



정답과 해설

확률과 통계



001 답 ③

학생 3명을 한 사람으로 생각하여 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(6-1)! = 5! = 120$$

학생끼리 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$$120 \times 6 = 720$$

002 답 8

가운데 삼각형을 칠하는 경우의 수는 4이고, 나머지 3개의 삼각형을 칠하는 경우의 수는

$$(3-1)! = 2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

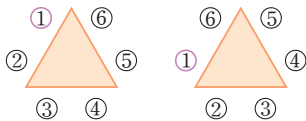
$$4 \times 2 = 8$$

003 답 240

6명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(6-1)! = 5! = 120$$

이때 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 주어진 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는

$$120 \times 2 = 240$$

004 답 ⑤

구하는 경우의 수는 3개의 시설에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$$

005 답 117

(i) 세 기호를 2개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$$

(ii) 세 기호를 3개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

(iii) 세 기호를 4개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 신호의 개수는

$$9 + 27 + 81 = 117$$

006 답 ④

천의 자리에 올 수 있는 숫자는

1, 2, 3, 4 $\Rightarrow$ 4가지

홀수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는

1, 3 $\Rightarrow$ 2가지

나머지 자리에는 0, 1, 2, 3, 4의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$$4 \times 2 \times 25 = 200$$

007 답 ④

$f(1) \neq 1$ 이므로 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 수는 1을 제외한 4개이다.

또 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 X 의 원소 2, 3에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$$4 \times {}_5\Pi_2 = 4 \times 5^2 = 100$$

다른 풀이 X 에서 Y 로의 함수의 개수는

$${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$$

X 에서 Y 로의 함수 중에서 $f(1)=1$ 인 함수의 개수는

$${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$$

따라서 구하는 함수의 개수는

$$125 - 25 = 100$$

008 답 180

p, u를 양 끝에 고정시키고 그 사이에 나머지 문자 r, r, e, e, s, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = 90$$

p, u끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$$90 \times 2 = 180$$

009 답 ④

짝수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2 또는 4이다.

(i) 일의 자리에 2가 오는 경우

나머지 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 2!} = 180$$

(ii) 일의 자리에 4가 오는 경우

나머지 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 3!} = 60$$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$$180 + 60 = 240$$

010 답 ①

b, d 의 순서가 정해져 있으므로 b, d 를 모두 B로 바꾸어 생각하여 a, B, c, B, e 를 일렬로 나열한 후 첫 번째 B를 b 로, 두 번째 B를 d 로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

011 답 40

A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!}=10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 10 = 40$$

012 답 20

오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

$A \rightarrow P \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow Q \rightarrow B$

(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

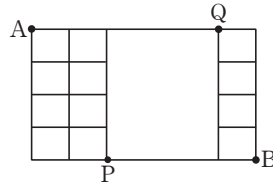
$$\frac{6!}{2! \times 4!} \times 1 = 15$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times \frac{5!}{4!} = 5$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$15 + 5 = 20$$



013 답 48

부모 2명을 한 사람으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

부모끼리 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 2 = 48$$

014 답 ②

초 8개 중에서 4개를 고르는 경우의 수는

$${}_8C_4 = 70$$

고른 초 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$70 \times 6 = 420$$

다른 풀이 초 8개 중에서 4개를 골라 일렬로 배열하는 경우의 수는 ${}_8P_4$ 이고, 이를 원형으로 배열하면 같은 것이 4가지씩 있으므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{{}_8P_4}{4} = 420$$

015 답 1440

D, E, F, G, H의 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

D, E, F, G, H 사이사이의 5개의 자리에서 3개를 택하여 A, B, C를 앉히는 경우의 수는

$${}_5P_3 = 60$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 60 = 1440$$

016 답 ③

2학년 학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(3-1)! = 2! = 2$$

2학년 학생 사이사이의 3개의 자리에 3학년 학생 3명을 앉히는 경우의 수는

$${}_3P_3 = 3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 6 = 12$$

017 답 ⑤

연우의 자리가 결정되면 진우가 앉을 수 있는 자리는 고정된다.

즉, 구하는 경우의 수는 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수와 같으므로

$$(7-1)! = 6! = 720$$

다른 풀이 연우와 진우가 마주 보고 원탁에 앉은 다음 나머지 6개의 자리에 친구 6명을 앉히면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_6P_6 = 6! = 720$$

018 답 48

회장, 총무, 서기를 한 사람으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

총무와 서기끼리 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 2 = 48$$

019 답 ④

3개의조를 만드는 경우의 수는

$$3! = 6$$

같은 조원 2명과 빈자리 1개를 묶어 한 사람으로 생각하여 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(3-1)! = 2! = 2$$

같은 조원들끼리 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는

$$2! \times 2! \times 2! = 8$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 2 \times 8 = 96$$

020 답 30

가운데 정사각형을 칠하는 경우의 수는 5이고, 나머지 4개의 반원을 칠하는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$5 \times 6 = 30$$

021 답 ①

6개의 영역에 6가지 색을 칠하는 경우의 수는
 $(6-1)! = 5! = 120$

022 답 48

빨간색과 주황색을 한 가지 색으로 생각하여 5가지 색을 칠하는 경우의 수는
 $(5-1)! = 4! = 24$
 빨간색과 주황색끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $24 \times 2 = 48$

023 답 ⑤

주황, 초록, 파랑의 3가지 색을 칠하는 경우의 수는
 $(3-1)! = 2! = 2$
 주황색, 초록색, 파란색 사이사이의 3개의 자리에서 2개를 택하여
 빨간색과 노란색을 칠하는 경우의 수는
 ${}_3P_2 = 6$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $2 \times 6 = 12$

다른 풀이 5개의 영역에 5가지 색을 칠하는 경우의 수는

$(5-1)! = 4! = 24$
 빨간색과 노란색이 이웃하도록 칠하는 경우의 수는
 $(4-1)! \times 2! = 12$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $24 - 12 = 12$

024 답 180

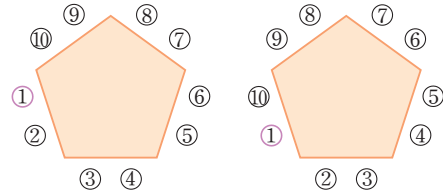
정사각뿔대의 두 밑면을 칠하는 경우의 수는
 ${}_6P_2 = 30$
 두 밑면에 칠한 2가지 색을 제외한 4가지 색을 옆면에 칠하는 경우의 수는
 $(4-1)! = 3! = 6$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $30 \times 6 = 180$

025 답 ④

가운데 정삼각형을 칠하는 경우의 수는 7
 가운데 정삼각형에 칠한 색을 제외한 6가지 색 중에서 나머지 3개의 정삼각형을 칠할 3가지 색을 택하는 경우의 수는
 ${}_6C_3 = 20$
 택한 3가지 색으로 3개의 정삼각형을 칠하는 경우의 수는
 $(3-1)! = 2! = 2$
 나머지 3가지 색으로 정삼각형의 바깥쪽의 3개의 영역을 칠하는 경우의 수는 $3! = 6$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $7 \times 20 \times 2 \times 6 = 1680$

026 답 ②

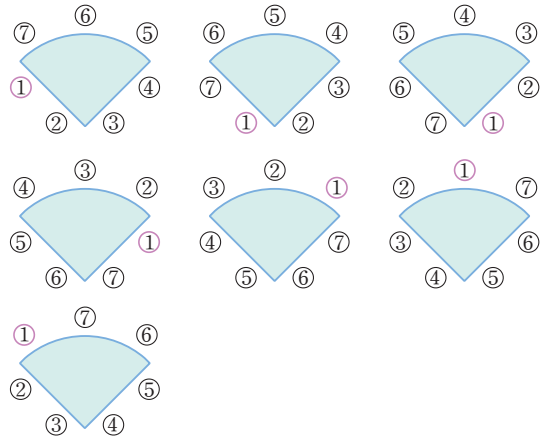
10명을 원형으로 배열하는 경우의 수는 $(10-1)! = 9!$
 이때 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 주어진 정오각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는
 $9! \times 2$

027 답 5040

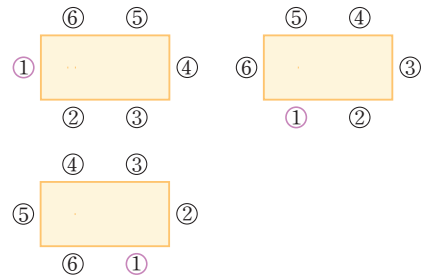
7명을 원형으로 배열하는 경우의 수는 $(7-1)! = 6! = 720$
 이때 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 주어진 부채꼴 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 7가지씩 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는
 $720 \times 7 = 5040$

028 답 ④

6명을 원형으로 배열하는 경우의 수는 $(6-1)! = 5! = 120$
 이때 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 주어진 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.

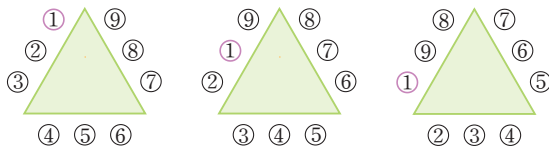


따라서 구하는 경우의 수는
 $120 \times 3 = 360$

029 답 $\frac{1}{3}$

9명을 원형으로 배열하는 경우의 수는 $(9-1)! = 8!$

이때 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 주어진 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 3가지씩 존재한다.



따라서 주어진 정삼각형 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는

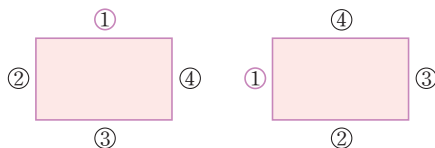
$$8! \times 3 = 8! \times 9 \times \frac{1}{3} = 9! \times \frac{1}{3}$$

$$\therefore k = \frac{1}{3}$$

030 답 ③

부부 1쌍을 한 사람으로 생각하여 4명을 원형으로 배열하는 경우의 수는 $(4-1)! = 3! = 6$

이때 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 주어진 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



또 부부끼리 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는

$$2! \times 2! \times 2! \times 2! = 16$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 2 \times 16 = 192$$

031 답 ③

구하는 경우의 수는 4개의 접시에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

032 답 ③

A가 미국 또는 영국을 여행하는 경우의 수는 2이고, B, C가 여행하는 경우의 수는 5개의 나라에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 25 = 50$$

033 답 62

6명의 학생을 두 고등학교 A, B에 배정하는 경우의 수는 2개의 고등학교에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_6 = 2^6 = 64$$

이때 6명의 학생이 모두 같은 고등학교에 배정되는 경우를 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$$64 - 2 = 62$$

034 답 ④

네 자리의 암호의 개수는 4개의 문자에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_4 = 4^4 = 256$$

이때 문자 V를 포함하지 않는 암호의 개수는 V를 제외한 나머지 3개의 문자에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

따라서 구하는 암호의 개수는

$$256 - 81 = 175$$

035 답 27

전체집합 U 의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 2, 4는 집합 $A \cap B$ 의 원소이고, 1, 3, 5는 세 집합 $A - B$, $B - A$, $(A \cup B)^c$ 중 어느 하나의 원소이다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 세 집합에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

036 답 ②

(i) 두 부호를 3개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$$

(ii) 두 부호를 4개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$$

(iii) 두 부호를 5개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 신호의 개수는

$$8 + 16 + 32 = 56$$

037 답 ④

구하는 경우의 수는 3개의 깃발에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$$

038 답 5

깃발을 1번, 2번, 3번, ..., n 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 ${}_3\Pi_1$, ${}_3\Pi_2$, ${}_3\Pi_3$, ..., ${}_3\Pi_n$ 이므로 깃발을 n 번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$$3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n$$

$$n=4일 때, 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120 < 300$$

$$n=5일 때, 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 = 363 > 300$$

따라서 n 의 최솟값은 5이다.

039 **답 ③**

짝수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는

4, 6 $\Rightarrow$ 2가지

나머지 자리에는 3, 4, 5, 6, 7의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$$

따라서 구하는 짝수의 개수는

$$2 \times 125 = 250$$

040 **답 ③**

백의 자리에 올 수 있는 숫자는

1, 2, 3 $\Rightarrow$ 3가지

나머지 자리에는 0, 1, 2, 3의 4개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$3 \times 16 = 48$$

041 **답 249**

3000보다 큰 네 자리의 자연수는 천의 자리의 숫자가 3 또는 4인 수에서 3000을 제외한 수이다.

(i) 천의 자리에 3이 오는 경우

나머지 자리에는 0, 1, 2, 3, 4의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$$

(ii) 천의 자리에 4가 오는 경우

나머지 자리에는 0, 1, 2, 3, 4의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$$

(i), (ii)에서 3000보다 큰 자연수의 개수는

$$125 + 125 - 1 = 249$$

042 **답 ②**

(i) 0, 1, 2, 3, 4에서 택하여 자연수를 만드는 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는

1, 2, 3, 4 $\Rightarrow$ 4가지

나머지 자리에는 0, 1, 2, 3, 4의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$$

따라서 세 자리의 자연수의 개수는

$$4 \times 25 = 100$$

(ii) 3을 제외하고 0, 1, 2, 4에서 택하여 자연수를 만드는 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는

1, 2, 4 $\Rightarrow$ 3가지

나머지 자리에는 0, 1, 2, 4의 4개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

따라서 숫자 3을 포함하지 않는 세 자리의 자연수의 개수는

$$3 \times 16 = 48$$

(i), (ii)에서 숫자 3을 적어도 한 개 포함하는 자연수의 개수는

$$100 - 48 = 52$$

043 **답 ③**

(i) 한 자리의 자연수의 개수는 5

(ii) 두 자리의 자연수의 개수는

$$5 \times {}_6\Pi_1 = 5 \times 6 = 30$$

(iii) 세 자리의 자연수의 개수는

$$5 \times {}_6\Pi_2 = 5 \times 6^2 = 180$$

(iv) 네 자리의 자연수 중에서 $10\square\square$, $11\square\square$ 꼴인 자연수의 개수는

$$2 \times {}_6\Pi_2 = 2 \times 6^2 = 72$$

(i)~(iv)에서 1200보다 작은 자연수의 개수는

$$5 + 30 + 180 + 72 = 287$$

따라서 1200은 288번째 수이다.

044 **답 615**

4000 이상의 네 자리의 자연수는 천의 자리의 숫자가 4 또는 5 또는 6인 수이므로 그 개수는

$$3 \times {}_6\Pi_3 = 3 \times 6^3 = 648$$

숫자 1끼리 이웃하는 4000 이상의 네 자리의 자연수는

(i) 백의 자리와 십의 자리에만 1이 오는 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 4, 5, 6의 3가지이고, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1을 제외한 5가지이므로 자연수의 개수는

$$3 \times 5 = 15$$

(ii) 십의 자리와 일의 자리에만 1이 오는 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 4, 5, 6의 3가지이고, 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1을 제외한 5가지이므로 자연수의 개수는

$$3 \times 5 = 15$$

(iii) 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 1이 오는 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 4, 5, 6의 3가지이므로 자연수의 개수는 3

(i), (ii), (iii)에서 숫자 1끼리 이웃하는 4000 이상의 네 자리의 자연수의 개수는 $15 + 15 + 3 = 33$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$648 - 33 = 615$$

045 **답 ④**

$f(3) \neq 7$ 이므로 $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 수는 7을 제외한 3개이다. 또 집합 Y 의 원소 5, 6, 7, 8의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 X 의 원소 1, 2, 4에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$$3 \times {}_4\Pi_3 = 3 \times 4^3 = 192$$

046 답 ②

X 에서 Y 로의 함수의 개수는 집합 Y 의 원소 a, b, c, d 의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 X 의 원소 $-1, 1$ 에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_2=4^2=16 \quad \therefore m=16$$

X 에서 Y 로의 일대일함수의 개수는 집합 Y 의 원소 a, b, c, d 의 4개에서 서로 다른 2개를 택하여 집합 X 의 원소 $-1, 1$ 에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_4P_2=12 \quad \therefore n=12$$

$$\therefore m-n=16-12=4$$

047 답 9

$f(-1)=4, f(3)=6$ 이므로 집합 X 의 원소 -1 과 3 에 대응하는 집합 Y 의 원소는 각각 4 와 6 으로 고정시키고, 집합 Y 의 원소 $2, 4, 6$ 의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 X 의 원소 $-3, 1$ 에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$${}_3\Pi_2=3^2=9$$

048 답 30

X 에서 Y 로의 함수의 개수는 집합 Y 의 원소 $1, 2$ 의 2개에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 집합 X 의 원소 a, b, c, d, e 에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_5=2^5=32$$

이때 치역이 $\{1\}$ 인 함수의 개수는 1, 치역이 $\{2\}$ 인 함수의 개수는 1이므로 공역과 치역이 일치하는 함수의 개수는

$$32-(1+1)=30$$

049 답 ④

p, n 을 양 끝에 고정시키고 그 사이에 나머지 문자 a, s, s, i, o 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!}=60$$

p, n 끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$$60 \times 2=120$$

050 답 630

g, r, r, a, a, m, m 을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2! \times 2! \times 2!}=630$$

051 답 ③

모음 a, i, i 를 한 문자 A 로 생각하여 A, s, s, s, t, t, t, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{3! \times 3!}=1120$$

모음 a, i, i 끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$$1120 \times 3=3360$$

052 답 44

a, a, b, b, b, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 3!}=60$$

(i) 양 끝에 a 가 오는 경우

나머지 문자 b, b, b, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

(ii) 양 끝에 b 가 오는 경우

나머지 문자 a, a, b, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

(i), (ii)에서 양 끝에 서로 같은 문자가 오도록 나열하는 경우의 수는

$$4+12=16$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$60-16=44$$

053 답 ④

b 와 d 를 제외한 a, a, c, c, c, e 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 3!}=60$$

a, a, c, c, c, e 의 사이사이와 양 끝의 7개의 자리에서 2개를 택하여 b 와 d 를 나열하는 경우의 수는

$${}_7P_2=42$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$60 \times 42=2520$$

다른 풀이 a, a, b, c, c, c, d, e 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{2! \times 3!}=3360$$

b 와 d 를 한 문자 B 로 생각하여 a, a, B, c, c, c, e 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2! \times 3!}=420$$

b, d 끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2!=2$$

즉, b 와 d 가 이웃하도록 나열하는 경우의 수는

$$420 \times 2=840$$

따라서 b 와 d 가 이웃하지 않도록 나열하는 경우의 수는

$$3360-840=2520$$

054 답 96

(i) o 끼리 이웃하는 경우

2개의 o 를 한 문자 O 로 생각하여 f, O, l, l, w 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!}=60$$

(ii) l 끼리 이웃하는 경우

2개의 l 을 한 문자 L 로 생각하여 f, o, o, L, w 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!}=60$$

- (iii) o끼리, l끼리 모두 이웃하는 경우
 2개의 o, 2개의 l을 각각 한 문자 O, L로 생각하여 4개의 문자
 f, O, L, w를 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $4! = 24$
 (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는
 $60 + 60 - 24 = 96$

055 답 36

- (i) 일의 자리에 1이 오는 경우
 나머지 숫자 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $4! = 24$
 (ii) 일의 자리에 3이 오는 경우
 나머지 숫자 1, 1, 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{4!}{2!} = 12$
 (i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는
 $24 + 12 = 36$

056 답 150

- (i) 맨 앞자리에 1이 오는 경우
 나머지 숫자 0, 1, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{5!}{2!} = 60$
 (ii) 맨 앞자리에 2가 오는 경우
 나머지 숫자 0, 1, 1, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$
 (iii) 맨 앞자리에 3이 오는 경우
 나머지 숫자 0, 1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{5!}{2!} = 60$
 (i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는
 $60 + 30 + 60 = 150$
다른 풀이 0, 1, 1, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{6!}{2! \times 2!} = 180$
 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 나머지 숫자 1, 1, 2, 3, 3을 일
 렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
 $\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$
 따라서 구하는 자연수의 개수는
 $180 - 30 = 150$

057 답 30

- 일의 자리, 십의 자리, 백의 자리에 홀수 1, 1, 3을 나열하는 경우
 의 수는
 $\frac{3!}{2!} = 3$

- 나머지 숫자 2, 2, 2, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$
 따라서 구하는 자연수의 개수는
 $3 \times 10 = 30$

058 답 ④

- 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.
 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3에서 택한 4개의 숫자의 합이
 6인 경우 $\Rightarrow 1, 1, 2, 2$
 9인 경우 $\Rightarrow 1, 2, 3, 3$
 (i) 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$
 (ii) 1, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{4!}{2!} = 12$
 (i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는
 $6 + 12 = 18$

059 답 1260

- t, c의 순서가 정해져 있으므로 t, c를 모두 T로 바꾸어 생각하여
 T, T, e, e, a, h, r를 일렬로 나열한 후 다시 첫 번째 T를 t로,
 두 번째 T를 c로 바꾸면 된다.
 따라서 구하는 경우의 수는
 $\frac{7!}{2! \times 2!} = 1260$

060 답 3024

- a, t, i, o, n의 순서가 정해져 있으므로 a, t, i, o, n을 모두 A로
 바꾸어 생각하여 e, d, u, c, A, A, A, A, A를 일렬로 나열한
 후 첫 번째, 두 번째, 세 번째, 네 번째, 다섯 번째 A를 각각 a, t,
 i, o, n으로 바꾸면 된다.
 따라서 구하는 경우의 수는
 $\frac{9!}{5!} = 3024$

061 답 ④

- 모음 a, a, i를 한 문자로 생각하고, 자음 p, r, c, c, t, l을 다른
 한 문자로 생각하여 모음이 자음보다 앞에 오도록 나열하는 경우
 의 수는 1
 모음 a, a, i끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는
 $\frac{3!}{2!} = 3$
 자음 p, r, c, c, t, l끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는
 $\frac{6!}{2!} = 360$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $1 \times 3 \times 360 = 1080$

062 답 ②

1, 4와 3, 5의 순서가 각각 정해져 있으므로 1, 4를 모두 A로, 3, 5를 모두 B로 생각하여 A, 2, B, A, B, 6을 일렬로 나열한 후 첫 번째 A는 1로, 두 번째 A는 4로 바꾸고, 첫 번째 B는 5로, 두 번째 B는 3으로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 2!} = 180$$

063 답 2520

서로 다른 4개의 가방을 각각 a, b, c, d 라 하면 각 가방에 리본과 인형을 다는 순서가 정해져 있으므로 각 가방에 리본을 다는 것과 인형을 다는 것을 같은 알파벳으로 나타내면

a, a, b, b, c, c, d, d

즉, a, a, b, b, c, c, d, d 를 일렬로 나열한 후 같은 문자에 대하여 첫 번째를 리본을 다는 것으로, 두 번째를 인형을 다는 것으로 생각하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{2! \times 2! \times 2! \times 2!} = 2520$$

064 답 90

A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{4! \times 2!} = 15$$

P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \times 6 = 90$$

065 답 ④

A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{7!}{3! \times 4!} = 35$$

066 답 ③

(i) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

(ii) P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{7!}{4! \times 3!} = 35$$

P 지점에서 Q 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{3!}{2!} = 6 \times 3 = 18$$

따라서 P 지점에서 Q 지점을 거치지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $35 - 18 = 17$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 17 = 102$$

067 답 236

(i) A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} \times \frac{7!}{4! \times 3!} = 4 \times 35 = 140$$

(ii) A 지점에서 Q 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{8!}{5! \times 3!} \times \frac{3!}{2!} = 56 \times 3 = 168$$

(iii) A 지점에서 P 지점과 Q 지점을 모두 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{3!}{2!} = 4 \times 6 \times 3 = 72$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$140 + 168 - 72 = 236$$

068 답 50

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 a , 위쪽으로 한 칸 가는 것을 b , 대각선으로 한 칸 가는 것을 c 라 하자.

(i) 대각선을 0번 이용하는 경우는 a, a, a, b, b, b 를 나열하는 것과 같으므로 그 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

(ii) 대각선을 1번 이용하는 경우는 a, a, b, b, c 를 나열하는 것과 같으므로 그 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$20 + 30 = 50$$

069 답 ④

꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가려면 가로, 세로, 높이의 방향으로 각각 정육면체의 모서리를 3번, 2번, 4번 지나야 하므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{9!}{3! \times 2! \times 4!} = 1260$$

070 답 26

오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

$A \rightarrow P \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow Q \rightarrow B$

또는 $A \rightarrow R \rightarrow B$

(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{4!} \times 1 = 5$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

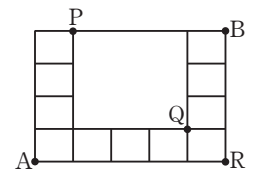
$$\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!} = 5 \times 4 = 20$$

(iii) $A \rightarrow R \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$5 + 20 + 1 = 26$$



071 **답 34**

오른쪽 그림과 같이 네 지점 Q, R, S, T를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

$A \rightarrow Q \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow R \rightarrow B$

또는 $A \rightarrow S \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow T \rightarrow B$

(i) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

(ii) $A \rightarrow R \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} \times \frac{4!}{3!} = 4 \times 4 = 16$$

(iii) $A \rightarrow S \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} \times \frac{4!}{3!} = 4 \times 4 = 16$$

(iv) $A \rightarrow T \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$1 + 16 + 16 + 1 = 34$$

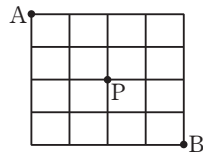
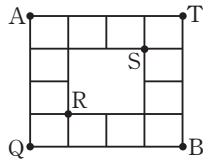
다른 풀이 P 지점을 생각하지 않고 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{8!}{4! \times 4!} = 70$$

A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \times 6 = 36$$

따라서 구하는 경우의 수는 $70 - 36 = 34$



072 **답 74**

오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R

를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

$A \rightarrow P \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow Q \rightarrow B$

또는 $A \rightarrow R \rightarrow B$

(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!} \times \frac{4!}{3!} = 10 \times 4 = 40$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

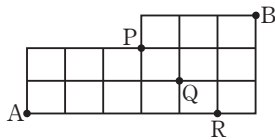
$$\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 5 \times 6 = 30$$

(iii) $A \rightarrow R \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times \frac{4!}{3!} = 4$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$40 + 30 + 4 = 74$$

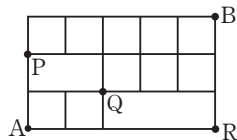


073 **답 37**

오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

$A \rightarrow P \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow Q \rightarrow B$

또는 $A \rightarrow R \rightarrow B$



(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times \frac{6!}{5!} = 6$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times \frac{5!}{3! \times 2!} = 3 \times 10 = 30$$

(iii) $A \rightarrow R \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$6 + 30 + 1 = 37$$

074 **답 432**

남학생 4명을 한 사람으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

남학생끼리 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $4! = 24$

따라서 남학생끼리 이웃하게 앉는 경우의 수는

$$a = 24 \times 24 = 576$$

한편 남학생 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

남학생들 사이사이의 4개의 자리에 여학생 4명을 앉히는 경우의 수는

$${}_4P_4 = 4! = 24$$

따라서 남학생과 여학생이 교대로 앉는 경우의 수는

$$b = 6 \times 24 = 144$$

$$\therefore a - b = 576 - 144 = 432$$

075 **답 12**

6이 적힌 카드의 양옆에 각각 2, 4가 적힌 카드가 와야 한다.

2, 4, 6이 적힌 카드를 1장으로 생각하여 4장의 카드를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

2, 4가 적힌 카드끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 2 = 12$$

076 **답 24**

빨간색을 칠하는 영역이 결정되면 파란색이 칠해지는 영역은 고정된다.

따라서 구하는 경우의 수는 5가지 색을 칠하는 경우의 수와 같으므로

$$(5-1)! = 4! = 24$$

077 **답 ①**

정사각꼴의 밑면을 칠하는 경우의 수는 5이고, 나머지 4가지 색을 옆면에 칠하는 경우의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

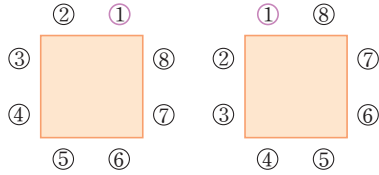
$$5 \times 6 = 30$$

078 답 10200

탁자 A에 8명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(8-1)! = 7! = 5040$$

이때 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 주어진 정사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



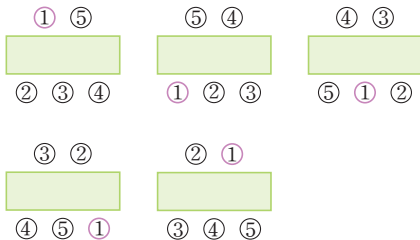
따라서 탁자 A에 8명이 둘러앉은 경우의 수는

$$5040 \times 2 = 10080$$

한편 탁자 B에 5명을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

이때 원형으로 배열하는 한 가지 경우에 대하여 주어진 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 5가지씩 존재한다.



따라서 탁자 B에 5명이 둘러앉은 경우의 수는

$$24 \times 5 = 120$$

따라서 $a=10080$, $b=120$ 이므로

$$a+b=10200$$

079 답 512

마지막 자리에 올 수 있는 것은

$a, b \rightarrow 2$ 가지

나머지 자리를 정하는 경우의 수는 1, 3, a , b 의 4개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_4 = 4^4 = 256$$

따라서 구하는 암호의 개수는

$$2 \times 256 = 512$$

080 답 63

켜거나 끄는 것 2종류에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_2\Pi_6 = 2^6 = 64$$

이때 모든 전구가 꺼진 경우 1가지는 제외해야 하므로 구하는 신호의 개수는

$$64 - 1 = 63$$

081 답 ③

(i) 천의 자리에 3이 오는 경우

백의 자리에 4 또는 5가 오고, 나머지 자리에는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$$2 \times {}_5\Pi_2 = 2 \times 5^2 = 50$$

(ii) 천의 자리에 4가 오는 경우

나머지 자리에는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$$

(iii) 천의 자리에 5가 오는 경우

나머지 자리에는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$50 + 125 + 125 = 300$$

082 답 48

$f(1)+f(2)=5$ 를 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$ 의 순서쌍 $(f(1), f(2))$ 는 (1, 4), (2, 3), (3, 2)

각각의 경우에 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 X 의 나머지 원소 0, 3에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$$3 \times {}_4\Pi_2 = 3 \times 4^2 = 48$$

083 답 ③

$f(2)f(3)f(4) \neq 0$ 이라면 $f(2) \neq 0$, $f(3) \neq 0$, $f(4) \neq 0$ 이어야 한다.

$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4의 4개

$f(0)$, $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 수는 0, 1, 2, 3, 4의 5개

따라서 구하는 함수의 개수는

$${}_4\Pi_3 \times {}_5\Pi_2 = 4^3 \times 5^2 = 1600$$

084 답 12

두 개의 m을 양 끝에 고정시키고 그 사이에 나머지 문자 u, u, s, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

085 답 ⑤

b 와 c 를 한 문자 B로 생각하여 a, a, B, d, d, d 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 3!} = 60$$

b, c 끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$$60 \times 2 = 120$$

086 ㉡ 180

- (i) 맨 앞자리에 1이 오고 일의 자리에 3이 오는 경우
나머지 숫자 0, 0, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$
- (ii) 맨 앞자리에 2가 오고 일의 자리에 1이 오는 경우
나머지 숫자 0, 0, 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$
- (iii) 맨 앞자리에 2가 오고 일의 자리에 3이 오는 경우
나머지 숫자 0, 0, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{5!}{2!} = 60$
- (iv) 맨 앞자리에 3이 오고 일의 자리에 1이 오는 경우
나머지 숫자 0, 0, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$
- (v) 맨 앞자리에 3이 오고 일의 자리에 3이 오는 경우
나머지 숫자 0, 0, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는
 $\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$
- (i)~(v)에서 구하는 홀수의 개수는 $30 + 30 + 60 + 30 + 30 = 180$

087 ㉡ 60

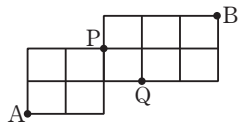
홀수 1, 3, 5의 순서가 정해져 있으므로 1, 3, 5를 모두 A로 바꾸어 생각하여 A, A, A, 2, 2, 4를 일렬로 나열한 후 첫 번째, 두 번째, 세 번째 A를 각각 1, 3, 5로 바꾸면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 $\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$

088 ㉡ ③

- (i) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
 $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$
- (ii) P 지점에서 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 1
- (iii) Q 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
 $\frac{4!}{3!} = 4$
- (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $6 \times 1 \times 4 = 24$

089 ㉡ 42

오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는



- $A \rightarrow P \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow Q \rightarrow B$
- (i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는
 $\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{4!}{3!} = 6 \times 4 = 24$
- (ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는
 $\left(\frac{3!}{2!} \times 1\right) \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 3 \times 6 = 18$
- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $24 + 18 = 42$



001 ㉡ ①

구하는 경우의 수는 3명의 학생에서 중복을 허용하여 9명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로
 ${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$

002 ㉡ 171

먼저 3종류의 송편을 각각 1개씩 넣고, 나머지 17개의 송편을 넣으면 된다.
따라서 구하는 경우의 수는 3종류의 송편에서 중복을 허용하여 17개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
 ${}_3H_{17} = {}_{19}C_{17} = {}_{19}C_2 = 171$

003 ㉡ ③

a 의 값은 3개의 문자 x, y, z 에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
 $a = {}_3H_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$
한편 x, y, z 가 모두 자연수이므로 $X = x - 1, Y = y - 1, Z = z - 1$ 이라 하면 X, Y, Z 는 음이 아닌 정수이다.
 $x = X + 1, y = Y + 1, z = Z + 1$ 을 방정식 $x + y + z = 8$ 에 대입하면
 $(X + 1) + (Y + 1) + (Z + 1) = 8$
 $\therefore X + Y + Z = 5$
따라서 b 의 값은 방정식 $X + Y + Z = 5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z 의 순서쌍 (X, Y, Z) 의 개수, 즉 3개의 문자 X, Y, Z 에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
 $b = {}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$
 $\therefore a + b = 45 + 21 = 66$

004 ㉡ 56

집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 집합 X 의 원소 $-1, 0, 1$ 에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는
 ${}_6H_3 = {}_8C_3 = 56$

005 ㉡ 3

$\left(ax^2 + \frac{1}{x}\right)^4$ 의 전개식의 일반항은
 ${}_4C_r (ax^2)^{4-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_4C_r a^{4-r} \frac{x^{8-2r}}{x^r}$
 $\frac{x^{8-2r}}{x^r} = x^2$ 에서 $8 - 2r - r = 2$
 $8 - 3r = 2 \quad \therefore r = 2$
이때 x^2 의 계수가 54이므로
 ${}_4C_2 a^2 = 54, 6a^2 = 54$
 $a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 (\because a > 0)$

006 답 -12

$(x+2)^3$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r x^{3-r} 2^r = {}_3C_r 2^r x^{3-r}$$

$(x-2)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_s x^{4-s} (-2)^s = {}_4C_s (-2)^s x^{4-s}$$

따라서 $(x+2)^3(x-2)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r 2^r x^{3-r} \times {}_4C_s (-2)^s x^{4-s} = {}_3C_r \times {}_4C_s 2^r (-2)^s x^{7-r-s}$$

$$x^{7-r-s} = x^5 \text{에서 } r+s=2$$

이때 r, s 는 $0 \leq r \leq 3, 0 \leq s \leq 4$ 인 정수이므로 r, s 의 순서쌍 (r, s) 는 $(0, 2), (1, 1), (2, 0)$

따라서 x^5 의 계수는

$$\begin{aligned} &{}_3C_0 \times {}_4C_2 \times (-2)^2 + {}_3C_1 \times {}_4C_1 \times 2^1 \times (-2)^1 + {}_3C_2 \times {}_4C_0 \times 2^2 \\ &= 24 + (-48) + 12 = -12 \end{aligned}$$

007 답 ②

$${}_2C_0 + {}_2C_1 + {}_3C_2 + {}_4C_3 = {}_3C_1 + {}_3C_2 + {}_4C_3$$

$$= {}_4C_2 + {}_4C_3$$

$$= {}_5C_3$$

$$= {}_5C_2$$

008 답 ③

$${}_{30}C_0 - {}_{30}C_1 + {}_{30}C_2 - {}_{30}C_3 + {}_{30}C_4 - \cdots - {}_{30}C_{29} + {}_{30}C_{30} = 0 \text{이므로}$$

$${}_{30}C_0 - ({}_{30}C_1 - {}_{30}C_2 + {}_{30}C_3 - {}_{30}C_4 + \cdots + {}_{30}C_{29}) + {}_{30}C_{30} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore {}_{30}C_1 - {}_{30}C_2 + {}_{30}C_3 - {}_{30}C_4 + \cdots + {}_{30}C_{29} &= {}_{30}C_0 + {}_{30}C_{30} \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

009 답 ④

$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n$ 이므로 이 식의 양변에 $x=2, n=30$ 을 대입하면

$$3^{30} = {}_{30}C_0 + {}_{30}C_1 \times 2 + {}_{30}C_2 \times 2^2 + {}_{30}C_3 \times 2^3 + \cdots + {}_{30}C_{30} \times 2^{30}$$

$$\begin{aligned} \therefore {}_{30}C_1 \times 2 + {}_{30}C_2 \times 2^2 + {}_{30}C_3 \times 2^3 + \cdots + {}_{30}C_{30} \times 2^{30} &= 3^{30} - {}_{30}C_0 \\ &= 3^{30} - 1 \end{aligned}$$

010 답 330

구하는 경우의 수는 5명의 학생에서 중복을 허용하여 7명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_7 = {}_{11}C_7 = {}_{11}C_4 = 330$$

011 답 ③

구하는 경우의 수는 4종류의 공에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_9 = {}_{12}C_9 = {}_{12}C_3 = 220$$

012 답 ②

구하는 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c 에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

013 답 247

a 의 값은 2명의 후보에서 중복을 허용하여 8명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$a = {}_2H_8 = {}_9C_8 = {}_9C_1 = 9$$

b 의 값은 2명의 후보에서 중복을 허용하여 8명을 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$$b = {}_2\Pi_8 = 2^8 = 256$$

$$\therefore b - a = 256 - 9 = 247$$

014 답 22

3종류의 구슬에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

이때 노란 구슬을 4개 이상 택하는 경우의 수는 먼저 노란 구슬을 4개 택한 후 3종류의 구슬에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$28 - 6 = 22$$

015 답 126

먼저 5종류의 과일을 각각 1개씩 사고, 나머지 5개의 과일을 사면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 5종류의 과일에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_5 = {}_9C_5 = {}_9C_4 = 126$$

016 답 ①

먼저 펜을 두 주머니 A, B에 각각 3개씩 넣고, 주머니 C에 1개를 넣고, 나머지 8개의 펜을 나누어 넣으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 3개의 주머니에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$$

017 답 460

엽서 8장을 5명에게 나누어 주는 경우의 수는 5명에서 중복을 허용하여 8명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_8 = {}_{12}C_8 = {}_{12}C_4 = 495$$

5명 모두 적어도 한 장의 엽서를 받도록 하려면 먼저 5명에게 엽서를 한 장씩 나누어 주고, 나머지 3장을 나누어 주면 된다.

