

수학 I

정답과 해설



개념편

정답과 해설

I-1 01 지수

거듭제곱과 거듭제곱근

개념 CHECK

9쪽

1 답 (1) 4, $-2 \pm 2\sqrt{3}i$ (2) $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{2}i$

2 답 (1) 6 (2) -5 (3) -3 (4) 2

문제

10~12쪽

01-1 답 ⑤

① -4의 제곱근을 x 라 하면 $x^2 = -4$

$\therefore x = \pm 2i$

따라서 -4의 제곱근은 $\pm 2i$ 이다.

② -512의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = -512$

$x^3 + 512 = 0$, $(x+8)(x^2 - 8x + 64) = 0$

$\therefore x = -8$ 또는 $x = 4 \pm 4\sqrt{3}i$

따라서 -512의 세제곱근은 $-8, 4 \pm 4\sqrt{3}i$ 이다.

③ $\sqrt[4]{256} = 16$ 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 16$

$x^4 - 16 = 0$, $(x+2)(x-2)(x^2 + 4) = 0$

$\therefore x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$

따라서 $\sqrt[4]{256}$ 의 네제곱근 중 실수인 것은 ± 2 이다.

④ 49의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 49$

$x^4 - 49 = 0$, $(x^2 - 7)(x^2 + 7) = 0$

$\therefore x = \pm\sqrt{7}$ 또는 $x = \pm\sqrt{7}i$

따라서 49의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt{7}$ 이다.

⑤ n 이 짝수일 때, 6의 n 제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt[n]{6}$ 의 2개

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

01-2 답 $5\sqrt{3}$

$\sqrt{81} = 9$ 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 9$

$x^4 - 9 = 0$, $(x^2 - 3)(x^2 + 3) = 0$

$\therefore x = \pm\sqrt{3}$ 또는 $x = \pm\sqrt{3}i$

이때 음수인 것은 $-\sqrt{3}$ 이므로 $a = -\sqrt{3}$

-125의 세제곱근을 y 라 하면 $y^3 = -125$

$y^3 + 125 = 0$, $(y+5)(y^2 - 5y + 25) = 0$

$\therefore y = -5$ 또는 $y = \frac{5 \pm 5\sqrt{3}i}{2}$

이때 실수인 것은 -5 이므로 $b = -5$

$\therefore ab = -\sqrt{3} \times (-5) = 5\sqrt{3}$

02-1 답 (1) 5 (2) 4 (3) x (4) $24\sqrt{x}$

(1) $\sqrt[6]{4} \times \sqrt[6]{16} + \sqrt[4]{81} = \sqrt[6]{4 \times 16} + \sqrt[4]{3^4}$
 $= \sqrt[6]{2^6} + 3 = 2 + 3 = 5$

(2) $(\sqrt[3]{7})^4 \div \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{7^4} \div \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{729}$
 $= \sqrt[3]{\frac{7^4}{7}} - \sqrt[3]{3^6} = \sqrt[3]{7^3} - 3$
 $= 7 - 3 = 4$

(3) $\sqrt[5]{x^4} \times \sqrt[3]{x^2} \div \sqrt[15]{x^7} = \sqrt[15]{x^{12} \times x^{10} \div x^7}$
 $= \sqrt[15]{\frac{x^{12} \times x^{10}}{x^7}} = \sqrt[15]{x^{15}} = x$

(4) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}} = \frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[6]{x}} \times \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[8]{x}} \times \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[6]{x}}$
 $= \frac{\sqrt[12]{x} \times \sqrt[4]{x}}{\sqrt[8]{x} \times \sqrt[6]{x}} = \frac{\sqrt[24]{x^2} \times \sqrt[24]{x^6}}{\sqrt[24]{x^3} \times \sqrt[24]{x^4}}$
 $= \sqrt[24]{\frac{x^2 \times x^6}{x^3 \times x^4}} = \sqrt[24]{x} = \sqrt[24]{x}$

02-2 답 (1) 8 (2) $3\sqrt{2}$

(1) $\sqrt{\frac{8^{12} + 4^{12}}{8^6 + 4^{15}}} = \sqrt{\frac{(2^3)^{12} + (2^2)^{12}}{(2^3)^6 + (2^2)^{15}}} = \sqrt{\frac{2^{36} + 2^{24}}{2^{18} + 2^{30}}}$
 $= \sqrt{\frac{2^{24}(2^{12} + 1)}{2^{18}(1 + 2^{12})}} = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8$

(2) $\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{\sqrt{16} + 1}} = \frac{\sqrt[6]{2^2} + \sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[6]{2^4 + 1}} = \frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^3}}{\sqrt[3]{2^2 + 1}}$
 $= \frac{\sqrt[3]{2}(1 + \sqrt[3]{2^2})}{\sqrt[3]{2^2 + 1}} = \sqrt[3]{2}$

03-1 답 $\sqrt[6]{2} < \sqrt[8]{3} < \sqrt[12]{6}$

$\sqrt[12]{6}$, $\sqrt[8]{3}$, $\sqrt[6]{2}$ 에서 12, 8, 6의 최소공배수가 24이므로

$\sqrt[12]{6} = \sqrt[24]{6^2} = \sqrt[24]{36}$, $\sqrt[8]{3} = \sqrt[24]{3^3} = \sqrt[24]{27}$,

$\sqrt[6]{2} = \sqrt[24]{2^4} = \sqrt[24]{16}$

이때 $16 < 27 < 36$ 이므로 $\sqrt[24]{16} < \sqrt[24]{27} < \sqrt[24]{36}$

$\therefore \sqrt[6]{2} < \sqrt[8]{3} < \sqrt[12]{6}$

03-2 **답** 12

$\sqrt[3]{6}=\sqrt[6]{6}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3\sqrt{12}}=\sqrt[12]{12}$ 에서 6, 3, 12의 최소공배수가 12이므로

$$\sqrt[6]{6}=\sqrt[12]{6^2}=\sqrt[12]{36}, \sqrt[3]{2}=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[12]{16}$$

이때 $12 < 16 < 36$ 이므로 $\sqrt[12]{12} < \sqrt[12]{16} < \sqrt[12]{36}$

$$\therefore \sqrt[4]{3\sqrt{12}} < \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{6}$$

따라서 $a=\sqrt[4]{3\sqrt{12}}=\sqrt[12]{12}$ 이므로

$$a^{12}=(\sqrt[12]{12})^{12}=12$$

03-3 **답** $C < A < B$

$$A-B=(\sqrt[3]{3}+2\sqrt{2})-(2\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})=\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}$$

$$=\sqrt[6]{2^3}-\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{8}-\sqrt[6]{9}<0$$

$$\therefore A < B \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$A-C=(\sqrt[3]{3}+2\sqrt{2})-(4\sqrt{2}-\sqrt[3]{3})=2\sqrt[3]{3}-2\sqrt{2}$$

$$=2(\sqrt[6]{3^3}-\sqrt[6]{2^3})=2(\sqrt[6]{9}-\sqrt[6]{8})>0$$

$$\therefore A > C \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } C < A < B$$

2 지수의 확장

개념 CHECK

14쪽

1 **답** (1) 2 (2) 82

2 **답** (1) a^2 (2) $\sqrt[4]{a}$ (3) 9 (4) 8

문제

15~20쪽

04-1 **답** (1) 4 (2) $\frac{5}{32}$ (3) 3 (4) $\frac{1}{27}$

$$(1) 4^{\frac{1}{4}} \times 8^{-\frac{1}{2}} \div 16^{-\frac{3}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} \times (2^3)^{-\frac{1}{2}} \div (2^4)^{-\frac{3}{4}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{3}{2}} \div 2^{-3}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}-(-3)} = 2^2 = 4$$

$$(2) \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right)^4 \right\}^{0.75} \times \left\{ \left(\frac{16}{25} \right)^{\frac{5}{4}} \right\}^{-\frac{2}{5}}$$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^4 \right\}^{0.75} \times \left(\frac{4}{5} \right)^{2 \times \frac{5}{4} \times \left(-\frac{2}{5} \right)} = \left(\frac{1}{2} \right)^3 \times \left(\frac{4}{5} \right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{32}$$

$$(3) \sqrt[4]{3\sqrt{81}} \times \sqrt[3]{\sqrt{81}} = \{ (3^4)^{\frac{1}{3}} \}^{\frac{1}{4}} \times \{ (3^4)^{\frac{1}{3}} \}^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 3$$

$$(4) (2^{\sqrt{6}} \times 3^{2\sqrt{6}-\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} \div 18^{\frac{3}{2}}$$

$$= (2^{\sqrt{6}})^{\sqrt{3}} \times (3^{2\sqrt{6}-\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} \div (2 \times 3^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 2^{3\sqrt{2}} \times 3^{6\sqrt{2}-3} \div (2^{3/2} \times 3^{6/2})$$

$$= 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

04-2 **답** (1) $\frac{13}{12}$ (2) $\frac{1}{6}$

$$(1) \sqrt[4]{a^3 \sqrt{a^2 \sqrt{a^3}}} = \{ a \times (a^2 \times a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} \}^{\frac{1}{2}} = \{ a \times (a^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{3}} \}^{\frac{1}{2}}$$

$$= (a \times a^{\frac{7}{6}})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{13}{6}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{13}{12}}$$

$$\text{즉, } a^k = a^{\frac{13}{12}} \text{이므로 } k = \frac{13}{12}$$

$$(2) \sqrt[6]{\frac{a}{\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}}} = \left(\frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{4}}} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{a^{\frac{1}{12}}}{a^{\frac{1}{8}}} \times \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{8}}}$$

$$= a^{\frac{1}{12}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}} = a^{\frac{1}{6}}$$

$$\text{즉, } a^k = a^{\frac{1}{6}} \text{이므로 } k = \frac{1}{6}$$

05-1 **답** (1) 80 (2) -3

$$(1) (3^{\frac{1}{4}}-1)(3^{\frac{1}{4}}+1)(3^{\frac{1}{2}}+1)(3+1)(3^2+1)$$

$$= \{ (3^{\frac{1}{4}})^2-1 \} (3^{\frac{1}{2}}+1)(3+1)(3^2+1)$$

$$= (3^{\frac{1}{2}}-1)(3^{\frac{1}{2}}+1)(3+1)(3^2+1)$$

$$= \{ (3^{\frac{1}{2}})^2-1 \} (3+1)(3^2+1)$$

$$= (3-1)(3+1)(3^2+1)$$

$$= (3^2-1)(3^2+1)$$

$$= 3^4-1=80$$

$$(2) (2^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}})(4^{\frac{1}{3}}+10^{\frac{1}{3}}+25^{\frac{1}{3}})$$

$$= (2^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}})\{ (2^{\frac{1}{3}})^2+2^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} + (5^{\frac{1}{3}})^2 \}$$

$$= (2^{\frac{1}{3}})^3 - (5^{\frac{1}{3}})^3$$

$$= 2-5=-3$$

05-2 **답** (1) $2a^2+6$ (2) $\frac{8}{1-a^2}$

$$(1) a^{\frac{2}{3}}=X, a^{-\frac{1}{3}}=Y \text{로 놓으면}$$

$$(a^{\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}})^3 + (a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{1}{3}})^3$$

$$= (X+Y)^3 + (X-Y)^3$$

$$= (X^3+3X^2Y+3XY^2+Y^3) + (X^3-3X^2Y+3XY^2-Y^3)$$

$$= 2X^3+6XY^2=2(a^{\frac{2}{3}})^3+6a^{\frac{2}{3}}(a^{-\frac{1}{3}})^2$$

$$= 2a^2+6a^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}}=2a^2+6$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \frac{1}{1-a^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{1+a^{\frac{1}{4}}} + \frac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+a} \\
 &= \frac{1+a^{\frac{1}{4}}+1-a^{\frac{1}{4}}}{(1-a^{\frac{1}{4}})(1+a^{\frac{1}{4}})} + \frac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+a} \\
 &= \frac{2}{1-a^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{1+a^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{1+a} \\
 &= \frac{2(1+a^{\frac{1}{2}})+2(1-a^{\frac{1}{2}})}{(1-a^{\frac{1}{2}})(1+a^{\frac{1}{2}})} + \frac{4}{1+a} \\
 &= \frac{4}{1-a} + \frac{4}{1+a} \\
 &= \frac{4(1+a)+4(1-a)}{(1-a)(1+a)} \\
 &= \frac{8}{1-a^2}
 \end{aligned}$$

06-1 [답] (1) 6 (2) 34 (3) 14

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 2 \text{의 양변을 제곱하면} \\
 & (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 = 2^2, \quad x - 2 + x^{-1} = 4 \\
 & \therefore x + x^{-1} = 6 \\
 (2) \quad & x + x^{-1} = 6 \text{의 양변을 제곱하면} \\
 & (x + x^{-1})^2 = 6^2, \quad x^2 + 2 + x^{-2} = 36 \\
 & \therefore x^2 + x^{-2} = 34 \\
 (3) \quad & x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 2 \text{의 양변을 세제곱하면} \\
 & (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^3 = 2^3 \\
 & x^{\frac{3}{2}} - 3(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}) - x^{-\frac{3}{2}} = 8 \\
 & x^{\frac{3}{2}} - 3 \times 2 - x^{-\frac{3}{2}} = 8 \\
 & \therefore x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} = 14
 \end{aligned}$$

06-2 [답] 5

$$\begin{aligned}
 & (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = x + 2 + x^{-1} = 23 + 2 = 25 \text{이므로} \\
 & x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = \pm 5 \\
 & \text{그런데 } x > 0 \text{이면 } x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} > 0 \text{이므로} \\
 & x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 5
 \end{aligned}$$

06-3 [답] 110

$$\begin{aligned}
 & 2^x + 2^{-x} = 5 \text{의 양변을 세제곱하면} \\
 & (2^x + 2^{-x})^3 = 5^3 \\
 & 2^{3x} + 3(2^x + 2^{-x}) + 2^{-3x} = 125 \\
 & 8^x + 3 \times 5 + 8^{-x} = 125 \\
 & \therefore 8^x + 8^{-x} = 110
 \end{aligned}$$

07-1 [답] (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{7}{9}$

(1) 주어진 식의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면

$$\begin{aligned}
 \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} &= \frac{(a^x - a^{-x})a^x}{(a^x + a^{-x})a^x} = \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} \\
 &= \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

(2) 주어진 식의 분모, 분자에 a^x 을 곱하면

$$\begin{aligned}
 \frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^{3x} + a^{-3x}} &= \frac{(a^{3x} - a^{-3x})a^x}{(a^{3x} + a^{-3x})a^x} = \frac{a^{4x} - a^{-2x}}{a^{4x} + a^{-2x}} \\
 &= \frac{(a^{2x})^2 - (a^{2x})^{-1}}{(a^{2x})^2 + (a^{2x})^{-1}} \\
 &= \frac{2^2 - 2^{-1}}{2^2 + 2^{-1}} = \frac{4 - \frac{1}{2}}{4 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{9}
 \end{aligned}$$

07-2 [답] $\sqrt{2}$

$\frac{a^m + a^{-m}}{a^m - a^{-m}} = 3$ 의 좌변의 분모, 분자에 a^m 을 곱하면

$$\frac{(a^m + a^{-m})a^m}{(a^m - a^{-m})a^m} = 3, \quad \frac{a^{2m} + 1}{a^{2m} - 1} = 3$$

$$a^{2m} + 1 = 3a^{2m} - 3, \quad 2a^{2m} = 4 \quad \therefore a^{2m} = 2$$

이때 $a > 0$ 이므로

$$a^m = (a^{2m})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

[다른 풀이]

$$\frac{a^m + a^{-m}}{a^m - a^{-m}} = 3 \text{에서 } a^m + a^{-m} = 3(a^m - a^{-m})$$

$$2a^m = 4a^{-m} \quad \therefore a^m = 2a^{-m}$$

양변에 a^m 을 곱하면 $a^{2m} = 2$

이때 $a > 0$ 이므로

$$a^m = (a^{2m})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

07-3 [답] $\frac{14}{3}$

$3^{\frac{1}{x}} = 25$ 의 양변을 x 제곱하면

$$3 = 25^x \quad \therefore 5^{2x} = 3$$

주어진 식의 분모, 분자에 5^x 을 곱하면

$$\begin{aligned}
 \frac{5^{3x} + 5^{-3x}}{5^x - 5^{-x}} &= \frac{(5^{3x} + 5^{-3x})5^x}{(5^x - 5^{-x})5^x} = \frac{5^{4x} + 5^{-2x}}{5^{2x} - 1} \\
 &= \frac{(5^{2x})^2 + (5^{2x})^{-1}}{5^{2x} - 1} = \frac{9 + \frac{1}{3}}{3 - 1} = \frac{14}{3}
 \end{aligned}$$

08-1 [답] (1) -1 (2) 0

(1) $73^x = 9$ 에서

$$73 = 9^{\frac{1}{x}}, \quad 73 = (3^2)^{\frac{1}{x}} \quad \therefore 3^{\frac{2}{x}} = 73 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$219^y = 27$ 에서

$$219 = 27^{\frac{1}{y}}, \quad 219 = (3^3)^{\frac{1}{y}} \quad \therefore 3^{\frac{3}{y}} = 219 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡에서

$$3^{\frac{2}{x}} \div 3^{\frac{3}{y}} = 73 \div 219 = \frac{1}{3}, 3^{\frac{2}{x} - \frac{3}{y}} = 3^{-1}$$

$$\therefore \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -1$$

(2) $2^x = 5^y = \left(\frac{1}{10}\right)^z = k (k > 0)$ 로 놓으면

$$k \neq 1 (\because xyz \neq 0)$$

$$2^x = k \text{에서 } 2 = k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$5^y = k \text{에서 } 5 = k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^z = k \text{에서 } \frac{1}{10} = k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에서

$$k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \times k^{\frac{1}{z}} = 2 \times 5 \times \frac{1}{10} = 1$$

$$\therefore k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = 1$$

$$\text{그런데 } k \neq 1 \text{이므로 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

08-2 [답] 32

$$2^a = 3^3 \text{에서 } 3 = 2^{\frac{a}{3}}$$

$$3^b = 5^4 \text{에서 } 5 = 3^{\frac{b}{4}}$$

$$\therefore 5^c = (3^{\frac{b}{4}})^c = 3^{\frac{bc}{4}} = (2^{\frac{a}{3}})^{\frac{bc}{4}} = 2^{\frac{abc}{12}} = 2^5 = 32$$

09-1 [답] 8배

수심이 5m인 곳에서의 빛의 세기는

$$I_5 = I_0 \times 2^{-\frac{5}{4}}$$

수심이 17m인 곳에서의 빛의 세기는

$$I_{17} = I_0 \times 2^{-\frac{17}{4}}$$

$$\therefore \frac{I_5}{I_{17}} = \frac{I_0 \times 2^{-\frac{5}{4}}}{I_0 \times 2^{-\frac{17}{4}}} = 2^3 = 8$$

따라서 수심이 5m인 곳에서의 빛의 세기는 수심이 17m인 곳에서의 빛의 세기의 8배이다.

09-2 [답] 3.6배

일평균 습도가 79%, 일평균 기온이 24°C인 날의 식품의 부패 지수는

$$P_1 = \frac{79-65}{14} \times 1.05^{24} = 1.05^{24}$$

일평균 습도가 72%, 일평균 기온이 12°C인 날의 식품의 부패 지수는

$$P_2 = \frac{72-65}{14} \times 1.05^{12} = 0.5 \times 1.05^{12}$$

$$\therefore \frac{P_1}{P_2} = \frac{1.05^{24}}{0.5 \times 1.05^{12}} = 2 \times 1.05^{12} = 2 \times 1.8 = 3.6$$

따라서 P_1 은 P_2 의 3.6배이다.

연습문제

21~23쪽

1 ③	2 3	3 ④	4 ⑤	5 4
6 ④	7 ③	8 ③	9 $\frac{3}{2}$	10 ⑤
11 ③	12 ④	13 ②	14 $2\sqrt{5}$	15 17
16 ⑤	17 2	18 ⑤	19 ③	20 ㄱ, ㄷ
21 15	22 ②			

- ① $\sqrt{625} = 25$ 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 25$
 $x^4 - 25 = 0, (x^2 - 5)(x^2 + 5) = 0$
 $\therefore x = \pm\sqrt{5}$ 또는 $x = \pm\sqrt{5}i$
따라서 $\sqrt{625}$ 의 네제곱근은 $\pm\sqrt{5}, \pm\sqrt{5}i$ 이다.

② -27 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = -27$
 $x^3 + 27 = 0, (x+3)(x^2 - 3x + 9) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$
따라서 -27 의 세제곱근 중 실수인 것은 -3 이다.

③ 36 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 36$
 $x^4 - 36 = 0, (x^2 - 6)(x^2 + 6) = 0$
 $\therefore x = \pm\sqrt{6}$ 또는 $x = \pm\sqrt{6}i$
따라서 36 의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt{6}$ 이다.

④ 4 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = 4$
 $x^4 - 4 = 0, (x^2 - 2)(x^2 + 2) = 0$
 $\therefore x = \pm\sqrt{2}$ 또는 $x = \pm\sqrt{2}i$
따라서 4 의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt{2}$ 의 2개이다.

⑤ 제곱근 25 는 $\sqrt{25} = 5$ 이다.
따라서 옳은 것은 ③이다.
- 2의 제곱근을 x 라 하면 $x^2 = 2$
 $\therefore x = \pm\sqrt{2} \quad \therefore N(2, 2) = 2$
 -5 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4 = -5$ 이고 이 방정식의 실근은 없다. $\therefore N(-5, 4) = 0$
8의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = 8$ 이므로
 $x^3 - 8 = 0, (x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$
 $\therefore x = 2 (\because x \text{는 실수})$
 $\therefore N(8, 3) = 1$
 $\therefore N(2, 2) + N(-5, 4) + N(8, 3)$
 $= 2 + 0 + 1 = 3$
- $\sqrt[4]{3\sqrt{64}} \times \sqrt[6]{\sqrt{8}} \div \sqrt[3]{4\sqrt{32}} = \sqrt[12]{2^6} \times \sqrt[12]{2^3} \div \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{\frac{2^6 \times 2^3}{2^3}} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[2]{2}$

$$4 \quad \sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[3]{a}}} = \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[4]{a}} \times \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[8]{a}} \times \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[12]{a}}$$

$$= \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{a}} = \frac{\sqrt[12]{a^2}}{\sqrt[12]{a}} = \sqrt[12]{\frac{a^2}{a}} = \sqrt[12]{a}$$

즉, $\sqrt[n]{a} = \sqrt[12]{a}$ 이므로 $n=12$

$$5 \quad (\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1) + (\sqrt[4]{9}-\sqrt[4]{4})(\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{4})$$

$$= (\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}+1) + (\sqrt{9}-\sqrt{4})$$

$$= \{(\sqrt[3]{2})^3+1\} + (3-2) = 2+1+1=4$$

$$6 \quad \text{이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 } \sqrt[3]{3}+b=\sqrt[3]{81},$$

$$\sqrt[3]{3} \times b = a \text{이므로}$$

$$b = \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3^4} - \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$$

$$a = \sqrt[3]{3} \times (2\sqrt[3]{3}) = 2\sqrt[3]{3^2}$$

$$\therefore ab = 2\sqrt[3]{3^2} \times 2\sqrt[3]{3} = 4 \times \sqrt[3]{3^3} = 4 \times 3 = 12$$

$$7 \quad A = \sqrt{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{2^2 \times 3} = \sqrt[6]{24}$$

$$B = \sqrt[3]{2\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{2^2 \times 3} = \sqrt[6]{12}$$

$$C = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{3^2 \times 2} = \sqrt[6]{18}$$

이때 $12 < 18 < 24$ 이므로 $\sqrt[6]{12} < \sqrt[6]{18} < \sqrt[6]{24}$

$$\therefore B < C < A$$

$$8 \quad \frac{10}{3^2+9^2} \times \frac{27}{2^{-5}+8^{-2}} = \frac{10}{3^2+(3^2)^2} \times \frac{3^3}{2^{-5}+(2^3)^{-2}}$$

$$= \frac{10}{3^2+3^4} \times \frac{3^3}{2^{-5}+2^{-6}}$$

$$= \frac{10}{3^2(1+3^2)} \times \frac{3^3}{2^{-6}(2+1)}$$

$$= \frac{1}{2^{-6}} = 2^6 = 64$$

$$9 \quad \sqrt[5]{a^3 \times \sqrt{a^k}} = (a^3 \times a^{\frac{k}{2}})^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{5}(3+\frac{k}{2})}$$

즉, $a^{\frac{1}{5}(3+\frac{k}{2})} = a^{\frac{3}{4}}$ 이므로

$$\frac{1}{5}\left(3+\frac{k}{2}\right) = \frac{3}{4}, \quad 3+\frac{k}{2} = \frac{15}{4} \quad \therefore k = \frac{3}{2}$$

$$10 \quad (a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{18}+1} \times (a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}-\sqrt{6}} \div (a^2)^{3-\sqrt{2}}$$

$$= a^{6+\sqrt{2}} \times a^{6-3\sqrt{2}} \div a^{6-2\sqrt{2}} = a^{6+\sqrt{2}+6-3\sqrt{2}-6+2\sqrt{2}} = a^6$$

$$\therefore k=6$$

$$11 \quad \sqrt{2}=a \text{에서 } 2^{\frac{1}{2}}=a \quad \therefore 2=a^2$$

$$\sqrt[4]{3}=b \text{에서 } 3^{\frac{1}{4}}=b \quad \therefore 3=b^4$$

$$\therefore \sqrt[8]{6} = 6^{\frac{1}{8}} = (2 \times 3)^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{1}{8}} \times 3^{\frac{1}{8}} = (a^2)^{\frac{1}{8}} (b^4)^{\frac{1}{8}} = a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{2}}$$

$$12 \quad 2^{3+\sqrt{3}}=X, \quad 2^{3-\sqrt{3}}=Y \text{로 놓으면}$$

$$(2^{3+\sqrt{3}}+2^{3-\sqrt{3}})^2 - (2^{3+\sqrt{3}}-2^{3-\sqrt{3}})^2$$

$$= (X+Y)^2 - (X-Y)^2 = 4XY$$

$$= 2^2 \times 2^{3+\sqrt{3}} \times 2^{3-\sqrt{3}} = 2^{2+3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}} = 2^8 = 256$$

$$13 \quad x = 3^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{1}{3}} \text{의 양변을 세제곱하면}$$

$$x^3 = 3 + 3^{-1} + 3(3^{\frac{1}{3}} + 3^{-\frac{1}{3}})$$

$$x^3 = \frac{10}{3} + 3x \quad \therefore 3x^3 - 9x = 10$$

$$\therefore 3x^3 - 9x - 6 = 10 - 6 = 4$$

$$14 \quad x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^3 - 3(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})$$

$$= (\sqrt{5})^3 - 3 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$15 \quad 2^{-a} + 2^{-b} = \frac{9}{4} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^b} = \frac{9}{4}, \quad \frac{2^a + 2^b}{2^{a+b}} = \frac{9}{4}$$

$$\therefore 2^{a+b} = \frac{4(2^a + 2^b)}{9} = \frac{4 \times 2}{9} = \frac{8}{9}$$

따라서 $p=9, q=8$ 이므로

$$p+q=17$$

$$16 \quad \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{2}{3} \text{의 좌변의 분모, 분자에 } a^x \text{을 곱하면}$$

$$\frac{(a^x - a^{-x})a^x}{(a^x + a^{-x})a^x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^{2x} - 1}{a^{2x} + 1} = \frac{2}{3}$$

$$3(a^{2x} - 1) = 2(a^{2x} + 1) \quad \therefore a^{2x} = 5$$

$$\therefore a^{4x} = (a^{2x})^2 = 5^2 = 25$$

$$17 \quad 2^{\frac{2}{a}} = 216 \text{에서 } 2^{\frac{2}{a}} = 6^3$$

$$\therefore 6^{3a} = 2^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$9^{\frac{2}{b}} = 36 \text{에서 } 3^{\frac{4}{b}} = 6^2$$

$$\therefore 6^b = 3^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$6^{3a} \times 6^b = 2^2 \times 3^2 = 36, \quad 6^{3a+b} = 6^2$$

$$\therefore 3a+b=2$$

$$18 \quad a^x = b^y = 5^z = k \quad (k>0) \text{로 놓으면 } k \neq 1 \quad (\because xyz \neq 0)$$

$$a^x = k \text{에서 } a = k^{\frac{1}{x}}$$

$$b^y = k \text{에서 } b = k^{\frac{1}{y}}$$

$$5^z = k \text{에서 } 5 = k^{\frac{1}{z}}$$

이때 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$ 이므로

$$\frac{a}{b} = k^{\frac{1}{x}} \div k^{\frac{1}{y}} = k^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = k^{\frac{2}{z}} = (k^{\frac{1}{z}})^2 = 5^2 = 25$$

$$19 \quad A \text{ 지역에서 지면으로부터 } 12 \text{ m와 } 36 \text{ m인 높이에서 풍속}$$

이 각각 2 (m/s) 와 8 (m/s) 이므로

$$8 = 2 \times \left(\frac{36}{12}\right)^{\frac{2}{2-k}} \quad \therefore 4 = 3^{\frac{2}{2-k}}$$

B 지역에서 지면으로부터 10m와 90m인 높이에서 풍속이 각각 $a(\text{m/s})$ 와 $b(\text{m/s})$ 이므로

$$b = a \times \left(\frac{90}{10}\right)^{\frac{2}{2-k}} \quad \therefore b = a \times 3^{\frac{4}{2-k}}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = 3^{\frac{4}{2-k}} = (3^{\frac{2}{2-k}})^2 = 4^2 = 16$$

20 ㄱ. $\sqrt[5]{-3}$ 은 실수이므로 $(5, -3) \in S$

ㄴ. $b \neq 0$ 일 때, $\sqrt[4]{b}$ 와 $\sqrt[4]{-b}$ 가 모두 실수하려면 a 는 홀수이어야 하므로

$$a=3 \text{ 또는 } a=5$$

ㄷ. $\sqrt[4]{b}$ 에서 a 가 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 생각하면

(i) a 가 짝수일 때, 즉 $a=4$ 일 때

$b \geq 0$ 이어야 $\sqrt[4]{b}$ 가 실수이므로 S 의 원소는

$$(4, 0), (4, 1), (4, 3) \text{의 } 3\text{개}$$

(ii) a 가 홀수일 때, 즉 $a=3$ 또는 $a=5$ 일 때

모든 b 에 대하여 $\sqrt[4]{b}$ 가 실수이므로 S 의 원소는

$$(3, -3), (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 3),$$

$$(5, -3), (5, -1), (5, 0), (5, 1), (5, 3)$$

의 10개

$$(i), (ii) \text{에서 } n(S) = 3 + 10 = 13$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21 $a^3=3$ 에서 $a=3^{\frac{1}{3}}$

$$b^5=7 \text{에서 } b=7^{\frac{1}{5}}$$

$$c^6=9 \text{에서 } c=9^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore (abc)^n = (3^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{1}{5}} \times 3^{\frac{1}{3}})^n = (3^{\frac{2}{3}} \times 7^{\frac{1}{5}})^n$$

$$= 3^{\frac{2n}{3}} \times 7^{\frac{n}{5}}$$

$3^{\frac{2n}{3}}$ 이 자연수가 되려면 $n=3, 6, 9, 12, \textcircled{15}, 18, \dots$

$7^{\frac{n}{5}}$ 이 자연수가 되려면 $n=5, 10, \textcircled{15}, 20, 25, 30, \dots$

따라서 $(abc)^n = 3^{\frac{2n}{3}} \times 7^{\frac{n}{5}}$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값은 15이다.

22 $a^{3x} - a^{-3x} = 14$ 에서

$$(a^x - a^{-x})^3 + 3(a^x - a^{-x}) = 14$$

이때 $a^x - a^{-x} = t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$t^3 + 3t = 14, (t-2)(t^2 + 2t + 7) = 0$$

$$\therefore t=2 \quad (\because t \text{는 실수})$$

즉, $a^x - a^{-x} = 2$ 이므로

$$\frac{a^{2x} + a^{-2x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{(a^x - a^{-x})^2 + 2}{a^x - a^{-x}} = \frac{2^2 + 2}{2} = 3$$

I-1 02 로그

로그의 뜻과 성질

개념 CHECK

25쪽

1 답 (1) $5 = \log_3 243$ (2) $0 = \log_5 1$

(3) $-\frac{2}{3} = \log_8 \frac{1}{4}$ (4) $3 = \log_{\frac{1}{5}} 0.008$

2 답 (1) $-3 < x < -2$ 또는 $x > -2$ (2) $x > 2$

3 답 (1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) $-\frac{5}{3}$

문제

26~28쪽

01-1 답 (1) 4 (2) 3 (3) $\frac{1}{27}$ (4) 8

(1) $\log_{\sqrt{5}} 25 = x$ 에서

$$(\sqrt{5})^x = 25, 5^{\frac{x}{2}} = 5^2$$

$$\frac{x}{2} = 2 \text{이므로 } x=4$$

(2) $\log_9 x = 0.5$ 에서

$$x = 9^{0.5} = (3^2)^{0.5} = 3$$

(3) $\log_x 81 = -\frac{4}{3}$ 에서

$$x^{-\frac{4}{3}} = 81 = 3^4$$

$$\therefore x = (3^4)^{-\frac{3}{4}} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

(4) $\log_{\frac{1}{2}} (\log_{64} x) = 1$ 에서

$$\log_{64} x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 64^{\frac{1}{2}} = (2^6)^{\frac{1}{2}} = 2^3 = 8$$

01-2 답 $\sqrt{3}$

$x = \log_2 27$ 에서 $2^x = 27 = 3^3$

$$\therefore 2^{\frac{x}{6}} = (2^x)^{\frac{1}{6}} = (3^3)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

01-3 답 16

$\log_a \frac{1}{8} = -2$ 에서 $a^{-2} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$

$$\therefore a = (2^{-3})^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$\log_{\sqrt{2}} b = 5$ 에서

$$b = (\sqrt{2})^5 = (2^{\frac{1}{2}})^5 = 2^{\frac{5}{2}}$$

$$\therefore ab = 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{5}{2}} = 2^4 = 16$$

02-1 답 (1) $3 < x < 4$ (2) $2 < x < 3$

(1) (i) (밑)>0, (밑) $\neq 1$ 이어야 하므로

$$x-3 > 0, x-3 \neq 1$$

$$\therefore x > 3, x \neq 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

(ii) (진수)>0이어야 하므로

$$4-x > 0 \quad \therefore x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $3 < x < 4$

(2) (i) (밑)>0, (밑) $\neq 1$ 이어야 하므로

$$x-2 > 0, x-2 \neq 1$$

$$\therefore x > 2, x \neq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

(ii) (진수)>0이어야 하므로

$$-x^2+2x+3 > 0, x^2-2x-3 < 0$$

$$(x+1)(x-3) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

따라서 ㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $2 < x < 3$

02-2 답 0, 1

(i) (밑)>0, (밑) $\neq 1$ 이어야 하므로

$$3-x > 0, 3-x \neq 1$$

$$\therefore x < 3, x \neq 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉤}$$

(ii) (진수)>0이어야 하므로

$$-x^2+3x+4 > 0, x^2-3x-4 < 0$$

$$(x+1)(x-4) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉥}$$

㉤, ㉥을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$-1 < x < 2 \text{ 또는 } 2 < x < 3$$

따라서 정수 x 의 값은 0, 1이다.

02-3 답 12

(i) (밑)>0, (밑) $\neq 1$ 이어야 하므로

$$p-1 > 0, p-1 \neq 1$$

$$\therefore p > 1, p \neq 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉦}$$

(ii) (진수)>0이어야 하므로 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2-2px+6p > 0$$

이차방정식 $x^2-2px+6p=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-p)^2 - 6p < 0, p^2 - 6p < 0$$

$$p(p-6) < 0 \quad \therefore 0 < p < 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉧}$$

㉦, ㉧을 동시에 만족시키는 p 의 값의 범위는

$$1 < p < 2 \text{ 또는 } 2 < p < 6$$

따라서 자연수 p 는 3, 4, 5이므로 그 합은

$$3+4+5=12$$

03-1 답 (1) -5 (2) 0

$$(1) 3\log_5 3 - 2\log_5 75 - \log_5 15$$

$$= \log_5 3^3 - \log_5 75^2 - \log_5 15$$

$$= \log_5 \frac{3^3}{75^2 \times 15} = \log_5 \frac{3^3}{(3 \times 5^2)^2 \times 3 \times 5}$$

$$= \log_5 \frac{1}{5^5} = \log_5 5^{-5} = -5\log_5 5 = -5$$

$$(2) \log_3 \sqrt{16} - \frac{1}{2} \log_3 \frac{1}{5} - \frac{3}{2} \log_3 \sqrt[3]{80}$$

$$= \log_3 \sqrt{16} + \log_3 (5^{-1})^{-\frac{1}{2}} - \log_3 (80^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

$$= \log_3 \sqrt{16} + \log_3 \sqrt{5} - \log_3 \sqrt{80}$$

$$= \log_3 \frac{\sqrt{16} \times \sqrt{5}}{\sqrt{80}} = \log_3 1 = 0$$

03-2 답 -2

$$\log_{10} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log_{10} \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \log_{10} \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$+ \log_{10} \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \dots + \log_{10} \left(1 - \frac{1}{100}\right)$$

$$= \log_{10} \frac{1}{2} + \log_{10} \frac{2}{3} + \log_{10} \frac{3}{4} + \log_{10} \frac{4}{5} + \dots + \log_{10} \frac{99}{100}$$

$$= \log_{10} \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \dots \times \frac{99}{100}\right)$$

$$= \log_{10} \frac{1}{100} = \log_{10} 10^{-2}$$

$$= -2\log_{10} 10 = -2$$

2 로그의 밑의 변환

개념 CHECK

29쪽

1 답 (1) $\frac{3}{2}$ (2) 2 (3) 12 (4) 0

문제

30~34쪽

04-1 답 (1) 3 (2) $\frac{3}{2}$

$$(1) \log_3 6 \times \log_9 8 \times \log_2 3 \times \log_6 9$$

$$= \log_3 6 \times \frac{\log_3 8}{\log_3 9} \times \frac{1}{\log_3 2} \times \frac{\log_3 9}{\log_3 6}$$

$$= \frac{3\log_3 2}{\log_3 2} = 3$$

$$(2) \log_6 \sqrt{27} + \frac{1}{\log_{\sqrt{6}} 6} = \log_6 \sqrt{27} + \log_6 \sqrt{8}$$

$$= \log_6 (\sqrt{27} \times \sqrt{8})$$

$$= \log_6 (\sqrt{3^3 \times 2^3})$$

$$= \log_6 6^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

04-2 ㉡ 4

$$\frac{\log_7 4}{a} = \log_7 6 \text{에서}$$

$$a = \frac{\log_7 4}{\log_7 6} = \log_6 4$$

$$\frac{\log_7 12}{b} = \log_7 6 \text{에서}$$

$$b = \frac{\log_7 12}{\log_7 6} = \log_6 12$$

$$\frac{\log_7 27}{c} = \log_7 6 \text{에서}$$

$$c = \frac{\log_7 27}{\log_7 6} = \log_6 27$$

$$\begin{aligned} \therefore a + b + c &= \log_6 4 + \log_6 12 + \log_6 27 \\ &= \log_6 (4 \times 12 \times 27) \\ &= \log_6 6^4 = 4 \end{aligned}$$

04-3 ㉡ 1

$$\begin{aligned} &\log_{10}(\log_2 3) + \log_{10}(\log_3 4) + \log_{10}(\log_4 5) \\ &\quad + \cdots + \log_{10}(\log_{1023} 1024) \\ &= \log_{10}(\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5 \times \cdots \times \log_{1023} 1024) \\ &= \log_{10}\left(\log_2 3 \times \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \times \cdots \times \frac{\log_2 1024}{\log_2 1023}\right) \\ &= \log_{10}(\log_2 1024) \\ &= \log_{10}(\log_2 2^{10}) \\ &= \log_{10} 10 = 1 \end{aligned}$$

05-1 ㉡ (1) 5 (2) 9

$$\begin{aligned} (1) \log_2 3 + \log_4 \sqrt{3} &= \log_2 3 + \log_{2^2} 3^{\frac{1}{2}} \\ &= \log_2 3 + \frac{1}{4} \log_2 3 \\ &= \frac{5}{4} \log_2 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_3 5 + \log_{\sqrt{3}} 5 &= \log_3 5 + \log_{3^{\frac{1}{2}}} 5 \\ &= \log_3 5 + 2 \log_3 5 \\ &= 3 \log_3 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_5 2 + \log_{125} 2 &= \log_5 2 + \log_{5^3} 2 \\ &= \log_5 2 + \frac{1}{3} \log_5 2 \\ &= \frac{4}{3} \log_5 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢} \end{aligned}$$

㉠, ㉡, ㉢에 의하여

$$\begin{aligned} &(\log_2 3 + \log_4 \sqrt{3})(\log_3 5 + \log_{\sqrt{3}} 5)(\log_5 2 + \log_{125} 2) \\ &= \frac{5}{4} \log_2 3 \times 3 \log_3 5 \times \frac{4}{3} \log_5 2 \\ &= 5 \log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 2 \\ &= 5 \log_2 3 \times \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \times \frac{1}{\log_2 5} \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) 5^{\log_5 4 \times \log_5 3} &= (5^{\log_5 4})^{\log_5 3} = (4^{\log_5 5})^{\log_5 3} \\ &= 4^{\log_5 3} = 3^{\log_5 4} \\ &= 3^{2 \log_5 2} = 3^2 = 9 \end{aligned}$$

05-2 ㉡ 4

$$(\log_2 5)(\log_{16} x) = \log_4 5 \text{에서}$$

$$(\log_2 5)(\log_{2^4} x) = \log_{2^2} 5$$

$$(\log_2 5) \left(\frac{1}{4} \log_2 x \right) = \frac{1}{2} \log_2 5$$

$$\frac{1}{4} \log_2 x = \frac{1}{2}, \log_2 x = 2$$

$$\therefore x = 2^2 = 4$$

05-3 ㉡ $3\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{\log_3 25} + \log_{25} 6 - \frac{\log_{\sqrt{2}} 3}{\log_{\sqrt{2}} 5} \\ &= \frac{3}{\log_3 5^2} + \log_{5^2} 6 - \log_5 3 \\ &= \frac{3}{2} \log_5 3 + \frac{1}{2} \log_5 6 - \log_5 3 \\ &= \frac{1}{2} \log_5 3 + \frac{1}{2} \log_5 6 \\ &= \frac{1}{2} (\log_5 3 + \log_5 6) \\ &= \frac{1}{2} \log_5 18 = \log_5 \sqrt{18} \\ &= \log_5 3\sqrt{2} \\ \therefore 5^a &= 5^{\log_5 3\sqrt{2}} = (3\sqrt{2})^{\log_5 5} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

06-1 ㉡ (1) $a-b-1$ (2) $\frac{2a+b}{1-a}$

$$\begin{aligned} (1) \log_3 \frac{2}{15} &= \log_3 2 - \log_3 15 \\ &= \log_3 2 - \log_3 (3 \times 5) \\ &= \log_3 2 - (\log_3 3 + \log_3 5) \\ &= \log_3 2 - 1 - \log_3 5 \\ &= a - b - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \log_5 12 &= \frac{\log_{10} 12}{\log_{10} 5} \\ &= \frac{\log_{10} (2^2 \times 3)}{\log_{10} \frac{10}{2}} \\ &= \frac{\log_{10} 2^2 + \log_{10} 3}{\log_{10} 10 - \log_{10} 2} \\ &= \frac{2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3}{1 - \log_{10} 2} \\ &= \frac{2a+b}{1-a} \end{aligned}$$

06-2 **답** $\frac{2a+b}{b+1}$

$$3^a=2 \text{에서 } a=\log_3 2$$

$$3^b=5 \text{에서 } b=\log_3 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_{15} 20 &= \frac{\log_3 20}{\log_3 15} = \frac{\log_3 (2^2 \times 5)}{\log_3 (3 \times 5)} \\ &= \frac{2\log_3 2 + \log_3 5}{\log_3 3 + \log_3 5} = \frac{2a+b}{b+1} \end{aligned}$$

07-1 **답** (1) 3 (2) $\frac{17}{4}$

$$(1) 8^x=10 \text{에서 } x=\log_8 10 \quad \therefore \frac{1}{x}=\log_{10} 8$$

$$125^y=10 \text{에서 } y=\log_{125} 10 \quad \therefore \frac{1}{y}=\log_{10} 125$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \log_{10} 8 + \log_{10} 125 = \log_{10} 1000 \\ &= \log_{10} 10^3 = 3 \end{aligned}$$

$$(2) \log_2 a \times \log_b 16 = 1 \text{에서}$$

$$\log_2 a \times \frac{\log_2 16}{\log_2 b} = 1, 4\log_2 a = \log_2 b$$

$$\log_2 a^4 = \log_2 b \quad \therefore b=a^4$$

$$\therefore \log_a b + \log_b a = \log_a a^4 + \log_{a^4} a = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

다른 풀이

$$(1) 8^x=10, 125^y=10 \text{에서 } 8=10^{\frac{1}{x}}, 125=10^{\frac{1}{y}}$$

$$10^{\frac{1}{x}} \times 10^{\frac{1}{y}} = 8 \times 125 \text{에서 } 10^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 10^3$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

07-2 **답** 9

$$\log_{\sqrt{3}} \sqrt{x} + \log_3 4y^2 + \log_3 3z = 1 \text{에서}$$

$$\log_{3^{\frac{1}{2}}} x^{\frac{1}{2}} + \log_{3^2} (2y)^2 + \log_3 3z = 1$$

$$\log_3 x + \log_3 2y + \log_3 3z = 1 \quad \therefore \log_3 6xyz = 1$$

$$\text{로그의 정의에 의하여 } 6xyz = 3 \quad \therefore xyz = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \{(81^x)^y\}^z = (3^4)^{xyz} = (3^4)^{\frac{1}{2}} = 3^2 = 9$$

08-1 **답** 2

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 8, \alpha\beta = 4$$

$$\therefore \log_{\alpha\beta} (\alpha + \beta) - \log_{\frac{1}{\alpha\beta}} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right)$$

$$= \log_{\alpha\beta} (\alpha + \beta) + \log_{\alpha\beta} \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

$$= \log_4 8 + \log_4 \frac{8}{4} = \log_4 16$$

$$= \log_4 4^2 = 2$$

08-2 **답** 2

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2\log_6 3, \alpha\beta = \log_6 2 - \log_6 3$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha - 1)(\beta - 1) &= \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 \\ &= \log_6 2 - \log_6 3 + 2\log_6 3 + 1 \\ &= \log_6 2 + \log_6 3 + 1 \\ &= \log_6 (2 \times 3) + 1 \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

08-3 **답** 21

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_{10} \alpha + \log_{10} \beta = -5, \log_{10} \alpha \times \log_{10} \beta = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_{\alpha} \alpha \beta^3 + \log_{\beta} \alpha^3 \beta &= \log_{\alpha} \alpha + 3\log_{\alpha} \beta + 3\log_{\beta} \alpha + \log_{\beta} \beta \\ &= 3(\log_{\alpha} \beta + \log_{\beta} \alpha) + 2 \\ &= 3 \left(\frac{\log_{10} \beta}{\log_{10} \alpha} + \frac{\log_{10} \alpha}{\log_{10} \beta} \right) + 2 \\ &= 3 \times \frac{(\log_{10} \alpha)^2 + (\log_{10} \beta)^2}{\log_{10} \alpha \times \log_{10} \beta} + 2 \\ &= 3 \times \frac{(\log_{10} \alpha + \log_{10} \beta)^2 - 2\log_{10} \alpha \times \log_{10} \beta}{\log_{10} \alpha \times \log_{10} \beta} + 2 \\ &= 3 \times \frac{(-5)^2 - 2 \times 3}{3} + 2 = 21 \end{aligned}$$

연습문제

35~36쪽

1 ②	2 ③	3 3	4 ①	5 ㄱ, ㄷ
6 ④	7 ①	8 $B < C < A$	9 9	
10 ④	11 ⑤	12 ⑤	13 ②	14 54
15 ④				

1 $\log_{\sqrt{2}} a = 4 \text{에서 } a = (\sqrt{2})^4 = (2^{\frac{1}{2}})^4 = 2^2 = 4$

$$\log_{\frac{1}{9}} 3 = b \text{에서 } \left(\frac{1}{9} \right)^b = 3, 3^{-2b} = 3$$

$$-2b = 1 \text{이므로 } b = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore ab = 4 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -2$$

2 $\log_3 \{ \log_3 (\log_2 x) \} = 0 \text{에서 } \log_3 (\log_2 x) = 5^0 = 1$

$$\log_3 (\log_2 x) = 1 \text{에서 } \log_2 x = 3$$

$$\therefore x = 2^3 = 8$$

3 (i) (땀) > 0, (땀) ≠ 1이어야 하므로

$$a - 1 > 0, a - 1 \neq 1$$

$$\therefore a > 1, a \neq 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) (진수) > 0이어야 하므로 모든 실수 x 에 대하여

$$ax^2 + ax + 1 > 0$$

㉠에서 $a > 0$ 이고 이차방정식 $ax^2 + ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$D = a^2 - 4a < 0, \quad a(a-4) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 4 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$1 < a < 2 \text{ 또는 } 2 < a < 4$$

따라서 정수 a 의 값은 3이다.

4 $5 \log_n 2 = m$ (m 은 자연수)이라 하면

$$\log_n 2 = \frac{m}{5} \text{이므로 } n^{\frac{m}{5}} = 2 \quad \therefore n = 2^{\frac{5}{m}}$$

이때 n 이 2 이상의 자연수이려면 $\frac{5}{m}$ 가 자연수이어야 하므로 $m=1$ 또는 $m=5$

$$m=1 \text{ 일 때, } n = 2^{\frac{5}{1}} = 2^5 = 32$$

$$m=5 \text{ 일 때, } n = 2^{\frac{5}{5}} = 2^1 = 2$$

따라서 모든 n 의 값의 합은 $32+2=34$

5 $\neg. \log_3(3 \times 3^2 \times 3^3 \times 3^4 \times 3^5)$

$$= \log_3 3^{1+2+3+4+5} = \log_3 3^{15} = 15$$

$\neg. \log_2 1 + \log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 4 + \log_2 5$

$$= \log_2 (1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5) = \log_2 120$$

$\neg. \frac{1}{2} \log_2 4 + \frac{2}{3} \log_2 8 + \frac{3}{4} \log_2 16 + \frac{4}{5} \log_2 32$

$$= \frac{1}{2} \log_2 2^2 + \frac{2}{3} \log_2 2^3 + \frac{3}{4} \log_2 2^4 + \frac{4}{5} \log_2 2^5$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 + \frac{2}{3} \times 3 + \frac{3}{4} \times 4 + \frac{4}{5} \times 5$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$\neg. \log_2 2^2 \times \log_3 3^2 \times \log_4 4^2 \times \log_5 5^2$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

6 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} = \frac{\log_2 5}{\log_3 5} = \frac{\log_5 3}{\log_5 2} = \log_2 3$

7 지수를 간단히 하면

$$(\log_{243} 8)(\log_9 2 + \log_3 4)(\log_2 3 - \log_8 9)$$

$$= (\log_{3^5} 2^3)(\log_{3^2} 2 + \log_3 2^2)(\log_2 3 - \log_{2^3} 3^2)$$

$$= \left(\frac{3}{5} \log_3 2\right) \left(\frac{1}{2} \log_3 2 + 2 \log_3 2\right) \left(\log_2 3 - \frac{2}{3} \log_2 3\right)$$

$$= \frac{3}{5} \log_3 2 \times \frac{5}{2} \log_3 2 \times \frac{1}{3} \log_2 3$$

$$= \frac{1}{2} \log_3 2 = \log_3 2^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{2}$$

$$\therefore 3^{(\log_{243} 8)(\log_9 2 + \log_3 4)(\log_2 3 - \log_8 9)} = 3^{\log_3 \sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\log_3 3} = \sqrt{2}$$

8 $A = \log_{64} 3 \times \log_9 125 \times \log_5 8$

$$= \log_{2^6} 3 \times \log_{3^2} 5^3 \times \log_5 2^3$$

$$= \frac{1}{6} \log_2 3 \times \frac{3}{2} \log_3 5 \times 3 \log_5 2$$

$$= \frac{1}{6} \log_2 3 \times \frac{3 \log_2 5}{2 \log_2 3} \times \frac{3}{\log_2 5} = \frac{3}{4}$$

$$B = 5^{\log_5 7 - \log_5 14} = 5^{\log_5 \frac{7}{14}} = 5^{\log_5 \frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_5 5} = \frac{1}{2}$$

$$C = \log_{27} 81 - \log_{64} 16 = \log_{3^3} 3^4 - \log_{2^6} 2^4$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore B < C < A$$

9 $(\log_3 2 + 2 \log_3 5) \log_{5\sqrt{2}} a$

$$= (\log_3 2 + \log_3 5^2) \frac{\log_3 a}{\log_3 5\sqrt{2}}$$

$$= \log_3 (2 \times 5^2) \frac{\log_3 a}{\log_3 5\sqrt{2}}$$

$$= \log_3 50 \times \frac{\log_3 a}{\log_3 5\sqrt{2}}$$

$$= \log_3 (5\sqrt{2})^2 \times \frac{\log_3 a}{\log_3 5\sqrt{2}}$$

$$= 2 \log_3 5\sqrt{2} \times \frac{\log_3 a}{\log_3 5\sqrt{2}}$$

$$= 2 \log_3 a$$

즉, $2 \log_3 a = 4$ 이므로 $\log_3 a = 2$

$$\therefore a = 3^2 = 9$$

10 $\log_2 3 = a$ 에서 $\log_3 2 = \frac{1}{a}$

$$\therefore \log_7 4\sqrt{3} = \frac{\log_3 4\sqrt{3}}{\log_3 7} = \frac{\log_3 (2^2 \times 3^{\frac{1}{2}})}{\log_3 7}$$

$$= \frac{2 \log_3 2 + \frac{1}{2}}{\log_3 7} = \frac{\frac{2}{a} + \frac{1}{2}}{\frac{2}{a}} = \frac{a+4}{2a}$$

11 $2^x = 54$ 에서 $x = \log_2 54$

$$3^y = 54 \text{에서 } y = \log_3 54$$

$$\therefore (x-1)(y-3)$$

$$= (\log_2 54 - 1)(\log_3 54 - 3)$$

$$= (\log_2 54 - \log_2 2)(\log_3 54 - \log_3 3^3)$$

$$= \log_2 \frac{54}{2} \times \log_3 \frac{54}{3^3} = \log_2 27 \times \log_3 2$$

$$= \log_2 3^3 \times \frac{1}{\log_2 3}$$

$$= 3 \log_2 3 \times \frac{1}{\log_2 3} = 3$$

12 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 5$$

$$\therefore (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 5^2 - 4 \times 5 = 5$$

$$\text{이때 } \alpha > \beta \text{ 이므로 } \alpha - \beta = \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_{\alpha-\beta} \alpha + \log_{\alpha-\beta} \beta &= \log_{\alpha-\beta} \alpha\beta = \log_{\sqrt{5}} 5 \\ &= \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5 = 2 \log_5 5 = 2 \end{aligned}$$

13 $3^a = x, 3^b = y, 3^c = z$ 에서

$$xyz = 3^a \times 3^b \times 3^c = 3^{a+b+c} = 3^0 = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_x yz + \log_y zx + \log_z xy \\ = \log_x \frac{1}{x} + \log_y \frac{1}{y} + \log_z \frac{1}{z} \\ = -1 - 1 - 1 = -3 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} \log_x yz + \log_y zx + \log_z xy \\ = \log_{3^a} (3^b \times 3^c) + \log_{3^b} (3^c \times 3^a) + \log_{3^c} (3^a \times 3^b) \\ = \log_{3^a} 3^{b+c} + \log_{3^b} 3^{c+a} + \log_{3^c} 3^{a+b} \\ = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \\ = \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} + \frac{-c}{c} \quad (\because a+b+c=0) \\ = -1 - 1 - 1 = -3 \end{aligned}$$

14 (가)에서 $\sqrt[4]{a} = \sqrt{b} = \sqrt[3]{c} = k \ (k > 0)$ 로 놓으면

$$a = k^4, b = k^2, c = k^3$$

(나)에서

$$\begin{aligned} \log_9 a + \log_{27} b + \log_3 c \\ = \log_3 k^4 + \log_3 k^2 + \log_3 k^3 \\ = 2 \log_3 k + \frac{2}{3} \log_3 k + 3 \log_3 k \\ = \frac{17}{3} \log_3 k \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{17}{3} \log_3 k = 34 \text{ 이므로 } \log_3 k = 6$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_3 abc &= \log_3 (k^4 \times k^2 \times k^3) = \log_3 k^9 \\ &= 9 \log_3 k = 9 \times 6 = 54 \end{aligned}$$

15 $\log_a b = \log_b a$ 에서 $\log_a b = \frac{1}{\log_a b}$

$$(\log_a b)^2 = 1 \quad \therefore \log_a b = \pm 1$$

그런데 $a \neq b$ 이므로 $\log_a b = -1$

$$\therefore b = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a + 4b = a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \times \frac{4}{a}} = 4$$

(단, 등호는 $a = 2$ 일 때 성립)

따라서 $a + 4b$ 의 최솟값은 4이다.

I-1 03 상용로그

상용로그

개념 CHECK

38쪽

1 답 (1) 5 (2) -2 (3) $\frac{2}{3}$ (4) $-\frac{1}{2}$

2 답 (1) 0.4683 (2) 0.7839 (3) 8.15 (4) 4.95

3 답 (1) 0 (2) 3 (3) -1 (4) -3

문제

39~44쪽

01-1 답 (1) 2.8854 (2) -0.1146 (3) 0.4427

$$\begin{aligned} (1) \log 768 &= \log (10^2 \times 7.68) = \log 10^2 + \log 7.68 \\ &= 2 \log 10 + \log 7.68 \\ &= 2 + 0.8854 = 2.8854 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \log 0.768 &= \log (10^{-1} \times 7.68) = \log 10^{-1} + \log 7.68 \\ &= -\log 10 + \log 7.68 \\ &= -1 + 0.8854 = -0.1146 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \log \sqrt{7.68} &= \log 7.68^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 7.68 \\ &= \frac{1}{2} \times 0.8854 = 0.4427 \end{aligned}$$

01-2 답 (1) 0.699 (2) 1.0791 (3) -0.2219

$$\begin{aligned} (1) \log 5 &= \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \\ &= 1 - 0.3010 = 0.699 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \log 12 &= \log (2^2 \times 3) = \log 2^2 + \log 3 \\ &= 2 \log 2 + \log 3 = 2 \times 0.3010 + 0.4771 \\ &= 1.0791 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \log 0.6 &= \log \frac{2 \times 3}{10} = \log 2 + \log 3 - \log 10 \\ &= 0.3010 + 0.4771 - 1 = -0.2219 \end{aligned}$$

01-3 답 -0.1463

상용로그표에서 $\log 3.64 = 0.5611$ 이므로

$$\log \sqrt[3]{0.364} = \log 0.364^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 0.364$$

$$= \frac{1}{3} \log (10^{-1} \times 3.64)$$

$$= \frac{1}{3} (\log 10^{-1} + \log 3.64)$$

$$= \frac{1}{3} (-1 + 0.5611) = -0.1463$$

02-1 [답] (1) 53600 (2) 0.000536

- (1) $\log N = 4 + 0.7292 = \log 10^4 + \log 5.36$
 $= \log(10^4 \times 5.36) = \log 53600$
 $\therefore N = 53600$
- (2) $\log N = -3 + (-0.2708) = (-3-1) + (1-0.2708)$
 $= -4 + 0.7292$
 $= \log 10^{-4} + \log 5.36 = \log(10^{-4} \times 5.36)$
 $= \log 0.000536$
 $\therefore N = 0.000536$

다른 풀이

- (1) $\log 5.36 = 0.7292$ 와 $\log N = 4 + 0.7292$ 의 소수 부분이 같으므로 N 은 5.36과 숫자의 배열이 같다.
 이때 $\log N$ 의 정수 부분이 4이므로 N 은 5자리의 수이다.
 $\therefore N = 53600$
- (2) $\log 5.36 = 0.7292$ 와 $\log N = -4 + 0.7292$ 의 소수 부분이 같으므로 N 은 5.36과 숫자의 배열이 같다.
 이때 $\log N$ 의 정수 부분이 -4이므로 N 은 소수점 아래 넷째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.
 $\therefore N = 0.000536$

02-2 [답] 0.00612

$$\begin{aligned}\log N &= -2 + (-0.2132) = (-2-3) + (3-0.2132) \\ &= -5 + 2.7868 \\ &= \log 10^{-5} + \log 612 \quad (\because \log 612 = 2.7868) \\ &= \log(10^{-5} \times 612) = \log 0.00612 \\ \therefore N &= 0.00612\end{aligned}$$

03-1 [답] (1) 22자리 (2) 소수점 아래 24째 자리

- (1) 12^{20} 에 상용로그를 취하면
 $\log 12^{20} = 20 \log 12 = 20 \log(2^2 \times 3)$
 $= 20(2 \log 2 + \log 3)$
 $= 20(2 \times 0.3010 + 0.4771)$
 $= 21.582 = 21 + 0.582$
 따라서 $\log 12^{20}$ 의 정수 부분이 21이므로 12^{20} 은 22자리의 자연수이다.
- (2) $\left(\frac{1}{6}\right)^{30}$ 에 상용로그를 취하면
 $\log\left(\frac{1}{6}\right)^{30} = \log 6^{-30} = -30 \log 6$
 $= -30 \log(2 \times 3) = -30(\log 2 + \log 3)$
 $= -30(0.3010 + 0.4771)$
 $= -23.343$
 $= (-23-1) + (1-0.343)$
 $= -24 + 0.657$

따라서 $\log\left(\frac{1}{6}\right)^{30}$ 의 정수 부분이 -24이므로 $\left(\frac{1}{6}\right)^{30}$ 은 소수점 아래 24째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

03-2 [답] 22자리

7^{100} 이 85자리의 자연수이므로 $\log 7^{100}$ 의 정수 부분이 84이다. 즉, $84 \leq \log 7^{100} < 85$ 이므로
 $84 \leq 100 \log 7 < 85 \quad \therefore 0.84 \leq \log 7 < 0.85 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 이때 $\log 7^{25} = 25 \log 7$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서
 $25 \times 0.84 \leq 25 \log 7 < 25 \times 0.85$
 $\therefore 21 \leq \log 7^{25} < 21.25$
 따라서 $\log 7^{25}$ 의 정수 부분이 21이므로 7^{25} 은 22자리의 자연수이다.

03-3 [답] 소수점 아래 10째 자리

a^{10} 이 95자리의 자연수이므로 $\log a^{10}$ 의 정수 부분이 94이다. 즉, $94 \leq \log a^{10} < 95$ 이므로
 $94 \leq 10 \log a < 95 \quad \therefore 9.4 \leq \log a < 9.5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 이때 $\log \frac{1}{a} = -\log a$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서
 $-9.5 < -\log a \leq -9.4, \quad -9.5 < \log \frac{1}{a} \leq -9.4$
 $(-9-1) + (1-0.5) < \log \frac{1}{a} \leq (-9-1) + (1-0.4)$
 $\therefore -10 + 0.5 < \log \frac{1}{a} \leq -10 + 0.6$
 따라서 $\log \frac{1}{a}$ 의 정수 부분이 -10이므로 $\frac{1}{a}$ 은 소수점 아래 10째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

04-1 [답] (1) $100\sqrt{10}$ (2) $10000\sqrt{10}$

- (1) $\log N$ 의 소수 부분과 $\log \frac{1}{N}$ 의 소수 부분이 같으므로
 $\log N - \log \frac{1}{N} = \log N - (-\log N)$
 $= 2 \log N \Rightarrow$ 정수
 $100 < N < 1000$ 에서 $2 < \log N < 3$
 $\therefore 4 < 2 \log N < 6$
 이때 $2 \log N$ 이 정수이므로
 $2 \log N = 5 \quad \therefore \log N = \frac{5}{2}$
 $\therefore N = 10^{\frac{5}{2}} = 100\sqrt{10}$
- (2) $\log N$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt[3]{N}$ 의 소수 부분의 합이 1이므로
 $\log N + \log \sqrt[3]{N} = \log N + \frac{1}{3} \log N$
 $= \frac{4}{3} \log N \Rightarrow$ 정수

$\log N$ 의 정수 부분이 4이므로

$$4 \leq \log N < 5 \quad \therefore \frac{16}{3} \leq \frac{4}{3} \log N < \frac{20}{3}$$

이때 $\frac{4}{3} \log N$ 이 정수이므로

$$\frac{4}{3} \log N = 6 \quad \therefore \log N = \frac{9}{2}$$

$$\therefore N = 10^{\frac{9}{2}} = 10000\sqrt{10}$$

04-2 [답] 2500

$\log \frac{N}{4}$ 의 소수 부분이 $\log N$ 의 소수 부분의 2배이므로

$2 \log N$ 의 소수 부분과 $\log \frac{N}{4}$ 의 소수 부분이 같다.

$$\begin{aligned} \therefore 2 \log N - \log \frac{N}{4} &= \log N^2 - \log \frac{N}{4} \\ &= \log \left(N^2 \times \frac{4}{N} \right) \\ &= \log 4N \Rightarrow \text{정수} \end{aligned}$$

이때 $\log N$ 의 정수 부분이 3이므로

$$3 \leq \log N < 4, \log 1000 \leq \log N < \log 10000$$

$$\therefore 1000 \leq N < 10000 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$\log 4N$ 이 정수이려면 $4N$ 이 10의 거듭제곱 꼴이어야 하고, $\textcircled{7}$ 에서 $4000 \leq 4N < 40000$ 이므로

$$4N = 10000 \quad \therefore N = 2500$$

05-1 [답] 6

규모 4 이상인 지진이 1년에 평균 64번 발생하므로

$$\log 64 = a - 0.9 \times 4$$

$$\begin{aligned} \therefore a &= \log 64 + 3.6 = 6 \log 2 + 3.6 \\ &= 6 \times 0.3 + 3.6 = 5.4 \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

또 규모 x 이상인 지진은 1년에 평균 한 번 발생하므로

$$\log 1 = a - 0.9x, 0 = 5.4 - 0.9x \quad (\because \textcircled{7})$$

$$\therefore x = 6$$

05-2 [답] 100배

2등급인 별의 밝기를 I_1 이라 하면

$$2 = -\frac{5}{2} \log I_1 + C \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

7등급인 별의 밝기를 I_2 라 하면

$$7 = -\frac{5}{2} \log I_2 + C \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7} - \textcircled{8}$ 을 하면

$$-5 = -\frac{5}{2} (\log I_1 - \log I_2), \log \frac{I_1}{I_2} = 2$$

로그의 정의에 의하여 $\frac{I_1}{I_2} = 10^2 = 100$

따라서 2등급인 별의 밝기는 7등급인 별의 밝기의 100배이다.

06-1 [답] 3.51%

방사선 입자가 특수 보호막 한 장을 통과할 때마다 그 양이 20%씩 감소하므로 처음 방사선 입자의 양을 a 라 하면 15장째 특수 보호막을 통과한 입자의 양은

$$a \left(1 - \frac{20}{100} \right)^{15} \quad \therefore a \times 0.8^{15} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

0.8^{15} 에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log 0.8^{15} &= 15 \log 0.8 = 15 \log \frac{8}{10} \\ &= 15 (3 \log 2 - 1) = 15 (3 \times 0.301 - 1) \\ &= -1.455 = (-1 - 1) + (1 - 0.455) \\ &= -2 + 0.545 = -2 + \log 3.51 \\ &= \log 10^{-2} + \log 3.51 \\ &= \log (10^{-2} \times 3.51) = \log 0.0351 \end{aligned}$$

$$\therefore 0.8^{15} = 0.0351$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $a \times 0.0351$

따라서 15장째 특수 보호막을 통과한 방사선 입자의 양은 처음 방사선 입자의 양의 3.51%이다.

06-2 [답] 15%

올해의 매출을 a , 매출의 증가율을 $r\%$ 라 하면 10년 후의 매출은 $4a$ 이므로

$$a \left(1 + \frac{r}{100} \right)^{10} = 4a \quad \therefore \left(1 + \frac{r}{100} \right)^{10} = 4$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log \left(1 + \frac{r}{100} \right)^{10} = \log 4, 10 \log \left(1 + \frac{r}{100} \right) = 2 \log 2$$

$$\log \left(1 + \frac{r}{100} \right) = \frac{\log 2}{5}, \log \left(1 + \frac{r}{100} \right) = 0.06$$

이때 $\log 1.15 = 0.06$ 이므로

$$1 + \frac{r}{100} = 1.15 \quad \therefore r = 15$$

따라서 매년 15%씩 매출을 증가시켜야 한다.

연습문제

45~46쪽

- | | | | | |
|-------------------|--------|-----|--------|------|
| 1 ④ | 2 0.09 | 3 ① | 4 1890 | 5 ① |
| 6 $\frac{4}{3}$ | 7 ④ | 8 ② | 9 ② | 10 ⑤ |
| 11 $100\sqrt{10}$ | 12 10% | | | |

$$\begin{aligned} 1 \quad ① \log 67.8 &= \log (10 \times 6.78) = \log 10 + \log 6.78 \\ &= 1 + 0.8312 = 1.8312 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ② \log 6780 &= \log (10^3 \times 6.78) = 3 \log 10 + \log 6.78 \\ &= 3 + 0.8312 = 3.8312 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \log 678000 = \log(10^5 \times 6.78) = 5\log 10 + \log 6.78 \\ = 5 + 0.8312 = 5.8312$$

$$\textcircled{4} \log 0.678 = \log(10^{-1} \times 6.78) = -\log 10 + \log 6.78 \\ = -1 + 0.8312 = -0.1688$$

$$\textcircled{5} \log 0.0678 = \log(10^{-2} \times 6.78) = -2\log 10 + \log 6.78 \\ = -2 + 0.8312 = -1.1688$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

$$\begin{aligned} 2 \quad & \log \sqrt{3} + \log 4 - \log \sqrt{32} \\ &= \log 3^{\frac{1}{2}} + \log 2^2 - \log 2^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log 3 + 2\log 2 - \frac{5}{2} \log 2 \\ &= \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \log 2 = \frac{1}{2} (\log 3 - \log 2) \\ &= \frac{1}{2} (0.48 - 0.3) = 0.09 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad & \log N = -4 + (-0.2464) = (-4 - 2) + (2 - 0.2464) \\ &= -6 + 1.7536 \\ &= \log 10^{-6} + \log 56.7 \quad (\because \log 56.7 = 1.7536) \\ &= \log(10^{-6} \times 56.7) = \log 0.0000567 \\ \therefore N &= 0.0000567 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad & 1 \leq N \leq 9 \text{일 때, } f(N) = 0 \\ & 10 \leq N \leq 99 \text{일 때, } f(N) = 1 \\ & 100 \leq N \leq 999 \text{일 때, } f(N) = 2 \\ \therefore & f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(999) \\ &= 90 \times 1 + 900 \times 2 = 1890 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad & \log A \text{의 정수 부분을 } n, \text{ 소수 부분을 } \alpha (0 \leq \alpha < 1) \text{라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여} \\ & n + \alpha = -\frac{5}{3} = -2 + \frac{1}{3} \\ \therefore n &= -2, \alpha = \frac{1}{3} \\ x &= -2 \text{는 이차방정식 } 3x^2 + 5x + k = 0 \text{의 한 근이므로} \\ 3 \times (-2)^2 + 5 \times (-2) + k &= 0 \\ \therefore k &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad & 10 < x < 100 \text{에서 } 1 < \log x < 2 \text{이므로} \\ & n = 1 \\ \therefore \log x &= 1 + \alpha \\ \text{이를 } 3\alpha^2 + 2\log x = 3 \text{에 대입하면} \\ 3\alpha^2 + 2(1 + \alpha) &= 3, 3\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0 \\ (\alpha + 1)(3\alpha - 1) &= 0 \quad \therefore \alpha = -1 \text{ 또는 } \alpha = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{그런데 } 0 \leq \alpha < 1 \text{이므로 } \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \log x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} 7 \quad & (\log_a \sqrt{a})^{20} = (\log_a a^{\frac{1}{2}})^{20} = \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \\ \therefore \log \left(\frac{1}{2}\right)^{20} &= \log 2^{-20} = -20 \log 2 \\ &= -20 \times 0.301 = -6.02 \\ &= -6 + (-0.02) \\ &= (-6 - 1) + (1 - 0.02) \\ &= -7 + 0.98 \end{aligned}$$

따라서 $\log \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ 의 정수 부분이 -7 이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$, 즉 $(\log_a \sqrt{a})^{20}$ 은 소수점 아래 7째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$$\begin{aligned} 8 \quad & I = 500 \text{일 때 } S = 0.6 \text{이므로} \\ & 0.6 = k \log 500 \\ \therefore k &= \frac{0.6}{\log 500} = \frac{0.6}{\log \frac{1000}{2}} = \frac{0.6}{3 - \log 2} \\ &= \frac{0.6}{3 - 0.3} = \frac{0.6}{2.7} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

따라서 $I = 8$ 일 때 감각의 세기는

$$k \log 8 = \frac{2}{9} \times 3 \log 2 = \frac{2}{9} \times 3 \times 0.3 = 0.2$$

따라서 자극의 세기가 8일 때의 감각의 세기는 0.2이다.

$$\begin{aligned} 9 \quad & \text{두 열차 } A, B \text{가 지점 } P \text{를 통과할 때의 속력을 각각 } v_A, \\ & v_B \text{라 하면} \\ v_A &= 0.9v_B \quad \cdots \cdots \textcircled{A} \end{aligned}$$

$$L_A = 80 + 28 \log \frac{v_A}{100} - 14 \log \frac{75}{25} \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$L_B = 80 + 28 \log \frac{v_B}{100} - 14 \log \frac{75}{25} \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

$\textcircled{C} - \textcircled{B}$ 을 하면

$$\begin{aligned} L_B - L_A &= 28 \log \frac{v_B}{100} - 28 \log \frac{v_A}{100} \\ &= 28 \log \frac{v_B}{v_A} = 28 \log \frac{v_B}{0.9v_B} \quad (\because \textcircled{A}) \\ &= 28 \log \frac{10}{9} = 28(1 - 2 \log 3) \\ &= 28 - 56 \log 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 \quad & 5^{25} \text{에 상용로그를 취하면} \\ \log 5^{25} &= 25 \log \frac{10}{2} = 25(\log 10 - \log 2) \\ &= 25(1 - 0.3010) = 17.475 \\ &= 17 + 0.475 \quad \cdots \cdots \textcircled{D} \end{aligned}$$

$\log 5^{25}$ 의 정수 부분이 17이므로 5^{25} 은 18자리의 수이다.

$$\therefore m=18$$

한편 숫자의 배열은 상용로그의 소수 부분과 관련 있고,

㉠에서 $\log 5^{25}$ 의 소수 부분은 0.475이다.

이때 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$ 이므로

$$\log 2 < 0.475 < \log 3$$

$$17 + \log 2 < 17.475 < 17 + \log 3$$

$$\log(2 \times 10^{17}) < \log 5^{25} < \log(3 \times 10^{17})$$

$$\therefore 2 \times 10^{17} < 5^{25} < 3 \times 10^{17}$$

따라서 5^{25} 의 최고 자리의 숫자는 2이므로

$$n=2$$

$$\therefore m+n=18+2=20$$

- 11 $\log N - [\log N] = \log N^3 - [\log N^3]$ 에서
 $\log N^3 - \log N = [\log N^3] - [\log N]$
 $3\log N - \log N = [3\log N] - [\log N]$
 $2\log N = [3\log N] - [\log N]$
 이때 $[3\log N] - [\log N]$ 이 정수이므로 $2\log N$ 은 정수이다.

$$100 < N < 1000 \text{에서 } 2 < \log N < 3$$

$$\therefore 4 < 2\log N < 6$$

이때 $2\log N$ 은 정수이므로

$$2\log N = 5 \quad \therefore \log N = \frac{5}{2}$$

$$\therefore N = 10^{\frac{5}{2}} = 100\sqrt{10}$$

- 12 전파 기지국에서 통화하는 데 필요한 에너지의 양을 a , 기지국에서 100m 멀어질 때마다 통화하는 데 필요한 에너지의 양의 증가율을 $r\%$ 라 하면 기지국에서 1750m 떨어진 지점에서 통화하는 데 필요한 에너지의 양은 $5a$ 이므로

$$a\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{17.5} = 5a \quad \therefore \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{17.5} = 5$$

양변에 상용로그를 취하면

$$17.5 \log\left(1 + \frac{r}{100}\right) = \log 5$$

$$17.5 \log\left(1 + \frac{r}{100}\right) = \log \frac{10}{2}$$

$$\log\left(1 + \frac{r}{100}\right) = \frac{1 - \log 2}{17.5} = \frac{1 - 0.3}{17.5} = 0.04$$

이때 $\log 1.1 = 0.04$ 이므로

$$1 + \frac{r}{100} = 1.1 \quad \therefore r = 10$$

따라서 기지국에서 100m 멀어질 때마다 통화하는 데 필요한 에너지의 양은 10%씩 증가한다.

I-2 01 지수함수

1 지수함수

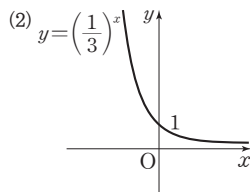
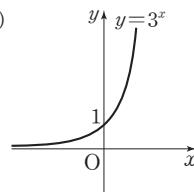
개념 CHECK

49쪽

1 답 ㄱ, ㄷ

2 답 (1) 3 (2) 27 (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\sqrt{3}$

3 답 (1)



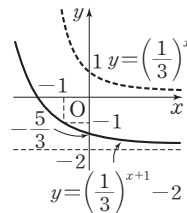
문제

50~56쪽

01-1 답 풀이 참조

(1) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 2$ 의 그래프는

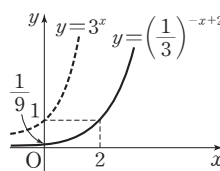
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 치역: $\{y | y > -2\}$, 점근선의 방정식: $y = -2$

(2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-(x-2)} = 3^{x-2}$

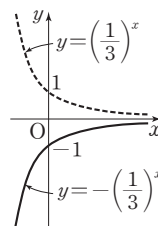
따라서 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2}$ 의 그래프는 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 치역: $\{y | y > 0\}$, 점근선의 방정식: $y = 0$

(3) $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프는

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



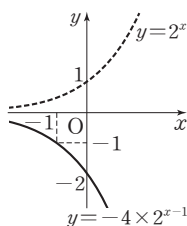
$\therefore$ 치역: $\{y | y < 0\}$,

점근선의 방정식: $y = 0$

01-2 [답] 풀이 참조

$$y = -4 \times 2^{x-1} = -2^{x+1}$$

따라서 $y = -4 \times 2^{x-1}$ 의 그래프는 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



02-1 [답] $a = -27, b = -2$

$y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$$y - 2 = 3^{x+3} \quad \therefore y = 3^{x+3} + 2$$

이 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면

$$-y = 3^{-x+3} + 2$$

$$\therefore y = -3^3 \times 3^{-x} - 2$$

$$= -27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2$$

$$\therefore a = -27, b = -2$$

02-2 [답] 7

$y = 9 \times 3^x - 2 = 3^{x+2} - 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$$y = 3^x - 2$$

이 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면

$$y = 3^{-x} - 2$$

이 그래프가 점 $(-2, k)$ 를 지나므로

$$k = 3^2 - 2 = 7$$

02-3 [답] 4

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-a+2} + b$$

주어진 함수의 그래프에서 점근선의 방정식이 $y = 2$ 이므로 $b = 2$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-a+2} + 2 \text{의 그래프가 점 } (-1, 4) \text{를 지나므로}$$

$$4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-a} + 2, 2^{a-1} = 2$$

$$2^{a-1} = 2 \text{에서}$$

$$a - 1 = 1 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore a + b = 2 + 2 = 4$$

03-1 [답] 18

$y = 4^x$ 의 그래프는 점 $\left(\frac{1}{2}, a\right)$ 를 지나므로

$$a = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

$y = 4^x$ 의 그래프는 점 (a, b) , 즉 점 $(2, b)$ 를 지나므로

$$b = 4^2 = 16$$

$$\therefore a + b = 2 + 16 = 18$$

03-2 [답] 2

함수 $y = 2^{2x}$ 의 그래프와 직선 $y = 4$ 가 만나는 점의 x 좌표는

$$2^{2x} = 4 = 2^2 \text{에서 } 2x = 2$$

$$\therefore x = 1 \quad \therefore A(1, 4)$$

함수 $y = 2^x$ 의 그래프와 직선 $y = 4$ 가 만나는 점의 x 좌표는

$$2^x = 4 = 2^2 \text{에서 } x = 2 \quad \therefore B(2, 4)$$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2$$

04-1 [답] (1) $\sqrt{3} < \sqrt[5]{27} < \sqrt[3]{9}$ (2) $\sqrt[5]{\frac{1}{16}} < \sqrt[3]{\frac{1}{4}} < \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$(1) \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}}, \sqrt[5]{27} = 3^{\frac{3}{5}} \quad \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} \text{이고, 밑이 1보다 크므로}$$

$$3^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{3}{5}} < 3^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \sqrt{3} < \sqrt[5]{27} < \sqrt[3]{9}$$

$$(2) \sqrt{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{16}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{5}}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{4}{5} \text{이고, 밑이 1보다 작으므로}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{5}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \sqrt[5]{\frac{1}{16}} < \sqrt[3]{\frac{1}{4}} < \sqrt{\frac{1}{2}}$$

04-2 [답] 4

$$0.5^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}, \sqrt[4]{32} = 4\sqrt[4]{2^5} = 2^{\frac{5}{4}},$$

$$\sqrt[3]{2\sqrt{8}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2} \times 8} = \sqrt[6]{2^5} = 2^{\frac{5}{6}}, \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{3}} = (2^{-4})^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{2}{3} < \frac{5}{6} < \frac{5}{4} < \frac{4}{3} \text{이고, 밑이 1보다 크므로}$$

$$2^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{5}{6}} < 2^{\frac{5}{4}} < 2^{\frac{4}{3}}$$

따라서 가장 큰 수는 $2^{\frac{4}{3}}$ 이고, 가장 작은 수는 $2^{\frac{2}{3}}$ 이므로 두 수의 곱은

$$2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$$

05-1 [답] (1) 최댓값: 3, 최솟값: $\frac{1}{27}$

(2) 최댓값: 7, 최솟값: $\frac{7}{2}$

(3) 최댓값: 64, 최솟값: 1

(4) 최댓값: $\frac{81}{25}$, 최솟값: 1

(1) 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ 의 밑이 1보다 작으므로 $-2 \leq x \leq 2$

에서 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ 은

$x = -2$ 일 때, 최댓값은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$

$x = 2$ 일 때, 최솟값은 $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$

(2) 함수 $y = 2^{x-1} + 3$ 의 밑이 1보다 크므로 $0 \leq x \leq 3$ 에서
함수 $y = 2^{x-1} + 3$ 은

$x = 3$ 일 때, 최댓값은 $2^2 + 3 = 7$

$x = 0$ 일 때, 최솟값은 $2^{-1} + 3 = \frac{7}{2}$

(3) $y = 4^{1-x} = 4^{-(x-1)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$

함수 $y = 4^{1-x}$ 의 밑이 1보다 작으므로 $-2 \leq x \leq 1$ 에서

함수 $y = 4^{1-x}$ 은

$x = -2$ 일 때, 최댓값은 $4^3 = 64$

$x = 1$ 일 때, 최솟값은 $4^0 = 1$

(4) $y = 3^{2x} 5^{-x} = 9^x \left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{9}{5}\right)^x$

함수 $y = 3^{2x} 5^{-x}$ 의 밑이 1보다 크므로 $0 \leq x \leq 2$ 에서
함수 $y = 3^{2x} 5^{-x}$ 은

$x = 2$ 일 때, 최댓값은 $\left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{81}{25}$

$x = 0$ 일 때, 최솟값은 $\left(\frac{9}{5}\right)^0 = 1$

05-2 [답] $\frac{3}{2}$

함수 $y = 2^{x+1} + k$ 의 밑이 1보다 크므로 $-2 \leq x \leq 1$ 에서

함수 $y = 2^{x+1} + k$ 는 $x = 1$ 일 때 최댓값은 $4 + k$, $x = -2$ 일

때 최솟값은 $\frac{1}{2} + k$ 이다.

이때 최댓값이 5이므로

$4 + k = 5 \quad \therefore k = 1$

따라서 함수 $y = 2^{x+1} + 1$ 의 최솟값은

$\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

06-1 [답] (1) 최댓값: 4, 최솟값: 없다.

(2) 최댓값: 625, 최솟값: 1

(1) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x-1}$ 에서 $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 이라 하면

$f(x) = (x-1)^2 - 2$ 이므로 $f(x) \geq -2$

이때 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 작으므로

$f(x) \geq -2$ 에서 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은

$f(x) = -2$ 일 때, 최댓값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$

최솟값은 없다.

