



정답과 해설

수학 II



001 답 ②

$$f(0) + \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 + 0 + 3 = 4$$

002 답 4

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (kx + 3) = 3k + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 + 2x) = 15$$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ 이어야 하므로
 $3k + 3 = 15, 3k = 12 \quad \therefore k = 4$

003 답 -1

$f(x) = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = -2$$

$x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow -1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1^-} f(t) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(f(x)) = -2 + 1 = -1$$

004 답 3

$3f(x) - g(x) = h(x)$ 라 하면 $g(x) = 3f(x) - h(x)$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3f(x) + 2g(x)}{9f(x) - 2g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3f(x) + 2\{3f(x) - h(x)\}}{9f(x) - 2\{3f(x) - h(x)\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9f(x) - 2h(x)}{3f(x) + 2h(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 - 2 \times \frac{h(x)}{f(x)}}{3 + 2 \times \frac{h(x)}{f(x)}} \\ &= 3 \left(\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{f(x)} = 0 \right) \end{aligned}$$

다른 풀이 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \{3f(x) - g(x)\} = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3f(x) - g(x)}{f(x)} = 0$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 3 - \frac{g(x)}{f(x)} \right\} = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3f(x) + 2g(x)}{9f(x) - 2g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + 2 \times \frac{g(x)}{f(x)}}{9 - 2 \times \frac{g(x)}{f(x)}} = \frac{3 + 2 \times 3}{9 - 2 \times 3} = 3$$

005 답 0

$-1 < x < 0$ 일 때 $0 < x+1 < 1$ 이므로 $[x+1] = 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} [x+1] = 0$$

$2 < x < 3$ 일 때 $[x] = 2$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = 2$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} [x+1] + \lim_{x \rightarrow 2^+} ([x] - 2) = 0 + 2 - 2 = 0$$

006 답 ③

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

007 답 ①

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+5}-4}{x+2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9t^2+5}-4}{-t+2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9+\frac{5}{t^2}}-\frac{4}{t}}{-1+\frac{2}{t}} = \frac{3}{-1} = -3 \end{aligned}$$

008 답 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+4x}-x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1} = \frac{4}{1+1} = 2 \end{aligned}$$

009 답 $\frac{1}{20}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \left(\frac{5}{x+2} - \frac{4}{x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{1}{x-3} \times \frac{x-3}{(x+2)(x+1)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+2)(x+1)} \\ &= \frac{1}{5 \times 4} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

010 답 -5

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0$ 이므로

$$1 + a + b = 0 \quad \therefore b = -a - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - (a+1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+a+1) = a+2 \end{aligned}$$

따라서 $a+2 = -1$ 이므로

$$a = -3$$

이를 ①에 대입하면 $b = 2$

$$\therefore a - b = -5$$

011 답 ③

(가)에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

(나)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 이므로 $f(1) = 0$

$f(x)=2(x-1)(x+a)$ (a 는 상수)라 하면 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x+a)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2(x+a) = 2(1+a)$$

즉, $2(1+a)=4$ 이므로 $a=1$

따라서 $f(x)=2(x-1)(x+1)$ 이므로

$$f(2)=2 \times 1 \times 3=6$$

012 답 3

모든 양의 실수 x 에 대하여 $x^2+1>0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2+1 로 나누면

$$\frac{3x^2-x+1}{x^2+1} < \frac{f(x)}{x^2+1} < \frac{3x^2+2x+4}{x^2+1}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-x+1}{x^2+1}=3$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+2x+4}{x^2+1}=3$ 이므로 함수의 극

한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2+1}=3$$

013 답 $\frac{5}{2}$

$P(a, \sqrt{a})$, $H(0, \sqrt{a})$ 이므로 $\overline{PH}=a$

$$\overline{PA}=\sqrt{(3-a)^2+(-\sqrt{a})^2}=\sqrt{a^2-5a+9}$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow \infty} (\overline{PH}-\overline{PA}) = \lim_{a \rightarrow \infty} (a-\sqrt{a^2-5a+9})$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{(a-\sqrt{a^2-5a+9})(a+\sqrt{a^2-5a+9})}{a+\sqrt{a^2-5a+9}}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{5a-9}{a+\sqrt{a^2-5a+9}}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{5-\frac{9}{a}}{1+\sqrt{1-\frac{5}{a}+\frac{9}{a^2}}} = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2}$$

014 답 ③

$$f(-1) + \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 0 + 1 + 0 = 1$$

015 답 5

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x+1)^2 = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} x^2 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 4 + 1 = 5$$

016 답 ③

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1 + (-1) = 0$$

017 답 -1

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2-2k) = 4-2k$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (kx+8) = 2k+8$$

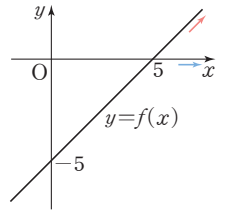
$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 이어야 하므로

$$4-2k=2k+8, \quad -4k=4 \quad \therefore k=-1$$

018 답 ③

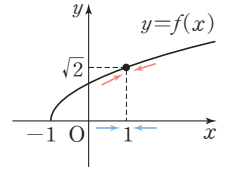
ㄱ. $f(x)=x-5$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$ 의 값도 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x-5) = \infty$$



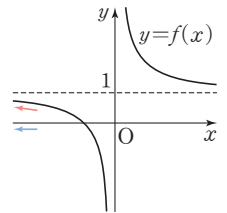
ㄴ. $f(x)=\sqrt{x+1}$ 이라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 1에 가까워질 때 $f(x)$ 의 값은 $\sqrt{2}$ 에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$$



ㄷ. $f(x)=\frac{1}{x}+1$ 이라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 $f(x)$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x}+1\right) = 1$$



ㄹ. $f(x)=\frac{x}{|x|}$ 라 하면

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases} \text{이므로 } y=f(x)$$

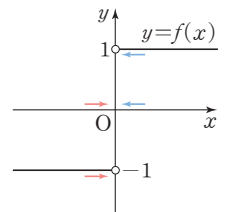
의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ 의 값은 존재하지 않는다.



따라서 보기 중 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

019 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 은 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$

ㄷ. $-1 < a < 1$ 인 임의의 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$

이므로 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재한다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

020 답 4

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} g(t) = 2$$

$g(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $s \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) = \lim_{s \rightarrow 1+} f(s) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) = 2 + 2 = 4$$

021 답 ②

ㄱ. $f(0)=2$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)=2, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)=\lim_{x \rightarrow 0-} (x-1)=-1$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(f(x))=f(2)=2$$

ㄹ. $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1-$ 일 때 $t \rightarrow -2-$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} f(f(x)) &= \lim_{t \rightarrow -2-} f(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow -2-} (t-1) = -3 \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

022 답 2

$x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x+1) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = 2$$

$-x=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $s \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(-x) = \lim_{s \rightarrow -1+} f(s) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} f(x+1) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(-x) = 2+0=2$$

023 답 3

$\frac{t+3}{t-2}=m$ 으로 놓으면

$$m = \frac{t+3}{t-2} = \frac{t-2+5}{t-2} = \frac{5}{t-2} + 1$$

$t \rightarrow \infty$ 일 때 $m \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{t+3}{t-2}\right) = \lim_{m \rightarrow 1+} f(m) = 2$$

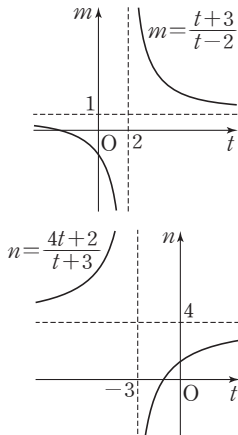
$\frac{4t+2}{t+3}=n$ 으로 놓으면

$$n = \frac{4t+2}{t+3} = \frac{4(t+3)-10}{t+3} = \frac{-10}{t+3} + 4$$

$t \rightarrow \infty$ 일 때 $n \rightarrow 4-$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{4t+2}{t+3}\right) = \lim_{n \rightarrow 4-} f(n) = 1$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{t+3}{t-2}\right) + \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{4t+2}{t+3}\right) = 2+1=3$$



024 답 ①

$2f(x)+g(x)=h(x)$ 라 하면 $g(x)=h(x)-2f(x)$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-3g(x)}{3f(x)+2g(x)-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-3\{h(x)-2f(x)\}}{3f(x)+2\{h(x)-2f(x)\}-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7f(x)-3h(x)}{-f(x)+2h(x)-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7-3 \times \frac{h(x)}{f(x)}}{-1+2 \times \frac{h(x)}{f(x)} - \frac{1}{f(x)}}$$

$$= -7$$

$$\left(\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{f(x)} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \right)$$

다른 풀이 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \{2f(x)+g(x)\} = -3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x)+g(x)}{f(x)} = 0$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 2 + \frac{g(x)}{f(x)} \right\} = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = -2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-3g(x)}{3f(x)+2g(x)-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-3 \times \frac{g(x)}{f(x)}}{3+2 \times \frac{g(x)}{f(x)} - \frac{1}{f(x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-3 \times (-2)}{3+2 \times (-2) - 0} \\ &= -7 \end{aligned}$$

025 답 $-\frac{1}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+\{g(x)\}^2}{2f(x)+g(x)} = \frac{-3+2^2}{2 \times (-3)+2} = -\frac{1}{4}$$

026 답 ㄷ, ㄹ

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)+g(x)\} = 1+0=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)+g(x)\} = 2+0=2$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)+g(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)+g(x)\}$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+g(x)\}$ 의 값은 존재하지 않는다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} \{g(x)-f(x)\} = 0-1=-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \{g(x)-f(x)\} = 0-2=-2$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1+} \{g(x)-f(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 1-} \{g(x)-f(x)\}$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x)-f(x)\}$ 의 값은 존재하지 않는다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = 1 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = 2 \times 0 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{0}{1} = 0, \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

따라서 보기 중 극한값이 존재하는 것은 ㄷ, ㄹ이다.

027 답 $\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+1)f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+1)f(x) \times (x+2)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{x^2+1}{x+2} \times (x+2)f(x) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x+2} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x+2)f(x) \\ &= \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

028 답 7

$f(x)+2g(x)=h(x)$ 라 하면 $g(x)=\frac{h(x)-f(x)}{2}$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) - 6g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ f(x) - 6 \times \frac{h(x) - f(x)}{2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \{4f(x) - 3h(x)\} \\ &= 4 \times 4 - 3 \times 3 = 7 \end{aligned}$$

029 답 $\frac{3}{2}$

$x-2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x-2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3x}{2g(x)-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x}+3}{2 \times \frac{g(x)}{x}-x} = \frac{3+3}{2 \times 2-0} = \frac{3}{2}$$

030 답 2

$x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4x-5}{f(x-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+5)(x-1)}{f(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{f(x-1)} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x+5) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{f(t)} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x+5) = \frac{1}{3} \times 6 = 2 \end{aligned}$$

031 답 -3

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+g(x)\}=1 \text{에서 } \alpha+\beta=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)=-6 \text{에서 } \alpha\beta=-6$$

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-6$ 이므로 α , β 를 두 근으로 하는 이차방정식을

$$x^2-x-6=0 \text{이라 하면}$$

$$(x+2)(x-3)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=3$$

이때 $\alpha < \beta$ 이므로 $\alpha=-2$, $\beta=3$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5f(x)+1}{2g(x)-3} = \frac{5 \times (-2)+1}{2 \times 3-3} = -3$$

032 답 ①

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)+g(x)\}=\alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)-g(x)\}=\beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\{f(x)+g(x)\} + \{f(x)-g(x)\}}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\{f(x)+g(x)\} - \{f(x)-g(x)\}}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow a} g(x)=\alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ g(x) \times \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \alpha\beta$$

ㄷ. [반례] $f(x)=g(x)=\begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ -1 & (x < a) \end{cases}$ 이면 $f(x)-g(x)=0$ 이

므로 $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)-g(x)\}=0$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 의 값은 모두 존재하지 않는다.

ㄹ. [반례] $f(x)=\begin{cases} 0 & (x \geq a) \\ 1 & (x < a) \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ 0 & (x < a) \end{cases}$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

와 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 의 값은 모두 존재하지 않지만 $f(x)+g(x)=1$ 이

$$\text{므로 } \lim_{x \rightarrow a} \{f(x)+g(x)\}=1$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

033 답 ④

$-1 < x < 0$ 일 때 $-2 < x-1 < -1$ 이므로 $[x-1]=-2$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} [x-1] = -2$$

$-x^2+2x-1=-(x-1)^2$ 이고 $1 < x < 2$ 일 때 $-1 < -(x-1)^2 < 0$

이므로 $[-x^2+2x-1]=-1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} [-x^2+2x-1] = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{[x-1]}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1+} [-x^2+2x-1] = \frac{-2}{-1} + (-1) = 1$$

034 답 -2

$$\lim_{x \rightarrow -1+} [x] = -1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} \{[x]^2 + (k+5)[x]\} \\ &= (-1)^2 + (k+5) \times (-1) = -k-4 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} [x] = -2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} \{[x]^2 + (k+5)[x]\} \\ &= (-2)^2 + (k+5) \times (-2) = -2k-6 \end{aligned}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$ 이

여야 하므로

$$-k-4 = -2k-6 \quad \therefore k = -2$$

035 답 ④

$$\lim_{x \rightarrow n+} [x] = n \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow n+} \frac{[x]^2+2x}{[x]} = \frac{n^2+2n}{n} = n+2$$

$$\lim_{x \rightarrow n-} [x] = n-1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow n-} \frac{[x]^2+2x}{[x]} = \frac{(n-1)^2+2n}{n-1} = \frac{n^2+1}{n-1}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow n} \frac{[x]^2+2x}{[x]}$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow n+} \frac{[x]^2+2x}{[x]} = \lim_{x \rightarrow n-} \frac{[x]^2+2x}{[x]} \text{에서}$$

$$n+2 = \frac{n^2+1}{n-1}, \quad n^2+n-2=n^2+1 \quad \therefore n=3$$

따라서 $\alpha=n+2=3+2=5$ 이므로

$$n+\alpha=8$$

036 답 16

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)(\sqrt{x+2}+2) \\ &= 4(2+2) = 16 \end{aligned}$$

037 ④

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+2}{x+1} = \frac{1+1+2}{1+1} = 2\end{aligned}$$

038 ④

① $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x+2} = \sqrt{4} = 2$

② $\lim_{x \rightarrow -1} (-x+2) = -(-1)+2=3$

③ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+4)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+4) = 1+4=5$

④ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+6}+3}$
 $= \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{2x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} 2(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})$
 $= 2(\sqrt{2}+\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

039 ⑧

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{(x^2-4)f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+4)(x^2-4)}{(x^2-4)f(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+4}{f(x)} = \frac{8}{f(2)}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{8}{f(2)} = 1$ 이므로 $f(2) = 8$

040 ⑥

$x > -2$ 일 때 $x+2 > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x^2-2x-8}{|x+2|} &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x^2-2x-8}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{(x+2)(x-4)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+} (x-4) = -6\end{aligned}$$

$\therefore a = -6$

또 $x < -1$ 일 때 $x-1 < 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^2-x}{|x-1|} &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^2-x}{-(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x(x-1)}{-(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} (-x) = -1\end{aligned}$$

$\therefore b = -1$

$\therefore ab = 6$

041 ④

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-\sqrt{9x^2-1}}{x+1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t-\sqrt{9t^2-1}}{-t+1} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1-\sqrt{9-\frac{1}{t^2}}}{-1+\frac{1}{t}} = \frac{-1-3}{-1} = 4\end{aligned}$$

042 ⑤

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(3x+1)}{x^2+3x+2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x-1}{x^2+3x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} = 3\end{aligned}$$

043 ②

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2-x+3}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}} = 2$$

044 ④

① $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+4}{x^2+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{5}{x^2}} = 0$

② $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-1}{x^2-x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 5$

③ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+5}-1}{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-\frac{1}{x}}{3} = \frac{1}{3}$

④ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{3}{x}} = \infty$

⑤ $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x+1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2+2}}{-3t+1} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{t^2}}}{-3+\frac{1}{t}} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

045 ①

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2-2x+3}-2x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2-2x+3}-2x)(\sqrt{4x^2-2x+3}+2x)}{\sqrt{4x^2-2x+3}+2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x+3}{\sqrt{4x^2-2x+3}+2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2+\frac{3}{x}}{\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+2} = \frac{-2}{2+2} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

046 **답** $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}{4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{4} = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

047 **답** ①

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2-2x}+3x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{9t^2+2t}-3t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9t^2+2t}-3t)(\sqrt{9t^2+2t}+3t)}{\sqrt{9t^2+2t}+3t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t}{\sqrt{9t^2+2t}+3t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{9+\frac{2}{t}}+3} = \frac{2}{3+3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

048 **답** 8

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax})}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1-\frac{a}{x}}} = \frac{2a}{1+1} = a \\ \therefore a &= 8 \end{aligned}$$

049 **답** ①

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x^2-4} \left(2 - \frac{2}{x+3} \right) &= \lim_{x \rightarrow -2} \left\{ \frac{1}{(x+2)(x-2)} \times \frac{2(x+2)}{x+3} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2}{(x-2)(x+3)} \\ &= \frac{2}{-4 \times 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

050 **답** 2

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x^2-3}-1) \left(2 + \frac{1}{x-2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{(\sqrt{x^2-3}-1)(\sqrt{x^2-3}+1)}{\sqrt{x^2-3}+1} \times \frac{2x-3}{x-2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-3}+1} \times \frac{2x-3}{x-2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{(x+2)(x-2)}{\sqrt{x^2-3}+1} \times \frac{2x-3}{x-2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(2x-3)}{\sqrt{x^2-3}+1} = \frac{4 \times 1}{1+1} = 2 \end{aligned}$$

051 **답** -2

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-4x}} + 1 \right) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ -t \left(\frac{-t}{\sqrt{t^2+4t}} + 1 \right) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} t \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+4t}} - 1 \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(t \times \frac{t - \sqrt{t^2+4t}}{\sqrt{t^2+4t}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ t \times \frac{(t - \sqrt{t^2+4t})(t + \sqrt{t^2+4t})}{\sqrt{t^2+4t}(t + \sqrt{t^2+4t})} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t \times (-4t)}{\sqrt{t^2+4t}(t + \sqrt{t^2+4t})} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-4}{\sqrt{1+\frac{4}{t}} \left(1 + \sqrt{1+\frac{4}{t}} \right)} \\ &= \frac{-4}{1 \times (1+1)} = -2 \end{aligned}$$

052 **답** ④

$$f(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

$\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ f\left(1+\frac{3}{x}\right) - f\left(1-\frac{2}{x}\right) \right\} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} \{ f(1+3t) - f(1-2t) \} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{(3+3t)^2 - (3-2t)^2}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{5t^2 + 30t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} (5t + 30) = 30 \end{aligned}$$

053 **답** $\frac{1}{6}$

$$\left[\frac{1}{6x^2} \right] = \frac{1}{6x^2} - h \quad (0 \leq h < 1) \text{라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left[\frac{1}{6x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(\frac{1}{6x^2} - h \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{6} - x^2 h \right) = \frac{1}{6}$$

054 **답** ②

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 0$ 이므로

$$4 + 2a + b = 0 \quad \therefore b = -2a - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax - 2(a+2)}{4-2x} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+a+2)}{-2(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{x+a+2}{2} \right) \\ &= -\frac{a+4}{2} \end{aligned}$$

따라서 $-\frac{a+4}{2} = -\frac{7}{2}$ 이므로 $a = 3$

이를 ①에 대입하면 $b = -10$

$$\therefore a + b = -7$$

055 ㉔ ④

$x \rightarrow -2$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + b) = 0 \text{이므로}$$

$$4 + b = 0 \quad \therefore b = -4$$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + (a+2)x + 2a}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+a)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+a}{x-2} = \frac{-2+a}{-4} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{-2+a}{-4} = 5 \text{이므로}$$

$$-2 + a = -20 \quad \therefore a = -18$$

$$\therefore a - 5b = -18 - 5 \times (-4) = 2$$

056 ㉔ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt{2x+a} - \sqrt{x+3}) = 0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{a-2} - \sqrt{2} = 0 \quad \therefore a = 4$$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+4} - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{2x+4} - \sqrt{x+3})(\sqrt{2x+4} + \sqrt{x+3})}{(x^2 - 1)(\sqrt{2x+4} + \sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)(\sqrt{2x+4} + \sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{2x+4} + \sqrt{x+3})} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

$$\therefore b = -\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$\therefore ab = 4 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

057 ㉔ -1

$x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+a} - b) = 0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{3+a} - b = 0 \quad \therefore b = \sqrt{3+a} \quad \dots\dots ㉔$$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{3+a}}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{3+a})(\sqrt{x+a} + \sqrt{3+a})}{(x-3)(\sqrt{x+a} + \sqrt{3+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+a} + \sqrt{3+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{3+a}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3+a}} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{2\sqrt{3+a}} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$\sqrt{3+a} = 2, 3+a=4 \quad \therefore a=1$$

$$\text{이를 ㉔에 대입하면 } b=2$$

$$\therefore a-b = -1$$

058 ㉔ ③

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x^2+a} - b) = 0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{4+a} - b = 0 \quad \therefore b = \sqrt{4+a} \quad \dots\dots ㉔$$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+a} - \sqrt{4+a}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+a} + \sqrt{4+a})}{(\sqrt{x^2+a} - \sqrt{4+a})(\sqrt{x^2+a} + \sqrt{4+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+a} + \sqrt{4+a})}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+a} + \sqrt{4+a})}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+a} + \sqrt{4+a}}{x+2} = \frac{\sqrt{4+a}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{\sqrt{4+a}}{2} = 2 \text{이므로}$$

$$\sqrt{4+a} = 4, 4+a=16 \quad \therefore a=12$$

$$\text{이를 ㉔에 대입하면 } b=4$$

$$\therefore a+b = 16$$

059 ㉔ ③

$$b \leq 0 \text{이면 } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+ax+2} - bx) = \infty \text{이므로}$$

$$b > 0$$

주어진 등식의 좌변에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+ax+2} - bx) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+ax+2} - bx)(\sqrt{x^2+ax+2} + bx)}{\sqrt{x^2+ax+2} + bx} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-b^2)x^2 + ax + 2}{\sqrt{x^2+ax+2} + bx} \quad \dots\dots ㉔ \end{aligned}$$

㉔의 극한값이 존재하므로

$$1-b^2=0, (1-b)(1+b)=0$$

$$\therefore b=1 (\because b>0)$$

이를 ㉔에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+2}{\sqrt{x^2+ax+2} + x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{a}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} \\ &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{a}{2} = 3 \text{이므로 } a=6$$

$$\therefore a-b = 6-1=5$$

060 답 -2

(가)에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 -3인 이차함수이다.

(나)에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{이므로 } f(0) = 0$$

$f(x) = -3x(x+a)$ (a 는 상수)라 하면 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x(x+a)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3(x+a)}{x-1} = 3a$$

$$\text{즉, } 3a = 1 \text{이므로 } a = \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x) = -3x\left(x + \frac{1}{3}\right) \text{이므로}$$

$$f(-1) = 3\left(-1 + \frac{1}{3}\right) = -2$$

061 답 0

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{2x + 1} = 2 \text{에서 } f(x) - x^3 \text{은 최고차항의 계수가 4인 일차}$$

함수이므로 $f(x) - x^3 = 4x + a$ (a 는 상수)라 하면

$$f(x) = x^3 + 4x + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 4x + a) = a \quad \therefore a = -5$$

따라서 $f(x) = x^3 + 4x - 5$ 이므로

$$f(1) = 1 + 4 - 5 = 0$$

062 답 11

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0 \text{에서 } f(x) \text{는 이차 이하의 함수이다.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 6 \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때 (분모) } \rightarrow 0 \text{이고 극한값이 존재하}$$

므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{이므로 } f(2) = 0$$

$f(x) = (x-2)(ax+b)$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(ax+b)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (ax+b) = 2a+b$$

$$\therefore 2a+b=6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 방정식 $f(x) = 3x-4$, 즉 $(x-2)(ax+b) = 3x-4$ 의 한 근 이 $x=1$ 이므로

$$-(a+b) = -1 \quad \therefore a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=5, b=-4$

따라서 $f(x) = (x-2)(5x-4)$ 이므로

$$f(3) = 1 \times 11 = 11$$

063 답 2

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 8 \text{에서 } x \rightarrow 3 \text{일 때 (분모) } \rightarrow 0 \text{이고 극한값이 존재하}$$

므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 \text{이므로 } f(3) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 \text{이므로 } f(-1) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $f(x) = a(x+1)(x-3)$ (a 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a(x+1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} a(x+1) = 4a$$

$$\text{즉, } 4a = 8 \text{이므로 } a = 2$$

따라서 $f(x) = 2(x+1)(x-3)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x+1)(x-3)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2}}{1} = 2 \end{aligned}$$

064 답 ③

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = 7 \text{에서 } f(x) - x^3 \text{은 최고차항의 계수가 7인 이차}$$

함수이므로 $f(x) - x^3 = 7x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x) = x^3 + 7x^2 + ax + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 20 \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모) } \rightarrow 0 \text{이고 극한값이 존재}$$

하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{이므로 } f(1) = 0$$

$$1 + 7 + a + b = 0 \quad \therefore b = -a - 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 7x^2 + ax - (a+8)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 8x + a + 8)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 8x + a + 8) = a + 17 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } a + 17 = 20 \text{이므로 } a = 3$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = -11$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 + 7x^2 + 3x - 11 \text{이므로 } f(0) = -11$$

065 답 ③

$$\frac{1}{x} = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow \infty \text{일 때 } t \rightarrow 0+ \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)}{3x+1} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{f(t)}{t^2}}{\frac{3}{t} + 1} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t)}{t^2 + 3t} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$t \rightarrow 0+$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = 0 \text{이므로 } f(0) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{한편 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2 + 4} = 2 \text{에서 } f(x) - x^3 \text{은 최고차항의 계수가 2인}$$

이차함수이므로 $f(x) - x^3 = 2x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } f(0) = 0 \text{이므로 } b = 0$$

이때 $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t)}{t^2 + 3t} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t^3 + 2t^2 + at}{t^2 + 3t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t(t^2 + 2t + a)}{t(t+3)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t^2 + 2t + a}{t+3} = \frac{a}{3} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{a}{3} = 3 \text{이므로 } a = 9$$

따라서 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 9x$ 이므로

$$f(1) = 1 + 2 + 9 = 12$$

066 [답] 9

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$ 에서 $f(x), g(x)$ 의 차수가 같고, $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 $g(x)$ 의 최고차항의 계수의 2배이다.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-g(x)}{x-4} = 3$ 에서 $f(x)-g(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 일차함수이므로 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 모두 일차함수이다.

$f(x) = 2ax + b, g(x) = ax + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f(x) - g(x) = ax + b - c \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore f(x) + g(x) = 9x + b + c$$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)+g(x)}{x+1}$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} \{f(x) + g(x)\} = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} (9x + b + c) = 0, \quad -9 + b + c = 0$$

$$\therefore b + c = 9$$

따라서 $f(x) + g(x) = 9x + 9$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)+g(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{9x+9}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{9(x+1)}{x+1} = 9$$

067 [답] $\frac{3}{5}$

$$x^3 + 3x^2 - 4 < f(x) < x^3 + 3x^2 + 7$$

$$3x^2 - 4 < f(x) - x^3 < 3x^2 + 7$$

모든 실수 x 에 대하여 $5x^2 + 1 > 0$ 이므로 각 변을 $5x^2 + 1$ 로 나누면

$$\frac{3x^2 - 4}{5x^2 + 1} < \frac{f(x) - x^3}{5x^2 + 1} < \frac{3x^2 + 7}{5x^2 + 1}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4}{5x^2 + 1} = \frac{3}{5}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 7}{5x^2 + 1} = \frac{3}{5}$ 이므로 함수의 극한의

대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{5x^2 + 1} = \frac{3}{5}$$

068 [답] -5

$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 6) = -5, \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x - 5) = -5$ 이므로 함수의 극한의

대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -5$$

069 [답] ⑤

모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 3 > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x^2 + 3$ 으로 나누면

$$\frac{5x^2 - 1}{x^2 + 3} < f(x) < \frac{5x^2 + 2}{x^2 + 3}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 1}{x^2 + 3} = 5, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2}{x^2 + 3} = 5$ 이므로 함수의 극한의

대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$$

070 [답] 8

$$|f(x) - 2x| < 1 \text{에서 } -1 < f(x) - 2x < 1$$

$$\therefore 2x - 1 < f(x) < 2x + 1$$

각 변을 세제곱하면

$$(2x - 1)^3 < \{f(x)\}^3 < (2x + 1)^3$$

모든 양의 실수 x 에 대하여 $x^3 + 1 > 0$ 이므로 각 변을 $x^3 + 1$ 로 나누면

$$\frac{(2x - 1)^3}{x^3 + 1} < \frac{\{f(x)\}^3}{x^3 + 1} < \frac{(2x + 1)^3}{x^3 + 1}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x - 1)^3}{x^3 + 1} = 8, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 1)^3}{x^3 + 1} = 8$ 이므로 함수의 극한의

대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^3}{x^3 + 1} = 8$$

071 [답] ③

모든 양의 실수 x 에 대하여 $x^2 > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2 으로 나누면

$$\frac{2x^2 + 1}{x^2} < \frac{1}{xf(x)} < \frac{2x^2 + x + 3}{x^2}$$

$$\therefore \frac{2x^2 + 1}{10x^2} < \frac{1}{10xf(x)} < \frac{2x^2 + x + 3}{10x^2}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{10x^2} = \frac{1}{5}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x + 3}{10x^2} = \frac{1}{5}$ 이므로 함수의 극한의

대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{10xf(x)} = \frac{1}{5} \quad \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} 10xf(x) = 5$$

072 [답] 1

$x > 0$ 일 때, 주어진 부등식의 각 변을 x 로 나누면

$$-x + 2 \leq \frac{f(x)}{x} \leq x + 2$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0+} (-x + 2) = 2, \lim_{x \rightarrow 0+} (x + 2) = 2$ 이므로 함수의 극한의

대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\{f(x)\}^2}{x\{2x + f(x)\}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}{2 + \frac{f(x)}{x}} = \frac{2^2}{2 + 2} = 1$$

073 [답] ④

(i) $x > 1$ 일 때, $x - 1 > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x - 1$ 로 나누면

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} \leq \frac{f(x)}{x - 1} \leq \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1}$$

$$\frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} \leq \frac{f(x)}{x - 1} \leq \frac{(3x - 1)(x - 1)}{x - 1}$$

$$\therefore x + 1 \leq \frac{f(x)}{x - 1} \leq 3x - 1$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 1+} (x + 1) = 2, \lim_{x \rightarrow 1+} (3x - 1) = 2$ 이므로 함수의 극한의

대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{x - 1} = 2$$

(ii) $x < 1$ 일 때, $x-1 < 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x-1$ 로 나누면

$$\frac{3x^2-4x+1}{x-1} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$\frac{(3x-1)(x-1)}{x-1} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$\therefore 3x-1 \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq x+1$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 1-} (3x-1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1-} (x+1) = 2$ 이므로 함수의 극한의

대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{x-1} = 2$$

(i), (ii)에서 $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{x-1} = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$$

074 답 $\frac{3}{2}$

$P(t, \sqrt{3t})$, $H(t, 0)$ 이므로

$$\overline{OP} = \sqrt{t^2 + (\sqrt{3t})^2} = \sqrt{t^2 + 3t}$$

$$\overline{OH} = t$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} (\overline{OP} - \overline{OH}) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 + 3t} - t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2 + 3t} - t)(\sqrt{t^2 + 3t} + t)}{\sqrt{t^2 + 3t} + t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3t}{\sqrt{t^2 + 3t} + t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{t}} + 1}$$

$$= \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$$

075 답 ⑤

$A(2, a^2)$, $B(a, 4)$ 이므로

$$\overline{PA} = |2-a|, \overline{PB} = |4-a^2|$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow 2-} \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \lim_{a \rightarrow 2-} \frac{|4-a^2|}{|2-a|}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 2-} \frac{(2+a)(2-a)}{2-a}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 2-} (2+a) = 4$$

076 답 $\frac{1}{2}$

중심이 원점이고 반지름의 길이가 a 인 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 = a^2$$

이 원과 직선 $y = 2ax$ 의 제1사분면에서의 교점 P의 x좌표는

$$x^2 + (2ax)^2 = a^2, x^2 = \frac{a^2}{4a^2+1}$$

$$\therefore x = \frac{a}{\sqrt{4a^2+1}} (\because x > 0)$$

따라서 $f(a) = \frac{a}{\sqrt{4a^2+1}}$ 이므로

$$\lim_{a \rightarrow \infty} f(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{4a^2+1}}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{a^2}}} = \frac{1}{2}$$

077 답 ②

점 $P(a, b)$ ($a > 0, b > 0$)는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \therefore b = \sqrt{1-a^2} (\because a > 0, b > 0)$$

이때 $Q(-a, b)$ 이므로 $\overline{PQ} = 2a$

$$\therefore S(a) = \frac{1}{2} \times 2a \times b = ab = a\sqrt{1-a^2}$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow 1-} \frac{S(a)}{\sqrt{1-a}} = \lim_{a \rightarrow 1-} \frac{a\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a}}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 1-} \frac{a\sqrt{(1-a)(1+a)}}{\sqrt{1-a}}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 1-} a\sqrt{1+a} = \sqrt{2}$$

078 답 2

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC는 직

각이등변삼각형이므로

$$\overline{BC} = 4\sqrt{2}$$

$\overline{QC} = t$ 라 하면

$$\overline{BQ} = 4\sqrt{2} - t$$

삼각형 QCP도 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{PQ} = t, \overline{PC} = \sqrt{2}t$$

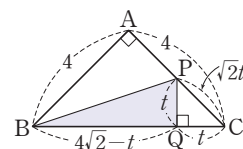
따라서 삼각형 BPQ의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2}t(4\sqrt{2} - t)$$

$P \rightarrow C$ 이면 $\sqrt{2}t \rightarrow 0+$, 즉 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{P \rightarrow C} \frac{S}{\overline{PC}} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2}t(4\sqrt{2} - t)}{\sqrt{2}t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{4}t\right) = 2$$



079 답 $\frac{5}{2}$

점 Q의 좌표를 $(0, y)$, 점 P의 좌표를 (x, x^2+2) 라 하면

$$\overline{QA} = \overline{QP}, \text{ 즉 } \overline{QA}^2 = \overline{QP}^2 \text{ 이므로}$$

$$(y-2)^2 = x^2 + \{(x^2+2)-y\}^2$$

$$x^4 + 5x^2 - 2x^2y = 0, 2x^2y = x^4 + 5x^2$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2} (\because x \neq 0)$$

점 P가 점 A에 한없이 가까워지면 $x \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

따라서 점 Q는 점 $(0, \frac{5}{2})$ 에 한없이 가까워진다.

$$\therefore a = \frac{5}{2}$$

080 ⑤

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 0 \text{ 이므로}$$

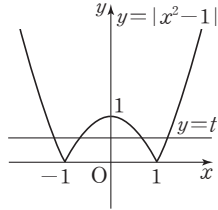
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0 + 1 + 1 = 2$$

081 ④

함수 $y = |x^2 - 1|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 2 & (t = 0) \\ 4 & (0 < t < 1) \\ 3 & (t = 1) \\ 2 & (t > 1) \end{cases}$$



$$\therefore f(0) + \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) + \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) = 2 + 4 + 2 = 8$$

082 ⑩

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (5x - 2) = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (kx + 4) = 2k + 4$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 이어야 하므로

$$8 = 2k + 4, 2k = 4 \quad \therefore k = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -2-} f(x)$$

$$= 8 + \lim_{x \rightarrow -2+} (2x + 4) + \lim_{x \rightarrow -2-} (2x^2 - 6)$$

$$= 8 + 0 + 2 = 10$$

083 ③

$f(x) = t$ 로 놓으면

$x \rightarrow -1-$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} g(t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow -1+} (t^2 - 2t) = 3$$

$x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 2-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2-} g(t)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 2-} (t^2 - 2t) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1-} g(f(x)) + \lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = 3 + 0 = 3$$

084 ②

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)}{x - 1} \times \frac{4}{x + 1} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{x + 1}$$

$$= -3 \times 2 = -6$$

085 ②

$3f(x) + g(x) = h(x)$, $f(x) - 2g(x) = k(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2} k(x) = 5$$

$$f(x) = \frac{1}{7} \{2h(x) + k(x)\} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{7} (2 \times 1 + 5) = 1$$

$$g(x) = \frac{1}{7} \{h(x) - 3k(x)\} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \frac{1}{7} (1 - 3 \times 5) = -2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) = 1 \times (-2) = -2$$

086 ㄱ

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} \{2f(x) + g(x)\} = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \{2f(x) + g(x) - 2f(x)\} = \beta - 2\alpha$$

ㄴ. [반례] $f(x) = 0$, $g(x) = \begin{cases} 0 & (x \geq a) \\ 1 & (x < a) \end{cases}$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. [반례] $f(x) = 0$, $g(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ 2 & (x < a) \end{cases}$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄹ. [반례] $f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$, $g(x) = \frac{1}{(x-a)^4}$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ 이지만

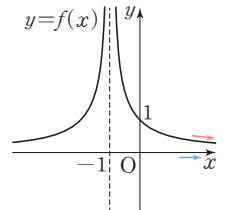
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} (x-a)^2 = 0$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.

087 ④

① $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2) = 9 - 2 = 7$

② $f(x) = \frac{1}{|x+1|}$ 이라 하면 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x+1|} = 0$$

③ $\lim_{x \rightarrow 2+} [x] = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2-} [x] = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{[x]^2 + x}{[x]} = \frac{4 + 2}{2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{[x]^2 + x}{[x]} = \frac{1 + 2}{1} = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x]^2 + x}{[x]} = 3$$

④ $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} (x+2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^2 - 4}{-(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x+2)(x-2)}{-(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2-} \{-(x+2)\} = -4$$

즉, $\lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x^2-4}{|x-2|} \neq \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{x^2-4}{|x-2|}$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{|x-2|}$ 의 값은 존재하지 않는다.

⑤ $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{|x|-2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t+1}{t-2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1+\frac{1}{t}}{1-\frac{2}{t}} = -1\end{aligned}$$

따라서 극한값이 존재하지 않은 것은 ④이다.

088 답 8

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3-a^3}{x^2-a^2} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{(x+a)(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2+ax+a^2}{x+a} \\ &= \frac{a^2+a^2+a^2}{a+a} = \frac{3a}{2}\end{aligned}$$

즉, $\frac{3a}{2}=3$ 이므로 $a=2$

이를 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3-ax^2+a^2x-a^3}{x-a}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x^2+4x-8}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+4)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+4) = 4+4=8\end{aligned}$$

089 답 ⑤

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{x+8}-3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(\sqrt{x+8}+3)}{\sqrt{x^2+3}+2} \\ &= \frac{2(3+3)}{2+2} = 3\end{aligned}$$

090 답 7

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+xf(x)}{x^2-f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{f(x)}{x}}{1-\frac{f(x)}{x} \times \frac{1}{x}} = \frac{3+4}{1-4 \times 0} = 7$$

091 답 2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+a) = a \\ \therefore a &= 2\end{aligned}$$

이를 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3+2f(x)}{xf(x)}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+2(x^2+2x)}{x(x^2+2x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+2x^2+4x}{x^3+2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = 2\end{aligned}$$

092 답 ②

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+4x}+x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2-4t}-t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2-4t}-t)(\sqrt{t^2-4t}+t)}{\sqrt{t^2-4t}+t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-4t}{\sqrt{t^2-4t}+t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{t}}+1} \\ &= \frac{-4}{1+1} = -2\end{aligned}$$

093 답 $\frac{1}{54}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2-x} \left(\frac{1}{\sqrt{x+9}} - \frac{1}{3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2-x} \times \frac{3-\sqrt{x+9}}{3\sqrt{x+9}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x^2-x} \times \frac{(3-\sqrt{x+9})(3+\sqrt{x+9})}{3\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x(x-1)} \times \frac{-x}{3\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x-1} \times \frac{-1}{3\sqrt{x+9}(3+\sqrt{x+9})} \right\} \\ &= -1 \times \frac{-1}{3 \times 3 \times (3+3)} = \frac{1}{54}\end{aligned}$$

094 답 $\frac{11}{12}$

$x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x+a}-3) = 0$ 이므로

$$\sqrt{-2+a}-3=0 \quad \therefore a=11$$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+11}-3}{2x+4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt{x+11}-3)(\sqrt{x+11}+3)}{(2x+4)(\sqrt{x+11}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{2(x+2)(\sqrt{x+11}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{2(\sqrt{x+11}+3)} \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

$$\therefore b = \frac{1}{12}$$

$$\therefore ab = \frac{11}{12}$$

095 ④

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - 4x + b}{x - 1} = 2$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (ax^2 - 4x + b) = 0$ 이므로

$$a - 4 + b = 0 \quad \therefore b = 4 - a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - 4x + 4 - a}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(ax+a-4)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (ax+a-4) = 2a-4 \end{aligned}$$

따라서 $2a-4=2$ 이므로 $a=3$

이를 ①에 대입하면 $b=1$

$$\therefore a-b=2$$

096 ② -24

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xg(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 9x}{f(x)} = 1$ 에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{xg(x)} = 2$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ 이므로 $f(3) = 0$

$f(x) = 3(x-3)(x+a)$ (a 는 상수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{xg(x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x-3)(x+a)}{3x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+a}{x} = \frac{3+a}{3}$$

즉, $\frac{3+a}{3} = 2$ 이므로 $a=3$

따라서 $f(x) = 3(x-3)(x+3)$ 이므로

$$f(1) = 3 \times (-2) \times 4 = -24$$

097 ③ 10

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 이므로 $f(1) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{f(x)} = 2$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ 이므로 $f(2) = 0$

$f(x)$ 는 삼차함수이므로

$f(x) = (x-1)(x-2)(ax+b)$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-2)(ax+b) = -a-b \end{aligned}$$

즉, $-a-b=1$ 이므로 $a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-1)(x-2)(ax+b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-1)(ax+b)} = \frac{1}{2a+b} \end{aligned}$$

즉, $\frac{1}{2a+b} = \frac{1}{2}$ 이므로 $2a+b=2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=3, b=-4$

따라서 $f(x) = (x-1)(x-2)(3x-4)$ 이므로

$$f(3) = 2 \times 1 \times 5 = 10$$

098 ③

$x > 0$ 일 때 $\sqrt{9x+1} > 0, \sqrt{9x+4} > 0$ 이므로

$\sqrt{9x+1} < f(x) < \sqrt{9x+4}$ 에서

$$9x+1 < \{f(x)\}^2 < 9x+4$$

$x > 0$ 일 때 $6x+2 > 0$ 이므로

$$\frac{9x+1}{6x+2} < \frac{\{f(x)\}^2}{6x+2} < \frac{9x+4}{6x+2}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x+1}{6x+2} = \frac{3}{2}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x+4}{6x+2} = \frac{3}{2}$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{6x+2} = \frac{3}{2}$$

099 ⑧ 8

두 점 $A(0, t), B(-2, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{0-t}{-2-0}x + t \quad \therefore y = \frac{t}{2}x + t$$

점 P는 직선 $y = \frac{t}{2}x + t$ 와 원 $x^2 + y^2 = 4$ 의 한 교점이므로 점 P의 y좌표는

$$\left(\frac{2}{t}y - 2\right)^2 + y^2 = 4, \left(\frac{4}{t^2} + 1\right)y^2 - \frac{8}{t}y = 0$$

$$y\left\{\left(\frac{4}{t^2} + 1\right)y - \frac{8}{t}\right\} = 0 \quad \therefore y = \frac{\frac{8}{t}}{\frac{4}{t^2} + 1} = \frac{8t}{4+t^2} \quad (\because y \neq 0)$$

따라서 $\overline{OA} = t, \overline{PH} = \frac{8t}{4+t^2}$ 이고, $P \rightarrow B$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow B} (\overline{OA} \times \overline{PH}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(t \times \frac{8t}{4+t^2}\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{8t^2}{4+t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{8}{\frac{4}{t^2} + 1} = 8 \end{aligned}$$

다른 풀이 $P(a, b)$ 라 하면 $H(a, 0)$ 이므로 $\overline{PH} = b$

직선 BP의 방정식은

$$y = \frac{b-0}{a+2}(x+2) \quad \therefore y = \frac{b}{a+2}x + \frac{2b}{a+2}$$

점 A는 이 직선이 y축과 만나는 점이므로

$$A\left(0, \frac{2b}{a+2}\right) \quad \therefore \overline{OA} = \frac{2b}{a+2}$$

점 P(a, b)는 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 4 \quad \therefore b^2 = 4 - a^2$$

$P \rightarrow B$ 일 때 $a \rightarrow -2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{P \rightarrow B} (\overline{OA} \times \overline{PH}) &= \lim_{a \rightarrow -2+} \left(\frac{2b}{a+2} \times b\right) \\ &= \lim_{a \rightarrow -2+} \frac{2b^2}{a+2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -2+} \frac{2(4-a^2)}{a+2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -2+} \frac{2(2+a)(2-a)}{a+2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -2+} 2(2-a) = 8 \end{aligned}$$

001 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $f(1)=2$ 이고, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+1) = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 정의되지 않으므로 $x=1$ 에서 불연속이다.

ㄷ. $f(1)=0$ 이고,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

ㄹ. $f(1)=2$ 이고,

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (\sqrt{x-1}+2) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x+1) = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

따라서 보기 중 $x=1$ 에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

002 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극한값이 존재하지 않는다.

ㄷ. $f(1)=-1$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

003 답 ⑤

함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+ax-3}{x-3} = b \quad \dots\dots ①$$

$x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2+ax-3) = 0$ 이므로

$$9+3a-3=0 \quad \therefore a=-2$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)(x-3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x+1) = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore b=4$$

$$\therefore a+b = -2+4 = 2$$

004 답 7

$$x \neq 2 \text{일 때, } f(x) = \frac{x^3-kx+2}{x-2}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-kx+2}{x-2} = f(2) \quad \dots\dots ①$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3-kx+2) = 0$ 이므로

$$8-2k+2=0 \quad \therefore k=5$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-5x+2}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x-1)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+2x-1) = 7 \end{aligned}$$

$$\therefore f(2) = 7$$

005 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f(x)+3g(x) = x+3+3(x^2+1) = 3x^2+x+6$ 이므로 이 함수는 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄴ. $\{f(x)\}^2 = (x+3)^2 = x^2+6x+9$ 이므로 이 함수는 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄷ. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+3}{x^2+1}$ 이므로 이 함수는 모든 실수 x 에서 연속이다.

$$\text{ㄹ. } \frac{f(x)}{g(x)-f(x)} = \frac{x+3}{x^2+1-(x+3)} = \frac{x+3}{x^2-x-2}$$

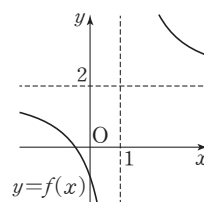
이 함수는 $x^2-x-2 = (x+1)(x-2) = 0$, 즉 $x=-1, x=2$ 에서 정의되지 않으므로 $x=-1, x=2$ 에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수 중 모든 실수 x 에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

006 답 ㄱ, ㄴ

함수 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 2$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ, ㄴ. 닫힌구간 $[-2, -1], [2, 3]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 각 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

ㄴ. 반열린구간 $[-1, 2)$ 에서 최댓값과 최솟값은 없다.

ㄷ. 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 최댓값은 -1 , 최솟값은 없다.

ㄹ. 반열린구간 $(3, 4]$ 에서 최댓값은 없고, 최솟값은 3이다.

따라서 보기 중 최댓값과 최솟값이 모두 존재하는 구간은 ㄱ, ㄴ이다.

007 답 ⑤

$f(x) = 2x^3 - 5x - 9$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고

$$f(-2) = -15, f(-1) = -6, f(0) = -9, f(1) = -12,$$

$$f(2) = -3, f(3) = 30$$

따라서 $f(2)f(3) < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 주어진 방정식은 열린구간 $(2, 3)$ 에서 실근을 갖는다.

008 답 3개

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 연속이고

$$f(-2)f(-1) < 0, f(-1)f(0) < 0, f(1)f(2) < 0$$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(-2, -1), (-1, 0), (1, 2)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(-2, 2)$ 에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

009 답 ㄱ, ㄴ

$$\text{ㄱ. } f(3)=7, \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x+1) = 7 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이다.

$$\text{ㄴ. } \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} ([x]-x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3+} (3-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} ([x]-x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3-} (2-x) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 정의되지 않으므로 $x=3$ 에서 불연속이다.

ㄹ. $f(3)=5$ 이고,

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} (x+2) = 5,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} (2x-1) = 5 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이다.

$$\text{ㅁ. } \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.

따라서 보기 중 $x=3$ 에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

010 답 ⑤

$$\text{① } f(-1)=\sqrt{2} \text{이고, } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+3} = \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$$\text{② } f(-1)=1 \text{이고, } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+2} = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$$\text{③ } f(-1)=0 \text{이고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x+1) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (-x-1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$$\text{④ } f(-1)=1 \text{이고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (-x) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} x^2 = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$$\text{⑤ } f(-1)=1 \text{이고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} x = -1$$

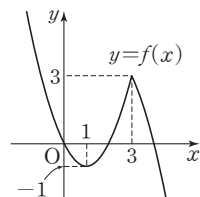
$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq f(-1)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이다.

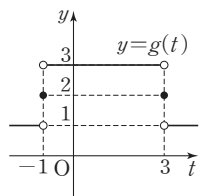
011 답 2

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (t < -1 \text{ 또는 } t > 3) \\ 2 & (t = -1 \text{ 또는 } t = 3) \\ 3 & (-1 < t < 3) \end{cases}$$



따라서 함수 $y=g(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $g(t)$ 가 불연속인 t 의 값은 $-1, 3$ 의 2개이다.



012 답 8

주어진 집합의 원소의 개수 $f(a)$ 는 이차방정식

$$ax^2 + 2(a-4)x - (a-4) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

의 실근의 개수와 같다.

이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-4)^2 + a(a-4) = 2(a-2)(a-4)$$

$$\text{(i) } f(a)=2 \text{일 때, } \frac{D}{4} > 0 \text{이므로}$$

$$2(a-2)(a-4) > 0 \quad \therefore a < 2 \text{ 또는 } a > 4$$

$$\text{(ii) } f(a)=1 \text{일 때, } \frac{D}{4} = 0 \text{이므로}$$

$$2(a-2)(a-4) = 0 \quad \therefore a = 2 \text{ 또는 } a = 4$$

$$\text{(iii) } f(a)=0 \text{일 때, } \frac{D}{4} < 0 \text{이므로}$$

$$2(a-2)(a-4) < 0 \quad \therefore 2 < a < 4$$

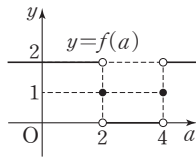
(i), (ii), (iii)에서

$$f(a) = \begin{cases} 2 & (a < 2 \text{ 또는 } a > 4) \\ 1 & (a = 2 \text{ 또는 } a = 4) \\ 0 & (2 < a < 4) \end{cases}$$

함수 $y=f(a)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(a)$ 가 불연속인 a 의 값은 2, 4

따라서 모든 a 의 값의 곱은

$$2 \times 4 = 8$$



013 답 4

$0 < x < 4$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$0 < x \leq 1$ 일 때, $[f(x)] = 2$

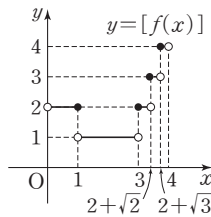
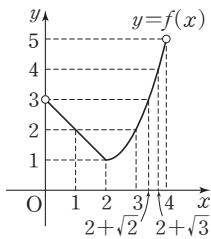
$1 < x < 3$ 일 때, $[f(x)] = 1$

$3 \leq x < 2 + \sqrt{2}$ 일 때, $[f(x)] = 2$

$2 + \sqrt{2} \leq x < 2 + \sqrt{3}$ 일 때, $[f(x)] = 3$

$2 + \sqrt{3} \leq x < 4$ 일 때, $[f(x)] = 4$

따라서 $0 < x < 4$ 에서 함수 $y=[f(x)]$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $[f(x)]$ 가 불연속인 x 의 값은 1, 3, $2 + \sqrt{2}$, $2 + \sqrt{3}$ 의 4개이다.



014 답 4

② $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

③ $f(2) = 0$ 이고, $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

④ (i) $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는

$x = -1$ 에서 불연속이다.

(ii) $f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 불연속이다.

(iii) 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 정의되지 않으므로 $x = 1$ 에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 -1 , 0 , 1 의 3개이다.

⑤ (i) $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 극한값이 존재하지 않는 x 의 값은 -1 , 1 의 2개이다.

015 답 6

(i) $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는

$x = -1$ 에서 불연속이다.

(ii) $f(0) = 0$ 이고, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 불연속이다.

(iii) $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 불연속이다.

(iv) $f(2) = -1$ 이고, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 불연속이다.

(i)~(iv)에서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$, $x = 1$ 에서 극한값이 존재하지 않으므로

$$m = 2$$

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ 에서 불연속이므로

$$n = 4$$

$$\therefore m + n = 2 + 4 = 6$$

016 답 2

(i) $f(1)g(1) = 1 \times 1 = 1$ 이고, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = 0 \times 1 = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) \neq f(1)g(1)$$

즉, 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 불연속이다.

(ii) $f(2)g(2) = -1 \times 1 = -1$ 이고,

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x) = -1 \times 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x) = 1 \times 0 = 0$$
이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) \neq f(2)g(2)$$

즉, 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x = 2$ 에서 불연속이다.

(iii) $f(3)g(3) = 0 \times 2 = 0$ 이고,

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x)g(x) = 0 \times 2 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x)g(x) = 0 \times 1 = 0$$
이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x) = f(3)g(3)$$

즉, 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x = 3$ 에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)g(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 1, 2의 2개이다.

017 ㉮ ④

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = 0 \times 0 = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = 1 \times 0 = 0$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = 0$
 즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)$ 의 값은 존재한다.

ㄴ. $f(0)+g(0)=-1+2=1$ 이고,
 $\lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)+g(x)\} = 0+1=1$,
 $\lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)+g(x)\} = -1+2=1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+g(x)\} = f(0)+g(0)$
 즉, 함수 $f(x)+g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 2+} \{f(x)-g(x)\} = 1-1=0$,
 $\lim_{x \rightarrow 2-} \{f(x)-g(x)\} = -1-1=-2$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 2+} \{f(x)-g(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 2-} \{f(x)-g(x)\}$
 즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-g(x)\}$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수
 $f(x)-g(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

018 ㉮ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) = -1 \times (-1) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) = 1 \times (-1) = -1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x)$
 즉, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $f(g(1)) = f(1) = -1$ 이고,
 $g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t=1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) = f(1) = -1$
 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow -1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) = -1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = -1$
 즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = f(g(1))$ 이므로 함수 $f(g(x))$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow -1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow -1+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} g(t) = -1$
 $x \rightarrow -1$ 일 때 $t=1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow -1-} g(f(x)) = g(1) = 1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} g(f(x)) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} g(f(x))$
 즉, $\lim_{x \rightarrow -1} g(f(x))$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $g(f(x))$
 는 $x=-1$ 에서 불연속이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

019 ㉮ ㄱ, ㄷ

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 1 + (-1) = 0$

ㄴ. $f(2)+f(-2)=-1+(-1)=-2$ 이고,
 $-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow -2$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 2+} \{f(x)+f(-x)\} = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) + \lim_{t \rightarrow -2-} f(t)$
 $= -1 + 1 = 0$
 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow -2$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 2-} \{f(x)+f(-x)\} = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) + \lim_{t \rightarrow -2+} f(t)$
 $= 1 + (-1) = 0$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)+f(-x)\} = 0$
 즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)+f(-x)\} \neq f(2)+f(-2)$ 이므로 함수
 $f(x)+f(-x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

ㄷ. $f(0)f(2)=-1 \times (-1)=1$ 이고,
 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로,
 $x+1=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $s \rightarrow 2$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x-1)f(x+1) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) \times \lim_{s \rightarrow 2+} f(s)$
 $= -1 \times (-1) = 1$
 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로, $x \rightarrow 1$ 일 때 $s \rightarrow 2$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x-1)f(x+1) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) \times \lim_{s \rightarrow 2-} f(s) = 1 \times 1 = 1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x-1)f(x+1) = 1$
 즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x-1)f(x+1) = f(0)f(2)$ 이므로 함수
 $f(x-1)f(x+1)$ 은 $x=1$ 에서 연속이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

020 ㉮ 4

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{x-1} = -4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+ax+b) = 0$ 이므로
 $1+a+b=0 \quad \therefore b=-a-1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 이를 ㉮의 좌변에 대입하면
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax-(a+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} (x+a+1) = a+2$
 즉, $a+2=-4$ 이므로 $a=-6$
 이를 ㉮에 대입하면 $b=5$
 $\therefore a+2b=-6+2 \times 5=4$

021 ㉮ 1

함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=a$ 에서 연속이므로
 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$
 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} (3-x^2) = 3-a^2$
 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} (x^2-2x) = a^2-2a$
 $f(a) = 3-a^2$
 즉, $3-a^2 = a^2-2a$ 이므로 $2a^2-2a-3=0$
 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a 의
 값의 합은 1이다.

022 답 32

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x+a}-2} = b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+a}-2) = 0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{2+a}-2=0 \quad \therefore a=2$$

이를 ⑦의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)(\sqrt{x+2}+2) = 16 \end{aligned}$$

따라서 $b=16$ 이므로 $ab=2 \times 16=32$

023 답 ⑤

함수 $(x-a)f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} (x-a)f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x-a)f(x) = (2-a)f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} (x-a)f(x) = (2-a) \times 1 = 2-a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} (x-a)f(x) = (2-a) \times 3 = 6-3a$$

$$(2-a)f(2) = 2-a$$

$$\text{즉, } 2-a=6-3a \text{이므로 } a=2$$

024 답 ②

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=-1$, $x=1$ 에서 연속이다.

