

미적분

정답과 해설



개념편

정답과 해설

I-1 01 수열의 극한

1 수열의 수렴과 발산

문제

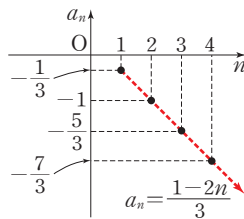
10쪽

01-1 답 (1) 발산 (2) 수렴, 0 (3) 발산

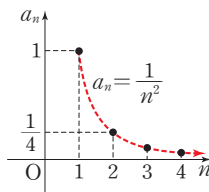
(4) 발산 (5) 수렴, 1 (6) 수렴, 2

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하고 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례대로 대입하여 a_n 의 값의 변화를 그래프로 나타낸 후 수열의 수렴, 발산을 판정한다.

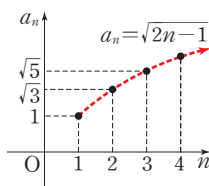
(1) 오른쪽 그림과 같이 n 의 값이 한없이 커질 때 a_n 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.



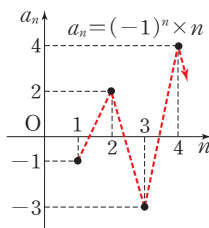
(2) 오른쪽 그림과 같이 n 의 값이 한없이 커질 때 a_n 의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 수렴하고, 극한값은 0이다.



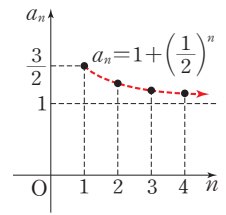
(3) 오른쪽 그림과 같이 n 의 값이 한없이 커질 때 a_n 의 값도 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.



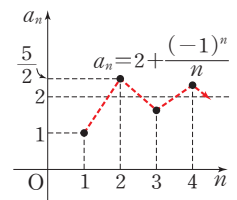
(4) 오른쪽 그림과 같이 n 의 값이 한없이 커질 때 a_n 의 값은 어느 한 값에 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.



(5) 오른쪽 그림과 같이 n 의 값이 한없이 커질 때 a_n 의 값은 1에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 수렴하고, 극한값은 1이다.



(6) 오른쪽 그림과 같이 n 의 값이 한없이 커질 때 a_n 의 값은 2에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 수렴하고, 극한값은 2이다.



2 수열의 극한값의 계산

개념 CHECK

12쪽

1 답 (1) 6 (2) -1 (3) -30 (4) -1

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n + 3) = -\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = -(-3) + 3 = 6$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + 4b_n) = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3 \times (-3) + 4 \times 2 = -1$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} 5a_n b_n = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 5 \times (-3) \times 2 = -30$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n}{3b_n} = \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{3 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{2 \times (-3)}{3 \times 2} = -1$$

2 답 (1) 2 (2) 1 (3) -3 (4) $\frac{1}{2}$

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 - 0 = 1$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} - 3 \right) \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = \left(2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = (0 - 3)(1 + 0) = -3$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

02-1 답 2

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 4) = 2$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 4 = 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$$

수열 $\{b_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + 3) = 5$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 5$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{2a_n - 5b_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 5 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \\ &= \frac{6 - 2}{2 \times 6 - 5 \times 2} = 2 \end{aligned}$$

02-2 답 -6

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 수렴하므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2b_n) = 4 \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$$

$$\therefore \alpha + 2\beta = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 5b_n) = 17 \text{에서}$$

$$2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 5 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 17$$

$$\therefore 2\alpha - 5\beta = 17 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $\alpha = 6$, $\beta = -1$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{6}{-1} = -6$$

02-3 답 3

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 수렴하므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 4 \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$$

$$\therefore \alpha + \beta = 4$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 10 \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = 10$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 10$$

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \text{이므로}$$

$$16 = 10 + 2\alpha\beta$$

$$\therefore \alpha\beta = 3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha\beta = 3$$

다른 풀이

두 수열 $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n^2 + b_n^2\}$ 이 수렴하므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \{ (a_n + b_n)^2 - (a_n^2 + b_n^2) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) \} \\ &= \frac{1}{2} (16 - 10) = 3 \end{aligned}$$

03-1 답 (1) ∞ (2) $\frac{3}{2}$ (3) 0 (4) $\frac{1}{2}$

(1) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n}{3n^2 - 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \frac{1}{n}}{3 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = \infty$$

(2) 식을 전개한 후 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2 으로 각각 나누면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(3n-5)}{(2n+1)(n+3)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n - 10}{2n^2 + 7n + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n} - \frac{10}{n^2}}{2 + \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2}} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(3) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{2 + \frac{1}{n}} = 0$$

(4) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 $\sqrt{n}$ 으로 각각 나누면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

03-2 답 1

분모, 분자를 분모의 최고차항인 n 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

이때 $a \neq 0$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로

$$a = 0$$

이를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 1 \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore a + b = 0 + 1 = 1$$

04-1 ㉡ (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{2n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{2n^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{4n^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{4} = \frac{1}{4} \\
 (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^2-1}{2^2} \times \frac{3^2-1}{3^2} \times \frac{4^2-1}{4^2} \times \cdots \times \frac{n^2-1}{n^2}\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \times \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{(4-1)(4+1)}{4^2} \times \cdots \times \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 \times 3}{2 \times 2} \times \frac{2 \times 4}{3 \times 3} \times \frac{3 \times 5}{4 \times 4} \right. \\
 &\quad \left. \times \cdots \times \frac{(n-1)(n+1)}{n \times n} \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

04-2 ㉡ $\frac{1}{4}$

첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n+1$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k+1) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + n = n^2 + 2n$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_n a_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n}{(2n+1)\{2(n+1)+1\}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n}{4n^2+8n+3} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{4+\frac{8}{n}+\frac{3}{n^2}} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

05-1 ㉡ (1) $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$

(1) 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2+1}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+5n} + \sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+5n} + \sqrt{n^2+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-1}{\sqrt{n^2+5n} + \sqrt{n^2+1}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

(2) 분모를 유리화하면

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4n+2}-n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+4n+2}+n}{(\sqrt{n^2+4n+2}-n)(\sqrt{n^2+4n+2}+n)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+4n+2}+n}{4n+2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}+1}{4+\frac{2}{n}} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

05-2 ㉡ 4

주어진 식의 좌변의 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+an} - \sqrt{n^2+3}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+an} - \sqrt{n^2+3})(\sqrt{n^2+an} + \sqrt{n^2+3})}{\sqrt{n^2+an} + \sqrt{n^2+3}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an-3}{\sqrt{n^2+an} + \sqrt{n^2+3}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}} + \sqrt{1+\frac{3}{n^2}}} = \frac{a}{2}
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{2} = 2$ 이므로

$$a = 4$$

06-1 ㉡ $\frac{2}{5}$

$$\begin{aligned}
 6+8+10+\cdots+(2n+4) &= \sum_{k=1}^n (2k+4) \\
 &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + 4n \\
 &= n^2 + 5n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1+3+5+\cdots+(2n-1) &= \sum_{k=1}^n (2k-1) \\
 &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2
 \end{aligned}$$

이를 주어진 극한에 대입하면

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{6+8+10+\cdots+(2n+4)} - \sqrt{1+3+5+\cdots+(2n-1)}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+5n} - \sqrt{n^2}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+5n}-n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+5n}+n}{(\sqrt{n^2+5n}-n)(\sqrt{n^2+5n}+n)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+5n}+n}{5n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1}{5} = \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

06-2 $\frac{1}{2}$

주어진 수열은

$$\sqrt{1 \times 2} - 1, \sqrt{2 \times 3} - 2, \sqrt{3 \times 4} - 3, \sqrt{4 \times 5} - 4, \dots$$

이므로 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \sqrt{n(n+1)} - n = \sqrt{n^2 + n} - n$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

06-3 -2

이차방정식 $x^2 - x + n - \sqrt{n^2 + n} = 0$ 의 두 근이 a_n, b_n 이

므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n + b_n = 1, a_n b_n = n - \sqrt{n^2 + n}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{a_n b_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n - \sqrt{n^2 + n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 + n}}{(n - \sqrt{n^2 + n})(n + \sqrt{n^2 + n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n^2 + n}}{-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{-1} = -2 \end{aligned}$$

07-1 $(1) 3 \quad (2) 1 \quad (3) -4$

(1) $\frac{3a_n - 2}{2a_n + 1} = b_n$ 으로 놓으면

$$3a_n - 2 = b_n(2a_n + 1), a_n(3 - 2b_n) = b_n + 2$$

$$\therefore a_n = \frac{b_n + 2}{3 - 2b_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n + 2}{3 - 2b_n} = \frac{1 + 2}{3 - 2 \times 1} = 3$$

(2) $(2n^2 + n + 1)a_n = b_n$ 으로 놓으면

$$a_n = \frac{b_n}{2n^2 + n + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \times \frac{b_n}{2n^2 + n + 1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2 + n + 1} \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= \frac{1}{2} \times 2 = 1 \end{aligned}$$

(3) $2a_n - b_n = c_n$ 으로 놓으면

$$b_n = 2a_n - c_n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$$

①을 구하는 극한에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + b_n - 1}{3a_n - 2b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + (2a_n - c_n) - 1}{3a_n - 2(2a_n - c_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4a_n - c_n - 1}{-a_n + 2c_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{c_n}{a_n} - \frac{1}{a_n}}{-1 + \frac{2c_n}{a_n}} = -4 \end{aligned}$$

다른 풀이

(2) 수렴하는 수열의 곱으로 식을 변형하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n^2}{2n^2 + n + 1} \times (2n^2 + n + 1)a_n \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2 + n + 1} \times \lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 + n + 1)a_n \\ &= \frac{1}{2} \times 2 = 1 \end{aligned}$$

08-1 $\frac{5}{(n+1)^2}$

$5n^2 + 2n - 3 < a_n < 5n^2 + 3n + 1$ 의 각 변을 $(n+1)^2$ 으로 나누면

$$\frac{5n^2 + 2n - 3}{(n+1)^2} < \frac{a_n}{(n+1)^2} < \frac{5n^2 + 3n + 1}{(n+1)^2}$$

$$\therefore \frac{5n^2 + 2n - 3}{n^2 + 2n + 1} < \frac{a_n}{(n+1)^2} < \frac{5n^2 + 3n + 1}{n^2 + 2n + 1}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 2n - 3}{n^2 + 2n + 1} = 5, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3n + 1}{n^2 + 2n + 1} = 5$ 이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(n+1)^2} = 5$$

08-2 -1

$$\frac{1}{3n^3 + 2n + 3} < \frac{a_n + 3}{6n^3 + n^2} < \frac{1}{3n^3 - n + 2} \text{의 각 변에}$$

$6n^3 + n^2$ 을 곱하면

$$\frac{6n^3 + n^2}{3n^3 + 2n + 3} < a_n + 3 < \frac{6n^3 + n^2}{3n^3 - n + 2}$$

$$\therefore \frac{6n^3 + n^2}{3n^3 + 2n + 3} - 3 < a_n < \frac{6n^3 + n^2}{3n^3 - n + 2} - 3$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^3 + n^2}{3n^3 + 2n + 3} - 3 \right) = 2 - 3 = -1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^3 + n^2}{3n^3 - n + 2} - 3 \right) = 2 - 3 = -1 \text{이므로 수열의 극한}$$

의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$$

08-3 [답] 1

$2n-1 < na_n < \sqrt{4n^2+2n}$ 의 각 변에 $\frac{n}{2n^2-1}$ 을 곱하면

$$\frac{n(2n-1)}{2n^2-1} < \frac{n^2 a_n}{2n^2-1} < \frac{n\sqrt{4n^2+2n}}{2n^2-1}$$

$$\therefore \frac{2n^2-n}{2n^2-1} < \frac{n^2 a_n}{2n^2-1} < \frac{\sqrt{4n^4+2n^3}}{2n^2-1}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-n}{2n^2-1} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^4+2n^3}}{2n^2-1} = 1$ 이므로 수열

의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 a_n}{2n^2-1} = 1$$

다른 풀이

$2n-1 < na_n < \sqrt{4n^2+2n}$ 의 각 변을 n 으로 나누면

$$\frac{2n-1}{n} < a_n < \frac{\sqrt{4n^2+2n}}{n}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+2n}}{n} = 2$ 이므로 수열의

극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 a_n}{2n^2-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2-1} \times \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

09-1 [답] ㄱ, ㄹ

ㄱ. $a_n < b_n$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 이면 n 의 값이 한없이 커질 때

a_n 의 값도 한없이 커지므로 b_n 의 값도 한없이 커진다.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$$

ㄴ. [반례] $\{a_n\}: 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

$\{b_n\}: 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ 이지만

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$$

ㄷ. [반례] $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n$ 이라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ (발산)} \text{이지만}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \times n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

즉, 수열 $\{a_n b_n\}$ 은 수렴한다.

ㄹ. [반례] $a_n = 2 + (-1)^n$, $b_n = 4$ 라 하면 $0 < a_n < b_n$ 이고 수열 $\{b_n\}$ 은 4로 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$ 은 발산(진동)한다.

ㅁ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_n - b_n\}$ 이 모두 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \beta \text{ (}\alpha, \beta \text{는 실수)라 하면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n - (a_n - b_n)\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$$

즉, 수열 $\{b_n\}$ 도 수렴한다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

10-1 [답] $\frac{4}{3}$

$P_n(n, 2n^2)$, $Q_n(n+1, 2n^2+4n+2)$ 이므로

$$a_n = \overline{P_n Q_n}$$

$$= \sqrt{1^2 + (4n+2)^2}$$

$$= \sqrt{16n^2 + 16n + 5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{9n^2+n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16n^2+16n+5}}{\sqrt{9n^2+n}} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

10-2 [답] $\frac{1}{4}$

직선 $P_n H_n$ 은 직선 $y=nx$ 와 서로 수직이므로 기울기가

$-\frac{1}{n}$ 이고, 점 $P_n\left(\frac{n}{2}, \frac{n^2}{4}\right)$ 을 지나므로 직선 $P_n H_n$ 의 방

정식은

$$y - \frac{n^2}{4} = -\frac{1}{n} \left(x - \frac{n}{2} \right)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{n}x + \frac{1}{2} + \frac{n^2}{4}$$

이 직선과 직선 $y=nx$ 의 교점 H_n 의 x 좌표를 구하면

$$nx = -\frac{1}{n}x + \frac{1}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$\left(n + \frac{1}{n} \right) x = \frac{1}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$\frac{n^2+1}{n} x = \frac{n^2+2}{4}$$

$$\therefore x = \frac{n(n^2+2)}{4(n^2+1)}$$

따라서 $h_n = \frac{n(n^2+2)}{4(n^2+1)}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{4n^2+4} = \frac{1}{4}$$

다른 풀이

$P_n\left(\frac{n}{2}, \frac{n^2}{4}\right)$, $H_n(h_n, nh_n)$ 이고 직선 $P_n H_n$ 과 직선

$y=nx$ 는 서로 수직이므로

$$\frac{nh_n - \frac{n^2}{4}}{h_n - \frac{n}{2}} \times n = -1$$

$$n \left(nh_n - \frac{n^2}{4} \right) = \frac{n}{2} - h_n$$

$$(n^2+1)h_n = \frac{n^3+2n}{4}$$

$$\therefore h_n = \frac{n^3+2n}{4(n^2+1)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{4n^2+4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

연습문제

22~23쪽

1 ㄴ, ㄷ, ㄹ	2 5	3 ②	4 3
5 ④	6 2	7 8	8 ④
10 -1	11 $\frac{1}{2}$	12 ㄷ	13 ①
			14 50

- 1 ㄱ. 수열 $\left\{-\frac{1}{2}n^2+3\right\}$ 의 첫째항부터 차례대로 항을 나열해 보면

$$\frac{5}{2}, 1, -\frac{3}{2}, -5, \dots$$

즉, n 의 값이 한없이 커질 때 이 수열은 음의 무한대로 발산한다.

- ㄴ. 수열 $\left\{\frac{3}{n+2}\right\}$ 의 첫째항부터 차례대로 항을 나열해 보면

$$1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \dots$$

즉, n 의 값이 한없이 커질 때 이 수열은 0으로 수렴한다.

- ㄷ. 수열 $\{\tan 2n\pi+1\}$ 의 첫째항부터 차례대로 항을 나열해 보면

$$1, 1, 1, 1, \dots$$

즉, n 의 값이 한없이 커질 때 이 수열은 1로 수렴한다.

- ㄹ. 수열 $\left\{\frac{\cos n\pi}{n+1}\right\}$ 의 첫째항부터 차례대로 항을 나열해 보면

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

즉, n 의 값이 한없이 커질 때 이 수열은 0으로 수렴한다.

- ㅁ. 수열 $1, 1-1, 1-1+1, 1-1+1-1, \dots$ 은

$$1, 0, 1, 0, \dots$$

즉, n 의 값이 한없이 커질 때 이 수열은 발산(진동)한다.

따라서 보기 중 수렴하는 수열인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

- 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n + b_n)^2 - 2a_nb_n\}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)^2 - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_nb_n$
 $= 9 - 2 \times 2 = 5$

- 3 수열 $\{a_n\}$ 이 0이 아닌 실수에 수렴하므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ($\alpha \neq 0$ 인 실수)라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$
 $\frac{1}{a_{n+1}} = 4 - 4a_n$ 에서
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (4 - 4a_n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 - 4 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\frac{1}{\alpha} = 4 - 4\alpha, 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0 \quad (\because \alpha \neq 0)$$

$$(2\alpha - 1)^2 = 0 \quad \therefore \alpha = \frac{1}{2}$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$$

- 4 $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)$

$$= \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n (k^2 + k)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 3}{n^3 + 3n^2 + 2n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} = 3$$

- 5 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_n = 2 + (n-1)d = dn + 2 - d \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{dn+2-d}{2n-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d + \frac{2-d}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{d}{2}$$

$$\text{즉, } \frac{d}{2} = 3 \text{이므로 } d = 6$$

따라서 $a_n = 6n - 4$ 이므로

$$a_3 = 18 - 4 = 14$$

- 6 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$
- $$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1})}$$
- $$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}}$$
- $$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 2}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 2$$

- 7 (가)에서 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} = -2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $a \neq 0$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로

$$a = 0$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} = -2$$

$$\frac{b}{2} = -2 \quad \therefore b = -4$$

(나)에서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + cn} - n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + cn} - n)(\sqrt{n^2 + cn} + n)}{\sqrt{n^2 + cn} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{cn}{\sqrt{n^2 + cn} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{c}{n}} + 1} = \frac{c}{2} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{c}{2} = 6 \text{이므로 } c = 12$$

$$\therefore a + b + c = 0 + (-4) + 12 = 8$$

- 8 $\sqrt{4n^2} < \sqrt{4n^2 + 2n + 1} < \sqrt{4n^2 + 4n + 1}$ 이므로
 $\sqrt{(2n)^2} < \sqrt{4n^2 + 2n + 1} < \sqrt{(2n + 1)^2}$
 $\therefore 2n < \sqrt{4n^2 + 2n + 1} < 2n + 1$
 따라서 $\sqrt{4n^2 + 2n + 1}$ 의 정수 부분이 $2n$ 이므로 소수 부분 a_n 은
 $a_n = \sqrt{4n^2 + 2n + 1} - 2n$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 2n + 1} - 2n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2 + 2n + 1} - 2n)(\sqrt{4n^2 + 2n + 1} + 2n)}{\sqrt{4n^2 + 2n + 1} + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{\sqrt{4n^2 + 2n + 1} + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{\sqrt{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} + 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- 9 $a_n - 1 = c_n$ 으로 놓으면 $a_n = c_n + 1$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2$ 이므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n + 1) = 2 + 1 = 3$

$$a_n + 2b_n = d_n \text{으로 놓으면 } b_n = \frac{1}{2}(d_n - a_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 9 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(d_n - a_n)$$

$$= \frac{1}{2}(9 - 3) = 3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(1 + b_n) = 3 \times (1 + 3) = 12$$

- 10 $a_n + b_n = c_n$ 으로 놓으면 $b_n = c_n - a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -2 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2b_n}{a_n} - \frac{a_n}{b_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2(c_n - a_n)}{a_n} - \frac{a_n}{c_n - a_n} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2c_n}{a_n} - 2 - \frac{1}{\frac{c_n}{a_n} - 1} \right) \\ &= -2 - (-1) = -1 \end{aligned}$$

- 11 $n - 1 < a_n < n + 3$ 에서

$$\sum_{k=1}^n (k - 1) < a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n < \sum_{k=1}^n (k + 3)$$

$$\frac{n(n+1)}{2} - n < a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n < \frac{n(n+1)}{2} + 3n$$

$$\frac{n^2 - n}{2} < a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n < \frac{n^2 + 7n}{2}$$

$$\therefore \frac{n^2 - n}{2n^2} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n^2} < \frac{n^2 + 7n}{2n^2}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{2n^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 7n}{2n^2} = \frac{1}{2}$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n^2} = \frac{1}{2}$$

- 12 ㄱ. [반례] $a_n = n^2$, $b_n = \frac{1}{n}$ 이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이지만 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \text{이다.}$$

ㄴ. [반례] $a_n = (-1)^n$ 이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 1$ 이지만

수열 $\{a_n\}$ 은 발산(진동)하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq -1$$

ㄷ. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n + b_n) - a_n\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ &= 0 - \alpha = -\alpha \end{aligned}$$

즉, 수열 $\{b_n\}$ 도 수렴한다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.

13 $\log_3 a_n + \log_3 a_{n+1} + \log_3 a_{n+2} = 1$ 에서

$$\log_3 a_n a_{n+1} a_{n+2} = 1$$

$$a_n a_{n+1} a_{n+2} = 3 \quad \therefore a_{n+2} = \frac{3}{a_n a_{n+1}}$$

$$a_1 = 3, a_2 = 4 \text{이므로}$$

$$a_3 = \frac{3}{a_1 a_2} = \frac{3}{3 \times 4} = \frac{1}{4}$$

$$a_4 = \frac{3}{a_2 a_3} = \frac{3}{4 \times \frac{1}{4}} = 3$$

$$a_5 = \frac{3}{a_3 a_4} = \frac{3}{\frac{1}{4} \times 3} = 4$$

$$a_6 = \frac{3}{a_4 a_5} = \frac{3}{3 \times 4} = \frac{1}{4}$$

⋮

$$\text{따라서 } a_{3k} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+3} \sum_{k=1}^n a_{3k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+3} \times \frac{1}{4} n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n+12} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

14 $y = x^2$ 에서 $y' = 2x$

점 $P_n(n, n^2)$ 에서의 접선의 기울기는 $2n$ 이므로 직선 l_n 의 방정식은

$$y - n^2 = 2n(x - n) \quad \therefore y = 2nx - n^2$$

직선 l_n 이 y 축과 만나는 점 Y_n 의 좌표는 $(0, -n^2)$

점 Y_n 에서 원 C_n '에 그은 두 접선의 길이가 같으므로

$$\overline{Y_n R_n} = \overline{Y_n P_n} = \sqrt{n^2 + (2n^2)^2} = \sqrt{4n^4 + n^2}$$

직선 l_n 이 x 축과 만나는 점

을 X_n 이라 하면

$$X_n \left(\frac{1}{2}n, 0 \right)$$

점 X_n 에서 원 C_n 에 그은

두 접선의 길이가 같으므로

$$\overline{X_n Q_n} = \overline{X_n P_n}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}n \right)^2 + (n^2)^2}$$

$$= \sqrt{n^4 + \frac{1}{4}n^2}$$

$$\therefore \overline{OQ_n} = \overline{OX_n} + \overline{X_n Q_n} = \frac{1}{2}n + \sqrt{n^4 + \frac{1}{4}n^2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{OQ_n}}{\overline{Y_n R_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n + \sqrt{n^4 + \frac{1}{4}n^2}}{\sqrt{4n^4 + n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$100\alpha = 100 \times \frac{1}{2} = 50$$

I-1 02 등비수열의 극한

1 등비수열의 수렴과 발산

문제

25~28쪽

01-1 답 (1) -9 (2) 4 (3) 0 (4) 10

(1) 분모, 분자를 3^n 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2}}{5 \times 2^{n-1} - 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{\frac{5}{2} \times \left(\frac{2}{3} \right)^n - 1} = -9$$

(2) 분모, 분자를 4^n 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + 3^n}{4^n - 3^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \left(\frac{3}{4} \right)^n}{1 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4} \right)^n} = 4$$

(3) 분모, 분자를 4^n 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 3^n}{3^{n+1} + 5 \times 2^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n - \left(\frac{3}{4} \right)^n}{3 \times \left(\frac{3}{4} \right)^n + 5} = 0$$

(4) 분모, 분자를 5^n 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 5^n + 2^{n+1}}{5^{n-1} - 3^{n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 2 \times \left(\frac{2}{5} \right)^n}{\frac{1}{5} - 27 \times \left(\frac{3}{5} \right)^n} = 10$$

01-2 답 2

좌변의 분모, 분자를 5^n 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+2} + 6 \times 5^{n+1}}{a \times 5^n - 7 \times 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16 \times \left(\frac{4}{5} \right)^n + 30}{a - 7 \times \left(\frac{3}{5} \right)^n} = \frac{30}{a}$$

$$\text{따라서 } \frac{30}{a} = 15 \text{이므로 } a = 2$$

02-1 답 (1) 0 (2) $\frac{8}{9}$

$$(1) 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$$

$$1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1} = \frac{1}{4}(5^{n+1} - 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n}{1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)}{\frac{1}{4}(5^{n+1} - 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(3^{n+1} - 1)}{5^{n+1} - 1} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \times \left(\frac{3}{5} \right)^n - 2 \times \left(\frac{1}{5} \right)^n}{5 - \left(\frac{1}{5} \right)^n} = 0$$

$$(2) 1+9+9^2+\cdots+9^n=\frac{9^{n+1}-1}{9-1}=\frac{1}{8}(9^{n+1}-1)$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n+1}+3^{2n}}{1+9+9^2+\cdots+9^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n+1}+3^{2n}}{\frac{1}{8}(9^{n+1}-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8(2^{3n+1}+3^{2n})}{9^{n+1}-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16 \times 8^n + 8 \times 9^n}{9^{n+1}-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16 \times \left(\frac{8}{9}\right)^n + 8}{9 - \left(\frac{1}{9}\right)^n} = \frac{8}{9}\end{aligned}$$

02-2 [답] $\frac{1}{2}$

첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은 $a_n = 3 \times 2^{n-1}$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{3(2^n-1)}{2-1} = 3 \times 2^n - 3$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 2^{n-1}}{3 \times 2^n - 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2}}{3 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

03-1 [답] (1) $-1-\sqrt{2} \leq x < -1$ 또는 $-1 < x \leq -1+\sqrt{2}$

(2) $x=5$ 또는 $-5 < x \leq 3$

(1) 등비수열 $\{x^n(x+2)^n\}$ 의 공비가 $x(x+2)=x^2+2x$

이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < x^2+2x \leq 1$$

(i) $x^2+2x > -1$ 에서

$$x^2+2x+1 > 0$$

$$\therefore (x+1)^2 > 0$$

따라서 $x \neq -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

(ii) $x^2+2x \leq 1$ 에서

$$x^2+2x-1 \leq 0$$

$$\therefore -1-\sqrt{2} \leq x \leq -1+\sqrt{2}$$

(i), (ii)에서

$$-1-\sqrt{2} \leq x < -1 \text{ 또는 } -1 < x \leq -1+\sqrt{2}$$

(2) 등비수열 $\left\{(x-5)\left(\frac{x+1}{4}\right)^{n-1}\right\}$ 의 첫째항이 $x-5$, 공

비가 $\frac{x+1}{4}$ 이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$x-5=0 \text{ 또는 } -1 < \frac{x+1}{4} \leq 1$$

$$x=5 \text{ 또는 } -4 < x+1 \leq 4$$

$$\therefore x=5 \text{ 또는 } -5 < x \leq 3$$

04-1 [답] 3

(i) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}+6}{x^{2n}+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{6}{x^{2n}}}{1 + \frac{2}{x^{2n}}} = x$$

(ii) $x=1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = 1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}+6}{x^{2n}+2} = \frac{1+6}{1+2} = \frac{7}{3}$$

(iii) $x=-1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = -1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}+6}{x^{2n}+2} = \frac{-1+6}{1+2} = \frac{5}{3}$$

(iv) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}+6}{x^{2n}+2} = 3$$

$$(i) \sim (iv) \text{에서 } f(x) = \begin{cases} x & (|x| > 1) \\ \frac{7}{3} & (x=1) \\ \frac{5}{3} & (x=-1) \\ 3 & (|x| < 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(-4)+f(-1)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f(1) &= -4 + \frac{5}{3} + 3 + \frac{7}{3} \\ &= 3\end{aligned}$$

다른 풀이

$$f(-4) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-4)^{2n+1}+6}{(-4)^{2n}+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4 \times 16^n + 6}{16^n + 2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4 + 6 \times \left(\frac{1}{16}\right)^n}{1 + 2 \times \left(\frac{1}{16}\right)^n} = -4$$

$$f(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n+1}+6}{(-1)^{2n}+2} = \frac{5}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}+6}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}+2} = 3$$

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2n+1}+6}{1^{2n}+2} = \frac{7}{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(-4)+f(-1)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f(1) &= -4 + \frac{5}{3} + 3 + \frac{7}{3} \\ &= 3\end{aligned}$$

연습문제

29~30쪽

1 ③	2 ①	3 $3+\sqrt{5}$	4 ③	5 4
6 $-\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{6}$	7 -1	8 $\neg, \supset$	9 $\frac{8}{3}$	
10 ⑤	11 4	12 $\frac{2}{5}$	13 ⑤	14 $\frac{2}{5}$

1. 분모, 분자를 6^n 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 6^n}{3^n + 6^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}} = -6$$

2. 분모, 분자를 2^n 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{2^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \infty$$

3. 분모, 분자를 3^n 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5^n} + 1}{3^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 0$$

4. 분모, 분자를 5^n 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + 4^{n+1}}{5^n + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n} = 5$$

따라서 보기 중 옳은 것은 2, 4이다.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ($\alpha \neq 0$ 인 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + 3^n \times a_n}{3^{n-1} + 5^n \times a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \left(\frac{3}{5}\right)^n \times a_n}{\frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n + a_n} = \frac{5}{\alpha}$$

$$\text{따라서 } \frac{5}{\alpha} = 10 \text{ 이므로 } \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$$

3. 이차방정식 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 을 풀면 $x = 3 \pm \sqrt{5}$

이때 $\alpha > \beta$, 즉 $\alpha = 3 + \sqrt{5}$, $\beta = 3 - \sqrt{5}$ 라 하면

$$0 < \frac{\beta}{\alpha} < 1 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$$

따라서 주어진 극한의 분모, 분자를 α^n 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{\alpha^n + \beta^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha + \beta \times \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} = \alpha = 3 + \sqrt{5}$$

다른 풀이

이차방정식 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 을 풀면 $x = 3 \pm \sqrt{5}$

이때 $\beta > \alpha$, 즉 $\alpha = 3 - \sqrt{5}$, $\beta = 3 + \sqrt{5}$ 라 하면

$$0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = 0$$

따라서 주어진 극한의 분모, 분자를 β^n 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{\alpha^n + \beta^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha \times \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + \beta}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + 1} = \beta = 3 + \sqrt{5}$$

4. $S_n = 4^n - 1$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 4^n - 1 - (4^{n-1} - 1) \\ &= (4 - 1)4^{n-1} = 3 \times 4^{n-1} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 4 - 1 = 3$$

(i), (ii)에서 $a_n = 3 \times 4^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 4^{n-1}}{4^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{3}{4}$$

5. $4^{n+1} + 3^{n-1} < (3^n + 4^n)a_n < 4^{n+1} + 3^{n+1}$ 의 각 변을 $3^n + 4^n$ 으로 나누면

$$\frac{4^{n+1} + 3^{n-1}}{3^n + 4^n} < a_n < \frac{4^{n+1} + 3^{n+1}}{3^n + 4^n}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + 3^{n-1}}{3^n + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} = 4,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + 3^{n+1}}{3^n + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} = 4 \text{ 이므로 수열의}$$

극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$$

6. 등비수열 $\{(\sqrt{3}\tan x)^n\}$ 의 공비가 $\sqrt{3}\tan x$ 이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < \sqrt{3}\tan x \leq 1 \quad \therefore -\frac{1}{\sqrt{3}} < \tan x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

이때 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$-\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{6}$$

7. (가)에서 등비수열의 첫째항이 $x - 4$, 공비가 $-\frac{x}{2}$ 이므로

이 등비수열이 수렴하려면

$$x - 4 = 0 \text{ 또는 } -1 < -\frac{x}{2} \leq 1$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } -2 \leq x < 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

(나)에서 등비수열의 첫째항이 $x + 4$, 공비가 $\frac{x+1}{3}$ 이므로

이 등비수열이 수렴하려면

$$x + 4 = 0 \text{ 또는 } -1 < \frac{x+1}{3} \leq 1$$

$$x = -4 \text{ 또는 } -3 < x + 1 \leq 3$$

$$\therefore -4 \leq x \leq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

이때 두 등비수열 중에서 어느 하나만 수렴하려면 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 $-2 \leq x < 2$ 를 제외해야 하므로 정수 x 의 값은 $-4, -3, 2, 4$ 따라서 구하는 정수 x 의 값의 합은 $-4 + (-3) + 2 + 4 = -1$

8 등비수열 $\{r^n\}$ 의 공비가 r 이고 이 등비수열이 수렴하므로 $-1 < r \leq 1$ ㉠

ㄱ. 등비수열 $\{r^{2n}\}$ 의 공비는 r^2 이고 ㉠에서 $0 \leq r^2 \leq 1$

즉, 등비수열 $\{r^{2n}\}$ 은 반드시 수렴한다.

ㄴ. 등비수열 $\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$ ($r \neq 0$)의 공비는 $\frac{1}{r}$ 이고 ㉠에서 $\frac{1}{r} < -1$ 또는 $\frac{1}{r} \geq 1$

즉, 등비수열 $\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$ 은 $\frac{1}{r} < -1$ 또는 $\frac{1}{r} > 1$ 일 때에는 수렴하지 않는다.

ㄷ. 등비수열 $\{(-r)^n\}$ 의 공비는 $-r$ 이고 ㉠에서 $-1 \leq -r < 1$

즉, 등비수열 $\{(-r)^n\}$ 은 $-r = -1$ 일 때에는 수렴하지 않는다.

ㄹ. 등비수열 $\left\{\left(\frac{1-r}{2}\right)^n\right\}$ 의 공비는 $\frac{1-r}{2}$ 이고 ㉠에서 $-1 \leq -r < 1, 0 \leq 1-r < 2$
 $\therefore 0 \leq \frac{1-r}{2} < 1$

즉, 등비수열 $\left\{\left(\frac{1-r}{2}\right)^n\right\}$ 은 반드시 수렴한다.

따라서 보기 중 반드시 수렴하는 수열인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

9 (i) $0 < r < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + r + 2}{r^n + 1} = r + 2$$

$$\text{즉, } r + 2 = \frac{7}{3} \text{에서 } r = \frac{1}{3}$$

(ii) $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + r + 2}{r^n + 1} = \frac{1 + 1 + 2}{1 + 1} = 2 \neq \frac{7}{3}$$

(iii) $r > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + r + 2}{r^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r + \frac{r}{r^n} + \frac{2}{r^n}}{1 + \frac{1}{r^n}} = r$$

$$\therefore r = \frac{7}{3}$$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 모든 r 의 값의 합은

$$\frac{1}{3} + \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$$

10 (i) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{n+1} + 3x}{x^n + 2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x + \frac{3x}{x^n}}{1 + \frac{2}{x^n}} = 2x \end{aligned}$$

(ii) $x = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{n+1} + 3x}{x^n + 2} = \frac{2 + 3}{1 + 2} = \frac{5}{3}$$

(iii) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{n+1} + 3x}{x^n + 2} = \frac{3}{2}x$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (|x| > 1) \\ \frac{5}{3} & (x = 1) \\ \frac{3}{2}x & (|x| < 1) \end{cases}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right)f(1)f(6) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times 12 = 10$$

11 직선 $y = n$ 이 곡선 $y = \log_2(3-x) - 1$ 과 만나는 점 A_n 의 좌표를 구하면

$$n = \log_2(3-x) - 1, n+1 = \log_2(3-x)$$

$$2^{n+1} = 3-x \quad \therefore x = 3 - 2^{n+1}$$

따라서 $A_n(3 - 2^{n+1}, n)$ 이므로 $C_n(3 - 2^{n+1}, 0)$

$$\therefore S_n = \frac{1}{2} \times |3 - 2^{n+1}| \times n$$

$$= \frac{n}{2}(2^{n+1} - 3)$$

직선 $y = n$ 이 곡선 $y = \log_2(2x-6)$ 과 만나는 점 B_n 의 x 좌표를 구하면

$$n = \log_2(2x-6)$$

$$2^n = 2x-6, 2^{n-1} = x-3 \quad \therefore x = 2^{n-1} + 3$$

따라서 $B_n(2^{n-1} + 3, n)$ 이므로 $D_n(2^{n-1} + 3, 0)$

$$\therefore T_n = \frac{1}{2} \times (2^{n-1} + 3) \times n$$

$$= \frac{n}{2}(2^{n-1} + 3)$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{T_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{2}(2^{n+1} - 3)}{\frac{n}{2}(2^{n-1} + 3)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 3}{2^{n-1} + 3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2} + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 4$$

12 $10^n = 2^n \times 5^n$ 이므로 10^n 의 양의 약수의 총합 $p(n)$ 은

$$\begin{aligned} p(n) &= (1+2+2^2+\cdots+2^n)(1+5+5^2+\cdots+5^n) \\ &= \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \times \frac{5^{n+1}-1}{5-1} \\ &= \frac{1}{4}(10^{n+1}-5^{n+1}-2^{n+1}+1) \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n}{p(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 10^n}{10^{n+1}-5^{n+1}-2^{n+1}+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{10-5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{1}{10}\right)^n} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

13 (i) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx - 2}{x^{2n} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{ax^2}{x^{2n}} + \frac{bx}{x^{2n}} - \frac{2}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = x \end{aligned}$$

(ii) $x=1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx - 2}{x^{2n} + 1} \\ &= \frac{1+a+b-2}{1+1} = \frac{a+b-1}{2} \end{aligned}$$

(iii) $x=-1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = -1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx - 2}{x^{2n} + 1} \\ &= \frac{-1+a-b-2}{1+1} = \frac{a-b-3}{2} \end{aligned}$$

(iv) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx - 2}{x^{2n} + 1} \\ &= ax^2 + bx - 2 \end{aligned}$$

(i)~(iv)에서

$$f(x) = \begin{cases} x & (|x| > 1) \\ \frac{a+b-1}{2} & (x=1) \\ \frac{a-b-3}{2} & (x=-1) \\ ax^2 + bx - 2 & (|x| < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} x = \lim_{x \rightarrow 1-} (ax^2 + bx - 2) = \frac{a+b-1}{2}$$

$$1 = a + b - 2 = \frac{a+b-1}{2}$$

$$\therefore a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} (ax^2 + bx - 2) = \lim_{x \rightarrow -1-} x = \frac{a-b-3}{2}$$

$$a-b-2 = -1 = \frac{a-b-3}{2}$$

$$\therefore a-b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$

$$\therefore ab=2$$

14 $a_1=1$ 이고 $a_{n+3}=5a_n$ 이므로

$$a_4=5a_1=5 \times 1=5$$

$$a_7=5a_4=5 \times 5=5^2$$

$$a_{10}=5a_7=5 \times 5^2=5^3$$

$\vdots$

$$\therefore a_{3k-2}=5^{k-1} \text{ (단, } k \text{는 자연수)}$$

$a_2=2$ 이고 $a_{n+3}=5a_n$ 이므로

$$a_5=5a_2=5 \times 2$$

$$a_8=5a_5=5 \times (5 \times 2) = 2 \times 5^2$$

$$a_{11}=5a_8=5 \times (2 \times 5^2) = 2 \times 5^3$$

$\vdots$

$$\therefore a_{3k-1}=2 \times 5^{k-1} \text{ (단, } k \text{는 자연수)}$$

$a_3=3$ 이고 $a_{n+3}=5a_n$ 이므로

$$a_6=5a_3=5 \times 3$$

$$a_9=5a_6=5 \times (5 \times 3) = 3 \times 5^2$$

$$a_{12}=5a_9=5 \times (3 \times 5^2) = 3 \times 5^3$$

$\vdots$

$$\therefore a_{3k}=3 \times 5^{k-1} \text{ (단, } k \text{는 자연수)}$$

$$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{3n} a_k$$

$$= (a_1 + a_4 + a_7 + \cdots + a_{3n-2})$$

$$+ (a_2 + a_5 + a_8 + \cdots + a_{3n-1})$$

$$+ (a_3 + a_6 + a_9 + \cdots + a_{3n})$$

$$= \frac{5^n-1}{5-1} + \frac{2(5^n-1)}{5-1} + \frac{3(5^n-1)}{5-1}$$

$$= \frac{3}{2}(5^n-1)$$

이때 $a_{3n}=3 \times 5^{n-1}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{3n}}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 5^{n-1}}{\frac{3}{2}(5^n-1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \times 5^{n-1}}{3 \times 5^n - 3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{5}}{3 - 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n} = \frac{2}{5}$$

1 급수의 수렴과 발산

개념 CHECK

33쪽

1 [답] (1) $\frac{2}{3}$ (2) 5

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2}{3}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 5 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} = 5$$

문제

34~35쪽

01-1 [답] (1) 수렴, 1 (2) 발산 (3) 발산

주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하자.

$$\begin{aligned} (1) S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

$$\begin{aligned} (2) S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - 1) = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(3) (i) $n=2k-1$ (k 는 자연수)일 때,

$$\begin{aligned} S_{2k-1} &= -\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k}{k+1} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} = -\frac{1}{2}$$

(ii) $n=2k$ (k 는 자연수)일 때,

$$\begin{aligned} S_{2k} &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) + \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right) + \left(-\frac{3}{4} + \frac{4}{5} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(-\frac{k}{k+1} + \frac{k+1}{k+2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{k+1}{k+2} \right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} \neq \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k}$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

02-1 [답] (1) 2 (2) $\frac{3}{4}$

$$(1) \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) 3+5+7+\cdots+(2n+1) &= \sum_{k=1}^n (2k+1) \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= n(n+2) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3+5+7+\cdots+(2n+1)} = \frac{1}{n(n+2)} \\ \therefore \frac{1}{3} + \frac{1}{3+5} + \frac{1}{3+5+7} + \frac{1}{3+5+7+9} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

02-2 **답** $\frac{1}{4}$

$S_n = n^2 + n$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} \\ = n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} = 2n$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1 + 1 = 2$$

(i), (ii)에서 $a_n = 2n$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n \times 2(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2 급수의 성질

문제

37~39쪽

03-1 **답** 7

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3 - \frac{a_n}{4} \right)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{a_n}{4} \right) = 0$

$$3 - \frac{a_n}{4} = b_n \text{으로 놓으면 } a_n = 12 - 4b_n$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{2} + 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{12 - 4b_n}{2} + 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-2b_n + 7) \\ &= -2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 7 = 0 + 7 = 7 \end{aligned}$$

03-2 **답** 5

$a_n - 3 = c_n$ 으로 놓으면 $a_n = c_n + 3$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - 1)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - 1) = 0$

$b_n - 1 = d_n$ 으로 놓으면 $b_n = d_n + 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(c_n + 3) + (d_n + 1)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n + d_n + 4) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} c_n + \lim_{n \rightarrow \infty} d_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \\ &= 1 + 0 + 4 = 5 \end{aligned}$$

03-3 **답** 2

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+2n}} \right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{1}{\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+2n}} \right) = 0$$

$a_n - \frac{1}{\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+2n}} = b_n$ 으로 놓으면

$$a_n = b_n + \frac{1}{\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+2n}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n + \frac{1}{\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+2n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+2n}} \\ &= 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+2n}}{(\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+2n})(\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+2n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+2n}}{n} = 2 \end{aligned}$$

04-1 **답** -7

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(4a_n - \frac{1}{2}b_n \right) &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 4 \times (-1) - \frac{1}{2} \times 6 = -7 \end{aligned}$$

04-2 **답** 8

$3a_n - 2b_n = c_n$ 으로 놓으면 $a_n = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2, \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 20 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n \right) = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \\ &= \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 20 = 8 \end{aligned}$$

04-3 **답** 3

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 3b_n) = 11 \text{에서}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 11 \quad \therefore \alpha - 3\beta = 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n) = 8 \text{에서}$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 8 \quad \therefore 2\alpha + \beta = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $\alpha = 5, \beta = -2$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha + \beta \\ &= 5 + (-2) = 3 \end{aligned}$$

05-1 [답] ㄱ, ㄴ

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1) \text{이 수렴하므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) = 0 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n - 1) + 1\} = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.

$$\text{ㄴ. } \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{이 모두 수렴하므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\text{ㄷ. [반례]} a_n = \frac{1}{n(n+1)}, b_n = n^2 \text{이라 하면}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 \end{aligned}$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 1로 수렴하고 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ 이지만

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = 1 \neq 0$$

$$\text{ㄹ. } \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{이 수렴하므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

$$\begin{aligned} 2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = 6 \text{에서 } a + 2d = 6 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$a_6 = 12 \text{에서 } a + 5d = 12 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 2, d = 2$

$$\therefore a_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n a_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4 다항식 $a_n x^2 - a_n x - 1$ 이 $x - n - 5$ 로 나누어떨어지므로

$$a_n(n+5)^2 - a_n(n+5) - 1 = 0$$

$$a_n(n+4)(n+5) = 1$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{(n+4)(n+5)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+4} - \frac{1}{k+5} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{n+5} \right) = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

연습문제

40~41쪽

- 1 ④ 2 $\frac{1}{2}$ 3 $\frac{1}{2}$ 4 ② 5 ④
6 ③ 7 $-\frac{3}{2}$ 8 $\frac{1}{4}$ 9 ① 10 ㄴ, ㄷ
11 ⑤ 12 $\frac{1}{12}$ 13 -1

1 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$1 + \frac{2n-1}{n+3} < S_n < 3 + \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n-1}{n+3} \right) = 1 + 2 = 3, \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 3 + \left(\frac{1}{4} \right)^n \right\} = 3$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3 \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3$$

5. $\neg$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3}{n^3+2} = 3 \neq 0$ 이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3}{n^3+2}$ 은 발산한다.

$$\begin{aligned} \neg. & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+2}{n+3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k+2}{k+3} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} \right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6} \right) \right. \\ & \quad \left. + \cdots + \left(\frac{n-1}{n} - \frac{n+1}{n+2} \right) + \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+2}{n+3} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{n+1}{n+2} - \frac{n+2}{n+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 1 - 1 = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2n}-n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+2n}-n)$ 은 발산한다.

ㄹ. 주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면 자연수 k 에 대하여

(i) $n=2k-1$ 일 때,

$$\begin{aligned} S_{2k-1} &= 1 + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) \\ & \quad + \cdots + \left(-\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k-1} \right) \\ &= 1 \\ \therefore \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} &= 1 \end{aligned}$$

(ii) $n=2k$ 일 때,

$$\begin{aligned} S_{2k} &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \\ & \quad + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2k+1} \\ \therefore \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2k+1} \right) = 1 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = 1$ 이므로 주어진 급수는 수렴한다.

따라서 보기 중 수렴하는 급수인 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

6. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an^2+6}{4n^2+8n+3}$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+6}{4n^2+8n+3} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{6}{n^2}}{4 + \frac{8}{n} + \frac{3}{n^2}} = 0$$

즉, $\frac{a}{4} = 0$ 이므로 $a=0$

$$\begin{aligned} \therefore b &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2+8n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) \right. \\ & \quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right\} \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) \\ &= 3 \times \frac{1}{3} = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore b-a=1-0=1$$

7. $\frac{a_n}{n} - 3 = b_n$ 으로 놓으면

$$\frac{a_n}{n} = b_n + 3 \quad \therefore a_n = n(b_n + 3)$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + a_n^3}{7n^3 - a_n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n^3(b_n+3)^3}{7n^3 - n^3(b_n+3)^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + (b_n+3)^3}{7 - (b_n+3)^3} = \frac{3+27}{7-27} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) = 3$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n - 1) + 1\} = 3 + 1 = 4$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n - 6)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n - 6) = 0$$

$a_n + b_n - 6 = c_n$ 으로 놓으면 $b_n = -a_n + c_n + 6$

$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nb_n + 5}{2na_n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(-a_n + c_n + 6) + 5}{2na_n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-a_n + c_n + 6 + \frac{5}{n}}{2a_n + \frac{1}{n}} = \frac{-4+6}{2 \times 4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

9. $\frac{b_n}{2} - a_n = c_n$ 으로 놓으면

$$\frac{b_n}{2} = a_n + c_n \quad \therefore b_n = 2a_n + 2c_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5, \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 3$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (5a_n - b_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \{5a_n - (2a_n + 2c_n)\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2c_n) = 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \\ &= 3 \times 5 - 2 \times 3 = 9 \end{aligned}$$

10 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{2}\right)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{1}{2}\right) = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(a_n - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n + b_n) + (a_n - b_n)}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n + b_n) - (a_n - b_n)}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 도 모두 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n - (a_n - b_n)\} = \alpha - 0 = \alpha$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

ㄹ. [반례] $a_n = 1$, $b_n = 2$ 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 발산하지만 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ 이므로

로 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 모두 수렴한다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

11 (가)에서 $\log a_n + \log a_{n+1} + \log b_n = 0$

$$\log a_n a_{n+1} b_n = 0 \quad \therefore a_n a_{n+1} b_n = 1$$

이때 $a_n > 0$ 이므로

$$b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1} - a_n} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 3, 즉 $a_{n+1} - a_n = 3$ 이므로

$$b_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$$

이때 $a_n = a_1 + (n-1) \times 3 = 3n - 3 + a_1$ 이므로

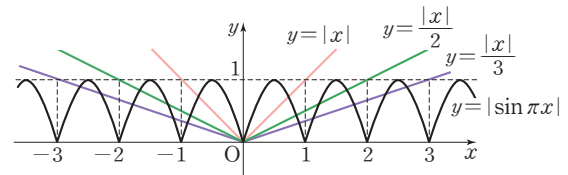
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{a_1} - \frac{1}{3(n+1) - 3 + a_1} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{3n + a_1} \right) = \frac{1}{3a_1} \end{aligned}$$

(나)에서 $\frac{1}{3a_1} = \frac{1}{12}$ 이므로 $a_1 = 4$

12 함수 $y = \sin \pi x$ 의 주기가 2이므로 함수 $y = |\sin \pi x|$ 의 주기는 1이다.

함수 $y = |\sin \pi x|$ 의 그래프와 함수 $y = |x|$, $y = \frac{|x|}{2}$,

$y = \frac{|x|}{3}$, ...의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $a_1 = 3$, $a_2 = 3 + 4 = 7$, $a_3 = 7 + 4 = 11$, ...이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3이고 공차가 4인 등차수열이다.

$$\therefore a_n = 3 + (n-1) \times 4 = 4n - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3} \right) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{15} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

13 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = 1$ 에서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) a_{n+1} = 0$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n+1} - a_n)$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= (a_2 - a_1) + 2(a_3 - a_2) + 3(a_4 - a_3) \\ &\quad + \cdots + (n-1)(a_n - a_{n-1}) + n(a_{n+1} - a_n) \\ &= a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \cdots + (n-1)a_n + na_{n+1} \\ &\quad - a_1 - 2a_2 - 3a_3 - \cdots - (n-1)a_{n-1} - na_n \\ &= -(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + na_{n+1} \\ &= -\sum_{k=1}^n a_k + (n+1)a_{n+1} - a_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n+1} - a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\sum_{k=1}^n a_k + (n+1)a_{n+1} - a_{n+1} \right\} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)a_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \\ &= -1 + 0 - 0 = -1 \end{aligned}$$

I-2 02 등비급수

1 등비급수의 수렴과 발산

개념 CHECK

43쪽

1 [답] (1) 수렴, $\frac{1}{3}$ (2) 발산 (3) 발산 (4) 수렴, $\frac{3}{2}$

(1) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 에서 공비는 $\frac{1}{4}$ 이고 $-1 < \frac{1}{4} < 1$ 이므로 이 급수는 수렴한다.

따라서 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비급수의 합은

$$\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

(2) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{6}{5}\right)^n$ 에서 공비는 $-\frac{6}{5}$ 이고 $-\frac{6}{5} < -1$ 이므로 이 급수는 발산한다.

(3) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5} \times 4^{n-1}$ 에서 공비는 4이고 $4 > 1$ 이므로 이 급수는 발산한다.

(4) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 에서 공비는 $-\frac{1}{3}$ 이고 $-1 < -\frac{1}{3} < 1$ 이므로 이 급수는 수렴한다.

따라서 첫째항이 2, 공비가 $-\frac{1}{3}$ 인 등비급수의 합은

$$\frac{2}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{2}$$

2 [답] $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

등비급수 $1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + \dots$ 의 공비는 $-3x$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < -3x < 1$$

$$\therefore -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

문제

44~51쪽

01-1 [답] (1) $-\frac{1}{5}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} (1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{-\frac{1}{4}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - 2^n}{3^n} &= 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= 3 \times \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 3 \times \frac{1}{2} - 2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 3^{2n-1}}{18^{n-1}} &= 36 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n - 6 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 36 \times \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} - 6 \times \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 36 \times \frac{1}{8} - 6 = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

01-2 [답] $-\frac{1}{17}$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \cos \frac{n\pi}{2} \\ &= -\frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \cos \pi + \left(-\frac{1}{4}\right)^3 \cos \frac{3}{2}\pi \\ &\quad + \left(-\frac{1}{4}\right)^4 \cos 2\pi + \left(-\frac{1}{4}\right)^5 \cos \frac{5}{2}\pi \\ &\quad + \left(-\frac{1}{4}\right)^6 \cos 3\pi + \dots \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 0 + \left(-\frac{1}{4}\right)^4 + 0 - \left(-\frac{1}{4}\right)^6 + \dots \\ &= \frac{-\frac{1}{16}}{1 - \left(-\frac{1}{16}\right)} = -\frac{1}{17} \end{aligned}$$

02-1 [답] $\frac{7}{12}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{k-1}}{7^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{5^k - 1}{7^k} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 1}{7^n} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\frac{5}{7}}{1 - \frac{5}{7}} - \frac{\frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

02-2 [답] $\frac{5}{6}$

$$\begin{aligned}
 a_n &= 5 \times 2^{n-1} \\
 S_n &= \frac{5(2^n - 1)}{2 - 1} = 5 \times 2^n - 5 \\
 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n - a_n}{4^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \times 2^n - 5 - 5 \times 2^{n-1}}{4^n} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{5}{2} \times 2^n - 5}{4^n} \\
 &= \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\
 &= \frac{5}{2} \times \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - 5 \times \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \\
 &= \frac{5}{2} - \frac{5}{3} = \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

02-3 [답] $\frac{13}{2}$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^n + 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^n + 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
 &= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{4}{1 - \frac{1}{3}} \\
 &= \frac{1}{2} + 6 = \frac{13}{2}
 \end{aligned}$$

03-1 [답] 2

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{27} + \dots = \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{3}\right)} = \frac{3}{3+x}$$

따라서 $\frac{3}{3+x} = \frac{3}{5}$ 이므로

$$15 = 9 + 3x$$

$$\therefore x = 2$$

03-2 [답] 3

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공비를 각각 r , s 라 하자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 \text{에서 } \frac{1}{1-r} = 4$$

$$1 = 4 - 4r \quad \therefore r = \frac{3}{4}$$

$$\therefore a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2 \text{에서 } \frac{1}{1-s} = 2$$

$$1 = 2 - 2s \quad \therefore s = \frac{1}{2}$$

$$\therefore b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \frac{b_4}{a_4} + \dots &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3
 \end{aligned}$$

03-3 [답] $\frac{5}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 \text{에서 } \frac{a}{1-r} = 2$$

$$\therefore a = 2(1-r) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

수열 $\{a_n^3\}$ 은 첫째항이 a^3 , 공비가 r^3 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = 24 \text{에서 } \frac{a^3}{1-r^3} = 24$$

$$\therefore a^3 = 24(1-r^3)$$

①을 대입하면

$$8(1-r)^3 = 24(1-r^3)$$

$$(1-r)^3 = 3(1-r)(1+r+r^2)$$

$$(1-r)^2 = 3(1+r+r^2) \quad (\because -1 < r < 1)$$

$$2r^2 + 5r + 2 = 0$$

$$(r+2)(2r+1) = 0$$

$$\therefore r = -\frac{1}{2} \quad (\because -1 < r < 1)$$

이를 ①에 대입하면

$$a = 2 \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \right\} = 3$$

$$\therefore a + r = 3 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

04-1 [답] (1) $2 \leq x < 4$

$$(2) x = -2 \text{ 또는 } -\sqrt{2} < x < 0 \text{ 또는 } 0 < x < \sqrt{2}$$

(1) 주어진 등비급수의 첫째항이 $(x-2)(x-3)$, 공비가

$x-3$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$(x-2)(x-3) = 0 \text{ 또는 } -1 < x-3 < 1$$

$$(i) (x-2)(x-3) = 0 \text{에서 } x=2 \text{ 또는 } x=3$$

$$(ii) -1 < x-3 < 1 \text{에서 } 2 < x < 4$$

(i), (ii)에서

$$2 \leq x < 4$$

- (2) 주어진 등비급수의 첫째항이 $x+2$, 공비가 x^2-1 이므로 이 등비급수가 수렴하려면
- $$x+2=0 \text{ 또는 } -1 < x^2-1 < 1$$
- (i) $x+2=0$ 에서 $x=-2$
- (ii) $-1 < x^2-1 < 1$ 에서
- $$0 < x^2 < 2$$
- $$\therefore -\sqrt{2} < x < 0 \text{ 또는 } 0 < x < \sqrt{2}$$
- (i), (ii)에서
- $$x=-2 \text{ 또는 } -\sqrt{2} < x < 0 \text{ 또는 } 0 < x < \sqrt{2}$$

04-2 [답] $1 < x < 9$

- 주어진 등비급수의 공비가 $1-\log_3 x$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면
- $$-1 < 1-\log_3 x < 1, -2 < -\log_3 x < 0$$
- $$0 < \log_3 x < 2$$
- $$\therefore 1 < x < 9$$

05-1 [답] (1) $\frac{104}{333}$ (2) $\frac{23}{90}$

- (1) $0.\dot{3}1\dot{2} = 0.312312312\cdots$
- $$= 0.312 + 0.000312 + 0.000000312 + \cdots$$
- $$= \frac{312}{1000} + \frac{312}{1000000} + \frac{312}{1000000000} + \cdots$$
- $$= \frac{\frac{312}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}}$$
- $$= \frac{312}{999} = \frac{104}{333}$$
- (2) $0.2\dot{5} = 0.2555\cdots$
- $$= 0.2 + 0.05 + 0.005 + 0.0005 + \cdots$$
- $$= \frac{2}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000} + \cdots$$
- $$= \frac{2}{10} + \frac{\frac{5}{100}}{1 - \frac{1}{10}}$$
- $$= \frac{2}{10} + \frac{5}{90}$$
- $$= \frac{23}{90}$$

06-1 [답] $\frac{\sqrt{3}}{3}$

- 점 P_n 의 x 좌표를 x_n 이라 하면
- $$x_1 = \overline{OP_1} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
- $$x_2 = x_1 - \overline{P_1P_2} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = x_2 + \overline{P_2P_3} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vdots$$

$$\therefore a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \cdots$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

점 P_n 의 y 좌표를 y_n 이라 하면

$$y_1 = \overline{OP_1} \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = y_1 + \overline{P_1P_2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$y_3 = y_2 + \overline{P_2P_3} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\vdots$$

$$\therefore b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

$$\therefore ab = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

07-1 [답] 8π

$$\overline{A_1A_2} = 4 \text{이므로 } l_1 = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 2 = 2\pi$$

$$\overline{A_2A_3} = \frac{3}{4} \overline{A_1A_2} = 3 \text{이므로 } l_2 = \frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\pi$$

$$\overline{A_3A_4} = \frac{3}{4} \overline{A_2A_3} = \frac{9}{4} \text{이므로 } l_3 = \frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{9}{8} = \frac{9}{8}\pi$$

$$\vdots$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = 2\pi + \frac{3}{2}\pi + \frac{9}{8}\pi + \cdots = \frac{2\pi}{1 - \frac{3}{4}} = 8\pi$$

[다른 풀이]

$$\overline{A_1A_2} = 4 \text{이므로 } l_1 = 2\pi$$

선분 A_nA_{n+1} 을 $1:3$ 으로 내분하는 점이 A_{n+2} 이므로

$$\overline{A_{n+1}A_{n+2}} = \frac{3}{4} \overline{A_nA_{n+1}}$$

이때 반원의 호의 길이는 반지름의 길이에 비례하므로

$$l_{n+1} = \frac{3}{4} l_n$$

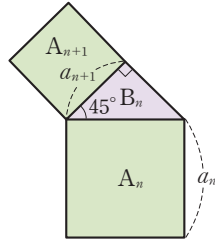
따라서 수열 $\{l_n\}$ 은 첫째항이 2π , 공비가 $\frac{3}{4}$ 인 등비수열

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{2\pi}{1 - \frac{3}{4}} = 8\pi$$

08-1 [답 10]

오른쪽 그림에서 정사각형 A_n 의 한 변의 길이를 a_n 이라 하면 직각이등변삼각형 B_n 의 빗변이 아닌 한 변의 길이는 a_{n+1} 이다.



$a_1=2$ 이므로

$$a_2 = a_1 \cos 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_3 = a_2 \cos 45^\circ = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$a_4 = a_3 \cos 45^\circ = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

이때 정사각형 A_n 의 넓이를 S_n 이라 하면

$$S_n = a_n^2 = \left\{ 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \right\}^2 = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

한편 직각이등변삼각형 B_n 의 넓이를 T_n 이라 하면

$$T_n = \frac{1}{2} \times a_{n+1}^2 = \frac{1}{2} \times \left\{ 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \right\}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

따라서 모든 정사각형과 직각이등변삼각형의 넓이의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n + \sum_{n=1}^{\infty} T_n = 8 + 2 = 10$$

연습문제

52~54쪽

1 2	2 ④	3 32	4 $\frac{37}{99}$	5 6
6 ③	7 $\frac{1}{15}$	8 $0 \leq x < 2$	9 ④	
10 $\neg, \cup$	11 2	12 ④	13 ②	14 27 m
15 $\frac{\sqrt{3}}{3}$	16 7	17 $\frac{2}{3}$	18 ④	

$$\begin{aligned} 1 \quad & \log_3 3 + \log_3 \sqrt{3} + \log_3 \sqrt[4]{3} + \log_3 \sqrt[8]{3} + \cdots \\ &= \log_3 3 + \log_3 3^{\frac{1}{2}} + \log_3 3^{\frac{1}{4}} + \log_3 3^{\frac{1}{8}} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}-2}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ &= \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} - 2 \times \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} \\ &= 2 - 2 \times \frac{1}{5} = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

3 $a_1=3$, $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} a_n &= 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ \therefore a_{2n-1} &= 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2} = 3 \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} 3 \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \\ &= \frac{3}{1-\frac{4}{9}} = \frac{27}{5} \end{aligned}$$

따라서 $p=5$, $q=27$ 이므로 $p+q=32$

4 4^n 의 일의 자리의 숫자는 차례대로 4, 6, 4, 6, ...

9^n 의 일의 자리의 숫자는 차례대로 9, 1, 9, 1, ...

따라서 4^n+9^n 의 일의 자리의 숫자는 3, 7이 반복되므로

$a_1=3$, $a_2=7$, $a_3=3$, $a_4=7$, ...

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} &= \frac{3}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \cdots \\ &= \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^5} + \cdots\right) \\ &\quad + \left(\frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^4} + \frac{7}{10^6} + \cdots\right) \\ &= \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{100}} + \frac{\frac{7}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{30}{99} + \frac{7}{99} = \frac{37}{99} \end{aligned}$$

5 $\log_8(S_n+1)=\frac{n}{3}$ 에서

$$S_n = 8^{\frac{n}{3}} - 1 = 2^n - 1$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2^n - 1 - (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때, $a_1=S_1=2-1=1$

(i), (ii)에서 $a_n=2^{n-1}$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{a_n a_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{2^{n-1} \times 2^n} = 18 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= 18 \times \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 18 \times \frac{1}{3} = 6 \end{aligned}$$

- 6 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_n = ar^{n-1} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{a_n + 2^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{ar^{n-1} + 2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{a}{r} \times \left(\frac{r}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \end{aligned}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{a_n + 2^n} = 6$ 으로 극한값이 존재하고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{r} \times \left(\frac{r}{3}\right)^n = \frac{1}{6}$$

등비수열의 극한에서 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$$\frac{r}{3} = 1, \frac{a}{r} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, r = 3$$

따라서 $a_n = \frac{1}{2} \times 3^{n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = 3 \end{aligned}$$

- 7 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{1}{5} \text{에서}$$

$$\frac{a}{1-r} = -\frac{1}{5} \quad \therefore a = -\frac{1}{5}(1-r) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

수열 $\{a_{2n}\}$ 은 $a_2, a_4, a_6, \dots$ 이므로 첫째항이 ar , 공비가 r^2 인 등비수열이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{1}{15} \text{에서}$$

$$\frac{ar}{1-r^2} = \frac{1}{15} \quad \therefore 15ar = 1-r^2$$

①을 대입하면

$$-3(1-r)r = 1-r^2, 4r^2 - 3r - 1 = 0$$

$$(4r+1)(r-1) = 0$$

$$\therefore r = -\frac{1}{4} \quad (\because -1 < r < 1)$$

이를 ①에 대입하면

$$a = -\frac{1}{5} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{4}\right) \right\} = -\frac{1}{4}$$

따라서 $a_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{1}{4}\right)^n \right\}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

- 8 등비수열 $\left\{ \frac{x}{4} \left(1 - \frac{x}{4}\right)^{n-1} \right\}$ 의 첫째항이 $\frac{x}{4}$, 공비가 $1 - \frac{x}{4}$

이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$\frac{x}{4} = 0 \text{ 또는 } -1 < 1 - \frac{x}{4} \leq 1$$

$$x = 0 \text{ 또는 } -2 < -\frac{x}{4} \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq x < 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2-x+1}{3}\right)^n$ 의 공비가 $\frac{x^2-x+1}{3}$ 이므로

이 등비급수가 수렴하려면 $-1 < \frac{x^2-x+1}{3} < 1$

$$(i) \frac{x^2-x+1}{3} > -1 \text{에서 } x^2-x+4 > 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

$$(ii) \frac{x^2-x+1}{3} < 1 \text{에서 } x^2-x-2 < 0$$

$$(x+1)(x-2) < 0 \quad \therefore -1 < x < 2$$

$$(i), (ii) \text{에서 } -1 < x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 구하는 x 의 값의 범위는 ①, ②에서 $0 \leq x < 2$

- 9 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하므로 $-1 < r < 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$$\textcircled{1} \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} \text{은 공비가 } r^2 \text{인 등비급수이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$0 \leq r^2 < 1$$

즉, 주어진 급수는 반드시 수렴한다.

$$\textcircled{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n \text{은 공비가 } -r \text{인 등비급수이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$-1 < -r < 1$$

즉, 주어진 급수는 반드시 수렴한다.

$$\textcircled{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r-1}{2}\right)^n \text{은 공비가 } \frac{r-1}{2} \text{인 등비급수이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$-2 < r-1 < 0 \quad \therefore -1 < \frac{r-1}{2} < 0$$

즉, 주어진 급수는 반드시 수렴한다.

$$\textcircled{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2}-1\right)^n \text{은 공비가 } \frac{r}{2}-1 \text{인 등비급수이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$-\frac{1}{2} < \frac{r}{2} < \frac{1}{2} \quad \therefore -\frac{3}{2} < \frac{r}{2}-1 < -\frac{1}{2}$$

즉, 주어진 급수는 $-\frac{3}{2} < \frac{r}{2}-1 \leq -1$ 일 때에는 수렴하지 않는다.

$$\textcircled{5} \sum_{n=1}^{\infty} r^n, \sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n \text{이 수렴하므로 } \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} r^n, \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n$$

도 수렴한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n + (-r)^n}{3} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} r^n + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n \text{이므로 주어진}$$

급수는 반드시 수렴한다.

따라서 반드시 수렴한다고 할 수 없는 것은 ④이다.

- 10 ㄱ. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 등비수열 $\{a_n^3\}$ 의 공비는 r^3 이다.

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 이 수렴하므로

$$-1 < r^3 < 1 \quad \therefore -1 < r < 1$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 도 수렴한다.

- ㄴ. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이면 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 0이거나

$-1 < (\text{공비}) < 1$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 수렴한다.

- ㄷ. [반례] $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 이라 하면

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \alpha\beta = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

$$a_n b_n = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \neq \alpha\beta$$

- ㄹ. [반례] $a_n = 3^n$, $b_n = -3^n$ 이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 공

비가 모두 3이고 $3 > 1$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 발산한다.

이때 $a_n + b_n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

- 11 $a_1 = 0, \dot{a} = \frac{a}{9}$, $a_2 = 0, \dot{a} = \frac{a}{99}$ 이므로 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{a}{99}}{\frac{a}{9}} = \frac{1}{11}$$

따라서 첫째항이 $\frac{a}{9}$, 공비가 $\frac{1}{11}$ 인 등비급수의 합이

$$0.2\dot{4} = \frac{22}{90} \text{이므로}$$

$$\frac{\frac{a}{9}}{1 - \frac{1}{11}} = \frac{22}{90}$$

$$\frac{11}{90}a = \frac{22}{90} \quad \therefore a = 2$$

- 12 n 번째 수거하여 재생산된 비닐의 양을 a_n kg이라 하면

$$a_1 = 200 \times 0.8 \times 0.75 = 200 \times \frac{3}{5} = 120$$

$$a_2 = a_1 \times 0.8 \times 0.75 = 120 \times \frac{3}{5}$$

$$a_3 = a_2 \times 0.8 \times 0.75 = 120 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$\vdots$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \frac{120}{1 - \frac{3}{5}} = 300$$

따라서 재생산되는 비닐의 총량은 300 kg이다.

- 13 원 $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$ 에 접하고 기울기가 -1 인 접선의 방정식은

$$y = -x \pm \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \sqrt{(-1)^2 + 1}$$

$$\therefore y = -x \pm \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

이때 제1사분면을 지나는 접선의 방정식은

$$y = -x + \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

이 접선이 x 축과 만나는 점의 좌표가 $(a_n, 0)$ 이므로

$$0 = -a_n + \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \therefore a_n = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

다른 풀이

기울기가 -1 인 접선이 점 $(a_n, 0)$ 을 지나므로 접선의 방정식은

$$y = -(x - a_n) \quad \therefore x + y - a_n = 0$$

원 $x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 접선 $x + y - a_n = 0$

사이의 거리는 반지름의 길이 $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ 과 같으므로

$$\frac{|-a_n|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \therefore a_n = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sqrt{2} \times \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

- 14 공이 정지할 때까지 움직인 거리는

$$3 + 2 \times 3 \times \frac{4}{5} + 2 \times 3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 2 \times 3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \cdots$$

$$= 3 + \frac{24}{1 - \frac{4}{5}} = 3 + 24 = 27(\text{m})$$

- 15 두 정삼각형 $A_nB_nC_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ 은 닮음이고 닮음비가 2 : 1이므로 넓이의 비는 4 : 1이다.

$$\therefore S_{n+1} = \frac{1}{4} S_n$$

이때 정삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 한 변의 길이는 $2 \times \frac{1}{2} = 1$ 이므로

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

- 16 함수 $f(x) = 2x^2 + 3x - 6$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 이차방정식 $2x^2 + 3x - 6 = 0$ 의 근과 같으므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{3}{2}, \alpha\beta = -3$$

한편 주어진 그래프에서 $\alpha < -1$, $\beta > 1$ 이므로

$$-1 < \frac{1}{\alpha} < 0, 0 < \frac{1}{\beta} < 1$$

따라서 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^n}$ 은 모두 수렴하므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^n} \\ &= \frac{\frac{1}{\alpha}}{1 - \frac{1}{\alpha}} + \frac{\frac{1}{\beta}}{1 - \frac{1}{\beta}} \\ &= \frac{1}{\alpha - 1} + \frac{1}{\beta - 1} \\ &= \frac{(\alpha + \beta) - 2}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} \\ &= \frac{-\frac{3}{2} - 2}{-3 - \left(-\frac{3}{2}\right) + 1} = 7 \end{aligned}$$

- 17 $4a_1 + 4^2a_2 + 4^3a_3 + \cdots + 4^n a_n = 3^n - 1$ ㉠

$$4a_1 + 4^2a_2 + 4^3a_3 + \cdots + 4^{n-1}a_{n-1} = 3^{n-1} - 1 \quad \text{..... ㉡}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때, ㉠ - ㉡을 하면

$$4^n a_n = (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1)$$

$$4^n a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{2 \times 3^{n-1}}{4^n}$$

$$(ii) n=1 \text{ 일 때, ㉠에서 } 4a_1 = 3 - 1 \quad \therefore a_1 = \frac{1}{2}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a_n = \frac{2 \times 3^{n-1}}{4^n}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^{n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \times 3^{n-1}}{4^n} \times \frac{1}{3^{n-1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= 2 \times \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- 18 오른쪽 그림과 같이 부채꼴 OA_1B_2 의 호 A_1B_2 와 선분 A_1B_1 이 만나는 점을 C라 하자.

직각삼각형 OA_1B_1 에서

$$\overline{OA_1} : \overline{OB_1} = 1 : \sqrt{3} \text{이므로}$$

$$\angle OA_1B_1 = \frac{\pi}{3}$$

$\overline{OA_1} = \overline{OC}$ 이므로 삼각형 OA_1C

는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.

따라서 $\angle B_2OC = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\begin{aligned} S_1 &= (\text{부채꼴 } OA_1C \text{의 넓이}) - \triangle OA_1C \\ &\quad + \triangle OCB_1 - (\text{부채꼴 } OCB_2 \text{의 넓이}) \\ &= \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4 \times \sin \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

두 삼각형 OA_1B_1 , OA_2B_2 는 닮음이고 닮음비는

$\overline{OB_1} : \overline{OB_2} = \sqrt{3} : 1$ 이므로 넓이의 비는 $(\sqrt{3})^2 : 1^2 = 3 : 1$ 이다.

즉, 두 삼각형 OA_nB_n ,

$OA_{n+1}B_{n+1}$ 의 넓이의 비는 3 : 1

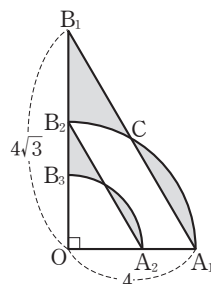
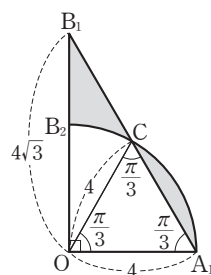
이므로 그림 R_n 에 새로 색칠한

부분과 그림 R_{n+1} 에 새로 색칠한

부분의 넓이의 비도 3 : 1이다.

