

기하

정답과 해설



개념편

정답과 해설

I-1 01 포물선

1 포물선의 방정식

개념 CHECK

10쪽

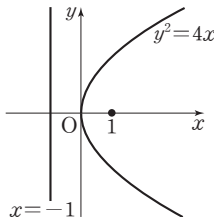
1 답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $y^2=4x$ 에서 $y^2=4 \times 1 \times x$

따라서 초점의 좌표는

(1, 0), 준선의 방정식은

$x=-1$ 이고, 그래프는 왼쪽으로 볼록한 포물선이므로 오른쪽 그림과 같다.

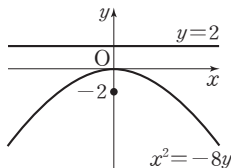


(2) $x^2=-8y$ 에서 $x^2=4 \times (-2) \times y$

따라서 초점의 좌표는

(0, -2), 준선의 방정식은

$y=2$ 이고, 그래프는 위로 볼록한 포물선이므로 오른쪽 그림과 같다.



2 답 (1) 2, -1

포물선	$y^2=12x$	$(y+1)^2=12(x-2)$
초점의 좌표	(3, 0)	(5, -1)
꼭짓점의 좌표	(0, 0)	(2, -1)
준선의 방정식	$x=-3$	$x=-1$
축의 방정식	$y=0$	$y=-1$

(2) -2, 2

포물선	$x^2=-4y$	$(x+2)^2=-4(y-2)$
초점의 좌표	(0, -1)	(-2, 1)
꼭짓점의 좌표	(0, 0)	(-2, 2)
준선의 방정식	$y=1$	$y=3$
축의 방정식	$x=0$	$x=-2$

문제

11~16쪽

01-1 답 (1) $y^2=16x$ (2) $x^2=\frac{4}{3}y$

(1) 초점이 F(4, 0)이고 준선이 $x=-4$ 인 포물선의 방정식은

$$y^2=4 \times 4 \times x \quad \therefore y^2=16x$$

(2) 초점이 F(0, $\frac{1}{3}$)이고 준선이 $y=-\frac{1}{3}$ 인 포물선의 방정식은

$$x^2=4 \times \frac{1}{3} \times y \quad \therefore x^2=\frac{4}{3}y$$

다른 풀이

(1) 포물선 위의 점을 P(x, y)라 하고, 점 P에서 준선

$x=-4$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=|x+4|$$

양변을 제곱하면 구하는 포물선의 방정식은

$$(x-4)^2+y^2=(x+4)^2$$

$$\therefore y^2=16x$$

(2) 포물선 위의 점을 P(x, y)라 하고, 점 P에서 준선

$y=-\frac{1}{3}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2}=\left|y+\frac{1}{3}\right|$$

양변을 제곱하면 구하는 포물선의 방정식은

$$x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\left(y+\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\therefore x^2=\frac{4}{3}y$$

01-2 답 -2

준선이 $y=2$ 이고 꼭짓점이 원점인 포물선의 방정식은

$$x^2=4 \times (-2) \times y \quad \therefore x^2=-8y$$

이 포물선이 점 (4, k)를 지나므로

$$16=-8k \quad \therefore k=-2$$

02-1 답 $(x-1)^2=-16(y-1)$

준선이 x축에 평행하므로 포물선의 방정식은

$$(x-m)^2=4p(y-n) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①의 초점의 좌표는 (m, p+n)이므로

$$m=1, p+n=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①의 준선의 방정식은 $y=-p+n$ 이므로

$$-p+n=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②, ③을 연립하여 풀면 $p=-4, n=1$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$$(x-1)^2=-16(y-1)$$

다른 풀이

포물선 위의 점을 $P(x, y)$ 라 하고, 점 P 에서 준선 $y=5$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$PF=PH \text{이므로}$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}=|y-5|$$

양변을 제곱하면 구하는 포물선의 방정식은

$$(x-1)^2+(y+3)^2=(y-5)^2$$

$$\therefore (x-1)^2=-16(y-1)$$

02-2 답 1

초점과 꼭짓점의 y 좌표가 같고 꼭짓점의 좌표가

$(-3, -2)$ 이므로 포물선의 방정식은

$$(y+2)^2=4p(x+3)$$

이 포물선의 초점의 좌표는 $(p-3, -2)$ 이므로

$$p-3=-2 \quad \therefore p=1$$

따라서 포물선의 방정식은 $(y+2)^2=4(x+3)$

이 포물선이 점 $(k, 2)$ 를 지나므로

$$16=4(k+3) \quad \therefore k=1$$

02-3 답 $(y-2)^2=-12(x-5), (y-2)^2=12(x+1)$

준선이 y 축에 평행하므로 포물선의 방정식은

$$(y-n)^2=4p(x-m)$$

이 포물선의 초점의 좌표는 $(p+m, n)$ 이므로

$$p+m=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$n=2$$

포물선 $(y-2)^2=4p(x-m)$ 이 점 $(2, -4)$ 를 지나므로

$$36=4p(2-m) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$p=-3, m=5 \text{ 또는 } p=3, m=-1$$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$$(y-2)^2=-12(x-5) \text{ 또는 } (y-2)^2=12(x+1)$$

03-1 답 (1) 초점의 좌표: $(2, -5)$,

꼭짓점의 좌표: $(4, -5)$,

준선의 방정식: $x=6$

(2) 초점의 좌표: $(-6, 0)$,

꼭짓점의 좌표: $(-6, -2)$,

준선의 방정식: $y=-4$

(1) $y^2+8x+10y-7=0$ 에서

$$y^2+10y+25=-8x+32$$

$$\therefore (y+5)^2=-8(x-4)$$

즉, 주어진 포물선은 포물선 $y^2=-8x$ 를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=-8x$, 즉 $y^2=4 \times (-2) \times x$ 의 초점의 좌표는 $(-2, 0)$, 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$, 준선의 방정식은 $x=2$ 이다.

따라서 구하는 포물선의 초점의 좌표는 $(2, -5)$, 꼭짓점의 좌표는 $(4, -5)$, 준선의 방정식은 $x=6$ 이다.

(2) $x^2+12x-8y+20=0$ 에서

$$x^2+12x+36=8y+16$$

$$\therefore (x+6)^2=8(y+2)$$

즉, 주어진 포물선은 포물선 $x^2=8y$ 를 x 축의 방향으로 -6만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=8y$, 즉 $x^2=4 \times 2 \times y$ 의 초점의 좌표는 $(0, 2)$, 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$, 준선의 방정식은 $y=-2$ 이다.

따라서 구하는 포물선의 초점의 좌표는 $(-6, 0)$, 꼭짓점의 좌표는 $(-6, -2)$, 준선의 방정식은 $y=-4$ 이다.

03-2 답 -28

$$x^2+4x+8y+a=0 \text{에서}$$

$$x^2+4x+4=-8y-a+4$$

$$\therefore (x+2)^2=-8\left(y+\frac{a-4}{8}\right)$$

즉, 주어진 포물선은 포물선 $x^2=-8y$ 를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 $-\frac{a-4}{8}$ 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=-8y$ 의 초점의 좌표는 $(0, -2)$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(-2, -2-\frac{a-4}{8}\right)$ 이다.

따라서 $-2-\frac{a-4}{8}=2$ 이므로

$$\frac{a-4}{8}=-4, a-4=-32 \quad \therefore a=-28$$

03-3 답 -59

$$x^2-4x+4y-4=0 \text{에서}$$

$$x^2-4x+4=-4y+8$$

$$\therefore (x-2)^2=-4(y-2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

즉, 포물선 $\textcircled{1}$ 은 포물선 $x^2=-4y$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=-4y$ 의 초점의 좌표는 $(0, -1)$ 이므로 포물선 $\textcircled{1}$ 의 초점의 좌표는 $(2, 1)$ 이다.

한편 $y^2-20x-2y+a=0$ 에서

$$y^2-2y+1=20x-a+1$$

$$\therefore (y-1)^2=20\left(x-\frac{a-1}{20}\right) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

즉, 포물선 ㉔은 포물선 $y^2=20x$ 를 x 축의 방향으로 $\frac{a-1}{20}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=20x$ 의 초점의 좌표는 $(5, 0)$ 이므로 포물선 ㉔의 초점의 좌표는 $(5+\frac{a-1}{20}, 1)$ 이다.

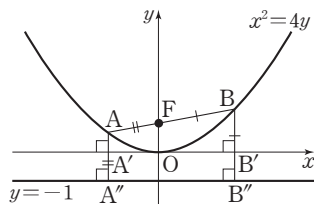
두 포물선 ㉓, ㉔의 초점이 일치하므로

$$2=5+\frac{a-1}{20}, \frac{a-1}{20}=-3 \quad \therefore a=-59$$

04-1 ㉓ 3

포물선 $x^2=4y$ 의 준선의 방정식은 $y=-1$

다음 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선 $y=-1$ 에 내린 수선의 발을 각각 A'', B''이라 하자.



포물선의 정의에 의하여 $\overline{AF}=\overline{AA''}$, $\overline{BF}=\overline{BB''}$

이때 $\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AB}=5$ 이므로

$$\overline{AA''}+\overline{BB''}=5$$

$$(\overline{AA'}+\overline{A'A''})+(\overline{BB'}+\overline{B'B''})=5$$

$$\overline{AA'}+1+\overline{BB'}+1=5 \quad \therefore \overline{AA'}+\overline{BB'}=3$$

04-2 ㉓ 22

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$, $\overline{QF}=\overline{QH'}$

따라서 구하는 사각형 PHH'Q의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{PH}+\overline{HH'}+\overline{QH'}+\overline{PQ} &= \overline{PF}+\overline{HH'}+\overline{QF}+\overline{PQ} \\ &= (\overline{PF}+\overline{QF})+\overline{HH'}+\overline{PQ} \\ &= \overline{PQ}+\overline{HH'}+\overline{PQ} \\ &= 8+6+8=22 \end{aligned}$$

05-1 ㉓ $\sqrt{26}$

포물선 $y^2=4x$ 의 초점을 F라 하면 $F(1, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x=-1$ 이다.

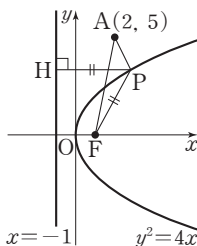
포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$

이고, 세 점 A, P, F가 일직선 위에 있을 때 $\overline{AP}+\overline{PF}$ 의 값이 최소

이므로

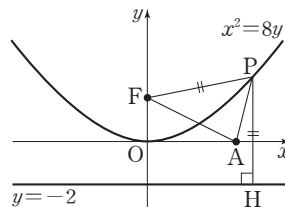
$$\begin{aligned} \overline{AP}+\overline{PH} &= \overline{AP}+\overline{PF} \\ &\geq \overline{AF} \\ &= \sqrt{(2-1)^2+5^2} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{26}$ 이다.



05-2 ㉓ $2\sqrt{3}$

포물선 $x^2=8y$ 의 초점을 F라 하면 $F(0, 2)$ 이고, 준선의 방정식은 $y=-2$ 이다.



포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 이고, 세 점 A, P, F가 일직선 위에 있을 때 $\overline{AP}+\overline{PF}$ 의 값이 최소이므로

$$\overline{AP}+\overline{PH}=\overline{AP}+\overline{PF} \geq \overline{AF}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PH}$ 의 최솟값은 선분 AF의 길이와 같으

므로

$$\overline{AF}=\sqrt{a^2+2^2}=4$$

$$a^2+4=16, a^2=12$$

$$\therefore a=2\sqrt{3} (\because a>0)$$

06-1 ㉓ $(x-1)^2=-16(y+2)$

점 C의 좌표를 (x, y) 라 하면 점 C에서 점 A(1, -6)까지의 거리와 직선 $y=2$ 까지의 거리가 원의 반지름으로 서로 같으므로

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+6)^2}=|y-2|$$

양변을 제곱하면 구하는 도형의 방정식은

$$(x-1)^2+(y+6)^2=(y-2)^2$$

$$\therefore (x-1)^2=-16(y+2)$$

06-2 ㉓ $x^2=6(y+\frac{1}{2})$

포물선 $x^2=4y$ 의 초점이 F이므로 $F(0, 1)$

포물선 위의 점 A의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$a^2=4b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 FA를 3:1로 외분하는 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x=\frac{3 \times a-1 \times 0}{3-1}=\frac{3a}{2}$$

$$y=\frac{3 \times b-1 \times 1}{3-1}=\frac{3b-1}{2}$$

이 식을 각각 a, b 에 대하여 풀면

$$a=\frac{2x}{3}, b=\frac{2y+1}{3}$$

이를 ㉑에 대입하면 구하는 도형의 방정식은

$$\left(\frac{2x}{3}\right)^2=4 \times \frac{2y+1}{3}$$

$$\therefore x^2=6\left(y+\frac{1}{2}\right)$$

연습문제

17~18쪽

- 1 ② 2 ③ 3 $(-2, 1)$
 4 $(x-2)^2=4(y-2)$, $(x-2)^2=-16(y-7)$
 5 ③ 6 ③ 7 $x^2+4x-4y=0$ 8 ①
 9 18 10 ② 11 $(y-1)^2=6(x+2)$
 12 12 13 $36\sqrt{3}$ 14 ⑤

- 1 꼭짓점이 원점이고 초점 $(0, -4)$ 가 y 축 위의 점이므로 포물선의 방정식은
 $x^2=4 \times (-4) \times y \quad \therefore x^2=-16y$
 이 포물선이 점 $(8, a)$ 를 지나므로
 $64=-16a \quad \therefore a=-4$
- 2 포물선 $(x+1)^2=-4(y-4)$ 는 포물선 $x^2=-4y$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이고, 포물선 $x^2=-4y$ 의 초점의 좌표는 $(0, -1)$ 이므로 점 A의 좌표는 $(-1, 3)$ 이다.
 포물선 $(y-5)^2=12(x+2)$ 는 포물선 $y^2=12x$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동한 것이고, 포물선 $y^2=12x$ 의 초점의 좌표는 $(3, 0)$ 이므로 점 B의 좌표는 $(1, 5)$ 이다.
 따라서 구하는 선분 AB의 길이는
 $\sqrt{(1+1)^2+(5-3)^2}=2\sqrt{2}$
- 3 준선이 y 축에 평행하므로 포물선의 방정식은
 $(y-n)^2=4p(x-m) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 의 초점의 좌표는 $(p+m, n)$ 이므로
 $p+m=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $n=1$
 $\textcircled{1}$ 의 준선의 방정식은 $x=-p+m$ 이므로
 $-p+m=-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면
 $p=3, m=-2$
 즉, 포물선의 방정식은
 $(y-1)^2=12(x+2)$
 따라서 구하는 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 1)$ 이다.
- 4 준선이 x 축에 평행하므로 포물선의 방정식은
 $(x-m)^2=4p(y-n)$
 이 포물선의 초점의 좌표는 $(m, p+n)$ 이므로
 $m=2$
 $p+n=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 포물선 $(x-2)^2=4p(y-n)$ 이 점 $(-2, 6)$ 을 지나므로
 $16=4p(6-n) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$p=1, n=2 \text{ 또는 } p=-4, n=7$$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$$(x-2)^2=4(y-2) \text{ 또는 } (x-2)^2=-16(y-7)$$

- 5 $y^2-8x-6y-7=0$ 에서
 $y^2-6y+9=8x+16$
 $\therefore (y-3)^2=8(x+2)$
 즉, 주어진 포물선은 포물선 $y^2=8x$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.
 이때 포물선 $y^2=8x$ 의 초점의 좌표는 $(2, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-2$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(0, 3)$, 준선의 방정식은 $x=-4$ 이다.
 따라서 $a=0, b=3, c=-4$ 이므로
 $a+b+c=-1$
- 6 $y^2-2x+2ay+18=0$ 에서
 $y^2+2ay+a^2=2x-18+a^2$
 $\therefore (y+a)^2=2\left(x-\frac{18-a^2}{2}\right)$
 즉, 이 포물선의 꼭짓점 A의 좌표는 $\left(\frac{18-a^2}{2}, -a\right)$
 한편 $x^2+2x-12y+b=0$ 에서
 $x^2+2x+1=12y-b+1$
 $\therefore (x+1)^2=12\left(y-\frac{b-1}{12}\right)$
 즉, 이 포물선의 꼭짓점 B의 좌표는 $\left(-1, \frac{b-1}{12}\right)$
 두 점 A, B가 y 축에 대하여 대칭이므로
 $\frac{18-a^2}{2}=1, -a=\frac{b-1}{12}$
 $\therefore a=4, b=-47 (\because a>0)$
 $\therefore a-b=51$
- 7 축이 y 축에 평행한 포물선의 방정식의 일반형은
 $x^2+Ax+By+C=0$ (단, A, B, C 는 상수, $B \neq 0$)
 이 포물선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로
 $C=0$
 포물선 $x^2+Ax+By=0$ 이 점 $(-4, 0)$ 을 지나므로
 $16-4A=0$
 $\therefore A=4$
 포물선 $x^2+4x+By=0$ 이 점 $(2, 3)$ 을 지나므로
 $12+3B=0$
 $\therefore B=-4$
 따라서 구하는 포물선의 방정식은
 $x^2+4x-4y=0$

- 8 포물선 $y^2=12x$ 의 준선의 방정식은 $x=-3$

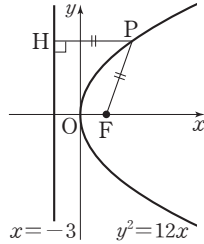
점 P에서 준선 $x=-3$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH}=\overline{PF}=9$$

이때 점 P의 x 좌표를 a 라 하면

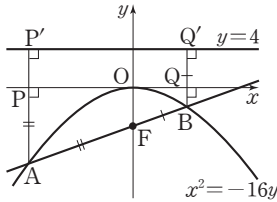
$$a+3=9$$

$$\therefore a=6$$



- 9 포물선 $x^2=-16y$ 의 준선의 방정식은 $y=4$

다음 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선 $y=4$ 에 내린 수선의 발을 각각 P', Q'이라 하자.



포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF}=\overline{AP'}=\overline{AP}+\overline{PP'}$$

$$=8+4=12$$

$$\overline{BF}=\overline{BQ'}=\overline{BQ}+\overline{QQ'}$$

$$=2+4=6$$

따라서 구하는 선분 AB의 길이는

$$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}$$

$$=12+6=18$$

- 10 포물선 $y^2=8x$ 의 초점이 F이므로 F(2, 0)이고, 준선의 방정식은 $x=-2$ 이다.

점 P에서 준선 $x=-2$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF}=\overline{PH}$$

세 점 A, P, H가 일직선 위에 있을 때 $\overline{AP}+\overline{PH}$ 의 값이 최소

이므로 점 A에서 준선 $x=-2$

$$\overline{AP}+\overline{PF}=\overline{AP}+\overline{PH}$$

$$\geq \overline{AH'}$$

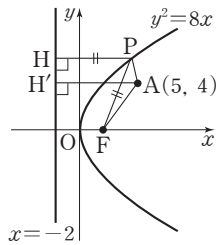
$$=5-(-2)=7$$

한편 $\overline{AF}=\sqrt{(5-2)^2+4^2}=5$ 이므로 삼각형 APF의 둘레의 길이는

$$\overline{AP}+\overline{PF}+\overline{AF} \geq \overline{AH'}+\overline{AF}$$

$$=7+5=12$$

따라서 구하는 최솟값은 12이다.



- 11 $y^2-12x-2y-23=0$ 에서

$$y^2-2y+1=12x+24$$

$$\therefore (y-1)^2=12(x+2)$$

즉, 주어진 포물선의 꼭짓점 B의 좌표는 (-2, 1)이다.

포물선 위의 점 A의 좌표를 (a, b)라 하면

$$b^2-12a-2b-23=0 \quad \text{..... ㉠}$$

선분 AB의 중점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x=\frac{a-2}{2}, y=\frac{b+1}{2}$$

이 식을 각각 a, b에 대하여 풀면

$$a=2x+2, b=2y-1$$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 도형의 방정식은

$$(2y-1)^2-12(2x+2)-2(2y-1)-23=0$$

$$\therefore (y-1)^2=6(x+2)$$

- 12 $\overline{AF}=k(k>0)$ 라 하면

$$\overline{AF}:\overline{BF}=1:2 \text{에서}$$

$$\overline{BF}=2\overline{AF}=2k$$

$$\therefore \overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}$$

$$=k+2k=3k$$

이때 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF}=\overline{AC}=k$$

$$\overline{BF}=\overline{BD}=2k$$

점 A에서 변 BD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AC}=\overline{HD}=k \text{이고 } \overline{BD}=2k \text{이므로}$$

$$\overline{BH}=\overline{BD}-\overline{HD}=2k-k=k$$

직각삼각형 AHB에서

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BH}^2}$$

$$=\sqrt{(3k)^2-k^2}=2\sqrt{2}k (\because k>0)$$

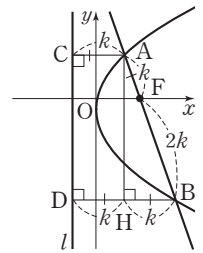
이때 사다리꼴 ACDB의 넓이가 $48\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2}(k+2k) \times 2\sqrt{2}k = 48\sqrt{2}$$

$$k^2=16 \quad \therefore k=4 (\because k>0)$$

따라서 구하는 변 AB의 길이는

$$\overline{AB}=3k=3 \times 4=12$$



- 13 포물선 $y^2=12x$ 의 초점이 F이므로 F(3, 0)이고, 준선의 방정식은 $x=-3$ 이다.

포물선의 준선 $x=-3$ 과 선분

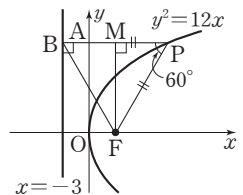
AP의 연장선이 만나는 점을 B

라 하면 삼각형 BPF에서

$$\angle BPF=\angle APF=60^\circ$$

포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF}=\overline{PB}$$



즉, 삼각형 PBF는 정삼각형이다.

$$\therefore \overline{PB} = \overline{BF} = \overline{PF}$$

이때 선분 PB의 중점을 M이라 하면

$$\overline{MB} = \overline{MA} + \overline{AB} = \overline{FO} + \overline{AB}$$

$$= 3 + 3 = 6$$

$$\therefore \overline{PB} = 2\overline{MB} = 2 \times 6 = 12$$

$$\therefore \overline{AP} = \overline{PB} - \overline{AB} = 12 - 3 = 9$$

$$\overline{MP} = \overline{MB} = 6 \text{ 이므로}$$

$$\overline{MF} = \overline{MP} \tan 60^\circ = 6\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{AO} = \overline{MF} = 6\sqrt{3}$$

따라서 구하는 사다리꼴 AOFB의 넓이는

$$\frac{1}{2}(\overline{OF} + \overline{AP}) \times \overline{AO} = \frac{1}{2} \times (3 + 9) \times 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

- 14 포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점이 F이므로 F(1, 0)이고, 준선의 방정식이 $x = -1$ 이므로 준선이 x 축과 만나는 점은 P(-1, 0)이다.

두 점 A, B에서 준선 $x = -1$ 에

내린 수선의 발을 각각 C, D라

하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AC}$$

$$\overline{BF} = \overline{BD}$$

$$\overline{FA} : \overline{FB} = 1 : 2 \text{에서}$$

$$\overline{FB} = 2\overline{FA} \text{이므로}$$

$$\overline{BD} = \overline{BF} = 2\overline{FA} = 2\overline{AC}$$

점 A는 제1사분면 위에 있는 포물선 위의 점이므로 점 A의 좌표를 $(a, 2\sqrt{a})$ ($a > 0$)라 하면

$$\overline{AC} = a + 1$$

$$\therefore \overline{BD} = 2\overline{AC} = 2(a + 1) = 2a + 2$$

따라서 점 B의 x 좌표는 $2a + 2 - 1 = 2a + 1$ 이므로

$$B(2a + 1, 2\sqrt{2a + 1})$$

한편 삼각형 PAC와 삼각형 PBD는 닮음이고

$$\overline{BD} = 2\overline{AC} \text{에서 } \overline{AC} : \overline{BD} = 1 : 2 \text{이므로}$$

$$\overline{PC} : \overline{PD} = 1 : 2$$

$$\overline{PD} = 2\overline{PC}$$

$$\therefore 2\sqrt{2a + 1} = 4\sqrt{a}$$

양변을 제곱하면

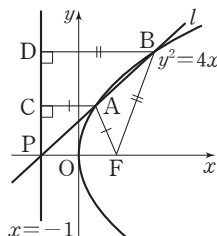
$$4(2a + 1) = 16a$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

따라서 두 점 A($\frac{1}{2}, \sqrt{2}$), B(2, $2\sqrt{2}$)를 지나는 직선 l의

기울기는

$$\frac{2\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



I-1 02 타원

1 타원의 방정식

개념 CHECK

21쪽

- 1 답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

$$(1) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{에서 } \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

$3 > 2$ 이므로 초점은 x 축 위에 있고 초점의 좌표는

$$(\sqrt{9-4}, 0), (-\sqrt{9-4}, 0) \quad \therefore (\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$$

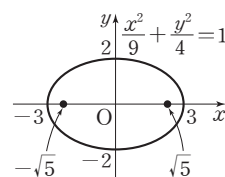
꼭짓점의 좌표는 (3, 0), (-3, 0), (0, 2), (0, -2)

장축의 길이는 $2 \times 3 = 6$

단축의 길이는 $2 \times 2 = 4$

그래프는 좌우로 긴 타원이

므로 오른쪽 그림과 같다.



$$(2) \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{에서 } \frac{x^2}{(\sqrt{7})^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

$\sqrt{7} < 4$ 이므로 초점은 y 축 위에 있고 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{16-7}), (0, -\sqrt{16-7}) \quad \therefore (0, 3), (0, -3)$$

꼭짓점의 좌표는

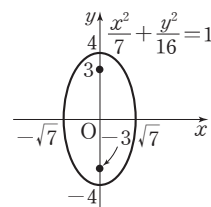
$$(\sqrt{7}, 0), (-\sqrt{7}, 0), (0, 4), (0, -4)$$

장축의 길이는 $2 \times 4 = 8$

단축의 길이는 $2 \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

그래프는 상하로 긴 타원이

므로 오른쪽 그림과 같다.



- 2 답 -1, 2

방정식	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$	$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$
초점의 좌표	(4, 0), (-4, 0)	(3, 2), (-5, 2)
꼭짓점의 좌표	(5, 0), (-5, 0), (0, 3), (0, -3)	(4, 2), (-6, 2), (-1, 5), (-1, -1)
중심의 좌표	(0, 0)	(-1, 2)
장축의 길이	10	10
단축의 길이	6	6

01-1 [답] (1) $\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{16} = 1$ (2) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{9} = 1$

- (1) 두 점 F, F'으로부터 거리의 합이 8인 타원이므로 두 점 F, F'은 초점이다.

중심이 원점이고 두 초점이 y 축 위에 있으므로 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } b > a > 0)$$

두 초점으로부터 거리의 합이 8이므로

$$2b = 8 \quad \therefore b = 4$$

$$a^2 = b^2 - (\sqrt{5})^2 \text{이므로 } a^2 = 4^2 - (\sqrt{5})^2 = 11$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{16} = 1$$

- (2) 중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > b > 0)$$

$$\text{단축의 길이가 6이므로 } 2b = 6 \quad \therefore b = 3$$

$$b^2 = a^2 - 1^2 \text{이므로 } a^2 = b^2 + 1^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{9} = 1$$

다른 풀이

- (1) 두 점 F, F'으로부터 거리의 합이 8인 점의 좌표를

(x, y) 라 하면

$$\sqrt{x^2 + (y - \sqrt{5})^2} + \sqrt{x^2 + (y + \sqrt{5})^2} = 8$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + (y - \sqrt{5})^2} = 8 - \sqrt{x^2 + (y + \sqrt{5})^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4\sqrt{x^2 + (y + \sqrt{5})^2} = \sqrt{5}y + 16$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 구하는 타원의 방정식은

$$16x^2 + 11y^2 = 176 \quad \therefore \frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{16} = 1$$

01-2 [답] 0

중심이 원점이고 두 초점이 y 축 위에 있으므로 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } b > a > 0)$$

$$\text{장축의 길이가 6이므로 } 2b = 6 \quad \therefore b = 3$$

$$a^2 = b^2 - 2^2 \text{이므로 } a^2 = 3^2 - 2^2 = 5$$

$$\text{따라서 타원의 방정식은 } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

이 타원이 점 $(k, 3)$ 을 지나므로

$$\frac{k^2}{5} + 1 = 1 \quad \therefore k = 0$$

02-1 [답] $\frac{(x-2)^2}{20} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$

타원의 중심은 선분 FF'의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+2}{2}, \frac{7-1}{2}\right) \quad \therefore (2, 3)$$

중심의 좌표가 $(2, 3)$ 이고 두 초점이 y 축에 평행한 직선 위에 있으므로 타원의 방정식은

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } b > a > 0)$$

$$\text{장축의 길이가 12이므로 } 2b = 12 \quad \therefore b = 6$$

$$\text{중심에서 초점까지의 거리가 4이고 } a^2 = b^2 - 4^2 \text{이므로}$$

$$a^2 = 6^2 - 4^2 = 20$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{(x-2)^2}{20} + \frac{(y-3)^2}{36} = 1$$

02-2 [답] $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{12} = 1$

타원의 중심은 선분 FF'의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{1-3}{2}, \frac{1+1}{2}\right) \quad \therefore (-1, 1)$$

중심의 좌표가 $(-1, 1)$ 이고 두 초점이 x 축에 평행한 직선 위에 있으므로 타원의 방정식은

$$\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > b > 0)$$

한편 두 초점 F, F'으로부터 타원 위의 점 A까지의 거리의 합은

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = 2 + 6 = 8$$

즉, 두 초점으로부터 거리의 합이 8이므로

$$2a = 8 \quad \therefore a = 4$$

$$\text{중심에서 초점까지의 거리가 2이고 } b^2 = a^2 - 2^2 \text{이므로}$$

$$b^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{12} = 1$$

02-3 [답] $\frac{(x-3)^2}{9} + (y+5)^2 = 1$

두 점 A, B의 y 좌표가 같으므로 선분 AB의 중점이 타원의 중심과 같다.

타원의 중심을 M이라 하면

$$M\left(\frac{6+0}{2}, \frac{-5-5}{2}\right) \quad \therefore M(3, -5)$$

이때 $\overline{AM} = 3$, $\overline{CM} = 1$ 이므로 장축은 선분 AB이고 x 축에 평행한 직선 위에 있다.

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{(y+5)^2}{1^2} = 1 \quad \therefore \frac{(x-3)^2}{9} + (y+5)^2 = 1$$

03-1 ㉮ 풀이 참조

$$9x^2 + 4y^2 + 18x - 32y + 37 = 0 \text{에서}$$

$$9(x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 - 8y + 16) = 36$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

즉, 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 을 x 축의 방향으로

-1만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{에서 } \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \text{이므로 이 타원의}$$

초점의 좌표는 $(0, \sqrt{5}), (0, -\sqrt{5})$,

꼭짓점의 좌표는 $(2, 0), (-2, 0), (0, 3), (0, -3)$,

중심의 좌표는 $(0, 0)$,

장축의 길이는 $2 \times 3 = 6$, 단축의 길이는 $2 \times 2 = 4$

따라서 구하는 타원의

초점의 좌표는 $(-1, \sqrt{5}+4), (-1, -\sqrt{5}+4)$,

꼭짓점의 좌표는 $(1, 4), (-3, 4), (-1, 7), (-1, 1)$,

중심의 좌표는 $(-1, 4)$,

장축의 길이는 6, 단축의 길이는 4

03-2 ㉮ 6

$$11x^2 + 2y^2 - 44x - 12y + 40 = 0 \text{에서}$$

$$11(x^2 - 4x + 4) + 2(y^2 - 6y + 9) = 22$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(y-3)^2}{11} = 1$$

즉, 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{11} = 1$ 을 x 축의 방향으로

2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{11} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(0, 3), (0, -3)$

이므로 주어진 타원의 두 초점의 좌표는

$(2, 6), (2, 0)$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6$$

04-1 ㉮ 8

타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(0, 1), (0, -1)$

이므로 두 점 F, C는 주어진 타원의 초점이다.

타원 위의 점에서 두 초점 C, F까지의 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로

$$\overline{AC} + \overline{AF} = 2 \times 2 = 4$$

$$\overline{BC} + \overline{BF} = 2 \times 2 = 4$$

따라서 구하는 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} &= (\overline{AF} + \overline{BF}) + \overline{BC} + \overline{AC} \\ &= (\overline{AC} + \overline{AF}) + (\overline{BC} + \overline{BF}) \\ &= 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

04-2 ㉮ $27\sqrt{5}$

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점이 y 축

위에 있으므로 타원의 장축의 길이는 $2b$

타원 위의 점에서 두 초점까지의 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = 2b$$

$$\overline{BF} + \overline{BF'} = 2b$$

삼각형 ABF'의 둘레의 길이가 36이므로

$$\overline{AB} + \overline{BF'} + \overline{AF'} = 36$$

$$(\overline{AF} + \overline{BF}) + \overline{BF'} + \overline{AF'} = 36$$

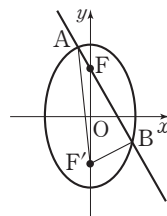
$$(\overline{AF} + \overline{AF'}) + (\overline{BF} + \overline{BF'}) = 36$$

$$2b + 2b = 36 \quad \therefore b = 9$$

한편 $a^2 = b^2 - 6^2$ 이므로

$$a^2 = 9^2 - 6^2 = 45 \quad \therefore a = 3\sqrt{5} \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore ab = 3\sqrt{5} \times 9 = 27\sqrt{5}$$



05-1 ㉮ 25

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(4, 0), (-4, 0)$

이므로 두 점 A, B는 주어진 타원의 초점이다.

타원 위의 점 P에서 두 초점 A, B까지의 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로

$$\overline{PA} + \overline{PB} = 2 \times 5 = 10$$

$\overline{PA} > 0, \overline{PB} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{PA} + \overline{PB} \geq 2\sqrt{\overline{PA} \times \overline{PB}}$$

$$10 \geq 2\sqrt{\overline{PA} \times \overline{PB}}$$

$$\therefore \sqrt{\overline{PA} \times \overline{PB}} \leq 5 \quad (\text{단, 등호는 } \overline{PA} = \overline{PB} \text{일 때 성립})$$

양변을 제곱하면

$$\overline{PA} \times \overline{PB} \leq 25$$

따라서 구하는 최댓값은 25이다.

다른 풀이

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(4, 0), (-4, 0)$

이므로 두 점 A, B는 주어진 타원의 초점이다.

타원 위의 점 P에서 두 초점 A, B까지의 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로

$$\overline{PA} + \overline{PB} = 2 \times 5 = 10 \quad \therefore \overline{PB} = 10 - \overline{PA}$$

이를 $\overline{PA} \times \overline{PB}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \overline{PA} \times \overline{PB} &= \overline{PA}(10 - \overline{PA}) = -\overline{PA}^2 + 10\overline{PA} \\ &= -(\overline{PA} - 5)^2 + 25 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{PA} = 5$ 일 때 최댓값은 25이다.

05-2 ㉡ 6

점 P(a, b)가 타원 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{36} = 1$$

$\frac{a^2}{4} > 0, \frac{b^2}{36} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{36} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{4} \times \frac{b^2}{36}}$$

$$1 \geq \frac{ab}{6} \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$\therefore ab \leq 6 \quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{a^2}{4} = \frac{b^2}{36} \text{ 일 때 성립} \right)$$

따라서 구하는 최댓값은 6이다.

06-1 ㉡ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} : |x-4| = 1 : 2$$

$$\therefore 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x-4|$$

양변을 제곱하면 구하는 도형의 방정식은

$$4(x-1)^2 + 4y^2 = (x-4)^2$$

$$3x^2 + 4y^2 = 12 \quad \therefore \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

06-2 ㉡ $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$

A(a, 0), B(0, b)라 하면 $\overline{AB} = 4$ 에서

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 4$$

양변을 제곱하면 $a^2 + b^2 = 16$ ㉠

선분 AB를 5 : 3으로 외분하는 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x = \frac{5 \times 0 - 3 \times a}{5 - 3} = -\frac{3a}{2}$$

$$y = \frac{5 \times b - 3 \times 0}{5 - 3} = \frac{5b}{2}$$

이 식을 각각 a, b에 대하여 풀면

$$a = -\frac{2x}{3}, b = \frac{2y}{5}$$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 도형의 방정식은

$$\left(-\frac{2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{2y}{5}\right)^2 = 16 \quad \therefore \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$$

1 $5x^2 + y^2 = 20$ 에서 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{20} = 1$ 이므로 이 타원의 두 초점의 좌표는 (0, 4), (0, -4)

이 두 점을 초점으로 하는 타원은 중심이 원점이고 두 초점이 y축 위에 있으므로 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } b > a > 0)$$

이 타원의 장축의 길이가 10이므로

$$2b = 10 \quad \therefore b = 5$$

$$a^2 = b^2 - 4^2 \text{이므로 } a^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

$$\text{즉, 타원의 방정식은 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

따라서 이 타원의 단축의 길이는

$$2 \times 3 = 6$$

2 중심이 원점이고 두 초점이 x축 위에 있으므로 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > b > 0)$$

장축과 단축의 길이의 차이가 2이므로

$$2a - 2b = 2 \quad \therefore a - b = 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$b^2 = a^2 - 5^2 \text{이므로}$$

$$a^2 - b^2 = 25$$

$$\therefore (a+b)(a-b) = 25$$

$$\text{이 식에 ㉠을 대입하면 } a + b = 25 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 13, b = 12$$

$$\text{즉, 타원의 방정식은 } \frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$$

이때 $\overline{PF} + \overline{PF'}$ 의 값은 타원의 장축의 길이와 같으므로

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 13 = 26$$

3 타원 $\frac{(x-2)^2}{a} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 은 타원 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

주어진 타원의 두 초점이 x축에 평행한 직선 위에 있으므로 $a > 4$ 이다.

$$\text{즉, 타원 } \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{의 두 초점의 좌표는 } (\sqrt{a-4}, 0),$$

$$(-\sqrt{a-4}, 0) \text{이므로 주어진 타원의 두 초점의 좌표는}$$

$$(\sqrt{a-4} + 2, 2), (-\sqrt{a-4} + 2, 2)$$

$$\text{따라서 } \sqrt{a-4} + 2 = 6, b = 2, -\sqrt{a-4} + 2 = -2 \text{이므로 } \sqrt{a-4} = 4$$

양변을 제곱하면

$$a - 4 = 16 \quad \therefore a = 20$$

$$\therefore ab = 20 \times 2 = 40$$

연습문제

28~29쪽

- | | | | | |
|------|-------|-----|------|-------|
| 1 ② | 2 26 | 3 ① | 4 40 | 5 25 |
| 6 22 | 7 8 | 8 ② | 9 2 | 10 12 |
| 11 ④ | 12 11 | | | |

- 4 타원 $\frac{(x-m)^2}{a} + \frac{(y-n)^2}{b} = 1$ 의 중심의 좌표는 (m, n)
 이므로 $m=1, n=-2$
 장축이 y 축에 평행하고 장축의 길이가 10이므로
 $2\sqrt{b}=10, \sqrt{b}=5 \quad \therefore b=25$
 두 초점 사이의 거리가 6이면 중심에서 초점까지의 거리
 는 3이므로
 $a=b-3^2=25-3^2=16$
 $\therefore a+b+m+n=16+25+1+(-2)=40$

- 5 $9x^2+5y^2+18x-36=0$ 에서
 $9(x^2+2x+1)+5y^2=45 \quad \therefore \frac{(x+1)^2}{5} + \frac{y^2}{9}=1$
 즉, 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9}=1$ 을 x 축의 방향으로
 -1만큼 평행이동한 것이다.
 이때 타원 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9}=1$ 의 두 초점의 좌표는 $(0, 2),$
 $(0, -2)$, 단축의 길이는 $2\sqrt{5}$ 이므로 주어진 타원의 두 초
 점의 좌표는 $(-1, 2), (-1, -2)$, 단축의 길이는 $2\sqrt{5}$
 이다.
 $\therefore p^2+q^2+l^2=1+4+20=25$

- 6 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27}=1$ 의 두 초점이 F, F'이므로
 $F(3, 0), F'(-3, 0) \quad \therefore \overline{FF'}=6$
 타원 위의 점 Q에서 두 초점까지의 거리의 합은 장축의
 길이와 같으므로
 $\overline{QF} + \overline{QF'} = 2 \times 6 = 12$
 따라서 삼각형 PFQ와 삼각형 PF'F의 둘레의 길이의 합은
 $(\overline{PF} + \overline{FQ} + \overline{PQ}) + (\overline{PF'} + \overline{F'F} + \overline{PF})$
 $= 2 + \overline{QF} + (\overline{PQ} + \overline{PF'}) + 6 + 2$
 $= \overline{QF} + \overline{QF'} + 10 = 12 + 10 = 22$

- 7 타원 $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{3}=1$ 은 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3}=1$ 을 x 축
 의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것
 이고, 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3}=1$ 의 두 초점의 좌표는 $(1, 0),$
 $(-1, 0)$ 이므로 주어진 타원의 두 초점의 좌표는 $(3, 1),$
 $(1, 1)$ 이다.
 따라서 두 점 A, B는 주어진 타원의 초점이고, 타원 위의
 점에서 두 초점 A, B까지의 거리의 합은 장축의 길이와
 같으므로
 $\overline{CA} + \overline{CB} = 2 \times 2 = 4, \overline{DA} + \overline{DB} = 2 \times 2 = 4$
 따라서 구하는 사각형의 둘레의 길이는
 $\overline{CA} + \overline{CB} + \overline{DB} + \overline{DA} = 4 + 4 = 8$

- 8 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16}=1$ 의 두 초점의 좌표는 $(3, 0), (-3, 0)$
 이므로 두 점 A, B는 주어진 타원의 초점이다.
 타원 위의 점 P에서 두 초점 A, B까지의 거리의 합은 장
 축의 길이와 같으므로
 $\overline{PA} + \overline{PB} = 2 \times 5 = 10$
 $\therefore \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = (\overline{PA} + \overline{PB})^2 - 2\overline{PA} \times \overline{PB}$
 $= 100 - 2\overline{PA} \times \overline{PB} \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 $\overline{PA} > 0, \overline{PB} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의
 하여
 $\overline{PA} + \overline{PB} \geq 2\sqrt{\overline{PA} \times \overline{PB}}$
 $10 \geq 2\sqrt{\overline{PA} \times \overline{PB}}$
 $\therefore \sqrt{\overline{PA} \times \overline{PB}} \leq 5$ (단, 등호는 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 일 때 성립)
 양변을 제곱하면
 $\overline{PA} \times \overline{PB} \leq 25$
 이때 $\textcircled{7}$ 에 의하여
 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 100 - 2\overline{PA} \times \overline{PB}$
 $\geq 100 - 2 \times 25 = 50$
 따라서 구하는 최솟값은 50이다.