(i) $x=-1$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (-x^2+ax+b) = -1-a+b$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (x-1)^2 = 4$$

$$f(-1) = (-1-1)^2 = 4$$

$$\text{즉, } -1-a+b=4 \text{이므로 } a-b=-5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $x=1$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x-1)^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x^2+ax+b) = -1+a+b$$

$$f(1) = (1-1)^2 = 0$$

$$\text{즉, } 0=-1+a+b \text{이므로 } a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{을 연립하여 풀면 } a=-2, b=3$$

$$\therefore 2a+b=2 \times (-2)+3=-1$$

025 답 6

함수 $f(x)g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$, $x=2$ 에서 연속이다.

(i) $x=1$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = f(1)g(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2+ax+b)(x-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2+ax+b)(x+1) = 2+2a+2b$$

$$f(1)g(1) = (1+a+b) \times (1+1) = 2+2a+2b$$

$$\text{즉, } 0=2+2a+2b \text{이므로 } a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $x=2$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x) = f(2)g(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2+ax+b)(-x+4) = 8+4a+2b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x^2+ax+b)(x-1) = 4+2a+b$$

$$f(2)g(2) = (4+2a+b) \times (-2+4) = 8+4a+2b$$

$$\text{즉, } 8+4a+2b=4+2a+b \text{이므로 } 2a+b=-4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{을 연립하여 풀면 } a=-3, b=2$$

따라서 $f(x)=x^2-3x+2$ 이므로

$$f(-1)=1+3+2=6$$

026 답 ③

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 불연속이고, 함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 합성함수 $g(f(x))$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이어야 한다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) = g(f(1))$$

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = g(0) = 2$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow -2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -2-} g(t) = g(-2) = 4a-2b-6$$

$$g(f(1)) = g(-1) = a-b+1$$

$$\text{즉, } 2=4a-2b-6=a-b+1 \text{이므로}$$

$$2a-b=4, a-b=1$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a=3, b=2 \quad \therefore ab=3 \times 2=6$$

027 답 8

함수 $f(x)f(x-k)$ 가 $x=k$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow k+} f(x)f(x-k) = \lim_{x \rightarrow k-} f(x)f(x-k) = f(k)f(0)$$

(i) $k=0$ 일 때

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)f(x-k) = \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)\}^2 = 25$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)f(x-k) = \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)\}^2 = 4$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow k+} f(x)f(x-k) \neq \lim_{x \rightarrow k-} f(x)f(x-k)$$

따라서 함수 $f(x)f(x-k)$ 는 $x=k$ 에서 불연속이다.

(ii) $k>0$ 일 때

$x-k=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow k$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow k+} f(x)f(x-k) = \lim_{x \rightarrow k+} f(x) \times \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$$

$$= \lim_{x \rightarrow k+} \left(-\frac{1}{2}x+5\right) \times \lim_{t \rightarrow 0+} \left(-\frac{1}{2}t+5\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}k+5\right) \times 5$$

$x \rightarrow k-$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow k-} f(x)f(x-k) &= \lim_{x \rightarrow k-} f(x) \times \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) \\ &= \lim_{x \rightarrow k-} \left(-\frac{1}{2}x+5\right) \times \lim_{t \rightarrow 0-} (t+2) \\ &= \left(-\frac{1}{2}k+5\right) \times 2\end{aligned}$$

$$f(k)f(0) = \left(-\frac{1}{2}k+5\right) \times 5$$

$$\text{즉, } \left(-\frac{1}{2}k+5\right) \times 5 = \left(-\frac{1}{2}k+5\right) \times 2 \text{이므로 } k=10$$

(iii) $k < 0$ 일 때

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow k+} f(x)f(x-k) &= \lim_{x \rightarrow k+} f(x) \times \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) \\ &= \lim_{x \rightarrow k+} (x+2) \times \lim_{t \rightarrow 0+} \left(-\frac{1}{2}t+5\right) \\ &= (k+2) \times 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow k-} f(x)f(x-k) &= \lim_{x \rightarrow k-} f(x) \times \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) \\ &= \lim_{x \rightarrow k-} (x+2) \times \lim_{t \rightarrow 0-} (t+2) \\ &= (k+2) \times 2\end{aligned}$$

$$f(k)f(0) = (k+2) \times 5$$

$$\text{즉, } (k+2) \times 5 = (k+2) \times 2 \text{이므로 } k=-2$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 상수 k 의 값의 합은

$$10 + (-2) = 8$$

028 답 5

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} \{a(x-1)^2+b\} = a+b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} 4x = 8$$

$$f(2) = a(2-1)^2+b = a+b$$

$$\therefore a+b=8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 $f(x)=f(x+4)$ 이므로 $f(0)=f(4)$

$$4 \times 0 = a(4-1)^2+b \quad \therefore 9a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=9$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} 4x & (0 \leq x < 2) \\ -(x-1)^2+9 & (2 \leq x \leq 4) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(19)=f(15)=f(11)=f(7)=f(3)=-(3-1)^2+9=5$$

029 답 4

$$x \neq 1 \text{일 때, } f(x) = \frac{x^2+ax+a-5}{x-1}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+a-5}{x-1} = f(1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+ax+a-5) = 0 \text{이므로}$$

$$1+a+a-5=0, 2a-4=0 \quad \therefore a=2$$

이를 $\textcircled{1}$ 의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 4$$

$$\therefore f(1) = 4$$

030 답 4

$$x \neq 3 \text{일 때, } f(x) = \frac{a\sqrt{x+6}+b}{x-3}$$

함수 $f(x)$ 가 $x \geq -6$ 인 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a\sqrt{x+6}+b}{x-3} = -\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} (a\sqrt{x+6}+b) = 0 \text{이므로}$$

$$3a+b=0 \quad \therefore b=-3a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이를 $\textcircled{1}$ 의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{a\sqrt{x+6}-3a}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a}{\sqrt{x+6}+3} = \frac{a}{6}\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{a}{6} = -\frac{1}{3} \text{이므로 } a=-2$$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } b=6$$

$$\therefore a+b = -2+6=4$$

031 답 6

$$x \neq -1 \text{이고 } x \neq 2 \text{일 때, } f(x) = \frac{2x^3+ax+b}{x^2-x-2}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3+ax+b}{x^2-x-2} = f(-1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} (2x^3+ax+b) = 0 \text{이므로}$$

$$-2-a+b=0 \quad \therefore a-b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3+ax+b}{x^2-x-2} = f(2) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (2x^3+ax+b) = 0 \text{이므로}$$

$$16+2a+b=0 \quad \therefore 2a+b=-16 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{4} \text{을 연립하여 풀면 } a=-6, b=-4 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

$\textcircled{3}$ 을 $\textcircled{5}$ 의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3-6x-4}{x^2-x-2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)^2(x-2)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} 2(x+1) = 0\end{aligned}$$

$$\therefore f(-1) = 0$$

$\textcircled{3}$ 을 $\textcircled{5}$ 의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3-6x-4}{x^2-x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+1)^2(x-2)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} 2(x+1) = 6\end{aligned}$$

$$\therefore f(2) = 6$$

$$\therefore f(-1)+f(2) = 0+6=6$$

032 답 8

(가)에서 $x \neq 1$ 일 때, $g(x) = \frac{f(x) - x^2}{x - 1}$

(나)에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^2}{x - 1} = 2$ 이므로 $f(x) - x^2$ 은 최고차항의 계수가 2인 일차함수이다.

즉, $f(x) - x^2 = 2x + a$ (a 는 상수)라 하면

$$f(x) = x^2 + 2x + a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + a}{x - 1} = g(1) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} (2x + a) = 0 \text{ 이므로 } 2 + a = 0 \quad \therefore a = -2$$

$a = -2$ 를 $\textcircled{2}$ 의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2 \quad \therefore g(1) = 2$$

$a = -2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $f(x) = x^2 + 2x - 2$ 이므로

$$f(2) = 4 + 4 - 2 = 6$$

$$\therefore f(2) + g(1) = 6 + 2 = 8$$

033 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $f(x) + g(x) = x^2 - 2x + 2$ 이므로 이 함수는 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄴ. $f(x)g(x) = x^3 - x^2 - 6x$ 이므로 이 함수는 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄷ. $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2 - 3x}{x + 2}$ 이므로 이 함수는 $x = -2$ 에서 정의되지 않으므로 $x = -2$ 에서 불연속이다.

$$\text{ㄹ. } \frac{1}{g(x) - 4} = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$$

이 함수는 $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4) = 0$, 즉 $x = -1, x = 4$ 에서 정의되지 않으므로 $x = -1, x = 4$ 에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수 중 모든 실수 x 에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

034 답 ⑤

$$\frac{f(x)}{f(x) + g(x)} = \frac{x^2 - x - 5}{x^2 - x - 5 + (-3x)} = \frac{x^2 - x - 5}{x^2 - 4x - 5}$$

이 함수는 $x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5) = 0$, 즉 $x = -1, x = 5$ 에서 정의되지 않으므로 $x = -1, x = 5$ 에서 불연속이다.

따라서 함수 $\frac{f(x)}{f(x) + g(x)}$ 가 연속인 구간은 $(-\infty, -1)$, $(-1, 5)$, $(5, \infty)$ 이다.

035 답 7

함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 모든 실수 x 에서

$$g(x) = x^2 + ax + 4 > 0$$

이차방정식 $x^2 + ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 16 < 0, (a + 4)(a - 4) < 0$$

$$\therefore -4 < a < 4$$

따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 7개이다.

036 답 ㄱ, ㄷ

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 각각 $x=a$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \{3f(x) - g(x)\} = 3 \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 3f(a) - g(a)$$

즉, 함수 $3f(x) - g(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

ㄴ. $g(a) = 0$ 이면 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $x=a$ 에서 정의되지 않으므로 $x=a$ 에서 불연속이다.

$$\text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow a} \{g(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \{g(a)\}^2$$

즉, $\{g(x)\}^2$ 은 $x=a$ 에서 연속이다.

ㄹ. $f(a) + g(a) = 0$ 이면 함수 $\frac{f(x)}{f(x) + g(x)}$ 는 $x=a$ 에서 정의되지 않으므로 $x=a$ 에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수 중 $x=a$ 에서 항상 연속인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

037 답 ㄷ

ㄱ. [반례] $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ -1 & (x < a) \end{cases}$ 이면 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 $x=a$ 에서 연속이지만 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이다.

ㄴ. [반례] $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ 0 & (x < a) \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 0 & (x \geq a) \\ 1 & (x < a) \end{cases}$ 이면 함수

$f(x) + g(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이지만 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 모두 $x=a$ 에서 불연속이다.

ㄷ. $h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면 $g(x) = f(x) - h(x)$

이때 두 함수 $f(x), h(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로 함수 $g(x)$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.

ㄹ. [반례] $f(x) = 0, g(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ -1 & (x < a) \end{cases}$ 이면 두 함수 $f(x),$

$\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $x=a$ 에서 연속이지만 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.

038 답 ㄱ, ㄴ

함수 $f(x) = \frac{x+2}{2x-4} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{2}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

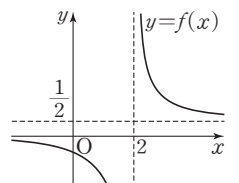
ㄱ, ㄴ. 닫힌구간 $[-1, 0], [3, 4]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 각 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

ㄴ. 반열린구간 $[0, 1)$ 에서 최댓값은 $-\frac{1}{2}$, 최솟값은 없다.

ㄷ. 반열린구간 $[1, 3)$ 에서 최댓값과 최솟값은 없다.

ㄹ. 닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 최댓값은 없고, 최솟값은 $\frac{5}{2}$ 이다.

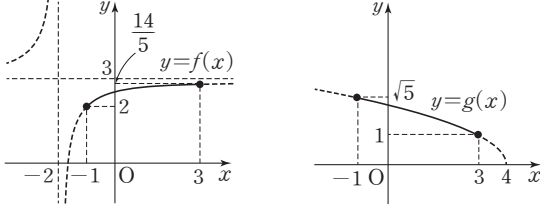
따라서 보기 중 최댓값과 최솟값이 모두 존재하는 구간은 ㄱ, ㄴ이다.



039 ㉓ ③

두 함수 $f(x) = \frac{3x+5}{x+2} = -\frac{1}{x+2} + 3$, $g(x) = \sqrt{-x+4}$ 는 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 주어진 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $M=f(3)=\frac{14}{5}$, $m=g(3)=1$ 이므로

$$M+m=\frac{19}{5}$$

040 ㉓ -3

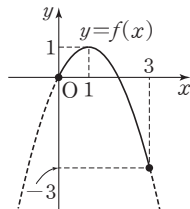
$t=-s$ 로 놓으면 $t \rightarrow -\infty$ 일 때 $s \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1+xt}{1-t}(x-2) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1-xs}{1+s}(x-2) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{s}-x}{\frac{1}{s}+1}(x-2) \\ &= -x(x-2) = -x^2+2x \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 주어진 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최댓값 1, $x=3$ 일 때 최솟값 -3을 가지므로 구하는 곱은 $1 \times (-3) = -3$



041 ㉓ ④

$f(x) = x^3 - 8x - 10$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고

$$f(0) = -10, f(1) = -17, f(2) = -18, f(3) = -7, f(4) = 22, f(5) = 75$$

따라서 $f(3)f(4) < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 주어진 방정식은 열린구간 $(3, 4)$ 에서 실근을 갖는다.

042 ㉓ 14

$f(x) = x^2 + 4x + a$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고

$$f(-1) = a-3, f(2) = a+12$$

이때 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 이 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 $f(-1)f(2) < 0$ 이어야 한다.

즉, $(a-3)(a+12) < 0$ 이므로 $-12 < a < 3$

따라서 정수 a 는 $-11, -10, -9, \dots, 2$ 의 14개이다.

043 ㉓ ③

ㄱ. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고

$$f(2) = -1, f(3) = 3$$

즉, $f(2)f(3) < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(2, 3)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f(x) = \frac{4}{2x-1} - 1$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 $x \neq \frac{1}{2}$ 인 모든 실수 x 에서 연속이고

$$f(2) = \frac{1}{3}, f(3) = -\frac{1}{5}$$

즉, $f(2)f(3) < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(2, 3)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{3}{x} - 1$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 $x > 0$ 인 모든 실수 x 에서 연속이고

$$f(2) = \sqrt{2} - \frac{5}{2} < 0, f(3) = \sqrt{3} - 2 < 0$$

즉, $f(2)f(3) > 0$ 이므로 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(2, 3)$ 에서 실근을 갖는지 알 수 없다.

따라서 열린구간 $(2, 3)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다고 할 수 있는 방정식은 ㄱ, ㄴ이다.

044 ㉓ 2개

$g(x) = f(x) - x$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고

$$g(-1) = f(-1) - (-1) = -2 + 1 = -1$$

$$g(0) = f(0) - 0 = 2$$

$$g(1) = f(1) - 1 = -3 - 1 = -4$$

$$g(2) = f(2) - 2 = -2 - 2 = -4$$

$$\therefore g(-1)g(0) < 0, g(0)g(1) < 0$$

사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x) = 0$, 즉 $f(x) = x$ 는 열린구간 $(-1, 0)$, $(0, 1)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x) = x$ 는 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

045 ㉓ 4개

$f(1)f(2) < 0$, $f(4)f(5) < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(1, 2)$, $(4, 5)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(-x)$ 이므로

$$f(-1)f(-2) < 0, f(-4)f(-5) < 0$$

사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(-2, -1)$, $(-5, -4)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 적어도 4개의 실근을 갖는다.

046 **답 3**

$g(x)=f(x)-x-1$ 이라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 연속이고

$$g(-2)=f(-2)+2-1=1+1=2$$

$$g(-1)=f(-1)+1-1=-1$$

$$g(0)=f(0)-1=3-1=2$$

$$g(1)=f(1)-1-1=1-2=-1$$

$$\therefore g(-2)g(-1)<0, g(-1)g(0)<0, g(0)g(1)<0$$

사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=x-1$ 은 열린구간 $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=x+1$ 은 열린구간 $(-2, 1)$ 에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

$$\therefore n=3$$

047 **답 3개**

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{이므로 } f(0) = 0$$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{이므로 } f(2) = 0$$

$$f(0) = 0, f(2) = 0 \text{이므로}$$

$f(x) = x(x-2)g(x)$ ($g(x)$ 는 다항함수)라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-2)g(x) = 4$$

$$\therefore g(0) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)g(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} xg(x) = 2$$

$$\therefore g(2) = 1$$

즉, 함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고, $g(0)g(2) = -2 < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖고 $f(0)=0, f(2)=0$ 이므로 방정식 $f(x)=0$ 은 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

048 **답 ㄱ, ㄷ**

ㄱ. $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이어야 한다.

$$f(0) = 0 \text{이고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x^2 = 0, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x^2) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 정의되지 않으므로 $x=2$ 에서 불연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이어야 한다.

$$f(1) = 0 \text{이고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \sqrt{x-1} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x-1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄹ. 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=2$ 에서 연속이어야 한다.

$$f(2) = 2 \text{이고,}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+2x+4) = 12 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

따라서 보기 중 모든 실수 x 에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

049 **답 ㄴ**

$$\text{ㄱ. } \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)+g(x)\} = 1+0=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)+g(x)\} = -1+0=-1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)+g(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)+g(x)\}$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+g(x)\}$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$f(x)+g(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$$\text{ㄴ. } f(0)g(0) = 0 \times 1 = 0 \text{이고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) = 1 \times 0 = 0, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) = -1 \times 0 = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = f(0)g(0)$$

즉, 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\text{ㄷ. } f(g(0)) = f(1) = 0$$

$$g(x)=t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 0 \text{일 때 } t \rightarrow 0- \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) \neq f(g(0))$$

즉, 함수 $f(g(x))$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$$\text{ㄹ. } g(f(0)) = g(0) = 1$$

$$f(x)=s \text{로 놓으면 } x \rightarrow 0+ \text{일 때 } s \rightarrow 1- \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 1-} g(s) = -1$$

$$x \rightarrow 0- \text{일 때 } s \rightarrow -1+ \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow -1+} g(s) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) \neq g(f(0))$$

즉, 함수 $g(f(x))$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수 중 $x=0$ 에서 연속인 것은 ㄴ이다.

050 [답] 5

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=-1$, $x=1$ 에서 연속이다.

(i) $x=-1$ 에서 연속이면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1) \\ \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} (3x+3) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} (x+b) = -1+b \\ f(-1) &= 0 \\ \text{즉, } 0 &= -1+b \text{ 이므로 } b=1\end{aligned}$$

(ii) $x=1$ 에서 연속이면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2+a) = 1+a \\ \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} (3x+3) = 6 \\ f(1) &= 1+a \\ \text{즉, } 1+a &= 6 \text{ 이므로 } a=5\end{aligned}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } f(x) = \begin{cases} x^2+5 & (x \geq 1) \\ 3x+3 & (-1 \leq x < 1) \\ x+1 & (x < -1) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$f(-2)+f(1) = (-2+1) + (1+5) = 5$$

051 [답] ③

함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{\sqrt{x^2-a}+b} = -1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$x \rightarrow -2$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x^2-a}+b) = 0$ 이므로

$$\sqrt{4-a}+b=0 \quad \therefore b=-\sqrt{4-a} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{\sqrt{x^2-a}+\sqrt{4-a}} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2x+4)(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{4-a})}{(\sqrt{x^2-a}-\sqrt{4-a})(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{4-a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2x+4)(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{4-a})}{x^2-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x+2)(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{4-a})}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{4-a})}{x-2} = -\sqrt{4-a}\end{aligned}$$

즉, $-\sqrt{4-a} = -1$ 이므로 $a=3$

이를 ②에 대입하면 $b=-1$

$$\therefore a-b = 3 - (-1) = 4$$

052 [답] 2

함수 $f(x)f(x-1)$ 이 $x=1$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)f(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)f(x-1) = f(1)f(0)$$

$x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)f(x-1) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} f(x-1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (-x+a) \times \lim_{t \rightarrow 0+} (-t+a) \\ &= (-1+a) \times a = a^2-a\end{aligned}$$

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)f(x-1) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} f(x-1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x+a) \times \lim_{t \rightarrow 0-} (t+2) \\ &= (-1+a) \times 2 = 2a-2\end{aligned}$$

$$f(1)f(0) = (-1+a)(0+2) = 2a-2$$

$$\text{즉, } a^2-a = 2a-2 \text{ 이므로 } a^2-3a+2=0$$

$$(a-1)(a-2)=0 \quad \therefore a=1 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 곱은 $1 \times 2 = 2$

053 [답] 18

$$(가) \text{에서 } x \neq -1 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{3x^5+ax+b}{x+1}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^5+ax+b}{x+1} = f(-1)$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^5+ax+b) = 0$ 이므로

$$-3-a+b=0 \quad \therefore a-b=-3 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

한편 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 6$$

$$\therefore f(1) = \frac{3+a+b}{2} = 6$$

$$3+a+b=12 \quad \therefore a+b=9 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=3$, $b=6$

$$\begin{aligned}\therefore f(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^5+3x+6}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+2)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} 3(x^4-x^3+x^2-x+2) = 18\end{aligned}$$

054 [답] -1

$$x \neq a \text{ 일 때, } f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x-a}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=a$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2+2x+1}{x-a} = f(a) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 2x + 1) = 0$ 이므로

$$a^2 + 2a + 1 = 0, (a+1)^2 = 0 \quad \therefore a = -1$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} f(a) &= f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0 \\ \therefore a + f(a) &= -1 + 0 = -1 \end{aligned}$$

055 답 ㄷ

ㄱ. [반례] $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ -1 & (x < a) \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -1 & (x \geq a) \\ 1 & (x < a) \end{cases}$ 이면 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이지만 함수 $f(x)+g(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

ㄴ. [반례] $f(x)=0, g(x)=\begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ -1 & (x < a) \end{cases}$ 이면 두 함수 $f(x), f(x)g(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이지만 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이다.

ㄷ. 두 함수 $f(x)+g(x), f(x)-g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \{f(x)+g(x)\} &= f(a)+g(a), \\ \lim_{x \rightarrow a} \{f(x)-g(x)\} &= f(a)-g(a) \\ \therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{2} [\{f(x)+g(x)\} + \{f(x)-g(x)\}] \\ &= \frac{1}{2} [\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)+g(x)\} + \lim_{x \rightarrow a} \{f(x)-g(x)\}] \\ &= \frac{1}{2} [f(a)+g(a) + f(a)-g(a)] \\ &= f(a) \end{aligned}$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

ㄹ. [반례] $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ -1 & (x < a) \end{cases}$ 이면 함수 $|f(x)|$ 는 $x=a$ 에서 연속이지만 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이다.
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.

056 답 ③

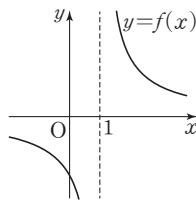
함수 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

①, ④, ⑤ 닫힌구간 $[-1, 0], [2, 3],$

$[3, 4]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 각 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

② 반열린구간 $[0, 1)$ 에서 최댓값이 -2 이다.

③ 반열린구간 $(1, 2]$ 에서 최댓값은 없다.



057 답 5

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이므로 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + b}{x - 1} = 1 + c \quad \dots\dots ㉠$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - ax + b) = 0 \text{이므로}$$

$$1 - a + b = 0 \quad \therefore b = a - 1$$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - ax + a - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-a+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-a+1) = 2-a \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2-a = 1+c \text{이므로 } a = 1-c$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x+c & (-1 \leq x < 1) \\ x^2+c & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(2) = 4+c$, 최솟값은 $f(-1) = -1+c$ 이므로 구하는 차는

$$4+c - (-1+c) = 5$$

058 답 ⑤

$g(x) = f(x) - 3x$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고

$$g(0) = f(0) - 0 = k+2, g(2) = f(2) - 6 = (k-3) - 6 = k-9$$

이때 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x) = 0$ 이 열린구간 $(0, 2)$ 에서 실근을 가지려면 $g(0)g(2) < 0$ 이어야 하므로

$$(k+2)(k-9) < 0 \quad \therefore -2 < k < 9$$

따라서 정수 k 는 $-1, 0, 1, \dots, 8$ 의 10개이다.

059 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. 사잇값의 정리에 의하여 A 지점에서 휴게소까지 갈 때 속력이 70 km/h인 순간이 적어도 2번 존재한다.

ㄴ. 사잇값의 정리에 의하여 A 지점에서 휴게소까지 갈 때 속력이 50 km/h인 순간이 적어도 2번, 휴게소에서 B 지점까지 갈 때 속력이 50 km/h인 순간이 적어도 2번 존재한다.

즉, 속력이 50 km/h인 순간이 적어도 4번 존재한다.

ㄷ. 최고 속력이 빠르다고 해서 평균 속력이 빠르다고 말할 수 없다.
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

060 답 2

$g(x) = x^2 f(x) - 3x + 1$ 이라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 연속이고

$$g(-2) = 4f(-2) + 6 + 1 = 4 \times (-2) + 7 = -1$$

$$g(-1) = f(-1) + 3 + 1 = -4 + 4 = 0$$

$$g(0) = 1$$

$$g(1) = f(1) - 3 + 1 = 0 - 2 = -2$$

이때 $g(0)g(1) < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x) = 0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖고, $g(-1) = 0$ 이므로 방정식 $g(x) = 0$, 즉 $x^2 f(x) = 3x - 1$ 은 열린구간 $(-2, 1)$ 에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

$$\therefore n = 2$$



001 답 5

함수 $f(x)=x^2-3x$ 에서 x 의 값이 2에서 a 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a)-f(2)}{a-2} = \frac{(a^2-3a)-(4-6)}{a-2} \\ &= \frac{a^2-3a+2}{a-2} = \frac{(a-2)(a-1)}{a-2} \\ &= a-1\end{aligned}$$

따라서 $a-1=4$ 이므로

$$a=5$$

002 답 0

함수 $f(x)=-x^2+x+2$ 에서 x 의 값이 -1에서 1까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{2-0}{2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수 $f'(a)$ 는

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{-(a+h)^2+(a+h)+2\}-(-a^2+a+2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2+(-2a+1)h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-h-2a+1) \\ &= -2a+1 \quad \dots\dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$1 = -2a+1 \quad \therefore a=0$$

003 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. 원점 및 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 가 직선 $y=x$ 위의 점이므로 원점과 점 $(a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기와 원점과 점 $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기는 모두 1이다.

$$\therefore \frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b} = 1$$

ㄴ. 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기가 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기보다 크므로

$$f'(a) > f'(b)$$

ㄷ. 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기가 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기보다 작으므로

$$f'(b) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

004 답 ㉔

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h)-f(1)}{3h} \times 3 \\ &= 3f'(1) \\ &= 3 \times 3 = 9\end{aligned}$$

005 답 3

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(1)-f(x)}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(1)-f(1)+f(1)-f(x)}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(1)}{(x+1)(x-1)} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1)}{x+1} - \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\} \\ &= \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}f'(1) \\ &= \frac{1}{2} \times 4 - \frac{1}{2} \times (-2) = 3\end{aligned}$$

006 답 ㉓

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ 의 양변에 $x=0$, $y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)+f(h)+h-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 1 \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= f'(0) + 1 = 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

007 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ 이고 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=f(0)=0$ 이므로 함수 $f(x)$

는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h-0}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h-0}{h} = -1$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=f(0)=3$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(h^2-2h+3)-3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (h-2) = -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(h^2+2h+3)-3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} (h+2) = 2\end{aligned}$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=f(0)=0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2-0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} h = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h^2-0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} (-h) = 0$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

ㄹ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=f(0)=0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{2h-0}{h} = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-2h-0}{h} = -2$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 보기의 함수 중 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

008 답 ③

- ① 점 $(0, f(0))$ 에서의 접선의 기울기가 0보다 크므로 $f'(0) > 0$
 ② $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재한다.
 ③ 미분가능하면서 접선의 기울기가 0인 점이 존재하지 않으므로 $f'(x) = 0$ 인 점도 존재하지 않는다.
 ④ 불연속인 x 의 값은 1, 3의 2개이다.
 ⑤ 미분가능하지 않은 x 의 값은 1, 2, 3의 3개이다.

009 답 ②

함수 $f(x) = x^2 - x + 2$ 에서 x 의 값이 a 에서 $a+1$ 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+1) - f(a)}{(a+1) - a} = \{(a+1)^2 - (a+1) + 2\} - (a^2 - a + 2) = 2a$$

따라서 $2a = 4$ 이므로 $a = 2$

010 답 5

함수 $f(x) = x^2 + 4x - 3$ 에서 x 의 값이 -1 에서 2 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{9 - (-6)}{3} = 5$$

011 답 ①

함수 $f(x) = x^3 - ax + 1$ 에서 x 의 값이 -2 에서 3 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \frac{(27 - 3a + 1) - (-8 + 2a + 1)}{5} = \frac{35 - 5a}{5} = 7 - a$$

따라서 $7 - a = 10$ 이므로 $a = -3$

012 답 $-\frac{1}{8}$

$$f^1(x) = f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$f^2(x) = (f \circ f^1)(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = x$$

⋮

$$\therefore g(x) = f^{2021}(x) = f^{2 \times 1010 + 1}(x) = f(x) = \frac{x}{x-1}$$

따라서 함수 $g(x)$ 에서 x 의 값이 3 에서 5 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(5) - g(3)}{5 - 3} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{8}$$

013 답 ④

함수 $f(x) = x^2 - 4x + 1$ 에서 x 의 값이 0 에서 a 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{(a^2 - 4a + 1) - 1}{a} = \frac{a^2 - 4a}{a} = a - 4 \quad \dots\dots ㉠$$

함수 $f(x)$ 의 $x=3$ 에서의 미분계수 $f'(3)$ 은

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(3+h)^2 - 4(3+h) + 1\} - (-2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2) = 2 \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

$$㉠, ㉡ \text{에서 } a - 4 = 2 \quad \therefore a = 6$$

014 답 $\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수 $f'(1)$ 은 x 의 값이 1 에서 $1+h$ 까지 변할 때의 평균변화율에 대하여 $h \rightarrow 0$ 일 때의 평균변화율의 극한값과 같으므로

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4-h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+h} - \sqrt{4-h})(\sqrt{4+h} + \sqrt{4-h})}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4-h})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4-h})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{4+h} + \sqrt{4-h}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

015 답 80

함수 $s(t) = 24t - 0.8t^2$ 에서 t 의 값이 5 에서 15 까지 변할 때의 평균변화율은

$$a = \frac{s(15) - s(5)}{15 - 5} = \frac{180 - 100}{10} = 8 \quad \dots\dots ㉠$$

함수 $s(t)$ 의 $t=b$ 에서의 순간변화율은

$$\begin{aligned} s'(b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(b+h) - s(b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{24(b+h) - 0.8(b+h)^2\} - (24b - 0.8b^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{24h - 1.6bh - 0.8h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (24 - 1.6b - 0.8h) = 24 - 1.6b \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

$$㉠, ㉡ \text{에서 } 8 = 24 - 1.6b \quad \therefore b = 10$$

$$\therefore ab = 8 \times 10 = 80$$

016 답 ④

ㄱ. 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기가 직선 $y=2x$ 의 기울기보다 작으므로

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 2$$

$$\therefore f(b) - f(a) < 2(b - a) \quad (\because b - a > 0)$$

ㄴ. 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기가 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기보다 작으므로

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(a)$$

$$\therefore f(b) - f(a) < (b - a)f'(a) \quad (\because b - a > 0)$$

ㄷ. 두 점 $(0, 0), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기가 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기보다 크므로

$$\frac{f(b)}{b} > f'(b) \quad \therefore f(b) > bf'(b) \quad (\because b > 0)$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

017 답 $b < x < c$

$f'(k)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k, f(k))$ 에서의 접선의 기울기이고, $g'(k)$ 는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(k, g(k))$ 에서의 접선의 기울기이다.

부등식 $f'(x)g'(x) > 0$ 의 해는

$f'(x) > 0, g'(x) > 0$ 또는 $f'(x) < 0, g'(x) < 0$

(i) $f'(x) > 0, g'(x) > 0$ 일 때

$f'(x) > 0$ 인 구간은 $x > c$ 이고, $g'(x) > 0$ 인 구간은 $x < b$ 이므로 공통부분이 없다.

(ii) $f'(x) < 0, g'(x) < 0$ 일 때

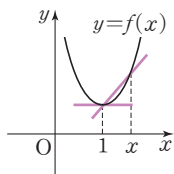
$f'(x) < 0$ 인 구간은 $x < c$ 이고, $g'(x) < 0$ 인 구간은 $x > b$ 이므로 공통부분은 $b < x < c$

따라서 구하는 부등식의 해는 $b < x < c$

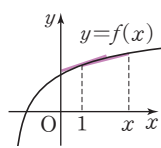
018 답 ㄴ

$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 은 두 점 $(1, f(1)), (x, f(x))$ 를 지나는 직선의 기울기와 같고, $f'(1)$ 은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 기울기와 같다.

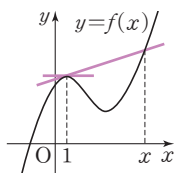
ㄱ. 오른쪽 그림에서 두 점 $(1, f(1)), (x, f(x))$ 를 지나는 직선의 기울기가 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 기울기보다 크므로 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} > f'(1)$ 이 항상 성립한다.



ㄴ. 오른쪽 그림에서 두 점 $(1, f(1)), (x, f(x))$ 를 지나는 직선의 기울기가 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 기울기보다 작으므로 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} < f'(1)$ 이 항상 성립한다.



ㄷ. 오른쪽 그림에서 두 점 $(1, f(1)), (x, f(x))$ 를 지나는 직선의 기울기가 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 기울기보다 크므로 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} > f'(1)$ 인 경우가 있다.



따라서 보기의 함수의 그래프 중 조건을 항상 만족시키는 것은 ㄴ이다.

019 답 ③

$(f \circ g)(x) = x$ 이므로 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.

함수 $g(x)$ 에서 x 의 값이 b 에서 c 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(c)-g(b)}{c-b} = \frac{f^{-1}(c)-f^{-1}(b)}{c-b}$$

오른쪽 그림에서 $f(b)=c$ 이므로

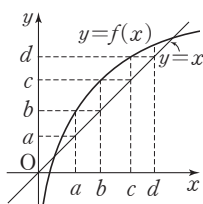
$$f^{-1}(c)=b$$

$$\text{또 } f(a)=b \text{이므로}$$

$$f^{-1}(b)=a$$

따라서 구하는 평균변화율은

$$\frac{f^{-1}(c)-f^{-1}(b)}{c-b} = \frac{b-a}{c-b} = \frac{a-b}{b-c}$$



020 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\frac{f(a)}{a}$ 는 원점과 점 $(a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기이므로 1보다 작거나 같다.

$$\therefore \frac{f(a)}{a} \leq 1$$

ㄴ. $a > 1$ 이면 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기는 1보다 작으므로 $f'(a) < 1$

ㄷ. $f(a) < af'(a)$ 에서

$$\frac{f(a)}{a} < f'(a) \quad (\because a > 0)$$

이때 원점과 점 $(a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기 $\frac{f(a)}{a}$ 가 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기 $f'(a)$ 보다 작은 a 의 값의 범위는

$$0 < a < 1$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

021 답 ㄱ, ㄷ

$f'(a), f'(b), f'(c)$ 는 각각 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a)), (b, f(b)), (c, f(c))$ 에서의 접선의 기울기이므로

$$f'(a) > 0, f'(b) < 0, f'(c) > 0$$

$$\therefore f'(a) + f'(c) > 0$$

$$\therefore f'(a)f'(b)f'(c) < 0$$

ㄷ. $\frac{f(b)}{b}$ 는 원점과 점 $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기이고, $\frac{f(c)}{c}$ 는 원점과 점 $(c, f(c))$ 를 지나는 직선의 기울기이므로 $\frac{f(b)}{b} > \frac{f(c)}{c}$

ㄹ. 두 점 $(0, f(0)), (c, f(c))$ 를 지나는 직선의 기울기는 0보다 작고, $f'(a) > 0$ 이므로

$$\frac{f(c)-f(0)}{c} < f'(a)$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

022 답 ②

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+5h)-f(2)}{2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+5h)-f(2)}{5h} \times \frac{5}{2} \\ &= \frac{5}{2} f'(2) \\ &= \frac{5}{2} \times 4 = 10 \end{aligned}$$

023 답 ④

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a)-f(a-2h)}{3h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h)-f(a)}{-3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} f'(a) \end{aligned}$$

024 ⑥

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f'(2)=3$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2-5h)}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-5h)}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \times \frac{1}{3} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-5h)-f(2)}{-5h} \times \left(-\frac{5}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}f'(2) + \frac{5}{3}f'(2) = 2f'(2) = 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

025 ②

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-3}{h} = 4$ 에서 $h \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{h \rightarrow 0} \{f(1+2h)-3\} = 0$ 이므로

$$f(1)-3=0 \quad \therefore f(1)=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-3}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{h} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times 2 \\ &= 2f'(1) \end{aligned}$$

따라서 $2f'(1) = -4$ 이므로 $f'(1) = -2$

026 ①

$\frac{1}{t} = h$ 로 놓으면 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} t \left\{ f\left(1+\frac{2}{t}\right) - f\left(1+\frac{1}{t}\right) \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{f(1+2h) - f(1+h)\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times 2 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= 2f'(1) - f'(1) = f'(1) = 3 \end{aligned}$$

027 ④

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h)-f(a)-g(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h} \times (-2) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} \\ &= -2f'(a) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} \\ &= -2 \times (-2) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} \\ &= 4 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} \end{aligned}$$

따라서 $4 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0$ 이므로 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 4$

028 ⑧

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(2) - 4f(x)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(2) - 4f(2) + 4f(2) - 4f(x)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)f(2)}{x-2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4\{f(x)-f(2)\}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)f(2)}{x-2} - 4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \\ &= 4f(2) - 4f'(2) \\ &= 4 \times (-1) - 4 \times (-3) = 8 \end{aligned}$$

029 ⑤

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3)-f(1)}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1} \times \frac{x^3-1}{x^2-1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= f'(1) \times \frac{3}{2} = 2 \times \frac{3}{2} = 3 \end{aligned}$$

030 ③

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1-3h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-3h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \times \frac{1}{2} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}f'(1) + \frac{3}{2}f'(1) = 2f'(1) \\ \text{즉, } 2f'(1) &= -6 \text{이므로 } f'(1) = -3 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^3-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x^2+x+1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2+x+1} \\ &= f'(1) \times \frac{1}{3} = (-3) \times \frac{1}{3} = -1 \end{aligned}$$

031 ③

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-2}{x^2-9} = 1$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x)-2\} = 0$ 이므로 $f(3)=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-2}{x^2-9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x^2-9} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{f(x)-f(3)}{x-3} \times \frac{1}{x+3} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}f'(3) \end{aligned}$$

즉, $\frac{1}{6}f'(3) = 1$ 이므로 $f'(3) = 6$

$$\therefore f(3) + f'(3) = 2 + 6 = 8$$

032 ㉮ -4

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3x}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)+f(1)-3x}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)-3x+3}{x-1} \quad (\because f(1)=3) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{x-1} \\ &= f'(1) - 3 = -1 - 3 = -4\end{aligned}$$

033 ㉮ $\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(1)}}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(1)}\} \{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(1)}\}}{(x-1)(x+1)\{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(1)}\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)\{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(1)}\}} \\ &= f'(1) \times \frac{1}{4\sqrt{f(1)}} = 6 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

034 ㉮ $\frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이므로 $f(0) = 0$ ㉮

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 2 \quad (\because \text{㉮})$$

$x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1) + g(x)}{x^2 - 1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) + g(t+1)}{(t+1)^2 - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t(t+2)} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t+1)}{t(t+2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(t) - f(0)}{t} \times \frac{1}{t+2} \right\} + \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{g(t+1) - g(1)}{t} \times \frac{1}{t+2} \right\} \\ &\quad (\because f(0)=0, g(1)=0) \\ &= \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{2}g'(1) = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

035 ㉮ ⑤

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy - 1$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) - 1 \quad \therefore f(0) = 1 \quad \dots\dots \text{㉮}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) + f(h) + 6h - 1 - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} + 6 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + 6 \quad (\because \text{㉮}) \\ &= f'(0) + 6 \\ &= 3 + 6 = 9\end{aligned}$$

036 ㉮ 4

$f(x+y) = f(x) + f(y) - 2xy + 1$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 1 \quad \therefore f(0) = -1 \quad \dots\dots \text{㉮}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) + f(h) - 2h + 1 - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 1}{h} - 2 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} - 2 \quad (\because \text{㉮}) \\ &= f'(0) - 2\end{aligned}$$

따라서 $f'(0) - 2 = 2$ 이므로 $f'(0) = 4$

037 ㉮ ④

$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 0 \quad \therefore f(0) = 0 \quad \dots\dots \text{㉮}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) + f(h) + h - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 1 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + 1 \quad (\because \text{㉮}) \\ &= f'(0) + 1\end{aligned}$$

즉, $f'(0) + 1 = 3$ 이므로 $f'(0) = 2$

$$\begin{aligned}\therefore f'(15) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(15+h) - f(15)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(15) + f(h) + 15h - f(15)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 15 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + 15 \quad (\because \text{㉮}) \\ &= f'(0) + 15 \\ &= 2 + 15 = 17\end{aligned}$$

038 ㉮ ③

$f(x+y) = 2f(x)f(y)$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = 2f(0)f(0) \quad \therefore f(0) = \frac{1}{2} \quad (\because f(0) > 0) \quad \dots\dots \text{㉮}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(1)f(h) - f(1)}{h} \\ &= 2f(1) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - \frac{1}{2}}{h} \\ &= 2f(1) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \quad (\because \text{㉮}) \\ &= 2f(1)f'(0) \\ &= 2f(1) \times 2 = 4f(1)\end{aligned}$$

따라서 $f'(1) = 4f(1)$ 이므로 $\frac{f'(1)}{f(1)} = 4$

039 2

$f(3x)=3f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(3\left(1+\frac{h}{3}\right)\right)-f(3 \times 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f\left(1+\frac{h}{3}\right)-3f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(1+\frac{h}{3}\right)-f(1)}{\frac{h}{3}} \\ &= f'(1)=2 \end{aligned}$$

040 ③

① $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)=0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$f'(1)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-0}{h}=1$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

② $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)=0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)h-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)=1 \end{aligned}$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

③ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)=0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{(1+h)^2-(1+h)\}-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (1+h)=1 \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\{-(1+h)^2+(1+h)\}-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} (-1-h)=-1 \end{aligned}$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

④ 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 정의되지 않으므로 $x=1$ 에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

⑤ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)=1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(1+h)^2-1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (h+2)=2 \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\{2(1+h)-1\}-1}{h}=2 \end{aligned}$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

041 1

1. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=f(2)=0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

2. $xf(x)=g(x)$ 라 하면

$$g(x)=\begin{cases} x(x-2) & (x \geq 2) \\ -x(x-2) & (x < 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(2+h)-g(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(2+h)h-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (2+h)=2 \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(2+h)-g(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-(2+h)h-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} (-2-h)=-2 \end{aligned}$$

즉, 함수 $xf(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

3. $x(x-2)f(x)=k(x)$ 라 하면

$$k(x)=\begin{cases} x(x-2)^2 & (x \geq 2) \\ -x(x-2)^2 & (x < 2) \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} k(x)=k(2)=0$ 이므로 함수 $x(x-2)f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{k(2+h)-k(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(2+h)h^2-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (2+h)h=0 \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{k(2+h)-k(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-(2+h)h^2-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \{-(2+h)h\}=0 \end{aligned}$$

즉, 함수 $x(x-2)f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

따라서 보기 중 옳은 것은 1이다.

042 1

1. $f(1)+g(1)=(-1)+1=0$ 이고,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)+g(x)\} &= (-1)+1=0, \\ \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)+g(x)\} &= 1+(-1)=0 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+g(x)\} &= f(1)+g(1) \end{aligned}$$

즉, 함수 $f(x)+g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

2. $\lim_{x \rightarrow -1+} \{f(x)-g(x)\}=(-1)+0=-1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} \{f(x)-g(x)\} &= 1+0=1 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow -1+} \{f(x)-g(x)\} &\neq \lim_{x \rightarrow -1-} \{f(x)-g(x)\} \end{aligned}$$

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} \{f(x)-g(x)\}$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$f(x)-g(x)$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이다.

3. $f(x)g(x)=k(x)$ 라 하고 구간 $(-1, 1)$ 에서 함수 $k(x)$ 를 구하면

$$k(x)=\begin{cases} -x^2 & (0 < x < 1) \\ 0 & (x=0) \\ x(x+1) & (-1 < x < 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{k(h)-k(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{-h^2-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (-h)=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{k(h)-k(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h(h+1)-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} (h+1)=1 \end{aligned}$$

즉, 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 보기 중 옳은 것은 1이다.

043 ②

ㄱ. $x+f(x)=k(x)$ 라 하면

$$k(x)=\begin{cases} 2x-1 & (x \geq 1) \\ 1 & (x < 1) \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{k(1+h)-k(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{2(1+h)-1\}-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{2h}{h} = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{k(1+h)-k(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{1-1}{h} = 0$$

즉, 함수 $x+f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $f(x)g(x)=l(x)$ 라 하면

$$l(x)=\begin{cases} -x(x-1) & (x \geq 1) \\ -(x-1)(2x-1) & (x < 1) \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{l(1+h)-l(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{-(1+h)h-0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} (-h-1) = -1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{l(1+h)-l(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h(2h+1)-0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} (-2h-1) = -1$$

즉, 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

ㄷ. $f(x)-g(x)=\begin{cases} 2x-1 & (x \geq 1) \\ -3x+2 & (x < 1) \end{cases}$ 이므로

$|f(x)-g(x)|=m(x)$ 라 하면

$$m(x)=\begin{cases} 2x-1 & (x \geq 1) \\ |-3x+2| & (x < 1) \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{m(1+h)-m(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{2(1+h)-1\}-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{2h}{h} = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{m(1+h)-m(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\{3(1+h)-2\}-1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{3h}{h} = 3$$

즉, 함수 $|f(x)-g(x)|$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 보기의 함수 중 $x=1$ 에서 미분가능한 것은 ㄴ이다.

044 ⑤

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$ 이고, 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 기울기가 0보다 작으므로 $f'(1) < 0$ 이다.

② $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재한다.

③ 미분가능하면서 접선의 기울기가 0인 x 의 값은 -1의 1개이다.

④ 불연속인 x 의 값은 0, 3의 2개이다.

⑤ 미분가능하지 않은 x 의 값은 0, 2, 3의 3개이다.

045 ②

불연속인 x 의 값은 1, 4의 2개이므로 $m=2$

미분가능하지 않은 x 의 값은 1, 2, 3, 4, 5의 5개이므로 $n=5$

$$\therefore m+n=2+5=7$$

046 ② (㉠) $(x+h)^2$ (㉡) $2xh$ (㉢) $2x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(㉠) (x+h)^2\} + 3(x+h) - (x^2+3x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(㉡) 2xh\} + h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h+3) \\ &= \{(㉢) 2x\} + 3 \end{aligned}$$

047 ④

$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+3xh-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 3x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 3x \quad (\because ㉠) \\ &= f'(0) + 3x = 3x + 1 \end{aligned}$$

048 ②

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3 \text{ 이므로}$$

$$f'(2) = 12 - 16 + 3 = -1$$

049 ③

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^2+1)'(x^3+x^2-1) + (2x^2+1)(x^3+x^2-1)' \\ &= 4x(x^3+x^2-1) + (2x^2+1)(3x^2+2x) \end{aligned}$$

$$\therefore f'(1) = 4 \times 1 + 3 \times 5 = 19$$

050 ①

$f(x)=x^4+ax^2+b$ 라 하면 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, -2)$ 를 지나므로 $f(1)=-2$ 에서

$$1+a+b=-2 \quad \therefore a+b=-3 \quad \dots\dots ㉠$$

$f'(x)=4x^3+2ax$ 이고 점 $(1, -2)$ 에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(1)=2$ 에서

$$4+2a=2 \quad \therefore a=-1$$

$$\text{이를 ㉠에 대입하면 } -1+b=-3 \quad \therefore b=-2$$

$$\therefore a-b=-1-(-2)=1$$

051 ②

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} \times (-1) \\ &= f'(1) + f'(1) = 2f'(1) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3 \text{ 이므로}$$

$$f'(1) = 3 - 4 + 3 = 2$$

따라서 구하는 극한값은

$$2f'(1) = 2 \times 2 = 4$$

052 답 ①

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1)-3}{x^2-1} = 4$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x+1)-3\} = 0$ 이므로 $f(2)=3$

$x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 2$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1)-3}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1)-3}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t)-3}{t(t-2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(t)-f(2)}{t-2} \times \frac{1}{t} \right\} \\ &= \frac{1}{2} f'(2)\end{aligned}$$

즉, $\frac{1}{2} f'(2) = 4$ 이므로 $f'(2) = 8$

한편 $f(x) = x^3 + ax + b$ 에서 $f'(x) = 3x^2 + a$

$f(2) = 3$ 에서 $8 + 2a + b = 3$

$\therefore 2a + b = -5 \quad \dots \text{㉠}$

$f'(2) = 8$ 에서 $12 + a = 8 \quad \therefore a = -4$

이를 ㉠에 대입하면

$-8 + b = -5 \quad \therefore b = 3$

$\therefore ab = -4 \times 3 = -12$

053 답 ⑤

$f(x) = x^9 + x^2 + x$ 라 하면 $f(1) = 3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^9 + x^2 + x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

$f'(x) = 9x^8 + 2x + 1$ 이므로

$f'(1) = 9 + 2 + 1 = 12$

054 답 4

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$f'(x) = 2ax + b$

$f(x)$ 와 $f'(x)$ 를 주어진 식에 대입하면

$$ax^2 + bx + c + x(2ax + b) = 3x^2 + 4x - 3$$

$$\therefore 3ax^2 + 2bx + c = 3x^2 + 4x - 3$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$3a = 3, 2b = 4, c = -3$$

$$\therefore a = 1, b = 2, c = -3$$

따라서 $f'(x) = 2x + 2$ 이므로

$$f'(1) = 2 + 2 = 4$$

055 답 ①

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 연속이고 미분계수 $f'(1)$ 이 존재한다.

(i) $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 에서

$$b+1 = a+2 \quad \therefore a-b = -1 \quad \dots \text{㉠}$$

(ii) 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{a(1+h)^2 + 2(1+h)\} - (a+2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(2a+2)h + ah^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (2a+2+ah) = 2a+2 \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\{b(1+h)+1\} - (b+1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{bh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} b = b\end{aligned}$$

따라서 $2a+2=b$ 이므로 $2a-b=-2 \quad \dots \text{㉡}$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1, b=0$

$$\therefore a^2 + b^2 = 1 + 0 = 1$$

다른 풀이 $g(x) = ax^2 + 2x, h(x) = bx + 1$ 이라 하면

$$g'(x) = 2ax + 2, h'(x) = b$$

(i) $x=1$ 에서 연속이므로 $g(1) = h(1)$ 에서

$$a+2 = b+1 \quad \therefore a-b = -1 \quad \dots \text{㉠}$$

(ii) $x=1$ 에서 미분계수가 존재하므로 $g'(1) = h'(1)$ 에서

$$2a+2 = b \quad \therefore 2a-b = -2 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1, b=0$

$$\therefore a^2 + b^2 = 1 + 0 = 1$$

056 답 6

다항식 $x^{10} + x^5 + 1$ 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)$ 를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$x^{10} + x^5 + 1 = (x+1)^2 Q(x) + ax + b \quad \dots \text{㉠}$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$1 - 1 + 1 = -a + b \quad \therefore a - b = -1 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$10x^9 + 5x^4 = 2(x+1)Q(x) + (x+1)^2 Q'(x) + a$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$-10 + 5 = a \quad \therefore a = -5$$

이를 ㉡에 대입하면

$$-5 - b = -1 \quad \therefore b = -4$$

따라서 $R(x) = -5x - 4$ 이므로

$$R(-2) = 10 - 4 = 6$$

057 답 (가) $x+h$ (나) h (다) $3x^2$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\text{가}) x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\text{나}) h \{ (x+h)^2 + x(x+h) + x^2 \}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \{ (x+h)^2 + x(x+h) + x^2 \} \\ &= (\text{다}) 3x^2\end{aligned}$$

058 [답] ㄱ, ㄴ

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h)-f(x)}{2h} &= f'(x) \\ \text{ㄴ. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \\ &= f'(x) \\ \text{ㄷ. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \times \frac{1}{3} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}f'(x) + \frac{1}{3}f'(x) \\ &= \frac{2}{3}f'(x) \end{aligned}$$

따라서 보기 중 $f'(x)$ 와 같은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

059 [답] ⑤

$f(x+y)=f(x)+f(y)+6xy-1$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0) + f(0) - 1 \\ \therefore f(0) &= 1 \quad \dots\dots \text{㉠} \\ \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+6xh-1-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-1}{h} + 6x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 6x \quad (\because \text{㉠}) \\ &= f'(0) + 6x \\ &= 6x + 2 \end{aligned}$$

060 [답] $f'(x) = -4x - 5$

$f(x+y)=f(x)+f(y)-4xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0) + f(0) - 0 \\ \therefore f(0) &= 0 \quad \dots\dots \text{㉠} \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)-4xh-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} - 4x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} - 4x \quad (\because \text{㉠}) \\ &= f'(0) - 4x \end{aligned}$$

이때 $f'(-1) = -1$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(0) + 4 &= -1 \quad \therefore f'(0) = -5 \\ \therefore f'(x) &= -4x - 5 \end{aligned}$$

061 [답] 4

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + 2x - 3x^2 + \dots + 10x^9 \text{이므로} \\ f'(0) &= -1 \\ f'(1) &= -1 + 2 - 3 + \dots + 10 = 5 \\ \therefore f'(0) + f'(1) &= -1 + 5 = 4 \end{aligned}$$

062 [답] -2

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2ax - (a+1) \\ f'(2) &= 5 \text{에서} \\ 12 + 4a - a - 1 &= 5, \quad 3a = -6 \quad \therefore a = -2 \end{aligned}$$

063 [답] ②

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 \text{에서 } 4a + 2b + c = 2 \quad \dots\dots \text{㉠} \\ f'(x) &= 2ax + b \text{이므로} \\ f'(1) &= 2 \text{에서 } 2a + b = 2 \quad \dots\dots \text{㉡} \\ f'(2) &= 8 \text{에서 } 4a + b = 8 \quad \dots\dots \text{㉢} \\ \text{㉡, ㉢을 연립하여 풀면 } a &= 3, b = -4 \\ \text{이를 ㉠에 대입하면} \\ 12 - 8 + c &= 2 \quad \therefore c = -2 \\ \therefore abc &= 3 \times (-4) \times (-2) = 24 \end{aligned}$$

064 [답] ⑤

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 8x - f'(1) \text{이므로 } x=1 \text{을 양변에 대입하면} \\ f'(1) &= 6 - 8 - f'(1) \\ 2f'(1) &= -2 \quad \therefore f'(1) = -1 \\ \text{따라서 } f'(x) &= 6x^2 - 8x + 1 \text{이므로} \\ f'(2) &= 24 - 16 + 1 = 9 \end{aligned}$$

065 [답] 4

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x-x^2)(1-x+x^2) \text{에서} \\ f(2) &= -1 \times 3 = -3 \\ f'(x) &= (1+x-x^2)'(1-x+x^2) + (1+x-x^2)(1-x+x^2)' \\ &= (1-2x)(1-x+x^2) + (1+x-x^2)(-1+2x) \\ \therefore f'(2) &= -3 \times 3 + (-1) \times 3 = -12 \\ \therefore \frac{f'(2)}{f(2)} &= \frac{-12}{-3} = 4 \end{aligned}$$

066 [답] -6

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2+3x)'(x+1)(x-2) + (x^2+3x)(x+1)'(x-2) \\ &\quad + (x^2+3x)(x+1)(x-2)' \\ &= (2x+3)(x+1)(x-2) + (x^2+3x)(x-2) \\ &\quad + (x^2+3x)(x+1) \\ \therefore f'(1) &= 5 \times 2 \times (-1) + 4 \times (-1) + 4 \times 2 = -6 \end{aligned}$$

067 답 ⑤

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3+1)'(x^2+k) + (x^3+1)(x^2+k)' \\ &= 3x^2(x^2+k) + (x^3+1) \times 2x \\ f'(-1) &= 9 \text{에서} \\ 3(1+k) &= 9, 1+k=3 \quad \therefore k=2 \end{aligned}$$

068 답 ④

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^3+x+1)'f(x) + (x^3+x+1)f'(x) \\ &= (3x^2+1)f(x) + (x^3+x+1)f'(x) \\ \therefore g'(1) &= 4f(1) + 3f'(1) \\ &= 4 \times 4 + 3 \times 1 = 19 \end{aligned}$$

069 답 ②

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{(3x-2)^3\}'(x^2+x)^2 + (3x-2)^3\{(x^2+x)^2\}' \\ &= 9(3x-2)^2(x^2+x)^2 + (3x-2)^3 \times 2(x^2+x)(2x+1) \\ \therefore f'(1) &= 9 \times 1 \times 4 + 1 \times 2 \times 2 \times 3 = 48 \end{aligned}$$

070 답 28

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 세 점의 x 좌표가 각각 a, b, c 이고 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

$$\therefore f'(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$$

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 A에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$ 와 같으므로

$$f'(a) = (a-b)(a-c) = (b-a)(c-a)$$

$$= \overline{AB} \times \overline{AC} = 4 \times (4+3) = 28$$

071 답 ⑤

$f(x) = -x^3 + 2ax^2 + bx - 1$ 이라 하면 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로 $f(-1) = 2$ 에서

$$1 + 2a - b - 1 = 2$$

$$\therefore 2a - b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f'(x) = -3x^2 + 4ax + b$ 이고 점 $(-1, 2)$ 에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f'(-1) = 3$ 에서

$$-3 - 4a + b = 3$$

$$\therefore 4a - b = -6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = -4, b = -10$$

$$\therefore a - b = -4 - (-10) = 6$$

072 답 ②

$f'(x) = 3x^2 - 2$ 이고, 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기가 10이므로 $f'(a) = 10$ 에서

$$3a^2 - 2 = 10, 3a^2 = 12$$

$$a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

073 답 2

$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ 라 하면 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(2, 4)$ 를 지나므로 $f(2) = 4$ 에서

$$(2-a)(2-b)(2-c) = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f'(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$ 이고 점 $(2, 4)$ 에서의 접선의 기울기가 8이므로 $f'(2) = 8$ 에서

$$(2-b)(2-c) + (2-a)(2-c) + (2-a)(2-b) = 8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c}$$

$$= \frac{(2-b)(2-c) + (2-a)(2-c) + (2-a)(2-b)}{(2-a)(2-b)(2-c)}$$

$$= \frac{8}{4} \quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2})$$

$$= 2$$

074 답 3

$f(x) = (x-k)^2$ 에서 $f'(x) = 2(x-k)$

$h(x) = f(x)g(x)$ 라 하면

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$x=1$ 인 점에서의 접선의 기울기가 -16 이므로 $h'(1) = -16$ 에서

$$f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = -16$$

$$2(1-k) - 3(1-k)^2 = -16$$

$$3k^2 - 4k - 15 = 0, (3k+5)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = 3 \quad (\because k > 0)$$

075 답 21

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \times (-1)$$

$$= 2f'(1) + f'(1) = 3f'(1)$$

$f'(x) = 3x^2 + 4$ 이므로

$$f'(1) = 3 + 4 = 7$$

따라서 구하는 극한값은

$$3f'(1) = 3 \times 7 = 21$$

076 답 4

$f(1) = -1$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} \times (-2)$$

$$= -2f'(1)$$

$f'(x) = -3x^2 + 2x - 1$ 이므로

$$f'(1) = -3 + 2 - 1 = -2$$

따라서 구하는 극한값은

$$-2f'(1) = -2 \times (-2) = 4$$

077 ㉔ ⑤

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x^2+x+1} \right\}$$

$$= \frac{1}{3} f'(1)$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3 \text{ 이므로 } f'(1) = 3 + 3 = 6$$

따라서 구하는 극한값은

$$\frac{1}{3} f'(1) = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

078 ㉔ -5

$2x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(2x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)+f(1)-f(2x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x-1)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)-f(1)}{\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right) - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)-f(1)}{\frac{1}{2}(t-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - 2 \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)-f(1)}{t-1}$$

$$= f'(1) - 2f'(1)$$

$$= -f'(1)$$

$$f'(x) = 8x^3 - 3 \text{ 이므로 } f'(1) = 8 - 3 = 5$$

따라서 구하는 극한값은

$$-f'(1) = -5$$

079 ㉔ ②

$f(1)=g(1)=1$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-g(1-3h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)+g(1)-g(1-3h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times 2 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1-3h)-g(1)}{-3h} \times (-3)$$

$$= 2f'(1) + 3g'(1)$$

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2, g'(x) = 4x^3 - 2x \text{ 이므로}$$

$$f'(1) = 5 + 3 = 8, g'(1) = 4 - 2 = 2$$

따라서 구하는 극한값은

$$2f'(1) + 3g'(1) = 2 \times 8 + 3 \times 2 = 22$$

080 ㉔ 8

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = 1$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-3\} = 0 \text{ 이므로 } f(2) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)+1}{x-2} = 3$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \{g(x)+1\} = 0 \text{ 이므로 } g(2) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = g'(2) = 3$$

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{ 이므로}$$

$$h'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2)$$

$$= 1 \times (-1) + 3 \times 3 = 8$$

081 ㉔ -47

$$f(x)+g(x)=2x^3-x+1 \text{ 에서}$$

$$f(1)+g(1)=2-1+1=2$$

$$\text{이때 } f(1)=5 \text{ 이므로 } g(1)=-3$$

$$f(x)+g(x)=2x^3-x+1 \text{ 에서}$$

$$f'(x)+g'(x)=6x^2-1$$

$$\therefore f'(1)+g'(1)=6-1=5$$

$$\text{이때 } f'(1)=9 \text{ 이므로 } g'(1)=-4$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)g(1+h)-f(1)g(1)}{h}$$

$$= \{f(1)g(1)\}'$$

$$= f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$$

$$= 9 \times (-3) + 5 \times (-4) = -47$$

082 ㉔ ③

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x+1)+1}{x^2-4} = 2$ 에서 $x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -2} \{f(x+1)+1\} = 0 \text{ 이므로 } f(-1) = -1$$

$x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -2$ 일 때 $t \rightarrow -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x+1)+1}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x+1)+1}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{f(t)+1}{(t+1)(t-3)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -1} \left\{ \frac{f(t)-f(-1)}{t-(-1)} \times \frac{1}{t-3} \right\}$$

$$= -\frac{1}{4} f'(-1)$$

$$\text{즉, } -\frac{1}{4} f'(-1) = 2 \text{ 이므로 } f'(-1) = -8$$

$$\text{한편 } f(x) = x^4 + ax + b \text{ 에서 } f'(x) = 4x^3 + a$$

$$f(-1) = -1 \text{ 에서 } 1 - a + b = -1$$

$$\therefore a - b = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$f'(-1) = -8 \text{ 에서}$$

$$-4 + a = -8 \quad \therefore a = -4$$

이를 ⑦에 대입하면

$$-4 - b = 2 \quad \therefore b = -6$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^4 - 4x - 6 \text{ 이고, } f'(x) = 4x^3 - 4 \text{ 이므로}$$

$$f(2) + f'(2) = (16 - 8 - 6) + (32 - 4) = 30$$

083 ㉔ ②

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \times (-1) \\
 &= 2f'(1) + f'(1) = 3f'(1) \\
 &\text{즉, } 3f'(1) = 6 \text{이므로 } f'(1) = 2 \\
 &f(x) = 2x^3 - x^2 + ax + 3 \text{에서 } f'(x) = 6x^2 - 2x + a \\
 &f'(1) = 2 \text{에서 } 4 + a = 2 \\
 &\therefore a = -2
 \end{aligned}$$

084 ㉔ 4

(가)에서 $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면
 $f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$
 (나)에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로
 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$ 이므로 $f'(0) = 0 \quad \therefore b = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 + 2ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (6x + 2a) = 2a$
 즉, $2a = 2$ 이므로 $a = 1$
 따라서 $f'(x) = 6x^2 + 2x$ 이므로
 $f'(-1) = 6 - 2 = 4$

085 ㉔ -6

(가)에서 $f(x) - x^3 = -3x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$
 $\therefore f'(x) = 3x^2 - 6x + a$
 (나)에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로
 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) + 5\} = 0$ 이므로 $f(2) = -5$
 $8 - 12 + 2a + b = -5 \quad \therefore 2a + b = -1 \quad \dots\dots \text{㉑}$
 또 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = -2$ 이므로
 $a = -2$
 이를 ㉑에 대입하면
 $-4 + b = -1 \quad \therefore b = 3$
 따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 3$ 이고, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 2$ 이므로
 $f(1) + f'(1) = (1 - 3 - 2 + 3) + (3 - 6 - 2) = -6$

086 ㉔ $\frac{4}{3}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이므로 $f(0) = 0$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 2} = 5$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - 2\} = 0$ 이므로 $f(2) = 2$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 5$

한편 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(0) = 0$ 에서 $d = 0$

$f'(0) = 1$ 에서 $c = 1$

$f(2) = 2$ 에서 $8a + 4b + 2c + d = 2$

$\therefore 2a + b = 0 \quad \dots\dots \text{㉑}$

$f'(2) = 5$ 에서 $12a + 4b + c = 5$

$\therefore 3a + b = 1 \quad \dots\dots \text{㉒}$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면 $a = 1, b = -2$

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

따라서 방정식 $f'(x) = 0$, 즉 $3x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 모든 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{4}{3}$ 이다.

