



# 정답과 해설

미적분

# 01 수열의 극한

8~21쪽

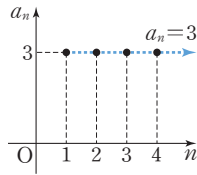
## 001 답 수렴, 3

주어진 수열의 일반항을  $a_n$ 이라고 하면

$$a_n = 3$$

오른쪽 그림에서  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $a_n$ 의 값은 3이므로 이 수열은 3에 수렴한다.

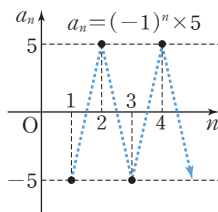
$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3$$



## 002 답 발산

주어진 수열의 일반항을  $a_n$ 이라고 하면

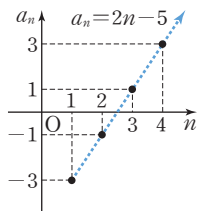
$$a_n = (-1)^n \times 5$$

오른쪽 그림에서  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $a_n$ 의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 이 수열은 진동한다.

## 003 답 발산

주어진 수열의 일반항을  $a_n$ 이라고 하면

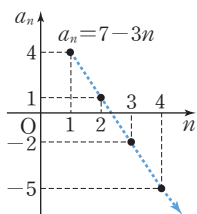
$$a_n = 2n - 5$$

오른쪽 그림에서  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $a_n$ 의 값은 한없이 커지므로 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.

## 004 답 발산

주어진 수열의 일반항을  $a_n$ 이라고 하면

$$a_n = 7 - 3n$$

오른쪽 그림에서  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $a_n$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 이 수열은 음의 무한대로 발산한다.

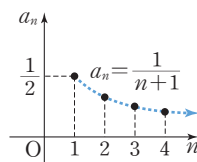
## 005 답 수렴, 0

주어진 수열의 일반항을  $a_n$ 이라고 하면

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

오른쪽 그림에서  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $a_n$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$



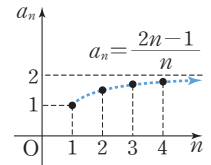
## 006 답 수렴, 2

주어진 수열의 일반항을  $a_n$ 이라고 하면

$$a_n = \frac{2n-1}{n}$$

오른쪽 그림에서  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $a_n$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로 이 수열은 2에 수렴한다.

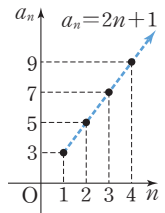
$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = 2$$



## 007 답 발산

주어진 수열의 일반항을  $a_n$ 이라고 하면

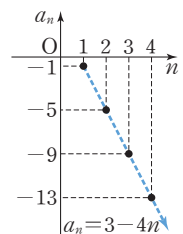
$$a_n = 2n + 1$$

오른쪽 그림에서  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $a_n$ 의 값은 한없이 커지므로 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.

## 008 답 발산

주어진 수열의 일반항을  $a_n$ 이라고 하면

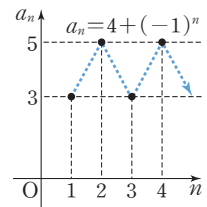
$$a_n = 3 - 4n$$

오른쪽 그림에서  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $a_n$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 이 수열은 음의 무한대로 발산한다.

## 009 답 발산

주어진 수열의 일반항을  $a_n$ 이라고 하면

$$a_n = 4 + (-1)^n$$

오른쪽 그림에서  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $a_n$ 의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 이 수열은 진동한다.

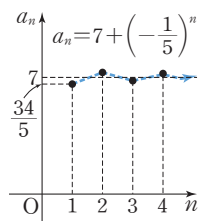
## 010 답 수렴, 7

주어진 수열의 일반항을  $a_n$ 이라고 하면

$$a_n = 7 + \left(-\frac{1}{5}\right)^n$$

오른쪽 그림에서  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $a_n$ 의 값은 7에 한없이 가까워지므로 이 수열은 7에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 7 + \left(-\frac{1}{5}\right)^n \right\} = 7$$



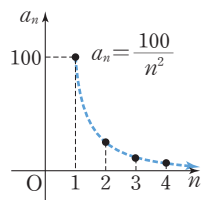
## 011 답 수렴, 0

주어진 수열의 일반항을  $a_n$ 이라고 하면

$$a_n = \frac{100}{n^2}$$

오른쪽 그림에서  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $a_n$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100}{n^2} = 0$$

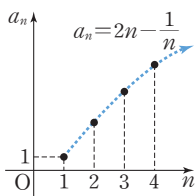


## 012 답 발산

주어진 수열의 일반항을  $a_n$ 이라고 하면

$$a_n = 2n - \frac{1}{n}$$

오른쪽 그림에서  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $a_n$ 의 값은 한없이 커지므로 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.



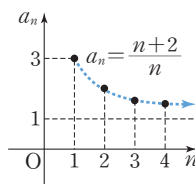
## 013 답 수렴, 1

주어진 수열의 일반항을  $a_n$ 이라고 하면

$$a_n = \frac{n+2}{n}$$

오른쪽 그림에서  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $a_n$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로 이 수열은 1에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n} = 1$$



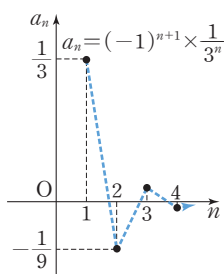
## 014 답 수렴, 0

주어진 수열의 일반항을  $a_n$ 이라고 하면

$$a_n = (-1)^{n+1} \times \frac{1}{3^n}$$

오른쪽 그림에서  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $a_n$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (-1)^{n+1} \times \frac{1}{3^n} \right\} = 0$$

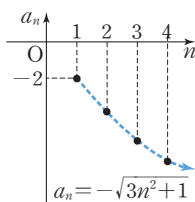


## 015 답 발산

주어진 수열의 일반항을  $a_n$ 이라고 하면

$$a_n = -\sqrt{3n^2+1}$$

오른쪽 그림에서  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $a_n$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 이 수열은 음의 무한대로 발산한다.



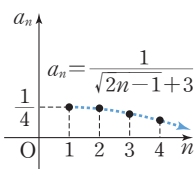
## 016 답 수렴, 0

주어진 수열의 일반항을  $a_n$ 이라고 하면

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2n-1}+3}$$

오른쪽 그림에서  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $a_n$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 이 수열은 0에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}+3} = 0$$



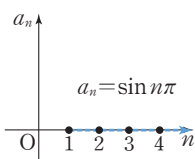
## 017 답 수렴, 0

주어진 수열의 일반항을  $a_n$ 이라고 하면

$$a_n = \sin n\pi$$

오른쪽 그림에서  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $a_n$ 의 값은 0이므로 이 수열은 0에 수렴한다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n\pi = 0$$

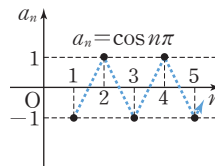


## 018 답 발산

주어진 수열의 일반항을  $a_n$ 이라고 하면

$$a_n = \cos n\pi$$

오른쪽 그림에서  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $a_n$ 의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 이 수열은 진동한다.



## 019 답 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2 + (-1) = 1$$

## 020 답 8

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - b_n + 3) &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \\ &= 2 \times 2 - (-1) + 3 = 8 \end{aligned}$$

## 021 답 -8

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4a_nb_n = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4 \times 2 \times (-1) = -8$$

## 022 답 -6

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5a_n + 2}{2b_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (5a_n + 2)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2b_n} = \frac{5 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 2}{2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \\ &= \frac{5 \times 2 + 2}{2 \times (-1)} = -6 \end{aligned}$$

## 023 답 -2

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_nb_n}{a_n + b_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_nb_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \\ &= \frac{2 \times (-1)}{2 + (-1)} = -2 \end{aligned}$$

## 024 답 1

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} 2a_nb_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= 2 \times 2 + 2 \times 2 \times (-1) + (-1) \times (-1) \\ &= 4 - 4 + 1 = 1 \end{aligned}$$

## 025 답 2

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  ( $\beta$ 는 실수)라고 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -3 - \beta$$

따라서  $-3 - \beta = -5$ 이므로  $\beta = 2$

## 026 답 1

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  ( $\beta$ 는 실수)라고 하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 3b_n - 2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \\ &= -3 + 3\beta - 2 = 3\beta - 5 \end{aligned}$$

따라서  $3\beta - 5 = -2$ 이므로  $\beta = 1$

027 답 -4

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  ( $\beta$ 는 실수)라고 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n + 4) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 4 = -3\beta + 4$$

따라서  $-3\beta + 4 = 16$ 이므로  $\beta = -4$

028 답 -2

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  ( $\beta$ 는 실수)라고 하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} 2a_n(b_n + 1) &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + 1) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 1) \\ &= 2 \times (-3) \times (\beta + 1) = -6\beta - 6 \end{aligned}$$

따라서  $-6\beta - 6 = 6$ 이므로  $\beta = -2$

029 답 3

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  ( $\beta$ 는 실수)라고 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n - 3} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 3)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 3} = \frac{\beta}{-3 - 3} = -\frac{\beta}{6}$$

따라서  $-\frac{\beta}{6} = -\frac{1}{2}$ 이므로  $\beta = 3$

030 답 1

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  ( $\beta$ 는 실수)라고 하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n - b_n + 4}{a_n b_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - b_n + 4)}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n} \\ &= \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 4}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \\ &= \frac{2 \times (-3) - \beta + 4}{-3 \times \beta} = \frac{\beta + 2}{3\beta} \end{aligned}$$

따라서  $\frac{\beta + 2}{3\beta} = 1$ 이므로

$$\beta + 2 = 3\beta \quad \therefore \beta = 1$$

031 답 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$$

032 답 0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} = 0 - 0 = 0$$

033 답 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 - 0 = 2$$

034 답 3

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{n} \right) \left( 3 - \frac{4}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3}{n} \right) \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3 - \frac{4}{n^2} \right) \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \right) \times \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} \right) \\ &= (1 + 0) \times (3 - 0) = 3 \end{aligned}$$

035 답 1

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n} \times \frac{n-3}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{n} \right) \times \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{3}{n} \right) \\ &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \right) \times \left( \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \right) \\ &= (1 + 0) \times (1 - 0) = 1 \end{aligned}$$

036 답 -1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{n^2} - 1}{\frac{n+5}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7}{n^2} - 1 \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n}} = \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1$$

037 답  $\frac{3}{2}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$$

038 답 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n-1)}{n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-n}{n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n^2}} = 2$$

039 답 0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{2n^2+n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = 0$$

040 답  $\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+5n-2}{4n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5-\frac{2}{n}}{4+\frac{5}{n}} = \infty$$

041 답 0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{-n^2+4n-7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{-1 + \frac{4}{n} - \frac{7}{n^2}} = 0$$

042 답 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4n+1)(n-2)}{2n^2+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-7n-2}{2n^2+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{7}{n} - \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{5}{n^2}} = 2$$

043 답  $\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-3}{(n+1)(n-2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3-3}{n^2-n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}} = \infty$$

## 044 답 0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n-1}+1}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}}{3} = 0$$

045 답  $\frac{1}{3}$ 

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-2}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\frac{2}{n}}{3} = \frac{1}{3}$$

## 046 답 -2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2-5}-\sqrt{4n^2+3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1-\frac{5}{n^2}}-\sqrt{4+\frac{3}{n}}} = -2$$

047 답  $n, n^2+n, 1+\frac{1}{n}, \frac{1}{2}$ 

## 048 답 6

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2}{1+2+3+\cdots+n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2+4}{n^2+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = 6 \end{aligned}$$

049 답  $\frac{1}{3}$ 

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

## 050 답 2

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+6n-1}{4+7+10+\cdots+(3n+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+6n-1}{\sum_{k=1}^n (3k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+6n-1}{3 \sum_{k=1}^n k+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+6n-1}{3 \times \frac{n(n+1)}{2} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2+12n-2}{3n^2+5n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6+\frac{12}{n}-\frac{2}{n^2}}{3+\frac{5}{n}} = 2 \end{aligned}$$

051 답  $2n+3, 2+\frac{3}{n}, 2, 1$ 

## 052 답 1

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \{\log_3(9n-7) - \log_3(3n+1)\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \frac{9n-7}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \frac{9-\frac{7}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \log_3 3 = 1 \end{aligned}$$

## 053 답 2

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \{\log_3(9n^2-6n+2) - \log_3(n^2+5n)\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \frac{9n^2-6n+2}{n^2+5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \frac{9-\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{5}{n}} \\ = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \end{aligned}$$

## 054 답 3

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \{\log_2(2n+5) + \log_2(4n-3) - \log_2(n^2+4)\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{(2n+5)(4n-3)}{n^2+4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{8n^2+14n-15}{n^2+4} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{8+\frac{14}{n}-\frac{15}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \end{aligned}$$

## 055 답 0, 2, 2, 2, 2

## 056 답 6

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3+bn^2-2}{3n^2+1}$ 에서  $a \neq 0$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로  $a=0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^3+bn^2-2}{3n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn^2-2}{3n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-\frac{2}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}} = \frac{b}{3}$$

이때  $\frac{b}{3}=2$ 이므로  $b=6$

$$\therefore a+b=6$$

## 057 답 12

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an-8}{bn^2+4n+6}$ 에서  $b \neq 0$ 이면 극한값이 0이므로  $b=0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an-8}{bn^2+4n+6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an-8}{4n+6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-\frac{8}{n}}{4+\frac{6}{n}} = \frac{a}{4}$$

이때  $\frac{a}{4}=3$ 이므로  $a=12$

$$\therefore a+b=12$$

## 058 답 -2

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an-2)(n+1)}{bn+9}$ 에서  $a \neq 0$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로  $a=0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an-2)(n+1)}{bn+9} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n-2}{bn+9} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2-\frac{2}{n}}{b+\frac{9}{n}} = -\frac{2}{b} \end{aligned}$$

이때  $-\frac{2}{b}=1$ 이므로  $b=-2$

$$\therefore a+b=-2$$

059 ㉠  $\frac{3}{n}, \infty$

060 ㉠  $-\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5 + 2n - n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n} - 1 \right) = -\infty$$

061 ㉠  $-\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 - 2n^3) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left( \frac{3}{n} - 2 \right) = -\infty$$

062 ㉠  $\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5n^3 - 6n^2 + 4n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left( 5 - \frac{6}{n} + \frac{4}{n^2} \right) = \infty$$

063 ㉠  $\sqrt{n^2+3n}, \sqrt{n^2+3n}, \sqrt{n^2+3n}, \frac{3}{n}, \frac{3}{2}$

064 ㉠ 1

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 - 2n + 1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n - \sqrt{n^2 - 2n + 1})(n + \sqrt{n^2 - 2n + 1})}{n + \sqrt{n^2 - 2n + 1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 1}{n + \sqrt{n^2 - 2n + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}} \\ &= \frac{2}{1 + \sqrt{1}} = 1 \end{aligned}$$

065 ㉠  $\frac{5}{4}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 5n} - 2n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2 + 5n} - 2n)(\sqrt{4n^2 + 5n} + 2n)}{\sqrt{4n^2 + 5n} + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{\sqrt{4n^2 + 5n} + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\sqrt{4 + \frac{5}{n}} + 2} \\ &= \frac{5}{\sqrt{4 + 2}} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

066 ㉠  $-1$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 3} - \sqrt{n^2 + 2n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - 3} - \sqrt{n^2 + 2n})(\sqrt{n^2 - 3} + \sqrt{n^2 + 2n})}{\sqrt{n^2 - 3} + \sqrt{n^2 + 2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n - 3}{\sqrt{n^2 - 3} + \sqrt{n^2 + 2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 - \frac{3}{n}}{\sqrt{1 - \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}}} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = -1 \end{aligned}$$

067 ㉠ 2

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt{n^2 - 5}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt{n^2 - 5})(\sqrt{n^2 + 4n} + \sqrt{n^2 - 5})}{\sqrt{n^2 + 4n} + \sqrt{n^2 - 5}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 5}{\sqrt{n^2 + 4n} + \sqrt{n^2 - 5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{n}}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + \sqrt{1 - \frac{5}{n^2}}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = 2 \end{aligned}$$

068 ㉠  $5n, \frac{5}{n}, 5, \frac{2}{5}$

069 ㉠  $-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - \sqrt{n^2 + 4n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 + 4n}}{(n - \sqrt{n^2 + 4n})(n + \sqrt{n^2 + 4n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 + 4n}}{-4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{n}}}{-4} \\ &= \frac{1 + \sqrt{1}}{-4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

070 ㉠  $-2$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{9n^2 - 3n} - 3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 - 3n} + 3n}{(\sqrt{9n^2 - 3n} - 3n)(\sqrt{9n^2 - 3n} + 3n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 - 3n} + 3n}{-3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{3}{n}} + 3}{-3} \\ &= \frac{\sqrt{9 + 3}}{-3} = -2 \end{aligned}$$

071 ㉠  $\frac{2}{9}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt{n^2 - 5n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4n} + \sqrt{n^2 - 5n}}{(\sqrt{n^2 + 4n} - \sqrt{n^2 - 5n})(\sqrt{n^2 + 4n} + \sqrt{n^2 - 5n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4n} + \sqrt{n^2 - 5n}}{9n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + \sqrt{1 - \frac{5}{n}}}{9} \\ &= \frac{\sqrt{1} + \sqrt{1}}{9} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

072 ㉠  $kn, k, k, k, 14$

073 ㉠  $-4$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - \sqrt{n^2 - 2n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + kn} - \sqrt{n^2 - 2n})(\sqrt{n^2 + kn} + \sqrt{n^2 - 2n})}{\sqrt{n^2 + kn} + \sqrt{n^2 - 2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(k+2)n}{\sqrt{n^2 + kn} + \sqrt{n^2 - 2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k+2}{\sqrt{1 + \frac{k}{n}} + \sqrt{1 - \frac{2}{n}}} = \frac{k+2}{2} \end{aligned}$$

따라서  $\frac{k+2}{2} = -1$  이므로  $k = -4$

## 074 ④ -1

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - \sqrt{n^2 + kn}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 + kn}}{(n - \sqrt{n^2 + kn})(n + \sqrt{n^2 + kn})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 + kn}}{-kn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{k}{n}}}{-k} = -\frac{2}{k}\end{aligned}$$

따라서  $-\frac{2}{k} = 2$ 이므로  $k = -1$

075 ④  $\frac{1}{2}$ 

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 5} - \sqrt{n^2 + kn}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 5} + \sqrt{n^2 + kn}}{(\sqrt{n^2 + 5} - \sqrt{n^2 + kn})(\sqrt{n^2 + 5} + \sqrt{n^2 + kn})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 5} + \sqrt{n^2 + kn}}{5 - kn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{k}{n}}}{\frac{5}{n} - k} = -\frac{2}{k}\end{aligned}$$

따라서  $-\frac{2}{k} = -4$ 이므로  $k = \frac{1}{2}$

076 ④  $2b_n - 1, 2b_n - 1, 2b_n - 1, 2$ 077 ④  $\frac{5}{4}$ 

$\frac{2a_n + 3}{a_n - 4} = b_n$ 이라고 하면

$$2a_n + 3 = b_n(a_n - 4), \quad a_n(b_n - 2) = 4b_n + 3$$

$$\therefore a_n = \frac{4b_n + 3}{b_n - 2}$$

이때  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4b_n + 3}{b_n - 2} = \frac{4 \times (-2) + 3}{-2 - 2} = \frac{5}{4}$$

## 078 ④ -3

$\frac{3a_n + 1}{2a_n + 4} = b_n$ 이라고 하면

$$3a_n + 1 = b_n(2a_n + 4), \quad a_n(3 - 2b_n) = 4b_n - 1$$

$$\therefore a_n = \frac{4b_n - 1}{3 - 2b_n}$$

이때  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4b_n - 1}{3 - 2b_n} = \frac{4 \times 4 - 1}{3 - 2 \times 4} = -3$$

079 ④  $n-1, n-1, n-1, 9$ 

## 080 ④ 4

$(n^2 + 1)a_n = b_n$ 이라고 하면  $a_n = \frac{b_n}{n^2 + 1}$

이때  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^2 \times \frac{b_n}{n^2 + 1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= 1 \times 4 = 4\end{aligned}$$

081 ④  $\frac{1}{6}$ 

$\frac{a_n}{n} = b_n$ 이라고 하면  $a_n = nb_n$

이때  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n + 5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nb_n}{2n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n + 5} \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

## 082 ④ 1, 1, 1

## 083 ④ 5

$\frac{5n}{n+1} < a_n < \frac{5n+1}{n+1}$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{n+1} = 5, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{n+1} = 5$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5$$

## 084 ④ 3

$\frac{6n}{2n+3} < a_n < \frac{6n+9}{2n+3}$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{2n+3} = 3, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+9}{2n+3} = 3$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

## 085 ④ 3, 3, 3

## 086 ④ 4

$4n+3 < (n+3)a_n < 4n+5$ 에서 각 변을  $n+3$ 으로 나누면

$$\frac{4n+3}{n+3} < a_n < \frac{4n+5}{n+3}$$

이때  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+3}{n+3} = 4, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+5}{n+3} = 4$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$$

## 087 ④ 1

$n^2 - n + 1 < n^2 a_n < n^2 + 3n + 3$ 에서 각 변을  $n^2$ 으로 나누면

$$\frac{n^2 - n + 1}{n^2} < a_n < \frac{n^2 + 3n + 3}{n^2}$$

이때  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 1}{n^2} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 3}{n^2} = 1$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

## 088 ④ 발산

주어진 수열의 공비가  $\sqrt{2}$ 이고,  $\sqrt{2} > 1$ 이므로 발산( $\infty$ )한다.

## 089 ④ 수렴, 0

주어진 수열의 공비가  $-\frac{2}{3}$ 이고,  $\left| -\frac{2}{3} \right| < 1$ 이므로 0에 수렴한다.

090 답 발산

주어진 수열의 공비가  $\frac{5}{4}$ 이고,  $\frac{5}{4} > 1$ 이므로 발산( $\infty$ )한다.

091 답 발산

주어진 수열의 공비가  $-1.5$ 이고,  $-1.5 \leq -1$ 이므로 발산(진동)한다.

092 답 수렴, 0

주어진 수열의 공비가  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이고,  $\left| \frac{1}{\sqrt{3}} \right| < 1$ 이므로 0에 수렴한다.

093 답  $-2 \leq r < 2$

공비가  $-\frac{r}{2}$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < -\frac{r}{2} \leq 1 \quad \therefore -2 \leq r < 2$$

094 답  $-3 < r \leq 3$

공비가  $\frac{r}{3}$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$\frac{r}{3} = 0 \text{ 또는 } -1 < \frac{r}{3} \leq 1 \quad \therefore -3 < r \leq 3$$

095 답  $-6 \leq r < 6$

공비가  $-\frac{r}{6}$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$-\frac{r}{6} = 0 \text{ 또는 } -1 < -\frac{r}{6} \leq 1 \quad \therefore -6 \leq r < 6$$

096 답  $-2 < r \leq 0$

첫째항이  $r$ , 공비가  $r+1$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면  $r=0$  또는  $-1 < r+1 \leq 1 \quad \therefore -2 < r \leq 0$

097 답  $r=-2$  또는  $2 < r \leq 4$

첫째항이  $r+2$ , 공비가  $r-3$ 이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$$r+2=0 \text{ 또는 } -1 < r-3 \leq 1$$

$$\therefore r=-2 \text{ 또는 } 2 < r \leq 4$$

098 답 0

099 답 0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^n}{4^n - 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n} = 0$$

100 답 -5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 5 \times 3^n}{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 5}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1} = -5$$

101 답  $\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (5^n - 2^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5^n \left\{ 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \right\} = \infty$$

102 답 5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}}{3^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1} = 5$$

103 답  $\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^n - 3^n}{3^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \infty$$

104 답 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + 3}{3^n + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} = 4$$

105 답 -2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{3})^n + 2^{n+1}}{(\sqrt{3})^n - 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n + 2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n - 1} = -2$$

106 답  $-\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{2n} - 5^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5^n \left\{ \left(\frac{4}{5}\right)^n - 1 \right\} = -\infty$$

107 답  $0, \frac{1}{2}, 0, 1, 0, \frac{1}{2}, 1$

$$108 \text{ 답 } \begin{cases} 0 < r < 1 \text{ 일 때, } 1 \\ r = 1 \text{ 일 때, } 0 \\ r > 1 \text{ 일 때, } -1 \end{cases}$$

(i)  $0 < r < 1$  일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^n}{1 + r^n} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

(ii)  $r = 1$  일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^n}{1 + r^n} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$$

(iii)  $r > 1$  일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ 이므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^n}{1 + r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{r^n} - 1}{\frac{1}{r^n} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 수열은  $0 < r < 1$  일 때 1에 수렴,  $r = 1$  일 때 0에 수렴,  $r > 1$  일 때 -1에 수렴한다.

$$109 \text{ 답 } \begin{cases} |r| < 1 \text{ 일 때, } 0 \\ r = 1 \text{ 일 때, } \frac{1}{2} \\ |r| > 1 \text{ 일 때, } r \end{cases}$$

(i)  $|r| < 1$  일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{r^n + 1} = \frac{0}{0 + 1} = 0$$

(ii)  $r=1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{r^n + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(iii)  $|r| > 1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \infty$ 이므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{r^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{1 + \frac{1}{r^n}} = \frac{r}{1+0} = r$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 수열은  $|r| < 1$ 일 때 0에 수렴,  
 $r=1$ 일 때  $\frac{1}{2}$ 에 수렴,  $|r| > 1$ 일 때  $r$ 에 수렴한다.

**110** 답  $\begin{cases} 0 < r < 1 \text{ 일 때, } \frac{1}{r} \\ r = 1 \text{ 일 때, } 1 \\ r > 1 \text{ 일 때, 발산} \end{cases}$

(i)  $0 < r < 1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n} + 1}{r^n + r} = \frac{0+1}{0+r} = \frac{1}{r}$$

(ii)  $r=1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n} + 1}{r^n + r} = \frac{1+1}{1+1} = 1$$

(iii)  $r > 1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ 이므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n} + 1}{r^n + r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n + \frac{1}{r^n}}{1 + \frac{r}{r^n}} = \infty$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 수열은  $0 < r < 1$ 일 때  $\frac{1}{r}$ 에 수렴,  
 $r=1$ 일 때 1에 수렴,  $r > 1$ 일 때 양의 무한대로 발산한다.

**111** 답  $\begin{cases} |r| < 1 \text{ 일 때, } 0 \\ r = 1 \text{ 일 때, } \frac{1}{2} \\ r = -1 \text{ 일 때, } -\frac{1}{2} \\ |r| > 1 \text{ 일 때, } r \end{cases}$

(i)  $|r| < 1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n+1} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n+1}}{r^{2n} + 1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

(ii)  $r=1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n+1} = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n+1}}{r^{2n} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(iii)  $r=-1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n+1} = -1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n+1}}{r^{2n} + 1} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

(iv)  $|r| > 1$ 일 때,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = \infty$ 이므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{2n}} = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n+1}}{r^{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{1 + \frac{1}{r^{2n}}} = \frac{r}{1+0} = r$$

(i)~(iv)에 의하여 주어진 수열은  $|r| < 1$ 일 때 0에 수렴,  $r=1$ 일 때  $\frac{1}{2}$ 에 수렴,  $r=-1$ 일 때  $-\frac{1}{2}$ 에 수렴,  $|r| > 1$ 일 때  $r$ 에 수렴한다.

연산  
유형

최종 점검하기

22~23쪽

|       |                 |         |      |       |                  |
|-------|-----------------|---------|------|-------|------------------|
| 1 ②   | 2 $\frac{1}{5}$ | 3 ③     | 4 ②  | 5 2   | 6 12             |
| 7 ⑤   | 8 ②             | 9 2     | 10 ⑤ | 11 20 | 12 $\frac{3}{2}$ |
| 13 15 | 14 ④            | 15 ㄱ, ㄷ |      |       |                  |

1 ㄱ.  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $2n-5$ 의 값은 한없이 커지므로  
주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

ㄴ.  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $\frac{5n}{n+5}$ 의 값은 5에 한없이 가까워지  
므로 주어진 수열은 5에 수렴한다.

ㄷ.  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $(-1)^{n+1} \times \frac{1}{4^n}$ 의 값은 0에 한없이  
가까워지므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

ㄹ.  $n$ 의 값이 한없이 커질 때,  $\sin \frac{n\pi}{2}$ 의 값은 1, 0, -1, 0, 1, ...  
이므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.

따라서 수렴하는 수열은 ㄴ, ㄷ이다.

$$\begin{aligned} 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + b_n}{a_n b_n + 5} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + b_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n + 5)} = \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 5} \\ &= \frac{2 \times (-4) + 5}{-4 \times 5 + 5} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$3 \text{ ① } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{5-2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{2}{n}}{\frac{5}{n}-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)(2n-1)}{n^2-4n+7} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+5n-3}{n^2-4n+7} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{5}{n}-\frac{3}{n^2}}{1-\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}} = 2 \end{aligned}$$

$$3 \text{ ③ } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-3n}{2n^3+5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{5}{n^2}} = 0$$

$$4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2n+5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{2+\frac{5}{n}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+4n}}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4+\frac{4}{n}}}{2} = 1$$

따라서 옳은 것은 ③이다.

$$\begin{aligned} 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+5+7+\cdots+(2n+1)}{(n+1)(2n-1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (2k+1)}{2n^2+n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \sum_{k=1}^n k + n}{2n^2+n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n}{2n^2+n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5 \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \{\log_3(3n+2) + \log_3(3n-2) - 2\log_3(n+2)\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \frac{(3n+2)(3n-2)}{(n+2)^2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \frac{9n^2-4}{n^2+4n+4} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \frac{9-\frac{4}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}} \\
&= \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2
\end{aligned}$$

$$6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+bn-2}{4n+3} \text{에서 } a \neq 0 \text{이면 극한값이 존재하지 않으므로 } a=0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+bn-2}{4n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn-2}{4n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-\frac{2}{n}}{4+\frac{3}{n}} = \frac{b}{4}$$

$$\text{따라서 } \frac{b}{4} = -3 \text{ 이므로 } b = -12$$

$$\therefore a-b=12$$

$$\begin{aligned}
7 \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-3})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-3}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}}} = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8 \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9 \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}-\sqrt{n^2+4n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+kn}+\sqrt{n^2+4n}}{(\sqrt{n^2+kn}-\sqrt{n^2+4n})(\sqrt{n^2+kn}+\sqrt{n^2+4n})} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+kn}+\sqrt{n^2+4n}}{(k-4)n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{k}{n}}+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}{k-4} \\
&= \frac{2}{k-4}
\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{2}{k-4} = -1 \text{ 이므로 } k=2$$

$$10 \quad \frac{2a_n-1}{3a_n+2} = b_n \text{ 이라고 하면 } 2a_n-1 = b_n(3a_n+2)$$

$$a_n(2-3b_n) = 2b_n+1 \quad \therefore a_n = \frac{2b_n+1}{2-3b_n}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2b_n+1}{2-3b_n} = \frac{2 \times (-1) + 1}{2 - 3 \times (-1)} = -\frac{1}{5}$$

$$11 \quad (n+3)a_n = b_n \text{ 이라고 하면 } a_n = \frac{b_n}{n+3}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} (4n-1)a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (4n-1) \times \frac{b_n}{n+3} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{n+3} \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4 \times 5 = 20
\end{aligned}$$

$$12 \quad 3n-1 < a_n < 3n+2 \text{ 에서}$$

$$3n^2-n < na_n < 3n^2+2n$$

$$\therefore \frac{3n^2-n}{2n^2+1} < \frac{na_n}{2n^2+1} < \frac{3n^2+2n}{2n^2+1}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-n}{2n^2+1} = \frac{3}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+2n}{2n^2+1} = \frac{3}{2} \text{ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{2n^2+1} = \frac{3}{2}$$

$$13 \quad (5-x)^{2n} = \{(5-x)^2\}^n \text{ 이므로 주어진 등비수열의 공비가 } (5-x)^2 \text{ 이다.}$$

$$\text{주어진 등비수열이 수렴하려면}$$

$$0 \leq (5-x)^2 \leq 1$$

$$-1 \leq 5-x \leq 1 \quad \therefore 4 \leq x \leq 6$$

$$\text{따라서 정수 } x \text{ 의 값은 } 4, 5, 6 \text{ 이므로 구하는 합은}$$

$$4+5+6=15$$

$$\begin{aligned}
14 \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1}-2^{n+1}}{(3^n-1)(2^n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6^{n+1}-2^{n+1}}{6^n-3^n-2^{n+1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6-2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{6}\right)^n} = 6
\end{aligned}$$

$$15 \quad \neg. |r| < 1 \text{ 일 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n}}{r^n+1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$\cup. r=1 \text{ 일 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n}}{r^n+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\cap. |r| > 1 \text{ 일 때, } \lim_{n \rightarrow \infty} |r^n| = \infty \text{ 이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n}}{r^n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1+\frac{1}{r^n}} = \infty$$

$$\text{따라서 옳은 것은 } \neg, \cap \text{ 이다.}$$

## 02 급수

26~35쪽

## 001 [답] 발산

주어진 급수의 제 $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라고 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \\ &= \sqrt{2n+1} - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+1} - 1) = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

## 002 [답] 발산

주어진 급수의 제 $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라고 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})} \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + \cdots + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \\ &= \sqrt{n+2} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{2}) = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

## 003 [답] 수렴, 1

주어진 급수의 제 $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라고 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

004 [답] 수렴,  $\frac{1}{3}$ 주어진 급수의 제 $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라고 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left( \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{3n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은  $\frac{1}{3}$ 이다.005 [답]  $n(n+1), n, n+1, k, k+1, n+1, n+1, 2$ 006 [답]  $\frac{1}{4}$ 주어진 급수의 제 $n$ 항을  $a_n$ 이라고 하면

$$a_n = \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right)$$

이때 제 $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라고 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left( \frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{13} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left( \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{4n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{4n+1} \right) = \frac{1}{4}$$

007 [답]  $\frac{1}{2}$ 주어진 급수의 제 $n$ 항을  $a_n$ 이라고 하면

$$a_n = \frac{1}{(2n)^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

이때 제 $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라고 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

008 [답]  $\frac{3}{4}$ 주어진 급수의 제 $n$ 항을  $a_n$ 이라고 하면

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 2n} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

이때 제 $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라고 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{4}$$

009 [답]  $\frac{k}{k+1}, \frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+1}, \frac{2n}{n+1}, 2, 1$

010 답 -1

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} \log_2 \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \log_2 \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \log_2 \left( \frac{k}{k+1} \times \frac{k+2}{k+1} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log_2 \left( \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \right) + \log_2 \left( \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \right) + \log_2 \left( \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \log_2 \left( \frac{n}{n+1} \times \frac{n+2}{n+1} \right) \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \left( \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n+2}{n+1} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \left( \frac{1}{2} \times \frac{n+2}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{n+2}{2n+2} \\
 &= \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1
 \end{aligned}$$

011 답  $-\log 2$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=2}^{\infty} \log \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right) \\
 &= \sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{n^2-1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \log \frac{k^2-1}{k^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \log \left( \frac{k-1}{k} \times \frac{k+1}{k} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \log \left( \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \right) + \log \left( \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \right) + \log \left( \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \log \left( \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n} \right) \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left( \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left( \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n+1}{2n} \\
 &= \log \frac{1}{2} = -\log 2
 \end{aligned}$$

012 답  $\frac{2}{3}$ , 발산

013 답 풀이 참고

$$\begin{aligned}
 a_n &= 1 - \left( \frac{1}{5} \right)^n \text{이라고 하면} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left( \frac{1}{5} \right)^n \right\} = 1 \\
 \text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &\neq 0 \text{이므로 주어진 급수는 발산한다.}
 \end{aligned}$$

014 답 풀이 참고

$$\begin{aligned}
 a_n &= \sqrt{n^2+4n} - n \text{이라고 하면} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+4n} - n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+4n} - n)(\sqrt{n^2+4n} + n)}{\sqrt{n^2+4n} + n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2+4n} + n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}} + 1} = 2 \\
 \text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &\neq 0 \text{이므로 주어진 급수는 발산한다.}
 \end{aligned}$$

015 답 풀이 참고

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{3^n-1}{2^n+3^n} \text{이라고 하면} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n-1}{2^n+3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n}{\left( \frac{2}{3} \right)^n + 1} = 1 \\
 \text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &\neq 0 \text{이므로 주어진 급수는 발산한다.}
 \end{aligned}$$

016 답 풀이 참고

$$\begin{aligned}
 a_n &= \log_2 \frac{6n+1}{3n-2} \text{이라고 하면} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{6n+1}{3n-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{6 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{2}{n}} = \log_2 2 = 1 \\
 \text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &\neq 0 \text{이므로 주어진 급수는 발산한다.}
 \end{aligned}$$

017 답 풀이 참고

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{n+3}{2n-1} \text{이라고 하면} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \\
 \text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &\neq 0 \text{이므로 주어진 급수는 발산한다.}
 \end{aligned}$$

018 답 0, 1

019 답 -7

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+7) \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n+7) = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -7$$

020 답 2

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n-1) \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n-1) &= 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n + \frac{3}{2} \right) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2
 \end{aligned}$$

021 답 -2

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n+4) \text{가 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n+4) &= 0 \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= -\frac{4}{3} \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n+2) &= 3 \times \left( -\frac{4}{3} \right) + 2 = -2
 \end{aligned}$$

022 답 0, 1

023 답 1

$$\begin{aligned}
 a_n - \frac{2n}{2n-1} &= b_n \text{이라고 하면 } a_n = b_n + \frac{2n}{2n-1} \\
 \text{급수 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n &\text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( b_n + \frac{2n}{2n-1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n-1} \\
 &= 0 + 1 = 1
 \end{aligned}$$

024 답  $\frac{1}{3}$ 

주어진 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{n} + 3 \right) = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = -3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + n}{4a_n - 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \frac{a_n}{n} + 1}{4 \times \frac{a_n}{n} - 3} = \frac{2 \times (-3) + 1}{4 \times (-3) - 3} = \frac{1}{3}$$

## 025 답 7

주어진 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{3^n} - 4 \right) = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^n} = 4$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + 3^{n+1}}{3^n + 2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{3^n} + 3}{1 + 2 \times \left( \frac{2}{3} \right)^n} = \frac{4 + 3}{1 + 0} = 7$$

## 026 답 -3

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + (-4) = -3$$

## 027 답 6

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - b_n) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2 \times 1 - (-4) = 6$$

## 028 답 26

$$\sum_{n=1}^{\infty} (6a_n - 5b_n) = 6 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 5 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 6 \times 1 - 5 \times (-4) = 26$$

029 답  $\frac{3}{2}$ 

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{4} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{4} \times (-4) = \frac{3}{2}$$

## 030 답 8, 9, 5, 1, 3, 8, 7

## 031 답 -2

 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$  ( $\alpha, \beta$ 는 실수)라고 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} (4a_n - b_n) = 3 \text{에서 } 4\alpha - \beta = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 3b_n) = -6 \text{에서 } 2\alpha - 3\beta = -6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면  $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = 3$ 

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{8}{3}a_n - 2b_n \right) = \frac{8}{3} \times \frac{3}{2} - 2 \times 3 = -2$$

032 답 수렴,  $\frac{5}{4}$ 

첫째항이 1, 공비가  $\frac{1}{5}$ 이고,  $\left| \frac{1}{5} \right| < 1$ 이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}$$

033 답 수렴,  $\frac{2}{5}$ 

첫째항이  $\frac{2}{3}$ , 공비가  $-\frac{2}{3}$ 이고,  $\left| -\frac{2}{3} \right| < 1$ 이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{\frac{2}{3}}{1 - \left( -\frac{2}{3} \right)} = \frac{2}{5}$$

034 답 수렴,  $\frac{10}{9}$ 

첫째항이 1, 공비가 0.1이고,  $|0.1| < 1$ 이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{1}{1 - 0.1} = \frac{10}{9}$$

## 035 답 발산

첫째항이 1, 공비가  $-\sqrt{2}$ 이고,  $|-\sqrt{2}| > 1$ 이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

036 답 수렴,  $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ 

$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{n-1}$ 에서 첫째항이  $\frac{1}{3}$ , 공비가  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 이고,

$\left| \frac{1}{\sqrt{3}} \right| < 1$ 이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{3 - \sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$$

037 답 수렴,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 

$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt{2})^{n-1}$ 에서 첫째항이 1, 공비가  $1 - \sqrt{2}$ 이고,  $|1 - \sqrt{2}| < 1$ 이

므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{1}{1 - (1 - \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

## 038 답 발산

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \times \left( \frac{3}{2} \right)^{n-1}$ 에서 첫째항이  $\frac{1}{2}$ , 공비가  $\frac{3}{2}$ 이고,

$\left| \frac{3}{2} \right| > 1$ 이므로 주어진 등비급수는 발산한다.

