac{n}{n+1}}$$

$$\therefore C < B < A$$

031 답 ②

$$0 < a < \frac{1}{b} < 1 \text{ 에서 } 0 < a < 1, b > 1$$

$$0 < a < 1 \text{ 이고 } a < b \text{ 이므로 } a^a > a^b$$

$$b > 1 \text{ 이고 } a < b \text{ 이므로 } b^a < b^b$$

이때 $a > 0, b > 0$ 이고 $a < b$ 이므로 $a^a < b^a, a^b < b^b$

$$\therefore a^b < a^a < b^a < b^b$$

032 답 ⑤

$$y = 3^{x-1} + 3 \text{ 에서 밑이 1보다 크므로}$$

$$x = 3 \text{ 일 때 최대이고 최댓값은 } 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$$

$$x = 0 \text{ 일 때 최소이고 최솟값은 } 3^{-1} + 3 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은

$$12 \times \frac{10}{3} = 40$$

033 답 $\frac{17}{4}$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + k \text{ 에서 밑이 1보다 작으므로 } x = -2 \text{ 일 때 최대이고}$$

$$\text{최댓값 } \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + k \text{ 를 갖는다.}$$

$$\text{즉, } \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + k = 6 \text{ 이므로}$$

$$2 + k = 6 \quad \therefore k = 4$$

따라서 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 4$ 는 $x = 1$ 일 때 최소이고 최솟값은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 = \frac{17}{4}$$

034 답 ①

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+b} + 1 \text{ 에서 밑이 1보다 작으므로 } x = 3 \text{ 일 때 최소이고}$$

$$x = a \text{ 일 때 최대이다.}$$

이때 최솟값이 $\left(\frac{1}{3}\right)^{3+b} + 1$ 이므로

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{3+b} + 1 = 4, \left(\frac{1}{3}\right)^{3+b} = 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$3 + b = -1 \quad \therefore b = -4$$

또 최댓값이 $\left(\frac{1}{3}\right)^{a-4} + 1$ 이므로

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{a-4} + 1 = 28, \left(\frac{1}{3}\right)^{a-4} = 27 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$$

$$a - 4 = -3 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a + b = 1 + (-4) = -3$$

035 답 $\frac{16}{3}$

$$y = 3^x \times 2^{-2x} + 5 = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 5 \text{ 에서 밑이 1보다 작으므로 } x = -1 \text{ 일}$$

때 최대이고 최댓값은

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} + 5 = \frac{4}{3} + 5 = \frac{19}{3}$$

따라서 $a = -1, M = \frac{19}{3}$ 이므로

$$a + M = \frac{16}{3}$$

036 답 ②

(i) $a > 2$ 일 때

$$f(x) = \left(\frac{2}{a}\right)^x \text{ 은 밑이 1보다 작으므로 } x = -2 \text{ 일 때 최대이고}$$

$$\text{최댓값 } \left(\frac{2}{a}\right)^{-2} \text{ 을 갖는다.}$$

$$\text{즉, } \left(\frac{2}{a}\right)^{-2} = 9 \text{ 이므로 } \frac{a^2}{4} = 9$$

$$a^2 = 36 \quad \therefore a = 6 (\because a > 2)$$

(ii) $0 < a < 2$ 일 때

$$f(x) = \left(\frac{2}{a}\right)^x \text{ 은 밑이 1보다 크므로 } x = 2 \text{ 일 때 최대이고 최댓}$$

$$\text{값 } \left(\frac{2}{a}\right)^2 \text{ 을 갖는다.}$$

$$\text{즉, } \left(\frac{2}{a}\right)^2 = 9 \text{ 이므로 } \frac{4}{a^2} = 9$$

$$a^2 = \frac{4}{9} \quad \therefore a = \frac{2}{3} (\because 0 < a < 2)$$

(i), (ii)에서 모든 양수 a 의 값의 합은 $6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$

037 답 ②

(i) $a > 1$ 일 때

$$f(x) = a^{x+3} \text{ 은 밑이 1보다 크므로 } x = -2 \text{ 일 때 최소이고 최솟}$$

$$\text{값 } a, x = 1 \text{ 일 때 최대이고 최댓값 } a^4 \text{ 을 갖는다.}$$

이때 최댓값이 최솟값의 27배이므로

$$a^4 = 27a, a^3 = 27 \quad \therefore a = 3$$

(ii) $0 < a < 1$ 일 때

$$f(x) = a^{x+3} \text{ 은 밑이 1보다 작으므로 } x = 1 \text{ 일 때 최소이고 최솟}$$

$$\text{값 } a^4, x = -2 \text{ 일 때 최대이고 최댓값 } a \text{ 를 갖는다.}$$

이때 최댓값이 최솟값의 27배이므로

$$a = 27a^4, a^3 = \frac{1}{27} \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

(i), (ii)에서 모든 양수 a 의 값의 곱은 $3 \times \frac{1}{3} = 1$

038 답 34

$f(x) = x^2 - 2x$ 로 놓으면
 $f(x) = (x-1)^2 - 1$
 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(-1)=3, f(1)=-1, f(2)=0$ 이므로
 $-1 \leq f(x) \leq 3$
 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 에서 밑이 1보다 작으므로
 $f(x) = -1$ 일 때 최대이고 최댓값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
 $f(x) = 3$ 일 때 최소이고 최솟값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
따라서 치역은 $\left\{y \mid \frac{1}{8} \leq y \leq 2\right\}$ 이므로 $M=2, m=\frac{1}{8}$
 $\therefore 16(M+m) = 16\left(2 + \frac{1}{8}\right) = 34$

039 답 ②

$f(x) = x^2 - 6x + 8$ 로 놓으면 $f(x) = (x-3)^2 - 1$
 $2 \leq x \leq 3$ 에서 $f(2)=0, f(3)=-1$ 이므로 $-1 \leq f(x) \leq 0$
 $y = 3^{f(x)}$ 에서 밑이 1보다 크므로 $f(x)=0$, 즉 $x=2$ 일 때 최대이고
최댓값은 $3^0=1$
따라서 $a=2, M=1$ 이므로 $a+M=3$

040 답 4

$f(x) = -x^2 + 2x + k$ 로 놓으면
 $f(x) = -(x-1)^2 + k + 1$
 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $f(0)=k, f(1)=k+1, f(2)=k$ 이므로
 $k \leq f(x) \leq k+1$
 $y = 2^{f(x)}$ 에서 밑이 1보다 크므로 $f(x)=k$ 일 때 최소이고 최솟값
 2^k 을 갖는다.
즉, $2^k=2$ 이므로 $k=1$
따라서 $y = 2^{f(x)}$ 은 $f(x)=k+1=2$ 일 때 최대이고 최댓값은
 $2^2=4$

041 답 2

$f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$
 $1 \leq x \leq 4$ 에서 $f(1)=2, f(2)=1, f(4)=5$ 이므로
 $1 \leq f(x) \leq 5$
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = a^{f(x)}$ 에서
(i) $a > 1$ 일 때
 $y = a^{f(x)}$ 은 밑이 1보다 크므로 $f(x)=5$ 일 때 최대이고 최댓값
 a^5 을 갖는다.
즉, $a^5=32=2^5$ 이므로 $a=2$
따라서 $y = 2^{f(x)}$ 은 $f(x)=1$ 일 때 최소이고 최솟값은
 $m=2^1=2$
(ii) $0 < a < 1$ 일 때
 $y = a^{f(x)}$ 은 밑이 1보다 작으므로 $f(x)=1$ 일 때 최대이고 최댓
값 a 를 갖는다.
 $\therefore a=32$
그런데 $0 < a < 1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(i), (ii)에서 $m=2$

042 답 73

$y = 4^x - 2^{x+1} + 5 = 2^{2x} - 2 \times 2^x + 5$
 $2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면 $-2 \leq x \leq 0$ 에서
 $2^{-2} \leq 2^x \leq 2^0 \quad \therefore \frac{1}{4} \leq t \leq 1$
이때 주어진 함수는
 $y = t^2 - 2t + 5 = (t-1)^2 + 4$
따라서 $t = \frac{1}{4}$ 일 때 최대이고 최댓값은 $\frac{73}{16}$, $t=1$ 일 때 최소이고 최
솟값은 4이므로
 $M = \frac{73}{16}, m=4$
 $\therefore 4Mm = 4 \times \frac{73}{16} \times 4 = 73$

043 답 ①

$y = 36^{-x} - 6^{-x+1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{2x} - 6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^x$
 $\left(\frac{1}{6}\right)^x = t (t > 0)$ 로 놓으면 주어진 함수는
 $y = t^2 - 6t = (t-3)^2 - 9$
따라서 $t=3$ 일 때 최소이고 최솟값은 -9

044 답 22

$y = \frac{1 - 2 \times 5^x + 4 \times 25^x}{25^x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} - 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^x + 4$
 $\left(\frac{1}{5}\right)^x = t (t > 0)$ 로 놓으면 $-1 \leq x \leq 0$ 에서
 $\left(\frac{1}{5}\right)^0 \leq \left(\frac{1}{5}\right)^x \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$
 $\therefore 1 \leq t \leq 5$
이때 주어진 함수는
 $y = t^2 - 2t + 4 = (t-1)^2 + 3$
따라서 $t=5$ 일 때 최대이고 최댓값은 19, $t=1$ 일 때 최소이고 최솟
값은 3이므로 구하는 합은
 $19+3=22$

045 답 ①

$y = \left(\frac{1}{9}\right)^x - 2k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 6k \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + 4$
 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = t (t > 0)$ 로 놓으면 주어진 함수는
 $y = t^2 - 6kt + 4 = (t-3k)^2 - 9k^2 + 4$
따라서 $t=3k$ 일 때 최소이고 최솟값 $-9k^2+4$ 를 갖는다.
즉, $-9k^2+4=-5$ 이므로 $-9k^2=-9, k^2=1$
 $\therefore k=1 (\because k>0)$

046 답 ②

$3^x + 3^{-x} = t$ 로 놓으면 $3^x > 0, 3^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의
관계에 의하여
 $t = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \times 3^{-x}} = 2$ (단, 등호는 $x=0$ 일 때 성립)

이때 $9^x + 9^{-x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$ 이므로 주어진 함수는
 $y = t^2 - 2 - 8t = (t-4)^2 - 18$
 따라서 $t \geq 2$ 이므로 주어진 함수는 $t=4$ 일 때 최솟값 -18 을 갖는다.

047 답 50

$5^{2-x} > 0, 5^{2+x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $y = 5^{2-x} + 5^{2+x} \geq 2\sqrt{5^{2-x} \times 5^{2+x}} = 2\sqrt{5^4} = 2 \times 5^2 = 50$
 (단, 등호는 $x=0$ 일 때 성립)
 따라서 주어진 함수의 최솟값은 50이다.

048 답 ③

$2^x > 0, 8^y = 2^{3y} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $2^x + 8^y \geq 2\sqrt{2^x \times 8^y} = 2\sqrt{2^x \times 2^{3y}} = 2\sqrt{2^{x+3y}}$
 (단, 등호는 $x=3y$ 일 때 성립)

그런데 $x+3y=4$ 이므로
 $2\sqrt{2^{x+3y}} = 2\sqrt{2^4} = 2 \times 2^2 = 8$
 따라서 $2^x + 8^y$ 의 최솟값은 8이다.

049 답 ①

$2 \times 3^{a+x} > 0, 8 \times 3^{a-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $y = 2 \times 3^{a+x} + 8 \times 3^{a-x} \geq 2\sqrt{2 \times 3^{a+x} \times 8 \times 3^{a-x}} = 2\sqrt{2^4 \times 3^{2a}} = 8 \times 3^a$
 (단, 등호는 $3^x=2$ 일 때 성립)
 따라서 주어진 함수는 최솟값이 8×3^a 이므로
 $8 \times 3^a = 72, 3^a = 9 \quad \therefore a=2$

050 답 $-\frac{5}{2}$

$4^x = 8 \times \left(\frac{1}{32}\right)^x$ 에서
 $2^{2x} = 2^3 \times 2^{-5x}, 2^{2x} = 2^{3-5x}$
 즉, $2x^2 = 3 - 5x$ 이므로
 $2x^2 + 5x - 3 = 0, (x+3)(2x-1) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = \frac{1}{2}$
 따라서 모든 근의 합은
 $-3 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

051 답 1

$3^x + 3^{3-x} = 12$ 의 양변에 3^x 을 곱하면
 $(3^x)^2 + 27 = 12 \times 3^x$
 $\therefore (3^x)^2 - 12 \times 3^x + 27 = 0$
 $3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 12t + 27 = 0, (t-3)(t-9) = 0$
 $\therefore t=3$ 또는 $t=9$
 즉, $3^x=3$ 또는 $3^x=9$ 이므로 $x=1$ 또는 $x=2$
 따라서 $\alpha=1, \beta=2$ 이므로 $\beta-\alpha=1$

052 답 ④

$4^x - 2^{x+3} + 10 = 0$ 에서 $(2^x)^2 - 8 \times 2^x + 10 = 0$
 $2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 8t + 10 = 0 \quad \dots\dots ㉠$
 주어진 방정식의 두 근이 α, β 이고 방정식 ㉠의 두 근은 $2^\alpha, 2^\beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $2^\alpha + 2^\beta = 8, 2^\alpha \times 2^\beta = 10$
 $\therefore 4^\alpha + 4^\beta = 2^{2\alpha} + 2^{2\beta} = (2^\alpha + 2^\beta)^2 - 2 \times 2^\alpha \times 2^\beta$
 $= 8^2 - 2 \times 10 = 44$

053 답 3

(i) $x-2=0$, 즉 $x=2$ 일 때
 주어진 방정식은 $3^0=5^0=1$ 이므로 성립한다.
 (ii) $x-2 \neq 0$ 일 때
 $x+1=3x-1$ 이므로 $2x=2 \quad \therefore x=1$
 (i), (ii)에서 모든 근의 합은 $2+1=3$

054 답 ⑤

$25^x - 2 \times 5^{x+1} + a - 2 = 0$ 에서
 $(5^x)^2 - 10 \times 5^x + a - 2 = 0$
 $5^x = t (t > 0)$ 로 놓으면 주어진 방정식은
 $t^2 - 10t + a - 2 = 0 \quad \dots\dots ㉠$
 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로
 (i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (-5)^2 - (a-2) > 0$
 $27 - a > 0 \quad \therefore a < 27$
 (ii) 이차방정식 ㉠의 (두 근의 합) $= 10 > 0$
 (iii) 이차방정식 ㉠의 (두 근의 곱) $= a - 2 > 0$
 $\therefore a > 2$
 (i), (ii), (iii)을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는
 $2 < a < 27$
 따라서 정수 a 의 최댓값은 26이다.

055 답 ④

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} > \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$ 에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-3}$
 밑이 1보다 작으므로
 $2x+1 < 3x-3 \quad \therefore x > 4$

056 답 2

$2^{2x} - 6 \times 2^{x+1} + 32 \leq 0$ 에서
 $(2^x)^2 - 12 \times 2^x + 32 \leq 0$
 $2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 12t + 32 \leq 0, (t-4)(t-8) \leq 0$
 $\therefore 4 \leq t \leq 8$
 즉, $2^2 \leq 2^x \leq 2^3$ 이고 밑이 1보다 크므로
 $2 \leq x \leq 3$
 따라서 구하는 정수 x 는 2, 3의 2개이다.

057 **답** $0 < x < 1$ 또는 $x > 5$

(i) $0 < x < 1$ 일 때

$$x > 2x - 5 \text{에서 } x < 5$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$

(ii) $x = 1$ 일 때

$1 < 1$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x > 1$ 일 때

$$x < 2x - 5 \text{에서 } x > 5$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$0 < x < 1 \text{ 또는 } x > 5$$

058 **답** ⑤

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + k \geq 0 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + k \geq 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 - 8t + k \geq 0$$

$$\therefore (t-4)^2 + k - 16 \geq 0$$

이 부등식이 $t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 성립하려면

$$k - 16 \geq 0 \quad \therefore k \geq 16$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 16이다.

059 **답** 10장

공기청정기로 유입된 오염 물질의 양을 $P (P > 0)$ 라 하면

필터 A는 오염 물질의 50%, 즉 $\frac{1}{2}$ 을 걸러 낼 수 있으므로 1장의

필터를 사용한 후 남아 있는 오염 물질의 양은 $\frac{1}{2}P$

따라서 필터 A를 20장 사용한 후 남아 있는 오염 물질의 양은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{20} P \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

필터 B는 오염 물질의 75%, 즉 $\frac{3}{4}$ 을 걸러 낼 수 있으므로 1장의

필터를 사용한 후 남아 있는 오염 물질의 양은 $\frac{1}{4}P$

따라서 필터 B를 n 장 사용한 후 남아 있는 오염 물질의 양은

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n P \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦과 ⑧이 같아야 하므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{20} P = \left(\frac{1}{4}\right)^n P, \left(\frac{1}{2}\right)^{20} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$20 = 2n \quad \therefore n = 10$$

따라서 필터 B를 10장 사용해야 한다.

060 **답** ②

$$(\sqrt{3})^{x^2-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \text{에서 } 3^{\frac{1}{2}(x^2-x)} = 3^{-x+1}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2}(x^2-x) = -x+1 \text{이므로}$$

$$x^2+x-2=0, (x+2)(x-1)=0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 모든 근의 곱은

$$-2 \times 1 = -2$$

061 **답** ①

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} = \left(\frac{9}{4}\right)^{3-x} \text{에서 } \left(\frac{2}{3}\right)^{4x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-6}$$

따라서 $4x = 2x - 6$ 이므로

$$2x = -6 \quad \therefore x = -3$$

062 **답** -2

$$5^{x^2-5x+9} - 125^{x+k} = 0 \text{에서}$$

$$5^{x^2-5x+9} = 5^{3x+3k}$$

$$\text{즉, } x^2 - 5x + 9 = 3x + 3k \text{이므로}$$

$$x^2 - 8x + 9 - 3k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 주어진 방정식의 한 근이 3이므로 $x = 3$ 을 ①에 대입하면

$$9 - 24 + 9 - 3k = 0, 3k = -6$$

$$\therefore k = -2$$

063 **답** $\frac{13}{9}$

$$\frac{8^{x^2+1}}{2^{x+3}} = 4 \text{에서 } \frac{2^{3(x^2+1)}}{2^{x+3}} = 2^2 \text{이므로}$$

$$2^{3x^2+3} = 2^{x+5}$$

$$\text{즉, } 3x^2 + 3 = x + 5 \text{이므로}$$

$$3x^2 - x - 2 = 0, (3x+2)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3} \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 주어진 방정식의 두 근은 $-\frac{2}{3}, 1$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 1^2 = \frac{13}{9}$$

064 **답** 12

점 A의 좌표는 (0, 1)이므로 점 B의 y 좌표는 1이다.

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} \text{에 } y = 1 \text{을 대입하면}$$

$$1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}$$

$$\text{즉, } x - 3 = 0 \text{이므로 } x = 3$$

$$\therefore B(3, 1)$$

또 점 C는 두 함수 $y = 9^x, y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}$ 의 그래프의 교점이므로

$$9^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}, 3^{2x} = 3^{-x+3}$$

$$\text{즉, } 2x = -x + 3 \text{이므로 } 3x = 3 \quad \therefore x = 1$$

$$\therefore C(1, 9)$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times (9 - 1) = 12$$

065 **답** -3

$$2^x + 8 \times 2^{-x} - 9 = 0 \text{의 양변에 } 2^x \text{을 곱하면}$$

$$(2^x)^2 - 9 \times 2^x + 8 = 0$$

$$2^x = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 9t + 8 = 0, (t-1)(t-8) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 8$$

즉, $2^x=1$ 또는 $2^x=8$ 이므로 $x=0$ 또는 $x=3$
따라서 $\alpha=0, \beta=3$ 이므로
 $\alpha-\beta=-3$

066 답 ③

$4^x-5 \times 2^{x+2}+64=0$ 에서 $(2^x)^2-20 \times 2^x+64=0$
 $2^x=t (t>0)$ 로 놓으면
 $t^2-20t+64=0, (t-4)(t-16)=0$
 $\therefore t=4$ 또는 $t=16$
즉, $2^x=4$ 또는 $2^x=16$ 이므로 $x=2$ 또는 $x=4$
따라서 모든 근의 곱은
 $2 \times 4=8$

067 답 27

$a^{2x}+a^x=12$ 에서 $(a^x)^2+a^x-12=0$
 $a^x=t (t>0)$ 로 놓으면
 $t^2+t-12=0, (t+4)(t-3)=0$
 $\therefore t=3 (\because t>0)$
즉, $a^x=3$ 에서 방정식의 해가 $x=\frac{1}{3}$ 이므로
 $a^{\frac{1}{3}}=3 \quad \therefore a=3^3=27$

068 답 ⑤

$\begin{cases} 2^x+2^y=17 \\ 2^{2x-y}=\frac{1}{16} \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} 2^x+2^y=17 \\ (2^x)^2 \div 2^y=\frac{1}{16} \end{cases}$
 $2^x=X, 2^y=Y (X>0, Y>0)$ 로 놓으면
 $\begin{cases} X+Y=17 \\ X^2 \div Y=\frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X+Y=17 \\ Y=16X^2 \end{cases}$
이 연립방정식을 풀면 $X=1, Y=16$
즉, $2^x=1, 2^y=16$ 이므로 $x=0, y=4$
따라서 $\alpha=0, \beta=4$ 이므로 $\alpha+\beta=4$

069 답 2

$3^x+3^{-x}=X (X \geq 2)$ 로 놓으면
 $9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=X^2-2$ 이므로
주어진 방정식은
 $3(X^2-2)-7X-4=0, 3X^2-7X-10=0$
 $(X+1)(3X-10)=0 \quad \therefore X=\frac{10}{3} (\because X \geq 2)$
 $3^x+3^{-x}=\frac{10}{3}$ 에서 양변에 3^x 을 곱하면
 $(3^x)^2+1=\frac{10}{3} \times 3^x \quad \therefore 3 \times (3^x)^2-10 \times 3^x+3=0$
 $3^x=t (t>0)$ 로 놓으면 $3t^2-10t+3=0$
 $(3t-1)(t-3)=0 \quad \therefore t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=3$
즉, $3^x=\frac{1}{3}$ 또는 $3^x=3$ 이므로 $x=-1$ 또는 $x=1$
따라서 $\alpha=-1, \beta=1$ 이므로 $\beta-\alpha=2$

070 답 84

$9^x-4 \times 3^{x+1}+30=0$ 에서 $(3^x)^2-12 \times 3^x+30=0$
 $3^x=t (t>0)$ 로 놓으면
 $t^2-12t+30=0$
이 이차방정식의 두 근은 $3^a, 3^b$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의
관계에 의하여
 $3^a+3^b=12, 3^a \times 3^b=30$
 $\therefore 3^{2a}+3^{2b}=(3^a+3^b)^2-2 \times 3^a \times 3^b$
 $=12^2-2 \times 30=84$

071 답 ①

$4^x-2^{x+3}+5=0$ 에서 $(2^x)^2-8 \times 2^x+5=0$
 $2^x=t (t>0)$ 로 놓으면
 $t^2-8t+5=0$
이 이차방정식의 두 근은 $2^a, 2^b$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의
관계에 의하여
 $2^a \times 2^b=5, 2^{a+b}=5$
 $\therefore a+b=\log_2 5$
 $\therefore 5^{\frac{1}{a+b}}=5^{\frac{1}{\log_2 5}}=5^{\log_5 2}=2$

072 답 ③

$a^{2x}-6a^x+3=0$ 에서 $(a^x)^2-6a^x+3=0$
 $a^x=t (t>0)$ 로 놓으면
 $t^2-6t+3=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근은 a^α, a^β
이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $a^\alpha \times a^\beta=3, a^{\alpha+\beta}=3$
이때 $\alpha+\beta=4$ 이므로
 $a^4=3 \quad \therefore a=\sqrt[4]{3}$

073 답 -24

(i) $x-6=0$, 즉 $x=6$ 일 때
주어진 방정식은 $65^0=15^0=1$ 이므로 성립한다.
(ii) $x-6 \neq 0$ 일 때
 $x^2+4x+5=x+9$ 이므로 $x^2+3x-4=0$
 $(x+4)(x-1)=0 \quad \therefore x=-4$ 또는 $x=1$
(i), (ii)에서 모든 근의 곱은
 $6 \times (-4) \times 1 = -24$

074 답 $x=1$ 또는 $x=2$

$(x^x)^x=x^x \times x^x$ 에서 $x^x=x^{2x}$
(i) $x=1$ 일 때
주어진 방정식은 $1^1=1^2$ 이므로 성립한다.
(ii) $x \neq 1$ 일 때
 $x^2=2x$ 이므로 $x(x-2)=0$
 $\therefore x=2 (\because x>0)$
(i), (ii)에서 구하는 방정식의 해는
 $x=1$ 또는 $x=2$

075 [답] ①

(i) $x+2=0$, 즉 $x=-2$ 일 때

주어진 방정식은 $7^0=1$ 이므로 성립한다.

(ii) $x+2 \neq 0$ 일 때

$$x^2-x+1=1 \text{이므로 } x^2-x=0$$

$$x(x-1)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은 $-2+0+1=-1$

076 [답] 3

$$49^x-2(a+1)7^x+a+7=0 \text{에서}$$

$$(7^x)^2-2(a+1)7^x+a+7=0$$

$$7^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-2(a+1)t+a+7=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ①이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 하므로

(i) 이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+1)^2-(a+7)>0$$

$$a^2+a-6>0, (a+3)(a-2)>0$$

$$\therefore a<-3 \text{ 또는 } a>2$$

(ii) 이차방정식 ①의 (두 근의 합) $=2(a+1)>0$

$$\therefore a>-1$$

(iii) 이차방정식 ①의 (두 근의 곱) $=a+7>0$

$$\therefore a>-7$$

(i), (ii), (iii)을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는 $a>2$

따라서 정수 a 의 최솟값은 3이다.

077 [답] ③

$$9^x+2k \times 3^x+15-2k=0 \text{에서}$$

$$(3^x)^2+2k \times 3^x+15-2k=0$$

$$3^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2+2kt+15-2k=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식의 두 실근을 $\alpha, 2\alpha \ (\alpha \neq 0)$ 라 하면 방정식 ①의 두 근은 $3^\alpha, 3^{2\alpha}$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$3^\alpha+3^{2\alpha}=-2k, 3^\alpha \times 3^{2\alpha}=15-2k$$

$$3^\alpha=m \ (m>0) \text{으로 놓으면}$$

$$m+m^2=-2k, m^3=15-2k$$

위의 두 식을 연립하면

$$m^3=15+(m+m^2), m^3-m^2-m-15=0$$

$$(m-3)(m^2+2m+5)=0$$

$$\therefore m=3 \ (\because m^2+2m+5>0)$$

$$\text{따라서 } m+m^2=-2k \text{에서}$$

$$-2k=3+9=12 \quad \therefore k=-6$$

078 [답] ④

$$3^{2x}-k \times 3^x+k=0 \text{에서}$$

$$(3^x)^2-k \times 3^x+k=0$$

$$3^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-kt+k=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식의 서로 다른 두 실근이 0과 1 사이에 존재하려면 방정식 ①의 두 근은 $3^0=1$ 과 $3^1=3$ 사이에 존재해야 한다.

$$f(t)=t^2-kt+k \text{라 할 때}$$

(i) 이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-k)^2-4k>0$$

$$k^2-4k>0, k(k-4)>0 \quad \therefore k<0 \text{ 또는 } k>4$$

(ii) $y=f(t)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $t=\frac{k}{2}$ 이므로

$$1<\frac{k}{2}<3 \quad \therefore 2<k<6$$

(iii) $f(1)>0, f(3)>0$ 이므로

$$f(1)=1-k+k>0$$

$$f(3)=9-3k+k>0 \quad \therefore k<\frac{9}{2}$$

(i), (ii), (iii)을 동시에 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$4<k<\frac{9}{2}$$

079 [답] ③

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{x-3} \text{에서 } \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}x} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-6}$$

밑이 1보다 작으므로

$$\frac{1}{2}x \geq 2x-6, \frac{3}{2}x \leq 6 \quad \therefore x \leq 4$$

080 [답] $a < x < d$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{f(x)} > \left(\frac{1}{5}\right)^{g(x)} \text{에서 밑이 1보다 작으므로 } f(x) < g(x)$$

따라서 주어진 부등식의 해는 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=g(x)$ 보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로 $a < x < d$

081 [답] 2

$$2^{3x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+1} < 4^{x+1} \text{에서 } 2^{3x-1} < 2^{-x^2-1} < 2^{2x+2}$$

밑이 1보다 크므로 $3x-1 < -x^2-1 < 2x+2$

(i) $3x-1 < -x^2-1$ 에서 $x^2+3x < 0$

$$x(x+3) < 0 \quad \therefore -3 < x < 0$$

(ii) $-x^2-1 < 2x+2$ 에서 $x^2+2x+3 > 0$

이때 $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$ 이므로 이 부등식은 항상 성립한다.

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-3 < x < 0$

따라서 구하는 정수 x 는 $-2, -1$ 의 2개이다.

082 [답] $6 < a \leq 8$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{ax} \text{에서 } \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{ax}$$

밑이 1보다 작으므로 $2x^2 < ax$

$$2x^2-ax < 0, x(2x-a) < 0$$

$$\therefore 0 < x < \frac{a}{2} \ (\because a > 0)$$

이때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 는 3개이므로

$$3 < \frac{a}{2} \leq 4 \quad \therefore 6 < a \leq 8$$

083 답 ③

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+6} < \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 에서 밑이 1보다 작으므로 $x+6 > x^2$
 $x^2 - x - 6 < 0, (x+2)(x-3) < 0 \quad \therefore -2 < x < 3$
 $\therefore A = \{x \mid -2 < x < 3\}$

$2^{|x-1|} \leq 2^a$ 에서 밑이 1보다 크므로 $|x-1| \leq a$

$-a \leq x-1 \leq a \quad \therefore -a+1 \leq x \leq a+1$

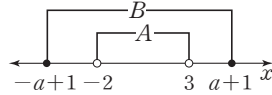
$\therefore B = \{x \mid -a+1 \leq x \leq a+1\}$

이때 $A \cap B = A$, 즉 $A \subset B$ 가 성립하려면

오른쪽 그림에서

$-a+1 \leq -2 \quad \therefore a \geq 3$

따라서 양수 a 의 최솟값은 3이다.



084 답 4

$\left(\frac{1}{9}\right)^x - 28 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 3 \leq 0$ 에서

$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\} - \frac{28}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3 \leq 0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t (t > 0)$ 로 놓으면 $t^2 - \frac{28}{3}t + 3 \leq 0$

$3t^2 - 28t + 9 \leq 0, (3t-1)(t-9) \leq 0 \quad \therefore \frac{1}{3} \leq t \leq 9$

즉, $\frac{1}{3} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ 이고 밑이 1보다 작으므로 $-2 \leq x \leq 1$

따라서 구하는 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1$ 의 4개이다.

085 답 ④

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-6} \leq 2^x$ 에서 $2^{-x^2+6} \leq 2^x$

밑이 1보다 크므로 $-x^2+6 \leq x$

$x^2+x-6 \geq 0, (x+3)(x-2) \geq 0$

$\therefore x \leq -3$ 또는 $x \geq 2$

$\therefore A = \{x \mid x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq 2\}$

$4^x - 3 \times 2^x - 4 > 0$ 에서 $(2^x)^2 - 3 \times 2^x - 4 > 0$

$2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면 $t^2 - 3t - 4 > 0$

$(t+1)(t-4) > 0 \quad \therefore t > 4 (\because t > 0)$

즉, $2^x > 2^2$ 이고 밑이 1보다 크므로 $x > 2$

$\therefore B = \{x \mid x > 2\}$

$\therefore A \cap B = \{x \mid x > 2\}$

따라서 $A \cap B$ 에 속하는 정수 x 의 최솟값은 3이다.

086 답 ①

$4^{x+1} + a \times 2^x + b < 0$ 에서 $4 \times (2^x)^2 + a \times 2^x + b < 0$

$2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면 $4t^2 + at + b < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

주어진 부등식의 해가 $-2 < x < 1$ 이므로

$2^{-2} < 2^x < 2^1$ 에서 $\frac{1}{4} < t < 2$

따라서 해가 $\frac{1}{4} < t < 2$ 이고 t^2 의 계수가 4인 이차부등식은

$4\left(t - \frac{1}{4}\right)(t-2) < 0 \quad \therefore 4t^2 - 9t + 2 < 0$

이 부등식이 $\textcircled{1}$ 과 일치하므로 $a = -9, b = 2 \quad \therefore b - a = 11$

087 답 8

(i) $0 < x < 1$ 일 때

$2x+3 < 3x-4$ 에서 $x > 7$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해가 존재하지 않는다.

(ii) $x=1$ 일 때, $1 > 1$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x > 1$ 일 때

$2x+3 > 3x-4$ 에서 $x < 7$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x < 7$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $1 < x < 7$

따라서 $\alpha = 1, \beta = 7$ 이므로 $\alpha + \beta = 8$

088 답 ⑤

(i) $0 < x < 1$ 일 때

$x^2 \leq 4x+5$ 에서 $x^2 - 4x - 5 \leq 0$

$(x+1)(x-5) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 5$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$

(ii) $x=1$ 일 때, $1 \geq 1$ 이므로 부등식이 성립한다.

(iii) $x > 1$ 일 때

$x^2 \geq 4x+5$ 에서 $x^2 - 4x - 5 \geq 0$

$(x+1)(x-5) \geq 0 \quad \therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 5$

그런데 $x > 1$ 이므로 $x \geq 5$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $0 < x \leq 1$ 또는 $x \geq 5$

따라서 $S = \{x \mid 0 < x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 5\}$ 이므로 집합 S 의 원소인 것은

⑤이다.

089 답 -4

$16^x - 4^{x+1} - k \geq 0$ 에서

$(4^x)^2 - 4 \times 4^x - k \geq 0$

$4^x = t (t > 0)$ 로 놓으면 $t^2 - 4t - k \geq 0$

$\therefore (t-2)^2 - k - 4 \geq 0$

이 부등식이 $t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 성립하려면

$-k-4 \geq 0 \quad \therefore k \leq -4$

따라서 실수 k 의 최댓값은 -4 이다.

090 답 ④

$25^x - 2k \times 5^x + 4 > 0$ 에서

$(5^x)^2 - 2k \times 5^x + 4 > 0$

$5^x = t (t > 0)$ 로 놓으면 $t^2 - 2kt + 4 > 0$

$\therefore (t-k)^2 - k^2 + 4 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

이 부등식이 $t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 성립하려면

(i) $k > 0$ 일 때

$-k^2+4 > 0$ 에서 $k^2-4 < 0$

$(k+2)(k-2) < 0 \quad \therefore -2 < k < 2$

그런데 $k > 0$ 이므로 $0 < k < 2$

(ii) $k \leq 0$ 일 때

$t=0$ 이면 $\textcircled{1}$ 에서 $4 > 0$ 이므로 $t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에서 $k < 2$

091 답 3시간

미생물 A는 매시간 8배씩 증가하므로 n 시간 후의 수는

$$16 \times 8^n (\text{마리})$$

미생물 B는 매시간 2배씩 증가하므로 n 시간 후의 수는

$$1024 \times 2^n (\text{마리})$$

미생물 A, B의 수가 같아지려면

$$16 \times 8^n = 1024 \times 2^n$$

$$2^4 \times 2^{3n} = 2^{10} \times 2^n, 2^{3n+4} = 2^{n+10}$$

$$\text{즉, } 3n+4=n+10 \text{ 이므로 } n=3$$

따라서 미생물 A, B의 수가 같아지는 것은 3시간 후이다.

092 답 12시간

처음 박테리아의 수는 $t=0$ 일 때이므로

$$15 \times 10^0 = 15 (\text{마리})$$

관찰하기 시작한 지 x 시간 후에 박테리아의 수가 처음의 10000배가 된다고 하면

$$15 \times 10^{\frac{x}{3}} = 10000 \times 15, 10^{\frac{x}{3}} = 10^4$$

$$\text{즉, } \frac{x}{3} = 4 \text{ 이므로 } x=12$$

따라서 박테리아의 수가 처음의 10000배가 되는 것은 관찰하기 시작한 지 12시간 후이다.

093 답 ②

치료제의 혈중 농도는 매시간 20%씩 줄어듦으로 x 시간 후 남아 있는 치료제의 혈중 농도는

$$1.25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^x (\mu\text{g/mL})$$

인체에 투여한 지 x 시간 후 혈중 농도가 $0.64 \mu\text{g/mL}$ 이하가 된다고 하면

$$1.25 \times \left(\frac{4}{5}\right)^x \leq 0.64$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^x \leq \frac{64}{125}, \left(\frac{4}{5}\right)^x \leq \left(\frac{4}{5}\right)^3 \quad \therefore x \geq 3$$

따라서 치료제의 혈중 농도가 처음으로 $0.64 \mu\text{g/mL}$ 이하가 되는 것은 인체에 투여한 지 3시간 후이다.

094 답 6

음원 A의 다운로드 수는 1시간마다 2배가 되므로 n 시간 후의 다운로드 수는 100×2^n (회)

음원 B의 다운로드 수는 1시간마다 $\frac{1}{2}$ 배가 되므로 n 시간 후의 다운로드 수는 $320000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (회)

$$n \text{시간 후에 음원 A의 다운로드 수가 음원 B의 다운로드 수보다}$$

1400회 이상 더 많아진다고 하면

$$100 \times 2^n \geq 320000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1400$$

$$100 \times 2^n - 320000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1400 \geq 0$$

$$2^n - \frac{3200}{2^n} - 14 \geq 0$$

$$2^n = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t - \frac{3200}{t} - 14 \geq 0, t^2 - 14t - 3200 \geq 0$$

$$(t+50)(t-64) \geq 0 \quad \therefore t \geq 64 (\because t > 0)$$

$$\text{즉, } 2^n \geq 64 \text{ 이므로 } 2^n \geq 2^6$$

$$\therefore n \geq 6$$

따라서 음원 A의 다운로드 수가 음원 B의 다운로드 수보다 1400회 이상 더 많아질 것으로 예측되는 것은 현재로부터 최소 6시간 후이다.

$$\therefore m=6$$

095 답 ①

$$f(1)=3 \text{에서 } a^{b+c}=3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$f(2)=27 \text{에서 } a^{2b+c}=27 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{8} \div \textcircled{7} \text{을 하면 } a^b=9$$

$$\textcircled{7} \text{에서}$$

$$a^{b+c}=a^b \times a^c=9a^c=3 \text{이므로 } a^c=\frac{1}{3}$$

$$\therefore f(-1)=a^{-b+c}=a^{-b} \times a^c=(a^b)^{-1} \times a^c \\ =\frac{1}{9} \times \frac{1}{3}=\frac{1}{27}$$

096 답 ④

$$\textcircled{4} \quad 0 < a < 1 \text{일 때, } x < y \text{이면 } f(x) > f(y) \text{이므로}$$

$$f(-2) > f(1)$$

$$\textcircled{5} \quad f(x)f(y)=a^x \times a^y=a^{x+y}=f(x+y)$$

097 답 1

$y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=3^{x-1}-2$$

이 그래프가 점 $(2, a)$ 를 지나므로

$$a=3^{2-1}-2=1$$

098 답 ①

$$\text{세 수 } A=\left(\frac{1}{5}\right)^{2x}, B=\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2}, C=5^x=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x} \text{에서}$$

$$0 < x < 1 \text{이므로 } 2x > 0, x^2 > 0, -x < 0$$

$$\text{또 } 2x-x^2=x(2-x) > 0 \text{이므로 } 2x > x^2$$

$$\therefore -x < x^2 < 2x$$

이때 밑이 1보다 작으므로

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$$

$$\therefore A < B < C$$

099 답 $\frac{1}{32}$

$$f(x)=-x^2+4x-5 \text{로 놓으면}$$

$$f(x)=-(x-2)^2-1$$

$$0 \leq x \leq 3 \text{에서 } f(0)=-5, f(2)=-1, f(3)=-2 \text{이므로}$$

$$-5 \leq f(x) \leq -1$$

$y=a^{f(x)}$ 에서 밑이 1보다 크므로 $f(x)=-1$ 일 때 최대이고 최댓값 a^{-1} 을 갖는다.

$$\text{즉, } a^{-1}=\frac{1}{2} \text{이므로 } a=2$$

따라서 $y=2^{f(x)}$ 은 $f(x)=-5$ 일 때 최소이고 최솟값은

$$2^{-5}=\frac{1}{32}$$

100 답 ⑤

$$y=2 \times 3^{x+1}-3^{2x}+a=-3^{2x}+6 \times 3^x+a$$

$$3^x=t \ (t>0) \text{로 놓으면 } 1 \leq x \leq 2 \text{에서}$$

$$3 \leq 3^x \leq 3^2 \quad \therefore 3 \leq t \leq 9$$

이때 주어진 함수는 $y=-t^2+6t+a=-(t-3)^2+9+a$ 이므로

$t=9$ 일 때 최소이고 최솟값 $-27+a$ 를 갖는다.

$$\text{즉, } -27+a=-25 \text{이므로 } a=2$$

따라서 $t=3$ 일 때 최대이고 최댓값은

$$9+2=11$$

101 답 9

$4^x>0, 4^{-x+2}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$y=4^x+4^{-x+2} \geq 2\sqrt{4^x \times 4^{-x+2}}=2 \times 4=8$$

이때 등호는 $4^x=4^{-x+2}$ 일 때 성립하므로

$$x=-x+2 \quad \therefore x=1$$

따라서 $a=1, m=8$ 이므로 $a+m=9$

102 답 -2

$$6^{x^2-x+6}=\left(\frac{1}{216}\right)^{x-3} \text{에서 } 6^{x^2-x+6}=6^{-3x+9}$$

$$\text{즉, } x^2-x+6=-3x+9 \text{이므로 } x^2+2x-3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 모든 근의 합은

$$-3+1=-2$$

103 답 4

점 A의 좌표를 $(a, 2^a)$ 이라 하면 두 점 A, B의 y좌표가 같으므로 점 B의 y좌표는 2^a 이다.

점 B는 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x=2^a \text{에서 } 2^{-2x}=2^a$$

$$-2x=a \text{이므로 } x=-\frac{a}{2}$$

$$\therefore B\left(-\frac{a}{2}, 2^a\right)$$

이때 $\overline{AB}=3$ 이므로

$$a-\left(-\frac{a}{2}\right)=3, \frac{3}{2}a=3 \quad \therefore a=2$$

따라서 상수 k의 값은 점 A의 y좌표와 같으므로

$$2^2=4$$

104 답 ②

$$y=2^{a-x}+1=2^a \times \left(\frac{1}{2}\right)^x+1 \text{에서 밑이 1보다 작으므로}$$

$x=-1$ 일 때 최대이고 최댓값은 $2^{a+1}+1$

$x=1$ 일 때 최소이고 최솟값은 $2^{a-1}+1$

이때 최댓값과 최솟값의 차가 6이므로

$$2^{a+1}+1-(2^{a-1}+1)=6$$

$$2^{a+1}-2^{a-1}=6, 2 \times 2^a-\frac{1}{2} \times 2^a=6$$

$$\frac{3}{2} \times 2^a=6, 2^a=4 \quad \therefore a=2$$

105 답 ①

$2^x-2^{1-x}=2$ 의 양변에 2^x 을 곱하면

$$(2^x)^2-2=2 \times 2^x$$

$$\therefore (2^x)^2-2 \times 2^x-2=0$$

$2^x=t \ (t>0)$ 로 놓으면

$$t^2-2t-2=0 \quad \therefore t=1+\sqrt{3} \ (\because t>0)$$

즉, $2^a=1+\sqrt{3}$ 이므로

$$4^a=(2^a)^2=(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$$

따라서 $a=4, b=2$ 이므로 $a+b=6$

106 답 ②

$$\begin{cases} 2 \times 3^x-3 \times 2^y=-6 \\ 3^{x-1}-2^{y+1}=-13 \end{cases} \text{에서 } \begin{cases} 2 \times 3^x-3 \times 2^y=-6 \\ \frac{3^x}{3}-2 \times 2^y=-13 \end{cases}$$

$3^x=X, 2^y=Y \ (X>0, Y>0)$ 로 놓으면

$$\begin{cases} 2X-3Y=-6 \\ \frac{X}{3}-2Y=-13 \end{cases} \text{ 즉 } \begin{cases} 2X-3Y=-6 \\ X-6Y=-39 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $X=9, Y=8$

$$\text{즉, } 3^x=9=3^2, 2^y=8=2^3 \text{이므로 } x=2, y=3$$

따라서 $a=2, b=3$ 이므로 $a\beta=2 \times 3=6$

107 답 ⑤

$$25^x-24 \times 5^x+k=0 \text{에서 } (5^x)^2-24 \times 5^x+k=0$$

$5^x=t \ (t>0)$ 로 놓으면

$$t^2-24t+k=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha+\beta=3$ 이고 방정식 $\textcircled{1}$ 의

두 근은 $5^\alpha, 5^\beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$k=5^\alpha \times 5^\beta=5^{\alpha+\beta}=5^3=125$$

108 답 5

$$(x+1)^{x^2+1}=(x+1)^{2x+1} \text{에서}$$

(i) $x+1=1$, 즉 $x=0$ 일 때

주어진 방정식은 $1=1$ 이므로 성립한다.

(ii) $x+1 \neq 1$, 즉 $x \neq 0$ 일 때

$$x^2+1=2x+1 \text{에서 } x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

그런데 $x \neq 0$ 이므로 $x=2$

(i), (ii)에서 $a=0+2=2$

$$(x+2)^{x-5}=4^{x-5}\text{에서}$$

$$(iii) x-5=0, \text{ 즉 } x=5\text{일 때}$$

주어진 방정식은 $7^0=4^0=1$ 이므로 성립한다.

$$(iv) x-5 \neq 0, \text{ 즉 } x \neq 5\text{일 때}$$

$$x+2=4\text{이므로 } x=2$$

$$(iii), (iv)\text{에서 } b=5+2=7$$

$$\therefore b-a=7-2=5$$

109 답 -3 < k < -2

$$3^{2x+1}+3k \times 3^x+k^2-k-6=0\text{에서}$$

$$3 \times (3^x)^2+3k \times 3^x+k^2-k-6=0$$

$$3^x=t(t>0)\text{로 놓으면}$$

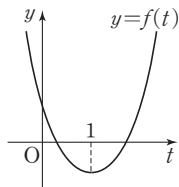
$$3t^2+3kt+k^2-k-6=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식의 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면 방정식 ①의 두 근은 $3^\alpha, 3^\beta$ 이므로

$$0 < 3^\alpha < 1, 3^\beta > 1$$

즉, 이차방정식 ①은 0과 1 사이의 한 개의 근을 갖고, 1보다 큰 한 개의 근을 갖는다.

$f(t)=3t^2+3kt+k^2-k-6$ 이라 하면 함수 $y=f(t)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로



$$(i) f(0)=k^2-k-6>0$$

$$(k+2)(k-3)>0$$

$$\therefore k < -2 \text{ 또는 } k > 3$$

$$(ii) f(1)=3+3k+k^2-k-6<0$$

$$k^2+2k-3<0, (k+3)(k-1)<0$$

$$\therefore -3 < k < 1$$

(i), (ii)를 동시에 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$-3 < k < -2$$

110 답 ①

$$4^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \text{에서 } 2^{2x} \geq 2^{-x+1}$$

밑이 1보다 크므로

$$2x \geq -x+1 \quad \therefore x \geq \frac{1}{3}$$

$$\therefore A = \left\{x \mid x \geq \frac{1}{3}\right\}$$

$$3^{2x+1}-82 \times 3^x+27 < 0\text{에서}$$

$$3 \times (3^x)^2-82 \times 3^x+27 < 0$$

$$3^x=t(t>0)\text{로 놓으면}$$

$$3t^2-82t+27 < 0, (3t-1)(t-27) < 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} < t < 27$$

즉, $3^{-1} < 3^x < 3^3$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$-1 < x < 3$$

$$\therefore B = \{x \mid -1 < x < 3\}$$

$$\therefore A \cap B = \left\{x \mid \frac{1}{3} \leq x < 3\right\}$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{1}{3}, \beta = 3\text{이므로 } \alpha + \beta = \frac{10}{3}$$

111 답 -2

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4x-2} - 8 > 0\text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^x\right\}^2 - 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^x - 8 > 0$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = t(t>0)\text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2t - 8 > 0, (t+2)(t-4) > 0$$

$$\therefore t > 4 (\because t > 0)$$

즉, $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ 이고 밑이 1보다 작으므로

$$x < -1$$

따라서 정수 x 의 최댓값은 -2 이다.

112 답 ④

(i) $0 < x < 1$ 일 때

$$x^2-5 > 4x\text{에서 } x^2-4x-5 > 0$$

$$(x+1)(x-5) > 0$$

$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 5$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해가 존재하지 않는다.

(ii) $x=1$ 일 때

$1 < 1$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x > 1$ 일 때

$$x^2-5 < 4x\text{에서 } x^2-4x-5 < 0$$

$$(x+1)(x-5) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 5$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x < 5$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$1 < x < 5$$

따라서 $\alpha=1, \beta=5$ 이므로 $\alpha+\beta=6$

113 답 ③

$$2^{x+1}-2^{\frac{x+4}{2}}+a > 0\text{에서}$$

$$2 \times 2^x - 2^2 \times 2^{\frac{x}{2}} + a > 0$$

$$2^{\frac{x}{2}}=t(t>0)\text{로 놓으면}$$

$$2t^2-4t+a > 0$$

$$\therefore 2(t-1)^2+a-2 > 0$$

이 부등식이 $t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 성립하려면

$$a-2 > 0 \quad \therefore a > 2$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 3이다.

114 답 4회

약품 A를 1회 투입할 때 세균의 수가 70% 감소하므로 남은 세균의 수는 30%이다.

처음 세균의 수를 a 라 하면 약품 A를 n 회 투입한 후 세균의 수는 $0.3^n \times a$ 이므로

$$0.3^n \times a = 0.0081a, 0.3^n = 0.3^4 \quad \therefore n=4$$

따라서 세균의 수가 처음 수의 0.81%가 되도록 하려면 약품 A를 4회 투입해야 한다.

001 답 2

$f(3)=6$ 에서 $\log_a 2+7=6$

$$\log_a 2 = -1 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$f(9)=b$ 에서

$$b = \log_{\frac{1}{2}} 8 + 7 = -\log_2 2^3 + 7 = -3 + 7 = 4$$

$$\therefore ab = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

002 답 ③

③ $y=\log_5 x$ 에서 밑이 1보다 크므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

003 답 ②

$y=\log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \log_3 (x-a) + b$$

이 식이 $y = \log_3 \left(\frac{x}{9} - 1 \right)$ 과 일치하므로

$$y = \log_3 \left(\frac{x}{9} - 1 \right) = \log_3 \frac{x-9}{9} = \log_3 (x-9) - \log_3 9 \\ = \log_3 (x-9) - 2$$

따라서 $a=9$, $b=-2$ 이므로

$$a+b=7$$

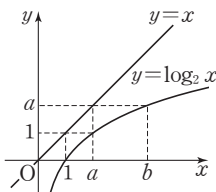
004 답 -3

오른쪽 그림에서

$$\log_2 a = 1 \text{이므로 } a=2$$

$$\log_2 b = a, \text{ 즉 } \log_2 b = 2 \text{이므로 } b=4$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{4}} 8ab = \log_{\frac{1}{4}} 64 = -\log_4 4^3 = -3$$



005 답 ⑤

$$y = \log_7 (x-1) + 6 \text{에서 } y-6 = \log_7 (x-1)$$

$$x-1 = 7^{y-6} \quad \therefore x = 7^{y-6} + 1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = 7^{x-6} + 1$$

따라서 $a=7$, $b=-6$, $c=1$ 이므로

$$a+b+c=2$$

006 답 ⑤

$$A = \log_3 10$$

$$B = 2 = \log_3 3^2 = \log_3 9$$

$$C = \log_9 80 = \log_{3^2} 80 = \frac{1}{2} \log_3 80 = \log_3 80^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{80}$$

이때 $\sqrt{80} < 9 < 10$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$\log_3 \sqrt{80} < \log_3 9 < \log_3 10$$

$$\therefore C < B < A$$

007 답 ③

$y = \log_2 (x-2) + 1$ 에서 밑이 1보다 크므로

$$x=18 \text{일 때 최대이고 최댓값은 } \log_2 (18-2) + 1 = 5$$

$$x=3 \text{일 때 최소이고 최솟값은 } \log_2 (3-2) + 1 = 1$$

$$\text{따라서 } M=5, m=1 \text{이므로 } M+m=6$$

008 답 ④

$f(x) = x^2 - 4x + 6$ 으로 놓으면

$$f(x) = (x-2)^2 + 2$$

$$3 \leq x \leq 7 \text{에서 } f(3)=3, f(7)=27 \text{이므로}$$

$$3 \leq f(x) \leq 27$$

$y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$ 에서 밑이 1보다 작으므로

$$f(x)=3 \text{일 때 최대이고 최댓값은 } \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$$

$$f(x)=27 \text{일 때 최소이고 최솟값은 } \log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$$

$$\text{따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은 } -1 \times (-3) = 3$$

009 답 4

$$y = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^4 + 5 = (\log_2 x)^2 - 4 \log_2 x + 5$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 16$ 에서

$$\log_2 1 \leq \log_2 x \leq \log_2 16 \quad \therefore 0 \leq t \leq 4$$

$$\text{이때 주어진 함수는 } y = t^2 - 4t + 5 = (t-2)^2 + 1$$

따라서 $t=0$ 또는 $t=4$ 일 때 최대이고 최댓값은 5, $t=2$ 일 때 최소이고 최솟값은 1이므로 $M=5$, $m=1$

$$\therefore M-m=4$$

010 답 ⑤

$y = x^{\log_2 4x}$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 y = \log_2 x^{\log_2 4x} = \log_2 4x \times \log_2 x$$

$$= (2 + \log_2 x) \log_2 x$$

$$= (\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 $2 \leq x \leq 8$ 에서

$$\log_2 2 \leq \log_2 x \leq \log_2 8 \quad \therefore 1 \leq t \leq 3$$

$$\text{이때 주어진 함수는 } \log_2 y = t^2 + 2t = (t+1)^2 - 1$$

따라서 $\log_2 y$ 는 $t=3$ 일 때 최댓값 15, $t=1$ 일 때 최솟값 3을 가지므로

$$\log_2 y = 15 \text{에서 } y = 2^{15}, \log_2 y = 3 \text{에서 } y = 2^3$$

$$\text{즉, } M = 2^{15}, m = 2^3 \text{이므로 } \frac{M}{m} = \frac{2^{15}}{2^3} = 2^{12}$$

011 답 $2\sqrt{2}$

$$y = \log_6 x + \log_x 36 = \log_6 x + \frac{1}{\log_{36} x} = \log_6 x + \frac{2}{\log_6 x}$$

이때 $x > 1$ 에서 $\log_6 x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\log_6 x + \frac{2}{\log_6 x} \geq 2\sqrt{\log_6 x \times \frac{2}{\log_6 x}} = 2\sqrt{2}$$

(단, 등호는 $\log_6 x = \sqrt{2}$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{2}$ 이다.