(2) $y = 5^{-x^2-4x}$ 에서 $f(x) = -x^2 - 4x$ 라 하면

$f(x) = -(x+2)^2 + 4$

$-3 \leq x \leq 0$ 에서 $0 \leq f(x) \leq 4$

이때 함수 $y = 5^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 크므로 $0 \leq f(x) \leq 4$
에서 함수 $y = 5^{f(x)}$ 은

$f(x) = 4$ 일 때, 최댓값은 $5^4 = 625$

$f(x) = 0$ 일 때, 최솟값은 $5^0 = 1$

06-2 [답] 1

$y = 2^{x^2-4x-2}$ 에서 $f(x) = x^2 - 4x - 2$ 라 하면

$f(x) = (x-2)^2 - 6$

$1 \leq x \leq 4$ 에서 $-6 \leq f(x) \leq -2$

이때 함수 $y = 2^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 크므로

$-6 \leq f(x) \leq -2$ 에서 함수 $y = 2^{f(x)}$ 은 $f(x) = -2$, 즉

$x = 4$ 일 때, 최댓값은 $2^{-2} = \frac{1}{4}$ 이다.

따라서 $a = 4$, $b = \frac{1}{4}$ 이므로

$ab = 1$

07-1 [답] 최댓값: 3, 최솟값: -1

$y = 2^{x+2} - 4^x - 1 = -(2^x)^2 + 4 \times 2^x - 1$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $0 \leq x \leq 2$ 에서

$2^0 \leq t \leq 2^2 \quad \therefore 1 \leq t \leq 4$

이때 주어진 함수는

$y = -t^2 + 4t - 1 = -(t-2)^2 + 3$

따라서 $1 \leq t \leq 4$ 에서 함수 $y = -(t-2)^2 + 3$ 은

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 3

$t = 4$ 일 때, 최솟값은 -1

07-2 [답] (1) 6 (2) -1

(1) $3^x > 0$, $3^{2-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에
의하여

$3^x + 3^{2-x} \geq 2\sqrt{3^x \times 3^{2-x}} = 6$

(단, 등호는 $3^x = 3^{2-x}$, 즉 $x = 1$ 일 때 성립)

따라서 함수 $y = 3^x + 3^{2-x}$ 의 최솟값은 6이다.

(2) $3^x + 3^{-x} = t$ 로 놓으면 $3^x > 0$, $3^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \times 3^{-x}} = 2$$

(단, 등호는 $3^x = 3^{-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립)

$$\therefore t \geq 2$$

$9^x + 9^{-x}$ 을 t 에 대한 식으로 나타내면

$$\begin{aligned} 9^x + 9^{-x} &= (3^x)^2 + (3^{-x})^2 \\ &= (3^x + 3^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2 \end{aligned}$$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - 2 - 2t + 1 = (t-1)^2 - 2$$

따라서 $t \geq 2$ 에서 함수 $y = (t-1)^2 - 2$ 는

$t=2$ 일 때, 최솟값은 -1

연습문제

57~58쪽

1 $\frac{5}{8}$	2 $0 < a < 1$	3 ④	4 6
5 $\neg, \supset, \equiv$	6 -16	7 ①	8 7
9 $A < B < C$	10 $\frac{13}{6}$	11 13	12 2
13 18	14 6	15 2	

1 $f(6)=8$ 이므로 $a^6=8$

$$f(-6) = a^{-6} = (a^6)^{-1} = 8^{-1} = \frac{1}{8}$$

$$f(-2) = a^{-2} = (a^6)^{-\frac{1}{3}} = 8^{-\frac{1}{3}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(-6) + f(-2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

2 x 의 값이 증가할 때 y 의 값이 감소하려면 $0 < a^2 - a + 1 < 1$ 이어야 한다.

(i) $a^2 - a + 1 > 0$ 에서

$$a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

따라서 항상 성립한다.

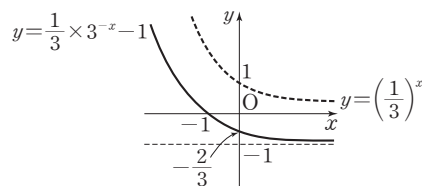
(ii) $a^2 - a + 1 < 1$ 에서

$$a^2 - a < 0, a(a-1) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 1$$

(i), (ii)에서 $0 < a < 1$

$$\begin{aligned} 3 \quad y &= \frac{1}{3} \times 3^{-x} - 1 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1 \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 1 \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$



① 치역은 $\{y | y > -1\}$ 이다.

② ㉠에 $x = -1$ 을 대입하면

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

따라서 함수 $y = \frac{1}{3} \times 3^{-x} - 1$ 의 그래프는 점 $(-1, 0)$ 을 지난다.

③ ㉠에서 밑이 1보다 작으므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

④ 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다.

⑤ $y = 3^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면

$$y = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

이 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 1$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

4 함수 $y = 2^{-x+a} + b$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $y = 3$ 이므로 $b = 3$

함수 $y = 2^{-x+a} + 3$ 의 그래프가 점 $(2, 5)$ 를 지나므로

$$5 = 2^{-2+a} + 3, 2^{-2+a} = 2$$

$$-2 + a = 1 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore a + b = 3 + 3 = 6$$

5 $\neg, y = 8 \times 2^x = 2^{x+3}$

따라서 $y = 8 \times 2^x$ 의 그래프는 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것과 같다.

$$\sqcup, y = 2^{2x} = 4^x$$

따라서 $y = 2^{2x}$ 은 $y = 2^x$ 과 밑이 다르므로 $y = 2^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

$$\sqsubset, y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 2^{-(x-1)}$$

따라서 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 의 그래프는 $y = 2^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것과 같다.

$$\therefore y=2(2^x-1)=2^{x+1}-2$$

따라서 $y=2(2^x-1)$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 보기의 함수 중 그 그래프가 $y=2^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄴ이다.

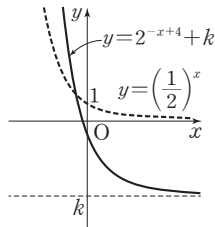
- 6 함수 $y=2^{-x+4}+k=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}+k$ 의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

이때 이 함수의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}+k \leq 0$$

$$\therefore k \leq -16$$

따라서 k 의 최댓값은 -16 이다.



- 7 함수 $y=3^{x-2}$ 의 그래프는 함수 $y=3^{x+1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 $\overline{AB}=3$

두 점 A, C의 x 좌표를 a 라 하면

$$A(a, 3^{a+1}), C(a, 3^{a-2})$$

$$\overline{AC}=\overline{AB}=3 \text{이므로 } 3^{a+1}-3^{a-2}=3$$

$$3^{a+1}(1-3^{-3})=3, 3^{a+1} \times \frac{26}{27}=3$$

$$\therefore 3^{a+1}=3 \times \frac{27}{26}=\frac{81}{26}$$

따라서 점 A의 y 좌표는 $\frac{81}{26}$ 이다.

- 8 $y=2^x$ 의 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나므로 $a=1$
 $y=2^x$ 의 그래프는 점 (a, b) , 즉 점 $(1, b)$ 를 지나므로
 $b=2^1=2$
 $y=2^x$ 의 그래프는 점 (b, c) , 즉 점 $(2, c)$ 를 지나므로
 $c=2^2=4$
 $\therefore a+b+c=1+2+4=7$

- 9 $A=\sqrt[n]{a^{n+1}}=a^{\frac{n+1}{n}}=a^{1+\frac{1}{n}}$,
 $B=\sqrt[n+1]{a^{n+2}}=a^{\frac{n+2}{n+1}}=a^{1+\frac{1}{n+1}}$,
 $C=\sqrt[n+2]{a^{n+3}}=a^{\frac{n+3}{n+2}}=a^{1+\frac{1}{n+2}}$
 $1+\frac{1}{n+2} < 1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{n}$ 이고, $0 < a < 1$ 이므로
 $a^{1+\frac{1}{n}} < a^{1+\frac{1}{n+1}} < a^{1+\frac{1}{n+2}} \therefore A < B < C$

- 10 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y=a^x$ ($0 < a < 1$)은 $x=-1$ 일 때 최댓값은 $\frac{1}{a}$, $x=2$ 일 때 최솟값은 a^2 이다.

이때 최솟값이 $\frac{4}{9}$ 이므로

$$a^2=\frac{4}{9} \therefore a=\frac{2}{3} (\because 0 < a < 1)$$

또 최댓값이 M 이므로

$$\frac{1}{a}=M \therefore M=\frac{3}{2}$$

$$\therefore a+M=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{13}{6}$$

- 11 $y=4^{-x}-3 \times 2^{1-x}+a=(2^{-x})^2-6 \times 2^{-x}+a$
 $=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x+a$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ ($t > 0$)로 놓으면 $-2 \leq x \leq 0$ 에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 \leq t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \therefore 1 \leq t \leq 4$$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-6t+a=(t-3)^2+a-9$$

따라서 $1 \leq t \leq 4$ 에서 함수 $y=(t-3)^2+a-9$ 는

$t=3$ 일 때 최솟값이 4이므로

$$a-9=4 \therefore a=13$$

- 12 $5^x+5^{-x}=t$ 로 놓으면 $5^x > 0$, $5^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t=5^x+5^{-x} \geq 2\sqrt{5^x \times 5^{-x}}=2$$

(단, 등호는 $5^x=5^{-x}$, 즉 $x=0$ 일 때 성립)

$$\therefore t \geq 2$$

25^x+25^{-x} 을 t 에 대한 식으로 나타내면

$$25^x+25^{-x}=(5^x)^2+(5^{-x})^2=(5^x+5^{-x})^2-2=t^2-2$$

이때 주어진 함수는

$$y=2t-(t^2-2)=-(t-1)^2+3$$

따라서 $t \geq 2$ 에서 함수 $y=-(t-1)^2+3$ 는

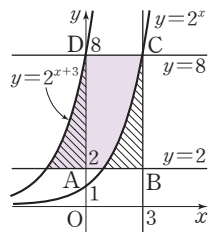
$t=2$ 일 때, 최댓값은 2

- 13 $y=8 \times 2^x=2^{x+3}$ 의 그래프는 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 같으므로 두 함수 $y=2^x$, $y=8 \times 2^x$ 의 그래프와 두 직선 $y=2$, $y=8$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\overline{AD} \times \overline{CD}=6 \times 3=18$$



- 14 $f(x)=a^{x-m}+n$ 의 그래프는 $y=a^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프이고, $g(x)=a^{m-x}+n=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-m}+n$ 의 그래프는

$y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프이다.

이때 $y=a^x$ 의 그래프와 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ 의 그래프는 y 축, 즉 직선 $x=0$ 에 대하여 대칭이므로 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이다.

$$\therefore m=2$$

또 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $y=1$ 이므로 $n=1$

따라서 $f(x)=a^{x-2}+1$, $g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-2}+1$ 이므로

$$A(3, a+1), B\left(3, \frac{1}{a}+1\right)$$

이때 $\overline{AB}=\frac{8}{3}$ 이므로

$$a+1-\left(\frac{1}{a}+1\right)=\frac{8}{3}, a-\frac{1}{a}=\frac{8}{3}$$

$$3a^2-8a-3=0, (3a+1)(a-3)=0$$

$$a=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } a=3$$

그런데 $a>1$ 이므로 $a=3$

$$\therefore a+m+n=3+2+1=6$$

- 15 함수 $y=a^{4^x-2^{x+1}+2}$ 에서 $s=4^x-2^{x+1}+2$ 라 하면

$$s=(2^x)^2-2 \times 2^x+2$$

$$2^x=t(t>0) \text{로 놓으면}$$

$$s=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$$

$$-1 \leq x \leq 1 \text{에서 } 2^{-1} \leq t \leq 2^1$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq t \leq 2$$

$$s=(t-1)^2+1 \text{은 } \frac{1}{2} \leq t \leq 2 \text{에서}$$

$$1 \leq s \leq 2$$

이때 $1 \leq s \leq 2$ 에서 함수 $y=a^s$ 을 $a>1$, $0<a<1$ 인 경우로 나누어 생각하면

(i) $a>1$ 인 경우

함수 $y=a^s$ 은 $s=2$ 일 때 최댓값이 a^2 이므로

$$a^2=4 \quad \therefore a=2 (\because a>1)$$

(ii) $0<a<1$ 인 경우

함수 $y=a^s$ 은 $s=1$ 일 때 최댓값이 a 이므로

$$a=4$$

그런데 $0<a<1$ 이므로 $a=4$ 는 모순이다.

(i), (ii)에서 $a=2$

I-2 02 지수함수의 활용

1 지수함수의 활용

개념 CHECK

59쪽

1 답 (1) $x=-4$ (2) $x=-3$ (3) $x=-3$

2 답 (1) $x<-1$ (2) $x>\frac{7}{2}$ (3) $x \geq 3$

문제

60~68쪽

01-1 답 (1) $x=7$ (2) $x=-\frac{4}{9}$

(3) $x=-2$ 또는 $x=2$ (4) $x=-2$ 또는 $x=1$

(1) $8^{x-1}=16 \times 4^x$ 에서 $2^{3x-3}=2^{4+2x}$ 이므로

$$3x-3=4+2x$$

$$\therefore x=7$$

(2) $8^{x+1}=3\sqrt{32}$ 에서 $2^{3x+3}=2^{\frac{5}{2}}$ 이므로

$$3x+3=\frac{5}{2}, 3x=-\frac{4}{3}$$

$$\therefore x=-\frac{4}{9}$$

(3) $(\sqrt{3})^x=9$ 에서 $3^{\frac{1}{2}x}=3^2$ 이므로

$$\frac{1}{2}x^2=2, x^2=4$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

(4) $4^{x^2}-16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^x=0$ 에서 $4^{x^2}=4^{2-x}$ 이므로

$$x^2=2-x, x^2+x-2=0$$

$$(x+2)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

01-2 답 10

$$9^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3} \text{에서 } 3^{2x}=3^{-x^2+3} \text{이므로}$$

$$2x=-x^2+3, x^2+2x-3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 주어진 방정식의 두 근이 $-3, 1$ 이므로

$$\alpha^2+\beta^2=(-3)^2+1^2=10$$

02-1 [답] (1) $x=-2$ (2) $x=1$ 또는 $x=2$

(3) $x=0$ (4) $x=0$ 또는 $x=2$

(1) $4^{-x}-2^{-x+1}-8=0$ 에서

$$(2^2)^{-x}-2 \times 2^{-x}-8=0$$

$$(2^{-x})^2-2 \times 2^{-x}-8=0$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x-8=0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t(t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-2t-8=0, (t+2)(t-4)=0$$

$$\therefore t=4 (\because t>0)$$

$$t=\left(\frac{1}{2}\right)^x \text{이므로}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x=4, \left(\frac{1}{2}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\therefore x=-2$$

(2) $9^x-4 \times 3^{x+1}+27=0$ 에서

$$(3^2)^x-4 \times 3 \times 3^x+27=0$$

$$(3^x)^2-12 \times 3^x+27=0$$

$$3^x=t(t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-12t+27=0, (t-3)(t-9)=0$$

$$\therefore t=3 \text{ 또는 } t=9$$

$$t=3^x \text{이므로}$$

$$3^x=3 \text{ 또는 } 3^x=9$$

$$3^x=3 \text{ 또는 } 3^x=3^2$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

(3) $5^x+5^{-x}=2$ 에서 $5^x+\frac{1}{5^x}=2$

$$5^x=t(t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t+\frac{1}{t}=2, t^2-2t+1=0$$

$$(t-1)^2=0 \therefore t=1$$

$$t=5^x \text{이므로}$$

$$5^x=1, 5^x=5^0$$

$$\therefore x=0$$

(4) $2^x+4 \times 2^{-x}=5$ 에서 $2^x+\frac{4}{2^x}=5$

$$2^x=t(t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t+\frac{4}{t}=5, t^2-5t+4=0$$

$$(t-1)(t-4)=0 \therefore t=1 \text{ 또는 } t=4$$

$$t=2^x \text{이므로}$$

$$2^x=1 \text{ 또는 } 2^x=4$$

$$2^x=2^0 \text{ 또는 } 2^x=2^2$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

02-2 [답] $x=1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\sqrt{2}-1 \text{이므로}$$

$$(\sqrt{2}+1)^x-(\sqrt{2}-1)^x-2=0 \text{에서}$$

$$(\sqrt{2}+1)^x-\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^x}-2=0$$

$$(\sqrt{2}+1)^x=t(t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t-\frac{1}{t}-2=0, t^2-2t-1=0$$

$$\therefore t=1+\sqrt{2} (\because t>0)$$

$$t=(\sqrt{2}+1)^x \text{이므로}$$

$$(\sqrt{2}+1)^x=1+\sqrt{2} \therefore x=1$$

03-1 [답] (1) $x=5$ (2) $x=3$

(3) $x=1$ (4) $x=-1$ 또는 $x=4$

(1) $5^{2x+1}=x^{2x+1}$ 에서

(i) 밑이 같으면 $x=5$

(ii) 지수가 0이면

$$2x+1=0 \therefore x=-\frac{1}{2}$$

그런데 $x>0$ 이므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=5$

(2) $(x-2)^{x-3}=(2x-3)^{x-3}$ 에서

(i) 밑이 같으면

$$x-2=2x-3 \therefore x=1$$

그런데 $x>2$ 이므로 해는 없다.

(ii) 지수가 0이면

$$x-3=0 \therefore x=3$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=3$

(3) $x^{3x+4}=x^{-x+2}$ 에서

(i) 밑이 1이면 $x=1$

(ii) 지수가 같으면

$$3x+4=-x+2 \therefore x=-\frac{1}{2}$$

그런데 $x>0$ 이므로 해는 없다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=1$

(4) $(x+2)^{x+1}=(x+2)^{x^2-11}$ 에서

(i) 밑이 1이면

$$x+2=1 \therefore x=-1$$

(ii) 지수가 같으면

$$x+1=x^2-11, x^2-x-12=0$$

$$(x+3)(x-4)=0 \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=4$$

그런데 $x>-2$ 이므로 $x=4$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x=-1 \text{ 또는 } x=4$$

03-2 ㉮ 6

$x > -1$ 에서 $x+1 > 0$ 이므로
 $16(x+1)^x = 2^{2x}(x+1)^2$ 에서
 $(x+1)^{x-2} = 2^{2x-4}$, $(x+1)^{x-2} = 4^{x-2}$
 (i) 밑이 같으면
 $x+1=4 \quad \therefore x=3$
 (ii) 지수가 0이면
 $x-2=0 \quad \therefore x=2$
 (i), (ii)에서 모든 근의 곱은
 $2 \times 3 = 6$

03-3 ㉮ $x=1$ 또는 $x=2$

$x > 0$ 이므로 $x^x x^x = (x^x)^x$ 에서
 $x^{2x} = x^{x^2}$
 (i) 밑이 1이면 $x=1$
 (ii) 지수가 같으면
 $2x = x^2$, $x(x-2) = 0$
 $\therefore x=0$ 또는 $x=2$
 그런데 $x > 0$ 이므로 $x=2$
 (i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는
 $x=1$ 또는 $x=2$

04-1 ㉮ (1) 3 (2) -9

(1) $4^x - 3 \times 2^{x+2} + 8 = 0$ 에서
 $(2^x)^2 - 12 \times 2^x + 8 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 12t + 8 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 방정식 ①의 두 근이 α, β 이므로 방정식 ②의 두 근은
 $2^\alpha, 2^\beta$
 따라서 ②에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $2^\alpha \times 2^\beta = 8$, $2^{\alpha+\beta} = 2^3$
 $\therefore \alpha + \beta = 3$
 (2) $9^x - 4 \times 3^{x+1} - k = 0$ 에서
 $(3^x)^2 - 12 \times 3^x - k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 12t - k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 방정식 ①의 두 근을 α, β 라 하면 방정식 ②의 두 근은
 $3^\alpha, 3^\beta$
 ②에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $3^\alpha \times 3^\beta = -k$
 이때 ①의 두 근의 합이 2, 즉 $\alpha + \beta = 2$ 이므로
 $k = -3^{\alpha+\beta} = -3^2 = -9$

04-2 ㉮ $a > 2$

$4^x - a \times 2^{x+2} + 16 = 0$ 에서
 $(2^x)^2 - 4a \times 2^x + 16 = 0$
 $2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 4at + 16 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 실수 x 에 대하여 $t = 2^x > 0$ 이므로 주어진 방정식이 서로
 다른 두 실근을 가지면 이차방정식 ①은 서로 다른 두 양
 의 실근을 갖는다.
 (i) 이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면 판별식 $D > 0$ 이
 어야 하므로
 $\frac{D}{4} = 4a^2 - 16 > 0$
 $a^2 - 4 > 0$, $(a+2)(a-2) > 0$
 $\therefore a < -2$ 또는 $a > 2$
 (ii) (두 근의 합) > 0 이어야 하므로
 $4a > 0 \quad \therefore a > 0$
 (iii) (두 근의 곱) > 0 이어야 하므로
 $16 > 0$
 (i), (ii), (iii)을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는
 $a > 2$

05-1 ㉮ (1) $x \leq 3$ (2) $-2 < x < \frac{3}{2}$

(3) $x \geq \frac{1}{2}$ (4) $-3 < x < 1$
 (1) $4^{2x-1} \leq 8 \times 2^{3x-2}$ 에서
 $(2^2)^{2x-1} \leq 2^3 \times 2^{3x-2}$
 $2^{4x-2} \leq 2^{3x+1}$
 밑이 1보다 크므로
 $4x-2 \leq 3x+1 \quad \therefore x \leq 3$
 (2) $9^{x(x-1)} < 27^{2-x}$ 에서
 $(3^2)^{x(x-1)} < (3^3)^{2-x}$
 $3^{2x^2-2x} < 3^{6-3x}$
 밑이 1보다 크므로
 $2x^2 - 2x < 6 - 3x$, $2x^2 + x - 6 < 0$
 $(x+2)(2x-3) < 0$
 $\therefore -2 < x < \frac{3}{2}$
 (3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq \left(\frac{1}{81}\right)^x$ 에서
 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^4\right\}^x$
 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{4x}$
 밑이 1보다 작으므로
 $2x+1 \leq 4x \quad \therefore x \geq \frac{1}{2}$

(4) $125 \times 0.2^{x^2} > \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ 에서
 $5^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} > \left\{\left(\frac{1}{5}\right)^2\right\}^{-x}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-3} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-2x}$
 밑이 1보다 작으므로
 $x^2-3 < -2x$, $x^2+2x-3 < 0$
 $(x+3)(x-1) < 0$
 $\therefore -3 < x < 1$

05-2 $\frac{8}{3}$

$\left(\frac{1}{8}\right)^{2x+1} \leq 32 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-9}$ 에서
 $2^{-3(2x+1)} \leq 2^5 \leq 2^{-(3x-9)}$, $2^{-6x-3} \leq 2^5 \leq 2^{-3x+9}$
 밑이 1보다 크므로
 $-6x-3 \leq 5 \leq -3x+9$
 (i) $-6x-3 \leq 5$ 에서 $x \geq -\frac{4}{3}$
 (ii) $5 \leq -3x+9$ 에서 $x \leq \frac{4}{3}$
 (i), (ii)를 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $-\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}$
 따라서 $M = \frac{4}{3}$, $m = -\frac{4}{3}$ 이므로
 $M-m = \frac{8}{3}$

06-1 $\frac{1}{3}$ (1) $1 < x < 2$ (2) $x < 1$ 또는 $x > 3$

(3) $-3 \leq x \leq -1$ (4) $x \leq -2$
 (1) $25^x - 6 \times 5^{x+1} + 125 < 0$ 에서
 $(5^x)^2 - 30 \times 5^x + 125 < 0$
 $5^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 30t + 125 < 0$, $(t-5)(t-25) < 0$
 $\therefore 5 < t < 25$
 $t = 5^x$ 이므로
 $5 < 5^x < 25$, $5^1 < 5^x < 5^2$
 밑이 1보다 크므로 $1 < x < 2$
 (2) $9^x - 10 \times 3^{x+1} + 81 > 0$ 에서
 $(3^x)^2 - 30 \times 3^x + 81 > 0$
 $3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 30t + 81 > 0$, $(t-3)(t-27) > 0$
 $\therefore t < 3$ 또는 $t > 27$
 그런데 $t > 0$ 이므로 $0 < t < 3$ 또는 $t > 27$
 $t = 3^x$ 이므로
 $0 < 3^x < 3$ 또는 $3^x > 27$
 $3^x < 3^1$ 또는 $3^x > 3^3$
 밑이 1보다 크므로 $x < 1$ 또는 $x > 3$

(3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 16 \leq 0$ 에서
 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 16 \leq 0$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 10t + 16 \leq 0$, $(t-2)(t-8) \leq 0$
 $\therefore 2 \leq t \leq 8$
 $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이므로
 $2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 8$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
 밑이 1보다 작으므로 $-3 \leq x \leq -1$
 (4) $\left(\frac{1}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 27$ 에서
 $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + 27$
 $\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 27 \geq 0$
 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 6t - 27 \geq 0$, $(t+3)(t-9) \geq 0$
 $\therefore t \leq -3$ 또는 $t \geq 9$
 그런데 $t > 0$ 이므로 $t \geq 9$
 $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 이므로
 $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 9$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$
 밑이 1보다 작으므로 $x \leq -2$

06-2 $\frac{9}{8}$

$4^x - a \times 2^x + b > 0$ 에서
 $(2^x)^2 - a \times 2^x + b > 0$ ㉠
 $2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - at + b > 0$ ㉡
 부등식 ㉠의 해가 $x < -2$ 또는 $x > 1$ 이므로
 $2^x < 2^{-2}$ 또는 $2^x > 2^1$
 따라서 부등식 ㉡의 해는
 $t < \frac{1}{4}$ 또는 $t > 2$
 해가 $t < \frac{1}{4}$ 또는 $t > 2$ 이고 t^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $\left(t - \frac{1}{4}\right)(t - 2) > 0$
 $\therefore t^2 - \frac{9}{4}t + \frac{1}{2} > 0$
 $t = 2^x$ 이므로 $4^x - \frac{9}{4} \times 2^x + \frac{1}{2} > 0$
 따라서 $a = \frac{9}{4}$, $b = \frac{1}{2}$ 이므로 $ab = \frac{9}{8}$

07-1 **답** $0 < x < 1$ 또는 $x > 3$

(i) $0 < x < 1$ 일 때, $3x - 2 < x + 4 \quad \therefore x < 3$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$

(ii) $x = 1$ 일 때, $1 > 1$ 이므로 모순이다.

따라서 해는 없다.

(iii) $x > 1$ 일 때, $3x - 2 > x + 4 \quad \therefore x > 3$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$0 < x < 1$ 또는 $x > 3$

07-2 **답** 3

(i) $0 < x < 1$ 일 때, $x^2 \geq 2x + 3$, $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

$(x+1)(x-3) \geq 0 \quad \therefore x \leq -1$ 또는 $x \geq 3$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x = 1$ 일 때, $1 \leq 1$ 이므로 $x = 1$ 은 해이다.

(iii) $x > 1$ 일 때, $x^2 \leq 2x + 3$, $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

$(x+1)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 3$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x \leq 3$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $1 \leq x \leq 3$

따라서 $m = 1$, $n = 3$ 이므로 $mn = 3$

07-3 **답** $x > 2$

(i) $0 < x - 1 < 1$, 즉 $1 < x < 2$ 일 때,

$x + 2 > 4x - 1 \quad \therefore x < 1$

그런데 $1 < x < 2$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x - 1 = 1$, 즉 $x = 2$ 일 때, $1 < 1$ 이므로 모순이다.

따라서 해는 없다.

(iii) $x - 1 > 1$, 즉 $x > 2$ 일 때,

$x + 2 < 4x - 1 \quad \therefore x > 1$

그런데 $x > 2$ 이므로 $x > 2$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $x > 2$

08-1 **답** (1) $k \geq 9$ (2) $k \geq 1$

(1) $9^x - 2 \times 3^{x+1} + k \geq 0$ 에서

$(3^x)^2 - 6 \times 3^x + k \geq 0$

$3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$t^2 - 6t + k \geq 0$

$f(t) = t^2 - 6t + k$ 라 하면

$f(t) = (t - 3)^2 + k - 9$

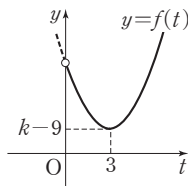
$t > 0$ 에서 $f(t)$ 의 최솟값은

$k - 9$

따라서 부등식 $f(t) \geq 0$ 이 $t > 0$

인 모든 실수 t 에 대하여 성립하려면

$k - 9 \geq 0 \quad \therefore k \geq 9$



(2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + k - 1 > 0$ 에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + k - 1 > 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$t^2 + 2t + k - 1 > 0$

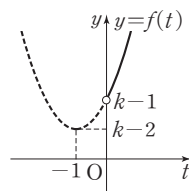
$f(t) = t^2 + 2t + k - 1$ 이라 하면

$f(t) = (t + 1)^2 + k - 2$

$t > 0$ 에서 부등식 $f(t) > 0$ 이 성립하려면 $f(0) \geq 0$ 이어야 한다.

즉, $f(0) = k - 1 \geq 0$

$\therefore k \geq 1$



08-2 **답** $a \leq 1$

$4^x - a \times 2^{x+2} + 4 \geq 0$ 에서

$(2^x)^2 - 4a \times 2^x + 4 \geq 0$

$2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$t^2 - 4at + 4 \geq 0$

$f(t) = t^2 - 4at + 4$ 라 하면

$f(t) = (t - 2a)^2 + 4 - 4a^2$

$t > 0$ 에서 부등식 $f(t) \geq 0$ 이 성립하려면

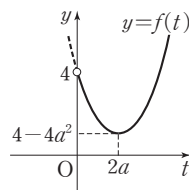
(i) $2a \geq 0$, 즉 $a \geq 0$ 일 때,

$4 - 4a^2 \geq 0$ 이어야 하므로

$a^2 - 1 \leq 0$, $(a+1)(a-1) \leq 0$

$\therefore -1 \leq a \leq 1$

그런데 $a \geq 0$ 이므로 $0 \leq a \leq 1$



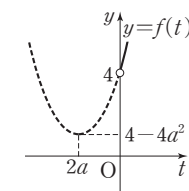
(ii) $2a < 0$, 즉 $a < 0$ 일 때,

$f(0) \geq 0$ 이어야 한다.

$f(0) = 4 \geq 0$ 이므로 모든 실수 t

에 대하여 성립한다.

$\therefore a < 0$



(i), (ii)에서 $t > 0$ 에서 부등식 $f(t) \geq 0$ 이 성립하려면

$a \leq 1$

09-1 **답** 5시간

10마리의 박테리아 A가 3시간 후에 640마리가 되므로

$10 \times a^3 = 640$, $a^3 = 64$

$\therefore a = 4$

10마리의 박테리아 A가 x 시간 후에 10240마리 이상이 된다고 하면

$10 \times 4^x \geq 10240$, $4^x \geq 1024$

$4^x \geq 4^5 \quad \therefore x \geq 5$

따라서 박테리아 A가 10240마리 이상이 되는 것은 번식을 시작한 지 5시간 후부터이다.

09-2 [답] 13.5등급

$\frac{(n\text{등급의 밝기})}{(n+1\text{등급의 밝기})} = k$ 라 하자.

1등급의 별의 밝기가 6등급의 별의 밝기의 100배이므로

$$\frac{(1\text{등급의 밝기})}{(6\text{등급의 밝기})} = k^5 = 100$$

$$\frac{(1\text{등급의 밝기})}{(2\text{등급의 밝기})} \times \frac{(2\text{등급의 밝기})}{(3\text{등급의 밝기})} \times \cdots \times \frac{(5\text{등급의 밝기})}{(6\text{등급의 밝기})}$$

$$\therefore k = 100^{\frac{1}{5}} = 10^{\frac{2}{5}}$$

즉, n 등급의 별은 $n+1$ 등급의 별보다 $10^{\frac{2}{5}}$ 배 밝다.

6등급의 별보다 1000배 어두운 별의 등급을 x 라 하면

6등급의 별은 x 등급의 별보다 1000배 밝으므로

$$\frac{(6\text{등급의 밝기})}{(x\text{등급의 밝기})} = k^{x-6} = 1000 \text{에서}$$

$$10^{\frac{2}{5}(x-6)} = 10^3$$

$$\text{따라서 } \frac{2}{5}(x-6) = 3 \text{이므로}$$

$$x-6 = \frac{15}{2} \quad \therefore x = \frac{27}{2} = 13.5$$

따라서 6등급의 별보다 1000배 어두운 별은 13.5등급이다.

$2^x = X, 3^y = Y$ 로 놓으면

$$\begin{cases} 2X - \frac{1}{3}Y = -1 \\ \frac{1}{4}X + 3Y = 82 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $X=4, Y=27$

즉, $2^x = 4 = 2^2, 3^y = 27 = 3^3$ 이므로

$$x=2, y=3$$

따라서 $\alpha=2, \beta=3$ 이므로 $\alpha\beta=6$

3 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 에서

$$2^{2x+2} + 10 = 2(2^x + 10) + 2$$

$$4 \times (2^x)^2 - 2 \times 2^x - 12 = 0$$

$2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$4t^2 - 2t - 12 = 0, 2t^2 - t - 6 = 0$$

$$(2t+3)(t-2) = 0 \quad \therefore t=2 (\because t > 0)$$

$$t=2^x \text{이므로 } 2^x = 2 \quad \therefore x=1$$

4 $x > 0$ 이므로 $(x^2)^x = x^x \times x^6$ 에서

$$x^{2x} = x^{x+6}$$

(i) 밑이 1이면 $x=1$

(ii) 지수가 같으면 $2x = x+6 \quad \therefore x=6$

(i), (ii)에서 모든 근의 곱은 $1 \times 6 = 6$

5 함수 $y = 2^{-x+3} - 4$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점의 y 좌표는

$$2^3 - 4 = 4 \quad \therefore A(0, 4)$$

함수 $y = 2^x - 2$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점의 y 좌표는

$$2^0 - 2 = -1 \quad \therefore B(0, -1)$$

두 함수의 그래프의 교점의 x 좌표는

$$2^{-x+3} - 4 = 2^x - 2, 2^x - 8 \times 2^{-x} + 2 = 0$$

$2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$t - \frac{8}{t} + 2 = 0, t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$(t+4)(t-2) = 0$$

$$\therefore t=2 (\because t > 0)$$

$$t=2^x \text{이므로}$$

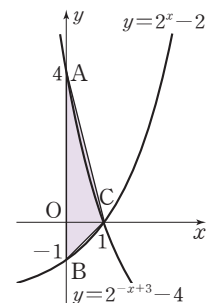
$$2^x = 2 \quad \therefore x=1$$

$y = 2^x - 2$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$y = 2^1 - 2 = 0 \quad \therefore C(1, 0)$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 1 = \frac{5}{2}$$



연습문제

69~70쪽

- | | | | | |
|---------------|------|---------|------|-----------------|
| 1 6 | 2 ⑤ | 3 $x=1$ | 4 ⑤ | 5 $\frac{5}{2}$ |
| 6 4 | 7 2 | 8 ② | 9 6 | 10 -3 |
| 11 $a \leq 4$ | 12 ② | 13 ④ | 14 ③ | |

1 $27^{x^2+1} - 9^{x+4} = 0$ 에서 $27^{x^2+1} = 9^{x+4}$
 $(3^3)^{x^2+1} = (3^2)^{x+4}, 3^{3x^2+3} = 3^{2x+8}$
 $3x^2+3 = 2x+8$ 이므로
 $3x^2-2x-5=0, (x+1)(3x-5)=0$
 $\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

따라서 $\alpha=-1, \beta=\frac{5}{3}$ 이므로

$$3\beta - \alpha = 3 \times \frac{5}{3} - (-1) = 6$$

2 $\begin{cases} 2^{x+1} - 3^{y-1} = -1 \\ 2^{x-2} + 3^{y+1} = 82 \end{cases}$ 에서
 $\begin{cases} 2 \times 2^x - \frac{1}{3} \times 3^y = -1 \\ \frac{1}{4} \times 2^x + 3 \times 3^y = 82 \end{cases}$

6 $2^{2x+1}-9 \times 2^x+k=0$ 에서
 $2(2^x)^2-9 \times 2^x+k=0$ ㉠
 $2^x=t(t>0)$ 로 놓으면
 $2t^2-9t+k=0$ ㉡
 방정식 ㉠의 두 근을 α, β 라 하면 방정식 ㉡의 두 근은
 $2^\alpha, 2^\beta$
 따라서 ㉡에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $2^\alpha \times 2^\beta = \frac{k}{2}$
 이때 ㉠의 두 근의 합이 1, 즉 $\alpha+\beta=1$ 이므로
 $k=2^{\alpha+\beta+1}=2^{1+1}=4$

7 $9^x-k \times 3^{x+1}+9=0$ 에서
 $(3^x)^2-3k \times 3^x+9=0$
 $3^x=t(t>0)$ 로 놓으면
 $t^2-3kt+9=0$ ㉠
 주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지면 ㉠은 오직 하나의 양의 실근을 갖는다.
 이때 ㉠에서 (두 근의 곱) $=9>0$ 이므로 ㉠은 양수인 중근을 갖는다.
 ㉠의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로
 $D=9k^2-36=0, k^2-4=0$
 $(k+2)(k-2)=0 \therefore k=-2$ 또는 $k=2$
 그런데 ㉠의 근이 양수이어야 하므로
 $k=2$

8 $\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2+2x+5} \leq \left(\frac{1}{81}\right)^{x^2+2x-5}$ 에서
 $\left(\frac{1}{9}\right)^{x^2+2x+5} \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{2x^2+4x-10}$
 밑이 1보다 작으므로
 $x^2+2x+5 \geq 2x^2+4x-10, x^2+2x-15 \leq 0$
 $(x+5)(x-3) \leq 0 \therefore -5 \leq x \leq 3$
 따라서 x 의 최댓값은 3, 최솟값은 -5이므로 그 합은
 $3+(-5)=-2$

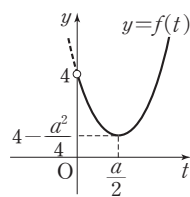
9 $(3^x-81)\left(\frac{1}{5^x}-125\right)>0$ 이므로
 $3^x-81>0, \frac{1}{5^x}-125>0$ 또는 $3^x-81<0, \frac{1}{5^x}-125<0$
 (i) $3^x-81>0, \frac{1}{5^x}-125>0$ 인 경우
 $3^x>81$ 에서 $3^x>3^4 \therefore x>4$ ㉠
 $\frac{1}{5^x}>125$ 에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^x>\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$
 $\therefore x<-3$ ㉡
 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 해는 없다.

(ii) $3^x-81<0, \frac{1}{5^x}-125<0$ 인 경우
 $3^x<81$ 에서
 $3^x<3^4 \therefore x<4$ ㉢
 $\frac{1}{5^x}<125$ 에서
 $\left(\frac{1}{5}\right)^x<\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \therefore x>-3$ ㉣
 ㉢, ㉣을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $-3<x<4$
 (i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는
 $-3<x<4$
 따라서 정수 x 는 -2, -1, 0, 1, 2, 3의 6개이다.

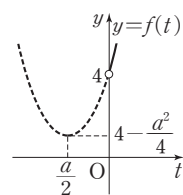
10 (i) $0<x<1$ 일 때,
 $-x+2<2x-10, -3x<-12 \therefore x>4$
 그런데 $0<x<1$ 이므로 해는 없다.
 (ii) $x=1$ 일 때, $1>1$ 이므로 해는 없다.
 (iii) $x>1$ 일 때,
 $-x+2>2x-10, -3x>-12 \therefore x<4$
 그런데 $x>1$ 이므로 $1<x<4$
 (i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는
 $1<x<4$
 따라서 $m=1, n=4$ 이므로
 $m-n=-3$

11 $9^x-a \times 3^x+4 \geq 0$ 에서
 $(3^x)^2-a \times 3^x+4 \geq 0$
 $3^x=t(t>0)$ 로 놓으면 $t^2-at+4 \geq 0$
 $f(t)=t^2-at+4$ 라 하면
 $f(t)=\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+4-\frac{a^2}{4}$
 $t>0$ 에서 부등식 $f(t) \geq 0$ 이 성립하려면

(i) $\frac{a}{2} \geq 0$, 즉 $a \geq 0$ 일 때,
 $4-\frac{a^2}{4} \geq 0$ 이어야 하므로
 $a^2-16 \leq 0, (a+4)(a-4) \leq 0$
 $\therefore -4 \leq a \leq 4$
 그런데 $a \geq 0$ 이므로 $0 \leq a \leq 4$



(ii) $\frac{a}{2} < 0$, 즉 $a < 0$ 일 때,
 $f(0) \geq 0$ 이어야 한다.
 $f(0)=4 \geq 0$ 이므로 모든 실수 t 에 대하여 성립한다.
 $\therefore a < 0$



(i), (ii)에서 $t>0$ 에서 부등식 $f(t) \geq 0$ 이 성립하려면
 $a \leq 4$

12 $\frac{Q(4)}{Q(2)} = \frac{3}{2}$ 에서 $\frac{Q_0(1-2^{-\frac{4}{a}})}{Q_0(1-2^{-\frac{2}{a}})} = \frac{3}{2}$

$$2(1-2^{-\frac{4}{a}}) = 3(1-2^{-\frac{2}{a}})$$

$$2(1-2^{-\frac{2}{a}})(1+2^{-\frac{2}{a}}) = 3(1-2^{-\frac{2}{a}}) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

a 는 양의 상수이므로 $2^{-\frac{2}{a}} \neq 1$

$\textcircled{7}$ 의 양변을 $1-2^{-\frac{2}{a}}$ 으로 나누면

$$2(1+2^{-\frac{2}{a}}) = 3, \quad 2^{-\frac{2}{a}} = \frac{1}{2}, \quad 2^{-\frac{2}{a}} = 2^{-1}$$

$$-\frac{2}{a} = -1 \quad \therefore a = 2$$

13 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$ 에서

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3g(x)}$$

밑이 1보다 작으므로

$$f(x)g(x) \leq 3g(x), \quad g(x)\{f(x)-3\} \leq 0$$

$$\therefore g(x) \geq 0, f(x) \leq 3 \text{ 또는 } g(x) \leq 0, f(x) \geq 3$$

(i) $g(x) \geq 0, f(x) \leq 3$ 인 경우

$$g(x) \geq 0 \text{에서 } x \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$f(x) \leq 3 \text{에서 } 1 \leq x \leq 5 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$3 \leq x \leq 5$$

(ii) $g(x) \leq 0, f(x) \geq 3$ 인 경우

$$g(x) \leq 0 \text{에서 } x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$$f(x) \geq 3 \text{에서 } x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 5 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{9}, \textcircled{10}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$x \leq 1$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$x \leq 1 \text{ 또는 } 3 \leq x \leq 5$$

따라서 자연수 x 는 1, 3, 4, 5이므로 그 합은

$$1+3+4+5=13$$

14 50년마다 방사성 물질의 양이 반으로 줄어들므로 n 년 후

방사성 물질의 양은 처음 양의 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{50}}$ 이 된다.

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{50}} = \frac{1}{100}$$

$$\text{이때 } \left(\frac{1}{2}\right)^7 < \frac{1}{100} < \left(\frac{1}{2}\right)^6 \text{이므로}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{50}} < \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

밑이 1보다 작으므로

$$6 < \frac{n}{50} < 7 \quad \therefore 300 < n < 350$$

I-2 03 로그함수

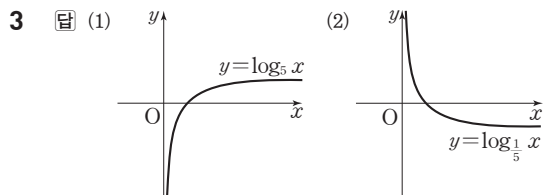
로그함수

개념 CHECK

72쪽

1 답 ㄱ, ㄷ

2 답 (1) -1 (2) 0 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 3



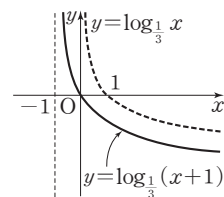
4 답 (1) $y = \log_2 x$ (2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

문제

73~80쪽

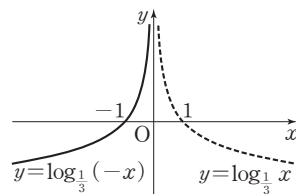
01-1 답 풀이 참조

(1) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$ 의 그래프는 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



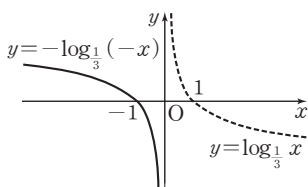
$\therefore$ 정의역: $\{x | x > -1\}$, 점근선의 방정식: $x = -1$

(2) $y = \log_{\frac{1}{3}}(-x)$ 의 그래프는 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x | x < 0\}$, 점근선의 방정식: $x = 0$

- (3) $y = -\log_{\frac{1}{3}}(-x)$ 의 그래프는 $y = \log_{\frac{1}{3}}x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.

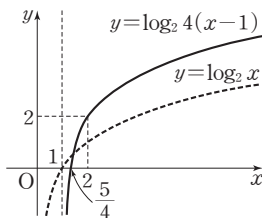


$\therefore$ 정의역: $\{x|x < 0\}$, 점근선의 방정식: $x=0$

01-2 답 풀이 참조

$$\begin{aligned} y &= \log_2 4(x-1) \\ &= \log_2 4 + \log_2(x-1) \\ &= \log_2(x-1) + 2 \end{aligned}$$

따라서 $y = \log_2 4(x-1)$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



02-1 답 -4

$$\begin{aligned} y &= \log_2 x \text{의 그래프를 } y \text{축의 방향으로 2만큼 평행이동하면} \\ y-2 &= \log_2 x \\ \therefore y &= \log_2 x + 2 \\ \text{이 그래프를 } y \text{축에 대하여 대칭이동하면} \\ y &= \log_2(-x) + 2 \\ &= \log_2(-x) + \log_2 4 \\ &= \log_2(-4x) \\ \therefore a &= -4 \end{aligned}$$

02-2 답 -1

$$\begin{aligned} y &= 4\log_3 x - 5 \text{의 그래프를 } x \text{축에 대하여 대칭이동하면} \\ -y &= 4\log_3 x - 5 \\ \therefore y &= -4\log_3 x + 5 \\ \text{이 그래프를 } x \text{축의 방향으로 } -3 \text{만큼, } y \text{축의 방향으로 } 2 \text{만큼 평행이동하면} \\ y-2 &= -4\log_3(x+3) + 5 \\ \therefore y &= -4\log_3(x+3) + 7 \\ \text{이 그래프가 점 } (6, k) \text{를 지나므로} \\ k &= -4\log_3(6+3) + 7 \\ &= -4\log_3 9 + 7 \\ &= -8 + 7 = -1 \end{aligned}$$

02-3 답 -2

$$\begin{aligned} y &= \log_3 x \text{의 그래프를 } x \text{축의 방향으로 } a \text{만큼, } y \text{축의 방향으로 } b \text{만큼 평행이동하면} \\ y-b &= \log_3(x-a) \\ \therefore y &= \log_3(x-a) + b \\ \text{점근선의 방정식이 } x &= -3 \text{이므로 } a = -3 \\ y &= \log_3(x+3) + b \text{의 그래프가 점 } (0, 2) \text{를 지나므로} \\ 2 &= \log_3 3 + b \quad \therefore b = 1 \\ \therefore a+b &= -3+1 = -2 \end{aligned}$$

03-1 답 9

$$\begin{aligned} y &= \log_3 x \text{의 그래프는 점 } (1, 0) \text{을 지나므로} \\ a &= 1 \\ y &= 3^x \text{의 그래프는 점 } (a, c), \text{ 즉 점 } (1, c) \text{를 지나므로} \\ c &= 3^1 = 3 \\ y &= \log_3 x \text{의 그래프는 점 } (b, c), \text{ 즉 점 } (b, 3) \text{을 지나므로} \\ 3 &= \log_3 b \quad \therefore b = 3^3 = 27 \\ y &= 3^x \text{의 그래프는 점 } (b, d), \text{ 즉 점 } (27, d) \text{를 지나므로} \\ d &= 3^{27} \\ \therefore \log_b d &= \log_{3^3} 3^{27} = \frac{27}{3} = 9 \end{aligned}$$

03-2 답 27

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \frac{3}{2} \text{이므로 } \log_3 k - \log_9 k = \frac{3}{2} \\ \log_3 k - \frac{1}{2} \log_3 k &= \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2} \log_3 k = \frac{3}{2} \\ \log_3 k &= 3 \quad \therefore k = 3^3 = 27 \end{aligned}$$

04-1 답 (1) $\log_3 7 < \log_9 80 < 2$

$$(2) \log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{4}} 20 < -2$$

$$\begin{aligned} (1) 2 &= \log_3 3^2 = \log_3 9 \\ \log_9 80 &= \log_{3^2} 80 = \frac{1}{2} \log_3 80 \\ &= \log_3 80^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{80} \\ 7 &< \sqrt{80} < 9 \text{이고, 밑이 1보다 크므로} \\ \log_3 7 &< \log_3 \sqrt{80} < \log_3 9 \\ \therefore \log_3 7 &< \log_9 80 < 2 \\ (2) \log_{\frac{1}{4}} 20 &= \log_{(\frac{1}{2})^2} 20 = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} 20 \\ &= \log_{\frac{1}{2}} 20^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{20} \\ -2 &= \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{2}} 4 \\ 4 &< \sqrt{20} < 5 \text{이고, 밑이 1보다 작으므로} \\ \log_{\frac{1}{2}} 5 &< \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{20} < \log_{\frac{1}{2}} 4 \\ \therefore \log_{\frac{1}{2}} 5 &< \log_{\frac{1}{4}} 20 < -2 \end{aligned}$$

04-2 [답] $B < A < C$

$$A = 2 \log_a 5 = \log_a 5^2 = \log_a 25$$

$$B = -3 \log_a \frac{1}{3} = -3 \log_a 3 = 3 \log_a 3 = \log_a 3^3 = \log_a 27$$

$$C = 3 \log_a 2 + \log_a 3 = \log_a 2^3 + \log_a 3 = \log_a (2^3 \times 3) = \log_a 24$$

$$24 < 25 < 27 \text{이고, } 0 < a < 1 \text{이므로}$$

$$\log_a 27 < \log_a 25 < \log_a 24$$

$$\therefore B < A < C$$

05-1 [답] (1) $y = \log_2(x-1) + 1$

$$(2) y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} + 2$$

$$(1) y = 2^{x-1} + 1 \text{에서 } y-1 = 2^{x-1}$$

$$\text{로그의 정의에 의하여 } x-1 = \log_2(y-1)$$

$$\therefore x = \log_2(y-1) + 1$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸어 역함수를 구하면}$$

$$y = \log_2(x-1) + 1$$

$$(2) y = \log_{\frac{1}{3}}(x-2) - 3 \text{에서 } y+3 = \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$$

$$\text{로그의 정의에 의하여}$$

$$x-2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{y+3} \quad \therefore x = \left(\frac{1}{3}\right)^{y+3} + 2$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸어 역함수를 구하면}$$

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+3} + 2$$

05-2 [답] 5

$$y = \log_2(x+a) - 3 \text{에서 } y+3 = \log_2(x+a)$$

$$\text{로그의 정의에 의하여}$$

$$x+a = 2^{y+3} \quad \therefore x = 2^{y+3} - a$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸어 역함수를 구하면}$$

$$y = 2^{x+3} - a$$

$$\text{따라서 } a=2, b=3 \text{이므로}$$

$$a+b=5$$

05-3 [답] $\frac{1}{9}$

두 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = f(x)$ 가 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

점 $Q(-1, b)$ 가 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

점 $(b, -1)$ 은 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프 위의 점이다.

$$-1 = \log_{\frac{1}{3}} b \text{에서 } b = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$$

따라서 점 $P(a, 3)$ 은 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$3 = \log_{\frac{1}{3}} a \quad \therefore a = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

$$\therefore ab = \frac{1}{27} \times 3 = \frac{1}{9}$$

06-1 [답] (1) 최댓값: 3, 최솟값: 1

$$(2) \text{ 최댓값: 0, 최솟값: -1}$$

(1) 함수 $y = \log_2(x-1)$ 은 밑이 1보다 크므로 $3 \leq x \leq 9$ 에서 함수 $y = \log_2(x-1)$ 은

$$x=9 \text{일 때, 최댓값은 } \log_2 8 = 3$$

$$x=3 \text{일 때, 최솟값은 } \log_2 2 = 1$$

(2) 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(2x-1) + 1$ 은 밑이 1보다 작으므로

$$2 \leq x \leq 5 \text{에서 함수 } y = \log_{\frac{1}{3}}(2x-1) + 1 \text{은}$$

$$x=2 \text{일 때, 최댓값은 } \log_{\frac{1}{3}} 3 + 1 = 0$$

$$x=5 \text{일 때, 최솟값은 } \log_{\frac{1}{3}} 9 + 1 = -1$$

06-2 [답] 2

함수 $y = \log_5(2x-3) + 4$ 의 밑이 1보다 크므로

$2 \leq x \leq 14$ 에서 함수 $y = \log_5(2x-3) + 4$ 는

$$x=14 \text{일 때, } M = \log_5 25 + 4 = 6$$

$$x=2 \text{일 때, } m = \log_5 1 + 4 = 4$$

$$\therefore M - m = 6 - 4 = 2$$

06-3 [답] -1

함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-a)$ 의 밑이 1보다 작으므로 $5 \leq x \leq 11$

에서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-a)$ 는 $x=5$ 일 때 최댓값은

$$\log_{\frac{1}{3}}(5-a), x=11 \text{일 때 최솟값은 } \log_{\frac{1}{3}}(11-a) \text{이다.}$$

이때 최솟값이 -2이므로 $-2 = \log_{\frac{1}{3}}(11-a)$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 11-a \quad \therefore a=2$$

따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-2)$ 의 최댓값은

$$\log_{\frac{1}{3}}(5-2) = -1$$

07-1 [답] (1) 최댓값: -2, 최솟값: 없다.

$$(2) \text{ 최댓값: 2, 최솟값: 0}$$

(1) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x + 13)$ 에서 $f(x) = x^2 - 4x + 13$ 이라

$$\text{하면 } f(x) = (x-2)^2 + 9 \quad \therefore f(x) \geq 9$$

따라서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$ 의 밑이 1보다 작으므로

$f(x) \geq 9$ 에서 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$ 는

$$f(x)=9 \text{일 때, 최댓값은 } \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$$

최솟값은 없다.

(2) $y = \log_3(-x^2 + 2x + 9)$ 에서 $f(x) = -x^2 + 2x + 9$ 라

$$\text{하면 } f(x) = -(x-1)^2 + 10$$

$$2 \leq x \leq 4 \text{에서 } f(x) \text{의 값의 범위는 } 1 \leq f(x) \leq 9$$

따라서 함수 $y = \log_3 f(x)$ 의 밑이 1보다 크므로

$$1 \leq f(x) \leq 9 \text{에서 함수 } y = \log_3 f(x) \text{는}$$

$$f(x)=9 \text{일 때, 최댓값은 } \log_3 9 = 2$$

$$f(x)=1 \text{일 때, 최솟값은 } \log_3 1 = 0$$

07-2 ㉔ 0

진수의 조건에서

$$x-3>0, 5-x>0$$

$$\therefore 3<x<5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$y=\log_2(x-3)+\log_2(5-x) \text{에서}$$

$$y=\log_2(x-3)(5-x)=\log_2(-x^2+8x-15)$$

$$f(x)=-x^2+8x-15 \text{라 하면}$$

$$f(x)=-(x-4)^2+1$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 0<f(x)\leq 1$$

따라서 함수 $y=\log_2 f(x)$ 의 밑이 1보다 크므로

$0<f(x)\leq 1$ 에서 함수 $y=\log_2 f(x)$ 는

$f(x)=1$ 일 때, 최댓값은 $\log_2 1=0$

07-3 ㉔ $\frac{1}{3}$

$y=\log_a(x^2-4x+6)$ 에서 $f(x)=x^2-4x+6$ 이라 하면

$$f(x)=(x-2)^2+2$$

$$-3\leq x\leq 4 \text{에서 } 2\leq f(x)\leq 27$$

따라서 함수 $y=\log_a f(x)$ 에서 $0<a<1$ 이므로

$2\leq f(x)\leq 27$ 에서 함수 $y=\log_a f(x)$ 는 $f(x)=27$ 일 때 최솟값은 $\log_a 27$ 이다.

이때 최솟값이 -3 이므로

$$-3=\log_a 27, a^{-3}=27$$

$$\therefore a=27^{-\frac{1}{3}}=3^{-1}=\frac{1}{3}$$

08-1 ㉔ (1) 최댓값: 4, 최솟값: $-\frac{1}{2}$ (2) 6

$$(1) y=2(\log_{\frac{1}{2}} x)^2+\log_{\frac{1}{2}} x^2=2(\log_{\frac{1}{2}} x)^2+2\log_{\frac{1}{2}} x$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x=t \text{로 놓으면 } 1\leq x\leq 4 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 4\leq t\leq \log_{\frac{1}{2}} 1 \quad \therefore -2\leq t\leq 0$$

이때 주어진 함수는

$$y=2t^2+2t=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } -2\leq t\leq 0 \text{에서 함수 } y=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2} \text{은}$$

$t=-2$ 일 때, 최댓값은 4

$t=-\frac{1}{2}$ 일 때, 최솟값은 $-\frac{1}{2}$

$$(2) y=\log_2 x+\log_x 512=\log_2 x+\log_x 2^9$$

$$=\log_2 x+9\log_x 2=\log_2 x+\frac{9}{\log_2 x}$$

$x>1$ 에서 $\log_2 x>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$y=\log_2 x+\frac{9}{\log_2 x}\geq 2\sqrt{\log_2 x\times\frac{9}{\log_2 x}}=6$$

(단, 등호는 $\log_2 x=3$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 6이다.

08-2 ㉔ $a=3, b=2$

$$y=(\log_3 x)^2+a\log_{27} x^2+b=(\log_3 x)^2+\frac{2}{3}a\log_3 x+b$$

$\log_3 x=t$ 로 놓으면

$$y=t^2+\frac{2}{3}at+b=\left(t+\frac{1}{3}a\right)^2-\frac{1}{9}a^2+b$$

이때 $x=\frac{1}{3}$, 즉 $t=-1$ 에서 최솟값 1을 가지므로

$$-\frac{1}{3}a=-1, -\frac{1}{9}a^2+b=1$$

$$\therefore a=3, b=2$$

연습문제

81~83쪽

1 16	2 ④	3 -6	4 30	5 3
6 ㄱ, ㄷ, ㄹ	7 ④	8 ④	9 $\frac{1}{3}$	
10 $A>B>C$	11 -2	12 ④	13 (16, 4)	
14 ②	15 4	16 6	17 ①	18 ③
19 8	20 ㄴ, ㄷ	21 ①		

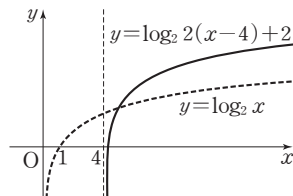
1 $f(2)=\log_2 2=1 \quad \therefore a=1$

$$f(8)=\log_2 8=3 \quad \therefore b=3$$

$$f(k)=a+b=4 \text{이므로}$$

$$\log_2 k=4 \quad \therefore k=2^4=16$$

2 $y=\log_2 2(x-4)+2=\log_2 2+\log_2(x-4)+2$
 $=\log_2(x-4)+3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$



① 정의역은 $\{x|x>4\}$ 이다.

② 그래프는 제2사분면과 제3사분면을 지나지 않는다.

③ 밑이 1보다 크므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

④ ㉔에 $x=6$ 을 대입하면 $y=\log_2(6-4)+3=4$

따라서 점 (6, 4)를 지난다.

⑤ $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

- 3 $y = \log_2 8x + 3 = \log_2 x + 6$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$$y = \log_2 (x-2) + 6$$

이 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면

$$y = -\log_2 (x-2) - 6$$

이 그래프가 점 $(3, k)$ 를 지나므로

$$k = -\log_2 1 - 6 = -6$$

- 4 $y = \log x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$y = \log (x-a) + b$$

이 그래프가 점 $(4, b)$ 를 지나므로

$$b = \log (4-a) + b, \log (4-a) = 0 \quad \therefore a = 3$$

$y = \log (x-3) + b$ 의 그래프가 점 $(13, 11)$ 을 지나므로

$$11 = \log (13-3) + b, 11 = 1 + b \quad \therefore b = 10$$

$$\therefore ab = 3 \times 10 = 30$$

- 5 점근선의 방정식이 $x=2$ 이므로 $a=2$

$y = \log_3 (x-2) + b$ 의 그래프가 점 $(5, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \log_3 (5-2) + b, 2 = 1 + b \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore a+b = 2+1 = 3$$

- 6 ㄱ. $y = \log_3 x$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면 $y=3^x$

이 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$$y = 3^{x-2}$$

$$\text{ㄴ. } y = \log_9 x^2 = \frac{1}{2} \log_3 x^2 = \log_3 \sqrt{x^2} = \log_3 |x|$$

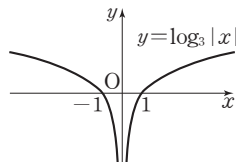
따라서 $y = \log_9 x^2$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같으

므로 $y = \log_3 x$ 의 그래프

를 평행이동 또는 대칭이

동하여 겹쳐질 수 없다.



- ㄷ. $y = \log_3 x$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면 $y=3^x$

이 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면 $y=3^{-x} = \frac{1}{3^x}$

이 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$$y = \frac{1}{3^x} + 1$$

$$\text{ㄹ. } y = 2 \log_9 x - 1 = \log_3 x - 1$$

따라서 $y = 2 \log_9 x - 1$ 의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 보기의 함수 중 그 그래프가 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

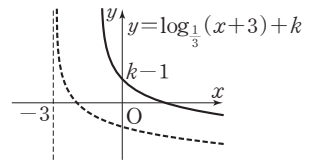
- 7 $y = \log_{\frac{1}{3}} (x+3) + k$ 의 그래프는 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

이때 그래프가 제3사분

면을 지나지 않으려면

오른쪽 그림과 같아야

한다.



$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} (x+3) + k$$

라 하면 $f(0) \geq 0$ 이어야 하므로 $k-1 \geq 0 \quad \therefore k \geq 1$

따라서 k 의 최솟값은 1이다.

- 8 $C(k, 0)$ 이라 하면 $\overline{CD} = 4$ 이므로 $D(k, 4)$

점 D 가 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$4 = \log_2 k \quad \therefore k = 2^4 = 16$$

$$\therefore C(16, 0)$$

한편 $\overline{BC} = 4$ 이므로 $B(12, 0)$

이때 $E(12, t)$ 라 하면 점 E 는 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 점이고 $\overline{BE} = t$ 이므로

$$t = \log_2 12 = \log_2 (2^2 \times 3) = 2 + \log_2 3$$

따라서 정사각형 $FGBE$ 의 한 변의 길이는 $2 + \log_2 3$ 이다.

- 9 $P(2, \log_a 2), Q(2, \log_b 2), R(2, -\log_a 2)$ 이므로

$$\overline{PQ} = \log_a 2 - \log_b 2, \overline{QR} = \log_b 2 + \log_a 2$$

$$\overline{PQ} : \overline{QR} = 1 : 2 \text{에서 } \overline{QR} = 2\overline{PQ} \text{이므로}$$

$$\log_a 2 + \log_a 2 = 2(\log_a 2 - \log_b 2), \log_a 2 = 3 \log_b 2$$

$$\frac{1}{\log_2 a} = \frac{3}{\log_2 b}, 3 \log_2 a = \log_2 b$$

$$\log_2 a^3 = \log_2 b \quad \therefore a^3 = b$$

$$\therefore g(a) = \log_b a = \log_{a^3} a = \frac{1}{3}$$

- 10 $1 < x < 3$ 의 각 변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 1 < \log_3 x < \log_3 3$$

$$\therefore 0 < \log_3 x < 1 \quad \therefore 0 < B < 1$$

$$A = \log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x} > 1 \quad \therefore A > B$$

$$B - C = \log_3 x - (\log_3 x)^2 = \log_3 x (1 - \log_3 x) > 0$$

$$\therefore B > C \quad \therefore A > B > C$$

- 11 $y = \log_9 (x-1) + \frac{3}{2}$ 에서 $y - \frac{3}{2} = \log_9 (x-1)$

$$x-1 = 9^{y-\frac{3}{2}} \quad \therefore x = 9^{y-\frac{3}{2}} + 1$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = 9^{x-\frac{3}{2}} + 1 = 3^{2x-3} + 1$$

따라서 $a = -3, b = 1$ 이므로 $a+b = -2$

- 12 함수 $f(x) = \log_3 \frac{x+1}{x-1}$ ($x > 1$)의 역함수가 $g(x)$ 이고,
 $g(a) = 3$, $g(\beta) = 5$ 이므로
 $f(3) = a$, $f(5) = \beta$
 $a = f(3) = \log_3 \frac{3+1}{3-1} = \log_3 2$
 $\beta = f(5) = \log_3 \frac{5+1}{5-1} = \log_3 \frac{3}{2} = 1 - \log_3 2$
 $\therefore a + \beta = \log_3 2 + 1 - \log_3 2 = 1$

- 13 $y = 2^x$ 의 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나므로
 $A(0, 1)$
 점 B의 y좌표는 1이므로 $B(b, 1)$ 이라 하면
 $\log_2 b = 1 \quad \therefore b = 2 \quad \therefore B(2, 1)$
 한편 함수 $y = \log_2 x$ 는 함수 $y = 2^x$ 의 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.
 따라서 점 B와 점 C는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
 $C(1, 2)$
 점 D의 y좌표는 2이므로 $D(d, 2)$ 라 하면
 $\log_2 d = 2 \quad \therefore d = 2^2 = 4 \quad \therefore D(4, 2)$
 점 D와 점 E는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로
 $E(2, 4)$
 점 F의 y좌표는 4이므로 $F(f, 4)$ 라 하면
 $\log_2 f = 4 \quad \therefore f = 2^4 = 16 \quad \therefore F(16, 4)$

- 14 $a > 1$ 이므로 함수 $y = \log_a x + b$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 $y = \log_a x + b$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
 이때 두 교점의 x좌표가 1, 3이므로 $y = \log_a x + b$ 의 그래프는 두 점 $(1, 1)$, $(3, 3)$ 을 지난다.
 $1 = \log_a 1 + b$ 에서 $b = 1$
 $3 = \log_a 3 + 1$ 에서 $2 = \log_a 3$
 $a^2 = 3 \quad \therefore a = \sqrt{3} \quad (\because a > 1)$
 $\therefore ab = \sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}$

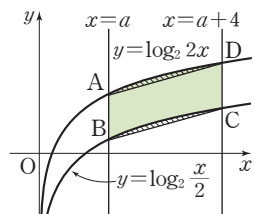
- 15 함수 $y = \log_3(x-a) + 2$ 의 밑이 1보다 크므로 $3 \leq x \leq 21$ 에서 함수 $y = \log_3(x-a) + 2$ 는 $x = 21$ 일 때 최댓값은 $\log_3(21-a) + 2$, $x = 3$ 일 때 최솟값은 $\log_3(3-a) + 2$ 이다.
 이때 최댓값이 5이므로
 $\log_3(21-a) + 2 = 5, 21-a = 3^3 \quad \therefore a = -6$
 따라서 함수 $y = \log_3(x+6) + 2$ 의 최솟값은
 $\log_3 9 + 2 = 4$

- 16 함수 $y = \log_2(x^2 - 4x + a)$ 에서 $f(x) = x^2 - 4x + a$ 라 하면
 $f(x) = (x-2)^2 + a - 4$
 $3 \leq x \leq 9$ 에서 $a - 3 \leq f(x) \leq a + 45$
 함수 $y = \log_2 f(x)$ 의 밑이 1보다 크므로
 $a - 3 \leq f(x) \leq a + 45$ 에서 함수 $y = \log_2 f(x)$ 는
 $f(x) = a + 45$ 일 때 최댓값은 $\log_2(a + 45)$,
 $f(x) = a - 3$ 일 때 최솟값은 $\log_2(a - 3)$ 이다.
 이때 최솟값이 4이므로
 $4 = \log_2(a - 3), a - 3 = 2^4 \quad \therefore a = 19$
 따라서 함수 $y = \log_2 f(x)$ 의 최댓값은
 $\log_2(19 + 45) = \log_2 64 = 6$

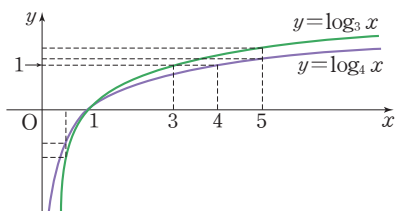
- 17 $y = 3^{\log x} \times x^{\log 3} - 3(x^{\log 3} + 3^{\log x}) + 10$
 $= 3^{\log x} \times 3^{\log x} - 3(3^{\log x} + 3^{\log x}) + 10$
 $= (3^{\log x})^2 - 6 \times 3^{\log x} + 10$
 $3^{\log x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면 주어진 함수는
 $y = t^2 - 6t + 10 = (t - 3)^2 + 1$
 $t = 3$ 일 때, 최솟값이 1이므로
 $3^{\log x} = 3$ 에서 $\log x = 1$
 $\therefore x = 10 \quad \therefore a = 10$
 최솟값이 1이므로 $b = 1$
 $\therefore a + b = 10 + 1 = 11$

- 18 $y = \log_{\frac{1}{2}} x + \log_x \frac{1}{256} = \log_{\frac{1}{2}} x + \frac{8}{\log_{\frac{1}{2}} x}$
 $0 < x < 1$ 에서 $\log_{\frac{1}{2}} x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $y = \log_{\frac{1}{2}} x + \frac{8}{\log_{\frac{1}{2}} x} \geq 2\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x \times \frac{8}{\log_{\frac{1}{2}} x}} = 4\sqrt{2}$
 (단, 등호는 $\log_{\frac{1}{2}} x = 2\sqrt{2}$ 일 때 성립)
 따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{2}$ 이다.

- 19 $y = \log_2 2x = \log_2 x + 1, y = \log_2 \frac{x}{2} = \log_2 x - 1$ 이므로
 함수 $y = \log_2 \frac{x}{2}$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 2x$ 의 그래프를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
 즉, 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는 평행사변형 ABCD의 넓이와 같다.
 이때 $\overline{AB} = 2$ 이고 두 직선 $x = a, x = a + 4$ 사이의 거리는 4이므로
 $\square ABCD = 2 \times 4 = 8$



- 20 두 함수 $y=\log_3 x$ 와 $y=\log_4 x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



- ㄱ. 함수 $y=(\log_4 3)^x$ 에서 밑 $\log_4 3$ 이 $0 < \log_4 3 < 1$ 이므로 $a < b$ 이면
 $(\log_4 3)^a > (\log_4 3)^b$
 ㄴ. 위의 그림에서 $0 < x < 1$ 일 때 함수 $y=\log_4 x$ 의 그래프가 함수 $y=\log_3 x$ 의 그래프보다 위에 있으므로 $\log_3 x < \log_4 x$
 ㄷ. 주어진 로그의 밑을 변환하면
 $\log_{\frac{1}{3}} 5 = -\log_3 5$
 $\log_{\frac{1}{4}} 5 = -\log_4 5$
 위의 그림에서 $\log_4 5 < \log_3 5$ 이므로
 $-\log_3 5 < -\log_4 5$
 $\therefore \log_{\frac{1}{3}} 5 < \log_{\frac{1}{4}} 5$
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

- 21 점 B의 x좌표는 4이므로

$$\log_2 4 = 2 \quad \therefore B(4, 2)$$

점 B(4, 2)를 지나고 기울기가 -1인 직선을 l 이라 하고, 함수 $y=2^x$ 의 그래프가 직선 l 과 만나는 점을 C' 이라 하자.

함수 $y=2^{x+1}+1$ 의 그래프는 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 점 C는 점 C' 을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y=\log_2 x$ 의 역함수는 $y=2^x$ 이고 B(4, 2)이므로

$$C'(2, 4)$$

즉, 점 C의 좌표는 점 C' 을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$$(2-1, 4+1) \quad \therefore C(1, 5)$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times (4-1) = 3$$

I-2 04 로그함수의 활용

로그함수의 활용

개념 CHECK

84쪽

1 답 (1) $x=5$ (2) $x=1$

2 답 (1) $\frac{3}{2} < x \leq \frac{7}{2}$ (2) $x > 3$

문제

85~92쪽

01-1 답 (1) $x=3$ (2) $x=5$ (3) $x=7$ (4) $x=4$

(1) 진수의 조건에서

$$x-2 > 0, x+6 > 0 \quad \therefore x > 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-2) + \log_{\frac{1}{3}}(x+6) = -2 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-2)(x+6) = -2$$

로그의 정의에 의하여

$$(x-2)(x+6) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}, x^2 + 4x - 21 = 0$$

$$(x+7)(x-3) = 0 \quad \therefore x = -7 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 ①에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=3$

(2) 진수의 조건에서

$$x-1 > 0, x-3 > 0 \quad \therefore x > 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_2(x-1) + \log_2(x-3) = 3 \text{에서}$$

$$\log_2(x-1)(x-3) = 3$$

로그의 정의에서

$$(x-1)(x-3) = 2^3, x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x+1)(x-5) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 5$$

따라서 ①에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=5$

(3) 진수의 조건에서

$$x+2 > 0, x-3 > 0, 5x+1 > 0$$

$$\therefore x > 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_2(x+2) + \log_2(x-3) = \log_2(5x+1) \text{에서}$$

$$\log_2(x+2)(x-3) = \log_2(5x+1)$$

진수끼리 비교하면

$$(x+2)(x-3) = 5x+1, x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$(x+1)(x-7) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 7$$

따라서 ①에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=7$

(4) 진수의 조건에서

$$2x+1>0, x-1>0 \quad \therefore x>1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(2x+1)=\log_{\frac{1}{2}}(x-1) \text{에서}$$

$$\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)=2\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2$$

진수끼리 비교하면

$$2x+1=(x-1)^2, x^2-4x=0$$

$$x(x-4)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 ⑦에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=4$

01-2 ㉡ $x=3$

밑과 진수의 조건에서

$$x^2-2x+1>0, x^2-2x+1 \neq 1, 2x-1>0$$

$$\therefore \frac{1}{2}<x<1 \text{ 또는 } 1<x<2 \text{ 또는 } x>2 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\log_{x^2-2x+1}(2x-1)=\log_4(2x-1) \text{에서}$$

(i) 밑이 같으면

$$x^2-2x+1=4, x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

그런데 ⑦에 의하여 $x=3$

(ii) 진수가 1이면

$$2x-1=1 \quad \therefore x=1$$

그런데 ⑦에 의하여 해는 없다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x=3$

02-1 ㉡ (1) $x=4$ 또는 $x=8$

$$(2) x=\frac{1}{100} \text{ 또는 } x=10000$$

$$(3) x=2 \text{ 또는 } x=16$$

$$(4) x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=8$$

(1) 진수의 조건에서

$$x>0, x^5>0 \quad \therefore x>0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x^5 + 6 = 0 \text{에서}$$

$$(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 6 = 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0, (t-2)(t-3) = 0$$

$$\therefore t=2 \text{ 또는 } t=3$$

$$t=\log_2 x \text{이므로 } \log_2 x=2 \text{ 또는 } \log_2 x=3$$

$$\therefore x=2^2=4 \text{ 또는 } x=2^3=8$$

따라서 ⑦에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=4 \text{ 또는 } x=8$$

(2) 진수의 조건에서

$$x>0, x^2>0 \quad \therefore x>0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$(\log x)^2 = \log x^2 + 8 \text{에서}$$

$$(\log x)^2 = 2\log x + 8$$

$$\log x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 = 2t + 8, t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$(t+2)(t-4) = 0 \quad \therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 4$$

$$t = \log x \text{이므로}$$

$$\log x = -2 \text{ 또는 } \log x = 4$$

$$\therefore x = 10^{-2} = \frac{1}{100} \text{ 또는 } x = 10^4 = 10000$$

따라서 ⑦에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{1}{100} \text{ 또는 } x = 10000$$

(3) 진수의 조건에서

$$\frac{4}{x} > 0, \frac{x}{8} > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{4}{x} \times \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{8} = -2 \text{에서}$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} 4 - \log_{\frac{1}{2}} x)(\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} 8) = -2$$

$$(-2 - \log_{\frac{1}{2}} x)(\log_{\frac{1}{2}} x + 3) = -2$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = t \text{로 놓으면}$$

$$(-2-t)(t+3) = -2, t^2 + 5t + 4 = 0$$

$$(t+4)(t+1) = 0 \quad \therefore t = -4 \text{ 또는 } t = -1$$

$$t = \log_{\frac{1}{2}} x \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = -4 \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{2}} x = -1$$

$$\therefore x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16 \text{ 또는 } x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$$

따라서 ⑦에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=2 \text{ 또는 } x=16$$

(4) 밑과 진수의 조건에서

$$x>0, x \neq 1 \quad \therefore 0 < x < 1 \text{ 또는 } x > 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\log_2 x = \log_x 8 + 2 \text{에서}$$

$$\log_2 x = 3\log_x 2 + 2$$

$$\log_2 x = \frac{3}{\log_2 x} + 2$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } t = \frac{3}{t} + 2, t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t+1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 3$$

$$t = \log_2 x \text{이므로}$$

$$\log_2 x = -1 \text{ 또는 } \log_2 x = 3$$

$$x = 2^{-1} = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 2^3 = 8$$

따라서 ⑦에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 8$$

02-2 [답 81]

밑과 진수의 조건에서

$$x > 0, x \neq 1$$

$$\therefore 0 < x < 1 \text{ 또는 } x > 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\log_3 x + \log_x 27 = 4 \text{에서}$$

$$\log_3 x + 3 \log_x 3 = 4$$

$$\log_3 x + \frac{3}{\log_3 x} = 4$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면 } t + \frac{3}{t} = 4$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$(t-1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 3$$

$$t = \log_3 x \text{이므로}$$

$$\log_3 x = 1 \text{ 또는 } \log_3 x = 3$$

$$\therefore x = 3^1 = 3 \text{ 또는 } x = 3^3 = 27$$

따라서 ⑦에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = 3 \text{ 또는 } x = 27$$

$$\therefore \alpha\beta = 3 \times 27 = 81$$

다른 풀이

주어진 방정식의 두 근이 α, β 이므로 방정식 ⑧의 두 근은

$$\log_3 \alpha, \log_3 \beta$$

⑧에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 \alpha + \log_3 \beta = 4, \log_3 \alpha\beta = 4$$

$$\therefore \alpha\beta = 3^4 = 81$$

03-1 [답] (1) $x = \frac{1}{10}$ 또는 $x = 1000$

$$(2) x = \frac{1}{9} \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

(1) 진수의 조건에서

$$x > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$x^{\log x} = 1000x^2$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log x^{\log x} = \log 1000x^2$$

$$\log x \times \log x = \log 1000 + \log x^2$$

$$(\log x)^2 - 2 \log x - 3 = 0$$

$$\log x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0, (t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 3$$

$$t = \log x \text{이므로}$$

$$\log x = -1 \text{ 또는 } \log x = 3$$

$$\therefore x = 10^{-1} = \frac{1}{10} \text{ 또는 } x = 10^3 = 1000$$

따라서 ⑦에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{1}{10} \text{ 또는 } x = 1000$$

(2) 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$

$$x^{2 \log_3 x} = \frac{9}{x^3} \text{의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면}$$

$$\log_3 x^{2 \log_3 x} = \log_3 \frac{9}{x^3}$$

$$2 \log_3 x \times \log_3 x = \log_3 9 - \log_3 x^3$$

$$2(\log_3 x)^2 + 3 \log_3 x - 2 = 0$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면}$$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0, (t+2)(2t-1) = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = \frac{1}{2}$$

$$t = \log_3 x \text{이므로}$$

$$\log_3 x = -2 \text{ 또는 } \log_3 x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 3^{-2} = \frac{1}{9} \text{ 또는 } x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

따라서 ⑦에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{1}{9} \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

03-2 [답] $x = \frac{1}{6}$

진수의 조건에서 $x > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$

$2^{\log 2x} = 3^{\log 3x}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 2^{\log 2x} = \log 3^{\log 3x}$$

$$\log 2x \times \log 2 = \log 3x \times \log 3$$

$$(\log 2 + \log x) \log 2 = (\log 3 + \log x) \log 3$$

$$(\log 2 - \log 3) \log x = (\log 3)^2 - (\log 2)^2$$

$$\therefore \log x = \frac{(\log 3 + \log 2)(\log 3 - \log 2)}{\log 2 - \log 3}$$

$$= -(\log 3 + \log 2) = -\log 6 = \log \frac{1}{6}$$

$$\therefore x = \frac{1}{6} (\because \textcircled{7})$$

04-1 [답] (1) $4 < x < 7$ (2) $5 < x \leq 9$

$$(3) 4 < x \leq 5 \quad (4) x > \frac{29}{2}$$

(1) 진수의 조건에서

$$x > 0, 7-x > 0, 5x-8 > 0$$

$$\therefore \frac{8}{5} < x < 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\log x + \log(7-x) < \log(5x-8) \text{에서}$$

$$\log x(7-x) < \log(5x-8)$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x(7-x) < 5x-8$$

$$x^2 - 2x - 8 > 0, (x+2)(x-4) > 0$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$4 < x < 7$$

(2) 진수의 조건에서

$$2x-2>0, x-5>0 \quad \therefore x>5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_{\frac{1}{5}}(2x-2) \leq 2\log_{\frac{1}{5}}(x-5) \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{5}}(2x-2) \leq \log_{\frac{1}{5}}(x-5)^2$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } 2x-2 \geq (x-5)^2$$

$$x^2-12x+27 \leq 0, (x-3)(x-9) \leq 0$$

$$\therefore 3 \leq x \leq 9 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$5 < x \leq 9$$

(3) 진수의 조건에서

$$x-1>0, x-4>0 \quad \therefore x>4 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(x-4) \geq -2 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)(x-4) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } (x-1)(x-4) \leq 4$$

$$x^2-5x \leq 0, x(x-5) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 5 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{9}, \textcircled{10}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$4 < x \leq 5$$

(4) 진수의 조건에서

$$x-2>0 \quad \therefore x>2 \quad \dots\dots \textcircled{11}$$

$$\log_5(x-2) + \log_{25} 4 > 2 \text{에서}$$

$$\log_5(x-2) + \log_5 2 > \log_5 25$$

$$\log_5 2(x-2) > \log_5 25$$

$$\text{밑이 1보다 크므로}$$

$$2(x-2) > 25, x-2 > \frac{25}{2}$$

$$\therefore x > \frac{29}{2} \quad \dots\dots \textcircled{12}$$

$\textcircled{11}, \textcircled{12}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$x > \frac{29}{2}$$

04-2 ㉨ 2

진수의 조건에서 $x>0, \log_2 x>0$

$$x>0, \log_2 x > \log_2 1$$

$$\therefore x>1 \quad \dots\dots \textcircled{13}$$

$$\log_3(\log_2 x) \leq 0 \text{에서}$$

$$\log_3(\log_2 x) \leq \log_3 1$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \log_2 x \leq 1$$

$$\log_2 x \leq 1 \text{에서 } \log_2 x \leq \log_2 2$$

$$\text{밑이 1보다 크므로}$$

$$x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{14}$$

$\textcircled{13}, \textcircled{14}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$1 < x \leq 2$$

따라서 자연수 x 의 값은 2이다.