039 답 수렴,  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 

$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 + \sqrt{3}} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{3}} \times \left( \frac{1}{1 + \sqrt{3}} \right)^{n-1}$ 에서 첫째항이  $\frac{1}{1 + \sqrt{3}}$ ,

공비가  $\frac{1}{1 + \sqrt{3}}$ 이고,  $\left| \frac{1}{1 + \sqrt{3}} \right| < 1$ 이므로 주어진 등비급수는 수렴한다. 따라서 그 합은

$$\frac{\frac{1}{1 + \sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{1 + \sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

040 답  $\frac{5}{4}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n \right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} \\ &= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}\end{aligned}$$

041 답  $-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{5^n} - \frac{3}{4^n} \right) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= 2 \times \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} - 3 \times \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

042 답 4

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 1 + 3 = 4\end{aligned}$$

043 답  $\frac{15}{28}$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-2)^n}{5^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} - \frac{-\frac{2}{5}}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{7} = \frac{15}{28}\end{aligned}$$

044 답 9

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1} + 4^{n+1}}{6^n} &= \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}} + 4 \times \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} \\ &= 1 + 8 = 9\end{aligned}$$

045 답  $-\frac{1}{3} < r < \frac{1}{3}$

첫째항이 1이고 공비가  $3r$ 이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면  $-1 < 3r < 1 \quad \therefore -\frac{1}{3} < r < \frac{1}{3}$

046 답  $-2 < r < 2$

첫째항이  $r$ 이고 공비가  $-\frac{r}{2}$ 이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면  $r=0$  또는  $-1 < -\frac{r}{2} < 1 \quad \therefore -2 < r < 2$

047 답  $-\frac{1}{4} < r < \frac{1}{4}$

첫째항이 1이고 공비가  $-4r$ 이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면  $-1 < -4r < 1 \quad \therefore -\frac{1}{4} < r < \frac{1}{4}$

048 답  $r=3$  또는  $-1 < r < 0$

첫째항이  $r-3$ 이고 공비가  $2r+1$ 이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면  $r-3=0$  또는  $-1 < 2r+1 < 1, r=3$  또는  $-2 < 2r < 0$   
 $\therefore r=3$  또는  $-1 < r < 0$

049 답  $\frac{5}{3} < r < \frac{7}{3}$

첫째항이  $(6-3r)^2$ 이고 공비가  $6-3r$ 이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면  $-1 < 6-3r < 1$   
 $-7 < -3r < -5 \quad \therefore \frac{5}{3} < r < \frac{7}{3}$

050 답 2, 4, 6, 2, 2,  $\frac{8}{33}$

051 답  $\frac{5}{11}$

$0.\dot{4}\dot{5} = 0.45 + 0.0045 + 0.000045 + \dots$

$$= \frac{45}{10^2} + \frac{45}{10^4} + \frac{45}{10^6} + \dots = \frac{\frac{45}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{5}{11}$$

052 답  $\frac{34}{333}$

$0.\dot{1}0\dot{2} = 0.102 + 0.000102 + 0.000000102 + \dots$

$$= \frac{102}{10^3} + \frac{102}{10^6} + \frac{102}{10^9} + \dots = \frac{\frac{102}{10^3}}{1-\frac{1}{10^3}} = \frac{34}{333}$$

053 답  $\frac{50}{33}$

$1.\dot{5}\dot{1} = 1 + 0.51 + 0.0051 + 0.000051 + \dots$

$$= 1 + \left( \frac{51}{10^2} + \frac{51}{10^4} + \frac{51}{10^6} + \dots \right) = 1 + \frac{\frac{51}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{50}{33}$$

054 답  $\frac{7}{30}$

$0.2\dot{3} = 0.2 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \dots$

$$= \frac{2}{10} + \left( \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots \right) = \frac{1}{5} + \frac{\frac{3}{10^2}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{7}{30}$$

055 답  $1, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}$

056 답  $\left(\frac{12}{25}, \frac{16}{25}\right)$ 

점 P가 한없이 가까워지는 점의 좌표를  $(x, y)$ 라고 하면

$$x = \overline{P_1P_2} - \overline{P_3P_4} + \overline{P_5P_6} - \overline{P_7P_8} + \dots$$

$$= \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^5 - \left(\frac{3}{4}\right)^7 + \dots = \frac{\frac{3}{4}}{1 - \left(-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)} = \frac{12}{25}$$

$$y = \overline{OP_1} - \overline{P_2P_3} + \overline{P_4P_5} - \overline{P_6P_7} + \dots$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \left(\frac{3}{4}\right)^6 + \dots = \frac{1}{1 - \left(-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)} = \frac{16}{25}$$

따라서 점 P가 한없이 가까워지는 점의 좌표는  $\left(\frac{12}{25}, \frac{16}{25}\right)$ 이다.

057 답 4, 3,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{3}{4}$ , 3058 답  $8(\sqrt{2}+1)$ 

$\overline{AA_1} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ 이고 삼각형  $ABA_1$ 은 직각이등변삼각형

이므로  $\overline{A_1B_1} = \sqrt{2}\overline{AA_1} = \sqrt{2}$

$$\therefore l_1 = 4 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$\overline{A_1A_2} = \frac{1}{2}\overline{A_1B_1} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고 삼각형  $A_1A_2D_2$ 는 직각이등변

삼각형이므로  $\overline{A_2D_2} = \sqrt{2}\overline{A_1A_2} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

$$\therefore l_2 = 4 \times 1 = 4$$

$\overline{A_2A_3} = \frac{1}{2}\overline{A_2D_2} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ 이고 삼각형  $A_2A_3D_3$ 은 직각이등변삼

각형이므로  $\overline{A_3D_3} = \sqrt{2}\overline{A_2A_3} = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore l_3 = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

⋮

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = \sum_{n=1}^{\infty} 4\sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = \frac{4\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 8(\sqrt{2}+1)$$

059 답  $\frac{16}{3}$ 

색칠한 정사각형의 넓이를 큰 순서대로  $S_1, S_2, S_3, \dots$ 이라고 하면

$S_1 = 4, S_2 = \frac{1}{4}S_1 = 1, S_3 = \frac{1}{4}S_2 = \frac{1}{4}, \dots$ 이므로 수열  $\{S_n\}$ 은 첫째

항이 4이고 공비가  $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이다.

따라서 색칠한 정사각형의 넓이의 합은  $\frac{4}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{16}{3}$

060 답  $\frac{4}{3}\pi$ 

$S_1 = \pi \times 1^2 = \pi, S_2 = \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi, S_3 = \pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\pi, \dots$ 이

므로 수열  $\{S_n\}$ 은 첫째항이  $\pi$ 이고 공비가  $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}\pi$$

## 061 답 100 cm

추를 A 위치에서 놓은 후 추가 움직인 거리는

$$20 \text{ cm}, 20 \times \frac{4}{5} \text{ (cm)}, 20 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 \text{ (cm)}, 20 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 \text{ (cm)}, \dots$$

따라서 추가 멈출 때까지 움직인 거리는

$$20 + 20 \times \frac{4}{5} + 20 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 20 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \dots$$

$$= \frac{20}{1 - \frac{4}{5}} = 100 \text{ (cm)}$$

## 062 답 150 m

한 번 튀어 오르고 떨어질 때마다 공이 움직인 거리는

$$2 \times 30 \times \frac{2}{3} \text{ (m)}, 2 \times 30 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{ (m)}, 2 \times 30 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \text{ (m)}, \dots$$

따라서 공이 정지할 때까지 움직인 거리는

$$30 + 2 \times 30 \times \frac{2}{3} + 2 \times 30 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \times 30 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots$$

$$= 30 + \frac{40}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= 30 + 120 = 150 \text{ (m)}$$

연산  
유형

최종 점검하기

36~37쪽

|                  |     |                                   |      |      |      |
|------------------|-----|-----------------------------------|------|------|------|
| 1 ③              | 2 2 | 3 ②                               | 4 ②  | 5 ②  | 6 -8 |
| 7 ④              | 8 ⑤ | 9 $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$ | 10 ④ | 11 ② |      |
| 12 $\frac{4}{3}$ |     |                                   |      |      |      |

1 주어진 급수의 제 $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라고 하면

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}}{\sqrt{k^2-1}}$$

$$= \sum_{k=2}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}}{\sqrt{k+1} \times \sqrt{k-1}}$$

$$= \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$+ \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n-2}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

2 주어진 급수의 제 $n$ 항을  $a_n$ 이라고 하면

$$a_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3} = \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=1}^n k^3}$$

$$= \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2} = \frac{2}{n(n+1)}$$

이때 제 $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라고 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right\}$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 2$$

3  $\sum_{n=3}^{\infty} \log_2 \frac{n^2-2n}{n^2-2n+1}$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \log_2 \frac{n(n-2)}{(n-1)^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3}^n \log_2 \left( \frac{k-2}{k-1} \times \frac{k}{k-1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log_2 \left( \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \right) + \log_2 \left( \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \right) + \log_2 \left( \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \right) \right.$$

$$\left. + \cdots + \log_2 \left( \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n}{n-1} \right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \left( \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n}{n-1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \left( \frac{1}{2} \times \frac{n}{n-1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{n}{2n-2}$$

$$= \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$$

4 ①  $a_n = \frac{n}{2n+1}$ 이라고 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

즉, 주어진 급수는 발산한다.

② 제 $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라고 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) \right.$$

$$\left. + \cdots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1}\right)$$

즉,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}$ 이므로 주어진 급수는 수렴한다.

③  $a_n = \sqrt{3n-1} - \sqrt{n}$ 이라고 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n-1} - \sqrt{n})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{3n-1} - \sqrt{n})(\sqrt{3n-1} + \sqrt{n})}{\sqrt{3n-1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{\sqrt{3n-1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{3 - \frac{1}{n}} + 1} = \infty$$

즉, 주어진 급수는 발산한다.

④ 제 $n$ 항까지의 부분합을  $S_n$ 이라고 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2})}$$

$$= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})$$

$$= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + \cdots + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$$

$$= \sqrt{n+2} - \sqrt{2}$$

즉,  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{2}) = \infty$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

⑤  $a_n = \log_2 \frac{6n-3}{3n-2}$ 이라고 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{6n-3}{3n-2} = \log_2 2 = 1 \neq 0$$

즉, 주어진 급수는 발산한다.

따라서 수렴하는 것은 ②이다.

5  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + 4n^2 - 2}{na_n - 2n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n^2}{n^2} + 4 - \frac{2}{n^2}}{\frac{a_n}{n} - 2 + \frac{3}{n}}$$

$$= -2$$

6 주어진 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{n^2} - 2 \right) = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - n + 3a_n}{n^2 + 3n - a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n} + 3 \times \frac{a_n}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} - \frac{a_n}{n^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 3 \times 2}{1 - 2}$$

$$= -8$$

7  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3a_n + 4b_n}{12} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$$= \frac{1}{4} \times 4 + \frac{1}{3} \times (-2)$$

$$= \frac{1}{3}$$

8 ㄱ.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{3}\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{9} \times \left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1}$  에서 첫째항은  $\frac{16}{9}$ , 공비는  $-\frac{4}{3}$ 이다.

이때  $\left|-\frac{4}{3}\right| > 1$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ.  $\sum_{n=1}^{\infty} 0.9^n = \sum_{n=1}^{\infty} 0.9 \times 0.9^{n-1}$ 에서 첫째항은 0.9, 공비는 0.9이다.

이때  $|0.9| < 1$ 이므로 주어진 급수는 수렴한다.

ㄷ.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$ 에서 첫째항은 1, 공비는  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이다.

이때  $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| < 1$ 이므로 주어진 급수는 수렴한다.

ㄹ.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^{n-1}$ 에서 첫째항은  $\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^2$ , 공비는  $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ 이다.

이때  $\frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ 이고  $|2-\sqrt{3}| < 1$ 이므로 주어진 급수는 수렴한다.

따라서 수렴하는 급수는 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

9 공비가  $4-2x$ 이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < 4-2x < 1, -5 < -2x < -3$$

$$\therefore \frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} 10 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} + 3^{n+1}}{6^{n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4^n}{6^{n-1}} + \frac{3^{n+1}}{6^{n-1}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{4}{1-\frac{2}{3}} + \frac{9}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 12 + 18 = 30 \end{aligned}$$

$$11 \quad 0.4\dot{6}\dot{3} = 0.4 + 0.063 + 0.00063 + 0.0000063 + \dots$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{10} + \left( \frac{63}{10^3} + \frac{63}{10^5} + \frac{63}{10^7} + \dots \right) \\ &= \frac{4}{10} + \frac{\frac{63}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{51}{110} \end{aligned}$$

12  $\square A_1B_1CC_1$ 과  $\square A_2B_2B_1C_2$ 는 정사각형이고

$$\overline{A_1B_1} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2} \times 2 = 1, \quad \overline{A_2B_2} = \frac{1}{2}\overline{A_1B_1} = \frac{1}{2} \text{이므로 } \square A_1B_1CC_1$$

과  $\square A_2B_2B_1C_2$ 의 닮음비는 2 : 1이고, 넓이의 비는 4 : 1이다.

따라서 각 정사각형의 넓이를  $S_n$ 이라고 하면 수열  $\{S_n\}$ 은 첫째항

이 1이고 공비가  $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로 구하는 합은

$$\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

## II. 미분법

# 03

## 지수함수와 로그함수의 미분

40~49쪽

001 답  $\infty$

002 답 0

003 답 0

004 답  $\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^x}{3^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^x}{9^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^x = \infty$$

005 답  $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

006 답  $5^x, \frac{1}{5}, 0, 1$

007 답 1

분모, 분자를  $3^x$ 으로 각각 나누면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 2^x}{3^x - 2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

008 답  $\infty$

주어진 식을  $4^x$ 으로 묶으면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (4^x - 3^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 4^x \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^x \right\}$$

이때  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^x \right\} = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (4^x - 3^x) = \infty$$

009 답  $-\infty$

주어진 식을  $7^x$ 으로 묶으면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2^x - 7^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 7^x \left\{ \left(\frac{2}{7}\right)^x - 1 \right\}$$

이때  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{2}{7}\right)^x - 1 \right\} = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2^x - 7^x) = -\infty$$

010 답  $\infty$

011 답  $-\infty$

012 답  $-\infty$

013 답  $\infty$

014 답 1

$$\lim_{x \rightarrow 4} \log_4 x = \log_4 4 = 1$$

015 답  $x, x, 4, 1$

016 답 2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_3(9x^2+2) - \log_3(x^2+1)\} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{9x^2+2}{x^2+1} = \log_3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2+2}{x^2+1} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\end{aligned}$$

017 답 1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} \{\log_2(x^2-1) - \log_2(x-1)\} \\ = \lim_{x \rightarrow 1+} \log_2 \frac{x^2-1}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1+} \log_2 \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1+} \log_2(x+1) = \log_2 \lim_{x \rightarrow 1+} (x+1) = \log_2 2 = 1\end{aligned}$$

018 답  $\log_5 10$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} (\log_5 |x^2-25| - \log_5 |x-5|) \\ = \lim_{x \rightarrow 5} \log_5 \left| \frac{x^2-25}{x-5} \right| \\ = \lim_{x \rightarrow 5} \log_5 \left| \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} \right| \\ = \lim_{x \rightarrow 5} \log_5 |x+5| = \log_5 \lim_{x \rightarrow 5} |x+5| = \log_5 10\end{aligned}$$

019 답  $2x, 2, 2$

020 답  $e^3$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}^3 = e^3$$

021 답  $e^{12}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{4}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\}^{12} = e^{12}$$

022 답  $\frac{1}{e^3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{4}\right)^{-\frac{12}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{\frac{4}{x}}\right\}^{-3} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

023 답  $\frac{1}{e}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1-x)^{-\frac{1}{x}}\}^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

024 답  $\frac{1}{e^4}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\}^{-4} = e^{-4} = \frac{1}{e^4}$$

025 답  $\sqrt{e}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-5x)^{-\frac{1}{10x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1-5x)^{-\frac{1}{5x}}\}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

026 답  $3x, 2, 2$

027 답  $e^3$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right\}^3 = e^3$$

028 답  $e^2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^2 = e^2$$

029 답  $\sqrt{e}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{8}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{\left(1 + \frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right\}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

030 답  $\frac{1}{e^6}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right\}^{-6} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

031 답  $e^2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{5x}\right)^{-10x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{\left(1 - \frac{1}{5x}\right)^{-5x}\right\}^2 = e^2$$

032 답 0

033 답 1

034 답 5

$$\ln e^5 = 5 \ln e = 5$$

035 답  $\frac{1}{2}$

$$\ln \sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$$

036 답 -3

$$\ln \frac{1}{e^3} = \ln e^{-3} = -3$$

037 답 2

$$e^{\ln 2} = 2^{\ln e} = 2$$

038 답 1

$$\frac{1}{3} e^{\ln 3} = \frac{1}{3} \times (3^{\ln e}) = \frac{1}{3} \times 3 = 1$$

039 답  $3x, 3, 3, 3$

040 답  $\frac{1}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{4}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{4}\right)}{\frac{x}{4}} \times \frac{1}{4} = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

041 답  $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

042 답  $\frac{1}{3}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \frac{2}{6} = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

043 답  $\frac{1}{4}$ 

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+4x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+4x)}{4x}} \times \frac{1}{4} = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

044 답  $-1$ 

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{-x} \times (-1) \\ &= 1 \times (-1) = -1 \end{aligned}$$

## 045 답 3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times \frac{x}{\ln(1+x)} \times 3 \right\} \\ &= 1 \times 1 \times 3 = 3 \end{aligned}$$

046 답  $4x, 4, 4, 4$ 047 답  $\frac{1}{5}$ 

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{5} = 1 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

048 답  $\frac{3}{2}$ 

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times \frac{3}{2} = 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

049 답  $\frac{1}{5}$ 

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{5x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^{5x} - 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^{5x} - 1}{5x}} \times \frac{1}{5} = 1 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

050 답  $-1$ 

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$$

## 051 답 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{x+1} \right) = 1 \times 1 = 1$$

052 답  $6x, 6, \frac{6}{\ln 2}$ 053 답  $\frac{1}{3 \ln 6}$ 

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_6(1+x)}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_6(1+x)}{x} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{\ln 6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3 \ln 6} \end{aligned}$$

054 답  $\frac{2}{5 \ln 3}$ 

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+2x)}{5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+2x)}{2x} \times \frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{\ln 3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5 \ln 3} \end{aligned}$$

055 답  $7 \ln 5$ 

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\log_5(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\log_5(1+x)}{x}} \times 7 = \ln 5 \times 7 = 7 \ln 5$$

056 답  $-\frac{3}{\ln 3}$ 

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1-3x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1-3x)}{-3x} \times (-3) \\ &= \frac{1}{\ln 3} \times (-3) = -\frac{3}{\ln 3} \end{aligned}$$

## 057 답 4

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_4(1+4x)}{\log_4(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log_4(1+4x)}{4x} \times \frac{x}{\log_4(1+x)} \times 4 \right\} \\ &= \frac{1}{\ln 4} \times \ln 4 \times 4 = 4 \end{aligned}$$

058 답  $x, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}$ 059 답  $3 \ln 2$ 

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{3x} \times 3 = \ln 2 \times 3 = 3 \ln 2$$

060 답  $2 \ln 5$ 

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{4x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{4x} - 1}{4x} \times 2 = \ln 5 \times 2 = 2 \ln 5$$

061 답  $\frac{3}{\ln 6}$ 

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{6^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{6^x - 1}{3x}} \times 3 = \frac{1}{\ln 6} \times 3 = \frac{3}{\ln 6}$$

062 답  $-\ln 3$ 

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{-x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{-x} - 1}{-x} \times (-1) \\ &= \ln 3 \times (-1) = -\ln 3 \end{aligned}$$

063 답  $-\ln 7$ 

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{x^2 - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{7^x - 1}{x} \times \frac{1}{x-1} \right) \\ &= \ln 7 \times (-1) = -\ln 7 \end{aligned}$$

064 답  $0, 0, 1, 1, 1, 1, 4, 4$ 065 답  $a=12, b=1$ 

$\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(ax+b) = 0$$

즉,  $\ln b = 0$ 이므로  $b = 1$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ax+1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ax+1)}{ax} \times \frac{a}{2} = 1 \times \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$$

따라서  $\frac{a}{2} = 6$ 이므로  $a = 12$

**066** 답  $a=-1, b=3$

$\lim_{x \rightarrow 0} x=0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} + a) = 0$$

즉,  $1+a=0$ 이므로  $a=-1$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{3x} \times 3 = 1 \times 3 = 3$$

$\therefore b=3$

**067** 답  $a=\frac{1}{7}, b=-1$

$\lim_{x \rightarrow 0} x=0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{ax} + b) = 0$$

즉,  $1+b=0$ 이므로  $b=-1$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{ax}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{e^{ax}-1} \times \frac{1}{a} = 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

따라서  $\frac{1}{a}=7$ 이므로  $a=\frac{1}{7}$

**068** 답  $y'=e^{x+3}$

$$y=e^{x+3}=e^3 \times e^x \text{이므로}$$

$$y'=e^3 \times (e^x)' = e^3 \times e^x = e^{x+3}$$

**069** 답  $y'=2e^{2x}$

$$y=e^{2x}=e^x \times e^x \text{이므로}$$

$$y'=(e^x)' \times e^x + e^x \times (e^x)'$$

$$=e^x \times e^x + e^x \times e^x$$

$$=e^{2x} + e^{2x} = 2e^{2x}$$

**070** 답  $y'=(1+x)e^x$

$$y'=(x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

**071** 답  $y'=2^{x+2} \ln 2$

$$y=2^{x+2}=2^2 \times 2^x \text{이므로}$$

$$y'=2^2 \times (2^x)' = 2^2 \times 2^x \ln 2 = 2^{x+2} \ln 2$$

**072** 답  $y'=7^{x-1} \ln 7$

$$y=7^{x-1}=\frac{1}{7} \times 7^x \text{이므로}$$

$$y'=\frac{1}{7} \times (7^x)' = \frac{1}{7} \times 7^x \ln 7 = 7^{x-1} \ln 7$$

**073** 답  $y'=5^x(x \ln 5 + 1)$

$$y'=(5^x)'x + 5^x(x)' = 5^x \ln 5 \times x + 5^x$$

$$=5^x(x \ln 5 + 1)$$

**074** 답 1

$$f'(x)=(e^x)' + (x^2)' = e^x + 2x$$

$$\therefore f'(0)=1$$

**075** 답  $4e$

$$f'(x)=(x^2+1)'e^x + (x^2+1)(e^x)'$$

$$=2xe^x + (x^2+1)e^x = (x^2+2x+1)e^x$$

$$\therefore f'(1)=4e$$

**076** 답  $\ln 5$

$$f(x)=5^{x+1}=5 \times 5^x \text{이므로}$$

$$f'(x)=5 \times (5^x)' = 5 \times 5^x \ln 5$$

$$=5^{x+1} \ln 5$$

$$\therefore f'(-1)=\ln 5$$

**077** 답  $\ln 6$

$$f'(x)=(2^x)' + (3^x)' = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3$$

$$\therefore f'(0)=\ln 2 + \ln 3 = \ln 6$$

**078** 답  $2\sqrt{6}$

$$f'(x)=(2x-1)'6^x + (2x-1)(6^x)'$$

$$=2 \times 6^x + (2x-1) \times 6^x \ln 6$$

$$=6^x \{2 + (2x-1) \ln 6\}$$

$$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{6}$$

**079** 답  $y'=\frac{1}{x}$

$$y=\ln 5x=\ln 5 + \ln x \text{이므로}$$

$$y'=(\ln 5)' + (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

**080** 답  $y'=\frac{3}{x}$

$$y=\ln x^3=3 \ln x \text{이므로}$$

$$y'=(3 \ln x)' = \frac{3}{x}$$

**081** 답  $y'=\ln x + 1$

$$y'=(x)' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \times \frac{1}{x}$$

$$=\ln x + 1$$

**082** 답  $y'=\frac{1}{x \ln 3}$

$$y=\log_3 2x=\log_3 2 + \log_3 x \text{이므로}$$

$$y'=(\log_3 2)' + (\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$$

**083** 답  $y'=\frac{4}{x \ln 10}$

$$y=\log x^4=4 \log x \text{이므로}$$

$$y'=(4 \log x)' = \frac{4}{x \ln 10}$$

**084** 답  $y'=e^x \left( \log_5 x + \frac{1}{x \ln 5} \right)$

$$y'=(e^x)' \log_5 x + e^x (\log_5 x)'$$

$$=e^x \log_5 x + \frac{e^x}{x \ln 5} = e^x \left( \log_5 x + \frac{1}{x \ln 5} \right)$$

## 085 답 -1

$$f'(x) = (\ln 2 + \ln x)' - (3x^2)' = \frac{1}{x} - 6x$$

$$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 6 \times \frac{1}{2} = -1$$

## 086 답 e

$$f'(x) = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$$

$$= e^x \left( \ln x + \frac{1}{x} \right)$$

$$\therefore f'(1) = e(0+1) = e$$

087 답  $4e^2 - 4$ 

$$f'(x) = (x^3 - 2x)' \ln x + (x^3 - 2x)(\ln x)'$$

$$= (3x^2 - 2) \ln x + (x^3 - 2x) \times \frac{1}{x}$$

$$= (3x^2 - 2) \ln x + x^2 - 2$$

$$\therefore f'(e) = 3e^2 - 2 + e^2 - 2 = 4e^2 - 4$$

088 답  $\frac{1}{\ln 10} - 1$ 

$$f'(x) = (3 \log x)' - (x)' = \frac{3}{x \ln 10} - 1$$

$$\therefore f'(3) = \frac{1}{\ln 10} - 1$$

089 답  $1 + \frac{1}{\ln 2}$ 

$$f'(x) = (x)' \log_2 x + x (\log_2 x)'$$

$$= \log_2 x + x \times \frac{1}{x \ln 2} = \log_2 x + \frac{1}{\ln 2}$$

$$\therefore f'(2) = \log_2 2 + \frac{1}{\ln 2} = 1 + \frac{1}{\ln 2}$$

090 답  $\frac{1}{\ln 3} + 1$ 

$$f'(x) = (\log_3 x)' + (\ln x)' = \frac{1}{x \ln 3} + \frac{1}{x}$$

$$\therefore f'(1) = \frac{1}{\ln 3} + 1$$

091 답  $f'(2), 2, e^x, e^2, 2, 2e^2$ 

## 092 답 15

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{3h} \times 3 = 3f'(1)$$

이때  $f'(x) = \frac{1}{x} + 4x$ 이므로  $f'(1) = 1 + 4 = 5$

따라서 구하는 극한값은  $3f'(1) = 3 \times 5 = 15$

093 답  $3 \ln 3$ 

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

이때  $f'(x) = 3^x \ln 3 - 2x + 2$ 이므로 구하는 극한값은  $f'(1) = 3 \ln 3$

094 답  $\frac{1}{2 \ln 2} + 1$ 

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1} \right\}$$

$$= f'(1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} f'(1)$$

이때  $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + 2x$ 이므로

$$f'(1) = \frac{1}{\ln 2} + 2$$

따라서 구하는 극한값은

$$\frac{1}{2} f'(1) = \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{\ln 2} + 2 \right) = \frac{1}{2 \ln 2} + 1$$

095 답  $b, be^{x-1}, be^{x-1}, b, 1, 2$ 096 답  $a=e, b=0$ 

함수  $f(x)$ 가  $x=1$ 에서 미분가능하면

(i)  $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (ax + b) = \lim_{x \rightarrow 1-} e^x = f(1)$$

$$\therefore a + b = e \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii)  $f'(1)$ 이 존재하므로

$$f'(x) = \begin{cases} a & (x > 1) \\ e^x & (x < 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} a = \lim_{x \rightarrow 1-} e^x \quad \therefore a = e$$

이를 ①에 대입하여 풀면  $b=0$

097 답  $a=e^2, b=1$ 

함수  $f(x)$ 가  $x=1$ 에서 미분가능하면

(i)  $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \ln ax = \lim_{x \rightarrow 1-} (bx + 1) = f(1)$$

$$\therefore \ln a = b + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii)  $f'(1)$ 이 존재하므로

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 1) \\ b & (x < 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1-} b \quad \therefore b = 1$$

이를 ①에 대입하면

$$\ln a = 2 \quad \therefore a = e^2$$

연산  
난이도  
유형

최종 점검하기

50~51쪽

|      |         |                          |      |      |
|------|---------|--------------------------|------|------|
| 1 ④  | 2 -1    | 3 $e^9 + \frac{1}{e^3}$  | 4 ⑤  | 5 ④  |
| 6 ①  | 7 ⑤     | 8 $4 \ln 2$              | 9 6  | 10 ② |
| 11 ④ | 12 $5e$ | 13 $1 + \frac{1}{\ln 3}$ | 14 ⑤ | 15 2 |

$$1 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^{x+1} - 3^x}{5^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - \left(\frac{3}{5}\right)^x}{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^x} = \frac{5-0}{1+0} = 5$$

$$2 \lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_2(5x-2) - \log_2 10x\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{5x-2}{10x}$$

$$= \log_2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-2}{10x}$$

$$= \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$$

$$3 \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{3}{x}} + \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+3x)^{\frac{1}{3x}} \right\}^9 + \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1-3x)^{-\frac{1}{3x}} \right\}^{-3}$$

$$= e^9 + \frac{1}{e^3}$$

$$4 \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+1}{5x} \right)^{10x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{5x} \right)^{10x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left( 1 + \frac{1}{5x} \right)^{5x} \right\}^2 = e^2$$

$$5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x^2+x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \frac{2x}{x^2+x} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \frac{2}{x+1} \right\}$$

$$= 1 \times 2 = 2$$

$$6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{e^{3x}-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{3x}{e^{3x}-1} \times \frac{1}{3} \right\}$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$7 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+2x)}{\log_2(1+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log_2(1+2x)}{2x} \times \frac{x}{\log_2(1+x)} \times 2 \right\}$$

$$= \frac{1}{\ln 2} \times \ln 2 \times 2 = 2$$

$$8 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x+2}-4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \times 2^x - 4}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(2^x-1)}{x}$$

$$= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x-1}{x}$$

$$= 4 \ln 2$$

$$9 \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \text{이고 극한값이 존재하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{ax}-b) = 0$$

즉,  $1-b=0$ 이므로  $b=1$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax}-1}{ax} \times a = 1 \times a = a$$

따라서  $a=6$ 이므로  $ab=6$

$$10 f'(x) = (x^2-2x)'e^x + (x^2-2x)(e^x)'$$

$$= (2x-2)e^x + (x^2-2x)e^x$$

$$= (x^2-2)e^x$$

$$\therefore f'(0) = -2$$

$$11 f(x) = 3^{x+a} = 3^a \times 3^x \text{이므로}$$

$$f'(x) = 3^a \times (3^x)' = 3^a \times 3^x \ln 3 = 3^{x+a} \ln 3$$

$$\therefore f'(-1) = 3^{-1+a} \ln 3$$

따라서  $3^{-1+a} \ln 3 = \ln 3$ 이므로  $a=1$

$$12 f'(x) = (e^x)'(\ln x + 2x) + e^x(\ln x + 2x)'$$

$$= e^x(\ln x + 2x) + e^x \left( \frac{1}{x} + 2 \right)$$

$$= e^x \left( \ln x + 2x + \frac{1}{x} + 2 \right)$$

$$\therefore f'(1) = e(0+2+1+2) = 5e$$

$$13 f'(x) = (x)' \log_3 x + x(\log_3 x)'$$

$$= \log_3 x + x \times \frac{1}{x \ln 3} = \log_3 x + \frac{1}{\ln 3}$$

따라서 점 (3, 3)에서의 접선의 기울기는

$$f'(3) = \log_3 3 + \frac{1}{\ln 3} = 1 + \frac{1}{\ln 3}$$

$$14 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)+f(0)-f(-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h)-f(0)}{-h}$$

$$= f'(0) + f'(0) = 2f'(0)$$

이때  $f'(x) = e^x + 2^x \ln 2$ 이므로

$$f'(0) = 1 + \ln 2$$

따라서 구하는 극한값은

$$2f'(0) = 2 + 2 \ln 2$$

15 함수  $f(x)$ 가  $x=1$ 에서 미분가능하면

(i)  $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \ln x = \lim_{x \rightarrow 1-} (ax+b) = f(1)$$

$$\therefore a+b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii)  $f'(1)$ 이 존재하므로

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x>1) \\ a & (x<1) \end{cases} \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1-} a$$

$$\therefore a=1$$

이를  $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면  $b=-1$

$$\therefore a-b = 1 - (-1) = 2$$

## 04 삼각함수의 미분

54~64쪽

001 **답** 4, 5,  $-\frac{5}{3}$ ,  $\frac{5}{4}$ ,  $-\frac{4}{3}$

002 **답**  $\csc \theta = \frac{13}{5}$ ,  $\sec \theta = -\frac{13}{12}$ ,  $\cot \theta = -\frac{12}{5}$

$\overline{OP} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = 13$ 이므로

$\csc \theta = \frac{13}{5}$ ,  $\sec \theta = -\frac{13}{12}$ ,  $\cot \theta = -\frac{12}{5}$

003 **답**  $\csc \theta = -\frac{5}{4}$ ,  $\sec \theta = -\frac{5}{3}$ ,  $\cot \theta = \frac{3}{4}$

$\overline{OP} = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = 10$ 이므로

$\csc \theta = -\frac{5}{4}$ ,  $\sec \theta = -\frac{5}{3}$ ,  $\cot \theta = \frac{3}{4}$

004 **답**  $\csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $\sec 60^\circ = 2$ ,  $\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\csc 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = 2$

$\cot 60^\circ = \frac{1}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

005 **답**  $\csc 225^\circ = -\sqrt{2}$ ,  $\sec 225^\circ = -\sqrt{2}$ ,  $\cot 225^\circ = 1$

$\csc 225^\circ = \frac{1}{\sin 225^\circ} = \frac{1}{\sin(180^\circ + 45^\circ)}$   
 $= \frac{1}{-\sin 45^\circ} = -\sqrt{2}$

$\sec 225^\circ = \frac{1}{\cos 225^\circ} = \frac{1}{\cos(180^\circ + 45^\circ)}$   
 $= \frac{1}{-\cos 45^\circ} = -\sqrt{2}$

$\cot 225^\circ = \frac{1}{\tan 225^\circ} = \frac{1}{\tan(180^\circ + 45^\circ)}$   
 $= \frac{1}{\tan 45^\circ} = 1$

006 **답**  $\csc \frac{\pi}{6} = 2$ ,  $\sec \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $\cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

$\csc \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2$

$\sec \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\cot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}$

007 **답**  $\csc \frac{4}{3}\pi = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $\sec \frac{4}{3}\pi = -2$ ,  $\cot \frac{4}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\csc \frac{4}{3}\pi = \frac{1}{\sin \frac{4}{3}\pi} = \frac{1}{\sin(\pi + \frac{\pi}{3})}$   
 $= \frac{1}{-\sin \frac{\pi}{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\sec \frac{4}{3}\pi = \frac{1}{\cos \frac{4}{3}\pi} = \frac{1}{\cos(\pi + \frac{\pi}{3})}$   
 $= \frac{1}{-\cos \frac{\pi}{3}} = -2$

$\cot \frac{4}{3}\pi = \frac{1}{\tan \frac{4}{3}\pi} = \frac{1}{\tan(\pi + \frac{\pi}{3})}$   
 $= \frac{1}{\tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

008 **답** 1, 1, 1,  $\frac{9}{16}$ ,  $>$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\tan \theta$ ,  $\frac{4}{3}$

009 **답**  $\frac{12}{5}$

$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$ 이므로

$\cot^2 \theta = \csc^2 \theta - 1 = \left(-\frac{13}{12}\right)^2 - 1 = \frac{25}{144}$

이때  $\theta$ 가 제3사분면의 각이므로  $\cot \theta > 0$

$\therefore \cot \theta = \frac{5}{12}$

$\therefore \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} = \frac{12}{5}$

010 **답**  $\frac{3}{5}$

$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$ 이므로

$\csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta = 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

이때  $\theta$ 가 제2사분면의 각이므로  $\csc \theta > 0$

$\therefore \csc \theta = \frac{5}{3}$

$\therefore \sin \theta = \frac{1}{\csc \theta} = \frac{3}{5}$

011 **답**  $-\frac{12}{5}$

$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ 이고,  $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{13}{5}$ 이므로

$\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1 = \left(\frac{13}{5}\right)^2 - 1 = \frac{144}{25}$

이때  $\theta$ 가 제4사분면의 각이므로  $\cot \theta < 0$

$\therefore \cot \theta = -\frac{12}{5}$

012 **답**  $-2 \cot \theta$

$\frac{1}{\cot \theta - \csc \theta} + \frac{1}{\cot \theta + \csc \theta}$   
 $= \frac{\cot \theta + \csc \theta + \cot \theta - \csc \theta}{(\cot \theta - \csc \theta)(\cot \theta + \csc \theta)}$   
 $= \frac{2 \cot \theta}{\cot^2 \theta - \csc^2 \theta} = -2 \cot \theta$

013 답  $-2 \csc \theta$

$$\begin{aligned} & \frac{\tan \theta}{1 - \sec \theta} - \frac{\tan \theta}{1 + \sec \theta} \\ &= \frac{\tan \theta(1 + \sec \theta) - \tan \theta(1 - \sec \theta)}{(1 - \sec \theta)(1 + \sec \theta)} \\ &= \frac{\tan \theta + \tan \theta \sec \theta - \tan \theta + \tan \theta \sec \theta}{1 - \sec^2 \theta} \\ &= \frac{2 \tan \theta \sec \theta}{-\tan^2 \theta} = -\frac{2 \sec \theta}{\tan \theta} \\ &= -2 \times \frac{1}{\cos \theta} \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -\frac{2}{\sin \theta} = -2 \csc \theta \end{aligned}$$

014 답  $2 \sec \theta$

$$\begin{aligned} & \frac{\cot \theta}{1 + \csc \theta} + \frac{1 + \csc \theta}{\cot \theta} \\ &= \frac{\cot^2 \theta + (1 + \csc \theta)^2}{(1 + \csc \theta) \cot \theta} = \frac{\cot^2 \theta + 1 + 2 \csc \theta + \csc^2 \theta}{(1 + \csc \theta) \cot \theta} \\ &= \frac{\csc^2 \theta + 2 \csc \theta + \csc^2 \theta}{(1 + \csc \theta) \cot \theta} = \frac{2 \csc \theta (\csc \theta + 1)}{(1 + \csc \theta) \cot \theta} \\ &= \frac{2 \csc \theta}{\cot \theta} = 2 \times \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{2}{\cos \theta} = 2 \sec \theta \end{aligned}$$

015 답 4

$$\begin{aligned} \tan \theta + \cot \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \end{aligned}$$

016 답  $2\sqrt{6}$

$$\begin{aligned} \csc \theta + \sec \theta &= \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\frac{1}{4}} \\ &= 4(\sin \theta + \cos \theta) \quad \dots \textcircled{1} \\ (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

이때  $\theta$ 가 제1사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$\csc \theta + \sec \theta = 4 \times \frac{\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$$

017 답 16

$$\begin{aligned} (1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta) &= \sec^2 \theta \csc^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{1}{(\sin \theta \cos \theta)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 16 \end{aligned}$$

018 답  $60^\circ, \cos 60^\circ, \sin 60^\circ, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$

019 답  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \cos(30^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

020 답  $2 - \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \tan 15^\circ &= \tan(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

021 답  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{12} &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

022 답  $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$$\begin{aligned} \cos \frac{7}{12} \pi &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

023 답  $2 + \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \tan \frac{5}{12} \pi &= \tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \times 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

024 답  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned} \sin 25^\circ \cos 20^\circ + \cos 25^\circ \sin 20^\circ \\ &= \sin(25^\circ + 20^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

025 답  $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ \cos 45^\circ - \cos 75^\circ \sin 45^\circ \\ &= \sin(75^\circ - 45^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

026 답 -1

$$\begin{aligned}\cos 100^\circ \cos 80^\circ - \sin 100^\circ \sin 80^\circ \\ = \cos(100^\circ + 80^\circ) = \cos 180^\circ = -1\end{aligned}$$

027 답  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned}\cos 55^\circ \cos 10^\circ + \sin 55^\circ \sin 10^\circ \\ = \cos(55^\circ - 10^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

028 답 1

$$\frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ} = \tan(20^\circ + 25^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

029 답  $\sqrt{3}$

$$\frac{\tan 70^\circ - \tan 10^\circ}{1 + \tan 70^\circ \tan 10^\circ} = \tan(70^\circ - 10^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

030 답  $>, <, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{4}{5}, \cos \beta, \cos \alpha, -\frac{4}{5}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}-4}{10}$

031 답  $\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3-4\sqrt{3}}{10}\end{aligned}$$

032 답  $\frac{25\sqrt{3}-48}{39}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned}\therefore \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3}{4}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(-\frac{3}{4}\right)} \\ &= \frac{\frac{4\sqrt{3}-9}{12}}{\frac{3(4+\sqrt{3})}{12}} = \frac{25\sqrt{3}-48}{39}\end{aligned}$$

033 답  $-\frac{16}{65}$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ 에서  $\cos \alpha > 0, \sin \beta > 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} - \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} = -\frac{16}{65}\end{aligned}$$

034 답  $\frac{33}{65}$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{12}{13} \times \frac{4}{5} - \frac{5}{13} \times \frac{3}{5} = \frac{33}{65}\end{aligned}$$

035 답  $-\frac{16}{63}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{5}{12} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{5}{12} \times \frac{3}{4}} = -\frac{16}{63}$$

036 답  $-3, 2, -, -, -, +, 1, \frac{\pi}{4}$

037 답  $\frac{\pi}{4}$

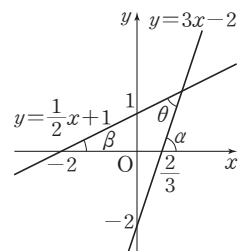
두 직선  $y=3x-2, y=\frac{1}{2}x+1$ 이  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각  $\alpha, \beta$ 라고 하면

$$\tan \alpha = 3, \tan \beta = \frac{1}{2}$$

두 직선이 이루는 예각의 크기를  $\theta$ 라고 하면  $\theta = \alpha - \beta$ 이므로

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \times \frac{1}{2}} = 1\end{aligned}$$

따라서 구하는 예각의 크기는  $\frac{\pi}{4}$ 이다.