- 9 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면
 $a^2+b^2=4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 $H(a, 0)$ 이므로 선분 PH의 중점 M의 좌표를 (x, y) 라
 하면
 $x = \frac{a+a}{2} = a, y = \frac{b}{2}$
 이 식을 각각 a, b 에 대하여 풀면
 $a = x, b = 2y$
 이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면
 $x^2 + (2y)^2 = 4$
 $\therefore \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
 따라서 이 타원의 장축의 길이는 $2 \times 2 = 4$, 단축의 길이는
 $2 \times 1 = 2$ 이므로 그 차는
 $4 - 2 = 2$

- 10 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}=1$ 의 두 초점 중 x 좌표가 양수인 점이 F,
 음수인 점이 F'이므로
 $F(\sqrt{3}, 0), F'(-\sqrt{3}, 0)$
 $\therefore \overline{FF'} = 2\sqrt{3}$
 타원 위의 점 P에서 두 초점까지의 거리의 합은 장축의
 길이와 같으므로
 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 3 = 6$
 $\therefore \overline{PF} = 6 - \overline{PF'} \quad \dots\dots \textcircled{7}$

삼각형 PF'F는 직각삼각형이므로

$$\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = \overline{FF'}^2$$

$$(6 - \overline{PF'})^2 + \overline{PF'}^2 = (2\sqrt{5})^2$$

$$\overline{PF'}^2 - 6\overline{PF'} + 8 = 0$$

$$(\overline{PF'} - 2)(\overline{PF'} - 4) = 0$$

$$\therefore \overline{PF'} = 2 \text{ 또는 } \overline{PF'} = 4$$

그런데 점 P가 제1사분면의 점이면 $\overline{PF'} > \overline{PF}$, 즉 ①에서

$$\overline{PF'} > 3 \text{ 이므로}$$

$$\overline{PF'} = 4$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{FQ} \times \overline{PF'} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$

- 11 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ 의 두 초점이 F, F'이므로

$$F(0, 4), F'(0, -4)$$

타원 위의 점 P에서 두 초점까지의 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 5 = 10 \quad \therefore \overline{PF} = 10 - \overline{PF'}$$

이를 $\overline{AP} - \overline{PF}$ 에 대입하면

$$\overline{AP} - \overline{PF} = \overline{AP} - (10 - \overline{PF'})$$

$$= \overline{AP} + \overline{PF'} - 10$$

$$\geq \overline{AF'} - 10$$

즉, $\overline{AP} - \overline{PF}$ 의 최솟값은 $\overline{AF'} - 10$ 이므로

$$\overline{AF'} - 10 = 2 \quad \therefore \overline{AF'} = 12$$

두 점 A(a, 0), F'(0, -4)에 대하여 $\overline{AF'} = 12$ 이므로

$$\sqrt{a^2 + 4^2} = 12$$

양변을 제곱하면

$$a^2 + 16 = 144$$

$$a^2 = 128 \quad \therefore a = 8\sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$

- 12 타원 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{33} = 1$ 의 두 초점이 F, F'이므로

$$F(7, 0), F'(-7, 0)$$

타원 위의 점 Q에서 두 초점까지의 거리의 합은 장축의 길이와 같으므로

$$\overline{QF} + \overline{QF'} = 2 \times 7 = 14$$

$$\overline{QF} + (\overline{PF'} + \overline{PQ}) = 14$$

$$\therefore \overline{PQ} + \overline{FQ} = 14 - \overline{PF'} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 원 $x^2 + (y-3)^2 = 4$ 의 중심

을 C(0, 3)이라 하면

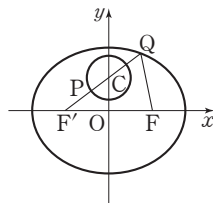
$$\overline{PF'} \geq \overline{CF'} - 2 = 5 - 2 = 3$$

즉, $\overline{PF'}$ 의 최솟값이 3이므로 ①

에서

$$\overline{PQ} + \overline{FQ} = 14 - \overline{PF'} \leq 14 - 3 = 11$$

따라서 구하는 최댓값은 11이다.



I-1 03 쌍곡선

1 쌍곡선의 방정식

개념 CHECK

33쪽

- 1 답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

$$(1) \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \text{에서}$$

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

초점은 x 축 위에 있으므로 초점의 좌표는

$$(\sqrt{9+16}, 0), (-\sqrt{9+16}, 0)$$

$$\therefore (5, 0), (-5, 0)$$

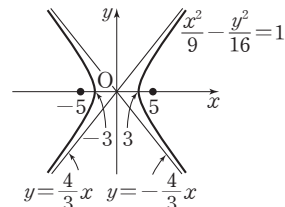
꼭짓점의 좌표는 (3, 0), (-3, 0)

주축의 길이는 $2 \times 3 = 6$

점근선의 방정식은

$$y = \frac{4}{3}x, y = -\frac{4}{3}x$$

그래프는 좌우로 놓인 쌍곡선이므로 다음 그림과 같다.



$$(2) \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1 \text{에서}$$

$$\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} - \frac{y^2}{2^2} = -1$$

초점은 y 축 위에 있으므로 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{5+4}), (0, -\sqrt{5+4})$$

$$\therefore (0, 3), (0, -3)$$

꼭짓점의 좌표는 (0, 2), (0, -2)

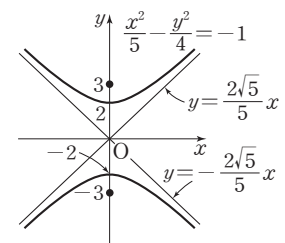
주축의 길이는 $2 \times 2 = 4$

점근선의 방정식은

$$y = \frac{2}{\sqrt{5}}x, y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x$$

$$\therefore y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x, y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x$$

그래프는 상하로 놓인 쌍곡선이므로 다음 그림과 같다.



2 [답] 1, -1

방정식	$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$	$(x-1)^2 - \frac{(y+1)^2}{3} = 1$
초점의 좌표	(2, 0), (-2, 0)	(3, -1), (-1, -1)
꼭짓점의 좌표	(1, 0), (-1, 0)	(2, -1), (0, -1)
중심의 좌표	(0, 0)	(1, -1)
주축의 길이	2	2
점근선의 방정식	$y = \sqrt{3}x,$ $y = -\sqrt{3}x$	$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3} - 1,$ $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 1$

문제

34~39쪽

01-1 [답] (1) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = -1$ (2) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

(1) 두 점 F, F'으로부터 거리의 차이가 6인 쌍곡선이므로 두 점 F, F'은 초점이다.

중심이 원점이고 두 초점이 y축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

두 초점으로부터 거리의 차이가 6이므로

$$2b = 6 \quad \therefore b = 3$$

$$a^2 = (2\sqrt{3})^2 - b^2 \text{이므로 } a^2 = (2\sqrt{3})^2 - 3^2 = 3$$

$$\text{따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 } \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = -1$$

(2) 중심이 원점이고 두 초점이 x축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

$$\text{주축의 길이가 4이므로 } 2a = 4 \quad \therefore a = 2$$

$$b^2 = 4^2 - a^2 \text{이므로 } b^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

$$\text{따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

다른 풀이

(1) 두 점 F, F'으로부터 거리의 차이가 6인 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$|\sqrt{x^2 + (y - 2\sqrt{3})^2} - \sqrt{x^2 + (y + 2\sqrt{3})^2}| = 6$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + (y - 2\sqrt{3})^2} = \sqrt{x^2 + (y + 2\sqrt{3})^2} \pm 6$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$-2\sqrt{3}y - 9 = \pm 3\sqrt{x^2 + (y + 2\sqrt{3})^2}$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$9x^2 - 3y^2 = -27 \quad \therefore \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = -1$$

01-2 [답] $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$

중심이 원점이고 두 꼭짓점이 x축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

두 꼭짓점의 좌표가 (1, 0), (-1, 0)이므로 $a = 1$

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 점 $(2, \sqrt{6})$ 을 지나므로

$$4 - \frac{6}{b^2} = 1 \quad \therefore b^2 = 2$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$

02-1 [답] $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = -1$

중심이 원점이고 두 초점이 y축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

$$a^2 = (\sqrt{6})^2 - b^2 \text{이므로 } a^2 = 6 - b^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점근선의 방정식이 $y = x, y = -x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = 1 \quad \therefore b = a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$a^2 = 6 - a^2 \quad \therefore a^2 = 3$$

이를 ②에 대입하면

$$3 = 6 - b^2 \quad \therefore b^2 = 3$$

$$\text{따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 } \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = -1$$

02-2 [답] 10

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 주축은 x축 위에 있고 주축의 길이가 4이므로

$$2a = 4 \quad \therefore a = 2$$

한 점근선의 방정식이 $y = \frac{5}{2}x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \frac{5}{2} \quad \therefore b = \frac{5}{2}a = \frac{5}{2} \times 2 = 5$$

$$\therefore ab = 2 \times 5 = 10$$

02-3 [답] $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = -1$

쌍곡선이 점 $(0, \sqrt{5})$ 를 지나고 두 점근선의 교점이 원점 이므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

점근선의 방정식이 $y = \frac{1}{2}x, y = -\frac{1}{2}x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \quad \therefore a = 2b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

쌍곡선이 점 $(0, \sqrt{5})$ 를 지나므로

$$-\frac{5}{b^2} = -1 \quad \therefore b^2 = 5$$

㉠에서 $a^2 = 4b^2$ 이므로 $a^2 = 20$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = -1$$

03-1 $\boxed{\text{답}} \quad \frac{(x-4)^2}{20} - \frac{(y-3)^2}{16} = -1$

쌍곡선의 중심은 선분 FF'의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{4+4}{2}, \frac{9-3}{2}\right) \quad \therefore (4, 3)$$

중심의 좌표가 $(4, 3)$ 이고 두 초점이 y 축에 평행한 직선 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-4)^2}{a^2} - \frac{(y-3)^2}{b^2} = -1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

두 초점으로부터 거리의 차이가 8이므로

$$2b = 8 \quad \therefore b = 4$$

중심에서 초점까지의 거리가 6이고 $a^2 = 6^2 - b^2$ 이므로

$$a^2 = 6^2 - 4^2 = 20$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-4)^2}{20} - \frac{(y-3)^2}{16} = -1$$

다른 풀이

두 점 F, F'으로부터 거리의 차이가 8인 점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$|\sqrt{(x-4)^2 + (y-9)^2} - \sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2}| = 8$$

$$\therefore \sqrt{(x-4)^2 + (y-9)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2} \pm 8$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$-3y + 1 = \pm 2\sqrt{(x-4)^2 + (y+3)^2}$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$4(x-4)^2 - 5(y-3)^2 = -80$$

$$\therefore \frac{(x-4)^2}{20} - \frac{(y-3)^2}{16} = -1$$

03-2 $\boxed{\text{답}} \quad (x+3)^2 - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$

쌍곡선의 중심은 선분 FF'의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1-5}{2}, \frac{2+2}{2}\right) \quad \therefore (-3, 2)$$

중심의 좌표가 $(-3, 2)$ 이고 두 초점이 x 축에 평행한 직선 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x+3)^2}{a^2} - \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

주축의 길이가 2이므로

$$2a = 2 \quad \therefore a = 1$$

중심에서 초점까지의 거리가 2이고 $b^2 = 2^2 - a^2$ 이므로

$$b^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$(x+3)^2 - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$$

03-3 $\boxed{\text{답}} \quad \frac{(x+1)^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

두 점근선의 교점은 쌍곡선의 중심이므로 두 점근선의 방정식을 연립하면

$$x+1 = -x-1 \quad \therefore x = -1$$

즉, 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-1, 0)$ 이다.

쌍곡선의 중심 $(-1, 0)$ 과 한 초점 $(3, 0)$ 이 x 축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x+1)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

점근선의 방정식이 $y = x+1$, $y = -x-1$ 이므로

$$\frac{b}{a} = 1 \quad \therefore b = a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

중심에서 초점까지의 거리가 4이고 $b^2 = 4^2 - a^2$ 이므로

$$b^2 = 16 - a^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$a^2 = 16 - a^2 \quad \therefore a^2 = 8$$

이를 ㉡에 대입하면 $b^2 = 8$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x+1)^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$$

다른 풀이

점근선의 방정식이 $y = x+1$, $y = -x-1$, 즉 $y = x+1$, $y = -(x+1)$ 이고 한 초점의 좌표가 $(3, 0)$ 인 쌍곡선은 점근선의 방정식이 $y = x$, $y = -x$ 이고 한 초점의 좌표가 $(4, 0)$ 인 쌍곡선을 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

점근선의 방정식이 $y = x$, $y = -x$ 이고, 한 초점의 좌표가 $(4, 0)$ 인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

한 초점의 좌표가 $(4, 0)$ 이므로

$$b^2 = 4^2 - a^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점근선의 방정식이 $y = x$, $y = -x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = 1 \quad \therefore b = a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a^2 = 8, b^2 = 8$$

따라서 구하는 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로

$$\frac{(x+1)^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$$

04-1 ㉡ 풀이 참조

$$9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 101 = 0 \text{에서}$$

$$9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 + 4y + 4) = -36$$

$$\therefore \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = -1$$

즉, 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{쌍곡선 } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1, \text{ 즉 } \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = -1 \text{의}$$

$$\text{초점의 좌표는 } (0, \sqrt{13}), (0, -\sqrt{13}),$$

$$\text{꼭짓점의 좌표는 } (0, 3), (0, -3),$$

$$\text{중심의 좌표는 } (0, 0), \text{ 주축의 길이는 } 2 \times 3 = 6,$$

$$\text{점근선의 방정식은 } y = \frac{3}{2}x, y = -\frac{3}{2}x$$

따라서 구하는 쌍곡선의

$$\text{초점의 좌표는 } (3, \sqrt{13}-2), (3, -\sqrt{13}-2),$$

$$\text{꼭짓점의 좌표는 } (3, 1), (3, -5),$$

$$\text{중심의 좌표는 } (3, -2), \text{ 주축의 길이는 } 6,$$

$$\text{점근선의 방정식은 } y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}, y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

04-2 ㉡ 3

$$8x^2 - y^2 + 2y - 9 = 0 \text{에서}$$

$$8x^2 - (y^2 - 2y + 1) = 8 \quad \therefore x^2 - \frac{(y-1)^2}{8} = 1$$

즉, 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ 을 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{쌍곡선 } x^2 - \frac{y^2}{8} = 1 \text{의 두 초점의 좌표는 } (3, 0), (-3, 0)$$

이므로 주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는

$$(3, 1), (-3, 1)$$

$$\text{따라서 구하는 삼각형의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 6 \times 1 = 3$$

05-1 ㉡ 8

$$\text{쌍곡선 } x^2 - 8y^2 = -8, \text{ 즉 } \frac{x^2}{8} - y^2 = -1 \text{의 두 초점의 좌표는 } (0, 3), (0, -3)$$

$$\text{따라서 두 초점 사이의 거리는 } \overline{FF'} = 6$$

이때 $\overline{PF} = m, \overline{PF'} = n$ 이라 하면 쌍곡선 위의 점 P에서 두 초점까지의 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로

$$|m - n| = 2 \times 1 = 2$$

$$\text{양변을 제곱하면 } m^2 - 2mn + n^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{삼각형 PFF'의 직각삼각형이므로 } m^2 + n^2 = 36$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 36 - 2mn = 4 \quad \therefore mn = 16$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}mn = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

05-2 ㉡ 480

$$\text{쌍곡선 } \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1 \text{의 두 초점의 좌표는}$$

$$(10, 0), (-10, 0)$$

$$\text{따라서 두 초점 사이의 거리는 } \overline{FF'} = 20$$

삼각형 PFF'의 둘레의 길이가 50이므로

$$\overline{PF} + \overline{FF'} + \overline{PF'} = 50 \quad \therefore \overline{PF} + \overline{PF'} = 30$$

쌍곡선 위의 점 P에서 두 초점까지의 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2 \times 8 = 16 \quad (\because \overline{PF} > \overline{PF'})$$

$$\therefore \overline{PF}^2 - \overline{PF'}^2 = (\overline{PF} + \overline{PF'}) (\overline{PF} - \overline{PF'}) \\ = 30 \times 16 = 480$$

05-3 ㉡ 34

$$\text{쌍곡선 } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1 \text{의 두 초점의 좌표는}$$

$$(0, 5), (0, -5)$$

$$\text{따라서 두 초점 사이의 거리는 } \overline{FF'} = 10$$

쌍곡선 위의 점 P에서 두 초점까지의 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2 \times 4 = 8 \quad (\because \overline{PF'} > \overline{PF})$$

이때 $\overline{PF'} = 2\overline{PF}$ 이므로

$$2\overline{PF} - \overline{PF} = 8 \quad \therefore \overline{PF} = 8, \overline{PF'} = 16$$

따라서 구하는 삼각형 PFF'의 둘레의 길이는

$$\overline{PF} + \overline{FF'} + \overline{PF'} = 8 + 10 + 16 = 34$$

06-1 ㉡ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = -1$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 점 Q의 좌표는 $(x, 0)$

$$\overline{AQ} = \overline{PQ} \text{에서 } \sqrt{x^2 + 4^2} = |y|$$

양변을 제곱하면 구하는 도형의 방정식은

$$x^2 + 16 = y^2, x^2 - y^2 = -16$$

$$\therefore \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = -1$$

06-2 ㉡ $x^2 - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$

쌍곡선 위의 점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{8} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 AP의 중점 M의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{a}{2}, y = \frac{2+b}{2}$$

이 식을 각각 a, b 에 대하여 풀면

$$a = 2x, b = 2y - 2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 도형의 방정식은

$$\frac{(2x)^2}{4} - \frac{(2y-2)^2}{8} = 1 \quad \therefore x^2 - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$$

1 답 (1) 쌍곡선 (2) 포물선 (3) 원 (4) 타원

(1) $x^2 - y^2 + 2x - 2y + 4 = 0$ 에서

$$(x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 2y + 1) = -4$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{4} = -1$$

따라서 주어진 방정식은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = -1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 쌍곡선을 나타낸다.

(2) $x^2 + 4x - 2y + 14 = 0$ 에서

$$x^2 + 4x + 4 = 2y - 10 \quad \therefore (x+2)^2 = 2(y-5)$$

따라서 주어진 방정식은 포물선 $x^2 = 2y$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동한 포물선을 나타낸다.

(3) $x^2 + y^2 - 8x + 1 = 0$ 에서

$$(x^2 - 8x + 16) + y^2 = 15 \quad \therefore (x-4)^2 + y^2 = 15$$

따라서 주어진 방정식은 중심의 좌표가 $(4, 0)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{15}$ 인 원을 나타낸다.

(4) $4x^2 + y^2 + 6y - 11 = 0$ 에서

$$4x^2 + (y^2 + 6y + 9) = 20$$

$$\therefore \frac{x^2}{5} + \frac{(y+3)^2}{20} = 1$$

따라서 주어진 방정식은 타원 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{20} = 1$ 을 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 타원을 나타낸다.

다른 풀이

(1) x^2 항과 y^2 항의 계수의 곱이 음수이므로 쌍곡선이다.(2) y^2 항이 없고 x^2 항, y 항이 존재하므로 포물선이다.(3) x^2 항과 y^2 항의 계수가 같으므로 원이다.(4) x^2 항과 y^2 항의 계수의 곱이 양수이면서 서로 다르므로 타원이다.

문제

07-1 답 -1 또는 $\frac{1}{2}$

$$x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + k(x^2 + 4y^2) = 0$$

$$(k+1)x^2 + (4k-2)y^2 + 6x + 4y = 0$$

이 방정식이 나타내는 도형이 포물선이라면

$$k+1=0 \text{ 또는 } 4k-2=0$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } k=\frac{1}{2}$$

07-2 답 $0 < k < 1$ 또는 $1 < k < 2$

$$x^2 - 4x + k(y^2 + 2) = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) + ky^2 = -2k + 4$$

$$\therefore (x-2)^2 + ky^2 = -2k + 4$$

이 방정식이 나타내는 도형이 타원이려면

$$1 \times k > 0, k \neq 1, -2k + 4 > 0$$

$$\therefore 0 < k < 1 \text{ 또는 } 1 < k < 2$$

07-3 답 $k < -3$ 또는 $k > 2$

$$3x^2 + 4y^2 - 2x - 2y + k(x^2 - 2y^2) = 0$$

$$(k+3)x^2 + (4-2k)y^2 - 2x - 2y = 0$$

이 방정식이 나타내는 도형이 쌍곡선이라면

$$(k+3)(4-2k) < 0$$

$$(k+3)(k-2) > 0$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > 2$$

연습문제

42~44쪽

1 24	2 36	3 ④	4 ⑤	5 ④
6 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{15} = -1$	7 ②	8 ②	9 ②	
10 ④	11 ③	12 16	13 ②	14 ③
15 ①	16 12	17 7	18 $4\sqrt{3}$	

$$1 \quad \frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{25} = -1 \text{에서 } \frac{x^2}{(2\sqrt{6})^2} - \frac{y^2}{5^2} = -1$$

초점은 y 축 위에 있으므로 두 초점의 좌표는

$$(0, 7), (0, -7)$$

$$\therefore a = |7 - (-7)| = 14$$

주축은 y 축 위에 있으므로 주축의 길이는

$$b = 2 \times 5 = 10$$

$$\therefore a + b = 14 + 10 = 24$$

2 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 꼭짓점은 x 축 위에 있으므로 두 꼭짓점의 좌표는

$$(a, 0), (-a, 0)$$

따라서 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점의 좌표가 $(a, 0)$, $(-a, 0)$ 이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로

$$b^2 = 36 - a^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 36$$

- 3 중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

주축의 길이가 8이므로

$$2a = 8 \quad \therefore a = 4$$

$$b^2 = 6^2 - a^2 \text{이므로 } b^2 = 6^2 - 4^2 = 20$$

따라서 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$$

이 쌍곡선이 점 $(6, k)$ 를 지나므로

$$\frac{36}{16} - \frac{k^2}{20} = 1, \quad k^2 = 25$$

$$\therefore k = 5 \quad (\because k > 0)$$

- 4 중심이 원점이고 두 초점이 y 축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

이 쌍곡선이 두 점 $(-4, 5), (6, -5\sqrt{2})$ 를 지나므로

$$\frac{16}{a^2} - \frac{25}{b^2} = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{36}{a^2} - \frac{50}{b^2} = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2}$ 을 하면

$$-\frac{4}{a^2} = -1 \quad \therefore a^2 = 4$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $b^2 = 5$

따라서 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = -1$$

이 쌍곡선의 두 초점의 좌표는

$$(0, 3), (0, -3)$$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$$|3 - (-3)| = 6$$

- 5 쌍곡선 $3x^2 - y^2 = -9$, 즉 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = -1$ 의 초점, 주축, 꼭짓점은 y 축 위에 있다.

① 초점의 좌표는 $(0, 2\sqrt{3}), (0, -2\sqrt{3})$ 이다.

② 주축의 길이는 $2 \times 3 = 6$ 이다.

③ 꼭짓점의 좌표는 $(0, 3), (0, -3)$ 이다.

④ 쌍곡선 위의 점에서 두 초점까지의 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로 6이다.

⑤ 점근선의 방정식은

$$y = \frac{3}{\sqrt{3}}x, y = -\frac{3}{\sqrt{3}}x$$

$$\therefore y = \sqrt{3}x, y = -\sqrt{3}x$$

따라서 옳은 것은 ④이다.

- 6 타원 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{25} = 1$ 의 두 초점의 좌표는

$$(0, 2\sqrt{5}), (0, -2\sqrt{5})$$

이 두 점을 초점으로 하는 쌍곡선의 중심은 원점이고 두 초점이 y 축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

$$a^2 = (2\sqrt{5})^2 - b^2 \text{이므로}$$

$$a^2 + b^2 = 20 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한 점근선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\frac{b}{a} = \tan 60^\circ, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{3} \quad \therefore b = \sqrt{3}a$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a^2 + 3a^2 = 20 \quad \therefore a^2 = 5$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$5 + b^2 = 20 \quad \therefore b^2 = 15$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{15} = -1$$

- 7 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 이 점 $(2, -4)$ 를 지나므로

$$\frac{4}{a^2} - \frac{16}{b^2} = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$$

두 점근선이 서로 수직이므로

$$\frac{b}{a} \times \left(-\frac{b}{a}\right) = -1$$

$$\therefore b^2 = a^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{4}{a^2} - \frac{16}{a^2} = -1, \quad a^2 = 12$$

$$\therefore a = 2\sqrt{3} \quad (\because a > 0)$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$b^2 = 12 \quad \therefore b = 2\sqrt{3} \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore ab = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 12$$

- 8 쌍곡선 $\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{7} = 1$ 은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(4, 0), (-4, 0)$

이므로 주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는

$$(1, 1), (-7, 1)$$

$$\therefore a + b + c + d = 1 + 1 + (-7) + 1 = -4$$

- 9 쌍곡선의 중심은 두 초점을 이은 선분의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2-2}{2}, \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2}\right) \quad \therefore (-2, 0)$$

중심의 좌표가 $(-2, 0)$ 이고 두 초점이 y 축에 평행한 직선 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x+2)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

주축의 길이가 4이므로

$$2b = 4 \quad \therefore b = 2$$

중심에서 초점까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 이고 $a^2 = (\sqrt{5})^2 - b^2$ 이므로

$$a^2 = (\sqrt{5})^2 - 2^2 = 1$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$(x+2)^2 - \frac{y^2}{4} = -1$$

- 10 $9x^2 - y^2 - 72x + 107 = 0$ 에서

$$9(x^2 - 8x + 16) - (y^2 + 2y + 1) = 36$$

$$\therefore \frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{36} = 1$$

즉, 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$ 을 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$ 의 점근선의 방정식은 $y = 3x$,

$y = -3x$ 이므로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y + 1 = 3(x - 4), \quad y + 1 = -3(x - 4)$$

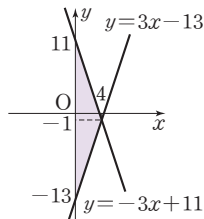
$$\therefore y = 3x - 13, \quad y = -3x + 11$$

이때 두 점근선의 교점의 좌표는

$(4, -1)$ 이므로 구하는 삼각형의

넓이는

$$\frac{1}{2} \times 24 \times 4 = 48$$



- 11 쌍곡선 위의 점 A에서 두 초점까지의 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로

$$\overline{AF'} - \overline{AF} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

사각형 ABF'F가 정사각형이므로 한 변의 길이를 k 라 하면

$$\overline{AF} = k, \quad \overline{AF'} = \sqrt{2}k$$

이를 ①에 대입하면

$$\sqrt{2}k - k = 2, \quad (\sqrt{2} - 1)k = 2$$

$$\therefore k = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} = 2\sqrt{2} + 2$$

따라서 구하는 대각선의 길이는 $\sqrt{2}k$ 이므로

$$\sqrt{2}k = \sqrt{2} \times (2\sqrt{2} + 2) = 4 + 2\sqrt{2}$$

- 12 원 $x^2 + y^2 = 25$ 와 y 축이 만나는 두 점이 A, B이므로 $A(0, 5), B(0, -5)$

쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$ 의 두 초점의 좌표는

$$(0, 5), (0, -5)$$

즉, 두 점 A, B는 쌍곡선의 두 초점이다.

이때 두 초점 A, B 사이의 거리는

$$\overline{AB} = 10$$

$\overline{PA} = m, \overline{PB} = n$ 이라 하면 쌍곡선의 위의 점 P에서 두 초점 A, B까지의 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로

$$|m - n| = 2 \times 3 = 6$$

양변을 제곱하면

$$m^2 - 2mn + n^2 = 36 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$$\angle APB = 90^\circ$$

즉, 삼각형 PAB는 직각삼각형이므로

$$m^2 + n^2 = 100 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$100 - 2mn = 36$$

$$\therefore mn = 32$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}mn = \frac{1}{2} \times 32 = 16$$

- 13 $\overline{PF'} = 2\overline{PF}$ 에서 $\overline{PF} = k$,

$\overline{PF'} = 2k (k > 0)$ 라 하면 삼각형

PFF'은 직각삼각형이므로

$$\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = \overline{FF'}^2$$

$$k^2 + (2k)^2 = 10^2$$

$$k^2 = 20$$

$$\therefore k = 2\sqrt{5} \quad (\because k > 0)$$

$$\therefore \overline{PF} = 2\sqrt{5}, \quad \overline{PF'} = 4\sqrt{5}$$

쌍곡선 위의 점 P에서 두 초점까지의 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$$

$$4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 2a$$

$$\therefore a = \sqrt{5} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 $\overline{FF'} = 10$ 에서

$$2\sqrt{a^2 + b^2} = 10$$

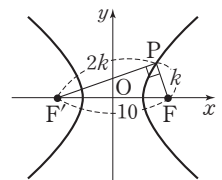
$$\therefore a^2 + b^2 = 25 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$(\sqrt{5})^2 + b^2 = 25, \quad b^2 = 20$$

$$\therefore b = 2\sqrt{5} \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore ab = \sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 10$$



- 14 점 P의 좌표를
- (x, y)
- 라 하면

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}:|x|=2:1$$

$$\therefore \sqrt{(x-3)^2+y^2}=2|x|$$

양변을 제곱하면 구하는 도형의 방정식은

$$(x-3)^2+y^2=4x^2, 3x^2+6x-y^2-9=0$$

$$3(x^2+2x+1)-y^2=12$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

- 15
- $x^2+3y^2-2+k(x^2+y^2)=0$
- 에서

$$(k+1)x^2+(k+3)y^2-2=0$$

이 방정식이 나타내는 도형이 쌍곡선이라면

$$(k+1)(k+3)<0$$

$$\therefore -3<k<-1$$

따라서 정수 k 는 -2 이다.

- 16 중심이 원점이고 두 초점이
- x
- 축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (\text{단, } a>0, b>0)$$

이 쌍곡선의 두 초점의 좌표는 $(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$,

$(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ 이므로

$$c=\sqrt{a^2+b^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점근선의 방정식이 $y=\pm\frac{4}{3}x$ 이므로

$$\frac{b}{a}=\frac{4}{3} \quad \therefore b=\frac{4}{3}a$$

이를 ①에 대입하면

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{4}{3}a\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{9}a^2}=\frac{5}{3}a \quad (\because a>0)$$

$$\therefore F\left(\frac{5}{3}a, 0\right)$$

한편 ㉞에서 $\overline{PF'}>\overline{PF}$ 이고, 쌍곡선 위의 점 P에서 두 초점까지의 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로

$$\overline{PF'}-\overline{PF}=2a$$

$$30-\overline{PF}=2a$$

$$\therefore \overline{PF}=30-2a$$

㉞에서 $16\leq\overline{PF}\leq 20$ 이므로

$$16\leq 30-2a\leq 20$$

$$\therefore 5\leq a\leq 7$$

두 점 $A(a, 0)$, $F\left(\frac{5}{3}a, 0\right)$ 에 대하여 선분 AF의 길이는

$$\overline{AF}=\left|a-\frac{5}{3}a\right|=\frac{2}{3}a$$

㉞에서 선분 AF의 길이가 자연수이고 $5\leq a\leq 7$ 이므로

$$a=6$$

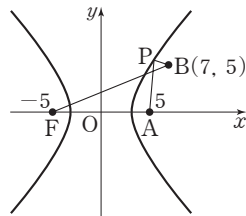
따라서 구하는 주축의 길이는

$$2a=2\times 6=12$$

- 17 쌍곡선
- $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$
- 의 두 초점의 좌표는

$$(5, 0), (-5, 0)$$

즉, 점 A는 쌍곡선의 한 초점이므로 나머지 초점을 F라 하자.



쌍곡선 위의 점 P에서 두 초점 A, F까지의 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로

$$\overline{PF}-\overline{PA}=2\times 3=6 \quad \therefore \overline{PA}=\overline{PF}-6$$

이를 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 에 대입하면

$$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PF}+\overline{PB}-6$$

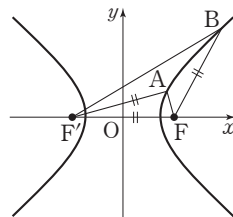
$$\geq \overline{BF}-6=13-6=7$$

따라서 구하는 최솟값은 7이다.

- 18 쌍곡선
- $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
- 의 두 초점은
- x
- 축 위에 있으므로

$F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c>0$)이라 하면 $\overline{FF'}=2c$

주어진 조건에 의하여 두 이등변삼각형 $\triangle AFF'$, $\triangle BFF'$ 은 다음 그림과 같다.



$$\therefore \overline{AF'}=\overline{FF'}=2c, \overline{BF'}=\overline{FF'}=2c$$

쌍곡선 위의 점 P에서 두 초점까지의 거리의 차는 주축의 길이와 같으므로

$$\overline{AF'}-\overline{AF}=2a, \overline{BF'}-\overline{BF}=2a$$

$$\therefore \overline{AF}=\overline{AF'}-2a=2c-2a, \overline{BF}=\overline{BF'}-2a=2c-2a$$

㉞에서 삼각형 $\triangle AFF'$ 의 둘레의 길이가 20이므로

$$\overline{AF}+\overline{FF'}+\overline{AF'}=20$$

$$(2c-2a)+2c+2c=20 \quad \therefore 3c-a=10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉞에서 삼각형 $\triangle BFF'$ 의 둘레의 길이가 28이므로

$$\overline{BF}+\overline{FF'}+\overline{BF'}=28$$

$$2c+2c+(2c-2a)=28 \quad \therefore 3c+a=14 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=2$, $c=4$

$$b^2=c^2-a^2 \text{이므로}$$

$$b^2=4^2-2^2=12 \quad \therefore b=2\sqrt{3} \quad (\because b>0)$$

$$\therefore ab=2\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

I-2 01 이차곡선과 직선

1 이차곡선과 직선의 위치 관계

개념 CHECK

46쪽

- 1 답 (1) 한 점에서 만난다.(접한다.)
(2) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(3) 만나지 않는다.