05-1 ㉨ (1) $\frac{1}{4} \leq x \leq 16$ (2) $0 < x \leq \frac{1}{27}$ 또는 $x \geq 9$

(3) $\frac{1}{32} < x < \frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{27} < x < 3$

(1) 진수의 조건에서 $x>0$ $\dots\dots \textcircled{15}$

$$\log_4 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - t \leq 2, t^2 - t - 2 \leq 0$$

$$(t+1)(t-2) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq t \leq 2$$

$$t = \log_4 x \text{이므로 } -1 \leq \log_4 x \leq 2$$

$$\log_4 \frac{1}{4} \leq \log_4 x \leq \log_4 16$$

$$\text{밑이 1보다 크므로}$$

$$\frac{1}{4} \leq x \leq 16 \quad \dots\dots \textcircled{16}$$

$\textcircled{15}, \textcircled{16}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{4} \leq x \leq 16$$

(2) 진수의 조건에서 $x>0$ $\dots\dots \textcircled{17}$

$$\log_{\frac{1}{3}} x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - t - 6 \geq 0, (t+2)(t-3) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq 3$$

$$t = \log_{\frac{1}{3}} x \text{이므로 } \log_{\frac{1}{3}} x \leq -2 \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{3}} x \geq 3$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} 9 \text{ 또는 } \log_{\frac{1}{3}} x \geq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로}$$

$$x \geq 9 \text{ 또는 } x \leq \frac{1}{27} \quad \dots\dots \textcircled{18}$$

$\textcircled{17}, \textcircled{18}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$0 < x \leq \frac{1}{27} \text{ 또는 } x \geq 9$$

(3) 진수의 조건에서

$$4x>0, 16x>0 \quad \therefore x>0 \quad \dots\dots \textcircled{19}$$

$$\log_2 4x \times \log_2 16x < 3 \text{에서}$$

$$(2+\log_2 x)(4+\log_2 x) < 3$$

$$(\log_2 x)^2 + 6\log_2 x + 5 < 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 + 6t + 5 < 0, (t+5)(t+1) < 0$$

$$\therefore -5 < t < -1$$

$$t = \log_2 x \text{이므로 } -5 < \log_2 x < -1$$

$$\log_2 \frac{1}{32} < \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2}$$

$$\text{밑이 1보다 크므로}$$

$$\frac{1}{32} < x < \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{20}$$

$\textcircled{19}, \textcircled{20}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{32} < x < \frac{1}{2}$$

(4) 진수의 조건에서

$$81x^2 > 0, \frac{1}{x} > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_3 81x^2 \times \log_3 \frac{1}{x} > -6 \text{에서}$$

$$(\log_3 81 + \log_3 x^2)(-\log_3 x) > -6$$

$$(2\log_3 x + 4)(-\log_3 x) > -6$$

$$2(\log_3 x)^2 + 4\log_3 x - 6 < 0$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면}$$

$$2t^2 + 4t - 6 < 0, t^2 + 2t - 3 < 0$$

$$(t+3)(t-1) < 0 \quad \therefore -3 < t < 1$$

$$t = \log_3 x \text{이므로 } -3 < \log_3 x < 1$$

$$\log_3 \frac{1}{27} < \log_3 x < \log_3 3$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{27} < x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{27} < x < 3$$

05-2 ㉡ 16

진수의 조건에서

$$x > 0, x^4 > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$(\log_2 x)^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^4 > 12 \text{에서}$$

$$(\log_2 x)^2 - 4\log_2 x - 12 > 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 4t - 12 > 0, (t+2)(t-6) > 0$$

$$\therefore t < -2 \text{ 또는 } t > 6$$

$$t = \log_2 x \text{이므로}$$

$$\log_2 x < -2 \text{ 또는 } \log_2 x > 6$$

$$\log_2 x < \log_2 \frac{1}{4} \text{ 또는 } \log_2 x > \log_2 64$$

밑이 1보다 크므로

$$x < \frac{1}{4} \text{ 또는 } x > 64 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$0 < x < \frac{1}{4} \text{ 또는 } x > 64$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{1}{4}, \beta = 64 \text{이므로}$$

$$\alpha\beta = 16$$

06-1 ㉡ (1) $\frac{1}{2} < x < 16$ (2) $\frac{1}{9} \leq x \leq \frac{1}{3}$

(1) 진수의 조건에서 $x > 0$ $\dots\dots \textcircled{7}$

$$x^{\log_2 x} < 16x^3 \text{의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면}$$

$$\log_2 x^{\log_2 x} < \log_2 16x^3, \log_2 x \times \log_2 x < \log_2 16 + \log_2 x^3$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 4 < 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 3t - 4 < 0, (t+1)(t-4) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 4$$

$$t = \log_2 x \text{이므로 } -1 < \log_2 x < 4$$

$$\log_2 \frac{1}{2} < \log_2 x < \log_2 16$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{2} < x < 16 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{2} < x < 16$$

(2) 진수의 조건에서 $x > 0$ $\dots\dots \textcircled{7}$

$$x^{\log_{\frac{1}{3}} x} \geq 9x^3 \text{의 양변에 밑이 } \frac{1}{3} \text{인 로그를 취하면}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x^{\log_{\frac{1}{3}} x} \leq \log_{\frac{1}{3}} 9x^3 \quad \leftarrow \text{부등호 방향이 바뀜}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x \times \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} 9 + \log_{\frac{1}{3}} x^3$$

$$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - 3\log_{\frac{1}{3}} x + 2 \leq 0$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 3t + 2 \leq 0, (t-1)(t-2) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq t \leq 2$$

$$t = \log_{\frac{1}{3}} x \text{이므로 } 1 \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq 2$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$$

밑이 1보다 작으므로

$$\frac{1}{9} \leq x \leq \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{9} \leq x \leq \frac{1}{3}$$

06-2 ㉡ 24

진수의 조건에서 $x > 0$ $\dots\dots \textcircled{7}$

$$x^{\log_5 x} < 25x \text{의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면}$$

$$\log_5 x^{\log_5 x} < \log_5 25x$$

$$\log_5 x \times \log_5 x < \log_5 25 + \log_5 x$$

$$(\log_5 x)^2 - \log_5 x - 2 < 0$$

$$\log_5 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - t - 2 < 0, (t+1)(t-2) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 2$$

$$t = \log_5 x \text{이므로 } -1 < \log_5 x < 2$$

$$\log_5 \frac{1}{5} < \log_5 x < \log_5 25$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{5} < x < 25 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{5} < x < 25$$

따라서 자연수 x 는 1, 2, 3, ..., 24의 24개이다.

07-1 ㉡ (1) $0 < a \leq \frac{1}{3}$ 또는 $a \geq 9$ (2) $0 < k \leq 9$

(1) 진수의 조건에서

$$a > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이차방정식 $x^2 - 2x \log_3 a + \log_3 a + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (\log_3 a)^2 - (\log_3 a + 2) \geq 0$$

$$(\log_3 a)^2 - \log_3 a - 2 \geq 0$$

$$\log_3 a = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - t - 2 \geq 0, (t+1)(t-2) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -1 \text{ 또는 } t \geq 2$$

$$t = \log_3 a \text{이므로 } \log_3 a \leq -1 \text{ 또는 } \log_3 a \geq 2$$

$$\log_3 a \leq \log_3 \frac{1}{3} \text{ 또는 } \log_3 a \geq \log_3 9$$

밑이 1보다 크므로

$$a \leq \frac{1}{3} \text{ 또는 } a \geq 9 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉡, ㉢을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$0 < a \leq \frac{1}{3} \text{ 또는 } a \geq 9$$

(2) 진수의 조건에서

$$k > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$(\log_3 x)^2 + 2 \log_3 3x - \log_9 k \geq 0 \text{에서}$$

$$(\log_3 x)^2 + 2(1 + \log_3 x) - \log_9 k \geq 0$$

$$(\log_3 x)^2 + 2 \log_3 x + 2 - \log_9 k \geq 0$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 + 2t + 2 - \log_9 k \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

주어진 부등식이 모든 양수 x 에 대하여 성립하려면

$t = \log_3 x$ 에서 모든 실수 t 에 대하여 부등식 ㉢이 성립해야 한다.

이차방정식 $t^2 + 2t + 2 - \log_9 k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 1^2 - (2 - \log_9 k) \leq 0$$

$$\log_9 k \leq 1, \log_9 k \leq \log_9 9$$

밑이 1보다 크므로

$$k \leq 9 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

㉡, ㉢을 동시에 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$0 < k \leq 9$$

08-1 ㉡ 2mL

처음 방향제를 a mL 분사한 다음 6시간 후에 대기 중에 남아 있는 방향제의 양이 16 mL이므로

$$6 = 6 \log_2 \frac{a}{16}, 1 = \log_2 a - \log_2 16$$

$$\log_2 a = 5 \quad \therefore a = 2^5 = 32$$

처음 방향제를 32 mL 분사한 다음 24시간 후에 대기 중에 남아 있는 방향제의 양을 x mL라 하면

$$24 = 6 \log_2 \frac{32}{x}, 4 = \log_2 32 - \log_2 x$$

$$\log_2 x = 1 \quad \therefore x = 2$$

따라서 24시간 후에 대기 중에 남아 있는 방향제의 양은 2 mL이다.

08-2 ㉡ 24년

현재 매출액을 a 라 하고 n 년 후 매출액이 현재 매출액의 3배 이상이 된다고 하면

$$a \times 1.05^n \geq 3a \quad \therefore 1.05^n \geq 3$$

양변에 상용로그를 취하면

$$n \log 1.05 \geq \log 3$$

$$\therefore n \geq \frac{\log 3}{\log 1.05} = \frac{0.48}{0.02} = 24$$

따라서 매출액이 현재의 3배 이상이 되는 것은 24년 후부터이다.

연습문제

93~94쪽

1 $x=5$	2 25	3 ㉡	4 ㉢	5 8
6 2	7 ㉡	8 ㉢	9 242	
10 $\frac{1}{3} < a < 27$		11 ㉠	12 ㉣	13 12번
14 ㉡	15 ㉤			

1 진수의 조건에서

$$x-3 > 0, 9-x > 0$$

$$\therefore 3 < x < 9 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_2(x-3) = \log_4(9-x) \text{에서}$$

$$\log_2(x-3) = \frac{1}{2} \log_2(9-x)$$

$$2 \log_2(x-3) = \log_2(9-x)$$

$$\log_2(x-3)^2 = \log_2(9-x)$$

진수끼리 비교하면

$$(x-3)^2 = 9-x, x^2-5x=0$$

$$x(x-5)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=5$$

따라서 ㉡에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=5$$

2 진수의 조건에서

$$x > 0, y > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log_3 x = X, \log_2 y = Y$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} X+Y=6 \\ XY=8 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면

$$X=2, Y=4 \text{ 또는 } X=4, Y=2$$

$$X=\log_3 x, Y=\log_2 y \text{ 이므로}$$

(i) $X=2, Y=4$ 일 때,

$$\log_3 x = 2, \log_2 y = 4$$

$$\therefore x = 3^2 = 9, y = 2^4 = 16$$

(ii) $X=4, Y=2$ 일 때,

$$\log_3 x = 4, \log_2 y = 2$$

$$\therefore x = 3^4 = 81, y = 2^2 = 4$$

①에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=9, y=16 \text{ 또는 } x=81, y=4$$

그런데 $\alpha < \beta$ 이므로

$$\alpha = 9, \beta = 16$$

$$\therefore \alpha + \beta = 25$$

3 $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^2 - 2 = 0$ 에서

$$(\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 2t - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 방정식 ①의 두 근이 α, β 이므로 방정식 ②의 두 근은

$$\log_2 \alpha, \log_2 \beta$$

②에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 2, \log_2 \alpha \times \log_2 \beta = -2$$

$$\therefore \log_\alpha \beta + \log_\beta \alpha$$

$$= \frac{\log_2 \beta}{\log_2 \alpha} + \frac{\log_2 \alpha}{\log_2 \beta}$$

$$= \frac{(\log_2 \alpha)^2 + (\log_2 \beta)^2}{\log_2 \alpha \times \log_2 \beta}$$

$$= \frac{(\log_2 \alpha + \log_2 \beta)^2 - 2 \log_2 \alpha \times \log_2 \beta}{\log_2 \alpha \times \log_2 \beta}$$

$$= \frac{2^2 - 2 \times (-2)}{-2}$$

$$= -4$$

4 진수의 조건에서

$$a > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (\log a + 2)^2 - (2 \log a + 7) = 0$$

$$(\log a)^2 + 2 \log a - 3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\log a = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0, (t+3)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

$$t = \log a \text{ 이므로}$$

$$\log a = -3 \text{ 또는 } \log a = 1$$

$$\log a = \log 10^{-3} \text{ 또는 } \log a = \log 10$$

$$\therefore a = \frac{1}{1000} \text{ 또는 } a = 10$$

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 방정식 } \textcircled{2} \text{의 해는 } a = \frac{1}{1000} \text{ 또는 } a = 10$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 곱은

$$\frac{1}{1000} \times 10 = \frac{1}{100}$$

5 진수의 조건에서

$$x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\left(\frac{x}{4}\right)^{\log_2 x} = 16 \times 2^{\log_2 x} \text{의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면}$$

$$\log_2 \left(\frac{x}{4}\right)^{\log_2 x} = \log_2 (16 \times 2^{\log_2 x})$$

$$\log_2 x (\log_2 x - \log_2 4) = \log_2 16 + \log_2 x \times \log_2 2$$

$$\log_2 x (\log_2 x - 2) = \log_2 x + 4$$

$$(\log_2 x)^2 - 3 \log_2 x - 4 = 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$(t+1)(t-4) = 0 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 4$$

$$t = \log_2 x \text{ 이므로}$$

$$\log_2 x = -1 \text{ 또는 } \log_2 x = 4$$

$$\therefore x = 2^{-1} = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 2^4 = 16$$

①에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 16$$

$$\therefore \alpha \beta = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

다른 풀이

주어진 방정식의 두 근이 α, β 이므로 방정식 ②의 두 근은

$$\log_2 \alpha, \log_2 \beta$$

②에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 3, \log_2 \alpha \beta = 3$$

$$\therefore \alpha \beta = 2^3 = 8$$

6 진수의 조건에서

$$3x+1 > 0, 2x-1 > 0$$

$$\therefore x > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_{\frac{1}{9}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{3}}(2x-1) \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{3}}(2x-1)$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(3x+1) > 2 \log_{\frac{1}{3}}(2x-1)$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{3}}(2x-1)^2$$

밑이 1보다 작으므로

$$3x+1 < (2x-1)^2, 4x^2-7x > 0$$

$$x(4x-7) > 0$$

$$\therefore x < 0 \text{ 또는 } x > \frac{7}{4} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①, ㉔을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$x > \frac{7}{4}$$

따라서 자연수 x 의 최솟값은 2이다.

7 진수의 조건에서

$$|x-1| \neq 0 \quad \therefore x \neq 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$2 \log_2 |x-1| \leq 1 - \log_2 \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\log_2 |x-1| \leq 1, \log_2 |x-1| \leq \log_2 2$$

밑이 1보다 크므로

$$|x-1| \leq 2, -2 \leq x-1 \leq 2$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ㉔을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$-1 \leq x < 1 \text{ 또는 } 1 < x \leq 3$$

따라서 정수 x 는 -1, 0, 2, 3의 4개이다.

8 진수의 조건에서

$$x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$3^{\log x} \times x^{\log 3} - 2(3^{\log x} + x^{\log 3}) + 3 < 0 \text{에서}$$

$$3^{\log x} \times 3^{\log x} - 2(3^{\log x} + 3^{\log x}) + 3 < 0$$

$$(3^{\log x})^2 - 4 \times 3^{\log x} + 3 < 0$$

$$3^{\log x} = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 4t + 3 < 0, (t-1)(t-3) < 0$$

$$\therefore 1 < t < 3$$

$$t = 3^{\log x} \text{이므로}$$

$$1 < 3^{\log x} < 3, 3^0 < 3^{\log x} < 3^1$$

지수의 밑이 1보다 크므로

$$0 < \log x < 1$$

$$\log 1 < \log x < \log 10$$

로그의 밑이 1보다 크므로

$$1 < x < 10 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ㉔을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$1 < x < 10$$

따라서 $\alpha=1, \beta=10$ 이므로 $\alpha+\beta=11$

9 진수의 조건에서

$$x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$x^{\log_3 x} < 243x^4$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 x^{\log_3 x} < \log_3 243x^4$$

$$(\log_3 x)^2 < \log_3 243 + \log_3 x^4$$

$$(\log_3 x)^2 - 4 \log_3 x - 5 < 0$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 4t - 5 < 0, (t+1)(t-5) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 5$$

$$t = \log_3 x \text{이므로 } -1 < \log_3 x < 5$$

$$\log_3 \frac{1}{3} < \log_3 x < \log_3 243$$

밑이 1보다 크므로

$$\frac{1}{3} < x < 243 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ㉔을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{3} < x < 243$$

따라서 자연수 x 는 1, 2, 3, ..., 242의 242개이다.

10 진수의 조건에서 $a > 0$ ㉔

이차방정식 $x^2 - 2(1 + \log_3 a)x + 4(1 + \log_3 a) = 0$ 의 실근이 존재하지 않으려면 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (1 + \log_3 a)^2 - 4(1 + \log_3 a) < 0$$

$$(\log_3 a)^2 - 2 \log_3 a - 3 < 0$$

$$\log_3 a = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2t - 3 < 0, (t+1)(t-3) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 3$$

$$t = \log_3 a \text{이므로 } -1 < \log_3 a < 3$$

$$\log_3 \frac{1}{3} < \log_3 a < \log_3 27$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{3} < a < 27 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

①, ㉔을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$\frac{1}{3} < a < 27$$

11 진수의 조건에서 $a > 0$ ㉔

주어진 이차방정식의 두 근이 모두 양수일 조건은

(i) 판별식 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (\log_2 a)^2 - (2 - \log_2 a) \geq 0$$

$$(\log_2 a)^2 + \log_2 a - 2 \geq 0$$

$$\log_2 a = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 + t - 2 \geq 0, (t+2)(t-1) \geq 0$$

$$t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq 1$$

$$t = \log_2 a \text{이므로}$$

$$\log_2 a \leq -2 \text{ 또는 } \log_2 a \geq 1$$

$$\log_2 a \leq \log_2 \frac{1}{4} \text{ 또는 } \log_2 a \geq \log_2 2$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } a \leq \frac{1}{4} \text{ 또는 } a \geq 2$$

(ii) (두 근의 합) > 0이어야 하므로

$$2\log_2 a > 0, \log_2 a > \log_2 1$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } a > 1$$

(iii) (두 근의 곱) > 0이어야 하므로

$$2 - \log_2 a > 0, \log_2 a < 2$$

$$\log_2 a < \log_2 4$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } a < 4$$

(i), (ii), (iii)을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$2 \leq a < 4 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{C}$ 을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$2 \leq a < 4$$

따라서 모든 자연수 a 의 값의 합은

$$2+3=5$$

12 30분 후 농도가 2 ng/mL이므로

$$\log(10-2)=1-30k$$

$$30k = \log 10 - \log 8 = \log \frac{5}{4}$$

$$\therefore k = \frac{1}{30} \log \frac{5}{4}$$

또 60분 후 농도가 a ng/mL이므로

$$\log(10-a)=1-60k$$

$$\log(10-a) = \log 10 - 2\log \frac{5}{4} = \log \frac{32}{5}$$

$$10-a = \frac{32}{5} \quad \therefore a = \frac{18}{5} = 3.6$$

13 원래 문서의 크기를 X 라 하면 n 번 82% 축소 복사한 문서의 크기는 $0.82^n X$ 이므로

$$0.82^n X \leq 0.1X \quad \therefore 0.82^n \leq 0.1$$

양변에 상용로그를 취하면

$$n \log 0.82 \leq \log 0.1$$

$$\therefore n \log 0.82 \leq -1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이때 $\log 8.2 = 0.91$ 이므로

$$\begin{aligned} \log 0.82 &= \log(8.2 \times 10^{-1}) = \log 8.2 + \log 10^{-1} \\ &= 0.91 - 1 = -0.09 \end{aligned}$$

이를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$-0.09n \leq -1$$

$$\therefore n \geq \frac{1}{0.09} = \frac{100}{9} = 11.1\dots$$

따라서 최소한 12번을 축소 복사해야 한다.

14 두 점 A, B의 좌표는 각각

$$(k, \log_2 k), (k, -\log_2(8-k))$$

$$\overline{AB} = 2 \text{이므로}$$

$$|\log_2 k + \log_2(8-k)| = 2$$

$$\log_2 k(8-k) = -2 \text{ 또는 } \log_2 k(8-k) = 2$$

진수의 조건에서

$$k(8-k) > 0 \quad \therefore 0 < k < 8 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

(i) $\log_2 k(8-k) = -2$ 일 때,

$$k(8-k) = 2^{-2}, k^2 - 8k + \frac{1}{4} = 0$$

$$\therefore k = \frac{8-3\sqrt{7}}{2} \text{ 또는 } k = \frac{8+3\sqrt{7}}{2}$$

이때 k 의 값은 모두 $\textcircled{A}$ 을 만족시킨다.

(ii) $\log_2 k(8-k) = 2$ 일 때,

$$k(8-k) = 2^2, k^2 - 8k + 4 = 0$$

$$\therefore k = 4-2\sqrt{3} \text{ 또는 } k = 4+2\sqrt{3}$$

이때 k 의 값은 모두 $\textcircled{A}$ 을 만족시킨다.

따라서 구하는 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$\begin{aligned} &\left(\frac{8-3\sqrt{7}}{2}\right) \times \left(\frac{8+3\sqrt{7}}{2}\right) \times (4-2\sqrt{3})(4+2\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{4} \times 4 = 1 \end{aligned}$$

15 $x^2 - 9x + 8 \leq 0$ 에서

$$(x-1)(x-8) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq x \leq 8$$

$$\therefore A = \{x \mid 1 \leq x \leq 8\}$$

$(\log_2 x)^2 - 2k \log_2 x + k^2 - 1 \leq 0$ 에서 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{B}$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 2kt + k^2 - 1 \leq 0, (t-k+1)(t-k-1) \leq 0$$

$$\therefore k-1 \leq t \leq k+1$$

$t = \log_2 x$ 이므로

$$k-1 \leq \log_2 x \leq k+1, \log_2 2^{k-1} \leq \log_2 x \leq \log_2 2^{k+1}$$

$$\therefore 2^{k-1} \leq x \leq 2^{k+1}$$

이때 $\textcircled{B}$ 에 의하여 $2^{k-1} \leq x \leq 2^{k+1}$

$$\therefore B = \{x \mid 2^{k-1} \leq x \leq 2^{k+1}\}$$

이때 $A \cap B = \emptyset$ 이려면

$$2^{k-1} > 8 \text{ 또는 } 2^{k+1} < 1$$

$$2^{k-1} > 2^3 \text{ 또는 } 2^{k+1} < 2^0$$

밑이 1보다 크므로

$$k-1 > 3 \text{ 또는 } k+1 < 0$$

$$\therefore k > 4 \text{ 또는 } k < -1$$

이때 $A \cap B \neq \emptyset$ 이려면 $k \leq 4$ 이고 $k \geq -1$ 이므로

$$-1 \leq k \leq 4$$

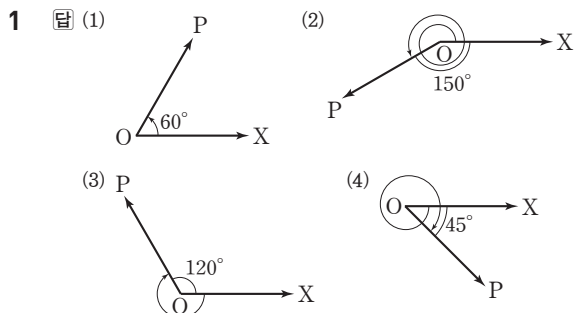
따라서 정수 k 는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ 의 6개이다.

II-1 01 삼각함수

1 일반각

개념 CHECK

97쪽



- 2 답 (1) $360^\circ \times n + 70^\circ$ (2) $360^\circ \times n + 310^\circ$
(3) $360^\circ \times n + 250^\circ$ (4) $360^\circ \times n + 130^\circ$

- 3 답 (1) 제2사분면 (2) 제3사분면
(3) 제4사분면 (4) 제1사분면

문제

98~99쪽

01-1 답 제2사분면, 제4사분면

θ 가 제3사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$\therefore 180^\circ \times n + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 135^\circ$$

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 135^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제2사분면의 각

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 270^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 315^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제4사분면의 각

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면, 제4사분면이다.

01-2 답 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면

3θ 가 제4사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 270^\circ < 3\theta < 360^\circ \times n + 360^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$\therefore 120^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 120^\circ \times n + 120^\circ$$

(i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 120^\circ$$

따라서 θ 는 제2사분면의 각

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 210^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 240^\circ$$

따라서 θ 는 제3사분면의 각

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 330^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 360^\circ$$

따라서 θ 는 제4사분면의 각

(i), (ii), (iii)에서 각 θ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면이다.

02-1 답 $45^\circ, 135^\circ$

두 각 $\theta, 5\theta$ 를 나타내는 두 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$$5\theta - \theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

(단, n 은 정수)

$$4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 90^\circ \times n + 45^\circ \quad \dots\dots \text{㉠}$$

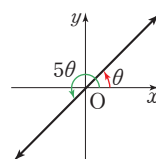
$$0^\circ < \theta < 180^\circ \text{이므로}$$

$$0^\circ < 90^\circ \times n + 45^\circ < 180^\circ, -45^\circ < 90^\circ \times n < 135^\circ$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=45^\circ$ 또는 $\theta=135^\circ$



02-2 답 $120^\circ, 150^\circ$

두 각 $\theta, 11\theta$ 를 나타내는 두 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$\theta + 11\theta = 360^\circ \times n$ (단, n 은 정수)

$$12\theta = 360^\circ \times n$$

$$\therefore \theta = 30^\circ \times n \quad \dots\dots \text{㉡}$$

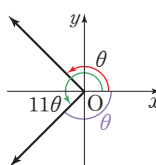
$$90^\circ < \theta < 180^\circ \text{이므로}$$

$$90^\circ < 30^\circ \times n < 180^\circ$$

$$\therefore 3 < n < 6$$

이때 n 은 정수이므로 $n=4$ 또는 $n=5$

이를 ㉡에 대입하면 $\theta=120^\circ$ 또는 $\theta=150^\circ$



02-3 답 $20^\circ, 60^\circ$

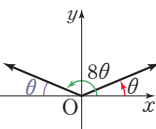
두 각 $\theta, 8\theta$ 를 나타내는 두 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 8\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

(단, n 은 정수)

$$9\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 40^\circ \times n + 20^\circ \quad \dots\dots \text{㉢}$$



1 답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $-\sqrt{3}$

2 답 (1) $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$
 (2) $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$
 (3) $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$
 (4) $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$

3 답 (1) 제2사분면 (2) 제3사분면

문제

106~111쪽

05-1 답 (1) 3 (2) 1

(1) 오른쪽 그림에서

$$\overline{OP} = \sqrt{(-8)^2 + 15^2} = 17$$

$$\sin \theta = \frac{15}{17}, \cos \theta = -\frac{8}{17}$$

$$\tan \theta = -\frac{15}{8}$$

$$\therefore \frac{17 \sin \theta + 16 \tan \theta}{17 \cos \theta + 3}$$

$$= \frac{17 \times \frac{15}{17} + 16 \times \left(-\frac{15}{8}\right)}{17 \times \left(-\frac{8}{17}\right) + 3}$$

$$= \frac{15 - 30}{-8 + 3} = \frac{-15}{-5} = 3$$

(2) 오른쪽 그림에서 $\overline{OP} = 1$ 이고,

$$\angle POH = \frac{\pi}{4} \text{ 이므로}$$

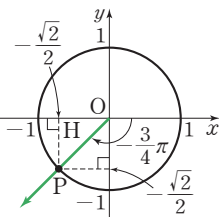
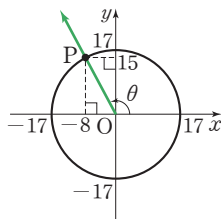
$$\overline{PH} = \overline{OP} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{OH} = \overline{OP} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{따라서 } \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = 1 \text{ 이므로}$$

$$\sin \theta - \cos \theta + \tan \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1 = 1$$



06-1 답 제2사분면

(i) $\cos \theta \sin \theta < 0$ 에서

$$\cos \theta > 0, \sin \theta < 0 \text{ 또는 } \cos \theta < 0, \sin \theta > 0$$

$\cos \theta > 0, \sin \theta < 0$ 이면 θ 는 제4사분면의 각이다.

$\cos \theta < 0, \sin \theta > 0$ 이면 θ 는 제2사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos \theta \tan \theta > 0$ 에서

$$\cos \theta > 0, \tan \theta > 0 \text{ 또는 } \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

$\cos \theta > 0, \tan \theta > 0$ 이면 θ 는 제1사분면의 각이다.

$\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$ 이면 θ 는 제3사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 주어진 조건을 동시에 만족시키는 θ 는 제2사분면의 각이다.

06-2 답 제4사분면

$\sin \theta \tan \theta \neq 0$ 이므로 음수의 제곱근의 성질에 의하여

$$\sin \theta < 0, \tan \theta < 0 \quad \sqrt{a} \sqrt{b} = -\sqrt{ab} \Leftrightarrow a < 0, b < 0 \text{ (단, } ab \neq 0 \text{)}$$

따라서 θ 는 제4사분면의 각이다.

06-3 답 $-\tan \theta$

θ 는 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$$

따라서 $\sin \theta - \tan \theta < 0$ 이므로

$$|\sin \theta| - \sqrt{(\sin \theta - \tan \theta)^2}$$

$$= |\sin \theta| - |\sin \theta - \tan \theta|$$

$$= -\sin \theta + (\sin \theta - \tan \theta)$$

$$= -\tan \theta$$

07-1 답 (1) 1 (2) $\frac{1}{\cos \theta}$

$$(1) (1 + \tan^2 \theta)(1 - \sin^2 \theta)$$

$$= (1 + \tan^2 \theta) \cos^2 \theta$$

$$\leftarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$= \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right) \times \cos^2 \theta$$

$$\leftarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\leftarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$(2) \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \tan \theta$$

$$= \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\leftarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta - \sin \theta + \sin^2 \theta}{(1 - \sin \theta) \cos \theta}$$

$$= \frac{1 - \sin \theta}{(1 - \sin \theta) \cos \theta}$$

$$\leftarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$= \frac{1}{\cos \theta}$$

07-2 [답] 2

$$\begin{aligned}
 & (1+\tan\theta)^2\cos^2\theta + (1-\tan\theta)^2\cos^2\theta \\
 &= \cos^2\theta\{(1+\tan\theta)^2 + (1-\tan\theta)^2\} \\
 &= \cos^2\theta(2+2\tan^2\theta) \\
 &= 2\cos^2\theta(1+\tan^2\theta) \\
 &= 2\cos^2\theta\left(1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right) \\
 &= 2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2
 \end{aligned}$$

07-3 [답] -2

$$\begin{aligned}
 & \frac{\tan\theta}{1+\cos\theta} - \frac{\tan\theta}{1-\cos\theta} \\
 &= \frac{\tan\theta(1-\cos\theta) - \tan\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} \\
 &= \frac{-2\tan\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta} = \frac{-2\sin\theta}{\sin^2\theta} \times \cos\theta \\
 &= \frac{-2\sin\theta}{\sin^2\theta} = \frac{-2}{\sin\theta} \\
 \therefore a &= -2
 \end{aligned}$$

08-1 [답] $\frac{12}{5}$

$$\begin{aligned}
 & \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{이므로} \\
 & \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \\
 & \text{이때 } \theta \text{가 제3사분면의 각이면 } \sin\theta < 0 \text{이므로} \\
 & \sin\theta = -\frac{12}{13} \\
 \therefore \tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{5}
 \end{aligned}$$

08-2 [답] -15

$$\begin{aligned}
 & \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1}{9} \text{에서} \\
 & 9(1-\cos\theta) = 1+\cos\theta, \quad 9-9\cos\theta = 1+\cos\theta \\
 \therefore \cos\theta &= \frac{4}{5} \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
 & \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{이므로} \\
 & \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \\
 & \text{이때 } \theta \text{가 제4사분면의 각이면 } \sin\theta < 0 \text{이므로} \\
 \sin\theta &= -\frac{3}{5} \quad \dots\dots \textcircled{2} \\
 \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서} \\
 \tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{3}{4} \\
 \therefore 15\sin\theta + 8\tan\theta &= 15 \times \left(-\frac{3}{5}\right) + 8 \times \left(-\frac{3}{4}\right) \\
 &= -9 - 6 = -15
 \end{aligned}$$

08-3 [답] $-\frac{\sqrt{21}}{5}$

주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \\
 &= \frac{\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)\sin\theta} \\
 &= \frac{\sin^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}{(1+\cos\theta)\sin\theta} \\
 &= \frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)\sin\theta} \\
 &= \frac{2}{\sin\theta}
 \end{aligned}$$

$$\therefore, \frac{2}{\sin\theta} = 5 \text{이므로 } \sin\theta = \frac{2}{5}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \text{이므로}$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

$$\text{이때 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이면 } \cos\theta < 0 \text{이므로}$$

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

09-1 [답] (1) $\frac{4}{9}$ (2) $\frac{\sqrt{17}}{3}$ (3) $\frac{13}{27}$ (4) $\frac{49}{81}$

$$(1) \sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{3} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{9}$$

$$1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta = \frac{4}{9}$$

$$(2) (\sin\theta + \cos\theta)^2$$

$$= 1 + 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 1 + 2 \times \frac{4}{9} = \frac{17}{9} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{이때 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{이면 } \sin\theta > 0, \cos\theta > 0 \text{이므로}$$

$$\sin\theta + \cos\theta > 0$$

$$\text{따라서 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{17}}{3}$$

$$(3) \sin^3\theta - \cos^3\theta$$

$$= (\sin\theta - \cos\theta)^3 + 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{27}$$

$$(4) \sin^4\theta + \cos^4\theta$$

$$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$= 1^2 - 2 \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{49}{81}$$

09-2 **답** $-\sqrt{2}$

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 2 \text{에서}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 2, \quad \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} = 2$$

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 2 \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 θ 가 제3사분면의 각이면 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta < 0$$

$$\text{따라서 } \textcircled{7} \text{에서 } \sin \theta + \cos \theta = -\sqrt{2}$$

10-1 **답** $-\frac{4}{3}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{3} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ 의 양변을 제곱하면

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9} \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$\textcircled{8}, \textcircled{9}$ 에서

$$\frac{k}{3} = -\frac{4}{9} \quad \therefore k = -\frac{4}{3}$$

10-2 **답** $-\frac{1}{4}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\cos \theta + \tan \theta = -\frac{k}{5} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\cos \theta \tan \theta = -\frac{3}{5} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8}$ 에서

$$\cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{3}{5} \quad \therefore \sin \theta = -\frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\text{이때 } \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \text{이면 } \cos \theta > 0 \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{3}{4}$$

$\textcircled{7}$ 에서

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = -\frac{k}{5} \quad \therefore k = -5\left(\frac{4}{5} - \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

10-3 **답** $\sqrt{2}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = 2k \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{8} \text{에서 } \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 2k \text{이므로 } \textcircled{8} \text{을 대입하면}$$

$$2(\sin \theta + \cos \theta) = 2k$$

$$\therefore k = \sin \theta + \cos \theta$$

양변을 제곱하면

$$k^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$$\text{이때 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 이면 } \sin \theta > 0, \cos \theta > 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta + \cos \theta > 0$$

$$\text{따라서 } \textcircled{9} \text{에서 } k = \sqrt{2}$$

연습문제

112~114쪽

1 ④	2 제2사분면	3 ③	4 ㄱ, ㄷ
5 ③	6 15	7 ④	8 $-\frac{6}{5}$
9 ③			
10 ①	11 ⑤	12 3	13 ③
14 ②			
15 ⑤	16 $-4\sqrt{5}$	17 ②	18 $-\frac{\sqrt{5}}{8}$
19 ③			
20 $\sqrt{15}$	21 $\frac{\sqrt{3}}{4}$		

1 ① $-1970^\circ = 360^\circ \times (-6) + 190^\circ$

➡ 제3사분면의 각

② $3450^\circ = 360^\circ \times 9 + 210^\circ$

➡ 제3사분면의 각

③ $-460^\circ = 360^\circ \times (-2) + 260^\circ$

➡ 제3사분면의 각

④ $660^\circ = 360^\circ \times 1 + 300^\circ$

➡ 제4사분면의 각

⑤ $945^\circ = 360^\circ \times 2 + 225^\circ$

➡ 제3사분면의 각

따라서 동경이 존재하는 사분면이 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

2 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$\therefore 120^\circ \times n + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 90^\circ$$

(i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 90^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면의 각

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 180^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 210^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 300^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 330^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각

(i), (ii), (iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제2사분면이다.

3 두 각 θ , 5θ 를 나타내는 두 동경이

직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 5\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ$$

(단, n 은 정수)

$$6\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ \times n + 15^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$0^\circ < \theta < 90^\circ \text{이므로}$$

$$0^\circ < 60^\circ \times n + 15^\circ < 90^\circ$$

$$-15^\circ < 60^\circ \times n < 75^\circ$$

$$\therefore -\frac{1}{4} < n < \frac{5}{4}$$

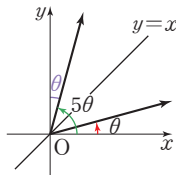
이때 n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

이를 ①에 대입하면

$$\theta = 15^\circ \text{ 또는 } \theta = 75^\circ$$

따라서 모든 각 θ 의 크기의 합은

$$15^\circ + 75^\circ = 90^\circ$$



4 $\neg$. $225^\circ = 225 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{4}\pi$

$\perp$. $-540^\circ = -540 \times \frac{\pi}{180} = -3\pi$

$\sqsubset$. $-\frac{5}{6}\pi = -\frac{5}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -150^\circ$

$\sqsupset$. $\frac{12}{5}\pi = \frac{12}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 432^\circ$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, $\sqsupset$ 이다.

5 부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심각의 크기가 4, 부채꼴의 넓이가 48이므로

$$48 = \frac{1}{2} \times r^2 \times 4, \quad r^2 = 24$$

$$\therefore r = 2\sqrt{6}$$

따라서 부채꼴의 호의 길이는

$$2\sqrt{6} \times 4 = 8\sqrt{6}$$

6 부채꼴의 호의 길이가 20이므로

$$2r + l = 20 \quad \therefore l = 20 - 2r$$

이때 $r > 0$, $20 - 2r > 0$ 이므로

$$0 < r < 10$$

부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}r(20 - 2r) = -r^2 + 10r = -(r - 5)^2 + 25$$

즉, 부채꼴의 넓이는 $0 < r < 10$ 에서 $r=5$ 일 때 최댓값이 25이다.

이때 호의 길이는

$$l = 20 - 2 \times 5 = 10$$

$$\therefore r + l = 5 + 10 = 15$$

7 $P(a, -2\sqrt{6})$ ($a > 0$)에서 $\tan \theta = -2\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{-2\sqrt{6}}{a} = -2\sqrt{2} \quad \therefore a = \sqrt{3}$$

$P(\sqrt{3}, -2\sqrt{6})$ 이므로

$$r = \overline{OP} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-2\sqrt{6})^2} = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore a + r = \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

8 원점 O와 점 $P(-4, -3)$ 에 대하여

$$\overline{OP} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\therefore \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

점 $P(-4, -3)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(-3, -4)$ 이므로

$$\overline{OQ} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\therefore \cos \beta = -\frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \alpha + \cos \beta &= -\frac{3}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) \\ &= -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

9 $\sin \theta \cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \text{ 또는 } \sin \theta < 0, \cos \theta > 0$$

$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$ 이면 θ 는 제2사분면의 각이다.

$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$ 이면 θ 는 제4사분면의 각이다.

따라서 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

- ① $\sin \theta > 0$ 인 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.
 ② $\cos \theta < 0$ 인 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.
 ③ $\tan \theta < 0$ 인 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.
 ④ $\cos \theta \tan \theta = \cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta < 0$ 인 θ 는
 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.
 ⑤ $\sin \theta \tan \theta = \sin \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} > 0$ 인 θ 는
 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.
 따라서 옳은 것은 ③이다.

10 $\cos \theta \tan \theta > 0$ 이므로

$$\cos \theta > 0, \tan \theta > 0 \text{ 또는 } \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

$$\text{이때 } \cos \theta + \tan \theta < 0 \text{이므로}$$

$$\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

$$\text{따라서 } \theta \text{는 제2사분면의 각이므로}$$

$$\sin \theta > 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{\tan^2 \theta} + \sqrt{\cos^2 \theta} + |\sin \theta| - \sqrt{(\tan \theta + \cos \theta)^2} \\ = |\tan \theta| + |\cos \theta| + |\sin \theta| - |\tan \theta + \cos \theta| \\ = -\tan \theta - \cos \theta + \sin \theta + \tan \theta + \cos \theta \\ = \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11 \quad \neg. \cos^2 \theta - \sin^2 \theta &= \sin^2 \theta \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - 1 \right) \\ &= \sin^2 \theta \left(\frac{1}{\tan^2 \theta} - 1 \right) \\ &= \sin^2 \theta \left(\frac{1 - \tan^2 \theta}{\tan^2 \theta} \right) \\ &\neq \sin^2 \theta \tan^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow. \frac{\tan \theta}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\sin \theta + 1}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1 + \sin \theta}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} \\ &= \frac{1}{1 - \sin \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqsubset. \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} + \frac{\tan \theta - 1}{\tan \theta + 1} \\ = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta} + \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - 1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + 1} \\ = \frac{(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta)}{(\sin \theta + \cos \theta)^2} + \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \\ = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = 0 \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, $\sqsubset$ 이다.

$$12 \quad \tan \theta = -\frac{1}{2} \text{이므로 } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = -2 \sin \theta \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{에 } \textcircled{1} \text{을 대입하면}$$

$$\sin^2 \theta + (-2 \sin \theta)^2 = 1, \quad 5 \sin^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$\text{이때 } \theta \text{가 제2사분면의 각이면 } \sin \theta > 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \cos \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{5}(\sin \theta - \cos \theta) \\ = \sqrt{5} \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \right\} \\ = 3 \end{aligned}$$

$$13 \quad \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} = 2 + \sqrt{3} \text{에서}$$

$$1 + \sin \theta = (2 + \sqrt{3})(1 - \sin \theta)$$

$$(3 + \sqrt{3}) \sin \theta = 1 + \sqrt{3}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{이때 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이면 } \cos \theta < 0 \text{이므로}$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$14 \quad \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{에서 } 1 - \cos^2 \theta = \cos \theta \text{이므로}$$

$$\sin^2 \theta = \cos \theta$$

$$\therefore \sin^2 \theta + \sin^6 \theta + \sin^8 \theta$$

$$= \cos \theta + \cos^3 \theta + \cos^4 \theta$$

$$= \cos \theta + \cos^2 \theta (\cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (\because \cos \theta + \cos^2 \theta = 1)$$

$$15 \quad \sin \theta + \cos \theta = \frac{2}{3} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{5}{18}$$

$$\therefore \sin^3 \theta + \cos^3 \theta$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= \left(\frac{2}{3} \right)^3 - 3 \times \left(-\frac{5}{18} \right) \times \frac{2}{3} = \frac{23}{27}$$

$$16 \quad \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

한편 $\sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{8}$ 이므로

$$\begin{aligned} (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉒} \end{aligned}$$

이때 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이면 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta > 0$$

$$\textcircled{㉒} \text{에서 } \sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

따라서 $\textcircled{㉓}$ 을 $\textcircled{㉑}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} &= \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{-\frac{1}{8}} = -4\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17 \quad \tan^2 \theta - \frac{1}{\tan^2 \theta} &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \quad \dots\dots \textcircled{㉔} \end{aligned}$$

한편 $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉕} \end{aligned}$$

이때 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이면 $\sin \theta < 0$, $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta < 0$$

$$\textcircled{㉕} \text{에서 } \sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{6}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉖}$$

$$\begin{aligned} (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉗} \end{aligned}$$

이때 $\sin \theta < \cos \theta$ 이면 $\sin \theta - \cos \theta < 0$ 이므로 $\textcircled{㉗}$ 에서

$$\sin \theta - \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉘}$$

$\textcircled{㉖}$, $\textcircled{㉘}$ 을 $\textcircled{㉔}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \tan^2 \theta - \frac{1}{\tan^2 \theta} &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{-\frac{\sqrt{6}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

18 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉙}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉚}$$

$\textcircled{㉙}$ 의 양변을 제곱하면

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{8} \quad \dots\dots \textcircled{㉛}$$

$\textcircled{㉚}$, $\textcircled{㉛}$ 에서

$$\frac{k}{2} = -\frac{1}{8} \quad \therefore k = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

그런데 $\sin \theta > \cos \theta$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta > 0$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore k(\sin \theta - \cos \theta) = \left(-\frac{1}{4}\right) \times \frac{\sqrt{5}}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{8}$$

19 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 12인 원을 6등분 한 부채꼴은 중심각의 크기가

$$2\pi \times \frac{1}{6} = \frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

$$\angle COA = \frac{\pi}{6}, \angle ACO = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \angle BCA = \frac{2}{3}\pi$$

내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면 직각삼각형 COA에서 $\overline{CA} = r$ 이므로

$$\overline{OC} = 2r, \overline{OA} = \sqrt{3}r$$

이때 $\overline{OB} = 12$ 이므로

$$2r + r = 12 \quad \therefore r = 4$$

위의 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 S 라 하면

$$S = (\text{부채꼴 BOD의 넓이}) - (\text{부채꼴 BCA의 넓이}) - (\text{삼각형 COA의 넓이})$$

$$= \frac{1}{2} \times 12^2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4$$

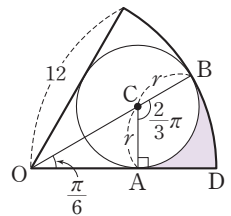
$$= 12\pi - \frac{16}{3}\pi - 8\sqrt{3} = \frac{20}{3}\pi - 8\sqrt{3}$$

구하는 넓이는 $12S$ 이므로

$$12S = 12 \left(\frac{20}{3}\pi - 8\sqrt{3} \right) = 80\pi - 96\sqrt{3}$$

따라서 $p = 80$, $q = -96$ 이므로

$$p + q = -16$$



- 20 오른쪽 그림과 같이 점 $A(a, b)$ ($a > 0, b > 0$)에 대하여

$$\sin \alpha = \frac{b}{1}$$

이때 $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ 이므로

$$b = \frac{1}{4}$$

점 $A(a, \frac{1}{4})$ 은 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$a^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1, a^2 = \frac{15}{16}$$

$$a = \frac{\sqrt{15}}{4} (\because a > 0)$$

각 $-\beta$ 를 나타내는 동경과 원 C의 교점이 $B(-b, -a)$ 이므로 각 β 를 나타내는 동경과 원 C의 교점을 B' 이라 하면 점 B' 은 점 B를 x 축에 대하여 대칭이동한 점이다.

$B'(-b, a)$, 즉 $(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4})$ 이므로

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore 4 \sin \beta = 4 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \sqrt{15}$$

- 21 $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ 이므로

삼각형 AOC에서

$$\overline{OC} = \overline{OA} \cos \theta = \cos \theta$$

$$\overline{AC} = \overline{OA} \sin \theta = \sin \theta$$

삼각형 DOB에서

$$\overline{BD} = \overline{OB} \tan \theta = \tan \theta$$

$$3 \overline{OC} = \overline{AC} \times \overline{BD} \text{이므로}$$

$$3 \cos \theta = \sin \theta \tan \theta, 3 \cos \theta = \sin \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$3 \cos^2 \theta = \sin^2 \theta, 3 \cos^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이면 $\cos \theta > 0$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

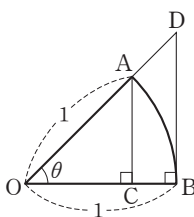
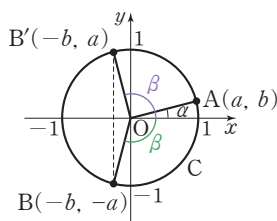
$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이면 $\sin \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



II-1 02 삼각함수의 그래프

1 삼각함수의 그래프

개념 CHECK

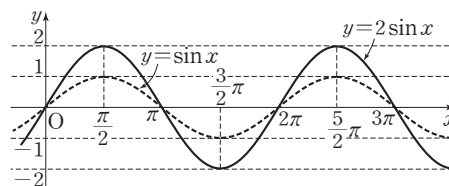
117쪽

- 1 답 (1) 주기: 2π , 그래프: 풀이 참조

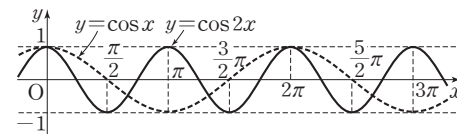
- (2) 주기: π , 그래프: 풀이 참조

- (3) 주기: 2π , 그래프: 풀이 참조

- (1) $y = 2 \sin x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

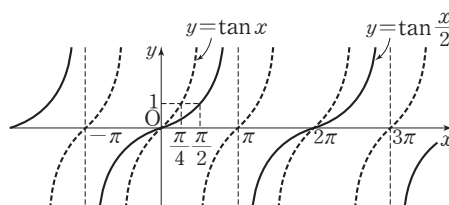


- (2) $y = \cos 2x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



- (3) $y = \tan \frac{x}{2}$ 에 $x = \frac{\pi}{2}$ 를 대입하면 $y = 1$

$y = \tan \frac{x}{2}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

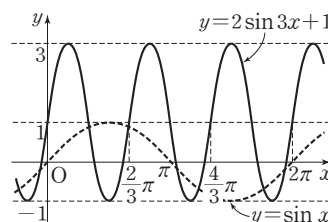


문제

118~119쪽

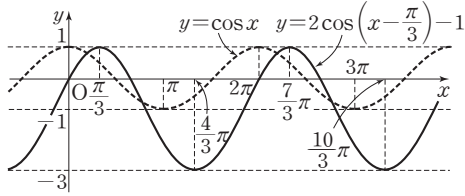
01-1 답 풀이 참조

- (1) $y = 2 \sin 3x + 1$ 의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{3}$ 배, y 축의 방향으로 2배 한 후 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



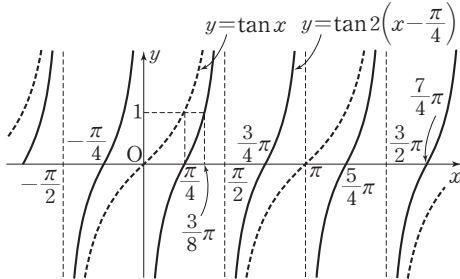
$\therefore$ 최댓값: 3, 최솟값: -1, 주기: $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

- (2) $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1$ 의 그래프는 $y=\cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 후 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 최댓값: 1, 최솟값: -3 , 주기: $\frac{2\pi}{1}=2\pi$

- (3) $y=\tan 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 의 그래프는 $y=\tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 후 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



$\therefore$ 최댓값: 없다., 최솟값: 없다., 주기: $\frac{\pi}{2}$

02-1 [답] π

주어진 함수 $y=a\cos(bx+c)+d$ 의 그래프에서 최댓값은 2, 최솟값은 -4 이고 $a>0$ 이므로

$$a+d=2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$-a+d=-4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=3$, $d=-1$

주어진 그래프에서 주기는 $\frac{11}{6}\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\pi$ 이고 $b>0$

$$\text{이므로 } \frac{2\pi}{b}=2\pi \quad \therefore b=1$$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=3\cos(x+c)-1$ 이고, 이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$ 를 지나므로

$$2=3\cos\left(\frac{\pi}{3}+c\right)-1 \quad \therefore \cos\left(\frac{\pi}{3}+c\right)=1$$

이때 $-\frac{\pi}{2}\leq c\leq 0$ 에서 $-\frac{\pi}{6}\leq \frac{\pi}{3}+c\leq \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\frac{\pi}{3}+c=0 \quad \therefore c=-\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore abcd=3\times 1\times \left(-\frac{\pi}{3}\right)\times (-1)=\pi$$

02-2 [답] 13

$f(x)=a\tan bx$ 의 주기가 $\frac{\pi}{6}$ 이고 $b>0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{6} \quad \therefore b=6$$

$f(x)=a\tan 6x$ 에서 $f\left(\frac{\pi}{24}\right)=7$ 이므로

$$a\tan \frac{\pi}{4}=7 \quad \therefore a=7$$

$$\therefore a+b=7+6=13$$

02-3 [답] -1

$f(x)=a\sin \frac{x}{b}+c$ 의 최댓값이 5이고 $a>0$ 이므로

$$a+c=5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

한편 주기가 4π 이고 $b<0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{-\frac{1}{b}}=4\pi, \quad -2b\pi=4\pi \quad \therefore b=-2$$

$f(x)=a\sin\left(-\frac{x}{2}\right)+c$ 에서 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7}{2}$ 이므로

$$a\sin \frac{\pi}{6}+c=\frac{7}{2}$$

$$\frac{a}{2}+c=\frac{7}{2} \quad \therefore a+2c=7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=3$, $c=2$

$$\therefore a+b-c=3+(-2)-2=-1$$

2 삼각함수의 성질

문제

123~126쪽

03-1 [답] (1) $-\sqrt{3}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$(1) \sin \frac{29}{6}\pi = \sin\left(2\pi \times 2 + \frac{5}{6}\pi\right) = \sin \frac{5}{6}\pi$$

$$= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{20}{3}\pi\right) = \cos \frac{20}{3}\pi = \cos\left(2\pi \times 3 + \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$= \cos \frac{2}{3}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{11}{3}\pi = \tan\left(2\pi \times 2 - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin \frac{29}{6}\pi + \cos\left(-\frac{20}{3}\pi\right) + \tan \frac{11}{3}\pi$$

$$= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + (-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \sin(-750^\circ) &= -\sin 750^\circ = -\sin(360^\circ \times 2 + 30^\circ) \\
 &= -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \\
 \cos 1395^\circ &= \cos(360^\circ \times 4 - 45^\circ) \\
 &= \cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \cos 240^\circ &= \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \\
 \tan 495^\circ &= \tan(360^\circ + 135^\circ) = \tan 135^\circ \\
 &= \tan(180^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1 \\
 \therefore \sin(-750^\circ) + \cos 1395^\circ + \cos 240^\circ - \tan 495^\circ \\
 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) - (-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

03-2 ㉡ (1) 0 (2) 1

$$\begin{aligned}
 (1) \tan(270^\circ - \theta) &= \tan(180^\circ + 90^\circ - \theta) \\
 &= \tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta} \\
 \therefore \tan(270^\circ - \theta) \cos(180^\circ - \theta) \\
 &\quad + \cos(-\theta) \tan(90^\circ - \theta) \\
 &= \frac{1}{\tan \theta} \times (-\cos \theta) + \cos \theta \times \frac{1}{\tan \theta} = 0 \\
 (2) \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\
 &= -\cos \theta \\
 \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\
 &= -(-\sin \theta) = \sin \theta \\
 \therefore \frac{\cos(\pi + \theta)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) \cos^2(\pi - \theta)} \\
 &\quad + \frac{\sin(\pi + \theta) \tan^2(\pi - \theta)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)} \\
 &= \frac{-\cos \theta}{-\cos \theta \times (-\cos \theta)^2} + \frac{-\sin \theta \times (-\tan \theta)^2}{\sin \theta} \\
 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta \\
 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\
 &= \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1
 \end{aligned}$$

03-3 ㉡ 0.4021

$$\begin{aligned}
 \sin 110^\circ &= \sin(90^\circ + 20^\circ) = \cos 20^\circ = 0.9397 \\
 \cos 260^\circ &= \cos(180^\circ + 80^\circ) = -\cos 80^\circ \\
 &= -\cos(90^\circ - 10^\circ) = -\sin 10^\circ = -0.1736 \\
 \tan 340^\circ &= \tan(360^\circ - 20^\circ) = -\tan 20^\circ = -0.3640 \\
 \therefore \sin 110^\circ + \cos 260^\circ + \tan 340^\circ \\
 &= 0.9397 - 0.1736 - 0.3640 = 0.4021
 \end{aligned}$$

04-1 ㉡ (1) $\frac{45}{2}$ (2) 1

$$\begin{aligned}
 (1) \sin(90^\circ - x) &= \cos x \text{ 이므로} \\
 \sin 89^\circ &= \sin(90^\circ - 1^\circ) = \cos 1^\circ \\
 \sin 87^\circ &= \sin(90^\circ - 3^\circ) = \cos 3^\circ \\
 \sin 85^\circ &= \sin(90^\circ - 5^\circ) = \cos 5^\circ \\
 &\vdots \\
 \sin 47^\circ &= \sin(90^\circ - 43^\circ) = \cos 43^\circ \\
 \therefore \sin^2 1^\circ + \sin^2 3^\circ + \sin^2 5^\circ + \cdots + \sin^2 87^\circ + \sin^2 89^\circ \\
 &= \sin^2 1^\circ + \sin^2 3^\circ + \sin^2 5^\circ + \cdots + \cos^2 3^\circ + \cos^2 1^\circ \\
 &= (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) \\
 &\quad + \cdots + (\sin^2 43^\circ + \cos^2 43^\circ) + \sin^2 45^\circ \\
 &= 1 + 1 + \cdots + 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\
 &= 1 \times 22 + \frac{1}{2} = \frac{45}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \tan(90^\circ - x) &= \frac{1}{\tan x} \text{ 이므로} \\
 \tan 89^\circ &= \tan(90^\circ - 1^\circ) = \frac{1}{\tan 1^\circ} \\
 \tan 88^\circ &= \tan(90^\circ - 2^\circ) = \frac{1}{\tan 2^\circ} \\
 \tan 87^\circ &= \tan(90^\circ - 3^\circ) = \frac{1}{\tan 3^\circ} \\
 &\vdots \\
 \tan 46^\circ &= \tan(90^\circ - 44^\circ) = \frac{1}{\tan 44^\circ} \\
 \therefore \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \cdots \times \tan 88^\circ \times \tan 89^\circ \\
 &= \tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \cdots \times \frac{1}{\tan 2^\circ} \times \frac{1}{\tan 1^\circ} \\
 &= \left(\tan 1^\circ \times \frac{1}{\tan 1^\circ}\right) \times \left(\tan 2^\circ \times \frac{1}{\tan 2^\circ}\right) \\
 &\quad \times \cdots \times \left(\tan 44^\circ \times \frac{1}{\tan 44^\circ}\right) \times \tan 45^\circ \\
 &= 1 \times 1 \times \cdots \times 1 \times 1 = 1
 \end{aligned}$$

04-2 ㉡ 1

$$\begin{aligned}
 \cos 50^\circ &= \cos(90^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ, \\
 \sin 50^\circ &= \sin(90^\circ - 40^\circ) = \cos 40^\circ \text{ 이므로} \\
 \left(1 - \frac{1}{\sin 40^\circ}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos 50^\circ}\right) \left(1 - \frac{1}{\cos 40^\circ}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin 50^\circ}\right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{\sin 40^\circ}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin 40^\circ}\right) \\
 &\quad \times \left(1 - \frac{1}{\cos 40^\circ}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos 40^\circ}\right) \\
 &= \left(1 - \frac{1}{\sin^2 40^\circ}\right) \left(1 - \frac{1}{\cos^2 40^\circ}\right) \\
 &= \frac{\sin^2 40^\circ - 1}{\sin^2 40^\circ} \times \frac{\cos^2 40^\circ - 1}{\cos^2 40^\circ} \\
 &= -\frac{\cos^2 40^\circ}{\sin^2 40^\circ} \times \left(-\frac{\sin^2 40^\circ}{\cos^2 40^\circ}\right) = 1
 \end{aligned}$$

04-3 ㉡ 4

$$\begin{aligned}\sin \frac{7}{8} \pi &= \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{8} \pi \right) = \cos \frac{3}{8} \pi, \\ \sin \frac{6}{8} \pi &= \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2}{8} \pi \right) = \cos \frac{2}{8} \pi, \\ \sin \frac{5}{8} \pi &= \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = \cos \frac{\pi}{8}, \\ \sin \frac{4}{8} \pi &= \sin \frac{\pi}{2} \text{이므로} \\ \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{2}{8} \pi + \sin^2 \frac{3}{8} \pi + \cdots + \sin^2 \frac{7}{8} \pi \\ &= \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{2}{8} \pi + \sin^2 \frac{3}{8} \pi + \sin^2 \frac{4}{8} \pi \\ &\quad + \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{2}{8} \pi + \cos^2 \frac{3}{8} \pi \\ &= \left(\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} \right) + \left(\sin^2 \frac{2}{8} \pi + \cos^2 \frac{2}{8} \pi \right) \\ &\quad + \left(\sin^2 \frac{3}{8} \pi + \cos^2 \frac{3}{8} \pi \right) + \sin^2 \frac{\pi}{2} \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4\end{aligned}$$

05-1 ㉡ (1) 최댓값: -1, 최솟값: -3

(2) 최댓값: 6, 최솟값: -2

$$\begin{aligned}(1) y &= 3 \cos(x - \pi) - 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 2 \\ &= 3 \cos\{-(\pi - x)\} - 2 \sin\left\{-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\} - 2 \\ &= 3 \cos(\pi - x) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 \\ &= -3 \cos x + 2 \cos x - 2 \\ &= -\cos x - 2 \\ \text{이때 } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{이므로 } -1 \leq -\cos x \leq 1 \\ \therefore -3 \leq -\cos x - 2 \leq 1 \\ \text{따라서 최댓값은 } -1, \text{ 최솟값은 } -3 \text{이다.}\end{aligned}$$

(2) $\cos 2x = t$ 로 놓으면

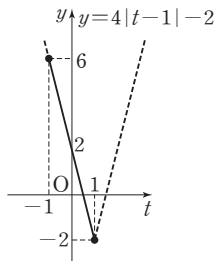
$$y = 4|t - 1| - 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

따라서 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 ㉠의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$t = -1$ 일 때, 최댓값은 6

$t = 1$ 일 때, 최솟값은 -2



다른 풀이

$$\begin{aligned}(2) -1 \leq \cos 2x \leq 1 \text{이므로 } -2 \leq \cos 2x - 1 \leq 0 \\ 0 \leq |\cos 2x - 1| \leq 2, 0 \leq 4|\cos 2x - 1| \leq 8 \\ \therefore -2 \leq 4|\cos 2x - 1| - 2 \leq 6 \\ \text{따라서 최댓값은 6, 최솟값은 } -2 \text{이다.}\end{aligned}$$

06-1 ㉡ (1) 최댓값: $\frac{2}{3}$, 최솟값: -2

(2) 최댓값: 5, 최솟값: $\frac{11}{4}$

(1) $\cos x = t$ 로 놓으면

$$y = \frac{2t}{t+2} = -\frac{4}{t+2} + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

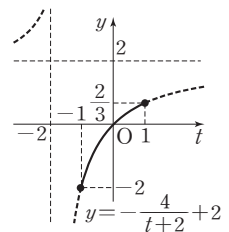
$$-1 \leq t \leq 1$$

따라서 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 ㉠의 그래프는 오른쪽 그림과 같

으므로

$t = 1$ 일 때, 최댓값은 $\frac{2}{3}$

$t = -1$ 일 때, 최솟값은 -2



(2) $y = -\cos^2 x - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 4$

$$= -(1 - \sin^2 x) - \cos\left\{-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\} + 4$$

$$= \sin^2 x - 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4$$

$$= \sin^2 x - \sin x + 3$$

$\sin x = t$ 로 놓으면

$$y = t^2 - t + 3 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq t \leq 1$$

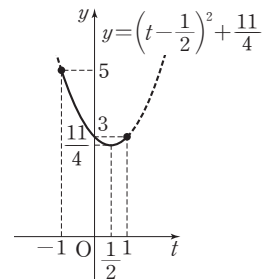
따라서 $-1 \leq t \leq 1$ 에서

㉠의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로

$t = -1$ 일 때, 최댓값은 5

$t = \frac{1}{2}$ 일 때, 최솟값은 $\frac{11}{4}$



다른 풀이

(1) 주어진 함수를 변형하면

$$y = \frac{2 \cos x}{\cos x + 2}$$

$$= -\frac{4}{\cos x + 2} + 2$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{\cos x + 2} \leq 1$$

$$-4 \leq -\frac{4}{\cos x + 2} \leq -\frac{4}{3}$$

$$\therefore -2 \leq -\frac{4}{\cos x + 2} + 2 \leq \frac{2}{3}$$

따라서 최댓값은 $\frac{2}{3}$, 최솟값은 -2이다.

연습문제

127~129쪽

- 1 -2π 2 ④ 3 3π 4 ⑤ 5 9
 6 ③ 7 ⑤ 8 ④ 9 $\frac{5}{2}$ 10 0
 11 $-\frac{4}{5}$ 12 -2 13 ③ 14 ② 15 ②
 16 18π 17 8 18 ② 19 $\frac{7}{2}$

- 1 주기는 $a = \frac{2\pi}{3}$
 최댓값은 $b = 2 - 1 = 1$
 최솟값은 $c = -2 - 1 = -3$
 $\therefore abc = \frac{2\pi}{3} \times 1 \times (-3) = -2\pi$
- 2 함수 $f(x)$ 는 주기함수이고 주기를 p 라 할 때, $pn=6$ 을 만족시키는 정수 n 이 존재해야 한다.
 ① 함수의 주기는 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 $3 \times 2 = 6$
 ② 함수의 주기는 $\frac{\pi}{\pi} = 1$ 이므로 $1 \times 6 = 6$
 ③ 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ 이므로 $6 \times 1 = 6$
 ④ 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 4$ 이므로 $4n=6$ 을 만족시키는 정수 n 이 존재하지 않는다.
 ⑤ 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ 이므로 $2 \times 3 = 6$
 따라서 $f(x+6) = f(x)$ 를 만족시키지 않는 것은 ④이다.
- 3 함수 $y = 5 \cos 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
 $y - b = 5 \cos 2(x - a) \quad \therefore y = 5 \cos(2x - 2a) + b$
 이 함수는 $y = 5 \cos(2x - \pi) + 6$ 과 일치하고,
 $0 < a < \pi$ 이므로 $2a = \pi, b = 6$
 따라서 $a = \frac{\pi}{2}, b = 6$ 이므로 $ab = 3\pi$
- 4 ① 주기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다.
 ② 그래프는 점 $(\pi, 1)$ 을 지난다.
 ③ 최댓값과 최솟값은 없다.
 ④ 점근선의 방정식은 $3x - \pi = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서
 $x = \frac{n+1}{3}\pi + \frac{\pi}{6}$ (n 은 정수)
 $\therefore x = \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{6}$ (단, n 은 정수)

- ⑤ $y = 2 \tan(3x - \pi) + 1 = 2 \tan 3\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ 이므로
 주어진 함수의 그래프는 함수 $y = 2 \tan 3x$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행
 이동한 것이다.
 따라서 옳은 것은 ⑤이다.

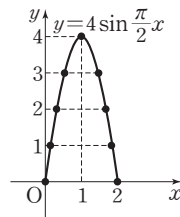
- 5 $y = 4 \sin \frac{\pi}{2}x$ 에서 이 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$ 이고,

최댓값은 4, 최솟값은 -4 이다.

따라서 $0 \leq x \leq 2$ 에서 곡선

$y = 4 \sin \frac{\pi}{2}x$ 는 오른쪽 그림과 같다.

이 곡선 위의 점 중 y 좌표가 정수인
 점은 이 곡선과 직선 $y = k$ (k 는 정
 수)의 교점과 같으므로 구하는 점의
 개수는 9이다.



- 6 $y = a \sin(bx - c)$ 의 그래프에서 최댓값은 2, 최솟값은 -2 이고 $a > 0$ 이므로 $a = 2$
 주어진 그래프에서 주기는 $\frac{4}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = \pi$ 이고 $b > 0$ 이므로
 $\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$
 따라서 $y = 2 \sin(2x - c)$ 이고, 이 함수의 그래프가 점
 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 을 지나므로
 $0 = 2 \sin\left(\frac{2}{3}\pi - c\right) \quad \therefore \sin\left(\frac{2}{3}\pi - c\right) = 0$
 이때 $0 < c < \pi$ 에서 $-\frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi - c < \frac{2}{3}\pi$ 이므로
 $\frac{2}{3}\pi - c = 0 \quad \therefore c = \frac{2}{3}\pi$
 $\therefore \frac{9abc}{\pi} = \frac{9 \times 2 \times 2 \times \frac{2}{3}\pi}{\pi} = 24$
- 7 $f(x) = a \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right) + c$ 의 최댓값이 2, 최솟값이 -4
 이고 $a < 0$ 이므로
 $-a + c = 2, a + c = -4$
 두 식을 연립하여 풀면 $a = -3, c = -1$
 한편 주기가 $\frac{2}{3}\pi$ 이고, $b > 0$ 이므로
 $\frac{2\pi}{b} = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore b = 3$
 따라서 $f(x) = -3 \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$ 이므로
 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3 \cos \pi - 1 = -3 \times (-1) - 1 = 2$

$$\begin{aligned}
8 \quad \cos \frac{32}{3} \pi &= \cos \left(2\pi \times 5 + \frac{2}{3} \pi \right) = \cos \frac{2}{3} \pi \\
&= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \\
&= -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\
\sin \frac{41}{6} \pi &= \sin \left(2\pi \times 3 + \frac{5}{6} \pi \right) = \sin \frac{5}{6} \pi \\
&= \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \\
&= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\
\tan \left(-\frac{45}{4} \pi \right) &= -\tan \frac{45}{4} \pi \\
&= -\tan \left(2\pi \times 5 + \frac{5}{4} \pi \right) = -\tan \frac{5}{4} \pi \\
&= -\tan \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) \\
&= -\tan \frac{\pi}{4} = -1 \\
\therefore \cos \frac{32}{3} \pi + \sin \frac{41}{6} \pi - \tan \left(-\frac{45}{4} \pi \right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - (-1) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9 \quad \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)}{1-\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} \\
&= \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x} \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
\sin x &= \frac{3}{5}, x \text{가 제1사분면의 각이므로} \\
\cos x &= \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \\
\sin x &= \frac{3}{5}, \cos x = \frac{4}{5} \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \\
&= \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x} \\
&= \frac{\frac{4}{5}}{1+\frac{3}{5}} + \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

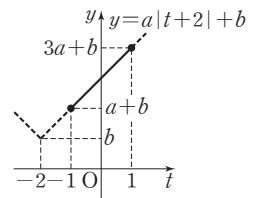
$$\begin{aligned}
10 \quad \theta &= 15^\circ \text{이므로} \\
\tan 5\theta &= \tan 75^\circ = \tan (90^\circ - 15^\circ) \\
&= \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{\tan \theta} \\
\tan 4\theta &= \tan 60^\circ = \tan (90^\circ - 30^\circ) \\
&= \frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\tan 2\theta} \\
\tan 3\theta &= \tan 45^\circ = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \log_3 \tan \theta + \log_3 \tan 2\theta + \log_3 \tan 3\theta \\
&\quad + \log_3 \tan 4\theta + \log_3 \tan 5\theta \\
&= \log_3 (\tan \theta \times \tan 2\theta \times \tan 3\theta \times \tan 4\theta \times \tan 5\theta) \\
&= \log_3 \left(\tan \theta \times \tan 2\theta \times 1 \times \frac{1}{\tan 2\theta} \times \frac{1}{\tan \theta} \right) \\
&= \log_3 1 = 0
\end{aligned}$$

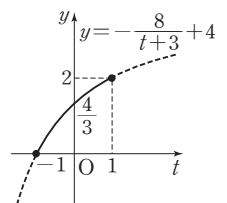
$$\begin{aligned}
11 \quad \text{직각삼각형 ABC에서 } \alpha + \beta &= \frac{\pi}{2} \text{이므로} \\
2\alpha + 2\beta &= \pi \\
\therefore \sin (2\alpha + 3\beta) &= \sin (2\alpha + 2\beta + \beta) \\
&= \sin (\pi + \beta) = -\sin \beta = -\frac{4}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12 \quad y &= a \cos (\pi + x) - 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + b \\
&= -a \cos x - 2 \cos x + b \\
&= -(a+2) \cos x + b \\
a > 0 \text{이고 최댓값이 } 1, \text{ 최솟값이 } -5 \text{이므로} \\
(\text{최댓값}) &= a+2+b=1 \\
\therefore a+b &= -1 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
(\text{최솟값}) &= -(a+2)+b=-5 \\
\therefore a-b &= 3 \quad \dots\dots \textcircled{2} \\
\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면} \\
a=1, b &= -2 \quad \therefore ab = -2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
13 \quad \sin 2x &= t \text{로 놓으면} \\
y &= a|t+2| + b \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
\text{이때 } -1 \leq \sin 2x \leq 1 \text{이므로 } -1 \leq t \leq 1 \\
a > 0 \text{이므로 } -1 \leq t \leq 1 \text{에서} \\
\textcircled{1} \text{의 그래프는 오른쪽 그림} \\
\text{과 같으므로 } t=1 \text{일 때 최댓} \\
\text{값은 } 3a+b, t=-1 \text{일 때 최} \\
\text{솟값은 } a+b \text{이다.} \\
\therefore 3a+b &= 4, a+b=2 \\
\text{두 식을 연립하여 풀면} \\
a=1, b &= 1 \quad \therefore a-b=0
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
14 \quad \sin x &= t \text{로 놓으면} \\
y &= \frac{4t+4}{t+3} = -\frac{8}{t+3} + 4 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
\text{이때 } -1 \leq \sin x \leq 1 \text{이므로 } -1 \leq t \leq 1 \\
-1 \leq t \leq 1 \text{에서 } \textcircled{1} \text{의 그래프는} \\
\text{오른쪽 그림과 같으므로} \\
t=1 \text{일 때, } M &= 2 \\
t=-1 \text{일 때, } m &= 0 \\
\therefore M-m &= 2
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 15 \quad y &= 3\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 4\cos^2 x + 6\sin(x + \pi) + 5 \\
 &= 3\cos^2 x - 4\cos^2 x - 6\sin x + 5 \\
 &= -\cos^2 x - 6\sin x + 5 \\
 &= -(1 - \sin^2 x) - 6\sin x + 5 \\
 &= \sin^2 x - 6\sin x + 4
 \end{aligned}$$

$\sin x = t$ 로 놓으면

$$y = t^2 - 6t + 4 = (t - 3)^2 - 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $0 \leq t \leq 1$

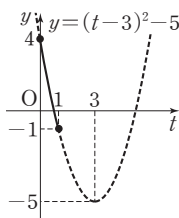
$0 \leq t \leq 1$ 에서 $\textcircled{1}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=1$ 일 때 최솟값은 -1 이다. $\therefore b = -1$

한편 $t = \sin x$ 이므로 $\sin x = 1$

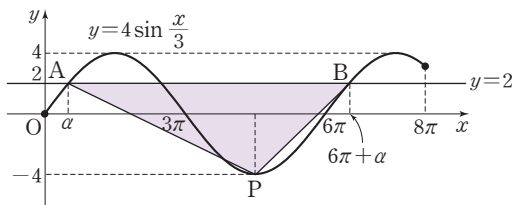
$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \therefore a = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore ab = \frac{\pi}{2} \times (-1) = -\frac{\pi}{2}$$



- 16 함수 $y = 4\sin \frac{x}{3}$ ($0 \leq x \leq 8\pi$)의 그래프와 직선 $y=2$ 는 다음 그림과 같다.



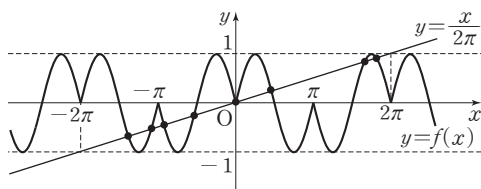
이때 선분 AB의 길이가 최대이고 높이가 최대가 되는 점 P에서 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 된다.

주기는 6π 이므로 점 A의 x좌표를 α 라 하면 점 B의 x좌표는 $6\pi + \alpha$ $\therefore \overline{AB} = 6\pi$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 6\pi \times (2 + 4) = 18\pi$$

- 17 (ㄴ)에서 $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, $f(x) = \sin 2x$
 (ㄷ)에서 $\pi < x \leq 2\pi$ 일 때, $f(x) = -\sin 2x$
 (ㄹ)에서 함수 $f(x)$ 의 주기는 2π 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{2\pi}$ 는 다음 그림과 같다.



따라서 직선 $y = \frac{x}{2\pi}$ 가 두 점 $(2\pi, 1)$, $(-2\pi, -1)$ 을 지나므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{x}{2\pi}$ 가 만나는 점의 개수는 8이다.

- 18 함수 $f(x) = \sin \pi x$ ($x \geq 0$)의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$

주어진 그림에서 $\beta = 1 - \alpha$, $\gamma = 2 + \alpha$ 이므로

$$f(\alpha + \beta + \gamma + 1) = f(\underbrace{4 + \alpha}_{\text{주기} \times 2}) = f(\alpha) = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}
 f\left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right) &= f\left(\frac{3}{2}\right) \\
 &= \sin \frac{3}{2}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= -\sin \frac{\pi}{2} = -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(\alpha + \beta + \gamma + 1) + f\left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right) \\
 = \frac{2}{3} + (-1) = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

- 19 $\angle P_1OA = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{16}$ 이므로 $\angle P_2OA = \frac{2}{16}\pi$,

$$\angle P_3OA = \frac{3}{16}\pi, \dots, \angle P_7OA = \frac{7}{16}\pi$$

직각삼각형 P_1OQ_1 에서 $\overline{P_1Q_1} = \overline{OP_1} \sin \frac{\pi}{16} = \sin \frac{\pi}{16}$

같은 방법으로 하면

$$\overline{P_2Q_2} = \sin \frac{2}{16}\pi, \overline{P_3Q_3} = \sin \frac{3}{16}\pi,$$

$$\overline{P_4Q_4} = \sin \frac{4}{16}\pi = \sin \frac{\pi}{4},$$

$$\overline{P_5Q_5} = \sin \frac{5}{16}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{16}\pi\right) = \cos \frac{3}{16}\pi,$$

$$\overline{P_6Q_6} = \sin \frac{6}{16}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{16}\pi\right) = \cos \frac{2}{16}\pi,$$

$$\overline{P_7Q_7} = \sin \frac{7}{16}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16}\right) = \cos \frac{\pi}{16}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \overline{P_1Q_1}^2 + \overline{P_2Q_2}^2 + \overline{P_3Q_3}^2 + \dots + \overline{P_7Q_7}^2 \\
 = \sin^2 \frac{\pi}{16} + \sin^2 \frac{2}{16}\pi + \sin^2 \frac{3}{16}\pi + \dots + \sin^2 \frac{7}{16}\pi \\
 = \sin^2 \frac{\pi}{16} + \sin^2 \frac{2}{16}\pi + \sin^2 \frac{3}{16}\pi + \sin^2 \frac{\pi}{4} \\
 \quad + \cos^2 \frac{3}{16}\pi + \cos^2 \frac{2}{16}\pi + \cos^2 \frac{\pi}{16} \\
 = \left(\sin^2 \frac{\pi}{16} + \cos^2 \frac{\pi}{16}\right) + \left(\sin^2 \frac{2}{16}\pi + \cos^2 \frac{2}{16}\pi\right) \\
 \quad + \left(\sin^2 \frac{3}{16}\pi + \cos^2 \frac{3}{16}\pi\right) + \sin^2 \frac{\pi}{4} \\
 = 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

II-1 03 삼각함수의 그래프의 활용

1 삼각함수가 포함된 방정식과 부등식

개념 CHECK

131쪽

1 답 (가) $\frac{2}{3}\pi$ (나) $\frac{4}{3}\pi$

2 답 (가) $\frac{\pi}{6}$ (나) $\frac{7}{6}\pi$ (다) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$
 (라) $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{7}{6}\pi$ (마) $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$

문제

132~136쪽

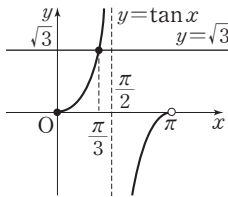
01-1 답 (1) $x = \frac{\pi}{3}$ (2) $x = \frac{\pi}{12}$ 또는 $x = \frac{5}{12}\pi$

(3) $x = \frac{2}{3}\pi$ (4) $x = \frac{5}{12}\pi$

(1) $\sqrt{3}\tan x - 3 = 0$ 에서

$\sqrt{3}\tan x = 3 \quad \therefore \tan x = \sqrt{3}$

$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = \sqrt{3}$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{3}$



따라서 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{\pi}{3}$

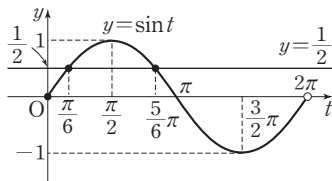
(2) $2x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < \pi$ 에서

$0 \leq 2x < 2\pi \quad \therefore 0 \leq t < 2\pi$

이때 주어진 방정식은 $\sin t = \frac{1}{2}$

$0 \leq t < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin t$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$

의 교점의 t 좌표는 $\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$



$t = 2x$ 이므로

$2x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $2x = \frac{5}{6}\pi$

$\therefore x = \frac{\pi}{12}$ 또는 $x = \frac{5}{12}\pi$

(3) $\frac{x}{2} + \pi = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < \pi$ 에서

$0 \leq \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}, \pi \leq \frac{x}{2} + \pi < \frac{3}{2}\pi$

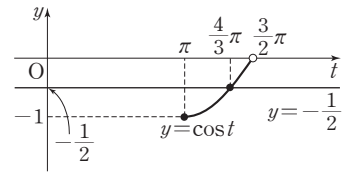
$\therefore \pi \leq t < \frac{3}{2}\pi$

이때 주어진 방정식은

$2\cos t = -1 \quad \therefore \cos t = -\frac{1}{2}$

$\pi \leq t < \frac{3}{2}\pi$ 에서 함수 $y = \cos t$ 의 그래프와 직선

$y = -\frac{1}{2}$ 의 교점의 t 좌표는 $\frac{4}{3}\pi$



$t = \frac{x}{2} + \pi$ 이므로

$\frac{x}{2} + \pi = \frac{4}{3}\pi \quad \therefore x = \frac{2}{3}\pi$

(4) $x - \frac{\pi}{6} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < \pi$ 에서

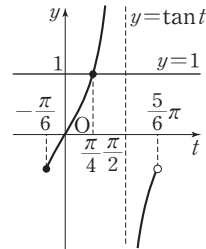
$-\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi \quad \therefore -\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{5}{6}\pi$

이때 주어진 방정식은

$\tan t - 1 = 0 \quad \therefore \tan t = 1$

$-\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{5}{6}\pi$ 에서 함수 $y = \tan t$ 의 그래프와 직선

$y = 1$ 의 교점의 t 좌표는 $\frac{\pi}{4}$



$t = x - \frac{\pi}{6}$ 이므로

$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} \quad \therefore x = \frac{5}{12}\pi$

02-1 답 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{3}{2}\pi$

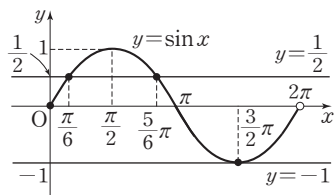
$2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$ 에서

$2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0, (\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$

$\therefore \sin x = -1$ 또는 $\sin x = \frac{1}{2}$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 두 직선 $y = -1$, $y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$



따라서 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi$$

02-2 ▮ $x = \frac{\pi}{3}$

$$\tan x + 3 \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\sqrt{3} \text{에서}$$

$$\tan x + \frac{3}{\tan x} = 2\sqrt{3}$$

이때 $0 < x < \pi$ 에서 $\tan x \neq 0$ 이므로 양변에 $\tan x$ 를 곱하면

$$\tan^2 x + 3 = 2\sqrt{3} \tan x$$

$$\tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x + 3 = 0$$

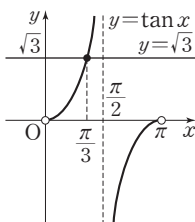
$$(\tan x - \sqrt{3})^2 = 0 \quad \therefore \tan x = \sqrt{3}$$

$0 < x < \pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = \sqrt{3}$ 의 교점의

x 좌표는 $\frac{\pi}{3}$

따라서 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{3}$$

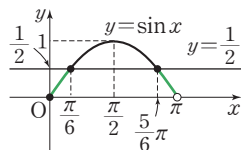


03-1 ▮ (1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi \leq x < \pi$

$$(2) 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{11}{12}\pi < x < \pi$$

(1) $0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$

의 교점의 x 좌표를 구하면 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$



주어진 부등식의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$ 과 만나거나 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi \leq x < \pi$$

(2) $x + \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < \pi$ 에서

$$\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} < \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} \leq t < \frac{4}{3}\pi$$

이때 주어진 부등식은

$$\tan t > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{4}{3}\pi$ 에서 함수

$y = \tan t$ 의 그래프와 직

선 $y = 1$ 의 교점의 t 좌표

는 $\frac{5}{4}\pi$

부등식 $\textcircled{1}$ 의 해는 함수

$y = \tan t$ 의 그래프가 직

선 $y = 1$ 보다 위쪽에 있

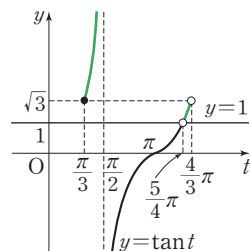
는 t 의 값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{5}{4}\pi < t < \frac{4}{3}\pi$$

따라서 $t = x + \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{5}{4}\pi < x + \frac{\pi}{3} < \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{11}{12}\pi < x < \pi$$



04-1 ▮ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$1 - \cos x \leq \sin^2 x \text{에서}$$

$$1 - \cos x \leq 1 - \cos^2 x, \cos^2 x - \cos x \leq 0$$

$$\cos x (\cos x - 1) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq \cos x \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의

그래프와 두 직선 $y = 0$, $y = 1$ 의

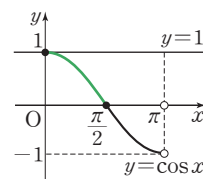
교점의 x 좌표는

$$0, \frac{\pi}{2}$$

부등식 $\textcircled{1}$ 의 해는 함수 $y = \cos x$

의 그래프가 직선 $y = 0$ 과 만나거나 위쪽에 있고, 직선 $y = 1$ 과 만나거나 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$



04-2 ▮ $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{3}{4}\pi < x < \pi$

$$\tan^2 x + (\sqrt{3} + 1) \tan x + \sqrt{3} > 0 \text{에서}$$

$$(\tan x + \sqrt{3})(\tan x + 1) > 0$$

$$\therefore \tan x < -\sqrt{3} \text{ 또는 } \tan x > -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$0 \leq x < \pi$ 에서 함수
 $y = \tan x$ 의 그래프와 두
 직선 $y = -\sqrt{3}$, $y = -1$ 의
 교점의 x 좌표는

$$\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi$$

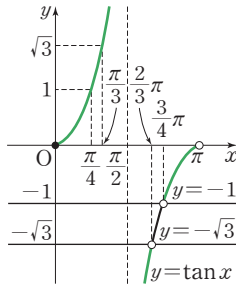
부등식 ㉠의 해는 함수

$y = \tan x$ 의 그래프가 직선

$y = -\sqrt{3}$ 보다 아래쪽에 있

거나 직선 $y = -1$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } \frac{3}{4}\pi < x < \pi$$



04-3 ㉡ $0 \leq x \leq \frac{7}{6}\pi$ 또는 $\frac{11}{6}\pi \leq x < 2\pi$

$$2\cos^2 x - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 \geq 0 \text{에서}$$

$$2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 \geq 0$$

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 \leq 0$$

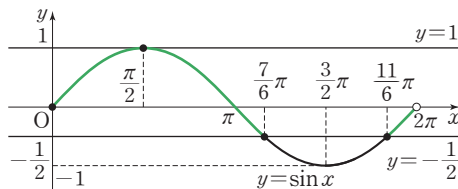
$$(2\sin x + 1)(\sin x - 1) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 두 직선

$y = -\frac{1}{2}$, $y = 1$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$



부등식 ㉠의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 직선

$y = -\frac{1}{2}$ 과 만나거나 위쪽에 있고, 직선 $y = 1$ 과 만나거나

아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로

$$0 \leq x \leq \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{11}{6}\pi \leq x < 2\pi$$

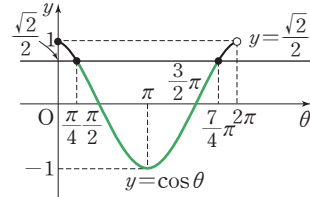
05-1 ㉡ 7

이차방정식 $x^2 + 2x + \sqrt{2}\cos\theta = 0$ 이 실근을 가지려면 이
 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 1 - \sqrt{2}\cos\theta \geq 0$$

$$\therefore \cos\theta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos\theta$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의
 교점의 θ 좌표는 $\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi$



부등식 ㉠의 해는 함수 $y = \cos\theta$ 의 그래프가 직선

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 와 만나거나 아래쪽에 있는 θ 의 값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{7}{4}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{7}{4}\pi$ 이므로 $\frac{\beta}{\alpha} = 7$

05-2 ㉡ $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차
 방정식 $3x^2 - 2\sqrt{2}x\cos\theta + \sin\theta = 0$ 의 판별식을 D 라 할
 때, $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (\sqrt{2}\cos\theta)^2 - 3\sin\theta < 0$$

$$2\cos^2\theta - 3\sin\theta < 0, 2(1 - \sin^2\theta) - 3\sin\theta < 0$$

$$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 > 0, (\sin\theta + 2)(2\sin\theta - 1) > 0$$

이때 $\sin\theta + 2 > 0$ 이므로

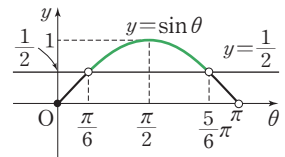
$$2\sin\theta - 1 > 0 \quad \therefore \sin\theta > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$0 \leq \theta < \pi$ 에서 함수

$y = \sin\theta$ 의 그래프와 직

선 $y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 θ 좌표

$$\text{는 } \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$



부등식 ㉠의 해는 함수 $y = \sin\theta$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$

보다 위쪽에 있는 θ 의 값의 범위이므로

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$$

05-3 ㉡ $\frac{4}{3}\pi$

$$x^2 - 2x\cos\theta + 1 = x \text{에서}$$

$$x^2 - (2\cos\theta + 1)x + 1 = 0$$

주어진 이차함수의 그래프와 직선이 접하려면 이 이차방
 정식의 판별식을 D 라 할 때, $D = 0$ 이어야 하므로

$$D = (2\cos\theta + 1)^2 - 4 = 0$$

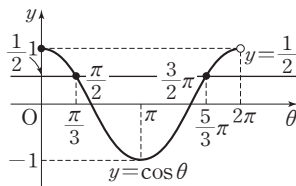
$$4\cos^2\theta + 4\cos\theta - 3 = 0, (2\cos\theta + 3)(2\cos\theta - 1) = 0$$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } \cos\theta = \frac{1}{2}$$

이때 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ 이므로 $\cos \theta = \frac{1}{2}$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos \theta$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의

교점의 θ 좌표는 $\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$



따라서 $\theta_1 = \frac{\pi}{3}, \theta_2 = \frac{5}{3}\pi$ 이므로 $\theta_2 - \theta_1 = \frac{4}{3}\pi$

연습문제

137~138쪽

- 1 $\frac{5}{6}\pi$ 2 ④ 3 $\frac{3}{2}\pi$ 4 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 5 7
 6 0 7 ⑤ 8 ③ 9 $\frac{\pi}{3}$ 10 ②
 11 ② 12 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$
 13 $\frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi$ 14 ④ 15 $\frac{1}{2\pi} < a < \frac{1}{\pi}$

1 $2x - \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < \pi$ 에서

$$0 \leq 2x < 2\pi, -\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$$

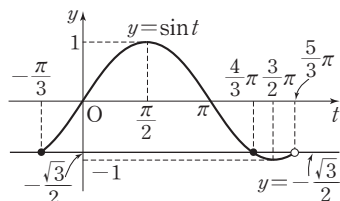
$$\therefore -\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5}{3}\pi$$

이때 주어진 방정식은

$$2\sin t + \sqrt{3} = 0 \quad \therefore \sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5}{3}\pi$ 에서 함수 $y = \sin t$ 의 그래프와 직선

$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 t 좌표는 $-\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi$



이때 $t = 2x - \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

따라서 모든 근의 합은 $\frac{5}{6}\pi$ 이다.