038 답  $\frac{\pi}{3}$

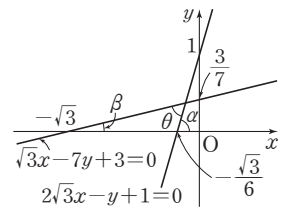
두 직선  $2\sqrt{3}x - y + 1 = 0, \sqrt{3}x - 7y + 3 = 0$ , 즉  $y = 2\sqrt{3}x + 1, y = \frac{\sqrt{3}}{7}x + \frac{3}{7}$ 이  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각  $\alpha, \beta$ 라고 하면

$$\tan \alpha = 2\sqrt{3}, \tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{7}$$

두 직선이 이루는 예각의 크기를  $\theta$ 라고 하면  $\theta = \alpha - \beta$ 이므로

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{7}}{1 + 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{7}} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

따라서 구하는 예각의 크기는  $\frac{\pi}{3}$ 이다.



039 답  $<, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, \cos \alpha, -\frac{4}{5}, -\frac{24}{25}$

040 답  $\frac{7}{25}$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

041 답  $-\frac{24}{7}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4} \text{ 이므로}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{24}{7}$$

042 답  $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ 에서 } \sin \alpha > 0 \text{ 이므로}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

043 답  $-\frac{7}{9}$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = -\frac{7}{9}$$

044 답  $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{1 - (2\sqrt{2})^2} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

045 답  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

046 답  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos x = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

047 답  $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} (\tan x + \sin x) &= \tan \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin \left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\tan \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \\ &= -\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

048 답  $\frac{\sqrt{3}}{6}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\tan x} = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

049 답  $\cos^2 x, 1 - \cos x, 1 + \cos x, 2$

050 답 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}{1 - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \sin x) = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

051 답 -2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} 2 \cos x = 2 \times (-1) = -2 \end{aligned}$$

052 답 1

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} = 1$$

053 답  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1 - \tan x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x (\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

054 답  $3x, 1, 3$

055 답  $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

056 답  $\frac{2}{5}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{5} = 1 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

057 답  $\frac{1}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} \times \frac{1}{4} = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

058 답 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \times 1 = 1$$

059 답  $\frac{5}{3}$ 

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 5x}{5x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{5}{3} \right) \\ &= 1 \times 1 \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

060 답  $\frac{1}{4}$ 

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 2x}{4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x}{4x} - \frac{\sin 2x}{4x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{3}{4} - \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{1}{2} \right) \\ &= 1 \times \frac{3}{4} - 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

## 061 답 1

$x \rightarrow 0$ 일 때  $3x^2 + x \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x^2 + x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(3x^2 + x)}{3x^2 + x} \times \frac{3x^2 + x}{x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(3x^2 + x)}{3x^2 + x} \times (3x + 1) \right\} \\ &= 1 \times 1 = 1\end{aligned}$$

062 답  $5x, 1, 5$ 063 답  $\frac{4}{3}$ 

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{4x} \times \frac{4}{3} = 1 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

## 064 답 5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x}{\tan 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\tan 2x} \times 5 = 1 \times 5 = 5$$

065 답  $\frac{1}{4}$ 

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\tan 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan x}{x} \times \frac{4x}{\tan 4x} \times \frac{1}{4} \right) \\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

066 답  $\frac{2}{5}$ 

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan 5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{5x}{\tan 5x} \times \frac{2}{5} \right) \\ &= 1 \times 1 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

067 답  $\frac{1}{3}$ 

$x \rightarrow 0$ 일 때  $\tan x \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\tan x)}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan(\tan x)}{\tan x} \times \frac{\tan x}{x} \times \frac{1}{3} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

068 답  $1 + \cos x, 1 + \cos x, \cos^2 x, \sin^2 x, \sin x, 0, 0$ 

## 069 답 2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)}{x^2(1 + \cos 2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x^2(1 + \cos 2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2(1 + \cos 2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left( \frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 \times 4 \times \frac{1}{1 + \cos 2x} \right\} \\ &= 1^2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 2\end{aligned}$$

070 답  $\frac{1}{2}$ 

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x \sin x (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{1 + \cos x} \right) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

## 071 답 2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x (1 + \cos x)}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left( \frac{x}{\sin x} \right)^2 \times \frac{\tan x}{x} \times (1 + \cos x) \right\} \\ &= 1^2 \times 1 \times 2 = 2\end{aligned}$$

072 답  $\pi, 0, \pi, \sin t, 1$ 

## 073 답 1

$\frac{\pi}{2} - x = t$ 로 놓으면  $x = \frac{\pi}{2} - t$ 이고,  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때  $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

## 074 답 1

$x - \pi = t$ 로 놓으면  $x = \pi + t$ 이고,  $x \rightarrow \pi$ 일 때  $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\tan x}{x - \pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi + t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1$$

## 075 답 1

$\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면  $x = \frac{1}{t}$ 이고,  $x \rightarrow \infty$ 일 때  $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

076 답 0, 1, 1, 1,  $ax$ , 2, 2, 4, 4, 4

**077** 답  $a=2, b=0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (ax+b) = 0 \quad \therefore b=0$$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \times a = 1 \times a = a$$

$$\therefore a=2$$

**078** 답  $a=1, b=0$

$\lim_{x \rightarrow 0} (1-\cos x) = 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (ax^2+b) = 0 \quad \therefore b=0$$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{ax^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{ax^2(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{ax^2(1+\cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{1+\cos x} \right\}$$

$$= 1^2 \times \frac{1}{a} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2a}$$

따라서  $\frac{1}{2a} = \frac{1}{2}$ 이므로  $a=1$

**079** 답  $y' = 2x - \sqrt{3} \sin x$

$$y' = (x^2)' + (\sqrt{3} \cos x)' = 2x - \sqrt{3} \sin x$$

**080** 답  $y' = -\cos x + 3 \sin x$

$$y' = (-\sin x)' - (3 \cos x)' = -\cos x + 3 \sin x$$

**081** 답  $y' = -5 \sin x - \frac{1}{x}$

$$y' = (5 \cos x)' - (\ln x)' = -5 \sin x - \frac{1}{x}$$

**082** 답  $y' = e^x (\sin x + \cos x)$

$$y' = (e^x)' \sin x + e^x (\sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$= e^x (\sin x + \cos x)$$

**083** 답  $y' = 2 \sin x \cos x$

$y = \sin^2 x = \sin x \times \sin x$ 이므로

$$y' = (\sin x)' \sin x + \sin x (\sin x)'$$

$$= \cos x \sin x + \sin x \cos x = 2 \sin x \cos x$$

**084** 답  $-2$

$$f'(x) = (2 \sin x)' + (\cos x)' = 2 \cos x - \sin x$$

$$\therefore f'(\pi) = 2 \cos \pi - \sin \pi = -2$$

**085** 답  $1$

$$f'(x) = (e^x)' - \left( \frac{1}{2} \cos x \right)' = e^x + \frac{1}{2} \sin x$$

$$\therefore f'(0) = e^0 + \frac{1}{2} \sin 0 = 1$$

**086** 답  $\frac{1}{2}$

$$f'(x) = (\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)'$$

$$= \cos x \cos x + \sin x (-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{6} - \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

**087** 답  $-\frac{\pi^2}{4}$

$$f'(x) = (x^2)' \cos x + x^2 (\cos x)' = 2x \cos x - x^2 \sin x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{4}$$

**088** 답  $-\ln \pi$

$$f'(x) = (\ln x)' \sin x + \ln x (\sin x)' = \frac{\sin x}{x} + \ln x \cos x$$

$$\therefore f'(\pi) = \frac{\sin \pi}{\pi} + \ln \pi \cos \pi = -\ln \pi$$

**089** 답  $f'(\pi), 2, \sin x, \sin \pi, -1, 2, -2$

**090** 답  $3\pi^2$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi-3h) - f(\pi)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi-3h) - f(\pi)}{-3h} \times (-3) = -3f'(\pi)$$

이때  $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$ 이므로

$$f'(\pi) = 2\pi \sin \pi + \pi^2 \cos \pi = -\pi^2$$

따라서 구하는 극한값은  $-3f'(\pi) = -3 \times (-\pi^2) = 3\pi^2$

**091** 답  $4$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{-h}$$

$$= f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

이때  $f'(x) = 2 \sin x + 2x \cos x$ 이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + \pi \cos \frac{\pi}{2} = 2$$

따라서 구하는 극한값은  $2f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times 2 = 4$

**092** 답  $1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

이때  $f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x)$ 이므로

$$f'(0) = e^0 (\cos 0 - \sin 0) = 1$$

따라서 구하는 극한값은  $f'(0) = 1$

**093** 답  $1, \cos x, \cos x, 1$

094 답  $a=0, b=1$ 

함수  $f(x)$ 가  $x=0$ 에서 미분가능하면

(i)  $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x^2 + ax + b) = f(0) \\ \therefore b=1$$

(ii)  $f'(0)$ 이 존재하므로

$$f'(x) = \begin{cases} -\sin x & (x > 0) \\ 4x + a & (x < 0) \end{cases} \text{에서} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\sin x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (4x + a) \\ \therefore a=0$$

095 답  $a=1, b=-1$ 

함수  $f(x)$ 가  $x=0$ 에서 미분가능하면

(i)  $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} a \sin x = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + b) = f(0) \\ \text{즉, } 1+b=0 \text{이므로 } b=-1$$

(ii)  $f'(0)$ 이 존재하므로

$$f'(x) = \begin{cases} a \cos x & (x > 0) \\ e^x & (x < 0) \end{cases} \text{에서} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} a \cos x = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \\ \therefore a=1$$

연산  
유형

최종 점검하기

65~67쪽

|                   |                           |      |      |      |                  |
|-------------------|---------------------------|------|------|------|------------------|
| 1 ①               | 2 ③                       | 3 ④  | 4 ⑤  | 5 ①  | 6 $-\frac{1}{3}$ |
| 7 $\frac{\pi}{4}$ | 8 $\frac{3\sqrt{7}+1}{8}$ | 9 ⑤  | 10 ⑤ | 11 ② |                  |
| 12 ②              | 13 ⑤                      | 14 ④ | 15 ② | 16 ③ | 17 12            |
| 18 ③              | 19 ⑤                      | 20 0 |      |      |                  |

1  $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$ 이고,  $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = -\frac{4}{3}$ 이므로

$$\csc^2 \theta = 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

이때  $\theta$ 가 제4사분면의 각이므로  $\csc \theta < 0$

$$\therefore \csc \theta = -\frac{5}{3}$$

$$2 \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta} + \frac{1}{\sec \theta + \tan \theta} \\ = \frac{\sec \theta + \tan \theta + \sec \theta - \tan \theta}{(\sec \theta - \tan \theta)(\sec \theta + \tan \theta)} \\ = \frac{2 \sec \theta}{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta} = 2 \sec \theta$$

3  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } \tan \theta + \cot \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{-\frac{4}{9}} = -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \csc \theta + \sec \theta &= \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} \\ &= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{4}{9}} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } (1 + \tan^2 \theta)(1 + \cot^2 \theta) \\ &= \sec^2 \theta \csc^2 \theta \\ &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{1}{(\sin \theta \cos \theta)^2} = \frac{1}{\left(-\frac{4}{9}\right)^2} = \frac{81}{16} \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

$$\begin{aligned} 4 \sin 125^\circ \cos 65^\circ - \cos 125^\circ \sin 65^\circ \\ &= \sin (125^\circ - 65^\circ) \\ &= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

5  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 에서  $\cos \alpha > 0, \sin \beta > 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin (\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{3}{5} \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{4}{5} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{-3 + 8\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

따라서  $a = -3, b = 8$ 이므로

$$a + b = 5$$

6  $\tan (\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = 1$ 이므로

$$\frac{\frac{1}{2} - \tan \beta}{1 + \frac{1}{2} \tan \beta} = 1, \frac{1}{2} - \tan \beta = 1 + \frac{1}{2} \tan \beta$$

$$\frac{3}{2} \tan \beta = -\frac{1}{2} \quad \therefore \tan \beta = -\frac{1}{3}$$

7 두 직선  $2x-y+1=0$ ,  $x-3y+2=0$ ,

즉  $y=2x+1$ ,  $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ 가  $x$ 축의 양의  
방향과 이루는 각의 크기를 각각  $\alpha$ ,  $\beta$ 라  
고 하면

$$\tan \alpha = 2, \tan \beta = \frac{1}{3}$$

두 직선이 이루는 예각의 크기를  $\theta$ 라고 하면  $\theta = \alpha - \beta$ 이므로

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + 2 \times \frac{1}{3}} = 1$$

따라서 구하는 예각의 크기는  $\frac{\pi}{4}$ 이다.

8  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서  $\cos \theta > 0$ 이므로

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin 2\theta - \cos 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta - (1 - 2 \sin^2 \theta) \\ &= 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{7}}{4} - \left\{ 1 - 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{3\sqrt{7} + 1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\tan^2 x}{\sec x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sec^2 x - 1}{\sec x - 1} = \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}{\sec x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2\pi} (\sec x + 1) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x + \sin 2x}{3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 4x}{3x} + \frac{\sin 2x}{3x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 4x}{4x} \times \frac{4}{3} + \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{3} \right) \\ &= 1 \times \frac{4}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = 2 \end{aligned}$$

$$11 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x}{10x} \times \frac{10}{a} = 1 \times \frac{10}{a} = \frac{10}{a}$$

따라서  $\frac{10}{a} = 5$ 이므로  $a = 2$

$$\begin{aligned} 12 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x^2 + x)}{3x^2 - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan(2x^2 + x)}{2x^2 + x} \times \frac{2x^2 + x}{3x^2 - x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan(2x^2 + x)}{2x^2 + x} \times \frac{2x + 1}{3x - 1} \right\} \\ &= 1 \times (-1) = -1 \end{aligned}$$

$$13 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 8x}{e^{4x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\tan 8x}{8x} \times \frac{4x}{e^{4x} - 1} \times 2 \right) = 1 \times 1 \times 2 = 2$$

$$\begin{aligned} 14 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 3x)(1 + \cos 3x)}{\sin^2 x (1 + \cos 3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{\sin^2 x (1 + \cos 3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x (1 + \cos 3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left( \frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 \times \left( \frac{x}{\sin x} \right)^2 \times \frac{9}{1 + \cos 3x} \right\} \\ &= 1^2 \times 1^2 \times \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

15  $x - 1 = t$ 로 놓으면  $x = 1 + t$ 이고,  $x \rightarrow 1$ 일 때  $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2}x}{x-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi}{2}(1+t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t \right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \frac{\pi}{2}t}{t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t} \times \frac{\pi}{2} \\ &= -1 \times \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

16  $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면  $x = \frac{1}{t}$ 이고,  $x \rightarrow \infty$ 일 때  $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1$$

17  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ 이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} (a - b \cos x) = 0, a - b = 0 \quad \therefore b = a \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

①을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - a \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{a}{1 + \cos x} \right\} = 1^2 \times \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

따라서  $\frac{a}{2} = 3$ 이므로  $a = 6$

이를 ①에 대입하면  $b = 6 \quad \therefore a + b = 12$

18  $f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$ 이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} \cos \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$19 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + 2h) - f(\pi - h)}{h}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + 2h) - f(\pi) + f(\pi) - f(\pi - h)}{h} \\ &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + 2h) - f(\pi)}{2h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi) - f(\pi - h)}{-h} \\ &= 2f'(\pi) + f'(\pi) = 3f'(\pi) \end{aligned}$$

이때  $f'(x) = -\sin x - \sqrt{2} \cos x$ 이므로

$$f'(\pi) = -\sin \pi - \sqrt{2} \cos \pi = \sqrt{2}$$

따라서 구하는 극한값은  $3f'(\pi) = 3\sqrt{2}$

20 함수  $f(x)$ 가  $x=0$ 에서 미분가능하면

(i)  $x=0$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} (e^x + ax + b) &= \lim_{x \rightarrow 0-} (\sin x + \cos x) = f(0) \\ 1 + b &= 1 \quad \therefore b = 0 \end{aligned}$$

(ii)  $f'(0)$ 이 존재하므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} e^x + a & (x > 0) \\ \cos x - \sin x & (x < 0) \end{cases} \text{에서} \\ \lim_{x \rightarrow 0+} (e^x + a) &= \lim_{x \rightarrow 0-} (\cos x - \sin x) \\ 1 + a &= 1 \quad \therefore a = 0 \end{aligned}$$

$\therefore a - b = 0$

## 05 여러 가지 미분법

70~79쪽

001 답  $y' = -\frac{1}{x^2}$

$$y' = -\frac{(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

002 답  $y' = -\frac{3}{x^4}$

$$y' = -\frac{(x^3)'}{(x^3)^2} = -\frac{3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$$

003 답  $y' = -\frac{2}{(2x+3)^2}$

$$y' = -\frac{(2x+3)'}{(2x+3)^2} = -\frac{2}{(2x+3)^2}$$

004 답  $y' = -\frac{3x^2}{(x^3-1)^2}$

$$y' = -\frac{(x^3-1)'}{(x^3-1)^2} = -\frac{3x^2}{(x^3-1)^2}$$

005 답  $y' = -\frac{2x+1}{(x^2+x+5)^2}$

$$y' = -\frac{(x^2+x+5)'}{(x^2+x+5)^2} = -\frac{2x+1}{(x^2+x+5)^2}$$

006 답  $y' = -\frac{11}{(3x+1)^2}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(4x+5)'(3x+1) - (4x+5)(3x+1)'}{(3x+1)^2} \\ &= \frac{4(3x+1) - (4x+5) \times 3}{(3x+1)^2} = -\frac{11}{(3x+1)^2} \end{aligned}$$

007 답  $y' = \frac{5x^2-2x-5}{(x^2+1)^2}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1-5x)'(x^2+1) - (1-5x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-5(x^2+1) - (1-5x) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{5x^2-2x-5}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

008 답  $y' = \frac{x^2-x+3}{(2x-1)^2}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2-3)'(4x-2) - (x^2-3)(4x-2)'}{(4x-2)^2} \\ &= \frac{2x(4x-2) - (x^2-3) \times 4}{(4x-2)^2} = \frac{x^2-x+3}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

009 답  $y' = \frac{-x^4+2x}{(x^3-x^2+1)^2}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2)'(x^3-x^2+1) - x^2(x^3-x^2+1)'}{(x^3-x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x(x^3-x^2+1) - x^2(3x^2-2x)}{(x^3-x^2+1)^2} = \frac{-x^4+2x}{(x^3-x^2+1)^2} \end{aligned}$$

010 답  $y' = \frac{2x^3+3x^2-5}{(x+1)^2}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^3-3x+2)'(x+1) - (x^3-3x+2)(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(3x^2-3)(x+1) - (x^3-3x+2)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^3+3x^2-5}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

011 답  $y' = -\frac{e^x}{(e^x-2)^2}$

$$y' = -\frac{(e^x-2)'}{(e^x-2)^2} = -\frac{e^x}{(e^x-2)^2}$$

012 답  $y' = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$

$$y' = -\frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$$

013 답  $y' = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(e^x-1)'(e^x+1) - (e^x-1)(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^x(e^x+1) - (e^x-1) \times e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

014 답  $y' = \frac{3^x(x \ln 3 + 4 \ln 3 - 1)}{(x+4)^2}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(3^x)'(x+4) - 3^x(x+4)'}{(x+4)^2} \\ &= \frac{3^x \ln 3 \times (x+4) - 3^x}{(x+4)^2} \\ &= \frac{3^x(x \ln 3 + 4 \ln 3 - 1)}{(x+4)^2} \end{aligned}$$

015 답  $y' = \frac{1}{\log_5 x} - \frac{1}{(\log_5 x)^2 \ln 5}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x)' \log_5 x - x(\log_5 x)'}{(\log_5 x)^2} \\ &= \frac{\log_5 x - x \times \frac{1}{x \ln 5}}{(\log_5 x)^2} \\ &= \frac{1}{\log_5 x} - \frac{1}{(\log_5 x)^2 \ln 5} \end{aligned}$$

016 답  $y' = -\frac{1}{1+\sin x}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\cos x)'(1+\sin x) - \cos x(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos x \cos x}{(1+\sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x - 1}{(1+\sin x)^2} \\ &= -\frac{1}{1+\sin x} \end{aligned}$$

017 답  $y' = -\frac{4}{x^5}$

$$y' = -4x^{-4-1} = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$$

018 답  $y' = -\frac{12}{x^7}$

$$y' = 2 \times (-6x^{-6-1}) = -12x^{-7} = -\frac{12}{x^7}$$

019 답  $y' = \frac{14}{x^3}$

$$y = -\frac{7}{x^2} = -7x^{-2} \circ | \text{므로}$$

$$y' = -7 \times (-2x^{-2-1}) = 14x^{-3} = \frac{14}{x^3}$$

020 답  $y' = -\frac{3}{x^4} + \frac{20}{x^6}$

$$y = \frac{x^2-4}{x^5} = \frac{x^2}{x^5} - \frac{4}{x^5} = x^{-3} - 4x^{-5} \circ | \text{므로}$$

$$y' = -3x^{-3-1} - 4 \times (-5x^{-5-1}) \\ = -3x^{-4} + 20x^{-6} = -\frac{3}{x^4} + \frac{20}{x^6}$$

021 답  $y' = 5 - \frac{2}{x^3}$

$$y = \frac{5x^4+x}{x^3} = \frac{5x^4}{x^3} + \frac{x}{x^3} = 5x + x^{-2} \circ | \text{므로}$$

$$y' = 5 - 2x^{-2-1} = 5 - 2x^{-3} \\ = 5 - \frac{2}{x^3}$$

022 답  $y' = 3x^2 + \frac{8}{x^5}$

$$y = \frac{x^7-3x^4-2}{x^4} = \frac{x^7}{x^4} - \frac{3x^4}{x^4} - \frac{2}{x^4} = x^3 - 3 - 2x^{-4} \circ | \text{므로}$$

$$y' = 3x^2 - 2 \times (-4x^{-4-1}) \\ = 3x^2 + 8x^{-5} = 3x^2 + \frac{8}{x^5}$$

023 답  $y' = 2 \sec^2 x - \csc^2 x$

$$y' = 2(\tan x)' + (\cot x)' \\ = 2 \sec^2 x - \csc^2 x$$

024 답  $y' = \sec x \tan x - \csc x \cot x$

$$y' = (\sec x)' + (\csc x)' \\ = \sec x \tan x - \csc x \cot x$$

025 답  $y' = 2x \tan x + x^2 \sec^2 x$

$$y' = (x^2)' \tan x + x^2 (\tan x)' \\ = 2x \tan x + x^2 \sec^2 x$$

026 답  $y' = \sec x \csc x (\tan x - \cot x)$

$$y' = (\sec x)' \csc x + \sec x (\csc x)' \\ = \sec x \tan x \csc x + \sec x (-\csc x \cot x) \\ = \sec x \csc x (\tan x - \cot x)$$

027 답  $y' = e^x (\cot x - \csc^2 x)$

$$y' = (e^x)' \cot x + e^x (\cot x)' \\ = e^x \cot x + e^x (-\csc^2 x) \\ = e^x (\cot x - \csc^2 x)$$

028 답  $y' = -\frac{2 \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$

$$y' = \frac{(1 - \tan x)'(1 + \tan x) - (1 - \tan x)(1 + \tan x)'}{(1 + \tan x)^2} \\ = \frac{-\sec^2 x(1 + \tan x) - (1 - \tan x) \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} \\ = -\frac{2 \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

029 답 0

$$f'(x) = (\sin x)' + (\tan x)' \\ = \cos x + \sec^2 x \\ \therefore f'(\pi) = -1 + 1 = 0$$

030 답 0

$$f'(x) = (x^2 - 1)' \sec x + (x^2 - 1)(\sec x)' \\ = 2x \sec x + (x^2 - 1) \sec x \tan x \\ = \sec x (2x + x^2 \tan x - \tan x) \\ \therefore f'(0) = 1 \times (0 + 0 - 0) = 0$$

031 답 14

$$f'(x) = (\sec x)' \tan x + \sec x (\tan x)' \\ = \sec x \tan x \tan x + \sec x \sec^2 x \\ = \sec x (\tan^2 x + \sec^2 x) \\ \therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2(3 + 4) = 14$$

032 답  $-3\sqrt{2}$

$$f'(x) = (\cot x)' \csc x + \cot x (\csc x)' \\ = -\csc^2 x \csc x - \cot x \csc x \cot x \\ = -\csc x (\csc^2 x + \cot^2 x) \\ \therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}(2 + 1) = -3\sqrt{2}$$

033 답  $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$

$$f'(x) = \frac{(\csc x)'(1 + \csc x) - \csc x (1 + \csc x)'}{(1 + \csc x)^2} \\ = \frac{-\csc x \cot x (1 + \csc x) - \csc x (-\csc x \cot x)}{(1 + \csc x)^2} \\ = -\frac{\csc x \cot x}{(1 + \csc x)^2} \\ \therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{2 \times \sqrt{3}}{(1 + 2)^2} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

034 ㉮  $4, 3, 4, 3, 8(2x+3)^3, 4u^3, 4u^3, 8(2x+3)^3$

035 ㉮  $y' = 10x(x^2+4)^4$

$$\begin{aligned} y' &= 5(x^2+4)^4(x^2+4)' \\ &= 5(x^2+4)^4 \times 2x \\ &= 10x(x^2+4)^4 \end{aligned}$$

036 ㉮  $y' = 6(x^3-5x)^5(3x^2-5)$

$$\begin{aligned} y' &= 6(x^3-5x)^5(x^3-5x)' \\ &= 6(x^3-5x)^5(3x^2-5) \end{aligned}$$

037 ㉮  $y' = 5(x^2-3x+2)^4(2x-3)$

$$\begin{aligned} y' &= 5(x^2-3x+2)^4(x^2-3x+2)' \\ &= 5(x^2-3x+2)^4(2x-3) \end{aligned}$$

038 ㉮  $y' = 2(3x-1)^3(9x^2-x+6)$

$$\begin{aligned} y' &= (x^2+1)'(3x-1)^4 + (x^2+1)\{(3x-1)^4\}' \\ &= 2x(3x-1)^4 + (x^2+1) \times 4(3x-1)^3 \times 3 \\ &= 2(3x-1)^3\{x(3x-1) + 6(x^2+1)\} \\ &= 2(3x-1)^3(9x^2-x+6) \end{aligned}$$

039 ㉮  $y' = -\frac{20x^3}{(x^4+1)^6}$

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{(x^4+1)^5} = (x^4+1)^{-5} \text{이므로} \\ y' &= -5(x^4+1)^{-6}(x^4+1)' \\ &= -5(x^4+1)^{-6} \times 4x^3 \\ &= -\frac{20x^3}{(x^4+1)^6} \end{aligned}$$

040 ㉮  $y' = 7\left(x - \frac{2}{x}\right)^6 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)$

$$\begin{aligned} y' &= 7\left(x - \frac{2}{x}\right)^6 \left(x - \frac{2}{x}\right)' \\ &= 7\left(x - \frac{2}{x}\right)^6 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) \end{aligned}$$

041 ㉮  $3x-1, 3e^{3x-1}$

042 ㉮  $y' = (2x+1)e^{x^2+x}$

$$y' = e^{x^2+x}(x^2+x)' = (2x+1)e^{x^2+x}$$

043 ㉮  $y' = 2^{2x-2} \ln 2$

$$y' = 2^{2x-3} \ln 2(2x-3)' = 2^{2x-2} \ln 2$$

044 ㉮  $y' = 3^{\sin x} \cos x \ln 3$

$$y' = 3^{\sin x} \ln 3(\sin x)' = 3^{\sin x} \cos x \ln 3$$

045 ㉮  $y' = e^{2x+1}(2 \cos x - \sin x)$

$$\begin{aligned} y' &= (e^{2x+1})' \cos x + e^{2x+1}(\cos x)' \\ &= e^{2x+1}(2x+1)' \cos x - e^{2x+1} \sin x \\ &= 2e^{2x+1} \cos x - e^{2x+1} \sin x \\ &= e^{2x+1}(2 \cos x - \sin x) \end{aligned}$$

046 ㉮  $5x+3, 5 \cos(5x+3)$

047 ㉮  $y' = 2 \sec^2(2x-3)$

$$\begin{aligned} y' &= \sec^2(2x-3)(2x-3)' \\ &= 2 \sec^2(2x-3) \end{aligned}$$

048 ㉮  $y' = -\sec^2 x \csc^2(\tan x)$

$$\begin{aligned} y' &= -\csc^2(\tan x)(\tan x)' \\ &= -\sec^2 x \csc^2(\tan x) \end{aligned}$$

049 ㉮  $y' = -3 \sin x \cos^2 x$

$$\begin{aligned} y &= \cos^3 x = (\cos x)^3 \text{이므로} \\ y' &= 3 \cos^2 x (\cos x)' \\ &= -3 \sin x \cos^2 x \end{aligned}$$

050 ㉮  $y' = 6 \sec^2 3x \tan 3x$

$$\begin{aligned} y &= \sec^2 3x = (\sec 3x)^2 \text{이므로} \\ y' &= 2 \sec 3x (\sec 3x)' \\ &= 2 \sec 3x \{\sec 3x \tan 3x (3x)'\} \\ &= 6 \sec^2 3x \tan 3x \end{aligned}$$

051 ㉮  $y' = \frac{2}{2x+1}$

$$y' = \frac{(2x+1)'}{2x+1} = \frac{2}{2x+1}$$

052 ㉮  $y' = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$

$$y' = \frac{(x^2+3x+1)'}{x^2+3x+1} = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$$

053 ㉮  $y' = -\tan x$

$$y' = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

054 ㉮  $y' = \frac{3}{(3x+2) \ln 5}$

$$y' = \frac{(3x+2)'}{(3x+2) \ln 5} = \frac{3}{(3x+2) \ln 5}$$

055 ㉮  $y' = \frac{e^x}{(e^x-1) \ln 3}$

$$y' = \frac{(e^x-1)'}{(e^x-1) \ln 3} = \frac{e^x}{(e^x-1) \ln 3}$$

056 답  $y' = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x}$

$y = \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$  이므로

$y' = \frac{4}{3} x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x}$

057 답  $y' = \pi x^{\pi-1}$

$y' = (x^\pi)' = \pi x^{\pi-1}$

058 답  $y' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+2}}$

$y = \sqrt{x^2-x+2} = (x^2-x+2)^{\frac{1}{2}}$  이므로

$y' = \frac{1}{2} (x^2-x+2)^{\frac{1}{2}-1} (x^2-x+2)'$

$= \frac{1}{2} (x^2-x+2)^{-\frac{1}{2}} \times (2x-1)$

$= \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+2}}$

059 답  $y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$

$y = \sqrt{1+\sin x} = (1+\sin x)^{\frac{1}{2}}$  이므로

$y' = \frac{1}{2} (1+\sin x)^{\frac{1}{2}-1} (1+\sin x)'$

$= \frac{1}{2} (1+\sin x)^{-\frac{1}{2}} \times \cos x$

$= \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$

060 답  $y' = -\frac{3}{2(3x-1)\sqrt{3x-1}}$

$y = \frac{1}{\sqrt{3x-1}} = (3x-1)^{-\frac{1}{2}}$  이므로

$y' = -\frac{1}{2} (3x-1)^{-\frac{1}{2}-1} (3x-1)'$

$= -\frac{1}{2} (3x-1)^{-\frac{3}{2}} \times 3$

$= -\frac{3}{2(3x-1)\sqrt{3x-1}}$

061 답 2, 6t, 6t, 2, 3t

062 답  $\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2+1}{4}$

$\frac{dx}{dt} = 4, \frac{dy}{dt} = 3t^2+1$  이므로

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2+1}{4}$

063 답  $\frac{dy}{dx} = -6t\sqrt{t}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{t}}, \frac{dy}{dt} = -6t$  이므로

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-6t}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = -6t\sqrt{t}$

064 답  $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+t)^2}{2(3+t)^2}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{-(1+t)-(1-t)}{(1+t)^2} = -\frac{2}{(1+t)^2}, \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{(3+t)^2}$  이므로

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{(3+t)^2}}{-\frac{2}{(1+t)^2}} = \frac{(1+t)^2}{2(3+t)^2}$

065 답  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$

$\frac{dx}{dt} = e^t + e^{-t}, \frac{dy}{dt} = e^t - e^{-t}$  이므로

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$

066 답  $\frac{dy}{dx} = \cot t$

$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \frac{dy}{dt} = -\cos t$  이므로

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\cos t}{-\sin t} = \cot t$

067 답  $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \sin t$

$\frac{dx}{dt} = 2\sec^2 t, \frac{dy}{dt} = 3\sec t \tan t$  이므로

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\sec t \tan t}{2\sec^2 t} = \frac{3\tan t}{2\sec t} = \frac{3}{2} \sin t$

068 답  $-\frac{x}{y}$

069 답  $\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{5y}$  (단,  $y \neq 0$ )

$3x^2 - 5y^2 = 10$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$6x - 10y \frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x}{5y}$  (단,  $y \neq 0$ )

070 답  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y}{x+2}$  (단,  $x \neq -2$ )

$xy = e^x - 2y$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$y + x \frac{dy}{dx} = e^x - 2 \frac{dy}{dx}$

$(x+2) \frac{dy}{dx} = e^x - y$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y}{x+2}$  (단,  $x \neq -2$ )

071 답  $\frac{dy}{dx} = -2xy$

$\ln |y| + x^2 = 1$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} + 2x = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -2xy$

072 답  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y+1}{x+\sin y}$  (단,  $x+\sin y \neq 0$ )

$x - \cos y + xy = 3$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$1 + \sin y \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x + \sin y) \frac{dy}{dx} = -y - 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y+1}{x+\sin y} \text{ (단, } x+\sin y \neq 0 \text{)}$$

073 답  $3y^2, 3y^2, \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

074 답  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}}$  (단,  $x \neq 2$ )

$y = \sqrt[4]{x-2}$ 의 양변을 네제곱하면  $y^4 = x-2$

즉,  $x = y^4 + 2$ 이므로 양변을  $y$ 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = 4y^3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{4y^3} = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}} \text{ (단, } x \neq 2 \text{)}$$

075 답  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{9y^2+2}$

$x = 3y^3 + 2y + 1$ 의 양변을  $y$ 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = 9y^2 + 2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{9y^2+2}$$

076 답  $\frac{dy}{dx} = -\frac{(y^2-1)^2}{y^2+1}$

$x = \frac{y}{y^2-1}$ 의 양변을  $y$ 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2-1-y \times 2y}{(y^2-1)^2} = -\frac{y^2+1}{(y^2-1)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{(y^2-1)^2}{y^2+1}$$

077 답  $\frac{dy}{dx} = -\csc y$

$x = \cos y$ 의 양변을  $y$ 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{1}{\sin y} = -\csc y$$

078 답 3, 3, 1, 1, 1, 3, 1,  $\frac{1}{5}$

079 답 4

$g(2) = a$ 라고 하면  $f(a) = 2$

$$\sqrt{a} = 2 \quad \therefore a = 4$$

따라서  $g(2) = 4$ 이고,  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 이므로

$$g'(2) = \frac{1}{f'(g(2))} = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

080 답  $\frac{1}{2}$

$g(1) = a$ 라고 하면  $f(a) = 1$

$$\tan a = 1 \quad \therefore a = \frac{\pi}{4} \left( \because -\frac{\pi}{2} \leq a < \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서  $g(1) = \frac{\pi}{4}$ 이고,  $f'(x) = \sec^2 x$ 이므로

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sec^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

081 답  $y'' = 12x + 2$

$y' = 6x^2 + 2x$ 이므로  $y'' = 12x + 2$

082 답  $y'' = 108(3x-1)^2$

$y' = 4(3x-1)^3(3x-1)' = 12(3x-1)^3$ 이므로

$$y'' = 12 \times 3(3x-1)^2(3x-1)' = 108(3x-1)^2$$

083 답  $y'' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$

$y' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ 이므로

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{2(x^2+1)^2 - 2x \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

084 답  $y'' = -\frac{1}{4(x+1)\sqrt{x+1}}$

$y' = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}$ 이므로

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-\frac{3}{2}}(x+1)' \\ &= -\frac{1}{4(x+1)\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