나머지 3장을 나누어 주는 경우의 수는 5명에서 중복을 허용하여 3명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

따라서 엽서를 한 장도 받지 못하는 사람이 생기는 경우의 수는

$$495 - 35 = 460$$

018 ㉮ 10

3종류의 만두에서 중복을 허용하여 n 개를 사는 경우의 수가 28이므로

$${}_3H_n = {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2 = 28$$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2 \times 1} = 28, (n+2)(n+1) = 56 = 8 \times 7$$

$\therefore n=6$ ($\because n$ 은 자연수)

만두를 종류별로 적어도 한 개씩 포함하여 6개를 사려면 먼저 만두를 종류별로 각각 1개씩 사고, 나머지 3개의 만두를 사면 된다. 따라서 구하는 경우의 수는 3종류의 만두에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

019 ㉮ 504

3명의 학생 중에서 펜 2개를 받을 1명을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

먼저 학생 A가 펜 2개를 받는 경우 두 학생 B, C가 각각 펜 1개씩 받는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_4P_2 = 12$$

이 각각에 대하여 지우개 4개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 3명의 학생에서 중복을 허용하여 4명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

이때 펜과 지우개를 합하여 5개 이하가 되려면 학생 A가 지우개 4개를 모두 받는 경우의 수를 빼면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 12 \times (15 - 1) = 504$$

020 ㉮ ④

a 의 값은 3개의 문자 x, y, z 에서 중복을 허용하여 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$a = {}_3H_{12} = {}_{14}C_{12} = {}_{14}C_2 = 91$$

한편 x, y, z 가 모두 자연수이므로 $X=x-1, Y=y-1, Z=z-1$ 이라 하면 X, Y, Z 는 음이 아닌 정수이다.

$x=X+1, y=Y+1, z=Z+1$ 을 방정식 $x+y+z=12$ 에 대입하면 $(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=12$

$$\therefore X+Y+Z=9$$

따라서 b 의 값은 방정식 $X+Y+Z=9$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z 의 순서쌍 (X, Y, Z) 의 개수, 즉 3개의 문자 X, Y, Z 에서 중복을 허용하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$b = {}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$$

$$\therefore a+b=91+55=146$$

021 ㉮ ⑤

x, y, z, w 가 음이 아닌 정수이므로 $x+y+z+w < 4$ 에서

$x+y+z+w=0$ 또는 $x+y+z+w=1$ 또는 $x+y+z+w=2$

또는 $x+y+z+w=3$

(i) 방정식 $x+y+z+w=0$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w 의 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w 에서 중복을 허용하여 0개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_0 = {}_3C_0 = 1$$

(ii) 방정식 $x+y+z+w=1$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w 의 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w 에서 중복을 허용하여 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_1 = {}_4C_1 = 4$$

(iii) 방정식 $x+y+z+w=2$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w 의 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w 에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

(iv) 방정식 $x+y+z+w=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w 의 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w 에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$1+4+10+20=35$$

022 ㉮ 105

a, b, c 가 각각 $a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3$ 인 자연수이므로 $A=a-1,$

$B=b-2, C=c-3$ 이라 하면 A, B, C 는 음이 아닌 정수이다.

$a=A+1, b=B+2, c=C+3$ 을 방정식 $a+b+c=19$ 에 대입하면 $(A+1)+(B+2)+(C+3)=19$

$$\therefore A+B+C=13$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 방정식 $A+B+C=13$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 A, B, C 의 순서쌍 (A, B, C) 의 개수, 즉 3개의 문자 A, B, C 에서 중복을 허용하여 13개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_{13} = {}_{15}C_{13} = {}_{15}C_2 = 105$$

023 ㉮ ②

방정식 $x+y+z=n$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수가 36이므로

$${}_3H_n = {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2 = 36$$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2 \times 1} = 36$$

$$(n+2)(n+1) = 72 = 9 \times 8$$

$$\therefore n=7 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

024 ㉮ 42

x, y, z, w 가 모두 자연수이므로 $X=x-1, Y=y-1, Z=z-1, W=w-1$ 이라 하면 X, Y, Z, W 는 음이 아닌 정수이다.

$x=X+1, y=Y+1, z=Z+1, w=W+1$ 을 방정식

$x+y+z+5w=15$ 에 대입하면

$$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)+5(W+1)=15$$

$$\therefore X+Y+Z+5W=7$$

(i) $W=0$, 즉 $X+Y+Z=7$ 일 때

방정식 $X+Y+Z=7$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z 의 순서쌍 (X, Y, Z) 의 개수는 3개의 문자 X, Y, Z 에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
 ${}_3H_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$

(ii) $W=1$, 즉 $X+Y+Z=2$ 일 때

방정식 $X+Y+Z=2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z 의 순서쌍 (X, Y, Z) 의 개수는 3개의 문자 X, Y, Z 에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $36+6=42$

025 답 ③

a, b, c, d 의 4개 중에서 홀수가 될 2개를 정하는 경우의 수는
 ${}_4C_2 = 6$

$a=2x+1, b=2y+1, c=2z+2, d=2w+2$ (x, y, z, w 는 음이 아닌 정수)라 하고 이를 방정식 $a+b+c+d=12$ 에 대입하면
 $(2x+1)+(2y+1)+(2z+2)+(2w+2)=12$

$$\therefore x+y+z+w=3$$

$x+y+z+w=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w 의 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w 에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 $6 \times 20 = 120$

026 답 ④

집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 집합 X 의 원소 $-3, -1, 1, 3$ 에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

$${}_5H_4 = {}_8C_4 = 70$$

027 답 75

$f(1) \leq f(2)$ 에서 $f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y 의 원소 1, 3, 5, 7, 9의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작은 수부터 차례대로 집합 X 의 원소 1, 2에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 ${}_5H_2 = {}_6C_2 = 15$

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개

따라서 구하는 함수의 개수는 $15 \times 5 = 75$

028 답 ③

(가)에서 $f(3)=4, f(5)=6$ 이므로 (나)에 의하여

$$f(1) \leq f(2) \leq 4 \leq f(4) \leq 6$$

$f(1) \leq f(2) \leq 4$ 에서 $f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작은 수부터 차례대로 집합 X 의 원소 1, 2에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 ${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$

$4 \leq f(4) \leq 6$ 에서 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 수는 4, 5, 6의 3개

따라서 구하는 함수의 개수는 $10 \times 3 = 30$

029 답 170

(나)에서 $f(1) \geq f(2) \geq f(3) \geq f(4)$

(가)에서 $f(2)$ 의 값이 짝수이므로

$$f(2)=2 \text{ 또는 } f(2)=4 \text{ 또는 } f(2)=6 \text{ 또는 } f(2)=8$$

(i) $f(2)=2$ 일 때

$f(1) \geq 2$ 에서 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 수는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 7개

$2 \geq f(3) \geq f(4)$ 에서 $f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y 의 원소 1, 2의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 집합 X 의 원소 3, 4에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 ${}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$

따라서 함수의 개수는 $7 \times 3 = 21$

(ii) $f(2)=4$ 일 때

$f(1) \geq 4$ 에서 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 수는 4, 5, 6, 7, 8의 5개
 $4 \geq f(3) \geq f(4)$ 에서 $f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 집합 X 의 원소 3, 4에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 ${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$

따라서 함수의 개수는 $5 \times 10 = 50$

(iii) $f(2)=6$ 일 때

$f(1) \geq 6$ 에서 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 수는 6, 7, 8의 3개
 $6 \geq f(3) \geq f(4)$ 에서 $f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 집합 X 의 원소 3, 4에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 ${}_6H_2 = {}_7C_2 = 21$

따라서 함수의 개수는 $3 \times 21 = 63$

(iv) $f(2)=8$ 일 때

$f(1) \geq 8$ 에서 $f(1)$ 의 값은 8

$8 \geq f(3) \geq f(4)$ 에서 $f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 8개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 집합 X 의 원소 3, 4에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 ${}_8H_2 = {}_9C_2 = 36$

따라서 함수의 개수는 36

(i)~(iv)에서 구하는 함수의 개수는

$$21 + 50 + 63 + 36 = 170$$

030 답 2

$\left(x^2 - \frac{a}{x}\right)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r (x^2)^{5-r} \left(-\frac{a}{x}\right)^r = {}_5C_r (-a)^r \frac{x^{10-2r}}{x^r}$$

$$\frac{x^{10-2r}}{x^r} = x^4 \text{에서}$$

$$10-2r-r=4, 10-3r=4$$

$$\therefore r=2$$

x^4 의 계수가 40이므로

$${}_5C_2 \times (-a)^2 = 40$$

$$10a^2 = 40, a^2 = 4$$

$$\therefore a=2 (\because a>0)$$

031 ㉡ ②

$(x^2-2x)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r(x^2)^{4-r}(-2x)^r = {}_4C_r(-2)^r x^{8-r}$$

$$x^{8-r} = x^6 \text{에서 } r=2$$

$$\text{따라서 } x^6 \text{의 계수는 } {}_4C_2 \times (-2)^2 = 24$$

032 ㉡ 2

$(x+ay)^7$ 의 전개식의 일반항은

$${}_7C_r x^{7-r} (ay)^r = {}_7C_r a^r x^{7-r} y^r$$

$$x^{7-r} y^r = x^4 y^3 \text{에서 } r=3$$

$x^4 y^3$ 의 계수가 280이므로

$${}_7C_3 a^3 = 280, \quad 35a^3 = 280$$

$$a^3 = 8 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a \text{는 실수})$$

033 ㉡ ②

$(x+a)^{10}$ 의 전개식의 일반항은

$${}_{10}C_r x^{10-r} a^r = {}_{10}C_r a^r x^{10-r}$$

$$x^{10-r} = x^7 \text{에서 } r=3$$

따라서 x^7 의 계수는

$${}_{10}C_3 a^3 = 120a^3$$

$$\text{한편 } x^{10-r} = x^8 \text{에서 } r=2$$

따라서 x^8 의 계수는

$${}_{10}C_2 a^2 = 45a^2$$

이때 x^7 의 계수가 x^8 의 계수의 8배이므로

$$120a^3 = 8 \times 45a^2, \quad a^2(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

034 ㉡ 84

$(x-1)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r x^{n-r} (-1)^r = {}_nC_r (-1)^r x^{n-r}$$

$$x^{n-r} = x^2 \text{에서 } n-r=2 \quad \therefore r=n-2$$

x^2 의 계수가 -36이므로

$${}_nC_{n-2} (-1)^{n-2} = -36$$

$$\text{즉, } {}_nC_{n-2} = {}_nC_2 = 36, \quad (-1)^{n-2} = -1 \text{에서}$$

$$\frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 36$$

$$n(n-1) = 72 = 9 \times 8$$

$$\therefore n = 9 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

따라서 x^3 의 계수는

$${}_9C_6 \times (-1)^6 = 84$$

035 ㉡ 42

$\left(x^4 + \frac{1}{x^3}\right)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r (x^4)^{n-r} \left(\frac{1}{x^3}\right)^r = {}_nC_r \frac{x^{4n-4r}}{x^{3r}}$$

$$\frac{x^{4n-4r}}{x^{3r}} = 1 \text{에서}$$

$$4n-4r=3r \quad \therefore n = \frac{7}{4}r$$

이때 n 은 자연수이므로 r 는 4의 배수이어야 한다.

즉, $r=4$ 일 때 n 이 최소이므로 최소값은

$$m = \frac{7}{4} \times 4 = 7$$

이때의 상수항은

$$k = {}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$$

$$\therefore m+k = 7+35 = 42$$

036 ㉡ ③

$(1+\sqrt{2}x)^{15}$ 의 전개식의 일반항은

$${}_{15}C_r (\sqrt{2}x)^r = {}_{15}C_r (\sqrt{2})^r x^r$$

항의 계수가 유리수이려면 r 가 0 또는 2의 배수이어야 한다.

이때 $0 \leq r \leq 15$ 이므로 r 의 값은 0, 2, 4, ..., 14의 8개이다.

따라서 계수가 유리수인 항의 개수는 8이다.

037 ㉡ ②

$(1+x)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^r$$

$(2-x)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_s 2^{5-s} (-x)^s = {}_5C_s (-1)^s 2^{5-s} x^s$$

따라서 $(1+x)^4(2-x)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^r \times {}_5C_s (-1)^s 2^{5-s} x^s = {}_4C_r \times {}_5C_s (-1)^s 2^{5-s} x^{r+s}$$

$$x^{r+s} = x^2 \text{에서 } r+s=2$$

이때 r, s 는 $0 \leq r \leq 4, 0 \leq s \leq 5$ 인 정수이므로 r, s 의 순서쌍 (r, s) 는

$(0, 2), (1, 1), (2, 0)$

따라서 x^2 의 계수는

$$\begin{aligned} & {}_4C_0 \times {}_5C_2 \times (-1)^2 \times 2^3 + {}_4C_1 \times {}_5C_1 \times (-1)^1 \times 2^4 + {}_4C_2 \times {}_5C_0 \times 2^5 \\ &= 80 + (-320) + 192 = -48 \end{aligned}$$

038 ㉡ 160

$$(1+x)(1+2x)^5 = (1+2x)^5 + x(1+2x)^5$$

$(1+2x)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r (2x)^r = {}_5C_r 2^r x^r \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$(1+x)(1+2x)^5$ 의 전개식에서 x^4 항은 1과 $\textcircled{1}$ 의 x^4 항이 곱해진 경우, x 와 $\textcircled{1}$ 의 x^3 항이 곱해진 경우가 있다.

(i) 1과 $\textcircled{1}$ 의 x^4 항이 곱해진 경우

$$x^r = x^4 \text{에서 } r=4$$

$\textcircled{1}$ 의 x^4 항은

$${}_5C_4 \times 2^4 \times x^4 = 5 \times 16 \times x^4 = 80x^4$$

1과 $\textcircled{1}$ 의 x^4 항을 곱하면

$$1 \times 80x^4 = 80x^4$$

(ii) x 와 $\textcircled{1}$ 의 x^3 항이 곱해진 경우

$$x^r = x^3 \text{에서 } r=3$$

$\textcircled{1}$ 의 x^3 항은

$${}_5C_3 \times 2^3 \times x^3 = {}_5C_2 \times 2^3 \times x^3 = 10 \times 8 \times x^3 = 80x^3$$

x 와 $\textcircled{1}$ 의 x^3 항을 곱하면

$$x \times 80x^3 = 80x^4$$

(i), (ii)에서 구하는 x^4 의 계수는

$$80+80=160$$

039 답 ③

$$(2x^3+3)\left(x+\frac{1}{x}\right)^5=2x^3\left(x+\frac{1}{x}\right)^5+3\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_5C_r \frac{x^{5-r}}{x^r} \quad \dots\dots ①$$

$(2x^3+3)\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$ 의 전개식에서 상수항은 $2x^3$ 과 ①의 $\frac{1}{x^3}$ 항이 곱

해진 경우, 3과 ①의 상수항이 곱해진 경우가 있다.

(i) $2x^3$ 과 ①의 $\frac{1}{x^3}$ 항이 곱해진 경우

$$\frac{x^{5-r}}{x^r} = \frac{1}{x^3} \text{에서 } r-(5-r)=3$$

$$2r-5=3 \quad \therefore r=4$$

①의 $\frac{1}{x^3}$ 항은

$${}_5C_4 \times \frac{1}{x^3} = {}_5C_1 \times \frac{1}{x^3} = \frac{5}{x^3}$$

$2x^3$ 과 ①의 $\frac{1}{x^3}$ 항을 곱하면

$$2x^3 \times \frac{5}{x^3} = 10$$

(ii) 3과 ①의 상수항이 곱해진 경우

$$\frac{x^{5-r}}{x^r} = 1 \text{에서 } 5-r=r \quad \therefore r=\frac{5}{2}$$

그런데 r 는 $0 \leq r \leq 5$ 인 정수이므로 ①의 상수항은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 상수항은 10이다.

040 답 2

$(x-a)^3$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r x^{3-r} (-a)^r = {}_3C_r (-a)^r x^{3-r}$$

$(x+2)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_s x^{4-s} 2^s = {}_4C_s 2^s x^{4-s}$$

따라서 $(x-a)^3(x+2)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r (-a)^r x^{3-r} \times {}_4C_s 2^s x^{4-s} = {}_3C_r \times {}_4C_s (-a)^r 2^s x^{7-r-s}$$

$$x^{7-r-s} = x \text{에서 } r+s=6$$

이때 r, s 는 $0 \leq r \leq 3, 0 \leq s \leq 4$ 인 정수이므로 r, s 의 순서쌍 (r, s) 는 $(2, 4), (3, 3)$

x 의 계수가 -64 이므로

$${}_3C_2 \times {}_4C_4 \times (-a)^2 \times 2^4 + {}_3C_3 \times {}_4C_3 \times (-a)^3 \times 2^3 = -64$$

$$3 \times a^2 \times 16 + 4 \times (-a^3) \times 8 = -64$$

$$32a^3 - 48a^2 - 64 = 0$$

$$2a^3 - 3a^2 - 4 = 0$$

$$(a-2)(2a^2+a+2)=0$$

$$\therefore a=2 \quad (\because a \text{는 실수})$$

041 답 7

$(1+x)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^r$$

$(1+x^2)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_s (x^2)^s = {}_nC_s x^{2s}$$

따라서 $(1+x)^5(1+x^2)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^r \times {}_nC_s x^{2s} = {}_5C_r \times {}_nC_s x^{r+2s}$$

$$x^{r+2s} = x^2 \text{에서}$$

$$r+2s=2$$

이때 r, s 는 $0 \leq r \leq 5, 0 \leq s \leq n$ 인 정수이므로 r, s 의 순서쌍 (r, s) 는 $(0, 1), (2, 0)$

x^2 의 계수가 17이므로

$${}_5C_0 \times {}_nC_1 + {}_5C_2 \times {}_nC_0 = 17$$

$$n+10=17 \quad \therefore n=7$$

042 답 -2016

$\frac{(x-2)^4(3x^2+2)^3}{x}$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는

$(x-2)^4(3x^2+2)^3$ 의 전개식에서 x^5 의 계수와 같다.

$(x-2)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^{4-r} (-2)^r = {}_4C_r (-2)^r x^{4-r}$$

$(3x^2+2)^3$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_s (3x^2)^{3-s} 2^s = {}_3C_s 2^s 3^{3-s} x^{6-2s}$$

따라서 $(x-2)^4(3x^2+2)^3$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r (-2)^r x^{4-r} \times {}_3C_s 2^s 3^{3-s} x^{6-2s} = {}_4C_r \times {}_3C_s (-2)^r 2^s 3^{3-s} x^{10-r-2s}$$

$$x^{10-r-2s} = x^5 \text{에서}$$

$$r+2s=5$$

이때 r, s 는 $0 \leq r \leq 4, 0 \leq s \leq 3$ 인 정수이므로 r, s 의 순서쌍 (r, s) 는 $(1, 2), (3, 1)$

따라서 $(x-2)^4(3x^2+2)^3$ 의 전개식에서 x^5 의 계수는

$${}_4C_1 \times {}_3C_2 \times (-2)^1 \times 2^2 \times 3^1 + {}_4C_3 \times {}_3C_1 \times (-2)^3 \times 2^1 \times 3^2$$

$$= 4 \times 3 \times (-2) \times 4 \times 3 + 4 \times 3 \times (-8) \times 2 \times 9$$

$$= -288 + (-1728) = -2016$$

043 답 ②

${}_1C_1 = {}_2C_2$ 이므로

$${}_1C_1 + {}_2C_1 + {}_3C_1 + {}_4C_1 + {}_5C_1 = {}_2C_2 + {}_3C_1 + {}_4C_1 + {}_5C_1$$

$$= {}_3C_2 + {}_3C_1 + {}_4C_1 + {}_5C_1$$

$$= {}_4C_2 + {}_4C_1 + {}_5C_1$$

$$= {}_5C_2 + {}_5C_1$$

$$= {}_6C_2$$

044 답 ③

${}_1C_0 = {}_2C_0$ 이므로

$${}_1C_0 + {}_2C_1 + {}_3C_2 + {}_4C_3 + \dots + {}_{10}C_9 = {}_2C_0 + {}_2C_1 + {}_3C_2 + {}_4C_3 + \dots + {}_{10}C_9$$

$$= {}_3C_1 + {}_3C_2 + {}_4C_3 + \dots + {}_{10}C_9$$

$$= {}_4C_2 + {}_4C_3 + \dots + {}_{10}C_9$$

$$\vdots$$

$$= {}_{10}C_8 + {}_{10}C_9$$

$$= {}_{11}C_9$$

$$= {}_{11}C_2$$

045 [답] 251

$$\begin{aligned} {}_5C_1 + {}_6C_2 + {}_7C_3 + {}_8C_4 + {}_9C_5 &= A \text{라 하면} \\ {}_5C_0 + A &= {}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_6C_2 + {}_7C_3 + {}_8C_4 + {}_9C_5 \\ &= {}_6C_1 + {}_6C_2 + {}_7C_3 + {}_8C_4 + {}_9C_5 \\ &= {}_7C_2 + {}_7C_3 + {}_8C_4 + {}_9C_5 \\ &= {}_8C_3 + {}_8C_4 + {}_9C_5 \\ &= {}_9C_4 + {}_9C_5 = {}_{10}C_5 = 252 \\ \therefore A &= 252 - {}_5C_0 = 252 - 1 = 251 \end{aligned}$$

046 [답] 462

$$\begin{aligned} (1+x)^n \text{의 전개식의 일반항은 } {}_nC_r x^r \\ 4 \leq n \leq 10 \text{인 경우에만 } x^4 \text{항이 나오므로} \\ (1+x)^4 \text{의 전개식에서 } x^4 \text{의 계수는 } {}_4C_4 \\ (1+x)^5 \text{의 전개식에서 } x^4 \text{의 계수는 } {}_5C_4 \\ (1+x)^6 \text{의 전개식에서 } x^4 \text{의 계수는 } {}_6C_4 \\ \vdots \\ (1+x)^{10} \text{의 전개식에서 } x^4 \text{의 계수는 } {}_{10}C_4 \\ \text{따라서 구하는 } x^4 \text{의 계수는} \\ {}_4C_4 + {}_5C_4 + {}_6C_4 + {}_7C_4 + {}_8C_4 + {}_9C_4 + {}_{10}C_4 \\ = {}_5C_5 + {}_5C_4 + {}_6C_4 + {}_7C_4 + {}_8C_4 + {}_9C_4 + {}_{10}C_4 \\ = {}_6C_5 + {}_6C_4 + {}_7C_4 + {}_8C_4 + {}_9C_4 + {}_{10}C_4 \\ = {}_7C_5 + {}_7C_4 + {}_8C_4 + {}_9C_4 + {}_{10}C_4 \\ = {}_8C_5 + {}_8C_4 + {}_9C_4 + {}_{10}C_4 \\ = {}_9C_5 + {}_9C_4 + {}_{10}C_4 \\ = {}_{10}C_5 + {}_{10}C_4 \\ = {}_{11}C_5 = 462 \end{aligned}$$

047 [답] ③

$$\begin{aligned} {}_{20}C_0 - {}_{20}C_1 + {}_{20}C_2 - {}_{20}C_3 + {}_{20}C_4 - \cdots - {}_{20}C_{19} + {}_{20}C_{20} &= 0 \text{이므로} \\ {}_{20}C_0 - ({}_{20}C_1 - {}_{20}C_2 + {}_{20}C_3 - {}_{20}C_4 + \cdots + {}_{20}C_{19}) + {}_{20}C_{20} &= 0 \\ \therefore {}_{20}C_1 - {}_{20}C_2 + {}_{20}C_3 - {}_{20}C_4 + \cdots + {}_{20}C_{19} &= {}_{20}C_0 + {}_{20}C_{20} \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

048 [답] 8

$$\begin{aligned} {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n &= 2^n \text{이므로} \\ {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n &= 2^n - 1 \\ {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n &= 255 \text{에서} \\ 2^n - 1 &= 255, 2^n = 256 = 2^8 \\ \therefore n &= 8 \end{aligned}$$

049 [답] ③

$$\begin{aligned} {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n &= 2^n \text{이므로} \\ {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n &= 2^n - 1 \\ \text{따라서 주어진 부등식은} \\ 100 &< 2^n - 1 < 1000 \\ \therefore 101 &< 2^n < 1001 \\ \text{이때 } 2^6 &= 64, 2^7 = 128, 2^8 = 256, 2^9 = 512, 2^{10} = 1024 \text{이므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 } n \text{은 } 7, 8, 9 \text{의 3개이다.} \end{aligned}$$

050 [답] 8

$$\begin{aligned} {}_{17}C_1 + {}_{17}C_3 + {}_{17}C_5 + \cdots + {}_{17}C_{17} &= 2^{17-1} = 2^{16} \\ \text{또 } {}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2 + {}_9C_3 + {}_9C_4 &= {}_9C_9 + {}_9C_8 + {}_9C_7 + {}_9C_6 + {}_9C_5 \text{이고} \\ ({}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2 + {}_9C_3 + {}_9C_4) &+ ({}_9C_9 + {}_9C_8 + {}_9C_7 + {}_9C_6 + {}_9C_5) = 2^9 \\ \text{이므로} \\ 2({}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2 + {}_9C_3 + {}_9C_4) &= 2^9 \\ \therefore {}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2 + {}_9C_3 + {}_9C_4 &= 2^8 \\ \text{따라서 } \frac{{}_{17}C_1 + {}_{17}C_3 + {}_{17}C_5 + \cdots + {}_{17}C_{17}}{{}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2 + {}_9C_3 + {}_9C_4} &= \frac{2^{16}}{2^8} = 2^8 \text{이므로} \\ n &= 8 \end{aligned}$$

051 [답] 128

$$\begin{aligned} \text{원소의 개수가 1인 부분집합의 개수는 } {}_8C_1 \\ \text{원소의 개수가 3인 부분집합의 개수는 } {}_8C_3 \\ \text{원소의 개수가 5인 부분집합의 개수는 } {}_8C_5 \\ \text{원소의 개수가 7인 부분집합의 개수는 } {}_8C_7 \\ \text{따라서 구하는 부분집합의 개수는} \\ {}_8C_1 + {}_8C_3 + {}_8C_5 + {}_8C_7 &= 2^{8-1} = 2^7 = 128 \end{aligned}$$

052 [답] ①

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n \text{이므로 이 식의 양변에} \\ x=7, n=9 \text{를 대입하면} \\ 8^9 &= {}_9C_0 + {}_9C_1 \times 7 + {}_9C_2 \times 7^2 + {}_9C_3 \times 7^3 + \cdots + {}_9C_9 \times 7^9 \\ \therefore {}_9C_1 \times 7 + {}_9C_2 \times 7^2 + {}_9C_3 \times 7^3 + \cdots + {}_9C_9 \times 7^9 &= 2^{27} - {}_9C_0 \\ &= 2^{27} - 1 \end{aligned}$$

053 [답] ③

$$\begin{aligned} 31^{50} &= (1+30)^{50} \\ &= {}_{50}C_0 + {}_{50}C_1 \times 30 + {}_{50}C_2 \times 30^2 + \cdots + {}_{50}C_{50} \times 30^{50} \\ &= 1 + 1500 + 30^2({}_{50}C_2 + {}_{50}C_3 \times 30 + \cdots + {}_{50}C_{50} \times 30^{48}) \\ \text{이때 } 30^2({}_{50}C_2 + {}_{50}C_3 \times 30 + \cdots + {}_{50}C_{50} \times 30^{48}) &\text{은 } 900 \text{으로 나누어떨} \\ \text{어지므로 } 31^{50} \text{을 } 900 \text{으로 나누었을 때의 나머지는 } 1501 &\text{을 } 900 \text{으로} \\ \text{나누었을 때의 나머지와 같다.} \\ \text{이때 } 1501 &= 900 \times 1 + 601 \text{이므로 } 31^{50} \text{을 } 900 \text{으로 나누었을 때의 나} \\ \text{머지는 } 601 \text{이다.} \end{aligned}$$

054 [답] 10

$$\begin{aligned} 11^{12} &= (1+10)^{12} \\ &= {}_{12}C_0 + {}_{12}C_1 \times 10 + {}_{12}C_2 \times 10^2 + {}_{12}C_3 \times 10^3 + \cdots + {}_{12}C_{12} \times 10^{12} \\ &= 1 + 12 \times 10 + 66 \times 100 + 10^3({}_{12}C_3 + {}_{12}C_4 \times 10 + \cdots + {}_{12}C_{12} \times 10^9) \\ &= 6721 + 10^3({}_{12}C_3 + {}_{12}C_4 \times 10 + \cdots + {}_{12}C_{12} \times 10^9) \\ \text{이때 } 10^3({}_{12}C_3 + {}_{12}C_4 \times 10 + \cdots + {}_{12}C_{12} \times 10^9) &\text{은 } 1000 \text{으로 나누어떨} \\ \text{어지므로 } 11^{12} \text{의 백의 자리의 숫자는 } 7, \text{ 십의 자리의 숫자는 } 2, \text{ 일} \\ \text{의 자리의 숫자는 } 1 \text{이다.} \\ \text{따라서 } a=7, b=2, c=1 \text{이므로} \\ a+b+c &= 10 \end{aligned}$$

055 답 ①

구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

056 답 ②

주어진 다항식의 전개식에서 서로 다른 항의 개수가 120이므로

$${}_4H_n = {}_{n+3}C_n = {}_{n+3}C_3 = 120$$

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

$$(n+3)(n+2)(n+1) = 720 = 10 \times 9 \times 8$$

$$\therefore n=7 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

057 답 84

$2 \leq a \leq b \leq c \leq 8$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c 는 순서가 정해져 있고 같은 수일 수도 있으므로 2부터 8까지 7개의 자연수 중에서 중복을 허용하여 3개의 수를 택하여 크기가 작은 것부터 차례대로 a, b, c 에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 7개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_7H_3 = {}_9C_3 = 84$$

058 답 28

먼저 3명에게 공책을 각각 2권씩 나누어 주고, 나머지 6권의 공책을 나누어 주면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 3명에서 중복을 허용하여 6명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

059 답 ④

x, y, z, w 는 모두 자연수이므로 $X=x-1, Y=y-1, Z=z-1, W=w-1$ 이라 하면 X, Y, Z, W 는 음이 아닌 정수이다.

$$x=X+1, y=Y+1, z=Z+1, w=W+1 \text{을 부등식}$$

$$6 \leq x+y+z+w \leq 8 \text{에 대입하면}$$

$$6 \leq (X+1) + (Y+1) + (Z+1) + (W+1) \leq 8$$

$$\therefore 2 \leq X+Y+Z+W \leq 4$$

$$\text{즉, } X+Y+Z+W=2 \text{ 또는 } X+Y+Z+W=3$$

$$\text{또는 } X+Y+Z+W=4$$

(i) 방정식 $X+Y+Z+W=2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z, W 의 순서쌍 (X, Y, Z, W) 의 개수는 4개의 문자 X, Y, Z, W 에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

(ii) 방정식 $X+Y+Z+W=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z, W 의 순서쌍 (X, Y, Z, W) 의 개수는 4개의 문자 X, Y, Z, W 에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

(iii) 방정식 $X+Y+Z+W=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z, W 의 순서쌍 (X, Y, Z, W) 의 개수는 4개의 문자 X, Y, Z, W 에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$10+20+35=65$$

060 답 39

(i)에서 $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4)$

(ii)에서 $f(1)=1$ 인 경우와 $f(3)=3$ 인 경우가 있다.

(i) $f(1)=1$ 인 경우

$1 \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4)$ 에서 $f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y 의 원소 1, 3, 5, 7, 9의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 집합 X 의 원소 2, 3, 4에 대응시키면 된다.

따라서 함수의 개수는

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

(ii) $f(3)=3$ 인 경우

$f(1) \leq f(2) \leq 3$ 에서 $f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y 의 원소 1, 3의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작은 수부터 차례대로 집합 X 의 원소 1, 2에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 ${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

$3 \leq f(4)$ 에서 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 수는 3, 5, 7, 9의 4개

따라서 함수의 개수는

$$3 \times 4 = 12$$

(iii) $f(1)=1, f(3)=3$ 인 경우

$1 \leq f(2) \leq 3$ 에서 $f(2)$ 의 값이 될 수 있는 수는 1, 3의 2개

$3 \leq f(4)$ 에서 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 수는 3, 5, 7, 9의 4개

따라서 함수의 개수는

$$2 \times 4 = 8$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수의 개수는

$$35+12+8=55$$

061 답 ③

$\left(xy + \frac{a}{y^2}\right)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r (xy)^{6-r} \left(\frac{a}{y^2}\right)^r = {}_6C_r a^r \frac{x^{6-r} y^{6-r}}{y^{2r}}$$

$$\frac{x^{6-r} y^{6-r}}{y^{2r}} = \frac{x^3}{y^3} \text{에서 } r=3$$

$$\frac{x^3}{y^3} \text{의 계수가 } 20 \text{이므로}$$

$${}_6C_3 \times a^3 = 20$$

$$20a^3 = 20, a^3 = 1$$

$$\therefore a=1 \quad (\because a \text{는 실수})$$

$$\frac{x^{6-r} y^{6-r}}{y^{2r}} = x^4 \text{에서 } r=2$$

따라서 x^4 의 계수는

$${}_6C_2 \times a^2 = 15 \times 1^2 = 15$$

062 ③ $\frac{1}{4}$

$\left(\frac{x}{2}+a\right)^7$ 의 전개식의 일반항은

$${}_7C_r\left(\frac{x}{2}\right)^{7-r}a^r={}_7C_r\left(\frac{1}{2}\right)^{7-r}a^rx^{7-r}$$

$$x^{7-r}=x^4\text{에서 }r=3$$

x^4 의 계수는

$${}_7C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\times a^3=35\times\frac{1}{16}\times a^3=\frac{35}{16}a^3$$

$$\text{한편 }x^{7-r}=x^3\text{에서 }r=4$$

x^3 의 계수는

$${}_7C_4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times a^4=35\times\frac{1}{8}\times a^4=\frac{35}{8}a^4$$

이때 x^4 의 계수가 x^3 의 계수의 2배이므로

$$\frac{35}{16}a^3=2\times\frac{35}{8}a^4$$

$$a^3=4a^4, a^3(4a-1)=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{4} (\because a>0)$$

063 ⑤

$(ax-y)^3$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r(ax)^{3-r}(-y)^r={}_3C_r(-1)^ra^{3-r}x^{3-r}y^r$$

$(x+y)^4$ 의 전개식의 일반항은 ${}_4C_sx^{4-s}y^s$

따라서 $(ax-y)^3(x+y)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r(-1)^ra^{3-r}x^{3-r}y^r\times{}_4C_sx^{4-s}y^s$$

$$={}_3C_r\times{}_4C_s(-1)^ra^{3-r}x^{7-r-s}y^{r+s}$$

$$x^{7-r-s}y^{r+s}=xy^6\text{에서}$$

$$r+s=6$$

이때 r, s 는 $0\leq r\leq 3, 0\leq s\leq 4$ 인 정수이므로 r, s 의 순서쌍 (r, s) 는

$(2, 4), (3, 3)$

xy^6 의 계수가 8이므로

$${}_3C_2\times{}_4C_4\times(-1)^2\times a^1+{}_3C_3\times{}_4C_3\times(-1)^3=8$$

$$3a-4=8 \quad \therefore a=4$$

064 ⑩

$$(x^2+x+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^4=x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^4+x\left(x+\frac{1}{x}\right)^4+\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_rx^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_r\frac{x^{4-r}}{x^r} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$(x^2+x+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$ 의 전개식에서 x^2 항은 x^2 과 $\textcircled{1}$ 의 상수항이 곱해진 경우, x 와 $\textcircled{1}$ 의 x 항이 곱해진 경우, 1과 $\textcircled{1}$ 의 x^2 항이 곱해진 경우가 있다.