087 ㉔ ①

$f(x) = x^{10} - x^3 + 3x$ 라 하면 $f(-1) = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{10} - x^3 + 3x + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1)$$

$f'(x) = 10x^9 - 3x^2 + 3$ 이므로

$f'(-1) = -10 - 3 + 3 = -10$

088 ㉔ 18

$f(x) = x^n + 2x$ 라 하면 $f(1) = 3$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n + 2x - 3}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1} \right\} = \frac{1}{2} f'(1)
 \end{aligned}$$

즉, $\frac{1}{2} f'(1) = 10$ 이므로 $f'(1) = 20$

$f'(x) = nx^{n-1} + 2$ 이므로 $f'(1) = n + 2$

따라서 $n + 2 = 20$ 이므로 $n = 18$

089 ㉔ ③

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$f'(x) = 2ax + b$

$f(x)$ 와 $f'(x)$ 를 주어진 식에 대입하면

$x(2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = x + 2$

$\therefore -bx - 2c = x + 2$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$-b = 1, -2c = 2 \quad \therefore b = -1, c = -1$

$f(1) = 2$ 에서 $a + b + c = 2$

$a - 1 - 1 = 2 \quad \therefore a = 4$

따라서 $f'(x) = 8x - 1$ 이므로

$f'(2) = 16 - 1 = 15$

090 ⑤

$f(x)$ 를 n 차함수라 하면 $f'(x)$ 는 $(n-1)$ 차함수이다.
 $\{f'(x)\}^2=4f(x)+1$ 에서 $n=1$ 이면 좌변은 상수함수이고, 우변은 일차함수가 되어 등식이 성립하지 않는다. 즉, $n \geq 2$ 이다.
 좌변의 차수는 $2(n-1)$, 우변의 차수는 n 이므로
 $2(n-1)=n \quad \therefore n=2$
 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면
 $f'(x)=2ax+b$
 $f(x)$ 와 $f'(x)$ 를 주어진 식에 대입하면
 $(2ax+b)^2=4(ax^2+bx+c)+1$
 $\therefore 4a^2x^2+4abx+b^2=4ax^2+4bx+4c+1$
 이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로
 $4a^2=4a, 4ab=4b, b^2=4c+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\therefore a=1 (\because a \neq 0)$
 한편 $f'(1)=5$ 에서 $2a+b=5, 2+b=5 \quad \therefore b=3$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $9=4c+1 \quad \therefore c=2$
 따라서 $f(x)=x^2+3x+2$ 이므로 $f(3)=9+9+2=20$

091 ⑨

$f(x)f'(x)+g(x)g'(x)=5x$ 에서 $f(x), g(x)$ 는 모두 일차함수이거나 하나는 일차함수이고 하나는 상수함수이다.
 $f(0)=g(0)=0$ 이므로 $f(x)=ax, g(x)=bx$ (a, b 는 상수)라 하면
 $f'(x)=a, g'(x)=b$
 $f(x)+g(x)=x$ 에서
 $ax+bx=x \quad \therefore a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $f(x)f'(x)+g(x)g'(x)=5x$ 에서
 $a^2x+b^2x=5x \quad \therefore a^2+b^2=5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 에서 $b=1-a$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $a^2+(1-a)^2=5$
 $a^2-a-2=0, (a+1)(a-2)=0 \quad \therefore a=-1 (\because f(3)<0)$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $-1+b=1 \quad \therefore b=2$
 따라서 $f(x)=-x, g(x)=2x$ 이므로
 $g(3)-f(3)=6-(-3)=9$

092 ⑧

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 미분가능하면 $x=-1$ 에서 연속이고 미분계수 $f'(-1)$ 이 존재한다.
 (i) $x=-1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=f(-1)$ 에서
 $-4=-a+b \quad \therefore a-b=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 (ii) 미분계수 $f'(-1)$ 이 존재하므로
 $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{a(-1+h)+b\}-(-a+b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{ah}{h} = a$
 $\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\{(-1+h)^3+3(-1+h)\}-(-4)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h^3-3h^2+6h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} (h^2-3h+6)=6$
 $\therefore a=6$

$a=6$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $6-b=4 \quad \therefore b=2$
 $\therefore a+b=6+2=8$

다른 풀이 $g(x)=ax+b, h(x)=x^3+3x$ 라 하면

$$g'(x)=a, h'(x)=3x^2+3$$

(i) $x=-1$ 에서 연속이므로 $g(-1)=h(-1)$ 에서

$$-a+b=-4 \quad \therefore a-b=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x=-1$ 에서 미분계수가 존재하므로 $g'(-1)=h'(-1)$ 에서

$$a=6$$

$a=6$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $6-b=4 \quad \therefore b=2$

$$\therefore a+b=6+2=8$$

093 ⑨

$$g(x)=\begin{cases} -x^3-3x^2+9x+m & (x \geq a) \\ x^3+3x^2-9x & (x < a) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하므로 $x=a$ 에서 연속이고 미분계수 $g'(a)$ 가 존재한다.

(i) $x=a$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)=g(a)$ 에서

$$a^3+3a^2-9a=-a^3-3a^2+9a+m$$

$$\therefore m=2a^3+6a^2-18a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 미분계수 $g'(a)$ 가 존재하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{-(a+h)^3-3(a+h)^2+9(a+h)+m\}-(-a^3-3a^2+9a+m)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{-h^3-(3a+3)h^2-(3a^2+6a-9)h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \{-h^2-(3a+3)h-(3a^2+6a-9)\}$$

$$=-3a^2-6a+9$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\{(a+h)^3+3(a+h)^2-9(a+h)\}-(a^3+3a^2-9a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h^3+(3a+3)h^2+(3a^2+6a-9)h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \{h^2+(3a+3)h+(3a^2+6a-9)\}$$

$$=3a^2+6a-9$$

$$\text{즉, } -3a^2-6a+9=3a^2+6a-9 \text{이므로}$$

$$a^2+2a-3=0, (a+3)(a-1)=0 \quad \therefore a=1 (\because a>0)$$

$a=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $m=-10$

$$\therefore a+m=1+(-10)=-9$$

다른 풀이 $h(x)=-x^3-3x^2+9x+m, k(x)=x^3+3x^2-9x$ 라 하면

$$h'(x)=-3x^2-6x+9, k'(x)=3x^2+6x-9$$

(i) $x=a$ 에서 연속이므로 $h(a)=k(a)$ 에서

$$-a^3-3a^2+9a+m=a^3+3a^2-9a$$

$$\therefore m=2a^3+6a^2-18a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x=a$ 에서 미분계수가 존재하므로 $h'(a)=k'(a)$ 에서

$$-3a^2-6a+9=3a^2+6a-9, a^2+2a-3=0$$

$$(a+3)(a-1)=0 \quad \therefore a=1 (\because a>0)$$

$a=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $m=-10$

$$\therefore a+m=1+(-10)=-9$$

094 답 ③

미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h(1+h-2a)-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (1+h-2a) \\ &= 1-2a \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h(1+h-2a)-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \{-(1+h-2a)\} \\ &= -1+2a\end{aligned}$$

따라서 $1-2a = -1+2a$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$

095 답 -6

$0 \leq x < 1$ 에서 $[x] = 0$, $1 \leq x < 2$ 에서 $[x] = 1$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ x^3 + ax + b & (1 \leq x < 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 연속이고 미분계수 $f'(1)$ 이 존재한다.

(i) $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 에서

$$0 = 1 + a + b \quad \therefore a + b = -1 \quad \dots\dots ㉠$$

(ii) 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{(1+h)^3 + a(1+h) + b\} - (1+a+b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (h^2 + 3h + a + 3) \\ &= a + 3 \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{0-0}{h} = 0 \\ \text{즉, } a+3 &= 0 \text{이므로 } a = -3\end{aligned}$$

$a = -3$ 을 ㉠에 대입하면 $-3 + b = -1 \quad \therefore b = 2$

$$\therefore ab = -3 \times 2 = -6$$

096 답 ⑤

다항식 $x^8 + x^4 + x^3 + 2$ 를 $x^2(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

나머지를 $R(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$x^8 + x^4 + x^3 + 2 = x^2(x-1)Q(x) + ax^2 + bx + c \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$2 = c$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$5 = a + b + 2 \quad \therefore a + b = 3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$8x^7 + 4x^3 + 3x^2 = x(3x-2)Q(x) + x^2(x-1)Q'(x) + 2ax + b$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면 $0 = b$

이를 ㉡에 대입하면 $a = 3$

따라서 $R(x) = 3x^2 + 2$ 이므로

$$R(3) = 27 + 2 = 29$$

097 답 1

다항식 $x^7 - ax^3 + bx + 2$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을

$Q(x)$ 라 하면 나머지가 0이므로

$$x^7 - ax^3 + bx + 2 = (x-1)^2 Q(x) \quad \dots\dots ㉠$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 - a + b + 2 = 0$$

$$\therefore a - b = 3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$7x^6 - 3ax^2 + b = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x)$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$7 - 3a + b = 0$$

$$\therefore 3a - b = 7 \quad \dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 2, b = -1$

$$\therefore a + b = 2 + (-1) = 1$$

098 답 -9

다항식 $x^6 + 2x^3 + ax + b$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을

$Q(x)$ 라 하면 나머지가 $3x-4$ 이므로

$$x^6 + 2x^3 + ax + b = (x+1)^2 Q(x) + 3x - 4 \quad \dots\dots ㉠$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$-1 - a + b = -7$$

$$\therefore a - b = 6 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$6x^5 + 6x^2 + a = 2(x+1)Q(x) + (x+1)^2 Q'(x) + 3$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$a = 3$$

이를 ㉡에 대입하면

$$3 - b = 6 \quad \therefore b = -3$$

$$\therefore ab = 3 \times (-3) = -9$$

099 답 2

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)+3}{x+2} = 1$ 에서 $x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이

존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -2} \{f(x)+3\} = 0 \text{이므로 } f(-2) = -3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)+3}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} \\ &= f'(-2) = 1 \quad \dots\dots ㉡\end{aligned}$$

다항식 $f(x)$ 를 $(x+2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $ax+b$ 이므로

$$f(x) = (x+2)^2 Q(x) + ax + b \quad \dots\dots ㉢$$

㉢에서 $f(-2) = -3$ 이므로

$$-2a + b = -3 \quad \dots\dots ㉣$$

㉡의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2(x+2)Q(x) + (x+2)^2 Q'(x) + a$$

㉢에서 $f'(-2) = 1$ 이므로 $a = 1$

이를 ㉣에 대입하면

$$-2 + b = -3 \quad \therefore b = -1$$

$$\therefore a - b = 1 - (-1) = 2$$

100 ㉓ ③

함수 $f(x)=2x^2-3x+1$ 에 대하여 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(2b^2-3b+1)-(2a^2-3a+1)}{b-a} \\ &= \frac{2(b-a)(b+a)-3(b-a)}{b-a} = 2(a+b)-3\end{aligned}$$

따라서 $2(a+b)-3=-1$ 이므로 $a+b=1$

101 ㉓ 1

함수 $f(x)=x^2-5x+4$ 에 대하여 x 의 값이 a 에서 $a+2$ 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a+2)-f(a)}{(a+2)-a} \\ &= \frac{\{(a+2)^2-5(a+2)+4\}-(a^2-5a+4)}{2} \\ &= \frac{4a-6}{2} = 2a-3 \quad \dots\dots ㉑\end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 의 $x=2$ 에서의 미분계수 $f'(2)$ 는

$$\begin{aligned}f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(2+h)^2-5(2+h)+4\}-(-2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h-1) = -1 \quad \dots\dots ㉒\end{aligned}$$

㉑, ㉒에서 $2a-3=-1 \quad \therefore a=1$

102 ㉓ ⑤

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 는 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 이은 직선의 기울기이고, $f'(a)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기, $f'(b)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기이다.

$$\therefore f'(b) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(a)$$

103 ㉓ ④

$$\begin{aligned}① \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times 2 \\ &= 2f'(1) = 2 \times 3 = 6 \\ ② \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3h)-f(1)}{3h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h} \times (-1) \\ &= -f'(1) = -3 \\ ③ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times 2 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} \times (-1) \\ &= 2f'(1) + f'(1) = 3f'(1) = 3 \times 3 = 9 \\ ④ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x)-3f(1)}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\{f(x)-f(1)\}}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{3}{x+1} \right\} \\ &= \frac{3}{2} f'(1) = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}⑤ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(1)-f(x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(1)-f(1)+f(1)-f(x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)f(1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)f(1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= 2f(1)-f'(1) = 2 \times 2 - 3 = 1\end{aligned}$$

104 ㉓ 1

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h)-f(2-4h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h)-f(2)+f(2)-f(2-4h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h)-f(2)}{3h} \times \frac{3}{2} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-4h)-f(2)}{-4h} \times (-2) \\ &= \frac{3}{2} f'(2) + 2f'(2) = \frac{7}{2} f'(2) \\ \text{즉, } \frac{7}{2} f'(2) &= 14 \text{이므로 } f'(2) = 4 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} \\ &= f'(2) \times \frac{1}{4} = 4 \times \frac{1}{4} = 1\end{aligned}$$

105 ㉓ 3

$$\begin{aligned}f(x+y) &= f(x)+f(y)+xy \text{의 양변에 } x=0, y=0 \text{을 대입하면} \\ f(0) &= f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0 \quad \dots\dots ㉑ \\ \therefore f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2)+f(h)+2h-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 2 \quad (\because ㉑) \\ &= f'(0) + 2 \\ \text{즉, } f'(0) + 2 &= 4 \text{이므로 } f'(0) = 2 \\ \therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)+f(h)+h-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 1 \quad (\because ㉑) \\ &= f'(0) + 1 = 2 + 1 = 3\end{aligned}$$

106 ㉓ ㄱ, ㄴ

ㄱ. $0 \leq x < 1$ 에서 $[x]=0$, $1 \leq x < 2$ 에서 $[x]=1$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ x-1 & (1 \leq x < 2) \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(1+h-1)-0}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{0-0}{h} = 0$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 0 & (x \geq 1) \\ -2x+2 & (x < 1) \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\{-2(1+h)+2\}-0}{h} = -2$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(1+h)^3-1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (h^2+3h+3) = 3 \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\{3(1+h)-2\}-1}{h} = 3$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

따라서 보기의 함수 중 $x=1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

107 답 ㄱ, ㄷ

$$\text{ㄱ. } \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)f(-x) = 0 \times (-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)f(-x) = 0 \times (-1) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} f(x)f(-x) = 0$$

$$\text{ㄴ. } f(-1)f(1) = 0 \times 1 = 0 \text{이고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)f(-x) = (-1) \times 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)f(-x) = (-1) \times 0 = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)f(-x) = f(-1)f(1)$$

즉, 함수 $f(x)f(-x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)f(-x) = g(x)$ 라 하고 구간 $(-1, 1)$ 에서 함수 $g(x)$ 를 구하면

$$g(x) = \begin{cases} x^2-x & (0 < x < 1) \\ 0 & (x=0) \\ x^2+x & (-1 < x < 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(h)-g(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(h^2-h)-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (h-1) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{g(h)-g(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(h^2+h)-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} (h+1) = 1 \end{aligned}$$

즉, 함수 $f(x)f(-x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

108 답 ㉓

$f(x-y) = f(x) + f(y) - xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) - 0 \quad \therefore f(0) = 0 \quad \dots\dots \text{㉓}$$

$f(x-y) = f(x) + f(y) - xy$ 의 양변에 y 대신 $-y$ 를 대입하면

$$f(x+y) = f(x) + f(-y) + xy$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(-h)+xh-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h)}{-h} \times (-1) + x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h)-f(0)}{-h} \times (-1) + x \quad (\because \text{㉓}) \\ &= -f'(0) + x = x - 5 \end{aligned}$$

109 답 ㉔

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f(0) = 2 \text{에서 } c = 2$$

$$f(1) = 8 \text{에서 } a + b + c = 8$$

$$a + b + 2 = 8 \quad \therefore a + b = 6 \quad \dots\dots \text{㉑}$$

$$f'(x) = 2ax + b \text{이므로}$$

$$f'(-1) = 0 \text{에서 } -2a + b = 0 \quad \dots\dots \text{㉒}$$

$$\text{㉑, ㉒을 연립하여 풀면 } a = 2, b = 4$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2x^2 + 4x + 2 \text{이므로 } f(-2) = 8 - 8 + 2 = 2$$

110 답 27

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(2, 3)$ 을 지나므로 $f(2) = 3$

또 $x=2$ 인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$ 와 같고, 이 접선은 두 점 $(-1, 0), (2, 3)$ 을 지나므로

$$f'(2) = \frac{3-0}{2-(-1)} = 1$$

$$g(x) = (x^2 + 2x + 1)f(x) \text{에서}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^2 + 2x + 1)'f(x) + (x^2 + 2x + 1)f'(x) \\ &= (2x + 2)f(x) + (x^2 + 2x + 1)f'(x) \end{aligned}$$

$$\therefore g'(2) = 6f(2) + 9f'(2) = 6 \times 3 + 9 \times 1 = 27$$

111 답 5

$$f(x) = 2x^2 + ax + b \text{라 하면 } f'(x) = 4x + a$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기와 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 2이다.

$$f(1) = 1 \text{에서 } 2 + a + b = 1 \quad \therefore a + b = -1 \quad \dots\dots \text{㉑}$$

$$f'(1) = 2 \text{에서 } 4 + a = 2 \quad \therefore a = -2$$

$$\text{이를 ㉑에 대입하면 } -2 + b = -1 \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-2)^2 + 1^2 = 5$$

112 답 ㉓

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{f(x)\}^2 - \{f(2)\}^2}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{f(x)-f(2)\}\{f(x)+f(2)\}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)+f(2)\} \\ &= f'(2) \times 2f(2) = 2f'(2)f(2) \end{aligned}$$

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 1 \text{에서 } f(2) = 16 - 16 - 1 = -1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 \text{이므로 } f'(2) = 32 - 24 = 8$$

$$\text{따라서 구하는 극한값은 } 2f'(2)f(2) = 2 \times 8 \times (-1) = -16$$

113 ⑤

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-2}{x-3}=1$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x)-2\}=0$ 이므로 $f(3)=2$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3)=1$$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)+3}{x-3}=7$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} \{g(x)+3\}=0$ 이므로 $g(3)=-3$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)+3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)-g(3)}{x-3} = g'(3)=7$$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 이므로

$$h'(3)=f'(3)g(3)+f(3)g'(3)=1 \times (-3) + 2 \times 7 = 11$$

따라서 곡선 $y=h(x)$ 위의 $x=3$ 인 점에서의 접선의 기울기는 11이다.

114 ⑪

$h(x)=f(x)g(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)-h(1)}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{h(x)-h(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\} \\ &= \frac{1}{2}h'(1) \end{aligned}$$

$f(x)=-x^2+3x+2$ 에서 $f'(x)=-2x+3$ 이므로

$$f(1)=4, f'(1)=1$$

$g(x)=2x^3-x^2+2x-5$ 에서 $g'(x)=6x^2-2x+2$ 이므로

$$g(1)=-2, g'(1)=6$$

따라서 구하는 극한값은

$$\frac{1}{2}h'(1) = \frac{1}{2}\{f'(1)g(1)+f(1)g'(1)\} = \frac{1}{2}(-2+24) = 11$$

115 ⑭

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \frac{1}{x+1} \right\} = \frac{1}{2}f'(1)$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2}f'(1) = \frac{5}{2} \text{이므로 } f'(1)=5$$

$f(x)=x^3+ax^2+b$ 에서 $f'(x)=3x^2+2ax$

$$f(-1)=2 \text{에서 } -1+a+b=2 \quad \therefore a+b=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(1)=5 \text{에서 } 3+2a=5 \quad \therefore a=1$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 1+b=3 \quad \therefore b=2$$

따라서 $f(x)=x^3+x^2+2$ 이므로 $f(2)=8+4+2=14$

116 ③

$f(x)=x^{3n}-x^{2n}+x^n$ 이라 하면 $f(1)=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{3n}-x^{2n}+x^n-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)=12$$

$f'(x)=3nx^{3n-1}-2nx^{2n-1}+nx^{n-1}$ 이므로

$$f'(1)=3n-2n+n=2n$$

따라서 $2n=12$ 이므로 $n=6$

117 ⑤

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x)=2ax+b$$

$f(x)$ 와 $f'(x)$ 를 주어진 식에 대입하면

$$x(2ax+b)=ax^2+bx+c-2x^2+1$$

$$\therefore 2ax^2+bx=(a-2)x^2+bx+c+1$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$2a=a-2, 0=c+1$$

$$\therefore a=-2, c=-1$$

$$f(1)=4 \text{에서 } a+b+c=4$$

$$-2+b-1=4 \quad \therefore b=7$$

따라서 $f(x)=-2x^2+7x-1$ 이므로

$$f(2)=-8+14-1=5$$

118 ②

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 $x=a$ 에서 연속이고 미분계수 $f'(a)$ 가 존재한다.

(i) $x=a$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=f(a)$ 에서

$$a^2-2a=2a+b \quad \therefore b=a^2-4a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 미분계수 $f'(a)$ 가 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{2(a+h)+b\}-(2a+b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{2h}{h} = 2 \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\{(a+h)^2-2(a+h)\}-(a^2-2a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h^2+(2a-2)h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} (h+2a-2) = 2a-2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2a-2=2 \text{이므로 } 2a=4 \quad \therefore a=2$$

$a=2$ 를 ①에 대입하면 $b=4-8=-4$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} 2x-4 & (x \geq 2) \\ x^2-2x & (x < 2) \end{cases} \text{이므로 } f(3)=6-4=2$$

119 ②

다항식 x^3-3x^2+b 를 $(x-a)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 0이므로

$$x^3-3x^2+b=(x-a)^2Q(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변에 $x=a$ 를 대입하면

$$a^3-3a^2+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2-6x=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)$$

양변에 $x=a$ 를 대입하면

$$3a^2-6a=0, 3a(a-2)=0 \quad \therefore a=2 (\because a \neq 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } 8-12+b=0 \quad \therefore b=4$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{4}{2} = 2$$

001 답 ③

$f(x) = -x^3 + ax + 3$ 이라 하면 $f'(x) = -3x^2 + a$
 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, 4)$ 를 지나므로 $f(1)=4$ 에서
 $-1+a+3=4 \quad \therefore a=2$
 점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$ 이므로 접선의 방정식
 $y-4=-(x-1) \quad \therefore y=-x+5$
 따라서 $b=-1, c=5$ 이므로
 $abc=2 \times (-1) \times 5 = -10$

002 답 6

$f(x) = x^3 + 2x + 1$ 이라 하면 $f'(x) = 3x^2 + 2$
 점 $(-1, -2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=5$ 이므로 이 점
 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는
 $-\frac{1}{f'(-1)} = -\frac{1}{5}$
 즉, 직선의 방정식은
 $y+2 = -\frac{1}{5}(x+1) \quad \therefore x+5y+11=0$
 따라서 $a=1, b=5$ 이므로
 $a+b=1+5=6$

003 답 5

$f(x) = -x^2 - x + 4$ 라 하면 $f'(x) = -2x - 1$
 접점의 좌표를 $(t, -t^2 - t + 4)$ 라 하면 접선의 기울기는 3이므로
 $f'(t)=3$ 에서
 $-2t-1=3, -2t=4 \quad \therefore t=-2$
 즉, 접점의 좌표는 $(-2, 2)$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-2=3(x+2)$
 $\therefore y=3x+8$
 따라서 $a=3, b=8$ 이므로
 $b-a=8-3=5$

004 답 ④

$f(x) = x^3 + 3$ 이라 하면 $f'(x) = 3x^2$
 접점의 좌표를 (t, t^3+3) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
 $f'(t)=3t^2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(t^3+3)=3t^2(x-t)$
 $\therefore y=3t^2x-2t^3+3 \quad \dots\dots ㉠$
 이 직선이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로
 $1 = -2t^3+3, t^3-1=0$
 $(t-1)(t^2+t+1)=0 \quad \therefore t=1 (\because t \text{는 실수})$
 이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은
 $y=3x+1$
 따라서 $a=3, b=1$ 이므로
 $a+2b=3+2=5$

005 답 ③

$f(x) = x^3 + a, g(x) = bx^2 - 6$ 이라 하면
 $f'(x) = 3x^2, g'(x) = 2bx$
 (i) $x=2$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(2)=g(2)$ 에서
 $8+a=4b-6$
 $\therefore a-4b=-14 \quad \dots\dots ㉠$
 (ii) $x=2$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로
 $f'(2)=g'(2)$ 에서
 $12=4b \quad \therefore b=3$
 $b=3$ 을 ㉠에 대입하면
 $a-12=-14 \quad \therefore a=-2$
 $\therefore a+b=-2+3=1$

006 답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

곡선 $y=-x^2+x+2$ 에 접하고 직선 $y=x+5$ 와 기울기가 같은 접
 선의 접점의 좌표를 $(t, -t^2+t+2)$ 라 하면 구하는 거리의 최솟
 값은 이 점과 직선 $y=x+5$ 사이의 거리와 같다.
 $f(x) = -x^2+x+2$ 라 하면 $f'(x) = -2x+1$
 접선의 기울기가 1이므로 $f'(t)=1$ 에서
 $-2t+1=1 \quad \therefore t=0$
 따라서 접점의 좌표는 $(0, 2)$ 이므로 이 점과 직선 $y=x+5$, 즉
 $x-y+5=0$ 사이의 거리는
 $\frac{|0-2+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

007 답 $\sqrt{17}$

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ 이라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 4x$
 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$
 원의 중심이 x 축 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면
 두 점 $(2, 1), (a, 0)$ 을 지나는 직선은 점 $(2, 1)$ 에서의 접선과 수
 직이다.
 즉, $\frac{0-1}{a-2} = -\frac{1}{4}$ 이므로 $a-2=4$
 $\therefore a=6$
 이때 원의 반지름의 길이는 두 점 $(2, 1), (6, 0)$ 사이의 거리와
 같으므로
 $\sqrt{(6-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{17}$

008 답 $\frac{2}{3}$

함수 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 열린
 구간 $(0, 2)$ 에서 미분가능하며 $f(0)=f(2)=0$ 이므로 롤의 정리
 에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재
 한다.
 이때 $f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$ 이므로
 $f'(c) = 3c^2 - 8c + 4 = 0$
 $(3c-2)(c-2) = 0$
 $\therefore c = \frac{2}{3} (\because 0 < c < 2)$

009 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

함수 $f(x)=x^3+2x$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2+2$ 이므로

$$\frac{3-0}{1-0}=3c^2+2, c^2=\frac{1}{3}$$

$$\therefore c=\frac{\sqrt{3}}{3} (\because 0 < c < 1)$$

010 답 ②

$f(x)=x^3+2x^2+ax+1$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2+4x+a$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로 $f(-1)=3$ 에서 $-1+2-a+1=3 \quad \therefore a=-1$

점 $(-1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-3=-2(x+1) \quad \therefore y=-2x+1$$

따라서 $b=-2, c=1$ 이므로

$$a+b+c=-1+(-2)+1=-2$$

011 답 -6

$f(x)=x^3+ax+b$ 라 하면 $f'(x)=3x^2+a$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, 2)$ 를 지나므로 $f(1)=2$ 에서

$$1+a+b=2 \quad \therefore a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 1이므로 $f'(1)=1$ 에서

$$3+a=1 \quad \therefore a=-2$$

이를 ①에 대입하면

$$-2+b=1 \quad \therefore b=3$$

점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-2=x-1 \quad \therefore y=x+1 \quad \therefore c=1$$

$$\therefore abc=-2 \times 3 \times 1=-6$$

012 답 1

$f(x)=x^2-3x+2$ 라 하면 $f'(x)=2x-3$

점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y=-(x-1) \quad \therefore y=-x+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(3, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=3$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-2=3(x-3) \quad \therefore y=3x-7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$x=2, y=-1$$

따라서 교점의 좌표는 $(2, -1)$ 이므로

$$a=2, b=-1$$

$$\therefore a+b=2+(-1)=1$$

013 답 3

$f(x)=2x^3+ax+b$ 라 하면 $f'(x)=6x^2+a$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, 1)$ 을 지나므로 $f(1)=1$ 에서

$$2+a+b=1 \quad \therefore a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=6+a$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-1=(6+a)(x-1)$$

이 직선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$-1=-(6+a) \quad \therefore a=-5$$

이를 ①에 대입하면

$$-5+b=-1 \quad \therefore b=4$$

$$\therefore a+2b=-5+8=3$$

014 답 ①

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1}=2$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-1\}=0 \text{이므로 } f(1)=1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)=2$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 2이므로 접선의 방정식은

$$y-1=2(x-1) \quad \therefore y=2x-1$$

$$\text{따라서 } g(x)=2x-1 \text{이므로 } g(-1)=-2-1=-3$$

015 답 1

점 $(1, 2)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(1)=2$

점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f'(1)=3$

$g(x)=(x^3-2x)f(x)$ 라 하면

$$g'(x)=(3x^2-2)f(x)+(x^3-2x)f'(x)$$

$$\therefore g'(1)=f(1)-f'(1)=2-3=-1$$

이때 $g(1)=-f(1)=-2$ 이므로 점 $(1, -2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y+2=-(x-1) \quad \therefore y=-x-1$$

$$\text{따라서 } a=-1, b=-1 \text{이므로 } ab=-1 \times (-1)=1$$

016 답 $\frac{9}{2}$

$f(x)=x^3-2x+1$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2-2$

점 $A(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y=x-1$$

곡선 $y=x^3-2x+1$ 과 점선 $y=x-1$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3-2x+1=x-1 \text{에서 } x^3-3x+2=0$$

$$(x+2)(x-1)^2=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

다시 만나는 점 B의 좌표는 $(-2, -3)$ 이므로 $H(-2, 0)$

따라서 삼각형 ABH의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{BH} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$$

017 답 $-\frac{4}{3}$

$f(x) = -3x^3 + 3x^2 + 2$ 라 하면 $f'(x) = -9x^2 + 6x$

점 (1, 2)에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -3$ 이므로 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$$-\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$$

즉, 직선의 방정식은

$$y - 2 = \frac{1}{3}(x - 1) \quad \therefore y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

따라서 $m = \frac{1}{3}, n = \frac{5}{3}$ 이므로

$$m - n = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3}$$

018 답 ④

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 4$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

점 P(0, 4)에서의 접선의 기울기는 $f'(0) = 2$ 이므로 접선 l의 방정식은

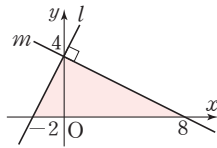
$$y - 4 = 2(x - 0) \quad \therefore y = 2x + 4$$

직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{2}$ 이고 점 P(0, 4)를 지나므로 직선 m의 방정식은

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 0) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + 4$$

따라서 오른쪽 그림에서 두 직선 l, m 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 10 \times 4 = 20$$



019 답 $\frac{1}{2}$

$g(x) = x^3 + x^2$ 이라 하면 $g'(x) = 3x^2 + 2x$

점 P($t, t^3 + t^2$)에서의 접선의 기울기는 $g'(t) = 3t^2 + 2t$ 이므로 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$$-\frac{1}{g'(t)} = -\frac{1}{3t^2 + 2t}$$

따라서 직선의 방정식은

$$y - (t^3 + t^2) = -\frac{1}{3t^2 + 2t}(x - t)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3t^2 + 2t}x + \frac{1}{3t + 2} + t^3 + t^2$$

$$x = 0 \text{ 일 때 } y = \frac{1}{3t + 2} + t^3 + t^2 \text{ 이므로}$$

$$f(t) = \frac{1}{3t + 2} + t^3 + t^2$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3t + 2} + t^3 + t^2 \right) = \frac{1}{2}$$

020 답 7

$f(x) = -x^2 + 3x + 1$ 이라 하면 $f'(x) = -2x + 3$

점점의 좌표를 ($t, -t^2 + 3t + 1$)이라 하면 직선 $y = -\frac{1}{5}x + 1$ 에

수직인 접선의 기울기는 5이므로 $f'(t) = 5$ 에서

$$-2t + 3 = 5 \quad \therefore t = -1$$

즉, 점점의 좌표는 (-1, -3)이므로 접선의 방정식은

$$y + 3 = 5(x + 1) \quad \therefore y = 5x + 2$$

따라서 $a = 5, b = 2$ 이므로 $a + b = 5 + 2 = 7$

021 답 -1

$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 10x + 7$ 이라 하면

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 10 = -3(x - 2)^2 + 2$$

즉, 접선의 기울기는 $x = 2$ 에서 최댓값 2를 갖는다.

이때 점점의 좌표는 (2, 3)이고 접선의 기울기가 2이므로 접선의 방정식은

$$y - 3 = 2(x - 2) \quad \therefore y = 2x - 1$$

따라서 구하는 y절편은 -1이다.

022 답 ②

$f(x) = x^3 - x + 2$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 1$

점점의 좌표를 ($t, t^3 - t + 2$)라 하면 접선의 기울기가 2이므로

$$f'(t) = 2 \text{ 에서}$$

$$3t^2 - 1 = 2, t^2 = 1 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 1$$

즉, 점점의 좌표는 (-1, 2) 또는 (1, 2)이므로 접선의 방정식은

$$y - 2 = 2(x + 1) \text{ 또는 } y - 2 = 2(x - 1)$$

$$\therefore y = 2x + 4 \text{ 또는 } y = 2x$$

이때 k는 양수이므로 $k = 4$

023 답 $2\sqrt{2}$

$f(x) = x^3 - 4x + 5$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 4$

점점의 좌표를 ($t, t^3 - 4t + 5$)라 하면 직선 $x + y + 1 = 0$, 즉

$y = -x - 1$ 에 평행한 접선의 기울기는 -1이므로 $f'(t) = -1$ 에서

$$3t^2 - 4 = -1, t^2 = 1 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 1$$

즉, 점점의 좌표는 (-1, 8) 또는 (1, 2)이므로 접선의 방정식은

$$y - 8 = -(x + 1) \text{ 또는 } y - 2 = -(x - 1)$$

$$\therefore x + y - 7 = 0 \text{ 또는 } x + y - 3 = 0$$

따라서 두 접선 사이의 거리는 직선 $x + y - 7 = 0$ 위의 점 (0, 7)

과 직선 $x + y - 3 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0 + 7 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$$

024 답 ④

$f(x) = x^3 + 2x + 1$ 이라 하면 $f'(x) = 3x^2 + 2$

점점의 좌표를 ($t, t^3 + 2t + 1$)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = 3t^2 + 2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (t^3 + 2t + 1) = (3t^2 + 2)(x - t)$$

$$\therefore y = (3t^2 + 2)x - 2t^3 + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 (0, 3)을 지나므로

$$3 = -2t^3 + 1, t^3 + 1 = 0$$

$$(t + 1)(t^2 - t + 1) = 0 \quad \therefore t = -1 (\because t \text{ 는 실수})$$

이를 ①에 대입하면 접선의 방정식은

$$y = 5x + 3$$

따라서 $a = 5, b = 3$ 이므로 $a - b = 5 - 3 = 2$

025 [답] -16

$$f(x)=x^4+3 \text{이라 하면 } f'(x)=4x^3$$

접점의 좌표를 (t, t^4+3) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=4t^3 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(t^4+3)=4t^3(x-t)$$

$$\therefore y=4t^3x-3t^4+3$$

이 직선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0=-3t^4+3, t^4-1=0$$

$$(t+1)(t-1)(t^2+1)=0$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=1 (\because t \text{는 실수})$$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$$f'(-1)f'(1)=-4 \times 4=-16$$

026 [답] ③

$$f(x)=x^3-x \text{라 하면 } f'(x)=3x^2-1$$

접점의 좌표를 (t, t^3-t) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2-1 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2-1)x-2t^3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2=-2t^3, t^3+1=0$$

$$(t+1)(t^2-t+1)=0 \quad \therefore t=-1 (\because t \text{는 실수})$$

이를 ①에 대입하면 접선의 방정식은

$$y=2x+2$$

이 직선이 점 $(k, 4)$ 를 지나므로

$$4=2k+2, 2k=2 \quad \therefore k=1$$

027 [답] ④

$$f(x)=x^2+4 \text{라 하면 } f'(x)=2x$$

접점의 좌표를 (t, t^2+4) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=2t \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(t^2+4)=2t(x-t)$$

$$\therefore y=2tx-t^2+4$$

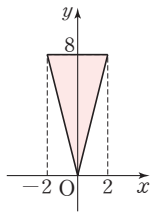
이 직선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0=-t^2+4, t^2=4 \quad \therefore t=-2 \text{ 또는 } t=2$$

따라서 두 접점의 좌표는 $(-2, 8), (2, 8)$ 이므로

구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 8=16$$



028 [답] 6

$$f(x)=x^3-3x^2+2 \text{라 하면 } f'(x)=3x^2-6x$$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+2) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2-6t \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(t^3-3t^2+2)=(3t^2-6t)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2+2$$

이 직선이 점 $(3, 0)$ 을 지나므로

$$0=9t^2-18t-2t^3+3t^2+2$$

$$\therefore t^3-6t^2+9t-1=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 x_1, x_2, x_3 은 삼차방정식 ①의 세 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$x_1+x_2+x_3=6$$

029 [답] ⑤

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+k \text{에서 } f'(x)=x$$

수직인 두 접선의 접점의 좌표를 각각 $(\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2+k), (\beta, \frac{1}{2}\beta^2+k)$

라 하면 두 접선의 기울기는 각각

$$f'(\alpha)=\alpha, f'(\beta)=\beta$$

두 접선이 서로 수직이므로

$$\alpha\beta=-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2+k)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-(\frac{1}{2}\alpha^2+k)=\alpha(x-\alpha)$$

$$\therefore y=\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2+k$$

점 $(\beta, \frac{1}{2}\beta^2+k)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-(\frac{1}{2}\beta^2+k)=\beta(x-\beta)$$

$$\therefore y=\beta x-\frac{1}{2}\beta^2+k$$

두 접선의 교점의 x 좌표는 $\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2+k=\beta x-\frac{1}{2}\beta^2+k$ 에서

$$(\alpha-\beta)x=\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)$$

$$\therefore x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

따라서 두 접선의 교점의 좌표는 $(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha\beta}{2}+k)$ 이고, 이 점이

$$\frac{\alpha\beta}{2}+k=0, -\frac{1}{2}+k=0 (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore k=\frac{1}{2}$$

030 [답] 9

$$f(x)=-x^3+ax+3, g(x)=bx^2+2 \text{라 하면}$$

$$f'(x)=-3x^2+a, g'(x)=2bx$$

(i) $x=1$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(1)=g(1)$ 에서

$$2+a=b+2 \quad \therefore a=b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x=1$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(1)=g'(1) \text{에서}$$

$$-3+a=2b \quad \therefore a-2b=3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=-3, b=-3$$

$$\therefore ab=-3 \times (-3)=9$$

031 답 ⑤

$f(x)=x^3+a$, $g(x)=-x^2+bx+c$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2, g'(x)=-2x+b$$

(i) 두 곡선이 점 (1, 2)를 지나므로

$$f(1)=2 \text{에서 } 1+a=2 \quad \therefore a=1$$

$$g(1)=2 \text{에서 } -1+b+c=2 \quad \therefore b+c=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 점 (1, 2)에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(1)=g'(1) \text{에서}$$

$$3=-2+b \quad \therefore b=5$$

$b=5$ 를 ①에 대입하면

$$5+c=3 \quad \therefore c=-2$$

$$\therefore a+b-c=1+5-(-2)=8$$

032 답 -3

$f(x)=x^3+1$, $g(x)=3x^2-3$ 이라 하면

$$f'(x)=3x^2, g'(x)=6x$$

두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

(i) $x=t$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$ 에서

$$t^3+1=3t^2-3, t^3-3t^2+4=0$$

$$(t+1)(t-2)^2=0$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=2$$

(ii) $x=t$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(t)=g'(t) \text{에서}$$

$$3t^2=6t, 3t(t-2)=0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=2$$

(i), (ii)를 동시에 만족시키는 t 의 값은 $t=2$

즉, 접점의 좌표는 (2, 9)이고, 접선의 기울기는 12이므로 공통인 접선의 방정식은

$$y-9=12(x-2) \quad \therefore y=12x-15$$

따라서 $a=12$, $b=-15$ 이므로

$$a+b=12+(-15)=-3$$

033 답 -1

$f(x)=x^3+ax$, $g(x)=x^2-1$ 이라 하면

$$f'(x)=3x^2+a, g'(x)=2x$$

두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

(i) $x=t$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$ 에서

$$t^3+at=t^2-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x=t$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(t)=g'(t) \text{에서}$$

$$3t^2+a=2t \quad \therefore a=2t-3t^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$t^3+(2t-3t^2)t=t^2-1$$

$$2t^3-t^2-1=0, (t-1)(2t^2+t+1)=0$$

$$\therefore t=1 (\because t \text{는 실수})$$

이를 ②에 대입하면

$$a=2-3=-1$$

034 답 ②

곡선 $y=x^2+1$ 에 접하고 직선 $y=2x-3$ 과 기울기가 같은 접선의 접점의 좌표를 (t, t^2+1) 이라 하면 구하는 거리의 최솟값은 이 점과 직선 $y=2x-3$ 사이의 거리와 같다.

$$f(x)=x^2+1 \text{이라 하면 } f'(x)=2x$$

접선의 기울기가 2이므로 $f'(t)=2$ 에서

$$2t=2 \quad \therefore t=1$$

따라서 접점의 좌표는 (1, 2)이므로 이 점점과 직선 $y=2x-3$,

즉 $2x-y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-2-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

035 답 $(1, \frac{3}{4})$

삼각형 PAB의 넓이가 최대가 될 때는 곡선 $y=-\frac{1}{4}x^2+1 (x>0)$ 의 접선 중에서 두 점 A(0, 1), B(2, 0)을 지나는 직선과 평행한 접선의 접점이 P일 때이다.

$$f(x)=-\frac{1}{4}x^2+1 \text{이라 하면 } f'(x)=-\frac{1}{2}x$$

두 점 A(0, 1), B(2, 0)을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{0-1}{2-0}=-\frac{1}{2}$

이므로 접점의 좌표를 $(t, -\frac{1}{4}t^2+1)$ 이라 하면

$$f'(t)=-\frac{1}{2} \text{에서 } -\frac{1}{2}t=-\frac{1}{2} \quad \therefore t=1$$

따라서 점 P의 좌표는 $(1, \frac{3}{4})$ 이다.

036 답 4

$f(x)=-x^3+5x-3$ 이라 하면 $f'(x)=-3x^2+5$

점 P(1, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-1=2(x-1) \quad \therefore y=2x-1$$

즉, 점 R의 좌표는 (0, -1)이다.

곡선 $y=-x^3+5x-3$ 과 접선 $y=2x-1$ 의 교점의 x 좌표는 $-x^3+5x-3=2x-1$ 에서

$$x^3-3x+2=0, (x+2)(x-1)^2=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

즉, 점 Q의 좌표는 (-2, -5)이다.

한편 삼각형 ARQ의 넓이가 최대가 될 때는 곡선

$y=-x^3+5x-3$ 의 접선 중에서 직선 QR과 평행한 접선의 접점이 A일 때이다.

점 A의 좌표를 $(t, -t^3+5t-3)$ 이라 하면 $f'(t)=2$ 에서

$$-3t^2+5=2, t^2=1$$

$$\therefore t=-1 (\because -2<t<1)$$

즉, 점 A의 좌표는 (-1, -7)이다.

점 A(-1, -7)과 직선 $y=2x-1$, 즉 $2x-y-1=0$ 사이의 거리

$$\text{는 } \frac{|-2+7-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5} \text{이고, } \overline{QR}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5} \text{이므로 삼각형}$$

ARQ의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5}=4$$

037 답 $\frac{\sqrt{26}}{5}$

$f(x)=x^3+x^2-2$ 라 하면 $f'(x)=3x^2+2x$

점 (1, 0)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=5$

원의 중심이 y 축 위에 있으므로 중심의 좌표를 (0, a)라 하면 두 점 (1, 0), (0, a)를 지나는 직선은 점 (1, 0)에서의 접선과 수직이다.

$$\text{즉, } \frac{a-0}{0-1} = -\frac{1}{5} \text{이므로 } 5a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이는 두 점 (1, 0), $(0, \frac{1}{5})$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

038 답 $\frac{17}{8}$

$f(x)=x^3-4x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-4$

원점에서의 접선 l 의 기울기는 $f'(0)=-4$

따라서 원점을 지나고 직선 l 과 수직인 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{4}x$$

원의 중심이 곡선 위에 있으므로 중심의 좌표를 (a, a^3-4a) 라 하면 직선 $y=\frac{1}{4}x$ 가 이 점을 지나므로

$$a^3-4a=\frac{1}{4}a, \quad 4a^3-17a=0, \quad a(4a^2-17)=0$$

$$\therefore a=-\frac{\sqrt{17}}{2} \text{ 또는 } a=\frac{\sqrt{17}}{2} \quad (\because a \neq 0)$$

즉, 원의 중심을 C라 하면

$$C\left(-\frac{\sqrt{17}}{2}, -\frac{\sqrt{17}}{8}\right) \text{ 또는 } C\left(\frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17}}{8}\right)$$

구하는 원의 반지름의 길이는 원점과 점 C 사이의 거리이므로

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{17}}{8}\right)^2} = \frac{17}{8}$$

039 답 ③

$f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 이라 하면 $f'(x)=x$

원과 곡선의 접점을 $P(t, \frac{1}{2}t^2)$ 이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}t^2=t(x-t) \quad \therefore y=tx-\frac{1}{2}t^2 \quad \dots\dots ①$$

원의 중심을 C라 하면 직선 CP와 접선

①이 서로 수직이고, 직선 CP의 기울기는

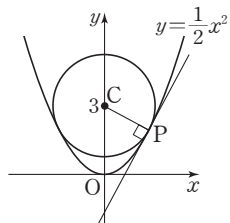
$$\frac{\frac{1}{2}t^2-3}{t} \text{이므로}$$

$$\frac{\frac{1}{2}t^2-3}{t} \times t = -1, \quad t^2=4$$

$$\therefore t=-2 \text{ 또는 } t=2$$

이때 기울기가 양수이므로 $t=2$

이를 ①에 대입하면 $y=2x-2$



040 답 $-\frac{1}{3}$

함수 $f(x)=x^3+2x^2+x-2$ 는 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 0)$ 에서 미분가능하며 $f(-1)=f(0)=-2$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 0)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2+4x+1$ 이므로

$$f'(c)=3c^2+4c+1=0$$

$$(c+1)(3c+1)=0$$

$$\therefore c=-\frac{1}{3} \quad (\because -1 < c < 0)$$

041 답 3

함수 $f(x)=x^4-8x^2+5$ 는 닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-3, 3)$ 에서 미분가능하며 $f(-3)=f(3)=14$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-3, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=4x^3-16x$ 이므로

$$f'(c)=4c^3-16c=0, \quad 4c(c+2)(c-2)=0$$

$$\therefore c=-2 \text{ 또는 } c=0 \text{ 또는 } c=2$$

따라서 상수 c 는 3개이다.

042 답 $\frac{1}{2}$

함수 $f(x)=x^2-ax+1$ 은 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키면 $f(-1)=f(2)$ 이므로

$$1+a+1=4-2a+1 \quad \therefore a=1$$

즉, $f(x)=x^2-x+1$ 에서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x-1$ 이므로

$$f'(c)=2c-1=0 \quad \therefore c=\frac{1}{2}$$

043 답 ②

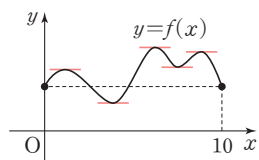
롤의 정리에 의하여 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$ 에서 미분가능할 때, $f(0)=f(1)$ 이면 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

②의 함수는 열린구간 $(0, 1)$ 에서 미분가능하지 않은 점이 있으므로 롤의 정리가 성립하지 않는다.

044 답 5

$f(0)=f(10)$ 이므로 닫힌구간 $[0, 10]$ 에서 롤의 정리를 만족시키는 상수 c 는 x 축과 평행한 접선을 갖는 점의 x 좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 x 축과 평행한 접선을 5개 그을 수 있으므로 구하는 상수 c 는 5개이다.



045 답 1

함수 $f(x)=x^3+x-1$ 은 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2+1$ 이므로

$$\frac{9-(-3)}{2-(-1)}=3c^2+1, 3c^2=3, c^2=1$$

$$\therefore c=1 (\because -1 < c < 2)$$

046 답 ①

함수 $f(x)=-x^2+3x$ 는 닫힌구간 $[1, k]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, k)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(k)-f(1)}{k-1}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(1, k)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-2x+3$ 이고, $c=2$ 이므로

$$\frac{(-k^2+3k)-2}{k-1}=-1, k^2-4k+3=0$$

$$(k-1)(k-3)=0$$

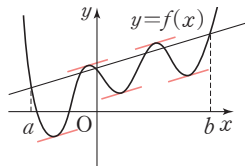
$$\therefore k=3 (\because k > 1)$$

047 답 5

닫힌구간 $[a, b]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c 는 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x 좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점

$(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선과 평행한 접선을 5개 그을 수 있으므로 구하는 상수 c 는 5개이다.