085 답  $y'' = 4e^{2x}$

$y' = e^{2x}(2x)' = 2e^{2x}$ 이므로  $y'' = 2e^{2x}(2x)' = 4e^{2x}$

086 답  $y'' = -\frac{1}{x^2}$

$$y' = \frac{4}{4x} = \frac{1}{x} \text{이므로 } y'' = -\frac{1}{x^2}$$

087 답  $y'' = -25 \sin 5x$

$y' = \cos 5x(5x)' = 5 \cos 5x$ 이므로

$$y'' = 5(-\sin 5x)(5x)' = -25 \sin 5x$$

088 답  $y''=2\ln x+3$

$$y'=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=2x\ln x+x\circlearrowright\text{므로}$$

$$y''=2\ln x+2x\times\frac{1}{x}+1=2\ln x+3$$

089 답  $y''=2\cos x-x\sin x$

$$y'=\sin x+x\cos x\circlearrowright\text{므로}$$

$$y''=\cos x+\cos x-x\sin x=2\cos x-x\sin x$$

090 답  $y''=-2e^x\sin x$

$$y'=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)\circlearrowright\text{므로}$$

$$y''=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)=-2e^x\sin x$$

연산  
유형

최종 점검하기

80~81쪽

- |      |                 |                 |      |                  |      |
|------|-----------------|-----------------|------|------------------|------|
| 1 ③  | 2 ②             | 3 ②             | 4 ④  | 5 15             | 6 2  |
| 7 ⑤  | 8 $\frac{3}{2}$ | 9 $\frac{4}{9}$ | 10 ③ | 11 $\frac{5}{6}$ | 12 ① |
| 13 ① | 14 ④            |                 |      |                  |      |

$$1 \quad f'(x)=-\frac{(x^2+3x-1)'}{(x^2+3x-1)^2}=-\frac{2x+3}{(x^2+3x-1)^2}$$

$$\therefore f'(-1)=-\frac{-2+3}{(1-3-1)^2}=-\frac{1}{9}$$

$$2 \quad f'(x)=\frac{-\sin x(1-\cos x)-(1+\cos x)\sin x}{(1-\cos x)^2}$$

$$=-\frac{2\sin x}{(1-\cos x)^2}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2\sin\frac{\pi}{3}}{\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)^2}=-\frac{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=-4\sqrt{3}$$

$$3 \quad f(x)=\frac{2x^4-4x^2+3}{x^2}=2x^2-4+3x^{-2}\circlearrowright\text{므로}$$

$$f'(x)=4x+3\times(-2x^{-3})=4x-\frac{6}{x^3}$$

$$\therefore f'(1)+f'(2)=(4-6)+\left(8-\frac{3}{4}\right)=\frac{21}{4}$$

$$4 \quad f'(x)=-\csc x\cot x+\sec^2 x\circlearrowright\text{므로}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\csc\frac{\pi}{4}\cot\frac{\pi}{4}+\sec^2\frac{\pi}{4}$$

$$=-\sqrt{2}\times 1+(\sqrt{2})^2=-\sqrt{2}+2$$

따라서  $a=-1$ ,  $b=2$ 이므로  $a+b=1$

$$5 \quad y'=3(x-2)^2(x-2)'(2x+1)'$$

$$+ (x-2)^3\times 2(2x+1)(2x+1)'$$

$$=3(x-2)^2(2x+1)^2+4(x-2)^3(2x+1)$$

따라서  $x=1$ 에서의 미분계수는

$$3(1-2)^2(2+1)^2+4(1-2)^3(2+1)=15$$

$$6 \quad f'(x)=e^{2x}(2x)'+e^{x^2}(x^2)'=2e^{2x}+2xe^{x^2}=2(e^{2x}+xe^{x^2})$$

$$\therefore f'(0)=2(1+0\times 1)=2$$

$$7 \quad f'(x)=5\cos 2x(2x)'=10\cos 2x$$

따라서 점  $(\pi, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\therefore f'(\pi)=10\cos 2\pi=10$$

$$8 \quad y'=\frac{(x^2-x)'}{x^2-x}=\frac{2x-1}{x^2-x}$$

따라서  $x=2$ 에서의 미분계수는

$$\frac{4-1}{4-2}=\frac{3}{2}$$

$$9 \quad f(x)=\sqrt[3]{2x^2+9}=(2x^2+9)^{\frac{1}{3}}\circlearrowright\text{므로}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}(2x^2+9)^{-\frac{2}{3}}(2x^2+9)'=\frac{4x}{3\sqrt[3]{(2x^2+9)^2}}$$

$$\therefore f'(3)=\frac{12}{3\sqrt[3]{27^2}}=\frac{4}{\sqrt[3]{9^3}}=\frac{4}{9}$$

$$10 \quad \frac{dx}{dt}=1, \frac{dy}{dt}=3t^2\circlearrowright\text{므로}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=3t^2$$

따라서  $t=2$ 일 때,  $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$3\times 2^2=12$$

$$11 \quad x^4+x-2y^3=0\text{의 양변을 }x\text{에 대하여 미분하면}$$

$$4x^3+1-6y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{4x^3+1}{6y^2} \quad (\text{단, } y\neq 0)$$

따라서 점  $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{5}{6}$$

$$12 \quad x=\sqrt{y^2+4}\text{의 양변을 }y\text{에 대하여 미분하면}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{2\sqrt{y^2+4}}=\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{\sqrt{y^2+4}}{y}$$

$$13 \quad g(6)=a\text{라고 하면 }f(a)=6$$

$$2a^3+a+3=6, (a-1)(2a^2+2a+3)=0$$

$$\therefore a=1 \quad (\because 2a^2+2a+3>0)$$

따라서  $g(6)=1$ 이고,  $f'(x)=6x^2+1$ 이므로

$$g'(6)=\frac{1}{f'(g(6))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{7}$$

$$14 \quad f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x\circlearrowright\text{므로}$$

$$f''(x)=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$$

$$\therefore f''(1)=(2+1)e=3e$$

## 06 도함수의 활용(1)

84~91쪽

001 ④  $\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}x+1$

002 ④  $y=-x-1$

$f(x)=\frac{1}{x+3}$ 이라고 하면  $f'(x)=-\frac{1}{(x+3)^2}$

점  $(-2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=-\frac{1}{(-2+3)^2}=-1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=-(x+2)$

$\therefore y=-x-1$

003 ④  $y=\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}$

$f(x)=e^{x-1}$ 이라고 하면  $f'(x)=e^{x-1}$

점  $(0, \frac{1}{e})$ 에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=e^{-1}=\frac{1}{e}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}x$

$\therefore y=\frac{1}{e}x+\frac{1}{e}$

004 ④  $y=\frac{1}{e}x$

$f(x)=\ln x$ 라고 하면  $f'(x)=\frac{1}{x}$

점  $(e, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$f'(e)=\frac{1}{e}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$

$\therefore y=\frac{1}{e}x$

005 ④  $y=-x+\frac{\pi}{2}$

$f(x)=\cos x$ 라고 하면  $f'(x)=-\sin x$

점  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$f'(\frac{\pi}{2})=-\sin \frac{\pi}{2}=-1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-(x-\frac{\pi}{2})$

$\therefore y=-x+\frac{\pi}{2}$

006 ④  $\frac{1}{x+3}, \frac{1}{a+3}, 1, 1, \ln 4, \ln 4, 1, \frac{1}{4}x-\frac{1}{4}+\ln 4$

007 ④  $y=2x+\frac{5}{4}$

$f(x)=\sqrt{2x+1}$ 이라고 하면

$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

접점의 좌표를  $(a, \sqrt{2a+1})$ 이라고 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(a)=2$ 에서

$\frac{1}{\sqrt{2a+1}}=2, \frac{1}{2a+1}=4 \quad \therefore a=-\frac{3}{8}$

따라서 접점의 좌표는  $(-\frac{3}{8}, \frac{1}{2})$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{2}=2(x+\frac{3}{8})$

$\therefore y=2x+\frac{5}{4}$

008 ④  $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ 이라고 하면

$f'(x)=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$

접점의 좌표를  $(a, \frac{a-1}{a+1})$ 이라고 하면 접선의 기울기가  $\frac{1}{2}$ 이므로

$f'(a)=\frac{1}{2}$ 에서

$\frac{2}{(a+1)^2}=\frac{1}{2}, (a+1)^2=4$

$a+1=\pm 2 \quad \therefore a=1 (\because a>-1)$

따라서 접점의 좌표는  $(1, 0)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}(x-1)$

$\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

009 ④  $y=-x+1$

$f(x)=e^{-x}$ 이라고 하면  $f'(x)=-e^{-x}$

접점의 좌표를  $(a, e^{-a})$ 이라고 하면 접선의 기울기가  $-1$ 이므로

$f'(a)=-1$ 에서

$-e^{-a}=-1 \quad \therefore a=0$

따라서 접점의 좌표는  $(0, 1)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=-x$

$\therefore y=-x+1$

010 ④  $y=x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(x)=\sin 2x$ 라고 하면  $f'(x)=2\cos 2x$

접점의 좌표를  $(a, \sin 2a)$ 라고 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(a)=1$ 에서

$2\cos 2a=1, \cos 2a=\frac{1}{2} \quad \therefore a=\frac{\pi}{6} (\because 0\leq x\leq \frac{\pi}{2})$

따라서 접점의 좌표는  $(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=x-\frac{\pi}{6}$

$\therefore y=x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

011 답  $e^x, e^a, e^a, e^a, 1, ex$

012 답  $y = -x + 2$

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ 이라고 하면 } f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

접점의 좌표를  $(a, \frac{1}{a})$  이라고 하면 접선의 기울기는  $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$

이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 직선이 점  $(2, 0)$  을 지나므로

$$0 = -\frac{2}{a^2} + \frac{2}{a}, \quad 0 = -2 + 2a \quad \therefore a = 1$$

이를 ⑦에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$$y = -x + 2$$

013 답  $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

$$f(x) = \sqrt{x} + 2 \text{ 라고 하면 } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

접점의 좌표를  $(a, \sqrt{a} + 2)$  라고 하면 접선의 기울기는

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} \text{ 이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - (\sqrt{a} + 2) = \frac{1}{2\sqrt{a}}(x - a)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2\sqrt{a}}x + \frac{\sqrt{a}}{2} + 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 직선이 점  $(-1, 2)$  를 지나므로

$$2 = -\frac{1}{2\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{2} + 2$$

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{2} \quad \therefore a = 1$$

이를 ⑦에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

014 답  $y = x - 1$

$$f(x) = x \ln x \text{ 라고 하면}$$

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

접점의 좌표를  $(a, a \ln a)$  라고 하면 접선의 기울기는

$$f'(a) = \ln a + 1 \text{ 이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - a \ln a = (\ln a + 1)(x - a)$$

$$\therefore y = (\ln a + 1)x - a \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 직선이 점  $(0, -1)$  을 지나므로

$$-1 = -a \quad \therefore a = 1$$

이를 ⑦에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$$y = x - 1$$

015 답 1, 1, 1, 증가, 1, 감소

016 답 구간  $(-\infty, 0]$ 에서 감소, 구간  $[0, \infty)$ 에서 증가

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ 에서}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ 인 } x \text{ 의 값은 } x = 0$$

함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |            |   |            |
|---------|------------|---|------------|
| $x$     | $\dots$    | 0 | $\dots$    |
| $f'(x)$ | -          | 0 | +          |
| $f(x)$  | $\searrow$ | 1 | $\nearrow$ |

따라서 함수  $f(x)$ 는 구간  $(-\infty, 0]$ 에서 감소하고, 구간  $[0, \infty)$ 에서 증가한다.

017 답 구간  $(-\infty, -1]$ 에서 감소, 구간  $[-1, \infty)$ 에서 증가

$$f(x) = xe^x \text{ 에서 } f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{ 인 } x \text{ 의 값은 } x = -1 \quad (\because e^x > 0)$$

함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |            |                |            |
|---------|------------|----------------|------------|
| $x$     | $\dots$    | -1             | $\dots$    |
| $f'(x)$ | -          | 0              | +          |
| $f(x)$  | $\searrow$ | $-\frac{1}{e}$ | $\nearrow$ |

따라서 함수  $f(x)$ 는 구간  $(-\infty, -1]$ 에서 감소하고, 구간  $[-1, \infty)$ 에서 증가한다.

018 답 구간  $(0, 1]$ 에서 증가, 구간  $[1, \infty)$ 에서 감소

$$f(x) = \ln x - x \text{ 에서 } x > 0 \text{ 이고}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

$$f'(x) = 0 \text{ 인 } x \text{ 의 값은 } x = 1$$

$x > 0$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |   |            |    |            |
|---------|---|------------|----|------------|
| $x$     | 0 | $\dots$    | 1  | $\dots$    |
| $f'(x)$ |   | +          | 0  | -          |
| $f(x)$  |   | $\nearrow$ | -1 | $\searrow$ |

따라서 함수  $f(x)$ 는 구간  $(0, 1]$ 에서 증가하고, 구간  $[1, \infty)$ 에서 감소한다.

019 답 구간  $(0, \frac{\pi}{4}]$ 에서 증가, 구간  $[\frac{\pi}{4}, \pi)$ 에서 감소

$$f(x) = \sin x + \cos x \text{ 에서 } f'(x) = \cos x - \sin x$$

$$f'(x) = 0 \text{ 인 } x \text{ 의 값은}$$

$$\sin x = \cos x \quad \therefore x = \frac{\pi}{4} \quad (\because 0 < x < \pi)$$

$0 < x < \pi$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |   |            |                 |            |       |
|---------|---|------------|-----------------|------------|-------|
| $x$     | 0 | $\dots$    | $\frac{\pi}{4}$ | $\dots$    | $\pi$ |
| $f'(x)$ |   | +          | 0               | -          |       |
| $f(x)$  |   | $\nearrow$ | $\sqrt{2}$      | $\searrow$ |       |

따라서 함수  $f(x)$ 는 구간  $(0, \frac{\pi}{4}]$ 에서 증가하고, 구간  $[\frac{\pi}{4}, \pi)$ 에서 감소한다.

020 답  $\geq, \geq, \leq, -2, 2$

021 답  $a \geq 1$

$f(x) = \ln(x^2 + a) - x$ 에서

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + a} - 1 = \frac{-x^2 + 2x - a}{x^2 + a}$$

함수  $f(x)$ 가 구간  $(-\infty, \infty)$ 에서 감소하려면 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$$-x^2 + 2x - a \leq 0 \quad (\because x^2 + a > 0)$$

$$\therefore x^2 - 2x + a \geq 0$$

이차방정식  $x^2 - 2x + a = 0$ 의 판별식을  $D$ 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - a \leq 0 \quad \therefore a \geq 1$$

022 답  $a \geq 2$

$f(x) = ax + \cos 2x$ 에서  $f'(x) = a - 2 \sin 2x$

함수  $f(x)$ 가 구간  $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하려면 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이때  $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ 이므로

$$-2 \leq -2 \sin 2x \leq 2$$

$$\therefore a - 2 \leq a - 2 \sin 2x \leq a + 2$$

즉,  $a - 2 \leq f'(x) \leq a + 2$ 에서  $a - 2 \geq 0$ 이어야 하므로  $a \geq 2$

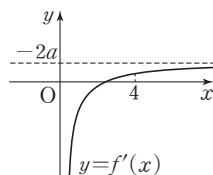
023 답  $\leq, \leq, -\frac{1}{2}$

024 답  $a \leq -\frac{1}{8}$

$f(x) = 1 - 2ax - \ln x$ 에서  $f'(x) = -2a - \frac{1}{x}$

함수  $f(x)$ 가 구간  $(4, \infty)$ 에서 증가하려면  $x > 4$ 에서  $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$f'(4) = -2a - \frac{1}{4} \geq 0 \quad \therefore a \leq -\frac{1}{8}$$



025 답  $a \leq 0$

$f(x) = (2x + a)e^x$ 에서

$$f'(x) = 2e^x + (2x + a)e^x = (2x + a + 2)e^x$$

함수  $f(x)$ 가 구간  $(-\infty, -1)$ 에서 감소하려면  $x < -1$ 에서  $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

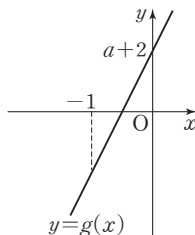
즉,  $x < -1$ 에서

$$2x + a + 2 \leq 0 \quad (\because e^x > 0)$$

$g(x) = 2x + a + 2$ 라고 하면  $x < -1$ 에서

$g(x) \leq 0$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$g(-1) = -2 + a + 2 \leq 0 \quad \therefore a \leq 0$$



026 답  $1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, -1$

027 답 극댓값:  $\frac{3}{2}$ , 극솟값:  $-\frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$ 에서

$$f'(x) = \frac{(2x - 3)(x^2 + 3) - (x^2 - 3x) \times 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{3(x + 3)(x - 1)}{(x^2 + 3)^2}$$

$f'(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은  $x = -3$  또는  $x = 1$

함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ... | -3            | ... | 1              | ... |
|---------|-----|---------------|-----|----------------|-----|
| $f'(x)$ | +   | 0             | -   | 0              | +   |
| $f(x)$  | ↗   | $\frac{3}{2}$ | ↘   | $-\frac{1}{2}$ | ↗   |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = -3$ 에서 극대이고 극댓값은  $\frac{3}{2}$ ,  $x = 1$ 에서 극소이고 극솟값은  $-\frac{1}{2}$ 이다.

028 답  $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}$

029 답 극솟값:  $-\frac{3}{4}$

$f(x) = x - \sqrt{4x - 1}$ 에서  $x \geq \frac{1}{4}$

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{2\sqrt{4x - 1}} = \frac{\sqrt{4x - 1} - 2}{\sqrt{4x - 1}}$$

$f'(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은

$$\sqrt{4x - 1} = 2, 4x - 1 = 4 \quad \therefore x = \frac{5}{4}$$

$x \geq \frac{1}{4}$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | $\frac{1}{4}$ | ... | $\frac{5}{4}$  | ... |
|---------|---------------|-----|----------------|-----|
| $f'(x)$ |               | -   | 0              | +   |
| $f(x)$  | $\frac{1}{4}$ | ↘   | $-\frac{3}{4}$ | ↗   |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = \frac{5}{4}$ 에서 극소이고 극솟값은  $-\frac{3}{4}$ 이다.

030 답  $0, 0, 0, -2, 0, 0$

031 답 극솟값:  $e$

$f(x) = \frac{e^x}{x}$ 에서  $x \neq 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{e^x \times x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x - 1)}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은  $x = 1$  ( $\because e^x > 0$ )

함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ... | 0 | ... | 1   | ... |
|---------|-----|---|-----|-----|-----|
| $f'(x)$ | -   |   | -   | 0   | +   |
| $f(x)$  | ↘   |   | ↘   | $e$ | ↗   |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = 1$ 에서 극소이고 극솟값은  $e$ 이다.

032 답 극댓값:  $\frac{1}{e}$

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 에서  $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은  $x = e$

$x > 0$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | 0 | ... | $e$           | ... |
|---------|---|-----|---------------|-----|
| $f'(x)$ |   | +   | 0             | -   |
| $f(x)$  |   | ↗   | $\frac{1}{e}$ | ↘   |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = e$ 에서 극대이고 극댓값은  $\frac{1}{e}$ 이다.

033 답 극솟값:  $3 - 3 \ln 3$

$f(x) = x - 3 \ln x$ 에서  $x > 0$ 이고

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x}$$

$f'(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은  $x = 3$

$x > 0$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | 0 | ... | 3             | ... |
|---------|---|-----|---------------|-----|
| $f'(x)$ |   | -   | 0             | +   |
| $f(x)$  |   | ↘   | $3 - 3 \ln 3$ | ↗   |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = 3$ 에서 극소이고 극솟값은  $3 - 3 \ln 3$ 이다.

034 답  $\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$

035 답 극댓값:  $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ , 극솟값:  $-\sqrt{3} - \frac{5}{3}\pi$

$f(x) = 2 \sin x - x$ 에서

$$f'(x) = 2 \cos x - 1$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | 0 | ... | $\frac{\pi}{3}$            | ... | $\frac{5}{3}\pi$             | ... | $2\pi$ |
|---------|---|-----|----------------------------|-----|------------------------------|-----|--------|
| $f'(x)$ |   | +   | 0                          | -   | 0                            | +   |        |
| $f(x)$  |   | ↗   | $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ | ↘   | $-\sqrt{3} - \frac{5}{3}\pi$ | ↗   |        |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = \frac{\pi}{3}$ 에서 극대이고 극댓값은  $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ ,

$x = \frac{5}{3}\pi$ 에서 극소이고 극솟값은  $-\sqrt{3} - \frac{5}{3}\pi$ 이다.

036 답 극댓값:  $\sqrt{2}$

$f(x) = \sin x - \cos x$ 에서

$$f'(x) = \cos x + \sin x$$

$f'(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은

$$\sin x = -\cos x \quad \therefore x = \frac{3}{4}\pi \quad (\because 0 < x < \pi)$$

$0 < x < \pi$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | 0 | ... | $\frac{3}{4}\pi$ | ... | $\pi$ |
|---------|---|-----|------------------|-----|-------|
| $f'(x)$ |   | +   | 0                | -   |       |
| $f(x)$  |   | ↗   | $\sqrt{2}$       | ↘   |       |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = \frac{3}{4}\pi$ 에서 극대이고 극댓값은  $\sqrt{2}$ 이다.

037 답  $-1, 6x, -1, -6, -1, 4, 1, 0$

038 답 극댓값: 11, 극솟값:  $-5$

$f(x) = -x^4 + 8x^2 - 5$ 에서

$$f'(x) = -4x^3 + 16x = -4x(x+2)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은  $x = -2$  또는  $x = 0$  또는  $x = 2$

$$f''(x) = -12x^2 + 16 \text{이므로}$$

$$f''(-2) = -32 < 0, f''(0) = 16 > 0, f''(2) = -32 < 0$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = -2, x = 2$ 에서 극대이고 극댓값은 11,  $x = 0$ 에서 극소이고 극솟값은  $-5$ 이다.

039 답 극댓값:  $-2\sqrt{2}$ , 극솟값:  $2\sqrt{2}$

$f(x) = x + \frac{2}{x}$ 에서

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$

$$f''(x) = \frac{4}{x^3} \text{이므로}$$

$$f''(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} < 0, f''(\sqrt{2}) = \sqrt{2} > 0$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = -\sqrt{2}$ 에서 극대이고 극댓값은  $-2\sqrt{2}$ ,  $x = \sqrt{2}$ 에서 극소이고 극솟값은  $2\sqrt{2}$ 이다.

040 답 극댓값: 1

$f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ 에서  $0 \leq x \leq 2$

$$f'(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$f'(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은  $x = 1$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\sqrt{2x-x^2} - (1-x) \times \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}{(\sqrt{2x-x^2})^2} \\ &= \frac{-1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } f''(1) = -1 < 0$$

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = 1$ 에서 극대이고 극댓값은 1이다.

041 답  $-\frac{1}{2}, 4(1+x)e^{2x}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{e}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2e}$

**042** ④ 극댓값: -1

$f(x) = x - e^x$ 에서  $f'(x) = 1 - e^x$   
 $f'(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은  $x = 0$   
 $f''(x) = -e^x < 0$ 이므로  $f''(0) = -1 < 0$   
 따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = 0$ 에서 극대이고 극댓값은 -1이다.

**043** ④ 극솟값:  $-\frac{2}{e}$

$f(x) = 2x \ln x$ 에서  
 $f'(x) = 2 \ln x + 2x \times \frac{1}{x} = 2 \ln x + 2$   
 $f'(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은  $x = \frac{1}{e}$   
 $f''(x) = \frac{2}{x}$ 이므로  $f''\left(\frac{1}{e}\right) = 2e > 0$   
 따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = \frac{1}{e}$ 에서 극소이고 극솟값은  $-\frac{2}{e}$ 이다.

**044** ④ 극솟값:  $-\frac{1}{2e}$

$f(x) = x^2 \ln x$ 에서  $x > 0$ 이고  
 $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$   
 $f'(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은  $2 \ln x + 1 = 0$  ( $\because x > 0$ )  
 $\ln x = -\frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{1}{\sqrt{e}}$   
 $f''(x) = 2 \ln x + 1 + x \times \frac{2}{x} = 2 \ln x + 3$ 이므로  
 $f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 2 > 0$   
 따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 에서 극소이고 극솟값은  $-\frac{1}{2e}$ 이다.

**045** ④  $\frac{\pi}{3}, 2 \sin x, \frac{\pi}{3}, \sqrt{3}, \frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi + \sqrt{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$

**046** ④ 극댓값:  $\pi$

$f(x) = \sin x - x \cos x$ 에서  
 $f'(x) = \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x$   
 $f'(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은  $\sin x = 0$   
 $\therefore x = \pi$  ( $\because 0 < x < 2\pi$ )  
 $f''(x) = \sin x + x \cos x$ 이므로  $f''(\pi) = -\pi < 0$   
 따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = \pi$ 에서 극대이고 극댓값은  $\pi$ 이다.

**047** ④ 극댓값: 2

$f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ 에서  $f'(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x$   
 $f'(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은  
 $\sin x = \sqrt{3} \cos x, \tan x = \sqrt{3}$   
 $\therefore x = \frac{\pi}{3}$  ( $\because 0 < x < \frac{\pi}{2}$ )  
 $f''(x) = -\sqrt{3} \sin x - \cos x$ 이므로  $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 < 0$   
 따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = \frac{\pi}{3}$ 에서 극대이고 극댓값은 2이다.

**048** ④ 0, -3, 0, 0, -3, -3, 2, 5

**049** ④  $a = -4, b = -3$

$f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$ 에서  
 $f'(x) = \frac{a(x^2+1) - (ax+b) \times 2x}{(x^2+1)^2}$   
 $= \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}$   
 $x = -2$ 에서 극댓값이 1이므로  
 $f'(-2) = 0, f(-2) = 1$   
 $f'(-2) = 0$ 에서  $\frac{-4a + 4b + a}{25} = 0$   
 $\therefore 3a - 4b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$   
 $f(-2) = 1$ 에서  $\frac{-2a+b}{5} = 1$   
 $\therefore 2a - b = -5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$   
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면  $a = -4, b = -3$

**050** ④  $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}, b = -\frac{1}{2}$

$f(x) = a \sin x - b \cos x$ 에서  
 $f'(x) = a \cos x + b \sin x$   
 $x = \frac{2}{3}\pi$ 에서 극솟값이 -1이므로  
 $f'\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 0, f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -1$   
 $f'\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 0$ 에서  $-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0$   
 $\therefore a - \sqrt{3}b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$   
 $f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -1$ 에서  $\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{b}{2} = -1$   
 $\therefore \sqrt{3}a + b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$   
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면  
 $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}, b = -\frac{1}{2}$

연산  
유형

최종 점검하기

92~93쪽

|     |     |     |      |           |      |
|-----|-----|-----|------|-----------|------|
| 1 ③ | 2 ④ | 3 ② | 4 0  | 5 ①       | 6 ④  |
| 7 ④ | 8 ⑤ | 9 ④ | 10 ④ | 11 $2\pi$ | 12 ④ |

1  $f(x) = x - x \ln x$ 라고 하면

$$f'(x) = 1 - \ln x - x \times \frac{1}{x} = -\ln x$$

점  $(e, 0)$ 에서의 접선의 기울기는  $f'(e) = -1$ 이므로 점  $(e, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = -(x - e) \quad \therefore y = -x + e$$

따라서  $a = -1, b = e$ 이므로  $ab = -e$

2  $f(x)=e^{2x}$ 이라고 하면

$$f'(x)=2e^{2x}$$

접점의 좌표를  $(a, e^{2a})$ 이라고 하면 직선  $y=2x+3$ 에 평행한 직선의 기울기는 2이므로  $f'(a)=2$ 에서

$$2e^{2a}=2 \quad \therefore a=0$$

따라서 접점의 좌표는  $(0, 1)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-1=2x \quad \therefore y=2x+1$$

즉, 구하는  $y$ 절편은 1이다.

3  $f(x)=\sqrt{x}$ 라고 하면

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

접점의 좌표를  $(a, \sqrt{a})$ 라고 하면 접선의 기울기는  $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$

이므로 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{a}=\frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)$$

$$\therefore y=\frac{1}{2\sqrt{a}}x+\frac{\sqrt{a}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 직선이 점  $(-1, 0)$ 을 지나므로

$$0=-\frac{1}{2\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{a} \quad \therefore a=1$$

이를 ⑦에 대입하여 접선의 방정식을 구하면

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

이 직선이 점  $(3, k)$ 를 지나므로

$$k=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$$

4  $f(x)=\frac{1}{x^2+2}$ 에서

$$f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+2)^2}$$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=0$

함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ... | 0             | ... |
|---------|-----|---------------|-----|
| $f'(x)$ | +   | 0             | -   |
| $f(x)$  | ↗   | $\frac{1}{2}$ | ↘   |

따라서 함수  $f(x)$ 는 구간  $(-\infty, 0]$ 에서 증가하고, 구간  $[0, \infty)$ 에서 감소하므로  $a=0$

5  $f(x)=(a-x^2)e^{-x}$ 에서

$$f'(x)=-2xe^{-x}-(a-x^2)e^{-x}=(x^2-2x-a)e^{-x}$$

함수  $f(x)$ 가 구간  $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하려면 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$x^2-2x-a \geq 0 \quad (\because e^{-x} > 0)$$

이차방정식  $x^2-2x-a=0$ 의 판별식을  $D$ 라고 하면

$$\frac{D}{4}=1+a \leq 0 \quad \therefore a \leq -1$$

6  $f(x)=\ln x-ax$ 에서

$$f'(x)=\frac{1}{x}-a$$

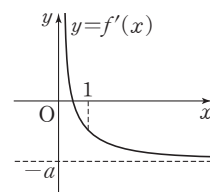
함수  $f(x)$ 가 구간  $(1, \infty)$ 에서 감소하려면  $x > 1$ 에서  $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로 오른쪽

그림에서

$$f'(1)=1-a \leq 0$$

$$\therefore a \geq 1$$

따라서 상수  $a$ 의 최솟값은 1이다.



7  $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$ 에서

$$f'(x)=\frac{x^2+3-(x+1) \times 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=-3$  또는  $x=1$

함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ... | -3             | ... | 1             | ... |
|---------|-----|----------------|-----|---------------|-----|
| $f'(x)$ | -   | 0              | +   | 0             | -   |
| $f(x)$  | ↘   | $-\frac{1}{6}$ | ↗   | $\frac{1}{2}$ | ↘   |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 극대이고 극댓값은  $\frac{1}{2}$ ,  $x=-3$ 에

서 극소이고 극솟값은  $-\frac{1}{6}$ 이므로

$$M=\frac{1}{2}, \quad m=-\frac{1}{6}$$

$$\therefore M-m=\frac{2}{3}$$

8  $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ 에서

$$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은

$$\sqrt{4-x^2}=x, \quad x^2=2 \quad \therefore x=\sqrt{2} \quad (\because 0 < x < 2)$$

$0 < x < 2$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | 0 | ... | $\sqrt{2}$  | ... | 2 |
|---------|---|-----|-------------|-----|---|
| $f'(x)$ |   | +   | 0           | -   |   |
| $f(x)$  |   | ↗   | $2\sqrt{2}$ | ↘   |   |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=\sqrt{2}$ 에서 극대이고 극댓값은  $2\sqrt{2}$ 이다.

9  $f(x)=e^x+e^{-x}$ 에서

$$f'(x)=e^x-e^{-x}$$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=0$

함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ... | 0 | ... |
|---------|-----|---|-----|
| $f'(x)$ | -   | 0 | +   |
| $f(x)$  | ↘   | 2 | ↗   |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 극소이고 극솟값은 2이므로  $a=0$ ,  $b=2$

$$\therefore a+b=2$$

10  $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ 에서  $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

$f'(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은

$$2\ln x = 1, \ln x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \sqrt{e}$$

$x > 0$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |   |            |                |            |
|---------|---|------------|----------------|------------|
| $x$     | 0 | ...        | $\sqrt{e}$     | ...        |
| $f'(x)$ |   | +          | 0              | -          |
| $f(x)$  |   | $\nearrow$ | $\frac{1}{2e}$ | $\searrow$ |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = \sqrt{e}$ 에서 극대이고 극댓값은  $\frac{1}{2e}$ 이므로

$$a = \sqrt{e}, b = \frac{1}{2e}$$

$$\therefore ab = \frac{\sqrt{e}}{2e}$$

11  $f(x) = x \sin x + \cos x$ 에서

$$f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$$

$f'(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은  $\cos x = 0$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |   |            |                 |            |                   |            |        |
|---------|---|------------|-----------------|------------|-------------------|------------|--------|
| $x$     | 0 | ...        | $\frac{\pi}{2}$ | ...        | $\frac{3}{2}\pi$  | ...        | $2\pi$ |
| $f'(x)$ |   | +          | 0               | -          | 0                 | +          |        |
| $f(x)$  |   | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\searrow$ | $-\frac{3}{2}\pi$ | $\nearrow$ |        |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 극대이고 극댓값은  $\frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{3}{2}\pi$

에서 극소이고 극솟값은  $-\frac{3}{2}\pi$ 이므로

$$M = \frac{\pi}{2}, m = -\frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore M - m = 2\pi$$

12  $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$ 에서

$$f'(x) = \frac{(2x + a)(x - 1) - (x^2 + ax + b)}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x - a - b}{(x - 1)^2}$$

$x = 3$ 에서 극솟값이  $-2$ 이므로

$$f'(3) = 0, f(3) = -2$$

$$f'(3) = 0 \text{에서 } \frac{3 - a - b}{4} = 0$$

$$\therefore a + b = 3 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f(3) = -2 \text{에서 } \frac{9 + 3a + b}{2} = -2$$

$$\therefore 3a + b = -13 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -8, b = 11 \quad \therefore b - a = 19$$

## II. 미분법

# 07 도함수의 활용 (2)

96~110쪽

001 ②  $6x - 6, 1, 1, <, 1, >, 1, \text{위}, 1, \text{아래}$

002 ②  $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}, x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 아래로 볼록,

$-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 위로 볼록

$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ 이라고 하면

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 + 1)^2 - (-2x) \times 2(x^2 + 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^4}$$

$$= \frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2(\sqrt{3}x + 1)(\sqrt{3}x - 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

$f''(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은  $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  또는  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x < -\frac{\sqrt{3}}{3}, x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서  $f''(x) > 0$ ,  $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서  $f''(x) < 0$

따라서 곡선  $y = f(x)$ 는  $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}, x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 아래로 볼록하고,

$-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 위로 볼록하다.

003 ②  $x < -2$ 에서 위로 볼록,  $x > -2$ 에서 아래로 볼록

$f(x) = 2xe^x$ 이라고 하면

$$f'(x) = 2e^x + 2xe^x = 2(1 + x)e^x$$

$$f''(x) = 2e^x + 2(1 + x)e^x = 2(2 + x)e^x$$

$f''(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은  $x = -2$  ( $\because e^x > 0$ )

$x < -2$ 에서  $f''(x) < 0$ ,  $x > -2$ 에서  $f''(x) > 0$

따라서 곡선  $y = f(x)$ 는  $x < -2$ 에서 위로 볼록하고,  $x > -2$ 에서 아래로 볼록하다.

004 ②  $x > 0$ 에서 아래로 볼록

$f(x) = x \ln x$ 라고 하면  $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \ln x + 1, f''(x) = \frac{1}{x}$$

$x > 0$ 에서  $f''(x) > 0$

따라서 곡선  $y = f(x)$ 는  $x > 0$ 에서 아래로 볼록하다.

005 ②  $0 < x < \pi$ 에서 위로 볼록,  $\pi < x < 2\pi$ 에서 아래로 볼록

$f(x) = \sin x$ 라고 하면

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x$$

$f''(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은  $x = \pi$  ( $\because 0 < x < 2\pi$ )

$0 < x < \pi$ 에서  $f''(x) < 0$ ,  $\pi < x < 2\pi$ 에서  $f''(x) > 0$

따라서 곡선  $y = f(x)$ 는  $0 < x < \pi$ 에서 위로 볼록하고,  $\pi < x < 2\pi$ 에서 아래로 볼록하다.

006 답  $6x-12, 2, 2, <, 2, >, 2, 2, -13$

007 답  $(0, -1), (1, -2)$

$f(x)=x^4-2x^3-1$ 이라고 하면  
 $f'(x)=4x^3-6x^2, f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$   
 $f''(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=0$  또는  $x=1$   
 $x<0, x>1$ 에서  $f''(x)>0, 0<x<1$ 에서  $f''(x)<0$   
따라서  $x=0, x=1$ 의 좌우에서  $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는  $(0, -1), (1, -2)$ 이다.

008 답  $(2, \frac{2}{e^2})$

$f(x)=xe^{-x}$ 이라고 하면  
 $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$   
 $f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$   
 $f''(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=2$  ( $\because e^{-x}>0$ )  
 $x<2$ 에서  $f''(x)<0, x>2$ 에서  $f''(x)>0$   
따라서  $x=2$ 의 좌우에서  $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는  $(2, \frac{2}{e^2})$ 이다.

009 답  $(-1, \ln 2), (1, \ln 2)$

$f(x)=\ln(x^2+1)$ 이라고 하면  
 $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$   
 $f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x \times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$   
 $f''(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=-1$  또는  $x=1$   
 $x<-1, x>1$ 에서  $f''(x)<0, -1<x<1$ 에서  $f''(x)>0$   
따라서  $x=-1, x=1$ 의 좌우에서  $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는  $(-1, \ln 2), (1, \ln 2)$ 이다.

010 답  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$f(x)=x+2\cos x$ 라고 하면  
 $f'(x)=1-2\sin x, f''(x)=-2\cos x$   
 $f''(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=\frac{\pi}{2}$  ( $\because 0<x<\pi$ )  
 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 에서  $f''(x)<0, \frac{\pi}{2}<x<\pi$ 에서  $f''(x)>0$   
따라서  $x=\frac{\pi}{2}$ 의 좌우에서  $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 이다.

011 답  $0, 0, 0, 0, -3, -9$

012 답  $a=-8, b=17$

$f(x)=ax^2+bx-\ln x$ 에서  $x>0$ 이고  
 $f'(x)=2ax+b-\frac{1}{x}, f''(x)=2a+\frac{1}{x^2}$   
 $x=1$ 에서 극대이므로  $f'(1)=0$ 에서  
 $2a+b-1=0 \dots\dots \textcircled{1}$

변곡점의  $x$ 좌표가  $\frac{1}{4}$ 이므로  $f''(\frac{1}{4})=0$ 에서  
 $2a+16=0 \therefore a=-8$   
이를  $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면  $b=17$

013 답  $a=6, b=-5, c=30$

$f(x)=x^3-ax^2+bx+c$ 에서  
 $f'(x)=3x^2-2ax+b, f''(x)=6x-2a$   
 $x=-1$ 인 점에서의 접선의 기울기가 10이므로  
 $f'(-1)=10$ 에서  $3+2a+b=10$   
 $\therefore 2a+b=7 \dots\dots \textcircled{1}$   
변곡점의 좌표가  $(2, 4)$ 이므로  $f(2)=4, f''(2)=0$   
 $f(2)=4$ 에서  $8-4a+2b+c=4$   
 $\therefore 4a-2b-c=4 \dots\dots \textcircled{2}$   
 $f''(2)=0$ 에서  $12-2a=0 \therefore a=6$   
이를  $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면  $b=-5$   
 $a=6, b=-5$ 를  $\textcircled{2}$ 에 대입하여 풀면  $c=30$

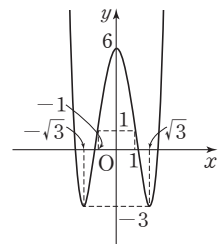
014 답  $10, 3, 2, 2, 3, -6, -17, 3, -17, 2, -6$

015 답 풀이 참고

(i) 정의역은 실수 전체의 집합이다.  
(ii)  $f(0)=6$ 이므로 그래프는 점  $(0, 6)$ 을 지난다.  
(iii)  $f'(x)=4x^3-12x=4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$   
 $f''(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$   
 $f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=-\sqrt{3}$  또는  $x=0$  또는  $x=\sqrt{3}$   
 $f''(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=-1$  또는  $x=1$   
함수  $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$      | $\dots$    | $-\sqrt{3}$ | $\dots$    | $-1$       | $\dots$    | $0$       | $\dots$    | $1$        | $\dots$    | $\sqrt{3}$ | $\dots$    |
|----------|------------|-------------|------------|------------|------------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $f'(x)$  | $-$        | $0$         | $+$        | $+$        | $+$        | $0$       | $-$        | $-$        | $-$        | $0$        | $+$        |
| $f''(x)$ | $+$        | $+$         | $+$        | $0$        | $-$        | $-$       | $-$        | $0$        | $+$        | $+$        | $+$        |
| $f(x)$   | $\searrow$ | $-3$<br>극소  | $\nearrow$ | $1$<br>변곡점 | $\nearrow$ | $6$<br>극대 | $\searrow$ | $1$<br>변곡점 | $\searrow$ | $-3$<br>극소 | $\nearrow$ |

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



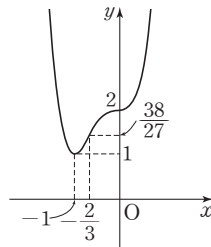
016 답 풀이 참고

(i) 정의역은 실수 전체의 집합이다.  
(ii)  $f(0)=2$ 이므로 그래프는 점  $(0, 2)$ 를 지난다.  
(iii)  $f'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$   
 $f''(x)=36x^2+24x=12x(3x+2)$   
 $f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=-1$  또는  $x=0$   
 $f''(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=-\frac{2}{3}$  또는  $x=0$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

|          |     |         |     |                        |     |          |     |
|----------|-----|---------|-----|------------------------|-----|----------|-----|
| $x$      | ... | -1      | ... | $-\frac{2}{3}$         | ... | 0        | ... |
| $f'(x)$  | -   | 0       | +   | +                      | +   | 0        | +   |
| $f''(x)$ | +   | +       | +   | 0                      | -   | 0        | +   |
| $f(x)$   | ↘   | 1<br>극소 | ↗   | $\frac{38}{27}$<br>변곡점 | ↘   | 2<br>변곡점 | ↗   |

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



**017** 답 0, 원점,  $1, \sqrt{3}, 1, \sqrt{3}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 1, \frac{1}{2}, \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}, x$

**018** 답 풀이 참고

- (i)  $x^2+3 \neq 0$ 이므로 정의역은 실수 전체의 집합이다.  
(ii)  $f(0)=\frac{2}{3}$ 이므로 그래프는 점  $(0, \frac{2}{3})$ 를 지난다.  
(iii)  $f(-x)=\frac{2}{x^2+3}=f(x)$ 이므로 그래프는  $y$ 축에 대하여 대칭이다.  
(iv)  $f'(x)=\frac{-4x}{(x^2+3)^2}$

$$f''(x)=\frac{-4(x^2+3)^2+4x \times 2(x^2+3) \times 2x}{(x^2+3)^4}$$

$$=\frac{12(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=0$

$f''(x)=0$ 인  $x$ 의 값은

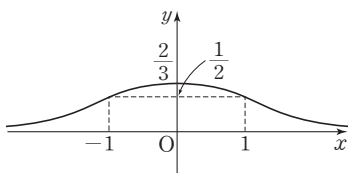
$x=-1$  또는  $x=1$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

|          |     |                      |     |                     |     |                      |     |
|----------|-----|----------------------|-----|---------------------|-----|----------------------|-----|
| $x$      | ... | -1                   | ... | 0                   | ... | 1                    | ... |
| $f'(x)$  | +   | +                    | +   | 0                   | -   | -                    | -   |
| $f''(x)$ | +   | 0                    | -   | -                   | -   | 0                    | +   |
| $f(x)$   | ↗   | $\frac{1}{2}$<br>변곡점 | ↘   | $\frac{2}{3}$<br>극대 | ↘   | $\frac{1}{2}$<br>변곡점 | ↗   |

(v)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2+3}=0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2+3}=0$ 이므로 점근선은  $x$ 축이다.