2 $\cos^2 x = \sin^2 x - \sin x$ 에서

$$1 - \sin^2 x = \sin^2 x - \sin x$$

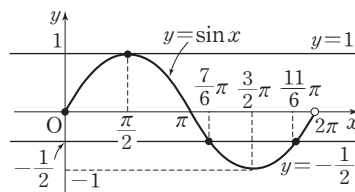
$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0, (2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = 1$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 두 직선

$y = -\frac{1}{2}, y = 1$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$



따라서 모든 해의 합은 $\frac{\pi}{2} + \frac{7}{6}\pi + \frac{11}{6}\pi = \frac{7}{2}\pi$

3 $(\sin x + \cos x)^2 = \sqrt{3}\cos x + 1$ 에서

$$1 + 2\sin x \cos x = \sqrt{3}\cos x + 1$$

$$\cos x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore \cos x = 0 \text{ 또는 } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(i) $0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수

$y = \cos x$ 의 그래

프와 직선 $y = 0$ 의

교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{2}$

(ii) $0 \leq x \leq \pi$ 에서 함

수 $y = \sin x$ 의 그

래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$$

따라서 모든 근의 합은 $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi = \frac{3}{2}\pi$

4 $0 \leq x < \pi$ 에서 함수

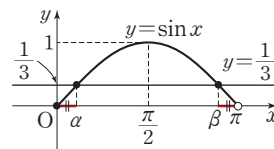
$y = \sin x$ 의 그래프와 직

선 $y = \frac{1}{3}$ 의 교점의 x 좌

표는 α, β 이므로

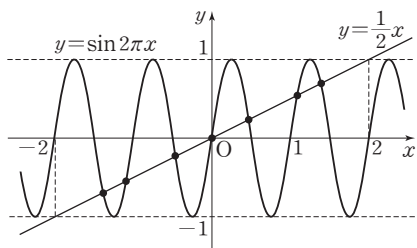
$$\alpha + \beta = \pi$$

$$\therefore \sin\left(\alpha + \beta + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



5 방정식 $\sin 2\pi x = \frac{1}{2}x$ 의 실근은 함수 $y = \sin 2\pi x$ 의 그래

프와 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 의 교점의 x 좌표와 같다.



위의 그림에서 함수 $y = \sin 2\pi x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 의 교점의 개수는 7이므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 7이다.

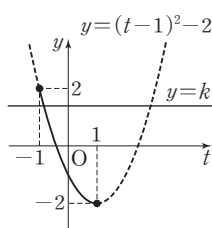
6 $\sin^2 x + 2\cos x + k = 0$ 에서 $1 - \cos^2 x + 2\cos x + k = 0$
 $\therefore \cos^2 x - 2\cos x - 1 = k$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y = \cos^2 x - 2\cos x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점이 존재해야 한다.

$y = \cos^2 x - 2\cos x - 1$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 $y = t^2 - 2t - 1 = (t-1)^2 - 2$

따라서 오른쪽 그림에서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 $-2 \leq k \leq 2$

따라서 $M=2$, $m=-2$ 이므로 $M+m=0$

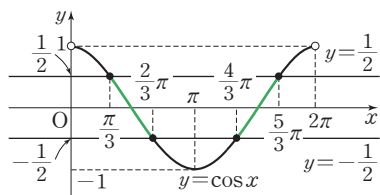


7 $|2\cos x| \leq 1$ 에서 $-1 \leq 2\cos x \leq 1$

$\therefore -\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$ ㉠

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 두 직선

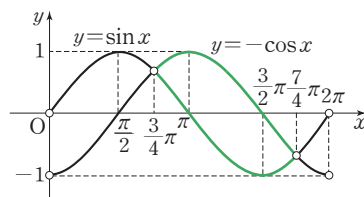
$y = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$, $\frac{5}{3}\pi$



따라서 부등식 ㉠의 해는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 과 만나거나 위쪽에 있고, 직선 $y = \frac{1}{2}$ 과 만나거나 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi \leq x \leq \frac{5}{3}\pi$

8 $\sin x + \cos x < 0$ 에서 $\sin x < -\cos x$ ㉡

$0 < x < 2\pi$ 에서 두 함수 $y = \sin x$, $y = -\cos x$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$



부등식 ㉡의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 함수 $y = -\cos x$ 의 그래프보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로 $\frac{3}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$

따라서 $\alpha = \frac{3}{4}\pi$, $\beta = \frac{7}{4}\pi$ 이므로 $\alpha + \beta = \frac{5}{2}\pi$

9 $2\sin^2 x - \cos x - 1 < 0$ 에서

$2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 < 0$, $2\cos^2 x + \cos x - 1 > 0$
 $(\cos x + 1)(2\cos x - 1) > 0$

이때 $0 \leq x < \pi$ 에서 $\cos x + 1 > 0$ 이므로

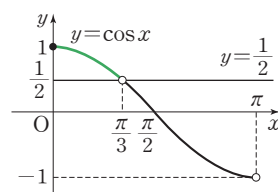
$2\cos x - 1 > 0 \therefore \cos x > \frac{1}{2}$ ㉢

$0 \leq x < \pi$ 에서 함수

$y = \cos x$ 의 그래프와 직

선 $y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표

는 $\frac{\pi}{3}$



부등식 ㉢의 해는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$

보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로 $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$

따라서 $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$

10 $\cos^2 x + 2\sin x - a \leq 0$ 에서

$(1 - \sin^2 x) + 2\sin x - a \leq 0$

$\therefore \sin^2 x - 2\sin x + a - 1 \geq 0$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 부등식은 $t^2 - 2t + a - 1 \geq 0$

$f(t) = t^2 - 2t + a - 1$ 이라 하면 $f(t) = (t-1)^2 + a - 2$
 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 $f(t)$ 의 최솟값은 $a - 2$

이때 모든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립하려면

$a - 2 \geq 0 \therefore a \geq 2$

따라서 상수 a 의 최솟값은 2이다.

11 $y = x^2 - 2x\sin\theta + \cos^2\theta$

$= (x - \sin\theta)^2 - \sin^2\theta + \cos^2\theta$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(\sin\theta, -\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

이 점이 직선 $y=\sqrt{3}x+1$ 위에 있으려면

$$-\sin^2\theta + \cos^2\theta = \sqrt{3}\sin\theta + 1$$

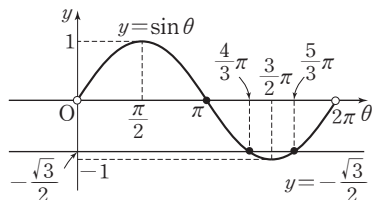
$$-\sin^2\theta + (1 - \sin^2\theta) = \sqrt{3}\sin\theta + 1$$

$$2\sin^2\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 0, \sin\theta(2\sin\theta + \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } \sin\theta = 0$$

$0 < \theta < 2\pi$ 에서 함수 $y=\sin\theta$ 의 그래프와 두 직선

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}, y=0 \text{의 교점의 } \theta \text{좌표는 } \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$



따라서 $x_1 = \pi, x_2 = \frac{4}{3}\pi, x_3 = \frac{5}{3}\pi$ 이므로

$$x_1 + 3(x_3 - x_2) = \pi + 3\left(\frac{5}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi\right) = 2\pi$$

- 12** 이차방정식 $x^2 - 2x\cos\theta + \cos\theta = 0$ 이 실근을 갖지 않으려면 이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \cos^2\theta - \cos\theta < 0$$

$$\cos\theta(\cos\theta - 1) < 0 \quad \therefore 0 < \cos\theta < 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$0 < \theta < 2\pi$ 에서 함수

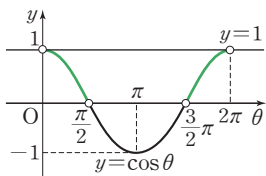
$y=\cos\theta$ 의 그래프와 두

직선 $y=0, y=1$ 의 교점의

θ 좌표는 $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$

따라서 부등식 $\textcircled{1}$ 의 해는

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$$



- 13** $f(x) = 2x^2 + 6x\sin\theta + 1$ 이라 할 때, 방정식 $f(x)=0$ 의 두 근 사이에 1이 있으려면 $f(1) < 0$ 이어야 하므로

$$2 + 6\sin\theta + 1 < 0$$

$$6\sin\theta < -3 \quad \therefore \sin\theta < -\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서

함수 $y=\sin\theta$ 의

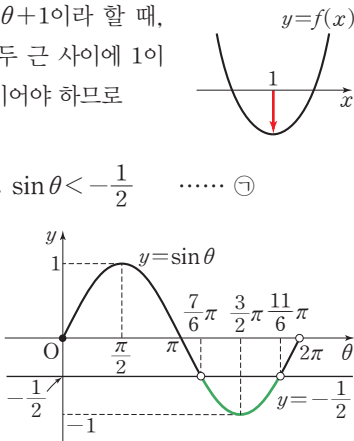
그래프와 직선

$y = -\frac{1}{2}$ 의 교점

의 θ 좌표는

$$\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

따라서 부등식 $\textcircled{1}$ 의 해는 $\frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi$

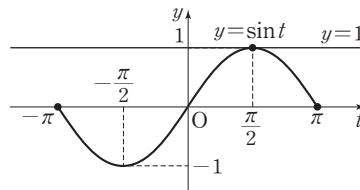


- 14** $\pi\cos x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $-\pi \leq t \leq \pi$ 이고 주어진 방정식은

$$\sin t = 1$$

$-\pi \leq t \leq \pi$ 에서 함수 $y=\sin t$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의

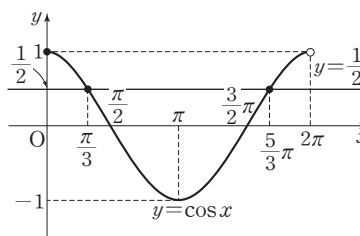
교점의 t 좌표는 $\frac{\pi}{2}$



이때 $t = \pi\cos x$ 이므로 $\pi\cos x = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \cos x = \frac{1}{2}$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y=\cos x$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$ 의

교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$



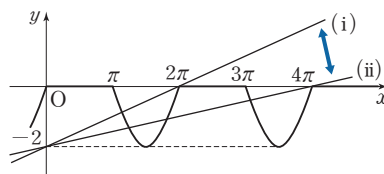
따라서 두 근의 차는 $\frac{5}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$

- 15** $y = \sin x - |\sin x| = \begin{cases} 0 & (\sin x \geq 0) \\ 2\sin x & (\sin x < 0) \end{cases}$

이고 직선 $y=ax-2$ 는 a 의 값에 관계없이 점 $(0, -2)$ 를 지난다.

이때 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=\sin x - |\sin x|$ 의 그래프와 직선

$y=ax-2$ ($a > 0$)가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로 다음 그림에서 직선 $y=ax-2$ 는 (i)과 (ii) 사이에 있어야 한다.



(i) 직선 $y=ax-2$ 가 점 $(2\pi, 0)$ 을 지날 때,

$$0 = 2\pi a - 2 \quad \therefore a = \frac{1}{\pi}$$

(ii) 직선 $y=ax-2$ 가 점 $(4\pi, 0)$ 을 지날 때,

$$0 = 4\pi a - 2 \quad \therefore a = \frac{1}{2\pi}$$

(i), (ii)에서 $\frac{1}{2\pi} < a < \frac{1}{\pi}$

II-2 01 사인법칙과 코사인법칙

1 사인법칙

문제

141~144쪽

01-1 [답] (1) $\sqrt{6}$ (2) $3\sqrt{3}$ (3) $B=30^\circ, C=30^\circ$

(1) 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 이므로

$$\frac{3}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}, 3 \sin 45^\circ = b \sin 60^\circ$$

$$3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = b \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore b = \sqrt{6}$$

(2) $A+B+C=180^\circ$ 이므로

$$A = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ 이므로

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sin 30^\circ} = 2R, 2R \sin 30^\circ = 3\sqrt{3} \quad \therefore R = 3\sqrt{3}$$

(3) 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = \frac{1}{\sin B}, \sqrt{3} \sin B = \sin 120^\circ$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로

$$B = 30^\circ \text{ 또는 } B = 150^\circ$$

그런데 $B = 150^\circ$ 이면 $A+B > 180^\circ$ 이므로 $B = 30^\circ$

$$\therefore C = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$$

02-1 [답] 4 : 10 : 5

사인법칙에 의하여 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

이므로

$$a : b : c = 2 : 4 : 5$$

이때 $a=2k, b=4k, c=5k (k>0)$ 로 놓으면

$$ab=8k^2, bc=20k^2, ca=10k^2$$

$$\therefore ab : bc : ca = 8k^2 : 20k^2 : 10k^2 = 4 : 10 : 5$$

02-2 [답] 2 : 6 : 5

$$a-2b+2c=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2a+b-2c=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$3a-b=0 \quad \therefore b=3a$$

$b=3a$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$2a+3a-2c=0 \quad \therefore c=\frac{5}{2}a$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : 3a : \frac{5}{2}a = 2 : 6 : 5$$

02-3 [답] 3

$A+B+C=180^\circ$ 이고 $A : B : C = 1 : 1 : 4$ 이므로

$$A = 180^\circ \times \frac{1}{6} = 30^\circ, B = 180^\circ \times \frac{1}{6} = 30^\circ,$$

$$C = 180^\circ \times \frac{4}{6} = 120^\circ$$

$$\therefore \sin A : \sin B : \sin C$$

$$= \sin 30^\circ : \sin 30^\circ : \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 : 1 : \sqrt{3}$$

사인법칙에 의하여 $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

이므로

$$a : b : c = 1 : 1 : \sqrt{3}$$

따라서 $a=k, b=k, c=\sqrt{3}k (k>0)$ 로 놓으면

$$\frac{c^2}{ab} = \frac{(\sqrt{3}k)^2}{k \times k} = 3$$

03-1 [답] $A=90^\circ$ 인 직각삼각형

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$ 에 대입하면

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2, \frac{a^2}{4R^2} = \frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2}$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

03-2 [답] $a=b$ 인 이등변삼각형

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}$$

이를 $a \sin A = b \sin B$ 에 대입하면

$$a \times \frac{a}{2R} = b \times \frac{b}{2R}$$

$$a^2 = b^2 \quad \therefore a = b (\because a>0, b>0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

03-3 [답] $a=c$ 인 이등변삼각형

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 $(a-c) \sin B = a \sin A - c \sin C$ 에 대입하면

$$(a-c) \times \frac{b}{2R} = a \times \frac{a}{2R} - c \times \frac{c}{2R}$$

$$(a-c)b = a^2 - c^2, (a-c)b - (a+c)(a-c) = 0$$

$$(a-c)\{b - (a+c)\} = 0$$

이때 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 크므로
 $b - (a + c) \neq 0 \quad \therefore a = c$
 따라서 삼각형 ABC는 $a = c$ 인 이등변삼각형이다.

04-1 [답] $50\sqrt{6}$ m

$A + B + C = 180^\circ$ 이므로
 $A = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$
 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
 $\frac{100}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ}, 100 \sin 60^\circ = \overline{AB} \sin 45^\circ$
 $100 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{AB} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \overline{AB} = 50\sqrt{6}(\text{m})$
 따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $50\sqrt{6}$ m이다.

04-2 [답] $8\sqrt{2}$ m

삼각형 ABQ에서 $A + B + Q = 180^\circ$ 이므로
 $\angle AQB = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$
 삼각형 ABQ에서 사인법칙에 의하여
 $\frac{24}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AQ}}{\sin 45^\circ}, 24 \sin 45^\circ = \overline{AQ} \sin 60^\circ$
 $24 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \overline{AQ} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\therefore \overline{AQ} = 8\sqrt{6}(\text{m})$
 삼각형 PQA에서 $\angle PQA = 90^\circ$ 이므로
 $\overline{PQ} = \overline{AQ} \tan 30^\circ = 8\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{2}(\text{m})$
 따라서 나무의 높이 PQ는 $8\sqrt{2}$ m이다.

2 코사인법칙

문제

146~149쪽

05-1 [답] (1) $2\sqrt{7}$ (2) 30°

(1) 코사인법칙에 의하여
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
 $= 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \cos 60^\circ$
 $= 36 + 16 - 24 = 28$
 $\therefore a = 2\sqrt{7} (\because a > 0)$
 (2) 코사인법칙에 의하여
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$
 $= (\sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2 \times \sqrt{2} \times (1 + \sqrt{3}) \times \cos 45^\circ$
 $= 2 + 1 + 2\sqrt{3} + 3 - 2(1 + \sqrt{3})$
 $= 4$
 $\therefore c = 2 (\because c > 0)$

또 사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 이므로

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin A} = \frac{2}{\sin 45^\circ}, \sqrt{2} \sin 45^\circ = 2 \sin A$$

$$\therefore \sin A = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 30^\circ$ 또는 $A = 150^\circ$
 그런데 $A = 150^\circ$ 이면 $A + C > 180^\circ$ 이므로 $A = 30^\circ$

05-2 [답] 7π

코사인법칙에 의하여
 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$
 $= (\sqrt{3})^2 + 4^2 - 2 \times \sqrt{3} \times 4 \times \cos 30^\circ$
 $= 3 + 16 - 12 = 7$
 $\therefore b = \sqrt{7} (\because b > 0)$
 이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면
 사인법칙에 의하여 $\frac{b}{\sin B} = 2R$ 이므로
 $\frac{\sqrt{7}}{\sin 30^\circ} = 2R \quad \therefore R = \sqrt{7}$
 따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는
 $\pi \times (\sqrt{7})^2 = 7\pi$

06-1 [답] 60°

코사인법칙에 의하여 $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ 이므로
 $\cos B = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 + (2\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \times (\sqrt{2} + \sqrt{6}) \times 2\sqrt{2}} = \frac{4 + 4\sqrt{3}}{8 + 8\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$
 이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B = 60^\circ$

06-2 [답] $-\frac{1}{4}$

$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ 이므로
 $a : b : c = 2 : 3 : 4$
 $a = 2k, b = 3k, c = 4k (k > 0)$ 로 놓으면 코사인법칙에 의하여
 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 이므로
 $\cos C = \frac{(2k)^2 + (3k)^2 - (4k)^2}{2 \times 2k \times 3k} = -\frac{1}{4}$

06-3 [답] 150°

삼각형에서 길이가 가장 긴 변의 대각의 크기가 세 내각 중 가장 크므로 가장 큰 각의 크기는 C이다.
 코사인법칙에 의하여 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 이므로
 $\cos C = \frac{2^2 + (2\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{7})^2}{2 \times 2 \times 2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 150^\circ$

07-1 [답] $A=90^\circ$ 인 직각삼각형

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이를 $a \cos B - b \cos A = c$ 에 대입하면

$$a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} - b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = c$$

$$(c^2 + a^2 - b^2) - (b^2 + c^2 - a^2) = 2c^2$$

$$2a^2 - 2b^2 = 2c^2 \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

07-2 [답] $a=c$ 인 이등변삼각형

$\tan A \cos C = \sin C$ 에서

$$\frac{\sin A}{\cos A} \times \cos C = \sin C$$

$$\therefore \sin A \cos C = \sin C \cos A \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R},$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이를 ①에 대입하면

$$\frac{a}{2R} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{c}{2R} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = b^2 + c^2 - a^2$$

$$a^2 = c^2 \quad \therefore a = c \quad (\because a > 0, c > 0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

07-3 [답] $a=b$ 인 이등변삼각형 또는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형

$\tan A : \tan B = a^2 : b^2$ 에서

$$a^2 \tan B = b^2 \tan A$$

$$a^2 \times \frac{\sin B}{\cos B} = b^2 \times \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\therefore a^2 \sin B \cos A = b^2 \sin A \cos B \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R},$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이를 ①에 대입하면

$$a^2 \times \frac{b}{2R} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = b^2 \times \frac{a}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) = b^2(c^2 + a^2 - b^2)$$

$$a^2b^2 + a^2c^2 - a^4 = b^2c^2 + a^2b^2 - b^4$$

$$a^4 - b^4 - a^2c^2 + b^2c^2 = 0$$

$$(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) - c^2(a^2 - b^2) = 0$$

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$\therefore a=b \text{ 또는 } a^2 + b^2 = c^2 \quad (\because a > 0, b > 0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형 또는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

08-1 [답] $20\sqrt{91}$ m

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= 120^2 + 100^2 - 2 \times 120 \times 100 \times \cos 120^\circ \\ &= 14400 + 10000 + 12000 \\ &= 36400 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB} = 20\sqrt{91}(\text{m}) \quad (\because \overline{AB} > 0)$$

따라서 두 나무 A, B 사이의 거리는 $20\sqrt{91}$ m이다.

08-2 [답] $4\sqrt{7}$ km

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{(6\sqrt{7})^2 + 6^2 - 12^2}{2 \times 6\sqrt{7} \times 6} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 &= (6\sqrt{7})^2 + 14^2 - 2 \times 6\sqrt{7} \times 14 \times \cos B \\ &= 252 + 196 - 336 = 112 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AD} = 4\sqrt{7}(\text{km}) \quad (\because \overline{AD} > 0)$$

따라서 두 집 A, D 사이의 거리는 $4\sqrt{7}$ km이다.

3 삼각형의 넓이

개념 CHECK

151쪽

1 [답] (1) $33\sqrt{3}$ (2) $3\sqrt{2}$

$$(1) \frac{1}{2} \times 11 \times 12 \times \sin 60^\circ = 33\sqrt{3}$$

$$(2) \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin 135^\circ = 3\sqrt{2}$$

2 [답] (1) $3\sqrt{3}$ (2) $24\sqrt{2}$

$$(1) 2 \times 3 \times \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$$

$$(2) 6 \times 8 \times \sin 135^\circ = 24\sqrt{2}$$

3 [답] (1) 9 (2) $5\sqrt{3}$

$$(1) \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 30^\circ = 9$$

$$(2) \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin 120^\circ = 5\sqrt{3}$$

09-1 [답] (1) 60° 또는 120° (2) $2\sqrt{26}$ (1) 삼각형 ABC의 넓이가 $3\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \sin A = 3\sqrt{3} \quad \therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로

$$A = 60^\circ \text{ 또는 } A = 120^\circ$$

(2) 삼각형 ABC의 넓이가 8이므로

$$\frac{1}{2} \times 8 \times c \times \sin 135^\circ = 8$$

$$\frac{1}{2} \times 8 \times c \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 8 \quad \therefore c = 2\sqrt{2}$$

코사인법칙에 의하여

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$= 8^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 8 \times 2\sqrt{2} \times \cos 135^\circ$$

$$= 64 + 8 + 32 = 104$$

$$\therefore a = 2\sqrt{26} \quad (\because a > 0)$$

09-2 [답] $5\sqrt{2}$ $\cos B = \frac{1}{3}$ 이고 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \sin B = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 5\sqrt{2}$$

09-3 [답] $\frac{12}{5}$ $\overline{AD} = x$ 라 하면 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times x \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 4 \times x \times \sin 60^\circ$$

$$6\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}x, \quad 6\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}x \quad \therefore x = \frac{12}{5}$$

$$\therefore \overline{AD} = \frac{12}{5}$$

10-1 [답] (1) 84 (2) 192

(1) 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{13^2 + 14^2 - 15^2}{2 \times 13 \times 14} = \frac{5}{13}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 13 \times 14 \times \frac{12}{13} = 84$$

(2) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{abc}{4R}$ 이므로

$$\frac{abc}{4 \times 2\sqrt{3}} = 8\sqrt{3} \quad \therefore abc = 192$$

다른 풀이

(1) 헤론의 공식을 이용하면 $s = \frac{13+14+15}{2} = 21$ 이므로

삼각형 ABC의 넓이는

$$\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$$

10-2 [답] $2\sqrt{2}$

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{9^2 + 10^2 - 11^2}{2 \times 9 \times 10} = \frac{1}{3}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 10 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 30\sqrt{2}$$

이때 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}r(a+b+c)$ 이므로

$$\frac{1}{2}r(9+10+11) = 30\sqrt{2}$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2}$$

다른 풀이

헤론의 공식을 이용하면 $s = \frac{9+10+11}{2} = 15$ 이므로

삼각형 ABC의 넓이는

$$\sqrt{15(15-9)(15-10)(15-11)} = 30\sqrt{2}$$

이때 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\frac{1}{2}r(9+10+11) = 30\sqrt{2}$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2}$$

11-1 [답] $7+6\sqrt{3}$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \times 4 \times 7 \times \sin 30^\circ = 7$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos D = \frac{3^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 3 \times 7} = -\frac{1}{7}$$

이때 $0^\circ < D < 180^\circ$ 이므로

$$\sin D = \sqrt{1 - \cos^2 D} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\therefore \triangle BCD = \frac{1}{2} \times 3 \times 7 \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = 6\sqrt{3}$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD \\ = 7 + 6\sqrt{3}$$

11-2 $\frac{19\sqrt{3}}{2}$

오른쪽 그림과 같이 선분 AC를
그으면 삼각형 ABC에서 코사
인법칙에 의하여

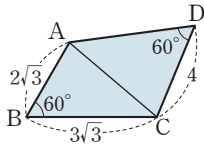
$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= (2\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})^2 \\ &\quad - 2 \times 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} \times \cos 60^\circ \\ &= 12 + 27 - 18 \\ &= 21\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{21} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

또 $\overline{AD} = x$ ($x > 0$)라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법
칙에 의하여

$$\begin{aligned}(\sqrt{21})^2 &= x^2 + 4^2 - 2 \times x \times 4 \times \cos 60^\circ \\ 21 &= x^2 + 16 - 4x, \quad x^2 - 4x - 5 = 0 \\ (x+1)(x-5) &= 0 \quad \therefore x = 5 \quad (\because x > 0) \\ \therefore \overline{AD} &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \square ABCD &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} \times \sin 60^\circ \\ &\quad + \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{2} + 5\sqrt{3} = \frac{19\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$



12-1 답 (1) 60° 또는 120° (2) 6

(1) 평행사변형에서 $\overline{AD} = \overline{BC} = 2\sqrt{3}$
평행사변형 ABCD의 넓이가 6이므로
 $2\sqrt{3} \times 2 \times \sin A = 6 \quad \therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$
이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로
 $A = 60^\circ$ 또는 $A = 120^\circ$

(2) 사각형 ABCD의 넓이가 $9\sqrt{2}$ 이므로
 $\frac{1}{2} \times 6 \times x \times \sin 45^\circ = 9\sqrt{2}$
 $3x \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$
 $\therefore x = 6$

12-2 답 $18\sqrt{2}$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로
 $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
 $\therefore \square ABCD = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 \times \sin \theta$
 $= \frac{1}{2} \times 6 \times 9 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$
 $= 18\sqrt{2}$

연습문제

157~160쪽

- | | | | | |
|-------------------------|----------------|---------------------------|-------------------|------------------|
| 1 ② | 2 32 | 3 ⑤ | 4 2 | 5 $3 - \sqrt{3}$ |
| 6 정삼각형 | 7 35.6 m | 8 $2\sqrt{6}$ | 9 $\sqrt{2}$ | 10 ④ |
| 11 $\frac{3}{5}$ | 12 ④ | 13 120 m | 14 ③ | 15 $\sqrt{3}$ |
| 16 240 | 17 ① | 18 $\frac{41\sqrt{3}}{2}$ | 19 ① | 20 ③ |
| 21 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 22 $2\sqrt{7}$ | 23 ⑤ | 24 $\frac{48}{7}$ | 25 ③ |
| 26 $7\sqrt{3}$ | | | | |

1 $A = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여
 $\frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}, \quad 2\sqrt{2} \sin 60^\circ = b \sin 45^\circ$
 $2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = b \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore b = 2\sqrt{3}$

2 한 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로
 $\angle BCA = \angle BDA = 30^\circ$
삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
 $\frac{\overline{AD}}{\sin 45^\circ} = \frac{16\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}, \quad \overline{AD} \sin 30^\circ = 16\sqrt{2} \sin 45^\circ$
 $\overline{AD} \times \frac{1}{2} = 16\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \overline{AD} = 32$

3 $B + C = 180^\circ - A$ 이므로
 $\cos(B + C) = \cos(180^\circ - A) = -\cos A$
 $4 \cos(B + C) \cos A = -1$ 에서
 $4(-\cos A) \cos A = -1$
 $-4 \cos^2 A = -1, \quad \cos^2 A = \frac{1}{4}$
이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로
 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
외접원의 반지름의 길이가 4이므로 사인법칙에 의하여
 $\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2 \times 4$
 $\therefore \overline{BC} = 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

4 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사
인법칙에 의하여
 $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{a+b+c}{2R}$
이때 외접원의 반지름의 길이가 3이고 삼각형 ABC의 둘
레의 길이가 12이므로
 $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{12}{2 \times 3} = 2$

- 5 $A+B+C=180^\circ$ 이고 $A:B:C=1:2:3$ 이므로

$$A=180^\circ \times \frac{1}{6}=30^\circ, B=180^\circ \times \frac{2}{6}=60^\circ,$$

$$C=180^\circ \times \frac{3}{6}=90^\circ$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$a=2R \sin A=2R \sin 30^\circ=R$$

$$b=2R \sin B=2R \sin 60^\circ=\sqrt{3}R$$

$$c=2R \sin C=2R \sin 90^\circ=2R$$

이를 $a+b+c=6$ 에 대입하면

$$R+\sqrt{3}R+2R=6, (3+\sqrt{3})R=6$$

$$\therefore R=\frac{6}{3+\sqrt{3}}=3-\sqrt{3}$$

- 6 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{a}{2R}, \sin B=\frac{b}{2R}, \sin C=\frac{c}{2R}$$

이를 $a \sin A=b \sin B=c \sin C$ 에 대입하면

$$a \times \frac{a}{2R}=b \times \frac{b}{2R}=c \times \frac{c}{2R}, a^2=b^2=c^2$$

$$\therefore a=b=c (\because a>0, b>0, c>0)$$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

- 7 $\angle BCA=43^\circ-14^\circ=29^\circ$

삼각형 CAB에서 사인법칙에 의하여

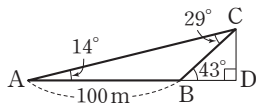
$$\frac{\overline{BC}}{\sin 14^\circ}=\frac{100}{\sin 29^\circ}, \overline{BC} \sin 29^\circ=100 \sin 14^\circ$$

$$\overline{BC} \times 0.48=100 \times 0.24 \quad \therefore \overline{BC}=50(\text{m})$$

삼각형 CBD에서

$$\overline{CD}=\overline{BC} \sin 43^\circ=50 \times 0.68=34(\text{m})$$

이때 서연이의 눈의 높이는 지면으로부터 1.6 m이므로
기둥과 지면 사이의 거리는 $34+1.6=35.6(\text{m})$



- 8 $B+D=180^\circ$ 에서 $D=180^\circ-B$ 이므로

$$\cos D=\cos (180^\circ-B)=-\cos B=-\frac{1}{4}$$

따라서 삼각형 DAC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=2^2+4^2-2 \times 2 \times 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right)=4+16+4=24$$

$$\therefore \overline{AC}=2\sqrt{6} (\because \overline{AC}>0)$$

- 9 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\sin C}, \sqrt{6} \sin C=\sqrt{3} \sin 45^\circ$$

$$\sqrt{6} \sin C=\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \sin C=\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$ 이므로 $C=30^\circ$ 또는 $C=150^\circ$

그런데 $C=150^\circ$ 이면 $B+C>180^\circ$ 이므로 $C=30^\circ$

$\overline{CD}=x$ ($0<x<\sqrt{6}$)라 하면 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{2})^2=(\sqrt{6})^2+x^2-2 \times \sqrt{6} \times x \times \cos 30^\circ$$

$$2=6+x^2-3\sqrt{2}x, x^2-3\sqrt{2}x+4=0$$

$$(x-\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})=0 \quad \therefore x=\sqrt{2} (\because 0<x<\sqrt{6})$$

$$\therefore \overline{CD}=\sqrt{2}$$

- 10 $a^2=b^2+bc+c^2$ 에서 $b^2+c^2-a^2=-bc$

코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$ 이므로 $A=120^\circ$

- 11 $\frac{\sin A}{3}=\frac{\sin B}{4}=\frac{\sin C}{5}$ 에서

$$\sin A:\sin B:\sin C=3:4:5$$

$$\therefore a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3:4:5$$

$a=3k, b=4k, c=5k$ ($k>0$)로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{(4k)^2+(5k)^2-(3k)^2}{2 \times 4k \times 5k}=\frac{4}{5}$$

이때 $0^\circ<A<180^\circ$ 이므로

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

- 12 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

이를 $c \cos A=a \cos C$ 에 대입하면

$$c \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=a \times \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$b^2+c^2-a^2=a^2+b^2-c^2$$

$$a^2=c^2 \quad \therefore a=c (\because a>0, c>0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

- 13 $\overline{PQ}=x$ ($x>0$)라 하면 삼각형 PBQ는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{PQ}=\overline{BQ}=x$

$$\text{또 삼각형 PAQ에서 } \overline{AQ}=\frac{\overline{PQ}}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3} \overline{PQ}=\sqrt{3}x$$

따라서 삼각형 ABQ에서 코사인법칙에 의하여

$$120^2=(\sqrt{3}x)^2+x^2-2 \times \sqrt{3}x \times x \times \cos 30^\circ$$

$$=3x^2+x^2-3x^2=x^2$$

$$\therefore x=120 (\because x>0)$$

따라서 타워의 높이 PQ는 120 m이다.

- 14 $A+B=180^\circ-C$ 이므로

$$\sin (A+B)=\sin (180^\circ-C)=\sin C=\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\therefore \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin C \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

15 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}a^2 &= 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos 60^\circ \\ &= 64 + 25 - 40 = 49\end{aligned}$$

$$\therefore a = 7 \quad (\because a > 0)$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$$

이때 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\frac{1}{2}r(7+8+5) = 10\sqrt{3} \quad \therefore r = \sqrt{3}$$

16 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{abc}{4R}$ 이므로

$$\frac{abc}{4 \times 4} = 15 \quad \therefore abc = 240$$

17 점 P는 변 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\overline{AP} = \frac{2}{3} \overline{AB} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

점 Q는 변 AC를 2 : 3으로 내분하는 점이므로

$$\overline{AQ} = \frac{2}{5} \overline{AC} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

두 삼각형 ABC, APQ의 넓이는

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\triangle APQ = \frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{AQ} \times \sin A \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

③에 ①, ②를 대입하면

$$\begin{aligned}\triangle APQ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \overline{AB} \times \frac{2}{5} \overline{AC} \times \sin A \\ &= \frac{4}{15} \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A \right) \\ &= \frac{4}{15} \triangle ABC \quad (\because \textcircled{C})\end{aligned}$$

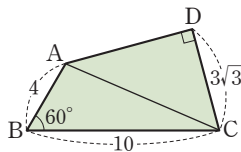
$$\therefore \triangle ABC : \triangle APQ = 15 : 4$$

18 오른쪽 그림과 같이 선분 AC

를 그으면 삼각형 ABC에서

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= 4^2 + 10^2 - 2 \times 4 \times 10 \times \cos 60^\circ \\ &= 16 + 100 - 40 = 76 \\ \therefore \overline{AC} &= 2\sqrt{19} \quad (\because \overline{AC} > 0)\end{aligned}$$



직각삼각형 ACD에서

$$\overline{AD} = \sqrt{(2\sqrt{19})^2 - (3\sqrt{3})^2} = 7$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \times 4 \times 10 \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 7 \\ &= 10\sqrt{3} + \frac{21\sqrt{3}}{2} = \frac{41\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

19 삼각형 APB는 $\angle APB = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

또 삼각형 QBA는 $\angle AQB = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{QA}^2 + \overline{QB}^2 = \overline{AB}^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20$$

$$\therefore \overline{QA} = \overline{QB} = \sqrt{10}$$

$$\therefore \square APBQ = \triangle PAB + \triangle AQB$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 + \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \sqrt{10} = 9$$

이때 $\angle QBA = \angle QPA = 45^\circ$, $\angle BAQ = \angle BPQ = 45^\circ$

이므로 $\overline{PQ} = x$ 라 하면 $\square APBQ = \triangle PAQ + \triangle PQB$ 에서

$$9 = \frac{1}{2} \times 4 \times x \times \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \times 2 \times x \times \sin 45^\circ$$

$$= \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}x = \frac{3\sqrt{2}}{2}x$$

$$\therefore x = 3\sqrt{2}$$

따라서 선분 PQ의 길이는 $3\sqrt{2}$ 이다.

다른 풀이

$$\overline{AB} = 2\sqrt{5}, \overline{QA} = \overline{QB} = \sqrt{10}$$

$\angle QBA = \angle QPA = 45^\circ$ 이므로 $\overline{PQ} = x$ ($x > 0$)라 하면

삼각형 APQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2 - 2 \times \overline{AP} \times \overline{PQ} \times \cos 45^\circ$$

$$(\sqrt{10})^2 = 4^2 + x^2 - 2 \times 4 \times x \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$10 = 16 + x^2 - 4\sqrt{2}x, \quad x^2 - 4\sqrt{2}x + 6 = 0$$

$$(x - \sqrt{2})(x - 3\sqrt{2}) = 0 \quad \therefore x = \sqrt{2} \text{ 또는 } x = 3\sqrt{2}$$

그런데 $\overline{PQ} > \overline{AQ} = \sqrt{10}$ 이므로 $x = 3\sqrt{2}$

따라서 선분 PQ의 길이는 $3\sqrt{2}$ 이다.

20 평행사변형 ABCD에서 $\overline{CD} = \overline{AB} = 8$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{10^2 + 8^2 - 12^2}{2 \times 10 \times 8} = \frac{1}{8}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\therefore \square ABCD = 10 \times 8 \times \sin C$$

$$= 10 \times 8 \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = 30\sqrt{7}$$

21 사각형 ABCD의 넓이가 $6\sqrt{6}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 9 \times \sin \theta = 6\sqrt{6} \quad \therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

이때 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 이므로

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

22 주어진 원뿔의 전개도를 그리

면 오른쪽 그림과 같다.

호의 길이는 원뿔의 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$$2\pi \times 2 = 4\pi$$

이때 선분 OA의 길이는 6이므로

로 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$4\pi = 6\theta \quad \therefore \theta = \frac{4\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$$

삼각형 OAP에서 $\angle POA = \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{3}$ 이고 점 P는 선분

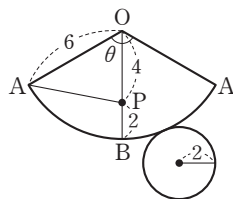
OB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 $\overline{OP} = 4$

따라서 삼각형 OAP에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AP}^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 36 + 16 - 24 = 28$$

$$\therefore \overline{AP} = 2\sqrt{7} \quad (\because \overline{AP} > 0)$$



23 ㄱ. 삼각형 BFG에서

$$\angle BFG = 180^\circ - (120^\circ + \theta) = 60^\circ - \theta$$

$$\therefore \angle BFE = \angle BFG + \angle GFE$$

$$= (60^\circ - \theta) + 30^\circ = 90^\circ - \theta$$

ㄴ. 이등변삼각형 EFG에서

$$\overline{FG} = 2\overline{EF} \cos 30^\circ = 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

삼각형 BGF에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = \frac{\overline{BF}}{\sin \theta}, \quad 2\sqrt{3} \sin \theta = \overline{BF} \sin 120^\circ$$

$$2\sqrt{3} \sin \theta = \overline{BF} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \overline{BF} = 4 \sin \theta$$

ㄷ. 삼각형 EFB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BE}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{EF}^2 - 2 \times \overline{BF} \times \overline{EF} \times \cos (90^\circ - \theta)$$

$$= (4 \sin \theta)^2 + 2^2 - 2 \times 4 \sin \theta \times 2 \times \sin \theta$$

$$= 4$$

$$\therefore \overline{BE} = 2 \quad (\because \overline{BE} > 0)$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

24 $\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 4$ 이므로 선분 AD는

$\angle CAB$ 의 이등분선이다.

$$\therefore \angle DAB = \angle CAD = 60^\circ$$

이때 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 16 \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times \overline{AD} \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 16 \times \overline{AD} \times \sin 60^\circ$$

$$48\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\overline{AD} + 4\sqrt{3}\overline{AD}$$

$$48\sqrt{3} = 7\sqrt{3}\overline{AD} \quad \therefore \overline{AD} = \frac{48}{7}$$

25 $\overline{AP} = x$, $\overline{AQ} = y$ 라 하면 $\triangle APQ = \frac{1}{2} \triangle ABC$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times x \times y \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin 60^\circ \right)$$

$$\therefore xy = 10$$

삼각형 APQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PQ}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 60^\circ$$

$$= x^2 + y^2 - 2 \times 10 \times \frac{1}{2} = x^2 + y^2 - 10$$

이때 $x^2 > 0$, $y^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2 + y^2 - 10 \geq 2\sqrt{x^2 y^2} - 10$$

$$= 2 \times 10 - 10$$

$$= 10 \quad (\text{단, 등호는 } x=y \text{일 때 성립})$$

$$\therefore \overline{PQ} \geq \sqrt{10}$$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $\sqrt{10}$ 이다.

26 $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$ 라 하면 $a + b = 6$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$(4\sqrt{2})^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos 120^\circ$$

$$32 = a^2 + b^2 + ab, \quad 32 = (a+b)^2 - ab$$

$$32 = 6^2 - ab \quad \therefore ab = 4$$

$$\therefore \overline{AB} \times \overline{AD} = 4$$

$$\overline{BC} = c, \quad \overline{CD} = d \text{라 하면 } c + d = 2\sqrt{26}$$

$C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ 이므로 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$(4\sqrt{2})^2 = c^2 + d^2 - 2 \times c \times d \times \cos 60^\circ$$

$$32 = c^2 + d^2 - cd, \quad 32 = (c+d)^2 - 3cd$$

$$32 = (2\sqrt{26})^2 - 3cd \quad \therefore cd = 24$$

$$\therefore \overline{BC} \times \overline{CD} = 24$$

$$\therefore \square ABCD$$

$$= \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AD} \times \sin 120^\circ$$

$$+ \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

1 수열

개념 CHECK

162쪽

1 답 (1) 17 (2) 16

2 답 (1) 5, 8, 11, 14 (2) 3, 5, 9, 17

(1) $a_1=3 \times 1 + 2=5$, $a_2=3 \times 2 + 2=8$,

$a_3=3 \times 3 + 2=11$, $a_4=3 \times 4 + 2=14$

(2) $a_1=2+1=3$, $a_2=2^2+1=5$,

$a_3=2^3+1=9$, $a_4=2^4+1=17$

문제

163쪽

01-1 답 (1) $a_n=n(n+1)$ (2) $a_n=n^2$

(3) $a_n=\frac{1}{3}(10^n-1)$

(1) $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면

$a_1=1 \times 2=1 \times (1+1)$

$a_2=2 \times 3=2 \times (2+1)$

$a_3=3 \times 4=3 \times (3+1)$

$a_4=4 \times 5=4 \times (4+1)$

$\vdots$

따라서 일반항 a_n 은 $a_n=n(n+1)$

(2) $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면

$a_1=1=1^2$

$a_2=4=2^2$

$a_3=9=3^2$

$a_4=16=4^2$

$\vdots$

따라서 일반항 a_n 은 $a_n=n^2$

(3) $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면

$a_1=3=\frac{1}{3} \times (10-1)$

$a_2=33=\frac{1}{3} \times (100-1)=\frac{1}{3} \times (10^2-1)$

$a_3=333=\frac{1}{3} \times (1000-1)=\frac{1}{3} \times (10^3-1)$

$a_4=3333=\frac{1}{3} \times (10000-1)=\frac{1}{3} \times (10^4-1)$

$\vdots$

따라서 일반항 a_n 은 $a_n=\frac{1}{3}(10^n-1)$

개념 CHECK

165쪽

1 답 (1) 2 (2) -4

2 답 (1) 1 (2) $\frac{1}{6}$

3 답 (1) $a_n=-2n+9$ (2) $a_n=4n-5$

(1) $a_n=7+(n-1) \times (-2)=-2n+9$

(2) 첫째항이 -1 , 공차가 $3-(-1)=4$ 인 등차수열의 일반항 a_n 은

$a_n=-1+(n-1) \times 4=4n-5$

4 답 (1) $x=1, y=-5$ (2) $x=\frac{7}{3}, y=\frac{17}{3}$

(1) x 는 4와 -2 의 등차중항이므로

$x=\frac{4-2}{2}=1$

y 는 -2 와 -8 의 등차중항이므로

$y=\frac{-2-8}{2}=-5$

(2) x 는 $\frac{2}{3}$ 와 4의 등차중항이므로

$x=\frac{\frac{2}{3}+4}{2}=\frac{7}{3}$

y 는 4와 $\frac{22}{3}$ 의 등차중항이므로

$y=\frac{4+\frac{22}{3}}{2}=\frac{17}{3}$

문제

166~170쪽

02-1 답 (1) $a_n=-\frac{2}{3}n+\frac{8}{3}$ (2) $a_n=6n-22$

(1) 공차를 d 라 하면 첫째항이 2, 제3항이 $\frac{2}{3}$ 이므로

$2+2d=\frac{2}{3} \quad \therefore d=-\frac{2}{3}$

따라서 첫째항이 2, 공차가 $-\frac{2}{3}$ 인 등차수열의 일반항

a_n 은

$a_n=2+(n-1) \times \left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2}{3}n+\frac{8}{3}$

(2) 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 제2항이 -10 , 제7항이 20 이므로

$$a+d=-10, a+6d=20$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-16, d=6$$

따라서 첫째항이 -16 , 공차가 6 인 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n=-16+(n-1)\times 6=6n-22$$

02-2 [답] -49

공차는 $5-8=-3$

첫째항이 8 , 공차가 -3 인 등차수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n=8+(n-1)\times(-3)=-3n+11$$

$$\therefore a_{20}=-3\times 20+11=-49$$

02-3 [답] 첫째항: 3, 공차: 2

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2+a_4=14\text{에서 } (a+d)+(a+3d)=14$$

$$\therefore a+2d=7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{10}+a_{20}=62\text{에서 } (a+9d)+(a+19d)=62$$

$$\therefore a+14d=31 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=3, d=2$

03-1 [답] 제18항

첫째항이 -50 , 공차가 3 인 등차수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n=-50+(n-1)\times 3=3n-53$$

이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면 $a_n>0$ 에서 $3n-53>0, 3n>53 \quad \therefore n>17.6\cdots$

그런데 n 은 자연수이므로 n 의 최솟값은 18 이다.

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제18항이다.

03-2 [답] 제22항

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_5=82, a_{10}=57$ 이므로

$$a+4d=82, a+9d=57$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=102, d=-5$

따라서 첫째항이 102 , 공차가 -5 인 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n=102+(n-1)\times(-5)=-5n+107$$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면 $a_n<0$ 에서 $-5n+107<0, 5n>107 \quad \therefore n>21.4$

그런데 n 은 자연수이므로 n 의 최솟값은 22 이다.

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제22항이다.

03-3 [답] 제23항

공차는 $-4-(-9)=5$

첫째항이 -9 , 공차가 5 인 등차수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n=-9+(n-1)\times 5=5n-14$$

이때 제 n 항에서 처음으로 100 보다 커진다고 하면 $a_n>100$ 에서

$$5n-14>100, 5n>114 \quad \therefore n>22.8$$

그런데 n 은 자연수이므로 n 의 최솟값은 23 이다.

따라서 처음으로 100 보다 커지는 항은 제23항이다.

04-1 [답] 28

주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 첫째항이 -2 , 제17항이 46 이므로

$$-2+16d=46, 16d=48 \quad \therefore d=3$$

이때 x_{10} 은 제11항이므로

$$x_{10}=-2+(11-1)\times 3=28$$

04-2 [답] 33

공차를 d 라 하면 첫째항이 3 , 제5항이 19 이므로

$$3+4d=19 \quad \therefore d=4$$

따라서 구하는 수는

$$x=3+d=7, y=3+2d=11, z=3+3d=15$$

$$\therefore x+y+z=7+11+15=33$$

04-3 [답] 14

첫째항이 4 , 공차가 2 인 등차수열의 제 $(m+2)$ 항이 34 이므로

$$4+(m+2-1)\times 2=34, 2(m+1)=30$$

$$m+1=15 \quad \therefore m=14$$

05-1 [답] -2, 1

x^2+2x 는 $-x$ 와 $3x+4$ 의 등차중항이므로

$$x^2+2x=\frac{-x+(3x+4)}{2}$$

$$2(x^2+2x)=2x+4, x^2+x-2=0$$

$$(x+2)(x-1)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

05-2 [답] $x=6, y=4$

5 는 x 와 y 의 등차중항이므로

$$5=\frac{x+y}{2} \quad \therefore x+y=10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 5 는 $-2y$ 와 $3x$ 의 등차중항이므로

$$5=\frac{-2y+3x}{2} \quad \therefore 3x-2y=10 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $x=6, y=4$

05-3 [답] -3

$f(x)=x^2+ax+1$ 을 $x+2$, $x+1$, $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 각각

$$f(-2)=5-2a, f(-1)=2-a, f(1)=2+a$$

세 수 $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루면 $f(-1)$ 은 $f(-2)$ 와 $f(1)$ 의 등차중항이므로

$$f(-1)=\frac{f(-2)+f(1)}{2}$$

$$2-a=\frac{(5-2a)+(2+a)}{2}$$

$$4-2a=7-a$$

$$\therefore a=-3$$

06-1 [답] 66

세 수를 $a-d$, a , $a+d$ 라 하면

$$(a-d)+a+(a+d)=12 \text{에서}$$

$$3a=12 \quad \therefore a=4$$

$$(a-d) \times a \times (a+d)=28 \text{에서}$$

$$(4-d) \times 4 \times (4+d)=28$$

$$16-d^2=7, d^2=9$$

$$\therefore d=-3 \text{ 또는 } d=3$$

따라서 세 수는 1, 4, 7이므로 세 수의 제곱의 합은

$$1^2+4^2+7^2=66$$

06-2 [답] 1

세 실근을 $a-d$, a , $a+d$ 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a-d)+a+(a+d)=3$$

$$3a=3 \quad \therefore a=1$$

따라서 주어진 삼차방정식의 한 근이 1이므로 주어진 삼차방정식에 $x=1$ 을 대입하면

$$1^3-3 \times 1^2+k \times 1+1=0$$

$$\therefore k=1$$

06-3 [답] 117°

네 내각의 크기를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$ 라 하면 네 내각의 크기의 합은 360° 이므로

$$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=360^\circ$$

$$4a=360^\circ \quad \therefore a=90^\circ$$

이때 가장 작은 각의 크기가 63° 이므로

$$90^\circ-3d=63^\circ, 3d=27^\circ$$

$$\therefore d=9^\circ$$

따라서 가장 큰 각의 크기는

$$90^\circ+3 \times 9^\circ=117^\circ$$

등차수열의 합

문제

172~176쪽

07-1 [답] (1) -160 (2) 5

(1) 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 제3항이 22, 제7항이 6이므로

$$a+2d=22, a+6d=6$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=30, d=-4$$

따라서 첫째항이 30, 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{20\{2 \times 30 + (20-1) \times (-4)\}}{2} = -160$$

(2) 첫째항이 3, 끝항이 15, 항수가 $m+2$ 인 등차수열의 모든 항의 합이 63이므로

$$\frac{(m+2)(3+15)}{2} = 63, 9(m+2) = 63$$

$$\therefore m=5$$

07-2 [답] 1010

첫째항이 3, 공차가 5인 등차수열의 제 k 항이 98이므로

$$3+(k-1) \times 5=98, 5(k-1)=95$$

$$\therefore k=20$$

따라서 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{20(3+98)}{2} = 1010$$

07-3 [답] 525

첫째항이 7, 공차가 4인 등차수열의 제 n 항을 63이라 하면

$$7+(n-1) \times 4=63, 4(n-1)=56$$

$$\therefore n=15$$

따라서 첫째항부터 제15항까지의 합은

$$\frac{15(7+63)}{2} = 525$$

08-1 [답] 960

첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $S_{15}=255$ 이므로

$$\frac{15\{2a + (15-1)d\}}{2} = 255$$

$$\therefore a+7d=17 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$S_{25}=675$ 이므로

$$\frac{25\{2a + (25-1)d\}}{2} = 675$$

$$\therefore a+12d=27 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=3, d=2$

따라서 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제30항까지의 합은

$$S_{30} = \frac{30\{2 \times 3 + (30-1) \times 2\}}{2} = 960$$

08-2 ㉡ 755

첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n

이라 하면 $S_{10}=155$ 이므로

$$\frac{10\{2a + (10-1)d\}}{2} = 155$$

$$\therefore 2a + 9d = 31 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$S_{20}-S_{10}=455$ 에서 $S_{20}=610$ 이므로

$$\frac{20\{2a + (20-1)d\}}{2} = 610$$

$$\therefore 2a + 19d = 61 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=3$

따라서 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열의 제21항부터 제30항까지의 합은

$$\begin{aligned} S_{30}-S_{20} &= \frac{30\{2 \times 2 + (30-1) \times 3\}}{2} - 610 \\ &= 1365 - 610 = 755 \end{aligned}$$

09-1 ㉡ -338

첫째항이 -50, 공차가 4인 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = -50 + (n-1) \times 4 = 4n - 54$$

이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면 $a_n > 0$ 에서 $4n - 54 > 0$, $4n > 54 \quad \therefore n > 13.5$

따라서 첫째항부터 제13항까지 음수이고, 제14항부터 양수이므로 구하는 최솟값은

$$S_{13} = \frac{13\{2 \times (-50) + (13-1) \times 4\}}{2} = -338$$

다른 풀이

첫째항이 -50, 공차가 4인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{n\{2 \times (-50) + (n-1) \times 4\}}{2}$$

$$= 2n^2 - 52n = 2(n-13)^2 - 338$$

따라서 구하는 최솟값은 $n=13$ 일 때 -338이다.

09-2 ㉡ 5

공차를 d 라 하면 첫째항이 6이므로

$$S_3 = \frac{3\{2 \times 6 + (3-1)d\}}{2} = 18 + 3d$$

$$S_7 = \frac{7\{2 \times 6 + (7-1)d\}}{2} = 42 + 21d$$

이때 $S_3=S_7$ 이므로

$$18 + 3d = 42 + 21d \quad \therefore d = -\frac{4}{3}$$

첫째항이 6, 공차가 $-\frac{4}{3}$ 인 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 6 + (n-1) \times \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3}n + \frac{22}{3}$$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면 $a_n < 0$ 에서

$$-\frac{4}{3}n + \frac{22}{3} < 0, \quad \frac{4}{3}n > \frac{22}{3}$$

$$\therefore n > 5.5$$

따라서 첫째항부터 제5항까지 양수이고, 제6항부터 음수이므로 첫째항부터 제5항까지의 합이 최대이다.

$$\therefore n=5$$

10-1 ㉡ 850

100 이하의 자연수 중에서 6으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$2, 8, 14, 20, \cdots, 98$$

이는 첫째항이 2, 공차가 6인 등차수열이므로 제 n 항을 98이라 하면

$$2 + (n-1) \times 6 = 98, \quad 6(n-1) = 96$$

$$\therefore n=17$$

따라서 구하는 합은 첫째항이 2, 제17항이 98인 등차수열의 첫째항부터 제17항까지의 합이므로

$$\frac{17(2+98)}{2} = 850$$

10-2 ㉡ 55350

세 자리의 자연수 중에서 9의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$108, 117, 126, 135, \cdots, 999$$

이는 첫째항이 108, 공차가 9인 등차수열이므로 제 n 항을 999라 하면

$$108 + (n-1) \times 9 = 999, \quad 9(n-1) = 891$$

$$\therefore n=100$$

따라서 구하는 합은 첫째항이 108, 제100항이 999인 등차수열의 첫째항부터 제100항까지의 합이므로

$$\frac{100(108+999)}{2} = 55350$$

10-3 ㉡ 1566

두 자리의 자연수 중에서 4로 나누어떨어지는 수, 즉 4의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$12, 16, 20, \cdots, 96$$

이는 첫째항이 12, 공차가 4인 등차수열이므로 96을 제 n 항이라 하면

$$12 + (n-1) \times 4 = 96, \quad 4(n-1) = 84$$

$$\therefore n=22$$

따라서 첫째항이 12, 제22항이 96인 등차수열의 첫째항부터 제22항까지의 합은

$$\frac{22(12+96)}{2}=1188 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

두 자리의 자연수 중에서 6으로 나누어떨어지는 수, 즉 6의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

12, 18, 24, $\dots$, 96

이는 첫째항이 12, 공차가 6인 등차수열이므로 96을 제 n 항이라 하면

$$12+(n-1)\times 6=96$$

$$6(n-1)=84$$

$$\therefore n=15$$

따라서 첫째항이 12, 제15항이 96인 등차수열의 첫째항부터 제15항까지의 합은

$$\frac{15(12+96)}{2}=810 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 4와 6으로 동시에 나누어떨어지는 수는 4와 6의 최소공배수인 12의 배수이므로 두 자리의 자연수 중에서 12의 배수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

12, 24, 36, $\dots$, 96

이는 첫째항이 12, 공차가 12인 등차수열이므로 96을 제 n 항이라 하면

$$12+(n-1)\times 12=96, \quad 12(n-1)=84$$

$$\therefore n=8$$

따라서 첫째항이 12이고 제8항이 96인 등차수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\frac{8(12+96)}{2}=432 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

따라서 $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$, $\textcircled{9}$ 에서 두 자리의 자연수 중에서 4 또는 6으로 나누어떨어지는 수의 총합은

$$1188+810-432=1566$$

11-1 [답] (1) $a_n=4n-5$

$$(2) a_1=3, a_n=2n+2 \quad (n\geq 2)$$

$$(1) S_n=2n^2-3n \text{에서}$$

(i) $n\geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 - 3n - \{2(n-1)^2 - 3(n-1)\} \\ &= 4n - 5 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 구하는 일반항 a_n 은

$$a_n=4n-5$$

$$(2) S_n=n^2+3n-1 \text{에서}$$

(i) $n\geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 3n - 1 - \{(n-1)^2 + 3(n-1) - 1\} \\ &= 2n + 2 \quad \dots\dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \times 1 - 1 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

이때 $\textcircled{4}$ 은 $\textcircled{3}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같지 않으므로 구하는 일반항 a_n 은

$$a_1=3, a_n=2n+2 \quad (n\geq 2)$$

11-2 [답] 29

$$S_n=2n^2-4n+1 \text{이므로}$$

$$a_1=S_1=2 \times 1^2 - 4 \times 1 + 1 = -1$$

$$\begin{aligned} a_9 &= S_9 - S_8 \\ &= (2 \times 9^2 - 4 \times 9 + 1) - (2 \times 8^2 - 4 \times 8 + 1) \\ &= 127 - 97 = 30 \end{aligned}$$

$$\therefore a_1 + a_9 = -1 + 30 = 29$$

11-3 [답] 150

$$S_n=n^2-6n \text{에서 } n\geq 2 \text{일 때,}$$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 6n - \{(n-1)^2 - 6(n-1)\} \\ &= 2n - 7 \end{aligned}$$

$a_n=2n-7$ 에 n 대신 $2n$ 을 대입하면

$$a_{2n}=2 \times 2n - 7 = 4n - 7$$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 -3 이고 공차가 4인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} &= \frac{10\{2 \times (-3) + (10-1) \times 4\}}{2} \\ &= 150 \end{aligned}$$

연습문제

177~179쪽

1 제61항	2 -20	3 ②	4 ③	5 24
6 ⑤	7 3, 5, 7	8 22	9 5	10 ③
11 600	12 ①	13 2295	14 ③	15 ②
16 ①	17 -14	18 (-112, 78)	19 2	
20 ①	21 ③	22 ②	23 16	

- 1 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 제31항이 85, 제45항이 127이므로

$$a + 30d = 85, a + 44d = 127$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -5, d = 3$$

주어진 등차수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -5 + (n-1) \times 3 = 3n - 8$$

이때 제 n 항을 175라 하면

$$3n - 8 = 175 \quad \therefore n = 61$$

따라서 175는 제61항이다.

- 2 제3항과 제9항은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로

$$a_3 = -a_9 \quad \therefore a_3 + a_9 = 0$$

이때 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$(a + 2d) + (a + 8d) = 0$$

$$\therefore a + 5d = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

제7항은 -5 이므로

$$a + 6d = -5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 25, d = -5$$

따라서 첫째항이 25, 공차가 -5 인 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 25 + (n-1) \times (-5) = -5n + 30$$

$$\therefore a_{10} = -5 \times 10 + 30 = -20$$

- 3 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_1 + a_2 = 132 \text{에서}$$

$$a + (a + d) = 132$$

$$\therefore 2a + d = 132 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_5 + a_6 + a_7 = 63 \text{에서}$$

$$(a + 4d) + (a + 5d) + (a + 6d) = 63$$

$$\therefore a + 5d = 21 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 71, d = -10$$

주어진 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 71 + (n-1) \times (-10)$$

$$= -10n + 81$$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면 $a_n < 0$ 에서

$$-10n + 81 < 0, 10n > 81$$

$$\therefore n > 8.1$$

그런데 n 은 자연수이므로 n 의 최솟값은 9이다.

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제9항이다.

- 4 첫째항을 a 라 하면 공차가 3, $a_{10} = -7$ 이므로

$$a + 9 \times 3 = -7 \quad \therefore a = -34$$

주어진 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = -34 + (n-1) \times 3$$

$$= 3n - 37$$

이때 $3n - 37 = 0$ 에서 $n = 12.3 \cdots$ 이므로

$$|a_{12}| = |3 \times 12 - 37| = 1$$

$$|a_{13}| = |3 \times 13 - 37| = 2$$

따라서 $|a_n|$ 의 값이 최소가 되는 자연수 n 의 값은 12이다.

- 5 공차를 d 라 하면 첫째항이 3, 제 $(m+2)$ 항이 78이므로

$$3 + (m+2-1)d = 78$$

$$\therefore (m+1)d = 75$$

이때 m, d 가 자연수이므로 $m+1$ 도 자연수이다.

따라서 $(m+1)d = 75$ 인 경우는 다음과 같다.

$m+1$	3	5	15	25	75
d	25	15	5	3	1

공차 d 는 1이 아니고 m 이 최대가 되어야 하므로

$$d = 3, m+1 = 25 \quad \therefore m = 24$$

따라서 m 의 최댓값은 24이다.

- 6 이차방정식 $x^2 - 3x - 6 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = -6$$

p 는 α, β 의 등차중항이므로

$$p = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{2}$$

q 는 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 의 등차중항이므로

$$q = \frac{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2\alpha\beta} = \frac{3}{2 \times (-6)} = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore p + q = \frac{3}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

- 7 세 수를 $a-d, a, a+d$ 라 하면

$$(a-d) + a + (a+d) = 15 \text{에서}$$

$$3a = 15 \quad \therefore a = 5$$

$$(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 83 \text{에서}$$

$$(5-d)^2 + 5^2 + (5+d)^2 = 83$$

$$d^2 = 4 \quad \therefore d = -2 \text{ 또는 } d = 2$$

따라서 구하는 세 수는 3, 5, 7이다.

- 8 세 실근을 $a-d$, a , $a+d$ 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a-d)+a+(a+d)=6$$

$$3a=6 \quad \therefore a=2$$

따라서 주어진 삼차방정식의 한 근이 2이므로

$$2^3-6 \times 2^2-3 \times 2+k=0$$

$$\therefore k=22$$

- 9 첫째항이 -11 , 끝항이 31 , 항수가 $m+2$ 인 등차수열의 합이 $-11+200+31=220$ 이므로

$$\frac{(m+2)(-11+31)}{2}=220$$

$$10(m+2)=220 \quad \therefore m=20$$

이때 공차를 d 라 하면 제22항이 31이므로

$$-11+(22-1)d=31 \quad \therefore d=2$$

따라서 x_8 은 제9항이므로

$$-11+(9-1) \times 2=5$$

10
$$S_n = \frac{n\{2 \times 60 + (n-1) \times (-4)\}}{2}$$

$$= -2n^2 + 62n$$

이때 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 처음으로 음수가 된다고 하면 $S_n < 0$ 에서

$$-2n^2 + 62n < 0, \quad n(n-31) > 0$$

$$\therefore n < 0 \text{ 또는 } n > 31$$

그런데 n 은 자연수이므로 n 의 최솟값은 32이다.

- 11 첫째항이 a_1 , 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제100항까지의 합이 200이므로

$$\frac{100\{2a_1 + (100-1) \times 4\}}{2} = 200$$

$$\therefore a_1 = -196$$

$$\therefore a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{101}$$

$$= S_{101} - a_1$$

$$= \frac{101\{2 \times (-196) + (101-1) \times 4\}}{2} - (-196)$$

$$= 404 + 196 = 600$$

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 4이므로

$$a_2 = a_1 + 4, \quad a_3 = a_2 + 4, \quad a_4 = a_3 + 4, \quad \cdots, \quad a_{101} = a_{100} + 4$$

$$\therefore a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{101}$$

$$= (a_1 + 4) + (a_2 + 4) + (a_3 + 4) + \cdots + (a_{100} + 4)$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100}) + 4 \times 100$$

$$= 200 + 4 \times 100 = 600$$

- 12 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_1 + a_3 + a_5 = 27$ 에서

$$a + (a+2d) + (a+4d) = 27$$

$$\therefore a + 2d = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이면 수열 $\{a_{2n}\}$ 도 등차수열이므로

$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20} = -310 \text{에서}$$

$$\frac{10(a_2 + a_{20})}{2} = -310$$

$$\frac{10\{(a+d) + (a+19d)\}}{2} = -310$$

$$\therefore a + 10d = -31 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 19, \quad d = -5$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{20} &= \frac{20\{2 \times 19 + (20-1) \times (-5)\}}{2} \\ &= -570 \end{aligned}$$

- 13 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $S_{10} = 165$ 이므로

$$\frac{10\{2a + (10-1)d\}}{2} = 165$$

$$\therefore 2a + 9d = 33 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 $S_{20} = 630$ 이므로

$$\frac{20\{2a + (20-1)d\}}{2} = 630$$

$$\therefore 2a + 19d = 63 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 3, \quad d = 3$$

$$\therefore a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{40}$$

$$= S_{40} - S_{10}$$

$$= \frac{40\{2 \times 3 + (40-1) \times 3\}}{2} - 165$$

$$= 2460 - 165$$

$$= 2295$$

- 14 S_n 이 최댓값을 가지므로 주어진 등차수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 음수이고 주어진 조건에서 S_{16} 의 값이 최대이므로 제16항은 양수이고, 제17항은 음수이다.

즉, 첫째항이 47이므로 공차를 d ($d < 0$)라 하면

$$a_n = 47 + (n-1)d$$

이때 $a_{16} > 0$, $a_{17} < 0$ 이므로

$$47 + 15d > 0 \quad \therefore d > -3.1 \cdots$$

$$47 + 16d < 0 \quad \therefore d < -2.9375$$

따라서 $-3.1 \cdots < d < -2.9375$ 를 만족시키는 정수 d 는

$$d = -3$$

- 15 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

2, 5, ⑧, 11, 14, 17, 20, ②③, 26, 29, 32, 35, ③⑧, ...

5로 나누었을 때의 나머지가 3인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

3, ⑧, 13, 18, ②③, 28, 33, ③⑧, ...

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 8, 23, 38, ...이므로 첫째항이 8이고 공차가 15인 등차수열이다.

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = \frac{10\{2 \times 8 + (10-1) \times 15\}}{2} = 755$$

- 16 $S_n = n^2 - 10n$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 10n - \{(n-1)^2 - 10(n-1)\} \\ &= 2n - 11 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 10 \times 1 = -9 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2n - 11$$

이때 $a_n < 0$ 에서 $2n - 11 < 0$

$$2n < 11 \quad \therefore n < 5.5$$

따라서 $a_n < 0$ 을 만족시키는 자연수 n 은 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

- 17 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 $A_n = 3n^2 + kn$, $B_n = 2n^2 + 5n$ 이라 하면

$$\begin{aligned} a_{10} &= A_{10} - A_9 \\ &= (3 \times 10^2 + 10k) - (3 \times 9^2 + 9k) = 57 + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{10} &= B_{10} - B_9 \\ &= (2 \times 10^2 + 5 \times 10) - (2 \times 9^2 + 5 \times 9) = 43 \end{aligned}$$

이때 $a_{10} = b_{10}$ 이므로

$$57 + k = 43 \quad \therefore k = -14$$

- 18 n 개의 점이 직선 l 위에 일정한 간격으로 놓여 있으므로 점 P_n 의 x 좌표와 y 좌표는 각각 등차수열을 이룬다.

점 P_n 의 x 좌표를 차례대로 나열하면

5, 2, -1, ...

이는 첫째항이 5, 공차가 -3인 등차수열이므로 일반항을 x_n 이라 하면

$$x_n = 5 + (n-1) \times (-3) = -3n + 8$$

또 점 P_n 의 y 좌표를 차례대로 나열하면

0, 2, 4, ...

이는 첫째항이 0, 공차가 2인 등차수열이므로 일반항을 y_n 이라 하면

$$y_n = 0 + (n-1) \times 2 = 2n - 2$$

$$\therefore x_{40} = -3 \times 40 + 8 = -112, y_{40} = 2 \times 40 - 2 = 78$$

따라서 점 P_{40} 의 좌표는 $(-112, 78)$

- 19 공차를 d 라 하면 첫째항이 5, 제 $(m+2)$ 항이 20이므로 $5 + (m+2-1)d = 20$

$$\therefore d = \frac{15}{m+1} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 제 $(m+n+3)$ 항이 50이므로

$$5 + (m+n+3-1)d = 50$$

$$\therefore d = \frac{45}{m+n+2} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } \frac{15}{m+1} = \frac{45}{m+n+2}$$

$$15(m+n+2) = 45(m+1) \quad \therefore 2m = n-1$$

$$\therefore \frac{n-1}{m} = \frac{2m}{m} = 2$$

- 20 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

(가)에서 $a_6 + a_8 = 0$ 이므로

$$(a+5d) + (a+7d) = 0$$

$$\therefore a = -6d$$

(나)에서 $|a_6| = |a_7| + 3$ 이므로

$$|a+5d| = |a+6d| + 3, |-d| = 3$$

$$\therefore d = 3 \quad (\because d > 0)$$

따라서 $a = -6 \times 3 = -18$ 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -18 + (n-1) \times 3 = 3n - 21$$

$$\therefore a_2 = 3 \times 2 - 21 = -15$$

다른 풀이

등차수열에서 a_7 은 a_6 과 a_8 의 등차중항이므로

$$a_7 = \frac{a_6 + a_8}{2}$$

(가)에서 $a_6 + a_8 = 0$ 이므로 $a_7 = 0$

이때 공차가 양수이므로

$$a_6 < a_7 = 0$$

(나)에서 $|a_6| = |a_7| + 3$ 이므로

$$-a_6 = 0 + 3 \quad \therefore a_6 = -3$$

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_6 = -3$, $a_7 = 0$ 이므로

$$a+5d = -3, a+6d = 0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -18, d = 3$$

$$\therefore a_2 = -18 + (2-1) \times 3 = -15$$

21 $a, b, -2$ 에서 b 는 a 와 -2 의 등차중항이므로
 $b = \frac{a-2}{2} \quad \therefore 2b = a-2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

$-2, d, f$ 에서 d 는 -2 와 f 의 등차중항이므로
 $d = \frac{-2+f}{2} \quad \therefore 2d = -2+f \quad \dots\dots \textcircled{8}$

$\textcircled{7} - \textcircled{8}$ 을 하면

$$2(b-d) = a-f$$

또 $b, c, 4$ 에서 c 는 b 와 4 의 등차중항이고, $5, c, d$ 에서 c 는 5 와 d 의 등차중항이므로

$$\frac{b+4}{2} = \frac{5+d}{2}, \quad b+4=5+d$$

$$\therefore b-d=1$$

$$\begin{aligned} \therefore a+b-d-f &= (a-f) + (b-d) \\ &= 2(b-d) + (b-d) \\ &= 3(b-d) = 3 \times 1 = 3 \end{aligned}$$

22 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_2 = -19$, $a_{13} = 25$ 이므로
 $a+d = -19$, $a+12d = 25$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -23, \quad d = 4$$

주어진 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = -23 + (n-1) \times 4 = 4n - 27$$

이때 $a_n > 0$ 에서 $4n - 27 > 0$

$$4n > 27 \quad \therefore n > 6.75$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제7항부터 양수이다.

$$a_6 = -3, \quad a_7 = 1, \quad a_{20} = 53 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} &|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_{20}| \\ &= -(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9 + \dots + a_{20}) \\ &= -\frac{6(-23-3)}{2} + \frac{14(1+53)}{2} \\ &= 78 + 378 = 456 \end{aligned}$$

23 수열 $\{S_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 S_1 , 공차가 -3 인 등차수열이므로

$$S_{2n-1} = S_1 + (n-1) \times (-3) = S_1 - 3n + 3$$

또 수열 $\{S_{2n}\}$ 은 첫째항이 S_2 , 공차가 2 인 등차수열이므로

$$S_{2n} = S_2 + (n-1) \times 2 = S_2 + 2n - 2$$

$$\begin{aligned} \therefore a_8 &= S_8 - S_7 \\ &= (S_2 + 2 \times 4 - 2) - (S_1 - 3 \times 4 + 3) \\ &= S_2 - S_1 + 15 \\ &= a_2 + 15 \quad (\because S_2 - S_1 = a_2) \\ &= 1 + 15 \quad (\because a_2 = 1) \\ &= 16 \end{aligned}$$

III-1 02 등비수열

1 등비수열

개념 CHECK

181쪽

1 답 (1) $\sqrt{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$

2 답 (1) 0.001 (2) -27

3 답 (1) $a_n = 4 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ (2) $a_n = 9 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}$

4 답 (1) $x = -3, y = -27$ 또는 $x = 3, y = 27$
 (2) $x = -2, y = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = 2, y = \frac{1}{2}$

(1) x 는 1과 9의 등비중항이므로

$$x^2 = 1 \times 9 \quad \therefore x = \pm 3$$

$x = -3$ 일 때, 공비가 -3 이므로

$$y = 9 \times (-3) = -27$$

$x = 3$ 일 때, 공비가 3 이므로

$$y = 9 \times 3 = 27$$

$$\therefore x = -3, y = -27 \text{ 또는 } x = 3, y = 27$$

(2) x 는 4와 1의 등비중항이므로

$$x^2 = 4 \times 1 \quad \therefore x = \pm 2$$

$x = -2$ 일 때 공비가 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$$y = 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$x = 2$ 일 때 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$y = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = -2, y = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 2, y = \frac{1}{2}$$

문제

182~187쪽

01-1 답 (1) $a_n = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ (2) $a_n = 2 \times (-3)^{n-1}$

(1) 공비를 r 라 하면 첫째항이 64, 제6항이 2이므로

$$64r^5 = 2, \quad r^5 = \frac{1}{32} \quad \therefore r = \frac{1}{2}$$

따라서 첫째항이 64, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열의 일반항

a_n 은

$$a_n = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2) 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 제2항이 -6 , 제5항이 162 이므로

$$ar = -6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^4 = 162 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$\frac{ar^4}{ar} = \frac{162}{-6}, r^3 = -27 \quad \therefore r = -3$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-3a = -6 \quad \therefore a = 2$$

따라서 첫째항이 2 , 공비가 -3 인 등비수열의 일반항

a_n 은

$$a_n = 2 \times (-3)^{n-1}$$

01-2 [답] $-64\sqrt{2}$

공비는 $-2\sqrt{2} \div 2 = -\sqrt{2}$

첫째항이 2 , 공비가 $-\sqrt{2}$ 인 등비수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 2 \times (-\sqrt{2})^{n-1}$$

$$\therefore a_{12} = 2 \times (-\sqrt{2})^{11} = -64\sqrt{2}$$

01-3 [답] 96

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 + a_5 = 54 \text{에서 } ar + ar^4 = 54$$

$$\therefore ar(1+r^3) = 54 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_3 + a_6 = 108 \text{에서 } ar^2 + ar^5 = 108$$

$$\therefore ar^2(1+r^3) = 108 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$\frac{ar^2(1+r^3)}{ar(1+r^3)} = \frac{108}{54} \quad \therefore r = 2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$18a = 54 \quad \therefore a = 3$$

따라서 첫째항이 3 , 공비가 2 인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

$$\therefore a_6 = 3 \times 2^5 = 96$$

02-1 [답] 제11항

첫째항이 2 , 공비가 2 인 등비수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

이때 제 n 항에서 처음으로 2000 보다 커진다고 하면

$$a_n > 2000 \text{에서 } 2^n > 2000$$

그런데 n 은 자연수이고 $2^{10} = 1024$, $2^{11} = 2048$ 이므로

$$n \geq 11$$

따라서 처음으로 2000 보다 커지는 항은 제11항이다.

02-2 [답] 6

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_2 = 5$, $a_4 = 25$ 이므로

$$ar = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^3 = 25 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$\frac{ar^3}{ar} = \frac{25}{5}, r^2 = 5 \quad \therefore r = \sqrt{5} (\because r > 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \sqrt{5}a = 5 \quad \therefore a = \sqrt{5}$$

첫째항이 $\sqrt{5}$, 공비가 $\sqrt{5}$ 인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = (\sqrt{5})^n \quad \therefore a_n^2 = 5^n$$

$$a_n^2 > 8000 \text{에서 } 5^n > 8000$$

그런데 n 은 자연수이고 $5^5 = 3125$, $5^6 = 15625$ 이므로

$$n \geq 6$$

따라서 n 의 최솟값은 6 이다.

02-3 [답] 21

첫째항이 4 , 공비가 3 인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 4 \times 3^{n-1}$$

$$a_n > 10^{10} \text{에서 } 4 \times 3^{n-1} > 10^{10}$$

$$3^{n-1} > \frac{10^{10}}{4}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 3^{n-1} > \log \frac{10^{10}}{4}$$

$$(n-1)\log 3 > \log 10^{10} - \log 2^2$$

$$\therefore n > \frac{10 - 2\log 2}{\log 3} + 1 = \frac{10 - 2 \times 0.3}{0.48} + 1 = 20.5 \dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 21 이다.

03-1 [답] 2

공비를 r 라 하면 첫째항이 2 , 제10항이 1024 이므로

$$2r^9 = 1024 \quad \therefore r^9 = 512$$

$$\therefore r = 2$$

03-2 [답] 1152

공비를 r 라 하면 첫째항이 6 , 제7항이 192 이므로

$$6r^6 = 192 \quad \therefore r^6 = 32$$

이때 x_2 , x_4 는 각각 제3항, 제5항이므로

$$x_2 x_4 = 6r^2 \times 6r^4 = 36r^6 = 36 \times 32 = 1152$$

03-3 [답] 5

첫째항이 3 , 공비가 3 인 등비수열의 제 $(m+2)$ 항이 2187

이므로

$$3 \times 3^{m+1} = 2187, 3^{m+1} = 729$$

따라서 $m+1=6$ 이므로 $m=5$

04-1 [답 8]

$3x$ 는 $x+1$ 과 $8x$ 의 등비중항이므로
 $(3x)^2 = (x+1) \times 8x$
 $9x^2 = 8x^2 + 8x, x^2 - 8x = 0$
 $x(x-8) = 0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=8$
 이때 $x+1, 3x, 8x$ 는 양수이므로 $x=8$

04-2 [답 $x=1, y=-2$]

x 는 4와 y 의 등차중항이므로
 $x = \frac{4+y}{2}$
 $\therefore 2x = 4+y \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 또 y 는 x 와 4의 등비중항이므로
 $y^2 = 4x \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $y^2 = 2(4+y), y^2 - 2y - 8 = 0$
 $(y+2)(y-4) = 0 \quad \therefore y = -2$ 또는 $y = 4$
 이때 공비가 음수인 등비수열에서 y 는 음수이므로 $y = -2$
 $y = -2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $2x = 4 - 2 \quad \therefore x = 1$

04-3 [답 125]

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = 25, \alpha\beta = k \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\beta - \alpha$ 는 α 와 β 의 등비중항이므로
 $(\beta - \alpha)^2 = \alpha\beta, (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha\beta$
 $\therefore (\alpha + \beta)^2 = 5\alpha\beta$
 $\textcircled{1}$ 을 이 식에 대입하면
 $25^2 = 5k \quad \therefore k = 125$

05-1 [답 1, 2, 4]

세 수를 a, ar, ar^2 이라 하면
 $a + ar + ar^2 = 7$
 $\therefore a(1+r+r^2) = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $a \times ar \times ar^2 = 8$
 $(ar)^3 = 8 \quad \therefore ar = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 에서 $a = \frac{2}{r}$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $\frac{2}{r}(1+r+r^2) = 7, 2r^2 - 5r + 2 = 0$
 $(2r-1)(r-2) = 0$
 $\therefore r = \frac{1}{2}$ 또는 $r = 2$
 이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 풀면 $a = 4$ 또는 $a = 1$
 따라서 세 수는 1, 2, 4이다.