012 답 ④

$f(2)=5$ 에서 $\log_a 7+4=5$
 $\log_a 7=1 \quad \therefore a=7$
 $\therefore f(16)=\log_7 49+4=2+4=6$

013 답 ④

- ① $f(1)=\log_5 1=0$
 ② $f(25x)=\log_5 25x=\log_5 x+\log_5 25=f(x)+2$
 ③ $f\left(\frac{1}{x}\right)=\log_5 \frac{1}{x}=-\log_5 x=-f(x)$
 ④ $25^{f(x)}=25^{\log_5 x}=x^{\log_5 25}=x^2$
 ⑤ $f(x^3)=\log_5 x^3=3\log_5 x=3f(x)$

014 답 16

$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(n)$
 $=\log_{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{4}\right)$
 $\quad +\cdots+\log_{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{n}\right)$
 $=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{3}+\log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{4}+\cdots+\log_{\frac{1}{2}} \frac{n-1}{n}$
 $=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}\right)=\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{n}=\log_2 n$
 이때 $\log_2 n=4$ 이므로
 $n=2^4=16$

015 답 ④

- ③ $f(x)=\log_{0.3} x$ 에서 밑이 1보다 작으므로 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값은 감소한다.
 즉, $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$
 ④ 그래프의 점근선이 y 축이므로 y 축과 만나지 않는다.
 ⑤ $f(x)$ 는 일대일함수이므로 $f(x_1)=f(x_2)$ 이면 $x_1=x_2$

016 답 6

$y=\log_4(-x^2+x+12)$ 에서 $-x^2+x+12>0$ 이므로
 $x^2-x-12<0, (x+3)(x-4)<0$
 $\therefore A=\{x \mid -3<x<4\}$
 따라서 집합 A 의 원소 중 정수는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 6개이다.

017 답 ①

함수 $y=ax+b$ 의 그래프에서 $a>0, 0<b<1$
 $y=\log_b ax$ 에서 $0<b<1$ 이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
 또 $a>0$ 이므로 $ax>0$ 에서 $x>0$ 이다.
 따라서 $y=\log_b ax$ 의 그래프의 개형은 ①이다.

018 답 4

$y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y=\log_2(x-a)+b$

이 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
 $-y=\log_2(x-a)+b$
 $\therefore y=-\log_2(x-a)-b$
 이 식이 $y=\log_{\frac{1}{2}}(4x-8)$ 과 일치하므로
 $y=\log_{\frac{1}{2}}(4x-8)=-\log_2 4(x-2)$
 $=-\log_2(x-2)-\log_2 4=-\log_2(x-2)-2$
 따라서 $a=2, b=2$ 이므로 $a+b=4$

019 답 ①

ㄱ. $y=\log_{\frac{1}{2}} x=-\log_2 x$ 에서 $-y=\log_2 x$ 이므로 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.
 ㄴ. $y=-\log_{\frac{1}{2}} 2x=\log_2 2x=\log_2 x+1$ 이므로 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
 ㄷ. $y=2\log_2 x=\log_{2^{\frac{1}{2}}} x=\log_{\sqrt{2}} x$ 이므로 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.
 ㄹ. $y=\frac{1}{2}\log_4(x+2)-1=\log_{\sqrt{4}}(x+2)-1=\log_{16}(x+2)-1$ 이므로 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.
 따라서 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

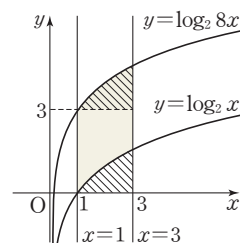
020 답 ④

그래프의 점근선의 방정식이 $x=-3$ 이므로 $a=3$
 또 이 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로
 $3=\log_3(0+3)+b \quad \therefore b=2$
 $\therefore ab=3 \times 2=6$

021 답 ①

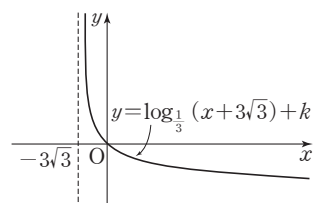
$y=\log_2 8x=\log_2 x+\log_2 8$
 $=\log_2 x+3$

의 그래프는 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
 즉, 오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이는 서로 같으므로 구하는 넓이는 $(3-1) \times 3=6$



022 답 ③

$y=\log_{\frac{1}{3}}(x+3\sqrt{3})+k$ 의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-3\sqrt{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.
 따라서 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $x=0$ 일 때 $y \geq 0$ 이어야 한다.
 즉, $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3}+k \geq 0$ 이므로
 $-\frac{3}{2}+k \geq 0 \quad \therefore k \geq \frac{3}{2}$
 따라서 k 의 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 이다.



023 답 1/3

오른쪽 그림에서

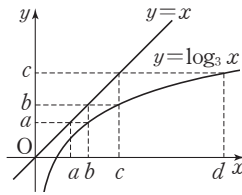
$$\log_3 b = a, \log_3 d = c \text{ 이므로}$$

$$a - c = \log_3 b - \log_3 d = \log_3 \frac{b}{d}$$

이때 $d = 3b$ 이므로

$$a - c = \log_3 \frac{1}{3} = -1$$

$$\therefore 3^{a-c} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$



024 답 ④

네 점 $A(a, \log_4 a)$, $B(a, \log_{16} a)$, $C(b, \log_4 b)$, $D(b, \log_{16} b)$ 에 대하여

$$\overline{AB} = \log_4 a - \log_{16} a = \log_4 a - \frac{1}{2} \log_4 a = \frac{1}{2} \log_4 a$$

$$\overline{CD} = \log_4 b - \log_{16} b = \log_4 b - \frac{1}{2} \log_4 b = \frac{1}{2} \log_4 b$$

이때 $\overline{AB} : \overline{CD} = 1 : 2$ 에서 $\overline{CD} = 2\overline{AB}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \log_4 b = 2 \times \frac{1}{2} \log_4 a, \log_4 b = \log_4 a^2$$

$$\therefore b = a^2$$

025 답 20/3

$y = \log_{\frac{1}{9}} x$ 에서

$$x = \frac{1}{3} \text{ 일 때, } y = \log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$x = 3 \text{ 일 때, } y = \log_{\frac{1}{9}} 3 = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), C\left(3, -\frac{1}{2}\right)$$

$y = \log_{\sqrt{3}} x$ 에서

$$x = \frac{1}{3} \text{ 일 때, } y = \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3} = -2$$

$$x = 3 \text{ 일 때, } y = \log_{\sqrt{3}} 3 = 2$$

$$\therefore B\left(\frac{1}{3}, -2\right), D(3, 2)$$

따라서 $\square ABCD$ 의 넓이는

$$\left\{\frac{1}{2} - (-2)\right\} \times \left(3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{20}{3}$$

026 답 9

$y = 3^x - k$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 좌표를 구하면

$$3^x - k = 0 \text{ 에서 } 3^x = k \quad \therefore x = \log_3 k$$

$$\therefore A(\log_3 k, 0)$$

$y = \log_3(x - 2k)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 좌표를 구하면

$$0 = \log_3(x - 2k) \text{ 에서 } x - 2k = 1 \quad \therefore x = 2k + 1$$

$$\therefore B(2k + 1, 0)$$

이때 $\overline{AB} = 2k$ 이므로

$$2k + 1 - \log_3 k = 2k$$

$$\log_3 k = 1 \quad \therefore k = 3$$

$y = 3^x - k$ 의 점근선의 방정식은 $y = -k$ 이고, $y = \log_3(x - 2k)$ 의

점근선의 방정식은 $x = 2k$ 이므로

$$a = 2k = 6, b = -k = -3$$

$$\therefore a - b = 6 - (-3) = 9$$

027 답 ⑤

$y = \log(x + 3) + a$ 에서 $y - a = \log(x + 3)$

$$x + 3 = 10^{y-a} \quad \therefore x = 10^{y-a} - 3$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = 10^{x-a} - 3$

따라서 $a = 3, b = 10, c = -3$ 이므로 $a + b + c = 10$

028 답 ②

$$f(8) = \log_2 8 - 1 = 2 \text{ 이므로 } g(2) = 8$$

$$g(g(a)) = 8 \text{ 에서 } g(a) = 2$$

$$f(2) = 2 - 3 = -1 \text{ 이므로 } g(-1) = 2$$

$$g(a) = 2 \text{ 에서 } a = -1$$

029 답 29

$g(x)$ 는 $y = \log_3 x$ 의 역함수이므로 $g(x) = 3^x$

점 A는 $y = g(x)$ 의 그래프와 y 축의 교점이므로 $A(0, 1)$

점 B의 y 좌표가 1이므로 $1 = \log_3 x$ 에서 $x = 3 \quad \therefore B(3, 1)$

$$\therefore \overline{AB} = 3$$

점 C의 x 좌표가 3이므로 $C(3, 3^3)$, 즉 $C(3, 27)$

$$\therefore \overline{BC} = 26$$

$$\therefore \overline{AB} + \overline{BC} = 3 + 26 = 29$$

030 답 ②

$g(x)$ 는 $f(x) = 2^x$ 의 역함수이므로 $g(x) = \log_2 x$

점 A의 y 좌표가 4이므로

$$2^x = 4 \quad \therefore x = 2$$

$$\therefore A(2, 4)$$

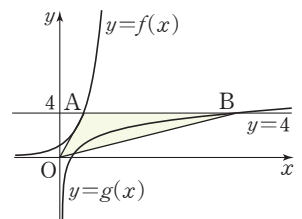
점 B의 y 좌표가 4이므로

$$\log_2 x = 4 \quad \therefore x = 2^4 = 16$$

$$\therefore B(16, 4)$$

따라서 $\triangle OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (16 - 2) \times 4 = 28$$



031 답 ③

$y = \log_a x + b$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은

$y = \log_a x + b$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.

이때 두 교점의 x 좌표가 각각 1, 2이므로 $y = \log_a x + b$ 의 그래프는 두 점 $(1, 1), (2, 2)$ 를 지난다.

$$1 = \log_a 1 + b \text{ 에서 } b = 1$$

$$2 = \log_a 2 + 1 \text{ 에서}$$

$$\log_a 2 = 1 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$

032 답 6

$y = \log_a x$ 는 $y = a^x$ 의 역함수이므로 두 함수 $y = a^x$, $y = \log_a x$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

점 A의 좌표를 $(k, 8-k)$ 라 하면 점 B의 좌표는 $(8-k, k)$ 이므로 $\overline{AB}^2 = (8-2k)^2 + (2k-8)^2 = (4\sqrt{2})^2$

$$2(2k-8)^2 = 32, 8(k-4)^2 = 32$$

$$(k-4)^2 = 4, k-4 = \pm 2 \quad \therefore k=2 \text{ 또는 } k=6$$

이때 점 A의 x 좌표는 점 B의 x 좌표보다 작으므로

$$k=2$$

따라서 A(2, 6), B(6, 2)이고, 점 A가 $y = a^x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$a^2 = 6$$

033 답 ④

$$A = 2\log_{0.1} 4\sqrt{2} = \log_{0.1} (4\sqrt{2})^2 = \log_{0.1} 32$$

$$B = \log_{0.1} 2 - 1 = \log_{0.1} 2 - \log_{0.1} 0.1 = \log_{0.1} \frac{2}{0.1} = \log_{0.1} 20$$

$$C = \log \frac{1}{50} = -\log 50 = \log_{0.1} 50$$

이때 $20 < 32 < 50$ 이고 밑이 1보다 작으므로

$$\log_{0.1} 50 < \log_{0.1} 32 < \log_{0.1} 20$$

$$\therefore C < A < B$$

034 답 $A < C < B$

$\frac{1}{9} < x < \frac{1}{3}$ 의 각 변에 밑이 $\frac{1}{3}$ 인 로그를 취하면

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} < \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} \quad \therefore 1 < \log_{\frac{1}{3}} x < 2$$

$$A = \log_3 x = -\log_{\frac{1}{3}} x \text{이므로}$$

$$1 < \log_{\frac{1}{3}} x < 2 \text{에서 } -2 < -\log_{\frac{1}{3}} x < -1$$

$$\therefore -2 < A < -1$$

$$1 < \log_{\frac{1}{3}} x < 2 \text{에서 } 1 < (\log_{\frac{1}{3}} x)^2 < 4 \text{이므로}$$

$$1 < B < 4$$

$1 < \log_{\frac{1}{3}} x < 2$ 의 각 변에 밑이 $\frac{1}{2}$ 인 로그를 취하면

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 < \log_{\frac{1}{2}} (\log_{\frac{1}{3}} x) < \log_{\frac{1}{2}} 1 \text{에서 } -1 < \log_{\frac{1}{2}} (\log_{\frac{1}{3}} x) < 0$$

$$\therefore -1 < C < 0 \quad \therefore A < C < B$$

035 답 ①

$0 < a < 1$ 이므로 $a < 1 < b$ 의 각 변에 밑이 a 인 로그를 취하면

$$\log_a b < \log_a 1 < \log_a a \quad \therefore \log_a b < 0 < 1$$

또 $b > 1$ 이므로 $a < 1 < b$ 의 각 변에 밑이 b 인 로그를 취하면

$$\log_b a < \log_b 1 < \log_b b$$

$$\log_b a < 0 < 1 \quad \therefore -\log_b a > 0$$

$$\log_b \frac{b}{a} = \log_b b - \log_b a = 1 - \log_b a \text{이므로}$$

$$1 - \log_b a > -\log_b a$$

$$\therefore \log_a b < -\log_b a < \log_b \frac{b}{a}$$

$$\therefore A < B < C$$

036 답 15

$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+4) - 3$ 에서 밑이 1보다 작으므로

$x = -3$ 일 때 최대이고 최댓값은

$$\log_{\frac{1}{3}}(-3+4) - 3 = -3$$

$x = 5$ 일 때 최소이고 최솟값은

$$\log_{\frac{1}{3}}(5+4) - 3 = -2 - 3 = -5$$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은 $-3 \times (-5) = 15$

037 답 ①

$y = \log_4(x-5) + b$ 에서 밑이 1보다 크므로 $x = 69$ 일 때 최댓값,

$x = a$ 일 때 최솟값을 갖는다.

즉, $\log_4(69-5) + b = 1$ 이므로

$$3 + b = 1 \quad \therefore b = -2$$

또 $\log_4(a-5) - 2 = -2$ 이므로 $\log_4(a-5) = 0$

$$a-5 = 1 \quad \therefore a = 6$$

$$\therefore ab = 6 \times (-2) = -12$$

038 답 ⑤

$f(x) = -x^2 + 2x + 9$ 로 놓으면

$$f(x) = -(x-1)^2 + 10$$

$1 \leq x \leq 4$ 에서 $f(1) = 10$, $f(4) = 1$ 이므로

$$1 \leq f(x) \leq 10$$

$y = \log_2 f(x)$ 에서 밑이 1보다 크므로

$f(x) = 10$ 일 때 최대이고 최댓값은 $\log_2 10$

$f(x) = 1$ 일 때 최소이고 최솟값은 $\log_2 1 = 0$

따라서 $M = \log_2 10$, $m = 0$ 이므로 $M + m = \log_2 10$

039 답 ①

진수의 조건에서 $x+2 > 0$, $4-x > 0$

$$\therefore -2 < x < 4$$

$$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+2) + \log_{\frac{1}{3}}(4-x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x^2 + 2x + 8) \text{이므로}$$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 8 \text{로 놓으면 } f(x) = -(x-1)^2 + 9$$

$-2 < x < 4$ 에서 $f(-2) = f(4) = 0$, $f(1) = 9$ 이므로 $0 < f(x) \leq 9$

$y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$ 에서 밑이 1보다 작으므로 $f(x) = 9$ 일 때 최소이고

최솟값은

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$$

040 답 $\frac{1}{2}$

$f(x) = -x^2 + 4x$ 로 놓으면

$$f(x) = -(x-2)^2 + 4$$

$1 \leq x \leq 3$ 에서 $f(1) = f(3) = 3$, $f(2) = 4$ 이므로

$$3 \leq f(x) \leq 4$$

$y = \log_a f(x)$ 에서 $0 < a < 1$ 이므로 $f(x) = 4$ 일 때 최소이고 최솟값

$\log_a 4$ 를 갖는다.

즉, $\log_a 4 = -2$ 이므로 $a^{-2} = 4$

$$a^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore a = \frac{1}{2} (\because 0 < a < 1)$$

041 답 ④

$$x+2y=20 \text{에서 } 2y=20-x \quad (0 < x < 20)$$

$$\begin{aligned} \therefore \log x + \log 2y &= \log(x \times 2y) = \log x(20-x) \\ &= \log(-x^2+20x) \end{aligned}$$

$$f(x) = -x^2+20x \text{로 놓으면 } f(x) = -(x-10)^2+100$$

$$0 < x < 20 \text{에서 } f(0)=f(20)=0, f(10)=100 \text{이므로}$$

$$0 < f(x) \leq 100$$

$\log f(x)$ 에서 밑이 1보다 크므로 $f(x)=100$ 일 때 최대이고 최댓값은

$$\log 100=2$$

다른 풀이 $\log x + \log 2y = \log 2xy$ 이고 밑이 1보다 크므로

$\log 2xy$ 는 xy 가 최대일 때 최댓값을 갖는다.

이때 $x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+2y \geq 2\sqrt{2xy} \quad (\text{단, 등호는 } x=2y \text{일 때 성립})$$

$$\text{또 } x+2y=20 \text{이므로 } 20 \geq 2\sqrt{2xy}, 10 \geq \sqrt{2xy}$$

$$100 \geq 2xy \quad \therefore xy \leq 50$$

따라서 xy 의 최댓값은 50이므로 $\log 2xy$ 의 최댓값은 $\log 100=2$

042 답 2

$$f(x) = |x^2-2x-8| \text{로 놓으면}$$

$$f(x) = |(x-1)^2-9|$$

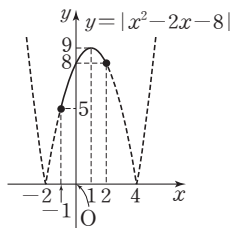
$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로 $5 \leq f(x) \leq 9$

$y=\log_3 f(x)$ 에서 밑이 1보다 크므로

$f(x)=9$ 일 때 최대이고 최댓값은

$$\log_3 9=2$$



043 답 8

$$\log_{\frac{1}{2}} x = t \text{로 놓으면 } \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \text{에서 } \log_{\frac{1}{2}} 2 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

$$\therefore -1 \leq t \leq 1$$

$$\text{이때 주어진 함수는 } y=2t^2+4t=2(t+1)^2-2$$

따라서 $t=1$ 일 때 최대이고 최댓값은 6, $t=-1$ 일 때 최소이고 최솟값은 -2이므로 $M=6, m=-2$

$$\therefore M-m=8$$

044 답 ④

$$y = \log_3 3x \times \log_{\frac{9}{x^2}} = \log_3 3x \times \log_3 \frac{x^2}{9}$$

$$= (\log_3 3 + \log_3 x)(\log_3 x^2 - \log_3 9)$$

$$= (1 + \log_3 x)(2 \log_3 x - 2)$$

$$= 2(\log_3 x)^2 - 2$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면 } 1 \leq x \leq 27 \text{에서 } \log_3 1 \leq \log_3 x \leq \log_3 27$$

$$\therefore 0 \leq t \leq 3$$

$$\text{이때 주어진 함수는 } y=2t^2-2$$

따라서 $t=3$ 일 때 최대이고 최댓값은 16, $t=0$ 일 때 최소이고 최솟값은 -2이므로 구하는 합은

$$16 + (-2) = 14$$

045 답 9

$$y = \log_4 x \times \log_4 \frac{16}{x} + k$$

$$= (\log_4 x) \times (\log_4 16 - \log_4 x) + k$$

$$= (\log_4 x) \times (2 - \log_4 x) + k$$

$$= -(\log_4 x)^2 + 2 \log_4 x + k$$

$\log_4 x = t$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = -t^2 + 2t + k = -(t-1)^2 + k + 1$$

따라서 $t=1$ 일 때 최대이고 최댓값은 $k+1$ 이므로

$$k+1=10 \quad \therefore k=9$$

046 답 160

$$x^{\log 3} = 3^{\log x} \text{이므로}$$

$$y = 3^{\log x} \times x^{\log 3} - 3(3^{\log x} + x^{\log 3}) + 25$$

$$= 3^{\log x} \times 3^{\log x} - 3(3^{\log x} + 3^{\log x}) + 25$$

$$= (3^{\log x})^2 - 6 \times 3^{\log x} + 25$$

$3^{\log x} = t$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = t^2 - 6t + 25 = (t-3)^2 + 16$$

따라서 $t=3$ 일 때 최소이고 최솟값 16을 가지므로

$$m=16$$

$$3^{\log x} = 3 \text{에서 } \log x = 1 \quad \therefore x = 10 \quad \therefore a = 10$$

$$\therefore am = 160$$

047 답 $\frac{1}{81}$

$y = x^{-4+\log_3 x}$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 y = \log_3 x^{-4+\log_3 x} = (-4 + \log_3 x) \log_3 x$$

$$= (\log_3 x)^2 - 4 \log_3 x$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 27$ 에서

$$\log_3 1 \leq \log_3 x \leq \log_3 27 \quad \therefore 0 \leq t \leq 3$$

$$\text{이때 주어진 함수는 } \log_3 y = t^2 - 4t = (t-2)^2 - 4$$

따라서 $\log_3 y$ 는 $t=0$ 일 때 최댓값 0, $t=2$ 일 때 최솟값 -4를 가지므로

$$\log_3 y = 0 \text{에서 } y = 1$$

$$\log_3 y = -4 \text{에서 } y = 3^{-4} = \frac{1}{81}$$

$$\text{즉, } M=1, m=\frac{1}{81} \text{이므로 } Mm=\frac{1}{81}$$

048 답 1000

$$y = \frac{10x^4}{x^{\log x}} \text{에서 } y = 10x^{4-\log x} \text{의 양변에 상용로그를 취하면}$$

$$\log y = \log 10x^{4-\log x} = \log 10 + \log x^{4-\log x}$$

$$= 1 + (4 - \log x) \log x$$

$$= -(\log x)^2 + 4 \log x + 1$$

$$\log x = t \text{로 놓으면 } \log y = -t^2 + 4t + 1 = -(t-2)^2 + 5$$

따라서 $\log y$ 는 $t=2$ 일 때 최댓값 5를 가지므로

$$\log x = 2 \text{에서 } x = 10^2 \quad \therefore a = 10^2$$

$$\log y = 5 \text{에서 } y = 10^5 \quad \therefore M = 10^5$$

$$\therefore \frac{M}{a} = \frac{10^5}{10^2} = 10^3 = 1000$$

049 [답] ③

$y = \log x - \log_x \frac{1}{10000} = \log x - \log_x 10^{-4}$
 $= \log x + 4 \log_x 10 = \log x + \frac{4}{\log x}$
 이때 $x > 1$ 에서 $\log x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $\log x + \frac{4}{\log x} \geq 2\sqrt{\log x \times \frac{4}{\log x}} = 2 \times 2 = 4$
 (단, 등호는 $\log x = 2$ 일 때 성립)
 따라서 구하는 최솟값은 4이다.

050 [답] $\frac{5}{3}$

$\frac{1}{9} < x < 4$ 에서 $9x > 1$, $\frac{4}{x} > 1$ 이므로 $\log_6 9x > 0$, $\log_6 \frac{4}{x} > 0$
 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $\log_6 9x + \log_6 \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{\log_6 9x \times \log_6 \frac{4}{x}}$
 이때 $\log_6 9x + \log_6 \frac{4}{x} = \log_6 \left(9x \times \frac{4}{x}\right) = \log_6 36 = 2$ 이므로
 $2 \geq 2\sqrt{\log_6 9x \times \log_6 \frac{4}{x}}$, $\sqrt{\log_6 9x \times \log_6 \frac{4}{x}} \leq 1$
 $\therefore 0 < \log_6 9x \times \log_6 \frac{4}{x} \leq 1$
 즉, $\log_6 9x \times \log_6 \frac{4}{x}$ 의 최댓값은 1이므로 $M = 1$
 한편 등호는 $\log_6 9x = \log_6 \frac{4}{x}$, 즉 $9x = \frac{4}{x}$ 일 때 성립하므로
 $x^2 = \frac{4}{9}$ $\therefore x = \frac{2}{3}$ ($\because \frac{1}{9} < x < 4$) $\therefore a = \frac{2}{3}$
 $\therefore a + M = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$

051 [답] $x = 9$

진수의 조건에서 $x^2 > 0$, $x - 6 > 0$
 $\therefore x > 6$ ㉠
 $\log_3 x^2 + \log_3 (x - 6) = 3$ 에서 $\log_3 x + \log_3 (x - 6) = 3$
 $\therefore \log_3 (x^2 - 6x) = \log_3 27$
 즉, $x^2 - 6x = 27$ 이므로 $x^2 - 6x - 27 = 0$
 $(x + 3)(x - 9) = 0$ $\therefore x = -3$ 또는 $x = 9$
 이때 ㉠에 의하여 $x = 9$

052 [답] ⑤

$(\log_6 x)^2 + \log_6 x^2 = \log_6 36x^3$ 에서
 $(\log_6 x)^2 + 2 \log_6 x = \log_6 36 + \log_6 x^3$
 $\therefore (\log_6 x)^2 - \log_6 x - 2 = 0$
 $\log_6 x = t$ 로 놓으면 $t^2 - t - 2 = 0$
 $(t + 1)(t - 2) = 0$ $\therefore t = -1$ 또는 $t = 2$
 즉, $\log_6 x = -1$ 또는 $\log_6 x = 2$ 이므로
 $x = 6^{-1} = \frac{1}{6}$ 또는 $x = 6^2 = 36$
 따라서 $a = \frac{1}{6}$, $\beta = 36$ 이므로
 $\beta - 6a = 36 - 6 \times \frac{1}{6} = 35$

053 [답] $\frac{1}{4}$

$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + \log_2 \frac{x^2}{4} = 0$ 에서
 $(-\log_2 x)^2 + \log_2 x^2 - \log_2 4 = 0$
 $\therefore (\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x - 2 = 0$
 $\log_2 x = t$ 로 놓으면 $t^2 + 2t - 2 = 0$
 이 이차방정식의 두 근은 $\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과
 계수의 관계에 의하여
 $\log_2 \alpha + \log_2 \beta = -2$, $\log_2 \alpha \beta = -2$
 $\therefore \alpha \beta = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

054 [답] $\frac{1}{100}$

$x^{\log x} = \frac{1000}{x^2}$ 의 양변에 상용로그를 취하면
 $\log x^{\log x} = \log \frac{1000}{x^2}$
 $(\log x)^2 = \log 1000 - \log x^2$
 $\therefore (\log x)^2 + 2 \log x - 3 = 0$
 $\log x = t$ 로 놓으면 $t^2 + 2t - 3 = 0$
 $(t + 3)(t - 1) = 0$ $\therefore t = -3$ 또는 $t = 1$
 즉, $\log x = -3$ 또는 $\log x = 1$ 이므로
 $x = 10^{-3} = \frac{1}{1000}$ 또는 $x = 10$
 따라서 모든 근의 곱은 $\frac{1}{1000} \times 10 = \frac{1}{100}$

055 [답] ④

진수의 조건에서 $x + 8 > 0$, $x - 4 > 0$
 $\therefore x > 4$ ㉠
 $\log_{25} (x + 8) < \log_5 (x - 4)$ 에서
 $\log_{25} (x + 8) < \log_{25} (x - 4)^2$
 $\therefore \log_{25} (x + 8) < \log_{25} (x^2 - 8x + 16)$
 밑이 1보다 크므로 $x + 8 < x^2 - 8x + 16$
 $x^2 - 9x + 8 > 0$, $(x - 1)(x - 8) > 0$
 $\therefore x < 1$ 또는 $x > 8$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $x > 8$
 따라서 자연수 x 의 최솟값은 9이다.

056 [답] ②

진수의 조건에서 $x > 0$, $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$
 $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 1$ 에서 $x < 1$
 $\therefore 0 < x < 1$ ㉠
 $\log_2 (\log_{\frac{1}{2}} x) \leq 2$ 에서 $\log_2 (\log_{\frac{1}{2}} x) \leq \log_2 4$
 밑이 1보다 크므로 $\log_{\frac{1}{2}} x \leq 4$
 $\log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$
 밑이 1보다 작으므로 $x \geq \frac{1}{16}$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{16} \leq x < 1$

057 답 20

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$(\log_{\frac{1}{4}} x)^2 + \log_{\frac{1}{4}} \frac{x^3}{16} \leq 0 \text{에서}$$

$$(\log_{\frac{1}{4}} x)^2 + \log_{\frac{1}{4}} x^3 - \log_{\frac{1}{4}} 16 \leq 0$$

$$\therefore (\log_{\frac{1}{4}} x)^2 + 3\log_{\frac{1}{4}} x + 2 \leq 0$$

$$\log_{\frac{1}{4}} x = t \text{로 놓으면 } t^2 + 3t + 2 \leq 0$$

$$(t+2)(t+1) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq t \leq -1$$

$$\text{즉, } -2 \leq \log_{\frac{1}{4}} x \leq -1 \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \leq \log_{\frac{1}{4}} x \leq \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } 4 \leq x \leq 16 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $4 \leq x \leq 16$

따라서 $a=4$, $\beta=16$ 이므로 $a+\beta=20$

058 답 9

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$x^{\log_3 x} < 27x^2$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x^{\log_3 x} < \log_3 27x^2$$

$$(\log_3 x)^2 < \log_3 27 + \log_3 x^2$$

$$\therefore (\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 3 < 0$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 2t - 3 < 0$$

$$(t+1)(t-3) < 0 \quad \therefore -1 < t < 3$$

$$\text{즉, } -1 < \log_3 x < 3 \text{이므로 } \log_3 3^{-1} < \log_3 x < \log_3 3^3$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{3} < x < 27 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{3} < x < 27$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $\beta=27$ 이므로 $a\beta=9$

059 답 ①

$$(\log x)^2 - \log ax^2 > 0 \text{에서 } (\log x)^2 - (\log a + \log x^2) > 0$$

$$\therefore (\log x)^2 - 2\log x - \log a > 0$$

$$\log x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 2t - \log a > 0$$

이 부등식이 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식

$$t^2 - 2t - \log a = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$\frac{D}{4} = 1 + \log a < 0, \log a < -1$$

$$\log a < \log 10^{-1}$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } a < \frac{1}{10}$$

$$\text{이때 } a > 0 \text{이므로 } 0 < a < \frac{1}{10}$$

060 답 10 m

동굴 입구의 빛의 밝기를 a 라 하고, 빛의 밝기가 동굴 입구의 10%,

즉 $\frac{1}{10}$ 이 되는 곳을 동굴 입구로부터 x m라 하면

$$a \times \left(\frac{4}{5}\right)^x = a \times \frac{1}{10}, \left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{1}{10}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$x \log \frac{4}{5} = \log \frac{1}{10}, x(3 \log 2 - 1) = -1$$

$$x(3 \times 0.3 - 1) = -1, -0.1x = -1$$

$$\therefore x = 10$$

따라서 빛의 밝기가 동굴 입구의 10%가 되는 곳은 동굴 입구로부터 10 m 들어간 곳이다.

061 답 $x = \frac{5}{3}$

진수의 조건에서 $x+1 > 0$, $3x-2 > 0$

$$\therefore x > \frac{2}{3} \quad \dots\dots ㉠$$

$$\log_8 (x+1) = 1 - \frac{1}{3} \log_2 (3x-2) \text{에서}$$

$$\frac{1}{3} \log_2 (x+1) + \frac{1}{3} \log_2 (3x-2) = 1$$

$$\log_2 (x+1)(3x-2) = 3$$

$$\therefore \log_2 (3x^2 + x - 2) = \log_2 8$$

$$\text{즉, } 3x^2 + x - 2 = 8 \text{이므로 } 3x^2 + x - 10 = 0$$

$$(x+2)(3x-5) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}$$

$$\text{이때 ㉠에 의하여 } x = \frac{5}{3}$$

062 답 ②

진수의 조건에서 $x-1 > 0$, $4-x > 0$

$$\therefore 1 < x < 4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\log_2 (x-1) - 1 = \log_4 (4-x) \text{에서}$$

$$\log_4 (x-1)^2 = \log_4 (4-x) + \log_4 4$$

$$\therefore \log_4 (x-1)^2 = \log_4 4(4-x)$$

$$\text{즉, } (x-1)^2 = 4(4-x) \text{이므로 } x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x+5)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 3$$

이때 ㉠에 의하여 $x = 3$

따라서 $a=3$ 이므로 $a^2=9$

063 답 ②

밑과 진수의 조건에서

$$x^2 - 2x + 1 > 0, x^2 - 2x + 1 \neq 1, 2 - 3x > 0$$

$$\therefore x < 0 \text{ 또는 } 0 < x < \frac{2}{3} \quad \dots\dots ㉠$$

(i) $x^2 - 2x + 1 = 4$ 일 때

$$x^2 - 2x - 3 = 0, (x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

이때 ㉠에 의하여 $x = -1$

(ii) $2 - 3x = 1$ 일 때

$$3x = 1 \quad \therefore x = \frac{1}{3}$$

(i), (ii)에서 $x = -1$ 또는 $x = \frac{1}{3}$

따라서 모든 근의 합은 $-1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

064 [답] 4

진수의 조건에서 $x > 0, y > 0$ ㉠

$$\log_2 \{\log(x^2 + y^2)\} = 0 \text{에서 } \log(x^2 + y^2) = 1$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 10$$

$$\log_3 \sqrt{x} + \log_3 y = \frac{1}{2} \text{에서 } \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 y = \frac{1}{2}$$

$$\log_3 x + \log_3 y = 1$$

$$\log_3 xy = 1 \quad \therefore xy = 3$$

즉, 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \\ &= 10 + 2 \times 3 = 16 \end{aligned}$$

㉠에 의하여 $x+y=4$

$$\therefore \alpha + \beta = 4$$

065 [답] 4

$$\log_2 x^2 + \log_2 y^2 = \log_2 (x+y+3)^2 \text{에서}$$

$$\log_2 x^2 y^2 = \log_2 (x+y+3)^2$$

$$(xy)^2 = (x+y+3)^2$$

이때 x, y 는 양의 정수이므로

$$xy = x+y+3 \quad \therefore (x-1)(y-1) = 4$$

$$(i) \ x-1=1, y-1=4 \text{일 때, } x=2, y=5$$

$$(ii) \ x-1=2, y-1=2 \text{일 때, } x=3, y=3$$

$$(iii) \ x-1=4, y-1=1 \text{일 때, } x=5, y=2$$

(i), (ii), (iii)에서 $x+2y$ 의 최댓값은 12이다.

066 [답] 4

$$(\log_2 x)^2 - \log_4 x^6 + 2 = 0 \text{에서}$$

$$(\log_2 x)^2 - 3 \log_2 x + 2 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 3t + 2 = 0, (t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=2$$

즉, $\log_2 x = 1$ 또는 $\log_2 x = 2$ 이므로

$$x=2 \text{ 또는 } x=2^2=4$$

따라서 $\alpha=2, \beta=4$ 이므로 $\log_a \beta = \log_2 4 = 2$

067 [답] $\frac{1}{64}$

$$\log_4 4x \times \log_4 16x = 6 \text{에서}$$

$$(\log_4 4 + \log_4 x)(\log_4 16 + \log_4 x) = 6$$

$$\therefore (\log_4 x)^2 + 3 \log_4 x - 4 = 0$$

$\log_4 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 3t - 4 = 0, (t+4)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -4 \text{ 또는 } t = 1$$

즉, $\log_4 x = -4$ 또는 $\log_4 x = 1$ 이므로

$$x = 4^{-4} = \frac{1}{256} \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 두 근의 곱은 $\frac{1}{256} \times 4 = \frac{1}{64}$

068 [답] $x = \frac{1}{27}$ 또는 $x = \frac{1}{3}$

밑과 진수의 조건에서

$$x > 0, x \neq 1$$

$$\log_9 x^2 + 3 \log_x 3 + 4 = 0 \text{에서}$$

$$\log_3 x + \frac{3}{\log_3 x} + 4 = 0$$

$\log_3 x = t (t \neq 0)$ 로 놓으면

$$t + \frac{3}{t} + 4 = 0, t^2 + 4t + 3 = 0$$

$$(t+3)(t+1) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = -1$$

즉, $\log_3 x = -3$ 또는 $\log_3 x = -1$ 이므로

$$x = 3^{-3} = \frac{1}{27} \text{ 또는 } x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

069 [답] 5

$$x^{\log_5 3} = 3^{\log_5 x} \text{이므로}$$

$$3^{\log_5 x} \times x^{\log_5 3} - 2 \times 3^{\log_5 x} - 3 = 0 \text{에서}$$

$$(3^{\log_5 x})^2 - 2 \times 3^{\log_5 x} - 3 = 0$$

$3^{\log_5 x} = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$t^2 - 2t - 3 = 0, (t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = 3 (\because t > 0)$$

즉, $3^{\log_5 x} = 3$ 이므로 $\log_5 x = 1$

$$\therefore x = 5$$

070 [답] 4

$\log_3 x = X, \log_2 y = Y$ 로 놓으면

$$\begin{cases} X+Y=4 \\ XY=3 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면

$$X=1, Y=3 \text{ 또는 } X=3, Y=1$$

즉, $\log_3 x = 1, \log_2 y = 3$ 또는 $\log_3 x = 3, \log_2 y = 1$ 이므로

$$x=3, y=2^3=8 \text{ 또는 } x=3^3=27, y=2$$

이때 $\alpha < \beta$ 이므로 $\alpha=3, \beta=8$

$$\therefore \beta - \alpha = 5$$

071 [답] 8

$$2 \log_x y - 2 \log_y x = 3 \text{에서}$$

$$2 \log_x y - \frac{2}{\log_x y} = 3$$

$\log_x y = t$ 로 놓으면 $x > 1, y > 1$ 에서 $t > 0$ 이고

$$2t - \frac{2}{t} = 3, 2t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$(2t+1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 2 (\because t > 0)$$

즉, $\log_x y = 2$ 이므로 $y = x^2$

이때 $1 < x < 100, 1 < y < 100$ 이므로 조건을 만족시키는 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 $(2, 2^2), (3, 3^2), (4, 4^2), \dots, (9, 9^2)$ 의 8개이다.

072 답 9

$(\log_3 x)^2 - 2\log_3 9x = 0$ 에서
 $(\log_3 x)^2 - 2(\log_3 9 + \log_3 x) = 0$
 $\therefore (\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 4 = 0$
 $\log_3 x = t$ 로 놓으면 $t^2 - 2t - 4 = 0$ ㉠
 주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 방정식 ㉠의 두 근은
 $\log_3 \alpha, \log_3 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\log_3 \alpha + \log_3 \beta = 2, \log_3 \alpha\beta = 2$
 $\therefore \alpha\beta = 3^2 = 9$

073 답 ④

$(\log_2 x)^2 - 8\log_2 x - 5 = 0$ 에서 $\log_2 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 8t - 5 = 0$
 이 이차방정식의 두 근은 $\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과
 계수의 관계에 의하여
 $\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 8, \log_2 \alpha \times \log_2 \beta = -5$
 $\therefore (\log_2 \alpha)^2 + (\log_2 \beta)^2$
 $= (\log_2 \alpha + \log_2 \beta)^2 - 2(\log_2 \alpha \times \log_2 \beta)$
 $= 8^2 - 2 \times (-5) = 74$

074 답 ⑤

밑과 진수의 조건에서 $x > 0, x \neq 1$
 $\log_5 x + a \log_x 5 = a + 1$ 에서
 $\log_5 x + \frac{a}{\log_5 x} - (a + 1) = 0$
 $\log_5 x = t (t \neq 0)$ 로 놓으면
 $t + \frac{a}{t} - (a + 1) = 0$
 $\therefore t^2 - (a + 1)t + a = 0$ ㉠
 주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 방정식 ㉠의 두 근은
 $\log_5 \alpha, \log_5 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\log_5 \alpha + \log_5 \beta = a + 1, \log_5 \alpha\beta = a + 1$
 이때 $\alpha\beta = 125$ 이므로
 $\log_5 125 = a + 1, 3 = a + 1$
 $\therefore a = 2$

075 답 ④

$x^{\log_5 x} = 4x$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면
 $\log_2 x^{\log_5 x} = \log_2 4x, (\log_2 x)^2 = \log_2 4 + \log_2 x$
 $\therefore (\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0$
 $\log_2 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 - t - 2 = 0, (t + 1)(t - 2) = 0$
 $\therefore t = -1$ 또는 $t = 2$
 즉, $\log_2 x = -1$ 또는 $\log_2 x = 2$ 이므로
 $x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 2^2 = 4$
 $\therefore \log_\alpha \beta + \log_\beta \alpha = \log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_4 \frac{1}{2}$
 $= -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

076 답 ④

$5^x = 2^{3-x}$ 의 양변에 상용로그를 취하면
 $\log 5^x = \log 2^{3-x}, x \log 5 = (3-x) \log 2$
 $\therefore x(\log 5 + \log 2) = 3 \log 2$
 그런데 $\log 5 + \log 2 = \log 10 = 1$ 이므로
 $x = 3 \log 2$
 따라서 $a = 3 \log 2 = \log 2^3 = \log 8$ 이므로
 $10^a = 10^{\log 8} = 8$

077 답 $x = \frac{1}{15}$

$3^{\log 3x} = 5^{\log 5x}$ 의 양변에 상용로그를 취하면
 $\log 3^{\log 3x} = \log 5^{\log 5x}$
 $\log 3x \times \log 3 = \log 5x \times \log 5$
 $(\log 3 + \log x) \log 3 = (\log 5 + \log x) \log 5$
 $(\log 5 - \log 3) \log x = (\log 3)^2 - (\log 5)^2$
 $\therefore \log x = -\frac{(\log 5 - \log 3)(\log 5 + \log 3)}{\log 5 - \log 3}$
 $= -(\log 5 + \log 3)$
 $= -\log 15 = \log \frac{1}{15}$
 $\therefore x = \frac{1}{15}$

078 답 ①

진수의 조건에서 $-x + 3 > 0, x + 9 > 0$
 $\therefore -9 < x < 3$ ㉠
 $\log_{\frac{1}{4}}(-x + 3) \leq \log_{\frac{1}{2}}(x + 9)$ 에서
 $\log_{\frac{1}{4}}(-x + 3) \leq \log_{\frac{1}{4}}(x + 9)^2$
 $\therefore \log_{\frac{1}{4}}(-x + 3) \leq \log_{\frac{1}{4}}(x^2 + 18x + 81)$
 밑이 1보다 작으므로 $-x + 3 \geq x^2 + 18x + 81$
 $x^2 + 19x + 78 \leq 0, (x + 13)(x + 6) \leq 0$
 $\therefore -13 \leq x \leq -6$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
 $-9 < x \leq -6$
 따라서 $a = -9, \beta = -6$ 이므로 $a + \beta = -15$

079 답 2

진수의 조건에서 $x^2 - x - 6 > 0, (x + 2)(x - 3) > 0$
 $\therefore x < -2$ 또는 $x > 3$ ㉠
 $\log_2(x^2 - x - 6) \leq 1 + \frac{2}{\log_3 4}$ 에서
 $\log_2(x^2 - x - 6) \leq \log_2 2 + \log_2 3$
 $\therefore \log_2(x^2 - x - 6) \leq \log_2 6$
 밑이 1보다 크므로 $x^2 - x - 6 \leq 6$
 $x^2 - x - 12 \leq 0, (x + 3)(x - 4) \leq 0$
 $\therefore -3 \leq x \leq 4$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
 $-3 \leq x < -2$ 또는 $3 < x \leq 4$
 따라서 부등식을 만족시키는 정수 x 는 $-3, 4$ 의 2개이다.

080 답 1 < x < 2

$$4^{-x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{4x} \text{에서 } 2^{-2x^2} > 2^{-4x}$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } -2x^2 > -4x$$

$$2x^2 - 4x < 0, 2x(x-2) < 0$$

$$\therefore 0 < x < 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\log_2(x^2 - 2x + 3) < \log_2 2x \text{의 진수의 조건에서}$$

$$x^2 - 2x + 3 > 0, 2x > 0$$

$$x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 0 \text{이므로}$$

$$x > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\log_2(x^2 - 2x + 3) < \log_2 2x \text{에서 밑이 1보다 크므로}$$

$$x^2 - 2x + 3 < 2x$$

$$x^2 - 4x + 3 < 0, (x-1)(x-3) < 0$$

$$\therefore 1 < x < 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢} \text{의 공통 범위를 구하면}$$

$$1 < x < 2$$

081 답 ①

$$\text{진수의 조건에서 } \frac{2}{3}x + k > 0, x - 2 > 0$$

$$\therefore x > 2$$

$$\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{2}{3}x + k\right) \leq \log_{\frac{1}{7}}(x-2) \text{에서 밑이 1보다 작으므로}$$

$$\frac{2}{3}x + k \geq x - 2$$

$$\frac{1}{3}x \leq k + 2 \quad \therefore x \leq 3k + 6$$

$$\text{이때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 } x \text{는 7개이므로}$$

$$9 \leq 3k + 6 < 10$$

$$3 \leq 3k < 4 \quad \therefore 1 \leq k < \frac{4}{3}$$

$$\text{따라서 자연수 } k \text{의 값은 1이다.}$$

082 답 ⑤

$$\text{진수의 조건에서 } 6x + 1 > 0, x^2 + 9 > 0$$

$$\therefore x > -\frac{1}{6} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(i) 0 < a < 1 \text{일 때}$$

$$6x + 1 > x^2 + 9, x^2 - 6x + 8 < 0$$

$$(x-2)(x-4) < 0$$

$$\therefore 2 < x < 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{의 공통 범위를 구하면 } 2 < x < 4$$

$$(ii) a > 1 \text{일 때}$$

$$6x + 1 < x^2 + 9, x^2 - 6x + 8 > 0$$

$$(x-2)(x-4) > 0$$

$$\therefore x < 2 \text{ 또는 } x > 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉢} \text{의 공통 범위를 구하면 } -\frac{1}{6} < x < 2 \text{ 또는 } x > 4$$

$$\text{이때 주어진 부등식의 해가 } 2 < x < 4 \text{이므로}$$

$$0 < a < 1$$

$$\text{따라서 } a \text{의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.}$$

083 답 ③

$$\text{진수의 조건에서 } x > 0, \log_3 2x > 0$$

$$\log_3 2x > \log_3 1 \text{에서 } 2x > 1 \quad \therefore x > \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 2x) > -1 \text{에서 } \log_{\frac{1}{2}}(\log_3 2x) > \log_{\frac{1}{2}} 2$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } \log_3 2x < 2$$

$$\log_3 2x < \log_3 9$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } 2x < 9 \quad \therefore x < \frac{9}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{의 공통 범위를 구하면 } \frac{1}{2} < x < \frac{9}{2}$$

084 답 31

$$\text{진수의 조건에서 } x > 0, \log_5 x > 0, \log_8(\log_5 x) > 0$$

$$\log_8(\log_5 x) > \log_8 1 \text{에서 } \log_5 x > 1$$

$$\log_5 x > \log_5 5 \quad \therefore x > 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\log_3 \{\log_8(\log_5 x)\} \leq -1 \text{에서}$$

$$\log_3 \{\log_8(\log_5 x)\} \leq \log_3 \frac{1}{3}$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \log_8(\log_5 x) \leq \frac{1}{3}$$

$$\log_8(\log_5 x) \leq \log_8 2$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \log_5 x \leq 2$$

$$\log_5 x \leq \log_5 25$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x \leq 25 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{의 공통 범위를 구하면 } 5 < x \leq 25$$

$$\text{따라서 정수 } x \text{의 최댓값은 25, 최솟값은 6이므로 구하는 합은 } 25 + 6 = 31$$

085 답 ④

$$\text{진수의 조건에서 } x > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{9} \times \log_3 \frac{x}{27} \geq 0 \text{에서}$$

$$(\log_{\frac{1}{3}} x - \log_{\frac{1}{3}} 9)(\log_3 x - \log_3 27) \geq 0$$

$$(-\log_3 x + 2)(\log_3 x - 3) \geq 0$$

$$\therefore (\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x + 6 \leq 0$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 5t + 6 \leq 0$$

$$(t-2)(t-3) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq t \leq 3$$

$$\text{즉, } 2 \leq \log_3 x \leq 3 \text{이므로 } \log_3 3^2 \leq \log_3 x \leq \log_3 3^3$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } 9 \leq x \leq 27 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{의 공통 범위를 구하면 } 9 \leq x \leq 27$$

$$\text{따라서 } a = 9, \beta = 27 \text{이므로 } \frac{\beta}{a} = 3$$

086 답 1 < x < 10

$$x^{\log 2} = 2^{\log x} \text{이므로}$$

$$2^{\log x} \times x^{\log 2} - \frac{3}{2}(2^{\log x} + x^{\log 2}) + 2 < 0 \text{에서}$$

$$(2^{\log x})^2 - 3 \times 2^{\log x} + 2 < 0$$

$$2^{\log x} = t (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 - 3t + 2 < 0$$

$$(t-1)(t-2) < 0 \quad \therefore 1 < t < 2$$

즉, $1 < 2^{\log x} < 2$ 이므로 $2^0 < 2^{\log x} < 2^1$

밑이 1보다 크므로 $0 < \log x < 1$

$\log 1 < \log x < \log 10$

밑이 1보다 크므로 $1 < x < 10$

087 답 ⑤

$(\log_{\frac{1}{5}} x)^2 + a \log_{\frac{1}{5}} x + b < 0$ 에서 $\log_{\frac{1}{5}} x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + at + b < 0 \quad \dots\dots ㉠$$

주어진 부등식의 해가 $5 < x < 25$ 이므로

$\log_{\frac{1}{5}} 25 < \log_{\frac{1}{5}} x < \log_{\frac{1}{5}} 5$ 에서 $-2 < \log_{\frac{1}{5}} x < -1$

$$\therefore -2 < t < -1$$

해가 $-2 < t < -1$ 이고 t^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(t+2)(t+1) < 0 \quad \therefore t^2 + 3t + 2 < 0$$

이 부등식이 ㉠과 일치하므로 $a=3, b=2$

$$\therefore a+b=5$$

088 답 15

$(\log_3 x)^2 < \log_3 \frac{x^4}{27}$ 의 진수의 조건에서

$$x > 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$(\log_3 x)^2 < \log_3 \frac{x^4}{27}$ 에서 $(\log_3 x)^2 < \log_3 x^4 - \log_3 27$

$$\therefore (\log_3 x)^2 - 4 \log_3 x + 3 < 0$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 $t^2 - 4t + 3 < 0$

$$(t-1)(t-3) < 0 \quad \therefore 1 < t < 3$$

즉, $1 < \log_3 x < 3$ 이므로 $\log_3 3 < \log_3 x < \log_3 3^3$

밑이 1보다 크므로 $3 < x < 27 \quad \dots\dots ㉡$

$\log_2 |x-3| < 2$ 의 진수의 조건에서

$$x-3 \neq 0 \quad \therefore x \neq 3 \quad \dots\dots ㉢$$

$\log_2 |x-3| < 2$ 에서 $\log_2 |x-3| < \log_2 4$

밑이 1보다 크므로 $|x-3| < 4, -4 < x-3 < 4$

$$\therefore -1 < x < 7 \quad \dots\dots ㉣$$

㉠, ㉡, ㉢, ㉣의 공통 범위를 구하면 $3 < x < 7$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x 는 4, 5, 6이므로 구하는 합은 $4+5+6=15$

089 답 ③

진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots ㉠$

$x^{\log_5 25x} \leq 25x$ 의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$$\log_5 x^{\log_5 25x} \leq \log_5 25x$$

$$\log_5 x (\log_5 25 + \log_5 x) \leq \log_5 25 + \log_5 x$$

$$\therefore (\log_5 x)^2 + \log_5 x - 2 \leq 0$$

$\log_5 x = t$ 로 놓으면 $t^2 + t - 2 \leq 0$

$$(t+2)(t-1) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq t \leq 1$$

즉, $-2 \leq \log_5 x \leq 1$ 이므로 $\log_5 5^{-2} \leq \log_5 x \leq \log_5 5$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{25} \leq x \leq 5 \quad \dots\dots ㉡$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $\frac{1}{25} \leq x \leq 5$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

090 답 $a < x < \beta$

$\frac{x^4}{2} > 2^x$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 \frac{x^4}{2} > \log_2 2^x$$

$$4 \log_2 x - \log_2 2 > x, 4 \log_2 x > x + 1$$

$$\therefore \log_2 x > \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

따라서 주어진 부등식의 해는 $y = \log_2 x$ 의 그래프가 직선

$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$a < x < \beta$$

091 답 $0 < x < \frac{1}{10}$ 또는 $x > \frac{\sqrt{10}}{10}$

진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots ㉠$

$x^{\log_{0.1} x} < \sqrt{10x^3}$ 의 양변에 밑이 0.1인 로그를 취하면

$$\log_{0.1} x^{\log_{0.1} x} > \log_{0.1} \sqrt{10x^3}$$

$$(\log_{0.1} x)^2 > \frac{1}{2}(\log_{0.1} 10 + 3 \log_{0.1} x)$$

$$(\log_{0.1} x)^2 > \frac{3}{2} \log_{0.1} x - \frac{1}{2}$$

$$\therefore (\log_{0.1} x)^2 - \frac{3}{2} \log_{0.1} x + \frac{1}{2} > 0$$

$\log_{0.1} x = t$ 로 놓으면 $t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} > 0$

$$2t^2 - 3t + 1 > 0, (2t-1)(t-1) > 0$$

$$\therefore t < \frac{1}{2} \text{ 또는 } t > 1$$

즉, $\log_{0.1} x < \frac{1}{2}$ 또는 $\log_{0.1} x > 1$ 이므로

$\log_{0.1} x < \log_{0.1} 0.1^{\frac{1}{2}}$ 또는 $\log_{0.1} x > \log_{0.1} 0.1$

밑이 1보다 작으므로

$$x > \frac{\sqrt{10}}{10} \text{ 또는 } x < \frac{1}{10} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$0 < x < \frac{1}{10} \text{ 또는 } x > \frac{\sqrt{10}}{10}$$

092 답 ④

$6^{x-1} \geq 5^{x+2}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 6^{x-1} \geq \log 5^{x+2}$$

$$(x-1) \log 6 \geq (x+2) \log 5$$

$$(\log 6 - \log 5)x \geq \log 6 + 2 \log 5$$

$$\therefore x \geq \frac{\log 6 + 2 \log 5}{\log 6 - \log 5}$$

$$= \frac{\log 2 + \log 3 + 2(1 - \log 2)}{\log 2 + \log 3 - (1 - \log 2)}$$

$$= \frac{-\log 2 + \log 3 + 2}{2 \log 2 + \log 3 - 1}$$

$$= \frac{-0.3 + 0.48 + 2}{2 \times 0.3 + 0.48 - 1}$$

$$= 27.25$$

따라서 자연수 x 의 최솟값은 28이다.