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



**019** 답 풀이 참고

(i) 정의역은  $x \geq 0$ 인 실수 전체의 집합이다.

(ii)  $f(x)=0$ 에서  $\sqrt{x}-x=0, \sqrt{x}=x, x=x^2$

$$x(x-1)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 그래프는 두 점  $(0, 0), (1, 0)$ 을 지난다.

(iii)  $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-1, f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}=1, 2\sqrt{x}=1 \quad \therefore x=\frac{1}{4}$$

$f''(x)=0$ 인  $x$ 의 값은 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

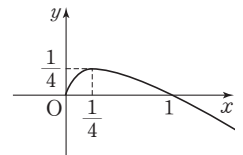
$x \geq 0$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

|          |   |     |                     |     |
|----------|---|-----|---------------------|-----|
| $x$      | 0 | ... | $\frac{1}{4}$       | ... |
| $f'(x)$  |   | +   | 0                   | -   |
| $f''(x)$ |   | -   | -                   | -   |
| $f(x)$   | 0 | ↗   | $\frac{1}{4}$<br>극대 | ↘   |

(iv)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x}-x)=-\infty$

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽

쪽 그림과 같다.



**020** 답 풀이 참고

(i) 정의역은  $x \geq 1$ 인 실수 전체의 집합이다.

(ii)  $f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{2\sqrt{x-1}-1}{2\sqrt{x-1}}$

$$f''(x)=\frac{1}{4(x-1)\sqrt{x-1}}$$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은

$$2\sqrt{x-1}=1, \sqrt{x-1}=\frac{1}{2} \quad \therefore x=\frac{5}{4}$$

$f''(x)=0$ 인  $x$ 의 값은 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

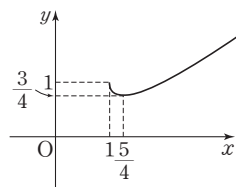
$x \geq 1$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

|          |   |     |                     |     |
|----------|---|-----|---------------------|-----|
| $x$      | 1 | ... | $\frac{5}{4}$       | ... |
| $f'(x)$  |   | -   | 0                   | +   |
| $f''(x)$ |   | +   | +                   | +   |
| $f(x)$   | 1 | ↘   | $\frac{3}{4}$<br>극소 | ↗   |

(iii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-\sqrt{x-1})=\infty$

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽

쪽 그림과 같다.



021 답  $y, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}, x$

022 답 풀이 참고

- (i) 정의역은 실수 전체의 집합이다.  
 (ii)  $f(0)=0$ 이므로 그래프는 점  $(0, 0)$ 을 지난다.  
 (iii)  $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

$$f''(x)=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은

$$x=-1 (\because e^x>0)$$

$f''(x)=0$ 인  $x$ 의 값은

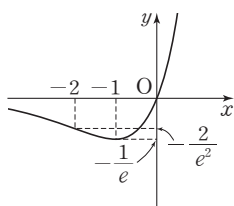
$$x=-2 (\because e^x>0)$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

|          |            |                         |            |                      |            |
|----------|------------|-------------------------|------------|----------------------|------------|
| $x$      | ...        | -2                      | ...        | -1                   | ...        |
| $f'(x)$  | -          | -                       | -          | 0                    | +          |
| $f''(x)$ | -          | 0                       | +          | +                    | +          |
| $f(x)$   | $\searrow$ | $-\frac{2}{e^2}$<br>변곡점 | $\swarrow$ | $-\frac{1}{e}$<br>극소 | $\nearrow$ |

(iv)  $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^x = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ 이므로 점근선은  $x$ 축이다.

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



023 답 풀이 참고

(i) 정의역은  $x>0$ 인 실수 전체의 집합이다.

(ii)  $f'(x)=1-\frac{1}{x}$

$$f''(x)=\frac{1}{x^2}$$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=1$

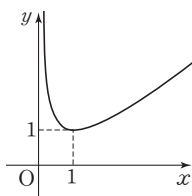
$f''(x)=0$ 인  $x$ 의 값은 존재하지 않으므로 변곡점은 없다.

$x>0$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

|          |   |            |         |            |
|----------|---|------------|---------|------------|
| $x$      | 0 | ...        | 1       | ...        |
| $f'(x)$  |   | -          | 0       | +          |
| $f''(x)$ |   | +          | +       | +          |
| $f(x)$   |   | $\searrow$ | 1<br>극소 | $\nearrow$ |

(iii)  $\lim_{x \rightarrow 0+} (x-\ln x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-\ln x) = \infty$ 이므로 점근선은  $y$ 축이다.

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



024 답 풀이 참고

(i) 정의역은  $x>0$ 인 실수 전체의 집합이다.

(ii)  $f(1)=0$ 이므로 그래프는 점  $(1, 0)$ 을 지난다.

(iii)  $f'(x)=\frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x} \times x^2 - (1 - \ln x) \times 2x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은

$$\ln x = 1 \quad \therefore x = e$$

$f''(x)=0$ 인  $x$ 의 값은

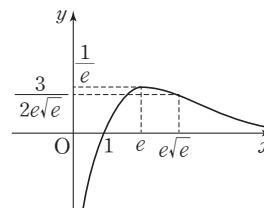
$$\ln x = \frac{3}{2} \quad \therefore x = e\sqrt{e}$$

$x>0$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

|          |   |            |                     |            |                               |            |
|----------|---|------------|---------------------|------------|-------------------------------|------------|
| $x$      | 0 | ...        | $e$                 | ...        | $e\sqrt{e}$                   | ...        |
| $f'(x)$  |   | +          | 0                   | -          | -                             | -          |
| $f''(x)$ |   | -          | -                   | -          | 0                             | +          |
| $f(x)$   |   | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$<br>극대 | $\searrow$ | $\frac{3}{2e\sqrt{e}}$<br>변곡점 | $\swarrow$ |

(iv)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ 이므로 점근선은  $x$ 축과  $y$ 축이다.

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



025 답  $\pi, \pi, 2\pi, \pi, 2\pi, \pi, 2\pi, \pi, \pi$

026 답 풀이 참고

(i) 정의역은  $0 \leq x \leq 2\pi$ 이다.

(ii)  $f(0)=0$ 이므로 그래프는 점  $(0, 0)$ 을 지난다.

(iii)  $f'(x)=1-2\cos x$

$$f''(x)=2\sin x$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{3} (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

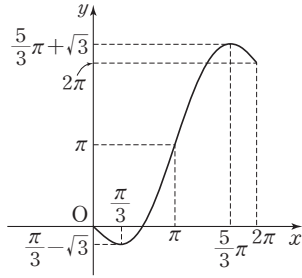
$$f''(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } \sin x = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \pi \text{ 또는 } x = 2\pi (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

|          |   |            |                                |            |              |            |                                 |            |        |
|----------|---|------------|--------------------------------|------------|--------------|------------|---------------------------------|------------|--------|
| $x$      | 0 | ...        | $\frac{\pi}{3}$                | ...        | $\pi$        | ...        | $\frac{5\pi}{3}$                | ...        | $2\pi$ |
| $f'(x)$  |   | -          | 0                              | +          | +            | +          | 0                               | -          |        |
| $f''(x)$ |   | +          | +                              | +          | 0            | -          | -                               | -          |        |
| $f(x)$   | 0 | $\searrow$ | $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$<br>극소 | $\swarrow$ | $\pi$<br>변곡점 | $\nearrow$ | $\frac{5\pi}{3}+\sqrt{3}$<br>극대 | $\searrow$ | $2\pi$ |

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



### 027 답 풀이 참고

(i) 정의역은  $0 \leq x \leq \pi$ 이다.

(ii)  $f(0)=1$ 이므로 그래프는 점  $(0, 1)$ 을 지난다.

(iii)  $f'(x)=1-2\sin 2x$

$$f''(x)=-4\cos 2x$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } \sin 2x=\frac{1}{2}$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{12} \text{ 또는 } x=\frac{5}{12}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

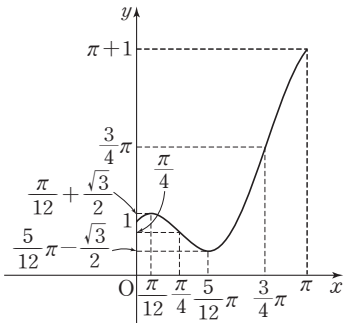
$$f''(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } \cos 2x=0$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x=\frac{3}{4}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

$0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$      | 0 | ... | $\frac{\pi}{12}$                            | ... | $\frac{\pi}{4}$        | ... | $\frac{5}{12}\pi$                            | ... | $\frac{3}{4}\pi$        | ... | $\pi$     |
|----------|---|-----|---------------------------------------------|-----|------------------------|-----|----------------------------------------------|-----|-------------------------|-----|-----------|
| $f'(x)$  |   | +   | 0                                           | -   | -                      | -   | 0                                            | +   | +                       | +   |           |
| $f''(x)$ |   | -   | -                                           | -   | 0                      | +   | +                                            | +   | 0                       | -   |           |
| $f(x)$   | 1 | ↗   | $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$<br>극대 | ↘   | $\frac{\pi}{4}$<br>변곡점 | ↘   | $\frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$<br>극소 | ↗   | $\frac{3}{4}\pi$<br>변곡점 | ↗   | $\pi + 1$ |

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



### 028 답 풀이 참고

(i) 정의역은  $0 \leq x \leq \pi$ 이다.

(ii)  $f(0)=-1$ 이므로 그래프는 점  $(0, -1)$ 을 지난다.

(iii)  $f'(x)=\cos x + \sin x$

$$f''(x)=-\sin x + \cos x$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$\sin x = -\cos x \quad \therefore x = \frac{3}{4}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

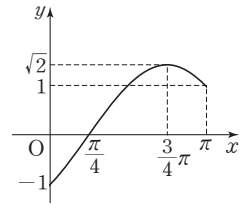
$$f''(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$\sin x = \cos x \quad \therefore x = \frac{\pi}{4} \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

$0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$      | 0  | ... | $\frac{\pi}{4}$ | ... | $\frac{3}{4}\pi$ | ... | $\pi$ |
|----------|----|-----|-----------------|-----|------------------|-----|-------|
| $f'(x)$  |    | +   | +               | +   | 0                | -   |       |
| $f''(x)$ |    | +   | 0               | -   | -                | -   |       |
| $f(x)$   | -1 | ↗   | 0<br>변곡점        | ↗   | $\sqrt{2}$<br>극대 | ↘   | 1     |

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



### 029 답 1, 1, $\frac{3}{2}$ , $\frac{9}{10}$ , 1, $\frac{3}{2}$ , -1, $-\frac{3}{2}$

### 030 답 최댓값: $\frac{7}{2}$ , 최솟값: 2

$$f(x)=\frac{x^2+5}{x+2} \text{에서}$$

$$f'(x)=\frac{2x(x+2)-(x^2+5)}{(x+2)^2}=\frac{(x+5)(x-1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \quad (\because 0 \leq x \leq 4)$$

구간  $[0, 4]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | 0             | ... | 1       | ... | 4             |
|---------|---------------|-----|---------|-----|---------------|
| $f'(x)$ |               | -   | 0       | +   |               |
| $f(x)$  | $\frac{5}{2}$ | ↘   | 2<br>극소 | ↗   | $\frac{7}{2}$ |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=4$ 에서 최대이고 최댓값은  $\frac{7}{2}$ ,  $x=1$ 에서 최소이고 최솟값은 2이다.

### 031 답 -2, -2, 0, -2, 0, -2, -2

### 032 답 최댓값: $\sqrt{2}$ , 최솟값: 1

$$f(x)=x+\sqrt{1-x^2} \text{에서}$$

$$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } \sqrt{1-x^2}=x, 1-x^2=x^2$$

$$2x^2=1 \quad \therefore x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because 0 \leq x \leq 1)$$

구간  $[0, 1]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | 0 | ... | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | ... | 1 |
|---------|---|-----|----------------------|-----|---|
| $f'(x)$ |   | +   | 0                    | -   |   |
| $f(x)$  | 1 | ↗   | $\sqrt{2}$<br>극대     | ↘   | 1 |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 최대이고 최댓값은  $\sqrt{2}$ ,  $x=0$ ,  $x=1$ 에서 최소이고 최솟값은 1이다.

033 답 1, 1, 0,  $\frac{1}{e}$ , 1,  $\frac{1}{e}$ , 0

034 답 최댓값:  $e^2-2$ , 최솟값: 1

$$f(x)=e^x-x \text{에서}$$

$$f'(x)=e^x-1$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } e^x=1 \quad \therefore x=0$$

구간  $[-2, 2]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |                   |            |         |            |         |
|---------|-------------------|------------|---------|------------|---------|
| $x$     | -2                | ...        | 0       | ...        | 2       |
| $f'(x)$ |                   | -          | 0       | +          |         |
| $f(x)$  | $\frac{1}{e^2}+2$ | $\searrow$ | 1<br>극소 | $\nearrow$ | $e^2-2$ |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=2$ 에서 최대이고 최댓값은  $e^2-2$ ,  $x=0$ 에서 최소이고 최솟값은 1이다.

035 답 최댓값:  $e$ , 최솟값: 0

$$f(x)=x^2e^x \text{에서}$$

$$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=x(x+2)e^x$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-2 \text{ 또는 } x=0 (\because e^x>0)$$

구간  $[-4, 1]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |                  |            |                       |            |         |            |     |
|---------|------------------|------------|-----------------------|------------|---------|------------|-----|
| $x$     | -4               | ...        | -2                    | ...        | 0       | ...        | 1   |
| $f'(x)$ |                  | +          | 0                     | -          | 0       | +          |     |
| $f(x)$  | $\frac{16}{e^4}$ | $\nearrow$ | $\frac{4}{e^2}$<br>극대 | $\searrow$ | 0<br>극소 | $\nearrow$ | $e$ |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 최대이고 최댓값은  $e$ ,  $x=0$ 에서 최소이고 최솟값은 0이다.

036 답 0, 0,  $\ln 2$ ,  $\ln 6$ ,  $\ln 6$ , 0,  $\ln 2$

037 답 최댓값:  $e^2$ , 최솟값:  $-\frac{1}{2e}$

$$f(x)=x^2 \ln x \text{에서}$$

$$f'(x)=2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$\ln x = -\frac{1}{2} \left( \because \frac{1}{e} \leq x \leq e \right) \quad \therefore x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

구간  $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |                  |            |                       |            |       |
|---------|------------------|------------|-----------------------|------------|-------|
| $x$     | $\frac{1}{e}$    | ...        | $\frac{1}{\sqrt{e}}$  | ...        | $e$   |
| $f'(x)$ |                  | -          | 0                     | +          |       |
| $f(x)$  | $-\frac{1}{e^2}$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{2e}$<br>극소 | $\nearrow$ | $e^2$ |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=e$ 에서 최대이고 최댓값은  $e^2$ ,  $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ 에서 최소이고 최솟값은  $-\frac{1}{2e}$ 이다.

038 답 최댓값: 0, 최솟값:  $-\frac{1}{e}$

$$f(x)=-\frac{\ln x}{x} \text{에서 } f'(x)=-\frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{\ln x - 1}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } \ln x=1 \quad \therefore x=e$$

구간  $[1, e^2]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |   |            |                      |            |                  |
|---------|---|------------|----------------------|------------|------------------|
| $x$     | 1 | ...        | $e$                  | ...        | $e^2$            |
| $f'(x)$ |   | -          | 0                    | +          |                  |
| $f(x)$  | 0 | $\searrow$ | $-\frac{1}{e}$<br>극소 | $\nearrow$ | $-\frac{2}{e^2}$ |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 최대이고 최댓값은 0,  $x=e$ 에서 최소이고 최솟값은  $-\frac{1}{e}$ 이다.

039 답  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\sqrt{2}$ , -1,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\sqrt{2}$ , -1

040 답 최댓값:  $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ , 최솟값:  $-\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$

$$f(x)=2 \sin x - x \text{에서 } f'(x)=2 \cos x - 1$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

구간  $[0, 2\pi]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |   |            |                                |            |                                  |            |         |
|---------|---|------------|--------------------------------|------------|----------------------------------|------------|---------|
| $x$     | 0 | ...        | $\frac{\pi}{3}$                | ...        | $\frac{5}{3}\pi$                 | ...        | $2\pi$  |
| $f'(x)$ |   | +          | 0                              | -          | 0                                | +          |         |
| $f(x)$  | 0 | $\nearrow$ | $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$<br>극대 | $\searrow$ | $-\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$<br>극소 | $\nearrow$ | $-2\pi$ |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=\frac{\pi}{3}$ 에서 최대이고 최댓값은  $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$ ,

$x=\frac{5}{3}\pi$ 에서 최소이고 최솟값은  $-\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$ 이다.

041 답 최댓값:  $\frac{\pi}{2}$ , 최솟값:  $-\frac{3}{2}\pi$

$$f(x)=x \sin x + \cos x \text{에서}$$

$$f'(x)=\sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } \cos x=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}\pi (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

구간  $[0, 2\pi]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |   |            |                       |            |                         |            |        |
|---------|---|------------|-----------------------|------------|-------------------------|------------|--------|
| $x$     | 0 | ...        | $\frac{\pi}{2}$       | ...        | $\frac{3}{2}\pi$        | ...        | $2\pi$ |
| $f'(x)$ |   | +          | 0                     | -          | 0                       | +          |        |
| $f(x)$  | 1 | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}$<br>극대 | $\searrow$ | $-\frac{3}{2}\pi$<br>극소 | $\nearrow$ | 1      |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=\frac{\pi}{2}$ 에서 최대이고 최댓값은  $\frac{\pi}{2}$ ,  $x=\frac{3}{2}\pi$ 에서 최소이고 최솟값은  $-\frac{3}{2}\pi$ 이다.

042 답 1, 1, 1, 1, 1, 2

043 답 2

$f(x)=x^2e^{ax}$ 에서

$$f'(x)=2xe^{ax}+ax^2e^{ax}=x(ax+2)e^{ax}$$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=-\frac{2}{a}$  또는  $x=0$  ( $\because e^{ax}>0$ )

$a>1$ 이므로 구간  $[-3, 0]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |                    |            |                          |            |   |
|---------|--------------------|------------|--------------------------|------------|---|
| $x$     | -3                 | ...        | $-\frac{2}{a}$           | ...        | 0 |
| $f'(x)$ |                    | +          | 0                        | -          |   |
| $f(x)$  | $\frac{9}{e^{3a}}$ | $\nearrow$ | $\frac{4}{a^2e^2}$<br>극대 | $\searrow$ | 0 |

따라서 함수  $f(x)$ 의 최댓값은  $\frac{4}{a^2e^2}$ 이므로

$$\frac{4}{a^2e^2}=\frac{1}{e^2}, a^2=4 \quad \therefore a=2 \quad (\because a>1)$$

044 답 2

$f(x)=2a\cos x+ax$ 에서

$$f'(x)=-2a\sin x+a$$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $\sin x=\frac{1}{2}$

$$\therefore x=\frac{\pi}{6} \quad (\because 0\leq x\leq \frac{\pi}{2})$$

구간  $[0, \frac{\pi}{2}]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |      |            |                                  |            |                  |
|---------|------|------------|----------------------------------|------------|------------------|
| $x$     | 0    | ...        | $\frac{\pi}{6}$                  | ...        | $\frac{\pi}{2}$  |
| $f'(x)$ |      | +          | 0                                | -          |                  |
| $f(x)$  | $2a$ | $\nearrow$ | $\sqrt{3}a+\frac{\pi}{6}a$<br>극대 | $\searrow$ | $\frac{\pi}{2}a$ |

이때  $a>0$ 이므로  $2a>\frac{\pi}{2}a$

따라서 함수  $f(x)$ 의 최솟값은  $\frac{\pi}{2}a$ 이므로

$$\frac{\pi}{2}a=\pi \quad \therefore a=2$$

045 답 3, 3,  $1-\ln 3$ , 2

046 답 0

$f(x)=e^x-x$ 라고 하면  $f'(x)=e^x-1$

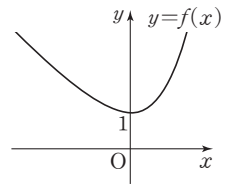
$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=0$

함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |            |   |            |
|---------|------------|---|------------|
| $x$     | ...        | 0 | ...        |
| $f'(x)$ | -          | 0 | +          |
| $f(x)$  | $\searrow$ | 1 | $\nearrow$ |

또  $\lim_{x\rightarrow-\infty}f(x)=\infty, \lim_{x\rightarrow\infty}f(x)=\infty$ 이므로  
함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는  $x$ 축과 만나지 않으므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 0이다.



047 답 1

$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$ 라고 하면  $x>0$ 이고

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은

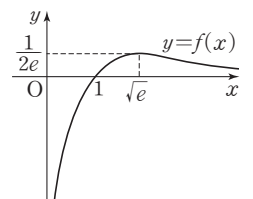
$$\ln x=-\frac{1}{2} \quad \therefore x=\sqrt{e}$$

$x>0$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |   |            |                |            |
|---------|---|------------|----------------|------------|
| $x$     | 0 | ...        | $\sqrt{e}$     | ...        |
| $f'(x)$ |   | +          | 0              | -          |
| $f(x)$  |   | $\nearrow$ | $\frac{1}{2e}$ | $\searrow$ |

또  $\lim_{x\rightarrow 0^+}f(x)=-\infty, \lim_{x\rightarrow\infty}f(x)=\infty$ 이므로  
함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는  $x$ 축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



048 답 1

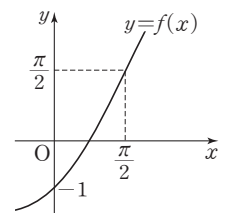
$f(x)=x-\cos x$ 라고 하면

$$f'(x)=1+\sin x$$

$f'(x)\geq 0$ 이므로 함수  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

또  $f(0)=-1<0, f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}>0$ 이므로  
함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는  $x$ 축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



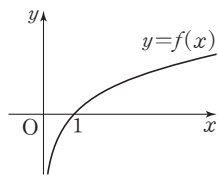
049 답 1

$f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ 이라고 하면  $x>0$ 이고

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$$

$x>0$ 에서  $f'(x)>0$ 이므로 함수  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

또  $f(1)=0$ 이므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.  
따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는  $x$ 축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



050 답 1, 1, -1, 2

051 답 2

$f(x)=e^x-x$ 라고 하면  $f'(x)=e^x-1$

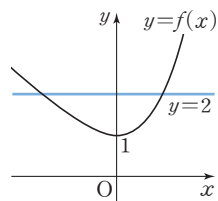
$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=0$

함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | ...        | 0 | ...        |
|---------|------------|---|------------|
| $f'(x)$ | -          | 0 | +          |
| $f(x)$  | $\searrow$ | 1 | $\nearrow$ |

또  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ 이므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 직선  $y=2$ 와 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



052 답 1

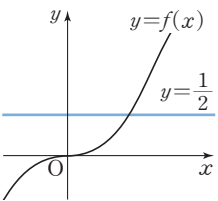
$x-\frac{1}{2}=\sin x$ 에서  $x-\sin x=\frac{1}{2}$

$f(x)=x-\sin x$ 라고 하면  $f'(x)=1-\cos x$

$f'(x) \geq 0$ 이므로 함수  $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

또  $f(0)=0$ 이므로 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 직선  $y=\frac{1}{2}$ 과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



053 답 1, 1, e, e

054 답  $-1-\ln 2$

$\ln x=2x+a$ 에서  $\ln x-2x=a$

$f(x)=\ln x-2x$ 라고 하면  $x>0$ 이고

$f'(x)=\frac{1}{x}-2$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=\frac{1}{2}$

$x>0$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | 0 | ...        | $\frac{1}{2}$ | ...        |
|---------|---|------------|---------------|------------|
| $f'(x)$ |   | +          | 0             | -          |
| $f(x)$  |   | $\nearrow$ | $-1-\ln 2$    | $\searrow$ |

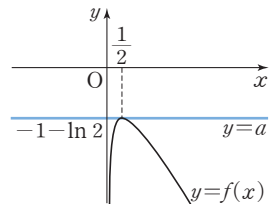
또  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 직선  $y=a$ 와 한 점에서 만나려면

$a=-1-\ln 2$



055 답  $1 \leq a < 2$

$2\sqrt{x+1}=x+a$ 에서  $2\sqrt{x+1}-x=a$

$f(x)=2\sqrt{x+1}-x$ 라고 하면  $x \geq -1$ 이고

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1=\frac{1-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $\sqrt{x+1}=1 \therefore x=0$

$x \geq -1$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

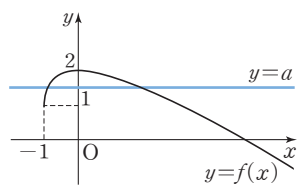
| $x$     | -1 | ...        | 0 | ...        |
|---------|----|------------|---|------------|
| $f'(x)$ |    | +          | 0 | -          |
| $f(x)$  | 1  | $\nearrow$ | 2 | $\searrow$ |

또  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프가 직선  $y=a$ 와 서로 다른 두 점에서 만나려면

$1 \leq a < 2$



056 답 0, 0, 0, 0, 0

057 답 풀이 참고

$x \geq \ln(1+x)$ 에서  $x-\ln(1+x) \geq 0$

$f(x)=x-\ln(1+x)$ 라고 하면

$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=0$

$x>-1$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$     | -1 | ...        | 0 | ...        |
|---------|----|------------|---|------------|
| $f'(x)$ |    | -          | 0 | +          |
| $f(x)$  |    | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ |

함수  $f(x)$ 는  $x=0$ 에서 최소이고 최솟값은 0이므로  $f(x) \geq 0$   
따라서  $x>-1$ 일 때, 부등식  $x \geq \ln(1+x)$ 가 성립한다.

058 답 풀이 참고

$x \geq 3-\frac{4}{x^2}$ 에서  $x+\frac{4}{x^2}-3 \geq 0$

$f(x)=x+\frac{4}{x^2}-3$ 이라고 하면

$f'(x)=1-\frac{8}{x^3}=\frac{x^3-8}{x^3}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=2$  ( $\because x^2+2x+4>0$ )

$x > 0$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |   |     |   |     |
|---------|---|-----|---|-----|
| $x$     | 0 | ... | 2 | ... |
| $f'(x)$ |   | -   | 0 | +   |
| $f(x)$  |   | ↘   | 0 | ↗   |

함수  $f(x)$ 는  $x=2$ 에서 최소이고 최솟값은 0이므로  $f(x) \geq 0$   
따라서  $x > 0$ 일 때, 부등식  $x \geq 3 - \frac{4}{x^2}$ 가 성립한다.

### 059 답 풀이 참고

$1-x \leq -\ln x$ 에서  $1-x+\ln x \leq 0$

$f(x)=1-x+\ln x$ 라고 하면  $f'(x)=-1+\frac{1}{x}$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=1$

$x > 0$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |   |     |   |     |
|---------|---|-----|---|-----|
| $x$     | 0 | ... | 1 | ... |
| $f'(x)$ |   | +   | 0 | -   |
| $f(x)$  |   | ↗   | 0 | ↘   |

함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 최대이고 최댓값은 0이므로  $f(x) \leq 0$   
따라서  $x > 0$ 일 때, 부등식  $1-x \leq -\ln x$ 가 성립한다.

### 060 답 풀이 참고

$2x+\cos x \geq 1$ 에서  $2x+\cos x-1 \geq 0$

$f(x)=2x+\cos x-1$ 이라고 하면

$f'(x)=2-\sin x$

$x \geq 0$ 일 때  $f'(x) > 0$ 이므로 함수  $f(x)$ 는 증가한다.

이때  $f(0)=0$ 이므로  $x \geq 0$ 에서  $f(x) \geq 0$

따라서  $x \geq 0$ 일 때, 부등식  $2x+\cos x \geq 1$ 이 성립한다.

### 061 답 1, 1, $-1-a$ , 1, $-1-a$ , $-1-a$ , $-1$

### 062 답 $a \leq 2-2\ln 2$

$e^x-2x \geq a$ 에서  $e^x-2x-a \geq 0$

$f(x)=e^x-2x-a$ 라고 하면  $f'(x)=e^x-2$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=\ln 2$

함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |     |              |     |
|---------|-----|--------------|-----|
| $x$     | ... | $\ln 2$      | ... |
| $f'(x)$ | -   | 0            | +   |
| $f(x)$  | ↘   | $2-2\ln 2-a$ | ↗   |

함수  $f(x)$ 는  $x=\ln 2$ 에서 최소이고 최솟값은  $2-2\ln 2-a$ 이므로  
 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$2-2\ln 2-a \geq 0$

$\therefore a \leq 2-2\ln 2$

### 063 답 $a \geq -6$

$f(x)=x+\frac{32}{x^2}+a$ 라고 하면

$f'(x)=1-\frac{64}{x^3}=\frac{x^3-64}{x^3}=\frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{x^3}$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=4$  ( $\because x^2+4x+16 > 0$ )

$x > 0$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |   |     |       |     |
|---------|---|-----|-------|-----|
| $x$     | 0 | ... | 4     | ... |
| $f'(x)$ |   | -   | 0     | +   |
| $f(x)$  |   | ↘   | $6+a$ | ↗   |

함수  $f(x)$ 는  $x=4$ 에서 최소이고 최솟값은  $6+a$ 이므로  $f(x) \geq 0$   
이 성립하려면

$6+a \geq 0 \quad \therefore a \geq -6$

### 064 답 $a < -\frac{1}{e}$

$xe^x > a$ 에서  $xe^x-a > 0$

$f(x)=xe^x-a$ 라고 하면  $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=-1$  ( $\because e^x > 0$ )

함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |     |                  |     |
|---------|-----|------------------|-----|
| $x$     | ... | -1               | ... |
| $f'(x)$ | -   | 0                | +   |
| $f(x)$  | ↘   | $-\frac{1}{e}-a$ | ↗   |

함수  $f(x)$ 는  $x=-1$ 에서 최소이고 최솟값은  $-\frac{1}{e}-a$ 이므로  
 $f(x) > 0$ 이 성립하려면

$-\frac{1}{e}-a > 0 \quad \therefore a < -\frac{1}{e}$

### 065 답 $a \leq 2-2\ln 2$

$\sqrt{x} \geq \ln x+a$ 에서  $\sqrt{x}-\ln x-a \geq 0$

$f(x)=\sqrt{x}-\ln x-a$ 라고 하면

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=4$

$x > 0$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |   |     |              |     |
|---------|---|-----|--------------|-----|
| $x$     | 0 | ... | 4            | ... |
| $f'(x)$ |   | -   | 0            | +   |
| $f(x)$  |   | ↘   | $2-2\ln 2-a$ | ↗   |

함수  $f(x)$ 는  $x=4$ 에서 최소이고 최솟값은  $2-2\ln 2-a$ 이므로  
 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$2-2\ln 2-a \geq 0 \quad \therefore a \leq 2-2\ln 2$

### 066 답 $a < 0$

$\sin x < 2x-a$ 에서  $\sin x-2x+a < 0$

$f(x)=\sin x-2x+a$ 라고 하면  $f'(x)=\cos x-2$

$x \geq 0$ 일 때  $f'(x) < 0$ 이므로 함수  $f(x)$ 는 감소한다.

$x \geq 0$ 인 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x) < 0$ 이 성립하려면

$f(0) < 0 \quad \therefore a < 0$

### 067 답 $\frac{2}{5}$

시각  $t$ 에서의 점 P의 속도를  $v$ 라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{t^2+4}$

따라서  $t=1$ 에서 점 P의 속도는  $\frac{2}{1+4}=\frac{2}{5}$

068 답  $\frac{6}{25}$

시각  $t$ 에서의 점 P의 가속도를  $a$ 라고 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{2(t^2+4) - 2t \times 2t}{(t^2+4)^2} = \frac{-2(t^2-4)}{(t^2+4)^2}$$

$$\text{따라서 } t=1 \text{에서 점 P의 가속도는 } \frac{-2(1-4)}{(1+4)^2} = \frac{6}{25}$$

069 답 2

가속도가 0이면

$$\frac{-2(t^2-4)}{(t^2+4)^2} = 0, \quad t^2-4=0$$

$$(t+2)(t-2)=0 \quad \therefore t=2 \quad (\because t>0)$$

070 답  $1-\sqrt{3}$

시각  $t$ 에서의 점 P의 속도를  $v$ 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 1 - 2 \sin 2t$$

따라서  $t = \frac{\pi}{6}$ 에서 점 P의 속도는

$$1 - 2 \sin \frac{\pi}{3} = 1 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$$

071 답 -2

시각  $t$ 에서의 점 P의 가속도를  $a$ 라고 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = -4 \cos 2t$$

따라서  $t = \frac{\pi}{6}$ 에서 점 P의 가속도는

$$-4 \cos \frac{\pi}{3} = -4 \times \frac{1}{2} = -2$$

072 답  $\frac{\pi}{12}$

운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로  $t=\alpha$ 일 때 점 P의 속도가 0이라고 하면

$$1 - 2 \sin 2\alpha = 0 \quad \therefore \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

이때  $\alpha > 0$ 이므로

$$2\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi, \frac{17}{6}\pi, \dots$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi, \frac{13}{12}\pi, \frac{17}{12}\pi, \dots$$

이때  $t = \frac{\pi}{12}$ 의 좌우에서 속도  $v$ 의 부호가 바뀌므로 점 P가 처음

으로 운동 방향을 바꾸는 시각은  $\frac{\pi}{12}$ 이다.

073 답  $2t+1, 2t+1, 2t+1, 4t^2+4t+26, 2, 2, 2, 2$

074 답  $(1+e^t, 1-e^t), \sqrt{2+2e^{2t}}, (e^t, -e^t), \sqrt{2}e^t$

$$\frac{dx}{dt} = 1+e^t, \quad \frac{dy}{dt} = 1-e^t \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의 속도는}$$

$$(1+e^t, 1-e^t)$$

따라서 시각  $t$ 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(1+e^t)^2 + (1-e^t)^2} = \sqrt{2+2e^{2t}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -e^t \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의 가속도는}$$

$$(e^t, -e^t)$$

따라서 시각  $t$ 에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{(e^t)^2 + (-e^t)^2} = \sqrt{2}e^t$$

075 답  $(-6\sin 3t, 6\cos 3t), 6, (-18\cos 3t, -18\sin 3t), 18$

$$\frac{dx}{dt} = -6\sin 3t, \quad \frac{dy}{dt} = 6\cos 3t \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의 속도}$$

는

$$(-6\sin 3t, 6\cos 3t)$$

따라서 시각  $t$ 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(-6\sin 3t)^2 + (6\cos 3t)^2}$$

$$= \sqrt{36(\sin^2 3t + \cos^2 3t)} = \sqrt{36} = 6$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -18\cos 3t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -18\sin 3t \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의}$$

가속도는

$$(-18\cos 3t, -18\sin 3t)$$

따라서 시각  $t$ 에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{(-18\cos 3t)^2 + (-18\sin 3t)^2}$$

$$= \sqrt{324(\sin^2 3t + \cos^2 3t)} = \sqrt{324} = 18$$

076 답  $(6, -2), 2\sqrt{10}, (2, 2), 2\sqrt{2}$

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 2t-8 \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의 속도는}$$

$$(2t, 2t-8)$$

따라서  $t=3$ 에서 점 P의 속도는  $(6, -2)$ 이므로 속력은

$$\sqrt{6^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2 \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의 가속도는}$$

$$(2, 2)$$

따라서  $t=3$ 에서 점 P의 가속도는  $(2, 2)$ 이므로 가속도의 크기는

$$\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

077 답  $(7, 1), 5\sqrt{2}, (2, 6), 2\sqrt{10}$

$$\frac{dx}{dt} = 2t+3, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2-6t+1 \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의 속도는}$$

$$(2t+3, 3t^2-6t+1)$$

따라서  $t=2$ 에서 점 P의 속도는  $(7, 1)$ 이므로 속력은

$$\sqrt{7^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 6t-6 \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 P의 가속도는}$$

$$(2, 6t-6)$$

따라서  $t=2$ 에서 점 P의 가속도는  $(2, 6)$ 이므로 가속도의 크기는

$$\sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$$

078 ④  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), 1, \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), 1$

$\frac{dx}{dt}=1-\cos t, \frac{dy}{dt}=\sin t$ 이므로 시각  $t$ 에서의 점 P의 속도는  $(1-\cos t, \sin t)$

따라서  $t=\frac{\pi}{3}$ 에서 점 P의 속도는  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이므로 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$\frac{d^2x}{dt^2}=\sin t, \frac{d^2y}{dt^2}=\cos t$ 이므로 시각  $t$ 에서의 점 P의 가속도는  $(\sin t, \cos t)$

따라서  $t=\frac{\pi}{3}$ 에서 점 P의 가속도는  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 이므로 가속도의 크기는

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

079 ④  $(-e^{\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}}), \sqrt{2e^{\pi}}, (-2e^{\frac{\pi}{2}}, 0), 2\sqrt{e^{\pi}}$

$$\frac{dx}{dt}=e^t \cos t - e^t \sin t = e^t(\cos t - \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt}=e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t)$$

이므로 시각  $t$ 에서의 점 P의 속도는

$$(e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$$

따라서  $t=\frac{\pi}{2}$ 에서 점 P의 속도는  $(-e^{\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{\pi}{2}})$ 이므로 속력은

$$\sqrt{(-e^{\frac{\pi}{2}})^2 + (e^{\frac{\pi}{2}})^2} = \sqrt{e^{\pi} + e^{\pi}} = \sqrt{2e^{\pi}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=e^t(\cos t - \sin t) + e^t(-\sin t - \cos t) = -2e^t \sin t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=e^t(\sin t + \cos t) + e^t(\cos t - \sin t) = 2e^t \cos t$$

이므로 시각  $t$ 에서의 점 P의 가속도는

$$(-2e^t \sin t, 2e^t \cos t)$$

따라서  $t=\frac{\pi}{2}$ 에서 점 P의 가속도는  $(-2e^{\frac{\pi}{2}}, 0)$ 이므로 가속도의 크기는

$$\sqrt{(-2e^{\frac{\pi}{2}})^2 + 0} = 2\sqrt{e^{\pi}}$$

연산  
유형

최종 점검하기

111~113쪽

|                   |      |      |      |                             |                  |
|-------------------|------|------|------|-----------------------------|------------------|
| 1 ②               | 2 ③  | 3 ③  | 4 1  | 5 ①                         | 6 ③              |
| 7 $\frac{11}{30}$ | 8 ③  | 9 ②  | 10 ③ | 11 $3\pi$                   | 12 ④             |
| 13 2              | 14 ③ | 15 ④ | 16 ① | 17 $\frac{\sqrt{e^4+1}}{e}$ | 18 $\frac{1}{2}$ |

1  $f(x)=x^4+4x^3+10$ 이라고 하면

$$f'(x)=4x^3+12x^2$$

$$f''(x)=12x^2+24x=12x(x+2)$$

$f''(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=-2$  또는  $x=0$

따라서 곡선  $y=f(x)$ 는  $-2 < x < 0$ 에서  $f''(x) < 0$ 이므로 구간  $(-2, 0)$ 에서 위로 볼록하다.