05-2 [답 -8]

세 실근을 a, ar, ar^2 이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $a + ar + ar^2 = -4$
 $\therefore a(1+r+r^2) = -4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $a \times ar + ar \times ar^2 + a \times ar^2 = -8$
 $\therefore a^2r(1+r+r^2) = -8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $a \times ar \times ar^2 = -k$
 $\therefore (ar)^3 = -k \quad \dots\dots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면
 $\frac{a^2r(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)} = \frac{-8}{-4} \quad \therefore ar = 2$
 이를 $\textcircled{3}$ 에 대입하면
 $8 = -k \quad \therefore k = -8$

05-3 [답 40]

세 모서리의 길이 l, m, n 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $l = a, m = ar, n = ar^2$ 이라 하면 직육면체의 부피가 27이므로
 $a \times ar \times ar^2 = 27$
 $(ar)^3 = 27 \quad \therefore ar = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 또 겉넓이가 60이므로
 $2a^2r + 2a^2r^3 + 2a^2r^2 = 60$
 $2ar(a + ar + ar^2) = 60$
 $\therefore a + ar + ar^2 = 10 (\because \textcircled{1})$
 따라서 모든 모서리의 길이의 합은
 $4(l + m + n) = 4(a + ar + ar^2) = 4 \times 10 = 40$

06-1 [답 20번째]

처음 선분의 길이가 l 이므로 첫 번째 시행 후 남은 선분의 길이의 합은
 $\frac{2}{3}l$
 두 번째 시행 후 남은 선분의 길이의 합은
 $\frac{2}{3}l \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 l$
 세 번째 시행 후 남은 선분의 길이의 합은
 $\left(\frac{2}{3}\right)^2 l \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 l$
 $\vdots$
 n 번째 시행 후 남은 선분의 길이의 합은
 $\left(\frac{2}{3}\right)^n l$
 따라서 남은 선분의 길이의 합이 $\left(\frac{2}{3}\right)^{20} l$ 이 되는 것은 20번째 시행 후이다.

06-2 $\sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

한 번의 길이가 2인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$

첫 번째 시행 후 남은 종이의 넓이는 $\sqrt{3} \times \frac{3}{4}$

두 번째 시행 후 남은 종이의 넓이는

$$\sqrt{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

세 번째 시행 후 남은 종이의 넓이는

$$\sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} = \sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

⋮

n 번째 시행 후 남은 종이의 넓이는 $\sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

따라서 10번째 시행 후 남은 종이의 넓이는 $\sqrt{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$

2 등비수열의 합

문제

190~193쪽

07-1 $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$

첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{1 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{19}$$

07-2 $\frac{1}{18}(3^{10}-1)$

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 제4항이 6, 제6항이 54이므로

$$ar^3 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^5 = 54 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$\frac{ar^5}{ar^3} = \frac{54}{6}, r^2 = 9 \quad \therefore r = -3 \quad (\because r < 0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-27a = 6 \quad \therefore a = -\frac{2}{9}$$

따라서 첫째항이 $-\frac{2}{9}$, 공비가 -3 인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{-\frac{2}{9}\{1 - (-3)^{10}\}}{1 - (-3)} = \frac{1}{18}(3^{10} - 1)$$

07-3 $\frac{1}{4}(3^{20}-1)$

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_2 + a_4 = 15 \text{에서 } ar + ar^3 = 15$$

$$\therefore ar(1 + r^2) = 15 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_4 + a_6 = 135 \text{에서 } ar^3 + ar^5 = 135$$

$$\therefore ar^3(1 + r^2) = 135 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$\frac{ar^3(1+r^2)}{ar(1+r^2)} = \frac{135}{15}, r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 \quad (\because r > 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 30a = 15 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore S_{20} = \frac{\frac{1}{2}(3^{20}-1)}{3-1} = \frac{1}{4}(3^{20}-1)$$

08-1 $\frac{1}{2}126$

첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $S_4 = 18$ 이므로

$$\frac{a(1-r^4)}{1-r} = 18 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } S_8 = 54 \text{이므로 } \frac{a(1-r^8)}{1-r} = 54$$

$$\therefore \frac{a(1-r^4)(1+r^4)}{1-r} = 54 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$18(1+r^4) = 54 \quad \therefore r^4 = 2$$

따라서 첫째항부터 제12항까지의 합은

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{a(1-r^{12})}{1-r} = \frac{a(1-r^4)(1+r^4+r^8)}{1-r} \\ &= 18(1+2+2^2) = 126 \end{aligned}$$

08-2 $\frac{1}{3}324$

첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $S_{10} = 9$ 이므로

$$\frac{a(1-r^{10})}{1-r} = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } S_{20} = 63 \text{이므로 } \frac{a(1-r^{20})}{1-r} = 63$$

$$\therefore \frac{a(1-r^{10})(1+r^{10})}{1-r} = 63 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$9(1+r^{10}) = 63 \quad \therefore r^{10} = 6$$

따라서 제21항부터 제30항까지의 합은

$$\begin{aligned} S_{30} - S_{20} &= \frac{a(1-r^{30})}{1-r} - 63 \\ &= \frac{a(1-r^{10})(1+r^{10}+r^{20})}{1-r} - 63 \\ &= 9(1+6+6^2) - 63 \\ &= 387 - 63 = 324 \end{aligned}$$

09-1 [답] 108

$$S_n = 2 \times 3^n - 2 \text{에서}$$

$$a_4 = S_4 - S_3 = 2 \times 3^4 - 2 - (2 \times 3^3 - 2)$$

$$= 2 \times 3^3(3 - 1) = 108$$

09-2 [답] -36

$$S_n = 4 \times 3^{n+2} + k \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 4 \times 3^{n+2} + k - (4 \times 3^{n+1} + k)$$

$$= 4 \times 3^{n+1}(3 - 1)$$

$$= 8 \times 3^{n+1} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 4 \times 3^3 + k = 108 + k \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값이 $\textcircled{8}$ 과 같아야 하므로

$$8 \times 3^2 = 108 + k, \quad 72 = 108 + k$$

$$\therefore k = -36$$

09-3 [답] 13

$$3S_n + 1 = 10^n \text{에서 } S_n = \frac{10^n - 1}{3}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= \frac{10^n - 1}{3} - \frac{10^{n-1} - 1}{3}$$

$$= \frac{10^{n-1}}{3}(10 - 1) = 3 \times 10^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = \frac{10 - 1}{3} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 \times 10^{n-1}$$

따라서 $a=3, r=10$ 이므로 $a+r=13$

10-1 [답] (1) 4941000원 (2) 4575000원

(1) 연이율 8%, 1년마다 복리로 매년 초에 10만 원씩 20년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$10(1+0.08) + 10(1+0.08)^2 + \dots + 10(1+0.08)^{20}$$

$$= \frac{10(1+0.08)\{(1+0.08)^{20} - 1\}}{(1+0.08) - 1}$$

$$= \frac{10 \times 1.08 \times 3.66}{0.08}$$

$$= 494.1(\text{만 원})$$

따라서 20년 말의 적립금의 원리합계는 4941000원이 다.

(2) 연이율 8%, 1년마다 복리로 매년 말에 10만 원씩 20년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$10 + 10(1+0.08) + 10(1+0.08)^2 + \dots + 10(1+0.08)^{19}$$

$$= \frac{10\{(1+0.08)^{20} - 1\}}{(1+0.08) - 1}$$

$$= \frac{10 \times 3.66}{0.08}$$

$$= 457.5(\text{만 원})$$

따라서 20년 말의 적립금의 원리합계는 4575000원이 다.

10-2 [답] 2505000원

월이율 0.2%, 1개월마다 복리로 매월 초에 10만 원씩 24개월 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$10(1+0.002) + 10(1+0.002)^2 + \dots + 10(1+0.002)^{24}$$

$$= \frac{10(1+0.002)\{(1+0.002)^{24} - 1\}}{(1+0.002) - 1}$$

$$= \frac{10 \times 1.002 \times 0.05}{0.002}$$

$$= 250.5(\text{만 원})$$

따라서 24개월 말의 적립금의 원리합계는 2505000원이 다.

연습문제

194~196쪽

1 ⑤	2 $\frac{1}{2}$	3 ④	4 ④	5 ③
6 10	7 108	8 3	9 8	10 $\frac{3^{10}}{2^{19}}$
11 $\frac{1}{2}(3^{30}-1)$	12 6	13 425	14 ④	
15 63	16 ㄱ, ㄷ	17 ④	18 100만 원	
19 10	20 ②	21 48000원		

1 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 제3항이 12, 제6항이 -96이므로

$$ar^2 = 12 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$ar^5 = -96 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8} \div \textcircled{7}$ 을 하면

$$\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{-96}{12}, \quad r^3 = -8 \quad \therefore r = -2$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $4a = 12 \quad \therefore a = 3$

따라서 첫째항과 공비의 합은

$$3 + (-2) = 1$$

- 2 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_3 + a_4 = 24$ 에서

$$ar^2 + ar^3 = 24 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $a_3 : a_4 = 2 : 1$ 에서 $\frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{ar^3}{ar^2} = \frac{1}{2} \quad \therefore r = \frac{1}{2}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{1}{4}a + \frac{1}{8}a = 24 \quad \therefore a = 64$$

따라서 첫째항이 64, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_8 = 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{2}$$

- 3 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공비를 각각 r , s 라 하면

$$a_8 b_8 = a_5 r^3 \times b_5 s^3 = a_5 b_5 (rs)^3$$

$$20 = 10(rs)^3 \quad \therefore (rs)^3 = 2$$

$$\therefore a_{11} b_{11} = a_8 r^3 \times b_8 s^3 = a_8 b_8 (rs)^3 = 20 \times 2 = 40$$

- 4 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_2 = 6$, $a_5 = 48$ 이므로

$$ar = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^4 = 48 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$\frac{ar^4}{ar} = \frac{48}{6}, r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $2a = 6 \quad \therefore a = 3$

따라서 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

이때 제 n 항에서 처음으로 3000보다 커진다고 하면

$$a_n > 3000 \text{에서}$$

$$3 \times 2^{n-1} > 3000, 2^{n-1} > 1000$$

그런데 n 은 자연수이고 $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$ 이므로

$$n-1 \geq 10 \quad \therefore n \geq 11$$

따라서 처음으로 3000보다 커지는 항은 제11항이다.

- 5 공비를 r 라 하면 첫째항이 9, 제6항이 $\frac{32}{27}$ 이므로

$$9r^5 = \frac{32}{27}, r^5 = \frac{32}{243} \quad \therefore r = \frac{2}{3}$$

이때 x_2 , x_3 은 각각 제3항, 제4항이므로

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{9r^2}{9r^3} = \frac{1}{r} = \frac{3}{2}$$

- 6 $a+b$ 는 a 와 $2a-b$ 의 등차중항이므로

$$a+b = \frac{a+(2a-b)}{2}$$

$$2a+2b=3a-b$$

$$\therefore a=3b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $a-1$ 은 1과 $3b+1$ 의 등비중항이므로

$$(a-1)^2 = 1 \times (3b+1)$$

$$a^2 - 2a + 1 = 3b + 1$$

$$\therefore a^2 - 2a = 3b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$a^2 - 2a = a, a^2 - 3a = 0$$

$$a(a-3) = 0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } a=3$$

그런데 공비가 양수인 등비수열에서 $a-1$ 은 양수이므로

$$a=3$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $b=1$

$$\therefore a^2 + b^2 = 9 + 1 = 10$$

- 7 $2^4 \times 3^6$ 은 a^n 과 b^n 의 등비중항이므로

$$(2^4 \times 3^6)^2 = a^n \times b^n$$

$$\therefore (ab)^n = (2^2 \times 3^3)^4$$

이때 자연수 n 이 최대일 때, ab 의 값이 최소이므로 $n=4$

$$\text{일 때 } ab \text{의 최솟값은 } 2^2 \times 3^3 = 108$$

- 8 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_1 = a, a_2 = a + d, a_5 = a + 4d \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$a+d$ 는 a 와 $a+4d$ 의 등비중항이므로

$$(a+d)^2 = a(a+4d), a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 4ad$$

$$d^2 = 2ad \quad \therefore d = 2a \quad (\because d \neq 0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a_1 = a, a_2 = 3a, a_5 = 9a$

따라서 구하는 공비는 3이다.

- 9 곡선 $y = x^3 - 3x^2$ 과 직선 $y = 6x - k$ 의 세 교점의 x 좌표를

a, ar, ar^2 이라 하면 a, ar, ar^2 은 방정식 $x^3 - 3x^2 = 6x - k$,

즉 $x^3 - 3x^2 - 6x + k = 0$ 의 세 실근이다.

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + ar + ar^2 = 3$$

$$\therefore a(1+r+r^2) = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + a \times ar^2 = -6$$

$$\therefore a^2 r(1+r+r^2) = -6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$a \times ar \times ar^2 = -k$$

$$\therefore (ar)^3 = -k \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$\frac{a^2 r(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)} = \frac{-6}{3} \quad \therefore ar = -2$$

이를 $\textcircled{3}$ 에 대입하면 $-8 = -k \quad \therefore k = 8$

- 10 정삼각형 R_2 의 한 변의 길이 a_2 는

$$a_2 = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

정삼각형 R_3 의 한 변의 길이 a_3 은

$$a_3 = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

정삼각형 R_4 의 한 변의 길이 a_4 는

$$a_4 = \sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$\vdots$

정삼각형 R_n 의 한 변의 길이 a_n 은

$$a_n = \sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{20} = \sqrt{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{19} = \frac{3^{10}}{2^{19}}$$

- 11 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_3 = 10 \text{에서 } a + ar^2 = 10$$

$$\therefore a(1+r^2) = 10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_3 + a_5 = 90 \text{에서 } ar^2 + ar^4 = 90$$

$$\therefore ar^2(1+r^2) = 90 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$\frac{ar^2(1+r^2)}{a(1+r^2)} = \frac{90}{10}, r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 (\because r > 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 10a = 10 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore S_{30} = \frac{1 \times (3^{30} - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^{30} - 1)$$

- 12 공비가 3, 제 n 항이 729이므로 첫째항을 a 라 하면

$$a \times 3^{n-1} = 729 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

첫째항부터 제 n 항까지의 합이 1092이므로

$$\frac{a(3^n - 1)}{3 - 1} = 1092$$

$$\therefore a \times 3^n - a = 2184 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$729 \times 3 - a = 2184 \quad \therefore a = 3$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$3 \times 3^{n-1} = 729, 3^n = 729$$

$$\therefore n = 6$$

- 13 첫째항을 a , 공비를 r , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n

이라 하면 $S_4 = 5$ 이므로

$$\frac{a(1-r^4)}{1-r} = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_{12} = 105 \text{이므로 } \frac{a(1-r^{12})}{1-r} = 105$$

$$\therefore \frac{a(1-r^4)(1+r^4+r^8)}{1-r} = 105 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$5(1+r^4+r^8) = 105, 1+r^4+r^8 = 21$$

$$(r^4)^2 + r^4 - 20 = 0, (r^4 + 5)(r^4 - 4) = 0$$

$$\therefore r^4 = 4 (\because r^4 > 0)$$

따라서 첫째항부터 제16항까지의 합은

$$\begin{aligned} S_{16} &= \frac{a(1-r^{16})}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^8)(1+r^8)}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^4)(1+r^4)(1+r^8)}{1-r} \\ &= 5(1+4)(1+4^2) \\ &= 425 \end{aligned}$$

- 14 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$S_k = \frac{a(1-r^k)}{1-r}, S_{2k} = \frac{a(1-r^{2k})}{1-r}$$

$$S_{2k} = 4S_k \text{이므로 } \frac{S_{2k}}{S_k} = 4$$

$$\therefore \frac{S_{2k}}{S_k} = \frac{\frac{a(1-r^{2k})}{1-r}}{\frac{a(1-r^k)}{1-r}} = \frac{1-r^{2k}}{1-r^k}$$

$$= \frac{(1-r^k)(1+r^k)}{1-r^k}$$

$$= 1+r^k = 4$$

$$\therefore r^k = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{이때 } S_{3k} = \frac{a(1-r^{3k})}{1-r} \text{이므로}$$

$$\frac{S_{3k}}{S_k} = \frac{\frac{a(1-r^{3k})}{1-r}}{\frac{a(1-r^k)}{1-r}} = \frac{1-r^{3k}}{1-r^k}$$

$$= \frac{(1-r^k)(1+r^k+r^{2k})}{1-r^k}$$

$$= 1+r^k+r^{2k}$$

$$= 1+3+3^2 (\because \textcircled{1})$$

$$= 13$$

- 15 공비를 r 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{S_9 - S_5}{S_6 - S_2} &= \frac{a_6 + a_7 + a_8 + a_9}{a_3 + a_4 + a_5 + a_6} \\ &= \frac{ar^5 + ar^6 + ar^7 + ar^8}{ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5} \\ &= \frac{ar^5(1+r+r^2+r^3)}{ar^2(1+r+r^2+r^3)} \\ &= r^3 \end{aligned}$$

따라서 $r^3 = 3$ 이므로

$$a_7 = 7r^6 = 7 \times 3^2 = 63$$

16 $\neg$. $S_n = 3^{n+1} - 2$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3^{n+1} - 2 - (3^n - 2) \\ &= 3^n(3 - 1) \\ &= 2 \times 3^n \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 3^2 - 2 = 7 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n = 1$ 을 대입한 값과 같지 않으므로

$$a_1 = 7, a_n = 2 \times 3^n \quad (n \geq 2)$$

$\therefore a_1 = 7, a_n = 2 \times 3^n \quad (n \geq 2)$ 이므로

$$a_1 + a_3 = 7 + 2 \times 3^3 = 7 + 54 = 61$$

$\therefore a_n = 2 \times 3^n \quad (n \geq 2)$ 이므로

$$a_{2n} = 2 \times 3^{2n} = 2 \times 9^n \quad (n \geq 1)$$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 공비가 9인 등비수열이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, $\textcircled{7}$ 이다.

17 $\log_2(S_n + k) = n + 2$ 에서 $S_n + k = 2^{n+2}$

$$\therefore S_n = 2^{n+2} - k$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2^{n+2} - k - (2^{n+1} - k) \\ &= 2^{n+1}(2 - 1) = 2^{n+1} \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2^3 - k = 8 - k \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $\textcircled{8}$ 에 $n = 1$ 을 대입한 값이 $\textcircled{7}$ 과 같아야 하므로

$$2^2 = 8 - k, 4 = 8 - k$$

$$\therefore k = 4$$

18 연이율 2%, 1년마다 복리로 매년 초에 a 만 원씩 5년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$a(1+0.02) + a(1+0.02)^2 + \dots + a(1+0.02)^5$$

$$= \frac{a(1+0.02)\{(1+0.02)^5 - 1\}}{(1+0.02) - 1}$$

$$= \frac{a \times 1.02 \times 0.1}{0.02}$$

$$= 5.1a \text{ (만 원)}$$

이때 적립금의 원리합계가 510만 원이어야 하므로

$$5.1a = 510$$

$$\therefore a = 100$$

따라서 매년 초에 100만 원씩 적립해야 한다.

19 첫째항이 1000, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

주어진 수열은 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로 1000부터 시작하여 항의 값이 감소하므로 1보다 큰 값이 나오는 마지막 항까지의 곱이 최대이다.

이때 제 n 항에서 1보다 큰 수가 나온다고 하면 $a_n > 1$ 에서

$$1000 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > \frac{1}{1000}$$

$$\text{그런데 } n \text{은 자연수이고 } \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}, \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \text{이므로}$$

$$n-1 \leq 9 \quad \therefore n \leq 10$$

따라서 $a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n$ 의 값이 최대가 되는 n 의 값은 10이다.

20 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이므로 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 도 등비수열이다.

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $T_2 = \frac{1}{2}$,

$$T_4 = 4 \text{이므로}$$

$$\frac{a(1-r^2)}{1-r} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\frac{a(1-r^4)}{1-r} = 4 \quad \therefore \frac{a(1-r^2)(1+r^2)}{1-r} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ 을 $\textcircled{8}$ 에 대입하면

$$\frac{1}{2}(1+r^2) = 4 \quad \therefore r^2 = 7$$

$$\begin{aligned} \therefore T_8 &= \frac{a(1-r^8)}{1-r} = \frac{a(1-r^4)(1+r^4)}{1-r} \\ &= 4(1+7^2) = 200 \end{aligned}$$

21 100만 원의 24개월 동안의 원리합계는

$$100(1+0.008)^{24} = 100 \times 1.008^{24} = 120 \text{ (만 원)}$$

또 이달 말부터 매달 a 만 원씩 24개월 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$a + a(1+0.008) + a(1+0.008)^2 + \dots + a(1+0.008)^{23}$$

$$= \frac{a\{(1+0.008)^{24} - 1\}}{(1+0.008) - 1}$$

$$= \frac{a(1.2 - 1)}{0.008} = 25a \text{ (만 원)}$$

이때 적립금의 원리합계가 120만 원이어야 하므로

$$25a = 120 \quad \therefore a = 4.8$$

따라서 매달 지불해야 하는 금액은 48000원이다.

III-2 01 수열의 합

1 합의 기호 Σ 와 그 성질

개념 CHECK

199쪽

1 [답] (1) $\sum_{k=1}^{49} k(k+1)$ (2) $\sum_{k=1}^7 5$

(3) $\sum_{k=1}^{13} \frac{1}{2k-1}$ (4) $\sum_{k=1}^{20} 3^k$

2 [답] (1) $2+2^2+2^3+2^4+2^5$
 (2) $-1+2-3+\cdots+(-1)^n \times n$
 (3) $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{20 \times 22}$
 (4) $5+7+9+\cdots+15$

3 [답] (1) 10 (2) 4 (3) 21 (4) 16
 (1) $\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k = 7 + 3 = 10$
 (2) $\sum_{k=1}^5 (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^5 a_k - \sum_{k=1}^5 b_k = 7 - 3 = 4$
 (3) $\sum_{k=1}^5 3a_k = 3 \sum_{k=1}^5 a_k = 3 \times 7 = 21$
 (4) $\sum_{k=1}^5 (2b_k + 2) = 2 \sum_{k=1}^5 b_k + \sum_{k=1}^5 2$
 $= 2 \times 3 + 2 \times 5 = 16$

문제

200~201쪽

01-1 [답] 381

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} (a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \cdots + (a_{19} + a_{20}) \\ &= \sum_{k=1}^{20} a_k \\ &= 20^2 - 20 + 1 = 381 \end{aligned}$$

01-2 [답] 9

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{99} k(a_k - a_{k+1}) \\ &= (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \cdots + 99(a_{99} - a_{100}) \\ &= a_1 + (2-1)a_2 + (3-2)a_3 + \cdots + (99-98)a_{99} - 99a_{100} \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{99} - 99a_{100} \\ &= \sum_{k=1}^{99} a_k - 99a_{100} \\ &= 20 - 99 \times \frac{1}{9} = 9 \end{aligned}$$

01-3 [답] 60

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{14} f(k+1) - \sum_{k=2}^{15} f(k-1) \\ &= f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(15) \\ & \quad - \{f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(14)\} \\ &= f(15) - f(1) \\ &= 80 - 20 = 60 \end{aligned}$$

02-1 [답] (1) -100 (2) $\frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}}$

$$\begin{aligned} (1) & \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 1)^2 - \sum_{k=1}^{10} (a_k + 3)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{10} \{ (2a_k - 1)^2 - (a_k + 3)^2 \} \\ &= \sum_{k=1}^{10} (3a_k^2 - 10a_k - 8) \\ &= 3 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - 10 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} 8 \\ &= 3 \times 10 - 10 \times 5 - 8 \times 10 = -100 \\ (2) & \sum_{k=1}^{12} \frac{6^{k-1} - 3^k - 2^{k+1}}{6^k} \\ &= \sum_{k=1}^{12} \left\{ \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{2}\right)^k - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^k \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{6} - \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 2 \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ &= \frac{1}{6} \times 12 - \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \right\} \\ & \quad - 2 \left\{ \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \right\} \\ &= 2 - \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} - 2 \times \frac{\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \right\}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 2 - \left(1 - \frac{1}{2^{12}}\right) - \left(1 - \frac{1}{3^{12}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} \end{aligned}$$

02-2 [답] -5

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 (2a_k + b_k) &= 2 \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k \\ &= 2 \times (-4 \times 5) + (5^2 + 2 \times 5) \\ &= -5 \end{aligned}$$

02-3 [답] 38

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (2^k + 2) - \sum_{k=5}^n (2^k + 2) \\ &= \sum_{k=1}^4 (2^k + 2) = \sum_{k=1}^4 2^k + \sum_{k=1}^4 2 \\ &= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2 \times 4 \\ &= \frac{2(2^4 - 1)}{2 - 1} + 8 = 38 \end{aligned}$$

1 [답] (1) 120 (2) 316 (3) 2870 (4) 1296

$$(1) \sum_{k=1}^{15} k = \frac{15 \times 16}{2} = 120$$

$$(2) \sum_{k=1}^6 k^2 + \sum_{k=1}^5 k^3 = \frac{6 \times 7 \times 13}{6} + \left(\frac{5 \times 6}{2}\right)^2$$

$$= 91 + 225 = 316$$

$$(3) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2 = \frac{20 \times 21 \times 41}{6} = 2870$$

$$(4) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 8^3 = \left(\frac{8 \times 9}{2}\right)^2 = 1296$$

문제

203~206쪽

03-1 [답] (1) -264 (2) $\frac{315}{2}$

$$(1) \sum_{k=1}^8 (4k - 2k^2) = 4 \sum_{k=1}^8 k - 2 \sum_{k=1}^8 k^2$$

$$= 4 \times \frac{8 \times 9}{2} - 2 \times \frac{8 \times 9 \times 17}{6}$$

$$= 144 - 408 = -264$$

$$(2) \sum_{k=1}^{10} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6k}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \frac{(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \frac{2k^2 + 3k + 1}{6}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{10} k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{10 \times 11}{2} + \frac{1}{6} \times 10$$

$$= \frac{385}{3} + \frac{55}{2} + \frac{5}{3} = \frac{315}{2}$$

03-2 [답] 7665

$$\sum_{k=5}^9 k(2k-1)(2k+1)$$

$$= \sum_{k=5}^9 (4k^3 - k)$$

$$= \sum_{k=1}^9 (4k^3 - k) - \sum_{k=1}^4 (4k^3 - k)$$

$$= 4 \sum_{k=1}^9 k^3 - \sum_{k=1}^9 k - 4 \sum_{k=1}^4 k^3 + \sum_{k=1}^4 k$$

$$= 4 \times \left(\frac{9 \times 10}{2}\right)^2 - \frac{9 \times 10}{2} - 4 \times \left(\frac{4 \times 5}{2}\right)^2 + \frac{4 \times 5}{2}$$

$$= 8100 - 45 - 400 + 10 = 7665$$

03-3 [답] 20

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^2 - \sum_{k=1}^n (k-1)^2 = \sum_{k=1}^n \{(k+1)^2 - (k-1)^2\}$$

$$= \sum_{k=1}^n 4k = 4 \sum_{k=1}^n k$$

$$= 4 \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 2n(n+1)$$

이때 $2n(n+1) = 840$ 이므로

$$n(n+1) = 420, \quad n^2 + n - 420 = 0$$

$$(n+21)(n-20) = 0 \quad \therefore n = 20 \quad (\because n > 0)$$

04-1 [답] (1) $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$

$$(2) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(1) 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n^2(n+1) = n^3 + n^2$$

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (k^3 + k^2)$$

$$= \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$$

(2) 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)$$

$$= \sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1$$

$$= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

04-2 [답] 806

수열 $1 \times 3, 2 \times 4, 3 \times 5, \dots, 12 \times 14$ 의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n(n+2) = n^2 + 2n$$

이때 구하는 식의 값은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 12항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = \sum_{k=1}^{12} (k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^{12} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{12} k$$

$$= \frac{12 \times 13 \times 25}{6} + 2 \times \frac{12 \times 13}{2}$$

$$= 650 + 156 = 806$$

05-1 [답] (1) 2200 (2) $5n(n+12)$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \sum_{k=1}^5 \left(\sum_{j=1}^{10} jk^2 \right) - \sum_{k=1}^{10} \left(\sum_{j=1}^5 jk \right) \\
 &= \sum_{k=1}^5 \left(k^2 \sum_{j=1}^{10} j \right) - \sum_{k=1}^{10} \left(k \sum_{j=1}^5 j \right) \\
 &= \sum_{k=1}^5 \left(k^2 \times \frac{10 \times 11}{2} \right) - \sum_{k=1}^{10} \left(k \times \frac{5 \times 6}{2} \right) \\
 &= 55 \sum_{k=1}^5 k^2 - 15 \sum_{k=1}^{10} k \\
 &= 55 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} - 15 \times \frac{10 \times 11}{2} \\
 &= 3025 - 825 = 2200 \\
 (2) \quad & \sum_{l=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^{10} (k+l) \right\} = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} l \right) \\
 &= \sum_{l=1}^n \left(\frac{10 \times 11}{2} + l \times 10 \right) \\
 &= \sum_{l=1}^n (10l + 55) \\
 &= 10 \sum_{l=1}^n l + \sum_{l=1}^n 55 \\
 &= 10 \times \frac{n(n+1)}{2} + 55 \times n \\
 &= 5n^2 + 60n = 5n(n+12)
 \end{aligned}$$

05-2 [답] 4

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=1}^l 6 \right) \right\} &= \sum_{m=1}^n \left(\sum_{l=1}^m 6l \right) \\
 &= \sum_{m=1}^n \left\{ 6 \times \frac{m(m+1)}{2} \right\} \\
 &= \sum_{m=1}^n (3m^2 + 3m) \\
 &= 3 \sum_{m=1}^n m^2 + 3 \sum_{m=1}^n m \\
 &= 3 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} \\
 &= n^3 + 3n^2 + 2n
 \end{aligned}$$

이때 $n^3 + 3n^2 + 2n = 120$ 에서

$$n^3 + 3n^2 + 2n - 120 = 0$$

$$(n-4)(n^2 + 7n + 30) = 0$$

그런데 n 은 자연수이므로 $n=4$

06-1 [답] 1400

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\
 &= 2n \quad \dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $\textcircled{1}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 2n$

따라서 $a_{2k} = 2 \times 2k = 4k$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{20} (k-12)a_{2k} &= \sum_{k=1}^{20} (k-12)4k = \sum_{k=1}^{20} (4k^2 - 48k) \\
 &= 4 \sum_{k=1}^{20} k^2 - 48 \sum_{k=1}^{20} k \\
 &= 4 \times \frac{20 \times 21 \times 41}{6} - 48 \times \frac{20 \times 21}{2} \\
 &= 11480 - 10080 = 1400
 \end{aligned}$$

06-2 [답] 2728

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2^{n+1} + 1$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= 2^{n+1} + 1 - (2^n + 1) \\
 &= 2^n(2-1) = 2^n \quad \dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2^2 + 1 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $\textcircled{1}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같지 않으므로 일반항 a_n 은 $a_1=5$, $a_n=2^n$ ($n \geq 2$)

따라서 $a_{2k+1} = 2^{2k+1} = 2 \times 4^k$ ($k \geq 1$)이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^5 a_{2k+1} &= \sum_{k=1}^5 (2 \times 4^k) \\
 &= 2 \times \frac{4(4^5 - 1)}{4 - 1} \\
 &= 2728
 \end{aligned}$$

06-3 [답] 1524

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 - 11n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= n^2 - 11n - \{(n-1)^2 - 11(n-1)\} \\
 &= 2n - 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 11 \times 1 = -10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $\textcircled{1}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 2n - 12$

따라서 $a_{2k} = 2 \times 2k - 12 = 4k - 12$ 이므로 $a_{2k} \geq 0$ 을 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$4k - 12 \geq 0 \quad \therefore k \geq 3$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^{30} |a_{2k}| &= -\sum_{k=1}^2 a_{2k} + \sum_{k=3}^{30} a_{2k} \\
 &= -\sum_{k=1}^2 a_{2k} + \sum_{k=1}^{30} a_{2k} - \sum_{k=1}^2 a_{2k} \\
 &= \sum_{k=1}^{30} a_{2k} - 2 \sum_{k=1}^2 a_{2k} \\
 &= \sum_{k=1}^{30} (4k-12) - 2 \sum_{k=1}^2 (4k-12) \\
 &= 4 \sum_{k=1}^{30} k - \sum_{k=1}^{30} 12 - 2 \left\{ \underset{k=1}{-8} + \underset{k=2}{(-4)} \right\} \\
 &= 4 \times \frac{30 \times 31}{2} - 12 \times 30 + 24 \\
 &= 1860 - 360 + 24 \\
 &= 1524
 \end{aligned}$$

3 여러 가지 수열의 합

개념 CHECK

207쪽

1 답 (1) $\frac{10}{39}$ (2) $4-\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}
 (1) \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(k+2)(k+3)} &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{13} \right) \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{13} = \frac{10}{39} \\
 (2) \sum_{k=1}^{13} \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+3}} &= \sum_{k=1}^{13} (\sqrt{k+3} - \sqrt{k+2}) \\
 &= (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + \cdots + (\sqrt{16} - \sqrt{15}) \\
 &= \sqrt{16} - \sqrt{3} \\
 &= 4 - \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

문제

208~209쪽

07-1 답 $\frac{n}{4(n+1)}$

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{1}{4n^2 + 4n}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 + 4k} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{n}{4(n+1)}
 \end{aligned}$$

07-2 답 $\frac{9}{5}$

수열 $1, \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2+3}, \cdots, \frac{1}{1+2+3+\cdots+9}$ 의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} \\
 &= \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^9 a_k &= \sum_{k=1}^9 \frac{2}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^9 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\
 &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \right\} \\
 &= 2 \left(1 - \frac{1}{10} \right) = \frac{9}{5}
 \end{aligned}$$

07-3 답 $\frac{5}{12}$

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 3n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= n^2 + 3n - \{ (n-1)^2 + 3(n-1) \} \\
 &= 2n + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}
 \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \times 1 = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n

은 $a_n = 2n + 2$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{4}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{4}{(2k+2)(2k+4)} \\
 &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
 &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

08-1 [답 5]

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \\ \therefore \sum_{k=1}^{60} a_k &= \sum_{k=1}^{60} \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{60} \frac{\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{60} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}) \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{121} - \sqrt{119}) \} \\ &= \frac{1}{2} (-1 + 11) \\ &= 5 \end{aligned}$$

08-2 [답 $2\sqrt{3}$]

첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$\begin{aligned} a_n &= 3 + (n-1) \times 2 = 2n+1 \\ \therefore \sum_{k=1}^{36} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} &= \sum_{k=1}^{36} \frac{1}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k+3}} \\ &= \sum_{k=1}^{36} \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k+3}}{(\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k+3})(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k+3})} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{36} (\sqrt{2k+3} - \sqrt{2k+1}) \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + (\sqrt{9} - \sqrt{7}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{75} - \sqrt{73}) \} \\ &= \frac{1}{2} (-\sqrt{3} + 5\sqrt{3}) \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

08-3 [답 30]

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2})} \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \\ &= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) \\ &= -\sqrt{2} + \sqrt{n+2} \\ \text{이때 } -\sqrt{2} + \sqrt{n+2} &= 3\sqrt{2} \text{ 이므로} \\ \sqrt{n+2} &= 4\sqrt{2}, n+2=32 \\ \therefore n &= 30 \end{aligned}$$

연습문제

212~215쪽

1 ②	2 ③	3 ②	4 58	5 ③
6 ①	7 ②	8 ③	9 ②	10 91
11 ③	12 ③	13 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$	14 ②	
15 ④	16 $\frac{72}{55}$	17 ①	18 ①	19 18
20 ③	21 1240	22 690	23 201	24 ③
25 1729				

1. $\neg$. $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$
 $\cup$. $\sum_{k=1}^n 3^k = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n$
 $\sum_{k=2}^{n+1} 3^k = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{n+1}$
 $\therefore \sum_{k=1}^n 3^k \neq \sum_{k=2}^{n+1} 3^k$
 $\cap$. $\sum_{i=1}^{m-1} a_i + \sum_{j=m}^n a_j$
 $= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}) + (a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)$
 $= \sum_{k=1}^n a_k$ (단, $n \geq m \geq 2$)
 $\exists$. $\sum_{k=1}^n (a_{3k} + a_{3k+1} + a_{3k+2})$
 $= a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{3n} + a_{3n+1} + a_{3n+2}$
 $\sum_{k=3}^{3n} a_k = a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_{3n}$
 $\therefore \sum_{k=1}^n (a_{3k} + a_{3k+1} + a_{3k+2}) \neq \sum_{k=3}^{3n} a_k$
따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, $\cap$ 이다.

2. $\sum_{k=1}^{100} ka_k = 600$ 에서
 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + 100a_{100} = 600$ ㉠

$$\sum_{k=1}^{99} ka_{k+1} = 300 \text{에서}$$

$$a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \cdots + 99a_{100} = 300$$
 ㉡

㉠ - ㉡을 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 300$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{100} a_k = 300$$

3. $\sum_{k=1}^{40} (a_k + a_{k+1}) = (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{40} + a_{41})$
 $= a_1 + 2(a_2 + a_3 + \cdots + a_{40}) + a_{41}$
 $= 2 \sum_{k=1}^{40} a_k - a_1 + a_{41} = 30$ ㉢

$$\sum_{k=1}^{20} (a_{2k-1} + a_{2k}) = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{39} + a_{40})$$

$$= \sum_{k=1}^{40} a_k = 10$$

이를 ㉠에 대입하면

$$2 \times 10 - a_1 + a_{41} = 30$$

$$\therefore a_1 - a_{41} = -10$$

4 $\sum_{k=1}^{10} k(a_k - a_{k+1})$

$$= (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \cdots + 10(a_{10} - a_{11})$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} - 10a_{11}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} a_k - 10a_{11}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} a_k - 280 = -165$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = 115$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_{11} = 28$ 이므로

$$a + 10d = 28 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } \sum_{k=1}^{10} a_k = 115 \text{ 이므로}$$

$$\frac{10(2a + 9d)}{2} = 115$$

$$\therefore 2a + 9d = 23 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -2, d = 3$$

$$\therefore a_{21} = -2 + 20 \times 3 = 58$$

5 $\sum_{k=1}^{30} \log_5 \{\log_{k+1}(k+2)\}$

$$= \log_5 (\log_2 3) + \log_5 (\log_3 4) + \log_5 (\log_4 5)$$

$$+ \cdots + \log_5 (\log_{31} 32)$$

$$= \log_5 (\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5 \times \cdots \times \log_{31} 32)$$

$$= \log_5 \left(\frac{\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 4}{\log 3} \times \frac{\log 5}{\log 4} \times \cdots \times \frac{\log 32}{\log 31} \right)$$

$$= \log_5 \left(\frac{\log 32}{\log 2} \right)$$

$$= \log_5 5 = 1$$

6 $a_n + b_n = 10$ 이고 $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k) = 160$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10} b_k = \sum_{k=1}^{10} \{(a_k + 2b_k) - (a_k + b_k)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k) - \sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k)$$

$$= 160 - \sum_{k=1}^{10} 10$$

$$= 160 - 10 \times 10 = 60$$

7 $\sum_{k=1}^{10} a_k = \alpha, \sum_{k=1}^{10} b_k = \beta$ 라 하면

$$\sum_{k=1}^{10} (3a_k - 2b_k + 1) = 15 \text{에서}$$

$$3 \sum_{k=1}^{10} a_k - 2 \sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=1}^{10} 1 = 15$$

$$3\alpha - 2\beta + 1 \times 10 = 15 \quad \therefore 3\alpha - 2\beta = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } \sum_{k=1}^{10} (2a_k + 5b_k) = 130 \text{에서}$$

$$2 \sum_{k=1}^{10} a_k + 5 \sum_{k=1}^{10} b_k = 130$$

$$\therefore 2\alpha + 5\beta = 130 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$\alpha = 15, \beta = 20$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k$$

$$= \alpha + \beta = 15 + 20 = 35$$

8 $\sum_{k=1}^8 \left(2^{k+1} - \frac{1}{6} k^3 \right) = \sum_{k=1}^8 2^{k+1} - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^8 k^3$

$$= \frac{4(2^8 - 1)}{2 - 1} - \frac{1}{6} \times \left(\frac{8 \times 9}{2} \right)^2$$

$$= 1020 - 216 = 804$$

9 $\sum_{k=2}^{20} \frac{k^3}{k-1} - \sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k-1} = \sum_{k=2}^{20} \frac{k^3 - 1}{k-1}$

$$= \sum_{k=2}^{20} \frac{(k-1)(k^2 + k + 1)}{k-1}$$

$$= \sum_{k=2}^{20} (k^2 + k + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{20} (k^2 + k + 1) - (1^2 + 1 + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} 1 - 3$$

$$= \frac{20 \times 21 \times 41}{6} + \frac{20 \times 21}{2} + 1 \times 20 - 3$$

$$= 2870 + 210 + 20 - 3$$

$$= 3097$$

10 다항식 $2x^2 - 3x + 1$ 을 $x - n$ 으로 나누었을 때의 나머지 a_n 은

$$a_n = 2n^2 - 3n + 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^7 (a_n - n^2 + n) = \sum_{n=1}^7 (2n^2 - 3n + 1 - n^2 + n)$$

$$= \sum_{n=1}^7 (n^2 - 2n + 1)$$

$$= \sum_{n=1}^7 n^2 - 2 \sum_{n=1}^7 n + \sum_{n=1}^7 1$$

$$= \frac{7 \times 8 \times 15}{6} - 2 \times \frac{7 \times 8}{2} + 1 \times 7$$

$$= 140 - 56 + 7 = 91$$

11 $\sum_{k=1}^{11} (k-a)(2k-a)$

$$= \sum_{k=1}^{11} (2k^2 - 3ak + a^2)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{11} k^2 - 3a \sum_{k=1}^{11} k + \sum_{k=1}^{11} a^2$$

$$= 2 \times \frac{11 \times 12 \times 23}{6} - 3a \times \frac{11 \times 12}{2} + a^2 \times 11$$

$$= 11a^2 - 198a + 1012$$

$$= 11(a-9)^2 + 121$$

따라서 $a=9$ 일 때 최솟값 121을 가지므로

$a=9$

12 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_1 = 1 = 1 \times 1$$

$$a_2 = 2 + 4 = 2(1+2)$$

$$a_3 = 3 + 6 + 9 = 3(1+2+3)$$

$$a_4 = 4 + 8 + 12 + 16 = 4(1+2+3+4)$$

$$\vdots$$

$$\therefore a_n = n(1+2+3+\cdots+n)$$

$$= n \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^3 + n^2}{2}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제15항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{15} a_k = \sum_{k=1}^{15} \frac{k^3 + k^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{15} k^3 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{15} k^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{15 \times 16}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{15 \times 16 \times 31}{6}$$

$$= 7200 + 620$$

$$= 7820$$

13 수열 $1 \times n, 2 \times (n-1), 3 \times (n-2), \dots, n \times 1$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = k \times \{n - (k-1)\} = -k^2 + (n+1)k$$

$$\therefore 1 \times n + 2 \times (n-1) + 3 \times (n-2) + \cdots + n \times 1$$

$$= \sum_{k=1}^n a_k$$

$$= \sum_{k=1}^n \{-k^2 + (n+1)k\}$$

$$= -\sum_{k=1}^n k^2 + (n+1) \sum_{k=1}^n k$$

$$= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1) \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

14 $\sum_{k=1}^{10} \left\{ \sum_{m=1}^n 2^m (2k-1) \right\}$

$$= \sum_{k=1}^{10} \left\{ (2k-1) \sum_{m=1}^n 2^m \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \left\{ (2k-1) \times \frac{2(2^n-1)}{2-1} \right\}$$

$$= 2(2^n-1) \sum_{k=1}^{10} (2k-1)$$

$$= 2(2^n-1) \left(2 \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 1 \right)$$

$$= 2(2^n-1) \left(2 \times \frac{10 \times 11}{2} - 1 \times 10 \right)$$

$$= 200(2^n-1)$$

$$\therefore a=200$$

15 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{n}{n+1}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2 + n} \quad \dots\dots \textcircled{\gamma}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{\delta}$$

이때 $\textcircled{\delta}$ 은 $\textcircled{\gamma}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n

$$\text{은 } a_n = \frac{1}{n^2 + n}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{12} (k^2 + k) = \sum_{k=1}^{12} k^2 + \sum_{k=1}^{12} k$$

$$= \frac{12 \times 13 \times 25}{6} + \frac{12 \times 13}{2}$$

$$= 650 + 78 = 728$$

16 $x^2 + 2x - n^2 + 1 = 0$ 의 두 근이 a_n, b_n 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n + b_n = -2, \quad a_n b_n = -n^2 + 1$$

$$\therefore \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k} \right) = \sum_{k=2}^{10} \frac{a_k + b_k}{a_k b_k} = \sum_{k=2}^{10} \frac{2}{k^2 - 1}$$

$$= \sum_{k=2}^{10} \frac{2}{(k-1)(k+1)}$$

$$= \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{72}{55}$$

17 $a_1=S_1=2$, $a_{k+1}=S_{k+1}-S_k$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{S_{k+1}-S_k}{S_k S_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k+1}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} \right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} \right) + \left(\frac{1}{S_3} - \frac{1}{S_4} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{S_{10}} - \frac{1}{S_{11}} \right) \\ &= \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{11}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{S_{11}} = \frac{1}{3} \\ \therefore \frac{1}{S_{11}} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ \therefore S_{11} &= 6\end{aligned}$$

18 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2n^2 + n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 + n - \{2(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 4n - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 + 1 = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 4n - 1$

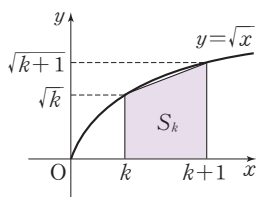
$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{80} \frac{2}{\sqrt{a_k+1} + \sqrt{a_{k+1}+1}} &= \sum_{k=1}^{80} \frac{2}{\sqrt{4k+1} + \sqrt{4k+5}} \\ &= \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{80} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\ &= \sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{81} - \sqrt{80}) \\ &= -1 + 9 = 8\end{aligned}$$

19 오른쪽 그림과 같이 네 점

$$\begin{aligned}(k, 0), (k+1, 0), (k, \sqrt{k}), \\ (k+1, \sqrt{k+1})\end{aligned}$$

을 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이 S_k 는

$$\begin{aligned}S_k &= \frac{1}{2} \times (\sqrt{k} + \sqrt{k+1}) \times 1 \\ &= \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}{2}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{S_k} &= \sum_{k=1}^{99} \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{99} \frac{2(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{99} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= 2\{(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99})\} \\ &= 2(-1 + 10) = 18\end{aligned}$$

20 $\sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$ 에서 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}$ 의 각 항의 값은 0, 1, 3 중 하나이므로 항의 값이 1인 항의 개수를 a , 항의 값이 3인 항의 개수를 b 라 하면

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 10 \text{에서 } 1 \times a + 3 \times b = 10$$

$$\therefore a + 3b = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 22 \text{에서 } 1^2 \times a + 3^2 \times b = 22$$

$$\therefore a + 9b = 22 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=4, b=2$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k^3 = 1^3 \times 4 + 3^3 \times 2 = 58$$

21 각 행에 나열된 모든 수의 합을 구해 보면

$$a_1 = 1 = 1^2$$

$$a_2 = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$$

$$a_3 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9 = 3^2$$

$$a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16 = 4^2$$

$\vdots$

$$a_n = n^2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{15} a_k = \sum_{k=1}^{15} k^2 = \frac{15 \times 16 \times 31}{6} = 1240$$

22 수열 $\{na_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $S_n = n(n+1)(n+2)$ 이므로

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}na_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) \\ &= 3n(n+1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1 \times 2 \times 3 = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항

na_n 은

$$na_n = 3n(n+1) \quad \therefore a_n = 3(n+1)$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \sum_{k=1}^{10} (a_{2k-1} + a_{2k}) \\
&= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{19} + a_{20}) \\
&= \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} 3(k+1) = 3 \sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} 3 \\
&= 3 \times \frac{20 \times 21}{2} + 3 \times 20 \\
&= 630 + 60 = 690
\end{aligned}$$

23 $f(n) < k < f(n) + 1$ 에서

$$n^2 + n - \frac{1}{3} < k < n^2 + n + \frac{2}{3}$$

이 부등식을 만족시키는 정수 k 의 값은 $n^2 + n$ 이므로

$$a_n = n^2 + n$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}
\end{aligned}$$

따라서 $p=101$, $q=100$ 이므로 $p+q=201$

24 $S_{10} = 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2^2} + \cdots + 10 \times \frac{1}{2^9}$

등비수열의 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로 $S_{10} - \frac{1}{2}S_{10}$ 을 하면

$$\begin{aligned}
S_{10} &= 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2^2} + \cdots + 10 \times \frac{1}{2^9} \\
- \frac{1}{2}S_{10} &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2^2} + \cdots + 9 \times \frac{1}{2^9} + 10 \times \frac{1}{2^{10}} \\
\frac{1}{2}S_{10} &= 1 + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2^2} + \cdots + 1 \times \frac{1}{2^9} - 10 \times \frac{1}{2^{10}} \\
&= \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} - 10 \times \frac{1}{2^{10}} = 2 - 3 \times \frac{1}{2^8}
\end{aligned}$$

$$\therefore S_{10} = 4 - \frac{3}{2^7}$$

따라서 $a=4$, $b=3$ 이므로 $a+b=7$

25 위에서 k 번째 줄에 나열된 수의 개수는 $2k-1$ 이므로 첫 번째 줄부터 9번째 줄까지 나열된 수의 개수는

$$\sum_{k=1}^9 (2k-1) = 2 \sum_{k=1}^9 k - \sum_{k=1}^9 1 = 2 \times \frac{9 \times 10}{2} - 1 \times 9 = 81$$

즉, 위에서 10번째 줄의 첫 번째 수는 82이고 10번째 줄의 항의 개수는 $2 \times 10 - 1 = 19$ 이므로 10번째 줄에 나열된 모든 수의 합은 첫째항이 82, 공차가 1인 등차수열의 첫째항부터 제19항까지의 합과 같다.

$$\therefore \frac{19\{2 \times 82 + (19-1) \times 1\}}{2} = 1729$$

III-2 02 수학적 귀납법

1 수열의 귀납적 정의

문제

217~223쪽

01-1 답 (1) -13 (2) 47

(1) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 5, 공차가 -2인 등차수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 5 + (n-1) \times (-2) = -2n + 7$$

$$\therefore a_{10} = -2 \times 10 + 7 = -13$$

(2) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 5인 등차수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 + (n-1) \times 5 = 5n - 3$$

$$\therefore a_{10} = 5 \times 10 - 3 = 47$$

01-2 답 20

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 -2, 공차가 6인 등차수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -2 + (n-1) \times 6 = 6n - 8$$

이때 $a_k = 112$ 에서

$$6k - 8 = 112 \quad \therefore k = 20$$

01-3 답 42

$2a_{n+1} - a_n - a_{n+2} = 0$, 즉 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

공차를 d 라 하면 $a_1 = 20$, $a_4 = 11$ 이므로

$$20 + 3d = 11 \quad \therefore d = -3$$

따라서 주어진 수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 20 + (n-1) \times (-3) = -3n + 23$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{12} a_k = \sum_{k=1}^{12} (-3k + 23)$$

$$= -3 \sum_{k=1}^{12} k + \sum_{k=1}^{12} 23$$

$$= -3 \times \frac{12 \times 13}{2} + 23 \times 12$$

$$= -234 + 276 = 42$$

02-1 답 (1) 2×5^{11} (2) 2048

(1) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 5인 등비수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 \times 5^{n-1} \quad \therefore a_{12} = 2 \times 5^{11}$$

(2) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 -1, 공비가 -2인 등비수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -1 \times (-2)^{n-1} \quad \therefore a_{12} = 2^{11} = 2048$$

02-2 [답] $3^{16}-3$

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 6, 공비가 3인 등비수열이므로

$$\sum_{k=1}^{15} a_k = \frac{6(3^{15}-1)}{3-1} \\ = 3^{16}-3$$

02-3 [답] 4

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 즉 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 5, 공비가 5인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{5(5^n-1)}{5-1} = \frac{5}{4}(5^n-1)$$

이때 $S_n \geq 400$ 에서 $\frac{5}{4}(5^n-1) \geq 400$

$$5^n-1 \geq 320 \quad \therefore 5^n \geq 321$$

$$5^3=125, 5^4=625 \text{이므로 } n \geq 4$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

03-1 [답] 393

$a_{n+1} = a_n + 4n - 2$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + 4 \times 1 - 2$$

$$a_3 = a_2 + 4 \times 2 - 2$$

$$a_4 = a_3 + 4 \times 3 - 2$$

$\vdots$

$$+) a_n = a_{n-1} + 4 \times (n-1) - 2$$

$$a_n = a_1 + 4\{1+2+3+\cdots+(n-1)\} - 2(n-1)$$

$$\therefore a_n = a_1 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} k - 2(n-1)$$

$$= 1 + 4 \times \frac{(n-1)n}{2} - 2(n-1)$$

$$= 2n^2 - 4n + 3$$

$$\therefore a_{15} = 2 \times 15^2 - 4 \times 15 + 3 = 393$$

03-2 [답] 제7항

$a_{n+1} - a_n = 3^n$ 에서 $a_{n+1} = a_n + 3^n$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + 3^1$$

$$a_3 = a_2 + 3^2$$

$$a_4 = a_3 + 3^3$$

$\vdots$

$$+) a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}$$

$$a_n = a_1 + (3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1})$$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 1 + \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} = \frac{1}{2}(3^n-1)$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 제 k 항이 1093이라 하면

$$\frac{1}{2}(3^k-1) = 1093, 3^k = 2187$$

$$\therefore k=7$$

따라서 1093은 제7항이다.

03-3 [답] $\sqrt{3}$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \text{에서}$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})} \\ = a_n + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + \sqrt{2} - \sqrt{1}$$

$$a_3 = a_2 + \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$a_4 = a_3 + \sqrt{4} - \sqrt{3}$$

$\vdots$

$$+) a_n = a_{n-1} + \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

$$a_n = a_1 + \sqrt{n} - 1$$

$$\therefore a_n = a_1 + \sqrt{n} - 1 = \sqrt{n}$$

$$\therefore a_{75} - a_{48} = \sqrt{75} - \sqrt{48} \\ = 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

04-1 [답] $\frac{2}{11}$

$$a_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) a_n \text{에서}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+2)-1}{n+2} a_n = \frac{n+1}{n+2} a_n$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$$a_2 = \frac{2}{3} a_1$$

$$a_3 = \frac{3}{4} a_2$$

$$a_4 = \frac{4}{5} a_3$$

$\vdots$

$$\times) a_n = \frac{n}{n+1} a_{n-1}$$

$$a_n = a_1 \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{n}{n+1}\right)$$

$$\therefore a_n = a_1 \times \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n+1}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{2}{11}$$

04-2 [답 23]

$a_{n+1} = (\sqrt{3})^n \times a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$$\begin{aligned} a_2 &= (\sqrt{3})^1 \times a_1 \\ a_3 &= (\sqrt{3})^2 \times a_2 \\ a_4 &= (\sqrt{3})^3 \times a_3 \\ &\vdots \\ \times) \quad a_n &= (\sqrt{3})^{n-1} \times a_{n-1} \\ a_n &= a_1 \times \sqrt{3} \times (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3})^3 \times \cdots \times (\sqrt{3})^{n-1} \\ \therefore a_n &= a_1 \times (\sqrt{3})^{1+2+\cdots+(n-1)} \\ &= \sqrt{3} \times (\sqrt{3})^{\frac{(n-1)n}{2}} \\ &= 3^{\frac{n^2-n+2}{4}} \end{aligned}$$

따라서 $a_{10} = 3^{23}$ 이므로
 $\log_3 a_{10} = \log_3 3^{23} = 23$

04-3 [답 16]

$\sqrt{n+1}a_{n+1} = \sqrt{n}a_n$ 에서

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} a_n$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} a_1 \\ a_3 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a_2 \\ a_4 &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} a_3 \\ &\vdots \\ \times) \quad a_n &= \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} a_{n-1} \\ a_n &= a_1 \times \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \times \cdots \times \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \right) \\ \therefore a_n &= a_1 \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

이때 $a_k = \frac{1}{4}$ 에서

$$\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{4}, \sqrt{k} = 4 \quad \therefore k = 16$$

05-1 [답 242]

$a_{n+1} = 3a_n + 2$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= 3a_1 + 2 = 3 \times 2 + 2 = 8 \\ a_3 &= 3a_2 + 2 = 3 \times 8 + 2 = 26 \\ a_4 &= 3a_3 + 2 = 3 \times 26 + 2 = 80 \\ \therefore a_5 &= 3a_4 + 2 = 3 \times 80 + 2 = 242 \end{aligned}$$

05-2 [답 30]

$$a_1 = 1 \text{ 이므로 } a_2 = \frac{a_1 + 3}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2$$

$$a_2 = 2 \text{ 이므로 } a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_3 = 1 \text{ 이므로 } a_4 = \frac{a_3 + 3}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1 & (n \text{은 홀수}) \\ 2 & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k = 10 \sum_{k=1}^2 a_k = 10(1+2) = 30$$

05-3 [답 8]

$a_1 = 3$ 이므로 $11a_1 = 11 \times 3 = 33$ 을 7로 나누었을 때의 나머지는 5

$$\therefore a_2 = 5$$

$11a_2 = 11 \times 5 = 55$ 를 7로 나누었을 때의 나머지는 6

$$\therefore a_3 = 6$$

$11a_3 = 11 \times 6 = 66$ 을 7로 나누었을 때의 나머지는 3

$$\therefore a_4 = 3$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 3 & (n=3k-2) \\ 5 & (n=3k-1) \text{ (단, } k \text{는 자연수)} \\ 6 & (n=3k) \end{cases}$$

이때 $2020 = 3 \times 674 - 2$, $2021 = 3 \times 674 - 1$ 이므로

$$a_{2020} + a_{2021} = 3 + 5 = 8$$

06-1 [답 96]

$S_{n+1} = 2S_n$ 에서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $S_1 = a_1 = 3$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$S_n = 3 \times 2^{n-1}$$

수열의 합과 일반항 사이의 관계에서

$$a_7 = S_7 - S_6 = 3 \times 2^6 - 3 \times 2^5 = 96$$

06-2 [답 $\left(\frac{4}{3}\right)^7$]

$S_n = 4a_n - 3$ 의 n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$S_{n+1} = 4a_{n+1} - 3$$

$S_{n+1} - S_n$ 을 하면

$$S_{n+1} - S_n = 4a_{n+1} - 3 - (4a_n - 3) = 4a_{n+1} - 4a_n$$

이때 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1} = 4a_{n+1} - 4a_n, 3a_{n+1} = 4a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{4}{3} a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $S_1=a_1=1$, 공비가 $\frac{4}{3}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = 1 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \quad \therefore a_8 = \left(\frac{4}{3}\right)^7$$

06-3 [답] -93

$S_n = 2a_n + 3n$ 의 n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$S_{n+1} = 2a_{n+1} + 3(n+1)$$

$S_{n+1} - S_n$ 을 하면

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= 2a_{n+1} + 3n + 3 - (2a_n + 3n) \\ &= 2a_{n+1} - 2a_n + 3 \end{aligned}$$

이때 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n + 3$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n - 3$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$a_2 = 2a_1 - 3 = 2 \times (-3) - 3 = -9$$

$$a_3 = 2a_2 - 3 = 2 \times (-9) - 3 = -21$$

$$a_4 = 2a_3 - 3 = 2 \times (-21) - 3 = -45$$

$$\therefore a_5 = 2a_4 - 3 = 2 \times (-45) - 3 = -93$$

07-1 [답] $a_1=3, a_{n+1}=a_n+3(n+1)$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

처음 정삼각형의 아래쪽에 작은 정삼각형 여러 개가 추가된다고 생각하면 성냥개비의 총개수 a_n 은

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = a_1 + 3 \times 2 \quad \blacktriangleleft a_1 \text{에 작은 정삼각형 2개 추가}$$

$$a_3 = a_2 + 3 \times 3 \quad \blacktriangleleft a_2 \text{에 작은 정삼각형 3개 추가}$$

$\vdots$

$$\therefore a_{n+1} = a_n + 3(n+1) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

07-2 [답] $a_1=4, a_{n+1}=\frac{4}{5}a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

농도가 5%인 소금물 160g에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{5}{100} \times 160 = 8(g)$$

1회 시행 후 소금물 200g의 농도는

$$\frac{8}{200} \times 100 = 4(\%)$$

$$\therefore a_1 = 4$$

$a_n\%$ 인 소금물 160g에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{a_n}{100} \times 160 = \frac{8}{5}a_n(g)$$

이때 물 40g을 넣은 소금물 200g의 농도는 $a_{n+1}\%$ 이므로

$$a_{n+1} = \frac{\frac{8}{5}a_n}{200} \times 100 = \frac{4}{5}a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

2 수학적 귀납법

개념 CHECK

224쪽

1 [답] ㄴ, ㄷ

ㄱ. $p(1)$ 이 참이면 $p(3), p(5), p(7), \dots$ 도 참이다.

ㄴ. $p(2)$ 가 참이면 $p(4), p(6), p(8), \dots$ 도 참이다.

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $p(1), p(2)$ 가 참이면 모든 자연수 n 에 대하여 $p(n)$ 이 참이다.

문제

225~226쪽

08-1 [답] 풀이 참조

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}, (\text{우변}) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

따라서 $n=1$ 일 때 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

이 등식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ 을 더하면

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k+1}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

08-2 [답] 풀이 참조

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{2}, (\text{우변}) = 2 - \frac{1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

따라서 $n=1$ 일 때 등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k}$$

이 등식의 양변에 $\frac{k+1}{2^{k+1}}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{k}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} &= 2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{k+1}{2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{k+3}{2^{k+1}} \\ &= 2 - \frac{(k+1)+2}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

09-1 [답 풀이 참조]

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n > 2^n \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

(i) $n=4$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24, (\text{우변}) = 2^4 = 16$$

따라서 $n=4$ 일 때 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 4$)일 때, 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k > 2^k$$

이 부등식의 양변에 $k+1$ 을 곱하면

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k \times (k+1) > 2^k \times (k+1)$$

이때 $k+1 > 2$ 이므로

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k \times (k+1) > 2^{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 4$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

09-2 [답 풀이 참조]

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

(i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}, (\text{우변}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

따라서 $n=2$ 일 때 부등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$$

이 부등식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$ 을 더하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

이때

$$\begin{aligned} &\left\{ 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \right\} - \left(2 - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= -\frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{-(k+1)^2 + k + k(k+1)}{k(k+1)^2} = -\frac{1}{k(k+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1} \text{이므로}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

연습문제

227~229쪽

1 ㉢	2 ㉠	3 ㉢	4 ㉢	5 46
6 50	7 ㉢	8 ㉠	9 ㉢	10 134
11 16	12 ㉢	13 (가) 9 (나) $9^k - 1$	14 5	
15 11	16 ㉡	17 ㉣		

1 $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$, 즉 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_5 = 11$, $a_9 = 19$ 이므로

$$a + 4d = 11 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$a + 8d = 19 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 3$, $d = 2$

따라서 주어진 수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1$$

이때 $a_n > 100$ 에서

$$2n + 1 > 100, 2n > 99 \quad \therefore n > 49.5$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 50이다.

2 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이므로

$$S_n = \frac{n\{2 \times 2 + (n-1) \times 2\}}{2} = n(n+1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{S_k} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \end{aligned}$$

3 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3인 등비수열이므로 공비를 r 라 하면 $\log_3 a_6 = 6$ 이므로

$$\log_3 3r^5 = 6, 3r^5 = 3^6 \quad \therefore r = 3$$

따라서 주어진 수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$$

$$\therefore a_{10} = 3^{10}$$

- 4 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 즉 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $S_3=78$, $S_6=2184$ 이므로

$$\frac{a(r^3-1)}{r-1}=78 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\frac{a(r^6-1)}{r-1}=2184$$

$$\therefore \frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=2184 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ 을 $\textcircled{8}$ 에 대입하면 $78(r^3+1)=2184$

$$r^3+1=28, r^3=27 \quad \therefore r=3$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$\frac{a(27-1)}{3-1}=78 \quad \therefore a=6$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 6, 공비가 3인 등비수열이므로

$$S_9 = \frac{6(3^9-1)}{3-1} = 3(3^9-1) = 3^{10}-3$$

- 5 $a_{n+1}-a_n=n$ 에서 $a_{n+1}=a_n+n$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2=a_1+1$$

$$a_3=a_2+2$$

$$a_4=a_3+3$$

$\vdots$

$$+) a_n = a_{n-1} + (n-1)$$

$$a_n = a_1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$$

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2-n+2}{2}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{10^2-10+2}{2} = 46$$

- 6 $(n+1)^2 a_{n+1} = n(n+2)a_n$ 에서

$$a_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right) \left(\frac{n+2}{n+1}\right) a_n$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$$a_2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} a_1$$

$$a_3 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} a_2$$

$$a_4 = \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} a_3$$

$\vdots$

$$\times) a_n = \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n} a_{n-1}$$

$$a_n = a_1 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n+1}{n}$$

$$\therefore a_n = a_1 \times \frac{n+1}{2n} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\text{이때 } a_k = \frac{51}{100} \text{에서}$$

$$\frac{k+1}{2k} = \frac{51}{100}$$

$$\therefore k=50$$

- 7 $a_1=7$ 이고 $a_{n+1}=2a_n-5$ 의 n 에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$$a_2=2a_1-5=2 \times 7-5=9$$

$$a_3=2a_2-5=2 \times 9-5=13$$

$$a_4=2a_3-5=2 \times 13-5=21$$

$$a_5=2a_4-5=2 \times 21-5=37$$

$$a_6=2a_5-5=2 \times 37-5=69$$

$$\therefore a_6-a_3=69-13=56$$

- 8 $a_1=2$ 이므로

$$a_2 = \frac{a_1}{2-3a_1} = \frac{2}{2-3 \times 2} = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 = 1 + a_2 = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{2-3a_3} = \frac{\frac{1}{2}}{2-3 \times \frac{1}{2}} = 1$$

$$a_5 = 1 + a_4 = 1 + 1 = 2$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 2 & (n=4k-3) \\ -\frac{1}{2} & (n=4k-2) \\ \frac{1}{2} & (n=4k-1) \\ 1 & (n=4k) \end{cases} \quad (\text{단, } k \text{는 자연수})$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{40} a_n &= 10 \sum_{n=1}^4 a_n \\ &= 10 \left\{ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + 1 \right\} \\ &= 10 \times 3 = 30 \end{aligned}$$

- 9 $S_n = -a_n + 2n$ 의 n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$S_{n+1} = -a_{n+1} + 2(n+1)$$

$S_{n+1}-S_n$ 을 하면

$$\begin{aligned} S_{n+1}-S_n &= -a_{n+1} + 2(n+1) - (-a_n + 2n) \\ &= -a_{n+1} + a_n + 2 \end{aligned}$$

이때 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1} = -a_{n+1} + a_n + 2$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, 4, 5를 차례대로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + 1 = \frac{1}{2} \times 1 + 1 = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{4}$$

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{7}{4} + 1 = \frac{15}{8}$$

$$a_5 = \frac{1}{2}a_4 + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{15}{8} + 1 = \frac{31}{16}$$

$$\therefore a_6 = \frac{1}{2}a_5 + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{31}{16} + 1 = \frac{63}{32}$$

- 10** n 시간 후 살아 있는 단세포 생물의 수를 a_n 이라 하면 1시간 후 살아 있는 단세포 생물의 수 a_1 은 10마리에서 3마리가 죽고 나머지는 각각 2마리로 분열하므로

$$a_1 = (10 - 3) \times 2 = 14$$

같은 방법으로 a_2, a_3, a_4, a_5 를 구하면

$$a_2 = (a_1 - 3) \times 2 = (14 - 3) \times 2 = 22$$

$$a_3 = (a_2 - 3) \times 2 = (22 - 3) \times 2 = 38$$

$$a_4 = (a_3 - 3) \times 2 = (38 - 3) \times 2 = 70$$

$$a_5 = (a_4 - 3) \times 2 = (70 - 3) \times 2 = 134$$

따라서 5시간 후 살아 있는 단세포 생물의 수는 134이다.

- 11** n 개의 직선에 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 n 개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 $(n+1)$ 개의 새로운 영역이 생긴다.

즉, $(n+1)$ 개의 직선에 의하여 분할된 영역은 n 개의 직선에 의하여 분할된 영역보다 $(n+1)$ 개가 많으므로

$$a_{n+1} = a_n + n + 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

이때 $a_3 = 7$ 이므로

$$a_4 = a_3 + 3 + 1 = 7 + 3 + 1 = 11$$

$$\therefore a_5 = a_4 + 4 + 1 = 11 + 4 + 1 = 16$$

- 12** $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \times \frac{n(n+1)}{2} \quad \dots\dots (*)$

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = (-1)^2 \times 1^2 = 1$$

$$(\text{우변}) = (-1)^2 \times \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

따라서 $(*)$ 이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, $(*)$ 이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{m+1} \times \frac{m(m+1)}{2}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} k^2$$

$$= \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} k^2 + \boxed{(-1)^{m+2} (m+1)^2}$$

$$= \boxed{(-1)^{m+1} \times \frac{m(m+1)}{2}}$$

$$+ \boxed{(-1)^{m+2} (m+1)^2}$$

$$= (-1)^{m+2} \left\{ -\frac{m(m+1)}{2} + (m+1)^2 \right\}$$

$$= (-1)^{m+2} \times \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 $(*)$ 이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $(*)$ 이 성립한다.

$$\text{따라서 } f(m) = (-1)^{m+2} (m+1)^2,$$

$$g(m) = (-1)^{m+1} \times \frac{m(m+1)}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{f(5)}{g(2)} = \frac{-36}{-3} = 12$$

- 13** (i) $n=1$ 일 때, $9^1 - 1 = 8$ 은 8의 배수이다.

(ii) $n=k$ 일 때, $9^k - 1 = 8m$ (m 은 자연수)이라 하면

$$\begin{aligned} 9^{k+1} - 1 &= \boxed{9} \times 9^k - 1 = (8+1)9^k - 1 \\ &= 8 \times 9^k + \boxed{9^k - 1} = 8 \times 9^k + 8m \\ &= 8(9^k + m) \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 8의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $9^n - 1$ 은 8의 배수이다.

- 14** $2^n > n^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

(i) $n=5$ 일 때, (좌변) $= 2^5 = 32$, (우변) $= 5^2 = 25$

따라서 $n=5$ 일 때 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 5$)일 때, 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$2^k > k^2$$

이 부등식의 양변에 2를 곱하면

$$2^{k+1} > 2k^2$$

$$\text{이때 } k \geq 5 \text{이면 } k^2 - 2k - 1 = \boxed{(k-1)^2} - 2 > 0 \text{이므로}$$

$$k^2 > 2k + 1$$

$$\therefore 2^{k+1} > 2k^2 = k^2 + k^2 > k^2 + 2k + 1 = \boxed{(k+1)^2}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

$$\text{따라서 } f(k) = (k-1)^2, g(k) = (k+1)^2 \text{이므로}$$

$$f(2) + g(1) = 1 + 4 = 5$$

- 15 $a_2=t$ (t 는 상수)라 하면 $a_1=7$ 이므로 (가)에서

$$a_3=a_1-4=7-4=3$$

$$a_4=a_2-4=t-4$$

$$a_5=a_3-4=3-4=-1$$

$$a_6=a_4-4=t-4-4=t-8$$

$$\therefore \sum_{k=1}^6 a_k = 7+t+3+(t-4)+(-1)+(t-8)=3t-3$$

(나)에서 $a_{n+6}=a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 7, t , 3, $t-4$, -1 , $t-8$ 이 반복적으로 나타난다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{50} a_k = 8 \sum_{k=1}^6 a_k + a_{49} + a_{50}$$

$$= 8(3t-3) + 7 + t = 25t - 17$$

따라서 $25t - 17 = 258$ 이므로 $t=11$ $\therefore a_2=11$

- 16 $a_n=3S_{n+1}-S_{n+2}-2S_n$ 에서

$$a_n = -(S_{n+2}-S_{n+1}) + 2(S_{n+1}-S_n)$$

이때 $S_{n+2}-S_{n+1}=a_{n+2}$, $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

이므로

$$a_n = -a_{n+2} + 2a_{n+1} \quad \therefore 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$$

$$\therefore a_{20} = 3 \times 20 - 2 = 58$$

- 17 1개의 계단을 오르는 경우가 1가지, 2개의 계단을 오르는 경우가 2가지이므로

$$a_1=1, a_2=2$$

$(n+2)$ 개의 계단을 오르는 경우는 n 개의 계단을 오르고 두 계단을 오르는 경우와 $(n+1)$ 개의 계단을 오르고 한 계단을 오르는 경우가 있으므로

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$a_1=1, a_2=2 \text{이므로}$$

$$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 2 = 3$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = 2 + 3 = 5$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = 3 + 5 = 8$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = 5 + 8 = 13$$

$$\therefore a_7 = a_6 + a_7 = 8 + 13 = 21$$

유형편

정답과 해설

I-1 01 지수

기초 문제 Training

4쪽

- 1 (1) $\pm\sqrt{2}$ (2) $-1, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$
 (3) 5, $\frac{-5\pm5\sqrt{3}i}{2}$ (4) $\pm 4, \pm 4i$
- 2 (1) ± 2 (2) $-\frac{1}{2}$ (3) $\pm 2\sqrt{2}$ (4) 없다.
- 3 (1) 16 (2) 2 (3) -3 (4) 2
- 4 (1) 2 (2) 8 (3) 256 (4) 9
- 5 (1) a^3 (2) $a^{\frac{1}{4}}$ (3) a (4) $a^{\frac{5}{6}}$
- 6 (1) 49 (2) 81 (3) 8 (4) 72

핵심 유형 Training

5~9쪽

- | | | | | |
|----------|-------------------|---------------------|----------------|----------------------|
| 1 ④ | 2 ③ | 3 $\neg, \sqsubset$ | 4 ⑤ | 5 $\sqrt[3]{a^2b^2}$ |
| 6 ① | 7 7 | 8 ④ | 9 ② | 10 ① |
| 11 ④ | 12 $\frac{9}{25}$ | 13 ② | 14 ① | 15 6 |
| 16 ③ | 17 ④ | 18 ② | 19 ④ | 20 ⑤ |
| 21 9 | 22 ③ | 23 ③ | 24 $3\sqrt{6}$ | 25 ⑤ |
| 26 ④ | 27 ④ | 28 ① | 29 ② | 30 ① |
| 31 ② | 32 $\frac{5}{3}$ | 33 64 | 34 ④ | 35 ⑤ |
| 36 2.07배 | | | | |

- 1 ① $\pm\sqrt{3}$ ② $-2, 1\pm\sqrt{3}i$ ③ $\pm 2, \pm 2i$ ⑤ 없다.
 따라서 옳은 것은 ④이다.

2 $a=3, b=\sqrt{5}$ 이므로 $ab=3\sqrt{5}$

- 3 $\neg$. (i) n 이 홀수일 때, $N(x, n)=1, N(x, n+1)=2$ 이므로 $N(x, n)+N(x, n+1)=1+2=3$
 (ii) n 이 짝수일 때, $N(x, n)=2, N(x, n+1)=1$ 이므로 $N(x, n)+N(x, n+1)=2+1=3$
 $\sqsubset$. n 이 홀수일 때, $N(x, n)=1, N(-x, n)=1$ 이므로 $N(x, n)-N(-x, n)=1-1=0$
 $\sqsubset$. $N(-3, 3)=1, N(-1, 4)=0, N(2, 4)=2$ 이므로 $N(-3, 3)+N(-1, 4)+N(2, 4)=3$
 따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \sqsubset$ 이다.

- 4 ① $\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 9$
 ② $\frac{\sqrt[4]{512}}{\sqrt[4]{8}} = \frac{\sqrt[4]{2^9}}{\sqrt[4]{2^3}} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$
 ③ $(\sqrt[3]{4})^4 = \sqrt[3]{4^4} = \sqrt[3]{4^3 \times 4} = 4\sqrt[3]{4}$
 ④ $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 9$
 ⑤ $\sqrt[18]{64} \times \sqrt[6]{2} = \sqrt[18]{2^6} \times \sqrt[6]{2} = \sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2}$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

5 $\sqrt[3]{a^2b^3} \times \sqrt[6]{a^3b} \div \sqrt{ab} = \sqrt[6]{(a^2b^3)^2} \times \sqrt[6]{a^3b} \div \sqrt[6]{(ab)^3}$
 $= \sqrt[6]{a^4b^6} \times \sqrt[6]{a^3b} \div \sqrt[6]{a^3b^3}$
 $= \sqrt[6]{a^4b^4} = \sqrt[3]{a^2b^2}$

6 $\sqrt{\frac{\sqrt[4]{a}}{3}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{4}} \div \sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{3}} = \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[6]{a}} \times \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{a}} \div \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[12]{a}}$
 $= \frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[6]{a}} \times \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{a}} \times \frac{\sqrt[12]{a}}{\sqrt[8]{a}} = 1$

7 $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} \times \frac{a}{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2} \times a} \times \sqrt[4]{\frac{a^4}{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^3} \times 4\sqrt{a^3}}$
 $= \sqrt[6]{a^3} \times \sqrt[12]{a^3} = \sqrt[12]{a^6} \times \sqrt[12]{a^3} = \sqrt[12]{a^9} = \sqrt[4]{a^3}$
 따라서 $m=4, n=3$ 이므로 $m+n=7$

8 $\sqrt[3]{4} = \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256}$
 $\sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{6^3} = \sqrt[12]{216}$
 $\sqrt[6]{15} = \sqrt[12]{15^2} = \sqrt[12]{225}$
 $\therefore \sqrt[4]{6} < \sqrt[6]{15} < \sqrt[3]{4}$

- 9 ① $\sqrt[3]{2 \times 3} = \sqrt[3]{6} = \sqrt[6]{6^2} = \sqrt[6]{36}$
 ② $\sqrt[3]{3\sqrt{2}} = \sqrt[3]{3^3 \times 2} = \sqrt[6]{54}$
 ③ $\sqrt[2]{3\sqrt{5}} = \sqrt[3]{2^3 \times 5} = \sqrt[6]{40}$
 ④ $\sqrt[3]{2\sqrt{5}} = \sqrt[3]{2^2 \times 5} = \sqrt[6]{20}$
 ⑤ $\sqrt[3]{5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{5^2 \times 2} = \sqrt[6]{50}$
 따라서 가장 큰 수는 ②이다.

10 $A-B=(\sqrt{2}+^3\sqrt{3})-2^3\sqrt{3}=\sqrt{2}-^3\sqrt{3}$
 $=^6\sqrt{2^3}-^6\sqrt{3^2}=^6\sqrt{8}-^6\sqrt{9}<0$
 $\therefore A<B \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 $B-C=2^3\sqrt{3}-(^4\sqrt{5}+^3\sqrt{3})=^3\sqrt{3}-^4\sqrt{5}$
 $=^{12}\sqrt{3^4}-^{12}\sqrt{5^3}=^{12}\sqrt{81}-^{12}\sqrt{125}<0$
 $\therefore B<C \quad \dots\dots \textcircled{8}$
 $\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } A<B<C$

11 $\{(-3)^4\}^{\frac{1}{2}}-25^{-\frac{3}{2}}\times 100^{\frac{3}{2}}$
 $=(3^4)^{\frac{1}{2}}-(5^2)^{-\frac{3}{2}}\times (10^2)^{\frac{3}{2}}$
 $=3^2-5^{-3}\times 10^3=9-\left(\frac{10}{5}\right)^3$
 $=9-8=1$

12 $\frac{9^{-10}+3^{-8}}{3^{-10}+9^{-11}}\times \frac{26}{5^2+25^2}=\frac{3^{-20}+3^{-8}}{3^{-10}+3^{-22}}\times \frac{26}{5^2+5^4}$
 $=\frac{3^{-20}(1+3^{12})}{3^{-22}(3^{12}+1)}\times \frac{26}{5^2(1+5^2)}$
 $=3^2\times \frac{1}{5^2}=\frac{9}{25}$

13 $\sqrt{2}\times ^3\sqrt{3}\times ^4\sqrt{4}\times ^6\sqrt{6}=2^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{3}}\times (2^2)^{\frac{1}{4}}\times (2\times 3)^{\frac{1}{6}}$
 $=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}\times 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2^{\frac{7}{6}}\times 3^{\frac{1}{2}}$
따라서 $a=\frac{7}{6}, b=\frac{1}{2}$ 이므로 $a+b=\frac{5}{3}$

14 $\sqrt{2\sqrt{2}}=\{2\times (2\times 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}=(2\times 2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}}=(2^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{7}{8}}$
 $^4\sqrt{4^4\sqrt{4}}=(4\times 4^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{4}}=(4^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{4}}=4^{\frac{5}{16}}=2^{\frac{5}{8}}$
즉, $\frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{^4\sqrt{4^4\sqrt{4}}}=\frac{2^{\frac{7}{8}}}{2^{\frac{5}{8}}}=2^{\frac{1}{4}}$ 이므로 $k=\frac{1}{4}$

15 $(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{2}}\times (3^{\sqrt{a}})^{6\sqrt{6}}\div a^{3\sqrt{6}}=a^{2\sqrt{6}}\times a^{2\sqrt{6}}\div a^{3\sqrt{6}}$
 $=a^{2\sqrt{6}+2\sqrt{6}-3\sqrt{6}}=a^{\sqrt{6}}$
따라서 $k=\sqrt{6}$ 이므로 $k^2=6$

16 원의 반지름의 길이를 r 라 하면
 $\pi r^2=^3\sqrt{32\pi}, r^2=2^{\frac{5}{3}}$
 $r>0$ 이므로 $r=(2^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{5}{6}}$
원의 둘레의 길이는 $a\pi$ 이므로
 $a\pi=2\pi r=2\pi\times 2^{\frac{5}{6}}=2^{\frac{11}{6}}\pi \quad \therefore a=2^{\frac{11}{6}}$
정육면체의 한 모서리의 길이를 x 라 하면
 $x^3=^4\sqrt{27}, x^3=3^{\frac{3}{4}}$
 $x>0$ 이므로 $x=(3^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{1}{4}}$
정육면체의 겉넓이는 b 이므로
 $b=6x^2=6\times (3^{\frac{1}{4}})^2=2\times 3\times 3^{\frac{1}{2}}=2\times 3^{\frac{3}{2}}$

따라서 $ab=2^{\frac{11}{6}}\times 2\times 3^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{17}{6}}3^{\frac{3}{2}}$ 이므로
 $a=\frac{17}{6}, \beta=\frac{3}{2} \quad \therefore a+\beta=\frac{13}{3}$

17 $a=3^{\frac{1}{2}}, b=2^{\frac{1}{3}}$ 이므로 $a^2=3, b^3=2$
 $\therefore 12^{\frac{1}{6}}=(2^2\times 3)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{1}{6}}=(b^3)^{\frac{1}{3}}\times (a^2)^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{3}}b$

18 $625^{\frac{1}{n}}=5^{\frac{4}{n}}$ 이 자연수가 되려면 정수 n 은 4의 양의 약수이다.
따라서 모든 정수 n 의 값의 합은 $1+2+4=7$

19 $(3^{\frac{1}{3}}-1)(9^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}+1)=(3^{\frac{1}{3}}-1)(3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}+1)$
 $=(3^{\frac{1}{3}})^3-1=3-1=2$
 $(2^{\frac{1}{2}}-1)^2(2^{\frac{3}{2}}+3)=\{(2^{\frac{1}{2}})^2-2\times 2^{\frac{1}{2}}+1\}(2^{\frac{3}{2}}+3)$
 $=(3-2^{\frac{3}{2}})(3+2^{\frac{3}{2}})=3^2-(2^{\frac{3}{2}})^2$
 $=9-2^3=1$
 $\therefore \frac{(3^{\frac{1}{3}}-1)(9^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}+1)}{(2^{\frac{1}{2}}-1)^2(2^{\frac{3}{2}}+3)}=\frac{2}{1}=2$

20 $a^{\frac{1}{3}}=X, a^{-\frac{2}{3}}=Y$ 로 놓으면 $a^{-\frac{1}{3}}=XY$ 이므로
 $(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}})^3-3a^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}})$
 $=(X+Y)^3-3XY(X+Y)=X^3+Y^3$
 $=(a^{\frac{1}{3}})^3+(a^{-\frac{2}{3}})^3=a+a^{-2}=a+\frac{1}{a^2}$

21 $\frac{1}{1-a^{-\frac{1}{8}}}+\frac{1}{1+a^{-\frac{1}{8}}}+\frac{2}{1+a^{-\frac{1}{4}}}+\frac{4}{1+a^{-\frac{1}{2}}}$
 $=\frac{2}{1-a^{-\frac{1}{4}}}+\frac{2}{1+a^{-\frac{1}{4}}}+\frac{4}{1+a^{-\frac{1}{2}}}$
 $=\frac{4}{1-a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{4}{1+a^{-\frac{1}{2}}}$
 $=\frac{8}{1-a^{-1}}=\frac{8a}{a-1}$
 $=\frac{8\times 9}{9-1}=9$

22 $x=2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}$ 의 양변을 세제곱하면
 $x^3=2-2^{-1}-3(2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}})=\frac{3}{2}-3x$
 $x^3+3x=\frac{3}{2} \quad \therefore 2x^3+6x=3$
 $\therefore 2x^3+6x+1=3+1=4$

23 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=1$ 의 양변을 제곱하면
 $x-2+x^{-1}=1 \quad \therefore x+x^{-1}=3$
 $\therefore x^3+x^{-3}=(x+x^{-1})^3-3(x+x^{-1})=3^3-3\times 3=18$

$$24 \quad x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} = (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^3 - 3(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) \\ = (\sqrt{6})^3 - 3 \times \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

$$25 \quad x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} = 4 \text{의 양변을 세제곱하면} \\ x + x^{-1} + 3(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}) = 64 \quad \therefore x + x^{-1} = 52 \\ \therefore (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 = x + x^{-1} - 2 = 50 \\ \text{이때 } x > 1 \text{에서 } x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} > 0 \text{이므로} \\ x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 5\sqrt{2}$$

$$26 \quad (3^x + 3^{-x})^2 = 9^x + 9^{-x} + 2 = 47 + 2 = 49 \\ \therefore 3^x + 3^{-x} = 7 \\ (3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}})^2 = 3^x + 3^{-x} + 2 = 7 + 2 = 9 \\ \therefore 3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}} = 3 \\ (3^{\frac{x}{4}} + 3^{-\frac{x}{4}})^2 = 3^{\frac{x}{2}} + 3^{-\frac{x}{2}} + 2 = 3 + 2 = 5 \\ \therefore 3^{\frac{x}{4}} + 3^{-\frac{x}{4}} = \sqrt{5}$$

$$27 \quad \text{주어진 식의 분모, 분자에 } a^x \text{을 곱하면} \\ \frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1} = \frac{7 + 1}{7 - 1} = \frac{4}{3}$$

$$28 \quad \text{주어진 식의 분모, 분자에 } 2^x \text{을 곱하면} \\ \frac{2^{3x} - 2^{-3x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{2^{4x} - 2^{-2x}}{2^{2x} + 1} = \frac{4^{2x} - 4^{-x}}{4^x + 1} = \frac{5^2 - 5^{-1}}{5 + 1} = \frac{62}{15}$$

$$29 \quad \frac{a^m + a^{-m}}{a^m - a^{-m}} = 3 \text{의 좌변의 분모, 분자에 } a^m \text{을 곱하면} \\ \frac{a^{2m} + 1}{a^{2m} - 1} = 3, a^{2m} + 1 = 3a^{2m} - 3 \\ \therefore a^{2m} = 2 \\ \therefore (a^m + a^{-m})(a^m - a^{-m}) = a^{2m} - a^{-2m} \\ = 2 - 2^{-1} = \frac{3}{2}$$

$$30 \quad 3^x = 4 \text{에서 } 2^{\frac{x}{2}} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ 48^y = 8 \text{에서 } 2^{\frac{3}{y}} = 48 \quad \dots\dots \textcircled{2} \\ \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 2^{\frac{2}{x} - \frac{3}{y}} = \frac{1}{16} \\ 2^{\frac{2}{x} - \frac{3}{y}} = 2^{-4} \quad \therefore \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -4$$

$$31 \quad a^x = 2^4 \text{에서 } a = 2^{\frac{4}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ b^y = 2^4 \text{에서 } b = 2^{\frac{4}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{2} \\ c^z = 2^4 \text{에서 } c = 2^{\frac{4}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{3} \\ \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{에서 } abc = 2^{\frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z}}$$

$$\text{이때 } abc = 8 \text{이므로 } 2^{\frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z}} = 2^3 \\ \frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z} = 3 \quad \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{4}$$

$$32 \quad 3^x = k \text{에서 } k^{\frac{1}{x}} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ 25^y = k \text{에서 } k^{\frac{1}{2y}} = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2} \\ \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } k^{\frac{1}{x} - \frac{1}{2y}} = \frac{3}{5} \\ \text{이때 } \frac{1}{x} - \frac{1}{2y} = -1 \text{이므로} \\ k^{-1} = \frac{3}{5} \quad \therefore k = \frac{5}{3}$$

$$33 \quad a^x = b^y = 4^z = k (k > 0, k \neq 1) \text{로 놓으면} \\ a = k^{\frac{1}{x}}, b = k^{\frac{1}{y}}, 4 = k^{\frac{1}{z}} \\ \text{이때 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{z} \text{이므로} \\ ab = k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = k^{\frac{3}{z}} = (k^{\frac{1}{z}})^3 \\ = 4^3 = 64$$

$$34 \quad \text{커지는 비율을 } r (r > 1) \text{라 하면 2를 입력하고 버튼을 6번} \\ \text{눌렀을 때 4가 출력되므로} \\ 2r^6 = 4 \quad \therefore r = 2^{\frac{1}{6}} \\ \text{따라서 4에서 버튼을 4번 더 눌렀을 때 출력되는 수는} \\ 4r^4 = 4 \times (2^{\frac{1}{6}})^4 = 2^2 \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{8}{3}}$$

$$35 \quad \text{음식물의 개수가 } 4p, \text{음식물의 부피가 } 8q \text{일 때, 음식물을} \\ \text{데우는 데 걸리는 시간을 } t' \text{이라 하면} \\ t' = a(4p)^{\frac{1}{2}}(8q)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{3}{2}} \times ap^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}} \\ = 2^{\frac{11}{2}} \times ap^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}} = 32\sqrt{2}t \quad (\because t = ap^{\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}}) \\ \text{따라서 음식물을 데우는 데 걸리는 시간은 } 32\sqrt{2} \text{배 증가} \\ \text{한다.}$$

$$36 \quad 10 \text{년 동안 품목 A의 연평균 가격 상승률은} \\ \sqrt[10]{\frac{2a}{a}} - 1 = \sqrt[10]{2} - 1 \\ 10 \text{년 동안 품목 B의 연평균 가격 상승률은} \\ \sqrt[10]{\frac{4a}{a}} - 1 = \sqrt[10]{4} - 1 \\ \therefore \frac{\sqrt[10]{4} - 1}{\sqrt[10]{2} - 1} = \frac{(\sqrt[10]{2})^2 - 1}{\sqrt[10]{2} - 1} = \frac{(\sqrt[10]{2} - 1)(\sqrt[10]{2} + 1)}{\sqrt[10]{2} - 1} \\ = \sqrt[10]{2} + 1 = 1.07 + 1 \quad (\because \sqrt[10]{2} = 2^{\frac{1}{10}} = 1.07) \\ = 2.07$$

따라서 10년 동안 품목 B의 연평균 가격 상승률은 품목 A의 연평균 가격 상승률의 2.07배이다.