093 [답] ④

$(\log_4 x)^2 + \log_4 16x^2 - \log_2 k \geq 0$ 에서
 $(\log_4 x)^2 + 2\log_4 x + 2 - \log_2 k \geq 0$
 $\log_4 x = t$ 로 놓으면 $t^2 + 2t + 2 - \log_2 k \geq 0$
 이 부등식이 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식
 $t^2 + 2t + 2 - \log_2 k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = 1 - (2 - \log_2 k) \leq 0, \log_2 k \leq 1 \quad \therefore k \leq 2$
 이때 $k > 0$ 이므로 $0 < k \leq 2$
 따라서 정수 k 는 1, 2이므로 구하는 합은 $1+2=3$

094 [답] 16

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D = (\log_2 a)^2 - 4(3 + \log_2 a) = 0$
 $\therefore (\log_2 a)^2 - 4\log_2 a - 12 = 0$
 $\log_2 a = t$ 로 놓으면 $t^2 - 4t - 12 = 0$
 $(t+2)(t-6) = 0 \quad \therefore t = -2$ 또는 $t = 6$
 즉, $\log_2 a = -2$ 또는 $\log_2 a = 6$ 이므로
 $a = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ 또는 $a = 2^6 = 64$
 따라서 모든 양수 a 의 값의 곱은 $\frac{1}{4} \times 64 = 16$

095 [답] ④

모든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식
 $x^2 - 2x \log_2 a + 4 \log_2 a - 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (\log_2 a)^2 - (4 \log_2 a - 3) < 0$
 $\therefore (\log_2 a)^2 - 4 \log_2 a + 3 < 0$
 $\log_2 a = t$ 로 놓으면 $t^2 - 4t + 3 < 0$
 $(t-1)(t-3) < 0 \quad \therefore 1 < t < 3$
 즉, $1 < \log_2 a < 3$ 이므로 $\log_2 2 < \log_2 a < \log_2 2^3$
 $\therefore 2 < a < 8$

096 [답] $0 < a \leq \frac{1}{100}$ 또는 $a \geq 10$

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (\log a + 1)^2 - (\log a + 3) \geq 0$
 $\therefore (\log a)^2 + \log a - 2 \geq 0$
 $\log a = t$ 로 놓으면 $t^2 + t - 2 \geq 0$
 $(t+2)(t-1) \geq 0 \quad \therefore t \leq -2$ 또는 $t \geq 1$
 즉, $\log a \leq -2$ 또는 $\log a \geq 1$ 이므로
 $\log a \leq \log 10^{-2}$ 또는 $\log a \geq \log 10$
 $\therefore a \leq \frac{1}{100}$ 또는 $a \geq 10$
 이때 $a > 0$ 이므로 $0 < a \leq \frac{1}{100}$ 또는 $a \geq 10$

097 [답] ①

$x^{\log_3 x} \geq (9x^2)^k$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면
 $\log_3 x^{\log_3 x} \geq \log_3 (9x^2)^k, (\log_3 x)^2 \geq k(2 + 2 \log_3 x)$
 $\therefore (\log_3 x)^2 - 2k \log_3 x - 2k \geq 0$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 $t^2 - 2kt - 2k \geq 0$
 이 부등식이 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식
 $t^2 - 2kt - 2k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (-k)^2 + 2k \leq 0$
 $k^2 + 2k \leq 0, k(k+2) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq k \leq 0$
 따라서 $\alpha = -2, \beta = 0$ 이므로 $\alpha + \beta = -2$

098 [답] 15개월

영업을 시작한 달의 매출을 a 원이라 하면 n 개월 후의 매출은
 $(1+0.05)^n a$ (원)
 n 개월이 지난 후의 매출이 영업을 시작한 달의 매출의 2배가 된다고 하면
 $(1+0.05)^n a = 2a, 1.05^n = 2$
 양변에 상용로그를 취하면
 $\log 1.05^n = \log 2, n \log 1.05 = \log 2$
 $n \times 0.02 = 0.3 \quad \therefore n = 15$
 따라서 영업을 시작한 달의 매출의 2배가 되는 것은 영업을 시작한
 지 15개월 후이다.

099 [답] $\frac{1}{10000}$ 기압 이상 $\frac{1}{100}$ 기압 이하

평균 해수면에서 높이가 9960 m인 곳의 기압이 $\frac{1}{1000}$ 기압이므로
 $9.96 = k \log \frac{1}{1000}, 9.96 = -3k$
 $\therefore k = -3.32$
 평균 해수면에서 높이가 6640 m 이상 13280 m 이하일 때의 기압
 을 x 기압이라 하면
 $6.64 \leq -3.32 \log x \leq 13.28$
 $-4 \leq \log x \leq -2, 10^{-4} \leq x \leq 10^{-2}$
 $\therefore \frac{1}{10000} \leq x \leq \frac{1}{100}$
 따라서 평균 해수면에서 높이가 6640 m 이상 13280 m 이하일 때
 의 기압의 범위는 $\frac{1}{10000}$ 기압 이상 $\frac{1}{100}$ 기압 이하이다.

100 [답] 9 g

20 g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 8%인 용액에 충분히 오래 담
 가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 4 g이므로
 $\log \frac{4}{20} = -1 + k \log 8, \log \frac{1}{5} = \log (8^k \times 10^{-1})$
 즉, $\frac{8^k}{10} = \frac{1}{5}$ 이므로 $8^k = 2 \quad \therefore k = \frac{1}{3}$
 30 g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 27%인 용액에 충분히 오래
 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량을 x g이라 하면
 $\log \frac{x}{30} = -1 + \frac{1}{3} \log 27, \log \frac{x}{30} = \log (10^{-1} \times 3)$
 즉, $\frac{x}{30} = \frac{3}{10}$ 이므로 $x = 9$
 따라서 구하는 염료 B의 질량은 9 g이다.

101 답 7

처음 미세먼지 농도를 $a \mu\text{m}$ 라 하면 공기 정화 식물을 1개씩 추가하여 n 개 두었을 때의 미세먼지 농도는

$$(1-0.1)^n a (\mu\text{m})$$

처음 미세먼지 농도의 $\frac{1}{2}$ 배 이하로 낮추기 위해서는

$$(1-0.1)^n a \leq \frac{1}{2} a, 0.9^n \leq \frac{1}{2}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 0.9^n \leq \log \frac{1}{2}, n \log 0.9 \leq -\log 2$$

$$n(2 \log 3 - 1) \leq -\log 2$$

$$n(2 \times 0.4771 - 1) \leq -0.3010$$

$$-0.0458n \leq -0.3010 \quad \therefore n \geq 6.5 \dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 7이다.

102 답 ④

$$f(-6) = 2^{-6} = \frac{1}{64} \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(-6) = g(f(-6)) = g\left(\frac{1}{64}\right) \\ = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 3$$

103 답 ③

$y = \log_3(6-x) + 2 = \log_3\{-(x-6)\} + 2$ 이므로 $y = \log_3(-x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 6만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y = \log_3(-x)$ 의 그래프는

$y = \log_3 x$ 의 그래프를 y 축에 대

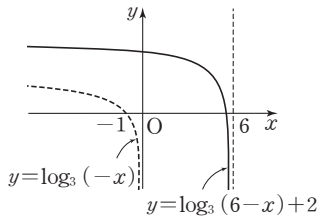
하여 대칭이동한 것이므로

$y = \log_3(6-x) + 2$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.

③ x 의 값이 증가하면 y 의 값은

감소한다.



104 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅂ

ㄱ. $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y = \log_2 x^2 = 2 \log_2 |x|$ 이므로 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄷ. $y = \log_2 4x = \log_2 x + 2$ 이므로 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y = \log_2 \frac{1}{x} = -\log_2 x$ 이므로 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㅁ. $y = 2^{2x} - 1$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㅂ. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅂ이다.

105 답 ②

$(f \circ g)(x) = x$ 이므로 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = a \text{라 하면 } f(a) = -\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^a - 1 = -\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = 1$$

또 $g(1) = b$ 라 하면 $f(b) = 1$ 이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^b - 1 = 1, \left(\frac{1}{2}\right)^b = 2 \quad \therefore b = -1$$

106 답 2

$y = f(x)$ 의 그래프가 $y = \log_2 x$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 $y = f(x)$ 는 $y = \log_2 x$ 의 역함수이다.

점 $(1, b)$ 가 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로 점 $(b, 1)$ 은 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 점이다.

$$\text{즉, } 1 = \log_2 b \text{이므로 } b = 2$$

또 점 $(a, 2)$ 가 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$2 = \log_2 a \quad \therefore a = 2^2 = 4$$

$$\therefore a - b = 4 - 2 = 2$$

107 답 $\log_a b < -1 < \log_b a < 0$

$\frac{1}{a} < 1$ 에서 $a > 1$ 이므로 $b < \frac{1}{a} < 1$ 의 각 변에 밑이 a 인 로그를 취하면

$$\log_a b < \log_a \frac{1}{a} < \log_a 1 \quad \therefore \log_a b < -1$$

또 $0 < b < 1$ 이므로 $b < \frac{1}{a} < 1$ 의 각 변에 밑이 b 인 로그를 취하면

$$\log_b 1 < \log_b \frac{1}{a} < \log_b b \text{에서 } 0 < -\log_b a < 1$$

$$\therefore -1 < \log_b a < 0$$

$$\therefore \log_a b < -1 < \log_b a < 0$$

108 답 1

$y = \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) + k$ 에서 밑이 1보다 작으므로

$$x = \frac{5}{2} \text{일 때 최대이고 최댓값은}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 4 + k = -2 + k$$

$$x = \frac{9}{2} \text{일 때 최소이고 최솟값은}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 8 + k = -3 + k$$

따라서 최댓값과 최솟값의 차는

$$(-2+k) - (-3+k) = 1$$

109 답 ②

$f(x) = x^2 - 2x + 10$ 으로 놓으면 $f(x) = (x-1)^2 + 9$

$f(1) = 9$ 이므로 $f(x)$ 의 최솟값은 9이고 최댓값은 없다.

그런데 주어진 함수가 최댓값을 가지므로 $0 < a < 1$

따라서 $y = \log_a f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최대이고 최댓값 $\log_a 9$ 를 갖는다.

$$\text{즉, } \log_a 9 = -2 \text{이므로 } a^{-2} = 9$$

$$a^2 = \frac{1}{9} \quad \therefore a = \frac{1}{3} (\because 0 < a < 1)$$

110 [답] ③

$$y = 2(\log_{\frac{1}{5}} x)^2 + a \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{x} + b = 2(\log_{\frac{1}{5}} x)^2 + a \log_{\frac{1}{5}} x + b$$

$\log_{\frac{1}{5}} x = t$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = 2t^2 + at + b = 2\left(t + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} + b$$

따라서 $t = -\frac{a}{4}$ 일 때 최소이고 최솟값 $-\frac{a^2}{8} + b$ 를 갖는다.

이때 주어진 함수는 $x = 25$ 일 때 최솟값 -6 을 가지므로

$$-\frac{a}{4} = \log_{\frac{1}{5}} 25, \quad -\frac{a}{4} = -2 \quad \therefore a = 8$$

$$-\frac{a^2}{8} + b = -6 \text{에서 } -8 + b = -6 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore a - b = 8 - 2 = 6$$

111 [답] 20

$y = x^{4 - \log_2 x}$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 y = \log_2 x^{4 - \log_2 x} = (4 - \log_2 x) \log_2 x$$

$$= -(\log_2 x)^2 + 4 \log_2 x$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 $\log_2 y = -t^2 + 4t = -(t-2)^2 + 4$

따라서 $\log_2 y$ 는 $t = 2$ 일 때 최대이고 최댓값 4를 가지므로

$\log_2 x = 2$ 에서 $x = 4 \quad \therefore a = 4$

$\log_2 y = 4$ 에서 $y = 16 \quad \therefore M = 16$

$$\therefore a + M = 4 + 16 = 20$$

112 [답] ③

$$y = \log_{\frac{1}{4}} x - \log_x 256 = \log_{\frac{1}{4}} x - \log_x 4^4$$

$$= \log_{\frac{1}{4}} x - 4 \log_x 4 = \log_{\frac{1}{4}} x + \frac{4}{\log_{\frac{1}{4}} x}$$

$0 < x < 1$ 이면 $\log_{\frac{1}{4}} x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하면

$$\log_{\frac{1}{4}} x + \frac{4}{\log_{\frac{1}{4}} x} \geq 2\sqrt{\log_{\frac{1}{4}} x \times \frac{4}{\log_{\frac{1}{4}} x}} = 2 \times 2 = 4$$

(단, 등호는 $x = \frac{1}{16}$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

113 [답] 4

진수의 조건에서 $x > 0, x - \frac{3}{2} > 0 \quad \therefore x > \frac{3}{2}$

$$\log_{\sqrt{2}} x - \log_2 \left(x - \frac{3}{2}\right) = 3 \text{에서}$$

$$\log_2 x^2 = \log_2 8 + \log_2 \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore \log_2 x^2 = \log_2 8 \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

즉, $x^2 = 8 \left(x - \frac{3}{2}\right)$ 이므로 $x^2 - 8x + 12 = 0$

$$(x-2)(x-6) = 0 \quad \therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 6$$

따라서 $a = 2, \beta = 6$ 이므로 $\beta - a = 4$

114 [답] 21

점 P의 좌표를 $(a, 3\log_2 a)$ 라 하면 $\overline{PQ} = 6$ 이므로

$$Q(a+6, 3\log_2 a)$$

즉, 점 R의 x 좌표가 $a+6$ 이므로

$$R(a+6, 3\log_2 (a+6))$$

이때 $\overline{QR} = 6$ 이므로 $3\log_2 (a+6) - 3\log_2 a = 6$

$$\log_2 (a+6) - \log_2 a = 2, \log_2 \frac{a+6}{a} = 2$$

$$\frac{a+6}{a} = 2^2 = 4, 3a = 6 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore R(8, 3\log_2 8), \text{ 즉 } R(8, 9)$$

즉, 점 S의 y 좌표가 9이므로

$$3^{x-7} = 9 = 3^2, x-7 = 2 \quad \therefore x = 9$$

$$\therefore S(9, 9)$$

$$\therefore \square PQSR = \triangle PQR + \triangle RQS$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 + \frac{1}{2} \times (9-8) \times 6 = 21$$

115 [답] ①

밑과 진수의 조건에서 $x > 0, x \neq 1$

$$\log_3 x - \log_x 27 = 2 \text{에서 } \log_3 x - 3\log_x 3 = 2$$

$$\therefore \log_3 x - \frac{3}{\log_3 x} = 2$$

$\log_3 x = t (t \neq 0)$ 로 놓으면 $t - \frac{3}{t} = 2$

$$t^2 - 2t - 3 = 0, (t+1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 3$$

즉, $\log_3 x = -1$ 또는 $\log_3 x = 3$ 이므로

$$x = 3^{-1} = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 3^3 = 27$$

따라서 $a = \frac{1}{3}, \beta = 27$ 이므로 $\log_a \beta = \log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$

116 [답] 2

밑의 조건에서 $x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1$

$$\begin{cases} \log_x 4 - \log_y 2 = 2 \\ \log_x 16 - \log_y \frac{1}{8} = -1 \end{cases} \text{에서 } \begin{cases} 2\log_x 2 - \log_y 2 = 2 \\ 4\log_x 2 + 3\log_y 2 = -1 \end{cases}$$

$\log_x 2 = X, \log_y 2 = Y$ 로 놓으면 $\begin{cases} 2X - Y = 2 \\ 4X + 3Y = -1 \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $X = \frac{1}{2}, Y = -1$

즉, $\log_x 2 = \frac{1}{2}, \log_y 2 = -1$ 이므로

$$x = 4, y = \frac{1}{2} \quad \therefore xy = 2$$

117 [답] ④

$x^{\log_2 x} = 16x^{k-1}$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 x^{\log_2 x} = \log_2 16x^{k-1}$$

$$(\log_2 x)^2 = \log_2 16 + (k-1) \log_2 x$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 - (k-1) \log_2 x - 4 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 $t^2 - (k-1)t - 4 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근은

$\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = k-1, \log_2 \alpha \beta = k-1$$

이때 $\alpha \beta = 4$ 이므로 $\log_2 4 = k-1, 2 = k-1 \quad \therefore k = 3$

118 답 22

$\log_6 |x-2| < 1$ 의 진수의 조건에서 $x \neq 2$

(i) $x > 2$ 일 때

$$\log_6 (x-2) < 1 \text{에서 } x-2 < 6 \quad \therefore x < 8$$

$$\text{그런데 } x > 2 \text{이므로 } 2 < x < 8 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $x < 2$ 일 때

$$\log_6 (-x+2) < 1 \text{에서 } -x+2 < 6 \quad \therefore x > -4$$

$$\text{그런데 } x < 2 \text{이므로 } -4 < x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 $-4 < x < 2$ 또는 $2 < x < 8$

$$\therefore A = \{x \mid -4 < x < 2 \text{ 또는 } 2 < x < 8\}$$

$\log_2 2x - \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq 4$ 의 진수의 조건에서

$$x > 0, x-2 > 0 \quad \therefore x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$$\log_2 2x - \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq 4 \text{에서}$$

$$(1 + \log_2 x) + \log_2 (x-2) \geq 4$$

$$\log_2 x + \log_2 (x-2) \geq 3, \log_2 x(x-2) \geq \log_2 8$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x(x-2) \geq 8$$

$$x^2 - 2x - 8 \geq 0, (x+2)(x-4) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 4 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$$\textcircled{9}, \textcircled{10} \text{의 공통 범위를 구하면 } x \geq 4 \quad \therefore B = \{x \mid x \geq 4\}$$

$$\therefore A \cap B = \{x \mid 4 \leq x < 8\}$$

따라서 정수 x 는 4, 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$$4+5+6+7=22$$

119 답 59

진수의 조건에서 $x > 0, \log_4 x > 0, \log_3(\log_4 x) > 0$

$\log_3(\log_4 x) > \log_3 1$ 에서 밑이 1보다 크므로

$$\log_4 x > 1 \quad \therefore x > 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}\{\log_3(\log_4 x)\} > 0 \text{에서 } \log_{\frac{1}{3}}\{\log_3(\log_4 x)\} > \log_{\frac{1}{3}} 1$$

밑이 1보다 작으므로 $\log_3(\log_4 x) < 1$

$$\log_3(\log_4 x) < \log_3 3$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \log_4 x < 3 \quad \therefore x < 64 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통 범위를 구하면 $4 < x < 64$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x 는

$$64-4-1=59(\text{개})$$

120 답 1

진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$\left(\log_2 \frac{4}{x}\right) \left(\log_2 \frac{x}{8}\right) < -2 \text{에서}$$

$$(\log_2 4 - \log_2 x)(\log_2 x - \log_2 8) < -2$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 4 > 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 5t + 4 > 0$$

$$(t-1)(t-4) > 0 \quad \therefore t < 1 \text{ 또는 } t > 4$$

즉, $\log_2 x < 1$ 또는 $\log_2 x > 4$ 이므로

$$\log_2 x < \log_2 2 \text{ 또는 } \log_2 x > \log_2 2^4$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x < 2 \text{ 또는 } x > 16 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통 범위를 구하면 $0 < x < 2$ 또는 $x > 16$

따라서 정수 x 의 최솟값은 1이다.

121 답 ②

진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$x^{\log_2 x} \leq \frac{16}{x^3}$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 x^{\log_2 x} \leq \log_2 \frac{16}{x^3}$$

$$(\log_2 x)^2 \leq \log_2 16 - \log_2 x^3$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 + 3\log_2 x - 4 \leq 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } t^2 + 3t - 4 \leq 0$$

$$(t+4)(t-1) \leq 0 \quad \therefore -4 \leq t \leq 1$$

$$\text{즉, } -4 \leq \log_2 x \leq 1 \text{이므로 } \log_2 2^{-4} \leq \log_2 x \leq \log_2 2$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{16} \leq x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{의 공통 범위를 구하면 } \frac{1}{16} \leq x \leq 2$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{1}{16}, \beta = 2 \text{이므로}$$

$$\log_4 \alpha + \log_4 \beta = \log_4 \alpha \beta = \log_4 \frac{1}{8} = \log_{2^2} 2^{-3} = -\frac{3}{2}$$

122 답 ④

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2 + \log_2 a)^2 - 6(2 + \log_2 a) < 0$$

$$\therefore (\log_2 a)^2 - 2\log_2 a - 8 < 0$$

$$\log_2 a = t \text{로 놓으면 } t^2 - 2t - 8 < 0$$

$$(t+2)(t-4) < 0 \quad \therefore -2 < t < 4$$

$$\text{즉, } -2 < \log_2 a < 4 \text{이므로 } \log_2 2^{-2} < \log_2 a < \log_2 2^4$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{4} < a < 16$$

따라서 자연수 a 의 최댓값은 15, 최솟값은 1이므로 구하는 합은

$$15+1=16$$

123 답 4

처음 아이스크림 1개당 무게와 가격을 각각 A g, B 원이라 하면 1번 시행할 때마다 아이스크림의 무게가 10%씩 줄어드므로 n 번 시행 후 아이스크림의 무게는

$$A(1-0.1)^n = 0.9^n A(\text{g})$$

한편 처음 아이스크림 1g의 가격은 $\frac{(\text{가격})}{(\text{무게})} = \frac{B}{A}$ (원)이고, 아이스크림의 가격은 변함이 없으므로 n 번 시행 후 아이스크림 1g의 가격은 $\frac{B}{0.9^n A}$ (원)

n 번 시행 후 아이스크림 1g의 가격이 처음의 1.5배 이상이 되어야 하므로

$$\frac{B}{0.9^n A} \geq 1.5 \times \frac{B}{A}, 0.9^n \leq \frac{2}{3}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 0.9^n \leq \log \frac{2}{3}, n(2\log 3 - 1) \leq \log 2 - \log 3$$

$$n(2 \times 0.4771 - 1) \leq 0.3010 - 0.4771$$

$$-0.0458n \leq -0.1761 \quad \therefore n \geq 3.8\dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 4이다.



001 답 ②

- ① $-1420^\circ = 360^\circ \times (-4) + 20^\circ$
 ② $-710^\circ = 360^\circ \times (-2) + 10^\circ$
 ③ $-340^\circ = 360^\circ \times (-1) + 20^\circ$
 ④ $380^\circ = 360^\circ \times 1 + 20^\circ$
 ⑤ $1100^\circ = 360^\circ \times 3 + 20^\circ$

따라서 동경 OP가 나타낼 수 없는 각은 ②이다.

002 답 ④

θ 가 제2사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore 180^\circ \times n + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 90^\circ$$

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 90^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 225^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 270^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

003 답 ④

- ① $40^\circ = 40 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{9}\pi$
 ② $135^\circ = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3}{4}\pi$
 ③ $\frac{5}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 150^\circ$
 ④ $\frac{5}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 300^\circ$
 ⑤ $\frac{7}{5}\pi = \frac{7}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 252^\circ$

004 답 $\frac{2}{3}\pi$

각 θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 일치하므로
 $4\theta - \theta = 2n\pi$ (n 은 정수)

$$3\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n}{3}\pi \quad \dots\dots ㉠$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{에서}$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2n}{3}\pi < \pi \quad \therefore \frac{3}{4} < n < \frac{3}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=1$

이를 ㉠에 대입하면

$$\theta = \frac{2}{3}\pi$$

005 답 $\frac{2}{7}\pi$

각 θ 를 나타내는 동경과 각 6θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여
 대칭이므로

$$\theta + 6\theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$7\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n}{7}\pi \quad \dots\dots ㉡$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서}$$

$$0 < \frac{2n}{7}\pi < \frac{\pi}{2} \quad \therefore 0 < n < \frac{7}{4}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=1$

$$\text{이를 ㉡에 대입하면 } \theta = \frac{2}{7}\pi$$

006 답 ④

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$, 호의 길
 이가 2π 이므로

$$2\pi = r \times \frac{\pi}{3} \quad \therefore r = 6$$

따라서 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{3} = 6\pi$$

007 답 4

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 둘레의 길이가 16이므로 호의
 길이는 $16 - 2r$ 이다.

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}r(16 - 2r) = -r^2 + 8r$$

$$= -(r - 4)^2 + 16 \quad (0 < r < 8)$$

따라서 $r=4$ 일 때 S 는 최대이므로 넓이가 최대인 부채꼴의 반지
 림의 길이는 4이다.

008 답 ②

오른쪽 그림에서 $OP = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$ 이

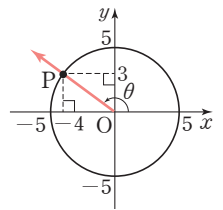
므로 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin \theta = \frac{3}{5}, \cos \theta = -\frac{4}{5}, \tan \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore 5 \sin \theta + 10 \cos \theta + 4 \tan \theta$$

$$= 5 \times \frac{3}{5} + 10 \times \left(-\frac{4}{5}\right) + 4 \times \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$= -8$$



009 답 ②

(i) $\sin \theta \cos \theta < 0$ 일 때

$\sin \theta$ 와 $\cos \theta$ 의 값의 부호가 서로 다르므로 θ 는 제2사분면 또
 는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\sin \theta \tan \theta < 0$ 일 때

$\sin \theta$ 와 $\tan \theta$ 의 값의 부호가 서로 다르므로 θ 는 제2사분면 또
 는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제2사분면의 각이다.

010 답 2

$$\begin{aligned} \frac{(1-\tan \theta)^2}{1+\tan^2 \theta} &= \frac{\left(1-\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^2}{1+\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} = \frac{(\cos \theta - \sin \theta)^2}{\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} \\ &= \frac{(\cos \theta - \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = (\cos \theta - \sin \theta)^2 \\ \therefore (\sin \theta + \cos \theta)^2 + \frac{(1-\tan \theta)^2}{1+\tan^2 \theta} &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\cos \theta - \sin \theta)^2 \\ &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &\quad + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \\ &= 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 2 \end{aligned}$$

011 답 24

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$$

이때 θ 가 제2사분면의 각이므로 $\sin \theta = \frac{12}{13}$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$$

$$\therefore 13 \sin \theta - 5 \tan \theta = 13 \times \frac{12}{13} - 5 \times \left(-\frac{12}{5}\right) = 24$$

012 답 ④

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{2}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{4}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{5}{18}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{5}{18}\right) \right\} = \frac{23}{27} \end{aligned}$$

013 답 $-\frac{7}{8}$

이차방정식 $4x^2 + 3x + k = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{3}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{9}{16}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{9}{16}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{7}{32}$$

따라서 ②에서 $\frac{k}{4} = -\frac{7}{32}$ 이므로

$$k = -\frac{7}{8}$$

014 답 ③

$$\textcircled{1} -935^\circ = 360^\circ \times (-3) + 145^\circ$$

$$\textcircled{2} -595^\circ = 360^\circ \times (-2) + 125^\circ$$

$$\textcircled{3} -225^\circ = 360^\circ \times (-1) + 135^\circ$$

$$\textcircled{4} 875^\circ = 360^\circ \times 2 + 155^\circ$$

$$\textcircled{5} 1505^\circ = 360^\circ \times 4 + 65^\circ$$

따라서 동경 OP가 나타낼 수 있는 각은 ③이다.

015 답 ⑤

$$\textcircled{1} 370^\circ = 360^\circ \times 1 + 10^\circ$$

$$\textcircled{2} 780^\circ = 360^\circ \times 2 + 60^\circ$$

$$\textcircled{3} 1200^\circ = 360^\circ \times 3 + 120^\circ$$

$$\textcircled{4} -30^\circ = 360^\circ \times (-1) + 330^\circ$$

$$\textcircled{5} -550^\circ = 360^\circ \times (-2) + 170^\circ$$

016 답 ㄴ, ㄹ, ㄷ, ㅅ

$$390^\circ = 360^\circ \times 1 + 30^\circ$$

$$\textcircled{ㄱ} -1380^\circ = 360^\circ \times (-4) + 60^\circ$$

$$\textcircled{ㄴ} -690^\circ = 360^\circ \times (-2) + 30^\circ$$

$$\textcircled{ㄷ} -300^\circ = 360^\circ \times (-1) + 60^\circ$$

$$\textcircled{ㄹ} 420^\circ = 360^\circ \times 1 + 60^\circ$$

$$\textcircled{ㅁ} 750^\circ = 360^\circ \times 2 + 30^\circ$$

$$\textcircled{ㅂ} 1110^\circ = 360^\circ \times 3 + 30^\circ$$

따라서 각을 나타내는 동경이 390°를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄴ, ㄹ, ㄷ, ㅅ이다.

017 답 제2사분면 또는 제4사분면

2θ 가 제3사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 180^\circ < 2\theta < 360^\circ \times n + 270^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore 180^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 180^\circ \times n + 135^\circ$$

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 135^\circ$$

따라서 θ 는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 270^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 315^\circ$$

따라서 θ 는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

018 답 ③

$$\textcircled{ㄱ} 120^\circ \Rightarrow \text{제2사분면의 각}$$

$$\textcircled{ㄴ} 760^\circ = 360^\circ \times 2 + 40^\circ \Rightarrow \text{제1사분면의 각}$$

$$\textcircled{ㄷ} -30^\circ = 360^\circ \times (-1) + 330^\circ \Rightarrow \text{제4사분면의 각}$$

$$\textcircled{ㄹ} -250^\circ = 360^\circ \times (-1) + 110^\circ \Rightarrow \text{제2사분면의 각}$$

$$\textcircled{ㅁ} 800^\circ = 360^\circ \times 2 + 80^\circ \Rightarrow \text{제1사분면의 각}$$

$$\textcircled{ㅂ} 1300^\circ = 360^\circ \times 3 + 220^\circ \Rightarrow \text{제3사분면의 각}$$

따라서 각을 나타내는 동경이 같은 사분면에 있는 것은 ㄱ-ㄹ, ㄴ-ㅁ이다.

019 [답] ④

θ 가 제1사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n < \theta < 360^\circ \times n + 90^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore 120^\circ \times n < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 30^\circ$$

(i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 30^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 120^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 150^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제2사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 240^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 270^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii), (iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제4사분면이다.

020 [답] ③

$$\textcircled{1} \quad 315^\circ = 315 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7}{4}\pi$$

$$\textcircled{2} \quad 162^\circ = 162 \times \frac{\pi}{180} = \frac{9}{10}\pi$$

$$\textcircled{3} \quad -690^\circ = -690 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{23}{6}\pi$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{9}{5}\pi = \frac{9}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 324^\circ$$

$$\textcircled{5} \quad -\frac{17}{18}\pi = -\frac{17}{18}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -170^\circ$$

021 [답] ㄱ, ㄷ, ㄹ

$$\text{ㄱ. } 60^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{이므로 } \frac{\pi}{60^\circ} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} = 3$$

$$\text{ㄴ. } -\frac{11}{5}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{9}{5}\pi \text{이므로 } -\frac{11}{5}\pi \text{는 제4사분면의 각이다.}$$

$$\text{ㄷ. } -\frac{20}{3}\pi = 2\pi \times (-4) + \frac{4}{3}\pi \text{이므로 동경의 일반각은 } 2n\pi + \frac{4}{3}\pi \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$\text{ㄹ. } \frac{17}{4}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{\pi}{4}, -\frac{15}{4}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{\pi}{4} \text{이므로 } \frac{\pi}{4}, \frac{17}{4}\pi, -\frac{15}{4}\pi \text{를 나타내는 동경은 모두 일치한다.}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

022 [답] ④

$$\textcircled{1} \quad -530^\circ = 360^\circ \times (-2) + 190^\circ \Rightarrow \text{제3사분면의 각}$$

$$\textcircled{2} \quad 930^\circ = 360^\circ \times 2 + 210^\circ \Rightarrow \text{제3사분면의 각}$$

$$\textcircled{3} \quad -\frac{27}{4}\pi = 2\pi \times (-4) + \frac{5}{4}\pi \Rightarrow \text{제3사분면의 각}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{19}{3}\pi = 2\pi \times 3 + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \text{제1사분면의 각}$$

$$\textcircled{5} \quad -\frac{25}{9}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{11}{9}\pi \Rightarrow \text{제3사분면의 각}$$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

023 [답] ③

각 θ 를 나타내는 동경과 각 9θ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$9\theta - \theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$8\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{n}{4}\pi \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } 0 < \frac{n}{4}\pi < \frac{\pi}{2} \quad \therefore 0 < n < 2$$

이때 n 은 정수이므로 $n=1$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \theta = \frac{\pi}{4}$$

024 [답] ⑤

각 2θ 를 나타내는 동경과 각 6θ 를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$$6\theta - 2\theta = (2n+1)\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$4\theta = (2n+1)\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n+1}{4}\pi \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$0 < \theta < \pi \text{에서 } 0 < \frac{2n+1}{4}\pi < \pi \quad \therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \theta = \frac{3}{4}\pi$$

$$\text{따라서 모든 각 } \theta \text{의 크기의 합은 } \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi = \pi$$

025 [답] $\frac{1}{2}$

각 θ 를 나타내는 동경과 각 7θ 를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$$7\theta - \theta = (2n+1)\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$6\theta = (2n+1)\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n+1}{6}\pi \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{에서 } \pi < \frac{2n+1}{6}\pi < \frac{3}{2}\pi \quad \therefore \frac{5}{2} < n < 4$$

이때 n 은 정수이므로 $n=3$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \theta = \frac{7}{6}\pi$$

$$\therefore \sin(\theta - \pi) = \sin\left(\frac{7}{6}\pi - \pi\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

026 [답] ⑤

각 3θ 를 나타내는 동경과 각 6θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$3\theta + 6\theta = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$9\theta = 2n\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n}{9}\pi \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{에서 } \pi < \frac{2n}{9}\pi < \frac{3}{2}\pi \quad \therefore \frac{9}{2} < n < \frac{27}{4}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=5$ 또는 $n=6$

$$\text{이를 ㉠에 대입하면 } \theta = \frac{10}{9}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{따라서 모든 각 } \theta \text{의 크기의 합은 } \frac{10}{9}\pi + \frac{4}{3}\pi = \frac{22}{9}\pi$$

027 답 ②

각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 5\theta = (2n+1)\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$6\theta = (2n+1)\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n+1}{6}\pi \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } 0 < \frac{2n+1}{6}\pi < \frac{\pi}{2} \quad \therefore -\frac{1}{2} < n < 1$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$

$$\text{이를 ㉠에 대입하면 } \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

028 답 4

각 θ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 3\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n \text{은 정수})$$

$$4\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta = \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{8} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$0 < \theta < 2\pi \text{에서 } 0 < \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{8} < 2\pi \quad \therefore -\frac{1}{4} < n < \frac{15}{4}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0, 1, 2, 3$

$$\text{이를 ㉠에 대입하면 } \theta = \frac{\pi}{8}, \frac{5}{8}\pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{13}{8}\pi$$

따라서 조건을 만족시키는 각 θ 는 4개이다.

029 답 4π

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$12\pi = \frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{2}{3}\pi, \quad r^2 = 36$$

$$\therefore r = 6 \quad (\because r > 0)$$

따라서 부채꼴의 호의 길이는

$$6 \times \frac{2}{3}\pi = 4\pi$$

030 답 ①

주어진 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 옆면인 부채꼴의 호의 길이는 $2\pi \times 3 = 6\pi$ 이므로 부채꼴의 넓이는

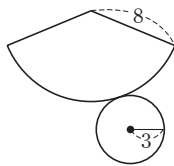
$$\frac{1}{2} \times 8 \times 6\pi = 24\pi$$

또 밑면인 원의 넓이는

$$\pi \times 3^2 = 9\pi$$

따라서 원뿔의 겉넓이는

$$24\pi + 9\pi = 33\pi$$



031 답 $(100+56\pi)$ cm

와이퍼의 전체 길이를 r cm라 하면

$$\frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{4}{5}\pi - \frac{1}{2} \times (r-50)^2 \times \frac{4}{5}\pi = 1400\pi$$

$$r^2 - (r-50)^2 = 3500$$

$$100r = 6000 \quad \therefore r = 60$$

따라서 와이퍼의 고무판이 회전하면서 닦은 유리창의 둘레의 길이는

$$60 \times \frac{4}{5}\pi + (60-50) \times \frac{4}{5}\pi + 50 \times 2 = 100 + 56\pi \text{ (cm)}$$

032 답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 색칠한 부분에 내접

하는 두 개의 삼각형은 한 변의 길이가 4

인 정삼각형이므로 부채꼴 OAB의 중심

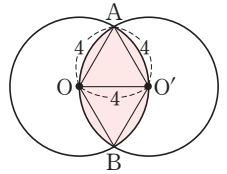
각의 크기는 $\frac{2}{3}\pi$ 이다.

부채꼴 OAB의 호의 길이를 l 이라 하면

$$l = 4 \times \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$$

따라서 색칠한 부분의 둘레의 길이는 부채꼴 OAB의 호의 길이의 2배이므로

$$2 \times \frac{8}{3}\pi = \frac{16}{3}\pi$$



033 답 $\frac{\pi}{2}$

$\angle COA = \theta$ 라 하면 부채꼴 COA의 넓이는 3π 이므로

$$3\pi = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \theta \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

$\triangle BOA_1$ 에서

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{OA_1}}{6}, \quad \frac{1}{2} = \frac{\overline{OA_1}}{6} \quad \therefore \overline{OA_1} = 3$$

따라서 부채꼴 OA_1C_1 의 호의 길이는

$$3 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

034 답 $\frac{25}{36}$ 배

부채꼴의 넓이를 S 라 하면 $S = \frac{1}{2}r^2\theta$

반지름의 길이를 20% 늘였을 때의 반지름의 길이를 r' , 중심각의 크기를 θ' , 넓이를 S' 이라 하면

$$r' = (1+0.2)r = 1.2r$$

$$S' = \frac{1}{2}(r')^2\theta' = \frac{1}{2} \times (1.2r)^2\theta'$$

이때 부채꼴의 넓이가 일정하므로 $S = S'$

$$\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times (1.2r)^2\theta'$$

$$\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2} \times 1.44r^2 \times \theta', \quad \theta = 1.44\theta'$$

$$\therefore \theta' = \frac{\theta}{1.44} = \frac{25}{36}\theta$$

따라서 중심각의 크기는 처음의 $\frac{25}{36}$ 배이다.

035 답 ①

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 둘레의 길이가 8이므로 호의 길이는 $8-2r$ 이다.

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r(8-2r) \\ &= -r^2 + 4r \\ &= -(r-2)^2 + 4 \quad (0 < r < 4) \end{aligned}$$

따라서 $r=2$ 일 때 S 의 최댓값은 4이므로 $a=2$, $M=4$

$$\therefore a+M=6$$

036 답 ④

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 둘레의 길이가 10이므로 호의 길이는 $10-2r$ 이다.

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r(10-2r) \\ &= -r^2 + 5r \\ &= -\left(r-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \quad (0 < r < 5) \end{aligned}$$

따라서 $r=\frac{5}{2}$ 일 때 S 의 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이다.

이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$\frac{25}{4} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times \theta \quad \therefore \theta = 2$$

037 답 18

반지름의 길이가 r , 호의 길이가 l 인 부채꼴의 둘레의 길이가 12이므로 $l=12-2r$

$$\begin{aligned} \therefore S+l &= \frac{1}{2}rl+l=l\left(\frac{1}{2}r+1\right) \\ &= (12-2r)\left(\frac{1}{2}r+1\right) \\ &= -r^2+4r+12 \\ &= -(r-2)^2+16 \quad (0 < r < 6) \end{aligned}$$

따라서 $r=2$ 에서 최댓값 16을 가지므로

$$a=2, M=16$$

$$\therefore a+M=18$$

038 답 16 m

부채꼴 모양의 화단의 반지름의 길이를 r m, 호의 길이를 l m라 하면

$$16 = \frac{1}{2}rl \quad \therefore l = \frac{32}{r}$$

부채꼴 모양의 화단의 둘레의 길이는

$$2r+l=2r+\frac{32}{r} \text{ (m)}$$

이때 $2r > 0$, $\frac{32}{r} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 2r+\frac{32}{r} &\geq 2\sqrt{2r \times \frac{32}{r}} \\ &= 16 \text{ (단, 등호는 } r=4 \text{ 일 때 성립)} \end{aligned}$$

따라서 둘레의 길이의 최솟값은 16 m이다.

039 답 -1

오른쪽 그림에서

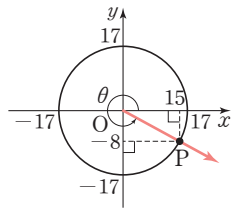
$$\overline{OP} = \sqrt{15^2 + (-8)^2} = 17 \text{ 이므로 삼각함}$$

수의 정의에 의하여

$$\sin \theta = -\frac{8}{17}, \cos \theta = \frac{15}{17},$$

$$\tan \theta = -\frac{8}{15}$$

$$\therefore \frac{17 \cos \theta + 15 \tan \theta}{17 \sin \theta + 1} = \frac{17 \times \frac{15}{17} + 15 \times \left(-\frac{8}{15}\right)}{17 \times \left(-\frac{8}{17}\right) + 1} = -1$$



040 답 ③

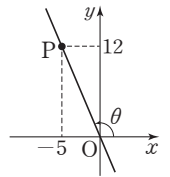
$$12x+5y=0 \text{ 에서 } y = -\frac{12}{5}x \quad \therefore \tan \theta = -\frac{12}{5}$$

$0 < \theta < \pi$ 이고 $\tan \theta = -\frac{12}{5}$ 이므로 점 P의 좌표를 $(-5, 12)$ 로 놓고 동경 OP를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $\overline{OP} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$ 이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin \theta = \frac{12}{13}, \cos \theta = -\frac{5}{13}$$

$$\therefore 13(\sin \theta + \cos \theta) = 13 \times \left\{ \frac{12}{13} + \left(-\frac{5}{13}\right) \right\} = 7$$



041 답 $-\frac{3}{10}$

오른쪽 그림과 같이 점 A, C에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면

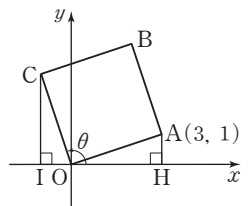
$$\triangle OAH \cong \triangle COI$$

따라서 점 C의 좌표는 $(-1, 3)$ 이고

$$\overline{OC} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10} \text{ 이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}, \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{3}{10}$$



042 답 $\frac{1}{5}$

$\tan \alpha = \frac{1}{2}$ 이므로 두 점 A, P를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

점 P를 원점 O에 대하여 대칭이동한 점이 Q이므로 선분 PQ는 원 $x^2+y^2=1$ 의 지름이다.

$\overline{AQ}$ 를 그으면 원주각의 성질에 의하여

직선 AP와 직선 AQ는 수직이므로 직

선 AQ의 방정식은

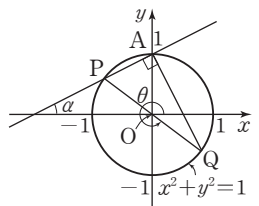
$$y = -2x + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 Q는 원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $\textcircled{1}$ 의 교

점이므로

$$x^2 + (-2x+1)^2 = 1, 5x^2 - 4x = 0, x(5x-4) = 0$$

$$\therefore x = \frac{4}{5} \quad (\because x \neq 0)$$



이를 ㉠에 대입하면 점 Q의 y좌표는

$$y = -2 \times \frac{4}{5} + 1 = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore Q\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

이때 $\overline{OQ} = 1$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{3}{5}, \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

043 답 제4사분면

(i) $\frac{\cos \theta}{\tan \theta} < 0$ 일 때

$\cos \theta, \tan \theta$ 의 값의 부호가 서로 다르므로 θ 는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\sin \theta \tan \theta > 0$ 일 때

$\sin \theta, \tan \theta$ 의 값의 부호가 서로 같으므로 θ 는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제4사분면의 각이다.

044 답 ②

θ 가 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta > 0$$

$$\therefore \cos \theta \tan \theta < 0$$

$$\therefore \frac{\sin \theta}{\cos \theta \tan \theta} > 0$$

$$\therefore \tan \theta - \cos \theta > 0$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

045 답 제2사분면

$$\frac{\sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{\cos \theta}} = -\sqrt{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \text{에서 } \sin \theta \cos \theta \neq 0 \text{이므로}$$

$$\cos \theta < 0, \sin \theta > 0$$

따라서 θ 는 제2사분면의 각이다.

046 답 ②

(i) $\sin \theta \cos \theta > 0$ 일 때

$\sin \theta, \cos \theta$ 의 값의 부호가 서로 같으므로 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\cos \theta \tan \theta < 0$ 일 때

$\cos \theta, \tan \theta$ 의 값의 부호가 서로 다르므로 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제3사분면의 각이다.

즉, $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$ 이므로

$$1 - 2 \sin \theta > 0, \sin \theta + \cos \theta < 0$$

$$\therefore |1 - 2 \sin \theta| + \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} - |\cos \theta|$$

$$= (1 - 2 \sin \theta) + |\sin \theta + \cos \theta| - (-\cos \theta)$$

$$= 1 - 2 \sin \theta + (-\sin \theta - \cos \theta) + \cos \theta$$

$$= 1 - 3 \sin \theta$$

047 답 0

$$\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} - \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta} - \frac{1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$$

$$= \frac{(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} - \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta}$$

$$= \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} - \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = 0$$

048 답 ⑤

$$\frac{\tan \theta \sin \theta}{\tan \theta - \sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \sin \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta - \sin \theta \cos \theta}{\cos \theta}} - \frac{1}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} - \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta - (1 - \cos \theta)}{\sin \theta (1 - \cos \theta)}$$

$$= \frac{(1 - \cos^2 \theta) - (1 - \cos \theta)}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} = \frac{\cos \theta (1 - \cos \theta)}{\sin \theta (1 - \cos \theta)}$$

$$= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta}$$

049 답 ③

$$\textcircled{1} \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta - \sin^3 \theta} = \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta (1 - \sin^2 \theta)}$$

$$= \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta}$$

$$\textcircled{2} \sin^4 \theta - \cos^4 \theta = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)$$

$$= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$$

$$= \sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta)$$

$$= 2 \sin^2 \theta - 1$$

$$\textcircled{3} \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \cos^2 \theta \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - 1 \right)$$

$$= \cos^2 \theta (\tan^2 \theta - 1)$$

$$\textcircled{4} \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta \{ (1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta) \}}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 2$$

$$\textcircled{5} \tan \theta + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta (1 + \sin \theta) + \cos^2 \theta}{\cos \theta (1 + \sin \theta)}$$

$$= \frac{\sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta (1 + \sin \theta)}$$

$$= \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta (1 + \sin \theta)}$$

$$= \frac{1}{\cos \theta}$$

050 ㉠ $-2\sin\theta$

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta} \\ &= \sqrt{\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}-\sqrt{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta} \\ &= \sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2} \\ &= |\sin\theta-\cos\theta|-|\sin\theta+\cos\theta| \\ &= -\sin\theta+\cos\theta-(\sin\theta+\cos\theta) \quad (\because 0<\sin\theta<\cos\theta) \\ &= -2\sin\theta \end{aligned}$$

051 ㉠ -8

$$\begin{aligned} \cos^2\theta &= 1-\sin^2\theta = 1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \\ \text{이때 } \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \text{ 이므로 } \cos\theta &= \frac{4}{5} \\ \therefore \tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \\ \therefore \frac{8\tan\theta-2}{5\cos\theta-3} &= \frac{8\times\left(-\frac{3}{4}\right)-2}{5\times\frac{4}{5}-3} = -8 \end{aligned}$$

052 ㉠ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta} &= \frac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} \\ &= \frac{2}{1-\sin^2\theta} = \frac{2}{\cos^2\theta} \\ \therefore \frac{2}{\cos^2\theta} &= \frac{7}{2} \text{ 에서 } \cos^2\theta = \frac{4}{7} \text{ 이므로} \\ \sin^2\theta &= 1-\cos^2\theta = 1-\frac{4}{7} = \frac{3}{7} \\ \therefore \tan^2\theta &= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{7}} = \frac{3}{4} \\ \text{이때 } \theta \text{ 가 제2사분면의 각이므로} \\ \tan\theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

053 ㉠ ①

$$\begin{aligned} \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta} &= 2-\sqrt{3} \text{ 에서} \\ 1-\tan\theta &= (2-\sqrt{3})(1+\tan\theta) \\ (3-\sqrt{3})\tan\theta &= -1+\sqrt{3} \\ \therefore \tan\theta &= \frac{-1+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan\theta &= \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 의 양변을 제곱하면 } \tan^2\theta = \frac{1}{3} \\ \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} &= \frac{1}{3}, \quad \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{3} \\ 3-3\cos^2\theta &= \cos^2\theta \quad \therefore \cos^2\theta = \frac{3}{4} \\ \text{이때 } \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{ 이므로 } \cos\theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

054 ㉠ $-\frac{\sqrt{15}}{16}$

$$\begin{aligned} & \frac{1-2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta} + \frac{1+2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta} \\ &= \frac{\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta-\sin\theta} + \frac{\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta+\sin\theta} \\ &= \frac{(\cos\theta-\sin\theta)^2}{\cos\theta-\sin\theta} + \frac{(\cos\theta+\sin\theta)^2}{\cos\theta+\sin\theta} \\ &= \cos\theta-\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta \\ &= 2\cos\theta \\ \text{즉, } 2\cos\theta &= \frac{1}{2} \text{ 에서 } \cos\theta = \frac{1}{4} \text{ 이므로} \\ \sin^2\theta &= 1-\cos^2\theta = 1-\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16} \\ \text{이때 } \theta \text{ 가 제4사분면의 각이므로} \\ \sin\theta &= -\frac{\sqrt{15}}{4} \\ \therefore \sin\theta\cos\theta &= -\frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{15}}{16} \end{aligned}$$

055 ㉠ $\frac{\sqrt{31}}{4}$

$$\begin{aligned} \sin\theta+\cos\theta &= \frac{1}{4} \text{ 의 양변을 제곱하면} \\ \sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta &= \frac{1}{16} \\ 1+2\sin\theta\cos\theta &= \frac{1}{16} \\ \therefore \sin\theta\cos\theta &= -\frac{15}{32} \\ \therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2 &= \sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta \\ &= 1-2\times\left(-\frac{15}{32}\right) = \frac{31}{16} \\ \text{이때 } \theta \text{ 가 제2사분면의 각이면 } \sin\theta > 0, \cos\theta < 0 \text{ 이므로} \\ \sin\theta-\cos\theta &> 0 \\ \therefore \sin\theta-\cos\theta &= \frac{\sqrt{31}}{4} \end{aligned}$$

056 ㉠ $\sqrt{15}$

$$\begin{aligned} (\sin\theta-\cos\theta)^2 &= \sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta \\ &= 1-2\times\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3} \\ \text{이때 } \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \text{ 이면 } \sin\theta < 0, \cos\theta > 0 \text{ 이므로} \\ \sin\theta-\cos\theta &< 0 \\ \therefore \sin\theta-\cos\theta &= -\frac{\sqrt{15}}{3} \\ \therefore \frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\sin\theta} &= \frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{-\frac{\sqrt{15}}{3}}{-\frac{1}{3}} = \sqrt{15} \end{aligned}$$

057 ㉠ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned} \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \\ &= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{즉, } \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} &= 2 \text{ 이므로 } \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \therefore (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이때 } \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{ 이면 } \sin \theta < 0, \cos \theta < 0 \text{ 이므로} \\ \sin \theta + \cos \theta < 0 \quad \therefore \sin \theta + \cos \theta &= -\sqrt{2} \\ \therefore \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) \\ &= -\sqrt{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

058 답 ②

$$\begin{aligned} \log_2 \sin \theta + \log_2 \cos \theta &= -1 \text{ 에서} \\ \log_2 \sin \theta \cos \theta &= \log_2 \frac{1}{2} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \therefore (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2 \\ \text{이때 } \theta \text{가 제1사분면의 각이면 } \sin \theta > 0, \cos \theta > 0 \text{ 이므로} \\ \sin \theta + \cos \theta > 0 \quad \therefore \sin \theta + \cos \theta &= \sqrt{2} \\ \log_2 (\sin \theta + \cos \theta) &= \log_2 x - \frac{1}{2} \text{ 에서} \\ \log_2 (\sin \theta + \cos \theta) &= \log_2 x - \log_2 \sqrt{2} \\ \therefore \log_2 \sqrt{2} &= \log_2 \frac{x}{\sqrt{2}} \\ \text{따라서 } \frac{x}{\sqrt{2}} &= \sqrt{2} \text{ 이므로 } x = 2 \end{aligned}$$

059 답 ①

$$\begin{aligned} \text{이차방정식 } 3x^2 - x + k = 0 \text{ 에서 근과 계수의 관계에 의하여} \\ \sin \theta + \cos \theta &= \frac{1}{3} \quad \dots\dots ㉠ \\ \sin \theta \cos \theta &= \frac{k}{3} \quad \dots\dots ㉡ \\ ㉠ \text{의 양변을 제곱하면} \\ \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta &= \frac{1}{9} \\ 1 + 2 \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{9} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9} \\ \text{따라서 } ㉡ \text{에서 } \frac{k}{3} &= -\frac{4}{9} \text{ 이므로} \\ k &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

060 답 -1

$$\begin{aligned} \text{이차방정식 } 2x^2 - 2x + k = 0 \text{ 에서 근과 계수의 관계에 의하여} \\ (\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta - \cos \theta) &= 1 \quad \dots\dots ㉠ \\ (\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) &= \frac{k}{2} \quad \dots\dots ㉡ \\ ㉠ \text{에서 } 2 \sin \theta &= 1 \quad \therefore \sin \theta = \frac{1}{2} \\ ㉡ \text{의 좌변을 간단히 하면} \\ (\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) \\ &= 2 \sin^2 \theta - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{즉, } 2 \sin^2 \theta - 1 &= \frac{k}{2} \text{ 이므로 } \sin \theta = \frac{1}{2} \text{ 을 대입하면} \\ \frac{1}{2} - 1 &= \frac{k}{2} \quad \therefore k = -1 \end{aligned}$$

061 답 $-\sqrt{15}$

$$\begin{aligned} \text{이차방정식 } 9x^2 + kx + 1 = 0 \text{ 에서 근과 계수의 관계에 의하여} \\ \sin^2 \theta \cos^2 \theta &= \frac{1}{9} \quad \dots\dots ㉠ \\ \text{이때 } \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{ 이면 } \sin \theta < 0, \cos \theta < 0 \text{ 이므로 } ㉠ \text{에서} \\ \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{3} \\ (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \text{ 이므로} \\ \sin \theta + \cos \theta &= -\frac{\sqrt{15}}{3} \quad (\because \sin \theta < 0, \cos \theta < 0) \\ \therefore \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} &= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{15}}{3}}{\frac{1}{3}} = -\sqrt{15} \end{aligned}$$

062 답 $3x^2 + 8x + 3 = 0$

$$\begin{aligned} \text{이차방정식 } 4x^2 - 2x + k = 0 \text{ 의 두 근이 } \sin \theta, \cos \theta \text{ 이므로 근과} \\ \text{계수의 관계에 의하여} \\ \sin \theta + \cos \theta &= \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉠ \\ \sin \theta \cos \theta &= \frac{k}{4} \quad \dots\dots ㉡ \\ ㉠ \text{의 양변을 제곱하면} \\ \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta &= \frac{1}{4} \\ 1 + 2 \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{4} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8} \\ \text{즉, } ㉡ \text{에서 } \frac{k}{4} &= -\frac{3}{8} \text{ 이므로 } k = -\frac{3}{2} \\ \text{이때 } \tan \theta \text{ 와 } \frac{1}{\tan \theta} \text{ 의 합과 곱을 구하면} \\ \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{8}{3} \\ \tan \theta \times \frac{1}{\tan \theta} &= 1 \\ \text{따라서 } \tan \theta, \frac{1}{\tan \theta} \text{ 을 두 근으로 하고 } x^2 \text{ 의 계수가 } -2k=3 \text{ 인 이} \\ \text{차방정식은} \\ 3\left(x^2 + \frac{8}{3}x + 1\right) &= 0 \quad \therefore 3x^2 + 8x + 3 = 0 \end{aligned}$$

063 답 ②

$$\begin{aligned} ① \quad -1300^\circ &= 360^\circ \times (-4) + 140^\circ \\ ② \quad -590^\circ &= 360^\circ \times (-2) + 130^\circ \\ ③ \quad 500^\circ &= 360^\circ \times 1 + 140^\circ \\ ④ \quad 1220^\circ &= 360^\circ \times 3 + 140^\circ \\ ⑤ \quad 1940^\circ &= 360^\circ \times 5 + 140^\circ \\ \text{따라서 } \alpha \text{ 의 값이 나머지 넷과 다른 하나는 } ② \text{ 이다.} \end{aligned}$$

064 [답] ①

θ 가 제4사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 270^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 360^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore 120^\circ \times n + 90^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 120^\circ$$

(i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 90^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 120^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 210^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 240^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때

$$360^\circ \times k + 330^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 360^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii), (iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제1사분면이다.