문제

47쪽

01-1 답 (1) $-\sqrt{17} < k < \sqrt{17}$

(2) $k = -\sqrt{17}$ 또는 $k = \sqrt{17}$

(3) $k < -\sqrt{17}$ 또는 $k > \sqrt{17}$

$y = 2x + k$ 를 $x^2 + 4y^2 = 4$ 에 대입하면

$x^2 + 4(2x + k)^2 = 4$

$\therefore 17x^2 + 16kx + 4k^2 - 4 = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = (8k)^2 - 17(4k^2 - 4) = -4k^2 + 68$

(1) 타원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D > 0$ 이어야 하므로

$-4k^2 + 68 > 0$

$k^2 < 17$

$\therefore -\sqrt{17} < k < \sqrt{17}$

(2) 타원과 직선이 접하려면 $D = 0$ 이어야 하므로

$-4k^2 + 68 = 0$

$k^2 = 17$

$\therefore k = -\sqrt{17}$ 또는 $k = \sqrt{17}$

(3) 타원과 직선이 만나지 않으려면 $D < 0$ 이어야 하므로

$-4k^2 + 68 < 0$

$k^2 > 17$

$\therefore k < -\sqrt{17}$ 또는 $k > \sqrt{17}$

01-2 답 $-1 < k < 1$

$y = x + k$ 를 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ 에 대입하면

$\frac{x^2}{5} - \frac{(x+k)^2}{4} = 1$

$\therefore x^2 + 10kx + 5k^2 + 20 = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$\frac{D}{4} = (5k)^2 - (5k^2 + 20) < 0$

$k^2 < 1$

$\therefore -1 < k < 1$

2 포물선의 접선의 방정식

개념 CHECK

49쪽

1 답 (1) $y = -2x - 1$ (2) $y = 2x + 2$

2 답 (1) $y = -\frac{1}{2}x + 1$ (2) $y = -x + 3$

문제

50~52쪽

02-1 답 $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 인 직선의 기울기는 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$y^2 = 4 \times (-3) \times x$ 이므로 포물선 $y^2 = -12x$ 에 접하고 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식은

$y = \sqrt{3}x + \frac{-3}{\sqrt{3}} \quad \therefore y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

다른 풀이 판별식 이용

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 인 직선의 기울기는 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 이므로 직선의 방정식은

$y = \sqrt{3}x + k$ (단, k 는 상수)

이를 $y^2 = -12x$ 에 대입하면

$(\sqrt{3}x + k)^2 = -12x \quad \therefore 3x^2 + 2(\sqrt{3}k + 6)x + k^2 = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$\frac{D}{4} = (\sqrt{3}k + 6)^2 - 3k^2 = 0$

$12\sqrt{3}k + 36 = 0 \quad \therefore k = -\sqrt{3}$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

02-2 답 -15

직선 $x - 5y + 5 = 0$, 즉 $y = \frac{1}{5}x + 1$ 에 수직인 직선의 기울기는 -5

$x^2 = 4 \times 1 \times y$ 이므로 포물선 $x^2 = 4y$ 에 접하고 기울기가 -5 인 직선의 방정식은

$y = -5x - (-5)^2 \times 1 \quad \therefore y = -5x - 25$

이 직선이 점 $(-2, k)$ 를 지나므로 $k = -15$

03-1 답 -4

점 $(-2, a)$ 가 포물선 $x^2 = -2y$ 위의 점이므로

$4 = -2a \quad \therefore a = -2$

$x^2 = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times y$ 이므로 포물선 $x^2 = -2y$ 위의 점

$(-2, -2)$ 에서의 접선의 방정식은

$-2x = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (y - 2) \quad \therefore y = 2x + 2$

이 직선이 점 $(0, b)$ 를 지나므로 $b = 2$

$\therefore ab = -2 \times 2 = -4$

다른 풀이 판별식 이용

점 $(-2, a)$ 가 포물선 $x^2 = -2y$ 위의 점이므로

$$4 = -2a \quad \therefore a = -2$$

점 $(-2, -2)$ 를 지나고 기울기가 $m (m \neq 0)$ 인 직선의 방정식은

$$y + 2 = m(x + 2) \quad \therefore y = mx + 2m - 2$$

이를 $x^2 = -2y$ 에 대입하면

$$x^2 = -2(mx + 2m - 2) \quad \therefore x^2 + 2mx + 4m - 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = m^2 - (4m - 4) = 0$$

$$m^2 - 4m + 4 = 0, (m - 2)^2 = 0 \quad \therefore m = 2$$

따라서 접선의 방정식은 $y = 2x + 2$

이 직선이 점 $(0, b)$ 를 지나므로 $b = 2$

$$\therefore ab = -2 \times 2 = -4$$

03-2 $\textcircled{답} y = x + 2$

점 $A(a, 2a)$ 가 포물선 $y^2 = 8x$ 위의 점이므로

$$4a^2 = 8a, 4a^2 - 8a = 0$$

$$4a(a - 2) = 0 \quad \therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 2$$

$y^2 = 4 \times 2 \times x$ 이므로 초점의 좌표는 $(2, 0)$ 이고 점 A 에서 초점까지의 거리가 4이므로 $A(2, 4)$

따라서 포물선 $y^2 = 8x$ 위의 점 $A(2, 4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4y = 2 \times 2(x + 2) \quad \therefore y = x + 2$$

04-1 $\textcircled{답} y = -2x - 6 \text{ 또는 } y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

$x^2 = 4 \times \frac{3}{2} \times y$ 이므로 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면

접선의 방정식은

$$x_1x = 2 \times \frac{3}{2}(y + y_1) \quad \therefore x_1x = 3(y + y_1)$$

이 직선이 점 $(-2, -2)$ 를 지나므로

$$-2x_1 = 3(-2 + y_1)$$

$$\therefore y_1 = -\frac{2}{3}x_1 + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 포물선 $x^2 = 6y$ 위의 점이므로

$$x_1^2 = 6y_1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$x_1^2 = 6\left(-\frac{2}{3}x_1 + 2\right), x_1^2 + 4x_1 - 12 = 0$$

$$(x_1 + 6)(x_1 - 2) = 0 \quad \therefore x_1 = -6 \text{ 또는 } x_1 = 2$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } x_1 = -6 \text{ 일 때 } y_1 = 6, x_1 = 2 \text{ 일 때 } y_1 = \frac{2}{3}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = -2x - 6 \text{ 또는 } y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

다른 풀이 기울기가 주어진 접선의 방정식 이용

$x^2 = 4 \times \frac{3}{2} \times y$ 이므로 포물선 $x^2 = 6y$ 에 접하고 기울기가

$m (m \neq 0)$ 인 직선의 방정식은

$$y = mx - \frac{3}{2}m^2$$

이 직선이 점 $(-2, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = -2m - \frac{3}{2}m^2, 3m^2 + 4m - 4 = 0$$

$$(m + 2)(3m - 2) = 0 \quad \therefore m = -2 \text{ 또는 } m = \frac{2}{3}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = -2x - 6 \text{ 또는 } y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

다른 풀이 판별식 이용

점 $(-2, -2)$ 를 지나고 기울기가 $m (m \neq 0)$ 인 직선의 방정식은

$$y + 2 = m(x + 2) \quad \therefore y = mx + 2m - 2$$

이를 $x^2 = 6y$ 에 대입하면

$$x^2 = 6(mx + 2m - 2) \quad \therefore x^2 - 6mx - 12m + 12 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (3m)^2 - (-12m + 12) = 0$$

$$3m^2 + 4m - 4 = 0, (m + 2)(3m - 2) = 0$$

$$\therefore m = -2 \text{ 또는 } m = \frac{2}{3}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = -2x - 6 \text{ 또는 } y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

타원의 접선의 방정식

개념 CHECK

54쪽

1 $\textcircled{답} (1) y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{10} \quad (2) y = -x \pm 3$

2 $\textcircled{답} (1) y = -x + 5 \quad (2) y = \frac{1}{2}x + 3$

문제

55~57쪽

05-1 $\textcircled{답} y = x \pm \sqrt{5}$

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 인 직선의 기울기는 $\tan 45^\circ = 1$

타원 $3x^2 + 2y^2 = 6$, 즉 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ 에 접하고 기울기가 1

인 직선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{2 \times 1^2 + 3} \quad \therefore y = x \pm \sqrt{5}$$

다른 풀이 판별식 이용

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 인 직선의 기울기는 $\tan 45^\circ = 1$ 이므로 직선의 방정식은

$$y = x + k \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

이를 $3x^2 + 2y^2 = 6$ 에 대입하면

$$3x^2 + 2(x+k)^2 = 6 \quad \therefore 5x^2 + 4kx + 2k^2 - 6 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 5(2k^2 - 6) = 0$$

$$k^2 = 5 \quad \therefore k = \pm\sqrt{5}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{5}$$

05-2 **답** $\frac{14}{3}$

직선 $3x - y - 6 = 0$, 즉 $y = 3x - 6$ 에 평행한 직선의 기울기는 3

타원 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{5 \times 3^2 + 4} \quad \therefore y = 3x \pm 7$$

즉, 두 직선이 x 축과 만나는 점의 좌표는 각각

$$\left(-\frac{7}{3}, 0\right), \left(\frac{7}{3}, 0\right)$$

따라서 구하는 선분 AB의 길이는

$$\left| -\frac{7}{3} - \frac{7}{3} \right| = \frac{14}{3}$$

06-1 **답** $y = -\sqrt{2}x + 4$

점 $(\sqrt{2}, 2)$ 가 타원 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{2}{a} + \frac{4}{8} = 1 \quad \therefore a = 4$$

따라서 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점 $(\sqrt{2}, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{2}x}{4} + \frac{2y}{8} = 1$$

$$\therefore y = -\sqrt{2}x + 4$$

다른 풀이 판별식 이용

점 $(\sqrt{2}, 2)$ 가 타원 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{2}{a} + \frac{4}{8} = 1 \quad \therefore a = 4$$

점 $(\sqrt{2}, 2)$ 를 지나고 기울기가 m ($m \neq 0$)인 직선의 방정식은

$$y - 2 = m(x - \sqrt{2}) \quad \therefore y = mx - \sqrt{2}m + 2$$

이를 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$, 즉 $2x^2 + y^2 = 8$ 에 대입하면

$$2x^2 + (mx - \sqrt{2}m + 2)^2 = 8$$

$$\therefore (m^2 + 2)x^2 - 2(\sqrt{2}m^2 - 2m)x + 2m^2 - 4\sqrt{2}m - 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (\sqrt{2}m^2 - 2m)^2 - (m^2 + 2)(2m^2 - 4\sqrt{2}m - 4) = 0$$

$$m^2 + 2\sqrt{2}m + 2 = 0, \quad (m + \sqrt{2})^2 = 0 \quad \therefore m = -\sqrt{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y = -\sqrt{2}x + 4$

06-2 **답** $\frac{9}{2}$

타원 $2x^2 + y^2 = 6$ 위의 점 $(1, -2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x - 2y = 6 \quad \therefore y = x - 3$$

따라서 P(3, 0), Q(0, -3)이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$$

07-1 **답** $y = -\sqrt{2}x + \sqrt{2}$ 또는 $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$2x_1x + y_1y = 1$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$2x_1 = 1 \quad \therefore x_1 = \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 타원 $2x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$2x_1^2 + y_1^2 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\frac{1}{2} + y_1^2 = 1, \quad y_1^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore y_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = -\sqrt{2}x + \sqrt{2} \text{ 또는 } y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$$

다른 풀이 판별식 이용

점 $(1, 0)$ 을 지나고 기울기가 m ($m \neq 0$)인 직선의 방정식은

$$y = m(x - 1) \quad \therefore y = mx - m$$

이를 $2x^2 + y^2 = 1$ 에 대입하면

$$2x^2 + (mx - m)^2 = 1$$

$$\therefore (m^2 + 2)x^2 - 2m^2x + m^2 - 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = m^4 - (m^2 + 2)(m^2 - 1) = 0$$

$$m^2 = 2 \quad \therefore m = \pm\sqrt{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = -\sqrt{2}x + \sqrt{2} \text{ 또는 } y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$$

07-2 **답** $\frac{32}{5}$

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{16} + \frac{y_1y}{9} = 1$$

이 직선이 점 $(0, 5)$ 를 지나므로

$$\frac{5y_1}{9} = 1 \quad \therefore y_1 = \frac{9}{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{9} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

①을 ①에 대입하면

$$\frac{x_1^2}{16} + \frac{9}{25} = 1, \quad x_1^2 = \frac{256}{25} \quad \therefore x_1 = \pm \frac{16}{5}$$

즉, 두 접선의 접점의 좌표는

$$\left(-\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right), \left(\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

따라서 구하는 선분 AB의 길이는

$$\left| -\frac{16}{5} - \frac{16}{5} \right| = \frac{32}{5}$$

4 쌍곡선의 접선의 방정식

개념 CHECK

59쪽

1 답 (1) $y = 2x \pm 2\sqrt{6}$ (2) $y = -x \pm 2$

2 답 (1) $y = -2x - 2$ (2) $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

문제

60~62쪽

08-1 답 $y = 2x \pm 2\sqrt{3}$

직선 $x + 2y + 4 = 0$, 즉 $y = -\frac{1}{2}x - 2$ 에 수직인 직선의 기울기는 2

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 4$, 즉 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{4 \times 2^2 - 4} \quad \therefore y = 2x \pm 2\sqrt{3}$$

다른 풀이 판별식 이용

직선 $x + 2y + 4 = 0$, 즉 $y = -\frac{1}{2}x - 2$ 에 수직인 직선의 기울기는 2이므로 직선의 방정식은

$$y = 2x + k \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

이를 $x^2 - y^2 = 4$ 에 대입하면

$$x^2 - (2x + k)^2 = 4$$

$$\therefore 3x^2 + 4kx + k^2 + 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 3(k^2 + 4) = 0$$

$$k^2 = 12 \quad \therefore k = \pm 2\sqrt{3}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm 2\sqrt{3}$$

08-2 답 $2\sqrt{2}$

쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = -1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{6 - 2 \times 1^2} \quad \therefore y = x \pm 2$$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $y = x + 2$ 위의 점

$(0, 2)$ 와 직선 $y = x - 2$, 즉 $x - y - 2 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

09-1 답 2

점 $(4, a)$ 가 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{16}{12} - \frac{a^2}{3} = 1, \quad a^2 = 1 \quad \therefore a = -1 \quad (\because a < 0)$$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$ 위의 점 $(4, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{12} + \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore y = -x + 3$$

이 직선이 점 $(b, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -b + 3 \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore a + b = -1 + 3 = 2$$

다른 풀이 판별식 이용

점 $(4, a)$ 가 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{16}{12} - \frac{a^2}{3} = 1, \quad a^2 = 1 \quad \therefore a = -1 \quad (\because a < 0)$$

점 $(4, -1)$ 을 지나고 기울기가 m ($m \neq 0$)인 직선의 방정식은

$$y + 1 = m(x - 4) \quad \therefore y = mx - 4m - 1$$

이를 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$, 즉 $x^2 - 4y^2 = 12$ 에 대입하면

$$x^2 - 4(mx - 4m - 1)^2 = 12$$

$$\therefore (4m^2 - 1)x^2 - 8(4m^2 + m)x + 64m^2 + 32m + 16 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{4(4m^2 + m)\}^2 - (4m^2 - 1)(64m^2 + 32m + 16) = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 = 0, \quad (m + 1)^2 = 0 \quad \therefore m = -1$$

따라서 접선의 방정식은 $y = -x + 3$

이 직선이 점 $(b, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -b + 3 \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore a + b = -1 + 3 = 2$$

09-2 답 5

점 $(1, 3)$ 이 쌍곡선 $ax^2 - by^2 = -3$ 위의 점이므로

$$a - 9b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

쌍곡선 $ax^2 - by^2 = -3$ 위의 점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$ax - 3by = -3 \quad \therefore y = \frac{a}{3b}x + \frac{1}{b}$$

이때 접선의 기울기가 2이므로

$$\frac{a}{3b} = 2 \quad \therefore a = 6b \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①, ㉔을 연립하여 풀면 $a=6, b=1 \quad \therefore a-b=5$

10-1 [답] $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$ 또는 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x - 4y_1y = 4$$

이 직선이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$-4y_1 = 4 \quad \therefore y_1 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{H}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 쌍곡선 $x^2 - 4y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$x_1^2 - 4y_1^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①을 ㉔에 대입하면 $x_1^2 - 4 = 4, x_1^2 = 8 \quad \therefore x_1 = \pm 2\sqrt{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1 \text{ 또는 } y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$$

다른 풀이 판별식 이용

점 $(0, 1)$ 을 지나고 기울기가 $m (m \neq 0)$ 인 직선의 방정식은

$$y - 1 = mx \quad \therefore y = mx + 1$$

이를 $x^2 - 4y^2 = 4$ 에 대입하면

$$x^2 - 4(mx + 1)^2 = 4 \quad \therefore (4m^2 - 1)x^2 + 8mx + 8 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (4m)^2 - 8(4m^2 - 1) = 0$$

$$m^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1 \text{ 또는 } y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$$

10-2 [답] 1

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$2x_1x - y_1y = -2$$

이 직선이 점 $(0, -1)$ 을 지나므로 $y_1 = -2 \quad \dots\dots \textcircled{H}$

또 점 (x_1, y_1) 은 쌍곡선 $2x^2 - y^2 = -2$ 위의 점이므로

$$2x_1^2 - y_1^2 = -2 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①을 ㉔에 대입하면

$$2x_1^2 - 4 = -2, x_1^2 = 1 \quad \therefore x_1 = \pm 1$$

즉, 접선의 방정식은 $y = -x - 1$ 또는 $y = x - 1$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$

연습문제

64~66쪽

1 ③	2 0	3 ④	4 -12	5 ③
6 $(1, \frac{5}{2})$	7 $8\sqrt{2}$	8 48	9 ④	10 4
11 5	12 ⑤	13 ③	14 52	15 ③
16 32	17 $5\sqrt{2}$	18 32	19 15	20 ②

1 $y = m(x-2)$ 를 $x^2 + \frac{y^2}{36} = 1$ 에 대입하면

$$x^2 + \frac{\{m(x-2)\}^2}{36} = 1$$

$$\therefore (m^2 + 36)x^2 - 4m^2x + 4m^2 - 36 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (2m^2)^2 - (m^2 + 36)(4m^2 - 36) > 0$$

$$m^2 < 12 \quad \therefore -2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$$

따라서 정수 m 은 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 7개이다.

2 직선 $2x + y + 4 = 0$, 즉 $y = -2x - 4$ 에 평행한 직선의 기울기는 -2

$y^2 = 4 \times 4 \times x$ 이므로 포물선 $y^2 = 16x$ 에 접하고 기울기가

-2 인 직선의 방정식은

$$y = -2x - 2$$

따라서 이 직선이 점 $(-1, a)$ 를 지나므로

$$a = 0$$

3 이차방정식 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 에서

$$(2x-1)(x-1) = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

이때 $m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = 1$ 이라 하자.

$y^2 = 4 \times 2 \times x$ 이므로 포물선 $y^2 = 8x$ 에 접하고 기울기가

$\frac{1}{2}$ 인 직선 l_1 의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + 4$$

또 포물선 $y^2 = 8x$ 에 접하고 기울기가 1인 직선 l_2 의 방정식은

$$y = x + 2$$

따라서 두 직선 l_1, l_2 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{2}x + 4 = x + 2 \quad \therefore x = 4$$

4 $y^2 = 4 \times 3 \times x$ 이므로 포물선 $y^2 = 12x$ 위의 점 $(3, -6)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-6y = 6(x+3) \quad \therefore y = -x - 3$$

이 직선이 포물선 $x^2 = ay$ 의 초점 $(0, \frac{a}{4})$ 를 지나므로

$$\frac{a}{4} = -3 \quad \therefore a = -12$$

- 5 $y^2=4 \times 4 \times x$ 이므로 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 $A(1, 4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4y=8(x+1) \quad \therefore y=2x+2$$

$$\therefore C(-1, 0)$$

포물선 $y^2=16x$ 의 준선의 방정식은 $x=-4$ 이므로

$$B(-4, -6), D(-4, 0)$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9$$

- 6 $x^2=4 \times 1 \times y$ 이므로 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x=2(y+y_1)$$

이 직선이 점 $(1, -2)$ 를 지나므로

$$x_1=2(-2+y_1)$$

$$\therefore x_1=2y_1-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 포물선 $x^2=4y$ 위의 점이므로

$$x_1^2=4y_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$(2y_1-4)^2=4y_1, \quad y_1^2-5y_1+4=0$$

$$(y_1-1)(y_1-4)=0$$

$$\therefore y_1=1 \text{ 또는 } y_1=4$$

①에서 $y_1=1$ 일 때 $x_1=-2$, $y_1=4$ 일 때 $x_1=4$ 이므로 두 접선의 접점의 좌표는

$$(-2, 1), (4, 4)$$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+4}{2}\right) \quad \therefore \left(1, \frac{5}{2}\right)$$

- 7 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 점 $(4, 0)$ 을 지나므로

$$\frac{16}{a^2} = 1, \quad a^2 = 16 \quad \therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$

직선 $x-4y+12=0$, 즉 $y=\frac{1}{4}x+3$ 의 기울기는 $\frac{1}{4}$ 이므로

타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{4}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{4}x \pm \sqrt{16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + b^2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}x \pm \sqrt{b^2 + 1}$$

즉, 직선 $y = \frac{1}{4}x + \sqrt{b^2 + 1}$ 이 직선 $y = \frac{1}{4}x + 3$ 과 일치하므로

$$\sqrt{b^2 + 1} = 3, \quad b^2 = 8$$

$$\therefore b = 2\sqrt{2} \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore ab = 4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

- 8 오른쪽 그림과 같이 타원

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{의 네 꼭짓점을}$$

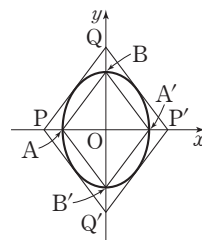
$$A(-3, 0), A'(3, 0),$$

$$B(0, 4), B'(0, -4) \text{라 하고, 마}$$

름모 $ABA'B'$ 와 각 변이 평행하

고 타원에 외접하는 마름모를

$PQP'Q'$ 이라 하자.



직선 AB의 기울기가 $\frac{4}{3}$ 이고 두 변 AB, PQ가 평행하

므로 직선 PQ의 기울기도 $\frac{4}{3}$ 이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에 접하고 기울기가 $\frac{4}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{4}{3}x \pm \sqrt{9 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 16}$$

$$\therefore y = \frac{4}{3}x \pm 4\sqrt{2}$$

그런데 직선 PQ의 y절편은 양수이므로 직선 PQ의 방정식은

$$y = \frac{4}{3}x + 4\sqrt{2}$$

즉, $P(-3\sqrt{2}, 0)$, $Q(0, 4\sqrt{2})$ 이므로 삼각형 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 12$$

따라서 구하는 마름모의 넓이는

$$4 \times 12 = 48$$

- 9 타원 $x^2+2y^2=6$ 위의 점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x-2y=6$$

$$\therefore y=x-3$$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 -1 이므로 점

$(-3, 2)$ 를 지나고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y-2=-(x+3)$$

$$\therefore x+y+1=0$$

따라서 $a=1$, $b=1$ 이므로

$$a+b=2$$

- 10 점 $(a, 2a)$ 가 타원 $4x^2+y^2=8$ 위의 점이므로

$$4a^2+4a^2=8, \quad a^2=1$$

$$\therefore a=1 \quad (\because a > 0)$$

이때 타원 $4x^2+y^2=8$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4x+2y=8$$

$$\therefore y=-2x+4$$

이 직선이 점 $(0, b)$ 를 지나므로 $b=4$

$$\therefore ab=1 \times 4 = 4$$

- 11 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$4x_1x + 9y_1y = 36$$

이 직선이 점 $(3, 4)$ 를 지나므로

$$12x_1 + 36y_1 = 36$$

$$\therefore y_1 = -\frac{1}{3}x_1 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 타원 $4x^2 + 9y^2 = 36$ 위의 점이므로

$$4x_1^2 + 9y_1^2 = 36 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$4x_1^2 + 9\left(-\frac{1}{3}x_1 + 1\right)^2 = 36$$

$$5x_1^2 - 6x_1 - 27 = 0, (5x_1 + 9)(x_1 - 3) = 0$$

$$\therefore x_1 = -\frac{9}{5} \text{ 또는 } x_1 = 3$$

①에서 $x_1 = -\frac{9}{5}$ 일 때 $y_1 = \frac{8}{5}$, $x_1 = 3$ 일 때 $y_1 = 0$ 이므로

접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 접선 중 직선 $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ 가 점 $(5, k)$ 를 지나므로

$$k = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5$$

- 12 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = -1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{25 - 16 \times 1^2} \quad \therefore y = x \pm 3$$

이때 y 절편이 양수인 직선은

$$y = x + 3$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$$

- 13 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 5$ 위의 점 $(3, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$3x - 2y = 5$$

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 5$, 즉 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} = 1$ 의 두 초점 F, F' 은

$$F(\sqrt{10}, 0), F'(-\sqrt{10}, 0)$$

따라서 초점 $F(\sqrt{10}, 0)$ 과 직선 $3x - 2y = 5$, 즉

$$3x - 2y - 5 = 0 \text{ 사이의 거리는}$$

$$\overline{FP} = \frac{|3\sqrt{10} - 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{3\sqrt{10} - 5}{\sqrt{13}}$$

초점 $F'(-\sqrt{10}, 0)$ 과 직선 $3x - 2y - 5 = 0$ 사이의 거리는

$$\overline{F'Q} = \frac{|-3\sqrt{10} - 5|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{3\sqrt{10} + 5}{\sqrt{13}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{FP} \times \overline{F'Q} &= \frac{3\sqrt{10} - 5}{\sqrt{13}} \times \frac{3\sqrt{10} + 5}{\sqrt{13}} \\ &= \frac{(3\sqrt{10})^2 - 5^2}{13} = 5 \end{aligned}$$

- 14 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{12} - \frac{by}{8} = 1$$

이 직선이 타원 $\frac{(x-2)^2}{4} + y^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하려면 타원의 중심인 점 $(2, 0)$ 을 지나야 하므로

$$\frac{a}{6} = 1 \quad \therefore a = 6$$

점 $(6, b)$ 는 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{36}{12} - \frac{b^2}{8} = 1 \quad \therefore b^2 = 16$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 36 + 16 = 52$$

- 15 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x - y_1y = 1$$

이 직선이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$x_1 - 3y_1 = 1$$

$$\therefore x_1 = 3y_1 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$x_1^2 - y_1^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$(3y_1 + 1)^2 - y_1^2 = 1, 8y_1^2 + 6y_1 = 0$$

$$2y_1(4y_1 + 3) = 0$$

$$\therefore y_1 = -\frac{3}{4} \text{ 또는 } y_1 = 0$$

①에서 $y_1 = -\frac{3}{4}$ 일 때 $x_1 = -\frac{5}{4}$, $y_1 = 0$ 일 때 $x_1 = 1$ 이므로

로 두 접선의 점점의 좌표는

$$\left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}\right), (1, 0)$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

- 16 포물선 $y^2 = 12x$ 의 준선의 방정식은 $x = -3$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서

준선에 내린 수선의 발을 H라

하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AH}$$

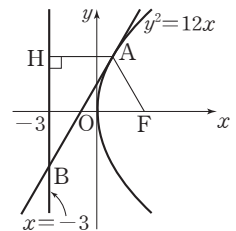
이때 $\overline{AB} = 2\overline{AF}$ 에서

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} \text{이므로 직각삼각형}$$

AHB에서

$$\overline{AB} : \overline{AH} = 2 : 1$$

즉, $\angle BAH = 60^\circ$ 이므로 직선 AB가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 60° 이다.



이때 $y^2=4 \times 3 \times x$ 이므로 포물선 $y^2=12x$ 에 접하고 기울기가 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{3}x + \frac{3}{\sqrt{3}} \quad \therefore y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

이를 $y^2=12x$ 에 대입하면

$$(\sqrt{3}x + \sqrt{3})^2 = 12x, \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0 \quad \therefore x = 1$$

따라서 점 A의 x좌표가 1이므로

$$\overline{AF} = \overline{AH} = 1 - (-3) = 4$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AF} = 8$$

$$\therefore \overline{AB} \times \overline{AF} = 32$$

17 오른쪽 그림과 같이 타원

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1 \text{ 위의 점 P에서}$$

그은 접선이 직선 $y=x+6$ 과

평행하고 y절편이 음수일 때

점 P와 직선 $y=x+6$ 사이

의 거리가 최대이다.

직선 $y=x+6$ 에 평행한 직선의 기울기는 1이므로 타원

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1 \text{에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은}$$

$$y = x \pm \sqrt{9 \times 1^2 + 7} \quad \therefore y = x \pm 4$$

이때 구하는 거리의 최댓값은 직선 $y=x-4$ 와 직선

$y=x+6$ 사이의 거리이다.

따라서 직선 $y=x-4$ 위의 점 $(0, -4)$ 와 직선

$y=x+6$, 즉 $x-y+6=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|4+6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

18 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{8} + \frac{y_1y}{2} = 1$$

이 직선이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$y_1 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{8} + \frac{y_1^2}{2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

①을 ⑧에 대입하면

$$\frac{x_1^2}{8} + \frac{1}{2} = 1, \quad x_1^2 = 4$$

$$\therefore x_1 = \pm 2$$

따라서 $P(-2, 1), Q(2, 1)$ 이므로 $\overline{PQ} = 4$

한편 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 의 장축의 길이는 $4\sqrt{2}$ 이므로 타원

의 다른 한 초점을 F' 이라 하면 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{QF} + \overline{QF'} = 4\sqrt{2}$$

이때 두 점 P, Q와 두 점 F, F'은 각각 y축에 대하여 대칭이므로

$$\overline{PF'} = \overline{QF}$$

$$\therefore \overline{PF} + \overline{QF} = 4\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 PFQ의 둘레의 길이는

$$\overline{PF} + \overline{QF} + \overline{PQ} = 4\sqrt{2} + 4$$

즉, $a=4, b=4$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 16 + 16 = 32$$

19 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점이 $F(3, 0), F'(-3, 0)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(4, k)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

선분 F'F를 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times (-3)}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 0}{2+1} \right)$$

$$\therefore (1, 0)$$

이때 직선 ⑧이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$\frac{4}{a^2} = 1 \quad \therefore a^2 = 4$$

이를 ⑦에 대입하여 풀면 $b^2 = 5$

따라서 점 $P(4, k)$ 는 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{16}{4} - \frac{k^2}{5} = 1 \quad \therefore k^2 = 15$$

20 쌍곡선 $x^2 - 3y^2 = 12$, 즉 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가

$m(m \neq 0)$ 인 직선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{12m^2 - 4}$$

이 직선이 점 $(a, 1)$ 을 지나므로

$$1 = am \pm \sqrt{12m^2 - 4}$$

$$\therefore 1 - am = \pm \sqrt{12m^2 - 4}$$

양변을 제곱하면

$$1 - 2am + a^2m^2 = 12m^2 - 4$$

$$\therefore (a^2 - 12)m^2 - 2am + 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

두 접선이 서로 수직이면 이차방정식 ⑨의 두 근의 곱이 -1 이므로

$$\frac{5}{a^2 - 12} = -1, \quad a^2 = 7$$

$$\therefore a = -\sqrt{7} \text{ 또는 } a = \sqrt{7}$$

따라서 모든 a의 값의 합은

$$-\sqrt{7} + \sqrt{7} = 0$$

II-1 01 벡터의 연산

1 벡터의 뜻

개념 CHECK

69쪽

- 1 답 (1) $\vec{e}, \vec{h}$ (2) $\vec{c}, \vec{e}, \vec{i}$ (3) $\vec{e}$ (4) $\vec{i}$

문제

70쪽

- 01-1 답 (1) $\vec{DA}, \vec{EF}$ (2) $\vec{FD}, \vec{EB}, \vec{CE}$ (3) 1

- (1) 서로 같은 벡터는 시점의 위치에 관계없이 크기와 방향이 각각 같은 벡터이므로 $\vec{BD}$ 와 서로 같은 벡터는 $\vec{DA}, \vec{EF}$
 (2) $\vec{DF}$ 와 크기는 같고 방향이 반대인 벡터는 $\vec{FD}, \vec{EB}, \vec{CE}$
 (3) $|\vec{CF}| = \vec{CF} = \frac{1}{2}\vec{AC} = 1$

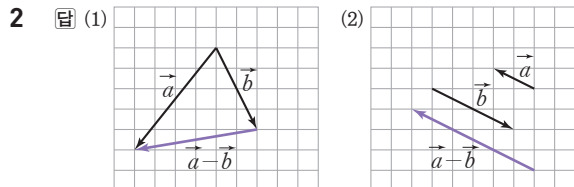
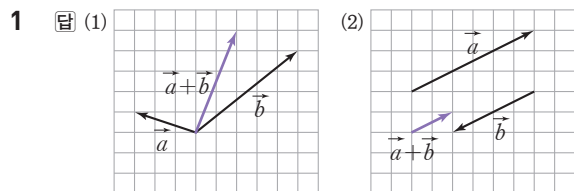
- 01-2 답 ㄷ

- ㄱ. $\vec{CD} = \vec{BA} = -\vec{AB} = -\vec{a}$
 ㄴ. $\vec{BC} = \vec{AD} = \vec{b}$
 ㄷ. $\vec{CA} = -\vec{AC} = -\vec{c}$
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.

2 벡터의 덧셈과 뺄셈

개념 CHECK

72쪽



- 3 답 (1) $\vec{0}$ (2) $\vec{AD}$ (3) $\vec{AE}$ (4) $\vec{0}$

- (1) $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$
 (2) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD}$
 $= \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$

- (3) $\vec{BC} + \vec{AB} + \vec{DE} + \vec{CD}$
 $= \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE}$
 $= (\vec{AB} + \vec{BC}) + (\vec{CD} + \vec{DE})$
 $= \vec{AC} + \vec{CE} = \vec{AE}$
 (4) $\vec{AB} + \vec{CD} - \vec{CB} + \vec{DA}$
 $= \vec{AB} - \vec{CB} + \vec{CD} + \vec{DA}$
 $= \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}$
 $= (\vec{AB} + \vec{BC}) + (\vec{CD} + \vec{DA})$
 $= \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{AA} = \vec{0}$

문제

73쪽

- 02-1 답 (1) $\vec{b} + \vec{c}$ (2) $-\vec{a} - \vec{b}$
 (1) $\vec{AE} = \vec{AF} + \vec{FE} = \vec{CD} + \vec{BC} = \vec{b} + \vec{c}$
 (2) $\vec{DF} = \vec{DE} + \vec{EF} = \vec{BA} + \vec{CB}$
 $= -\vec{AB} - \vec{BC} = -\vec{a} - \vec{b}$

다른 풀이

- (1) $\vec{AE} = \vec{FE} - \vec{FA} = \vec{BC} - \vec{DC}$
 $= \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{b} + \vec{c}$
 (2) $\vec{DF} = \vec{EF} - \vec{ED} = \vec{CB} - \vec{AB}$
 $= -\vec{BC} - \vec{AB} = -\vec{a} - \vec{b}$

- 02-2 답 ③

평행사변형 ABCD에서 $\vec{AD} = \vec{BC}$ 이므로
 $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CA} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$
 $= \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{AA} = \vec{0}$

3 벡터의 실수배

개념 CHECK

75쪽

- 1 답 (1) $7\vec{a} + \vec{b}$ (2) $2\vec{a} - 5\vec{b} + 13\vec{c}$
 2 답 $\vec{c}, \vec{d}$

문제

76~81쪽

- 03-1 답 (1) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ (2) $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
 (1) $\vec{AO} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD})$
 $= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
 (2) $\vec{OD} = \frac{1}{2}\vec{BD} = \frac{1}{2}(\vec{AD} - \vec{AB})$
 $= \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

03-2 ㉔ $\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\vec{a}, \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{QP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$$

03-3 ㉔ $-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

변 BC의 중점을 D라 하면

$$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$$

$$\therefore \overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)=-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

03-4 ㉔ $-\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AO} \\ &= \frac{1}{3}\vec{a}-\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=-\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b} \end{aligned}$$

03-5 ㉔ $4\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \vec{a}+3\vec{b}+\vec{c} &= \overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } |\overrightarrow{AC}|=\overrightarrow{AC}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$|\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}|=|4\overrightarrow{AC}|=4|\overrightarrow{AC}|=4\sqrt{2}$$

04-1 ㉔ (1) $-11\vec{a}+9\vec{b}$ (2) $\frac{3}{5}\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}-\frac{4}{5}\vec{c}$

$$(1) 3(\vec{a}+\vec{b}+\vec{x})=4(3\vec{b}-2\vec{a})+2\vec{x} \text{에서}$$

$$3\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{x}=12\vec{b}-8\vec{a}+2\vec{x}$$

$$\therefore \vec{x}=-11\vec{a}+9\vec{b}$$

$$(2) 3(\vec{a}-\vec{x})-2(\vec{b}+\vec{c})=2(\vec{x}+\vec{c}) \text{에서}$$

$$3\vec{a}-3\vec{x}-2\vec{b}-2\vec{c}=2\vec{x}+2\vec{c}$$

$$5\vec{x}=3\vec{a}-2\vec{b}-4\vec{c}$$

$$\therefore \vec{x}=\frac{3}{5}\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}-\frac{4}{5}\vec{c}$$

04-2 ㉔ $\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}, \vec{y}=3\vec{a}-2\vec{b}$

$$2\vec{x}-\vec{y}=\vec{a} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$-3\vec{x}+2\vec{y}=-\vec{b} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2} \text{을 하면 } \vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$2(2\vec{a}-\vec{b})-\vec{y}=\vec{a}$$

$$\therefore \vec{y}=3\vec{a}-2\vec{b}$$

04-3 ㉔ $-3\vec{a}+11\vec{b}$

$$2\vec{x}+\vec{y}=4\vec{a}+2\vec{b} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\vec{x}-3\vec{y}=-5\vec{a}+15\vec{b} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times 3 + \textcircled{2}$ 을 하면

$$7\vec{x}=7\vec{a}+21\vec{b} \quad \therefore \vec{x}=\vec{a}+3\vec{b}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2(\vec{a}+3\vec{b})+\vec{y}=4\vec{a}+2\vec{b} \quad \therefore \vec{y}=2\vec{a}-4\vec{b}$$

$$\therefore \vec{x}-2\vec{y}=(\vec{a}+3\vec{b})-2(2\vec{a}-4\vec{b})=-3\vec{a}+11\vec{b}$$

05-1 ㉔ (1) $m=1, n=-1$ (2) $m=2, n=1$

(1) 두 벡터가 서로 같을 조건에서

$$2m+n-1=0, 3m-2n-5=0$$

$$\therefore 2m+n=1, 3m-2n=5$$

두 식을 연립하여 풀면 $m=1, n=-1$

(2) 두 벡터가 서로 같을 조건에서

$$2m=m+2n, 3n=2m-1$$

$$\therefore m-2n=0, 2m-3n=1$$

두 식을 연립하여 풀면 $m=2, n=1$

05-2 ㉔ -1

$$m\vec{a}+2n\vec{b}=(2\vec{a}+\vec{b})m+(\vec{a}+\vec{b})n+2\vec{b} \text{에서}$$

$$m\vec{a}+2n\vec{b}=(2m+n)\vec{a}+(m+n+2)\vec{b}$$

두 벡터가 서로 같을 조건에서

$$m=2m+n, 2n=m+n+2$$

$$\therefore m+n=0, m-n=-2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$m=-1, n=1 \quad \therefore mn=-1$$

05-3 ㉔ $k=-1, m=-2$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-\vec{a}+\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(2\vec{a}+k\vec{b})-\vec{a}=\vec{a}+k\vec{b}$$

이때 $m\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$ 에서

$$m(-\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}+k\vec{b})$$

$$\therefore -m\vec{a}+m\vec{b}=2\vec{a}+2k\vec{b}$$

따라서 $-m=2, m=2k$ 이므로

$$m=-2, k=-1$$

06-1 ㉔ -1

두 벡터 $\vec{p}=m\vec{a}-2\vec{b}, \vec{q}=4\vec{a}+8\vec{b}$ 가 서로 평행하려면

0이 아닌 실수 k 에 대하여

$$m\vec{a}-2\vec{b}=k(4\vec{a}+8\vec{b})$$

$$\therefore m\vec{a}-2\vec{b}=4k\vec{a}+8k\vec{b}$$

따라서 $m=4k, -2=8k$ 이므로

$$k=-\frac{1}{4}, m=-1$$

06-2 [답] -3

두 벡터 $\vec{q}-\vec{p}$, $\vec{q}+\vec{r}$ 가 서로 평행하려면

$$\vec{q}+\vec{r}=k(\vec{q}-\vec{p}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.

$$\vec{q}-\vec{p}=(-\vec{a}+2\vec{b})-(-3\vec{a}+4\vec{b})=2\vec{a}-2\vec{b}$$

$$\vec{q}+\vec{r}=(-\vec{a}+2\vec{b})+(m\vec{a}+2\vec{b})=(m-1)\vec{a}+4\vec{b}$$

이를 ①에 대입하면

$$(m-1)\vec{a}+4\vec{b}=k(2\vec{a}-2\vec{b})$$

$$\therefore (m-1)\vec{a}+4\vec{b}=2k\vec{a}-2k\vec{b}$$

따라서 $m-1=2k$, $4=-2k$ 이므로

$$k=-2, m=-3$$

06-3 [답] ㄴ, ㄷ

$$\textcircled{1}. \vec{a}+\vec{c}=\vec{a}+(3\vec{a}+2\vec{b})=4\vec{a}+2\vec{b}=2(2\vec{a}+\vec{b})$$

따라서 두 벡터 $\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}$ 는 서로 평행하지 않다.

$$\textcircled{2}. \vec{a}-\vec{c}=\vec{a}-(3\vec{a}+2\vec{b})=-2\vec{a}-2\vec{b}=-2(\vec{a}+\vec{b})$$

따라서 두 벡터 $\vec{a}-\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}$ 는 서로 평행하다.

$$\textcircled{3}. \vec{b}+\vec{c}=\vec{b}+(3\vec{a}+2\vec{b})=3\vec{a}+3\vec{b}=3(\vec{a}+\vec{b})$$

따라서 두 벡터 $\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}$ 는 서로 평행하다.

$$\textcircled{4}. \vec{b}-\vec{c}=\vec{b}-(3\vec{a}+2\vec{b})=-3\vec{a}-\vec{b}=-(3\vec{a}+\vec{b})$$

따라서 두 벡터 $\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}$ 는 서로 평행하지 않다.