(i) x^2 과 $\textcircled{1}$ 의 상수항이 곱해진 경우

$$\frac{x^{4-r}}{x^r}=1\text{에서 }4-r=r \quad \therefore r=2$$

$$\textcircled{1}\text{의 상수항은 }{}_4C_2=6$$

$$x^2\text{과 } \textcircled{1}\text{의 상수항을 곱하면 }x^2\times 6=6x^2$$

(ii) x 와 $\textcircled{1}$ 의 x 항이 곱해진 경우

$$\frac{x^{4-r}}{x^r}=x\text{에서 }4-r-r=1 \quad \therefore r=\frac{3}{2}$$

그런데 r 는 $0\leq r\leq 4$ 인 정수이므로 $\textcircled{1}$ 의 x 항은 존재하지 않는다.

(iii) 1과 $\textcircled{1}$ 의 x^2 항이 곱해진 경우

$$\frac{x^{4-r}}{x^r}=x^2\text{에서 }4-r-r=2 \quad \therefore r=1$$

$$\textcircled{1}\text{의 }x^2\text{항은 }{}_4C_1\times x^2=4x^2$$

$$1\text{과 } \textcircled{1}\text{의 }x^2\text{항을 곱하면 }1\times 4x^2=4x^2$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 x^2 의 계수는 $6+4=10$

065 ③

$${}_3C_3={}_4C_4\text{이므로}$$

$$\begin{aligned} {}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3 &= {}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3 \\ &= {}_5C_4+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3 \\ &= {}_6C_4+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3 \\ &\vdots \\ &= {}_{10}C_4+{}_{10}C_3={}_{11}C_4 \end{aligned}$$

066 ④

$$\neg. {}_{100}C_0+{}_{100}C_1+{}_{100}C_2+\cdots+{}_{100}C_{99}+{}_{100}C_{100}=2^{100}\text{이고}$$

$${}_{100}C_{100}=1\text{이므로}$$

$${}_{100}C_0+{}_{100}C_1+{}_{100}C_2+\cdots+{}_{100}C_{99}=2^{100}-1$$

$$\neg. {}_6C_0-{}_6C_1+{}_6C_2-{}_6C_3+\cdots+{}_6C_6=0$$

$$\begin{aligned} \neg. {}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+\cdots+{}_{11}C_{11} &= {}_{11}C_5+{}_{11}C_4+{}_{11}C_3+\cdots+{}_{11}C_0\text{이고} \\ ({}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+\cdots+{}_{11}C_5) &+ ({}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+\cdots+{}_{11}C_{11}) \\ &= 2^{11} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 }2({}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+\cdots+{}_{11}C_{11})=2^{11}$$

$$\therefore {}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{10}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

067 ⑤

$${}_{2n+1}C_1={}_{2n+1}C_{2n}, {}_{2n+1}C_3={}_{2n+1}C_{2n-2}, \dots, {}_{2n+1}C_n={}_{2n+1}C_{n+1}$$

이므로 주어진 부등식의 좌변에서

$$\begin{aligned} &{}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_1+{}_{2n+1}C_2+\cdots+{}_{2n+1}C_n \\ &= {}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_{2n}+{}_{2n+1}C_2+{}_{2n+1}C_{2n-2}+\cdots+{}_{2n+1}C_{n+1} \\ &= {}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_2+{}_{2n+1}C_4+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n-2}+{}_{2n+1}C_{2n} \\ &= 2^{2n+1-1}=2^{2n} \end{aligned}$$

즉, 주어진 부등식의 좌변이 2^{2n} 이므로

$$2^{2n}<1500$$

이때 $2^{10}=1024, 2^{11}=2048$ 이므로 n 의 최댓값은 5이다.

068 ④

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$ 이므로 이 식의 양변에

$x=5, n=8$ 을 대입하면

$$6^8={}_8C_0+{}_8C_1\times 5+{}_8C_2\times 5^2+\cdots+{}_8C_8\times 5^8$$

$$\therefore N=6^8=2^8\times 3^8$$

따라서 $N=2^8\times 3^8$ 의 양의 약수의 개수는

$$(8+1)(8+1)=81$$



001 답 ㄱ, ㄷ

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$\neg, B = \{5\} \text{이므로 } A \cap B = \emptyset$$

따라서 A와 B는 서로 배반사건이다.

$$\neg, C = \{2, 4, 6\} \text{이므로 } A \cap C = \{2\}$$

따라서 A와 C는 서로 배반사건이 아니다.

$$\neg, D = \{4, 5\} \text{이므로 } A \cap D = \emptyset$$

따라서 A와 D는 서로 배반사건이다.

따라서 보기 중 사건 A와 서로 배반사건인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

002 답 ②

두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

나오는 두 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는 두 눈의 수가 모두 홀수 이어야 하므로 그 경우의 수는

$$3 \times 3 = 9$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

003 답 ②

answer에 있는 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$6! = 720$$

a와 r를 양 끝에 고정시키고 그 사이에 n, s, w, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$, a와 r끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2 \text{이므로 a와 r가 양 끝에 오는 경우의 수는}$$

$$24 \times 2 = 48$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{48}{720} = \frac{1}{15}$$

004 답 $\frac{1}{5}$

7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(7-1)! = 6! = 720$$

여자 3명을 한 사람으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(5-1)! = 4! = 24$, 여자끼리 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $3! = 6$ 이므로 여자끼리 이웃하게 앉는 경우의 수는

$$24 \times 6 = 144$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{144}{720} = \frac{1}{5}$$

005 답 $\frac{1}{2}$

맨 앞 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 5의 3가지이므로 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$$3 \times 4 \times 3 = 3 \times 4^2 = 48$$

홀수이면 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 3, 5의 2가지이므로 홀수의 개수는

$$3 \times 4 \times 3 \times 2 = 3 \times 4^2 \times 2 = 96$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{96}{192} = \frac{1}{2}$$

006 답 ①

7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2!} = 2520$$

s와 t를 양 끝에 고정시키고 그 사이에 w, e, b, i, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!} = 60$, s와 t가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2 \text{이므로 s와 t가 적힌 카드가 양 끝에 오는 경우의 수는}$$

$$60 \times 2 = 120$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{120}{2520} = \frac{1}{21}$$

007 답 ④

공 5개 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

흰 공 3개 중에서 2개, 검은 공 2개 중에서 1개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times {}_2C_1 = 3 \times 2 = 6$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

008 답 $\frac{2}{15}$

방정식 $x+y+z=8$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 3개의 문자 x, y, z 에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_8H_3 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$$

$$y=3 \text{이면 } x+3+z=8 \text{에서 } x+z=5$$

방정식 $x+z=5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, z 의 순서쌍 (x, z) 의 개수는 2개의 문자 x, z 에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5H_2 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

009 답 ㄷ

표본공간은 $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로

$$A = \{1, 3\}, B = \{1\}, C = \{2, 3\}$$

$$\neg, A \cap B = \{1\} \text{이므로 A와 B는 서로 배반사건이 아니다.}$$

$$\neg, A \cap C = \{3\} \text{이므로 A와 C는 서로 배반사건이 아니다.}$$

$$\neg, B \cap C = \emptyset \text{이므로 B와 C는 서로 배반사건이다.}$$

따라서 보기 중 서로 배반사건인 것은 ㄷ이다.

010 답 ④

표본공간은 $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$ 이므로

$$A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{3, 6\}$$

$$\textcircled{4} A \cap B^c = A - B = \{1, 5, 7\} \text{이므로 } n(A \cap B^c) = 3$$

$$\textcircled{5} A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{이므로 } n(A^c \cup B^c) = 7$$

011 답 4

사건 A 와 배반인 사건은 사건 A^c 의 부분집합이고, 사건 B 와 배반인 사건은 사건 B^c 의 부분집합이므로 두 사건 A, B 와 모두 배반인 사건은 $A^c \cap B^c$ 의 부분집합이다.

$$A^c = \{-3, -2, 2, 3\}, B^c = \{-2, -1, 1, 3\} \text{이므로}$$

$$A^c \cap B^c = \{-2, 3\}$$

따라서 구하는 사건의 개수는 집합 $\{-2, 3\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^2=4$

012 답 ④

2개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

나오는 두 눈의 수를 a, b 라 하면 순서쌍 (a, b) 에 대하여 $a+b$ 를 4로 나누었을 때의 나머지가 3인 경우는

(i) $a+b=3$ 인 경우

$$(1, 2), (2, 1) \Rightarrow 2\text{가지}$$

(ii) $a+b=7$ 인 경우

$$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) \Rightarrow 6\text{가지}$$

(iii) $a+b=11$ 인 경우

$$(5, 6), (6, 5) \Rightarrow 2\text{가지}$$

(i), (ii), (iii)에서 두 눈의 수의 합을 4로 나누었을 때의 나머지가 3인 경우의 수는

$$2+6+2=10$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

013 답 $\frac{1}{4}$

집합 A 의 부분집합의 개수는

$$2^6=64$$

집합 A 의 부분집합 중에서 원소 5, 7을 모두 포함하는 부분집합의 개수는

$$2^{6-2}=2^4=16$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

014 답 $\frac{3}{4}$

$360=2^3 \times 3^2 \times 5$ 이므로 360의 양의 약수의 개수는

$$(3+1)(2+1)(1+1)=24$$

짝수는 2를 소인수로 가지므로 360의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는 $2^2 \times 3^2 \times 5$ 의 양의 약수의 개수와 같다.

즉, 360의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는

$$(2+1)(2+1)(1+1)=18$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

015 답 $\frac{14}{25}$

나오는 모든 경우의 수는

$$5 \times 5 = 25$$

방정식 $ax^2+bx+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면 이 방정식이 실근을 가질 조건은

$$D=b^2-4a \geq 0 \quad \therefore 4a \leq b^2$$

이 부등식을 만족시키는 경우는

(i) $a=1$ 일 때, $b=3, 5, 7, 9 \Rightarrow 4\text{가지}$

(ii) $a=3$ 일 때, $b=5, 7, 9 \Rightarrow 3\text{가지}$

(iii) $a=5$ 일 때, $b=5, 7, 9 \Rightarrow 3\text{가지}$

(iv) $a=7$ 일 때, $b=7, 9 \Rightarrow 2\text{가지}$

(v) $a=9$ 일 때, $b=7, 9 \Rightarrow 2\text{가지}$

(i)~(v)에서 주어진 이차방정식이 실근을 갖는 경우의 수는

$$4+3+3+2+2=14$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{14}{25}$$

016 답 $\frac{1}{7}$

7명이 일렬로 서는 경우의 수는

$$7!=5040$$

3명의 남학생 중에서 2명이 양 끝에 서는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$, 나머지 남학생 1명과 여학생 4명이 일렬로 서는 경우의 수는

$$5!=120 \text{이므로 양 끝에 남학생이 서는 경우의 수는}$$

$$6 \times 120 = 720$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{720}{5040} = \frac{1}{7}$$

017 답 $\frac{1}{5}$

만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$$5!=120$$

5의 배수이면 일의 자리에 올 수 있는 숫자가 5뿐이므로 5의 배수의 개수는

$$4!=24$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

018 답 ①

5명을 탑승하는 순서대로 일렬로 세우는 경우의 수는

$$5!=120$$

부부를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$4!=24$, 부부끼리 순서를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$ 이므로 부부가 연이어 탑승하는 경우의 수는

$$24 \times 2 = 48$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$$

019 답 $\frac{11}{20}$

만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$${}_5P_4=120$$

만들 수 있는 자연수가 3200보다 큰 경우는 $32\square\square, 34\square\square,$

$35\square\square, 4\square\square\square, 5\square\square\square$ 풀이다.

(i) $32\square\square$, $34\square\square$, $35\square\square$ 꼴의 자연수의 개수는

$$3 \times {}_3P_2 = 18$$

(ii) $4\square\square\square$ 꼴의 자연수의 개수는

$${}_4P_3 = 24$$

(iii) $5\square\square\square$ 꼴의 자연수의 개수는

$${}_4P_3 = 24$$

(i), (ii), (iii)에서 3200보다 큰 자연수의 개수는

$$18 + 24 + 24 = 66$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{66}{120} = \frac{11}{20}$

020 답 ④

4명이 일렬로 서는 경우의 수는 $4! = 24$

키가 작은 학생부터 차례대로 A, B, C, D라 하면 앞에서 두 번째 자리에 서는 학생이 이웃한 두 학생보다 키가 큰 경우는

(i) 키가 가장 큰 D가 두 번째 자리에 서는 경우

나머지 자리에는 어느 학생이 서도 되므로 그 경우의 수는

$$3! = 6$$

(ii) 키가 두 번째로 큰 C가 두 번째 자리에 서는 경우

D와 C는 이웃하여 설 수 없으므로 D는 네 번째 자리에만 설 수 있다.

나머지 두 자리에 A, B가 서는 경우의 수는

$$2! = 2$$

(i), (ii)에서 앞에서 두 번째 학생이 이웃한 두 학생보다 키가 크도록 서는 경우의 수는

$$6 + 2 = 8$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

021 답 ②

6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(6-1)! = 5! = 120$$

각 부부를 한 사람으로 생각하여 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(3-1)! = 2! = 2$, 각 부부끼리 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $2! \times 2! \times 2! = 8$ 이므로 부부끼리 이웃하게 앉는 경우의 수는

$$2 \times 8 = 16$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{120} = \frac{2}{15}$

022 답 $\frac{1}{5}$

7개의 숫자를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$$(7-1)! = 6! = 720$$

홀수 4개를 원형으로 배열하는 경우의 수는 $(4-1)! = 3! = 6$, 홀수 사이사이의 4개의 자리에서 3개를 택하여 짝수를 배열하는 경우의 수는 ${}_4P_3 = 24$ 이므로 짝수끼리 이웃하지 않게 배열하는 경우의 수는

$$6 \times 24 = 144$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{144}{720} = \frac{1}{5}$

023 답 ①

6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(6-1)! = 5! = 120$$

여자 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(3-1)! = 2! = 2$, 여자 사이사이의 3개의 자리에 남자 3명이 앉는 경우의 수는 ${}_3P_3 = 3! = 6$

이므로 여자와 남자가 교대로 앉는 경우의 수는

$$2 \times 6 = 12$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{120} = \frac{1}{10}$

024 답 $\frac{1}{5}$

6개의 영역에 6가지 색을 칠하는 경우의 수는

$$(6-1)! = 5! = 120$$

노란색을 칠한 맞은편에 보라색을 칠하고 나머지 4가지 색을 4개의 영역에 칠하는 경우의 수는

$${}_4P_4 = 4! = 24$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$

025 답 ③

맨 앞자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지이므로 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수의 개수는

$$4 \times {}_5P_5 = 4 \times 5! = 12500$$

짝수이면 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4의 3가지이므로 짝수의 개수는

$$4 \times {}_5P_4 \times 3 = 4 \times 5! \times 3 = 7500$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{7500}{12500} = \frac{3}{5}$

026 답 $\frac{3}{8}$

X에서 Y로의 함수 f 의 개수는 ${}_4P_3 = 4^3 = 64$

X에서 Y로의 일대일함수 f 의 개수는 ${}_4P_3 = 24$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{64} = \frac{3}{8}$

027 답 ③

만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$${}_3P_4 = 3^4 = 81$$

만들 수 있는 자연수가 2200보다 큰 경우는 $22\square\square$, $23\square\square$,

$3\square\square\square$ 꼴이다.

(i) $22\square\square$, $23\square\square$ 꼴의 자연수의 개수는

$$2 \times {}_3P_2 = 2 \times 3^2 = 18$$

(ii) $3\square\square\square$ 꼴의 자연수의 개수는

$${}_3P_3 = 3^3 = 27$$

(i), (ii)에서 2200보다 큰 자연수의 개수는

$$18 + 27 = 45$$

따라서 네 자리의 자연수가 2200보다 클 확률은 $\frac{45}{81} = \frac{5}{9}$ 이므로

$$p=9, q=5 \quad \therefore p+q=14$$

028 답 $\frac{5}{32}$

4명의 학생에게 서로 다른 연필 5자루를 나누어 주는 경우의 수는 ${}_4\Pi_5=4^5=1024$

연필 5자루 중에서 2자루를 택하여 A와 B에게 먼저 1자루씩 나누어 주고, 2명의 학생 C, D에게 나머지 연필 3자루를 나누어 주는 경우의 수는

$${}_5P_2 \times {}_2\Pi_3 = 20 \times 2^3 = 160$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{160}{1024} = \frac{5}{32}$

029 답 $\frac{1}{7}$

brother에 있는 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2!} = 2520$$

자음 b, r, r, t, h를 한 문자 B로 생각하여 B, o, e를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$, 자음 b, r, r, t, h끼리 자리를 바꾸는

경우의 수는 $\frac{5!}{2!}=60$ 이므로 자음끼리 이웃하는 경우의 수는

$$6 \times 60 = 360$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{360}{2520} = \frac{1}{7}$

030 답 $\frac{1}{3}$

여섯 개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$$

맨 앞에 2를 놓고 나머지 숫자 1, 1, 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$

031 답 $\frac{18}{35}$

A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{7!}{4! \times 3!} = 35$$

A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{3!}{2!} = 6 \times 3 = 18$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{18}{35}$

032 답 $\frac{1}{9}$

X에서 X로의 함수 f의 개수는 ${}_3\Pi_3=3^3=27$

$f(1)+f(2)+f(3)=8$ 인 경우의 수는 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$

033 답 ④

만들 수 있는 여섯 자리의 자연수의 개수는

$${}_2\Pi_6=2^6=64$$

여섯 자리의 자연수의 각 자리의 숫자를 a, b, c, d, e, f라 할 때 3의 배수이려면 $a+b+c+d+e+f$ 가 3의 배수이어야 한다.

(i) $a+b+c+d+e+f=6$ 인 경우

$$a=b=c=d=e=f=1 \Rightarrow 1\text{가지}$$

(ii) $a+b+c+d+e+f=9$ 인 경우

$1+1+1+2+2+2=9$ 이므로 3개의 숫자 1과 3개의 숫자 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

(iii) $a+b+c+d+e+f=12$ 인 경우

$$a=b=c=d=e=f=2 \Rightarrow 1\text{가지}$$

(i), (ii), (iii)에서 3의 배수의 개수는

$$1+20+1=22$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{22}{64} = \frac{11}{32}$

034 답 ④

7개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_7C_2=21$$

흰 공 4개 중에서 1개, 검은 공 3개 중에서 1개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_3C_1 = 12$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$

035 답 $\frac{4}{15}$

6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

A는 포함되고 B는 포함되지 않을 경우의 수는 A, B를 제외한 나머지 4명의 학생 중에서 3명을 뽑고 A를 포함시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{15}$

036 답 $\frac{3}{14}$

집합 A의 부분집합의 개수는 $2^3=8$ 이므로 8개의 부분집합 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_8C_2=28$$

두 집합이 모두 집합 $\{b, c\}$ 의 부분집합인 경우의 수는 $\{b, c\}$ 의 부분집합 4개 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4C_2=6$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{28} = \frac{3}{14}$

037 답 ①

남학생의 수를 x 라 하면 여학생의 수는 $10-x$ 이므로

$$\frac{x C_1 \times {}_{10-x} C_1}{{}_{10} C_2} = \frac{8}{15} \cdot \frac{x(10-x)}{45} = \frac{8}{15}$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0, (x-4)(x-6) = 0$$

$$\therefore x=4 \text{ 또는 } x=6$$

따라서 남학생이 4명, 여학생이 6명 또는 남학생이 6명, 여학생이 4명이므로 구하는 학생 수의 차는 2이다.

038 답 ④

8개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_8 C_3 = 56$$

가장 작은 수가 3인 경우의 수는 3이 적힌 공을 꺼내고, 4, 5, 6, 7,

8이 적힌 공 5개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

$$1 \times {}_5 C_2 = 10$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$$

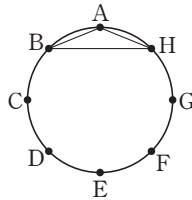
039 답 $\frac{3}{7}$

8개의 점 중에서 3개를 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는

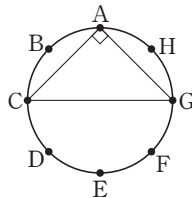
$${}_8 C_3 = 56$$

이등변삼각형이 되는 경우를 모양에 따라 나누어 생각하면

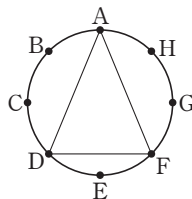
(i) 오른쪽 그림과 같이 점 A를 꼭짓점으로 하면서 $\angle A$ 가 둔각인 이등변삼각형 ABH와 합동인 삼각형은 나머지 점 B, ..., 점 H에 대하여 존재하므로 한 내각이 둔각인 이등변삼각형의 개수는 8



(ii) 오른쪽 그림과 같이 점 A를 꼭짓점으로 하면서 $\angle A = 90^\circ$ 인 이등변삼각형 ACG와 합동인 삼각형은 나머지 점 B, ..., 점 H에 대하여 존재하므로 한 내각이 직각인 이등변삼각형의 개수는 8



(iii) 오른쪽 그림과 같이 점 A를 꼭짓점으로 하면서 $\angle A$ 가 예각인 이등변삼각형 ADF와 합동인 삼각형은 나머지 점 B, ..., 점 H에 대하여 존재하므로 세 내각이 모두 예각인 이등변삼각형의 개수는 8



(i), (ii), (iii)에서 이등변삼각형의 개수는

$$8 + 8 + 8 = 24$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

040 답 $\frac{7}{12}$

방정식 $x+y+z=7$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 3개의 문자 x, y, z 에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3 H_7 = {}_9 C_7 = {}_9 C_2 = 36$$

$x \geq 2$ 인 경우는 먼저 x 를 2개 택하고, 3개의 문자 x, y, z 에서 중복을 허용하여 나머지 5개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3 H_5 = {}_7 C_5 = {}_7 C_2 = 21$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

041 답 $\frac{1}{13}$

4명의 학생에게 음료수 12병을 나누어 주는 경우의 수는

$${}_4 H_{12} = {}_{15} C_{12} = {}_{15} C_3 = 455$$

모든 학생이 2병 이상 받으려면 먼저 모든 학생에게 2병씩 나누어 주고, 나머지 4병을 4명의 학생에게 나누어 주면 되므로 그 경우의 수는

$${}_4 H_4 = {}_7 C_4 = {}_7 C_3 = 35$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{35}{455} = \frac{1}{13}$$

042 답 $\frac{10}{21}$

3개의 숫자에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 곱하는 경우의 수는

$${}_3 H_5 = {}_7 C_5 = {}_7 C_2 = 21$$

곱한 결과가 10의 배수이려면 2, 5는 반드시 뽑아야 하므로 3개의 숫자에서 나머지 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_3 H_3 = {}_5 C_3 = {}_5 C_2 = 10$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{10}{21}$$

043 답 ③

함수 f 의 개수는 ${}_4 P_3 = 4^3 = 64$

$i < j$ 이면 $f(i) \leq f(j)$ 에서 $f(1) \leq f(2) \leq f(3)$

이를 만족시키는 함수 f 는 집합 B 의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 집합 A 의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로 함수 f 의 개수는

$${}_4 H_3 = {}_6 C_3 = 20$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$

044 답 $\frac{35}{216}$

한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

(i) $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ 인 경우

6개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 a_1, a_2, a_3 에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

$${}_6 H_3 = {}_8 C_3 = 56$$

(ii) $a_1 \leq a_2 = a_3$ 인 경우

6개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작은 수부터 차례대로 a_1, a_2 에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

$${}_6 H_2 = {}_7 C_2 = 21$$

(i), (ii)에서 $a_1 \leq a_2 < a_3$ 인 경우의 수는

$$56 - 21 = 35$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{35}{216}$$

045 답 3

주머니 속에 들어 있는 빨간 공의 개수를 n 이라 하면 2개의 공이 모두 빨간 공일 확률이 $\frac{1}{7}$ 이므로

$$\frac{nC_2}{7C_2} = \frac{1}{7}, \frac{n(n-1)}{42} = \frac{1}{7}$$

$$n(n-1) = 6 = 3 \times 2 \quad \therefore n = 3 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

따라서 주머니 속에 들어 있는 빨간 공의 개수는 3이다.

046 답 $\frac{3}{4}$

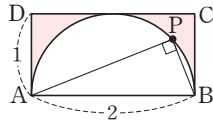
오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원을 그리면 반원 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAB는 직각삼각형이므로 삼각형 PAB가 예각삼각형이라면 점 P가 색칠한 부분에 있어야 한다.

따라서 삼각형 PAB가 예각삼각형일 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square ABCD \text{의 넓이})} = \frac{2 - \frac{1}{2}\pi}{2} = 1 - \frac{1}{4}\pi$$

따라서 $p=1, q=-\frac{1}{4}$ 이므로

$$p+q = \frac{3}{4}$$



047 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. [반례] $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{3}{4}$ 이면

$$P(A) + P(B) = \frac{3}{2} \text{이므로 } P(A) + P(B) > 1$$

ㄴ. $0 \leq P(A) \leq 1, 0 \leq P(B) \leq 1$ 이므로 $0 \leq P(A)P(B) \leq 1$

ㄷ. $\emptyset \subset (A \cup B) \subset S$ 이므로 $0 \leq P(A \cup B) \leq 1$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

048 답 ①

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} = 1 - P(A \cup B) \quad \therefore P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

049 답 ②

4의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A, 6의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라 하면 $A \cap B$ 는 12의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건이므로

$$P(A) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}, P(A \cap B) = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{4}{25} - \frac{2}{25} = \frac{33}{100}$$

050 답 $\frac{22}{35}$

파란 공이 1개만 나오는 사건을 A, 하나도 나오지 않는 사건을 B라 하자.

A는 파란 공 3개 중에서 1개, 빨간 공 4개 중에서 2개를 꺼내는 사건이므로

$$P(A) = \frac{{}_3C_1 \times {}_4C_2}{{}_7C_3} = \frac{18}{35}$$

B는 빨간 공 4개 중에서 3개를 꺼내는 사건이므로

$$P(B) = \frac{{}_4C_3}{{}_7C_3} = \frac{4}{35}$$

A와 B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = \frac{22}{35}$$

051 답 $\frac{9}{20}$

뽑은 2개의 제비 중에서 적어도 1개가 당첨 제비인 사건을 A라 하면 A^c 은 당첨 제비가 아닌 제비만 2개 뽑는 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_{12}C_2}{{}_{16}C_2} = \frac{66}{120} = \frac{11}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$$

052 답 ②

5개의 동전 중에서 뒷면이 2개 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^c 은 5개의 동전 중에서 뒷면이 0개 또는 1개 나오는 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{1+5}{2^5} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$$

053 답 ②

주머니 속에 들어 있는 노란 구슬의 개수를 n 이라 하면 2개의 구슬이 모두 노란 구슬일 확률이 $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ 이므로

$$\frac{nC_2}{15C_2} = \frac{1}{5}, \frac{n(n-1)}{210} = \frac{1}{5}$$

$$n(n-1) = 42 = 7 \times 6 \quad \therefore n = 7 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

따라서 주머니 속에 들어 있는 노란 구슬의 개수는 7이다.

054 답 $\frac{4}{25}$

A 공장에서 생산한 장난감이 불량품일 확률은

$$a = \frac{5}{2000} = \frac{1}{400}$$

B 공장에서 생산한 장난감이 불량품일 확률은

$$b = \frac{2}{5000} = \frac{1}{2500}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2500}}{\frac{1}{400}} = \frac{4}{25}$$

055 답 $\frac{5}{12}$

전체 학생 수는

$$300 + 150 + 180 + 90 = 720(\text{명})$$

혈액형이 A형인 학생이 300명이므로 구하는 확률은

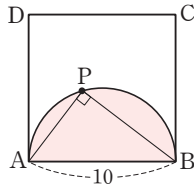
$$\frac{300}{720} = \frac{5}{12}$$

056 답 $\frac{\pi}{8}$

오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원을 그리면 반원 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAB는 직각삼각형이므로 삼각형 PAB가 둔각삼각형이라면 점 P가 색칠한 부분에 있어야 한다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 반원의 넓이})}{(\square ABCD \text{의 넓이})} = \frac{\frac{25}{2}\pi}{100} = \frac{\pi}{8}$$



057 답 $\frac{5}{16}$

반지름의 길이가 4인 원의 넓이는 16π

색칠한 부분의 넓이는 $9\pi - 4\pi = 5\pi$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{5\pi}{16\pi} = \frac{5}{16}$$

058 답 ⑤

이차방정식 $x^2 - 6ax + 6a = 0$ 의 판별식을 D라 할 때, 이 방정식이 실근을 가지려면

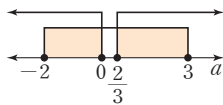
$$\frac{D}{4} = 9a^2 - 6a \geq 0, 3a(3a - 2) \geq 0$$

$$\therefore a \leq 0 \text{ 또는 } a \geq \frac{2}{3}$$

그런데 $-2 \leq a \leq 3$ 이므로 오른쪽 그림

에서 구하는 확률은

$$\frac{\{0 - (-2)\} + \left\{3 - \frac{2}{3}\right\}}{3 - (-2)} = \frac{13}{15}$$



059 답 $\neg, \cup, \cap$

$\neg, 0 \leq P(A) \leq 1, 0 \leq P(B) \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq P(A) - P(B) \leq 1$$

$\cup, A \subset (A \cup B)$ 이므로

$$P(A) \leq P(A \cup B)$$

$\cap, 0 \leq P(A) \leq 1, 0 \leq P(B) \leq 1$ 이므로

$$0 \leq P(A)P(B) \leq 1$$

이때 $P(S) = 1$ 이므로

$$P(A)P(B) \leq P(S)$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \cup, \cap$ 이다.

060 답 ①

$\neg, P(S) = 1, P(\emptyset) = 0$ 이므로 $P(S) - P(\emptyset) = 1$

$\cup, [\text{반례}] S = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{4, 5\}$ 이면

$$A \cup B = S \text{이지만 } P(A) + P(B) = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5} \neq 1$$

$\cap, [\text{반례}] S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A = \{3, 6\}, B = \{1, 2, 3, 6\}$

$$\text{이면 } P(A) + P(B) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1 \text{이지만 } A \cap B = \{3, 6\} \neq \emptyset$$

이므로 두 사건 A, B는 서로 배반사건이 아니다.

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$ 이다.

061 답 $\frac{4}{5}$

$P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B)$ 이므로

$$\frac{3}{5} = 1 - P(A \cap B) \quad \therefore P(A \cap B) = \frac{2}{5}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{7}{10} - \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

062 답 $\frac{1}{2}$

A와 B가 서로 배반사건이므로 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 에서

$$\frac{2}{3} = P(A) + \frac{1}{3}P(A), \frac{4}{3}P(A) = \frac{2}{3}$$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{2}$$

063 답 ①

$$P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

이때 A와 B가 서로 배반사건이면 $P(A \cap B) = 0$ 이므로

$$P(A \cup B) = \frac{7}{12}$$

$$\therefore P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

다른 풀이 A와 B가 서로 배반사건이면 $A \cap B = \emptyset$ 이므로

$$A \cap B^c = A, A^c \cap B = B$$

$$\therefore P(A \cap B^c) = P(A) = \frac{1}{3}, P(A^c \cap B) = P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{에서 } P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$\therefore P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$$

064 답 ②

$$P(A) = \frac{5}{2}P(A \cap B), P(B) = 3P(A \cap B) \text{이므로}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{5}{2}P(A \cap B) + 3P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{9}{2}P(A \cap B)$$

$$\therefore \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{2}{9}$$

065 **답** $\frac{13}{10}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 에서

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - P(A \cup B)$$

$$= \frac{31}{20} - P(A \cup B)$$

이므로 $P(A \cup B)$ 가 최소일 때 $P(A \cap B)$ 가 최대이고,

$P(A \cup B)$ 가 최대일 때 $P(A \cap B)$ 가 최소이다.

이때 $P(A \cup B) \geq P(A)$, $P(A \cup B) \geq P(B)$, $P(A \cup B) \leq 1$ 이므로

$$P(A \cup B) \geq \frac{3}{4}, P(A \cup B) \geq \frac{4}{5}, P(A \cup B) \leq 1$$

$$\text{즉, } \frac{4}{5} \leq P(A \cup B) \leq 1 \text{이므로}$$

$$-1 \leq -P(A \cup B) \leq -\frac{4}{5} \quad \therefore \frac{11}{20} \leq \frac{31}{20} - P(A \cup B) \leq \frac{3}{4}$$

$$\text{따라서 } M = \frac{3}{4}, m = \frac{11}{20} \text{이므로 } M + m = \frac{13}{10}$$

066 **답** $\frac{3}{5}$

2의 배수가 적힌 카드가 나오는 사건을 A , 5의 배수가 적힌 카드가 나오는 사건을 B 라 하면 $A \cap B$ 는 10의 배수인 사건이므로

$$P(A) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}, P(A \cap B) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$$

067 **답** ⑤

미술을 좋아하는 학생을 택하는 사건을 A , 음악을 좋아하는 학생을 택하는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = 0.55, P(B) = 0.3, P(A \cap B) = \frac{24}{120} = 0.2$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.55 + 0.3 - 0.2 = 0.65$$

068 **답** $\frac{13}{28}$

꺼낸 2개의 공 중에서 1개가 3이 적힌 공인 사건을 A , 4가 적힌 공인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{1 \times 7C_1}{8C_2} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1 \times 7C_1}{8C_2} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4},$$

$$P(A \cap B) = \frac{1 \times 1}{8C_2} = \frac{1}{28}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{28} = \frac{13}{28}$$

069 **답** $\frac{11}{48}$

두 주머니에서 각각 한 개씩 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_6C_1 \times {}_8C_1 = 48$$

두 공에 적힌 수의 합이 12 이상인 사건을 A , 6의 배수인 사건을 B 라 하자.

이때 공에 적힌 두 수를 a, b 라 하면 순서쌍 (a, b) 에 대하여

$$A = \{(4, 8), (5, 7), (5, 8), (6, 6), (6, 7), (6, 8)\},$$

$$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (4, 8), (5, 7), (6, 6)\},$$

$$A \cap B = \{(4, 8), (5, 7), (6, 6)\} \text{이므로}$$

$$P(A) = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}, P(B) = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}, P(A \cap B) = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{16} = \frac{11}{48}$$

070 **답** ④

꺼낸 2개의 공이 모두 흰색인 사건을 A , 모두 검은색인 사건을 B 라 하자.

A 는 흰 공 4개 중에서 2개를 꺼내는 사건이므로

$$P(A) = \frac{{}_4C_2}{{}_9C_2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

B 는 검은 공 5개 중에서 2개를 꺼내는 사건이므로

$$P(B) = \frac{{}_5C_2}{{}_9C_2} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

A 와 B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{5}{18} = \frac{4}{9}$$

071 **답** $\frac{1}{4}$

선생님 1명이 맨 앞에 서는 사건을 A , 맨 뒤에 서는 사건을 B 라 하자.

A 는 학생 7명을 선생님 뒤에 일렬로 나열하는 사건이므로

$$P(A) = \frac{7!}{8!} = \frac{1}{8}$$

B 는 학생 7명을 선생님 앞에 일렬로 나열하는 사건이므로

$$P(B) = \frac{7!}{8!} = \frac{1}{8}$$

A 와 B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

072 **답** $\frac{1}{4}$

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

두 눈의 수의 합이 5인 사건을 A , 8인 사건을 B 라 하자.

이때 나오는 두 눈의 수를 a, b 라 하면 순서쌍 (a, b) 에 대하여

$$A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\},$$

$$B = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\} \text{이므로}$$

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, P(B) = \frac{5}{36}$$

A 와 B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{5}{36} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

073 답 $\frac{5}{14}$

남학생이 여학생보다 많으려면 5명의 학생 중에서 남학생이 3명 또는 4명이어야 한다.

남학생이 3명인 사건을 A , 4명인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{{}_4C_3 \times {}_5C_2}{{}_9C_5} = \frac{40}{126} = \frac{20}{63}$$

$$P(B) = \frac{{}_4C_4 \times {}_5C_1}{{}_9C_5} = \frac{5}{126}$$

A 와 B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{20}{63} + \frac{5}{126} = \frac{5}{14} \end{aligned}$$

074 답 ④

15개의 공 중에서 3의 배수가 적힌 공은 3, 6, 9, 12, 15의 5개이므로 3의 배수가 아닌 수가 적힌 공은 10개이다.

꺼낸 2개의 공 중에서 적어도 1개가 3의 배수가 적힌 공인 사건을 A 라 하면 A^c 은 2개 모두 3의 배수가 아닌 수가 적힌 공인 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_{10}C_2}{{}_{15}C_2} = \frac{45}{105} = \frac{3}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

075 답 $\frac{3}{5}$

6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(6-1)! = 5! = 120$$

어린이 사이에 적어도 1명의 어른이 앉는 사건을 A 라 하면 A^c 은 어린이끼리 이웃하게 앉는 사건이다.

어린이를 한 사람으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(5-1)! = 4! = 24$, 어린이끼리 자리를 바꾸어 앉는 경우의 수는 $2! = 2$ 이므로 어린이끼리 이웃하게 앉는 경우의 수는

$$24 \times 2 = 48$$

$$\therefore P(A^c) = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

076 답 $\frac{61}{125}$

함숫값이 2인 원소가 집합 X 에 적어도 1개 있는 함수인 사건을 A 라 하면 A^c 은 함숫값이 2인 원소가 집합 X 에 없는 함수인 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_4\Pi_3}{{}_5\Pi_3} = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125}$$

077 답 7

$(n+3)$ 개의 공 중에서 2개의 공을 꺼낼 때, 적어도 1개가 흰 공인 사건을 A 라 하면 A^c 은 2개 모두 검은 공인 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_3C_2}{{}_{n+3}C_2} = \frac{6}{(n+3)(n+2)}$$

$P(A) = 1 - P(A^c)$ 에서

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{14}{15} = \frac{1}{15} \text{이므로}$$

$$\frac{6}{(n+3)(n+2)} = \frac{1}{15}$$

$$(n+3)(n+2) = 90 = 10 \times 9$$

$\therefore n = 7$ ($\because n$ 은 자연수)

078 답 $\frac{31}{32}$

서로 다른 6개의 동전을 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

앞면이 나온 동전의 개수와 뒷면이 나온 동전의 개수의 차가 4 이하인 사건을 A 라 하면 A^c 은 앞면이 나온 동전의 개수와 뒷면이 나온 동전의 개수의 차이가 5 이상인 사건이다.