065 [답] 67

$$600^\circ = 600 \times \frac{\pi}{180} = \frac{10}{3}\pi \text{이므로}$$

$$a=3, b=10$$

$$\text{또 } \frac{3}{10}\pi = \frac{3}{10}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 54^\circ \text{이므로}$$

$$c=54$$

$$\therefore a+b+c=3+10+54=67$$

066 [답] $\frac{7}{9}\pi$

$$\frac{\pi}{9} \text{와 각 } \theta \text{의 크기를 각각 3배하면 } \frac{\pi}{3}, 3\theta$$

$\frac{\pi}{3}$ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$3\theta - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$3\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3} \quad \therefore \theta = \frac{2}{3}n\pi + \frac{\pi}{9} \quad \dots\dots ①$$

$$0 < \theta < \pi \text{에서 } 0 < \frac{2}{3}n\pi + \frac{\pi}{9} < \pi$$

$$\therefore -\frac{1}{6} < n < \frac{4}{3}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } \theta = \frac{\pi}{9} \text{ 또는 } \theta = \frac{7}{9}\pi$$

$$\text{그런데 } \theta \neq \frac{\pi}{9} \text{이므로 } \theta = \frac{7}{9}\pi$$

067 [답] 2π

각 4θ 를 나타내는 동경과 각 8θ 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$4\theta + 8\theta = (2n+1)\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$12\theta = (2n+1)\pi \quad \therefore \theta = \frac{2n+1}{12}\pi \quad \dots\dots ①$$

$$0 < \theta < 2\pi \text{에서}$$

$$0 < \frac{2n+1}{12}\pi < 2\pi \quad \therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{23}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0, 1, 2, \dots, 11$

따라서 각 θ 는 $n=11$ 일 때 최댓값, $n=0$ 일 때 최솟값을 가지므로

$$n=11 \text{을 ①에 대입하면 } \theta = \frac{23}{12}\pi$$

$$n=0 \text{을 ①에 대입하면 } \theta = \frac{\pi}{12}$$

따라서 각 θ 의 크기의 최댓값과 최솟값의 합은

$$\frac{23}{12}\pi + \frac{\pi}{12} = 2\pi$$

068 [답] ④

호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}rl \text{에서 } 12\pi = \frac{1}{2} \times r \times 4\pi \quad \therefore r=6$$

$$l=r\theta \text{에서 } 4\pi=6\theta \quad \therefore \theta = \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore \frac{r\pi}{\theta} = \frac{6\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 9$$

069 [답] 504 m^2

$\angle AOB = \theta$, $\overline{OA} = r$ m라 하면

$$\text{부채꼴 OAB에서 } 40 = r\theta \quad \dots\dots ①$$

$$\text{부채꼴 OCD에서 } 16 = (r-18)\theta$$

$$16 = r\theta - 18\theta, 16 = 40 - 18\theta$$

$$18\theta = 24 \quad \therefore \theta = \frac{4}{3}$$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } 40 = \frac{4}{3}r$$

$$\therefore r=30$$

따라서 도형 ABDC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 30 \times 40 - \frac{1}{2} \times (30-18) \times 16 = 504 (\text{m}^2)$$

070 [답] ②

부채꼴의 반지름의 길이를 r m라 하면 둘레의 길이가 200 m 이므로 호의 길이는 $(200-2r) \text{ m}$ 이다.

부채꼴의 넓이를 $S \text{ m}^2$ 라 하면

$$S = \frac{1}{2}r(200-2r) = -r^2 + 100r$$

$$= -(r-50)^2 + 2500 \quad (0 < r < 100)$$

따라서 $r=50$ 일 때 S 의 최댓값은 2500 m^2 이다.

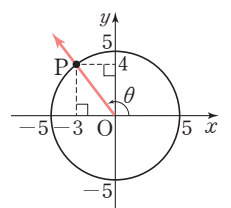
071 [답] ③

오른쪽 그림에서 $\overline{OP} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ 이

므로 삼각함수의 정의에 의하여

$$\cos \theta = -\frac{3}{5}, \tan \theta = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore 15(\cos \theta - \tan \theta) = 15\left\{-\frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{3}\right)\right\} = 11$$



072 답 $\frac{2}{5}$ $\overline{AD}=8, \overline{AB}=4$ 이므로 $A(-4, 2)$ $\overline{OA}=2\sqrt{5}$ 이므로

$$\sin \alpha = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

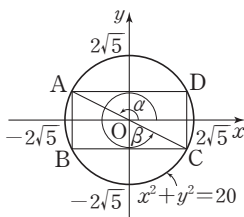
두 점 A, C가 원점에 대하여 대칭이

므로

 $C(4, -2)$ $\overline{OC}=2\sqrt{5}$ 이므로

$$\cos \beta = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}$$

073 답 $-\cos \theta$ θ 는 제2사분면의 각이므로 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$

$$\begin{aligned} \therefore |\cos \theta - \sin \theta + \tan \theta| - \sqrt{\tan^2 \theta} - \sin \theta \\ = -(\cos \theta - \sin \theta + \tan \theta) - |\tan \theta| - \sin \theta \\ = -\cos \theta + \sin \theta - \tan \theta - (-\tan \theta) - \sin \theta \\ = -\cos \theta \end{aligned}$$

074 답 ④

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos \theta(1+\cos \theta)}{\sin \theta(1+\cos \theta)} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \cos \theta}{\sin \theta(1+\cos \theta)} \\ &= \frac{1+\cos \theta}{\sin \theta(1+\cos \theta)} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \end{aligned}$$

075 답 $-\sqrt{3}$ $\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}=3$ 에서

$$1+\cos \theta=3(1-\cos \theta)$$

$$4\cos \theta=2 \quad \therefore \cos \theta=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \sin^2 \theta=1-\cos^2 \theta$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

이때 θ 가 제4사분면의 각이므로

$$\sin \theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

076 답 $-\frac{4}{3}$ $\sin \theta + 3\cos \theta = 1$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 6\sin \theta \cos \theta + 9\cos^2 \theta = 1$$

$$6\sin \theta \cos \theta + 8\cos^2 \theta = 0$$

$$2\cos \theta(3\sin \theta + 4\cos \theta) = 0$$

이때 $\cos \theta \neq 0$ 이므로 $3\sin \theta + 4\cos \theta = 0$

$$3\sin \theta = -4\cos \theta, \quad \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore \tan \theta = -\frac{4}{3}$$

077 답 ⑤

 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$1 - 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{5} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2\sin \theta \cos \theta \\ &= \frac{9}{5} \end{aligned}$$

이때 θ 가 제1사분면의 각이면 $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta > 0$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^4 \theta - \cos^4 \theta &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) \\ &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

078 답 1

이차방정식 $4x^2+3x-9=0$ 의 두 근이 $\frac{1}{\sin \theta}, \frac{1}{\cos \theta}$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{3}{4} \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{9}{4} \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{3}{4}$$

 $\textcircled{㉡}$ 을 대입하면

$$(\sin \theta + \cos \theta) \times \left(-\frac{9}{4}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$\text{또 } \textcircled{㉡} \text{에서 } \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

한편 이차방정식 $9x^2+ax-b=0$ 의 두 근이 $\sin \theta, \cos \theta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{a}{9}, \quad \sin \theta \cos \theta = -\frac{b}{9}$$

$$\text{따라서 } -\frac{a}{9} = \frac{1}{3}, \quad -\frac{b}{9} = -\frac{4}{9} \text{이므로 } a = -3, \quad b = 4$$

$$\therefore a+b=1$$



001 답 ⑤

함수 $f(x)$ 의 주기가 p 이므로 임의의 실수 x 에 대하여

$$f(x+p)=f(x)$$

$$\therefore f(p)=f(0)=\sin 0+\cos \frac{0}{4}+\tan 0=1$$

002 답 -8

함수 $y=\cos 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\cos 2(x-1)+a=\cos (2x-2)+a$$

이 식이 $y=\cos (2x+b)+4$ 와 같아야 하므로

$$a=4, b=-2 \quad \therefore ab=-8$$

003 답 ③

$$① f(\pi)=3 \sin (2\pi-\pi)+1=1$$

② 정의역은 실수 전체의 집합이다.

$$③ \text{ 주기는 } \frac{2\pi}{2}=\pi \text{이다.}$$

$$④ \text{ 최댓값은 } 3+1=4, \text{ 최솟값은 } -3+1=-2 \text{이다.}$$

$$⑤ f(x)=3 \sin (2x-\pi)+1=3 \sin 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+1 \text{의 그래프는}$$

$y=3 \sin 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

004 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 최댓값은 $|-2|+3=5$, 최솟값은 $-|-2|+3=1$ 이다.

ㄴ. 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$ 이므로 임의의 실수 x 에 대하여

$$f(x+\pi)=f(x)$$

$$\text{ㄷ. } f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2 \cos \left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+3=1 \text{이므로 그래프는 점 } \left(\frac{\pi}{6}, 1\right) \text{을 지난다.}$$

$$\text{ㄹ. } f(x)=-2 \cos \left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+3=-2 \cos 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+3 \text{의 그래프는}$$

직선 $x=\frac{\pi}{6}$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

005 답 ④

$$① \text{ 주기가 } \frac{\pi}{2} \text{인 주기함수이다.}$$

$$② \text{ 최댓값과 최솟값은 없다.}$$

$$③ \text{ 그래프는 원점을 지나지 않는다.}$$

$$④ \text{ 그래프의 점근선의 방정식은}$$

$$2x-\frac{\pi}{4}=n\pi+\frac{\pi}{2} \quad \therefore x=\frac{n}{2}\pi+\frac{3}{8}\pi (n \text{은 정수})$$

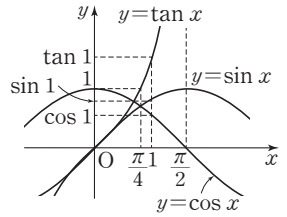
$$⑤ y=4 \tan \left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=4 \tan 2\left(x-\frac{\pi}{8}\right) \text{의 그래프는 } y=4 \tan 2x$$

의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$ 만큼 평행이동한 것이다.

006 답 ③

$\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}$ 이므로 오른쪽 그림에서

$$\cos 1<\sin 1<\tan 1$$

007 답 6π

$y=\sin x$ 의 그래프에서

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\pi}{2}, \frac{x_3+x_4}{2}=\frac{5}{2}\pi \text{이므로}$$

$$x_1+x_2=\pi, x_3+x_4=5\pi$$

$$\therefore x_1+x_2+x_3+x_4=6\pi$$

008 답 ①

$f(x)=a \cos \frac{\pi}{4}x+b$ 의 최댓값이 7이고 $a<0$ 이므로

$$-a+b=7 \quad \cdots \cdots ㉠$$

$$f(8)=3 \text{이므로 } a \cos 2\pi+b=3$$

$$\therefore a+b=3 \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2, b=5$

$$\therefore ab=-10$$

009 답 -6π

주어진 함수의 최댓값이 1, 최솟값이 -3 이고 $a>0$ 이므로

$$a+d=1, -a+d=-3$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, d=-1$

또 주기가 $\frac{7}{6}\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}\pi$ 이고 $b>0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b}=\frac{2}{3}\pi \quad \therefore b=3$$

따라서 주어진 함수는 $y=2 \sin (3x+c)-1$ 이고 그래프가 점

$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 을 지나므로

$$1=2 \sin \left(\frac{3}{2}\pi+c\right)-1 \quad \therefore \sin \left(\frac{3}{2}\pi+c\right)=1$$

이때 $0< c < 2\pi$ 에서 $\frac{3}{2}\pi < \frac{3}{2}\pi+c < \frac{7}{2}\pi$ 이므로

$$\frac{3}{2}\pi+c=\frac{5}{2}\pi \quad \therefore c=\pi$$

$$\therefore abcd=2 \times 3 \times \pi \times (-1)=-6\pi$$

010 답 ①

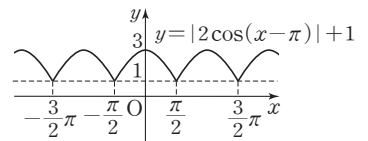
$y=|2 \cos (x-\pi)|+1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으

므로

$$a=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

$$M=3, m=1$$

$$\therefore a(M+m)=\pi(3+1)=4\pi$$



011 답 ②

함수 $f(x)$ 의 주기가 p 이므로 임의의 실수 x 에 대하여
 $f(x+2p)=f(x+p)=f(x)$
 $\therefore f(2p)=f(0)=\frac{\sin 0+\cos 0-3}{\tan 0+2}=\frac{-2}{2}=-1$

012 답 ③

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2)=f(x)$ 이므로
 $f(102)=f(100)=f(98)=\dots=f(0)=1$
 $f(101)=f(99)=f(97)=\dots=f(1)=3$
 $\therefore f(100)+f(101)+f(102)=1+3+1=5$

013 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

모든 실수 x 에 대하여 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 를 만족시키므로 이
 식의 양변에 x 대신 $x+\frac{\pi}{2}$ 를 대입하면
 $f(x+\pi)=f(x)$
 따라서 함수 $f(x)$ 는 주기가 π 인 주기함수이므로
 $f\left(\frac{22}{3}\pi\right)=f\left(\frac{19}{3}\pi\right)=f\left(\frac{16}{3}\pi\right)=\dots=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$
 $\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

014 답 ④

$y=3\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)+2=3\sin\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)+2$ 의 그래프는
 $y=3\sin\pi x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로
 2만큼 평행이동한 것이므로
 $a=\frac{1}{2}$, $b=2 \quad \therefore a+b=\frac{5}{2}$

015 답 $\frac{4}{3}\pi$

$y=\cos 2x-3$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
 $-y=\cos 2x-3 \quad \therefore y=-\cos 2x+3$
 이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 a
 만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y=-\cos 2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+3+a=-\cos\left(2x+\frac{2}{3}\pi\right)+3+a$
 이 식이 $y=-\cos(2x+b)+5$ 와 같아야 하므로
 $a=2$, $b=\frac{2}{3}\pi \quad \therefore ab=\frac{4}{3}\pi$

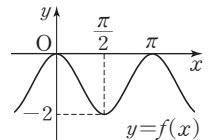
016 답 ③

① $y=\sin(2x-\pi)=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 $y=\sin 2x$ 의 그
 래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.
 ② $y=\sin 2x+1$ 의 그래프는 $y=\sin 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으
 로 1만큼 평행이동한 것이다.
 ③ $y=2\sin x+3$ 의 그래프는 $y=\sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으
 로 2배 한 후 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=-\sin 2x$ 의 그래프는 $y=\sin 2x$ 의 그래프를 x 축에 대하여
 대칭이동한 것이다.
 ⑤ $y=-\sin(2x+2)-4=-\sin 2\left(x+1\right)-4$ 의 그래프는
 $y=\sin 2x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방
 향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이다.
 따라서 $y=\sin 2x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지
 지 않는 그래프의 식은 ③이다.

017 답 ②

ㄱ. 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+\pi)=f(x)$
 이다.
 ㄴ. 최댓값은 $|-1|-1=0$, 최솟값은 $-|-1|-1=-2$ 이므로
 $-2\leq f(x)\leq 0$
 ㄷ. $f(x)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-1=-\sin 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ 의 그래프는
 $y=\sin 2x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방
 향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.
 ㄹ. $f(x)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-1$ 의 그래프
 는 오른쪽 그림과 같으므로 $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$
 에서 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값은
 감소한다.



따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

018 답 4

$y=3\sin\left(\pi x-\frac{1}{2}\right)+1$ 에서
 $p=\frac{2\pi}{\pi}=2$, $M=3+1=4$, $m=-3+1=-2$
 $\therefore p+M+m=2+4+(-2)=4$

019 답 ⑤

① 최댓값은 $2+2=4$
 ② 최솟값은 $-2+2=0$
 ③ $y=2\cos(4x+\pi)+2$ 에 $x=0$ 을 대입하면 $y=2\cos\pi+2=0$
 이므로 그래프는 원점을 지난다.
 ④ 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 이므로 임의의 실수 x 에 대하여
 $f(x+\pi)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$
 ⑤ $f(x)=2\cos(4x+\pi)+2=2\cos 4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2$ 의 그래프는
 $y=2\cos 4x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$ 만큼, y 축의 방향
 으로 2만큼 평행이동한 것이다.

020 답 36

$y=-4\cos\left(\frac{\pi}{2}x-3\right)+5$ 에서
 $p=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$, $M=-|-4|+5=9$, $m=-|-4|+5=1$
 $\therefore pMm=4\times 9\times 1=36$

021 답 ②

- ㄱ. 주기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다.
 ㄴ. 최댓값과 최솟값은 없다.
 ㄷ. 정의역은 $3x - \pi \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$, 즉 $x \neq \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)인 실수 전체의 집합이다.
 ㄹ. $y = \tan(3x - \pi)$ 에 $x=0$ 을 대입하면 $y = \tan(-\pi) = 0$ 이므로 그래프는 원점을 지난다.
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

022 답 ⑤

$$y = \tan \frac{1}{3} \left(x + \frac{2}{3}\pi \right) \text{의 주기는 } \frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$$

- ① $y = 2\sin \frac{x}{2}$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$
 ② $y = \cos 2x + 1$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$
 ③ $y = -2\tan \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{1} = \pi$
 ④ $y = \frac{1}{2} \sin(x + 3\pi)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$
 ⑤ $y = -3\cos \left(\frac{2}{3}x - \pi \right)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$

따라서 $y = \tan \frac{1}{3} \left(x + \frac{2}{3}\pi \right)$ 와 주기가 같은 함수는 ⑤이다.

023 답 ㄴ, ㄷ

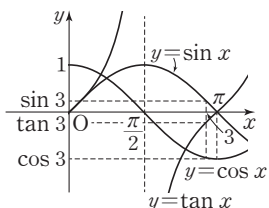
모든 실수 x 에 대하여 $f(x + \pi) = f(x)$ 이면 주기가 $\frac{\pi}{n}$ (n 은 자연수)인 주기함수이다.

- ㄱ. $f(x)$ 의 주기는 2π
 이때 $\frac{\pi}{n} = 2\pi$ 를 만족시키는 자연수 n 이 존재하지 않으므로 $f(x + \pi) \neq f(x)$
 ㄴ. $f(x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ $\therefore f(x + \pi) = f(x)$
 ㄷ. $f(x)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ $\therefore f(x + \pi) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$
 ㄹ. $f(x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$

이때 $\frac{\pi}{n} = \sqrt{2}\pi$ 를 만족시키는 자연수 n 이 존재하지 않으므로 $f(x + \pi) \neq f(x)$
 따라서 보기 중 모든 실수 x 에 대하여 $f(x + \pi) = f(x)$ 를 만족시키는 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

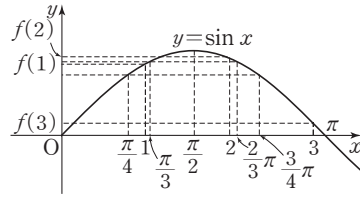
024 답 ④

$\frac{5}{6}\pi < 3 < \pi$ 이므로 오른쪽 그림에서 $\cos 3 < \tan 3 < \sin 3$
 $\therefore B < C < A$



025 답 ⑤

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 x 의 값이 증가하면 $\sin x$ 의 값도 증가하고,
 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 에서 x 의 값이 증가하면 $\sin x$ 의 값은 감소한다.



$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3} &\text{이므로 } \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 1 < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\pi}{2} < 2 < \frac{2}{3}\pi &\text{이므로 } \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin 2 < 1 \\ \frac{3}{4}\pi < 3 < \pi &\text{이므로 } 0 < \sin 3 < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \therefore \sin 3 < \sin 1 < \sin 2 \\ \therefore f(3) < f(1) < f(2) \end{aligned}$$

026 답 -1

$$\begin{aligned} y = \cos x \text{의 그래프에서} \\ \frac{a+b}{2} = -\pi, \frac{c+d}{2} = \pi \text{이므로} \\ a+b = -2\pi, c+d = 2\pi \\ \therefore \frac{a+b}{c+d} = \frac{-2\pi}{2\pi} = -1 \end{aligned}$$

027 답 $-\pi$

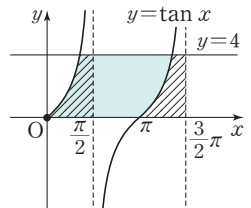
$$\begin{aligned} y = \cos x \text{의 그래프에서} \\ \frac{a+c}{2} = \pi \quad \therefore a+c = 2\pi \\ y = \sin x \text{의 그래프에서} \\ \frac{b+d}{2} = \frac{3}{2}\pi \quad \therefore b+d = 3\pi \\ \therefore a-b+c-d = a+c-(b+d) \\ = 2\pi - 3\pi = -\pi \end{aligned}$$

028 답 1

$$\begin{aligned} y = \sin \frac{1}{2}x \text{의 그래프에서} \\ \frac{\alpha+\beta}{2} = \pi, \frac{\gamma+\delta}{2} = 3\pi \text{이므로} \\ \alpha+\beta = 2\pi, \gamma+\delta = 6\pi \\ \therefore \cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \cos(2\pi+6\pi) \\ = \cos 8\pi = 1 \end{aligned}$$

029 답 ③

오른쪽 그림에서 빗금친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 $y = \tan x$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $y=4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 $4 \times \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2} \right) = 4\pi$



030 답 2

함수 $y = \sin \frac{\pi}{6}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$

이므로 점 E의 좌표는 (6, 0)이다.

또 주어진 그래프는 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이고 $BC=4$ 이므로

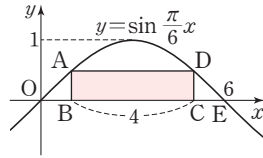
$$\overline{OB} = \frac{1}{2} \times (6-4) = 1$$

$$\therefore B(1, 0), C(5, 0)$$

즉, 점 A의 x좌표는 1이므로 점 A의 y좌표는

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \therefore A\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는 $4 \times \frac{1}{2} = 2$



031 답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$ 의 길이가 최대이고 높이가 최대가 되는 점 P에서 $\triangle ABC$ 의 넓이는 최대가 된다.

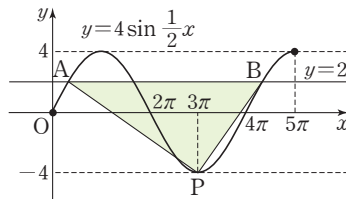
함수 $y = 4 \sin \frac{1}{2}x$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \text{이므로 } \overline{AB} = 4\pi$$

또 최솟값은 -4이므로 높이가 최대가 되는 점 P의 y좌표는 -4이다.

따라서 $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 4\pi \times \{2 - (-4)\} = 12\pi$$



032 답 $\frac{5}{2}$

$f(x) = a \sin\left(bx - \frac{\pi}{3}\right) + c$ 의 최솟값이 -6이고 $a > 0$ 이므로

$$-a + c = -6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 주기가 4π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

$$f(\pi) = 0 \text{에서 } a \sin \frac{\pi}{6} + c = 0$$

$$\frac{a}{2} + c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = 4, c = -2$

$$\therefore a + b + c = 4 + \frac{1}{2} - 2 = \frac{5}{2}$$

033 답 2π

$y = -\tan(ax - b) + 1$ 의 주기가 2π 이고 $a > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a} = 2\pi \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

따라서 $y = -\tan\left(\frac{x}{2} - b\right) + 1$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$\frac{x}{2} - b = n\pi + \frac{\pi}{2}, \frac{x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2} + b$$

$$\therefore x = 2n\pi + \pi + 2b \quad (n \text{은 정수})$$

이 방정식이 $x = 2n\pi$ 와 일치하므로 $\pi + 2b = 2k\pi$ (k 는 정수)

이때 $0 < b < \pi$ 이므로 $b = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore 8ab = 8 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

034 답 ⑤

(가)에서 $f(x) = a \cos b\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + c$ 의 주기가 π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

(나)에서 $a > 0$ 이므로

$$a + c = 3, -a + c = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 1, c = 2$

$$\text{따라서 } f(x) = \cos 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\pi + 2 = 1 + 2 = 3$$

035 답 5

(i) $k = 0$ 일 때

$y = -6$ 이므로 함수의 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다.

(ii) $k > 0$ 일 때

$y = k \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + k^2 - 6$ 의 최댓값은 $k^2 + k - 6$ 이고, 함수의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 최댓값이 0보다 작거나 같아야 하므로

$$k^2 + k - 6 \leq 0, (k+3)(k-2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq k \leq 2$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $0 < k \leq 2$

(iii) $k < 0$ 일 때

$y = k \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + k^2 - 6$ 의 최댓값은 $k^2 - k - 6$ 이고, 함수의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 최댓값이 0보다 작거나 같아야 하므로

$$k^2 - k - 6 \leq 0, (k+2)(k-3) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq k \leq 3$$

그런데 $k < 0$ 이므로 $-2 \leq k < 0$

(i), (ii), (iii)에서 $-2 \leq k \leq 2$

따라서 구하는 정수 k 는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이다.

036 답 2π

주어진 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a > 0$ 이므로

$$a = 2$$

또 주기가 $\frac{3}{4}\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

따라서 주어진 함수는 $y = 2 \cos(2x - c)$ 이고 그래프가 원점을 지나므로

$$0 = 2 \cos(-c) \quad \therefore \cos(-c) = 0$$

이때 $0 < c < \pi$ 에서 $-\pi < -c < 0$ 이므로

$$-c = -\frac{\pi}{2} \quad \therefore c = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore abc = 2 \times 2 \times \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

037 답 -6

주어진 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -4이고 $a > 0$ 이므로

$$a+c=2, -a+c=-4$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3, c=-1$

또 주기가 $\frac{17}{4}\pi - \frac{\pi}{4} = 4\pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 4abc = 4 \times 3 \times \frac{1}{2} \times (-1) = -6$$

038 답 2π

주어진 함수의 주기가 $\frac{5}{4}\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi$ 이고 $a > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a} = \frac{3}{4}\pi \quad \therefore a = \frac{4}{3}$$

따라서 주어진 함수는 $y = \tan\left(\frac{4}{3}x - b\right)$ 이고 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{8}, 0\right)$

을 지나므로 $0 = \tan\left(\frac{\pi}{6} - b\right)$

이때 $0 < b < \frac{\pi}{2}$ 에서 $-\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6} - b < \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\frac{\pi}{6} - b = 0 \quad \therefore b = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore 9ab = 9 \times \frac{4}{3} \times \frac{\pi}{6} = 2\pi$$

039 답 $-\frac{4}{3}\pi$

함수 $y = \tan x$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, d\right)$ 를 지나므로

$$d = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

함수 $y = a \sin(bx+c)$ 의 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a > 0$ 이므로 $a=2$

또 주기가 $\frac{7}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \pi$ 이고 $b > 0$ 이므로 $\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b=2$

따라서 주어진 함수는 $y = 2 \sin(2x+c)$ 이고 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

을 지나므로

$$1 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + c\right) \quad \therefore \sin\left(\frac{\pi}{2} + c\right) = \frac{1}{2}$$

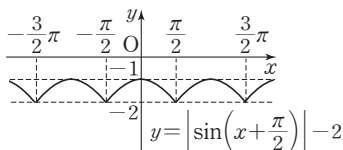
이때 $-\frac{\pi}{2} < c \leq 0$ 에서 $0 < \frac{\pi}{2} + c \leq \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\frac{\pi}{2} + c = \frac{\pi}{6} \quad \therefore c = -\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore abcd = 2 \times 2 \times \left(-\frac{\pi}{3}\right) \times 1 = -\frac{4}{3}\pi$$

040 답 ④

$y = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| - 2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$$a = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

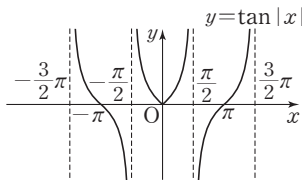
$$M = -1, m = -2$$

$$\therefore aMm = \pi \times (-1) \times (-2) = 2\pi$$

041 답 ⑤

$y = \tan |x|$ 의 그래프는

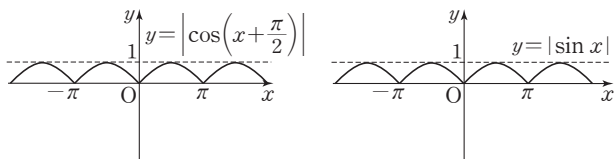
$y = \tan x$ 의 그래프에서 $x \geq 0$ 인 부분만 그린 후 $x < 0$ 인 부분은 $x \geq 0$ 인 부분에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



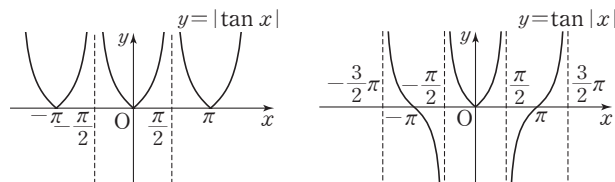
⑤ 그래프의 점근선은 직선 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)이다.

042 답 ①

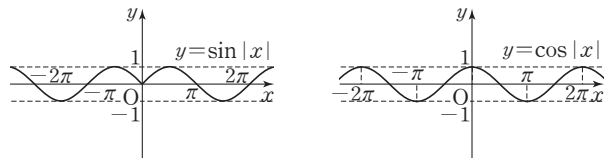
ㄱ. $y = \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|, y = |\sin x|$ 의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



ㄴ. $y = |\tan x|, y = \tan |x|$ 의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



ㄷ. $y = \sin |x|, y = \cos |x|$ 의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



따라서 보기 중 두 함수의 그래프가 일치하는 것은 ㄱ이다.

043 답 ②

$$\sin \frac{7}{6}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{15}{4}\pi = \cos\left(2\pi + 2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \frac{5}{3}\pi = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{5}{4}\pi = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \times \frac{1}{2} + 1 \\ &= -1 + 1 - 2 + 1 = -1 \end{aligned}$$

044 답 ①

$$\sin 5^\circ = \sin(90^\circ - 85^\circ) = \cos 85^\circ$$

$$\sin 10^\circ = \sin(90^\circ - 80^\circ) = \cos 80^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ) = \cos 75^\circ$$

⋮

$$\sin 40^\circ = \sin(90^\circ - 50^\circ) = \cos 50^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= (\cos^2 85^\circ + \sin^2 85^\circ) + (\cos^2 80^\circ + \sin^2 80^\circ) \\ &\quad + \cdots + (\cos^2 50^\circ + \sin^2 50^\circ) + \sin^2 45^\circ \\ &= 1 + \cdots + 1 + \sin^2 45^\circ \\ &\quad \text{--- 8개 ---} \\ &= 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2} \end{aligned}$$

045 답 $-\frac{4}{5}$

$\overline{AB}$ 가 원의 지름이므로

$$\angle C = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\triangle ABC \text{에서 } \overline{BC} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos(2\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha \\ &= -\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

046 답 -6

$$-1 \leq \cos 5x \leq 1 \text{에서 } \cos 5x + 4 > 0$$

$$\therefore y = a \cos 5x + 4a + b$$

$a > 0$ 이므로 주어진 함수의 최댓값은

$$a + 4a + b = 5a + b = 7 \quad \cdots \text{㉠}$$

최솟값은

$$-a + 4a + b = 3a + b = 3 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 2, b = -3$$

$$\therefore ab = -6$$

047 답 $\frac{10}{3}$

$$y = \frac{\cos x + 3}{\cos x + 2} \text{에서 } \cos x = t \text{로 놓으면 } -1 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

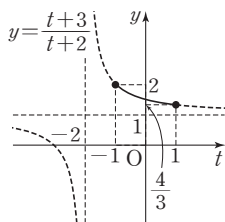
$$y = \frac{t+3}{t+2} = \frac{(t+2)+1}{t+2} = \frac{1}{t+2} + 1$$

오른쪽 그림에서 $t = -1$ 일 때 최댓값은

$$2, t = 1 \text{일 때 최솟값은 } \frac{4}{3} \text{이므로}$$

$$M = 2, m = \frac{4}{3}$$

$$\therefore M + m = \frac{10}{3}$$



048 답 ④

$$\begin{aligned} y &= \sin^2 x + 2 \cos x = (1 - \cos^2 x) + 2 \cos x \\ &= -\cos^2 x + 2 \cos x + 1 \end{aligned}$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

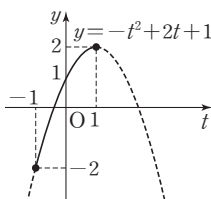
$$y = -t^2 + 2t + 1 = -(t-1)^2 + 2$$

오른쪽 그림에서 $t = 1$ 일 때 최댓값은 2,

$t = -1$ 일 때 최솟값은 -2이므로

$$M = 2, m = -2$$

$$\therefore M - m = 4$$



049 답 $x = 0$ 또는 $x = \frac{\pi}{6}$

$2x + \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < \pi$ 에서 $\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{7}{3}\pi$ 이고, 주어진 방정

$$\text{식은 } \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore t = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } t = \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{즉, } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi \text{이므로}$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{6}$$

050 답 ⑤

$$2 \sin^2 x - \cos x - 1 = 0 \text{에서}$$

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0$$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0, (\cos x + 1)(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\therefore \cos x = -1 \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{이므로}$$

$$\cos x = -1 \text{에서 } x = \pi$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{에서 } x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi$$

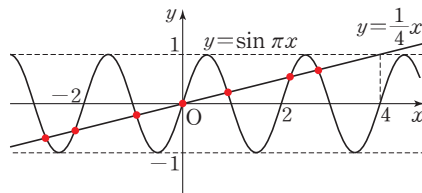
따라서 구하는 모든 근의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \pi + \frac{5}{3}\pi = 3\pi$$

051 답 7

방정식 $\sin \pi x = \frac{1}{4}x$ 의 실근은 함수 $y = \sin \pi x$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{1}{4}x$ 의 교점의 x 좌표와 같다.



위의 그림에서 두 그래프의 교점이 7개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

052 답 $2 \leq k \leq 6$

$$\cos^2 x - 2 \sin x + 4 = k \text{에서 } (1 - \sin^2 x) - 2 \sin x + 4 = k$$

$$\therefore -\sin^2 x - 2 \sin x + 5 = k$$

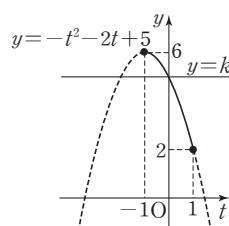
주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y = -\sin^2 x - 2 \sin x + 5$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 교점을 가져야 한다.

$y = -\sin^2 x - 2 \sin x + 5$ 에서 $\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -t^2 - 2t + 5 = -(t+1)^2 + 6$$

따라서 오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 실수 k 의 값의 범위는

$$2 \leq k \leq 6$$



053 답 ⑤

$x + \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{9}{4}\pi$ 이고, 주어진 부등식은 $\sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$

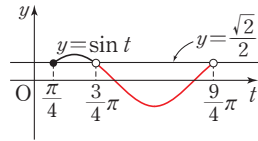
오른쪽 그림에서 부등식 $\sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의

해는 $\frac{3}{4}\pi < t < \frac{9}{4}\pi$ 이므로

$$\frac{3}{4}\pi < x + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{2} < x < 2\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 2\pi$ 이므로 $\alpha + \beta = \frac{5}{2}\pi$



054 답 $-\frac{1}{2}$

$2\cos^2 x - 3 \geq 3\sin x$ 에서 $2(1 - \sin^2 x) - 3 \geq 3\sin x$

$2\sin^2 x + 3\sin x + 1 \leq 0$, $(\sin x + 1)(2\sin x + 1) \leq 0$

$$\therefore -1 \leq \sin x \leq -\frac{1}{2}$$

$-\pi < x < \pi$ 이므로 오른쪽 그림

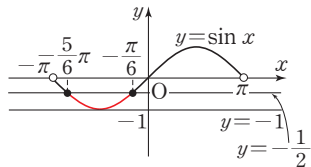
에서 부등식 $-1 \leq \sin x \leq -\frac{1}{2}$

의 해는 $-\frac{5}{6}\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6}$

$$\therefore \alpha = -\frac{5}{6}\pi, \beta = -\frac{\pi}{6}$$

따라서 $\beta - \alpha = -\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$$



055 답 ①

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 - 2x + 2\cos\theta = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

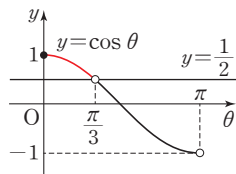
$$\frac{D}{4} = 1 - 2\cos\theta < 0$$

$$\therefore \cos\theta > \frac{1}{2}$$

$0 < \theta < \pi$ 이므로 오른쪽 그림에서 구하는

θ 의 값의 범위는

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{3}$$



056 답 ③

$$\sin \frac{11}{3}\pi = \sin \left(2\pi + 2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{5}{3}\pi = \tan \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\cos \frac{7}{6}\pi = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3 \times (-\sqrt{3}) + 4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

057 답 0.7661

$$\sin 110^\circ = \sin (90^\circ + 20^\circ) = \cos 20^\circ = 0.9397$$

$$\cos 260^\circ = \cos (90^\circ \times 3 - 10^\circ) = -\sin 10^\circ = -0.1736$$

$$\therefore \sin 110^\circ + \cos 260^\circ = 0.9397 - 0.1736 = 0.7661$$

058 답 $\neg$

$$\neg. \cos 1080^\circ = \cos (360^\circ \times 3 + 0^\circ) = \cos 0^\circ = 1$$

$$\sin (-330^\circ) = -\sin 330^\circ = -\sin (360^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 240^\circ = \tan (180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cos 150^\circ = \cos (180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = 1 \times \frac{1}{2} + \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1$$

$$\neg. \sin \frac{13}{4}\pi = \sin \left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \left(-\frac{4}{3}\pi\right) = \cos \frac{4}{3}\pi = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \left(-\frac{7}{6}\pi\right) = -\tan \frac{7}{6}\pi = -\tan \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$= -1 - 1 - 1 = -3$$

$$\neg. \sin \frac{7}{3}\pi = \sin \left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{13}{6}\pi = \tan \left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos \frac{11}{3}\pi = \cos \left(2\pi + 2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \log_2 \frac{\sqrt{3}}{3} + \log_2 \frac{1}{2}$$

$$= \log_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= \log_2 \frac{1}{4} = -2$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$ 이다.

059 답 -1

$$\frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cos^2 (2\pi - \theta)}{\sin \left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)} - \frac{\cos \left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\tan \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}$$

$$= \frac{\cos \theta \cos^2 \theta}{-\cos \theta} - \frac{-\sin \theta \cos \theta}{-\frac{1}{\tan \theta}}$$

$$= -\cos^2 \theta - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}$$

$$= -\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = -1$$

060 답 -4

직선 $2x - \sqrt{2}y + 1 = 0$ 의 기울기가 $\sqrt{2}$ 이므로 $\tan \theta = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{1 - \sin(-\theta)} + \frac{\sin(\theta - \pi)}{1 + \sin(\pi + \theta)} \\ = \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{-\sin \theta}{1 - \sin \theta} \\ = \frac{\sin \theta - \sin^2 \theta - \sin \theta - \sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} \\ = \frac{-2\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = -2\tan^2 \theta \\ = -2 \times 2 = -4 \end{aligned}$$

061 답 ④

$$\cos 10^\circ = \cos(90^\circ - 80^\circ) = \sin 80^\circ$$

$$\cos 20^\circ = \cos(90^\circ - 70^\circ) = \sin 70^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \cos(90^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ$$

$$\cos 40^\circ = \cos(90^\circ - 50^\circ) = \sin 50^\circ$$

$\therefore$ (주어진 식)

$$\begin{aligned} &= (\sin^2 80^\circ + \cos^2 80^\circ) + (\sin^2 70^\circ + \cos^2 70^\circ) \\ &\quad + (\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ) + (\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ) + \cos^2 90^\circ \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 0 = 4 \end{aligned}$$

062 답 ④

$$1^\circ + \theta = A \text{로 놓으면 } \theta = A - 1^\circ$$

$$89^\circ - \theta = 89^\circ - (A - 1^\circ) = 90^\circ - A$$

$$\therefore \text{(주어진 식)} = \tan A \times \tan(90^\circ - A)$$

$$= \tan A \times \frac{1}{\tan A} = 1$$

063 답 0

$$\begin{aligned} &\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \cdots + \sin 180^\circ + \sin 181^\circ + \sin 182^\circ + \cdots + \sin 360^\circ \\ &= \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \cdots + \sin 180^\circ + \sin(180^\circ + 1^\circ) \\ &\quad + \sin(180^\circ + 2^\circ) + \cdots + \sin(180^\circ + 180^\circ) \\ &= \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \cdots + \sin 180^\circ - \sin 1^\circ - \sin 2^\circ - \cdots - \sin 180^\circ \\ &= 0 \end{aligned}$$

064 답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overline{AB}$ 는 반원의 지름이므로

$$\angle ADB = \frac{\pi}{2}$$

$$\triangle ABD \text{에서 } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

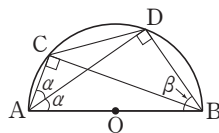
$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\therefore \cos(\beta - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \sin 2\alpha$$

한편 $\triangle ABC$ 에서 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\overline{BC} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \cos(\beta - \alpha) = \sin 2\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



065 답 ⑤

$A + B + C = \pi$ 이므로

$$\textcircled{1} \cos(B + C) = \cos(\pi - A) = -\cos A$$

$$\textcircled{2} \sin(B + C) = \sin(\pi - A) = \sin A$$

$$\textcircled{3} \sin \frac{B+C}{2} = \sin \frac{\pi-A}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cos \frac{A}{2}$$

$$\textcircled{4} \tan(A + C) = \tan(\pi - B) = -\tan B \text{이므로}$$

$$\tan B \tan(A + C) = \tan B \times (-\tan B) = -\tan^2 B$$

$$\textcircled{5} \tan \frac{B+C}{2} = \tan \frac{\pi-A}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{\tan \frac{A}{2}} \text{이므로}$$

$$\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B+C}{2} = \tan \frac{A}{2} \times \frac{1}{\tan \frac{A}{2}} = 1$$

066 답 0

$5\theta = \pi$ 이므로

$$\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos 10\theta$$

$$= \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos 5\theta$$

$$+ \cos(\pi + \theta) + \cos(\pi + 2\theta) + \cdots + \cos(\pi + 5\theta)$$

$$= \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos 5\theta - \cos \theta - \cos 2\theta - \cdots - \cos 5\theta$$

$$= 0$$

067 답 ⑤

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1 \text{이므로 } 2\sin 2x - 3 < 0$$

$$\therefore y = -2a \sin 2x + 3a + b$$

$a > 0$ 이므로 주어진 함수의 최댓값은

$$2a + 3a + b = 5a + b = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

최솟값은

$$-2a + 3a + b = a + b = -3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = -4 \quad \therefore a - b = 5$$

068 답 4

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = -\cos x \text{이므로}$$

$$y = \sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - \cos x + 2$$

$$= -2\cos x + 2$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로 } -2 \leq -2\cos x \leq 2$$

$$\therefore 0 \leq -2\cos x + 2 \leq 4$$

따라서 최댓값은 4, 최솟값은 0이므로 $M = 4, m = 0$

$$\therefore M + m = 4$$

069 답 ⑤

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{에서 } -1 \leq \tan x \leq 1 \text{이므로}$$

$$\tan x - 2 < 0$$

$$\therefore y = \tan x - 2 + k$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $-1 + k$, 최솟값은 $-3 + k$ 이므로

$$-1 + k + (-3 + k) = 4 \quad \therefore k = 4$$

070 [답] ①

$y = \frac{\sin x + 2}{\sin x - 2}$ 에서 $\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

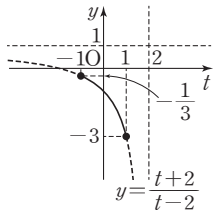
$$y = \frac{t+2}{t-2} = \frac{t-2+4}{t-2} = \frac{4}{t-2} + 1$$

오른쪽 그림에서 $t = -1$ 일 때 최댓값은

$-\frac{1}{3}$, $t = 1$ 일 때 최솟값은 -3 이므로

$$M = -\frac{1}{3}, m = -3$$

$$\therefore Mm = 1$$



071 [답] 3

$y = \frac{3 \tan x + 1}{\tan x + 1}$ 에서 $\tan x = t$ 로 놓으면

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{에서 } 0 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

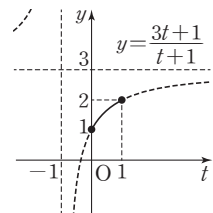
$$y = \frac{3t+1}{t+1} = \frac{3(t+1)-2}{t+1} = \frac{-2}{t+1} + 3$$

오른쪽 그림에서 $t = 1$ 일 때 최댓값은 2,

$t = 0$ 일 때 최솟값은 1이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$$2+1=3$$



072 [답] ③

$y = \frac{a \cos x}{\cos x - 2}$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = \frac{at}{t-2} = \frac{a(t-2)+2a}{t-2} = \frac{2a}{t-2} + a$$

$a > 0$ 이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

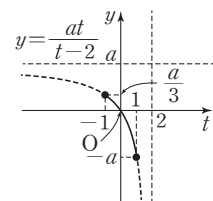
따라서 $t = -1$ 일 때 최댓값 $\frac{a}{3}$ 를 가지므로

$$\frac{a}{3} = 1 \quad \therefore a = 3$$

$t = 1$ 일 때 최솟값 $-a$ 를 가지므로

$$b = -a = -3$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{-3}{3} = -1$$



073 [답] ⑤

$y = \frac{2|\cos x| + 3}{|\cos x| + 1}$ 에서 $|\cos x| = t$ 로 놓으면 $0 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = \frac{2t+3}{t+1} = \frac{2(t+1)+1}{t+1} = \frac{1}{t+1} + 2$$

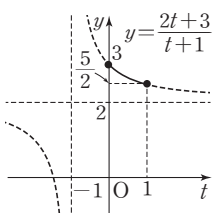
오른쪽 그림에서 $t = 0$ 일 때 최댓값은 3,

$t = 1$ 일 때 최솟값은 $\frac{5}{2}$ 이다.

따라서 주어진 함수의 치역은

$$\left\{ y \mid \frac{5}{2} \leq y \leq 3 \right\} \text{이므로 } a = \frac{5}{2}, b = 3$$

$$\therefore ab = \frac{15}{2}$$



074 [답] ②

$$y = \cos^2 x - 4 \sin(\pi + x) + 2 = (1 - \sin^2 x) + 4 \sin x + 2 = -\sin^2 x + 4 \sin x + 3$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

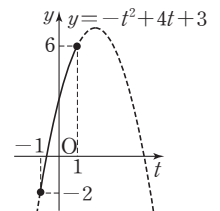
$$y = -t^2 + 4t + 3 = -(t-2)^2 + 7$$

오른쪽 그림에서 $t = 1$ 일 때 최댓값은 6,

$t = -1$ 일 때 최솟값은 -2 이므로

$$M = 6, m = -2$$

$$\therefore M + m = 4$$



075 [답] 1

$$y = -2 \sin^2 x - 2 \cos x + k$$

$$= -2(1 - \cos^2 x) - 2 \cos x + k$$

$$= 2 \cos^2 x - 2 \cos x + k - 2$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = 2t^2 - 2t + k - 2 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + k - \frac{5}{2}$$

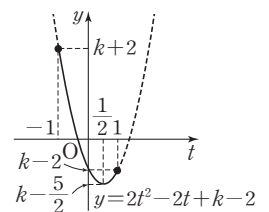
오른쪽 그림에서 $t = -1$ 일 때 최댓값

은 $k+2$, $t = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값은 $k - \frac{5}{2}$

이므로

$$(k+2) + \left(k - \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$2k = 2 \quad \therefore k = 1$$



076 [답] ④

$$y = a \sin^2 x + 2a \cos x + 1$$

$$= a(1 - \cos^2 x) + 2a \cos x + 1$$

$$= -a \cos^2 x + 2a \cos x + a + 1$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -at^2 + 2at + a + 1 = -a(t-1)^2 + 2a + 1$$

오른쪽 그림에서 $t = 1$ 일 때 최댓값

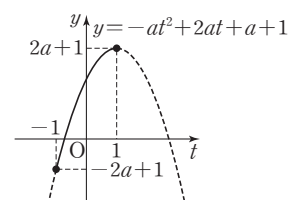
$2a+1$ 을 가지므로

$$2a+1=3 \quad \therefore a=1$$

$t = -1$ 일 때 최솟값 $-2a+1$ 을 가

지므로

$$b = -2a+1 = -1 \quad \therefore a-b=2$$



077 [답] ⑤

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) = -\cos x, \cos(\pi + x) = -\cos x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \text{이므로}$$

$$y = \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) + \cos^2(\pi + x) - 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= \cos^2 x + \cos^2 x - 2 \cos x = 2 \cos^2 x - 2 \cos x$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

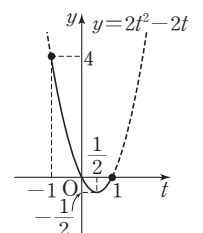
$$y = 2t^2 - 2t = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 $t = -1$ 일 때 최댓값은 4,

$t = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값은 $-\frac{1}{2}$ 이므로 주어진 함

수의 치역은 $\left\{ y \mid -\frac{1}{2} \leq y \leq 4 \right\}$ 이다.