따라서 보기 중 $\vec{a}+\vec{b}$ 와 서로 평행한 벡터인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

07-1 [답] $\frac{1}{2}$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\vec{AC}=k\vec{AB} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.

$$\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=(2\vec{a}+m\vec{b})-\vec{a}=\vec{a}+m\vec{b}$$

$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(3\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}=2\vec{a}+\vec{b}$$

이를 ①에 대입하면

$$\vec{a}+m\vec{b}=k(2\vec{a}+\vec{b}) \quad \therefore \vec{a}+m\vec{b}=2k\vec{a}+k\vec{b}$$

$$\text{따라서 } 1=2k, m=k \text{이므로 } k=\frac{1}{2}, m=\frac{1}{2}$$

07-2 [답] 2

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\vec{AC}=k\vec{AB} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.

$$\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=(3\vec{a}+6\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})=2\vec{a}+8\vec{b}$$

$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(2\vec{a}+m\vec{b})-(\vec{a}-2\vec{b})=\vec{a}+(m+2)\vec{b}$$

이를 ①에 대입하면

$$2\vec{a}+8\vec{b}=k\{\vec{a}+(m+2)\vec{b}\}$$

$$\therefore 2\vec{a}+8\vec{b}=k\vec{a}+(km+2k)\vec{b}$$

$$\text{따라서 } 2=k, 8=km+2k \text{이므로 } m=2$$

연습문제

82~84쪽

1 $\frac{5}{2}$	2 ④	3 ④	4 ③	5 ①
6 $-2\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$	7 ㄱ, ㄷ	8 $\sqrt{2}$	9 2	
10 ②	11 5	12 4	13 12	14 ⑤
15 C, E	16 ②	17 6	18 ⑤	19 $\frac{2}{3}\pi$

$$1 \quad \overline{BD}=\sqrt{3^2+4^2}=5 \text{이므로 } \overline{BO}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{5}{2}$$

$$\therefore |\overrightarrow{BO}|=\overline{BO}=\frac{5}{2}$$

$$2 \quad \textcircled{1} \quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=-\vec{a}+\vec{c}$$

$$\textcircled{2} \quad \overrightarrow{BF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB} \\ =-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-\vec{b}-\vec{c}$$

$$\textcircled{3} \quad \overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CO}=-\overrightarrow{OC}=-\vec{c}$$

$$\textcircled{4} \quad \overrightarrow{EA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BO} \\ =\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$$

$$\textcircled{5} \quad \vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} \\ =\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OC} \\ =\overrightarrow{CC}=\vec{0}$$

$$\therefore |\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}|=0$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

$$3 \quad \textcircled{1}. \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA} \\ =(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CC}+\overrightarrow{DA} \\ =\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}$$

$$\textcircled{2}. \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB} \\ =\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CB}$$

$$\textcircled{3}. \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AC} \\ =(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB})+\overrightarrow{AC} \\ =\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

4 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ 에서 $\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{PC}$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ 는 크기가 같고 방향이 반대이다.

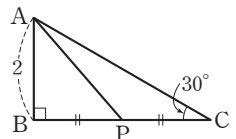
즉, 점 P는 변 BC의 중점이며
로 오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{BC}=\frac{2}{\tan 30^\circ}=2\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{PB}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } \overline{PA}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{PB}^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7} \text{이므로}$$

$$|\overrightarrow{PA}|^2=\overline{PA}^2=7$$



- 5 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC} + \vec{BA} = \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$ 이고 $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$ 이므로

$$|\vec{BC}| = 3 \quad \therefore \overline{BC} = 3$$

또 $\vec{a} - \vec{c} = \vec{AC} - \vec{DC} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}$ 이고 $|\vec{a} - \vec{c}| = 2$ 이므로

$$|\vec{AD}| = 2 \quad \therefore \overline{AD} = 2$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$$

- 6 $\vec{AC} = \vec{BC} - \vec{BA} = \vec{b} - \vec{a}$

오른쪽 그림과 같이 변 BC를

1 : 2로 내분하는 점을 E라 하면

$$\vec{BE} = \frac{1}{3}\vec{BC} = \frac{1}{3}\vec{b}$$

이때 $3\vec{AD} = \vec{BC}$ 이므로

$$\vec{AD} = \vec{BE}$$

따라서 사각형 ABED는 평행사변형이므로

$$\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BE} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\therefore \vec{AC} - \vec{BD} = (\vec{b} - \vec{a}) - \left(\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) = -2\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

- 7 $\neg$, $\triangle OAE \equiv \triangle OCF$ 이고 $\vec{AE} = 3\vec{BE}$ 이므로

$$\vec{CF} = \vec{EA} = \frac{3}{4}\vec{BA} = -\frac{3}{4}\vec{AB} = -\frac{3}{4}\vec{a}$$

$$\perp, \vec{CA} = \vec{CB} + \vec{BA} = -\vec{BC} - \vec{AB} = -\vec{a} - \vec{b}$$

$$\therefore \vec{OA} = \frac{1}{2}\vec{CA} = \frac{1}{2}(-\vec{a} - \vec{b}) = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\sqsubset, \vec{OF} = \vec{OC} + \vec{CF} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{CF}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CF}$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \left(-\frac{3}{4}\vec{a}\right) (\because \neg)$$

$$= -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, $\sqsubset$ 이다.

- 8 오른쪽 그림과 같이 두 선분 AB, BC를 이등분하는 두 변으로 하는 정사각형의 나머지 꼭짓점을 E라 하면

$$\vec{BE} = \sqrt{2}\vec{BD}$$

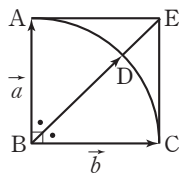
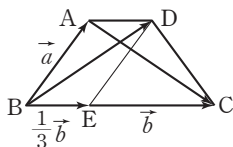
$$\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{BC}$$

$$\sqrt{2}\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BC}$$

$$\sqrt{2}\vec{BD} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\therefore \vec{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{a} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{b}$$

따라서 $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $n = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 $m + n = \sqrt{2}$



- 9 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{BD}$
 $= (\vec{AB} + \vec{BD}) + \vec{AD}$
 $= \vec{AD} + \vec{AD} = 2\vec{AD}$

이때 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 4$ 이므로 $|2\vec{AD}| = 4$

$$2|\vec{AD}| = 4, |\vec{AD}| = 2 \quad \therefore \overline{AD} = 2$$

따라서 정사각형의 한 변의 길이는 2이다.

- 10 $2(\vec{x} - \vec{y}) + 3\vec{y} = 2\vec{x} + \vec{y}$
 $= 2(7\vec{a} - 3\vec{b}) + (-2\vec{a} + 5\vec{b})$
 $= 12\vec{a} - \vec{b}$

- 11 $(m+n)(\vec{a} + \vec{b}) = 3(\vec{a} + n\vec{b}) + 6\vec{b}$ 에서
 $(m+n)\vec{a} + (m+n)\vec{b} = 3\vec{a} + (3n+6)\vec{b}$

두 벡터가 서로 같을 조건에서

$$m+n=3, m+n=3n+6$$

$$\therefore m+n=3, m-2n=6$$

두 식을 연립하여 풀면

$$m=4, n=-1 \quad \therefore m-n=5$$

- 12 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에 대하여 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$

라 하면

$$\vec{OP} = -2\vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{OQ} = -\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\vec{OR} = 2\vec{a} + \vec{b}$$

이를 $\vec{OQ} = t\vec{OP} + s\vec{OR}$ 에 대입하면

$$-\vec{a} + 3\vec{b} = t(-2\vec{a} + \vec{b}) + s(2\vec{a} + \vec{b})$$

$$\therefore -\vec{a} + 3\vec{b} = (-2t+2s)\vec{a} + (t+s)\vec{b}$$

따라서 $-1 = -2t+2s$, $3 = t+s$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면

$$t = \frac{7}{4}, s = \frac{5}{4}$$

$$\therefore 3t - s = \frac{21}{4} - \frac{5}{4} = 4$$

- 13 두 벡터 $\vec{x} + \vec{y}$, $m\vec{a} + 3\vec{b}$ 가 서로 평행하려면

$$m\vec{a} + 3\vec{b} = k(\vec{x} + \vec{y}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.

$$m\vec{a} + 3\vec{b} = m(\vec{x} + 2\vec{y}) + 3(3\vec{x} - \vec{y})$$

$$= (m+9)\vec{x} + (2m-3)\vec{y}$$

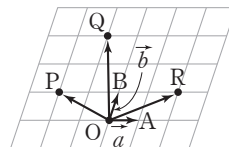
이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$(m+9)\vec{x} + (2m-3)\vec{y} = k(\vec{x} + \vec{y})$$

$$\therefore (m+9)\vec{x} + (2m-3)\vec{y} = k\vec{x} + k\vec{y}$$

따라서 $m+9=k$, $2m-3=k$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면

$$k=21, m=12$$



- 14 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (m\vec{a} + 3\vec{b}) - (3\vec{a} + \vec{b})$$

$$= (m-3)\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (\vec{a} - \vec{b}) - (3\vec{a} + \vec{b})$$

$$= -2\vec{a} - 2\vec{b}$$

이를 ①에 대입하면

$$(m-3)\vec{a} + 2\vec{b} = k(-2\vec{a} - 2\vec{b})$$

$$\therefore (m-3)\vec{a} + 2\vec{b} = -2k\vec{a} - 2k\vec{b}$$

따라서 $m-3 = -2k$, $2 = -2k$ 이므로

$$k = -1, m = 5$$

- 15 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -\vec{a} + \vec{b}$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (3\vec{a} - 2\vec{b}) - \vec{a}$$

$$= 2\vec{a} - 2\vec{b} = -2(-\vec{a} + \vec{b})$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (2\vec{a} - 3\vec{b}) - \vec{a}$$

$$= \vec{a} - 3\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} = (4\vec{a} - 3\vec{b}) - \vec{a}$$

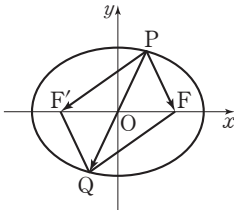
$$= 3\vec{a} - 3\vec{b} = -3(-\vec{a} + \vec{b})$$

따라서 $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AB}$ 이므로 직선 AB 위에 있는 점은 C, E이다.

- 16 사각형 PF'QF가 두 선분 PF, PF'을 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형이 되도록 점 Q를 잡으면

$$\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{QF'}, \overrightarrow{PF'} = \overrightarrow{QF}$$

즉, $\overrightarrow{PF} + \overrightarrow{PF'} = \overrightarrow{QF} + \overrightarrow{QF'}$ 이므로 타원의 정의에 의하여 점 Q는 타원 위의 점이다.



이때 $\overrightarrow{PF} + \overrightarrow{PF'} = \overrightarrow{PQ}$ 이므로

$$|\overrightarrow{PF} + \overrightarrow{PF'}| = |\overrightarrow{PQ}| = \overrightarrow{PQ}$$

선분 PQ는 타원의 장축일 때 길이가 최대이다.

따라서 타원의 장축의 길이는 $2 \times 3 = 6$ 이므로 구하는

$$|\overrightarrow{PF} + \overrightarrow{PF'}| \text{의 최댓값은 } 6 \text{이다.}$$

- 17 $\overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{AP_3} + \overrightarrow{AP_4} + \overrightarrow{AP_5} + \overrightarrow{AP_6}$

$$= (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OA}) + \dots + (\overrightarrow{OP_6} - \overrightarrow{OA})$$

$$= (\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_6}) - 6\overrightarrow{OA} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 오른쪽 그림과 같이 점 $P_1, P_2,$

$\dots, P_6$ 은 원의 둘레를 6등분 하므로

$$\overrightarrow{OP_1} = -\overrightarrow{OP_4}$$

$$\overrightarrow{OP_2} = -\overrightarrow{OP_5}$$

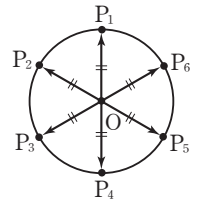
$$\overrightarrow{OP_3} = -\overrightarrow{OP_6}$$

$$\therefore \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_6} = \vec{0}$$

이를 ①에 대입하면

$$\overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{AP_3} + \overrightarrow{AP_4} + \overrightarrow{AP_5} + \overrightarrow{AP_6} = -6\overrightarrow{OA} = 6\overrightarrow{AO}$$

$$\therefore k = 6$$



- 18 ㄱ. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{CA}$ 에서

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PA}$$

$$\therefore \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{CP} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 직사각

형 ABCD의 두 대각선의 교

점을 M이라 하면

$$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PM}$$

이를 ①에 대입하면

$$2\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{CP} \quad \therefore \overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{PC}$$

따라서 점 P는 선분 CM의 중점이므로

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

ㄷ. ②에서 $|\overrightarrow{AP}| = \left|\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right|$ 이므

$$\text{로 } \overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

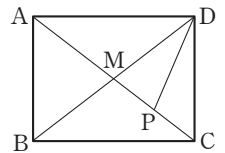
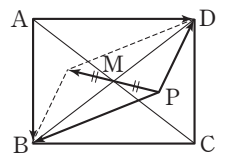
$$\therefore \overrightarrow{AP} : \overrightarrow{AC} = 3 : 4$$

$$\therefore \triangle ADC = \frac{4}{3}\triangle ADP$$

$$= \frac{4}{3} \times 3 = 4$$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는 $4 \times 2 = 8$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.



- 19 $\overrightarrow{OQ}$ 는 $\overrightarrow{OP}$ 와 방향이 같은 단위벡

터이므로 점 Q가 나타내는 도형

은 오른쪽 그림과 같이 중심이 원

점이고 반지름의 길이가 1인 부채

꼴의 호이다. 원점 O에서 중심이

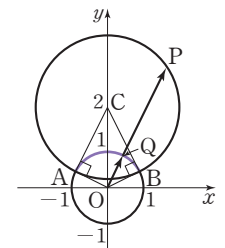
$C(0, 2)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$

인 원에 그은 두 접선의 접점을

각각 A, B라 하면 $\angle AOC = 60^\circ$

따라서 $\angle AOB = 120^\circ$ 이므로 구하는 도형의 길이는

$$2\pi \times 1 \times \frac{120^\circ}{360^\circ} = \frac{2}{3}\pi$$



II-2 01 평면벡터의 성분

1 위치벡터

개념 CHECK

87쪽

1 답 (1) $\frac{5}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}$ (2) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ (3) $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$

문제

88~90쪽

01-1 답 $\frac{3}{10}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

점 M은 변 OA의 중점이므로 $\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OA} = \frac{1}{2}\vec{a}$

점 N은 선분 BM을 3 : 2로 내분하는 점이므로 삼각형 OMB에서

$$\begin{aligned}\vec{ON} &= \frac{3\vec{OM} + 2\vec{OB}}{3+2} = \frac{3}{5}\vec{OM} + \frac{2}{5}\vec{OB} \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} = \frac{3}{10}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\end{aligned}$$

01-2 답 $\frac{4}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

$\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BC}$ 이고 점 E는 변 CD의 중점이므로 삼각형 BCD에서

$$\vec{BE} = \frac{\vec{BC} + \vec{BD}}{2}$$

$$= \frac{\vec{BC} + (\vec{BA} + \vec{BC})}{2} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$$

점 F는 선분 AE를 2 : 3으로 내분하는 점이므로 삼각형 BEA에서

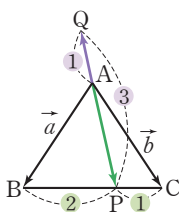
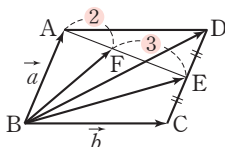
$$\begin{aligned}\vec{BF} &= \frac{2\vec{BE} + 3\vec{BA}}{2+3} = \frac{2}{5}\vec{BE} + \frac{3}{5}\vec{BA} \\ &= \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right) + \frac{3}{5}\vec{a} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\end{aligned}$$

01-3 답 $-\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$

주어진 조건을 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.

이때 점 P는 변 BC를 2 : 1로 내분하는 점이므로 삼각형 ABC에서

$$\begin{aligned}\vec{AP} &= \frac{2\vec{AC} + \vec{AB}}{2+1} \\ &= \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\end{aligned}$$



따라서 점 Q는 선분 AP를 1 : 3으로 외분하는 점이므로

$$\begin{aligned}\vec{AQ} &= -\frac{1}{2}\vec{AP} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \\ &= -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

02-1 답 풀이 참조

네 점 A, B, C, G의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{g}$ 라 하면

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} &= (\vec{OA} - \vec{OG}) + (\vec{OB} - \vec{OG}) + (\vec{OC} - \vec{OG}) \\ &= (\vec{a} - \vec{g}) + (\vec{b} - \vec{g}) + (\vec{c} - \vec{g}) \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\vec{g} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3 \times \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \vec{0} \\ \therefore \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} &= \vec{0}\end{aligned}$$

02-2 답 $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$

삼각형 ABC의 무게중심 G의 위치벡터를 $\vec{g}$ 라 하면

$$\begin{aligned}\vec{g} &= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \\ \therefore \vec{AG} &= \vec{OG} - \vec{OA} = \vec{g} - \vec{a} \\ &= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} - \vec{a} \\ &= -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

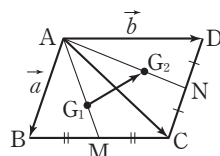
02-3 답 $-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

오른쪽 그림과 같이 두 변 BC, CD의 중점을 각각 M, N이라 하면 $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{a} + \vec{b}$ 이므로

$$\begin{aligned}\vec{AG}_1 &= \frac{2}{3}\vec{AM} = \frac{2}{3} \times \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b})}{2} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{AG}_2 &= \frac{2}{3}\vec{AN} = \frac{2}{3} \times \frac{\vec{AC} + \vec{AD}}{2} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}}{2} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \vec{G_1G_2} &= \vec{AG_2} - \vec{AG_1} \\ &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) - \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\end{aligned}$$



03-1 ㉔ 2

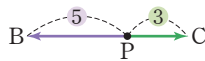
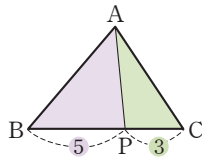
네 점 A, B, C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$ 라 하면
 $\vec{PA} + 3\vec{PB} + 4\vec{PC} = \vec{CA}$ 에서
 $(\vec{a} - \vec{p}) + 3(\vec{b} - \vec{p}) + 4(\vec{c} - \vec{p}) = \vec{a} - \vec{c}$
 $3\vec{b} + 5\vec{c} = 8\vec{p}$
 $\therefore \vec{p} = \frac{3\vec{b} + 5\vec{c}}{8} = \frac{5 \times \vec{c} + 3 \times \vec{b}}{5 + 3}$

따라서 점 P는 변 BC를 5 : 3으로
 내분하는 점이므로
 $m=5, n=3$
 $\therefore m-n=2$

다른 풀이

$\vec{PA} + 3\vec{PB} + 4\vec{PC} = \vec{CA}$ 에서
 $\vec{PA} + 3\vec{PB} + 4\vec{PC} = \vec{PA} - \vec{PC}$
 $\therefore 3\vec{PB} = -5\vec{PC}$

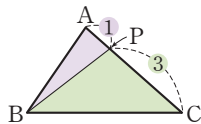
따라서 점 P는 변 BC를 5 : 3으로
 내분하는 점이므로
 $m=5, n=3$
 $\therefore m-n=2$



03-2 ㉔ 1 : 3

네 점 A, B, C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$ 라 하면
 $2\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{AB}$ 에서
 $2(\vec{a} - \vec{p}) + (\vec{b} - \vec{p}) + (\vec{c} - \vec{p}) = \vec{b} - \vec{a}$
 $3\vec{a} + \vec{c} = 4\vec{p}$
 $\therefore \vec{p} = \frac{3\vec{a} + \vec{c}}{4} = \frac{1 \times \vec{c} + 3 \times \vec{a}}{1 + 3}$

따라서 점 P는 변 AC를 1 : 3으로
 내분하는 점이므로
 $\triangle ABP : \triangle BCP = \vec{AP} : \vec{PC}$
 $= 1 : 3$



2 평면벡터의 성질

개념 CHECK

93쪽

1 ㉔ (1) (2, 1) (2) (-1, 3)

2 ㉔ (1) (-11, 14) (2) (6, -14)

문제

94~98쪽

04-1 ㉔ $(-10, 15), 5\sqrt{13}$

$2(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) - 3(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$
 $= -\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$
 $= -(2, 1) - (3, -6) + 5(-1, 2)$
 $= (-10, 15)$
 $\therefore |2(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) - 3(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})|$
 $= \sqrt{(-10)^2 + 15^2} = 5\sqrt{13}$

04-2 ㉔ $\sqrt{17}$

$2(\vec{x} + \vec{a}) = 3\vec{a} - \vec{b} + \vec{x}$ 에서
 $2\vec{x} + 2\vec{a} = 3\vec{a} - \vec{b} + \vec{x}$
 $\therefore \vec{x} = \vec{a} - \vec{b} = (4, 2) - (3, -2) = (1, 4)$
 $\therefore |\vec{x}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

04-3 ㉔ $-\frac{9}{5}$

$\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} = \left(\frac{1}{5}, k\right) + \frac{1}{5}(2, 5) = \left(\frac{3}{5}, k+1\right)$
 이때 $\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$ 가 단위벡터이므로 $\left|\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}\right| = 1$
 $\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + (k+1)^2} = 1$
 양변을 제곱하면
 $\frac{9}{25} + k^2 + 2k + 1 = 1, 25k^2 + 50k + 9 = 0$
 $(5k+1)(5k+9) = 0 \therefore k = -\frac{9}{5} \text{ 또는 } k = -\frac{1}{5}$
 그런데 $k < -1$ 이므로 $k = -\frac{9}{5}$

05-1 ㉔ (1) $-6\vec{a} - 4\vec{b}$ (2) $2\vec{a} + 4\vec{b}$

(1) $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$ 를 성분으로 나타내면
 $(8, 6) = k(-2, 1) + l(1, -3)$
 $= (-2k+l, k-3l)$
 두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여
 $8 = -2k+l, 6 = k-3l$
 두 식을 연립하여 풀면
 $k = -6, l = -4 \therefore \vec{c} = -6\vec{a} - 4\vec{b}$
 (2) $\vec{d} = k\vec{a} + l\vec{b}$ 를 성분으로 나타내면
 $(0, -10) = k(-2, 1) + l(1, -3)$
 $= (-2k+l, k-3l)$
 두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여
 $0 = -2k+l, -10 = k-3l$
 두 식을 연립하여 풀면
 $k = 2, l = 4 \therefore \vec{d} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$

05-2 [답] $x=2, y=-1$

$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ 를 성분으로 나타내면

$$(5, 4) = x(2, 3) + y(-1, 2)$$

$$= (2x-y, 3x+2y)$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$5=2x-y, 4=3x+2y$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=2, y=-1$$

05-3 [답] $\sqrt{10}$

$\vec{a}=\vec{b}$ 를 성분으로 나타내면

$$(x-1, y+2) = (2-y, 2x-1)$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$x-1=2-y, y+2=2x-1$$

$$\therefore x+y=3, 2x-y=3$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=2, y=1$$

따라서 $\vec{a}=(1, 3)$ 이므로

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$$

06-1 [답] $(6, 4)$

점 C의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\vec{AC} = (x-2, y-5)$$

$$\vec{OB} = \vec{AC} \text{이므로}$$

$$(4, -1) = (x-2, y-5)$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$4=x-2, -1=y-5$$

$$\therefore x=6, y=4$$

따라서 점 C의 좌표는 $(6, 4)$

06-2 [답] 6

$$\vec{AB} = (0-(-1), 2-1) = (1, 1)$$

$$\vec{DC} = (3-x, 5-y)$$

$$\vec{AB} = \vec{DC} \text{이므로}$$

$$(1, 1) = (3-x, 5-y)$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$1=3-x, 1=5-y$$

$$\therefore x=2, y=4$$

$$\therefore x+y=6$$

06-3 [답] $(2, 2)$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\vec{AP} = (x+1, y-2), \vec{BP} = (x-4, y-3),$$

$$\vec{CP} = (x-3, y-1)$$

$$\therefore \vec{AP} + \vec{BP} + \vec{CP}$$

$$= (x+1, y-2) + (x-4, y-3) + (x-3, y-1)$$

$$= (3x-6, 3y-6)$$

$$\vec{AP} + \vec{BP} + \vec{CP} = \vec{0} \text{이므로}$$

$$(3x-6, 3y-6) = (0, 0)$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$3x-6=0, 3y-6=0 \quad \therefore x=2, y=2$$

따라서 점 P의 좌표는 $(2, 2)$

07-1 [답] $-\frac{1}{2}$

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{a} = k\vec{b} \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

$$(2, 2x-1) = k(x+1, 1) = (k(x+1), k)$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$2 = k(x+1), 2x-1 = k$$

$$k = 2x-1 \text{을 } 2 = k(x+1) \text{에 대입하면}$$

$$2 = (2x-1)(x+1), 2x^2+x-3=0$$

$$(2x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x=1$$

따라서 모든 x 의 값의 합은

$$-\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$$

07-2 [답] 6

두 벡터 $\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}$ 를 각각 성분으로 나타내면

$$\vec{a}-\vec{b} = (3, t) - (2, 4) = (1, t-4)$$

$$\vec{a}+\vec{b} = (3, t) + (2, 4) = (5, t+4)$$

두 벡터 $\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{a}-\vec{b} = k(\vec{a}+\vec{b}) \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

$$(1, t-4) = k(5, t+4) = (5k, k(t+4))$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$1=5k, t-4=k(t+4) \quad \therefore k=\frac{1}{5}, t=6$$

07-3 [답] $-\frac{1}{2}$

두 벡터 $\vec{a}+t\vec{c}, \vec{b}-\vec{a}$ 를 각각 성분으로 나타내면

$$\vec{a}+t\vec{c} = (5, 4) + t(3, 7) = (5+3t, 4+7t)$$

$$\vec{b}-\vec{a} = (-2, 3) - (5, 4) = (-7, -1)$$

두 벡터 $\vec{a}+t\vec{c}, \vec{b}-\vec{a}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{a}+t\vec{c} = k(\vec{b}-\vec{a}) \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

$$(5+3t, 4+7t) = k(-7, -1) = (-7k, -k)$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$5+3t = -7k, 4+7t = -k$$

두 식을 연립하여 풀면

$$k = -\frac{1}{2}, t = -\frac{1}{2}$$

08-1 [답] $x+y-2=0$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overrightarrow{AP}=(x, y-1), \overrightarrow{BP}=(x-1, y-2)$$

$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|$ 이므로

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$$

양변을 제곱하면

$$x^2+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2-4y+4$$

$$\therefore x+y-2=0$$

08-2 [답] 4π

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overrightarrow{PA}=(2-x, 3-y), \overrightarrow{PB}=(4-x, -y),$$

$$\overrightarrow{PC}=(-x, -1-y)$$

$$\therefore \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$$

$$=(2-x, 3-y)+(4-x, -y)+(-x, -1-y)$$

$$=(6-3x, 2-3y)$$

$$|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|=6 \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{(6-3x)^2+(2-3y)^2}=6$$

양변을 제곱하면

$$9(x-2)^2+9\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=36$$

$$\therefore (x-2)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=4$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $\left(2, \frac{2}{3}\right)$ 이고

반지름의 길이가 2인 원이므로 그 둘레의 길이는

$$2\pi \times 2=4\pi$$

연습문제

99~101쪽

- | | | |
|--|--|-----------------|
| 1 $\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$ | 2 $-\frac{5}{4}\vec{a}+\frac{5}{4}\vec{b}$ | 3 ⑤ |
| 4 ① | 5 $-2\vec{a}-\vec{b}$ | 6 10 |
| 7 ① | | |
| 8 ② | 9 $-5, 1$ | 10 24 |
| | | 11 $2\sqrt{17}$ |
| 12 $\left(\frac{9}{4}, \frac{7}{4}\right)$ | 13 ② | 14 ① |
| | | 15 ④ |
| 16 ⑤ | 17 3 | 18 ④ |
| | | 19 ⑤ |
| 20 27 | | |
| 21 2 | | |

1 점 M이 선분 AB의 중점이므로

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\frac{(2\vec{a}-3\vec{b})+(\vec{a}+2\vec{b})}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$$

2 선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점 P의 위치벡터를 $\vec{p}$ 라 하면

$$\vec{p}=\frac{\vec{b}+3\vec{a}}{1+3}=\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$$

또 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점 Q의 위치벡터를 $\vec{q}$ 라 하면

$$\vec{q}=\frac{3\vec{b}-\vec{a}}{3-1}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ}=\vec{q}-\vec{p}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}\right)-\left(\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}\right)=-\frac{5}{4}\vec{a}+\frac{5}{4}\vec{b}$$

3 점 M은 변 AB의 중점이므로

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

점 N은 선분 CM을 3 : 2로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{BN}=\frac{3\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{BC}}{3+2}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BM}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$$

$$=\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{10}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$$

$$\text{따라서 } m=\frac{3}{10}, n=\frac{2}{5} \text{ 이므로 } m+n=\frac{7}{10}$$

4 점 A, B, C, D, M, N의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{m}, \vec{n}$ 이라 하면 두 점 M, N은 각각 두 변 AB, CD의 중점이므로

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}, \vec{n}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}$$

$$\therefore \overrightarrow{MN}=\vec{n}-\vec{m}=\left(\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\right)-\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)$$

$$=\frac{(\vec{d}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{b})}{2}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}}{2}$$

5 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ 에서

$$\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=-\vec{a}-\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA}=(-\vec{a}-\vec{b})-\vec{a}=-2\vec{a}-\vec{b}$$

6 네 점 A, B, C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$ 라 하면

$$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{CA} \text{ 에서}$$

$$(\vec{a}-\vec{p})+2(\vec{b}-\vec{p})+3(\vec{c}-\vec{p})=\vec{a}-\vec{c}, 2\vec{b}+4\vec{c}=6\vec{p}$$

$$\therefore \vec{p}=\frac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}=\frac{2 \times \vec{c}+1 \times \vec{b}}{2+1}$$

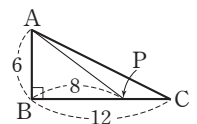
즉, 점 P는 변 BC를 2 : 1로 내분

하는 점이므로

$$\overrightarrow{PB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3} \times 12=8$$

따라서 직각삼각형 ABP에서

$$|\overrightarrow{PA}|=PA=\sqrt{AB^2+BP^2}=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10$$



- 7 $\vec{a}$ 는 단위벡터이므로 $|\vec{a}|=1$

$$\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + (x-1)^2} = 1$$

양변을 제곱하면

$$\frac{16}{25} + x^2 - 2x + 1 = 1, 25x^2 - 50x + 16 = 0$$

$$(5x-2)(5x-8)=0$$

$$\therefore x = \frac{2}{5} \text{ 또는 } x = \frac{8}{5}$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $x = \frac{8}{5}$

- 8 $(\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}) - (2\vec{c} - \vec{a})$

$$= \vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} - 2\vec{c} + \vec{a}$$

$$= 2\vec{a} + 3\vec{b} - 3\vec{c}$$

$$= 2(2, 1) + 3(-1, 3) - 3(0, 4)$$

$$= (1, -1)$$

$$\therefore |(\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}) - (2\vec{c} - \vec{a})| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

- 9 $\vec{a} + x\vec{b} = (4, -2) + x(2, 0) = (4+2x, -2)$

$\vec{a} + x\vec{b}$ 의 크기가 $2\sqrt{10}$ 이어야 하므로

$$\sqrt{(4+2x)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10}$$

양변을 제곱하면

$$4x^2 + 16x + 16 + 4 = 40, x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x+5)(x-1)=0 \quad \therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 1$$

- 10 $\vec{a} + \vec{b} = (4t-2, -1) + \left(2, 1+\frac{3}{t}\right) = \left(4t, \frac{3}{t}\right)$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (4t)^2 + \left(\frac{3}{t}\right)^2 = 16t^2 + \frac{9}{t^2}$$

$t^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$16t^2 + \frac{9}{t^2} \geq 2\sqrt{16t^2 \times \frac{9}{t^2}} = 24$$

$$\left(\text{단, 등호는 } 16t^2 = \frac{9}{t^2}, \text{ 즉 } t = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $|\vec{a} + \vec{b}|^2$ 의 최솟값은 24이다.

- 11 $\vec{a} = \vec{b}$ 를 성분으로 나타내면

$$(x+2, y-1) = (4-y, 2x-5)$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$x+2=4-y, y-1=2x-5$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=2, y=0$$

$$\vec{a} = \vec{b} = (4, -1) \text{이므로}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (8, -2)$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{8^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{17}$$

- 12 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\vec{AP} = (x+1, y-2), \vec{BP} = (x-4, y-3),$$

$$\vec{PC} = (3-x, 1-y)$$

$$\vec{AP} + \vec{BP} = 2\vec{PC} \text{이므로}$$

$$(x+1, y-2) + (x-4, y-3) = 2(3-x, 1-y)$$

$$(2x-3, 2y-5) = (6-2x, 2-2y)$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$2x-3=6-2x, 2y-5=2-2y$$

$$\therefore x = \frac{9}{4}, y = \frac{7}{4}$$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{9}{4}, \frac{7}{4}\right)$

- 13 점 P는 직선 $y = -x+2$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를

$(a, -a+2)$ 라 하면

$$\vec{AP} = (a, -a+1), \vec{BP} = (a-2, -a-1)$$

$$\therefore \vec{AP} + \vec{BP} = (a, -a+1) + (a-2, -a-1)$$

$$= (2a-2, -2a)$$

$$\therefore |\vec{AP} + \vec{BP}| = \sqrt{(2a-2)^2 + (-2a)^2}$$

$$= \sqrt{4a^2 - 8a + 4 + 4a^2}$$

$$= \sqrt{8a^2 - 8a + 4}$$

$$= \sqrt{8\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + 2}$$

따라서 $a = \frac{1}{2}$ 일 때 $|\vec{AP} + \vec{BP}|$ 의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

- 14 $|\vec{OA}|=2, |\vec{OB}|=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=3$

이때 선분 OP가 $\angle AOB$ 의 이등분선이므로

$$\vec{AP} : \vec{PB} = \vec{OA} : \vec{OB} = 2 : 3$$

따라서 점 P는 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점이므로

$$\vec{OP} = \frac{2\vec{OB} + 3\vec{OA}}{2+3} = \frac{3}{5}\vec{OA} + \frac{2}{5}\vec{OB}$$

$$= \frac{3}{5}(0, 2) + \frac{2}{5}(2\sqrt{2}, 1) = \left(\frac{4\sqrt{2}}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

$$\therefore |\vec{OP}| = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{96}{25}} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$$

- 15 $\vec{a} - \vec{b} = (1, -2) - (3, t) = (-2, -t-2)$

$$2\vec{a} + \vec{b} = 2(1, -2) + (3, t) = (5, t-4)$$

두 벡터 $\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{a} - \vec{b} = k(2\vec{a} + \vec{b}) \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

$$(-2, -t-2) = k(5, t-4) = (5k, k(t-4))$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-2=5k, -t-2=k(t-4)$$

$$\therefore k = -\frac{2}{5}, t = -6$$

- 16 $\vec{v}=(x, y)$ 라 하면
 $\vec{v}+\vec{b}=(x, y)+(4, -2)=(x+4, y-2)$
 두 벡터 $\vec{a}, \vec{v}+\vec{b}$ 가 서로 평행하므로
 $\vec{v}+\vec{b}=k\vec{a}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $(x+4, y-2)=k(3, 1)=(3k, k)$
 두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여
 $x+4=3k, y-2=k$
 $\therefore x=3k-4, y=k+2$
 $\therefore |\vec{v}|^2=(3k-4)^2+(k+2)^2$
 $=9k^2-24k+16+k^2+4k+4$
 $=10k^2-20k+20$
 $=10(k-1)^2+10$
 따라서 $k=1$ 일 때 $|\vec{v}|^2$ 의 최솟값은 10이다.

- 17 $\vec{AB}=\vec{PB}-\vec{PA}$
 $= (2, 4)-(1, 5)=(1, -1)$
 $\vec{AC}=\vec{PC}-\vec{PA}$
 $= (a, 3)-(1, 5)=(a-1, -2)$
 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로
 $\vec{AC}=k\vec{AB}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $(a-1, -2)=k(1, -1)=(k, -k)$
 두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여
 $a-1=k, -2=-k$
 $\therefore k=2, a=3$

- 18 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
 $\vec{AP}=(x-3, y+4), \vec{BP}=(x-1, y+2)$
 $|\vec{AP}|=\sqrt{2}|\vec{BP}|$ 이므로
 $\sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2}=\sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$
 양변을 제곱하면
 $x^2-6x+9+y^2+8y+16=2(x^2-2x+1+y^2+4y+4)$
 $x^2+2x+y^2-15=0$
 $\therefore (x+1)^2+y^2=16$
 따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $(-1, 0)$ 이고
 반지름의 길이가 4인 원이므로 그 넓이는
 $\pi \times 4^2=16\pi$

- 19 점 D는 변 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로
 $\vec{AB}=\frac{3}{2}\vec{AD}=\frac{3}{2}\vec{a}$
 점 E는 변 AC를 1 : 2로 내분하는 점이므로
 $\vec{AC}=3\vec{AE}=3\vec{b}$

삼각형 ABE에서 점 P가 변 BE를 $m : (1-m)$ 으로 내
 분하는 점이라 하면

$$\vec{AP}=\frac{m\vec{AE}+(1-m)\vec{AB}}{m+(1-m)}=m\vec{AE}+(1-m)\vec{AB}$$

$$=\frac{3}{2}(1-m)\vec{a}+m\vec{b} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또 삼각형 ADC에서 점 P가 변 CD를 $n : (1-n)$ 으로
 내분하는 점이라 하면

$$\vec{AP}=\frac{n\vec{AD}+(1-n)\vec{AC}}{n+(1-n)}=n\vec{AD}+(1-n)\vec{AC}$$

$$=n\vec{a}+3(1-n)\vec{b} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{3}{2}(1-m)\vec{a}+m\vec{b}=n\vec{a}+3(1-n)\vec{b}$$

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 는 서로 평행하지 않으므로

$$\frac{3}{2}(1-m)=n, m=3(1-n)$$

두 식을 연립하여 풀면

$$m=\frac{3}{7}, n=\frac{6}{7}$$

따라서 $\vec{AP}=\frac{6}{7}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}$ 이므로 $x=\frac{6}{7}, y=\frac{3}{7}$

$$\therefore x+y=\frac{9}{7}$$

다른 풀이

세 점 B, P, E가 한 직선 위에 있으므로

$$\vec{BP}=k\vec{BE} \text{ (단, } k \text{는 0이 아닌 실수)}$$

$$\vec{AP}-\vec{AB}=k(\vec{AE}-\vec{AB})$$

$$\therefore \vec{AP}=k\vec{AE}+(1-k)\vec{AB}$$

$$=\frac{3}{2}(1-k)\vec{a}+k\vec{b} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또 세 점 C, P, D가 한 직선 위에 있으므로

$$\vec{CP}=l\vec{CD} \text{ (단, } l \text{은 0이 아닌 실수)}$$

$$\vec{AP}-\vec{AC}=l(\vec{AD}-\vec{AC})$$

$$\therefore \vec{AP}=l\vec{AD}+(1-l)\vec{AC}$$

$$=l\vec{a}+3(1-l)\vec{b} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{3}{2}(1-k)\vec{a}+k\vec{b}=l\vec{a}+3(1-l)\vec{b}$$

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 는 서로 평행하지 않으므로

$$\frac{3}{2}(1-k)=l, k=3(1-l)$$

두 식을 연립하여 풀면

$$k=\frac{3}{7}, l=\frac{6}{7}$$

따라서 $\vec{AP}=\frac{6}{7}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}$ 이므로 $x=\frac{6}{7}, y=\frac{3}{7}$

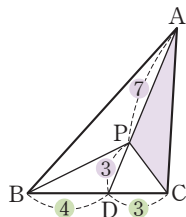
$$\therefore x+y=\frac{9}{7}$$

20 $3\vec{PA} + 3\vec{PB} + 4\vec{PC} = \vec{0}$ 에서 $-3\vec{PA} = 3\vec{PB} + 4\vec{PC}$
 $\therefore 3\vec{AP} = 7 \times \frac{4\vec{PC} + 3\vec{PB}}{7} = 7 \times \frac{4\vec{PC} + 3\vec{PB}}{4+3}$

이때 $\frac{4\vec{PC} + 3\vec{PB}}{4+3} = \vec{PD}$ 라 하면 점 D는 변 BC를 4 : 3으로 내분하는 점이다.