048 답 ③

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=2x-2 \text{이므로 } \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=2c-2$$

$$\therefore k=2c-2$$

이때 $a, b(a < b)$ 는 구간 $[-3, 0]$ 에 속하는 임의의 실수이므로 $-3 < c < 0 \quad \therefore -8 < 2c-2 < -2$

따라서 $-8 < k < -2$ 이므로 모든 정수 k 의 값의 합은

$$-7+(-6)+(-5)+(-4)+(-3)=-25$$

049 답 9

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 모든 실수에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[x-1, x+2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(x-1, x+2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(x+2)-f(x-1)}{(x+2)-(x-1)}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(x-1, x+2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x-1 < c < x+2$ 에서 $x \rightarrow \infty$ 이면 $c \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x-1)-f(x+2)\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+2)-f(x-1)}{(x+2)-(x-1)} \times (-3) \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} f'(c) \times (-3) \\ &= -3 \times (-3) = 9 \end{aligned}$$

050 답 ⑤

함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 미분가능하므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(2, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(2, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 (4)에서 $|f'(x)| \leq 2$ 이므로

$$\left| \frac{f(3)-f(2)}{3-2} \right| \leq 2$$

(7)에 의하여 $|4-f(2)| \leq 2$

$$-2 \leq 4-f(2) \leq 2, -6 \leq -f(2) \leq -2$$

$$\therefore 2 \leq f(2) \leq 6$$

따라서 $f(2)$ 의 최댓값은 6, 최솟값은 2이므로 구하는 합은

$$6+2=8$$

051 답 26

$f(x)=-x^3+2x^2+x+5$ 라 하면 $f'(x)=-3x^2+4x+1$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(3, a)$ 를 지나므로 $f(3)=a$ 에서

$$-27+18+3+5=a \quad \therefore a=-1$$

점 $(3, -1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=-14$ 이므로 접선의 방정식은

$$y+1=-14(x-3) \quad \therefore y=-14x+41$$

따라서 $m=-14, n=41$ 이므로

$$a+m+n=-1+(-14)+41=26$$

052 답 $y=9x-32$

$f(x)=x^3-6x^2+9x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-12x+9$

점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=0$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-4=0 \times (x-1) \quad \therefore y=4$$

곡선 $y=x^3-6x^2+9x$ 와 접선 $y=4$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3-6x^2+9x=4 \text{에서 } x^3-6x^2+9x-4=0$$

$$(x-1)^2(x-4)=0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 점 P의 좌표는 $(4, 4)$ 이고 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(4)=9 \text{이므로 구하는 접선의 방정식은}$$

$$y-4=9(x-4) \quad \therefore y=9x-32$$

053 ㉮ $y = -3x + 2$

(가)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)g(x) - 3\} = 0$ 이므로

$$f(1)g(1) - 3 = 0 \quad \therefore f(1)g(1) = 3$$

(나)에서 $f(1) = -3$ 이므로 $g(1) = -1$

$h(x) = f(x)g(x)$ 라 하면

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x) - 3}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = h'(1) \\ &= f'(1)g(1) + f(1)g'(1) \\ &= 6 - 3g'(1) \end{aligned}$$

즉, $6 - 3g'(1) = 15$ 이므로

$$3g'(1) = -9 \quad \therefore g'(1) = -3$$

따라서 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(1, g(1))$, 즉 $(1, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y + 1 = -3(x - 1) \quad \therefore y = -3x + 2$$

054 ㉮ 0

$$f(x) = x^3 + x + k \text{라 하면 } f'(x) = 3x^2 + 1$$

점 $(1, a)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 4$ 이므로 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$$-\frac{1}{f'(1)} = -\frac{1}{4}$$

즉, 직선의 방정식은

$$y - a = -\frac{1}{4}(x - 1) \quad \therefore y = -\frac{1}{4}x + a + \frac{1}{4}$$

$$\text{이 직선의 } y\text{-절편이 } \frac{5}{4} \text{이므로 } a + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \quad \therefore a = 1$$

따라서 곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$2 + k = 1 \quad \therefore k = -1$$

$$\therefore a + k = 1 + (-1) = 0$$

055 ㉮ ①

두 점 $(-2, 3)$, $(0, 7)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{7 - 3}{0 - (-2)} = 2$$

$$f(x) = 3x^2 - 4x - 2 \text{라 하면 } f'(x) = 6x - 4$$

접점의 좌표를 $(t, 3t^2 - 4t - 2)$ 라 하면 접선의 기울기는 2이므로

$$f'(t) = 2 \text{에서 } 6t - 4 = 2 \quad \therefore t = 1$$

즉, 접점의 좌표는 $(1, -3)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y + 3 = 2(x - 1) \quad \therefore y = 2x - 5$$

따라서 구하는 접선의 y -절편은 -5 이다.

056 ㉮ 8

$$f(x) = -2x^3 + 7x + 1 \text{이라 하면 } f'(x) = -6x^2 + 7$$

접점의 좌표를 $(t, -2t^3 + 7t + 1)$ 이라 하면 x -축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 인 접선의 기울기는 $\tan 45^\circ = 1$ 이므로

$$f'(t) = 1 \text{에서}$$

$$-6t^2 + 7 = 1, t^2 = 1 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 1$$

즉, 접점의 좌표는 $(-1, -4)$ 또는 $(1, 6)$ 이므로 접선의 방정식은 $y + 4 = x + 1$ 또는 $y - 6 = x - 1$

$$\therefore y = x - 3 \text{ 또는 } y = x + 5$$

따라서 $A(0, -3)$, $B(0, 5)$ 또는 $A(0, 5)$, $B(0, -3)$ 이므로

$$\overline{AB} = 5 - (-3) = 8$$

057 ㉮ $\frac{1}{2}$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 3(x - 1)^2 - 1$$

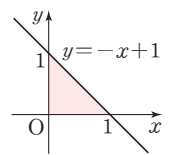
즉, 접선의 기울기는 $x = 1$ 에서 최솟값 -1 을 갖는다.

이때 접점의 좌표는 $(1, 0)$ 이고 접선의 기울기가 -1 이므로 접선의 방정식은

$$y = -(x - 1) \quad \therefore y = -x + 1$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$



058 ㉮ 6

$$f(x) = x^2 - 2x \text{라 하면 } f'(x) = 2x - 2$$

접점의 좌표를 $(t, t^2 - 2t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = 2t - 2 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - (t^2 - 2t) = (2t - 2)(x - t)$$

$$\therefore y = (2t - 2)x - t^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(0, -4)$ 를 지나므로

$$-4 = -t^2 \quad \therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 2$$

이를 ①에 대입하면 접선의 방정식은

$$y = -6x - 4 \text{ 또는 } y = 2x - 4$$

이때 접선의 기울기가 양수이므로

$$a = 2, b = -4$$

$$\therefore a - b = 2 - (-4) = 6$$

059 ㉮ 2

$$f(x) = -x^2 + x + 1 \text{이라 하면 } f'(x) = -2x + 1$$

접점의 좌표를 $(t, -t^2 + t + 1)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = -2t + 1 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - (-t^2 + t + 1) = (-2t + 1)(x - t)$$

$$\therefore y = (-2t + 1)x + t^2 + 1$$

이 직선이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

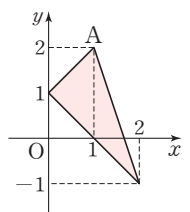
$$2 = -2t + 1 + t^2 + 1, t^2 - 2t = 0, t(t - 2) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = 2$$

따라서 두 점의 좌표는 $(0, 1)$, $(2, -1)$

이므로 구하는 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} 3 \times 2 - \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 3 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) \\ = 2 \end{aligned}$$



060 ④

$f(x)=x^3+a$, $g(x)=-x^2+bx+c$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2, g'(x)=-2x+b$$

접점의 좌표를 $(t, 3t-1)$ 이라 하면

(i) 두 곡선이 점 $(t, 3t-1)$ 을 지나므로

$$f(t)=3t-1 \text{에서}$$

$$t^3+a=3t-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g(t)=3t-1 \text{에서}$$

$$-t^2+bt+c=3t-1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(ii) 점 $(t, 3t-1)$ 에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 3이므로

$$f'(t)=3 \text{에서 } 3t^2=3 \quad \therefore t=1 (\because t>0)$$

$$g'(t)=3 \text{에서 } -2t+b=3$$

$$t=1 \text{을 대입하면}$$

$$-2+b=3 \quad \therefore b=5$$

$t=1$ 을 ①에 대입하면

$$1+a=2 \quad \therefore a=1$$

$t=1, b=5$ 를 ②에 대입하면

$$-1+5+c=2 \quad \therefore c=-2$$

$$\therefore a+b-c=1+5-(-2)=8$$

061 ② $\frac{27}{8}$

삼각형 PAB의 넓이가 최대가 될 때는 곡선 $y=-x^2+4$ 의 접선 중에서 두 점 A(2, 0), B(-1, 3)을 지나는 직선과 평행한 접선의 접점이 P일 때이다.

$$f(x)=-x^2+4 \text{라 하면 } f'(x)=-2x$$

두 점 A(2, 0), B(-1, 3)을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{3-0}{-1-2}=-1 \text{이므로 접점의 좌표를 } (t, -t^2+4) \text{라 하면}$$

$$f'(t)=-1 \text{에서}$$

$$-2t=-1 \quad \therefore t=\frac{1}{2}$$

즉, 접점의 좌표가 $(\frac{1}{2}, \frac{15}{4})$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{15}{4}=-(x-\frac{1}{2})$$

$$\therefore 4x+4y-17=0$$

점 A(2, 0)과 직선 $4x+4y-17=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|8-17|}{\sqrt{4^2+4^2}}=\frac{9\sqrt{2}}{8} \text{이고, } \overline{AB}=\sqrt{(-3)^2+3^2}=3\sqrt{2} \text{이므로 삼각형}$$

PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{9\sqrt{2}}{8}=\frac{27}{8}$$

062 ④ -4

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2 \text{이라 하면 } f'(x)=x$$

접점의 좌표를 $(t, \frac{1}{2}t^2)$ 이라 하면 $f'(t)=t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}t^2=t(x-t)$$

$$\therefore y=tx-\frac{1}{2}t^2$$

곡선과 원이 접할 때 원의 중심과 접점을 지나는 직선은 그 접점에서의 접선과 수직이므로 원의 중심 $(0, 3)$ 과 점 $(t, \frac{1}{2}t^2)$ 을 지나는 직선의 기울기는 $-\frac{1}{t}$ 이다.

$$\text{즉, } \frac{\frac{1}{2}t^2-3}{t-0}=-\frac{1}{t} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2}t^2-3=-1, t^2=4$$

$$\therefore t=-2 \text{ 또는 } t=2$$

따라서 두 직선 l, m 의 기울기의 곱은

$$-2 \times 2 = -4$$

063 ③

함수 $f(x)=x^2+ax+1$ 은 닫힌구간 $[1, 5]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 5)$ 에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키면 $f(1)=f(5)$ 이므로

$$1+a+1=25+5a+1$$

$$\therefore a=-6$$

따라서 $f(x)=x^2-6x+1$ 이므로

$$f'(x)=2x-6$$

$$f'(c_1)=0 \text{에서}$$

$$2c_1-6=0 \quad \therefore c_1=3$$

함수 $f(x)=x^2-6x+1$ 은 닫힌구간 $[1, 6]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 6)$ 에서 미분가능하므로

$$\frac{f(6)-f(1)}{6-1}=f'(c_2) \text{에서}$$

$$\frac{1-(-4)}{6-1}=2c_2-6 \quad \therefore c_2=\frac{7}{2}$$

$$\therefore c_2-c_1=\frac{7}{2}-3=\frac{1}{2}$$

064 ⑦

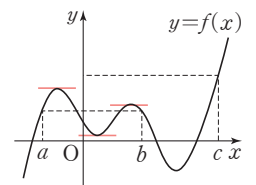
$f(a)=f(b)$ 이므로 열린구간 (a, b) 에서의 롤의 정리를 만족시키는 상수 c_1 은 x 축과 평행한 접선을 갖는 점의 x 좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 x 축과 평행한

접선을 3개 그을 수 있으므로 상수 c_1 의

개수는 3이다.

$$\therefore p=3$$



열린구간 (a, c) 에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c_2 는 두 점 $(a, f(a)), (c, f(c))$ 를 지나는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x 좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점

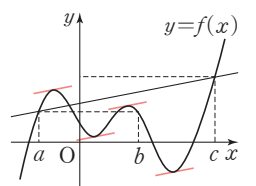
$(a, f(a)), (c, f(c))$ 를 지나는 직선

과 평행한 접선을 4개 그을 수 있으므로

상수 c_2 의 개수는 4이다.

$$\therefore q=4$$

$$\therefore p+q=3+4=7$$





001 답 4

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	6	↘	-26	↗

따라서 함수 $f(x)$ 가 감소하는 구간은 $[-1, 3]$ 이므로

$$a = -1, b = 3$$

$$\therefore b - a = 3 - (-1) = 4$$

다른 풀이 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

이때 $f'(x) \leq 0$ 인 구간에서 함수 $f(x)$ 는 감소하므로

$$3(x+1)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 3$$

따라서 $a = -1, b = 3$ 이므로

$$b - a = 3 - (-1) = 4$$

002 답 ②

$$f(x) = x^3 + ax^2 + ax - 1 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 + 2ax + a$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $3x^2 + 2ax + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3a \leq 0, a(a-3) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a \leq 3$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

003 답 $\frac{4}{3}$

$$f(x) = x^3 - (a+2)x^2 + ax - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2(a+2)x + a$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $[1, 2]$ 에서 감소하려면

$$1 \leq x \leq 2 \text{에서 } f'(x) \leq 0 \text{이어야 하므로}$$

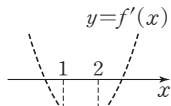
$$f'(1) \leq 0, f'(2) \leq 0$$

$$f'(1) = 3 - 2(a+2) + a \leq 0 \text{에서 } a \geq -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(2) = 12 - 4(a+2) + a \leq 0 \text{에서 } a \geq \frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 동시에 만족시키는 } a \text{의 값의 범위는 } a \geq \frac{4}{3}$$

따라서 a 의 최솟값은 $\frac{4}{3}$ 이다.



004 답 ⑤

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x = -3x(x-4)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 0 \text{ 또는 } x = 4$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	5 극소	↗	37 극대	↘

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(4) = 37$, 극솟값은 $f(0) = 5$ 이므로

$$M = 37, m = 5$$

$$\therefore M + m = 37 + 5 = 42$$

005 답 -19

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 극댓값 8을 가지므로

$$f'(-1) = 0, f(-1) = 8$$

$$f'(-1) = 0 \text{에서 } 6 - 2a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(-1) = 8 \text{에서 } -2 + a - b + 1 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -3, b = -12$$

$$\text{즉, } f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \text{이므로}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	8 극대	↘	-19 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $f(2) = -19$

006 답 4

$y = f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $-1, 1$ 이므로 주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

주어진 그래프에서 $f'(-1) = 0, f'(1) = 0$ 이므로

$$3 - 2a + b = 0, 3 + 2a + b = 0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 0, b = -3$

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x + c$$

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극소이고 극솟값이 0이므로 $f(1) = 0$ 에서

$$1 - 3 + c = 0 \quad \therefore c = 2$$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ 이므로 구하는 극댓값은

$$f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$$

007 답 ⑤

$y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $-3, 1, 3$ 이므로 주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	...	-3	...	1	...	3	...	4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$		/	극대	\	극소	/	극대	\	

- ① 함수 $f(x)$ 는 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 감소한다.
 ② 함수 $f(x)$ 는 $2 \leq x \leq 3$ 에서 증가하고, $x \geq 3$ 에서 감소한다.
 ③ 함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극대이다.
 ④ 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극소이다.
 ⑤ 함수 $f(x)$ 는 $x = -3, x = 1, x = 3$ 에서 극값을 갖는다.

008 답 ①

$y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $-2, 0$ 이므로 주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	\	극소	/		/

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ①이다.

009 답 ①

$f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x + 4$ 에서
 $f'(x) = -3x^2 + 12x + 15 = -3(x+1)(x-5)$
 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 5$
 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	5	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	-4	/	104	\

따라서 함수 $f(x)$ 가 증가하는 구간은 $[-1, 5]$ 이므로

$$a = -1, b = 5 \quad \therefore a + b = -1 + 5 = 4$$

다른 풀이 $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x + 4$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 + 12x + 15 = -3(x+1)(x-5)$$

이때 $f'(x) \geq 0$ 인 구간에서 함수 $f(x)$ 는 증가하므로
 $-3(x+1)(x-5) \geq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 5$

따라서 $a = -1, b = 5$ 이므로 $a + b = -1 + 5 = 4$

010 답 ③

$f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$ 에서 $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$
 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 1$
 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	-3	/	-2	\	-3	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1], [0, 1]$ 에서 감소하고, 구간 $[-1, 0], [1, \infty)$ 에서 증가한다.

011 답 10

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + ax - 2 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 + 12x + a$$

함수 $f(x)$ 가 감소하는 x 의 값의 범위가 $-3 \leq x \leq b$ 이므로 $-3, b$ 는 이차방정식 $3x^2 + 12x + a = 0$ 의 두 근이다.

즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-3 + b = -4, \quad -3 \times b = \frac{a}{3} \quad \therefore a = 9, b = -1$$

$$\therefore a - b = 9 - (-1) = 10$$

012 답 39

$$f(x) = -2x^3 + ax^2 + bx - 1 \text{에서 } f'(x) = -6x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, -2], [3, \infty)$ 에서 감소하고, 구간 $[-2, 3]$ 에서 증가하므로 $-2, 3$ 은 이차방정식 $-6x^2 + 2ax + b = 0$ 의 두 근이다.

즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2 + 3 = \frac{a}{3}, \quad -2 \times 3 = -\frac{b}{6} \quad \therefore a = 3, b = 36$$

$$\therefore a + b = 3 + 36 = 39$$

013 답 -3

$$f(x) = -x^3 + ax^2 - 3x + 5 \text{에서 } f'(x) = -3x^2 + 2ax - 3$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $-3x^2 + 2ax - 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 9 \leq 0, \quad (a+3)(a-3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq a \leq 3$$

따라서 a 의 최솟값은 -3 이다.

014 답 ⑤

$$f(x) = ax^3 + x^2 + 4x \text{에서 } f'(x) = 3ax^2 + 2x + 4$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$a > 0 \quad \dots\dots ㉠$$

이차방정식 $3ax^2 + 2x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - 12a \leq 0 \quad \therefore a \geq \frac{1}{12} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는 $a \geq \frac{1}{12}$

015 답 3

$$f(x) = -x^3 + 3ax^2 + (a-4)x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6ax + a - 4$$

$x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) > f(x_2)$ 가 성립하려면 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $-3x^2 + 6ax + (a-4) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9a^2 + 3(a-4) \leq 0, \quad 3(3a+4)(a-1) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{4}{3} \leq a \leq 1$$

따라서 정수 a 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다.

016 답 -8

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - kx - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 2x^2 + 8x - k$$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하고 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $2x^2 + 8x - k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 16 + 2k \leq 0$$

$$\therefore k \leq -8$$

따라서 k 의 최댓값은 -8 이다.

017 답 9

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 (가) 에서 $f(0) = 2$ 이므로 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

(나) 에서 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq f'(-1)$ 이므로 이차함수 $y = f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x = -1$ 이다.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{3} + b \text{이므로}$$

$$-\frac{a}{3} = -1 \quad \therefore a = 3$$

(다) 에서 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $3x^2 + 2ax + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3b \leq 0, \quad 9 - 3b \leq 0$$

$$3b \geq 9 \quad \therefore b \geq 3$$

따라서 $f(1) = b + 6 \geq 9$ 이므로 $f(1)$ 의 최솟값은 9이다.

018 답 2

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 12x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + 12$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $[-1, 3]$ 에서 증가하려면

$-1 \leq x \leq 3$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$$\therefore f'(-1) \geq 0, \quad f'(3) \geq 0$$

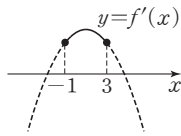
$$f'(-1) = -3 - 2a + 12 \geq 0 \text{에서 } a \leq \frac{9}{2} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$f'(3) = -27 + 6a + 12 \geq 0 \text{에서 } a \geq \frac{5}{2} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$\frac{5}{2} \leq a \leq \frac{9}{2}$$

따라서 정수 a 는 3, 4의 2개이다.



019 답 ③

$$f(x) = x^3 - x^2 - ax + 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - a$$

함수 $f(x)$ 가 $0 \leq x \leq 1$ 에서 감소하려면

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

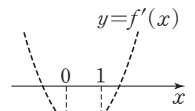
$$\therefore f'(0) \leq 0, \quad f'(1) \leq 0$$

$$f'(0) = -a \leq 0 \text{에서 } a \geq 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$f'(1) = 3 - 2 - a \leq 0 \text{에서 } a \geq 1 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는 $a \geq 1$

따라서 a 의 최솟값은 1이다.



020 답 $0 \leq a \leq 6$

$$f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + ax + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 9x + a$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $[1, 2]$ 에서 감소하려면

$1 \leq x \leq 2$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하고, 구간

$[3, \infty)$ 에서 증가하려면 $x \geq 3$ 에서

$f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

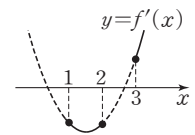
$$\therefore f'(1) \leq 0, \quad f'(2) \leq 0, \quad f'(3) \geq 0$$

$$f'(1) = 3 - 9 + a \leq 0 \text{에서 } a \leq 6 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$f'(2) = 12 - 18 + a \leq 0 \text{에서 } a \leq 6 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$f'(3) = 27 - 27 + a \geq 0 \text{에서 } a \geq 0 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는 $0 \leq a \leq 6$



021 답 ⑤

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	28 극대	↘	-4 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(-3) = 28$, 극솟값은 $f(1) = -4$ 이므로

$$M = 28, \quad m = -4 \quad \therefore M - m = 28 - (-4) = 32$$

022 답 -1

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x + 11 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 16 = 4(x+1)(x-2)^2$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	↘	0 극소	↗		↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극솟값 0을 가지므로

$$a = -1, \quad m = 0$$

$$\therefore a + m = -1 + 0 = -1$$

023 답 28

$$f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 24x = -12x(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	2 극대	↘	-3 극소	↗	29 극대	↘

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(-1)=2$, $f(2)=29$, 극솟값은

$$f(0) = -3 \text{이므로 모든 극값의 합은}$$

$$2 + 29 + (-3) = 28$$

024 답 ④

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	5 극대	↘	1 극소	↗

따라서 A(1, 5), B(3, 1)이므로 선분 AB의 길이는

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (1-5)^2} = 2\sqrt{5}$$

025 답 ③

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값 -1을 가지므로

$$f'(1) = 0, f(1) = -1$$

$$f'(1) = 0 \text{에서 } -3 + 2a + b = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f(1) = -1 \text{에서 } -1 + a + b + 3 = -1 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{을 연립하여 풀면 } a = 6, b = -9$$

$$\text{즉, } f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3 \text{이므로}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	-1 극소	↗	3 극대	↘

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(3)=3$

026 답 -22

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 극댓값, $x=1$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(-2) = 0, f'(1) = 0$$

$$f'(-2) = 0 \text{에서 } 24 - 4a + b = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f'(1) = 0 \text{에서 } 6 + 2a + b = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{을 연립하여 풀면 } a = 3, b = -12$$

$$f(-2) = 5 \text{에서 } -16 + 12 + 24 + c = 5$$

$$\therefore c = -15$$

따라서 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 15$ 이므로 구하는 극솟값은

$$f(1) = 2 + 3 - 12 - 15 = -22$$

027 답 1

$$f(x) = 2x^3 + 3ax^2 - 12a^2x + a^3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6ax - 12a^2 = 6(x+2a)(x-a)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -2a \text{ 또는 } x = a$$

$a > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-2a$	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$21a^3$ 극대	↘	$-6a^3$ 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(-2a) = 21a^3$, 극솟값은

$$f(a) = -6a^3 \text{이고 그 합이 } 15 \text{이므로}$$

$$21a^3 + (-6a^3) = 15, a^3 = 1$$

$$\therefore a = 1 (\because a > 0)$$

028 답 -4

$$f(x) = -2x^3 + (a+2)x^2 + 6x + b \text{에서}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 2(a+2)x + 6$$

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극대이고 $x=\beta$ 에서 극소라 하면 a, β 는 이차방정식 $-6x^2 + 2(a+2)x + 6 = 0$ 의 두 근이다.

이때 극대인 점과 극소인 점이 원점에 대하여 대칭이므로

$$a = -\beta \quad \therefore a + \beta = 0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + \beta = \frac{2(a+2)}{6} = 0 \quad \therefore a = -2$$

$$\text{즉, } f(x) = -2x^3 + 6x + b \text{이므로}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 6 = -6(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	$b-4$ 극소	↗	$b+4$ 극대	↘

극대인 점과 극소인 점이 원점에 대하여 대칭이므로

$$b-4 = -(b+4) \quad \therefore b = 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $f(-1) = -4$

029 ③

$$f(x) = x^3 - 3(a+1)x^2 + 3(a^2+2a)x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6(a+1)x + 3(a^2+2a) \\ = 3(x-a)\{x-(a+2)\}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=a \text{ 또는 } x=a+2$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...	$a+2$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 의 극댓값이 2이므로 $f(a)=2$ 에서

$$a^3 - 3(a+1)a^2 + 3(a^2+2a)a = 2$$

$$a^3 + 3a^2 - 2 = 0, (a+1)(a^2+2a-2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = -1 \pm \sqrt{3}$$

한편 $f(3) < 0$ 이므로

$$27 - 27(a+1) + 9(a^2+2a) < 0$$

$$a^2 - a < 0, a(a-1) < 0 \quad \therefore 0 < a < 1$$

$$\therefore a = -1 + \sqrt{3}$$

따라서 $f(x) = x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 6x$ 이므로

$$f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 0$$

030 ④

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

(가)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(2) = 0$$

(나)에서 $f'(1-x) = f'(1+x)$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(0) = f'(2)$$

$$\therefore f'(0) = f'(2) = 0$$

$$f'(0) = 0 \text{에서 } b = 0$$

$$f'(2) = 0 \text{에서 } 12 + 4a = 0, 4a = -12 \quad \therefore a = -3$$

즉, $f(x) = x^3 - 3x^2 + c$ 이므로

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	c 극대	↘	$c-4$ 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(0)=c$, 극솟값은 $f(2)=c-4$ 이므로 구하는 차는

$$c - (c-4) = 4$$

031 ⑤

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 모두 삼차함수이고, $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 2, $f(x)g(x)$ 의 최고차항의 계수는 1이므로 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 $\frac{1}{2}$ 이다.

함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값을 가지므로 $g(x)$ 는 $(x-1)^2$ 을 인수로 갖는다.

즉, $g(x) = 2(x-1)^2(x-a)$ 라 하면

$$a=0 \text{ 또는 } a=2$$

(i) $a=0$ 일 때

$$g(x) = 2x(x-1)^2 \text{에서}$$

$$g'(x) = 2(x-1)^2 + 4x(x-1) \\ = 2(x-1)(3x-1)$$

$$g'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x=1$$

함수 $g(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\frac{1}{3}$	...	1	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	$\frac{8}{27}$ 극대	↘	0 극소	↗

즉, 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값을 가지므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $a=2$ 일 때

$$g(x) = 2(x-1)^2(x-2) \text{에서}$$

$$g'(x) = 4(x-1)(x-2) + 2(x-1)^2 \\ = 2(x-1)(3x-5)$$

$$g'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}$$

함수 $g(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	$\frac{5}{3}$	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	0 극대	↘	$-\frac{8}{27}$ 극소	↗

즉, 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값을 가지므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $g(x) = 2x(x-1)^2$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x(x-2)^2$$

따라서 $f'(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + x(x-2)$ 이므로

$$f'(4) = \frac{1}{2} \times (4-2)^2 + 4 \times (4-2) = 10$$

032 ③ $\frac{3}{2}$

$y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $-2, 1$ 이므로 주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면
 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
 주어진 그래프에서 $f'(-2) = 0, f'(1) = 0$ 이므로
 $12 - 4a + b = 0, 3 + 2a + b = 0$
 두 식을 연립하여 풀면 $a = \frac{3}{2}, b = -6$

$$\therefore f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + c$$

함수 $f(x)$ 의 극댓값이 15이므로 $f(-2) = 15$ 에서
 $-8 + 6 + 12 + c = 15 \quad \therefore c = 5$

따라서 $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$ 이므로 구하는 극솟값은
 $f(1) = 1 + \frac{3}{2} - 6 + 5 = \frac{3}{2}$

033 답 ③

$y = f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $-1, 0$ 이므로
 주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	극소	/	극대	\

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d 는 상수, $a \neq 0$)라 하면
 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

주어진 그래프에서 $f'(-1) = 0, f'(0) = 0$ 이므로

$$3a - 2b + c = 0, c = 0 \quad \therefore 3a - 2b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 의 극댓값이 1, 극솟값이 0이므로 $f(0) = 1, f(-1) = 0$ 에서

$$d = 1, -a + b - c + d = 0 \quad \therefore a - b = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -2, b = -3$

따라서 $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 1$ 이므로

$$f(-2) = 16 - 12 + 1 = 5$$

034 답 $\frac{32}{3}$

$y = f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $-1, 3$ 이므로
 주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	극소	/	극대	\

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d 는 상수, $a \neq 0$)라 하면
 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

주어진 그래프에서 $f'(0) = 3$ 이므로 $c = 3$

즉, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 3$ 이고 $f'(-1) = 0, f'(3) = 0$ 이므로

$$3a - 2b + 3 = 0, 27a + 6b + 3 = 0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -\frac{1}{3}, b = 1$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + d$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(3) = 9 + d$, 극솟값은

$$f(-1) = -\frac{5}{3} + d \text{이므로 구하는 차는}$$

$$(9 + d) - \left(-\frac{5}{3} + d\right) = \frac{32}{3}$$

035 답 ②

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...	3	...	5	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	극소	/		/	극대	\	극소	/

- ① 함수 $f(x)$ 는 구간 $(2, 3)$ 에서 증가하고, 구간 $[3, 4)$ 에서 감소한다.
- ② $f'(1) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 미분가능하다.
- ③ $f'(2) \neq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극값을 갖지 않는다.
- ④ 함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 극대이다.
- ⑤ 구간 $(-1, 5)$ 에서 함수 $f(x)$ 가 $x = 3$ 에서 극값을 가지므로 극값은 1개이다.

036 답 ③

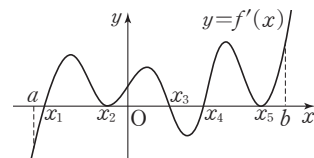
주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\		/		\

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-1, 3]$ 에서 증가한다.

037 답 -1

다음 그림과 같이 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 차례대로 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 라 하자.



주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	a	...	x_1	...	x_2	...	x_3	...	x_4	...	x_5	...	b
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	+	0	+	
$f(x)$		\	극소	/		/	극대	\	극소	/		/	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = x_3$ 에서 극대, $x = x_1, x = x_4$ 에서 극소이므로

$$m = 1, n = 2$$

$$\therefore m - n = 1 - 2 = -1$$

038 답 ③

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ 인 x 의 값은 두 함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같으므로

$x=b$ 또는 $x=c$ 또는 $x=f$

주어진 그래프에서 $h'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $h(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	b	...	c	...	f	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $h(x)$ 는 $x=c$ 에서 극소이므로 구하는 x 의 값은 c 이다.

039 답 ③

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	↗		↗	극대	↘

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ③이다.

040 답 ①

$f(x)=x^4-6x^2+5$ 라 하면

$f'(x)=4x^3-12x=4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\sqrt{3}$	...	0	...	$\sqrt{3}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ①이다.

041 답 ㄱ, ㄴ

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극대, $x=b$ 에서 극소이므로

$f'(a)=0$, $f'(b)=0$

따라서 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근은 a , b 이고, $a<0$, $b>0$,

$|\beta|>|\alpha|$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+\beta=-\frac{2a}{3}>0, a\beta=\frac{b}{3}<0$$

$\therefore a<0$, $b<0$

또 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 $x=0$ 일 때 y 축의 양의 부분과 만나므로 $c>0$

ㄱ. $a<0$, $b<0$, $c>0$ 이므로 $abc>0$

ㄴ. $a<0$, $bc<0$ 이므로 $a+bc<0$

$$\text{ㄷ. } \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} = \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} + \frac{c}{c} = -1-1+1=-1$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

042 답 20

$f(x)=-x^3+3x^2+9x+k$ 에서

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	$k-5$ 극소	↗	$k+27$ 극대	↘

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

이때 함수 $g(x)=|f(x)|$ 가 $x=a$,

$x=b$ ($a<b$)에서 극댓값을 가지려면

$k-5<0$, $k+27>0$

$\therefore -27< k < 5$

..... ㉠

함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로

$a=-1$, $\beta=3$

$g(a)=|f(-1)|=|k-5|=-k+5$

$g(\beta)=|f(3)|=|k+27|=k+27$

$\therefore |g(a)-g(\beta)|$

$$=|(-k+5)-(k+27)|$$

$$=|-2k-22|$$

이때 $|g(a)-g(\beta)|>10$ 이므로

$$|-2k-22|>10$$

(i) $-2k-22>10$ 일 때

$$-2k>32 \quad \therefore k<-16 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$-27< k < -16$$

따라서 정수 k 는 $-26, -25, -24, \dots, -17$ 의 10개이다.

(ii) $-2k-22<-10$ 일 때

$$-2k<12 \quad \therefore k>-6 \quad \text{..... ㉢}$$

㉠, ㉢을 동시에 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$-6< k < 5$$

따라서 정수 k 는 $-5, -4, -3, \dots, 4$ 의 10개이다.

(i), (ii)에서 구하는 정수 k 의 개수는 $10+10=20$

043 답 ⑤

$f(x)=x^3+ax^2-(a-6)x+5$ 에서

$f'(x)=3x^2+2ax-(a-6)$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

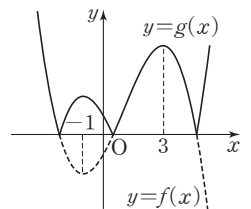
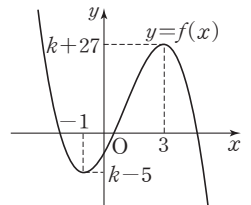
이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2+3(a-6)\leq 0$$

$$a^2+3a-18\leq 0, (a+6)(a-3)\leq 0$$

$$\therefore -6\leq a\leq 3$$

따라서 정수 a 는 $-6, -5, -4, \dots, 2, 3$ 의 10개이다.



044 답 $-2 < a < 0$

$$f(x) = x^3 - ax^2 + 2ax + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + 2a$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-2, 2)$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 $-2 < x < 2$ 에서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i) 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 6a > 0, a(a-6) > 0$$

$$\therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $f'(-2) > 0$ 에서 $12 + 4a + 2a > 0$

$$6a > -12 \quad \therefore a > -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(iii) $f'(2) > 0$ 에서 $12 - 4a + 2a > 0$

$$-2a > -12 \quad \therefore a < 6 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

(iv) $y = f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x = \frac{a}{3}$ 이므로

$$-2 < \frac{a}{3} < 2 \quad \therefore -6 < a < 6 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1} \sim \textcircled{4}$ 을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$-2 < a < 0$$

045 답 $-\frac{9}{4} < a < 0$ 또는 $a > 0$

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 2ax^2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4ax = 4x(x^2 - 3x - a)$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2 - 3x - a = 0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $x = 0$ 이 이차방정식 $x^2 - 3x - a = 0$ 의 근이 아니어야 하므로

$$a \neq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 이차방정식 $x^2 - 3x - a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 9 + 4a > 0 \quad \therefore a > -\frac{9}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$-\frac{9}{4} < a < 0 \text{ 또는 } a > 0$$

046 답 -3

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	2	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	1	$\nearrow$	12 극대	$\searrow$	-15 극소	$\nearrow$	-4

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(-1) = 12$, 최솟값은 $f(2) = -15$ 이므로 $M = 12, m = -15$

$$\therefore M + m = 12 + (-15) = -3$$

047 답 9

$$f(x) = ax^3 - 3ax + b \text{에서}$$

$$f'(x) = 3ax^2 - 3a = 3a(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

$a > 0$ 이므로 구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-2a+b$	$\nearrow$	$2a+b$ 극대	$\searrow$	$-2a+b$ 극소	$\nearrow$	$2a+b$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(-1) = f(2) = 2a + b$, 최솟값은 $f(-2) = f(1) = -2a + b$ 이므로

$$2a + b = 10, -2a + b = 6$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 8$

$$\therefore a + b = 1 + 8 = 9$$

048 답 $8\sqrt{2}$

점 A의 좌표를 $(a, 6 - a^2)$ ($0 < a < \sqrt{6}$)이라 하면

$$\overline{AB} = 2a, \overline{AD} = 6 - a^2$$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a) = 2a(6 - a^2) = -2a^3 + 12a$$

$$\therefore S'(a) = -6a^2 + 12 = -6(a + \sqrt{2})(a - \sqrt{2})$$

$$S'(a) = 0 \text{인 } a \text{의 값은 } a = \sqrt{2} \quad (\because 0 < a < \sqrt{6})$$

$0 < a < \sqrt{6}$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	$\sqrt{2}$	...	$\sqrt{6}$
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$	$8\sqrt{2}$ 극대	$\searrow$	

따라서 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 $S(\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$

049 답 16 cm^3

잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 $x \text{ cm}$ 라 하면 상자의 밑면의 가로, 세로의 길이는 $(6 - 2x) \text{ cm}$

이때 $x > 0, 6 - 2x > 0$ 이어야 하므로 $0 < x < 3$

상자의 부피를 $V(x) \text{ cm}^3$ 라 하면

$$V(x) = x(6 - 2x)^2 = 4x^3 - 24x^2 + 36x$$

$$\therefore V'(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 12(x - 1)(x - 3)$$

$$V'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1 \quad (\because 0 < x < 3)$$

$0 < x < 3$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		$\nearrow$	16 극대	$\searrow$	

따라서 부피 $V(x)$ 의 최댓값은 $V(1) = 16(\text{cm}^3)$

050 [답] ③

입장 수입을 $f(x)$ 백 원이라 하면

$$f(x) = xy = x \left(4800 - 10x - \frac{1}{3}x^2 \right) = -\frac{1}{3}x^3 - 10x^2 + 4800x$$

$$\therefore f'(x) = -x^2 - 20x + 4800 = -(x+80)(x-60)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=60 \text{ (} \because x>0 \text{)}$$

$x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	60	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=60$ 일 때 최대이므로 입장 수입이 최대가 되기 위한 입장료는 6000원이다.

051 [답] ③

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + (a-1)x^2 + 2x - 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 2x^2 + 2(a-1)x + 2$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - 4 \leq 0, \quad a^2 - 2a - 3 \leq 0$$

$$(a+1)(a-3) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq a \leq 3$$

따라서 정수 a 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

052 [답] ④

$$f(x) = x^3 + ax^2 + (a^2 - 4a)x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a^2 - 4a$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3(a^2 - 4a) > 0, \quad a^2 - 6a < 0$$

$$a(a-6) < 0 \quad \therefore 0 < a < 6$$

따라서 정수 a 는 $1, 2, 3, 4, 5$ 이므로 구하는 합은

$$1+2+3+4+5=15$$

053 [답] 5

$$f(x) = ax^3 - 6x^2 + (a-1)x - 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3ax^2 - 12x + (a-1)$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 36 - 3a(a-1) > 0, \quad a^2 - a - 12 < 0$$

$$(a+3)(a-4) < 0$$

$$\therefore -3 < a < 0 \text{ 또는 } 0 < a < 4 \text{ (} \because a \neq 0 \text{)}$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

054 [답] 5

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (2a-3)x - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -x^2 - 2ax + 2a - 3$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = a^2 + 2a - 3 > 0$$

$$(a+3)(a-1) > 0$$

$$\therefore a < -3 \text{ 또는 } a > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g(x) = \frac{4}{3}x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x + 1 \text{에서}$$

$$g'(x) = 4x^2 - 2(a+2)x + 2a + 1$$

함수 $g(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $g'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $g'(x)=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (a+2)^2 - 4(2a+1) \leq 0$$

$$a^2 - 4a \leq 0, \quad a(a-4) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$1 < a \leq 4$$

따라서 $\alpha=1, \beta=4$ 이므로

$$\alpha + \beta = 1 + 4 = 5$$

055 [답] -5

$$f(x) = x^3 - (a+2)x^2 + 3ax + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2(a+2)x + 3a$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-1, 2)$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 $-1 < x < 2$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+2)^2 - 9a > 0$$

$$a^2 - 5a + 4 > 0, \quad (a-1)(a-4) > 0$$

$$\therefore a < 1 \text{ 또는 } a > 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $f'(-1) > 0$ 에서

$$3 + 2(a+2) + 3a > 0 \quad \therefore a > -\frac{7}{5} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(iii) $f'(2) > 0$ 에서

$$12 - 4(a+2) + 3a > 0 \quad \therefore a < 4 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

(iv) $y=f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{a+2}{3}$ 이므로

$$-1 < \frac{a+2}{3} < 2 \quad \therefore -5 < a < 4 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

①~④을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$-\frac{7}{5} < a < 1$$

따라서 $\alpha = -\frac{7}{5}, \beta = 1$ 이므로

$$5\alpha + 2\beta = -7 + 2 = -5$$

056 **답** $a > 1$

$$f(x) = -x^3 + (a+1)x^2 - x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2(a+1)x - 1$$

함수 $f(x)$ 가 $x < 1$ 에서 극솟값을, $x > 1$ 에서 극댓값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 서로 다른 두 실근 중 한 근은 1보다 작고, 다른 한 근은 1보다 커야 하므로 $f'(1) > 0$ 에서

$$-3 + 2(a+1) - 1 > 0$$

$$\therefore a > 1$$

057 **답** $4 < a < \frac{25}{6}$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (a-2)x^2 + 4x \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 2(a-2)x + 4$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 극대인 점과 극소인 점이 모두 두 직선 $x=-1$, $x=3$ 사이에 존재하려면 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-1, 3)$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 $-1 < x < 3$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-2)^2 - 4 > 0, \quad a^2 - 4a > 0$$

$$a(a-4) > 0 \quad \therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $f'(-1) > 0$ 에서

$$1 + 2(a-2) + 4 > 0 \quad \therefore a > -\frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

(iii) $f'(3) > 0$ 에서

$$9 - 6(a-2) + 4 > 0 \quad \therefore a < \frac{25}{6} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(iv) $y=f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=a-2$ 이므로

$$-1 < a-2 < 3 \quad \therefore 1 < a < 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1} \sim \textcircled{4}$ 을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$4 < a < \frac{25}{6}$$

058 **답** 2

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2-1)x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 2ax + a^2 - 1$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-1, 2)$ 에서 극댓값, 구간 $(2, \infty)$ 에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근 중 한 근은 -1과 2 사이에 있고, 다른 한 근은 2보다 커야 한다.

(i) $f'(-1) > 0$ 에서

$$1 + 2a + a^2 - 1 > 0, \quad a^2 + 2a > 0$$

$$a(a+2) > 0$$

$$\therefore a < -2 \text{ 또는 } a > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $f'(2) < 0$ 에서

$$4 - 4a + a^2 - 1 < 0, \quad a^2 - 4a + 3 < 0$$

$$(a-1)(a-3) < 0$$

$$\therefore 1 < a < 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$1 < a < 3$$

따라서 정수 a 의 값은 2이다.

059 **답** $a < 0$ 또는 $a > \frac{2}{3}$

$$f(x) = x^4 - 4ax^3 + 3a^2x^2 + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12ax^2 + 6ax$$

$$= 2x(2x^2 - 6ax + 3a)$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식

$f'(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식

$2x^2 - 6ax + 3a = 0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $x=0$ 이 이차방정식 $2x^2 - 6ax + 3a = 0$ 의 근이 아니어야 하므로

$$a \neq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) 이차방정식 $2x^2 - 6ax + 3a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9a^2 - 6a > 0, \quad 3a(3a-2) > 0$$

$$\therefore a < 0 \text{ 또는 } a > \frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$a < 0 \text{ 또는 } a > \frac{2}{3}$$

060 **답** ①

$$f(x) = -x^4 + 4x^3 + 2ax^2 \text{에서}$$

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 + 4ax$$

$$= -4x(x^2 - 3x - a)$$

함수 $f(x)$ 가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2 - 3x - a = 0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) $x=0$ 이 이차방정식 $x^2 - 3x - a = 0$ 의 근이 아니어야 하므로

$$a \neq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) 이차방정식 $x^2 - 3x - a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 9 + 4a > 0 \quad \therefore a > -\frac{9}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$-\frac{9}{4} < a < 0 \text{ 또는 } a > 0$$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 1이다.

061 **답** $a = -2$ 또는 $a \geq \frac{1}{4}$

$$f(x) = -x^4 - 2(a-1)x^2 - 4ax + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -4x^3 - 4(a-1)x - 4a$$

$$= -4(x+1)(x^2 - x + a)$$

함수 $f(x)$ 가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2 - x + a = 0$ 의 한 근이 -1이거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2 - x + a = 0$ 의 한 근이 -1인 경우

$$1 + 1 + a = 0 \quad \therefore a = -2$$

(ii) 이차방정식 $x^2 - x + a = 0$ 이 중근 또는 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2 - x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1 - 4a \leq 0 \quad \therefore a \geq \frac{1}{4}$$

(i), (ii)에서 $a = -2$ 또는 $a \geq \frac{1}{4}$

062 ㉡ 12

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 3(a+4)x^2 + 12ax \text{에서}$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 6(a+4)x + 12a$$

$$= 6(x-2)(2x^2 + 2x - a)$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 하나만 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $2x^2 + 2x - a = 0$ 의 한근이 2이거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $2x^2 + 2x - a = 0$ 의 한근이 2인 경우

$$8 + 4 - a = 0 \quad \therefore a = 12$$

(ii) 이차방정식 $2x^2 + 2x - a = 0$ 이 중근 또는 허근을 갖는 경우

이차방정식 $2x^2 + 2x - a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 + 2a \leq 0 \quad \therefore a \leq -\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 $a \leq -\frac{1}{2}$ 또는 $a = 12$

따라서 a 의 최댓값은 12이다.

063 ㉡ ⑤

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 10 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

구간 $[0, 5]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3	...	5
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	10	\	6 극소	/	10 극대	\	-10

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(0)=f(3)=10$, 최솟값은 $f(5)=-10$ 이므로 $M=10$, $m=-10$

$$\therefore M - m = 10 - (-10) = 20$$

064 ㉡ -7

$$f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 15 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x - 8 = 4(x+1)^2(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	\	18	\	-9 극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 -9를 가지므로

$$a=2, m=-9 \quad \therefore a+m=2+(-9)=-7$$

065 ㉡ $-\frac{2}{3}$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + ax^2 - a \text{에서}$$

$$f'(x) = -2x^2 + 2ax = -2x(x-a)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=a$$

구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	a	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-a$	/	$\frac{1}{3}a^3 - a$ 극대	\	$3a - \frac{16}{3}$

함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 최댓값 $\frac{1}{3}a^3 - a$ 를 가지므로

$$g(a) = \frac{1}{3}a^3 - a$$

$$\therefore g'(a) = a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$$

$$g'(a) = 0 \text{인 } a \text{의 값은 } a=1 \text{ } (\because 0 < a < 2)$$

$0 < a < 2$ 에서 함수 $g(a)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	1	...	2
$g'(a)$		-	0	+	
$g(a)$	0	\	$-\frac{2}{3}$ 극소	/	$\frac{2}{3}$

따라서 함수 $g(a)$ 의 최솟값은 $g(1) = -\frac{2}{3}$

066 ㉡ -17

$x+1=t$ 로 놓으면 $-1 \leq x \leq 3$ 에서 $0 \leq t \leq 4$

$$g(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 5 \text{라 하면}$$

$$g'(t) = 3t^2 - 6t - 9 = 3(t+1)(t-3)$$

$$g'(t) = 0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=3 \text{ } (\because 0 \leq t \leq 4)$$

$0 \leq t \leq 4$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	3	...	4
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	5	\	-22 극소	/	-15

따라서 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 $g(0)=5$, 최솟값은 $g(3)=-22$ 이므로 구하는 함은

$$5 + (-22) = -17$$

067 ㉡ ②

$$f(x) = ax^4 - 2ax^2 + b + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4ax^3 - 4ax = 4ax(x^2 - 1)$$

$$= 4ax(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ } (\because -2 \leq x \leq 0)$$

$a > 0$ 이므로 구간 $[-2, 0]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	0
$f'(x)$		-	0	+	0
$f(x)$	$8a+b+1$	\	$-a+b+1$ 극소	/	$b+1$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(-2)=8a+b+1$, 최솟값은 $f(-1)=-a+b+1$ 이므로
 $8a+b+1=11$, $-a+b+1=2$
 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$
 $\therefore a+b=1+2=3$

068 답 -3

$f(x)=-2x^3+6x^2+a$ 에서
 $f'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$
 구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	2	...	3
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$a+8$	$\searrow$	a 극소	$\nearrow$	$a+8$ 극대	$\searrow$	a

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(-1)=f(2)=a+8$, 최솟값은 $f(0)=f(3)=a$ 이다.
 이때 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 5이므로
 $a+8=5 \quad \therefore a=-3$
 따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -3이다.

069 답 ④

$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+a$ 에서
 $f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12$
 $=4(x+1)(x-1)(x-3)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$ ($\because 0 \leq x \leq 4$)
 구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3	...	4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	a	$\nearrow$	$a+7$ 극대	$\searrow$	$a-9$ 극소	$\nearrow$	$a+16$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(4)=a+16$, 최솟값은 $f(3)=a-9$ 이고 그 합이 11이므로
 $a+16+a-9=11$
 $\therefore a=2$

070 답 $\frac{64\sqrt{3}}{9}$

직사각형의 꼭짓점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하고 점 P의 x 좌표를 a 라 하면
 $P(a, -a^2+4)$ (단, $0 < a < 2$)
 직사각형의 넓이를 $S(a)$ 라 하면
 $S(a)=2a \times 2(-a^2+4)=-4a^3+16a$
 $\therefore S'(a)=-12a^2+16=-4(3a^2-4)$
 $S'(a)=0$ 인 a 의 값은 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ($\because 0 < a < 2$)

$0 < a < 2$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	...	2
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$	$\frac{64\sqrt{3}}{9}$ 극대	$\searrow$	

따라서 직사각형의 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은
 $S\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{64\sqrt{3}}{9}$

071 답 $\sqrt{5}$

점 P의 좌표를 (a, a^2) 이라 하면
 $AP=\sqrt{(a-3)^2+a^4}=\sqrt{a^4+a^2-6a+9}$
 $f(a)=a^4+a^2-6a+9$ 라 하면
 $f'(a)=4a^3+2a-6=2(a-1)(2a^2+2a+3)$
 $f'(a)=0$ 인 a 의 값은 $a=1$ ($\because a$ 는 실수)
 함수 $f(a)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	...	1	...
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	$\searrow$	5 극소	$\nearrow$

따라서 $f(a)$ 의 최솟값은 $f(1)=5$ 이므로 선분 AP의 길이의 최솟값은 $\sqrt{5}$ 이다.

072 답 8

$f(x)=x^2-6x+9$ 라 하면 $f'(x)=2x-6$
 접점 P의 좌표는 (a, a^2-6a+9) 이고 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a)=2a-6$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(a^2-6a+9)=(2a-6)(x-a)$
 $\therefore y=2(a-3)x-a^2+9$
 이때 $\overline{OA}=\frac{a+3}{2}$, $\overline{OB}=-a^2+9$ 이므로 삼각형 OAB의 넓이를 $S(a)$ 라 하면
 $S(a)=\frac{1}{2} \times \frac{a+3}{2} \times (-a^2+9)$
 $=-\frac{1}{4}(a^3+3a^2-9a-27)$
 $\therefore S'(a)=-\frac{1}{4}(3a^2+6a-9)=-\frac{3}{4}(a+3)(a-1)$
 $S'(a)=0$ 인 a 의 값은 $a=1$ ($\because 0 < a < 3$)
 $0 < a < 3$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	1	...	3
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$	8 극대	$\searrow$	

따라서 삼각형 OAB의 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 $S(1)=8$

073 **답** $\frac{50}{27}$

점 Q의 좌표를 $(a, 2)$ 라 하면 $\overline{OQ} = \overline{PQ}$ 에서

$$a^2 + 4 = (a-2)^2 + (2-t)^2 \quad \therefore a = \frac{1}{4}(2-t)^2$$

삼각형 OPQ의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(t) &= 2 \times 2 - \left\{ \frac{1}{2} \times a \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times t + \frac{1}{2} \times (2-a) \times (2-t) \right\} \\ &= 2 - \frac{1}{2}at = 2 - \frac{1}{8}t(2-t)^2 \\ &= 2 - \frac{1}{8}(t^3 - 4t^2 + 4t) \end{aligned}$$

$$\therefore S'(t) = -\frac{1}{8}(3t^2 - 8t + 4) = -\frac{1}{8}(3t-2)(t-2)$$

$$S'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=\frac{2}{3} \text{ 또는 } t=2$$

$0 \leq t \leq 2$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\frac{2}{3}$	...	2
$S'(t)$		-	0	+	0
$S(t)$	2	\	$\frac{50}{27}$ 극소	/	2

따라서 삼각형 OPQ의 넓이 $S(t)$ 의 최솟값은 $S\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{50}{27}$

074 **답** 256

오른쪽 그림과 같이 잘라 내는 사각형의 긴 변의 길이를 x 라 하면 상자의 밑면인 정삼각형의 한 변의 길이는

$$24-2x$$

이때 $x > 0$, $24-2x > 0$ 이어야 하므로

$$0 < x < 12$$

상자의 밑면인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(24-2x)^2 = \sqrt{3}(x-12)^2$$

삼각기둥의 높이를 h 라 하면

$$h = x \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

상자의 부피를 $V(x)$ 라 하면

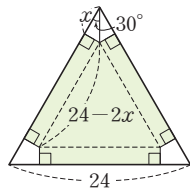
$$\begin{aligned} V(x) &= \sqrt{3}(x-12)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}x \\ &= x(x-12)^2 = x^3 - 24x^2 + 144x \\ \therefore V'(x) &= 3x^2 - 48x + 144 = 3(x-4)(x-12) \end{aligned}$$

$$V'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=4 \quad (\because 0 < x < 12)$$

$0 < x < 12$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	4	...	12
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		/	256 극대	\	

따라서 상자의 부피 $V(x)$ 의 최댓값은 $V(4) = 256$



075 **답** 252π

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면

$$r+h=9 \quad \therefore h=9-r$$

이때 $r > 0$, $9-r > 0$ 이어야 하므로

$$0 < r < 9$$

원기둥의 부피를 $V(r)$ 라 하면

$$\begin{aligned} V(r) &= \pi r^2 h = \pi r^2 (9-r) \\ &= \pi (9r^2 - r^3) \end{aligned}$$

$$\therefore V'(r) = \pi (18r - 3r^2) = -3\pi r(r-6)$$

$$V'(r)=0 \text{인 } r \text{의 값은 } r=6 \quad (\because 0 < r < 9)$$

$0 < r < 9$ 에서 함수 $V(r)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	...	6	...	9
$V'(r)$		+	0	-	
$V(r)$		/	108π 극대	\	

따라서 원기둥의 부피는 $r=6$ 일 때 최댓값이 108π 이다.

밑면의 반지름의 길이가 6인 반구의 부피는

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 6^3 = 144\pi$$

따라서 구하는 전체 입체도형의 부피는

$$108\pi + 144\pi = 252\pi$$

076 **답** ⑤

원뿔의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면

$$r^2 + h^2 = 144$$

$$\therefore r^2 = 144 - h^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $h > 0$, $144 - h^2 > 0$ 이므로

$$0 < h < 12$$

원뿔의 부피를 $V(h)$ 라 하면

$$\begin{aligned} V(h) &= \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (144 - h^2) h \\ &= \frac{1}{3} \pi (-h^3 + 144h) \end{aligned}$$

$$\therefore V'(h) = \frac{1}{3} \pi (-3h^2 + 144)$$

$$= -\pi(h+4\sqrt{3})(h-4\sqrt{3})$$

$$V'(h)=0 \text{인 } h \text{의 값은 } h=4\sqrt{3} \quad (\because 0 < h < 12)$$

$0 < h < 12$ 에서 함수 $V(h)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	0	...	$4\sqrt{3}$	...	12
$V'(h)$		+	0	-	
$V(h)$		/	극대	\	

원뿔의 부피 $V(h)$ 가 최대일 때, 원뿔의 높이는 $h=4\sqrt{3}$

이를 ⑦에 대입하면

$$r^2 = 144 - 48 = 96$$

$$\therefore r = 4\sqrt{6} \quad (\because r > 0)$$

$$\therefore r : h = 4\sqrt{6} : 4\sqrt{3} = \sqrt{2} : 1$$

077 답 $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$

오른쪽 그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 $2x$ 라 하면

$$r^2 = 1 - x^2$$

이때 $x > 0$, $1 - x^2 > 0$ 이므로

$$0 < x < 1$$

원기둥의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} V(x) &= \pi r^2 \times 2x = \pi(1 - x^2) \times 2x \\ &= 2\pi(-x^3 + x) \end{aligned}$$

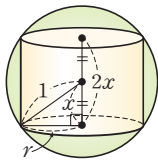
$$\begin{aligned} \therefore V'(x) &= 2\pi(-3x^2 + 1) = -6\pi\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \\ &= -6\pi\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \end{aligned}$$

$$V'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because 0 < x < 1)$$

$0 < x < 1$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	...	1
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$ 극대	$\searrow$	

따라서 원기둥의 부피 $V(x)$ 의 최댓값은 $V\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$



078 답 $16\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이 직육면체의 밑면의 한 변의 길이를 x , 높이를 y 라 하면 정사각뿔의

높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{2}$ 이므로

$$6 : 3\sqrt{2} = (6 - x) : y$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{2}}{2}(6 - x)$$

이때 $x > 0$, $\frac{\sqrt{2}}{2}(6 - x) > 0$ 이므로

$$0 < x < 6$$

직육면체의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} V(x) &= x^2 y = \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 (6 - x) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (6x^2 - x^3) \end{aligned}$$

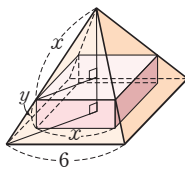
$$\therefore V'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (12x - 3x^2) = \frac{3\sqrt{2}}{2} x (4 - x)$$

$$V'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 4 \quad (\because 0 < x < 6)$$

$0 < x < 6$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	4	...	6
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		$\nearrow$	$16\sqrt{2}$ 극대	$\searrow$	

따라서 직육면체의 부피 $V(x)$ 의 최댓값은 $V(4) = 16\sqrt{2}$



079 답 30 kg

제품 A를 x kg을 판매하여 얻은 이익을 $g(x)$ 원이라 하면

$$g(x) = 5000x - f(x) = -2x^3 + 90x^2 - 2000 \quad (x > 0)$$

$$\therefore g'(x) = -6x^2 + 180x = -6x(x - 30)$$

$$g'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 30 \quad (\because x > 0)$$

$x > 0$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	30	...
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x = 30$ 일 때 최대이므로 이익을 최대로 하기 위해 하루에 생산해야 할 제품 A는 30 kg이다.