이때 동전의 개수의 차는 5가 될 수 없으므로 A^c 은 개수의 차가 6, 즉 모두 앞면만 나오거나 모두 뒷면만 나오는 사건이다.

$$\therefore P(A^c) = \frac{1+1}{64} = \frac{2}{64} = \frac{1}{32}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

079 답 ④

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

나오는 두 눈의 수의 곱이 4의 배수가 아닌 사건을 A 라 하면 A^c 은 곱이 4의 배수인 사건이다.

이때 나오는 두 눈의 수를 a, b 라 하면 순서쌍 (a, b) 에 대하여 ab 가 4의 배수인 경우는

$(1, 4), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (6, 2), (6, 4), (6, 6) \Rightarrow 15$ 가지

$$\therefore P(A^c) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

080 **답** $\frac{65}{84}$

꺼낸 동전의 금액의 합이 200원 미만인 사건을 A 라 하면 A^c 은 금액의 합이 200원 이상인 사건이다.

A^c 은 100원짜리 동전 2개와 다른 동전 1개를 꺼내거나 100원짜리 동전 1개와 50원짜리 동전 2개를 꺼내는 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_2C_2 \times {}_7C_1 + {}_2C_1 \times {}_4C_2}{{}_9C_3} = \frac{19}{84}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{19}{84} = \frac{65}{84}$$

081 **답** $\frac{4}{9}$

한 개의 주사위를 3번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

x, y, z 가 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$ 을 만족시키는 사건을 A 라 하면 A^c 은 $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$, 즉 $x \neq y, y \neq z, z \neq x$ 를 만족시키는 사건이다. 즉, A^c 은 주사위의 눈의 수가 모두 다른 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_6P_3}{{}_6P_3} = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

082 **답** ⑤

$$A = \{2, 8, 10\}, B = \{2, 3, 5, 7\}, C = \{3, 9\}$$

- ① $n(A)=3$
- ② $A \cap B = \{2\}$ 이므로 A 와 B 는 서로 배반사건이 아니다.
- ③ $A \cap C = \emptyset$ 이므로 A 와 C 는 서로 배반사건이다.
- ④ $B \cap C = \{3\}$ 이므로 B 와 C 는 서로 배반사건이 아니다.
- ⑤ $C^c = \{2, 5, 7, 8, 10\}$ 이므로 $A \subset C^c$

083 **답** $\frac{1}{12}$

한 개의 주사위를 2번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

두 직선 $ax+2y=2, x-by=5$ 가 서로 수직이므로

$$a-2b=0 \quad \therefore a=2b$$

$a=2b$ 를 만족시키는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(2, 1), (4, 2), (6, 3) \Rightarrow 3$ 가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

084 **답** $\frac{5}{8}$

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지이므로 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$$4 \times 4! = 96$$

짝수이면 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4이다.

(i) 일의 자리에 0이 오는 경우

나머지 자리에는 4개의 숫자를 일렬로 나열하면 되므로 자연수의 개수는 $4! = 24$

(ii) 일의 자리에 2가 오는 경우

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 4의 3가지이고, 나머지 자리에는 3개의 숫자를 일렬로 나열하면 되므로 자연수의 개수는 $3 \times 3! = 18$

(iii) 일의 자리에 4가 오는 경우

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3의 3가지이고, 나머지 자리에는 3개의 숫자를 일렬로 나열하면 되므로 자연수의 개수는 $3 \times 3! = 18$

(i), (ii), (iii)에서 짝수의 개수는

$$24 + 18 + 18 = 60$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{96} = \frac{5}{8}$

085 **답** $\frac{3}{5}$

6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(6-1)! = 5! = 120$$

남학생 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)! = 3! = 6$, 남학생 4명 사이사이에 여학생 2명을 앉히는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$ 이므로 여학생끼리 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는

$$6 \times 12 = 72$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{72}{120} = \frac{3}{5}$

086 **답** $\frac{24}{125}$

5개의 숫자에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$${}_5\Pi_4 = 5^4 = 625$$

각 자리의 숫자가 모두 다르려면 5개의 숫자 중에서 서로 다른 4개를 택하여 자연수를 만들어야 하므로 자연수의 개수는

$${}_5P_4 = 120$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{120}{625} = \frac{24}{125}$

087 **답** ③

X 에서 X 로의 함수의 개수는

$${}_4\Pi_4 = 4^4 = 256$$

치역의 모든 원소의 곱이 홀수인 함수의 개수는 치역의 원소가 모두 홀수인 함수, 즉 집합 X 에서 집합 $\{3, 5\}$ 로의 함수의 개수와 같으므로

$${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{256} = \frac{1}{16}$

088 **답** ①

destiny에 있는 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$7! = 5040$$

t, s, y를 같은 문자 T로 생각하여 d, e, T, T, i, n, T를 일렬로 나열한 후 첫 번째 T를 y로, 두 번째 T를 t로, 세 번째 T를 s로 바꾸면 되므로 그 경우의 수는

$$\frac{7!}{3!}=840$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{840}{5040}=\frac{1}{6}$

089 답 ① $\frac{1}{10}$

5장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=10$$

카드에 적힌 세 숫자의 곱이 홀수인 경우는 세 숫자가 모두 홀수인 경우이므로 1, 3, 5가 적힌 카드를 뽑는 1가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{10}$

090 답 ① $\frac{11}{63}$

9장의 카드 중에서 4장을 꺼내는 경우의 수는

$${}_9C_4=126$$

꺼낸 카드에 적힌 수 중에서 가장 작은 수를 a, 가장 큰 수를 b라 할 때, $a+b$ 가 9인 경우는 다음과 같다.

(i) $a=1, b=8$ 인 경우

나머지 2장은 2, 3, 4, 5, 6, 7이 적힌 카드 중에서 꺼내야 하므로 그 경우의 수는

$${}_6C_2=15$$

(ii) $a=2, b=7$ 인 경우

나머지 2장은 3, 4, 5, 6이 적힌 카드 중에서 꺼내야 하므로 그 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

(iii) $a=3, b=6$ 인 경우

나머지 2장은 4, 5가 적힌 카드 중에서 꺼내야 하므로 그 경우의 수는

$${}_2C_2=1$$

(i), (ii), (iii)에서 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합이 9인 경우의 수는

$$15+6+1=22$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{22}{126}=\frac{11}{63}$

091 답 ⑤

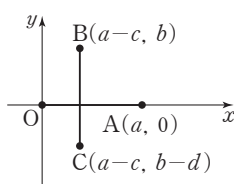
한 개의 주사위를 네 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$$

네 점의 위치가 오른쪽 그림과 같을 때 선분 OA와 선분 BC가 만날 수 있으므로 $0 \leq a-c \leq a, b-d \leq 0 \leq b$ 이어야 한다.

$$0 \leq a-c \leq a \text{에서 } a \geq c$$

$$b-d \leq 0 \leq b \text{에서 } b \leq d$$



$a \geq c$ 인 경우는 6개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 큰 수부터 차례대로 a, c에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

$${}_6H_2={}_7C_2=21$$

$b \leq d$ 인 경우도 마찬가지로 이므로 그 경우의 수는

$${}_6H_2={}_7C_2=21$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{21 \times 21}{1296}=\frac{49}{144}$

092 답 ⑦

흰 바둑돌의 개수를 n이라 하면 검은 바둑돌의 개수는 $10-n$ 이고,

서로 다른 색의 바둑돌이 나올 확률이 $\frac{7}{15}$ 이므로

$$\frac{{}_nC_1 \times {}_{10-n}C_1}{{}_{10}C_2} = \frac{7}{15}, \quad \frac{n(10-n)}{45} = \frac{7}{15}$$

$$n(10-n)=21, \quad n^2-10n+21=0$$

$$(n-3)(n-7)=0 \quad \therefore n=3 \text{ 또는 } n=7$$

이때 흰 바둑돌이 검은 바둑돌보다 많이 들어 있으므로 흰 바둑돌의 개수는 7이다.

093 답 ①

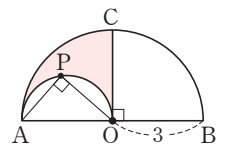
오른쪽 그림에서 삼각형 PAO가 직각삼각형이라면 선분 AO를 지름으로 하는

반원 위에 점 P가 있거나 $\angle BOC=90^\circ$ 인 점 C를 잡을 때 선분 OC 위에 점 P가 있

어야 한다.

따라서 삼각형 PAO가 예각삼각형이 되려면 점 P가 색칠한 부분에 있어야 하므로 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\text{AB를 지름으로 하는 반원의 넓이})} = \frac{\frac{9}{4}\pi - \frac{9}{8}\pi}{\frac{9}{2}\pi} = \frac{1}{4}$$



094 답 ③

ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $A \cap B = \emptyset$ 이므로

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ㄴ. $\emptyset \subset (A \cap B) \subset S$ 이므로 $0 \leq P(A \cap B) \leq 1$

ㄷ. [반례] $S = \{1, 2, 3\}, A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$ 이면

$$A - B = \{1\}$$

$$\text{이때 } P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{2}{3}, P(A - B) = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$P(A - B) > P(A) - P(B)$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

095 답 ③ $\frac{3}{8}$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\therefore P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

096 [답] $\frac{3}{10}$

$$P(B) = 2 \times \frac{3}{10} = \frac{3}{5} \text{이므로 } P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

A 와 B^c 이 서로 배반사건이므로

$$P(A \cup B^c) = P(A) + P(B^c) = \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{7}{10}$$

$$\therefore P(B \cap A^c) = P((A \cup B^c)^c) = 1 - P(A \cup B^c)$$

$$= 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

[다른 풀이] A 와 B^c 은 서로 배반사건이므로

$$A \cap B^c = \emptyset \quad \therefore A \subset B$$

$$\text{이때 } P(A) = \frac{3}{10}, P(B) = \frac{3}{5} \text{이므로}$$

$$P(B \cap A^c) = P(B) - P(A) = \frac{3}{5} - \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$$

097 [답] ①

$$12x^2 - 7nx + n^2 = 0 \text{을 풀면}$$

$$(4x - n)(3x - n) = 0 \quad \therefore x = \frac{n}{4} \text{ 또는 } x = \frac{n}{3}$$

이때 이차방정식이 정수해를 가지려면 자연수 n 이 4의 배수 또는 3의 배수이어야 한다.

n 이 4의 배수인 사건을 A , 3의 배수인 사건을 B 라 하면 $A \cap B$ 는 12의 배수인 사건이므로

$$P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}, P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{1}{4} + \frac{3}{10} - \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$$

098 [답] ④

6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 3!} = 60$$

2개의 b 가 이웃하는 사건을 A , 3개의 c 가 모두 이웃하는 사건을 B 라 하자.

A 는 2개의 b 를 하나의 문자로 생각하여 일렬로 나열하는 사건이므로 그 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 20 \quad \therefore P(A) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

B 는 3개의 c 를 하나의 문자로 생각하여 일렬로 나열하는 사건이므로 그 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12 \quad \therefore P(B) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

$A \cap B$ 는 2개의 b 를 하나의 문자로, 3개의 c 를 또 다른 하나의 문자로 생각하여 일렬로 나열하는 사건이므로 그 경우의 수는

$$3! = 6 \quad \therefore P(A \cap B) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{13}{30}$$

099 [답] $\frac{1}{7}$

뽑힌 2명 모두 1학년 학생인 사건을 A , 2학년 학생인 사건을 B 라 하자.

A 는 1학년 학생 2명을 모두 뽑는 사건이므로

$$P(A) = \frac{{}_2C_2}{{}_8C_2} = \frac{1}{28}$$

B 는 2학년 학생 3명 중에서 2명을 뽑는 사건이므로

$$P(B) = \frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = \frac{3}{28}$$

A 와 B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{28} + \frac{3}{28} = \frac{1}{7}$$

100 [답] 6

집합 X 의 원소 중에서 정수의 개수를 k 라 하자.

택한 3개의 원소 중에서 적어도 1개는 정수인 사건을 A 라 하면 A^c 은 모두 정수가 아닌 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_{10-k}C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{{}_{10-k}C_3}{120}$$

$$\text{이때 } P(A) = \frac{29}{30} \text{이므로 } P(A^c) = 1 - \frac{29}{30} = \frac{1}{30} \text{에서}$$

$$\frac{{}_{10-k}C_3}{120} = \frac{1}{30}, {}_{10-k}C_3 = 4$$

$$\frac{(10-k)(9-k)(8-k)}{3 \times 2 \times 1} = 4$$

$$(10-k)(9-k)(8-k) = 4 \times 3 \times 2$$

$$\therefore k = 6 (\because k \text{는 자연수})$$

101 [답] $\frac{21}{32}$

집합 X 의 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$

택한 부분집합의 원소의 개수가 3 이상인 사건을 A 라 하면 A^c 은 부분집합의 원소의 개수가 2 이하인 사건이다.

A^c 은 집합 X 의 원소 6개 중에서 0개를 택하거나 1개를 택하거나 2개를 택하여 만든 부분집합인 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_6C_0 + {}_6C_1 + {}_6C_2}{64} = \frac{11}{32}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{11}{32} = \frac{21}{32}$$

102 [답] ②

뽑은 공에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A , 5의 배수인 사건을 B 라 하면 $A \cap B$ 는 15의 배수인 사건이므로

$$P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}, P(B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, P(A \cap B) = \frac{1}{20}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) \\ = 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$$

001 답 ①

$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = \frac{2}{5}$ 이므로

$$P(A \cup B) = \frac{3}{5}$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 이므로

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}$$

002 답 $\frac{15}{26}$

택한 한 명이 여학생인 사건을 A , 답양을 선호하는 학생인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{26}{60} = \frac{13}{30}, P(A \cap B) = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{13}{30}} = \frac{15}{26}$$

003 답 $\frac{5}{14}$

첫 번째로 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 A , 두 번째로 꺼낸 공이 흰 공인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{5}{8}, P(B|A) = \frac{4}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

004 답 ③

이 야구팀이 낮에 열리는 경기를 하는 사건을 A , 경기에서 이기는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{1}{5} = 0.2, P(A^c) = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$P(B|A) = 0.5, P(B|A^c) = 0.6$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0.2 \times 0.5 = 0.1,$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = 0.8 \times 0.6 = 0.48$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = 0.1 + 0.48 = 0.58$$

005 답 $\frac{5}{9}$

택한 한 명이 남학생인 사건을 A , 수시 모집에 응시하지 않은 학생인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}, P(A^c) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(B|A) = \frac{1}{12}, P(B|A^c) = \frac{1}{10}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{20},$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{25}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)} \\ &= \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{20} + \frac{1}{25}} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

006 답 ④

$A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{3, 6\}$ 이므로

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\neg. A \cap B = \{2\} \text{이므로 } P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

따라서 $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ 이므로 두 사건 A, B 는 서로 종속이다.

$$\neg. A \cap C = \{3\} \text{이므로 } P(A \cap C) = \frac{1}{6}$$

따라서 $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ 이므로 두 사건 A, C 는 서로 독립이다.

$$\neg. B \cap C = \{6\} \text{이므로 } P(B \cap C) = \frac{1}{6}$$

따라서 $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ 이므로 두 사건 B, C 는 서로 독립이다.

따라서 보기 중 서로 독립인 사건인 것은 $\neg, \neg$ 이다.

007 답 $\neg$

$\neg$. [반례] 표본공간을 $S = \{1, 2, 3\}$ 이라 하고 $A = \{1\}$ 이라 하면

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(A^c) = \frac{2}{3}, P(A \cap A^c) = 0$$

$$\therefore P(A \cap A^c) \neq P(A)P(A^c)$$

따라서 두 사건 A, A^c 은 서로 종속이다.

$\neg$. [반례] 표본공간을 $S = \{1, 2, 3\}$ 이라 하고 $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ 라 하면

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = 0$$

$$\therefore P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

따라서 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 두 사건 A, B 가 서로 배반사건이지만 A, B 는 서로 종속이다.

$\neg$. 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이므로

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)\{1 - P(B)\} \\ &= P(A)P(B^c) \end{aligned}$$

따라서 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A, B^c 도 서로 독립이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$ 이다.

008 답 ① $\frac{1}{6}$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

이때 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 이므로

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$\frac{4}{9} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{3}P(B)$$

$$\frac{2}{3}P(B) = \frac{1}{9} \quad \therefore P(B) = \frac{1}{6}$$

009 답 ⑤

갑과 을이 성공하는 사건을 각각 A, B 라 하면

$$P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{2}{3}$$

이때 두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{11}{12} \end{aligned}$$

010 답 ⑤

한 발 이상 10점 과녁에 맞히는 사건을 A 라 하면 한 발도 10점 과녁을 맞히지 못하는 사건은 A^c 이므로

$$P(A^c) = {}_3C_0 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$\therefore P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

011 답 ⑤ $\frac{5}{16}$

한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

동전의 앞면이 나오는 횟수를 x , 뒷면이 나오는 횟수를 y 라 하면 동전을 6번 던지므로

$$x + y = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원점에서 출발한 점 P 가 다시 원점으로 돌아와야 하므로

$$x - y = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $x = 3, y = 3$

따라서 앞면이 3번, 뒷면이 3번 나와야 하므로 구하는 확률은

$${}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

012 답 ④ $\frac{4}{5}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{이므로}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{2}{5} + P(B) - \frac{1}{10} \quad \therefore P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\therefore P(A^c | B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

013 답 ④

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{이므로}$$

$$0.5 = 0.3 + 0.4 - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \cap B) = 0.2$$

$$\therefore P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$$

014 답 ③ $\frac{3}{10}$

A, B 가 서로 배반사건이므로 $A \cap B = \emptyset$

즉, $B \subset A^c$ 이므로 $B \cap A^c = B$

$$\therefore P(B \cap A^c) = P(B) = \frac{1}{5}$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$P(B | A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{10}$$

015 답 ① $\frac{1}{2}$

$$P(A^c | B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{3}{4} - P(A \cap B)}{\frac{3}{4}}, \quad \frac{3}{4} - P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{2}$$

016 답 ⑤ $\frac{5}{3}$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{3}} = 3P(A \cap B) \text{이므로}$$

$P(A | B)$ 는 $P(A \cap B)$ 가 최대일 때 최댓값을 갖고, $P(A \cap B)$ 가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

(i) $P(B) < P(A)$ 이므로 $P(A \cap B)$ 가 최대일 때는 $A \cap B = B$ 일 때이다.

따라서 $P(A \cap B)$ 의 최댓값은 $P(B) = \frac{1}{3}$ 이다.

$$\therefore M = 3P(A \cap B) = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

$$(ii) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{8}{9} + \frac{1}{3} - P(A \cap B) = \frac{11}{9} - P(A \cap B)$$

이므로 $P(A \cap B)$ 가 최소일 때는 $P(A \cup B)$ 가 최대일 때, 즉 $P(A \cup B) = 1$ 일 때이다.

따라서 $1 = \frac{11}{9} - P(A \cap B)$ 에서 $P(A \cap B) = \frac{2}{9}$ 이므로

$P(A \cap B)$ 의 최솟값은 $\frac{2}{9}$ 이다.

$$\therefore m = 3P(A \cap B) = 3 \times \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } M + m = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

017 답 5/6

택한 한 명이 2학년 학생인 사건을 A , 남학생인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}, P(A \cap B) = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{6}$$

018 답 ③

택한 한 명이 버스로 등교하는 학생인 사건을 A , 여학생인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = 0.6, P(A \cap B) = 0.25$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.25}{0.6} = \frac{5}{12}$$

019 답 ④

당첨 제비를 한 개 뽑는 사건을 A , 1등 당첨 제비를 한 개 뽑는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{{}_5C_1 \times {}_5C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}, P(A \cap B) = \frac{{}_2C_1 \times {}_5C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$$

020 답 2

택한 한 명이 남자인 사건을 A , B 영화를 선호하는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{14+x}{38+x}, P(A \cap B) = \frac{x}{38+x}$$

택한 한 명이 남자일 때, 그 사람이 B 영화를 선호할 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{x}{38+x}}{\frac{14+x}{38+x}} = \frac{x}{14+x}$$

$$\text{즉, } \frac{x}{14+x} = \frac{1}{8} \text{이므로 } 8x = 14+x \quad \therefore x = 2$$

021 답 7/8

택한 초콜릿이 화이트 초콜릿인 사건을 A , 땅콩이 들어 있는 초콜릿인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{3}{4}, P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{6}$$

이때 $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$ 이므로

$$\frac{1}{6} = 1 - P(A \cup B)$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 이므로

$$\frac{5}{6} = \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{7}{12}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{7}{8}$$

022 답 ③

첫 번째에 당첨권을 뽑지 못하는 사건을 A , 두 번째에 당첨권을 뽑지 못하는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, P(B|A) = \frac{9}{14}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{2}{3} \times \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$$

023 답 ③

택한 한 명이 남자인 사건을 A , 40대인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = 0.8, P(B|A) = 0.6$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0.8 \times 0.6 = 0.48$$

024 답 1/6

노란색 필통을 택하는 사건을 A , 빨간색 볼펜을 꺼내는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B|A) = \frac{4}{4+8} = \frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

025 답 7

첫 번째에 100원짜리 동전을 꺼내는 사건을 A , 두 번째에 500원짜리 동전을 꺼내는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{4}{n+4}, P(B|A) = \frac{n}{n+3}$$

따라서 첫 번째는 100원짜리 동전을, 두 번째는 500원짜리 동전을 꺼낼 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{4}{n+4} \times \frac{n}{n+3}$$

$$\text{즉, } \frac{4}{n+4} \times \frac{n}{n+3} = \frac{2}{7} \text{이므로}$$

$$(n+3)(n+4) = 14n, n^2 - 7n + 12 = 0$$

$$(n-3)(n-4) = 0 \quad \therefore n = 3 \text{ 또는 } n = 4$$

따라서 모든 n 의 값의 합은 $3+4=7$

026 답 $\frac{5}{8}$

진아가 망고 푸딩을 꺼내 먹는 사건을 A , 지원이 망고 푸딩을 꺼내는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{5}{8}, P(A^c) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(B|A) = \frac{4}{7}, P(B|A^c) = \frac{5}{7}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14},$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{5}{14} + \frac{15}{56} = \frac{5}{8}$$

027 답 ④

택한 한 명이 암에 걸린 사람인 사건을 A , 암에 걸렸다고 진단 받는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = 0.1, P(A^c) = 1 - 0.1 = 0.9$$

$$P(B|A) = 0.8, P(B|A^c) = 0.05$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0.1 \times 0.8 = 0.08,$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = 0.9 \times 0.05 = 0.045$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = 0.08 + 0.045 = 0.125$$

028 답 $\frac{7}{20}$

화요일에 비가 오는 사건을 A , 수요일에 비가 오는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(A^c) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(B|A) = \frac{1}{2}, P(B|A^c) = \frac{1}{5}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{7}{20}$$

029 답 $\frac{19}{30}$

A 주머니를 택하는 사건을 A , 서로 다른 색의 공을 꺼내는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(A^c) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(B|A) = \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{2}{3}, P(B|A^c) = \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{10} = \frac{19}{30}$$

030 답 ③

흰 옷을 택하는 사건을 A , 로봇이 흰 옷이라고 판별하는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, P(A^c) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P(B|A) = 1 - p, P(B|A^c) = p$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{2}{5}(1 - p),$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{3}{5}p$$

따라서 로봇이 흰 옷이라고 판별할 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{2}{5}(1 - p) + \frac{3}{5}p = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}p$$

$$\text{즉, } \frac{2}{5} + \frac{1}{5}p = \frac{11}{25} \text{ 이므로 } p = \frac{1}{5}$$

031 답 $\frac{21}{29}$

택한 한 명이 중국어를 선택한 학생인 사건을 A , 안경을 쓴 학생인 사건을 B 라 하면

$$P(A^c) = 0.4, P(A) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$P(B|A^c) = 0.4, P(B|A) = 0.7$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0.6 \times 0.7 = 0.42,$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = 0.4 \times 0.4 = 0.16$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)} \\ &= \frac{0.42}{0.42 + 0.16} = \frac{0.42}{0.58} = \frac{21}{29} \end{aligned}$$

032 답 $\frac{7}{8}$

갑이 당첨 제비를 뽑지 못하는 사건을 A , 을이 당첨 제비를 뽑는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{7}{9}, P(A^c) = 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$$

$$P(B|A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, P(B|A^c) = \frac{1}{8}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{7}{9} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{36},$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{36}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)} \\ &= \frac{\frac{7}{36}}{\frac{7}{36} + \frac{1}{36}} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

033 답 ①

택한 한 명이 우대 고객인 사건을 A , 보험에 재가입하지 않은 고객인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{3}{10}, P(A^c) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

$$P(B|A) = 1 - \frac{80}{100} = \frac{1}{5}, P(B|A^c) = 1 - \frac{40}{100} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{50},$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{21}{50}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)} \\ &= \frac{\frac{3}{50}}{\frac{3}{50} + \frac{21}{50}} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

034 답 7/17

A 상자를 택하는 사건을 A, 흰 구슬 2개를 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(A^c) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(B|A) = \frac{{}^3C_2}{{}^6C_2} = \frac{1}{5}, P(B|A^c) = \frac{{}^4C_2}{{}^7C_2} = \frac{2}{7}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10},$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)} \\ &= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{7}} = \frac{7}{17} \end{aligned}$$

035 답 30

검은색 볼펜을 꺼내는 사건을 A, 서로 같은 색 볼펜을 꺼내는 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{n}{100}, P(A^c) = 1 - \frac{n}{100} = \frac{100-n}{100}$$

$$P(B|A) = \frac{100-2n}{100}, P(B|A^c) = \frac{2n}{100}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{n}{100} \times \frac{100-2n}{100} = \frac{100n-2n^2}{10000}$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{100-n}{100} \times \frac{2n}{100} = \frac{200n-2n^2}{10000}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)} \\ &= \frac{\frac{100n-2n^2}{10000}}{\frac{100n-2n^2}{10000} + \frac{200n-2n^2}{10000}} = \frac{n-50}{2n-150} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{n-50}{2n-150} = \frac{2}{9} \text{ 이므로 } 9n-450=4n-300$$

$$5n=150 \quad \therefore n=30$$

036 답 ⑤

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 표본공간은

{HH, HT, TH, TT}이고 $A = \{TH, TT\}$, $B = \{HT, TT\}$,

$C = \{HT, TH\}$ 이므로

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\neg, A \cap B = \{TT\} \text{ 이므로 } P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

따라서 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

$$\neg, A \cap C = \{TH\} \text{ 이므로 } P(A \cap C) = \frac{1}{4}$$

따라서 $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ 이므로 두 사건 A, C는 서로 독립이다.

$$\neg, B \cap C = \{HT\} \text{ 이므로 } P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

따라서 $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ 이므로 두 사건 B, C는 서로 독립이다.

따라서 보기 중 서로 독립인 사건은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

037 답 $\neg, \neg$

$$P(A) = P(B) = P(C) = P(D) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(E) = \frac{3}{4}$$

$$\neg, A \cap B = \{1\} \text{ 이므로 } P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

따라서 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

$$\neg, A \cap C = \emptyset \text{ 이므로 } P(A \cap C) = 0$$

따라서 $P(A \cap C) \neq P(A)P(C)$ 이므로 두 사건 A, C는 서로 종속이다.

$$\neg, A \cap D = \{3\} \text{ 이므로 } P(A \cap D) = \frac{1}{4}$$

따라서 $P(A \cap D) = P(A)P(D)$ 이므로 두 사건 A, D는 서로 독립이다.

$$\neg, A \cap E = \{3\} \text{ 이므로 } P(A \cap E) = \frac{1}{4}$$

따라서 $P(A \cap E) \neq P(A)P(E)$ 이므로 두 사건 A, E는 서로 종속이다.

따라서 보기 중 사건 A와 서로 독립인 사건은 $\neg, \neg$ 이다.

038 답 ④

$$P(A) = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

$\neg, A \cap B$ 는 10의 배수가 적힌 카드가 나오는 사건이므로

$$P(A \cap B) = \frac{5}{50} = \frac{1}{10}$$

$$\neg, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3}{5}$$

$\neg, P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다. 따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

039 답 3

$S = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이므로 $\frac{1}{3} = \frac{1}{2}P(B) \quad \therefore P(B) = \frac{2}{3}$

따라서 $n(B) = 4$ 이고, $\{3, 4\} \subset B$, $2 \notin B$ 이어야 하므로 주어진 조건을 만족시키는 사건 B는 $\{1, 3, 4, 6\}$, $\{1, 3, 4, 12\}$, $\{3, 4, 6, 12\}$ 의 3개이다.

040 답 10

$$P(A) = \frac{15+k}{40}, P(B) = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}, P(A \cap B) = \frac{k}{40}$$

이때 두 사건 A, B 가 서로 독립이라면 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

이어야 하므로

$$\frac{k}{40} = \frac{15+k}{40} \times \frac{2}{5}$$

$$5k = 30 + 2k, 3k = 30 \quad \therefore k = 10$$

041 답 $\neg, \cup, \cap$

$\neg$. 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 사건 B 가 일어나거나 일어나지 않는 것이 사건 A 가 일어날 확률에 영향을 주지 않으므로 $P(A|B^c) = P(A)$

$\cup$. 두 사건 A, B 가 서로 배반사건이면 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 $P(A \cap B) = 0$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$\cap$. 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이고 두 사건 A^c, B 도 서로 독립이므로

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$$

$$\therefore P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ = P(A)P(B) + P(A^c)P(B)$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \cup, \cap$ 이다.

042 답 $\neg, \cap$

$\neg$. $P(A|B) = P(A), P(A|B^c) = P(A)$ 이므로 $P(A|B) = P(A|B^c)$

$\cup$. 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A^c, B 도 서로 독립이므로

$$P(A^c|B) = P(A^c) = 1 - P(A)$$

$\cap$. 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 $P(B|A) = P(B)$ 이고 두 사건 A^c, B^c 도 서로 독립이므로

$$P(B^c|A^c) = P(B^c)$$

$$\therefore P(B^c|A^c) = P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - P(B|A)$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \cap$ 이다.

다른 풀이 두 사건 A, B 가 서로 독립이면

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\cup. P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} \\ = \frac{P(B) - P(A)P(B)}{P(B)} = 1 - P(A)$$

$\cap. P(B|A) = P(B)$ 이므로

$$P(B^c|A^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(A^c)} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(A^c)} \\ = \frac{1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\}}{1 - P(A)} \\ = \frac{1 - \{P(A) + P(B) - P(A)P(B)\}}{1 - P(A)} \\ = \frac{1 - P(A) - \{1 - P(A)\}P(B)}{1 - P(A)} \\ = 1 - P(B) = 1 - P(B|A)$$

$$\therefore P(B^c|A^c) = 1 - P(B|A)$$

043 답 ②

두 사건 A, B 가 서로 독립이면

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \text{이므로}$$

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) \\ = 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\ = 1 - \{P(A) + P(B) - P(A)P(B)\} \\ = \{1 - P(A)\}\{1 - P(B)\} \\ = P(A^c)P(B^c)$$

따라서 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A^c, B^c 도 서로 독립이다.

044 답 ④

$\neg. P(A|B) = P(B|A)$ 이면

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\therefore P(A) = P(B) \text{ 또는 } P(A \cap B) = 0$$

그런데 이는 $A=B$ 를 의미하지는 않는다.

$\cup. P(A|B) = P(A|B^c)$ 에서

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)}$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$$

$$P(A \cap B)\{1 - P(B)\} = P(B)\{P(A) - P(A \cap B)\}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A, B 는 서로 독립이다.

$\cap. P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$ 이므로

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A)P(B) \text{이면}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A, B 는 서로 독립이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 $\cup, \cap$ 이다.

045 답 $\frac{2}{3}$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 에서

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2}P(B) \quad \therefore P(B) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

046 답 ④

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) - \frac{1}{2}P(B) \text{에서}$$

$$P(A)P(B) = P(A) - \frac{1}{2}P(B)$$

$$\frac{2}{3}P(B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}P(B)$$

$$\frac{7}{6}P(B) = \frac{2}{3} \quad \therefore P(B) = \frac{4}{7}$$

047 답 $\frac{1}{12}$

두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A, B^c 도 서로 독립이다.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{에서}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{3}P(B)$$

$$\frac{2}{3}P(B) = \frac{1}{2} \quad \therefore P(B) = \frac{3}{4}$$

$$\therefore P(B^c) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

048 답 $\frac{1}{4}$

두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A^c, B 와 두 사건 A, B^c 도 각각 서로 독립이다.

$$P(B|A^c) = P(B) = \frac{1}{6} \text{에서}$$

$$P(B^c) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) = \frac{1}{3} \text{에서}$$

$$P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(A) \times \frac{5}{6} + \{1 - P(A)\} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3}P(A) = \frac{1}{6} \quad \therefore P(A) = \frac{1}{4}$$

049 답 ①

두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A, B^c 도 서로 독립이다.

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = \frac{1}{12} \text{에서}$$

$$\frac{1}{4}P(B^c) = \frac{1}{12} \quad \therefore P(B^c) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$P(B^c \cap C^c) = P((B \cup C)^c) = 1 - P(B \cup C) = \frac{2}{9} \text{에서}$$

$$P(B \cup C) = \frac{7}{9}$$

두 사건 B, C 가 서로 배반사건이면 $P(B \cap C) = 0$ 이므로

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C)$$

$$\frac{7}{9} = P(B) + P(C), \quad \frac{7}{9} = \frac{2}{3} + P(C) \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore P(C) = \frac{1}{9}$$

050 답 $\frac{3}{4}$

두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A^c, B 와 두 사건 A^c, B^c 도 각각 서로 독립이다.

$$P(A \cup B^c) = P((A^c \cap B)^c) = 1 - P(A^c \cap B) = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$P(A^c \cap B) = \frac{1}{2} \quad \therefore P(A^c)P(B) = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$P(A \cup B) = P((A^c \cap B^c)^c) = 1 - P(A^c \cap B^c) = \frac{5}{6} \text{에서}$$

$$P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{6} \quad \therefore P(A^c)P(B^c) = \frac{1}{6} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{P(B)}{P(B^c)} = 3 \text{이므로}$$

$$P(B) = 3\{1 - P(B)\} \quad \therefore P(B) = \frac{3}{4}$$

다른 풀이 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A, B^c 도 서로 독립이다.

$$P(A \cup B^c) = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$P(A) + P(B^c) - P(A \cap B^c) = \frac{1}{2}$$

$$P(A) + P(B^c) - P(A)P(B^c) = \frac{1}{2}$$

$$P(A) + \{1 - P(B)\} - P(A)\{1 - P(B)\} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(A)P(B) = P(B) - \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6} \text{에서}$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{6}$$

$$P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{5}{6}$$

$$P(A) + P(B) - \left\{P(B) - \frac{1}{2}\right\} = \frac{5}{6} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{3}$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \frac{1}{3}P(B) = P(B) - \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3}P(B) = \frac{1}{2} \quad \therefore P(B) = \frac{3}{4}$$

051 답 $\frac{11}{15}$

A 와 B 가 그림을 완성하는 사건을 각각 A, B 라 하면

$$P(A) = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{1}{3}$$

이때 두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= \frac{3}{5} + \frac{1}{3} - \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{15} \end{aligned}$$

052 답 $\frac{3}{4}$

A 와 B 가 예선을 통과하는 사건을 각각 A, B 라 하면

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(A^c) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, P(A^c \cap B) = \frac{1}{2}$$

이때 두 사건 A^c, B 가 서로 독립이므로

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{3}P(B) \quad \therefore P(B) = \frac{3}{4}$$

053 ㉔ ②

두 수의 합이 홀수이려면 한 수는 홀수, 다른 한 수는 짝수이어야 한다.

두 정육면체 A, B의 바닥에 놓인 면에 적힌 수가 홀수인 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A, B^c과 두 사건 A^c, B도 서로 독립이다.

(i) 정육면체 A는 홀수, 정육면체 B는 짝수일 확률은

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$$

(ii) 정육면체 A는 짝수, 정육면체 B는 홀수일 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

054 ㉔ ①

A, B, C 세 사람이 게임에서 이기는 사건을 A, B, C라 하면

$$P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{3}{5}, P(C) = p, P(A \cap B^c \cap C^c) = \frac{1}{5}$$

세 사건 A, B, C가 서로 독립이므로 세 사건 A, B^c, C^c도 서로 독립이다.

$$P(A \cap B^c \cap C^c) = P(A)P(B^c)P(C^c) \text{이므로}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times (1 - p), \frac{1}{5} = \frac{4}{15}(1 - p)$$

$$1 - p = \frac{3}{4} \quad \therefore p = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

055 ㉔ $\frac{4}{81}$

동규가 이기는 경우를 ○, 지는 경우를 ×로 나타내자.

이때 동규가 이길 확률이 $\frac{1}{3}$ 이고 두 사람이 비기는 경우는 없으므로

로 승규가 이길 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다.

(i) 동규가 승자로 결정되는 경우

×○×○○이어야 하므로 그 확률은

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{243}$$

(ii) 승규가 승자로 결정되는 경우

○×○××이어야 하므로 그 확률은

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{243}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{4}{243} + \frac{8}{243} = \frac{4}{81}$$

056 ㉔ $\frac{80}{81}$

6의 약수의 눈이 1개 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^c은 6의 약수의 눈이 하나도 나오지 않는 사건이다.