2  $f(x)=\ln(x^2+9)$ 라고 하면

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+9}$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+9)-2x \times 2x}{(x^2+9)^2}$$

$$=\frac{-2(x+3)(x-3)}{(x^2+9)^2}$$

$f''(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=-3$  또는  $x=3$

따라서 곡선  $y=f(x)$ 는  $-3 < x < 3$ 에서  $f''(x) > 0$ 이므로 구간  $(-3, 3)$ 에서 아래로 볼록하다.

따라서 이 구간에 속하는 정수  $x$ 는  $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.

3  $f(x)=(x^2+1)e^x$ 이라고 하면

$$f'(x)=2xe^x + (x^2+1)e^x = (x^2+2x+1)e^x$$

$$f''(x)=(2x+2)e^x + (x^2+2x+1)e^x$$

$$=(x^2+4x+3)e^x = (x+3)(x+1)e^x$$

$f''(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=-3$  또는  $x=-1$  ( $\because e^x > 0$ )

$x < -3, x > -1$ 에서  $f''(x) > 0$

$-3 < x < -1$ 에서  $f''(x) < 0$

따라서  $x=-3, x=-1$ 의 좌우에서  $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 모든 변곡점의  $x$ 좌표의 합은

$$-3 + (-1) = -4$$

4  $f(x)=2\sin x - x$ 라고 하면

$$f'(x)=2\cos x - 1$$

$$f''(x)=-2\sin x$$

$f''(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $\sin x=0$

$$\therefore x=\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$0 < x < \pi$ 에서  $f''(x) < 0$

$\pi < x < 2\pi$ 에서  $f''(x) > 0$

따라서  $x=\pi$ 의 좌우에서  $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 1이다.

5  $f(x)=x^2+ax+b\ln x$ 에서

$$f'(x)=2x+a+\frac{b}{x}, f''(x)=2-\frac{b}{x^2}$$

$x=\frac{1}{2}$ 에서 극대이므로  $f'(\frac{1}{2})=0$ 에서

$$1+a+2b=0 \quad \dots\dots ①$$

변곡점의  $x$ 좌표가 1이므로  $f''(1)=0$ 에서

$$2-b=0 \quad \therefore b=2$$

이를 ①에 대입하여 풀면  $a=-5$

$$\therefore a+b=-3$$

6 (i) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii)  $f(0)=0$ 이므로 그래프는 점  $(0, 0)$ 을 지난다.

$$(iii) f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$$

$$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=1$  ( $\because e^{-x} > 0$ )

$f''(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=2$  ( $\because e^{-x} > 0$ )

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

|          |            |                     |            |                        |            |
|----------|------------|---------------------|------------|------------------------|------------|
| $x$      | ...        | 1                   | ...        | 2                      | ...        |
| $f'(x)$  | +          | 0                   | -          | -                      | -          |
| $f''(x)$ | -          | -                   | -          | 0                      | +          |
| $f(x)$   | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$<br>극대 | $\searrow$ | $\frac{2}{e^2}$<br>변곡점 | $\searrow$ |

(iv)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 이므로 점근선은  $x$ 축이다.

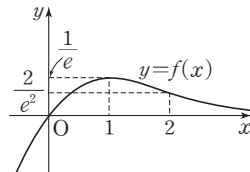
따라서 함수  $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. 치역은  $\{y \mid y \leq \frac{1}{e}\}$ 이다.

ㄴ.  $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점의 좌표는  $(2, \frac{2}{e^2})$ 이다.

ㄷ.  $y=f(x)$ 의 그래프는 구간  $(2, \infty)$ 에서  $f''(x) > 0$ 이므로 아래로 볼록하다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.



**7**  $f(x) = \frac{x}{x^2+x+4}$ 에서

$$f'(x) = \frac{x^2+x+4-x(2x+1)}{(x^2+x+4)^2} = \frac{-(x+2)(x-2)}{(x^2+x+4)^2}$$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=2$  ( $\because 1 \leq x \leq 3$ )

구간  $[1, 3]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |               |            |                     |            |                |
|---------|---------------|------------|---------------------|------------|----------------|
| $x$     | 1             | ...        | 2                   | ...        | 3              |
| $f'(x)$ |               | +          | 0                   | -          |                |
| $f(x)$  | $\frac{1}{6}$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{5}$<br>극대 | $\searrow$ | $\frac{3}{16}$ |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=2$ 에서 최대이고 최댓값은  $\frac{1}{5}$ ,  $x=1$ 에서 최소이고 최솟값은  $\frac{1}{6}$ 이므로

$$M = \frac{1}{5}, m = \frac{1}{6} \quad \therefore M+m = \frac{11}{30}$$

**8**  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$ 에서

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-1}{2\sqrt{8-x}} = \frac{\sqrt{8-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{8-x}}$$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은

$$\sqrt{8-x}-\sqrt{x}=0, \sqrt{8-x}=\sqrt{x} \quad \therefore x=4$$

구간  $[1, 7]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |              |            |         |            |              |
|---------|--------------|------------|---------|------------|--------------|
| $x$     | 1            | ...        | 4       | ...        | 7            |
| $f'(x)$ |              | +          | 0       | -          |              |
| $f(x)$  | $1+\sqrt{7}$ | $\nearrow$ | 4<br>극대 | $\searrow$ | $\sqrt{7}+1$ |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=4$ 에서 최대이고 최댓값은 4이므로  $a=4, b=4 \quad \therefore a+b=8$

**9**  $f(x) = xe^x$ 에서

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=-1$  ( $\because e^x > 0$ )

구간  $[-2, 1]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |                  |            |                      |            |     |
|---------|------------------|------------|----------------------|------------|-----|
| $x$     | -2               | ...        | -1                   | ...        | 1   |
| $f'(x)$ |                  | -          | 0                    | +          |     |
| $f(x)$  | $-\frac{2}{e^2}$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{e}$<br>극소 | $\nearrow$ | $e$ |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=1$ 에서 최대이고 최댓값은  $e$ ,  $x=-1$ 에서 최소이고 최솟값은  $-\frac{1}{e}$ 이므로 최댓값과 최솟값의 곱은

$$e \times \left(-\frac{1}{e}\right) = -1$$

**10**  $f(x) = 2x - x \ln x$ 에서

$$f'(x) = 2 - \ln x - x \times \frac{1}{x} = 1 - \ln x$$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=1$

구간  $[1, e^2]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |   |            |           |            |       |
|---------|---|------------|-----------|------------|-------|
| $x$     | 1 | ...        | $e$       | ...        | $e^2$ |
| $f'(x)$ |   | +          | 0         | -          |       |
| $f(x)$  | 2 | $\nearrow$ | $e$<br>극대 | $\searrow$ | 0     |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=e$ 에서 최대이고,  $x=e^2$ 에서 최소이므로  $\alpha=e, \beta=e^2$

$$\therefore \alpha\beta = e^3$$

**11**  $f(x) = \sin x - x \cos x$ 에서

$$f'(x) = \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x$$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=0$  또는  $\sin x=0$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\pi \text{ 또는 } x=2\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

구간  $[0, 2\pi]$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |   |            |             |            |         |
|---------|---|------------|-------------|------------|---------|
| $x$     | 0 | ...        | $\pi$       | ...        | $2\pi$  |
| $f'(x)$ |   | +          | 0           | -          |         |
| $f(x)$  | 0 | $\nearrow$ | $\pi$<br>극대 | $\searrow$ | $-2\pi$ |

따라서 함수  $f(x)$ 는  $x=\pi$ 에서 최대이고 최댓값은  $\pi$ ,  $x=2\pi$ 에서 최소이고 최솟값은  $-2\pi$ 이므로

$$M = \pi, m = -2\pi$$

$$\therefore M-m = 3\pi$$

**12**  $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln ax$ 에서

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} = \frac{(x+1)(x-1)}{2x}$$

$f'(x)=0$ 인  $x$ 의 값은  $x=1$  ( $\because 0 < x \leq 2$ )

$0 < x \leq 2$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |   |     |                                         |     |                          |
|---------|---|-----|-----------------------------------------|-----|--------------------------|
| $x$     | 0 | ... | 1                                       | ... | 2                        |
| $f'(x)$ |   | -   | 0                                       | +   |                          |
| $f(x)$  |   |     | $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln a$<br>극소 |     | $1 - \frac{1}{2} \ln 2a$ |

따라서 함수  $f(x)$ 의 최솟값은  $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln a$ 이므로

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln a = 0, \ln a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = \sqrt{e}$$

**13**  $\ln x + 1 = \frac{1}{2}x^2$ 에서  $\ln x - \frac{1}{2}x^2 = -1$

$f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$ 이라고 하면  $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{1}{x} - x$$

$f'(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은  $x = 1$  ( $\because x > 0$ )

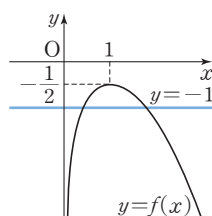
$x > 0$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |   |     |                |     |
|---------|---|-----|----------------|-----|
| $x$     | 0 | ... | 1              | ... |
| $f'(x)$ |   | +   | 0              | -   |
| $f(x)$  |   |     | $-\frac{1}{2}$ |     |

또  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ 이

므로 함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 직선  $y = -1$ 과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



**14**  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$ 이라고 하면

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 3)^2}$$

$f'(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은  $x = 0$

함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |     |               |     |
|---------|-----|---------------|-----|
| $x$     | ... | 0             | ... |
| $f'(x)$ | +   | 0             | -   |
| $f(x)$  |     | $\frac{1}{3}$ |     |

또  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ 이므로

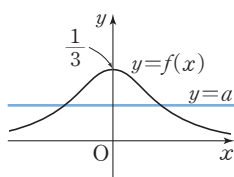
함수  $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 직선  $y = a$ 와 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$0 < a < \frac{1}{3}$$

따라서  $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{3}$ 이므로

$$\alpha + \beta = \frac{1}{3}$$



**15**  $f(x) = 2x \ln x + a$ 라고 하면

$$f'(x) = 2 \ln x + 2x \times \frac{1}{x}$$

$$= 2 \ln x + 2$$

$f'(x) = 0$ 인  $x$ 의 값은

$$\ln x = -1 \quad \therefore x = \frac{1}{e}$$

$x > 0$ 에서 함수  $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

|         |   |     |                    |     |
|---------|---|-----|--------------------|-----|
| $x$     | 0 | ... | $\frac{1}{e}$      | ... |
| $f'(x)$ |   | -   | 0                  | +   |
| $f(x)$  |   |     | $-\frac{2}{e} + a$ |     |

함수  $f(x)$ 는  $x = \frac{1}{e}$ 에서 최소이고 최솟값은  $-\frac{2}{e} + a$ 이므로

$f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-\frac{2}{e} + a \geq 0 \quad \therefore a \geq \frac{2}{e}$$

따라서  $a$ 의 최솟값은  $\frac{2}{e}$ 이다.

**16** 시각  $t$ 에서의 점 P의 속도를  $v$ , 가속도를  $a$ 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = \cos t - \sin t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\sin t - \cos t$$

따라서  $t = \frac{\pi}{2}$ 에서 점 P의 속도  $\alpha$ 와 가속도  $\beta$ 는

$$\alpha = \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= 0 - 1 = -1$$

$$\beta = -\sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2}$$

$$= -1 - 0 = -1$$

$$\therefore \alpha + \beta = -2$$

**17**  $\frac{dx}{dt} = e^t, \frac{dy}{dt} = e^{-t}$ 이므로 시각  $t$ 에서의 점 P의 속도는  $(e^t, e^{-t})$

따라서  $t = 1$ 에서 점 P의 속도는  $(e, \frac{1}{e})$ 이므로 속력은

$$\sqrt{e^2 + \left(\frac{1}{e}\right)^2} = \frac{\sqrt{e^4 + 1}}{e}$$

**18**  $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{t}}$ 이므로

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{2t\sqrt{t}}$$

시각  $t$ 에서의 점 P의 가속도는

$$\left(0, -\frac{1}{2t\sqrt{t}}\right)$$

따라서  $t = 1$ 에서 점 P의 가속도는  $(0, -\frac{1}{2})$ 이므로 가속도의 크기는

$$\sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

001 답  $4 \ln |x| + C$

$$\int \frac{4}{x} dx = 4 \int \frac{1}{x} dx = 4 \ln |x| + C$$

002 답  $-\frac{1}{4x^4} + C$

$$\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = -\frac{1}{-5+1} x^{-5+1} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$$

003 답  $\frac{5}{6} x^5 \sqrt{x} + C$

$$\int \sqrt[5]{x} dx = \int x^{\frac{1}{5}} dx = \frac{1}{\frac{1}{5}+1} x^{\frac{1}{5}+1} + C = \frac{5}{6} x^{\frac{6}{5}} \sqrt{x} + C$$

004 답  $\frac{3}{5} x^3 \sqrt{x^2} + C$

$$\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{\frac{2}{3}+1} x^{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} \sqrt{x^2} + C$$

005 답  $\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$

$$\int x \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \sqrt{x} + C$$

006 답  $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = -\frac{1}{-\frac{3}{2}+1} x^{-\frac{3}{2}+1} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

007 답  $3 \ln |x| + \frac{2}{x} + C$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-2}{x^2} dx &= \int \left( \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx = \int \left( \frac{3}{x} - 2x^{-2} \right) dx \\ &= 3 \ln |x| + 2x^{-1} + C \\ &= 3 \ln |x| + \frac{2}{x} + C \end{aligned}$$

008 답  $x^3 - 2 \ln |x| - \frac{2}{x^2} + C$

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^5 - 2x^2 + 4}{x^3} dx &= \int \left( 3x^2 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^3} \right) dx \\ &= \int \left( 3x^2 - \frac{2}{x} + 4x^{-3} \right) dx \\ &= x^3 - 2 \ln |x| - 2x^{-2} + C \\ &= x^3 - 2 \ln |x| - \frac{2}{x^2} + C \end{aligned}$$

009 답  $2\sqrt{x} + \ln |x| + C$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}+1}{x} dx &= \int \left( x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= 2x^{\frac{1}{2}} + \ln |x| + C \\ &= 2\sqrt{x} + \ln |x| + C \end{aligned}$$

010 답  $\frac{1}{3} x^3 + \frac{4}{x} + C$

$$\begin{aligned} \int \left( x + \frac{2}{x} \right) \left( x - \frac{2}{x} \right) dx &= \int \left( x^2 - \frac{4}{x^2} \right) dx = \int (x^2 - 4x^{-2}) dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 + 4x^{-1} + C \\ &= \frac{1}{3} x^3 + \frac{4}{x} + C \end{aligned}$$

011 답  $\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} \left( x + \frac{1}{x} \right) dx &= \int \left( x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx \\ &= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

012 답  $\frac{2}{3} x \sqrt{x} - 4x + 8\sqrt{x} + C$

$$\begin{aligned} \int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{\frac{1}{2}} - 4 + 4x^{-\frac{1}{2}}) dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 4x + 8x^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3} x \sqrt{x} - 4x + 8\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

013 답  $\sqrt{x} + 3, \frac{2}{3}, 3x$

014 답  $\frac{2}{3} x \sqrt{x} + x + C$

$$\begin{aligned} \int \frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} dx &= \int \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} dx \\ &= \int (\sqrt{x}+1) dx = \int (x^{\frac{1}{2}}+1) dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + x + C \\ &= \frac{2}{3} x \sqrt{x} + x + C \end{aligned}$$

015 답  $\frac{3}{5} x^3 \sqrt{x^2} - \frac{3}{4} x^3 \sqrt{x} + x + C$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1} dx &= \int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x}+1} dx \\ &= \int (\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1) dx \\ &= \int (x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1) dx \\ &= \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + x + C \\ &= \frac{3}{5} x^3 \sqrt{x^2} - \frac{3}{4} x^3 \sqrt{x} + x + C \end{aligned}$$

016 ㉮  $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x+C$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x+2}} dx - \int \frac{4}{\sqrt{x+2}} dx &= \int \frac{x-4}{\sqrt{x+2}} dx \\ &= \int \frac{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x+2}-2)}{\sqrt{x+2}} dx \\ &= \int (\sqrt{x+2}-2) dx \\ &= \int (x^{\frac{1}{2}}-2) dx \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x+C \\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x+C\end{aligned}$$

017 ㉮  $\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

$$\begin{aligned}\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx - \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx &= \int \frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx \\ &= \int \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1})(\sqrt{x+1}-1)}{\sqrt{x+1}} dx \\ &= \int \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-1) dx \\ &= \int (x-\sqrt{x}) dx \\ &= \int (x-x^{\frac{1}{2}}) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C \\ &= \frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C\end{aligned}$$

018 ㉮  $e^{x+2}+C$

$$\int e^{x+2} dx = e^2 \int e^x dx = e^2 \times e^x + C = e^{x+2} + C$$

019 ㉮  $\frac{25^x}{\ln 25} + C$

$$\int 5^{2x} dx = \int 25^x dx = \frac{25^x}{\ln 25} + C$$

020 ㉮  $3^x + C$

$$\int 3^x \ln 3 dx = \ln 3 \int 3^x dx = \ln 3 \times \frac{3^x}{\ln 3} + C = 3^x + C$$

021 ㉮  $e^{x-1} + \frac{2^x}{\ln 2} + C$

$$\begin{aligned}\int (e^{x-1} + 2^x) dx &= \frac{1}{e} \int e^x dx + \int 2^x dx \\ &= \frac{1}{e} \times e^x + \frac{2^x}{\ln 2} + C = e^{x-1} + \frac{2^x}{\ln 2} + C\end{aligned}$$

022 ㉮  $\frac{3^{x-1}}{\ln 3} - \frac{5^{x+1}}{\ln 5} + C$

$$\begin{aligned}\int (3^{x-1} - 5^{x+1}) dx &= \frac{1}{3} \int 3^x dx - 5 \int 5^x dx \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3^x}{\ln 3} - 5 \times \frac{5^x}{\ln 5} + C = \frac{3^{x-1}}{\ln 3} - \frac{5^{x+1}}{\ln 5} + C\end{aligned}$$

023 ㉮  $\frac{4^x}{\ln 4} - 4x + C$

$$\int (2^x + 2)(2^x - 2) dx = \int (4^x - 4) dx = \frac{4^x}{\ln 4} - 4x + C$$

024 ㉮  $\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + x + C$

$$\begin{aligned}\int (2^x + 1)^2 dx &= \int (4^x + 2 \times 2^x + 1) dx \\ &= \int 4^x dx + 2 \int 2^x dx + \int dx \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \times \frac{2^x}{\ln 2} + x + C \\ &= \frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + x + C\end{aligned}$$

025 ㉮  $e^x - \frac{5}{2}x^2 - \ln|x| + C$

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^x - 5x^2 - 1}{x} dx &= \int \left( e^x - 5x - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= e^x - \frac{5}{2}x^2 - \ln|x| + C\end{aligned}$$

026 ㉮  $e^x + e^{-x} + C$

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}} dx &= \int \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x}} dx \\ &= \int (e^x - e^{-x}) dx \\ &= e^x + e^{-x} + C\end{aligned}$$

027 ㉮  $\frac{2^x}{\ln 2} + x + C$

$$\begin{aligned}\int \frac{8^x + 1}{4^x - 2^x + 1} dx &= \int \frac{(2^x + 1)(4^x - 2^x + 1)}{4^x - 2^x + 1} dx \\ &= \int (2^x + 1) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + x + C\end{aligned}$$

028 ㉮  $\sin x - 2 \cos x + C$

$$\int (\cos x + 2 \sin x) dx = \sin x - 2 \cos x + C$$

029 ㉮  $-\cos x + C$

$$\begin{aligned}\int \cos x \tan x dx &= \int \left( \cos x \times \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx \\ &= \int \sin x dx = -\cos x + C\end{aligned}$$

030 ㉮  $-\cos x + \sin x + C$

$$\begin{aligned}\int \sin x (1 + \cot x) dx &= \int \left( \sin x + \sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} \right) dx \\ &= \int (\sin x + \cos x) dx \\ &= -\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

031 ㉮  $\sec x + \tan x + C$

$$\begin{aligned}\int \sec x (\tan x + \sec x) dx &= \int (\sec x \tan x + \sec^2 x) dx \\ &= \sec x + \tan x + C\end{aligned}$$

032 답  $x + \csc x + C$

$$\begin{aligned} \int \csc x (\sin x - \cot x) dx \\ &= \int (\csc x \sin x - \csc x \cot x) dx \\ &= \int \left( \frac{1}{\sin x} \times \sin x - \csc x \cot x \right) dx \\ &= \int (1 - \csc x \cot x) dx \\ &= x + \csc x + C \end{aligned}$$

033 답  $x - \sin x + C$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} dx \\ &= \int \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 + \cos x} dx \\ &= \int (1 - \cos x) dx \\ &= x - \sin x + C \end{aligned}$$

034 답  $-\cot x + x + C$

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \cos^2 x} dx &= \int \frac{1 + \sin^2 x}{\sin^2 x} dx \\ &= \int (\csc^2 x + 1) dx \\ &= -\cot x + x + C \end{aligned}$$

035 답  $2 \sin x - \tan x + C$

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \cos^3 x - 1}{1 - \sin^2 x} dx &= \int \frac{2 \cos^3 x - 1}{\cos^2 x} dx \\ &= \int (2 \cos x - \sec^2 x) dx \\ &= 2 \sin x - \tan x + C \end{aligned}$$

036 답  $\tan x - x + C$

$$\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$$

037 답  $-\cot x - 2x + C$

$$\begin{aligned} \int (\cot^2 x - 1) dx &= \int \{(\csc^2 x - 1) - 1\} dx \\ &= \int (\csc^2 x - 2) dx \\ &= -\cot x - 2x + C \end{aligned}$$

038 답  $2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}$

039 답  $\frac{2}{7} \left( \frac{1}{2}x + 3 \right)^7 + C$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + 3 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \text{이므로} \\ \int \left( \frac{1}{2}x + 3 \right)^6 dx &= \int t^6 \times 2 dt = 2 \int t^6 dt \\ &= \frac{2}{7} t^7 + C = \frac{2}{7} \left( \frac{1}{2}x + 3 \right)^7 + C \end{aligned}$$

040 답  $-\frac{1}{4(2x-5)^2} + C$

$$\begin{aligned} 2x - 5 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2 \text{이므로} \\ \int \frac{1}{(2x-5)^3} dx &= \int \frac{1}{t^3} \times \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t^{-3} dt \\ &= -\frac{1}{4t^2} + C = -\frac{1}{4(2x-5)^2} + C \end{aligned}$$

041 답  $2x, dt, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}$

042 답  $\frac{1}{4}(5+x-x^2)^4 + C$

$$\begin{aligned} 5 + x - x^2 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 1 - 2x \text{이므로} \\ \int (1-2x)(5+x-x^2)^3 dx &= \int (5+x-x^2)^3 \times (1-2x) dx \\ &= \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + C \\ &= \frac{1}{4} (5+x-x^2)^4 + C \end{aligned}$$

043 답  $\frac{1}{18}(x^3-3x+4)^6 + C$

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 4 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 3x^2 - 3 \text{이므로} \\ \int (x^2-1)(x^3-3x+4)^5 dx \\ &= \frac{1}{3} \int (x^3-3x+4)^5 \times (3x^2-3) dx \\ &= \frac{1}{3} \int t^5 dt = \frac{1}{18} t^6 + C \\ &= \frac{1}{18} (x^3-3x+4)^6 + C \end{aligned}$$

044 답  $-\frac{1}{x^2+7} + C$

$$\begin{aligned} x^2 + 7 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2x \text{이므로} \\ \int \frac{2x}{(x^2+7)^2} dx &= \int \frac{1}{(x^2+7)^2} \times 2x dx \\ &= \int \frac{1}{t^2} dt = \int t^{-2} dt \\ &= -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x^2+7} + C \end{aligned}$$

045 답  $-\frac{1}{6(x^2+4x-5)^3} + C$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 5 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2x + 4 \text{이므로} \\ \int \frac{x+2}{(x^2+4x-5)^4} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2+4x-5)^4} \times (2x+4) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^4} dt = \frac{1}{2} \int t^{-4} dt \\ &= -\frac{1}{6t^3} + C = -\frac{1}{6(x^2+4x-5)^3} + C \end{aligned}$$

046 답  $4, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$

047 ㉮  $\sqrt{2x-7}+C$ 

$2x-7=t$ 로 놓으면  $\frac{dt}{dx}=2$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{2x-7}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \sqrt{t} + C = \sqrt{2x-7} + C\end{aligned}$$

048 ㉮  $\frac{2}{5}(x+2)^2\sqrt{x+2}-\frac{4}{3}(x+2)\sqrt{x+2}+C$ 

$x+2=t$ 로 놓으면  $\frac{dt}{dx}=1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+2} dx &= \int (t-2)\sqrt{t} dt = \int (t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}}) dt \\ &= \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}t^2\sqrt{t} - \frac{4}{3}t\sqrt{t} + C \\ &= \frac{2}{5}(x+2)^2\sqrt{x+2} - \frac{4}{3}(x+2)\sqrt{x+2} + C\end{aligned}$$

049 ㉮  $\frac{2}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1}+C$ 

$x^2-1=t$ 로 놓으면  $\frac{dt}{dx}=2x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{x^2-1} dx &= \int \sqrt{x^2-1} \times 2x dx \\ &= \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}t\sqrt{t} + C \\ &= \frac{2}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1} + C\end{aligned}$$

050 ㉮  $\frac{1}{3}(x^2-2x)\sqrt{x^2-2x}+C$ 

$x^2-2x=t$ 로 놓으면  $\frac{dt}{dx}=2x-2$ 이므로

$$\begin{aligned}\int (x-1)\sqrt{x^2-2x} dx &= \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2-2x} \times (2x-2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}t\sqrt{t} + C \\ &= \frac{1}{3}(x^2-2x)\sqrt{x^2-2x} + C\end{aligned}$$

051 ㉮  $2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ 052 ㉮  $-\frac{1}{3}e^{4-3x}+C$ 

$4-3x=t$ 로 놓으면  $\frac{dt}{dx}=-3$ 이므로

$$\begin{aligned}\int e^{4-3x} dx &= \int e^t \times \left(-\frac{1}{3}\right) dt = -\frac{1}{3} \int e^t dt \\ &= -\frac{1}{3}e^t + C \\ &= -\frac{1}{3}e^{4-3x} + C\end{aligned}$$

053 ㉮  $\frac{2}{3}(e^x+1)\sqrt{e^x+1}+C$ 

$e^x+1=t$ 로 놓으면  $\frac{dt}{dx}=e^x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int e^x\sqrt{e^x+1} dx &= \int \sqrt{e^x+1} \times e^x dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}t\sqrt{t} + C \\ &= \frac{2}{3}(e^x+1)\sqrt{e^x+1} + C\end{aligned}$$

054 ㉮  $\frac{1}{3}(\ln x)^3+C$ 

$\ln x=t$ 로 놓으면  $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx &= \int (\ln x)^2 \times \frac{1}{x} dx = \int t^2 dt \\ &= \frac{1}{3}t^3 + C = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C\end{aligned}$$

055 ㉮  $-\frac{1}{2(\ln 3x)^2}+C$ 

$\ln 3x = \ln x + \ln 3 = t$ 로 놓으면  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(\ln 3x)^3} dx &= \int \frac{1}{(\ln 3x)^3} \times \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{t^3} dt \\ &= \int t^{-3} dt = -\frac{1}{2}t^{-2} + C \\ &= -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2(\ln 3x)^2} + C\end{aligned}$$

056 ㉮  $3, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$ 057 ㉮  $\frac{1}{2}\sec 2x+C$ 

$2x=t$ 로 놓으면  $\frac{dt}{dx}=2$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \sec 2x \tan 2x dx &= \int \sec t \tan t \times \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \sec t \tan t dt \\ &= \frac{1}{2} \sec t + C \\ &= \frac{1}{2} \sec 2x + C\end{aligned}$$

058 ㉮  $-\frac{1}{4}\tan(2-4x)+C$ 

$2-4x=t$ 로 놓으면  $\frac{dt}{dx}=-4$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \sec^2(2-4x) dx &= \int \sec^2 t \times \left(-\frac{1}{4}\right) dt = -\frac{1}{4} \int \sec^2 t dt \\ &= -\frac{1}{4} \tan t + C = -\frac{1}{4} \tan(2-4x) + C\end{aligned}$$

059 ㉮  $\sin x^2+C$ 

$x^2=t$ 로 놓으면  $\frac{dt}{dx}=2x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int 2x \cos x^2 dx &= \int \cos x^2 \times 2x dx = \int \cos t dt \\ &= \sin t + C = \sin x^2 + C\end{aligned}$$

060 답  $-\frac{1}{2} \cot(3x^2+2x)+C$

$3x^2+2x=t$ 로 놓으면  $\frac{dt}{dx}=6x+2$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int (3x+1) \csc^2(3x^2+2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \csc^2(3x^2+2x) \times (6x+2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \csc^2 t dt \\ &= -\frac{1}{2} \cot t + C \\ &= -\frac{1}{2} \cot(3x^2+2x) + C \end{aligned}$$

061 답  $\cos x, t^3, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \sin^4 x$

062 답  $-\frac{1}{6} \cot^6 x + C$

$\cot x=t$ 로 놓으면  $\frac{dt}{dx}=-\csc^2 x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \cot^5 x \csc^2 x dx &= -\int \cot^5 x \times (-\csc^2 x) dx \\ &= -\int t^5 dt = -\frac{1}{6} t^6 + C \\ &= -\frac{1}{6} \cot^6 x + C \end{aligned}$$

063 답  $\frac{1}{5}(1+\sin x)^5 + C$

$1+\sin x=t$ 로 놓으면  $\frac{dt}{dx}=\cos x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \cos x (1+\sin x)^4 dx &= \int (1+\sin x)^4 \times \cos x dx \\ &= \int t^4 dt = \frac{1}{5} t^5 + C \\ &= \frac{1}{5} (1+\sin x)^5 + C \end{aligned}$$

064 답  $-\frac{2}{3}(\cos x-4)\sqrt{\cos x-4}+C$

$\cos x-4=t$ 로 놓으면  $\frac{dt}{dx}=-\sin x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \sin x \sqrt{\cos x-4} dx &= -\int \sqrt{\cos x-4} \times (-\sin x) dx \\ &= -\int \sqrt{t} dt = -\int t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= -\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3} t \sqrt{t} + C \\ &= -\frac{2}{3} (\cos x-4) \sqrt{\cos x-4} + C \end{aligned}$$

065 답  $-\cos(\ln x)+C$

$\ln x=t$ 로 놓으면  $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx &= \int \sin(\ln x) \times \frac{1}{x} dx \\ &= \int \sin t dt = -\cos t + C \\ &= -\cos(\ln x) + C \end{aligned}$$

066 답  $2x, x^2-3, x^2-3$

067 답  $\frac{1}{3} \ln |x^3+3x-5|+C$

$(x^3+3x-5)'=3x^2+3$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x^3+3x-5} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{(x^3+3x-5)'}{x^3+3x-5} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln |x^3+3x-5| + C \end{aligned}$$

068 답  $\ln |e^x+x|+C$

$(e^x+x)'=e^x+1$ 이므로

$$\int \frac{e^x+1}{e^x+x} dx = \int \frac{(e^x+x)'}{e^x+x} dx = \ln |e^x+x| + C$$

069 답  $\ln |\ln x|+C$

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \ln x} dx &= \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx \\ &= \ln |\ln x| + C \end{aligned}$$

070 답  $-\ln |\cos x|+C$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 이고  $(\cos x)' = -\sin x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx \\ &= -\ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

071 답  $1, 1, x$

072 답  $2x - \ln |x+3| + C$

$\frac{2x+5}{x+3} = 2 - \frac{1}{x+3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+5}{x+3} dx &= \int \left( 2 - \frac{1}{x+3} \right) dx \\ &= 2x - \ln |x+3| + C \end{aligned}$$

073 답  $2x + \ln |2x-1| + C$

$\frac{4x}{2x-1} = 2 + \frac{2}{2x-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{4x}{2x-1} dx &= \int \left( 2 + \frac{2}{2x-1} \right) dx \\ &= 2x + \ln |2x-1| + C \end{aligned}$$

074 답  $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 7 \ln |x+2| + C$

$\frac{x^2+3}{x+2} = x-2 + \frac{7}{x+2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+3}{x+2} dx &= \int \left( x-2 + \frac{7}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 7 \ln |x+2| + C \end{aligned}$$

075 답  $x^2 + x + 3 \ln |x-3| + C$

$$\frac{2x^2-5x}{x-3} = 2x+1 + \frac{3}{x-3} \text{이므로}$$

$$\int \frac{2x^2-5x}{x-3} dx = \int \left( 2x+1 + \frac{3}{x-3} \right) dx$$

$$= x^2 + x + 3 \ln |x-3| + C$$

076 답  $\frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 \ln |x-1| + C$

$$\frac{x^2+3x+2}{x-1} = x+4 + \frac{6}{x-1} \text{이므로}$$

$$\int \frac{x^2+3x+2}{x-1} dx = \int \left( x+4 + \frac{6}{x-1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 \ln |x-1| + C$$

077 답  $\frac{1}{2}x^2 + x - \ln |2x+3| + C$

$$\frac{2x^2+5x+1}{2x+3} = x+1 - \frac{2}{2x+3} \text{이므로}$$

$$\int \frac{2x^2+5x+1}{2x+3} dx = \int \left( x+1 - \frac{2}{2x+3} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x - \ln |2x+3| + C$$

078 답  $x+1, x+1, x+1, \frac{x}{x+1}$

079 답  $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$

$$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) \text{이므로}$$

$$\int \frac{1}{(x-2)(x+2)} dx = \frac{1}{4} \int \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} (\ln |x-2| - \ln |x+2|) + C$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

080 답  $\ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C$

$$\frac{3}{x^2+3x} = \frac{3}{x(x+3)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \text{이므로}$$

$$\int \frac{3}{x^2+3x} dx = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right) dx$$

$$= \ln |x| - \ln |x+3| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C$$

081 답  $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C$

$$\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{1}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) \text{이므로}$$

$$\int \frac{1}{x^2-x-2} dx = \frac{1}{3} \int \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} (\ln |x-2| - \ln |x+1|) + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C$$

082 답  $\ln \left| \frac{x+1}{x+4} \right| + C$

$$\frac{3}{x^2+5x+4} = \frac{3}{(x+1)(x+4)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} \text{이므로}$$

$$\int \frac{3}{x^2+5x+4} dx = \int \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4} \right) dx$$

$$= \ln |x+1| - \ln |x+4| + C$$

$$= \ln \left| \frac{x+1}{x+4} \right| + C$$

083 답  $A, B, A, B, 2, 1, 2, 1, 2$

084 답  $2 \ln |x-2| - \ln |x+1| + C$

$$\frac{x+4}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \text{ (A, B는 상수)라고 하면}$$

$$\frac{x+4}{(x-2)(x+1)} = \frac{(A+B)x + A - 2B}{(x-2)(x+1)}$$

위의 식은  $x$ 에 대한 항등식이므로

$$A+B=1, A-2B=4$$

두 식을 연립하여 풀면

$$A=2, B=-1$$

$$\therefore \int \frac{x+4}{(x-2)(x+1)} dx = \int \left( \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= 2 \ln |x-2| - \ln |x+1| + C$$

085 답  $\ln |x-3| - 2 \ln |x-2| + C$

$$\frac{4-x}{x^2-5x+6} = \frac{4-x}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} \text{ (A, B는 상수)라고 하면}$$

$$\frac{4-x}{(x-3)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A - 3B}{(x-3)(x-2)}$$

위의 식은  $x$ 에 대한 항등식이므로

$$A+B=-1, -2A-3B=4$$

두 식을 연립하여 풀면

$$A=1, B=-2$$

$$\therefore \int \frac{4-x}{x^2-5x+6} dx = \int \left( \frac{1}{x-3} - \frac{2}{x-2} \right) dx$$

$$= \ln |x-3| - 2 \ln |x-2| + C$$

086 답  $\frac{3}{2} \ln |2x-1| - \ln |x+3| + C$

$$\frac{x+10}{2x^2+5x-3} = \frac{x+10}{(2x-1)(x+3)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+3} \text{ (A, B는 상수)라고 하면}$$

$$\frac{x+10}{(2x-1)(x+3)} = \frac{(A+2B)x + 3A - B}{(2x-1)(x+3)}$$

위의 식은  $x$ 에 대한 항등식이므로

$$A+2B=1, 3A-B=10$$

두 식을 연립하여 풀면

$$A=3, B=-1$$

$$\therefore \int \frac{x+10}{2x^2+5x-3} dx = \int \left( \frac{3}{2x-1} - \frac{1}{x+3} \right) dx$$

$$= \frac{3}{2} \ln |2x-1| - \ln |x+3| + C$$

087 답  $e^x, e^x, e^x, e^x, x-1$

088 답  $(3x-2)e^x+C$

$f(x)=3x+1, g'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$f'(x)=3, g(x)=e^x$

$$\begin{aligned}\therefore \int (3x+1)e^x dx &= (3x+1)e^x - \int 3e^x dx \\ &= (3x+1)e^x - 3e^x + C = (3x-2)e^x + C\end{aligned}$$

089 답  $(-x+3)e^{-x}+C$

$f(x)=x-4, g'(x)=e^{-x}$ 으로 놓으면

$f'(x)=1, g(x)=-e^{-x}$

$$\begin{aligned}\therefore \int (x-4)e^{-x} dx &= (x-4) \times (-e^{-x}) - \int 1 \times (-e^{-x}) dx \\ &= (-x+4)e^{-x} + \int e^{-x} dx \\ &= (-x+4)e^{-x} - e^{-x} + C = (-x+3)e^{-x} + C\end{aligned}$$

090 답  $2xe^{2x}+C$

$f(x)=4x+2, g'(x)=e^{2x}$ 으로 놓으면

$f'(x)=4, g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$$\begin{aligned}\therefore \int (4x+2)e^{2x} dx &= (4x+2) \times \frac{1}{2}e^{2x} - \int 4 \times \frac{1}{2}e^{2x} dx \\ &= (2x+1)e^{2x} - 2 \int e^{2x} dx \\ &= (2x+1)e^{2x} - e^{2x} + C = 2xe^{2x} + C\end{aligned}$$

091 답  $x \ln x - x + C$

$f(x)=\ln x, g'(x)=1$ 로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}, g(x)=x$

$$\therefore \int \ln x dx = \ln x \times x - \int \frac{1}{x} \times x dx = x \ln x - x + C$$

092 답  $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

$f(x)=\ln x, g'(x)=x$ 로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}, g(x)=\frac{1}{2}x^2$

$$\begin{aligned}\therefore \int x \ln x dx &= \ln x \times \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{2}x^2 dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C\end{aligned}$$

093 답  $(x^2-x) \ln 2x - \frac{1}{2}x^2 + x + C$

$f(x)=\ln 2x, g'(x)=2x-1$ 로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}, g(x)=x^2-x$

$$\begin{aligned}\therefore \int (2x-1) \ln 2x dx &= \ln 2x \times (x^2-x) - \int \frac{1}{x} \times (x^2-x) dx \\ &= (x^2-x) \ln 2x - \int (x-1) dx \\ &= (x^2-x) \ln 2x - \frac{1}{2}x^2 + x + C\end{aligned}$$

094 답  $x \sin x + \cos x + C$

$f(x)=x, g'(x)=\cos x$ 로 놓으면  $f'(x)=1, g(x)=\sin x$

$$\begin{aligned}\therefore \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

095 답  $(-3x+2)\cos x + 3\sin x + C$

$f(x)=3x-2, g'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$f'(x)=3, g(x)=-\cos x$

$$\begin{aligned}\therefore \int (3x-2)\sin x dx &= (3x-2) \times (-\cos x) - \int 3 \times (-\cos x) dx \\ &= (-3x+2)\cos x + 3 \int \cos x dx \\ &= (-3x+2)\cos x + 3\sin x + C\end{aligned}$$

096 답  $(2x+4)\sin x + 2\cos x + C$

$f(x)=2x+4, g'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$f'(x)=2, g(x)=\sin x$

$$\begin{aligned}\therefore \int (2x+4)\cos x dx &= (2x+4)\sin x - \int 2\sin x dx \\ &= (2x+4)\sin x + 2\cos x + C\end{aligned}$$

097 답  $-\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

$f(x)=x, g'(x)=\sin 2x$ 로 놓으면

$f'(x)=1, g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$

$$\begin{aligned}\therefore \int x \sin 2x dx &= x \times \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int \left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) dx \\ &= -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C\end{aligned}$$