080 답 3시간

$$f(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t \quad (t > 0) \text{라 하면}$$

$$f'(t) = -3t^2 + 6t + 9 = -3(t + 1)(t - 3)$$

$$f'(t) = 0 \text{인 } t \text{의 값은 } t = 3 \quad (\because t > 0)$$

$t > 0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	3	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t = 3$ 일 때 최대이므로 약효가 최대가 되는 것은 3시간 후이다.

081 답 ③

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x - 1)(x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 1]$, $[3, \infty)$ 에서 감소하고, 구간 $[1, 3]$ 에서 증가한다.

082 답 $a \geq \frac{1}{6}$

$$f(x) = 2ax^3 - x^2 + 6ax + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6ax^2 - 2x + 6a$$

$x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) < f(x_2)$ 가 성립하려면 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$6a > 0 \quad \therefore a > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이차방정식 $6ax^2 - 2x + 6a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - 36a^2 \leq 0, \quad 36a^2 - 1 \geq 0, \quad (6a + 1)(6a - 1) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -\frac{1}{6} \text{ 또는 } a \geq \frac{1}{6} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는 $a \geq \frac{1}{6}$

083 ③

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 4ax + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax - 4a$$

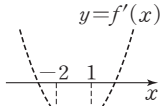
함수 $f(x)$ 가 구간 $[-2, 1]$ 에서 감소하려면 $-2 \leq x \leq 1$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

$$\therefore f'(-2) \leq 0, f'(1) \leq 0$$

$$f'(-2) = 24 - 4a - 4a \leq 0 \text{에서 } a \geq 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(1) = 6 + 2a - 4a \leq 0 \text{에서 } a \geq 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는 $a \geq 3$ 따라서 a 의 최솟값은 3이다.



084 ①

$$g(x) = x^2 f(x) \text{라 하면 } g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x)$$

$$\text{이때 } f(1) = 3, f'(1) = 0 \text{이므로}$$

$$g'(1) = 2f(1) + f'(1) = 2 \times 3 + 0 = 6$$

085 ⑤

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 감소하는 구간이 $[-1, 1]$ 이므로 $-1, 1$ 은 이차방정식 $3x^2 + 2ax + b = 0$ 의 두 근이다.

즉, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1 + 1 = -\frac{2}{3}a, -1 \times 1 = \frac{b}{3} \quad \therefore a = 0, b = -3$$

$$\text{즉, } f(x) = x^3 - 3x + 1 \text{이므로 } f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3 극대	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(-1) = 3$, 극솟값은 $f(1) = -1$ 이므로

$$M = 3, m = -1 \quad \therefore M + m = 3 + (-1) = 2$$

086 ④ $-\frac{19}{2}$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + a \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$a + \frac{7}{2}$ 극대	$\searrow$	$a - 10$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 극댓값 4를 가지므로 $f(-1) = 4$ 에서

$$a + \frac{7}{2} = 4 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 함수 } f(x) \text{의 극솟값은 } f(2) = a - 10 = \frac{1}{2} - 10 = -\frac{19}{2}$$

087 ②

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$a+4$ 극대	$\searrow$	a 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(1) = a + 4$, 극솟값은 $f(3) = a$ 이다.

이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 그 부호가 서로 다르므로

$$a + 4 = -a \quad \therefore a = -2$$

088 ③ ㄱ, ㄴ

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-2, -1]$ 에서 감소한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 구간 $[3, 4]$ 에서 감소한다.

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극대이다.

ㄹ. 함수 $f(x)$ 는 $x = 4$ 에서 극소이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

089 ①

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ①이다.

090 ④ 15

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 좌표가 a ($a \neq 0$)인 점에서 x 축에 접한다고 하면 이 그래프는 원점을 지나므로

$$f(x) = x(x-a)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore f'(x) = (x-a)^2 + 2x(x-a) = (x-a)(3x-a)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = a \text{ 또는 } x = \frac{a}{3}$$

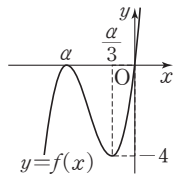
이때 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 -4 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{a}{3}$ 일 때 극솟값 -4 를 가지

$$\text{므로 } f\left(\frac{a}{3}\right) = -4 \text{에서}$$

$$\frac{a}{3}\left(\frac{a}{3} - a\right)^2 = -4, \frac{4}{27}a^3 = -4$$

$$a^3 = -27 \quad \therefore a = -3 \quad (\because a \text{는 실수})$$



이를 ㉠에 대입하면

$$f(x) = x(x+3)^2 = x^3 + 6x^2 + 9x$$

따라서 $a=6$, $b=9$ 이므로 $a+b=6+9=15$

091 답 3

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad \dots\dots ㉠$$

$$(㉠) \text{에서 } f'(1)=0, f'(a)=0, f'(\beta)=0$$

이므로 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프의 개형

은 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore a < 1 < \beta$$

이때 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수는 1이므로

$$f'(x) = (x-1)(x-a)(x-\beta) \quad \dots\dots ㉡$$

$$(㉡) \text{에서 } f'(-1)=6 \text{이므로}$$

$$(-1-1)(-1-a)(-1-\beta)=6$$

$$(1+a)(1+\beta)=-3, 1+a+\beta+a\beta=-3$$

$$a+\beta=-4-a\beta \quad \dots\dots ㉢$$

$$(a-\beta)^2 = (a+\beta)^2 - 4a\beta \text{이고, } (㉢) \text{에서 } \beta-a=4, \text{ 즉 } a-\beta=-4$$

이므로

$$16 = (-4-a\beta)^2 - 4a\beta$$

$$(a\beta)^2 + 4a\beta = 0, a\beta(a\beta+4)=0$$

$$\therefore a\beta = -4 \text{ 또는 } a\beta = 0$$

(i) $a\beta = -4$ 일 때

㉢에 의하여 $a+\beta=0$ 이고, $\beta-a=4$ 이므로

$$a=-2, \beta=2$$

(ii) $a\beta = 0$ 일 때

㉢에 의하여 $a+\beta=-4$ 이고, $\beta-a=4$ 이므로

$$a=-4, \beta=0$$

이는 $a < 1 < \beta$ 를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-2, \beta=2$

이를 ㉠에 대입하면

$$f'(x) = (x-1)(x+2)(x-2) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

따라서 ㉠에서 $a=-1, b=-4, c=4$ 이므로

$$a+b+2c = (-1) + (-4) + 8 = 3$$

092 답 ④

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (2a+3)x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 2ax + 2a + 3$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식

$$f'(x)=0 \text{이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.}$$

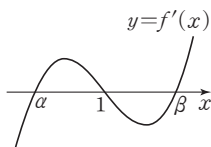
이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - (2a+3) > 0, a^2 - 2a - 3 > 0$$

$$(a+1)(a-3) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 3$$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 4이다.



093 답 $-\frac{1}{5} < k < 0$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + 3kx + 7 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 2kx + 3k$$

함수 $f(x)$ 가 $-1 < x < 1$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 $-1 < x < 1$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 3k > 0, k(k-3) > 0$$

$$\therefore k < 0 \text{ 또는 } k > 3 \quad \dots\dots ㉠$$

(ii) $f'(-1) > 0$ 에서

$$1 + 2k + 3k > 0 \quad \therefore k > -\frac{1}{5} \quad \dots\dots ㉡$$

(iii) $f'(1) > 0$ 에서

$$1 - 2k + 3k > 0 \quad \therefore k > -1 \quad \dots\dots ㉢$$

(iv) $y=f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=k$ 이므로

$$-1 < k < 1 \quad \dots\dots ㉣$$

㉠~㉣을 동시에 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$-\frac{1}{5} < k < 0$$

094 답 $a=0$ 또는 $a \geq \frac{9}{4}$

$$f(x) = x^4 + 4x^3 + 2ax^2 + a \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 4ax = 4x(x^2 + 3x + a)$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2 + 3x + a = 0$ 의 한 근이 0이거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2 + 3x + a = 0$ 의 한 근이 0인 경우

$$a = 0$$

(ii) 이차방정식 $x^2 + 3x + a = 0$ 이 중근 또는 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2 + 3x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 9 - 4a \leq 0 \quad \therefore a \geq \frac{9}{4}$$

(i), (ii)에서 $a=0$ 또는 $a \geq \frac{9}{4}$

095 답 ③

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1	...	2
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	2	/	3 극대	\	2 극소	/	11

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(2)=11$, 최솟값은

$$f(-1)=f(1)=2 \text{이므로 구하는 합은 } 11+2=13$$

096 [답] -25

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

주어진 그래프에서 $f'(-1)=0$, $f'(3)=0$ 이므로

$$3-2a+b=0, 27+6a+b=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-9$

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + c$$

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 구간 $[-2, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	3	...	4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$c-2$	$\nearrow$	$c+5$ 극대	$\searrow$	$c-27$ 극소	$\nearrow$	$c-20$

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값 7을 가지므로 $f(-1)=7$ 에서

$$c+5=7 \quad \therefore c=2$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$f(3) = c - 27 = 2 - 27 = -25$$

097 [답] 12

$$f(x) = ax^3 - 3ax^2 + b \text{에서}$$

$$f'(x) = 3ax^2 - 6ax = 3ax(x-2)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

$a>0$ 이므로 구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	4
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	b	$\searrow$	$-4a+b$ 극소	$\nearrow$	$16a+b$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(4)=16a+b$, 최솟값은

$$f(2) = -4a+b \text{이므로}$$

$$16a+b=5, -4a+b=-15$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-11$

$$\therefore a-b=1-(-11)=12$$

098 [답] 256

곡선 $y = -x^2 + 8x + 20$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는

$$-x^2 + 8x + 20 = 0 \text{에서 } -(x+2)(x-10) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 10$$

$$\therefore A(-2, 0), B(10, 0)$$

점 C의 좌표를 $(a, -a^2 + 8a + 20)$ ($4 < a < 10$)이라 하고, 점 C에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(a, 0)$ 이므로

$$\overline{AB}=12, \overline{CD}=2(a-4)=2a-8, \overline{CH}=-a^2+8a+20$$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a) = \frac{1}{2}(2a-8+12)(-a^2+8a+20)$$

$$= -a^3 + 6a^2 + 36a + 40$$

$$\therefore S'(a) = -3a^2 + 12a + 36 = -3(a+2)(a-6)$$

$$S'(a)=0 \text{인 } a \text{의 값은 } a=6 \quad (\because 4 < a < 10)$$

$4 < a < 10$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	4	...	6	...	10
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$	256 극대	$\searrow$	

따라서 사다리꼴 ABCD의 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 $S(6)=256$

099 [답] ③

오른쪽 그림과 같이 원뿔에 내접하는 원기둥의

밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면

$$8:4=(8-h):r \quad \therefore h=8-2r$$

이때 $r>0$, $8-2r>0$ 이므로

$$0 < r < 4$$

원뿔에 내접하는 원기둥의 부피를 $V(r)$ 라 하면

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 (8-2r) = \pi (8r^2 - 2r^3)$$

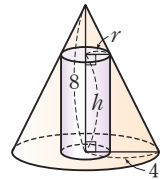
$$\therefore V'(r) = \pi (16r - 6r^2) = -2\pi r(3r-8)$$

$$V'(r)=0 \text{인 } r \text{의 값은 } r=\frac{8}{3} \quad (\because 0 < r < 4)$$

$0 < r < 4$ 에서 함수 $V(r)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	...	$\frac{8}{3}$	...	4
$V'(r)$		+	0	-	
$V(r)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $V(r)$ 는 $r=\frac{8}{3}$ 일 때 최대이므로 부피가 최대인 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $\frac{8}{3}$ 이다.



100 [답] 1450원

1L당 가격을 10x원 올렸을 경우 휘발유 1L의 가격은

$(1350+10x)$ 원이고, 이때 하루 판매량은 $(3000-x^2)$ L이다.

이때 $x>0$, $3000-x^2>0$ 이므로 $0 < x < 10\sqrt{30}$

가격을 10x원 올렸을 경우 하루 판매 금액을 $f(x)$ 원이라 하면

$$f(x) = (1350+10x)(3000-x^2)$$

$$\therefore f'(x) = 10(3000-x^2) + (1350+10x)(-2x)$$

$$= -30x^2 - 2700x + 30000$$

$$= -30(x+100)(x-10)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=10 \quad (\because 0 < x < 10\sqrt{30})$$

$0 < x < 10\sqrt{30}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	10	...	$10\sqrt{30}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=10$ 일 때 최대이므로 하루 판매 금액이 최대가 되려면 휘발유 가격을 $1350+10 \times 10=1450$ (원)으로 정해야 한다.



001 답 ③

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 - k = 0 \text{에서 } 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = k$$

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

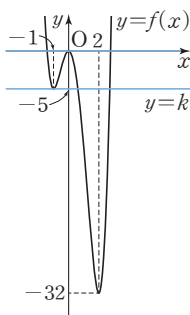
x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	-5 극소	/	0 극대	\	-32 극소	/

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$$k = -5 \text{ 또는 } k = 0$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-5 + 0 = -5$$



002 답 26

$$x^3 - 3x^2 - 9x + k = 0 \text{에서 } x^3 - 3x^2 - 9x = -k$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

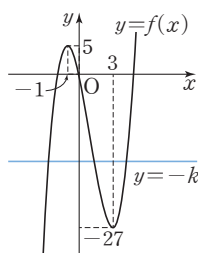
함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	5 극대	\	-27 극소	/

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-k$ 의 교점의 x 좌표가 한 개는 음수이고 다른 두 개는 양수이려면

$$-27 < -k < 0 \quad \therefore 0 < k < 27$$

따라서 정수 k 는 1, 2, 3, ..., 26의 26개이다.



003 답 ②

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x+3)(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -3 \text{ 또는 } x = -1$$

삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$f(-3)f(-1) < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$k(k-4) < 0 \quad \therefore 0 < k < 4$$

004 답 20

주어진 곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식

$$2x^3 + 3x^2 - 10x = 2x + k, \text{ 즉 } 2x^3 + 3x^2 - 12x - k = 0 \text{이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.}$$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$$f(-2)f(1) = 0 \text{이어야 하므로}$$

$$(20-k)(-7-k) = 0$$

$$\therefore k = 20 \quad (\because k > 0)$$

005 답 $-\frac{1}{27} < a < 0$

$$y = x^3 + x^2 \text{에서 } y' = 3x^2 + 2x$$

점 $(0, a)$ 에서 곡선 $y = x^3 + x^2$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t, t^3 + t^2)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$y - (t^3 + t^2) = (3t^2 + 2t)(x - t)$$

이 직선이 점 $(0, a)$ 를 지나므로

$$a - (t^3 + t^2) = (3t^2 + 2t)(-t)$$

$$\therefore 2t^3 + t^2 + a = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

점 $(0, a)$ 에서 주어진 곡선에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 t 에 대한 삼차방정식 $\textcircled{7}$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$f(t) = 2t^3 + t^2 + a \text{라 하면}$$

$$f'(t) = 6t^2 + 2t = 2t(3t + 1)$$

$$f'(t) = 0 \text{인 } t \text{의 값은 } t = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } t = 0$$

삼차방정식 $f(t) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)f(0) < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$a\left(a + \frac{1}{27}\right) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{27} < a < 0$$

006 답 ⑤

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 10x + k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 6x - 10 = 2(x-1)(2x^2 + 2x + 5)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1 \quad (\because x \text{는 실수})$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\	$k-6$ 극소	/

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(1) = k - 6$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) > 0 \text{이 성립하려면}$$

$$k - 6 > 0 \quad \therefore k > 6$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 7이다.

007 답 ②

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 30 > k \text{에서}$$

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 30 - k > 0$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 30 - k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3 (\because x \geq 0)$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	3	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$30-k$	$\searrow$	$3-k$ 극소	$\nearrow$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(3) = 3 - k$ 이므로 $f(x) > 0$ 이 성립하려면

$$3 - k > 0 \quad \therefore k < 3$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 2이다.

008 답 11

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 18x = 6x(x+3)$$

$1 < x < 3$ 일 때 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(1, 3)$ 에서 증가한다.

즉, $1 < x < 3$ 일 때 $f(x) > 0$ 이 성립하려면 $f(1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$11 - k \geq 0 \quad \therefore k \leq 11$$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3, ..., 11의 11개이다.

009 답 $\frac{19}{2}$

$$\frac{3}{2}x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 12x + k = 0 \text{에서}$$

$$\frac{3}{2}x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 12x = -k$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 12x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^3 + 12x^2 - 6x - 12 = 6(x+2)(x+1)(x-1)$$

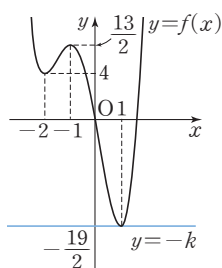
$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -2 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	4 극소	$\nearrow$	$\frac{13}{2}$ 극대	$\searrow$	$-\frac{19}{2}$ 극소	$\nearrow$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 오직 한 실근만을 가지려면 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = -k$ 가 한 점에서 만나야 하므로

$$-k = -\frac{19}{2} \quad \therefore k = \frac{19}{2}$$



010 답 ③

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 3 \text{이라 하면}$$

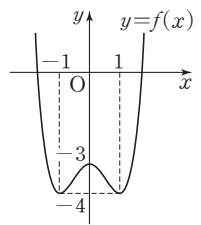
$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$	-3 극대	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



011 답 -4

$$2f(x) - k = 0 \text{에서 } f(x) = \frac{k}{2}$$

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

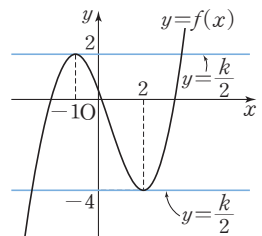
x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2 극대	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = \frac{k}{2}$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$\frac{k}{2} = 2 \text{ 또는 } \frac{k}{2} = -4$$

$$\therefore k = 4 \text{ 또는 } k = -8$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은 $4 + (-8) = -4$



012 답 4

$$x^3 - 6x^2 + 9x - k = 0 \text{에서}$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x = k$$

$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \text{라 하면}$$

$$g'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$$g'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $g(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

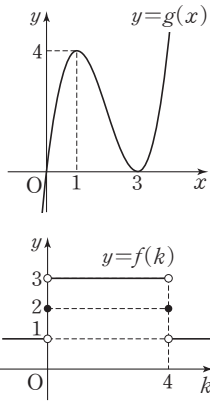
x	...	1	...	3	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	4 극대	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=k$ 의 교점은 $k<0$ 또는 $k>4$ 일 때 1개, $k=0$ 또는 $k=4$ 일 때 2개, $0<k<4$ 일 때 3개이다.

즉, 함수 $y=f(k)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(k)$ 는 $k=0, k=4$ 에서 불연속이다.

$\therefore a=0$ 또는 $a=4$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 $0+4=4$



013 답 5 < k < 7

$f(x)=3x^3-9x^2+5$ 에서

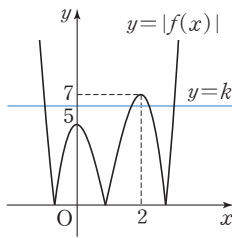
$f'(x)=9x^2-18x=9x(x-2)$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		5 극대		-7 극소	

함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 곡선 $y=|f(x)|$ 와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로

$5 < k < 7$



014 답 -1

(㉠)에서 함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가지므로 반드시 극솟값도 갖는다.

(㉡)에서 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 이 서로 다른 5개의 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 -1 이어야 한다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)

라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

(㉢)에서 $f(0)=3, f'(0)=0$ 이므로 $c=3, b=0$

$f(x)=x^3+ax^2+3$ 이므로

$f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

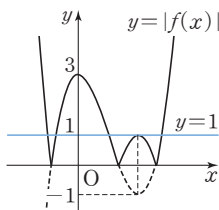
함수 $f(x)$ 는 $x=-\frac{2}{3}a$ 에서 극솟값 -1 을 가지므로

$f\left(-\frac{2}{3}a\right)=-1$ 에서 $-\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{9}a^3+3=-1$

$\frac{4}{27}a^3=-4, a^3=-27 \therefore a=-3$ ($\because a$ 는 실수)

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3$ 이므로

$f(-1)=-1-3+3=-1$



015 답 -2

모든 실수 x 에 대하여

$f(-x)=-f(x)$ 를 만족시키는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, 최고차항의 계수가 -1 이므로 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 극값을 가지는 두 점도 원점에 대하여 대칭이다.

이때 방정식 $|f(x)|=2$ 가 서로 다른 네 실근을 가지려면 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 가 서로 다른 4개의 점에서 만나야 하므로 오른쪽 그림과 같이 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 2, 극솟값이 -2 이어야 한다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교

점 중 원점이 아닌 점의 x 좌표를 각각 $-k, k$ ($k>0$)라 하면

$f(x)=-x(x+k)(x-k)=-x^3+k^2x$

$f'(x)=-3x^2+k^2=-3\left(x^2-\frac{k^2}{3}\right)$
 $=-3\left(x+\frac{k}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{k}{\sqrt{3}}\right)$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-\frac{k}{\sqrt{3}}$ 또는 $x=\frac{k}{\sqrt{3}}$

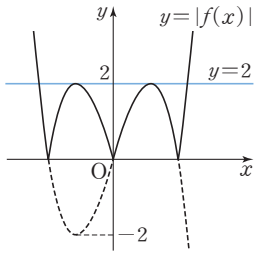
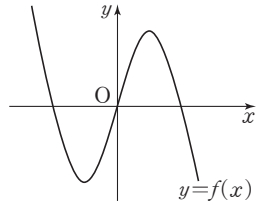
함수 $f(x)$ 는 $x=-\frac{k}{\sqrt{3}}$ 에서 극솟값 -2 를 갖고, $x=\frac{k}{\sqrt{3}}$ 에서 극댓값 2를 갖는다.

즉, $f\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right)=2$ 이므로 $-\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right)^3+k^2\times\frac{k}{\sqrt{3}}=2$

$k^3=3\sqrt{3} \therefore k=\sqrt{3}$ ($\because k$ 는 실수)

따라서 $f(x)=-x^3+3x$ 이므로

$f(2)=-8+6=-2$



016 답 6

$2x^3-3x^2-12x-k=0$ 에서

$2x^3-3x^2-12x=k$

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$ 라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

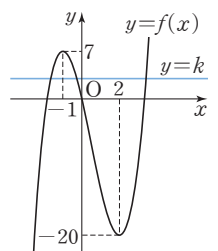
함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		7 극대		-20 극소	

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표가 한 개는 양수이고 다른 두 개는 음수이려면

$0 < k < 7$

따라서 정수 k 는 1, 2, 3, ..., 6의 6개이다.



017 답 -4

$$x^3 - 3x + a = 0 \text{에서 } x^3 - 3x = -a$$

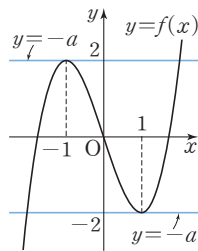
$$f(x) = x^3 - 3x \text{라 하면 } f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	2 극대	↘	-2 극소	↗

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-a$ 의 교점의 x 좌표가 한 개는 음수이고 한 개는 양수이려면 $-a=2$ 또는 $-a=-2$ 따라서 $a=-2$ 또는 $a=2$ 이므로 모든 실수 a 의 값의 곱은 $-2 \times 2 = -4$



018 답 $0 < k < 9$

$$4x^3 - 12x = x^4 - 2x^2 + k \text{에서 } -x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 12x = k$$

$$f(x) = -x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 12x \text{라 하면}$$

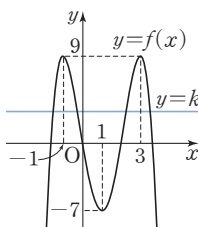
$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 + 4x - 12 = -4(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	9 극대	↘	-7 극소	↗	9 극대	↘

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표가 두 개는 음수이고 다른 두 개는 양수이려면 $0 < k < 9$



019 답 ②

$$x^3 - 3x^2 + 3 - k = 0 \text{에서 } x^3 - 3x^2 + 3 = k$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 \text{이라 하면 } f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

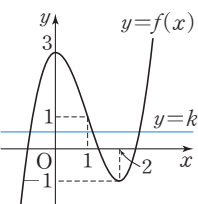
$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	3 극대	↘	-1 극소	↗

$f(1) = 1 - 3 + 3 = 1$ 이고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표가 두 개는 1보다 크고 한 개는 1보다 작으려면 $-1 < k < 1$

따라서 $\alpha = -1$, $\beta = 1$ 이므로 $\alpha\beta = -1$



020 답 $-5 < k < 27$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$f(-3)f(1) < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$(27-k)(-5-k) < 0$$

$$\therefore -5 < k < 27$$

021 답 -7

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 6 + k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x-1)(x-4)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$$f(1)f(4) = 0 \text{이어야 하므로}$$

$$(k+17)(k-10) = 0 \quad \therefore k = -17 \text{ 또는 } k = 10$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-17 + 10 = -7$$

022 답 $0 < a < \frac{1}{4}$

$$f(x) = x^3 - 3ax + a \text{에서 } f'(x) = 3x^2 - 3a$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른

두 실근을 가져야 하므로 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 36a > 0 \quad \therefore a > 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -\sqrt{a} \text{ 또는 } x = \sqrt{a}$$

삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 오직 한 실근만을 가지려면

$$f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a}) > 0 \text{이어야 하므로}$$

$$(2a\sqrt{a} + a)(-2a\sqrt{a} + a) > 0$$

$$a^2 - 4a^3 > 0, \quad a^2(1 - 4a) > 0$$

$$a^2 \neq 0 \text{이고 } 1 - 4a > 0 \quad \therefore a < 0 \text{ 또는 } 0 < a < \frac{1}{4} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$0 < a < \frac{1}{4}$$

023 답 1

주어진 곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식

$-x^3 + x^2 = -x + k$, 즉 $x^3 - x^2 - x + k = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 1$$

삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)f(1) = 0 \text{이어야 하므로}$$

$$\left(k + \frac{5}{27}\right)(k-1) = 0 \quad \therefore k = 1 (\because k > 0)$$

024 답 ③

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $h(x)=0$ 이 한 실근만을 가져야 한다.
주어진 그래프에서 $h'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $h(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	α	...	β	...
$h'(x)$	-	0	+	0	-
$h(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

삼차방정식 $h(x)=0$ 이 한 실근만을 가지려면
 $h(\alpha)h(\beta)>0$

025 답 ④

두 곡선 $y=-x^4+2x-k$, $y=x^2+8x+k$ 가 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $-x^4+2x-k=x^2+8x+k$, 즉 $x^4+x^2+6x=-2k$ 가 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^4+x^2+6x$ 라 하면

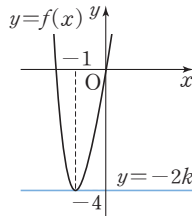
$$f'(x)=4x^3+2x+6=2(x+1)(2x^2-2x+3)$$

$$f'(x)=0인\ x의\ 값은\ x=-1\ (\because 2x^2-2x+3>0)$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-2k$ 가 오직 한 점에서 만나려면
 $-2k=-4 \quad \therefore k=2$



026 답 $3 \leq k < 10$

두 점 A(-5, 0), B(2, 7)을 지나는 직선의 방정식은
 $y=x+5$

곡선 $y=x^3+3x^2-8x+k$ 가 선분 AB와 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3+3x^2-8x+k=x+5$, 즉 $x^3+3x^2-9x-5=-k$ 가 $-5 \leq x \leq 2$ 에서 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x-5$ 라 하면

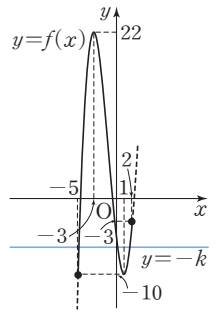
$$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

$$f'(x)=0인\ x의\ 값은\ x=-3\ 또는\ x=1$$

$-5 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-5	...	-3	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-10	$\nearrow$	22 극대	$\searrow$	-10 극소	$\nearrow$	-3

따라서 $-5 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나려면
 $-10 < -k \leq -3$
 $\therefore 3 \leq k < 10$



027 답 5

$$y=x^3+2에서\ y'=3x^2$$

점 (1, a)에서 곡선 $y=x^3+2$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, t^3+2) 라 하면 접선의 방정식은

$$y-(t^3+2)=3t^2(x-t)$$

이 직선이 점 (1, a)를 지나므로

$$a-(t^3+2)=3t^2(1-t)$$

$$\therefore 2t^3-3t^2+a-2=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 (1, a)에서 주어진 곡선에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ①이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$$f(t)=2t^3-3t^2+a-2라\ 하면$$

$$f'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$$

$$f'(t)=0인\ t의\ 값은\ t=0\ 또는\ t=1$$

삼차방정식 $f(t)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$$f(0)f(1)=0이어야\ 하므로$$

$$(a-2)(a-3)=0 \quad \therefore a=2\ 또는\ a=3$$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은

$$2+3=5$$

028 답 $a < -4$ 또는 $a > 0$

$$y=x^3+ax+1에서\ y'=3x^2+a$$

점 (2, 1)에서 곡선 $y=x^3+ax+1$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, t^3+at+1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$y-(t^3+at+1)=(3t^2+a)(x-t)$$

이 직선이 점 (2, 1)을 지나므로

$$1-(t^3+at+1)=(3t^2+a)(2-t)$$

$$\therefore t^3-3t^2-a=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 (2, 1)에서 주어진 곡선에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으면 t에 대한 삼차방정식 ①이 한 실근만을 가져야 한다.

$$f(t)=t^3-3t^2-a라\ 하면$$

$$f'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$$

$$f'(t)=0인\ t의\ 값은\ t=0\ 또는\ t=2$$

삼차방정식 $f(t)=0$ 이 한 실근만을 가지려면 $f(0)f(2)>0$ 이어야 하므로

$$-a(-a-4)>0$$

$$a(a+4)>0 \quad \therefore a < -4\ 또는\ a > 0$$

029 ③

$f(x)=x^4-6x^2-8x+10+a$ 라 하면

$$f'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$		$a+13$		$a-14$ 극소	

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(2)=a-14$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)>0$ 이 성립하려면

$$a-14>0 \quad \therefore a>14$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 15이다.

030 ② -32

$3x^4+4x^3-12x^2 \geq a$ 에서 $3x^4+4x^3-12x^2-a \geq 0$

$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2-a$ 라 하면

$$f'(x)=12x^3+12x^2-24x$$

$$=12x(x+2)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		$-a-32$ 극소		$-a$ 극대		$-a-5$ 극소	

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(-2)=-a-32$ 이므로 구간 $(-\infty, \infty)$, 즉 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-a-32 \geq 0 \quad \therefore a \leq -32$$

따라서 a 의 최댓값은 -32이다.

031 ② $k \leq -3$

$f(x) \leq g(x)$ 에서 $f(x)-g(x) \leq 0$

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$$h(x)=(-3x^4+16x^3-14x^2-24)-(4x^2-k)$$

$$=-3x^4+16x^3-18x^2-24+k$$

$$\therefore h'(x)=-12x^3+48x^2-36x$$

$$=-12x(x-1)(x-3)$$

$h'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $h(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...	3	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$h(x)$		$k-24$ 극대		$k-29$ 극소		$k+3$ 극대	

함수 $h(x)$ 의 최댓값은 $h(3)=k+3$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $h(x)=f(x)-g(x) \leq 0$ 이 성립하려면

$$k+3 \leq 0 \quad \therefore k \leq -3$$

032 ② -6

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 함수 $y=g(x)$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)>g(x)$, 즉

$$f(x)-g(x)>0$$
이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$$h(x)=(x^4+3x^2+4x)-(x^2-4x+a)$$

$$=x^4+2x^2+8x-a$$

$$\therefore h'(x)=4x^3+4x+8=4(x+1)(x^2-x+2)$$

$h'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ ($\because x$ 는 실수)

함수 $h(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$		$-a-5$ 극소	

함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $h(-1)=-a-5$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $h(x)=f(x)-g(x)>0$ 이 성립하려면

$$-a-5>0 \quad \therefore a<-5$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 -6이다.

033 ②

$f(x)=2x^3-9x^2-24x+k$ 라 하면

$$f'(x)=6x^2-18x-24=6(x+1)(x-4)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ ($\because x<0$)

$x<0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0
$f'(x)$	+	0	-	
$f(x)$		$k+13$ 극대		

$x<0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(-1)=k+13$ 이므로 $f(x) \leq 0$ 이 성립하려면

$$k+13 \leq 0 \quad \therefore k \leq -13$$

따라서 k 의 최댓값은 -13이다.

034 ② $k < -17$

$x^3-x^2+x+3 > 2x^2+x+k$ 에서 $x^3-3x^2+3-k > 0$

$f(x)=x^3-3x^2+3-k$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

$x \geq -2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	0	...	2	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-k-17$		$-k+3$ 극대		$-k-1$ 극소	

$x \geq -2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(2)=-k-17$ 이므로 $f(x)>0$ 이 성립하려면

$$-k-17>0 \quad \therefore k<-17$$

035 **답** $k > 2$

$f(x) > g(x)$ 에서 $f(x) - g(x) > 0$

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면

$$h(x) = (2x^3 + x + k) - (3x^2 + x + 1)$$

$$= 2x^3 - 3x^2 + k - 1$$

$$\therefore h'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

$h'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x=1$ ($\because x > 0$)

$x > 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$		\	$k-2$ 극소	/

$x > 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $h(1) = k-2$ 이므로

$h(x) = f(x) - g(x) > 0$ 이 성립하려면

$$k-2 > 0 \quad \therefore k > 2$$

036 **답** 5

$$|x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + k| \leq 10 \text{에서}$$

$$-10 \leq x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + k \leq 10$$

$f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + k$ 라 하면

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 = 4(x+1)(x-1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$ ($\because 0 \leq x \leq 3$)

$0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	k	/	$k+7$ 극대	\	$k-9$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(3) = k-9$, 최댓값은

$f(1) = k+7$ 이므로 $-10 \leq f(x) \leq 10$ 이 성립하려면

$$k-9 \geq -10, k+7 \leq 10$$

$$\therefore -1 \leq k \leq 3$$

따라서 정수 k 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

037 **답** $k \geq 8$

$$x^3 + 16x < 8x^2 + k \text{에서 } x^3 - 8x^2 + 16x - k < 0$$

$f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - k$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 16x + 16 = (3x-4)(x-4)$$

$2 < x < 4$ 일 때 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(2, 4)$ 에서 감소한다.

즉, $2 < x < 4$ 일 때 $f(x) < 0$ 이 성립하려면 $f(2) \leq 0$ 이어야 하므로

$$8 - k \leq 0 \quad \therefore k \geq 8$$

038 **답** ③

$f(x) = x^3 + 5x - a(a-1)$ 이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 5$$

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(1, \infty)$ 에서 증가한다.

즉, $x > 1$ 일 때 $f(x) > 0$ 이 성립하려면 $f(1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$1 + 5 - a(a-1) \geq 0, a^2 - a - 6 \leq 0$$

$$(a+2)(a-3) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq a \leq 3$$

따라서 $M=3, m=-2$ 이므로

$$M+m=3+(-2)=1$$

039 **답** 4

$$x^n + n(n-3) > nx + 1 \text{에서 } x^n - nx + n(n-3) - 1 > 0$$

$f(x) = x^n - nx + n(n-3) - 1$ 이라 하면

$$f'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$$

이때 $n \geq 2$ 이므로 $x > 1$ 일 때 $f'(x) > 0$ 이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(1, \infty)$ 에서 증가한다.

즉, $x > 1$ 일 때 $f(x) > 0$ 이 성립하려면 $f(1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$1 - n + n(n-3) - 1 \geq 0, n^2 - 4n \geq 0$$

$$n(n-4) \geq 0 \quad \therefore n \geq 4 \quad (\because n \geq 2)$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

040 **답** 2

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

(가)에서 $f(0) = f'(0)$ 이므로 $c = b$

$$g(x) = f(x) - f'(x)$$

$$= (x^3 + ax^2 + bx + c) - (3x^2 + 2ax + b)$$

$$= x^3 + (a-3)x^2 + (b-2a)x$$

$$\therefore g'(x) = 3x^2 + 2(a-3)x + (b-2a)$$

이때 $g(0) = 0$ 이고 (나)에서 $x \geq -1$ 인 모든

실수 x 에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$, 즉

$g(x) \geq 0$ 이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의

개형은 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉, 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이므로

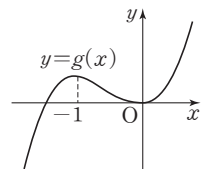
$$g'(0) = 0 \text{에서}$$

$$b - 2a = 0 \quad \therefore b = 2a$$

$g(x) = x^3 + (a-3)x^2$ 이고 (나)에서 $g(-1) \geq 0$ 이므로

$$-1 + a - 3 \geq 0 \quad \therefore a \geq 4$$

따라서 $g(1) = a - 2$ 이고 $a \geq 4$ 이므로 $g(1)$ 의 최솟값은 2이다.



041 **답** 18

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 6t - 10$$

점 P의 속도가 2이면

$$6t^2 - 6t - 10 = 2, t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t+1)(t-2) = 0 \quad \therefore t = 2 \quad (\because t > 0)$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 6$$

따라서 $t=2$ 일 때 점 P의 가속도는

$$12 \times 2 - 6 = 18$$

042 [답] ④

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t - 9$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$3t^2 - 6t - 9 = 0, \quad t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t+1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 3 \quad (\because t > 0)$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 6$$

따라서 $t=3$ 일 때 점 P의 가속도는

$$6 \times 3 - 6 = 12$$

043 [답] -40 m/s

로켓이 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로

$$35 + 30t - 5t^2 = 0, \quad t^2 - 6t - 7 = 0$$

$$(t+1)(t-7) = 0 \quad \therefore t = 7 \quad (\because t > 0)$$

로켓의 t 초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = 30 - 10t$$

따라서 $t=7$ 일 때 로켓의 속도는

$$30 - 10 \times 7 = -40 \text{ (m/s)}$$

044 [답] ②

속도는 $x'(t)$ 이므로 위치 $x(t)$ 의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

① $x'(a)=0$ 이므로 $t=a$ 에서 점 P의 속도는 0이다.

② $x'(c)=0$ 이므로 $t=c$ 에서 점 P의 속도는 0이다.

③ $x'(t)=0$ 이고 그 좌우에서 $x'(t)$ 의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 $0 < t < d$ 에서 운동 방향이 바뀌는 시각은 $t=a$ 또는 $t=c$ 이다.

④ $b < t < c$ 에서 $x'(t) < 0$ 이므로 점 P는 음의 방향으로 움직인다.

⑤ $0 < t < e$ 에서 $t=b, t=d$ 일 때 $x(t)=0$ 이므로 점 P는 원점을 두 번 지난다.

045 [답] 2 m/s

학생이 2 m/s의 속도로 움직이므로 t 초 동안 움직이는 거리는 $2t$ m

그림자 끝이 t 초 동안 움직이는 거리

를 x m라 하면 오른쪽 그림에서

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ 이므로

$$3.4 : x = 1.7 : (x - 2t)$$

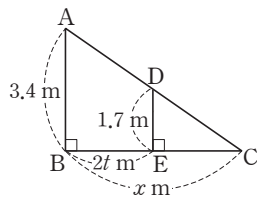
$$1.7x = 3.4x - 6.8t$$

$$\therefore x = 4t$$

그림자의 길이를 l m라 하면 $l = \overline{EC}$ 이므로

$$l = 4t - 2t = 2t \quad \therefore \frac{dl}{dt} = 2$$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 2 m/s이다.



046 [답] $13.5\pi \text{ m}^2/\text{s}$

t 초 후의 원의 반지름의 길이는 $1.5t$ m이므로 원의 넓이를 $S \text{ m}^2$ 라 하면

$$S = \pi(1.5t)^2 = 2.25\pi t^2$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = 4.5\pi t$$

따라서 $t=3$ 에서 원의 넓이의 변화율은

$$4.5\pi \times 3 = 13.5\pi \text{ (m}^2/\text{s)}$$

047 [답] $18\pi \text{ cm}^3/\text{s}$

그릇에 담긴 물의 높이를 h cm, 수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$$r : h = 10 : 20 \quad \therefore r = \frac{1}{2}h$$

이때 t 초 동안 수면의 높이는 $2t$ cm만큼

상승하므로 $h=2t$

물의 부피를 $V \text{ cm}^3$ 라 하면

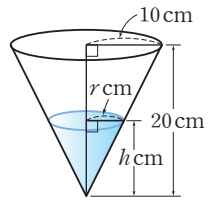
$$V = \frac{\pi}{3} \times \left(\frac{1}{2}h\right)^2 \times h = \frac{\pi}{12}h^3$$

$$= \frac{\pi}{12} \times (2t)^3 = \frac{2}{3}\pi t^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = 2\pi t^2$$

따라서 $h=6$ 일 때 $6=2t$ 에서 $t=3$ 이므로 물의 부피의 변화율은

$$2\pi \times 3^2 = 18\pi \text{ (cm}^3/\text{s)}$$



048 [답] ④

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 2t^2 - 2t$$

점 P의 속도가 4이면

$$2t^2 - 2t = 4, \quad t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t+1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 2 \quad (\because t > 0)$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 4t - 2$$

따라서 $t=2$ 일 때 점 P의 가속도는

$$4 \times 2 - 2 = 6$$

049 [답] -21

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -3t^2 + 6t, \quad a = \frac{dv}{dt} = -6t + 6$$

$t=3$ 에서의 점 P의 속도와 가속도는

$$v = -3 \times 3^2 + 6 \times 3 = -9, \quad a = -6 \times 3 + 6 = -12$$

따라서 구하는 합은

$$-9 + (-12) = -21$$

050 답 1

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -12t^2 + 24t = -12(t-1)^2 + 12$$

따라서 $t=1$ 일 때 점 P의 속도가 최대이다.

051 답 -4

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t + 2$$

점 P의 속도가 -1이면

$$3t^2 - 6t + 2 = -1, t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0 \quad \therefore t=1$$

시각 $t=1$ 에서의 점 P의 위치가 -4이므로

$$1 - 3 + 2 + k = -4 \quad \therefore k = -4$$

052 답 -2

점 P가 원점을 지날 때는 $x=0$ 일 때이므로

$$t^3 - 4t^2 + 3t = 0, t(t-1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=3 (\because t>0)$$

즉, 점 P가 출발 후 처음으로 다시 원점을 지나는 시각은 $t=1$ 이다.

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 8t + 3, a = \frac{dv}{dt} = 6t - 8$$

따라서 $t=1$ 일 때 점 P의 가속도는

$$6 \times 1 - 8 = -2$$

053 답 ⑤

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = t^2 + 9, v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = 6t$$

두 점 P, Q의 속도가 같아질 때는 $v_P = v_Q$ 이므로

$$t^2 + 9 = 6t, t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$(t-3)^2 = 0 \quad \therefore t=3$$

$t=3$ 에서의 두 점 P, Q의 위치는

$$x_P = \frac{1}{3} \times 3^3 + 9 \times 3 - 6 = 30, x_Q = 3 \times 3^2 - 7 = 20$$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$30 - 20 = 10$$

054 답 ㄱ, ㄴ

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 18t + 24$$

점 P의 속도가 0이면 $3t^2 - 18t + 24 = 0$

$$t^2 - 6t + 8 = 0, (t-2)(t-4) = 0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=4$$

$$\therefore \alpha=2, \beta=4$$

$$\therefore \alpha + \beta = 6$$

ㄴ. 시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 18$$

$$t=4\text{에서의 점 P의 가속도는 } 6 \times 4 - 18 = 6$$

$$\therefore t=2\text{에서의 점 P의 위치는 } 2^3 - 9 \times 2^2 + 24 \times 2 + 1 = 21$$

$$t=4\text{에서의 점 P의 위치는 } 4^3 - 9 \times 4^2 + 24 \times 4 + 1 = 17$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 위치가 $t=4$ 에서의 점 P의 위치보다 원점에서 더 멀다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

055 답 15

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = 4t^3 - 24t^2 + 36t, v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = m$$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간이 세 번 있으려면 $v_P = v_Q$ 를 만족시키는 양수 t 가 세 개 존재해야 하므로 방정식

$$4t^3 - 24t^2 + 36t = m \text{이 서로 다른 세 개의 양의 근을 가져야 한다.}$$

$$f(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t \text{라 하면}$$

$$f'(t) = 12t^2 - 48t + 36 = 12(t-1)(t-3)$$

$$f'(t) = 0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=1 \text{ 또는 } t=3$$

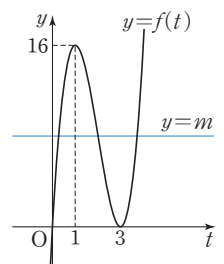
$t>0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	1	...	3	...
$f'(t)$		+	0	-	0	+
$f(t)$		↗	16 극대	↘	0 극소	↗

함수 $y=f(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(t)$ 와 직선 $y=m$ 의 교점의 x 좌표가 세 개 모두 양수이려면

$$0 < m < 16$$

따라서 정수 m 은 1, 2, 3, ..., 15의 15개 이다.



056 답 12

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 12t$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$6t^2 - 12t = 0, t(t-2) = 0 \quad \therefore t=2 (\because t>0)$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 12$$

따라서 $t=2$ 일 때 점 P의 가속도는

$$12 \times 2 - 12 = 12$$

057 답 ③

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 18t + 15$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$3t^2 - 18t + 15 = 0, t^2 - 6t + 5 = 0, (t-1)(t-5) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=5$$

따라서 $\alpha=1, \beta=5$ 이므로 $\beta - \alpha = 5 - 1 = 4$

058 [답] $2 < t < 3$

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = 2t - 6, \quad v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = 4t - 8$$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호가 서로 반대이므로 $v_P v_Q < 0$ 에서

$$(2t - 6)(4t - 8) < 0, \quad 8(t - 2)(t - 3) < 0$$

$$\therefore 2 < t < 3$$

059 [답] 64 m

제동을 건 지 t 초 후의 열차의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 32 - 8t$$

열차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$$32 - 8t = 0 \quad \therefore t = 4$$

따라서 4초 동안 열차가 움직인 거리는

$$32 \times 4 - 4 \times 4^2 = 64(\text{m})$$

060 [답] ③

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 2mt + n$$

$t=1$ 일 때 점 P는 운동 방향을 바꾸므로

$$3 + 2m + n = 0$$

$$\therefore 2m + n = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$t=1$ 일 때 점 P의 위치는 4이므로

$$1 + m + n = 4$$

$$\therefore m + n = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $m = -6, n = 9$

$$\therefore v = 3t^2 - 12t + 9$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$3t^2 - 12t + 9 = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0, \quad (t-1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

따라서 점 P가 $t=1$ 이외에 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=3$ 이다.

시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

따라서 $t=3$ 일 때 점 P의 가속도는

$$6 \times 3 - 12 = 6$$

061 [답] ②

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t + a$$

점 P의 운동 방향이 바뀌지 않으려면 $v(t) \geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $3t^2 - 6t + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - 3a \leq 0, \quad 3a \geq 9$$

$$\therefore a \geq 3$$

따라서 a 의 최솟값은 3이다.

062 [답] 64

선분 AB의 중점 M의 좌표를 x 라 하면

$$x = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{(t^3 - 8t^2 + 12t) + (t^3 - 10t^2 + 36t)}{2} \\ = t^3 - 9t^2 + 24t$$

시각 t 에서의 점 M의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 18t + 24$$

점 M이 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$3t^2 - 18t + 24 = 0, \quad t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$(t-2)(t-4) = 0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=4$$

즉, 점 M이 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=4$ 이므로 그

때의 두 점 A, B의 좌표는 각각

$$x_A = 4^3 - 8 \times 4^2 + 12 \times 4 = -16$$

$$x_B = 4^3 - 10 \times 4^2 + 36 \times 4 = 48$$

따라서 선분 AB의 길이는

$$48 - (-16) = 64$$

063 [답] ①

물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로

$$25t - 5t^2 = 0, \quad t(t-5) = 0 \quad \therefore t=5 \quad (\because t > 0)$$

t 초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = 25 - 10t$$

따라서 $t=5$ 일 때 물체의 속도는

$$25 - 10 \times 5 = -25(\text{m/s})$$

064 [답] 47

t 초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = 20 - 10t$$

물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$$20 - 10t = 0 \quad \therefore t=2$$

$t=2$ 일 때 물체의 높이는

$$25 + 20 \times 2 - 5 \times 2^2 = 45(\text{m})$$

따라서 $a=2, b=45$ 이므로

$$a+b=2+45=47$$

065 [답] 25

물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은 3초이고 그때의

높이가 85 m이므로

$$40 + 3a + 9b = 85 \quad \therefore a + 3b = 15 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

t 초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = a + 2bt$$

물체가 최고 높이에 도달했을 때의 속도는 0이므로

$$a + 6b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=30, b=-5$

$$\therefore a+b=30+(-5)=25$$

066 답 -10 m/s

공이 경사면과 처음으로 충돌하는 순간의 공의 중심의 높이를 x m라 하면 삼각형 OAB에서

$$\sin 30^\circ = \frac{0.5}{x} = \frac{1}{2} \quad \therefore x=1$$

즉, 이 공이 경사면과 처음으로 충돌하는 순간의 높이는 $h=1$ 일 때이므로

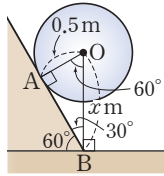
$$6-5t^2=1, t^2=1 \quad \therefore t=1 (\because t>0)$$

t 초 후의 공의 중심의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = -10t$$

따라서 $t=1$ 일 때 공의 속도는

$$-10 \times 1 = -10 \text{ (m/s)}$$



067 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

속도는 $x'(t)$ 이므로 위치 $x(t)$ 의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

ㄱ. $x'(4)=0$ 이므로 $t=4$ 에서 점 P의 속도는 0이다.

ㄴ. $x'(1)>0, x'(2)=0$ 이므로 점 P의 $t=1$ 에서의 속도는 $t=2$ 에서의 속도보다 크다.

ㄷ. $x'(t)=0$ 이고 그 좌우에서 $x'(t)$ 의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 $0<t<6$ 에서 운동 방향이 바뀌는 시각은 $t=2, t=4$ 이다.

따라서 $t=3$ 에서 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다.

ㄹ. 출발한 후 점 P는 $t=2, t=4$ 에서 운동 방향을 두 번 바꾸므로 출발할 때와 반대 방향으로 움직인 총시간은 $4-2=2$ (초)이다.

ㅁ. $t=2$ 에서의 점 P의 위치는 2이고, $t=4$ 에서의 점 P의 위치는 -1이므로 점 P의 위치의 변화량은 -3이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

068 답 ⑤

시각 t 에서의 가속도는 $v'(t)$ 이므로 속도 $v(t)$ 의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

① $v'(a)=0$ 이므로 $t=a$ 에서 점 P의 가속도는 0이다.

② $v'(b)>0$ 이므로 $t=b$ 에서 점 P의 가속도는 양의 값이다.

③ $v(b)<0, v(d)>0$ 이므로 $t=b$ 일 때와 $t=d$ 일 때 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.

④ $c<t<d$ 에서 점 P의 속도는 증가한다.

⑤ $v(t)=0$ 이고 그 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 $0<t<e$ 에서 운동 방향이 바뀌는 시각은 $t=c$ 이다. 즉, 점 P는 $0<t<e$ 에서 운동 방향을 한 번 바꾼다.

069 답 3번

$x'(t)=0$ 이고 그 좌우에서 $x'(t)$ 의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 $0<t<e$ 에서 운동 방향이 바뀌는 시각은 $t=a, t=c, t=d$ 이다.

따라서 점 P는 운동 방향을 3번 바꾼다.

070 답 1 m/s

사람이 1.5 m/s의 속도로 움직이므로

t 초 동안 움직이는 거리는 $1.5t$ m

그림자 끝이 t 초 동안 움직이는 거리를 x m라 하면 오른쪽 그림에서

$\triangle ACB \sim \triangle DCE$ 이므로

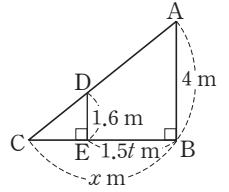
$$4 : x = 1.6 : (x - 1.5t)$$

$$1.6x = 4x - 6t \quad \therefore x = 2.5t$$

그림자의 길이를 l m라 하면 $l = \overline{CE}$ 이므로

$$l = 2.5t - 1.5t = t \quad \therefore \frac{dl}{dt} = 1$$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 1 m/s이다.



071 답 ④

선분 AB의 길이를 l 이라 하면

$$l = |t^3 + t^2 + t - (t^2 - 2t)| = t^3 + 3t (\because t > 0)$$

$$\therefore \frac{dl}{dt} = 3t^2 + 3$$

따라서 $t=2$ 에서 선분 AB의 길이의 변화율은

$$3 \times 2^2 + 3 = 15$$

072 답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

t 초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(t, 0), (0, 2t)$

두 점 A, B를 1:2로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 0 + 2 \times t}{1+2}, \frac{1 \times 2t + 2 \times 0}{1+2} \right) \quad \therefore \left(\frac{2t}{3}, \frac{2t}{3} \right)$$

선분 OP의 길이를 l 이라 하면

$$l = \sqrt{\left(\frac{2t}{3} \right)^2 + \left(\frac{2t}{3} \right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}t (\because t > 0)$$

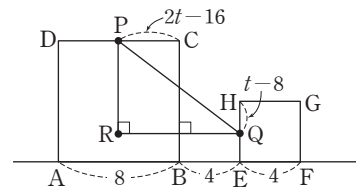
따라서 선분 OP의 길이의 변화율은

$$\frac{dl}{dt} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

073 답 44

$8 < t \leq 12$ 일 때 점 P는 $\overline{CD}$ 위를 움직이므로 $\overline{CP} = 2t - 16$ 이고,

점 Q는 $\overline{HE}$ 위를 움직이므로 $\overline{HQ} = t - 8$



위의 그림에서

$$\overline{PR} = 4 + (t - 8) = t - 4, \quad \overline{RQ} = (2t - 16) + 4 = 2t - 12$$

삼각형 PRQ에서

$$\overline{PQ}^2 = (t - 4)^2 + (2t - 12)^2 = 5t^2 - 56t + 160$$

$$\therefore \frac{d\overline{PQ}^2}{dt} = 10t - 56$$

따라서 $t=10$ 에서 $\overline{PQ}^2$ 의 변화율은

$$10 \times 10 - 56 = 44$$

074 ③ 3.2

t 초 후의 풍선의 반지름의 길이는 $(1+0.2t)$ cm이므로 풍선의 겉넓이를 S cm²라 하면

$$S=4\pi(1+0.2t)^2$$

$$\therefore \frac{dS}{dt}=4\pi \times 2(1+0.2t) \times 0.2=1.6\pi(1+0.2t)$$

따라서 $t=5$ 에서 풍선의 겉넓이의 변화율은

$$1.6\pi(1+0.2 \times 5)=3.2\pi(\text{cm}^2/\text{s}) \quad \therefore a=3.2$$

075 ④ ①

t 초 후의 직사각형의 가로의 길이는 $(10+2t)$ cm, 세로의 길이는 $(10-t)$ cm이므로 $0 < t < 10$

직사각형의 넓이를 S cm²라 하면

$$S=(10+2t)(10-t)=-2t^2+10t+100$$

$$\therefore \frac{dS}{dt}=-4t+10$$

직사각형의 넓이가 88 cm²가 되었을 때의 시각은

$$-2t^2+10t+100=88, \quad t^2-5t-6=0$$

$$(t+1)(t-6)=0 \quad \therefore t=6 \quad (\because 0 < t < 10)$$

따라서 $t=6$ 에서 직사각형의 넓이의 변화율은

$$-4 \times 6 + 10 = -14(\text{cm}^2/\text{s})$$

076 ④ 76

점 P가 출발한 지 t 초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 각각

$$(2t, 0), (0, 3(t-3)) \quad (t \geq 3)$$

정사각형 PQRS의 넓이를 S 라 하면

$$S=\overline{PQ}^2=(0-2t)^2+(3t-9)^2=13t^2-54t+81$$

$$\therefore \frac{dS}{dt}=26t-54$$

따라서 $t=5$ 에서 정사각형 PQRS의 넓이의 변화율은

$$26 \times 5 - 54 = 76$$

077 ④ 20π cm²/s

t 초 후의 수면의 높이는 t cm이므로

수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$$r=\sqrt{20^2-(20-t)^2}=\sqrt{-t^2+40t}$$

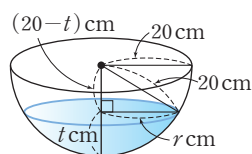
수면의 넓이를 S cm²라 하면

$$S=\pi(-t^2+40t)$$

$$\therefore \frac{dS}{dt}=\pi(-2t+40)$$

따라서 $t=10$ 에서 수면의 넓이의 변화율은

$$\pi(-2 \times 10 + 40) = 20\pi(\text{cm}^2/\text{s})$$

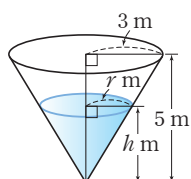


078 ④ $\frac{9}{2}\pi$ m³/s

그릇에 담긴 물의 높이를 h m, 수면의 반지름의 길이를 r m라 하면

$$r:h=3:5 \quad \therefore r=\frac{3}{5}h$$

이때 t 초 동안 수면의 높이는 $0.5t$ m만큼 상승하므로 $h=0.5t$



물의 부피를 V m³라 하면

$$V=\frac{\pi}{3} \times \left(\frac{3}{5}h\right)^2 \times h=\frac{3}{25}\pi h^3=\frac{3}{25}\pi \times (0.5t)^3=\frac{3}{200}\pi t^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{9}{200}\pi t^2$$

물이 가득 차는 순간의 수면의 높이는 5 m이므로

$$0.5t=5 \quad \therefore t=10$$

따라서 $t=10$ 에서 물의 부피의 변화율은

$$\frac{9}{200}\pi \times 10^2 = \frac{9}{2}\pi(\text{m}^3/\text{s})$$

079 ④ ⑤

t 초 후의 구의 반지름의 길이는 $(3+2t)$ cm이므로 구의 부피를

V cm³라 하면

$$V=\frac{4}{3}\pi(3+2t)^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi \times 3(3+2t)^2 \times 2=8\pi(3+2t)^2$$

따라서 $t=3$ 에서 구의 부피의 변화율은

$$8\pi(3+2 \times 3)^2=648\pi(\text{cm}^3/\text{s})$$

080 ④ $\frac{88}{3}$ cm³/s

t 초 후의 정사각뿔의 밑면의 한 변의 길이는 $(2+t)$ cm, 높이는

$(3+2t)$ cm이므로 정사각뿔의 부피를 V cm³라 하면

$$V=\frac{1}{3}(2+t)^2(3+2t)=\frac{1}{3}(2t^3+11t^2+20t+12)$$

$$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{1}{3}(6t^2+22t+20)$$

따라서 $t=2$ 에서 정사각뿔의 부피의 변화율은

$$\frac{1}{3}(6 \times 2^2 + 22 \times 2 + 20) = \frac{88}{3}(\text{cm}^3/\text{s})$$

081 ④ 6

$$3x^4+4x^3-24x^2-48x-k=0 \text{에서}$$

$$3x^4+4x^3-24x^2-48x=k$$

$$f(x)=3x^4+4x^3-24x^2-48x \text{라 하면}$$

$$f'(x)=12x^3+12x^2-48x-48=12(x+2)(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-2 \text{ 또는 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

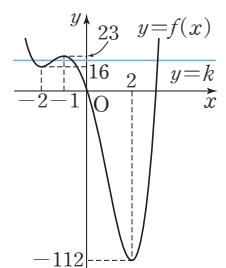
함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	16 극소	\	23 극대	\	-112 극소	\

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로

$$16 < k < 23$$

따라서 정수 k 는 17, 18, 19, 20, 21, 22의 6개이다.