한 개의 주사위를 던져서 6의 약수의 눈이 나오지 않을 확률이 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$P(A^c) = {}_4C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81}$$

057 ㉔ ①

한 개의 동전과 한 개의 주사위를 동시에 던져서 동전은 뒷면이 나오고 주사위는 4 이하의 눈이 나올 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{9}$$

058 ㉔ ④

어느 질병에 걸린 환자 한 명이 완치될 확률은 $\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ 이므로

(i) 4명 중에서 3명이 완치될 확률은

$${}_4C_3 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{256}{625}$$

(ii) 4명 모두 완치될 확률은

$${}_4C_4 \left(\frac{4}{5}\right)^4 \left(\frac{1}{5}\right)^0 = \frac{256}{625}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{256}{625} + \frac{256}{625} = \frac{512}{625}$$

059 ㉔ $\frac{80}{2187}$

A팀이 이길 확률이 $\frac{2}{3}$ 이고 두 팀이 비기는 경우는 없으므로 B팀

이 이길 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

5차전까지 A팀이 3승 2패로 앞설 확률은

$${}_5C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243}$$

7차전에서 B팀이 최종 우승하기 위해서는 6차전과 7차전을 모두

B팀이 이겨야 하므로 B팀이 최종 우승할 확률은

$$\frac{80}{243} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{80}{2187}$$

060 ㉔ $\frac{1}{4}$

(i) 예선 3문제를 모두 맞힐 확률은

$${}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$$

(ii) 예선 3문제 중 2문제를 맞히고, 추가 문제를 맞힐 확률은

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

061 답 764

세 명의 기술자 A, B, C 중에서 한 명을 임의로 택할 확률은 각각 $\frac{1}{3}$ 이다.

(i) 기술자 A를 택할 때, 불량품이 4개 이상일 확률은

$$\frac{1}{3} \times \{ {}_5C_4 0.1^4 \times 0.9^1 + {}_5C_5 0.1^5 \times 0.9^0 \} = \frac{1}{3} \times 0.1^4 \times 4.6$$

(ii) 기술자 B를 택할 때, 불량품이 4개 이상일 확률은

$$\frac{1}{3} \times \{ {}_5C_4 0.1^4 \times 0.9^1 + {}_5C_5 0.1^5 \times 0.9^0 \} = \frac{1}{3} \times 0.1^4 \times 4.6$$

(iii) 기술자 C를 택할 때, 불량품이 4개 이상일 확률은

$$\frac{1}{3} \times \{ {}_5C_4 0.2^4 \times 0.8^1 + {}_5C_5 0.2^5 \times 0.8^0 \} = \frac{1}{3} \times 0.2^4 \times 4.2$$

(i), (ii), (iii)에서 불량품이 4개 이상일 확률은

$$\frac{1}{3} \times 0.1^4 \times 4.6 + \frac{1}{3} \times 0.1^4 \times 4.6 + \frac{1}{3} \times 0.2^4 \times 4.2$$

$$= \frac{0.1^4}{30} \times (46 + 46 + 16 \times 42) = \frac{0.1^4}{30} \times 764$$

$$\therefore A = 764$$

062 답 $\frac{9}{28}$

꺼낸 2장의 카드에 적힌 숫자가 서로 같을 확률은

$$\frac{{}_4C_2 + {}_3C_2}{{}_7C_2} = \frac{6+3}{21} = \frac{3}{7}$$

(i) 카드에 적힌 숫자가 서로 같고 주사위를 2번 던져서 짝수의 눈이 2번 나올 확률은

$$\frac{3}{7} \times {}_2C_2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^0 = \frac{3}{28}$$

(ii) 카드에 적힌 숫자가 서로 다르고 주사위를 3번 던져서 짝수의 눈이 2번 나올 확률은

$$\left(1 - \frac{3}{7} \right) \times {}_3C_2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^1 = \frac{3}{14}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{28} + \frac{3}{14} = \frac{9}{28}$$

063 답 $\frac{5}{16}$

A가 이기는 횟수를 x , 지는 횟수를 y 라 하면 가위바위보를 5번하므로

$$x + y = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

위로 한 칸 가는 것을 +1, 아래로 한 칸 가는 것을 -1로 생각하면 가위바위보를 5번 하여 A가 밑에서 9번째 계단에 있으므로

$$x \times 1 + y \times (-1) = -1$$

$$\therefore x - y = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$x = 2, y = 3$$

가위바위보를 1번 하여 A가 이길 확률은 $\frac{1}{2}$ 이고, A가 2번 이기고

3번 져야 하므로 구하는 확률은

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{5}{16}$$

064 답 $\frac{15}{64}$

동전의 앞면이 나오는 횟수를 x , 뒷면이 나오는 횟수를 y 라 하면 오른쪽으로 4칸, 위쪽으로 2칸 이동해야 하므로

$$x = 4, y = 2$$

따라서 구하는 확률은

$${}_6C_4 \left(\frac{1}{2} \right)^4 \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{15}{64}$$

065 답 $\frac{50}{243}$

주사위를 5번 던져서 5의 약수의 눈이 나오는 횟수를 a , 5의 약수가 아닌 눈이 나오는 횟수를 b 라 하면 점 P가 이동하는 점의 좌표는 (a, b)

이때 $a + b = 5$ 이고 a, b 는 $0 \leq a \leq 5, 0 \leq b \leq 5$ 인 정수이므로 (a, b) 를 모두 구하면

$$(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)$$

이때 이 점 중에서 도형 $|x-3| + |y-1| = 1$ 위의 점은 $(3, 2)$ 와 $(4, 1)$ 이다.

(i) 점 P가 점 $(3, 2)$ 로 이동하는 경우

5의 약수의 눈이 3번, 5의 약수가 아닌 눈이 2번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{3} \right)^3 \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{40}{243}$$

(ii) 점 P가 점 $(4, 1)$ 로 이동하는 경우

5의 약수의 눈이 4번, 5의 약수가 아닌 눈이 1번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_5C_4 \left(\frac{1}{3} \right)^4 \left(\frac{2}{3} \right)^1 = \frac{10}{243}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{40}{243} + \frac{10}{243} = \frac{50}{243}$$

066 답 ④

상자를 3번 던지므로

$m + n = 3$ 이고, m, n 은 $0 \leq m \leq 3, 0 \leq n \leq 3$ 인 정수이므로

$$|m - n| = 1 \text{ 또는 } |m - n| = 3$$

그런데 $i^{|m-n|} = i$ 이라면 $|m - n| = 1$ 이어야 하므로

$$m - n = -1 \text{ 또는 } m - n = 1$$

(i) $m - n = -1$ 인 경우

$m = 1, n = 2$, 즉 2가 1번, 2가 아닌 숫자가 2번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{4} \right)^1 \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{27}{64}$$

(ii) $m - n = 1$ 인 경우

$m = 2, n = 1$, 즉 2가 2번, 2가 아닌 숫자가 1번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{4} \right)^2 \left(\frac{3}{4} \right)^1 = \frac{9}{64}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{27}{64} + \frac{9}{64} = \frac{9}{16}$$

067 답 $\frac{1}{2}$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{에서}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

068 답 $\frac{7}{20}$

택한 한 명이 남학생인 사건을 A , 피아노를 선호하는 학생인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}, P(B) = \frac{36}{50} = \frac{18}{25}, P(A \cap B) = \frac{9}{50}$$

이때 $P_1 = P(B|A)$, $P_2 = P(A|B)$ 이므로

$$P_1 = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{50}}{\frac{3}{10}} = \frac{3}{5}$$

$$P_2 = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{9}{50}}{\frac{18}{25}} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P_1 - P_2 = \frac{3}{5} - \frac{1}{4} = \frac{7}{20}$$

069 답 $\frac{2}{5}$

택한 2장의 카드가 모두 숫자가 적힌 카드인 사건을 A , 모두 숫자 1이 적힌 카드인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{{}^6C_2}{{}^{10}C_2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{{}^4C_2}{{}^{10}C_2} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{5}$$

070 답 $\frac{1}{6}$

택한 한 명이 1학년 학생인 사건을 A , 여학생인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}, P(B|A) = \frac{5}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

071 답 ③

첫 번째에 파란 공을 꺼내는 사건을 A , 두 번째에 파란 공을 꺼내는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{3}{10}, P(A^c) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

$$P(B|A) = \frac{2}{9}, P(B|A^c) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15},$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{7}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{30}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{1}{15} + \frac{7}{30} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

072 답 4

공장 A에서 생산한 제품을 택하는 사건을 A , 제품이 불량품인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{3}{5}, P(A^c) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(B|A) = \frac{p}{100}, P(B|A^c) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{3}{5} \times \frac{p}{100} = \frac{3p}{500},$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{50} = \frac{1}{125}$$

따라서 제품이 불량품일 확률은

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{3p}{500} + \frac{1}{125} = \frac{3p+4}{500} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{3p+4}{500} = \frac{4}{125} \text{이므로}$$

$$3p+4=16 \quad \therefore p=4$$

073 답 ③

이 팀이 치르는 경기가 홈 경기인 사건을 A , 이 팀이 승리하는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = 0.4, P(A^c) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$P(B|A) = 0.8, P(B|A^c) = 0.6$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0.4 \times 0.8 = 0.32,$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = 0.6 \times 0.6 = 0.36$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)} \\ &= \frac{0.32}{0.32 + 0.36} = \frac{0.32}{0.68} = \frac{8}{17} \end{aligned}$$

074 답 ⑤

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면

$$A = \{HHH, TTT\}$$

$$B = \{HTT, THT, TTH, TTT\}$$

$$A \cap B = \{TTT\}$$

$$\neg. P(A) = \frac{2}{2^3} = \frac{1}{4}$$

$$\neg. P(A \cap B) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$\neg. P(B) = \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2} \text{이므로 } P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A, B 는 서로 독립이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

075 답 $\neg, \neg, \neg$

$\neg. B \subset A$ 이면 $A \cap B = B$ 이므로

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$\neg. \text{두 사건 } A, B \text{가 서로 배반사건이면 } A \cap B = \emptyset \text{이므로}$

$$P(A \cap B) = 0$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$$

$\neg. \text{두 사건 } A, B \text{가 서로 독립이면 } P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{이므로}$

$$\begin{aligned} \{1 - P(A)\}\{1 - P(B)\} &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\ &= 1 - P(A \cup B) \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

076 답 ①

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(B|A) = P(B)$$

또 주어진 조건에서 $P(B|A) = P(A)$ 이므로

$$P(A) = P(B) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{9} \text{에서}$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{9}$$

$$P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \frac{5}{9}$$

$$P(A) + P(A) - P(A)P(A) = \frac{5}{9} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$2P(A) - \{P(A)\}^2 = \frac{5}{9}$$

$$9\{P(A)\}^2 - 18P(A) + 5 = 0$$

$$\{3P(A) - 1\}\{3P(A) - 5\} = 0$$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{3} \quad (\because 0 < P(A) < 1)$$

$$\therefore P(A) = P(B) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{9}$$

077 답 $\frac{1}{2}$

두 수의 합이 짝수이려면 두 수 모두 짝수이거나 두 수 모두 홀수 이어야 한다.

두 주머니 A, B 에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 짝수인 사건을 각각 A, B 라 하면 두 사건 A, B 는 서로 독립이므로 두 사건 A^c, B^c 도 서로 독립이다.

(i) 주머니 A 에서 짝수, 주머니 B 에서 짝수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

(ii) 주머니 A 에서 홀수, 주머니 B 에서 홀수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P(A^c)P(B^c) \\ &= \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{1}{2}$$

078 답 $\frac{3}{8}$

4번째 경기에서 우승팀이 결정되려면 우승팀은 3번의 경기에서 2번 이기고 마지막 4번째 경기에서도 이겨야 한다.

이때 한 번의 경기에서 A팀이 이길 확률이 $\frac{1}{2}$ 이고 두 팀이 비기는

경우는 없으므로 B팀이 이길 확률도 $\frac{1}{2}$ 이다.

(i) A팀이 우승팀이 될 확률은

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

(ii) B팀이 우승팀이 될 확률은

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{3}{8}$$

079 답 $\frac{10}{27}$

주사위를 5번 던져서 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 x , 3의 배수가 아닌 눈이 나오는 횟수를 y 라 하면

$$x + y = 5$$

$$\therefore y = 5 - x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 P 가 꼭짓점 A 에 있으려면 $2x + y$ 가 3의 배수가 되어야 하므로

$$2x + y = 3k \quad (\text{단, } k \text{는 자연수})$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$2x + 5 - x = 3k$$

$$\therefore x + 5 = 3k$$

이때 x 는 $0 \leq x \leq 5$ 인 정수이므로

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

(i) 3의 배수의 눈이 1번 나올 확률은

$${}_5C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{243}$$

(ii) 3의 배수의 눈이 4번 나올 확률은

$${}_5C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{10}{243}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{80}{243} + \frac{10}{243} = \frac{10}{27}$$



001 답 9

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$$

$$\frac{1}{a}+\frac{3}{a}+\frac{5}{a}=1, \frac{9}{a}=1 \quad \therefore a=9$$

002 답 $\frac{1}{4}$

확률의 총합은 1이므로

$$2k+k+3k+12k+6k=1, 24k=1$$

$$\therefore k=\frac{1}{24}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X \leq 0) &= P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0) \\ &= 2k+k+3k=6k=6 \times \frac{1}{24} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

003 답 $\frac{25}{28}$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0 \times {}_5C_2}{{}_8C_2}=\frac{5}{14}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1 \times {}_5C_1}{{}_8C_2}=\frac{15}{28}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2 \times {}_5C_0}{{}_8C_2}=\frac{3}{28}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	1

$$\begin{aligned} \therefore P(X \leq 1) &= P(X=0)+P(X=1) \\ &= \frac{5}{14}+\frac{15}{28}=\frac{25}{28} \end{aligned}$$

004 답 $\frac{7}{6}$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{3}+a=1 \quad \therefore a=\frac{5}{12}$$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=0 \times \frac{1}{6}+1 \times \frac{1}{12}+2 \times \frac{1}{3}+3 \times \frac{5}{12}=2,$$

$$E(X^2)=0^2 \times \frac{1}{6}+1^2 \times \frac{1}{12}+2^2 \times \frac{1}{3}+3^2 \times \frac{5}{12}=\frac{31}{6} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2)-\{E(X)\}^2 \\ &= \frac{31}{6}-2^2=\frac{7}{6} \end{aligned}$$

005 답 $\frac{8}{15}$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_2C_0 \times {}_8C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{28}{45}$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_1 \times {}_8C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{16}{45}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2 \times {}_8C_0}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{45}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{28}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{1}{45}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=0 \times \frac{28}{45}+1 \times \frac{16}{45}+2 \times \frac{1}{45}=\frac{2}{5},$$

$$E(X^2)=0^2 \times \frac{28}{45}+1^2 \times \frac{16}{45}+2^2 \times \frac{1}{45}=\frac{4}{9} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2)-\{E(X)\}^2 \\ &= \frac{4}{9}-\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{64}{225} \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{64}{225}}=\frac{8}{15}$$

006 답 ②

복권 한 장으로 받을 수 있는 당첨금을 X 만 원이라 할 때, 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	20	50	100	합계
$P(X=x)$	$\frac{13}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=0 \times \frac{13}{20}+20 \times \frac{1}{5}+50 \times \frac{1}{10}+100 \times \frac{1}{20}=14$$

즉, 구하는 기댓값은 14만 원이다.

007 답 5

$E(X)=1$ 이므로 $E(Y)=-1$ 에서

$$E(aX+b)=-1, aE(X)+b=-1$$

$$\therefore a+b=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$V(X)=9$ 이므로 $V(Y)=36$ 에서

$$V(aX+b)=36, a^2V(X)=36$$

$$9a^2=36, a^2=4 \quad \therefore a=2 (\because a>0)$$

이를 ①에 대입하면 $2+b=-1$

$$\therefore b=-3$$

$$\therefore a-b=2-(-3)=5$$

008 답 $\sqrt{15}$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{3}{10}+a+\frac{3}{10}=1 \quad \therefore a=\frac{2}{5}$$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=0 \times \frac{3}{10}+1 \times \frac{2}{5}+2 \times \frac{3}{10}=1,$$

$$E(X^2)=0^2 \times \frac{3}{10}+1^2 \times \frac{2}{5}+2^2 \times \frac{3}{10}=\frac{8}{5} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2)-\{E(X)\}^2 \\ &= \frac{8}{5}-1^2=\frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\therefore \sigma(5X-1)=|5|\sigma(X)=5 \times \frac{\sqrt{15}}{5}=\sqrt{15}$$

009 답 ③

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0) = \frac{{}_3C_0 \times {}_4C_2}{7C_2} = \frac{2}{7}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_3C_1 \times {}_4C_1}{7C_2} = \frac{4}{7}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_3C_2 \times {}_4C_0}{7C_2} = \frac{1}{7}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{1}{7} = \frac{6}{7},$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{2}{7} + 1^2 \times \frac{4}{7} + 2^2 \times \frac{1}{7} = \frac{8}{7} \text{이므로}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= \frac{8}{7} - \left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{20}{49}$$

$$\therefore V(Y) = V(7X+3) = 7^2 V(X)$$

$$= 49 \times \frac{20}{49} = 20$$

010 답 ⑤

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(3, \frac{3}{4}\right)$ 을 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_3C_x \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{3-x} \quad (x=0, 1, 2, 3)$$

$$\therefore P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$$

$$= 1 - {}_3C_0 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{63}{64}$$

011 답 541

$$E(X) = 90 \text{에서 } np = 90 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\sigma(X) = 5\sqrt{3} \text{에서 } \sqrt{np(1-p)} = 5\sqrt{3}$$

$$\therefore np(1-p) = 75$$

이 식에 ㉠을 대입하면

$$90(1-p) = 75, \quad 1-p = \frac{5}{6} \quad \therefore p = \frac{1}{6}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{6}n = 90 \quad \therefore n = 540$$

$$\therefore n + 6p = 540 + 6 \times \frac{1}{6} = 541$$

012 답 ⑤

한 번의 시행에서 5의 약수의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(9, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 9 \times \frac{1}{3} = 3, \quad V(X) = 9 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 2$$

따라서 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 에서

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 2 + 3^2 = 11$$

013 답 98

한 번의 시행에서 불량품이 나올 확률이 $\frac{2}{100} = \frac{1}{50}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(50, \frac{1}{50}\right)$ 을 따른다.

$$\text{따라서 } V(X) = 50 \times \frac{1}{50} \times \frac{49}{50} = \frac{49}{50} \text{이므로}$$

$$V(10X+1) = 10^2 V(X) = 100 \times \frac{49}{50} = 98$$

014 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1$$

$$4k + 5k + 6k + 7k = 1, \quad 22k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{22}$$

015 답 $\frac{1}{2}$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a = 1$$

$$2a^2 + 3a - 2 = 0, \quad (a+2)(2a-1) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = \frac{1}{2}$$

$$\text{이때 } 0 \leq P(X=x) \leq 1 \text{이므로 } a = \frac{1}{2}$$

016 답 ①

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=99) = 1$$

$$\frac{k}{2 \times 3} + \frac{k}{3 \times 4} + \frac{k}{4 \times 5} + \dots + \frac{k}{101 \times 102} = 1$$

$$k \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{101} - \frac{1}{102} \right) \right\} = 1$$

$$k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{102} \right) = 1, \quad \frac{25}{51}k = 1 \quad \therefore 25k = 51$$

017 답 ⑤

확률의 총합은 1이므로

$$a + \frac{1}{4} + 2a + \frac{1}{4} = 1, \quad 3a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore P(0 \leq X < 2) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= \frac{1}{4} + 2a = \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$$

018 답 $\frac{8}{9}$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{9} + a + \frac{2}{3} = 1 \quad \therefore a = \frac{2}{9}$$

$$\therefore P(X \geq 5a) = P\left(X \geq \frac{10}{9}\right)$$

$$= P(X=2) + P(X=3)$$

$$= a + \frac{2}{3} = \frac{2}{9} + \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$$

019 답 ③

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$$

$$\left(\frac{1}{5}+k\right)+\left(\frac{2}{5}+k\right)+k=1$$

$$\therefore k=\frac{2}{15}$$

따라서 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x)=\begin{cases} \frac{1}{5}x+\frac{2}{15} & (x=1, 2) \\ \frac{2}{15} & (x=3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X=1 \text{ 또는 } X=3) &= P(X=1)+P(X=3) \\ &= \left(\frac{1}{5}+\frac{2}{15}\right)+\frac{2}{15}=\frac{7}{15} \end{aligned}$$

020 답 $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$

$$\begin{aligned} P(X=x) &= \frac{k}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{k(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})} \\ &= k(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) \end{aligned}$$

확률의 총합은 1이므로

$$\begin{aligned} P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+\cdots+P(X=15) &= 1 \\ k\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})\} &= 1 \\ k(\sqrt{16}-\sqrt{1}) &= 1, 3k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

따라서 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$\begin{aligned} P(X=x) &= \frac{1}{3(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{3} \quad (x=1, 2, 3, \dots, 15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X^2-9X+8=0) &= P(X=1 \text{ 또는 } X=8) \\ &= P(X=1)+P(X=8) \\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{3} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

021 답 ①

$$\frac{3}{P(X=k)} = \frac{k}{P(X=k+1)} \text{에서}$$

$$P(X=k+1) = \frac{k}{3}P(X=k)$$

$$P(X=1)=a \text{라 하면}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{3}P(X=1) = \frac{1}{3}a$$

$$P(X=3) = \frac{2}{3}P(X=2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}a = \frac{2}{9}a$$

$$P(X=4) = \frac{3}{3}P(X=3) = \frac{2}{9}a$$

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$$

$$a+\frac{1}{3}a+\frac{2}{9}a+\frac{2}{9}a=1$$

$$\frac{16}{9}a=1 \quad \therefore a=\frac{9}{16}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X \geq 3) &= P(X=3)+P(X=4) \\ &= \frac{2}{9}a+\frac{2}{9}a = \frac{4}{9}a = \frac{4}{9} \times \frac{9}{16} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

022 답 ⑤

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0) = \frac{{}^4C_0 \times {}^3C_3}{{}^7C_3} = \frac{1}{35}, P(X=1) = \frac{{}^4C_1 \times {}^3C_2}{{}^7C_3} = \frac{12}{35},$$

$$P(X=2) = \frac{{}^4C_2 \times {}^3C_1}{{}^7C_3} = \frac{18}{35}, P(X=3) = \frac{{}^4C_3 \times {}^3C_0}{{}^7C_3} = \frac{4}{35}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$$\therefore P(X \geq 2) = P(X=2)+P(X=3) = \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = \frac{22}{35}$$

023 답 ②

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, ..., 8이다.

바닥에 놓인 면에 적힌 두 수를 a, b 라 하면 순서쌍 (a, b) 에 대하여

(i) 두 수의 합이 5인 경우

$$(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) \Rightarrow 4\text{가지}$$

(ii) 두 수의 합이 6인 경우

$$(2, 4), (3, 3), (4, 2) \Rightarrow 3\text{가지}$$

(i), (ii)에서

$$P(X=5) = \frac{4}{4 \times 4} = \frac{1}{4}, P(X=6) = \frac{3}{4 \times 4} = \frac{3}{16}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X=5 \text{ 또는 } X=6) &= P(X=5)+P(X=6) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16} \end{aligned}$$

참고 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

024 답 $\frac{1}{2}$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 4, 6이다.

뽑힌 카드에 적힌 두 수를 a, b ($a < b$)라 하면 순서쌍 (a, b) 에 대하여

(i) 두 수의 차이가 4인 경우

$$(2, 6), (4, 8) \Rightarrow 2\text{가지}$$

(ii) 두 수의 차이가 6인 경우

$$(2, 8) \Rightarrow 1\text{가지}$$

(i), (ii)에서

$$P(X=4) = \frac{2}{{}^4C_2} = \frac{1}{3}, P(X=6) = \frac{1}{{}^4C_2} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore P(X > 3) = P(X=4)+P(X=6) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

참고 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

025 답 ⑤

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이다.

$$X^2-8X+15 \leq 0 \text{에서 } (X-3)(X-5) \leq 0 \quad \therefore 3 \leq X \leq 5$$

나오는 두 눈의 수를 a, b 라 하면 순서쌍 (a, b) 에 대하여

(i) 두 수 중에서 크지 않은 수가 3인 경우

$(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3), (3, 6), (6, 3)$

⇒ 7가지

(ii) 두 수 중에서 크지 않은 수가 4인 경우

$(4, 4), (4, 5), (5, 4), (4, 6), (6, 4)$ ⇒ 5가지

(iii) 두 수 중에서 크지 않은 수가 5인 경우

$(5, 5), (5, 6), (6, 5)$ ⇒ 3가지

(i), (ii), (iii)에서

$$P(X=3) = \frac{7}{6 \times 6} = \frac{7}{36}, P(X=4) = \frac{5}{6 \times 6} = \frac{5}{36},$$

$$P(X=5) = \frac{3}{6 \times 6} = \frac{1}{12}$$

$$\therefore P(X^2 - 8X + 15 \leq 0) = P(3 \leq X \leq 5)$$

$$= P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$= \frac{7}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

참고 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$	1

026 답 2

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 그 확률은 각각

$$P(X=1) = \frac{{}^7C_1 \times {}^5C_3}{{}^{10}C_4} = \frac{1}{30}, P(X=2) = \frac{{}^7C_2 \times {}^3C_2}{{}^{10}C_4} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=3) = \frac{{}^7C_3 \times {}^3C_1}{{}^{10}C_4} = \frac{1}{2}, P(X=4) = \frac{{}^7C_4 \times {}^3C_0}{{}^{10}C_4} = \frac{1}{6}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\text{이때 } P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{30} + \frac{3}{10} = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$P(X \leq 2) = \frac{1}{3} \quad \therefore k=2$$

027 답 $\frac{8}{7}$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} + a + \frac{1}{7} = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{7}$$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 1 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{2}{7} + 3 \times \frac{1}{7} + 4 \times \frac{1}{7} = 2,$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{3}{7} + 2^2 \times \frac{2}{7} + 3^2 \times \frac{1}{7} + 4^2 \times \frac{1}{7} = \frac{36}{7} \text{이므로}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{36}{7} - 2^2 = \frac{8}{7}$$

028 답 ②

확률의 총합은 1이므로

$$2a^2 + 2a + a^2 = 1, 3a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$(a+1)(3a-1) = 0 \quad \therefore a = -1 \text{ 또는 } a = \frac{1}{3}$$

$$\text{이때 } 0 \leq P(X=x) \leq 1 \text{이므로 } a = \frac{1}{3}$$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{9} + 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

029 답 ①

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1$$

$$k + 4k + 9k + 16k = 1, 30k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{30}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{8}{15}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{30} + 2 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{8}{15} = \frac{10}{3},$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{30} + 2^2 \times \frac{2}{15} + 3^2 \times \frac{3}{10} + 4^2 \times \frac{8}{15} = \frac{59}{5} \text{이므로}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{59}{5} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{31}{45}$$

030 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$$b + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \quad \therefore b = \frac{1}{4}$$

$E(X) = 1$ 에서

$$-a \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{4} + a \times \frac{1}{2} = 1, \frac{1}{4}a = 1 \quad \therefore a = 4$$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X^2) = (-4)^2 \times \frac{1}{4} + 0^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{2} = 12 \text{이므로}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 12 - 1^2 = 11$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{11}$$

031 답 $\frac{4\sqrt{6}}{15}$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0) = \frac{{}^4C_0 \times {}^6C_2}{{}^{10}C_2} = \frac{1}{3}, P(X=1) = \frac{{}^4C_1 \times {}^6C_1}{{}^{10}C_2} = \frac{8}{15},$$

$$P(X=2) = \frac{{}^4C_2 \times {}^6C_0}{{}^{10}C_2} = \frac{2}{15}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{2}{15} = \frac{4}{5},$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{8}{15} + 2^2 \times \frac{2}{15} = \frac{16}{15} \text{이므로}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{16}{15} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{32}{75}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{32}{75}} = \frac{4\sqrt{6}}{15}$$

032 ㉔ ②

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

- (i) 나머지가 0인 경우는 4의 1가지
 (ii) 나머지가 1인 경우는 1, 5의 2가지
 (iii) 나머지가 2인 경우는 2, 6의 2가지
 (iv) 나머지가 3인 경우는 3의 1가지
 (i)~(iv)에서

$$P(X=0)=\frac{1}{6}, P(X=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},$$

$$P(X=2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}, P(X=3)=\frac{1}{6}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{2},$$

$$E(X^2)=0^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{6} = \frac{19}{6} \text{ 이므로}$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2 \\ =\frac{19}{6}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{11}{12}$$

033 ㉔ ③

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이다.

뽑힌 카드에 적힌 두 수를 $a, b(a < b)$ 라 하면 순서쌍 (a, b) 에 대하여

- (i) 두 수 중에서 작은 수가 1인 경우
 (1, 2), (1, 3), (1, 4) $\Rightarrow$ 3가지
 (ii) 두 수 중에서 작은 수가 2인 경우
 (2, 3), (2, 4) $\Rightarrow$ 2가지
 (iii) 두 수 중에서 작은 수가 3인 경우
 (3, 4) $\Rightarrow$ 1가지

(i), (ii), (iii)에서

$$P(X=1)=\frac{3}{4C_2}=\frac{1}{2}, P(X=2)=\frac{2}{4C_2}=\frac{1}{3},$$

$$P(X=3)=\frac{1}{4C_2}=\frac{1}{6}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3},$$

$$E(X^2)=1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{3} \text{ 이므로}$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2 \\ =\frac{10}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

034 ㉔ $\frac{13}{2}$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 4, 6, 8, 10이다.

- (i) 두 수의 합이 4이려면 A에서 2, B에서 2가 나와야 하므로 그 확률은

$$P(X=4)=\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

- (ii) 두 수의 합이 6이려면 A에서 2, B에서 4가 나오거나 A에서 4, B에서 2가 나와야 하므로 그 확률은

$$P(X=6)=\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{16}$$

- (iii) 두 수의 합이 8이려면 A에서 2, B에서 6이 나오거나 A에서 4, B에서 4가 나와야 하므로 그 확률은

$$P(X=8)=\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$$

- (iv) 두 수의 합이 10이려면 A에서 4, B에서 6이 나와야 하므로 그 확률은

$$P(X=10)=\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	4	6	8	10	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=4 \times \frac{3}{16} + 6 \times \frac{7}{16} + 8 \times \frac{5}{16} + 10 \times \frac{1}{16} = \frac{13}{2}$$

035 ㉔ ①

0, 1, 2가 적힌 공이 각각 a 개, b 개, c 개라 하면

$$a+b+c=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{a}{6}, P(X=1)=\frac{b}{6}, P(X=2)=\frac{c}{6}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{a}{6}$	$\frac{b}{6}$	$\frac{c}{6}$	1

$$E(X)=\frac{3}{2} \text{에서}$$

$$0 \times \frac{a}{6} + 1 \times \frac{b}{6} + 2 \times \frac{c}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore b+2c=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$V(X)=\frac{7}{12} \text{에서}$$

$$\left(0^2 \times \frac{a}{6} + 1^2 \times \frac{b}{6} + 2^2 \times \frac{c}{6}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}$$

$$\therefore b+4c=17 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

$\textcircled{B}$, $\textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면

$$b=1, c=4$$

이를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$a+1+4=6$$

$$\therefore a=1$$

따라서 숫자 0이 적힌 공은 1개이다.

036 답 ①

행운권 1장으로 받을 수 있는 상금을 X 원이라 할 때, 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	500	10000	100000	합계
$P(X=x)$	$\frac{389}{500}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{500}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \times \frac{389}{500} + 500 \times \frac{1}{5} + 10000 \times \frac{1}{50} + 100000 \times \frac{1}{500} = 500$$

즉, 구하는 기댓값은 500원이다.

037 답 350원

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때, 게임을 한 번 하여 나오는 모든 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

500원	100원	100원	받은 금액(원)
H	H	H	0
H	H	T	100
H	T	H	100
H	T	T	200
T	H	H	500
T	H	T	600
T	T	H	600
T	T	T	700

게임을 한 번 하여 받을 수 있는 금액을 X 원이라 할 때, 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 100, 200, 500, 600, 700이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0) = \frac{1}{8}, P(X=100) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, P(X=200) = \frac{1}{8},$$

$$P(X=500) = \frac{1}{8}, P(X=600) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, P(X=700) = \frac{1}{8}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	200	500	600	700	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 100 \times \frac{1}{4} + 200 \times \frac{1}{8} + 500 \times \frac{1}{8} + 600 \times \frac{1}{4} + 700 \times \frac{1}{8} = 350$$

즉, 구하는 기댓값은 350원이다.

038 답 ③

게임을 한 번 하여 받을 수 있는 금액을 X 원이라 할 때, 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 4900, -2800이고, 그 확률은 각각

$$P(X=4900) = \frac{4}{4+a}, P(X=-2800) = \frac{a}{4+a}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	4900	-2800	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{4+a}$	$\frac{a}{4+a}$	1

이때 $E(X) = 1600$ 이므로

$$4900 \times \frac{4}{4+a} + (-2800) \times \frac{a}{4+a} = 1600$$

$$\frac{196-28a}{4+a} = 16, 196-28a=64+16a$$

$$44a=132 \quad \therefore a=3$$

039 답 6

$E(X) = 2$ 이므로 $E(Y) = 8$ 에서

$$E(aX+b) = 8, aE(X)+b=8$$

$$\therefore 2a+b=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$V(X) = 5$ 이므로 $V(Y) = 45$ 에서

$$V(aX+b) = 45, a^2V(X) = 45$$

$$5a^2 = 45, a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 (\because a > 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 6+b=8 \quad \therefore b=2$$

$$\therefore ab = 3 \times 2 = 6$$

040 답 ④

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 27 - 5^2 = 2$ 이므로

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \sigma(Y) = \sigma(-3X+1) = |-3|\sigma(X) = 3\sqrt{2}$$

041 답 31

$E(2X+3) = 13$ 에서

$$2E(X)+3=13 \quad \therefore E(X)=5$$

$V(2X+3) = 24$ 에서

$$2^2V(X) = 24 \quad \therefore V(X) = 6$$

따라서 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 에서

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 6 + 5^2 = 31$$

042 답 60

$E(X) = m, \sigma(X) = \sigma$ 이므로

$$E(T) = E\left(10 \times \frac{X-m}{\sigma} + 50\right) = \frac{10}{\sigma}E(X) - \frac{10m}{\sigma} + 50$$

$$= \frac{10}{\sigma} \times m - \frac{10m}{\sigma} + 50 = 50$$

$$\sigma(T) = \sigma\left(10 \times \frac{X-m}{\sigma} + 50\right) = \left|\frac{10}{\sigma}\right|\sigma(X)$$

$$= \frac{10}{\sigma} \times \sigma = 10$$

따라서 확률변수 T 의 평균과 표준편차의 합은

$$E(T) + \sigma(T) = 50 + 10 = 60$$

043 답 ③

$E(X) = a, E(X^2) = 2a+3$ 에서

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 2a+3-a^2$$

$$\therefore V(Y) = V(2X-1) = 2^2V(X)$$

$$= 4(2a+3-a^2) = -4a^2+8a+12$$

$$= -4(a-1)^2+16$$

따라서 $V(Y)$ 는 $a=1$ 일 때 최댓값이 16이므로 $\sigma(Y)$ 의 최댓값은 $\sqrt{16}=4$

044 답 $-\frac{7}{3}$

$V(X) = \frac{4}{9}$ 에서

$V(Y) = V(3X+9) = 3^2 V(X) = 9 \times \frac{4}{9} = 4$

$E(Y) = a$ 라 하면 $E(Y^2) = 4a$ 이므로

$V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = 4a - a^2 = 4$

즉, $a^2 - 4a + 4 = 0$ 에서

$(a-2)^2 = 0 \quad \therefore a = 2$

$E(Y) = 2$ 이므로

$E(3X+9) = 2, 3E(X) + 9 = 2$

$\therefore E(X) = -\frac{7}{3}$

045 답 ①

확률의 총합은 1이므로

$a + 2a + a = 1, 4a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1,$

$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$ 이므로

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$

$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \sigma(4X-3) = |4| \sigma(X) = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

046 답 20

확률변수 X 에 대하여

$E(X) = 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{2}{5} = 2,$

$E(X^2) = 1^2 \times \frac{2}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{2}{5} = \frac{24}{5}$ 이므로

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{24}{5} - 2^2 = \frac{4}{5}$

$\therefore V(5X+3) = 5^2 V(X) = 25 \times \frac{4}{5} = 20$

047 답 ②

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$E(X) = 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{3}{20} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{4} + 5 \times \frac{3}{10} = \frac{7}{2}$

$\therefore E(2X+5) = 2E(X) + 5 = 2 \times \frac{7}{2} + 5 = 12$

048 답 ③

$P(X < 3) = \frac{9}{10}$ 에서 $P(X=1) + P(X=2) = \frac{9}{10}$ 이므로

$\frac{3}{10} + a = \frac{9}{10} \quad \therefore a = \frac{3}{5}$

또 $P(X < 3) = \frac{9}{10}$ 에서 $P(X=3) = \frac{1}{10}$ 이므로

$b = \frac{1}{10}$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{5},$

$E(X^2) = 1^2 \times \frac{3}{10} + 2^2 \times \frac{3}{5} + 3^2 \times \frac{1}{10} = \frac{18}{5}$ 이므로

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{18}{5} - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

$\therefore \sigma\left(\frac{1}{a}X + 10b\right) = \sigma\left(\frac{5}{3}X + 1\right)$
 $= \left|\frac{5}{3}\right| \sigma(X) = \frac{5}{3} \times \frac{3}{5} = 1$

049 답 7

확률변수 X 에 대하여

$E(X) = 0 \times \frac{5}{12} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{12} = 1,$

$E(X^2) = 0^2 \times \frac{5}{12} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{12} = 2$ 이므로

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 2 - 1^2 = 1$

$E(X) = 1$ 이므로 $E(Y) = -1$ 에서

$E(aX+b) = -1, aE(X) + b = -1$

$\therefore a + b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$V(X) = 1$ 이므로 $V(Y) = 16$ 에서

$V(aX+b) = 16, a^2 V(X) = 16$

$a^2 = 16 \quad \therefore a = -4 (\because a < 0)$

이를 ①에 대입하면

$-4 + b = -1 \quad \therefore b = 3$

$\therefore b - a = 3 - (-4) = 7$

050 답 ⑤

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$P(X=0) = \frac{{}^4C_0 \times {}^5C_2}{{}^9C_2} = \frac{5}{18}$

$P(X=1) = \frac{{}^4C_1 \times {}^5C_1}{{}^9C_2} = \frac{5}{9}$

$P(X=2) = \frac{{}^4C_2 \times {}^5C_0}{{}^9C_2} = \frac{1}{6}$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$E(X) = 0 \times \frac{5}{18} + 1 \times \frac{5}{9} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{8}{9},$

$E(X^2) = 0^2 \times \frac{5}{18} + 1^2 \times \frac{5}{9} + 2^2 \times \frac{1}{6} = \frac{11}{9}$ 이므로

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{11}{9} - \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{35}{81}$

$\therefore V(Y) = V(9X-28) = 9^2 V(X) = 81 \times \frac{35}{81} = 35$

051 답 ①

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

$$\therefore E(2X-5) = 2E(X) - 5 = 2 \times \frac{7}{2} - 5 = 2$$

052 답 $\sqrt{26}$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 4, a 이므로 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	4	a	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{1}{5} + a \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}a + \frac{9}{5}$$

이때 $E(5X-3)=9$ 에서

$$5E(X) - 3 = 9, \quad 5\left(\frac{1}{5}a + \frac{9}{5}\right) - 3 = 9 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore E(X) = \frac{1}{5} \times 3 + \frac{9}{5} = \frac{12}{5}$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{2}{5} + 4^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5} = \frac{34}{5} \text{이므로}$$

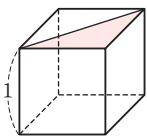
$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{34}{5} - \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{26}{25}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{26}{25}} = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

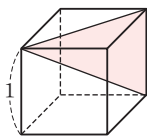
$$\therefore \sigma(5X-3) = |5| \sigma(X) = 5 \times \frac{\sqrt{26}}{5} = \sqrt{26}$$

053 답 3

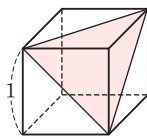
8개의 꼭짓점 중에서 3개를 택하여 만들 수 있는 서로 다른 삼각형의 종류는 다음 그림과 같다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

(i) [그림 1]과 같은 삼각형인 경우

$$\text{삼각형의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

이때 정사각형인 한 면에 4개의 삼각형이 존재하므로 그 개수는 $4 \times 6 = 24$

(ii) [그림 2]와 같은 삼각형인 경우

$$\text{삼각형의 넓이는 } \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 정사각형인 한 면에 2개의 대각선이 있고, 하나의 대각선에 대하여 2개의 삼각형이 존재하므로 그 개수는

$$2 \times 2 \times 6 = 24$$

(iii) [그림 3]과 같은 삼각형인 경우

$$\text{삼각형의 넓이는 } \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 정사각형인 한 면에 2개의 대각선이 있고, 하나의 대각선에 대하여 2개의 삼각형이 존재한다.