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 은 첫째항이 $\frac{4}{3}\pi$, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{4}{3}\pi}{1 - \frac{1}{3}} = 2\pi$$



II-1 01 지수함수와 로그함수의 미분

1 지수함수와 로그함수의 극한

개념 CHECK

57쪽

- 1 답 (1) ∞ (2) 0 (3) 0 (4) ∞ (5) 25 (6) 7
- 2 답 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) $-\infty$ (4) ∞ (5) -1 (6) -2
- 3 답 (1) 2 (2) 3 (3) 1 (4) 0
- (1) $\lim_{x \rightarrow 2} \log_3(x^2+5) = \log_3 \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+5) = \log_3 9 = 2$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{3x+5} = \log_{\frac{1}{2}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{3x+5} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4x+3}{2x+1} = \log_2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+3}{2x+1} = \log_2 2 = 1$
- (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{1}{5}} \frac{x^2+3x}{x^2+1} = \log_{\frac{1}{5}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3x}{x^2+1} = \log_{\frac{1}{5}} 1 = 0$

문제

58~59쪽

01-1 답 (1) 0 (2) 5 (3) -1 (4) 2

(1) 분모, 분자를 4^x 으로 각각 나누면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{4^x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^x} = 0$$

(2) 분모, 분자를 5^x 으로 각각 나누면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 5^{x+1}}{5^x - 3^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x + 5}{1 - 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^x} = 5$$

(3) 분모, 분자에 2^x 을 각각 곱하면

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x + 1}{4^x - 1} = -1$$

(4) 4^x 으로 묶으면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (4^x - 3^{x+1})^{\frac{1}{2x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[4^x \left\{ 1 - 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^x \right\} \right]^{\frac{1}{2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \left\{ 1 - 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^x \right\}^{\frac{1}{2x}} \\ &= 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

다른 풀이

(3) $-x=t$ 로 놓으면 $x=-t$ 이고, $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2^{-t} + 2^t}{2^{-t} - 2^t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^t + 1}{\left(\frac{1}{4}\right)^t - 1} = -1 \end{aligned}$$

01-2 답 2

주어진 식의 좌변의 분모, 분자를 9^x 으로 각각 나누면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \times 3^{2x+1} + 2^{x-1}}{9^{x-1} - 2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3a + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{9}\right)^x}{\frac{1}{9} - \left(\frac{2}{9}\right)^x} = 27a$$

따라서 $27a=54$ 이므로 $a=2$

02-1 답 (1) 1 (2) -1 (3) 2 (4) 1

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1+} \{\log_2(x^2-1) - \log_2(x-1)\}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \log_2 \frac{x^2-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \log_2 \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \log_2(x+1) \\ &= \log_2 \lim_{x \rightarrow 1+} (x+1) \\ &= \log_2 2 = 1 \end{aligned}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} (\log_3 |x^2-4| - \log_3 |x^3-8|)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 2} \log_3 \left| \frac{x^2-4}{x^3-8} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \log_3 \left| \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \log_3 \left| \frac{x+2}{x^2+2x+4} \right| \\ &= \log_3 \lim_{x \rightarrow 2} \left| \frac{x+2}{x^2+2x+4} \right| \\ &= \log_3 \frac{1}{3} = -1 \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_3(9x+2) - \log_3(x-1)\}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{9x+2}{x-1} \\ &= \log_3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x+2}{x-1} \\ &= \log_3 9 = 2 \end{aligned}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \{\log(10x^2+1) - \log x^2\}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{10x^2+1}{x^2} \\ &= \log \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2+1}{x^2} \\ &= \log 10 = 1 \end{aligned}$$

02-2 답 100

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{\log(ax+1) - \log(x-1)\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{ax+1}{x-1} \\ &= \log \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+1}{x-1} \\ &= \log a \end{aligned}$$

따라서 $\log a=2$ 이므로 $a=100$

1 답 (1) $\sqrt{e}$ (2) e^3

2 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 3 (3) $\frac{1}{\ln 3}$ (4) $\ln 5$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{3x} \times 3 = 1 \times 3 = 3$$

문제

62~67쪽

03-1 답 (1) $\sqrt{e}$ (2) $\frac{1}{e^2}$ (3) $\frac{1}{e^6}$ (4) e^4 (5) $\frac{1}{e\sqrt{e}}$ (6) $\frac{1}{e}$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{4x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \right\}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{3} \right)^{-\frac{6}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(1 + \frac{x}{3} \right)^{\frac{3}{x}} \right\}^{-2} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{4x} \right)^{8x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{3}{4x} \right)^{-\frac{4x}{3}} \right\}^{-6} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x+2} \right)^{-6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x} \right)^{6x} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x} \right)^{6x} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{2}{3x} \right)^{\frac{3x}{2}} \right\}^4 = e^4$$

(5) $-x=t$ 로 놓으면 $x=-t$ 이고, $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{2x} \right)^{3x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2t} \right)^{-3t} \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2t} \right)^{2t} \right\}^{-\frac{3}{2}} \\ = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

(6) $x-2=t$ 로 놓으면 $x=2+t$ 이고, $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{1}{2-x}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{-\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\}^{-1} \\ = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

04-1 답 (1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $-3e$ (4) $-\frac{1}{2}$ (5) 1 (6) 1

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x}{\ln(4x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{4x}{\ln(1+4x)} \times \frac{x^2+3x}{4x} \right\} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\ln(1+4x)} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{4} \\ = 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{2x}{\ln(1+2x)} \times \frac{1}{2} \right\} \\ = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-3x}-e}{x} = e \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x}-1}{x} \\ = e \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x}-1}{-3x} \times (-3) \\ = e \times 1 \times (-3) = -3e$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{2x}}{x^3+4x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x}-1}{2x} \times \frac{2x}{x^3+4x} \right) \\ = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2+4} \\ = -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

(5) $x+1=t$ 로 놓으면 $x=-1+t$ 이고, $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(x+2)}{x+1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

(6) $x-1=t$ 로 놓으면 $x=1+t$ 이고, $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-e^{x-1}}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^2-e^t}{t} \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2+2t+1-e^t}{t} \\ = \lim_{t \rightarrow 0} (t+2) - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t-1}{t} \\ = 2-1=1$$

05-1 답 (1) $2\ln 5$ (2) 2 (3) $\frac{3}{2}\ln 3$ (4) $\ln 8$ (5) $\frac{\ln 2}{2}$

(6) $\frac{\ln 4+2}{3}$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x}-1}{\log_5(1+2x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{4x}-1}{4x} \times \frac{2x}{\log_5(1+2x)} \times 2 \right\} \\ = 1 \times \ln 5 \times 2 = 2\ln 5$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(9^x-1)\log_3(1+3x)}{x^3+3x^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{9^x-1}{x} \times \frac{\log_3(1+3x)}{3x} \times \frac{3x^2}{x^3+3x^2} \right\} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x-1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+3x)}{3x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x+3} \\ = \ln 9 \times \frac{1}{\ln 3} \times 1 = 2\ln 3 \times \frac{1}{\ln 3} = 2$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1}-3}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x-1}{x} \\ = \frac{3}{2} \ln 3$$

$$\begin{aligned}
 (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 2^{-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 1 - 2^{-x} + 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{-x} - 1}{-x} \\
 &= \ln 4 + \ln 2 = \ln 8
 \end{aligned}$$

(5) $x-3=t$ 로 놓으면 $x=3+t$ 이고, $x \rightarrow 3$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\log_2(2x-5)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_2(1+2t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{\log_2(1+2t)} \times \frac{1}{2} \\
 &= \ln 2 \times \frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{2}
 \end{aligned}$$

(6) $x+1=t$ 로 놓으면 $x=t-1$ 이고, $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4^{x+1} - x^2}{x^3 + 1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4^t - (t-1)^2}{(t-1)^3 + 1} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4^t - 1 - t^2 + 2t}{t^3 - 3t^2 + 3t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4^t - 1}{t^3 - 3t^2 + 3t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^2 + 2t}{t^3 - 3t^2 + 3t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4^t - 1}{t} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2 - 3t + 3} \\
 &\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t + 2}{t^2 - 3t + 3} \\
 &= \ln 4 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \\
 &= \frac{\ln 4 + 2}{3}
 \end{aligned}$$

06-1 답 1

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(a+5x) = 0$$

$$\ln a = 0 \quad \therefore a = 1$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x^2 + bx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+5x)}{5x} \times \frac{5x}{x^2 + bx} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{5x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x+b} \\
 &= 1 \times \frac{5}{b} = \frac{5}{b}
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{5}{b} = 5 \text{이므로 } b = 1$$

$$\therefore ab = 1 \times 1 = 1$$

06-2 답 4

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{bx+c} - 1) = 0$$

$$e^c - 1 = 0 \quad \therefore c = 0$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ax+1)}{e^{bx}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+ax)}{ax} \times \frac{bx}{e^{bx}-1} \times \frac{a}{b} \right\} \\
 &= 1 \times 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{a}{b} = 4 \text{이므로 } a = 4b$$

$$\therefore \frac{a}{b+c} = \frac{4b}{b+0} = 4$$

06-3 답 2

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow -1} \{a \ln(x+2) + b\} = 0 \quad \therefore b = 0$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{a \ln(x+2)}{x^2 - 1} = -1$$

이때 $x+1=t$ 로 놓으면 $x=t-1$ 이고, $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{a \ln(x+2)}{x^2 - 1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a \ln(1+t)}{(t-1)^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a \ln(1+t)}{t^2 - 2t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a}{t-2} \\
 &= 1 \times \left(-\frac{a}{2} \right) = -\frac{a}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{a}{2} = -1 \text{이므로 } a = 2$$

$$\therefore a+b = 2+0 = 2$$

07-1 답 4

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{a-2}}{ax} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{4x} - e^{a-2}) = 0, \quad 1 - e^{a-2} = 0 \quad \therefore a = 2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{4x} \times 2 = 1 \times 2 = 2 \\
 \therefore ab &= 2 \times 2 = 4
 \end{aligned}$$

07-2 답 3

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 + 4x}{\ln(a+bx)} = \lim_{x \rightarrow 0-} (x+b)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 + 4x}{\ln(a+bx)} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0+$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(a+bx) = 0, \ln a = 0 \quad \therefore a = 1$$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2+4x}{\ln(1+bx)} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ \frac{bx}{\ln(1+bx)} \times \frac{x^2+4x}{bx} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{bx}{\ln(1+bx)} \times \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x+4}{b} \\ &= 1 \times \frac{4}{b} = \frac{4}{b} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{4}{b} = b \text{이므로 } b^2 = 4 \quad \therefore b = 2 \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore a+b = 1+2 = 3$$

07-3 ㉠ $\ln 3$

$$x \neq 0 \text{일 때, } f(x) = \frac{3^x - a + 2}{ax}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - a + 2}{ax} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3^x - a + 2) = 0, 1 - a + 2 = 0 \quad \therefore a = 3$$

이를 ㉠에 대입하면

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} \times \frac{1}{3} = \ln 3 \times \frac{1}{3} = \frac{\ln 3}{3}$$

$$\therefore a \times f(0) = 3 \times \frac{\ln 3}{3} = \ln 3$$

08-1 ㉠ $\ln 6$

$$P(t, 2^t), Q\left(t, \left(\frac{1}{3}\right)^t\right), H(0, 2^t) \text{이므로}$$

$$\overline{PH} = t, \overline{PQ} = 2^t - \left(\frac{1}{3}\right)^t$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{PQ}}{\overline{PH}} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2^t - \left(\frac{1}{3}\right)^t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2^t - 1 - 3^{-t} + 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2^t - 1}{t} + \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{3^{-t} - 1}{-t} \\ &= \ln 2 + \ln 3 = \ln 6 \end{aligned}$$

08-2 ㉠ 50

$$A(1, 0), P(x, \ln x), Q(x, 0) \text{이므로}$$

$$\overline{AQ} = |x-1|, \overline{PQ} = |\ln x|$$

$$\therefore S(x) = \frac{1}{2} \times \overline{AQ} \times \overline{PQ} = \frac{1}{2} \times |x-1| \times |\ln x|$$

$x \rightarrow 1+$ 일 때 $x-1 > 0, \ln x > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{100S(x)}{(x-1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{50(x-1)\ln x}{(x-1)^2} \\ &= 50 \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln x}{x-1} \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

이때 $x-1=t$ 로 놓으면 $x=1+t$ 이고, $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로 ㉠에서

$$50 \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln x}{x-1} = 50 \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 50 \times 1 = 50$$

3 지수함수와 로그함수의 미분

문제

69~72쪽

09-1 ㉠ (1) $y' = e^{x-1} + 1$

$$(2) y' = (x^3 + 3x^2 + 4)e^x - 9x^2$$

$$(3) y' = 3x^2 + 3^{x+3} \ln 3$$

$$(4) y' = \{(2x+1)\ln 4 + 2\}4^x$$

$$\begin{aligned} (1) y' &= e^{-1}(e^x)' + (x)' + (-1)' \\ &= e^{-1} \times e^x + 1 = e^{x-1} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) y' &= (e^x - 3)'(x^3 + 4) + (e^x - 3)(x^3 + 4)' \\ &= e^x(x^3 + 4) + (e^x - 3) \times 3x^2 \\ &= (x^3 + 3x^2 + 4)e^x - 9x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) y' &= (x^3)' + 3^3(3^x)' = 3x^2 + 3^3 \times 3^x \ln 3 \\ &= 3x^2 + 3^{x+3} \ln 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) y' &= (2x+1)'4^x + (2x+1)(4^x)' \\ &= 2 \times 4^x + (2x+1)4^x \ln 4 \\ &= \{(2x+1)\ln 4 + 2\}4^x \end{aligned}$$

09-2 ㉠ $2e^2 + \ln 3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^2(e^x)' + (3^x)' = 2e^2 \times e^x + 3^x \ln 3 \\ &= 2e^{x+2} + 3^x \ln 3 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(0) = 2e^2 + \ln 3$$

10-1 ㉠ (1) $y' = 3 \ln x + \frac{2}{x} + 3$

$$(2) y' = e^x \left(\ln 2x + \frac{1}{x} \right)$$

$$(3) y' = \log_2 x + 1 + \frac{1}{\ln 2}$$

$$(4) y' = 2x + \frac{1}{x \ln 2}$$

$$\begin{aligned} (1) y' &= (3x+2)' \ln x + (3x+2)(\ln x)' \\ &= 3 \ln x + (3x+2) \times \frac{1}{x} \\ &= 3 \ln x + \frac{2}{x} + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad y' &= \{e^x(\ln 2 + \ln x)\}' \\
 &= (e^x)'(\ln 2 + \ln x) + e^x(\ln 2 + \ln x)' \\
 &= e^x(\ln 2 + \ln x) + e^x \times \frac{1}{x} \\
 &= e^x \left(\ln 2x + \frac{1}{x} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad y' &= (x)'(\log_2 x + 1) + x(\log_2 x + 1)' \\
 &= \log_2 x + 1 + x \times \frac{1}{x \ln 2} \\
 &= \log_2 x + 1 + \frac{1}{\ln 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad y' &= (x^2 + \log_2 3 + \log_2 x)' \\
 &= (x^2)' + (\log_2 3)' + (\log_2 x)' \\
 &= 2x + \frac{1}{x \ln 2}
 \end{aligned}$$

10-2 $\frac{e^2}{\ln 3}$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= e(e^x)' \log_3 x + e^{x+1}(\log_3 x)' \\
 &= e \times e^x \log_3 x + e^{x+1} \times \frac{1}{x \ln 3} \\
 \therefore f'(1) &= \frac{e^2}{\ln 3}
 \end{aligned}$$

11-1 $240 \ln 2$

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+4h) - f(2-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+4h) - f(2) + f(2) - f(2-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+4h) - f(2)}{4h} \times 4 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h} \\
 &= 4f'(2) + f'(2) \\
 &= 5f'(2) \\
 \text{이때 } f(x) &= 2^{x+2} + 2^{2x} = 4 \times 2^x + 4^x \text{이므로} \\
 f'(x) &= 4 \times 2^x \ln 2 + 4^x \ln 4 \\
 \text{따라서 구하는 극한값은} \\
 5f'(2) &= 5(4 \times 4 \ln 2 + 16 \ln 4) \\
 &= 5(16 \ln 2 + 32 \ln 2) \\
 &= 240 \ln 2
 \end{aligned}$$

11-2 $\frac{1}{\ln 2} - 3$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \log_2 4x - 3x + 1 \text{에서 } f(1) = 0 \text{이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) \\
 \text{이때 } f(x) &= \log_2 4x - 3x + 1 = 3 + \log_2 x - 3x \text{이므로} \\
 f'(x) &= \frac{1}{x \ln 2} - 3 \\
 \text{따라서 구하는 극한값은} \\
 f'(1) &= \frac{1}{\ln 2} - 3
 \end{aligned}$$

11-3 $\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{x-1} &= b \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고, 극한} \\
 &\text{값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{에서} \\
 \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + 2\} &= 0 \quad \therefore f(1) = -2 \\
 \therefore b &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) \\
 \text{함수 } f(x) &= x \ln x + x^2 - ax \text{에서 } f(1) = -2 \text{이므로} \\
 1 - a &= -2 \quad \therefore a = 3 \\
 \therefore f'(x) &= (x)' \ln x + x(\ln x)' + (x^2)' - 3(x)' \\
 &= \ln x + x \times \frac{1}{x} + 2x - 3 \\
 &= \ln x + 2x - 2 \\
 b &= f'(1) \text{이므로 } b = 0 \\
 \therefore a - b &= 3 - 0 = 3
 \end{aligned}$$

12-1 $\ln 3 + 1$

$$\begin{aligned}
 \text{함수 } f(x) &\text{가 } x=0 \text{에서 미분가능하면 } x=0 \text{에서 연속이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0) \\
 \lim_{x \rightarrow 0+} (x^2 + 3^x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} (ax + b) \\
 \therefore b &= 1 \\
 f'(x) &= \begin{cases} 2x + 3^x \ln 3 & (x > 0) \\ a & (x < 0) \end{cases} \text{이고 미분계수 } f'(0) \text{이 존재} \\
 \text{하므로 } \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) \\
 \lim_{x \rightarrow 0+} (2x + 3^x \ln 3) &= \lim_{x \rightarrow 0-} a \\
 \therefore a &= \ln 3 \\
 \therefore a + b &= \ln 3 + 1
 \end{aligned}$$

12-2 $-e$

$$\begin{aligned}
 \text{함수 } f(x) &\text{가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 } x=1 \\
 \text{에서 미분가능하고 } x=1 \text{에서 연속이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) \\
 \lim_{x \rightarrow 1+} \ln ax &= \lim_{x \rightarrow 1-} e^{x+b} \\
 \therefore \ln a &= e^{1+b} \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
 f'(x) &= \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 1) \\ e^{x+b} & (x < 1) \end{cases} \text{이고 미분계수 } f'(1) \text{이 존재하므로} \\
 \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) \\
 \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 1-} e^{x+b} \\
 1 &= e^{1+b} \quad \therefore b = -1 \\
 \text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \\
 \ln a &= 1 \quad \therefore a = e \\
 \therefore ab &= e \times (-1) = -e
 \end{aligned}$$

연습문제

73~75쪽

- 1 ③ 2 -2 3 $\sqrt{e}$ 4 3 5 ①
 6 10 7 3 8 $36\ln 2$ 9 1 10 0
 11 ② 12 $\frac{1}{2}$ 13 ③ 14 ② 15 2
 16 $2\ln 5$ 17 $3\ln 3 + 5\ln 5$ 18 3 19 -1
 20 ③ 21 $\frac{2}{e}$

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2^x}{1-3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x}{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1} = 0$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (8^x + 3^x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[8^x \left\{ 1 + \left(\frac{3}{8}\right)^x \right\} \right]^{\frac{1}{3x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \left\{ 1 + \left(\frac{3}{8}\right)^x \right\}^{\frac{1}{3x}} = 2 \times 1 = 2$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{6x}{2x+5} = \log_3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{2x+5} = \log_3 3 = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 3} (\log_2 |x^3 - 27| - \log_2 |x^2 - 9|)$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \log_2 \left| \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} \right|$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \log_2 \left| \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x+3)(x-3)} \right|$
 $= \log_2 \lim_{x \rightarrow 3} \left| \frac{x^2+3x+9}{x+3} \right| = \log_2 \frac{9}{2} = 2\log_2 3 - 1$
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+2x)^{\frac{1}{2x}} \right\}^6 = e^6$ 이므로 $a=6$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right\}^{-\frac{1}{3}} = e^{-\frac{1}{3}}$ 이므로
 $b = -\frac{1}{3} \quad \therefore ab = 6 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -2$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \right\}^n$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \frac{n+3}{n+2} \times \cdots \times \frac{2n+1}{2n} \right)^n$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n} \right\}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\frac{a}{x}}{1+\frac{a}{x}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1-\frac{a}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{a}{x}\right)^x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left\{ \left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}} \right\}^{-a}}{\left\{ \left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}} \right\}^a} = \frac{e^{-a}}{e^a} = \frac{1}{e^{2a}}$

따라서 $\frac{1}{e^{2a}} = \frac{1}{e^6}$ 이므로 $a=3$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \{ \ln x - \ln(x+4) \} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x}{x+4} \right)^x$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x+4}{x} \right)^{-x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{4}{x} \right)^{-x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left\{ \left(1 + \frac{4}{x} \right)^{\frac{x}{4}} \right\}^{-4}$
 $= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{4}{x} \right)^{\frac{x}{4}} \right\}^{-4}$
 $= \ln e^{-4} = -4$

다른 풀이

$\lim_{x \rightarrow \infty} x \{ \ln x - \ln(x+4) \} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x}{x+4}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 - \frac{4}{x+4} \right)$
 $-\frac{4}{x+4} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{-4-4t}{t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때
 $t \rightarrow 0$ 이므로 구하는 극한값은
 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 - \frac{4}{x+4} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-4-4t}{t} \ln(1+t)$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} (-4-4t) \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$
 $= -4 \times 1 = -4$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x} + \cdots + e^{nx} - n}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + e^{2x} - 1 + e^{3x} - 1 + \cdots + e^{nx} - 1}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3$
 $\quad \quad \quad + \cdots + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{nx} - 1}{nx} \times n$
 $= 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

따라서 $\frac{n(n+1)}{2} = 55$ 이므로

$n(n+1) = 10 \times 11 \quad \therefore n = 10$ ($\because n$ 은 자연수)

7. $\ln(1+3x) \leq f(x) \leq e^{3x} - 1$ 의 각 변을 x 로 나누면
 $\frac{\ln(1+3x)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{e^{3x} - 1}{x}$
 이 때 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times 3 = 3,$
 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3 = 3$ 이므로 함수의 극한의
 대소 관계에 의하여
 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = 3$

8 (가)에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 3^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1 - 3^x + 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} \\ &= \ln a - \ln 3 = \ln \frac{a}{3}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \ln \frac{a}{3} = \ln 2 \text{이므로 } a = 6$$

이를 (나)에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_2 x}{6(x-1)} = b$$

$x-1=t$ 로 놓으면 $x=1+t$ 이고, $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_2 x}{6(x-1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_2 (1+t)}{6t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_2 (1+t)}{t} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6 \ln 2}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = 6 \times 6 \ln 2 = 36 \ln 2$$

9 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (ax^2 + b) = 0 \quad \therefore b = 0$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \ln(1+x)}{ax^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^x - 1}{x} \times \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{a} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{a} = 2 \text{이므로 } a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 2a + b = 2 \times \frac{1}{2} + 0 = 1$$

10 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(2x+b)}{e^{ax}-1} = \lim_{x \rightarrow 0-} \{a(x-b)^2 + 1\}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(2x+b)}{e^{ax}-1} = ab^2 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(2x+b) = 0, \ln b = 0 \quad \therefore b = 1$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(2x+1)}{e^{ax}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \frac{ax}{e^{ax}-1} \times \frac{2}{a} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{2}{a} = \frac{2}{a}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{2}{a} = ab^2 + 1 = a + 1 \text{이므로}$$

$$a^2 + a - 2 = 0, (a+2)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore a - b = 1 - 1 = 0$$

11 $A(t, \ln t), B(t, -\ln t)$ 이므로

$$\overline{AB} = |2 \ln t|$$

삼각형 AQB의 넓이가 1이 되려면

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PQ} = 1$$

$$\frac{1}{2} \times |2 \ln t| \times f(t) = 1$$

$$\therefore f(t) = \frac{1}{|\ln t|}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1+} (t-1)f(t) = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{t-1}{\ln t}$$

$t-1=s$ 로 놓으면 $t=1+s$ 이고, $t \rightarrow 1+$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 1+} (t-1)f(t) = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{t-1}{\ln t} = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{s}{\ln(1+s)} = 1$$

12 $Q(t, 0), R(t, 1)$ 이고 $t > 0$ 이므로

$$f(t) = \frac{1}{2} \times \overline{AR} \times \overline{PR} = \frac{1}{2} t(e^t - 1)$$

$$g(t) = \frac{1}{2} \times \overline{AR} \times \overline{QR} = \frac{1}{2} t$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\{g(t)\}^2}{f(t)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{4} t^2}{\frac{1}{2} t(e^t - 1)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t}{e^t - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

13 ① $(e^{x+3})' = e^3(e^x)'$

$$= e^3 \times e^x = e^{x+3}$$

$$\textcircled{2} (x^2 e^x)' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)'$$

$$= 2x e^x + x^2 e^x$$

$$= (x^2 + 2x) e^x$$

$$\textcircled{3} (\ln 5x)' = (\ln 5 + \ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\textcircled{4} (\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$$

$$\textcircled{5} (x \log x)' = (x)' \log x + x (\log x)'$$

$$= \log x + x \times \frac{1}{x \ln 10}$$

$$= \log x + \frac{1}{\ln 10}$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

$$\begin{aligned}
 14 \quad f'(x) &= (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' \\
 &= e^x \ln x + \frac{e^x}{x} \\
 \therefore f'(e) - f(e) &= \left(e^e + \frac{e^e}{e} \right) - e^e = \frac{e^e}{e} = e^{e-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15 \quad f(x) &= (x+a)e^{x+b} = (x+a)e^x \times e^b \text{이므로} \\
 f'(x) &= \{(x+a)'e^x + (x+a)(e^x)'\}e^b \\
 &= \{e^x + (x+a)e^x\}e^b \\
 &= (x+a+1)e^{x+b} \\
 f'(0) &= 0 \text{에서} \\
 (a+1)e^b &= 0 \quad \therefore a = -1 \quad (\because e^b > 0) \\
 f'(-1) &= -1 \text{에서} \\
 ae^{b-1} &= -1, -e^{b-1} = -1 \\
 e^{b-1} &= 1 \quad \therefore b = 1 \\
 \therefore b - a &= 1 - (-1) = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \ln 5}{x - 1} &= -1 \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고,} \\
 &\text{극한값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{에서} \\
 \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - \ln 5\} &= 0 \quad \therefore f(1) = \ln 5 \\
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \ln 5}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \text{이므로} \\
 f'(1) &= -1 \\
 g(x) &= (\log_5 x + x^2)f(x) \text{에서} \\
 g'(x) &= (\log_5 x + x^2)'f(x) + (\log_5 x + x^2)f'(x) \\
 &= \left(\frac{1}{x \ln 5} + 2x \right) f(x) + (\log_5 x + x^2)f'(x) \\
 \therefore g'(1) &= \left(\frac{1}{\ln 5} + 2 \right) f(1) + f'(1) \\
 &= \left(\frac{1}{\ln 5} + 2 \right) \times \ln 5 + (-1) = 2 \ln 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17 \quad f(x) &= 3^x + 5^x \text{이라 하면 } f(1) = 8 \text{이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^x + 5^x - 8}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \\
 f'(x) &= 3^x \ln 3 + 5^x \ln 5 \text{이므로 구하는 극한값은} \\
 f'(1) &= 3 \ln 3 + 5 \ln 5
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 x - 1 &= t \text{로 놓으면 } x = 1 + t \text{이고, } x \rightarrow 1 \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^x + 5^x - 8}{x - 1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3^{1+t} + 5^{1+t} - 8}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3^{t+1} - 3 + 5^{t+1} - 5}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3^t - 1}{t} \times 3 + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5^t - 1}{t} \times 5 \\
 &= 3 \ln 3 + 5 \ln 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18 \quad \text{함수 } f(x) \text{가 } x=1 \text{에서 미분가능하면 } x=1 \text{에서 연속이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) \\
 \lim_{x \rightarrow 1+} (a \ln x + b) = \lim_{x \rightarrow 1-} (2^x - 1) \\
 \therefore b = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \begin{cases} \frac{a}{x} & (x > 1) \\ 2^x \ln 2 & (x < 1) \end{cases} \text{이고 미분계수 } f'(1) \text{이 존재하므로} \\
 \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) \\
 \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a}{x} &= \lim_{x \rightarrow 1-} 2^x \ln 2 \\
 \therefore a &= 2 \ln 2 \\
 \therefore e^a - b &= e^{2 \ln 2} - 1 \\
 &= e^{\ln 4} - 1 \\
 &= 4 - 1 = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19 \quad \text{함수 } f(x)g(x) \text{가 } x=2 \text{에서 연속이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) &= f(2)g(2) \\
 \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{\ln(x^2 - 4x + 5)} &= 0 \\
 x - 2 = t \text{로 놓으면 } x = 2 + t \text{이고, } x \rightarrow 2 \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{\ln(x^2 - 4x + 5)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2+t)}{\ln(1+t^2)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{t^2}{\ln(1+t^2)} \times \frac{f(2+t)}{t^2} \right\} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2+t)}{t^2}
 \end{aligned}$$

즉, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2+t)}{t^2} = 0$ 이므로 함수 $f(2+t)$ 는 t^2 을 인수로 갖는다.

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이면 함수 $f(2+t)$ 의 최고차항의 계수도 1이므로 $f(2+t) = t^2(t+a)$ (a 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2+t)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(t+a)}{t^2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} (t+a) = a
 \end{aligned}$$

즉, $a = 0$ 이므로

$$f(2+t) = t^3$$

따라서 $f(x) = (x-2)^3$ 이므로

$$f(1) = -1$$

$$\begin{aligned}
 20 \quad Q(k, e^{\frac{k}{2} + 3t}) \text{이므로 점 R의 } y \text{좌표는} \\
 e^{\frac{k}{2} + 3t}
 \end{aligned}$$

점 R의 x 좌표를 구하면 $e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{k}{2} + 3t}$

$$\frac{x}{2} = \frac{k}{2} + 3t \quad \therefore x = k + 6t$$

$$\therefore R(k+6t, e^{\frac{k}{2} + 3t})$$

$P(k, e^{\frac{k}{2}})$ 이므로

$$\overline{PQ} = e^{\frac{k}{2} + 3t} - e^{\frac{k}{2}} = e^{\frac{k}{2}}(e^{3t} - 1), \overline{QR} = 6t$$

$\overline{PQ} = \overline{QR}$ 에서

$$e^{\frac{k}{2}}(e^{3t} - 1) = 6t$$

$$e^{\frac{k}{2}} = \frac{6t}{e^{3t} - 1} \quad (\because e^{3t} - 1 > 0)$$

$$\frac{k}{2} = \ln \frac{6t}{e^{3t} - 1}$$

$$\therefore k = 2 \ln \frac{6t}{e^{3t} - 1}$$

따라서 $f(t) = 2 \ln \frac{6t}{e^{3t} - 1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} 2 \ln \frac{6t}{e^{3t} - 1} \\ &= 2 \ln \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{6t}{e^{3t} - 1} \\ &= 2 \ln \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3t}{e^{3t} - 1} \times 2 \right) \\ &= 2 \ln 2 = \ln 4 \end{aligned}$$

- 21 $f(x+y) = \frac{f(x)}{e^y} + \frac{f(y)}{e^x}$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0)$$

$$\therefore f(0) = 0$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \text{ 이므로}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

도함수의 정의에 의하여

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{e^h} + \frac{f(h)}{e^x} - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{-h} - 1)f(x) + e^{-x}f(h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ -f(x) \times \frac{e^{-h} - 1}{-h} + e^{-x} \times \frac{f(h)}{h} \right\}$$

$$= -f(x) - 2e^{-x} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore g(x) = f'(x) + f(x)$$

$$= -f(x) - 2e^{-x} + f(x)$$

$$= -2e^{-x}$$

$$\therefore g'(x) = \left\{ -2 \times \left(\frac{1}{e} \right)^x \right\}'$$

$$= -2 \times \left(\frac{1}{e} \right)^x \ln \frac{1}{e}$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{e} \right)^x$$

$$\therefore g'(1) = \frac{2}{e}$$

II-1 02 삼각함수의 덧셈정리

삼각함수의 덧셈정리

개념 CHECK

78쪽

- 1 $\textcircled{답}$ (1) 2 (2) -2 (3) $\sqrt{3}$

$$(1) \csc \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\begin{aligned} (2) \sec \left(-\frac{2}{3}\pi \right) &= \frac{1}{\cos \left(-\frac{2}{3}\pi \right)} = \frac{1}{-\cos \frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \cot \frac{7}{6}\pi &= \frac{1}{\tan \frac{7}{6}\pi} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

- 2 $\textcircled{답}$ (1) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ (3) $-2 - \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} (1) \sin 75^\circ &= \sin (45^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \cos 15^\circ &= \cos (60^\circ - 45^\circ) \\ &= \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \tan 105^\circ &= \tan (60^\circ + 45^\circ) \\ &= \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \times 1} = -2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

- 3 $\textcircled{답}$ (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} (1) \sin 100^\circ \cos 55^\circ - \cos 100^\circ \sin 55^\circ \\ &= \sin (100^\circ - 55^\circ) \\ &= \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \cos 40^\circ \cos 70^\circ + \sin 40^\circ \sin 70^\circ \\ &= \cos (40^\circ - 70^\circ) = \cos (-30^\circ) \\ &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \frac{\tan 80^\circ - \tan 20^\circ}{1 + \tan 80^\circ \tan 20^\circ} &= \tan (80^\circ - 20^\circ) \\ &= \tan 60^\circ = \sqrt{3} \end{aligned}$$

01-1 [답] (1) $\frac{100}{9}$ (2) $-\frac{1}{3}$ (3) $-\frac{4}{3}$

(1) $\tan \theta = -3$ 에서 $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$\csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$$

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta = 1 + (-3)^2 = 10$$

$$\therefore \csc^2 \theta + \sec^2 \theta = \frac{10}{9} + 10 = \frac{100}{9}$$

(2) θ 가 제3사분면의 각이면 $\tan \theta > 0$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \text{ 이므로}$$

$$\tan \theta = \sqrt{\sec^2 \theta - 1} = \sqrt{\left(-\frac{5}{4}\right)^2 - 1} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \cot \theta = \frac{4}{3}$$

θ 가 제3사분면의 각이면 $\sin \theta < 0 \quad \therefore \csc \theta < 0$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta \text{ 이므로}$$

$$\csc \theta = -\sqrt{1 + \cot^2 \theta} = -\sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{5}{3}$$

$$\therefore \csc \theta + \cot \theta = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

(3) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sec \theta + \csc \theta &= \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

다른 풀이

(2) θ 가 제3사분면의 각이고

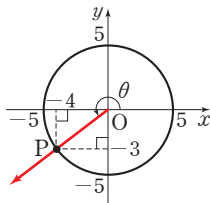
$$\sec \theta = -\frac{5}{4}, \text{ 즉 } \cos \theta = -\frac{4}{5}$$

이므로 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5인 원을 그리면 각 θ 를 나타내는 동경이 원과 만나는 점 P의 좌표는

$$P(-4, -3)$$

따라서 $\csc \theta = -\frac{5}{3}, \cot \theta = \frac{4}{3}$ 이므로

$$\csc \theta + \cot \theta = -\frac{1}{3}$$



02-1 [답] (1) $-\frac{5\sqrt{3}}{9}$ (2) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ (3) $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 에서 $\cos \alpha > 0, \sin \beta > 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} (1) \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{5\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - (-2\sqrt{2})}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-2\sqrt{2})} = -\frac{5\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

02-2 [답] $\frac{1}{3}$

$(\tan \alpha + 3)(\tan \beta - 3) = -10$ 에서

$$\tan \alpha \tan \beta - 3(\tan \alpha - \tan \beta) - 9 = -10$$

$$\tan \alpha \tan \beta + 1 = 3(\tan \alpha - \tan \beta)$$

$$\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$$

03-1 [답] (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{3}{5}$ (3) $\frac{4}{3}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \theta > 0, \sec \theta > 0$ 이므로

$$\sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

또 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{aligned} (1) \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$(2) \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$

$$= 1 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{3}{5}$$

$$(3) \tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1-\tan^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$$

03-2 $\square -\frac{2\sqrt{14}}{9}$

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{2}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{4}{9}$$

$$1 - 2\sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$2\sin \theta \cos \theta = \frac{5}{9}$$

$$\therefore \sin 2\theta = \frac{5}{9}$$

이때 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi$ 이므로

$$\cos 2\theta < 0$$

$$\therefore \cos 2\theta = -\sqrt{1 - \sin^2 2\theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{14}}{9}$$

04-1 $\square \frac{\pi}{3}$

두 직선 $\sqrt{3}x + 2y = 0$, $3\sqrt{3}x - y + 1 = 0$, 즉 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$,

$y = 3\sqrt{3}x + 1$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \beta = 3\sqrt{3}$$

따라서 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right|$$

$$= \left| \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3}}{1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 3\sqrt{3}} \right| = \sqrt{3}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

04-2 $\square 3$

두 직선 $ax - 4y + 12 = 0$, $x + 2y + 4 = 0$, 즉 $y = \frac{a}{4}x + 3$,

$y = -\frac{1}{2}x - 2$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를

각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{a}{4}, \tan \beta = -\frac{1}{2}$$

이때 두 직선이 이루는 예각의 크기가 θ 이므로

$$\tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right|$$

$$= \left| \frac{\frac{a}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \frac{a}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right)} \right| = \left| \frac{2a+4}{8-a} \right|$$

따라서 $\left| \frac{2a+4}{8-a} \right| = 2$ 이므로

$$2a+4 = 2(8-a) \text{ 또는 } 2a+4 = -2(8-a)$$

$$\therefore a = 3$$

05-1 $\square \frac{119}{169}$

$$\overline{AC} = \overline{AE} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$$\angle CAB = \alpha, \angle EAD = \beta$$

하면

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{12}{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{5}{13}$$

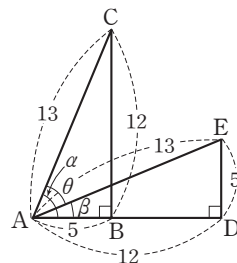
$$\sin \beta = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{5}{13}$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{12}{13}$$

이때 $\theta = \alpha - \beta$ 이므로

$$\sin \theta = \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{12}{13} \times \frac{12}{13} - \frac{5}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{119}{169}$$



05-2 $\square 7$

점 D가 변 AB를 2:1로 내분하므로 $\overline{BD} = 6 \times \frac{1}{3} = 2$

$$\angle CDB = \alpha, \angle CAB = \beta$$

하면

$$\tan \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{a}{2}$$

$$\tan \beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{6}$$

이때 $\theta = \alpha - \beta$ 이므로

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

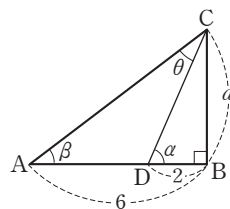
$$= \frac{\frac{a}{2} - \frac{a}{6}}{1 + \frac{a}{2} \times \frac{a}{6}} = \frac{4a}{a^2 + 12}$$

$$\text{즉, } \frac{4a}{a^2 + 12} = \frac{4}{7} \text{이므로 } 7a = a^2 + 12$$

$$a^2 - 7a + 12 = 0, (a-3)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 3 \text{ 또는 } a = 4$$

따라서 모든 a 의 값의 합은 $3+4=7$



06-1 [답] (1) $2\sin\left(\theta + \frac{5}{6}\pi\right)$ (2) $2\cos\left(\theta - \frac{5}{3}\pi\right)$

$$\begin{aligned} (1) & -\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta \\ & = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right) \\ & = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi\sin\theta + \sin\frac{5}{6}\pi\cos\theta\right) \\ & = 2\sin\left(\theta + \frac{5}{6}\pi\right) \\ (2) & -\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta \\ & = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right) \\ & = 2\left(\sin\frac{5}{3}\pi\sin\theta + \cos\frac{5}{3}\pi\cos\theta\right) \\ & = 2\cos\left(\theta - \frac{5}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

06-2 [답] 최댓값: 4, 최솟값: -4

$$\begin{aligned} y & = 4\sin x + 4\sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\ & = 4\sin x + 4\sqrt{3}\left(\cos x \cos\frac{\pi}{3} - \sin x \sin\frac{\pi}{3}\right) \\ & = 4\sin x + 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) \\ & = -2\sin x + 2\sqrt{3}\cos x \\ & = 4\left(-\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) \\ & = 4\left(\cos\frac{2}{3}\pi\sin x + \sin\frac{2}{3}\pi\cos x\right) \\ & = 4\sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) \end{aligned}$$

이때 $-1 \leq \sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) \leq 1$ 이므로

$$-4 \leq 4\sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) \leq 4$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 4, 최솟값은 -4이다.

연습문제

86~87쪽

- 1 ㄱ, ㄴ 2 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 3 ④ 4 $\frac{14}{25}$ 5 2
6 $-\frac{5}{8}$ 7 ② 8 $\frac{4+\sqrt{15}}{8}$
9 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$, $y = 3x - 6$ 10 $\frac{8}{15}$ 11 ④
12 4 13 ① 14 $\frac{7}{4}$

$$\begin{aligned} 1 \quad \neg. \quad & \frac{1}{1+\cos\theta} + \frac{1}{1-\cos\theta} = \frac{(1-\cos\theta) + (1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} \\ & = \frac{2}{1-\cos^2\theta} \\ & = \frac{2}{\sin^2\theta} \\ & = 2\csc^2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \quad & \frac{\cot\theta}{1+\csc\theta} + \frac{1+\csc\theta}{\cot\theta} \\ & = \frac{\cot^2\theta + (1+\csc\theta)^2}{(1+\csc\theta)\cot\theta} \\ & = \frac{\cot^2\theta + 1 + 2\csc\theta + \csc^2\theta}{(1+\csc\theta)\cot\theta} \\ & = \frac{2\csc^2\theta + 2\csc\theta}{(1+\csc\theta)\cot\theta} \\ & = \frac{2\csc\theta(\csc\theta+1)}{(1+\csc\theta)\cot\theta} = \frac{2\csc\theta}{\cot\theta} \\ & = 2\csc\theta\tan\theta = 2 \times \frac{1}{\sin\theta} \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ & = \frac{2}{\cos\theta} = 2\sec\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \quad & \frac{1+\cos\theta}{\sec\theta-\tan\theta} - \frac{1-\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta} \\ & = \frac{(1+\cos\theta)(\sec\theta+\tan\theta) - (1-\cos\theta)(\sec\theta-\tan\theta)}{(\sec\theta-\tan\theta)(\sec\theta+\tan\theta)} \\ & = \frac{2(\cos\theta\sec\theta + \tan\theta)}{\sec^2\theta - \tan^2\theta} \\ & = \frac{2(1+\tan\theta)}{(1+\tan^2\theta) - \tan^2\theta} \\ & = 2(1+\tan\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \quad & (\tan\theta + \cot\theta)^2 - (\sin\theta + \csc\theta)^2 - (\cos\theta + \sec\theta)^2 \\ & = \tan^2\theta + 2 + \cot^2\theta - (\sin^2\theta + 2 + \csc^2\theta) \\ & \quad - (\cos^2\theta + 2 + \sec^2\theta) \\ & = (\tan^2\theta - \sec^2\theta) + (\cot^2\theta - \csc^2\theta) \\ & \quad - (\sin^2\theta + \cos^2\theta) - 2 \\ & = -1 + (-1) - 1 - 2 = -5 \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

2 $\tan\theta + \cot\theta = -8$ 에서

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -8, \quad \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = -8$$

$$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = -8$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sin\theta - \cos\theta)^2 & = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta \\ & = 1 - 2\sin\theta\cos\theta \\ & = 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore |\sin\theta - \cos\theta| = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad & \frac{\cos 20^\circ \cos 25^\circ - \sin 20^\circ \sin 25^\circ}{\sin 140^\circ \cos 20^\circ - \cos 140^\circ \sin 20^\circ} \\
 &= \frac{\cos(20^\circ + 25^\circ)}{\sin(140^\circ - 20^\circ)} = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 60^\circ} \\
 &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4 \quad & \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \cos \alpha < 0, \cos \beta > 0 \text{이므로} \\
 & \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5} \\
 & \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5} \\
 & \therefore \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\
 & \quad = \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{21}}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{2}{5} \\
 & \quad = \frac{3\sqrt{21} + 8}{25}, \\
 & \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\
 & \quad = -\frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{21}}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \\
 & \quad = \frac{-4\sqrt{21} - 6}{25} \\
 & \therefore 4 \sin(\alpha - \beta) + 3 \cos(\alpha + \beta) \\
 & \quad = \frac{12\sqrt{21} + 32}{25} + \frac{-12\sqrt{21} - 18}{25} = \frac{14}{25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5 \quad & \text{이차방정식 } x^2 + 7x + 8 = 0 \text{의 두 근이 } \tan \alpha, \tan \beta \text{이므로 근과 계수의 관계에 의하여} \\
 & \tan \alpha + \tan \beta = -7, \tan \alpha \tan \beta = 8 \\
 & \text{이때 } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-7}{1 - 8} = 1 \text{이므로} \\
 & \sec^2(\alpha + \beta) = 1 + \tan^2(\alpha + \beta) = 1 + 1^2 = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6 \quad & \sin \alpha - \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{의 양변을 제곱하면} \\
 & \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
 & \cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2} \text{의 양변을 제곱하면} \\
 & \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2} \\
 & \textcircled{1} + \textcircled{2} \text{을 하면} \\
 & (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \\
 & \quad + 2(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = \frac{3}{4} \\
 & 2 + 2 \cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{4} \\
 & \therefore \cos(\alpha + \beta) = -\frac{5}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7 \quad & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \cos \theta > 0, \sec \theta > 0 \text{이므로} \\
 & \sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{1 + (2\sqrt{2})^2} = 3 \\
 & \therefore \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} = \frac{1}{3} \\
 & \text{또 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \sin \theta > 0 \text{이므로} \\
 & \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\
 & \therefore \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}, \\
 & \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{9} \\
 & \therefore \sqrt{2} \sin 2\theta + \cos 2\theta = \sqrt{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{9} + \left(-\frac{7}{9}\right) = \frac{1}{9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8 \quad & 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \text{에서 } 0 < 2\theta < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \cos 2\theta > 0 \\
 & \therefore \cos 2\theta = \sqrt{1 - \sin^2 2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \\
 & \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \text{이므로} \\
 & \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\
 & \quad = \frac{1 + \frac{\sqrt{15}}{4}}{2} = \frac{4 + \sqrt{15}}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9 \quad & \text{직선 } y = \frac{1}{2}x + 4 \text{와 이루는 예각의 크기가 } \frac{\pi}{4} \text{인 직선의 기울기를 } m \text{이라 하고, 두 직선이 } x \text{축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 } \alpha, \beta \text{라 하면} \\
 & \tan \alpha = \frac{1}{2}, \tan \beta = m \\
 & |\tan(\alpha - \beta)| = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{이므로} \\
 & \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| = 1 \\
 & \left| \frac{\frac{1}{2} - m}{1 + \frac{1}{2}m} \right| = 1 \\
 & \therefore \left| \frac{1 - 2m}{2 + m} \right| = 1 \\
 & \text{즉, } 1 - 2m = 2 + m \text{ 또는 } 1 - 2m = -2 - m \text{이므로} \\
 & m = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } m = 3 \\
 & \text{따라서 기울기가 } -\frac{1}{3} \text{ 또는 } 3 \text{이고 점 } (2, 0) \text{을 지나는 직선의 방정식은} \\
 & y = -\frac{1}{3}(x - 2) \text{ 또는 } y = 3(x - 2) \\
 & \therefore y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \text{ 또는 } y = 3x - 6
 \end{aligned}$$

- 10 직선 $y = \frac{1}{4}x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\tan \theta = \frac{1}{4}$$

직선 $y = mx$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 2θ 이므로

$$m = \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \times \frac{1}{4}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{8}{15}$$

- 11 $P(t, 1-t^2)$ ($0 < t < 1$)이라 하면 $H(0, 1-t^2)$ 이므로

$$\overline{AH} = 1 - (1-t^2) = t^2$$

$$\overline{PH} = t$$

$$\therefore \tan \theta_1 = \frac{\overline{AH}}{\overline{PH}} = \frac{t^2}{t} = t$$

즉, $t = \frac{1}{2}$ 이므로

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$

$$\therefore \tan \theta_2 = \frac{\overline{OH}}{\overline{PH}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan(\theta_1 + \theta_2) &= \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}} = 8 \end{aligned}$$

- 12 $y = \cos x - \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$

$$= \cos x - \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6}\right) + 2$$

$$= \cos x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x\right) + 2$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + 2$$

$$= \cos \frac{5}{6} \pi \sin x + \sin \frac{5}{6} \pi \cos x + 2$$

$$= \sin\left(x + \frac{5}{6} \pi\right) + 2$$

이때 $-1 \leq \sin\left(x + \frac{5}{6} \pi\right) \leq 1$ 이므로

$$1 \leq \sin\left(x + \frac{5}{6} \pi\right) + 2 \leq 3$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 3, 최솟값은 1이므로

$$M = 3, m = 1$$

$$\therefore M + m = 4$$

- 13 $y' = e^x$ 이므로 곡선 $y = e^x$ 위의 두 점 $A(t, e^t)$,

$B(-t, e^{-t})$ 에서의 접선 l, m 의 기울기는 각각 e^t, e^{-t} 이다. 두 직선 l, m 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라 하면

$$\tan \alpha = e^t, \tan \beta = e^{-t}$$

두 직선 l, m 이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = 1$$

$$\frac{e^t - e^{-t}}{1 + e^t \times e^{-t}} = 1, e^t - e^{-t} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$e^{2t} - 2e^t - 1 = 0$$

$e^t = s$ ($s > 0$)로 놓으면

$$s^2 - 2s - 1 = 0 \quad \therefore s = 1 + \sqrt{2} \quad (\because s > 0)$$

즉, $e^t = 1 + \sqrt{2}$ 이므로 $t = \ln(1 + \sqrt{2})$

따라서 두 점 $A(t, e^t)$, $B(-t, e^{-t})$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\begin{aligned} \frac{e^t - e^{-t}}{t - (-t)} &= \frac{2}{2t} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \frac{1}{t} = \frac{1}{\ln(1 + \sqrt{2})} \end{aligned}$$

- 14 선분 AC가 선분 BD와 만나는 점

을 G라 하자.

$\angle CAD = \alpha$ 라 하면 $\angle CBD = \alpha$

이므로

$$\tan \alpha = \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} = \frac{2}{5}$$

$\angle DAF = \beta$ 라 하면

$$\tan \beta = \frac{\overline{DF}}{\overline{AF}} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \tan(\angle GAF) = \tan(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{6}}{1 + \frac{2}{5} \times \frac{1}{6}} = \frac{7}{32}$$

$$\therefore \overline{GF} = \overline{AF} \tan(\angle GAF) = 6 \times \frac{7}{32} = \frac{21}{16}$$

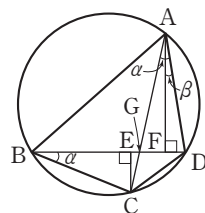
삼각형 AGF와 삼각형 CGE는 닮음이므로

$$\overline{AF} : \overline{CE} = \overline{GF} : \overline{GE}$$

$$6 : 2 = \frac{21}{16} : \overline{GE}$$

$$6 \overline{GE} = \frac{21}{8} \quad \therefore \overline{GE} = \frac{7}{16}$$

$$\therefore \overline{EF} = \overline{GE} + \overline{GF} = \frac{7}{16} + \frac{21}{16} = \frac{7}{4}$$



II-1 03 삼각함수의 미분

1 삼각함수의 극한

개념 CHECK

89쪽

1 답 (1) 0 (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (5) -2 (6) 1

2 답 (1) 1 (2) 1 (3) $\frac{1}{3}$ (4) 4 (5) 2 (6) $\frac{1}{2}$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{3} \\ = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{4x} \times 4 \\ = 1 \times 4 = 4$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \times 2 \\ = 1 \times 2 = 2$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x} \times \frac{1}{2} \\ = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

문제

90~94쪽

01-1 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $2\sqrt{2}$ (3) 2 (4) 0

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \\ = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos x \left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1 \right)} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\tan x + 1)(\tan x - 1)}{\cos x (\tan x - 1)} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x + 1}{\cos x} \\ = \frac{1 + 1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} \\ = \lim_{x \rightarrow \pi} 2 \cos^2 x \\ = 2 \times (-1)^2 = 2$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\cos x (1 + \sin x)} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} \\ = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} \\ = \frac{0}{1 + 1} = 0$$

02-1 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 5 (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$

(1) $x \rightarrow 0$ 일 때, $(4x^3 + 3x^2 - 2x) \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x^3 + 3x^2 - 2x)}{3x^2 - 4x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(4x^3 + 3x^2 - 2x)}{4x^3 + 3x^2 - 2x} \times \frac{4x^3 + 3x^2 - 2x}{3x^2 - 4x} \right\} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(4x^3 + 3x^2 - 2x)}{4x^3 + 3x^2 - 2x} \times \frac{4x^2 + 3x - 2}{3x - 4} \right\} \\ = 1 \times \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin 3x}{\sin x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{\sin x} + \frac{\sin 3x}{\sin x} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{x}{\sin x} \times 2 \right) \\ \quad + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{x}{\sin x} \times 3 \right) \\ = 1 \times 1 \times 2 + 1 \times 1 \times 3 = 5$$

(3) $x \rightarrow 0$ 일 때, $\sin 2x \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin 2x)}{\tan 3x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(\sin 2x)}{\sin 2x} \times \frac{3x}{\tan 3x} \times \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{3} \right\} \\ = 1 \times 1 \times 1 \times \frac{2}{3} \\ = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x \sin x (1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{1 + \cos x} \right) \\
 &= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

02-2 -3

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^3}{\sin x - \tan x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^3}{\sin x - \frac{\sin x}{\cos x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^3 \cos x}{\sin x (\cos x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^3 \cos x (\cos x + 1)}{\sin x (\cos x - 1)(\cos x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^3 \cos x (\cos x + 1)}{\sin x (\cos^2 x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^3 \cos x (\cos x + 1)}{-\sin^3 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -a \left(\frac{x}{\sin x} \right)^3 \times \cos x (\cos x + 1) \right\} \\
 &= -a \times 1^3 \times 1 \times 2 = -2a \\
 &\text{따라서 } -2a = 6 \text{ 이므로 } a = -3
 \end{aligned}$$

03-1 (1) $-\frac{1}{\pi}$ (2) 1 (3) $-\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{1}{2}$

(1) $x-3=t$ 로 놓으면 $x=3+t$ 이고, $x \rightarrow 3$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sin \pi x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin \pi (3+t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin (3\pi + \pi t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{-\sin \pi t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\pi t}{\sin \pi t} \times \frac{1}{\pi} \right) \\
 &= -1 \times \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\pi}
 \end{aligned}$$

(2) $x-\pi=t$ 로 놓으면 $x=\pi+t$ 이고, $x \rightarrow \pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pi} (x-\pi) \cot x &= \lim_{t \rightarrow 0} t \cot (\pi+t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan (\pi+t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} = 1
 \end{aligned}$$

(3) $x-1=t$ 로 놓으면 $x=1+t$ 이고, $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x^2 - 1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi}{2} (1+t)}{(1+t)^2 - 1} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} t \right)}{t^2 + 2t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \frac{\pi}{2} t}{t(t+2)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\sin \frac{\pi}{2} t}{\frac{\pi}{2} t} \times \frac{\pi}{2(t+2)} \right\} \\
 &= -1 \times \frac{\pi}{4} \\
 &= -\frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

(4) $\frac{1}{2x+1}=t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}
 2x+1 &= \frac{1}{t} \quad \therefore x = \frac{1-t}{2t} \\
 x \rightarrow \infty \text{ 일 때 } t &\rightarrow 0 \text{ 이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{2x+1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-t}{2t} \sin t \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \times \frac{1-t}{2} \right) \\
 &= 1 \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

03-2 $-\frac{\pi}{2}$

$x-\frac{1}{2}=t$ 로 놓으면 $x=\frac{1}{2}+t$ 이고, $x \rightarrow \frac{1}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\tan (\cos \pi x)}{2x-1} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan \left\{ \cos \pi \left(\frac{1}{2} + t \right) \right\}}{2 \left(\frac{1}{2} + t \right) - 1} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2} + \pi t \right) \right\}}{2t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan (-\sin \pi t)}{2t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan (-\sin \pi t)}{-\sin \pi t} \times \frac{\sin \pi t}{\pi t} \times \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} \\
 &= 1 \times 1 \times \left(-\frac{\pi}{2} \right) \\
 &= -\frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

04-1 [답] $a = -1, b = 3$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + a) = 0$$

$$1 + a = 0 \quad \therefore a = -1$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 3x}{3x} \times \frac{x}{e^x - 1} \times 3 \right) \\ &= 1 \times 1 \times 3 = 3 \end{aligned}$$

$$\therefore b = 3$$

04-2 [답] $\frac{1}{2}$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{ax^2 + b} - 1) = 0$$

$$\sqrt{b} - 1 = 0 \quad \therefore b = 1$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \sin x}{\sqrt{ax^2 + 1} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \sin x (\sqrt{ax^2 + 1} + 1)}{(\sqrt{ax^2 + 1} - 1)(\sqrt{ax^2 + 1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \sin x (\sqrt{ax^2 + 1} + 1)}{ax^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \times \frac{\sin x}{x} \times \frac{\sqrt{ax^2 + 1} + 1}{a} \right) \\ &= 1 \times 1 \times \frac{2}{a} \\ &= \frac{2}{a} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{2}{a} = 4 \text{이므로 } a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore b - a = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

04-3 [답] $\frac{\pi}{2}$

$x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (ax - b) = 0$$

$$\frac{\pi}{2}a - b = 0$$

$$\therefore b = \frac{\pi}{2}a \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{ax - \frac{\pi}{2}a}{\cos x} = 1$$

이때 $x - \frac{\pi}{2} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{\pi}{2} + t$ 이고, $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{ax - \frac{\pi}{2}a}{\cos x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \frac{\pi}{2}a}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{at}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{at}{-\sin t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} \times (-a) \\ &= 1 \times (-a) = -a \end{aligned}$$

즉, $-a = 1$ 이므로 $a = -1$

이를 ⑦에 대입하면 $b = -\frac{\pi}{2}$

$$\therefore ab = -1 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

05-1 [답] 1

직각삼각형 BCH에서 $\overline{BH} = 3 \sin \theta$

$\angle ABH = \angle BCH = \theta$ 이므로 직각삼각형 ABH에서

$$\overline{AH} = \overline{BH} \tan \theta = 3 \sin \theta \tan \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{AH}}{3\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{3 \sin \theta \tan \theta}{3\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{\tan \theta}{\theta} \right) \\ &= 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

05-2 [답] $\frac{1}{4}$

직각삼각형 OHB에서 $\overline{OH} = \cos \theta$, $\overline{BH} = \sin \theta$

$$\overline{AH} = \overline{OA} - \overline{OH} = 1 - \cos \theta \text{이므로}$$

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{BH}$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{(1 - \cos \theta) \sin \theta}{2\theta^3} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) \sin \theta}{2\theta^3(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{(1 - \cos^2 \theta) \sin \theta}{2\theta^3(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 \theta \sin \theta}{2\theta^3(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^3 \times \frac{1}{2(1 + \cos \theta)} \right\} \\ &= 1^3 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- 1 답 (1) $y' = \cos x - \sqrt{3} \sin x$
(2) $y' = \sin x + x \cos x$

06-1 답 $\frac{1}{\pi}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln x)' - (\cos x)' \\ &= \frac{1}{x} + \sin x \\ \therefore f'(\pi) &= \frac{1}{\pi} + \sin \pi = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

06-2 답 0

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}-h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h} \\ &= f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ & \text{이때 } f(x) = (x+1) \sin x + \cos x \text{에서} \\ f'(x) &= (x+1)' \sin x + (x+1)(\sin x)' + (\cos x)' \\ &= \sin x + (x+1) \cos x - \sin x \\ &= (x+1) \cos x \\ & \text{따라서 구하는 극한값은} \\ 2f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2 \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \cos \frac{\pi}{2} \right\} = 2 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

연습문제

97~98쪽

- 1 $1-\sqrt{2}$ 2 4 3 ② 4 ③ 5 ⑤
6 $\frac{1}{2}$ 7 π 8 -6 9 ③ 10 9
11 1 12 ④

$$\begin{aligned} 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cot x &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x (\sin x - \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{\cos x} \right) = -\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cot x + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad f(n) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 2x}{x} + \dots + \frac{\sin nx}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 2x}{2x} \times 2 + \dots + \frac{\sin nx}{nx} \times n} \\ &= \frac{2}{1+2+3+\dots+n} = \frac{2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{4}{n(n+1)} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} f(n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \\ & \quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 4 \times 1 = 4 \end{aligned}$$

- 3 $x - \pi = t$ 로 놓으면 $x = \pi + t$ 이고, $x \rightarrow \pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi) \sin x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(\pi + t)}{t \sin(\pi + t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{-t \sin t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{-t \sin t (1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 t}{-t \sin t (1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{-t \sin t (1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin t}{t} \times \frac{1}{1 + \cos t} \right) \\ &= -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

- 4 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x+b) = 0$$

$$\ln b = 0 \quad \therefore b = 1$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin ax} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{ax}{\sin ax} \times \frac{1}{a} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{a} \\ &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{a} = 3 \text{이므로 } a = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a+b = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

- 5 $x \neq 0$ 일 때, $f(x) = \frac{a-4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a-4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(a - 4\cos\frac{\pi}{2}x \right) = 0$$

$$a - 4 = 0 \quad \therefore a = 4$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \left(1 - \cos\frac{\pi}{2}x \right) \left(1 + \cos\frac{\pi}{2}x \right)}{(e^{2x}-1)^2 \left(1 + \cos\frac{\pi}{2}x \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \left(1 - \cos^2\frac{\pi}{2}x \right)}{(e^{2x}-1)^2 \left(1 + \cos\frac{\pi}{2}x \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2 \left(1 + \cos\frac{\pi}{2}x \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{2}x} \right)^2 \times \left(\frac{2x}{e^{2x}-1} \right)^2 \times \frac{\frac{\pi^2}{4}}{1 + \cos\frac{\pi}{2}x} \right\} \\ &= 1^2 \times 1^2 \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{8} \\ \therefore a \times f(0) &= 4 \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

- 6 직각삼각형 POH에서 $\overline{OH} = \cos\theta$, $\overline{PH} = \sin\theta$ 이므로 $\overline{AH} = \overline{OA} - \overline{OH} = 1 - \cos\theta$

삼각형 AQH는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{QH} = \overline{AH} = 1 - \cos\theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{QH}}{\theta \times \overline{PH}} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos\theta}{\theta \sin\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{\theta \sin\theta (1 + \cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos^2\theta}{\theta \sin\theta (1 + \cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin^2\theta}{\theta \sin\theta (1 + \cos\theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin\theta}{\theta} \times \frac{1}{1 + \cos\theta} \right) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- 7 $f'(x) = -2\cos x$ 이므로 $f'(a) = 2$ 에서

$$-2\cos a = 2, \cos a = -1$$

$$\therefore a = \pi \quad (\because 0 \leq a \leq 2\pi)$$

- 8 $f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi} \frac{f(x)}{x - \frac{3}{2}\pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}\pi} \frac{f(x) - f\left(\frac{3}{2}\pi\right)}{x - \frac{3}{2}\pi} = f'\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\therefore f'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 3$$

이때 $f'(x) = a\cos^2x - a\sin^2x$ 이므로

$$a\cos^2\frac{3}{2}\pi - a\sin^2\frac{3}{2}\pi = 3$$

$$-a \times (-1)^2 = 3 \quad \therefore a = -3$$

따라서 $f'(x) = -3\cos^2x + 3\sin^2x$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2\pi - 2h) - f(2\pi - 4h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2\pi - 2h) - f(2\pi) + f(2\pi) - f(2\pi - 4h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2\pi - 2h) - f(2\pi)}{-2h} \times (-2) \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2\pi - 4h) - f(2\pi)}{-4h} \times 4 \\ &= -2f'(2\pi) + 4f'(2\pi) = 2f'(2\pi) \\ &= 2(-3\cos^2 2\pi + 3\sin^2 2\pi) = 2 \times (-3) = -6 \end{aligned}$$

- 9 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (ae^x + 2x + 5) = \lim_{x \rightarrow 0-} (\cos x + bx)$$

$$a + 5 = 1 \quad \therefore a = -4$$

$f'(x) = \begin{cases} ae^x + 2 & (x > 0) \\ -\sin x + b & (x < 0) \end{cases}$ 이고 미분계수 $f'(0)$ 이 존재

재하므로 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ae^x + 2) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\sin x + b)$$

$$a + 2 = b \quad \therefore b = -2 \quad (\because a = -4)$$

$$\therefore ab = -4 \times (-2) = 8$$

$$\begin{aligned} 10 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos^4 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(1 + \cos^4 x)}{(1 - \cos^4 x)(1 + \cos^4 x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(1 + \cos^4 x)}{1 - \cos^8 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(1 + \cos^4 x)}{\sin^8 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{x^8} \times \left(\frac{x}{\sin x} \right)^8 \times (1 + \cos^4 x) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^8} \times 1^8 \times 2 \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^8} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^8} = 2 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^8} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^a} = b \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{x^8} \times x^{8-a} \right\} = b \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} x^{8-a} = b$$

이때 $a > 8$ 이면 b 의 값이 존재하지 않고 $0 < a < 8$ 이면

$b = 0$ 이므로 양수 b 에 대하여

$$a = 8, b = 1 \quad \therefore a + b = 9$$

$$\begin{aligned} 11 \quad a_1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x} \times \frac{x}{\sin x} \times \frac{1}{2} \right) \\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때, $f_1(x) = \sin \frac{1}{2}x$ 에서 $f_1(x) \rightarrow 0$ 이므로

$$f_2(x) = \sin \left(\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}x \right) \text{에서 } f_2(x) \rightarrow 0$$

$$f_3(x) = \sin \left\{ \frac{1}{2} \sin \left(\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}x \right) \right\} \text{에서 } f_3(x) \rightarrow 0$$

$\vdots$

$$f_n(x) \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{n+1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f_n(x))}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left\{ \frac{1}{2} f_n(x) \right\}}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \left\{ \frac{1}{2} f_n(x) \right\}}{\frac{1}{2} f_n(x)} \times \frac{\frac{1}{2} f_n(x)}{\sin x} \right] \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x)}{\sin x} = \frac{1}{2} a_n \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

12 $\overline{OP} = 1$ 이므로 직각삼각형 OHP에서

$$\overline{PH} = \sin \theta, \overline{OH} = \cos \theta$$

$$\therefore f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{OH} \times \overline{PH} = \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta$$

$$\angle QPO = \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \angle AQR = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\text{직각삼각형 OQP에서 } \overline{OQ} = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\therefore \overline{AQ} = \overline{OQ} - \overline{OA} = \frac{1}{\cos \theta} - 1 = \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta}$$

$$\begin{aligned} \therefore g(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{AQ}^2 \times \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} \right)^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta \times f(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)}}{\frac{\theta}{2} \sin \theta \cos \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos \theta) \sqrt{\pi - 2\theta}}{\theta \sin \theta \cos^2 \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) \sqrt{\pi - 2\theta}}{\theta \sin \theta \cos^2 \theta (1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos^2 \theta) \sqrt{\pi - 2\theta}}{\theta \sin \theta \cos^2 \theta (1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \theta \sqrt{\pi - 2\theta}}{\theta \sin \theta \cos^2 \theta (1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta \sqrt{\pi - 2\theta}}{\theta \cos^2 \theta (1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{\sqrt{\pi - 2\theta}}{\cos^2 \theta (1 + \cos \theta)} \right\} \\ &= 1 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

II-2 01 여러 가지 미분법(1)

1 함수의 몫의 미분법

개념 CHECK

101쪽

1 [답] (1) $y' = -\frac{1}{(x-4)^2}$ (2) $y' = \frac{1}{(2x+1)^2}$

(1) $y' = -\frac{(x-4)'}{(x-4)^2} = -\frac{1}{(x-4)^2}$

(2) $y' = \frac{(x)'(2x+1) - x(2x+1)'}{(2x+1)^2}$
 $= \frac{2x+1-x \times 2}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2}$

2 [답] (1) $y' = 3 \sec x \tan x - \csc x \cot x$

(2) $y' = 2 \sec^2 x + \csc^2 x$

문제

102~103쪽

01-1 [답] (1) $y' = -\frac{4}{x^5} - \frac{15}{x^6} - \frac{6}{x^7}$

(2) $y' = \frac{(1-x)e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$

(3) $y' = -\frac{2 \sin x}{(1 - \cos x)^2}$

(1) $y' = \frac{(x^2+3x+1)'x^6 - (x^2+3x+1)(x^6)'}{(x^6)^2}$
 $= \frac{(2x+3) \times x^6 - (x^2+3x+1) \times 6x^5}{x^{12}}$
 $= \frac{-4x^7 - 15x^6 - 6x^5}{x^{12}}$

$= -\frac{4}{x^5} - \frac{15}{x^6} - \frac{6}{x^7}$

(2) $y' = \frac{(x)'(e^x+1) - x(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$
 $= \frac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(1-x)e^x+1}{(e^x+1)^2}$

(3) $y' = \frac{(1+\cos x)'(1-\cos x) - (1+\cos x)(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2}$
 $= \frac{-\sin x(1-\cos x) - (1+\cos x)\sin x}{(1-\cos x)^2}$
 $= -\frac{2 \sin x}{(1-\cos x)^2}$

다른 풀이

(1) $y = \frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^5} + \frac{1}{x^6} = x^{-4} + 3x^{-5} + x^{-6}$ ∴
 $y' = -4x^{-5} - 15x^{-6} - 6x^{-7}$
 $= -\frac{4}{x^5} - \frac{15}{x^6} - \frac{6}{x^7}$

01-2 [답] 20

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1-h)}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{3h} \times 3 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h}$

$= 3f'(1) + f'(1) = 4f'(1)$

$f(x) = \frac{2x-3}{x^2+x-1}$ 에서

$f'(x) = \frac{(2x-3)'(x^2+x-1) - (2x-3)(x^2+x-1)'}{(x^2+x-1)^2}$

$= \frac{2(x^2+x-1) - (2x-3)(2x+1)}{(x^2+x-1)^2}$

$= -\frac{2x^2-6x-1}{(x^2+x-1)^2}$

따라서 구하는 극한값은

$4f'(1) = 4 \times 5 = 20$

02-1 [답] (1) $y' = \sec x \{3x^2 + (x^3-2) \tan x\}$

(2) $y' = \frac{\cot x}{x} - \ln x \csc^2 x$

(3) $y' = \sin x (1 + \sec^2 x)$

(4) $y' = -\frac{\csc x \cot x}{(1 + \csc x)^2}$

(1) $y' = (x^3-2)' \sec x + (x^3-2)(\sec x)'$
 $= 3x^2 \sec x + (x^3-2) \sec x \tan x$

$= \sec x \{3x^2 + (x^3-2) \tan x\}$

(2) $y' = (\ln x)' \cot x + \ln x (\cot x)'$

$= \frac{1}{x} \times \cot x - \ln x \csc^2 x$

$= \frac{\cot x}{x} - \ln x \csc^2 x$

(3) $y' = (\sin x)' \tan x + \sin x (\tan x)'$

$= \cos x \times \frac{\sin x}{\cos x} + \sin x \sec^2 x$

$= \sin x + \sin x \sec^2 x$

$= \sin x (1 + \sec^2 x)$

(4) $y' = \frac{(\csc x)'(1 + \csc x) - \csc x (1 + \csc x)'}{(1 + \csc x)^2}$

$= \frac{-\csc x \cot x (1 + \csc x) + \csc x \csc x \cot x}{(1 + \csc x)^2}$

$= -\frac{\csc x \cot x}{(1 + \csc x)^2}$

02-2 [답] -3

$f'(x) = (ax)' \sec x + ax (\sec x)'$

$= a \sec x + ax \sec x \tan x$

$= a \sec x (1 + x \tan x)$

$f'(\pi) = 3$ 에서

$-a = 3 \quad \therefore a = -3$

03-1 답 (1) $y' = \frac{5(x^2+1)^4(x^2-1)}{x^6}$

(2) $y' = 15 \sin^2(5x-1) \cos(5x-1)$

(3) $y' = (2x-1)3^{x^2-x+1} \ln 3$

(4) $y' = 2e^{\sin x} \cos x$

(1) $y' = 5 \left(\frac{x^2+1}{x} \right)^4 \left(\frac{x^2+1}{x} \right)'$
 $= 5 \left(\frac{x^2+1}{x} \right)^4 \times \frac{(x^2+1)' \times x - (x^2+1)(x)'}{x^2}$
 $= 5 \left(\frac{x^2+1}{x} \right)^4 \times \frac{2x \times x - (x^2+1)}{x^2}$
 $= \frac{5(x^2+1)^4(x^2-1)}{x^6}$

(2) $y' = 3 \sin^2(5x-1) \times \{\sin(5x-1)\}'$
 $= 3 \sin^2(5x-1) \cos(5x-1) \times (5x-1)'$
 $= 15 \sin^2(5x-1) \cos(5x-1)$

(3) $y' = 3^{x^2-x+1} \ln 3 \times (x^2-x+1)'$
 $= (2x-1)3^{x^2-x+1} \ln 3$

(4) $y' = 2e^{\sin x} (\sin x)' = 2e^{\sin x} \cos x$

03-2 답 2

$f'(x) = \sec^2 2x \times (2x)' + 3 \cos \frac{x}{2} \times \left(\frac{x}{2} \right)'$
 $= 2 \sec^2 2x + \frac{3}{2} \cos \frac{x}{2}$
 $\therefore f'(\pi) = 2 \times 1^2 = 2$

04-1 답 9

$y' = 3\{f(x)\}^2 f'(x)$ 이므로 $x=1$ 에서의 미분계수는
 $3\{f(1)\}^2 f'(1) = 3 \times 1^2 \times 3 = 9$

04-2 답 12

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+2}{x-1} = 3$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+2\} = 0 \quad \therefore f(1) = -2$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 3$

또 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)-1}{x+1} = 4$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$\lim_{x \rightarrow -1} \{g(x)-1\} = 0 \quad \therefore g(-1) = 1$

$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$
 $= g'(-1) = 4$

$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ 에서

$h'(x) = \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$

$\therefore h'(-1) = f'(g(-1))g'(-1)$
 $= f'(1)g'(-1) = 3 \times 4 = 12$

05-1 답 (1) $y' = \cot x$ (2) $y' = \frac{2x}{(x^2-3) \ln 2}$

(3) $y' = \frac{1}{x \ln |x| \ln 5}$ (4) $y' = \frac{3(1-2 \ln |x|)}{x^3}$

(1) $y' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

(2) $y' = \frac{(x^2-3)'}{(x^2-3) \ln 2} = \frac{2x}{(x^2-3) \ln 2}$

(3) $y' = \frac{(\ln |x|)'}{\ln |x| \ln 5} = \frac{1}{x \ln |x| \ln 5}$

(4) $y = \frac{\ln |x|^3}{x^2} = \frac{3 \ln |x|}{x^2}$ 이므로
 $y' = \frac{(3 \ln |x|)' x^2 - 3 \ln |x| \times (x^2)'}{(x^2)^2}$
 $= \frac{\frac{3}{x} \times x^2 - 3 \ln |x| \times 2x}{x^4}$
 $= \frac{3x - 6x \ln |x|}{x^4} = \frac{3(1-2 \ln |x|)}{x^3}$

05-2 답 6

$f'(x) = \frac{(ax-3)'}{ax-3} = \frac{a}{ax-3}$

$f'(1) = 2$ 에서

$\frac{a}{a-3} = 2, a = 2a-6 \quad \therefore a = 6$

06-1 답 (1) $y' = x^x (\ln x + 1)$

(2) $y' = \frac{4}{|x+1|(x+1)\sqrt{(x-1)(x+3)}}$

(1) $x > 0, y > 0$ 이므로 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln y = x \ln x$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$\frac{y'}{y} = (x)' \ln x + x (\ln x)'$

$= \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$\therefore y' = y(\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$

(2) 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln |y| = \frac{1}{2} (\ln |x-1| + \ln |x+3| - 2 \ln |x+1|)$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x+1} \right)$
 $= \frac{4}{(x-1)(x+1)(x+3)}$

$$\begin{aligned}\therefore y' &= y \times \frac{4}{(x-1)(x+1)(x+3)} \\ &= \frac{\sqrt{(x-1)(x+3)}}{(x+1)^2} \times \frac{4}{(x-1)(x+1)(x+3)} \\ &= \frac{4}{|x+1|(x+1)\sqrt{(x-1)(x+3)}}\end{aligned}$$

06-2 ㉔ 2

주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = (\ln x)^2$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} &= 2 \ln x \times (\ln x)' \\ &= 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x} \\ \therefore f'(x) &= f(x) \times \frac{2 \ln x}{x} = x^{\ln x} \times \frac{2 \ln x}{x} \\ &= 2x^{\ln x - 1} \ln x\end{aligned}$$

$$\therefore f'(e) = 2 \times 1 \times 1 = 2$$

07-1 ㉔ (1) $y' = x^{2\pi-1}(2\pi \cos x - x \sin x)$

$$(2) y' = \frac{2x+4}{3^3 \sqrt{(x^2+4x+1)^2}}$$

$$(3) y' = \frac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$(4) y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$$

$$\begin{aligned}(1) y' &= (x^{2\pi})' \cos x + x^{2\pi} (\cos x)' \\ &= 2\pi x^{2\pi-1} \cos x - x^{2\pi} \sin x \\ &= x^{2\pi-1} (2\pi \cos x - x \sin x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) y' &= \{(x^2+4x+1)^{\frac{1}{3}}\}' \\ &= \frac{1}{3} (x^2+4x+1)^{-\frac{2}{3}} (x^2+4x+1)' \\ &= \frac{2x+4}{3^3 \sqrt{(x^2+4x+1)^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) y' &= \{(x-1)(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\}' \\ &= (x-1)'(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} + (x-1)\{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\}' \\ &= (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} + (x-1)\left\{-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}(x^2+1)'\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2} \times \frac{2x(x-1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x(x-1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) y' &= \{(1+\sin x)^{\frac{1}{2}}\}' \\ &= \frac{1}{2} (1+\sin x)^{-\frac{1}{2}} (1+\sin x)' \\ &= \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}\end{aligned}$$

연습문제

111~113쪽

1 ①	2 ③	3 ②	4 -6	5 ①
6 $\frac{44}{3}$	7 6	8 ④	9 ③	10 ③
11 ④	12 ②	13 $\frac{3}{2}$	14 ④	15 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
16 ②	17 ①	18 6	19 ⑤	

$$\begin{aligned}1 \quad f'(x) &= \frac{(\ln x)'x^2 - \ln x \times (x^2)'}{(x^2)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} \\ &= \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} \\ \therefore f'(e) &= \frac{1 - 2}{e^3} = -\frac{1}{e^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \quad f'(x) &= \frac{(ax+b)'(x^2+1) - (ax+b)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{a(x^2+1) - (ax+b) \times 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2} \\ f'(0) &= -3 \text{에서 } a = -3 \\ f'(1) &= 2 \text{에서 } \frac{-2b}{4} = 2 \quad \therefore b = -4 \\ \text{따라서 } f(x) &= \frac{-3x-4}{x^2+1} \text{이므로} \\ f(1) &= -\frac{7}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} &= 5 \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고, 극한 값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{에서} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-3\} &= 0 \quad \therefore f(2)=3 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)=5 \\ g(x) &= \frac{f(x)}{e^{x-2}} \text{에서} \\ g'(x) &= \frac{f'(x)e^{x-2} - f(x)(e^{x-2})'}{(e^{x-2})^2} \\ &= \frac{f'(x) \times e^{x-2} - f(x) \times e^{x-2}}{(e^{x-2})^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^{x-2}} \\ \therefore g'(2) &= f'(2) - f(2) = 5 - 3 = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4 \quad f'(x) &= \frac{(x)'(x^2+x+9) - x(x^2+x+9)'}{(x^2+x+9)^2} \\ &= \frac{(x^2+x+9) - x(2x+1)}{(x^2+x+9)^2} \\ &= \frac{-x^2+9}{(x^2+x+9)^2}\end{aligned}$$

$$f'(x) > 0 \text{에서 } \frac{-x^2+9}{(x^2+x+9)^2} > 0$$

$$-x^2+9 > 0, x^2-9 < 0$$

$$(x+3)(x-3) < 0 \quad \therefore -3 < x < 3$$

$$\text{따라서 } a = -3, b = 3 \text{이므로 } a - b = -6$$

$$\begin{aligned} 5 \quad f'(x) &= \frac{(\tan x)'(1+\sec x) - \tan x(1+\sec x)'}{(1+\sec x)^2} \\ &= \frac{\sec^2 x(1+\sec x) - \tan x \times \sec x \tan x}{(1+\sec x)^2} \\ &= \frac{\sec^2 x(1+\sec x) - \sec x(\sec^2 x - 1)}{(1+\sec x)^2} \\ &= \frac{\sec x(\sec x + 1)}{(1+\sec x)^2} \\ &= \frac{\sec x}{1+\sec x} \\ \therefore f'(0) &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad f'(x) &= a \sec^2 x - \csc^2 x \text{이므로 } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6 \text{에서} \\ 2a - 2 &= 6 \quad \therefore a = 4 \\ \text{따라서 } f'(x) &= 4 \sec^2 x - \csc^2 x \text{이므로} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h} \\ &\quad + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{3}-h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-h} \\ &= \frac{1}{2} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 4 \times 4 - \frac{4}{3} = \frac{44}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \quad f'(x) &= (x^2+a)'e^x + (x^2+a)(e^x)' \\ &= 2xe^x + (x^2+a)e^x \times (x^2)' \\ &= 2x(x^2+a+1)e^x \\ f'(1) &= 16e \text{에서} \\ 2(a+2)e &= 16e, a+2=8 \\ \therefore a &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \quad h(x) &= f(g(x)) \text{라 하면} \\ h\left(\frac{\pi}{3}\right) &= f\left(g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = e \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(g(x)) - e}{x - \frac{\pi}{3}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{h(x) - h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} = h'\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\text{이때 } h'(x) = f'(g(x))g'(x) \text{이고}$$

$$f'(x) = e^{2x}(2x)' = 2e^{2x},$$

$$g'(x) = \cos \frac{x}{2} \times \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \text{이므로 구하는 극한값은}$$

$$\begin{aligned} h'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= f'\left(g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)g'\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= f'\left(\frac{1}{2}\right)g'\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2e \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \quad f(g(x)) &= 3x^2 + 4x - 1 \text{에서} \\ f'(g(x))g'(x) &= 6x + 4 \\ \text{양변에 } x=1 \text{을 대입하면} \\ f'(g(1))g'(1) &= 10 \\ f'(3)g'(1) &= 10 \\ 2g'(1) &= 10 \\ \therefore g'(1) &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 \quad f(2x-1) &= (x^2+1)^3 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ f'(2x-1)(2x-1)' &= 3(x^2+1)^2(x^2+1)' \\ 2f'(2x-1) &= 6x(x^2+1)^2 \\ \therefore f'(2x-1) &= 3x(x^2+1)^2 \\ \text{양변에 } x=1 \text{을 대입하면} \\ f'(1) &= 3 \times 4 = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11 \quad \textcircled{a} \text{에서} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+4h) - g(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+4h) - g(2)}{4h} \times 4 \\ &= 4g'(2) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 4g'(2) = 8 \text{이므로}$$

$$g'(2) = 2 \quad \dots\dots \textcircled{a}$$

$$\{(f \circ g)(x)\}' = \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x) \text{이므로}$$

$$\textcircled{a} \text{에서}$$

$$f'(g(2))g'(2) = 10$$

$$f'(g(2)) \times 2 = 10 \quad (\because \textcircled{a})$$

$$\therefore f'(g(2)) = 5 \quad \dots\dots \textcircled{b}$$

$$f(x) = \frac{2^x}{\ln 2} \text{에서 } f'(x) = 2^x$$

$$\textcircled{b} \text{에서 } g(2) = k \text{라 하면 } f'(k) = 5 \text{이므로}$$

$$2^k = 5 \quad \therefore k = \log_2 5$$

$$\therefore g(2) = \log_2 5$$

$$\begin{aligned} 12 \quad f(x) &= \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \\ &= \frac{1}{2} \{\ln(1+\cos x) - \ln(1-\cos x)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(x) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x} - \frac{(1-\cos x)'}{1-\cos x} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-\sin x}{1+\cos x} - \frac{\sin x}{1-\cos x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{-\sin x(1-\cos x) - \sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} \\ &= \frac{-2\sin x}{2\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} \\ \therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right) - f'\left(\frac{\pi}{6}\right) &= -\sqrt{2} - (-2) = 2 - \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}13 \quad f'(x) &= \frac{(x^2+2x)'}{x^2+2x} = \frac{2x+2}{x^2+2x} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(n)}{n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{n^2+2n} \times \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

14 $x > 0$, $f(x) > 0$ 이므로 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = \cos 2x \ln x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} &= (\cos 2x)' \ln x + \cos 2x (\ln x)' \\ &= -\sin 2x \times (2x)' \ln x + \cos 2x \times \frac{1}{x}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)} = -2 \ln x \sin 2x + \frac{\cos 2x}{x}$$

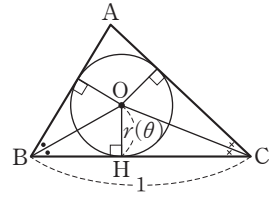
양변에 $x = \frac{\pi}{2}$ 를 대입하면

$$\frac{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{f\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{2}{\pi}, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore k = -\frac{2}{\pi}$$

$$\begin{aligned}15 \quad f'(x) &= \frac{(x-\sqrt{x^2-1})'}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{\{x-(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\}'}{x-\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{1-\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}(x^2-1)'}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ \therefore f'(2) &= -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

16 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 O라 하고, 점 O에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.