기초 문제 Training

10쪽

- 1 (1) $2 = \log_2 4$ (2) $4 = \log_{\sqrt{6}} 36$
(3) $\frac{1}{2} = \log_{25} 5$ (4) $0 = \log_7 1$
- 2 (1) $3^3 = 27$ (2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$
(3) $(\sqrt{2})^8 = 16$ (4) $9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$
- 3 (1) $x > -2$ (2) $x < 3$
(3) $6 < x < 7$ 또는 $x > 7$ (4) $x < -2$ 또는 $-2 < x < -1$
- 4 (1) 5 (2) -3 (3) -2 (4) 3
- 5 (1) -1 (2) 2 (3) 2 (4) 1
- 6 (1) 15 (2) $\log_2 3$
- 7 (1) 6 (2) 1
- 8 (1) $\frac{7}{2}$ (2) $-\frac{2}{3}$ (3) 27 (4) $\sqrt{7}$

핵심 유형 Training

11~14쪽

- | | | | | |
|-----------|-----------------------|------------|-----------------|------------------|
| 1 24 | 2 ④ | 3 ② | 4 ④ | 5 ① |
| 6 ② | 7 3 | 8 7 | 9 $\frac{3}{2}$ | 10 ③ |
| 11 9 | 12 ④ | 13 105 | 14 ⑤ | 15 1 |
| 16 ① | 17 ③ | 18 $A > B$ | | 19 $\frac{5}{9}$ |
| 20 $a+3b$ | 21 $\frac{a+2b}{1-a}$ | 22 ③ | 23 ③ | |
| 24 2 | 25 ③ | 26 ⑤ | 27 3 | 28 ⑤ |
| 29 ② | 30 ③ | | | |

- 1 $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$ 에서 $x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
 $\log_y 2 = -\frac{1}{3}$ 에서 $2 = y^{-\frac{1}{3}}$ $\therefore y = 2^{-3} = \frac{1}{8}$
 $\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 16 + 8 = 24$

- 2 $\log_2 \{\log_4 (\log_3 a)\} = -1$ 에서 $\log_4 (\log_3 a) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
 $\log_4 (\log_3 a) = \frac{1}{2}$ 에서 $\log_3 a = 4^{\frac{1}{2}} = 2$
 $\log_3 a = 2$ 에서 $a = 3^2 = 9$
- 3 $a = \log_2 9$ 에서 $2^a = 9$
 $\therefore 2^{\frac{a}{2}} = (2^a)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$
- 4 $x = \log_5 (\sqrt{2} + 1)$ 에서 $5^x = \sqrt{2} + 1$ 이므로
 $5^{-x} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$
 $\therefore 5^x + 5^{-x} = (\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}$
- 5 (i) $a - 5 > 0$, $a - 5 \neq 1$ 이어야 하므로
 $a > 5$, $a \neq 6$ ㉠
(ii) $-a^2 + 11a - 18 > 0$ 이어야 하므로
 $a^2 - 11a + 18 < 0$, $(a - 2)(a - 9) < 0$
 $\therefore 2 < a < 9$ ㉡
㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 a 는 7, 8의 2개이다.
- 6 (i) $a - 3 > 0$, $a - 3 \neq 1$ 이어야 하므로
 $a > 3$, $a \neq 4$ ㉢
(ii) $a - 1 > 0$ 이어야 하므로 $a > 1$ ㉣
(iii) $8 - a > 0$ 이어야 하므로 $a < 8$ ㉤
㉢, ㉣, ㉤을 동시에 만족시키는 정수 a 는 5, 6, 7이므로
그 합은 $5 + 6 + 7 = 18$
- 7 (i) $|x - 1| > 0$, $|x - 1| \neq 1$ 이어야 하므로
 $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 2$ ㉥
(ii) $-x^2 + 3x + 4 > 0$ 이어야 하므로
 $x^2 - 3x - 4 < 0$, $(x + 1)(x - 4) < 0$
 $\therefore -1 < x < 4$ ㉦
㉥, ㉦을 동시에 만족시키는 정수 x 의 값은 3이다.
- 8 (i) $(a - 2)^2 > 0$, $(a - 2)^2 \neq 1$ 이어야 하므로
 $a \neq 1$, $a \neq 2$, $a \neq 3$ ㉧
(ii) 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + 2ax + 8 > 0$ 이어야 한다.
① $a = 0$ 이면 $8 > 0$ 이 성립한다.
② $a > 0$ 이고 이차방정식 $ax^2 + 2ax + 8 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = a^2 - 8a < 0$, $a(a - 8) < 0$ $\therefore 0 < a < 8$
①, ②에서 $0 < a < 8$ ㉨
㉧, ㉨을 동시에 만족시키는 정수 a 는 0, 4, 5, 6, 7이므로
최댓값과 최솟값의 합은 $7 + 0 = 7$

$$\begin{aligned}
 9 \quad & \log_3 \sqrt{15} - \frac{1}{2} \log_3 5 + \frac{3}{2} \log_3 \sqrt[3]{9} \\
 &= \frac{1}{2} \log_3 15 + \frac{1}{2} \log_3 \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \log_3 9 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\log_3 15 + \log_3 \frac{1}{5} + \log_3 9 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \log_3 27 = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10 \quad & \log_2 \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \log_2 \left(1 - \frac{1}{9} \right) + \log_2 \left(1 - \frac{1}{16} \right) \\
 & \quad + \cdots + \log_2 \left(1 - \frac{1}{64} \right) \\
 &= \log_2 \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) + \log_2 \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) + \log_2 \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) \\
 & \quad + \cdots + \log_2 \left(1 - \frac{1}{8^2} \right) \\
 &= \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \right) + \log_2 \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \right) + \log_2 \left(\frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \right) \\
 & \quad + \cdots + \log_2 \left(\frac{7}{8} \times \frac{9}{8} \right) \\
 &= \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{7}{8} \times \frac{9}{8} \right) \\
 &= \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{9}{8} \right) = \log_2 \frac{9}{16} \\
 &= \log_2 9 - \log_2 16 = 2 \log_2 3 - 4
 \end{aligned}$$

11 $36 = 2^2 \times 3^2$ 이므로 36의 모든 양의 약수는 다음과 같다.

$2^0 \times 3^0$	$2^0 \times 3^1$	$2^0 \times 3^2$
$2^1 \times 3^0$	$2^1 \times 3^1$	$2^1 \times 3^2$
$2^2 \times 3^0$	$2^2 \times 3^1$	$2^2 \times 3^2$

$$\begin{aligned}
 \therefore & \log_6 a_1 + \log_6 a_2 + \log_6 a_3 + \cdots + \log_6 a_9 \\
 &= \log_6 (a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_9) \\
 &= \log_6 \{ 2^{3(0+1+2)} \times 3^{3(0+1+2)} \} \\
 &= \log_6 (2^9 \times 3^9) \\
 &= \log_6 6^9 = 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12 \quad & \log_3 4 \times \log_2 5 \times \log_5 6 - \log_3 25 \times \log_5 2 \\
 &= 2 \log_3 2 \times \frac{\log_3 5}{\log_3 2} \times \frac{\log_3 6}{\log_3 5} - 2 \log_3 5 \times \frac{\log_3 2}{\log_3 5} \\
 &= 2(\log_3 6 - \log_3 2) \\
 &= 2 \log_3 3 = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13 \quad & \frac{1}{\log_3 2} + \frac{1}{\log_5 2} + \frac{1}{\log_7 2} = \log_2 k \text{에서} \\
 & \log_2 3 + \log_2 5 + \log_2 7 = \log_2 k \\
 & \log_2 (3 \times 5 \times 7) = \log_2 k \\
 \therefore & k = 105
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14 \quad & \log_2 (\log_3 5) + \log_2 (\log_5 10) + \log_2 (\log_{10} 81) \\
 &= \log_2 (\log_3 5 \times \log_5 10 \times \log_{10} 81) \\
 &= \log_2 \left(\log_3 5 \times \frac{\log_3 10}{\log_3 5} \times \frac{\log_3 81}{\log_3 10} \right) \\
 &= \log_2 \left(\log_3 5 \times \frac{\log_3 10}{\log_3 5} \times \frac{4}{\log_3 10} \right) = \log_2 4 = 2
 \end{aligned}$$

15 $(\log_a b)^2 > 0$, $(\log_b \sqrt{a})^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}
 (\log_a b)^2 + (\log_b \sqrt{a})^2 &\geq 2\sqrt{(\log_a b)^2 \times (\log_b \sqrt{a})^2} \\
 &= 2\sqrt{(\log_a b)^2 \times \left(\frac{1}{2} \log_b a \right)^2} \\
 &= 2\sqrt{(\log_a b)^2 \times \frac{1}{4(\log_a b)^2}} \\
 &= 2 \times \frac{1}{2} = 1 \\
 &\quad \left(\text{단, 등호는 } (\log_a b)^2 = \frac{1}{2} \text{일 때 성립} \right)
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 1이다.

$$\begin{aligned}
 16 \quad & \left(\log_2 5 + \log_4 \frac{1}{5} \right) \left(\log_5 2 + \log_{25} \frac{1}{2} \right) \\
 &= (\log_2 5 + \log_{2^2} 5^{-1}) (\log_5 2 + \log_{5^2} 2^{-1}) \\
 &= \left(\log_2 5 - \frac{1}{2} \log_2 5 \right) \left(\log_5 2 - \frac{1}{2} \log_5 2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \log_2 5 \times \frac{1}{2} \log_5 2 = \frac{1}{2} \log_2 5 \times \frac{1}{2 \log_2 5} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17 \quad & 5^{\log_5 2 \times 2 \log_5 3} \times 4^{\log_5 5} = (5^{\log_5 2})^{\log_5 9} \times 5^{\log_5 4} \\
 &= 2^{\log_5 9} \times 5^2 \\
 &= 9 \times 25 = 225
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18 \quad & A = 2 \log_{\frac{1}{4}} 8 - \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8} = 2 \log_{2^{-2}} 2^3 - \log_{2^{-1}} 2^{\frac{3}{2}} \\
 &= -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \\
 B &= \log_{32} \frac{1}{512} = \log_{2^5} 2^{-9} = -\frac{9}{5} \\
 \therefore & A > B
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19 \quad & \log_3 9 < \log_3 12 < \log_3 27 \text{이므로} \\
 & 2 < \log_3 12 < 3 \quad \therefore x = 2 \\
 \therefore & y = \log_3 12 - 2 = \log_3 12 - \log_3 9 = \log_3 \frac{4}{3} \\
 \therefore & \frac{3^y + 3^{-y}}{2^x - 2^{-x}} = \frac{3^{\log_3 \frac{4}{3}} + 3^{-\log_3 \frac{4}{3}}}{2^2 - 2^{-2}} = \frac{3^{\log_3 \frac{4}{3}} + 3^{\log_3 \frac{3}{4}}}{2^2 - 2^{-2}} \\
 &= \frac{\frac{4}{3} + \frac{3}{4}}{4 - \frac{1}{4}} = \frac{5}{9}
 \end{aligned}$$

20 $\log_5 54 = \log_5 (2 \times 3^3) = \log_5 2 + 3 \log_5 3$
 $= a + 3b$

21 $\log_5 18 = \frac{\log_{10} 18}{\log_{10} 5} = \frac{\log_{10} (2 \times 3^2)}{\log_{10} \frac{10}{2}}$
 $= \frac{\log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3}{1 - \log_{10} 2}$
 $= \frac{a + 2b}{1 - a}$

22 $\log_2 3 = a$ 에서 $\log_3 2 = \frac{1}{a}$
 $b = \log_3 15 = \log_3 (3 \times 5) = 1 + \log_3 5$
 $\therefore \log_{30} 24 = \frac{\log_3 24}{\log_3 30} = \frac{\log_3 (2^3 \times 3)}{\log_3 (2 \times 3 \times 5)}$
 $= \frac{3 \log_3 2 + 1}{\log_3 2 + 1 + \log_3 5}$
 $= \frac{\frac{3}{a} + 1}{\frac{1}{a} + b} = \frac{a + 3}{ab + 1}$

23 $2^a = 3$ 에서 $a = \log_2 3$ 이므로 $\frac{1}{a} = \log_3 2$
 $3^b = 5$ 에서 $b = \log_3 5$
 $5^c = 7$ 에서 $c = \log_5 7$
 $\log_3 7 = \frac{\log_5 7}{\log_5 3} = \log_5 3 \times \log_5 7 = bc$
 $\therefore \log_5 42 = \frac{\log_3 42}{\log_3 5} = \frac{\log_3 (2 \times 3 \times 7)}{\log_3 5}$
 $= \frac{\log_3 2 + 1 + \log_3 7}{\log_3 5}$
 $= \frac{\frac{1}{a} + 1 + bc}{b}$
 $= \frac{1 + a + abc}{ab}$

24 $27^x = 18$ 에서 $x = \log_{27} 18$
 $12^y = 18$ 에서 $y = \log_{12} 18$
 $\therefore \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$
 $= \log_{18} 27 + \log_{18} 12 = \log_{18} 324$
 $= \log_{18} 18^2 = 2$

다른 풀이

$27^x = 18, 12^y = 18$ 에서 $27 = 18^{\frac{1}{x}}, 12 = 18^{\frac{1}{y}}$
 $18^{\frac{1}{x}} \times 18^{\frac{1}{y}} = 27 \times 12$ 에서 $18^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 18^2$
 $\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$
 $\therefore \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$

25 $a^2 b^3 = 1$ 에서 $b^3 = a^{-2} \therefore b^6 = a^{-4}$
 $\therefore \log_{a^2} a^7 b^6 = \log_{a^2} (a^7 \times a^{-4})$
 $= \log_{a^2} a^3 = \frac{3}{2}$

26 $\log_a 9 = \log_b 27$ 에서 $2 \log_a 3 = 3 \log_b 3$
 $\frac{2}{\log_3 a} = \frac{3}{\log_3 b}, 2 \log_3 b = 3 \log_3 a$
 $\log_3 b^2 = \log_3 a^3 \therefore b^2 = a^3$
따라서 $b = a^{\frac{3}{2}}$ 이므로
 $\log_{ab} a^2 b^3 = \log_{a \times a^{\frac{3}{2}}} \{a^2 \times (a^{\frac{3}{2}})^3\}$
 $= \log_{a^{\frac{5}{2}}} a^{\frac{13}{2}} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{13}{5}$

27 $\log_3 x - 2 \log_3 y + 3 \log_{27} z = -1$ 에서
 $\log_3 x - 2 \log_3 y + 3 \log_3 z = -1$
 $\log_3 x - \log_3 y + \log_3 z = -1$
 $\log_3 \frac{xz}{y} = -1 \therefore \frac{xz}{y} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
 $\therefore 27^{\frac{xz}{y}} = 27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3$

28 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\log_3 \alpha + \log_3 \beta = 3, \log_3 \alpha \beta = 3$
 $\therefore \alpha \beta = 3^3 = 27$

29 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\log_2 \alpha + \log_2 \beta = -5, \log_2 \alpha \times \log_2 \beta = 5$
 $\therefore \log_\alpha \beta + \log_\beta \alpha = \frac{\log_2 \beta}{\log_2 \alpha} + \frac{\log_2 \alpha}{\log_2 \beta}$
 $= \frac{(\log_2 \alpha)^2 + (\log_2 \beta)^2}{\log_2 \alpha \times \log_2 \beta}$
 $= \frac{(\log_2 \alpha + \log_2 \beta)^2 - 2 \log_2 \alpha \times \log_2 \beta}{\log_2 \alpha \times \log_2 \beta}$
 $= \frac{(-5)^2 - 2 \times 5}{5} = 3$

30 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = 5, \alpha \beta = \frac{5}{2}$
 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$
 $= 5^2 - 4 \times \frac{5}{2} = 15$
 $\therefore a = |\alpha - \beta| = \sqrt{15}$
 $\therefore \log_a 2\alpha + \log_a 3\beta = \log_a 6\alpha\beta$
 $= \log_{\sqrt{15}} 15 = 2$

기초 문제 Training

15쪽

- 1 (1) 3 (2) -3 (3) $\frac{4}{3}$ (4) $-\frac{2}{3}$ (5) $-\frac{3}{5}$
- 2 (1) 2 (2) 4 (3) -1 (4) -3 (5) -4
- 3 (1) 0.4786 (2) 0.4955 (3) 0.5211 (4) 0.5328
- 4 (1) 정수 부분: 1, 소수 부분: 0.4502
 (2) 정수 부분: 2, 소수 부분: 0.5705
 (3) 정수 부분: -1, 소수 부분: 0.3365
 (4) 정수 부분: -3, 소수 부분: 0.6232
- 5 (1) 2 (2) 3 (3) -3 (4) -4

핵심 유형 Training

16~18쪽

- 1 $-\frac{5}{3}$ 2 ④ 3 ③ 4 0.3266 5 ⑤
- 6 21.91 7 6 8 ⑤ 9 9 10 ①
- 11 $\frac{12}{5}$ 12 ① 13 2 14 17 15 100배
- 16 128만 원 17 $\frac{1}{2}$ 18 6% 19 ③
- 20 3.3배

- 1 $\log \sqrt{10} - \log \sqrt[3]{100} + \log \sqrt{\frac{1}{1000}}$
 $= \log 10^{\frac{1}{2}} - \log 10^{\frac{2}{3}} + \log 10^{-\frac{3}{2}}$
 $= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{3}$
- 2 $x = 10^{\frac{3}{10}}$ 에서 $\log x = \frac{3}{10}$
 $\therefore \log 10x^3 - \log \frac{x^5}{\sqrt{10}} + \log \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
 $= \log \frac{10x^3 \times \sqrt{10}}{x^5 \times \sqrt[3]{x^2}}$
 $= \log 10^{1+\frac{1}{2}} x^{3-5-\frac{2}{3}}$
 $= \log 10^{\frac{3}{2}} x^{-\frac{8}{3}}$
 $= \frac{3}{2} - \frac{8}{3} \log x$
 $= \frac{3}{2} - \frac{8}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

- 3 ① $\log 163 = \log (10^2 \times 1.63)$
 $= 2 + 0.2122 = 2.2122$
 ② $\log 1630 = \log (10^3 \times 1.63)$
 $= 3 + 0.2122 = 3.2122$
 ③ $\log 0.163 = \log (10^{-1} \times 1.63)$
 $= -1 + 0.2122 = -0.7878$
 ④ $\log 0.0163 = \log (10^{-2} \times 1.63)$
 $= -2 + 0.2122 = -1.7878$
 ⑤ $\log 0.00163 = \log (10^{-3} \times 1.63)$
 $= -3 + 0.2122 = -2.7878$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

- 4 $\log \sqrt{3} - \log 2\sqrt{6} + \log 6 = \log \frac{\sqrt{3} \times 6}{2\sqrt{6}} = \log \frac{3}{\sqrt{2}}$
 $= \log 3 - \log \sqrt{2}$
 $= \log 3 - \frac{1}{2} \log 2$
 $= 0.4771 - \frac{1}{2} \times 0.3010$
 $= 0.3266$

- 5 $a = \log 2340$
 $= \log (10^3 \times 2.34)$
 $= 3 + 0.3692 = 3.3692$
 $\log b = -1.6308$
 $= -2 + 0.3692$
 $= \log 10^{-2} + \log 2.34$
 $= \log (10^{-2} \times 2.34) = \log 0.0234$
 $\therefore b = 0.0234$
 $\therefore a + 100b = 3.3692 + 100 \times 0.0234 = 5.7092$

- 6 $\log 0.155 = -0.8097$, $\log 641 = 2.8069$ 이므로
 $\log a = 0.8069$
 $= -2 + 2.8069$
 $= \log 10^{-2} + \log 641$
 $= \log (10^{-2} \times 641)$
 $= \log 6.41$
 $\therefore a = 6.41$
 $\log b = 1.1903$
 $= 2 - 0.8097$
 $= \log 10^2 + \log 0.155$
 $= \log (10^2 \times 0.155)$
 $= \log 15.5$
 $\therefore b = 15.5$
 $\therefore a + b = 6.41 + 15.5 = 21.91$

- 7 $\log A = -1.2219 = -2 + 0.7781$
 $= -2 + 0.3010 + 0.4771$
 $= \log 10^{-2} + \log 2 + \log 3$
 $= \log (10^{-2} \times 2 \times 3) = \log 0.06$
 $\therefore A = 0.06 \quad \therefore 100A = 6$
- 8 $\log 15^{30} = 30 \log \frac{3 \times 10}{2} = 30(\log 3 + 1 - \log 2)$
 $= 30(0.4771 + 1 - 0.3010) = 35.283$
 따라서 $\log 15^{30}$ 의 정수 부분이 35이므로 15^{30} 은 36자리의 자연수이다.
- 9 $\log \left(\frac{2}{3}\right)^{50} = 50(\log 2 - \log 3) = 50(0.3010 - 0.4771)$
 $= -8.805 = -9 + 0.195$
 따라서 $\log \left(\frac{2}{3}\right)^{50}$ 의 정수 부분이 -9이므로 $\left(\frac{2}{3}\right)^{50}$ 은 소수점 아래 9째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.
 $\therefore n = 9$
- 10 N^{100} 이 150자리의 자연수이므로 $\log N^{100}$ 의 정수 부분은 149이다. 즉, $149 \leq \log N^{100} < 150$ 이므로
 $1.49 \leq \log N < 1.5, -1.5 < -\log N \leq -1.49$
 $\therefore -2 + 0.5 < \log \frac{1}{N} \leq -2 + 0.51$
 따라서 $\log \frac{1}{N}$ 의 정수 부분이 -2이므로 $\frac{1}{N}$ 은 소수점 아래 2째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.
- 11 $\log x^2$ 의 소수 부분과 $\log \sqrt[3]{x}$ 의 소수 부분이 같으므로
 $\log x^2 - \log \sqrt[3]{x} = \frac{5}{3} \log x \Rightarrow$ 정수
 이때 $\log x$ 의 정수 부분이 2이므로 $2 \leq \log x < 3$
 $\therefore \frac{10}{3} \leq \frac{5}{3} \log x < 5$
 즉, $\frac{5}{3} \log x = 4$ 이므로 $\log x = \frac{12}{5}$
- 12 $\log x^4$ 의 소수 부분과 $\log \frac{1}{x}$ 의 소수 부분의 합이 1이므로
 $\log x^4 + \log \frac{1}{x} = 3 \log x \Rightarrow$ 정수
 이때 $1000 < x < 10000$ 에서 $3 < \log x < 4$
 $\therefore 9 < 3 \log x < 12$
 즉, $3 \log x = 10$ 또는 $3 \log x = 11$ 이므로
 $\log x = \frac{10}{3}$ 또는 $\log x = \frac{11}{3}$
 $\therefore x = 10^{\frac{10}{3}}$ 또는 $x = 10^{\frac{11}{3}}$
 따라서 모든 x 의 값의 곱은 $10^{\frac{10}{3}} \times 10^{\frac{11}{3}} = 10^7$

- 13 $\log x^2$ 과 $\log \frac{1}{\sqrt{x}}$ 의 합이 정수이므로
 $\log x^2 + \log \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{2} \log x \Rightarrow$ 정수
 이때 $1 < x < 10$ 에서 $0 < \log x < 1$
 $\therefore 0 < \frac{3}{2} \log x < \frac{3}{2}$
 즉, $\frac{3}{2} \log x = 1$ 이므로 $\log x = \frac{2}{3}$
 $\therefore 3 \log x = 3 \times \frac{2}{3} = 2$
- 14 (㉞)에서 $\log x^3 - \log \frac{1}{x^4} = [\log x^3] - \left[\log \frac{1}{x^4}\right]$ 이므로
 $7 \log x = [\log x^3] - \left[\log \frac{1}{x^4}\right]$
 이때 $[\log x^3] - \left[\log \frac{1}{x^4}\right]$ 은 정수이므로 $7 \log x$ 는 정수이다.
 (㉟)에서 $2 \leq \log x < 3$ 이므로
 $14 \leq 7 \log x < 21$
 즉, $7 \log x = 14$ 또는 $7 \log x = 15$ 또는 ... 또는
 $7 \log x = 20$ 이므로
 $\log x = 2$ 또는 $\log x = \frac{15}{7}$ 또는 ... 또는 $\log x = \frac{20}{7}$
 따라서 모든 $\log x$ 의 값의 합은
 $2 + \frac{15}{7} + \frac{16}{7} + \dots + \frac{20}{7} = 17$
- 15 높이가 400m인 곳의 기압을 P_1 , 높이가 7km인 곳의 기압을 P_2 라 하면
 $0.4 = 3.3 \log \frac{1}{P_1} \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$
 $7 = 3.3 \log \frac{1}{P_2} \quad \dots\dots \textcircled{㉟}$
 $\textcircled{㉟} - \textcircled{㉞}$ 을 하면
 $6.6 = 3.3 \left(\log \frac{1}{P_2} - \log \frac{1}{P_1} \right), \log \frac{P_1}{P_2} = 2$
 $\therefore \frac{P_1}{P_2} = 10^2 = 100$
 따라서 높이가 400m인 곳의 기압은 높이가 7km인 곳의 기압의 100배이다.
- 16 3년 후의 중고 상품의 가격을 a 만 원이라 하면
 $\log (1 - 0.2) = \frac{1}{3} \log \frac{a}{250}$
 $3 \log 0.8 = \log a - \log 250$
 $\log a = \log \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \log 250$
 $= \log \left(\frac{4^3}{5^3} \times 250\right) = \log 128$
 $\therefore a = 128$
 따라서 3년 후의 중고 상품의 가격은 128만 원이다.

- 17 처음 기억 상태가 100일 때, 1개월 후의 기억 상태를 $2a$ 라 하면 7개월 후의 기억 상태는 a 이므로

$$\log \frac{100}{2a} = c \log 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log \frac{100}{a} = c \log 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 을 하면

$$\log \frac{100}{a} - \log \frac{100}{2a} = c \log 8 - c \log 2$$

$$\log 2 = c \log 4, \log 2 = 2c \log 2$$

$$2c = 1 \quad \therefore c = \frac{1}{2}$$

- 18 이번 달 저축 금액을 a 라 하고 저축 금액을 매달 $r\%$ 씩 증가시킨다고 하면 12개월 후의 저축 금액은 $2a$ 이므로

$$a \left(1 + \frac{r}{100} \right)^{12} = 2a \quad \therefore \left(1 + \frac{r}{100} \right)^{12} = 2$$

양변에 상용로그를 취하면

$$12 \log \left(1 + \frac{r}{100} \right) = \log 2$$

$$\log \left(1 + \frac{r}{100} \right) = \frac{0.3}{12} = 0.025$$

이때 $\log 1.06 = 0.025$ 이므로

$$1 + \frac{r}{100} = 1.06 \quad \therefore r = 6$$

따라서 매달 6% 씩 증가시켜야 한다.

- 19 현재 미세 먼지의 농도를 a 라 하고 매년 $r\%$ 씩 감소시킨다고 하면 10년 후의 농도는 $\frac{1}{3}a$ 이므로

$$a \left(1 - \frac{r}{100} \right)^{10} = \frac{1}{3}a \quad \therefore \left(1 - \frac{r}{100} \right)^{10} = \frac{1}{3}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$10 \log \left(1 - \frac{r}{100} \right) = -\log 3$$

$$\log \left(1 - \frac{r}{100} \right) = -\frac{0.48}{10} = -0.048 = -1 + 0.952$$

이때 $\log 8.96 = 0.952$ 이므로

$$1 - \frac{r}{100} = 0.896 \quad \therefore r = 10.4$$

따라서 매년 10.4% 씩 감소시켜야 한다.

- 20 2004년의 매출액을 a 라 하면 2005년의 매출액은 $0.5a$ 이므로 2025년의 매출액은

$$0.5a(1+0.1)^{20} \quad \therefore 0.5a \times 1.1^{20} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

0.5×1.1^{20} 에 상용로그를 취하면

$$\log(0.5 \times 1.1^{20}) = -\log 2 + 20 \log 1.1$$

$$= -0.301 + 20 \times 0.041 = 0.519$$

이때 $\log 3.3 = 0.519$ 이므로 $0.5 \times 1.1^{20} = 3.3$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a \times 3.3$

따라서 2025년의 매출액은 2004년의 매출액의 3.3배이다.

I-2 01 지수함수

기초 문제 Training

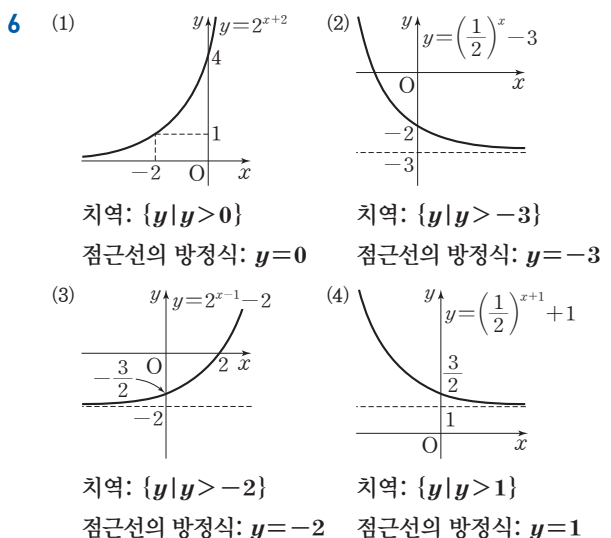
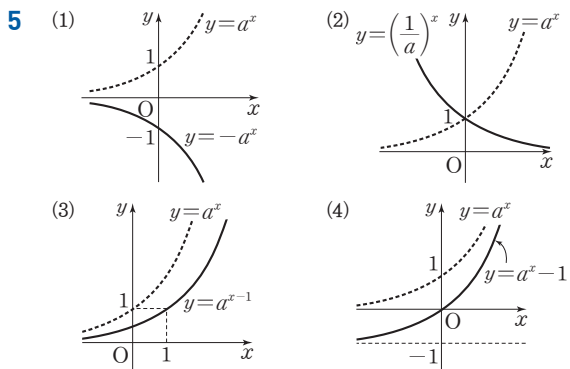
20쪽

1 $\neg, \cup$

2 (1) 1 (2) 4 (3) $\sqrt{2}$ (4) 2

3 (1) 1 (2) $\frac{1}{27}$ (3) 9 (4) 27

4 $\cup, \cap, \square$



- 7 (1) 최댓값: 8, 최솟값: $\frac{1}{2}$
(2) 최댓값: 9, 최솟값: $\frac{1}{3}$

핵심 유형 Training

21~24쪽

- | | | | | |
|----------------------------|----------------|------|------------------|------|
| 1 ④ | 2 ㄱ, ㄷ | 3 ② | 4 ⑤ | 5 ⑤ |
| 6 3 | 7 ㄱ, ㄴ, ㄷ | 8 1 | 9 $\frac{1}{4}$ | |
| 10 ③ | 11 $3\sqrt{3}$ | 12 ④ | 13 $\frac{1}{5}$ | |
| 14 $b^m < b^n < a^n < a^m$ | 15 ① | 16 3 | 17 4 | |
| 18 $\frac{5}{2}$ | 19 ② | 20 ④ | 21 ④ | 22 ③ |
| 23 11 | 24 -17 | 25 ③ | | |

1 $f(m)=a^m=3, f(n)=a^n=6$ 이므로
 $f(m+n)=a^{m+n}=a^m \times a^n=3 \times 6=18$

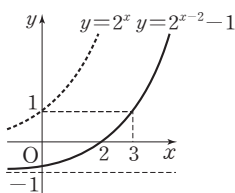
2 ㄱ. $f(m)f(-m)=a^m a^{-m}=a^0=1$
 ㄴ. $f(2m)=a^{2m}=(a^m)^2=\{f(m)\}^2$
 ㄷ. $f(m+n)=a^{m+n}=a^m a^n=f(m)f(n)$
 ㄹ. $f\left(\frac{1}{m}\right)=a^{\frac{1}{m}}, \frac{1}{f(m)}=\frac{1}{a^m}=a^{-m}$
 $\therefore f\left(\frac{1}{m}\right) \neq \frac{1}{f(m)}$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

3 ㄱ. $(a, b) \in A$ 이므로 $b=\left(\frac{1}{3}\right)^a$
 양변에 3을 곱하면 $3b=3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^a=\left(\frac{1}{3}\right)^{a-1}$
 $\therefore (a-1, 3b) \in A$
 ㄴ. $(-a, b) \in A$ 이므로 $b=\left(\frac{1}{3}\right)^{-a}$
 양변을 $\frac{1}{2}$ 제곱하면 $\sqrt{b}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{a}{2}}$
 $\therefore \left(-\frac{a}{2}, \sqrt{b}\right) \in A$
 ㄷ. $(2a, b) \in A$ 이면 $b=\left(\frac{1}{3}\right)^{2a}$
 양변을 제곱하면 $b^2=\left(\frac{1}{3}\right)^{4a}$
 $\therefore (4a, b^2) \in A$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

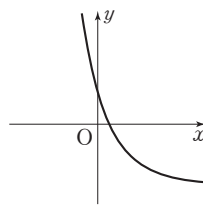
4 함수 $y=2^{x-2}-1$ 의 그래프는
 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방
 향으로 2만큼, y 축의 방
 향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로
 오른쪽 그림과 같다.



- ① 정의역은 실수 전체의 집합이다.
 ② 치역은 $\{y|y>-1\}$ 이다.
 ③ 그래프는 점 $(2, 0)$ 을 지난다.
 ④ 밑이 1보다 크므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
 ⑤ 일대일함수이므로 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.
 따라서 옳은 것은 ⑤이다.

5 $y=3^{-x+1}-2=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}-2$

함수 $y=3^{-x+1}-2$ 의 그래프는 함
 수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의
 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로
 -2만큼 평행이동한 것이므로 오
 른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=3^{-x+1}-2$ 의 그래프로 옳은 것은 ⑤이다.

6 $y=4(2^{2x}+1)=4^{x+1}+4$ 의 그래프는 $y=2^{2x}=4^x$ 의 그래
 프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평
 행이동한 것과 같으므로
 $m=-1, n=4 \quad \therefore m+n=3$

7 ㄱ. $y=-3^{x+1}$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축에 대하
 여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -1만큼 평행이동
 한 것과 같다.
 ㄴ. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+1$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를 y 축에 대
 하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동
 한 것과 같다.
 ㄷ. $y=\frac{3^x+1}{3}=3^{x-1}+\frac{1}{3}$ 의 그래프는 $y=3^x$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 $\frac{1}{3}$ 만큼 평행
 이동한 것과 같다.
 ㄹ. $y=3^{3x}+1=27^x+1$ 이므로 $y=3^x$ 의 그래프를 평행이
 동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.
 따라서 보기의 함수 중 그 그래프가 $y=3^x$ 의 그래프를 평
 행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ
 이다.

8 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의
 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
 $y=5^{x-a}+b$
 이때 점근선의 방정식이 $y=-1$ 이므로 $b=-1$
 함수 $y=5^{x-a}-1$ 의 그래프가 원점을 지나므로
 $0=5^{-a}-1 \quad \therefore a=0$
 $\therefore a-b=0-(-1)=1$

9 $y=2^x$ 의 그래프는 점 $(1, a)$ 를 지나므로 $a=2^1=2$
 $y=2^x$ 의 그래프는 점 (a, b) , 즉 점 $(2, b)$ 를 지나므로
 $b=2^2=4$
 $\therefore 2^{a-b}=2^{2-4}=\frac{1}{4}$

10 $A(a, 3^a), B(b, 3^b)$ 에서
 $\frac{3^b-3^a}{b-a}=2 \quad \therefore b-a=\frac{1}{2}(3^b-3^a) \quad \dots\dots \textcircled{1}$
또 $\overline{AB}=5$ 에서 $(b-a)^2+(3^b-3^a)^2=5^2$
이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면
 $\frac{1}{4}(3^b-3^a)^2+(3^b-3^a)^2=25$
 $(3^b-3^a)^2=20 \quad \therefore 3^b-3^a=2\sqrt{5} \quad (\because 3^a < 3^b)$

11 점 A의 x 좌표를 a 라 하면
 $A(a, k), B\left(a+\frac{3}{4}, k\right)$
점 A는 $y=3^{2x}$ 의 그래프 위의 점이므로
 $k=3^{2a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$
또 점 B는 $y=3^x$ 의 그래프 위의 점이므로
 $k=3^{a+\frac{3}{4}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $3^{2a}=3^{a+\frac{3}{4}}$
 $\therefore a=\frac{3}{4}$
 $\therefore k=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}$

12 $A=8^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}, B=\sqrt[5]{16}=2^{\frac{4}{5}}, C=0.25^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$
이때 $\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5}$ 이고 밑이 1보다 크므로
 $2^{\frac{2}{3}} < 2^{\frac{3}{4}} < 2^{\frac{4}{5}} \quad \therefore C < A < B$

13 $\frac{1}{\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{25}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}, \sqrt[5]{\frac{1}{25}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{5}},$
 $\sqrt[3]{0.2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$
이때 $\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ 이고 밑이 1보다 작으므로
 $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{5}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$
따라서 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱은
 $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}$

14 $0 < a < 1$ 이고 $m < n$ 이므로 $a^m > a^n \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $b > 1$ 이고 $m < n$ 이므로 $b^m < b^n \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $0 < a < 1 < b$ 이고 $n < 0$ 이므로 $b^n < a^n \quad \dots\dots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 $b^m < b^n < a^n < a^m$

15 $y=2^{3x}3^{-2x}=\left(\frac{8}{9}\right)^x$ 에서 밑이 1보다 작으므로
 $M=\left(\frac{8}{9}\right)^{-1}=\frac{9}{8}, m=\frac{8}{9}$
 $\therefore M-m=\frac{17}{72}$

16 $y=3^{-x}+k=\left(\frac{1}{3}\right)^x+k$ 에서 밑이 1보다 작으므로
 $x=-2$ 일 때 최대이다.
즉, $9+k=10 \quad \therefore k=1$
 $x=0$ 일 때 최소이므로 $m=3^0+1=2$
 $\therefore k+m=1+2=3$

17 (i) $0 < a < 1$ 이면 $x=1$ 일 때 최대이므로
 $a^0+2=18 \quad \therefore 3=18 \Rightarrow$ 모순
(ii) $a > 1$ 이면 $x=3$ 일 때 최대이므로
 $a^2+2=18, a^2=16 \quad \therefore a=4 \quad (\because a > 1)$
(i), (ii)에서 $a=4$

18 $y=a^{3-x}=\left(\frac{1}{a}\right)^{x-3}$ 에서
(i) $0 < \frac{1}{a} < 1$ 이면 $a > 1$ 이므로 $x=-1$ 일 때 최댓값이 a^4 ,
 $x=2$ 일 때 최솟값이 a 이다. 즉,
 $\frac{a^4}{a}=8, a^3=8 \quad \therefore a=2 \quad (\because a > 1)$
(ii) $\frac{1}{a} > 1$ 이면 $0 < a < 1$ 이므로 $x=2$ 일 때 최댓값이 a ,
 $x=-1$ 일 때 최솟값이 a^4 이다. 즉,
 $\frac{a}{a^4}=8, a^3=\frac{1}{8} \quad \therefore a=\frac{1}{2} \quad (\because 0 < a < 1)$
(i), (ii)에서 모든 a 의 값의 합은 $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

19 $f(x)=-x^2+2x+1=-(x-1)^2+2$ 라 하면
 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $-2 \leq f(x) \leq 2$
따라서 $-2 \leq f(x) \leq 2$ 에서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은
 $f(x)=-2$ 일 때, $M=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$
 $f(x)=2$ 일 때, $m=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$
 $\therefore M-4m=4-4 \times \frac{1}{4}=3$

20 $f(x)=2x^2-4x+5=2(x-1)^2+3$ 이라 하면 $f(x) \geq 3$
 $f(x) \geq 3$ 에서 $y=a^{f(x)} \quad (0 < a < 1)$ 은 $f(x)=3$ 일 때 최댓값이 a^3 이므로
 $a^3=\frac{8}{27} \quad \therefore a=\frac{2}{3} \quad (\because 0 < a < 1)$

- 21 $f(x) = -x^2 + 8x - a = -(x-4)^2 + 16 - a$ 라 하면
 $f(x) \leq 16 - a$
 $f(x) \leq 16 - a$ 에서 $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)}$ 은 $f(x) = 16 - a$, 즉 $x = 4$
 일 때 최대이므로 $b = 4$
 최댓값이 $\frac{2}{3}$ 이므로 $\left(\frac{3}{2}\right)^{16-a} = \frac{2}{3}$ 에서
 $16 - a = -1 \quad \therefore a = 17$
 $\therefore a + b = 17 + 4 = 21$

- 22 $y = \frac{1-2^{x+1}+4^{x+1}}{4^x} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 4$ 에서
 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $y = t^2 - 2t + 4 = (t-1)^2 + 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $-3 \leq x \leq 1$ 에서 $\frac{1}{2} \leq t \leq 8$ 이므로 $\textcircled{1}$ 은
 $t = 8$ 일 때, $M = 7^2 + 3 = 52$
 $t = 1$ 일 때, $m = 3$
 $\therefore M - m = 52 - 3 = 49$

- 23 $3^x + 3^{-x} = t$ 로 놓으면 $3^x > 0$, $3^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과
 기하평균의 관계에 의하여
 $t = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \times 3^{-x}} = 2$
 $\therefore t \geq 2$
 $9^x + 9^{-x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$ 이므로 주어진 함수는
 $y = 6t - (t^2 - 2) = -(t-3)^2 + 11$
 따라서 $t \geq 2$ 에서 함수 $y = -(t-3)^2 + 11$ 은
 $t = 3$ 일 때, 최댓값은 11

- 24 $5^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $y = t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $-2 \leq x \leq 1$ 에서 $\frac{1}{25} \leq t \leq 5$
 $\textcircled{1}$ 은 $t = 5$, 즉 $x = 1$ 일 때 최댓값은 17이고 $t = 1$, 즉 $x = 0$
 일 때 최솟값은 1이다.
 따라서 $a = 1$, $b = 17$, $c = 0$, $d = 1$ 이므로
 $a - b + c - d = -17$

- 25 $y = 9^x - 2 \times 3^{x+a} + 4 \times 3^b$ 에서 $3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $y = t^2 - 2 \times 3^a \times t + 4 \times 3^b$
 $= (t - 3^a)^2 - 3^{2a} + 4 \times 3^b \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 은 $t = 3^a$ 일 때 최솟값이 $-3^{2a} + 4 \times 3^b$ 이다.
 $x = 1$, 즉 $t = 3$ 일 때 최솟이므로 $3^a = 3 \quad \therefore a = 1$
 또 최솟값이 3이므로
 $-3^2 + 4 \times 3^b = 3$, $3^b = 3 \quad \therefore b = 1$
 $\therefore a + b = 1 + 1 = 2$

I-2 02 지수함수의 활용

기초 문제 Training

25쪽

- (1) $x = 5$ (2) $x = 2$ (3) $x = -2$ (4) $x = \frac{3}{2}$
- 4, 4, 2, 2
- (1) $x = 1$ (2) $x = -2$ 또는 $x = -1$
- (1) $x < 3$ (2) $x > 0$ (3) $x \geq 3$ (4) $x \leq 4$
- 1, 4, 1, 4, -2, 0
- (1) $x \leq 1$ 또는 $x \geq 2$ (2) $-2 < x < 0$

핵심 유형 Training

26~30쪽

1 4	2 ②	3 4	4 2	5 ⑤
6 ②	7 $x = 0$	8 $x = -1$ 또는 $x = 1$	9 ⑤	
10 ④	11 ③	12 ①	13 ③	14 $\frac{1}{27}$
15 ④	16 ③	17 ③	18 $8 \leq m < 10$	
19 ④	20 4	21 7	22 4	23 ①
24 -2	25 18	26 2	27 ③	28 ④
29 ③	30 ③	31 ①	32 $a \leq 2$	33 ③
34 ②	35 ④			

- $2^{x^2} 4^x = 8$ 에서 $2^{x^2+2x} = 2^3$ 이므로
 $x^2 + 2x = 3$, $(x+3)(x-1) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = 1$
 따라서 $\alpha = -3$, $\beta = 1$ 이므로
 $\beta - \alpha = 4$
- $2^{2x} = 16$ 에서 $2^{2x} = 2^4$ 이므로
 $2x = 4 \quad \therefore x = 2$
 $3^{3x} = 27$ 에서 $3^{3x} = 3^3$ 이므로
 $3x = 3 \quad \therefore x = 1$
 $\therefore \alpha\beta = 2$

3 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-8} = \left(\frac{3}{2}\right)^{5-x}$ 에서 $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x^2-8} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x-5}$ 이므로
 $2x^2-8=x-5, 2x^2-x-3=0$
 $(x+1)(2x-3)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

따라서 $\alpha=-1, \beta=\frac{3}{2}$ 이므로

$2\beta-\alpha=2\times\frac{3}{2}-(-1)=4$

4 $(2\sqrt{2})^{x^2}=4^{x+1}$ 에서 $2^{\frac{3}{2}x^2}=2^{2x+2}$ 이므로
 $\frac{3}{2}x^2=2x+2, 3x^2-4x-4=0$

$(3x+2)(x-2)=0 \quad \therefore x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

그런데 x 는 자연수이므로 $x=2$

5 $\left(\frac{1}{3}\right)^x=t(t>0)$ 로 놓으면

$t^2+\frac{1}{9}t=9t+1, 9t^2-80t-9=0$

$(9t+1)(t-9)=0 \quad \therefore t=9 (\because t>0)$

$t=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 이므로

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=9, \left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \quad \therefore x=-2$

따라서 $\alpha=-2$ 이므로

$\log_2 \alpha^2 = \log_2 (-2)^2 = 2$

6 $\begin{cases} 2^{x+2}-3^{y-1}=29 \\ 2^{x-1}+3^{y+2}=85 \end{cases}$ 에서 $\begin{cases} 4 \times 2^x - \frac{1}{3} \times 3^y = 29 \\ \frac{1}{2} \times 2^x + 9 \times 3^y = 85 \end{cases}$

$2^x=X, 3^y=Y (X>0, Y>0)$ 로 놓으면

$\begin{cases} 4X - \frac{1}{3}Y = 29 \\ \frac{1}{2}X + 9Y = 85 \end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $X=8, Y=9$

즉, $2^x=8=2^3, 3^y=9=3^2$ 이므로 $x=3, y=2$

따라서 $\alpha=3, \beta=2$ 이므로 $\alpha+\beta=5$

7 $(f \circ g)(x)=(g \circ f)(x)$ 에서

$2 \times 2^x + 2 = 2^{2x+2}, 4 \times 2^{2x} - 2 \times 2^x - 2 = 0$

$2^x=t(t>0)$ 로 놓으면

$4t^2-2t-2=0, 2t^2-t-1=0$

$(2t+1)(t-1)=0 \quad \therefore t=1 (\because t>0)$

$t=2^x$ 이므로

$2^x=1 \quad \therefore x=0$

8 $2^x+2^{-x}=t(t\geq 2)$ 로 놓으면

$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$ 이므로

$2(t^2-2)-3t-1=0, 2t^2-3t-5=0$

$(t+1)(2t-5)=0 \quad \therefore t=\frac{5}{2} (\because t\geq 2)$

$t=2^x+2^{-x}$ 이므로 $2^x+2^{-x}=\frac{5}{2}$

$2^x=X(X>0)$ 로 놓으면

$X+\frac{1}{X}=\frac{5}{2}, 2X^2-5X+2=0$

$(2X-1)(X-2)=0 \quad \therefore X=\frac{1}{2}$ 또는 $X=2$

$X=2^x$ 이므로 $2^x=\frac{1}{2}$ 또는 $2^x=2$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

9 $(4x-1)^{2x-5}=(2x+2)^{2x-5}$ 에서

(i) 밑이 같으면 $4x-1=2x+2 \quad \therefore x=\frac{3}{2}$

(ii) 지수가 0이면 $2x-5=0 \quad \therefore x=\frac{5}{2}$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은 $\frac{3}{2}+\frac{5}{2}=4$

10 $x>0$ 이므로 $x^{x+6}=(x^x)^3$ 에서 $x^{x+6}=x^{3x}$

(i) 밑이 1이면 $x=1$

(ii) 지수가 같으면 $x+6=3x \quad \therefore x=3$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은 $1+3=4$

11 $(x-1)^{3+2x}=(x-1)^{x^2}$ 에서

(i) 밑이 1이면 $x-1=1 \quad \therefore x=2$

(ii) 지수가 같으면 $3+2x=x^2, x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=3 (\because x>1)$

(i), (ii)에서 모든 근의 곱은 $2 \times 3=6$

12 $3^x=t(t>0)$ 로 놓으면

$81t^2-81t+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ 의 두 근은 $3^\alpha, 3^\beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$3^\alpha \times 3^\beta = \frac{1}{81}, 3^{\alpha+\beta} = 3^{-4}$

$\therefore \alpha+\beta=-4$

13 $2^x=t(t>0)$ 로 놓으면

$t^2-10t+20=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ 의 두 근은 $2^\alpha, 2^\beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2^\alpha+2^\beta=10, 2^\alpha \times 2^\beta=20$

$\therefore 2^{2\alpha}+2^{2\beta}=(2^\alpha+2^\beta)^2-2 \times 2^\alpha \times 2^\beta$
 $=10^2-2 \times 20=60$

- 14 주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = -4$$

$$3^x = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$3t^2 - t + k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 두 근은 $3^\alpha, 3^\beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$3^\alpha \times 3^\beta = \frac{k}{3}, \quad 3^{\alpha+\beta} = \frac{k}{3}$$

이때 $\alpha + \beta = -4$ 이므로

$$\frac{1}{81} = \frac{k}{3} \quad \therefore k = \frac{1}{27}$$

- 15 주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2}$$

$$a^x = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 7t + 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 두 근은 a^α, a^β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a^\alpha \times a^\beta = 5, \quad a^{\alpha+\beta} = 5$$

이때 $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$ 이므로 $a^{\frac{1}{2}} = 5$

양변을 제곱하면 $a = 25$

- 16 $2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$4t^2 - 2 \times 2^a t + 16 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지면 ①은 오직 하나의 양의 실근을 갖는다.

이때 ①에서 (두 근의 곱) $= 4 > 0$ 이므로 ①은 양수인 중근을 갖는다.

①의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (2^a)^2 - 4 \times 16 = 0, \quad 4^a - 4^3 = 0$$

$$\therefore a = 3$$

이를 ①에 대입하면

$$4t^2 - 16t + 16 = 0, \quad (t-2)^2 = 0 \quad \therefore t = 2$$

즉, $2^a = 2$ 이므로 $a = 1$

$$\therefore a + a = 3 + 1 = 4$$

- 17 $\left(\frac{1}{3}\right)^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$t^2 - at + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지면 ①은 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

(i) ①의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 에서

$$D = a^2 - 8 > 0$$

$$\therefore a < -2\sqrt{2} \text{ 또는 } a > 2\sqrt{2}$$

(ii) (두 근의 합) > 0 에서 $a > 0$

(iii) (두 근의 곱) > 0 에서 $2 > 0$

(i), (ii), (iii)을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$a > 2\sqrt{2}$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 3이다.

- 18 $4^x - 2(m-4)2^x + 2m = 0$ 에서

$$(2^x)^2 - 2(m-4)2^x + 2m = 0$$

$$2^x = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2(m-4)t + 2m = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 주어진 방정식의 두 근이 모두 1보다 크면 $x > 1$ 이므로 $2^x = t$ 에서 $t > 2$

즉, ①의 두 근은 2보다 크다.

$f(t) = t^2 - 2(m-4)t + 2m$ 이라 할 때 ①의 두 근이 2보다 크려면

(i) ①의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = (m-4)^2 - 2m \geq 0$$

$$m^2 - 10m + 16 \geq 0, \quad (m-2)(m-8) \geq 0$$

$$\therefore m \leq 2 \text{ 또는 } m \geq 8$$

(ii) $y = f(t)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $t = m - 4$ 이므로

$$m - 4 > 2 \quad \therefore m > 6$$

(iii) $f(2) > 0$ 이어야 하므로

$$4 - 4(m-4) + 2m > 0 \quad \therefore m < 10$$

(i), (ii), (iii)을 동시에 만족시키는 m 의 값의 범위는 $8 \leq m < 10$

- 19 $5^{x(x+1)} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ 에서

$$5^{x(x+1)} \geq 5^{-x+3} \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$x(x+1) \geq -x+3, \quad x^2 + 2x - 3 \geq 0$$

$$(x+3)(x-1) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq 1$$

- 20 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x < 4 < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2x-5}$ 에서

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-4} < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2x-5} \quad \blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$$

$$2x-5 < -4 < x \quad \therefore -4 < x < \frac{1}{2}$$

따라서 정수 x 는 $-3, -2, -1, 0$ 의 4개이다.

- 21 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{g(x)}$ 에서 $\blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$

$$f(x) \leq g(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 그래프에서 ①을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$-\frac{14}{3} \leq x \leq 2$$

따라서 정수 x 는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ 의 7개이다.

22 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+6} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$ 에서 $\blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$
 $x+6 > x^2, x^2-x-6 < 0$
 $(x+2)(x-3) < 0 \quad \therefore -2 < x < 3$
 $\therefore A = \{x \mid -2 < x < 3\}$
 $3^{|x-2|} \leq 3^a$ 에서 $\blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$
 $|x-2| \leq a, -a \leq x-2 \leq a$
 $\therefore 2-a \leq x \leq a+2$
 $\therefore B = \{x \mid 2-a \leq x \leq a+2\}$
 $A \cap B = A$ 를 만족시키는 a 의 값의 범위는
 $2-a \leq -2, a+2 \geq 3 \quad \therefore a \geq 4$
따라서 양수 a 의 최솟값은 4이다.

23 $3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 + 7 \leq 4(3t - 5), t^2 - 12t + 27 \leq 0$
 $(t-3)(t-9) \leq 0 \quad \therefore 3 \leq t \leq 9$
 $t = 3^x$ 이므로 $3 \leq 3^x \leq 9 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$
 $\therefore 1 \leq x \leq 2$
따라서 모든 자연수 x 의 값의 합은 $1+2=3$

24 $\left(\frac{1}{5}\right)^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 \geq 20t + 125, t^2 - 20t - 125 \geq 0$
 $(t+5)(t-25) \geq 0 \quad \therefore t \geq 25 (\because t > 0)$
 $t = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ 이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^x \geq 25 \quad \blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$
 $\therefore x \leq -2$
따라서 구하는 x 의 최댓값은 -2 이다.

25 $2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $4t^2 - at + b < 0$
한편 $-2 < x < 1$ 에서 $\frac{1}{4} < t < 2$ 이므로 이차항의 계수가 4
이고 해가 $\frac{1}{4} < t < 2$ 인 t 에 대한 이차부등식은
 $4\left(t - \frac{1}{4}\right)(t-2) < 0, 4t^2 - 9t + 2 < 0$
 $t = 2^x$ 이므로 $4^{x+1} - 9 \times 2^x + 2 < 0$
따라서 $a=9, b=2$ 이므로
 $ab=18$

26 $\begin{cases} 2^{x^2-6} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x & \dots\dots \textcircled{㉠} \\ \left(\frac{1}{4}\right)^x - 3 \times 2^{-x} - 4 < 0 & \dots\dots \textcircled{㉡} \end{cases}$
 $\textcircled{㉠}$ 에서 $2^{x^2-6} \leq 2^{-x} \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$
 $x^2 - 6 \leq -x, x^2 + x - 6 \leq 0$
 $(x+3)(x-2) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$

$\textcircled{㉡}$ 에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 3t - 4 < 0, (t+1)(t-4) < 0$
 $\therefore 0 < t < 4 (\because t > 0)$
 $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이므로 $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < 4 \quad \blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$
 $\therefore x > -2 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$
 $\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $-2 < x \leq 2$
따라서 모든 정수 x 의 값의 합은
 $-1+0+1+2=2$

27 (i) $0 < x < 1$ 일 때,
 $x-3 \leq 5-x \quad \therefore x \leq 4$
그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$
(ii) $x=1$ 일 때, $1 \geq 1$ 이므로 $x=1$
(iii) $x > 1$ 일 때,
 $x-3 \geq 5-x \quad \therefore x \geq 4$
(i), (ii), (iii) 에서 $0 < x \leq 1$ 또는 $x \geq 4$

28 (i) $0 < x-1 < 1$, 즉 $1 < x < 2$ 일 때,
 $x^2 - x > 8+x, x^2 - 2x - 8 > 0$
 $(x+2)(x-4) > 0 \quad \therefore x < -2$ 또는 $x > 4$
그런데 $1 < x < 2$ 이므로 해는 없다.
(ii) $x-1=1$ 일 때, $1 < 1$ 이므로 해는 없다.
(iii) $x-1 > 1$, 즉 $x > 2$ 일 때,
 $x^2 - x < 8+x, x^2 - 2x - 8 < 0$
 $(x+2)(x-4) < 0 \quad \therefore -2 < x < 4$
그런데 $x > 2$ 이므로 $2 < x < 4$
(i), (ii), (iii) 에서 $2 < x < 4$
따라서 $\alpha=2, \beta=4$ 이므로
 $\alpha+\beta=6$

29 (i) $0 < x^2 - x + 1 < 1$, 즉 $0 < x < 1$ 일 때,
 $2x-5 > x+2 \quad \therefore x > 7$
그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해는 없다.
(ii) $x^2 - x + 1 = 1$ 일 때, $1 < 1$ 이므로 해는 없다.
(iii) $x^2 - x + 1 > 1$, 즉 $x < 0$ 또는 $x > 1$ 일 때,
 $2x-5 < x+2 \quad \therefore x < 7$
그런데 $x < 0$ 또는 $x > 1$ 이므로
 $x < 0$ 또는 $1 < x < 7$
(i), (ii), (iii) 에서 $x < 0$ 또는 $1 < x < 7$
따라서 자연수 x 는 2, 3, 4, 5, 6 의 5개이다.

30 $5^x=t(t>0)$ 로 놓으면 $t^2-5t+k\geq 0$
 $f(t)=t^2-5t+k=\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+k-\frac{25}{4}$ 라 하면 $t>0$ 에서
 $f(t)$ 의 최솟값은 $k-\frac{25}{4}$
 부등식 $f(t)\geq 0$ 이 $t>0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 성립하
 려면 $k-\frac{25}{4}\geq 0 \quad \therefore k\geq \frac{25}{4}$
 따라서 자연수 k 의 최솟값은 7이다.

31 $2^x=t(t>0)$ 로 놓으면 $2t^2+4t+2-a>0$
 $f(t)=2t^2+4t+2-a=2(t+1)^2-a$ 라 하고 $t>0$ 에서
 $f(t)>0$ 이 성립하려면
 $f(0)\geq 0, 2-a\geq 0 \quad \therefore a\leq 2$
 따라서 모든 자연수 a 의 값의 합은 $1+2=3$

32 $3^x=t(t>0)$ 로 놓으면 $t^2-3at+9\geq 0$
 $f(t)=t^2-3at+9=\left(t-\frac{3}{2}a\right)^2+9-\frac{9}{4}a^2$ 이라 하고
 $t>0$ 에서 부등식 $f(t)\geq 0$ 이 성립하려면
 (i) $\frac{3}{2}a\geq 0$, 즉 $a\geq 0$ 일 때, $9-\frac{9}{4}a^2\geq 0$ 이어야 하므로
 $a^2-4\leq 0, (a+2)(a-2)\leq 0 \quad \therefore -2\leq a\leq 2$
 그런데 $a\geq 0$ 이므로 $0\leq a\leq 2$
 (ii) $\frac{3}{2}a<0$, 즉 $a<0$ 일 때, $f(0)\geq 0$ 이어야 한다.
 $f(0)=9\geq 0$ 이므로 모든 실수 t 에 대하여 성립한다.
 (i), (ii)에서 $t>0$ 에서 부등식 $f(t)\geq 0$ 이 성립하려면
 $a\leq 2$

33 x 분 후 실험실 A의 암모니아 분자는 $2^{10}\times 8^x$ 개, 실험실
 B의 암모니아 분자는 $4^{15}\times 2^x$ 개이므로
 $2^{10}\times 8^x=4^{15}\times 2^x, 2^{10+3x}=2^{30+x}$
 $10+3x=30+x \quad \therefore x=10$
 따라서 암모니아 분자 수가 같아지는 것은 10분 후이다.

34 x 년 후에 1억 원 이상이 된다고 하면
 $2500\times 2^{\frac{x}{5}}\geq 10000, 2^{\frac{x}{5}}\geq 4 \quad \blacktriangleleft (\text{밑})>1$
 $\frac{x}{5}\geq 2 \quad \therefore x\geq 10$
 따라서 투자금이 1억 원 이상이 되는 것은 10년 후부터이다.

35 x 주 후 불량률이 0.2% 이하가 된다고 하면
 $12.8\times \left(\frac{1}{2}\right)^x\leq 0.2, \left(\frac{1}{2}\right)^x\leq \frac{1}{64} \quad \blacktriangleleft 0<(\text{밑})<1$
 $\therefore x\geq 6$
 따라서 처음으로 0.2% 이하가 되는 것은 6주 후부터이다.

I-2 03 로그함수

기초 문제 Training

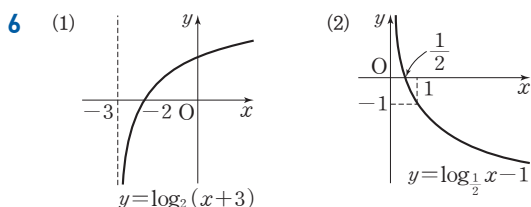
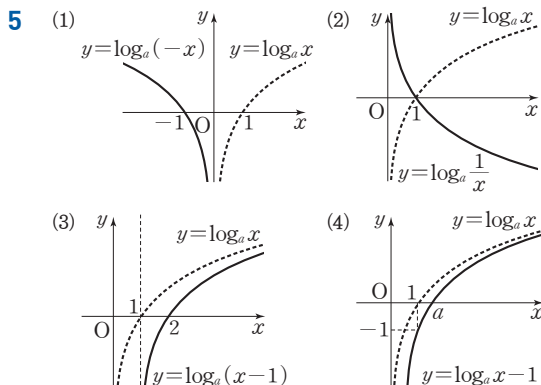
31쪽

1 L, R

2 (1) 0 (2) 1 (3) -2 (4) -3

3 (1) 0 (2) -2 (3) 3 (4) -4

4 ㄱ, ㄷ

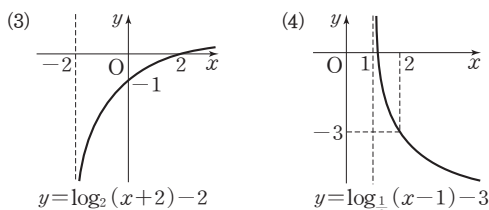


정의역: $\{x|x>-3\}$

정의역: $\{x|x>0\}$

점근선의 방정식: $x=-3$

점근선의 방정식: $x=0$



정의역: $\{x|x>-2\}$

정의역: $\{x|x>1\}$

점근선의 방정식: $x=-2$

점근선의 방정식: $x=1$

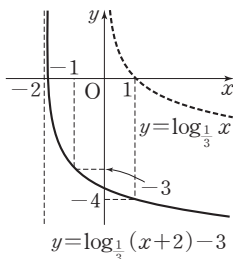
7 (1) $y=\log_5 x$ (2) $y=-\log x$

8 (1) 최댓값: 5, 최솟값: 2

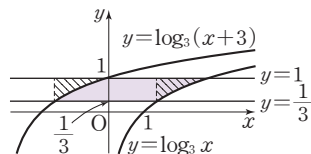
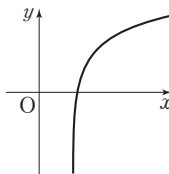
(2) 최댓값: 0, 최솟값: -3

1 ③	2 ㄱ	3 ⑤	4 ④	5 ④
6 5	7 -5	8 2	9 ③	10 4
11 $\frac{15}{4}$	12 ④	13 $\log_b \frac{a}{b} < \log_b a < \log_a b < \log_a ab$		
14 ②	15 ④	16 ①	17 2	18 38
19 $\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$	20 2	21 ②	22 1	
23 ①	24 3	25 ④	26 ②	27 ④
28 24	29 ②	30 ①	31 11	

- 1 $f(m)=\log_a m=2, f(n)=\log_a n=4$ 이므로
 $f(mn)=\log_a mn=\log_a m+\log_a n=6$
- 2 ㄱ. $f(ab)=\log_2 ab=\log_2 a+\log_2 b=f(a)+f(b)$
 ㄴ. $f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=\log_2 a+\log_2 \frac{1}{a}$
 $=\log_2 a-\log_2 a=0$
 ㄷ. $f(a-b)=\log_2 (a-b)$
 $f(a)-f(b)=\log_2 a-\log_2 b=\log_2 \frac{a}{b}$
 $\therefore f(a-b) \neq f(a)-f(b)$
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.
- 3 $f(x)=\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\log_2 3}=3^{\log_2 \left(\frac{x+2}{x+1}\right)}$ 이므로
 $f(1) \times f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(14)$
 $=3^{\log_2 \frac{3}{2}} \times 3^{\log_2 \frac{4}{3}} \times 3^{\log_2 \frac{5}{4}} \times \cdots \times 3^{\log_2 \frac{16}{15}}$
 $=3^{\log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{4}{3} + \log_2 \frac{5}{4} + \cdots + \log_2 \frac{16}{15}}$
 $=3^{\log_2 \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{16}{15}\right)}$
 $=3^{\log_2 8}=3^3=27$
- 4 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)-3$ 의
 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프
 를 x 축의 방향으로 -2 만큼,
 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행
 이동한 것이므로 오른쪽 그림
 과 같다.
- ① 정의역은 $\{x|x>-2\}$ 이다.
 ② 치역은 실수 전체의 집합이다.
 ③ 그래프는 점 $(1, -4)$ 를 지난다.
 ④ 밑이 1보다 작으므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감
 소한다.
 따라서 옳지 않은 것은 ④이다.



- 5 $y=\log_2 2(x-2)+1=\log_2(x-2)+2$
 함수 $y=\log_2 2(x-2)+1$ 의 그래프
 는 함수 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축
 의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로
 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽
 그림과 같다.
 따라서 함수 $y=\log_2 2(x-2)+1$ 의 그래프로 옳은 것은
 ④이다.
- 6 $y=\log_5(x+2)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y
 축의 방향으로 4만큼 평행이동하면
 $y=\log_5(x+3)+4$
 이 그래프가 점 $(2, k)$ 를 지나므로
 $k=\log_5 5+4=5$
- 7 $y=\log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의
 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면
 $y=-\log_2(x-m)+n$
 이때 점근선의 방정식이 $x=-2$ 이므로
 $m=-2$
 따라서 $y=-\log_2(x+2)+n$ 의 그래프가 점 $(0, -4)$ 를
 지나므로
 $-4=-\log_2 2+n \quad \therefore n=-3$
 $\therefore m+n=-2+(-3)=-5$
- 8 함수 $y=\log_3(x+3)$ 의 그래프는 $y=\log_3 x$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림
 에서 빗금 친 두 부분의 넓이는 서로 같다.
- 따라서 구하는 넓이는
 $3 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2$
- 9 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프는 점 (a, c) 를 지나므로
 $\log_{\frac{1}{3}} a = c \quad \therefore a = \left(\frac{1}{3}\right)^c = 3^{-c}$
 또 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프는 점 (b, a) 를 지나므로
 $\log_{\frac{1}{3}} b = a$
 $\therefore b = \left(\frac{1}{3}\right)^a = 3^{-a}$
 $\therefore 3^{-a-c} = 3^{-a} \times 3^{-c} = ab$



- 10 점 A의 좌표를 (a, b) 라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 1이므로 $b=1$

점 A는 $y=\log_3 x$ 위의 점이므로 $1=\log_3 a$ 에서
 $a=3 \quad \therefore A(3, 1)$

따라서 점 D의 x 좌표는 $3+1=4$

- 11 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$ 에 대하여

$$x=\frac{1}{2} \text{일 때, } y=\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad \therefore A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$x=2 \text{일 때, } y=\log_{\frac{1}{4}} 2=-\frac{1}{2} \quad \therefore C\left(2, -\frac{1}{2}\right)$$

$y=\log_{\sqrt{2}} x$ 에 대하여

$$x=\frac{1}{2} \text{일 때, } y=\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2}=-2 \quad \therefore B\left(\frac{1}{2}, -2\right)$$

$$x=2 \text{일 때, } y=\log_{\sqrt{2}} 2=2 \quad \therefore D(2, 2)$$

$\overline{AB}=\overline{CD}=\frac{5}{2}$ 에서 사각형 ABCD는 평행사변형이므로 구

$$\text{하는 넓이는 } \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$$

- 12 $A=2\log_3 5=\log_3 5^2=\log_3 25$

$$B=3=\log_3 3^3=\log_3 27$$

$$C=\log_9 400=\log_{3^2} 20^2=\log_3 20$$

$20 < 25 < 27$ 이고, 밑이 1보다 크므로

$$\log_3 20 < \log_3 25 < \log_3 27 \quad \therefore C < A < B$$

- 13 $0 < a < 1$ 이므로 $b < a$ 의 양변에 밑이 a 인 로그를 취하면

$$\log_a b > 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$0 < b < 1$ 이므로 $b < a$ 의 양변에 밑이 b 인 로그를 취하면

$$1 > \log_b a \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } \log_b a < \log_a b$$

$$\log_a ab = \log_a b + 1, \log_b \frac{a}{b} = \log_b a - 1 \text{이므로}$$

$$\log_a b < \log_a ab, \log_b \frac{a}{b} < \log_b a$$

$$\therefore \log_b \frac{a}{b} < \log_b a < \log_a b < \log_a ab$$

- 14 $A=-f(a+1)=-\log_3(a+1)=\log_3 \frac{1}{a+1}$

$$B=f(a+1)-f(a)=\log_3(a+1)-\log_3 a$$

$$=\log_3 \frac{a+1}{a}=\log_3 \left(1+\frac{1}{a}\right)$$

$$C=f(a+2)-f(a+1)=\log_3(a+2)-\log_3(a+1)$$

$$=\log_3 \frac{a+2}{a+1}=\log_3 \left(1+\frac{1}{a+1}\right)$$

$$\frac{1}{a+1} < 1+\frac{1}{a+1} < 1+\frac{1}{a} \text{이고, 밑이 1보다 크므로}$$

$$\log_3 \frac{1}{a+1} < \log_3 \left(1+\frac{1}{a+1}\right) < \log_3 \left(1+\frac{1}{a}\right)$$

$$\therefore A < C < B$$

- 15 $y=\frac{1}{2}\log_2(x-3)+1$ 에서

$$\log_2(x-3)=2(y-1)$$

로그의 정의에 의하여

$$x-3=2^{2(y-1)} \quad \therefore x=4^{y-1}+3$$

x 와 y 를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$$y=4^{x-1}+3$$

$$\therefore a=4, b=-1, c=3 \quad \therefore a+b+c=6$$

- 16 $g(2)=4$ 에서 $f(4)=2$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{3}}(4-k)+2=2, \log_{\frac{1}{3}}(4-k)=0$$

$$4-k=1 \quad \therefore k=3$$

$$\therefore f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x-3)+2$$

$g(1)=a$ 라 하면 $f(a)=1$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{3}}(a-3)+2=1, \log_{\frac{1}{3}}(a-3)=-1$$

$$a-3=3 \quad \therefore a=6$$

- 17 $(f \circ g)(x)=x$ 이므로 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.

$(g \circ g \circ g)(a)=127$ 에서 $g(a)=b, g(b)=c$ 라 하면

$$g(c)=127$$

$$g(c)=127 \text{에서 } f(127)=c \text{이므로 } c=\log_2(127+1)=7$$

$$g(b)=7 \text{에서 } f(7)=b \text{이므로 } b=\log_2(7+1)=3$$

$$g(a)=3 \text{에서 } f(3)=a \text{이므로 } a=\log_2(3+1)=2$$

- 18 점 Q(2, b)가 $y=g(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

점 (b, 2)는 $y=\log_2(x-1)$ 의 그래프 위의 점이다.

$$2=\log_2(b-1) \text{에서 } b-1=2^2 \quad \therefore b=5$$

점 P(a, 5)가 $y=\log_2(x-1)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$5=\log_2(a-1), a-1=2^5 \quad \therefore a=33$$

$$\therefore a+b=33+5=38$$

- 19 $g(-1)=a$ 에서 $2^{-1}=a \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

$$\therefore D\left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

$$f(b)=\frac{1}{2} \text{에서 } \log_2 b=\frac{1}{2} \quad \therefore b=\sqrt{2}$$

$$\therefore B\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$$

함수 $f(x)$ 는 함수 $g(x)$ 의 역함수이므로

$$B\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right) \text{에서 } C\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$$

$$D\left(-1, \frac{1}{2}\right) \text{에서 } A\left(\frac{1}{2}, -1\right)$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ACD + \triangle ABC$$

$$= \frac{3+3\sqrt{2}}{4} + \frac{3+\sqrt{2}}{4} = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

20 함수 $y=f(x)$ 는 함수 $y=g(x)$ 의 역함수이므로
 $P(k, -k) (k < 0)$ 라 하면 $Q(-k, k)$
 이때 $PQ=4\sqrt{2}$ 이므로
 $\sqrt{(k+k)^2 + (-k-k)^2} = 4\sqrt{2}, \sqrt{8k^2} = 4\sqrt{2}$
 $k^2=4 \quad \therefore k=-2 (\because k < 0)$
 점 $Q(2, -2)$ 는 함수 $g(x)=a^{x-1}-b$ 의 그래프 위의 점
 이므로 $a-b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 또 점 $(4, 4)$ 는 함수 $g(x)=a^{x-1}-b$ 의 그래프 위의 점이
 므로 $a^3-b=4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$
 $\textcircled{8}-\textcircled{7}$ 을 하면
 $a^3-a=6, a^3-a-6=0$
 $(a-2)(a^2+2a+3)=0 \quad \therefore a=2$
 $a=2$ 를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면
 $2-b=-2 \quad \therefore b=4$
 따라서 $f(x)=\log_2(x+4)+1, g(x)=2^{x-1}-4$ 이므로
 $f(12)+g(1)=5+(-3)=2$

21 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+2$ 는 밑이 1보다 작으므로
 $x=3$ 일 때, $M=\log_{\frac{1}{2}}2+2=1$
 $x=17$ 일 때, $m=\log_{\frac{1}{2}}16+2=-2$
 $\therefore 2M+m=2 \times 1 + (-2)=0$

22 $y=\log_3(x+2)+k$ 는 밑이 1보다 크므로
 $x=13$ 일 때, $M=\log_315+k$
 $x=3$ 일 때, $m=\log_35+k$
 $\therefore M-m=\log_315+k-(\log_35+k)=\log_33=1$

23 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+b$ 는 밑이 1보다 작으므로 $x=a$ 일 때 최
 대값이 1이고, $x=10$ 일 때 최솟값이 -3 이다.
 즉, $\log_{\frac{1}{3}}(a-1)+b=1, \log_{\frac{1}{3}}9+b=-3$ 이므로
 $b=-1, a=\frac{10}{9} \quad \therefore 9ab=-10$

24 (i) $0 < a < 1$ 이면 $x=-3$ 일 때 최대이므로
 $\log_a1+1=3 \quad \therefore 1=3 \Rightarrow$ 모순
 (ii) $a > 1$ 이면 $x=5$ 일 때 최대이므로
 $\log_a9+1=3, a^2=9 \quad \therefore a=3 (\because a > 1)$
 (i), (ii)에서 $a=3$

25 진수의 조건에서
 $x-5 > 0, 25-x > 0 \quad \therefore 5 < x < 25 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 $y=\log(x-5)+\log(25-x)$
 $=\log(-x^2+30x-125)$
 $f(x)=-x^2+30x-125$ 라 하면
 $f(x)=-(x-15)^2+100$

$\textcircled{7}$ 에서 $0 < f(x) \leq 100$
 $0 < f(x) \leq 100$ 에서 $y=\log f(x)$ 는 $f(x)=100$ 일 때 최
 대이므로 구하는 최댓값은 $\log 100=2$

26 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+3)$ 에서 $f(x)=x^2-2x+3$ 이라 하면
 $f(x)=(x-1)^2+2$
 $2 \leq x \leq 6$ 에서 $3 \leq f(x) \leq 27$
 $3 \leq f(x) \leq 27$ 에서 $y=\log_{\frac{1}{3}}f(x)$ 는
 $f(x)=3$ 일 때, $M=-1$
 $f(x)=27$ 일 때, $m=-3$
 $\therefore M^2+m=(-1)^2+(-3)=-2$

27 $y=\log_a(|x-1|+2)$ 에서 $f(x)=|x-1|+2$ 라 하면
 $0 \leq x \leq 7$ 에서 $2 \leq f(x) \leq 8$
 (i) $a > 1$ 이면 $y=\log_a f(x)$ 는 $f(x)=8$ 일 때 최대이므로
 $\log_a8=-1 \quad \therefore a=\frac{1}{8}$
 그런데 $a > 1$ 이므로 조건에 맞지 않다.
 (ii) $0 < a < 1$ 이면 $y=\log_a f(x)$ 는 $f(x)=2$ 일 때 최대이
 므로
 $\log_a2=-1 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{2}$
 따라서 $y=\log_{\frac{1}{2}}f(x)$ 는 $f(x)=8$ 일 때 최소이므로 구하
 는 최솟값은 $\log_{\frac{1}{2}}8=-3$

28 $y=(\log_{\frac{1}{3}}x)^2-\log_{\frac{1}{3}}x^2+3=(\log_{\frac{1}{3}}x)^2-2\log_{\frac{1}{3}}x+3$
 $\log_{\frac{1}{3}}x=t$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 27$ 에서 $-3 \leq t \leq 0$
 이때 주어진 함수는
 $y=t^2-2t+3=(t-1)^2+2$
 따라서 $-3 \leq t \leq 0$ 에서 함수 $y=(t-1)^2+2$ 는
 $t=-3$ 일 때, $M=18$
 $t=0$ 일 때, $m=3$
 $\therefore M+2m=18+2 \times 3=24$

29 $y=\log_2x+\log_x128=\log_2x+\log_x2^7$
 $=\log_2x+7\log_x2=\log_2x+\frac{7}{\log_2x}$
 $x > 1$ 에서 $\log_2x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계
 에 의하여
 $y=\log_2x+\frac{7}{\log_2x} \geq 2\sqrt{\log_2x \times \frac{7}{\log_2x}}=2\sqrt{7}$
 (단, 등호는 $\log_2x=\sqrt{7}$ 일 때 성립)
 따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{7}$ 이다.