그런데 세 변의 길이가 모두 면의 대각선으로 3번 중복되므로 그 개수는

$$2 \times 2 \times 6 \div 3 = 8$$

즉, 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ 이고, 그 확률은 각각

$$P\left(X = \frac{1}{4}\right) = \frac{24}{8C_3} = \frac{3}{7}$$

$$P\left(X = \frac{1}{2}\right) = \frac{24}{8C_3} = \frac{3}{7}$$

$$P\left(X = \frac{3}{4}\right) = \frac{8}{8C_3} = \frac{1}{7}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\therefore E(7X) = 7E(X) = 7 \times \frac{3}{7} = 3$$

054 답 ②

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(20, \frac{4}{5}\right)$ 를 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_{20}C_x \left(\frac{4}{5}\right)^x \left(\frac{1}{5}\right)^{20-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 20)$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X \geq 1) &= 1 - P(X=0) \\ &= 1 - {}_{20}C_0 \left(\frac{4}{5}\right)^0 \left(\frac{1}{5}\right)^{20} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{20} \end{aligned}$$

055 답 2

확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_5C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{5-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

이때 $P(X=1) = kP(X=3)$ 에서

$$\begin{aligned} {}_5C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^4 &= k \times {}_5C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ \frac{5 \times 2^4}{3^5} &= k \times \frac{5 \times 2^3}{3^5} \quad \therefore k = 2 \end{aligned}$$

056 답 $\frac{15}{128}$

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 10)$$

$$\therefore P(X=3) = {}_{10}C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{15}{128}$$

057 답 ⑤

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(6, \frac{1}{10}\right)$ 을 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$\begin{aligned} P(X=x) &= {}_6C_x \left(\frac{1}{10}\right)^x \left(\frac{9}{10}\right)^{6-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 6) \\ \therefore P(4 < X \leq 6) &= P(X=5) + P(X=6) \\ &= {}_6C_5 \left(\frac{1}{10}\right)^5 \left(\frac{9}{10}\right)^1 + {}_6C_6 \left(\frac{1}{10}\right)^6 \left(\frac{9}{10}\right)^0 \\ &= \frac{11}{2 \times 10^5} \end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=11$ 이므로

$$a+b=13$$

058 답 ⑤

항공권을 구입하고 항공기에 탑승하는 사람의 수를 확률변수 X 라 하면 X 는 이항분포 $B(27, 0.9)$ 를 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$\begin{aligned} P(X=x) &= {}_{27}C_x 0.9^x \times 0.1^{27-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 27) \\ \text{이때 좌석이 부족하려면 탑승하는 사람의 수가 25명을 초과해야 하므로 구하는 확률은} \\ P(X > 25) &= P(X=26) + P(X=27) \\ &= {}_{27}C_{26} 0.9^{26} \times 0.1^1 + {}_{27}C_{27} 0.9^{27} \times 0.1^0 \\ &= 2.7 \times 0.9^{26} + 0.9^{27} = 3 \times 0.9^{27} + 0.9^{27} \\ &= 4 \times 0.9^{27} = 4 \times 0.0581 = 0.2324 \end{aligned}$$

059 답 ①

$$E(X)=20 \text{에서 } np=20 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$V(X)=\frac{50}{3} \text{에서 } np(1-p)=\frac{50}{3}$$

이 식에 ①을 대입하면

$$20(1-p)=\frac{50}{3}, \quad 1-p=\frac{5}{6}$$

$$\therefore p=\frac{1}{6}$$

이를 ①에 대입하면

$$\frac{1}{6}n=20 \quad \therefore n=120$$

060 답 $\frac{3}{5}$

$$V(X)=24 \text{에서 } 100p(1-p)=24$$

$$25p^2 - 25p + 6 = 0, \quad (5p-2)(5p-3)=0$$

$$\therefore p=\frac{3}{5} \quad \left(\because p > \frac{1}{2}\right)$$

061 답 평균: 6, 분산: $\frac{24}{5}$

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(30, \frac{1}{5}\right)$ 을 따르므로

$$E(X)=30 \times \frac{1}{5}=6, \quad V(X)=30 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5}=\frac{24}{5}$$

062 답 $\frac{1}{3}$

$$E(X)=3 \text{에서 } np=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2 \text{에서}$$

$$V(X)=11-3^2=2 \quad \therefore np(1-p)=2$$

이 식에 ①을 대입하면

$$3(1-p)=2, \quad 1-p=\frac{2}{3} \quad \therefore p=\frac{1}{3}$$

이를 ①에 대입하면

$$\frac{1}{3}n=3 \quad \therefore n=9$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(9, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$\begin{aligned} P(X=x) &= {}_9C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{9-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 9) \\ \therefore \frac{P(X=6)}{P(X=5)} &= \frac{{}_9C_6 \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^3}{{}_9C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^4} \\ &= \frac{84 \times \frac{2^3}{3^9}}{126 \times \frac{2^4}{3^9}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

063 답 5

$$V(X)=10p(1-p)=-10p^2+10p$$

$$=-10\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$$

따라서 $p=\frac{1}{2}$ 일 때 확률변수 X 의 분산이 최대이다.

즉, 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르는 확률변수 X 의 평균은

$$E(X)=10 \times \frac{1}{2}=5$$

064 답 920

한 번의 시행에서 3의 배수의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(90, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X)=90 \times \frac{1}{3}=30,$$

$$V(X)=90 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}=20$$

따라서 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$ 에서

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=20+30^2=920$$

065 답 ②

한 번의 시행에서 불이 붙지 않는 성냥이 나올 확률이 $\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$ 이

므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(200, \frac{1}{10}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{200 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

066 답 ③

한 번의 시행에서 썩은 사과가 나올 확률이 $\frac{1}{4}$ 이므로 확률변수 X

는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{4}\right)$ 을 따른다.

$E(X)=16$ 에서

$$n \times \frac{1}{4} = 16 \quad \therefore n = 64$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(64, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = 64 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 12$$

067 답 ③

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{6}$ 이므로

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(30, \frac{1}{6}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore V(X) = 30 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{6}$$

한 개의 동전을 한 번 던질 때 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$ 이므로 확률

변수 Y 는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore V(Y) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$$

이때 $V(Y) > V(X)$ 이어야 하므로

$$\frac{n}{4} > \frac{25}{6} \quad \therefore n > \frac{50}{3} = 16.6 \times \times$$

따라서 n 의 최솟값은 17이다.

068 답 28

한 번의 시행에서 빨간 공이 나올 확률이 $\frac{a}{a+4}$ 이므로 확률변수

X 는 이항분포 $B\left(n, \frac{a}{a+4}\right)$ 를 따른다.

$$E(X) = 12 \text{에서 } n \times \frac{a}{a+4} = 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$V(X) = 3$ 에서

$$n \times \frac{a}{a+4} \times \left(1 - \frac{a}{a+4}\right) = 3$$

$$\therefore n \times \frac{a}{a+4} \times \frac{4}{a+4} = 3$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$12 \times \frac{4}{a+4} = 3 \quad \therefore a = 12$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{3}{4}n = 12 \quad \therefore n = 16$$

$$\therefore a + n = 12 + 16 = 28$$

069 답 ⑤

한 번의 경기에서 승리할 확률이 $\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ 이므로 확률변수 X 는

이항분포 $B\left(50, \frac{4}{5}\right)$ 를 따른다.

따라서 $E(X) = 50 \times \frac{4}{5} = 40$ 이므로

$$E(2X - 4) = 2E(X) - 4 = 2 \times 40 - 4 = 76$$

070 답 ④

$$E(X) = n \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}n \text{이므로}$$

$$E(3X - 2) = 3E(X) - 2$$

$$= 3 \times \frac{1}{6}n - 2$$

$$= \frac{1}{2}n - 2$$

이때 $E(3X - 2) = 5$ 에서

$$\frac{1}{2}n - 2 = 5, \quad \frac{1}{2}n = 7$$

$$\therefore n = 14$$

071 답 73

한 번의 시행에서 당첨 제비가 나올 확률이 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이므로 확률변

수 X 는 이항분포 $B\left(45, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

따라서 $E(X) = 45 \times \frac{1}{3} = 15$, $V(X) = 45 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 10$ 이므로

$$E(2X + 3) = 2E(X) + 3 = 2 \times 15 + 3 = 33$$

$$V(2X + 3) = 2^2 V(X) = 4 \times 10 = 40$$

$$\therefore E(2X + 3) + V(2X + 3) = 33 + 40 = 73$$

072 답 7

확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_{10}C_x p^x (1-p)^{10-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 10)$$

$$4P(X=4) = 5P(X=5) \text{이므로}$$

$$4 \times {}_{10}C_4 p^4 (1-p)^6 = 5 \times {}_{10}C_5 p^5 (1-p)^5$$

$$840p^4 (1-p)^6 = 1260p^5 (1-p)^5$$

$$2(1-p) = 3p \quad (\because 0 < p < 1)$$

$$\therefore p = \frac{2}{5}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(10, \frac{2}{5}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 10 \times \frac{2}{5} = 4$$

$$\therefore E(3X - 5) = 3E(X) - 5$$

$$= 3 \times 4 - 5 = 7$$

073 답 ④

게임을 24번 할 때 동전의 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 Y 라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $24 - Y$ 이므로

$$X = 4Y - 2(24 - Y) = 6Y - 48$$

한 번의 게임에서 동전의 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$ 이므로 확률변수

Y 는 이항분포 $B\left(24, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

따라서 $E(Y) = 24 \times \frac{1}{2} = 12$ 이므로

$$E(X) = E(6Y - 48)$$

$$= 6E(Y) - 48$$

$$= 6 \times 12 - 48 = 24$$

074 [답] ⑤

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$$

$$\left(k+\frac{2}{11}\right)+\left(k+\frac{1}{11}\right)+k+\left(k+\frac{1}{11}\right)+\left(k+\frac{2}{11}\right)=1$$

$$5k+\frac{6}{11}=1, 5k=\frac{5}{11} \quad \therefore k=\frac{1}{11}$$

075 [답] $\frac{3}{4}$

확률의 총합은 1이므로

$$a+2b+3b=1 \quad \therefore a+5b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$P(X=1)=\frac{3}{2}P(X=2) \text{에서}$$

$$a=\frac{3}{2} \times 2b \quad \therefore a=3b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{을 연립하여 풀면 } a=\frac{3}{8}, b=\frac{1}{8}$$

$$\therefore P(X=1 \text{ 또는 } X=3)=P(X=1)+P(X=3) \\ =a+3b=\frac{3}{8}+3 \times \frac{1}{8}=\frac{3}{4}$$

076 [답] ②

$$X^2-2X=0 \text{에서 } X(X-2)=0$$

$$\therefore X=0 \text{ 또는 } X=2$$

따라서 $P(X=0)$, $P(X=2)$ 를 구하면

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0 \times {}_7C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{7}{24}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2 \times {}_7C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{7}{40}$$

$$\therefore P(X^2-2X=0)=P(X=0 \text{ 또는 } X=2) \\ =P(X=0)+P(X=2) \\ =\frac{7}{24}+\frac{7}{40}=\frac{7}{15}$$

077 [답] ②

확률의 총합은 1이므로

$$a+\frac{1}{3}+b=1 \quad \therefore a+b=\frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$E(X)=3 \text{에서}$$

$$1 \times a + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times b = 3 \quad \therefore a+4b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a=\frac{2}{9}, b=\frac{4}{9} \quad \therefore b-a=\frac{2}{9}$$

078 [답] $\frac{9}{25}$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_2C_0 \times {}_3C_3}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}, P(X=1)=\frac{{}_2C_1 \times {}_3C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{5},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2 \times {}_3C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5},$$

$$E(X^2)=0^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{3}{5} + 2^2 \times \frac{3}{10} = \frac{9}{5} \text{이므로}$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{9}{5}-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

079 [답] 8625원

복권 1장으로 받을 수 있는 당첨금을 X 원이라 할 때, 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 5000, 20000, 300000이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0 \times {}_7C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{7}{24}$$

$$P(X=5000)=\frac{{}_3C_1 \times {}_7C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{21}{40}$$

$$P(X=20000)=\frac{{}_3C_2 \times {}_7C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{7}{40}$$

$$P(X=300000)=\frac{{}_3C_3 \times {}_7C_0}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{120}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	5000	20000	300000	합계
$P(X=x)$	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=0 \times \frac{7}{24} + 5000 \times \frac{21}{40} + 20000 \times \frac{7}{40} + 300000 \times \frac{1}{120} \\ =8625$$

즉, 구하는 최소 판매 금액은 8625원이다.

080 [답] 48800

$$E(X)=30000, \sigma(X)=8000 \text{에서}$$

$$E(Y)=E\left(\frac{6}{5}X+3200\right)=\frac{6}{5}E(X)+3200$$

$$=\frac{6}{5} \times 30000 + 3200 = 39200$$

$$\sigma(Y)=\sigma\left(\frac{6}{5}X+3200\right)=\left|\frac{6}{5}\right|\sigma(X)$$

$$=\frac{6}{5} \times 8000 = 9600$$

$$\therefore E(Y)+\sigma(Y)=39200+9600=48800$$

081 [답] ③

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{10}+a+\frac{3}{10}+\frac{1}{5}a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{1}{10} = \frac{12}{5},$$

$$E(X^2)=1^2 \times \frac{1}{10} + 2^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{3}{10} + 4^2 \times \frac{1}{10} = \frac{32}{5} \text{이므로}$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{32}{5}-\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$$

$$\therefore V(aX+2)=V\left(\frac{1}{2}X+2\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2 V(X)$$

$$=\frac{1}{4} \times \frac{16}{25} = \frac{4}{25}$$

082 답 ④

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이다.

택한 두 수를 a, b ($a < b$)라 하면 순서쌍 (a, b) 에 대하여

(i) 두 수의 차가 1인 경우

(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5) $\Rightarrow$ 4가지

(ii) 두 수의 차가 2인 경우

(1, 3), (2, 4), (3, 5) $\Rightarrow$ 3가지

(iii) 두 수의 차가 3인 경우

(1, 4), (2, 5) $\Rightarrow$ 2가지

(iv) 두 수의 차가 4인 경우

(1, 5) $\Rightarrow$ 1가지

(i)~(iv)에서

$$P(X=1) = \frac{4}{5C_2} = \frac{2}{5}$$

$$P(X=2) = \frac{3}{5C_2} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=3) = \frac{2}{5C_2} = \frac{1}{5}$$

$$P(X=4) = \frac{1}{5C_2} = \frac{1}{10}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{10} = 2,$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{2}{5} + 2^2 \times \frac{3}{10} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{1}{10} = 5 \text{이므로}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 5 - 2^2 = 1$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1$$

$$\therefore \sigma(6X-1) = |6| \sigma(X) = 6 \times 1 = 6$$

083 답 4

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 그 확률은 각각

$$P(X=0) = \frac{{}_3C_0 \times {}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{3}{5}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_3C_2 \times {}_2C_0}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5},$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{3}{5} + 2^2 \times \frac{3}{10} = \frac{9}{5} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{9}{5} - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{6}{5} \text{이므로 } E(Y) = 5 \text{에서}$$

$$E(aX+b) = 5, aE(X)+b=5$$

$$\therefore \frac{6}{5}a+b=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$V(X) = \frac{9}{25} \text{이므로 } V(Y) = 9 \text{에서}$$

$$V(aX+b) = 9, a^2V(X) = 9$$

$$\frac{9}{25}a^2 = 9, a^2 = 25$$

$$\therefore a=5 \quad (\because a>0)$$

이를 ①에 대입하면

$$6+b=5 \quad \therefore b=-1$$

$$\therefore a+b=5+(-1)=4$$

084 답 ③

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(4, \frac{3}{5}\right)$ 을 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_4C_x \left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\frac{2}{5}\right)^{4-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4)$$

$$\therefore P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4)$$

$$= {}_4C_3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^1 + {}_4C_4 \left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{2}{5}\right)^0$$

$$= \frac{297}{625}$$

085 답 $\frac{495}{8}$

$$E(X) = \frac{15}{2} \text{에서}$$

$$30p = \frac{15}{2} \quad \therefore p = \frac{1}{4}$$

즉, 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(30, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = 30 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{45}{8}$$

따라서 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 에서

$$\begin{aligned} E(X^2) &= V(X) + \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{45}{8} + \left(\frac{15}{2}\right)^2 = \frac{495}{8} \end{aligned}$$

086 답 80

주머니에 들어 있는 검은 구슬의 개수를 x 라 하면 한 번의 시행에서 검은 구슬이 나올 확률은 $\frac{x}{12}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포

$B\left(36, \frac{x}{12}\right)$ 를 따른다.

$$E(X) = 6 \text{에서}$$

$$36 \times \frac{x}{12} = 6 \quad \therefore x = 2$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(36, \frac{1}{6}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = 36 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 5$$

$$\therefore V(4X+1) = 4^2V(X) = 16 \times 5 = 80$$



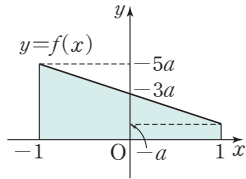
001 답 ⑤

$f(x)=a(2x-3)$ ($-1 \leq x \leq 1$)은 확률밀도함수이므로 $a < 0$ 이고 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 하므로

$$\frac{1}{2} \times \{-5a + (-a)\} \times 2 = 1, \quad -6a = 1$$

$$\therefore a = -\frac{1}{6}$$



002 답 ⑤

$f(x)=a(6-x)$ ($0 \leq x \leq 6$)는 확률밀도함수이므로 $a > 0$ 이고 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 하므로

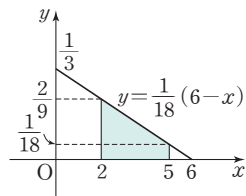
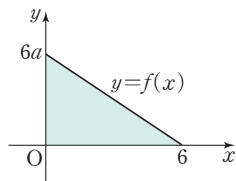
$$\frac{1}{2} \times 6 \times 6a = 1, \quad 18a = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{18}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{18}(6-x) \quad (0 \leq x \leq 6)$$

따라서 $P(2 \leq X \leq 5)$ 는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y = \frac{1}{18}(6-x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=2$, $x=5$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$P(2 \leq X \leq 5) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{18} \right) \times 3 = \frac{5}{12}$$



003 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. 확률변수 X_1 의 정규분포 곡선의 대칭축이 확률변수 X_2 의 정규분포 곡선의 대칭축보다 왼쪽에 있으므로

$$E(X_1) < E(X_2)$$

ㄴ. 확률변수 X_1 의 정규분포 곡선의 가운데 부분의 높이가 확률변수 X_2 의 정규분포 곡선의 가운데 부분의 높이보다 높으므로

$$\sigma(X_1) < \sigma(X_2) \quad \therefore V(X_1) < V(X_2)$$

ㄷ. $f(E(X_1)) = f(x_1)$, $g(E(X_2)) = g(x_2)$ 이고, $f(x_1) > g(x_2)$ 이므로

$$f(E(X_1)) > g(E(X_2))$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

004 답 ③

$m=60$, $\sigma=4$ 이므로

$$\begin{aligned} P(48 \leq X \leq 64) &= P(60 - 3 \times 4 \leq X \leq 60 + 4) \\ &= P(m - 3\sigma \leq X \leq m + \sigma) \\ &= P(m - 3\sigma \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m + \sigma) \\ &= P(m \leq X \leq m + 3\sigma) + P(m \leq X \leq m + \sigma) \\ &= 0.4987 + 0.3413 = 0.84 \end{aligned}$$

005 답 ⑤

$P(X \leq a) = 0.9772$ 에서

$$P(X \leq m) + P(m \leq X \leq a) = 0.9772$$

$$0.5 + P(m \leq X \leq a) = 0.9772$$

$$\therefore P(m \leq X \leq a) = 0.4772$$

이때 $P(m \leq X \leq m + 2\sigma) = 0.4772$ 이므로

$$a = m + 2\sigma$$

$m=40$, $\sigma=6$ 이므로

$$a = 40 + 2 \times 6 = 52$$

006 답 ③

두 확률변수 X , Y 가 각각 정규분포 $N(20, 4^2)$, $N(30, 5^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-20}{4}$, $Z_Y = \frac{Y-30}{5}$ 으로 놓으면 두 확률변수 Z_X , Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(24 \leq X \leq 32) = P(35 \leq Y \leq k) \text{에서}$$

$$P\left(\frac{24-20}{4} \leq Z_X \leq \frac{32-20}{4}\right) = P\left(\frac{35-30}{5} \leq Z_Y \leq \frac{k-30}{5}\right)$$

$$P(1 \leq Z_X \leq 3) = P\left(1 \leq Z_Y \leq \frac{k-30}{5}\right)$$

$$\text{따라서 } 3 = \frac{k-30}{5} \text{이므로}$$

$$k-30=15 \quad \therefore k=45$$

007 답 ④

확률변수 X 가 정규분포 $N(40, 5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-40}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(34 \leq X \leq 43) &= P\left(\frac{34-40}{5} \leq Z \leq \frac{43-40}{5}\right) \\ &= P(-1.2 \leq Z \leq 0.6) \\ &= P(-1.2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.6) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1.2) + P(0 \leq Z \leq 0.6) \\ &= 0.3849 + 0.2257 = 0.6106 \end{aligned}$$

008 답 ②

확률변수 X 가 정규분포 $N(21, 3^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-21}{3}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(15 \leq X \leq a) = 0.9104 \text{에서}$$

$$P\left(\frac{15-21}{3} \leq Z \leq \frac{a-21}{3}\right) = 0.9104$$

$$P(-2 \leq Z \leq \frac{a-21}{3}) = 0.9104$$

$$P(-2 \leq Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-21}{3}\right) = 0.9104$$

$$P(0 \leq Z \leq 2) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-21}{3}\right) = 0.9104$$

$$0.4772 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-21}{3}\right) = 0.9104$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-21}{3}\right) = 0.4332$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$\frac{a-21}{3} = 1.5, a-21 = 4.5$$

$$\therefore a = 25.5$$

009 답 국어, 영어, 수학

지형이네 반 전체 학생의 국어, 영어, 수학 시험 성적을 각각 X_A 점, X_B 점, X_C 점이라 하면 세 확률변수 X_A, X_B, X_C 는 각각 정규분포 $N(56, 8^2), N(58, 10^2), N(64, 14^2)$ 을 따르므로

$$Z_A = \frac{X_A - 56}{8}, Z_B = \frac{X_B - 58}{10}, Z_C = \frac{X_C - 64}{14}$$

로 놓으면 세 확률변수 Z_A, Z_B, Z_C 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

다른 학생들보다 지형이의 국어, 영어, 수학 시험 성적이 높을 확률은 각각

$$P(X_A < 72) = P\left(Z_A < \frac{72-56}{8}\right) = P(Z_A < 2)$$

$$P(X_B < 75) = P\left(Z_B < \frac{75-58}{10}\right) = P(Z_B < 1.7)$$

$$P(X_C < 78) = P\left(Z_C < \frac{78-64}{14}\right) = P(Z_C < 1)$$

이때 $P(Z_A < 2) > P(Z_B < 1.7) > P(Z_C < 1)$ 이므로

$$P(X_A < 72) > P(X_B < 75) > P(X_C < 78)$$

따라서 지형이의 성적이 상대적으로 좋은 과목부터 순서대로 나열하면 국어, 영어, 수학이다.

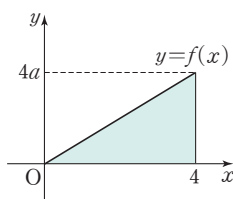
010 답 $\frac{1}{8}$

$f(x) = ax$ ($0 \leq x \leq 4$)는 확률밀도함수이므로 $a > 0$ 이고 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 하므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4a = 1, 8a = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{8}$$



011 답 $\frac{1}{3}$

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 하므로

$$\frac{1}{2} \times (1+5) \times k = 1, 3k = 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{3}$$

012 답 ⑤

① $0 \leq x < 1$ 에서 $f(x) < 0$ 이므로 확률밀도함수의 그래프가 될 수 없다.

② $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0, x=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 $2 \times 1 = 2$ 이므로 확률밀도함수의 그래프가 될 수 없다.

③ $0 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x) < 0$ 이므로 확률밀도함수의 그래프가 될 수 없다.

④ $0 < x < 2$ 에서 $f(x) < 0$ 이므로 확률밀도함수의 그래프가 될 수 없다.

⑤ $0 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이고 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$ 이므로 확률밀도함수의 그래프이다.

따라서 확률밀도함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 될 수 있는 것은 ⑤이다.

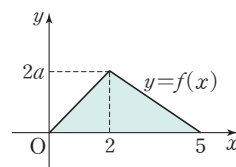
013 답 $\frac{1}{5}$

$f(x)$ 는 확률밀도함수이므로 $a > 0$ 이고 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 하므로

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 2a = 1, 5a = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{5}$$



014 답 ⑤

$f(x) = a(x+2)$ ($-1 \leq x \leq 1$)는 확률밀도함수이므로 $a > 0$ 이고 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=-1, x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 하므로

$$\frac{1}{2} \times (a+3a) \times 2 = 1, 4a = 1$$

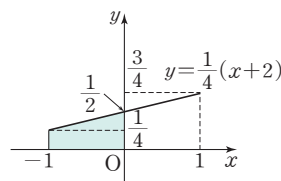
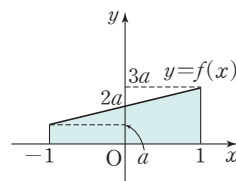
$$\therefore a = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{4}(x+2) \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

따라서 $P(X \leq 0)$ 은 오른쪽 그림과

같이 직선 $y = \frac{1}{4}(x+2)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=-1, x=0$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned} P(X \leq 0) &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \times 1 \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

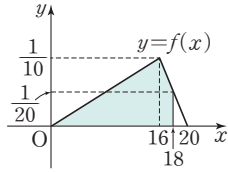


015 답 $\frac{19}{20}$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 구하는 확률은 $P(X \leq 18)$ 이므로 오른쪽 그림의 색칠한 도형의 넓이와 같다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X \leq 18) &= 1 - P(18 \leq X \leq 20) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{20} \\ &= \frac{19}{20}\end{aligned}$$



016 답 5

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 하므로

$$\frac{1}{2} \times a \times \frac{4}{5} = 1, \frac{2}{5}a = 1$$

$$\therefore a = \frac{5}{2}$$

한편 $P(0 \leq X \leq b)$ 는 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로 $P(0 \leq X \leq b) = \frac{4}{5}$ 에서

$$\frac{1}{2} \times b \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}, \frac{2}{5}b = \frac{4}{5}$$

$$\therefore b = 2$$

$$\therefore ab = \frac{5}{2} \times 2 = 5$$

017 답 $\frac{1}{4}$

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=-2$, $x=3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 하므로

$$\frac{1}{2} \times 1 \times k + \frac{1}{2} \times 4 \times k = 1, \frac{5}{2}k = 1$$

$$\therefore k = \frac{2}{5}$$

$-1 \leq x \leq 3$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 두 점 $(-1, 0)$, $(3, \frac{2}{5})$ 를 지나는 직선이므로

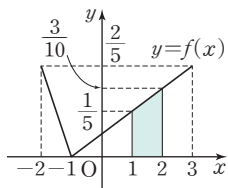
$$y = \frac{\frac{2}{5} - 0}{3 - (-1)} \{x - (-1)\}, y = \frac{1}{10}(x+1)$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{10}(x+1) \quad (-1 \leq x \leq 3)$$

따라서 $f(1) = \frac{1}{5}$, $f(2) = \frac{3}{10}$ 이고

$P(1 \leq X \leq 2)$ 는 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned}P(1 \leq X \leq 2) &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{10} \right) \times 1 \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$



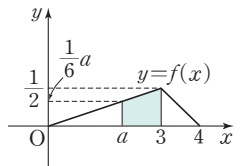
018 답 ⑤

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 두 점 $(0, 0)$, $(3, \frac{1}{2})$ 을 지나는 직선이므로

$$y = \frac{\frac{1}{2} - 0}{3 - 0}x, y = \frac{1}{6}x$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{6}x \quad (0 \leq x \leq 3)$$

따라서 $f(a) = \frac{1}{6}a$ 이고 $P(a \leq X \leq 3)$ 은 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=a$, $x=3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로



$$\begin{aligned}P(a \leq X \leq 3) &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6}a + \frac{1}{2} \right) \times (3 - a) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{12}a^2\end{aligned}$$

한편 $P(3 \leq X \leq 4)$ 는 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$P(3 \leq X \leq 4) = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

따라서 $P(a \leq X \leq 3) = P(3 \leq X \leq 4)$ 에서

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{12}a^2 = \frac{1}{4}, a^2 = 6$$

$$\therefore a = \sqrt{6} \quad (\because 0 < a < 3)$$

019 답 ㄱ

ㄱ. 확률변수 X_1 의 정규분포 곡선의 대칭축이 확률변수 X_2 의 정규분포 곡선의 대칭축보다 왼쪽에 있으므로

$$E(X_1) < E(X_2)$$

ㄴ. 확률변수 X_1 의 정규분포 곡선의 가운데 부분의 높이가 확률변수 X_2 의 정규분포 곡선의 가운데 부분의 높이보다 낮으므로

$$\sigma(X_1) > \sigma(X_2)$$

ㄷ. $E(X_1) < a$ 이므로 $P(X_1 \geq a) < 0.5$

$$E(X_2) > a \text{이므로 } P(X_2 \geq a) > 0.5$$

$$\therefore P(X_1 \geq a) < P(X_2 \geq a)$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.

020 답 ④

평균이 클수록 정규분포 곡선의 대칭축은 오른쪽에 있으므로 A의 대칭축보다 B의 대칭축이 오른쪽에 있다.

표준편차가 클수록 정규분포 곡선의 가운데 부분의 높이는 낮아지고 양쪽으로 넓게 퍼지므로 A의 가운데 부분의 높이보다 B의 가운데 부분의 높이가 낮고 양쪽으로 넓게 퍼진다.