082 답 9

$f(x)=2x^3-9x^2+12x-2$ 에서

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$$

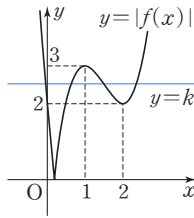
$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	3 극대	$\searrow$	2 극소	$\nearrow$

함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 방정식 $|f(x)|=k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같으므로 함수 $g(k)$ 는 $k=0$ 일 때 1, $0<k<2$ 또는 $k>3$ 일 때 2, $k=2$ 또는 $k=3$ 일 때 3, $2<k<3$ 일 때 4이다.

$$\therefore g(0)+g(1)+g(2)+g(3)=1+2+3+3=9$$



083 답 3

$(x+2)(x-1)^2-k=0$ 에서

$$x^3-3x+2=k$$

$f(x)=x^3-3x+2$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

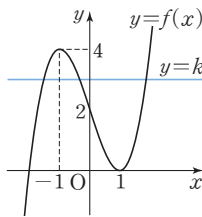
함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	4 극대	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표가 한 개는 양수이고 다른 두 개는 음수이려면

$$2 < k < 4$$

따라서 정수 k 의 값은 3이다.



084 답 ③

$f(x)=2x^3-6x^2-18x-k$ 라 하면

$$f'(x)=6x^2-12x-18=6(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

$$f(-1)f(3)=0$$

$$(10-k)(-54-k)=0$$

$$\therefore k=10 \quad (\because k>0)$$

085 답 $-17 < k < 15$

주어진 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식

$$x^3+2x^2-5x-12=-x^2+4x+k, \text{ 즉 } x^3+3x^2-9x-12-k=0$$

이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x-12-k$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$f(-3)f(1)<0$$

$$(15-k)(-17-k)<0$$

$$\therefore -17 < k < 15$$

086 답 ④

$y=x^3-6x^2-5x+10$ 에서 $y'=3x^2-12x-5$

점 $(0, n)$ 에서 곡선 $y=x^3-6x^2-5x+10$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t, t^3-6t^2-5t+10)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$y-(t^3-6t^2-5t+10)=(3t^2-12t-5)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2-12t-5)x-2t^3+6t^2+10$$

이 직선이 점 $(0, n)$ 을 지나므로

$$n=-2t^3+6t^2+10$$

$g(t)=-2t^3+6t^2+10$ 이라 하면

$$g'(t)=-6t^2+12t=-6t(t-2)$$

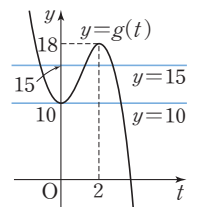
$g'(t)=0$ 인 t 의 값은 $t=0$ 또는 $t=2$

함수 $g(t)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	0	...	2	...
$g'(t)$	-	0	+	0	-
$g(t)$	$\searrow$	10 극소	$\nearrow$	18 극대	$\searrow$

함수 $y=g(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $f(n)$ 의 값은 곡선 $y=g(t)$ 와 직선 $y=n$ 의 교점의 개수와 같으므로

$$f(10)+f(15)=2+3=5$$



087 답 $6 < a < 8$

$f(x)=x^4-32x-a^2+14a$ 라 하면

$$f'(x)=4x^3-32=4(x-2)(x^2+2x+4)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=2$ ($\because x$ 는 실수)

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-a^2+14a-48$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(2)=-a^2+14a-48$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)>0$ 이 성립하려면

$$-a^2+14a-48>0, \quad a^2-14a+48<0$$

$$(a-6)(a-8)<0 \quad \therefore 6 < a < 8$$

088 ②

$$f(x) = x^3 - 3x + k^2 + k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	1	...	2
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	k^2+k+2	$\searrow$	k^2+k-2 극소	$\nearrow$	k^2+k+2

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(1) = k^2 + k - 2$, 최댓값은 $f(-1) = f(2) = k^2 + k + 2$ 이므로 $0 \leq f(x) \leq 4$ 가 성립하려면 $k^2 + k - 2 \geq 0$, $k^2 + k + 2 \leq 4$

$$\text{즉, } k^2 + k - 2 = 0 \text{이므로 } (k+2)(k-1) = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 1$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-2 + 1 = -1$$

089 ⑦

구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 함수 $y = g(x)$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 $f(x) > g(x)$, 즉 $f(x) - g(x) > 0$ 이어야 한다.

$$h(x) = f(x) - g(x) \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= (x^4 + 2x^2 - 6x + a) - (-x^2 + 4x) \\ &= x^4 + 3x^2 - 10x + a \end{aligned}$$

$$\therefore h'(x) = 4x^3 + 6x - 10 = 2(x-1)(2x^2 + 2x + 5)$$

$$h'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1 \text{ (}\because x \text{는 실수)}$$

구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	a	$\searrow$	$a-6$ 극소	$\nearrow$	$a+8$

구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $h(1) = a - 6$ 이므로

$$h(x) = f(x) - g(x) > 0 \text{이 성립하려면}$$

$$a - 6 > 0 \quad \therefore a > 6$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 7이다.

090 ③ -7

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - k + 1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

$2 < x < 3$ 일 때, $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(2, 3)$ 에서 증가한다.

$$\text{즉, } 2 < x < 3 \text{일 때 } f(x) > 0 \text{이 성립하려면 } f(2) \geq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$-k - 7 \geq 0 \quad \therefore k \leq -7$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -7이다.

091 ③ $-\frac{1}{4}$

$$f(x) = x^3 + 3kx^2 + 1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6kx = 3x(x+2k)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 0 \text{ 또는 } x = -2k$$

(i) $k > 0$ 일 때

$$x \geq k \text{에서 } f'(x) > 0 \text{이므로 함수 } f(x) \text{는 증가한다.}$$

$$\text{이때 } f(0) = 1 \text{이므로 } x \geq k \text{일 때 } f(x) \geq 0, \text{ 즉 부등식}$$

$$x^3 + 3kx^2 + 1 \geq 0 \text{이 성립한다.}$$

$$\therefore k^3 > 0$$

(ii) $k = 0$ 일 때

$$x \geq 0 \text{에서 } f'(x) > 0 \text{이므로 함수 } f(x) \text{는 증가한다.}$$

$$\text{이때 } f(0) = 1 \text{이므로 } x \geq k \text{일 때 } f(x) \geq 0, \text{ 즉 부등식}$$

$$x^3 + 3kx^2 + 1 \geq 0 \text{이 성립한다.}$$

$$\therefore k^3 = 0$$

(iii) $k < 0$ 일 때

$x \geq k$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	k	...	0	...	$-2k$	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$4k^3+1$	$\nearrow$	1 극대	$\searrow$	$4k^3+1$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(k) = f(-2k) = 4k^3 + 1$ 이므로 $x \geq k$ 일 때 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$4k^3 + 1 \geq 0 \quad \therefore k^3 \geq -\frac{1}{4}$$

$$\text{그런데 } k < 0 \text{이므로 } -\frac{1}{4} \leq k^3 < 0$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } k^3 \geq -\frac{1}{4}$$

따라서 k^3 의 최솟값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

092 ③

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -12t^2 + 24t + 5$$

점 P의 속도가 17이면

$$-12t^2 + 24t + 5 = 17, \quad t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0 \quad \therefore t = 1$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = -24t + 24$$

따라서 $t = 1$ 일 때 점 P의 가속도는

$$-24 \times 1 + 24 = 0$$

093 ⑥

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = 4t^3 + 2kt, \quad v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = 8t$$

두 점 P, Q의 가속도를 각각 a_P , a_Q 라 하면

$$a_P = \frac{dv_P}{dt} = 12t^2 + 2k, \quad a_Q = \frac{dv_Q}{dt} = 8$$

두 점 P, Q의 가속도가 같아질 때는 $a_P = a_Q$ 이므로

$$12t^2 + 2k = 8, \quad 12t^2 = 8 - 2k$$

$t > 0$ 에서 $12t^2 > 0$ 이므로 두 점 P, Q의 가속도가 같게 되는 순간이 존재하려면

$$8 - 2k > 0 \quad \therefore k < 4$$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$$1 + 2 + 3 = 6$$

094 답 ⑤

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 18t + 15$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$3t^2 - 18t + 15 = 0$$

$$t^2 - 6t + 5 = 0, \quad (t-1)(t-5) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 5$$

즉, $t = 5$ 일 때 점 P가 두 번째로 운동 방향을 바꾼다.

시간 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 18$$

따라서 $t = 5$ 일 때 점 P의 가속도는

$$6 \times 5 - 18 = 12$$

095 답 ②

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 18t + 12$$

ㄱ. $t = 0$ 일 때 점 P의 속도는 12이다.

ㄴ. 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$6t^2 - 18t + 12 = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0, \quad (t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 2$$

따라서 점 P는 $t = 1, t = 2$ 에서 운동 방향을 바꾼다.

ㄷ. 시간 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 18$$

따라서 $t = 2$ 일 때 점 P의 가속도는

$$12 \times 2 - 18 = 6$$

ㄹ. 점 P가 원점을 지나면 $x = 0$ 이므로

$$2t^3 - 9t^2 + 12t = 0, \quad t(2t^2 - 9t + 12) = 0$$

$$t > 0 \text{이므로 해가 없다.}$$

따라서 출발 후 점 P는 원점을 다시 지나지 않는다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

096 답 -15 m/s

물체가 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로

$$10 + 5t - 5t^2 = 0, \quad t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t+1)(t-2) = 0 \quad \therefore t = 2 \quad (\because t > 0)$$

물체의 t 초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dh}{dt} = 5 - 10t$$

따라서 $t = 2$ 일 때 물체의 속도는

$$5 - 10 \times 2 = -15 \text{ (m/s)}$$

097 답 ②

속도는 $x'(t)$ 이므로 위치 $x(t)$ 의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

ㄱ. $x'(a) = 0$ 이므로 $t = a$ 에서 점 P의 속도는 0이다.

ㄴ. $x'(c) = 0$ 이므로 $t = c$ 에서 점 P의 속도는 0이다.

ㄷ. $x'(t) = 0$ 이고 그 좌우에서 $x'(t)$ 의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 $0 < t < e$ 에서 운동 방향이 바뀌는 시간은 $t = a, t = c, t = d$ 이다.

따라서 점 P는 운동 방향을 3번 바꾼다.

ㄹ. 출발 후 점 P는 $t = b, t = d$ 에서 원점을 지난다.

따라서 점 P는 출발 후 원점을 두 번 지난다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

098 답 36

t 초 후의 점 P의 좌표는 $(2t, 0)$ 이므로 점 Q의 좌표는

$$(2t, 8t^3 - 16t^2 + 4t + 5)$$

선분 PQ의 길이를 l 이라 하면

$$l = 8t^3 - 16t^2 + 4t + 5$$

$$\therefore \frac{dl}{dt} = 24t^2 - 32t + 4$$

따라서 $t = 2$ 에서 선분 PQ의 길이의 변화율은

$$24 \times 2^2 - 32 \times 2 + 4 = 36$$

099 답 1.2 m/s

t 초 후의 정사각형의 한 변의 길이는

$$(5 + 0.1t) \text{ m}$$

t 초 후의 정사각형의 넓이를 $S \text{ m}^2$ 라 하면

$$S = (5 + 0.1t)^2$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = 2(5 + 0.1t) \times 0.1 = 0.2(5 + 0.1t)$$

따라서 $t = 10$ 에서 정사각형의 넓이의 변화율은

$$0.2(5 + 0.1 \times 10) = 1.2 \text{ (m}^2/\text{s)}$$

100 답 ④

t 초 후의 밑면의 반지름의 길이는 $(2 + 2t) \text{ cm}$, 높이는 $(4 + t) \text{ cm}$ 이므로 원기둥의 부피를 $V \text{ cm}^3$ 라 하면

$$V = \pi(2 + 2t)^2(4 + t)$$

$$= \pi(4t^3 + 24t^2 + 36t + 16)$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \pi(12t^2 + 48t + 36)$$

따라서 $t = 1$ 에서 원기둥의 부피의 변화율은

$$\pi(12 + 48 + 36) = 96\pi \text{ (cm}^3/\text{s)}$$



001 답 ⑤

$$f(x) = (x^3 - 2x^2 + x + C)' = 3x^2 - 4x + 1$$

$$\therefore f(2) = 12 - 8 + 1 = 5$$

002 답 8

$$f(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx}(x^3 + 3x^2 - 5x) \right\} dx$$

$$= x^3 + 3x^2 - 5x + C$$

$$f(1) = 0 \text{에서}$$

$$1 + 3 - 5 + C = 0 \quad \therefore C = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 1 \text{이므로}$$

$$f(-1) = -1 + 3 + 5 + 1 = 8$$

003 답 ③

$$f(x) = \int \frac{x^3}{x+1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \int \frac{x^3+1}{x+1} dx$$

$$= \int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} dx = \int (x^2-x+1) dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

$$f(0) = 1 \text{에서 } C = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \text{이므로}$$

$$f(2) = \frac{8}{3} - 2 + 2 + 1 = \frac{11}{3}$$

004 답 ④

$$f'(x) = 3x^2 - 6 \text{이므로}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 6) dx = x^3 - 6x + C$$

$$f(0) = 8 \text{에서 } C = 8$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 - 6x + 8 \text{이므로}$$

$$f(-1) = -1 + 6 + 8 = 13$$

005 답 -10

$$F(x) = xf(x) + 2x^3 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) = f(x) + xf'(x) + 6x^2$$

$$xf'(x) = -6x^2$$

$$\therefore f'(x) = -6x$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (-6x) dx$$

$$= -3x^2 + C$$

$$f(1) = -1 \text{에서 } -3 + C = -1$$

$$\therefore C = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = -3x^2 + 2 \text{이므로}$$

$$f(2) = -12 + 2 = -10$$

006 답 ⑤

$$\frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} = 4x - 4 \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} \right] dx = \int (4x - 4) dx$$

$$\therefore f(x) - g(x) = 2x^2 - 4x + C_1$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = 6x^2 + 6x - 5 \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} \right] dx = \int (6x^2 + 6x - 5) dx$$

$$\therefore f(x)g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + C_2$$

$$f(0) = 4, g(0) = 3 \text{에서}$$

$$f(0) - g(0) = C_1 = 1, f(0)g(0) = C_2 = 12$$

$$\therefore f(x) - g(x) = 2x^2 - 4x + 1,$$

$$f(x)g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 12$$

$$= (x+3)(2x^2-3x+4)$$

$$\therefore \begin{cases} f(x) = x+3 \\ g(x) = 2x^2-3x+4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} f(x) = 2x^2-3x+4 \\ g(x) = x+3 \end{cases}$$

$$\text{이때 } f(0) = 4, g(0) = 3 \text{이므로}$$

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 4, g(x) = x + 3$$

$$\therefore f(2) - g(1) = (8 - 6 + 4) - (1 + 3) = 2$$

007 답 2

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & (x \geq 0) \\ 3x^2-1 & (x < 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$(i) x \geq 0 \text{일 때}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x-1) dx$$

$$= x^2 - x + C_1$$

$$f(1) = 2 \text{에서}$$

$$1 - 1 + C_1 = 2 \quad \therefore C_1 = 2$$

$$(ii) x < 0 \text{일 때}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2-1) dx$$

$$= x^3 - x + C_2$$

$$(i), (ii) \text{에서 } f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & (x \geq 0) \\ x^3 - x + C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\text{함수 } f(x) \text{가 } x=0 \text{에서 연속이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (x^2 - x + 2) = \lim_{x \rightarrow 0-} (x^3 - x + C_2)$$

$$\therefore C_2 = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & (x \geq 0) \\ x^3 - x + 2 & (x < 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(-1) = -1 + 1 + 2 = 2$$

008 답 ①

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{의 양변에 } x=0, y=0 \text{을 대입하면}$$

$$f(0) = f(0) + f(0) \quad \therefore f(0) = 0$$

도함수의 정의에 의하여 $f'(x)$ 는

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x) + f(h)\} - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int 1 dx = x + C$$

그런데 $f(0) = 0$ 이므로 $C = 0$

따라서 $f(x) = x$ 이므로 $f(3) = 3$

009 답 ③

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 12x) dx \\ &= x^3 - 6x^2 + C \end{aligned}$$

$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$ 이므로

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 0$ 또는 $x = 4$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극대이고 극댓값이 15이므로 $f(0) = 15$ 에서

$C = 15$

$$\therefore f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$$

함수 $f(x)$ 는 $x = 4$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$f(4) = 64 - 96 + 15 = -17$$

010 답 ③

$$\int x f(x) dx = 2x^3 + 3x^2 + C \text{에서}$$

$$\begin{aligned} x f(x) &= (2x^3 + 3x^2 + C)' \\ &= 6x^2 + 6x = x(6x + 6) \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = 6x + 6$$

$$\therefore f(1) + f(-1) = (6 + 6) + (-6 + 6) = 12$$

011 답 ③

① $(x^4 - 1)' = 4x^3$ 이므로 $4x^3$ 의 부정적분이다.

② $(x^4)' = 4x^3$ 이므로 $4x^3$ 의 부정적분이다.

③ $(2x^4)' = 8x^3$ 이므로 $4x^3$ 의 부정적분이 아니다.

④ $(x^4 + 1)' = 4x^3$ 이므로 $4x^3$ 의 부정적분이다.

⑤ $(x^4 + 2)' = 4x^3$ 이므로 $4x^3$ 의 부정적분이다.

012 답 8

$$8x^3 - ax^2 + 1 = (bx^4 - 2x^3 + x + C)' = 4bx^3 - 6x^2 + 1$$

따라서 $8 = 4b$, $-a = -6$ 이므로

$$a = 6, b = 2 \quad \therefore a + b = 8$$

013 답 3

$$f(x) = F'(x) = (x^3 + ax^2)' = 3x^2 + 2ax$$

$$f(2) = -4 \text{에서}$$

$$12 + 4a = -4 \quad \therefore a = -4$$

따라서 $f(x) = 3x^2 - 8x$ 이므로

$$f(3) = 27 - 24 = 3$$

014 답 ③

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(1+h) - f(1)\} - \{f(1-2h) - f(1)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} \times 2 \\ &= f'(1) + 2f'(1) \\ &= 3f'(1) \end{aligned}$$

$$f(x) = \int (x^2 + x) dx \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 + x \quad \therefore f'(1) = 2$$

따라서 구하는 값은

$$3f'(1) = 3 \times 2 = 6$$

015 답 ④

$$f(x) = \int xg(x) dx \text{에서}$$

$$f'(x) = xg(x) \quad \dots\dots ㉠$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} = 6x^3 - 2x \text{에서}$$

$$f'(x) - g'(x) = 6x^3 - 2x \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$xg(x) - g'(x) = 6x^3 - 2x \quad \dots\dots ㉢$$

따라서 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 6인 이차함수이므로

$$g(x) = 6x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$g'(x) = 12x + a$$

이를 ㉢에 대입하면

$$x(6x^2 + ax + b) - (12x + a) = 6x^3 - 2x$$

$$6x^3 + ax^2 + (b - 12)x - a = 6x^3 - 2x$$

$$\text{즉, } a = 0, b - 12 = -2 \text{이므로}$$

$$a = 0, b = 10$$

따라서 $g(x) = 6x^2 + 10$ 이므로

$$g(1) = 6 + 10 = 16$$

016 답 ④

$$f(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx}(-x^2 + 2x) \right\} dx = -x^2 + 2x + C$$

$$f(1) = 5 \text{에서}$$

$$-1 + 2 + C = 5 \quad \therefore C = 4$$

따라서 $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ 이므로

$$f(3) = -9 + 6 + 4 = 1$$

017 답 ②

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \int (2x^3 - x^2 + 5) dx \right\} = 2x^3 - x^2 + 5 \circ \text{이므로}$$

$$f(-1) = -2 - 1 + 5 = 2$$

018 답 18

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \int (3x^2 - 2x) dx \right\} + \int \left\{ \frac{d}{dx} (2x^2 - x) \right\} dx$$

$$= (3x^2 - 2x) + (2x^2 - x + C)$$

$$= 5x^2 - 3x + C$$

$$f(0) = 4 \text{에서 } C = 4$$

따라서 $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$ 이므로

$$f(2) = 20 - 6 + 4 = 18$$

019 답 -1

$$f(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (x^2 - 4x) \right\} dx$$

$$= x^2 - 4x + C = (x-2)^2 + C - 4$$

이때 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -1 이므로

$$C - 4 = -1 \quad \therefore C = 3$$

따라서 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ 이므로

$$f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$$

020 답 ⑤

$$f(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (x^3 + ax) \right\} dx$$

$$= x^3 + ax + C$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 + a$$

$$f(2) = 4 \text{에서}$$

$$8 + 2a + C = 4 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또 $f'(0) = -3$ 에서 $a = -3$

이를 ㉠에 대입하면

$$8 - 6 + C = 4 \quad \therefore C = 2$$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $f'(x) = 3x^2 - 3$ 이므로

$$f(-1) + f'(-1) = (-1 + 3 + 2) + (3 - 3) = 4$$

021 답 ㄷ

ㄱ. $\int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx = f(x) + C$, $\frac{d}{dx} \left\{ \int f(x) dx \right\} = f(x)$ 이므로

$$\int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx \neq \frac{d}{dx} \left\{ \int f(x) dx \right\}$$

ㄴ. $\frac{d}{dx} \left[\int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx \right] = \frac{d}{dx} \{ f(x) + C \} = f'(x)$

ㄷ. $\frac{d}{dx} \left\{ \int f(x) dx \right\} = f(x)$, $\int \left\{ \frac{d}{dx} g(x) \right\} dx = g(x) + C$ 이므로

$$f(x) = g(x) + C$$

양변을 x 에 대하여 미분하면 $f'(x) = g'(x)$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.

022 답 ③

$$\frac{d}{dx} \{ x^2 f(x) \} = 2x f(x) + x^2 f'(x) \circ \text{이므로}$$

$$\int \{ 2x f(x) + x^2 f'(x) \} dx = \int \left[\frac{d}{dx} \{ x^2 f(x) \} \right] dx$$

$$= x^2 f(x) + C$$

$$\therefore x^2 f(x) + C = x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 1$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$C = 1$$

즉, $x^2 f(x) + 1 = x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 1$ 이므로

$$x^2 f(x) = x^4 - 2x^3 - 6x^2$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 2x - 6$$

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -6 이다.

023 답 -2

$$f(x) = \int \frac{x^2}{x-2} dx - \int \frac{5x-6}{x-2} dx = \int \frac{x^2-5x+6}{x-2} dx$$

$$= \int \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} dx = \int (x-3) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

$$f(-2) = 10 \text{에서}$$

$$2 + 6 + C = 10 \quad \therefore C = 2$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$ 이므로

$$f(4) = 8 - 12 + 2 = -2$$

024 답 ④

$$\int (2x^3 - 6x^2 + 3) dx = 2 \int x^3 dx - 6 \int x^2 dx + 3 \int dx$$

$$= \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3x + C$$

025 답 2

$$f(x) = \int (5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) dx$$

$$= x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + C$$

$$f(0) = -3 \text{에서 } C = -3$$

따라서 $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 3$ 이므로

$$f(1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 3 = 2$$

026 답 ②

(가)에서 $f(x) = \int (2x-4) dx = x^2 - 4x + C$

(나)에서 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 4x + C \geq 0$ 이므로 이차방정식 $x^2 - 4x + C = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4 - C \leq 0 \quad \therefore C \geq 4$$

이때 $f(0) = C$ 이므로 $f(0)$ 의 최솟값은 4이다.

027 답 ①

$f'(x)=3x^2-4x+1$ 이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-4x+1)dx$$

$$=x^3-2x^2+x+C$$

$f(1)=2$ 에서

$$1-2+1+C=2 \quad \therefore C=2$$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+x+2$ 이므로

$$f(-1)=-1-2-1+2=-2$$

028 답 ②

$f'(x)=6x+8$ 이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x+8)dx$$

$$=3x^2+8x+C_1$$

$f(0)=3$ 에서 $C_1=3$

$$\therefore f(x)=3x^2+8x+3$$

따라서 $f(x)$ 를 적분하면

$$\int f(x)dx=\int(3x^2+8x+3)dx$$

$$=x^3+4x^2+3x+C$$

029 답 6

$f'(x)=ax^2-2x+3$ 이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(ax^2-2x+3)dx$$

$$=\frac{a}{3}x^3-x^2+3x+C$$

$f(0)=1$ 에서 $C=1$

$f(2)=19$ 에서

$$\frac{8}{3}a-4+6+C=19, \quad \frac{8}{3}a=16 \quad (\because C=1)$$

$$\therefore a=6$$

030 답 ②

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가 $6x^2+2x+10$ 이므로

$$f'(x)=6x^2+2x+10$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(6x^2+2x+10)dx$$

$$=2x^3+x^2+10x+C$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로 $f(0)=3$ 에서 $C=3$

따라서 $f(x)=2x^3+x^2+10x+3$ 이므로

$$f(-1)=-2+1-10+3=-8$$

031 답 ④

$f'(x)=12x$ 이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int 12x dx=6x^2+C_1$$

$f(x)$ 의 한 부정적분이 $F(x)$ 이므로

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(6x^2+C_1)dx$$

$$=2x^3+C_1x+C_2$$

$f(0)=F(0)$ 이므로

$$C_1=C_2$$

$f(1)=F(1)$ 이므로

$$6+C_1=2+C_1+C_2$$

$$6+C_1=2+2C_1 \quad (\because C_1=C_2)$$

$$\therefore C_1=4, C_2=4$$

따라서 $F(x)=2x^3+4x+4$ 이므로

$$F(2)=16+8+4=28$$

032 답 $-\frac{3}{2}$

$f'(x)=4x+a$ 이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(4x+a)dx$$

$$=2x^2+ax+C$$

$f(2)=4$ 에서

$$8+2a+C=4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

방정식 $f(x)=0$, 즉 $2x^2+ax+C=0$ 의 모든 근의 곱이 -5 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{C}{2}=-5 \quad \therefore C=-10$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$8+2a-10=4 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore f(x)=2x^2+3x-10$$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $2x^2+3x-10=0$ 의 모든 근의 합은

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{3}{2}$ 이다.

033 답 ⑤

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h)-f(x)\}-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

$$=f'(x)+f'(x)$$

$$=2f'(x)$$

즉, $2f'(x)=4x^2-6x+2$ 이므로

$$f'(x)=2x^2-3x+1$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int(2x^2-3x+1)dx$$

$$=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+C$$

$f(0)=1$ 에서 $C=1$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+1$ 이므로

$$f(1)=\frac{2}{3}-\frac{3}{2}+1+1=\frac{7}{6}$$

034 ㉮ 11

(가)에서 $f'(x)=3x^2+2x+a$ 이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (3x^2+2x+a)dx$$

$$=x^3+x^2+ax+C$$

(나)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=0$ 이므로 $f(1)=0$

$$1+1+a+C=0 \quad \therefore a+C=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(나)의 좌변에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

즉, $f'(1)=2a+4$ 이므로

$$3+2+a=2a+4 \quad \therefore a=1$$

이를 ㉮에 대입하면

$$1+C=-2 \quad \therefore C=-3$$

따라서 $f(x)=x^3+x^2+x-3$ 이므로

$$f(2)=8+4+2-3=11$$

035 ㉮ 4

$F(x)=xf(x)-2x^3+x^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+2x$$

$$xf'(x)=6x^2-2x=x(6x-2)$$

$$\therefore f'(x)=6x-2$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int (6x-2)dx$$

$$=3x^2-2x+C$$

$$f(1)=-1 \text{에서 } 3-2+C=-1 \quad \therefore C=-2$$

따라서 $f(x)=3x^2-2x-2$ 이므로

$$f(-1)=3+2-2=3$$

036 ㉮ -40

$F(x)=\int (x-1)f(x)dx+x^4-4x^3+4x^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=(x-1)f(x)+4x^3-12x^2+8x$$

$$(x-2)f(x)=-4x^3+12x^2-8x=-4x(x-1)(x-2)$$

$$\therefore f(x)=-4x(x-1)=-4x^2+4x$$

$$\therefore F(x)=\int f(x)dx=\int (-4x^2+4x)dx$$

$$=-\frac{4}{3}x^3+2x^2+C$$

$$F(0)=2 \text{에서 } C=2$$

$$\text{따라서 } F(x)=-\frac{4}{3}x^3+2x^2+2 \text{이므로}$$

$$f(3)+F(3)=(-36+12)+(-36+18+2)=-40$$

037 ㉮ 9

$\int xf(x)dx=\{f(x)\}^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$xf(x)=2f(x)f'(x), f(x)\{x-2f'(x)\}=0$$

$$2f'(x)=x \quad (\because f(x) \neq 0) \quad \therefore f'(x)=\frac{1}{2}x$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{1}{2}x dx=\frac{1}{4}x^2+C$$

$$f(0)=1 \text{에서 } C=1$$

$$\text{즉, } f(x)=\frac{1}{4}x^2+1 \text{이므로}$$

$$f(1)=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$$

$$\text{따라서 } p=4, q=5 \text{이므로 } p+q=9$$

038 ㉮ 4

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+2 \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} \right] dx = \int (2x+2) dx$$

$$\therefore f(x)+g(x)=x^2+2x+C_1$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2+6x+1 \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} \right] dx = \int (3x^2+6x+1) dx$$

$$\therefore f(x)g(x)=x^3+3x^2+x+C_2$$

$$f(1)=1, g(1)=3 \text{에서}$$

$$f(1)+g(1)=1+2+C_1=4, f(1)g(1)=1+3+1+C_2=3$$

$$\therefore C_1=1, C_2=-2$$

$$\therefore f(x)+g(x)=x^2+2x+1,$$

$$f(x)g(x)=x^3+3x^2+x-2=(x+2)(x^2+x-1)$$

$$\therefore \begin{cases} f(x)=x+2 \\ g(x)=x^2+x-1 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} f(x)=x^2+x-1 \\ g(x)=x+2 \end{cases}$$

이때 $f(1)=1, g(1)=3$ 이므로

$$f(x)=x^2+x-1, g(x)=x+2$$

$$\therefore f(2)-g(2)=(4+2-1)-(2+2)=1$$

039 ㉮ 2

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2 \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} \right] dx = \int 3x^2 dx$$

$$\therefore f(x)g(x)=x^3+C$$

$$f(1)=-1, g(1)=7 \text{에서}$$

$$f(1)g(1)=1+C=-7 \quad \therefore C=-8$$

$$\therefore f(x)g(x)=x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$$

이때 $f(1)=-1, g(1)=7$ 이므로

$$f(x)=x-2, g(x)=x^2+2x+4$$

$$\therefore f(3)+g(-1)=(3-2)+(1-2+4)=4$$

040 ㉮ $F(x)=2x$

$$\frac{d}{dx}\{(x^2-1)F(x)\}=2xF(x)+(x^2-1)F'(x)$$

$$=(x^2-1)f(x)+2xF(x)$$

이므로 $(x^2-1)f(x)+2xF(x)=6x^2-2$ 에서

$$\frac{d}{dx}\{(x^2-1)F(x)\}=6x^2-2$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{(x^2-1)F(x)\} \right] dx = \int (6x^2-2) dx$$

$$\therefore (x^2-1)F(x)=2x^3-2x+C$$

$$F(0)=0\text{에서 } C=0$$

$$\text{따라서 } (x^2-1)F(x)=2x^3-2x=2x(x^2-1)\text{이므로}$$

$$F(x)=2x$$

041 답 ①

$$f'(x)=\begin{cases} -4x & (x\geq 1) \\ 4x^3-8x & (x<1) \end{cases}\text{에서}$$

(i) $x\geq 1$ 일 때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (-4x)dx$$

$$=-2x^2+C_1$$

(ii) $x<1$ 일 때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (4x^3-8x)dx$$

$$=x^4-4x^2+C_2$$

$$f(0)=3\text{에서 } C_2=3$$

$$(i), (ii)\text{에서 } f(x)=\begin{cases} -2x^2+C_1 & (x\geq 1) \\ x^4-4x^2+3 & (x<1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 미분가능하면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x\rightarrow 1+} f(x)=\lim_{x\rightarrow 1-} f(x)\text{에서}$$

$$\lim_{x\rightarrow 1+} (-2x^2+C_1)=\lim_{x\rightarrow 1-} (x^4-4x^2+3)$$

$$-2+C_1=1-4+3 \quad \therefore C_1=2$$

$$\text{따라서 } f(x)=\begin{cases} -2x^2+2 & (x\geq 1) \\ x^4-4x^2+3 & (x<1) \end{cases}\text{이므로}$$

$$f(2)=-8+2=-6$$

042 답 4

$$f'(x)=-x+|x-1|=\begin{cases} -1 & (x\geq 1) \\ -2x+1 & (x<1) \end{cases}\text{에서}$$

(i) $x\geq 1$ 일 때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (-1)dx$$

$$=-x+C_1$$

$$f(2)=3\text{에서}$$

$$-2+C_1=3 \quad \therefore C_1=5$$

(ii) $x<1$ 일 때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (-2x+1)dx$$

$$=-x^2+x+C_2$$

$$(i), (ii)\text{에서 } f(x)=\begin{cases} -x+5 & (x\geq 1) \\ -x^2+x+C_2 & (x<1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x\rightarrow 1+} f(x)=\lim_{x\rightarrow 1-} f(x)\text{에서}$$

$$\lim_{x\rightarrow 1+} (-x+5)=\lim_{x\rightarrow 1-} (-x^2+x+C_2)$$

$$-1+5=-1+1+C_2 \quad \therefore C_2=4$$

$$\text{따라서 } f(x)=\begin{cases} -x+5 & (x\geq 1) \\ -x^2+x+4 & (x<1) \end{cases}\text{이므로}$$

$$f(0)=4$$

043 답 ④

$$\text{주어진 그래프에서 } f'(x)=\begin{cases} -x+1 & (x\geq 0) \\ x+1 & (x<0) \end{cases}$$

(i) $x\geq 0$ 일 때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (-x+1)dx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2+x+C_1$$

$$\text{함수 } y=f(x)\text{의 그래프가 점 } (0, 2)\text{를 지나므로 } f(0)=2\text{에서}$$

$$C_1=2$$

(ii) $x<0$ 일 때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (x+1)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2+x+C_2$$

$$(i), (ii)\text{에서 } f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2+x+2 & (x\geq 0) \\ \frac{1}{2}x^2+x+C_2 & (x<0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x\rightarrow 0+} f(x)=\lim_{x\rightarrow 0-} f(x)\text{에서}$$

$$\lim_{x\rightarrow 0+} \left(-\frac{1}{2}x^2+x+2\right)=\lim_{x\rightarrow 0-} \left(\frac{1}{2}x^2+x+C_2\right)$$

$$\therefore C_2=2$$

$$\text{따라서 } f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x^2+x+2 & (x\geq 0) \\ \frac{1}{2}x^2+x+2 & (x<0) \end{cases}\text{이므로}$$

$$f(1)+f(-1)=\left(-\frac{1}{2}+1+2\right)+\left(\frac{1}{2}-1+2\right)=4$$

044 답 2

$$f'(x)=\begin{cases} 5-2x & (x>1) \\ 2x+a & (x<1) \end{cases}\text{에서}$$

(i) $x>1$ 일 때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (5-2x)dx$$

$$=5x-x^2+C_1$$

(ii) $x<1$ 일 때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (2x+a)dx$$

$$=x^2+ax+C_2$$

$$(i), (ii)\text{에서 } f(x)=\begin{cases} -x^2+5x+C_1 & (x>1) \\ x^2+ax+C_2 & (x<1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x\rightarrow 1+} f(x)=\lim_{x\rightarrow 1-} f(x)\text{에서}$$

$$\lim_{x\rightarrow 1+} (-x^2+5x+C_1)=\lim_{x\rightarrow 1-} (x^2+ax+C_2)$$

$$-1+5+C_1=1+a+C_2$$

$$\therefore C_1-C_2=a-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$f(3)-f(-3)=2\text{에서}$$

$$(-9+15+C_1)-(9-3a+C_2)=2$$

$$\therefore C_1-C_2=-3a+5 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8}\text{에서 } a-3=-3a+5 \quad \therefore a=2$$

045 [답] ③

$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x)+f(h)+3xh(x+h)\}-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} + 3x(x+h) \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 3x^2 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 3x^2 = f'(0) + 3x^2 \end{aligned}$$

$$f'(1)=4 \text{에서}$$

$$4=f'(0)+3 \quad \therefore f'(0)=1$$

즉, $f'(x)=3x^2+1$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2+1) dx = x^3+x+C$$

그런데 $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

$$\text{따라서 } f(x)=x^3+x \text{이므로}$$

$$f(2)=8+2=10$$

046 [답] $f(x)=-2x-5$

$f(x+y)=f(x)+f(y)+5$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+5 \quad \therefore f(0)=-5$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x)+f(h)+5\}-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = -2 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (-2) dx = -2x+C$$

그런데 $f(0)=-5$ 이므로 $C=-5$

$$\therefore f(x)=-2x-5$$

047 [답] -2

$f(x+y)=f(x)+f(y)-3$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)-3 \quad \therefore f(0)=3$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x)+f(h)-3\}-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0) \end{aligned}$$

$f'(0)=k$ (k 는 상수)로 놓으면 $f'(x)=k$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int k dx = kx+C$$

그런데 $f(0)=3$ 이므로 $C=3$

$$\therefore f(x)=kx+3$$

$$f(3)=-3 \text{에서}$$

$$3k+3=-3 \quad \therefore k=-2$$

$$\therefore f'(0)=k=-2$$

048 [답] ④

$f(x+y)=f(x)+f(y)+4xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x)+f(h)+4xh\}-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+4xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 4x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 4x \\ &= f'(0) + 4x \end{aligned}$$

$f'(0)=k$ (k 는 상수)로 놓으면 $f'(x)=4x+k$ 이므로

$$F(x) = \int (x-1)f'(x) dx = \int (x-1)(4x+k) dx$$

$$\therefore F'(x) = (x-1)(4x+k)$$

이때 함수 $F(x)$ 의 극값이 존재하지 않으므로 이차방정식

$$F'(x)=0 \text{은 중근 또는 허근을 가져야 한다.}$$

그런데 방정식 $F'(x)=0$ 의 한 근이 1이므로 방정식

$$4x+k=0 \text{의 근도 1이어야 한다.}$$

$$\text{즉, } 4+k=0 \text{에서 } k=-4 \quad \therefore f'(0)=-4$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (4x-4) dx \\ &= 2x^2-4x+C \end{aligned}$$

그런데 $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

$$\text{따라서 } f(x)=2x^2-4x \text{이므로}$$

$$f(5)=50-20=30$$

049 [답] 6

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (-6x^2+6x) dx \\ &= -2x^3+3x^2+C \end{aligned}$$

$$f'(x) = -6x^2+6x = -6x(x-1) \text{이므로}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		극소		극대	

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이고 극솟값이 5이므로 $f(0)=5$ 에서 $C=5$

$$\therefore f(x) = -2x^3+3x^2+5$$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$f(1) = -2+3+5=6$$

050 **답** -3

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (ax^2 - a) dx$$

$$= \frac{a}{3}x^3 - ax + C$$

$$f'(x) = a(x^2 - 1) = a(x+1)(x-1) \text{이므로}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

$a < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	극소	/	극대	\

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이고 극댓값이 3이므로 $f(1)=3$ 에서

$$\frac{a}{3} - a + C = 3$$

$$\therefore -\frac{2}{3}a + C = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극소이고 극솟값이 -1이므로

$$f(-1) = -1 \text{에서}$$

$$-\frac{a}{3} + a + C = -1$$

$$\therefore \frac{2}{3}a + C = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$-\frac{4}{3}a = 4 \quad \therefore a = -3$$

051 **답** ⑤

$f'(x) = ax(x-2)$ ($a > 0$)라 하면 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 점 $(1, -2)$ 를 지나므로 $f'(1) = -2$ 에서

$$-a = -2 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore f'(x) = 2x(x-2) = 2x^2 - 4x$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x^2 - 4x) dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + C$$

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	극대	\	극소	/

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이고 극댓값이 6이므로 $f(0)=6$ 에서 $C=6$

$$\therefore f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 6$$

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$f(2) = \frac{16}{3} - 8 + 6 = \frac{10}{3}$$

052 **답** 4

(㉠)에서 $f'(x)=0$ 인 x 의 값이 $x=1$ 또는 $x=3$ 이므로

$$f'(x) = a(x-1)(x-3) \quad (a > 0) \text{이라 하자.}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int a(x-1)(x-3) dx$$

$$= \int (ax^2 - 4ax + 3a) dx$$

$$= \frac{a}{3}x^3 - 2ax^2 + 3ax + C$$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3
$f'(x)$	+	+	0	-	0
$f(x)$		/	극대	\	

$$f(0) = C$$

$$f(1) = \frac{a}{3} - 2a + 3a + C = \frac{4}{3}a + C$$

$$f(3) = 9a - 18a + 9a + C = C$$

(㉡)에서 최댓값이 4, 최솟값이 0이므로

$$\frac{4}{3}a + C = 4, \quad C = 0$$

$$\therefore a = 3$$

따라서 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ 이므로

$$f(4) = 64 - 96 + 36 = 4$$

053 **답** 8

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 3(x+1)(x-2) dx$$

$$= \int (3x^2 - 3x - 6) dx$$

$$= x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$$

$$f'(x) = 3(x+1)(x-2) \text{이므로}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	극대	\	극소	/

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대이고 극댓값은

$$f(-1) = -1 - \frac{3}{2} + 6 + C = \frac{7}{2} + C$$

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이고 극솟값은

$$f(2) = 8 - 6 - 12 + C = -10 + C$$

그런데 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하므로 극댓값 또는 극솟값이 0이어야 한다.

$$\text{즉, } f(-1)f(2) = 0 \text{이므로}$$

$$\left(\frac{7}{2} + C\right)(-10 + C) = 0$$

이때 $f(0) > 0$ 이므로

$$f(0) = C > 0$$

$$\therefore C = 10$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 10 \text{이므로}$$

$$f(-2) = -8 - 6 + 12 + 10 = 8$$

054 [답] ⑤

$$\begin{aligned}\int (x+1)f(x) dx &= x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 6x + C \text{에서} \\ (x+1)f(x) &= \left(x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 6x + C\right)' \\ &= 3x^2 + 9x + 6 = 3(x+1)(x+2) \\ \text{따라서 } f(x) &= 3(x+2) \text{이므로} \\ f(3) &= 3(3+2) = 15\end{aligned}$$

055 [답] 29

$$\begin{aligned}f(x) &= \int \left\{ \frac{d}{dx}(x^4 + 5x) \right\} dx = x^4 + 5x + C \\ \therefore f'(x) &= 4x^3 + 5 \\ f(1) &= f'(1) \text{에서} \\ 1 + 5 + C &= 4 + 5 \quad \therefore C = 3 \\ \text{따라서 } f(x) &= x^4 + 5x + 3 \text{이므로} \\ f(2) &= 16 + 10 + 3 = 29\end{aligned}$$

056 [답] ②

$$\begin{aligned}f(x) &= \int \frac{2x^2}{x-1} dx + \int \frac{3x}{x-1} dx - \int \frac{5}{x-1} dx \\ &= \int \frac{2x^2 + 3x - 5}{x-1} dx = \int \frac{(2x+5)(x-1)}{x-1} dx \\ &= \int (2x+5) dx = x^2 + 5x + C \\ f(1) &= 4 \text{에서} \\ 1 + 5 + C &= 4 \quad \therefore C = -2 \\ \text{따라서 } f(x) &= x^2 + 5x - 2 \text{이므로} \\ f(-1) &= 1 - 5 - 2 = -6\end{aligned}$$

057 [답] ④

$$\begin{aligned}f(x) &= \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx - \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx \\ &= \int \left\{ \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 - \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \right\} dx \\ &= \int 4 dx = 4x + C \\ f(1) &= 2 \text{에서} \\ 4 + C &= 2 \quad \therefore C = -2 \\ \text{따라서 } f(x) &= 4x - 2 \text{이므로} \\ f(3) &= 12 - 2 = 10\end{aligned}$$

058 [답] -4

$$\begin{aligned}f'(x) &= -2x + 4 \text{이므로} \\ f(x) &= \int f'(x) dx = \int (-2x + 4) dx \\ &= -x^2 + 4x + C \\ f(1) &= 7 \text{에서} \\ -1 + 4 + C &= 7 \quad \therefore C = 4 \\ \therefore f(x) &= -x^2 + 4x + 4 \\ \text{따라서 방정식 } f(x) &= 0 \text{의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계} \\ &\text{수의 관계에 의하여 } -4 \text{이다.}\end{aligned}$$

059 [답] ②

$$\begin{aligned}f'(x) &= 12x^2 + 6x - 2 \text{이므로} \\ f(x) &= \int f'(x) dx = \int (12x^2 + 6x - 2) dx \\ &= 4x^3 + 3x^2 - 2x + C_1 \\ f(1) &= 2 \text{에서} \\ 4 + 3 - 2 + C_1 &= 2 \quad \therefore C_1 = -3 \\ \therefore f(x) &= 4x^3 + 3x^2 - 2x - 3 \\ \therefore F(x) &= \int f(x) dx = \int (4x^3 + 3x^2 - 2x - 3) dx \\ &= x^4 + x^3 - x^2 - 3x + C_2 \\ F(1) &= 3 \text{에서} \\ 1 + 1 - 1 - 3 + C_2 &= 3 \quad \therefore C_2 = 5 \\ \text{따라서 } F(x) &= x^4 + x^3 - x^2 - 3x + 5 \text{이므로} \\ F(-1) &= 1 - 1 - 1 + 3 + 5 = 7\end{aligned}$$

060 [답] ③

$$\begin{aligned}F(x) &= xf(x) - 3x^4 + x^2 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ f(x) &= f(x) + xf'(x) - 12x^3 + 2x \\ xf'(x) &= 12x^3 - 2x = x(12x^2 - 2) \\ \therefore f'(x) &= 12x^2 - 2 \\ \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (12x^2 - 2) dx \\ &= 4x^3 - 2x + C \\ f(1) &= 5 \text{에서} \\ 4 - 2 + C &= 5 \quad \therefore C = 3 \\ \text{따라서 } f(x) &= 4x^3 - 2x + 3 \text{이므로 } f(x) \text{의 상수항은 } 3 \text{이다.}\end{aligned}$$

061 [답] 9

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{xf(x)\} &= f(x) + xf'(x) \text{이므로 (가)에서} \\ \frac{d}{dx}\{xf(x)\} &= 4x^3 + 6x^2 - 8x + 1 \\ \therefore xf(x) &= x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x + C_1 \\ \text{양변에 } x=0 \text{을 대입하면 } 0 &= C_1 \\ \text{즉, } xf(x) &= x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x \text{이므로} \\ f(x) &= x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \\ \therefore f(0) &= 1 \\ \text{(나)에서} \\ f(x) + g(x) &= \int \{f'(x) + g'(x)\} dx \\ &= \int (6x + 2) dx \\ &= 3x^2 + 2x + C_2 \\ \text{이때 } f(0) &= g(0) = 1 \text{이므로} \\ f(0) + g(0) &= 2 \quad \therefore C_2 = 2 \\ \therefore g(x) &= 3x^2 + 2x + 2 - (x^3 + 2x^2 - 4x + 1) \\ &= -x^3 + x^2 + 6x + 1 \\ \therefore g(2) &= -8 + 4 + 12 + 1 = 9\end{aligned}$$

062 5

$$f'(x) = \begin{cases} x+a & (x>2) \\ -2x & (x<2) \end{cases} \text{에서}$$

(i) $x>2$ 일 때

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x+a) dx \\ = \frac{1}{2}x^2 + ax + C_1$$

$$f(3) = \frac{5}{2} \text{에서}$$

$$\frac{9}{2} + 3a + C_1 = \frac{5}{2} \quad \therefore C_1 = -3a - 2$$

(ii) $x<2$ 일 때

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (-2x) dx \\ = -x^2 + C_2$$

$$f(0) = -1 \text{에서 } C_2 = -1$$

$$(i), (ii) \text{에서 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + ax - 3a - 2 & (x>2) \\ -x^2 - 1 & (x<2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \left(\frac{1}{2}x^2 + ax - 3a - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow 2-} (-x^2 - 1) = f(2)$$

$$2 + 2a - 3a - 2 = -4 - 1$$

$$\therefore a = 5$$

063 -7

$$f'(x) = 2x^2 - 6x \text{이므로}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x^2 - 6x) dx \\ = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + C$$

$$f'(x) = 2x^2 - 6x = 2x(x-3) \text{이므로}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이고 극댓값이 2이므로 $f(0)=2$ 에서 $C=2$

$$\therefore f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 2$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$f(3) = 18 - 27 + 2 = -7$$

064 ①

주어진 그래프에서 $f'(x) = ax(x+3)$ ($a<0$)이라 하면

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int ax(x+3) dx \\ = \int (ax^2 + 3ax) dx = \frac{a}{3}x^3 + \frac{3}{2}ax^2 + C$$

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이고 극댓값이 4이므로 $f(0)=4$ 에서 $C=4$

$$\therefore f(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{3}{2}ax^2 + 4$$

함수 $f(x)$ 는 $x=-3$ 에서 극소이고 극솟값이 -5이므로

$$f(-3) = -5 \text{에서}$$

$$-9a + \frac{27}{2}a + 4 = -5$$

$$\therefore a = -2$$

$$\text{따라서 } f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 4 \text{이므로}$$

$$f(1) = -\frac{2}{3} - 3 + 4 = \frac{1}{3}$$

065 $\frac{32}{3}$

$f(x-y) = f(x) - f(y) + xy(x-y)$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) - f(0) + 0$$

$$\therefore f(0) = 0$$

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x) - f(-h) - xh(x+h)\} - f(x)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h) - x^2}{-h} - x^2 \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h) - f(0)}{-h} - x^2 \\ = f'(0) - x^2 \\ = 4 - x^2$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (4 - x^2) dx \\ = -\frac{1}{3}x^3 + 4x + C$$

이때 $f(0)=0$ 이므로 $C=0$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$$

$$f'(x) = -x^2 + 4 = -(x+2)(x-2) \text{이므로}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 갖고, $x=-2$ 에서 극솟값을 가지므로 극댓값과 극솟값의 차는

$$f(2) - f(-2) = \left(-\frac{8}{3} + 8\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{32}{3}$$

001 답 ④

$$\begin{aligned}\int_2^2 (x^4-3) dx + \int_0^2 (3x^2+6x) dx &= 0 + \int_0^2 (3x^2+6x) dx \\ &= \left[x^3 + 3x^2 \right]_0^2 \\ &= (8+12) - 0 = 20\end{aligned}$$

002 답 ④

$$\begin{aligned}\int_0^5 (x+1)^2 dx - \int_0^5 (x-1)^2 dx &= \int_0^5 \{(x+1)^2 - (x-1)^2\} dx \\ &= \int_0^5 4x dx \\ &= \left[2x^2 \right]_0^5 = 50\end{aligned}$$

003 답 9

$$\begin{aligned}\int_3^8 f(x) dx &= \int_3^2 f(x) dx + \int_2^8 f(x) dx \\ &= -\int_2^3 f(x) dx + \left\{ \int_2^6 f(x) dx + \int_6^8 f(x) dx \right\} \\ &= -5 + 6 + 8 = 9\end{aligned}$$

004 답 $\frac{46}{3}$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (x^2+4) dx + \int_1^2 (-x^2+6x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_{-1}^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 4 \right) + \left(-\frac{8}{3} + 12 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 3 \right) \\ &= \frac{46}{3}\end{aligned}$$

005 답 ①

$$\begin{aligned}x|x-2| &= \begin{cases} x^2-2x & (x \geq 2) \\ -x^2+2x & (x \leq 2) \end{cases} \text{이므로} \\ \int_1^3 x|x-2| dx &= \int_1^2 (-x^2+2x) dx + \int_2^3 (x^2-2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_2^3 \\ &= \left(-\frac{8}{3} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) + (9-9) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) \\ &= 2\end{aligned}$$

006 답 4

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (3x^5+5x^4-4x^3+x+1) dx &= 2 \int_0^1 (5x^4+1) dx \\ &= 2 \left[x^5 + x \right]_0^1 \\ &= 2(1+1) = 4\end{aligned}$$

007 답 -16

$$\begin{aligned}g(x) &= xf(x), \quad h(x) = x^3f(x) \text{라 하면} \\ g(-x) &= -xf(-x) = -xf(x) = -g(x) \\ h(-x) &= -x^3f(-x) = -x^3f(x) = -h(x) \\ \therefore \int_{-2}^2 (3x^3+5x-2)f(x) dx \\ &= 3 \int_{-2}^2 x^3f(x) dx + 5 \int_{-2}^2 xf(x) dx - 2 \int_{-2}^2 f(x) dx \\ &= -2 \int_{-2}^2 f(x) dx \\ &= -4 \int_0^2 f(x) dx \\ &= -4 \times 4 = -16\end{aligned}$$

008 답 4

$$\begin{aligned}\text{모든 실수 } x \text{에 대하여 } f(x+3) &= f(x) \text{이므로} \\ \int_0^1 f(x) dx &= \int_3^4 f(x) dx \\ \therefore \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 2x dx + \int_1^3 (3-x) dx \\ &= 2 \left[x^2 \right]_0^1 + \left[3x - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^3 \\ &= 2 + \left(9 - \frac{9}{2} \right) - \left(3 - \frac{1}{2} \right) = 4\end{aligned}$$

009 답 $-\frac{5}{3}$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(t) dt &= k \text{ (} k \text{는 상수)로 놓으면 } f(x) = x^2 - 2x + k \text{이므로} \\ \int_{-1}^1 f(t) dt &= \int_{-1}^1 (t^2 - 2t + k) dt \\ &= 2 \int_0^1 (t^2 + k) dt \\ &= 2 \left[\frac{1}{3}t^3 + kt \right]_0^1 = \frac{2}{3} + 2k\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{2}{3} + 2k = k \text{이므로 } k = -\frac{2}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^2 - 2x - \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$f(1) = 1 - 2 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$$

010 답 5

$$\begin{aligned}\int_1^x f(t) dt &= -2x^2 + ax + 5 \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면} \\ 0 &= -2 + a + 5 \quad \therefore a = -3 \\ \int_1^x f(t) dt &= -2x^2 - 3x + 5 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ f(x) &= -4x - 3 \\ \therefore f(-2) &= 8 - 3 = 5\end{aligned}$$

011 답 4

$$\int_1^x (x-t)f(t) dt = 2x^3 - 4x^2 + 2x \text{에서}$$

$$x \int_1^x f(t) dt - \int_1^x tf(t) dt = 2x^3 - 4x^2 + 2x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\left\{ \int_1^x f(t) dt + xf(x) \right\} - xf(x) = 6x^2 - 8x + 2$$

$$\therefore \int_1^x f(t) dt = 6x^2 - 8x + 2$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 12x - 8 \quad \therefore f(1) = 12 - 8 = 4$$

012 답 $\frac{29}{2}$

$f(x) = \int_{-2}^x (t^2 - 3t + 2) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$f(1) = \int_{-2}^1 (t^2 - 3t + 2) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_{-2}^1$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 6 - 4 \right) = \frac{27}{2}$$

따라서 $\alpha=1, \beta=\frac{27}{2}$ 이므로

$$\alpha + \beta = 1 + \frac{27}{2} = \frac{29}{2}$$

013 답 -4

$f(x) = \int_1^x t(t-2) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

$0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

$$f(0) = \int_1^0 (t^2 - 2t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_1^0 = -\left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{2}{3}$$

$$f(2) = \int_1^2 (t^2 - 2t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 4 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = -\frac{2}{3}$$

$$f(4) = \int_1^4 (t^2 - 2t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_1^4 = \left(\frac{64}{3} - 16 \right) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = 6$$

따라서 $0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 6, 최솟값은 $-\frac{2}{3}$ 이므로

$$M=6, m=-\frac{2}{3}$$

$$\therefore Mm = 6 \times \left(-\frac{2}{3} \right) = -4$$

014 답 ①

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} [F(t)]_1^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1}$$

$$= F'(1) = f(1) = 1 + 2 = 3$$

015 답 -9

$$\int_{-2}^1 2(x+2)(x-1) dx + \int_3^3 (2x-1)^3 dx$$

$$= \int_{-2}^1 2(x+2)(x-1) dx + 0 = \int_{-2}^1 (2x^2 + 2x - 4) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x \right]_{-2}^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} + 1 - 4 \right) - \left(-\frac{16}{3} + 4 + 8 \right) = -9$$

016 답 ②

$$\int_0^1 f'(x) dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = -1 - 1 = -2$$

017 답 10

$$\int_{-1}^0 (4x^3 - 3x^2 + a) dx = \left[x^4 - x^3 + ax \right]_{-1}^0$$

$$= -(1 + 1 - a) = a - 2$$

따라서 $a - 2 = 8$ 이므로 $a = 10$

018 답 ④

$$\int_{-1}^a (x^2 + 2x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_{-1}^a = \left(\frac{1}{3}a^3 + a^2 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{3}a^3 + a^2 - \frac{2}{3}$$

따라서 $\frac{1}{3}a^3 + a^2 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ 이므로

$$a^3 + 3a^2 - 4 = 0, (a-1)(a+2)^2 = 0$$

$\therefore a = 1$ ($\because a > -1$)

019 답 -12

$f(x) = ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하자.