또 $3\vec{AP} = 7\vec{PD}$ 에서 $|\vec{AP}| : |\vec{PD}| = 7 : 3$ 이므로 점 P는 선분 AD를 7 : 3으로 내분하는 점이다.

$$\begin{aligned}\therefore \triangle APC &= \frac{7}{10} \triangle ADC \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{3}{7} \triangle ABC \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{3}{7} \times 90 \\ &= 27\end{aligned}$$



21 오른쪽 그림과 같이 점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 원점으로 하고 두 직선 AB, CO가 각각 x축, y축이 되도록 좌표평면에 놓으면

A(-3, 0), B(3, 0)

이때 정삼각형 ABC의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$ 이므로

C(0, $3\sqrt{3}$)

점 P의 좌표를 (x, y)라 하면 점 P는 변 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$x = \frac{2 \times 3 + 1 \times (-3)}{2+1} = 1, y = \frac{2 \times 0 + 1 \times 0}{2+1} = 0$$

$\therefore P(1, 0)$

$\vec{OG} = \frac{1}{3} \vec{OC} = \sqrt{3}$ 이므로 G(0, $\sqrt{3}$)

$$\therefore \vec{PG} = \vec{OG} - \vec{OP} = (0, \sqrt{3}) - (1, 0) = (-1, \sqrt{3})$$

$$\therefore |\vec{PG}| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

다른 풀이

점 P는 변 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\vec{AP} = \frac{2}{3} \vec{AB}$$

변 BC의 중점을 M이라 하면

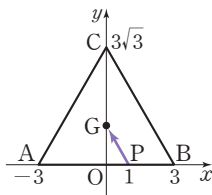
$$\vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AM} = \frac{2}{3} \times \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{3}$$

$$\therefore \vec{PG} = \vec{AG} - \vec{AP} = \left(\frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{3} \right) - \frac{2}{3} \vec{AB}$$

$$= -\frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC} = \frac{1}{3} (\vec{AC} - \vec{AB})$$

$$= \frac{1}{3} \vec{BC}$$

$$\therefore |\vec{PG}| = \frac{1}{3} |\vec{BC}| = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$



II-2 02 평면벡터의 내적

1 평면벡터의 내적

개념 CHECK

103쪽

1 답 (1) 4 (2) $-4\sqrt{2}$

2 답 (1) 10 (2) -11

문제

104~106쪽

01-1 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) 1 (4) $-\frac{3}{2}$

(1) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos 60^\circ$

$$= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(2) $\vec{BO} = \vec{AF}$, $\angle BAF = 120^\circ$ 이므로

$$\vec{AB} \cdot \vec{BO} = \vec{AB} \cdot \vec{AF}$$

$$= -|\vec{AB}| |\vec{AF}| \cos (180^\circ - 120^\circ)$$

$$= -1 \times 1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

(3) $\vec{OB} = \vec{EO}$ 이므로

$$\vec{OB} \cdot \vec{EO} = \vec{OB} \cdot \vec{OB} = |\vec{OB}| |\vec{OB}| \cos 0^\circ$$

$$= |\vec{OB}|^2 = 1$$

(4) 오른쪽 그림과 같이 $\vec{OF}$ 를 평

행이동하여 시점을 F로 일치

시켰을 때의 종점을 F'이라

하면

$$\vec{OF} = \vec{FF'}$$

직각삼각형 CDF에서

$$\angle FCD = 60^\circ, \vec{CF} = 2 \text{이므로}$$

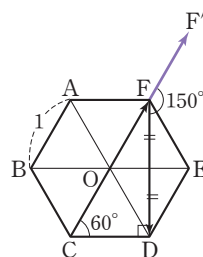
$$\vec{FD} = \vec{CF} \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

따라서 $\angle F'FD = 150^\circ$ 이므로

$$\vec{OF} \cdot \vec{FD} = \vec{FF'} \cdot \vec{FD}$$

$$= -|\vec{FF'}| |\vec{FD}| \cos (180^\circ - 150^\circ)$$

$$= -1 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2}$$



01-2 답 9

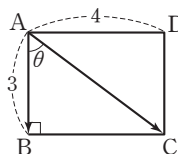
오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\vec{AB}$,

$\vec{AC}$ 가 이루는 각의 크기를

$\theta (0^\circ < \theta < 90^\circ)$ 라 하면 직각삼각형

ABC에서

$$|\vec{AC}| \cos \theta = |\vec{AB}|$$



$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos \theta \\ &= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AB}| \\ &= |\overrightarrow{AB}|^2 = 9\end{aligned}$$

02-1 [답] (1) 4 (2) 2

$$\begin{aligned}(1) \vec{a} + 3\vec{b} \text{를 성분으로 나타내면} \\ \vec{a} + 3\vec{b} &= (-5, 3) + 3(1, -2) \\ &= (-5+3, 3-6) = (-2, -3) \\ \therefore (\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot \vec{b} &= (-2, -3) \cdot (1, -2) \\ &= (-2) \times 1 + (-3) \times (-2) = 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \vec{a} \cdot \vec{b} \text{를 } k \text{에 대한 식으로 나타내면} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= (2, k-1) \cdot (-3, k+2) \\ &= 2 \times (-3) + (k-1)(k+2) \\ &= k^2 + k - 8 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= -2 \text{이므로} \\ k^2 + k - 8 &= -2, \quad k^2 + k - 6 = 0 \\ (k+3)(k-2) &= 0 \quad \therefore k = -3 \text{ 또는 } k = 2 \\ \text{그런데 } k > 0 \text{이므로 } k &= 2\end{aligned}$$

02-2 [답] 3

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (-3, 2) - (-1, 3) = (-2, -1) \\ \overrightarrow{CD} &= (0, -2) - (-1, 3) = (1, -5) \\ \therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= (-2, -1) \cdot (1, -5) \\ &= (-2) \times 1 + (-1) \times (-5) = 3\end{aligned}$$

02-3 [답] 2

$$\begin{aligned}|\vec{a}| = 5 \text{이므로 } \sqrt{(k-2)^2 + (-3)^2} &= 5 \\ \text{양변을 제곱하면} \\ k^2 - 4k + 4 + 9 &= 25, \quad k^2 - 4k - 12 = 0 \\ (k+2)(k-6) &= 0 \quad \therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 6 \\ \text{그런데 } k < 0 \text{이므로 } k &= -2 \\ \text{따라서 } \vec{a} &= (-4, -3), \quad \vec{b} = (4, -6) \text{이므로} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= (-4, -3) \cdot (4, -6) \\ &= (-4) \times 4 + (-3) \times (-6) = 2\end{aligned}$$

03-1 [답] (1) $\sqrt{29}$ (2) 3

$$\begin{aligned}(1) |2\vec{a} - \vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ |\vec{a}| &= 3, \quad |\vec{b}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \text{이므로} \\ |2\vec{a} - \vec{b}|^2 &= 4 \times 3^2 - 4 \times 2 + 1^2 = 29 \\ \therefore |2\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{29} \\ (2) |\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{7} \text{의 양변을 제곱하면} \\ |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 7 \\ |\vec{a}| &= \sqrt{5}, \quad |\vec{b}| = 2\sqrt{2} \text{이므로} \\ (\sqrt{5})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (2\sqrt{2})^2 &= 7, \quad -2\vec{a} \cdot \vec{b} = -6 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= 3\end{aligned}$$

03-2 [답] 65

$$\begin{aligned}|\vec{a} + \vec{b}| = 4 \text{의 양변을 제곱하면} \\ |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 16 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{10} \text{의 양변을 제곱하면} \\ |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 10 \quad \dots\dots \textcircled{2} \\ \textcircled{1} + \textcircled{2} \text{을 하면} \\ 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) &= 26 \quad \therefore |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 13 \\ \therefore |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 + |2\vec{a} - \vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 5(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) = 5 \times 13 = 65\end{aligned}$$

03-3 [답] 3

$$\begin{aligned}\text{두 벡터 } \vec{a}, \vec{b} \text{가 이루는 각의 크기가 } 60^\circ, \quad |\vec{b}| = \frac{1}{3} \text{이므로} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = |\vec{a}| \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{|\vec{a}|}{6} \\ |\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7} \text{의 양변을 제곱하면} \\ |\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 &= 7 \\ |\vec{a}|^2 - |\vec{a}| - 6 &= 0, \quad (|\vec{a}| + 2)(|\vec{a}| - 3) = 0 \\ \therefore |\vec{a}| &= -2 \text{ 또는 } |\vec{a}| = 3 \\ \text{그런데 } |\vec{a}| \geq 0 \text{이므로 } |\vec{a}| &= 3\end{aligned}$$

2 두 평면벡터가 이루는 각의 크기

개념 CHECK

107쪽

1 [답] (1) 60° (2) 135°

2 [답] (1) $\frac{2}{3}$ (2) $-\frac{3}{2}$

문제

108~110쪽

04-1 [답] (1) 120° (2) $3\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}(1) \vec{a} + \vec{b} &= (\sqrt{3}, 1) + (-\sqrt{3}, 0) = (0, 1) \\ -\vec{a} - 2\vec{b} &= -(\sqrt{3}, 1) - 2(-\sqrt{3}, 0) = (\sqrt{3}, -1) \\ \therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{a} - 2\vec{b}) &= (0, 1) \cdot (\sqrt{3}, -1) \\ &= 0 \times \sqrt{3} + 1 \times (-1) = -1 \\ (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{a} - 2\vec{b}) < 0 \text{이므로 두 벡터 } \vec{a} + \vec{b}, \\ -\vec{a} - 2\vec{b} \text{가 이루는 각의 크기를 } \theta \text{ (} 90^\circ < \theta \leq 180^\circ \text{)라} \\ \text{하면} \\ \cos(180^\circ - \theta) &= -\frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (-\vec{a} - 2\vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| |\vec{a} - 2\vec{b}|} \\ &= -\frac{-1}{\sqrt{0^2 + 1^2} \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

그런데 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 이므로

$$180^\circ - \theta = 60^\circ \quad \therefore \theta = 120^\circ$$

- (2) 두 벡터 $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{b} = (-3, k)$ 가 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\cos 60^\circ = \frac{1 \times (-3) + \sqrt{3} \times k}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \sqrt{(-3)^2 + k^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}k - 3}{2\sqrt{k^2 + 9}}, \sqrt{k^2 + 9} = \sqrt{3}k - 3$$

양변을 제곱하면

$$k^2 + 9 = 3k^2 - 6\sqrt{3}k + 9, k^2 - 3\sqrt{3}k = 0$$

$$k(k - 3\sqrt{3}) = 0 \quad \therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 3\sqrt{3}$$

그런데 k 는 양수이므로 $k = 3\sqrt{3}$

04-2 [답] 135°

$\angle BAC = \theta$ 라 하면 θ 는 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 가 이루는 각의 크기이다.

$$\overrightarrow{AB} = (2, 3) - (1, 1) = (1, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (3, -5) - (1, 1) = (2, -6)$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (1, 2) \cdot (2, -6)$$

$$= 1 \times 2 + 2 \times (-6) = -10$$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$ 에서 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - \theta) &= -\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} \\ &= -\frac{-10}{\sqrt{1^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + (-6)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

그런데 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 이므로

$$180^\circ - \theta = 45^\circ \quad \therefore \theta = 135^\circ$$

05-1 [답] 90°

$|4\vec{a} + \vec{b}| = |4\vec{a} - \vec{b}|$ 의 양변을 제곱하면

$$16|\vec{a}|^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16|\vec{a}|^2 - 8\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$16\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를

$\theta (0^\circ \leq \theta < 90^\circ)$ 라 하면

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0$$

$$\therefore \cos \theta = 0 \quad (\because |\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0)$$

$$\therefore \theta = 90^\circ$$

05-2 [답] 150°

$|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{13}$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 13$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 1 \text{ 이므로}$$

$$(\sqrt{3})^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \times 1^2 = 13, -4\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{2}$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 $\theta (90^\circ < \theta \leq 180^\circ)$ 라 하면

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = -\frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

그런데 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 이므로

$$180^\circ - \theta = 30^\circ \quad \therefore \theta = 150^\circ$$

05-3 [답] 45°

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ 에서 $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$

$|\vec{a} + \vec{b}| = |-\vec{c}|$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

$$|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 6\sqrt{2}, |\vec{c}| = 6\sqrt{5} \text{ 이므로}$$

$$6^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (6\sqrt{2})^2 = (6\sqrt{5})^2$$

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} = 72 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 36$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를

$\theta (0^\circ \leq \theta < 90^\circ)$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{36}{6 \times 6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

그런데 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ 이므로 $\theta = 45^\circ$

06-1 [답] (1) $\frac{1}{3}$ (2) -2

$$\vec{a} - x\vec{b} = (2, -1) - x(-1, -3) = (x+2, 3x-1)$$

$$\vec{a} + 2\vec{b} = (2, -1) + 2(-1, -3) = (0, -7)$$

(1) $(\vec{a} - x\vec{b}) \perp (\vec{a} + 2\vec{b})$ 이면

$$(\vec{a} - x\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = 0 \text{ 이므로}$$

$$(x+2, 3x-1) \cdot (0, -7) = 0$$

$$-7(3x-1) = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{3}$$

(2) $(\vec{a} - x\vec{b}) \parallel (\vec{a} + 2\vec{b})$ 이면

$$(\vec{a} - x\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = \pm |\vec{a} - x\vec{b}| |\vec{a} + 2\vec{b}| \text{ 이므로}$$

$$(x+2, 3x-1) \cdot (0, -7)$$

$$= \pm \sqrt{(x+2)^2 + (3x-1)^2} \sqrt{0^2 + (-7)^2}$$

$$-3x+1 = \pm \sqrt{10x^2 - 2x + 5}$$

양변을 제곱하면

$$9x^2 - 6x + 1 = 10x^2 - 2x + 5$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0, (x+2)^2 = 0$$

$$\therefore x = -2$$

다른 풀이

(2) $(\vec{a} - x\vec{b}) \parallel (\vec{a} + 2\vec{b})$ 이면

$$\vec{a} - x\vec{b} = k(\vec{a} + 2\vec{b}) \quad (\text{단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

$$(x+2, 3x-1) = k(0, -7) = (0, -7k)$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$x+2=0, 3x-1=-7k$$

$$\therefore x = -2, k = 1$$

06-2 [답] $x=-9, y=-3$

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$(x, 6) \cdot (-6, 4) = \pm \sqrt{x^2+6^2} \sqrt{(-6)^2+4^2}$$

$$-3x+12 = \pm \sqrt{13} \sqrt{x^2+36}$$

양변을 제곱하면

$$9x^2 - 72x + 144 = 13x^2 + 468$$

$$x^2 + 18x + 81 = 0$$

$$(x+9)^2 = 0 \quad \therefore x = -9$$

두 벡터 $\vec{b}, \vec{c}$ 가 서로 수직이므로 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

$$(-6, 4) \cdot (-2, y) = 0$$

$$(-6) \times (-2) + 4 \times y = 0$$

$$12 + 4y = 0 \quad \therefore y = -3$$

연습문제

111~113쪽

1 ④	2 ②	3 14	4 ③	5 4
6 ①	7 3	8 15	9 $\sqrt{7}$	
10 ②	11 $-2\sqrt{3}$	12 ①	13 135°	14 ⑤
15 5	16 60°	17 ②	18 $-\frac{3}{5}$	19 -4
20 7	21 ⑤	22 ③		

1 삼각형 ABP는 $\angle BPA = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BP}^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}$ 가 이루는 각의 크기를 $\theta (0^\circ < \theta < 90^\circ)$

라 하면 직각삼각형 ABP에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AP}| \cos \theta$$

$$= 10 \times 8 \times \frac{4}{5} = 64$$

2 두 벡터 $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ 가 이루는 각의 크기를 $\theta (0^\circ < \theta < 90^\circ)$

라 하면 직각삼각형 ABH에서

$$|\overrightarrow{BA}| \cos \theta = |\overrightarrow{BH}|$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cos \theta = |\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{BA}| \cos \theta$$

$$= |\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{BH}| = 7 \times 4 = 28$$

3 $\vec{a} + \vec{b} = (3, -2) + (-2, 5) = (1, 3)$

$$\vec{b} + \vec{c} = (-2, 5) + (-2, 1) = (-4, 6)$$

$$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (1, 3) \cdot (-4, 6)$$

$$= 1 \times (-4) + 3 \times 6 = 14$$

$$4 \quad \overrightarrow{AC} = (6, 1) - (x, -1) = (-x+6, 2)$$

$$\overrightarrow{BD} = (2, -x+1) - (3, -2) = (-1, -x+3)$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2 \text{이므로}$$

$$(-x+6, 2) \cdot (-1, -x+3) = -2$$

$$-(-x+6) + 2(-x+3) = -2 \quad \therefore x = 2$$

5 $|\vec{a}| = 2\sqrt{10}$ 이므로

$$\sqrt{6^2 + (3k-4)^2} = 2\sqrt{10}$$

양변을 제곱하면

$$36 + 9k^2 - 24k + 16 = 40, \quad 3k^2 - 8k + 4 = 0$$

$$(3k-2)(k-2) = 0 \quad \therefore k = \frac{2}{3} \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 k 는 정수이므로 $k = 2$

따라서 $\vec{a} = (6, 2), \vec{b} = (-1, 5)$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (6, 2) \cdot (-1, 5)$$

$$= 6 \times (-1) + 2 \times 5 = 4$$

$$6 \quad t\vec{a} + \vec{b} = t(-1, 1) + (2, -1)$$

$$= (-t+2, t-1)$$

$$\vec{a} - t\vec{b} = (-1, 1) - t(2, -1)$$

$$= (-2t-1, t+1)$$

$$\therefore f(t) = (t\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - t\vec{b})$$

$$= (-t+2, t-1) \cdot (-2t-1, t+1)$$

$$= (-t+2)(-2t-1) + (t-1)(t+1)$$

$$= 3t^2 - 3t - 3 = 3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{15}{4}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때 $f(t)$ 의 최솟값은 $-\frac{15}{4}$ 이다.

7 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overrightarrow{AB} = (4, 2) - (1, -2) = (3, 4)$$

$$\overrightarrow{CP} = (x, y) - (1, 2) = (x-1, y-2)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CP} = 4 \text{이므로}$$

$$(3, 4) \cdot (x-1, y-2) = 4$$

$$3(x-1) + 4(y-2) = 4$$

$$\therefore 3x + 4y - 15 = 0$$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 직선 $3x + 4y - 15 = 0$ 이다.

따라서 $|\overrightarrow{OP}|$ 의 최솟값은 원점 O와 직선 $3x + 4y - 15 = 0$

사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 3$$

8 포물선 $y^2 = 12x$ 의 초점 F의 좌표는 $(3, 0)$

점 P의 좌표를 $(a, 2\sqrt{3a}) (a \geq 0)$ 라 하면

$$\overrightarrow{AP} = (a, 2\sqrt{3a}) - (5, 0) = (a-5, 2\sqrt{3a})$$

$$\overrightarrow{FP} = (a, 2\sqrt{3a}) - (3, 0) = (a-3, 2\sqrt{3a})$$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{FP} &= (a-5, 2\sqrt{3a}) \cdot (a-3, 2\sqrt{3a}) \\ &= (a-5)(a-3) + 12a \\ &= a^2 - 8a + 15 + 12a \\ &= a^2 + 4a + 15 \\ &= (a+2)^2 + 11\end{aligned}$$

그런데 $a \geq 0$ 이므로 $a=0$ 일 때 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{FP}$ 의 최솟값은 15이다.

9 $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$ 의 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 4 \\ |\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 1 \text{이므로} \\ (\sqrt{2})^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 1^2 &= 4, 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{1}{2} \\ \therefore |2\vec{a} - \vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 4 \times (\sqrt{2})^2 - 4 \times \frac{1}{2} + 1^2 = 7 \\ \therefore |2\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{7}\end{aligned}$$

10 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기는 60° 이고 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2$ 이므로

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2 \\ \therefore |2\vec{a} + 3\vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 \\ &= 4 \times 2^2 + 12 \times 2 + 9 \times 2^2 = 76 \\ \therefore |2\vec{a} + 3\vec{b}| &= 2\sqrt{19}\end{aligned}$$

11 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 30° 이고 $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$ 이므로

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 30^\circ = 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ |k\vec{a} + \vec{b}| = 2 \text{의 양변을 제곱하면} \\ k^2|\vec{a}|^2 + 2k\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 4 \\ k^2 \times 1^2 + 2k \times \sqrt{3} + 2^2 &= 4, k^2 + 2\sqrt{3}k = 0 \\ k(k + 2\sqrt{3}) &= 0 \quad \therefore k = -2\sqrt{3} \text{ 또는 } k = 0 \\ \text{그런데 } k \neq 0 \text{이므로 } k &= -2\sqrt{3}\end{aligned}$$

12 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ 이므로 $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}| = 6$ 에서

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})| &= 6 \\ \therefore |2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| &= 6 \\ \text{양변을 제곱하면} \\ 4|\overrightarrow{AB}|^2 - 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2 &= 36 \\ |\overrightarrow{AB}| = 2, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \text{이므로} \\ 4 \times 2^2 - 4 \times 0 + |\overrightarrow{AC}|^2 &= 36, |\overrightarrow{AC}|^2 = 20 \\ \therefore |\overrightarrow{AC}| &= 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

13 $\vec{a} + 2\vec{b} = \left(\frac{1}{2}, -1\right) + 2\left(\frac{3}{4}, 1\right) = (2, 1)$

$$\begin{aligned}\vec{a} - 2\vec{b} &= \left(\frac{1}{2}, -1\right) - 2\left(\frac{3}{4}, 1\right) = (-1, -3) \\ \therefore (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) &= (2, 1) \cdot (-1, -3) \\ &= 2 \times (-1) + 1 \times (-3) = -5 \\ (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) < 0 \text{이므로 두 벡터 } \vec{a} + 2\vec{b}, \\ \vec{a} - 2\vec{b} \text{가 이루는 각의 크기를 } \theta (90^\circ < \theta \leq 180^\circ) \text{라 하면} \\ \cos(180^\circ - \theta) &= -\frac{(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})}{|\vec{a} + 2\vec{b}| |\vec{a} - 2\vec{b}|} \\ &= -\frac{-5}{\sqrt{2^2 + 1^2} \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

그런데 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 이므로
 $180^\circ - \theta = 45^\circ \quad \therefore \theta = 135^\circ$

14 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ 이므로

$$\begin{aligned}(x-1, 4) \cdot (-x, 3) &= 6 \\ -x(x-1) + 4 \times 3 &= 6, x^2 - x - 6 = 0 \\ (x+2)(x-3) &= 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3 \\ \text{그런데 } x > 0 \text{이므로 } x &= 3 \\ \text{따라서 } \vec{a} = (2, 4), \vec{b} = (-3, 3) \text{이므로} \\ \cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= \frac{6}{\sqrt{2^2 + 4^2} \sqrt{(-3)^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}\end{aligned}$$

15 (가)에서 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ 의 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned}|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \text{(나)에서 } (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) &= 0 \text{이므로} \\ 4|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 &= 0 \\ \therefore |\vec{b}| = 2|\vec{a}| \quad (\because |\vec{a}| > 0, |\vec{b}| > 0) \\ |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 2 \times 0 + (2|\vec{a}|)^2 = 5|\vec{a}|^2 \\ \therefore |\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{5}|\vec{a}| \\ \text{한편 } \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) &= |\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 > 0 \text{이므로} \\ 0^\circ &\leq \theta < 90^\circ \\ \therefore \cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{a} - \vec{b}|} \\ &= \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}| \times \sqrt{5}|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \therefore 25 \cos^2 \theta &= 25 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 5\end{aligned}$$

- 16 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 60° 이고 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=1$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1^2 + 2 \times \frac{1}{2} + 1^2 = 3$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$$

$$|2\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4 \times 1^2 - 4 \times \frac{1}{2} + 1^2 = 3$$

$$\therefore |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 2|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2 \\ = 2 \times 1^2 + \frac{1}{2} - 1^2 = \frac{3}{2}$$

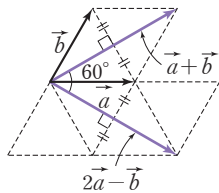
$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) > 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 $\theta (0^\circ \leq \theta < 90^\circ)$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| |2\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

그런데 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ 이므로 $\theta = 60^\circ$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 정삼각형을 이용하여 두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 구하면 60° 이다.



- 17 두 벡터 $\vec{a}, \vec{a} - t\vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} - t\vec{b}) = 0, |\vec{a}|^2 - t\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$|\vec{a}| = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \text{이므로}$$

$$2^2 - t \times 2 = 0 \quad \therefore t = 2$$

- 18 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$(x, 1) \cdot (3, 5) = \pm \sqrt{x^2 + 1^2} \sqrt{3^2 + 5^2}$$

$$3x + 5 = \pm \sqrt{34} \sqrt{x^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$9x^2 + 30x + 25 = 34x^2 + 34$$

$$25x^2 - 30x + 9 = 0$$

$$(5x - 3)^2 = 0 \quad \therefore x = \frac{3}{5}$$

두 벡터 $\vec{a}, \vec{c}$ 가 서로 수직이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\left(\frac{3}{5}, 1\right) \cdot (2, y) = 0$$

$$\frac{6}{5} + y = 0 \quad \therefore y = -\frac{6}{5}$$

$$\therefore x + y = \frac{3}{5} - \frac{6}{5} = -\frac{3}{5}$$

- 19 오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심 O를 원점으로 하고 두 직선 CG, AE가 각각 x 축, y 축이 되도록 좌표평면에 놓으면

$$A(0, 2), C(-2, 0), G(2, 0)$$

점 H의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \overline{OH} \cos 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$y = \overline{OH} \sin 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

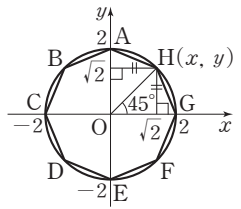
$$\therefore H(\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$\overrightarrow{AG} = (2, 0) - (0, 2) = (2, -2)$$

$$\overrightarrow{HC} = (-2, 0) - (\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (-2 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$$\therefore \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{HC} = (2, -2) \cdot (-2 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$$= 2 \times (-2 - \sqrt{2}) + (-2) \times (-\sqrt{2}) = -4$$



- 20 오른쪽 그림과 같이 두 벡터 $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}$ 가 이루는 각의 크기를

$\theta (90^\circ < \theta \leq 180^\circ)$ 라 하면

직각삼각형 PBH에서

$$|\overrightarrow{PB}| \cos (180^\circ - \theta) = |\overrightarrow{PH}|$$

$$\therefore |\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}| = |-\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}| \cos (180^\circ - \theta) = |-\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PH}| = |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PH}|$$

$$= |-\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PH}| = |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PH}|$$

$$= |-\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PH}| = |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PH}|$$

두 벡터 $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PH}$ 가 영벡터가 아닐 때, $|\overrightarrow{PA}| > 0,$

$|\overrightarrow{PH}| > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$|\overrightarrow{PA}| + |\overrightarrow{PH}| \geq 2\sqrt{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PH}|}$$

$$\text{이때 } |\overrightarrow{PA}| + |\overrightarrow{PH}| = |\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3} \text{이므로}$$

$$\sqrt{3} \geq 2\sqrt{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PH}|}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 3 \geq 4|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PH}|$$

$$\therefore |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PH}| \leq \frac{3}{4}$$

(단, 등호는 $|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PH}|$ 일 때 성립)

따라서 $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}|$ 의 최댓값이 $\frac{3}{4}$ 이므로

$$p = 4, q = 3 \quad \therefore p + q = 7$$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 점 H를 원점

으로 하고 두 직선 BC, AH가 각

각 x 축, y 축이 되도록 좌표평면에

놓으면

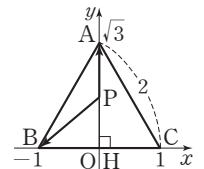
$$A(0, \sqrt{3}), B(-1, 0), C(1, 0)$$

점 P는 선분 AH 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(0, y)$

$(0 \leq y \leq \sqrt{3})$ 라 하면

$$\overrightarrow{PA} = (0, \sqrt{3}) - (0, y) = (0, \sqrt{3} - y)$$

$$\overrightarrow{PB} = (-1, 0) - (0, y) = (-1, -y)$$



$$\begin{aligned}\therefore |\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}| &= |(0, \sqrt{3}-y) \cdot (-1, -y)| \\ &= |y^2 - \sqrt{3}y| \\ &= \left| \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \right|\end{aligned}$$

$0 \leq y \leq \sqrt{3}$ 에서 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때 $|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}|$ 의 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

따라서 $p=4, q=3$ 이므로

$$p+q=7$$

21 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}$ 라 하면

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$$

$$|\overrightarrow{AC}|=15\text{이므로}$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|=15$$

양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2+2\vec{a} \cdot \vec{b}+|\vec{b}|^2=225 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$|\overrightarrow{BD}|=9\text{이므로}$$

$$|\vec{b}-\vec{a}|=9$$

양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2-2\vec{a} \cdot \vec{b}+|\vec{b}|^2=81 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}-\textcircled{8}$ 을 하면

$$4\vec{a} \cdot \vec{b}=144$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b}=36$$

22 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AC}=\vec{b}$ 라 하면 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\vec{a}, \overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\vec{b}$,

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\vec{b}\text{이므로}$$

$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{a}$$

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE} &= \left(\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{a}\right) + \left(\frac{3}{4}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}\right) \\ &= -\frac{5}{3}\vec{a}+\vec{b}\end{aligned}$$

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 60° 이고 $|\vec{a}|=3,$

$|\vec{b}|=3$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 3 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore |\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}|^2 &= \left| -\frac{5}{3}\vec{a}+\vec{b} \right|^2 \\ &= \frac{25}{9}|\vec{a}|^2 - \frac{10}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= \frac{25}{9} \times 3^2 - \frac{10}{3} \times \frac{9}{2} + 3^2 = 19\end{aligned}$$

II-2 03 직선과 원의 방정식

1 직선의 방정식

개념 CHECK

115쪽

1 답 (1) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3}$

(2) $\frac{x+3}{5} = \frac{y+4}{-3}$

(3) $7x-3y-8=0$

문제

116~117쪽

01-1 답 (1) $\frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{3}$ (2) $\frac{x}{-4} = \frac{y-3}{5}$

(1) 직선 $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3}$ 의 방향벡터는 (4, 3)

따라서 점 (2, 4)를 지나고 방향벡터가 (4, 3)인 직선의 방정식은 $\frac{x-2}{4} = \frac{y-4}{3}$

(2) 두 점 A(5, -2), B(1, 3)을 지나는 직선의 방향벡터는 $\overrightarrow{AB}=(1, 3)-(5, -2)=(-4, 5)$

따라서 점 (0, 3)을 지나고 방향벡터가 (-4, 5)인 직선의 방정식은 $\frac{x}{-4} = \frac{y-3}{5}$

01-2 답 3

두 점 A(3, -1), B(4, -2)를 지나는 직선의 방향벡터는 $\overrightarrow{AB}=(4, -2)-(3, -1)=(1, -1)$

점 (1, 2)를 지나고 방향벡터가 (1, -1)인 직선의 방정식은 $x-1 = \frac{y-2}{-1}$

$x=0$ 을 대입하면

$$-1 = \frac{y-2}{-1} \quad \therefore y=3$$

따라서 y절편은 3이다.

01-3 답 -1

직선 $\frac{x-1}{2} = 2-y$ 의 방향벡터는 (2, -1)

점 (3, -2)를 지나고 방향벡터가 (2, -1)인 직선의 방정식은 $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-1}$

이 직선이 점 (1, a)를 지나므로

$$\frac{1-3}{2} = \frac{a+2}{-1} \quad \therefore a=-1$$

02-1 [답] (1) $2x+3y-8=0$ (2) $x+4y+1=0$

(1) 두 점 A(4, -1), B(2, -4)를 지나는 직선의 방향 벡터는 $\overrightarrow{AB}=(2, -4)-(4, -1)=(-2, -3)$
따라서 점 (1, 2)를 지나고 법선벡터가 (-2, -3)인 직선의 방정식은 $-2(x-1)-3(y-2)=0$
 $\therefore 2x+3y-8=0$

(2) 직선 $x+4y-1=0$ 의 법선벡터는 (1, 4)
따라서 점 (3, -1)을 지나고 법선벡터가 (1, 4)인 직선의 방정식은 $(x-3)+4(y+1)=0$
 $\therefore x+4y+1=0$

02-2 [답] 8

직선 $x-1=\frac{y+2}{-2}$ 의 방향벡터는 (1, -2)
점 (2, -3)을 지나고 법선벡터가 (1, -2)인 직선의 방정식은 $(x-2)-2(y+3)=0$
 $\therefore x-2y-8=0$
 $y=0$ 을 대입하면
 $x-8=0 \therefore x=8$
따라서 x 절편은 8이다.

02-3 [답] -3

직선 $2x-y+5=0$ 의 법선벡터는 (2, -1)
점 (-2, 4)를 지나고 법선벡터가 (2, -1)인 직선의 방정식은 $2(x+2)-(y-4)=0$
 $\therefore 2x-y+8=0$
이 직선이 점 (a, 2)를 지나므로
 $2a-2+8=0 \therefore a=-3$

2 두 직선이 이루는 각의 크기

문제

119~120쪽

03-1 [답] (1) $\frac{4}{5}$ (2) -2

(1) 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면
 $\vec{u}=(1, -1), \vec{v}=(1, -7)$
두 직선이 이루는 예각의 크기가 θ 이므로
 $\cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|1 \times 1 + (-1) \times (-7)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + (-7)^2}} = \frac{4}{5}$
(2) 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면
 $\vec{u}=(-3, 1), \vec{v}=(a, -1)$
두 직선이 이루는 각의 크기가 45° 이므로
 $\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \cos 45^\circ$

$$\frac{|(-3) \times a + 1 \times (-1)|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2} \sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$|-3a-1| = \sqrt{5} \sqrt{a^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$9a^2+6a+1=5a^2+5, 2a^2+3a-2=0$$

$$(a+2)(2a-1)=0 \therefore a=-2 \text{ 또는 } a=\frac{1}{2}$$

그런데 a 는 정수이므로 $a=-2$

03-2 [답] 2

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(a, -b), \vec{v}=(1, 2)$$

$$\cos \theta = \frac{3}{5} \text{ 이므로 } \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{|a \times 1 + (-b) \times 2|}{\sqrt{a^2 + (-b)^2} \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\sqrt{5} |a-2b| = 3\sqrt{a^2+b^2}$$

양변을 제곱하면

$$5a^2-20ab+20b^2=9a^2+9b^2, 4a^2+20ab-11b^2=0$$

$$(2a+11b)(2a-b)=0 \therefore 2a=-11b \text{ 또는 } 2a=b$$

그런데 a, b 는 자연수이므로 $a>0, b>0$ 에서

$$2a=b \therefore \frac{b}{a}=2$$

04-1 [답] $a=\frac{8}{3}, b=-\frac{4}{3}$

세 직선 l, m, n 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ 이라 하면

$$\vec{u}_1=(4, 3), \vec{u}_2=(a, 2), \vec{u}_3=(1, b)$$

두 직선 l, m 이 서로 평행하므로 $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$ 에서

$$\vec{u}_1=k\vec{u}_2 \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

$$(4, 3)=k(a, 2)=(ak, 2k)$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$4=ak, 3=2k \therefore k=\frac{3}{2}, a=\frac{8}{3}$$

두 직선 l, n 이 서로 수직이므로 $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_3$ 에서 $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3=0$

$$(4, 3) \cdot (1, b)=0$$

$$4+3b=0 \therefore b=-\frac{4}{3}$$

04-2 [답] $\frac{1}{2}$

두 점 A(a, 2), B(-2, a)를 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB}=(-a-2, a-2)$$

$$\text{직선 } \frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-5} \text{의 방향벡터는 } (3, -5)$$

두 직선이 서로 수직이므로

$$(-a-2, a-2) \cdot (3, -5)=0$$

$$-3a-6-5a+10=0 \therefore a=\frac{1}{2}$$

04-3 답 -1

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(2, a+1), \vec{v}=(a, 3)$$

두 직선 l, m 이 서로 평행하므로 $\vec{u} \parallel \vec{v}$ 에서

$$\vec{u}=k\vec{v} \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

$$(2, a+1)=k(a, 3)=(ak, 3k)$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$2=ak, a+1=3k$$

$$k=\frac{2}{a}=\frac{a+1}{3} \text{ 이므로}$$

$$a(a+1)=6, a^2+a-6=0$$

$$(a+3)(a-2)=0 \quad \therefore a=-3 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 $-3+2=-1$

3 원의 방정식

문제

122쪽

05-1 답 (1) $(x+1)^2+(y-4)^2=9$ (2) $x^2+(y-5)^2=5$

$$(1) \vec{p}-\vec{a}=(x+1, y-4)$$

$$|\vec{p}-\vec{a}|=3 \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}=3$$

양변을 제곱하면

$$(x+1)^2+(y-4)^2=9$$

(2) 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\vec{p}-\vec{a}=(x-2, y-6), \vec{p}-\vec{b}=(x+2, y-4)$$

$$(\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}-\vec{b})=0 \text{ 이므로}$$

$$(x-2, y-6) \cdot (x+2, y-4)=0$$

$$(x-2)(x+2)+(y-6)(y-4)=0$$

$$x^2-4+y^2-10y+24=0$$

$$\therefore x^2+(y-5)^2=5$$

다른 풀이

(2) $(\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}-\vec{b})=0$ 이므로 점 P가 나타내는 도형은

두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.

원의 중심은 선분 AB의 중점과 같으므로 원의 중심의

$$\text{좌표는 } \left(\frac{2+2}{2}, \frac{6+4}{2} \right) \quad \therefore (0, 5)$$

반지름의 길이는 $\frac{1}{2} \overline{AB}$ 와 같으므로

$$\frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2-2)^2+(4-6)^2} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

따라서 구하는 도형의 방정식은

$$x^2+(y-5)^2=(\sqrt{5})^2$$

$$\therefore x^2+(y-5)^2=5$$

연습문제

123~124쪽

- | | | | |
|---------------|------------------------|--------------|-----|
| 1 5 | 2 9 | 3 $x-4y+2=0$ | 4 ① |
| 5 ② | 6 ③ | 7 45° | 8 ④ |
| 10 $\sqrt{5}$ | 11 $(x-3)^2+(y-4)^2=2$ | 12 ⑤ | |
| 13 ③ | | | |

- 두 점 A(3, 4), B(5, 1)을 지나는 직선의 방향벡터는 $\overrightarrow{AB}=(5, 1)-(3, 4)=(2, -3)$
점 (1, 3)을 지나고 방향벡터가 (2, -3)인 직선의 방정식은
$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-3}$$

이 직선이 점 (a, -3)을 지나므로
$$\frac{a-1}{2}=\frac{-3-3}{-3} \quad \therefore a=5$$
- 점 (4, 1)을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(1, 2)$ 인 직선의 방정식은
$$(x-4)+2(y-1)=0$$

$$\therefore x+2y-6=0$$

이 직선이 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는 각각 (6, 0), (0, 3)
따라서 $a=6, b=3$ 이므로
 $a+b=9$
- $\frac{x+2}{2}=3-y$ 에서 $x+2y-4=0$
 $x+2y-4=0, 2x+y-5=0$ 을 연립하여 풀면
 $x=2, y=1$
즉, 두 직선 l, m 의 교점의 좌표는 (2, 1)이다.
직선 $x-4y+1=0$ 의 법선벡터는 (1, -4)
따라서 점 (2, 1)을 지나고 법선벡터가 (1, -4)인 직선의 방정식은
$$(x-2)-4(y-1)=0$$

$$\therefore x-4y+2=0$$
- 직선 $\frac{x+1}{4}=\frac{y-7}{3}$ 의 방향벡터는 (4, 3)
점 (-3, -5)를 지나고 방향벡터가 (4, 3)인 직선의 방정식은
$$\frac{x+3}{4}=\frac{y+5}{3}$$

$$\therefore 3x-4y-11=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

직선 $3x+4y=-5$ 의 법선벡터는 $(3, 4)$

점 $(5, -4)$ 를 지나고 법선벡터가 $(3, 4)$ 인 직선의 방정식은

$$3(x-5)+4(y+4)=0$$

$$\therefore 3x+4y+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 를 연립하여 풀면

$$x=\frac{5}{3}, y=-\frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } a=\frac{5}{3}, b=-\frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$ab=-\frac{5}{2}$$

5 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(2, 1), \vec{v}=(-4, 3)$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|2 \times (-4) + 1 \times 3|}{\sqrt{2^2+1^2} \sqrt{(-4)^2+3^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

6 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(-2, 3), \vec{v}=(a, -1)$$

두 직선이 이루는 각의 크기가 45° 이므로

$$\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \cos 45^\circ$$

$$\frac{|(-2) \times a + 3 \times (-1)|}{\sqrt{(-2)^2+3^2} \sqrt{a^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2|-2a-3| = \sqrt{26} \sqrt{a^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$16a^2+48a+36=26a^2+26$$

$$5a^2-24a-5=0, (5a+1)(a-5)=0$$

$$\therefore a=-\frac{1}{5} \text{ 또는 } a=5$$

그런데 a 는 정수이므로 $a=5$

7 선분 AC의 중점 M의 좌표는

$$\left(\frac{3-1}{2}, \frac{2+6}{2}\right) \quad \therefore (1, 4)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-1, 6)-(-3, 2)=(-4, 4)$$

$$\overrightarrow{BM}=(1, 4)-(-4, 4)=(-3, 0)$$

두 직선 AC, BM이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BM}|} \\ &= \frac{|(-4) \times (-3) + 4 \times 0|}{\sqrt{(-4)^2+4^2} \sqrt{(-3)^2+0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \theta=45^\circ$$

8 두 점 A(5, 1), B(2, a)를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u}=(2, a)-(5, 1)=(-3, a-1)$$

직선 $\frac{x+3}{2}=\frac{y-4}{3}$ 의 방향벡터를 $\vec{v}$ 라 하면

$$\vec{v}=(2, 3)$$

두 점 A, B를 지나는 직선과 직선 $\frac{x+3}{2}=\frac{y-4}{3}$ 가 서로

수직이므로 $\vec{u} \perp \vec{v}$ 에서

$$\vec{u} \cdot \vec{v}=0$$

$$(-3, a-1) \cdot (2, 3)=0$$

$$-6+3a-3=0 \quad \therefore a=3$$

9 세 직선 l, m, n 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ 이라 하면

$$\vec{u}_1=(3, 2), \vec{u}_2=(6, a), \vec{u}_3=(-b, 3)$$

두 직선 l, m 이 서로 평행하므로 $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$ 에서

$$\vec{u}_1=k\vec{u}_2 \text{ (단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수)}$$

$$(3, 2)=k(6, a)=(6k, ak)$$

두 평면벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$3=6k, 2=ak$$

$$\therefore k=\frac{1}{2}, a=4$$

두 직선 l, n 이 서로 수직이므로 $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_3$ 에서

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3=0$$

$$(3, 2) \cdot (-b, 3)=0$$

$$-3b+6=0 \quad \therefore b=2$$

$$\therefore a+b=4+2=6$$

10 점 H의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 H는 직선 l 위의 점이므로

$$2(a+3)=-(b-1)$$

$$\therefore 2a+b=-5 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

직선 $l: 2(x+3)=-(y-1)$, 즉 $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-1}{2}$ 의 방향

벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u}=(-1, 2)$$

$\overrightarrow{AH}=(a-2, b-1)$, $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ 이므로 $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}=0$ 에서

$$(a-2, b-1) \cdot (-1, 2)=0$$

$$-(a-2)+2(b-1)=0$$

$$\therefore a-2b=0 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 를 연립하여 풀면

$$a=-2, b=-1$$

따라서 H(-2, -1)이므로

$$|\overrightarrow{OH}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

- 11 원 위의 한 점을 $P(x, y)$ 라 하면

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

$\overrightarrow{AP} = (x-2, y-5)$, $\overrightarrow{BP} = (x-4, y-3)$ 이므로 구하는 원의 방정식은

$$(x-2, y-5) \cdot (x-4, y-3) = 0$$

$$(x-2)(x-4) + (y-5)(y-3) = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 + y^2 - 8y + 15 = 0$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y-4)^2 = 2$$

- 12 오른쪽 그림과 같이 원

$x^2 + y^2 = 10$ 위의 두 점

$A(3, 1)$, $B(a, b)$ 에서의 두

접선이 서로 수직이면 두 접선

의 법선벡터도 서로 수직이다.