021 답 18

정규분포 곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이고

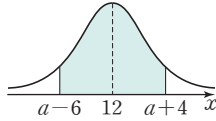
$$P(X \leq 7) = P(X \geq 11) \text{이므로}$$

$$m = \frac{7+11}{2} = 9$$

또 $V\left(\frac{1}{3}X\right)=9$ 에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 V(X)=9 \quad \therefore V(X)=81$
 즉, $\sigma^2=81$ 이므로 $\sigma=9$ ($\because \sigma>0$)
 $\therefore m+\sigma=9+9=18$

022 답 ③

확률변수 X 의 평균이 12이므로 X 의 확률밀도함수는 $x=12$ 에서
 최댓값을 갖고, 정규분포 곡선은 직선 $x=12$ 에 대하여 대칭이다.
 따라서 $P(a-6 \leq X \leq a+4)$ 가 최대가
 되려면 오른쪽 그림과 같이 $a-6, a+4$
 의 평균이 12이어야 하므로
 $\frac{(a-6)+(a+4)}{2}=12, a-1=12$
 $\therefore a=13$



023 답 0.1574

$m=45, \sigma=3$ 이므로
 $P(36 \leq X \leq 42)=P(45-3 \times 3 \leq X \leq 45-3)$
 $=P(m-3\sigma \leq X \leq m-\sigma)$
 $=P(m+\sigma \leq X \leq m+3\sigma)$
 $=P(m \leq X \leq m+3\sigma)-P(m \leq X \leq m+\sigma)$
 $=0.4987-0.3413=0.1574$

024 답 ③

$P(m-\sigma \leq X \leq m+\sigma)=a$ 에서
 $2P(m \leq X \leq m+\sigma)=a$
 $\therefore P(m \leq X \leq m+\sigma)=\frac{a}{2}$
 한편 $P(m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma)=b$ 에서
 $2P(m \leq X \leq m+2\sigma)=b$
 $\therefore P(m \leq X \leq m+2\sigma)=\frac{b}{2}$
 $\therefore P(m-2\sigma \leq X \leq m-\sigma)$
 $=P(m-2\sigma \leq X \leq m)-P(m-\sigma \leq X \leq m)$
 $=P(m \leq X \leq m+2\sigma)-P(m \leq X \leq m+\sigma)$
 $=\frac{b}{2}-\frac{a}{2}=\frac{b-a}{2}$

025 답 0.6826

$P(X \leq m-\sigma)=0.1587$ 에서
 $P(X \leq m)-P(m-\sigma \leq X \leq m)=0.1587$
 $0.5-P(m-\sigma \leq X \leq m)=0.1587$
 $\therefore P(m-\sigma \leq X \leq m)=0.3413$
 $\therefore P(m-\sigma \leq X \leq m+\sigma)$
 $=P(m-\sigma \leq X \leq m)+P(m \leq X \leq m+\sigma)$
 $=P(m-\sigma \leq X \leq m)+P(m-\sigma \leq X \leq m)$
 $=2P(m-\sigma \leq X \leq m)=2 \times 0.3413=0.6826$

026 답 0.3641

정규분포 곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이고
 $P(40 \leq X \leq 45)=P(55 \leq X \leq 60)$ 이므로
 $m=\frac{45+55}{2}=50$

$\therefore P(X \leq 40)+P(50 \leq X \leq 55)$
 $=P(X \leq 40)+P(45 \leq X \leq 50)$
 $=P(X \leq 50)-P(40 \leq X \leq 45)$
 $=0.5-0.1359=0.3641$

027 답 0.3413

곡선 $y=x^2+2Xx-X+2$ 와 직선 $y=4x$ 가 만나지 않으려면 x 에
 대한 이차방정식 $x^2+2Xx-X+2=4x$, 즉
 $x^2+2(X-2)x-X+2=0$ 이 허근을 가져야 한다.
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=(X-2)^2-(-X+2)<0$
 $X^2-3X+2<0, (X-1)(X-2)<0$
 $\therefore 1<X<2$
 이때 $m=2, \sigma=1$ 이므로
 $P(1<X<2)=P(2-1<X<2)$
 $=P(m-\sigma<X< m)$
 $=P(m \leq X \leq m+\sigma)$
 $=0.3413$

028 답 ③

$P(X \leq a)=0.1587$ 에서
 $P(X \leq m)-P(a \leq X \leq m)=0.1587$
 $0.5-P(a \leq X \leq m)=0.1587$
 $\therefore P(a \leq X \leq m)=0.3413$
 한편 $P(m \leq X \leq m+\sigma)=0.3413$ 에서
 $P(m-\sigma \leq X \leq m)=0.3413$ 이므로 $a=m-\sigma$
 따라서 $m=15, \sigma=2$ 이므로
 $a=15-2=13$

029 답 0.5

$P(m-k\sigma \leq X \leq m+k\sigma)=0.383$ 에서
 $P(m-k\sigma \leq X \leq m)+P(m \leq X \leq m+k\sigma)=0.383$
 $P(m \leq X \leq m+k\sigma)+P(m \leq X \leq m+k\sigma)=0.383$
 $2P(m \leq X \leq m+k\sigma)=0.383$
 $\therefore P(m \leq X \leq m+k\sigma)=0.1915$
 이때 $P(m \leq X \leq m+0.5\sigma)=0.1915$ 이므로
 $k=0.5$

030 답 39

$P(X \geq a)=0.9332$ 에서
 $P(X \geq m)+P(a \leq X \leq m)=0.9332$
 $0.5+P(a \leq X \leq m)=0.9332$
 $\therefore P(a \leq X \leq m)=0.4332$
 한편 $P(m \leq X \leq m+1.5\sigma)=0.4332$ 에서
 $P(m-1.5\sigma < X < m)=0.4332$ 이므로 $a=m-1.5\sigma$
 따라서 $m=48, \sigma=6$ 이므로
 $a=48-1.5 \times 6=39$

031 답 4

두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(7, 3^2), N(0, 4^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-7}{3}, Z_Y = \frac{Y}{4}$ 로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \geq 4k) = P(Y \geq 3k) \text{에서}$$

$$P\left(Z_X \geq \frac{4k-7}{3}\right) = P\left(Z_Y \geq \frac{3k}{4}\right)$$

$$\text{따라서 } \frac{4k-7}{3} = \frac{3k}{4} \text{이므로}$$

$$16k-28=9k, 7k=28 \quad \therefore k=4$$

032 답 ②

확률변수 X 가 정규분포 $N(25, 4^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-25}{4}$ 로 놓으면 두 확률변수 Z, Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \leq a) = P(Y \geq a) \text{에서}$$

$$P\left(Z \leq \frac{a-25}{4}\right) = P(Y \geq a)$$

$$\therefore P\left(Z \leq \frac{a-25}{4}\right) = P(Y \leq -a)$$

$$\text{따라서 } \frac{a-25}{4} = -a \text{이므로}$$

$$a-25 = -4a, 5a=25 \quad \therefore a=5$$

033 답 16

두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(18, 6^2), N(m, 4^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-18}{6}, Z_Y = \frac{Y-m}{4}$ 으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$2P(18 \leq X \leq 24) = P(12 \leq Y \leq 2m-12) \text{에서}$$

$$2P\left(\frac{18-18}{6} \leq Z_X \leq \frac{24-18}{6}\right) = P\left(\frac{12-m}{4} \leq Z_Y \leq \frac{2m-12-m}{4}\right)$$

$$\begin{aligned} 2P(0 \leq Z_X \leq 1) &= P\left(-\frac{m-12}{4} \leq Z_Y \leq \frac{m-12}{4}\right) \\ &= P\left(-\frac{m-12}{4} \leq Z_Y \leq 0\right) + P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{m-12}{4}\right) \\ &= P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{m-12}{4}\right) + P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{m-12}{4}\right) \\ &= 2P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{m-12}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore P(0 \leq Z_X \leq 1) = P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{m-12}{4}\right)$$

$$\text{따라서 } 1 = \frac{m-12}{4} \text{이므로}$$

$$m-12=4 \quad \therefore m=16$$

034 답 0.8185

확률변수 X 가 정규분포 $N(60, 10^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-60}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(50 \leq X \leq 80) &= P\left(\frac{50-60}{10} \leq Z \leq \frac{80-60}{10}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 2) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185 \end{aligned}$$

035 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

확률변수 X 가 정규분포 $N(32, 4^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-32}{4}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } P(20 \leq X \leq 32) &= P\left(\frac{20-32}{4} \leq Z \leq \frac{32-32}{4}\right) \\ &= P(-3 \leq Z \leq 0) \\ &= P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= 0.4987 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } P(X \geq 20) &= P\left(Z \geq \frac{20-32}{4}\right) \\ &= P(Z \geq -3) = P(Z \leq 3) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= 0.5 + 0.4987 = 0.9987 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } P(X \geq 44) &= P\left(Z \geq \frac{44-32}{4}\right) \\ &= P(Z \geq 3) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= 0.5 - 0.4987 = 0.0013 \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

036 답 0.1359

확률변수 X 가 정규분포 $N(15, 3^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-15}{3}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$Y = 3X + 4 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} P(58 \leq Y \leq 67) &= P(58 \leq 3X + 4 \leq 67) \\ &= P(18 \leq X \leq 21) \\ &= P\left(\frac{18-15}{3} \leq Z \leq \frac{21-15}{3}\right) \\ &= P(1 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359 \end{aligned}$$

037 답 0.6915

확률변수 X 의 평균이 m 이므로 확률변수 X 의 정규분포 곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이다.

$$(가)에서 f(5)=f(25) \text{이므로}$$

$$m = \frac{5+25}{2} = 15$$

즉, 두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(15, 5^2), N(30, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-15}{5}, Z_Y = \frac{Y-30}{\sigma}$ 으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$(나)에서 P(X \leq 5) + P(Y \geq 26) = 1 \text{이므로}$$

$$P\left(Z_X \leq \frac{5-15}{5}\right) + P\left(Z_Y \geq \frac{26-30}{\sigma}\right) = 1$$

$$P(Z_X \leq -2) + P\left(Z_Y \geq -\frac{4}{\sigma}\right) = 1$$

$$\text{따라서 } -2 = -\frac{4}{\sigma} \text{이므로}$$

$$\sigma = 2$$

즉, 확률변수 Y 는 정규분포 $N(30, 2^2)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(Y \geq 29) &= P\left(Z_Y \geq \frac{29-30}{2}\right) \\ &= P(Z_Y \geq -0.5) \\ &= P(Z_Y \leq 0.5) \\ &= P(Z_Y \leq 0) + P(0 \leq Z_Y \leq 0.5) \\ &= 0.5 + 0.1915 = 0.6915 \end{aligned}$$

038 답 ④

확률변수 X 가 정규분포 $N(20, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-20}{2}$ 으로

놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(a \leq X \leq 23) = 0.7745 \text{에서}$$

$$P\left(\frac{a-20}{2} \leq Z \leq \frac{23-20}{2}\right) = 0.7745$$

$$P\left(\frac{a-20}{2} \leq Z \leq 1.5\right) = 0.7745$$

$$P\left(\frac{a-20}{2} \leq Z \leq 0\right) + P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.7745$$

$$P\left(0 \leq Z \leq -\frac{a-20}{2}\right) + 0.4332 = 0.7745$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq -\frac{a-20}{2}\right) = 0.3413$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$-\frac{a-20}{2} = 1, a-20 = -2$$

$$\therefore a = 18$$

039 답 1.25

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 으로

놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(m-k\sigma \leq X \leq m+k\sigma) = 0.7888 \text{에서}$$

$$P\left(\frac{m-k\sigma-m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{m+k\sigma-m}{\sigma}\right) = 0.7888$$

$$P(-k \leq Z \leq k) = 0.7888$$

$$P(-k \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq k) = 0.7888$$

$$P(0 \leq Z \leq k) + P(0 \leq Z \leq k) = 0.7888$$

$$2P(0 \leq Z \leq k) = 0.7888$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq k) = 0.3944$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.25) = 0.3944$ 이므로

$$k = 1.25$$

040 답 0.0668

확률변수 X 가 정규분포 $N(24, 4^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-24}{4}$ 로 놓

으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \leq 24-k) = 0.3085 \text{에서}$$

$$P\left(Z \leq \frac{24-k-24}{4}\right) = 0.3085$$

$$P\left(Z \leq -\frac{k}{4}\right) = 0.3085$$

$$P\left(Z \geq \frac{k}{4}\right) = 0.3085$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k}{4}\right) = 0.3085$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k}{4}\right) = 0.3085$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k}{4}\right) = 0.1915$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.1915$ 이므로

$$\frac{k}{4} = 0.5 \quad \therefore k = 2$$

$$\therefore P(X \geq 15k) = P(X \geq 30)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{30-24}{4}\right)$$

$$= P(Z \geq 1.5)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

041 답 2차 필기시험, 실기 시험, 1차 필기시험

회사 전체 입사 지원자의 1차 필기시험, 2차 필기시험, 실기 시험 성적을 각각 X_A 점, X_B 점, X_C 점이라 하면 세 확률변수 X_A , X_B , X_C 는 각각 정규분포 $N(60, 9^2)$, $N(55, 12^2)$, $N(64, 10^2)$ 을 따르므로

$$Z_A = \frac{X_A-60}{9}, Z_B = \frac{X_B-55}{12}, Z_C = \frac{X_C-64}{10}$$

로 놓으면 세 확률변수 Z_A , Z_B , Z_C 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

다른 지원자들보다 정연이의 1차 필기시험, 2차 필기시험, 실기 시험 성적이 높을 확률은 각각

$$P(X_A < 68) = P\left(Z_A < \frac{68-60}{9}\right) = P\left(Z_A < \frac{8}{9}\right)$$

$$P(X_B < 67) = P\left(Z_B < \frac{67-55}{12}\right) = P(Z_B < 1)$$

$$P(X_C < 73) = P\left(Z_C < \frac{73-64}{10}\right) = P\left(Z_C < \frac{9}{10}\right)$$

$$\text{이때 } P(Z_B < 1) > P\left(Z_C < \frac{9}{10}\right) > P\left(Z_A < \frac{8}{9}\right) \text{이므로}$$

$$P(X_B < 67) > P(X_C < 73) > P(X_A < 68)$$

따라서 정연이의 성적이 상대적으로 좋은 시험부터 순서대로 나열하면 2차 필기시험, 실기 시험, 1차 필기시험이다.

042 답 ③

세 확률변수 X , Y , W 가 각각 정규분포 $N(59, 4^2)$, $N(65, 5^2)$, $N(67, 6^2)$ 을 따르므로

$$Z_X = \frac{X-59}{4}, Z_Y = \frac{Y-65}{5}, Z_W = \frac{W-67}{6}$$

로 놓으면 세 확률변수 Z_X , Z_Y , Z_W 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$a = P(X \geq 65) = P\left(Z_X \geq \frac{65-59}{4}\right) = P(Z_X \geq 1.5)$$

$$\begin{aligned} b = P(Y \leq 57) &= P\left(Z_Y \leq \frac{57-65}{5}\right) = P(Z_Y \leq -1.6) \\ &= P(Z_Y \geq 1.6) \end{aligned}$$

$$c = P(W \geq 73) = P\left(Z_W \geq \frac{73-67}{6}\right) = P(Z_W \geq 1)$$

이때 $P(Z_Y \geq 1.6) < P(Z_X \geq 1.5) < P(Z_W \geq 1)$ 이므로

$$b < a < c$$

043 **답** A, C, B

1팀, 2팀, 3팀 직원들의 하루 스마트폰 사용 시간을 각각 X_1 분, X_2 분, X_3 분이라 하면 세 확률변수 X_1, X_2, X_3 은 각각 정규분포 $N(68, 8^2), N(72, 5^2), N(70, 4^2)$ 을 따르므로

$$Z_1 = \frac{X_1 - 68}{8}, Z_2 = \frac{X_2 - 72}{5}, Z_3 = \frac{X_3 - 70}{4}$$

으로 놓으면 세 확률변수 Z_1, Z_2, Z_3 은 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

각 팀 직원들의 하루 스마트폰 사용 시간이 64분보다 적을 확률은 각각

$$P(X_1 < 64) = P\left(Z_1 < \frac{64 - 68}{8}\right) = P(Z_1 < -0.5)$$

$$P(X_2 < 64) = P\left(Z_2 < \frac{64 - 72}{5}\right) = P(Z_2 < -1.6)$$

$$P(X_3 < 64) = P\left(Z_3 < \frac{64 - 70}{4}\right) = P(Z_3 < -1.5)$$

이때 $P(Z_1 < -0.5) > P(Z_3 < -1.5) > P(Z_2 < -1.6)$ 이므로

$$P(X_1 < 64) > P(X_3 < 64) > P(X_2 < 64)$$

따라서 소속된 각 팀에서 상대적으로 하루 스마트폰 사용 시간이 많은 직원부터 순서대로 나열하면 A, C, B이다.

044 **답** ②

제품 한 개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(20, 5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X - 20}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 30) &= P\left(Z \geq \frac{30 - 20}{5}\right) = P(Z \geq 2) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.48 = 0.02 \end{aligned}$$

045 **답** 328

학생의 확률과 통계 시험 점수를 X 점이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(58, 8^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X - 58}{8}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

확률과 통계 시험 점수가 42점 이상 66점 이하일 확률은

$$\begin{aligned} P(42 \leq X \leq 66) &= P\left(\frac{42 - 58}{8} \leq Z \leq \frac{66 - 58}{8}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 1) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.48 + 0.34 = 0.82 \end{aligned}$$

따라서 구하는 학생 수는

$$400 \times 0.82 = 328$$

046 **답** 47점

학생의 평가 점수를 X 점이라 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(40, 5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X - 40}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

상위 8%에 속하는 학생의 최저 점수를 a 점이라 하면

$$P(X \geq a) = 0.08$$

$$P\left(Z \geq \frac{a - 40}{5}\right) = 0.08$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a - 40}{5}\right) = 0.08$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a - 40}{5}\right) = 0.08$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a - 40}{5}\right) = 0.42$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.4) = 0.42$ 이므로

$$\frac{a - 40}{5} = 1.4, a - 40 = 7 \quad \therefore a = 47$$

따라서 A학점을 받은 학생의 최저 점수는 47점이다.

047 **답** ③

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 100 \times \frac{1}{5} = 20, V(X) = 100 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 16$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(20, 4^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X - 20}{4}$ 이라 하면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(X \geq 24) &= P\left(Z \geq \frac{24 - 20}{4}\right) \\ &= P(Z \geq 1) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 = 0.1587 \end{aligned}$$

048 **답** ④

한 번의 시행에서 동전의 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로 앞면이 나

오는 횟수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 100 \times \frac{1}{2} = 50, V(X) = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(50, 5^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X - 50}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(45 \leq X \leq 65) &= P\left(\frac{45 - 50}{5} \leq Z \leq \frac{65 - 50}{5}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 3) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= 0.3413 + 0.4987 = 0.84 \end{aligned}$$

049 **답** ③

한 번의 시행에서 문제를 맞힐 확률은 $\frac{1}{5}$ 이므로 맞힌 문제의 개수

를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(25, \frac{1}{5}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 25 \times \frac{1}{5} = 5, V(X) = 25 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 4$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(5, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-5}{2}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

문제를 a 개 이상 맞힐 확률이 0.01이므로 $P(X \geq a) = 0.01$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{a-5}{2}\right) = 0.01$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-5}{2}\right) = 0.01$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-5}{2}\right) = 0.01$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-5}{2}\right) = 0.49$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2.5) = 0.49$ 이므로

$$\frac{a-5}{2} = 2.5, a-5=5 \quad \therefore a=10$$

050 답 0.3085

승용차 한 대를 세차하는 데 걸리는 시간을 X 분이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(20, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-20}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 21) &= P\left(Z \geq \frac{21-20}{2}\right) \\ &= P(Z \geq 0.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 0.5 - 0.1915 = 0.3085 \end{aligned}$$

051 답 0.6687

밥 한 공기의 열량을 X kcal라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(320, 8^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-320}{8}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(304 \leq X \leq 324) &= P\left(\frac{304-320}{8} \leq Z \leq \frac{324-320}{8}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 0.5) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 0.4772 + 0.1915 = 0.6687 \end{aligned}$$

052 답 ⑤

과자 한 개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(18, 0.3^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-18}{0.3}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

과자 한 개의 무게가 18.75 g 이하일 확률은

$$\begin{aligned} P(X \leq 18.75) &= P\left(Z \leq \frac{18.75-18}{0.3}\right) \\ &= P(Z \leq 2.5) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= 0.5 + 0.49 = 0.99 \end{aligned}$$

따라서 무게가 18.75 g 이하인 과자는 전체의 99 %이다.

053 답 0.0668

공원까지 가는 데 걸리는 시간을 X 분이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(25, 4^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-25}{4}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

집에서 공원까지 가는 데 걸리는 시간이 31분을 초과하면 약속 시간에 늦으므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X > 31) &= P\left(Z > \frac{31-25}{4}\right) \\ &= P(Z > 1.5) = P(Z \geq 1.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 = 0.0668 \end{aligned}$$

054 답 ②

이 고등학교 2학년 학생의 키를 X cm라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(169, 6.5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-169}{6.5}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

학생의 키가 182 cm 이상일 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 182) &= P\left(Z \geq \frac{182-169}{6.5}\right) \\ &= P(Z \geq 2) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.48 = 0.02 \end{aligned}$$

따라서 구하는 학생 수는 $150 \times 0.02 = 3$

055 답 477

확률변수 X 는 정규분포 $N(62, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-62}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

키위의 무게가 58 g 이상 66 g 이하일 확률은

$$\begin{aligned} P(58 \leq X \leq 66) &= P\left(\frac{58-62}{2} \leq Z \leq \frac{66-62}{2}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 2) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 2 \times 0.477 = 0.954 \end{aligned}$$

따라서 정상 제품의 개수는 $500 \times 0.954 = 477$

056 답 ④

세계지리 시험 성적을 X 점이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(70, 8^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-70}{8}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

시험 성적이 62점 이하일 확률은

$$\begin{aligned} P(X \leq 62) &= P\left(Z \leq \frac{62-70}{8}\right) \\ &= P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.34 = 0.16 \end{aligned}$$

따라서 재평가를 받아야 하는 학생 수는 $200 \times 0.16 = 32$

057 **답** 2766명

이 지역 50대 주민의 최고 혈압을 X mmHg라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(143, 6^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-143}{6}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

최고 혈압이 140 mmHg 이상일 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 140) &= P\left(Z \geq \frac{140-143}{6}\right) \\ &= P(Z \geq -0.5) \\ &= P(Z \leq 0.5) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 0.5 + 0.1915 = 0.6915 \end{aligned}$$

따라서 최고 혈압이 고혈압의 범위에 속하는 50대 주민은

$$4000 \times 0.6915 = 2766(\text{명})$$

058 **답** 410초

학생의 오래매달리기 기록을 X 초라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(480, 40^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-480}{40}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

메달을 받은 학생의 최저 기록을 a 초라 하면 기록이 a 초보다 짧아야 메달을 받으므로

$$\begin{aligned} P(X \leq a) &= 0.04 \\ P\left(Z \leq \frac{a-480}{40}\right) &= 0.04 \\ P\left(Z \geq \frac{480-a}{40}\right) &= 0.04 \\ P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{480-a}{40}\right) &= 0.04 \\ 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{480-a}{40}\right) &= 0.04 \\ \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{480-a}{40}\right) &= 0.46 \\ \text{이때 } P(0 \leq Z \leq 1.75) &= 0.46 \text{이므로} \\ \frac{480-a}{40} &= 1.75, \quad 480-a=70 \\ \therefore a &= 410 \end{aligned}$$

따라서 메달을 받은 학생의 최저 기록은 410초이다.

059 **답** ③

응시자의 시험 점수를 X 점이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(60, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-60}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

합격자의 최저 점수를 a 점이라 하면

$$\begin{aligned} P(X \geq a) &= \frac{21}{300} = 0.07 \\ P\left(Z \geq \frac{a-60}{2}\right) &= 0.07 \\ P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-60}{2}\right) &= 0.07 \\ 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-60}{2}\right) &= 0.07 \\ \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-60}{2}\right) &= 0.43 \end{aligned}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.43$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{a-60}{2} &= 1.5, \quad a-60=3 \\ \therefore a &= 63 \end{aligned}$$

따라서 합격자의 최저 점수는 63점이다.

060 **답** 55 m

선수의 기록을 X m라 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(45, 5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-45}{5}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

3등을 한 선수의 기록을 a m라 하면

$$\begin{aligned} P(X \geq a) &= \frac{3}{150} = 0.02 \\ P\left(Z \geq \frac{a-45}{5}\right) &= 0.02 \\ P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-45}{5}\right) &= 0.02 \\ 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-45}{5}\right) &= 0.02 \\ \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-45}{5}\right) &= 0.48 \\ \text{이때 } P(0 \leq Z \leq 2) &= 0.48 \text{이므로} \\ \frac{a-45}{5} &= 2, \quad a-45=10 \\ \therefore a &= 55 \end{aligned}$$

따라서 3등을 한 선수의 기록은 55 m이다.

061 **답** 2점

응시자의 점수를 X 점이라 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(68, 10^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-68}{10}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

1차 합격자의 최저 점수를 a 점이라 하면

$$\begin{aligned} P(X \geq a) &= \frac{30}{600} = 0.05 \\ P\left(Z \geq \frac{a-68}{10}\right) &= 0.05 \\ P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-68}{10}\right) &= 0.05 \\ 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-68}{10}\right) &= 0.05 \\ \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-68}{10}\right) &= 0.45 \\ \text{이때 } P(0 \leq Z \leq 1.64) &= 0.45 \text{이므로} \\ \frac{a-68}{10} &= 1.64, \quad a-68=16.4 \\ \therefore a &= 84.4 \end{aligned}$$

한편 2차 합격자의 최저 점수를 b 점이라 하면

$$\begin{aligned} P(X \geq b) &= \frac{30+15}{600} = 0.075 \\ P\left(Z \geq \frac{b-68}{10}\right) &= 0.075 \\ P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{b-68}{10}\right) &= 0.075 \\ 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{b-68}{10}\right) &= 0.075 \end{aligned}$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{b-68}{10}\right) = 0.425$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.44) = 0.425$ 이므로

$$\frac{b-68}{10} = 1.44, \quad b-68 = 14.4$$

$$\therefore b = 82.4$$

따라서 1차 합격자와 2차 합격자의 최저 점수의 차는

$$a-b = 84.4 - 82.4 = 2(\text{점})$$

062 답 0.8351

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(150, \frac{3}{5}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 150 \times \frac{3}{5} = 90, \quad V(X) = 150 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = 36$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(90, 6^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-90}{6}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(75 \leq X \leq 96) &= P\left(\frac{75-90}{6} \leq Z \leq \frac{96-90}{6}\right) \\ &= P(-2.5 \leq Z \leq 1) \\ &= P(-2.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2.5) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.4938 + 0.3413 \\ &= 0.8351 \end{aligned}$$

063 답 51

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(64, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 64 \times \frac{1}{2} = 32, \quad V(X) = 64 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 16$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(32, 4^2)$ 을 따르므로

$$a = 32, \quad b = 16$$

$Z = \frac{X-32}{4}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} P(32 \leq X \leq 44) &= P\left(\frac{32-32}{4} \leq Z \leq \frac{44-32}{4}\right) \\ &= P(0 \leq Z \leq 3) \end{aligned}$$

따라서 $c = 3$ 이므로

$$a+b+c = 32+16+3 = 51$$

064 답 0.0082

확률변수 X 가 이항분포 $B(180, p)$ 를 따르므로 $V(X) = 25$ 에서

$$180p(1-p) = 25, \quad 36p^2 - 36p + 5 = 0$$

$$(6p-1)(6p-5) = 0 \quad \therefore p = \frac{5}{6} \quad (\because 0.5 < p < 1)$$

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(180, \frac{5}{6}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 180 \times \frac{5}{6} = 150$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(150, 5^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-150}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P\left(X \geq \frac{135}{p}\right) &= P\left(X \geq 135 \times \frac{6}{5}\right) \\ &= P(X \geq 162) \\ &= P\left(Z \geq \frac{162-150}{5}\right) \\ &= P(Z \geq 2.4) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2.4) \\ &= 0.5 - 0.4918 \\ &= 0.0082 \end{aligned}$$

065 답 0.1587

${}_{100}C_x \left(\frac{9}{10}\right)^x \left(\frac{1}{10}\right)^{100-x}$ 은 한 번의 시행에서 일어날 확률이 $\frac{9}{10}$ 인 어떤 사건이 100번의 독립시행에서 x 번 일어날 확률이다.

이 사건이 일어나는 횟수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포

$B\left(100, \frac{9}{10}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 100 \times \frac{9}{10} = 90$$

$$V(X) = 100 \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = 9$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(90, 3^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-90}{3}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore {}_{100}C_{100} \left(\frac{9}{10}\right)^{100} + {}_{100}C_{99} \left(\frac{9}{10}\right)^{99} \left(\frac{1}{10}\right) + \cdots + {}_{100}C_{93} \left(\frac{9}{10}\right)^{93} \left(\frac{1}{10}\right)^7 \\ = P(X=100) + P(X=99) + \cdots + P(X=93) \\ = P(X \geq 93) \\ = P\left(Z \geq \frac{93-90}{3}\right) \\ = P(Z \geq 1) \\ = P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ = 0.5 - 0.3413 \\ = 0.1587 \end{aligned}$$

066 답 ②

한 번의 시행에서 주사위의 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$ 이므로 1의 눈

이 나오는 횟수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(720, \frac{1}{6}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 720 \times \frac{1}{6} = 120, \quad V(X) = 720 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 100$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(120, 10^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-120}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 140) &= P\left(Z \geq \frac{140-120}{10}\right) \\ &= P(Z \geq 2) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.4772 \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

067 답 0.0668

한 명이 재구매할 확률이 $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ 이므로 재구매하는 사람의 수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(150, \frac{3}{5}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 150 \times \frac{3}{5} = 90, V(X) = 150 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = 36$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(90, 6^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-90}{6}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 99) &= P\left(Z \geq \frac{99-90}{6}\right) \\ &= P(Z \geq 1.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 = 0.0668 \end{aligned}$$

068 답 0.9332

초청장을 받은 한 명이 공연을 보러 올 확률은 $\frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ 이므로 공연을 보러 온 사람의 수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(400, \frac{4}{5}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 400 \times \frac{4}{5} = 320, V(X) = 400 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = 64$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(320, 8^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-320}{8}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \leq 332) &= P\left(Z \leq \frac{332-320}{8}\right) \\ &= P(Z \leq 1.5) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 + 0.4332 = 0.9332 \end{aligned}$$

069 답 ③

등록한 합격자의 수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포

$B\left(192, \frac{3}{4}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 192 \times \frac{3}{4} = 144, V(X) = 192 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 36$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(144, 6^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-144}{6}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 138) &= P\left(Z \geq \frac{138-144}{6}\right) \\ &= P(Z \geq -1) \\ &= P(Z \leq 1) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 + 0.3413 = 0.8413 \end{aligned}$$

070 답 0.02

10점을 얻은 횟수를 X 라 하면 2점을 잃은 횟수는 $1200 - X$ 이므로 얻은 점수가 1560점 이상이 되려면

$$10X - 2(1200 - X) \geq 1560$$

$$\therefore X \geq 330$$

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(1200, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 1200 \times \frac{1}{4} = 300, V(X) = 1200 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 225$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(300, 15^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-300}{15}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 330) &= P\left(Z \geq \frac{330-300}{15}\right) \\ &= P(Z \geq 2) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.48 = 0.02 \end{aligned}$$

071 답 220

한 명이 찬성할 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로 찬성한 사람의 수를 X 라 하면

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 400 \times \frac{1}{2} = 200, V(X) = 400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 100$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(200, 10^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-200}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$P(X \geq a) = 0.02$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{a-200}{10}\right) = 0.02$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-200}{10}\right) = 0.02$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-200}{10}\right) = 0.02$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-200}{10}\right) = 0.48$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.48$ 이므로

$$\frac{a-200}{10} = 2, a-200 = 20$$

$$\therefore a = 220$$

072 답 315

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(450, \frac{2}{3}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 450 \times \frac{2}{3} = 300, V(X) = 450 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 100$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(300, 10^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-300}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(300 \leq X \leq a) = 0.43 \text{에서}$$

$$P\left(\frac{300-300}{10} \leq Z \leq \frac{a-300}{10}\right) = 0.43$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-300}{10}\right) = 0.43$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.43$ 이므로

$$\frac{a-300}{10} = 1.5, \quad a-300 = 15$$

$$\therefore a = 315$$

073 답 ②

제품 한 개가 불량품일 확률은 $\frac{2}{100} = \frac{1}{50}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(2500, \frac{1}{50}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 2500 \times \frac{1}{50} = 50, \quad V(X) = 2500 \times \frac{1}{50} \times \frac{49}{50} = 49$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(50, 7^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-50}{7}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(|X-50| \geq k) = 0.04 \text{에서}$$

$$P(X-50 \leq -k) + P(X-50 \geq k) = 0.04$$

$$P(X \leq 50-k) + P(X \geq 50+k) = 0.04$$

$$P\left(Z \leq \frac{50-k-50}{7}\right) + P\left(Z \geq \frac{50+k-50}{7}\right) = 0.04$$

$$P\left(Z \leq -\frac{k}{7}\right) + P\left(Z \geq \frac{k}{7}\right) = 0.04$$

$$P\left(Z \geq \frac{k}{7}\right) + P\left(Z \geq \frac{k}{7}\right) = 0.04$$

$$2P\left(Z \geq \frac{k}{7}\right) = 0.04$$

$$P\left(Z \geq \frac{k}{7}\right) = 0.02$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k}{7}\right) = 0.02$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k}{7}\right) = 0.02$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k}{7}\right) = 0.48$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.48$ 이므로

$$\frac{k}{7} = 2 \quad \therefore k = 14$$

074 답 0.9772

입장한 관객 한 명이 어린이일 확률은 $\frac{1}{10}$ 이므로 입장한 어린이의 수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{10}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 100 \times \frac{1}{10} = 10, \quad V(X) = 100 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = 9$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(10, 3^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-10}{3}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

어린이가 a 명 이상일 확률이 0.1587이므로 $P(X \geq a) = 0.1587$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{a-10}{3}\right) = 0.1587$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-10}{3}\right) = 0.1587$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-10}{3}\right) = 0.1587$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-10}{3}\right) = 0.3413$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{a-10}{3} = 1, \quad a-10 = 3$$

$$\therefore a = 13$$

100명 중에서 어른은 $(100-X)$ 명이므로 구하는 확률은

$$P(100-X \geq 6a+6) = P(100-X \geq 6 \times 13+6)$$

$$= P(X \leq 16)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{16-10}{3}\right)$$

$$= P(Z \leq 2)$$

$$= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.5 + 0.4772$$

$$= 0.9772$$

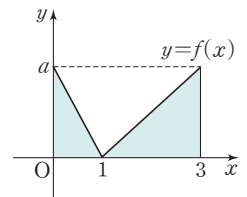
075 답 ④

$f(x)$ 는 확률밀도함수이므로 $a > 0$ 이고 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=0, x=3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 하므로

$$\frac{1}{2} \times 1 \times a + \frac{1}{2} \times 2 \times a = 1, \quad \frac{3}{2}a = 1$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$



076 답 $\frac{1}{9}$

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=6$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 1이어야 하므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times p = 1, \quad 3p = 1 \quad \therefore p = \frac{1}{3}$$

$0 \leq x \leq 6$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 두 점 $(0, 0), \left(6, \frac{1}{3}\right)$ 을 지나는 직선이므로

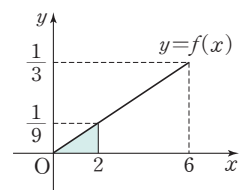
$$y = \frac{1}{6}x \quad \therefore f(x) = \frac{1}{18}x \quad (0 \leq x \leq 6)$$

$$\text{따라서 } f(6p) = f(2) = \frac{1}{9} \text{이고}$$

$P(0 \leq X \leq 2)$ 는 오른쪽 그림과 같이

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

$$P(0 \leq X \leq 2) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$



077 답 ㄷ

- ㄱ. A, B의 정규분포 곡선의 대칭축이 같으므로 A 동아리 회원들과 B 동아리 회원들은 평균적으로 연습량이 같다.
 ㄴ. B의 정규분포 곡선의 대칭축보다 C의 정규분포 곡선의 대칭축이 오른쪽에 있으므로 연습량이 많은 회원은 B 동아리보다 C 동아리에 더 많다.
 ㄷ. B의 정규분포 곡선이 C의 정규분포 곡선보다 가운데 부분의 높이가 높고 좁게 모여 있으므로 B 동아리 회원들이 C 동아리 회원들보다 연습량이 더 고르다.
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.

078 답 ①

확률변수 X 의 확률밀도함수는 $x=m$ 에서 최댓값을 갖고, 정규분포 곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $g(9)=P(5 \leq X \leq 15)$ 가 최댓값이 되려면 5와 15의 평균이 m 이어야 하므로

$$m = \frac{5+15}{2} = 10$$

079 답 59

$$P(|X| \geq k) = 0.0026 \text{에서}$$

$$P(X \leq -k) + P(X \geq k) = 0.0026$$

$$P(X \geq k) + P(X \geq k) = 0.0026$$

$$2P(X \geq k) = 0.0026$$

$$P(X \geq k) = 0.0013$$

$$P(X \geq m) - P(m \leq X \leq k) = 0.0013$$

$$0.5 - P(m \leq X \leq k) = 0.0013$$

$$\therefore P(m \leq X \leq k) = 0.4987$$

이때 $P(m \leq X \leq m+3\sigma) = 0.4987$ 이므로

$$k = m + 3\sigma$$

따라서 $m=50$, $\sigma=3$ 이므로

$$k = 50 + 3 \times 3 = 59$$

080 답 62

A 양계장과 B 양계장에서 생산하는 달걀 한 개의 무게를 각각 X g, Y g이라 하면 두 확률변수 X , Y 는 각각 정규분포 $N(60, 10^2)$,

$N(65, 15^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-60}{10}$, $Z_Y = \frac{Y-65}{15}$ 로 놓으면 두 확률변수 Z_X , Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

A 양계장에서 임의로 택한 달걀 한 개의 무게가 a g 이상일 확률은

$$P(X \geq a) = P\left(Z_X \geq \frac{a-60}{10}\right) \quad \dots\dots ㉠$$

B 양계장에서 임의로 택한 달걀 한 개의 무게가 a g 이하일 확률은

$$P(Y \leq a) = P\left(Z_Y \leq \frac{a-65}{15}\right) = P\left(Z_Y \geq \frac{65-a}{15}\right) \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡이 서로 일치하므로

$$\frac{a-60}{10} = \frac{65-a}{15}, \quad 3a-180=130-2a$$

$$5a=310 \quad \therefore a=62$$

081 답 0.1587

확률변수 X 가 정규분포 $N(20, 5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-20}{5}$ 으로

놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$Y=3X+2 \text{이므로}$$

$$P(Y \leq 47) = P(3X+2 \leq 47)$$

$$= P(X \leq 15)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{15-20}{5}\right)$$

$$= P(Z \leq -1)$$

$$= P(Z \geq 1)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$

082 답 0.927

$f(52-x)=f(52+x)$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=52$ 에 대하여 대칭이다.

$$\therefore m=52$$

확률변수 X 는 정규분포 $N(52, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-52}{\sigma}$ 로

놓으면 $P(m \leq X \leq m+4) = 0.4772$ 에서

$$P(52 \leq X \leq 56) = 0.4772$$

$$P\left(\frac{52-52}{\sigma} \leq Z \leq \frac{56-52}{\sigma}\right) = 0.4772$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{4}{\sigma}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{4}{\sigma} = 2 \quad \therefore \sigma = 2$$

$$\therefore P(49 \leq X \leq 57) = P\left(\frac{49-52}{2} \leq Z \leq \frac{57-52}{2}\right)$$

$$= P(-1.5 \leq Z \leq 2.5)$$

$$= P(-1.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2.5)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.5) + P(0 \leq Z \leq 2.5)$$

$$= 0.4332 + 0.4938 = 0.927$$

083 답 ③

확률변수 X 가 정규분포 $N(60, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-60}{2}$ 으로

놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \geq k) = 0.0228 \text{에서}$$

$$P\left(Z \geq \frac{k-60}{2}\right) = 0.0228$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-60}{2}\right) = 0.0228$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-60}{2}\right) = 0.0228$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-60}{2}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{k-60}{2} = 2, \quad k-60=4$$

$$\therefore k=64$$

084 답 ㄷ

지민이네 학교 전체 학생의 물리학, 화학, 생명과학, 지구과학 시험 성적을 각각 X_A 점, X_B 점, X_C 점, X_D 점이라 하면 네 확률변수 X_A, X_B, X_C, X_D 는 각각 정규분포 $N(44, 16^2), N(42, 12^2), N(52, 14^2), N(68, 10^2)$ 을 따르므로

$$Z_A = \frac{X_A - 44}{16}, Z_B = \frac{X_B - 42}{12}, Z_C = \frac{X_C - 52}{14}, Z_D = \frac{X_D - 68}{10}$$

로 놓으면 네 확률변수 Z_A, Z_B, Z_C, Z_D 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

다른 학생들보다 지민이의 물리학, 화학, 생명과학, 지구과학 시험 성적이 높을 확률은 각각

$$P(X_A < 56) = P\left(Z_A < \frac{56 - 44}{16}\right) = P\left(Z_A < \frac{3}{4}\right)$$

$$P(X_B < 54) = P\left(Z_B < \frac{54 - 42}{12}\right) = P(Z_B < 1)$$

$$P(X_C < 59) = P\left(Z_C < \frac{59 - 52}{14}\right) = P\left(Z_C < \frac{1}{2}\right)$$

$$P(X_D < 74) = P\left(Z_D < \frac{74 - 68}{10}\right) = P\left(Z_D < \frac{3}{5}\right)$$

이때 $P(Z_B < 1) > P\left(Z_A < \frac{3}{4}\right) > P\left(Z_D < \frac{3}{5}\right) > P\left(Z_C < \frac{1}{2}\right)$ 이므로

$$P(X_B < 54) > P(X_A < 56) > P(X_D < 74) > P(X_C < 59)$$

ㄱ. 물리학 성적이 지구과학 성적보다 상대적으로 높다.