점 O는 삼각형 ABC의 내심이므로

$$\angle OBH = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{\pi}{6}, \quad \angle OCH = \frac{1}{2} \angle ACB = \theta$$

$\overline{OH} = r(\theta)$ 이므로 직각삼각형 OBH에서

$$\overline{BH} = \frac{r(\theta)}{\tan \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}r(\theta)$$

직각삼각형 OHC에서

$$\begin{aligned}\overline{CH} &= \frac{r(\theta)}{\tan \theta} \\ \overline{BH} + \overline{CH} &= 1 \text{이므로}\end{aligned}$$

$$\sqrt{3}r(\theta) + \frac{r(\theta)}{\tan \theta} = 1, \quad r(\theta) \times \frac{\sqrt{3}\tan \theta + 1}{\tan \theta} = 1$$

$$\therefore r(\theta) = \frac{\tan \theta}{\sqrt{3}\tan \theta + 1}$$

$$h(\theta) = \frac{r(\theta)}{\tan \theta} = \frac{1}{\sqrt{3}\tan \theta + 1} \text{이므로}$$

$$h'(\theta) = -\frac{(\sqrt{3}\tan \theta + 1)'}{(\sqrt{3}\tan \theta + 1)^2} = -\frac{\sqrt{3}\sec^2 \theta}{(\sqrt{3}\tan \theta + 1)^2}$$

$$\therefore h'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{aligned}17 \quad g'(x) &= \frac{\{e^{f(x)}\}'(x+1) - e^{f(x)}(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{e^{f(x)}f'(x)(x+1) - e^{f(x)}}{(x+1)^2} \\ &= \frac{e^{f(x)}\{(x+1)f'(x) - 1\}}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

방정식 $g'(x) = 0$ 에서

$$\frac{e^{f(x)}\{(x+1)f'(x) - 1\}}{(x+1)^2} = 0$$

$$\therefore (x+1)f'(x) - 1 = 0 \quad (\because e^{f(x)} > 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

방정식 $g'(x) = 0$ 의 두 근이 $-3, 1$ 이므로

$\textcircled{1}$ 에 $x = -3$ 을 대입하면

$$-2f'(-3) - 1 = 0 \quad \therefore f'(-3) = -\frac{1}{2}$$

$\textcircled{1}$ 에 $x = 1$ 을 대입하면

$$2f'(1) - 1 = 0 \quad \therefore f'(1) = \frac{1}{2}$$

이차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(0) = 1$ 이므로

$f(x) = ax^2 + bx + 1$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(-3) = -\frac{1}{2} \text{에서 } -6a + b = -\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} \text{에서 } 2a + b = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{을 연립하여 풀면 } a = \frac{1}{8}, b = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + 1 \text{이므로}$$

$$f(4) = 2 + 1 + 1 = 4$$

18 $(f \circ g)(0) = 4$ 에서 $f(g(0)) = 4$

$$g(0) = 1 \text{이므로 } f(1) = 4$$

$$(f \circ g)'(0) = 2 \text{에서 } f'(g(0))g'(0) = 2$$

$$\therefore f'(1)g'(0) = 2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$g'(x) = e^{x^2+x}(x^2+x)' = (2x+1)e^{x^2+x} \text{이므로}$$

$$g'(0) = 1$$

$$\text{따라서 } \textcircled{A} \text{에서 } f'(1) = 2$$

$$f(x) \text{를 } (x-1)^2 \text{으로 나누었을 때의 몫을 } Q(x),$$

$$R(x) = ax + b (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f(x) = (x-1)^2 Q(x) + ax + b \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{B} \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$f(1) = a + b \quad \therefore a + b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{B} \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x) = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + a$$

$$\text{양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$f'(1) = a \quad \therefore a = 2$$

$$\text{이를 } \textcircled{C} \text{에 대입하여 풀면 } b = 2$$

$$\text{따라서 } R(x) = 2x + 2 \text{이므로 } R(2) = 6$$

19 $f(x) = \ln(e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{nx})$ 이라 하면

$$f(0) = \ln n \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{nx}}{n}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{nx}) - \ln n}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

$$\text{이때}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{nx})'}{e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{nx}}$$

$$= \frac{e^x + 2e^{2x} + 3e^{3x} + \dots + ne^{nx}}{e^x + e^{2x} + e^{3x} + \dots + e^{nx}}$$

$$\text{이므로}$$

$$f'(0) = \frac{1+2+3+\dots+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{n+1}{2} = 5 \text{이므로}$$

$$n+1=10 \quad \therefore n=9$$

II-2 02 여러 가지 미분법(2)

1 매개변수로 나타낸 함수의 미분법

개념 CHECK

114쪽

1 답 (1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{t} (t \neq 0)$

$$(2) \frac{dy}{dx} = -\frac{3t^2}{2t+1} \left(t \neq -\frac{1}{2} \right)$$

(1) x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = 6t^2, \frac{dy}{dt} = -6t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-6t}{6t^2} = -\frac{1}{t} (t \neq 0)$$

(2) x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = 2t+1, \frac{dy}{dt} = -3t^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{3t^2}{2t+1} \left(t \neq -\frac{1}{2} \right)$$

문제

115쪽

01-1 답 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{t^2+1}{2t} (t \neq 0)$ (2) $\frac{dy}{dx} = 24\sqrt{t}(3t-1)^3$

$$(3) \frac{dy}{dx} = -\cot 2t \quad (4) \frac{dy}{dx} = 2 \sin t$$

(1) x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t(1-t^2) - (1+t^2) \times (-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{4t}{(1-t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2(1-t^2) - 2t \times (-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{2(t^2+1)}{(1-t^2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2(t^2+1)}{(1-t^2)^2}}{\frac{4t}{(1-t^2)^2}} = \frac{t^2+1}{2t} (t \neq 0)$$

(2) x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\frac{dy}{dt} = 4(3t-1)^3 \times 3 = 12(3t-1)^3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{12(3t-1)^3}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = 24\sqrt{t}(3t-1)^3$$

(3) x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = -2\sin 2t, \frac{dy}{dt} = 2\cos 2t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\cos 2t}{-2\sin 2t} = -\cot 2t$$

(4) x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = 2\sec^2 t, \frac{dy}{dt} = 4\sec t \tan t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4\sec t \tan t}{2\sec^2 t} = \frac{2\tan t}{\sec t} = 2\sin t$$

01-2 [답] $4e^2$

x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = 2te^t + (t^2 + 1)e^t = (t^2 + 2t + 1)e^t, \frac{dy}{dt} = 4e^{4t+2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4e^{4t+2}}{(t^2 + 2t + 1)e^t} = \frac{4e^{3t+2}}{t^2 + 2t + 1} \quad (t \neq -1)$$

따라서 $t=0$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은 $4e^2$

2 음함수와 역함수의 미분법

개념 CHECK

117쪽

1 [답] (가) $2x$ (나) $6y$ (다) $-\frac{x}{3y}$

2 [답] (가) $5y^4 + 2$ (나) $\frac{1}{5y^4 + 2}$

문제

118~120쪽

02-1 [답] (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 1}{6y^2} \quad (y \neq 0)$

(2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-1}{2y(y^2+1)} \quad (y \neq 0)$

(3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x-\cos y} \quad (x \neq \cos y)$

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

(1) 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + 1 - 6y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 1}{6y^2} \quad (y \neq 0)$$

(2) 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2(x-1) + 2(y^2+1) \times 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$4y(y^2+1) \frac{dy}{dx} = -2(x-1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x-1}{2y(y^2+1)} \quad (y \neq 0)$$

(3) 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x - \cos y \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x - \cos y) \frac{dy}{dx} = -(2x + y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x-\cos y} \quad (x \neq \cos y)$$

(4) 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

02-2 [답] $-\frac{5}{7}$

주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$6x^2 + 9y^2 \frac{dy}{dx} - y^2 - x \times 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2xy - 9y^2) \frac{dy}{dx} = 6x^2 - y^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 - y^2}{2xy - 9y^2} \quad (2xy \neq 9y^2)$$

따라서 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{6-1}{2-9} = -\frac{5}{7}$$

03-1 [답] (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2 + 6y + 4}$ (2) $\frac{dy}{dx} = \frac{(y+1)^3}{2y}$

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2+1}}{y}$ (4) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2e^{2y}+5}$

(1) 주어진 식의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = 3y^2 + 6y + 4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{3y^2 + 6y + 4}$$

(2) 주어진 식의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= 2 \times \frac{y}{y+1} \times \left(\frac{y}{y+1} \right)' \\ &= 2 \times \frac{y}{y+1} \times \frac{(y+1)-y}{(y+1)^2} \\ &= \frac{2y}{(y+1)^3} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{(y+1)^3}{2y}$$

(3) 주어진 식의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2\sqrt{y^2+1}} = \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{\sqrt{y^2+1}}{y}$$

(4) 주어진 식의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = 2e^{2y} + 5$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2e^{2y} + 5}$$

03-2 ㉡ 1

주어진 식의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sec y \tan y}{\sec y} = \tan y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\tan y}$$

따라서 $y = \frac{\pi}{4}$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은 $\frac{1}{\tan \frac{\pi}{4}} = 1$

04-1 ㉡ 4

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = \frac{1}{4}$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-3\} = 0 \quad \therefore f(2) = 3$$

$$\therefore g(3) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$g'(3) = \frac{1}{f'(g(3))} = \frac{1}{f'(2)} = 4$$

04-2 ㉡ $\frac{1}{4}$

$g(\sqrt{3}) = a$ 라 하면 $f(a) = \sqrt{3}$ 이므로

$$\tan a = \sqrt{3} \quad \therefore a = \frac{\pi}{3} \left(\because -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore g(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

이때 $f'(x) = \sec^2 x$ 이므로

$$g'(\sqrt{3}) = \frac{1}{f'(g(\sqrt{3}))} = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

04-3 ㉡ -6

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2) + g(2) - g(2-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2) - g(2-h)}{-h}$$

$$= g'(2) + g'(2) = 2g'(2)$$

$g(2) = a$ 라 하면 $f(a) = 2$ 이므로

$$\frac{a+1}{a-2} = 2, \quad a+1 = 2a-4 \quad \therefore a = 5$$

$$\therefore g(2) = 5$$

따라서 $f'(x) = \frac{(x-2)-(x+1)}{(x-2)^2} = -\frac{3}{(x-2)^2}$ 이므로

구하는 극한값은

$$2g'(2) = \frac{2}{f'(g(2))} = \frac{2}{f'(5)} = \frac{2}{-\frac{1}{3}} = -6$$

3 이계도함수

개념 CHECK

121쪽

1 ㉡ (1) $y'' = 12x^2 + 12x$ (2) $y'' = \frac{2}{x^3}$

(3) $y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$ (4) $y'' = 4e^{2x+1}$

(5) $y'' = -\cos x$ (6) $y'' = -\frac{1}{x^2 \ln 2}$

문제

122쪽

05-1 ㉡ -2

$$f'(x) = \cos x \times \cos x + \sin x \times (-\sin x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x$$

$$= 1 - 2\sin^2 x$$

$$f''(x) = -4\sin x (\sin x)'$$

$$= -4\sin x \cos x$$

$$\therefore f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -2$$

05-2 ㉡ 10

$$f'(x) = e^{ax+b} + x \times ae^{ax+b}$$

$$= (ax+1)e^{ax+b}$$

$$f''(x) = ae^{ax+b} + (ax+1) \times ae^{ax+b}$$

$$= a(ax+2)e^{ax+b}$$

$$f'(0) = 1 \text{에서}$$

$$e^b = 1 \quad \therefore b = 0$$

$$f''(0) = 20 \text{에서}$$

$$2ae^b = 20$$

$$2a = 20 \quad (\because b = 0)$$

$$\therefore a = 10$$

$$\therefore a+b = 10+0 = 10$$

- 1 ② 2 ⑤ 3 $-\frac{3}{4}$ 4 7 5 $x > 1$
 6 ③ 7 ② 8 ③ 9 1 10 $-\frac{4}{3}$
 11 3 12 ① 13 ④

- 1 x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = \sec t \tan t - \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t - \sin t}$$

$$= \frac{1}{\sin t - \sin t \cos^2 t}$$

$$= \frac{1}{\sin t (1 - \cos^2 t)}$$

$$= \frac{1}{\sin^3 t}$$

$$\tan t = 1 \text{에서 } t = \frac{\pi}{4} \left(\because 0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서 점 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 1 \right)$, 즉 $t = \frac{\pi}{4}$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3} = 2\sqrt{2}$$

- 2 x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} + 1$$

$$\frac{dy}{dt} = -3t^2 + 3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{-3t^2 + 3}{\frac{1}{t} + 1}$$

$$= -3t(t-1)$$

$$= -3t^2 + 3t$$

$$= -3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 에서 최댓값 $\frac{3}{4}$ 을 가지므로

$$a = \frac{1}{2}$$

- 3 점 $(0, a)$ 가 곡선 $x^3 + y^4 = e^{xy}$ 위의 점이므로
 $a^4 = 1 \quad \therefore a = -1 \quad (\because a < 0)$

$x^3 + y^4 = e^{xy}$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + 4y^3 \frac{dy}{dx} = e^{xy} \left(y + x \frac{dy}{dx} \right)$$

$$(xe^{xy} - 4y^3) \frac{dy}{dx} = 3x^2 - ye^{xy}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - ye^{xy}}{xe^{xy} - 4y^3} \quad (xe^{xy} \neq 4y^3)$$

점 $(0, -1)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{4}$

$$\therefore b = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a + b = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$$

- 4 점 $(0, -1)$ 이 곡선 $x^3 + ay^3 - bxy + 1 = 0$ 위의 점이므로
 $-a + 1 = 0 \quad \therefore a = 1$

$x^3 + y^3 - bxy + 1 = 0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - by - bx \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(bx - 3y^2) \frac{dy}{dx} = 3x^2 - by$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - by}{bx - 3y^2} \quad (bx \neq 3y^2)$$

이때 점 $(0, -1)$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값이 2이므로

$$-\frac{b}{3} = 2 \quad \therefore b = -6$$

$$\therefore a - b = 1 - (-6) = 7$$

- 5 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2xy^3 + (x^2 + 1) \times 3y^2 \frac{dy}{dx} + 2x + 4 = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^3 - 2x - 4}{3y^2(x^2 + 1)} \quad (y \neq 0)$$

$$\frac{dy}{dx} > 0 \text{에서}$$

$$-2xy^3 - 2x - 4 > 0$$

이때 $(x^2 + 1)y^3 + x^2 + 4x + 1 = 0$ 에서

$$y^3 = \frac{-x^2 - 4x - 1}{x^2 + 1}$$

이므로

$$-2x \times \frac{-x^2 - 4x - 1}{x^2 + 1} - 2x - 4 > 0$$

$$2x(x^2 + 4x + 1) - 2(x + 2)(x^2 + 1) > 0$$

$$4x^2 - 4 > 0, \quad x^2 - 1 > 0$$

$$(x + 1)(x - 1) > 0$$

$$\therefore x > 1 \quad (\because x > 0)$$

- 6 $g(0)=a$ 라 하면 $f(a)=0$ 이므로

$$\ln(\ln a)=0$$

$$\ln a=1 \quad \therefore a=e$$

$$\therefore g(0)=e$$

$$\text{이때 } f'(x)=\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{x \ln x} \text{이므로}$$

$$g'(0)=\frac{1}{f'(g(0))}=\frac{1}{f'(e)}=\frac{1}{\frac{1}{e}}=e$$

- 7 $g(f(1))=a$ 라 하면

$$f(a)=f(1)$$

함수 $f(x)$ 가 역함수를 가지면 일대일대응이므로

$$a=1 \quad \therefore g(f(1))=1$$

$$\text{이때 } f'(x)=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2} \text{이므로}$$

$$g'(f(1))=\frac{1}{f'(g(f(1)))}$$

$$=\frac{1}{f'(1)}$$

$$=-\frac{1}{e}$$

$$=-\frac{(e+1)^2}{e}$$

- 8 $h'(x)=g(x)+xg'(x)$ 이므로

$$h'(2)=g(2)+2g'(2)$$

$$f(1)=2 \text{에서 } g(2)=1 \text{이므로}$$

$$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore h'(2)=g(2)+2g'(2)$$

$$=1+2 \times \frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

- 9 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-3}{x-3}=\frac{1}{3}$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극

한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x)-3\}=0 \quad \therefore f(3)=3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-3}{x-3}=\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=\frac{1}{3}$$

$g^{-1}(x)=f(3x)$ 이므로 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}=3f'(3x)$$

$$\frac{1}{g'(f(3x))}=3f'(3x)$$

$$\therefore g'(f(3x))=\frac{1}{3f'(3x)}$$

따라서 $g'(f(3))=\frac{1}{3f'(3)}$ 이므로

$$g'(3)=\frac{1}{3 \times \frac{1}{3}}=1$$

$$\begin{aligned} 10 \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-f'\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-f'\left(\frac{\pi}{3}\right)+f'\left(\frac{\pi}{3}\right)-f'\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}+h\right)-f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h} \\ & \quad + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}-h\right)-f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-h} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} f''\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} f''\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= f''\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

이때 $f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$ 이므로

$$f''(x)=-\csc^2 x$$

$$\therefore f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=-\frac{4}{3}$$

- 11 $f(x)=x^2 \ln x$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x}$$

$$=x(2 \ln x + 1)$$

$$\therefore f''(x)=2 \ln x + 1 + x \times \frac{2}{x}$$

$$=2 \ln x + 3$$

방정식 $f(x)+f'(x)-4f''(x)=x-12$ 에서

$$x^2 \ln x + x(2 \ln x + 1) - 4(2 \ln x + 3) = x - 12$$

$$(x^2 + 2x - 8) \ln x = 0$$

$$(x+4)(x-2) \ln x = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2 (\because x>0)$$

따라서 모든 x 의 값의 합은

$$1+2=3$$

- 12 (가)에서 $f(-x)=-f(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$-f'(-x)=-f'(x)$$

$$\therefore f'(-x)=f'(x)$$

(나)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-2x\}=0 \quad \therefore f(1)=2$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2x}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)+2-2x}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - 2 \\ &= f'(1) - 2 \\ \text{즉, } f'(1) - 2 &= 2 \text{이므로 } f'(1) = 4 \\ f(-1) &= -f(1) = -2 \text{이므로 } g(-2) = -1 \\ \therefore g'(-2) &= \frac{1}{f'(g(-2))} \\ &= \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

13 (가)에서 $f(1)=e$ 이므로

$$(1+a+b)e=e, 1+a+b=1$$

$$\therefore a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= (2x+a)e^x + (x^2+ax+b)e^x \\ &= \{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x\end{aligned}$$

이므로 $f'(1)=e$ 에서

$$\{1+(a+2)+a+b\}e=e, 2a+b+3=1$$

$$\therefore 2a+b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-2, b=2$

$$\therefore f(x)=(x^2-2x+2)e^x, f'(x)=x^2e^x$$

$h(x)=f^{-1}(x)g(x)$ 에서

$$h'(x)=(f^{-1})'(x)g(x)+f^{-1}(x)g'(x)$$

$$\therefore h'(e)=(f^{-1})'(e)g(e)+f^{-1}(e)g'(e)$$

$$= \frac{g(e)}{f'(f^{-1}(e))} + f^{-1}(e)g'(e)$$

(가)에서 $f(1)=e$ 이므로

$$f^{-1}(e)=1$$

(나)에서 $g(f(x))=f'(x)$ 이므로

$$g(f(1))=f'(1)$$

$$\therefore g(e)=e$$

$g(f(x))=f'(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(f(x))f'(x)=f''(x) \text{이므로}$$

$$g'(f(1))f'(1)=f''(1)$$

$$g'(e) \times e = f''(1) \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

이때 $f''(x)=2xe^x+x^2e^x=x(x+2)e^x$ 이므로

$$f''(1)=3e$$

이를 ③에 대입하면

$$g'(e) \times e = 3e$$

$$\therefore g'(e)=3$$

$$\therefore h'(e) = \frac{g(e)}{f'(f^{-1}(e))} + f^{-1}(e)g'(e)$$

$$= \frac{e}{f'(1)} + 1 \times 3$$

$$= \frac{e}{e} + 3 = 4$$

II-3 01 도함수의 활용(1)

1 접선의 방정식

개념 CHECK

127쪽

1 답 (1) 1 (2) $y=x+1$

문제

128~133쪽

01-1 답 (1) $y=3x$ (2) $y=\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}+1$

(1) $f(x)=\sqrt{6x-1}$ 이라 하면

$$f'(x) = \frac{6}{2\sqrt{6x-1}} = \frac{3}{\sqrt{6x-1}}$$

점 $(\frac{1}{3}, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(\frac{1}{3}) = 3$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=3(x-\frac{1}{3})$$

$$\therefore y=3x$$

(2) $f(x)=\tan \frac{\pi}{4}x$ 라 하면

$$f'(x) = \frac{\pi}{4} \sec^2 \frac{\pi}{4}x$$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = \frac{\pi}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-1 = \frac{\pi}{2}(x-1)$$

$$\therefore y = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1$$

01-2 답 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}e$

$f(x)=x+x \ln x$ 라 하면

$$f'(x) = 1 + \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 2$$

점 $(e, 2e)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$$-\frac{1}{f'(e)} = -\frac{1}{1+2} = -\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y-2e = -\frac{1}{3}(x-e)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}e$$

02-1 ㉡ (1) $y = -x + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $y = 3x - 1$

(1) $f(x) = \sin 2x$ 라 하면

$$f'(x) = 2 \cos 2x$$

점점의 좌표를 $(t, \sin 2t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 -1 이므로 $f'(t) = -1$ 에서

$$2 \cos 2t = -1 \quad \therefore \cos 2t = -\frac{1}{2}$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{에서 } 0 \leq 2t \leq \pi \text{이므로}$$

$$2t = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore t = \frac{\pi}{3}$$

따라서 점점의 좌표는 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore y = -x + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) $f(x) = \ln 3x$ 라 하면

$$f'(x) = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

점점의 좌표를 $(t, \ln 3t)$ 라 하면 직선 $2x + 6y + 3 = 0$,

즉 $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$ 에 수직인 직선의 기울기는 3이므로

$f'(t) = 3$ 에서

$$\frac{1}{t} = 3 \quad \therefore t = \frac{1}{3}$$

따라서 점점의 좌표는 $(\frac{1}{3}, 0)$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore y = 3x - 1$$

02-2 ㉡ 1

직선 $y = 3x$ 를 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면

$$y = 3x + k$$

$$f(x) = 3x + \sin x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3 + \cos x$$

점점의 좌표를 $(t, 3t + \sin t)$ 라 하면 접선의 기울기가 3이므로 $f'(t) = 3$ 에서

$$3 + \cos t = 3, \cos t = 0$$

$$\therefore t = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 < t < \pi)$$

점점의 좌표는 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi + 1)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \left(\frac{3}{2}\pi + 1\right) = 3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore y = 3x + 1 \quad \therefore k = 1$$

03-1 ㉡ $y = \frac{1}{4}x + 6$

$$f(x) = \sqrt{x} + 5 \text{라 하면 } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

점점의 좌표를 $(t, \sqrt{t} + 5)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

점 $(t, \sqrt{t} + 5)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (\sqrt{t} + 5) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(x - t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(-4, 5)$ 를 지나므로

$$5 - (\sqrt{t} + 5) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(-4 - t)$$

$$-\sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}(-4 - t), -2t = -4 - t \quad \therefore t = 4$$

따라서 이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y - 7 = \frac{1}{4}(x - 4) \quad \therefore y = \frac{1}{4}x + 6$$

03-2 ㉡ $-e^2$

$$f(x) = e^{x+1} \text{이라 하면 } f'(x) = e^{x+1}$$

점점의 좌표를 (t, e^{t+1}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = e^{t+1}$

점 (t, e^{t+1}) 에서의 접선의 방정식은

$$y - e^{t+1} = e^{t+1}(x - t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-e^{t+1} = -te^{t+1} \quad \therefore t = 1 \quad (\because e^{t+1} > 0)$$

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$$y - e^2 = e^2(x - 1) \quad \therefore y = e^2x$$

이 직선이 점 $(-1, a)$ 를 지나므로 $a = -e^2$

04-1 ㉡ 1

$$f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \text{이라 하면 } f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

점점의 좌표를 $(t, 1 + \frac{1}{t})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의

$$\text{기울기는 } f'(t) = -\frac{1}{t^2}$$

점 $(t, 1 + \frac{1}{t})$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \left(1 + \frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2}(x - t)$$

이 직선이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$1 - \left(1 + \frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2}(2 - t)$$

$$-\frac{1}{t} = -\frac{2}{t^2} + \frac{1}{t}, -t = -2 + t \quad (\because t \neq 0)$$

$$2t = 2 \quad \therefore t = 1$$

따라서 점점의 좌표는 $(1, 2)$ 의 1개이므로 접선의 개수는 1이다.

04-2 [답] -4

$f(x)=(x-a)e^{-x}$ 이라 하면

$$f'(x)=e^{-x}-(x-a)e^{-x}=(1+a-x)e^{-x}$$

접점의 좌표를 $(t, (t-a)e^{-t})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=(1+a-t)e^{-t}$

점 $(t, (t-a)e^{-t})$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-(t-a)e^{-t}=(1+a-t)e^{-t}(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-(t-a)e^{-t}=(1+a-t)e^{-t} \times (-t)$$

$$-(t-a)=-t(1+a-t) \quad (\because e^{-t}>0)$$

$$\therefore t^2-at-a=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원점에서 곡선 $y=(x-a)e^{-x}$ 에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 한 개의 접점이 존재해야 하므로 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 중근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$D=a^2+4a=0, \quad a(a+4)=0$$

$$\therefore a=-4 \quad (\because a \neq 0)$$

05-1 [답] $y=\frac{5}{3}x-\frac{8}{3}$

x 와 y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=e^t-e^{-t}, \quad \frac{dy}{dt}=e^t+e^{-t}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t+e^{-t}}{e^t-e^{-t}} \quad (t \neq 0)$$

$t=\ln 2$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}}=\frac{5}{3}$$

$t=\ln 2$ 에 대응하는 점의 x 좌표와 y 좌표는

$$x=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}, \quad y=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-\frac{3}{2}=\frac{5}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

$$\therefore y=\frac{5}{3}x-\frac{8}{3}$$

05-2 [답] $y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$

x 와 y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=-\sin t, \quad \frac{dy}{dt}=2\cos t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\cos t}{-\sin t}=-2\cot t$$

$$\cos t=\frac{1}{2} \text{에서 } t=\frac{\pi}{3} \quad \left(\because 0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$$

점 $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$, 즉 $t=\frac{\pi}{3}$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$-2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{3}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

06-1 [답] $y=-x+2\pi$

주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\cos y-x \sin y \frac{dy}{dx}+\cos x \frac{dy}{dx}-y \sin x=0$$

$$(x \sin y-\cos x) \frac{dy}{dx}=\cos y-y \sin x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\cos y-y \sin x}{x \sin y-\cos x} \quad (x \sin y \neq \cos x)$$

점 (π, π) 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{-1-0}{0-(-1)}=-1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-\pi=-(x-\pi) \quad \therefore y=-x+2\pi$$

06-2 [답] $\sqrt{2}$

주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x-y-x \frac{dy}{dx}+2y \frac{dy}{dx}=0$$

$$(x-2y) \frac{dy}{dx}=2x-y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x-2y} \quad (x \neq 2y)$$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2-1}{1-2}=-1$$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-1=-(x-1)$$

$$\therefore x+y-2=0$$

따라서 직선 $x+y-2=0$ 과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$$

06-3 [답] 4

점 $(1, 2)$ 가 곡선 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=x^2+2$ 위의 점이므로

$$a+\frac{b}{2}=3 \quad \therefore 2a+b=6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = x^2 + 2$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$-\frac{a}{x^2} - \frac{b}{y^2} \times \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x + \frac{a}{x^2}}{-\frac{b}{y^2}} = -\frac{2x^3y^2 + ay^2}{bx^2}$$

점 (1, 2)에서의 접선의 기울기가 -8이므로

$$-\frac{8+4a}{b} = -8$$

$$\therefore a - 2b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=2, b=2$

$$\therefore a+b=4$$

2 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

개념 CHECK

135쪽

1 [답] 극댓값: 0, 극솟값: -1

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x$$

$$f''(x) = 12x - 6$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 6x^2 - 6x = 0, x(x-1) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

$f''(0), f''(1)$ 의 부호를 조사하면

$$f''(0) = -6 < 0, f''(1) = 6 > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 $f(0)=0$, $x=1$ 에서 극솟값 $f(1)=-1$ 을 갖는다.

문제

136~140쪽

07-1 [답] 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가, 구간 $(-\infty, 0]$ 에서 감소

$$f(x) = e^x - x \text{에서}$$

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } e^x - 1 = 0, e^x = 1$$

$$\therefore x=0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	0	$\dots$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $(-\infty, 0]$ 에서 감소한다.

07-2 [답] 구간 $(0, \frac{\pi}{6}]$, $[\frac{5}{6}\pi, 2\pi)$ 에서 증가,

구간 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$ 에서 감소

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \cos x \text{에서 } f'(x) = \frac{1}{2} - \sin x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \frac{1}{2} - \sin x = 0, \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, \frac{\pi}{6}]$, $[\frac{5}{6}\pi, 2\pi)$ 에서 증가

하고, 구간 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$ 에서 감소한다.

08-1 [답] $a \geq 2$

$$f(x) = ax + \sin 2x \text{에서 } f'(x) = a + 2\cos 2x$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하려면 모든 실수 x 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$a + 2\cos 2x \geq 0$$

이때 $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ 이므로

$$-2 \leq 2\cos 2x \leq 2, a - 2 \leq a + 2\cos 2x \leq a + 2$$

따라서 $a - 2 \geq 0$ 이어야 하므로 $a \geq 2$

08-2 [답] $0 < a \leq \frac{1}{3}$

$$f(x) = (ax^2 - 1)e^x \text{에서}$$

$$f'(x) = 2axe^x + (ax^2 - 1)e^x = (ax^2 + 2ax - 1)e^x$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $[-1, 1]$ 에서 감소하려면 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$$(ax^2 + 2ax - 1)e^x \leq 0$$

$$\therefore ax^2 + 2ax - 1 \leq 0 \quad (\because e^x > 0)$$

이때 $g(x) = ax^2 + 2ax - 1$ 이라 하면

$$g(x) = a(x+1)^2 - a - 1$$

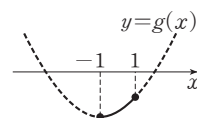
이때 $a > 0$ 이고 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $g(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$$g(1) \leq 0$$

$$4a - a - 1 \leq 0 \quad \therefore a \leq \frac{1}{3}$$

따라서 구하는 a 의 값의 범위는

$$0 < a \leq \frac{1}{3}$$



09-1 [답] (1) 극댓값: 1, 극솟값: -1

(2) 극솟값: e

(3) 극댓값: $\frac{4}{e^2}$, 극솟값: 0

(4) 극댓값: $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 극솟값: $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(1) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ 에서

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$x^2 - 1 = 0, x^2 = 1 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$	1 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 1, $x=-1$ 에서 극솟값 -1을 갖는다.

(2) $f(x) = \frac{e^x}{x}$ 에서 $f'(x) = \frac{e^x \times x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$

$f'(x) = 0$ 에서

$$x-1=0 (\because e^x > 0) \quad \therefore x=1$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	e 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값 e 를 갖는다.

(3) $f(x) = x(\ln x)^2$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = (\ln x)^2 + x \times 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \ln x (\ln x + 2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \ln x = -2 \text{ 또는 } \ln x = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{e^2} \text{ 또는 } x = 1$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{e^2}$	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$ 극대	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{e^2}$ 에서 극댓값 $\frac{4}{e^2}$, $x=1$ 에서 극솟값 0을 갖는다.

(4) $f(x) = 2 \cos x + \sin 2x$ 에서

$$f'(x) = -2 \sin x + 2 \cos 2x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \sin x - \cos 2x = 0$$

$$\sin x - (1 - 2 \sin^2 x) = 0$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$(\sin x + 1)(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = -1 \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{6} (\because 0 < x < \pi)$$

$0 < x < \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5\pi}{6}$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 극대	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 극소	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 극댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$

에서 극솟값 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 을 갖는다.

다른 풀이 이계도함수 이용

(1) $f'(x) = -\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ 이므로

$$f''(x) = -\frac{4x(x^2+1)^2 - 2(x^2-1) \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\therefore f''(-1) = 1 > 0, f''(1) = -1 < 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 1, $x=-1$ 에서 극솟값 -1을 갖는다.

(2) $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$ 이므로

$$f''(x) = \frac{\{e^x + (x-1)e^x\}x^2 - (x-1)e^x \times 2x}{x^4}$$

$$= \frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 1$$

$$\therefore f''(1) = e > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값 e 를 갖는다.

(3) $f'(x) = \ln x (\ln x + 2)$ 이므로

$$f''(x) = \frac{1}{x} (\ln x + 2) + \ln x \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2}{x} (\ln x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{1}{e^2} \text{ 또는 } x = 1$$

$$\therefore f''\left(\frac{1}{e^2}\right) = -2e^2 < 0, f''(1) = 2 > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{e^2}$ 에서 극댓값 $\frac{4}{e^2}$, $x=1$ 에서 극솟값 0을 갖는다.

$$(4) f'(x) = -2\sin x + 2\cos 2x \text{이므로}$$

$$f''(x) = -2\cos x - 4\sin 2x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3\sqrt{3} < 0, f''\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 3\sqrt{3} > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 극댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{5}{6}\pi$

에서 극솟값 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 을 갖는다.

10-1 ㉡ 1

$$f(x) = a\cos x - b\cos 2x \text{에서}$$

$$f'(x) = -a\sin x + 2b\sin 2x$$

$x = \frac{\pi}{3}$ 에서 극댓값 $\frac{3}{2}$ 을 가지므로

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \text{에서}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}a + \sqrt{3}b = 0 \quad \therefore a - 2b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = \frac{3}{2} \quad \therefore a + b = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = 2, b = 1 \quad \therefore a - b = 1$$

10-2 ㉡ $-\frac{9}{8} - 2\ln 2$

$$f(x) = ax^2 - bx + \ln x \text{에서 } x > 0 \text{이고}$$

$$f'(x) = 2ax - b + \frac{1}{x}$$

$x=1$ 에서 극솟값 -3 을 가지므로

$$f'(1) = 0, f(1) = -3$$

$$f'(1) = 0 \text{에서}$$

$$2a - b + 1 = 0 \quad \therefore 2a - b = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(1) = -3 \text{에서 } a - b = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 5$

$$\therefore f(x) = 2x^2 - 5x + \ln x, f'(x) = 4x - 5 + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 4x - 5 + \frac{1}{x} = 0$$

$$4x^2 - 5x + 1 = 0, (4x - 1)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{4} \text{ 또는 } x = 1$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{4}$	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	$-\frac{9}{8} - 2\ln 2$ 극대	$\searrow$	-3 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{4}$ 에서 극댓값 $-\frac{9}{8} - 2\ln 2$ 를 갖는다.

11-1 ㉡ $a \geq 0$

$$f(x) = ax + \ln x \text{에서 } x > 0 \text{이고}$$

$$f'(x) = a + \frac{1}{x}$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 $x > 0$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$a + \frac{1}{x} \geq 0$$

이때 $x > 0$ 일 때 $\frac{1}{x} > 0$ 이므로

$$a \geq 0$$

11-2 ㉡ $a < 10$

$$f(x) = (x^2 - 6x + a)e^{-x} \text{에서}$$

$$f'(x) = (2x - 6)e^{-x} - (x^2 - 6x + a)e^{-x}$$

$$= (-x^2 + 8x - a - 6)e^{-x}$$

이때 $e^{-x} > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $-x^2 + 8x - a - 6 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 16 - (a + 6) > 0$$

$$\therefore a < 10$$

연습문제

141~142쪽

- | | | | | |
|--|---------------|-----------------------------|------|-------|
| 1 2 | 2 $2\sqrt{2}$ | 3 1 | 4 ① | 5 ② |
| 6 $a < -3 - 2\sqrt{2}$ 또는 $-3 + 2\sqrt{2} < a < 0$ | 7 1 | | | |
| 8 ③ | 9 4 | 10 3 | 11 ④ | 12 45 |
| 13 $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$ | 14 ④ | 15 $\frac{1}{e^{2\pi} - 1}$ | | |

1 $f(x)=xe^x+2$ 라 하면
 $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$
 점 $(0, 2)$ 에서의 접선의 기울기는
 $f'(0)=1$
 점 $(0, 2)$ 에서의 접선의 방정식은
 $y-2=x \quad \therefore y=x+2$
 이때 직선 $y=x+2$ 의 x 절편은 -2 , y 절편은 2 이므로 구
 하는 삼각형의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$

2 곡선 $y=\ln x$ 에 접하고 직선 $y=x+3$ 과 기울기가 같은 접
 선의 접점을 $P(t, \ln t)$ 라 하면 구하는 선분의 길이의 최
 소값은 점 P 와 직선 $y=x+3$ 사이의 거리와 같다.
 $f(x)=\ln x$ 라 하면
 $f'(x)=\frac{1}{x}$
 점 P 에서의 접선의 기울기가 1 이므로 $f'(t)=1$ 에서
 $\frac{1}{t}=1 \quad \therefore t=1 \quad \therefore P(1, 0)$
 따라서 점 $P(1, 0)$ 과 직선 $y=x+3$, 즉 $x-y+3=0$ 사
 이의 거리는
 $\frac{|1+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$

3 $f(x)=e^x, g(x)=\sqrt{2x+a}$ 라 하면
 $f'(x)=e^x, g'(x)=\frac{2}{\sqrt{2x+a}}=\frac{1}{\sqrt{2x+a}}$
 두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 접한다고 하면 $x=t$ 인 점에서
 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$ 에서
 $e^t=\sqrt{2t+a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 또 $x=t$ 인 점에서의 접선의 기울기가 같으므로
 $f'(t)=g'(t)$ 에서
 $e^t=\frac{1}{\sqrt{2t+a}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $e^t=\frac{1}{e^t}$
 $e^{2t}=1 \quad \therefore t=0$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $a=1$

4 $f(x)=ke^x+1, g(x)=x^2-3x+4$ 라 하면
 $f'(x)=ke^x, g'(x)=2x-3$
 점 P 의 x 좌표를 t 라 하면 $x=t$ 인 점에서 두 곡선이 만나
 므로 $f(t)=g(t)$ 에서
 $ke^t+1=t^2-3t+4$
 $\therefore ke^t=t^2-3t+3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

또 $x=t$ 인 점에서의 두 접선이 서로 수직이므로
 $f'(t)g'(t)=-1$ 에서
 $ke^t(2t-3)=-1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 에 $\textcircled{2}$ 을 대입하면
 $(t^2-3t+3)(2t-3)=-1$
 $2t^3-9t^2+15t-8=0$
 $(t-1)(2t^2-7t+8)=0$
 $\therefore t=1 (\because 2t^2-7t+8>0)$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $ke=1 \quad \therefore k=\frac{1}{e}$

5 $f(x)=\sqrt{x+1}$ 이라 하면
 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$
 점점의 좌표를 $(t, \sqrt{t+1})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의
 기울기는
 $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t+1}}$
 점 $(t, \sqrt{t+1})$ 에서의 접선의 방정식은
 $y-\sqrt{t+1}=\frac{1}{2\sqrt{t+1}}(x-t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 이 직선이 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로
 $-\sqrt{t+1}=\frac{1}{2\sqrt{t+1}}(-2-t)$
 $2(t+1)=2+t$
 $2t+2=t+2 \quad \therefore t=0$
 $t=0$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 접선의 방정식은
 $y-1=\frac{1}{2}x \quad \therefore y=\frac{1}{2}x+1$
 따라서 이 직선이 점 $(4, a)$ 를 지나므로
 $a=2+1=3$

6 $f(x)=x^2e^x$ 이라 하면
 $f'(x)=2xe^x+x^2e^x=(x^2+2x)e^x$
 점점의 좌표를 (t, t^2e^t) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기
 울기는 $f'(t)=(t^2+2t)e^t$
 점 (t, t^2e^t) 에서의 접선의 방정식은
 $y-t^2e^t=(t^2+2t)e^t(x-t)$
 이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로
 $-t^2e^t=(t^2+2t)e^t(a-t)$
 $-t^2=(t^2+2t)(a-t) (\because e^t>0)$
 $\therefore t\{t^2+(1-a)t-2a\}=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 점 $(a, 0)$ 에서 곡선 $y=x^2e^x$ 에 서로 다른 세 개의 접선을
 그을 수 있으려면 세 개의 접점이 존재해야 하므로 방정식
 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $t^2 + (1-a)t - 2a = 0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 에서
 $D = (1-a)^2 + 8a > 0$
 $a^2 + 6a + 1 > 0$
 $\therefore a < -3 - 2\sqrt{2}$ 또는 $a > -3 + 2\sqrt{2}$
 이때 $a < 0$ 이므로
 $a < -3 - 2\sqrt{2}$ 또는 $-3 + 2\sqrt{2} < a < 0$

7 x 와 y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = 3\sec^2 t, \quad \frac{dy}{dt} = 2\sec t \tan t$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ &= \frac{2\sec t \tan t}{3\sec^2 t} \\ &= \frac{2\tan t}{3\sec t} = \frac{2}{3} \sin t \end{aligned}$$

$t = \frac{\pi}{3}$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$t = \frac{\pi}{3}$ 에 대응하는 점의 x 좌표와 y 좌표는

$$x = 3 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}, \quad y = 2 \times 2 = 4$$

$t = \frac{\pi}{3}$ 에 대응하는 점에서의 접선의 방정식은

$$y - 4 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 3\sqrt{3})$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$$

따라서 구하는 y 절편은 1이다.

8 점 $(0, b)$ 가 곡선 $x^3 - axy - y^2 + 4 = 0$ 위의 점이므로
 $-b^2 + 4 = 0 \quad \therefore b = 2 \quad (\because b > 0)$

$x^3 - axy - y^2 + 4 = 0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 - ay - ax \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - ay}{ax + 2y} \quad (ax \neq -2y)$$

점 $(0, 2)$ 에서의 접선의 기울기가 -1 이므로

$$\frac{-2a}{4} = -1 \quad \therefore a = 2$$

점 $(0, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 2 = -x$$

$$\therefore y = -x + 2$$

따라서 $c = 2$ 이므로

$$a + b + c = 2 + 2 + 2 = 6$$

9 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{a}{x}$ 에서

$$f'(x) = x - 3 + \frac{a}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(0, \infty)$ 에서 증가하려면 $x > 0$ 에서

$f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$x - 3 + \frac{a}{x^2} \geq 0, \quad \frac{1}{x^2}(x^3 - 3x^2 + a) \geq 0$$

$$\therefore x^3 - 3x^2 + a \geq 0$$

이때 $g(x) = x^3 - 3x^2 + a$ 라 하면

$$g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

$$g'(x) = 0 \text{에서 } x(x - 2) = 0 \quad \therefore x = 2 \quad (\because x > 0)$$

$x > 0$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		$\searrow$	$a-4$ 극소	$\nearrow$

$x > 0$ 에서 $g(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$a - 4 \geq 0 \quad \therefore a \geq 4$$

따라서 a 의 최솟값은 4이다.

10 $f(x) = -x^2 + 6x + (a-8)\ln x$ 에서

$$f'(x) = -2x + 6 + \frac{a-8}{x} = \frac{-2x^2 + 6x + a - 8}{x}$$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $x > 0$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{-2x^2 + 6x + a - 8}{x} \leq 0$$

$$-2x^2 + 6x + a - 8 \leq 0 \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore 2x^2 - 6x - a + 8 \geq 0$$

이차방정식 $2x^2 - 6x - a + 8 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 9 - 2(-a + 8) \leq 0, \quad 2a - 7 \leq 0 \quad \therefore a \leq \frac{7}{2}$$

따라서 자연수 a 는 1, 2, 3의 3개이다.

11 $f(x) = (x^2 - 8)e^{-x}$ 에서

$$f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2 - 8)e^{-x} = (-x^2 + 2x + 8)e^{-x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } -x^2 + 2x + 8 = 0 \quad (\because e^{-x} > 0)$$

$$(x+2)(x-4) = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 4$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$-4e^2$ 극소	$\nearrow$	$\frac{8}{e^4}$ 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 극댓값 $\frac{8}{e^4}$, $x=-2$ 에서 극솟값 $-4e^2$ 을 가지므로 구하는 곱은 $\frac{8}{e^4} \times (-4e^2) = -\frac{32}{e^2}$

12 $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x-1}$ 에서

$$f'(x) = \frac{(2x+a)(x-1) - (x^2+ax+b)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-2x-a-b}{(x-1)^2}$$

$x=-1$ 에서 극댓값 4를 가지므로

$$f'(-1)=0, f(-1)=4$$

$$f'(-1)=0 \text{에서}$$

$$\frac{3-a-b}{4}=0 \quad \therefore a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(-1)=4 \text{에서}$$

$$\frac{1-a+b}{-2}=4 \quad \therefore a-b=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=6, b=-3 \quad \therefore a^2+b^2=36+9=45$$

13 $f(x) = (x-a)e^{x^2}$ 에서

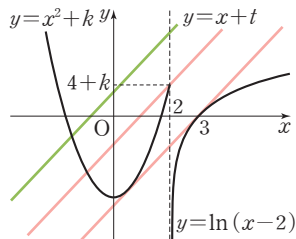
$$f'(x) = e^{x^2} + (x-a)e^{x^2} \times 2x = (2x^2-2ax+1)e^{x^2}$$

 이때 $e^{x^2} > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x 에서 $2x^2-2ax+1 \geq 0$ 이어야 한다.
 따라서 이차방정식 $2x^2-2ax+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2 \leq 0$$

$$(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2}) \leq 0 \quad \therefore -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$$

14 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(2, 4+k)$ 를 지나고 직선 $y=x+t$ 가 점 $(2, 4+k)$ 를 지날 때 이 직선과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다.



$t > k+2$ 이면 직선 $y=x+t$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 한 점에서 만나므로 직선 $y=x+t$ 가 점 $(2, 4+k)$ 를 지날 때의 t 의 값은

$$4+k=2+t \quad \therefore t=k+2$$

함수 $g(t)$ 가 $t=a$ 에서 불연속인 a 의 값이 한 개이려면

$$g(t) = \begin{cases} 2 & (t \leq k+2) \\ 1 & (t > k+2) \end{cases} \text{이어야 한다.}$$

따라서 직선 $y=x+t$ 는 두 곡선 $y=x^2+k$, $y=\ln(x-2)$ 에 동시에 접해야 한다.

$y=\ln(x-2)$ 에서 $y' = \frac{1}{x-2}$ 이므로 곡선 $y=\ln(x-2)$ 와 직선 $y=x+t$ 의 접점의 좌표를 $(s, \ln(s-2))$ 라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$$\frac{1}{s-2}=1 \quad \therefore s=3$$

즉, 접점의 좌표는 $(3, 0)$ 이고 이 점은 직선 $y=x+t$ 위의 점이므로

$$0=3+t \quad \therefore t=-3$$

또 곡선 $y=x^2+k$ 와 직선 $y=x-3$ 이 접해야 하므로 방정식 $x^2+k=x-3$, 즉 $x^2-x+k+3=0$ 이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 에서

$$D=1-4(k+3)=0$$

$$-4k-11=0 \quad \therefore k=-\frac{11}{4}$$

15 $f(x) = \cos(\ln x)$ 에서

$$f'(x) = -\sin(\ln x) \times \frac{1}{x} = -\frac{\sin(\ln x)}{x}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x>1 \text{이므로}$$

$$\sin(\ln x)=0$$

$$\ln x = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

$$\therefore x = e^\pi, e^{2\pi}, e^{3\pi}, \dots$$

$x > 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\dots$	e^π	$\dots$	$e^{2\pi}$	$\dots$	$e^{3\pi}$	$\dots$	$e^{4\pi}$	$\dots$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 가 극대일 때의 x 의 값을 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$e^{2\pi}, e^{4\pi}, \dots, e^{2n\pi}, \dots$$

따라서 $x_n = e^{2n\pi}$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n\pi}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{2\pi}} \right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{e^{2\pi}}}{1 - \frac{1}{e^{2\pi}}} = \frac{1}{e^{2\pi} - 1} \end{aligned}$$

II-3 02 도함수의 활용(2)

곡선의 오목과 볼록

개념 CHECK

144쪽

- 1 [답] (1) 구간 $(-\infty, 2)$ 에서 위로 볼록,
구간 $(2, \infty)$ 에서 아래로 볼록,
변곡점의 좌표: $(2, 2)$
(2) 구간 $(-\infty, -1)$, $(0, \infty)$ 에서 아래로 볼록,
구간 $(-1, 0)$ 에서 위로 볼록,
변곡점의 좌표: $(-1, -1)$, $(0, 0)$
(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ 라 하면
 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12$
 $f''(x) = 0$ 에서
 $6x - 12 = 0 \quad \therefore x = 2$
이때 $x < 2$ 에서 $f''(x) < 0$, $x > 2$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로
곡선 $y = f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 2)$ 에서 위로 볼록하고,
구간 $(2, \infty)$ 에서 아래로 볼록하다.
따라서 $x = 2$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변
곡점의 좌표는 $(2, 2)$
(2) $f(x) = x^4 + 2x^3$ 이라 하면
 $f'(x) = 4x^3 + 6x^2$, $f''(x) = 12x^2 + 12x$
 $f''(x) = 0$ 에서
 $12x^2 + 12x = 0$, $12x(x + 1) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 0$
이때 $x < -1$, $x > 0$ 에서 $f''(x) > 0$, $-1 < x < 0$ 에서
 $f''(x) < 0$ 이므로 곡선 $y = f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1)$,
 $(0, \infty)$ 에서 아래로 볼록하고, 구간 $(-1, 0)$ 에서 위
로 볼록하다.
따라서 $x = -1$, $x = 0$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바
뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-1, -1)$, $(0, 0)$

문제

145~146쪽

- 01-1 [답] (1) 구간 $(-\infty, \ln 2)$ 에서 아래로 볼록,
구간 $(\ln 2, \infty)$ 에서 위로 볼록,
변곡점의 좌표: $(\ln 2, (\ln 2)^2 - 2)$
(2) 구간 $(0, \frac{\pi}{4})$ 에서 아래로 볼록,
구간 $(\frac{\pi}{4}, \pi)$ 에서 위로 볼록,
변곡점의 좌표: $(\frac{\pi}{4}, 0)$

- (3) 구간 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$ 에서 아래로 볼록,
구간 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 에서 위로 볼록,
변곡점의 좌표: $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4})$, $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4})$

- (4) 구간 $(0, \frac{1}{2})$ 에서 위로 볼록,
구간 $(\frac{1}{2}, \infty)$ 에서 아래로 볼록,
변곡점의 좌표: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \ln 2)$

- (1) $f(x) = x^2 - e^x$ 이라 하면
 $f'(x) = 2x - e^x$
 $f''(x) = 2 - e^x$
 $f''(x) = 0$ 에서
 $2 - e^x = 0$, $e^x = 2 \quad \therefore x = \ln 2$
이때 $x < \ln 2$ 에서 $f''(x) > 0$, $x > \ln 2$ 에서 $f''(x) < 0$
이므로 곡선 $y = f(x)$ 는 구간 $(-\infty, \ln 2)$ 에서 아래로
볼록하고, 구간 $(\ln 2, \infty)$ 에서 위로 볼록하다.
따라서 $x = \ln 2$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므
로 변곡점의 좌표는 $(\ln 2, (\ln 2)^2 - 2)$
(2) $f(x) = \sin x - \cos x$ 라 하면
 $f'(x) = \cos x + \sin x$
 $f''(x) = -\sin x + \cos x$
 $f''(x) = 0$ 에서 $-\sin x + \cos x = 0$
 $\sin x = \cos x \quad \therefore x = \frac{\pi}{4} \quad (\because 0 < x < \pi)$
이때 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 에서 $f''(x) > 0$, $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ 에서
 $f''(x) < 0$ 이므로 곡선 $y = f(x)$ 는 구간 $(0, \frac{\pi}{4})$ 에서
아래로 볼록하고, 구간 $(\frac{\pi}{4}, \pi)$ 에서 위로 볼록하다.
따라서 $x = \frac{\pi}{4}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로
변곡점의 좌표는 $(\frac{\pi}{4}, 0)$
(3) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ 이라 하면
 $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$
 $f''(x) = -\frac{2(x^2 + 1)^2 - 2x \times 2(x^2 + 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^4}$
 $= \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}$
 $f''(x) = 0$ 에서
 $6x^2 - 2 = 0$, $x^2 = \frac{1}{3}$
 $\therefore x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

이때 $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 $f''(x) > 0$,
 $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$
 는 구간 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$ 에서 아래로 볼록
 하고, 구간 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 에서 위로 볼록하다.

따라서 $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호
 가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4})$, $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4})$

(4) $f(x) = 2x^2 + \ln x$ 라 하면 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = 4x + \frac{1}{x}, f''(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 \text{에서}$$

$$4 - \frac{1}{x^2} = 0, x^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore x = \frac{1}{2} (\because x > 0)$$

이때 $0 < x < \frac{1}{2}$ 에서 $f''(x) < 0$, $x > \frac{1}{2}$ 에서 $f''(x) > 0$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(0, \frac{1}{2})$ 에서 위로 볼록
 하고, 구간 $(\frac{1}{2}, \infty)$ 에서 아래로 볼록하다.

따라서 $x = \frac{1}{2}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변
 곡점의 좌표는 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \ln 2)$

02-1 ㉡ $\frac{7}{3}$

$f(x) = ax^3 + b \ln x$ 라 하면

$$f'(x) = 3ax^2 + \frac{b}{x}, f''(x) = 6ax - \frac{b}{x^2}$$

곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 좌표가 $(1, \frac{1}{3})$ 이므로

$$f''(1) = 0, f(1) = \frac{1}{3}$$

$$f''(1) = 0 \text{에서 } 6a - b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(1) = \frac{1}{3} \text{에서 } a = \frac{1}{3}$$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $b = 2$

$$\therefore a + b = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

02-2 ㉡ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$f'(x) = a \cos x - b \sin x - 1$$

$$f''(x) = -a \sin x - b \cos x$$

함수 $f(x)$ 가 $x = \frac{7}{6}\pi$ 에서 극소이므로 $f'(\frac{7}{6}\pi) = 0$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b - 1 = 0 \quad \therefore \sqrt{3}a - b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 x 좌표가 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 $f''(\frac{\pi}{3}) = 0$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b = 0 \quad \therefore \sqrt{3}a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $b = 1$

$$\therefore ab = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

02-3 ㉡ 9

$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ 라 하면

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx, f''(x) = 6ax + 2b$$

$x = 1$ 인 점에서의 접선의 기울기가 -3 이므로

$$f'(1) = -3 \text{에서 } 3a + 2b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 좌표가 $(1, 3)$ 이므로

$$f''(1) = 0, f(1) = 3$$

$$f''(1) = 0 \text{에서 } 6a + 2b = 0 \quad \therefore 3a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$f(1) = 3 \text{에서 } a + b + c = 3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 1$, $b = -3$

이를 ㉢에 대입하여 풀면 $c = 5$

$$\therefore a - b + c = 1 - (-3) + 5 = 9$$

2 함수의 그래프

문제

149~151쪽

03-1 ㉡ (1)~(4) 풀이 참조

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x - 1} \text{에서}$$

(i) 정의역은 $x \neq 1$ 인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0) = -1$ 이므로 그래프는 점 $(0, -1)$ 을 지난다.

$$(iii) f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = 0, (x-1)^2 = 1$$

$$x(x-2) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

$x \neq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록
 을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f''(x)$	-	-	-		+	+	+
$f(x)$	$\nearrow$	-1 극대	$\searrow$		$\swarrow$	3 극소	$\nearrow$

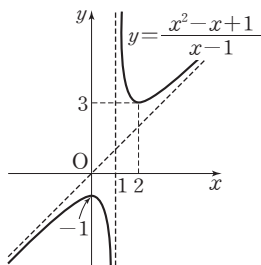
$$(iv) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x + \frac{1}{x-1} \right) = \infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x + \frac{1}{x-1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

따라서 점근선은 직선 $x=1$, $y=x$ 이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x) = 2x - \sqrt{x}$ 에서

(i) 정의역은 $x \geq 0$ 인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $2x - \sqrt{x} = 0$ 에서 $2x = \sqrt{x}$

$$4x^2 = x, x(4x-1) = 0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{1}{4}$$

따라서 그래프는 두 점 $(0, 0)$, $(\frac{1}{4}, 0)$ 을 지난다.

(iii) $f'(x) = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}, f''(x) = \frac{1}{4x\sqrt{x}}$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0, 4\sqrt{x} = 1$$

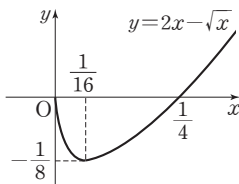
$$16x = 1 \quad \therefore x = \frac{1}{16}$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{16}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f''(x)$		+	+	+
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{8}$ 극소	↗

(iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \infty$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(3) $f(x) = e^{-x^2}$ 에서

(i) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0) = 1$ 이므로 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지난다.

(iii) $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$ 이므로 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

(iv) $f'(x) = -2xe^{-x^2}$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x \times (-2xe^{-x^2})$$

$$= 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x=0 \quad (\because e^{-x^2} > 0)$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } 2x^2 - 1 = 0 \quad (\because e^{-x^2} > 0)$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

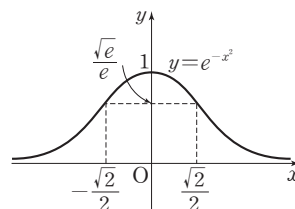
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{\sqrt{e}}{e}$ 변곡점	↗	1 극대	↘	$\frac{\sqrt{e}}{e}$ 변곡점	↘

(v) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$

이므로 점근선은 x 축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



(4) $f(x) = \cos^2 x$ 에서

$$f'(x) = 2 \cos x \times (-\sin x) = -2 \sin x \cos x$$

$$= -\sin 2x$$

$$f''(x) = -2 \cos 2x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\sin 2x = 0$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{에서 } 0 \leq 2x \leq 2\pi \text{이므로}$$

$$2x = 0 \text{ 또는 } 2x = \pi \text{ 또는 } 2x = 2\pi$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \pi$$

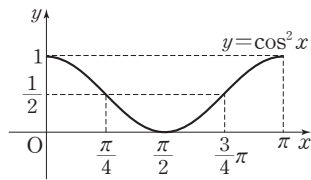
$$f''(x) = 0 \text{에서 } \cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } 2x = \frac{3}{2}\pi \quad \therefore x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{3}{4}\pi$$

$0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	π
$f'(x)$		-	-	-	0	+	+	+	
$f''(x)$		-	0	+	+	+	0	-	
$f(x)$	1	↘	$\frac{1}{2}$ 변곡점	↘	0 극소	↗	$\frac{1}{2}$ 변곡점	↗	1

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



04-1 [답] (1) 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$

(2) 최댓값: 2, 최솟값: -2

(3) 최댓값: $\frac{1}{2e}$, 최솟값: 0

(4) 최댓값: $\frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, 최솟값: $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) $f(x) = \frac{2x}{x^2+4}$ 에서

$$f'(x) = \frac{2(x^2+4) - 2x \times 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } -2x^2+8=0$$

$$x^2=4 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

구간 $[-4, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	...	-2	...	2	...	4
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\frac{2}{5}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$ 극소	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$ 극대	$\searrow$	$\frac{2}{5}$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

(2) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ 에서

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 4-2x^2=0$$

$$x^2=2 \quad \therefore x=-\sqrt{2} \text{ 또는 } x=\sqrt{2}$$

구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	$-\sqrt{2}$	...	$\sqrt{2}$	...	2
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2 극소	$\nearrow$	2 극대	$\searrow$	0

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

(3) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ 에서

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 1-2\ln x=0$$

$$\ln x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \sqrt{e}$$

구간 $[1, e]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	$\sqrt{e}$	...	e
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$ 극대	$\searrow$	$\frac{1}{e^2}$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{2e}$, 최솟값은 0이다.

(4) $f(x) = x - \sin 2x$ 에서

$$f'(x) = 1 - 2\cos 2x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 1-2\cos 2x=0, \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{에서 } 0 \leq 2x \leq 2\pi \text{이므로}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } 2x = \frac{5\pi}{3} \quad \therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{6}$$

구간 $[0, \pi]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5\pi}{6}$	...	π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 극소	$\nearrow$	$\frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 극대	$\searrow$	π

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, 최솟값은 $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

05-1 [답] 3

점 D의 x 좌표를 a 라 하면

$$D\left(a, \frac{2}{a^2+1}\right) \text{ (단, } a>0)$$

$$\overline{AD} = 2a \text{이므로 } \overline{BC} = 2\overline{AD} = 4a$$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a) = \frac{1}{2}(2a+4a) \times \frac{2}{a^2+1} = \frac{6a}{a^2+1}$$

$$\therefore S'(a) = \frac{6(a^2+1) - 6a \times 2a}{(a^2+1)^2} = \frac{-6a^2+6}{(a^2+1)^2}$$

$$S'(a)=0 \text{에서 } -6a^2+6=0$$

$$a^2=1 \quad \therefore a=1 \text{ (} \because a>0)$$

$a > 0$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	1	...
$S'(a)$		+	0	-
$S(a)$		↗	3 극대	↘

따라서 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 3이다.

05-2 $\frac{\pi}{3}$

점 A의 x 좌표를 a 라 하면

$$A(a, 4\sin a) \quad \left(\text{단, } 0 < a < \frac{\pi}{2} \right)$$

$\overline{BC} = \pi - 2a$, $\overline{CD} = 4\sin a$ 이므로 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 $f(a)$ 라 하면

$$f(a) = 2(\pi - 2a + 4\sin a) = 2\pi - 4a + 8\sin a$$

$$\therefore f'(a) = -4 + 8\cos a$$

$$f'(a) = 0 \text{에서 } -4 + 8\cos a = 0$$

$$\cos a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because 0 < a < \frac{\pi}{2} \right)$$

$0 < a < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $f(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(a)$		+	0	−	
$f(a)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(a)$ 는 $a = \frac{\pi}{3}$ 일 때 최대이므로 이때 선분

BC의 길이는

$$\pi - 2a = \pi - 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

연습문제

152~153쪽

- | | | | |
|--------------------|-------------------------|---------------|--------|
| 1 ① | 2 $-3 \leq a \leq 0$ | 3 ① | 4 $2e$ |
| 5 ④ | 6 $\neg, \sqsubset$ | 7 $\sqsubset$ | 8 21 |
| 10 $\frac{1}{e^2}$ | 11 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ | 12 ⑤ | 13 ③ |

1 $f(x) = x - 2\cos x$ 라 하면

$$f'(x) = 1 + 2\sin x, f''(x) = 2\cos x$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } \cos x = 0 \quad \therefore x = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 < x < \pi)$$

따라서 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 곡선 $y = f(x)$ 는 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 아래로 볼록하다.

2 $f(x) = 3x^4 + 4ax^3 - 6ax^2 + 1$ 이라 하면

$$f'(x) = 12x^3 + 12ax^2 - 12ax$$

$$f''(x) = 36x^2 + 24ax - 12a = 12(3x^2 + 2ax - a)$$

곡선 $y = f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 아래로 볼록하려면

모든 실수 x 에서 $f''(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$3x^2 + 2ax - a \geq 0$$

이차방정식 $3x^2 + 2ax - a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D \leq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$\frac{D}{4} = a^2 + 3a \leq 0, a(a+3) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq a \leq 0$$

3 $f(x) = (x^2 - x)e^x$ 이라 하면

$$f'(x) = (2x - 1)e^x + (x^2 - x)e^x = (x^2 + x - 1)e^x$$

$$f''(x) = (2x + 1)e^x + (x^2 + x - 1)e^x = (x^2 + 3x)e^x$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } x^2 + 3x = 0 \quad (\because e^x > 0)$$

$$x(x+3) = 0 \quad \therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 0$$

$x = -3, x = 0$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 곡선

$y = f(x)$ 의 변곡점의 x 좌표는 $-3, 0$

따라서 그 합은 $-3 + 0 = -3$

4 $f(x) = (\ln ax)^2$ 이라 하면

$$f'(x) = 2\ln ax \times \frac{a}{ax} = \frac{2\ln ax}{x}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - 2\ln ax}{x^2} = \frac{2(1 - \ln ax)}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } 1 - \ln ax = 0, \ln ax = 1$$

$$ax = e \quad \therefore x = \frac{e}{a}$$

$x = \frac{e}{a}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 곡선

$y = f(x)$ 의 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{e}{a}, 1\right)$

이 점이 직선 $y = 2x$ 위에 있으므로

$$1 = 2 \times \frac{e}{a} \quad \therefore a = 2e$$

5 $f(x) = ax^2 - 2\sin 2x$ 라 하면

$$f'(x) = 2ax - 4\cos 2x, f''(x) = 2a + 8\sin 2x$$

곡선 $y = f(x)$ 가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x) = 0$ 이 실근을 갖고, 그 근의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌어야 한다.

$$f''(x) = 0 \text{에서 } 2a + 8\sin 2x = 0$$

$$\therefore \sin 2x = -\frac{a}{4}$$

이때 $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ 이므로 실근을 가지려면

$$-1 \leq -\frac{a}{4} \leq 1 \quad \therefore -4 \leq a \leq 4$$

$$a=-4\text{일 때, } f''(x)=-8+8\sin 2x\leq 0$$

$$a=4\text{일 때, } f''(x)=8+8\sin 2x\geq 0$$

즉, $a=-4$ 또는 $a=4$ 일 때 $f''(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 될 수 없다.

따라서 a 의 값의 범위는 $-4 < a < 4$ 이므로 정수 a 는 $-3, -2, \dots, 3$ 의 7개이다.

6. ㄱ. $f'(a)=0$ 이고 $x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=a$ 에서 극소이다.
 ㄴ. $f'(b)=0$ 이지만 $x=b$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=b$ 에서 극값을 갖지 않는다.
 ㄷ. $f''(0)=0$, $f''(b)=0$ 이고 $x=0$, $x=b$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 $x=0$, $x=b$ 인 점은 변곡점이다. 따라서 그래프의 변곡점은 2개이다.
 ㄹ. 구간 $(0, b)$ 에서 $f''(x)<0$ 이므로 그래프는 위로 볼록하다.
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

7. $f(x)=e^x \sin x$ 에서
 $f'(x)=e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$
 $f''(x)=e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$
 $=2e^x \cos x$
 $f'(x)=0$ 에서
 $\sin x + \cos x = 0$ ($\because e^x > 0$)
 $\therefore x = \frac{3}{4}\pi$ ($\because 0 < x < \pi$)
 $f''(x)=0$ 에서
 $\cos x = 0$ ($\because e^x > 0$)
 $\therefore x = \frac{\pi}{2}$ ($\because 0 < x < \pi$)
 $0 < x < \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$	$\dots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\dots$	π
$f'(x)$		+	+	+	0	-	
$f''(x)$		+	0	-	-	-	
$f(x)$		$\nearrow$	변곡점	$\nearrow$	극대	$\searrow$	

- ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{3}{4}\pi$ 에서 극대이다.
 ㄴ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점은 점 $\left(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}}\right)$ 의 1개이다.
 ㄷ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 에서 위로 볼록하다.
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.

8. $f(x)=\frac{x-1}{x^2+x+2}$ 에서
 $f'(x)=\frac{(x^2+x+2)-(x-1)(2x+1)}{(x^2+x+2)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+x+2)^2}$
 $f'(x)=0$ 에서 $-x^2+2x+3=0$
 $(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=3$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-1	$\dots$	3	$\dots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		-1 극소	$\nearrow$	$\frac{1}{7}$ 극대	$\searrow$

이때 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선은 x 축이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값 $\frac{1}{7}$ 을 가지므로

$$a=3, b=\frac{1}{7} \quad \therefore \frac{a}{b}=21$$

9. $f(x)=axe^x$ 에서
 $f'(x)=ae^x + axe^x = a(1+x)e^x$
 $f'(x)=0$ 에서 $1+x=0$ ($\because e^x > 0$) $\therefore x=-1$
 $a>0$ 이므로 구간 $[-3, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\dots$	-1	$\dots$	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-\frac{3a}{e^3}$	$\searrow$	$-\frac{a}{e}$ 극소	$\nearrow$	ae

함수 $f(x)$ 의 최댓값은 ae , 최솟값은 $-\frac{a}{e}$ 이고 그 곱이 -1 이므로

$$ae \times \left(-\frac{a}{e}\right) = -1$$

$$-a^2 = -1 \quad \therefore a=1 \quad (\because a>0)$$

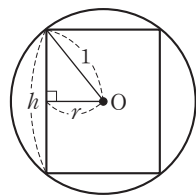
10. 점 A의 좌표를 (a, e^{-2a}) ($a>0$)이라 하면 $H(0, e^{-2a})$
 $y'=-2e^{-2x}$ 이므로 점 A(a, e^{-2a})에서의 접선의 방정식은
 $y-e^{-2a}=-2e^{-2a}(x-a)$
 $\therefore y=-2e^{-2a}x+(2a+1)e^{-2a}$
 즉, 점 B의 좌표는 $(0, (2a+1)e^{-2a})$ 이므로
 $\overline{BH}=(2a+1)e^{-2a}-e^{-2a}=2ae^{-2a}$
 삼각형 ABH의 넓이를 $S(a)$ 라 하면
 $S(a)=\frac{1}{2} \times 2ae^{-2a} \times a = a^2e^{-2a}$
 $\therefore S'(a)=2ae^{-2a}-2a^2e^{-2a}=2a(1-a)e^{-2a}$
 $S'(a)=0$ 에서 $a(1-a)=0$ ($\because e^{-2a}>0$)
 $\therefore a=1$ ($\because a>0$)

$a > 0$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	1	...
$S'(a)$		+	0	-
$S(a)$		↗	$\frac{1}{e^2}$ 극대	↘

따라서 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{e^2}$ 이다.

- 11** 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r ($0 < r < 1$), 높이를 h 라 하면 오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 지나면서 원기둥의 밑면에 수직인 평면으로 자른 단면에서



$$h = 2\sqrt{1-r^2}$$

원기둥의 부피를 $V(r)$ 라 하면

$$\begin{aligned} V(r) &= \pi r^2 h = 2\pi r^2 \sqrt{1-r^2} \\ \therefore V'(r) &= 4\pi r \sqrt{1-r^2} + 2\pi r^2 \times \frac{-2r}{2\sqrt{1-r^2}} \\ &= \frac{4\pi r(1-r^2) - 2\pi r^3}{\sqrt{1-r^2}} \\ &= \frac{2\pi r(2-3r^2)}{\sqrt{1-r^2}} \end{aligned}$$

$$V'(r) = 0 \text{에서 } 2-3r^2 = 0 \quad (\because r > 0)$$

$$r^2 = \frac{2}{3} \quad \therefore r = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (\because 0 < r < 1)$$

$0 < r < 1$ 에서 함수 $V(r)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	...	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	...	1
$V'(r)$		+	0	-	
$V(r)$		↗	극대	↘	

따라서 부피 $V(r)$ 는 $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 에서 최대이므로 원기둥의 부피를 최대로 하는 밑면의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 이다.

- 12** $f(x) = \sin^n x$ 라 하면
- $$\begin{aligned} f'(x) &= n \sin^{n-1} x \cos x \\ f''(x) &= n(n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x - n \sin^{n-1} x \times \sin x \\ &= n(n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x - n \sin^n x \\ &= n \sin^{n-2} x \{ (n-1) \cos^2 x - \sin^2 x \} \\ &= n \sin^{n-2} x (n \cos^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= n \sin^{n-2} x (n \cos^2 x - 1) \end{aligned}$$
- 곡선 $y = f(x)$ 의 변곡점의 좌표가 (a_n, b_n) 이므로
- $$f''(a_n) = 0, f(a_n) = b_n$$

$f''(a_n) = 0$ 에서 n 은 2 이상의 자연수이고, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때 $\sin x > 0$ 이므로

$$n \cos^2 a_n - 1 = 0 \quad \therefore \cos^2 a_n = \frac{1}{n}$$

$f(a_n) = b_n$ 에서

$$\begin{aligned} b_n &= \sin^n a_n = \left(\sqrt{1 - \cos^2 a_n} \right)^n = \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)^n \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-n} \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{e} \end{aligned}$$

- 13** $f(x) = ae^{3x} + be^x$ 에서

$$f'(x) = 3ae^{3x} + be^x, f''(x) = 9ae^{3x} + be^x$$

(*)에서 $x = \ln \frac{2}{3}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로

$$f''\left(\ln \frac{2}{3}\right) = 0$$

$$9ae^{3 \ln \frac{2}{3}} + be^{\ln \frac{2}{3}} = 0$$

$$9a \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 + b \times \frac{2}{3} = 0$$

$$\frac{8}{3}a + \frac{2}{3}b = 0 \quad \therefore b = -4a$$

즉, $f'(x) = 3ae^{3x} - 4ae^x = ae^x(3e^{2x} - 4)$ 이므로

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 3e^{2x} - 4 = 0 \quad (\because e^x > 0), e^{2x} = \frac{4}{3}$$

$$2x = \ln \frac{4}{3} \quad \therefore x = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗

이때 (*)에서 구간 $[k, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $f(x)$ 가 일대일대응이어야 한다.

즉, 함수 $f(x)$ 는 구간 $\left[\frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}, \infty\right)$ 에서 증가하므로

$$k \geq \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} \quad \therefore m = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$$

$$f(x) = ae^{3x} - 4ae^x \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f(2m) &= f\left(\ln \frac{4}{3}\right) = ae^{3 \ln \frac{4}{3}} - 4ae^{\ln \frac{4}{3}} \\ &= a \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4a \times \frac{4}{3} = -\frac{80}{27}a \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{80}{27}a = -\frac{80}{9} \text{이므로 } a = 3$$

따라서 $f(x) = 3e^{3x} - 12e^x$ 이므로

$$f(0) = 3 - 12 = -9$$

II-3 03 도함수의 활용(3)

1 방정식과 부등식의 활용

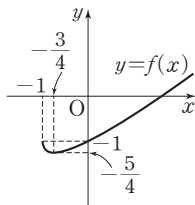
개념 CHECK

154쪽

1 답 (1)

x	-1	...	$-\frac{3}{4}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	-1	\	$-\frac{5}{4}$	/

(2)



(3) 1

문제

155~157쪽

01-1 답 (1) 2 (2) 1

(1) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2x} - 2$ 라 하면 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2} = 0, \sqrt{x} = x^2$$

$$x = x^4, x(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\therefore x = 1 (\because x > 0)$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

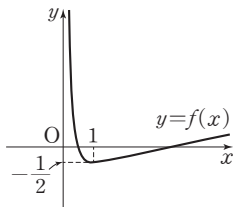
x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$-\frac{1}{2}$ 극소	/

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{이므로 함수}$$

$y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



(2) $f(x) = x - \cos x$ 라 하면

$$f'(x) = 1 + \sin x$$

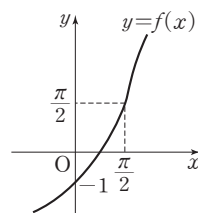
이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $f'(x) \geq 0$

즉, 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$$\text{이때 } f(0) = -1, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 한 점에서 만난다.

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



02-1 답 4

주어진 방정식에서 $\ln x - ex + 6 = a$ 이므로 이 방정식이 오직 한 실근을 가지려면 함수 $y = \ln x - ex + 6$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 오직 한 점에서 만나야 한다.

$f(x) = \ln x - ex + 6$ 이라 하면 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{1}{x} - e$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \frac{1}{x} - e = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{e}$$

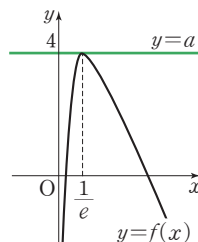
$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		/	4 극대	\

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \text{이므로 함수}$$

$y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 교점이 1개가 되도록 직선 $y = a$ 를 그어 보면 구하는 a 의 값은 4이다.