- 30 $y = \log x^{\log x} - 4 \log 10x$
 $= (\log x)^2 - 4(1 + \log x)$
 $= (\log x)^2 - 4 \log x - 4$
 $\log x = t$ 로 놓으면 $10 \leq x \leq 1000$ 에서 $1 \leq t \leq 3$
 이때 주어진 함수는
 $y = t^2 - 4t - 4 = (t-2)^2 - 8$
 따라서 $1 \leq t \leq 3$ 에서 함수 $y = (t-2)^2 - 8$ 은
 $t=1$ 또는 $t=3$ 일 때, $M = -7$
 $t=2$ 일 때, $m = -8$
 $\therefore M - m = -7 - (-8) = 1$

- 31 $y = \log_2 4x \times \log_2 \frac{16}{x} = (2 + \log_2 x)(4 - \log_2 x)$
 $\log_2 x = t$ 로 놓으면
 $y = (2+t)(4-t) = -t^2 + 2t + 8 = -(t-1)^2 + 9$
 따라서 $t=1$ 일 때, 즉 $x=2$ 일 때 최댓값이 9이므로
 $a=2, M=9 \quad \therefore a+M=11$

I-2 04 로그함수의 활용

기초 문제 Training

37쪽

- 1 (1) $x=8$ (2) $x=4$ (3) $x=3$ (4) $x=\sqrt{2}$
- 2 0, 4, 4, 10000, 10000
- 3 (1) $x=4$ 또는 $x=16$ (2) $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=27$
- 4 (1) $2 < x < 11$ (2) $x \leq -2$
 (3) $-3 \leq x < 0$ 또는 $0 < x \leq 3$ (4) $-2 < x < 1$
- 5 0, -2, 4, -2, 4, $\frac{1}{4}$, 16, $\frac{1}{4}$, 16
- 6 (1) $0 < x \leq \frac{1}{10}$ 또는 $x \geq 100$ (2) $\frac{1}{3} < x < 243$

핵심 유형 Training

38~42쪽

- | | | | | |
|-----------------------------|------|--|--------------------|------|
| 1 $x=3$ | 2 ② | 3 ① | 4 $x=1$ | 5 80 |
| 6 $x=10$ | 7 5 | 8 ⑤ | 9 ② | 10 ① |
| 11 ⑤ | 12 ① | 13 ① | 14 -4 | 15 ① |
| 16 ④ | 17 ④ | 18 2 | 19 $3 < x < 4$ | |
| 20 4 | 21 3 | 22 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 또는 $x \geq 16$ | | |
| 23 ④ | 24 2 | 25 ④ | 26 ② | 27 ④ |
| 28 ③ | 29 ④ | 30 80 | 31 $0 < k \leq 10$ | |
| 32 $0 < a \leq \frac{1}{4}$ | 33 ① | 34 ④ | 35 6.25% | |

- 1 진수의 조건에서
 $2x-3 > 0, x > 0 \quad \therefore x > \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\log_2 3(2x-3) = 2 \log_2 x$ 에서
 $\log_2 (6x-9) = \log_2 x^2, 6x-9 = x^2$
 $x^2 - 6x + 9 = 0, (x-3)^2 = 0 \quad \therefore x=3$
 따라서 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $x=3$
- 2 진수의 조건에서
 $x-1 > 0, x+2 > 0 \quad \therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\log_2 (x-1) + \log_2 (x+2) = 2$ 에서
 $\log_2 (x-1)(x+2) = 2, (x-1)(x+2) = 4$
 $x^2 + x - 6 = 0, (x+3)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$
 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $x=2$ 이므로 $a=2 \quad \therefore 2a=4$
- 3 진수의 조건에서
 $x^2 - 3x - 10 > 0, x-2 > 0 \quad \therefore x > 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $2 \log_4 (x^2 - 3x - 10) = \log_2 (x-2) + 1$ 에서
 $\log_2 (x^2 - 3x - 10) = \log_2 (2x-4)$
 $x^2 - 3x - 10 = 2x-4, x^2 - 5x - 6 = 0$
 $(x+1)(x-6) = 0 \quad \therefore x = -1$ 또는 $x = 6$
 따라서 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $x=6$
- 4 진수의 조건에서
 $2x+2 > 0, 2x-1 > 0 \quad \therefore x > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\log_2 \sqrt{2x+2} = 1 - \frac{1}{2} \log_2 (2x-1)$ 에서
 $\frac{1}{2} \log_2 (2x+2) + \frac{1}{2} \log_2 (2x-1) = 1$
 $\log_2 (2x+2)(2x-1) = 2, (2x+2)(2x-1) = 4$
 $4x^2 + 2x - 6 = 0, 2x^2 + x - 3 = 0$
 $(2x+3)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -\frac{3}{2}$ 또는 $x = 1$
 따라서 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $x=1$

- 5 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면 } (t-1)^2 = t+5$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0, (t+1)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 4$$

$$t = \log_3 x \text{이므로 } \log_3 x = -1 \text{ 또는 } \log_3 x = 4$$

$$\therefore x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 81$$

$$\text{㉠에 의하여 } x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 81$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{1}{3}, \beta = 81 \text{이므로}$$

$$\beta - 3\alpha = 81 - 3 \times \frac{1}{3} = 80$$

- 6 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$2^{\log x} \times x^{\log 2} + 2^{\log x} - 6 = 0 \text{에서}$$

$$(2^{\log x})^2 + 2^{\log x} - 6 = 0$$

$$2^{\log x} = t (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 + t - 6 = 0$$

$$(t+3)(t-2) = 0 \quad \therefore t = 2 (\because t > 0)$$

$$t = 2^{\log x} \text{이므로 } 2^{\log x} = 2$$

$$\log x = 1 \quad \therefore x = 10$$

$$\text{따라서 ㉠에 의하여 } x = 10$$

- 7 밑과 진수의 조건에서 $x > 0, x \neq 1$ ㉠

$$\log_5 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t + \frac{6}{t} - 5 = 0, t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t-2)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 3$$

$$t = \log_5 x \text{이므로 } \log_5 x = 2 \text{ 또는 } \log_5 x = 3$$

$$\therefore x = 25 \text{ 또는 } x = 125$$

$$\text{㉠에 의하여 } x = 25 \text{ 또는 } x = 125$$

$$\text{따라서 } \alpha = 25, \beta = 125 \text{이므로 } \frac{\beta}{\alpha} = 5$$

- 8 진수의 조건에서 $x > 0, y > 0$ ㉠

$$\log_3 x \times \log_2 y = 10 \text{에서}$$

$$\frac{\log x}{\log 3} \times \frac{\log y}{\log 2} = 10, \frac{\log x}{\log 2} \times \frac{\log y}{\log 3} = 10$$

$$\therefore \log_2 x \times \log_3 y = 10$$

$$\log_2 x = X, \log_3 y = Y \text{로 놓으면}$$

$$X + Y = 7, XY = 10$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면}$$

$$X = 2, Y = 5 \text{ 또는 } X = 5, Y = 2$$

$$\log_2 x = 2, \log_3 y = 5 \text{ 또는 } \log_2 x = 5, \log_3 y = 2$$

$$\therefore x = 4, y = 243 \text{ 또는 } x = 32, y = 9$$

$$\text{㉠에 의하여 } x = 4, y = 243 \text{ 또는 } x = 32, y = 9$$

$$\text{이때 } \alpha > \beta \text{이므로 } \alpha = 32, \beta = 9$$

$$\therefore \alpha - \beta = 23$$

- 9 방정식의 양변에 상용로그를 취하면

$$(x-1) \log 2 = (1-2x) \log 5$$

$$x(\log 2 + 2 \log 5) = \log 2 + \log 5$$

$$\therefore x = \frac{\log 2 + \log 5}{\log 2 + 2 \log 5} = \frac{\log 10}{\log 50}$$

$$= \frac{1}{\log \frac{100}{2}} = \frac{1}{2 - \log 2} = \frac{1}{2 - a}$$

- 10 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$\text{방정식의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면}$$

$$(\log_3 x)^2 = 3 - 2 \log_3 x$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 = 3 - 2t, t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$(t+3)(t-1) = 0 \quad \therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

$$t = \log_3 x \text{이므로 } \log_3 x = -3 \text{ 또는 } \log_3 x = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{27} \text{ 또는 } x = 3$$

$$\text{따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는}$$

$$x = \frac{1}{27} \text{ 또는 } x = 3$$

- 11 진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$\text{방정식의 양변에 상용로그를 취하면}$$

$$(\log 5x)^2 = (\log 3x)^2$$

$$\therefore \log 5x = -\log 3x \text{ 또는 } \log 5x = \log 3x$$

$$(i) \log 5x = -\log 3x \text{에서}$$

$$5x = \frac{1}{3x} \quad \therefore x^2 = \frac{1}{15}$$

$$(ii) \log 5x = \log 3x \text{에서 } 5x = 3x, \text{ 즉 } x = 0$$

$$\text{그런데 ㉠에서 } x > 0 \text{이므로 해는 없다.}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a^2 = \frac{1}{15} \quad \therefore \frac{1}{a^2} = 15$$

- 12 $\log_2 x = t$ 로 놓으면 $(1+t)^2 - 2(3+2t) = 0$

$$t^2 - 2t - 5 = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{주어진 방정식의 두 근을 } \alpha, \beta \text{라 하면 ㉠의 두 근은}$$

$$\log_2 \alpha, \log_2 \beta \text{이므로 근과 계수의 관계에 의하여}$$

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 2, \log_2 \alpha \beta = 2$$

$$\therefore \alpha \beta = 4$$

- 13 $\log_3 x = t$ 로 놓으면 $(\log_3 2 + t)(\log_3 5 + t) = 2$

$$t^2 + (\log_3 2 + \log_3 5)t + \log_3 2 \times \log_3 5 - 2 = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{㉠의 두 근은 } \log_3 \alpha, \log_3 \beta \text{이므로 근과 계수의 관계에 의}$$

$$\text{하여 } \log_3 \alpha + \log_3 \beta = -(\log_3 2 + \log_3 5)$$

$$\log_3 \alpha \beta = \log_3 \frac{1}{10} \quad \therefore \alpha \beta = \frac{1}{10}$$

- 14** $\log_4 x = t$ 로 놓으면 $(t+k)(t+1)+2=0$
 $t^2 + (k+1)t + k + 2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 $\textcircled{㉠}$ 의 두 근은 $\log_4 \alpha, \log_4 \beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\log_4 \alpha + \log_4 \beta = -(k+1), \log_4 \alpha \beta = -k-1$
 이때 $\alpha\beta = 64$ 이므로 $3 = -k-1 \quad \therefore k = -4$
- 15** 진수의 조건에서
 $x^2 - 2x - 15 > 0, x - 3 > 0 \quad \therefore x > 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 주어진 부등식에서
 $\log_3 (x^2 - 2x - 15) < \log_3 (3x - 9)$ 이므로 $\blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$
 $x^2 - 2x - 15 < 3x - 9, x^2 - 5x - 6 < 0$
 $(x+1)(x-6) < 0 \quad \therefore -1 < x < 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $5 < x < 6$
 따라서 $\alpha = 5, \beta = 6$ 이므로 $\beta - \alpha = 1$
- 16** 진수의 조건에서
 $1 - x > 0, 2x + 6 > 0 \quad \therefore -3 < x < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 주어진 부등식에서
 $\log_{\frac{1}{2}} (1-x)^2 > \log_{\frac{1}{2}} (2x+6)$ 이므로 $\blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$
 $(1-x)^2 < 2x+6, x^2 - 4x - 5 < 0$
 $(x+1)(x-5) < 0 \quad \therefore -1 < x < 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $-1 < x < 1$
- 17** 진수의 조건에서
 $|x-3| > 0 \quad \therefore x \neq 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $\log_{\frac{1}{2}} |x-3| > -2$ 에서 $\blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$
 $|x-3| < 4, -4 < x-3 < 4$
 $\therefore -1 < x < 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $-1 < x < 3$ 또는 $3 < x < 7$
 따라서 정수 x 는 0, 1, 2, 4, 5, 6의 6개이다.
- 18** 진수의 조건에서
 $x > 0, \log_9 x > 0 \quad \therefore x > 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $\log_{\frac{1}{2}} (\log_9 x) > 1$ 에서 $\blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$
 $\log_9 x < \frac{1}{2} \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$
 $\therefore x < 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $1 < x < 3$
 따라서 자연수 x 의 값은 2이다.

- 19** (i) 부등식 $\log_2 (x^2 - 2x) < 3$
 진수의 조건에서 $x^2 - 2x > 0$
 $x(x-2) > 0 \quad \therefore x < 0$ 또는 $x > 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $\log_2 (x^2 - 2x) < 3$ 에서 $\blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$
 $x^2 - 2x < 8, x^2 - 2x - 8 < 0$
 $(x+2)(x-4) < 0 \quad \therefore -2 < x < 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $-2 < x < 0$ 또는 $2 < x < 4$
- (ii) 부등식 $2\log_{\frac{1}{3}} (x-3) \geq \log_{\frac{1}{3}} (x+3)$
 진수의 조건에서
 $x-3 > 0, x+3 > 0 \quad \therefore x > 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $2\log_{\frac{1}{3}} (x-3) \geq \log_{\frac{1}{3}} (x+3)$ 에서
 $\log_{\frac{1}{3}} (x-3)^2 \geq \log_{\frac{1}{3}} (x+3) \quad \blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$
 $(x-3)^2 \leq x+3, x^2 - 7x + 6 \leq 0$
 $(x-1)(x-6) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq x \leq 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $3 < x \leq 6$
- (i), (ii)에서 주어진 연립부등식의 해는 $3 < x < 4$
- 20** 진수의 조건에서
 $-x+3 > 0, -x^2+5 > 0$
 $\therefore -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $\log_{\frac{1}{2}} f(x) \geq \log_{\frac{1}{2}} g(x)$ 에서 $\blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$
 $f(x) \leq g(x)$
 $-x+3 \leq -x^2+5$ 에서 $x^2 - x - 2 \leq 0$
 $(x+1)(x-2) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $-1 \leq x \leq 2$
 따라서 정수 x 는 -1, 0, 1, 2의 4개이다.
- 21** 진수의 조건에서
 $x-1 > 0, \frac{x}{2} + k > 0 \quad \therefore x > 1, x > -2k$
 그런데 k 는 자연수이므로 $x > 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $\log_5 (x-1) \leq \log_5 \left(\frac{x}{2} + k \right)$ 에서 $\blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$
 $x-1 \leq \frac{x}{2} + k \quad \therefore x \leq 2k+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $1 < x \leq 2k+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 따라서 $\textcircled{㉢}$ 을 만족시키는 정수 x 가 7개이므로 $8 \leq 2k+2 < 9 \quad \therefore 3 \leq k < \frac{7}{2}$
 이때 k 가 자연수이므로 $k=3$

22 진수의 조건에서

$$x > 0, 4x > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$(5-t)(2+t) \leq 6, t^2 - 3t - 4 \geq 0$$

$$(t+1)(t-4) \geq 0 \quad \therefore t \leq -1 \text{ 또는 } t \geq 4$$

$$t = \log_2 x \text{이므로}$$

$$\log_2 x \leq -1 \text{ 또는 } \log_2 x \geq 4 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$\therefore x \leq \frac{1}{2} \text{ 또는 } x \geq 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ 또는 } x \geq 16$$

23 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$

$$\log_4 x = t \text{로 놓으면}$$

$$2t - t\left(\frac{1}{2} + t\right) + 1 \geq 0, 2t^2 - 3t - 2 \leq 0$$

$$(2t+1)(t-2) \leq 0 \quad \therefore -\frac{1}{2} \leq t \leq 2$$

$$t = \log_4 x \text{이므로 } -\frac{1}{2} \leq \log_4 x \leq 2 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq x \leq 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 16$$

따라서 자연수 x 는 1, 2, 3, ..., 16의 16개이다.

24 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면}$$

$$(1-t)t > -2, t^2 - t - 2 < 0$$

$$(t+1)(t-2) < 0 \quad \therefore -1 < t < 2$$

$$t = \log_2 x \text{이므로 } -1 < \log_2 x < 2 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} < x < 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{2} < x < 4$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{1}{2}, \beta = 4 \text{이므로 } \alpha\beta = 2$$

25 $\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓으면 $t^2 + 2at + b < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$

주어진 부등식의 해가 $1 < x < 9$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{3}} 9 < \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} 1 \quad \therefore -2 < t < 0$$

이차항의 계수가 1이고 해가 $-2 < t < 0$ 인 t 에 대한 이차 부등식은

$$t(t+2) < 0 \quad \therefore t^2 + 2t < 0$$

이 부등식이 ㉠과 일치하므로

$$a=1, b=0 \quad \therefore a+b=1$$

26 부등식의 양변에 상용로그를 취하면

$$(x-5)\log 4 < 3-x$$

$$(2\log 2 + 1)x < 3 + 10\log 2$$

$$\therefore x < \frac{3+10\log 2}{2\log 2+1} = \frac{3+10 \times 0.3}{2 \times 0.3+1} = 3.75$$

따라서 자연수 x 는 1, 2, 3의 3개이다.

27 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$

부등식의 양변에 상용로그를 취하면

$$(\log x)^2 < 3 + 2\log x, (\log x)^2 - 2\log x - 3 < 0$$

$$\log x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 2t - 3 < 0$$

$$(t+1)(t-3) < 0 \quad \therefore -1 < t < 3$$

$$t = \log x \text{이므로 } -1 < \log x < 3$$

$$\therefore \frac{1}{10} < x < 1000 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$\frac{1}{10} < x < 1000$$

따라서 자연수 x 의 최댓값은 999, 최솟값은 1이므로 그

$$\text{합은 } 999+1=1000$$

28 진수의 조건에서 $x > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$

부등식의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$(\log_3 x - 3)\log_3 x < -2, (\log_3 x)^2 - 3\log_3 x + 2 < 0$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 3t + 2 < 0$$

$$(t-1)(t-2) < 0 \quad \therefore 1 < t < 2$$

$$t = \log_3 x \text{이므로 } 1 < \log_3 x < 2$$

$$\therefore 3 < x < 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는 $3 < x < 9$

따라서 모든 자연수 x 의 값의 합은

$$4+5+6+7+8=30$$

29 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (2 - \log_2 a)^2 - 1 \geq 0$$

$$(\log_2 a)^2 - 4\log_2 a + 3 \geq 0$$

진수의 조건에서 $a > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$

$$\log_2 a = t \text{로 놓으면 } t^2 - 4t + 3 \geq 0$$

$$(t-1)(t-3) \geq 0 \quad \therefore t \leq 1 \text{ 또는 } t \geq 3$$

$$t = \log_2 a \text{이므로}$$

$$\log_2 a \leq 1 \text{ 또는 } \log_2 a \geq 3 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$\therefore a \leq 2 \text{ 또는 } a \geq 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$0 < a \leq 2 \text{ 또는 } a \geq 8$$

따라서 한 자리의 자연수 a 는 1, 2, 8, 9의 4개이다.

- 30** 이차방정식 $x^2 + 2(2 - \log_3 a)x - \log_3 a + 8 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, 주어진 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (2 - \log_3 a)^2 - (-\log_3 a + 8) < 0$$

$$(\log_3 a)^2 - 3\log_3 a - 4 < 0$$

진수의 조건에서

$$a > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_3 a = t \text{로 놓으면 } t^2 - 3t - 4 < 0$$

$$(t+1)(t-4) < 0 \quad \therefore -1 < t < 4$$

$$t = \log_3 a \text{이므로 } -1 < \log_3 a < 4 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$\therefore \frac{1}{3} < a < 81 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$\frac{1}{3} < a < 81$$

따라서 자연수 a 는 1, 2, 3, ..., 80의 80개이다.

- 31** 진수의 조건에서

$$k > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 2(t+1) - \log k \geq 0$$

$$t^2 + 2t + 2 - \log k \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{8}$ 이 모든 실수 t 에 대하여 성립하려면

$t^2 + 2t + 2 - \log k = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 1 - 2 + \log k \leq 0, \log k \leq 1$$

$$\therefore k \leq 10 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{9}$ 을 동시에 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$0 < k \leq 10$$

- 32** 진수의 조건에서

$$a > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이차방정식 $x^2 - 2x \log_2 a + 2 - \log_2 a = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, 두 근이 음수가 되려면

(i) $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (\log_2 a)^2 - (2 - \log_2 a)$$

$$= (\log_2 a)^2 + \log_2 a - 2 \geq 0$$

$\log_2 a = t$ 로 놓으면

$$t^2 + t - 2 \geq 0, (t+2)(t-1) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq 1$$

$t = \log_2 a$ 이므로

$$\log_2 a \leq -2 \text{ 또는 } \log_2 a \geq 1 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$\therefore a \leq \frac{1}{4} \text{ 또는 } a \geq 2$$

(ii) (두 근의 합) < 0 에서

$$2\log_2 a < 0 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$\therefore a < 1$$

(iii) (두 근의 곱) > 0 에서

$$2 - \log_2 a > 0, \log_2 a < 2 \quad \blacktriangleleft (\text{밑}) > 1$$

$$\therefore a < 4$$

(i), (ii), (iii)을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$a \leq \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{10}$ 을 동시에 만족시키는 a 의 값의 범위는

$$0 < a \leq \frac{1}{4}$$

- 33** $k=2, I=3 \times 10^5, x=1000$ 을 대입하면

$$1000 = -\frac{1000}{2} \log \frac{L \times 1000^2}{3 \times 10^5}$$

$$-2 = \log \frac{10L}{3}$$

$$\frac{10L}{3} = 10^{-2}$$

$$\therefore L = 10^{-3} \times 3 = 0.003$$

따라서 조도는 0.003이다.

- 34** 처음 물의 양을 a 라 하면 x 일 후 남아 있는 물의 양은

$$a \times \left(\frac{9}{10}\right)^x \text{이므로}$$

$$a \times \left(\frac{9}{10}\right)^x \leq \frac{1}{2}a \quad \therefore \left(\frac{9}{10}\right)^x \leq \frac{1}{2}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$x \log \frac{9}{10} \leq -\log 2$$

$$x(2\log 3 - 1) \leq -\log 2$$

$$\therefore x \geq \frac{-\log 2}{2\log 3 - 1} = \frac{-0.3}{2 \times 0.48 - 1} = 7.5$$

따라서 물의 양이 절반 이하가 되는 것은 8일 후부터이다.

- 35** 거리가 30 cm인 곳에서 $T = \frac{1}{2}T_0$ 이므로

$$30 = k \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \quad \therefore k = 30$$

거리가 120 cm 이하인 곳에서 T 가 T_0 의 $x\%$ 만큼이라

$$\text{하면 } T = \frac{x}{100}T_0 \text{이므로}$$

$$30 \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{100} \leq 120, \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{100} \leq 4$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{100} \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} \quad \blacktriangleleft 0 < (\text{밑}) < 1$$

$$\frac{x}{100} \geq \frac{1}{16} \quad \therefore x \geq 6.25$$

따라서 측정되는 전자파의 양은 방출량의 6.25% 이상이다.

II-1 01 삼각함수

기초 문제 Training

44쪽

- 1 (1) $360^\circ \times n + 60^\circ$ (2) $360^\circ \times n + 130^\circ$
(3) $360^\circ \times n + 335^\circ$ (4) $360^\circ \times n + 190^\circ$
- 2 (1) 제4사분면 (2) 제3사분면
(3) 제2사분면 (4) 제1사분면
- 3 (1) $-\frac{4}{5}\pi$ (2) $\frac{23}{6}\pi$ (3) -315° (4) 252°
- 4 (1) $l=4\pi, S=24\pi$ (2) $l=2\pi, S=10\pi$
- 5 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 6 (1) $\sin\theta < 0, \cos\theta < 0, \tan\theta > 0$
(2) $\sin\theta > 0, \cos\theta > 0, \tan\theta > 0$
(3) $\sin\theta < 0, \cos\theta > 0, \tan\theta < 0$
(4) $\sin\theta > 0, \cos\theta < 0, \tan\theta < 0$
- 7 (1) 제4사분면
(2) 제3사분면
(3) 제1사분면 또는 제3사분면
(4) 제2사분면 또는 제3사분면
- 8 (1) $\frac{3}{5}$ (2) $-\frac{3}{4}$

핵심 유형 Training

45~50쪽

- | | | | | |
|-------------------|---------------------|--------------------------|--------------------------|------------------|
| 1 ③ | 2 ② | 3 ③ | 4 ④ | 5 ② |
| 6 제1사분면 | 7 ② | 8 180° | 9 ⑤ | |
| 10 6 | 11 ② | 12 ④ | 13 $\neg, \perp, \kappa$ | |
| 14 ② | 15 $\frac{3}{8}\pi$ | 16 ③ | 17 ④ | 18 ③ |
| 19 ④ | 20 ① | 21 $\frac{23}{17}$ | 22 $-\frac{7}{5}$ | 23 $\frac{3}{2}$ |
| 24 ③ | 25 ③ | 26 ② | 27 ④ | 28 $\neg, \perp$ |
| 29 ⑤ | 30 ④ | 31 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 32 ⑤ | 33 ① |
| 34 $\frac{5}{12}$ | 35 ③ | 36 $\frac{\sqrt{15}}{3}$ | 37 ④ | 38 ② |
| 39 $4\sqrt{5}$ | 40 $3x^2+8x+3=0$ | | | |

- 1 ① $420^\circ = 360^\circ \times 1 + 60^\circ$
② $780^\circ = 360^\circ \times 2 + 60^\circ$
③ $1020^\circ = 360^\circ \times 2 + 300^\circ$
④ $-300^\circ = 360^\circ \times (-1) + 60^\circ$
⑤ $-660^\circ = 360^\circ \times (-2) + 60^\circ$
따라서 동경 OP가 나타낼 수 없는 각은 ③이다.

- 2 $675^\circ = 360^\circ \times 1 + 315^\circ$
 $\neg. 315^\circ = 360^\circ \times 0 + 315^\circ$
 $\perp. 585^\circ = 360^\circ \times 1 + 225^\circ$
 $\sqsubset. 1125^\circ = 360^\circ \times 3 + 45^\circ$
 $\kappa. -405^\circ = 360^\circ \times (-2) + 315^\circ$
 $\square. -765^\circ = 360^\circ \times (-3) + 315^\circ$
 $\vdash. -1035^\circ = 360^\circ \times (-3) + 45^\circ$
따라서 675° 를 나타내는 동경과 일치하는 것은 $\neg, \kappa, \square$ 이다.

- 3 ① $840^\circ = 360^\circ \times 2 + 120^\circ$
② $1200^\circ = 360^\circ \times 3 + 120^\circ$
③ $1680^\circ = 360^\circ \times 4 + 240^\circ$
④ $-240^\circ = 360^\circ \times (-1) + 120^\circ$
⑤ $-1320^\circ = 360^\circ \times (-4) + 120^\circ$
따라서 α 의 값이 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

- 4 $\neg. 160^\circ = 360^\circ \times 0 + 160^\circ \Rightarrow$ 제2사분면의 각
 $\perp. 390^\circ = 360^\circ \times 1 + 30^\circ \Rightarrow$ 제1사분면의 각
 $\sqsubset. 570^\circ = 360^\circ \times 1 + 210^\circ \Rightarrow$ 제3사분면의 각
 $\kappa. -70^\circ = 360^\circ \times (-1) + 290^\circ \Rightarrow$ 제4사분면의 각
 $\square. -480^\circ = 360^\circ \times (-2) + 240^\circ \Rightarrow$ 제3사분면의 각
 $\vdash. -600^\circ = 360^\circ \times (-2) + 120^\circ \Rightarrow$ 제2사분면의 각
따라서 동경이 같은 사분면에 있는 각은 $\neg, \vdash$ 과, $\sqsubset, \square$ 이다.

- 5 θ 가 제2사분면의 각이므로
 $360^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 180^\circ$ (단, n 은 정수)
 $\therefore 180^\circ \times n + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 90^\circ$
(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때,
 $360^\circ \times k + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 90^\circ$
따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제1사분면의 각
(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때,
 $360^\circ \times k + 225^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 270^\circ$
따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제3사분면의 각

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제1사분면 또는 제3사분면이다.

6 $660^\circ = 360^\circ \times 1 + 300^\circ \Rightarrow$ 제4사분면의 각

θ 가 제4사분면의 각이므로

$360^\circ \times n + 270^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 360^\circ$ (단, n 은 정수)

$$\therefore 120^\circ \times n + 90^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 120^\circ$$

(i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 90^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 120^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제2사분면의 각

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 210^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 240^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 330^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 360^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각

(i), (ii), (iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제1사분면이다.

7 두 각 θ , 9θ 를 나타내는 두 동경이 일치하므로

$$9\theta - \theta = 360^\circ \times n \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$8\theta = 360^\circ \times n$$

$$\therefore \theta = 45^\circ \times n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ \text{이므로}$$

$$90^\circ < 45^\circ \times n < 180^\circ \quad \therefore 2 < n < 4$$

이때 n 은 정수이므로 $n=3$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $\theta = 135^\circ$

8 두 각 2θ , 6θ 를 나타내는 두 동경이 일치선 위에 있고 방향이 반대이므로

$$6\theta - 2\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 90^\circ \times n + 45^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$0^\circ < \theta < 180^\circ \text{이므로}$$

$$0^\circ < 90^\circ \times n + 45^\circ < 180^\circ \quad \therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $\theta = 45^\circ$ 또는 $\theta = 135^\circ$

따라서 모든 각 θ 의 크기의 합은

$$45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$$

9 두 각 5θ , 7θ 를 나타내는 두 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$5\theta + 7\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$12\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 30^\circ \times n + 15^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$0^\circ < \theta < 360^\circ \text{이므로}$$

$$0^\circ < 30^\circ \times n + 15^\circ < 360^\circ \quad \therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{23}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 각 θ 는 $n=11$ 일 때 최댓값, $n=0$ 일 때 최솟값을 갖는다.

$$n=11 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \theta = 345^\circ$$

$$n=0 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \theta = 15^\circ$$

따라서 각 θ 의 최댓값과 최솟값의 합은

$$345^\circ + 15^\circ = 360^\circ$$

10 두 각 θ , 5θ 를 나타내는 두 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 5\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$6\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ \times n + 15^\circ$$

$$0^\circ < \theta < 360^\circ \text{이므로}$$

$$0^\circ < 60^\circ \times n + 15^\circ < 360^\circ \quad \therefore -\frac{1}{4} < n < \frac{23}{4}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$

따라서 각 θ 의 개수는 6이다.

$$\textbf{11} \quad \textcircled{1} \quad 10^\circ = 10 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{18}$$

$$\textcircled{2} \quad 36^\circ = 36 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{5}{12}\pi = \frac{5}{12}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 75^\circ$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{8}{9}\pi = \frac{8}{9}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 160^\circ$$

$$\textcircled{5} \quad 132^\circ = 132 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11}{15}\pi$$

따라서 옳지 않은 것은 $\textcircled{2}$ 이다.

$$\textbf{12} \quad \textcircled{1} \quad -880^\circ = 360^\circ \times (-3) + 200^\circ \Rightarrow \text{제3사분면}$$

$$\textcircled{2} \quad 985^\circ = 360^\circ \times 2 + 265^\circ \Rightarrow \text{제3사분면}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{19}{6}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{7}{6}\pi \Rightarrow \text{제3사분면}$$

$$\textcircled{4} \quad -\frac{16}{3}\pi = 2\pi \times (-3) + \frac{2}{3}\pi \Rightarrow \text{제2사분면}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{71}{10}\pi = 2\pi \times 3 + \frac{11}{10}\pi \Rightarrow \text{제3사분면}$$

따라서 동경이 존재하는 사분면이 나머지 넷과 다른 하나는 $\textcircled{4}$ 이다.

- 13 $\cap, 25^\circ = 25 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{36}\pi$
 $\cup, 3 = 3 \times \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{540^\circ}{\pi}$
 $\subset, -\frac{5}{6}\pi = -\frac{5}{6} \times 180^\circ = -150^\circ$ 이므로 제3사분면의 각이다.
 $\supset, -\frac{2}{5}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{8}{5}\pi, \frac{18}{5}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{8}{5}\pi,$
 $\frac{38}{5}\pi = 2\pi \times 3 + \frac{8}{5}\pi$ 이므로 동경은 모두 일치한다.
따라서 보기 중 옳은 것은 $\cap, \cup, \supset$ 이다.

- 14 부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 호의 길이가 π 이므로
 $\pi = r \times \frac{\pi}{3} \quad \therefore r = 3$
따라서 부채꼴의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 3^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\pi$

- 15 호의 길이와 넓이가 모두 $\frac{3}{2}\pi$ 이므로
 $\frac{3}{2}\pi = \frac{1}{2} \times r \times \frac{3}{2}\pi \quad \therefore r = 2$
호의 길이는 $\frac{3}{2}\pi$ 이므로
 $\frac{3}{2}\pi = 2\theta \quad \therefore \theta = \frac{3}{4}\pi$
 $\therefore \frac{\theta}{r} = \frac{3}{8}\pi$

- 16 부채꼴 OCD의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 16^2 \times \frac{5}{8}\pi = 80\pi(\text{cm}^2)$
부채꼴 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{5}{8}\pi = 5\pi(\text{cm}^2)$
따라서 구하는 종이의 넓이는 $80\pi - 5\pi = 75\pi(\text{cm}^2)$

- 17 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면
 $2r + l = 16 \quad \therefore l = 16 - 2r$
이때 $r > 0, 16 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 8$
부채꼴의 넓이는
 $\frac{1}{2}r(16 - 2r) = -r^2 + 8r = -(r - 4)^2 + 16$
따라서 부채꼴의 넓이는 $0 < r < 8$ 에서 $r = 4$ 일 때 최대이다.

- 18 부채꼴의 반지름의 길이를 r m, 호의 길이를 l m라 하면
 $2r + l = 100 \quad \therefore l = 100 - 2r$
이때 $r > 0, 100 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 50$
부채꼴의 넓이는
 $\frac{1}{2}r(100 - 2r) = -r^2 + 50r = -(r - 25)^2 + 625$
따라서 부채꼴의 넓이는 $0 < r < 50$ 에서 $r = 25$ 일 때 최대값이 625 m^2 이다.

- 19 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하고 둘레의 길이가 일정하므로 $2r + l = c$ (c 는 상수)로 놓으면
 $l = c - 2r$

이때 $r > 0, c - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < \frac{c}{2}$

부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}r(c - 2r) = -r^2 + \frac{c}{2}r = -\left(r - \frac{c}{4}\right)^2 + \frac{c^2}{16}$$

따라서 부채꼴의 넓이는 $0 < r < \frac{c}{2}$ 에서 $r = \frac{c}{4}$ 일 때 최대

이므로 그때의 호의 길이는 $l = c - 2 \times \frac{c}{4} = \frac{c}{2}$

부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$\frac{c}{2} = \frac{c}{4} \times \theta \quad \therefore \theta = 2$$

- 20 $\overline{OP} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = 13$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{12}{13}, \tan \theta = -\frac{5}{12}$$

$$\therefore 13 \cos \theta - 12 \tan \theta = 13 \times \left(-\frac{12}{13}\right) - 12 \times \left(-\frac{5}{12}\right) = -7$$

- 21 θ 가 제2사분면의 각이므로 원점 O에 대하여 각 θ 를 나타내는 동경을 OP라 할 때, $\tan \theta = \frac{15}{-8}$ 에서 점 P의 좌표를 $(-8, 15)$ 로 놓을 수 있다.

이때 $\overline{OP} = \sqrt{(-8)^2 + 15^2} = 17$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{15}{17}, \cos \theta = -\frac{8}{17}$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = \frac{23}{17}$$

- 22 점 P의 좌표를 $(-3a, -4a)$ ($a > 0$)로 놓으면

$$\overline{OP} = \sqrt{(-3a)^2 + (-4a)^2} = 5a \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{-4a}{5a} = -\frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{-3a}{5a} = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\frac{4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{7}{5}$$

- 23 (ㄴ)에서 점 P는 제4사분면에 있으므로

$P(a, b)$ (단, $a > 0, b < 0$)

점 P는 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\textcircled{ㄴ} \text{에서 } b^2 = 3a^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = -\sqrt{3} \quad (\because a > 0, b < 0)$$

이때 $P(1, -\sqrt{3})$ 에서 $\overline{OP} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin \theta \tan \theta = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (-\sqrt{3}) = \frac{3}{2}$$

24 ㄱ. θ 가 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \quad \therefore \sin \theta - \cos \theta > 0$$

ㄴ. θ 가 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta \tan \theta > 0$$

ㄷ. θ 가 제4사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$$

$$\text{즉, } \cos \theta \sin \theta < 0 \text{이고 } \sin \theta + \tan \theta < 0 \text{이므로}$$

$$\frac{\cos \theta \sin \theta}{\sin \theta + \tan \theta} > 0$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

25 θ 가 제3사분면의 각이므로

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\sin \theta}{|\sin \theta|} - \frac{\cos \theta}{|\cos \theta|} + \frac{\tan \theta}{|\tan \theta|} \\ = \frac{\sin \theta}{-\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{-\cos \theta} + \frac{\tan \theta}{\tan \theta} \\ = (-1) - (-1) + 1 = 1 \end{aligned}$$

26 (i) $\sin \theta \cos \theta < 0$ 에서 $\sin \theta$ 와 $\cos \theta$ 의 값의 부호가 서로 다르므로 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\sin \theta \tan \theta < 0$ 에서 $\sin \theta$ 와 $\tan \theta$ 의 값의 부호가 서로 다르므로 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제2사분면의 각이다.

$$\text{즉, } \sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta - \tan \theta > 0, \cos \theta + \tan \theta < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{\cos^2 \theta} + \sqrt{(\sin \theta - \tan \theta)^2} - \sqrt{(\cos \theta + \tan \theta)^2} \\ = |\cos \theta| + |\sin \theta - \tan \theta| - |\cos \theta + \tan \theta| \\ = -\cos \theta + (\sin \theta - \tan \theta) + (\cos \theta + \tan \theta) \\ = \sin \theta \end{aligned}$$

$$27 (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{1 - 2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} \\ = \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{(\sin \theta - \cos \theta)^2}{\sin \theta - \cos \theta} \\ = (\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta - \cos \theta) \\ = 2 \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 28 \quad \text{ㄱ. } \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \\ = \frac{\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} \\ = \frac{\sin^2 \theta + 1 - 2 \cos \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} \\ = \frac{2(1 - \cos \theta)}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} = \frac{2}{\sin \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \frac{\cos \theta - \tan \theta \sin \theta}{1 - \tan \theta} \\ = \frac{\cos \theta - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}}{1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \\ = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} \\ = \frac{(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta)}{\cos \theta - \sin \theta} \\ = \sin \theta + \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \tan^2 \theta + (1 - \tan^4 \theta) \cos^2 \theta \\ = \tan^2 \theta + (1 + \tan^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta) \cos^2 \theta \\ = \tan^2 \theta + (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(1 - \tan^2 \theta) \\ = \tan^2 \theta + (1 - \tan^2 \theta) \\ = 1 \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

$$\begin{aligned} 29 \quad & \sin^4 \theta - \cos^4 \theta \\ &= (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= 1 - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2 \cos^2 \theta \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \\ &= \tan^2 \theta - \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} \\ &= \tan^2 \theta \left(1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \right) \\ &= \tan^2 \theta \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \right) \\ &= \tan^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \tan^2 \theta \sin^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta \times \tan^2 \theta \\ \therefore & \text{㉗) } 2 \cos^2 \theta \quad \text{㉘) } \tan^2 \theta \end{aligned}$$

$$30 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{16}{25}$$

이때 θ 가 제3사분면의 각이면 $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\text{또 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore 4 \tan \theta - 5 \cos \theta &= 4 \times \frac{3}{4} - 5 \times \left(-\frac{4}{5} \right) \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 31 \quad & \frac{1}{1-\cos\theta} + \frac{1}{1+\cos\theta} \\
 &= \frac{1+\cos\theta+1-\cos\theta}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} \\
 &= \frac{2}{1-\cos^2\theta} \\
 &= \frac{2}{\sin^2\theta} = 4 \\
 &\therefore \sin^2\theta = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{또 } \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

이때 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이면 $\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$ 이므로

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -1$$

$$\therefore \sin\theta \tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$32 \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{이면 } \cos\theta > 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} &= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}} \\
 &= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{|\cos\theta|}} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}} \\
 &= \sin\theta = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\text{또 } \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\text{이때 } \cos\theta > 0 \text{ 이므로 } \cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{\cos\theta} + \tan\theta = \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$$

$$33 \quad \sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{3} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta = -\frac{4}{9}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\
 &= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta} \\
 &= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} \\
 &= -\frac{9}{4}
 \end{aligned}$$

$$34 \quad \sin\theta - \cos\theta = -\frac{1}{5} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{25} \quad \therefore \sin\theta\cos\theta = \frac{12}{25}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\cos\theta} &= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} \\
 &= \frac{-\left(-\frac{1}{5}\right)}{\frac{12}{25}} = \frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

$$35 \quad (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 1 - 2 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{7}{4}$$

이때 θ 가 제2사분면의 각이면 $\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$ 에서 $\sin\theta - \cos\theta > 0$ 이므로

$$\sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sin^3\theta - \cos^3\theta &= (\sin\theta - \cos\theta)^3 + 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^3 + 3 \times \left(-\frac{3}{8}\right) \times \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{5\sqrt{7}}{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 36 \quad \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta} \\
 &= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} = -3
 \end{aligned}$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta = -\frac{1}{3}$$

$$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

그런데 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이면 $\sin\theta > 0$, $\cos\theta < 0$ 에서

$\sin\theta - \cos\theta > 0$ 이므로

$$\sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$37 \quad \text{이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여}$$

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{7}{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{k}{25} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{49}{25}$$

$$\therefore \sin\theta\cos\theta = \frac{12}{25} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡}, \textcircled{㉢} \text{에서 } \frac{k}{25} = \frac{12}{25}$$

$$\therefore k = 12$$

38 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\cos \theta + \sin \theta) + (\cos \theta - \sin \theta) = 1 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta) = a \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } 2 \cos \theta = 1 \quad \therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = a \text{ 이므로}$$

$$a = \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

39 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = k, \quad \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 8$$

$$\text{이때 } \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{8} \text{ 이므로}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{4}$$

그런데 $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore k = \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta}$$

$$= \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{8}} = 4\sqrt{5}$$

40 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

양변을 제곱하면

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

이때 $\tan \theta, \frac{1}{\tan \theta}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식에서 두 근의 합은

$$\begin{aligned} \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\text{두 근의 곱은 } \tan \theta \times \frac{1}{\tan \theta} = 1$$

따라서 x^2 의 계수가 3이고 두 근의 합이 $-\frac{8}{3}$, 두 근의 곱

이 1인 이차방정식은

$$3\left(x^2 + \frac{8}{3}x + 1\right) = 0$$

$$\therefore 3x^2 + 8x + 3 = 0$$

II-1 02 삼각함수의 그래프

기초 문제 Training

51쪽

1 (1) 주기: 2π , 치역: $\{y \mid -3 \leq y \leq 3\}$

(2) 주기: π , 치역: $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$

(3) 주기: 2π , 치역: $\left\{y \mid -\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{1}{3}\right\}$

(4) 주기: 4π , 치역: $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$

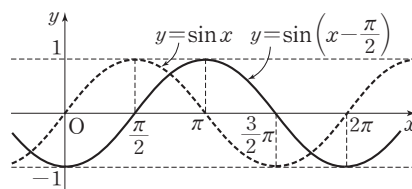
2 (1) 주기: π

점근선의 방정식: $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (단, n 은 정수)

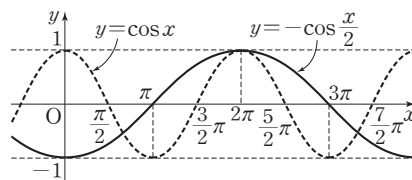
(2) 주기: $\frac{\pi}{2}$

점근선의 방정식: $x = \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{4}$ (단, n 은 정수)

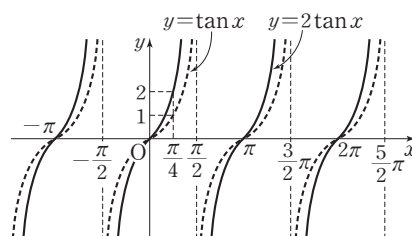
3 (1)



(2)



(3)



4 (1) 최댓값: 3, 최솟값: -3, 주기: π

(2) 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: $\frac{\pi}{2}$

(3) 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$, 주기: $\frac{2}{3}\pi$

(4) 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: 4π

(5) 최댓값: 없다., 최솟값: 없다., 주기: 3π

(6) 최댓값: 없다., 최솟값: 없다., 주기: $\frac{1}{3}$

5 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $-\frac{1}{2}$ (5) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (6) $-\sqrt{3}$

- 1 ③ 2 ⑤ 3 ④ 4 ㄱ, ㄷ 5 ⑤
 6 8π 7 2π 8 $\frac{3}{4}$ 9 ⑤ 10 -8
 11 $\frac{1}{2}$ 12 4 13 $\frac{10}{3}\pi$ 14 $-\frac{\pi}{2}$ 15 ④
 16 ② 17 25 18 1 19 -1 20 $-\frac{1}{3}$
 21 ㄱ 22 ② 23 ③ 24 $\frac{9}{2}$ 25 6
 26 ④ 27 ③ 28 3 29 ② 30 ④
 31 9 32 ②

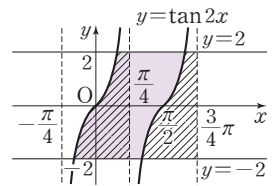
- 1 $a=2+1=3$, $b=-2+1=-1$, $c=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 이므로
 $abc=3 \times (-1) \times \frac{\pi}{2} = -\frac{3}{2}\pi$
- 2 함수 $f(x)$ 는 주기함수이고 주기를 p 라 할 때, $pn=2$ 를 만족시키는 정수 n 이 존재해야 한다.
 각 함수의 주기는
 ① $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8 \Rightarrow 8n \neq 2$ ② $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6 \Rightarrow 6n \neq 2$
 ③ $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4 \Rightarrow 4n \neq 2$ ④ $\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=3 \Rightarrow 3n \neq 2$
 ⑤ $\frac{\pi}{4\pi}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} \times 8=2$
 따라서 $f(x+2)=f(x)$ 를 만족시키는 것은 ⑤이다.
- 3 $y=\cos 2x+2$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면
 $y=-\cos 2x-2$
 이 함수의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼 평행이동하면
 $y=-\cos 2x-\frac{1}{2}$
 따라서 $a=-1$, $b=-\frac{1}{2}$ 이므로 $a+b=-\frac{3}{2}$
- 4 ㄱ. 최댓값은 $3+2=5$, 최솟값은 $-3+2=-1$
 ㄴ. 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$
 ㄷ. $y=-3\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+2=-3\cos\left\{\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right\}+2$
 이므로 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=-3\cos\frac{x}{2}$
 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

5 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}=2$

접근선의 방정식은 $\frac{\pi}{2}x - \pi = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서
 $x=2(n+1)+1$ (n 은 정수)
 $\therefore x=2n+1$ (단, n 은 정수)

6 $y=\cos x$ 의 그래프에서
 $\frac{x_1+x_2}{2}=\pi$, $\frac{x_3+x_4}{2}=3\pi$
 $\therefore x_1+x_2+x_3+x_4=2\pi+6\pi=8\pi$

7 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는 가로의 길이가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 세로의 길이가 4인 직사각형의 넓이와 같다.



$\therefore \frac{\pi}{2} \times 4 = 2\pi$

8 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{2}{3}\pi}=3$ 이므로

$\gamma - \alpha = 3 \quad \therefore \gamma = \alpha + 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

주어진 그래프는 직선 $x=\frac{3}{4}$ 에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{4} \quad \therefore \alpha+\beta=\frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{8}$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 $\alpha+\beta+\gamma+\frac{3}{2}=6+\alpha$

$\therefore f\left(\alpha+\beta+\gamma+\frac{3}{2}\right)=f(6+\alpha)$
 $=f(\alpha)=\frac{3}{4} (\because f(x) \text{의 주기는 } 3)$

9 $y=a \sin bx+c$ 의 최댓값이 5, 최솟값이 -1 이고 $a>0$ 이므로

$a+c=5$, $-a+c=-1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $c=2$

또 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 $b>0$ 이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2} \quad \therefore b=4$

$\therefore abc=3 \times 4 \times 2=24$

10 (ㄱ)에서 주기가 3π 이고 $b>0$ 이므로

$\frac{2\pi}{b}=3\pi \quad \therefore b=\frac{2}{3}$

(ㄷ)에서 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=a \cos\left(\frac{2}{3} \times \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)+c=1$ 이므로

$\frac{1}{2}a+c=1 \quad \therefore a+2c=2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$

(나)에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 4이고 $a > 0$ 이므로
 $a+c=4$ ㉔

㉓, ㉔을 연립하여 풀면 $a=6$, $c=-2$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$-a+c=-6-2=-8$$

11 $y=2\tan(ax-\pi)+1$ 의 주기가 3π 이고 $a > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a}=3\pi \quad \therefore a=\frac{1}{3}$$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=2\tan\left(\frac{1}{3}x-\pi\right)+1$ 이므로

로 점근선의 방정식은 $\frac{1}{3}x-\pi=n\pi+\frac{\pi}{2}$ 에서

$$x=3(n+1)\pi+\frac{3}{2}\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore x=3n\pi+\frac{3}{2}\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

이때 $1 < b < 2$ 이므로 $b=\frac{3}{2}$

$$\therefore ab=\frac{1}{3} \times \frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

12 $y=a\sin b\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+c$ 의 최댓값이 3, 최솟값이 -1 이고

$a > 0$ 이므로

$$a+c=3, \quad -a+c=-1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $c=1$

또 주기가 $\frac{3}{4}\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b}=\pi \quad \therefore b=2$$

$$\therefore abc=2 \times 2 \times 1=4$$

13 $y=a\cos(bx-c)+d$ 의 최댓값이 4, 최솟값이 0이고

$a > 0$ 이므로

$$a+d=4, \quad -a+d=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=2$

또 주기가 $\frac{11}{6}\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b}=2\pi \quad \therefore b=1$$

따라서 주어진 함수의 식은 $y=2\cos(x-c)+2$ 이고,

이 함수의 그래프가 점 $\left(\frac{5}{6}\pi, 4\right)$ 를 지나므로

$$4=2\cos\left(\frac{5}{6}\pi-c\right)+2 \quad \therefore \cos\left(\frac{5}{6}\pi-c\right)=1$$

이때 $0 < c < \pi$ 에서 $-\frac{\pi}{6} < \frac{5}{6}\pi-c < \frac{5}{6}\pi$ 이므로

$$\frac{5}{6}\pi-c=0 \quad \therefore c=\frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore abcd=2 \times 1 \times \frac{5}{6}\pi \times 2=\frac{10}{3}\pi$$

14 $y=\tan(ax+b)+c$ 의 주기가 $\frac{3}{8}\pi - \left(-\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{2}$ 이고

$$a > 0 \text{이므로 } \frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2} \quad \therefore a=2$$

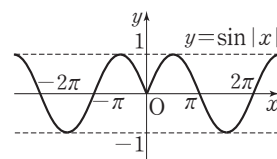
$a=2$ 이고 $-\frac{\pi}{2} < b < 0$ 이므로 주어진 그래프는

$y=\tan 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. 즉,

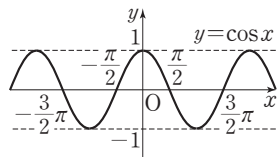
$$y=\tan 2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+1=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$$

$$\therefore b=-\frac{\pi}{4}, \quad c=1 \quad \therefore abc=2 \times \left(-\frac{\pi}{4}\right) \times 1=-\frac{\pi}{2}$$

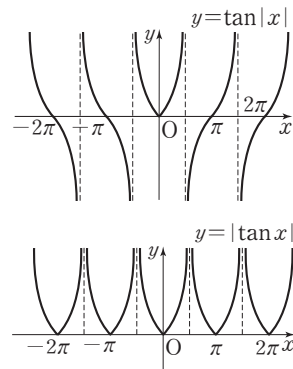
15 ㄱ. $y=\sin|x|$ 와 $y=|\sin x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



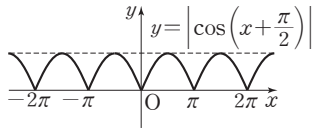
ㄴ. $y=\cos x$ 와 $y=\cos|x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄷ. $y=\tan|x|$ 와 $y=|\tan x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

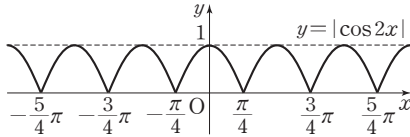


ㄹ. $y = \left| \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right|$ 의 그래프는 다음과 같다.

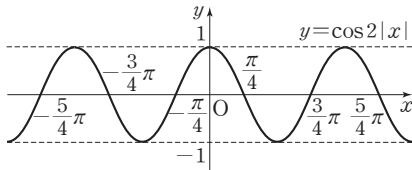


따라서 두 함수의 그래프가 일치하는 것은 ㄴ, ㄹ이다.

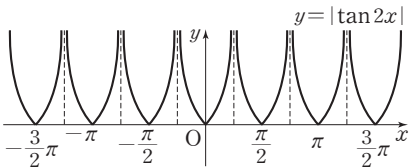
- 16** ㄱ. $y = |\cos 2x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.



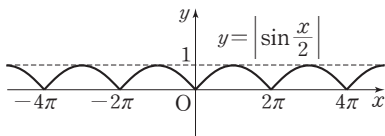
ㄴ. $y = \cos 2|x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주기는 π 이다.



ㄷ. $y = |\tan 2x|$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

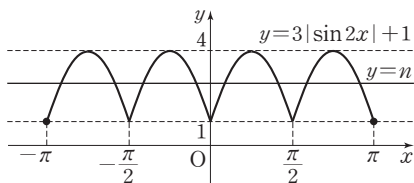


ㄹ. $y = \left| \sin \frac{x}{2} \right|$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 주기는 2π 이다.



따라서 주기가 같은 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

- 17** $y = 3|\sin 2x| + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $a_1=5, a_2=8, a_3=8, a_4=4$ 이므로
 $a_1+a_2+a_3+a_4=5+8+8+4=25$

18 $\cos \frac{7}{6}\pi = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$
 $= -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = -\tan \frac{4}{3}\pi$
 $= -\tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$
 $= -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$\sin \frac{11}{6}\pi = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$
 $= -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$\tan \frac{5}{4}\pi = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$
 $= \tan \frac{\pi}{4} = 1$

$\therefore \cos \frac{7}{6}\pi \tan\left(-\frac{4}{3}\pi\right) + \sin \frac{11}{6}\pi \tan \frac{5}{4}\pi$
 $= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (-\sqrt{3}) + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = 1$

19 $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right)$
 $= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$
 $= -(-\sin \theta) = \sin \theta$
 $\therefore \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{1 + \sin(\pi + \theta)} \times \frac{\cos(\pi - \theta)}{1 + \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)}$
 $= \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \times \frac{-\cos \theta}{1 + \sin \theta}$
 $= \frac{-\cos^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{-\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta}$
 $= -1$

20 $\tan\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right)$
 $= \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{\tan \theta}$
 $\therefore \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin(\pi + \theta)} \times \frac{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos(\theta + \pi)} \times \frac{\tan\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)}{\tan(\pi - \theta)}$
 $= \frac{\cos \theta}{-\sin \theta} \times \frac{-\sin \theta}{-\cos \theta} \times \frac{-\frac{1}{\tan \theta}}{-\tan \theta}$
 $= -\frac{1}{\tan^2 \theta}$

이때 $\theta = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$\tan \theta = \tan \frac{2}{3}\pi = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$\therefore -\frac{1}{\tan^2 \theta} = -\frac{1}{(-\sqrt{3})^2} = -\frac{1}{3}$

21 $A+B+C=\pi$ 이므로

$$\neg. (\text{우변}) = \sin(B+C) = \sin(\pi-A) = \sin A \text{이므로}$$

$$\sin A = \sin(B+C)$$

$$\neg. (\text{우변}) = \cos \frac{B+C}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) = \sin \frac{A}{2} \text{이므로}$$

$$\cos \frac{A}{2} \neq \sin \frac{B+C}{2}$$

$$\neg. (\text{좌변}) = \tan A \tan(B+C) = \tan A \tan(\pi-A)$$

$$= \tan A \times (-\tan A) = -\tan^2 A$$

$$\text{이므로 } \tan A \tan(B+C) \neq 1$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$ 이다.

22 $\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$ 이므로

$$\tan^2 10^\circ \times \tan^2 20^\circ \times \cdots \times \tan^2 70^\circ \times \tan^2 80^\circ$$

$$= (\tan^2 10^\circ \times \tan^2 80^\circ) \times (\tan^2 20^\circ \times \tan^2 70^\circ)$$

$$\times (\tan^2 30^\circ \times \tan^2 60^\circ) \times (\tan^2 40^\circ \times \tan^2 50^\circ)$$

$$= \left(\tan^2 10^\circ \times \frac{1}{\tan^2 10^\circ} \right) \times \left(\tan^2 20^\circ \times \frac{1}{\tan^2 20^\circ} \right)$$

$$\times \left(\tan^2 30^\circ \times \frac{1}{\tan^2 30^\circ} \right) \times \left(\tan^2 40^\circ \times \frac{1}{\tan^2 40^\circ} \right)$$

$$= 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$$

23 $\cos 110^\circ = \cos(180^\circ - 70^\circ) = -\cos 70^\circ$

$$\cos 130^\circ = \cos(180^\circ - 50^\circ) = -\cos 50^\circ$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ$$

$$\cos 170^\circ = \cos(180^\circ - 10^\circ) = -\cos 10^\circ$$

$$\therefore a+b = \sin^2 10^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ$$

$$+ \cos^2 110^\circ + \cos^2 130^\circ + \cos^2 150^\circ + \cos^2 170^\circ$$

$$= \sin^2 10^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 70^\circ$$

$$+ (-\cos 70^\circ)^2 + (-\cos 50^\circ)^2 + (-\cos 30^\circ)^2$$

$$+ (-\cos 10^\circ)^2$$

$$= (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ)$$

$$+ (\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ) + (\sin^2 70^\circ + \cos^2 70^\circ)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

24 $10\theta = \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin 9\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$ 이므로 같은 방법으로 하면

$$\sin 8\theta = \cos 2\theta, \sin 7\theta = \cos 3\theta, \sin 6\theta = \cos 4\theta$$

$$\therefore \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \cdots + \sin^2 9\theta$$

$$= \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \sin^2 4\theta + \sin^2 5\theta$$

$$+ \cos^2 4\theta + \cos^2 3\theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 \theta$$

$$= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + (\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta)$$

$$+ (\sin^2 3\theta + \cos^2 3\theta) + (\sin^2 4\theta + \cos^2 4\theta)$$

$$+ \sin^2 \frac{\pi}{4}$$

$$5\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

25 $y = 2\sin(x+\pi) + \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - 2$

$$= -2\sin x - \sin x - 2$$

$$= -3\sin x - 2$$

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$$-3 \leq -3\sin x \leq 3 \quad \therefore -5 \leq -3\sin x - 2 \leq 1$$

따라서 $M=1, m=-5$ 이므로

$$M-m=6$$

26 $\sin x = t$ 로 놓으면 $y = \left|t - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{2}$ ㉠

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

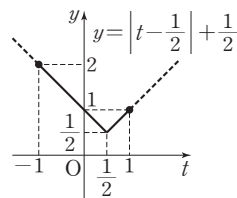
㉠의 그래프는 오른쪽 그림과

같으므로

$$t = -1 \text{일 때, } M = 2$$

$$t = \frac{1}{2} \text{일 때, } m = \frac{1}{2}$$

$$\therefore M+m = \frac{5}{2}$$



27 $\cos x = t$ 로 놓으면 $y = a|2t+1| + b$ ㉠

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq t \leq 1$$

$a > 0$ 이므로 ㉠의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$$t = 1 \text{일 때 최댓값은 } 3a+b,$$

$$t = -\frac{1}{2} \text{일 때 최솟값은 } b \text{이다.}$$

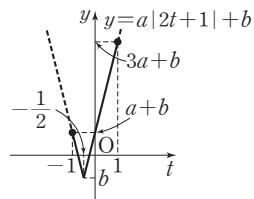
다.

이때 최댓값이 5, 최솟값이 -1이므로

$$3a+b=5, b=-1$$

따라서 $a=2, b=-1$ 이므로

$$a+b=1$$



28 $\tan x = t$ 로 놓으면 $y = -|t-1| + k$ ㉠

이때 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $-1 \leq \tan x \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq t \leq 1$$

㉠의 그래프는 오른쪽 그림

과 같으므로 $t=1$ 일 때 최댓

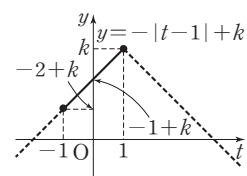
값은 $k, t=-1$ 일 때 최솟

값은 $-2+k$ 이다.

이때 최댓값과 최솟값의 합

이 4이므로

$$k + (-2+k) = 4 \quad \therefore k = 3$$



29 $\sin x = t$ 로 놓으면 $y = \frac{1}{t-2} + 1$ ㉠

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

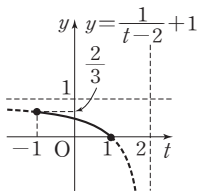
㉠의 그래프는 오른쪽 그림과 같

으므로

$t = -1$ 일 때, $M = \frac{2}{3}$

$t = 1$ 일 때, $m = 0$

$\therefore M + m = \frac{2}{3}$



30 $\cos x = t$ 로 놓으면 $y = \frac{t-5}{t+3} = -\frac{8}{t+3} + 1$ ㉡

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

㉡의 그래프는 오른쪽 그림과 같

으므로 $t = 1$ 일 때 최댓값은 -1 ,

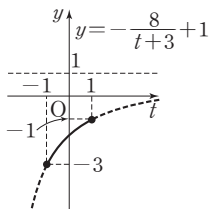
$t = -1$ 일 때 최솟값은 -3 이다.

주어진 함수의 치역은

$\{y | -3 \leq y \leq -1\}$ 이므로

$a = -3, b = -1$

$\therefore a^2 + b^2 = 10$



31 $y = \sin^2 x - 3 \cos^2 x - 4 \sin x$

$= 4 \sin^2 x - 4 \sin x - 3$

$\sin x = t$ 로 놓으면

$y = 4t^2 - 4t - 3 = 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - 4$ ㉢

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$-1 \leq t \leq 1$

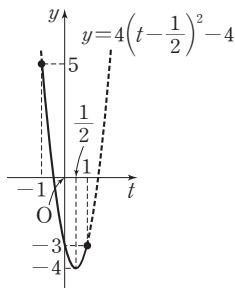
㉢의 그래프는 오른쪽 그림과

같으므로

$t = -1$ 일 때, $M = 5$

$t = \frac{1}{2}$ 일 때, $m = -4$

$\therefore M - m = 9$



32 $y = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 4 \cos(\pi - x) + a$

$= \sin^2 x + 4 \cos x + a$

$= -\cos^2 x + 4 \cos x + a + 1$

$\cos x = t$ 로 놓으면

$y = -t^2 + 4t + a + 1 = -(t-2)^2 + a + 5$ ㉣

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

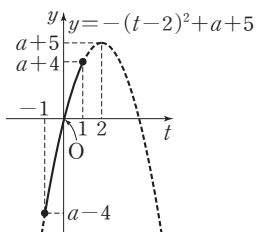
㉣의 그래프는 오른쪽 그림

과 같으므로 $t = 1$ 일 때 최

댓값은 $a + 4$ 이다.

이때 최솟값은 3이므로

$a + 4 = 3 \quad \therefore a = -1$



II-1 03 삼각함수의 그래프의 활용

기초 문제 Training

57쪽

1 (가) $\frac{\pi}{3}$ (나) $\frac{2}{3}\pi$

2 (1) $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{3}{4}\pi$

(2) $x = \frac{5}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{7}{6}\pi$

(3) $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{7}{6}\pi$

3 (가) $\frac{2}{3}\pi$ (나) $\frac{4}{3}\pi$ (다) $\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi$

4 (1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{2}{3}\pi \leq x < 2\pi$

(2) $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{7}{4}\pi < x < 2\pi$

(3) $\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{4}{3}\pi \leq x < \frac{3}{2}\pi$

핵심 유형 Training

58~60쪽

1 $\frac{5}{6}\pi$ 2 ④ 3 ③ 4 3π 5 ④

6 $x = \frac{\pi}{4}$ 7 ② 8 ② 9 $-\frac{25}{8} \leq k \leq 3$

10 ③ 11 $\frac{\pi}{6}$ 12 $\frac{3}{2}\pi$ 13 $-\frac{1}{2}$ 14 ⑤

15 ⑤ 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19 $\frac{2}{3}\pi$

20 ③

1 $2x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < \pi$ 에서 $0 \leq t < 2\pi$ 이고 주어진 방

정식은 $2 \cos t - \sqrt{3} = 0 \quad \therefore \cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leq t < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos t$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의

교점의 t 좌표는 $\frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi$

이때 $t = 2x$ 이므로

$2x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $2x = \frac{11}{6}\pi \quad \therefore x = \frac{\pi}{12}$ 또는 $x = \frac{11}{12}\pi$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{12}, \beta = \frac{11}{12}\pi$ 이므로 $\beta - \alpha = \frac{5}{6}\pi$

- 2 $\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면 $0 < x < 2\pi$ 에서 $-\frac{\pi}{3} < t < \frac{2}{3}\pi$ 이고 주어진 방정식은

$$\sqrt{2}\sin t = 1 \quad \therefore \sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$-\frac{\pi}{3} < t < \frac{2}{3}\pi$ 에서 함수 $y = \sin t$ 의 그래프와 직선

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{의 교점의 } t \text{좌표는 } \frac{\pi}{4}$$

이때 $t = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} \quad \therefore x = \frac{7}{6}\pi$$

$$\therefore \sin 4\alpha = \sin \frac{14}{3}\pi = \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- 3 $2x + \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓으면 $0 < x < 2\pi$ 에서 $\frac{\pi}{4} < t < \frac{17}{4}\pi$ 이고 주어진 방정식은

$$\cos t = \sin t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\cos t = \sin t$ 에서 $\cos t = 0$ 일 때 $\sin t \neq 0$ 이므로 $\cos t \neq 0$

따라서 $\textcircled{1}$ 의 양변을 $\cos t$ 로 나누면

$$1 = \frac{\sin t}{\cos t} \quad \therefore \tan t = 1$$

$\frac{\pi}{4} < t < \frac{17}{4}\pi$ 에서 함수 $y = \tan t$ 의 그래프와 직선 $y = 1$

의 교점의 t 좌표는 $\frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi, \frac{13}{4}\pi$

이때 $t = 2x + \frac{\pi}{4}$ 이므로

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{9}{4}\pi \text{ 또는 } 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{13}{4}\pi$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \pi \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi$$

따라서 모든 근의 합은 $\frac{\pi}{2} + \pi + \frac{3}{2}\pi = 3\pi$

- 4 $\pi \sin x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $-\pi \leq t \leq \pi$ 이고 주어진 방정식은 $\sin t = -1$

$-\pi \leq t \leq \pi$ 에서 함수 $y = \sin t$ 의 그래프와 직선 $y = -1$

의 교점의 t 좌표는 $-\frac{\pi}{2} \quad \therefore t = -\frac{\pi}{2}$

이때 $t = \pi \sin x$ 이므로

$$-\frac{\pi}{2} = \pi \sin x \quad \therefore \sin x = -\frac{1}{2}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{1}{2}$

의 교점의 x 좌표는 $\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$

따라서 모든 근의 합은 $\frac{7}{6}\pi + \frac{11}{6}\pi = 3\pi$

- 5 $\cos^2 x + \sin x - \sin^2 x = 0$ 에서
 $(1 - \sin^2 x) + \sin x - \sin^2 x = 0$
 $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0, (2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$
 $\therefore \sin x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = 1$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 두 직선

$y = -\frac{1}{2}, y = 1$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

따라서 모든 근의 합은

$$\frac{\pi}{2} + \frac{7}{6}\pi + \frac{11}{6}\pi = \frac{7}{2}\pi$$

- 6 $\tan x + \frac{1}{\tan x} = 2$ 에서 $0 < x < \pi$ 일 때 $\tan x \neq 0$ 이므로 양변에 $\tan x$ 를 곱하면

$$\tan^2 x + 1 = 2\tan x, \tan^2 x - 2\tan x + 1 = 0$$

$$(\tan x - 1)^2 = 0 \quad \therefore \tan x = 1$$

$0 < x < \pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의

교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{4}$

따라서 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{\pi}{4}$

- 7 $3\sin^2 \frac{A}{2} - 5\cos \frac{A}{2} = 1$ 에서

$$3\left(1 - \cos^2 \frac{A}{2}\right) - 5\cos \frac{A}{2} = 1$$

$$3\cos^2 \frac{A}{2} + 5\cos \frac{A}{2} - 2 = 0$$

$$\left(\cos \frac{A}{2} + 2\right)\left(3\cos \frac{A}{2} - 1\right) = 0$$

$$\therefore \cos \frac{A}{2} = -2 \text{ 또는 } \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{3}$$

이때 $0 < \cos \frac{A}{2} < 1$ 이므로 $\cos \frac{A}{2} = \frac{1}{3}$

따라서 $A + B + C = \pi$ 이므로

$$\sin \frac{B+C}{2} = \sin \frac{\pi-A}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{3}$$

- 8 $\cos^2 x + 4\sin x + k = 0$ 에서

$$(1 - \sin^2 x) + 4\sin x + k = 0$$

$$\therefore \sin^2 x - 4\sin x - 1 = k$$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수

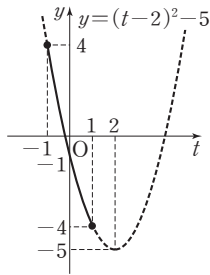
$y = \sin^2 x - 4\sin x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점이 존재해야 한다.

$y = \sin^2 x - 4\sin x - 1$ 에서 $\sin x = t$ 로 놓으면

$-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = t^2 - 4t - 1 = (t-2)^2 - 5$$

이때 오른쪽 그림에서 주어진
방정식이 실근을 가지려면
 $-4 \leq k \leq 4$
따라서 $M=4$, $m=-4$ 이므로
 $M-m=8$



9 $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-3\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+k=0$ 에서

$$2\cos^2 x + 3\sin x + k = 0$$

$$2(1-\sin^2 x) + 3\sin x + k = 0$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 - k = 0$$

$$\therefore 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = k$$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수

$y=2\sin^2 x - 3\sin x - 2$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점이
존재해야 한다.

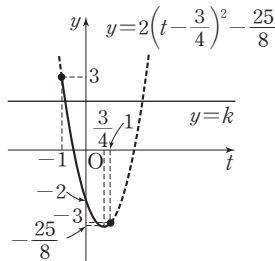
$y=2\sin^2 x - 3\sin x - 2$ 에서 $\sin x=t$ 로 놓으면

$$-1 \leq t \leq 1 \text{ 이고}$$

$$y=2t^2-3t-2=2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{8}$$

이때 오른쪽 그림에서 주
어진 방정식이 실근을 가
지려면

$$-\frac{25}{8} \leq k \leq 3$$



10 $\cos^2 x + \cos(\pi+x) - k + 1 = 0$ 에서

$$\cos^2 x - \cos x - k + 1 = 0$$

$$\therefore \cos^2 x - \cos x + 1 = k$$

따라서 주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면 함
수 $y=\cos^2 x - \cos x + 1$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 한 점
에서 만나야 한다.

$y=\cos^2 x - \cos x + 1$ 에서 $\cos x=t$ 로 놓으면

$$0 \leq x \leq \pi \text{에서 } -1 \leq t \leq 1 \text{ 이고}$$

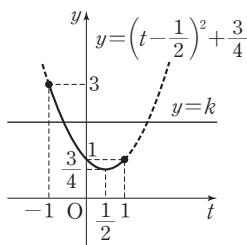
$$y=t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

이때 오른쪽 그림에서 주어
진 방정식이 오직 하나의 실
근을 가지려면

$$k=\frac{3}{4} \text{ 또는 } 1 < k \leq 3$$

따라서 모든 정수 k 의 값의
합은

$$2+3=5$$



11 $2x - \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓으면 $0 < x < \pi$ 에서 $-\frac{\pi}{3} < t < \frac{5}{3}\pi$ 이고
주어진 부등식은

$$2\sin t + \sqrt{3} < 0 \quad \therefore \sin t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

오른쪽 그림에서 t 의

값의 범위는

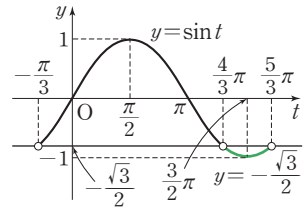
$$\frac{4}{3}\pi < t < \frac{5}{3}\pi$$

이때 $t=2x - \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\frac{4}{3}\pi < 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore \frac{5}{6}\pi < x < \pi$$

따라서 $\alpha = \frac{5}{6}\pi$, $\beta = \pi$ 이므로 $\beta - \alpha = \frac{\pi}{6}$



12 $\sin x - \cos x > 0$ 에서 $\sin x > \cos x$

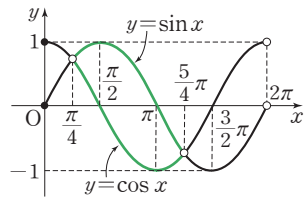
오른쪽 그림에서 x 의

값의 범위는

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{5}{4}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{5}{4}\pi$

$$\text{이므로 } \alpha + \beta = \frac{3}{2}\pi$$



13 $\log_2(\cos x) + 1 \leq 0$ 에서 $\log_2(\cos x) \leq -1$

$$\therefore 0 < \cos x \leq \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 x 의

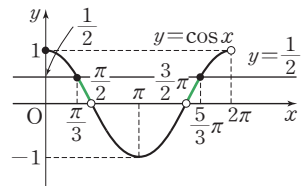
값의 범위는

$$\frac{\pi}{3} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ 또는}$$

$$\frac{3}{2}\pi < x \leq \frac{5}{3}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \frac{4}{3}\pi = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$



14 $A+B+C=\pi$ 이므로

$$\tan(B+C) = \tan(\pi-A) = -\tan A$$

$$\tan A - \tan(B+C) + 2 \leq 0 \text{에서}$$

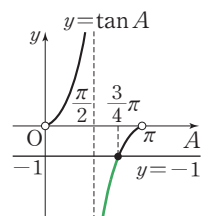
$$2\tan A + 2 \leq 0 \quad \therefore \tan A \leq -1$$

오른쪽 그림에서 A 의 값의

범위는

$$\frac{\pi}{2} < A \leq \frac{3}{4}\pi$$

따라서 A 의 최댓값은 $\frac{3}{4}\pi$ 이다.



15 $2\cos^2 x - 3\sin x \leq 0$ 에서

$$2(1 - \sin^2 x) - 3\sin x \leq 0$$

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 \geq 0$$

$$(2\sin x - 1)(\sin x + 2) \geq 0$$

이때 $\sin x + 2 > 0$ 이므로 $2\sin x - 1 \geq 0$

$$\therefore \sin x \geq \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 x 의 값의

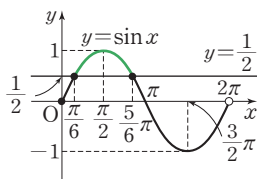
범위는

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{이므로 } \beta - \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \sin(\beta - \alpha) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



16 $\cos x + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) < \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ 에서

$$\cos x + \cos^2 x < \sin^2 x$$

$$\cos x + \cos^2 x < 1 - \cos^2 x$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 < 0$$

$$(\cos x + 1)(2\cos x - 1) < 0$$

이때 $0 \leq x < \pi$ 에서 $\cos x + 1 > 0$ 이므로

$$2\cos x - 1 < 0 \quad \therefore \cos x < \frac{1}{2}$$

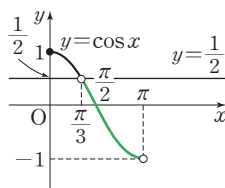
오른쪽 그림에서 x 의 값의 범

위는

$$\frac{\pi}{3} < x < \pi$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \pi \text{이므로}$$

$$\alpha + \beta = \frac{4\pi}{3}$$



17 $\sin^2 x + 4\cos x + 2a \leq 0$ 에서

$$(1 - \cos^2 x) + 4\cos x + 2a \leq 0$$

$$\therefore \cos^2 x - 4\cos x - 2a - 1 \geq 0$$

이때 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고 주어진 부등식은

$$t^2 - 4t - 2a - 1 \geq 0$$

$$f(t) = t^2 - 4t - 2a - 1 \text{이라 하면}$$

$$f(t) = (t - 2)^2 - 2a - 5$$

$$-1 \leq t \leq 1 \text{에서 } f(t) \text{의 최솟값은 } -2a - 4$$

이때 모든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립하려면

$$-2a - 4 \geq 0$$

$$\therefore a \leq -2$$

따라서 상수 a 의 최댓값은 -2 이다.

18 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차 방정식 $x^2 - 2x\sin\theta + \sin\theta = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \sin^2\theta - \sin\theta \leq 0$$

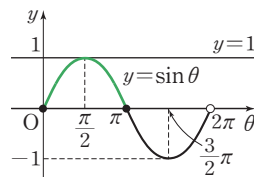
$$\sin\theta(\sin\theta - 1) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq \sin\theta \leq 1$$

오른쪽 그림에서 θ 의 값의

범위는 $0 \leq \theta \leq \pi$

따라서 $\alpha = 0, \beta = \pi$ 이므로

$$\alpha + \beta = \pi$$



19 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2x\cos\theta + \cos\theta + \sin^2\theta = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \cos^2\theta - (\sin^2\theta + \cos\theta) = 0$$

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta - \cos\theta = 0$$

$$\cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) - \cos\theta = 0$$

$$2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$$

$$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) = 0$$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos\theta = 1$$

이때 $0 < \theta < 2\pi$ 에서 $-1 \leq \cos\theta < 1$ 이므로

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$0 < \theta < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos\theta$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{1}{2}$

의 교점의 θ 좌표는 $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{4\pi}{3} \text{이므로 } \beta - \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

20 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2x\sin\theta + \cos^2\theta = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \sin^2\theta - \cos^2\theta > 0$$

$$(1 - \cos^2\theta) - \cos^2\theta > 0$$

$$\cos^2\theta < \frac{1}{2}$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

오른쪽 그림에서 θ 의

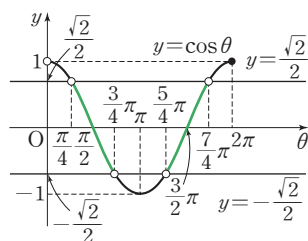
값의 범위는

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4} \text{ 또는}$$

$$\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4}$$

따라서 θ 의 값이 아닌

것은 ③이다.



II-2 01 사인법칙과 코사인법칙

기초 문제 Training

62쪽

- 1 (1) $\sqrt{6}$ (2) $2\sqrt{2}$ (3) $8\sqrt{3}$
- 2 (1) 30° (2) 45° 또는 135° (3) 60° 또는 120°
- 3 (1) 4 (2) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- 4 (1) $\sqrt{39}$ (2) $\sqrt{5}$ (3) $3\sqrt{7}$
- 5 (1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$
- 6 (1) 15 (2) $5\sqrt{3}$ (3) 6
- 7 (1) 6 (2) $48\sqrt{3}$
- 8 (1) $12\sqrt{2}$ (2) 9

핵심 유형 Training

63~68쪽

- | | | | | |
|----------------------------|--------------------------------------|------------------|---------------------------|----------------|
| 1 ③ | 2 ⑤ | 3 $2\sqrt{2}$ | 4 $10\sqrt{2}$ | 5 4 : 2 : 5 |
| 6 $\frac{13}{4}$ | 7 ③ | 8 ② | 9 ③ | 10 ⑤ |
| 11 $a=b$ 인 이등변삼각형 | 12 $30\sqrt{3}$ m | | | |
| 13 ⑤ | 14 $10\sqrt{6}$ m | 15 $\sqrt{19}$ | 16 ① | |
| 17 ① | 18 $\frac{3}{5}$ | 19 120° | 20 $\frac{5\sqrt{7}}{14}$ | 21 6 |
| 22 ② | 23 $a=b$ 인 이등변삼각형 | 24 ④ | | |
| 25 $40\sqrt{7}$ m | 26 $\frac{169}{3}\pi$ m ² | 27 $5\sqrt{2}$ m | | |
| 28 ④ | 29 ⑤ | 30 ③ | 31 ④ | 32 24 |
| 33 ③ | 34 $20\sqrt{3}$ | 35 ③ | 36 ② | 37 $\sqrt{26}$ |
| 38 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ | 39 9 | 40 $14\sqrt{3}$ | | |

- 1 $A=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여
 $\frac{2\sqrt{6}}{\sin 45^\circ}=\frac{b}{\sin 60^\circ}$, $2\sqrt{6}\sin 60^\circ=b\sin 45^\circ$
 $2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=b\times\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore b=6$

- 2 $C=180^\circ-(45^\circ+105^\circ)=30^\circ$ 이므로 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여
 $\frac{12}{\sin 30^\circ}=2R$, $2R\sin 30^\circ=12$
 $\therefore R=12$
따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는
 $\pi\times 12^2=144\pi$
- 3 $B+C=180^\circ-A$ 이므로
 $2\sin A\sin(B+C)=1$, $2\sin A\sin(180^\circ-A)=1$
 $2\sin^2 A=1$, $\sin^2 A=\frac{1}{2}$
 $\therefore \sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because 0^\circ<A<180^\circ$)
사인법칙에 의하여
 $\frac{a}{\sin A}=2\times 2$
 $\therefore a=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$
- 4 $A+C=180^\circ$ 이므로 사각형 ABCD는 원에 내접한다.
삼각형 ACD의 외접원의 지름의 길이가 20이므로 사인법칙에 의하여
 $\frac{\overline{AC}}{\sin 135^\circ}=20$ $\therefore \overline{AC}=20\times\frac{\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}$
- 5 $a+b=6k$, $b+c=7k$, $c+a=9k$ ($k>0$)로 놓고 세 식을 변끼리 더하면
 $2(a+b+c)=22k$ $\therefore a+b+c=11k$
따라서 $a=4k$, $b=2k$, $c=5k$ 이므로 사인법칙에 의하여
 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=4:2:5$
- 6 사인법칙에 의하여
 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=4:5:7$
따라서 $a=4k$, $b=5k$, $c=7k$ ($k>0$)로 놓으면
 $\frac{a^2+c^2}{ab}=\frac{(4k)^2+(7k)^2}{4k\times 5k}=\frac{65k^2}{20k^2}=\frac{13}{4}$
- 7 $A+B+C=180^\circ$ 이고 $A:B:C=1:2:1$ 이므로
 $A=180^\circ\times\frac{1}{4}=45^\circ$, $B=180^\circ\times\frac{2}{4}=90^\circ$,
 $C=180^\circ\times\frac{1}{4}=45^\circ$
 $\therefore \sin A:\sin B:\sin C=\sin 45^\circ:\sin 90^\circ:\sin 45^\circ$
 $=\frac{\sqrt{2}}{2}:1:\frac{\sqrt{2}}{2}=1:\sqrt{2}:1$
사인법칙에 의하여
 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=1:\sqrt{2}:1$

따라서 $a=k, b=\sqrt{2}k, c=k (k>0)$ 로 놓으면

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(\sqrt{2}k)^2}{k \times k} = 2$$

- 8 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a &= 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C \\ \therefore a+b+c &= 2R \sin A + 2R \sin B + 2R \sin C \\ &= 2R(\sin A + \sin B + \sin C) \\ &= 2 \times 5 \times \frac{3}{2} = 15 \end{aligned}$$

- 9 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \sin B &= \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} \\ \text{이를 } b^2 \sin C &= c^2 \sin B \text{에 대입하면} \\ b^2 \times \frac{c}{2R} &= c^2 \times \frac{b}{2R} \\ \therefore b &= c \end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

- 10 $\cos^2 A + \cos^2 B = \cos^2 C + 1$ 에서

$$\begin{aligned} (1 - \sin^2 A) + (1 - \sin^2 B) &= (1 - \sin^2 C) + 1 \\ \therefore \sin^2 C &= \sin^2 A + \sin^2 B \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} \\ \text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \\ \left(\frac{c}{2R}\right)^2 &= \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \\ \therefore c^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

- 11 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \sin^2 B - \sin^2 A = 0 \\ \therefore \sin^2 B &= \sin^2 A \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

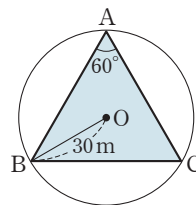
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \sin A &= \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R} \\ \text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \\ \left(\frac{b}{2R}\right)^2 &= \left(\frac{a}{2R}\right)^2 \\ b^2 &= a^2 \quad \therefore a=b \quad (\because a>0, b>0) \end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

- 12 오른쪽 그림과 같이 선분 BC를 그으면 외접원의 반지름의 길이가 30 m이므로 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ} &= 2 \times 30 \\ \therefore \overline{BC} &= 60 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 30\sqrt{3}(\text{m}) \end{aligned}$$



- 13 $C = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{60}{\sin 60^\circ} &= \frac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ} \\ 60 \sin 45^\circ &= \overline{BC} \sin 60^\circ, \quad 60 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \overline{BC} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore \overline{BC} &= 20\sqrt{6}(\text{m}) \end{aligned}$$

- 14 삼각형 AQB에서

$$\angle AQB = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$$

사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BQ}}{\sin 60^\circ} &= \frac{20}{\sin 45^\circ} \\ \overline{BQ} \sin 45^\circ &= 20 \sin 60^\circ, \quad \overline{BQ} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore \overline{BQ} &= 10\sqrt{6}(\text{m}) \end{aligned}$$

이때 삼각형 PBQ는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{PQ} = \overline{BQ} = 10\sqrt{6}(\text{m})$$

- 15 사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$$B = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos 60^\circ \\ &= 25 + 9 - 15 \\ &= 19 \\ \therefore \overline{AC} &= \sqrt{19} \quad (\because \overline{AC} > 0) \end{aligned}$$

- 16 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 &= 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos 60^\circ \\ &= 16 + 25 - 20 \\ &= 21 \end{aligned}$$

$$\therefore a = \sqrt{21} \quad (\because a > 0)$$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{21}}{\sin 60^\circ} &= 2R, \quad 2R \sin 60^\circ = \sqrt{21} \\ \therefore R &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

17 코사인법칙에 의하여

$$b^2 = (\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \times (\sqrt{3}+1) \times \sqrt{2} \times \cos 45^\circ$$

$$= 3 + 2\sqrt{3} + 1 + 2 - 2(\sqrt{3}+1) = 4$$

$$\therefore b=2 \quad (\because b>0)$$

또 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin A} = \frac{2}{\sin 45^\circ}, \quad \sqrt{2} \sin 45^\circ = 2 \sin A$$

$$\therefore \sin A = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A=30^\circ$ 또는 $A=150^\circ$

그런데 $A=150^\circ$ 이면 $A+B > 180^\circ$ 이므로

$$A=30^\circ$$

18 사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 4$$

따라서 $a=3k$, $b=5k$, $c=4k$ ($k>0$)로 놓으면 코사인 법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{(3k)^2 + (5k)^2 - (4k)^2}{2 \times 3k \times 5k} = \frac{3}{5}$$

19 삼각형에서 길이가 가장 긴 변의 대각의 크기가 세 내각 중 가장 크므로 길이가 13인 변의 대각의 크기를 θ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{7^2 + 8^2 - 13^2}{2 \times 7 \times 8} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$\theta = 120^\circ$$

20 정육각형의 한 내각의 크기는

$$\frac{180^\circ \times (6-2)}{6} = 120^\circ$$

$\overline{MF} = \frac{1}{2} \overline{EF} = 3$ 이므로 삼각형 AMF에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AM}^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \times 6 \times 3 \times \cos 120^\circ$$

$$= 36 + 9 + 18 = 63$$

$$\therefore \overline{AM} = 3\sqrt{7} \quad (\because \overline{AM} > 0)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{6^2 + (3\sqrt{7})^2 - 3^2}{2 \times 6 \times 3\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$

21 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \times 8 \times 9} = \frac{2}{3}$$

따라서 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \cos B$$

$$= 64 + 36 - 64 = 36$$

$$\therefore \overline{AD} = 6 \quad (\because \overline{AD} > 0)$$

22 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이를 $b=2a \cos C$ 에 대입하면

$$b = 2a \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$b^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

$$a^2 = c^2$$

$$\therefore a=c \quad (\because a>0, c>0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

23 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이를 $\sin A \cos B = \cos A \sin B$ 에 대입하면

$$\frac{a}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \frac{b}{2R}$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = b^2 + c^2 - a^2$$

$$b^2 = a^2$$

$$\therefore a=b \quad (\because a>0, b>0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

24 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이를 $a \cos A + c \cos C = b \cos B$ 에 대입하면

$$a \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + c \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = b \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2) = b^2(c^2 + a^2 - b^2)$$

$$a^4 - 2a^2c^2 + c^4 - b^4 = 0$$

$$(a^2 - c^2)^2 - (b^2)^2 = 0$$

$$(a^2 - c^2 - b^2)(a^2 - c^2 + b^2) = 0$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{또는} \quad c^2 = a^2 + b^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$ 또는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

25 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PQ}^2 = 120^2 + 80^2 - 2 \times 120 \times 80 \times \cos 60^\circ$$

$$= 14400 + 6400 - 9600$$

$$= 11200$$

$$\therefore \overline{PQ} = 40\sqrt{7}(\text{m}) \quad (\because \overline{PQ} > 0)$$

따라서 두 나무 P, Q 사이의 거리는 $40\sqrt{7}$ m이다.