098 답  $(x-2)\sin 3x + \frac{1}{3}\cos 3x + C$

$f(x)=3x-6, g'(x)=\cos 3x$ 로 놓으면

$f'(x)=3, g(x)=\frac{1}{3}\sin 3x$

$$\begin{aligned}\therefore \int (3x-6)\cos 3x dx &= (3x-6) \times \frac{1}{3}\sin 3x - \int 3 \times \frac{1}{3}\sin 3x dx \\ &= (x-2)\sin 3x + \frac{1}{3}\cos 3x + C\end{aligned}$$

099 답  $-\sin x, \cos x, \cos x, \sin x, \cos x, \cos x, \sin x, \cos x, \sin x + \cos x$

100 답  $(x^2-2x+2)e^x+C$

$f(x)=x^2, g'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$f'(x)=2x, g(x)=e^x$

$$\therefore \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$\int x e^x dx$ 에서  $u(x)=x, v'(x)=e^x$ 으로 놓으면  
 $u'(x)=1, v(x)=e^x$

$$\therefore \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①을 ⑦에 대입하면

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + C_1) = (x^2 - 2x + 2) e^x + C$$

### 101 $x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$

$f(x) = (\ln x)^2$ ,  $g'(x) = 1$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{2}{x} \ln x, \quad g(x) = x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int (\ln x)^2 dx &= x(\ln x)^2 - \int \frac{2}{x} \ln x \times x dx \\ &= x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$\int \ln x dx$ 에서  $u(x) = \ln x$ ,  $v'(x) = 1$ 로 놓으면

$$u'(x) = \frac{1}{x}, \quad v(x) = x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \ln x dx &= x \ln x - \int \frac{1}{x} \times x dx = x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{L} \end{aligned}$$

①을 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned} \int (\ln x)^2 dx &= x(\ln x)^2 - 2(x \ln x - x + C_1) \\ &= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C \end{aligned}$$

### 102 $-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C$

$f(x) = \sin x$ ,  $g'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = \cos x, \quad g(x) = -e^{-x}$$

$$\therefore \int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$\int e^{-x} \cos x dx$ 에서  $u(x) = \cos x$ ,  $v'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면

$$u'(x) = -\sin x, \quad v(x) = -e^{-x}$$

$$\therefore \int e^{-x} \cos x dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x dx \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①을 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \sin x dx &= -e^{-x} \sin x + (-e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x dx) \\ 2 \int e^{-x} \sin x dx &= -e^{-x}(\sin x + \cos x) \\ \therefore \int e^{-x} \sin x dx &= -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \quad f(x) &= \int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x} dx = \int \frac{x^3+1}{x} dx \\ &= \int \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{3}x^3 + \ln|x| + C \\ f(1) &= \frac{7}{3} \text{이므로 } \frac{1}{3} + C = \frac{7}{3} \quad \therefore C = 2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \ln|x| + 2 \text{이므로}$$

$$f(-3) = -9 + \ln 3 + 2 = -7 + \ln 3$$

따라서  $a = -7$ ,  $b = 3$ 이므로  $a + b = -4$

$$\begin{aligned} 2 \quad \int (e^{x+2} - 3^{x-1}) dx &= e^2 \int e^x dx - \frac{1}{3} \int 3^x dx \\ &= e^2 \times e^x - \frac{1}{3} \times \frac{3^x}{\ln 3} + C \\ &= e^{x+2} - \frac{3^{x-1}}{\ln 3} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad f(x) &= \int (e^x - e^{-x})^2 dx = \int (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} - 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C \end{aligned}$$

$f(0) = -2$ 이므로

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + C = -2 \quad \therefore C = -2$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} - 2$$

$$\begin{aligned} 4 \quad f(x) &= \int \frac{1}{1-\sin x} dx = \int \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} dx \\ &= \int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int (\sec^2 x + \sec x \tan x) dx = \tan x + \sec x + C \end{aligned}$$

$f(0) = 1$ 이므로  $1 + C = 1 \quad \therefore C = 0$

따라서  $f(x) = \tan x + \sec x$ 이므로  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} 5 \quad 6x-1 &= t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 6 \text{이므로} \\ \int (6x-1)^4 dx &= \int t^4 \times \frac{1}{6} dt = \frac{1}{6} \int t^4 dt = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} t^5 + C \\ &= \frac{1}{30} t^5 + C = \frac{1}{30} (6x-1)^5 + C \end{aligned}$$

따라서  $a = \frac{1}{30}$ ,  $b = 5$ 이므로  $ab = \frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} 6 \quad x^2+4x &= t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2x+4 \text{이므로} \\ f(x) &= \int (x+2) \sqrt{x^2+4x} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2+4x} \times (2x+4) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} t \sqrt{t} + C \\ &= \frac{1}{3} (x^2+4x) \sqrt{x^2+4x} + C \end{aligned}$$

$$f(0) = \sqrt{3} \text{이므로 } C = \sqrt{3}$$

따라서  $f(x) = \frac{1}{3} (x^2+4x) \sqrt{x^2+4x} + \sqrt{3}$ 이므로

$$f(2) = \frac{1}{3} \times (4+8) \times \sqrt{4+8} + \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

연습  
유형

최종 점검하기

128~129쪽

- |                                 |                                         |                                                            |
|---------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| 1 ②                             | 2 $e^{x+2} - \frac{3^{x-1}}{\ln 3} + C$ | 3 $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} - 2$ |
| 4 ②                             | 5 ①                                     | 6 ④                                                        |
| 7 $e^x + C$                     | 8 4                                     |                                                            |
| 9 $\frac{1}{4}(1-\cos x)^4 + C$ | 10 ③                                    | 11 16                                                      |
| 12 ⑤                            |                                         |                                                            |
| 13 ⑤                            | 14 ③                                    | 15 $-(x^2+3x+3)e^{-x} + C$                                 |

7  $x^2=t$ 로 놓으면  $\frac{dt}{dx}=2x$ 이므로

$$\int 2xe^{x^2} dx = \int e^t \times 2x dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2} + C$$

8  $f'(x) = \frac{\ln x}{x}$ 이므로  $\ln x = t$ 로 놓으면  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 에서

$$f(x) = \int \frac{\ln x}{x} dx = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

$$f(1) = 2 \text{이므로 } C = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2 \text{이므로}$$

$$f(e^2) = \frac{1}{2}(\ln e^2)^2 + 2 = \frac{1}{2} \times 2^2 + 2 = 4$$

9  $1 - \cos x = t$ 로 놓으면  $\frac{dt}{dx} = \sin x$ 이므로

$$\int \sin x (1 - \cos x)^3 dx = \int (1 - \cos x)^3 \times \sin x dx$$

$$= \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C$$

$$= \frac{1}{4}(1 - \cos x)^4 + C$$

$$10 f(x) = \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} dx = \int \frac{(e^{2x}+1)'}{e^{2x}+1} dx$$

$$= \ln |e^{2x}+1| + C$$

$$= \ln(e^{2x}+1) + C (\because e^{2x}+1 > 0)$$

$$f(0) = \ln 2 \text{이므로 } \ln 2 + C = \ln 2 \quad \therefore C = 0$$

$$\text{즉, } f(x) = \ln(e^{2x}+1) \text{이므로}$$

$$f(\ln 2) = \ln(e^{2\ln 2}+1) = \ln(e^{\ln 4}+1) = \ln(4+1) = \ln 5$$

$$\therefore a = 5$$

$$11 \frac{(x+1)^2}{x-2} = \frac{x^2+2x+1}{x-2} = x+4 + \frac{9}{x-2} \text{이므로}$$

$$f(x) = \int \frac{(x+1)^2}{x-2} dx = \int \left(x+4 + \frac{9}{x-2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 4x + 9\ln|x-2| + C$$

$$f(1) = 4 \text{이므로 } \frac{1}{2} + 4 + C = 4 \quad \therefore C = -\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 9\ln|x-2| - \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$f(3) = \frac{9}{2} + 12 - \frac{1}{2} = 16$$

$$12 \frac{5}{x^2+x-6} = \frac{5}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3} \text{이므로}$$

$$f(x) = \int \frac{5}{x^2+x-6} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}\right) dx$$

$$= \ln|x-2| - \ln|x+3| + C = \ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C$$

$$f(0) = 0 \text{이므로}$$

$$\ln\frac{2}{3} + C = 0 \quad \therefore C = \ln\frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + \ln\frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$f(-2) = \ln 4 + \ln\frac{3}{2} = \ln 6$$

$$13 \frac{x+7}{x^2+4x+3} = \frac{x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$$

(A, B는 상수)라고 하면

$$\frac{x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{(A+B)x+3A+B}{(x+1)(x+3)}$$

위의 식은  $x$ 에 대한 항등식이므로

$$A+B=1, 3A+B=7$$

두 식을 연립하여 풀면

$$A=3, B=-2$$

$$\therefore f(x) = \int \frac{x+7}{x^2+4x+3} dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+3}\right) dx$$

$$= 3\ln|x+1| - 2\ln|x+3| + C$$

$$f(0) = \ln 3 \text{이므로}$$

$$-2\ln 3 + C = \ln 3$$

$$\therefore C = 3\ln 3$$

$$\text{따라서 } f(x) = 3\ln|x+1| - 2\ln|x+3| + 3\ln 3 \text{이므로}$$

$$f(3) = 3\ln 4 - 2\ln 6 + 3\ln 3$$

$$= \ln 48$$

$$14 f(x) = \ln 2x, g'(x) = x \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore \int x \ln 2x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln 2x - \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{2}x^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln 2x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

$$= \frac{1}{4}x^2(2\ln 2x - 1) + C$$

$$\text{따라서 } a=2, b=-1 \text{이므로}$$

$$a+b=1$$

$$15 f(x) = x^2+x, g'(x) = e^{-x} \text{으로 놓으면}$$

$$f'(x) = 2x+1, g(x) = -e^{-x}$$

$$\therefore \int (x^2+x)e^{-x} dx$$

$$= (x^2+x) \times (-e^{-x}) - \int (2x+1) \times (-e^{-x}) dx$$

$$= -(x^2+x)e^{-x} + \int (2x+1)e^{-x} dx \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\int (2x+1)e^{-x} dx \text{에서 } u(x) = 2x+1, v'(x) = e^{-x} \text{으로 놓으면}$$

$$u'(x) = 2, v(x) = -e^{-x}$$

$$\therefore \int (2x+1)e^{-x} dx$$

$$= (2x+1) \times (-e^{-x}) - \int 2 \times (-e^{-x}) dx$$

$$= -(2x+1)e^{-x} - 2e^{-x} + C \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑧을 ⑦에 대입하면

$$\int (x^2+x)e^{-x} dx$$

$$= -(x^2+x)e^{-x} + \{-(2x+1)e^{-x} - 2e^{-x} + C\}$$

$$= -(x^2+3x+3)e^{-x} + C$$

## 001 답 1

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \left[ \ln |x| \right]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

002 답  $\frac{2}{3}$ 

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^3 x^{-2} dx = \left[ -x^{-1} \right]_1^3 = -\frac{1}{3} - (-1) = \frac{2}{3}$$

003 답  $\frac{14}{3}$ 

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

004 답  $\frac{4}{7}$ 

$$\int_0^1 \sqrt[4]{x^3} dx = \int_0^1 x^{\frac{3}{4}} dx = \left[ \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} \right]_0^1 = \frac{4}{7}$$

005 답  $e^2 - \frac{1}{e}$ 

$$\int_{-1}^2 e^x dx = \left[ e^x \right]_{-1}^2 = e^2 - \frac{1}{e}$$

006 답  $\frac{15}{\ln 2}$ 

$$\int_0^4 2^x dx = \left[ \frac{2^x}{\ln 2} \right]_0^4 = \frac{16}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{15}{\ln 2}$$

## 007 답 1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[ -\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$$

## 008 답 1

$$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \sec^2 x dx = \left[ \tan x \right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} = 0 - (-1) = 1$$

009 답  $4\ln 2 - \frac{5}{2}$ 

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{(2-x)^2}{x} dx &= \int_1^2 \frac{4-4x+x^2}{x} dx = \int_1^2 \left( \frac{4}{x} - 4 + x \right) dx \\ &= \left[ 4\ln |x| - 4x + \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 \\ &= (4\ln 2 - 6) - \left( -\frac{7}{2} \right) = 4\ln 2 - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

010 답  $\frac{27}{4}$ 

$$\begin{aligned} \int_1^8 \left( \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx &= \int_1^8 \left( x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}} \right) dx \\ &= \left[ \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} \right]_1^8 = 6 - \left( -\frac{3}{4} \right) = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

011 답  $e - \frac{1}{e}$ 

$$\int_0^1 (e^x + e^{-x}) dx = \left[ e^x - e^{-x} \right]_0^1 = e - \frac{1}{e}$$

012 답  $e^2 - e + \frac{4}{\ln 5}$ 

$$\begin{aligned} \int_0^1 (e^{x+1} + 5^x) dx &= \left[ e^{x+1} + \frac{5^x}{\ln 5} \right]_0^1 \\ &= e^2 + \frac{5}{\ln 5} - \left( e + \frac{1}{\ln 5} \right) \\ &= e^2 - e + \frac{4}{\ln 5} \end{aligned}$$

013 답  $\frac{\pi^2}{32} - 1$ 

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x - \sec^2 x) dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 - \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{32} - 1$$

014 답  $\frac{\pi}{2} - 1$ 

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}{1 + \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) dx \\ &= \left[ x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

015 답  $2e^2 - \frac{2}{e}$ 

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (e^x + 1) dx + \int_{-1}^2 (e^x - 1) dx &= \int_{-1}^2 (e^x + 1 + e^x - 1) dx \\ &= \int_{-1}^2 2e^x dx = \left[ 2e^x \right]_{-1}^2 \\ &= 2e^2 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

016 답  $\frac{2}{\ln 3} - 1$ 

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{9^x}{3^x + 1} dx - \int_0^1 \frac{1}{3^x + 1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{9^x - 1}{3^x + 1} dx = \int_0^1 \frac{(3^x + 1)(3^x - 1)}{3^x + 1} dx \\ &= \int_0^1 (3^x - 1) dx = \left[ \frac{3^x}{\ln 3} - x \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{\ln 3} - 1 - \frac{1}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3} - 1 \end{aligned}$$

## 017 답 4

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 1)^2 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\cos x - 1)^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + 2\cos x + 1) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - 2\cos x + 1) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos x dx = \left[ 4\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \end{aligned}$$

018 답  $2\sqrt{3} + \frac{16}{3}$

$$\begin{aligned} & \int_1^2 (\sqrt{x}+3) dx + \int_2^3 (\sqrt{x}+3) dx \\ &= \int_1^3 (\sqrt{x}+3) dx = \left[ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x \right]_1^3 \\ &= (2\sqrt{3}+9) - \frac{11}{3} = 2\sqrt{3} + \frac{16}{3} \end{aligned}$$

019 답 2

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx + \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos x - \sin x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx \\ &= \int_0^{\pi} (\sin x - \cos x) dx \\ &= \left[ -\cos x - \sin x \right]_0^{\pi} \\ &= 1 - (-1) = 2 \end{aligned}$$

020 답  $2 - \frac{1}{e}$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^2 \sqrt{e^{2x} + 2e^x + 1} dx + \int_2^0 \sqrt{e^{2x} + 2e^x + 1} dx \\ &= \int_{-1}^0 \sqrt{e^{2x} + 2e^x + 1} dx = \int_{-1}^0 \sqrt{(e^x + 1)^2} dx \\ &= \int_{-1}^0 (e^x + 1) dx = \left[ e^x + x \right]_{-1}^0 \\ &= 1 - \left( \frac{1}{e} - 1 \right) = 2 - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

021 답  $e^x, e^x, 2 - \frac{1}{e}$

022 답  $\frac{8}{3} - \pi$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^1 f(x) dx &= \int_{-\pi}^0 (\cos x - 1) dx + \int_0^1 4\sqrt{x} dx \\ &= \left[ \sin x - x \right]_{-\pi}^0 + \left[ \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{8}{3} - \pi \end{aligned}$$

023 답  $5 + \pi$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 3) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (4 \sin x - 1) dx \\ &= \left[ \sin x + 3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[ -4 \cos x - x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= 1 + \frac{3}{2}\pi + \left( 4 - \frac{\pi}{2} \right) = 5 + \pi \end{aligned}$$

024 답 1, 0, 0,  $e^x - 1$ , 0,  $e^x - x$ ,  $e + \frac{1}{e} - 2$

025 답  $\frac{4\sqrt{2}-4}{3}$

$$\begin{aligned} |\sqrt{x}-1| &= \begin{cases} \sqrt{x}-1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{x}+1 & (0 \leq x < 1) \end{cases} \text{이므로} \\ \int_0^2 |\sqrt{x}-1| dx &= \int_0^1 (-\sqrt{x}+1) dx + \int_1^2 (\sqrt{x}-1) dx \\ &= \left[ -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x \right]_0^1 + \left[ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} + \left( \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{3} \right) = \frac{4\sqrt{2}-4}{3} \end{aligned}$$

026 답 4

$$\begin{aligned} |\sin x| &= \begin{cases} \sin x & (0 \leq x \leq \pi) \\ -\sin x & (-\pi \leq x < 0) \end{cases} \text{이므로} \\ \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx &= \int_{-\pi}^0 (-\sin x) dx + \int_0^{\pi} \sin x dx \\ &= \left[ \cos x \right]_{-\pi}^0 + \left[ -\cos x \right]_0^{\pi} = 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

027 답 0

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \text{로 놓으면} \\ f(-x) &= \sin(-x) = -\sin x = -f(x) \text{이므로} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx &= 0 \end{aligned}$$

028 답  $\frac{16}{3}$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2, g(x) = x \cos x \text{로 놓으면} \\ f(-x) &= (-x)^2 = x^2 = f(x) \\ g(-x) &= -x \cos(-x) = -x \cos x = -g(x) \\ \therefore \int_{-2}^2 (x^2 + x \cos x) dx &= 2 \int_0^2 x^2 dx = 2 \left[ \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 \\ &= 2 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

029 답  $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 3x, g(x) = \cos x \text{로 놓으면} \\ f(-x) &= \sin(-3x) = -\sin 3x = -f(x) \\ g(-x) &= \cos(-x) = \cos x = g(x) \\ \therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin 3x + \cos x) dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = 2 \left[ \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

030 답  $2e - \frac{2}{e}$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x + e^{-x} \text{으로 놓으면} \\ f(-x) &= e^{-x} + e^x = f(x) \\ \therefore \int_{-1}^1 (e^x + e^{-x}) dx &= 2 \int_0^1 (e^x + e^{-x}) dx \\ &= 2 \left[ e^x - e^{-x} \right]_0^1 \\ &= 2 \left( e - \frac{1}{e} \right) = 2e - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

031 답 0

$$f(x) = x(e^{2x} + e^{-2x}) \text{으로 놓으면}$$

$$f(-x) = -x(e^{-2x} + e^{2x}) = -f(x) \text{이므로}$$

$$\int_{-2}^2 x(e^{2x} + e^{-2x}) dx = 0$$

032 답  $\frac{3}{\ln 2}$

$$f(x) = 2^x + 2^{-x}, g(x) = 5^x - 5^{-x} \text{으로 놓으면}$$

$$f(-x) = 2^{-x} + 2^x = f(x)$$

$$g(-x) = 5^{-x} - 5^x = -(5^x - 5^{-x}) = -g(x)$$

$$\therefore \int_{-1}^1 (2^x + 5^x + 2^{-x} - 5^{-x}) dx$$

$$= 2 \int_0^1 (2^x + 2^{-x}) dx = 2 \left[ \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{\ln 2} \right]_0^1$$

$$= 2 \times \left( \frac{2}{\ln 2} - \frac{2^{-1}}{\ln 2} \right) = 2 \times \frac{3}{2 \ln 2} = \frac{3}{\ln 2}$$

033 답  $-\frac{7}{2}$

$$3x - 2 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 3$$

$$x=0 \text{일 때 } t=-2, x=1 \text{일 때 } t=1 \text{이므로}$$

$$\int_0^1 (3x-2)^5 dx = \int_{-2}^1 t^5 \times \frac{1}{3} dt = \left[ \frac{1}{18} t^6 \right]_{-2}^1$$

$$= \frac{1}{18} (1 - 64) = -\frac{7}{2}$$

034 답 121

$$2x+1=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2$$

$$x=0 \text{일 때 } t=1, x=1 \text{일 때 } t=3 \text{이므로}$$

$$\int_0^1 5(2x+1)^4 dx = \int_1^3 5t^4 \times \frac{1}{2} dt = \left[ \frac{1}{2} t^5 \right]_1^3$$

$$= \frac{1}{2} (243 - 1) = 121$$

035 답  $\frac{243}{5}$

$$x^2 - 1 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2x$$

$$x=1 \text{일 때 } t=0, x=2 \text{일 때 } t=3 \text{이므로}$$

$$\int_1^2 2x(x^2-1)^4 dx = \int_0^3 (x^2-1)^4 \times 2x dx = \int_0^3 t^4 dt$$

$$= \left[ \frac{1}{5} t^5 \right]_0^3 = \frac{243}{5}$$

036 답 156

$$x^3 - x^2 + 1 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 3x^2 - 2x$$

$$x=1 \text{일 때 } t=1, x=2 \text{일 때 } t=5 \text{이므로}$$

$$\int_1^2 (3x^2 - 2x)(x^3 - x^2 + 1)^3 dx$$

$$= \int_1^2 (x^3 - x^2 + 1)^3 \times (3x^2 - 2x) dx$$

$$= \int_1^5 t^3 dt = \left[ \frac{1}{4} t^4 \right]_1^5 = \frac{1}{4} (625 - 1) = 156$$

037 답  $\frac{1}{15}$

$$2x+1=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2$$

$$x=1 \text{일 때 } t=3, x=2 \text{일 때 } t=5 \text{이므로}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{(2x+1)^2} dx = \int_3^5 \frac{1}{t^2} \times \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_3^5 t^{-2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[ -t^{-1} \right]_3^5 = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{15}$$

038 답  $\ln 5$

$$x^3 + 2x + 3 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 3x^2 + 2$$

$$x=0 \text{일 때 } t=3, x=2 \text{일 때 } t=15 \text{이므로}$$

$$\int_0^2 \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x + 3} dx = \int_3^{15} \frac{1}{t} dt = \left[ \ln |t| \right]_3^{15}$$

$$= \ln 15 - \ln 3 = \ln 5$$

039 답  $\frac{26}{3}$

$$2x-1=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2$$

$$x=1 \text{일 때 } t=1, x=5 \text{일 때 } t=9 \text{이므로}$$

$$\int_1^5 \sqrt{2x-1} dx = \int_1^9 \sqrt{t} \times \frac{1}{2} dt = \left[ \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^9$$

$$= 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

040 답  $\sqrt{7} - \sqrt{2}$

$$x^2 - 2 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2x$$

$$x=2 \text{일 때 } t=2, x=3 \text{일 때 } t=7 \text{이므로}$$

$$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-2}} dx = \int_2^7 \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{2} dt = \int_2^7 \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= \left[ t^{\frac{1}{2}} \right]_2^7 = \sqrt{7} - \sqrt{2}$$

041 답  $\frac{e^{10}-e^4}{3}$

$$3x+1=t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 3$$

$$x=1 \text{일 때 } t=4, x=3 \text{일 때 } t=10 \text{이므로}$$

$$\int_1^3 e^{3x+1} dx = \int_4^{10} e^t \times \frac{1}{3} dt$$

$$= \left[ \frac{1}{3} e^t \right]_4^{10} = \frac{e^{10} - e^4}{3}$$

042 답  $\frac{e^4-1}{2}$

$$x^2 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2x$$

$$x=0 \text{일 때 } t=0, x=2 \text{일 때 } t=4 \text{이므로}$$

$$\int_0^2 x e^{x^2} dx = \int_0^4 \frac{1}{2} e^t dt$$

$$= \left[ \frac{1}{2} e^t \right]_0^4 = \frac{e^4 - 1}{2}$$

043 답  $\ln(e+1)$

$$e^x - 1 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = e^x$$

$$x=1 \text{일 때 } t=e-1, x=2 \text{일 때 } t=e^2-1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{e^x}{e^x-1} dx &= \int_{e-1}^{e^2-1} \frac{1}{t} dt = \left[ \ln |t| \right]_{e-1}^{e^2-1} \\ &= \ln(e^2-1) - \ln(e-1) = \ln(e+1) \end{aligned}$$

044 답  $\frac{1}{6}$

$$\ln x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$x=1 \text{일 때 } t=0, x=e \text{일 때 } t=1 \text{이므로}$$

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{2x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} t^2 dt = \left[ \frac{1}{6} t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

045 답  $\ln 3$

$$\ln x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$x=e \text{일 때 } t=1, x=e^3 \text{일 때 } t=3 \text{이므로}$$

$$\int_e^{e^3} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_1^3 \frac{1}{t} dt = \left[ \ln |t| \right]_1^3 = \ln 3$$

046 답  $\frac{1}{6}$

$$\sin x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \cos x$$

$$x=0 \text{일 때 } t=0, x=\frac{\pi}{2} \text{일 때 } t=1 \text{이므로}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos x dx = \int_0^1 \frac{1}{6} t^5 dt = \left[ \frac{1}{6} t^6 \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

047 답  $\ln 2$

$$1 + \tan x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \sec^2 x$$

$$x=0 \text{일 때 } t=1, x=\frac{\pi}{4} \text{일 때 } t=2 \text{이므로}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{1 + \tan x} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \left[ \ln |t| \right]_1^2 = \ln 2$$

048 답  $\frac{5}{24}$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \sin x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos^2 x) \sin x dx \end{aligned}$$

$$\cos x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = -\sin x$$

$$x=0 \text{일 때 } t=1, x=\frac{\pi}{3} \text{일 때 } t=\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos^2 x) \sin x dx &= \int_1^{\frac{1}{2}} (1 - t^2) \times (-1) dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - t^2) dt = \left[ t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{11}{24} = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

049 답  $\cos \theta, \cos \theta, \cos \theta, \theta, \frac{\pi}{6}$

050 답  $\frac{\pi}{4}$

$$x = 2 \sin \theta \left( -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \text{로 놓으면 } \frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta$$

$$x=0 \text{일 때 } \theta=0, x=\sqrt{2} \text{일 때 } \theta=\frac{\pi}{4} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2 \theta}} \times 2 \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2 \cos \theta} \times 2 \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[ \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

051 답  $\frac{\pi}{6}$

$$x = 3 \sin \theta \left( -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \text{로 놓으면 } \frac{dx}{d\theta} = 3 \cos \theta$$

$$x=0 \text{일 때 } \theta=0, x=\frac{3}{2} \text{일 때 } \theta=\frac{\pi}{6} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{9-9\sin^2 \theta}} \times 3 \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3 \cos \theta} \times 3 \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \left[ \theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

052 답  $\sec^2 \theta, \sec^2 \theta, \sec^2 \theta, \theta, \frac{\pi}{3}$

053 답  $\frac{\pi}{8}$

$$x = 2 \tan \theta \left( -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \text{로 놓으면 } \frac{dx}{d\theta} = 2 \sec^2 \theta$$

$$x=0 \text{일 때 } \theta=0, x=2 \text{일 때 } \theta=\frac{\pi}{4} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{x^2+4} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4 \tan^2 \theta + 4} \times 2 \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4 \sec^2 \theta} \times 2 \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} d\theta = \left[ \frac{1}{2} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

054 답  $\frac{\pi}{36}$

$$x = 6 \tan \theta \left( -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \text{로 놓으면 } \frac{dx}{d\theta} = 6 \sec^2 \theta$$

$$x=0 \text{일 때 } \theta=0, x=2\sqrt{3} \text{일 때 } \theta=\frac{\pi}{6} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+36} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{36 \tan^2 \theta + 36} \times 6 \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{36 \sec^2 \theta} \times 6 \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{6} d\theta = \left[ \frac{1}{6} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{36} \end{aligned}$$

055 답  $e^2$

$$f(x)=x, g'(x)=e^x \text{으로 놓으면 } f'(x)=1, g(x)=e^x$$

$$\therefore \int_1^2 xe^x dx = \left[ xe^x \right]_1^2 - \int_1^2 1 \times e^x dx = (2e^2 - e) - \left[ e^x \right]_1^2$$

$$= 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2$$

056 답  $-\frac{6}{e}+3$

$$f(x)=3x, g'(x)=e^{-x} \text{으로 놓으면 } f'(x)=3, g(x)=-e^{-x}$$

$$\therefore \int_0^1 3xe^{-x} dx = \left[ -3xe^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 3 \times (-e^{-x}) dx$$

$$= -\frac{3}{e} - \left[ 3e^{-x} \right]_0^1$$

$$= -\frac{3}{e} - \left( \frac{3}{e} - 3 \right) = -\frac{6}{e} + 3$$

057 답  $e^2+3$

$$f(x)=2x-1, g'(x)=e^x \text{으로 놓으면 } f'(x)=2, g(x)=e^x$$

$$\therefore \int_0^2 (2x-1)e^x dx = \left[ (2x-1)e^x \right]_0^2 - \int_0^2 2 \times e^x dx$$

$$= 3e^2 + 1 - \left[ 2e^x \right]_0^2$$

$$= 3e^2 + 1 - (2e^2 - 2) = e^2 + 3$$

058 답  $(e-1)\ln 2+1$

$$f(x)=\ln 2x, g'(x)=1 \text{로 놓으면}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}, g(x)=x$$

$$\therefore \int_1^e \ln 2x dx = \left[ x \ln 2x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times x dx$$

$$= e \ln 2e - \ln 2 - \left[ x \right]_1^e$$

$$= e \ln 2 + e - \ln 2 - (e-1) = (e-1)\ln 2 + 1$$

059 답  $\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$

$$f(x)=\ln x, g'(x)=x \text{로 놓으면 } f'(x)=\frac{1}{x}, g(x)=\frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore \int_1^e x \ln x dx = \left[ \frac{1}{2}x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{1}{2}x^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \left[ \frac{1}{4}x^2 \right]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \left( \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

060 답  $-\frac{3}{e^2}+\frac{2}{e}$

$$f(x)=\ln x, g'(x)=\frac{1}{x^2} \text{로 놓으면 } f'(x)=\frac{1}{x}, g(x)=-\frac{1}{x}$$

$$\therefore \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[ -\frac{\ln x}{x} \right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{1}{x} \times \left( -\frac{1}{x} \right) dx$$

$$= -\frac{2}{e^2} + \frac{1}{e} - \left[ \frac{1}{x} \right]_e^{e^2}$$

$$= -\frac{2}{e^2} + \frac{1}{e} - \left( \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e} \right) = -\frac{3}{e^2} + \frac{2}{e}$$

061 답 1

$$f(x)=x, g'(x)=\sin x \text{로 놓으면}$$

$$f'(x)=1, g(x)=-\cos x$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \left[ -x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times (-\cos x) dx$$

$$= \left[ \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

062 답  $-\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$

$$f(x)=x-\pi, g'(x)=\cos x \text{로 놓으면}$$

$$f'(x)=1, g(x)=\sin x$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x-\pi) \cos x dx = \left[ (x-\pi) \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \times \sin x dx$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi + \left[ \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

063 답  $-\frac{1}{2}$

$$f(x)=x, g'(x)=\cos 2x \text{로 놓으면}$$

$$f'(x)=1, g(x)=\frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = \left[ \frac{1}{2}x \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \frac{1}{2} \sin 2x dx$$

$$= \left[ \frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

064 답  $-\frac{4+2\sqrt{2}}{9}$

$$f(x)=4x-\pi, g'(x)=\sin 3x \text{로 놓으면}$$

$$f'(x)=4, g(x)=-\frac{1}{3} \cos 3x$$

$$\therefore \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4x-\pi) \sin 3x dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{3}(4x-\pi) \cos 3x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \times \left( -\frac{1}{3} \cos 3x \right) dx$$

$$= \left[ \frac{4}{9} \sin 3x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{9} = -\frac{4+2\sqrt{2}}{9}$$

065 답  $\pi-2$

$$f(x)=x, g'(x)=\cos x+\sin x \text{로 놓으면}$$

$$f'(x)=1, g(x)=\sin x-\cos x$$

$$\therefore \int_0^{\pi} x(\cos x+\sin x) dx$$

$$= \left[ x(\sin x-\cos x) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \times (\sin x-\cos x) dx$$

$$= \pi - \left[ -\cos x - \sin x \right]_0^{\pi}$$

$$= \pi - (1+1) = \pi - 2$$

066 답  $e^x \sin x, e^x \cos x, -e^{\pi}-1, -e^{\pi}-1, \frac{e^{\pi}+1}{2}$

067 답  $\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}$

$f(x)=x^2, g'(x)=e^{2x}$ 으로 놓으면  $f'(x)=2x, g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^1 x^2 e^{2x} dx &= \left[ \frac{1}{2} x^2 e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 2x \times \frac{1}{2} e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \int_0^1 x e^{2x} dx \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$\int_0^1 x e^{2x} dx$ 에서  $u(x)=x, v'(x)=e^{2x}$ 으로 놓으면

$u'(x)=1, v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^1 x e^{2x} dx &= \left[ \frac{1}{2} x e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times \frac{1}{2} e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} \left[ e^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

①을 ②에 대입하면

$$\int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^2 - \left( \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4}$$

068 답  $\frac{1}{2e^{\frac{\pi}{2}}} + \frac{1}{2}$

$f(x)=\cos x, g'(x)=e^{-x}$ 으로 놓으면

$f'(x)=-\sin x, g(x)=-e^{-x}$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx &= \left[ -e^{-x} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^{-x}) \times (-\sin x) dx \\ &= 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin x dx \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin x dx$ 에서  $u(x)=\sin x, v'(x)=e^{-x}$ 으로 놓으면

$u'(x)=\cos x, v(x)=-e^{-x}$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \sin x dx &= \left[ -e^{-x} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-e^{-x}) \times \cos x dx \\ &= -e^{-\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx \quad \dots\dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

①을 ②에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx = 1 - \left( -e^{-\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx \right)$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx = e^{-\frac{\pi}{2}} + 1$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2e^{\frac{\pi}{2}}} + \frac{1}{2}$$

069 답  $k, -e^2+1, e^x-e^2+1$

070 답  $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2-e}$

$$\int_1^e f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓으면  $f(x)=\frac{1}{x}+k$

이를 ①에 대입하면  $\int_1^e \left( \frac{1}{t} + k \right) dt = k$

$$\left[ \ln |t| + kt \right]_1^e = k, \quad 1 + ke - k = k$$

$$(2-e)k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{2-e}$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2-e}$$

071 답  $f(x)=\sqrt{x}-\frac{7}{3}$

$$\int_1^4 f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓으면  $f(x)=\sqrt{x}+k$

이를 ①에 대입하면

$$\int_1^4 (\sqrt{t}+k) dt = k, \quad \left[ \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + kt \right]_1^4 = k$$

$$\frac{16}{3} + 4k - \left( \frac{2}{3} + k \right) = k, \quad 2k = -\frac{14}{3}$$

$$\therefore k = -\frac{7}{3}$$

$$\therefore f(x) = \sqrt{x} - \frac{7}{3}$$

072 답  $f(x)=\cos x + \frac{2}{2-\pi}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓으면  $f(x)=\cos x+k$

이를 ①에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + k) dt = k, \quad \left[ \sin t + kt \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = k$$

$$1 + \frac{\pi}{2}k = k, \quad \frac{2-\pi}{2}k = 1$$

$$\therefore k = \frac{2}{2-\pi}$$

$$\therefore f(x) = \cos x + \frac{2}{2-\pi}$$

073 답  $f(x)=e^{2x}+e^4-e^2$

$$\int_0^2 e^{-t} f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 놓으면  $f(x)=e^{2x}+k$

이를 ①에 대입하면

$$\int_0^2 e^{-t} (e^{2t} + k) dt = k, \quad \int_0^2 (e^t + ke^{-t}) dt = k$$

$$\left[ e^t - ke^{-t} \right]_0^2 = k, \quad (e^2 - ke^{-2}) - (1 - k) = k$$

$$ke^{-2} = e^2 - 1 \quad \therefore k = e^4 - e^2$$

$$\therefore f(x) = e^{2x} + e^4 - e^2$$

074 답  $0, -8, \ln x - 7$

075 답  $f(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

주어진 등식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**076** 답  $f(x)=2e^{2x}+3e^x$

$$\int_0^x f(t) dt = e^{2x} + ae^x - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면  $f(x)=2e^{2x}+ae^x$

①의 양변에  $x=0$ 을 대입하면  $0=1+a-4 \quad \therefore a=3$

$$\therefore f(x)=2e^{2x}+3e^x$$

**077** 답  $f(x)=2\cos 2x-6x$

$$\int_{\pi}^x f(t) dt = \sin 2x + 3ax^2 + 3\pi^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면  $f(x)=2\cos 2x+6ax$

①의 양변에  $x=\pi$ 를 대입하면

$$0=3a\pi^2+3\pi^2 \quad \therefore a=-1$$

$$\therefore f(x)=2\cos 2x-6x$$

**078** 답  $f(x)=4\ln x+\frac{e}{x}+4$

$$\int_e^x f(t) dt = 4x\ln x + a\ln x - 5e \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면  $f(x)=4\ln x+4+\frac{a}{x}$

①의 양변에  $x=e$ 를 대입하면

$$0=4e+a-5e \quad \therefore a=e$$

$$\therefore f(x)=4\ln x+\frac{e}{x}+4$$

**079** 답  $x, tf(t), xf(x), xf(x), -a\sin x+2, 0, 2\pi, -2\pi\sin x+2$

**080** 답  $f(x)=4e^{2x}$

$$\int_0^x (x-t)f(t) dt = e^{2x} - 2x - 1 \text{에서}$$

$$x\int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt = e^{2x} - 2x - 1$$

이 등식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 2e^{2x} - 2$$

$$\therefore \int_0^x f(t) dt = 2e^{2x} - 2$$

위의 등식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면  $f(x)=4e^{2x}$

**081** 답  $f(x)=-\frac{1}{x^2}-1$

$$\int_1^x (x-t)f(t) dt = \ln x + 2ax^2 + \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$x\int_1^x f(t) dt - \int_1^x tf(t) dt = \ln x + 2ax^2 + \frac{1}{2}$$

이 등식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = \frac{1}{x} + 4ax$$

$$\therefore \int_1^x f(t) dt = \frac{1}{x} + 4ax \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면  $f(x)=-\frac{1}{x^2}+4a$

①의 양변에  $x=1$ 을 대입하면  $0=1+4a \quad \therefore a=-\frac{1}{4}$

$$\therefore f(x)=-\frac{1}{x^2}-1$$

**082** 답  $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 1$

**083** 답  $-\pi$

$f(t)=t\cos t$ 라 하고, 함수  $f(t)$ 의 한 부정적분을  $F(t)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{\pi}^{x+\pi} t \cos t dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{\pi}^{x+\pi} f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x+\pi) - F(\pi)}{x} \\ &= F'(\pi) = f(\pi) \\ &= \pi \cos \pi = -\pi \end{aligned}$$

**084** 답  $e$

$f(t)=\frac{e^t}{t}$ 이라 하고, 함수  $f(t)$ 의 한 부정적분을  $F(t)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_1^{x+1} \frac{e^t}{t} dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_1^{x+1} f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x+1) - F(1)}{x} \\ &= F'(1) = f(1) = e \end{aligned}$$

**085** 답  $2^e+1$

$f(t)=2^t+\ln t$ 라 하고, 함수  $f(t)$ 의 한 부정적분을  $F(t)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{x-e} \int_e^x (2^t + \ln t) dt &= \lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{x-e} \int_e^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow e} \frac{F(x) - F(e)}{x-e} \\ &= F'(e) = f(e) \\ &= 2^e + \ln e = 2^e + 1 \end{aligned}$$

**086** 답  $\frac{1}{2}$

$f(t)=\sin t \cos t$ 라 하고, 함수  $f(t)$ 의 한 부정적분을  $F(t)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{x - \frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{4}}^x \sin t \cos t dt &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{x - \frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{4}}^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{F(x) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} \\ &= F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**087** 답  $e^{2e}$

$f(t)=e^t \ln \frac{t}{2}$ 라 하고, 함수  $f(t)$ 의 한 부정적분을  $F(t)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2e} \frac{1}{x-2e} \int_{2e}^x e^t \ln \frac{t}{2} dt &= \lim_{x \rightarrow 2e} \frac{1}{x-2e} \int_{2e}^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 2e} \frac{F(x) - F(2e)}{x-2e} \\ &= F'(2e) = f(2e) \\ &= e^{2e} \ln e = e^{2e} \end{aligned}$$