02-2 답 $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} < a < \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$

주어진 방정식에서 $2\sin x + x = a$ 이므로 이 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y = 2\sin x + x$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x) = 2\sin x + x$ 라 하면

$$f'(x) = 2\cos x + 1$$

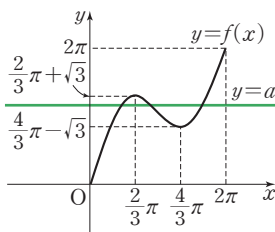
$$f'(x) = 0 \text{에서 } 2\cos x + 1 = 0, \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	$\frac{4}{3}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$ 극대	$\searrow$	$\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ 극소	$\nearrow$	2π

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 교점이 3개가 되도록 직선 $y=a$ 를 그어 보면 구하는 a 의 값의 범위는 $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} < a < \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$



03-1 ㉡ $a \leq 2$

$\ln(x^2 + e^2) \geq a$ 에서

$\ln(x^2 + e^2) - a \geq 0$

$f(x) = \ln(x^2 + e^2) - a$ 라 하면

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + e^2}$$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$2-a$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $2-a$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$2-a \geq 0 \quad \therefore a \leq 2$$

03-2 ㉡ $a \leq 1$

$x^2 + \cos x > a$ 에서

$x^2 + \cos x - a > 0$

$f(x) = x^2 + \cos x - a$ 라 하면

$$f'(x) = 2x - \sin x$$

$$f''(x) = 2 - \cos x$$

$x > 0$ 일 때, $-1 \leq \cos x \leq 1$ 에서 $f''(x) > 0$

즉, $x > 0$ 에서 함수 $f'(x)$ 는 증가하고 $f'(0) = 0$ 이므로

$$f'(x) > 0$$

따라서 $x > 0$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 증가하므로 $f(x) > 0$ 이 성립하려면 $f(0) \geq 0$ 에서

$$1-a \geq 0 \quad \therefore a \leq 1$$

2 속도와 가속도

문제

159~160쪽

04-1 ㉡ 속도: e^3+2 , 가속도: e^3

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = e^t + 2$$

$$a = \frac{dv}{dt} = e^t$$

따라서 $t=3$ 에서의 점 P의 속도는

$$v = e^3 + 2$$

$t=3$ 에서의 점 P의 가속도는

$$a = e^3$$

04-2 ㉡ 3

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -p \sin t + q$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -p \cos t$$

$t = \frac{\pi}{6}$ 에서의 점 P의 속도가 $\frac{3}{2}$ 이므로

$$-\frac{1}{2}p + q = \frac{3}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$t = \frac{\pi}{6}$ 에서의 점 P의 가속도가 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}p = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore p = 1$$

이를 ①에 대입하여 풀면 $q = 2$

$$\therefore p + q = 1 + 2 = 3$$

04-3 ㉡ 4

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -2 \cos 2t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 4 \sin 2t$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$-2 \cos 2t = 0, \cos 2t = 0$$

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 < 2t < \pi$ 이므로

$$2t = \frac{\pi}{2} \quad \therefore t = \frac{\pi}{4}$$

따라서 $t = \frac{\pi}{4}$ 에서의 점 P의 가속도는

$$a = 4 \sin \frac{\pi}{2} = 4$$

05-1 [답] 속도: (3, 1), 가속도: (-4, 2)

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{2}{t^2}, \frac{dy}{dt} = 2 - \frac{1}{t^2} \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 } P \text{의}$$

$$\text{속도는 } \left(1 + \frac{2}{t^2}, 2 - \frac{1}{t^2}\right)$$

따라서 $t=1$ 에서의 점 P 의 속도는 (3, 1)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4}{t^3}, \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2}{t^3} \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 } P \text{의 가속}$$

$$\text{도는 } \left(-\frac{4}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right)$$

따라서 $t=1$ 에서의 점 P 의 가속도는 (-4, 2)

05-2 [답] $\sqrt{17}$

$$\frac{dx}{dt} = -2t, \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t} \text{이므로 시각 } t \text{에서의 점 } P \text{의 속도는}$$

$$\left(-2t, \frac{2}{t}\right)$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P 의 속도는 (-4, 1)이므로 속력은

$$\sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

05-3 [답] $2\sqrt{e^\pi}$

$$\frac{dx}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t)$$

시각 t 에서의 점 P 의 속도는

$$(e^t (\sin t + \cos t), e^t (\cos t - \sin t))$$

따라서 시각 t 에서의 점 P 의 속력은

$$\sqrt{\{e^t (\sin t + \cos t)\}^2 + \{e^t (\cos t - \sin t)\}^2} = \sqrt{2e^{2t}}$$

$$\text{즉, } \sqrt{2e^{2t}} = \sqrt{2e^\pi} \text{에서 } e^{2t} = e^\pi \quad \therefore t = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^t (\sin t + \cos t) + e^t (\cos t - \sin t) = 2e^t \cos t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = e^t (\cos t - \sin t) + e^t (-\sin t - \cos t) = -2e^t \sin t$$

시각 t 에서의 점 P 의 가속도는 $(2e^t \cos t, -2e^t \sin t)$

따라서 $t = \frac{\pi}{2}$ 에서의 점 P 의 가속도는 $(0, -2e^{\frac{\pi}{2}})$ 이므로

$$\text{가속도의 크기는 } \sqrt{0 + (-2e^{\frac{\pi}{2}})^2} = 2\sqrt{e^\pi}$$

연습문제

161~162쪽

1 1 2 ② 3 ④ 4 $a < -\frac{1}{e}$ 5 ①

6 $2 < a < 2e$ 7 $5e^2$ 8 $\frac{\pi}{3}$ 9 $\frac{2}{3}$

10 ④ 11 2 12 ③ 13 100 14 ④

1 $f(x) = xe^{-x+1} - 1$ 이라 하면

$$f'(x) = e^{-x+1} - xe^{-x+1} = (1-x)e^{-x+1}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$1-x=0 \quad (\because e^{-x+1} > 0)$$

$$\therefore x=1$$

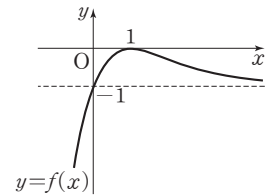
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{이므로 함}$$

수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오
른쪽 그림과 같이 x 축과 한
점에서 만난다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

2 주어진 방정식에서 $4\ln x + \ln(5-x) = -a$ 이므로 이 방
정식이 오직 한 실근을 가지려면 함수

$y = 4\ln x + \ln(5-x)$ 의 그래프와 직선 $y = -a$ 가 오직
한 점에서 만나야 한다.

$f(x) = 4\ln x + \ln(5-x)$ 라 하면 $0 < x < 5$ 이고

$$f'(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{5-x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\frac{4}{x} - \frac{1}{5-x} = 0, \frac{4}{x} = \frac{1}{5-x}$$

$$4(5-x) = x, 5x = 20 \quad \therefore x = 4$$

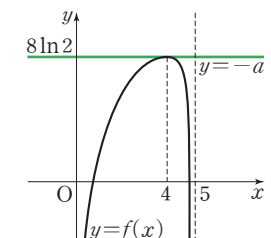
$0 < x < 5$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
다음과 같다.

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	$8\ln 2$ 극대	$\searrow$	

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty \text{이므로 함}$$

수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른
쪽 그림과 같고, 교점이 1개
가 되도록 직선 $y = -a$ 를 그
어 보면



$$-a = 8\ln 2$$

$$\therefore a = -8\ln 2$$

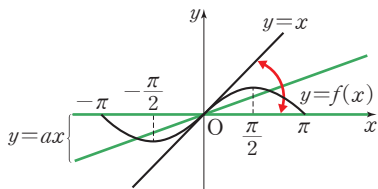
- 3 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=\sin x$ 의 그래프와 직선 $y=ax$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$$f(x)=\sin x \text{라 하면 } f'(x)=\cos x$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y=x$$

$-\pi \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 교점이 3개가 되도록 직선 $y=ax$ 를 그어 보면 구하는 a 의 값의 범위는 $0 \leq a < 1$



- 4 $xe^x > a$ 에서 $xe^x - a > 0$

$$f(x)=xe^x - a \text{라 하면}$$

$$f'(x)=e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$1+x=0 \quad (\because e^x > 0) \quad \therefore x=-1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}a$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-\frac{1}{e}a$ 이므로 모든 실수

x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이 성립하려면

$$-\frac{1}{e}a > 0 \quad \therefore a < -\frac{1}{e}$$

- 5 $\sqrt{x} \geq a \ln x$ 에서 $\sqrt{x} - a \ln x \geq 0$

$$f(x)=\sqrt{x} - a \ln x \text{라 하면 } f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{a}{x}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{a}{x}, \quad x=2a\sqrt{x}$$

$$x^2=4a^2x, \quad x(x-4a^2)=0 \quad \therefore x=4a^2 \quad (\because x>0)$$

$x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$4a^2$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$2a(1-\ln 2a)$ 극소	$\nearrow$

따라서 $x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $2a(1-\ln 2a)$

이므로 $x>0$ 일 때 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

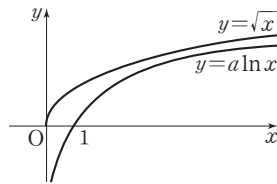
$$2a(1-\ln 2a) \geq 0, \quad 1-\ln 2a \geq 0$$

$$\ln 2a \leq 1 \quad \therefore 0 < a \leq \frac{e}{2} \quad (\because a > 0)$$

따라서 양수 a 의 최댓값은 $\frac{e}{2}$ 이다.

다른 풀이

$x>0$ 일 때, 부등식 $\sqrt{x} \geq a \ln x$ 가 성립하려면 다음 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x}$ 가 곡선 $y=a \ln x$ 보다 위쪽에 있거나 두 곡선이 접해야 한다.



$$f(x)=\sqrt{x}, \quad g(x)=a \ln x \text{라 하면}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad g'(x)=\frac{a}{x}$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 접할 때의 접점의 x 좌표를 t ($t>0$)라 하면 $x=t$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로

$$f(t)=g(t) \text{에서}$$

$$\sqrt{t}=a \ln t \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x=t$ 인 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(t)=g'(t) \text{에서}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{a}{t} \quad \therefore a = \frac{\sqrt{t}}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이를 ①에 대입하면

$$\sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{2} \ln t$$

$$\ln t = 2 \quad \therefore t = e^2$$

$$\text{이를 ②에 대입하여 풀면 } a = \frac{e}{2}$$

따라서 $0 < a \leq \frac{e}{2}$ 이므로 양수 a 의 최댓값은 $\frac{e}{2}$ 이다.

- 6 함수 $y=e^{-x}-1$ 의 역함수는

$$x=e^{-y}-1, \quad e^{-y}=x+1$$

$$-y=\ln(x+1) \quad \therefore y=-\ln(x+1)$$

즉, $g(x)=-\ln(x+1)$ 이므로 $2x+2+ag(x)>0$ 에서

$$2x+2-a \ln(x+1)>0$$

$$h(x)=2x+2-a \ln(x+1) \text{이라 하면}$$

$$h'(x)=2-\frac{a}{x+1}$$

$$h'(x)=0 \text{에서 } 2-\frac{a}{x+1}=0, \quad \frac{a}{x+1}=2$$

$$2x+2=a \quad \therefore x=\frac{a-2}{2}$$

$x > 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{a-2}{2}$	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$		$\searrow$	$a\left(1-\ln\frac{a}{2}\right)$ 극소	$\nearrow$

따라서 $x > 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $a\left(1-\ln\frac{a}{2}\right)$ 이므로 $x > 0$ 일 때 $h(x) > 0$ 이 성립하려면

$$a\left(1-\ln\frac{a}{2}\right) > 0, \quad 1-\ln\frac{a}{2} > 0$$

$$\ln\frac{a}{2} < 1 \quad \therefore 2 < a < 2e \quad (\because a > 2)$$

- 7 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 2t \ln t + t^2 \times \frac{1}{t} = 2t \ln t + t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 2 \ln t + 2t \times \frac{1}{t} + 1 = 2 \ln t + 3$$

점 P의 가속도가 7이므로 $a = 7$ 에서

$$2 \ln t + 3 = 7, \quad \ln t = 2$$

$$\therefore t = e^2$$

따라서 $t = e^2$ 에서의 점 P의 속도는

$$v = 2e^2 \times 2 + e^2 = 5e^2$$

- 8 시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$$f'(t) = -\sin t, \quad g'(t) = -2 \sin t \cos t$$

두 점 P, Q의 속도가 같으므로 $f'(t) = g'(t)$ 에서

$$-\sin t = -2 \sin t \cos t$$

$$\sin t(2 \cos t - 1) = 0$$

$$\sin t = 0 \quad \text{또는} \quad \cos t = \frac{1}{2}$$

$$\therefore t = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because 0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$$

- 9 시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$$f'(t) = 2t - a, \quad g'(t) = \frac{2t-2}{t^2-2t+2}$$

두 점이 서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호는 서로 반대이므로 $f'(t)g'(t) < 0$ 에서

$$\frac{(2t-a)(2t-2)}{t^2-2t+2} < 0$$

$$(2t-a)(2t-2) < 0 \quad (\because t^2-2t+2 > 0)$$

$$\therefore \frac{a}{2} < t < 1 \quad (\because a < 2)$$

$$\text{따라서 } \frac{a}{2} = \frac{1}{3} \text{이므로 } a = \frac{2}{3}$$

- 10 $\frac{dx}{dt} = 3t^2 + a, \frac{dy}{dt} = 2at - 4$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는 $(3t^2 + a, 2at - 4)$

$t = 1$ 에서의 점 P의 속도는 $(3 + a, 2a - 4)$ 이므로 속력은

$$\sqrt{(3+a)^2 + (2a-4)^2} = \sqrt{5a^2 - 10a + 25}$$

$$\text{즉, } \sqrt{5a^2 - 10a + 25} = 5 \text{이므로}$$

$$5a^2 - 10a + 25 = 25, \quad 5a^2 - 10a = 0$$

$$5a(a-2) = 0 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 2, \quad \frac{dy}{dt} = 4t - 4$$

이때 $\frac{d^2x}{dt^2} = 6t, \frac{d^2y}{dt^2} = 4$ 이므로 $t = 2$ 에서의 점 P의 가속도는 $(12, 4)$

따라서 구하는 가속도의 크기는

$$\sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10}$$

- 11 $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos^2 t + \sin^2 t$

$$= 1 - (1 - \sin^2 t) + \sin^2 t = 2 \sin^2 t$$

$$\frac{dy}{dt} = -\csc^2 t$$

시각 t 에서의 점 P의 속도는 $(2 \sin^2 t, -\csc^2 t)$ 이므로 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{(2 \sin^2 t)^2 + (-\csc^2 t)^2} &= \sqrt{4 \sin^4 t + \csc^4 t} \\ &= \sqrt{4 \sin^4 t + \frac{1}{\sin^4 t}} \end{aligned}$$

이때 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서 $4 \sin^4 t > 0, \frac{1}{\sin^4 t} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4 \sin^4 t + \frac{1}{\sin^4 t} \geq 2 \sqrt{4 \sin^4 t \times \frac{1}{\sin^4 t}} = 4$$

$$\left(\text{단, 등호는 } 4 \sin^4 t = \frac{1}{\sin^4 t} \text{일 때 성립} \right)$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{4} = 2$

- 12 $\neg. h(x) = g(f(x))$ 에서 $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$ 이므로 $h'(1) = g'(f(1))f'(1)$

$$\text{이때 } f'(x) = nx^{n-1}, \quad g'(x) = \frac{4x^3}{(x^4+2n) \ln 3} \text{이므로}$$

$$h'(1) = g'(f(1))f'(1)$$

$$= g'(0)f'(1)$$

$$= 0 \times n = 0$$

$$\neg. h'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

$$= \frac{4nx^{n-1}(x^n-1)^3}{\{(x^n-1)^4+2n\} \ln 3}$$

$0 < x < 1$ 일 때 $x^{n-1} > 0$ 이고 $-1 < x^n - 1 < 0$ 이므로

$$(x^n-1)^3 < 0 \quad \therefore h'(x) < 0$$

따라서 열린구간 $(0, 1)$ 에서 함수 $h(x)$ 는 감소한다.

ㄷ. $h'(x)=0$ 에서

$$x^n - 1 = 0 \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore x = 1$$

$x > 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$		$\searrow$	$\log_3 2n$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

이때 자연수 n 에 대하여

$$n = \log_3 3^n \geq \log_3 (2n+1)$$

이므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=n$ 의 교점의 개수는 1이다.

즉, $x > 0$ 일 때 방정식 $h(x)=n$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

- 13** 방정식 $2xe^{1-\frac{x}{n}}=a$ 가 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=2xe^{1-\frac{x}{n}}$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$$g(x)=2xe^{1-\frac{x}{n}} \text{이라 하면}$$

$$g'(x)=2e^{1-\frac{x}{n}}+2xe^{1-\frac{x}{n}} \times \left(-\frac{1}{n}\right)$$

$$=2e^{1-\frac{x}{n}} \left(1-\frac{x}{n}\right)$$

$$g'(x)=0 \text{에서}$$

$$1-\frac{x}{n}=0 \quad (\because e^{1-\frac{x}{n}} > 0)$$

$$\therefore x=n$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

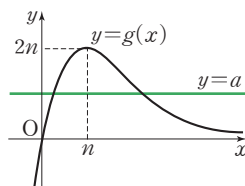
x	...	n	...
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\nearrow$	$2n$ 극대	$\searrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)=0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)=-\infty \text{이므로 함}$$

수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 교점이 2개가 되도록 직선 $y=a$ 를 그어 보면 a 의 값의 범위는

$$0 < a < 2n$$



따라서 정수 a 의 개수는 $f(n)=2n-1$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{10} f(n) = \sum_{n=1}^{10} (2n-1)$$

$$= 2 \times \frac{10 \times 11}{2} - 10$$

$$= 100$$

- 14** 함수 $f(x)$ 가 역함수를 가지려면 $f(x)$ 가 일대일대응이어야 하므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

$$f(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}+ax \text{에서}$$

$$f'(x)=e^{x+1}\{x^2+(n-2)x-n+3\}$$

$$+e^{x+1}(2x+n-2)+a$$

$$=e^{x+1}(x^2+nx+1)+a$$

따라서 모든 실수 x 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$e^{x+1}(x^2+nx+1)+a \geq 0$$

$$\therefore e^{x+1}(x^2+nx+1) \geq -a$$

$$h(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1) \text{이라 하면}$$

$$h'(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)+e^{x+1}(2x+n)$$

$$=e^{x+1}\{x^2+(n+2)x+n+1\}$$

$$h'(x)=0 \text{에서}$$

$$x^2+(n+2)x+n+1=0 \quad (\because e^{x+1} > 0)$$

$$(x+n+1)(x+1)=0$$

$$\therefore x=-n-1 \text{ 또는 } x=-1$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-n-1$	...	-1	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\nearrow$	$\frac{n+2}{e^n}$ 극대	$\searrow$	$2-n$ 극소	$\nearrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)=\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)=0 \text{이므로 함}$$

수 $y=h(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $h(x)$ 의 최

솟값은 $2-n$ 이므로 $h(x) \geq -a$ 가 성립하려면

$$2-n \geq -a$$

$$\therefore a \geq n-2$$

즉, a 의 최솟값은 $g(n)=n-2$

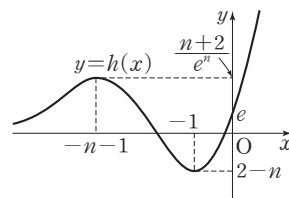
$$1 \leq g(n) \leq 8 \text{에서}$$

$$1 \leq n-2 \leq 8 \quad \therefore 3 \leq n \leq 10$$

따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$3+4+5+\cdots+10=\frac{8(3+10)}{2}$$

$$=52$$



III-1 01 여러 가지 함수의 부정적분

1 여러 가지 함수의 부정적분

개념 CHECK

165쪽

1 [답] (1) $-\frac{1}{x}+C$ (2) $\frac{3}{4}x^3\sqrt{x}+C$ (3) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$

(4) $\frac{1}{2}\ln|x|+C$

(1) $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C$
 $= -\frac{1}{x} + C$

(2) $\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} + C$
 $= \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$

(3) $\int x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + C$
 $= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$

(4) $\int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx$
 $= \frac{1}{2} \ln|x| + C$

2 [답] (1) $3e^x+C$ (2) $e^{x-1}+C$ (3) $\frac{9^x}{\ln 9}+C$

(4) $\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+C$

(1) $\int 3e^x dx = 3 \int e^x dx = 3e^x + C$

(2) $\int e^{x-1} dx = \int e^x \times e^{-1} dx = \frac{1}{e} \int e^x dx$
 $= \frac{1}{e} \times e^x + C = e^{x-1} + C$

(3) $\int 3^{2x} dx = \int (3^2)^x dx = \int 9^x dx = \frac{9^x}{\ln 9} + C$

(4) $\int 2^{x+1} dx = \int 2^x \times 2 dx = 2 \int 2^x dx$
 $= 2 \times \frac{2^x}{\ln 2} + C = \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + C$

3 [답] (1) $x-4\cos x+C$ (2) $\tan x-3\sin x+C$

(3) $\sec x+x+C$ (4) $-\cot x-2\csc x+C$

(1) $\int (1+4\sin x) dx = \int dx + 4 \int \sin x dx$
 $= x - 4\cos x + C$

(2) $\int (\sec^2 x - 3\cos x) dx = \int \sec^2 x dx - 3 \int \cos x dx$
 $= \tan x - 3\sin x + C$

(3) $\int \tan x (\sec x + \cot x) dx$
 $= \int (\sec x \tan x + 1) dx$
 $= \int \sec x \tan x dx + \int dx$
 $= \sec x + x + C$

(4) $\int \csc x (\csc x + 2\cot x) dx$
 $= \int (\csc^2 x + 2\csc x \cot x) dx$
 $= \int \csc^2 x dx + 2 \int \csc x \cot x dx$
 $= -\cot x - 2\csc x + C$

문제

166~168쪽

01-1 [답] (1) $x^2-3x-\frac{1}{2x^2}+C$

(2) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+4\sqrt{x}+C$

(3) $\frac{1}{2}x^2-2x+\ln|x|+\frac{2}{x}+C$

(4) $x-4\sqrt{x}+\ln|x|+C$

(1) $\int \frac{2x^4-3x^3+1}{x^3} dx = \int (2x-3+x^{-3}) dx$
 $= x^2-3x-\frac{1}{2}x^{-2}+C$
 $= x^2-3x-\frac{1}{2x^2}+C$

(2) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{1}{2}}) dx$
 $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x^{\frac{1}{2}}+C$
 $= \frac{2}{3}x\sqrt{x}+4\sqrt{x}+C$

(3) $\int \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right) dx$
 $= \int \left(x-2+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right) dx$
 $= \int \left(x-2+\frac{1}{x}-2x^{-2}\right) dx$
 $= \frac{1}{2}x^2-2x+\ln|x|+2x^{-1}+C$
 $= \frac{1}{2}x^2-2x+\ln|x|+\frac{2}{x}+C$

(4) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x} dx = \int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x} dx$
 $= \int \left(1-2x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right) dx$
 $= x-4x^{\frac{1}{2}}+\ln|x|+C$
 $= x-4\sqrt{x}+\ln|x|+C$

01-2 ㉡ 1

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} dx \\
 &= \int \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+2} dx \\
 &= \int (\sqrt{x}-2) dx = \int (x^{\frac{1}{2}}-2) dx \\
 &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x+C = \frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x+C
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f(1) = -\frac{1}{3} \text{에서}$$

$$\frac{2}{3}-2+C = -\frac{1}{3} \quad \therefore C=1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x+1 \text{이므로}$$

$$f(9) = 18-18+1=1$$

$$02-1 \quad \text{㉡ (1)} \quad \frac{1}{2}e^{x+1} - \frac{2^{x+1}}{\ln 2} - \frac{1}{2x} + C$$

$$(2) \quad \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + x + C$$

$$(3) \quad \frac{1}{2}x^2 + e^x + C$$

$$(4) \quad \frac{9^x}{\ln 9} - \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \int \frac{x^2 e^{x+1} - x^2 2^{x+2} + 1}{2x^2} dx \\
 = \int \left(\frac{e}{2} \times e^x - 2 \times 2^x + \frac{1}{2} x^{-2} \right) dx \\
 = \frac{e}{2} \times e^x - 2 \times \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{2} x^{-1} + C \\
 = \frac{1}{2} e^{x+1} - \frac{2^{x+1}}{\ln 2} - \frac{1}{2x} + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int (2^x-1)^2 dx &= \int (4^x - 2 \times 2^x + 1) dx \\
 &= \frac{4^x}{\ln 4} - 2 \times \frac{2^x}{\ln 2} + x + C \\
 &= \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int \frac{x^2 - e^{2x}}{x - e^x} dx &= \int \frac{(x+e^x)(x-e^x)}{x-e^x} dx \\
 &= \int (x+e^x) dx \\
 &= \frac{1}{2}x^2 + e^x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \int \frac{27^x - 3^x}{3^x + 1} dx &= \int \frac{3^x(9^x - 1)}{3^x + 1} dx \\
 &= \int \frac{3^x(3^x + 1)(3^x - 1)}{3^x + 1} dx \\
 &= \int 3^x(3^x - 1) dx = \int (9^x - 3^x) dx \\
 &= \frac{9^x}{\ln 9} - \frac{3^x}{\ln 3} + C
 \end{aligned}$$

$$02-2 \quad \text{㉡} \quad \frac{8}{\ln 8} + 1$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int f'(x) dx \\
 &= \int (2^x+1)(4^x-2^x+1) dx \\
 &= \int (8^x+1) dx \\
 &= \frac{8^x}{\ln 8} + x + C
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f(0) = \frac{1}{\ln 8} \text{에서}$$

$$\frac{1}{\ln 8} + C = \frac{1}{\ln 8} \quad \therefore C=0$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{8^x}{\ln 8} + x \text{이므로}$$

$$f(1) = \frac{8}{\ln 8} + 1$$

$$03-1 \quad \text{㉡ (1)} \quad x + \sin x + C \quad (2) \quad -3 \cot x + x + C$$

$$(3) \quad \tan x - \ln |x| + C \quad (4) \quad \frac{1}{2} \tan x + C$$

$$(5) \quad \frac{3}{2} \sin x - \frac{1}{2} x + C \quad (6) \quad x - \cos x + C$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \int \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} dx &= \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} dx \\
 &= \int \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 - \cos x} dx \\
 &= \int (1 + \cos x) dx \\
 &= x + \sin x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \int \frac{3 + \sin^2 x}{\sin^2 x} dx &= \int \left(\frac{3}{\sin^2 x} + 1 \right) dx \\
 &= \int (3 \csc^2 x + 1) dx \\
 &= -3 \cot x + x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \int \frac{x - \cos^2 x}{x \cos^2 x} dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x} \right) dx \\
 &= \int \left(\sec^2 x - \frac{1}{x} \right) dx \\
 &= \tan x - \ln |x| + C
 \end{aligned}$$

$$(4) \quad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx &= \int \frac{1}{2 \cos^2 x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \sec^2 x dx \\
 &= \frac{1}{2} \tan x + C
 \end{aligned}$$

$$(5) \quad \text{배각의 공식에 의하여}$$

$$\cos \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} \right) = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\therefore \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \left(\cos x - \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx \\ = \int \left(\cos x - \frac{1 - \cos x}{2} \right) dx \\ = \int \left(\frac{3}{2} \cos x - \frac{1}{2} \right) dx \\ = \frac{3}{2} \sin x - \frac{1}{2} x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx \\ = \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx \\ = \int (1 + \sin x) dx \quad \blacktriangle \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \\ = x - \cos x + C \end{aligned}$$

03-2 [답] -1

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{1}{1 + \sin x} dx \\ &= \int \frac{1 - \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} dx \\ &= \int \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx \\ &= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx \\ &= \tan x - \sec x + C \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{에서}$$

$$1 - \sqrt{2} + C = 1 \quad \therefore C = \sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \tan x - \sec x + \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \sin(3x-1) dx &= \int \sin t \times \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int \sin t dt \\ &= -\frac{1}{3} \cos t + C \\ &= -\frac{1}{3} \cos(3x-1) + C \end{aligned}$$

$$(2) 1-x=t \text{로 놓으면 } x=1-t$$

$$1-x=t \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$-1 = \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int (7x-1)(1-x)^5 dx \\ = \int \{7(1-t)-1\}t^5 \times (-1) dt \\ = \int (7t^6 - 6t^5) dt = t^7 - t^6 + C \\ = (1-x)^7 - (1-x)^6 + C = -x(1-x)^6 + C \end{aligned}$$

$$(3) x^2-2x-3=t \text{로 놓고 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$2x-2 = \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = t^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2-2x-3} + C \end{aligned}$$

$$(4) e^x+2=t \text{로 놓고 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$e^x = \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int e^x \sqrt{e^x+2} dx &= \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} t \sqrt{t} + C \\ &= \frac{2}{3} (e^x+2) \sqrt{e^x+2} + C \end{aligned}$$

$$(5) \ln(x^2+2)=t \text{로 놓고 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$\frac{2x}{x^2+2} = \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{x}{x^2+2} \ln(x^2+2) dx &= \int t \times \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t dt \\ &= \frac{1}{4} t^2 + C \\ &= \frac{1}{4} \{\ln(x^2+2)\}^2 + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \int \frac{\cos^3 x}{1 + \sin x} dx &= \int \frac{\cos x (1 - \sin^2 x)}{1 + \sin x} dx \\ &= \int \frac{\cos x (1 + \sin x)(1 - \sin x)}{1 + \sin x} dx \\ &= \int \cos x (1 - \sin x) dx \end{aligned}$$

$$1 - \sin x = t \text{로 놓고 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$-\cos x = \frac{dt}{dx}$$

2 치환적분법

문제

172~174쪽

$$04-1 [답] (1) -\frac{1}{3} \cos(3x-1) + C \quad (2) -x(1-x)^6 + C$$

$$(3) \sqrt{x^2-2x-3} + C \quad (4) \frac{2}{3} (e^x+2) \sqrt{e^x+2} + C$$

$$(5) \frac{1}{4} \{\ln(x^2+2)\}^2 + C \quad (6) \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

$$(1) 3x-1=t \text{로 놓고 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$3 = \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x} dx &= \int \cos x (1-\sin x) dx \\
 &= \int t \times (-1) dt = -\int t dt \\
 &= -\frac{1}{2}t^2 + C_1 = -\frac{1}{2}(1-\sin x)^2 + C_1 \\
 &= \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + C
 \end{aligned}$$

다른 풀이

(6) $\sin x = t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 \cos x &= \frac{dt}{dx} \\
 \therefore \int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x} dx &= \int \cos x (1-\sin x) dx \\
 &= \int (1-t) dt = t - \frac{1}{2}t^2 + C \\
 &= \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + C
 \end{aligned}$$

04-2 ㉡ 41

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int f'(x) dx = \int (4x+2)(x^2+x+1)^3 dx \\
 x^2+x+1 &= t \text{로 놓고 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\
 2x+1 &= \frac{dt}{dx} \\
 \therefore f(x) &= \int (4x+2)(x^2+x+1)^3 dx \\
 &= \int t^3 \times 2 dt = 2 \int t^3 dt \\
 &= \frac{1}{2}t^4 + C = \frac{1}{2}(x^2+x+1)^4 + C
 \end{aligned}$$

이때 $f(-1) = 1$ 에서

$$\frac{1}{2} + C = 1 \quad \therefore C = \frac{1}{2}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}(x^2+x+1)^4 + \frac{1}{2}$ 이므로

$$f(1) = \frac{81}{2} + \frac{1}{2} = 41$$

04-3 ㉡ 7

 $1+\sin x = t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 \cos x &= \frac{dt}{dx} \\
 \therefore f(x) &= \int \cos x (1+\sin x)^4 dx = \int t^4 dt \\
 &= \frac{1}{5}t^5 + C = \frac{1}{5}(1+\sin x)^5 + C
 \end{aligned}$$

이때 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{5}$ 에서 $C = \frac{3}{5}$ 따라서 $f(x) = \frac{1}{5}(1+\sin x)^5 + \frac{3}{5}$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{32}{5} + \frac{3}{5} = 7$$

$$04-4 \text{ ㉡ } f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - x - 1$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int \frac{e^{4x}}{e^{2x}+1} dx - \int \frac{1}{e^{2x}+1} dx \\
 &= \int \frac{e^{4x}-1}{e^{2x}+1} dx = \int \frac{(e^{2x}+1)(e^{2x}-1)}{e^{2x}+1} dx \\
 &= \int (e^{2x}-1) dx \\
 &= \int e^{2x} dx - \int dx
 \end{aligned}$$

 $\int e^{2x} dx$ 에서 $2x = t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 2 &= \frac{dt}{dx} \\
 \therefore f(x) &= \int e^{2x} dx - \int dx = \int e^t \times \frac{1}{2} dt - x \\
 &= \frac{1}{2} \int e^t dt - x = \frac{1}{2}e^t - x + C \\
 &= \frac{1}{2}e^{2x} - x + C
 \end{aligned}$$

이때 $f(0) = -\frac{1}{2}$ 에서

$$\frac{1}{2} + C = -\frac{1}{2} \quad \therefore C = -1$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - x - 1$$

$$05-1 \text{ ㉡ (1) } \ln |e^{2x}-1| + C \quad (2) \ln |2^x-x^2| + C$$

$$(3) -\frac{1}{2} \ln |1+2\cos x| + C \quad (4) \ln |\sin x| + C$$

(1) $(e^{2x}-1)' = 2e^{2x}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} dx &= \int \frac{(e^{2x}-1)'}{e^{2x}-1} dx \\
 &= \ln |e^{2x}-1| + C
 \end{aligned}$$

(2) $(2^x-x^2)' = 2^x \ln 2 - 2x$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2^x \ln 2 - 2x}{2^x - x^2} dx &= \int \frac{(2^x - x^2)'}{2^x - x^2} dx \\
 &= \ln |2^x - x^2| + C
 \end{aligned}$$

(3) $(1+2\cos x)' = -2\sin x$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin x}{1+2\cos x} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2\sin x}{1+2\cos x} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int \frac{(1+2\cos x)'}{1+2\cos x} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \ln |1+2\cos x| + C
 \end{aligned}$$

(4) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ 이고 $(\sin x)' = \cos x$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int \cot x dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\
 &= \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx \\
 &= \ln |\sin x| + C
 \end{aligned}$$

05-2 $\frac{\ln 3}{3} + 1$

$(x^3+3x+1)'=3x^2+3$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{x^2+1}{x^3+3x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{3x^2+3}{x^3+3x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{(x^3+3x+1)'}{x^3+3x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln |x^3+3x+1| + C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=1$ 에서 $C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3} \ln |x^3+3x+1| + 1$ 이므로

$$f(-1)=\frac{\ln |-3|}{3} + 1 = \frac{\ln 3}{3} + 1$$

06-1 $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2\ln|x-1| + C$

$$(2) \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C$$

$$(3) 2\ln|x+1| - \ln|x-3| + C$$

(1) 분자를 분모로 나누어 식을 변형하면

$$\begin{aligned} \frac{x^3+2x-1}{x-1} &= \frac{(x-1)(x^2+x+3)+2}{x-1} \\ &= x^2+x+3 + \frac{2}{x-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{x^3+2x-1}{x-1} dx &= \int \left(x^2+x+3 + \frac{2}{x-1} \right) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2\ln|x-1| + C \end{aligned}$$

(2) 분모가 인수분해되므로 식을 변형하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-4x+3} &= \frac{1}{(x-3)(x-1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{1}{x^2-4x+3} dx &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} (\ln|x-3| - \ln|x-1|) + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C \end{aligned}$$

(3) 분모를 인수분해하면 $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{x-7}{x^2-2x-3} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \quad (A, B \text{는 상수}) \text{로 놓으면} \\ \frac{x-7}{x^2-2x-3} &= \frac{(A+B)x-3A+B}{x^2-2x-3} \end{aligned}$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$A+B=1, -3A+B=-7$$

두 식을 연립하여 풀면 $A=2, B=-1$

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{x-7}{x^2-2x-3} dx &= \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-3} \right) dx \\ &= 2\ln|x+1| - \ln|x-3| + C \end{aligned}$$

부분적분법

문제

177~178쪽

07-1 $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$

$$(2) \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

$$(3) \left(\frac{2}{3} - x \right) e^{3x} + C$$

(1) $f(x)=x-1, g'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$$f'(x)=1, g(x)=\sin x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int (x-1) \cos x dx &= (x-1) \sin x - \int \sin x dx \\ &= (x-1) \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

(2) $f(x)=\ln x, g'(x)=x^2$ 으로 놓으면

$$f'(x)=\frac{1}{x}, g(x)=\frac{1}{3}x^3$$

$$\begin{aligned} \therefore \int x^2 \ln x dx &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{3}x^3 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C \end{aligned}$$

(3) $f(x)=1-3x, g'(x)=e^{3x}$ 으로 놓으면

$$f'(x)=-3, g(x)=\frac{1}{3}e^{3x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int (1-3x)e^{3x} dx &= \frac{1}{3}(1-3x)e^{3x} - \int (-3) \times \frac{1}{3}e^{3x} dx \\ &= \frac{1}{3}(1-3x)e^{3x} + \int e^{3x} dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x} - xe^{3x} + \frac{1}{3}e^{3x} + C \\ &= \left(\frac{2}{3} - x \right) e^{3x} + C \end{aligned}$$

07-2 $\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{8}$

$u(x)=\ln 2x, v'(x)=x$ 로 놓으면

$$u'(x)=\frac{1}{x}, v(x)=\frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int x \ln 2x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln 2x - \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{2} x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln 2x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln 2x - \frac{1}{4} x^2 + C\end{aligned}$$

이때 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$ 에서

$$-\frac{1}{16} + C = \frac{1}{16}$$

$$\therefore C = \frac{1}{8}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln 2x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{8}$ 이므로

$$f(1) = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{8}$$

08-1 [답] (1) $(x^2 - 2x + 2)e^x + C$

$$(2) \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C$$

(1) $f(x) = x^2$, $g'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x) = 2x, g(x) = e^x$$

$$\therefore \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x \times e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\int x e^x dx$ 에서 $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$u'(x) = 1, v(x) = e^x$$

$$\therefore \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

$$= x e^x - e^x + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x + C_1)$$

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

$$= (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

(2) $f(x) = \cos x$, $g'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = -\sin x, g(x) = -e^{-x}$$

$$\therefore \int e^{-x} \cos x dx$$

$$= -e^{-x} \cos x - \int (-\sin x) \times (-e^{-x}) dx$$

$$= -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\int e^{-x} \sin x dx$ 에서 $u(x) = \sin x$, $v'(x) = e^{-x}$ 으로

놓으면

$$u'(x) = \cos x, v(x) = -e^{-x}$$

$$\therefore \int e^{-x} \sin x dx$$

$$= -e^{-x} \sin x - \int \cos x \times (-e^{-x}) dx$$

$$= -e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\int e^{-x} \cos x dx$$

$$= -e^{-x} \cos x - (-e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx)$$

$$2 \int e^{-x} \cos x dx = -e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x$$

$$\therefore \int e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C$$

연습문제

179~180쪽

1 $-e^3$	2 ⑤	3 2	4 5	5 $\frac{5}{3}$
6 ⑤	7 ①	8 $2 \ln 2$	9 27	10 $-\ln 6$
11 ②	12 $3e^3$	13 2	14 ④	15 $\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}1 \quad f(x) &= \int \frac{3x^4 - x + 2}{x^2} dx \\ &= \int \left(3x^2 - \frac{1}{x} + 2x^{-2} \right) dx \\ &= x^3 - \ln |x| - 2x^{-1} + C \\ &= x^3 - \ln |x| - \frac{2}{x} + C\end{aligned}$$

이때 $f(e) = -\frac{2}{e}$ 에서

$$e^3 - 1 - \frac{2}{e} + C = -\frac{2}{e} \quad \therefore C = 1 - e^3$$

따라서 $f(x) = x^3 - \ln |x| - \frac{2}{x} + 1 - e^3$ 이므로

$$f(1) = 1 - 2 + 1 - e^3 = -e^3$$

2 $x \leq 1$ 일 때,

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int e^{x-1} dx = \frac{1}{e} \int e^x dx$$

$$= \frac{1}{e} \times e^x + C_1 = e^{x-1} + C_1$$

$x > 1$ 일 때,

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C_2$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + C_1 & (x \leq 1) \\ \ln x + C_2 & (x > 1) \end{cases}$$

이때 $f(-1)=e+\frac{1}{e^2}$ 에서

$$e^{-2}+C_1=e+\frac{1}{e^2} \quad \therefore C_1=e$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x + C_2) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^{x-1} + e)$$

$$\therefore C_2 = 1 + e$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + e & (x \leq 1) \\ \ln x + 1 + e & (x > 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(e) = 1 + 1 + e = e + 2$$

$$\begin{aligned} 3 \quad f(x) &= \int \frac{\sin x + 1}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx \\ &= \int (\sec x \tan x + \sec^2 x) dx \\ &= \sec x + \tan x + C \\ \therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= (2 + \sqrt{3} + C) - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + C\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad \frac{d}{dx} \{f(x) + g(x)\} &= 2 \sin x \text{에서} \\ f(x) + g(x) &= \int 2 \sin x dx \\ &= -2 \cos x + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{㉑} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{f(x) - g(x)\} &= 1 - \cos x \text{에서} \\ f(x) - g(x) &= \int (1 - \cos x) dx \\ &= x - \sin x + C_2 \quad \dots\dots \textcircled{㉒} \end{aligned}$$

이때 $f(0)=1, g(0)=-1$ 이므로 ㉑에서

$$\begin{aligned} f(0) + g(0) &= -2 + C_1 \\ -2 + C_1 &= 0 \quad \therefore C_1 = 2 \end{aligned}$$

$$\textcircled{㉒} \text{에서 } f(0) - g(0) = C_2 \quad \therefore C_2 = 2$$

$$\therefore f(x) + g(x) = -2 \cos x + 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉓},$$

$$f(x) - g(x) = x - \sin x + 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

㉓+㉔을 하면

$$2f(x) = x - \sin x - 2 \cos x + 4$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sin x - \cos x + 2$$

㉓-㉔을 하면

$$2g(x) = -x + \sin x - 2 \cos x$$

$$\therefore g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \sin x - \cos x$$

$$\therefore 2f(\pi) + g(2\pi) = 2\left(\frac{\pi}{2} + 1 + 2\right) + (-\pi - 1) = 5$$

$$5 \quad x+1=t \text{로 놓으면 } x=t-1$$

$x+1=t$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$1 = \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \\ &= \int \frac{t-1}{\sqrt{t}} dt \\ &= \int (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) dt \\ &= \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - 2 t^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3} t \sqrt{t} - 2 \sqrt{t} + C \\ &= \frac{2}{3} (x+1) \sqrt{x+1} - 2 \sqrt{x+1} + C \\ &= \frac{2}{3} (x-2) \sqrt{x+1} + C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=-1$ 에서

$$-\frac{4}{3} + C = -1 \quad \therefore C = \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{2}{3} (x-2) \sqrt{x+1} + \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$f(3) = \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx \\ \ln x &= t \text{로 놓고 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ \frac{1}{x} &= \frac{dt}{dx} \\ \therefore f(x) &= \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx \\ &= \int \sin t dt \\ &= -\cos t + C \\ &= -\cos(\ln x) + C \end{aligned}$$

이때 $f(1)=1$ 에서

$$-1 + C = 1 \quad \therefore C = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = -\cos(\ln x) + 2 \text{이므로}$$

$$f(e^\pi) = 1 + 2 = 3$$

7 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가

$$\frac{2x}{1+x^2} \text{이므로}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= \int \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx \\ &= \ln(1+x^2) + C \quad (\because 1+x^2 > 0) \end{aligned}$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(0, -2)$ 를 지나므로
 $f(0)=-2$ 에서 $C=-2$
 $\therefore f(x)=\ln(1+x^2)-2$
 방정식 $f(x)=0$ 에서
 $\ln(1+x^2)-2=0, \ln(1+x^2)=2$
 $1+x^2=e^2, x^2=e^2-1$
 $\therefore x=\pm\sqrt{e^2-1}$
 따라서 방정식 $f(x)=0$ 의 모든 근의 곱은
 $-\sqrt{e^2-1}\times\sqrt{e^2-1}=1-e^2$

$$\begin{aligned} 8 \quad F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{1}{x \ln x} dx \\ &= \int \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx \\ &= \ln |\ln x| + C \end{aligned}$$

이때 $F(e)=\ln 2$ 에서 $C=\ln 2$
 따라서 $F(x)=\ln |\ln x| + \ln 2$ 이므로
 $F(e^2)=\ln 2 + \ln 2 = 2 \ln 2$

$$\begin{aligned} 9 \quad f'(x) &= 3f(x) \text{에서 } \frac{f'(x)}{f(x)} = 3 \text{이므로} \\ \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \int 3 dx \\ \therefore \ln f(x) &= 3x + C \quad (\because f(x) > 0) \\ \text{이때 } f(0) &= 1 \text{에서 } C = 0 \\ \text{따라서 } \ln f(x) &= 3x \text{이므로 } f(x) = e^{3x} \\ \therefore f(\ln 3) &= e^{3 \ln 3} = e^{\ln 27} = 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 \quad f(x) &= \int \frac{1}{x^2+7x+12} dx \\ &= \int \frac{1}{(x+3)(x+4)} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \right) dx \\ &= \ln |x+3| - \ln |x+4| + C \\ &= \ln \left| \frac{x+3}{x+4} \right| + C \\ \text{이때 } f(-2) &= -\ln 2 \text{에서} \\ \ln \frac{1}{2} + C &= -\ln 2 \quad \therefore C = 0 \\ \therefore f(x) &= \ln \left| \frac{x+3}{x+4} \right| \\ \therefore \sum_{k=1}^{20} f(k) &= \sum_{k=1}^{20} \ln \left| \frac{k+3}{k+4} \right| \\ &= \ln \frac{4}{5} + \ln \frac{5}{6} + \ln \frac{6}{7} + \cdots + \ln \frac{23}{24} \\ &= \ln \left(\frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{7} \times \cdots \times \frac{23}{24} \right) \\ &= \ln \frac{1}{6} = -\ln 6 \end{aligned}$$

$$11 \quad u(x)=2x, v'(x)=\sin 2x \text{로 놓으면}$$

$$u'(x)=2, v(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int 2x \sin 2x dx \\ &= -x \cos 2x + \int \cos 2x dx \\ &= -x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + C \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} + C = -\frac{1}{2} \quad \therefore C = -1$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } f(x) &= -x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x - 1 \text{이므로} \\ f(\pi) &= -\pi - 1 \end{aligned}$$

$$12 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \text{이므로}$$

$$f'(x) = (x^2+2)e^{x+2}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^2+2)e^{x+2} dx$$

$$g(x)=x^2+2, h'(x)=e^{x+2} \text{으로 놓으면}$$

$$g'(x)=2x, h(x)=e^{x+2}$$

$$\therefore f(x) = \int (x^2+2)e^{x+2} dx$$

$$= (x^2+2)e^{x+2} - \int 2xe^{x+2} dx$$

$$= (x^2+2)e^{x+2} - 2 \int xe^{x+2} dx \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\int xe^{x+2} dx \text{에서 } u(x)=x, v'(x)=e^{x+2} \text{으로 놓으면}$$

$$u'(x)=1, v(x)=e^{x+2}$$

$$\therefore \int xe^{x+2} dx = xe^{x+2} - \int e^{x+2} dx$$

$$= xe^{x+2} - e^{x+2} + C_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑧을 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+2)e^{x+2} - 2(xe^{x+2} - e^{x+2} + C_1) \\ &= (x^2-2x+4)e^{x+2} + C \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f(-2) = 12 \text{에서}$$

$$12 + C = 12 \quad \therefore C = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = (x^2-2x+4)e^{x+2} \text{이므로}$$

$$f(1) = 3e^3$$

$$13 \quad \frac{f(x)}{x} + f'(x) = \frac{x-1}{x\sqrt{x}+x} \text{의 양변에 } x \text{를 곱하면}$$

$$f(x) + xf'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$$

$$\therefore f(x) + xf'(x) = \sqrt{x} - 1$$

이때 $f(x) + xf'(x) = \{xf(x)\}'$ 이므로

$$\begin{aligned} xf(x) &= \int \{f(x) + xf'(x)\} dx = \int (\sqrt{x}-1) dx \\ &= \int (x^{\frac{1}{2}}-1) dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + C \\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + C \end{aligned}$$

이때 $f(1) = -\frac{1}{3}$ 에서

$$\frac{2}{3} - 1 + C = -\frac{1}{3} \quad \therefore C = 0$$

즉, $xf(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x$ 이므로 $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x} - 1$

함수 $f(x)$ 가 $4 \leq x \leq 16$ 에서 증가하므로 $f(x)$ 는 $x=16$ 에서 최댓값 $f(16) = \frac{5}{3}$ 를 갖고, $x=4$ 에서 최솟값

$f(4) = \frac{1}{3}$ 을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{5}{3} + \frac{1}{3} = 2$

- 14 (가)의 좌변에서 $f(x) = t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dt}{dx} \\ \therefore \int 2\{f(x)\}^2 f'(x) dx &= \int 2t^2 dt = \frac{2}{3}t^3 + C_1 \\ &= \frac{2}{3}\{f(x)\}^3 + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(가)의 우변에서 $f(2x+1) = s$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} 2f'(2x+1) &= \frac{ds}{dx} \\ \therefore \int \{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1) dx &= \int s^2 \times \frac{1}{2} ds \\ &= \frac{1}{2} \int s^2 ds = \frac{1}{6} s^3 + C_2 \\ &= \frac{1}{6} \{f(2x+1)\}^3 + C_2 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②에서 $\frac{2}{3}\{f(x)\}^3 + C_1 = \frac{1}{6}\{f(2x+1)\}^3 + C_2$

$$\therefore 4\{f(x)\}^3 = \{f(2x+1)\}^3 + C \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

(나)에서 $f\left(-\frac{1}{8}\right) = 1$ 이므로 ③의 양변에 $x = -\frac{1}{8}$ 을 대입하면

$$4 = \left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3 + C \quad \therefore \left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3 = 4 - C$$

③의 양변에 $x = \frac{3}{4}$ 을 대입하면

$$4(4 - C) = \left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3 + C \quad \therefore \left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3 = 16 - 5C$$

③의 양변에 $x = \frac{5}{2}$ 를 대입하면

$$4(16 - 5C) = \{f(6)\}^3 + C$$

이때 (나)에서 $f(6) = 2$ 이므로

$$64 - 20C = 8 + C \quad \therefore C = \frac{8}{3}$$

따라서 ③에서 $4\{f(x)\}^3 = \{f(2x+1)\}^3 + \frac{8}{3}$ 이므로 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$4\{f(-1)\}^3 = \{f(-1)\}^3 + \frac{8}{3}, \quad \{f(-1)\}^3 = \frac{8}{9}$$

$$\therefore f(-1) = \left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$$

- 15 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{x} = 2$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한

값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) - 3\} = 0 \quad \therefore f(0) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

즉, $f'(0) = 2$ 이므로 $f'(x) = x^3 e^{x^2} + a$ 에서 $a = 2$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (x^3 e^{x^2} + 2) dx \\ &= \int x^3 e^{x^2} dx + \int 2 dx \end{aligned}$$

$\int x^3 e^{x^2} dx$ 에서 $x^2 = t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{dt}{dx} \\ \therefore f(x) &= \int x^3 e^{x^2} dx + \int 2 dx \\ &= \int t e^t \times \frac{1}{2} dt + 2x + C_1 \\ &= \frac{1}{2} \int t e^t dt + 2x + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\int t e^t dt$ 에서 $u(t) = t$, $v'(t) = e^t$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned} u'(t) &= 1, \quad v(t) = e^t \\ \therefore \int t e^t dt &= t e^t - \int e^t dt = t e^t - e^t + C_2 \\ &= (x^2 - 1) e^{x^2} + C_2 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①을 ②에 대입하면

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)e^{x^2} + 2x + C$$

이때 $f(0) = 3$ 에서

$$-\frac{1}{2} + C = 3 \quad \therefore C = \frac{7}{2}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)e^{x^2} + 2x + \frac{7}{2}$ 이므로

$$f(-1) = -2 + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}$$

III-1 02 여러 가지 함수의 정적분

1 여러 가지 함수의 정적분

개념 CHECK

182쪽

1 [답] (1) $\frac{1}{2}$ (2) 12 (3) 2 (4) $\frac{4}{\ln 2}$ (5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (6) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$(1) \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 x^{-2} dx = \left[-x^{-1} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$$

$$(2) \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx = \int_0^8 x^{\frac{1}{3}} dx = \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right]_0^8 = \frac{3}{4} \times 16 = 12$$

$$(3) \int_{\ln 2}^{\ln 4} e^x dx = \left[e^x \right]_{\ln 2}^{\ln 4} = 4 - 2 = 2$$

$$(4) \int_2^3 2^x dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2} \right]_2^3 = \frac{8}{\ln 2} - \frac{4}{\ln 2} = \frac{4}{\ln 2}$$

$$(5) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left[-\cos x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(6) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos x dx = \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2 [답] (1) 0 (2) $3\sqrt{3}$

$$(1) f(x) = 2 \sin x \text{ 라 하면}$$

$$f(-x) = 2 \sin(-x) = -2 \sin x = -f(x)$$

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 2 \sin x dx = 0$$

$$(2) f(x) = 3 \cos x \text{ 라 하면}$$

$$f(-x) = 3 \cos(-x) = 3 \cos x = f(x)$$

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3 \cos x dx$$

$$= 6 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

문제

183~186쪽

01-1 [답] (1) $e^3 - e^2 + 1$ (2) $\frac{44}{3}$ (3) $3e^2 + \frac{15}{\ln 4} - 3$

$$(4) \frac{26}{3 \ln 3} - 3 \quad (5) 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (6) \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$(1) \int_1^e \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x} dx = \int_1^e \left(3x^2 - 2x + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \left[x^3 - x^2 + \ln |x| \right]_1^e$$

$$= (e^3 - e^2 + 1) - (1 - 1)$$

$$= e^3 - e^2 + 1$$

$$(2) \int_4^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_4^9 (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} \right]_4^9$$

$$= (18 + 6) - \left(\frac{16}{3} + 4 \right)$$

$$= \frac{44}{3}$$

$$(3) \int_0^2 (3e^x + 2^{2x}) dx = \int_0^2 (3e^x + 4^x) dx$$

$$= \left[3e^x + \frac{4^x}{\ln 4} \right]_0^2$$

$$= \left(3e^2 + \frac{16}{\ln 4} \right) - \left(3 + \frac{1}{\ln 4} \right)$$

$$= 3e^2 + \frac{15}{\ln 4} - 3$$

$$(4) \int_{-1}^2 \frac{9^x - 1}{3^x + 1} dx = \int_{-1}^2 \frac{(3^x + 1)(3^x - 1)}{3^x + 1} dx$$

$$= \int_{-1}^2 (3^x - 1) dx = \left[\frac{3^x}{\ln 3} - x \right]_{-1}^2$$

$$= \left(\frac{9}{\ln 3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3 \ln 3} + 1 \right)$$

$$= \frac{26}{3 \ln 3} - 3$$

$$(5) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 2 \cos x) dx = \left[-\cos x + 2 \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \right)$$

$$= 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(6) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 - \sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x dx$$

$$= \left[\tan x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

01-2 [답] (1) 4 (2) $\frac{37}{10}$

$$(1) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x + 1)^2 dx + \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - 1)^2 dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x + 1)^2 dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - 1)^2 dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \{ (\sin x + 1)^2 - (\sin x - 1)^2 \} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 4 \sin x dx$$

$$= \left[-4 \cos x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 4$$

$$\begin{aligned}
(2) \int_1^3 (x-\sqrt{x})^2 dx + \int_3^6 (x-\sqrt{x})^2 dx &= \int_1^6 (x-\sqrt{x})^2 dx \\
&= \int_1^3 (x-\sqrt{x})^2 dx + \int_3^6 (x-\sqrt{x})^2 dx \\
&= \int_1^4 (x-\sqrt{x})^2 dx = \int_1^4 (x^2 - 2x\sqrt{x} + x) dx \\
&= \int_1^4 (x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + x) dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^2 \right]_1^4 \\
&= \left(\frac{64}{3} - \frac{128}{5} + 8 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \right) = \frac{37}{10}
\end{aligned}$$

02-1 ㉔ 34 - $\frac{1}{e}$

$-1 \leq x \leq 0$ 일 때 $f(x) = e^x + 1$ 이고, $0 \leq x \leq 4$ 일 때

$f(x) = x + 3\sqrt{x} + 2$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^4 f(x) dx &= \int_{-1}^0 (e^x + 1) dx + \int_0^4 (x + 3x^{\frac{1}{2}} + 2) dx \\
&= \left[e^x + x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x^{\frac{3}{2}} + 2x \right]_0^4 \\
&= \left\{ 1 - \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \right\} + (8 + 16 + 8) \\
&= 34 - \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

02-2 ㉔ 4 - $2\sqrt{3}$

$\cos x - \sqrt{3}\sin x = 0$ 에서 $\cos x = \sqrt{3}\sin x$

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \therefore x = \frac{\pi}{6} \quad \left(\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \right)$$

따라서

$$|\cos x - \sqrt{3}\sin x| = \begin{cases} \cos x - \sqrt{3}\sin x & \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \right) \\ -\cos x + \sqrt{3}\sin x & \left(\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \right) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{3}} |\cos x - \sqrt{3}\sin x| dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \sqrt{3}\sin x) dx \\
&\quad + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (-\cos x + \sqrt{3}\sin x) dx \\
&= \left[\sin x + \sqrt{3}\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[-\sin x - \sqrt{3}\cos x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) - \sqrt{3} \right\} + \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) \right\} \\
&= 4 - 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

03-1 ㉔ (1) $\frac{2}{3}\pi^3$ (2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(1) $f(x) = x^2 + 2\cos x$, $g(x) = \sin x$ 라 하면

$$f(-x) = (-x)^2 + 2\cos(-x) = x^2 + 2\cos x = f(x)$$

$$g(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -g(x)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + \sin x + 2\cos x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + 2\cos x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx \\
&= 2 \int_0^{\pi} (x^2 + 2\cos x) dx + 0 \\
&= 2 \left[\frac{1}{3}x^3 + 2\sin x \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{3}\pi^3
\end{aligned}$$

(2) $f(x) = \sec^2 x$, $g(x) = x \tan^2 x + x^3 \cos x$ 라 하면

$$f(-x) = \sec^2(-x) = \sec^2 x = f(x)$$

$$\begin{aligned}
g(-x) &= -x \tan^2(-x) + (-x)^3 \cos(-x) \\
&= -x \tan^2 x - x^3 \cos x = -g(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\sec^2 x + x \tan^2 x + x^3 \cos x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sec^2 x dx + \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (x \tan^2 x + x^3 \cos x) dx \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^2 x dx + 0 \\
&= 2 \left[\tan x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

04-1 ㉔ 8

함수 $y = |\cos x|$ 의 주기가 π 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} |\cos x| dx &= \int_{\pi}^{2\pi} |\cos x| dx = \int_{2\pi}^{3\pi} |\cos x| dx \\
&= \int_{3\pi}^{4\pi} |\cos x| dx \\
\therefore \int_0^{4\pi} |\cos x| dx &= \int_0^{\pi} |\cos x| dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\cos x| dx \\
&\quad + \int_{2\pi}^{3\pi} |\cos x| dx + \int_{3\pi}^{4\pi} |\cos x| dx \\
&= 4 \int_0^{\pi} |\cos x| dx \\
&= 4 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx \right\} \\
&= 4 \left(\left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) \\
&= 4(1 + 1) \\
&= 8
\end{aligned}$$

04-2 12

$f(x+\pi)=f(x)$ 이므로

$$\int_{-\pi}^0 f(x) dx = \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx \\ = \dots = \int_{4\pi}^{5\pi} f(x) dx$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{5\pi} f(x) dx \\ = \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx \\ + \dots + \int_{4\pi}^{5\pi} f(x) dx \\ = 6 \int_{-\pi}^0 f(x) dx = 6 \int_{-\pi}^0 (-\sin x) dx \\ = 6 \left[\cos x \right]_{-\pi}^0 = 6 \{1 - (-1)\} = 12$$

2 치환적분법과 부분적분법을 이용한 정적분

문제

189~191쪽

05-1 11 (1) $\ln 11$ (2) 6 (3) $\frac{4}{15}$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (5) $\ln 2$ (6) $\frac{1}{12}$

(1) $x^2+x-1=t$ 로 놓으면 $2x+1=\frac{dt}{dx}$ 이고, $x=1$ 일 때

$t=1$, $x=3$ 일 때 $t=11$ 이므로

$$\int_1^3 \frac{2x+1}{x^2+x-1} dx = \int_1^{11} \frac{1}{t} dt = \left[\ln |t| \right]_1^{11} = \ln 11$$

(2) $x^2+2x=t$ 로 놓으면 $2x+2=\frac{dt}{dx}$ 이고, $x=0$ 일 때

$t=0$, $x=2$ 일 때 $t=8$ 이므로

$$\int_0^2 (x+1)^3 \sqrt{x^2+2x} dx = \int_0^8 \sqrt[3]{t} \times \frac{1}{2} dt \\ = \frac{1}{2} \int_0^8 t^{\frac{1}{3}} dt \\ = \left[\frac{3}{8} t^{\frac{4}{3}} \right]_0^8 = 6$$

(3) $1-x=t$ 로 놓으면 $x=1-t$ 이고 $-1=\frac{dt}{dx}$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\int_0^1 x \sqrt{1-x} dx = \int_1^0 (1-t) \sqrt{t} \times (-1) dt \\ = - \int_1^0 (\sqrt{t} - t\sqrt{t}) dt \\ = \int_0^1 (t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}}) dt \\ = \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\ = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

(4) $2x+\frac{\pi}{4}=t$ 로 놓으면 $2=\frac{dt}{dx}$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=\frac{\pi}{4}$,

$x=\frac{\pi}{4}$ 일 때 $t=\frac{3}{4}\pi$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin t \times \frac{1}{2} dt \\ = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin t dt \\ = \frac{1}{2} \left[-\cos t \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \\ = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(5) $\ln x=t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$ 이고, $x=e$ 일 때 $t=1$,

$x=e^2$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \left[\ln |t| \right]_1^2 = \ln 2$$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \cos^2 x - 1) \sin x dx$

$\cos x=t$ 로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$ 이고, $x=0$ 일 때

$t=1$, $x=\frac{\pi}{3}$ 일 때 $t=\frac{1}{2}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \cos^2 x - 1) \sin x dx \\ = \int_1^{\frac{1}{2}} (2t^2 - 1) \times (-1) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t^2 - 1) dt \\ = \left[\frac{2}{3} t^3 - t \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \left(\frac{2}{3} - 1 \right) - \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{12}$$

다른 풀이

(1) $(x^2+x-1)'=2x+1$ 이므로

$$\int_1^3 \frac{2x+1}{x^2+x-1} dx = \left[\ln |x^2+x-1| \right]_1^3 = \ln 11$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ = \frac{\sqrt{2}}{4} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(5) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ 이므로

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \left[\ln |\ln x| \right]_e^{e^2} = \ln 2$$

05-2 6

$3x-6=t$ 로 놓으면 $3=\frac{dt}{dx}$ 이고, $x=2$ 일 때 $t=0$,

$x=4$ 일 때 $t=6$ 이므로

$$\int_2^4 3e^{3x-6} dx = \int_0^6 e^t dt = \left[e^t \right]_0^6 = e^6 - 1$$

따라서 $k=e^6-1$ 이므로

$$\ln |k+1| = \ln e^6 = 6$$

06-1 ▣ (1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

(1) $x = \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$ 이고,

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos \theta}{\cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

(2) $x = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = \sec^2 \theta$ 이고,

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{(\tan^2 \theta + 1)^2} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^4 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

07-1 ▣ (1) $1 - \frac{2}{e}$ (2) $\frac{\pi}{2}$ (3) $\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$ (4) $e - 2$

(1) $f(x) = x$, $g'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = 1, g(x) = -e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 x e^{-x} dx &= \left[-x e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx \\ &= \left[-x e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx \\ &= -\frac{1}{e} + \left[-e^{-x} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{e} + \left(-\frac{1}{e} + 1 \right) = 1 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

(2) $f(x) = x + 1$, $g'(x) = \cos x$ 로 놓으면

$$f'(x) = 1, g(x) = \sin x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cos x dx &= \left[(x+1) \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= \frac{\pi}{2} + 1 - \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 1 - 1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

(3) $f(x) = (\ln x)^2$, $g'(x) = x$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}, g(x) = \frac{1}{2} x^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^e x (\ln x)^2 dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 (\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e \frac{2 \ln x}{x} \times \frac{1}{2} x^2 dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \int_1^e x \ln x dx \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\int_1^e x \ln x dx$ 에서 $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x$ 로 놓으면

$$u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = \frac{1}{2} x^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^e x \ln x dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{1}{2} x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①을 ②에 대입하면

$$\int_1^e x (\ln x)^2 dx = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$$

(4) $f(x) = x^2$, $g'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x) = 2x, g(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 x^2 e^x dx &= \left[x^2 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx \\ &= e - 2 \int_0^1 x e^x dx \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\int_0^1 x e^x dx$ 에서 $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$u'(x) = 1, v(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^1 x e^x dx &= \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - \left[e^x \right]_0^1 \\ &= e - (e - 1) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①을 ②에 대입하면 $\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$

07-2 ▣ 1

$f(x) = \sin x$, $g'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면

$$f'(x) = \cos x, g(x) = -e^{-x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx &= \left[-e^{-x} \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos x \times (-e^{-x}) dx \\ &= \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx$ 에서 $u(x) = \cos x$, $v'(x) = e^{-x}$ 으로 놓으면 $u'(x) = -\sin x$, $v(x) = -e^{-x}$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx &= \left[-e^{-x} \cos x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\sin x) \times (-e^{-x}) dx \\ &= e^{-\pi} + 1 - \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx \quad \cdots \cdots \textcircled{A} \end{aligned}$$

①을 ①에 대입하면

$$\int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx = e^{-\pi} + 1 - \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx$$

$$2 \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx = e^{-\pi} + 1$$

$$\therefore \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx = \frac{e^{-\pi}}{2} + \frac{1}{2}$$

따라서 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ 이므로 $a + b = 1$

정적분으로 정의된 함수

개념 CHECK

192쪽

1 답 (1) $x \sin x$ (2) $\ln \frac{x+1}{x}$

문제

193~195쪽

08-1 답 (1) $f(x) = e^x - 2e + 2$ (2) $f(x) = \cos x + \frac{3}{4}$

(1) $\int_0^1 f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = e^x + 2k$$

이를 $\int_0^1 f(t) dt = k$ 에 대입하면

$$\int_0^1 (e^t + 2k) dt = k$$

$$\left[e^t + 2kt \right]_0^1 = k$$

$$e + 2k - 1 = k \quad \therefore k = -e + 1$$

$$\therefore f(x) = e^x - 2e + 2$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) \sin t dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = \cos x + k$$

이를 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) \sin t dt = k$ 에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos t + k) \sin t dt = k$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin t \cos t + k \sin t) dt = k$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} \sin 2t + k \sin t \right) dt = k \quad \blacktriangleleft \sin 2t = 2 \sin t \cos t$$

$$\left[-\frac{1}{4} \cos 2t - k \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = k$$

$$\left(\frac{1}{8} - \frac{k}{2} \right) - \left(-\frac{1}{4} - k \right) = k \quad \therefore k = \frac{3}{4}$$

$$\therefore f(x) = \cos x + \frac{3}{4}$$

다른 풀이

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) \sin t dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = \cos x + k$$

이를 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) \sin t dt = k$ 에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos t + k) \sin t dt = k$$

$\cos t = s$ 로 놓으면 $-\sin t = \frac{ds}{dt}$ 이고, $t=0$ 일 때

$s=1$, $t=\frac{\pi}{3}$ 일 때 $s=\frac{1}{2}$ 이므로

$$\int_1^{\frac{1}{2}} (s+k) \times (-1) ds = k, \int_{\frac{1}{2}}^1 (s+k) ds = k$$

$$\left[\frac{1}{2}s^2 + ks \right]_{\frac{1}{2}}^1 = k, \left(\frac{1}{2} + k \right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{k}{2} \right) = k$$

$$\therefore k = \frac{3}{4} \quad \therefore f(x) = \cos x + \frac{3}{4}$$

09-1 답 $\frac{1}{2}$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \cos x - a \sin x$$

주어진 등식의 양변에 $x=\pi$ 를 대입하면

$$\int_{\pi}^{\pi} f(t) dt = -a - \frac{1}{2}$$

$$0 = -a - \frac{1}{2} \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

따라서 $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \sin x$ 이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

09-2 답 1

주어진 등식에서

$$x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = ae^{-x} + x^2 - 3x + 3$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = -ae^{-x} + 2x - 3$$

$$\therefore \int_0^x f(t) dt = -ae^{-x} + 2x - 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = ae^{-x} + 2$$

㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$\int_0^0 f(t) dt = -a-3$$

$$0 = -a-3 \quad \therefore a = -3$$

따라서 $f(x) = -3e^{-x} + 2$ 이므로

$$f(\ln 3) = -1 + 2 = 1$$

10-1 $\text{답} -\frac{13}{5}$

주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x(\sqrt{x}-2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x(\sqrt{x}-2)=0$$

$$\therefore x=4 \quad (\because x>0)$$

$x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	4	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$$\begin{aligned} f(4) &= \int_1^4 t(\sqrt{t}-2) dt = \int_1^4 (t\sqrt{t}-2t) dt \\ &= \int_1^4 (t^{\frac{3}{2}}-2t) dt = \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-t^2 \right]_1^4 \\ &= \left(\frac{64}{5}-16 \right) - \left(\frac{2}{5}-1 \right) = -\frac{13}{5} \end{aligned}$$

10-2 $\text{답} 4\ln 2 - \frac{3}{2}$

$$f(x) = \int_0^x (2-e^t)(2+e^t) dt = \int_0^x (4-e^{2t}) dt$$

함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 4-e^{2x}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 4-e^{2x}=0$$

$$e^{2x}=4, 2x=\ln 4 \quad \therefore x=\ln 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\ln 2$	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\ln 2$ 에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$$\begin{aligned} f(\ln 2) &= \int_0^{\ln 2} (4-e^{2t}) dt = \left[4t - \frac{1}{2}e^{2t} \right]_0^{\ln 2} \\ &= (4\ln 2 - 2) - \left(-\frac{1}{2} \right) = 4\ln 2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

연습문제

196~198쪽

- | | | | | |
|-------------------|------|------|---------------|-------|
| 1 ③ | 2 ② | 3 2 | 4 $5\sqrt{3}$ | 5 ⑤ |
| 6 $e-2\sqrt{e}+1$ | 7 2 | 8 ③ | 9 ② | |
| 10 ④ | 11 3 | 12 ④ | 13 3 | 14 -2 |
| 15 ⑤ | 16 ⑤ | 17 ① | 18 1 | 19 ② |
| 20 ④ | | | | |

$$\begin{aligned} 1 \quad \int_1^4 (5x-6)\sqrt{x} dx &= \int_1^4 (5x^{\frac{3}{2}}-6x^{\frac{1}{2}}) dx \\ &= \left[2x^{\frac{5}{2}}-4x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\ &= (64-32) - (2-4) = 34 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \int_0^2 \frac{1}{x^2+3x+2} dx &= \int_0^2 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \left[\ln|x+1| - \ln|x+2| \right]_0^2 \\ &= \left[\ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| \right]_0^2 \\ &= \ln \frac{3}{4} - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad \int_0^a \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx &= \int_0^a \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1} dx \\ &= \int_0^a (e^x-1) dx = \left[e^x-x \right]_0^a \\ &= e^a - a - 1 \end{aligned}$$

따라서 $e^a - a - 1 = e^2 - 3$ 이므로 $a=2$

$$\begin{aligned} 4 \quad \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{5}} f(y) dy + \int_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{3}} f(z) dz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{5}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3+4\cos^3 x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (3\sec^2 x + 4\cos x) dx \\ &= \left[3\tan x + 4\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad \int_{-3}^3 f(x) dx &= \int_{-3}^1 (\sin \pi x + 1) dx + \int_1^3 \frac{1}{x} dx \\ &= \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi x + x \right]_{-3}^1 + \left[\ln|x| \right]_1^3 \\ &= \left(\frac{1}{\pi} + 1 \right) - \left(\frac{1}{\pi} - 3 \right) + \ln 3 = \ln 3 + 4 \end{aligned}$$

- 6 $e^x - e^a = 0$ 에서 $e^x = e^a \quad \therefore x = a$
따라서 $|e^x - e^a| = \begin{cases} e^x - e^a & (x \geq a) \\ -e^x + e^a & (x \leq a) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^1 |e^x - e^a| dx \\ &= \int_0^a (-e^x + e^a) dx + \int_a^1 (e^x - e^a) dx \\ &= \left[-e^x + e^a x \right]_0^a + \left[e^x - e^a x \right]_a^1 \\ &= (-e^a + ae^a) - (-1) + (e - e^a) - (e^a - ae^a) \\ &= (2a - 3)e^a + e + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(a) = 2e^a + (2a - 3)e^a = (2a - 1)e^a$$

$$f'(a) = 0 \text{에서 } 2a - 1 = 0 \quad (\because e^a > 0) \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$0 \leq a \leq 1$ 에서 함수 $f(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$		\	극소	/	

따라서 함수 $f(a)$ 는 $a = \frac{1}{2}$ 에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = e - 2\sqrt{e} + 1$$

- 7 $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, $g(x) = 3^x - 3^{-x}$ 이라 하면
 $f(-x) = 2^{-x} + 2^x = f(x)$
 $g(-x) = 3^{-x} - 3^x = -(3^x - 3^{-x}) = -g(x)$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^1 (2^x + 3^x + 2^{-x} - 3^{-x}) dx \\ &= \int_{-1}^1 (2^x + 2^{-x}) dx + \int_{-1}^1 (3^x - 3^{-x}) dx \\ &= 2 \int_0^1 (2^x + 2^{-x}) dx + 0 \\ &= 2 \left[\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{\ln 2} \right]_0^1 \\ &= 2 \left\{ \left(\frac{2}{\ln 2} - \frac{2^{-1}}{\ln 2} \right) - \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \right) \right\} = \frac{3}{\ln 2} \\ \therefore a &= 2 \end{aligned}$$

- 8 함수 $y = |\cos 2x|$ 의 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos 2x| dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos 2x| dx \\ &= \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos 2x| dx \\ &= \dots = \int_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi} |\cos 2x| dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{3\pi} |\cos 2x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos 2x| dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\cos 2x| dx \\ &\quad + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} |\cos 2x| dx + \dots + \int_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi} |\cos 2x| dx \\ &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos 2x| dx \\ &= 6 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 2x) dx \right\} \\ &= 6 \left(\left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right) \\ &= 6 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 6 \end{aligned}$$

- 9 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos x dx$ 에서 $\sin x = t$ 로 놓으면 $\cos x = \frac{dt}{dx}$

이고, $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos x dx = \int_0^1 t^n dt \\ &= \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \\ \therefore \sum_{n=1}^{20} a_n a_{n+1} &= \sum_{n=1}^{20} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \sum_{n=1}^{20} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{21} - \frac{1}{22} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{22} = \frac{5}{11} \end{aligned}$$

따라서 $p=11$, $q=5$ 이므로 $p+q=16$

- 10 $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+e^{-t}} dt = \int_0^x \frac{e^t}{e^t+1} dt$

$e^t+1=s$ 로 놓으면 $e^t = \frac{ds}{dt}$ 이고, $t=0$ 일 때 $s=2$,
 $t=x$ 일 때 $s=e^x+1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \frac{e^t}{e^t+1} dt = \int_2^{e^x+1} \frac{1}{s} ds \\ &= \left[\ln |s| \right]_2^{e^x+1} = \ln(e^x+1) - \ln 2 = \ln \frac{e^x+1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (f \circ f)(a) &= f(f(a)) = f\left(\ln \frac{e^a+1}{2}\right) \\ &= \ln \frac{e^{\ln \frac{e^a+1}{2}} + 1}{2} = \ln \frac{e^a+3}{4} \end{aligned}$$

따라서 $\ln \frac{e^a+3}{4} = \ln 5$ 이므로

$$\frac{e^a+3}{4} = 5, e^a = 17 \quad \therefore a = \ln 17$$

다른 풀이

$(e^t+1)'=e^t$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \frac{e^t}{e^t+1} dt \\ &= \left[\ln(e^t+1) \right]_0^x \quad (\because e^t+1 > 0) \\ &= \ln(e^x+1) - \ln 2 = \ln \frac{e^x+1}{2} \\ \therefore (f \circ f)(a) &= f(f(a)) = f\left(\ln \frac{e^a+1}{2}\right) \\ &= \ln \frac{e^{\ln \frac{e^a+1}{2}} + 1}{2} = \ln \frac{e^a+3}{4} \end{aligned}$$

따라서 $\ln \frac{e^a+3}{4} = \ln 5$ 이므로

$$\frac{e^a+3}{4} = 5, e^a = 17 \quad \therefore a = \ln 17$$

- 11 $x = a \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = a \cos \theta$ 이고,

$x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=a$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2 \sin^2 \theta} \times a \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1-\sin^2 \theta)} \times a \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \times a \cos \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{4} \pi \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a^2}{4} \pi = \frac{9}{4} \pi$ 이므로

$$a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

다른 풀이

$y = \sqrt{a^2-x^2}$ 이라 하고 양변을 제곱하면

$$y^2 = a^2 - x^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = a^2 \quad (\text{단, } y \geq 0)$$

따라서 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx$ 의 값은 원

점을 중심으로 하고 반지름의 길

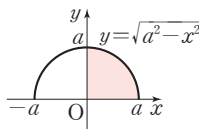
이가 a 인 원의 넓이의 $\frac{1}{4}$ 과 같으

므로

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{a^2}{4} \pi$$

따라서 $\frac{a^2}{4} \pi = \frac{9}{4} \pi$ 이므로

$$a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$



- 12 $f(x) = x \sin x$ 라 하면

$$f(-x) = -x \sin(-x) = x \sin x = f(x)$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = 2 \int_0^{\pi} x \sin x dx \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$\int_0^{\pi} x \sin x dx$ 에서 $u(x) = x$, $v'(x) = \sin x$ 로 놓으면

$$u'(x) = 1, v(x) = -\cos x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\pi} x \sin x dx &= \left[-x \cos x \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \\ &= \pi + \left[\sin x \right]_0^{\pi} \\ &= \pi \quad \dots\dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

⑧을 ⑦에 대입하면

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = 2\pi$$

- 13 $f(x) = (\ln x)^2$, $g'(x) = 1$ 로 놓으면

$$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}, g(x) = x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^e (\ln x)^2 dx &= \left[x (\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e \frac{2 \ln x}{x} \times x dx \\ &= e - 2 \int_1^e \ln x dx \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$\int_1^e \ln x dx$ 에서 $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$ 로 놓으면

$$u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^e \ln x dx &= \left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e dx \\ &= e - \left[x \right]_1^e \\ &= e - (e - 1) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

⑧을 ⑦에 대입하면

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$$

따라서 $a = 1$, $b = -2$ 이므로

$$a - b = 3$$

- 14 $\int_0^1 e^{-t} f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = x + k$$