따라서 $a = -\frac{1}{2}$, $b = 4$ 이므로 $ab = -2$



078 답 3

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -\cos^2 x - 2\sin x + 1 \\
 &= -(1 - \sin^2 x) - 2\sin x + 1 \\
 &= \sin^2 x - 2\sin x \\
 \sin x &= t \text{로 놓으면 } -1 \leq t \leq 1 \text{이고} \\
 y &= t^2 - 2t = (t-1)^2 - 1 \\
 t &= -1 \text{일 때 최댓값은 } 3, t=1 \text{일 때 최솟값은 } -1 \text{이므로} \\
 -1 &\leq f(x) \leq 3 \\
 f(x) &= s \text{로 놓으면 } -1 \leq s \leq 3 \text{이고} \\
 (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(s) \\
 &= -s^2 + 4s + 2 = -(s-2)^2 + 6 \\
 s &= 2 \text{일 때 최댓값은 } 6, s = -1 \text{일 때 최솟값은 } -3 \text{이므로} \\
 M &= 6, m = -3 \\
 \therefore M+m &= 3
 \end{aligned}$$

079 답 $\frac{13}{3}\pi$

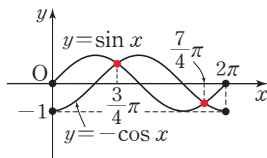
$$\begin{aligned}
 \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} &= t \text{로 놓으면 } 0 \leq x < 4\pi \text{에서 } -\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{7}{4}\pi \text{이고, 주어진} \\
 \text{방정식은 } \tan t &= \sqrt{3} \\
 \therefore t &= \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } t = \frac{4}{3}\pi \\
 \text{즉, } \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{4}{3}\pi \text{이므로} \\
 x &= \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{19}{6}\pi \\
 \text{따라서 모든 근의 합은 } \frac{7}{6}\pi + \frac{19}{6}\pi &= \frac{13}{3}\pi
 \end{aligned}$$

080 답 ③

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x, \sin(\pi + x) = -\sin x \text{이므로} \\
 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin(\pi + x) &= \sqrt{3} \text{에서} \\
 \sin x - (-\sin x) &= \sqrt{3} \\
 2\sin x &= \sqrt{3} \quad \therefore \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 0 \leq x < 4\pi \text{이므로} \\
 x &= \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{8}{3}\pi \\
 \text{따라서 주어진 방정식의 해가 아닌 것은 } &\text{③이다.}
 \end{aligned}$$

081 답 $\frac{5}{2}\pi$

$$\begin{aligned}
 \sin x + \cos x &= 0 \text{에서 } \sin x = -\cos x \\
 \text{오른쪽 그림에서 두 함수 } y &= \sin x, \\
 y &= -\cos x \text{의 그래프의 교점의 } x \text{좌} \\
 \text{표가 } \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \text{이므로} \\
 x &= \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{4}\pi \\
 \text{따라서 모든 } x \text{의 값의 합은} \\
 \frac{3}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi &= \frac{5}{2}\pi
 \end{aligned}$$

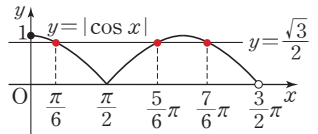


다른 풀이 $\sin x + \cos x = 0$ 에서 $\sin x = -\cos x$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi \text{는 등식을 만족시키지 않고} \\
 x &\neq \frac{\pi}{2}, x \neq \frac{3}{2}\pi \text{일 때 } \cos x \neq 0 \text{이므로 양변을 } \cos x \text{로 나누면} \\
 \frac{\sin x}{\cos x} &= -1 \quad \therefore \tan x = -1 \\
 0 \leq x < 2\pi \text{이므로 } x &= \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{4}\pi \\
 \text{따라서 모든 } x \text{의 값의 합은 } \frac{3}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi &= \frac{5}{2}\pi
 \end{aligned}$$

082 답 $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{오른쪽 그림과 같이 } 0 \leq x < \frac{3}{2}\pi \\
 \text{에서 함수 } y = |\cos x| \text{의 그래프} \\
 \text{와 직선 } y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{의 교점의 } x \text{좌표} \\
 \text{가 } \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi \text{이므로} \\
 x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5}{6}\pi, x_3 = \frac{7}{6}\pi \\
 \therefore x_1 - x_2 + x_3 = \frac{\pi}{6} - \frac{5}{6}\pi + \frac{7}{6}\pi = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$



083 답 ④

$$\begin{aligned}
 2x &= t \text{로 놓으면 } -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \text{에서 } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{이고, 주어진 방정} \\
 \text{식은 } \sin t &= \sqrt{3} \cos t \\
 \text{이때 } \cos t &\neq 0 \text{이므로 양변을 } \cos t \text{로 나누면} \\
 \frac{\sin t}{\cos t} &= \sqrt{3} \quad \therefore \tan t = \sqrt{3} \\
 -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } t &= \frac{\pi}{3} \\
 \text{즉, } 2x &= \frac{\pi}{3} \text{이므로 } x = \frac{\pi}{6} \\
 \text{따라서 } \alpha &= \frac{\pi}{6} \text{이므로} \\
 \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) &= -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

084 답 ④

$$\begin{aligned}
 \pi \sin x &= t \text{로 놓으면 } 0 \leq x < 2\pi \text{에서} \\
 -1 &\leq \sin x \leq 1 \quad \therefore -\pi \leq t \leq \pi \\
 \text{이때 주어진 방정식은 } \cos t &= 0 \text{이므로} \\
 t &= -\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } t = \frac{\pi}{2} \\
 \text{즉, } \pi \sin x &= -\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \pi \sin x = \frac{\pi}{2} \text{이므로} \\
 \sin x &= -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2} \\
 \therefore x &= \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi \\
 \text{따라서 주어진 방정식의 해가 아닌 것은 } &\text{④이다.}
 \end{aligned}$$

085 [답] 2π

$$y = x^2 - 4x \cos \theta - 4 \sin^2 \theta$$

$$= (x - 2 \cos \theta)^2 - 4 \cos^2 \theta - 4 \sin^2 \theta$$

$$= (x - 2 \cos \theta)^2 - 4$$

이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2 \cos \theta, -4)$ 이고, 이 점이 직선 $y = 4x$ 위에 있으므로

$$-4 = 4 \times 2 \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ 이므로 } \theta = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{4}{3}\pi$$

따라서 모든 θ 의 값의 합은

$$\frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = 2\pi$$

086 [답] $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

$$2 \cos^2 x - 5 \sin x + 1 = 0 \text{ 에서}$$

$$2(1 - \sin^2 x) - 5 \sin x + 1 = 0$$

$$2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3 = 0$$

$$(\sin x + 3)(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2} \quad (\because -1 \leq \sin x \leq 1)$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ 이므로 } x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

087 [답] ⑤

$$3 \tan^2 x - 4\sqrt{3} \tan x + 3 = 0 \text{ 에서}$$

$$(3 \tan x - \sqrt{3})(\tan x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } \tan x = \sqrt{3}$$

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 에서 } x = \frac{\pi}{6}$$

$$\tan x = \sqrt{3} \text{ 에서 } x = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \cos(\beta - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

088 [답] ②

$$2 \cos^2 A - \sin A \cos A + \sin^2 A - 1 = 0 \text{ 에서}$$

$$2 \cos^2 A - \sin A \cos A + (1 - \cos^2 A) - 1 = 0$$

$$\cos^2 A - \sin A \cos A = 0$$

$$\therefore \cos A(\cos A - \sin A) = 0$$

한편 $\triangle ABC$ 는 직각삼각형이 아니므로

$$\cos A \neq 0$$

$$\therefore \cos A = \sin A \quad \therefore A = \frac{\pi}{4} \quad (\because 0 < A < \pi)$$

이때 $A + B + C = \pi$ 이므로

$$\tan(B + C) = \tan(\pi - A) = -\tan A$$

$$= -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

089 [답] $-\sqrt{2}$

$$5 \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta - 2 = 0 \text{ 에서}$$

$$5 \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta - 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 0$$

$$3 \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta - 2 \cos^2 \theta = 0$$

$$(3 \sin \theta + 2 \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) = 0$$

$$\text{이때 } \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{ 이므로}$$

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$$

$$\therefore \sin \theta = \cos \theta$$

$$\therefore \theta = \frac{5}{4}\pi$$

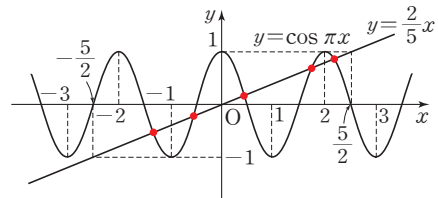
$$\text{따라서 } \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 이므로}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = -\sqrt{2}$$

090 [답] ①

방정식 $\cos \pi x = \frac{2}{5}x$ 의 실근은 함수 $y = \cos \pi x$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{2}{5}x$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

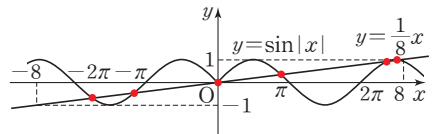


위의 그림에서 두 그래프의 교점이 5개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

091 [답] 6

방정식 $\sin |x| = \frac{1}{8}x$ 의 실근은 함수 $y = \sin |x|$ 의 그래프와 직선

$y = \frac{1}{8}x$ 의 교점의 x 좌표와 같다.



위의 그림에서 두 그래프의 교점이 6개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

092 [답] ②

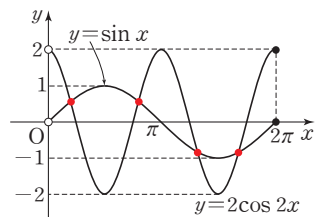
$0 < x \leq 2\pi$ 에서 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 의 실근은 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.

오른쪽 그림에서 두 그래프의 교

점이 4개이므로 방정식

$\sin x = 2 \cos 2x$ 의 서로 다른 실

근의 개수는 4이다.



093 [답] ④

$$4\sin^2 x + 4\cos x - 2 + k = 0 \text{에서}$$

$$4(1 - \cos^2 x) + 4\cos x - 2 + k = 0$$

$$\therefore 4\cos^2 x - 4\cos x - 2 = k$$

따라서 주어진 방정식이 실근을 갖기 위해서는 함수

$y = 4\cos^2 x - 4\cos x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 교점을 가져야 한다.

$y = 4\cos^2 x - 4\cos x - 2$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

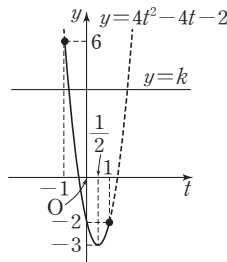
$$y = 4t^2 - 4t - 2 = 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - 3$$

따라서 오른쪽 그림에서 주어진 방정식

이 실근을 갖도록 하는 실수 k 의 값의

범위는 $-3 \leq k \leq 6$ 이므로 k 의 최댓값은

6이다.



094 [답] ①

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{에서 } -1 \leq \tan x \leq 1 \text{이므로 } \tan x \neq 2$$

$$a \tan x = 2a + 1 \text{에서 } a(\tan x - 2) = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{\tan x - 2}$$

따라서 주어진 방정식이 실근을 갖기 위해서는 함수 $y = \frac{1}{\tan x - 2}$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 교점을 가져야 한다.

$\tan x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수

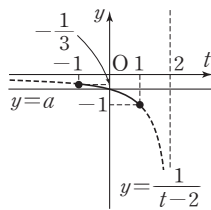
$y = \frac{1}{t-2}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으

므로 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하

는 실수 a 의 값의 범위는

$$-1 \leq a \leq -\frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } a = -1, \beta = -\frac{1}{3} \text{이므로 } \alpha + \beta = -\frac{4}{3}$$



095 [답] $\frac{1}{2}$

방정식 $\left| \sin 2x + \frac{1}{2} \right| = k$ 가 서로 다른 3개의 실근을 가지려면 함

수 $y = \left| \sin 2x + \frac{1}{2} \right|$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 세 점에

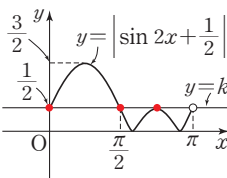
서 만나야 한다.

$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \left| \sin 2x + \frac{1}{2} \right|$ 의

그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 이 그

래프와 직선 $y = k$ 의 교점이 3개이려면

$$k = \frac{1}{2}$$



096 [답] $\frac{1}{2\pi} < a < \frac{1}{\pi}$

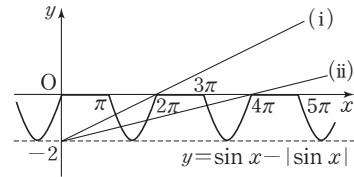
$$y = \sin x - |\sin x| = \begin{cases} 0 & (\sin x \geq 0) \\ 2\sin x & (\sin x < 0) \end{cases} \text{이고 직선 } y = ax - 2 \text{는}$$

a 의 값에 관계없이 항상 점 $(0, -2)$ 를 지난다.

다음 그림에서 $y = \sin x - |\sin x|$ 의 그래프와 직선

$y = ax - 2 (a > 0)$ 가 서로 다른 세 점에서 만나려면 직선

$y = ax - 2$ 가 (i)과 (ii) 사이에 있어야 한다.



(i) 직선 $y = ax - 2$ 가 점 $(2\pi, 0)$ 을 지날 때

$$0 = 2\pi a - 2 \quad \therefore a = \frac{1}{\pi}$$

(ii) 직선 $y = ax - 2$ 가 점 $(4\pi, 0)$ 을 지날 때

$$0 = 4\pi a - 2 \quad \therefore a = \frac{1}{2\pi}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \frac{1}{2\pi} < a < \frac{1}{\pi}$$

097 [답] ④

$x - \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면 $0 < x < 2\pi$ 에서 $-\frac{\pi}{3} < t < \frac{5\pi}{3}$ 이고, 주어진 부

$$\text{등식은 } \cos t \leq \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 부등식

$$\cos t \leq \frac{1}{2} \text{의 해는 } \frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5\pi}{3} \text{이}$$

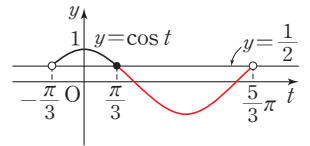
므로

$$\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3}$$

$$\therefore \frac{2\pi}{3} \leq x < 2\pi$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = 2\pi \text{이므로}$$

$$\beta - \alpha = \frac{4\pi}{3}$$



098 [답] $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5\pi}{4} \leq x < 2\pi$

부등식 $\cos x \geq \sin x$ 의 해는 함

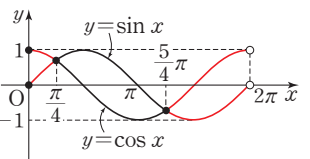
수 $y = \cos x$ 의 그래프가 함수

$y = \sin x$ 의 그래프보다 위쪽에

있는 x 의 값의 범위와 같으므로

오른쪽 그림에서

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{5\pi}{4} \leq x < 2\pi$$



099 [답] ④

$$3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0 \text{에서 } \tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

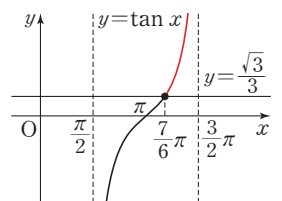
$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \text{이므로 오른쪽 그림에서}$$

$$\text{부등식 } \tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \text{의 해는}$$

$$\frac{7\pi}{6} \leq x < \frac{3\pi}{2}$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는

x 의 최솟값은 $\frac{7\pi}{6}$ 이다.



100 [답] $\frac{\pi}{6} < \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{2}{3}\pi \leq \alpha < \frac{5}{6}\pi$

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ 에서 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$1 < \sin \alpha + \cos \beta \leq \sqrt{3}$ 에서

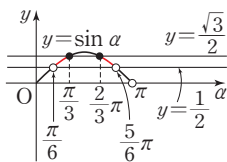
$1 < \sin \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \leq \sqrt{3}$

$1 < 2\sin \alpha \leq \sqrt{3} \quad \therefore \frac{1}{2} < \sin \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leq \alpha < \pi$ 이므로 오른쪽 그림에서 부등식

$\frac{1}{2} < \sin \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는

$\frac{\pi}{6} < \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{2}{3}\pi \leq \alpha < \frac{5}{6}\pi$



101 [답] $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5}{12}\pi$

테니스공의 처음 속력이 20 m/s이므로 $v=20$ 을

$f(\theta) = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$ 에 대입하면

$f(\theta) = \frac{20^2 \times \sin 2\theta}{10} = 40 \sin 2\theta$

이때 테니스공이 날아간 거리가 20 m 이상이 되게 하면 $f(\theta) \geq 20$ 이므로

$40 \sin 2\theta \geq 20 \quad \therefore \sin 2\theta \geq \frac{1}{2}$

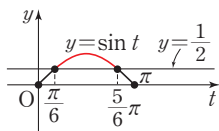
$2\theta = t$ 로 놓으면 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 \leq t \leq \pi$ 이고, 주어진 부등식은

$\sin t \geq \frac{1}{2}$

오른쪽 그림에서 부등식 $\sin t \geq \frac{1}{2}$ 의 해는

$\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5}{6}\pi$ 이므로

$\frac{\pi}{6} \leq 2\theta \leq \frac{5}{6}\pi \quad \therefore \frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5}{12}\pi$



102 [답] ③

$4 \sin^2 x + 8 \cos x < 7$ 에서

$4(1 - \cos^2 x) + 8 \cos x - 7 < 0$

$4 \cos^2 x - 8 \cos x + 3 > 0$

$(2 \cos x - 1)(2 \cos x - 3) > 0$

$\therefore \cos x < \frac{1}{2}$ 또는 $\cos x > \frac{3}{2}$

그런데 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$\cos x < \frac{1}{2}$

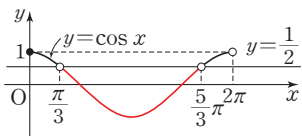
$0 \leq x < 2\pi$ 이므로 오른쪽 그림에

서 부등식 $\cos x < \frac{1}{2}$ 의 해는

$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{5}{3}\pi$ 이므로

$\beta - \alpha = \frac{4}{3}\pi$



103 [답] $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$

$\tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x < -\sqrt{3}$ 에서

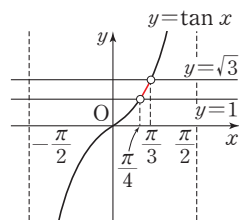
$\tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} < 0$

$(\tan x - \sqrt{3})(\tan x - 1) < 0 \quad \therefore 1 < \tan x < \sqrt{3}$

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 이므로 오른쪽 그림에서

부등식 $1 < \tan x < \sqrt{3}$ 의 해는

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$



104 [답] ⑤

$\sin^2 \theta + 2 \cos \theta - a < 0$ 에서 $(1 - \cos^2 \theta) + 2 \cos \theta - a < 0$

$\cos^2 \theta - 2 \cos \theta > 1 - a$

$\cos \theta = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 부등식은

$t^2 - 2t > 1 - a$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 부등식 $t^2 - 2t > 1 - a$ 가 항상

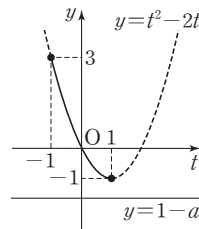
성립하려면 함수 $y = t^2 - 2t$ 의 그래프가

직선 $y = 1 - a$ 보다 위쪽에 있어야 한다.

따라서 오른쪽 그림에서 $1 - a < -1$ 이어야

하므로

$a > 2$



105 [답] ④

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하면 이차방정식

$x^2 - 2\sqrt{2}x \sin \theta + 1 = 0$ 이 실근을 갖지 않으므로 이 이차방정식의

판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = (-\sqrt{2} \sin \theta)^2 - 1 < 0, 2 \sin^2 \theta - 1 < 0$

$(\sqrt{2} \sin \theta + 1)(\sqrt{2} \sin \theta - 1) < 0 \quad \therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$

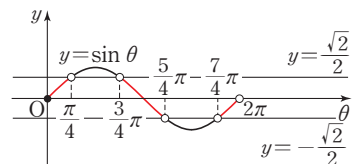
$0 \leq \theta < 2\pi$ 이므로 오른쪽 그

림에서 θ 의 값의 범위는

$0 \leq \theta < \frac{\pi}{4}$ 또는

$\frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi$ 또는 $\frac{7}{4}\pi < \theta < 2\pi$

따라서 θ 의 값이 아닌 것은 ④이다.



106 [답] 2π

이차방정식 $x^2 - 2(2 \cos \theta - 1)x + 8 \cos \theta - 4 = 0$ 의 판별식을 D 라

하면

$\frac{D}{4} = (2 \cos \theta - 1)^2 - (8 \cos \theta - 4) = 0$

$4 \cos^2 \theta - 12 \cos \theta + 5 = 0, (2 \cos \theta - 5)(2 \cos \theta - 1) = 0$

$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$ 또는 $\cos \theta = \frac{5}{2}$

그런데 $0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ 이므로 $\cos \theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta = \frac{5}{3}\pi$

따라서 모든 θ 의 값의 합은 $\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi = 2\pi$

107 **답** $\frac{\pi}{3}$

이차함수 $y=x^2-2\sqrt{3}x\tan\theta+1$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으면 이차방정식 $x^2-2\sqrt{3}x\tan\theta+1=0$ 이 실근을 갖지 않으므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-\sqrt{3}\tan\theta)^2-1<0$$

$$3\tan^2\theta-1<0, (\sqrt{3}\tan\theta+1)(\sqrt{3}\tan\theta-1)<0$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3}<\tan\theta<\frac{\sqrt{3}}{3}$$

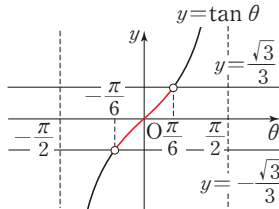
$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 이므로 오른쪽 그림에

서 θ 의 값의 범위는

$$-\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{\pi}{6}$$

따라서 $\alpha=-\frac{\pi}{6}, \beta=\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\beta-\alpha=\frac{\pi}{3}$$



108 **답** $\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

(i) 이차방정식 $x^2-4x\sin\theta+6\cos\theta=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2\sin\theta)^2-6\cos\theta \geq 0$$

$$2\sin^2\theta-3\cos\theta \geq 0, 2(1-\cos^2\theta)-3\cos\theta \geq 0$$

$$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2 \leq 0, (2\cos\theta-1)(\cos\theta+2) \leq 0$$

$$\therefore \cos\theta \leq \frac{1}{2} (\because \cos\theta+2>0)$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{5}{3}\pi (\because 0 \leq \theta < 2\pi)$$

(ii) (두 근의 합) > 0 이어야 하므로 $4\sin\theta > 0, \sin\theta > 0$

$$\therefore 0 < \theta < \pi (\because 0 \leq \theta < 2\pi)$$

(iii) (두 근의 곱) > 0 이어야 하므로 $6\cos\theta > 0, \cos\theta > 0$

$$\therefore 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi (\because 0 \leq \theta < 2\pi)$$

(i), (ii), (iii)에서 $\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

109 **답** ⑤

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+1)=f(x-2)$ 를 만족시키므로 이 식의 양변에 x 대신 $x+2$ 를 대입하면

$$f(x+3)=f(x)$$

따라서 $f(x)$ 는 주기가 3인 주기함수이므로

$$f(20)=f(17)=f(14)=\dots=f(2)=3$$

$$f(10)=f(7)=f(4)=f(1)=5$$

$$\therefore 2f(20)+5f(10)=2 \times 3+5 \times 5=31$$

110 **답** $\frac{9}{2}$

$y=\cos\frac{\pi}{4}x+4$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한

$$\text{그래프의 식은 } y=\cos\frac{\pi}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)+4$$

이 그래프가 점 $\left(\frac{11}{6}, a\right)$ 를 지나므로

$$a=\cos\frac{\pi}{4}\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{2}\right)+4=\cos\frac{\pi}{3}+4=\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}$$

111 **답** ⑤

② 주기가 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 인 주기함수이다.

③ 최댓값은 $3-2=1$, 최솟값은 $-3-2=-5$ 이다.

④ $y=3\cos 4x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$ 만큼 평행이동하면

$$y=3\cos 4\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=3\cos\left(-\frac{\pi}{2}+4x\right)=3\sin 4x \text{이고, 주어진}$$

함수의 그래프는 $y=3\sin 4x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{12}$ 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=3\cos 4x$ 의 그래프를 평행이동하면 주어진 함수의 그래프와 겹쳐진다.

⑤ $x=\frac{3}{8}\pi$ 를 대입하면 $y=3\sin\frac{7}{6}\pi-2=3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)-2=-\frac{7}{2}$ 이

므로 점 $\left(\frac{3}{8}\pi, -\frac{7}{2}\right)$ 을 지난다.

112 **답** 8π

$$y=2\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)+4 \text{에서}$$

$$a=\frac{2}{3}\pi, b=2+4=6, c=-2+4=2$$

$$\therefore abc=\frac{2}{3}\pi \times 6 \times 2=8\pi$$

113 **답** ②

$$y=\tan\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right) \text{에서 주기는 } \frac{\pi}{\pi}=1$$

$$\text{점근선의 방정식은 } \pi x-\frac{\pi}{3}=n\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\pi x=n\pi+\frac{5}{6}\pi \quad \therefore x=n+\frac{5}{6}$$

114 **답** ④

(가)에서 주기가 2π 이므로 주어진 함수의 주기를 각각 구하면

$$\textcircled{1} \frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi \quad \textcircled{2} \frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi \quad \textcircled{3} \frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi \quad \textcircled{4} 2\pi \quad \textcircled{5} 2\pi$$

그러므로 (가)를 만족시키는 함수는 ③, ④, ⑤이다.

또 (나)에서 그래프가 원점에 대하여 대칭인 함수이므로

$y=\sin x, y=\tan x$ 의 함수이다.

그러므로 (가), (나)를 만족시키는 함수는 ③, ④이다.

그런데 (다)에서 최댓값과 최솟값의 차는 10이므로 (가), (나), (다)를 모두 만족시키는 함수는 ④이다.

115 **답** ④

함수 $y=\cos x$ 의 그래프에서

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\pi \text{이므로 } \alpha+\beta=2\pi$$

$$\gamma=2\pi+\alpha$$

$$\therefore \cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos(2\pi+2\pi+\alpha)=\cos(2\pi+\alpha) \\ =\cos\alpha=a$$

116 답 ①

주어진 함수의 최댓값이 2이고 $a > 0$ 이므로

$$a + c = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 $b > 0$ 이므로 $\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b = 4$

$f\left(\frac{\pi}{24}\right) = 0$ 에서 $a \sin \frac{\pi}{6} + c = 0$ 이므로

$$\frac{1}{2}a + c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = 4, c = -2$

$$\therefore abc = 4 \times 4 \times (-2) = -32$$

117 답 12π

주어진 함수의 최댓값이 4, 최솟값이 0이고 $a > 0$ 이므로

$$a + d = 4, -a + d = 0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, d = 2$

또 주기가 $\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore b = 3$$

따라서 주어진 함수는 $y = 2 \cos(3x - c) + 2$ 이고 그래프가 점

$\left(\frac{2}{3}\pi, 0\right)$ 을 지나므로

$$0 = 2 \cos(2\pi - c) + 2 \quad \therefore \cos(2\pi - c) = -1$$

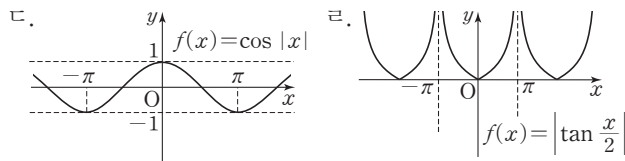
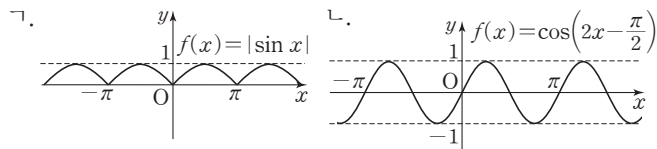
이때 $0 < c < 2\pi$ 에서 $0 < 2\pi - c < 2\pi$ 이므로

$$2\pi - c = \pi \quad \therefore c = \pi$$

$$\therefore abcd = 2 \times 3 \times \pi \times 2 = 12\pi$$

118 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 를 만족시키면 그래프가 y 축에 대하여 대칭이고, 주어진 함수의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = f(x)$ 인 함수는 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

119 답 ②

$$\therefore \sin 330^\circ = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{9}{4}\pi = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{5}{2}\pi - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 1$$

$$\therefore \sin 10^\circ = \sin(90^\circ - 80^\circ) = \cos 80^\circ$$

$$\sin 20^\circ = \sin(90^\circ - 70^\circ) = \cos 70^\circ$$

$$\sin 30^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ$$

$$\sin 40^\circ = \sin(90^\circ - 50^\circ) = \cos 50^\circ$$

$$\therefore 2^{\sin^2 10^\circ} \times 2^{\sin^2 20^\circ} \times 2^{\sin^2 30^\circ} \times \cdots \times 2^{\sin^2 80^\circ}$$

$$= 2^{\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \cdots + \sin^2 80^\circ}$$

$$= 2^{(\cos^2 80^\circ + \sin^2 80^\circ) + (\cos^2 70^\circ + \sin^2 70^\circ) + \cdots + (\cos^2 50^\circ + \sin^2 50^\circ)} = 2^4 = 16$$

$$\therefore (\sin 20^\circ + \cos 20^\circ)^2 + (\sin 70^\circ - \cos 70^\circ)^2$$

$$= \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ + 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ$$

$$+ \sin^2 70^\circ + \cos^2 70^\circ - 2 \sin 70^\circ \cos 70^\circ$$

$$= 2 + 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ - 2 \sin(90^\circ - 20^\circ) \cos(90^\circ - 20^\circ)$$

$$= 2 + 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ - 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ = 2$$

$$\therefore \sin^2 \theta + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + \cos^2\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) + \cos^2(\pi - \theta)$$

$$= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 2$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

120 답 $\frac{5}{2}$

$$\angle P_n O A = \frac{\pi}{2} \times \frac{n}{6} = \frac{n}{12}\pi, \overline{OP_n} = 1 \text{이므로}$$

$$\overline{P_n Q_n} = \overline{OP_n} \sin \frac{n}{12}\pi = \sin \frac{n}{12}\pi$$

$$\therefore \overline{P_1 Q_1}^2 + \overline{P_2 Q_2}^2 + \overline{P_3 Q_3}^2 + \overline{P_4 Q_4}^2 + \overline{P_5 Q_5}^2$$

$$= \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{2}{12}\pi + \sin^2 \frac{3}{12}\pi + \sin^2 \frac{4}{12}\pi + \sin^2 \frac{5}{12}\pi$$

$$= \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{2}{12}\pi + \sin^2 \frac{3}{12}\pi$$

$$+ \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{12}\pi\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{2}{12}\pi + \sin^2 \frac{3}{12}\pi + \cos^2 \frac{2}{12}\pi + \cos^2 \frac{\pi}{12}$$

$$= 2 + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

121 답 ③

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \text{이므로 } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{에서}$$

$$\cos x - 3 < 0 \quad \therefore y = \cos x - 3 + k$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $1 - 3 + k = -2 + k$, 최솟값은

$$-1 - 3 + k = -4 + k \text{이므로}$$

$$(-2 + k) + (-4 + k) = 4 \quad \therefore k = 5$$

122 답 $-\frac{1}{2}$

$$y = \frac{2 \cos x}{\cos x + 3} \text{에서 } \cos x = t \text{로 놓으면 } -1 \leq t \leq 1 \text{이고}$$

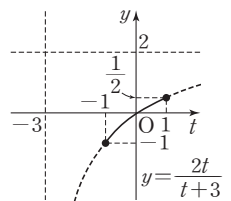
$$y = \frac{2t}{t+3} = \frac{2(t+3) - 6}{t+3} = \frac{-6}{t+3} + 2$$

오른쪽 그림에서 $t = 1$ 일 때 최댓값은 $\frac{1}{2}$.

$t = -1$ 일 때 최솟값은 -1 이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$$\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{1}{2}$$



123 답 ②

$\tan\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\frac{1}{\tan x}$ 이므로 주어진 식은 $y=\tan^2 x+2\tan x+6$

$\tan x=t$ 로 놓으면 $0\leq x<\frac{\pi}{2}$ 에서 $t\geq 0$ 이고

$$y=t^2+2t+6=(t+1)^2+5$$

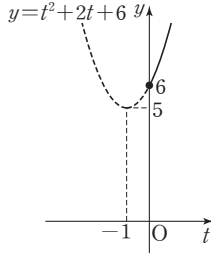
오른쪽 그림에서 $t=0$ 일 때 최솟값 6을

가지므로 $m=6$

이때 $t=0$, 즉 $\tan x=0$ 이고

$0\leq x<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $x=0$

$$\therefore a+m=0+6=6$$



124 답 $\frac{\pi}{6}$

$\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$ 의 양변을 제곱하면

$$3\sin^2\theta=2\cos^2\theta, 3\sin\theta=2(1-\sin^2\theta)$$

$$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2=0, (\sin\theta+2)(2\sin\theta-1)=0$$

$$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2} (\because 0<\sin\theta<1)$$

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}\text{이므로 } \theta=\frac{\pi}{6}$$

125 답 ②

$$4\cos^2 x+4\sin(x+4\pi)+k=0\text{에서}$$

$$4(1-\sin^2 x)+4\sin x+k=0$$

$$\therefore 4\sin^2 x-4\sin x-4=k$$

이 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=4\sin^2 x-4\sin x-4$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 교점을 가져야 한다.

이때 $\sin x=t$ 로 놓으면 $-1\leq t\leq 1$ 이고

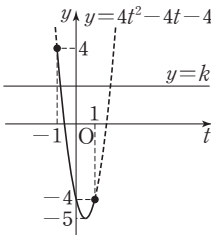
$$y=4t^2-4t-4=4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-5$$

따라서 오른쪽 그림에서 실근을 갖도록

하는 실수 k 의 값의 범위는 $-5\leq k\leq 4$ 이

므로 $M=4, m=-5$

$$\therefore M-m=4-(-5)=9$$



126 답 $x=\frac{\pi}{4}$

$\log\cos x, \log\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 에서 진수의 조건에 의하여

$$\cos x>0, \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)>0 \quad \therefore 0<x<\frac{\pi}{2} (\because 0<x<\pi)$$

$$\log\cos x+\log\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\log\frac{1}{2}\text{에서}$$

$$\log\cos x+\log\cos x=\log\frac{1}{2}, \log\cos^2 x=\log\frac{1}{2}$$

따라서 $\cos^2 x=\frac{1}{2}$ 이므로 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 에서

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore x=\frac{\pi}{4}$$

127 답 ④

$A+B+C=\pi$ 이므로

$$\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$$

$\sin A+\sin(B+C)\geq 1$ 에서

$$\sin A+\sin A\geq 1$$

$$2\sin A\geq 1 \quad \therefore \sin A\geq \frac{1}{2}$$

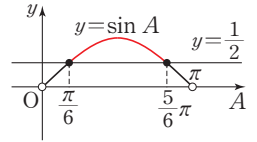
$0<A<\pi$ 이므로 오른쪽 그림에서 부등

식 $\sin A\geq \frac{1}{2}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{6}\leq A\leq \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2}\leq \cos A\leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $\cos A$ 의 최댓값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.



128 답 9

$x-\frac{\pi}{3}=t$ 로 놓으면 $x+\frac{\pi}{6}=t+\frac{\pi}{2}$ 이고, $0\leq x<2\pi$ 에서

$$-\frac{\pi}{3}\leq t<\frac{5}{3}\pi$$

$$2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1\geq 0\text{에서}$$

$$2\cos^2 t-\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)-1\geq 0$$

$$2(1-\sin^2 t)+\sin t-1\geq 0, 2\sin^2 t-\sin t-1\leq 0$$

$$(2\sin t+1)(\sin t-1)\leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2}\leq \sin t\leq 1$$

오른쪽 그림에서 부등식

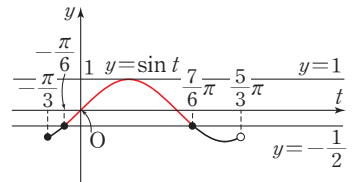
$-\frac{1}{2}\leq \sin t\leq 1$ 의 해는

$$-\frac{\pi}{6}\leq t\leq \frac{7}{6}\pi\text{이므로}$$

$$-\frac{\pi}{6}\leq x-\frac{\pi}{3}\leq \frac{7}{6}\pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{6}\leq x\leq \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{따라서 } \alpha=\frac{\pi}{6}, \beta=\frac{3}{2}\pi\text{이므로 } \frac{\beta}{\alpha}=9$$



129 답 제1사분면 또는 제2사분면

$f(x)=x^2-2x\sin\theta-2\cos^2\theta+1$ 로 놓으

면 $f(1)<0$ 이어야 하므로

$$1-2\sin\theta-2\cos^2\theta+1<0$$

$$\cos^2\theta+\sin\theta-1>0$$

$$(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-1>0$$

$$\sin^2\theta-\sin\theta<0, \sin\theta(\sin\theta-1)<0$$

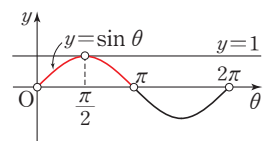
$$\therefore 0<\sin\theta<1$$

$0<\theta<2\pi$ 이므로 오른쪽 그림에서 θ

의 값의 범위는

$$0<\theta<\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2}<\theta<\pi$$

따라서 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.





001 답 ⑤

사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = \frac{2}{\sin C}, \quad 2\sqrt{3} \sin C = 2 \sin 120^\circ$$

$$\therefore \sin C = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

그런데 $A+C < 180^\circ$ 이므로 $C=30^\circ$

$$\therefore B = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$$

$$\therefore \cos B = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

002 답 4:2:5

$$\frac{a+b}{6} = \frac{b+c}{7} = \frac{c+a}{9} = k (k>0) \text{로 놓으면}$$

$$a+b=6k, \quad b+c=7k, \quad c+a=9k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

위의 세 식을 변끼리 더하면

$$2a+2b+2c=22k$$

$$\therefore a+b+c=11k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①에서 ②의 각 식을 빼면

$$a=4k, \quad b=2k, \quad c=5k$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에

$$\text{의하여 } \sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R} \text{ 이므로}$$

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 4k : 2k : 5k \\ = 4 : 2 : 5$$

003 답 ③

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$b \times \frac{b}{2R} = c \times \frac{c}{2R}, \quad b^2 = c^2$$

$$\therefore b=c \quad (\because b>0, c>0)$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

004 답 $10\sqrt{6}$ m

$C=180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{20}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ}, \quad 20 \sin 60^\circ = \overline{BC} \times \sin 45^\circ$$

$$\therefore \overline{BC} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{6} \text{ (m)}$$

따라서 두 지점 B, C 사이의 거리는 $10\sqrt{6}$ m이다.

005 답 $\sqrt{19}$

$\square ABCD$ 가 원에 내접하므로

$$A+C=180^\circ$$

즉, $A=180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 이므로

$$\cos A = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

따라서 $\triangle ABD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 19$$

$$\therefore \overline{BD} = \sqrt{19} \quad (\because \overline{BD} > 0)$$

006 답 $\sqrt{10}$

$\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{4^2 + 8^2 - 6^2}{2 \times 4 \times 8} = \frac{11}{16}$$

$\triangle ABD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times \frac{11}{16} = 10$$

$$\therefore \overline{AD} = \sqrt{10} \quad (\because \overline{AD} > 0)$$

007 답 ③

사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

$$= 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$$

$a=k, b=\sqrt{2}k, c=\sqrt{3}k (k>0)$ 로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(\sqrt{2}k)^2 + (\sqrt{3}k)^2 - k^2}{2 \times \sqrt{2}k \times \sqrt{3}k} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

008 답 $a=b$ 인 이등변삼각형

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = b^2 + c^2 - a^2, \quad a^2 = b^2$$

$$\therefore a=b \quad (\because a>0, b>0)$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

009 답 $\sqrt{37}$ km

코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \cos 120^\circ = 37$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{37} \text{ (km)} \quad (\because \overline{AB} > 0)$$

따라서 건설되는 도로의 길이는 $\sqrt{37}$ km이다.

010 답 60°

$\triangle ABC$ 의 넓이가 $33\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 11 \times \sin B = 33\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 90^\circ$ 이므로 $B=60^\circ$

011 답 ④

삼각형의 넓이를 S 라 하면 헤론의 공식에서 $s = \frac{5+7+8}{2} = 10$ 이므로
 $S = \sqrt{10 \times (10-5) \times (10-7) \times (10-8)} = 10\sqrt{3}$

012 답 $\frac{39\sqrt{3}}{4}$

$\triangle ABD$ 에서 코사인법칙에 의하여
 $\overline{BD}^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos 120^\circ = 49$
 $\therefore \overline{BD} = 7$ ($\because \overline{BD} > 0$)
 $\triangle BCD$ 에서 헤론의 공식에 의하여 $s = \frac{7+8+3}{2} = 9$ 이므로
 $\triangle BCD = \sqrt{9 \times (9-7) \times (9-8) \times (9-3)} = 6\sqrt{3}$
 또 $\triangle ABD = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \sin 120^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ 이므로
 $\square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD$
 $= \frac{15\sqrt{3}}{4} + 6\sqrt{3} = \frac{39\sqrt{3}}{4}$

013 답 $10\sqrt{3}$

$\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여
 $\cos B = \frac{4^2 + 5^2 - (\sqrt{21})^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{1}{2}$
 이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B = 60^\circ$
 따라서 평행사변형 $ABCD$ 의 넓이는
 $\overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin 60^\circ = 4 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

014 답 $\frac{37}{64}$

사인법칙에 의하여
 $\frac{4}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\sin C}, 4 \sin C = 3 \sin 60^\circ$
 $\therefore \sin C = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$
 $\therefore \cos^2 C = 1 - \sin^2 C$
 $= 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$

015 답 $12\sqrt{2}$

$B = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여
 $\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{6}{\sin 60^\circ}, a \sin 60^\circ = 6 \sin 45^\circ$
 $\therefore a = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$
 또 $\frac{6}{\sin 60^\circ} = 2R$ 에서
 $R = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$
 $\therefore aR = 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{3} = 12\sqrt{2}$

016 답 ③

$\widehat{BC}$ 에 대한 원주각의 크기가 같으므로
 $\angle BAC = \angle BDC = 60^\circ$

$\triangle ABC$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{4\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}$$

$$4\sqrt{6} \sin 45^\circ = \overline{AB} \sin 60^\circ$$

$$\therefore \overline{AB} = 4\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 8$$

017 답 ④

$A + B + C = \pi$ 이므로
 $\sin(B+C) = \sin(\pi-A) = \sin A$
 $5 \sin A \times \sin(B+C) = 4$ 에서
 $5 \sin^2 A = 4 \quad \therefore \sin^2 A = \frac{4}{5}$
 이때 $0 < A < \pi$ 이므로
 $\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$ 이므로 사인법칙에 의하여
 $\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2 \times 2\sqrt{5}$
 $\therefore \overline{BC} = 4\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 8$

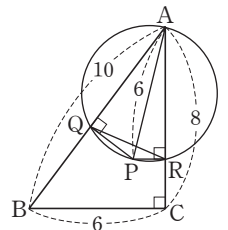
018 답 $\frac{3}{2}$

$\overline{BD} = \overline{CD} = k, \angle ADB = \theta$ 라 하면 $\angle ADC = \pi - \theta$ 이므로
 $\triangle ABD$ 에서 사인법칙에 의하여
 $\frac{k}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin \theta}$
 $\therefore k = \frac{4 \sin \alpha}{\sin \theta}$
 $\triangle ACD$ 에서 사인법칙에 의하여
 $\frac{k}{\sin \beta} = \frac{6}{\sin(\pi - \theta)}$
 $\therefore k = \frac{6 \sin \beta}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{6 \sin \beta}{\sin \theta}$
 즉, $\frac{4 \sin \alpha}{\sin \theta} = \frac{6 \sin \beta}{\sin \theta}$ 이므로
 $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{3}{2}$

019 답 $\frac{18}{5}$

$\angle AQP = \angle ARP = 90^\circ$ 이므로 $\square AQPR$ 는
 $\overline{AP}$ 를 지름으로 하는 원에 내접한다.
 $\triangle AQR$ 의 외접원의 지름의 길이는
 $\overline{AP} = 6$ 이므로 사인법칙에 의하여
 $\frac{\overline{QR}}{\sin A} = \overline{AP} = 6$
 $\therefore \overline{QR} = 6 \sin A \quad \dots\dots ①$

이때 $\triangle ABC$ 는 직각삼각형이므로
 $\sin A = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
 이를 ①에 대입하면
 $\overline{QR} = 6 \times \frac{3}{5} = \frac{18}{5}$



020 답 ⑦

$(b+c):(c+a):(a+b)=5:6:7$ 에서
 $b+c=5k, c+a=6k, a+b=7k (k>0)$ ㉠

로 놓고 세 식을 변끼리 더하면

$$2a+2b+2c=18k \quad \therefore a+b+c=9k \quad \dots\dots ㉡$$

㉠에서 ㉡의 각 식을 빼면

$$a=4k, b=3k, c=2k$$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} \text{이므로}$$

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 4k : 3k : 2k \\ = 4 : 3 : 2$$

따라서 $\sin A=4m, \sin B=3m, \sin C=2m (m>0)$ 으로 놓으면

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{4m + 3m}{2m} = \frac{7}{2}$$

021 답 ⑤

$A+B+C=180^\circ$ 이고 $A:B:C=2:3:1$ 이므로

$$A=180^\circ \times \frac{2}{6}=60^\circ, B=180^\circ \times \frac{3}{6}=90^\circ, C=180^\circ \times \frac{1}{6}=30^\circ$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여 $a=2R \sin A, b=2R \sin B, c=2R \sin C$ 이므로

$$a:b:c = \sin A : \sin B : \sin C \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 : \frac{1}{2} = \sqrt{3} : 2 : 1$$

022 답 ⑦

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이가 8이므로 사인법칙에 의하여

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \\ = \frac{a+b+c}{2R} \\ = \frac{28}{2 \times 8} = \frac{7}{4}$$

023 답 ①

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$a \times \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = b \times \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = c \times \left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$$\therefore a^3 = b^3 = c^3$$

이때 a, b, c 는 실수이므로 $a=b=c$

따라서 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.

024 답 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형

$A+B+C=180^\circ$ 이므로

$$\sin(A+B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$a \times \frac{a}{2R} + b \times \frac{b}{2R} - c \times \frac{c}{2R} = 0$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0 \quad \therefore a^2 + b^2 = c^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

025 답 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \sin^2 C - (\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B) = 0$$

$$\sin^2 C - (\sin^2 A - \sin^2 B) = 0$$

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C \quad \dots\dots ㉠$$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

026 답 ②

$C=180^\circ - (105^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 30^\circ} = \frac{6}{\sin 45^\circ}, \overline{AC} \sin 45^\circ = 6 \sin 30^\circ$$

$$\therefore \overline{AC} = 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}(\text{m})$$

따라서 두 지점 A, C 사이의 거리는 $3\sqrt{2}$ m이다.

027 답 $41\sqrt{2}$ m

$\triangle ABQ$ 에서 $\angle AQB = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BQ}}{\sin 45^\circ} = \frac{123}{\sin 60^\circ}, \overline{BQ} \sin 60^\circ = 123 \sin 45^\circ$$

$$\therefore \overline{BQ} = 123 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 41\sqrt{6}(\text{m})$$

이때 $\triangle PBQ$ 에서 $\tan 30^\circ = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}$ 이므로

$$\overline{PQ} = \overline{BQ} \times \tan 30^\circ = 41\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 41\sqrt{2}(\text{m})$$

따라서 전망대의 높이는 $41\sqrt{2}$ m이다.

028 답 $200(\sqrt{3}+1)$ m

$\triangle AHC$ 에서

$$\angle ACH = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$$

또 $\triangle BHC$ 에서

$$\angle BCH = \angle CBH = 45^\circ$$

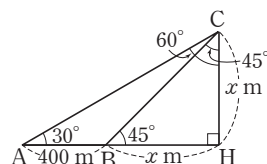
이때 $\overline{BH} = \overline{CH} = x$ m라 하면

$\triangle AHC$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{400+x}{\sin 60^\circ}, x \sin 60^\circ = (400+x) \sin 30^\circ$$

$$x \times \frac{\sqrt{3}}{2} = (400+x) \times \frac{1}{2}, (\sqrt{3}-1)x = 400 \quad \therefore x = 200(\sqrt{3}+1)$$

따라서 빌딩의 높이는 $200(\sqrt{3}+1)$ m이다.



029 답 ①

□ABCD가 원에 내접하므로 $A+C=180^\circ$

즉, $C=180^\circ-135^\circ=45^\circ$ 이므로 $\cos C=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $\overline{CD}=x$ 라 하면 $\triangle BCD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{5})^2=(2\sqrt{2})^2+x^2-2\times 2\sqrt{2}\times x\times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x^2-4x+3=0, (x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=3 (\because \overline{CD}>\overline{BC})$$

따라서 $\overline{CD}$ 의 길이는 3이다.

030 답 ③

코사인법칙에 의하여

$$a^2=4^2+3^2-2\times 4\times 3\times \cos 60^\circ=13$$

$$\therefore a=\sqrt{13} (\because a>0)$$

031 답 $\sqrt{3}$

코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2\times x\times \frac{1}{x}\times \cos 120^\circ=x^2+\frac{1}{x^2}+1$$

$x^2>0, \frac{1}{x^2}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{BC}^2=x^2+\frac{1}{x^2}+1$$

$$\geq 2\sqrt{x^2\times \frac{1}{x^2}}+1$$

$$=2+1=3 \text{ (단, 등호는 } x=1 \text{ 일 때 성립)}$$

$$\therefore \overline{BC}\geq \sqrt{3} (\because \overline{BC}>0)$$

따라서 $\overline{BC}$ 의 길이의 최솟값은 $\sqrt{3}$ 이다.

032 답 $6\sqrt{7}$

주어진 원뿔의 전개도를 그리면 오른쪽 그림과 같다. 부채꼴의 호의 길이 l 은 원뿔의 밑면의 둘레의 길이와 같으므로 $l=2\pi\times 4=8\pi$

$\overline{AB}=12$ 이므로 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$l=12\theta \quad \therefore \theta=\frac{8\pi}{12}=\frac{2}{3}\pi$$

점 M은 모선 AB의 중점이므로 $\overline{AM}=12\times \frac{1}{2}=6$

구하는 최단 거리는 $\overline{BM}$ 의 길이이므로 $\triangle ABM$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BM}^2=12^2+6^2-2\times 12\times 6\times \cos \frac{2}{3}\pi=252$$

$$\therefore \overline{BM}=6\sqrt{7} (\because \overline{BM}>0)$$

따라서 구하는 최단 거리는 $6\sqrt{7}$ 이다.

033 답 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$

$\triangle ABD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B=\frac{8^2+6^2-6^2}{2\times 8\times 6}=\frac{2}{3}$$

$\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=8^2+8^2-2\times 8\times 8\times \frac{2}{3}=\frac{128}{3}$$

$$\therefore \overline{AC}=\frac{8\sqrt{6}}{3} (\because \overline{AC}>0)$$

034 답 ①

$$c^2=a^2+b^2+ab \text{ 에서 } a^2+b^2-c^2=-ab$$

코사인법칙에 의하여

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{-ab}{2ab}=-\frac{1}{2}$$

이때 $0<C<180^\circ$ 이므로 $C=120^\circ$

$$\therefore \tan C=\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$$

035 답 $\frac{\sqrt{21}}{7}$

$\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=2^2+4^2-2\times 2\times 4\times \cos 60^\circ=12$$

$$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{3} (\because \overline{AC}>0)$$

$\triangle BCD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=4^2+2^2-2\times 4\times 2\times \cos 120^\circ=28$$

$$\therefore \overline{BD}=2\sqrt{7} (\because \overline{BD}>0)$$

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로

$$\cos \alpha=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{7})^2-2^2}{2\times \sqrt{3}\times \sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

036 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 12이므로 $\overline{AM}=\overline{DM}=6$

선분 CD를 1:2로 내분하는 점이 E이므로

$$\overline{CE}=12\times \frac{1}{3}=4, \overline{DE}=12\times \frac{2}{3}=8$$

세 직각삼각형 ABM, BCE, DEM에서

$$\overline{BM}=\sqrt{12^2+6^2}=6\sqrt{5}, \overline{BE}=\sqrt{12^2+4^2}=4\sqrt{10},$$

$$\overline{EM}=\sqrt{6^2+8^2}=10$$

따라서 $\triangle BEM$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta=\frac{(6\sqrt{5})^2+(4\sqrt{10})^2-10^2}{2\times 6\sqrt{5}\times 4\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

037 답 $2\sqrt{5}$

코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{6^2+c^2-4^2}{2\times 6\times c}=\frac{20+c^2}{12c}=\frac{5}{3c}+\frac{c}{12}$$

$0<A<\pi$ 이므로 $\cos A$ 의 값이 최소일 때, A의 값은 최대가 된다.

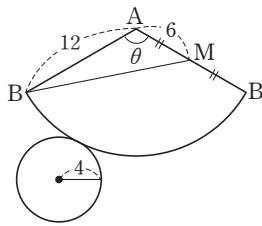
$\frac{5}{3c}>0, \frac{c}{12}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\cos A=\frac{5}{3c}+\frac{c}{12}\geq 2\sqrt{\frac{5}{3c}\times \frac{c}{12}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

이때 등호는 $\frac{5}{3c}=\frac{c}{12}$ 일 때 성립하므로

$$c^2=20 \quad \therefore c=2\sqrt{5} (\because c>0)$$

따라서 A의 값이 최대가 되도록 하는 c의 값은 $2\sqrt{5}$ 이다.



038 [답] ⑤

사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 7 : 8 : 13$$

$a=7k$, $b=8k$, $c=13k$ ($k>0$)로 놓으면 가장 긴 변의 대각의 크기가 가장 크므로 가장 큰 각의 크기는 C 이다.

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{(7k)^2 + (8k)^2 - (13k)^2}{2 \times 7k \times 8k} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C=120^\circ$

039 [답] $\frac{\sqrt{21}}{3}$

코사인법칙에 의하여

$$a^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos 60^\circ = 7$$

$$\therefore a = \sqrt{7} \quad (\because a > 0)$$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \sqrt{7} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

040 [답] $3\sqrt{2}$

$\triangle ABC$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin A}, \quad \sqrt{6} \sin A = \sqrt{3} \sin 45^\circ$$

$$\therefore \sin A = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

그런데 $A+B < 180^\circ$ 이므로 $A=30^\circ$

$\overline{AD}=x$ 라 하면 $\triangle ADC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{2})^2 = (\sqrt{6})^2 + x^2 - 2 \times \sqrt{6} \times x \times \cos 30^\circ$$

$$2 = 6 + x^2 - 3\sqrt{2}x, \quad x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$$

$$(x-\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})=0 \quad \therefore x=\sqrt{2} \text{ 또는 } x=2\sqrt{2}$$

따라서 모든 $\overline{AD}$ 의 길이의 합은

$$\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

041 [답] ⑤

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{ab}{c} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = c$$

$$(c^2 + a^2 - b^2) + (a^2 + b^2 - c^2) + (b^2 + c^2 - a^2) = 2c^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2 \quad \therefore a^2 + b^2 = c^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

042 [답] $a=c$ 인 이등변삼각형

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\frac{b}{2R} = 2 \times \frac{a}{2R} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$b^2 = a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = c^2$$

$$\therefore a=c \quad (\because a>0, c>0)$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

043 [답] ④

$A+B+C=\pi$ 이므로

$$\sin(A+B) = \sin(\pi-C) = \sin C,$$

$$\cos(A+B) = \cos(\pi-C) = -\cos C$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\sin A \cos A + \sin C \times (-\cos C) = 0$$

$$\sin A \cos A = \sin C \cos C \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}, \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이를 ①에 대입하면

$$\frac{a}{2R} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{c}{2R} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) = c^2(a^2 + b^2 - c^2)$$

$$a^4 - c^4 + b^2c^2 - a^2b^2 = 0, \quad (a^2 + c^2)(a^2 - c^2) - b^2(a^2 - c^2) = 0$$

$$(a^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2) = 0$$

이때 $a>0$, $c>0$ 이므로 $a=c$ 또는 $a^2 + c^2 = b^2$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $a=c$ 인 이등변삼각형 또는 $B=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 $\triangle ABC$ 가 될 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

044 [답] ③

코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = 120^2 + 80^2 - 2 \times 120 \times 80 \times \cos 60^\circ = 11200$$

$$\therefore \overline{AB} = 40\sqrt{7}(\text{m}) \quad (\because \overline{AB} > 0)$$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $40\sqrt{7}$ m이다.

045 [답] $\frac{169}{3}\pi \text{ m}^2$

코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{7^2 + 8^2 - 13^2}{2 \times 7 \times 8} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B=120^\circ$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{13}{\sin 120^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = 13 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

따라서 덮개의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{13\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{169}{3}\pi(\text{m}^2)$$

046 답 $10\sqrt{21}$ m

$\overline{BC}=a$ m, $\overline{AC}=b$ m, $\overline{AB}=c$ m라 하면

$$\triangle ADC \text{에서 } b = \frac{30}{\sin 60^\circ} = 20\sqrt{3}$$

$$\triangle BEC \text{에서 } a = \frac{45}{\sin 60^\circ} = 30\sqrt{3}$$

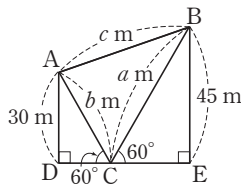
$\angle ACB = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$ 이므로

$\triangle ACB$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$c^2 = (30\sqrt{3})^2 + (20\sqrt{3})^2 - 2 \times 30\sqrt{3} \times 20\sqrt{3} \times \cos 60^\circ = 2100$$

$$\therefore c = 10\sqrt{21} \quad (\because c > 0)$$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $10\sqrt{21}$ m이다.