두 접선의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1$,

$\vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{OA} = (3, 1), \vec{n}_2 = \overrightarrow{OB} = (a, b)$$

$$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \text{이므로 } \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$(3, 1) \cdot (a, b) = 0$$

$$3a + b = 0 \quad \therefore b = -3a \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

점 $B(a, b)$ 는 원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = -1, b = 3 \text{ 또는 } a = 1, b = -3$$

그런데 $a < 0$ 이므로 $a = -1, b = 3$

$$\therefore ab = -3$$

- 13 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 $(\vec{p}-\vec{b}) \cdot (\vec{p}-\vec{b}) = 9$ 이므로

$$(x-2, y-2) \cdot (x-2, y-2) = 9$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $B(2, 2)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원이다.

한편 $|\vec{p}-\vec{a}| = |\overrightarrow{AP}|$ 는 두 점 A, P 사이의 거리이므로

$|\vec{p}-\vec{a}|$ 가 최대, 최소인 경우

는 점 P의 위치가 각각 오른쪽

쪽 그림에서 P_1, P_2 일 때이다.

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (2-3)^2}$$

$$= \sqrt{2}$$

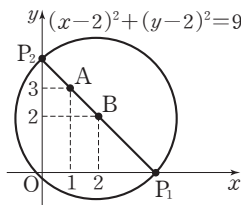
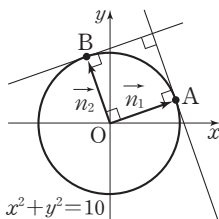
이므로

$$(\text{최대값}) = |\overrightarrow{P_1A}| = \overrightarrow{P_1B} + \overrightarrow{AB} = 3 + \sqrt{2}$$

$$(\text{최소값}) = |\overrightarrow{P_2A}| = \overrightarrow{P_2B} - \overrightarrow{AB} = 3 - \sqrt{2}$$

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$$(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$$



III-1 01 직선과 평면의 위치 관계

1 직선과 평면의 위치 관계

개념 CHECK

128쪽

- 1 답 (1) 직선 AB, 직선 AD, 직선 CB, 직선 CF

(2) 직선 DE

(3) 직선 CB, 직선 FE

- 2 답 (1) 평면 ABCD, 평면 AEHD

(2) 평면 AEHD, 평면 AEFB, 평면 BFGC, 평면 EFGH

(3) 평면 BFGC, 평면 DHGC

(4) 직선 EH, 직선 EF, 직선 FG, 직선 HG

- 3 답 (1) 직선 CI

(2) 평면 DJKE

(3) 평면 ABCDEF, 평면 GHIJKL, 평면 ABHG, 평면 BHIC, 평면 DJKE, 평면 FLKE

문제

129~130쪽

01-1 답 10

한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 한 평면을 결정한다.

따라서 구하는 평면의 개수는 5개의 점에서 3개를 선택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_5C_3 = 10$$

01-2 답 7

주어진 사각뿔에서 5개의 꼭짓점으로 만들 수 있는 서로 다른 평면은

평면 ABCD, 평면 OAB, 평면 OBC, 평면 ODC,

평면 OAD, 평면 OAC, 평면 ODB

따라서 구하는 평면의 개수는 7

다른 풀이

꼭짓점 O와 밑면의 두 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는 ${}_4C_2 = 6$

밑면의 네 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는 1

따라서 구하는 평면의 개수는

$$6 + 1 = 7$$

01-3 圖 6

한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점으로 만들 수 있는 평면은

평면 DHF

한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점으로 만들 수 있는 평면은

평면 AED, 평면 AEH, 평면 AEF, 평면 CDG,

평면 CHG, 평면 CFG

이때 네 점 A, E, H, D는 한 평면 위의 점이므로 평면 AED와 평면 AEH는 서로 같은 평면이다.

또 네 점 D, H, G, C도 한 평면 위의 점이므로 평면 CDG와 평면 CHG는 서로 같은 평면이다.

평행한 두 직선으로 만들 수 있는 평면은

평면 AEGC

따라서 구하는 평면의 개수는 $1+4+1=6$

02-1 圖 (1) 직선 CF, 직선 DF, 직선 EF

(2) 평면 ABC, 평면 ABED

(3) 평면 ABC, 평면 DEF, 평면 ABED,

평면 ACFD

(4) 직선 AB, 직선 BC, 직선 AC

(1) 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은

직선 CF, 직선 DF, 직선 EF

(2) 직선 AB를 포함하는 평면은

평면 ABC, 평면 ABED

(3) 직선 AD와 만나는 평면은

평면 ABC, 평면 DEF, 평면 ABED, 평면 ACFD

(4) 평면 DEF와 평행한 직선은

직선 AB, 직선 BC, 직선 AC

02-2 圖 8

오른쪽 그림과 같이 정팔면체는

모든 모서리의 길이가 같으므로

$\overline{AB}=\overline{BF}=\overline{DF}=\overline{AD}$

즉, 사각형 ABFD는 마름모이므로

직선 AD와 평행한 직선은

직선 BF

$\therefore a=1$

직선 BC와 꼬인 위치에 있는 직선은

직선 AE, 직선 AD, 직선 EF, 직선 DF

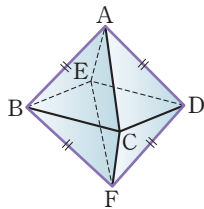
$\therefore b=4$

평면 ABE와 평행한 직선은

직선 CD, 직선 CF, 직선 DF

$\therefore c=3$

$\therefore a+b+c=1+4+3=8$



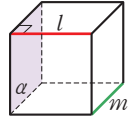
2 직선과 평면의 평행과 수직

문제

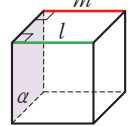
133~134쪽

03-1 圖 ㄴ

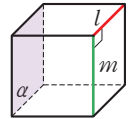
ㄱ. [반례] 오른쪽 그림에서 $l \perp \alpha$, $m \parallel \alpha$ 이지만 두 직선 l , m 은 꼬인 위치에 있다.



ㄴ. 오른쪽 그림에서 $l \perp \alpha$, $l \parallel m$ 이면 $m \perp \alpha$ 이다.



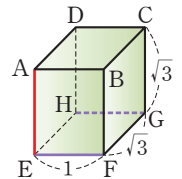
ㄷ. [반례] 오른쪽 그림에서 $l \parallel \alpha$, $m \parallel \alpha$ 이지만 $l \perp m$ 이다.



따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

04-1 圖 (1) 90° (2) 45° (3) 60°

(1) 오른쪽 그림에서 $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$ 이므로 두 직선 AE, HG가 이루는 각의 크기는 두 직선 AE, EF가 이루는 $\angle AEF$ 의 크기와 같다.

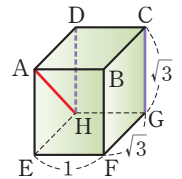


이때 사각형 AEFB는 직사각형이므로

$\angle AEF=90^\circ$

따라서 구하는 각의 크기는 90° 이다.

(2) 오른쪽 그림에서 $\overline{DH} \parallel \overline{CG}$ 이므로 두 직선 AH, CG가 이루는 각의 크기는 두 직선 AH, DH가 이루는 $\angle AHD$ 의 크기와 같다.

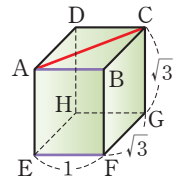


이때 삼각형 AHD는 $\overline{AD}=\overline{DH}$ 인 직각이등변삼각형이므로

$\angle AHD=45^\circ$

따라서 구하는 각의 크기는 45° 이다.

(3) 오른쪽 그림에서 $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ 이므로 두 직선 AC, EF가 이루는 각의 크기는 두 직선 AC, AB가 이루는 $\angle CAB$ 의 크기와 같다.



이때 직각삼각형 ABC에서

$\tan(\angle CAB)=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\sqrt{3}$

$\therefore \angle CAB=60^\circ$

따라서 구하는 각의 크기는 60° 이다.

연습문제

135~136쪽

- 1 ④ 2 20 3 ② 4 ⑤ 5 $\neg, \perp$
 6 $\perp$ 7 13 8 (가) $\overline{BM}$ (나) $\overline{AM}$ 9 60°
 10 $\frac{\sqrt{15}}{6}$ 11 20 12 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 13 $\sqrt{2}$

- 1 $\neg$. 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 한 평면을 결정하므로 세 점 B, C, H는 평면을 결정한다.
 $\perp$. 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점은 한 평면을 결정하므로 점 A와 직선 CF는 평면을 결정한다.
 $\neg$. 직선 DE와 직선 HG는 꼬인 위치에 있으므로 평면을 결정할 수 없다.
 $\neg$. 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점은 한 평면을 결정하므로 직선 DC 위의 임의의 점 P와 직선 EF는 평면을 결정한다.

따라서 보기 중 평면이 결정되는 것은 $\neg, \perp, \neg$ 이다.

- 2 어느 두 점도 한 모서리 위에 있지 않은 세 점으로 만들 수 있는 평면은

평면 AFC, 평면 AFH, 평면 AHC, 평면 CHF,

평면 BDE, 평면 BGD, 평면 BEG, 평면 DEG

평행한 두 모서리로 만들 수 있는 평면은

평면 ABCD, 평면 EFGH, 평면 AEFB, 평면 DHGC,

평면 AEHD, 평면 BFGC, 평면 AHGB, 평면 DEFC,

평면 AFGD, 평면 BCHE, 평면 AEGC, 평면 DHFB

따라서 구하는 서로 다른 평면의 개수는

$$8 + 12 = 20$$

- 3 직선 EH와 만나는 평면은
 평면 AEFB, 평면 DHGC, 평면 AEHD, 평면 EFGH

$$\therefore a=4$$

평면 ABCD와 만나지 않는 평면은

평면 EFGH

$$\therefore b=1$$

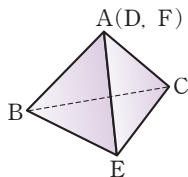
$$\therefore ab=4 \times 1=4$$

- 4 주어진 전개도로 정사면체를 만들면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 모서리 BD와 꼬인 위치에

있는 것은

$\overline{CE}$



- 5 $\neg$. 직선 CD와 직선 BQ는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.

$\neg$. 직선 AD와 직선 BC는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.

- 다. 오른쪽 그림과 같이 직선 CP가 모서리 AB와 만나는 점을 M, 직선 CQ가 모서리 AD와 만나는 점을 N이라 하면 두 점 M, N은 두 모서리 AB, AD의 중점이므로 삼각형 ABD에서

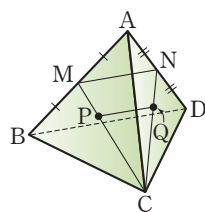
$$\overline{MN} \parallel \overline{BD} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 두 점 P, Q는 두 삼각형 ABC, ACD의 무게중심이므로 삼각형 CNM에서

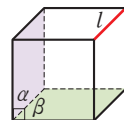
$$\overline{PQ} \parallel \overline{MN} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에 의하여 } \overline{PQ} \parallel \overline{BD}$$

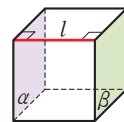
따라서 보기 중 꼬인 위치에 있는 것은 $\neg, \perp$ 이다.



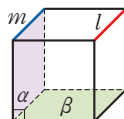
- 6 $\neg$. [반례] 오른쪽 그림에서 $l \parallel \alpha, l \parallel \beta$ 이지만 $\alpha \perp \beta$ 이다.



- $\perp$. 오른쪽 그림에서 $l \perp \alpha, \alpha \parallel \beta$ 이면 $l \perp \beta$ 이다.



- 다. [반례] 오른쪽 그림에서 $l \parallel \alpha, m \parallel \beta, l \parallel m$ 이지만 $\alpha \perp \beta$ 이다.

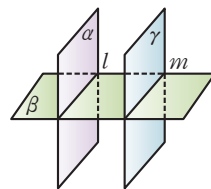


따라서 보기 중 옳은 것은 $\perp$ 이다.

- 7 $l \parallel m$ 일 때, 서로 다른 세 평면 α, β, γ 에 의하여 나누어지는 공간의 개수는 다음 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

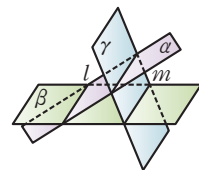
- (i) 두 평면 α, γ 가 서로 평행한 경우

세 평면 α, β, γ 의 위치 관계가 오른쪽 그림과 같을 때 나누어지는 공간의 개수는 6이다.



- (ii) 두 평면 α, γ 가 한 직선을 공유하는 경우

세 평면 α, β, γ 의 위치 관계가 오른쪽 그림과 같을 때 나누어지는 공간의 개수는 7이다.



- (i), (ii)에 의하여 구하는 공간의

최대 개수와 최소 개수의 합은 $7 + 6 = 13$

- 8 오른쪽 그림과 같이 모서리 CD의 중점을 M이라 하자.

삼각형 BCD는 정삼각형이므로

$$\overline{BM} \perp \overline{CD} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

삼각형 ACD는 정삼각형이므로

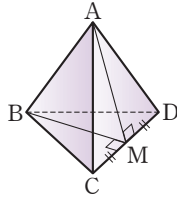
$$\overline{AM} \perp \overline{CD} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

\textcircled{7}, \textcircled{8}에 의하여

$$(\text{평면 } ABM) \perp \overline{CD}$$

따라서 직선 CD는 평면 ABM에 포함된 모든 직선과 수직이므로

$$\overline{AB} \perp \overline{CD}$$



- 9 $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$ 이므로 두 직선 AC, ED가 이루는 각의 크기는 두 직선 AC, BC가 이루는 $\angle ACB$ 의 크기와 같다.

삼각형 ABC는 정삼각형이므로

$$\angle ACB = 60^\circ$$

따라서 구하는 각의 크기는 60° 이다.

- 10 오른쪽 직육면체에서 $\overline{AD} \parallel \overline{EH}$ 이므로

$$\angle DAG = \theta$$

한편 $\overline{AD} \perp (\text{평면 } DHGC)$ 이므로

삼각형 AGD는 $\angle GDA = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

직각삼각형 DGC에서

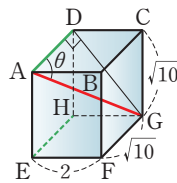
$$\overline{DG} = \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{CG}^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{10})^2} = \sqrt{14}$$

직각삼각형 AGD에서

$$\overline{AG} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DG}^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{14})^2} = 2\sqrt{6}$$

따라서 직각삼각형 AGD에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AG}} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$



- 11 오른쪽 그림과 같이 네 모서리 AB, BC, CD, AD와 이 사면체를 자른 평면의 교점을 각각 E, F, G, H라 하자.

$$\overline{EF} \parallel \overline{AC}, \overline{AC} \parallel \overline{HG} \text{이므로}$$

$$\overline{EF} \parallel \overline{HG}$$

$$\overline{EH} \parallel \overline{BD}, \overline{BD} \parallel \overline{FG} \text{이므로}$$

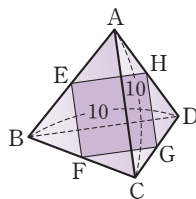
$$\overline{EH} \parallel \overline{FG}$$

따라서 사각형 EFGH는 평행사변형이다.

$$\overline{AE} : \overline{EB} = m : n \quad (m > 0, n > 0) \text{으로 놓으면}$$

$$\overline{EF} \parallel \overline{AC} \text{이므로}$$

$$\overline{EF} : \overline{AC} = n : (m+n)$$



$$\therefore \overline{EF} = \frac{n}{m+n} \overline{AC} = \frac{10n}{m+n}$$

$$\text{또 } \overline{EH} \parallel \overline{BD} \text{이므로}$$

$$\overline{EH} : \overline{BD} = m : (m+n)$$

$$\therefore \overline{EH} = \frac{m}{m+n} \overline{BD} = \frac{10m}{m+n}$$

따라서 구하는 사각형의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} 2(\overline{EF} + \overline{EH}) &= 2\left(\frac{10n}{m+n} + \frac{10m}{m+n}\right) \\ &= 2 \times 10 = 20 \end{aligned}$$

- 12 오른쪽 그림과 같이 모서리 BD의 중점을 N이라 하면 모서리 CD의 중점은 M이므로

$$\overline{NM} \parallel \overline{BC}, \overline{NM} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 2$$

두 직선 AM, BC가 이루는 각의

크기는 두 직선 AM, NM이 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle AMN = \theta$$

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ANM은

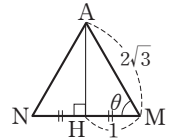
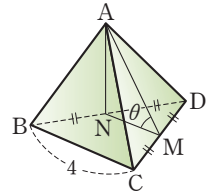
$$\overline{AN} = \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3} \text{인 이등변}$$

삼각형이므로 점 A에서 변 NM에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{HM} = \frac{1}{2} \overline{NM} = 1$$

따라서 직각삼각형 AHM에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{HM}}{\overline{AM}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$



- 13 오른쪽 그림과 같이 두 모서리 AB, CD의 중점을 각각 M, N이라 하면 두 삼각형 ACD, BCD는 모두 정삼각형이므로

$$\overline{AN} \perp \overline{CD}, \overline{BN} \perp \overline{CD}$$

따라서 (평면 ABN) $\perp$ $\overline{CD}$ 이므로

$$\overline{MN} \perp \overline{CD}$$

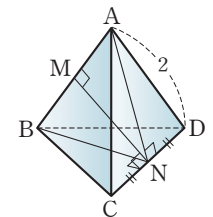
같은 방법으로 하면 $\overline{MN} \perp \overline{AB}$

즉, 선분 MN은 꼬인 위치에 있는 두 모서리 AB, CD의 공통된 수선이므로 두 모서리 AB, CD 사이의 거리는 선분 MN의 길이와 같다.

따라서 직각삼각형 AMN에서

$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 1, \overline{AN} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{MN} = \sqrt{\overline{AN}^2 - \overline{AM}^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$$



III-1 02 삼수선의 정리와 정사영

1 삼수선의 정리

문제

138~139쪽

01-1 답 2√3

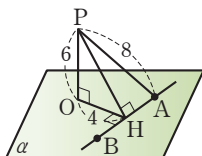
오른쪽 그림과 같이 선분 PH를
그으면 직각삼각형 POH에서

$$\begin{aligned}\overline{PH} &= \sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{OP}^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}\end{aligned}$$

이때 $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PH} \perp \overline{AB}$

따라서 직각삼각형 PHA에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{PA}^2 - \overline{PH}^2} = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{13})^2} = 2\sqrt{3}$$



01-2 답 3

오른쪽 그림과 같이 선분 PH를
그으면 $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PH} \perp \overline{AB}$

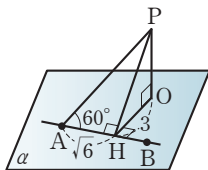
직각삼각형 PAH에서

$\angle PAH = 60^\circ$ 이므로

$$\overline{PH} = \sqrt{6} \tan 60^\circ = \sqrt{6} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{2}$$

따라서 직각삼각형 PHO에서

$$\overline{PO} = \sqrt{\overline{PH}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 3^2} = 3$$



02-1 답 4√5

$\overline{DH} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{DI} \perp \overline{GM}$ 이므로 삼수선의 정리에
의하여 $\overline{HI} \perp \overline{GM}$

직각삼각형 MFG에서

$$\overline{MG} = \sqrt{\overline{MF}^2 + \overline{FG}^2} = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$$

삼각형 HMG의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{HG} \times \overline{HE} = \frac{1}{2} \times \overline{GM} \times \overline{HI}$$

$$\frac{1}{2} \times 10 \times 10 = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{5} \times \overline{HI} \quad \therefore \overline{HI} = 4\sqrt{5}$$

02-2 답 1

$\overline{OC} \perp \overline{OA}$, $\overline{OB} \perp \overline{OC}$ 이므로 $\overline{OC} \perp$ (평면 OAB)

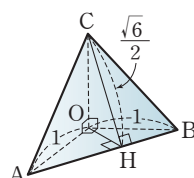
오른쪽 그림과 같이 선분 OH를

그으면 $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선

의 정리에 의하여 $\overline{OH} \perp \overline{AB}$

직각삼각형 OAB에서

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



삼각형 OAB의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OH}$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \overline{OH} \quad \therefore \overline{OH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 직각삼각형 OHC에서

$$\overline{OC} = \sqrt{\overline{CH}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

2 두 평면이 이루는 각의 크기

개념 CHECK

141쪽

1 답 (1) 90° (2) 45°

(1) 면 ABCD와 면 BFGC의 교선 BC에 대하여

$\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{BF} \perp \overline{BC}$ 이고, $\angle ABF = 90^\circ$ 이다.

따라서 면 ABCD와 면 BFGC가 이루는 각의 크기는
90°이다.

(2) 면 AEFB와 면 AEGC의 교선 AE에 대하여

$\overline{AB} \perp \overline{AE}$, $\overline{AC} \perp \overline{AE}$ 이고, $\angle CAB = 45^\circ$ 이다.

따라서 면 AEFB와 면 AEGC가 이루는 각의 크기는
45°이다.

문제

142쪽

03-1 답 √3/3

오른쪽 그림과 같이 선분 HF의

중점을 I라 하면 두 삼각형 CHF,

GHF는 이등변삼각형이므로

$\overline{CI} \perp \overline{HF}$, $\overline{GI} \perp \overline{HF}$

평면 CHF와 평면 EFGH가 이루

는 각의 크기는 직선 CI와 직선 GI가 이루는 각의 크기와
같으므로

$$\angle CIG = \theta$$

직각삼각형 EFG에서

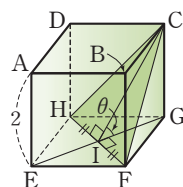
$$\overline{EG} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{FG}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{GI} = \frac{1}{2} \overline{EG} = \sqrt{2}$$

직각삼각형 CIG에서

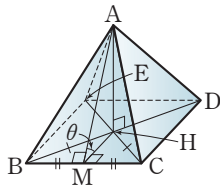
$$\overline{CI} = \sqrt{\overline{GI}^2 + \overline{CG}^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{GI}}{\overline{CI}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



03-2 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서
평면 BCDE에 내린 수선의 발
을 H라 하면 점 H는 정사각형
BCDE의 두 대각선의 교점이
므로



$$\overline{BH} = \overline{CH}$$

모서리 BC의 중점을 M이라 하면 두 삼각형 ABC,
HBC는 이등변삼각형이므로

$$\overline{AM} \perp \overline{BC}, \overline{HM} \perp \overline{BC}$$

평면 ABC와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기는 직선
AM과 직선 HM이 이루는 각의 크기와 같으므로
 $\angle AMH = \theta$

이때 사각뿔의 한 모서리의 길이를 $2a$ 라 하면

$$\overline{HM} = \frac{1}{2} \times 2a = a$$

정삼각형 ABC에서

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a = \sqrt{3}a$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{HM}}{\overline{AM}} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

정사영

개념 CHECK

144쪽

- 1 $\frac{1}{2}$ (1) 점 E (2) 선분 DG
(3) 삼각형 EFH (4) 선분 AF

2 $\frac{1}{2}$

선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A'B'이라 하면

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 60^\circ = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

3 $3\sqrt{2}$

$$6 \cos 45^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

문제

145~147쪽

04-1 $\frac{1}{2}$

$$\tan \theta = \sqrt{3} \text{이므로 } \theta = 60^\circ$$

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 60^\circ \text{이므로}$$

$$6 = \overline{AB} \times \frac{1}{2} \quad \therefore \overline{AB} = 12$$

04-2 $\frac{3+3\sqrt{3}}{2}$

직선 AB와 평면 β 가 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 30^\circ$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$\overline{BC} \parallel \beta$ 에서 직선 BC와 평면 β 가 이루는 각의 크기는 0°
이므로

$$\overline{B'C'} = \overline{BC} \cos 0^\circ = 3 \times 1 = 3$$

이때 삼각형 A'B'C'은 $\angle B' = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned} \overline{A'C'} &= \sqrt{\overline{A'B'}^2 + \overline{B'C'}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

따라서 삼각형 A'B'C'의 둘레의 길이는

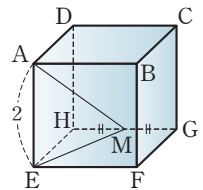
$$\sqrt{3} + 3 + 2\sqrt{3} = 3 + 3\sqrt{3}$$

04-3 $\sqrt{5}$

오른쪽 그림에서 선분 AM의 평
면 EFGH 위로의 정사영은 선분
EM이다.

직각삼각형 HEM에서

$$\begin{aligned} \overline{EM} &= \sqrt{\overline{EH}^2 + \overline{HM}^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$



05-1 $\frac{1}{2}$

세 변의 길이가 5, 12, 13인 삼각형은 빗변의 길이가 13
인 직각삼각형이다.

평면 α 위의 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$S \cos 60^\circ = 30 \times \frac{1}{2} = 15$$

05-2 $\frac{1}{2}$

삼각기둥의 단면의 밑면을 포함한 평면 위로의 정사영은
삼각기둥의 밑면이다.

삼각기둥의 밑면인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$$

단면과 밑면이 이루는 각의 크기가 30° 이므로 단면의 넓
이를 S라 하면

$$S \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} S = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore S = 8$$

05-3 $\frac{72\sqrt{5}}{5}$

오른쪽 그림에서 $\overline{AM} \perp \overline{AD}$,
 $\overline{AE} \perp \overline{AD}$ 이므로 평면 AEHD와
 평면 AMND가 이루는 각의 크
 기를 θ 라 하면 $\angle EAM = \theta$

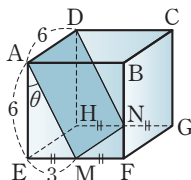
직각삼각형 AEM에서

$$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EM}^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{AE}}{\overline{AM}} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

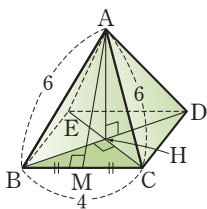
따라서 평면 AEHD의 평면 AMND 위로의 정사영의 넓
 이는

$$\square AEHD \cos \theta = 36 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{72\sqrt{5}}{5}$$



06-1 (1) 4 (2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

(1) 오른쪽 그림과 같이 점 A에
 서 사각형 BCDE에 내린 수
 선의 발을 H라 하면 점 H는
 사각형 BCDE의 두 대각선
 의 교점이므로 삼각형 ABC
 의 평면 BCDE 위로의 정사
 영은 삼각형 HBC이다.



$$\therefore \triangle HBC = \frac{1}{4} \square BCDE = \frac{1}{4} \times 4^2 = 4$$

(2) 점 A에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면
 $\overline{BM} = \overline{CM} = 2$

직각삼각형 ABM에서

$$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BM}^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AM}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

따라서 $\triangle HBC = \triangle ABC \cos \theta$ 이므로

$$4 = 8\sqrt{2} \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

다른 풀이

(2) 점 A에서 사각형 BCDE에 내린 수선의 발을 H, 모
 서리 BC의 중점을 M이라 하면

$$\overline{BC} \perp \overline{AM}, \overline{BC} \perp \overline{HM}$$

평면 ABC와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기를 θ 라
 하면

$$\angle AMH = \theta$$

$$\overline{AM} = 4\sqrt{2}, \overline{HM} = \frac{1}{2} \overline{BE} = 2 \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\overline{HM}}{\overline{AM}} = \frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

06-2 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

모서리 AB의 중점을 N'이라 하면 $\overline{NN'} \perp \overline{AB}$ 이고 점 G
 에서 평면 ABCD 위에 내린 수선의 발이 C이므로 사각
 형 ANGCM의 평면 ABCD 위로의 정사영은 평행사변형
 AN'CM이다.

직각삼각형 AEN에서

$$\overline{AN} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EN}^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{AM} = \overline{AN} = \overline{MG} = \overline{NG} \text{이므로}$$

사각형 ANGCM은 마름모이다.

마름모 ANGCM의 두 대각선의 길이는

$$\overline{AG} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EG}^2} = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{3}$$

$$\overline{MN} = \sqrt{\overline{MN'}^2 + \overline{N'N}^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

즉, 마름모 ANGCM의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AG} \times \overline{MN} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{6}$$

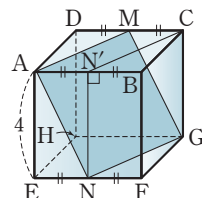
평행사변형 AN'CM의 넓이는

$$\overline{AN'} \times \overline{BC} = 2 \times 4 = 8$$

따라서 $\square AN'CM = \square ANGCM \cos \theta$ 이므로

$$8 = 8\sqrt{6} \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{6}$$



연습문제

148~150쪽

1 $3\sqrt{3}$	2 ②	3 $\frac{\sqrt{2}}{4}$	4 ②	5 ⑤
6 $2\sqrt{6}$	7 ④	8 $\frac{\sqrt{6}}{3}$	9 $\sqrt{13}$	10 $5\sqrt{6}$
11 $\sqrt{2}\pi$	12 $\frac{\sqrt{2}}{4}$	13 ④	14 $\frac{\sqrt{3}}{12}$	15 ②
16 4	17 $\frac{3}{4}\pi$	18 ④		

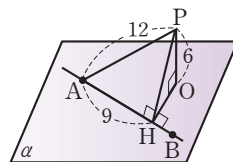
1 오른쪽 그림과 같이 선분 PH
 를 그으면 $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp \overline{AB}$
 이므로 삼수선의 정리에 의하여
 $\overline{PH} \perp \overline{AB}$

직각삼각형 PAH에서

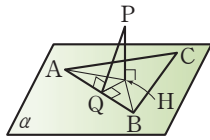
$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{PA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{12^2 - 9^2} = 3\sqrt{7}$$

따라서 직각삼각형 PHO에서

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{PH}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{(3\sqrt{7})^2 - 6^2} = 3\sqrt{3}$$



- 2 오른쪽 그림과 같이 선분 HQ를
그으면 $\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$ 이므로
삼수선의 정리에 의하여
 $\overline{HQ} \perp \overline{AB}$



이때 삼각형 ABC의 넓이가 24이고, 점 H가 삼각형 ABC
의 무게중심이므로 삼각형 ABH의 넓이에서

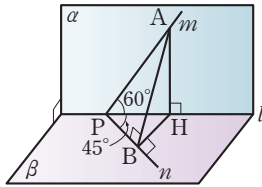
$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{HQ} = \frac{1}{3} \times \triangle ABC$$

$$\frac{1}{2} \times 8 \times \overline{HQ} = \frac{1}{3} \times 24 \quad \therefore \overline{HQ} = 2$$

따라서 직각삼각형 PQH에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{HQ}^2 + \overline{PH}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

- 3 오른쪽 그림과 같이 직선
 m 위의 한 점 A에서 교선
 l 에 내린 수선의 발을 H,



점 H에서 직선 n 에 내린
수선의 발을 B라 하고 선
분 AB를 그으면 $\overline{AH} \perp \beta$, $\overline{HB} \perp \overline{PB}$ 이므로 삼수선의 정
리에 의하여 $\overline{AB} \perp \overline{PB}$

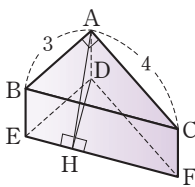
이때 $\overline{AP} = a$ 라 하면 두 직각삼각형 APH, HPB에서

$$\overline{PH} = \overline{AP} \cos 60^\circ = \frac{a}{2}, \quad \overline{PB} = \overline{PH} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} a$$

따라서 직각삼각형 APB에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{PB}}{\overline{AP}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} a}{a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

- 4 오른쪽 그림과 같이 선분 DH를
그으면 $\overline{AD} \perp$ (평면 DEF),
 $\overline{AH} \perp \overline{EF}$ 이므로 삼수선의 정리에
의하여 $\overline{DH} \perp \overline{EF}$
직각삼각형 DEF에서



$$\overline{EF} = \sqrt{\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

삼각형 DEF의 넓이에서

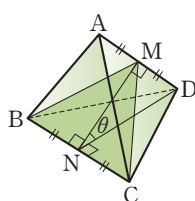
$$\frac{1}{2} \times \overline{DE} \times \overline{DF} = \frac{1}{2} \times \overline{EF} \times \overline{DH}$$

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times \overline{DH} \quad \therefore \overline{DH} = \frac{12}{5}$$

따라서 직각삼각형 ADH에서

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AH}^2 - \overline{DH}^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{5}\right)^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = 1$$

- 5 오른쪽 그림과 같이 모서리 BC의
중점을 N이라 하면 삼각형 MBC
는 이등변삼각형이고 삼각형
DBC는 정삼각형이므로
 $\overline{MN} \perp \overline{BC}$, $\overline{DN} \perp \overline{BC}$



평면 MBC와 평면 BCD가 이루는 각의 크기는 직선
MN과 직선 DN이 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle MND = \theta$$

정사면체의 한 모서리의 길이를 $2a$ 라 하면

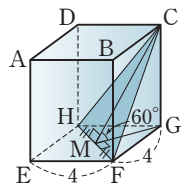
$$\overline{DN} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a = \sqrt{3}a$$

이때 $\overline{DM} = a$ 이고 삼각형 MND는 직각삼각형이므로

$$\overline{MN} = \sqrt{\overline{DN}^2 - \overline{DM}^2} = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 - a^2} = \sqrt{2}a$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{MN}}{\overline{DN}} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

- 6 오른쪽 그림과 같이 선분 HF의 중
점을 M이라 하면 두 삼각형 CHF,
GHF는 이등변삼각형이므로



$$\overline{CM} \perp \overline{HF}, \quad \overline{GM} \perp \overline{HF}$$

평면 CHF와 평면 FGH가 이루는

각의 크기는 직선 CM과 직선 GM이 이루는 각의 크기와
같으므로 $\angle CMG = 60^\circ$

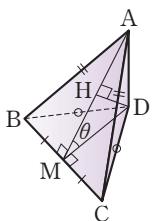
이때 $\overline{EF} = \overline{FG} = 4$ 이므로

$$\overline{MG} = \frac{1}{2} \overline{EG} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

따라서 직각삼각형 CMG에서

$$\overline{CG} = \overline{MG} \tan 60^\circ = 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{6}$$

- 7 오른쪽 그림과 같이 모서리 BC의 중
점을 M이라 하면 두 삼각형 ABC,
DBC는 이등변삼각형이므로
 $\overline{AM} \perp \overline{BC}$, $\overline{DM} \perp \overline{BC}$
평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 각
의 크기는 직선 AM과 직선 DM이 이
루는 각의 크기와 같으므로 $\angle AMD = \theta$



$$\overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 3 \text{이므로}$$

$$\overline{AM} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BM}^2} = \sqrt{7^2 - 3^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\overline{DM} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{BM}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

즉, 삼각형 AMD는 $\overline{AD} = \overline{DM}$ 인 이등변삼각형이다.

점 D에서 변 AM에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{MH} = \overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AM} = \sqrt{10}$$

따라서 직각삼각형 DHM에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{MH}}{\overline{DM}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

- 8 점 A에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발이 E이므로
 $\angle AGE = \theta$

이때 정육면체의 한 모서리의 길이가 4이므로

$$\overline{EG} = 4\sqrt{2}, \quad \overline{AG} = 4\sqrt{3}$$

따라서 직각삼각형 AEG에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{EG}}{\overline{AG}} = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

- 9 오른쪽 그림과 같이 점 A에

서 평면 β 에 내린 수선의 발

을 A', 점 A'에서 교선 l에

내린 수선의 발을 H라 하고

선분 AH를 그으면 $\overline{AA'} \perp \beta$, $\overline{A'H} \perp l$ 이므로 삼수선의

정리에 의하여 $\overline{AH} \perp l$

직각삼각형 ABH에서

$$\overline{AH} = 4 \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\overline{BH} = 4 \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

또 두 평면 α , β 가 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$\angle AHA' = 30^\circ$$

$$\therefore \overline{A'H} = \overline{AH} \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

따라서 선분 AB의 평면 β 위로의 정사영은 선분 A'B이

므로 직각삼각형 A'BH에서

$$\overline{A'B} = \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{A'H}^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

- 10 오른쪽 그림과 같이 선분 BD의 중

점을 M이라 하면

$\overline{CM} \perp$ (평면 DHFB)이므로 선분

CF의 평면 DHFB 위로의 정사영

은 선분 MF이다.

직각삼각형 FBM에서

$$\overline{BF} = 10, \overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} \times 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{MF} = \sqrt{\overline{BF}^2 + \overline{BM}^2} = \sqrt{10^2 + (5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{6}$$

- 11 오른쪽 그림과 같이 밑면과 45°

의 각을 이루는 평면으로 자른 단

면은 원이다.