이를 $\int_0^1 e^{-t} f(t) dt = k$ 에 대입하면

$$\int_0^1 e^{-t} (t+k) dt = k$$

이때 $u(t) = t+k$, $v'(t) = e^{-t}$ 으로 놓으면 $u'(t) = 1$,

$v(t) = -e^{-t}$ 이므로

$$\left[-e^{-t} (t+k) \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-t} dt = k$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{e}(1+k)+k+\left[-e^{-t}\right]_0^1=k \\
 & -\frac{2}{e}-\frac{k}{e}+k+1=k \\
 & \therefore k=e-2 \\
 & \text{따라서 } f(x)=x+e-2 \text{ 이므로} \\
 & f(-e)=-e+e-2=-2
 \end{aligned}$$

- 15 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\int_1^1 (t-1)f(t)dt = -a+b$$

$$0 = -a+b$$

$$\therefore a=b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 등식에서

$$\int_1^x tf(t)dt - x \int_1^x f(t)dt = x^2 \ln x - ax + b$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$xf(x) - \int_1^x f(t)dt - xf(x) = 2x \ln x + x - a$$

$$\therefore \int_1^x f(t)dt = -2x \ln x - x + a$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\int_1^1 f(t)dt = -1+a$$

$$0 = -1+a \quad \therefore a=1$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b=1$

$$\therefore a+b=1+1=2$$

- 16 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (a+b \cos x) \sin x$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=\frac{\pi}{2}$ 에서 극댓값 1을 가지므로

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \text{에서 } a=0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \text{에서}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a+b \cos t) \sin t dt = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin t \cos t dt = 1 \quad (\because a=0)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b}{2} \sin 2t dt = 1$$

$$\left[-\frac{b}{4} \cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\frac{b}{4} - \left(-\frac{b}{4}\right) = 1, \frac{b}{2} = 1$$

$$\therefore b=2$$

$$\therefore a+b=0+2=2$$

- 17 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$2x-2=0 \quad \therefore x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

$$\begin{aligned}
 f(1) &= \int_0^1 \frac{2t-2}{t^2-2t+2} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{(t^2-2t+2)'}{t^2-2t+2} dt \\
 &= \left[\ln(t^2-2t+2) \right]_0^1 \\
 &= -\ln 2
 \end{aligned}$$

- 18 $f(t)=\sin \pi t+\cos \pi t$ 라 하고 함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x (\sin \pi t + \cos \pi t) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x f(t) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \left[F(t) \right]_2^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x-2}$$

$$= F'(2)$$

$$= f(2)$$

$$= \sin 2\pi + \cos 2\pi$$

$$= 1$$

- 19 $2f(x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ 에 x 대신 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 f(x) = x + x^2$$

이 식의 양변을 $2x^2$ 으로 나누면

$$\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면

$$\frac{3}{2}f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3} \right) dx \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{3x} + \frac{2}{3}x^{-2} - \frac{1}{3} \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} \ln |x| - \frac{2}{3}x^{-1} - \frac{1}{3}x \right]_{\frac{1}{2}}^2 \\
 &= \left(\frac{\ln 2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) - \left(-\frac{\ln 2}{3} - \frac{4}{3} - \frac{1}{6} \right) \\
 &= \frac{2\ln 2}{3} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

20 (가)에서 $g(x) = \int_1^x \frac{f(t^2+2)}{t} dt$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $g(1)=0$

또 $g(x) = \int_1^x \frac{f(t^2+2)}{t} dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = \frac{f(x^2+2)}{x}$$

$\int_1^3 xg(x) dx$ 에서 $u(x)=g(x)$, $v'(x)=x$ 로 놓으면

$$u'(x)=g'(x), v(x)=\frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_1^3 xg(x) dx &= \left[\frac{1}{2}x^2g(x) \right]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{2}x^2g'(x) dx \\
 &= \frac{9}{2}g(3) - \frac{1}{2}g(1) - \frac{1}{2} \int_1^3 x^2 \times \frac{f(x^2+2)}{x} dx \\
 &= \frac{9}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{2} \int_1^3 xf(x^2+2) dx \\
 &= 9 - \frac{1}{2} \int_1^3 xf(x^2+2) dx \quad \dots\dots \textcircled{7}
 \end{aligned}$$

$\int_1^3 xf(x^2+2) dx$ 에서 $x^2+2=s$ 로 놓으면 $2x=\frac{ds}{dx}$ 이고,
 $x=1$ 일 때 $s=3$, $x=3$ 일 때 $s=11$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_1^3 xf(x^2+2) dx &= \int_3^{11} f(s) \times \frac{1}{2} ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_3^{11} f(s) ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_3^{11} f(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \times 16 \quad (\because \textcircled{4}) \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

이를 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned}
 \int_1^3 xg(x) dx &= 9 - \frac{1}{2} \times 8 \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

III-2 01 정적분의 활용(1)

정적분과 급수

개념 CHECK

202쪽

1 답 2, $\frac{k}{n}$, 2, x^2 , $\frac{1}{3}x^3$, 2, $\frac{7}{3}$

문제

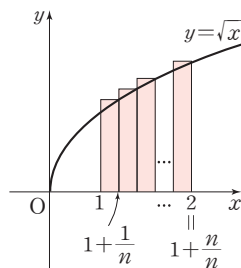
203~204쪽

01-1 답 ③

오른쪽 그림과 같이 구간

$[1, 2]$ 를 n 등분 하면 각 구간의 오른쪽 끝 점의 x 좌표는 차례대로

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n}, 1 + \frac{3}{n}, \\
 \dots, 1 + \frac{n}{n} (=2)
 \end{aligned}$$



이에 대응하는 y 의 값은 각각

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}}, \sqrt{1 + \frac{2}{n}}, \sqrt{1 + \frac{3}{n}}, \dots, \sqrt{1 + \frac{n}{n}}$$

이때 색칠한 각 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{1}{n}$ 이므로 직사각형의 넓이의 합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{3}{n}} \\
 &\quad + \dots + \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}}
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

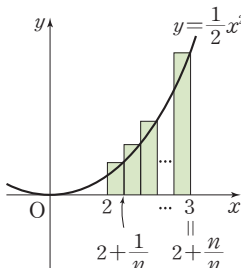
$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}}$$

01-2 답 $\frac{19}{6}$

오른쪽 그림과 같이 구간

$[2, 3]$ 을 n 등분 하면 각 구간의 오른쪽 끝 점의 x 좌표는 차례대로

$$\begin{aligned}
 2 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{2}{n}, 2 + \frac{3}{n}, \\
 \dots, 2 + \frac{n}{n} (=3)
 \end{aligned}$$



이에 대응하는 y 의 값은 각각

$$\frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{n} \right)^2, \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{n} \right)^2, \frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{n} \right)^2, \dots, \frac{1}{2} \left(2 + \frac{n}{n} \right)^2$$

이때 색칠한 각 직사각형의 가로 길이는 $\frac{1}{n}$ 이므로 직사각형의 넓이의 합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{n} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{n} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} \left(2 + \frac{n}{n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2n} \left\{ \left(4 + \frac{4}{n} + \frac{1^2}{n^2} \right) + \left(4 + \frac{4 \times 2}{n} + \frac{2^2}{n^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(4 + \frac{4 \times 3}{n} + \frac{3^2}{n^2} \right) + \cdots + \left(4 + \frac{4n}{n} + \frac{n^2}{n^2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2n} \left\{ 4n + \frac{4}{n} (1+2+3+\cdots+n) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n^2} (1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) \right\} \\ &= \frac{1}{2n} \left\{ 4n + \frac{4}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \\ &= 2 + \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{12} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2 + \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{12} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) \right\} \\ &= 2 + 1 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6} \end{aligned}$$

02-1 $\square$ (1) $\frac{15}{4}$ (2) $1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (3) $4 \ln 2$ (4) $3 \ln 2 - 1$

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)^3}{n^4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right)^3 \times \frac{1}{n} \\ 1 + \frac{k}{n} \text{를 } x, \frac{1}{n} \text{을 } dx \text{로 나타내면 적분 구간은 } [1, 2] \\ \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)^3}{n^4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right)^3 \times \frac{1}{n} \\ &= \int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_1^2 = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\sqrt{n} + \sqrt{2k}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n} + \sqrt{2k}}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \sqrt{\frac{2k}{n}} \right) \times \frac{2}{n} \end{aligned}$$

$\frac{2k}{n}$ 를 x , $\frac{2}{n}$ 를 dx 로 나타내면 적분 구간은 $[0, 2]$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\sqrt{n} + \sqrt{2k}) &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \sqrt{\frac{2k}{n}} \right) \times \frac{2}{n} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (1 + \sqrt{x}) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_0^2 = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

(3) 주어진 식을 Σ 를 이용하여 나타내면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n+1} + \frac{4}{n+2} + \frac{4}{n+3} + \cdots + \frac{4}{n+n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1 + \frac{n}{n}} \right) \times \frac{1}{n} \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \times \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$1 + \frac{k}{n}$ 를 x , $\frac{1}{n}$ 을 dx 로 나타내면 적분 구간은 $[1, 2]$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n+1} + \frac{4}{n+2} + \frac{4}{n+3} + \cdots + \frac{4}{n+n} \right) \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \times \frac{1}{n} \\ &= 4 \int_1^2 \frac{1}{x} dx = 4 \left[\ln |x| \right]_1^2 = 4 \ln 2 \end{aligned}$$

(4) 주어진 식을 Σ 를 이용하여 나타내면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \ln \left(2 + \frac{2}{n} \right) + \ln \left(2 + \frac{4}{n} \right) + \ln \left(2 + \frac{6}{n} \right) \right. \\ \left. + \cdots + \ln \left(2 + \frac{2n}{n} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(2 + \frac{2k}{n} \right) \times \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(2 + \frac{2k}{n} \right) \times \frac{2}{n}$$

$2 + \frac{2k}{n}$ 를 x , $\frac{2}{n}$ 를 dx 로 나타내면 적분 구간은 $[2, 4]$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \ln \left(2 + \frac{2}{n} \right) + \ln \left(2 + \frac{4}{n} \right) + \ln \left(2 + \frac{6}{n} \right) \right. \\ \left. + \cdots + \ln \left(2 + \frac{2n}{n} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(2 + \frac{2k}{n} \right) \times \frac{2}{n}$$

$$= \frac{1}{2} \int_2^4 \ln x dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left[x \ln x \right]_2^4 - \int_2^4 dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(6 \ln 2 - \left[x \right]_2^4 \right) = 3 \ln 2 - 1$$

다른 풀이

(1) $\frac{k}{n}$ 를 x , $\frac{1}{n}$ 을 dx 로 나타내면 적분 구간은 $[0, 1]$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)^3}{n^4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right)^3 \times \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 (1+x)^3 dx \\ &= \left[\frac{1}{4} (1+x)^4 \right]_0^1 = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

- (3) $\frac{k}{n}$ 를 x , $\frac{1}{n}$ 을 dx 로 나타내면 적분 구간은 $[0, 1]$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n+1} + \frac{4}{n+2} + \frac{4}{n+3} + \cdots + \frac{4}{n+n} \right) \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \times \frac{1}{n} \\ &= 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= 4 \left[\ln |1+x| \right]_0^1 \\ &= 4 \ln 2 \end{aligned}$$

2 넓이

개념 CHECK

206쪽

1 답 $\ln 2$

$1 \leq x \leq 2$ 에서 $y > 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\ln |x| \right]_1^2 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

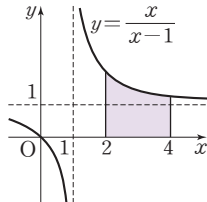
문제

207~210쪽

03-1 답 (1) $2 + \ln 3$ (2) 2

- (1) $2 \leq x \leq 4$ 에서 $y > 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

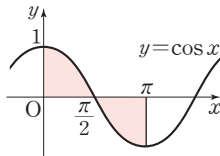
$$\begin{aligned} S &= \int_2^4 \frac{x}{x-1} dx \\ &= \int_2^4 \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= \left[x + \ln |x-1| \right]_2^4 \\ &= 2 + \ln 3 \end{aligned}$$



- (2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $y \geq 0$ 이고,

$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx \\ &= \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= 2 \end{aligned}$$



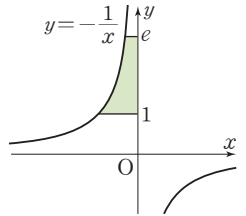
03-2 답 (1) 1 (2) 4

- (1) $y = -\frac{1}{x}$ 을 x 에 대하여 풀면

$$x = -\frac{1}{y}$$

$1 \leq y \leq e$ 에서 $x < 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e \frac{1}{y} dy \\ &= \left[\ln |y| \right]_1^e \\ &= 1 \end{aligned}$$



- (2) $y = (x+2)^2$ 을 x 에 대하여 풀면

$$\sqrt{y} = x+2 \quad (\because x \geq -2)$$

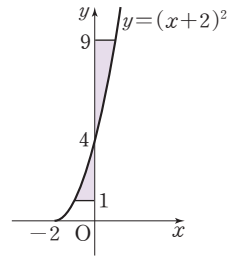
$$\therefore x = \sqrt{y} - 2$$

곡선 $x = \sqrt{y} - 2$ 와 y 축의 교점의 y 좌표를 구하면

$$\begin{aligned} \sqrt{y} - 2 &= 0 \\ \sqrt{y} &= 2 \\ \therefore y &= 4 \end{aligned}$$

$1 \leq y \leq 4$ 에서 $x \leq 0$ 이고, $4 \leq y \leq 9$ 에서 $x \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 (-\sqrt{y} + 2) dy + \int_4^9 (\sqrt{y} - 2) dy \\ &= \left[-\frac{2}{3} y\sqrt{y} + 2y \right]_1^4 + \left[\frac{2}{3} y\sqrt{y} - 2y \right]_4^9 \\ &= 4 \end{aligned}$$



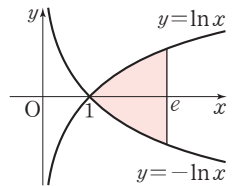
04-1 답 (1) 2 (2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (3) $e - \frac{7}{6}$ (4) $\frac{e^2}{2} - e + \frac{3}{2}$

- (1) 두 곡선 $y = \ln x$, $y = -\ln x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\begin{aligned} \ln x &= -\ln x \\ 2 \ln x &= 0 \\ \therefore x &= 1 \end{aligned}$$

$1 \leq x \leq e$ 에서 $\ln x \geq -\ln x$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e \{ \ln x - (-\ln x) \} dx \\ &= 2 \int_1^e \ln x dx \\ &= 2 \left(\left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e dx \right) \\ &= 2 \left(e - \left[x \right]_1^e \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$



- (2) 두 곡선 $y=\cos x$,
 $y=\cos 2x$ 의 교점의
 x 좌표를 구하면

$$\cos x = \cos 2x$$

$$\cos x = 2\cos^2 x - 1$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

$$\therefore \cos x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = 1$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

$0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ 에서 $\cos x \geq \cos 2x$ 이고, $\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \pi$ 에서
 $\cos 2x \geq \cos x$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\cos x - \cos 2x) dx \\ &\quad + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (\cos 2x - \cos x) dx \\ &= \left[\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} + \left[\frac{1}{2} \sin 2x - \sin x \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

- (3) $y=\ln x$, $y=\sqrt{2x}$ 를 각각 x 에
 대하여 풀면

$$x = e^y, \quad x = \frac{1}{2}y^2$$

$$0 \leq y \leq 1 \text{에서 } e^y > \frac{1}{2}y^2 \text{이므로}$$

구하는 넓이를 S 라 하면

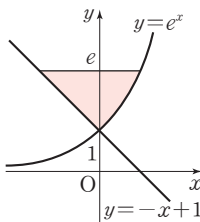
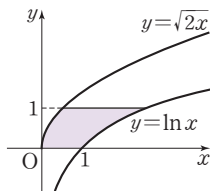
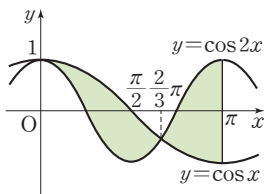
$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left(e^y - \frac{1}{2}y^2 \right) dy \\ &= \left[e^y - \frac{1}{6}y^3 \right]_0^1 \\ &= e - \frac{7}{6} \end{aligned}$$

- (4) $y=e^x$, $y=-x+1$ 을 각각 x 에
 대하여 풀면

$$x = \ln y, \quad x = -y + 1$$

$1 \leq y \leq e$ 에서 $\ln y \geq -y + 1$ 이
 므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e \{ \ln y - (-y + 1) \} dy \\ &= \int_1^e \ln y dy + \int_1^e (y - 1) dy \\ &= \left[y \ln y \right]_1^e - \int_1^e dy + \left[\frac{1}{2}y^2 - y \right]_1^e \\ &= e - \left[y \right]_1^e + \left(\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{e^2}{2} - e + \frac{3}{2} \end{aligned}$$



05-1 답 $\frac{1}{4}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^k (-3\sqrt{x} + 1) dx = 0$$

$$\left[-2x\sqrt{x} + x \right]_0^k = 0$$

$$-2k\sqrt{k} + k = 0, \quad -k(2\sqrt{k} - 1) = 0$$

$$\therefore k = \frac{1}{4} \quad (\because k > \frac{1}{9})$$

05-2 답 $\sqrt{3}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (k \sin x - \cos x) dx = 0$$

$$\left[-k \cos x - \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 0$$

$$\frac{k}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \therefore k = \sqrt{3}$$

05-3 답 $\frac{1}{e}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_k^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx = 0$$

$$\ln x = t \text{로 놓으면 } \frac{1}{x} = \frac{dt}{dx} \text{이고, } x=k \text{일 때 } t=\ln k,$$

$$x=e \text{일 때 } t=1 \text{이므로}$$

$$\int_{\ln k}^1 t^3 dt = 0$$

$$\left[\frac{1}{4}t^4 \right]_{\ln k}^1 = 0$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4}(\ln k)^4 = 0, \quad (\ln k)^4 = 1$$

$$\therefore \ln k = -1 \text{ 또는 } \ln k = 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{e} \quad (\because 0 < k < 1)$$

06-1 답 (1) $\frac{8}{\pi} - 2$ (2) $2e^2$

- (1) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=\sin \frac{\pi}{2}x$ 가 세 점

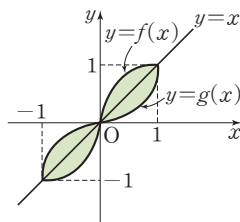
$$(-1, -1), (0, 0),$$

$$(1, 1) \text{을 지나므로 곡선}$$

$$y=\sin \frac{\pi}{2}x \text{와 직선 } y=x$$

의 교점의 x 좌표는

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$



$-1 \leq x \leq 0$ 에서 $x \geq \sin \frac{\pi}{2}x$ 이고, $0 \leq x \leq 1$ 에서

$\sin \frac{\pi}{2}x \geq x$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= 2 \left\{ \int_{-1}^0 \left(x - \sin \frac{\pi}{2}x \right) dx + \int_0^1 \left(\sin \frac{\pi}{2}x - x \right) dx \right\} \\ &= 2 \left(\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x \right]_{-1}^0 \right. \\ &\quad \left. + \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \right) \\ &= \frac{8}{\pi} - 2 \end{aligned}$$

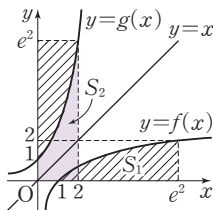
- (2) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고 $f(1)=0$, $f(e^2)=2$ 이므로 $g(0)=1$, $g(2)=e^2$ 이다.

$$\int_1^{e^2} f(x) dx = S_1,$$

$$\int_0^2 g(x) dx = S_2 \text{라 하면 오}$$

른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 값은

$$\begin{aligned} \int_1^{e^2} f(x) dx + \int_0^2 g(x) dx &= S_1 + S_2 \\ &= 2 \times e^2 = 2e^2 \end{aligned}$$



이때 색칠한 각 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{2}{n}$ 이므로 직사

각형의 넓이의 합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{n} \times \left(1 + \frac{2}{n} \right)^2 + \frac{2}{n} \times \left(1 + \frac{4}{n} \right)^2 + \frac{2}{n} \times \left(1 + \frac{6}{n} \right)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{2}{n} \times \left(1 + \frac{2n}{n} \right)^2 \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n} \right)^2 \end{aligned}$$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n} \right)^2$$

$$\begin{aligned} 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{2k}{n}\right) &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k}{n}\right) \times \frac{2}{n} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (4x^3 + x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \cos \frac{3\pi}{2n} + \cdots + \cos \frac{n\pi}{2n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{k\pi}{2n} \right) \times \frac{\pi}{n} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{k\pi}{2n} \right) \times \frac{\pi}{2n} \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= 2 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

- 4 $y = \ln(1-2x) + 1$ 을 x 에 대하여 풀면

$$y-1 = \ln(1-2x)$$

$$1-2x = e^{y-1}$$

$$2x = -e^{y-1} + 1$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}e^{y-1} + \frac{1}{2}$$

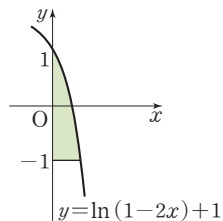
곡선 $x = -\frac{1}{2}e^{y-1} + \frac{1}{2}$ 과 y 축의 교점의 y 좌표를 구하면

$$-\frac{1}{2}e^{y-1} + \frac{1}{2} = 0, e^{y-1} = 1$$

$$y-1=0 \quad \therefore y=1$$

$-1 \leq y \leq 1$ 에서 $x \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2}e^{y-1} + \frac{1}{2} \right) dy \\ &= \left[-\frac{1}{2}e^{y-1} + \frac{1}{2}y \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$



연습문제

211~212쪽

1 ⑤

2 ④

3 2

4 $\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2}$

5 ⑤

6 10

7 $\ln 2$

8 $\frac{e}{2} - 1$

9 $\frac{8}{\pi^2}$

10 ①

11 $\frac{9-2\sqrt{3}}{36}\pi$

12 32

13 $\frac{3}{4}$

- 1 오른쪽 그림과 같이 구간

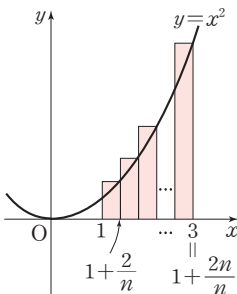
$[1, 3]$ 을 n 등분 하면 각 구간의 오른쪽 끝 점의 x 좌표는 차례대로

$$1 + \frac{2}{n}, 1 + \frac{4}{n}, 1 + \frac{6}{n},$$

$$\cdots, 1 + \frac{2n}{n} (=3)$$

이에 대응하는 y 의 값은 각각

$$\left(1 + \frac{2}{n} \right)^2, \left(1 + \frac{4}{n} \right)^2, \left(1 + \frac{6}{n} \right)^2, \cdots, \left(1 + \frac{2n}{n} \right)^2$$



- 5 $1 \leq x \leq e^2$ 에서 $\frac{\ln x}{x} \geq 0$ 이므로

$$S_1 = \int_1^k \frac{\ln x}{x} dx, S_2 = \int_k^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$$

$\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$ 이고, $x=1$ 일 때 $t=0$, $x=k$ 일 때 $t=\ln k$, $x=e^2$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$S_1 = \int_1^k \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^{\ln k} t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^{\ln k} = \frac{1}{2} (\ln k)^2$$

$$S_2 = \int_k^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \int_{\ln k}^2 t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_{\ln k}^2 = 2 - \frac{1}{2} (\ln k)^2$$

$S_1 = S_2$ 에서

$$\frac{1}{2} (\ln k)^2 = 2 - \frac{1}{2} (\ln k)^2$$

$$(\ln k)^2 = 2$$

이때 $1 < k < e^2$ 에서 $0 < \ln k < 2$ 이므로

$$\ln k = \sqrt{2} \quad \therefore k = e^{\sqrt{2}}$$

- 6 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=7$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 18이므로

$$\int_0^7 f(x) dx = 18 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \int_0^7 x f'(x) dx = \left[x f(x) \right]_0^7 - \int_0^7 f(x) dx$$

$$= 7f(7) - \int_0^7 f(x) dx$$

$$= 7 \times 4 - 18 \quad (\because \textcircled{1})$$

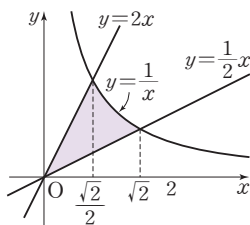
$$= 10$$

- 7 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 과 직선 $y=2x$ 의

교점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{x} = 2x, x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because x > 0)$$



곡선 $y=\frac{1}{x}$ 과 직선 $y=\frac{1}{2}x$

의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x, x^2 = 2 \quad \therefore x = \sqrt{2} \quad (\because x > 0)$$

$0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 $2x \geq \frac{1}{2}x$ 이고, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ 에서

$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}x$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(2x - \frac{1}{2}x \right) dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x \right) dx$$

$$= \left[\frac{3}{4} x^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\ln |x| - \frac{1}{4} x^2 \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$= \ln 2$$

- 8 $f(x) = \ln(x-1)$ 이라 하면 $f'(x) = \frac{1}{x-1}$

점 $(e+1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(e+1) = \frac{1}{e}$ 이므로

로 접선의 방정식은

$$y-1 = \frac{1}{e}(x-e-1) \quad \therefore y = \frac{1}{e}x - \frac{1}{e}$$

$$y = \ln(x-1), y = \frac{1}{e}x - \frac{1}{e}$$

각각 x 에 대하여 풀면

$$x = e^y + 1, x = ey + 1$$

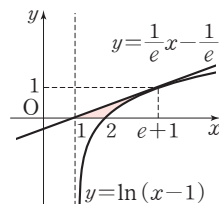
$0 \leq y \leq 1$ 에서 $e^y + 1 \geq ey + 1$ 이

므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^1 \{ (e^y + 1) - (ey + 1) \} dy$$

$$= \int_0^1 (e^y - ey) dy$$

$$= \left[e^y - \frac{e}{2} y^2 \right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1$$



다른 풀이

$$f(x) = \ln(x-1) \text{이라 하면 } f'(x) = \frac{1}{x-1}$$

점 $(e+1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(e+1) = \frac{1}{e}$ 이므로

로 접선의 방정식은

$$y-1 = \frac{1}{e}(x-e-1) \quad \therefore y = \frac{1}{e}x - \frac{1}{e}$$

$2 \leq x \leq e+1$ 에서 $\ln(x-1) \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times e \times 1 - \int_2^{e+1} \ln(x-1) dx$$

$$= \frac{e}{2} - \int_2^{e+1} \ln(x-1) dx$$

$$= \frac{e}{2} - \int_1^e \ln t dt \quad \blacktriangleleft x-1=t$$

$$= \frac{e}{2} - \left(\left[t \ln t \right]_1^e - \int_1^e dt \right)$$

$$= \frac{e}{2} - \left(e - \left[t \right]_1^e \right)$$

$$= \frac{e}{2} - 1$$

- 9 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - ax) dx = 0$$

$$\left[-\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} ax^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$1 - \frac{\pi^2}{8} a = 0, \frac{\pi^2}{8} a = 1$$

$$\therefore a = \frac{8}{\pi^2}$$

- 10 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 y 축 및 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

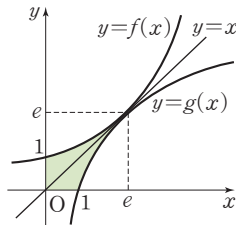
이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 $x=e$ 에서 서로 접하고, 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 접점의 좌표는 (e, e) 이다.

즉, $f(e)=e$ 에서

$$e^{ae}=e, ae=1 \quad \therefore a=\frac{1}{e}$$

$0 \leq x \leq e$ 에서 $e^{\frac{1}{e}x} \geq x$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^e (e^{\frac{1}{e}x} - x) dx \\ &= 2 \left[e \times e^{\frac{1}{e}x} - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^e = e^2 - 2e \end{aligned}$$



- 11 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ 이므로

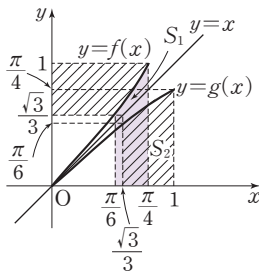
$$g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}, g(1)=\frac{\pi}{4} \text{이다.}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = S_1,$$

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 g(x) dx = S_2 \text{라 하면 오}$$

른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 값은

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 g(x) dx \\ &= S_1 + S_2 \\ &= \frac{\pi}{4} \times 1 - \frac{\pi}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{9-2\sqrt{3}}{36} \pi \end{aligned}$$



- 12 $\angle AOP_k = \frac{\pi}{2n} \times k = \frac{k\pi}{2n}$ 이므로

$$\angle BOQ_k = \frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2n}$$

이때 직각삼각형 OQ_kB 에서

$$\overline{OQ_k} = \overline{OB} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2n}\right) = 8 \sin \frac{k\pi}{2n}$$

$$\overline{BQ_k} = \overline{OB} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2n}\right) = 8 \cos \frac{k\pi}{2n}$$

$$\therefore S_k = \frac{1}{2} \times \overline{OQ_k} \times \overline{BQ_k}$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \sin \frac{k\pi}{2n} \times 8 \cos \frac{k\pi}{2n}$$

$$= 16 \times \left(2 \sin \frac{k\pi}{2n} \cos \frac{k\pi}{2n}\right) = 16 \sin \frac{k\pi}{n}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} 16 \sin \frac{k\pi}{n} \\ &= \frac{16}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sin \frac{k\pi}{n} \right) \times \frac{\pi}{n} \\ &= \frac{16}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx \\ &= \frac{16}{\pi} \left[-\cos x \right]_0^\pi = \frac{32}{\pi} \end{aligned}$$

$$\therefore a=32$$

- 13 두 곡선 $y=\cos x$, $y=a \sin x$ 의 교점의 x 좌표를

$$a \left(0 < a < \frac{\pi}{2} \right) \text{라 하면}$$

$$\cos a = a \sin a$$

$$\cos^2 a = a^2 \sin^2 a$$

$$\cos^2 a = a^2 (1 - \cos^2 a), (a^2 + 1) \cos^2 a = a^2$$

$$\cos^2 a = \frac{a^2}{a^2 + 1}$$

$$\therefore \cos a = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} \left(\because 0 < a < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{또 } \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \text{이므로}$$

$$\sin^2 a = 1 - \frac{a^2}{a^2 + 1} = \frac{1}{a^2 + 1}$$

$$\therefore \sin a = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \left(\because 0 < a < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\text{곡선 } y=\cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{와 } x$$

$$\text{축 및 } y\text{축으로 둘러싸인 도형의}$$

$$\text{넓이를 } S_1 \text{이라 하면 } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{에서 } \cos x \geq 0 \text{이므로}$$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\text{또 두 곡선 } y=\cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right), y=a \sin x \text{와 } y\text{축으}$$

$$\text{로 둘러싸인 도형의 넓이를 } S_2 \text{라 하면 } 0 \leq x \leq a \text{에서}$$

$$\cos x \geq a \sin x \text{이므로}$$

$$S_2 = \int_0^a (\cos x - a \sin x) dx$$

$$= \left[\sin x + a \cos x \right]_0^a$$

$$= \sin a + a \cos a - a$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + 1}} - a$$

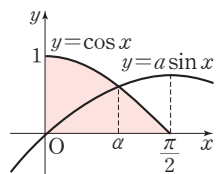
$$= \sqrt{a^2 + 1} - a$$

$$\text{주어진 조건에서 } S_1 = 2S_2 \text{이므로}$$

$$1 = 2(\sqrt{a^2 + 1} - a), 2\sqrt{a^2 + 1} = 2a + 1$$

$$4a^2 + 4 = 4a^2 + 4a + 1, 4a = 3$$

$$\therefore a = \frac{3}{4}$$



III-2 02 정적분의 활용(2)

1 입체도형의 부피

개념 CHECK

213쪽

1 [답] 12

입체도형의 밑면으로부터 높이가 x 인 지점에서의 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = x^2 + 1$$

이때 입체도형의 높이가 3이므로 부피를 V 라 하면

$$V = \int_0^3 S(x) dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^3 = 12$$

문제

214~215쪽

01-1 [답] $\left(\frac{\pi^2}{2} + 2\right) \text{cm}^3$

물의 높이가 x cm일 때의 수면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \sin x + x (\text{cm}^2)$$

따라서 물의 높이가 π cm일 때, 이 그릇에 담긴 물의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi S(x) dx = \int_0^\pi (\sin x + x) dx \\ &= \left[-\cos x + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} + 2 (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

01-2 [답] 108π

입체도형의 밑면으로부터 높이가 x 인 지점에서의 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

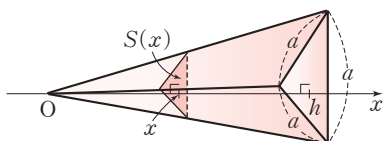
$$S(x) = \pi(\sqrt{10x - x^2})^2 = \pi(10x - x^2)$$

이때 입체도형의 높이가 6이므로 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^6 S(x) dx = \int_0^6 \pi(10x - x^2) dx \\ &= \pi \left[5x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^6 = 108\pi \end{aligned}$$

01-3 [답] $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2h$

다음 그림과 같이 정삼각뿔의 꼭짓점을 원점, 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선을 x 축으로 정하고, x 좌표가 x 인 점을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하자.



밑면과 단면은 서로 닮음이므로 닮음비는

$$h : x$$

이때 넓이의 비는 $h^2 : x^2$ 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 : S(x) = h^2 : x^2$$

$$\therefore S(x) = \frac{\sqrt{3}a^2}{4h^2}x^2$$

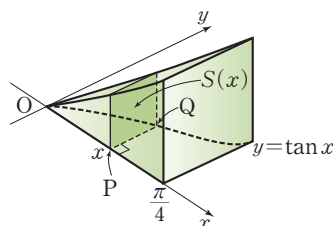
따라서 정삼각뿔의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h S(x) dx = \int_0^h \frac{\sqrt{3}a^2}{4h^2}x^2 dx \\ &= \frac{\sqrt{3}a^2}{4h^2} \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^h = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2h \end{aligned}$$

02-1 [답] $1 - \frac{\pi}{4}$

다음 그림과 같이 x 축 위의 점 $P(x, 0)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$)을 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = \tan x$ 와 만나는 점을 Q 라 하면

$$Q(x, \tan x)$$



이때 $\overline{PQ} = \tan x$ 를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

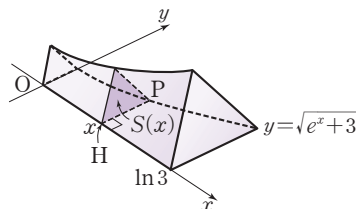
$$S(x) = \tan^2 x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/4} S(x) dx = \int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx \\ &= \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \left[\tan x - x \right]_0^{\pi/4} = 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

02-2 [답] $\frac{\sqrt{3}}{4}(2 + 3\ln 3)$

점 P 의 좌표를 $(x, \sqrt{e^x + 3})$ ($0 \leq x \leq \ln 3$)이라 하면 점 H 의 좌표는 $(x, 0)$



이때 $\overline{PH} = \sqrt{e^x + 3}$ 을 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{e^x + 3})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (e^x + 3)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\ln 3} S(x) dx = \int_0^{\ln 3} \frac{\sqrt{3}}{4} (e^x + 3) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[e^x + 3x \right]_0^{\ln 3} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2 + 3 \ln 3) \end{aligned}$$

2 속도 와 거리

개념 CHECK

217쪽

1 답 $3\sqrt{13}$

$\frac{dx}{dt} = 2, \frac{dy}{dt} = 3$ 이므로 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt &= \int_0^3 \sqrt{2^2 + 3^2} dt \\ &= \int_0^3 \sqrt{13} dt \\ &= \left[\sqrt{13}t \right]_0^3 = 3\sqrt{13} \end{aligned}$$

2 답 $\frac{19}{3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ 이므로 $0 \leq x \leq 5$ 에서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx &= \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx \\ &= \int_0^5 \frac{1}{2} \sqrt{4+x} dx \\ &= \left[\frac{1}{3} (4+x) \sqrt{4+x} \right]_0^5 = \frac{19}{3} \end{aligned}$$

문제

218~220쪽

03-1 답 (1) $\frac{7}{2 \ln 2}$ (2) $\frac{1}{\ln 2} - 1$ (3) $\frac{5}{2 \ln 2} - 1$

$$\begin{aligned} (1) \quad 3 + \int_0^3 (2^{t-1} - 1) dt &= 3 + \left[\frac{2^{t-1}}{\ln 2} - t \right]_0^3 \\ &= \frac{7}{2 \ln 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_1^2 (2^{t-1} - 1) dt &= \left[\frac{2^{t-1}}{\ln 2} - t \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{\ln 2} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \int_0^3 |2^{t-1} - 1| dt &= \int_0^1 (-2^{t-1} + 1) dt + \int_1^3 (2^{t-1} - 1) dt \\ &= \left[-\frac{2^{t-1}}{\ln 2} + t \right]_0^1 + \left[\frac{2^{t-1}}{\ln 2} - t \right]_1^3 \\ &= \frac{5}{2 \ln 2} - 1 \end{aligned}$$

03-2 답 $-\frac{1}{e}$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v(t) = 0$ 에서

$$(t-1)e^{-t} = 0 \quad \therefore t=1 \quad (\because e^{-t} > 0)$$

따라서 원점을 출발하여 $t=1$ 일 때 운동 방향을 바꾸므로 $t=1$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^1 (t-1)e^{-t} dt &= \left[-(t-1)e^{-t} \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-t}) dt \\ &= -1 - \left[e^{-t} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{e} \end{aligned}$$

04-1 답 $e^2 + 1$

$\frac{dx}{dt} = 2t - \frac{2}{t}, \frac{dy}{dt} = 4$ 이므로 $t=1$ 에서 $t=e$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_1^e \sqrt{\left(2t - \frac{2}{t}\right)^2 + 4^2} dt &= \int_1^e \sqrt{4t^2 + 8 + \frac{4}{t^2}} dt \\ &= \int_1^e \sqrt{\left(2t + \frac{2}{t}\right)^2} dt \\ &= \int_1^e \left(2t + \frac{2}{t}\right) dt \\ &= \left[t^2 + 2 \ln |t| \right]_1^e \\ &= e^2 + 1 \end{aligned}$$

04-2 답 $\frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2}$

$\frac{dx}{dt} = e^{2t} - e^2, \frac{dy}{dt} = 2e^{t+1}$ 이므로 $t=0$ 에서 $t=1$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{(e^{2t} - e^2)^2 + (2e^{t+1})^2} dt &= \int_0^1 \sqrt{e^{4t} + 2e^{2t+2} + e^4} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{(e^{2t} + e^2)^2} dt \\ &= \int_0^1 (e^{2t} + e^2) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2t} + e^2 t \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

04-3 ㉡ 4

$\frac{dx}{dt}=2\sqrt{t}$, $\frac{dy}{dt}=-t+1$ 이므로 $t=2$ 에서 $t=a$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_2^a \sqrt{(2\sqrt{t})^2 + (-t+1)^2} dt &= \int_2^a \sqrt{t^2 + 2t + 1} dt \\ &= \int_2^a \sqrt{(t+1)^2} dt \\ &= \int_2^a (t+1) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 + t \right]_2^a \\ &= \frac{a^2}{2} + a - 4\end{aligned}$$

따라서 $\frac{a^2}{2} + a - 4 = 8$ 이므로

$$a^2 + 2a - 24 = 0$$

$$(a+6)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$

05-1 ㉡ (1) $\frac{\pi^2}{32}$ (2) $\frac{15}{8} + \ln 4$

$$(1) \frac{dx}{dt} = \cos t - t \sin t - \cos t = -t \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = -\sin t + \sin t + t \cos t = t \cos t$$

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(-t \sin t)^2 + (t \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{t^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} t dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi^2}{32}\end{aligned}$$

(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{x}$ 이므로 $1 \leq x \leq 4$ 에서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{x}\right)^2} dx \\ &= \int_1^4 \sqrt{\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}} dx \\ &= \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{x}\right)^2} dx \\ &= \int_1^4 \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{x}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{8}x^2 + \ln |x| \right]_1^4 \\ &= \frac{15}{8} + \ln 4\end{aligned}$$

연습문제

221~222쪽

- 1 $2e^4 - \frac{2}{e^4}$ 2 ② 3 $\frac{4\sqrt{3}}{15}$ 4 ② 5 ①
6 ② 7 $\frac{24}{5}$ 8 ③ 9 $\ln 3 - \frac{1}{2}$ 10 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
11 4

- 1 입체도형의 밑면으로부터 높이가 x 인 지점에서의 단면은 가로의 길이가 $\sqrt{e^x + e^{-x}}$, 세로의 길이가 $2\sqrt{e^x + e^{-x}}$ 인 직사각형이므로 그 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = 2(e^x + e^{-x})$$

이때 입체도형의 높이가 4이므로 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned}V &= \int_0^4 S(x) dx \\ &= \int_0^4 2(e^x + e^{-x}) dx \\ &= 2[e^x - e^{-x}]_0^4 \\ &= 2e^4 - \frac{2}{e^4}\end{aligned}$$

- 2 $S(h) = he^{-\frac{1}{3}h}$ 이라 하면

$$\begin{aligned}S'(h) &= e^{-\frac{1}{3}h} - \frac{1}{3}he^{-\frac{1}{3}h} \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}h\right)e^{-\frac{1}{3}h}\end{aligned}$$

$S'(h) = 0$ 에서

$$1 - \frac{1}{3}h = 0 \quad (\because e^{-\frac{1}{3}h} > 0)$$

$$\therefore h = 3$$

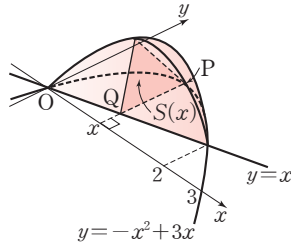
$0 \leq h \leq 6$ 에서 함수 $S(h)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	0	...	3	...	6
$S'(h)$		+	0	-	
$S(h)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $S(h)$ 는 $h=3$ 일 때 최대이므로 이때의 물의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned}V &= \int_0^3 S(h) dh \\ &= \int_0^3 he^{-\frac{1}{3}h} dh \\ &= \left[-3he^{-\frac{1}{3}h} \right]_0^3 - \int_0^3 (-3e^{-\frac{1}{3}h}) dh \\ &= -\frac{9}{e} - \left[9e^{-\frac{1}{3}h} \right]_0^3 \\ &= 9 - \frac{18}{e} (\text{cm}^3)\end{aligned}$$

- 3 곡선 $y = -x^2 + 3x$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면
 $-x^2 + 3x = x, x^2 - 2x = 0$
 $x(x-2) = 0$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$
 점 P의 좌표를 $(x, -x^2 + 3x)$ ($0 \leq x \leq 2$)라 하면 점 Q의
 좌표는 (x, x)



이때 $\overline{PQ} = -x^2 + 2x$ 를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (-x^2 + 2x)^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (x^4 - 4x^3 + 4x^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

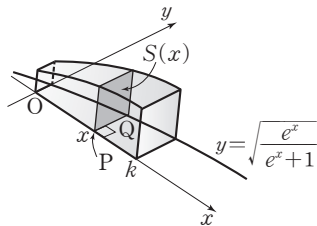
$$V = \int_0^2 S(x) dx$$

$$= \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{4} (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\frac{1}{5} x^5 - x^4 + \frac{4}{3} x^3 \right]_0^2$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{15}$$

- 4 다음 그림과 같이 x 축 위의 점 $P(x, 0)$ ($0 \leq x \leq k$)을 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = \sqrt{\frac{e^x}{e^x + 1}}$ 과 만나는 점을 Q라 하면
 $Q\left(x, \sqrt{\frac{e^x}{e^x + 1}}\right)$



이때 $\overline{PQ} = \sqrt{\frac{e^x}{e^x + 1}}$ 을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \left(\sqrt{\frac{e^x}{e^x + 1}} \right)^2$$

$$= \frac{e^x}{e^x + 1}$$

따라서 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$V = \int_0^k S(x) dx$$

$$= \int_0^k \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$= \left[\ln(e^x + 1) \right]_0^k$$

$$= \ln \frac{e^k + 1}{2}$$

따라서 $\ln \frac{e^k + 1}{2} = \ln 7$ 이므로

$$\frac{e^k + 1}{2} = 7, e^k = 13$$

$$\therefore k = \ln 13$$

- 5 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v(t) = 0$ 에서

$$e^{2t} - e^2 = 0, e^{2t} = e^2$$

$$\therefore t = 1$$

따라서 $t = 1$ 일 때 운동 방향을 바꾸므로 $t = 0$ 에서 $t = 1$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^1 |e^{2t} - e^2| dt = \int_0^1 (-e^{2t} + e^2) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2} e^{2t} + e^2 t \right]_0^1$$

$$= \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}$$

- 6 $t = 0$ 에서의 위치가 0이므로 $t = a$ ($0 < a \leq \pi$)에서의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^a \cos \pi t dt = \left[\frac{1}{\pi} \sin \pi t \right]_0^a = \frac{1}{\pi} \sin a\pi$$

점 P가 원점을 지나려면

$$\frac{1}{\pi} \sin a\pi = 0, \sin a\pi = 0$$

$$\therefore a = 1, 2, 3 \quad (\because 0 < a \leq \pi)$$

따라서 점 P는 원점을 3번 지난다.

- 7 $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{t}, \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2}$ 이므로 $t = 1$ 에서 $t = 5$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^5 \sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2} dt = \int_1^5 \sqrt{1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}} dt$$

$$= \int_1^5 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2} dt$$

$$= \int_1^5 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= \left[t - \frac{1}{t} \right]_1^5$$

$$= \frac{24}{5}$$

- 8 $\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t)$
 $\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t)$
 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s_1 이라 하면

$$\begin{aligned} s_1 &= \int_0^4 \sqrt{\{e^t(\cos t - \sin t)\}^2 + \{e^t(\sin t + \cos t)\}^2} dt \\ &= \int_0^4 \sqrt{2e^{2t}(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^4 e^t dt \\ &= \sqrt{2} \left[e^t \right]_0^4 \\ &= \sqrt{2}(e^4 - 1) \end{aligned}$$

또 $t=4$ 에서 $t=\ln a$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s_2 라 하면

$$\begin{aligned} s_2 &= \int_4^{\ln a} \sqrt{\{e^t(\cos t - \sin t)\}^2 + \{e^t(\sin t + \cos t)\}^2} dt \\ &= \int_4^{\ln a} \sqrt{2e^{2t}(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt \\ &= \sqrt{2} \int_4^{\ln a} e^t dt \\ &= \sqrt{2} \left[e^t \right]_4^{\ln a} \\ &= \sqrt{2}(a - e^4) \end{aligned}$$

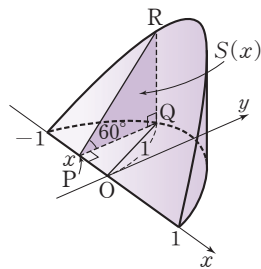
따라서 $\sqrt{2}(e^4 - 1) = \sqrt{2}(a - e^4)$ 이므로

$$\begin{aligned} e^4 - 1 &= a - e^4 \\ \therefore a &= 2e^4 - 1 \end{aligned}$$

- 9 $f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$ 이므로 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 에서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1+x^2}{1-x^2} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-1 + \frac{2}{1-x^2}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{-1 + \frac{2}{(1+x)(1-x)}\right\} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-1 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) dx \\ &= \left[-x + \ln|1+x| - \ln|1-x|\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \ln 3 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- 10 오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을 원점, 밑면의 지름을 x 축으로 정하고, x 축 위의 점 $P(x, 0)$ ($-1 \leq x \leq 1$)을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면을 삼각형 PQR라 하면



$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\overline{RQ} = \overline{PQ} \tan 60^\circ = \sqrt{3} \sqrt{1 - x^2}$$

삼각형 PQR의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{RQ} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - x^2) \end{aligned}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 S(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - x^2) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

- 11 $t=0$ 에서의 위치가 0이므로 $t=a$ ($0 < a \leq \pi$)에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} &0 + \int_0^a \left(\frac{1}{2} \sin 2t - 2 \sin t \right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{4} \cos 2t + 2 \cos t \right]_0^a \\ &= -\frac{1}{4} \cos 2a + 2 \cos a - \frac{7}{4} \\ &= -\frac{1}{4} (2 \cos^2 a - 1) + 2 \cos a - \frac{7}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \cos^2 a + 2 \cos a - \frac{3}{2} \\ &= -\frac{1}{2} (\cos a - 2)^2 + \frac{1}{2} \\ 0 < a \leq \pi &\text{에서 } -1 \leq \cos a < 1 \text{이므로} \\ -3 &\leq \cos a - 2 < -1 \\ 1 < (\cos a - 2)^2 &\leq 9 \\ -\frac{9}{2} &\leq -\frac{1}{2} (\cos a - 2)^2 < -\frac{1}{2} \\ \therefore -4 &\leq -\frac{1}{2} (\cos a - 2)^2 + \frac{1}{2} < 0 \end{aligned}$$

따라서 점 P가 원점에서 가장 멀리 떨어져 있을 때의 위치가 -4 이므로 원점과 점 P 사이의 거리의 최댓값은 $|-4| = 4$

유형편

정답과 해설

I-1 01 수열의 극한

기초 문제 Training

4쪽

- 1 (1) 수렴 (2) 발산 (3) 발산 (4) 수렴
- 2 (1) 6 (2) 3 (3) 0 (4) 7
(5) -2 (6) -1
- 3 (1) 1 (2) 0 (3) -4 (4) 2
- 4 (1) 4 (2) $\frac{1}{2}$ (3) 0 (4) ∞
- 5 2

핵심 유형 Training

5~10쪽

- | | | | | |
|------------------|-------|-------|------------------|----------------------|
| 1 ④ | 2 ③ | 3 15 | 4 ③ | 5 ⑤ |
| 6 $\frac{1}{4}$ | 7 ③ | 8 ⑤ | 9 1 | 10 $\neg$, κ |
| 11 ① | 12 0 | 13 ④ | 14 6 | 15 $\frac{3}{4}$ |
| 16 ③ | 17 -3 | 18 3 | 19 8 | 20 ① |
| 21 $\frac{2}{5}$ | 22 2 | 23 -1 | 24 ⑤ | 25 6 |
| 26 -12 | 27 -3 | 28 6 | 29 $\frac{1}{2}$ | 30 1 |
| 31 ③ | 32 ③ | 33 ① | 34 2 | 35 2 |
| 36 $\frac{1}{2}$ | 37 5 | 38 ④ | 39 $\frac{2}{3}$ | |

- 1 ① 양의 무한대로 발산한다.
② 음의 무한대로 발산한다.

- ③ 발산(진동)한다.
 - ④ 1로 수렴한다.
 - ⑤ 발산(진동)한다.
- 따라서 수렴하는 수열인 것은 ④이다.

- 2 $\neg$. 수열 $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ 의 첫째항부터 차례대로 항을 나열해 보면
 $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$
 즉, n 의 값이 한없이 커질 때 이 수열은 1로 수렴한다.
 κ . 수열 $\{5-3n\}$ 의 첫째항부터 차례대로 항을 나열해 보면
 $2, -1, -4, -7, \dots$
 즉, n 의 값이 한없이 커질 때 이 수열은 음의 무한대로 발산한다.
 ι . 수열 $\{n+2^n\}$ 의 첫째항부터 차례대로 항을 나열해 보면
 $3, 6, 11, 20, \dots$
 즉, n 의 값이 한없이 커질 때 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.
 ϵ . 수열 $\left\{1+\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$ 의 첫째항부터 차례대로 항을 나열해 보면
 $2, \frac{3}{4}, \frac{17}{16}, \frac{63}{64}, \dots$
 즉, n 의 값이 한없이 커질 때 이 수열은 1로 수렴한다.
 따라서 보기 중 발산하는 수열인 것은 $\neg$, ι 이다.

$$3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5a_n^2 b_n^2}{3a_n + 2b_n} = \frac{5 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3}{3 \times 2 + 2 \times 3} = 15$$

$$4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{ (}\alpha \text{는 실수)라 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 6}{5 - a_n} = 2 \text{에서}$$

$$\frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 6}{\lim_{n \rightarrow \infty} 5 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = 2$$

$$\frac{2\alpha + 6}{5 - \alpha} = 2$$

$$2\alpha + 6 = 10 - 2\alpha \quad \therefore \alpha = 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + a_n b_n + b_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n - b_n)^2 + 3a_n b_n\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)^2 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n$$

$$= 4 + 3 \times 1 = 7$$

6 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+2} = \alpha$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 3}{a_{n+2} + 1} = -\frac{5}{3} \text{에서}$$

$$\frac{\alpha - 3}{\alpha + 1} = -\frac{5}{3}, 3\alpha - 9 = -5\alpha - 5$$

$$8\alpha = 4 \quad \therefore \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n a_{n+1} = \alpha^2 = \frac{1}{4}$$

7 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4} \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3a_n + 4}$$

$$\alpha = \sqrt{3\alpha + 4}, \alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$$

$$(\alpha + 1)(\alpha - 4) = 0 \quad \therefore \alpha = -1 \text{ 또는 } \alpha = 4$$

이때 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 양수이므로 $\alpha > 0$

따라서 $\alpha = 4$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$

8 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \alpha$$

이차방정식 $x^2 - a_n x + a_{n+1} - 1 = 0$ 이 중근을 가지므로 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 에서

$$D = a_n^2 - 4(a_{n+1} - 1) = 0$$

$$\therefore a_n^2 - 4a_{n+1} + 4 = 0$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 - 4a_{n+1} + 4) = 0$ 이므로

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0, (\alpha - 2)^2 = 0 \quad \therefore \alpha = 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - a_{2n}) = 3\alpha - \alpha = 2\alpha = 4$$

9 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = 1$

10 $\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3}{4n^3 - n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n^3}}{4 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \frac{1}{2}$

$\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 2n - 4}{n^4 - n^5 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - \frac{2}{n^4} - \frac{4}{n^5}}{\frac{1}{n} - 1 + \frac{5}{n^5}} = 0$

$\neg. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2 - n^2}{6n^2 + n - 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4n + 1}{6n^2 + n - 4}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{6 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)(3n-1)}{(2n+1)(n+2)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 7n + 2}{2n^2 + 5n + 2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

11 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16n^2 - an + 1}}{an^2 + 2n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16 - \frac{a}{n} + \frac{1}{n^2}}}{an + 2 - \frac{1}{n}} = b$

이때 $a \neq 0$ 이면 $b = 0$ 이므로 $a = 0$

$$\therefore b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16 + \frac{1}{n^2}}}{2 - \frac{1}{n}} = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 - 4n + 1}{\sqrt{bn^2 + n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n + 1}{\sqrt{2n^2 + n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4 + \frac{1}{n}}{\sqrt{2 + \frac{1}{n}}} = \frac{-4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

12 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

13 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1+2+3+\cdots+n)}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \times \frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$$

14 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n + b_n = 2n, a_n b_n = \frac{n^2 - 3n}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} + \frac{b_n}{a_n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n b_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + b_n)^2 - 2a_n b_n}{a_n b_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^2 - 2 \times \frac{n^2 - 3n}{2}}{\frac{n^2 - 3n}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 6n}{n^2 - 3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{6}{n}}{1 - \frac{3}{n}} = 6 \end{aligned}$$

15 1부터 $3n$ 까지의 모든 자연수의 합은

$$1+2+3+\cdots+3n=\sum_{k=1}^{3n}k=\frac{3n(3n+1)}{2}$$

1부터 $3n$ 까지의 자연수 중 3의 배수의 합은

$$3+6+9+\cdots+3n=\sum_{k=1}^n3k=3\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore A_n=\frac{3n(3n+1)}{2}-\frac{3n(n+1)}{2}=3n^2$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{4n^2+3n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{4n^2+3n+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}16 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}17 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2-10n}-2n}{\sqrt{9n^2+5n}-3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-10n(\sqrt{9n^2+5n}+3n)}{5n(\sqrt{4n^2-10n}+2n)} \\ &= -2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9+\frac{5}{n}}+3}{\sqrt{4-\frac{10}{n}}+2} \\ &= -2 \times \frac{3}{2} = -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}18 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+an+1}-n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+1}{\sqrt{n^2+an+1}+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}}+1} \\ &= \frac{a}{2}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{2}=\frac{3}{2}$ 이므로 $a=3$

$$\begin{aligned}19 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+1}{\sqrt{4n^2+bn}-2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an+1)(\sqrt{4n^2+bn}+2n)}{bn} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an+1)\left(\sqrt{4+\frac{b}{n}}+2\right)}{b}\end{aligned}$$

이때 $a \neq 0$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로 $a=0$

$$\text{즉, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4+\frac{b}{n}}+2}{b} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{4}{b} = \frac{1}{2} \quad \therefore b=8$$

$$\therefore b-a=8-0=8$$

$$\begin{aligned}20 \quad a_n &= \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}-(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}-(n+1)} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\{\sqrt{n^2+2n}-(n+1)\}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}+(n+1)}{-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1+\frac{1}{n}}{-1} \\ &= -2\end{aligned}$$

21 $x^2+2nx-5n=0$ 을 풀면

$$x = -n \pm \sqrt{n^2+5n}$$

$$\therefore a_n = -n + \sqrt{n^2+5n}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+5n}-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+5n}+n}{5n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1}{5} \\ &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

22 첫째항이 0이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{n\{(n-1) \times 2\}}{2} = n^2 - n$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{S_{n+2}} - \sqrt{S_n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{(n+2)^2 - (n+2)} - \sqrt{n^2 - n}\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+3n+2} - \sqrt{n^2-n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2}{\sqrt{n^2+3n+2} + \sqrt{n^2-n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} = 2\end{aligned}$$

23 $3 \times 5^{n-1}$ 의 양의 약수의 개수 a_n 은

$$a_n = (1+1)\{(n-1)+1\} = 2n$$

$24 \times 15^{n-1}$, 즉 $2^3 \times 3^n \times 5^{n-1}$ 의 양의 약수의 개수 b_n 은

$$b_n = (3+1)(n+1)\{(n-1)+1\} = 4n^2+4n$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \sqrt{b_n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{4n^2+4n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n}{2n + \sqrt{4n^2+4n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4}{2 + \sqrt{4+\frac{4}{n}}} = -1\end{aligned}$$

24 $\frac{3a_n-5}{a_n+1}=b_n$ 으로 놓으면

$$3a_n-5=(a_n+1)b_n \quad \therefore a_n=\frac{b_n+5}{3-b_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n=1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n+5}{3-b_n} \\ &= \frac{1+5}{3-1}=3 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 - a_n + 1) = 9 - 3 + 1 = 7$$

25 $\frac{a_n}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}=b_n$ 으로 놓으면

$$a_n=(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n=4 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})b_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} b_n \\ &= \frac{3}{2} \times 4 = 6 \end{aligned}$$

26 $n^3 a_n = c_n$ 으로 놓으면 $a_n = \frac{c_n}{n^3}$

$$\frac{b_n}{n^2} = d_n \text{으로 놓으면 } b_n = n^2 d_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = -4 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n b_n \left(a_n + \frac{1}{n^3} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n \times n^2 d_n \left(\frac{c_n}{n^3} + \frac{1}{n^3} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_n (c_n + 1) \\ &= -4(2+1) = -12 \end{aligned}$$

27 $2a_n + b_n = c_n$ 으로 놓으면

$$b_n = c_n - 2a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4a_n^2}{b_n} + \frac{b_n^2}{2a_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8a_n^3 + b_n^3}{2a_n b_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2a_n + b_n)(4a_n^2 - 2a_n b_n + b_n^2)}{2a_n b_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + b_n) \left(\frac{2a_n}{b_n} - 1 + \frac{b_n}{2a_n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \left(\frac{2a_n}{c_n - 2a_n} - 1 + \frac{c_n - 2a_n}{2a_n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \left(\frac{2}{\frac{c_n}{a_n} - 2} - 1 + \frac{c_n}{2a_n} - 1 \right) \\ &= 1 \times (-1 - 1 - 1) = -3 \end{aligned}$$

28 $3n^3 - n^2 < a_n < 3n^3 + 2n^2 + n$ 의 각 변에 $\frac{2}{n^3}$ 를 곱하면

$$\frac{6n^3 - 2n^2}{n^3} < \frac{2a_n}{n^3} < \frac{6n^3 + 4n^2 + 2n}{n^3}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - 2n^2}{n^3} = 6, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 + 4n^2 + 2n}{n^3} = 6 \text{이므로}$$

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n}{n^3} = 6$$

29 $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} < \frac{a_n}{n+1} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ 의 각 변에 $\frac{n+1}{\sqrt{n}}$

을 곱하면

$$\frac{(n+1)(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})}{\sqrt{n}} < \frac{a_n}{\sqrt{n}} < \frac{(n+1)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{n+1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})} < \frac{a_n}{\sqrt{n}} < \frac{n+1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$\therefore \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n+\sqrt{n^2+n}}} < \frac{a_n}{\sqrt{n}} < \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+n}}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n+\sqrt{n^2+n}}} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+n}} = \frac{1}{2} \text{이므로 수열의 극한의 대소 관계에}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

30 $\frac{2n-1}{n} < a_n < \frac{2n+1}{n}$ 의 각 변에 n 을 곱하면

$$2n-1 < na_n < 2n+1$$

n 에 1, 2, 3, ..., n 을 차례대로 대입하여 각 변끼리 더하면

$$1 < a_1 < 3$$

$$3 < 2a_2 < 5$$

$$5 < 3a_3 < 7$$

⋮

$$+) 2n-1 < na_n < 2n+1$$

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) < a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n < \sum_{k=1}^n (2k+1)$$

$$\begin{aligned} 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n < a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n \\ < 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + n \end{aligned}$$

$$n^2 < a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n < n^2 + 2n$$

$$\therefore \frac{n^2}{n^2+1} < \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{n^2+1} < \frac{n^2+2n}{n^2+1}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n}{n^2+1} = 1 \text{이므로 수열의 극}$$

한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{n^2+1} = 1$$

31 $\frac{n}{3}-1 < \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \leq \frac{n}{3}$ 이므로

$$\frac{2}{n+3} \left(\frac{n}{3}-1 \right) < \frac{2}{n+3} \times \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \leq \frac{2}{n+3} \times \frac{n}{3}$$

$$\therefore \frac{2n-6}{3n+9} < \frac{2}{n+3} \times \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \leq \frac{2n}{3n+9}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-6}{3n+9} = \frac{2}{3}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n+9} = \frac{2}{3}$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n+3} \times \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \right) = \frac{2}{3}$$

32 ㄱ. [반례] $a_n = n$, $b_n = -n^2$ 이라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty \text{이지만}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n - n^2) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n - (a_n - b_n)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \\ &= a - 0 = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n \times \frac{b_n}{a_n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} \\ &= a \times 1 = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄹ. [반례]} \{a_n\} &: 1, 0, 1, 0, \dots \\ \{b_n\} &: 0, 1, 0, 1, \dots \end{aligned}$$

이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ 이지만 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 모두 발산(진동)한다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

33 ㄱ. $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-|a_n|) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \text{이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. [반례]} a_n &= 1 - \frac{1}{n}, b_n = 1 + \frac{1}{n} \text{이라 하면} \\ a_n &< b_n \text{이지만 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. [반례]} a_n &= n, b_n = 1 \text{이라 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \text{이고 수열 } \{a_n\} &\text{은 발산하지만 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \end{aligned}$$

즉, 수열 $\{b_n\}$ 은 수렴한다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.

34 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 과 직선 $y = nx$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{x} = nx, x^2 = \frac{1}{n} \quad \therefore x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

따라서 두 교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \sqrt{n}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}, -\sqrt{n}\right)$ 이므로

$$l_n = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 + (2\sqrt{n})^2} = \sqrt{\frac{4}{n} + 4n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n^2}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n} + 4n}{2n} = 2$$

35 $y = \frac{1}{2}x^2$ 에서 $y' = x$

곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 에 접하고 기울기가 n 인 접선의 접점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ 이라 하면 $t = n$

기울기가 n 이고 접점의 좌표가 $\left(n, \frac{1}{2}n^2\right)$ 인 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{2}n^2 = n(x - n)$$

$$\therefore y = nx - \frac{1}{2}n^2$$

따라서 $P_n\left(\frac{1}{2}n, 0\right)$, $Q_n\left(0, -\frac{1}{2}n^2\right)$ 이므로

$$\begin{aligned} l_n &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}n\right)^2 + \left(\frac{1}{2}n^2\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n^4} = \frac{1}{2}\sqrt{n^4 + n^2} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4l_n}{n^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n^4 + n^2}}{n^2 + 1} = 2 \end{aligned}$$

36 곡선 $y = nx^2$ 위의 점 중 y 좌표가 1인 점의 x 좌표를 구하면

$$nx^2 = 1, x^2 = \frac{1}{n}$$

$$\therefore x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

이때 점 P_n 은 제1사분면 위의 점이므로

$$P_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, 1\right)$$

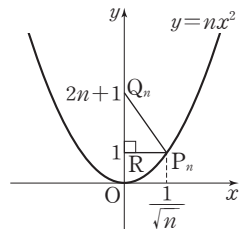
$\overline{P_n R} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\overline{Q_n R} = 2n$ 이므로 삼각형 $P_n Q_n R$ 의 넓이 S_n 은

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times 2n = \sqrt{n}$$

선분 $P_n Q_n$ 의 길이 l_n 은

$$l_n = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + (2n)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} + 4n^2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^2}{l_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\frac{1}{n} + 4n^2}} = \frac{1}{2}$$



- 37** 가로로 놓인 막대의 개수는 $2 \times n \times (n+1)$
 세로로 놓인 막대의 개수는 $(n+1) \times (n+1)$
 높이로 놓인 막대의 개수는 $2 \times n \times (n+1)$
 따라서 입체도형 A_n 을 만드는 데 필요한 막대의 개수 a_n 은

$$a_n = 2n(n+1) + (n+1)^2 + 2n(n+1)$$

$$= 5n^2 + 6n + 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 6n + 1}{n^2} = 5$$

- 38** 곡선 $y = 2x^2 - 2(n+1)x + a_n$ 이 x 축과 만나려면 이차방정식 $2x^2 - 2(n+1)x + a_n = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 할 때, $D_1 \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D_1}{4} = (n+1)^2 - 2a_n \geq 0 \quad \therefore a_n \leq \frac{(n+1)^2}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

곡선 $y = x^2 + 2nx + 2a_n$ 이 x 축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2 + 2nx + 2a_n = 0$ 의 판별식을 D_2 라 할 때, $D_2 < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D_2}{4} = n^2 - 2a_n < 0 \quad \therefore a_n > \frac{n^2}{2} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } \frac{n^2}{2} < a_n \leq \frac{(n+1)^2}{2}$$

$$\therefore \frac{n^2}{2n^2+6} < \frac{a_n}{n^2+3} \leq \frac{n^2+2n+1}{2n^2+6}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2+6} = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n+1}{2n^2+6} = \frac{1}{2}$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2+3} = \frac{1}{2}$$

- 39** 곡선 $y = x^2 - \left(4 + \frac{1}{n}\right)x + \frac{4}{n}$ 와 직선 $y = \frac{1}{n}x + 1$ 이 만나는 두 점 P_n, Q_n 의 x 좌표를 각각 α_n, β_n 이라 하면

$$P_n\left(\alpha_n, \frac{\alpha_n}{n} + 1\right), Q_n\left(\beta_n, \frac{\beta_n}{n} + 1\right)$$

이때 α_n, β_n 은 이차방정식 $x^2 - \left(4 + \frac{1}{n}\right)x + \frac{4}{n} = \frac{1}{n}x + 1$, 즉 $x^2 - \left(4 + \frac{2}{n}\right)x + \frac{4}{n} - 1 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = 4 + \frac{2}{n}$$

삼각형 OP_nQ_n 의 무게중심의 y 좌표 a_n 은

$$a_n = \frac{0 + \left(\frac{\alpha_n}{n} + 1\right) + \left(\frac{\beta_n}{n} + 1\right)}{3} = \frac{1}{3n}(\alpha_n + \beta_n) + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3n}\left(4 + \frac{2}{n}\right) + \frac{2}{3} = \frac{4}{3n} + \frac{2}{3n^2} + \frac{2}{3}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3n} + \frac{2}{3n^2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

I-1 02 등비수열의 극한

기초 문제 Training

11쪽

1 (1) 수렴 (2) 수렴 (3) 발산 (4) 발산

2 (1) 발산 (2) 발산 (3) 수렴 (4) 발산

3 (1) 0 (2) $\frac{1}{7}$ (3) 0 (4) 5

4 (1) $-3 < x \leq 3$ (2) $-\frac{1}{5} \leq x < \frac{1}{5}$
 (3) $0 < x \leq \frac{2}{3}$ (4) $1 \leq x < 7$

핵심 유형 Training

12~14쪽

1 75	2 ③	3 ③	4 3	5 12
6 22	7 ③	8 ④	9 25	10 15
11 4	12 ②	13 2	14 6	15 ⑤
16 -4	17 ⑤	18 ④	19 ②	20 ②

1 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 5^{n+1} - 3^{n+2}}{5^{n-1} + 2^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15 - 9 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n}{\frac{1}{5} + 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n} = 75$

2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n+1} + 2^{2n-1}}{(2^n + 1)(4^n - 2^n + 1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 8^n + \frac{1}{2} \times 4^n}{8^n + 1}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{8}\right)^n} = 2$

3 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+2)\left(\frac{4}{3}\right)^n + \frac{b}{3}}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

이때 $a+2 \neq 0$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로

$$a+2=0 \quad \therefore a=-2$$

이를 ⑦에 대입하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b}{3}}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3} = 1$$

$$\frac{b}{9} = 1 \quad \therefore b = 9$$

$$\therefore a+b = -2+9 = 7$$

$$\begin{aligned}
4 \quad S_n &= \frac{4(3^n - 1)}{3 - 1} \\
&= 2 \times 3^n - 2 \\
\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \times 3^n + 2^n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \times 3^n + 2^n}{2 \times 3^n - 2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{2 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5 \quad (i) \quad n \geq 2 \text{ 일 때,} \\
a_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= 3^{n+1} - 3 - (3^n - 3) \\
&= (3 - 1)3^n = 2 \times 3^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii) \quad n = 1 \text{ 일 때,} \\
a_1 &= S_1 = 9 - 3 = 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(i), (ii) \text{에서 } a_n &= 2 \times 3^n \\
\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n a_{n+1}}{9^n + 3^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 3^n \times 2 \times 3^{n+1}}{9^n + 3^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12 \times 9^n}{9^n + 3^n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6 \quad a_n &= 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 2^n + 3^{n-1} \\
b_n &= 3 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n + 3^{n-1} \\
\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n + 3^{n-1}}{3 \times 2^{n+1} - 2 \times 2^n + 3^{n-1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 - 2 + \frac{1}{3}}{6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}} = 22
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} &\leq \frac{100}{101} \text{의 } n \text{에 } 1, 2, 3, \dots, n-1 \text{을 차례대로 대입} \\
&\text{하여 변끼리 곱하면} \\
\frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \dots \times \frac{a_n}{a_{n-1}} &\leq \left(\frac{100}{101}\right)^{n-1} \\
\therefore \frac{a_n}{a_1} &\leq \left(\frac{100}{101}\right)^{n-1} \\
a_n > 0 \text{이므로 } 0 < a_n &\leq a_1 \times \left(\frac{100}{101}\right)^{n-1} \\
\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \left(\frac{100}{101}\right)^{n-1} &= 0 \text{이므로 수열의 극한의 대소} \\
&\text{관계에 의하여} \\
\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= 0 \\
\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 3n^2 + 1}{a_n + n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2a_n}{n^2} + 3 + \frac{1}{n^2}}{\frac{a_n}{n^2} + 1} = 3
\end{aligned}$$

$$8 \quad \text{등비수열 } \left\{ (x+1) \left(\frac{x-2}{3} \right)^{n-1} \right\} \text{이 수렴하려면}$$

$$x+1=0 \text{ 또는 } -1 < \frac{x-2}{3} \leq 1$$

$$x=-1 \text{ 또는 } -3 < x-2 \leq 3$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 5$$

$$\text{따라서 정수 } x \text{는 } -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{이므로 그 합은} \\
-1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 14$$

$$9 \quad \text{등비수열 } \{ (x-2)(\log_3 x - 2)^{n-1} \} \text{이 수렴하려면}$$

$$x-2=0 \text{ 또는 } -1 < \log_3 x - 2 \leq 1$$

$$x=2 \text{ 또는 } 1 < \log_3 x \leq 3$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } 3 < x \leq 27$$

$$\text{따라서 정수 } x \text{는 } 2, 4, 5, \dots, 27 \text{의 25개이다.}$$

$$10 \quad \text{등비수열 } \left\{ \left(\frac{3x-1}{2} \right)^{n-1} \right\} \text{이 수렴하려면}$$

$$-1 < \frac{3x-1}{2} \leq 1, \quad -2 < 3x-1 \leq 2$$

$$-1 < 3x \leq 3$$

$$\therefore -\frac{1}{3} < x \leq 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \times 3^{n+1} - x^{n+2}}{3^n + x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15 - x^2 \left(\frac{x}{3} \right)^n}{1 + \left(\frac{x}{3} \right)^n} = 15$$

$$11 \quad \text{등비수열 } \{ (f(x))^n \} \text{이 수렴하려면}$$

$$-1 < f(x) \leq 1$$

$$\text{이때 공비가 정수이므로 } f(x)=0 \text{ 또는 } f(x)=1$$

$$\text{방정식 } f(x)=0 \text{을 만족시키}$$

$$\text{는 } x \text{의 값은 함수 } y=f(x) \text{의}$$

$$\text{그래프와 } x \text{축의 교점의 } x \text{좌}$$

$$\text{표와 같으므로 두 근을 } \alpha, \beta$$

$$\text{라 하자.}$$

$$\text{이차함수 } y=f(x) \text{의 그래프}$$

$$\text{는 직선 } x=1 \text{에 대하여 대칭이므로}$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 1 \quad \therefore \alpha + \beta = 2$$

$$\text{방정식 } f(x)=1 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값은 함수 } y=f(x)$$

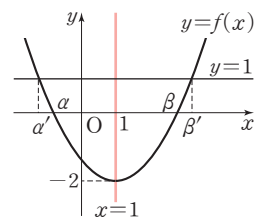
$$\text{의 그래프와 직선 } y=1 \text{의 교점의 } x \text{좌표와 같으므로 두}$$

$$\text{근을 } \alpha', \beta' \text{이라 하면}$$

$$\frac{\alpha' + \beta'}{2} = 1 \quad \therefore \alpha' + \beta' = 2$$

$$\text{따라서 조건을 만족시키는 모든 } x \text{의 값의 합은}$$

$$\alpha + \beta + \alpha' + \beta' = 2 + 2 = 4$$



12 ㄱ. $r > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{1+r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{\frac{1}{r^n} + 1} = r$$

ㄴ. $-1 < r < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{1+r^n} = 0$$

ㄷ. $r < -1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{1+r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{\frac{1}{r^n} + 1} = r$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

13 (i) $|r| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{2n}} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+r^{2n}}{2+r^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{r^{2n}} + 1}{\frac{2}{r^{2n}} + 1} = 1$$

(ii) $|r| = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+r^{2n}}{2+r^{2n}} = \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}$$

(iii) $|r| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+r^{2n}}{2+r^{2n}} = \frac{1}{2}$$

따라서 $a=1$, $b=\frac{2}{3}$, $c=\frac{1}{2}$ 이므로

$$a+3b-2c=1+2-\frac{1}{2}=2$$

14 (i) $0 < r < 6$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{6}\right)^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{r}{6}\right)^{n+1} + 1}{\left(\frac{r}{6}\right)^n + 1} = 1$$

(ii) $r=6$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{6}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{6}\right)^{n+1} = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{r}{6}\right)^{n+1} + 1}{\left(\frac{r}{6}\right)^n + 1} = \frac{1+1}{1+1} = 1$$

(iii) $r > 6$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{r}\right)^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{r}{6}\right)^{n+1} + 1}{\left(\frac{r}{6}\right)^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{r}{6} + \left(\frac{6}{r}\right)^n}{1 + \left(\frac{6}{r}\right)^n} = \frac{r}{6}$$

이때 $r > 6$ 이므로 극한값은 1이 될 수 없다.

(i), (ii), (iii)에서 $0 < r \leq 6$

따라서 정수 r 는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

15 (i) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + 2x - 1}{x^{n+1} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2x}{x^n} - \frac{1}{x^n}}{x + \frac{1}{x^n}} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(ii) $x=1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + 2x - 1}{x^{n+1} + 1} = \frac{1+2-1}{1+1} = 1$$

(iii) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + 2x - 1}{x^{n+1} + 1} = 2x - 1$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (|x| > 1) \\ 1 & (x=1) \\ 2x-1 & (|x| < 1) \end{cases}$$

따라서 $f(-2) = -\frac{1}{2}$, $f(0) = -1$, $f(1) = 1$,

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}$, $f(3) = \frac{1}{3}$ 이므로 옳지 않은 것은 ⑤이다.

$$\begin{aligned} 16 \quad f\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + \frac{1}{2}a + 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + 1} \\ &= \frac{1}{2}a + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1} + 2a + 1}{2^{2n} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + (2a+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n} = 2 \end{aligned}$$

$f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = 1$ 에서

$$\frac{1}{2}a + 1 + 2 = 1 \quad \therefore a = -4$$

17 (i) $x=1$, 2일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 3^{n+1}}{x^n + 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x\left(\frac{x}{3}\right)^n - 3}{\left(\frac{x}{3}\right)^n + 1} = -3 \end{aligned}$$

(ii) $x=3$ 일 때,

$$f(3) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 3^{n+1}}{3^n + 3^n} = 0$$

(iii) $x=4, 5, \dots, 10$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x}\right)^n = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 3^{n+1}}{x^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x - 3 \times \left(\frac{3}{x}\right)^n}{1 + \left(\frac{3}{x}\right)^n} = x$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{10} f(x) = -3 \times 2 + 0 + (4 + 5 + 6 + \dots + 10) \\ = -6 + \frac{7(4+10)}{2} = 43$$

18 (i) $0 < x < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+2} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^{n+2} + 3x - 1}{x^n + 1} = 3x - 1$$

(ii) $x=1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+2} = 1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^{n+2} + 3x - 1}{x^n + 1} = \frac{a + 3 - 1}{1 + 1} = \frac{a + 2}{2}$$

(iii) $x > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^{n+2} + 3x - 1}{x^n + 1} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + \frac{3x}{x^n} - \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{1}{x^n}} = ax^2$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & (0 < x < 1) \\ \frac{a+2}{2} & (x=1) \\ ax^2 & (x > 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} ax^2 = \lim_{x \rightarrow 1-} (3x - 1) = \frac{a+2}{2} \\ \therefore a = 2$$

19 (i) $0 < x < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+3} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+3} + ax^2 + bx}{x^n + 1} = ax^2 + bx$$

(ii) $x=1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+3} = 1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+3} + ax^2 + bx}{x^n + 1} \\ = \frac{1 + a + b}{1 + 1} = \frac{a + b + 1}{2}$$

(iii) $x > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+3} + ax^2 + bx}{x^n + 1} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^3 + \frac{ax^2}{x^n} + \frac{bx}{x^n}}{1 + \frac{1}{x^n}} = x^3$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & (0 < x < 1) \\ \frac{a+b+1}{2} & (x=1) \\ x^3 & (x > 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 연속이다. 따라서 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} x^3 = \lim_{x \rightarrow 1-} (ax^2 + bx) = \frac{a+b+1}{2}$$

$$1 = a + b = \frac{a+b+1}{2} \quad \therefore a + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 $f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & (0 < x < 1) \\ 3x^2 & (x > 1) \end{cases}$ 이고 미분계수 $f'(1)$ 이

존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} 3x^2 = \lim_{x \rightarrow 1-} (2ax + b)$$

$$\therefore 3 = 2a + b \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

$$\therefore a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5$$

20 (i) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n+1}}{1 + x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^{2n+1}} - x}{\frac{1}{x^{2n}} + 1} = -x$$

(ii) $x=1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = 1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n+1}}{1 + x^{2n}} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$$

(iii) $x=-1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = -1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n+1}}{1 + x^{2n}} = \frac{1 - (-1)}{1 + 1} = 1$$

(iv) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n+1}}{1 + x^{2n}} = 1$$

(i)~(iv)에서

$$f(x) = \begin{cases} -x & (|x| > 1) \\ 0 & (x=1) \\ 1 & (-1 \leq x < 1) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽

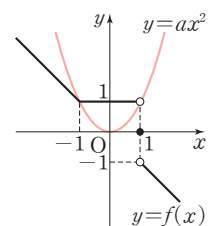
그림과 같으므로 이차함수

$y=ax^2$ ($a>0$)의 그래프와 오직

한 점에서 만나려면

$$0 < a \leq 1$$

따라서 양수 a 의 최댓값은 1이다.