(가)에서

$$\int_0^1 (ax + b) dx = \left[\frac{a}{2}x^2 + bx \right]_0^1 = \frac{a}{2} + b$$

즉, $\frac{a}{2} + b = 3$ 이므로 $a + 2b = 6$ ㉠

(나)에서

$$\int_0^1 x(ax + b) dx = \int_0^1 (ax^2 + bx) dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2}$$

즉, $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 1$ 이므로 $2a + 3b = 6$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -6, b = 6$

따라서 $f(x) = -6x + 6$ 이므로

$$f(3) = -18 + 6 = -12$$

020 답 35/9

$$\begin{aligned}\int_0^1 (5x^2 - a)^2 dx &= \int_0^1 (25x^4 - 10ax^2 + a^2) dx \\ &= \left[5x^5 - \frac{10}{3}ax^3 + a^2x \right]_0^1 \\ &= a^2 - \frac{10}{3}a + 5 = \left(a - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{20}{9}\end{aligned}$$

따라서 $\int_0^1 (5x^2 - a)^2 dx$ 는 $a = \frac{5}{3}$ 일 때 최솟값이 $\frac{20}{9}$ 이므로

$$m = \frac{5}{3}, n = \frac{20}{9} \quad \therefore m + n = \frac{35}{9}$$

021 답 ⑤

함수 $f(x) = x^3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $2b$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$g(x) = (x - a)^3 + 2b$$

$$g(0) = 0 \text{에서}$$

$$(-a)^3 + 2b = 0 \quad \therefore 2b = a^3$$

$$\therefore g(x) = (x - a)^3 + a^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x$$

$$\begin{aligned}\int_a^{3a} g(x) dx &= \int_a^{3a} (x^3 - 3ax^2 + 3a^2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - ax^3 + \frac{3}{2}a^2x^2 \right]_a^{3a} \\ &= 6a^4\end{aligned}$$

$$\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^{2a} x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^{2a} = 4a^4$$

$$\int_a^{3a} g(x) dx - \int_0^{2a} f(x) dx = 64 \text{에서}$$

$$6a^4 - 4a^4 = 64, 2a^4 = 64$$

$$\therefore a^4 = 32$$

다른 풀이 함수 $f(x) = x^3$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $2b$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$g(x) = (x - a)^3 + 2b$$

$$g(0) = 0 \text{에서}$$

$$(-a)^3 + 2b = 0 \quad \therefore 2b = a^3$$

한편 $g(x) = (x - a)^3 + 2b$ 의 그래프는 $y = x^3 + 2b$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이므로

$$\begin{aligned}\int_a^{3a} g(x) dx &= \int_a^{3a} \{(x - a)^3 + 2b\} dx = \int_0^{2a} (x^3 + 2b) dx \\ \therefore \int_a^{3a} g(x) dx - \int_0^{2a} f(x) dx &= \int_0^{2a} (x^3 + 2b) dx - \int_0^{2a} x^3 dx \\ &= \int_0^{2a} 2b dx = \left[2bx \right]_0^{2a} = 4ab\end{aligned}$$

$$\text{이때 } 2b = a^3 \text{이므로 } 4ab = 2a^4 = 64 \quad \therefore a^4 = 32$$

022 답 ⑤

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(4x^3 + \frac{1}{x} \right) dx - \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - 4 \right) dx \\ &= \int_1^2 \left\{ \left(4x^3 + \frac{1}{x} \right) - \left(\frac{1}{x} - 4 \right) \right\} dx \\ &= \int_1^2 (4x^3 + 4) dx = \left[x^4 + 4x \right]_1^2 \\ &= (16 + 8) - (1 + 4) = 19\end{aligned}$$

023 답 -16

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 \frac{4x^2}{x+2} dx + \int_3^{-1} \frac{16}{t+2} dt \\ &= \int_{-1}^3 \frac{4x^2}{x+2} dx - \int_{-1}^3 \frac{16}{x+2} dx \\ &= \int_{-1}^3 \frac{4x^2 - 16}{x+2} dx = \int_{-1}^3 \frac{4(x+2)(x-2)}{x+2} dx \\ &= \int_{-1}^3 (4x - 8) dx = \left[2x^2 - 8x \right]_{-1}^3 \\ &= (18 - 24) - (2 + 8) = -16\end{aligned}$$

024 답 ③

$$\begin{aligned}\int_0^2 (3x^3 + 2x) dx + \int_0^2 (k + 2x - 3x^3) dx \\ &= \int_0^2 \{(3x^3 + 2x) + (k + 2x - 3x^3)\} dx \\ &= \int_0^2 (4x + k) dx = \left[2x^2 + kx \right]_0^2 = 2k + 8\end{aligned}$$

따라서 $2k + 8 = 16$ 이므로 $k = 4$

025 답 ②

$$\begin{aligned}\int_1^k (8x + 4) dx + 4 \int_k^1 (1 + x - x^3) dx \\ &= \int_1^k (8x + 4) dx - \int_1^k 4(1 + x - x^3) dx \\ &= \int_1^k \{(8x + 4) - 4(1 + x - x^3)\} dx \\ &= \int_1^k (4x^3 + 4x) dx = \left[x^4 + 2x^2 \right]_1^k \\ &= (k^4 + 2k^2) - (1 + 2) = k^4 + 2k^2 - 3\end{aligned}$$

즉, $k^4 + 2k^2 - 3 = 0$ 이므로 $(k^2 + 3)(k + 1)(k - 1) = 0$
 $\therefore k = -1$ 또는 $k = 1$ ($\because k$ 는 실수)
 따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은 $-1 \times 1 = -1$

026 답 7

$$\begin{aligned}\int_{-2}^0 f(x) dx &= \int_{-2}^5 f(x) dx + \int_5^0 f(x) dx \\ &= \left\{ \int_{-2}^4 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx \right\} - \int_0^5 f(x) dx \\ &= 5 + 4 - 6 = 3 \\ \therefore \int_{-2}^0 \{f(x) - 2x\} dx &= \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_{-2}^0 2x dx \\ &= 3 - \left[x^2 \right]_{-2}^0 = 3 - (0 - 4) = 7\end{aligned}$$

027 답 ④

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x) dx - \int_{-3}^2 f(x) dx + \int_{-3}^3 f(x) dx \\ &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^{-3} f(x) dx + \int_{-3}^3 f(x) dx \\ &= \int_0^{-3} f(x) dx + \int_{-3}^3 f(x) dx \\ &= \int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x^2 - x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^3 = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}\end{aligned}$$

028 답 ①

$$\begin{aligned}
 & \int_0^2 (2x+1)^2 dx - \int_{-1}^2 (2x+1)^2 dx + \int_{-1}^0 (2x-1)^2 dx \\
 &= \int_0^2 (2x+1)^2 dx + \int_2^{-1} (2x+1)^2 dx + \int_{-1}^0 (2x-1)^2 dx \\
 &= \int_0^{-1} (2x+1)^2 dx + \int_{-1}^0 (2x-1)^2 dx \\
 &= -\int_{-1}^0 (2x+1)^2 dx + \int_{-1}^0 (2x-1)^2 dx \\
 &= \int_{-1}^0 \{(2x-1)^2 - (2x+1)^2\} dx \\
 &= \int_{-1}^0 (-8x) dx = \left[-4x^2\right]_{-1}^0 = 4
 \end{aligned}$$

029 답 ②

$$\begin{aligned}
 & \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx \text{에서} \\
 & \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx \text{이므로} \\
 & \int_{-2}^0 f(x) dx = 0 \quad \therefore \int_0^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx = 0 \\
 & f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{는 상수, } a \neq 0) \text{라 하면} \\
 & f(0) = 1 \text{에서 } c = 1 \quad \therefore f(x) = ax^2 + bx + 1 \\
 & \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (ax^2 + bx + 1) dx \\
 &= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + x\right]_0^2 = \frac{8}{3}a + 2b + 2 \\
 & \text{즉, } \frac{8}{3}a + 2b + 2 = 0 \text{이므로 } 4a + 3b = -3 \quad \cdots \cdots ㉠ \\
 & \int_{-2}^0 f(x) dx = \int_{-2}^0 (ax^2 + bx + 1) dx \\
 &= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + x\right]_{-2}^0 = \frac{8}{3}a - 2b + 2 \\
 & \text{즉, } \frac{8}{3}a - 2b + 2 = 0 \text{이므로 } 4a - 3b = -3 \quad \cdots \cdots ㉡ \\
 & ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } a = -\frac{3}{4}, b = 0 \\
 & \text{따라서 } f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 1 \text{이므로 } f(4) = -12 + 1 = -11
 \end{aligned}$$

030 답 6

$$\begin{aligned}
 & (\text{나})\text{에서} \\
 & \int_n^{n+2} f(x) dx = \int_n^{n+1} 2x dx = \left[x^2\right]_n^{n+1} = 2n+1 \\
 & \therefore \int_0^8 f(x) dx \\
 &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx + \int_4^6 f(x) dx + \int_6^8 f(x) dx \\
 &= 1 + 5 + 9 + 13 = 28 \\
 & (\text{ㄷ})\text{에서 } \int_0^1 f(x) dx = 1 \text{이므로} \\
 & \int_0^7 f(x) dx \\
 &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx + \int_5^7 f(x) dx \\
 &= 1 + 3 + 7 + 11 = 22 \\
 & \therefore \int_7^8 f(x) dx = \int_0^8 f(x) dx - \int_0^7 f(x) dx = 28 - 22 = 6
 \end{aligned}$$

031 답 ③

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^0 (2-4x) dx + \int_0^2 (3x^2+2) dx \\
 &= \left[2x-2x^2\right]_{-2}^0 + \left[x^3+2x\right]_0^2 \\
 &= -(-4-8) + (8+4) = 24
 \end{aligned}$$

032 답 $\frac{11}{2}$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \begin{cases} 1 & (x \geq 3) \\ -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} & (1 \leq x < 3) \\ x+1 & (x \leq 1) \end{cases} \text{이므로} \\
 \int_{-2}^4 f(x) dx &= \int_{-2}^1 (x+1) dx + \int_1^3 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) dx + \int_3^4 1 dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_{-2}^1 + \left[-\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x\right]_1^3 + \left[x\right]_3^4 \\
 &= \left(\frac{1}{2} + 1\right) - (2 - 2) + \left(-\frac{9}{4} + \frac{15}{2}\right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{2}\right) + 4 - 3 = \frac{11}{2}
 \end{aligned}$$

033 답 3

$$\begin{aligned}
 & k > 1 \text{이므로} \\
 \int_{-2}^k f(x) dx &= \int_{-2}^{-1} (3x^2+3) dx + \int_{-1}^k (4-2x) dx \\
 &= \left[x^3+3x\right]_{-2}^{-1} + \left[4x-x^2\right]_{-1}^k \\
 &= (-1-3) - (-8-6) + (4k-k^2) - (-4-1) \\
 &= -k^2 + 4k + 15 \\
 & \text{따라서 } -k^2 + 4k + 15 = 18 \text{이므로} \\
 & k^2 - 4k + 3 = 0, (k-1)(k-3) = 0 \\
 & \therefore k = 3 \quad (\because k > 1)
 \end{aligned}$$

034 답 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$$\begin{aligned}
 g(a) &= \int_{-a}^a f(x) dx \text{라 하자.} \\
 g(a) &= \int_{-a}^a f(x) dx \\
 &= \int_{-a}^0 (4x+1) dx + \int_0^a (-x^2+4x+1) dx \\
 &= \left[2x^2+x\right]_{-a}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+x\right]_0^a \\
 &= -(2a^2-a) + \left(-\frac{1}{3}a^3+2a^2+a\right) = -\frac{1}{3}a^3+2a \\
 g'(a) &= -a^2+2 = -(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2}) \text{이므로} \\
 g'(a) &= 0 \text{인 } a \text{의 값은 } a = \sqrt{2} \quad (\because a > 0) \\
 & a > 0 \text{에서 함수 } g(a) \text{의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.}
 \end{aligned}$$

a	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$g'(a)$		+	0	-
$g(a)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

$$\begin{aligned}
 & \text{함수 } g(a) \text{는 } a = \sqrt{2} \text{에서 최댓값을 가지므로 최댓값은} \\
 g(\sqrt{2}) &= -\frac{2\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}
 \end{aligned}$$

035 ④ -4

$$f(x) = 2x^3 - 6x \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

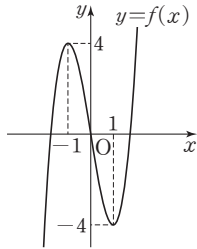
x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	-4	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$$-1 \leq t \leq 1 \text{일 때 } g(t) = f(t) = 2t^3 - 6t \text{이고,}$$

$$t \geq 1 \text{일 때 } g(t) = f(1) = -4 \text{이므로}$$

$$g(t) = \begin{cases} 2t^3 - 6t & (-1 \leq t \leq 1) \\ -4 & (t \geq 1) \end{cases}$$



$$\therefore \int_{-1}^2 g(t) dt$$

$$= \int_{-1}^1 g(t) dt + \int_1^2 g(t) dt$$

$$= \int_{-1}^1 (2t^3 - 6t) dt + \int_1^2 (-4) dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^4 - 3t^2 \right]_{-1}^1 + \left[-4t \right]_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - 3 \right) + (-8) - (-4) = -4$$

036 ④ ①

$$|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -x^2 + x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\int_0^2 |x^2 - x| dx = \int_0^1 (-x^2 + x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2$$

$$= \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = 1$$

037 ④ $\frac{5}{2}$

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & (x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -x^2 + 4 & (-2 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\int_0^3 \frac{|x^2 - 4|}{x+2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{-x^2 + 4}{x+2} dx + \int_2^3 \frac{x^2 - 4}{x+2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{-(x+2)(x-2)}{x+2} dx + \int_2^3 \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} dx$$

$$= \int_0^2 (-x+2) dx + \int_2^3 (x-2) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_2^3$$

$$= (-2+4) - 0 + \left(\frac{9}{2} - 6 \right) - (2-4) = \frac{5}{2}$$

038 ④ 4

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & (x \geq 2) \\ -x+2 & (x \leq 2) \end{cases} \text{이므로, } a > 2 \text{이므로}$$

$$\int_1^a |x-2| dx = \int_1^2 (-x+2) dx + \int_2^a (x-2) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_2^a$$

$$= (-2+4) - \left(-\frac{1}{2} + 2 \right) + \left(\frac{1}{2}a^2 - 2a \right) - (-2+4)$$

$$= \frac{1}{2}a^2 - 2a + \frac{5}{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{2}a^2 - 2a + \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \text{이므로 } a^2 - 4a = 0$$

$$a(a-4) = 0 \quad \therefore a = 4 \quad (\because a > 2)$$

039 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$|x-a| = \begin{cases} x-a & (x \geq a) \\ -x+a & (x \leq a) \end{cases} \text{이므로, } 0 < a < 1 \text{이므로}$$

$$\int_0^1 x|x-a| dx = \int_0^a x(-x+a) dx + \int_a^1 x(x-a) dx$$

$$= \int_0^a (-x^2 + ax) dx + \int_a^1 (x^2 - ax) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^a + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 \right]_a^1$$

$$= \left(-\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^3 \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}a \right) - \left(\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^3 \right)$$

$$= \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}$$

$$f(a) = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3} \text{이라 하면}$$

$$f'(a) = a^2 - \frac{1}{2} = \left(a + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(a - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$f'(a) = 0 \text{인 } a \text{의 값은 } a = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because 0 < a < 1)$$

$0 < a < 1$ 에서 함수 $f(a)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	1
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(a)$ 는 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때 최소이므로 구하는 a 의 값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다.

040 ④ $f(x) = x^2 - 2x + 2$

$$|t-x| = \begin{cases} -t+x & (0 \leq t \leq x) \\ t-x & (x \leq t \leq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(x) = \int_0^x (-t+x) dt + \int_x^2 (t-x) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2}t^2 + xt \right]_0^x + \left[\frac{1}{2}t^2 - xt \right]_x^2$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x^2 + x^2 \right) + (2-2x) - \left(\frac{1}{2}x^2 - x^2 \right)$$

$$= x^2 - 2x + 2$$

041 답 12

$$\int_{-2}^2 (x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 1) dx = 2 \int_0^2 (3x^2 - 1) dx$$

$$= 2 \left[x^3 - x \right]_0^2 = 2(8 - 2) = 12$$

042 답 ②

$$\int_{-a}^a (x^3 + 2x + 3) dx = 2 \int_0^a 3 dx$$

$$= 2 \left[3x \right]_0^a = 6a$$

따라서 $6a = 12$ 이므로 $a = 2$

043 답 $\frac{1}{2}$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 1 \text{에서}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (x^2 + ax + b) dx = 2 \int_0^1 (x^2 + b) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3}x^3 + bx \right]_0^1 = \frac{2}{3} + 2b$$

$$\text{즉, } \frac{2}{3} + 2b = 1 \text{이므로 } b = \frac{1}{6}$$

$$\int_{-1}^1 xf(x) dx = 2 \text{에서}$$

$$\int_{-1}^1 xf(x) dx = \int_{-1}^1 (x^3 + ax^2 + bx) dx = 2 \int_0^1 ax^2 dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3}ax^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}a$$

$$\text{즉, } \frac{2}{3}a = 2 \text{이므로 } a = 3$$

$$\therefore ab = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

044 답 ②

$$f(-x) = -f(x) \text{이므로 } \int_{-1}^1 f(x) dx = 0$$

$$g(x) = xf(x), h(x) = x^4 f(x) \text{라 하면}$$

$$g(-x) = -xf(-x) = xf(x) = g(x)$$

$$h(-x) = x^4 f(-x) = -x^4 f(x) = -h(x)$$

$$\therefore \int_{-1}^1 (x^4 + x + 1) f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 x^4 f(x) dx + \int_{-1}^1 xf(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx$$

$$= 2 \int_0^1 xf(x) dx = 2 \times 3 = 6$$

045 답 ②

$$f(-x) = f(x) \text{이므로 } \int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx$$

$$g(-x) = -g(x) \text{이므로 } \int_{-2}^2 g(x) dx = 0$$

$$\therefore \int_{-2}^2 \{g(x) - f(x)\} dx = \int_{-2}^2 g(x) dx - \int_{-2}^2 f(x) dx$$

$$= 0 - 2 \int_0^2 f(x) dx = -2 \times 3 = -6$$

046 답 ④

$$f(-x) = -f(x) \text{이므로 } \int_{-1}^1 f(x) dx = 0$$

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx = 15$$

$$\therefore \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx$$

$$= 3 + 15 = 18$$

047 답 2

$f(-x) = -f(x), g(-x) = g(x)$ 이므로
 $h(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -h(x)$
 따라서 함수 $h(x)$ 는 홀수 차수의 항만 있으므로 $h'(x)$ 는 짝수 차수의 항만 있다.

$$\therefore \int_{-3}^3 (x+5)h'(x) dx = \int_{-3}^3 xh'(x) dx + 5 \int_{-3}^3 h'(x) dx$$

$$= 10 \int_0^3 h'(x) dx = 10 \left[h(x) \right]_0^3$$

$$= 10 \{h(3) - h(0)\}$$

즉, $10 \{h(3) - h(0)\} = 20$ 이므로

$$h(3) - h(0) = 2$$

이때 $f(0) = -f(0)$ 에서 $f(0) = 0$ 이므로

$$h(0) = f(0)g(0) = 0$$

$$\therefore h(3) = h(0) + 2 = 2$$

048 답 10

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2) = f(x)$ 이므로

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_2^3 f(x) dx = \int_4^5 f(x) dx = \int_6^7 f(x) dx,$$

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx = \int_3^4 f(x) dx$$

$$= \int_5^6 f(x) dx = \int_7^8 f(x) dx$$

$$\therefore \int_4^8 f(x) dx$$

$$= \int_4^5 f(x) dx + \int_5^6 f(x) dx + \int_6^7 f(x) dx + \int_7^8 f(x) dx$$

$$= 2 \int_0^1 f(x) dx + 2 \int_{-1}^0 f(x) dx$$

$$= 2 \int_0^1 (4x+1) dx + 2 \int_{-1}^0 (1-4x^3) dx$$

$$= 2 \left[2x^2 + x \right]_0^1 + 2 \left[x - x^4 \right]_{-1}^0$$

$$= 2(2+1) - 2(-1-1) = 10$$

049 답 ③

$f(x+3) = f(x)$ 이므로

$$\int_1^4 f(x) dx = \int_4^7 f(x) dx = \int_7^{10} f(x) dx = 3$$

$$\therefore \int_1^{10} f(x) dx = \int_1^4 f(x) dx + \int_4^7 f(x) dx + \int_7^{10} f(x) dx$$

$$= 3 + 3 + 3 = 9$$

050 ㉔ ⑤

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4)=f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_2^6 f(x) dx = \int_6^{10} f(x) dx \\ \therefore \int_{-2}^{10} f(x) dx &= \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx \\ &= 3 \int_{-2}^2 f(x) dx = 3 \int_{-2}^2 x^2 dx = 6 \int_0^2 x^2 dx \\ &= 6 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = 6 \times \frac{8}{3} = 16\end{aligned}$$

051 ㉔ 7

$f(-x) = -f(x)$ 이므로 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$

$f(x+2) = f(x)$ 이므로

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx = \int_3^5 f(x) dx = \int_5^7 f(x) dx = 0$$

한편 $g(x) = f(x-2) + 1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_2^7 g(x) dx &= \int_2^7 \{f(x-2) + 1\} dx = \int_2^7 f(x-2) dx + \int_2^7 1 dx \\ &= \int_2^7 f(x-2) dx + \left[x \right]_2^7 \\ &= \int_2^7 f(x-2) dx + (7-2) = \int_2^7 f(x-2) dx + 5\end{aligned}$$

$f(x+2) = f(x)$ 의 양변에 $x = t-2$ 를 대입하면

$f(t) = f(t-2)$ 이므로 $f(x-2) = f(x)$

$$\begin{aligned}\therefore \int_2^7 f(x-2) dx &= \int_2^7 f(x) dx \\ &= \int_2^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx + \int_5^7 f(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx + 0 + 0 = 2\end{aligned}$$

$$\therefore \int_2^7 g(x) dx = \int_2^7 f(x-2) dx + 5 = 2 + 5 = 7$$

052 ㉔ 11

$\int_0^2 f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면 $f(x) = 3x^2 + 2kx$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(t) dt &= \int_0^2 (3t^2 + 2kt) dt \\ &= \left[t^3 + kt^2 \right]_0^2 = 8 + 4k\end{aligned}$$

$$\text{즉, } 8 + 4k = k \text{이므로 } k = -\frac{8}{3}$$

따라서 $f(x) = 3x^2 - \frac{16}{3}x$ 이므로

$$f(3) = 27 - 16 = 11$$

053 ㉔ ②

$\int_{-1}^2 f'(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면 $f(x) = x^3 - 2x + k$ 이므로

$$f'(x) = 3x^2 - 2$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^2 f'(t) dt &= \int_{-1}^2 (3t^2 - 2) dt = \left[t^3 - 2t \right]_{-1}^2 \\ &= (8 - 4) - (-1 + 2) = 3\end{aligned}$$

따라서 $k = 3$ 이므로 $f(x) = x^3 - 2x + 3$

$$\therefore f(-2) = -8 + 4 + 3 = -1$$

054 ㉔ 1

$\int_0^1 f(t) dt = a$, $\int_{-1}^0 f(t) dt = b$ (a, b 는 상수)로 놓으면

$f(x) = -6x^2 + 4ax + b$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 (-6t^2 + 4at + b) dt \\ &= \left[-2t^3 + 2at^2 + bt \right]_0^1 = -2 + 2a + b\end{aligned}$$

$$\text{즉, } -2 + 2a + b = a \text{이므로 } a + b = 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 f(t) dt &= \int_{-1}^0 (-6t^2 + 4at + b) dt \\ &= \left[-2t^3 + 2at^2 + bt \right]_{-1}^0 = -2 - 2a + b\end{aligned}$$

$$\text{즉, } -2 - 2a + b = b \text{이므로}$$

$$2a = -2 \quad \therefore a = -1$$

이를 ㉠에 대입하면

$$-1 + b = 2 \quad \therefore b = 3$$

따라서 $f(x) = -6x^2 - 4x + 3$ 이므로

$$f(-1) = -6 + 4 + 3 = 1$$

055 ㉔ 8

$f(x) = 12x^2 + \int_0^1 (6x - 4t)f(t) dt$ 에서

$$f(x) = 12x^2 + 6x \int_0^1 f(t) dt - 4 \int_0^1 tf(t) dt$$

$\int_0^1 f(t) dt = a$, $\int_0^1 tf(t) dt = b$ (a, b 는 상수)로 놓으면

$f(x) = 12x^2 + 6ax - 4b$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 (12t^2 + 6at - 4b) dt \\ &= \left[4t^3 + 3at^2 - 4bt \right]_0^1 = 4 + 3a - 4b\end{aligned}$$

$$\text{즉, } 4 + 3a - 4b = a \text{이므로 } a - 2b = -2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 tf(t) dt &= \int_0^1 (12t^3 + 6at^2 - 4bt) dt \\ &= \left[3t^4 + 2at^3 - 2bt^2 \right]_0^1 = 3 + 2a - 2b\end{aligned}$$

$$\text{즉, } 3 + 2a - 2b = b \text{이므로 } 2a - 3b = -3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 0$, $b = 1$

따라서 $f(x) = 12x^2 - 4$ 이므로

$$f(1) = 12 - 4 = 8$$

056 ㉔ 3

$\int_2^x f(t) dt = x^3 + ax^2 + 8$ 의 양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$0 = 8 + 4a + 8 \quad \therefore a = -4$$

$\int_2^x f(t) dt = x^3 - 4x^2 + 8$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 3x^2 - 8x \quad \therefore f(3) = 27 - 24 = 3$$

057 ㉔ 4

$f(x) = \int_3^x (3t^2 - 2t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

$$\therefore \int_0^2 (3x^2 - 2x) dx = \left[x^3 - x^2 \right]_0^2 = 8 - 4 = 4$$

058 답 ②

$$\int_a^x f(t) dt = x^2 + ax - 8 \text{의 양변에 } x=a \text{를 대입하면}$$

$$0 = a^2 + a^2 - 8, a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 (\because a > 0)$$

$$\int_2^x f(t) dt = x^2 + 2x - 8 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) = 2x + 2 \quad \therefore f(1) = 2 + 2 = 4$$

$$\therefore a + f(1) = 2 + 4 = 6$$

059 답 $\frac{22}{3}$

$$\int_1^x f(t) dt = xf(x) - \frac{4}{3}x^3 \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$0 = f(1) - \frac{4}{3} \quad \therefore f(1) = \frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\int_1^x f(t) dt = xf(x) - \frac{4}{3}x^3 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 4x^2$$

$$xf'(x) = 4x^2 \quad \therefore f'(x) = 4x$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int 4x dx = 2x^2 + C$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } f(1) = 2 + C = \frac{4}{3} \quad \therefore C = -\frac{2}{3}$$

따라서 $f(x) = 2x^2 - \frac{2}{3}$ 이므로

$$f(2) = 8 - \frac{2}{3} = \frac{22}{3}$$

060 답 ①

$$g(x) + \int_1^x f(t) dt = -4x^2 + 9x + 5 \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$g(1) = -4 + 9 + 5 = 10$$

$$g(x) + \int_1^x f(t) dt = -4x^2 + 9x + 5 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$g'(x) + f(x) = -8x + 9$$

이때 $f(x)g'(x) = -20x^2 + 54x - 36 = -2(2x-3)(5x-6)$ 이므로

$$\begin{cases} f(x) = 2x-3 \\ g'(x) = -10x+12 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} f(x) = -10x+12 \\ g'(x) = 2x-3 \end{cases}$$

(i) $g'(x) = -10x + 12$ 일 때

$$g(x) = \int g'(x) dx = \int (-10x + 12) dx = -5x^2 + 12x + C_1$$

$$g(1) = 10 \text{에서 } -5 + 12 + C_1 = 10 \quad \therefore C_1 = 3$$

즉, $g(x) = -5x^2 + 12x + 3$ 이므로

$$g(2) = -20 + 24 + 3 = 7$$

(ii) $g'(x) = 2x - 3$ 일 때

$$g(x) = \int g'(x) dx = \int (2x - 3) dx = x^2 - 3x + C_2$$

$$g(1) = 10 \text{에서 } 1 - 3 + C_2 = 10 \quad \therefore C_2 = 12$$

즉, $g(x) = x^2 - 3x + 12$ 이므로

$$g(2) = 4 - 6 + 12 = 10$$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $g(x) = -5x^2 + 12x + 3$ 이므로

$$g(3) = -45 + 36 + 3 = -6$$

061 답 6

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{F(x)} = -2 \text{에서 } x \rightarrow 3 \text{일 때 (분자)} \rightarrow 0 \text{이고 } 0 \text{이 아닌 극한}$$

값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} F(x) = 0$ 이고, 함수 $F(x)$ 가 다항함수이므로 $F(3) = 0$

$$F(x) = \int_x^a f(t) dt \text{의 양변에 } x=a \text{를 대입하면 } F(a) = 0$$

이때 함수 $F(x)$ 가 일대일 대응이므로 $a = 3$

$$F(x) = -\int_3^x f(t) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$F'(x) = -f(x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{F(x) - F(3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{x-3}{F(x) - F(3)} \times (x+3) \right\}$$

$$= \frac{1}{F'(3)} \times 6 = -\frac{6}{f(3)}$$

즉, $-\frac{6}{f(3)} = -2$ 이므로 $f(3) = 3$

$$\therefore a + f(3) = 3 + 3 = 6$$

062 답 16

$$\int_1^x f(t) dt = \frac{x-1}{2} \{f(x) + f(1)\} \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \{f(x) + f(1)\} + \frac{x-1}{2} f'(x)$$

$$\therefore f(x) = (x-1)f'(x) + f(1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(x)$ 의 최고차항을 $ax^n (a \neq 0)$ 이라 하면 $f'(x)$ 의 최고차항은 nax^{n-1} 이므로 $\textcircled{1}$ 의 양변에서 최고차항을 비교하면

$$ax^n = x \times nax^{n-1} \quad \therefore n = 1 (\because a \neq 0)$$

즉, $f(x)$ 는 일차함수이고 $f(0) = 1$ 이므로 $f(x) = ax + 1$ 이라 하면

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (ax + 1) dx = \left[\frac{1}{2}ax^2 + x \right]_0^2 = 2a + 2$$

$$4 \int_{-1}^1 xf(x) dx = 4 \int_{-1}^1 (ax^2 + x) dx = 8 \int_0^1 ax^2 dx$$

$$= 8 \left[\frac{1}{3}ax^3 \right]_0^1 = \frac{8}{3}a$$

즉, $2a + 2 = \frac{8}{3}a$ 이므로 $a = 3$

따라서 $f(x) = 3x + 1$ 이므로

$$f(5) = 15 + 1 = 16$$

063 답 10

$$\int_1^x (x-t)f(t) dt = x^3 - x^2 - x + 1 \text{에서}$$

$$x \int_1^x f(t) dt - \int_1^x tf(t) dt = x^3 - x^2 - x + 1$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\left\{ \int_1^x f(t) dt + xf(x) \right\} - xf(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

$$\therefore \int_1^x f(t) dt = 3x^2 - 2x - 1$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 6x - 2$$

$$\therefore f(2) = 12 - 2 = 10$$

064 ㉮ 4

$$F(x) = \int_1^x x(3t+1) dt \text{에서 } F(x) = x \int_1^x (3t+1) dt$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \int_1^x (3t+1) dt + x(3x+1)$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = 0 + 1 \times (3+1) = 4$$

065 ㉮ 0

$$\int_2^x (x-t)f(t) dt = x^3 + ax^2 + 4x \text{의 양변에 } x=2 \text{를 대입하면}$$

$$0 = 8 + 4a + 8 \quad \therefore a = -4$$

$$\int_2^x (x-t)f(t) dt = x^3 - 4x^2 + 4x \text{에서}$$

$$x \int_2^x f(t) dt - \int_2^x tf(t) dt = x^3 - 4x^2 + 4x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\left\{ \int_2^x f(t) dt + xf(x) \right\} - xf(x) = 3x^2 - 8x + 4$$

$$\therefore \int_2^x f(t) dt = 3x^2 - 8x + 4$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 6x - 8 \quad \therefore f(2) = 12 - 8 = 4$$

$$\therefore a + f(2) = -4 + 4 = 0$$

066 ㉮ 9

$$\int_0^x (x-t)f'(t) dt = x^4 - x^3 \text{에서}$$

$$x \int_0^x f'(t) dt - \int_0^x tf'(t) dt = x^4 - x^3$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\left\{ \int_0^x f'(t) dt + xf'(x) \right\} - xf'(x) = 4x^3 - 3x^2$$

$$\therefore \int_0^x f'(t) dt = 4x^3 - 3x^2$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 12x^2 - 6x$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (12x^2 - 6x) dx = 4x^3 - 3x^2 + C$$

$$f(0) = 2 \text{에서 } C = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2 \text{이므로}$$

$$f'(1) + f(1) = (12 - 6) + (4 - 3 + 2) = 9$$

067 ㉮ 9

$$x^2 f(x) = x^3 + \int_0^x (x^2 + t)f'(t) dt \text{에서}$$

$$x^2 f(x) = x^3 + x^2 \int_0^x f'(t) dt + \int_0^x tf'(t) dt$$

$$\text{이때 } \int_0^x f'(t) dt = [f(t)]_0^x = f(x) - f(0) = f(x) - 3 \text{이므로}$$

$$x^2 f(x) = x^3 + x^2 \{f(x) - 3\} + \int_0^x tf'(t) dt$$

$$\therefore \int_0^x tf'(t) dt = -x^3 + 3x^2$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$xf'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$\therefore f'(x) = -3x + 6$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (-3x + 6) dx$$

$$= -\frac{3}{2}x^2 + 6x + C$$

$$f(0) = 3 \text{에서 } C = 3$$

$$\text{따라서 } f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6x + 3 \text{이므로}$$

$$f(2) = -6 + 12 + 3 = 9$$

068 ㉮ 14

$$\int_{-1}^x (x-t)f(t) dt = 2x^3 + ax^2 + bx \text{의 양변에 } x = -1 \text{을 대입하면}$$

$$0 = -2 + a - b$$

$$\therefore a - b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\int_{-1}^x (x-t)f(t) dt = 2x^3 + ax^2 + bx \text{에서}$$

$$x \int_{-1}^x f(t) dt - \int_{-1}^x tf(t) dt = 2x^3 + ax^2 + bx$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\left\{ \int_{-1}^x f(t) dt + xf(x) \right\} - xf(x) = 6x^2 + 2ax + b$$

$$\therefore \int_{-1}^x f(t) dt = 6x^2 + 2ax + b$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$0 = 6 - 2a + b$$

$$\therefore 2a - b = 6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉮, ㉮을 연립하여 풀면

$$a = 4, b = 2$$

$$\therefore \int_{-1}^x f(t) dt = 6x^2 + 8x + 2$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 12x + 8$$

$$\therefore \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (12x + 8) dx$$

$$= \left[6x^2 + 8x \right]_0^1 = 6 + 8 = 14$$

069 ㉮ ①

$$f(x) = \int_1^x (4t - t^3) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x) = 4x - x^3 = -x(x+2)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$f(0) = \int_1^0 (4t - t^3) dt = \left[2t^2 - \frac{1}{4}t^4 \right]_1^0$$

$$= -\left(2 - \frac{1}{4} \right) = -\frac{7}{4}$$

070 답 81

$f(x) = \int_0^x (-t^2 + t + a) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = -x^2 + x + a$$

함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 극댓값을 가지므로 $f'(3)=0$ 에서

$$-9 + 3 + a = 0 \quad \therefore a = 6$$

$$\begin{aligned} \therefore M = f(3) &= \int_0^3 (-t^2 + t + 6) dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 6t \right]_0^3 = -9 + \frac{9}{2} + 18 = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore aM = 6 \times \frac{27}{2} = 81$$

071 답 5

$f(x) = \int_0^x (t^2 + at + b) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x^2 + ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값 $\frac{2}{3}$ 를 가지므로

$$f'(2) = 0, f(2) = \frac{2}{3}$$

$$f'(2) = 0 \text{에서 } 4 + 2a + b = 0$$

$$\therefore 2a + b = -4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f(2) = \frac{2}{3} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= \int_0^2 (t^2 + at + b) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2 + bt \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} + 2a + 2b \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{8}{3} + 2a + 2b = \frac{2}{3} \text{이므로 } a + b = -1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -3, b = 2$

$$\therefore b - a = 2 - (-3) = 5$$

072 답 ④

$f(x) = \int_x^{x+1} (2t^3 - 2t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{2(x+1)^3 - 2(x+1)\} - (2x^3 - 2x) \\ &= 6x^2 + 6x = 6x(x+1) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 0$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$\begin{aligned} M = f(-1) &= \int_{-1}^0 (2t^3 - 2t) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^4 - t^2 \right]_{-1}^0 = -\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$\begin{aligned} m = f(0) &= \int_0^1 (2t^3 - 2t) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^4 - t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore M - m = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

073 답 1

$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x)$$

즉, $f(x)$ 는 $F(x)$ 의 도함수이다.

함수 $F(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f(x)$	+	0	-	0	+
$F(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

주어진 그래프에서 $f(x) = \begin{cases} x-3 & (x \geq 2) \\ -x+1 & (x \leq 2) \end{cases}$ 이고, 함수 $F(x)$ 는

$x=3$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$\begin{aligned} F(3) &= \int_{-1}^3 f(t) dt \\ &= \int_{-1}^2 (-t+1) dt + \int_2^3 (t-3) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t^2 + t \right]_{-1}^2 + \left[\frac{1}{2}t^2 - 3t \right]_2^3 \\ &= (-2+2) - \left(-\frac{1}{2}-1\right) + \left(\frac{9}{2}-9\right) - (2-6) = 1 \end{aligned}$$

074 답 31

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x) = x^3 - 12x + a$$

사차함수 $F(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식

$F'(x) = 0$, 즉 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2) \text{이므로}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

즉, $f(-2)f(2) < 0$ 이어야 하므로

$$(a+16)(a-16) < 0$$

$$\therefore -16 < a < 16$$

따라서 정수 a 는 $-15, -14, -13, \dots, 15$ 의 31개이다.

075 답 ③

$f(x) = \int_{-1}^x (6t^3 - 6t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 6x^3 - 6x = 6x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1
$f'(x)$	0	+	0	-	0
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최대이므로 최댓값은

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_{-1}^0 (6t^3 - 6t) dt \\ &= \left[\frac{3}{2}t^4 - 3t^2 \right]_{-1}^0 \\ &= -\left(\frac{3}{2} - 3\right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

076 ㉠ -1

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x)$$

즉, $f(x)$ 는 $F(x)$ 의 도함수이다.

$f(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 1$ 또는 $x = 3$ ($\because 0 \leq x \leq 3$)

구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $F(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3
$f(x)$	+	+	0	-	0
$F(x)$		↗	극대	↘	

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = \int_0^1 f(t) dt = 1$$

$$F(3) = \int_0^3 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^3 f(t) dt = 1 + (-2) = -1$$

따라서 구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $F(x)$ 의 최댓값은 1, 최솟값은 -1
이므로 구하는 곱은 $1 \times (-1) = -1$

077 ㉠ ④

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x)$$

즉, $f(x)$ 는 $F(x)$ 의 도함수이다.

주어진 그래프에서 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극대, $x = 2$ 에서 극소이므로

$$f'(-2) = 0, f'(2) = 0$$

$f'(x) = a(x+2)(x-2)$ ($a > 0$)라 하면

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int a(x^2 - 4) dx = a\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right) + C$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 원점을 지나므로 $f(0) = 0$ 에서
 $C = 0$

$$\therefore f(x) = a\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right) = \frac{1}{3}ax(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})$$

$f(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 0$ 또는 $x = 2\sqrt{3}$ ($\because 0 \leq x \leq 4$)

구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $F(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$2\sqrt{3}$	...	4
$f(x)$	0	-	0	+	+
$F(x)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $F(x)$ 는 $x = 2\sqrt{3}$ 에서 최솟이므로 최솟값은
 $F(2\sqrt{3})$

078 ㉠ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$$f(x) = \int_0^x t(x-t) dt \text{에서}$$

$$f(x) = x \int_0^x t dt - \int_0^x t^2 dt$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \int_0^x t dt + x^2 - x^2 = \int_0^x t dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x = \frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore f'(0) = 0$$

ㄴ. $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 \geq 0$ 이므로 모든 실수 x 에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

ㄷ. 구간 $[-1, 6]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$\begin{aligned} f(-1) &= \int_0^{-1} t(-1-t) dt = \int_0^{-1} (-t^2 - t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2\right]_0^{-1} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

079 ㉠ ①

$f(x) = 5x^2 - 4x - 8$ 이라 하고, 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x (5t^2 - 4t - 8) dt &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} [F(t)]_2^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x-2} \\ &= F'(2) \\ &= f(2) \\ &= 20 - 8 - 8 = 4 \end{aligned}$$

080 ㉠ 6

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+2h} f(x) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [F(x)]_1^{1+2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h) - F(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h) - F(1)}{2h} \times 2 \\ &= 2F'(1) \\ &= 2f(1) \\ &= 2(-2+5) = 6 \end{aligned}$$

081 ㉠ 2

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2-9} \int_3^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2-9} [F(t)]_3^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{F(x) - F(3)}{x^2-9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{F(x) - F(3)}{x-3} \times \frac{1}{x+3} \right\} \\ &= \frac{1}{6} F'(3) \\ &= \frac{1}{6} f(3) \end{aligned}$$

즉, $\frac{1}{6}f(3) = 2$ 이므로 $f(3) = 12$

$$9 + 3a - 3 = 12, 3a = 6$$

$$\therefore a = 2$$

082 답 22

$xf(x) - x^3 = \int_1^x \{f(t) - t\} dt$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) - 1 = 0 \quad \therefore f(1) = 1$$

$xf(x) - x^3 = \int_1^x \{f(t) - t\} dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) - 3x^2 = f(x) - x$$

$$xf'(x) = 3x^2 - x = x(3x - 1)$$

$$\therefore f'(x) = 3x - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (3x - 1) dx \\ &= \frac{3}{2}x^2 - x + C \end{aligned}$$

$f(1) = 1$ 에서

$$\frac{3}{2} - 1 + C = 1 \quad \therefore C = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$$

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{3-h}^{3+h} f(x) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [F(x)]_{3-h}^{3+h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(3+h) - F(3-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(3+h) - F(3) - \{F(3-h) - F(3)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(3+h) - F(3)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(3-h) - F(3)}{-h} \\ &= 2F'(3) \\ &= 2f(3) \\ &= 2\left(\frac{27}{2} - 3 + \frac{1}{2}\right) \\ &= 22 \end{aligned}$$

083 답 4

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [F(t)]_x^{x+h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= F'(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

즉, $g'(x) = 2x - 4$ 이므로

$$\begin{aligned} g(x) &= \int g'(x) dx = \int (2x - 4) dx \\ &= x^2 - 4x + C \end{aligned}$$

$g(1) = -1$ 에서

$$1 - 4 + C = -1 \quad \therefore C = 2$$

$$\therefore g(x) = x^2 - 4x + 2$$

따라서 방정식 $g(x) = 0$ 의 모든 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 4이다.

084 답 ①

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x^2 + 2x + 4)f(x) dx &= \int_0^2 (x^2 + 2x + 4)(x - 2) dx \\ &= \int_0^2 (x^3 - 8) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 8x \right]_0^2 \\ &= 4 - 16 = -12 \end{aligned}$$

085 답 ③

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (9x^2 - 2kx + 3) dx &= \left[3x^3 - kx^2 + 3x \right]_{-1}^2 \\ &= (24 - 4k + 6) - (-3 - k - 3) \\ &= 36 - 3k \end{aligned}$$

즉, $36 - 3k > 6$ 이므로 $-3k > -30$

$$\therefore k < 10$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 9이다.

086 답 2

$$\begin{aligned} \int_{-1}^k (x^2 - 2x) dx - 2 \int_k^{-1} (x^2 + x + 3) dx &= \int_{-1}^k (x^2 - 2x) dx + \int_{-1}^k 2(x^2 + x + 3) dx \\ &= \int_{-1}^k \{(x^2 - 2x) + 2(x^2 + x + 3)\} dx \\ &= \int_{-1}^k (3x^2 + 6) dx = \left[x^3 + 6x \right]_{-1}^k \\ &= (k^3 + 6k) - (-1 - 6) = k^3 + 6k + 7 \end{aligned}$$

즉, $k^3 + 6k + 7 = 9k + 9$ 이므로

$$k^3 - 3k - 2 = 0, (k+1)^2(k-2) = 0$$

$$\therefore k = 2 (\because k \neq -1)$$

087 답 28

$$\begin{aligned} \int_2^4 (\sqrt{x} + 2)^2 dx - \int_4^8 (\sqrt{t} - 2)^2 dt + \int_2^8 (\sqrt{y} - 2)^2 dy &= \int_2^4 (\sqrt{x} + 2)^2 dx + \int_8^4 (\sqrt{x} - 2)^2 dx + \int_2^8 (\sqrt{x} - 2)^2 dx \\ &= \int_2^4 (\sqrt{x} + 2)^2 dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - 2)^2 dx \\ &= \int_2^4 \{(\sqrt{x} + 2)^2 + (\sqrt{x} - 2)^2\} dx \\ &= \int_2^4 (2x + 8) dx = \left[x^2 + 8x \right]_2^4 \\ &= (16 + 32) - (4 + 16) = 28 \end{aligned}$$

088 답 ④

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 f(x) dx &= \int_{-3}^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \\ &= \int_{-3}^2 f(x) dx + \left\{ \int_2^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx \right\} \\ &= \int_{-3}^2 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx \\ &= 5 - 8 + 6 = 3 \end{aligned}$$

089 [답] ①

주어진 그래프에서 $f(x) = \begin{cases} -4 & (x \geq 0) \\ -2x-4 & (x \leq 0) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-3}^1 xf(x) dx &= \int_{-3}^0 x(-2x-4) dx + \int_0^1 \{x \times (-4)\} dx \\ &= \int_{-3}^0 (-2x^2-4x) dx + \int_0^1 (-4x) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3-2x^2\right]_{-3}^0 + \left[-2x^2\right]_0^1 \\ &= -(18-18) + (-2) = -2 \end{aligned}$$

090 [답] ②

$|x| + |x-1| = \begin{cases} 2x-1 & (x \geq 1) \\ 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ -2x+1 & (x \leq 0) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (|x| + |x-1|) dx &= \int_{-1}^0 (-2x+1) dx + \int_0^1 1 dx + \int_1^2 (2x-1) dx \\ &= \left[-x^2+x\right]_{-1}^0 + \left[x\right]_0^1 + \left[x^2-x\right]_1^2 \\ &= -(-1-1) + 1 + (4-2) - (1-1) = 5 \end{aligned}$$

091 [답] -20

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 (x^3-3x^2+5x-1) dx + \int_0^2 (x^3-3x^2+5x-1) dx \\ &= \int_{-2}^2 (x^3-3x^2+5x-1) dx \\ &= 2 \int_0^2 (-3x^2-1) dx \\ &= 2 \left[-x^3-x\right]_0^2 = 2(-8-2) = -20 \end{aligned}$$

092 [답] ③

$f(-x) = -f(x)$ 이므로

$$\int_{-4}^4 f(x) dx = 0$$

$g(-x) = g(x)$ 이므로

$$\int_{-4}^4 g(x) dx = 2 \int_0^4 g(x) dx$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-4}^4 \{f(x) + g(x)\} dx &= \int_{-4}^4 f(x) dx + \int_{-4}^4 g(x) dx \\ &= 0 + 2 \int_0^4 g(x) dx \\ &= 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

093 [답] 1

(*)에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+1) = f(x-1)$ 이므로 x 대신 $x+1$ 을 대입하면

$$f(x+2) = f(x)$$

$$\therefore \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx = \int_3^5 f(x) dx = \int_5^7 f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_3^8 f(x) dx &= \int_3^5 f(x) dx + \int_5^7 f(x) dx + \int_7^8 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^0 f(x) dx \\ &= 3 \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \\ &= 3 \times 2 - 5 = 1 \end{aligned}$$

094 [답] ⑤

$f(x) = -4x^3 + \int_0^1 (2x+2)f(t) dt$ 에서

$$f(x) = -4x^3 + 2x \int_0^1 f(t) dt + 2 \int_0^1 f(t) dt$$

$\int_0^1 f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$f(x) = -4x^3 + 2kx + 2k$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 (-4t^3 + 2kt + 2k) dt \\ &= \left[-t^4 + kt^2 + 2kt\right]_0^1 \\ &= -1 + k + 2k = 3k - 1 \end{aligned}$$

즉, $3k-1=k$ 이므로 $k = \frac{1}{2}$

따라서 $f(x) = -4x^3 + x + 1$ 이므로 $f(0) = 1$

095 [답] ③

$\int_a^x f(t) dt = 2x^2 - 5x - 3$ 의 양변에 $x=a$ 를 대입하면

$$0 = 2a^2 - 5a - 3$$

$$(2a+1)(a-3) = 0 \quad \therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

$\int_3^x f(t) dt = 2x^2 - 5x - 3$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 4x - 5$$

$$\therefore f(5) = 20 - 5 = 15$$

$$\therefore a + f(5) = 3 + 15 = 18$$

096 [답] ②

$\int_0^1 f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$\int_0^x f(t) dt = -3x^3 + 2x^2 - 2kx$$

양변을 x 에 대하여 미분하면 $f(x) = -9x^2 + 4x - 2k$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 (-9t^2 + 4t - 2k) dt \\ &= \left[-3t^3 + 2t^2 - 2kt\right]_0^1 \\ &= -3 + 2 - 2k = -2k - 1 \end{aligned}$$

즉, $-2k-1=k$ 이므로 $k = -\frac{1}{3}$

따라서 $f(x) = -9x^2 + 4x + \frac{2}{3}$ 이므로 $f(0) = \frac{2}{3}$

097 답 -6

$$\int_0^x (x-t)f(t) dt = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 \text{에서}$$

$$x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\left\{ \int_0^x f(t) dt + x f(x) \right\} - x f(x) = 2x^3 - 6x$$

$$\therefore \int_0^x f(t) dt = 2x^3 - 6x$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 6x^2 - 6$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값 -6 을 갖는다.

098 답 ①

$$f(x) = \int_2^x (3t^2 + 3t - 6) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 3(x+2)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$\begin{aligned} f(-2) &= \int_2^{-2} (3t^2 + 3t - 6) dt \\ &= 2 \int_2^0 (3t^2 - 6) dt = 2 \left[t^3 - 6t \right]_2^0 \\ &= 2 \{ -(8 - 12) \} = 8 \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_2^1 (3t^2 + 3t - 6) dt = \left[t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 6t \right]_2^1 \\ &= \left(1 + \frac{3}{2} - 6 \right) - (8 + 6 - 12) = -\frac{11}{2} \end{aligned}$$

따라서 극댓값과 극솟값의 곱은

$$8 \times \left(-\frac{11}{2} \right) = -44$$

099 답 ㄱ, ㄷ

$$\text{ㄱ. } h(x) = \int_1^x \{f(t) - g(t)\} dt \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$h(1) = 0$$

$$\text{ㄷ. } h(x) = \int_1^x \{f(t) - g(t)\} dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$h'(x) = f(x) - g(x)$$

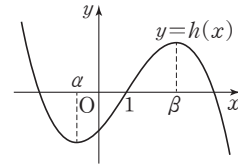
$$h'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = \alpha \text{ 또는 } x = \beta$$

함수 $h(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	α	...	β	...
$h'(x)$	-	0	+	0	-
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $h(x)$ 는 $x = \alpha$ 에서 극소이고, $x = \beta$ 에서 극대이다.

ㄴ. ㄱ에서 $h(1) = 0$ 이므로 함수 $y = h(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 방정식 $h(x) = 0$ 은 한 개의 음의 근과 두 개의 양의 근을 갖는다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

100 답 18

$$f(x) = \int_{x-1}^{x+1} (t^2 - 2t) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{(x+1)^2 - 2(x+1)\} - \{(x-1)^2 - 2(x-1)\} \\ &= 4x - 4 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1$$

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	1	...	2
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$		↘	극소	↗	

$$\begin{aligned} f(-2) &= \int_{-3}^{-1} (t^2 - 2t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_{-3}^{-1} \\ &= \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) - (-9 - 9) = \frac{50}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^2 (t^2 - 2t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= \int_1^3 (t^2 - 2t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_1^3 \\ &= (9 - 9) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } M = \frac{50}{3}, m = -\frac{4}{3} \text{이므로}$$

$$M - m = \frac{50}{3} - \left(-\frac{4}{3} \right) = 18$$

101 답 ②

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} \int_2^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} \left[F(t) \right]_2^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} \times \frac{1}{x + 2} \right\} \\ &= \frac{1}{4} F'(2) \\ &= \frac{1}{4} f(2) \\ &= \frac{1}{4} (8 + 12 - 4) = 4 \end{aligned}$$



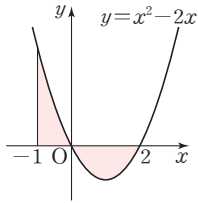
001 답 ④

곡선 $y=x^2-2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^2-2x=0$ 에서

$$x(x-2)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^2 |x^2-2x| dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^2-2x) dx + \int_0^2 (-x^2+2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

002 답 $\frac{32}{3}$

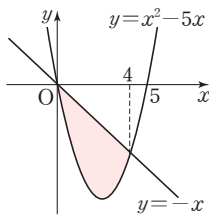
곡선 $y=x^2-5x$ 와 직선 $y=-x$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2-5x=-x$ 에서

$$x^2-4x=0, x(x-4)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^4 \{-x - (x^2-5x)\} dx \\ &= \int_0^4 (-x^2+4x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^4 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$



003 답 9

두 곡선 $y=x^2-3x+4$, $y=-x^2+7x-4$ 의 교점의 x 좌표는

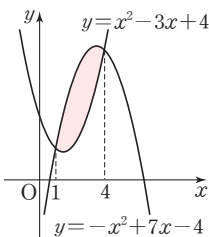
$$x^2-3x+4=-x^2+7x-4$$

$$x^2-5x+4=0, (x-1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_1^4 \{(-x^2+7x-4) - (x^2-3x+4)\} dx \\ &= \int_1^4 (-2x^2+10x-8) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 8x \right]_1^4 = 9 \end{aligned}$$



004 답 ②

$f(x)=x^3+2$ 라 하면 $f'(x)=3x^2$ 이므로 점 (1, 3)에서의 접선의 기울기는

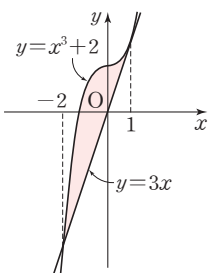
$$f'(1)=3 \text{이고, 접선의 방정식은}$$

$$y-3=3(x-1) \quad \therefore y=3x$$

곡선 $y=x^3+2$ 와 직선 $y=3x$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3+2=3x$ 에서

$$x^3-3x+2=0, (x+2)(x-1)^2=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^1 \{(x^3+2)-3x\} dx = \int_{-2}^1 (x^3-3x+2) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

005 답 $\frac{3}{2}$

$A=B$ 이므로

$$\int_0^2 (x^3-ax^2) dx = 0, \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a}{3}x^3 \right]_0^2 = 0$$

$$4 - \frac{8}{3}a = 0 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

006 답 4

곡선 $y=-x^2+2x$ 와 직선 $y=ax$ 의 교점의 x 좌표는 $-x^2+2x=ax$ 에서

$$x^2+(a-2)x=0, x(x+a-2)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2-a$$

곡선 $y=-x^2+2x$ 와 x 축으로 둘러싸인

도형의 넓이를 S_1 이라 하면

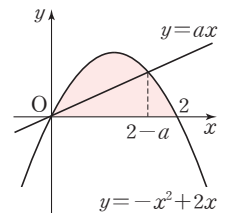
$$S_1 = \int_0^2 (-x^2+2x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

곡선 $y=-x^2+2x$ 와 직선 $y=ax$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{2-a} \{(-x^2+2x) - ax\} dx = \int_0^{2-a} \{-x^2 + (2-a)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{2-a}{2}x^2 \right]_0^{2-a} = -\frac{1}{3}(2-a)^3 + \frac{1}{2}(2-a)^3 \\ &= \frac{1}{6}(2-a)^3 \end{aligned}$$

이때 $S_2 = \frac{1}{2}S_1$ 이므로

$$\frac{1}{6}(2-a)^3 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \quad \therefore (2-a)^3 = 4$$



007 답 ①

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로 $x^3=x$ 에서

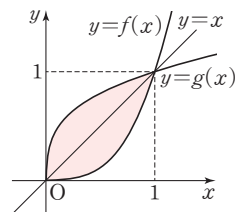
$$x^3-x=0, x(x+1)(x-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1 (\because x \geq 0)$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선

$y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 도형의 넓이는

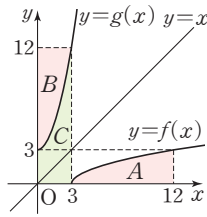
$$\begin{aligned} & 2 \int_0^1 (x-x^3) dx = 2 \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 \\ &= 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



008 답 ④

함수 $y=f(x)$ 와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 $A=B$

$$\begin{aligned} \therefore \int_3^{12} f(x) dx + \int_0^3 g(x) dx \\ = A + C = B + C = 3 \times 12 = 36 \end{aligned}$$



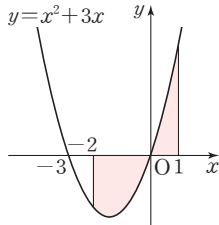
009 답 $\frac{31}{6}$

곡선 $y=x^2+3x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^2+3x=0$ 에서

$$x(x+3)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=0$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

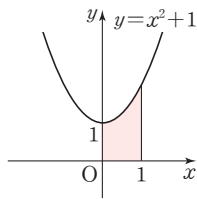
$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 |x^2+3x| dx \\ = \int_{-2}^0 (-x^2-3x) dx + \int_0^1 (x^2+3x) dx \\ = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 \\ = \frac{10}{3} + \frac{11}{6} = \frac{31}{6} \end{aligned}$$



010 답 $\frac{4}{3}$

구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^1 |x^2+1| dx = \int_0^1 (x^2+1) dx \\ = \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



011 답 $\frac{1}{2}$

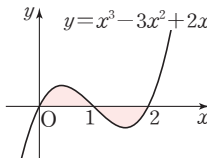
곡선 $y=x^3-3x^2+2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^3-3x^2+2x=0$ 에서

$$x(x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^2 |x^3-3x^2+2x| dx \\ = \int_0^1 (x^3-3x^2+2x) dx + \int_1^2 (-x^3+3x^2-2x) dx \\ = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 \right]_1^2 \\ = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



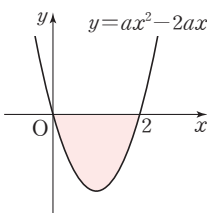
012 답 ③

곡선 $y=ax^2-2ax$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $ax^2-2ax=0$ 에서

$$ax(x-2)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

$a>0$ 이므로 곡선 $y=ax^2-2ax$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\begin{aligned} \int_0^2 |ax^2-2ax| dx &= \int_0^2 (-ax^2+2ax) dx \\ &= \left[-\frac{a}{3}x^3 + ax^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3}a \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{4}{3}a=4 \text{ 이므로 } a=3$$

013 답 2

$$S_2 = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$S_1 + S_2 = 1 \text{ 이므로 } S_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

014 답 ④

(가)에서 $f'(x) = -3x^2 - 6x + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (-3x^2 - 6x + 1) dx \\ &= -x^3 - 3x^2 + x + C \end{aligned}$$

(나)에서 $f(-2) = -3$ 이므로

$$8 - 12 - 2 + C = -3 \quad \therefore C = 3$$

$$\therefore f(x) = -x^3 - 3x^2 + x + 3$$

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

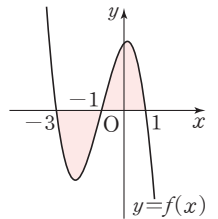
$$-x^3 - 3x^2 + x + 3 = 0 \text{ 에서}$$

$$(x+3)(x+1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-3}^1 |-x^3 - 3x^2 + x + 3| dx \\ = \int_{-3}^{-1} (x^3 + 3x^2 - x - 3) dx + \int_{-1}^1 (-x^3 - 3x^2 + x + 3) dx \\ = \int_{-3}^{-1} (x^3 + 3x^2 - x - 3) dx + 2 \int_0^1 (-3x^2 + 3) dx \\ = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x \right]_{-3}^{-1} + 2 \left[-x^3 + 3x \right]_0^1 \\ = 4 + 2 \times 2 = 8 \end{aligned}$$



015 답 9

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=-2$, $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 , 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하자.