26 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{8^2 + 7^2 - 13^2}{2 \times 8 \times 7} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 120^\circ$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{13}{\sin 120^\circ} = 2R, \quad 2R \sin 120^\circ = 13 \quad \therefore R = \frac{13\sqrt{3}}{3}(\text{m})$$

따라서 물웅덩이의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{13\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{169}{3}\pi (\text{m}^2)$$

27 $\overline{PQ} = x$ ($x > 0$)라 하면 삼각형 PAQ에서

$$\overline{AP} = \frac{\overline{PQ}}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}x$$

또 삼각형 PBQ에서

$$\overline{BP} = \frac{\overline{PQ}}{\sin 30^\circ} = 2x$$

삼각형 PAB에서 코사인법칙에 의하여

$$10^2 = (\sqrt{2}x)^2 + (2x)^2 - 2 \times \sqrt{2}x \times 2x \times \cos 45^\circ$$

$$100 = 2x^2 + 4x^2 - 4x^2, \quad x^2 = 50$$

$$\therefore x = 5\sqrt{2} \quad (\because x > 0)$$

따라서 가로등의 높이 PQ는 $5\sqrt{2}$ m이다.

28 삼각형 ABC의 넓이가 $15\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \sin A = 15\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $A > 90^\circ$ 이므로 $A = 120^\circ$

코사인법칙에 의하여

$$a^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos 120^\circ$$

$$= 36 + 100 + 60 = 196$$

$$\therefore a = 14 \quad (\because a > 0)$$

29 원의 중심을 O라 하면

$$\angle BOA = 360^\circ \times \frac{3}{12} = 90^\circ$$

$$\angle COB = 360^\circ \times \frac{4}{12} = 120^\circ$$

$$\angle AOC = 360^\circ \times \frac{5}{12} = 150^\circ$$

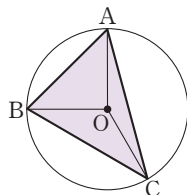
$$\therefore \triangle ABC$$

$$= \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$$

$$= \frac{1}{2} \times 6^2 \times \sin 90^\circ + \frac{1}{2} \times 6^2 \times \sin 120^\circ$$

$$+ \frac{1}{2} \times 6^2 \times \sin 150^\circ$$

$$= 18 + 9\sqrt{3} + 9 = 9(3 + \sqrt{3})$$



$$30 \quad \triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 = 16\sqrt{3}$$

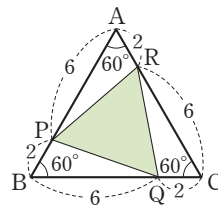
이때 $\triangle APR = \triangle BQP = \triangle CRQ$ 이고

$$\triangle APR = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 \times \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore \triangle PQR$$

$$= \triangle ABC - 3\triangle APR$$

$$= 16\sqrt{3} - 3 \times 3\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$



31 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{8^2 + 10^2 - 12^2}{2 \times 8 \times 10} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 10 \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = 15\sqrt{7}$$

32 삼각형의 세 변의 길이를 a, b, c 라 하면 삼각형의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 이고 넓이가 $2\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{abc}{4 \times \sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore abc = 24$$

33 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 5 \times 7} = \frac{1}{7}$$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = 10\sqrt{3}$$

이때 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\frac{1}{2}r(5+7+8) = 10\sqrt{3}$$

$$\therefore r = \sqrt{3}$$

34 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \times 5 \times 10 \times \cos 60^\circ$$

$$= 25 + 100 - 50 = 75$$

$$\therefore \overline{BD} = 5\sqrt{3} \quad (\because \overline{BD} > 0)$$

$$\therefore \square ABCD$$

$$= \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 5\sqrt{3} \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times 5 \times 10 \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{15\sqrt{3}}{2} + \frac{25\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$$

35 오른쪽 그림과 같이 선분

BD를 그으면 삼각형 ABD
에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = (3\sqrt{2})^2 + 8^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 8 \times \cos 135^\circ$$

$$= 18 + 64 + 48 = 130$$

$$\therefore \overline{BD} = \sqrt{130} \quad (\because \overline{BD} > 0)$$

또 $\overline{BC} = x \ (x > 0)$ 라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙
에 의하여

$$(\sqrt{130})^2 = x^2 + (7\sqrt{2})^2 - 2 \times x \times 7\sqrt{2} \times \cos 45^\circ$$

$$130 = x^2 + 98 - 14x, \quad x^2 - 14x - 32 = 0$$

$$(x+2)(x-16) = 0 \quad \therefore x = 16 \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore \overline{BC} = 16$$

$$\therefore \square ABCD$$

$$= \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 8 \times \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \times 16 \times 7\sqrt{2} \times \sin 45^\circ$$

$$= 12 + 56$$

$$= 68$$

36 오른쪽 그림과 같이 선분 AC를 그
으면 삼각형 ABC에서 코사인법칙
에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos B$$

$$= 8 - 8 \cos B \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos D$$

$$= 52 - 48 \cos (180^\circ - B)$$

$$= 52 + 48 \cos B \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$8 - 8 \cos B = 52 + 48 \cos B$$

$$\therefore \cos B = -\frac{11}{14}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B}$$

$$= \sqrt{1 - \left(-\frac{11}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

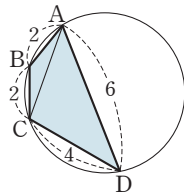
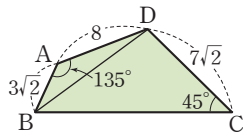
$$\therefore \square ABCD$$

$$= \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin B + \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin (180^\circ - B)$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{5\sqrt{3}}{14} + \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$= 5\sqrt{3}$$



37 평행사변형 ABCD의 넓이가 20이므로

$$4 \times \overline{BC} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 20$$

$$\therefore \overline{BC} = 5\sqrt{2}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 4^2 + (5\sqrt{2})^2 - 2 \times 4 \times 5\sqrt{2} \times \cos 45^\circ$$

$$= 16 + 50 - 40 = 26$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{26} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

38 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$

$$\text{직각삼각형 ABD에서 } \overline{BD} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

사다리꼴 ABCD의 넓이는 $\frac{1}{2} \times (4+8) \times 4 = 24$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times 4\sqrt{2} \times \sin \theta = 24$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

39 $\tan \theta = \frac{3}{4}$ 에서 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4}$ 이므로 $\cos \theta = \frac{4 \sin \theta}{3}$

이를 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에 대입하면

$$\sin^2 \theta + \left(\frac{4 \sin \theta}{3}\right)^2 = 1, \quad \sin^2 \theta + \frac{16 \sin^2 \theta}{9} = 1$$

$$\frac{25 \sin^2 \theta}{9} = 1, \quad \sin^2 \theta = \frac{9}{25}$$

이때 $\tan \theta > 0$ 에서 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \frac{3}{5} = 9$$

40 두 대각선의 교점을 O, $\overline{OA} = x$, $\overline{OB} = y$ 라 하면 삼각형

OAB에서 코사인법칙에 의하여

$$6^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 60^\circ$$

$$\therefore x^2 + y^2 - xy = 36 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 삼각형 OBC에서 코사인법칙에 의하여

$$8^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ$$

$$\therefore x^2 + y^2 + xy = 64 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 을 하면

$$2xy = 28 \quad \therefore xy = 14$$

$$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 2x \times 2y \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3}xy$$

$$= 14\sqrt{3}$$

III-1 01 등차수열

기초 문제 Training

70쪽

- 1 (1) 11 (2) 1024 (3) $\frac{1}{7}$ (4) -9
- 2 (1) 2, 3, 4 (2) $\frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{10}$
- 3 (1) -2 (2) $\frac{1}{2}$
- 4 (1) 8 (2) 3
- 5 (1) $a_n=3n-2$ (2) $a_n=5n-8$
(3) $a_n=4n-2$ (4) $a_n=-3n-2$
- 6 (1) $x=5, y=9$ (2) $x=-1, y=1$
- 7 (1) 48 (2) 480 (3) 276 (4) 284

핵심 유형 Training

71~76쪽

1 ④	2 ④	3 ②	4 ①	5 ③
6 $a_n=4n-16$	7 ②	8 제17항	9 ④	
10 제25항	11 13	12 2	13 261	14 ④
15 ①	16 ①	17 -6	18 6	19 5
20 -24	21 ③	22 54	23 6	24 ①
25 200	26 3	27 252	28 ③	29 ②
30 290	31 ②	32 12	33 9	34 ③
35 ②	36 ③	37 630	38 ④	39 ⑤
40 12	41 ④	42 6	43 75	44 143

- 1 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면
 $a_1=(1+1)^2-1, a_2=(2+1)^2-2, a_3=(3+1)^2-3,$
 $a_4=(4+1)^2-4, \dots$
 $\therefore a_n=(n+1)^2-n=n^2+n+1$

- 2 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면
 $a_1=\frac{1}{2 \times 1 - 1}, a_2=\frac{1}{2 \times 2 - 1}, a_3=\frac{1}{2 \times 3 - 1},$
 $a_4=\frac{1}{2 \times 4 - 1}, \dots$
 $\therefore a_n=\frac{1}{2n-1}$
 $a_k=\frac{1}{101}$ 에서 $\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{101}$
 $2k-1=101 \quad \therefore k=51$

- 3 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ 의 규칙을 찾아보면
 $a_1=1 \times 3, a_2=2 \times 4, a_3=3 \times 5, a_4=4 \times 6, \dots$
 $\therefore a_n=n(n+2)$
 $\therefore a_{10}-a_9=10 \times 12 - 9 \times 11 = 21$

- 4 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_2=7, a_{10}=23$ 이므로
 $a+d=7, a+9d=23$
두 식을 연립하여 풀면
 $a=5, d=2$

- 5 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_2+a_8=16$ 이므로
 $(a+d)+(a+7d)=16$
 $\therefore a+4d=8 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
또 $a_3=2a_6$ 이므로
 $a+2d=2(a+5d)$
 $\therefore a+8d=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면
 $a=16, d=-2$
주어진 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n=16+(n-1) \times (-2)=-2n+18$
 $\therefore a_9=-2 \times 9+18=0$

- 6 제2항과 제6항은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로
 $a_2=-a_6$, 즉 $a_2+a_6=0$
첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $(a+d)+(a+5d)=0$
 $\therefore a+3d=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$
또 제5항은 4이므로
 $a+4d=4 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$
 $\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣}$ 을 연립하여 풀면
 $a=-12, d=4$
따라서 주어진 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n=-12+(n-1) \times 4=4n-16$

- 7 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 각각 d_1 , d_2 라 하면 $a_3 : b_3 = 4 : 5$ 에서 $4b_3 = 5a_3$ 이므로
 $4(a+2d_2) = 5(a+2d_1)$
 $\therefore a+10d_1-8d_2=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 또 $a_5 : b_5 = 7 : 9$ 에서 $7b_5 = 9a_5$ 이므로
 $7(a+4d_2) = 9(a+4d_1)$
 $\therefore a+18d_1-14d_2=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}-\textcircled{㉡}$ 을 하면
 $-8d_1+6d_2=0 \quad \therefore d_1=\frac{3}{4}d_2$
 이를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면 $a=\frac{1}{2}d_2$
 $\therefore a_7 : b_7 = (a+6d_1) : (a+6d_2)$
 $= \left(\frac{1}{2}d_2 + \frac{9}{2}d_2\right) : \left(\frac{1}{2}d_2 + 6d_2\right)$
 $= 5d_2 : \frac{13}{2}d_2$
 $= 10 : 13$
- 8 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 제6항이 32, 제10항이 20이므로
 $a+5d=32$, $a+9d=20$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a=47$, $d=-3$
 주어진 등차수열의 일반항을 a_n 이라 하면
 $a_n=47+(n-1)\times(-3)=-3n+50$
 이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면 $a_n<0$ 에서
 $-3n+50<0$, $3n>50$
 $\therefore n>16.6\cdots$
 그런데 n 은 자연수이므로 처음으로 음수가 되는 항은 제17항이다.
- 9 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_3=-47$, $a_{10}=-19$ 이므로
 $a+2d=-47$, $a+9d=-19$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a=-55$, $d=4$
 주어진 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n=-55+(n-1)\times 4=4n-59$
 이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면 $a_n>0$ 에서
 $4n-59>0$, $4n>59$
 $\therefore n>14.75$
 그런데 n 은 자연수이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제15항이다.

- 10 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_7=16$ 이므로
 $a+6d=16 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 또 $a_3 : a_9 = 2 : 5$ 에서 $2a_9 = 5a_3$ 이므로
 $2(a+8d) = 5(a+2d)$
 $\therefore a-2d=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면
 $a=4$, $d=2$
 주어진 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n=4+(n-1)\times 2=2n+2$
 이때 제 n 항에서 처음으로 50보다 커진다고 하면 $a_n>50$ 에서
 $2n+2>50$, $2n>48$
 $\therefore n>24$
 그런데 n 은 자연수이므로 처음으로 50보다 커지는 항은 제25항이다.
- 11 공차를 d 라 하면 $a_1=47$, $a_{10}=11$ 이므로
 $47+9d=11 \quad \therefore d=-4$
 주어진 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n=47+(n-1)\times(-4)=-4n+51$
 이때 $-4n+51=0$ 에서 $n=12.75$ 이므로
 $|a_{12}| = |-4\times 12+51| = 3$
 $|a_{13}| = |-4\times 13+51| = 1$
 따라서 $|a_n|$ 의 값이 최소가 되는 자연수 n 의 값은 13이다.
- 12 공차를 d 라 하면 첫째항이 8, 제7항이 20이므로
 $8+6d=20 \quad \therefore d=2$
- 13 공차를 d 라 하면 첫째항이 15, 제5항이 3이므로
 $15+4d=3 \quad \therefore d=-3$
 $\therefore x=15+d=12$, $y=15+2d=9$, $z=15+3d=6$
 $\therefore x^2+y^2+z^2=12^2+9^2+6^2$
 $=261$
- 14 첫째항이 -10, 공차가 $\frac{3}{4}$ 인 등차수열의 제 $(m+2)$ 항이 20이므로
 $-10+(m+2-1)\times\frac{3}{4}=20$
 $\frac{3}{4}(m+1)=30$, $m+1=40$
 $\therefore m=39$

- 15** 공차를 d 라 하면 첫째항이 1, 제 $(m+2)$ 항이 100이므로
 $1 + (m+2-1)d = 100$
 $\therefore (m+1)d = 99$
 이때 m, d 가 자연수이므로 $m+1$ 도 자연수이다.
 따라서 $(m+1)d = 99$ 인 경우는 다음과 같으므로 자연수 d 의 개수는 5이다.

$m+1$	3	9	11	33	99
d	33	11	9	3	1

- 16** a^2-1 은 a 와 a^2+a+1 의 등차중항이므로

$$a^2-1 = \frac{a+(a^2+a+1)}{2}$$

$$2(a^2-1) = a^2+2a+1$$

$$a^2-2a-3=0, (a+1)(a-3)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=3$$

따라서 모든 a 의 값의 곱은

$$-1 \times 3 = -3$$

- 17** a 는 $1-2\sqrt{3}$ 과 1의 등차중항이므로

$$a = \frac{(1-2\sqrt{3})+1}{2} = 1-\sqrt{3}$$

1은 a 와 b 의 등차중항이므로

$$1 = \frac{a+b}{2}$$

$$2 = (1-\sqrt{3})+b \quad \therefore b = 1+\sqrt{3}$$

c 는 5와 1의 등차중항이므로

$$c = \frac{5+1}{2} = 3$$

1은 c 와 d 의 등차중항이므로

$$1 = \frac{c+d}{2}$$

$$2 = 3+d \quad \therefore d = -1$$

$$\therefore ab-c+d = (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})-3+(-1) = -6$$

- 18** 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=6, \alpha\beta=6$$

이때 p 는 α 와 β 의 등차중항이므로

$$p = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

또 q 는 $\frac{1}{\alpha}$ 과 $\frac{1}{\beta}$ 의 등차중항이므로

$$q = \frac{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta} = \frac{6}{2 \times 6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{p}{q} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

- 19** $a, b, 10$ 에서 b 는 a 와 10의 등차중항이므로

$$b = \frac{a+10}{2} \quad \therefore 2b = a+10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

10, c, d 에서 c 는 10과 d 의 등차중항이므로

$$c = \frac{10+d}{2} \quad \therefore 2c = 10+d \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 을 하면

$$2(b-c) = a-d$$

또 $b, e, 0$ 에서 e 는 b 와 0의 등차중항이고, 5, e, c 에서 e 는 5와 c 의 등차중항이므로

$$\frac{b+0}{2} = \frac{5+c}{2}, b=5+c$$

$$\therefore b-c=5$$

$$\therefore a-b+c-d = (a-d) - (b-c)$$

$$= 2(b-c) - (b-c) = b-c = 5$$

- 20** 세 실근을 $a-d, a, a+d$ 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a-d)+a+(a+d)=9$$

$$3a=9 \quad \therefore a=3$$

따라서 주어진 삼차방정식의 한 근이 3이므로

$$3^3 - 9 \times 3^2 + 26 \times 3 + k = 0$$

$$\therefore k = -24$$

- 21** 가로, 세로, 높이를 각각 $a-d, a, a+d$ 라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 48이므로

$$4\{(a-d)+a+(a+d)\}=48$$

$$12a=48 \quad \therefore a=4$$

또 부피가 60이므로

$$(4-d) \times 4 \times (4+d) = 60$$

$$16-d^2=15, d^2=1 \quad \therefore d=\pm 1$$

따라서 가로, 세로, 높이는 각각 3, 4, 5 또는 5, 4, 3이므로 구하는 겉넓이는

$$2(3 \times 4 + 4 \times 5 + 5 \times 3) = 94$$

- 22** $\textcircled{㉠}$ 에서 직각삼각형의 세 변의 길이를 각각 $a-d, a, a+d$ ($a > d > 0$)라 하면

$$(a+d)^2 = a^2 + (a-d)^2, a(a-4d) = 0$$

$$\therefore a=4d \quad (\because a \neq 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } a+d=15 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 을 연립하여 풀면

$$a=12, d=3$$

따라서 직각삼각형의 세 변의 길이는 9, 12, 15이므로 그 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 12 = 54$$

- 23 네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$ 라 하면 네 수의 합이 20이므로

$$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=20$$

$$4a=20 \quad \therefore a=5$$

또 네 수의 제곱의 합이 120이므로

$$(5-3d)^2+(5-d)^2+(5+d)^2+(5+3d)^2=120$$

$$100+20d^2=120, d^2=1$$

$$\therefore d=\pm 1$$

따라서 구하는 네 수는 2, 4, 6, 8이므로 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차는

$$8-2=6$$

- 24 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_2=5$, $a_6=17$ 이므로

$$a+d=5, a+5d=17$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=2, d=3$$

따라서 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{20\{2 \times 2 + (20-1) \times 3\}}{2} = 610$$

- 25 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차를 각각 d_1 , d_2 라 하면

$$a_1+b_1=2, d_1+d_2=4$$

$$\therefore (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10})$$

$$= \frac{10(2a_1+9d_1)}{2} + \frac{10(2b_1+9d_2)}{2}$$

$$= \frac{10\{2(a_1+b_1)+9(d_1+d_2)\}}{2}$$

$$= \frac{10(2 \times 2 + 9 \times 4)}{2}$$

$$= 200$$

- 26 첫째항이 1, 제 $(m+2)$ 항이 58인 등차수열의 첫째항부터 제 $(m+2)$ 항까지의 합이 590이므로

$$\frac{(m+2)(1+58)}{2} = 590, m+2=20$$

$$\therefore m=18$$

이 수열의 공차를 d 라 하면 제20항이 58이므로

$$1+19d=58 \quad \therefore d=3$$

- 27 공차를 d 라 하면 $a_1=6$, $a_{10}=-12$ 이므로

$$6+9d=-12 \quad \therefore d=-2$$

주어진 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n=6+(n-1) \times (-2)=-2n+8$$

$$\text{이때 } a_n < 0 \text{에서 } -2n+8 < 0, 2n > 8 \quad \therefore n > 4$$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제5항부터 음수이다.

$$a_4=0, a_5=-2, a_{19}=-30 \text{이므로}$$

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{19}|$$

$$=(a_1+a_2+a_3+a_4)-(a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{19})$$

$$= \frac{4(6+0)}{2} - \frac{15(-2-30)}{2}$$

$$= 12 - (-240) = 252$$

- 28 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $S_3=6$, $S_6=3$ 이므로

$$\frac{3\{2a+(3-1)d\}}{2} = 6$$

$$\therefore a+d=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{6\{2a+(6-1)d\}}{2} = 3$$

$$\therefore 2a+5d=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a=3, d=-1$$

$$\therefore S_9 = \frac{9\{2 \times 3 + (9-1) \times (-1)\}}{2} = -9$$

- 29 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=40$

에서 $S_5=40$ 이므로

$$\frac{5\{2a+(5-1)d\}}{2} = 40$$

$$\therefore a+2d=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{15}=305$ 에서 $S_{15}-S_5=305$ 이므로

$$\frac{15\{2a+(15-1)d\}}{2} - 40 = 305$$

$$\therefore a+7d=23 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a=2, d=3$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10\{2 \times 2 + (10-1) \times 3\}}{2} = 155$$

- 30 첫째항을 a , 공차를 d , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n

이라 하면 (7) 에서 $S_{20}=90$ 이므로

$$\frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2} = 90$$

$$\therefore 2a+19d=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

(4) 에서 $S_{40}-S_{20}=490$ 이므로

$$\frac{40\{2a+(40-1)d\}}{2} - 90 = 490$$

$$\therefore 2a+39d=29 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a=-5, d=1$$

$$\begin{aligned} \therefore a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{30} \\ &= S_{30} - S_{10} \\ &= \frac{30\{2 \times (-5) + (30-1) \times 1\}}{2} - \frac{10\{2 \times (-5) + (10-1) \times 1\}}{2} \\ &= 285 - (-5) = 290 \end{aligned}$$

- 31** 첫째항이 15, 공차가 -2이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 15 + (n-1) \times (-2) = -2n + 17$
 이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면 $a_n < 0$ 에서
 $-2n + 17 < 0, 2n > 17 \quad \therefore n > 8.5$
 따라서 첫째항부터 제8항까지 양수이고, 제9항부터 음수
 이므로 구하는 최댓값은

$$S_8 = \frac{8\{2 \times 15 + (8-1) \times (-2)\}}{2} = 64$$

다른 풀이

$$S_n = \frac{n\{2 \times 15 + (n-1) \times (-2)\}}{2}$$

$$= -n^2 + 16n$$

$$= -(n-8)^2 + 64$$

따라서 구하는 최댓값은 $n=8$ 일 때 64이다.

- 32** 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 제6항이 -55, 제10항이 -23이므로
 $a + 5d = -55, a + 9d = -23$
 두 식을 연립하여 풀면 $a = -95, d = 8$
 주어진 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n = -95 + (n-1) \times 8 = 8n - 103$
 이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면 $a_n > 0$ 에서
 $8n - 103 > 0, 8n > 103 \quad \therefore n > 12.875$
 따라서 첫째항부터 제12항까지 음수이고, 제13항부터 양수이므로 첫째항부터 제12항까지의 합이 최소이다.
 $\therefore n = 12$

- 33** 공차를 d 라 하면 첫째항이 17이므로
 $S_7 = \frac{7\{34 + (7-1)d\}}{2} = 21d + 119$
 $S_{11} = \frac{11\{34 + (11-1)d\}}{2} = 55d + 187$
 이때 $S_7 = S_{11}$ 이므로 $21d + 119 = 55d + 187$
 $34d = -68 \quad \therefore d = -2$
 주어진 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n = 17 + (n-1) \times (-2) = -2n + 19$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면 $a_n < 0$ 에서
 $-2n + 19 < 0, 2n > 19 \quad \therefore n > 9.5$
 따라서 첫째항부터 제9항까지 양수이고, 제10항부터 음수
 이므로 첫째항부터 제9항까지의 합이 최대이다.
 $\therefore n = 9$

- 34** 공차를 d 라 하면 $a_1 = -45, a_{10} = -27$ 이므로
 $-45 + 9d = -27 \quad \therefore d = 2$
 주어진 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n = -45 + (n-1) \times 2 = 2n - 47$
 이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면 $a_n > 0$ 에서
 $2n - 47 > 0, 2n > 47 \quad \therefore n > 23.5$
 따라서 첫째항부터 제23항까지 음수이고, 제24항부터 양수이므로 첫째항부터 제23항까지의 합이 최소이다.
 $\therefore k = 23$
 $\therefore m = S_{23} = \frac{23\{2 \times (-45) + (23-1) \times 2\}}{2} = -529$
 $\therefore k - m = 23 - (-529) = 552$

- 35** 두 자리의 자연수 중에서 7로 나누었을 때의 나머지가 5인 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면
 12, 19, 26, ..., 96
 이는 첫째항이 12, 공차가 7인 등차수열이므로 제 n 항을 96이라 하면
 $12 + (n-1) \times 7 = 96, 7(n-1) = 84$
 $\therefore n = 13$
 따라서 구하는 합은 첫째항이 12, 제13항이 96인 등차수열의 첫째항부터 제13항까지의 합이므로
 $\frac{13(12+96)}{2} = 702$

- 36** 100 이상 300 이하의 자연수 중에서 3으로 나누어떨어지고 5로도 나누어떨어지는 수는 3과 5의 최소공배수인 15로 나누어떨어지는 수이다. 이 수를 작은 것부터 차례대로 나열하면
 105, 120, 135, ..., 300
 이는 첫째항이 105, 공차가 15인 등차수열이므로 제 n 항을 300이라 하면
 $105 + (n-1) \times 15 = 300, 15(n-1) = 195$
 $\therefore n = 14$
 따라서 구하는 합은 첫째항이 105, 제14항이 300인 등차수열의 첫째항부터 제14항까지의 합이므로
 $\frac{14(105+300)}{2} = 2835$

37 3으로 나누어떨어지는 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

3, 6, ⑨, 12, 15, 18, ⑫, 24, 27, 30, ⑬, ...

4로 나누었을 때의 나머지가 1인 자연수를 작은 것부터 차례대로 나열하면

1, 5, ⑨, 13, 17, ⑫, 25, 29, ⑬, ...

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 9, 공차가 12인 등차수열이므로

$$S_{10} = \frac{10\{2 \times 9 + (10-1) \times 12\}}{2} = 630$$

38 $S_n = 3n^2 - 5n + 7$ 에서

$$a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 - 5 \times 1 + 7 = 5$$

$$\begin{aligned} a_{10} &= S_{10} - S_9 \\ &= (3 \times 10^2 - 5 \times 10 + 7) - (3 \times 9^2 - 5 \times 9 + 7) \\ &= 257 - 205 = 52 \end{aligned}$$

$$\therefore a_1 + a_{10} = 5 + 52 = 57$$

39 나머지 정리에 의하여

$$S_n = (-n)^2 + 2(-n) = n^2 - 2n$$

$$\begin{aligned} a_3 &= S_3 - S_2 \\ &= (3^2 - 2 \times 3) - (2^2 - 2 \times 2) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_7 &= S_7 - S_6 \\ &= (7^2 - 2 \times 7) - (6^2 - 2 \times 6) = 11 \end{aligned}$$

$$\therefore a_3 + a_7 = 3 + 11 = 14$$

40 $S_n = 2n^2 + n$ 에서

$$\begin{aligned} \text{(i) } n \geq 2 \text{ 일 때,} \\ a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 + n - \{2(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 4n - 1 \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } n=1 \text{ 일 때,} \\ a_1 &= S_1 = 2 \times 1^2 + 1 = 3 \quad \dots\dots \text{㉡} \end{aligned}$$

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 4n - 1$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열이므로 $a=3, d=4$

$$\therefore ad = 12$$

41 $S_n = n^2 - 12n$ 에서

$$\begin{aligned} \text{(i) } n \geq 2 \text{ 일 때,} \\ a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 12n - \{(n-1)^2 - 12(n-1)\} \\ &= 2n - 13 \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 12 \times 1 = -11 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 2n - 13$ 이고 $a_n < 0$ 에서

$$2n - 13 < 0, 2n < 13$$

$$\therefore n < 6.5$$

따라서 $a_n < 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

42 n 각형의 내각의 크기의 합은 $180^\circ(n-2) \quad \dots\dots \text{㉠}$

첫째항이 95° , 공차가 10° 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\frac{n\{2 \times 95^\circ + (n-1) \times 10^\circ\}}{2} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$180^\circ(n-2) = \frac{n\{2 \times 95^\circ + (n-1) \times 10^\circ\}}{2}$$

$$n^2 - 18n + 72 = 0, (n-6)(n-12) = 0$$

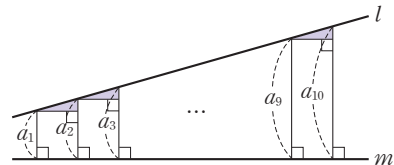
$$\therefore n=6 \text{ 또는 } n=12$$

이때 $n=12$ 이면 가장 큰 내각의 크기가

$$95^\circ + 11 \times 10^\circ = 205^\circ \text{이므로 } n=6$$

43 다음 그림에서 색칠한 삼각형은 한 변의 길이와 그 양 끝각의 크기가 같으므로 모두 합동이다.

$$\therefore a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_{10} - a_9$$



따라서 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = \frac{10(5+10)}{2} = 75$$

44 선분 10개를 각각 연장한 직선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 왼쪽부터 차례대로 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{13}$ 이라 하면

$$l_n = (x_n^2 + ax_n + b) - x_n^2 = ax_n + b \quad (n=1, 2, 3, \dots, 13)$$

이때 수열 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{13}$ 이 등차수열이므로

$$x_{n+1} - x_n = d \text{라 하면}$$

$$l_{n+1} - l_n = a(x_{n+1} - x_n) = ad$$

따라서 수열 $l_1, l_2, l_3, \dots, l_{13}$ 은 등차수열이므로

$$l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{13} = \frac{13(3+19)}{2} = 143$$

III-1 02 등비수열

기초 문제 Training

77쪽

- (1) 3 (2) 4 (3) $\sqrt{3}$ (4) -1
- (1) 12 (2) -4 (3) $\frac{1}{32}$ (4) $-2\sqrt{2}$
- (1) $a_n = 2^{n-1}$ (2) $a_n = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
(3) $a_n = (\sqrt{5})^n$ (4) $a_n = 7 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
- (1) $x=2, y=8$ (2) $x=\frac{1}{2}, y=\frac{9}{8}$
(3) $x=6, y=36$ (4) $x=32, y=8$
- (1) 728 (2) $-\frac{85}{128}$ (3) 341 (4) $\frac{1}{9}(1-0.1^{10})$

핵심 유형 Training

78~82쪽

1 5	2 ④	3 ①	4 ③	5 ④
6 ③	7 8	8 ①	9 ③	10 7
11 3	12 ③	13 ④	14 $-\frac{9}{2}$	15 12
16 ④	17 ④	18 $\frac{4}{25}g$	19 7번째	20 $\frac{3}{1024}$
21 ②	22 1023	23 9207	24 9	25 ④
26 ③	27 ⑤	28 ③	29 ①	30 5460
31 8	32 1875000원	33 ③	34 ①	

- 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $-\frac{1}{2}$ 인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_k = \frac{1}{32} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{32}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{16}, k-1=4$$

$$\therefore k=5$$

- 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_4=24, a_7=192$ 이므로

$$ar^3=24 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^6=192 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면}$$

$$\frac{ar^6}{ar^3} = \frac{192}{24}, r^3=8 \quad \therefore r=2$$
이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $8a=24 \quad \therefore a=3$

$$\therefore a+r=3+2=5$$

- 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_1+a_3=5$ 에서

$$a+ar^2=5 \quad \therefore a(1+r^2)=5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$
또 $a_4+a_6=-40$ 에서

$$ar^3+ar^5=-40 \quad \therefore ar^3(1+r^2)=-40 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면}$$

$$\frac{ar^3(1+r^2)}{a(1+r^2)} = \frac{-40}{5}, r^3=-8 \quad \therefore r=-2$$
이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $5a=5 \quad \therefore a=1$

$$\therefore a_7+a_8=(-2)^6+(-2)^7=64-128=-64$$

- 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_3=36, a_5=324$ 이므로

$$ar^2=36 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^4=324 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면}$$

$$\frac{ar^4}{ar^2} = \frac{324}{36}, r^2=9 \quad \therefore r=3 (\because r>0)$$
이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $9a=36 \quad \therefore a=4$
따라서 $a_9=4 \times 3^8$ 이므로

$$\log_3 \frac{a_9}{4} = \log_3 \frac{4 \times 3^8}{4} = \log_3 3^8 = 8$$

- 공비를 r 라 하면 첫째항이 4, 제5항이 $\frac{1}{4}$ 이므로

$$4r^4 = \frac{1}{4}, r^4 = \frac{1}{16} \quad \therefore r = \frac{1}{2} (\because r>0)$$
주어진 등비수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$
이때 제 n 항에서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작아진다고 하면

$$a_n < \frac{1}{1000} \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} < \frac{1}{1000}$$
그런데 n 은 자연수이고 $\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}, \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}$ 이므로

$$n-3 \geq 10 \quad \therefore n \geq 13$$
따라서 처음으로 $\frac{1}{1000}$ 보다 작아지는 항은 제13항이다.

- 6 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_2=6$, $a_5=48$ 이므로
 $ar=6$ ㉠
 $ar^4=48$ ㉡
 ㉡÷㉠을 하면
 $\frac{ar^4}{ar}=\frac{48}{6}$, $r^3=8$ $\therefore r=2$
 이를 ㉠에 대입하면 $2a=6$ $\therefore a=3$
 주어진 등비수열의 일반항 a_n 은
 $a_n=3 \times 2^{n-1}$
 $500 < a_n < 1000$ 에서
 $500 < 3 \times 2^{n-1} < 1000$ $\therefore \frac{500}{3} < 2^{n-1} < \frac{1000}{3}$
 그런데 n 은 자연수이고 $2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$ 이므로
 $n-1=8$ $\therefore n=9$

- 7 첫째항이 2, 공비가 $\sqrt{3}$ 인 등비수열의 일반항 a_n 은
 $a_n=2 \times (\sqrt{3})^{n-1}$ $\therefore a_n^2=4 \times 3^{n-1}$
 $a_n^2 > 4000$ 에서 $4 \times 3^{n-1} > 4000$
 $3^{n-1} > 1000$
 그런데 n 은 자연수이고 $3^6=729$, $3^7=2187$ 이므로
 $n-1 \geq 7$ $\therefore n \geq 8$
 따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 8이다.

- 8 공비를 r 라 하면 첫째항이 4, 제6항이 128이므로
 $4r^5=128$, $r^5=32$ $\therefore r=2$
 따라서 $x_1=4 \times 2=8$, $x_2=4 \times 2^2=16$, $x_3=4 \times 2^3=32$,
 $x_4=4 \times 2^4=64$ 이므로
 $x_1+x_2+x_3+x_4=8+16+32+64$
 $=120$

- 9 공비를 r ($r>0$)라 하면 첫째항이 3, 제13항이 48이므로
 $3r^{12}=48$, $r^{12}=16$
 $\therefore r^3=2$ ($\because r>0$)
 $\therefore \frac{x_{10}}{x_7}=\frac{3r^{10}}{3r^7}=r^3=2$

- 10 첫째항이 $\frac{64}{81}$, 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열의 제($m+2$)항이
 $\frac{81}{4}$ 이므로
 $\frac{64}{81} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{m+1}=\frac{81}{4}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{m+1}=\frac{81^2}{64 \times 4}=\left(\frac{3}{2}\right)^8$
 따라서 $m+1=8$ 이므로
 $m=7$

- 11 $4x+3$ 은 $x+2$ 와 $10x+15$ 의 등비중항이므로
 $(4x+3)^2=(x+2)(10x+15)$
 $16x^2+24x+9=10x^2+35x+30$
 $6x^2-11x-21=0$, $(6x+7)(x-3)=0$
 $\therefore x=-\frac{7}{6}$ 또는 $x=3$
 이때 x 는 정수이므로 $x=3$

- 12 a 는 1과 b 의 등차중항이므로
 $a=\frac{1+b}{2}$ ㉠
 또 b 는 a 와 1의 등비중항이므로
 $b^2=a$ ㉡
 ㉠을 ㉡에 대입하면
 $b^2=\frac{1+b}{2}$, $2b^2-b-1=0$
 $(2b+1)(b-1)=0$ $\therefore b=-\frac{1}{2}$ ($\because b<0$)
 이를 ㉡에 대입하면 $a=\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$
 $\therefore 4a+2b=4 \times \frac{1}{4}+2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)=0$

- 13 b 는 a 와 c 의 등비중항이므로 $b^2=ac$
 $\therefore \frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_c b}=\log_b a+\log_b c$
 $=\log_b ac$
 $=\log_b b^2=2$

- 14 (가)에서 b 는 a 와 c 의 등차중항이므로
 $b=\frac{a+c}{2}$ $\therefore 2b=a+c$ ㉠
 (나)에서 a 는 c 와 b 의 등비중항이므로
 $a^2=bc$ ㉡
 (다)에서 $abc=27$ 이므로 이 식에 ㉡을 대입하면
 $a^3=27$ $\therefore a=3$
 이를 ㉠, ㉡에 대입하면
 $2b=3+c$, $bc=9$
 두 식을 연립하여 풀면
 $b=-\frac{3}{2}$, $c=-6$ ($\because a>b>c$)
 $\therefore a+b+c=3+\left(-\frac{3}{2}\right)+(-6)=-\frac{9}{2}$

- 15 세 수를 a , ar , ar^2 이라 하면
 $a+ar+ar^2=21$ 에서
 $a(1+r+r^2)=21$ ㉠
 $a \times ar \times ar^2=216$ 에서
 $(ar)^3=216$ $\therefore ar=6$ ㉡

㉔에서 $a = \frac{6}{r}$ 을 ㉓에 대입하면

$$\frac{6}{r}(1+r+r^2)=21, \quad 2r^2-5r+2=0$$

$$(2r-1)(r-2)=0 \quad \therefore r=\frac{1}{2} \text{ 또는 } r=2$$

이를 ㉔에 대입하여 풀면 $a=12$ 또는 $a=3$

따라서 세 수는 3, 6, 12이므로 가장 큰 수는 12이다.

- 16** 세 실근을 a, ar, ar^2 이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+ar+ar^2=p$$

$$\therefore a(1+r+r^2)=p \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + a \times ar^2 = -84$$

$$\therefore a^2r(1+r+r^2) = -84 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$a \times ar \times ar^2 = -216$$

$$\therefore (ar)^3 = -216 \quad \therefore ar = -6$$

이를 ㉔에 대입하면

$$-6a(1+r+r^2) = -84 \quad \therefore a(1+r+r^2) = 14$$

이를 ㉓에 대입하면 $p=14$

- 17** 가로 길이, 세로 길이, 높이를 각각 a, ar, ar^2 이라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 76이므로

$$4(a+ar+ar^2)=76$$

$$\therefore a(1+r+r^2)=19 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 겹넓이가 228이므로

$$2(a \times ar + ar \times ar^2 + a \times ar^2) = 228$$

$$\therefore a^2r(1+r+r^2) = 114 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉔ $\div$ ㉓을 하면

$$\frac{a^2r(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)} = \frac{114}{19} \quad \therefore ar = 6$$

따라서 직육면체의 부피는

$$a \times ar \times ar^2 = (ar)^3 = 6^3 = 216$$

- 18** 감소하는 일정한 비율을 r ($r > 0$)라 하면 1번 통과한 후의 유해 물질의 양은 $100r$ g

2번 통과한 후의 유해 물질의 양은

$$100r \times r = 100r^2 \text{ (g)}$$

3번 통과한 후의 유해 물질의 양은

$$100r^2 \times r = 100r^3 \text{ (g)}$$

$$\text{이때 } 100r^3 = 4 \text{ 이므로 } r^3 = \frac{1}{25}$$

n 번 통과한 후의 유해 물질의 양은 $100r^n$ g이므로 6번 통과한 후의 유해 물질의 양은

$$100r^6 = 100 \times \left(\frac{1}{25}\right)^2 = \frac{4}{25} \text{ (g)}$$

- 19** 첫 번째 시행 후 남은 조각의 수는 3

두 번째 시행 후 남은 조각의 수는 $3 \times 3 = 3^2$

세 번째 시행 후 남은 조각의 수는 $3^2 \times 3 = 3^3$

$\vdots$

n 번째 시행 후 남은 조각의 수는 3^n

따라서 남은 조각의 수가 1000개를 넘는 것은

$$3^n > 1000$$

$$\text{이때 } 3^6 = 729, \quad 3^7 = 2187 \text{ 이므로 } n \geq 7$$

따라서 남은 조각의 수가 처음으로 1000개를 넘는 것은

7번째 시행 후이다.

- 20** 삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 한 변의 길이는 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$l_1 = 3 \times \frac{1}{2}$$

삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 한 변의 길이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 이므로

$$l_2 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

삼각형 $A_3B_3C_3$ 의 한 변의 길이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ 이므로

$$l_3 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$\vdots$

삼각형 $A_nB_nC_n$ 의 한 변의 길이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 이므로

$$l_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore l_{10} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{3}{1024}$$

- 21** $S_n = \frac{3(2^n-1)}{2-1} = 3(2^n-1)$

$S_k = 189$ 에서

$$3(2^k-1) = 189, \quad 2^k-1 = 63$$

$$2^k = 64 \quad \therefore k = 6$$

- 22** 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_1 + a_4 = 9 \text{ 에서 } a + ar^3 = 9$$

$$\therefore a(1+r^3) = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $a_4 + a_7 = 72$ 에서 $ar^3 + ar^6 = 72$

$$\therefore ar^3(1+r^3) = 72 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉔ $\div$ ㉓을 하면

$$\frac{ar^3(1+r^3)}{a(1+r^3)} = \frac{72}{9}, \quad r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$$

$$\text{이를 ㉓에 대입하면 } 9a = 9 \quad \therefore a = 1$$

따라서 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{1 \times (2^{10}-1)}{2-1} = 1023$$

23 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_3=6$, $a_7=24$ 이므로

$$ar^2=6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^6=24 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$\frac{ar^6}{ar^2} = \frac{24}{6}, r^4=4$$

$$\therefore r=\sqrt{2} \quad (\because r>0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2a=6 \quad \therefore a=3$$

주어진 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n=3 \times (\sqrt{2})^{n-1}$$

$$\therefore a_n^2=9 \times 2^{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_n^2\}$ 은 첫째항이 9, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots+a_{10}^2=\frac{9(2^{10}-1)}{2-1}=9207$$

24 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $\frac{S_6}{S_3}=28$ 이므로

$$\frac{\frac{a(r^6-1)}{r-1}}{\frac{a(r^3-1)}{r-1}}=28, \frac{r^6-1}{r^3-1}=28$$

$$\frac{(r^3+1)(r^3-1)}{r^3-1}=28, r^3+1=28$$

$$r^3=27 \quad \therefore r=3$$

$$\therefore \frac{a_6}{a_4}=\frac{ar^5}{ar^3}=r^2=3^2=9$$

25 첫째항을 a , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$S_5=22$ 이므로

$$\frac{a\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)}=22$$

$$11a=22 \quad \therefore a=2$$

따라서 구하는 합은

$$S_{11}-S_5=\frac{2\{1-(-2)^{11}\}}{1-(-2)}-22=1366-22=1344$$

26 첫째항을 a , 공비를 r 라 하고 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $S_{10}=7$ 이므로

$$\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $S_{20}-S_{10}=21$ 이므로

$$\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}-7=21$$

$$\therefore \frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}=28 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $7(r^{10}+1)=28$

$$r^{10}+1=4 \quad \therefore r^{10}=3$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{30} &= \frac{a(r^{30}-1)}{r-1} \\ &= \frac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1} \\ &= 7(3^2+3+1)=91 \end{aligned}$$

27 항의 개수가 짝수이므로 전체 항의 개수를 $2n$ 이라 하고 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 홀수 번째의 항의 합은

$$a+ar^2+ar^4+\dots+ar^{2n-2}=\frac{a(r^{2n}-1)}{r^2-1}=119 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 짝수 번째의 항의 합은

$$ar+ar^3+ar^5+\dots+ar^{2n-1}=\frac{ar(r^{2n}-1)}{r^2-1}=357 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$119r=357 \quad \therefore r=3$$

28 $S_n=3^n-1$ 에서

$$a_1=S_1=3^1-1=2$$

$$a_3=S_3-S_2=(3^3-1)-(3^2-1)=18$$

$$a_5=S_5-S_4=(3^5-1)-(3^4-1)=162$$

$$\therefore a_1+a_3+a_5=2+18+162=182$$

29 $S_n=2 \times 3^{n+1}+2k$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2 \times 3^{n+1} + 2k - (2 \times 3^n + 2k) \\ &= 2 \times 3^n \times (3-1) \\ &= 4 \times 3^n \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1=S_1=2 \times 3^2+2k=18+2k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값이 $\textcircled{2}$ 과 같아야 하므로

$$4 \times 3 = 18 + 2k, 12 = 18 + 2k$$

$$\therefore k=-3$$

30 $\log_2 S_n=n+1$ 에서 $S_n=2^{n+1}$

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-2^n=2^n$$

$$\therefore a_{2n}=2^{2n}=4^n \quad (n \geq 1)$$

따라서 수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 4, 공비가 4인 등비수열이므로

$$a_2+a_4+a_6+\dots+a_{12}=\frac{4(4^6-1)}{4-1}=5460$$

31 $S_n = a^{n+1} + b$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= a^{n+1} + b - (a^n + b) \\ &= (a-1)a^n \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = a^2 + b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이므로

$$a=2$$

또 $\textcircled{1}$ 은 $\textcircled{2}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같아야 하므로

$$(a-1)a = a^2 + b$$

$$a=2 \text{이므로}$$

$$(2-1) \times 2 = 2^2 + b \quad \therefore b = -2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2^2 + (-2)^2 = 8$$

32 구하는 원리합계는

$$\begin{aligned} &5 + 5(1+0.004) + 5(1+0.004)^2 + \dots + 5(1+0.004)^{35} \\ &= \frac{5\{(1+0.004)^{36} - 1\}}{(1+0.004) - 1} \\ &= \frac{5(1.15 - 1)}{0.004} \\ &= 187.5(\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 3년 말의 적립금의 원리합계는 1875000원이다.

33 구하는 원리합계는

$$\begin{aligned} &10 + 10(1+0.01) + 10(1+0.01)^2 + \dots + 10(1+0.01)^{19} \\ &= \frac{10\{(1+0.01)^{20} - 1\}}{(1+0.01) - 1} \\ &= \frac{10(1.22 - 1)}{0.01} \\ &= 220(\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 만기 시 원리합계는 220만 원이다.

34 매년 초에 적립하는 금액을 a 만 원이라 하면 10년 말의 원리합계는

$$\begin{aligned} &a(1+0.05) + a(1+0.05)^2 + a(1+0.05)^3 \\ &\quad + \dots + a(1+0.05)^{10} \\ &= \frac{a(1+0.05)\{(1+0.05)^{10} - 1\}}{(1+0.05) - 1} \\ &= \frac{a \times 1.05 \times (1.6 - 1)}{0.05} \\ &= 12.6a(\text{만 원}) \end{aligned}$$

이때 $12.6a = 1260$ 이어야 하므로

$$a = 100$$

따라서 매년 초에 100만 원씩 적립해야 한다.

III-2 01 수열의 합

기초 문제 Training

84쪽

1 (1) $\sum_{k=1}^{10} k(k+2)$ (2) $\sum_{k=1}^6 7$ (3) $\sum_{k=1}^{15} 3k$ (4) $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

2 (1) $5 + 10 + 15 + 20 + 25$
 (2) $-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$
 (3) $1 + 4 + 7 + \dots + 58$
 (4) $3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + 11^2$

3 (1) 3 (2) 7 (3) 4 (4) -17

4 (1) 28 (2) 140 (3) 784

5 (1) 630 (2) 395 (3) 195 (4) 166

6 (1) $\frac{10}{11}$ (2) 2

핵심 유형 Training

85~88쪽

1 ③	2 ①	3 19	4 10	5 4
6 1097	7 ④	8 9	9 ⑤	10 10
11 ②	12 429	13 ②	14 3765	
15 $\frac{n(n-1)(n+4)}{6}$	16 ③	17 ④	18 ②	
19 ④	20 ②	21 ①	22 16	23 ①
24 $\frac{10}{39}$	25 20	26 74	27 ①	28 $9\sqrt{2}$
29 ①				

1 $\neg. \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} a_{k+10}$
 $= (a_1 + a_2 + \dots + a_{10}) + (a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20})$
 $= \sum_{k=1}^{20} a_k$
 $\sqcup. \sum_{k=1}^9 a_{k+1} - \sum_{k=2}^{10} a_{k-1}$
 $= (a_2 + a_3 + \dots + a_{10}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_9)$
 $= a_{10} - a_1$
 $\sqsubset. \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{10} a_{2k}$
 $= (a_1 + a_3 + \dots + a_{19}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_{20})$
 $= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{19} + a_{20} = \sum_{k=1}^{20} a_k$

$$\begin{aligned} & \text{즉, } \sum_{k=1}^{20} a_k - \sum_{k=1}^{19} a_{k+1} \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}) - (a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}) \\ &= a_1 \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

$$\begin{aligned} 2 \quad & \sum_{k=1}^n (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) \\ & \quad + \cdots + (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}) \\ &= \sum_{k=1}^{3n} a_k \end{aligned}$$

따라서 $\sum_{k=1}^{3n} a_k = n^2 + n$ 이므로 $\sum_{k=1}^{15} a_k = 5^2 + 5 = 30$

$$\begin{aligned} 3 \quad & \sum_{k=1}^{19} ka_{k+1} = 247 \text{에서} \\ & a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \cdots + 19a_{20} = 247 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ & \sum_{k=1}^{20} (k+1)a_k = 285 \text{에서} \\ & 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + \cdots + 21a_{20} = 285 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\ & \textcircled{2} - \textcircled{1} \text{을 하면} \\ & 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + \cdots + 2a_{20} = 38 \\ & \therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20} = 19 \\ & \therefore \sum_{k=1}^{20} a_k = 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad & \sum_{k=1}^{20} (a_k + a_{k+1}) = (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{20} + a_{21}) \\ &= a_1 + 2(a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}) + a_{21} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{20} a_k - a_1 + a_{21} = 40 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ & \sum_{k=1}^{10} (a_{2k-1} + a_{2k}) = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{19} + a_{20}) \\ &= \sum_{k=1}^{20} a_k = 15 \end{aligned}$$

이를 ①에 대입하면 $2 \times 15 - a_1 + a_{21} = 40$

$$\therefore a_{21} - a_1 = 10$$

$$\begin{aligned} 5 \quad & \sum_{k=1}^5 (a_k + 2)(a_k - 1) = \sum_{k=1}^5 (a_k^2 + a_k - 2) \\ &= \sum_{k=1}^5 a_k^2 + \sum_{k=1}^5 a_k - \sum_{k=1}^5 2 \\ &= 10 + 4 - 10 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad & \sum_{k=1}^6 (a_k + 3^k) = \sum_{k=1}^6 a_k + \sum_{k=1}^6 3^k \\ &= 5 + \frac{3(3^6 - 1)}{3 - 1} \\ &= 1097 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \quad & \sum_{k=1}^{20} (2a_k + b_k)^2 + \sum_{k=1}^{20} (a_k - 2b_k)^2 = 100 \text{이므로} \\ & \sum_{k=1}^{20} \{(2a_k + b_k)^2 + (a_k - 2b_k)^2\} \\ &= \sum_{k=1}^{20} (5a_k^2 + 5b_k^2) \\ &= 5 \sum_{k=1}^{20} (a_k^2 + b_k^2) = 100 \\ &\therefore \sum_{k=1}^{20} (a_k^2 + b_k^2) = 20 \\ &\therefore \sum_{k=1}^{20} (a_k^2 + b_k^2 + 1) = \sum_{k=1}^{20} (a_k^2 + b_k^2) + \sum_{k=1}^{20} 1 \\ &= 20 + 20 = 40 \end{aligned}$$

$$8 \quad \sum_{k=1}^{10} a_k = \alpha, \sum_{k=1}^{10} b_k = \beta \text{라 하면}$$

$$\sum_{k=1}^{10} (3a_k - 2b_k + 1) = 7 \text{에서}$$

$$3 \sum_{k=1}^{10} a_k - 2 \sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=1}^{10} 1 = 7$$

$$3\alpha - 2\beta + 10 = 7$$

$$\therefore 3\alpha - 2\beta = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } \sum_{k=1}^{10} (a_k + 3b_k) = 21 \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k + 3 \sum_{k=1}^{10} b_k = 21$$

$$\therefore \alpha + 3\beta = 21 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } \alpha = 3, \beta = 6$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k \\ &= \alpha + \beta = 3 + 6 = 9 \end{aligned}$$

$$9 \quad \sum_{k=1}^{10} k^2(k+1) - \sum_{k=1}^{10} k(k-1)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \{(k^3 + k^2) - (k^2 - k)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (k^3 + k)$$

$$= \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 + \frac{10 \times 11}{2}$$

$$= 3025 + 55 = 3080$$

$$10 \quad \sum_{k=n}^{2n} (2k-1)$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} (2k-1) - \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1)$$

$$= 2 \times \frac{2n(2n+1)}{2} - 2n - 2 \times \frac{(n-1)n}{2} + (n-1)$$

$$= 3n^2 + 2n - 1$$

이때 $3n^2 + 2n - 1 = 319$ 에서

$$3n^2 + 2n - 320 = 0, (3n+32)(n-10) = 0$$

그런데 n 은 자연수이므로 $n=10$

11 $a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$ 이므로

$$a_{2k-1} = 3(2k-1) - 1 = 6k - 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{20} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{20} (6k - 4) \\ &= 6 \times \frac{20 \times 21}{2} - 80 \\ &= 1260 - 80 = 1180 \end{aligned}$$

12 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{11} (\alpha - k)(\beta - k) &= \sum_{k=1}^{11} \{\alpha\beta - (\alpha + \beta)k + k^2\} \\ &= \sum_{k=1}^{11} (k^2 - k - 1) \\ &= \frac{11 \times 12 \times 23}{6} - \frac{11 \times 12}{2} - 11 \\ &= 506 - 66 - 11 = 429 \end{aligned}$$

13 주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1+2+3+\cdots+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} \frac{k+1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{20 \times 21}{2} + 20 \right) = 115$$

14 수열 $1 \times 1, 4 \times 3, 9 \times 5, \dots, 81 \times 17$ 의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n^2(2n-1) = 2n^3 - n^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^9 a_k &= \sum_{k=1}^9 (2k^3 - k^2) \\ &= 2 \times \left(\frac{9 \times 10}{2} \right)^2 - \frac{9 \times 10 \times 19}{6} \\ &= 4050 - 285 = 3765 \end{aligned}$$

15 수열 $2 \times (n-1), 3 \times (n-2), 4 \times (n-3), \dots, n \times 1$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = (k+1)(n-k) = -k^2 + (n-1)k + n$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{n-1} a_k &= \sum_{k=1}^{n-1} \{-k^2 + (n-1)k + n\} \\ &= -\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &\quad + (n-1) \times \frac{(n-1)n}{2} + n(n-1) \\ &= \frac{n(n-1)(n+4)}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16 \quad \sum_{k=1}^{10} \left\{ \sum_{l=1}^5 (k+2l) \right\} &= \sum_{k=1}^{10} \left(\sum_{l=1}^5 k + 2 \sum_{l=1}^5 l \right) \\ &= \sum_{k=1}^{10} \left(5k + 2 \times \frac{5 \times 6}{2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (5k + 30) \\ &= 5 \times \frac{10 \times 11}{2} + 300 \\ &= 275 + 300 = 575 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17 \quad \sum_{k=1}^n \left(\sum_{m=1}^k km \right) &= \sum_{k=1}^n \left(k \sum_{m=1}^k m \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ k \times \frac{k(k+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k^3 + k^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 + \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+1) \end{aligned}$$

따라서 $a=24, b=2, c=1$ 이므로

$$a+b+c=27$$

$$\begin{aligned} 18 \quad \sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{l=1}^k \left(\sum_{m=1}^l 12 \right) \right\} &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{l=1}^k 12l \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ 12 \times \frac{k(k+1)}{2} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n (6k^2 + 6k) \\ &= 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 6 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 2n^3 + 6n^2 + 4n \\ \text{이때 } 2n^3 + 6n^2 + 4n &= 420 \text{에서} \\ n^3 + 3n^2 + 2n - 210 &= 0, (n-5)(n^2 + 8n + 42) = 0 \\ \text{그런데 } n \text{은 자연수이므로 } n &= 5 \end{aligned}$$

19 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 2n \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은 $a_n = 2n$

따라서 $a_{2k-1} = 2(2k-1) = 4k-2$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{20} (4k-2) \\ &= 4 \times \frac{20 \times 21}{2} - 40 \\ &= 840 - 40 = 800\end{aligned}$$

20 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n(n+2) = n^2 + 2n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= 2n+1 \quad \dots\dots \textcircled{7}\end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \times 1 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2n+1$$

따라서 $a_{2k} = 2 \times 2k+1 = 4k+1$,

$a_{k+1} = 2(k+1)+1 = 2k+3$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 ka_{2k} + \sum_{k=1}^5 a_{k+1} &= \sum_{k=1}^5 k(4k+1) + \sum_{k=1}^5 (2k+3) \\ &= \sum_{k=1}^5 \{(4k^2+k) + (2k+3)\} \\ &= \sum_{k=1}^5 (4k^2+3k+3) \\ &= 4 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + 3 \times \frac{5 \times 6}{2} + 15 \\ &= 220 + 45 + 15 = 280\end{aligned}$$

21 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 3(3^n - 1)$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3(3^n - 1) - 3(3^{n-1} - 1) \\ &= 3^n(3 - 1) \\ &= 2 \times 3^n \quad \dots\dots \textcircled{7}\end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 3(3 - 1) = 6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 \times 3^n$$

따라서 $a_{2k-1} = 2 \times 3^{2k-1} = \frac{2}{3} \times 9^k$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{2}{3} \times 9^k \right) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{9(9^{10} - 1)}{9 - 1} = \frac{3^{21} - 3}{4}\end{aligned}$$

따라서 $p=21$, $q=4$ 이므로 $p+q=25$

22 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \log \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \log \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \log \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \log \left\{ \frac{(n+1)(n+2)}{2} \times \frac{2}{n(n+1)} \right\} \\ &= \log \frac{n+2}{n} \quad \dots\dots \textcircled{7}\end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = \log \frac{2 \times 3}{2} = \log 3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{8}$ 은 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = \log \frac{n+2}{n}$$

따라서 $a_{2k} = \log \frac{2k+2}{2k} = \log \frac{k+1}{k}$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15} a_{2k} &= \sum_{k=1}^{15} \log \frac{k+1}{k} \\ &= \log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \dots + \log \frac{16}{15} \\ &= \log \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{16}{15} \right) \\ &= \log 16 = p \\ \therefore 10^p &= 10^{\log 16} = 16\end{aligned}$$

23 수열 $\frac{1}{2^2-1}, \frac{1}{4^2-1}, \frac{1}{6^2-1}, \dots, \frac{1}{20^2-1}$ 의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{(2n)^2 - 1} \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k)^2 - 1} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{10}{21}\end{aligned}$$

24 다항식 x^2+5x+6 을 $x-n$ 으로 나누었을 때의 나머지는 n^2+5n+6 이므로

$$a_n = n^2 + 5n + 6$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k^2+5k+6} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(k+2)(k+3)} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{13} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{13} \\ &= \frac{10}{39} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25 \quad a_n &= \frac{2n+1}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2} \\ &= \frac{2n+1}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \\ &= \frac{6}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^m a_k &= \sum_{k=1}^m \frac{6}{k(k+1)} \\ &= 6 \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 6 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) \right\} \\ &= 6 \left(1 - \frac{1}{m+1} \right) \\ &= \frac{6m}{m+1} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \frac{6m}{m+1} = \frac{40}{7} \text{에서}$$

$$42m = 40m + 40 \quad \therefore m = 20$$

$$\begin{aligned} 26 \quad S_n &= \frac{n\{2 \times 3 + (n-1) \times 2\}}{2} \\ &= n(n+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^8 \frac{1}{S_k} &= \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k(k+2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \\ &= \frac{29}{45} \end{aligned}$$

따라서 $p=45$, $q=29$ 이므로

$$p+q=74$$

27 수열 $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{25}}$ 의 제 n 항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} \\ \therefore \sum_{k=1}^{23} a_k &= \sum_{k=1}^{23} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^{23} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})} \\ &= \sum_{k=1}^{23} (\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}) \\ &= (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + (\sqrt{5}-\sqrt{4}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{25}-\sqrt{24}) \\ &= -\sqrt{2} + 5 \end{aligned}$$

따라서 $a=5$, $b=-1$ 이므로

$$a+b=4$$

28 $a_n=2+(n-1) \times 2=2n$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{99} \frac{2}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}} &= \sum_{k=1}^{99} \frac{2}{\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k}} \\ &= \sum_{k=1}^{99} \frac{2(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})}{(\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k})(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})} \\ &= \sum_{k=1}^{99} (\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k}) \\ &= (\sqrt{4}-\sqrt{2}) + (\sqrt{6}-\sqrt{4}) + (\sqrt{8}-\sqrt{6}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{200}-\sqrt{198}) \\ &= -\sqrt{2} + 10\sqrt{2} \\ &= 9\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 29 \quad \sum_{k=1}^m a_k &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}) \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3}-\sqrt{1}) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + (\sqrt{7}-\sqrt{5}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{2m+1}-\sqrt{2m-1}) \} \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{2m+1}-1) \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \frac{1}{2} (\sqrt{2m+1}-1) = 3 \text{에서}$$

$$\sqrt{2m+1}=7, \quad 2m+1=49$$

$$\therefore m=24$$

III-2 02 수학적 귀납법

기초 문제 Training

89쪽

- 1 (1) -7 (2) $\frac{1}{9}$ (3) 8 (4) 30
- 2 (1) $a_n = 3n - 5$ (2) $a_n = 2n + 3$
 (3) $a_n = 2^{n-1}$ (4) $a_n = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
- 3 (가) 1 (나) $k+1$
- 4 (가) $k+1$ (나) $k+2$

핵심 유형 Training

90~95쪽

- | | | | | |
|-----------------|---|------|-----------------------|-------------------|
| 1 ② | 2 27 | 3 ⑤ | 4 ③ | 5 ④ |
| 6 22 | 7 ② | 8 ④ | 9 ③ | 10 $\frac{3}{19}$ |
| 11 ② | 12 ① | 13 ② | 14 ④ | 15 90 |
| 16 6 | 17 ② | 18 ① | 19 $\frac{21}{8}$ | 20 650 |
| 21 ③ | 22 41 | 23 ③ | 24 $\neg, \cup, \cap$ | |
| 25 ⑤ | 26 (가) $(k+1)^3$ (나) $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ | | | |
| 27 (가) 4 (나) 짝수 | 28 $\frac{7}{4}$ | 29 ④ | | |

- 1 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
 이때 공차를 d 라 하면 $a_1 = 2, a_3 = 5$ 이므로
 $2 + 2d = 5 \quad \therefore d = \frac{3}{2}$
 $\therefore a_n = 2 + (n-1) \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}$
 $\therefore a_{99} = \frac{3}{2} \times 99 + \frac{1}{2} = 149$
- 2 $a_{n+1} + 4 = a_n$, 즉 $a_{n+1} - a_n = -4$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 102, 공차가 -4 인 등차수열이므로
 $a_n = 102 + (n-1) \times (-4) = -4n + 106$
 이때 $a_n < 0$ 에서
 $-4n + 106 < 0, 4n > 106 \quad \therefore n > 26.5$
 따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 27이다.

- 3 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 은 공차가 각각 2, d 인 등차수열이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{n\{2a + (n-1) \times 2\}}{2} = a + (n-1) \times 1$$

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 a 이고 공차가 1인 등차수열이므로 $d = 1$

- 4 $a_n = \frac{1}{3}a_{n+1}$, 즉 $a_{n+1} = 3a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 3인 등비수열이므로 첫째항을 a 라 하면 $a_2 = 1$ 이므로

$$3a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3} \times 3^{n-1} = 3^{n-2} \quad \therefore a_{15} = 3^{13}$$

- 5 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$, 즉 $a_{n+1} = 2a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n = \frac{1}{4} \times 2^{n-1} = 2^{n-3}$$

이때 $a_k = 512$ 에서

$$2^{k-3} = 512, k-3 = 9 \quad \therefore k = 12$$

- 6 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

이때 공비를 r 라 하면 $a_1 = 3, a_2 = \frac{3}{4}$ 이므로

$$3r = \frac{3}{4} \quad \therefore r = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = \frac{3 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{10} \right\}}{1 - \frac{1}{4}} = 4 - \left(\frac{1}{2} \right)^{18}$$

따라서 $a = 4, b = 18$ 이므로 $a + b = 22$

- 7 $a_{n+1} = a_n + 4n - 1$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + 4 \times 1 - 1$$

$$a_3 = a_2 + 4 \times 2 - 1$$

$$a_4 = a_3 + 4 \times 3 - 1$$

$\vdots$

$$+) a_n = a_{n-1} + 4(n-1) - 1$$

$$a_n = a_1 + 4\{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\} - (n-1)$$

$$\therefore a_n = a_1 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} k - (n-1)$$

$$= 1 + 4 \times \frac{(n-1)n}{2} - (n-1)$$

$$= 2n^2 - 3n + 2$$

$$\therefore a_{10} = 2 \times 10^2 - 3 \times 10 + 2 = 172$$

- 8 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n(n+1)}$, 즉 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ a_3 &= a_2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ a_4 &= a_3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &\vdots \\ +) \quad a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ \hline a_n &= a_1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ \therefore a_n &= a_1 + 1 - \frac{1}{n} = 3 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

이때 $|a_n - 3| < \frac{1}{100}$ 에서

$$\left| -\frac{1}{n} \right| < \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \quad \therefore n > 100$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 101이다.

- 9 $a_{n+1}=a_n+2^n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 2^1 \\ a_3 &= a_2 + 2^2 \\ a_4 &= a_3 + 2^3 \\ &\vdots \\ +) \quad a_n &= a_{n-1} + 2^{n-1} \\ \hline a_n &= a_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}) \\ \therefore a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^n \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} (a_{2k-1} + a_{2k}) &= \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} 2^k = \frac{2(2^{20}-1)}{2-1} = 2^{21} - 2 \end{aligned}$$

- 10 $a_{n+1}=\frac{2n-1}{2n+1}a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{3}a_1 \\ a_3 &= \frac{3}{5}a_2 \\ a_4 &= \frac{5}{7}a_3 \\ &\vdots \\ \times) \quad a_n &= \frac{2n-3}{2n-1}a_{n-1} \\ \hline a_n &= \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} \times \cdots \times \frac{2n-3}{2n-1} \right) \times a_1 \\ \therefore a_n &= \frac{1}{2n-1} \times a_1 = \frac{3}{2n-1} \quad \therefore a_{10} = \frac{3}{19} \end{aligned}$$

- 11 $a_{n+1}=\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}a_n$, 즉 $a_{n+1}=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\left(\frac{n+3}{n+2}\right)a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} a_1 \\ a_3 &= \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} a_2 \\ a_4 &= \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} a_3 \\ &\vdots \\ \times) \quad a_n &= \frac{n}{n+1} \times \frac{n+2}{n+1} a_{n-1} \\ \hline a_n &= \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n+2}{n+1} \right) \times a_1 \\ \therefore a_n &= \frac{2(n+2)}{3(n+1)} \times a_1 = \frac{2(n+2)}{n+1} = 2 + \frac{2}{n+1} \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} (a_k - 2)(a_{k+1} - 2) &= \sum_{k=1}^{10} \frac{4}{(k+1)(k+2)} = 4 \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= 4 \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) \right\} \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12} \right) = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

- 12 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, 즉 $a_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 모두 곱하면

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2}a_1 \\ a_3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 a_2 \\ a_4 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 a_3 \\ &\vdots \\ \times) \quad a_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a_{n-1} \\ \hline a_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \times a_1 \\ \therefore a_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(n-1)n}{2}} \times a_1 = 2^{-\frac{n(n-1)}{2}} \end{aligned}$$

따라서 $a_{20}=2^{-\frac{20 \times 19}{2}}=2^{-190}$ 이므로

$$\log_2 a_{20} = \log_2 2^{-190} = -190$$

- 13 $a_{n+1}=3a_n+4$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$$\begin{aligned} a_2 &= 3a_1 + 4 = 3 \times 1 + 4 = 7 \\ a_3 &= 3a_2 + 4 = 3 \times 7 + 4 = 25 \\ a_4 &= 3a_3 + 4 = 3 \times 25 + 4 = 79 \\ \therefore \sum_{k=1}^4 a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 7 + 25 + 79 = 112 \end{aligned}$$

- 14 $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+na_n}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_2 = \frac{a_1}{1+a_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{1+2a_2} = \frac{\frac{1}{3}}{1+2 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{1+3a_3} = \frac{\frac{1}{5}}{1+3 \times \frac{1}{5}} = \frac{1}{8}$$

$$a_5 = \frac{a_4}{1+4a_4} = \frac{\frac{1}{8}}{1+4 \times \frac{1}{8}} = \frac{1}{12}$$

따라서 $a_k = \frac{1}{12}$ 을 만족시키는 자연수 k 의 값은 5이다.

- 15 $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+1}{a_n}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하면

$$a_3 = \frac{a_2+1}{a_1} = \frac{2+1}{1} = 3, a_4 = \frac{a_3+1}{a_2} = \frac{3+1}{2} = 2,$$

$$a_5 = \frac{a_4+1}{a_3} = \frac{2+1}{3} = 1, a_6 = \frac{a_5+1}{a_4} = \frac{1+1}{2} = 1,$$

$$a_7 = \frac{a_6+1}{a_5} = \frac{1+1}{1} = 2, \dots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 2, 3, 2, 1이 반복적으로 나타나므로

$$\sum_{k=1}^{50} a_k = 10 \sum_{k=1}^5 a_k = 10(1+2+3+2+1) = 90$$

- 16 $a_1 = 2 < 4$ 이므로

$$a_2 = a_1 + 2 = 2 + 2 = 4$$

$$a_2 = 4 \geq 4 \text{이므로}$$

$$a_3 = a_2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$a_3 = 3 < 4 \text{이므로}$$

$$a_4 = a_3 + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$a_4 = 5 \geq 4 \text{이므로}$$

$$a_5 = a_4 - 1 = 5 - 1 = 4$$

$$a_5 = 4 \geq 4 \text{이므로}$$

$$a_6 = a_5 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$a_6 = 3 < 4 \text{이므로}$$

$$a_7 = a_6 + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$a_7 = 5 \geq 4 \text{이므로}$$

$$a_8 = a_7 - 1 = 5 - 1 = 4$$

$\vdots$

$$\therefore a_1 = 2, a_n = \begin{cases} 4 & (n=3m-1) \\ 3 & (n=3m) \\ 5 & (n=3m+1) \end{cases} \quad (\text{단, } m \text{은 자연수})$$

따라서 $a_k = 5$ 를 만족시키는 20 이하의 자연수 k 는 4, 7, 10, 13, 16, 19의 6개이다.

- 17 $S_n = -\frac{1}{4}a_n + \frac{5}{4}$ 의 n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$S_{n+1} = -\frac{1}{4}a_{n+1} + \frac{5}{4}$$

$S_{n+1} - S_n$ 을 하면

$$S_{n+1} - S_n = -\frac{1}{4}a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n$$

이때 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1} = -\frac{1}{4}a_{n+1} + \frac{1}{4}a_n \quad \therefore a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{5}$ 인 등비수열이

므로

$$a_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad \therefore a_{15} = \frac{1}{5^{14}}$$

- 18 $S_n = n^2 a_n$ 의 n 에 $n+1$ 을 대입하면

$$S_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1}$$

$S_{n+1} - S_n$ 을 하면

$$S_{n+1} - S_n = (n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n$$

이때 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n$$

$$(n^2 + 2n)a_{n+1} = n^2 a_n \quad \therefore a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여
변끼리 모두 곱하면

$$a_2 = \frac{1}{3} a_1$$

$$a_3 = \frac{2}{4} a_2$$

$$a_4 = \frac{3}{5} a_3$$

$\vdots$

$$a_{n-1} = \frac{n-2}{n} a_{n-2}$$

$$\times \left) a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1}$$

$$a_n = \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{5} \times \dots \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-1}{n+1}\right) \times a_1$$

$$\therefore a_n = \frac{1 \times 2}{n(n+1)} \times a_1 = \frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{20}} = 210$$

19 $2S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n = a_n$ 에서
 $2(S_{n+2} - S_{n+1}) - (S_{n+1} - S_n) = a_n$
 이때 $S_{n+2} - S_{n+1} = a_{n+2}$, $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)
 이므로
 $2a_{n+2} - a_{n+1} = a_n$
 $\therefore a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$
 위의 식의 n 에 1, 2, 3을 차례대로 대입하면
 $a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$
 $a_4 = \frac{a_2 + a_3}{2} = \frac{3 + \frac{5}{2}}{2} = \frac{11}{4}$
 $\therefore a_5 = \frac{a_3 + a_4}{2} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{11}{4}}{2} = \frac{21}{8}$

20 n 번째 실험 후 살아 있는 세균의 수를 a_n 이라 하면
 $a_1 = (50-5) \times 2 = 90$
 $a_2 = (a_1-5) \times 2 = (90-5) \times 2 = 170$
 $a_3 = (a_2-5) \times 2 = (170-5) \times 2 = 330$
 $a_4 = (a_3-5) \times 2 = (330-5) \times 2 = 650$
 따라서 4번째 실험 후 살아 있는 세균의 수는 650이다.

21 n 일 후 물탱크에 들어 있는 물의 양을 a_n L라 하면
 $a_1 = \frac{1}{2} \times 100 + 10 = 60$
 $a_2 = \frac{1}{2} \times a_1 + 10 = \frac{1}{2} \times 60 + 10 = 40$
 $a_3 = \frac{1}{2} \times a_2 + 10 = \frac{1}{2} \times 40 + 10 = 30$
 $a_4 = \frac{1}{2} \times a_3 + 10 = \frac{1}{2} \times 30 + 10 = 25$
 $a_5 = \frac{1}{2} \times a_4 + 10 = \frac{1}{2} \times 25 + 10 = 22.5$
 따라서 5일 후 물탱크에 들어 있는 물의 양은 22.5 L이다.

22 n 번째 도형을 만드는 데 필요한 정사각형의 개수는 a_n 이므로
 $a_1 = 1$
 $a_2 = a_1 + 4 \times 1 = 1 + 4 = 5$
 $a_3 = a_2 + 4 \times 2 = 5 + 8 = 13$
 $a_4 = a_3 + 4 \times 3 = 13 + 12 = 25$
 $\therefore a_5 = a_4 + 4 \times 4 = 25 + 16 = 41$

23 $p(1)$ 이 참이므로 $p(3)$, $p(5)$ 도 참이다.
 $p(3)$ 이 참이므로 $p(3 \times 3) = p(9)$, $p(3 \times 5) = p(15)$ 도 참이다.
 $p(5)$ 가 참이므로 $p(5 \times 5) = p(25)$ 도 참이다.
 같은 방법으로 하면 음이 아닌 정수 a, b 에 대하여 $p(3^a \times 5^b)$ 은 참이다.
 ① $p(30) = p(2 \times 3 \times 5)$
 ② $p(90) = p(2 \times 3^2 \times 5)$
 ③ $p(135) = p(3^3 \times 5)$
 ④ $p(175) = p(5^2 \times 7)$
 ⑤ $p(210) = p(2 \times 3 \times 5 \times 7)$
 따라서 반드시 참인 것은 ③이다.

24 ㄱ. $p(1)$ 이 참이면 $p(4)$, $p(7)$, $p(10)$, ...도 참이므로 모든 자연수 k 에 대하여 $p(3k+1)$ 도 참이다.
 ㄴ. $p(3)$ 이 참이면 $p(6)$, $p(9)$, $p(12)$, ...도 참이므로 모든 자연수 k 에 대하여 $p(3k)$ 도 참이다.
 ㄷ. $p(2)$ 가 참이면 $p(5)$, $p(8)$, $p(11)$, ...도 참이므로 모든 자연수 k 에 대하여 $p(3k+2)$ 도 참이다.
 따라서 $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ 이 참이면 $p(4)$, $p(5)$, $p(6)$, ...도 참이므로 모든 자연수 k 에 대하여 $p(k)$ 도 참이다.
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

25 (i) $n=1$ 일 때,
 (좌변) $= 1 \times 2 = 2$, (우변) $= \frac{1}{3} \times 1 \times 2 \times 3 = 2$
 따라서 $n=1$ 일 때 등식 ㉠이 성립한다.
 (ii) $n=k$ 일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면
 $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + k(k+1) = \frac{1}{3} k(k+1)(k+2)$
 위의 식의 양변에 $\boxed{k(k+1)(k+2)}$ 를 더하면
 $1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + k(k+1) + \boxed{k(k+1)(k+2)}$
 $= \frac{1}{3} k(k+1)(k+2) + \boxed{k(k+1)(k+2)}$
 $= \frac{1}{3} (k+1)(k+2) (\boxed{k+3})$
 따라서 $n=k+1$ 일 때도 등식 ㉠이 성립한다.
 (i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.
 따라서 $f(k) = (k+1)(k+2)$, $g(k) = k+3$ 이므로
 $\frac{f(2)}{g(1)} = \frac{3 \times 4}{4} = 3$

26 (i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변})=1^3=1, (\text{우변})=\left(\frac{1 \times 2}{2}\right)^2=1$$

따라서 $n=1$ 일 때 등식 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$$

위의 식의 양변에 $\boxed{\textcircled{VB} (k+1)^3}$ 을 더하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+\boxed{\textcircled{VB} (k+1)^3}$$

$$=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+\boxed{\textcircled{VB} (k+1)^3}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{4}\{k^2+4(k+1)\}$$

$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$=\left\{\frac{\textcircled{VB} (k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 등식 ㉠이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 등식 ㉠이 성립한다.

27 (i) $n=1$ 일 때, $5^2+2 \times 3^1+1=32$ 는 8의 배수이다.

(ii) $n=k$ 일 때, $5^{k+1}+2 \times 3^k+1=8m$ (m 은 자연수)이라 하면

$$5^{k+2}+2 \times 3^{k+1}+1$$

$$=5 \times 5^{k+1}+6 \times 3^k+1$$

$$=5^{k+1}+2 \times 3^k+1+4 \times 5^{k+1}+4 \times 3^k$$

$$=8m+\boxed{\textcircled{VB} 4}(5^{k+1}+3^k)$$

그런데 $5^{k+1}+3^k$ 은 (홀수)+(홀수), 즉 $\boxed{\textcircled{VB} \text{ 짝수}}$ 이므로

$n=k+1$ 일 때도 8의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $5^{n+1}+2 \times 3^n+1$ 은 8의 배수이다.

28 (i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변})=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}, (\text{우변})=\frac{4}{2+1}=\frac{4}{3}$$

따라서 $n=2$ 일 때 부등식 ㉡이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때, 부등식 ㉡이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$$

위의 식의 양변에 $\boxed{\textcircled{VB} \frac{1}{k+1}}$ 을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\boxed{\textcircled{VB} \frac{1}{k+1}}>\frac{2k}{k+1}+\boxed{\textcircled{VB} \frac{1}{k+1}}$$

이때

$$\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2k+2}{k+2}$$

$$=\frac{(2k+1)(k+2)-(2k+2)(k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$$

이므로

$$\frac{2k}{k+1}+\boxed{\textcircled{VB} \frac{1}{k+1}}>\boxed{\textcircled{VB} \frac{2k+2}{k+2}}$$

$$\therefore 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\boxed{\textcircled{VB} \frac{1}{k+1}}>\boxed{\textcircled{VB} \frac{2k+2}{k+2}}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 ㉡이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 ㉡이 성립한다.

따라서 $f(k)=\frac{1}{k+1}$, $g(k)=\frac{2k+2}{k+2}$ 이므로

$$f(3)+g(2)=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=\frac{7}{4}$$

29 (i) $n=3$ 일 때,

$$(\text{좌변})=2^3=8, (\text{우변})=2 \times 3+1=7$$

따라서 $n=3$ 일 때 부등식 ㉢이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 3$)일 때, 부등식 ㉢이 성립한다고 가정하면

$$2^k>2k+1$$

위의 식의 양변에 $\boxed{\textcircled{VB} 2}$ 를 곱하면

$$2^k \times \boxed{\textcircled{VB} 2}>(2k+1) \times \boxed{\textcircled{VB} 2}$$

$$2^{k+1}>\boxed{\textcircled{VB} 4k+2}$$

이때

$$(\boxed{\textcircled{VB} 4k+2})-(\boxed{\textcircled{VB} 2k+3})=2k-1>0$$

이므로

$$\boxed{\textcircled{VB} 4k+2}>\boxed{\textcircled{VB} 2k+3}$$

$$\therefore 2^{k+1}>\boxed{\textcircled{VB} 2k+3}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 ㉢이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 3$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 ㉢이 성립한다.

따라서 $a=2$, $f(k)=4k+2$, $g(k)=2k+3$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10} \{a+f(k)+g(k)\}=\sum_{k=1}^{10} (2+4k+2+2k+3)$$

$$=\sum_{k=1}^{10} (6k+7)$$

$$=6 \times \frac{10 \times 11}{2}+70$$

$$=400$$