기초 문제 Training

16쪽

- 1 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 0 (3) 1 (4) 7
- 2 (1) $S_n = n^2$ (2) 발산 (3) 발산
- 3 (가) $\frac{n}{3n-1}$ (나) $\frac{1}{3}$ (다) 발산
- 4 (1) -10 (2) 5 (3) 4 (4) -9

핵심 유형 Training

17~20쪽

1 3	2 ③	3 7	4 ⑤	5 ㄱ, ㄴ
6 ③	7 ③	8 ②	9 3	10 -12
11 ④	12 ③	13 ④	14 ⑤	15 50
16 ①	17 ④	18 7	19 ④	
20 ㄱ, ㄴ, ㄷ	21 $\frac{\sqrt{2}}{2}$	22 ④	23 $\frac{1}{2}$	

- 1 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 5$ 이므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 2$
 $= 5 - 2 = 3$
- 2 $S_n = \frac{n^2 + 3}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$
 $= \frac{n^2 + 3}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n^2 + 6}{n^2 + n}$
 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 6}{n^2 + n} = 2$
- 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{1}{6}$
 따라서 $p=6$, $q=1$ 이므로
 $p+q=7$

- 4 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{2}$
 ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{3n+3} + \sqrt{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3n+3} - \sqrt{3n})$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\sqrt{3k+3} - \sqrt{3k})$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{3} + \sqrt{3n+3}) = \infty$
 ㄷ. $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

- 5 주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하자.
 ㄱ. $S_n = \left(2 - \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3} \right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{4} \right)$
 $+ \dots + \left(\frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1} \right)$
 $= 2 - \frac{n+2}{n+1}$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{n+2}{n+1} \right) = 2 - 1 = 1$
 즉, 주어진 급수는 수렴한다.
 ㄴ. (i) $n=2k-1$ (k 는 자연수)일 때,
 $S_{2k-1} = -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$
 $+ \dots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$
 $= -\frac{1}{k+1}$
 $\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{k+1} \right) = 0$
 (ii) $n=2k$ (k 는 자연수)일 때,
 $S_{2k} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)$
 $+ \dots + \left(-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} \right)$
 $= 0$
 $\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = 0$
 (i), (ii)에서 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = 0$ 이므로 주어진 급수는 수렴한다.

ㄷ. (i) $n=2k-1$ (k 는 자연수)일 때,

$$\begin{aligned} S_{2k-1} &= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(-\frac{k-1}{k} + \frac{k}{k+1}\right) \\ &= \frac{k}{k+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

(ii) $n=2k$ (k 는 자연수)일 때,

$$\begin{aligned} S_{2k} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k}{k+1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = 0$$

(i), (ii)에서 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} \neq \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k}$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

따라서 보기 중 수렴하는 급수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

$$\begin{aligned} 6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{2a_n a_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2a_n} - \frac{1}{2a_{n+1}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2n^2+3}{2n^2} - \frac{2(n+1)^2+3}{2(n+1)^2} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{3}{2n^2} - 1 - \frac{3}{2(n+1)^2} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \quad 2+4+6+\cdots+2n &= \sum_{k=1}^n 2k \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+4+6+\cdots+2n} &= \frac{1}{n(n+1)} \\ \therefore 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2+4} + \frac{1}{2+4+6} + \frac{1}{2+4+6+8} + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

8 $a_n = 4 + (n-1) \times 2 = 2n + 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{\sqrt{a_n a_{n+1}}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} - \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+4}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2k+2}} - \frac{1}{\sqrt{2k+4}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{2n+4}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

9 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= -4, \quad a_n b_n = -n^2 + 1 \\ \therefore \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{a_n b_n} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-4}{-n^2 + 1} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{(n-1)(n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n 2 \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 3 \end{aligned}$$

10 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 4b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{3} + 1 \right)$ 이 수렴하므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 4b_n) &= 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_n}{3} + 1 \right) = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_n}{3} + 1 \right) &= 0 \text{에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{3} = -1 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= -3 \\ a_n - 4b_n &= c_n \text{으로 놓으면} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (4b_n + c_n) \\ &= 4 \times (-3) + 0 = -12 \end{aligned}$$

11 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{n+2n+3n+\cdots+n^2}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2} \right)$ 이 수렴하므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{n+2n+3n+\cdots+n^2}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2} \right) &= 0 \\ \frac{a_n}{n} - \frac{n+2n+3n+\cdots+n^2}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2} &= b_n \text{으로 놓으면} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n + \frac{n+2n+3n+\cdots+n^2}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2} \right) \\ &= 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \times \frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

12 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 20$ 이므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + 10a_{n+1}}{2a_n + 5} = \frac{20 + 0}{0 + 5} = 4$

13 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an^2+2}{n^2+n}$ 가 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+2}{n^2+n} = 0$
 $\therefore a = 0$
 $\therefore b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+n}$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2$
 $\therefore a + b = 0 + 2 = 2$

14 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 6^n + 3}{2^n a_n + 3^n b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n b_n} \dots\dots \textcircled{7}$

$$1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} < a_n < \frac{3^n}{2} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2}(3^n - 1) < a_n < \frac{3^n}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n < \left(\frac{1}{3}\right)^n a_n < \frac{1}{2}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} = \frac{1}{2}$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n a_n = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4n^2 - 3n}{2n^2 + 1} < \sum_{k=1}^n b_k < \frac{4n^2 + 5}{2n^2 - 1} \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n}{2n^2 + 1} = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 5}{2n^2 - 1} = 2$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k = 2 \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2$$

즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

따라서 $\textcircled{7}$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 6^n + 3}{2^n a_n + 3^n b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n b_n} \\ &= \frac{2 + 0}{\frac{1}{2} + 0} \end{aligned}$$

15 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = p$, 즉 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

또 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = p$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = p$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + S_{n+1} - 2a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 5 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} \text{에서}$$

$$p + p - 0 = 5 \quad \therefore p = \frac{5}{2}$$

$$\therefore 20p = 20 \times \frac{5}{2} = 50$$

16 $a_n - 2b_n = c_n$ 으로 놓으면

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} a_n - \frac{1}{2} c_n \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \\ &= \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times 8 = -3 \end{aligned}$$

17 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = 1 \text{에서}$$

$$\alpha - \beta = 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 3b_n) = -2 \text{에서}$$

$$2\alpha - 3\beta = -2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $\alpha = 5, \beta = 4$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta = 9$$

18 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n-1)^2 a_n = 0$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_{n+1} = 0$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n - a_{n+1})$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 - a_2) + 4(a_2 - a_3) + 9(a_3 - a_4) \\ &\quad + \cdots + (n-1)^2 (a_{n-1} - a_n) + n^2 (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 + 3a_2 + 5a_3 + \cdots + (2n-1)a_n - n^2 a_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n (2k-1)a_k - n^2 a_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n - a_{n+1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n (2k-1)a_k - n^2 a_{n+1} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_{n+1} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} na_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_{n+1} \\ &= 2 \times 6 - 5 - 0 = 7 \end{aligned}$$

19 $\neg$. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \{b_n + (a_n - b_n)\} \\ = \alpha + \beta$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 도 수렴한다.

$\neg$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ = 0 \times 0 = 0$$

$\sqsubset$. [반례] $\{a_n\}: 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

$\{b_n\}: 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

이라 하면 $a_n b_n = 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 수렴하지만

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \text{이고 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \text{이다.}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

20 $\neg$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{a_n} \\ = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \frac{0}{3} = 0$$

$\neg$. $a_n + 2b_n = c_n$, $2a_n - b_n = d_n$ 으로 놓고 두 식을 연립하여 풀면

$$a_n = \frac{1}{5}c_n + \frac{2}{5}d_n, b_n = \frac{2}{5}c_n - \frac{1}{5}d_n$$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}c_n + \frac{2}{5}d_n \right) \\ = \frac{1}{5}\alpha + \frac{2}{5}\beta$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}c_n - \frac{1}{5}d_n \right) \\ = \frac{2}{5}\alpha - \frac{1}{5}\beta$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 도 모두 수렴한다.

$\sqsubset$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$$

$$= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \dots < 0$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, $\neg$, $\sqsubset$ 이다.

21 $P_n(n, \sqrt{n})$ 이므로

$$l_n = \overline{OP}_n = \sqrt{n^2 + (\sqrt{n})^2} = \sqrt{n^2 + n}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_{n+1} - l_n}{l_n l_{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l_n} - \frac{1}{l_{n+1}} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} - \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2 + (n+1)}} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} - \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

22 $nx + ny + y - 2 = 0$ 에 $y = 0$ 을 대입하면 $nx - 2 = 0$

$$\therefore x = \frac{2}{n} \quad \therefore A_n \left(\frac{2}{n}, 0 \right)$$

$nx + ny + y - 2 = 0$ 에 $x = 0$ 을 대입하면 $ny + y - 2 = 0$

$$\therefore y = \frac{2}{n+1} \quad \therefore B_n \left(0, \frac{2}{n+1} \right)$$

따라서 삼각형 $OA_n B_n$ 의 넓이 S_n 은

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{2}{n} \times \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2$$

23 원점을 지나고 원에 접하는 직선의 기울기가 a_n 이므로 직선의 방정식은 $y = a_n x$

원 $(x - 2n)^2 + y^2 = 1$ 의 중심의 좌표는 $(2n, 0)$, 반지름의 길이는 1이고 원의 중심과 직선 $y = a_n x$, 즉

$a_n x - y = 0$ 사이의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|2na_n|}{\sqrt{a_n^2 + (-1)^2}} = 1$$

$$|2na_n| = \sqrt{a_n^2 + 1}$$

양변을 제곱하면 $4n^2 a_n^2 = a_n^2 + 1$

$$(4n^2 - 1)a_n^2 = 1 \quad \therefore a_n^2 = \frac{1}{4n^2 - 1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

기초 문제 Training

21쪽

- 1 (1) 발산 (2) 수렴 (3) 수렴 (4) 발산
(5) 발산 (6) 수렴
- 2 (1) $\frac{3}{2}$ (2) $-\frac{3}{7}$ (3) 4 (4) $\frac{4}{3}$
- 3 (1) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ (2) $-5 < x < 5$
(3) $-1 < x < 1$ (4) $0 < x < 2$
- 4 (가) 0.36 (나) 100 (다) $\frac{1}{100}$ (라) $\frac{4}{11}$

핵심 유형 Training

22~26쪽

- 1 ㄴ, ㄷ 2 29 3 ⑤ 4 $-\frac{6}{5}$ 5 $-\frac{1}{3}$
6 $\frac{11}{120}$ 7 $\frac{1}{4}$ 8 ② 9 $\frac{100}{3}$ 10 3
11 ③ 12 ④ 13 ㄱ, ㄷ 14 ② 15 ㄷ
16 ① 17 ③ 18 ① 19 ① 20 ①
21 80 22 1 23 ④ 24 $\frac{2}{3}$ 25 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
26 $\frac{25}{48}\pi$ 27 $32-8\pi$

1 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 2$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= 2 \times \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{ㄴ. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - 2 \times \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ㄷ. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{-\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

2 $\sum_{n=1}^{\infty} (3^n - 1) \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

$$= \frac{3}{1 - \frac{3}{5}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{5}}$$

$$= \frac{15}{2} - \frac{5}{4} = \frac{25}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=25$ 이므로 $p+q=29$

3 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n\pi}{5}\right)^n$

$$= \frac{1 + \cos \pi}{5} + \left(\frac{1 + \cos 2\pi}{5}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 3\pi}{5}\right)^3$$

$$+ \left(\frac{1 + \cos 4\pi}{5}\right)^4 + \dots$$

$$= 0 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + 0 + \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \dots$$

$$= \frac{\frac{4}{25}}{1 - \frac{4}{25}} = \frac{4}{21}$$

4 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비는 $\frac{a_2}{a_1} = -\frac{2}{3}$ 이므로

$$a_n = 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= 3 \times \frac{-\frac{2}{3}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{6}{5}$$

5 수열 $\{a_n\}$ 은 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...이므로

$$\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} - \frac{a_4}{2^4} + \frac{a_5}{2^5} - \frac{a_6}{2^6} + \dots$$

$$= 0 - \frac{1}{2^2} + 0 - \frac{1}{2^4} + 0 - \frac{1}{2^6} + \dots$$

$$= -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots\right)$$

$$= -\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{1}{3}$$

6 $n=2$ 일 때, $(-5)^2$ 의 제곱근 중 실수인 것은 ± 5 이므로
 $a_2=2$
 $n=3$ 일 때, $(-5)^3$ 의 세제곱근 중 실수인 것은 -5 이므로
 $a_3=1$
 $n=4$ 일 때, $(-5)^4$ 의 네제곱근 중 실수인 것은 ± 5 이므로
 $a_4=2$

$n=5$ 일 때, $(-5)^5$ 의 5제곱근 중 실수인 것은 -5 이므로

$$a_5=1$$

$\vdots$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{5^n} &= \frac{2}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{2}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \cdots \\ &= \left(\frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^4} + \frac{2}{5^6} + \cdots \right) + \left(\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{5^7} + \cdots \right) \\ &= \frac{\frac{2}{25}}{1 - \frac{1}{25}} + \frac{\frac{1}{125}}{1 - \frac{1}{25}} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{120} \\ &= \frac{11}{120}\end{aligned}$$

7 $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_n a_{n+1} = 2^n$ 에서 $a_{n+1} = \frac{2^n}{a_n}$ 이므로

$$a_2 = \frac{2}{a_1} = 8$$

$$a_3 = \frac{4}{a_2} = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{8}{a_3} = 16$$

$$a_5 = \frac{16}{a_4} = 1$$

$$a_6 = \frac{32}{a_5} = 32$$

$\vdots$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2n}} &= \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6} + \cdots \\ &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots \\ &= \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n + (-x)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x}{4} \right)^n$

$$= \frac{\frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}} + \frac{-\frac{x}{4}}{1 + \frac{x}{4}}$$

$$= \frac{x}{2-x} - \frac{x}{4+x}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x}{-x^2 - 2x + 8}$$

$$\text{즉, } \frac{2x^2 + 2x}{-x^2 - 2x + 8} = \frac{2}{9} \text{이므로}$$

$$10x^2 + 11x - 8 = 0, (5x+8)(2x-1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} (\because 0 < x < 2)$$

9 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10 \text{에서}$$

$$\frac{a}{1-r} = 10 \quad \therefore a = 10(1-r) \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

수열 $\{a_{3n}\}$ 은 첫째항이 ar^2 , 공비가 r^3 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{3n} = \frac{10}{7} \text{에서}$$

$$\frac{ar^2}{1-r^3} = \frac{10}{7} \quad \therefore 7ar^2 = 10(1-r^3)$$

$\textcircled{7}$ 을 대입하면

$$70(1-r)r^2 = 10(1-r^3)$$

$$7(1-r)r^2 = (1-r)(1+r+r^2)$$

$$7r^2 = 1+r+r^2 (\because 0 < r < 1)$$

$$6r^2 - r - 1 = 0, (3r+1)(2r-1) = 0$$

$$\therefore r = \frac{1}{2} (\because 0 < r < 1)$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $a = 5$

따라서 $a_n = 5 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 5 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 25 \times \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \\ &= \frac{25}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{100}{3}\end{aligned}$$

10 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\textcircled{7}\text{에서 } \frac{a}{1-r} = 2(a+ar)$$

$$2(1+r)(1-r) = 1 (\because a > 0)$$

$$1-r^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore r^2 = \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{7}\text{에서 } \frac{a^2}{1-r^2} = 2(a+ar^2)$$

$$2(1+r^2)(1-r^2) = a (\because a > 0)$$

$\textcircled{7}$ 을 대입하면

$$a = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 a , 공비가 r^2 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \frac{a}{1-r^2} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

11 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log_2 x - 3}{2} \right)^{n-1}$ 이 수렴하려면

$$-1 < \frac{\log_2 x - 3}{2} < 1$$

$$-2 < \log_2 x - 3 < 2, 1 < \log_2 x < 5$$

$$\therefore 2 < x < 32$$

따라서 정수 x 는 3, 4, 5, ..., 31의 29개이다.

12 등비수열 $\{x(x-1)^{n-1}\}$ 이 수렴하려면

$$x=0 \text{ 또는 } -1 < x-1 \leq 1$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (x^2+x-1)^{n-1}$ 이 수렴하려면

$$-1 < x^2+x-1 < 1$$

$$(i) \ x^2+x-1 > -1 \text{에서 } x(x+1) > 0$$

$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 0$$

$$(ii) \ x^2+x-1 < 1 \text{에서 } (x+2)(x-1) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 1$$

$$(i), (ii) \text{에서 } -2 < x < -1 \text{ 또는 } 0 < x < 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

따라서 구하는 x 의 값의 범위는 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서

$$0 < x < 1$$

13 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하므로 $-1 < r < 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2}$ 은 공비가 r 인 등비급수이므로 $\textcircled{㉢}$ 에서

$$-1 < r < 1$$

즉, 주어진 급수는 반드시 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2r-3}{4}\right)^n$ 은 공비가 $\frac{2r-3}{4}$ 인 등비급수이므로 $\textcircled{㉢}$

에서

$$-\frac{5}{4} < \frac{2r-3}{4} < -\frac{1}{4}$$

즉, 주어진 급수는 수렴하지 않는 경우가 있다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2}+1\right)^n$ 은 공비가 $\frac{r}{2}+1$ 인 등비급수이므로 $\textcircled{㉢}$ 에서

$$\frac{1}{2} < \frac{r}{2}+1 < \frac{3}{2}$$

즉, 주어진 급수는 수렴하지 않는 경우가 있다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n-1}$ 은 공비가 r^2 인 등비급수이므로 $\textcircled{㉢}$ 에서

$$0 \leq r^2 < 1$$

즉, 주어진 급수는 반드시 수렴한다.

따라서 보기 중 반드시 수렴하는 급수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

14 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a^n, \sum_{n=1}^{\infty} b^n$ 이 모두 수렴하므로

$$-1 < a < 1, -1 < b < 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} (ab)^n$ 은 공비가 ab 인 등비급수이므로 $\textcircled{㉣}$ 에서

$$-1 < ab < 1$$

즉, 주어진 급수는 반드시 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$ 은 공비가 $\frac{a+b}{2}$ 인 등비급수이므로 $\textcircled{㉣}$ 에

서

$$-1 < \frac{a+b}{2} < 1$$

즉, 주어진 급수는 반드시 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a-b)^n$ 은 공비가 $a-b$ 인 등비급수이므로 $\textcircled{㉣}$ 에서

$$-2 < a-b < 2$$

즉, 주어진 급수는 수렴하지 않는 경우가 있다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a^2-b^2)^n$ 은 공비가 a^2-b^2 인 등비급수이므로 $\textcircled{㉣}$

에서

$$-1 < a^2-b^2 < 1$$

즉, 주어진 급수는 반드시 수렴한다.

따라서 보기 중 반드시 수렴하는 급수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

15 ㄱ. [반례] $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n, b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

은 모두 수렴하지만 $\frac{a_n}{b_n} = 2^n$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 은 발산한

다.

ㄴ. [반례] $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1}$ 이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 모두 발산하지만 $a_n + b_n = 0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 은 수렴한다.

ㄷ. 두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 공비를 각각 a, b 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^3 \text{이 모두 수렴하므로}$$

$$-1 < a^3 < 1, -1 < b^3 < 1$$

$$\therefore -1 < a < 1, -1 < b < 1$$

따라서 $-1 < ab < 1$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 수렴한다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.

16 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하므로 $-1 < r < 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = k$ (k 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned} k &= \frac{r}{1-r} \\ &= \frac{-(1-r)+1}{1-r} \\ &= -\frac{1}{r-1} - 1 \end{aligned}$$

$$-1 < r < 1 \text{에서 } k = -\frac{1}{r-1} - 1$$

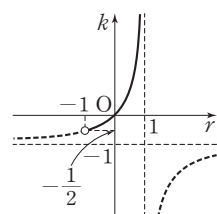
의 그래프는 오른쪽 그림과 같으

므로

$$k > -\frac{1}{2}$$

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 의 합이 될

수 없는 것은 ①이다.



17 $0.\dot{5}4=0.5444\cdots$

$$=0.5+0.04+0.004+0.0004+\cdots$$

$$=\frac{5}{10}+\frac{\frac{4}{100}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{5}{10}+\frac{4}{90}=\frac{49}{90}$$

18 $0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, $0.\dot{0}3\dot{7}=\frac{37}{999}=\frac{1}{27}$ 이므로 공비를 r 라 하면

$$\frac{1}{3}r^2=\frac{1}{27} \quad \therefore r=\frac{1}{3} \quad (\because r>0)$$

따라서 구하는 등비급수의 합은

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}=0.5$$

19 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비를 r 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=0.\dot{6}\text{에서 } 0.\dot{6}=\frac{2}{3}\text{이므로}$$

$$\frac{r}{1-r}=\frac{2}{3}$$

$$3r=2-2r \quad \therefore r=\frac{2}{5}$$

$$\text{따라서 } a_n=\left(\frac{2}{5}\right)^n \text{이므로}$$

$$a_2=\frac{4}{25}=0.16$$

20 점 P_n 이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x=\overline{OP_1}+\overline{P_1P_3}+\overline{P_4P_5}+\cdots$$

$$=1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9}{5}$$

$$y=\overline{P_1P_2}+\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}+\cdots$$

$$=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^5+\cdots$$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{6}{5}$$

따라서 점 P_n 이 한없이 가까워지는 점의 좌표는

$$\left(\frac{9}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

21 $a=\overline{OP_1}\cos 45^\circ+\overline{P_1P_2}\cos 45^\circ+\overline{P_2P_3}\cos 45^\circ+\cdots$

$$=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times 6\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 6\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}}=6\sqrt{2}$$

$$b=\overline{OP_1}\sin 45^\circ-\overline{P_1P_2}\sin 45^\circ+\overline{P_2P_3}\sin 45^\circ-\cdots$$

$$=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times 6\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 6\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\cdots$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore a^2+b^2=(6\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2=80$$

22 직각이등변삼각형 ABC에서 $\angle CAB=45^\circ$ 이므로

$$\overline{BC}=\overline{AC}\sin 45^\circ=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$$

삼각형의 중점 연결 정리에 의하여 삼각형 ABC에서

$$\overline{B_1C_1}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}$$

삼각형 AB_1C_1 에서

$$\overline{B_2C_2}=\frac{1}{2}\overline{B_1C_1}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

삼각형 AB_2C_2 에서

$$\overline{B_3C_3}=\frac{1}{2}\overline{B_2C_2}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$\vdots$

$$\therefore \overline{B_1C_1}+\overline{B_2C_2}+\overline{B_3C_3}+\cdots=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

23 진자가 움직인 거리의 합은 반지름의 길이가 12인 부채꼴의 호의 길이의 합과 같으므로

$$12\times\frac{\pi}{3}+2\times 12\times\frac{\pi}{3}\times\frac{3}{4}+2\times 12\times\frac{\pi}{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$+2\times 12\times\frac{\pi}{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^3+\cdots$$

$$=4\pi+\frac{6\pi}{1-\frac{3}{4}}=28\pi$$

24 삼각형 $A_1B_1D_1$ 의 넓이 S_1 은

$$S_1=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$$

두 삼각형 $A_nB_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}D_{n+1}$ 은 닮음이고 닮음비가 2 : 1이므로 넓이의 비는 4 : 1이다.

$$\therefore S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

25 정삼각형 A_1 의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$$

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 A_1 에 내접하는 원 C_1 의 반지름의 길이를 r_1 이라 하면

$$r_1 = 2 \times \frac{1}{2} \times \tan 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}$$

오른쪽 그림과 같이 원 C_1 에 내접하는 정삼각형 A_2 의 한 변의 길이는

$$2 \times r_1 \times \cos 30^\circ = 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

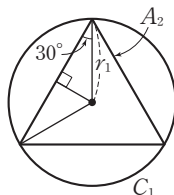
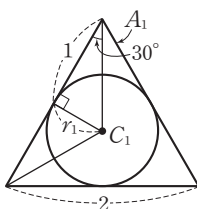
두 정삼각형 A_n, A_{n+1} 은 닮음이고

닮음비가 2 : 1이므로 넓이의 비는 4 : 1이다.

따라서 구하는 모든 정삼각형의 넓이의 합은 첫째항이 $\sqrt{3}$,

공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비급수의 합과 같으므로

$$\frac{\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$



26 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에 내접하는 반원의 반지름의 길이는 1이므로 그림 R_1 에 색칠된 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{2}$$

선분 B_1C_1 을 지름으로 하는 반원의 중심을 O_1 , 점 C_2 에서 선분 B_1C_1 에 내린 수선의 발을 P_1 이라 하자.

$\overline{A_1B_2} = x$ ($0 < x < 1$)라 하면

$$\overline{A_1D_2} = 2x$$

직각삼각형 $C_2P_1O_1$ 에서 $\overline{C_2P_1} = 1 - x$, $\overline{P_1O_1} = 1 - 2x$,

$\overline{C_2O_1} = 1$ 이므로

$$(1 - x)^2 + (1 - 2x)^2 = 1^2$$

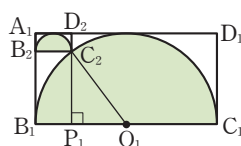
$$5x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$(5x - 1)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{5} \quad (\because 0 < x < 1)$$

두 직사각형 $A_1B_nC_nD_n, A_1B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 은 닮음이고 닮음비가 5 : 1이다.

즉, 그림 R_n 에 새로 색칠된 반원과 그림 R_{n+1} 에 새로 색칠된 반원의 닮음비는 5 : 1이므로 넓이의 비는 25 : 1이다.



따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 은 첫째항이 $\frac{\pi}{2}$, 공비가 $\frac{1}{25}$ 인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{25\pi}{48}$$

27 n 번째에 새로 색칠된 도형의 넓이를 S_n 이라 하자.

첫 번째로 색칠된 도형의 넓이는 한 변의 길이가 4인 정사각형의 넓이에서 반지름의 길이가 2인 원의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$S_1 = 4^2 - \pi \times 2^2 = 16 - 4\pi$$

두 번째에 새로 색칠된 도형 1개의 넓이는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 정사각형의 넓이에서 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 원의 넓이를 뺀 것과 같고 도형의 개수가 4이므로

$$S_2 = 4 \times \left\{ (\sqrt{2})^2 - \pi \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right\} = 8 - 2\pi$$

세 번째에 새로 색칠된 도형 1개의 넓이는 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 정사각형의 넓이에서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$ 인 원의 넓이를 뺀 것과 같고 도형의 개수가 4×4 이므로

$$S_3 = 4 \times 4 \times \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \pi \times \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right\} = 4 - \pi$$

⋮

따라서 구하는 모든 도형의 넓이의 합은

$$(16 - 4\pi) + (8 - 2\pi) + (4 - \pi) + \dots = \frac{16 - 4\pi}{1 - \frac{1}{2}} = 32 - 8\pi$$

다른 풀이

첫 번째로 색칠된 도형의 넓이는 한 변의 길이가 4인 정사각형의 넓이에서 반지름의 길이가 2인 원의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$4^2 - \pi \times 2^2 = 16 - 4\pi$$

첫 번째로 색칠된 도형과 두 번째에 새로 색칠된 도형 1개는 닮음이고 닮음비는 정사각형의 한 변의 길이의 비와 같으므로 4 : $\sqrt{2}$ 이다.

즉, 넓이의 비는 $16 : 2 = 8 : 1$ 이고 색칠된 도형의 개수는 4배씩 늘어난다.

따라서 구하는 모든 도형의 넓이의 합은 첫째항이

$$16 - 4\pi, \text{ 공비가 } \frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2} \text{인 등비급수의 합과 같으므로}$$

$$\frac{16 - 4\pi}{1 - \frac{1}{2}} = 32 - 8\pi$$

II-1 01 지수함수와 로그함수의 미분

기초 문제 Training

28쪽

- 1 (1) ∞ (2) 0 (3) 0 (4) $\frac{1}{36}$
- 2 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) $-\infty$ (4) -1
- 3 (1) e^2 (2) e^5
- 4 (1) 4 (2) $\frac{1}{3}$ (3) -2 (4) 4
- 5 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{\ln 5}$ (4) $\ln 10$
- 6 (1) $y' = 2x + e^x$ (2) $y' = 3^x \ln 3$
 (3) $y' = 2^x \ln 2 + \frac{1}{x}$ (4) $y' = \frac{1}{x \ln 3}$

핵심 유형 Training

29~34쪽

- | | | | |
|-------------|-----------------------|------------------|-----------------|
| 1 ㄱ, ㄴ, ㄷ | 2 ㉔ | 3 ㉑ | 4 ㉔ |
| 5 ㉓ | 6 50 | 7 $-\frac{1}{4}$ | 8 $\frac{1}{4}$ |
| 10 e^2 | 11 ㉔ | 12 $\frac{3}{4}$ | 13 -1 |
| 15 ㉔ | 16 $\frac{10}{\ln 2}$ | 17 2 | 18 2 |
| 20 -36 | 21 8 | 22 3 | 23 ㉔ |
| 25 3 | 26 $\frac{1}{2}$ | 27 6 | 28 ㉔ |
| 30 ㉔ | 31 4 | 32 ㉔ | 33 ㉓ |
| 35 $-10e^2$ | 36 ㉔ | 37 ㉔ | 38 ㉔ |
| 40 7 | 41 -1 | | |

- 1 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1}}{5^x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^x}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^x} = 0$
 ㄴ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x}{2^x - 2^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x}{4^x - 1} = 0$
 ㄷ. $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{3^x} + 2^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{3^x} + 1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3^t + 2^t}{3^t + 1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^t}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^t} = 1$$

ㄷ. $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - 7^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{1}{1 - 7^t} = \infty$$

따라서 보기 중 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

- 2 $\lim_{x \rightarrow \infty} (4^x - 2^x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[4^x \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \right\} \right]^{\frac{1}{2x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \right\}^{\frac{1}{2x}}$$

$$= 2 \times 1 = 2$$
- 3 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \times 3^{x+1} + 12}{3^x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3a + 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x}{1 + 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x} = 3a$
 따라서 $3a = 15$ 이므로
 $a = 5$
- 4 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{ \log_2 (2x^2 + x + 3) - 2 \log_2 (2x + 1) \}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{2x^2 + x + 3}{(2x + 1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{2x^2 + x + 3}{4x^2 + 4x + 1}$$

$$= \log_2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x + 3}{4x^2 + 4x + 1}$$

$$= \log_2 \frac{1}{2} = -1$$
- 5 $\lim_{x \rightarrow -2} (\log_4 |x^2 - 4| - \log_4 |x + 2|)$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \log_4 \left| \frac{x^2 - 4}{x + 2} \right|$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \log_4 \left| \frac{(x + 2)(x - 2)}{x + 2} \right|$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \log_4 |x - 2|$$

$$= \log_4 \lim_{x \rightarrow -2} |x - 2|$$

$$= \log_4 4 = 1$$

- 6 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \log_5 (ax - 1) - \frac{1}{2} \log_5 (4x^2 + 1) \right\}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_5 \frac{ax - 1}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$= \log_5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - 1}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$= \log_5 \frac{a}{2}$$

따라서 $\log_5 \frac{a}{2} = 2$ 이므로

$$\frac{a}{2} = 25 \quad \therefore a = 50$$

$$\begin{aligned}
 7 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{4x}\right) \left(1 - \frac{1}{2x}\right) \right\}^x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^x \times \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^x \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left\{ \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^{4x} \right\}^{\frac{1}{4}} \times \left\{ \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{-2x} \right\}^{-\frac{1}{2}} \right] \\
 &= e^{\frac{1}{4}} \times e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{4}} \\
 \therefore a &= -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+ax)^{\frac{3}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+ax)^{\frac{1}{ax}} \right\}^{3a} = e^{3a} \\
 \text{따라서 } e^{3a} &= e^{\frac{3}{4}} \text{이므로 } a = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(2x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{2x-1} \right)^{2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-1}{2x} \right)^{-2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{2x} \right)^{-2x} \\
 \text{이때 } -x &= t \text{로 놓으면 } x = -t \text{이고, } x \rightarrow -\infty \text{일 때} \\
 t &\rightarrow \infty \text{이므로 구하는 극한값은} \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{2x} \right)^{-2x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2t} \right)^{2t} = e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10 \quad S_n &= \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1} \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2S_n} \right)^{4n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^{4n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{4n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n} \right\}^2 = e^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11 \quad x-2=t \text{로 놓으면 } x &= 2+t \text{이고, } x \rightarrow 2 \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \sqrt{x-1}}{x-2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{1+t}}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \ln(1+t)}{t} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax}-1}{x^3+2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{ax}-1}{ax} \times \frac{a}{x^2+2} \right) = 1 \times \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \\
 \text{즉, } \frac{a}{2} &= 2 \text{이므로 } a = 4 \\
 \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{ax} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{4x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times \frac{3}{4} \\
 &= 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{\ln(1+ax)-\ln(1-2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\ln(1+ax)}{ax} \times a + \frac{\ln(1-2x)}{-2x} \times 2} \\
 &= \frac{1}{1 \times a + 1 \times 2} = \frac{1}{a+2} \\
 \text{따라서 } \frac{1}{a+2} &= 1 \text{이므로 } a = -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14 \quad y &= e^{\frac{x}{2}} - 1 \text{이라 하면 } e^{\frac{x}{2}} = y+1 \\
 \frac{x}{2} &= \ln(y+1) \quad \therefore x = 2 \ln(y+1) \\
 \text{따라서 } g(x) &= 2 \ln(x+1) \text{이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(2x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(2x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times 4 \\
 &= 1 \times 4 = 4
 \end{aligned}$$

$$15 \quad ① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x-1}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x-1}{x} \times \frac{1}{5} = \ln 5 \times \frac{1}{5} = \frac{\ln 5}{5}$$

$$\begin{aligned}
 ② \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+x)}{\log_9(1-x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log_3(1+x)}{x} \times \frac{-x}{\log_9(1-x)} \times (-1) \right\} \\
 &= \frac{1}{\ln 3} \times \ln 9 \times (-1) = -\frac{2 \ln 3}{\ln 3} = -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ③ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4^x-1) \log_2(1+x)}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{4^x-1}{x} \times \frac{\log_2(1+x)}{x} \right\} \\
 &= \ln 4 \times \frac{1}{\ln 2} = \frac{2 \ln 2}{\ln 2} = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ④ \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-2^{-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1-2^{-x}+1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{-x}-1}{-x} \\
 &= 1 + \ln 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ⑤ \quad x+1=t \text{로 놓으면 } x &= t-1 \text{이고, } x \rightarrow -1 \text{일 때 } t \rightarrow 0 \\
 \text{이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\log_2(x+2)}{x+1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+t)}{t} = \frac{1}{\ln 2} \\
 \text{따라서 옳지 않은 것은 } &④ \text{이다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+x) + \log_2(1+2x) + \log_2(1+3x) + \log_2(1+4x)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+x)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+2x)}{2x} \times 2 \\
 &\quad + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+3x)}{3x} \times 3 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+4x)}{4x} \times 4 \\
 &= \frac{1}{\ln 2} + \frac{2}{\ln 2} + \frac{4}{\ln 2} + \frac{4}{\ln 2} = \frac{10}{\ln 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+8)^x - a^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+8)^x - 1 - a^x + 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+8)^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \\
 &= \ln(a+8) - \ln a = \ln \frac{a+8}{a}
 \end{aligned}$$

따라서 $\ln \frac{a+8}{a} = \ln 5$ 이므로

$$\frac{a+8}{a} = 5, a+8=5a \quad \therefore a=2$$

18 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{ax+b}-2) = 0$$

$$\sqrt{b}-2=0 \quad \therefore b=4$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+4}-2}{\ln(1+4x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{(\sqrt{ax+4}-2) \ln(1+4x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{ax+4}-2} \times \frac{4x}{\ln(1+4x)} \times \frac{a}{4} \right\}$$

$$= \frac{1}{4} \times 1 \times \frac{a}{4} = \frac{a}{16}$$

$$\text{즉, } \frac{a}{16} = \frac{1}{8} \text{ 이므로 } a=2$$

$$\therefore b-a=4-2=2$$

19 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x} - a) = 0$$

$$1+1-a=0 \quad \therefore a=2$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하고 분모, 분자에 각각 e^x 을 곱하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{bx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{bx^2 e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2}{bx^2 e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)^2 \times \frac{1}{be^x} \right\}$$

$$= 1^2 \times \frac{1}{b} = \frac{1}{b}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{b} = \frac{1}{3} \text{ 이므로 } b=3$$

$$\therefore a+b=2+3=5$$

20 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} (ax+b) = 0$$

$$a+b=0 \quad \therefore b=-a \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1}-1}{ax-a} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1}-1}{a(x-1)}$$

이때 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1}-1}{a(x-1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t-1}{at}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t-1}{t} \times \frac{1}{a}$$

$$= 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{a} = \frac{1}{6} \text{ 이므로}$$

$$a=6$$

이를 ⑦에 대입하면 $b=-6$

$$\therefore ab=6 \times (-6) = -36$$

21 $\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{1}{t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a \ln \left(b + \frac{c}{x^2} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(b+ct^2)}{t^a} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$t \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln(b+ct^2) = 0$$

$$\ln b = 0 \quad \therefore b=1$$

이를 ⑦에 대입하면

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ct^2)}{t^a} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+ct^2)}{ct^2} \times \frac{c}{t^{a-2}} \right\}$$

$$= 1 \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{c}{t^{a-2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{c}{t^{a-2}}$$

$$\text{즉, } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{c}{t^{a-2}} = 4 \text{ 이므로}$$

$$a=2, c=4$$

$$\therefore abc=2 \times 1 \times 4=8$$

22 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x)}{e^{2x}-1} = b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(a+x) = 0$$

$$\ln a = 0 \quad \therefore a=1$$

이를 ⑦에 대입하면

$$b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{e^{2x}-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{2x}{e^{2x}-1} \times \frac{1}{2} \right\}$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a+4b=1+2=3$$

- 23 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{e^x - e^{a-1}}{a(x-1)} = be^a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (e^x - e^{a-1}) = 0$$

$$e - e^{a-1} = 0, \quad e^{a-1} = e$$

$$\therefore a = 2$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{e^x - e}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{2(x-1)}$$

이때 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{2(x-1)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e(e^t - 1)}{2t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^t - 1}{t} \times \frac{e}{2}$$

$$= 1 \times \frac{e}{2} = \frac{e}{2}$$

$$\text{즉, } be^a = \frac{e}{2} \text{이므로 } be^2 = \frac{e}{2} \quad \therefore b = \frac{1}{2e}$$

$$\therefore ab = 2 \times \frac{1}{2e} = \frac{1}{e}$$

- 24 $x \neq 0$ 일 때, $f(x) = \frac{e^{3x} - \ln a}{\ln(1+x)}$

함수 $f(x)$ 가 $x > -1$ 에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\therefore f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - \ln a}{\ln(1+x)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} - \ln a) = 0$$

$$1 - \ln a = 0, \quad \ln a = 1$$

$$\therefore a = e$$

이를 ①에 대입하면

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1+x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times \frac{x}{\ln(1+x)} \times 3 \right\}$$

$$= 1 \times 1 \times 3 = 3$$

- 25 $A(3, 0), P(t, \ln(t-2)), Q(0, \ln(t-2))$ 이므로 $\overline{OA} = 3, \overline{PQ} = t, \overline{QO} = \ln(t-2)$

$$\therefore S(t) = \frac{1}{2} \times (t+3) \times \ln(t-2) = \frac{t+3}{2} \ln(t-2)$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 3+} \frac{S(t)}{t-3} = \lim_{t \rightarrow 3+} \left\{ \frac{t+3}{2} \times \frac{\ln(t-2)}{t-3} \right\}$$

이때 $t-3=s$ 로 놓으면 $t=3+s$ 이고, $t \rightarrow 3$ 일 때 $s \rightarrow 0$ 이므로 구하는 극한값은

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 3+} \left\{ \frac{t+3}{2} \times \frac{\ln(t-2)}{t-3} \right\} &= \lim_{s \rightarrow 0+} \left\{ \frac{s+6}{2} \times \frac{\ln(1+s)}{s} \right\} \\ &= \frac{6}{2} \times 1 = 3 \end{aligned}$$

- 26 선분 AB의 중점을 M이라 하면 $M\left(\frac{1+t}{2}, \ln t\right)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{2 \ln t}{t-1}$ 이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는

$$-\frac{t-1}{2 \ln t}$$

선분 AB의 수직이등분선의 방정식은

$$y - \ln t = -\frac{t-1}{2 \ln t} \left(x - \frac{1+t}{2} \right)$$

$$\therefore y = -\frac{t-1}{2 \ln t} x + \frac{(t-1)(t+1)}{4 \ln t} + \ln t$$

즉, 선분 AB의 수직이등분선이 y 축과 만나는 점의 y 좌표 $p(t)$ 는

$$p(t) = \frac{(t-1)(t+1)}{4 \ln t} + \ln t$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1+} p(t) = \lim_{t \rightarrow 1+} \left\{ \frac{(t-1)(t+1)}{4 \ln t} + \ln t \right\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{(t-1)(t+1)}{4 \ln t}$$

이때 $t-1=s$ 로 놓으면 $t=1+s$ 이고, $t \rightarrow 1$ 일 때 $s \rightarrow 0$ 이므로 구하는 극한값은

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{(t-1)(t+1)}{4 \ln t} &= \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{s(s+2)}{4 \ln(1+s)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0+} \left\{ \frac{s}{\ln(1+s)} \times \frac{s+2}{4} \right\} \\ &= 1 \times \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- 27 곡선 $y = \frac{1}{4}e^{2x}$ 을 y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면

$$y = \frac{1}{4}e^{2x} + m$$

이 곡선이 원점을 지나므로

$$0 = \frac{1}{4} + m \quad \therefore m = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{4}$$

곡선 $y = -\ln 3x$ 를 x 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면

$$y = -\ln 3(x-n)$$

이 곡선이 원점을 지나므로

$$0 = -\ln(-3n)$$

$$-3n = 1 \quad \therefore n = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore g(x) = -\ln(3x+1)$$

직선 $y=k$ 와 곡선 $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$-\ln(3x+1)=k, 3x+1=e^{-k}$$

$$\therefore x=\frac{e^{-k}-1}{3} \quad \therefore P\left(\frac{e^{-k}-1}{3}, k\right)$$

직선 $y=k$ 와 곡선 $y=f(x)$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{e^{2x}-1}{4}=k, e^{2x}=4k+1, 2x=\ln(4k+1)$$

$$\therefore x=\frac{\ln(4k+1)}{2} \quad \therefore R\left(\frac{\ln(4k+1)}{2}, k\right)$$

$Q(0, k)$ 이므로

$$\overline{PQ}=\frac{1-e^{-k}}{3}, \overline{QR}=\frac{\ln(4k+1)}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}} &= \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\ln(4k+1)}{2}}{\frac{1-e^{-k}}{3}} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{3}{2} \times \frac{\ln(1+4k)}{4k} \times \frac{-k}{e^{-k}-1} \times 4 \right\} \\ &= \frac{3}{2} \times 1 \times 1 \times 4 = 6 \end{aligned}$$

$$28 \quad f'(x)=e^x-1+(x-1)e^x$$

$$=xe^x-1$$

$$\therefore f'(1)=e-1$$

$$29 \quad f'(x)=4^x \ln 4 + 3^x \ln 3$$

점 $(0, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0)$ 이므로

$$f'(0)=\ln 4 + \ln 3 = \ln 12$$

$$\therefore a=12$$

$$30 \quad f(x)=(x^2+ax)e^{x+1}=e(x^2+ax)e^x \text{이므로}$$

$$f'(x)=e\{(2x+a)e^x+(x^2+ax)e^x\}$$

$$=\{x^2+(a+2)x+a\}e^{x+1}$$

$$\therefore f'(2)=(3a+8)e^3$$

$$\text{따라서 } (3a+8)e^3=5e^3 \text{이므로}$$

$$3a+8=5 \quad \therefore a=-1$$

$$31 \quad f'(x)=2+a^x \ln a \text{이므로}$$

$$f'(0)=2+\ln a$$

$$\text{즉, } 2+\ln a=2+\ln 2 \text{이므로}$$

$$a=2$$

$$\text{따라서 } f(x)=2x+2^x \text{이므로}$$

$$f(1)=2+2=4$$

$$32 \quad f(x)=x \ln 2x=x(\ln 2+\ln x) \text{이므로}$$

$$f'(x)=\ln 2+\ln x+x \times \frac{1}{x}$$

$$=\ln 2x+1$$

$$\therefore f'(1)=\ln 2+1$$

$$33 \quad f(x)=\log_9 \frac{1}{x}-\log_3 \frac{1}{x}=-\log_9 x+\log_3 x \text{이므로}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{x \ln 9}+\frac{1}{x \ln 3}$$

$$\therefore f'(2)=-\frac{1}{2 \ln 9}+\frac{1}{2 \ln 3}=\frac{1}{4 \ln 3}$$

$$\therefore k=1$$

$$34 \quad f'(x)=(2x+2a)(\ln x-1)+(x^2+2ax) \times \frac{1}{x}$$

$$=(2x+2a) \ln x-x$$

$$\therefore f'(e)=(2e+2a)-e=e+2a$$

$$\text{따라서 } e+2a=3e \text{이므로 } a=e$$

$$35 \quad f'(x)=a-b \ln x-bx \times \frac{1}{x}=a-b \ln x-b$$

$$f(1)=4 \text{에서 } a=4$$

$$f'(1)=-3 \text{에서 } a-b=-3 \quad \therefore b=7$$

$$\text{따라서 } f(x)=4x-7x \ln x \text{이므로}$$

$$f(e^2)=4e^2-14e^2=-10e^2$$

$$36 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2)-f(2-h)}{-h}$$

$$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$$

$$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x \text{이므로 구하는 극한값은}$$

$$2f'(2)=2 \times 3e^2=6e^2$$

$$37 \quad h(x)=f(x)g(x) \text{라 하면}$$

$$h(1)=f(1)g(1)=1 \times 1=1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)-1}{x-1}=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$$

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \text{이고}$$

$$f'(x)=5^x \ln 5, g'(x)=\frac{1}{x} \text{이므로 구하는 극한값은}$$

$$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$$

$$=5 \ln 5 \times 1 + 1 \times 1 = 5 \ln 5 + 1$$

$$38 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}=\frac{2}{\ln 3} \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고, 극한}$$

$$\text{값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=0 \quad \therefore f(1)=0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{2}{\ln 3}$$

$$f(x)=a+b \log_3 x \text{에서 } f(1)=0 \text{이므로 } a=0$$

$$f'(x)=\frac{b}{x \ln 3} \text{이므로 } f'(1)=\frac{2}{\ln 3} \text{에서 } b=2$$

따라서 $f'(x) = \frac{2}{x \ln 3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3) + f(3) - f(3-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3)}{2h} \times 2 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{-h} \\ &= 2f'(3) + f'(3) = 3f'(3) \\ &= 3 \times \frac{2}{3 \ln 3} = \frac{2}{\ln 3} \end{aligned}$$

- 39 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (ae^{x-1} - b) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx - 2)$$

$$a - b = b - 2 \quad \therefore a - 2b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f'(x) = \begin{cases} ae^{x-1} & (x > 1) \\ b & (x < 1) \end{cases}$ 이고 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} ae^{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} b \quad \therefore a = b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 2$

$$\therefore ab = 4$$

- 40 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 미분가능하고 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x + 2) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax + b)$$

$$2 = 1 + a + b \quad \therefore a + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 1) \\ 2x + a & (x < 1) \end{cases}$ 이고 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하

므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + a)$$

$$1 = 2 + a \quad \therefore a = -1$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $b = 2$

따라서 $f(x) = \begin{cases} \ln x + 2 & (x \geq 1) \\ x^2 - x + 2 & (x < 1) \end{cases}$ 이므로

$$f(-1) + f(e) = 4 + 3 = 7$$

- 41 $f(x) = \begin{cases} x \ln x + a(x-1) & (x \geq 1) \\ -x \ln x - a(x-1) & (0 < x < 1) \end{cases}$ 이므로

$$f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1 + a & (x > 1) \\ -\ln x - 1 - a & (0 < x < 1) \end{cases}$$

미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x + 1 + a) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-\ln x - 1 - a)$$

$$1 + a = -1 - a \quad \therefore a = -1$$

II-1 02 삼각함수의 덧셈정리

기초 문제 Training

35쪽

1 (1) $-\frac{13}{12}$ (2) $\frac{13}{5}$ (3) $-\frac{5}{12}$

2 (1) $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}, \sec \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}, \cot \frac{\pi}{4} = 1$

(2) $\csc \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \sec \frac{\pi}{3} = 2, \cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\csc 150^\circ = 2, \sec 150^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \cot 150^\circ = -\sqrt{3}$

(4) $\csc 225^\circ = -\sqrt{2}, \sec 225^\circ = -\sqrt{2}, \cot 225^\circ = 1$

3 $\sqrt{3}$

4 (1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ (3) $2 + \sqrt{3}$

5 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6 (가) $\sqrt{2}$ (나) $\frac{\pi}{4}$ (다) $\theta + \frac{\pi}{4}$

핵심 유형 Training

36~38쪽

1 $\frac{5\sqrt{2}}{4}$	2 $\angle, \square$	3 $\frac{9}{4}$	4 50	5 $\frac{3}{2}$
6 $\frac{63}{65}$	7 $\frac{3}{8}$	8 2	9 $-\frac{31}{25}$	10 $-\frac{3}{4}$
11 ②	12 ①	13 ②	14 -1	15 -2
16 $\frac{7}{9}$	17 $2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}$	18 ⑤	19 ①	
20 ③	21 $10\sqrt{2}$			

- 1 θ 가 제3사분면의 각이면 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \text{ 이므로}$$

$$\cot \theta = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \sec \theta + \cot \theta = -\frac{3\sqrt{2}}{4} + 2\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad \text{㉑. } \frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta} &= \frac{(1-\sin\theta) + (1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} \\
 &= \frac{2}{1-\sin^2\theta} \\
 &= \frac{2}{\cos^2\theta} \\
 &= 2\sec^2\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{㉒. } \frac{\sec\theta}{\csc\theta - \cot\theta} + \frac{\sec\theta}{\csc\theta + \cot\theta} &= \frac{\sec\theta(\csc\theta + \cot\theta) + \sec\theta(\csc\theta - \cot\theta)}{(\csc\theta - \cot\theta)(\csc\theta + \cot\theta)} \\
 &= \frac{2\sec\theta\csc\theta}{\csc^2\theta - \cot^2\theta} \\
 &= \frac{2\sec\theta\csc\theta}{(1+\cot^2\theta) - \cot^2\theta} \\
 &= 2\sec\theta\csc\theta \\
 \text{㉓. } (1+\csc\theta)(1+\sec\theta)(1-\csc\theta)(1-\sec\theta) &= (1-\csc^2\theta)(1-\sec^2\theta) \\
 &= -\cot^2\theta \times (-\tan^2\theta) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㉒, ㉓이다.

$$3 \quad \sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{3} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{9}$$

$$1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta = \frac{4}{9}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \tan\theta + \cot\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\
 &= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \\
 &= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} \\
 &= \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}
 \end{aligned}$$

$$4 \quad \frac{2\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - 2\cos\theta} = 3 \text{에서}$$

$$2\sin\theta + \cos\theta = 3\sin\theta - 6\cos\theta$$

$$7\cos\theta = \sin\theta \quad \dots\dots \text{㉑}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos\theta \neq 0$ 이므로 ㉑의 양변을 $\cos\theta$

로 나누면

$$7 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \therefore \tan\theta = 7$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sec^2\theta &= 1 + \tan^2\theta \\
 &= 1 + 7^2 = 50
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5 \quad \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) &= \sin\frac{\pi}{3}\cos\theta + \cos\frac{\pi}{3}\sin\theta \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta \quad \dots\dots \text{㉑}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) &= \sin\frac{\pi}{3}\cos\theta - \cos\frac{\pi}{3}\sin\theta \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta \quad \dots\dots \text{㉒}
 \end{aligned}$$

㉑, ㉒을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}
 \sin^2\theta + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) &= \sin^2\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right)^2 \\
 &\quad + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right)^2 \\
 &= \sin^2\theta + \frac{3}{4}\cos^2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta \\
 &\quad + \frac{3}{4}\cos^2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta \\
 &= \frac{3}{2}\sin^2\theta + \frac{3}{2}\cos^2\theta \\
 &= \frac{3}{2}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$6 \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi \text{에서 } \sin\alpha > 0, \sin\beta < 0 \text{이므로}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\sin\beta = -\sqrt{1 - \cos^2\beta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
 &= \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} - \frac{4}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) \\
 &= \frac{63}{65}
 \end{aligned}$$

$$7 \quad \sin\alpha - \cos\beta = \frac{1}{2} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \text{㉑}$$

$\cos\alpha + \sin\beta = 1$ 의 양변을 제곱하면

$$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = 1 \quad \dots\dots \text{㉒}$$

㉑+㉒을 하면

$$\begin{aligned}
 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\cos^2\beta + \sin^2\beta) &\quad - 2(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = \frac{5}{4} \\
 &\quad - 2(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = \frac{5}{4}
 \end{aligned}$$

$$2 - 2\sin(\alpha - \beta) = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{8}$$

- 8 이차방정식 $x^2+3x-5=0$ 의 두 근이 $\tan \alpha, \tan \beta$ 이면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = -3, \tan \alpha \tan \beta = -5$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{-3}{1 - (-5)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\sec^2(\alpha + \beta) = 1 + \tan^2(\alpha + \beta) = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \text{이므로}$$

$$\cos^2(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin^2(\alpha + \beta) = 1 - \cos^2(\alpha + \beta) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$\tan(\alpha + \beta) < 0$ 에서 $\alpha + \beta$ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이므로 $\sin(\alpha + \beta)$ 와 $\cos(\alpha + \beta)$ 의 부호가 서로 다르다.

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) = -\sqrt{\frac{1}{5} \times \frac{4}{5}} = -\frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2\cos^2(\alpha + \beta) - \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) \\ = 2 \times \frac{4}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) = 2 \end{aligned}$$

- 9 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 에서 $\sin \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin 2\theta - \cos 2\theta &= 2\sin \theta \cos \theta - (2\cos^2 \theta - 1) \\ &= 2 \times \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{4}{5} - \left\{2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1\right\} \\ &= -\frac{24}{25} - \frac{7}{25} = -\frac{31}{25} \end{aligned}$$

- 10 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \therefore 2\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{4}$$

- 11 $(1 + \tan \theta) \tan 2\theta = \frac{4}{3}$ 에서

$$(1 + \tan \theta) \times \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{4}{3}$$

$$(1 + \tan \theta) \times \frac{2\tan \theta}{(1 + \tan \theta)(1 - \tan \theta)} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2\tan \theta}{1 - \tan \theta} = \frac{4}{3}$$

$$6\tan \theta = 4 - 4\tan \theta$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} 12 \quad y &= \cos 2\theta - 4\sin \theta + 1 \\ &= (1 - 2\sin^2 \theta) - 4\sin \theta + 1 \\ &= -2\sin^2 \theta - 4\sin \theta + 2 \\ &= -2(\sin \theta + 1)^2 + 4 \end{aligned}$$

이때 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ 이므로 주어진 함수는 $\sin \theta = -1$ 일 때 최댓값 4, $\sin \theta = 1$ 일 때 최솟값 -4 를 갖는다.

따라서 $M=4$, $m=-4$ 이므로

$$Mm = -16$$

- 13 오른쪽 그림과 같이 두 직선

$$y = \frac{1}{2}x + 1, y = 3x + 2 \text{가 } x$$

축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라 하면

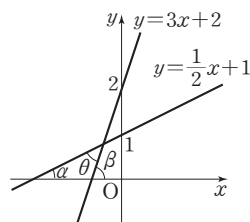
$$\tan \alpha = \frac{1}{2}, \tan \beta = 3$$

이때 $\theta = \beta - \alpha$ 이므로

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\beta - \alpha) \\ &= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \times \frac{1}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sec \theta > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sec \theta &= \sqrt{1 + \tan^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 + 1^2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$



- 14 두 직선 $mx - y + 1 = 0$, $2x + y - 3 = 0$, 즉 $y = mx + 1$, $y = -2x + 3$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라 하면

$$\tan \alpha = m, \tan \beta = -2$$

$$|\tan(\alpha - \beta)| = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{이므로}$$

$$\left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| = 1$$

$$\left| \frac{m - (-2)}{1 + m \times (-2)} \right| = 1$$

$$\left| \frac{m+2}{1-2m} \right| = 1$$

즉, $m+2=1-2m$ 또는 $m+2=-1+2m$ 이므로

$$m = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } m = 3$$

따라서 모든 m 의 값의 곱은

$$-\frac{1}{3} \times 3 = -1$$

II-1 03 삼각함수의 미분

기초 문제 Training

39쪽

- 1 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) 0 (3) 1
- 2 (1) 2 (2) $\pi + \frac{1}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (4) 1
- 3 (1) 1 (2) 1 (3) $\frac{1}{4}$ (4) 2
- 4 (1) 2 (2) 5 (3) $\frac{3}{2}$ (4) $\frac{5}{3}$
- 5 (1) $y' = -\cos x$ (2) $y' = 1 - \sin x$
 (3) $y' = 5 \cos x - \sin x$ (4) $y' = \cos x + e^x$
- 6 (1) $y' = \cos^2 x - \sin^2 x$
 (2) $y' = \cos x - x \sin x$
 (3) $y' = 2 \sin x + (2x + 1) \cos x$
 (4) $y' = e^x (\sin x + \cos x)$

핵심 유형 Training

40~44쪽

- | | | | | |
|------------------|-------------------|------|------------------|---------------------------|
| 1 ⑤ | 2 $\frac{1}{2}$ | 3 4 | 4 ③ | 5 ㄷ, ㄱ |
| 6 ④ | 7 $\frac{5}{3}$ | 8 ⑤ | 9 $\frac{1}{2}$ | 10 $\frac{1}{2}$ |
| 11 ⑤ | 12 -1 | 13 ⑤ | 14 $\frac{1}{3}$ | 15 2 |
| 16 $\frac{1}{3}$ | 17 ⑤ | 18 ④ | 19 1 | 20 6 |
| 21 2 | 22 ④ | 23 1 | 24 ① | 25 ③ |
| 26 ③ | 27 ② | 28 ③ | 29 ① | 30 $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ |
| 31 2 | 32 $-\frac{1}{2}$ | | | |

$$\begin{aligned}
 1 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \cot x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \frac{\cos x}{\sin x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x (\sin x - \cos x)}{\sin x - \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec x - \tan x}{\cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \cos^2 x - 1) - 1}{\cos x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos^2 x - 1)}{\cos x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{\cos x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} 2(\cos x + 1) \\
 &= 2 \times 2 = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{a \cot^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{a \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x) \sin^2 x}{a \cos^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x) \sin^2 x}{a(1 - \sin^2 x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x) \sin^2 x}{a(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{a(1 + \sin x)} = \frac{1}{2a}
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{2a} = \frac{1}{4}$ 이므로 $a = 2$

$$\begin{aligned}
 5 \quad \text{ㄱ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1 + 4x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{4x}{\ln(1 + 4x)} \times \frac{1}{2} \right\} \\
 &= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ㄴ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{e^{3x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{3x}{e^{3x} - 1} \times \frac{2}{3} \right) \\
 &= 1 \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \tan 2x}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\sin 3x} + \frac{\tan 2x}{\sin 3x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{1}{3} \right) \\
 &\quad + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 2x}{2x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{2}{3} \right) \\
 &= 1 \times 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times 1 \times \frac{2}{3} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{예. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \times \frac{2x}{\tan 2x} \times \frac{\tan x}{x} \times \frac{1}{2} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

$$\begin{aligned} 6 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 - x)}{\tan^2 x - \tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 - x)}{\tan x(\tan x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(x^2 - x)}{x^2 - x} \times \frac{x}{\tan x} \times \frac{x - 1}{\tan x - 1} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \quad x \neq 0 \text{ 일 때, } f(x) &= \frac{\tan 5x}{\ln(1 + 3x)} \\ \text{함수 } f(x) \text{가 } -\frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi}{10} \text{에서 연속이면 } x=0 \text{에서 연} \\ \text{속이므로} \\ f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{\ln(1 + 3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan 5x}{5x} \times \frac{3x}{\ln(1 + 3x)} \times \frac{5}{3} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 3x)(1 + \cos 3x)}{x^2(1 + \cos 3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{x^2(1 + \cos 3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2(1 + \cos 3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 \times \frac{9}{1 + \cos 3x} \right\} \\ &= 1^2 \times \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(1 - \cos x)}{1 - \cos x} \times \frac{1 - \cos x}{x^2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(1 - \cos x)}{1 - \cos x} \times \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(1 - \cos x)}{1 - \cos x} \times \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(1 - \cos x)}{1 - \cos x} \times \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(1 - \cos x)}{1 - \cos x} \times \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos x} \right\} \\ &= 1 \times 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x - \cot x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x \sin x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \sin x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{1 + \cos x} \right) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1 + ax)}{2 - 2 \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1 + ax)(1 + \cos x)}{2(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1 + ax)(1 + \cos x)}{2(1 - \cos^2 x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1 + ax)(1 + \cos x)}{2 \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \times \frac{\ln(1 + ax)}{ax} \times \frac{a(1 + \cos x)}{2} \right\} \\ &= 1^2 \times 1 \times a = a \\ \therefore a &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cot x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \times \frac{\cos x}{\sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$x - \frac{\pi}{2} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{\pi}{2} + t$ 이고, $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{x - \frac{\pi}{2}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t \times (-\sin t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin t}{t} \times \cos t \right) \\ &= -1 \times 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 13 \quad \frac{1}{x} = t \text{로 놓으면 } x &= \frac{1}{t} \text{이고, } x \rightarrow \infty \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\tan \frac{1}{x}\right) \csc \frac{1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \sin(\tan t) \csc t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \sin(\tan t) \times \frac{1}{\sin t} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(\tan t)}{\tan t} \times \frac{\tan t}{t} \times \frac{t}{\sin t} \right\} = 1 \times 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

- 14 $\frac{1}{3x+1}=t$ 로 놓으면 $x=\frac{1-t}{3t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) \tan \frac{1}{3x+1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1-t}{3t} + 1 \right) \tan t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1+2t}{3} \times \frac{\tan t}{t} \right) \\ &= \frac{1}{3} \times 1 \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

- 15 $x - \frac{\pi}{2} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{\pi}{2} + t$ 이고, $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{1 - \sin x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{1 - \cos t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(1 + \cos t)}{(1 - \cos t)(1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(1 + \cos t)}{1 - \cos^2 t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(1 + \cos t)}{\sin^2 t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{t}{\sin t} \right)^2 \times (1 + \cos t) \right\} \\ &= 1^2 \times 2 \\ &= 2\end{aligned}$$

- 16 $x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow a} (2^x - 1) = 0$$

$$2^a - 1 = 0$$

$$\therefore a = 0$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{3 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \times \frac{2^x - 1}{x} \times \frac{x}{\sin x} \right) \\ &= \frac{1}{3} \times \ln 2 \times 1 \\ &= \frac{\ln 2}{3}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{\ln 2}{3} = b \ln 2 \text{이므로}$$

$$b = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a + b = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

- 17 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + a) = 0$$

$$1 + a = 0$$

$$\therefore a = -1$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{bx \sin x + x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{(bx \sin x + x^2)(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{(bx \sin x + x^2)(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{(bx \sin x + x^2)(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\left(b \times \frac{\sin x}{x} + 1\right)(\cos x + 1)} \\ &= \frac{-1^2}{(b \times 1 + 1) \times 2} \\ &= -\frac{1}{2(b+1)}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{1}{2(b+1)} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$b = -3$$

$$\therefore ab = -1 \times (-3) = 3$$

- 18 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{x - a} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - a) = 0$$

$$2 - a = 0$$

$$\therefore a = 2$$

이를 ①에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{x - 2} = b$$

이때 $x - 2 = t$ 로 놓으면 $x = 2 + t$ 이고, $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{x - 2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin (2\pi + \pi t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \pi t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \pi t}{\pi t} \times \pi \right) \\ &= 1 \times \pi \\ &= \pi\end{aligned}$$

$$\therefore b = \pi$$

$$\therefore ab = 2 \times \pi = 2\pi$$

- 19 반지름의 길이가 1, 중심각의 크기가 θ 인 호 AB의 길이는 $l = \theta$

점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle AOH = \frac{\theta}{2}$ 이므로 직각삼각형 AOH에서

$$\overline{AH} = \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\sin \frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{l}{\overline{AB}} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\theta}{2\sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = 1 \end{aligned}$$

- 20 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ 이므로 직각삼각

형 ABC에서 $\overline{AC} = \frac{6}{\tan \theta}$

$\angle ADC = \frac{\pi}{2}$ 이므로 직각삼각

형 ADC에서

$$\overline{CD} = \overline{AC} \cos \theta = \frac{6 \cos \theta}{\tan \theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{\overline{CD}}{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{6 \cos \theta}{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2 \tan \theta}$$

$\frac{\pi}{2} - \theta = t$ 로 놓으면 $\theta = \frac{\pi}{2} - t$ 이고, $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{6 \cos \theta}{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2 \tan \theta} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{6 \cos \left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{t^2 \tan \left(\frac{\pi}{2} - t\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{6 \sin t \tan t}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(6 \times \frac{\sin t}{t} \times \frac{\tan t}{t}\right) \\ &= 6 \times 1 \times 1 = 6 \end{aligned}$$

- 21 삼각형 OAP는 이등변삼각형
이므로

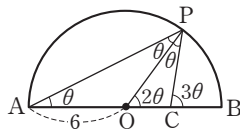
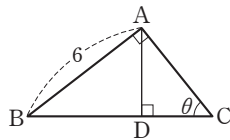
$\angle APO = \theta$

$\therefore \angle POC = 2\theta$

$\angle OPC = \theta$ 이므로 $\angle PCB = 3\theta$

즉, $\angle OCP = \pi - 3\theta$ 이므로 삼각형 POC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{OC}}{\sin \theta} = \frac{\overline{OP}}{\sin (\pi - 3\theta)}$$



$$\therefore \overline{OC} = \frac{\overline{OP} \sin \theta}{\sin (\pi - 3\theta)} = \frac{6 \sin \theta}{\sin 3\theta}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \overline{OC} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{6 \sin \theta}{\sin 3\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{3\theta}{\sin 3\theta} \times 2 \right) \\ &= 1 \times 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

- 22 직각삼각형 BCH에서

$$\overline{BH} = 2 \sin \theta$$

$\angle ABH = \angle BCH = \theta$ 이므로 직각삼각형 ABH에서

$$\overline{AH} = \overline{BH} \tan \theta = 2 \sin \theta \tan \theta$$

$$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{BH}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \sin \theta \tan \theta \times 2 \sin \theta$$

$$= 2 \sin^2 \theta \tan \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2 \sin^2 \theta \tan \theta}{\theta^3} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ 2 \times \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \times \frac{\tan \theta}{\theta} \right\} \\ &= 2 \times 1^2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

- 23 $\angle ARO = \frac{\pi}{2}$ 이므로 직각삼각

형 OAR에서

$$\overline{OR} = 2 \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PR} &= \overline{OP} - \overline{OR} \\ &= 2 - 2 \cos \theta \end{aligned}$$

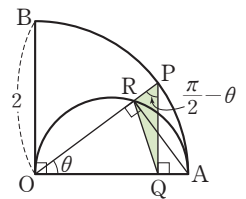
직각삼각형 OQP에서

$$\overline{PQ} = 2 \sin \theta$$

삼각형 PRQ에서 $\angle QPR = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{PR} \times \overline{PQ} \times \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \times (2 - 2 \cos \theta) \times 2 \sin \theta \times \cos \theta \\ &= 2(1 - \cos \theta) \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2(1 - \cos \theta) \sin \theta \cos \theta}{\theta^3} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) \sin \theta \cos \theta}{\theta^3(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2(1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta}{\theta^3(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2 \sin^3 \theta \cos \theta}{\theta^3(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^3 \times \frac{2 \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right\} \\ &= 1^3 \times 1 = 1 \end{aligned}$$



24 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = \frac{2}{\cos \theta}$

$\overline{AD} = \overline{CD}$ 이므로 $\overline{AE} = \overline{CE}$ 에서

$$\overline{AE} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{\cos \theta}$$

직각삼각형 ADE에서

$$\overline{DE} = \overline{AE} \tan \theta = \frac{\tan \theta}{\cos \theta}$$

$$\overline{AD} = \frac{\overline{AE}}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\therefore \overline{BD} = \overline{AB} - \overline{AD} = 2 - \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$\overline{AC} \parallel \overline{DF}$ 이므로 $\angle EDF = \frac{\pi}{2}$, $\angle BDF = \theta$

삼각형 DBF에서

$$\overline{DF} = \frac{\overline{BD}}{\cos \theta} = \frac{2}{\cos \theta} - \frac{1}{\cos^3 \theta}$$

$$\begin{aligned} \therefore S(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{DE} \times \overline{DF} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\tan \theta}{\cos \theta} \times \left(\frac{2}{\cos \theta} - \frac{1}{\cos^3 \theta} \right) \\ &= \frac{\tan \theta}{2} \left(\frac{2}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{\cos^4 \theta} \right) \\ \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\tan \theta}{2\theta} \left(\frac{2}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{\cos^4 \theta} \right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{2} \times \frac{\tan \theta}{\theta} \times \left(\frac{2}{\cos^2 \theta} - \frac{1}{\cos^4 \theta} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

25 오른쪽 그림과 같이

$$\angle APB = \frac{\pi}{2} \text{이고}$$

$$\begin{aligned} \angle PAB &= \frac{1}{2} \angle POB \\ &= \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

이므로 직각삼각형 ABP에서

$$\overline{AP} = 4 \cos \frac{\theta}{2}$$

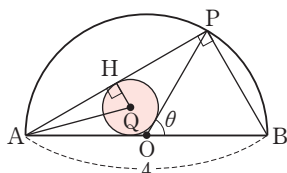
삼각형 AOP에 내접하는 원의 중심을 Q라 하고 점 Q에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AP} = 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

$\angle PAQ = \frac{1}{2} \angle PAO = \frac{\theta}{4}$ 이므로 원의 반지름의 길이를

$r(\theta)$ 라 하면 직각삼각형 AQH에서

$$r(\theta) = \overline{AH} \tan \frac{\theta}{4} = 2 \cos \frac{\theta}{2} \tan \frac{\theta}{4}$$



$$\begin{aligned} \therefore S(\theta) &= \pi \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \tan \frac{\theta}{4} \right)^2 \\ &= 4\pi \cos^2 \frac{\theta}{2} \tan^2 \frac{\theta}{4} \\ \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{4\pi \cos^2 \frac{\theta}{2} \tan^2 \frac{\theta}{4}}{\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \left(\frac{\tan \frac{\theta}{4}}{\frac{\theta}{4}} \right)^2 \times \frac{4\pi}{16} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right\} \\ &= 1^2 \times \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

26 $f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$
 $= 2e^x \cos x$
 $\therefore f'(0) = 2$

27 $f(x) = ax \sin x + b \cos x$ 에서
 $f'(x) = a \sin x + ax \cos x - b \sin x$
 $= ax \cos x + (a - b) \sin x$
 $f(\pi) = 1$ 에서
 $-b = 1 \quad \therefore b = -1$
 $f'(\pi) = -\pi$ 에서
 $-a\pi = -\pi \quad \therefore a = 1$
 $\therefore ab = 1 \times (-1) = -1$

28 $h(x) = f(x)g(x)$ 에서
 $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
 이때 $f(x) = 2 \cos x + \sin x - x$ 에서
 $f'(x) = -2 \sin x + \cos x - 1$ 이므로
 $f(0) = 2, f'(0) = 0$
 $h'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$ 이므로
 $20 = 2g'(0) \quad \therefore g'(0) = 10$

29 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+h) - f(\pi-2h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+h) - f(\pi) + f(\pi) - f(\pi-2h)}{h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi) - f(\pi-2h)}{-2h} \times 2$
 $= f'(\pi) + 2f'(\pi)$
 $= 3f'(\pi)$
 이때 $f'(x) = \sin x + x \cos x$ 이므로 구하는 극한값은
 $3f'(\pi) = 3 \times (-\pi) = -3\pi$

30 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}} = 4$ 에서 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \{f(x)-1\} = 0 \quad \therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{이므로}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$$

$$\text{이때 } f'(x) = \cos x - a \sin x \text{이므로 } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \text{에서}$$

$$-a = 4 \quad \therefore a = -4$$

$$\text{따라서 } f(x) = \sin x - 4 \cos x \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

31 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x \cos x + a) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (bx + 2)$$

$$1 + a = 2 \quad \therefore a = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x (\cos x - \sin x) & (x > 0) \\ b & (x < 0) \end{cases} \text{이고 미분계수 } f'(0) \text{이 존재하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x (\cos x - \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} b \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore a + b = 1 + 1 = 2$$

32 $f(x)$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) + \sin(x-h) - 2 \sin x}{h^2}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h + \sin x \cos h - \cos x \sin h - 2 \sin x}{h^2}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (\cos h - 1)}{h^2}$$

$$= 2 \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h^2 (\cos h + 1)}$$

$$= 2 \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h^2 (\cos h + 1)}$$

$$= 2 \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 h}{h^2 (\cos h + 1)}$$

$$= 2 \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ -\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2 \times \frac{1}{\cos h + 1} \right\}$$

$$= 2 \sin x \times \left(-1^2 \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\sin x$$

$$\text{따라서 } f'(x) = -\cos x \text{이므로}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

II-2 01 여러 가지 미분법(1)

기초 문제 Training

46쪽

1 (1) $y' = -\frac{1}{(x-2)^2}$ (2) $y' = -\frac{2}{(2x+3)^2}$

(3) $y' = \frac{2}{(x+2)^2}$ (4) $y' = -\frac{2x^2+2}{(x^2-1)^2}$

2 (1) $y' = -\frac{5}{x^6}$ (2) $y' = 3x^2 - \frac{3}{x^4}$

3 (1) $y' = \sec x (\sec x - \tan x)$
(2) $y' = -\csc x (3 \cot x + \csc x)$

4 (1) $y' = 12(3x+1)^3$ (2) $y' = 2e^{2x-1}$
(3) $y' = 3 \times 2^{3x+2} \ln 2$ (4) $y' = 2 \cos(2x+3)$

5 (1) $y' = \frac{3}{3x-4}$ (2) $y' = \frac{2x+3}{x^2+3x+1}$
(3) $y' = \frac{1}{(x+1) \ln 4}$ (4) $y' = \frac{10x}{(5x^2-1) \ln 3}$

6 (1) $y' = \pi x^{\pi-1}$ (2) $y' = \frac{3}{2} \sqrt{x}$

핵심 유형 Training

47~50쪽

1 ②	2 2	3 -2	4 $\frac{\pi}{6}$	5 ③
6 ④	7 ②	8 ②	9 ①	10 1
11 $3e^3$	12 -2	13 ④	14 $-2\pi^2$	15 ⑤
16 -8	17 ③	18 ④	19 ②	20 1
21 ③	22 ②	23 $\frac{4}{\pi^2}$	24 ③	25 ⑤
26 π				

1 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) = -\frac{1}{9}$
 $f'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}$ 이므로 $-\frac{1}{(a-3)^2} = -\frac{1}{9}$
 $(a-3)^2 = 9 \quad \therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$

2 $f'(x) = \frac{5(x^2+x+1) - (5x+a)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$
 $= \frac{-5x^2 - 2ax + 5 - a}{(x^2+x+1)^2}$
 $f'(-1) = 3$ 에서 $-5 + 2a + 5 - a = 3 \quad \therefore a = 3$
 $\therefore f'(0) = 5 - a = 5 - 3 = 2$

- 3 $g'(x) = -\frac{f(x) + xf'(x)}{\{xf(x) + 1\}^2}$
 $\therefore g'(0) = -f(0) = -2$
- 4 $f'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - (1 + \sin x) \times (-\sin x)}{\cos^2 x}$
 $= \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$
 $= \frac{1 + \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 + \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$
 $= \frac{1}{1 - \sin x}$
 $f'(a) = 2$ 에서
 $\frac{1}{1 - \sin a} = 2, 2 - 2 \sin a = 1$
 $\sin a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{\pi}{6} \left(\because -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \right)$
- 5 $f'(x) = 3 \sec x \tan x - \csc^2 x$
 $\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \sec \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{6} - \csc^2 \frac{\pi}{6}$
 $= 3 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} - 2^2 = -2$
- 6 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0) + f(0) - f(-h)}{2h}$
 $= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h) - f(0)}{-h}$
 $= \frac{1}{2} f'(0) + \frac{1}{2} f'(0) = f'(0)$
 $\circ$ 이때 $f'(x) = \frac{\cos x (1 + \tan x) - \sin x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$ $\circ$ 이므로
 $f'(0) = 1$
- 7 $f'(x) = a \sec x \tan x \csc x + a \sec x \times (-\csc x \cot x)$
 $= a \sec^2 x - a \csc^2 x$
 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 16$ 에서
 $4a - \frac{4}{3}a = 16, \frac{8}{3}a = 16 \quad \therefore a = 6$
- 8 $f'(x) = -3^{\cos x} \ln 3 \times \sin x$
 $\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\ln 3 \times 1 = -\ln 3$
- 9 $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ 에서
 $h'(x) = g'(f(x)) f'(x)$
 $\therefore h'\left(\frac{\pi}{3}\right) = g'\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = g'(\sqrt{3}) f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

이때 $f'(x) = \sec^2 x$,
 $g'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$ $\circ$ 이므로
 $h'\left(\frac{\pi}{3}\right) = g'(\sqrt{3}) f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4} \times 4 = -1$