047 답 $2\sqrt{19}$

$\triangle ABC$ 의 넓이가 $6\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin A = 6\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $A > 90^\circ$ 이므로 $A = 120^\circ$

따라서 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \cos 120^\circ = 76$$

$$\therefore a = 2\sqrt{19} \quad (\because a > 0)$$

048 답 ③

$$\sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin C = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \frac{1}{3} = 8$$

049 답 ③

$\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = 5 : 3 : 4$ 이므로

$$\angle AOB = 360^\circ \times \frac{5}{12} = 150^\circ$$

$$\angle BOC = 360^\circ \times \frac{3}{12} = 90^\circ$$

$$\angle COA = 360^\circ \times \frac{4}{12} = 120^\circ$$

$$\therefore \triangle ABC = \triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COA$$

$$= \frac{1}{2} \times 18 \times 18 \times \sin 150^\circ + \frac{1}{2} \times 18 \times 18 \times \sin 90^\circ + \frac{1}{2} \times 18 \times 18 \times \sin 120^\circ$$

$$= 81 + 162 + 81\sqrt{3}$$

$$= 81(3 + \sqrt{3})$$

050 답 $2(\sqrt{3}-1)$

코사인법칙에 의하여

$$c^2 = (4\sqrt{3})^2 + 8^2 - 2 \times 4\sqrt{3} \times 8 \times \cos 30^\circ = 16$$

$$\therefore c = 4 \quad (\because c > 0)$$

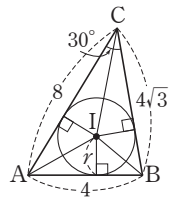
$\triangle ABC$ 의 내접원의 중심을 I, 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\triangle ABC = \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 4\sqrt{3} \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} r (4 + 4\sqrt{3} + 8)$$

$$8\sqrt{3} = 2(3 + \sqrt{3})r$$

$$\therefore r = 2(\sqrt{3}-1)$$



051 답 $\frac{15}{4}$

$$\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$$

$$\overline{AD} = x \text{라 하면 } \triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} \times 10 \times 6 \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 10 \times x \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times x \times 6 \times \sin 60^\circ$$

$$15\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}x$$

$$15\sqrt{3} = 4\sqrt{3}x \quad \therefore x = \frac{15}{4}$$

따라서 $\overline{AD}$ 의 길이는 $\frac{15}{4}$ 이다.

052 답 ②

$\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ABC) = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \times 3 \times 4} = \frac{7}{8}$$

$\triangle ABD$ 에서 $\angle ABD = 90^\circ + \angle ABC$ 이므로

$$\sin(\angle ABD) = \sin(90^\circ + \angle ABC) = \cos(\angle ABC) = \frac{7}{8}$$

$$\therefore \triangle ABD = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin(\angle ABD)$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{7}{8} = \frac{21}{4}$$

053 답 ③

$\overline{AP} = x$, $\overline{AQ} = y$ 라 하면

$$\triangle APQ = \frac{1}{2} \times x \times y \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}xy$$

$\triangle APQ$ 의 넓이가 $\triangle ABC$ 의 넓이의 $\frac{1}{4}$ 이 되려면

$$\frac{\sqrt{3}}{4}xy = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 8 \times 10 \times \sin 60^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}xy = 5\sqrt{3} \quad \therefore xy = 20$$

$\triangle APQ$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PQ}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 60^\circ$$

$$= x^2 + y^2 - xy = x^2 + y^2 - 20$$

$x^2 > 0$, $y^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{PQ}^2 = x^2 + y^2 - 20$$

$$\geq 2\sqrt{x^2 y^2} - 20$$

$$= 2 \times 20 - 20 = 20 \quad (\text{단, 등호는 } x=y \text{일 때 성립})$$

$$\therefore \overline{PQ} \geq 2\sqrt{5} \quad (\because \overline{PQ} > 0)$$

따라서 $\overline{PQ}$ 의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{5}$ 이다.

054 답 $\sqrt{5}$

$\triangle ABC$ 의 넓이를 S 라 하면 헤론의 공식에서 $s = \frac{7+8+9}{2} = 12$ 이므로

$$S = \sqrt{12 \times (12-7) \times (12-8) \times (12-9)} \\ = 12\sqrt{5}$$

$\triangle ABC$ 의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c) \text{에서}$$

$$12\sqrt{5} = \frac{1}{2} \times r \times 24, \quad 12\sqrt{5} = 12r$$

$$\therefore r = \sqrt{5}$$

055 답 ④

$$S = \frac{abc}{4R} \text{에서 } 2\sqrt{3} = \frac{abc}{4 \times 3}$$

$$\therefore abc = 24\sqrt{3}$$

056 답 ⑤

사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 3$$

$a = 2k, b = 3k, c = 3k (k > 0)$ 로 놓으면 헤론의 공식에서

$$s = \frac{2k+3k+3k}{2} = 4k \text{이므로}$$

$$\triangle ABC = \sqrt{4k \times (4k-2k) \times (4k-3k) \times (4k-3k)} \\ = 2\sqrt{2}k^2$$

$$\text{즉, } 2\sqrt{2}k^2 = 32\sqrt{2} \text{이므로 } k^2 = 16$$

$$\therefore k = 4 (\because k > 0)$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 둘레의 길이는

$$2k+3k+3k=8k=32$$

057 답 $4\sqrt{6}$

$$S = \frac{abc}{4R} \text{에서 } 10 = \frac{5ab}{4 \times 3}$$

$$\therefore ab = 24$$

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{24} = 4\sqrt{6} \text{ (단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립)}$$

따라서 $a+b$ 의 최솟값은 $4\sqrt{6}$ 이다.

058 답 $14\sqrt{3}+6\sqrt{35}$

$\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \times 7 \times 8 \times \cos 120^\circ = 169$$

$$\therefore \overline{AC} = 13 (\because \overline{AC} > 0)$$

$$\triangle ACD \text{에서 헤론의 공식에 의하여 } s = \frac{13+8+9}{2} = 15 \text{이므로}$$

$$\triangle ACD = \sqrt{15 \times (15-13) \times (15-8) \times (15-9)} \\ = 6\sqrt{35}$$

$$\text{또 } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \sin 120^\circ = 14\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$\square ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD \\ = 14\sqrt{3} + 6\sqrt{35}$$

059 답 ④

$\overline{BD} = x$ 라 하면 $\triangle ABD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{6})^2 = (2\sqrt{3})^2 + x^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times x \times \cos 45^\circ$$

$$x^2 - 2\sqrt{6}x + 6 = 0, \quad (x - \sqrt{6})^2 = 0$$

$$\therefore x = \sqrt{6}$$

$$\therefore \triangle ABD = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times 2\sqrt{3} \times \sin 45^\circ = 3$$

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 이므로

$$\angle DBC = \angle ADB = 45^\circ$$

$$\therefore \triangle DBC = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times 8 \times \sin 45^\circ = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABD + \triangle DBC \\ = 3 + 4\sqrt{3}$$

060 답 $\frac{45\sqrt{3}}{4}$

$\square ABCD$ 가 원에 내접하므로 $B + D = 180^\circ$

$$\therefore D = 180^\circ - B$$

$\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \times 6 \times 9 \times \cos B \\ = 117 - 108 \cos B$$

$\triangle ACD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 3 \times \cos (\pi - B) \\ = 18 + 18 \cos B$$

$$\text{즉, } 117 - 108 \cos B = 18 + 18 \cos B \text{이므로}$$

$$126 \cos B = 99 \quad \therefore \cos B = \frac{11}{14}$$

$$\therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14} (\because 0^\circ < B < 180^\circ)$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 9 \times \sin B + \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin D$$

$$= 27 \sin B + \frac{9}{2} \sin B = \frac{63}{2} \sin B$$

$$= \frac{63}{2} \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{45\sqrt{3}}{4}$$

061 답 $\frac{15\sqrt{7}}{2}$

$\overline{AD} = \overline{BC} = 5$ 이므로 $\triangle ABD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2 \times 5 \times 4} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8} (\because 0^\circ < A < 180^\circ)$$

$$\therefore \square ABCD = 4 \times 5 \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{15\sqrt{7}}{2}$$

062 답 120°

평행사변형 $ABCD$ 의 넓이가 $15\sqrt{3}$ 이므로

$$15\sqrt{3} = 5 \times 6 \times \sin C \quad \therefore \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $90^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 120^\circ$

063 답 ②

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad (\because 0^\circ < \theta < 180^\circ) \\ \therefore \square ABCD &= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = 3\sqrt{15}\end{aligned}$$

064 답 ⑤

두 대각선의 길이를 각각 a, b 라 하면 $a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad 20 \geq 2\sqrt{ab}$$

$\therefore ab \leq 100$ (단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립)

$\square ABCD$ 의 두 대각선이 이루는 각의 크기를 θ , 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \theta \leq \frac{1}{2} \times 100 \times 1 = 50 \quad (\because 0 < \sin \theta \leq 1)$$

따라서 $\square ABCD$ 의 넓이의 최댓값은 50이다.

065 답 ②

$A = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{6}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}, \quad 6 \sin 45^\circ = \overline{AB} \sin 30^\circ$$

$$\therefore \overline{AB} = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = 6\sqrt{2}$$

066 답 ③

$\triangle ACD$ 는 $A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이고 $\overline{AD} = 2$ 이므로

$$\overline{CD} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

또 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이면 $\triangle ABC$ 는 직각이등변삼각형이므로

$$B = C = 45^\circ$$

$\triangle BCD$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{5}}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = 2\sqrt{5} \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \sqrt{10}$$

따라서 $\triangle BCD$ 의 외접원의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{10})^2 = 10\pi$$

067 답 3 : 5 : 7

$$a - 2b + c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$3a + b - 2c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$2 \times \textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$5a - 3b = 0 \quad \therefore b = \frac{5}{3}a$$

$\textcircled{1} + 2 \times \textcircled{2}$ 을 하면

$$7a - 3c = 0 \quad \therefore c = \frac{7}{3}a$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\sin A : \sin B : \sin C &= a : b : c = a : \frac{5}{3}a : \frac{7}{3}a \\ &= 3 : 5 : 7\end{aligned}$$

068 답 $B = 90^\circ$ 인 직각삼각형

$$\cos^2 B = 1 - \sin^2 B \text{이므로}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 B + \sin^2 C = 1 \text{에서}$$

$$\sin^2 A + (1 - \sin^2 B) + \sin^2 C = 1$$

$$\sin^2 A + \sin^2 C = \sin^2 B \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 ①에 대입하면

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \quad \therefore a^2 + c^2 = b^2$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

069 답 ③

$C = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{90}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ}, \quad \overline{BC} \sin 60^\circ = 90 \sin 45^\circ$$

$$\therefore \overline{BC} = 90 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 30\sqrt{6}(\text{m})$$

따라서 두 지점 B, C 사이의 거리는 $30\sqrt{6}$ m이다.

070 답 ①

코사인법칙에 의하여

$$7^2 = b^2 + 3^2 - 2 \times b \times 3 \times \cos 120^\circ$$

$$49 = 9 + b^2 + 3b$$

$$b^2 + 3b - 40 = 0, \quad (b + 8)(b - 5) = 0$$

$$\therefore b = 5 \quad (\because b > 0)$$

071 답 $2\sqrt{7}$

$\square ABCD$ 가 원에 내접하므로 $A + C = 180^\circ$

$$\therefore C = 180^\circ - A$$

$\triangle ABD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \times \cos A = 20 - 16 \cos A$$

$\triangle BCD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos (180^\circ - A) = 52 + 48 \cos A$$

즉, $20 - 16 \cos A = 52 + 48 \cos A$ 에서

$$32 = -64 \cos A \quad \therefore \cos A = -\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } \overline{BD}^2 = 20 - 16 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 28 \text{이므로}$$

$$\overline{BD} = 2\sqrt{7} \quad (\because \overline{BD} > 0)$$

072 답 $2\sqrt{3}$

$\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{4^2 + 6^2 - (2\sqrt{7})^2}{2 \times 4 \times 6} = \frac{1}{2}$$

점 D가 $\overline{BC}$ 를 1 : 2로 내분하는 점이므로 $\overline{BD} = 2$

$\triangle ABD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \times 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 12$$

$$\therefore \overline{AD} = 2\sqrt{3} \quad (\because \overline{AD} > 0)$$

073 답 $\frac{8\sqrt{7}}{7}$

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \times 5 \times 6} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad (\because 0 < A < 180^\circ) \end{aligned}$$

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{4}{\sin A} = 2R$$

$$\therefore R = 4 \times \frac{4}{\sqrt{7}} \times \frac{1}{2} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

074 답 ④

$\triangle ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R},$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\frac{a}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{b}{2R} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)$$

위의 식의 양변에 $4acR$ 를 곱하면

$$2a^2c + 2ac^2 = ab^2 + ac^2 - a^3 + a^2c + b^2c - c^3$$

$$a^2c + ac^2 - ab^2 - b^2c + a^3 + c^3 = 0$$

$$ac(a+c) - b^2(a+c) + (a+c)(a^2 - ac + c^2) = 0$$

$$(a+c)(a^2 + c^2 - b^2) = 0$$

$$\therefore a^2 + c^2 = b^2 \quad (\because a > 0, c > 0)$$

따라서 $\triangle ABC$ 는 $B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

075 답 10 m

$\overline{AP} = x$ m라 하면 $\triangle PAB$ 는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{AB} = x \text{ m}$$

$\triangle PAC$ 에서

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{\overline{AC}}, \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{\overline{AC}} \quad \therefore \overline{AC} = \sqrt{3}x \text{ (m)}$$

$\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{3}x)^2 = x^2 + 10^2 - 2 \times x \times 10 \times \cos 120^\circ$$

$$3x^2 = x^2 + 100 + 10x, x^2 - 5x - 50 = 0$$

$$(x+5)(x-10) = 0 \quad \therefore x = 10 \quad (\because x > 0)$$

따라서 물로켓의 최고 높이는 10 m이다.

076 답 $\frac{64}{3}\pi - 16\sqrt{3}$

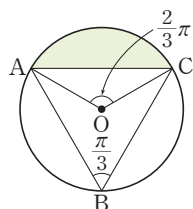
$\triangle ABC$ 의 외접원의 중심을 O 라 하면

$$\angle AOC = 2\angle ABC = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8^2 \times \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \times 8^2 \times \sin \frac{2}{3}\pi$$

$$= \frac{64}{3}\pi - 16\sqrt{3}$$



077 답 ②

$\triangle ACD$ 의 넓이가 $4\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin D = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \sin D = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos D &= \sqrt{1 - \sin^2 D} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \quad (\because 0^\circ < D < 90^\circ) \end{aligned}$$

$\square ABCD$ 가 원에 내접하므로 $B + D = 180^\circ$

$$\therefore B = 180^\circ - D$$

$$\therefore \cos B = \cos(180^\circ - D)$$

$$= -\cos D = -\frac{1}{3}$$

$\overline{AB} = x$ 라 하면 $\triangle ABC$ 와 $\triangle ACD$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$x^2 + 2^2 - 2 \times x \times 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \frac{1}{3}$$

$$3x^2 + 4x - 39 = 0$$

$$(3x+13)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 3 \quad (\because x > 0)$$

078 답 $\frac{9\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{2}$

$\triangle ABC$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \cos 60^\circ = 27$$

$$\therefore \overline{AC} = 3\sqrt{3} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

$\angle ACB = \theta$ 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{3}{\sin \theta} = \frac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}, 3 \sin 60^\circ = 3\sqrt{3} \sin \theta$$

$$\therefore \sin \theta = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

그런데 $0^\circ < \theta < 75^\circ$ 이므로 $\theta = 30^\circ$

따라서 $\angle ACD = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$ 이므로

$\square ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 2 \times \sin 45^\circ$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{9\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{2}$$

079 답 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

사다리꼴 $ABCD$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (6+12) \times 6 = 54$$

$$\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}, \overline{BD} = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}$$
이므로

$$\frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 6\sqrt{5} \times \sin \theta = 54$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{10} \quad (\because 0^\circ < \theta < 90^\circ)$$



001 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 = a + d = 44 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_7 = a + 6d = 9 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=51, d=-7$

따라서 $a_n = 51 + (n-1) \times (-7) = -7n + 58$ 이므로

$$a_{15} = -7 \times 15 + 58 = -47$$

002 답 ③

첫째항이 -32 이고 공차가 3 이므로

$$a_n = -32 + (n-1) \times 3 = 3n - 35$$

$$3n - 35 > 0 \text{에서 } 3n > 35$$

$$\therefore n > \frac{35}{3} = 11.6\dots$$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제12항이다.

003 답 36

주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 첫째항이 9 , 제4항이 27 이므로

$$9 + 3d = 27, 3d = 18 \quad \therefore d = 6$$

따라서 $x = 9 + 6 = 15, y = 15 + 6 = 21$ 이므로

$$x + y = 15 + 21 = 36$$

004 답 ④

세 수 $a, a^2, a^2 + 2$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2a^2 = a + (a^2 + 2) \text{에서 } a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a+1)(a-2) = 0 \quad \therefore a = 2 (\because a > 0)$$

005 답 120

세 수를 $a-d, a, a+d$ 로 놓으면

$$(a-d) + a + (a+d) = 18 \quad \dots\dots ㉠$$

$$(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 140 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠ \text{에서 } 3a = 18 \quad \therefore a = 6$$

이를 ㉡에 대입하면

$$108 + 2d^2 = 140, 2d^2 = 32$$

$$d^2 = 16 \quad \therefore d = -4 \text{ 또는 } d = 4$$

따라서 세 수는 $2, 6, 10$ 이므로 세 수의 곱은

$$2 \times 6 \times 10 = 120$$

006 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 = a + d = 5 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_8 = a + 7d = 17 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{을 연립하여 풀면 } a = 3, d = 2$$

따라서 첫째항부터 제15항까지의 합은

$$\frac{15\{2 \times 3 + (15-1) \times 2\}}{2} = 255$$

007 답 23

첫째항이 2 , 끝항이 74 , 항수가 $(m+2)$ 인 등차수열의 합이 950 이므로

$$\frac{(m+2)(2+74)}{2} = 950, m+2 = 25$$

$$\therefore m = 23$$

008 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_{10} = \frac{10\{2a + (10-1)d\}}{2} = 80$$

$$\therefore 2a + 9d = 16 \quad \dots\dots ㉠$$

$$S_{20} = \frac{20\{2a + (20-1)d\}}{2} = 360$$

$$\therefore 2a + 19d = 36 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{을 연립하여 풀면 } a = -1, d = 2$$

$$\therefore S_{30} = \frac{30\{2 \times (-1) + (30-1) \times 2\}}{2} = 840$$

009 답 -72

주어진 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = -22 + (n-1) \times 4 = 4n - 26 \quad \dots\dots ㉠$$

$$4n - 26 > 0 \text{에서 } 4n > 26$$

$$\therefore n > \frac{26}{4} = 6.5$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 제7항부터 양수이므로 첫째항부터 제6항까지의 합이 최소이다.

이때 ㉠에서 $a_6 = 4 \times 6 - 26 = -2$ 이므로 구하는 최솟값은

$$S_6 = \frac{6\{-22 + (-2)\}}{2} = -72$$

$$\text{다른 풀이 } S_n = \frac{n\{2 \times (-22) + (n-1) \times 4\}}{2}$$

$$= 2n^2 - 24n$$

$$= 2(n-6)^2 - 72$$

따라서 S_n 은 $n=6$ 일 때 최솟값이 -72 이다.

010 답 ④

두 자리의 자연수 중에서 6 으로 나누었을 때의 나머지가 5 인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$11, 17, 23, \dots, 95$$

이때 $95 = 11 + 6 \times 14$ 에서 구하는 값은 첫째항이 11 , 끝항이 95 , 항수가 15 인 등차수열의 합이므로

$$\frac{15(11+95)}{2} = 795$$

011 답 7

연속하는 30 개의 자연수 중에서 가장 작은 수를 a 라 하면 30 개의 자연수는 첫째항이 a , 공차가 1 인 등차수열을 이루므로

$$\frac{30\{2a + (30-1) \times 1\}}{2} = 645, 2a + 29 = 43$$

$$2a = 14 \quad \therefore a = 7$$

따라서 구하는 가장 작은 수는 7 이다.

012 답 ②

$$S_n = 3n^2 - n + 1 \text{에서}$$

$$a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 - 1 + 1 = 3$$

$$a_{10} = S_{10} - S_9$$

$$= (3 \times 10^2 - 10 + 1) - (3 \times 9^2 - 9 + 1)$$

$$= 291 - 235 = 56$$

$$\therefore a_1 + a_{10} = 3 + 56 = 59$$

다른 풀이 (i) $n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 3n^2 - n + 1 - \{3(n-1)^2 - (n-1) + 1\}$$

$$= 6n - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 - 1 + 1 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같지 않으므로

$$a_1 = 3, a_n = 6n - 4 \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore a_1 + a_{10} = 3 + (6 \times 10 - 4) = 59$$

013 답 -158

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_{13} = a + 12d = -58 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_{21} = a + 20d = -98 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 2, d = -5$$

따라서 $a_n = 2 + (n-1) \times (-5) = -5n + 7$ 이므로

$$a_{33} = -5 \times 33 + 7 = -158$$

014 답 ④

주어진 등차수열의 일반항을 a_n 이라 하면 첫째항이 -2 , 공차가

$$3 - (-2) = 5 \text{이므로}$$

$$a_n = -2 + (n-1) \times 5 = 5n - 7$$

$$\therefore a_{30} = 5 \times 30 - 7 = 143$$

015 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$4(a_2 + a_3) = a_{10} \text{에서}$$

$$4\{(3+d) + (3+2d)\} = 3+9d$$

$$4(6+3d) = 3+9d, 24+12d = 3+9d$$

$$3d = -21 \quad \therefore d = -7$$

016 답 $a_n = \log(2^n \times 3)$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 = a + d = \log 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_4 = a + 3d = \log 48 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = \log 6, d = \log 2$$

$$\therefore a_n = \log 6 + (n-1) \times \log 2$$

$$= \log 6 + \log 2^{n-1}$$

$$= \log(6 \times 2^{n-1}) = \log(2^n \times 3)$$

017 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 $a_2, a_4, a_6, a_8, \dots$ 이므로

$$a_4 - a_2 = (a_1 + 3d_1) - (a_1 + d_1) = 2d_1$$

$$a_6 - a_4 = (a_1 + 5d_1) - (a_1 + 3d_1) = 2d_1$$

$\vdots$

$$\therefore a_4 - a_2 = a_6 - a_4 = \dots = 2d_1$$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 공차가 $2d_1$ 인 등차수열이다.

ㄴ. 수열 $\{b_n^2\}$ 은 $b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2, \dots$ 이므로

$$b_2^2 - b_1^2 = (b_1 + d_2)^2 - b_1^2 = 2b_1d_2 + d_2^2$$

$$b_3^2 - b_2^2 = (b_1 + 2d_2)^2 - (b_1 + d_2)^2 = 2b_1d_2 + 3d_2^2$$

$$\therefore b_2^2 - b_1^2 \neq b_3^2 - b_2^2$$

따라서 수열 $\{b_n^2\}$ 은 등차수열이 아니다.

ㄷ. 수열 $\{a_n + b_n\}$ 은 $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots$ 이므로

$$a_2 + b_2 - (a_1 + b_1) = \{(a_1 + d_1) + (b_1 + d_2)\} - (a_1 + b_1)$$

$$= d_1 + d_2$$

$$a_3 + b_3 - (a_2 + b_2) = \{(a_1 + 2d_1) + (b_1 + 2d_2)\}$$

$$- \{(a_1 + d_1) + (b_1 + d_2)\}$$

$$= d_1 + d_2$$

$\vdots$

$$\therefore a_2 + b_2 - (a_1 + b_1) = a_3 + b_3 - (a_2 + b_2) = \dots = d_1 + d_2$$

따라서 수열 $\{a_n + b_n\}$ 은 공차가 $d_1 + d_2$ 인 등차수열이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

018 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 + a_{12} = (a + 2d) + (a + 11d)$$

$$= 2a + 13d = 25 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_{10} - a_4 = 6d = 30$$

$$\therefore d = 5$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $a = -20$

$$\therefore a_n = -20 + (n-1) \times 5 = 5n - 25$$

60을 제 k 항이라 하면

$$5k - 25 = 60, 5k = 85$$

$$\therefore k = 17$$

따라서 60은 제17항이다.

019 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면 제15항이 -25 이므로

$$a + 14 \times (-3) = -25$$

$$\therefore a = 17$$

따라서 $a_n = 17 + (n-1) \times (-3) = -3n + 20$ 이므로

$$b_n = a_{2n} = -3 \times 2n + 20 = -6n + 20$$

$$\therefore b_6 = -6 \times 6 + 20 = -16$$

020 답 -6

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

(가)에서

$$a_5 + a_7 = (a + 4d) + (a + 6d) = 0$$

$$2a = -10d \quad \therefore a = -5d \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(나)에서

$$|a+2d| + |a+7d| = 15$$

㉠을 이 식에 대입하면

$$|-3d| + |2d| = 15$$

이때 $d > 0$ 이므로

$$5d = 15 \quad \therefore d = 3$$

이를 ㉠에 대입하면 $a = -15$

따라서 $a_n = -15 + (n-1) \times 3 = 3n - 18$ 이므로

$$a_4 = 3 \times 4 - 18 = -6$$

021 답 제11항

주어진 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 7 + (n-1) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}n + \frac{31}{4}$$

$$-\frac{3}{4}n + \frac{31}{4} < 0 \text{에서 } \frac{3}{4}n > \frac{31}{4}$$

$$\therefore n > \frac{31}{3} = 10.3\cdots$$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제11항이다.

022 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 + a_7 = (a + 2d) + (a + 6d) = 2a + 8d = 0$$

$$\therefore a + 4d = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{10} = a + 9d = 20 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = -16$, $d = 4$

$$\therefore a_n = -16 + (n-1) \times 4 = 4n - 20$$

$$4n - 20 > 100 \text{에서 } 4n > 120$$

$$\therefore n > 30$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 31이다.

023 답 1

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_{11} = 19 + 10d = -11$$

$$10d = -30 \quad \therefore d = -3$$

$$\therefore a_n = 19 + (n-1) \times (-3) = -3n + 22$$

$$-3n + 22 < 0 \text{에서 } 3n > 22$$

$$\therefore n > \frac{22}{3} = 7.3\cdots$$

이때 $a_7 = -3 \times 7 + 22 = 1$, $a_8 = -3 \times 8 + 22 = -2$ 이므로

$$|a_7| = 1, |a_8| = 2$$

따라서 $|a_n|$ 의 최솟값은 1이다.

024 답 ③

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 5, 공차가 $-\frac{1}{3}$ 인 등차수열이므로

$$a_n = 5 + (n-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}n + \frac{16}{3}$$

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 -15, 공차가 $\frac{1}{2}$ 인 등차수열이므로

$$b_n = -15 + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n - \frac{31}{2}$$

따라서 수열 $\{b_n - a_n\}$ 의 일반항은

$$\frac{1}{2}n - \frac{31}{2} - \left(-\frac{1}{3}n + \frac{16}{3}\right) = \frac{5}{6}n - \frac{125}{6}$$

$$\frac{5}{6}n - \frac{125}{6} > 0 \text{에서 } \frac{5}{6}n > \frac{125}{6} \quad \therefore n > 25$$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제26항이다.

025 답 $\frac{15}{2}$

주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 첫째항이 6, 제6항이 -14이므로

$$6 + 5d = -14, 5d = -20 \quad \therefore d = -4$$

따라서 $x = 6 + (-4) = 2$, $y = 2 + (-4) = -2$,

$z = -2 + (-4) = -6$, $w = -6 + (-4) = -10$ 이므로

$$\frac{zw}{x^2 + y^2} = \frac{-6 \times (-10)}{2^2 + (-2)^2} = \frac{15}{2}$$

026 답 35

첫째항이 -7이고 공차가 $\frac{2}{3}$ 인 등차수열의 제 $(m+2)$ 항이 17이므로

$$-7 + (m+2-1) \times \frac{2}{3} = 17$$

$$\frac{2}{3}(m+1) = 24, m+1 = 36 \quad \therefore m = 35$$

027 답 ②

주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 첫째항이 13, 제 $(m+2)$ 항이 103이므로

$$13 + (m+2-1)d = 103, (m+1)d = 90$$

$$\therefore m = \frac{90}{d} - 1$$

이때 m 은 자연수이므로 d 는 90의 약수가 되어야 한다.

따라서 주어진 수열의 공차가 될 수 없는 것은 ②이다.

028 답 $\frac{3}{2}$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d_1 이라 하면

$$y = x + 6d_1, 6d_1 = y - x$$

$$\therefore d_1 = \frac{y-x}{6}$$

등차수열 $\{b_n\}$ 의 공차를 d_2 라 하면

$$y = x + 4d_2, 4d_2 = y - x$$

$$\therefore d_2 = \frac{y-x}{4}$$

$$\therefore \frac{b_3 - b_2}{a_5 - a_4} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{\frac{y-x}{4}}{\frac{y-x}{6}} = \frac{3}{2}$$

029 답 ③

세 수 $a-1$, a^2+1 , $3a+1$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(a^2+1) = (a-1) + (3a+1) \text{에서 } 2(a^2+1) = 4a$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0, (a-1)^2 = 0$$

$$\therefore a = 1$$

030 답 3

세 수 6, a , 10이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a = \frac{6+10}{2} = 8$$

세 수 6, b , 0도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$b = \frac{6+0}{2} = 3$$

세 수 a , 5, c , 즉 8, 5, c 도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$5 = \frac{8+c}{2}, 10 = 8+c \quad \therefore c = 2$$

세 수 10, 7, d 도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$7 = \frac{10+d}{2}, 14 = 10+d \quad \therefore d = 4$$

$$\therefore a - b + c - d = 8 - 3 + 2 - 4 = 3$$

031 답 ⑤

세 수 $\log_2 3$, $\log_2 a$, $\log_2 12$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\log_2 a = \log_2 3 + \log_2 12, \log_2 a^2 = \log_2 36$$

$$a^2 = 36 \quad \therefore a = 6 (\because a > 0)$$

세 수 $\log_2 a$, $\log_2 12$, $\log_2 b$, 즉 $\log_2 6$, $\log_2 12$, $\log_2 b$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\log_2 12 = \log_2 6 + \log_2 b, \log_2 12^2 = \log_2 6b$$

$$6b = 144 \quad \therefore b = 24$$

$$\therefore b - a = 24 - 6 = 18$$

032 답 -6

다항식 $f(x)$ 를 $x-1$, $x+1$, $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 각각

$$f(1) = 1 + a + b, f(-1) = 1 - a + b, f(-2) = 4 - 2a + b$$

세 수 $f(1)$, $f(-1)$, $f(-2)$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2f(-1) = f(1) + f(-2)$$

$$2(1 - a + b) = (1 + a + b) + (4 - 2a + b)$$

$$2 - 2a + 2b = 5 - a + 2b \quad \therefore a = -3$$

이때 $f(x)$ 는 $x-2$ 로 나누어떨어지므로

$$f(2) = 4 + 2a + b = 0 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore ab = -6$$

033 답 24

세 수 a , b , 10이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b = a + 10 \quad \therefore a = 2b - 10 \quad \dots\dots ㉠$$

또 $a < b < 10$ 이므로 직각삼각형에서 피타고라스 정리에 의하여

$$a^2 + b^2 = 100 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(2b - 10)^2 + b^2 = 100, 4b^2 - 40b + 100 + b^2 = 100$$

$$5b^2 - 40b = 0, b^2 - 8b = 0, b(b - 8) = 0$$

$$\therefore b = 8 (\because b > 0)$$

이를 ㉠에 대입하면 $a = 6$

따라서 직각삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$

034 답 ③

세 수를 $a-d$, a , $a+d$ 로 놓으면

$$(a-d) + a + (a+d) = 12 \quad \dots\dots ㉠$$

$$(a-d) \times a \times (a+d) = 48 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠에서 3a = 12 \quad \therefore a = 4$$

이를 ㉡에 대입하면

$$(4-d) \times 4 \times (4+d) = 48, 16 - d^2 = 12$$

$$d^2 = 4 \quad \therefore d = -2 \text{ 또는 } d = 2$$

따라서 세 수는 2, 4, 6이므로 세 수의 제곱의 합은

$$2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$$

035 답 2

삼차방정식의 세 실근을 $a-d$, a , $a+d$ 로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a-d) + a + (a+d) = -3, 3a = -3 \quad \therefore a = -1$$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 -1 이므로 방정식에 $x = -1$ 을 대입하면

$$(-1)^3 + 3 \times (-1)^2 + p \times (-1) + q = 0$$

$$2 - p + q = 0 \quad \therefore p - q = 2$$

036 답 -1

네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$ 로 놓으면

$$(a-3d) + (a-d) + (a+d) + (a+3d) = 8 \quad \dots\dots ㉠$$

$$(a-d)(a+d) = (a-3d)(a+3d) + 8 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠에서 4a = 8 \quad \therefore a = 2$$

이를 ㉡에 대입하면

$$(2-d)(2+d) = (2-3d)(2+3d) + 8$$

$$4 - d^2 = 4 - 9d^2 + 8, 8d^2 = 8$$

$$d^2 = 1 \quad \therefore d = -1 \text{ 또는 } d = 1$$

따라서 네 수는 -1 , 1 , 3 , 5 이므로 네 수 중 가장 작은 수는 -1 이다.

037 답 $81\sqrt{5}$

$\overline{AD} = a-d$, $\overline{CD} = a$, $\overline{AB} = a+d$ 라 하면

$$\triangle ABD \sim \triangle ACB \text{이므로 } \overline{AB}^2 = \overline{AD} \times \overline{AC}$$

$$(a+d)^2 = (a-d)(2a-d)$$

$$a^2 = 5ad \quad \therefore a = 5d (\because a > 0)$$

즉, $\overline{AB} = 6d$, $\overline{BC} = 9\sqrt{5}$, $\overline{AC} = 9d$ 이므로 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$$(9d)^2 = (6d)^2 + (9\sqrt{5})^2$$

$$45d^2 = 405, d^2 = 9 \quad \therefore d = 3 (\because d > 0)$$

따라서 $\overline{AB} = 18$ 이므로 직각삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 9\sqrt{5} \times 18 = 81\sqrt{5}$$

038 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_4 = a + 3d = 7 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_{20} - a_{10} = (a + 19d) - (a + 9d) = 10d = 30 \quad \therefore d = 3$$

이를 ㉠에 대입하면

$$a+9=7 \quad \therefore a=-2$$

따라서 첫째항부터 제12항까지의 합은

$$\frac{12\{2 \times (-2) + (12-1) \times 3\}}{2} = 174$$

039 답 ⑤

주어진 등차수열의 일반항을 a_n 이라 하면 첫째항이 26, 공차가 $23-26=-3$ 이므로

$$a_n = 26 + (n-1) \times (-3) = -3n + 29$$

-16을 제k항이라 하면

$$-16 = -3k + 29 \quad \therefore k = 15$$

따라서 첫째항부터 제15항까지의 합은

$$\frac{15\{26 + (-16)\}}{2} = 75$$

040 답 -2

첫째항이 8이고 제k항이 -30인 등차수열의 첫째항부터 제k항까지의 합이 -220이므로

$$\frac{k\{8 + (-30)\}}{2} = -220 \quad \therefore k = 20$$

즉, $a_{20} = -30$ 이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$8 + 19d = -30 \quad \therefore d = -2$$

041 답 8

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = a + 2d = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a + 6d = 3(a + 4d), \quad 2a + 6d = 0$$

$$\therefore a + 3d = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 9, d = -3$

$$\therefore S_n = \frac{n\{2 \times 9 + (n-1) \times (-3)\}}{2} = \frac{n(21-3n)}{2}$$

$$\frac{n(21-3n)}{2} < 0 \text{에서 } n(21-3n) < 0$$

이때 n 은 자연수이므로 $n > 7$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 8이다.

042 답 ④

두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 공차를 각각 d_1, d_2 라 하면

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_9)$$

$$= \frac{9(2a_1 + 8d_1)}{2} + \frac{9(2b_1 + 8d_2)}{2}$$

$$= \frac{9\{2(a_1 + b_1) + 8(d_1 + d_2)\}}{2}$$

$$= \frac{9\{2 \times 10 + 8(d_1 + d_2)\}}{2}$$

$$= 90 + 36(d_1 + d_2)$$

즉, $90 + 36(d_1 + d_2) = 54$ 이므로 $d_1 + d_2 = -1$

$$\therefore a_9 + b_9 = (a_1 + 8d_1) + (b_1 + 8d_2)$$

$$= (a_1 + b_1) + 8(d_1 + d_2)$$

$$= 10 + 8 \times (-1) = 2$$

다른 풀이 수열 $\{a_n + b_n\}$ 은 첫째항이 10이고 첫째항부터 제9항까지의 합이 54이므로

$$\frac{9\{2 \times 10 + (9-1)(d_1 + d_2)\}}{2} = 54$$

$$90 + 36(d_1 + d_2) = 54 \quad \therefore d_1 + d_2 = -1$$

$$\therefore a_9 + b_9 = (a_1 + b_1) + 8(d_1 + d_2) = 10 + 8 \times (-1) = 2$$

043 답 281

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 첫째항이 43이므로

$$a_{10} = 43 + 9d = 7 \quad \therefore d = -4$$

$$\therefore a_n = 43 + (n-1) \times (-4) = -4n + 47$$

$$-4n + 47 < 0 \text{에서 } 4n > 47 \quad \therefore n > \frac{47}{4} = 11.75$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 제11항까지는 양수이고, 제12항부터 음수이다.

이때 $a_{11} = 3, a_{12} = -1, a_{15} = -13$ 이므로

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{15}|$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{11}) - (a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15})$$

$$= \frac{11(43+3)}{2} - \frac{4\{-1+(-13)\}}{2} = 253 + 28 = 281$$

044 답 ①

첫째항이 6, 끝항이 48, 항수가 $(m+2)$ 인 등차수열의 합이 594이므로

$$\frac{(m+2)(6+48)}{2} = 594, \quad m+2=22 \quad \therefore m=20$$

045 답 -252

첫째항이 5, 끝항이 -33, 항수가 20인 등차수열의 합은

$$\frac{20\{5 + (-33)\}}{2} = -280$$

따라서 $5 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{18} + (-33) = -280$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{18} = -252$$

046 답 ③

$$-4 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m + 50 = -4 + 391 + 50 = 437$$

즉, 첫째항이 -4, 끝항이 50, 항수가 $(m+2)$ 인 등차수열의 합이 437이므로

$$\frac{(m+2)\{(-4) + 50\}}{2} = 437, \quad m+2=19 \quad \therefore m=17$$

047 답 -525

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_5 = \frac{5\{2a + (5-1)d\}}{2} = -5$$

$$\therefore a + 2d = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_{15} = \frac{15\{2a + (15-1)d\}}{2} = -165$$

$$\therefore a + 7d = -11 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 3, d = -2$

$$\therefore S_{25} = \frac{25\{2 \times 3 + (25-1) \times (-2)\}}{2} = -525$$

048 [답] ②

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_4 = \frac{4\{2a + (4-1)d\}}{2} = 34$$

$$\therefore 2a + 3d = 17 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_8 = \frac{8\{2a + (8-1)d\}}{2} = 116$$

$$\therefore 2a + 7d = 29 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a=4$, $d=3$

$$\begin{aligned} \therefore a_9 + a_{10} + a_{11} + \dots + a_{20} &= S_{20} - S_8 \\ &= \frac{20\{2 \times 4 + (20-1) \times 3\}}{2} - 116 \\ &= 650 - 116 = 534 \end{aligned}$$

049 [답] -65

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

(7)에서

$$S_{10} = \frac{10\{2a + (10-1)d\}}{2} = -15$$

$$\therefore 2a + 9d = -3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(4)에서

$$S_{20} - S_{10} = \frac{20\{2a + (20-1)d\}}{2} - (-15) = -115$$

$$\therefore 2a + 19d = -13 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a=3$, $d=-1$

$$\begin{aligned} \therefore a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{15} &= S_{15} - S_5 \\ &= \frac{15\{2 \times 3 + (15-1) \times (-1)\}}{2} - \frac{5\{2 \times 3 + (5-1) \times (-1)\}}{2} \\ &= -60 - 5 = -65 \end{aligned}$$

050 [답] 121

주어진 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 21 + (n-1) \times (-2) = -2n + 23 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$-2n + 23 < 0 \text{에서 } n > \frac{23}{2} = 11.5$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 제12항부터 음수이므로 첫째항부터 제11항까지의 합이 최대이다.

이때 ①에서 $a_{11} = -2 \times 11 + 23 = 1$ 이므로 구하는 최댓값은

$$S_{11} = \frac{11(21+1)}{2} = 121$$

[다른 풀이] $S_n = \frac{n\{2 \times 21 + (n-1) \times (-2)\}}{2}$
 $= -n^2 + 22n = -(n-11)^2 + 121$

따라서 S_n 은 $n=11$ 일 때 최댓값이 121이다.

051 [답] ①

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 첫째항이 -13 이므로

$$a_{12} = -13 + 11d = 9 \quad \therefore d = 2$$

$$\therefore a_n = -13 + (n-1) \times 2 = 2n - 15 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2n - 15 > 0 \text{에서 } n > \frac{15}{2} = 7.5$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 제8항부터 양수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최소이다.

이때 ①에서 $a_7 = 2 \times 7 - 15 = -1$ 이므로 첫째항부터 제7항까지의 합은

$$\frac{7\{-13 + (-1)\}}{2} = -49$$

따라서 $k=7$, $m=-49$ 이므로 $k+m=-42$

[다른 풀이] 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n\{2 \times (-13) + (n-1) \times 2\}}{2} \\ &= n^2 - 14n = (n-7)^2 - 49 \end{aligned}$$

따라서 S_n 은 $n=7$ 일 때 최솟값 -49 를 가지므로

$$k=7, m=-49 \quad \therefore k+m=-42$$

052 [답] 5

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$S_3 = \frac{3\{2 \times (-9) + (3-1)d\}}{2} = -27 + 3d$$

$$S_7 = \frac{7\{2 \times (-9) + (7-1)d\}}{2} = -63 + 21d$$

$$S_3 = S_7 \text{에서 } -27 + 3d = -63 + 21d$$

$$18d = 36 \quad \therefore d = 2$$

$$\therefore a_n = -9 + (n-1) \times 2 = 2n - 11$$

$$2n - 11 > 0 \text{에서 } n > \frac{11}{2} = 5.5$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 제6항부터 양수이므로 첫째항부터 제5항까지의 합이 최소이다.

$$\therefore n=5$$

053 [답] ⑤

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_n = 21 + (n-1)d$$

이때 S_{11} 의 값이 최대이므로 $a_{11} > 0$, $a_{12} < 0$ 이어야 한다.

$$a_{11} = 21 + 10d > 0 \text{에서 } d > -\frac{21}{10}$$

$$a_{12} = 21 + 11d < 0 \text{에서 } d < -\frac{21}{11}$$

$$\therefore -\frac{21}{10} < d < -\frac{21}{11}$$

그런데 d 는 정수이므로 $d = -2$

$$\therefore S_{20} = \frac{20\{2 \times 21 + (20-1) \times (-2)\}}{2} = 40$$

054 [답] 676

두 자리의 자연수 중에서 7로 나누었을 때의 나머지가 3인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$10, 17, 24, 31, \dots, 94$$

이때 $94 = 10 + 7 \times 12$ 에서 구하는 값은 첫째항이 10, 끝항이 94, 항수가 13인 등차수열의 합이므로

$$\frac{13(10+94)}{2} = 676$$

055 답 ③

50 이상 100 이하의 자연수 중에서 2의 배수는

50, 52, 54, ..., 100

이때 $100=50+2 \times 25$ 이므로 첫째항이 50, 끝항이 100, 항수가 26인 등차수열의 합은

$$\frac{26(50+100)}{2}=1950$$

또 50 이상 100 이하의 자연수 중에서 3의 배수는

51, 54, 57, ..., 99

이때 $99=51+3 \times 16$ 이므로 첫째항이 51, 끝항이 99, 항수가 17인 등차수열의 합은

$$\frac{17(51+99)}{2}=1275$$

한편 50 이상 100 이하의 자연수 중에서 6의 배수는

54, 60, 66, ..., 96

이때 $96=54+6 \times 7$ 이므로 첫째항이 54, 끝항이 96, 항수가 8인 등차수열의 합은

$$\frac{8(54+96)}{2}=600$$

따라서 50 이상 100 이하의 자연수 중에서 2 또는 3으로 나누어떨어지는 수의 총합은

$$1950+1275-600=2625$$

056 답 508

$A=\{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, \dots\}$,

$B=\{6, 11, 16, 21, 26, \dots\}$

이므로 $A \cap B = \{11, 26, 41, 56, \dots\}$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 11, 공차가 15인 등차수열이므로

$$a_1+a_2+a_3+\dots+a_8=\frac{8\{2 \times 11+(8-1) \times 15\}}{2}=508$$

057 답 ④

연속하는 15개의 자연수 중에서 가장 작은 수를 a 라 하면 15개의 자연수는 첫째항이 a , 공차가 1인 등차수열을 이루므로

$$\frac{15\{2a+(15-1) \times 1\}}{2}=315$$

$$a+7=21 \quad \therefore a=14$$

따라서 구하는 가장 큰 수는

$$14+14=28$$

058 답 6

n 각형의 내각의 크기의 합은

$$180^\circ \times (n-2) = 180^\circ \times n - 360^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

첫째항이 70° , 공차가 20° 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\frac{n\{2 \times 70^\circ + (n-1) \times 20^\circ\}}{2} = 10^\circ \times n^2 + 60^\circ \times n \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$180^\circ \times n - 360^\circ = 10^\circ \times n^2 + 60^\circ \times n$$

$$n^2 - 12n + 36 = 0, (n-6)^2 = 0$$

$$\therefore n=6$$

059 답 30

두 곡선 $y=x^2+ax+b$, $y=x^2$ 사이에 y 축과 평행하게 그은 선분의 길이를 $f(x)$ 라 하면

$$f(x)=x^2+ax+b-x^2=ax+b$$

이때 $f(x)$ 는 x 에 대한 일차식이므로 같은 간격의 x 좌표에 대하여 각각의 선분의 길이는 등차수열을 이룬다.

따라서 10개의 선분의 길이의 합은 첫째항이 1, 제10항이 5인 등차수열의 합과 같으므로

$$\frac{10(1+5)}{2}=30$$

060 답 ①

$$S_n = -2n^2 + 3n + 1 \text{에서}$$

$$a_1 = S_1 = -2 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1 = 2$$

$$a_3 = S_3 - S_2$$

$$= (-2 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1) - (-2 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1)$$

$$= -8 - (-1) = -7$$

$$a_5 = S_5 - S_4$$

$$= (-2 \times 5^2 + 3 \times 5 + 1) - (-2 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1)$$

$$= -34 - (-19) = -15$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 = 2 + (-7) + (-15)$$

$$= -20$$

다른 풀이 (i) $n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= -2n^2 + 3n + 1 - \{-2(n-1)^2 + 3(n-1) + 1\}$$

$$= -4n + 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = -2 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같지 않으므로

$$a_1 = 2, a_n = -4n + 5 \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 = 2 + (-4 \times 3 + 5) + (-4 \times 5 + 5)$$

$$= -20$$

061 답 ②

$$S_n = -2n^2 + 9n \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= -2n^2 + 9n - \{-2(n-1)^2 + 9(n-1)\}$$

$$= -4n + 11 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = -2 \times 1^2 + 9 \times 1 = 7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = -4n + 11$$

$$-4n + 11 > 0 \text{에서 } 4n < 11$$

$$\therefore n < \frac{11}{4} = 2.75$$

따라서 자연수 n 은 1, 2의 2개이다.

062 [답] 11

나머지정리에 의하여

$$S_n = (-n)^2 + 3(-n) = n^2 - 3n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 3n - \{(n-1)^2 - 3(n-1)\} \\ &= 2n - 4 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 3 \times 1 = -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2n - 4$$

따라서 $a_k = 2k - 4 = 18$ 에서 $k = 11$

063 [답] ④

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각

$$A_n = n^2 + kn, B_n = -2n^2 + 23n \text{이라 하면}$$

$n \geq 2$ 일 때, $a_n = A_n - A_{n-1}$, $b_n = B_n - B_{n-1}$ 이므로

$$a_4 = A_4 - A_3 = 4^2 + 4k - (3^2 + 3k) = 7 + k$$

$$b_4 = B_4 - B_3 = -2 \times 4^2 + 23 \times 4 - (-2 \times 3^2 + 23 \times 3) = 9$$

이때 $a_4 = b_4$ 이므로

$$7 + k = 9 \quad \therefore k = 2$$

064 [답] 10

$$S_n = -n^2 + 7n \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= -n^2 + 7n - \{-(n-1)^2 + 7(n-1)\} \\ &= -2n + 8 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = -1^2 + 7 \times 1 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = -2n + 8$$

$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2k}$ 는 첫째항이 $a_2 = 4$, 끝항이 $a_{2k} = -4k + 8$, 항수가 k 인 등차수열의 합이므로

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2k} = \frac{k\{4 + (-4k + 8)\}}{2} = -2k^2 + 6k$$

$$\text{즉, } -2k^2 + 6k = -140 \text{이므로 } 2k^2 - 6k - 140 = 0$$

$$k^2 - 3k - 70 = 0, (k+7)(k-10) = 0$$

$$\therefore k = 10 \quad (\because k > 0)$$

065 [답] ⑤

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3 = ar^2 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_5 = ar^4 = 12 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^2 = 4 \quad \therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 4a = 3 \quad \therefore a = \frac{3}{4}$$

$$\text{따라서 } a_n = \frac{3}{4} \times 2^{n-1} \text{이므로 } a_8 = \frac{3}{4} \times 2^7 = 96$$

066 [답] ②

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 = ar = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_5 = ar^4 = 243 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^3 = 27 \quad \therefore r = 3$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 3a = 9 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore a_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$$

$$3^n > 3000 \text{에서 } 3^7 = 2187, 3^8 = 6561 \text{이므로 } n \geq 8$$

따라서 처음으로 3000보다 커지는 항은 제8항이다.

067 [답] 84

주어진 등비수열의 공비를 r 라 하면 첫째항이 6, 제5항이 96이므로

$$6r^4 = 96, r^4 = 16 \quad \therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

$$\text{따라서 } x = 6 \times 2 = 12, y = 12 \times 2 = 24, z = 24 \times 2 = 48 \text{이므로}$$

$$x + y + z = 12 + 24 + 48 = 84$$

068 [답] ④

세 수 $a, 4, b$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$8 = a + b$$

세 수 $a, 3, b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$9 = ab$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 8^2 - 2 \times 9 = 46$$

069 [답] ②

삼차방정식의 세 실근을 $a, ar, ar^2 (a \neq 0)$ 으로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + ar + ar^2 = 19 \quad \therefore a(1 + r + r^2) = 19 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a = 114 \text{에서}$$

$$a^2r + a^2r^3 + a^2r^2 = 114 \quad \therefore a^2r(1 + r + r^2) = 114 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$a \times ar \times ar^2 = -k \text{에서 } a^3r^3 = -k \quad \therefore (ar)^3 = -k \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } ar = 6$$

이를 $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$6^3 = -k \quad \therefore k = -216$$

070 [답] ②

$$\text{한 변의 길이가 1인 정삼각형의 넓이는 } \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{이고, 각 시행}$$

에서 정삼각형의 한 변의 길이는 $\frac{1}{2}$ 배가 되고, 개수는 3배가 된다.

첫 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{3}{4}$$

두 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$\vdots$

$$n \text{번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 } \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

따라서 10번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

071 답 -129

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3 = ar^2 = -12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_7 = ar^6 = -192 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^4 = 16 \quad \therefore r = -2 \quad (\because r < 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 4a = -12 \quad \therefore a = -3$$

$$\therefore S_7 = \frac{-3\{1 - (-2)^7\}}{1 - (-2)} = -129$$

072 답 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$S_5 = \frac{a(1-r^5)}{1-r} = 20 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_{10} = \frac{a(1-r^{10})}{1-r} = \frac{a(1-r^5)(1+r^5)}{1-r} = 60 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } 1+r^5 = 3 \quad \therefore r^5 = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{15} &= \frac{a(1-r^{15})}{1-r} = \frac{a(1-r^5)(1+r^5+r^{10})}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^5)}{1-r} \times (1+r^5+r^{10}) \\ &= 20(1+2+2^2) = 140 \end{aligned}$$

073 답 $9\pi\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$

$$l_1 = \pi \times 3 = 3\pi$$

선분 A_1B 를 1:2로 내분하는 점이 A_2 이므로

$$\overline{A_2B} = 3 \times \frac{2}{3} = 2$$

$$\therefore l_2 = \pi \times 2 = 2\pi$$

선분 A_2B 를 1:2로 내분하는 점이 A_3 이므로

$$\overline{A_3B} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore l_3 = \pi \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{l_n\}$ 은 첫째항이 3π , 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 등비수열이므로

$$l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{10} = \frac{3\pi\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{2}{3}} = 9\pi\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$$

074 답 ④

$S_n = 3^n - 1$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1) \\ &= 3^{n-1} \times (3 - 1) = 2 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 - 1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n = 1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

$$\therefore \frac{a_6 + a_7}{a_1 + a_2} = \frac{2 \times 3^5 + 2 \times 3^6}{2 + 2 \times 3} = \frac{2 \times 3^5 \times (1 + 3)}{2 \times (1 + 3)} = 3^5 = 243$$

075 답 336만 원

연이율 5%, 1년마다 복리로 매년 초에 20만 원씩 12년 동안 적립할 때의 원리합계를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= 20(1+0.05) + 20(1+0.05)^2 + \dots + 20(1+0.05)^{12} \\ &= \frac{20(1+0.05)\{(1+0.05)^{12} - 1\}}{(1+0.05) - 1} \\ &= \frac{20 \times 1.05 \times (1.8 - 1)}{0.05} \\ &= 336(\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 12년 말의 적립금의 원리합계는 336만 원이다.

076 답 324

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 = ar = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_5 = ar^4 = 108 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^3 = 27 \quad \therefore r = 3$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 3a = 4 \quad \therefore a = \frac{4}{3}$$

$$\text{따라서 } a_n = \frac{4}{3} \times 3^{n-1} \text{이므로 } a_6 = \frac{4}{3} \times 3^5 = 324$$

077 답 ④

주어진 등비수열의 일반항 a_n 은 $a_n = \frac{1}{4} \times (\sqrt{2})^{n-1}$

8을 제 k 항이라 하면

$$\frac{1}{4} \times (\sqrt{2})^{k-1} = 8, \quad (\sqrt{2})^{k-1} = 32$$

$$2^{\frac{k-1}{2}} = 2^5, \quad \frac{k-1}{2} = 5$$

$$k-1 = 10 \quad \therefore k = 11$$

따라서 8은 제11항이다.