단면인 원의 지름을 선분 BC라

하면 삼각형 OBC는 $\overline{OB} = \overline{OC} = 2$ 인 직각이등변삼각형

이므로 $\overline{BC} = 2\sqrt{2}$

따라서 단면의 넓이가 $\pi \times (\sqrt{2})^2 = 2\pi$ 이므로 구하는 정사

영의 넓이는 $2\pi \cos 45^\circ = 2\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\pi$

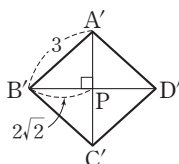
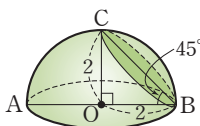
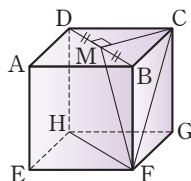
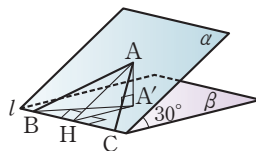
- 12 대각선 BD는 평면 α 와 평행하므로

$$\overline{B'D'} = \overline{BD} = 4\sqrt{2}$$

오른쪽 그림과 같이 두 대각선

A'C', B'D'의 교점을 P라 하면

$$\overline{B'P} = \frac{1}{2} \overline{B'D'} = 2\sqrt{2}$$



직각삼각형 A'B'P에서

$$\overline{A'P} = \sqrt{\overline{A'B'}^2 - \overline{B'P}^2} = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 1$$

즉, $\overline{A'C'} = 2\overline{A'P} = 2$ 이므로

$$\square A'B'C'D' = \frac{1}{2} \times \overline{B'D'} \times \overline{A'C'} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2}$$

따라서 $\square A'B'C'D' = \square ABCD \cos \theta$ 에서

$$4\sqrt{2} = 16 \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

- 13 삼각형 MEN의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형

HEF이므로 $\triangle HEF = \triangle MEN \cos \theta$

$$\text{이때 } \overline{MN} = \overline{DB} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\overline{EN} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{NF}^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5},$$

$$\overline{EM} = \sqrt{\overline{EH}^2 + \overline{MH}^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{이므로 삼각형}$$

MEN은 $\overline{MN} = \overline{EN}$ 인 이등변삼각형이다.

점 N에서 변 EM에 내린 수선의 발을 I

$$\text{라 하면 } \overline{MI} = \frac{1}{2} \overline{EM} = \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\overline{IN} = \sqrt{\overline{MN}^2 - \overline{MI}^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

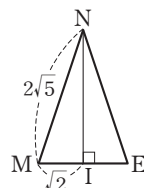
$$\therefore \triangle MEN = \frac{1}{2} \times \overline{EM} \times \overline{IN}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6,$$

$$\triangle HEF = \frac{1}{2} \times \overline{HE} \times \overline{EF} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

따라서 $\triangle HEF = \triangle MEN \cos \theta$ 이므로

$$4 = 6 \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{2}{3}$$



- 14 평면 OAB와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 하

면 삼각형 OAB의 평면 ABCD 위로의 정사영이 삼각형

EAB이므로 $\triangle EAB = \triangle OAB \cos \theta$

$$\text{이때 } \triangle OAB = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\triangle EAB = \frac{1}{4} \square ABCD = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 삼각형 EAB의 평면 OAB 위로의 정사영의 넓이

$$\text{는 } \triangle EAB \cos \theta = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

- 15 오른쪽 그림과 같이 점 P에서

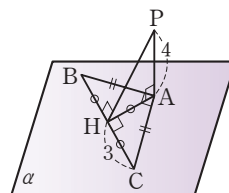
선분 BC에 내린 수선의 발을

H라 하고 선분 AH를 그으면

$\overline{PA} \perp \alpha$, $\overline{PH} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼

수선의 정리에 의하여

$$\overline{AH} \perp \overline{BC}$$



직각이등변삼각형 ABC에서 점 H는 빗변 BC의 중점이므로 삼각형 ABC의 외심이다.

$$\therefore \overline{AH} = \overline{BH} = \overline{CH} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

직각삼각형 PHA에서

$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{PA}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

따라서 점 P에서 직선 BC까지의 거리는 5이다.

- 16 타원의 장축의 길이를 $2a$, 단축의 길이를 $2b$ 라 하자.

타원의 장축의 밑면 위로의 정사영은 원기둥의 밑면의 지름이고, 타원을 포함하는 평면과 원기둥의 밑면을 포함하는 평면이 이루는 각의 크기가 45° 이므로

$$2a \cos 45^\circ = 4 \quad \therefore a = 2\sqrt{2}$$

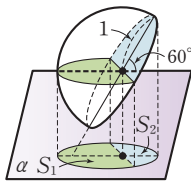
단축의 길이는 원기둥의 밑면의 지름의 길이와 같으므로

$$2b = 4 \quad \therefore b = 2$$

따라서 타원의 두 초점 사이의 거리는

$$2\sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 4$$

- 17 오른쪽 그림과 같이 반구를 반구의 중심을 지나고 평면 α 와 평행한 평면으로 자를 때 생기는 단면인 반원의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S_1 , 반구의 밑면의 반인 반원의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S_2 라 하면 구하는 정사영의 넓이는 $S_1 + S_2$ 이다.



S_1 은 반원의 넓이와 같으므로

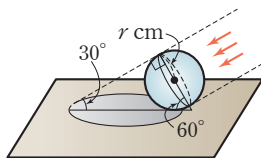
$$S_1 = \frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{2}$$

$$S_2 = (\text{반원의 넓이}) \times \cos 60^\circ = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

따라서 구하는 넓이는

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

- 18 오른쪽 그림과 같이 풍선이 지면과 접하도록 이동시키면 태양 광선과 수직이고 풍선의 중심을 지나하는 평면이 지면과 이루는 각의 크기는 60° 이다.



이때 풍선의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$$72\pi \cos 60^\circ = \pi r^2 \text{ 이므로}$$

$$72\pi \times \frac{1}{2} = \pi r^2, r^2 = 36$$

$$\therefore r = 6 (\because r > 0)$$

따라서 풍선의 반지름의 길이는 6 cm이다.

III-2 01 공간에서의 점의 좌표

1 공간에서의 점의 좌표

개념 CHECK

154쪽

- 1 답 (1) P(2, 4, 3), Q(2, 0, 0), R(0, 0, 3)
(2) P(0, -6, 5), Q(3, -6, 0), R(3, 0, 0)

- 2 답 (1) (2, 0, 0) (2) (0, -3, 0) (3) (0, 0, 4)

- 3 답 (1) (-1, 5, 0) (2) (0, 5, 7) (3) (-1, 0, 7)

- 4 답 (1) (3, -6, 2) (2) (-3, 6, 2)
(3) (-3, -6, -2)

- 5 답 (1) (-4, 1, 8) (2) (4, 1, -8)
(3) (-4, -1, -8) (4) (4, -1, 8)

문제

155쪽

- 01-1 답 (-3, -1, -7)

점 P(-3, 1, 7)과 원점에 대하여 대칭인 점 Q의 좌표는 (3, -1, -7)

점 Q(3, -1, -7)과 yz 평면에 대하여 대칭인 점 R의 좌표는 (-3, -1, -7)

- 01-2 답 -2

점 P(a, 2, b)와 y 축에 대하여 대칭인 점 Q의 좌표는 (-a, 2, -b)

점 Q(-a, 2, -b)에서 zx 평면에 내린 수선의 발 R의 좌표는 (-a, 0, -b)

이 점이 점 (5, c, -3)과 일치하므로

$$-a = 5, 0 = c, -b = -3$$

$$\therefore a = -5, b = 3, c = 0 \quad \therefore a + b + c = -2$$

- 01-3 답 3

점 A는 점 B(2, 4, a)에서 zx 평면에 내린 수선의 발이므로 A(2, 0, a)

점 A와 x 축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 (2, 0, -a)

이 점이 점 (b, 0, -5)와 일치하므로

$$2 = b, -a = -5$$

$$\therefore a = 5, b = 2 \quad \therefore a - b = 3$$

1 답 (1) $\sqrt{34}$ (2) 7

(1) $\overline{AB} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2 + (-5+2)^2} = \sqrt{34}$

(2) $\overline{OA} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 7$

문제

157~160쪽

02-1 답 2

$\overline{AB} = 9$ 이므로

$\sqrt{(-a-2)^2 + (-3-5)^2 + (1-a)^2} = 9$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2 + a - 6 = 0, (a+3)(a-2) = 0$

$\therefore a = 2 (\because a > 0)$

02-2 답 $\sqrt{17}$

점 P(1, -2, 6)에서 yz평면에 내린 수선의 발 Q의 좌표는

(0, -2, 6)

점 P(1, -2, 6)과 z축에 대하여 대칭인 점 R의 좌표는

(-1, 2, 6)

$\therefore \overline{QR} = \sqrt{(-1)^2 + (2+2)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{17}$

02-3 답 $\sqrt{6}$

$\overline{AB} = \sqrt{(1-3)^2 + (-2+4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\overline{BC} = \sqrt{(2-1)^2 + (-4+2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$\overline{CA} = \sqrt{(3-2)^2 + (-4+4)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2}$

이때 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$ 이므로 삼각형 ABC는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CA}$

$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$

03-1 답 (1) (0, -1, 0) (2) (0, -4, -1)

(1) y축 위의 점 P의 좌표를 (0, b, 0)이라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$(-4)^2 + (b+3)^2 + (-1)^2 = 1^2 + (b-3)^2 + 2^2$

$b^2 + 6b + 26 = b^2 - 6b + 14$

$12b = -12 \therefore b = -1$

$\therefore P(0, -1, 0)$

(2) yz평면 위의 점 Q의 좌표를 (0, b, c)라 하면

$\overline{OQ} = \overline{AQ}$ 에서 $\overline{OQ}^2 = \overline{AQ}^2$ 이므로

$b^2 + c^2 = (-2)^2 + (b+1)^2 + (c-1)^2$

$2b - 2c = -6 \therefore b - c = -3 \dots\dots \textcircled{A}$

$\overline{OQ} = \overline{BQ}$ 에서 $\overline{OQ}^2 = \overline{BQ}^2$ 이므로

$b^2 + c^2 = (b+5)^2 + (c-3)^2$

$10b - 6c = -34 \therefore 5b - 3c = -17 \dots\dots \textcircled{B}$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면

$b = -4, c = -1$

$\therefore Q(0, -4, -1)$

03-2 답 $(-\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5}), (1, 0, 2)$

zx평면 위의 점 C의 좌표를 (a, 0, c)라 하자.

이때 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ 이다.

$\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로

$2^2 + (1-2)^2 + (-1)^2 = (a-2)^2 + (-1)^2 + c^2$

$a^2 + c^2 - 4a - 1 = 0 \dots\dots \textcircled{1}$

$\overline{BC} = \overline{CA}$ 에서 $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$ 이므로

$(a-2)^2 + (-1)^2 + c^2 = (-a)^2 + 2^2 + (1-c)^2$

$-4a = -2c \therefore c = 2a$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$5a^2 - 4a - 1 = 0, (5a+1)(a-1) = 0$

$\therefore a = -\frac{1}{5} \text{ 또는 } a = 1$

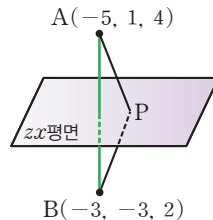
$\therefore a = -\frac{1}{5}, c = -\frac{2}{5} \text{ 또는 } a = 1, c = 2$

따라서 구하는 점 C의 좌표는

$(-\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5}), (1, 0, 2)$

04-1 답 (1) $2\sqrt{6}$ (2) $2\sqrt{21}$

(1) 두 점 A, B의 y좌표의 부호가 다르므로 두 점 A, B는 zx평면을 기준으로 서로 반대쪽에 있다.



$\therefore \overline{AP} + \overline{BP} \geq \overline{AB}$

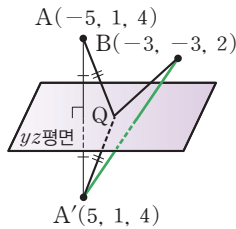
$= \sqrt{(-3+5)^2 + (-3-1)^2 + (2-4)^2}$

$= 2\sqrt{6}$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{6}$ 이다.

(2) 두 점 A, B의 x 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 yz 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 yz 평면에 대하여 대칭인 점을 A' 이라 하면
 $A'(-5, 1, 4)$

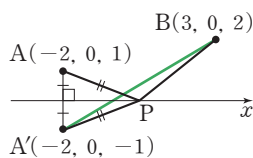


$$\begin{aligned} \text{이때 } \overline{AQ} &= \overline{A'Q} \text{이므로} \\ \overline{AQ} + \overline{BQ} &= \overline{A'Q} + \overline{BQ} \\ &\geq \overline{A'B} \\ &= \sqrt{(-3-5)^2 + (-3-1)^2 + (2-4)^2} \\ &= 2\sqrt{21} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{21}$ 이다.

04-2 [답] $\sqrt{34}$

두 점 A, B의 y 좌표가 0이고 z 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 zx 평면에 있고 x 축을 기준으로 같은 쪽에 있다.



점 A와 x 축에 대하여 대칭인 점을 A' 이라 하면
 $A'(-2, 0, -1)$

$$\begin{aligned} \text{이때 } \overline{AP} &= \overline{A'P} \text{이므로} \\ \overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{A'P} + \overline{BP} \\ &\geq \overline{A'B} \\ &= \sqrt{(3+2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{34}$ 이다.

05-1 [답] $\sqrt{41}$

두 점 A, B의 yz 평면 위로의 정사영을 각각 A' , B' 이라 하면

$$A'(0, -2, -1), B'(0, 2, 4)$$

따라서 구하는 정사영의 길이는

$$\overline{A'B'} = \sqrt{(2+2)^2 + (4+1)^2} = \sqrt{41}$$

05-2 [답] 45°

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-2)^2 + (8-3)^2 + (8-4)^2} = 5\sqrt{2}$$

두 점 A, B의 zx 평면 위로의 정사영을 각각 A' , B' 이라 하면

$$A'(2, 0, 4), B'(5, 0, 8)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(5-2)^2 + (8-4)^2} = 5$$

직선 AB와 zx 평면이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta \text{이므로}$$

$$5 = 5\sqrt{2} \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

05-3 [답] 2, 4

$$\overline{AB} = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (a-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{a^2 - 6a + 20}$$

두 점 A, B의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A' , B' 이라 하면

$$A'(\sqrt{2}, 3, 0), B'(0, a, 0)$$

$$\overline{A'B'} = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (a-3)^2} = \sqrt{a^2 - 6a + 11}$$

따라서 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 60^\circ$ 이므로

$$\sqrt{a^2 - 6a + 11} = \sqrt{a^2 - 6a + 20} \times \frac{1}{2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 6a + 8 = 0, (a-2)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = 4$$

3 선분의 내분점과 외분점

개념 CHECK

162쪽

$$1 \quad \text{[답]} \quad (1) \left(-\frac{8}{3}, -1, 2\right) \quad (2) (-3, 0, 1)$$

$$(3) (-6, 9, -8)$$

$$(1) \left(\frac{1 \times (-4) + 2 \times (-2)}{1+2}, \frac{1 \times 3 + 2 \times (-3)}{1+2}, \frac{1 \times (-2) + 2 \times 4}{1+2} \right)$$

$$\therefore \left(-\frac{8}{3}, -1, 2\right)$$

$$(2) \left(\frac{-2 + (-4)}{2}, \frac{-3 + 3}{2}, \frac{4 + (-2)}{2} \right)$$

$$\therefore (-3, 0, 1)$$

$$(3) \left(\frac{2 \times (-4) - 1 \times (-2)}{2-1}, \frac{2 \times 3 - 1 \times (-3)}{2-1}, \frac{2 \times (-2) - 1 \times 4}{2-1} \right)$$

$$\therefore (-6, 9, -8)$$

$$2 \quad \text{[답]} \quad (4, -1, 4)$$

$$\left(\frac{3 + (-1) + 10}{3}, \frac{-1 + 2 + (-4)}{3}, \frac{5 + 4 + 3}{3} \right)$$

$$\therefore (4, -1, 4)$$

06-1 답 3√3

선분 AB를 1:3으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-1) + 3 \times 3}{1+3}, \frac{1 \times 0 + 3 \times (-4)}{1+3}, \frac{1 \times 2 + 3 \times (-2)}{1+3} \right)$$

$$\therefore (2, -3, -1)$$

선분 AB를 1:3으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-1) - 3 \times 3}{1-3}, \frac{1 \times 0 - 3 \times (-4)}{1-3}, \frac{1 \times 2 - 3 \times (-2)}{1-3} \right)$$

$$\therefore (5, -6, -4)$$

$$\therefore PQ = \sqrt{(5-2)^2 + (-6+3)^2 + (-4+1)^2} = 3\sqrt{3}$$

06-2 답 21

점 P(-1, 6, 7)을 yz평면에 대하여 대칭이동한 점 Q(1, 6, 7)

따라서 선분 PQ를 3:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 1 + 1 \times (-1)}{3+1}, \frac{3 \times 6 + 1 \times 6}{3+1}, \frac{3 \times 7 + 1 \times 7}{3+1} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}, 6, 7 \right)$$

따라서 $a = \frac{1}{2}$, $b = 6$, $c = 7$ 이므로

$$abc = 21$$

06-3 답 (0, -1, -4)

선분 AB를 3:2로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times a - 2 \times 3}{3-2}, \frac{3 \times b - 2 \times 2}{3-2}, \frac{3 \times c - 2 \times (-7)}{3-2} \right)$$

$$\therefore (3a-6, 3b-4, 3c+14)$$

이 점이 점 (-12, -13, 8)과 일치하므로

$$3a-6 = -12, 3b-4 = -13, 3c+14 = 8$$

$$\therefore a = -2, b = -3, c = -2$$

즉, B(-2, -3, -2)이므로 선분 AB를 3:2로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-2) + 2 \times 3}{3+2}, \frac{3 \times (-3) + 2 \times 2}{3+2}, \frac{3 \times (-2) + 2 \times (-7)}{3+2} \right)$$

$$\therefore (0, -1, -4)$$

다른 풀이

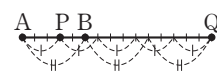
오른쪽 그림에서 점 P는 선분

AQ를 1:4로 내분하는 점이므로

점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-12) + 4 \times 3}{1+4}, \frac{1 \times (-13) + 4 \times 2}{1+4}, \frac{1 \times 8 + 4 \times (-7)}{1+4} \right)$$

$$\therefore (0, -1, -4)$$



07-1 답 3

선분 AB를 $m:1$ 로 내분하는 점이 zx 평면 위에 있으므로 내분점의 y 좌표는 0이다.

$$\therefore \frac{m \times 1 + 1 \times (-3)}{m+1} = 0 \text{ 이므로}$$

$$m-3=0 \quad \therefore m=3$$

07-2 답 10

선분 AB를 1:2로 내분하는 점이 xy 평면 위에 있으므로 내분점의 z 좌표는 0이다.

$$\therefore \frac{1 \times c + 2 \times (-4)}{1+2} = 0 \text{ 이므로}$$

$$c-8=0 \quad \therefore c=8$$

또 선분 AB를 3:2로 외분하는 점이 z 축 위에 있으므로 외분점의 x 좌표, y 좌표는 모두 0이다.

$$\therefore \frac{3 \times a - 2 \times (-2)}{3-2} = 0, \frac{3 \times b - 2 \times 5}{3-2} = 0 \text{ 이므로}$$

$$3a+4=0, 3b-10=0 \quad \therefore a = -\frac{4}{3}, b = \frac{10}{3}$$

$$\therefore a+b+c=10$$

08-1 답 $a=5, b=4, c=12$

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치한다.

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+1}{2}, \frac{-1+b}{2}, \frac{6+8}{2} \right)$$

$$\therefore \left(2, \frac{-1+b}{2}, 7 \right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a-1}{2}, \frac{-3+6}{2}, \frac{2+c}{2} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{a-1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2+c}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 일치하므로

$$2 = \frac{a-1}{2}, \frac{-1+b}{2} = \frac{3}{2}, 7 = \frac{2+c}{2}$$

$$\therefore a=5, b=4, c=12$$

08-2 **답** C(7, -1, 3), D(3, 2, 11)

두 대각선 AC, BD의 교점은 두 대각선 AC, BD의 중점과 일치한다.

대각선 AC의 중점의 좌표가 (2, 0, 4)이므로 점 C의 좌표를 (a, b, c)라 하면

$$\frac{-3+a}{2}=2, \frac{1+b}{2}=0, \frac{5+c}{2}=4$$

$$\therefore a=7, b=-1, c=3 \quad \therefore C(7, -1, 3)$$

대각선 BD의 중점의 좌표가 (2, 0, 4)이므로 점 D의 좌표를 (d, e, f)라 하면

$$\frac{1+d}{2}=2, \frac{-2+e}{2}=0, \frac{-3+f}{2}=4$$

$$\therefore d=3, e=2, f=11 \quad \therefore D(3, 2, 11)$$

08-3 **답** 5

마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치한다.

대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{-4+7}{2}, \frac{-2+3}{2}\right)$

$$\therefore \left(\frac{a}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

대각선 BD의 중점의 좌표는 $\left(\frac{b+3}{2}, \frac{0+3}{2}, \frac{3-2}{2}\right)$

$$\therefore \left(\frac{b+3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②이 일치하므로

$$\frac{a}{2}=\frac{b+3}{2} \quad \therefore a=b+3 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

또 마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로

$$\overline{AD}=\overline{CD} \quad \therefore \overline{AD}^2=\overline{CD}^2$$

$$(3-a)^2+(3+4)^2+(-2+2)^2$$

$$=3^2+(3-7)^2+(-2-3)^2$$

$$a^2-6a+8=0, (a-2)(a-4)=0$$

$$\therefore a=4 (\because a>2)$$

이를 ③에 대입하여 풀면 $b=1$

$$\therefore a+b=5$$

09-1 **답** (2, 0, 3)

C(a, b, c)라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3+4+a}{3}, \frac{-1-2+b}{3}, \frac{4-1+c}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+7}{3}, \frac{b-3}{3}, \frac{c+3}{3}\right)$$

이 점이 점 (3, -1, 2)와 일치하므로

$$\frac{a+7}{3}=3, \frac{b-3}{3}=-1, \frac{c+3}{3}=2$$

$$\therefore a=2, b=0, c=3 \quad \therefore C(2, 0, 3)$$

09-2 **답** $\left(-\frac{2}{3}, 1, -4\right)$

점 A(2, 3, 4)와 xy평면에 대하여 대칭인 점 P의 좌표는 (2, 3, -4)

점 A(2, 3, 4)와 y축에 대하여 대칭인 점 Q의 좌표는 (-2, 3, -4)

점 A(2, 3, 4)와 원점에 대하여 대칭인 점 R의 좌표는 (-2, -3, -4)

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2-2-2}{3}, \frac{3+3-3}{3}, \frac{-4-4-4}{3}\right)$$

$$\therefore \left(-\frac{2}{3}, 1, -4\right)$$

09-3 **답** $\left(3, -1, \frac{1}{3}\right)$

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times 3}{2+1}, \frac{2 \times (-2) + 1 \times (-1)}{2+1}, \frac{2 \times (-1) + 1 \times 4}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{11}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 2 + 1 \times 4}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times (-2)}{2+1}, \frac{2 \times (-2) + 1 \times (-1)}{2+1}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

선분 CA를 2 : 1로 내분하는 점 R의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times (-1) + 1 \times 0}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times (-2)}{2+1}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}, 2\right)$$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{\frac{11}{3} + \frac{8}{3} + \frac{8}{3}}{3}, \frac{-\frac{5}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}}{3}, \frac{\frac{2}{3} - \frac{5}{3} + 2}{3}\right)$$

$$\therefore \left(3, -1, \frac{1}{3}\right)$$

다른 풀이

삼각형 PQR의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3+4+2}{3}, \frac{-1-2+0}{3}, \frac{4-1-2}{3}\right)$$

$$\therefore \left(3, -1, \frac{1}{3}\right)$$

참고 삼각형의 세 변을 각각 $m:n (m>0, n>0)$ 으로 내분하는 점을 연결한 삼각형의 무게중심은 원래 삼각형의 무게중심과 일치한다.

연습문제

167~169쪽

- 1 $(-3, -1, -4)$ 2 ⑤ 3 ① 4 ⑤
 5 $3\sqrt{2}$ 6 $(0, 1, 0)$ 7 -30 8 6
 9 $5\sqrt{2}$ 10 60° 11 ② 12 $(7, -4, -2)$
 13 1 14 ④ 15 ③ 16 $(2, 2, 0)$
 17 $5\sqrt{2}$ 18 ④ 19 $(-19, -5, 14)$ 20 ②
 21 45° 22 $\sqrt{17}$

- 1 점 A의 좌표를 (a, b, c) 라 하자.
 점 A (a, b, c) 와 yz 평면에 대하여 대칭인 점 B의 좌표는 $(-a, b, c)$
 점 B $(-a, b, c)$ 와 z 축에 대하여 대칭인 점 C의 좌표는 $(a, -b, c)$
 이 점이 점 $(-3, 1, -4)$ 와 일치하므로
 $a = -3, -b = 1, c = -4$
 $\therefore a = -3, b = -1, c = -4$
 $\therefore A(-3, -1, -4)$

- 2 점 P $(1, 5, -2)$ 와 zx 평면에 대하여 대칭인 점 Q의 좌표는 $(1, -5, -2)$
 점 Q $(1, -5, -2)$ 와 y 축에 대하여 대칭인 점 R의 좌표는 $(-1, -5, 2)$
 $\therefore \overline{QR} = \sqrt{(-1-1)^2 + (-5+5)^2 + (2+2)^2} = 2\sqrt{5}$

- 3 $\overline{PA} = 2\overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = 4\overline{PB}^2$ 이므로
 $(-1)^2 + (1-3)^2 + a^2 = 4\{1^2 + (2-3)^2 + (-1)^2\}$
 $a^2 + 5 = 12, a^2 = 7 \quad \therefore a = \sqrt{7} \quad (\because a > 0)$

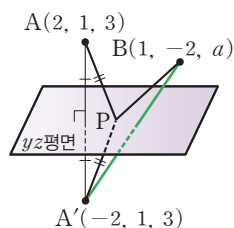
- 4 점 C의 좌표를 $(a, 0, 0)$ 이라 하면
 $\overline{AB}^2 = (-2-1)^2 + (-2+4)^2 + 1^2 = 14$
 $\overline{BC}^2 = (a+2)^2 + 2^2 + (-1)^2 = a^2 + 4a + 9$
 $\overline{CA}^2 = (1-a)^2 + (-4)^2 = a^2 - 2a + 17$
 삼각형 ABC가 변 AC를 빗변으로 하는 직각삼각형이므로 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$
 $a^2 - 2a + 17 = 14 + (a^2 + 4a + 9)$
 $-6a = 6 \quad \therefore a = -1$

- 5 $\overline{AB} = \sqrt{(b-2)^2 + (-a)^2 + (-4-b)^2}$
 $= \sqrt{a^2 + 2b^2 + 4b + 20}$
 $= \sqrt{a^2 + 2(b+1)^2 + 18}$
 따라서 두 점 A, B 사이의 거리는 $a = 0, b = -1$ 일 때 최
 소값 $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ 를 갖는다.

- 6 y 축 위의 점 P의 좌표를 $(0, b, 0)$ 이라 하면
 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로
 $(-4)^2 + (b-2)^2 + 1^2 = 4^2 + b^2 + 1^2$
 $-4b = -4 \quad \therefore b = 1$
 $\therefore P(0, 1, 0)$

- 7 점 P가 xy 평면 위에 있으므로 $c = 0$
 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로
 $(a-1)^2 + (b+1)^2 + (-1)^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 + 4^2$
 $2a + 4b = 18 \quad \therefore a + 2b = 9 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 $\overline{BP} = \overline{CP}$ 에서 $\overline{BP}^2 = \overline{CP}^2$ 이므로
 $(a-2)^2 + (b-1)^2 + 4^2 = a^2 + (b+1)^2 + (-6)^2$
 $-4a - 4b = 16 \quad \therefore a + b = -4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$
 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면
 $a = -17, b = 13$
 $\therefore a - b + c = -30$

- 8 두 점 A, B의 x 좌표의 부호
 가 같으므로 두 점 A, B는
 yz 평면을 기준으로 같은 쪽에
 있다.
 점 A와 yz 평면에 대하여 대
 칭인 점을 A'이라 하면
 $A'(-2, 1, 3)$
 이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로
 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$



$$\geq \overline{A'B}$$

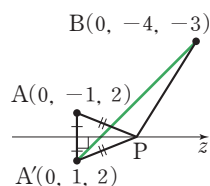
$$= \sqrt{(1+2)^2 + (-2-1)^2 + (a-3)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - 6a + 27}$$

따라서 $\sqrt{a^2 - 6a + 27} = 3\sqrt{3}$ 이므로 양변을 제곱하여 정리
 하면

$$a^2 - 6a = 0, a(a-6) = 0 \quad \therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$$

- 9 두 점 A, B의 x 좌표가 0이고 y
 좌표의 부호가 같으므로 두 점
 A, B는 yz 평면 위에 있고 z 축
 을 기준으로 같은 쪽에 있다.
 점 A와 z 축에 대하여 대칭인 점
 을 A'이라 하면 $A'(0, 1, 2)$



이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로
 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$
 $\geq \overline{A'B}$
 $= \sqrt{(-4-1)^2 + (-3-2)^2} = 5\sqrt{2}$

따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{2}$ 이다.

- 10 $\overline{AB} = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2 + (2\sqrt{3}-7\sqrt{3})^2} = 10$
 두 점 A, B의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A' , B' 이라 하면
 $A'(2, 3, 0)$, $B'(5, -1, 0)$
 $\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = 5$
 직선 AB와 xy 평면이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면
 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 이므로
 $5 = 10 \cos \theta$, $\cos \theta = \frac{1}{2}$
 $\therefore \theta = 60^\circ$

- 11 $\overline{AB} = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (a-1)^2 + (2-3)^2}$
 $= \sqrt{a^2 - 2a + 4}$
 두 점 A, B의 zx 평면 위로의 정사영을 각각 A' , B' 이라 하면
 $A'(\sqrt{2}, 0, 3)$, $B'(0, 0, 2)$
 $\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (2-3)^2} = \sqrt{3}$
 이때 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 30^\circ$ 이므로
 $\sqrt{3} = \sqrt{a^2 - 2a + 4} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
 양변을 제곱하여 정리하면
 $a^2 - 2a = 0$, $a(a-2) = 0$
 $\therefore a = 2$ ($\because a > 0$)

- 12 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는
 $\left(\frac{3 \times 3 + 2 \times (-2)}{3+2}, \frac{3 \times 0 + 2 \times 5}{3+2}, \frac{3 \times 2 + 2 \times 7}{3+2} \right)$
 $\therefore (1, 2, 4)$
 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점 Q의 좌표는
 $\left(\frac{3 \times 3 - 2 \times (-2)}{3-2}, \frac{3 \times 0 - 2 \times 5}{3-2}, \frac{3 \times 2 - 2 \times 7}{3-2} \right)$
 $\therefore (13, -10, -8)$
 따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{1+13}{2}, \frac{2-10}{2}, \frac{4-8}{2} \right)$
 $\therefore (7, -4, -2)$

- 13 점 A는 선분 PP'의 중점이므로
 $A\left(\frac{4-6}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{6-3}{2}\right)$
 $\therefore A\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$
 따라서 $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{3}{2}$ 이므로
 $a + b + c = 1$

- 14 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이 x 축 위에 있으므로 내분점의 y 좌표는 0이다.
 $\therefore \frac{2 \times (-2) + 1 \times a}{2+1} = 0$ 이므로
 $a - 4 = 0 \quad \therefore a = 4$

- 15 선분 AB를 $m : 3$ 으로 내분하는 점이 xy 평면 위에 있으므로 내분점의 z 좌표는 0이다.
 $\therefore \frac{m \times 6 + 3 \times (-4)}{m+3} = 0$ 이므로
 $6m - 12 = 0 \quad \therefore m = 2$
 또 선분 AB를 3 : n 으로 외분하는 점이 zx 평면 위에 있으므로 외분점의 y 좌표는 0이다.
 $\therefore \frac{3 \times 5 - n \times 3}{3-n} = 0$ 이므로
 $15 - 3n = 0 \quad \therefore n = 5$
 $\therefore mn = 10$

- 16 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ 이라 하면 점 P는 선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점이고, xy 평면 위에 있으므로 점 P의 z 좌표는 0이다.
 $\therefore \frac{m \times 4 + n \times (-1)}{m+n} = 0$ 이므로
 $4m - n = 0 \quad \therefore 4m = n$
 $\therefore \overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 4$
 따라서 점 P는 선분 AB를 1 : 4로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는
 $\left(\frac{1 \times (-2) + 4 \times 3}{1+4}, \frac{1 \times 2 + 4 \times 2}{1+4}, \frac{1 \times 4 + 4 \times (-1)}{1+4} \right)$
 $\therefore (2, 2, 0)$

- 17 점 B의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 평행사변형 ABCD의 대각선 BD의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+8}{2} \right)$
 이때 대각선 BD의 중점은 두 대각선의 교점 $(2, 0, 4)$ 와 일치하므로
 $\frac{a+3}{2} = 2$, $\frac{b+2}{2} = 0$, $\frac{c+8}{2} = 4$
 $\therefore a = 1$, $b = -2$, $c = 0$
 따라서 $B(1, -2, 0)$ 이므로
 $\overline{AB} = \sqrt{(1+3)^2 + (-2-1)^2 + (-5)^2}$
 $= 5\sqrt{2}$

- 18 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+1+1}{3}, \frac{0+b+1}{3}, \frac{5-3+1}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+2}{3}, \frac{b+1}{3}, 1\right)$$

이 점이 점 (2, 2, 1)과 일치하므로

$$\frac{a+2}{3}=2, \frac{b+1}{3}=2$$

$$\therefore a=4, b=5 \quad \therefore a+b=9$$

- 19 점 C의 좌표를 (a, b, c)라 하면 선분 CM을 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 8 + 1 \times a}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times b}{2+1}, \frac{2 \times 2 + 1 \times c}{2+1}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+16}{3}, \frac{b+8}{3}, \frac{c+4}{3}\right)$$

이 점이 점 G(-1, 1, 6)과 일치하므로

$$\frac{a+16}{3}=-1, \frac{b+8}{3}=1, \frac{c+4}{3}=6$$

$$\therefore a=-19, b=-5, c=14$$

$$\therefore C(-19, -5, 14)$$

다른 풀이

A(x₁, y₁, z₁), B(x₂, y₂, z₂), C(x, y, z)라 하면 선분 AB의 중점이 M이므로

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

$$\text{즉, } \frac{x_1+x_2}{2}=8, \frac{y_1+y_2}{2}=4, \frac{z_1+z_2}{2}=2 \text{ 이므로}$$

$$x_1+x_2=16, y_1+y_2=8, z_1+z_2=4$$

삼각형 ABC의 무게중심이 G이므로

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x}{3}, \frac{y_1+y_2+y}{3}, \frac{z_1+z_2+z}{3}\right)$$

$$\text{즉, } \frac{16+x}{3}=-1, \frac{8+y}{3}=1, \frac{4+z}{3}=6 \text{ 이므로}$$

$$x=-19, y=-5, z=14$$

$$\therefore C(-19, -5, 14)$$

- 20 점 P(a, 2a, a+1)과 xy평면에 대하여 대칭인 점 Q의 좌표는

$$(a, 2a, -a-1)$$

점 P(a, 2a, a+1)과 y축에 대하여 대칭인 점 R의 좌표는

$$(-a, 2a, -a-1)$$

삼각형 PQR에서

$$\overline{PQ}=|-a-1-(a+1)|=|-2a-2|=2a+2$$

$$\overline{QR}=|-a-a|=|-2a|=2a$$

$$\begin{aligned} \overline{RP} &= \sqrt{(a+a)^2 + (2a-2a)^2 + (a+1+a+1)^2} \\ &= \sqrt{8a^2 + 8a + 4} \end{aligned}$$

이때 $\overline{RP}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2$ 이므로 삼각형 PQR는 $\angle Q = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{QR} = \frac{1}{2} \times (2a+2) \times 2a \\ &= 2a^2 + 2a \end{aligned}$$

따라서 $2a^2 + 2a = 40$ 이므로

$$a^2 + a - 20 = 0, (a+5)(a-4) = 0$$

$$\therefore a=4 (\because a>0)$$

- 21 $\overline{AB} = |4-1| = 3$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-2)^2 + (4-4)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(2-4)^2 + (1-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{17}$$

이때 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 이므로 삼각형 ABC는 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC}$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

세 점 A, B, C의 xy평면 위로의 정사영을 각각 A', B', C'이라 하면

$$A'(2, 1, 0), B'(2, 4, 0), C'(4, 4, 0)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = |4-1| = 3, \overline{B'C'} = |4-2| = 2,$$

$$\overline{C'A'} = \sqrt{(2-4)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{13}$$

이때 $\overline{C'A'}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{B'C'}^2$ 이므로 삼각형 A'B'C'은 $\angle B' = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\therefore \triangle A'B'C' = \frac{1}{2} \times \overline{A'B'} \times \overline{B'C'}$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$$

따라서 삼각형 ABC와 xy평면이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면 $\triangle A'B'C' = \triangle ABC \cos \theta$ 이므로

$$3 = 3\sqrt{2} \cos \theta, \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

- 22 오른쪽 그림과 같이 점 H를 원

점으로 하고 세 직선 EH, GH,

DH를 각각 x축, y축, z축으로

하는 좌표공간을 나타내면

$$D(0, 0, 5), E(5, 0, 0),$$

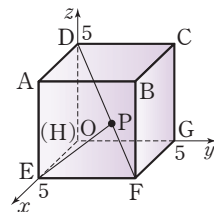
$$F(5, 5, 0)$$

선분 DF를 3:2로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 5 + 2 \times 0}{3+2}, \frac{3 \times 5 + 2 \times 0}{3+2}, \frac{3 \times 0 + 2 \times 5}{3+2}\right)$$

$$\therefore (3, 3, 2)$$

$$\therefore \overline{EP} = \sqrt{(3-5)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{17}$$



III-2 02 구의 방정식

1 구의 방정식(1)

개념 CHECK

171쪽

- 1 답 (1) 중심의 좌표: $(0, -1, 2)$, 반지름의 길이: 1
 (2) 중심의 좌표: $(-2, -4, 3)$, 반지름의 길이: 4
- 2 답 (1) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$
 (2) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
- 3 답 (1) 중심의 좌표: $(0, 1, -1)$, 반지름의 길이: 1
 (2) 중심의 좌표: $(-1, 3, -2)$, 반지름의 길이: $\sqrt{17}$
 (1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z + 1 = 0$ 을 변형하면
 $x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1$
 따라서 중심의 좌표는 $(0, 1, -1)$, 반지름의 길이는 1이다.
 (2) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 3 = 0$ 을 변형하면
 $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 17$
 따라서 중심의 좌표는 $(-1, 3, -2)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{17}$ 이다.

문제

172~174쪽

- 01-1 답 (1) $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 22$
 (2) $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 29$
 (1) 구의 반지름의 길이는 두 점 $(3, -2, 1)$, $(0, 1, 3)$ 사이의 거리와 같으므로
 $\sqrt{(-3)^2 + (1+2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{22}$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 22$
 (2) 구의 중심은 선분 AB의 중점과 같으므로 구의 중심의 좌표는
 $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{5-3}{2}\right)$
 $\therefore (1, 2, 1)$
 구의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}AB$ 와 같으므로
 $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(4+2)^2 + 4^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{29}$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 29$

01-2 답 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 51$

구 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$ 의 중심의 좌표는 $(1, -2, 3)$

구의 반지름의 길이는 두 점 $(1, -2, 3)$, $(2, 5, 2)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(2-1)^2 + (5+2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{51}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 51$$

01-3 답 $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+5)^2 = 12$

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 2 + 1 \times (-1)}{2+1}, \frac{2 \times 5 + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times (-4) + 1 \times (-1)}{2+1}\right)$$

$$\therefore (1, 4, -3)$$

선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 2 - 1 \times (-1)}{2-1}, \frac{2 \times 5 - 1 \times 2}{2-1}, \frac{2 \times (-4) - 1 \times (-1)}{2-1}\right)$$

$$\therefore (5, 8, -7)$$

구의 중심은 선분 PQ의 중점과 같으므로 구의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{4+8}{2}, \frac{-3-7}{2}\right) \therefore (3, 6, -5)$$

구의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}\sqrt{(5-1)^2 + (8-4)^2 + (-7+3)^2} = 2\sqrt{3}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+5)^2 = 12$$

02-1 답 (1) $a=21, b=-3, c=6$

(2) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - y - 3z = 0$

(1) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y - 12z + a = 0$ 을 변형하면

$$(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-6)^2 = 46 - a$$

이 구의 중심의 좌표는 $(-1, -3, 6)$ 이므로

$$b = -3, c = 6$$

구의 반지름의 길이는 $\sqrt{46-a}$ 이므로

$$\sqrt{46-a} = 5, 46-a = 25 \therefore a = 21$$

(2) 구하는 구의 방정식을

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

이라 하자.