10 $f'(x) = 3 \left(\frac{2x+a}{x+1} \right)^2 \times \frac{2(x+1) - (2x+a)}{(x+1)^2}$
 $= \frac{3(2-a)(2x+a)^2}{(x+1)^4}$

$f'(0) = 3$ 에서
 $3(2-a)a^2 = 3, a^3 - 2a^2 + 1 = 0$
 $(a-1)(a^2 - a - 1) = 0$
 $\therefore a = 1$ ($\because a$ 는 정수)

11 $f(1) = 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = e$
 $f'(x) = e^{2x+a} + (x-1)e^{2x+a} \times 2 = (2x-1)e^{2x+a}$ $\circ$ 이므로
 $f'(1) = e$ 에서 $e^{2+a} = e \quad \therefore a = -1$
따라서 $f'(x) = (2x-1)e^{2x-1}$ $\circ$ 이므로
 $f'(2) = 3e^3$

12 (가)에서 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f'(g(x))g'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) + 9x^2 + 8x + 1$
 $\circ$ 이므로
 $f'(g(-1))g'(-1)$
 $= f'(-1)g(-1) + f(-1)g'(-1) + 2$
 $\circ$ 이때 $f'(x) = 2x + 3$ 이고 (나)에서 $g'(-1) = 3$ 이므로
 $g(-1) = k$ (k 는 실수)로 놓으면
 $f'(k) \times 3 = 1 \times k + (-1) \times 3 + 2$
 $(2k+3) \times 3 = k-1, 6k+9 = k-1$
 $\therefore k = -2 \quad \therefore g(-1) = -2$

13 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이
 $\circ$ 므로
 $\lim_{x \rightarrow 0+} e^{ax+b} = \lim_{x \rightarrow 0-} (2x+1)^4$
 $e^b = 1 \quad \therefore b = 0$
 $f'(x) = \begin{cases} ae^{ax+b} & (x > 0) \\ 8(2x+1)^3 & (x < 0) \end{cases}$ 이고 미분계수 $f'(0)$ 이 존
재하므로
 $\lim_{x \rightarrow 0+} ae^{ax+b} = \lim_{x \rightarrow 0-} 8(2x+1)^3$
 $ae^b = 8 \quad \therefore a = 8 \quad (\because b = 0)$
따라서 $f(x) = \begin{cases} e^{8x} & (x \geq 0) \\ (2x+1)^4 & (x < 0) \end{cases}$ $\circ$ 이므로
 $f(2) = e^{16}$

$$\begin{aligned}
14 \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin 2\pi x) - f(\tan \pi x)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin 2\pi x) - f(0) + f(0) - f(\tan \pi x)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin 2\pi x) - f(0)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\tan \pi x) - f(0)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(\sin 2\pi x) - f(0)}{\sin 2\pi x - 0} \times \frac{\sin 2\pi x}{2\pi x} \times 2\pi \right\} \\
&\quad - \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(\tan \pi x) - f(0)}{\tan \pi x - 0} \times \frac{\tan \pi x}{\pi x} \times \pi \right\} \\
&= f'(0) \times 1 \times 2\pi - f'(0) \times 1 \times \pi = \pi f'(0) \\
&\text{이때} \\
&f(x) = \sin(2\pi x + \pi) + \cos(\pi x^2 + \pi) \\
&= -\sin 2\pi x - \cos \pi x^2 \\
&\text{이므로} \\
&f'(x) = -\cos 2\pi x \times 2\pi + \sin \pi x^2 \times 2\pi x \\
&= -2\pi \cos 2\pi x + 2\pi x \sin \pi x^2 \\
&\therefore \pi f'(0) = \pi \times (-2\pi) = -2\pi^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
15 \quad & y = \{xf(x)\}^3 \text{에서} \\
& y' = 3\{xf(x)\}^2 \times \{xf(x)\}' \\
&= 3\{xf(x)\}^2 \{f(x) + xf'(x)\} \\
&\text{따라서 } x=3 \text{에서의 미분계수는} \\
&3\{3f(3)\}^2 \{f(3) + 3f'(3)\} = 3 \times 9 \times (1+9) = 270
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
16 \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = -2 \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고, 극} \\
&\text{한값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{에서} \\
&\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) - 1\} = 0 \quad \therefore f(0) = 1 \\
&\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = -2 \\
&\text{또 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 3}{x - 1} = 4 \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고, 극} \\
&\text{한값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{에서} \\
&\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x) - 3\} = 0 \quad \therefore g(1) = 3 \\
&\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1) = 4 \\
&\text{이때 } y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{에서} \\
&y' = g'(f(x))f'(x) \text{이므로 } x=0 \text{에서의 미분계수는} \\
&g'(f(0))f'(0) = g'(1)f'(0) = 4 \times (-2) = -8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
17 \quad & \text{(나)에서 } x \rightarrow 3 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고, 극한값이 존재하므로} \\
&\text{(분자)} \rightarrow 0 \text{에서} \\
&\lim_{x \rightarrow 3} \{h(x) - 6\} = 0 \quad \therefore h(3) = 6 \\
&\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{h(x) - 6}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{h(x) - h(3)}{x - 3} = h'(3) = 8 \\
&h(x) = g(f(x)) \text{에서 } h(3) = g(f(3)) \quad \therefore g(2) = 6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&h'(x) = g'(f(x))f'(x) \text{이므로} \\
&h'(3) = g'(f(3))f'(3) \\
&8 = g'(2) \times 4 \quad \therefore g'(2) = 2 \\
&\therefore g(2)g'(2) = 6 \times 2 = 12
\end{aligned}$$

$$18 \quad f'(x) = \frac{2^x \ln 2}{(2^x - 1) \ln 3} \quad \therefore f'(1) = \frac{2 \ln 2}{\ln 3}$$

$$\begin{aligned}
19 \quad & f'(x) = \frac{4x^3 + 2ax}{x^4 + ax^2 - 2} \\
&f'(-1) = 1 \text{이므로} \\
&\frac{-4 - 2a}{a - 1} = 1, \quad -4 - 2a = a - 1 \quad \therefore a = -1 \\
&\text{따라서 } f(x) = \ln |x^4 - x^2 - 2| \text{이므로 } f(2) = \ln 10
\end{aligned}$$

$$20 \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln 1 = 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{n}} \\
&\frac{1}{n} = t \text{로 놓으면 } n \rightarrow \infty \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + t\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{t} \\
&= f'\left(\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$\text{이때 } f'(x) = \frac{\sqrt{2} \cos x}{\sqrt{2} \sin x} = \cot x \text{이므로 } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\begin{aligned}
21 \quad & \text{주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면} \\
&\ln |f(x)| = 4 \ln |x| + 3 \ln |x-1| - 2 \ln |x-2| \\
&\quad \quad \quad - \ln |x-3|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\
&\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-3} \\
&\therefore \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{4}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-3} \right) \\
&= 1 + 1 - 1 - 1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
22 \quad & \text{주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면} \\
&\ln f(x) = x \ln (\ln x) \\
&\text{양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln (\ln x) + x \times \frac{1}{\ln x} = \ln (\ln x) + \frac{1}{\ln x} \\
&\therefore f'(x) = f(x) \times \left\{ \ln (\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right\} \\
&= (\ln x)^x \left\{ \ln (\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right\} \\
&\therefore f'(e) = 1 \times 1 = 1
\end{aligned}$$

23 $f(\pi)=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x)-1}{x-\pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = f'(\pi) = 2 \ln \pi$$

$f(x)=x^{a \sin x}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = a \sin x \ln x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = a \cos x \ln x + \frac{a \sin x}{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= f(x) \times \left(a \ln x \cos x + \frac{a \sin x}{x} \right) \\ &= x^{a \sin x} \left(a \ln x \cos x + \frac{a \sin x}{x} \right) \end{aligned}$$

$$f'(\pi) = 2 \ln \pi \text{에서}$$

$$-a \ln \pi = 2 \ln \pi \quad \therefore a = -2$$

따라서 $f(x) = x^{-2 \sin x}$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{\pi^2}$$

24 $f(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 2} = (x^4 + 2x^2 + 2)^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} (x^4 + 2x^2 + 2)^{-\frac{1}{2}} (4x^3 + 4x) \\ &= \frac{2x^3 + 2x}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 2}} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } f'(-1) = \frac{-4}{\sqrt{5}}, f'(1) = \frac{4}{\sqrt{5}} \text{이므로}$$

$$ab = \frac{-4}{\sqrt{5}} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = -\frac{16}{5}$$

25 $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$ 이고 $f(1)=1$ 이므로

$$h'(1) = g'(f(1))f'(1) = g'(1)f'(1)$$

$$\therefore g'(1)f'(1) = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $f(x) = (3x-2)\sqrt{3x-2} = (3x-2)^{\frac{3}{2}}$ 이므로

$$f'(x) = \frac{3}{2} (3x-2)^{\frac{1}{2}} \times 3 = \frac{9}{2} \sqrt{3x-2}$$

$$\therefore f'(1) = \frac{9}{2}$$

이를 ①에 대입하면

$$\frac{9}{2} g'(1) = 9 \quad \therefore g'(1) = 2$$

26 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}} = (1-\cos x)^{-\frac{1}{2}}$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} (1-\cos x)^{-\frac{3}{2}} \sin x \\ &= -\frac{\sin x}{2\sqrt{(1-\cos x)^3}} \end{aligned}$$

$$f'(a) = 0 \text{에서 } -\frac{\sin a}{2\sqrt{(1-\cos a)^3}} = 0$$

$$\sin a = 0 \quad \therefore a = \pi \quad (\because 0 < a < 2\pi)$$

II-2 02 여러 가지 미분법(2)

기초 문제 Training

51쪽

1 (1) $\frac{dy}{dx} = 2t$ (2) $\frac{dy}{dx} = \frac{4t}{2t-1} \left(t \neq \frac{1}{2}\right)$

2 (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3t-4} \left(t \neq \frac{4}{3}\right)$ (2) $\frac{1}{4}$

3 (가) $2x$ (나) $3y^2$ (다) $\frac{2x}{3y^2}$

4 (가) $e^y + 1$ (나) $\frac{1}{e^y + 1}$

5 (1) $y'' = 6x - 2$ (2) $y'' = 12x^2 + 24x - 6$
 (3) $y'' = 24(2x - 1)$ (4) $y'' = -\frac{1}{4(x-2)\sqrt{x-2}}$
 (5) $y'' = 16e^{4x-1}$ (6) $y'' = -\sin x - \cos x$

핵심 유형 Training

52~54쪽

1 -1	2 4	3 ④	4 $\frac{1}{\pi}$	5 ②
6 $\frac{17}{2}$	7 -8	8 ②	9 ②	10 ①
11 $\frac{1}{6}$	12 ②	13 ②	14 $\frac{3}{4}e^6$	15 ③
16 4	17 $\frac{9}{10}$	18 ④	19 12	20 5
21 2				

1 x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t (\sin t + \cos t)}{e^t (\cos t - \sin t)}$$

$$= \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t} \quad (\cos t \neq \sin t)$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t} = \frac{1+0}{0-1} = -1$$

- 2 x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = 2 \times \frac{3}{2}\sqrt{t} = 3\sqrt{t}, \quad \frac{dy}{dt} = 2t + a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t+a}{3\sqrt{t}} \quad (t \neq 0)$$

이때 $t=1$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 2이므로

$$\frac{2+a}{3} = 2, \quad 2+a=6 \quad \therefore a=4$$

- 3 x, y 를 각각 θ 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{d\theta} = \sec^2 \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \sec \theta \tan \theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sec \theta \tan \theta}{\sec^2 \theta} = \frac{\tan \theta}{\sec \theta} = \sin \theta$$

이때 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서 $a = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \quad b = \sec \frac{\pi}{3} = 2$ 이므로 $ab = 2\sqrt{3}$

- 4 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3 - \sin x - y^2 - x \times 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3 - \sin x - y^2}{2xy} \quad (xy \neq 0)$$

따라서 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{3 - 1 - 1}{2 \times \frac{\pi}{2} \times 1} = \frac{1}{\pi}$$

- 5 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \times \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \quad (x \neq 0)$$

이때 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6$ 에서 $x=4$ 일 때

$$2 + \sqrt{y} = 6, \quad \sqrt{y} = 4 \quad \therefore y = 16$$

따라서 점 $(4, 16)$ 에서의 접선의 기울기는 $-\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = -2$

- 6 점 (a, b) 가 곡선 $x^2 + 4y^2 = 10$ 위의 점이므로

$$a^2 + 4b^2 = 10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x^2 + 4y^2 = 10$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 8y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y} \quad (y \neq 0)$$

이때 점 (a, b) 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값이 1이므로

$$-\frac{a}{4b} = 1 \quad \therefore a = -4b$$

이를 ①에 대입하면

$$(-4b)^2 + 4b^2 = 10, \quad 20b^2 = 10 \quad \therefore b^2 = \frac{1}{2}$$

이를 ①에 대입하여 풀면 $a^2 = 8$

$$\therefore a^2 + b^2 = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

- 7 점 $(1, 1)$ 이 곡선 $5x^2 - 3y^2 + axy + b = 0$ 위의 점이므로

$$5 - 3 + a + b = 0 \quad \therefore a + b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$5x^2 - 3y^2 + axy + b = 0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$10x - 6y \frac{dy}{dx} + ay + ax \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(ax - 6y) \frac{dy}{dx} = -10x - ay$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-10x - ay}{ax - 6y} \quad (ax \neq 6y)$$

이때 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기가 3이므로

$$\frac{-10 - a}{a - 6} = 3, \quad -10 - a = 3a - 18 \quad \therefore a = 2$$

이를 ①에 대입하여 풀면 $b = -4$

$$\therefore ab = 2 \times (-4) = -8$$

- 8 주어진 식의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{y+1} + \frac{y}{2\sqrt{y+1}} = \frac{3y+2}{2\sqrt{y+1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{2\sqrt{y+1}}{3y+2}$$

- 9 주어진 식의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{3y^2+1}{(y^3+y)^2} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{(y^3+y)^2}{3y^2+1}$$

따라서 $y=1$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{2^2}{3+1} = -1$$

- 10 주어진 식의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \cos y \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}$$

이때 $x = \sin y$ 에서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때

$$\frac{1}{2} = \sin y \quad \therefore y = \frac{\pi}{6} \quad \left(\because 0 < y < \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서 $x = \frac{1}{2}$, 즉 $y = \frac{\pi}{6}$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

11 $g(2)=a$ 라 하면 $f(a)=2$ 이므로

$$a^3+3a+6=2, \quad a^3+3a+4=0$$

$$(a+1)(a^2-a+4)=0$$

$$\therefore a=-1 \quad (\because a^2-a+4>0)$$

$$\therefore g(2)=-1$$

이때 $f'(x)=3x^2+3$ 이므로

$$g'(2)=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{6}$$

12 $(g \circ f)(x)=x$ 이므로 $g(x)=f^{-1}(x)$

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=a \text{라 하면 } f(a)=\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\cos a=\frac{1}{2} \quad \therefore a=\frac{\pi}{3} \quad \left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$

이때 $f'(x)=-\sin x$ 이므로

$$g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

13 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h)-g(1-h)}{h}$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h)-g(1)+g(1)-g(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1-h)-g(1)}{-h}$$

$$=g'(1)+g'(1)=2g'(1)$$

$g(1)=a$ 라 하면 $f(a)=1$ 이므로

$$e^{3a-1}=1, \quad 3a-1=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{3}$$

$$\therefore g(1)=\frac{1}{3}$$

이때 $f'(x)=3e^{3x-1}$ 이므로 구하는 극한값은

$$2g'(1)=2 \times \frac{1}{f'\left(\frac{1}{3}\right)}=\frac{2}{3}$$

14 $h'(x)=3\{g(x)\}^2 g'(x)$ 이므로

$$h'(4)=3\{g(4)\}^2 g'(4)$$

$g(4)=a$ 라 하면 $f(a)=4$ 이므로

$$(\ln a)^2=4, \quad \ln a=2 \quad (\because a>1) \quad \therefore a=e^2$$

$$\therefore g(4)=e^2$$

이때 $f'(x)=2\ln x \times \frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}$ 이므로

$$g'(4)=\frac{1}{f'(e^2)}=\frac{e^2}{4}$$

$$\therefore h'(4)=3\{g(4)\}^2 g'(4)=3 \times e^4 \times \frac{e^2}{4}=\frac{3}{4}e^6$$

15 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-3}{x-3}=6$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한

값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x)-3\}=0 \quad \therefore f(3)=3$$

$$\therefore g(3)=3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-3}{x-3}=\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=6 \text{이므로}$$

$$g'(3)=\frac{1}{f'(3)}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \left\{ \frac{3}{g(x)} - 1 \right\}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{1}{x-3} \times \frac{3-g(x)}{g(x)} \right\}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{g(x)-3}{x-3} \times \left\{ -\frac{1}{g(x)} \right\} \right]$$

$$=\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)-g(3)}{x-3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ -\frac{1}{g(x)} \right\}$$

$$=g'(3) \times \left\{ -\frac{1}{g(3)} \right\} = \frac{1}{6} \times \left(-\frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{18}$$

16 $g\left(\frac{x-1}{4}\right)=f^{-1}(x)$ 이므로 양변에 $x=-3$ 을 대입하면

$$g(-1)=f^{-1}(-3) \quad \therefore f^{-1}(-3)=2$$

$g\left(\frac{x-1}{4}\right)=f^{-1}(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{4} g'\left(\frac{x-1}{4}\right)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

양변에 $x=-3$ 을 대입하면

$$\frac{1}{4} g'(-1)=\frac{1}{f'(f^{-1}(-3))}, \quad \frac{1}{4} g'(-1)=\frac{1}{f'(2)}$$

$$\frac{1}{4} g'(-1)=1 \quad \therefore g'(-1)=4$$

17 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기가 5

$$\text{이므로 } f(1)=1, \quad f'(1)=5$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, a)$ 에서의 접선의 기울기가 b

$$\text{이므로 } g(1)=a, \quad g'(1)=b$$

$f(-2x+3)=g^{-1}(x)$ 이므로 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1)=g^{-1}(1) \quad \therefore g^{-1}(1)=1$$

$g(1)=1$ 이고 $g(x)$ 는 일대일함수이므로 $a=1$

$f(-2x+3)=g^{-1}(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$-2f'(-2x+3)=\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$-2f'(1)=\frac{1}{g'(g^{-1}(1))}, \quad -2 \times 5=\frac{1}{g'(1)}$$

$$\therefore g'(1)=-\frac{1}{10} \quad \therefore b=-\frac{1}{10}$$

$$\therefore a+b=1+\left(-\frac{1}{10}\right)=\frac{9}{10}$$

18 $f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} + 3x^2 - 3 = \ln x + 3x^2 - 2$ 이므로

$f'(1) = 1$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = f''(1)$

이때 $f''(x) = \frac{1}{x} + 6x$ 이므로

$f''(1) = 7$

19 $f'(x) = \frac{a(x-3) - ax}{(x-3)^2} = \frac{-3a}{(x-3)^2}$ 이므로 $f'(2) = 6$ 에서

$-3a = 6 \quad \therefore a = -2$

$f'(x) = \frac{6}{(x-3)^2}$ 이므로

$f''(x) = -\frac{6 \times 2(x-3)}{(x-3)^4} = -\frac{12}{(x-3)^3}$

$\therefore f''(2) = 12$

20 $f'(x) = 2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x = e^{2x}(2 \sin x + \cos x)$

$f''(x) = 2e^{2x}(2 \sin x + \cos x) + e^{2x}(2 \cos x - \sin x)$

$= e^{2x}(3 \sin x + 4 \cos x)$

$f''(x) - 4f'(x) + af(x) = 0$ 에서

$e^{2x}(3 \sin x + 4 \cos x) - 4e^{2x}(2 \sin x + \cos x) + ae^{2x} \sin x = 0$

$(a-5)e^{2x} \sin x = 0$

이 식이 x 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$a-5=0 \quad \therefore a=5$

21 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(f(x)) - 4}{x - 2} = 8$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고,

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$\lim_{x \rightarrow 2} \{f'(f(x)) - 4\} = 0 \quad \therefore f'(f(2)) = 4$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(f(x)) - 4}{x - 2}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(f(x)) - f'(f(2))}{x - 2}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f'(f(x)) - f'(f(2))}{f(x) - f(2)} \times \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right\}$

$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(f(x)) - f'(f(2))}{f(x) - f(2)} \times f'(2)$

$= 4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(f(x)) - f'(f(2))}{f(x) - f(2)}$

$f(x) = t$ 로 놓으면 $f(2) = 3$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 3$ 이므로

$4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(f(x)) - f'(f(2))}{f(x) - f(2)} = 4 \lim_{t \rightarrow 3} \frac{f'(t) - f'(3)}{t - 3}$

$= 4f''(3)$

따라서 $4f''(3) = 8$ 이므로

$f''(3) = 2$

II-3 01 도함수의 활용(1)

기초 문제 Training

56쪽

1 (1) -2 (2) $y = -2x + 4$

2 (1) 0 (2) $y = x + 1$

3 (1) $y = e^x - te^t + e^t$ (2) 1 (3) $y = ex$

4 $0, 0, 0$, 증가, 0 , 감소

5 $0, 0, \sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$

핵심 유형 Training

57~62쪽

1 ⑤	2 e	3 3	4 $\frac{1}{4}$	5 -2
6 $3 - \ln 2$	7 ④	8 ③	9 ⑤	10 e
11 2	12 $a < -4$ 또는 $a > 0$	13 ④		
14 $y = \frac{1}{2}x$	15 ③	16 1	17 ③	
18 $y = -8x + 35$	19 6	20 π	21 ④	
22 ②	23 $a \leq -1$	24 ②	25 ③	26 ①
27 $\frac{2}{3}$	28 ④	29 40π	30 2	31 1
32 ③	33 ④	34 ①	35 $-\frac{12}{e^3}$	36 ③
37 $0 < a < 4$	38 ②			

1 $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ 이라 하면

$f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x-1)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$

점 $(-1, -3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1) = 5$

점 $(-1, -3)$ 에서의 접선의 방정식은

$y + 3 = 5(x + 1) \quad \therefore y = 5x + 2$

따라서 $a = 5, b = 2$ 이므로 $ab = 10$

2 $f(x) = \ln(x + 3e)$ 라 하면

$f'(x) = \frac{1}{x + 3e}$

x 좌표가 $-2e$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(-2e) = \frac{1}{e}$

이때 $f(-2e)=1$ 이므로 점 $(-2e, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-1=\frac{1}{e}(x+2e) \quad \therefore y=\frac{1}{e}x+3$$

이 직선이 점 $(a, 4)$ 를 지나므로

$$4=\frac{a}{e}+3 \quad \therefore a=e$$

- 3 점 $(1, b)$ 가 곡선 $y=a^x \ln x$ 위의 점이므로

$$b=0$$

$$f(x)=a^x \ln x \text{라 하면}$$

$$f'(x)=a^x \ln a \ln x + a^x \times \frac{1}{x} = a^x \left(\ln a \ln x + \frac{1}{x} \right)$$

점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기가 3이므로

$$f'(1)=3 \text{에서 } a=3$$

$$\therefore a+b=3+0=3$$

- 4 $f(x)=x \cos x$ 라 하면

$$f'(x)=\cos x - x \sin x$$

점 $(\pi, -\pi)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(\pi)=-1$$

점 $(\pi, -\pi)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y+\pi=-(x-\pi) \quad \therefore y=-x$$

직선 $y=-x$ 가 곡선 $y=-\sqrt{x-k}$ 에 접하므로

$$-x=-\sqrt{x-k} \text{에서 } x^2=x-k$$

$$\therefore x^2-x+k=0$$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 에서

$$D=1-4k=0 \quad \therefore k=\frac{1}{4}$$

- 5 $f(x)=-x+\sqrt{4x+3}$ 이라 하면

$$f'(x)=-1+\frac{4}{2\sqrt{4x+3}}=-1+\frac{2}{\sqrt{4x+3}}$$

점점의 좌표를 $(t, -t+\sqrt{4t+3})$ 이라 하면 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 인 접선의 기울기는

$$\tan 45^\circ=1 \text{이므로 } f'(t)=1 \text{에서}$$

$$-1+\frac{2}{\sqrt{4t+3}}=1, \quad \frac{2}{\sqrt{4t+3}}=2$$

$$\sqrt{4t+3}=1, \quad 4t+3=1 \quad \therefore t=-\frac{1}{2}$$

즉, 점점의 좌표는 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{3}{2}=x+\frac{1}{2} \quad \therefore y=x+2$$

따라서 구하는 x 절편은 -2 이다.

- 6 $f(x)=e^x+2e^{-x}$ 이라 하면 $f'(x)=e^x-2e^{-x}$

점점의 좌표를 (t, e^t+2e^{-t}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(t)=1$ 에서

$$e^t-2e^{-t}=1$$

$$e^t=a \ (a>0) \text{로 놓으면}$$

$$a-2a^{-1}=1, \quad a^2-a-2=0$$

$$(a+1)(a-2)=0$$

$$\therefore a=2 \ (\because a>0)$$

$$\text{즉, } e^t=2 \text{이므로 } t=\ln 2$$

따라서 점점의 좌표는 $(\ln 2, 3)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-3=x-\ln 2 \quad \therefore y=x+3-\ln 2$$

$$\therefore k=3-\ln 2$$

- 7 $y=e^x+1$ 에서 $e^x=y-1$

양변에 자연로그를 취하면

$$x=\ln(y-1)$$

즉, 두 함수 $y=e^x+1$,

$y=\ln(x-1)$ 은 역함수 관계이

므로 두 함수의 그래프는 직선

$y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 선분 AB의 길이가 최소이려면 두 점 A, B는 직선 $y=x$ 와 기울기가 같은 접선의 접점이어야 하므로 두 점 A, B에서의 접선의 기울기는 1이어야 한다.

$$f(x)=e^x+1 \text{이라 하면 } f'(x)=e^x$$

$A(a, e^a+1)$ 이라 하면 점 A에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(a)=1$ 에서

$$e^a=1 \quad \therefore a=0 \quad \therefore A(0, 2)$$

$$\text{또 } g(x)=\ln(x-1) \text{이라 하면 } g'(x)=\frac{1}{x-1}$$

$B(b, \ln(b-1))$ 이라 하면 점 B에서의 접선의 기울기가 1이므로 $g'(b)=1$ 에서

$$\frac{1}{b-1}=1 \quad \therefore b=2 \quad \therefore B(2, 0)$$

따라서 $A(0, 2), B(2, 0)$ 일 때, 선분 AB의 길이는 최소이므로 구하는 최솟값은

$$\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$$

- 8 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ 이라 하면

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

점점의 좌표를 $(t, \sqrt{t^2+1})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-\sqrt{t^2+1}=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}(x-t) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$-\sqrt{t^2+1} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}(1-t)$$

$$-(t^2+1) = t(1-t) \quad \therefore t = -1$$

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$$y - \sqrt{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1)$$

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{\sqrt{2}}{2}, b = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 이므로}$$

$$ab = -\frac{1}{2}$$

- 9 $f(x) = \ln \frac{x}{2} + 1 = \ln x - \ln 2 + 1$ 이라 하면

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

A $\left(t, \ln \frac{t}{2} + 1\right)$ 이라 하면 점 A에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = \frac{1}{t} \text{ 이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - \left(\ln \frac{t}{2} + 1\right) = \frac{1}{t}(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-\left(\ln \frac{t}{2} + 1\right) = \frac{1}{t} \times (-t)$$

$$\ln \frac{t}{2} = 0, \frac{t}{2} = 1 \quad \therefore t = 2$$

따라서 A(2, 1)이므로 선분 OA의 길이는

$$\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

- 10 $f(x) = xe^x$ 이라 하면

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

접점의 좌표를 (t, te^t) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기

울기는 $f'(t) = (1+t)e^t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - te^t = (1+t)e^t(x-t)$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$-te^t = (1+t)e^t(1-t)$$

$$-t = (1+t)(1-t) \quad (\because e^t > 0)$$

$$\therefore t^2 - t - 1 = 0$$

이차방정식 $t^2 - t - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$$

이때 두 접선의 기울기는 각각 $(1+\alpha)e^\alpha, (1+\beta)e^\beta$ 이므로 구하는 곱은

$$\begin{aligned} (1+\alpha)e^\alpha(1+\beta)e^\beta &= (1+\alpha+\beta+\alpha\beta)e^{\alpha+\beta} \\ &= (1+1-1)e = e \end{aligned}$$

- 11 $f(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$ 이라 하면 $f'(x) = \frac{1}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, 1 - \frac{1}{t}\right)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의

기울기는 $f'(t) = \frac{1}{t^2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \left(1 - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}(x-t)$$

이 직선이 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$2 - \left(1 - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}(3-t)$$

$$t^2 + t = 3 - t \quad (\because t \neq 0)$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$(t+3)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

따라서 접점의 좌표는 $\left(-3, \frac{4}{3}\right), (1, 0)$ 의 2개이므로 접선의 개수는 2이다.

- 12 $f(x) = xe^{x-1}$ 이라 하면

$$f'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1} = (1+x)e^{x-1}$$

접점의 좌표를 (t, te^{t-1}) 이라 하면 이 점에서의 접선의

기울기는 $f'(t) = (1+t)e^{t-1}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - te^{t-1} = (1+t)e^{t-1}(x-t)$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$-te^{t-1} = (1+t)e^{t-1}(a-t)$$

$$-t = (1+t)(a-t) \quad (\because e^{t-1} > 0)$$

$$\therefore t^2 - at - a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(a, 0)$ 에서 곡선 $y = xe^{x-1}$ 에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 두 개의 접점이 존재해야 하므로 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$D = a^2 + 4a > 0, a(a+4) > 0$$

$$\therefore a < -4 \text{ 또는 } a > 0$$

- 13 $f(x) = (2x+a)e^{-x}$ 이라 하면

$$f'(x) = 2e^{-x} - (2x+a)e^{-x} = (2-2x-a)e^{-x}$$

접점의 좌표를 $(t, (2t+a)e^{-t})$ 이라 하면 이 점에서의 접

선의 기울기는 $f'(t) = (2-2t-a)e^{-t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (2t+a)e^{-t} = (2-2t-a)e^{-t}(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-(2t+a)e^{-t} = (2-2t-a)e^{-t} \times (-t)$$

$$-(2t+a) = (2-2t-a) \times (-t) \quad (\because e^{-t} > 0)$$

$$\therefore 2t^2 + at + a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원점에서 곡선 $y=(2x+a)e^{-x}$ 에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 한 개의 접점이 존재해야 하므로 이차방정식 ①이 중근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$D=a^2-8a=0, a(a-8)=0$$

$$\therefore a=8 (\because a \neq 0)$$

- 14** x 와 y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{(1+t)^2}, \frac{dy}{dt} = -\frac{2t}{(t^2+3)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t(1+t)^2}{(t^2+3)^2}$$

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{2} \text{에서 } t=1$$

$t=1$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2 \times 2^2}{(1+3)^2} = \frac{1}{2} \text{이므로 구하는 접선의 방정식은}$$

$$y - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right) \quad \therefore y = \frac{1}{2}x$$

- 15** x 와 y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = a \cos t - 2 \cos 2t, \frac{dy}{dt} = -b \sin t + 2 \sin 2t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-b \sin t + 2 \sin 2t}{a \cos t - 2 \cos 2t} \quad (a \cos t \neq 2 \cos 2t)$$

$$x+2y-3=0 \text{에서 } y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

즉, $t = \frac{\pi}{2}$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{-b}{2} = -\frac{1}{2} \quad \therefore b=1$$

$t = \frac{\pi}{2}$ 에 대응하는 점의 x 좌표와 y 좌표는

$$x=a, y=1$$

점 $(a, 1)$ 이 직선 $x+2y-3=0$ 위의 점이므로

$$a+2-3=0 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore ab=1 \times 1=1$$

- 16** x 와 y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = 3 \sin^2 t \cos t, \frac{dy}{dt} = -3 \cos^2 t \sin t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3 \cos^2 t \sin t}{3 \sin^2 t \cos t} = -\cot t$$

$$-\cot t = -1 \text{에서 } \cot t = 1$$

$$\therefore t = \frac{\pi}{4} \quad (\because 0 < t < \frac{\pi}{2})$$

$t = \frac{\pi}{4}$ 에 대응하는 점의 x 좌표와 y 좌표는

$$x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}, y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

즉, 점 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{\sqrt{2}}{4} = - \left(x - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \quad \therefore y = -x + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이므로 선분 AB의 길이는

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

- 17** 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$1 + \cos y \frac{dy}{dx} - y - x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{\cos y - x} \quad (\cos y \neq x)$$

점 $(0, \pi)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{\pi-1}{-1} = -\pi+1$$

점 $(0, \pi)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \pi = (-\pi+1)x$$

$$\therefore y = (-\pi+1)x + \pi$$

이 직선이 점 $(1, a)$ 를 지나므로

$$a=1$$

- 18** 점 $(4, a)$ 가 곡선 $12x - xy^2 - 12 = 0$ 위의 점이므로

$$48 - 4a^2 - 12 = 0, a^2 = 9$$

$$\therefore a=3 (\because a>0)$$

$12x - xy^2 - 12 = 0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$12 - y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{12-y^2}{2xy} \quad (xy \neq 0)$$

점 $(4, 3)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{12-9}{24} = \frac{1}{8}$$

따라서 접선에 수직인 직선의 기울기는 -8 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-3 = -8(x-4)$$

$$\therefore y = -8x + 35$$

- 19** 점 $(1, 1)$ 이 곡선 $ax^2 - bxy - y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$a-b-1=4$$

$$\therefore a-b=5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

점 (1, 1)에서의 접선이 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=1$ 의 넓이를 이등분하면 원의 중심 (3, -1)을 지나므로 접선의 방정식은

$$y-1=\frac{-1-1}{3-1}(x-1) \quad \therefore y=-x+2$$

$ax^2-bxy-y^2=4$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2ax-by-bx\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2ax-by}{bx+2y} \quad (bx \neq -2y)$$

점 (1, 1)에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$$\frac{2a-b}{b+2}=-1$$

$$2a-b=-b-2$$

$$\therefore a=-1$$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-6$

$$\therefore ab=-1 \times (-6)=6$$

20 $f(x)=\cos x+x \sin x$ 에서

$$f'(x)=-\sin x+\sin x+x \cos x=x \cos x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x \cos x=0$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	$-\frac{3}{2}\pi$	↗	

따라서 함수 $f(x)$ 가 감소하는 x 의 값의 범위가

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi \text{이므로 } a=\frac{\pi}{2}, b=\frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore b-a=\pi$$

21 $f(x)=e^{-x}+3x$ 에서

$$f'(x)=-e^{-x}+3$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } -e^{-x}+3=0$$

$$e^{-x}=3 \quad \therefore x=-\ln 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\ln 3$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$3-3\ln 3$	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-\ln 3, \infty)$ 에서 증가하고 구간 $(-\infty, -\ln 3]$ 에서 감소하므로

$$a=-\ln 3$$

22 $f(x)=x+\sqrt{12-x^2}$ 에서 $0 < x \leq 2\sqrt{3}$ 이고

$$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{12-x^2}}=1-\frac{x}{\sqrt{12-x^2}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$\frac{x}{\sqrt{12-x^2}}=1, \sqrt{12-x^2}=x, 12-x^2=x^2$$

$$x^2=6 \quad \therefore x=\sqrt{6} \quad (\because 0 < x \leq 2\sqrt{3})$$

$0 < x \leq 2\sqrt{3}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\sqrt{6}$	...	$2\sqrt{3}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	$2\sqrt{6}$	↘	$2\sqrt{3}$

따라서 함수 $f(x)$ 가 증가하는 구간은 $(0, \sqrt{6}]$ 이므로 이 구간에 속하는 모든 정수 x 의 값의 합은

$$1+2=3$$

23 $f(x)=(x^2+1)e^{ax}$ 에서

$$f'(x)=2xe^{ax}+a(x^2+1)e^{ax}=(ax^2+2x+a)e^{ax}$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소하려면 모든 실수 x 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$$(ax^2+2x+a)e^{ax} \leq 0$$

$$\therefore ax^2+2x+a \leq 0 \quad (\because e^{ax} > 0)$$

따라서 $a < 0$ 이어야 하고, 이차방정식 $ax^2+2x+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=1-a^2 \leq 0, a^2 \geq 1$$

$$\therefore a \leq -1$$

24 $f(x)=e^x-ax$ 에서 $f'(x)=e^x-a$

함수 $f(x)$ 가 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가하려면 $x \geq 0$ 에서

$$f'(x) \geq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$e^x-a \geq 0 \quad \therefore e^x \geq a$$

그런데 $x \geq 0$ 에서 $e^x \geq 1$ 이므로

$$a \leq 1$$

따라서 a 의 최댓값은 1이다.

25 $f(x)=-x+\ln(x^4+n)$ 에서 $f'(x)=-1+\frac{4x^3}{x^4+n}$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소하려면 모든 실수 x 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$$-1+\frac{4x^3}{x^4+n} \leq 0$$

$$\frac{4x^3}{x^4+n} \leq 1, 4x^3 \leq x^4+n \quad (\because x^4+n > 0)$$

$$\therefore x^4-4x^3+n \geq 0$$

$$g(x)=x^4-4x^3+n \text{이라 하면 } g'(x)=4x^3-12x^2$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x^2(x-3)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	3	...
$g'(x)$	-	0	-	0	+
$g(x)$		$\searrow$	n	$\searrow$	$n-27$ 극소

$$g(x) \geq 0 \text{이라면 } n-27 \geq 0 \quad \therefore n \geq 27$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 27이다.

26 $f(x)=x^2e^x$ 에서

$$f'(x)=2xe^x+x^2e^x=x(x+2)e^x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x(x+2)=0 \quad (\because e^x > 0)$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극대이고, $x=0$ 에서 극소이므로

$$\alpha=-2, \beta=0 \quad \therefore \alpha-\beta=-2$$

다른 풀이

$$f'(x)=(x^2+2x)e^x \text{이므로}$$

$$f''(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x)e^x=(x^2+4x+2)e^x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

$$\therefore f''(-2)=-\frac{2}{e^2} < 0, f''(0)=2 > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극대이고, $x=0$ 에서 극소이므로

$$\alpha=-2, \beta=0 \quad \therefore \alpha-\beta=-2$$

27 $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$ 에서

$$f'(x)=\frac{(x^2+3)-(x+1) \times 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } -x^2-2x+3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{6}$ 극소	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$ 극대

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 $\frac{1}{2}$, $x=-3$ 에서

극솟값 $-\frac{1}{6}$ 을 가지므로 구하는 차는

$$\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{3}$$

28 $f(x)=x+\sqrt{9-4x}$ 에서 $x \leq \frac{9}{4}$ 이고

$$f'(x)=1+\frac{-4}{2\sqrt{9-4x}}$$

$$=1-\frac{2}{\sqrt{9-4x}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$\frac{2}{\sqrt{9-4x}}=1, \sqrt{9-4x}=2$$

$$9-4x=4 \quad \therefore x=\frac{5}{4}$$

$x \leq \frac{9}{4}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\frac{5}{4}$	...	$\frac{9}{4}$
$f'(x)$	+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{13}{4}$ 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{5}{4}$ 에서 극댓값 $\frac{13}{4}$ 을 가지므로

$$a=\frac{5}{4}, b=\frac{13}{4}$$

$$\therefore a+b=\frac{9}{2}$$

29 $f(x)=e^x(\sin x - \cos x)$ 에서

$$f'(x)=e^x(\sin x - \cos x) + e^x(\cos x + \sin x)$$

$$=2e^x \sin x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \sin x=0 \quad (\because e^x > 0)$$

$$\therefore x=\pi, 2\pi, 3\pi, \dots \quad (\because x > 0)$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	π	...	2π	...	3π	...	4π	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 가 극소일 때의 x 의 값을 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$2\pi, 4\pi, \dots, 2n\pi, \dots$$

따라서 $x_n=2n\pi$ 이므로

$$x_{20}=40\pi$$

30 $f(x) = (1 + \sin x) \cos x$ 에서
 $f'(x) = \cos^2 x + (1 + \sin x) \times (-\sin x)$
 $= 1 - \sin^2 x - \sin x - \sin^2 x$
 $= -2\sin^2 x - \sin x + 1$

$f'(x) = 0$ 에서
 $-2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$
 $(\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$
 $\sin x = -1$ 또는 $\sin x = \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{3}{2}\pi$ ($\because 0 < x < 2\pi$)

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	+	
$f(x)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 극대	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 극소	↗	0	↗	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 극댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $x = \frac{5}{6}\pi$ 에서 극솟값 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 을 가지므로 2개의 극값을 갖는다.

31 $f(x) = 2n \ln x + \frac{2n+1}{x} - 2n$ 에서 $x > 0$ 이고

$f'(x) = \frac{2n}{x} - \frac{2n+1}{x^2}$

$f'(x) = 0$ 에서
 $2nx - 2n - 1 = 0$ ($\because x > 0$)

$\therefore x = \frac{2n+1}{2n}$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{2n+1}{2n}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값 a_n 은

$a_n = 2n \ln \frac{2n+1}{2n} + \frac{2n+1}{\frac{2n+1}{2n}} - 2n$
 $= 2n \ln \frac{2n+1}{2n}$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n \ln \frac{2n+1}{2n} \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n}$
 $= 1$

32 $y = \ln x$ 에서 $y' = \frac{1}{x}$

점 $P(t, \ln t)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}$ 이므로 접선의 방정식은

$y - \ln t = \frac{1}{t}(x - t) \quad \therefore y = \frac{1}{t}x - 1 + \ln t$

$y = 0$ 을 대입하면

$0 = \frac{1}{t}x - 1 + \ln t, \quad \frac{1}{t}x = 1 - \ln t$

$\therefore x = t - t \ln t$

$\therefore p(t) = t - t \ln t$

점 $Q(2t, \ln 2t)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2t}$ 이므로 접선의 방정식은

$y - \ln 2t = \frac{1}{2t}(x - 2t) \quad \therefore y = \frac{1}{2t}x - 1 + \ln 2t$

$y = 0$ 을 대입하면

$0 = \frac{1}{2t}x - 1 + \ln 2t, \quad \frac{1}{2t}x = 1 - \ln 2t$

$\therefore x = 2t - 2t \ln 2t$

$\therefore q(t) = 2t - 2t \ln 2t$

$f(t) = q(t) - p(t)$ 에서 $t > 0$ 이고

$f(t) = (2t - 2t \ln 2t) - (t - t \ln t)$

$= t - 2t(\ln 2 + \ln t) + t \ln t$

$= (1 - 2 \ln 2)t - t \ln t$

$\therefore f'(t) = 1 - 2 \ln 2 - \ln t - t \times \frac{1}{t}$

$= -2 \ln 2 - \ln t$

$f'(t) = 0$ 에서

$-2 \ln 2 - \ln t = 0$

$\ln t = \ln \frac{1}{4} \quad \therefore t = \frac{1}{4}$

$t > 0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\frac{1}{4}$	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		↗	$\frac{1}{4}$ 극대	↘

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t = \frac{1}{4}$ 에서 극댓값 $\frac{1}{4}$ 을 갖는다.

33 $f(x) = x - a \ln x$ 에서 $x > 0$ 이고

$f'(x) = 1 - \frac{a}{x}$

$f'(x) = 0$ 에서

$1 - \frac{a}{x} = 0 \quad \therefore x = a$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	a	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	$a - a \ln a$ 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이고 극솟값은 0이므로 $a - a \ln a = 0, \ln a = 1 \quad \therefore a = e$

34 $f(x) = a \sin x - b \cos x$ 에서

$$f'(x) = a \cos x + b \sin x$$

$x = \frac{2}{3}\pi$ 에서 극댓값 2를 가지므로

$$f'\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 0, f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 2$$

$$f'\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 0 \text{에서}$$

$$-\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \quad \therefore a - \sqrt{3}b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 2 \text{에서}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b = 2 \quad \therefore \sqrt{3}a + b = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = \sqrt{3}, b = 1 \quad \therefore ab = \sqrt{3}$$

35 $f(x) = (ax^2 + b)e^x$ 에서

$$f'(x) = 2axe^x + (ax^2 + b)e^x = (ax^2 + 2ax + b)e^x$$

$x=1$ 에서 극댓값 $4e$ 를 가지므로

$$f'(1) = 0, f(1) = 4e$$

$$f'(1) = 0 \text{에서}$$

$$(3a + b)e = 0 \quad \therefore 3a + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$f(1) = 4e \text{에서}$$

$$(a + b)e = 4e \quad \therefore a + b = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -2, b = 6$

$$\therefore f(x) = (-2x^2 + 6)e^x, f'(x) = (-2x^2 - 4x + 6)e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } -2x^2 - 4x + 6 = 0 \quad (\because e^x > 0)$$

$$(x+3)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	$-\frac{12}{e^3}$ 극소	↗	$4e$ 극대	↘

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극솟값 $-\frac{12}{e^3}$ 를 갖는다.

36 $f(x) = (x^2 + ax + 3)e^x$ 에서

$$f'(x) = (2x + a)e^x + (x^2 + ax + 3)e^x$$

$$= \{x^2 + (a+2)x + a+3\}e^x$$

이때 $e^x > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x 에서

$$x^2 + (a+2)x + a+3 \geq 0$$

따라서 이차방정식 $x^2 + (a+2)x + a+3 = 0$ 의 판별식을

$$D \text{라 하면 } D \leq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$D = (a+2)^2 - 4(a+3) \leq 0$$

$$a^2 - 8 \leq 0, (a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2}) \leq 0$$

$$\therefore -2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 이므로 그 합은

$$-2 + (-1) + 0 + 1 + 2 = 0$$

37 $f(x) = 4 \ln x + \frac{a}{x} - x$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{4}{x} - \frac{a}{x^2} - 1 = \frac{-x^2 + 4x - a}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x > 0$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $-x^2 + 4x - a = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $-x^2 + 4x - a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D > 0 \text{이어야 하므로}$$

$$\frac{D}{4} = 4 - a > 0 \quad \therefore a < 4$$

(ii) (두 근의 합) > 0 이어야 하므로 $4 > 0$

(iii) (두 근의 곱) > 0 이어야 하므로 $a > 0$

(i), (ii), (iii)에서 a 의 값의 범위는

$$0 < a < 4$$

38 $f(x) = (x^3 - 9x + a)e^{-x}$ 에서

$$f'(x) = (3x^2 - 9)e^{-x} - (x^3 - 9x + a)e^{-x}$$

$$= (-x^3 + 3x^2 + 9x - a - 9)e^{-x}$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $-x^3 + 3x^2 + 9x - a - 9 = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$g(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - a - 9 \text{라 하면}$$

$$g'(x) = -3x^2 + 6x + 9$$

$$g'(x) = 0 \text{에서}$$

$$-3x^2 + 6x + 9 = 0, (x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

이때 극값이 $g(-1), g(3)$ 이므로

$$g(-1)g(3) < 0, (-14 - a)(18 - a) < 0$$

$$(a+14)(a-18) < 0 \quad \therefore -14 < a < 18$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 17이다.

II-3 02 도함수의 활용(2)

기초 문제 Training

63쪽

- 1 $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, <, \frac{2}{3}, >, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}$
- 2 0, 1, 0, 1, 0, -1, 1, 0
- 3 1, 1, y 축, 0, -1, 1, -1, 0, 1, x 축

핵심 유형 Training

64~66쪽

- | | | | | |
|-----------------|----------------|--------------------------|--------------------|-----------------------|
| 1 3 | 2 -4 | 3 $\frac{2}{3}\pi$ | 4 $-\frac{1}{2}$ | 5 ② |
| 6 -80 | 7 ⑤ | 8 ③ | 9 5 | 10 $\perp, \parallel$ |
| 11 ③ | 12 $4\sqrt{2}$ | 13 ④ | 14 $3\sqrt{3}-\pi$ | |
| 15 $2e\sqrt{e}$ | 16 1 | 17 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ | 18 $3\sqrt{3}$ | |

- 1 $f(x)=\ln(x^2+2)$ 라 하면
 $f'(x)=\frac{2x}{x^2+2}$
 $f''(x)=\frac{2(x^2+2)-2x \times 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-2(x^2-2)}{(x^2+2)^2}$
 $f''(x)=0$ 에서
 $x^2-2=0 \quad \therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$
 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 에서 $f''(x)>0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 에서 아래로 볼록하다.
따라서 구간 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 에 속하는 정수 x 는 -1, 0, 1의 3개이다.
- 2 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln|x|$ 라 하면
 $f'(x)=x+\frac{1}{x}$
 $f''(x)=1-\frac{1}{x^2}$
 $f''(x)=0$ 에서 $1-\frac{1}{x^2}=0$
 $x^2=1 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=1$
 $x=-1, x=1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x 좌표는 -1, 1

이때 두 변곡점에서의 접선의 기울기는
 $f'(-1)=-1-1=-2, f'(1)=1+1=2$
따라서 구하는 곱은
 $-2 \times 2 = -4$

- 3 $f(x)=(1-\cos x)^2$ 이라 하면
 $f'(x)=2(1-\cos x)\sin x$
 $f''(x)=2\sin^2 x+2(1-\cos x)\cos x$
 $=2\sin^2 x-2\cos^2 x+2\cos x$
 $=2(1-\cos^2 x)-2\cos^2 x+2\cos x$
 $=-4\cos^2 x+2\cos x+2$
 $=-2(2\cos^2 x-\cos x-1)$
 $f''(x)=0$ 에서
 $2\cos^2 x-\cos x-1=0$
 $(2\cos x+1)(\cos x-1)=0$
 $\cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1$
 $\therefore x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi (\because 0<x<2\pi)$
 $x=\frac{2}{3}\pi, x=\frac{4}{3}\pi$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는
 $(\frac{2}{3}\pi, \frac{9}{4}), (\frac{4}{3}\pi, \frac{9}{4})$
따라서 두 변곡점 사이의 거리는
 $\frac{4}{3}\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi$
- 4 $f(x)=(ax^2-1)e^{-x}$ 이라 하면
 $f'(x)=2axe^{-x}-(ax^2-1)e^{-x}$
 $=(-ax^2+2ax+1)e^{-x}$
 $f''(x)=(-2ax+2a)e^{-x}-(-ax^2+2ax+1)e^{-x}$
 $=(ax^2-4ax+2a-1)e^{-x}$
곡선 $y=f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 위로 볼록하려면 모든 실수 x 에서 $f''(x) \leq 0$ 이어야 하므로
 $ax^2-4ax+2a-1 \leq 0 (\because e^{-x} > 0)$
(i) $a=0$ 일 때, $-1 \leq 0$ 이므로 부등식이 성립한다.
(ii) $a \neq 0$ 일 때,
이차방정식 $ax^2-4ax+2a-1=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $a < 0$ 이고 $D \leq 0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4}=4a^2-a(2a-1) \leq 0$
 $2a^2+a \leq 0, a(2a+1) \leq 0$
 $\therefore -\frac{1}{2} \leq a < 0 (\because a < 0)$
(i), (ii)에서 $-\frac{1}{2} \leq a \leq 0$ 이므로 a 의 최솟값은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

5 $f(x) = \frac{1}{x^2+a}$ 이라 하면

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+a)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2(x^2+a)^2 - 2x \times 2(x^2+a) \times 2x}{(x^2+a)^4}$$

$$= \frac{6x^2-2a}{(x^2+a)^3}$$

곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 좌표가 $(1, b)$ 이므로

$$f''(1)=0, f(1)=b$$

$$f''(1)=0 \text{에서}$$

$$\frac{6-2a}{(1+a)^3}=0$$

$$6-2a=0 \quad \therefore a=3$$

$$f(1)=b \text{에서}$$

$$\frac{1}{1+a}=b \quad \therefore b=\frac{1}{4} \quad (\because a=3)$$

$$\therefore a+b=3+\frac{1}{4}=\frac{13}{4}$$

6 $f(x)=x^2+ax+b \ln x$ 에서

$$f'(x)=2x+a+\frac{b}{x}$$

$$f''(x)=2-\frac{b}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극대이므로 $f'(1)=0$ 에서

$$2+a+b=0$$

$$\therefore a+b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 x 좌표가 2이므로 $f''(2)=0$ 에서

$$2-\frac{b}{4}=0 \quad \therefore b=8$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $a=-10$

$$\therefore ab=-10 \times 8 = -80$$

7 $f(x)=3x^4-4x^3+ax^2$ 이라 하면

$$f'(x)=12x^3-12x^2+2ax$$

$$f''(x)=36x^2-24x+2a$$

곡선 $y=f(x)$ 가 변곡점을 갖지 않으려면 모든 실수 x 에
서 $f''(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$36x^2-24x+2a \geq 0$$

$$\therefore 18x^2-12x+a \geq 0$$

따라서 이차방정식 $18x^2-12x+a=0$ 의 판별식을 D 라
하면 $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 36-18a \leq 0$$

$$18a \geq 36 \quad \therefore a \geq 2$$

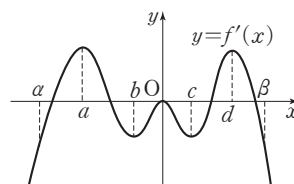
따라서 a 의 최솟값은 2이다.

8 $f''(x)$ 의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+

$b < x < d$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 가 위로 볼
록한 구간은 (b, d) 이다.

9 아래 그림과 같이 a, b, c, d 를 정하고 구간 $[a, \beta]$ 에서
 $f''(x)$ 의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.



x	a	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	0	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	β
$f''(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	

$x=a, x=b, x=0, x=c, x=d$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의
부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 5이다.

10 $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$ 에서

$$f'(x) = \frac{3(x^2+1) - 3x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-6x(x^2+1)^2 + 3(x^2-1) \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{6x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$x^2-1=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

$$f''(x)=0 \text{에서}$$

$$x(x^2-3)=0 \quad \therefore x=-\sqrt{3} \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=\sqrt{3}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면
다음과 같다.

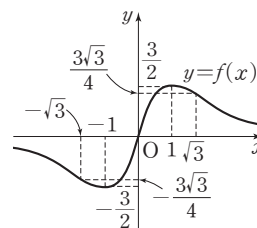
x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$
		변곡점		극소		변곡점		극대		변곡점	

또 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{이므로 함수}$$

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른
쪽 그림과 같다.

∴ 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서
극대이다.



$$\therefore f(-x) = \frac{-3x}{(-x)^2+1} = -\frac{3x}{x^2+1} = -f(x) \text{이므로 함수}$$

수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $0 < x < \sqrt{3}$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 구간 $(0, \sqrt{3})$ 에서 위로 볼록하다.

ㄹ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점은 점 $(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4})$, 점 $(0, 0)$, 점 $(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$ 의 3개이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

11 $f(x) = (x-1)e^{2x}$ 에서

$$f'(x) = e^{2x} + 2(x-1)e^{2x} = (2x-1)e^{2x}$$

$$f''(x) = 2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x} = 4xe^{2x}$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$2x-1=0 \quad (\because e^{2x} > 0) \quad \therefore x = \frac{1}{2}$$

$f''(x) = 0$ 에서 $x=0$ ($\because e^{2x} > 0$)

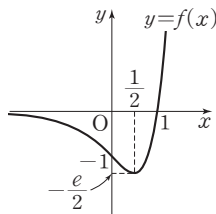
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+
$f(x)$	$\searrow$	-1 변곡점	$\searrow$	$-\frac{e}{2}$ 극소	$\nearrow$

또 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $-\frac{e}{2}$

이다.

② 함수 $f(x)$ 의 치역은 $\{y \mid y \geq -\frac{e}{2}\}$ 이다.

③ 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점은 점 $(0, -1)$ 의 1개이다.

④ 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선은 x 축이므로 점근선의 방정식은 $y=0$ 이다.

⑤ $x < 0$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 구간 $(-\infty, 0)$ 에서 위로 볼록하다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

12 $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$ 에서 $0 \leq x \leq 4$ 이고

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} = 0, \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{4-x}, x = 4-x \quad \therefore x = 2$$

$0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$ 극대	$\searrow$	2

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $2\sqrt{2}$, 최솟값은 2이므로 구하는 곱은 $2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2}$

13 $f(x) = x \ln x - 2x$ 에서

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 2 = \ln x - 1$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \ln x - 1 = 0, \ln x = 1 \quad \therefore x = e$$

구간 $[1, e^2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	e^2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	-2	$\searrow$	$-e$ 극소	$\nearrow$	0

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=e^2$ 에서 최대이고, $x=e$ 에서 최소이므로

$$\alpha = e^2, \beta = e \quad \therefore \frac{\alpha}{\beta} = e$$

14 $f(x) = 2a \sin x - ax$ 에서

$$f'(x) = 2a \cos x - a = a(2 \cos x - 1)$$

$f'(x) = 0$ 에서

$$2 \cos x - 1 = 0, \cos x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

구간 $[0, \pi]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$a(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$ 극대	$\searrow$	$-a\pi$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-a\pi$ 이므로

$$-a\pi = -3\pi \quad \therefore a = 3$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{3}$ 에서 최대이므로 구하는 최댓값은

$$3\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3} - \pi$$

- 15 $\frac{1}{2} \sin x + 1 = t$ 로 놓으면 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 에서

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin x + 1 \leq \frac{3}{2} \quad \therefore \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}$$

주어진 함수 $f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타내면

$$g(t) = \frac{2e^t}{2t} = \frac{e^t}{t}$$

$$\therefore g'(t) = \frac{e^t \times t - e^t}{t^2} = \frac{(t-1)e^t}{t^2}$$

$$g'(t) = 0 \text{에서 } t=1 (\because e^t > 0)$$

$\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

다음과 같다.

t	$\frac{1}{2}$	$\dots$	1	$\dots$	$\frac{3}{2}$
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	$2\sqrt{e}$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	$\frac{2}{3}e\sqrt{e}$

따라서 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 $2\sqrt{e}$, 최솟값은 e 이므로

$$M = 2\sqrt{e}, m = e \quad \therefore Mm = 2e\sqrt{e}$$

- 16 $P(a, e^a), Q(a, a)$ 이므로

$$\overline{PQ} = e^a - a$$

$$l(a) = e^a - a \text{라 하면}$$

$$l'(a) = e^a - 1$$

$$l'(a) = 0 \text{에서 } e^a - 1 = 0, e^a = 1 \quad \therefore a = 0$$

함수 $l(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\dots$	0	$\dots$
$l'(a)$	-	0	+
$l(a)$	$\searrow$	1 극소	$\nearrow$

따라서 길이 $l(a)$ 의 최솟값은 1이다.

- 17 선분 BP를 그으면 삼각형 ABP에서 $\overline{AP} \perp \overline{BP}$ 이고

$$\overline{AB} \perp \overline{PQ} \text{이므로}$$

$$\overline{PQ}^2 = \overline{AQ} \times \overline{BQ}$$

$$\text{이때 } \overline{AQ} = x (0 < x < 2) \text{라 하면}$$

$$\overline{PQ}^2 = x(2-x) \quad \therefore \overline{PQ} = \sqrt{x(2-x)} = \sqrt{2x-x^2}$$

삼각형 AQP의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{2x-x^2}$$

$$\therefore S'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2x-x^2} + \frac{1}{2}x \times \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{x(3-2x)}{2\sqrt{2x-x^2}}$$

$$S'(x) = 0 \text{에서 } x(3-2x) = 0$$

$$\therefore x = \frac{3}{2} (\because 0 < x < 2)$$

$0 < x < 2$ 에서 함수 $S(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

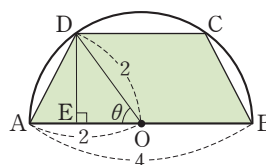
x	0	$\dots$	$\frac{3}{2}$	$\dots$	2
$S'(x)$		+	0	-	
$S(x)$		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$ 극대	$\searrow$	

따라서 넓이 $S(x)$ 의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ 이다.

- 18 다음 그림과 같이 선분 AB의 중점을 O, $\angle AOD = \theta$

$(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ 라 하고, 점 D에서 선분 AO에 내린 수선의

발을 E라 하자.



$\overline{OD} = \overline{OA} = 2$ 이므로 직각삼각형 ODE에서

$$\overline{DE} = 2 \sin \theta, \overline{OE} = 2 \cos \theta$$

$$\therefore \overline{CD} = 2\overline{OE} = 4 \cos \theta$$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하면

$$S(\theta) = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD}) \times \overline{DE}$$

$$= \frac{1}{2}(4 + 4 \cos \theta) \times 2 \sin \theta = 4(1 + \cos \theta) \sin \theta$$

$$\therefore S'(\theta) = -4 \sin^2 \theta + 4(1 + \cos \theta) \cos \theta$$

$$= -4 \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta$$

$$= -4(1 - \cos^2 \theta) + 4 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta$$

$$= 8 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta - 4$$

$$= 4(2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1)$$

$$S'(\theta) = 0 \text{에서 } 2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$$

$$(\cos \theta + 1)(2 \cos \theta - 1) = 0$$

$$\cos \theta = -1 \text{ 또는 } \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} (\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $S(\theta)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	0	$\dots$	$\frac{\pi}{3}$	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		+	0	-	
$S(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 극대	$\searrow$	

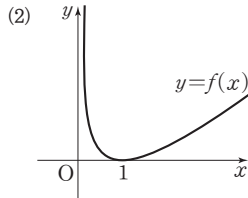
따라서 넓이 $S(\theta)$ 의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 이다.

기초 문제 Training

67쪽

1 (1)

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	0	/



(3) 1

2 0, 0, -, +, \, 0, /, 0

3 (1) $-3e^3$ (2) $-9e^3$

4 (1) (2, 7) (2) $\sqrt{53}$ (3) (0, 2) (4) 2

5 (1) (0, 3) (2) 3 (3) (4, 6) (4) $2\sqrt{13}$

핵심 유형 Training

68~70쪽

1 2	2 ④	3 ③	4 $0 < a \leq 1$	
5 ②	6 6	7 1	8 ①	9 $2e$
10 ①	11 ③	12 $\frac{\sqrt{3}}{3}$	13 4	14 1
15 ③	16 4	17 $(4, 0)$	18 ②	19 ④

1 $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}-4$ 라 하면

$$f'(x)=2e^{2x}-2e^{-2x}$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$2e^{2x}-2e^{-2x}=0, e^{2x}=e^{-2x} \quad \therefore x=0$$

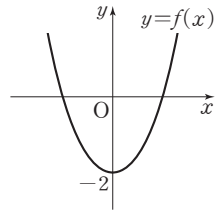
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\	-2 극소	/

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



2 $f(x)=\sin x-x$ 라 하면

$$f'(x)=\cos x-1$$

$$\text{이때 } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로 } f'(x) \leq 0$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

$$\text{이때 } f(-\pi)=\pi, f(0)=0,$$

$$f(\pi)=-\pi \text{이므로 함수}$$

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 한 점에서 만난다.

따라서 방정식 $\sin x-x=0$ 의

서로 다른 실근의 개수는 1이다.

$$\therefore a=1$$

$$g(x)=\ln x-3x+4 \text{라 하면 } x>0 \text{이고}$$

$$g'(x)=\frac{1}{x}-3$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } \frac{1}{x}-3=0 \quad \therefore x=\frac{1}{3}$$

$x>0$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{3}$	...
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		/	$3-\ln 3$ 극대	\

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty,$$

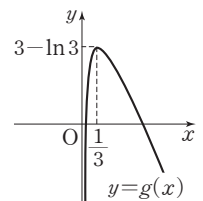
$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty \text{이므로 함수}$$

$y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 방정식 $\ln x-3x+4=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$$\therefore b=2$$

$$\therefore a+b=1+2=3$$



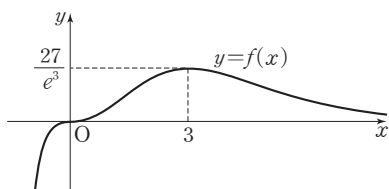
3 $f(x)=x^3e^{-x}$ 이라 하면

$$f'(x)=3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}=(3x^2-x^3)e^{-x}$$

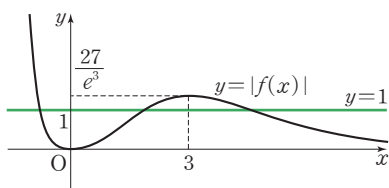
$f'(x)=0$ 에서 $3x^2-x^3=0$ ($\because e^{-x}>0$)
 $x^2(3-x)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=3$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	3	...
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{27}{e^3}$ 극대	$\searrow$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=-\infty$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 x 축보다 아래쪽에 있는 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 직선 $y=1$ 을 그어 보면 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 은 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

- 4 주어진 방정식에서 $x-2\sqrt{x-1}=a$ 이므로 이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=x-2\sqrt{x-1}$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x-2\sqrt{x-1}$ 이라 하면 $x \geq 1$ 이고

$$f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 1-\frac{1}{\sqrt{x-1}}=0, \sqrt{x-1}=1$$

$$x-1=1 \quad \therefore x=2$$

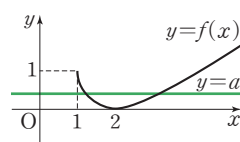
$x \geq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	1	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=\infty$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 교점이 2개가 되도록 직선 $y=a$ 를 그어 보면 구하는 a 의 값의 범위는

$$0 < a \leq 1$$



- 5 주어진 방정식에서 $\ln x - \frac{1}{2}x^2 = a$ 이므로 이 방정식이 오

직 한 실근을 가지려면 함수 $y=\ln x - \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 오직 한 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\ln x - \frac{1}{2}x^2$ 이라 하면 $x > 0$ 이고

$$f'(x)=\frac{1}{x}-x$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$\frac{1}{x}-x=0, \frac{1}{x}=x$$

$$x^2=1 \quad \therefore x=1 \quad (\because x>0)$$

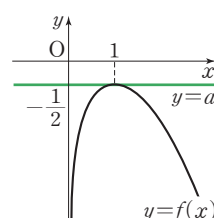
$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$ 극대	$\searrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)=-\infty,$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=-\infty$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 교점이 1개가 되도록 직선 $y=a$ 를 그어 보면 구하는 a 의 값은 $-\frac{1}{2}$ 이다.



- 6 주어진 방정식에서 $x \cos x - \sin x = -a$ 이므로 이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=x \cos x - \sin x$ 의 그래프와 직선 $y=-a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$$f(x)=x \cos x - \sin x \text{라 하면}$$

$$f'(x)=\cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x \sin x=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\pi \text{ 또는 } x=2\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

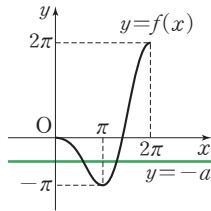
x	0	...	π	...	2π
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\pi$ 극소	$\nearrow$	2π

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 교점이 2개가 되도록 직선 $y=-a$ 를 그어 보면 a 의 값의 범위는

$$-\pi < -a \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a < \pi$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$$0+1+2+3=6$$



- 7 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=e^{|x|}-3|x|$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(x)=e^{|x|}-3|x|$ 라 하면

(i) $x \geq 0$ 일 때, $f(x)=e^x-3x$ 이므로

$$f'(x)=e^x-3$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$e^x-3=0, e^x=3 \quad \therefore x=\ln 3$$

(ii) $x < 0$ 일 때, $f(x)=e^{-x}+3x$ 이므로

$$f'(x)=-e^{-x}+3$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$-e^{-x}+3=0, e^{-x}=3 \quad \therefore x=-\ln 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

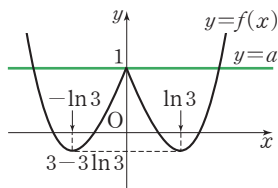
x	...	$-\ln 3$	...	0	...	$\ln 3$	...
$f'(x)$	-	0	+		-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$3-3\ln 3$ 극소	$\nearrow$	1 극대	$\searrow$	$3-3\ln 3$ 극소	$\nearrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \text{이므로 함수 } y=f(x) \text{의 그래프는}$$

오른쪽 그림과 같고, 교점이 3개가 되도록 직선

$y=a$ 를 그어 보면 구하는 a 의 값은 1이다.



- 8 $f(x)=\ln(x^2+4x+7)-a$ 라 하면

$$f'(x)=\frac{2x+4}{x^2+4x+7}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 2x+4=0 \quad \therefore x=-2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$\ln 3-a$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $\ln 3-a$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$\ln 3-a \geq 0 \quad \therefore a \leq \ln 3$$

- 9 $2e^x+x \ln x > a$ 에서 $2e^x+x \ln x - a > 0$

$f(x)=2e^x+x \ln x - a$ 라 하면

$$f'(x)=2e^x+\ln x+x \times \frac{1}{x}=2e^x+\ln x+1$$

$x > 1$ 일 때, $e^x > 0$, $\ln x > 0$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수

$f(x)$ 는 $x > 1$ 에서 증가한다.

따라서 $x > 1$ 일 때, $f(x) > 0$ 이 성립하려면 $f(1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$2e-a \geq 0 \quad \therefore a \leq 2e$$

따라서 a 의 최댓값은 $2e$ 이다.

- 10 $ax \leq e^x \leq bx$ 에서 $1 \leq x \leq 2$ 이므로 $a \leq \frac{e^x}{x} \leq b$

$$f(x)=\frac{e^x}{x} \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=\frac{xe^x-e^x}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x-1=0 (\because e^x > 0) \quad \therefore x=1$$

$1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	2
$f'(x)$		+	
$f(x)$	e	$\nearrow$	$\frac{e^2}{2}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $1 \leq x \leq 2$ 에서 증가하므로

$$e \leq f(x) \leq \frac{e^2}{2} \quad \therefore e \leq \frac{e^x}{x} \leq \frac{e^2}{2}$$

따라서 $a \leq e$, $b \geq \frac{e^2}{2}$ 이므로 $b-a$ 의 최솟값은

$$\frac{e^2}{2}-e=e\left(\frac{e}{2}-1\right)$$

- 11 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=\cos t-k \sin t$$

$t=\frac{\pi}{4}$ 에서의 점 P의 속도가 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 이므로 $v=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 에서

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}k=\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}k=\frac{\sqrt{2}}{4} \quad \therefore k=\frac{1}{2}$$

따라서 $x = \sin t + \frac{1}{2} \cos t$ 이므로 $t = \frac{\pi}{4}$ 에서의 점 P의 위치는

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

- 12** 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{k}{3} \cos \frac{t}{3}, \quad a = \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{9} \sin \frac{t}{3}$$

$t = 2\pi$ 에서의 점 P의 속도가 1이므로 $v = 1$ 에서

$$\frac{k}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 1, \quad -\frac{k}{6} = 1 \quad \therefore k = -6$$

따라서 $a = \frac{2}{3} \sin \frac{t}{3}$ 이므로 $t = 2\pi$ 에서의 점 P의 가속도는

$$a = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- 13** 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{t^2 + 16}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{2(t^2 + 16) - 2t \times 2t}{(t^2 + 16)^2} = \frac{-2(t^2 - 16)}{(t^2 + 16)^2}$$

점 P의 가속도가 0이므로 $a = 0$ 에서

$$t^2 - 16 = 0 \quad \therefore t = 4 \quad (\because t > 0)$$

- 14** $\frac{dx}{dt} = \sqrt{7}$, $\frac{dy}{dt} = 2t + 1$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$(\sqrt{7}, 2t + 1)$$

시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{(\sqrt{7})^2 + (2t + 1)^2} = \sqrt{4t^2 + 4t + 8}$$

$$\text{즉, } \sqrt{4t^2 + 4t + 8} = 4 \text{이므로}$$

$$4t^2 + 4t + 8 = 16, \quad 4(t - 1)(t + 2) = 0$$

$$\therefore t = 1 \quad (\because t > 0)$$

- 15** $\frac{dx}{dt} = ae^t$, $\frac{dy}{dt} = e^t + te^t = (1 + t)e^t$ 이므로

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ae^t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = e^t + (1 + t)e^t = (2 + t)e^t$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도는 $(ae^t, (2 + t)e^t)$

따라서 $t = 1$ 에서의 점 P의 가속도는 $(ae, 3e)$ 이므로 가속도의 크기는 $\sqrt{(ae)^2 + (3e)^2} = e\sqrt{a^2 + 9}$

$$\text{즉, } e\sqrt{a^2 + 9} = 5e \text{이므로}$$

$$\sqrt{a^2 + 9} = 5, \quad a^2 = 16 \quad \therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$

- 16** $\frac{dx}{dt} = 4$, $\frac{dy}{dt} = 2t - 2$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$(4, 2t - 2)$$

시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{4^2 + (2t - 2)^2} = 2\sqrt{(t - 1)^2 + 4}$$

따라서 $t = 1$ 일 때 최솟값 4를 갖는다.

- 17** $\frac{dx}{dt} = 2(1 - \cos t)$, $\frac{dy}{dt} = 2 \sin t$ 이므로 시각 t 에서의 점

P의 속도는

$$(2(1 - \cos t), 2 \sin t)$$

시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} & \sqrt{\{2(1 - \cos t)\}^2 + (2 \sin t)^2} \\ &= 2\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= 2\sqrt{2 - 2\cos t} \end{aligned}$$

이때 $0 \leq t \leq 2\pi$ 에서 $-1 \leq \cos t \leq 1$ 이므로 $\cos t = -1$ 일 때 속력이 최대이다.

$$\cos t = -1 \text{에서 } t = \pi \quad (\because 0 \leq t \leq 2\pi)$$

따라서 $t = \pi$ 에서의 점 P의 속도는 $(4, 0)$

- 18** 원점을 출발한 지 t 초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각

$$A(3t, 0), \quad B(0, 6t)$$

이때 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{2 \times 0 + 1 \times 3t}{2 + 1} = t$$

$$y = \frac{2 \times 6t + 1 \times 0}{2 + 1} = 4t$$

$$\therefore P(t, 4t)$$

이때 $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 4$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$(1, 4)$$

따라서 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

- 19** 오른쪽 그림과 같이 t 초 후에 지면과 닿은 사다리의 끝에서 벽까지의 거리를 x m, 벽에 닿은 사다리의 끝부터 지면까지의 거리를 y m라 하면

$$x^2 + y^2 = 10^2$$

각 항을 t 에 대하여 미분하면

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\text{이때 } \frac{dx}{dt} = 0.3 \text{이므로}$$

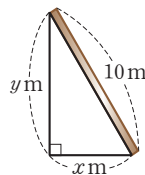
$$0.6x + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{0.3x}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$x = 8 \text{일 때, } y = 6 \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{0.3 \times 8}{6} = -0.4$$

따라서 벽에 닿은 사다리의 끝이 아래로 내려오는 속력은 0.4m/s이다.