078 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$ 에서

$$a_4 + a_5 = ar^3 + ar^4 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_4 : a_5 = 2 : 1 \text{에서 } 2a_5 = a_4 \text{이므로}$$

$$2 \times ar^4 = ar^3 \quad \therefore r = \frac{1}{2}$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \frac{a}{8} + \frac{a}{16} = 3$$

$$\frac{3}{16}a = 3 \quad \therefore a = 16$$

$$\therefore ar = 16 \times \frac{1}{2} = 8$$

079 답 100

주어진 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 \times 4^{n-1} = 2 \times 2^{2(n-1)} = 2^{2n-1}$$

$$\therefore \log_2 a_n = \log_2 2^{2n-1} = 2n-1 = 2(n-1)+1$$

따라서 수열 $\{\log_2 a_n\}$ 은 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열이므로 구하는 합은

$$\frac{10\{2 \times 1 + (10-1) \times 2\}}{2} = 100$$

080 [답] ④

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_6}{a_1} = \frac{ar^5}{a} = r^5, \frac{a_7}{a_2} = \frac{ar^6}{ar} = r^5, \dots, \frac{a_{25}}{a_{10}} = \frac{ar^{24}}{ar^9} = r^{15} \text{이므로}$$

$$\frac{a_6}{a_1} + \frac{a_7}{a_2} + \frac{a_8}{a_3} + \dots + \frac{a_{25}}{a_{10}} = 20r^5 = 100$$

$$\therefore r^5 = 5$$

$$\therefore \frac{a_{25}}{a_{10}} = \frac{ar^{24}}{ar^9} = r^{15} = (r^5)^3 = 5^3 = 125$$

081 [답] 제8항

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3 = ar^2 = 36 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_6 = ar^5 = 972 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^3 = 27 \quad \therefore r = 3$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$9a = 36 \quad \therefore a = 4$$

따라서 $a_n = 4 \times 3^{n-1}$ 이므로

$$4 \times 3^{n-1} > 4000 \text{에서 } 3^{n-1} > 1000$$

$$\text{이때 } 3^6 = 729, 3^7 = 2187 \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 7 \quad \therefore n \geq 8$$

따라서 구하는 항은 제8항이다.

082 [답] ⑤

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_5 = ar^4 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_7 = ar^6 = 16 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^2 = 2 \quad \therefore r = \sqrt{2} (\because r > 0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$4a = 8 \quad \therefore a = 2$$

따라서 $a_n = 2 \times (\sqrt{2})^{n-1}$ 이므로

$$a_n^2 = \{2 \times (\sqrt{2})^{n-1}\}^2 = 2^2 \times \{(\sqrt{2})^2\}^{n-1} = 4 \times 2^{n-1}$$

$$4 \times 2^{n-1} > 1600 \text{에서 } 2^{n-1} > 400$$

$$\text{이때 } 2^8 = 256, 2^9 = 512 \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 9 \quad \therefore n \geq 10$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10이다.

083 [답] 12

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3 + a_6 = ar^2 + ar^5 = \frac{7}{16}$$

$$\therefore ar^2(1+r^3) = \frac{7}{16} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_4 + a_7 = ar^3 + ar^6 = -\frac{7}{32}$$

$$\therefore ar^3(1+r^3) = -\frac{7}{32} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r = -\frac{1}{2}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a \times \frac{1}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{16} \quad \therefore a = 2$$

따라서 $a_n = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\left|2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right| < \frac{1}{1000} \text{에서 } 2 \times \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right| < \frac{1}{1000}$$

$$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right| < \frac{1}{2000}$$

$$\text{이때 } \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}, \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{2048} \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 11 \quad \therefore n \geq 12$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 12이다.

084 [답] -9

주어진 등비수열의 공비를 r 라 하면 첫째항이 24, 제5항이 $\frac{3}{2}$ 이므로

$$24r^4 = \frac{3}{2}, r^4 = \frac{1}{16} \quad \therefore r = \frac{1}{2} (\because r > 0)$$

$$\text{따라서 } a_1 = 24 \times \frac{1}{2} = 12, a_3 = 24 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \text{이므로}$$

$$a_3 - a_1 = 3 - 12 = -9$$

085 [답] ②

첫째항이 12이고 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열의 제 $(m+2)$ 항이 $\frac{4}{243}$ 이므로

$$12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{m+1} = \frac{4}{243}, \left(\frac{1}{3}\right)^{m+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^6$$

$$m+1=6 \quad \therefore m=5$$

086 [답] 14

주어진 등비수열의 공비를 r 라 하면 첫째항이 4, 제9항이 324이므로

$$4r^8 = 324, r^8 = 81 \quad \therefore r = \sqrt{3} (\because r > 0)$$

따라서

$$a_1 = 4 \times \sqrt{3}, a_2 = 4 \times (\sqrt{3})^2, a_3 = 4 \times (\sqrt{3})^3, \dots, a_7 = 4 \times (\sqrt{3})^7$$

이므로

$$\begin{aligned} a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_7 &= 4^7 \times \{\sqrt{3} \times (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3})^3 \times \dots \times (\sqrt{3})^7\} \\ &= 4^7 \times (\sqrt{3})^{1+2+3+\dots+7} \\ &= 2^{14} \times 3^{14} = 6^{14} \end{aligned}$$

$$\therefore k = 14$$

087 [답] 4

세 수 $a, 6, b$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$12 = a + b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 수 $2, a, b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a^2 = 2b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$12 = a + \frac{a^2}{2}, a^2 + 2a - 24 = 0$$

$$(a+6)(a-4) = 0 \quad \therefore a = 4 (\because a > 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 4 + b = 12 \quad \therefore b = 8$$

$$\therefore 5a - 2b = 5 \times 4 - 2 \times 8 = 4$$

088 [답] 2

세 양수 $9a, a+4, a$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $(a+4)^2=9a \times a$ 에서 $a^2+8a+16=9a^2$
 $a^2-a-2=0, (a+1)(a-2)=0$
 $\therefore a=2 (\because a>0)$

089 [답] ②

세 수 $a, 3, b$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $9=ab$
 $\therefore \frac{1}{\log_a 3} + \frac{1}{\log_b 3} = \log_3 a + \log_3 b = \log_3 ab$
 $= \log_3 9 = 2$

090 [답] 2

$A(k, 2\sqrt{k}), B(k, \sqrt{k}), C(k, 0)$ 이므로
 $\overline{BC}=\sqrt{k}, \overline{OC}=k, \overline{AC}=2\sqrt{k}$
 $\overline{BC}, \overline{OC}, \overline{AC}$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $k^2=\sqrt{k} \times 2\sqrt{k}, k^2=2k$
 $k^2-2k=0, k(k-2)=0$
 $\therefore k=2 (\because k>0)$

091 [답] 정삼각형

세 변의 길이 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
 $b=\frac{a+c}{2} \dots\dots ㉠$
 또 $\sin A, \sin B, \sin C$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
 $\sin^2 B = \sin A \times \sin C$
 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의
 하여
 $\left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \frac{a}{2R} \times \frac{c}{2R}$
 $\therefore b^2=ac \dots\dots ㉡$
 ㉠을 ㉡에 대입하면
 $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = ac, a^2+2ac+c^2=4ac$
 $(a-c)^2=0 \therefore a=c$
 이를 ㉠에 대입하면 $b=c$
 $\therefore a=b=c$
 따라서 $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.

092 [답] ①

삼차방정식의 세 실근을 $a, ar, ar^2 (a \neq 0)$ 으로 놓으면 삼차방정식
 의 근과 계수의 관계에 의하여
 $a+ar+ar^2=-p$
 $\therefore a(1+r+r^2)=-p \dots\dots ㉠$
 $a \times ar+ar \times ar^2+ar^2 \times a=-6$ 에서
 $a^2r+a^2r^3+a^2r^2=-6$
 $\therefore a^2r(1+r+r^2)=-6 \dots\dots ㉡$
 $a \times ar \times ar^2=-8$ 에서
 $a^3r^3=-8 \therefore (ar)^3=-8 \dots\dots ㉢$
 ㉢에서 $ar=-2$

이를 ㉠에 대입하면

$$-2a(1+r+r^2)=-6 \therefore a(1+r+r^2)=3$$

이를 ㉡에 대입하면

$$3=-p \therefore p=-3$$

093 [답] 27

세 실수를 $a, ar, ar^2 (a \neq 0)$ 으로 놓으면
 $a+ar+ar^2=21$
 $\therefore a(1+r+r^2)=21 \dots\dots ㉠$
 $a \times ar \times ar^2=-729, a^3r^3=-729, (ar)^3=-729$
 $\therefore ar=-9 \dots\dots ㉡$
 ㉠÷㉡을 하면
 $\frac{a(1+r+r^2)}{ar} = \frac{21}{-9} = -\frac{7}{3}$
 $3(1+r+r^2)=-7r, 3r^2+3r+3=-7r$
 $3r^2+10r+3=0, (r+3)(3r+1)=0$
 $\therefore r=-3$ 또는 $r=-\frac{1}{3}$
 이를 ㉡에 대입하면
 $r=-3$ 일 때 $a=3, r=-\frac{1}{3}$ 일 때 $a=27$
 따라서 세 실수는 3, -9, 27이므로 가장 큰 수는 27이다.

094 [답] ②

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a, ar, ar^2
 $(a \neq 0)$ 으로 놓으면 모든 모서리의 길이의 합은 56이므로
 $4(a+ar+ar^2)=56$
 $\therefore a(1+r+r^2)=14 \dots\dots ㉠$
 또 겉넓이가 112이므로
 $2(a \times ar+ar \times ar^2+a \times ar^2)=112$
 $\therefore a^2r(1+r+r^2)=56 \dots\dots ㉡$
 ㉠÷㉡을 하면 $ar=4$
 따라서 직육면체의 부피는
 $a \times ar \times ar^2=(ar)^3=4^3=64$

095 [답] 46

한 변의 길이가 9인 정사각형의 넓이는 $9 \times 9=81$ 이고
 첫 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는
 $81 \times \frac{8}{9}$
 두 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는
 $81 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2$
 $\vdots$
 n 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는
 $81 \times \left(\frac{8}{9}\right)^n$
 따라서 10번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는
 $81 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{10} = \frac{8^{10}}{9^8} = \frac{2^{30}}{3^{16}}$
 따라서 $p=16, q=30$ 이므로 $p+q=46$

105 답 $\frac{95}{3}$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_3 = \frac{a(1-r^3)}{1-r} = 15 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_6 = \frac{a(1-r^6)}{1-r} = \frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r} = 25 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } 1+r^3 = \frac{5}{3} \quad \therefore r^3 = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_9 &= \frac{a(1-r^9)}{1-r} = \frac{a(1-r^3)(1+r^3+r^6)}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^3)}{1-r} \times (1+r^3+r^6) \\ &= 15 \times \left\{ 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right\} = \frac{95}{3} \end{aligned}$$

106 답 -128

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$S_4 = \frac{a(1-r^4)}{1-r} = -5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_8 = \frac{a(1-r^8)}{1-r} = \frac{a(1-r^4)(1+r^4)}{1-r} = -85 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$1+r^4 = 17, r^4 = 16 \quad \therefore r = -2 \quad (\because r < 0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{a\{1-(-2)^4\}}{1-(-2)} = -5, -5a = -5 \quad \therefore a = 1$$

따라서 $a_n = (-2)^{n-1}$ 이므로

$$a_8 = (-2)^7 = -128$$

107 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 수열 a_1, a_3, a_5, a_7 의 공비는 r^2 이므로

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = \frac{a\{(r^2)^4 - 1\}}{r^2 - 1} = \frac{a(r^8 - 1)}{r^2 - 1} = 17 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 = \frac{a(r^8 - 1)}{r - 1} = -34 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r + 1 = -2 \quad \therefore r = -3$$

108 답 -64

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 첫째항이 2이므로 $r=1$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = 2$

그런데 $r=1$ 이면

$$S_{10} - S_8 = a_9 + a_{10} = 4 > 0$$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$$\therefore r \neq 1$$

$$\textcircled{가} \text{에서 } \frac{2(1-r^{10})}{1-r} - \frac{2(1-r^2)}{1-r} = 4 \times \frac{2(1-r^8)}{1-r}$$

$$-r^{10} + r^2 = 4(1-r^8), r^2(1-r^8) = 4(1-r^8)$$

그런데 $r \neq 1$ 이므로 $r = -1$ 또는 $r^2 = 4$

$$\therefore r = -2 \text{ 또는 } r = -1 \text{ 또는 } r = 2$$

이때 (나)에서

$$S_{10} - S_8 = a_9 + a_{10} = 2r^8 + 2r^9 = 2r^8(1+r) < 0$$

이므로

$$r < -1 \quad \therefore r = -2$$

$$\therefore a_6 = 2 \times (-2)^5 = -64$$

109 답 ②

정삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$ 이므로

$$S_1 = \sqrt{3} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$S_2 = S_1 \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{4}$$

$$S_3 = S_2 \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{10} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \right\}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \right\} \end{aligned}$$

110 답 ⑤

이동 거리를 전날의 10%씩 늘려서 여행하므로 일주일 동안 이동하는 거리는

$$5 + 5 \times (1+0.1) + 5 \times (1+0.1)^2 + \dots + 5 \times (1+0.1)^6$$

$$= \frac{5\{(1+0.1)^7 - 1\}}{(1+0.1) - 1}$$

$$= \frac{5(1.9 - 1)}{0.1}$$

$$= 45(\text{km})$$

111 답 $\frac{16}{9}$ 배

2004년의 신규 가입자의 수를 a 명, 매년 증가하는 신규 가입자의 수의 비율을 r 라 하면 n 년 후의 신규 가입자의 수는 ar^n 명

2004년부터 2011년까지 8년 동안의 신규 가입자의 수가 12만 명이므로

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^7 = 120000$$

$$\therefore \frac{a(r^8 - 1)}{r - 1} = 120000 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

2012년부터 2019년까지 8년 동안의 신규 가입자의 수가 16만 명이므로

$$ar^8 + ar^9 + ar^{10} + \dots + ar^{15} = 160000$$

$$\therefore \frac{ar^8(r^8 - 1)}{r - 1} = 160000 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^8 = \frac{4}{3}$$

따라서 2020년의 신규 가입자의 수는 $ar^{16} = a(r^8)^2 = \frac{16}{9}a$ (명)이므로

2004년의 신규 가입자의 수의 $\frac{16}{9}$ 배이다.

112 답 ④

$S_n = 2^n - 3$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (2^n - 3) - (2^{n-1} - 3) \\ &= 2^{n-1} \times (2 - 1) = 2^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2^1 - 3 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같지 않으므로

$$a_1 = -1, \quad a_n = 2^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = -1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 = -1 + 4 + 16 + 64 = 83$$

113 답 ①

$S_n = 6 \times 8^n + k$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (6 \times 8^n + k) - (6 \times 8^{n-1} + k) \\ &= 8^{n-1} \times (48 - 6) = 42 \times 8^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 6 \times 8^1 + k = 48 + k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같아야 하므로

$$42 = 48 + k \quad \therefore k = -6$$

114 답 6

$S_n = 3^{n+1} - 3$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (3^{n+1} - 3) - (3^n - 3) \\ &= 3^n \times (3 - 1) = 2 \times 3^n \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 3^2 - 3 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 $a_n = 2 \times 3^n$

$$2 \times 3^n > 1000 \text{에서 } 3^n > 500$$

$$\text{이때 } 3^5 = 243, \quad 3^6 = 729 \text{이므로 } n \geq 6$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

115 답 30

$\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_3 + \dots + \log_3 a_n = S_n$ 이라 하면

$$S_n = \frac{n^2 - n}{2} \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} \log_3 a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{n^2 - n}{2} - \frac{(n-1)^2 - (n-1)}{2} \\ &= \frac{2n-2}{2} = n-1 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때

$$\log_3 a_1 = S_1 = \frac{1^2 - 1}{2} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$\log_3 a_n = n-1 \quad \therefore a_n = 3^{n-1}$$

$$\therefore a_2 + a_4 = 3 + 3^3 = 30$$

116 답 1620만 원

연이율 8%, 1년마다 복리로 매년 초에 100만 원씩 10년 동안 적립할 때의 원리합계를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= 100(1+0.08) + 100(1+0.08)^2 + \dots + 100(1+0.08)^{10} \\ &= \frac{100(1+0.08)\{(1+0.08)^{10} - 1\}}{(1+0.08) - 1} \\ &= \frac{100 \times 1.08 \times (2.2 - 1)}{0.08} = 1620(\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 10년 말의 적립금의 원리합계는 1620만 원이다.

117 답 ③

연이율 5%, 1년마다 복리로 매년 말에 10만 원씩 10년 동안 적립할 때의 원리합계를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= 10 + 10(1+0.05) + \dots + 10(1+0.05)^9 \\ &= \frac{10\{(1+0.05)^{10} - 1\}}{(1+0.05) - 1} = \frac{10(1.63 - 1)}{0.05} \\ &= 126(\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 10년 말의 적립금의 원리합계는 126만 원이다.

118 답 ②

월이율 0.4%, 1개월마다 복리로 매월 초에 20만 원씩 3년간 적립할 때의 원리합계를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= 20(1+0.004) + 20(1+0.004)^2 + \dots + 20(1+0.004)^{36} \\ &= \frac{20(1+0.004)\{(1+0.004)^{36} - 1\}}{(1+0.004) - 1} \\ &= \frac{20 \times 1.004 \times (1.15 - 1)}{0.004} = 753(\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 3년 말의 적립금의 원리합계는 753만 원이다.

119 답 50

연이율 4%, 1년마다 복리로 매년 초에 a 만 원씩 10년 동안 적립할 때의 원리합계를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= a(1+0.04) + a(1+0.04)^2 + \dots + a(1+0.04)^{10} \\ &= \frac{a(1+0.04)\{(1+0.04)^{10} - 1\}}{(1+0.04) - 1} \\ &= \frac{a \times 1.04 \times (1.5 - 1)}{0.04} = 13a(\text{만 원}) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 13a = 650 \text{이므로 } a = 50$$

120 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= a + (a+d) + (a+2d) \\ &= 3a + 3d = -30 \end{aligned}$$

$$\therefore a + d = -10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} a_4 + a_5 + a_6 &= (a+3d) + (a+4d) + (a+5d) \\ &= 3a + 12d = 15 \end{aligned}$$

$$\therefore a + 4d = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = -15, \quad d = 5$$

$$\text{따라서 } a_n = -15 + (n-1) \times 5 = 5n - 20 \text{이므로}$$

$$a_{10} = 5 \times 10 - 20 = 30$$

121 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 = a + d = -74 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{13} = a + 12d = -30 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -78, d = 4$$

$$\therefore a_n = -78 + (n-1) \times 4 = 4n - 82$$

$$4n - 82 > 0 \text{에서 } n > \frac{82}{4} = 20.5$$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제21항이다.

122 답 4

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 18, 공차가 -2 인 등차수열이므로

$$a_n = 18 + (n-1) \times (-2) = -2n + 20$$

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 12, 공차가 -3 인 등차수열이므로

$$b_n = 12 + (n-1) \times (-3) = -3n + 15$$

$$a_n \leq 4b_n \text{에서 } -2n + 20 \leq 4(-3n + 15)$$

$$-2n + 20 \leq -12n + 60 \quad \therefore n \leq 4$$

따라서 자연수 n 은 1, 2, 3, 4의 4개이다.

123 답 15

주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 첫째항이 3, 제17항이 35이므로

$$3 + 16d = 35, 16d = 32 \quad \therefore d = 2$$

이때 a_6 은 주어진 수열의 제7항이므로

$$a_6 = 3 + 6 \times 2 = 15$$

124 답 ③

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 $a-d$, a , $a+d$ 로 놓으면 모든 모서리의 길이의 합은 36이므로

$$4 \times \{(a-d) + a + (a+d)\} = 36$$

$$12a = 36 \quad \therefore a = 3$$

또 부피가 24이므로

$$(a-d) \times a \times (a+d) = 24$$

$$a(a^2 - d^2) = 24$$

$a=3$ 을 대입하면

$$3(9 - d^2) = 24, 9 - d^2 = 8$$

$$d^2 = 1 \quad \therefore d = -1 \text{ 또는 } d = 1$$

따라서 가로, 세로, 높이는 각각 2, 3, 4이므로 구하는 겉넓이는

$$2(2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 2) = 52$$

125 답 -170

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 + a_5 = (a + 2d) + (a + 4d) = 2a + 6d = 22$$

$$\therefore a + 3d = 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_6 + a_{10} = (a + 5d) + (a + 9d) = 2a + 14d = -2$$

$$\therefore a + 7d = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 20, d = -3$$

$$\therefore S_{20} = \frac{20\{2 \times 20 + (20-1) \times (-3)\}}{2} = -170$$

126 답 145

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_{10} = \frac{10\{2a + (10-1)d\}}{2} = -80$$

$$\therefore 2a + 9d = -16 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S_{20} = \frac{20\{2a + (20-1)d\}}{2} = 40$$

$$\therefore 2a + 19d = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -17, d = 2$$

$$\therefore a_n = -17 + (n-1) \times 2 = 2n - 19$$

$$2n - 19 > 0 \text{에서 } n > \frac{19}{2} = 9.5$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 제9항까지는 음수이고, 제10항부터 양수이다.

이때 $a_9 = -1$, $a_{10} = 1$, $a_{17} = 15$ 이므로

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{17}|$$

$$= -(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9) + (a_{10} + a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{17})$$

$$= -\frac{9\{-17 + (-1)\}}{2} + \frac{8(1 + 15)}{2}$$

$$= 81 + 64 = 145$$

127 답 13

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 = a + d = 35 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_7 = a_5 - 6 \text{에서}$$

$$a_7 - a_5 = -6, 2d = -6 \quad \therefore d = -3$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $a = 38$

$$\therefore a_n = 38 + (n-1) \times (-3) = -3n + 41$$

$$-3n + 41 < 0 \text{에서 } n > \frac{41}{3} = 13.6\cdots$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 제14항부터 음수이므로 첫째항부터 제13항까지의 합이 최대이다.

$$\therefore n = 13$$

128 답 580

3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \cdots \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 4로 나누어떨어지는 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$4, 8, 12, 16, 20, \cdots \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 공통인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$4, 16, 28, \cdots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 4, 공차가 12인 등차수열이므로

$$S_{10} = \frac{10\{2 \times 4 + (10-1) \times 12\}}{2} = 580$$

129 [답] 155

탑의 각 층의 벽돌의 개수는 한 층씩 위로 올라갈수록 일정한 개수만큼 줄어들므로 등차수열을 이룬다.

10층의 벽돌의 개수부터 한 층씩 내려가면서 차례대로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 이라 하고 전체 벽돌의 개수를 S_{10} , 공차를 d 라 하면 $a_1=2$ 이고 $S_{10}=7a_7+15$ 이므로

$$\frac{10\{2 \times 2 + (10-1)d\}}{2} = 7(2+6d) + 15$$

$$20 + 45d = 14 + 42d + 15, 3d = 9$$

$$\therefore d = 3$$

따라서 필요한 전체 벽돌의 개수는

$$\frac{10\{2 \times 2 + (10-1) \times 3\}}{2} = 155$$

130 [답] ③

$$S_n = 2n^2 + 9n \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 + 9n - \{2(n-1)^2 + 9(n-1)\} \\ &= 4n + 7 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1 + 9 \times 1 = 11 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 ②은 ①에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 4n + 7 = 4(n-1) + 11$$

따라서 $a=11, d=4$ 이므로

$$a+d=15$$

131 [답] -3

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{a_3 + a_5 + a_7}{a_1 + a_3 + a_5} &= \frac{ar^2 + ar^4 + ar^6}{a + ar^2 + ar^4} \\ &= \frac{ar^2(1 + r^2 + r^4)}{a(1 + r^2 + r^4)} = r^2 \end{aligned}$$

즉, $r^2=9$ 이므로 $r=-3$ ($\because r < 0$)

132 [답] 55

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 5, 공비가 2이므로

$$a_n = 5 \times 2^{n-1}$$

$$5 \times 2^{n-1} < 5000 \text{에서 } 2^{n-1} < 1000$$

$$\text{이때 } 2^9 = 512, 2^{10} = 1024 \text{이므로}$$

$$n-1 \leq 9 \quad \therefore n \leq 10$$

따라서 자연수 n 은 1, 2, 3, ..., 10이므로 구하는 합은

$$\frac{10(1+10)}{2} = 55$$

133 [답] 90

주어진 등비수열의 공비를 r 라 하면 첫째항이 3, 제7항이 30이므로

$$3r^6 = 30 \quad \therefore r^6 = 10$$

따라서 $a_1=3r, a_5=3r^5$ 이므로

$$a_1a_5 = 3r \times 3r^5 = 9r^6 = 9 \times 10 = 90$$

134 [답] ①

세 수 $x, 2y, 10$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$4y = x + 10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 수 4, $x, 13-y$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$x^2 = 4(13-y) \quad \therefore x^2 = 52 - 4y \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$x^2 = 52 - (x+10), x^2 + x - 42 = 0$$

$$(x+7)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = -7 \text{ 또는 } x = 6$$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } x = -7 \text{ 일 때 } y = \frac{3}{4}, x = 6 \text{ 일 때 } y = 4$$

그런데 x, y 는 정수이므로 $x=6, y=4$

따라서 등차수열 6, 8, 10의 공차는 2, 등비수열 4, 6, 9의 공비는

$$\frac{3}{2} \text{이므로 } d=2, r=\frac{3}{2}$$

$$\therefore dr=3$$

135 [답] 16

네 수 a, b, c, d 를 각각 a, ar, ar^2, ar^3 ($r > 0$)으로 놓으면

(가)에서 $\log_2 a - \log_2 c = 2$ 이므로

$$\log_2 \frac{a}{c} = 2, \log_2 \frac{a}{ar^2} = \log_2 4$$

$$\frac{1}{r^2} = 4 \quad \therefore r = \frac{1}{2} \quad (\because r > 0)$$

(나)에서 $2^a \times 2^b \times 2^c \times 2^d = 2^{15}$ 이므로

$$2^{a+b+c+d} = 2^{15} \quad \therefore a+b+c+d = 15$$

$$\text{즉, } a + ar + ar^2 + ar^3 = 15 \text{이므로 } a\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 15$$

$$\frac{15}{8}a = 15 \quad \therefore a = 8$$

$$\text{따라서 } b = 8 \times \frac{1}{2} = 4, c = 4 \times \frac{1}{2} = 2, d = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \text{이므로}$$

$$ad + bc = 8 \times 1 + 4 \times 2 = 16$$

136 [답] 64

세 실수를 a, ar, ar^2 ($a \neq 0$)으로 놓으면

$$a + ar + ar^2 = 14$$

$$\therefore a(1 + r + r^2) = 14 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a^2 + (ar)^2 + (ar^2)^2 = 84, a^2 + a^2r^2 + a^2r^4 = 84$$

$$\therefore a^2(1 + r^2 + r^4) = 84$$

$$\textcircled{1} \text{의 양변을 제곱하면 } a^2(1 + r + r^2)^2 = 14^2$$

$$a^2(1 + r^2 + r^4 + 2r + 2r^2 + 2r^3) = 196$$

$$a^2(1 + r^2 + r^4) + 2ar \times a(1 + r + r^2) = 196$$

$$84 + 2ar \times 14 = 196 \quad \therefore ar = 4$$

$$\therefore a \times ar \times ar^2 = (ar)^3 = 4^3 = 64$$

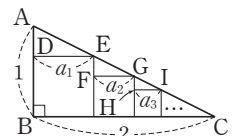
137 [답] ②

오른쪽 그림에서 $\triangle ADE$ 와 $\triangle ABC$ 는

닮음이므로 $\overline{AD} : \overline{DE} = \overline{AB} : \overline{BC}$

$$(1-a_1) : a_1 = 1 : 2, 2-2a_1 = a_1$$

$$\therefore a_1 = \frac{2}{3}$$



$\triangle EFG$ 와 $\triangle ABC$ 는 닮음이므로

$$\overline{EF} : \overline{FG} = \overline{AB} : \overline{BC}$$

$$(a_1 - a_2) : a_2 = 1 : 2, 2a_1 - 2a_2 = a_2$$

$$\therefore a_2 = \frac{2}{3}a_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$\triangle GHI$ 와 $\triangle ABC$ 는 닮음이므로

$$\overline{GH} : \overline{HI} = \overline{AB} : \overline{BC}$$

$$(a_2 - a_3) : a_3 = 1 : 2, 2a_2 - 2a_3 = a_3$$

$$\therefore a_3 = \frac{2}{3}a_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{2}{3}$, 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \therefore a_6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

138 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } a_n + S_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{ㄴ. } \log_3 b_n = \log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \log_3 3^{1-n} = 1 - n = -(n-1)$$

따라서 수열 $\{\log_3 b_n\}$ 은 첫째항이 0, 공차가 -1인 등차수열이다.

$$\text{ㄷ. } a_n b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_n b_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{6}$ 인 등비수열이다.

$$\begin{aligned} \text{ㄹ. } b_{n+1} - b_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3} - 1\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= -\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{b_{n+1} - b_n\}$ 은 첫째항이 $-\frac{2}{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

139 답 896

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_4 = \frac{a(1-r^4)}{1-r} = 14 \quad \dots\dots \text{㉑}$$

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{a(1-r^8)}{1-r} = \frac{a(1-r^4)(1+r^4)}{1-r} \\ &= 14 + 112 = 126 \quad \dots\dots \text{㉒} \end{aligned}$$

$$\text{㉑} \div \text{㉒} \text{을 하면 } 1 + r^4 = 9 \quad \therefore r^4 = 8$$

$$\therefore S_{12} = \frac{a(1-r^{12})}{1-r} = \frac{a(1-r^4)(1+r^4+r^8)}{1-r}$$

$$= \frac{a(1-r^4)}{1-r} \times (1+r^4+r^8)$$

$$= 14 \times (1+8+64) = 1022$$

$$\begin{aligned} \therefore a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} &= S_{12} - S_8 \\ &= 1022 - 126 = 896 \end{aligned}$$

140 답 $\frac{37+14\sqrt{3}}{16}$

$\angle XOY = 30^\circ$ 이므로

$$\overline{P_1 P_2} = \overline{OP_1} \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$\angle OP_1 P_2 = 60^\circ$ 이므로

$$\overline{P_2 P_3} = \overline{P_1 P_2} \sin 60^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\angle P_3 P_2 P_4 = 60^\circ$ 이므로

$$\overline{P_3 P_4} = \overline{P_2 P_3} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{\overline{P_n P_{n+1}}\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 인 등비수열이므로

$$\overline{P_1 P_2} + \overline{P_2 P_3} + \overline{P_3 P_4} + \overline{P_4 P_5} + \overline{P_5 P_6} = \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{37 + 14\sqrt{3}}{16}$$

141 답 ⑤

ㄱ. $S_n = 2^n - 1$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) \\ &= 2^{n-1} \times (2 - 1) = 2^{n-1} \quad \dots\dots \text{㉑} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1 \quad \dots\dots \text{㉒}$$

이때 ㉒은 ㉑에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 $a_n = 2^{n-1}$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 &= 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 \\ &= \frac{1 \times \{(2^2)^5 - 1\}}{2^2 - 1} \\ &= \frac{1}{3}(2^{10} - 1) = 341 \end{aligned}$$

ㄷ. 수열 $\{a_{2n}\}$: $a_2, a_4, a_6, \dots$ 의 공비는

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{2^3}{2} = 2^2 = 4$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

142 답 1.025배

예린이와 서연이가 각각 10년 후, 5년 후 연말에 받는 금액을 S 만 원, T 만 원이라 하면

$$\begin{aligned} S &= 5(1+0.01) + 5(1+0.01)^2 + \dots + 5(1+0.01)^{10} \\ &= \frac{5(1+0.01)\{(1+0.01)^{10} - 1\}}{(1+0.01) - 1} = \frac{5 \times 1.01 \times (1.01^{10} - 1)}{0.01} \\ &= 505(1.01^{10} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= 10(1+0.01) + 10(1+0.01)^2 + \dots + 10(1+0.01)^5 \\ &= \frac{10(1+0.01)\{(1+0.01)^5 - 1\}}{(1+0.01) - 1} = \frac{10 \times 1.01 \times (1.01^5 - 1)}{0.01} \\ &= 1010(1.01^5 - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{S}{T} &= \frac{505(1.01^{10} - 1)}{1010(1.01^5 - 1)} = \frac{505(1.01^5 - 1)(1.01^5 + 1)}{1010(1.01^5 - 1)} \\ &= \frac{1.01^5 + 1}{2} = \frac{1.05 + 1}{2} = 1.025 \end{aligned}$$

따라서 예린이가 받는 금액은 서연이가 받는 금액의 1.025배이다.



001 답 ①

$$\sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n})$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} a_k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{2n} a_k = n^2 + 3n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = 5^2 + 3 \times 5 = 40$$

002 답 -400

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = a + 2d = 2 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_8 = a + 7d = -8 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=6$, $d=-2$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{200} a_{2k} - \sum_{k=1}^{200} a_{2k-1} &= (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{400}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{399}) \\ &= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) + \cdots + (a_{400} - a_{399}) \\ &= 200d = 200 \times (-2) = -400 \end{aligned}$$

003 답 ③

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} (3a_k - 4b_k + 2) &= 3 \sum_{k=1}^{20} a_k - 4 \sum_{k=1}^{20} b_k + \sum_{k=1}^{20} 2 \\ &= 3 \times 15 - 4 \times 18 + 2 \times 20 \\ &= 13 \end{aligned}$$

004 답 ③

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (3k-2)^2 - \sum_{k=1}^{10} (3k)^2 &= \sum_{k=1}^{10} (9k^2 - 12k + 4) - \sum_{k=1}^{10} 9k^2 \\ &= \sum_{k=1}^{10} (-12k + 4) \\ &= -12 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 4 \\ &= -12 \times \frac{10 \times 11}{2} + 4 \times 10 \\ &= -660 + 40 = -620 \end{aligned}$$

005 답 84

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^7 \left(\sum_{k=1}^m k \right) &= \sum_{m=1}^7 \frac{m(m+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^7 (m^2 + m) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{7 \times 8 \times 15}{6} + \frac{7 \times 8}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times (140 + 28) = 84 \end{aligned}$$

006 답 ④

수열 $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, \dots, 15 \times 16$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n(n+1) = n^2 + n$$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제15항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} a_k &= \sum_{k=1}^{15} (k^2 + k) \\ &= \frac{15 \times 16 \times 31}{6} + \frac{15 \times 16}{2} \\ &= 1240 + 120 = 1360 \end{aligned}$$

007 답 $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

수열 $1 \times n, 3 \times (n-1), 5 \times (n-2), \dots, (2n-1) \times 1$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = (2k-1)\{n-(k-1)\}$$

따라서 주어진 식은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n [(2k-1)\{n-(k-1)\}] \\ &= \sum_{k=1}^n \{-2k^2 + (2n+3)k - (n+1)\} \\ &= -2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2n+3) \times \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \times n \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

008 답 ③

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 - n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - n - \{(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 2n - 2 \quad \cdots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

이때 $\textcircled{㉡}$ 은 $\textcircled{㉠}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2n - 2$$

따라서 $a_{2k-1} = 2(2k-1) - 2 = 4k - 4$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^5 (4k - 4) = 4 \times \frac{5 \times 6}{2} - 4 \times 5 \\ &= 60 - 20 = 40 \end{aligned}$$

009 답 ②

수열 $\frac{1}{1 \times 3}, \frac{1}{3 \times 5}, \frac{1}{5 \times 7}, \dots, \frac{1}{19 \times 21}$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{10}{21} \end{aligned}$$

010 답 4

$a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$ 이므로

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{40} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} \\ &= \sum_{k=1}^{40} \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{40} \frac{\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})} \\ &= \sum_{k=1}^{40} \frac{\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1}}{-2} \\ &= \sum_{k=1}^{40} \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{81} - \sqrt{79}) \} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{81} - \sqrt{1}) = 4 \end{aligned}$$

011 답 ④

$S = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \cdots + 10 \times 2^9$ 으로 놓고 $S - 2S$ 를 하면

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \cdots + 10 \times 2^9 \\ -) 2S &= 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + 9 \times 2^9 + 10 \times 2^{10} \\ \hline -S &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^9 - 10 \times 2^{10} \\ &= \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} - 10 \times 2^{10} \\ &= -9 \times 2^{10} - 1 \\ \therefore S &= 9 \times 2^{10} + 1 \end{aligned}$$

012 답 74

위에서 n 번째 줄에는 $(2n-1)$ 개의 자연수가 있으므로 첫 번째 줄부터 8번째 줄까지의 자연수의 개수는

$$\sum_{k=1}^8 (2k-1) = 2 \times \frac{8 \times 9}{2} - 8 = 64$$

따라서 위에서 9번째 줄의 왼쪽에서 10번째에 있는 수는

$$64 + 10 = 74$$

013 답 184

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} a_k \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \sum_{k=1}^{2n} a_k = 3n^2 - n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{16} a_k = 3 \times 8^2 - 8 = 184$$

014 답 ③

$$\begin{aligned} \text{① } \sum_{k=1}^n 5k &= 5 \times 1 + 5 \times 2 + 5 \times 3 + \cdots + 5 \times n \\ &= 5 + 10 + 15 + \cdots + 5n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{② } \sum_{k=2}^{10} (2k-1) &= (2 \times 2 - 1) + (2 \times 3 - 1) + (2 \times 4 - 1) \\ &\quad + \cdots + (2 \times 10 - 1) \\ &= 3 + 5 + 7 + \cdots + 19 \end{aligned}$$

$$\text{③ } \sum_{k=1}^n 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n$$

$$\begin{aligned} \text{④ } \sum_{k=1}^7 (-1)^k &= (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 \\ &\quad + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 \\ &= -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{⑤ } \sum_{k=1}^{10} (k+1)^2 &= (1+1)^2 + (2+1)^2 + (3+1)^2 + \cdots + (10+1)^2 \\ &= 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 11^2 \\ &= 4 + 9 + 16 + \cdots + 121 \end{aligned}$$

015 답 66

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{14} f(k+1) - \sum_{k=3}^{16} f(k-2) \\ &= \{f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(15)\} \\ &\quad - \{f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(14)\} \\ &= f(15) - f(1) \\ &= 70 - 4 = 66 \end{aligned}$$

016 답 ④

$$\sum_{k=1}^5 k a_k = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 60 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\sum_{k=1}^5 k a_{k+1} = a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 4a_5 + 5a_6 = 100 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠ - ㉡을 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - 5a_6 = -40$$

$$\text{즉, } \sum_{k=1}^5 a_k - 5a_6 = -40 \text{이므로}$$

$$20 - 5a_6 = -40$$

$$-5a_6 = -60 \quad \therefore a_6 = 12$$

017 답 ⑤

$$\text{ㄱ. } \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$\sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=0}^n k$$

$$\text{ㄴ. } \sum_{k=1}^n 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$$

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n 2^k \neq \sum_{k=0}^n 2^k$$

$$\text{ㄷ. } \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 a_{k+5}$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + (a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10})$$

$$= \sum_{k=1}^{10} a_k$$

$$\text{ㄹ. } \sum_{i=1}^{20} (2i-1)^2 + \sum_{j=1}^{20} (2j)^2$$

$$= (1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 39^2) + (2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 40^2)$$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 40^2$$

$$= \sum_{k=1}^{40} k^2$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

018 답 40

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_{10}=a+9d=21 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_4+a_8=(a+3d)+(a+7d)=10$$

$$2a+10d=10$$

$$\therefore a+5d=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=-15$, $d=4$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} a_{2k} - \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} &= (a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}) - (a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}) \\ &= (a_2-a_1) + (a_4-a_3) + \cdots + (a_{20}-a_{19}) \\ &= 10d = 10 \times 4 = 40 \end{aligned}$$

019 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_3+a_7}{a_1+a_5} = \frac{ar^2+ar^6}{a+ar^4} = \frac{ar^2(1+r^4)}{a(1+r^4)} = r^2$$

즉, $r^2=4$ 이므로 $r=2$ ($\because r>0$)

$$\sum_{k=1}^3 a_{2k-1} = a_1+a_3+a_5=42 \text{에서}$$

$$a+ar^2+ar^4=42, \quad a+4a+16a=42$$

$$21a=42 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore a_4=ar^3=2 \times 2^3=16$$

020 답 ④

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{20} 2^{-k} \sin \frac{k\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2^2} \sin \pi + \frac{1}{2^3} \sin \frac{3}{2}\pi + \cdots + \frac{1}{2^{20}} \sin 10\pi \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} - \cdots - \frac{1}{2^{19}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^{10} \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{4} \right)} \\ &= \frac{2}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{20} \right\} \end{aligned}$$

021 답 35

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_{10}=20 \text{에서 } a+9d=20 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^9 k(a_k - a_{k+1}) \\ &= (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \cdots + 9(a_9 - a_{10}) \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 - 9a_{10} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^9 a_k - 9 \times 20 = \sum_{k=1}^9 a_k - 180$$

$$\text{즉, } \sum_{k=1}^9 a_k - 180 = -135 \text{이므로 } \sum_{k=1}^9 a_k = 45$$

$$\frac{9\{2a+(9-1)d\}}{2} = 45$$

$$\therefore a+4d=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=-7$, $d=3$

$$\therefore a_{15} = -7 + 14 \times 3 = 35$$

022 답 26

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 1)^2 &= \sum_{k=1}^{10} (4a_k^2 - 4a_k + 1) \\ &= 4 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - 4 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= 4 \times 10 - 4 \times 6 + 10 = 26 \end{aligned}$$

023 답 50

$\sum_{k=1}^{15} a_k = \alpha$, $\sum_{k=1}^{15} b_k = \beta$ 라 하면

$$\sum_{k=1}^{15} (a_k + b_k) = 8 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{15} a_k + \sum_{k=1}^{15} b_k = 8$$

$$\therefore \alpha + \beta = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\sum_{k=1}^{15} (a_k - b_k) = -2 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{15} a_k - \sum_{k=1}^{15} b_k = -2$$

$$\therefore \alpha - \beta = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$\alpha = 3, \beta = 5$$

따라서 $\sum_{k=1}^{15} a_k = 3$, $\sum_{k=1}^{15} b_k = 5$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} (5a_k - 2b_k + 3) &= 5 \sum_{k=1}^{15} a_k - 2 \sum_{k=1}^{15} b_k + \sum_{k=1}^{15} 3 \\ &= 5 \times 3 - 2 \times 5 + 3 \times 15 = 50 \end{aligned}$$

024 답 -105

$\sum_{k=1}^n a_k = 2n$, $\sum_{k=1}^n b_k = \frac{1}{3}n^2$ 이므로

$$\sum_{k=11}^{15} a_k = 2 \times 15 - 2 \times 10 = 10$$

$$\sum_{k=11}^{15} b_k = \frac{1}{3} \times 15^2 - \frac{1}{3} \times 10^2 = \frac{125}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=11}^{15} (2a_k - 3b_k) &= 2 \sum_{k=11}^{15} a_k - 3 \sum_{k=11}^{15} b_k \\ &= 20 - 125 = -105 \end{aligned}$$

025 답 ②

$\sum_{k=1}^n (3a_k + b_k)^2 = n^2 + 2n$, $\sum_{k=1}^n (a_k - 3b_k)^2 = 6n + 10$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10} (3a_k + b_k)^2 = 10^2 + 2 \times 10 = 120 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - 3b_k)^2 = 6 \times 10 + 10 = 70 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 을 하면

$$\sum_{k=1}^{10} \{ (3a_k + b_k)^2 + (a_k - 3b_k)^2 \}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (10a_k^2 + 10b_k^2)$$

$$= 10 \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + b_k^2) = 190$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + b_k^2) = 19$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} \left(a_k^2 + b_k^2 - \frac{1}{2} \right) &= \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + b_k^2) - \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2} \\ &= 19 - \frac{1}{2} \times 10 = 14 \end{aligned}$$

026 답 10

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{50} \frac{5^k - 3^k}{4^k} &= \sum_{k=1}^{50} \left(\frac{5}{4}\right)^k - \sum_{k=1}^{50} \left(\frac{3}{4}\right)^k \\ &= \frac{\frac{5}{4} \left\{ \left(\frac{5}{4}\right)^{50} - 1 \right\}}{\frac{5}{4} - 1} - \frac{\frac{3}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{50} \right\}}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= 5 \left\{ \left(\frac{5}{4}\right)^{50} - 1 \right\} - 3 \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{50} \right\} \\ &= 5 \left(\frac{5}{4}\right)^{50} + 3 \left(\frac{3}{4}\right)^{50} - 8\end{aligned}$$

따라서 $a=5$, $b=3$, $c=-8$ 이므로
 $a-b-c=10$

027 답 ⑤

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1-a_k}{1+a_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{2-(1+a_k)}{1+a_k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{1+a_k} - 1 \right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k} - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 2(n^2+2n) - n \\ &= 2n^2+3n\end{aligned}$$

028 답 ③

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} (k+1)^2 - \sum_{k=1}^{20} (k^2-1) \\ &= \sum_{k=1}^{20} (k^2+2k+1) - \sum_{k=1}^{20} (k^2-1) \\ &= \sum_{k=1}^{20} (2k+2) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} 2 \\ &= 2 \times \frac{20 \times 21}{2} + 2 \times 20 \\ &= 420 + 40 = 460\end{aligned}$$

029 답 10

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (6-2k) &= \sum_{k=1}^n 6 - 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= 6n - 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= -n^2 + 5n\end{aligned}$$

즉, $-n^2+5n=-50$ 이므로 $n^2-5n-50=0$
 $(n+5)(n-10)=0 \quad \therefore n=-5$ 또는 $n=10$
 이때 n 은 자연수이므로 $n=10$

030 답 ②

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} \frac{1+2+3+\cdots+k}{k+1} &= \sum_{k=1}^{20} \frac{\frac{k(k+1)}{2}}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{20} \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{20} k \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{20 \times 21}{2} = 105\end{aligned}$$

031 답 245

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-3$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10} (\alpha-k)(\beta-k) &= \sum_{k=1}^{10} \{ \alpha\beta - (\alpha+\beta)k + k^2 \} \\ &= \sum_{k=1}^{10} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 3 \\ &= \sum_{k=1}^{10} (k^2 - 2k - 3) \\ &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 2 \times \frac{10 \times 11}{2} - 3 \times 10 \\ &= 385 - 110 - 30 = 245\end{aligned}$$

032 답 ①

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^7 (c-k)^2 &= \sum_{k=1}^7 (k^2 - 2ck + c^2) \\ &= \sum_{k=1}^7 k^2 - 2c \sum_{k=1}^7 k + c^2 \sum_{k=1}^7 1 \\ &= \frac{7 \times 8 \times 15}{6} - 2c \times \frac{7 \times 8}{2} + 7c^2 \\ &= 7c^2 - 56c + 140 \\ &= 7(c-4)^2 + 28\end{aligned}$$

따라서 $c=4$ 일 때 최솟값 28을 가지므로
 $c+m=4+28=32$

033 답 55

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} \log_3 a_k &= (\log_3 a_1 + \log_3 a_2) + (\log_3 a_3 + \log_3 a_4) \\ &\quad + \cdots + (\log_3 a_{19} + \log_3 a_{20}) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (\log_3 a_{2k-1} + \log_3 a_{2k}) = \sum_{k=1}^{10} \log_3 (a_{2k-1} a_{2k}) \\ &= \sum_{k=1}^{10} \log_3 \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^k \times 6^k \right\} = \sum_{k=1}^{10} \log_3 3^k \\ &= \sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \times 11}{2} = 55\end{aligned}$$

034 답 882

직선 $y=x+a_n$ 이 원의 중심 $(n, 2n^2+n)$ 을 지나야 하므로
 $2n^2+n=n+a_n \quad \therefore a_n=2n^2$
 $\therefore \sum_{k=1}^6 ka_k = \sum_{k=1}^6 2k^3 = 2 \times \left(\frac{6 \times 7}{2}\right)^2 = 882$

035 답 55

$$\begin{aligned}S^2 &= (1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2) + (2^2+3^2+4^2+\cdots+10^2) \\ &\quad + (3^2+4^2+5^2+\cdots+10^2) + \cdots + (9^2+10^2) + 10^2 \\ &= 1^2 \times 1 + 2^2 \times 2 + 3^2 \times 3 + \cdots + 9^2 \times 9 + 10^2 \times 10 \\ &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3 \\ &= \sum_{k=1}^{10} k^3 = \left(\frac{10 \times 11}{2}\right)^2 = 55^2\end{aligned}$$

그런데 $S>0$ 이므로 $S=55$

036 답 91

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{13} \left\{ \sum_{k=1}^l (2k-l) \right\} &= \sum_{l=1}^{13} \left(2 \sum_{k=1}^l k - l \sum_{k=1}^l 1 \right) \\ &= \sum_{l=1}^{13} \left\{ 2 \times \frac{l(l+1)}{2} - l^2 \right\} = \sum_{l=1}^{13} l \\ &= \frac{13 \times 14}{2} = 91\end{aligned}$$

037 답 ①

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=1}^l 1 \right) \right\} &= \sum_{m=1}^n \left(\sum_{l=1}^m l \right) \\
 &= \sum_{m=1}^n \frac{m(m+1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n (m^2 + m) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\
 \therefore, \frac{n(n+1)(n+2)}{6} &= 56 \text{ 이므로} \\
 n(n+1)(n+2) &= 6 \times 7 \times 8 \quad \therefore n=6
 \end{aligned}$$

038 답 32

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{l=1}^n (k+l) \right\} &= \sum_{k=1}^m \left(k \sum_{l=1}^n 1 + \sum_{l=1}^n l \right) \\
 &= \sum_{k=1}^m \left\{ kn + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\
 &= n \sum_{k=1}^m k + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{k=1}^m 1 \\
 &= n \times \frac{m(m+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \times m \\
 &= \frac{mn}{2} (m+n+2) \\
 &= \frac{8}{2} (6+2) = 32
 \end{aligned}$$

039 답 ②

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{10} \left[\sum_{k=1}^n \{ (-1)^{n-1} \times (2k-1) \} \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{10} \left\{ (-1)^{n-1} \times \sum_{k=1}^n (2k-1) \right\} \\
 &= \sum_{n=1}^{10} \left[(-1)^{n-1} \times \left\{ 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n \right\} \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{10} \{ (-1)^{n-1} \times n^2 \} \\
 &= 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 9^2 - 10^2 \\
 &= (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + \dots + (9-10)(9+10) \\
 &= -(1+2+3+4+\dots+9+10) \\
 &= -\frac{10 \times 11}{2} = -55
 \end{aligned}$$

040 답 3164

수열 $1 \times 2^2, 3 \times 4^2, 5 \times 6^2, \dots, 11 \times 12^2$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = (2n-1) \times (2n)^2 = 8n^3 - 4n^2$$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제6항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^6 a_k &= \sum_{k=1}^6 (8k^3 - 4k^2) \\
 &= 8 \times \left(\frac{6 \times 7}{2} \right)^2 - 4 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} \\
 &= 3528 - 364 = 3164
 \end{aligned}$$

041 답 4

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
 a_n &= (3n-1)^2 = 9n^2 - 6n + 1 \\
 \therefore S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (9k^2 - 6k + 1) \\
 &= 9 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 6 \times \frac{n(n+1)}{2} + n \\
 &= \frac{n(6n^2 + 3n - 1)}{2}
 \end{aligned}$$

따라서 $a=3, b=-1$ 이므로 $a-b=4$

042 답 ③

수열 $1, 1+2, 1+2+3, \dots, 1+2+3+\dots+10$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 1+2+3+\dots+n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} (k^2 + k) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} (385 + 55) = 220
 \end{aligned}$$

043 답 260

$$\begin{aligned}
 a_n &= \overline{A_n B_n} = g(n) - f(n) \\
 &= (n+2)^2 - n^2 = 4n + 4 \\
 \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} (4k + 4) \\
 &= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} + 4 \times 10 \\
 &= 220 + 40 = 260
 \end{aligned}$$

044 답 $\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$

수열 $1 \times (n-1), 2 \times (n-2), 3 \times (n-3), \dots, (n-1) \times 1$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = k(n-k) = nk - k^2$$

따라서 주어진 식은

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n-1} a_k &= \sum_{k=1}^{n-1} (nk - k^2) = n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\
 &= n \times \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
 &= \frac{n(n-1)\{3n - (2n-1)\}}{6} \\
 &= \frac{n(n-1)(n+1)}{6}
 \end{aligned}$$

045 답 ④

주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = \left(\frac{k+n}{n} \right)^2 = \left(\frac{k}{n} + 1 \right)^2 = \frac{k^2}{n^2} + \frac{2k}{n} + 1$$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k^2}{n^2} + \frac{2k}{n} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{(2n+1)(7n+1)}{6n}\end{aligned}$$

046 답 116

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 2n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} = n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= 2n + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \times 1 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2n + 1$$

따라서 $(2k-1)a_k = (2k-1)(2k+1) = 4k^2 - 1$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 (2k-1)a_k &= \sum_{k=1}^4 (4k^2 - 1) \\ &= 4 \times \frac{4 \times 5 \times 9}{6} - 1 \times 4 \\ &= 120 - 4 = 116\end{aligned}$$

047 답 35

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{2n}{n+1}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} = \frac{2n}{n+1} - \frac{2(n-1)}{n} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = \frac{2 \times 1}{1+1} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)}$$

따라서 $\frac{1}{a_k} = \frac{k(k+1)}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^5 \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^5 (k^2 + k) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{5 \times 6 \times 11}{6} + \frac{5 \times 6}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (55 + 15) = 35\end{aligned}$$

048 답 ②

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 3^n - 1$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} = 3^n - 1 - (3^{n-1} - 1) \\ &= 3^{n-1}(3 - 1) \\ &= 2 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

따라서 $a_{2k} = 2 \times 3^{2k-1} = \frac{2}{3} \times 9^k$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^6 a_{2k} &= \sum_{k=1}^6 \left(\frac{2}{3} \times 9^k \right) = \frac{2}{3} \times \frac{9(9^6 - 1)}{9 - 1} \\ &= \frac{3(3^{12} - 1)}{4} = \frac{3^{13} - 3}{4}\end{aligned}$$

따라서 $p=4$, $q=13$ 이므로 $p+q=17$

049 답 2

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \log_3 \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \log_3 \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \log_3 \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \log_3 \frac{n+2}{n} \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = \log_3 3 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = \log_3 \frac{n+2}{n}$$

따라서 $a_{2k} = \log_3 \frac{2k+2}{2k} = \log_3 \frac{k+1}{k}$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^8 a_{2k} &= \sum_{k=1}^8 \log_3 \frac{k+1}{k} \\ &= \log_3 \frac{2}{1} + \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{4}{3} + \dots + \log_3 \frac{9}{8} \\ &= \log_3 \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{9}{8} \right) = \log_3 9 = 2\end{aligned}$$

050 답 37

수열 $\frac{1}{3^2-1}, \frac{1}{5^2-1}, \frac{1}{7^2-1}, \dots, \frac{1}{23^2-1}$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)^2-1} = \frac{1}{4n^2+4n} = \frac{1}{4n(n+1)}$$

주어진 식의 좌변은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제11항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{11} a_k &= \sum_{k=1}^{11} \frac{1}{4k(k+1)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{11} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{12} \right) = \frac{11}{48}\end{aligned}$$

따라서 $p=48$, $q=11$ 이므로 $p-q=37$

051 **답** $\frac{10}{31}$

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{28} - \frac{1}{31}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{31}\right) = \frac{10}{31} \end{aligned}$$

052 **답** ④

수열 $1, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2+3}, \dots, \frac{1}{1+2+3+\dots+100}$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제100항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{100} a_k &= \sum_{k=1}^{100} \frac{2}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right) \right\} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{101}\right) = \frac{200}{101} \end{aligned}$$

053 **답** $\frac{30}{31}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = -2, \alpha_n \beta_n = -(4n^2 - 1)$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = \frac{-2}{-(4n^2 - 1)} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{15} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right) &= \sum_{n=1}^{15} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{15} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{29} - \frac{1}{31}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{31} = \frac{30}{31} \end{aligned}$$

054 **답** $-\frac{10}{19}$

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 - 2n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = n^2 - 2n - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\} \\ &= 2n - 3 \end{aligned}$$

..... ㉠

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 2 \times 1 = -1 \quad \text{..... ㉡}$$

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2n - 3$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{(2k-3)(2k-1)}$$

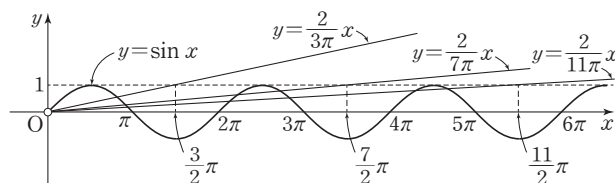
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k-3)(2k-1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (-1-1) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{19}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{1}{19}\right) = -\frac{10}{19} \end{aligned}$$

055 **답** 9

방정식 $\sin x = \frac{2}{(4n-1)\pi} x$ ($n=1, 2, 3, \dots$)의 양의 실근의 개수

a_n 은 두 함수 $y = \sin x$ 와 $y = \frac{2}{(4n-1)\pi} x$ 의 그래프가 $x > 0$ 인 범

위에서 만나는 점의 개수와 같다.