- 1 ②    2 ③    3 ⑤    4  $e^2 - \frac{1}{e^2}$     5  $\frac{3}{2}$   
 6 ③    7 ③    8  $\frac{\pi}{3}$     9 ⑤    10 ③    11  $\frac{56}{15}$   
 12  $f(x) = \frac{\pi}{4}x \cos x$     13 ④    14 ④

$$\begin{aligned} 1 \quad \int_0^1 (\sqrt{x} + e^{-x}) dx &= \left[ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - e^{-x} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{e} + 1 \\ &= \frac{5}{3} - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

따라서  $a = \frac{5}{3}$ ,  $b = 1$ 이므로  $a - b = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} 2 \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cot x) \sin x dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left( 1 + \frac{\cos x}{\sin x} \right) \sin x dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + \cos x) dx \\ &= \left[ -\cos x + \sin x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

$$3 \quad |\sin x - \cos x| = \begin{cases} \sin x - \cos x & \left( \frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi \right) \\ \cos x - \sin x & \left( 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\pi} |\sin x - \cos x| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx \\ &= \left[ \sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[ -\cos x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\ &= \sqrt{2} - 1 + 1 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$4 \quad f(x) = e^{2x} + e^{-2x} \text{에서}$$

$$f(-x) = e^{-2x} + e^{2x} = f(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 (e^{2x} + e^{-2x}) dx \\ &= 2 \int_0^1 (e^{2x} + e^{-2x}) dx \\ &= 2 \left[ \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} \right]_0^1 \\ &= 2 \left( \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2e^2} \right) \\ &= e^2 - \frac{1}{e^2} \end{aligned}$$

$$5 \quad x^3 - 3x + 4 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 3x^2 - 3$$

$x=0$ 일 때  $t=4$ ,  $x=2$ 일 때  $t=6$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x^2-1}{x^3-3x+4} dx &= \int_4^6 \frac{1}{t} \times \frac{1}{3} dt = \left[ \frac{1}{3} \ln |t| \right]_4^6 \\ &= \frac{1}{3} (\ln 6 - \ln 4) = \frac{1}{3} \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

$$6 \quad \ln x - 1 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$x=e^2$ 일 때  $t=1$ ,  $x=e^3$ 일 때  $t=2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{x(\ln x - 1)^2} dx &= \int_1^2 \frac{1}{t^2} dt = \left[ -\frac{1}{t} \right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$7 \quad 1 - \cos x = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = \sin x$$

$x=0$ 일 때  $t=0$ ,  $x=\frac{\pi}{3}$ 일 때  $t=\frac{1}{2}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos x) \sin x dx = \int_0^{\frac{1}{2}} t dt = \left[ \frac{1}{2}t^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$8 \quad x = 4 \sin \theta \left( -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \text{로 놓으면 } \frac{dx}{d\theta} = 4 \cos \theta$$

$x=0$ 일 때  $\theta=0$ ,  $x=2\sqrt{3}$ 일 때  $\theta=\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{16-16\sin^2\theta}} \times 4 \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4 \cos \theta} \times 4 \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \left[ \theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$9 \quad f(x) = 6x + 1, g'(x) = e^{3x} \text{으로 놓으면}$$

$$f'(x) = 6, g(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 (6x+1)e^{3x} dx &= \left[ \frac{1}{3}(6x+1)e^{3x} \right]_0^1 - \int_0^1 6 \times \frac{1}{3}e^{3x} dx \\ &= \frac{7}{3}e^3 - \frac{1}{3} - \left[ \frac{2}{3}e^{3x} \right]_0^1 \\ &= \frac{7}{3}e^3 - \frac{1}{3} - \left( \frac{2}{3}e^3 - \frac{2}{3} \right) = \frac{5}{3}e^3 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

따라서  $a = \frac{5}{3}$ ,  $b = \frac{1}{3}$ 이므로  $a + b = 2$

$$10 \quad f(x) = (\ln x)^2, g'(x) = x \text{로 놓으면}$$

$$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}, g(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^e x(\ln x)^2 dx &= \left[ \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e \frac{2 \ln x}{x} \times \frac{1}{2}x^2 dx \\ &= \frac{1}{2}e^2 - \int_1^e x \ln x dx \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\int_1^e x \ln x dx \text{에서 } u(x) = \ln x, v'(x) = x \text{로 놓으면}$$

$$u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^e x \ln x \, dx &= \left[ \frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{1}{2} x^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} e^2 - \left( \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{A}\end{aligned}$$

①을 ①에 대입하면

$$\int_1^e x (\ln x)^2 \, dx = \frac{1}{2} e^2 - \left( \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4}$$

**11**  $\int_0^4 f(t) \, dt = k$  ( $k$ 는 상수)  $\dots\dots \textcircled{A}$

로 놓으면  $f(x) = x\sqrt{x} + k$

이를 ①에 대입하면

$$\int_0^4 (t\sqrt{t} + k) \, dt = k, \quad \left[ \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} + kt \right]_0^4 = k$$

$$\frac{64}{5} + 4k = k \quad \therefore k = -\frac{64}{15}$$

따라서  $f(x) = x\sqrt{x} - \frac{64}{15}$  이므로

$$f(4) = 8 - \frac{64}{15} = \frac{56}{15}$$

**12**  $\int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t) \, dt = a(x \sin x + \cos x) - \frac{\pi^2}{8} \quad \dots\dots \textcircled{A}$

①의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f(x) = a(\sin x + x \cos x - \sin x) = ax \cos x$$

①의 양변에  $x = \frac{\pi}{2}$ 를 대입하면

$$0 = \frac{\pi}{2} a - \frac{\pi^2}{8} \quad \therefore a = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore f(x) = \frac{\pi}{4} x \cos x$$

**13**  $\int_0^x (x-t)f(t) \, dt = (x+a)e^x + 1$ 에서

$$x \int_0^x f(t) \, dt - \int_0^x t f(t) \, dt = (x+a)e^x + 1$$

이 등식의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t) \, dt + x f(x) - x f(x) = e^x + (x+a)e^x$$

$$\therefore \int_0^x f(t) \, dt = (x+a+1)e^x \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

①의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면

$$f(x) = e^x + (x+a+1)e^x = (x+a+2)e^x$$

①의 양변에  $x=0$ 을 대입하면

$$0 = a+1 \quad \therefore a = -1$$

따라서  $f(x) = (x+1)e^x$  이므로

$$\begin{aligned}a + f(\ln 2) &= -1 + (\ln 2 + 1)e^{\ln 2} \\ &= -1 + (\ln 2 + 1) \times 2 = 2\ln 2 + 1\end{aligned}$$

**14**  $f(t) = e^t \ln t^2$ 이라 하고, 함수  $f(t)$ 의 한 부정적분을  $F(t)$ 라고 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{x-e} \int_e^x e^t \ln t^2 \, dt &= \lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{x-e} \int_e^x f(t) \, dt \\ &= \lim_{x \rightarrow e} \frac{F(x) - F(e)}{x-e} \\ &= F'(e) = f(e) = 2e^e\end{aligned}$$

### III. 적분법

## 10 정적분의 활용

148~158쪽

**001**  $\textcircled{A} \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 1, 2, \frac{1}{3}$

**002**  $\textcircled{A} \frac{h}{n}, \frac{h}{n}, \frac{h}{n}, \frac{h}{n}, 1, 2, \frac{\pi r^2 h}{3}$

**003**  $\textcircled{A} \frac{1}{n}, \frac{k}{n}, 1, 1, \frac{1}{3}$

**004**  $\textcircled{A} \frac{2}{3}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \times \frac{1}{n}$$

이때  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a=0$ ,  $b=1$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{1}{n}, \quad x_k = \frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \times \frac{1}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x \\ &= \int_0^1 \sqrt{x} \, dx \\ &= \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

**005**  $\textcircled{A} e-1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + \dots + e^{\frac{n}{n}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} \times \frac{1}{n}$$

이때  $f(x) = e^x$ ,  $a=0$ ,  $b=1$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{1}{n}, \quad x_k = \frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} \times \frac{1}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x \\ &= \int_0^1 e^x \, dx = \left[ e^x \right]_0^1 = e-1\end{aligned}$$

**006**  $\textcircled{A} \frac{2}{\pi}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \left( \frac{k\pi}{n} \right) \times \frac{\pi}{n}$$

이때  $f(x) = \sin x$ ,  $a=0$ ,  $b=\pi$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{\pi}{n}, \quad x_k = \frac{k\pi}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \left( \frac{k\pi}{n} \right) \times \frac{\pi}{n} &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ -\cos x \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

007 답 2 ln 2 - 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left( 1 + \frac{2}{n} \right) + \ln \left( 1 + \frac{3}{n} \right) + \cdots + \ln \left( 1 + \frac{n}{n} \right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right) \times \frac{1}{n}$$

이때  $f(x) = \ln x$ ,  $a=1$ ,  $b=2$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{1}{n}, x_k = 1 + \frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right) \times \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_1^2 \ln x \, dx$$

$$= \left[ x \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \times x \, dx$$

$$= 2 \ln 2 - \left[ x \right]_1^2 = 2 \ln 2 - 1$$

008 답  $\geq, \leq, \cos x, -\cos x, 2$

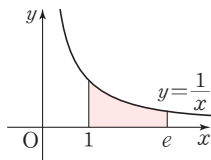
009 답 1

구간  $[1, e]$ 에서  $\frac{1}{x} > 0$ 이므로 구하는 넓이

이  $S$ 는

$$S = \int_1^e \left| \frac{1}{x} \right| dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

$$= \left[ \ln x \right]_1^e = 1$$



010 답  $\frac{4\sqrt{2}-4}{3}$

구간  $[0, 1]$ 에서  $\sqrt{x}-1 \leq 0$ 이고, 구간

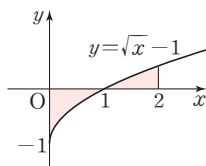
$[1, 2]$ 에서  $\sqrt{x}-1 \geq 0$ 이므로 구하는 넓이

$S$ 는

$$S = \int_0^2 |\sqrt{x}-1| dx$$

$$= \int_0^1 (-\sqrt{x}+1) dx + \int_1^2 (\sqrt{x}-1) dx$$

$$= \left[ -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x \right]_0^1 + \left[ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x \right]_1^2 = \frac{1}{3} + \left( \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{3} \right) = \frac{4\sqrt{2}-4}{3}$$



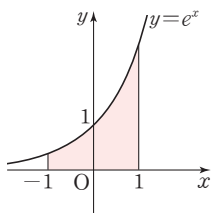
011 답  $e - \frac{1}{e}$

구간  $[-1, 1]$ 에서  $e^x > 0$ 이므로 구하는

넓이  $S$ 는

$$S = \int_{-1}^1 |e^x| dx = \int_{-1}^1 e^x dx$$

$$= \left[ e^x \right]_{-1}^1 = e - \frac{1}{e}$$



012 답 1

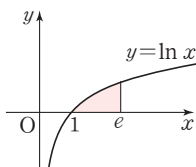
구간  $[1, e]$ 에서  $\ln x \geq 0$ 이므로 구하는

넓이  $S$ 는

$$S = \int_1^e |\ln x| dx = \int_1^e \ln x dx$$

$$= \left[ x \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times x dx$$

$$= e - \left[ x \right]_1^e = e - (e - 1) = 1$$



013 답 2

구간  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서  $\sin 2x \geq 0$ 이고,

구간  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 에서  $\sin 2x \leq 0$ 이므로

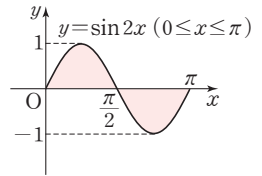
구하는 넓이  $S$ 는

$$S = \int_0^{\pi} |\sin 2x| dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\sin 2x) dx$$

$$= \left[ -\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[ \frac{1}{2} \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= 1 + 1 = 2$$



014 답  $e^y, e^y, e^y, e^2 - 1$

015 답  $\frac{3}{4}$

$y = x^3$ 에서  $x = \sqrt[3]{y}$

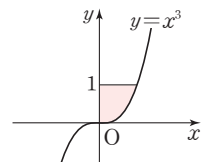
구간  $[0, 1]$ 에서  $\sqrt[3]{y} \geq 0$ 이므로 구하는 넓이

$S$ 는

$$S = \int_0^1 |\sqrt[3]{y}| dy$$

$$= \int_0^1 \sqrt[3]{y} dy$$

$$= \left[ \frac{3}{4} y^{\frac{4}{3}} \right]_0^1 = \frac{3}{4}$$



016 답  $\ln 3 + 2$

$y = \frac{1}{x-1}$ 에서  $x = \frac{1}{y} + 1$

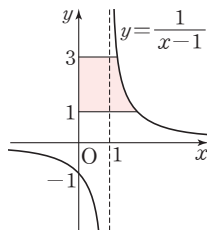
구간  $[1, 3]$ 에서  $\frac{1}{y} + 1 > 0$ 이므로 구하는

넓이  $S$ 는

$$S = \int_1^3 \left| \frac{1}{y} + 1 \right| dy$$

$$= \int_1^3 \left( \frac{1}{y} + 1 \right) dy = \left[ \ln y + y \right]_1^3$$

$$= (\ln 3 + 3) - 1 = \ln 3 + 2$$



017 답  $\frac{23}{3}$

$y = \sqrt{x+4}$ 에서  $x = y^2 - 4$

구간  $[0, 2]$ 에서  $y^2 - 4 \leq 0$ 이고, 구간

$[2, 3]$ 에서  $y^2 - 4 \geq 0$ 이므로 구하는 넓이

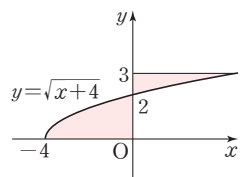
$S$ 는

$$S = \int_0^3 |y^2 - 4| dy$$

$$= \int_0^2 (-y^2 + 4) dy + \int_2^3 (y^2 - 4) dy$$

$$= \left[ -\frac{1}{3}y^3 + 4y \right]_0^2 + \left[ \frac{1}{3}y^3 - 4y \right]_2^3$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}$$



018 ④  $e^2+1$

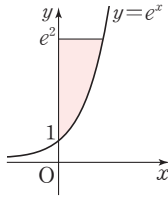
$y=e^x$ 에서  $x=\ln y$   
 구간  $[1, e^2]$ 에서  $\ln y \geq 0$ 이므로  

$$S = \int_1^{e^2} |\ln y| dy = \int_1^{e^2} \ln y dy$$

$$= [y \ln y]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{y} \times y dy$$

$$= 2e^2 - [y]_1^{e^2} = 2e^2 - (e^2 - 1)$$

$$= e^2 + 1$$



019 ④  $e + \frac{1}{e} - 2$

$y=\ln(x+1)$ 에서  $x=e^y-1$   
 구간  $[-1, 0]$ 에서  $e^y-1 \leq 0$ 이고, 구간  
 $[0, 1]$ 에서  $e^y-1 \geq 0$ 이므로 구하는 넓이  
 S는  

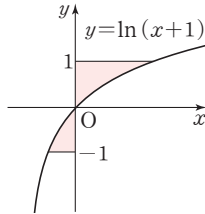
$$S = \int_{-1}^1 |e^y-1| dy$$

$$= \int_{-1}^0 (-e^y+1) dy + \int_0^1 (e^y-1) dy$$

$$= [-e^y+y]_{-1}^0 + [e^y-y]_0^1$$

$$= \frac{1}{e} + (e-2)$$

$$= e + \frac{1}{e} - 2$$



020 ④  $0, \leq, \geq, e^{-x}-e^x, e^x-e^{-x}, 2e+\frac{2}{e}-4$

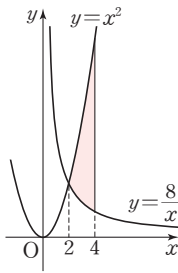
021 ④  $\frac{56}{3}-8\ln 2$

두 곡선  $y=x^2, y=\frac{8}{x}$ 의 교점의 x좌표는  
 $x^2=\frac{8}{x}$ 에서  $x^3-8=0$   
 $(x-2)(x^2+2x+4)=0$   
 $\therefore x=2 (\because x^2+2x+4>0)$   
 구간  $[2, 4]$ 에서  $x^2 \geq \frac{8}{x}$ 이므로 구하는 넓이  
 S는  

$$S = \int_2^4 \left(x^2 - \frac{8}{x}\right) dx$$

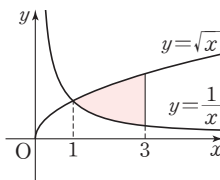
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 8\ln x\right]_2^4$$

$$= \frac{56}{3} - 8\ln 2$$



022 ④  $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}-\ln 3$

두 곡선  $y=\frac{1}{x}, y=\sqrt{x}$ 의 교점의 x좌표는  
 $\frac{1}{x}=\sqrt{x}$ 에서  $\frac{1}{x^2}=x, x^3-1=0$   
 $(x-1)(x^2+x+1)=0$   
 $\therefore x=1 (\because x^2+x+1>0)$



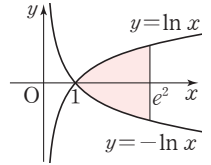
구간  $[1, 3]$ 에서  $\sqrt{x} \geq \frac{1}{x}$ 이므로 구하는 넓이 S는

$$S = \int_1^3 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \ln x\right]_1^3$$

$$= (2\sqrt{3} - \ln 3) - \frac{2}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3} - \ln 3$$

023 ④  $2e^2+2$

두 곡선  $y=\ln x, y=-\ln x$ 의 교점의 x좌  
 표는  $\ln x = -\ln x$ 에서  
 $\ln x = \ln \frac{1}{x}, x = \frac{1}{x}, x^2=1$   
 $\therefore x=1 (\because x>0)$



구간  $[1, e^2]$ 에서  $\ln x \geq -\ln x$ 이므로 구하  
 는 넓이 S는

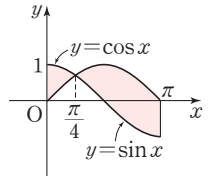
$$S = \int_1^{e^2} \{\ln x - (-\ln x)\} dx = 2 \int_1^{e^2} \ln x dx$$

$$= 2 \left( [x \ln x]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \times x dx \right)$$

$$= 2 \left( 2e^2 - [x]_1^{e^2} \right) = 2e^2 + 2$$

024 ④  $2\sqrt{2}$

구간  $[0, \pi]$ 에서 두 곡선  $y=\sin x,$   
 $y=\cos x$ 의 교점의 x좌표는  $\sin x = \cos x$   
 에서



$$\tan x = 1 \quad \therefore x = \frac{\pi}{4}$$

구간  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 에서  $\cos x \geq \sin x$ 이고, 구간

$\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ 에서  $\sin x \geq \cos x$ 이므로 구하는 넓이 S는

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx$$

$$= [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x - \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$= (\sqrt{2}-1) + (1+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

025 ④  $\frac{1}{3}$

$y=\sqrt{x-2}, y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 을 각각 x에 대하여 풀면

$$x=y^2+2, x=2y+1$$

곡선  $x=y^2+2$ 와 직선  $x=2y+1$ 의 교점의 y좌표는

$$y^2+2=2y+1 \text{에서 } (y-1)^2=0 \quad \therefore y=1$$

즉, 주어진 곡선과 직선은 점 (3, 1)에서 접한다.

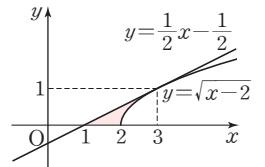
구간  $[0, 1]$ 에서  $y^2+2 \geq 2y+1$ 이므

로 구하는 넓이 S는

$$S = \int_0^1 \{y^2+2-(2y+1)\} dy$$

$$= \int_0^1 (y^2-2y+1) dy$$

$$= \left[\frac{1}{3}y^3-y^2+y\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$



026 답  $k, k \ln 2, \frac{1}{\ln 2}$

027 답 9

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^k (\sqrt{x}-2) dx=0, \left[ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x \right]_0^k=0$$

$$\frac{2}{3}k\sqrt{k}-2k=0, \sqrt{k}=3 (\because k>4)$$

$$\therefore k=9$$

028 답  $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^{\frac{8}{3}} \left( \cos \frac{\pi}{4}x - k \right) dx = 0$$

$$\left[ \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{4}x - kx \right]_0^{\frac{8}{3}} = 0$$

$$\frac{4}{\pi} \sin \frac{2}{3}\pi - \frac{8}{3}k = 0, \frac{2\sqrt{3}}{\pi} = \frac{8}{3}k$$

$$\therefore k = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

029 답 2, 1, 1,  $\geq$ , 2, 1,  $\sqrt{x}-x, \frac{1}{3}$

030 답  $\frac{1}{9}$

두 곡선  $y=f(x), y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

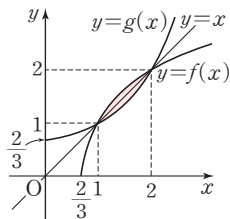
곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=x$ 의 교점의  $x$ 좌표는  $\sqrt{3x-2}=x$ 에서

$$x=1 \text{ 또는 } x=2$$

구간  $[1, 2]$ 에서  $\sqrt{3x-2} \geq x$ 이므로 구하는 넓이  $S$ 는

$$S = 2 \int_1^2 (\sqrt{3x-2} - x) dx$$

$$= 2 \left[ \frac{2}{9}(3x-2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 = \frac{1}{9}$$



031 답  $\frac{4}{\pi} - 1$

두 곡선  $y=f(x), y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

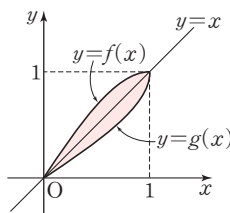
곡선  $y=f(x)$ 와 직선  $y=x$ 의 교점의  $x$ 좌표는  $\sin \frac{\pi}{2}x = x$ 에서

$$x=0 \text{ 또는 } x=1$$

구간  $[0, 1]$ 에서  $\sin \frac{\pi}{2}x \geq x$ 이므로 구하는 넓이  $S$ 는

$$S = 2 \int_0^1 \left( \sin \frac{\pi}{2}x - x \right) dx$$

$$= 2 \left[ -\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{4}{\pi} - 1$$



032 답 72

$x$ 좌표가  $x$ 일 때, 단면의 넓이는  $S(x)=3x^2+2$ 이므로 구하는 입체도형의 부피  $V$ 는

$$V = \int_0^4 S(x) dx = \int_0^4 (3x^2+2) dx$$

$$= \left[ x^3+2x \right]_0^4 = 72$$

033 답  $e^2 - \frac{1}{e^2}$

$x$ 좌표가  $x$ 일 때, 단면의 넓이는  $S(x)=e^x+e^{-x}$ 이므로 구하는 입체도형의 부피  $V$ 는

$$V = \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 (e^x+e^{-x}) dx$$

$$= \left[ e^x - e^{-x} \right]_0^2 = e^2 - \frac{1}{e^2}$$

034 답 24

$x$ 좌표가  $x$ 일 때, 단면의 넓이는  $S(x)=\cos \pi x+2$ 이므로 구하는 입체도형의 부피  $V$ 는

$$V = \int_0^{12} S(x) dx = \int_0^{12} (\cos \pi x + 2) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{\pi} \sin \pi x + 2x \right]_0^{12} = 24$$

035 답  $(\pi^2 + \pi + 2) \text{ cm}^3$

깊이가  $x \text{ cm}$ 일 때, 수면의 넓이는  $S(x)=\sin x+2x+1 (\text{cm}^2)$ 이므로 구하는 물의 부피  $V$ 는

$$V = \int_0^{\pi} S(x) dx = \int_0^{\pi} (\sin x + 2x + 1) dx$$

$$= \left[ -\cos x + x^2 + x \right]_0^{\pi}$$

$$= \pi^2 + \pi + 2 (\text{cm}^3)$$

036 답  $80 \text{ cm}^3$

높이가  $x \text{ cm}$ 일 때, 단면의 넓이  $S(x)$ 는

$$S(x) = (\sqrt{21-2x})^2 = 21-2x (\text{cm}^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피  $V$ 는

$$V = \int_0^5 S(x) dx = \int_0^5 (21-2x) dx$$

$$= \left[ 21x - x^2 \right]_0^5 = 80 (\text{cm}^3)$$

037 답  $\frac{\pi}{2}(e^8-1) \text{ cm}^3$

높이가  $x \text{ cm}$ 일 때, 단면의 넓이  $S(x)$ 는

$$S(x) = \pi(e^x)^2 = \pi e^{2x} (\text{cm}^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피  $V$ 는

$$V = \int_0^4 S(x) dx = \int_0^4 \pi e^{2x} dx$$

$$= \left[ \frac{\pi}{2} e^{2x} \right]_0^4 = \frac{\pi}{2}(e^8-1) (\text{cm}^3)$$

038 답  $\frac{\sqrt{3}}{4} \sin x, \frac{\sqrt{3}}{4} \sin x, \frac{\sqrt{3}}{2}$

039 답  $\frac{4\sqrt{3}}{15}$

$x$ 좌표가  $x(0 \leq x \leq 2)$ 인 점을 지나고  $x$ 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면은 한 변의 길이가  $-x^2+2x$ 인 정삼각형이므로 그 넓이  $S(x)$ 는

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(-x^2+2x)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^4-4x^3+4x^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피  $V$ 는

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{4}(x^4-4x^3+4x^2) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[ \frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{4\sqrt{3}}{15} \end{aligned}$$

040 답  $\frac{81}{2}$

$x$ 좌표가  $x(0 \leq x \leq 9)$ 인 점을 지나고  $x$ 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면은 한 변의 길이가  $\sqrt{9-x}$ 인 정사각형이므로 그 넓이  $S(x)$ 는

$$S(x) = 9 - x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피  $V$ 는

$$V = \int_0^9 S(x) dx = \int_0^9 (9-x) dx = \left[ 9x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^9 = \frac{81}{2}$$

041 답  $\frac{15}{2\ln 2}$

$x$ 좌표가  $x(0 \leq x \leq 2)$ 인 점을 지나고  $x$ 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면은 한 변의 길이가  $2^x$ 인 정사각형이므로 그 넓이  $S(x)$ 는

$$S(x) = (2^x)^2 = 4^x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피  $V$ 는

$$V = \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 4^x dx = \left[ \frac{4^x}{\ln 4} \right]_0^2 = \frac{15}{2\ln 2}$$

042 답  $e-3$

시각  $t=0$ 에서 점 P의 위치가 원점이므로 시각  $t=1$ 에서 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^1 (e^t - 2) dt = \left[ e^t - 2t \right]_0^1 = e - 3$$

043 답  $e^3 - 7$

시각  $t=0$ 에서  $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^3 (e^t - 2) dt = \left[ e^t - 2t \right]_0^3 = e^3 - 7$$

044 답  $e^3 + 4\ln 2 - 9$

$0 \leq t \leq \ln 2$ 에서  $v(t) \leq 0$ ,  $\ln 2 \leq t \leq 3$ 에서  $v(t) \geq 0$ 이므로 시각  $t=0$ 에서  $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^3 |e^t - 2| dt &= \int_0^{\ln 2} (-e^t + 2) dt + \int_{\ln 2}^3 (e^t - 2) dt \\ &= \left[ -e^t + 2t \right]_0^{\ln 2} + \left[ e^t - 2t \right]_{\ln 2}^3 \\ &= (-1 + 2\ln 2) + (e^3 - 8 + 2\ln 2) \\ &= e^3 + 4\ln 2 - 9 \end{aligned}$$

045 답  $1 - 2\ln 2$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은  $v(t)=0$ 일 때이므로

$$e^t - 2 = 0, e^t = 2 \quad \therefore t = \ln 2$$

따라서 시각  $t=0$ 에서 점 P의 위치가 원점이므로 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^{\ln 2} (e^t - 2) dt &= \left[ e^t - 2t \right]_0^{\ln 2} \\ &= 1 - 2\ln 2 \end{aligned}$$

046 답  $\frac{1}{\pi}$

시각  $t=0$ 에서 점 P의 위치가  $\frac{1}{\pi}$ 이므로 시각  $t=2$ 에서 점 P의 위치는

$$\frac{1}{\pi} + \int_0^2 \sin \pi t dt = \frac{1}{\pi} + \left[ -\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_0^2 = \frac{1}{\pi}$$

047 답 0

시각  $t=1$ 에서  $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^3 \sin \pi t dt = \left[ -\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_1^3 = 0$$

048 답  $\frac{4}{\pi}$

$1 \leq t \leq 2$ 에서  $v(t) \leq 0$ ,  $2 \leq t \leq 3$ 에서  $v(t) \geq 0$ 이므로 시각  $t=1$ 에서  $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_1^3 |\sin \pi t| dt &= \int_1^2 (-\sin \pi t) dt + \int_2^3 \sin \pi t dt \\ &= \left[ \frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_1^2 + \left[ -\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_2^3 \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

049 답  $\frac{3}{\pi}$

점 P가 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은  $v(t)=0$ 일 때이므로  $\sin \pi t = 0 \quad \therefore t = 1$

따라서 시각  $t=0$ 에서 점 P의 위치가  $\frac{1}{\pi}$ 이므로 점 P가 처음으로 운동 방향을 바꾸는 순간의 위치는

$$\frac{1}{\pi} + \int_0^1 \sin \pi t dt = \frac{1}{\pi} + \left[ -\frac{1}{\pi} \cos \pi t \right]_0^1 = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \frac{3}{\pi}$$

050 답  $t^2 - 1, t^2 - 1, t^2 + 1, \frac{4}{3}$

051 답  $\frac{3}{2}$

$\frac{dx}{dt} = t - 1, \frac{dy}{dt} = 2\sqrt{t}$ 이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{(t-1)^2 + (2\sqrt{t})^2} dt &= \int_0^1 \sqrt{t^2 + 2t + 1} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{(t+1)^2} dt = \int_0^1 (t+1) dt \\ &= \left[ \frac{1}{2}t^2 + t \right]_0^1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

052 답 3

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t, \frac{dy}{dt} = 3\cos t \text{이므로 점 P가 움직인 거리는}$$

$$\int_0^1 \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt$$

$$= \int_0^1 3 dt = \left[ 3t \right]_0^1 = 3$$

053 답  $\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}$

$$\frac{dx}{dt} = e^{2t} - 1, \frac{dy}{dt} = 2e^t \text{이므로 점 P가 움직인 거리는}$$

$$\int_0^1 \sqrt{(e^{2t}-1)^2 + (2e^t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{e^{4t} + 2e^{2t} + 1} dt = \int_0^1 (e^{2t} + 1) dt$$

$$= \left[ \frac{1}{2}e^{2t} + t \right]_0^1 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}$$

054 답  $e - \frac{1}{e}$

$$\frac{dx}{dt} = e^t - e^{-t}, \frac{dy}{dt} = 2 \text{이므로 점 P가 움직인 거리는}$$

$$\int_0^1 \sqrt{(e^t - e^{-t})^2 + 2^2} dt = \int_0^1 (e^t + e^{-t}) dt = \left[ e^t - e^{-t} \right]_0^1 = e - \frac{1}{e}$$

055 답  $\sqrt{2}(e-1)$

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t), \frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t) \text{이므로 점 P가 움직}$$

$$\text{인 거리는}$$

$$\int_0^1 \sqrt{\{e^t(\cos t - \sin t)\}^2 + \{e^t(\sin t + \cos t)\}^2} dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{2e^{2t}} dt = \int_0^1 \sqrt{2} e^t dt$$

$$= \sqrt{2} \left[ e^t \right]_0^1 = \sqrt{2}(e-1)$$

056 답  $\frac{17}{12}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2} \text{이므로 구하는 곡선의 길이 } l \text{은}$$

$$l = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2x^2}\right)^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x^2}\right) dx$$

$$= \left[ \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2x} \right]_1^2 = \frac{17}{12}$$

057 답  $\frac{14}{3}$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} \text{이므로 구하는 곡선의 길이 } l \text{은}$$

$$l = \int_0^3 \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1+x} dx = \left[ \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = \frac{14}{3}$$

058 답 21

$$\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{x^2+1} \text{이므로 구하는 곡선의 길이 } l \text{은}$$

$$l = \int_0^3 \sqrt{1 + (2x\sqrt{x^2+1})^2} dx = \int_0^3 (2x^2+1) dx$$

$$= \left[ \frac{2}{3}x^3 + x \right]_0^3 = 21$$

059 답  $\frac{1}{2}(e^2 - \frac{1}{e^2})$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \text{이므로 구하는 곡선의 길이 } l \text{은}$$

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right\}^2} dx = \int_0^2 \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[ e^x - e^{-x} \right]_0^2 = \frac{1}{2} \left( e^2 - \frac{1}{e^2} \right)$$

060 답  $\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} - x \right) \text{이므로 구하는 곡선의 길이 } l \text{은}$$

$$l = \int_1^e \sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} - x \right) \right\}^2} dx = \int_1^e \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + x \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \ln x + \frac{1}{2}x^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

061 답  $\ln 3 + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{4} - \frac{1}{x} \text{이므로 구하는 곡선의 길이 } l \text{은}$$

$$l = \int_1^3 \sqrt{1 + \left( \frac{x}{4} - \frac{1}{x} \right)^2} dx = \int_1^3 \left( \frac{x}{4} + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \left[ \frac{x^2}{8} + \ln x \right]_1^3 = \ln 3 + 1$$

연산  
유형

최종 점검하기

159~160쪽

|                     |                   |                     |     |     |      |
|---------------------|-------------------|---------------------|-----|-----|------|
| 1 (7) $\frac{h}{n}$ | (4) $\frac{1}{n}$ | (2) $\frac{1}{2}ah$ | 2 ① | 3 ⑤ | 4 ②  |
| 5 6                 | 6 $3 - \sqrt{3}$  | 7 ⑤                 | 8 ② | 9 4 | 10 ④ |
| 11 $\sqrt{2}$       | 12 ⑤              |                     |     |     |      |

1 색칠한 직사각형의 세로의 길이는 각각  $\frac{h}{n}$ 이므로 그 넓이의 합을  $S_n$ 이라고 하면

$$S_n = \frac{a}{n} \times \frac{h}{n} + \frac{2a}{n} \times \frac{h}{n} + \frac{3a}{n} \times \frac{h}{n} + \cdots + a \times \frac{h}{n}$$

$$= \frac{ah}{n^2} (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

$$= \frac{ah}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}ah \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이  $S$ 는

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}ah \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}ah$$

2  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^6} (1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n} \right)^5 \times \frac{1}{n}$

이때  $f(x) = x^5$ ,  $a=0$ ,  $b=1$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{1}{n}, x_k = \frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5 \times \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

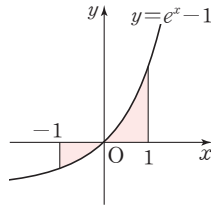
$$= \int_0^1 x^5 dx = \left[\frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

**3** 구간  $[-1, 0]$ 에서  $e^x - 1 \leq 0$ 이고, 구간  $[0, 1]$ 에서  $e^x - 1 \geq 0$ 이므로 구하는 넓이  $S$ 는

$$S = \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$$

$$= \int_{-1}^0 (-e^x + 1) dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx$$

$$= \left[-e^x + x\right]_{-1}^0 + \left[e^x - x\right]_0^1 = e + \frac{1}{e} - 2$$

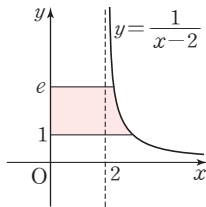


**4**  $y = \frac{1}{x-2}$ 에서  $x = 2 + \frac{1}{y}$

구간  $[1, e]$ 에서  $2 + \frac{1}{y} > 0$ 이므로 구하는 넓이  $S$ 는

$$S = \int_1^e \left|2 + \frac{1}{y}\right| dy = \int_1^e \left(2 + \frac{1}{y}\right) dy$$

$$= \left[2y + \ln y\right]_1^e = 2e - 1$$



**5** 곡선  $y = \frac{2}{x}$ 와 직선  $y = 3 - x$ 의 교점의

$x$ 좌표는  $\frac{2}{x} = 3 - x$ 에서

$$2 = 3x - x^2, x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

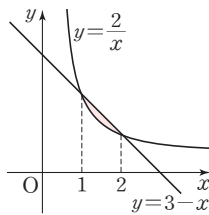
$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

구간  $[1, 2]$ 에서  $3 - x \geq \frac{2}{x}$ 이므로 구하는 넓이  $S$ 는

$$S = \int_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{x}\right) dx = \left[3x - \frac{1}{2}x^2 - 2\ln x\right]_1^2$$

$$= (4 - 2\ln 2) - \frac{5}{2} = \frac{3}{2} - \ln 4$$

따라서  $a = \frac{3}{2}$ ,  $b = 4$ 이므로  $ab = 6$



**6** 구간  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서 두 곡선  $y = \sqrt{3} \cos x$ ,

$y = \sin x$ 의 교점의  $x$ 좌표는

$$\sqrt{3} \cos x = \sin x \text{에서 } \tan x = \sqrt{3}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3}$$

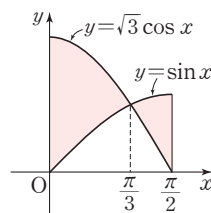
구간  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 에서  $\sqrt{3} \cos x \geq \sin x$ 이고,

구간  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 에서  $\sin x \geq \sqrt{3} \cos x$ 이므로 구하는 넓이  $S$ 는

$$S = \int_0^{\pi/3} (\sqrt{3} \cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/3}^{\pi/2} (\sin x - \sqrt{3} \cos x) dx$$

$$= \left[\sqrt{3} \sin x + \cos x\right]_0^{\pi/3} + \left[-\cos x - \sqrt{3} \sin x\right]_{\pi/3}^{\pi/2}$$

$$= 1 + (-\sqrt{3} + 2) = 3 - \sqrt{3}$$



**7** 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^1 \left(3 \sin \frac{\pi}{2} x - k\right) dx = 0, \left[-\frac{6}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} x - kx\right]_0^1 = 0$$

$$-k + \frac{6}{\pi} = 0 \quad \therefore k = \frac{6}{\pi}$$

**8** 두 곡선  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선  $y = f(x)$ 과 직선  $y = x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

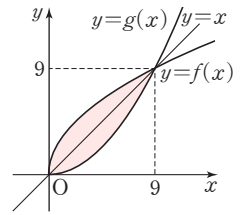
곡선  $y = f(x)$ 과 직선  $y = x$ 의 교점의  $x$ 좌표는  $3\sqrt{x} = x$ 에서

$$9x = x^2, x(x-9) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 9$$

구간  $[0, 9]$ 에서  $3\sqrt{x} \geq x$ 이므로 구하는 넓이  $S$ 는

$$S = 2 \int_0^9 (3\sqrt{x} - x) dx = 2 \left[2x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^9 = 27$$



**9**  $x$ 좌표가  $x \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 인 점을 지나고  $x$ 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면은 한 변의 길이가  $\sqrt{2} \cos x$ 인 정사각형이므로 그 넓이  $S(x)$ 는

$$S(x) = 2 \cos x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피  $V$ 는

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} S(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos x dx = \left[2 \sin x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4$$

**10** 시각  $t=0$ 에서  $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량  $m$ 은

$$m = \int_0^3 \cos \frac{\pi}{2} t dt = \left[\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} t\right]_0^3 = -\frac{2}{\pi}$$

$0 \leq t \leq 1$ 에서  $v(t) \geq 0$ ,  $1 \leq t \leq 3$ 에서  $v(t) \leq 0$ 이므로 시각  $t=0$ 에서  $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리  $n$ 은

$$n = \int_0^3 \left|\cos \frac{\pi}{2} t\right| dt = \int_0^1 \cos \frac{\pi}{2} t dt + \int_1^3 (-\cos \frac{\pi}{2} t) dt$$

$$= \left[\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} t\right]_0^1 + \left[-\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} t\right]_1^3 = \frac{2}{\pi} + \left(\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\right) = \frac{6}{\pi}$$

$$\therefore m + n = -\frac{2}{\pi} + \frac{6}{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

**11**  $\frac{dx}{dt} = \cos t + \sin t$ ,  $\frac{dy}{dt} = \cos t - \sin t$ 이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^1 \sqrt{(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2} dt$$

$$= \int_0^1 \sqrt{2} dt = \left[\sqrt{2}t\right]_0^1 = \sqrt{2}$$

**12**  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$ 이므로 구하는 곡선의 길이  $l$ 은

$$l = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2} dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \ln x\right]_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{3}{4}$$

따라서  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{3}{4}$ 이므로  $a + b = \frac{5}{4}$

• MEMO •