(가)에서

$$2 \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx = 2S_1 - S_2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(나)에서

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 f(x) dx &= \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx \\ &= S_1 - S_2 = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 에서 } S_1 = 3, S_2 = 6$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=-2$, $x=4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$S_1 + S_2 = 3 + 6 = 9$$

016 ④ $\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} \int_0^{2020} f(x) dx &= \int_3^{2020} f(x) dx \text{에서} \\ \int_0^{2020} f(x) dx - \int_3^{2020} f(x) dx &= 0 \\ \int_0^3 f(x) dx + \int_{2020}^3 f(x) dx &= 0 \\ \therefore \int_0^3 f(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=3$ 이므로
 $f(x)=x^2+ax+3$ (a 는 상수)이라 하면

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx &= \int_0^3 (x^2+ax+3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + 3x \right]_0^3 = \frac{9}{2}a + 18 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{9}{2}a + 18 = 0 \text{이므로 } a = -4$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 4x + 3$$

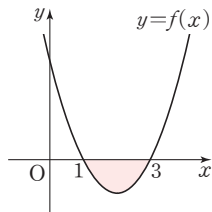
곡선 $y=f(x)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)(x-3) = 0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_1^3 |x^2 - 4x + 3| dx \\ = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx \\ = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



017 ②

곡선 $y = -x^2 + 2$ 와 직선 $y = -x$ 의 교점의 x 좌표는 $-x^2 + 2 = -x$ 에서

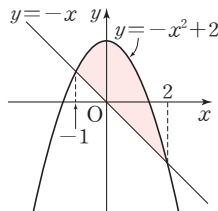
$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \{(-x^2 + 2) - (-x)\} dx \\ = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx \\ = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$



018 ④

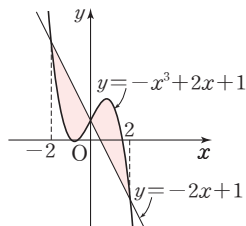
곡선 $y = -x^3 + 2x + 1$ 과 직선 $y = -2x + 1$ 의 교점의 x 좌표는 $-x^3 + 2x + 1 = -2x + 1$ 에서

$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 4) = 0$$

$$x(x+2)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \{(-2x+1) - (-x^3+2x+1)\} dx \\ + \int_0^2 \{(-x^3+2x+1) - (-2x+1)\} dx \\ = \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 (-x^3 + 4x) dx \\ = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 \right]_0^2 \\ = 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

019 ③ $\frac{11}{3}$

곡선 $y = -2x^2 + 6x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^3 (-2x^2 + 6x) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^3 = 9$$

곡선 $y = -2x^2 + 6x$ 와 직선 $y = 2x$ 의 교점의 x 좌표는 $-2x^2 + 6x = 2x$ 에서

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$2x(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore S_1 &= \int_0^2 \{(-2x^2 + 6x) - 2x\} dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore S_2 = S - S_1 = 9 - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

$$\therefore S_2 - S_1 = \frac{19}{3} - \frac{8}{3} = \frac{11}{3}$$

020 ③ $\frac{9}{2}$

$\int_0^2 f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면 $f(x) = x^3 - 3x + k$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(t) dt &= \int_0^2 (t^3 - 3t + k) dt \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 + kt \right]_0^2 = 2k - 2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2k - 2 = k \text{이므로 } k = 2$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x + 2$$

곡선 $y = x^3 - 3x + 2$ 와 직선 $y = 2$ 의

교점의 x 좌표는 $x^3 - 3x + 2 = 2$ 에서

$$x^3 - 3x = 0$$

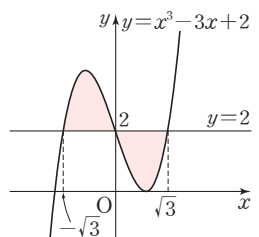
$$x(x^2 - 3) = 0$$

$$x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x = -\sqrt{3} \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^0 \{(x^3 - 3x + 2) - 2\} dx + \int_0^{\sqrt{3}} \{2 - (x^3 - 3x + 2)\} dx \\ = \int_{-\sqrt{3}}^0 (x^3 - 3x) dx + \int_0^{\sqrt{3}} (-x^3 + 3x) dx \\ = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-\sqrt{3}}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{3}} \\ = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$



021 답 ③

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표가 0, 1, 2이므로 삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$ 의 세 근은 0, 1, 2이다.

이때 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)-g(x)$ 의 최고차항의 계수도 양수이다.

$f(x)-g(x)=ax(x-1)(x-2)=a(x^3-3x^2+2x)$ ($a>0$)라 하면 삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \{f(x)-g(x)\} dx + \int_1^2 \{g(x)-f(x)\} dx \\ &= \int_0^1 a(x^3-3x^2+2x) dx + \int_1^2 a(-x^3+3x^2-2x) dx \\ &= a \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right]_0^1 + a \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 \right]_1^2 \\ &= \frac{a}{4} + \frac{a}{4} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

즉, $\frac{a}{2}=2$ 이므로 $a=4$

따라서 $f(x)-g(x)=4(x^3-3x^2+2x)$ 이므로

$$f(-1)-g(-1)=4(-1-3-2)=-24$$

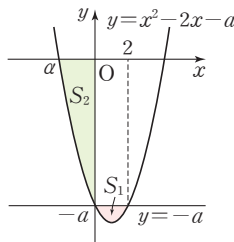
022 답 8

곡선 $y=x^2-2x-a$ 와 직선 $y=-a$ 의

교점의 x 좌표는 $x^2-2x-a=-a$ 에서 $x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

$$\begin{aligned} \therefore S_1 &= \int_0^2 \{-a-(x^2-2x-a)\} dx \\ &= \int_0^2 (-x^2+2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$



곡선 $y=x^2-2x-a$ ($x<0$)와 x 축의 교점의 x 좌표를 a 라 하면 a 는 이차방정식 $x^2-2x-a=0$ 의 한 실근이므로

$$a^2-2a-a=0$$

$$\therefore a=a^2-2a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_2 &= \int_a^0 (-x^2+2x+a) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax \right]_a^0 \\ &= \frac{1}{3}a^3 - a^2 - aa \end{aligned}$$

이때 $S_2=7S_1$ 이므로

$$\frac{1}{3}a^3 - a^2 - aa = 7 \times \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{3}a^3 - a^2 - (a^2-2a)a = \frac{28}{3} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$2a^3 - 3a^2 + 28 = 0, \quad (a+2)(2a^2 - 7a + 14) = 0$$

$$\therefore a = -2 \quad (\because a \text{는 실수})$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a=4+4=8$$

023 답 ⑤

두 곡선 $y=x^2-x-2$,

$y=-2x^2+5x+7$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2-x-2=-2x^2+5x+7 \text{에서}$$

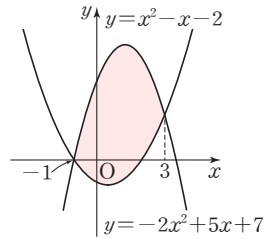
$$x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^3 \{(-2x^2+5x+7)-(x^2-x-2)\} dx \\ &= \int_{-1}^3 (-3x^2+6x+9) dx \\ &= \left[-x^3+3x^2+9x \right]_{-1}^3 \\ &= 32 \end{aligned}$$



024 답 -8

$$\int_{-3}^9 \{f(x)-g(x)\} dx$$

$$= \int_{-3}^1 \{f(x)-g(x)\} dx + \int_1^5 \{f(x)-g(x)\} dx$$

$$+ \int_5^9 \{f(x)-g(x)\} dx$$

$$= - \int_{-3}^1 \{g(x)-f(x)\} dx + \int_1^5 \{f(x)-g(x)\} dx$$

$$- \int_5^9 \{g(x)-f(x)\} dx$$

$$= -A+B-C$$

$$= -6+8-10$$

$$= -8$$

025 답 $\frac{37}{12}$

두 곡선 $y=x^3-2x$, $y=x^2$ 의 교점의

x 좌표는 $x^3-2x=x^2$ 에서

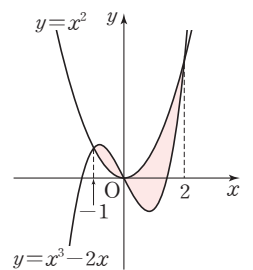
$$x^3-x^2-2x=0$$

$$x(x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 \{(x^3-2x)-x^2\} dx \\ & \quad + \int_0^2 \{x^2-(x^3-2x)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3-x^2-2x) dx + \int_0^2 (-x^3+x^2+2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{5}{12} + \frac{8}{3} \\ &= \frac{37}{12} \end{aligned}$$



026 답 $\frac{8}{3}$

곡선 $y=x^2$ 을 원점에 대하여 대칭이동하면

$$-y=(-x)^2 \quad \therefore y=-x^2$$

이 곡선을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동하면

$$y=-(x-2)^2+4 \quad \therefore f(x)=-(x-2)^2+4=-x^2+4x$$

두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+4x$ 의 교점

의 x 좌표는 $x^2=-x^2+4x$ 에서

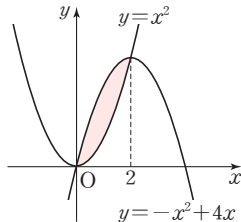
$$x^2-2x=0, x(x-2)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^2 \{(-x^2+4x)-x^2\} dx$$

$$= \int_0^2 (-2x^2+4x) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$



027 답 $\frac{11}{12}$

$f(x)=x^3-x$, $g(x)=x^2+ax+b$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-1, g'(x)=2x+a$$

(i) $x=1$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(1)=g(1)$ 에서

$$0=1+a+b \quad \therefore a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x=1$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(1)=g'(1) \text{에서}$$

$$2=2+a \quad \therefore a=0$$

$a=0$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b=-1$

$$\therefore g(x)=x^2-1$$

두 곡선 $y=x^3-x$, $y=x^2-1$ 의 교점의

x 좌표는 $x^3-x=x^2-1$ 에서

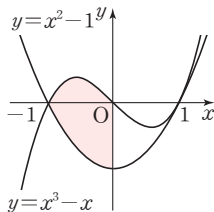
$$x^3-x^2-x+1=0, (x+1)(x-1)^2=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^0 \{(x^3-x)-(x^2-1)\} dx$$

$$= \int_{-1}^0 (x^3-x^2-x+1) dx = \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^0 = \frac{11}{12}$$



028 답 18

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $a^2x^2 \geq -x^2$ 이므로

$$S(a) = \int_0^3 \{a^2x^2 - (-x^2)\} dx$$

$$= \int_0^3 (a^2+1)x^2 dx$$

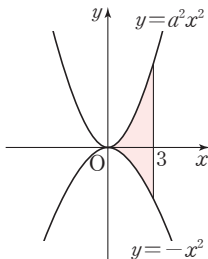
$$= \left[\frac{a^2+1}{3}x^3\right]_0^3 = 9(a^2+1)$$

$$\therefore \frac{S(a)}{a} = \frac{9(a^2+1)}{a} = 9\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

이때 $a > 0$, $\frac{1}{a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 9 \times 2\sqrt{a \times \frac{1}{a}} = 18 \text{ (단, 등호는 } a=1 \text{ 일 때 성립)}$$

따라서 구하는 최솟값은 18이다.



029 답 $\frac{27}{4}$

$f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2-6x+2$ 이므로 점

$(0, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=2$ 이고, 접선의 방정식은

$$y-1=2x \quad \therefore y=2x+1$$

곡선 $y=x^3-3x^2+2x+1$ 과 직선

$y=2x+1$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3-3x^2+2x+1=2x+1 \text{에서}$$

$$x^3-3x^2=0, x^2(x-3)=0$$

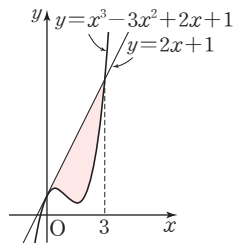
$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^3 \{(2x+1)-(x^3-3x^2+2x+1)\} dx$$

$$= \int_0^3 (-x^3+3x^2) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_0^3 = \frac{27}{4}$$



030 답 $\frac{1}{3}$

$f(x)=x^2-1$ 이라 하면 $f'(x)=2x$ 이므로

점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=2 \text{이고, 접선의 방정식은}$$

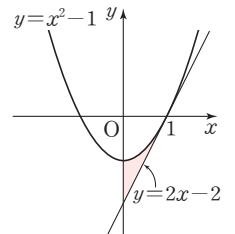
$$y=2(x-1) \quad \therefore y=2x-2$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^1 \{(x^2-1)-(2x-2)\} dx$$

$$= \int_0^1 (x^2-2x+1) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$



031 답 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$f(x)=x^2+2$ 라 하면 $f'(x)=2x$

점점의 좌표를 (t, t^2+2) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=2t \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(t^2+2)=2t(x-t) \quad \therefore y=2tx-t^2+2$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0=-t^2+2, t^2-2=0$$

$$(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})=0$$

$$\therefore t=-\sqrt{2} \text{ 또는 } t=\sqrt{2}$$

즉, 접선의 방정식은

$$y=-2\sqrt{2}x \text{ 또는 } y=2\sqrt{2}x$$

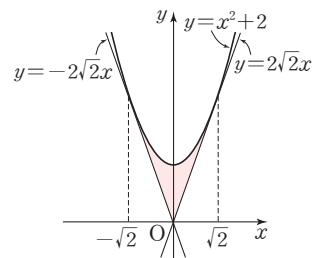
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$2 \int_0^{\sqrt{2}} \{(x^2+2)-2\sqrt{2}x\} dx$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{2}} (x^2-2\sqrt{2}x+2) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{3}x^3-\sqrt{2}x^2+2x\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$



032 ㉔ ②

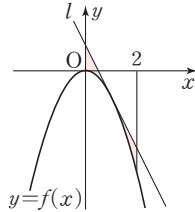
$f(x) = -x^2$ 이라 하면 $f'(x) = -2x$ 이므로 점 $(a, -a^2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(a) = -2a$ 이고, 접선의 방정식은

$$y - (-a^2) = -2a(x - a)$$

$$\therefore y = -2ax + a^2$$

$0 \leq a \leq 2$ 이므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{(-2ax + a^2) - (-x^2)\} dx \\ &= \int_0^2 (x^2 - 2ax + a^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x \right]_0^2 \\ &= 2a^2 - 4a + \frac{8}{3} \\ &= 2(a-1)^2 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$



따라서 $0 \leq a \leq 2$ 에서 구하는 넓이의 최솟값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

033 ㉔ -6

함수 $f(x)$ 가 삼차함수이고 (㉔)에서 $f(-x) = -f(x)$ 이므로

$f(x) = ax^3 + bx$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

(㉔)에서 이차함수 $f'(x)$ 의 최솟값이 2이므로

$$a > 0, b = 2$$

$$\therefore f(x) = ax^3 + 2x$$

$f'(x) = 3ax^2 + 2$ 이므로 점 $(1, f(1))$, 즉 $(1, a+2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 3a+2$ 이고, 접선의 방정식은

$$y - (a+2) = (3a+2)(x-1)$$

$$\therefore y = (3a+2)x - 2a$$

곡선 $y = ax^3 + 2x$ 와 접선 $y = (3a+2)x - 2a$ 의 교점의 x 좌표는

$$ax^3 + 2x = (3a+2)x - 2a \text{에서}$$

$$ax^3 - 3ax + 2a = 0, a(x+2)(x-1)^2 = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

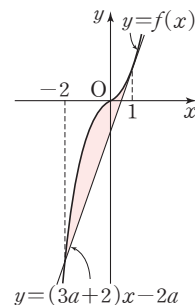
(㉔)에서 곡선 $y = f(x)$ 와 이 곡선 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이가 27이므로

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^1 [(ax^3 + 2x) - \{(3a+2)x - 2a\}] dx \\ &= a \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx \\ &= a \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 \\ &= \frac{27}{4}a \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{27}{4}a = 27 \text{이므로 } a = 4$$

따라서 $f(x) = 4x^3 + 2x$ 이므로

$$f(-1) = -4 - 2 = -6$$



034 ㉔ $\frac{7}{6}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2 \{a(x-2)^2 - (-x^2 + 2x)\} dx = 0$$

$$\int_0^2 \{(a+1)x^2 - 2(2a+1)x + 4a\} dx = 0$$

$$\left[\frac{a+1}{3}x^3 - (2a+1)x^2 + 4ax \right]_0^2 = 0$$

$$\frac{8}{3}a - \frac{4}{3} = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

두 곡선 $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$, $y = -x^2 + 2x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{2}(x-2)^2 = -x^2 + 2x \text{에서}$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$(3x-2)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = \frac{2}{3} \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore k = \frac{2}{3}$$

$$\therefore a + k = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

035 ㉔ $\frac{1}{2}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^1 x(x-a)(x-1) dx = 0$$

$$\int_0^1 \{x^3 - (a+1)x^2 + ax\} dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^1 = 0$$

$$\frac{1}{6}a - \frac{1}{12} = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

036 ㉔ $\frac{1}{3}$

$A = B$ 이므로

$$\int_0^1 (x^2 - a) dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - ax \right]_0^1 = 0$$

$$\frac{1}{3} - a = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

037 ㉔ -6

$A : B = 1 : 2$ 에서 $B = 2A$

곡선 $y = -x^2 + 6x + k$ 는 직선 $x = 3$ 에

대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서

빛금친 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}B$ 이다.

즉, 빛금친 부분의 넓이는 A 와 같다.

따라서 구간 $[0, 3]$ 에서 곡선

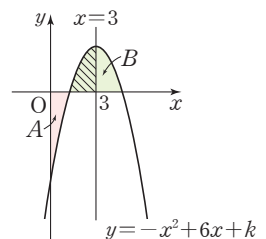
$y = -x^2 + 6x + k$ 와 x 축, y 축 및 직선 $x = 3$ 으로 둘러싸인 두 도형

의 넓이가 같으므로

$$\int_0^3 (-x^2 + 6x + k) dx = 0$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + kx \right]_0^3 = 0$$

$$18 + 3k = 0 \quad \therefore k = -6$$



038 ㉮ $\frac{8}{3}$

$$\int_{2-t}^2 f(x) dx + \int_{2+t}^2 f(x) dx = 0 \text{에서}$$

$$\int_{2-t}^2 f(x) dx = -\int_{2+t}^2 f(x) dx$$

$$\therefore \int_{2-t}^2 f(x) dx = \int_2^{2+t} f(x) dx$$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로

$$f(x) = (x-2)^2 + k = x^2 - 4x + 4 + k \quad (k \text{는 상수})$$

라 하자.

오른쪽 그림에서 빗금친 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}S_2$ 이고, $S_2=2S_1$ 이므로 빗금친 부분의 넓이는 S_1 과 같다.

구간 $[0, 2]$ 에서 곡선 $y=x^2-4x+4+k$ 와 x 축, y 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

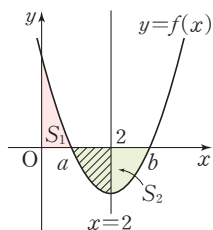
$$\int_0^2 (x^2-4x+4+k) dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + (4+k)x \right]_0^2 = 0$$

$$2k + \frac{8}{3} = 0 \quad \therefore k = -\frac{4}{3}$$

따라서 $f(x) = x^2 - 4x + \frac{8}{3}$ 이므로

$$f(0) = \frac{8}{3}$$



039 ㉮ 54

곡선 $y=x^2-3x$ 와 직선 $y=ax$ 의 교점의

x 좌표는 $x^2-3x=ax$ 에서

$$x^2 - (a+3)x = 0, \quad x\{x - (a+3)\} = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=a+3$$

곡선 $y=x^2-3x$ 와 직선 $y=ax$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

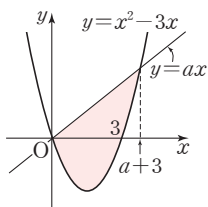
$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{a+3} \{ax - (x^2-3x)\} dx = \int_0^{a+3} \{-x^2 + (a+3)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a+3}{2}x^2 \right]_0^{a+3} = \frac{(a+3)^3}{6} \end{aligned}$$

곡선 $y=x^2-3x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \int_0^3 (-x^2+3x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

이때 $S_2 = \frac{1}{2}S_1$ 이므로

$$\frac{9}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{(a+3)^3}{6} \quad \therefore (a+3)^3 = 54$$



040 ㉮ 8

곡선 $y=2x^2$ ($x \geq 0$)과 직선 $y=2$ 의 교점의 x 좌표는 $2x^2=2$ 에서 $x^2=1 \quad \therefore x=1$ ($\because x \geq 0$)

곡선 $y=2x^2$ ($x \geq 0$)과 y 축 및 직선 $y=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^1 (2-2x^2) dx = \left[2x - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

곡선 $y=ax^2$ ($x \geq 0$)과 직선 $y=2$ 의 교점의 x 좌표는 $ax^2=2$ 에서

$$x^2 = \frac{2}{a} \quad \therefore x = \sqrt{\frac{2}{a}} \quad (\because x \geq 0)$$

곡선 $y=ax^2$ ($x \geq 0$)과 y 축 및 직선 $y=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$\int_0^{\sqrt{\frac{2}{a}}} (2-ax^2) dx = \left[2x - \frac{a}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{\frac{2}{a}}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{a}}$$

이때 $S_2 = \frac{1}{2}S_1$ 이므로

$$\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}, \quad \sqrt{a} = 2\sqrt{2} \quad \therefore a=8$$

041 ㉮ ⑤

곡선 $y=x^2-4x+2$ 와 직선 $y=x-2$

의 교점의 x 좌표는

$$x^2-4x+2=x-2 \text{에서}$$

$$x^2-5x+4=0, \quad (x-1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 곡선 $y=x^2-4x+2$ 와 직선

$y=x-2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_1^4 \{(x-2) - (x^2-4x+2)\} dx = \int_1^4 (-x^2+5x-4) dx$$

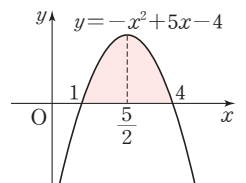
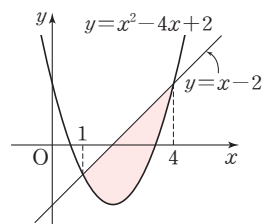
이 넓이는 곡선

$$y = -x^2+5x-4 = -\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \text{와 } x$$

축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

대칭축 $x=\frac{5}{2}$ 에 의하여 이등분된다.

$$\therefore a = \frac{5}{2}$$



042 ㉮ $\frac{4}{3}$

곡선 $y=2x^2-k^2$ 과 y 축 및 직선 $y=k^2$ 으로

둘러싸인 도형의 넓이를 A , 두 직선

$y=2x-k^2$, $y=k^2$ 과 y 축으로 둘러싸인

도형의 넓이를 B 라 하자.

(i) $x < 0$ 일 때

곡선 $y=2x^2-k^2$ 과 직선 $y=k^2$ 의 교

점의 x 좌표를 t_1 이라 하면

$$2t_1^2 - k^2 = k^2, \quad t_1^2 = k^2$$

$$\therefore t_1 = -k \quad (\because t_1 < 0)$$

$$\therefore A = \int_{-k}^0 \{k^2 - (2x^2 - k^2)\} dx$$

$$= \int_{-k}^0 (-2x^2 + 2k^2) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2k^2x \right]_{-k}^0 = \frac{4}{3}k^3$$

(ii) $x \geq 0$ 일 때

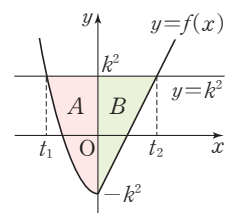
두 직선 $y=2x-k^2$, $y=k^2$ 의 교점의 x 좌표를 t_2 라 하면

$$2t_2 - k^2 = k^2 \quad \therefore t_2 = k^2$$

$$\therefore B = \frac{1}{2} \times k^2 \times 2k^2 = k^4$$

(i), (ii)에서 $A=B$ 이므로

$$\frac{4}{3}k^3 = k^4 \quad \therefore k = \frac{4}{3} \quad (\because k > 0)$$



043 답 ②

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로

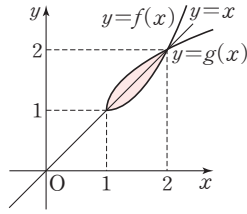
$$x^2 - 2x + 2 = x \text{에서}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0, (x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 도형의 넓이는

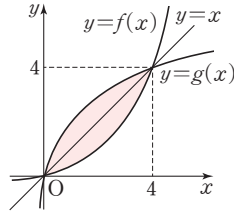
$$\begin{aligned} 2 \int_1^2 \{x - (x^2 - 2x + 2)\} dx &= 2 \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right]_1^2 \\ &= 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



044 답 4

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \int_0^4 \{x - f(x)\} dx \\ = \int_0^4 2x dx - 2 \int_0^4 f(x) dx \\ = \left[x^2 \right]_0^4 - 2 \times 6 = 16 - 12 = 4 \end{aligned}$$



045 답 38

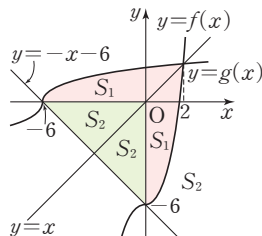
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다. 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로 $x^3 - 6 = x$ 에서 $x^3 - x - 6 = 0$, $(x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0$
 $\therefore x=2$ ($\because x$ 는 실수)

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 직선 $y=-x-6$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 두 직선 $y=x$, $y=-x-6$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 도형의 넓이를 S 라 하면 오른쪽 그림에서 $S = 2(S_1 + S_2)$

$$\begin{aligned} 2S_1 &= 2 \int_0^2 \{x - (x^3 - 6)\} dx = 2 \int_0^2 (-x^3 + x + 6) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_0^2 = 20 \end{aligned}$$

$$2S_2 = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18$$

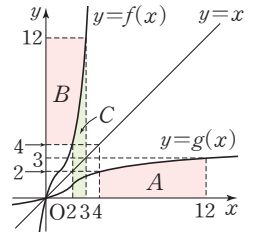
$$\therefore S = 2(S_1 + S_2) = 2S_1 + 2S_2 = 20 + 18 = 38$$



046 답 28

함수 $y=f(x)$ 와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서

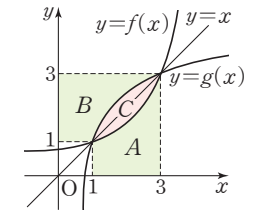
$$\begin{aligned} A &= B \\ \therefore \int_2^3 f(x) dx + \int_4^{12} g(x) dx \\ &= C + A \\ &= C + B \\ &= 3 \times 12 - 2 \times 4 = 28 \end{aligned}$$



047 답 ③

함수 $y=f(x)$ 와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고, $f(1)=1$, $f(3)=3$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같다고 하면

$$\begin{aligned} A &= B \\ \therefore \int_1^3 g(x) dx &= A + C \\ &= 3 \times 3 - 1 \times 1 - B \\ &= 8 - B = 8 - A \\ &= 8 - \int_1^3 f(x) dx \\ &= 8 - \frac{7}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$



048 답 $\frac{65}{12}$

$g(9)=a$ 라 하면 $f(a)=9$ 이므로

$$a(a+2)^2=9$$

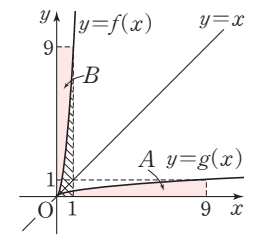
$$a^3 + 4a^2 + 4a - 9 = 0$$

$$(a-1)(a^2 + 5a + 9) = 0$$

$$\therefore a=1 \quad (\because a \geq 0)$$

함수 $y=f(x)$ 와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned} A &= B \\ \therefore \int_0^9 g(x) dx &= A \\ &= B \\ &= 1 \times 9 - (\text{빛금친 도형의 넓이}) \\ &= 9 - \int_0^1 f(x) dx \\ &= 9 - \int_0^1 x(x+2)^2 dx \\ &= 9 - \int_0^1 (x^3 + 4x^2 + 4x) dx \\ &= 9 - \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^1 \\ &= 9 - \frac{43}{12} = \frac{65}{12} \end{aligned}$$



049 [답] ③

$t=0$ 에서의 점 P의 좌표가 3이므로 $t=2$ 에서의 점 P의 위치는
 $3 + \int_0^2 (2t-1) dt = 3 + \left[t^2 - t \right]_0^2 = 3 + 2 = 5$

050 [답] ②

$$\begin{aligned} \int_1^3 |6t-3t^2| dt &= \int_1^2 (6t-3t^2) dt + \int_2^3 (-6t+3t^2) dt \\ &= \left[3t^2 - t^3 \right]_1^2 + \left[-3t^2 + t^3 \right]_2^3 \\ &= 2 + 4 = 6 \end{aligned}$$

051 [답] ㄱ, ㄴ

ㄱ. $t=4$ 에서의 물체의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^4 v(t) dt &= \int_0^1 v(t) dt + \int_1^3 v(t) dt + \int_3^4 v(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ㄴ. $v(t)=0$ 이고 그 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 물체는 $t=3$ 에서 운동 방향을 한 번 바꾼다.

ㄷ. $t=6$ 일 때 물체의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^6 v(t) dt &= \int_0^1 v(t) dt + \int_1^3 v(t) dt + \int_3^6 v(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \frac{1}{2} \times (3+1) \times 1 = 0 \end{aligned}$$

따라서 $t=6$ 일 때 물체는 원점에 있다.

ㄹ. $v(t)=0$ 일 때 정지하므로 $t=1$ 에서 처음 정지한다.

따라서 $t=0$ 에서 $t=1$ 까지 물체가 움직인 거리는

$$\int_0^1 |v(t)| dt = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

052 [답] ①

$t=0$ 에서의 점 P의 좌표가 1이므로 $t=3$ 에서의 점 P의 위치는
 $1 + \int_0^3 (t^2-4t+3) dt = 1 + \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t \right]_0^3 = 1 + 0 = 1$

053 [답] -9

$v(t)=0$ 일 때 점 P가 움직이는 방향이 바뀌므로

$$t^2 - 2t - 3 = 0, (t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t=3 (\because t>0)$$

시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^3 (t^2 - 2t - 3) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t \right]_0^3 = -9$$

054 [답] ④

공이 최고 지점에 도달했을 때 $v(t)=0$ 이므로

$$30 - 10t = 0 \quad \therefore t=3$$

따라서 공을 던진 지 3초 후에 최고 지점에 도달하므로 구하는 높이는

$$\begin{aligned} 10 + \int_0^3 (30 - 10t) dt &= 10 + \left[30t - 5t^2 \right]_0^3 \\ &= 10 + 45 = 55(\text{m}) \end{aligned}$$

055 [답] 3초

두 점 P_1, P_2 가 만나려면 위치가 같아야 하므로 두 점이 다시 만나는 시각을 $t=a$ 라 하면

$$\int_0^a (2t^2 - 4t + 1) dt = \int_0^a (-t^2 + 8t - 8) dt$$

$$\left[\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + t \right]_0^a = \left[-\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 - 8t \right]_0^a$$

$$\frac{2}{3}a^3 - 2a^2 + a = -\frac{1}{3}a^3 + 4a^2 - 8a$$

$$a^3 - 6a^2 + 9a = 0, a(a-3)^2 = 0$$

$$\therefore a=3 (\because a>0)$$

따라서 두 점 P_1, P_2 가 다시 만나는 시각은 3초 후이다.

056 [답] ②

속도가 두 번째로 0이 되는 순간의 시각을 $t=k$ 라 하면 $v(k)=0$ 에서

$$k^4 - 2k^2 + 1 = a = 0$$

$$\therefore a = k^4 - 2k^2 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

속도가 두 번째로 0이 되는 순간까지 점 P의 위치의 변화량이 0이므로

$$\begin{aligned} \int_0^k (t^4 - 2t^2 + 1 - a) dt &= \left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + (1-a)t \right]_0^k \\ &= \frac{1}{5}k^5 - \frac{2}{3}k^3 + (1-a)k \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{5}k^5 - \frac{2}{3}k^3 + (1-a)k = 0 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{5}k^4 - \frac{2}{3}k^2 + 1 - a = 0 (\because k \neq 0)$$

$$\therefore a = \frac{1}{5}k^4 - \frac{2}{3}k^2 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①과 ②이 일치하므로

$$k^4 - 2k^2 + 1 = \frac{1}{5}k^4 - \frac{2}{3}k^2 + 1$$

$$\frac{4}{5}k^4 - \frac{4}{3}k^2 = 0, \frac{4}{5}k^2 = \frac{4}{3} (\because k \neq 0)$$

$$\therefore k^2 = \frac{5}{3}$$

이를 ②에 대입하면

$$a = \left(\frac{5}{3} \right)^2 - 2 \times \frac{5}{3} + 1 = \frac{4}{9}$$

057 [답] 3

두 점 P, Q가 만나려면 위치가 같아야 하므로 두 점이 만나는 시각을 $t=a$ 라 하면

$$\int_0^a (4t+7) dt = -3 + \int_0^a (3t^2 - 8t + 16) dt$$

$$\left[2t^2 + 7t \right]_0^a = -3 + \left[t^3 - 4t^2 + 16t \right]_0^a$$

$$2a^2 + 7a = -3 + a^3 - 4a^2 + 16a$$

$$\therefore a^3 - 6a^2 + 9a - 3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(a) = a^3 - 6a^2 + 9a - 3$ 이라 하면

$$f'(a) = 3a^2 - 12a + 9 = 3(a-1)(a-3)$$

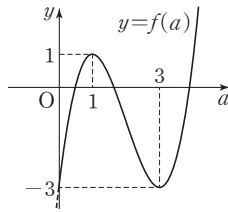
$f'(a)=0$ 인 a 의 값은 $a=1$ 또는 $a=3$

$a > 0$ 에서 함수 $f(a)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	1	...	3	...
$f'(a)$		+	0	-	0	+
$f(a)$		↗	1 극대	↘	-3 극소	↗

따라서 함수 $y=f(a)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $a > 0$ 에서 a 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 삼차방정식 ㉠의 실근은 3개이다.

즉, 두 점 P, Q는 3회 만난다.



058 답 16/3

$$\begin{aligned} \int_0^3 |4t-2t^2| dt &= \int_0^2 (4t-2t^2) dt + \int_2^3 (-4t+2t^2) dt \\ &= \left[2t^2 - \frac{2}{3}t^3 \right]_0^2 + \left[-2t^2 + \frac{2}{3}t^3 \right]_2^3 = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

059 답 ④

$v(t)=0$ 일 때 자동차가 정지하므로

$$10-2t=0 \quad \therefore t=5$$

따라서 자동차가 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^5 |10-2t| dt = \int_0^5 (10-2t) dt = \left[10t - t^2 \right]_0^5 = 25(\text{m})$$

060 답 ③

점 P가 출발한 후 다시 원점을 지나는 시각을 $t=a$ 라 하면

$$\int_0^a (t^3-3t^2) dt = 0, \quad \left[\frac{1}{4}t^4 - t^3 \right]_0^a = 0$$

$$\frac{1}{4}a^4 - a^3 = 0, \quad \frac{1}{4}a^3(a-4) = 0 \quad \therefore a=4 \quad (\because a > 0)$$

따라서 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^4 |t^3-3t^2| dt &= \int_0^3 (-t^3+3t^2) dt + \int_3^4 (t^3-3t^2) dt \\ &= \left[-\frac{1}{4}t^4 + t^3 \right]_0^3 + \left[\frac{1}{4}t^4 - t^3 \right]_3^4 = \frac{27}{4} + \frac{27}{4} = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

061 답 125m

물체가 두 번째로 지면으로부터 60m의 높이에 도달하는 시각을 $t=a$ 라 하면

$$25 + \int_0^a (40-10t) dt = 25 + \left[40t - 5t^2 \right]_0^a = -5a^2 + 40a + 25$$

$$\text{즉, } -5a^2 + 40a + 25 = 60 \text{이므로}$$

$$a^2 - 8a + 7 = 0, \quad (a-1)(a-7) = 0 \quad \therefore a=1 \text{ 또는 } a=7$$

따라서 물체가 두 번째로 지면으로부터 60m의 높이에 도달하는 시각은 $t=7$ 이다.

또 물체가 최고 높이에 도달했을 때 $v(t)=0$ 이므로

$$40-10t=0 \quad \therefore t=4$$

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=7$ 까지 물체가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^7 |40-10t| dt &= \int_0^4 (40-10t) dt + \int_4^7 (-40+10t) dt \\ &= \left[40t - 5t^2 \right]_0^4 + \left[-40t + 5t^2 \right]_4^7 \\ &= 80 + 45 = 125(\text{m}) \end{aligned}$$

062 답 24

시각 t 에서의 점 P의 좌표는

$$\int_0^t (6t^2+2t+2) dt = \left[2t^3+t^2+2t \right]_0^t = 2t^3+t^2+2t$$

시각 t 에서의 점 Q의 좌표는

$$\int_0^t (3t^2+4t-5) dt = \left[t^3+2t^2-5t \right]_0^t = t^3+2t^2-5t$$

두 점 $P(2t^3+t^2+2t)$, $Q(t^3+2t^2-5t)$ 에 대하여 선분 PQ를 2:1

로 외분하는 점 R의 좌표는

$$\frac{2(t^3+2t^2-5t) - (2t^3+t^2+2t)}{2-1} = 3t^2-12t$$

점 R가 다시 원점을 지날 때의 시각은

$$3t^2-12t=0, \quad 3t(t-4)=0$$

$$\therefore t=4 \quad (\because t > 0)$$

점 R의 속도는 $(3t^2-12t)'=6t-12$ 이므로 구하는 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^4 |6t-12| dt &= \int_0^2 (-6t+12) dt + \int_2^4 (6t-12) dt \\ &= \left[-3t^2+12t \right]_0^2 + \left[3t^2-12t \right]_2^4 \\ &= 12+12=24 \end{aligned}$$

063 답 ③

(i) $0 \leq t \leq 5$ 에서의 점 P의 속도를 k_1t ($k_1 > 0$)라 하면 시각 $t=0$

에서 $t=5$ 까지 움직인 거리가 25이므로

$$\int_0^5 k_1t dt = 25 \text{에서}$$

$$\int_0^5 k_1t dt = \left[\frac{k_1}{2}t^2 \right]_0^5 = \frac{25}{2}k_1$$

$$\text{즉, } \frac{25}{2}k_1 = 25 \text{이므로 } k_1=2$$

(ii) 시각 $t=5$ 에서의 점 P의 속도가 10이므로 $5 \leq t \leq a$ 에서의 점

P의 속도는 10이다.

이때 시각 $t=5$ 에서 $t=a$ 까지 움직인 거리가 50이므로

$$\int_5^a 10 dt = 50 \text{에서}$$

$$\int_5^a 10 dt = \left[10t \right]_5^a = 10a-50$$

$$\text{즉, } 10a-50=50 \text{이므로 } a=10$$

(iii) $10 \leq t \leq b$ 에서의 점 P의 속도를 $-k_2(t-b)$ ($k_2 > 0$)라 하면

시각 $t=10$ 에서의 속도가 10이므로

$$-k_2(10-b)=10 \quad \therefore k_2=\frac{10}{b-10}$$

이때 시각 $t=10$ 에서 $t=b$ 까지 움직인 거리가 50이므로

$$\int_{10}^b \left\{ -\frac{10}{b-10}(t-b) \right\} dt = 50 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} \int_{10}^b \left\{ -\frac{10}{b-10}(t-b) \right\} dt &= \frac{10}{10-b} \left[\frac{1}{2}t^2 - bt \right]_{10}^b \\ &= \frac{5}{b-10}(b^2-20b+100) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{5}{b-10}(b^2-20b+100)=50 \text{이므로}$$

$$b^2-30b+200=0, \quad (b-10)(b-20)=0$$

$$\therefore b=20 \quad (\because b > 10)$$

따라서 $a=10$, $b=20$ 이므로

$$a+b=10+20=30$$

064 [답] ㄴ, ㄷ

ㄱ. $t=5$ 에서의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^5 v(t) dt = \int_0^3 v(t) dt + \int_3^5 v(t) dt \\ = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

따라서 $t=5$ 일 때 원점을 지나지 않는다.

ㄴ. $t=0$ 에서 $t=6$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^6 v(t) dt = \int_0^3 v(t) dt + \int_3^5 v(t) dt + \int_5^6 v(t) dt \\ = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \\ = 3$$

따라서 $t=1$ 에서 $t=6$ 까지 위치의 변화량은 3이다.

ㄷ. $v(t)=0$ 이고 그 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀔 때 운동 방향이

바뀌므로 점 P는 $t=3$, $t=5$ 에서 운동 방향을 두 번 바꾼다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

065 [답] ①

점 P는 $t=4$ 일 때 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있고 그때의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^4 v(t) dt = -\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = -8$$

066 [답] 8초

원점으로 돌아오는 시각을 $t=a$ 라 하면 $\int_0^a v(t) dt = 0$

$$\int_0^4 v(t) dt = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6,$$

$$\int_4^6 v(t) dt = -\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = -2,$$

$$\int_6^8 v(t) dt = -2 \times 2 = -4 \text{이므로}$$

$$\int_0^4 v(t) dt + \int_4^6 v(t) dt + \int_6^8 v(t) dt = 0$$

$$\therefore \int_0^8 v(t) dt = 0$$

따라서 점 P가 출발한 후 원점으로 처음 다시 돌아올 때까지 걸리는 시간은 8초이다.

067 [답] 1

시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)| dt = \int_0^2 |v(t)| dt + \int_2^3 |v(t)| dt \\ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times (-a) = 2 - \frac{a}{2}$$

$$\text{즉, } 2 - \frac{a}{2} = \frac{5}{2} \text{이므로 } a = -1$$

따라서 $t=6$ 에서의 점 P의 위치는

$$\int_0^6 v(t) dt = \int_0^2 v(t) dt + \int_2^5 v(t) dt + \int_5^6 v(t) dt \\ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times (3+1) \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$

068 [답] 4

$t=4$ 에서의 점 P의 위치는 $\int_0^4 v(t) dt$ 이므로

$$\int_0^4 v(t) dt = 4$$

이때 $\int_0^4 v(t) dt = \int_0^3 v(t) dt + \int_3^4 v(t) dt$ 이므로

$$4 = 6 + \int_3^4 v(t) dt \quad \therefore \int_3^4 v(t) dt = -2$$

따라서 $t=4$ 에서 $t=6$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_4^6 |v(t)| dt = \int_3^6 |v(t)| dt - \int_3^4 |v(t)| dt = 6 - 2 = 4$$

069 [답] ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 점 P의 시각 t 에서의 속도가 $v(t)$ 이므로 속력은 $|v(t)|$ 이다.

$t=3$ 일 때 $|v(3)| = |-3| = 3$ 으로 속력이 가장 크다.

ㄴ. $\int_2^3 v(t) dt = -\int_0^2 v(t) dt$ 이므로 $t=3$ 일 때 점 P의 위치는

$$\int_0^3 v(t) dt = \int_0^2 v(t) dt + \int_2^3 v(t) dt \\ = \int_0^2 v(t) dt - \int_0^2 v(t) dt = 0$$

따라서 $t=3$ 일 때 점 P는 원점에 있다.

ㄷ. 점 P의 시각 t 에서의 속도가 $v(t)$ 이므로 가속도는 $v'(t)$ 이다.

$t=1$ 일 때 $v'(1)=0$ 이므로 가속도는 0이다.

ㄹ. $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 $v(t) > 0$ 이므로 $t=2$ 일 때 점 P는 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

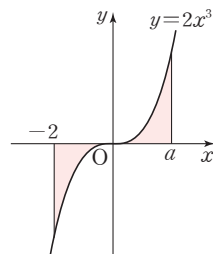
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

070 [답] 2

$$\int_{-2}^a |2x^3| dx \\ = \int_{-2}^0 (-2x^3) dx + \int_0^a 2x^3 dx \\ = \left[-\frac{1}{2}x^4 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{2}x^4 \right]_0^a \\ = 8 + \frac{1}{2}a^4$$

$$\text{즉, } 8 + \frac{1}{2}a^4 = 16 \text{이므로 } a^4 = 16$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$



071 [답] ③

$$A = \int_{-2}^1 f'(x) dx = 7, \quad B = -\int_1^3 f'(x) dx = 4 \text{이므로}$$

$$\int_{-2}^3 f'(x) dx = \int_{-2}^1 f'(x) dx + \int_1^3 f'(x) dx \\ = 7 + (-4) = 3 \quad \dots\dots ㉠$$

한편 $f'(x)$ 가 $f(x)$ 의 도함수이므로

$$\int_{-2}^3 f'(x) dx = \left[f(x) \right]_{-2}^3 = f(3) - f(-2) \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$f(3) - f(-2) = 3$$

이때 $f(-2) = 2$ 이므로 $f(3) = 5$

072 답 ③

$\int_3^x f(t) dt = x^3 - ax^2$ 의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$0 = 27 - 9a \quad \therefore a = 3$$

$\int_3^x f(t) dt = x^3 - 3x^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 3x^2 - 6x$$

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$3x^2 - 6x = 0 \text{에서 } 3x(x-2) = 0$$

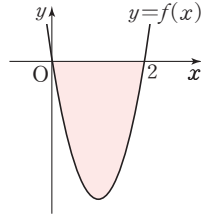
$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_0^2 |3x^2 - 6x| dx = \int_0^2 (-3x^2 + 6x) dx$$

$$= \left[-x^3 + 3x^2 \right]_0^2 = 4$$

$$\therefore a + S = 3 + 4 = 7$$



073 답 8

$$y = x|x-2| = \begin{cases} x^2 - 2x & (x \geq 2) \\ -x^2 + 2x & (x \leq 2) \end{cases}$$

(i) $x \geq 2$ 일 때, 곡선 $y = x^2 - 2x$ 와 직선

$y = 2x$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 2x = 2x \text{에서}$$

$$x^2 - 4x = 0, x(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 4 \quad (\because x \geq 2)$$

(ii) $x \leq 2$ 일 때, 곡선 $y = -x^2 + 2x$ 와 직선

$y = 2x$ 의 교점의 x 좌표는

$$-x^2 + 2x = 2x \text{에서}$$

$$x^2 = 0 \quad \therefore x = 0$$

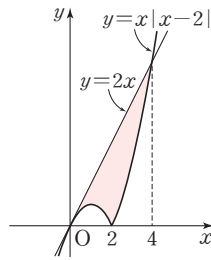
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^2 \{2x - (-x^2 + 2x)\} dx + \int_2^4 \{2x - (x^2 - 2x)\} dx$$

$$= \int_0^2 x^2 dx + \int_2^4 (-x^2 + 4x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_2^4$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{16}{3} = 8$$



074 답 $\frac{27}{2}$

두 곡선 $y = 2x^2 - x - 4$,

$y = -x^2 + 2x + 2$ 의 교점의 x 좌표는

$$2x^2 - x - 4 = -x^2 + 2x + 2 \text{에서}$$

$$x^2 - x - 2 = 0, (x+1)(x-2) = 0$$

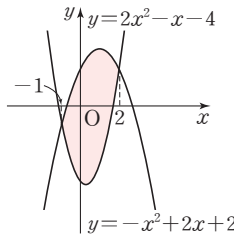
$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^2 \{(-x^2 + 2x + 2) - (2x^2 - x - 4)\} dx$$

$$= \int_{-1}^2 (-3x^2 + 3x + 6) dx$$

$$= \left[-x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x \right]_{-1}^2 = \frac{27}{2}$$



075 답 $\frac{2}{3}$

$f(x) = x^2 - 3x + 4$ 라 하면 $f'(x) = 2x - 3$

접점의 좌표를 $(t, t^2 - 3t + 4)$ 라 하면 접선의 방정식은

$$y - (t^2 - 3t + 4) = (2t - 3)(x - t)$$

$$\therefore y = (2t - 3)x - t^2 + 4$$

이 직선이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$1 = (2t - 3) \times 2 - t^2 + 4, t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 3$$

즉, 접선의 방정식은

$$y = -x + 3 \text{ 또는 } y = 3x - 5$$

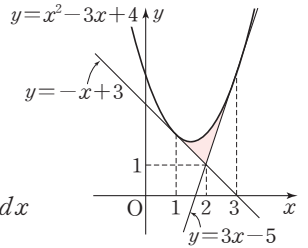
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_1^2 \{(x^2 - 3x + 4) - (-x + 3)\} dx$$

$$+ \int_2^3 \{(x^2 - 3x + 4) - (3x - 5)\} dx$$

$$= \int_1^2 (x^2 - 2x + 1) dx + \int_2^3 (x^2 - 6x + 9) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x \right]_2^3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



076 답 3

곡선 $y = -2x^2 + 4x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표

는 $-2x^2 + 4x = 0$ 에서

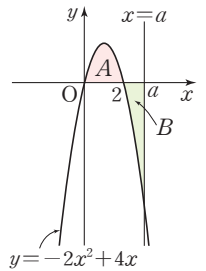
$$-2x(x-2) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

$A = B$ 이므로

$$\int_0^a (-2x^2 + 4x) dx = 0$$

$$\left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^a = 0, -\frac{2}{3}a^3 + 2a^2 = 0,$$

$$-\frac{2}{3}a^2(a-3) = 0 \quad \therefore a = 3 \quad (\because a > 2)$$



077 답 32

곡선 $y = x^2 - 4x$ 와 직선 $y = ax$ 의 교점의

x 좌표는 $x^2 - 4x = ax$ 에서

$$x\{x - (a+4)\} = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = a+4$$

곡선 $y = x^2 - 4x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도

형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^4 = \frac{32}{3}$$

곡선 $y = x^2 - 4x$ 와 직선 $y = ax$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 이라

하면

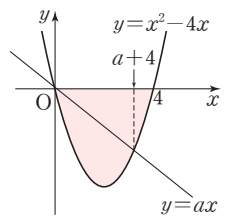
$$S_2 = \int_0^{a+4} \{ax - (x^2 - 4x)\} dx = \int_0^{a+4} \{-x^2 + (a+4)x\} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a+4}{2}x^2 \right]_0^{a+4}$$

$$= \frac{(a+4)^3}{6}$$

$$\text{이때 } S_2 = \frac{1}{2}S_1 \text{이므로 } \frac{(a+4)^3}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{32}{3}$$

$$\therefore (a+4)^3 = 32$$



078 [답] ①

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로

$$x^3 - 2x^2 + 2x = x \text{에서}$$

$$x^3 - 2x^2 + x = 0, x(x-1)^2 = 0$$

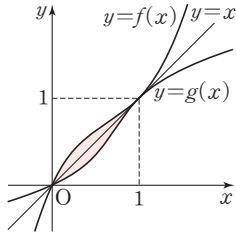
$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 도형의 넓이는

$$2 \int_0^1 \{(x^3 - 2x^2 + 2x) - x\} dx = 2 \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$



079 [답] 17

함수 $y=f(x)$ 와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서

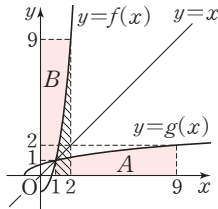
$$A=B$$

$$\therefore \int_1^2 f(x) dx + \int_1^9 g(x) dx$$

$$= (\text{빛금친 도형의 넓이}) + A$$

$$= (\text{빛금친 도형의 넓이}) + B$$

$$= 2 \times 9 - 1 \times 1 = 17$$



080 [답] 19

$v(t)=0$ 일 때 점 P가 움직이는 방향이 바뀌므로

$$12 - 3t = 0 \quad \therefore t = 4$$

따라서 $t=4$ 에서의 점 P의 위치는

$$-5 + \int_0^4 (12 - 3t) dt = -5 + \left[12t - \frac{3}{2}t^2 \right]_0^4 = -5 + 24 = 19$$

081 [답] ㄱ, ㄷ

ㄱ. $t=2$ 에서의 점 P의 위치는

$$2 + \int_0^2 v(t) dt = 2 + \int_0^2 (-3t^2 + 4t + 4) dt$$

$$= 2 + \left[-t^3 + 2t^2 + 4t \right]_0^2 = 2 + 8 = 10$$

ㄴ. $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^3 v(t) dt = \int_1^3 (-3t^2 + 4t + 4) dt$$

$$= \left[-t^3 + 2t^2 + 4t \right]_1^3 = -2$$

ㄷ. $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)| dt = \int_0^2 (-3t^2 + 4t + 4) dt + \int_2^3 (3t^2 - 4t - 4) dt$$

$$= \left[-t^3 + 2t^2 + 4t \right]_0^2 + \left[t^3 - 2t^2 - 4t \right]_2^3$$

$$= 8 + 5 = 13$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

082 [답] $\frac{4}{3}$

원점을 출발한 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각은

$$3t^2 + t = 2t^2 + 3t \text{에서}$$

$$t^2 - 2t = 0, t(t-2) = 0$$

$$\therefore t=2 \quad (\because t > 0)$$

$t=2$ 일 때 점 P의 위치는

$$\int_0^2 (3t^2 + t) dt = \left[t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^2 = 10$$

$t=2$ 일 때 점 Q의 위치는

$$\int_0^2 (2t^2 + 3t) dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \right]_0^2 = \frac{34}{3}$$

따라서 두 점 사이의 거리는

$$\left| 10 - \frac{34}{3} \right| = \frac{4}{3}$$

083 [답] ①

ㄱ. $t=5$ 일 때 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^5 v(t) dt = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times (3+1) \times 1 = 0$$

따라서 $t=5$ 일 때 점 P는 원점을 다시 지난다.

ㄴ. $t=1$ 일 때 $|v(1)| = |2| = 2$ 로 속력이 최대이다.

ㄷ. $v(t)=0$ 이고 그 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 물체는 $t=2$, $t=5$ 에서 운동 방향을 두 번 바꾼다.

ㄹ. $t=0$ 에서 $t=6$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^6 |v(t)| dt = \int_0^2 |v(t)| dt + \int_2^5 |v(t)| dt + \int_5^6 |v(t)| dt$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times (3+1) \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{9}{2}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.