III-1 01 여러 가지 함수의 부정적분

기초 문제 Training

72쪽

- 1 (1) $-\frac{1}{3x^3}+C$ (2) $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+C$
 (3) $2\sqrt{x}+C$ (4) $3\ln|x|+C$
- 2 (1) $e^{x+3}+C$ (2) $\frac{8^x}{\ln 8}+C$
 (3) $-\cos x+\cot x+C$ (4) $\tan x-2\sec x+C$
- 3 (1) $\frac{1}{12}(2x+1)^6+C$ (2) $\frac{1}{5}e^{5x-2}+C$
- 4 (가) $-\cos x$ (나) $(-1)dt$ (다) $-t$ (라) $-\frac{1}{2}(1-\sin x)^2$
- 5 (가) $\ln x$ (나) $\frac{1}{x}$ (다) $\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$

핵심 유형 Training

73~77쪽

- 1 ③ 2 9 3 ① 4 $f(x)=e^x-4x+4$
 5 ② 6 $\frac{1}{2\ln 3}$ 7 $f(x)=2\tan x-x+\frac{\pi}{3}$
 8 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 9 ② 10 2 11 ③ 12 $\pi+1$
 13 $\frac{\pi}{2}-3$ 14 ① 15 $-\frac{9}{20}$ 16 ①
 17 $f(x)=e^x-2x^3+4$ 18 ② 19 1
 20 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 21 $\frac{\ln 2+1}{2}$ 22 ④ 23 ④
 24 ④ 25 $20-\ln 21$ 26 $\ln 3$ 27 ④
 28 ① 29 1 30 ④ 31 $e+1$ 32 ③

- 1 $F(x)=\int f(x)dx=\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^2dx$
 $=\int\left(x+\frac{2\sqrt{x}}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$
 $=\int\left(x+2x^{-\frac{1}{2}}+x^{-2}\right)dx$
 $=\frac{1}{2}x^2+4x^{\frac{1}{2}}-x^{-1}+C$
 $=\frac{1}{2}x^2+4\sqrt{x}-\frac{1}{x}+C$
 $\therefore F(2)-F(1)=\left(4\sqrt{2}+\frac{3}{2}+C\right)-\left(\frac{7}{2}+C\right)=4\sqrt{2}-2$

- 2 $f(x)=\int\frac{x+4}{x(x+1)}dx+\int\frac{2x-1}{x(x+1)}dx$
 $=\int\frac{3(x+1)}{x(x+1)}dx$
 $=\int\frac{3}{x}dx=3\ln|x|+C$
 이때 $f(1)=3$ 에서 $C=3$
 따라서 $f(x)=3\ln|x|+3$ 이므로
 $f(e^2)=6+3=9$

- 3 $f_n(x)=\int x^{\frac{1}{n+2}}dx=\frac{n+2}{n+3}x^{\frac{n+3}{n+2}}+C$
 이때 $f_n(0)=0$ 에서 $C=0$
 따라서 $f_n(x)=\frac{n+2}{n+3}x^{\frac{n+3}{n+2}}$ 이므로
 $f_1(1)\times f_2(1)\times f_3(1)\times\cdots\times f_{12}(1)$
 $=\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{14}{15}=\frac{1}{5}$

- 4 $f(x)=\int(\sqrt{e^x}+2)(\sqrt{e^x}-2)dx$
 $=\int(e^x-4)dx=e^x-4x+C$
 이때 $f(1)=e$ 에서
 $e-4+C=e \quad \therefore C=4$
 $\therefore f(x)=e^x-4x+4$

- 5 $f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{8^x+1}{2^x+1}dx$
 $=\int\frac{(2^x+1)(4^x-2^x+1)}{2^x+1}dx$
 $=\int(4^x-2^x+1)dx=\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}+x+C$
 이때 $f(0)=-1$ 에서
 $\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 2}+C=-1 \quad \therefore C=\frac{1}{\ln 4}-1$
 따라서 $f(x)=\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}+x+\frac{1}{\ln 4}-1$ 이므로
 $f(1)=\frac{4}{\ln 4}-\frac{2}{\ln 2}+1+\frac{1}{\ln 4}-1=\frac{1}{\ln 4}$

- 6 $\{f(x)+2g(x)\}'=3^x$ 에서
 $f(x)+2g(x)=\int 3^x dx=\frac{3^x}{\ln 3}+C_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\{f(x)-2g(x)\}'=3^{-x}=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 에서
 $f(x)-2g(x)=\int\left(\frac{1}{3}\right)^x dx=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln \frac{1}{3}}+C_2$
 $=-\frac{3^{-x}}{\ln 3}+C_2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

이때 $f(0)=0$, $g(0)=\frac{1}{2\ln 3}$ 이므로 ㉠에서

$$f(0)+2g(0)=\frac{1}{\ln 3}+C_1$$

$$\frac{1}{\ln 3}+C_1=\frac{1}{\ln 3} \quad \therefore C_1=0$$

㉡에서 $f(0)-2g(0)=-\frac{1}{\ln 3}+C_2$

$$-\frac{1}{\ln 3}+C_2=-\frac{1}{\ln 3} \quad \therefore C_2=0$$

$$\therefore f(x)+2g(x)=\frac{3^x}{\ln 3} \quad \dots\dots \text{㉢},$$

$$f(x)-2g(x)=-\frac{3^{-x}}{\ln 3} \quad \dots\dots \text{㉣}$$

㉢+㉣을 하면

$$2f(x)=\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{3^{-x}}{\ln 3} \quad \therefore f(x)=\frac{3^x-3^{-x}}{2\ln 3}$$

㉢-㉣을 하면

$$4g(x)=\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{3^{-x}}{\ln 3} \quad \therefore g(x)=\frac{3^x+3^{-x}}{4\ln 3}$$

$$\therefore f(1)-g(1)=\frac{4}{3\ln 3}-\frac{5}{6\ln 3}=\frac{1}{2\ln 3}$$

7 $f(x)=\int \frac{\sin^2 x+1}{\cos^2 x} dx = \int \left\{ \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 + \frac{1}{\cos^2 x} \right\} dx$

$$= \int (\tan^2 x + \sec^2 x) dx$$

$$= \int \{(\sec^2 x - 1) + \sec^2 x\} dx$$

$$= \int (2\sec^2 x - 1) dx$$

$$= 2\tan x - x + C$$

이때 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$ 에서

$$2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}+C=2\sqrt{3} \quad \therefore C=\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore f(x)=2\tan x - x + \frac{\pi}{3}$$

8 $f(x)=\int (\tan x + \cot x)^2 dx$

$$= \int (\tan^2 x + 2 + \cot^2 x) dx$$

$$= \int \{(\sec^2 x - 1) + 2 + (\csc^2 x - 1)\} dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \csc^2 x) dx$$

$$= \tan x - \cot x + C$$

이때 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ 에서

$$1-1+C=0 \quad \therefore C=0$$

따라서 $f(x)=\tan x - \cot x$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

9 $\int \frac{1}{1-\cos x} dx = \int \frac{1+\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} dx$

$$= \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} \right) dx$$

$$= \int (\csc^2 x + \csc x \cot x) dx$$

$$= -\cot x - \csc x + C$$

따라서 $a=-1$, $b=-1$ 이므로

$$a+b=-2$$

10 $f(x)=\int f'(x) dx$

$$= \int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx$$

$$= \int \frac{\sin x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)} dx$$

$$= \int \frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x} dx$$

$$= \int \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \left\{ \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} - \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^2 \right\} dx$$

$$= \int (\sec x \tan x - \tan^2 x) dx$$

$$= \int (\sec x \tan x - \sec^2 x + 1) dx$$

$$= \sec x - \tan x + x + C$$

이때 $f(\pi)=\pi$ 에서

$$-1+\pi+C=\pi \quad \therefore C=1$$

따라서 $f(x)=\sec x - \tan x + x + 1$ 이므로

$$f(0)=1+1=2$$

11 $F(x)=\int f(x) dx = \int \frac{2\sin x}{1+\cos 2x} dx$

$$= \int \frac{2\sin x}{1+(2\cos^2 x-1)} dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= \int \sec x \tan x dx$$

$$= \sec x + C$$

$$\therefore F(\pi)-F(-\pi)=(-1+C)-(-1+C)=0$$

12 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 2x + \cos x - x \sin x - \cos x$$

$$xf'(x) = 2x + x \sin x$$

$$\therefore f'(x) = 2 + \sin x \quad (\because x > 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2 + \sin x) dx \\ &= 2x - \cos x + C \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{에서}$$

$$\pi + C = 0 \quad \therefore C = -\pi$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2x - \cos x - \pi \text{이므로}$$

$$f(\pi) = 2\pi + 1 - \pi = \pi + 1$$

13 $x \geq 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (1 - \cos x) dx \\ &= x - \sin x + C_1 \end{aligned}$$

$x < 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2x + \sin x) dx \\ &= x^2 - \cos x + C_2 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x - \sin x + C_1 & (x \geq 0) \\ x^2 - \cos x + C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

이때 $f(-\pi) = \pi^2$ 에서

$$\pi^2 + 1 + C_2 = \pi^2 \quad \therefore C_2 = -1$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \sin x + C_1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - \cos x - 1)$$

$$\therefore C_1 = -2$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x - \sin x - 2 & (x \geq 0) \\ x^2 - \cos x - 1 & (x < 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 - 2 = \frac{\pi}{2} - 3$$

14 $e^{3x} + 3 = t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3e^{3x} = \frac{dt}{dx}$$

$$\therefore \int e^{3x} \sqrt{e^{3x} + 3} dx = \int \sqrt{t} \times \frac{1}{3} dt$$

$$= \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{2}{9} t^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{9} t \sqrt{t} + C$$

$$= \frac{2}{9} (e^{3x} + 3) \sqrt{e^{3x} + 3} + C$$

$$\therefore a = \frac{2}{9}$$

15 $x^2 + 1 = t$ 로 놓으면

$$x^2 = t - 1$$

$x^2 + 1 = t$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x = \frac{dt}{dx}$$

$$\therefore f(x) = \int 2x^3(x^2 + 1)^3 dx$$

$$= \int (t - 1)t^3 dt$$

$$= \int (t^4 - t^3) dt$$

$$= \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{4} t^4 + C$$

$$= \frac{1}{5} (x^2 + 1)^5 - \frac{1}{4} (x^2 + 1)^4 + C$$

이때 $f(1) = 2$ 에서

$$\frac{32}{5} - 4 + C = 2$$

$$\therefore C = -\frac{2}{5}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{5} (x^2 + 1)^5 - \frac{1}{4} (x^2 + 1)^4 - \frac{2}{5} \text{이므로}$$

$$f(0) = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = -\frac{9}{20}$$

$$16 f(x) = \int \sin x \cos 2x dx$$

$$= \int \sin x (2 \cos^2 x - 1) dx$$

$\cos x = t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$-\sin x = \frac{dt}{dx}$$

$$\therefore f(x) = \int \sin x (2 \cos^2 x - 1) dx$$

$$= \int (2t^2 - 1) \times (-1) dt$$

$$= - \int (2t^2 - 1) dt$$

$$= -\frac{2}{3} t^3 + t + C$$

$$= -\frac{2}{3} \cos^3 x + \cos x + C$$

$$\therefore f(\pi) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{1}{3} + C\right) - C = -\frac{1}{3}$$

$$17 f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int 2x(e^{x^2} - 3x) dx$$

$$= \int (2xe^{x^2} - 6x^2) dx$$

$$= \int 2xe^{x^2} dx - \int 6x^2 dx$$

$$\int 2xe^{x^2} dx \text{에서 } x^2=t \text{로 놓고 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$2x = \frac{dt}{dx}$$

$$\therefore f(x) = \int 2xe^{x^2} dx - \int 6x^2 dx$$

$$= \int e^t dt - \int 6x^2 dx$$

$$= e^t - 2x^3 + C$$

$$= e^{x^2} - 2x^3 + C$$

이때 $f(0)=5$ 에서

$$1+C=5 \quad \therefore C=4$$

$$\therefore f(x) = e^{x^2} - 2x^3 + 4$$

- 18 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{이므로}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$1+x^2=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x = \frac{dt}{dx}$$

$$\therefore f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt$$

$$= t^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \sqrt{t} + C$$

$$= \sqrt{1+x^2} + C$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로 $f(0)=1$ 에서

$$1+C=1 \quad \therefore C=0$$

따라서 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ 이므로

$$f(-1) = \sqrt{2}$$

19 $F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{6(\ln x)^2 + 1}{x} dx$

$\ln x = t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$$

$$\therefore F(x) = \int \frac{6(\ln x)^2 + 1}{x} dx$$

$$= \int (6t^2 + 1) dt$$

$$= 2t^3 + t + C$$

$$= 2(\ln x)^3 + \ln x + C$$

이때 $F(e)=3$ 에서

$$2+1+C=3 \quad \therefore C=0$$

$$\therefore F(x) = 2(\ln x)^3 + \ln x$$

방정식 $F(x)=0$ 에서

$$2(\ln x)^3 + \ln x = 0, \ln x \{2(\ln x)^2 + 1\} = 0$$

$$\ln x = 0 \quad (\because 2(\ln x)^2 + 1 > 0)$$

$$\therefore x=1$$

20 $f(x) = \int f'(x) dx$

$$= \int (\sin 2x - \cos 2x) dx$$

$2x=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2 = \frac{dt}{dx}$$

$$\therefore f(x) = \int (\sin 2x - \cos 2x) dx$$

$$= \int (\sin t - \cos t) \times \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int (\sin t - \cos t) dt$$

$$= -\frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t + C$$

$$= -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$f'(x)=0$ 에서

$$\sin 2x - \cos 2x = 0$$

$$\sin 2x = \cos 2x$$

$$\therefore 2x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } 2x = \frac{5}{4}\pi \quad (\because 0 < 2x < 2\pi)$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{8} \text{ 또는 } x = \frac{5}{8}\pi$$

$0 < x < \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{8}$	...	$\frac{5}{8}\pi$	...	π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		\	극소	/	극대	\	

함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{5}{8}\pi$ 에서 극대이고 극댓값이 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$f\left(\frac{5}{8}\pi\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{에서}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + C = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad \therefore C = \sqrt{2}$$

따라서 함수 $f(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x + \sqrt{2}$ 는

$x = \frac{\pi}{8}$ 에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 21 \quad f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{x+2}{x^2+4x+5} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5) + C \quad (\because x^2+4x+5 > 0)
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f(-2) = \frac{1}{2} \text{에서 } C = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+4x+5) + \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$f(-1) = \frac{\ln 2 + 1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 22 \quad F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{1+\sin x}{x-\cos x} dx \\
 &= \int \frac{(x-\cos x)'}{x-\cos x} dx = \ln |x-\cos x| + C \\
 \therefore F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{3}{2}\pi\right) &= \left(\ln \frac{\pi}{2} + C\right) - \left(\ln \frac{3}{2}\pi + C\right) \\
 &= \ln \frac{1}{3} = -\ln 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 23 \quad f(x) &= \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-\sin x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{e^{2x}-\sin x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x}-\cos x}{e^{2x}-\sin x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(e^{2x}-\sin x)'}{e^{2x}-\sin x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \ln |e^{2x}-\sin x| + C
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f(0) = 0 \text{에서 } C = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2} \ln |e^{2x}-\sin x| \text{이므로}$$

$$f(\pi) = \frac{\ln e^{2\pi}}{2} = \pi$$

$$\begin{aligned}
 24 \quad f(x) &= \int \frac{3-x}{x+2} dx = \int \frac{-(x+2)+5}{x+2} dx \\
 &= \int \left(-1 + \frac{5}{x+2}\right) dx \\
 &= -x + 5 \ln |x+2| + C
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f(-1) = 5 \text{에서}$$

$$1+C=5 \quad \therefore C=4$$

$$\text{따라서 } f(x) = -x + 5 \ln |x+2| + 4 \text{이므로}$$

$$f(-3) = 3 + 4 = 7$$

$$\begin{aligned}
 25 \quad f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x^2-4} dx \\
 &= \int \frac{1}{(x-2)(x+2)} dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) dx \\
 &= \frac{1}{4} (\ln |x-2| - \ln |x+2|) + C \\
 &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f(0) = 1 \text{에서 } C = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=1}^5 4f(2k+2) \\
 &= \sum_{k=1}^5 \left(\ln \left| \frac{k}{k+2} \right| + 4 \right) \\
 &= \left(\ln \frac{1}{3} + 4 \right) + \left(\ln \frac{1}{2} + 4 \right) + \cdots + \left(\ln \frac{5}{7} + 4 \right) \\
 &= \ln \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \right) + 4 \times 5 \\
 &= \ln \frac{1}{21} + 20 = 20 - \ln 21
 \end{aligned}$$

$$26 \quad \text{분모에서 } 2x^2-5x-3 = (2x+1)(x-3) \text{이므로}$$

$$\frac{x+4}{2x^2-5x-3} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-3} \quad (A, B \text{는 상수}) \text{로 놓으면}$$

$$\frac{x+4}{2x^2-5x-3} = \frac{(A+2B)x-3A+B}{2x^2-5x-3}$$

$$\text{이 식은 } x \text{에 대한 항등식이므로}$$

$$A+2B=1, -3A+B=4$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } A=-1, B=1$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(x) &= \int \frac{x+4}{2x^2-5x-3} dx \\
 &= \int \left(-\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{x-3} \right) dx \\
 &= -\frac{1}{2} \ln |2x+1| + \ln |x-3| + C
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f(4) = -\ln 3 \text{에서}$$

$$-\frac{\ln 9}{2} + C = -\ln 3 \quad \therefore C = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = -\frac{1}{2} \ln |2x+1| + \ln |x-3| \text{이므로}$$

$$f(0) = \ln 3$$

$$27 \quad u(x) = x+1, v'(x) = \sin x \text{로 놓으면}$$

$$u'(x) = 1, v(x) = -\cos x$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(x) &= \int (x+1) \sin x dx \\
 &= -(x+1) \cos x + \int \cos x dx \\
 &= -(x+1) \cos x + \sin x + C
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{에서}$$

$$1+C=1 \quad \therefore C=0$$

$$\text{따라서 } f(x) = -(x+1) \cos x + \sin x \text{이므로}$$

$$f(\pi) = \pi + 1$$

$$28 \quad f(x) = \int f'(x) dx = \int (x-a)e^{-x} dx$$

$$u(x) = x-a, v'(x) = e^{-x} \text{으로 놓으면}$$

$$u'(x) = 1, v(x) = -e^{-x}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int (x-a)e^{-x} dx \\ &= -(x-a)e^{-x} + \int e^{-x} dx \\ &= -(x-a)e^{-x} - e^{-x} + C \\ &= -(x-a+1)e^{-x} + C\end{aligned}$$

이때 $f(0) = -1$ 에서

$$a-1+C = -1 \quad \therefore C = -a$$

또 $f(-1) = e-1$ 에서

$$ae-a = e-1 \quad (\because C = -a)$$

$$(a-1)(e-1) = 0 \quad \therefore a = 1$$

29 $F'(x) = f(x)$ 이므로

$$F(x) + xf(x) = \{xF(x)\}'$$

$$\therefore xF(x) = \int \{F(x) + xf(x)\} dx$$

$$= \int (2\ln x + 1) dx$$

$$= 2 \int \ln x dx + \int dx$$

$\int \ln x dx$ 에서 $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$ 로 놓으면

$$u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\int \ln x dx &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C_1\end{aligned}$$

$$\therefore xF(x) = 2 \int \ln x dx + \int dx$$

$$= 2(x \ln x - x + C_1) + \int dx$$

$$= 2x \ln x - 2x + x + C = 2x \ln x - x + C$$

이때 $F(1) = -1$ 에서

$$-1 + C = -1 \quad \therefore C = 0$$

따라서 $xF(x) = 2x \ln x - x$ 이므로

$$F(x) = 2 \ln x - 1 \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore F(e) = 2 - 1 = 1$$

30 $f(x) = x^2$, $g'(x) = \cos x$ 로 놓으면

$$f'(x) = 2x, g(x) = \sin x$$

$$\therefore \int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx$$

$$= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$\int x \sin x dx$ 에서 $u(x) = x$, $v'(x) = \sin x$ 로 놓으면

$$u'(x) = 1, v(x) = -\cos x$$

$$\therefore \int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8}$ 을 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x dx &= x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x + C_1) \\ &= (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C\end{aligned}$$

따라서 $p=1$, $q=-2$, $r=2$ 이므로

$$p+q+r=1$$

31 $g(x) = (\ln x)^2$, $h'(x) = 1$ 로 놓으면

$$g'(x) = \frac{2 \ln x}{x}, h(x) = x$$

$$\therefore f(x) = \int (\ln x)^2 dx$$

$$= x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$\int \ln x dx$ 에서 $u(x) = \ln x$, $v'(x) = 1$ 로 놓으면

$$u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = x$$

$$\therefore \int \ln x dx = x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{10}$ 을 $\textcircled{9}$ 에 대입하면

$$f(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

이때 $f(1) = 3$ 에서 $2+C=3 \quad \therefore C=1$

따라서 $f(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + 1$ 이므로

$$f(e) = e - 2e + 2e + 1 = e + 1$$

32 $g(x) = -\cos x$ 이므로 $g'(x) = \sin x$

$$\therefore h(x) = \int 5f(x)g'(x) dx = 5 \int e^{2x} \sin x dx$$

$\int e^{2x} \sin x dx$ 에서 $f(x) = e^{2x}$, $g'(x) = \sin x$ 이므로

$$f'(x) = 2e^{2x}, g(x) = -\cos x \text{이므로}$$

$$\int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x dx \quad \dots\dots \textcircled{11}$$

$\int e^{2x} \cos x dx$ 에서 $u(x) = e^{2x}$, $v'(x) = \cos x$ 로 놓으면

$$u'(x) = 2e^{2x}, v(x) = \sin x \text{이므로}$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x dx \quad \dots\dots \textcircled{12}$$

$\textcircled{12}$ 을 $\textcircled{11}$ 에 대입하면

$$\int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4 \int e^{2x} \sin x dx$$

$$5 \int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x$$

$$\therefore h(x) = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x + C$$

이때 $h(0) = -1$ 에서 $-1+C = -1 \quad \therefore C=0$

따라서 $h(x) = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x$ 이므로

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2e^\pi$$

III-1 02 여러 가지 함수의 정적분

기초 문제 Training

78쪽

1 (1) $\frac{52}{3}$ (2) 1 (3) $\frac{24}{\ln 3}$ (4) $\sqrt{3}-1$

2 (가) 1 (나) 2 (다) $\frac{1}{3}$ (라) $\frac{31}{15}$

3 (가) $-x \cos x$ (나) $-\cos x$ (다) $\sin x$ (라) 1

4 (1) $\frac{\ln x}{x}$ (2) $e^{x+2}-e^x$

5 (1) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+3}$ (2) $f(x) = -3 \sin x$

핵심 유형 Training

79~84쪽

- | | | | |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|-------------|
| 1 ② | 2 ② | 3 16 | 4 e^2-e-1 |
| 5 ④ | 6 $\frac{10}{\ln 3}+9$ | 7 $\frac{3}{2}\pi-3$ | 8 ① |
| 9 ④ | | | |
| 10 ㄴ | 11 ① | 12 4 | 13 ③ |
| 14 $\frac{1}{2}\ln \frac{5}{2}$ | 15 $\frac{1}{2}+\ln 2$ | 16 1 | 17 ② |
| 18 ② | 19 4 | 20 $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 21 2 |
| 22 $\frac{2-\ln 3}{3}$ | 23 $\frac{7}{4}e^2-\frac{7}{4}$ | 24 ② | |
| 25 ④ | 26 ② | 27 $2-\frac{4}{\ln 2}$ | |
| 28 $f(x)=2-\pi \cos x$ | 29 $\frac{\ln 5}{5}$ | 30 $\frac{8}{e^4}$ | 31 ② |
| 32 $\frac{1}{6}$ | 33 $\sqrt{3}$ | 34 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | 35 ④ |
| 36 ⑤ | | | |
| 37 1 | 38 ⑤ | 39 ① | |

1 $\int_1^4 \frac{2\sqrt{x}-4}{x^2} dx = \int_1^4 (2x^{-\frac{3}{2}}-4x^{-2}) dx$
 $= \left[-4x^{-\frac{1}{2}}+4x^{-1} \right]_1^4$
 $= (-2+1) - (-4+4)$
 $= -1$

2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{1+\cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-(2\cos^2 x-1)}{1+\cos x} dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2-2\cos^2 x}{1+\cos x} dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(1+\cos x)(1-\cos x)}{1+\cos x} dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1-\cos x) dx$
 $= \left[2x-2\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi-2$

3 $\int_1^3 \frac{3x^2+1}{x^2} dx + 2 \int_1^3 \frac{x+1}{x^2} dx$
 $= \int_1^3 \frac{3x^2+2x+3}{x^2} dx$
 $= \int_1^3 \left(3+\frac{2}{x}+3x^{-2} \right) dx$
 $= \left[3x+2\ln|x|-3x^{-1} \right]_1^3$
 $= (9+2\ln 3-1) - (3-3) = 2\ln 3+8$
따라서 $a=2, b=8$ 이므로 $ab=16$

4 $\int_{-2}^2 \frac{e^{3x}-1}{e^{2x}+e^x+1} dx - \int_{-2}^1 \frac{e^{3t}-1}{e^{2t}+e^t+1} dt$
 $= \int_{-2}^2 \frac{e^{3x}-1}{e^{2x}+e^x+1} dx + \int_1^{-2} \frac{e^{3x}-1}{e^{2x}+e^x+1} dx$
 $= \int_1^2 \frac{e^{3x}-1}{e^{2x}+e^x+1} dx$
 $= \int_1^2 \frac{(e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)}{e^{2x}+e^x+1} dx$
 $= \int_1^2 (e^x-1) dx$
 $= \left[e^x-x \right]_1^2$
 $= (e^2-2) - (e-1) = e^2-e-1$

5 $x-2=0$ 에서 $x=2$

따라서 $\frac{|x-2|}{x} = \begin{cases} \frac{x-2}{x} & (x \geq 2) \\ -\frac{x-2}{x} & (x \leq 2) \end{cases}$ 이므로

$\int_1^3 \frac{|x-2|}{x} dx$
 $= \int_1^2 \left(-\frac{x-2}{x} \right) dx + \int_2^3 \frac{x-2}{x} dx$
 $= \int_1^2 \left(-1+\frac{2}{x} \right) dx + \int_2^3 \left(1-\frac{2}{x} \right) dx$
 $= \left[-x+2\ln|x| \right]_1^2 + \left[x-2\ln|x| \right]_2^3$
 $= \{(-2+2\ln 2)-(-1)\} + \{(3-2\ln 3)-(2-2\ln 2)\}$
 $= 2\ln \frac{4}{3}$
 $\therefore a=2$

6 $3^x - 9 = 0$ 에서 $3^x = 9 \quad \therefore x = 2$

따라서 $|3^x - 9| = \begin{cases} 3^x - 9 & (x \geq 2) \\ -3^x + 9 & (x \leq 2) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^3 |3^x - 9| dx &= \int_0^2 (-3^x + 9) dx + \int_2^3 (3^x - 9) dx \\ &= \left[-\frac{3^x}{\ln 3} + 9x \right]_0^2 + \left[\frac{3^x}{\ln 3} - 9x \right]_2^3 \\ &= \left\{ \left(-\frac{9}{\ln 3} + 18 \right) - \left(-\frac{1}{\ln 3} \right) \right\} \\ &\quad + \left\{ \left(\frac{27}{\ln 3} - 27 \right) - \left(\frac{9}{\ln 3} - 18 \right) \right\} \\ &= \frac{10}{\ln 3} + 9 \end{aligned}$$

7 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (2 \cos x + 1) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (-\sin x + k)$

$1 = -1 + k \quad \therefore k = 2$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^\pi f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x + 2) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (2 \cos x + 1) dx \\ &= \left[\cos x + 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[2 \sin x + x \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\ &= (\pi - 1) + \left\{ \pi - \left(2 + \frac{\pi}{2} \right) \right\} = \frac{3}{2}\pi - 3 \end{aligned}$$

8 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (2 \sin x - 3 \cos x + \tan x) dx$
 $-\int_{\frac{\pi}{4}}^0 (2 \sin x - 3 \cos x + \tan x) dx$
 $= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (2 \sin x - 3 \cos x + \tan x) dx$
 $+ \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \sin x - 3 \cos x + \tan x) dx$
 $= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \sin x - 3 \cos x + \tan x) dx$

이때 $f(x) = 2 \sin x + \tan x$, $g(x) = -3 \cos x$ 라 하면

$f(-x) = 2 \sin(-x) + \tan(-x)$
 $= -2 \sin x - \tan x = -f(x)$

$g(-x) = -3 \cos(-x) = -3 \cos x = g(x)$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (2 \sin x - 3 \cos x + \tan x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (2 \sin x - 3 \cos x + \tan x) dx \\ &\quad - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 (2 \sin x - 3 \cos x + \tan x) dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \sin x - 3 \cos x + \tan x) dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2 \sin x + \tan x) dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-3 \cos x) dx \\ &= 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-3 \cos x) dx = -6 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -3\sqrt{2} \end{aligned}$$

9 $f(x) = x^2 + \cos x$ 에서 $f'(x) = 2x - \sin x$ 이므로
 $f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = f(x)$
 $f'(-x) = 2 \times (-x) - \sin(-x) = -2x + \sin x$
 $= -f'(x)$

$\therefore f(-x)f'(-x) = -f(x)f'(x)$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-\pi}^\pi f(x)\{f'(x) + 3\} dx &= \int_{-\pi}^\pi f(x)f'(x) dx + 3 \int_{-\pi}^\pi f(x) dx \\ &= 0 + 6 \int_0^\pi f(x) dx = 6 \int_0^\pi (x^2 + \cos x) dx \\ &= 6 \left[\frac{1}{3}x^3 + \sin x \right]_0^\pi = 2\pi^3 \end{aligned}$$

10 ㉠. $f(-x) = -x(e^{-x} - e^x)$
 $= x(e^x - e^{-x}) = f(x)$

$\therefore \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

㉡. $g(x) = xf(x)$ 라 하면

$g(-x) = -xf(-x)$
 $= -xf(x) = -g(x)$

$\therefore \int_{-a}^a xf(x) dx = 0$

㉢. $f'(x) = (e^x - e^{-x}) + x(e^x + e^{-x})$ 이므로

$xf'(x) = x(e^x - e^{-x}) + x^2(e^x + e^{-x})$

$h(x) = xf'(x)$ 라 하면

$h(-x) = -x(e^{-x} - e^x) + (-x)^2(e^{-x} + e^x)$
 $= x(e^x - e^{-x}) + x^2(e^x + e^{-x})$
 $= h(x)$

$\therefore \int_{-a}^a xf'(x) dx = 2 \int_0^a xf'(x) dx$

따라서 보기 중 정적분의 값이 항상 0인 것은 ㉡이다.

11 함수 $y = |\sin 3x|$ 의 주기가 $\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} |\sin 3x| dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} |\sin 3x| dx = \int_{\frac{2\pi}{3}}^\pi |\sin 3x| dx \\ \therefore \int_0^\pi |\sin 3x| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} |\sin 3x| dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} |\sin 3x| dx \\ &\quad + \int_{\frac{2\pi}{3}}^\pi |\sin 3x| dx \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} |\sin 3x| dx = 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx \\ &= 3 \left[-\frac{1}{3} \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 3 \left\{ \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \right\} = 2 \end{aligned}$$

- 12 함수 $y = \left| \cos \frac{x}{2} \right|$ 의 주기가 2π 이므로

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} \left| \cos \frac{x}{2} \right| dx &= \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{x}{2} \right| dx \\ &= \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \left(-\cos \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \left[2 \sin \frac{x}{2} \right]_0^{\pi} + \left[-2 \sin \frac{x}{2} \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

- 13 $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} f(x) dx \\ &= \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} f(x) dx \\ \therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} f(x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx \\ &\quad + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} f(x) dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} f(x) dx \\ &= 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \end{aligned}$$

이때 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서

$$f(-x) = \sec^2(-x) = \sec^2 x = f(x) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} f(x) dx &= 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx \\ &= 8 \left[\tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 8 \end{aligned}$$

- 14 $e^{2x} + 1 = t$ 로 놓으면 $2e^{2x} = \frac{dt}{dx}$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=2$,

$x=\ln 2$ 일 때 $t=5$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx &= \int_2^5 \frac{1}{t} \times \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int_2^5 \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln |t| \right]_2^5 \\ &= \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} \end{aligned}$$

다른 풀이

$(e^{2x} + 1)' = 2e^{2x}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} \frac{(e^{2x}+1)'}{e^{2x}+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln(e^{2x}+1) \right]_0^{\ln 2} \\ &= \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 15 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^3 x}{1+\sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+\sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \cos^3 x}{1+\sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x (1+\cos^2 x)}{1+\sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x (2-\sin^2 x)}{1+\sin x} dx \end{aligned}$$

$1+\sin x=t$ 로 놓으면 $\cos x = \frac{dt}{dx}$ 이고, $x=0$ 일 때

$t=1$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^3 x}{1+\sin x} dx \\ &= \int_1^2 \frac{\cos x (2-\sin^2 x)}{1+\sin x} dx \\ &= \int_1^2 \frac{2-(t-1)^2}{t} dt \\ &= \int_1^2 \left(-t + 2 + \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t^2 + 2t + \ln |t| \right]_1^2 \\ &= (-2+4+\ln 2) - \left(-\frac{1}{2}+2 \right) = \frac{1}{2} + \ln 2 \end{aligned}$$

- 16 $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \frac{a+\ln x}{x} dx$ 에서 $a+\ln x=t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$ 이고, $x=1$ 일 때 $t=a$, $x=e$ 일 때 $t=a+1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^e f(x) dx &= \int_a^{a+1} \frac{a+\ln x}{x} dx \\ &= \int_a^{a+1} t dt = \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_a^{a+1} \\ &= \frac{1}{2}(a+1)^2 - \frac{1}{2}a^2 = a + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\int_0^2 g(x) dx = \int_0^2 \frac{12x-6}{(x^2-x+2)^2} dx \text{에서}$$

$x^2-x+2=s$ 로 놓으면 $2x-1 = \frac{ds}{dx}$ 이고, $x=0$ 일 때

$s=2$, $x=2$ 일 때 $s=4$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 g(x) dx &= \int_2^4 \frac{12x-6}{(x^2-x+2)^2} dx \\ &= \int_2^4 \frac{6(2x-1)}{(x^2-x+2)^2} dx \\ &= \int_2^4 \frac{6}{s^2} ds = 6 \int_2^4 s^{-2} ds \\ &= 6 \left[-s^{-1} \right]_2^4 = 6 \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

따라서 $a + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 이므로 $a=1$

17 $\int_0^2 \frac{f(x)+f(4-x)}{2} dx$
 $= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(4-x) dx \right\}$
 $\int_0^2 f(4-x) dx$ 에서 $4-x=t$ 로 놓으면 $-1 = \frac{dt}{dx}$ 이고,
 $x=0$ 일 때 $t=4$, $x=2$ 일 때 $t=2$ 이므로
 $\int_0^2 f(4-x) dx = - \int_4^2 f(t) dt = \int_2^4 f(x) dx$
 $\therefore \int_0^2 \frac{f(x)+f(4-x)}{2} dx$
 $= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(4-x) dx \right\}$
 $= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \right\}$
 $= \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx$
 $= \frac{1}{2} \times 6 = 3$

18 $2x = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $2 \frac{dx}{d\theta} = \sec^2 \theta$ 이고,
 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\frac{1}{2}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로
 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{4x^2+1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} d\theta$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$
 $= \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$
 $= \frac{\pi}{4}$

19 $x = a \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = a \sec^2 \theta$ 이고,
 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{3}a$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 이므로
 $\int_0^{\sqrt{3}a} \frac{1}{x^2+a^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{a^2 \tan^2 \theta + a^2} \times a \sec^2 \theta d\theta$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{a \sec^2 \theta}{a^2 \sec^2 \theta} d\theta$
 $= \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta$
 $= \frac{1}{a} \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$
 $= \frac{\pi}{3a}$
 따라서 $\frac{\pi}{3a} = \frac{\pi}{12}$ 이므로
 $a=4$

20 $x=2 \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta$ 이고,
 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 이므로
 $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4 \sin^2 \theta}{\sqrt{4-4 \sin^2 \theta}} \times 2 \cos \theta d\theta$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4 \sin^2 \theta}{\sqrt{4 \cos^2 \theta}} \times 2 \cos \theta d\theta$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \sin^2 \theta d\theta$
 $= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 2\theta) d\theta \quad \blacktriangleleft \cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$
 $= 2 \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$
 $= 2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

21 $\cos(\pi-x) = -\cos x$ 이므로
 $\int_0^{\pi} x \cos(\pi-x) dx = - \int_0^{\pi} x \cos x dx$
 $f(x)=x$, $g'(x)=\cos x$ 로 놓으면
 $f'(x)=1$, $g(x)=\sin x$
 $\therefore \int_0^{\pi} x \cos(\pi-x) dx$
 $= - \int_0^{\pi} x \cos x dx$
 $= - \left(\left[x \sin x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx \right)$
 $= \left[-\cos x \right]_0^{\pi}$
 $= 1 - (-1) = 2$

22 $\int_1^{e^2} f(x) dx - \int_3^{e^2} f(x) dx = \int_1^{e^2} f(x) dx + \int_{e^2}^3 f(x) dx$
 $= \int_1^3 f(x) dx$
 $= \int_1^3 \frac{\ln x}{x^2} dx$
 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=\frac{1}{x^2}$ 로 놓으면
 $u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=-\frac{1}{x}$
 $\therefore \int_1^{e^2} f(x) dx - \int_3^{e^2} f(x) dx = \int_1^3 \frac{\ln x}{x^2} dx$
 $= \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx$
 $= -\frac{\ln 3}{3} + \left[-x^{-1} \right]_1^3$
 $= -\frac{\ln 3}{3} + \left\{ -\frac{1}{3} - (-1) \right\}$
 $= \frac{2-\ln 3}{3}$

23 $f(x)=x^2+3$, $g'(x)=e^{2x}$ 으로 놓으면

$$f'(x)=2x, g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^1 (x^2+3)e^{2x} dx &= \left[\frac{1}{2}(x^2+3)e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 xe^{2x} dx \\ &= 2e^2 - \frac{3}{2} - \int_0^1 xe^{2x} dx \quad \dots\dots \textcircled{㉑}\end{aligned}$$

$\int_0^1 xe^{2x} dx$ 에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^{2x}$ 으로 놓으면

$$u'(x)=1, v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^1 xe^{2x} dx &= \left[\frac{1}{2}xe^{2x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉒}\end{aligned}$$

㉑을 ㉒에 대입하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2+3)e^{2x} dx &= 2e^2 - \frac{3}{2} - \left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{7}{4}e^2 - \frac{7}{4}\end{aligned}$$

24 $f(x)=\cos x$, $g'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x)=-\sin x, g(x)=e^x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx &= \left[e^x \cos x \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x dx \\ &= -e^{\pi} + e^{-\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x dx \quad \dots\dots \textcircled{㉑}\end{aligned}$$

$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x dx$ 에서 $u(x)=\sin x$, $v'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$$u'(x)=\cos x, v(x)=e^x$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x dx &= \left[e^x \sin x \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx \quad \dots\dots \textcircled{㉒}\end{aligned}$$

㉑을 ㉒에 대입하면

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx = -e^{\pi} + e^{-\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx = -\frac{e^{\pi}}{2} + \frac{e^{-\pi}}{2}$$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ 이므로

$$a-b=-1$$

25 $\int_0^1 f'(t) dt=k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x)=e^x+2x-k$$

$$\therefore f'(x)=e^x+2$$

이를 $\int_0^1 f'(t) dt=k$ 에 대입하면

$$\begin{aligned}k &= \int_0^1 (e^t+2) dt = \left[e^t+2t \right]_0^1 \\ &= e+2-1=e+1\end{aligned}$$

따라서 $f(x)=e^x+2x-e-1$ 이므로

$$f(1)=e+2-e-1=1$$

26 $\int_0^{\frac{1}{3}} f(t) dt=k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x)=\sin \pi x+k$$

이를 $\int_0^{\frac{1}{3}} f(t) dt=k$ 에 대입하면

$$\int_0^{\frac{1}{3}} (\sin \pi t+k) dt=k$$

$$\left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t+kt \right]_0^{\frac{1}{3}}=k$$

$$-\frac{1}{2\pi}+\frac{k}{3}+\frac{1}{\pi}=k \quad \therefore k=\frac{3}{4\pi}$$

따라서 $f(x)=\sin \pi x+\frac{3}{4\pi}$ 이므로 $f(-1)=\frac{3}{4\pi}$

27 $\int_1^2 tf(t) dt=k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x)=\frac{2^x}{x}+k$$

이를 $\int_1^2 tf(t) dt=k$ 에 대입하면

$$\int_1^2 (2^t+kt) dt=k$$

$$\left[\frac{2^t}{\ln 2}+\frac{k}{2}t^2 \right]_1^2=k$$

$$\left(\frac{4}{\ln 2}+2k \right) - \left(\frac{2}{\ln 2}+\frac{k}{2} \right) = k \quad \therefore k=-\frac{4}{\ln 2}$$

따라서 $f(x)=\frac{2^x}{x}-\frac{4}{\ln 2}$ 이므로 $f(2)=2-\frac{4}{\ln 2}$

28 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=2+a \cos x$$

주어진 등식의 양변에 $x=\frac{\pi}{2}$ 를 대입하면

$$0=\pi+a \quad \therefore a=-\pi$$

$$\therefore f(x)=2-\pi \cos x$$

29 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)=5^x \ln 5+xf'(x)$$

$$\therefore f(x)=5^x \ln 5$$

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0=1+a \quad \therefore a=-1$$

$$\therefore f(a)=f(-1)=\frac{\ln 5}{5}$$

30 주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0=a+b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

주어진 등식에서

$$x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = a e^{2x} - 4x + b$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = 2a e^{2x} - 4$$

$$\therefore \int_0^x f(t) dt = 2a e^{2x} - 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 4a e^{2x}$$

$\textcircled{8}$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = 2a - 4 \quad \therefore a = 2 \quad \therefore f(x) = 8e^{2x}$$

$a=2$ 를 $\textcircled{7}$ 에 대입하여 풀면 $b=-2$

$$\therefore f(b) = f(-2) = \frac{8}{e^4}$$

31 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = e - e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } e - e^x = 0, e^x = e \quad \therefore x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이면서 최대이므로 구하는 최댓값은

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^1 (e - e^t) dt = \left[et - e^t \right]_0^1 \\ &= (e - e) - (-1) = 1 \end{aligned}$$

32 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \sqrt{x} - x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \sqrt{x} - x = 0, x = \sqrt{x}, x^2 = x$$

$$x(x-1) = 0 \quad \therefore x = 1 (\because x > 0)$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^1 (\sqrt{t} - t) dt = \int_0^1 (t^{\frac{1}{2}} - t) dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

따라서 $a=1, b=\frac{1}{6}$ 이므로 $ab=\frac{1}{6}$

33 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 1 - 2 \cos x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 1 - 2 \cos x = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{\pi}{3} \left(\because 0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\dots$	$\frac{\pi}{3}$	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{3}$ 에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - 2 \cos t) dt \\ &= \left[t - 2 \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{\pi}{3}, b=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$ 이므로 $a-b=\sqrt{3}$

34 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \sin x - \cos 2x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\sin x - \cos 2x = 0, \sin x - (1 - 2 \sin^2 x) = 0$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$(\sin x + 1)(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = -1 \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{6} (\because 0 < x < \pi)$$

$0 < x < \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\dots$	$\frac{\pi}{6}$	$\dots$	$\frac{5\pi}{6}$	$\dots$	π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	

함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{5\pi}{6}$ 에서 극대, $x=\frac{\pi}{6}$ 에서 극소이므로 극댓값과 극솟값은 각각

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= \int_0^{\frac{5\pi}{6}} (\sin t - \cos 2t) dt \\ &= \left[-\cos t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - (-1) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin t - \cos 2t) dt \\
 &= \left[-\cos t - \frac{1}{2} \sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - (-1) \\
 &= -\frac{3\sqrt{3}}{4} + 1
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 차는

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} + 1 - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4} + 1\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

35 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \frac{ax}{x^2+1}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=b$ 에서 극솟값 $-\ln 2$ 를 가지므로

$$f'(b) = 0, f(b) = -\ln 2$$

$$f'(b) = 0 \text{에서 } \frac{ab}{b^2+1} = 0$$

$$ab = 0 \quad \therefore b = 0 \quad (\because a > 0)$$

$$f(b) = f(0) = -\ln 2 \text{에서}$$

$$\int_{-1}^0 \frac{at}{t^2+1} dt = -\ln 2$$

이 식의 좌변에서 $(t^2+1)' = 2t$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^0 \frac{at}{t^2+1} dt &= \frac{a}{2} \int_{-1}^0 \frac{2t}{t^2+1} dt \\
 &= \frac{a}{2} \int_{-1}^0 \frac{(t^2+1)'}{t^2+1} dt \\
 &= \frac{a}{2} \left[\ln(t^2+1) \right]_{-1}^0 \\
 &= -\frac{a}{2} \ln 2
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{a}{2} \ln 2 = -\ln 2 \text{이므로 } a = 2$$

$$\therefore a+b = 2+0 = 2$$

36 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2(x+1) + \frac{4}{x+1} - 2x - \frac{4}{x} \\
 &= \frac{2(x^2+x-2)}{x(x+1)}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x^2+x-2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 1 \quad (\because x > 0)$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이므로
최솟값은

$$\begin{aligned}
 f(1) &= \int_1^2 \left(2t + \frac{4}{t}\right) dt \\
 &= \left[t^2 + 4 \ln |t|\right]_1^2 \\
 &= (4 + 4 \ln 2) - 1 = 4 \ln 2 + 3
 \end{aligned}$$

따라서 $a=4$, $b=3$ 이므로 $ab=12$

37 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} \\
 &= F'(0) = f(0) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

38 $f(x) = (x^2+2) \cos(x+\pi)$ 라 하고 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\pi-h}^{\pi+h} (x^2+2) \cos(x+\pi) dx \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\pi-h}^{\pi+h} f(x) dx \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\pi+h) - F(\pi-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\pi+h) - F(\pi) + F(\pi) - F(\pi-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\pi+h) - F(\pi)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\pi) - F(\pi-h)}{-h} \\
 &= F'(\pi) + F'(\pi) = 2F'(\pi) \\
 &= 2f(\pi) \\
 &= 2(\pi^2+2) \cos 2\pi \\
 &= 2\pi^2 + 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{39 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2-9} \int_3^x g'(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{g(x) - g(3)}{x-3} \times \frac{1}{x+3} \right\} \\
 &= \frac{1}{6} g'(3)
 \end{aligned}$$

$g(3) = a$ 라 하면 $f(a) = 3$ 에서

$$a^3 + 2a + 3 = 3, a^3 + 2a = 0$$

$$a(a^2+2) = 0$$

$$\therefore a = 0 \quad (\because a^2+2 > 0)$$

$$\therefore g(3) = 0$$

이때 $f'(x) = 3x^2+2$ 이므로 역함수의 미분법에 의하여

$$g'(3) = \frac{1}{f'(g(3))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2-9} \int_3^x g'(t) dt &= \frac{1}{6} g'(3) \\
 &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

기초 문제 Training

86쪽

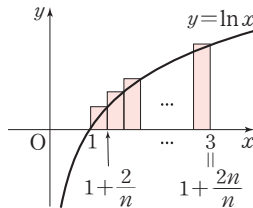
- 1 (가) $\frac{3}{n}$ (나) 27 (다) 2 (라) 9
- 2 (가) $\frac{2}{n}$ (나) $\frac{2k}{n}$ (다) 2 (라) $\frac{8}{3}$
- 3 $e-1$
- 4 $e-\frac{1}{e}$

핵심 유형 Training

87~91쪽

- | | | | | |
|------------------------|--------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------|
| 1 ④ | 2 84 | 3 $\frac{31}{5}$ | 4 3 | 5 $4\sqrt{2}-2$ |
| 6 6 | 7 e^2-1 | 8 ③ | 9 $\ln 5$ | |
| 10 $e+\frac{1}{e}-2$ | 11 ② | 12 $\frac{5}{2}$ | 13 ② | |
| 14 ③ | 15 ④ | 16 $\frac{14}{3}-\ln 4$ | 17 ② | |
| 18 ② | 19 $\frac{e}{2}-1$ | 20 $\frac{1}{3}$ | 21 $2\ln 2-\frac{6}{5}$ | |
| 22 $2-\sqrt{3}$ | 23 0 | 24 $\frac{2}{\pi}$ | 25 $\frac{3}{2}$ | 26 ③ |
| 27 $\frac{1}{(e-1)^2}$ | 28 1 | 29 $4\ln 2-2$ | | |
| 30 $\frac{4}{9}$ | 31 $e+1$ | | | |

- 1 오른쪽 그림과 같이 구간 $[1, 3]$ 을 n 등분 하면 각 구간의 오른쪽 끝 점의 x 좌표는 차례대로 $1+\frac{2}{n}, 1+\frac{4}{n}, 1+\frac{6}{n}, \dots, 1+\frac{2n}{n}(=3)$



이에 대응하는 y 의 값은 각각 $\ln\left(1+\frac{2}{n}\right), \ln\left(1+\frac{4}{n}\right), \ln\left(1+\frac{6}{n}\right), \dots, \ln\left(1+\frac{2n}{n}\right)$

이때 색칠한 각 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{2}{n}$ 이므로 직사각형의 넓이의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{2k}{n}\right)$$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{2k}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} 2 \quad S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4k}{n}\right)^3 \times \left[\frac{4}{n}\right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{256}{n^4}\right] \sum_{k=1}^n k^3 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{256}{n^4}\right] \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 64 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \boxed{64} \end{aligned}$$

따라서 $f(n) = \frac{4}{n}, g(n) = \frac{256}{n^4}, a = 64$ 이므로 $f(1) + g(2) + a = 4 + 16 + 64 = 84$

$$\begin{aligned} 3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^4 + \left(1 + \frac{3}{n}\right)^4 + \dots + \left(1 + \frac{n}{n}\right)^4 \right\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^4 \times \frac{1}{n} \\ = \int_1^2 x^4 dx \\ = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_1^2 = \frac{31}{5} \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^4 + \left(1 + \frac{3}{n}\right)^4 + \dots + \left(1 + \frac{n}{n}\right)^4 \right\} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^4 \times \frac{1}{n} \\ = \int_0^1 (1+x)^4 dx \\ = \left[\frac{1}{5}(1+x)^5\right]_0^1 = \frac{31}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} \sin \frac{k\pi}{6n} &= 6 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{k\pi}{6n}\right) \times \frac{\pi}{6n} \\ &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx \\ &= 6 \left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= 6 - 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

따라서 $a=6, b=-3$ 이므로 $a+b=3$

5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right\}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{n}$
 $= 3 \int_0^1 f(x) dx = 3 \int_0^1 \sqrt{1+x} dx$
 $= 3 \left[\frac{2}{3} (1+x) \sqrt{1+x} \right]_0^1 = 4\sqrt{2} - 2$

6 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) \times \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{2k}{n}\right) \times \frac{2}{n}$
 $= \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx$
 $= \frac{1}{2} \int_1^3 (3x^2 + ax) dx$
 $= \frac{1}{2} \left[x^3 + \frac{a}{2} x^2 \right]_1^3 = 13 + 2a$

따라서 $13 + 2a = 25$ 이므로 $a = 6$

7 점 A_k 의 좌표는 $\left(\frac{2k}{n}, 0\right)$ 이므로 점 B_k 의 좌표는 $\left(\frac{2k}{n}, 2e^{\frac{2k}{n}}\right)$

따라서 $\overline{A_k B_k} = 2e^{\frac{2k}{n}}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \overline{A_k B_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2e^{\frac{2k}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{\frac{2k}{n}} \times \frac{2}{n}$$

$$= \int_0^2 e^x dx = \left[e^x \right]_0^2 = e^2 - 1$$

8 $\angle AOP_k = \frac{\pi}{2n} \times k = \frac{k\pi}{2n}$ 이므로 삼각형 OAP_k 의 넓이 S_k 는

$$S_k = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OP_k} \times \sin \frac{k\pi}{2n} = 2 \sin \frac{k\pi}{2n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} 2 \sin \frac{k\pi}{2n}$$

$$= \frac{4}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sin \frac{k\pi}{2n} \right) \times \frac{\pi}{2n}$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

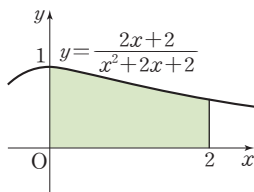
$$= \frac{4}{\pi} \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

9 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $y > 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^2 \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx$$

$$= \left[\ln(x^2+2x+2) \right]_0^2$$

$$= \ln 5$$

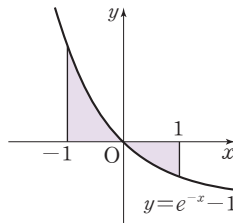


10 $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $y \geq 0$ 이고,
 $0 \leq x \leq 1$ 에서 $y \leq 0$ 이므로
 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_{-1}^0 (e^{-x} - 1) dx$$

$$+ \int_0^1 (-e^{-x} + 1) dx$$

$$= \left[-e^{-x} - x \right]_{-1}^0 + \left[e^{-x} + x \right]_0^1 = e + \frac{1}{e} - 2$$



11 곡선 $y = \sqrt{4-ax}$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\sqrt{4-ax} = 0$$

$$ax = 4 \quad \therefore x = \frac{4}{a}$$

$0 \leq x \leq \frac{4}{a}$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 곡선

$y = \sqrt{4-ax}$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^{\frac{4}{a}} \sqrt{4-ax} dx$$

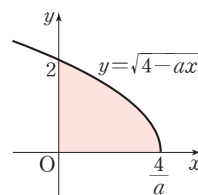
$4-ax = t$ 로 놓으면 $-a = \frac{dt}{dx}$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=4$,

$x = \frac{4}{a}$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$S = \int_0^{\frac{4}{a}} \sqrt{4-ax} dx = -\frac{1}{a} \int_4^0 \sqrt{t} dt$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^4 \sqrt{t} dt = \frac{1}{a} \left[\frac{2}{3} t\sqrt{t} \right]_0^4 = \frac{16}{3a}$$

따라서 $\frac{16}{3a} = \frac{8}{3}$ 이므로 $a = 2$



12 곡선 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin x$ 와 x 축의 교

점의 x 좌표를 구하면

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin x = 0, \sin x = 0$$

$$\therefore x = \pi \left(\because \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi \right)$$

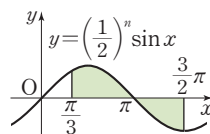
$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$ 에서 $y \geq 0$ 이고, $\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ 에서 $y \leq 0$ 이므로

$$S_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin x dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \left\{ -\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin x \right\} dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[-\cos x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\cos x \right]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$= \frac{5}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{5}{2} \times \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{2}$$



- 13 $y = \frac{2}{2-x}$ 를 x 에 대하여 풀면

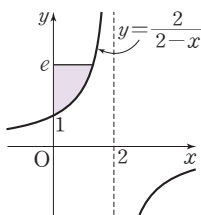
$$2-x = \frac{2}{y} \quad \therefore x = 2 - \frac{2}{y}$$

곡선 $x = 2 - \frac{2}{y}$ 와 y 축의 교점의 y 좌표를 구하면

$$2 - \frac{2}{y} = 0, \frac{2}{y} = 2 \quad \therefore y = 1$$

$1 \leq y \leq e$ 에서 $x \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

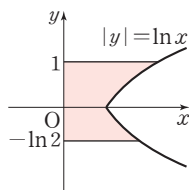
$$S = \int_1^e \left(2 - \frac{2}{y}\right) dy = \left[2y - 2 \ln |y|\right]_1^e = 2e - 4$$



- 14 $y \geq 0$ 일 때, $y = \ln x$ 에서 $x = e^y$
 $y \leq 0$ 일 때, $-y = \ln x$ 에서 $x = e^{-y}$
 $-\ln 2 \leq y \leq 0$ 에서 $e^{-y} > 0$ 이고,
 $0 \leq y \leq 1$ 에서 $e^y > 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_{-\ln 2}^0 e^{-y} dy + \int_0^1 e^y dy$$

$$= \left[-e^{-y}\right]_{-\ln 2}^0 + \left[e^y\right]_0^1 = e$$

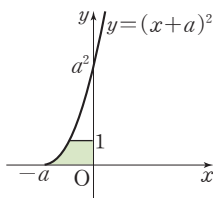


- 15 $y = (x+a)^2$ 을 x 에 대하여 풀면
 $x+a = \sqrt{y}$ ($\because x \geq -a$)
 $\therefore x = \sqrt{y} - a$
 $0 \leq y \leq 1$ 에서 $x < 0$ 이므로 곡선
 $y = (x+a)^2$ ($x \geq -a$)과 y 축,
 y 축 및 직선 $y=1$ 로 둘러싸인 도
 형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^1 (-\sqrt{y} + a) dy$$

$$= \left[-\frac{2}{3}y\sqrt{y} + ay\right]_0^1 = -\frac{2}{3} + a$$

따라서 $-\frac{2}{3} + a = \frac{7}{3}$ 이므로 $a = 3$



- 16 두 곡선 $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\sqrt{x} = \frac{1}{x}, x^3 = 1$$

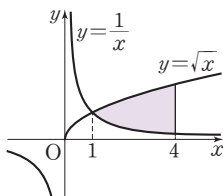
$$\therefore x = 1 \quad (\because x \text{는 실수})$$

$1 \leq x \leq 4$ 에서 $\sqrt{x} \geq \frac{1}{x}$ 이므로

구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \ln |x|\right]_1^4 = \frac{14}{3} - \ln 4$$



- 17 두 곡선 $y = \sqrt{2} \cos x$, $y = \sin 2x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면
 $\sqrt{2} \cos x = \sin 2x$

$$\sqrt{2} \cos x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos x (\sqrt{2} - 2 \sin x) = 0$$

$$\therefore \cos x = 0 \text{ 또는 } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{2} \quad \left(\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $\sqrt{2} \cos x \geq \sin 2x$ 이고, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서

$\sin 2x \geq \sqrt{2} \cos x$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{2} \cos x - \sin 2x) dx$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - \sqrt{2} \cos x) dx$$

$$= \left[\sqrt{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\frac{1}{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2 - \sqrt{2}$$

- 18 $y = e^{x-1} - 1$ 을 x 에 대하여 풀면

$$x-1 = \ln(y+1)$$

$$\therefore x = \ln(y+1) + 1$$

$y = \ln(x-1)$ 을 x 에 대하여 풀면

$$x-1 = e^y$$

$$\therefore x = e^y + 1$$

$0 \leq y \leq 1$ 에서 $e^y + 1 > \ln(y+1) + 1$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^1 [(e^y + 1) - \{\ln(y+1) + 1\}] dy$$

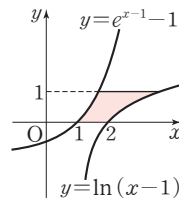
$$= \int_0^1 e^y dy - \int_0^1 \ln(y+1) dy$$

$$= \int_0^1 e^y dy - \int_1^2 \ln t dt \quad \blacktriangleleft y+1=t$$

$$= \left[e^y\right]_0^1 - \left[t \ln t\right]_1^2 + \int_1^2 dt$$

$$= e - 1 - 2 \ln 2 + \left[t\right]_1^2$$

$$= e - 2 \ln 2$$



- 19 $f(x) = e^x - 1$ 이라 하면

$$f'(x) = e^x$$

접점의 좌표를 $(t, e^t - 1)$ 이라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t) = e \text{이므로}$$

$$e^t = e \quad \therefore t = 1$$

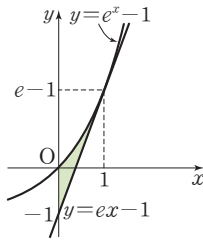
즉, 접점의 좌표는 $(1, e-1)$ 이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$$y - (e-1) = e(x-1)$$

$$\therefore y = ex - 1$$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $e^x - 1 \geq ex - 1$ 이므로
 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(e^x - 1) - (ex - 1)\} dx \\ &= \int_0^1 (e^x - ex) dx \\ &= \left[e^x - \frac{e}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1 \end{aligned}$$



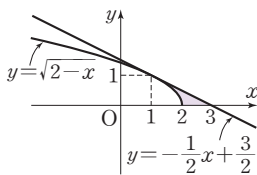
20 $f(x) = \sqrt{2-x}$ 라 하면 $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$

점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -\frac{1}{2}$ 이므로 이
 점에서의 접선의 방정식은

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$1 \leq x \leq 2$ 에서 $\sqrt{2-x} \geq 0$ 이므로
 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \int_1^2 \sqrt{2-x} dx \\ &= 1 + \int_1^0 \sqrt{t} dt \quad \leftarrow 2-x=t \\ &= 1 + \left[\frac{2}{3} t\sqrt{t} \right]_1^0 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



다른 풀이

$$f(x) = \sqrt{2-x} \text{라 하면 } f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$$

점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -\frac{1}{2}$ 이므로 이
 점에서의 접선의 방정식은

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$y = \sqrt{2-x}$, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 을 각각 x 에 대하여 풀면

$$x = 2 - y^2 (y \geq 0), \quad x = 3 - 2y$$

$0 \leq y \leq 1$ 에서 $3 - 2y \geq 2 - y^2$ 이므로 구하는 넓이를 S라
 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(3 - 2y) - (2 - y^2)\} dy \\ &= \int_0^1 (y^2 - 2y + 1) dy \\ &= \left[\frac{1}{3}y^3 - y^2 + y \right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

21 $f(x) = \frac{1}{x}$ 이라 하면 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

점 $(\frac{1}{2}, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(\frac{1}{2}) = -4$ 이므로

이 점에서의 접선의 방정식은

$$\begin{aligned} y - 2 &= -4\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ \therefore y &= -4x + 4 \end{aligned}$$

점 $(2, \frac{1}{2})$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2) = -\frac{1}{4}$ 이므로

이 점에서의 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{4}x + 1$$

두 접선 $y = -4x + 4$,

$y = -\frac{1}{4}x + 1$ 의 교점의 x 좌

표를 구하면

$$-4x + 4 = -\frac{1}{4}x + 1$$

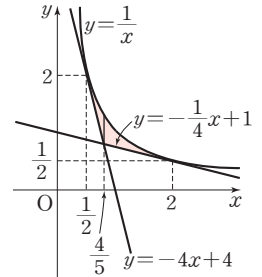
$$\frac{15}{4}x = 3$$

$$\therefore x = \frac{4}{5}$$

$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{4}{5}$ 에서 $\frac{1}{x} \geq -4x + 4$ 이고, $\frac{4}{5} \leq x \leq 2$ 에서

$\frac{1}{x} \geq -\frac{1}{4}x + 1$ 이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{4}{5}} \left\{ \frac{1}{x} - (-4x + 4) \right\} dx \\ &\quad + \int_{\frac{4}{5}}^2 \left\{ \frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{4}x + 1 \right) \right\} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{4}{5}} \left(\frac{1}{x} + 4x - 4 \right) dx + \int_{\frac{4}{5}}^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4}x - 1 \right) dx \\ &= \left[\ln |x| + 2x^2 - 4x \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{4}{5}} + \left[\ln |x| + \frac{1}{8}x^2 - x \right]_{\frac{4}{5}}^2 \\ &= 2\ln 2 - \frac{6}{5} \end{aligned}$$



22 $f(x) = \sin x$ 라 하면

$$f'(x) = \cos x$$

점 $(\alpha, \sin \alpha)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(\alpha) = \cos \alpha$ 이므로

이 점에서의 접선의 방정식은

$$y - \sin \alpha = \cos \alpha (x - \alpha)$$

$$\therefore y = \cos \alpha (x - \alpha) + \sin \alpha$$

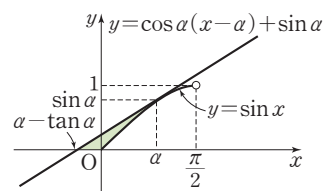
이때 접선과 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\cos \alpha (x - \alpha) + \sin \alpha = 0$$

$$\cos \alpha (x - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$x - \alpha = -\tan \alpha$$

$$\therefore x = \alpha - \tan \alpha$$



곡선 $y=\sin x$ 와 직선 $y=\cos \alpha(x-\alpha)+\sin \alpha$ 및 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하면 $0 \leq x \leq \alpha$ 에서 $\sin x \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \tan \alpha \times \sin \alpha - \int_0^{\alpha} \sin x dx \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha} - \left[-\cos x \right]_0^{\alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha} + \cos \alpha - 1 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha} + \cos \alpha - 1 = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 4 \cos \alpha &= 0 \\ (1 - \cos^2 \alpha) + 2 \cos^2 \alpha - 4 \cos \alpha &= 0 \\ \cos^2 \alpha - 4 \cos \alpha + 1 &= 0 \\ \therefore \cos \alpha &= 2 - \sqrt{3} \quad (\because 0 < \cos \alpha \leq 1) \end{aligned}$$

23 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(x) dx &= 0 \\ \int_0^2 f(3x) dx &\text{에서 } 3x=t \text{로 놓으면 } 3=\frac{dt}{dx} \text{이고, } x=0 \text{일} \\ &\text{때 } t=0, x=2 \text{일 때 } t=6 \text{이므로} \\ \int_0^2 f(3x) dx &= \int_0^6 f(t) \times \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int_0^6 f(x) dx = 0 \end{aligned}$$

24 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - k) dx &= 0, \left[\sin x - kx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \\ 1 - \frac{\pi}{2}k &= 0, \frac{\pi}{2}k = 1 \quad \therefore k = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

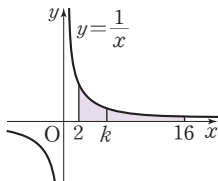
25 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{xe^x - (-x+a)\} dx &= 0 \\ \int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 (x-a) dx &= 0 \\ \left[xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx + \left[\frac{1}{2}x^2 - ax \right]_0^1 &= 0 \\ e - \left[e^x \right]_0^1 + \frac{1}{2} - a &= 0 \\ \frac{3}{2} - a &= 0 \quad \therefore a = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

26 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 과 x 축 및 두 직선

$x=2, x=16$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면 $2 \leq x \leq 16$ 에서 $y > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_2^{16} \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\ln |x| \right]_2^{16} = \ln 8 \end{aligned}$$



또 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 과 x 축 및 두 직선 $x=2, x=k$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면 $2 \leq x \leq k$ 에서 $y > 0$ 이므로

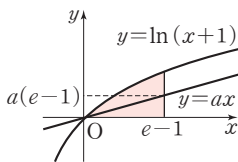
$$\begin{aligned} S_2 &= \int_2^k \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\ln |x| \right]_2^k = \ln \frac{k}{2} \end{aligned}$$

주어진 조건에서 $S_1=2S_2$ 이므로

$$\ln 8 = 2 \ln \frac{k}{2}, \frac{k}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore k = 4\sqrt{2}$$

27 곡선 $y=\ln(x+1)$ 과 x 축 및 직선 $x=e-1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면 $0 \leq x \leq e-1$ 에서 $y \geq 0$ 이므로



$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx \\ &= \int_1^e \ln t dt \quad \leftarrow x+1=t \\ &= \left[t \ln t \right]_1^e - \int_1^e 1 dt \\ &= e - \left[t \right]_1^e = 1 \end{aligned}$$

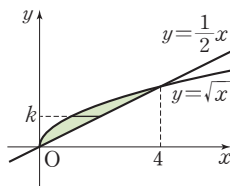
또 직선 $y=ax$ 과 x 축 및 직선 $x=e-1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} \times (e-1) \times a(e-1) = \frac{(e-1)^2}{2} a \\ \text{주어진 조건에서 } S_1 &= 2S_2 \text{이므로} \\ 1 &= 2 \times \frac{(e-1)^2}{2} a \\ \therefore a &= \frac{1}{(e-1)^2} \end{aligned}$$

28 곡선 $y=\sqrt{x}$ 와 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 의

교점의 x 좌표를 구하면

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= \frac{1}{2}x, x^2 - 4x = 0 \\ x(x-4) &= 0 \\ \therefore x &= 0 \text{ 또는 } x = 4 \end{aligned}$$



곡선 $y=\sqrt{x}$ 와 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를

$$\begin{aligned} S_1 &\text{이라 하면 } 0 \leq x \leq 4 \text{에서 } \sqrt{x} \geq \frac{1}{2}x \text{이므로} \\ S_1 &= \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x \right) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^2 \right]_0^4 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$y=\sqrt{x}, y=\frac{1}{2}x$ 를 각각 x 에 대하여 풀면 $x=y^2 (y \geq 0), x=2y$

곡선 $x=y^2$ 과 두 직선 $x=2y$, $y=k$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면 $0 \leq y \leq k$ 에서 $2y \geq y^2$ 이므로

$$S_2 = \int_0^k (2y - y^2) dy$$

$$= \left[y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^k = k^2 - \frac{k^3}{3}$$

주어진 조건에서 $S_1 = 2S_2$ 이므로

$$\frac{4}{3} = 2k^2 - \frac{2}{3} k^3, \quad k^3 - 3k^2 + 2 = 0$$

$$(k-1)(k^2 - 2k - 2) = 0$$

$$\therefore k=1 \quad (\because 0 < k < 2)$$

- 29 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,

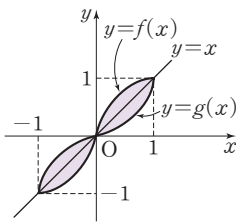
$$0 \leq x \leq 1 \text{에서 } \frac{2x}{x^2+1} \geq x \text{이므로}$$

로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = 4 \int_0^1 \left(\frac{2x}{x^2+1} - x \right) dx$$

$$= 4 \left[\ln(x^2+1) - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1$$

$$= 4 \ln 2 - 2$$



- 30 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\sqrt{6x-8} = x$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

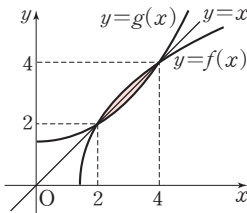
$$(x-2)(x-4) = 0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=4$$

$2 \leq x \leq 4$ 에서 $\sqrt{6x-8} \geq x$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = 2 \int_2^4 (\sqrt{6x-8} - x) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{9} (6x-8) \sqrt{6x-8} - \frac{1}{2} x^2 \right]_2^4 = \frac{4}{9}$$



- 31 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고 $f(0)=2$, $f(1)=e+1$ 이므로 $g(2)=0$, $g(e+1)=1$ 이다.

$$\int_0^1 f(x) dx = S_1,$$

$$\int_2^{e+1} g(x) dx = S_2 \text{라 하면 오}$$

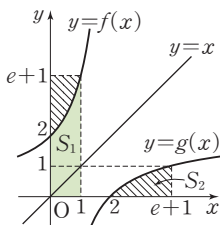
른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^1 f(x) dx + \int_2^{e+1} g(x) dx$$

$$= S_1 + S_2$$

$$= 1 \times (e+1)$$

$$= e+1$$



III-2 02 정적분의 활용(2)

기초 문제 Training

92쪽

1 (1) 72 (2) $\frac{15}{\ln 2}$

2 (가) x^2 (나) $\frac{\pi r^2}{h^2} x^2$ (다) h

3 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{14}{3}$

4 (1) $9\sqrt{5}$ (2) 12

5 $\frac{14}{3}$

핵심 유형 Training

93~95쪽

1 $(2 + \ln 5) \text{ cm}^3$

2 ②

3 21초

4 $\frac{22}{3}$

5 $\frac{31}{5}$

6 $\frac{\sqrt{3}}{8} \pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$

7 $\frac{136}{3}$

8 $\frac{\pi}{4} (1 + \ln 2)$

9 ④

10 2

11 ⑤

12 $\frac{\pi}{3}$

13 $e^3 - \frac{1}{e^3}$

14 $\frac{\pi}{2}$

15 1

16 $4 + \ln 3$

17 ④

18 3

19 ③

- 1 물의 높이가 x cm일 때의 수면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} (\text{cm}^2)$$

따라서 물의 높이가 2 cm일 때, 이 그릇에 담긴 물의 부피를 V 라 하면

$$V = \int_0^2 S(x) dx$$

$$= \int_0^2 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} dx$$

$$= \int_0^2 \left(1 + \frac{2x}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \left[x + \ln(x^2+1) \right]_0^2$$

$$= 2 + \ln 5 (\text{cm}^3)$$

- 2 입체도형의 밑면으로부터 높이가 x 인 지점에서의 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \{\sqrt{\ln(x+1)}\}^2 = \ln(x+1)$$

이때 입체도형의 높이가 5이므로 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^5 S(x) dx = \int_0^5 \ln(x+1) dx \\ &= \int_1^6 \ln t dt \quad \blacktriangleleft x+1=t \\ &= \left[t \ln t \right]_1^6 - \int_1^6 dt \\ &= 6 \ln 6 - \left[t \right]_1^6 \\ &= 6 \ln 6 - 5 \end{aligned}$$

- 3 물의 높이가 x cm일 때의 수면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{x^2+2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (x^2+2) (\text{cm}^2)$$

이때 그릇의 높이가 6 cm이므로 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^6 S(x) dx = \int_0^6 \frac{\sqrt{3}}{4} (x^2+2) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\frac{1}{3} x^3 + 2x \right]_0^6 \\ &= 21\sqrt{3} (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

그릇에 매초 $\sqrt{3} \text{ cm}^3$ 의 비율로 물을 채우므로 21초 후에 물이 가득 찬다.

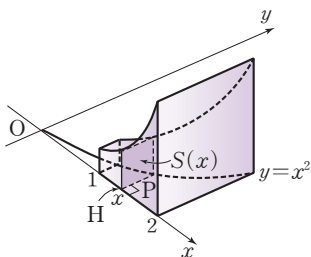
- 4 $\overline{PQ} = \sqrt{4x-x^2}$ 이므로 선분 PQ를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = (\sqrt{4x-x^2})^2 = 4x-x^2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_1^3 S(x) dx = \int_1^3 (4x-x^2) dx \\ &= \left[2x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_1^3 \\ &= \frac{22}{3} \end{aligned}$$

- 5 점 P의 좌표를 (x, x^2) ($1 \leq x \leq 2$)이라 하면 점 H의 좌표는 $(x, 0)$



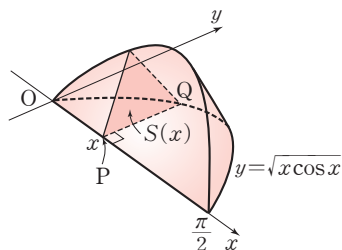
이때 $\overline{PH} = x^2$ 을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = (x^2)^2 = x^4$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 S(x) dx = \int_1^2 x^4 dx \\ &= \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_1^2 = \frac{31}{5} \end{aligned}$$

- 6 다음 그림과 같이 x 축 위의 점 $P(x, 0)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)을 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = \sqrt{x \cos x}$ 와 만나는 점을 Q라 하면 $Q(x, \sqrt{x \cos x})$



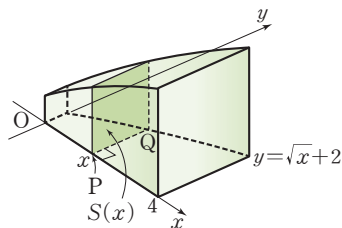
이때 $\overline{PQ} = \sqrt{x \cos x}$ 를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{x \cos x})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} x \cos x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3}}{4} x \cos x dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

- 7 다음 그림과 같이 x 축 위의 점 $P(x, 0)$ ($0 \leq x \leq 4$)을 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = \sqrt{x+2}$ 와 만나는 점을 Q라 하면 $Q(x, \sqrt{x+2})$



이때 $\overline{PQ} = \sqrt{x+2}$ 를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = (\sqrt{x+2})^2 = x+4\sqrt{x}+4$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 S(x) dx \\ &= \int_0^4 (x + 4\sqrt{x} + 4) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{8}{3}x\sqrt{x} + 4x \right]_0^4 = \frac{136}{3} \end{aligned}$$

8 오른쪽 그림과 같이 x 축

위의 점 $P(x, 0)$

$(0 \leq x \leq \ln 2)$ 을 지나고

x 축에 수직인 직선이 곡

선 $y = \sqrt{2e^x + 2}$ 와 만나는

점을 Q 라 하면

$Q(x, \sqrt{2e^x + 2})$

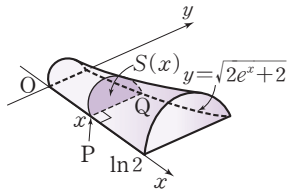
이때 $\overline{PQ} = \sqrt{2e^x + 2}$ 를 지름으로 하는 반원의 넓이를

$S(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{1}{2} \sqrt{2e^x + 2} \right)^2 \\ &= \frac{\pi}{4} (e^x + 1) \end{aligned}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\ln 2} S(x) dx \\ &= \int_0^{\ln 2} \frac{\pi}{4} (e^x + 1) dx \\ &= \frac{\pi}{4} \left[e^x + x \right]_0^{\ln 2} = \frac{\pi}{4} (1 + \ln 2) \end{aligned}$$



9 오른쪽 그림과 같이 밑면의

중심을 원점, 밑면의 지름을

x 축으로 정하고, x 축 위의 점

$P(x, 0)$ ($-3 \leq x \leq 3$)을 지

나고 x 축에 수직인 평면으로

입체도형을 자른 단면을 부

채꼴 PQR 라 하면

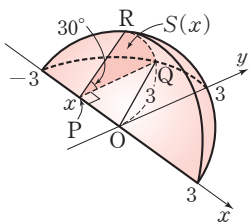
$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{9 - x^2}$$

부채꼴 PQR 의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2} \times \overline{PQ}^2 \times \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{12} (9 - x^2) \end{aligned}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_{-3}^3 S(x) dx \\ &= \int_{-3}^3 \frac{\pi}{12} (9 - x^2) dx \\ &= \frac{\pi}{12} \left[9x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-3}^3 = 3\pi \end{aligned}$$



10 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P 의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned} \int_0^a (t-1)e^t dt &= \left[(t-1)e^t \right]_0^a - \int_0^a e^t dt \\ &= (a-1)e^a + 1 - \left[e^t \right]_0^a \\ &= (a-2)e^a + 2 \end{aligned}$$

따라서 $(a-2)e^a + 2 = 2$ 이므로

$$(a-2)e^a = 0 \quad \therefore a = 2 \quad (\because e^a > 0)$$

11 점 P 가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v(t) = 0$ 에서

$$8 - t\sqrt{t} = 0, \quad t^3 = 64 \quad \therefore t = 4 \quad (\because t > 0)$$

따라서 $t=4$ 일 때 운동 방향을 바꾸므로 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 P 가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^4 |8 - t\sqrt{t}| dt &= \int_0^4 (8 - t\sqrt{t}) dt \\ &= \left[8t - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = \frac{96}{5} \end{aligned}$$

12 $t=a$ 에서의 점 P 의 위치를 x_P 라 하면

$$\begin{aligned} x_P &= 0 + \int_0^a 2 \cos 2t dt \\ &= \left[\sin 2t \right]_0^a = \sin 2a \end{aligned}$$

$t=a$ 에서의 점 Q 의 위치를 x_Q 라 하면

$$\begin{aligned} x_Q &= 0 + \int_0^a \cos t dt \\ &= \left[\sin t \right]_0^a = \sin a \end{aligned}$$

두 점이 다시 만나면 위치가 같으므로 $x_P = x_Q$ 에서

$$\sin 2a = \sin a, \quad 2 \sin a \cos a = \sin a$$

$$\sin a (2 \cos a - 1) = 0$$

$$\therefore \sin a = 0 \text{ 또는 } \cos a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi, \dots$$

따라서 두 점 P, Q 가 출발 후 처음으로 다시 만나는 시각은 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

13 $\frac{dx}{dt} = e^t - e^{-t}$, $\frac{dy}{dt} = 2$ 이므로 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P 가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^3 \sqrt{(e^t - e^{-t})^2 + 2^2} dt &= \int_0^3 \sqrt{e^{2t} + 2 + e^{-2t}} dt \\ &= \int_0^3 \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} dt \\ &= \int_0^3 (e^t + e^{-t}) dt \\ &= \left[e^t - e^{-t} \right]_0^3 = e^3 - \frac{1}{e^3} \end{aligned}$$

14 $\frac{dx}{dt} = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$

$$\frac{dy}{dt} = -2 \sin t \cos t = -\sin 2t$$

$t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{(\sin 2t)^2 + (-\sin 2t)^2} dt &= \int_0^a \sqrt{2 \sin^2 2t} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^a \sin 2t dt \\ &= \sqrt{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^a \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2a - 1) \end{aligned}$$

따라서 $-\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2a - 1) = \sqrt{2}$ 이므로

$$\cos 2a = -1$$

$$2a = \pi \quad (\because 0 < 2a \leq \pi) \quad \therefore a = \frac{\pi}{2}$$

15 $\frac{dx}{dt} = -(2t-2) \sin(t^2-2t)$

$$\frac{dy}{dt} = (2t-2) \cos(t^2-2t)$$

시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{\{-(2t-2) \sin(t^2-2t)\}^2 + \{(2t-2) \cos(t^2-2t)\}^2} \\ = \sqrt{(2t-2)^2 \{\sin^2(t^2-2t) + \cos^2(t^2-2t)\}} \\ = \sqrt{(2t-2)^2} = |2t-2| \end{aligned}$$

이때 점 P가 출발 후 속력이 0이 되는 시각은

$$|2t-2| = 0, \quad 2t-2=0$$

$$\therefore t=1$$

따라서 $t=0$ 에서 $t=1$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^1 |2t-2| dt = \int_0^1 (-2t+2) dt = \left[-t^2 + 2t \right]_0^1 = 1$$

16 $\frac{dx}{dt} = t - \frac{1}{t}, \frac{dy}{dt} = -2$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + (-2)^2} &= \sqrt{t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}} \\ &= \sqrt{\left(t + \frac{1}{t}\right)^2} = t + \frac{1}{t} \end{aligned}$$

$t > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \times \frac{1}{t}} = 2$$

이때 등호는 $t = \frac{1}{t}$ 일 때 성립하므로 $t^2 = 1$, 즉 $t = 1$ 일 때 점 P의 속력이 최소가 된다.

따라서 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^3 \left(t + \frac{1}{t}\right) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + \ln|t|\right]_1^3 = 4 + \ln 3$$

17 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{x^2}$ 이므로 $1 \leq x \leq 2$ 에서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2} dx &= \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4}} dx \\ &= \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2} dx \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{13}{12} \end{aligned}$$

18 $\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{x^2+1}$ 이므로 $0 \leq x \leq a$ 에서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{1 + (2x\sqrt{x^2+1})^2} dx &= \int_0^a \sqrt{4x^4 + 4x^2 + 1} dx \\ &= \int_0^a \sqrt{(2x^2+1)^2} dx \\ &= \int_0^a (2x^2+1) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 + x\right]_0^a \\ &= \frac{2}{3}a^3 + a \end{aligned}$$

따라서 $\frac{2}{3}a^3 + a = 21$ 이므로

$$2a^3 + 3a - 63 = 0$$

$$(a-3)(2a^2+6a+21) = 0$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

19 $\frac{dx}{dt} = -\sin t - 2 \sin t \cos t$

$$= -\sin t - \sin 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos t + \cos^2 t - \sin^2 t$$

$$= \cos t + 1 - 2 \sin^2 t$$

$$= \cos t + \cos 2t$$

따라서 $0 \leq t \leq \pi$ 에서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sqrt{(-\sin t - \sin 2t)^2 + (\cos t + \cos 2t)^2} dt \\ = \int_0^\pi \sqrt{2 + 2 \sin t \sin 2t + 2 \cos t \cos 2t} dt \\ = \int_0^\pi \sqrt{2 + 2 \sin t \times 2 \sin t \cos t + 2 \cos t (1 - 2 \sin^2 t)} dt \\ = \int_0^\pi \sqrt{2 + 2 \cos t} dt \\ = \int_0^\pi \sqrt{4 \cos^2 \frac{t}{2}} dt \quad \blacktriangleleft \cos t = 2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1 \\ = \int_0^\pi 2 \cos \frac{t}{2} dt \\ = \left[4 \sin \frac{t}{2} \right]_0^\pi = 4 \end{aligned}$$