ㄴ. 상대적으로 화학 성적이 가장 높고 생명과학 성적이 가장 낮다.

ㄷ. 화학 성적이 54점으로 가장 낮지만 물리학 성적보다 상대적으로 높다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.

085 답 ④

학생의 키를 X cm라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(171, 7^2)$ 을

따르므로 $Z = \frac{X - 171}{7}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

키가 164 cm 이상 178 cm 이하일 확률은

$$\begin{aligned} P(164 \leq X \leq 178) &= P\left(\frac{164 - 171}{7} \leq Z \leq \frac{178 - 171}{7}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 2 \times 0.34 \\ &= 0.68 \end{aligned}$$

따라서 키가 164 cm 이상 178 cm 이하인 학생은 전체 학생의 68 %이다.

086 답 68.12점

사원의 점수를 X 점이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(55, 8^2)$

을 따르므로 $Z = \frac{X - 55}{8}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

10등 이내에 들기 위한 최저 점수를 k 점이라 하면

$$P(X \geq k) = \frac{10}{200} = 0.05$$

$$P\left(Z \geq \frac{k - 55}{8}\right) = 0.05$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k - 55}{8}\right) = 0.05$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k - 55}{8}\right) = 0.05$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k - 55}{8}\right) = 0.45$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.64) = 0.45$ 이므로

$$\frac{k - 55}{8} = 1.64, k - 55 = 13.12$$

$$\therefore k = 68.12$$

따라서 10등 이내에 들기 위한 최저 점수는 68.12점이다.

087 답 0.9772

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{5}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 400 \times \frac{1}{5} = 80, V(X) = 400 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 64$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(80, 8^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X - 80}{8}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(X \leq 96) &= P\left(Z \leq \frac{96 - 80}{8}\right) \\ &= P(Z \leq 2) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 + 0.4772 \\ &= 0.9772 \end{aligned}$$

088 답 0.9452

동전을 100번 던질 때 앞면이 나오는 횟수를 X 라 하면 뒷면이 나

오는 횟수는 $100 - X$ 이므로 점 P 의 좌표가 26 이상이 되려면

$$2X - (100 - X) \geq 26, 3X \geq 126$$

$$\therefore X \geq 42$$

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 100 \times \frac{1}{2} = 50, V(X) = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(50, 5^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X - 50}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 42) &= P\left(Z \geq \frac{42 - 50}{5}\right) \\ &= P(Z \geq -1.6) \\ &= P(Z \leq 1.6) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.6) \\ &= 0.5 + 0.4452 \\ &= 0.9452 \end{aligned}$$



001 답 237

모평균이 15, 모표준편차가 6, 표본의 크기가 3이므로

$$E(\bar{X})=15, V(\bar{X})=\frac{6^2}{3}=12$$

따라서 $V(\bar{X})=E(\bar{X}^2)-\{E(\bar{X})\}^2$ 에서

$$E(\bar{X}^2)=V(\bar{X})+\{E(\bar{X})\}^2=12+15^2=237$$

002 답 $\frac{35}{18}$

확률의 총합은 1이므로 $\frac{1}{4}+a+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=1 \quad \therefore a=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$V(X)=0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 \\ = \frac{25}{6} - \frac{25}{9} = \frac{25}{18}$$

이때 표본의 크기가 5이므로

$$E(\bar{X})=\frac{5}{3}, V(\bar{X})=\frac{\frac{25}{18}}{5}=\frac{5}{18}$$

$$\therefore E(\bar{X})+V(\bar{X})=\frac{5}{3}+\frac{5}{18}=\frac{35}{18}$$

003 답 ③

공 한 개를 임의로 택할 때, 공에 적힌 수를 X 라 하고 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=1 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 5 \times \frac{1}{4} + 7 \times \frac{1}{4} = 4$$

$$V(X)=1^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 5^2 \times \frac{1}{4} + 7^2 \times \frac{1}{4} - 4^2 = 21 - 16 = 5$$

이때 표본의 크기가 2이므로 $E(\bar{X})=4, V(\bar{X})=\frac{5}{2}$

$$\therefore E(\bar{X})V(\bar{X})=4 \times \frac{5}{2}=10$$

004 답 0.8185

모집단이 정규분포 $N(260, 15^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(260, \frac{15^2}{25}\right)$, 즉 $N(260, 3^2)$ 을 따른다.

$Z=\frac{\bar{X}-260}{3}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따르므로 구하는 확률은

$$P(257 \leq \bar{X} \leq 266) = P\left(\frac{257-260}{3} \leq Z \leq \frac{266-260}{3}\right) \\ = P(-1 \leq Z \leq 2) \\ = P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ = P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ = 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$$

005 답 9

모집단이 정규분포 $N(640, 12^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 n 이므로

표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(640, \frac{12^2}{n}\right)$ 을 따른다.

$Z=\frac{\bar{X}-640}{\frac{12}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따르므로 $P(\bar{X} \leq 634) = 0.0668$ 에서

$$P\left(Z \leq \frac{634-640}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right) = 0.0668$$

$$P\left(Z \leq -\frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 0.0668, P\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 0.0668$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 0.0668$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 0.0668$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 0.4332$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{2} = 1.5, \sqrt{n} = 3 \quad \therefore n = 9$$

006 답 $88.04 \leq m \leq 91.96$

표본의 크기가 100, 표본평균이 90, 모표준편차가 10이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$90 - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{100}} \leq m \leq 90 + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore 88.04 \leq m \leq 91.96$$

007 답 4

표본의 크기가 n , 표본평균이 1500, 모표준편차가 20이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$1500 - 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{n}} \leq m \leq 1500 + 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{n}}$$

이때 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이

$$1480.4 \leq m \leq 1519.6 \text{이므로}$$

$$1500 - 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{n}} = 1480.4, 1500 + 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{n}} = 1519.6$$

따라서 $1.96 \times \frac{20}{\sqrt{n}} = 19.6$ 이므로

$$\sqrt{n} = 2 \quad \therefore n = 4$$

008 답 8.6

표본의 크기가 9, 모표준편차가 5이므로 모평균을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2.58 \times \frac{5}{\sqrt{9}} = 8.6$$

009 답 196

표본의 크기가 n , 모표준편차가 5이므로 모평균을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이가 1.4 이하하려면

$$2 \times 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \leq 1.4, \sqrt{n} \geq 14 \quad \therefore n \geq 196$$

따라서 n 의 최솟값은 196이다.

010 답 96

표본의 크기가 64, 모표준편차가 32이므로 $P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라 하면 모평균을 신뢰도 $\alpha\%$ 로 추정할 신뢰구간의 길이는

$$2 \times k \times \frac{32}{\sqrt{64}} = 16.4 \quad \therefore k = 2.05$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2.05) = 0.48$ 이므로

$$\begin{aligned} P(|Z| \leq 2.05) &= P(-2.05 \leq Z \leq 2.05) \\ &= P(-2.05 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2.05) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 2.05) \\ &= 2 \times 0.48 = 0.96 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{\alpha}{100} = 0.96$ 이므로 $\alpha = 96$

011 답 97

표본의 크기가 n , 표본평균이 $\bar{x}$, 모표준편차가 5이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\begin{aligned} \bar{x} - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \\ -\frac{9.8}{\sqrt{n}} \leq m - \bar{x} \leq \frac{9.8}{\sqrt{n}} \quad \therefore |m - \bar{x}| \leq \frac{9.8}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

이때 $|m - \bar{x}| \leq 1$ 이어야 하므로

$$\frac{9.8}{\sqrt{n}} \leq 1, \sqrt{n} \geq 9.8 \quad \therefore n \geq 96.04$$

따라서 n 의 최솟값은 97이다.

012 답 ㄱ, ㄷ

표본의 크기가 n , 모표준편차가 σ 이므로 모평균을 신뢰도 $\alpha\%$ 로 추정할 신뢰구간의 길이는

$$b - a = 2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \left(\text{단, } P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100} \right)$$

ㄱ. n 의 값이 커지면 $\sqrt{n}$ 의 값이 커지므로 $b - a$ 의 값은 작아진다.

ㄴ. α 의 값이 작아지면 k 의 값이 작아지므로 $b - a$ 의 값도 작아진다.

ㄷ. α 의 값이 커지면 k 의 값이 커지고, n 의 값이 작아지면 $\sqrt{n}$ 의 값이 작아지므로 $b - a$ 의 값은 커진다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

013 답 102

모평균이 10, 모표준편차가 4, 표본의 크기가 8이므로

$$E(\bar{X}) = 10, V(\bar{X}) = \frac{4^2}{8} = 2$$

따라서 $V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2$ 에서

$$E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + \{E(\bar{X})\}^2 = 2 + 10^2 = 102$$

014 답 ㉔

모평균이 60, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 16이므로

$$E(\bar{X}) = 60, \sigma(\bar{X}) = \frac{5}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore E(\bar{X})\sigma(\bar{X}) = 60 \times \frac{5}{4} = 75$$

015 답 7

모평균이 m , 모표준편차가 6, 표본의 크기가 n 이므로

$$E(\bar{X}) = m = 11$$

$$V(\bar{X}) = \frac{6^2}{n} = 9 \quad \therefore n = 4$$

$$\therefore m - n = 11 - 4 = 7$$

016 답 1600

모표준편차가 8, 표본의 크기가 n 이므로

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{8}{\sqrt{n}}$$

이때 $\sigma(\bar{X}) \geq 0.2$ 이어야 하므로

$$\frac{8}{\sqrt{n}} \geq 0.2, \sqrt{n} \leq 40 \quad \therefore n \leq 1600$$

따라서 n 의 최댓값은 1600이다.

017 답 $\frac{55}{27}$

확률의 총합은 1이므로

$$a + 2a + 3a = 1, 6a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{6}$$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{2} = \frac{11}{3}$$

$$V(X) = 1^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{3} + 5^2 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{47}{3} - \frac{121}{9} = \frac{20}{9}$$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$E(\bar{X}) = \frac{11}{3}, V(\bar{X}) = \frac{\frac{20}{9}}{4} = \frac{5}{9}$$

$$\therefore E(\bar{X})V(\bar{X}) = \frac{11}{3} \times \frac{5}{9} = \frac{55}{27}$$

018 답 ④

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{10} = 2$$

$$V(X) = 1^2 \times \frac{2}{5} + 2^2 \times \frac{3}{10} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{1}{10} - 2^2 = 5 - 4 = 1$$

표본의 크기가 n 이므로 $V(\bar{X}) = \frac{1}{n}$

$$\text{이때 } V(\bar{X}) = \frac{1}{8} \text{에서 } \frac{1}{n} = \frac{1}{8} \quad \therefore n = 8$$

019 답 $\frac{1}{2}$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{5}{12} + \frac{1}{4} + a + b = 1 \quad \therefore a + b = \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \times \frac{5}{12} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times a + 3 \times b = 2a + 3b + \frac{1}{4}$$

이때 $E(X) = E(\bar{X}) = 1$ 이므로

$$2a + 3b + \frac{1}{4} = 1 \quad \therefore 2a + 3b = \frac{3}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

$$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒} \text{을 연립하여 풀면 } a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{12}$$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$V(X) = 0^2 \times \frac{5}{12} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{12} - 1^2 = 2 - 1 = 1$$

이때 표본의 크기가 2이므로 $V(\bar{X}) = \frac{1}{2}$

020 **답 1**

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$$

$$\frac{-k+2}{10}+\frac{1}{5}+\frac{k+2}{10}+\frac{k+1}{5}=1$$

$$\frac{k+4}{5}=1, k+4=5 \quad \therefore k=1$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=-1 \times \frac{1}{10}+0 \times \frac{1}{5}+1 \times \frac{3}{10}+2 \times \frac{2}{5}=1$$

$$V(X)=(-1)^2 \times \frac{1}{10}+0^2 \times \frac{1}{5}+1^2 \times \frac{3}{10}+2^2 \times \frac{2}{5}-1^2=2-1=1$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=1$$

$$\text{이때 표본의 크기가 9이므로 } \sigma(\bar{X})=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \sigma(3\bar{X}+5)=|3|\sigma(\bar{X})=3 \times \frac{1}{3}=1$$

021 **답 ③**

공 한 개를 임의로 꺼낼 때, 공에 적힌 수를 X 라 하고 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=1 \times \frac{1}{2}+2 \times \frac{1}{3}+3 \times \frac{1}{6}=\frac{5}{3}$$

$$V(X)=1^2 \times \frac{1}{2}+2^2 \times \frac{1}{3}+3^2 \times \frac{1}{6}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{10}{3}-\frac{25}{9}=\frac{5}{9}$$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$E(\bar{X})=\frac{5}{3}, V(\bar{X})=\frac{5}{4}=\frac{5}{36} \quad \therefore \frac{E(\bar{X})}{V(\bar{X})}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{36}}=12$$

022 **답 13000**

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 게임을 한 번 하여 나오는 모든 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

500원	100원	상금(원)
H	H	600
H	T	500
T	H	100
T	T	0

게임을 한 번 하여 받을 수 있는 금액을 X 원이라 하고 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	500	600	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=0 \times \frac{1}{4}+100 \times \frac{1}{4}+500 \times \frac{1}{4}+600 \times \frac{1}{4}=300$$

$$V(X)=0^2 \times \frac{1}{4}+100^2 \times \frac{1}{4}+500^2 \times \frac{1}{4}+600^2 \times \frac{1}{4}-300^2=155000-90000=65000$$

이때 표본의 크기가 5이므로

$$V(\bar{X})=\frac{65000}{5}=13000$$

023 **답 32**

구슬 한 개를 임의로 꺼낼 때, 구슬에 적힌 수를 X 라 하고 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	5	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=3 \times \frac{2}{7}+5 \times \frac{3}{7}+7 \times \frac{2}{7}=5$$

$$V(X)=3^2 \times \frac{2}{7}+5^2 \times \frac{3}{7}+7^2 \times \frac{2}{7}-5^2=\frac{191}{7}-25=\frac{16}{7}$$

$$\text{표본의 크기가 } n \text{이므로 } V(\bar{X})=\frac{16}{n}=\frac{16}{7n}$$

$$\text{이때 } V(\bar{X})=\frac{1}{14} \text{에서}$$

$$\frac{16}{7n}=\frac{1}{14} \quad \therefore n=32$$

024 **답 0.8185**

모집단이 정규분포 $N(60, 8^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 16이므로

표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(60, \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $N(60, 2^2)$ 을 따른다.

$Z=\frac{\bar{X}-60}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따르므로 굴의 무게의 평균이 58 g 이상 64 g 이하일 확률은

$$\begin{aligned} P(58 \leq \bar{X} \leq 64) &= P\left(\frac{58-60}{2} \leq Z \leq \frac{64-60}{2}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 2) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185 \end{aligned}$$

025 **답 0.8413**

모집단이 정규분포 $N(350, 12^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 36이므로

표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(350, \frac{12^2}{36}\right)$, 즉 $N(350, 2^2)$ 을 따른다.

$Z=\frac{\bar{X}-350}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq 348) &= P\left(Z \geq \frac{348-350}{2}\right) \\ &= P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 + 0.3413 = 0.8413 \end{aligned}$$

026 답 11/54

크기가 3인 표본을 X_1, X_2, X_3 이라 하면 순서쌍 (X_1, X_2, X_3) 에 대하여 $\bar{X}=2$ 인 경우는

$(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 2, 2)$

$$\therefore P(\bar{X}=2) = 6 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{11}{54}$$

027 답 ②

모집단이 정규분포 $N(m, 20^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \frac{20^2}{100}\right)$, 즉 $N(m, 2^2)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{X}-m}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 표본평균 $\bar{X}$ 와 모평균 m 의 차가 2시간 이하일 확률은

$$\begin{aligned} P(|\bar{X}-m| \leq 2) &= P(-2 \leq \bar{X}-m \leq 2) \\ &= P(m-2 \leq \bar{X} \leq m+2) \\ &= P\left(\frac{m-2-m}{2} \leq Z \leq \frac{m+2-m}{2}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 2 \times 0.3413 = 0.6826 \end{aligned}$$

028 답 0.0062

모집단이 정규분포 $N(500, 16^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(500, \frac{16^2}{4}\right)$, 즉 $N(500, 8^2)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{X}-500}{8}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 한 조각 하루에 만드는 빵이 2080개 이상일 확률은

$$\begin{aligned} P(4\bar{X} \geq 2080) &= P(\bar{X} \geq 520) \\ &= P\left(Z \geq \frac{520-500}{8}\right) \\ &= P(Z \geq 2.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= 0.5 - 0.4938 = 0.0062 \end{aligned}$$

029 답 36

모집단이 정규분포 $N(300, 33^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 n 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(300, \frac{33^2}{n}\right)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{X}-300}{\frac{33}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따르므로 $P(\bar{X} \geq 289) = 0.9772$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{289-300}{\frac{33}{\sqrt{n}}}\right) = 0.9772$$

$$P\left(Z \geq -\frac{\sqrt{n}}{3}\right) = 0.9772$$

$$P\left(Z \leq \frac{\sqrt{n}}{3}\right) = 0.9772$$

$$P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{3}\right) = 0.9772$$

$$0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{3}\right) = 0.9772$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{3}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{3} = 2, \sqrt{n} = 6$$

$$\therefore n = 36$$

030 답 ⑤

모집단이 정규분포 $N(150, 16^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 n 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(150, \frac{16^2}{n}\right)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{X}-150}{\frac{16}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따르므로 $P(\bar{X} \geq 152) = 0.0668$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{152-150}{\frac{16}{\sqrt{n}}}\right) = 0.0668$$

$$P\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}}{8}\right) = 0.0668$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{8}\right) = 0.0668$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{8}\right) = 0.0668$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{8}\right) = 0.4332$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{8} = 1.5, \sqrt{n} = 12$$

$$\therefore n = 144$$

031 답 355

모집단이 정규분포 $N(350, 50^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(350, \frac{50^2}{100}\right)$, 즉 $N(350, 5^2)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{X}-350}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따르므로 $P(\bar{X} \geq k) = 0.1587$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{k-350}{5}\right) = 0.1587$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-350}{5}\right) = 0.1587$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-350}{5}\right) = 0.1587$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-350}{5}\right) = 0.3413$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{k-350}{5} = 1, k-350 = 5$$

$$\therefore k = 355$$

032 답 ②

모집단이 정규분포 $N(180, 10^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 25이므로
표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(180, \frac{10^2}{25})$, 즉 $N(180, 2^2)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{X}-180}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따르므로 $P(|\bar{X}-180| \leq a) = 0.8664$ 에서

$$P(-a \leq \bar{X}-180 \leq a) = 0.8664$$

$$P(-a+180 \leq \bar{X} \leq a+180) = 0.8664$$

$$P\left(\frac{-a+180-180}{2} \leq Z \leq \frac{a+180-180}{2}\right) = 0.8664$$

$$P\left(-\frac{a}{2} \leq Z \leq \frac{a}{2}\right) = 0.8664$$

$$P\left(-\frac{a}{2} \leq Z \leq 0\right) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{a}{2}\right) = 0.8664$$

$$2P\left(0 \leq Z \leq \frac{a}{2}\right) = 0.8664 \quad \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a}{2}\right) = 0.4332$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$\frac{a}{2} = 1.5 \quad \therefore a = 3$$

033 답 4

모집단이 정규분포 $N(40, 10^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 n 이므로
표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(40, \frac{10^2}{n})$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{X}-40}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따르므로 $P(30 \leq \bar{X} \leq 50) \geq 0.9544$ 에서

$$P\left(\frac{30-40}{\frac{10}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq \frac{50-40}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right) \geq 0.9544$$

$$P(-\sqrt{n} \leq Z \leq \sqrt{n}) \geq 0.9544$$

$$P(-\sqrt{n} \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq \sqrt{n}) \geq 0.9544$$

$$2P(0 \leq Z \leq \sqrt{n}) \geq 0.9544 \quad \therefore P(0 \leq Z \leq \sqrt{n}) \geq 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\sqrt{n} \geq 2 \quad \therefore n \geq 4$$

따라서 n 의 최솟값은 4이다.

034 답 $81.08 \leq m \leq 88.92$

표본의 크기가 49, 표본평균이 85, 모표준편차가 14이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$85 - 1.96 \times \frac{14}{\sqrt{49}} \leq m \leq 85 + 1.96 \times \frac{14}{\sqrt{49}}$$

$$\therefore 81.08 \leq m \leq 88.92$$

035 답 ⑤

표본의 크기가 16, 표본평균이 40, 모표준편차가 12이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$40 - 2.58 \times \frac{12}{\sqrt{16}} \leq m \leq 40 + 2.58 \times \frac{12}{\sqrt{16}}$$

$$\therefore 32.26 \leq m \leq 47.74$$

따라서 $\alpha = 32.26$, $\beta = 47.74$ 이므로

$$100\alpha - 50\beta = 3226 - 2387 = 839$$

036 답 ⑤

표본의 크기 144가 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 12를 이용할 수 있고, 표본평균이 64이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$64 - 1.96 \times \frac{12}{\sqrt{144}} \leq m \leq 64 + 1.96 \times \frac{12}{\sqrt{144}}$$

$$\therefore 62.04 \leq m \leq 65.96$$

037 답 180.58

표본의 크기 100이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 10을 이용할 수 있고, 표본평균이 $\bar{x}$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{100}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{100}}$$

이때 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $175.42 \leq m \leq a$ 이므로

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{100}} = 175.42 \quad \therefore \bar{x} = 178$$

$$\therefore a = \bar{x} + 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{100}} = 178 + 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{100}} = 180.58$$

038 답 16

표본의 크기가 n , 표본평균이 42, 모표준편차가 8이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$42 - 2.58 \times \frac{8}{\sqrt{n}} \leq m \leq 42 + 2.58 \times \frac{8}{\sqrt{n}}$$

이때 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이

$$36.84 \leq m \leq 47.16 \text{ 이므로}$$

$$42 - 2.58 \times \frac{8}{\sqrt{n}} = 36.84, \quad 42 + 2.58 \times \frac{8}{\sqrt{n}} = 47.16$$

$$\text{따라서 } 2.58 \times \frac{8}{\sqrt{n}} = 5.16 \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{n} = 4 \quad \therefore n = 16$$

039 답 ④

표본의 크기를 n 이라 하면 표본평균이 12, 모표준편차가 10이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$12 - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq m \leq 12 + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$$

이때 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이

$$11.51 \leq m \leq 12.49 \text{ 이므로}$$

$$12 - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 11.51, \quad 12 + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 12.49$$

$$\text{따라서 } 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 0.49 \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{n} = 40 \quad \therefore n = 1600$$

따라서 국민 1600명을 대상으로 조사한 것이다.

040 답 0.98

표본의 크기가 144, 모표준편차가 3이므로 모평균을 신뢰도 95 %로 추정할 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{144}} = 0.98$$

041 답 ②

$P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라 하면 신뢰도 $\alpha\%$ 로 추정한 각각의 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

- ① $2k \times \frac{5}{\sqrt{25}} = 2k$ ② $2k \times \frac{10}{\sqrt{25}} = 4k$
 ③ $2k \times \frac{3}{\sqrt{36}} = k$ ④ $2k \times \frac{6}{\sqrt{36}} = 2k$
 ⑤ $2k \times \frac{9}{\sqrt{36}} = 3k$

따라서 신뢰구간의 길이가 가장 긴 것은 ②이다.

042 답 0.62

표본의 크기가 400, 모표준편차가 10이므로 모평균을 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$a = 2 \times 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{400}} = 1.96$$

한편 모평균을 신뢰도 99%로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$b = 2 \times 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{400}} = 2.58$$

$$\therefore b - a = 2.58 - 1.96 = 0.62$$

043 답 74명

표본의 크기를 n 이라 하면 모표준편차가 0.5이므로 모평균을 신뢰도 99%로 추정한 신뢰구간의 길이가 0.3 이하하려면

$$2 \times 2.58 \times \frac{0.5}{\sqrt{n}} \leq 0.3, \sqrt{n} \geq 8.6$$

$$\therefore n \geq 73.96$$

따라서 적어도 74명의 신생아를 조사해야 한다.

044 답 ②

표본의 크기가 n , 모표준편차가 10이므로 모평균을 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간의 길이가 7.84 이하하려면

$$2 \times 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq 7.84, \sqrt{n} \geq 5$$

$$\therefore n \geq 25$$

따라서 n 의 최솟값은 25이다.

045 답 64

표본의 크기가 n , 모표준편차가 σ 이므로 모평균 m 을 신뢰도 99%로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때 $b - a$ 의 값은 신뢰도 99%로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이와 같으므로

$$2 \times 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.645\sigma, \sqrt{n} = 8$$

$$\therefore n = 64$$

046 답 ②

모표준편차를 σ , $P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라 하면 표본의 크기가 4일 때, 모평균을 신뢰도 $\alpha\%$ 로 추정한 신뢰구간의 길이가 2.45이므로

$$2k \times \frac{\sigma}{\sqrt{4}} = 2.45 \quad \therefore k\sigma = 2.45$$

한편 표본의 크기가 n 일 때, 모평균을 신뢰도 $\alpha\%$ 로 추정한 신뢰구간의 길이가 0.49이므로

$$2k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.49, 2 \times \frac{2.45}{\sqrt{n}} = 0.49$$

$$\sqrt{n} = 10 \quad \therefore n = 100$$

047 답 92

표본의 크기가 25, 모표준편차가 10이므로 $P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라 하면 모평균을 신뢰도 $\alpha\%$ 로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2k \times \frac{10}{\sqrt{25}} = 7 \quad \therefore k = 1.75$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.75) = 0.46$ 이므로

$$\begin{aligned} P(|Z| \leq 1.75) &= P(-1.75 \leq Z \leq 1.75) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 1.75) \\ &= 2 \times 0.46 = 0.92 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{\alpha}{100} = 0.92$ 이므로 $\alpha = 92$

048 답 ④

모표준편차를 σ 라 하면 표본의 크기가 n 이므로 모평균을 신뢰도 98%로 추정한 신뢰구간의 길이 l 은

$$l = 2 \times 2.2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라 하면 신뢰도 $\alpha\%$ 로 추정한 모평균에 대한

신뢰구간의 길이가 $\frac{l}{2}$ 이므로

$$2k \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2.2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \therefore k = 1.1$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.1) = 0.36$ 이므로

$$\begin{aligned} P(|Z| \leq 1.1) &= P(-1.1 \leq Z \leq 1.1) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 1.1) \\ &= 2 \times 0.36 = 0.72 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{\alpha}{100} = 0.72$ 이므로 $\alpha = 72$

049 답 30.5

$f(x) = \beta - \alpha$ 의 값은 신뢰도 $x\%$ 로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이와 같으므로 $P(|Z| \leq k) = \frac{x}{100}$ 라 하면

$$f(x) = 2k \times \frac{5}{\sqrt{25}} = 2k$$

$f(x_1) = 2$ 에서 $k = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} P(|Z| \leq 1) &= P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 2 \times 0.3413 = 0.6826 \end{aligned}$$

즉, $\frac{x_1}{100} = 0.6826$ 이므로 $x_1 = 68.26$

$f(x_2) = 5$ 에서 $k = 2.5$ 이므로

$$\begin{aligned} P(|Z| \leq 2.5) &= P(-2.5 \leq Z \leq 2.5) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= 2 \times 0.4938 = 0.9876 \end{aligned}$$

즉, $\frac{x_2}{100} = 0.9876$ 이므로 $x_2 = 98.76$

$$\therefore x_2 - x_1 = 98.76 - 68.26 = 30.5$$

050 [답] ⑤

표본의 크기가 n , 표본평균이 $\bar{x}$, 모표준편차가 10이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{25.8}{\sqrt{n}} \leq m - \bar{x} \leq \frac{25.8}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m - \bar{x}| \leq \frac{25.8}{\sqrt{n}}$$

이때 $|m - \bar{x}| \leq 6$ 이어야 하므로

$$\frac{25.8}{\sqrt{n}} \leq 6, \sqrt{n} \geq 4.3$$

$$\therefore n \geq 18.49$$

따라서 n 의 최솟값은 19이다.

051 [답] 9604

모평균을 m , 표본평균을 $\bar{x}$, 모표준편차를 σ 라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} \leq m - \bar{x} \leq \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m - \bar{x}| \leq \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때 $|m - \bar{x}| \leq \frac{\sigma}{50}$ 이어야 하므로

$$\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sigma}{50}, \sqrt{n} \geq 98$$

$$\therefore n \geq 9604$$

따라서 n 의 최솟값은 9604이다.

052 [답] 32개

표본의 크기를 n , 모평균을 m , 표본평균을 $\bar{x}$ 라 하면 모표준편차가 20이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{39.2}{\sqrt{n}} \leq m - \bar{x} \leq \frac{39.2}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m - \bar{x}| \leq \frac{39.2}{\sqrt{n}}$$

이때 $|m - \bar{x}| \leq 7$ 이어야 하므로

$$\frac{39.2}{\sqrt{n}} \leq 7, \sqrt{n} \geq 5.6$$

$$\therefore n \geq 31.36$$

따라서 최소 32개를 조사해야 한다.

053 [답] ③

표본의 크기를 n , 모표준편차를 σ 라 하면 모평균을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \left(\text{단, } P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100} \right)$$

ㄱ. 신뢰도가 낮아지면 k 의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

ㄴ. 표본의 크기가 커지면 $\sqrt{n}$ 의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

ㄷ. 표본의 크기가 커지면 $\sqrt{n}$ 의 값이 커지고, 신뢰도가 낮아지면 k 의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

ㄹ. 신뢰도가 높아지면 k 의 값이 커지고, 표본의 크기가 작아지면 $\sqrt{n}$ 의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 길어진다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

054 [답] ①

처음 표본의 크기를 n 이라 하면 모표준편차가 σ 이므로 모평균을 신뢰도 α %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \left(\text{단, } P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100} \right)$$

이때 표본의 크기가 a 배, 즉 an 일 때 신뢰구간의 길이는 3배가 되므로

$$2k \frac{\sigma}{\sqrt{an}} = 3 \times 2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \sqrt{a} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a = \frac{1}{9}$$

055 [답] 45

$$E(\bar{X}) = E(X) = 5 \text{이므로}$$

$$V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2 = 30 - 5^2 = 5$$

표본의 크기가 4이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{4} = 5 \quad \therefore V(X) = 20$$

따라서 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 에서

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 20 + 5^2 = 45$$

056 [답] $\frac{1}{4}$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{4} + a + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{8}$$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{8} + 3^2 \times \frac{1}{2} + 4^2 \times \frac{1}{8} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ &= \frac{29}{4} - \frac{25}{4} = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1$$

이때 표본의 크기가 16이므로

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{1}{4}$$

057 [답] ②

과일 바구니 한 개를 임의로 택할 때, 과일 바구니의 무게를 X kg 이라 하고 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} = 2$$

$$V(X) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{4} - 2^2 \\ = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

표본의 크기가 n 이므로

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}$$

$$\therefore \sigma(6\bar{X} - 2) = |6| \sigma(\bar{X}) = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

$$\text{이때 } \sigma(6\bar{X} - 2) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{에서}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{n} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore n = 24$$

058 답 0.9544

모집단이 정규분포 $N(800, 10^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(800, \frac{10^2}{100})$, 즉 $N(800, 1^2)$ 을 따른다.

$Z = \bar{X} - 800$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(798 \leq \bar{X} \leq 802) = P(798 - 800 \leq Z \leq 802 - 800) \\ = P(-2 \leq Z \leq 2) \\ = P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ = 2P(0 \leq Z \leq 2) \\ = 2 \times 0.4772 \\ = 0.9544$$

059 답 64

모집단이 정규분포 $N(60, 24^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 n 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(60, \frac{24^2}{n})$ 을 따른다.

$$Z = \frac{\bar{X} - 60}{\frac{24}{\sqrt{n}}} \text{이라 하면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포 } N(0, 1) \text{을 따}$$

르므로 $P(\bar{X} \geq 66) = 0.0228$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{66 - 60}{\frac{24}{\sqrt{n}}}\right) = 0.0228$$

$$P\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.0228$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.0228$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.0228$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{4}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{4} = 2, \sqrt{n} = 8$$

$$\therefore n = 64$$

060 답 $\frac{81}{2}$

모집단이 정규분포 $N(40, 4^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 64이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(40, \frac{4^2}{64})$, 즉 $N(40, (\frac{1}{2})^2)$ 을 따른다.

$$Z = \frac{\bar{X} - 40}{\frac{1}{2}} = 2\bar{X} - 80 \text{으로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(\bar{X} \geq k) \leq 0.1587$ 에서

$$P(Z \geq 2k - 80) \leq 0.1587$$

$$P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2k - 80) \leq 0.1587$$

$$0.5 - P(0 \leq Z \leq 2k - 80) \leq 0.1587$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq 2k - 80) \geq 0.3413$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$2k - 80 \geq 1, 2k \geq 81$$

$$\therefore k \geq \frac{81}{2}$$

따라서 k 의 최솟값은 $\frac{81}{2}$ 이다.

061 답 7

표본의 크기가 100, 표본평균이 120, 모표준편차가 20이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$120 - 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{100}} \leq m \leq 120 + 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore 116.08 \leq m \leq 123.92$$

따라서 신뢰구간에 속하는 자연수는 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123의 7개이다.

062 답 ③

표본의 크기가 n , 표본평균이 64, 모표준편차가 5이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$64 - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \leq m \leq 64 + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}}$$

이때 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이

$$63.02 \leq m \leq 64.98 \text{이므로}$$

$$64 - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} = 63.02, 64 + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} = 64.98$$

$$\text{따라서 } 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} = 0.98 \text{이므로}$$

$$\sqrt{n} = 10 \quad \therefore n = 100$$

063 답 5.16

$\beta - \alpha$ 의 값은 신뢰도 99%로 추정된 모평균의 신뢰구간의 길이와 같다.

이때 표본의 크기가 16, 모표준편차가 4이므로

$$\beta - \alpha = 2 \times 2.58 \times \frac{4}{\sqrt{16}} = 5.16$$

064 답 $\frac{49}{9}$

표본의 크기가 n_1 인 표본을 임의추출할 때 모표준편차가 1이므로
모평균 m 을 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간의 길이 $b-a$ 는

$$b-a = 2 \times 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{n_1}}$$

표본의 크기가 n_2 인 표본을 임의추출할 때 모표준편차가 1이므로
모평균 m 을 신뢰도 99%로 추정한 신뢰구간의 길이 $d-c$ 는

$$d-c = 2 \times 2.58 \times \frac{1}{\sqrt{n_2}}$$

$$\text{이때 } \frac{d-c}{b-a} = \frac{43}{14} \text{ 이므로}$$

$$\frac{2 \times 2.58 \times \frac{1}{\sqrt{n_2}}}{2 \times 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{n_1}}} = \frac{43}{14}, \quad \frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{n_2}} = \frac{7}{3}$$

$$\therefore \frac{n_1}{n_2} = \frac{49}{9}$$

065 답 92

표본의 크기가 25, 모표준편차가 25이므로 $P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라

하면 모평균을 신뢰도 $\alpha\%$ 로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2k \times \frac{25}{\sqrt{25}} = 18 \quad \therefore k = 1.8$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.8) = 0.46$ 이므로

$$\begin{aligned} P(|Z| \leq 1.8) &= P(-1.8 \leq Z \leq 1.8) \\ &= P(-1.8 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.8) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 1.8) \\ &= 2 \times 0.46 = 0.92 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{\alpha}{100} = 0.92$ 이므로 $\alpha = 92$

066 답 324

모평균을 m , 표본평균을 $\bar{x}$ 라 하면 표본의 크기가 n , 모표준편차가 300이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{300}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{300}{\sqrt{n}}$$

$$-\frac{774}{\sqrt{n}} \leq m - \bar{x} \leq \frac{774}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m - \bar{x}| \leq \frac{774}{\sqrt{n}}$$

이때 $|m - \bar{x}| \leq 43$ 이어야 하므로

$$\frac{774}{\sqrt{n}} \leq 43, \quad \sqrt{n} \geq 18$$

$$\therefore n \geq 324$$

따라서 n 의 최솟값은 324이다.

067 답 ④

$$f(n, \alpha) = 2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \left(\text{단, } P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100} \right)$$

ㄱ. 표본의 크기 n 이 일정할 때, 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이가 길어지므로

$$\alpha < \beta \text{ 이면 } f(n, \alpha) < f(n, \beta)$$

ㄴ. 신뢰도 $\alpha\%$ 가 일정할 때, 표본의 크기가 커지면 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

$$\text{이때 } n > 2 \text{ 이면 } n^2 > 2n \text{ 이므로}$$

$$f(n^2, \alpha) < f(2n, \alpha)$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } f(16n, \alpha) &= 2k \times \frac{\sigma}{\sqrt{16n}} = \frac{1}{4} \times 2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{4} f(n, \alpha) \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