위의 그림에서 $a_1=1, a_2=3, a_3=5, \dots$ 이므로

$$a_n = 2n - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^9 \frac{40}{(a_n+1)(a_n+3)} &= \sum_{n=1}^9 \frac{40}{2n(2n+2)} \\ &= 10 \sum_{n=1}^9 \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 10 \sum_{n=1}^9 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 10 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) \right\} \\ &= 10 \left(1 - \frac{1}{10}\right) = 9 \end{aligned}$$

056 **답** $2\sqrt{2}$

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{16} a_k &= \sum_{k=1}^{16} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^{16} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2})} \\ &= \sum_{k=1}^{16} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + \cdots + (\sqrt{18} - \sqrt{17}) \\ &= -\sqrt{2} + \sqrt{18} = -\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

057 답 15

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m a_k &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\ &= \sum_{k=1}^m (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{m+1} - \sqrt{m}) \\ &= \sqrt{m+1} - 1\end{aligned}$$

즉, $\sqrt{m+1} - 1 = 3$ 이므로
 $\sqrt{m+1} = 4$, $m+1 = 16$
 $\therefore m = 15$

058 답 $3+2\sqrt{2}$

$P_n(n, \sqrt{n+2})$, $Q_n(n, -\sqrt{n})$ 에서
 $a_n = P_n Q_n = \sqrt{n+2} + \sqrt{n}$
 $\therefore \sum_{k=1}^{48} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{48} \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k}}$
 $= \sum_{k=1}^{48} \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k})(\sqrt{k+2} - \sqrt{k})}$
 $= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{48} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k})$
 $= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3})$
 $\quad + \cdots + (\sqrt{49} - \sqrt{47}) + (\sqrt{50} - \sqrt{48}) \}$
 $= \frac{1}{2} (-1 - \sqrt{2} + \sqrt{49} + \sqrt{50})$
 $= \frac{1}{2} (-1 - \sqrt{2} + 7 + 5\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}$

059 답 160

$27 \times 2^{n-1} = 3^3 \times 2^{n-1}$ 이므로 자연수 $27 \times 2^{n-1}$ 의 양의 약수의 개수
 a_n 은
 $a_n = (3+1)\{(n-1)+1\} = 4n$
 $\therefore f(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}}$
 $= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4k} + \sqrt{4(k+1)}}$
 $= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$
 $= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})}$
 $= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$
 $= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3})$
 $\quad + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \}$
 $= \frac{1}{2} (\sqrt{n+1} - 1)$
 $f(n)$ 의 값이 자연수가 되려면 $\sqrt{n+1}$ 은 3 이상의 홀수이어야 한다.
 이때 n 은 100 이하의 자연수이므로
 $3 \leq \sqrt{n+1} \leq \sqrt{101} < 11$

즉, $\sqrt{n+1}$ 의 값이 3, 5, 7, 9일 때, $f(n)$ 의 값이 자연수가 된다.
 따라서 자연수 n 의 값은 8, 24, 48, 80이므로 구하는 합은
 $8 + 24 + 48 + 80 = 160$

060 답 66

$1 - 2 \times 3 + 3 \times 3^2 - 4 \times 3^3 + \cdots - 16 \times 3^{15} = S$ 로 놓고
 $S - (-3S)$ 를 하면

$$\begin{aligned}S &= 1 - 2 \times 3 + 3 \times 3^2 - 4 \times 3^3 + \cdots - 16 \times 3^{15} \\ -) -3S &= -1 \times 3 + 2 \times 3^2 - 3 \times 3^3 + \cdots - 15 \times 3^{15} + 16 \times 3^{16} \\ \hline 4S &= 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \cdots - 3^{15} + 16 \times 3^{16} \\ &= \frac{1 - (-3)^{16}}{1 - (-3)} - 16 \times 3^{16} \\ &= \frac{1 - 65 \times 3^{16}}{4} \\ \therefore S &= \frac{1 - 65 \times 3^{16}}{16}\end{aligned}$$

 따라서 $a=1$, $b=65$ 이므로
 $a+b=66$

061 답 ②

$f(2) = 1 + 4 \times 2 + 7 \times 2^2 + 10 \times 2^3 + \cdots + 31 \times 2^{10}$ 이므로
 $f(2) - 2f(2)$ 를 하면

$$\begin{aligned}f(2) &= 1 + 4 \times 2 + 7 \times 2^2 + 10 \times 2^3 + \cdots + 31 \times 2^{10} \\ -) 2f(2) &= 2 + 4 \times 2^2 + 7 \times 2^3 + \cdots + 28 \times 2^{10} + 31 \times 2^{11} \\ \hline -f(2) &= 1 + 3 \times 2 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + 3 \times 2^{10} - 31 \times 2^{11} \\ &= 1 + 3 \times \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} - 31 \times 2^{11} \\ &= -28 \times 2^{11} - 5 \\ \therefore f(2) &= 28 \times 2^{11} + 5\end{aligned}$$

062 답 50

위에서 n 번째 줄에는 n 개의 자연수가 있으므로 첫 번째 줄부터 9
 번째 줄까지의 자연수의 개수는
 $\sum_{k=1}^9 k = \frac{9 \times 10}{2} = 45$
 따라서 위에서 10번째 줄의 왼쪽에서 5번째에 있는 수는
 $45 + 5 = 50$

063 답 제68항

주어진 수열을
 $\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \dots$
 와 같이 분모가 같은 항끼리 묶으면 n 번째 묶음의 항의 개수는 n
 이므로 첫 번째 묶음부터 11번째 묶음까지의 항의 개수는
 $\sum_{k=1}^{11} k = \frac{11 \times 12}{2} = 66$
 따라서 $66 + 2 = 68$ 이므로 $\frac{2}{13}$ 는 제68항이다.

064 답 39

위에서 n 번째 줄에 있는 순서쌍의 두 수의 합은 $n+1$ 이고, 위에서 n 번째 줄의 왼쪽에서 k 번째의 순서쌍은 $(k, n+1-k)$ 이다.
 이때 순서쌍 $(8, 24)$ 에서 $8+24=32=31+1$ 이므로 순서쌍 $(8, 24)$ 는 위에서 31번째 줄의 왼쪽에서 8번째에 있다.
 따라서 $p=31, q=8$ 이므로 $p+q=39$

065 답 ②

주어진 표의 첫 번째 줄의 수는 왼쪽에서부터 차례대로 $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$ 이므로 첫 번째 줄의 왼쪽에서 9번째 칸에 있는 수는 9^2 이다.
 이때 첫 번째 줄의 9번째 칸에 있는 수부터 9번째 줄의 9번째 칸에 있는 수까지 1씩 작아지므로 8번째 줄의 왼쪽에서 9번째 칸에 있는 수는 $9^2-7=74$

066 답 ⑤

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \dots + (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}) \\ &= \sum_{k=1}^{3n} a_k \\ &\text{이므로 } \sum_{k=1}^{3n} a_k = 3n^2 - 2n \\ &\therefore \sum_{k=1}^{30} a_k = 3 \times 10^2 - 2 \times 10 = 280 \end{aligned}$$

067 답 ①

$$\begin{aligned} a_n &= \log_2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \log_2 \frac{n+1}{n} \\ \therefore \sum_{k=1}^m a_k &= \sum_{k=1}^m \log_2 \frac{k+1}{k} \\ &= \log_2 \frac{2}{1} + \log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{4}{3} + \dots + \log_2 \frac{m+1}{m} \\ &= \log_2 \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{m+1}{m} \right) \\ &= \log_2 (m+1) \\ \text{즉, } \log_2 (m+1) &= 5 \text{이므로 } m+1 = 2^5 = 32 \quad \therefore m = 31 \end{aligned}$$

068 답 ⑤

다항식 $P(x) = x^{n-1}(3x-1)$ 을 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $P(3)$ 이므로
 $a_n = 3^{n-1} \times (9-1) = 8 \times 3^{n-1}$
 따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 8, 공비가 3인 등비수열이므로
 $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (8 \times 3^{k-1}) = \frac{8(3^n-1)}{3-1} = 4(3^n-1)$

069 답 36

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} (a_k - b_k)^2 &= \sum_{k=1}^{20} (a_k^2 - 2a_k b_k + b_k^2) \\ &= \sum_{k=1}^{20} (a_k^2 + b_k^2) - 2 \sum_{k=1}^{20} a_k b_k \\ \text{이므로 } 8 &= \sum_{k=1}^{20} (a_k^2 + b_k^2) - 2 \times 14 \\ \therefore \sum_{k=1}^{20} (a_k^2 + b_k^2) &= 36 \end{aligned}$$

070 답 80

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2n-1} + a_{2n}) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} a_k = 3n^2 - 2n \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k &= 3 \times 5^2 - 2 \times 5 = 65 \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 5) &= 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} 5 \\ &= 2 \times 65 - 5 \times 10 = 80 \end{aligned}$$

071 답 ②

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^4 (k+1)^3 - 3 \sum_{k=1}^4 k(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^4 (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - \sum_{k=1}^4 (3k^2 + 3k) \\ &= \sum_{k=1}^4 (k^3 + 1) = \sum_{k=1}^4 k^3 + \sum_{k=1}^4 1 \\ &= \left(\frac{4 \times 5}{2} \right)^2 + 4 \times 1 = 104 \end{aligned}$$

072 답 -1530

등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은
 $a_n = -1 + (n-1) \times (-2) = -2n + 1$
 등차수열 $\{b_n\}$ 의 일반항 b_n 은
 $b_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1$
 $\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k b_k = \sum_{k=1}^{10} (-2k+1)(2k+1)$
 $= \sum_{k=1}^{10} (-4k^2 + 1)$
 $= -4 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 10$
 $= -1540 + 10 = -1530$

073 답 ④

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \left\{ \sum_{m=1}^n (m+n) \right\} &= \sum_{n=1}^k \left(\sum_{m=1}^n m + n \sum_{m=1}^n 1 \right) \\ &= \sum_{n=1}^k \left\{ \frac{n(n+1)}{2} + n^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (3n^2 + n) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 3 \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{k(k+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{k(k+1)^2}{2} \\ \text{즉, } \frac{k(k+1)^2}{2} &= 147 \text{이므로 } k(k+1)^2 = 6 \times 7^2 \\ \therefore k &= 6 \end{aligned}$$

074 답 91

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면
 $a_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$
 $= \sum_{k=1}^n (2k-1)$
 $= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$
 $\therefore \sum_{k=1}^6 a_k = \sum_{k=1}^6 k^2 = \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = 91$

075 답 ⑤

수열 $2 \times (2n-1), 4 \times (2n-3), 6 \times (2n-5), \dots, 2n \times 1$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = 2k\{2n - (2k-1)\}$$

따라서 주어진 식의 좌변은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n 2k\{2n - (2k-1)\} = \sum_{k=1}^n \{(4n+2)k - 4k^2\} \\ &= (4n+2) \sum_{k=1}^n k - 4 \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= (4n+2) \times \frac{n(n+1)}{2} - 4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \end{aligned}$$

즉, $a=1, b=1, c=1$ 이므로 $a+b+c=3$

076 답 124

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 - 11n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 11n - \{(n-1)^2 - 11(n-1)\} \\ &= 2n - 12 \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 11 = -10 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로

$$a_n = 2n - 12$$

따라서 $a_{2k} = 2 \times 2k - 12 = 4k - 12$ 이고, $a_{2k} \geq 0$ 을 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$4k - 12 \geq 0 \quad \therefore k \geq 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} |a_{2k}| &= -\sum_{k=1}^2 a_{2k} + \sum_{k=3}^{10} a_{2k} = -\sum_{k=1}^2 a_{2k} + \sum_{k=1}^9 a_{2k} - \sum_{k=1}^2 a_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{10} a_{2k} - 2 \sum_{k=1}^2 a_{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{10} (4k - 12) - 2 \sum_{k=1}^2 (4k - 12) \\ &= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} - 12 \times 10 - 2 \left(4 \times \frac{2 \times 3}{2} - 12 \times 2 \right) \\ &= 220 - 120 + 24 = 124 \end{aligned}$$

077 답 $\frac{40}{7}$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{2n+1} = \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{2n+1} = \frac{n(n+1)}{6} \\ \therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{20}} \\ &= \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{20} \frac{6}{k(k+1)} = 6 \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 6 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{21} \right) \right\} \\ &= 6 \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{40}{7} \end{aligned}$$

078 답 ④

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \frac{1}{f(k)} &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{3k+9} + \sqrt{3k+6}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\sqrt{3k+9} - \sqrt{3k+6}}{(\sqrt{3k+9} + \sqrt{3k+6})(\sqrt{3k+9} - \sqrt{3k+6})} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\sqrt{3k+9} - \sqrt{3k+6}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \{ (\sqrt{12} - \sqrt{9}) + (\sqrt{15} - \sqrt{12}) + (\sqrt{18} - \sqrt{15}) \\ &\quad + \dots + (\sqrt{3m+9} - \sqrt{3m+6}) \} \\ &= \frac{1}{3} (\sqrt{3m+9} - 3) \end{aligned}$$

즉, $\frac{1}{3} (\sqrt{3m+9} - 3) = 1$ 이므로

$$\sqrt{3m+9} - 3 = 3, \sqrt{3m+9} = 6$$

$$3m+9=36 \quad \therefore m=9$$

079 답 ①

$S_{10} = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{10}{2^9}$ 이므로 $S_{10} - \frac{1}{2}S_{10}$ 을 하면

$$\begin{aligned} S_{10} &= 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{10}{2^9} \\ - \frac{1}{2}S_{10} &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{9}{2^9} + \frac{10}{2^{10}} \\ \hline \frac{1}{2}S_{10} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^9} - \frac{10}{2^{10}} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{10}{2^{10}} \\ &= 2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right\} - \frac{10}{2^{10}} \\ &= 2 - \frac{12}{2^{10}} \\ &= 2 - 3 \left(\frac{1}{2}\right)^8 \end{aligned}$$

$$\therefore S_{10} = 4 - 3 \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

따라서 $a=4, b=7$ 이므로

$$a+b=11$$

080 답 1705

n 행에 나열되는 수들의 합은 첫째항이 n , 공차가 n 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이므로

$$a_n = \frac{n\{2n + (n-1) \times n\}}{2} = \frac{n^3 + n^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \frac{k^3 + k^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{10} k^3 + \sum_{k=1}^{10} k^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 + \frac{10 \times 11 \times 21}{6} \right\} \\ &= \frac{1}{2} (3025 + 385) \\ &= 1705 \end{aligned}$$

001 답 ④

$a_{n+1}=a_n-4$, 즉 $a_{n+1}-a_n=-4$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 -4 인 등차수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=200$ 이므로

$$a_n=200+(n-1)\times(-4)=-4n+204$$

$$a_k=12\text{에서 } -4k+204=12$$

$$4k=192 \quad \therefore k=48$$

다른 풀이 $a_{n+1}=a_n-4$ 의 n 에 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례대로 대입하면

$$a_2=a_1-4=200-4$$

$$a_3=a_2-4=200-4\times 2$$

$$a_4=a_3-4=200-4\times 3$$

$\vdots$

$$a_n=a_{n-1}-4=200-4\times(n-1)$$

$$\therefore a_n=-4n+204$$

$$a_k=12\text{에서 } -4k+204=12$$

$$4k=192 \quad \therefore k=48$$

002 답 $\frac{63}{4}$

$a_n=2a_{n+1}$, 즉 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다.

이때 $a_2=\frac{1}{2}a_1$ 에서 $a_1=8$ 이므로

$$a_n=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^6 a_k &= \sum_{k=1}^6 \left\{ 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \right\} \\ &= \frac{8 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{63}{4} \end{aligned}$$

다른 풀이 $a_n=2a_{n+1}$, 즉 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ 의 n 에 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{1}{2}a_1=4$$

$$a_3=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{2}\times 4$$

$$a_4=\frac{1}{2}a_3=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 4$$

$\vdots$

$$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\times 4$$

$$\therefore a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^6 a_k &= \sum_{k=1}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{k-4} \\ &= \frac{8 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{63}{4} \end{aligned}$$

003 답 ③

$a_{n+1}=a_n+2n-1$ 의 n 에 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2=a_1+2\times 1-1$$

$$a_3=a_2+2\times 2-1$$

$$a_4=a_3+2\times 3-1$$

$\vdots$

$$+) a_n=a_{n-1}+2\times(n-1)-1$$

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$

$$=1+2\times\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)$$

$$=n^2-2n+2$$

$$\therefore a_{20}=20^2-2\times 20+2=362$$

004 답 496

$a_{n+1}=\frac{n+3}{n+1}a_n$ 의 n 에 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2=\frac{4}{2}a_1$$

$$a_3=\frac{5}{3}a_2$$

$$a_4=\frac{6}{4}a_3$$

$\vdots$

$$\times) a_n=\frac{n+2}{n}a_{n-1}$$

$$a_n=\frac{(n+1)(n+2)}{6}a_1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\therefore a_{30}=\frac{31\times 32}{2}=496$$

005 답 $\frac{17}{4}$

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+2$ 의 n 에 $1, 2, 3, 4$ 를 차례대로 대입하면

$$a_2=\frac{1}{2}a_1+2=\frac{1}{2}\times 8+2=6$$

$$a_3=\frac{1}{2}a_2+2=\frac{1}{2}\times 6+2=5$$

$$a_4=\frac{1}{2}a_3+2=\frac{1}{2}\times 5+2=\frac{9}{2}$$

$$\therefore a_5=\frac{1}{2}a_4+2=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}+2=\frac{17}{4}$$

006 답 2

$a_1=1$ 이므로

$$a_2=a_1+1=1+1=2, \quad a_3=a_2+1=2+1=3,$$

$$a_4=a_3-2=3-2=1, \quad a_5=a_4+1=1+1=2, \dots$$

$$\therefore a_n=\begin{cases} 1 & (n=3k-2) \\ 2 & (n=3k-1) \text{ (단, } k \text{는 자연수)} \\ 3 & (n=3k) \end{cases}$$

이때 $29=3\times 10-1$ 이므로 $a_{29}=2$

007 답 ④

$S_n = 3a_n - 4$ 의 n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$S_{n+1} = 3a_{n+1} - 4$$

이때 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1} = 3a_{n+1} - 4 - (3a_n - 4)$$

$$2a_{n+1} = 3a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{20} = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{19} = \frac{3^{19}}{2^{18}}$$

008 답 136

$$a_1 = (12-4) \times 2 = 16$$

$$a_2 = (a_1-4) \times 2 = (16-4) \times 2 = 24$$

$$a_3 = (a_2-4) \times 2 = (24-4) \times 2 = 40$$

$$a_4 = (a_3-4) \times 2 = (40-4) \times 2 = 72$$

$$\therefore a_5 = (a_4-4) \times 2 = (72-4) \times 2 = 136$$

009 답 ⑤

$p(1)$ 이 참이면 $p(3), p(5)$ 도 참이다.

$p(3)$ 이 참이면 $p(3 \times 3) = p(9), p(5 \times 3) = p(15)$ 도 참이다.

$p(5)$ 가 참이면 $p(5 \times 5) = p(25)$ 도 참이다.

⋮

따라서 $p(1)$ 이 참이면 자연수 a, b 에 대하여 $p(3^a \times 5^b)$ 이 참이다.

$$\textcircled{1} p(30) = p(2 \times 3 \times 5)$$

$$\textcircled{2} p(60) = p(2^2 \times 3 \times 5)$$

$$\textcircled{3} p(105) = p(3 \times 5 \times 7)$$

$$\textcircled{4} p(120) = p(2^3 \times 3 \times 5)$$

$$\textcircled{5} p(225) = p(3^2 \times 5^2)$$

010 답 풀이 참조

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 2 \times 1 - 1 = 1, (\text{우변}) = 1^2 = 1$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때

주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$$

위의 식의 양변에 $(2k+1)$ 을 더하면

$$1+3+5+\dots+(2k-1)+(2k+1)$$

$$=k^2+(2k+1)$$

$$=(k+1)^2$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

011 답 풀이 참조

(i) $n=1$ 일 때

$$1 \times (1^2+5) = 6 \text{이므로 } 6 \text{의 배수이다.}$$

(ii) $n=k$ 일 때

$k(k^2+5) = 6m$ (m 은 자연수)이라 가정하면 $n=k+1$ 일 때

$$(k+1)\{(k+1)^2+5\} = k^3+3k^2+8k+6$$

$$=k^3+5k+6+3k(k+1)$$

$$=k(k^2+5)+6+3k(k+1)$$

$$=6m+6+3k(k+1)$$

$$=6(m+1)+3k(k+1)$$

이때 k 또는 $k+1$ 이 2의 배수이므로 $3k(k+1)$ 은 6의 배수이다.

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $n(n^2+5)$ 가 6의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $n(n^2+5)$ 는 6의 배수이다.

012 답 풀이 참조

(i) $n=3$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 2^4 = 16, (\text{우변}) = 3 \times 2 = 6$$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 3$)일 때

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$2^{k+1} > k(k-1)$$

위의 식의 양변에 2를 곱하면

$$2^{k+2} > 2k(k-1) = k^2+k(k-2)$$

이때 $k^2+k(k-2) \geq k^2+k$ 이므로

$$2^{k+2} > k^2+k$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 3$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

013 답 ⑤

$a_{n+1} - a_n = 3$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 3인 등차수열이다.

이때 첫째항이 $a_1 = -2$ 이므로

$$a_n = -2 + (n-1) \times 3 = 3n-5$$

$$a_k = 232 \text{에서}$$

$$3k-5=232, 3k=237$$

$$\therefore k=79$$

014 답 32

$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$, 즉 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_6 = a + 5d = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_{12} = a + 11d = 20 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -2, d = 2$$

따라서 $a_n = -2 + (n-1) \times 2 = 2n-4$ 이므로

$$a_{18} = 2 \times 18 - 4 = 32$$

015 답 9

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_4=\frac{4\{2a+(4-1)d\}}{2}=56$$

$$\therefore 2a+3d=28 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_8=\frac{8\{2a+(8-1)d\}}{2}=80$$

$$\therefore 2a+7d=20 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=17$, $d=-2$

$$\therefore a_n=17+(n-1)\times(-2)=-2n+19$$

$$-2n+19<0 \text{에서 } n>\frac{19}{2}=9.5$$

따라서 제10항부터 음수이므로 첫째항부터 제9항까지의 합이 최대가 된다.

$$\therefore n=9$$

016 답 $\frac{16}{17}$

$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$, 즉 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고 $a_1=2$, $a_2-a_1=4-2=2$ 이므로 첫째항이 2, 공차가 2이다.

$$\therefore S_n=\frac{n\{2\times 2+(n-1)\times 2\}}{2}=n(n+1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{16} \frac{1}{S_k}=\sum_{k=1}^{16} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{16} \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{17}\right)$$

$$=1-\frac{1}{17}=\frac{16}{17}$$

017 답 ②

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$, 즉 $a_{n+1}=3a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 3인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1=3$ 이므로

$$a_n=3\times 3^{n-1}=3^n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^5 a_k=\sum_{k=1}^5 3^k=\frac{3(3^5-1)}{3-1}=363$$

018 답 ④

$a_{n+1}=\sqrt{a_n a_{n+2}}$, 즉 $a_{n+1}^2=a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고

$a_1=1$ 이므로 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_4}{a_1}+\frac{a_5}{a_2}+\frac{a_6}{a_3}=81 \text{에서}$$

$$3r^3=81, r^3=27 \quad \therefore r=3$$

$$\therefore \frac{a_{20}}{a_{10}}=r^{10}=3^{10}$$

019 답 3069

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$, 즉 $a_{n+1}^2=a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고

$a_1=3$ 이므로 공비를 r 라 하면

$$a_4=3r^3=24$$

$$r^3=8 \quad \therefore r=2$$

$$\therefore S_{10}=\frac{3(2^{10}-1)}{2-1}=3069$$

020 답 ①

$a_{n+1}=a_n+2n^2$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2=a_1+2\times 1^2$$

$$a_3=a_2+2\times 2^2$$

$$a_4=a_3+2\times 3^2$$

$\vdots$

$$+) a_n=a_{n-1}+2\times (n-1)^2$$

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} 2k^2$$

$$=2+2\times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$=\frac{2n^3-3n^2+n+6}{3}$$

$$\therefore a_7=\frac{2\times 7^3-3\times 7^2+7+6}{3}=184$$

021 답 ②

$a_n=a_{n-1}+3^{n-1}$ 의 n 에 2, 3, 4, ..., n 을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2=a_1+3^1$$

$$a_3=a_2+3^2$$

$$a_4=a_3+3^3$$

$\vdots$

$$+) a_n=a_{n-1}+3^{n-1}$$

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} 3^k$$

$$=4+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$=\frac{3^n+5}{2}$$

$$a_m=124 \text{에서 } \frac{3^m+5}{2}=124$$

$$3^m+5=248, 3^m=243=3^5$$

$$\therefore m=5$$

022 답 165

$a_{n+1}=a_n+f(n)$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 9를 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2=a_1+f(1)$$

$$a_3=a_2+f(2)$$

$$a_4=a_3+f(3)$$

$\vdots$

$$+) a_{10}=a_9+f(9)$$

$$a_{10}=a_1+\sum_{k=1}^9 f(k)$$

$$=2+2\times 9^2+1=165$$

023 답 41

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{1+2+3+\dots+n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, 즉
 $a_{n+1} = a_n + 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로
 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ a_3 &= a_2 + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ a_4 &= a_3 + 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ &\vdots \\ +) a_n &= a_{n-1} + 2\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ a_n &= a_1 + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= 5 + 2 - \frac{2}{n} = 7 - \frac{2}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a_n - 7| &< \frac{1}{20} \text{에서} \\ \left| -\frac{2}{n} \right| &< \frac{1}{20}, \frac{2}{n} < \frac{1}{20} \\ \therefore n &> 40 \end{aligned}$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 41이다.

024 답 60

$(n+1)a_{n+1} = (n+2)a_n$, 즉 $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...,
 $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{3}{2}a_1 \\ a_3 &= \frac{4}{3}a_2 \\ a_4 &= \frac{5}{4}a_3 \\ &\vdots \\ \times) a_n &= \frac{n+1}{n}a_{n-1} \\ a_n &= \frac{n+1}{2}a_1 = 3n+3 \\ \therefore a_{19} &= 3 \times 19 + 3 = 60 \end{aligned}$$

025 답 ⑤

$\sqrt{n+1}a_{n+1} = \sqrt{n}a_n$, 즉 $a_{n+1} = \sqrt{\frac{n}{n+1}}a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을
 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\begin{aligned} a_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}}a_1 \\ a_3 &= \sqrt{\frac{2}{3}}a_2 \\ a_4 &= \sqrt{\frac{3}{4}}a_3 \\ &\vdots \\ \times) a_n &= \sqrt{\frac{n-1}{n}}a_{n-1} \\ a_n &= \sqrt{\frac{1}{n}}a_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{7} \text{에서 } \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{7} \\ \sqrt{k} &= 7 \quad \therefore k = 49 \end{aligned}$$

026 답 165

$a_{n+1} = 2^n a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리
 곱하면

$$\begin{aligned} a_2 &= 2^1 a_1 \\ a_3 &= 2^2 a_2 \\ a_4 &= 2^3 a_3 \\ &\vdots \\ \times) a_n &= 2^{n-1} a_{n-1} \\ a_n &= 2 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{n-1} a_1 \\ &= 2^{1+2+3+\dots+(n-1)} = 2^{\frac{(n-1)n}{2}} \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} \log_2 a_k &= \sum_{k=1}^{10} \log_2 2^{\frac{(k-1)k}{2}} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{(k-1)k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} (k^2 - k) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \times 11 \times 21}{6} - \frac{10 \times 11}{2} \right) = 165 \end{aligned}$$

027 답 ②

$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$, 즉 $\frac{1}{a_{n+1}} = (n+1) \frac{1}{a_n}$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 39를 차례
 대로 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_2} &= 2 \times \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_3} &= 3 \times \frac{1}{a_2} = 3 \times 2 \times \frac{1}{a_1} \\ \frac{1}{a_4} &= 4 \times \frac{1}{a_3} = 4 \times 3 \times 2 \times \frac{1}{a_1} \\ &\vdots \\ \frac{1}{a_{40}} &= 40 \times \frac{1}{a_{39}} = 40 \times 39 \times \dots \times 2 \times \frac{1}{a_1} \end{aligned}$$

이때 $3 \times 4 \times 5 = 60$ 이므로 $\frac{1}{a_5}, \frac{1}{a_6}, \frac{1}{a_7}, \dots, \frac{1}{a_{40}}$ 은 모두 60으로 나
 누어떨어진다.

즉, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{40}}$ 을 60으로 나누었을 때의 나머지는

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}$ 을 60으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$ 이므로 구하는 나머
 지는 33이다.

028 답 ①

$a_{n+1} = -2a_n + 6$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= -2a_1 + 6 = -2 \times (-2) + 6 = 10 \\ a_3 &= -2a_2 + 6 = -2 \times 10 + 6 = -14 \\ a_4 &= -2a_3 + 6 = -2 \times (-14) + 6 = 34 \\ a_5 &= -2a_4 + 6 = -2 \times 34 + 6 = -62 \\ \therefore a_5 - a_3 &= -48 \end{aligned}$$

029 답 0

$a_{n+1} + a_n = n$, 즉 $a_{n+1} = n - a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$$a_2 = 1 - a_1 = 1 - 3 = -2$$

$$a_3 = 2 - a_2 = 2 - (-2) = 4$$

$$a_4 = 3 - a_3 = 3 - 4 = -1$$

$$a_5 = 4 - a_4 = 4 - (-1) = 5$$

$$\therefore a_6 = 5 - a_5 = 5 - 5 = 0$$

030 답 $\frac{1}{11}$

$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n}$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$a_2 = \frac{a_1}{1 + a_1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{1 + 2a_2} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + 2 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{1 + 3a_3} = \frac{\frac{1}{4}}{1 + 3 \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{7}$$

$$\therefore a_5 = \frac{a_4}{1 + 4a_4} = \frac{\frac{1}{7}}{1 + 4 \times \frac{1}{7}} = \frac{1}{11}$$

031 답 ⑤

$a_{n+1} = a_n^2 + a_n$ 의 양변을 a_n 으로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_n + 1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{100} \log(a_k + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{100} \log \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

$$= \log \frac{a_2}{a_1} + \log \frac{a_3}{a_2} + \log \frac{a_4}{a_3} + \cdots + \log \frac{a_{101}}{a_{100}}$$

$$= \log \left(\frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \cdots \times \frac{a_{101}}{a_{100}} \right)$$

$$= \log a_{101}$$

032 답 ②

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & (a_n \text{은 짝수}) \\ a_n + 3 & (a_n \text{은 홀수}) \end{cases} \text{에서 } a_1 = 21 \text{이므로}$$

$$a_2 = a_1 + 3 = 21 + 3 = 24, a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2} \times 24 = 12,$$

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 = \frac{1}{2} \times 12 = 6, a_5 = \frac{1}{2}a_4 = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

$$a_6 = a_5 + 3 = 3 + 3 = 6, a_7 = \frac{1}{2}a_6 = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

$$a_8 = a_7 + 3 = 3 + 3 = 6, a_9 = \frac{1}{2}a_8 = \frac{1}{2} \times 6 = 3, \cdots$$

따라서 $n \geq 4$ 일 때, $a_n = \begin{cases} 6 & (n \text{은 짝수}) \\ 3 & (n \text{은 홀수}) \end{cases}$ 이므로

$$a_{13} = 3$$

033 답 ④

$a_n a_{n+1} a_{n+2} = 1$, 즉 $a_{n+2} = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_3 = \frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = 1$$

$$a_5 = \frac{1}{a_3 a_4} = \frac{1}{\frac{1}{2} \times 1} = 2$$

$$a_6 = \frac{1}{a_4 a_5} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1 & (n=3k-2) \\ 2 & (n=3k-1) \\ \frac{1}{2} & (n=3k) \end{cases} \text{ (단, } k \text{는 자연수)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{50} a_k &= 16 \times (a_1 + a_2 + a_3) + a_{49} + a_{50} \\ &= 16 \times \left(1 + 2 + \frac{1}{2} \right) + 1 + 2 \\ &= 16 \times \frac{7}{2} + 3 = 59 \end{aligned}$$

034 답 4

$a_1 = 2$ 에서

$$a_2 = (14 \text{를 } 5 \text{로 나누었을 때의 나머지}) = 4$$

$$a_3 = (28 \text{를 } 5 \text{로 나누었을 때의 나머지}) = 3$$

$$a_4 = (21 \text{를 } 5 \text{로 나누었을 때의 나머지}) = 1$$

$$a_5 = (7 \text{를 } 5 \text{로 나누었을 때의 나머지}) = 2$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 2 & (n=4k-3) \\ 4 & (n=4k-2) \\ 3 & (n=4k-1) \\ 1 & (n=4k) \end{cases} \text{ (단, } k \text{는 자연수)}$$

이때 $100 = 4 \times 25$, $101 = 4 \times 26 - 3$, $102 = 4 \times 26 - 2$,

$103 = 4 \times 26 - 1$ 이므로

$$a_{100} + a_{101} + a_{102} - a_{103} = 1 + 2 + 4 - 3 = 4$$

035 답 48

$S_n = 2a_n - 1$ 의 n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$S_{n+1} = 2a_{n+1} - 1$$

이때 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1} = 2a_{n+1} - 1 - (2a_n - 1)$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $a_1 = 1$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n = 2^{n-1}$$

$$\therefore a_5 + a_6 = 2^4 + 2^5 = 48$$

036 답 $-\frac{1}{24}$

$S_{n+1} = \frac{1}{2}S_n + \frac{1}{3}$ 의 n 에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면

$$S_2 = \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$S_3 = \frac{1}{2}S_2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{2}S_3 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{17}{24}$$

$$\therefore a_4 = S_4 - S_3 = \frac{17}{24} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{24}$$

037 답 -62

$S_n = 2a_n + 2n$ 의 n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$S_{n+1} = 2a_{n+1} + 2(n+1)$$

이때 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1} = 2a_{n+1} + 2(n+1) - (2a_n + 2n)$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n - 2$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$a_2 = 2a_1 - 2 = 2 \times (-2) - 2 = -6$$

$$a_3 = 2a_2 - 2 = 2 \times (-6) - 2 = -14$$

$$a_4 = 2a_3 - 2 = 2 \times (-14) - 2 = -30$$

$$\therefore a_5 = 2a_4 - 2 = 2 \times (-30) - 2 = -62$$

038 답 10

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S_n$ 이라 하면

$$S_1 = a_1 = 5, a_{n+1} = S_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

이때 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$S_{n+1} - S_n = S_n$$

$$\therefore S_{n+1} = 2S_n$$

수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $S_1=5$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$S_n = 5 \times 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 5 \times 2^{n-1} - 5 \times 2^{n-2}$$

$$= 5 \times 2^{n-2} \quad (n \geq 2)$$

$$5 \times 2^{n-2} > 1000 \text{에서 } 2^{n-2} > 200$$

$$\text{이때 } 2^7 = 128, 2^8 = 256 \text{이므로}$$

$$n-2 \geq 8 \quad \therefore n \geq 10$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10이다.

039 답 7048마리

이 호수의 2021년 초의 물고기 수는

$$10000 \times (1-0.2) + 1000 = 9000 \text{(마리)}$$

2022년 초의 물고기 수는

$$9000 \times (1-0.2) + 1000 = 8200 \text{(마리)}$$

2023년 초의 물고기 수는

$$8200 \times (1-0.2) + 1000 = 7560 \text{(마리)}$$

따라서 2024년 초의 물고기 수는

$$7560 \times (1-0.2) + 1000 = 7048 \text{(마리)}$$

040 답 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 8 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

물 a_n L의 절반을 버리고 다시 8 L의 물을 채워 넣었을 때 수족관에 들어 있는 물의 양이 a_{n+1} L이므로

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 8 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

041 답 $\frac{11}{6}$

6%의 소금물 50 g에 들어 있는 소금의 양은

$$50 \times \frac{6}{100} = 3 \text{(g)}$$

$a_n\%$ 의 소금물 250 g에 들어 있는 소금의 양은

$$250 \times \frac{a_n}{100} = \frac{5}{2}a_n \text{(g)}$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{\frac{5}{2}a_n + 3}{300} \times 100$$

$$= \frac{5}{6}a_n + 1$$

$$\text{따라서 } p = \frac{5}{6}, q = 1 \text{이므로}$$

$$p+q = \frac{11}{6}$$

042 답 $a_{n+1} = a_n + 4n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + 4 \times 1$$

$$a_3 = a_2 + 4 \times 2$$

$$a_4 = a_3 + 4 \times 3$$

$\vdots$

$$\therefore a_{n+1} = a_n + 4n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

043 답 30

n 개의 원이 그려진 평면에 1개의 원을 추가하면 이 원은 기존의 n 개의 원과 각각 2개의 점에서 만나므로 $2n$ 개의 새로운 교점이 생긴다.

즉, $(n+1)$ 개의 원의 교점은 n 개의 원의 교점보다 $2n$ 개가 많으므로

$$a_{n+1} = a_n + 2n$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2 = a_1 + 2 \times 1$$

$$a_3 = a_2 + 2 \times 2$$

$$a_4 = a_3 + 2 \times 3$$

$\vdots$

$$+) a_n = a_{n-1} + 2 \times (n-1)$$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k$$

$$= 0 + 2 \times \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= n^2 - n$$

$$\therefore a_6 = 6^2 - 6 = 30$$

044 답 250

$a_1=2$ 이고 $a_2=4$ 이므로 a_3 은 점 A가 꼭짓점 P_4 를 출발하여 4만큼 이동하므로 꼭짓점 P_3 에 도착한다.

$$\therefore a_3=3$$

또 a_4 는 점 A가 꼭짓점 P_3 을 출발하여 3만큼 이동하므로 꼭짓점 P_1 에 도착한다.

$$\therefore a_4=1$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 2 & (n=4k-3) \\ 4 & (n=4k-2) \\ 3 & (n=4k-1) \\ 1 & (n=4k) \end{cases} \quad (\text{단, } k \text{는 자연수})$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{100} a_k &= 25 \times (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \\ &= 25 \times (2 + 4 + 3 + 1) = 250 \end{aligned}$$

045 답 ④

$p(1)$ 이 참이면 $p(2)$ 도 참이다.

$p(2)$ 가 참이면 $p(2 \times 2) = p(4)$ 도 참이다.

$p(4)$ 가 참이면 $p(2 \times 4) = p(8)$ 도 참이다.

⋮

따라서 $p(1)$ 이 참이면 $p(2^n)$ 도 참이다.

이때 $32=2^5$ 이므로 $p(32)$ 는 참이다.

046 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $p(1)$ 이 참이면 $p(3), p(5), p(7)$ 도 참이다.

ㄴ. $p(2)$ 가 참이면 $p(4), p(6), p(8), \dots, p(20)$ 도 참이다.

ㄷ. $p(1)$ 이 참이면 $p(3), p(5), p(7), \dots, p(2n+1)$ 이 참이고,
 $p(2)$ 가 참이면 $p(4), p(6), p(8), \dots, p(2n)$ 도 참이므로 모든 자연수 n 에 대하여 $p(n)$ 이 참이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

047 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $p(1)$ 이 참이면 $p(3), p(5), p(7), \dots, p(2n+1)$ 도 참이다.

이때 $125=2 \times 62 + 1$ 이므로 $p(125)$ 는 참이다.

ㄴ. $p(1)$ 이 참이면

$$p(2 \times 1 + 3) = p(5),$$

$$p(2 \times 5 + 3) = p(13),$$

$$p(2 \times 13 + 3) = p(29),$$

$$p(2 \times 29 + 3) = p(61),$$

$$p(2 \times 61 + 3) = p(125),$$

⋮

도 참이다.

ㄷ. 명제 ' $p(n+4)$ 가 거짓이면 $p(n)$ 도 거짓이다.'의 대우는 ' $p(n)$ 이 참이면 $p(n+4)$ 도 참이다.'

따라서 $p(1)$ 이 참이면 $p(5), p(9), p(13), \dots, p(4n+1)$ 도 참이다.

이때 $125=4 \times 31 + 1$ 이므로 $p(125)$ 는 참이다.

따라서 보기 중 조건 ㄴ이 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

048 답 ③

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1 \times 2 = 2, (\text{우변}) = \frac{1}{3} \times 1 \times 2 \times 3 = 2$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때

주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + k(k+1)$$

$$= \frac{1}{3} k(k+1)(k+2)$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{3} k(k+1)(k+2)$ 를 더하면

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + k(k+1) + \frac{1}{3} k(k+1)(k+2)$$

$$= \frac{1}{3} k(k+1)(k+2) + \frac{1}{3} k(k+1)(k+2)$$

$$= (k+1)(k+2) \left(\frac{1}{3} k + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{3} (k+1)(k+2) \left(\frac{1}{3} k + 3 \right)$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

049 답 27

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1^2 = 1, (\text{우변}) = \frac{1}{6} \times 1 \times 2 \times 3 = 1$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때

주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1)$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{6} k(k+1)(2k+1)$ 을 더하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1)$$

$$= \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1)$$

$$= \frac{1}{6} (k+1)(2k^2 + k + \frac{1}{3} 6k + 6)$$

$$= \frac{1}{6} (k+1)(k+2)(2k+3)$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

따라서 $f(k) = (k+1)^2, g(k) = 6k+6$ 이므로

$$f(2) + g(2) = (2+1)^2 + (6 \times 2 + 6) = 27$$

050 답 ③

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1, (\text{우변}) = 1$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때

주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} (m+1-k)^2$$

$$= (-1)^0 \times m^2 + (-1)^1 \times (m-1)^2 + \dots + (-1)^{m-1} \times 1^2$$

$$= \sum_{k=1}^m k$$

$n=m+1$ 일 때

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} (m+2-k)^2 \\ &= (-1)^0 \times (m+1)^2 + (-1)^1 \times m^2 + (-1)^2 \times (m-1)^2 \\ & \quad + \cdots + (-1)^m \times 1^2 \\ &= (m+1)^2 + (-1) \times \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} (m+1-k)^2 \\ &= (m+1)^2 - \sum_{k=1}^m k \\ &= (m+1)^2 - \boxed{\frac{m(m+1)}{2}} \\ &= (m+1) \left(m+1 - \frac{m}{2} \right) \\ &= \frac{(m+1)(m+2)}{2} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} k \end{aligned}$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

따라서 $f(m) = \frac{m(m+1)}{2}$ 이므로

$$f(8) = \frac{8 \times 9}{2} = 36$$

051 답 (가) 9 (나) 8 (다) $9m+1$

(i) $n=1$ 일 때

$3^2 - 1 = 8$ 이므로 8의 배수이다.

(ii) $n=k$ 일 때

$3^{2k} - 1 = 8m$ (m 은 자연수)이라 가정하면 $n=k+1$ 일 때

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)} - 1 &= \boxed{\frac{1}{9}} \times 3^{2k} - 1 \\ &= 9(3^{2k} - 1) + \boxed{\frac{1}{9}} \times 8 \\ &= 9 \times 8m + \boxed{\frac{1}{9}} \times 8 \\ &= 8 \times \boxed{\frac{1}{9}} (9m + 1) \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 8의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $3^{2n} - 1$ 은 8의 배수이다.

052 답 (가) 5^{k-1} (나) $2m$

(i) $n=1$ 일 때

$7^1 + 5^{1-1} = 8 = 2 \times 4$ 이므로 2로 나누어떨어진다.

(ii) $n=k$ 일 때

$7^k + 5^{k-1} = 2m$ (m 은 자연수)이라 가정하면 $n=k+1$ 일 때

$$\begin{aligned} 7^{k+1} + 5^k &= 7 \times 7^k + 5 \times \boxed{\frac{1}{5}} 5^{k-1} \\ &= 7(7^k + 5^{k-1}) - 2 \times \boxed{\frac{1}{5}} 5^{k-1} \\ &= 7 \times \boxed{\frac{1}{5}} 2m - 2 \times \boxed{\frac{1}{5}} 5^{k-1} \\ &= 2 \times (7m - 5^{k-1}) \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 2로 나누어떨어진다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $7^n + 5^{n-1}$ 은 2로 나누어떨어진다.

053 답 ⑤

(i) $n=4$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24, (\text{우변}) = 2^4 = 16$$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 4)$ 일 때

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k > 2^k$$

위의 식의 양변에 $\boxed{\frac{1}{k+1}}$ 을 곱하면

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k \times \boxed{\frac{1}{k+1}} > 2^k \times \boxed{\frac{1}{k+1}}$$

이때 $2^k \times \boxed{\frac{1}{k+1}} > \boxed{\frac{1}{k+1}} 2^{k+1} = 2 \times 2^k$ 이므로

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k \times \boxed{\frac{1}{k+1}} > \boxed{\frac{1}{k+1}} 2^{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 4$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

054 답 ④

(i) $n=2$ 일 때

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}, (\text{우변}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$$

위의 식의 양변에 $\boxed{\frac{1}{(k+1)^2}}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \boxed{\frac{1}{(k+1)^2}} \\ < 2 - \frac{1}{k} + \boxed{\frac{1}{(k+1)^2}} \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} \left\{ 2 - \frac{1}{k} + \boxed{\frac{1}{(k+1)^2}} \right\} - \left(2 - \frac{1}{k+1} \right) \\ = -\frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1} \\ = \frac{-(k+1)^2 + k + k(k+1)}{k(k+1)^2} \\ = -\frac{\boxed{\frac{1}{k+1}}}{k(k+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } 2 - \frac{1}{k} + \boxed{\frac{1}{(k+1)^2}} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

$$\therefore \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 $f(k) = \frac{1}{(k+1)^2}$, $a=1$ 이므로

$$f(1) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

055 [답] 44

$\log_2 a_{n+1} + 1 = \log_2 a_{n+1} + \log_2 2 = \log_2 2a_{n+1}$ 이므로

$$\log_2 2a_{n+1} = \log_2 (a_n + a_{n+2})$$

$$\therefore 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$$

수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = a + 2d = 8 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_7 = a + 6d = 20 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=3$

$$\therefore a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$$

$$\therefore a_{15} = 3 \times 15 - 1 = 44$$

056 [답] 제8항

$a_{n+1} = 2a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다.

이때 첫째항이 $a_1 = 8$ 이므로

$$a_n = 8 \times 2^{n-1} = 2^{n+2}$$

수열 $\{a_n\}$ 이 제 n 항에서 처음으로 1000보다 커진다고 하면

$$2^{n+2} > 1000$$

$$\text{이때 } 2^9 = 512, 2^{10} = 1024 \text{이므로}$$

$$n+2 \geq 10 \quad \therefore n \geq 8$$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제8항이다.

057 [답] ④

$a_{n+1} - a_n = 2n$, 즉 $a_{n+1} = a_n + 2n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2 = a_1 + 2 \times 1$$

$$a_3 = a_2 + 2 \times 2$$

$$a_4 = a_3 + 2 \times 3$$

$\vdots$

$$+) a_n = a_{n-1} + 2 \times (n-1)$$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k$$

$$= 10 + 2 \times \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= n^2 - n + 10$$

$$a_m = 82 \text{에서 } m^2 - m + 10 = 82$$

$$m^2 - m - 72 = 0, (m+8)(m-9) = 0$$

$$\therefore m = 9 (\because m > 0)$$

058 [답] ②

$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)a_n = \frac{n+1}{n}a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$a_2 = \frac{2}{1}a_1$$

$$a_3 = \frac{3}{2}a_2$$

$$a_4 = \frac{4}{3}a_3$$

$\vdots$

$$\times) a_n = \frac{n}{n-1}a_{n-1}$$

$$a_n = na_1 = n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} k$$

$$= \frac{20 \times 21}{2} = 210$$

059 [답] ④

$a_{n+2} = a_n + 3$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 12를 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_3 = a_1 + 3$$

$$a_4 = a_2 + 3$$

$$a_5 = a_3 + 3$$

$$a_6 = a_4 + 3$$

$\vdots$

$$a_{13} = a_{11} + 3$$

$$+) a_{14} = a_{12} + 3$$

$$a_{13} + a_{14} = a_1 + a_2 + 3 \times 12$$

$$= 1 + 2 + 36 = 39$$

060 [답] 6

$a_n a_{n+2} = a_{n-1} a_{n+1}$, 즉 $a_{n+2} = \frac{a_{n-1} a_{n+1}}{a_n}$ 의 n 에 2, 3, 4, ...를 차례대로 대입하면

$$a_4 = \frac{a_1 a_3}{a_2} = \frac{1 \times 4}{2} = 2$$

$$a_5 = \frac{a_2 a_4}{a_3} = \frac{2 \times 2}{4} = 1$$

$$a_6 = \frac{a_3 a_5}{a_4} = \frac{4 \times 1}{2} = 2$$

$$a_7 = \frac{a_4 a_6}{a_5} = \frac{2 \times 2}{1} = 4$$

$$a_8 = \frac{a_5 a_7}{a_6} = \frac{1 \times 4}{2} = 2$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1 & (n=4k-3) \\ 2 & (n=4k-2) \\ 4 & (n=4k-1) \\ 2 & (n=4k) \end{cases} \quad (\text{단, } k \text{는 자연수})$$

이때 $50 = 4 \times 13 - 2$, $52 = 4 \times 13$, $54 = 4 \times 14 - 2$ 이므로

$$a_{50} + a_{52} + a_{54} = 2 + 2 + 2 = 6$$

061 [답] 16

$3S_n = a_{n+1} + 7$ 의 n 에 $n-1$ 을 대입하면

$$3S_{n-1} = a_n + 7$$

이때 $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n=2, 3, 4, \dots$)이므로

$$3a_n = 3S_n - 3S_{n-1} = a_{n+1} - a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = 4a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 4인 등비수열이므로

$$a_n = a_1 \times 4^{n-1}$$

$$a_{20} = k a_{18} \text{에서}$$

$$a_1 \times 4^{19} = k \times (a_1 \times 4^{17})$$

$$\therefore k = 4^2 = 16$$

062 답 81 km

여행 n 일째 이동한 거리를 a_n km라 하면 $(n+1)$ 일째 이동한 거리 a_{n+1} km는 a_n km의 절반에 5 km를 더 이동하므로

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 5$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + 5 = \frac{1}{2} \times 26 + 5 = 18$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + 5 = \frac{1}{2} \times 18 + 5 = 14$$

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 + 5 = \frac{1}{2} \times 14 + 5 = 12$$

$$a_5 = \frac{1}{2}a_4 + 5 = \frac{1}{2} \times 12 + 5 = 11$$

따라서 여행 첫날부터 5일째까지 이동한 거리는

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 26 + 18 + 14 + 12 + 11 = 81(\text{km})$$

063 답 ④

ㄱ. $p(1)$ 이 참이면 $p(4), p(7), p(10), \dots, p(3k+1)$ 도 참이다.

ㄴ. $p(2)$ 가 참이면 $p(5), p(8), p(11), \dots, p(3k+2)$ 도 참이다.

ㄷ. $p(1), p(2), p(3)$ 이 참이면 $p(4), p(5), p(6), \dots, p(k)$ 도 참이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

064 답 $\frac{3}{2}$

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{2}, (\text{우변}) = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때

주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k}$$

위의 식의 양변에 $\frac{k+1}{2^{k+1}}$ 을 더하면

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}}$$

$$= 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}}$$

$$= 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

따라서 $a = \frac{1}{2}, f(k) = \frac{k+1}{2^{k+1}}, g(k) = \frac{k+3}{2^{k+1}}$ 이므로

$$f(2a) + g(2a) = f(1) + g(1) = \frac{2}{2^2} + \frac{4}{2^2} = \frac{3}{2}$$

065 답 17

(i) $n=1$ 일 때

$2^2 - 1 = 3$ 이므로 3의 배수이다.

(ii) $n=k$ 일 때

$2^{2k} - 1 = 3m$ (m 은 자연수)이라 가정하면 $n=k+1$ 일 때

$$2^{2(k+1)} - 1 = \boxed{4} \times 2^{2k} - 1$$

$$= 4(3m+1) - 1$$

$$= 4 \times 3m + 3$$

$$= 3 \times \boxed{4m+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 3의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{2n} - 1$ 은 3의 배수이다.

따라서 $a=4, f(m)=4m+1$ 이므로

$$f(a) = f(4) = 4 \times 4 + 1 = 17$$

066 답 ㉠ $\frac{2k+1}{k+1}$ ㉡ k

(i) $n=2$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, (\text{우변}) = \frac{2 \times 2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{k+1}$ 을 더하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}$$

$$> \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{2k+1}{k+1}$$

$$\text{이때 } \frac{2k+1}{k+1} - \frac{2k+2}{k+2} = \frac{\boxed{k}}{(k+1)(k+2)} > 0 \text{이므로}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