점 $(0, 0, 0)$ 을 지나므로 $D=0$

점 $(0, 1, 0)$ 을 지나므로

$$1+B=0 \therefore B=-1$$

점 $(0, 2, 2)$ 를 지나므로

$$6+2C=0 \therefore C=-3$$

점 $(-4, 0, 3)$ 을 지나므로
 $16 - 4A = 0 \quad \therefore A = 4$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - y - 3z = 0$

02-2 [답] $k > -21$

$x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 2y + 4z - k = 0$ 을 변형하면
 $(x+4)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = k+21$
 주어진 방정식이 구를 나타내려면 $k+21 > 0$ 이어야 하므로 $k > -21$

03-1 [답] $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 16 = 0$

$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$ 이므로 $3\overline{BP} = \overline{AP}$
 $\therefore 9\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$
 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면
 $9\{(x+4)^2 + y^2 + z^2\} = (x-4)^2 + y^2 + z^2$
 $\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 16 = 0$

03-2 [답] $72\sqrt{2}\pi$

$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \sqrt{3}$ 이므로 $\sqrt{3}\overline{BP} = \overline{AP}$
 $\therefore 3\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$
 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면
 $3\{(x-2)^2 + y^2 + z^2\} = x^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2$
 $\therefore (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 18$
 따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $(3, -2, -1)$
 이고 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$ 인 구이므로 구하는 도형의 부피는
 $\frac{4}{3}\pi \times (3\sqrt{2})^3 = 72\sqrt{2}\pi$

03-3 [답] 4π

점 A의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 점 A는 구
 $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4$ 위의 점이므로
 $(a-2)^2 + (b-1)^2 + c^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 선분 AB의 중점의 좌표를 (x, y, z) 라 하면
 $x = \frac{a+0}{2}, y = \frac{b+5}{2}, z = \frac{c-2}{2}$
 $\therefore a = 2x, b = 2y - 5, c = 2z + 2$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $(2x-2)^2 + (2y-6)^2 + (2z+2)^2 = 4$
 $\therefore (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 1$
 따라서 선분 AB의 중점이 나타내는 도형은 중심이 점
 $(1, 3, -1)$ 이고 반지름의 길이가 1인 구이므로 구하는
 도형의 겹넓이는
 $4\pi \times 1^2 = 4\pi$

2 구의 방정식(2)

개념 CHECK

176쪽

1 [답] (1) $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$

(2) $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$

(3) $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 1$

(1) 주어진 구가 xy 평면에 접하므로 반지름의 길이는
 $|-2| = 2$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$

(2) 주어진 구가 yz 평면에 접하므로 반지름의 길이는
 $|3| = 3$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$

(3) 주어진 구가 zx 평면에 접하므로 반지름의 길이는
 $|1| = 1$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 1$

2 [답] (1) $(x-5)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 17$

(2) $(x-5)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 26$

(3) $(x-5)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 41$

(1) 주어진 구가 x 축에 접하므로 반지름의 길이는
 $\sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-5)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 17$

(2) 주어진 구가 y 축에 접하므로 반지름의 길이는
 $\sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-5)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 26$

(3) 주어진 구가 z 축에 접하므로 반지름의 길이는
 $\sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$

따라서 구하는 구의 방정식은

$(x-5)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 41$

3 [답] (1) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 12$

(2) $(y+3)^2 + (z-2)^2 = 15$

(3) $(x-1)^2 + (z-2)^2 = 7$

(1) 주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (-2)^2 = 16$

$\therefore (x-1)^2 + (y+3)^2 = 12$

(2) 주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$(-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 16$

$\therefore (y+3)^2 + (z-2)^2 = 15$

(3) 주어진 구의 방정식에 $y=0$ 을 대입하면

$$(x-1)^2+3^2+(z-2)^2=16$$

$$\therefore (x-1)^2+(z-2)^2=7$$

문제

177~180쪽

04-1 답 3

$x^2+y^2+z^2-4x+2ky+2z+10=0$ 을 변형하면

$$(x-2)^2+(y+k)^2+(z+1)^2=k^2-5$$

이 구가 yz 평면에 접할 때 반지름의 길이는 중심의 x 좌표의 절댓값과 같으므로

$$\sqrt{k^2-5}=|2|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$k^2=9 \quad \therefore k=3 \quad (\because k>0)$$

04-2 답 1

구의 중심 $C(k, 2, -3)$ 에서 y 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$H(0, 2, 0)$$

$$\therefore \overline{CH}=\sqrt{(-k)^2+3^2}=\sqrt{k^2+9}$$

이때 선분 CH 의 길이는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$\sqrt{k^2+9}=\sqrt{10}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$k^2=1 \quad \therefore k=1 \quad (\because k>0)$$

04-3 답 6

구가 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 동시에 접하고 점

$(-2, 3, 1)$ 을 지나므로 반지름의 길이를 r 라 하면 구의

중심의 좌표는 $(-r, r, r)$ $\leftarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ominus \\ \oplus \\ \oplus \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -r \\ r \\ r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ominus \\ \oplus \\ \oplus \end{pmatrix}$

즉, 구의 방정식은

$$(x+r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2$$

이 구가 점 $(-2, 3, 1)$ 을 지나므로

$$(-2+r)^2+(3-r)^2+(1-r)^2=r^2$$

$$\therefore r^2-6r+7=0$$

이때 두 구의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$r_1+r_2=6$$

05-1 답 8 π

주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$y^2+z^2-2y-4z-3=0$$

$$\therefore (y-1)^2+(z-2)^2=8$$

따라서 주어진 구와 yz 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi \times (2\sqrt{2})^2=8\pi$$

다른 풀이

$x^2+y^2+z^2+2x-2y-4z-3=0$ 을 변형하면

$$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$$

구의 중심을 C 라 하고 점 C 에서

yz 평면에 내린 수선의 발을 H ,

구와 yz 평면이 만나서 생기는 원

위의 한 점을 P 라 하면

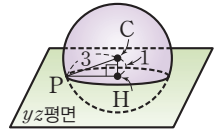
$$\overline{CP}=3, \overline{CH}=1$$

이때 직각삼각형 CPH 에서

$$\overline{PH}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$$

따라서 주어진 구와 yz 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi \times (2\sqrt{2})^2=8\pi$$



05-2 답 8

구의 중심의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 구의 반지름의 길이가 5이므로 구의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=25$$

위의 방정식에 $y=0$ 을 대입하면

$$(x-a)^2+(-b)^2+(z-c)^2=25$$

$$\therefore (x-a)^2+(z-c)^2=25-b^2$$

이 방정식이 $(x-3)^2+(z-4)^2=9$ 와 일치하므로

$$a=3, c=4, 25-b^2=9$$

$$25-b^2=9 \text{에서 } b^2=16 \quad \therefore b=\pm 4$$

두 구의 중심의 좌표는

$$(3, -4, 4), (3, 4, 4)$$

따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

$$|4-(-4)|=8$$

06-1 답 $\sqrt{7}$

$x^2+y^2+z^2-2x-10y+22=0$ 을 변형하면

$$(x-1)^2+(y-5)^2+z^2=4$$

이 구의 중심을 C 라 하면 $C(1, 5, 0)$ 이므로

$$\overline{AC}=\sqrt{(1+2)^2+(5-6)^2+1^2}=\sqrt{11}$$

오른쪽 그림과 같이 점 A

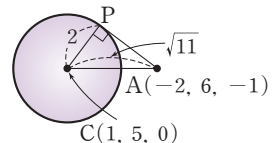
에서 구에 그은 접선의 접

점을 P 라 하면

$$\overline{CP}=2$$

따라서 직각삼각형 APC 에서

$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{(\sqrt{11})^2-2^2}=\sqrt{7}$$



06-2 [답] $\sqrt{10}$

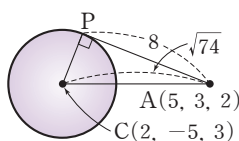
$$\overline{AC} = \sqrt{(2-5)^2 + (-5-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{74}$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 구에 그은 접선의 접점을 P라 하면

$$\overline{AP} = 8$$

따라서 직각삼각형 APC에서

$$\overline{CP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AP}^2} = \sqrt{(\sqrt{74})^2 - 8^2} = \sqrt{10}$$



06-3 [답] 29

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 12z + k = 0 \text{을 변형하면}$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-6)^2 = 46 - k$$

이 구의 중심을 C라 하면 $C(-1, 3, 6)$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(-1-3)^2 + (3-2)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{42}$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 구에 그은 접선의 접점을 P라 하면

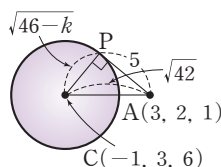
$$\overline{AP} = 5, \overline{CP} = \sqrt{46 - k}$$

직각삼각형 APC에서

$$\overline{CP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AP}^2} = \sqrt{(\sqrt{42})^2 - 5^2} = \sqrt{17}$$

따라서 $\sqrt{46 - k} = \sqrt{17}$ 이므로 양변을 제곱하면

$$46 - k = 17 \quad \therefore k = 29$$



07-1 [답] 22

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 12y - 4z + 25 = 0 \text{을 변형하면}$$

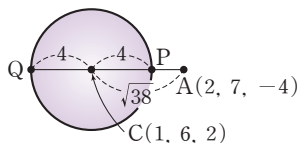
$$(x-1)^2 + (y-6)^2 + (z-2)^2 = 16$$

이 구의 중심을 C라 하면 $C(1, 6, 2)$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-2)^2 + (6-7)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{38}$$

다음 그림과 같이 직선 AC가 구와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하면 두 선분 CP, CQ의 길이는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{CP} = \overline{CQ} = 4$$



따라서 선분의 길이의 최댓값 M, 최솟값 m은

$$M = \overline{AQ} = \overline{AC} + \overline{CQ} = \sqrt{38} + 4$$

$$m = \overline{AP} = \overline{AC} - \overline{CP} = \sqrt{38} - 4$$

$$\therefore Mm = 38 - 16 = 22$$

07-2 [답] 최댓값: 6, 최솟값: 2

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 8z + 22 = 0 \text{을 변형하면}$$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 4$$

구의 중심을 C라 하고 점 C에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{HC} = 4$$

오른쪽 그림과 같이 직선

HC가 구와 만나는 두 점을

각각 P, Q라 하면 두 선분

CP, CQ의 길이는 구의 반

지름의 길이와 같으므로

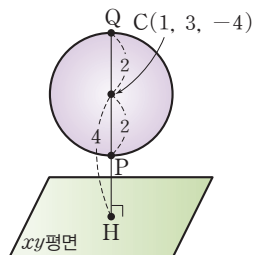
$$\overline{CP} = \overline{CQ} = 2$$

따라서 거리의 최댓값은

$$\overline{HQ} = \overline{HC} + \overline{CQ} = 4 + 2 = 6$$

또 거리의 최솟값은

$$\overline{HP} = \overline{HC} - \overline{CP} = 4 - 2 = 2$$



연습문제

181~183쪽

- | | | | |
|----|------------------------------------|----|-----|
| 1 | $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 14$ | 2 | ④ |
| 3 | ④ | 4 | 2 |
| 5 | 5 | 6 | 40 |
| 7 | 80π | | |
| 8 | ④ | 9 | ③ |
| 10 | $(x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 = 50$ | 11 | ③ |
| 12 | 20 | 13 | ④ |
| 14 | 6 | 15 | -12 |
| 16 | 45 | | |
| 17 | ② | 18 | ② |
| 19 | ② | 20 | 64 |

- 구 $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$ 의 중심의 좌표는 $(3, -1, 2)$
구의 반지름의 길이는 두 점 $(3, -1, 2), (2, 1, -1)$ 사이의 거리와 같으므로
$$\sqrt{(2-3)^2 + (1+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{14}$$

따라서 구하는 구의 방정식은
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 14$$
- 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는
$$\left(\frac{1 \times 1 + 2 \times 4}{1+2}, \frac{1 \times (-2) + 2 \times 1}{1+2}, \frac{1 \times 3 + 2 \times (-3)}{1+2} \right)$$

$$\therefore (3, 0, -1)$$

선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점 Q의 좌표는
$$\left(\frac{1 \times 1 - 2 \times 4}{1-2}, \frac{1 \times (-2) - 2 \times 1}{1-2}, \frac{1 \times 3 - 2 \times (-3)}{1-2} \right)$$

$$\therefore (7, 4, -9)$$

구의 중심은 선분 PQ의 중점과 같으므로 구의 중심의 좌표는
$$\left(\frac{3+7}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{-1-9}{2} \right)$$

$$\therefore (5, 2, -5)$$

구의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}\sqrt{(7-3)^2 + 4^2 + (-9+1)^2} = 2\sqrt{6}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 + (z+5)^2 = 24$$

즉, $a=5, b=2, c=-5, d=24$ 이므로

$$a+b+c+d=26$$

3 구하는 구의 방정식을

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

이라 하자.

점 $(0, 0, 0)$ 을 지나므로 $D=0$

점 $(6, 0, 0)$ 을 지나므로

$$36 + 6A = 0 \quad \therefore A = -6$$

점 $(1, 1, 0)$ 을 지나므로

$$-4 + B = 0 \quad \therefore B = 4$$

점 $(-3, 0, 3)$ 을 지나므로

$$36 + 3C = 0 \quad \therefore C = -12$$

즉, 구의 방정식은 $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 12z = 0$ 이므로

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-6)^2 = 49$$

따라서 구의 반지름의 길이는 7이다.

4 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + kz = k$ 를 변형하면

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + \left(z + \frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4} + k + 5$$

이때 구의 부피가 최소이려면 구의 반지름의 길이

$$\sqrt{\frac{k^2}{4} + k + 5} \text{가 최소이어야 한다.}$$

$$\frac{k^2}{4} + k + 5 = \frac{1}{4}(k+2)^2 + 4 \text{이므로 } k = -2 \text{일 때 반지름}$$

의 길이가 최소이고 이때의 구의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$$

따라서 $a=1, b=2, c=1, r=2$ 이므로

$$a+b+c-r=2$$

5 $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 8y + 10z = 0$ 을 변형하면

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 + (z+5)^2 = 50$$

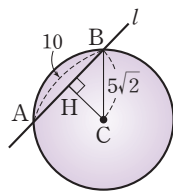
이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(-3, 4, -5)$, 반지름의 길이는 $5\sqrt{2}$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C라 하고 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CB} = 5\sqrt{2}, \overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 5$$

따라서 직각삼각형 BHC에서

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{BH}^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - 5^2} = 5$$



6 $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 14y - 16z - 20 = 0$ 을 변형하면

$$(x-6)^2 + (y-7)^2 + (z-8)^2 = 169$$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(6, 7, 8)$ 이다.

이때 구의 중심은 선분 AB의 중점과 같으므로

$$\frac{3+a}{2} = 6, \frac{3+b}{2} = 7, \frac{-4+c}{2} = 8$$

$$\therefore a=9, b=11, c=20$$

$$\therefore a+b+c=40$$

7 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로 $2\overline{BP} = \overline{AP}$

$$\therefore 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$4\{x^2 + (y-3)^2 + z^2\} = (x+6)^2 + y^2 + z^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y = 0$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-4)^2 + z^2 = 20$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $(2, 4, 0)$ 이고

반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$ 인 구이므로 구하는 도형의 겉넓이는

$$4\pi \times (2\sqrt{5})^2 = 80\pi$$

8 $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 2az + b = 0$ 을 변형하면

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z-a)^2 = a^2 - b + 20$$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(4, -2, a)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{a^2 - b + 20}$ 이다.

이 구가 xy 평면에 접하므로

$$\sqrt{a^2 - b + 20} = |a|$$

양변을 제곱하면

$$a^2 - b + 20 = a^2$$

$$\therefore b = 20$$

또 이 구가 yz 평면에 접하므로

$$\sqrt{a^2 - b + 20} = |4|$$

$$\text{이때 } b=20 \text{이므로 } \sqrt{a^2} = 4$$

그런데 $a > 0$ 이므로

$$a = 4$$

$$\therefore b - a = 16$$

9 구가 xy 평면에 접하므로

$$r = |a| = a \quad (\because a > 0)$$

구의 중심 $C(3, 4, a)$ 에서 z 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$H(0, 0, a)$$

이때 선분 CH의 길이는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (a-a)^2} = 5$$

$$\therefore a = 5$$

$$\therefore a + r = 10$$

- 10** 구가 x 축, y 축, z 축에 동시에 접하므로 구의 중심에서 x 축, y 축, z 축에 이르는 거리는 모두 구의 반지름의 길이와 같다.

구의 중심을 $C(a, a, a)(a>0)$ 라 하고 점 C 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$H(a, 0, 0)$$

$$\overline{CH}=5\sqrt{2}\text{이므로}$$

$$\sqrt{(a-a)^2+(0-a)^2+(0-a)^2}=5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2a^2}=5\sqrt{2}, a\sqrt{2}=5\sqrt{2} \quad \therefore a=5$$

따라서 구의 중심의 좌표는 $(5, 5, 5)$ 이고 반지름의 길이는 $5\sqrt{2}$ 이므로 구하는 구의 방정식은

$$(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=50$$

- 11** 주어진 구의 방정식에 $y=0, z=0$ 을 대입하면

$$(x-1)^2+2^2+(-3)^2=r^2$$

$$\therefore x^2-2x+14-r^2=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 구와 x 축이 만나는 두 점 사이의 거리가 6이므로 x 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근을 $\alpha, \alpha+6$ 이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(\alpha+6)=2, \alpha(\alpha+6)=14-r^2$$

$$\therefore \alpha=-2, r=\sqrt{22} \quad (\because r>0)$$

- 12** 주어진 구의 방정식에 $x=0, z=0$ 을 대입하면

$$y^2-6y-7=0, (y+1)(y-7)=0$$

$$\therefore y=-1 \text{ 또는 } y=7$$

즉, 주어진 구와 y 축의 두 교점의 좌표는 $(0, -1, 0), (0, 7, 0)$ 이므로

$$\overline{AB}=|7-(-1)|=8$$

$$x^2+y^2+z^2-8x-6y+4z-7=0\text{을 변형하면}$$

$$(x-4)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=36$$

이때 두 점 A, B 는 구 위의 점이므로 두 선분 AC, BC 의 길이는 구의 반지름의 길이와 같다.

$$\therefore \overline{AC}=\overline{BC}=6$$

따라서 삼각형 ABC 의 둘레의 길이는

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=8+6+6=20$$

- 13** 구의 중심은 선분 AB 의 중점과 같으므로 구의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{4-8}{2}, \frac{-5-1}{2}, \frac{7+1}{2}\right)$$

$$\therefore (-2, -3, 4)$$

구의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(-8-4)^2+(-1+5)^2+(1-7)^2}=7$$

즉, 구의 방정식은

$$(x+2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=49$$

위의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

$$(x+2)^2+(y+3)^2+(-4)^2=49$$

$$\therefore (x+2)^2+(y+3)^2=33$$

따라서 주어진 구와 xy 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 $\sqrt{33}$ 인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{33})^2=33\pi$$

- 14** 주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$y^2+z^2+6y-2z+k=0$$

$$\therefore (y+3)^2+(z-1)^2=10-k$$

이때 주어진 구와 yz 평면이 만나서 생기는 원의 반지름의 길이가 2이므로

$$\sqrt{10-k}=2$$

양변을 제곱하면

$$10-k=4 \quad \therefore k=6$$

- 15** $x^2+y^2+z^2-2x+2z+k=0$ 을 변형하면

$$(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=2-k$$

주어진 구의 중심을 C 라 하면 $C(1, 0, -1)$ 이므로

$$\overline{AC}=\sqrt{(1+2)^2+(-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{29}$$

오른쪽 그림과 같이 점 A 에서 구에 그른 접선의 접점을 P 라 하면

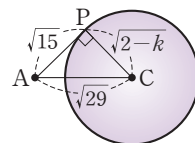
$$\overline{AP}=\sqrt{15}, \overline{CP}=\sqrt{2-k}$$

직각삼각형 ACP 에서

$$\begin{aligned} \overline{CP} &= \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AP}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{29})^2 - (\sqrt{15})^2} = \sqrt{14} \end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{2-k}=\sqrt{14}$ 이므로

$$2-k=14 \quad \therefore k=-12$$



- 16** 구의 중심을 C 라 하면 $C(-2, 3, -6)$ 이므로

$$\overline{OC}=\sqrt{(-2)^2+3^2+(-6)^2}=7$$

오른쪽 그림과 같이 직선 OC 가 구와 만나는 두 점을 각각 P, Q 라 하면 두 선분 CP, CQ 의 길이는 구의 반지름의 길이와 같으므로

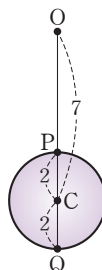
$$\overline{CP}=\overline{CQ}=2$$

따라서 선분의 길이의 최댓값 M , 최솟값 m 은

$$M=\overline{OQ}=\overline{OC}+\overline{CQ}=7+2=9$$

$$m=\overline{OP}=\overline{OC}-\overline{CP}=7-2=5$$

$$\therefore Mm=45$$



- 17 정육면체 A에 내접하는 구의 중심의 좌표는 (3, 1, 3)
 정육면체 B에 내접하는 구의 중심의 좌표는 (3, 3, 1)
 정육면체 C에 내접하는 구의 중심의 좌표는 (1, 3, 1)
 즉, 세 점 (3, 1, 3), (3, 3, 1), (1, 3, 1)을 연결한 삼각
 형의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3+3+1}{3}, \frac{1+3+3}{3}, \frac{3+1+1}{3}\right) \quad \therefore \left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

따라서 $p=\frac{7}{3}, q=\frac{7}{3}, r=\frac{5}{3}$ 이므로 $p+q+r=\frac{19}{3}$

- 18 구 S의 반지름의 길이를 r , 중심을 $C(a, b, c)$ 라 하면 중
 심의 x 좌표, y 좌표, z 좌표가 모두 양수이므로

$$a>0, b>0, c>0$$

구 S가 z 축과 접하는 점을 각각 A, B라 하면

$A(a, 0, 0), B(0, b, 0)$ 이고 $r=\overline{AC}=\overline{BC}$ 이므로

$$r=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{a^2+c^2}$$

$$\therefore r^2=b^2+c^2=a^2+c^2$$

$$\therefore a=b \quad (\because a>0, b>0)$$

따라서 구 S의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-c)^2=a^2+c^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦에 $z=0$ 을 대입하면

$$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$$

이 원의 넓이가 64π 이므로

$$\pi \times a^2 = 64\pi \quad \therefore a=8 \quad (\because a>0)$$

$a=8$ 을 ⑦에 대입하면

$$(x-8)^2+(y-8)^2+(z-c)^2=64+c^2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑧에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$64+64+(z-c)^2=64+c^2$$

$$(z-c)^2=c^2-64 \quad \therefore z=c \pm \sqrt{c^2-64}$$

구 S가 z 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8이므로

$$(c+\sqrt{c^2-64})-(c-\sqrt{c^2-64})=8$$

$$\therefore \sqrt{c^2-64}=4$$

양변을 제곱하면

$$c^2-64=16 \quad \therefore c^2=80$$

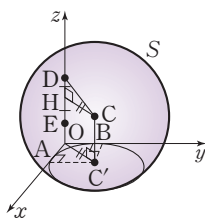
따라서 구 S의 반지름의 길이는

$$\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{64+80}=12$$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 구 S의 중심
 을 C라 하고 점 C의 xy 평면 위
 로의 정사영을 C'이라 하자.

이때 구 S가 x 축과 y 축에 각각
 접하므로 xy 평면에 의하여 잘린
 구의 단면은 x 축과 y 축에 각각
 접하고 점 C'을 중심으로 하는 원이다.



이 원의 넓이가 $64\pi=\pi \times 8^2$ 이므로

$$\overline{AC'}=\overline{BC'}=8$$

또 구 S가 z 축과 만나는 두 점을 D, E, 점 C에서 z 축에 내
 린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{DE}=8, \overline{CD}=\overline{CE}, \overline{CH} \perp \overline{DE}$$

이므로

$$\overline{DH}=\frac{1}{2}\overline{DE}=4$$

$$\overline{CH}=\overline{OC'}=\sqrt{\overline{OA'}^2+\overline{AC'}^2}=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$$

직각삼각형 DHC에서

$$\overline{DC}=\sqrt{\overline{DH}^2+\overline{CH}^2}=\sqrt{4^2+(8\sqrt{2})^2}=12$$

따라서 구 S의 반지름의 길이는 12이다.

- 19 주어진 구의 중심을 C라 하면 $C(1, 0, -1)$ 이므로

$$\overline{AC}=\sqrt{(1-1)^2+(-2)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 구

에 그은 접선의 접점을 P라 하면

$$\overline{CP}=2$$

직각삼각형 APC에서

$$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CP}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2^2}=2$$

직각삼각형 APC의 꼭짓점 P에서 변 AC에 내린 수선의
 발을 H라 하면 삼각형 APC의 넓이에서

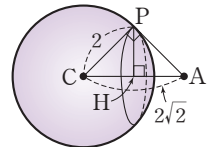
$$\frac{1}{2} \times \overline{CP} \times \overline{AP} = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{PH}$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \overline{PH}$$

$$\therefore \overline{PH}=\sqrt{2}$$

따라서 접점이 나타내는 도형은 중심이 점 H이고 반지름
 의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{2})^2 = 2\pi$$



- 20 $x^2+y^2+z^2+8x-8y+4z+32=0$ 을 변형하면

$$(x+4)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=4$$

구의 중심을 C라 하면 $C(-4, 4, -2)$ 이고 반지름의 길
 이는 2이다.

원점 O에 대하여 $\overline{OP}^2=x^2+y^2+z^2$ 이

므로 점 P가 오른쪽 그림과 같을 때

$x^2+y^2+z^2$ 의 값이 최대가 된다.

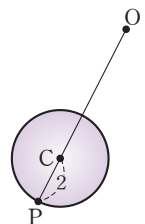
$$\text{이때 } \overline{OC}=\sqrt{(-4)^2+4^2+(-2)^2}=6\text{이}$$

므로

$$\overline{OP}=6+2=8$$

따라서 $x^2+y^2+z^2$ 의 최댓값은

$$8^2=64$$



유형편

정답과 해설

I-1 01 포물선

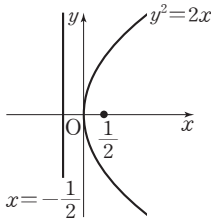
기초 문제 Training

4쪽

- 1 (1) $y^2=8x$ (2) $y^2=-20x$
(3) $x^2=2y$ (4) $x^2=-24y$

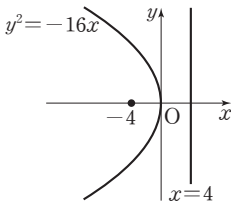
- 2 (1) 초점의 좌표: $(\frac{1}{2}, 0)$, 꼭짓점의 좌표: $(0, 0)$

준선의 방정식: $x=-\frac{1}{2}$



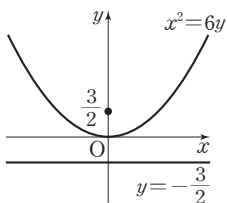
- (2) 초점의 좌표: $(-4, 0)$, 꼭짓점의 좌표: $(0, 0)$

준선의 방정식: $x=4$



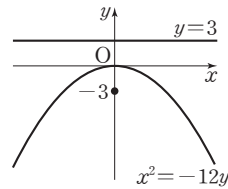
- (3) 초점의 좌표: $(0, \frac{3}{2})$, 꼭짓점의 좌표: $(0, 0)$

준선의 방정식: $y=-\frac{3}{2}$



- (4) 초점의 좌표: $(0, -3)$, 꼭짓점의 좌표: $(0, 0)$

준선의 방정식: $y=3$



- 3 (1) $(y+2)^2=2(x-1)$ (2) $(x+4)^2=16(y-2)$

- 4 (1) 초점의 좌표: $(2, -2)$, 꼭짓점의 좌표: $(3, -2)$

준선의 방정식: $x=4$, 축의 방정식: $y=-2$

- (2) 초점의 좌표: $(1, 4)$, 꼭짓점의 좌표: $(1, 2)$

준선의 방정식: $y=0$, 축의 방정식: $x=1$

- 5 (1) 초점의 좌표: $(-5, 1)$, 준선의 방정식: $x=3$

- (2) 초점의 좌표: $(-1, 7)$, 준선의 방정식: $y=5$

핵심 유형 Training

5~8쪽

1 ③	2 ④	3 ②	4 $y^2=8x, x^2=y$
5 ③	6 $2\sqrt{6}$	7 $\frac{1}{8}$	8 12
10 $(0, -4)$	11 ③	12 4	13 ④
14 10	15 $x^2+9y-9=0$	16 6	17 6
18 8	19 15	20 6	21 ④
23 $\sqrt{17}$	24 $\frac{1}{4}$	25 14	26 ⑤
27 $y^2=7(x+1)$	28 $(2, -1)$		

- 1 $y^2=-4x$ 에서 $y^2=4 \times (-1) \times x$ 이므로 $A(-1, 0)$
 $x^2=-12y$ 에서 $x^2=4 \times (-3) \times y$ 이므로 $B(0, -3)$
 $\therefore AB=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

- 2 $y^2=ax$ 에서 $y^2=4 \times \frac{a}{4} \times x$ 이므로 준선의 방정식은

$$x=-\frac{a}{4}$$

$x^2=4y$ 에서 $x^2=4 \times 1 \times y$ 이므로 준선의 방정식은
 $y=-1$

두 준선의 교점의 좌표는 $(-\frac{a}{4}, -1)$ 이므로

$$-\frac{a}{4}=-6, -1=b$$

$$\therefore a=24, b=-1$$

$$\therefore a-b=25$$

- 3 점 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ 을 초점으로 하고 준선이 $x=\frac{1}{2}$ 인 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times x \quad \therefore y^2 = -2x$$

따라서 이 포물선이 지나는 점은 ② $(-2, 2)$ 이다.

- 4 꼭짓점이 원점인 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4px \text{ 또는 } x^2 = 4py \text{ (단, } p \neq 0)$$

이 포물선이 점 $(2, 4)$ 를 지나므로

$$(i) y^2 = 4px \text{ 일 때, } 16 = 8p \quad \therefore p = 2$$

$$\therefore y^2 = 8x$$

$$(ii) x^2 = 4py \text{ 일 때, } 4 = 16p \quad \therefore p = \frac{1}{4}$$

$$\therefore x^2 = y$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 포물선의 방정식은

$$y^2 = 8x \text{ 또는 } x^2 = y$$

- 5 포물선 $y^2 = 4px$ 의 초점의 좌표는 $(p, 0)$, 준선의 방정식은 $x = -p$ 이므로 중심의 좌표가 $(p, 0)$ 이고 직선 $x = -p$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는 $2p$ 이다.

이때 원의 둘레의 길이가 36π 이므로

$$2\pi \times 2p = 36\pi \quad \therefore p = 9$$

- 6 꼭짓점이 원점이고 y 축에 대하여 대칭인 포물선의 방정식은

$$x^2 = 4py \text{ (단, } p \neq 0)$$

이 포물선이 점 $(a, 3)$ ($a > 0$)

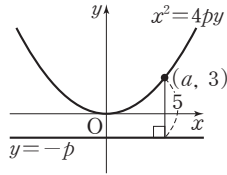
을 지나므로 $p > 0$

포물선의 준선의 방정식은 $y = -p$ 이고 점 $(a, 3)$ 에서 준선까지의 거리가 5이므로

$$3 - (-p) = 5 \quad \therefore p = 2$$

따라서 점 $(a, 3)$ 이 포물선 $x^2 = 8y$ 위의 점이므로

$$a^2 = 24 \quad \therefore a = 2\sqrt{6} \text{ (} \because a > 0)$$



- 7 초점이 $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ 이고 준선이 $x = -\frac{1}{4}$ 인 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4 \times \frac{1}{4} \times x \quad \therefore y^2 = x$$

이 포물선의 꼭짓점은 $A(0, 0)$

한편 초점 F 를 지나고 준선에 평행한 직선의 방정식은

$$x = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ 을 } y^2 = x \text{ 에 대입하면 } y^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore y = \pm \frac{1}{2}$$

따라서 $B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $C\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ 이라 하면 구하는 삼각형

$$\text{의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

- 8 포물선 $y^2 = a(x-1)$ 은 포물선 $y^2 = ax$ 를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 초점은

$$F\left(\frac{a}{4} + 1, 0\right)$$

포물선 $x^2 = 2a(y+2)$ 는 포물선 $x^2 = 2ay$ 를 y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 초점은

$$F'\left(0, \frac{a}{2} - 2\right)$$

점 F 의 x 좌표와 점 F' 의 y 좌표가 서로 같으므로

$$\frac{a}{4} + 1 = \frac{a}{2} - 2$$

$$\therefore a = 12$$

- 9 준선이 y 축에 평행하므로 포물선의 방정식은

$$(y-n)^2 = 4p(x-m)$$

이 포물선의 초점의 좌표는 $(p+m, n)$, 준선의 방정식은

$$x = -p+m \text{ 이므로}$$

$$p+m = -2, n=2, -p+m=4$$

$$\therefore p = -3, m=1, n=2$$

따라서 포물선의 방정식은

$$(y-2)^2 = -12(x-1)$$

이 포물선이 점 $(a, 8)$ 을 지나므로

$$36 = -12(a-1)$$

$$\therefore a = -2$$

- 10 꼭짓점의 좌표가 $(4, -2)$ 이고 준선이 x 축인 포물선의 방정식은

$$(x-4)^2 = 4p(y+2)$$

이 포물선의 준선의 방정식은 $y = -p-2$ 이므로

$$-p-2=0 \quad \therefore p = -2$$

즉, 포물선의 방정식은 $(x-4)^2 = -8(y+2)$ 이므로 $x=0$ 을 대입하면

$$16 = -8(y+2) \quad \therefore y = -4$$

따라서 주어진 포물선이 y 축과 만나는 점의 좌표는

$$(0, -4)$$

- 11 구하는 포물선은 점 $(3, 0)$ 이 초점이고 직선 $x = -5$ 가 준선이다.

준선이 y 축에 평행하므로 포물선의 방정식은

$$(y-n)^2 = 4p(x-m)$$

이 포물선의 초점의 좌표는 $(p+m, n)$, 준선의 방정식은

$$x = -p+m \text{ 이므로}$$

$$p+m=3, n=0, -p+m=-5$$

$$\therefore p=4, m=-1, n=0$$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$$y^2 = 16(x+1)$$

다른 풀이

$P(x, y)$ 라 하면

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=|x-(-5)|$$

양변을 제곱하면 구하는 포물선의 방정식은

$$(x-3)^2+y^2=(x+5)^2 \quad \therefore y^2=16(x+1)$$

- 12 $y^2-3x-4y+1=0$ 에서

$$y^2-4y+4=3x+3 \quad \therefore (y-2)^2=3(x+1)$$

즉, 이 포물선은 포물선 $y^2=3x$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로

$$a=3, m=-1, n=2 \quad \therefore a+m+n=4$$

- 13 $y^2-4x+4y+a=0$ 에서

$$y^2+4y+4=4x-a+4$$

$$\therefore (y+2)^2=4\left(x-\frac{a}{4}+1\right)$$

이 포물선은 포물선 $y^2=4x$ 를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{4}-1$ 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 초점의 좌표는 $\left(1+\frac{a}{4}-1, -2\right)$, 즉 $\left(\frac{a}{4}, -2\right)$ 이다.

점 $\left(\frac{a}{4}, -2\right)$ 가 포물선 $y^2=x$ 위의 점이므로

$$4=\frac{a}{4} \quad \therefore a=16$$

- 14 포물선 $x^2-8y=0$, 즉 $x^2=8y$ 의 초점은 $F(0, 2)$

$$x^2+4y-8=0 \text{에서 } x^2=-4(y-2)$$

즉, 이 포물선은 포물선 $x^2=-4y$ 를 y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 초점은

$$F'(0, -1+2) \quad \therefore F'(0, 1)$$

점 $A(a, 0)$ ($a>0$)에 대하여 삼각형 $AF F'$ 의 넓이가 5 이므로

$$\frac{1}{2} \times 1 \times a = 5 \quad \therefore a=10$$

- 15 준선이 x 축에 평행한 포물선의 방정식의 일반형은

$$x^2+Ax+By+C=0 \text{ (단, } A, B, C \text{는 상수, } B \neq 0)$$

이 포물선이 세 점 $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 1)$ 을 지나므로

$$9-3A+C=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$9+3A+C=0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$B+C=0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $A=0$, $C=-9$

$C=-9$ 를 $\textcircled{3}$ 에 대입하여 풀면 $B=9$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$$x^2+9y-9=0$$

- 16 포물선 $x^2=16y$ 의 준선의 방정식은 $y=-4$

포물선 위의 점 P 에서 준

선에 내린 수선의 발을 H ,

직선 $y=-6$ 에 내린 수선

의 발을 H' 이라 하면

$$\overline{PH'}=8 \text{이므로}$$

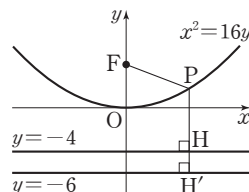
$$\overline{PH}+\overline{HH'}=8$$

$$\overline{PH}+2=8$$

$$\therefore \overline{PH}=6$$

따라서 포물선의 정의에 의하여 점 P 에서 초점 F 까지의

$$\overline{PF}=\overline{PH}=6$$



- 17 포물선 $(y-2)^2=4(x+1)$ 의 준선의 방정식은

$$x=-1-1 \quad \therefore x=-2$$

포물선 위의 점 B 에서 준선

에 내린 수선의 발을 H 라

하면 포물선의 정의에 의하여

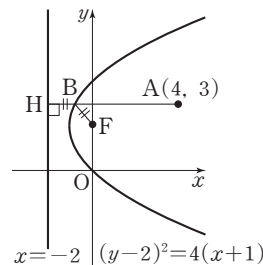
$$\overline{BF}=\overline{BH}$$

$$\therefore \overline{AB}+\overline{BF}=\overline{AB}+\overline{BH}$$

$$=\overline{AH}$$

$$=4-(-2)$$

$$=6$$



- 18 포물선 $y^2=8x$ 의 준선의 방정식은 $x=-2$

두 점 A, B 에서 준선에 내린 수선

의 발을 각각 A'', B'' 이라 하면 포

물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF}=\overline{AA''}$$

$$=\overline{AA'}+1$$

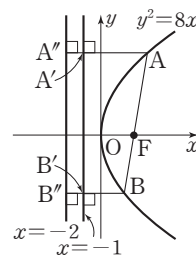
$$\overline{BF}=\overline{BB''}$$

$$=\overline{BB'}+1$$

이때 $\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AB}=10$ 이므로

$$(\overline{AA'}+1)+(\overline{BB'}+1)=10$$

$$\therefore \overline{AA'}+\overline{BB'}=8$$



- 19 포물선 $x^2=6y$ 의 준선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}$

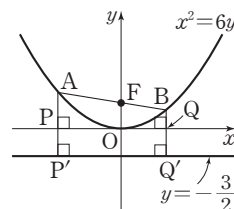
두 점 A, B 에서 준선에 내린

수선의 발을 각각 P', Q' 이라

하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF}=\overline{AP'}=\overline{AP}+\frac{3}{2}$$

$$\overline{BF}=\overline{BQ'}=\overline{BQ}+\frac{3}{2}$$



이때 $\overline{AF} + \overline{BF} = \overline{AB} = 8$ 이므로

$$\left(\overline{AP} + \frac{3}{2}\right) + \left(\overline{BQ} + \frac{3}{2}\right) = 8 \quad \therefore \overline{AP} + \overline{BQ} = 5$$

따라서 구하는 사각형 APQB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (\overline{AP} + \overline{BQ}) \times \overline{PQ} = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$$

- 20** 포물선 $y^2 = -4x$ 의 초점을 F라 하면 $F(-1, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x=1$ 이다.

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 a, b 라 하면 선분 AB의 중점의 x 좌표가 -2 이므로

$$\frac{a+b}{2} = -2$$

$$\therefore a+b = -4$$

두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A', B' 이라 하면 포물선의 정의에 의하여

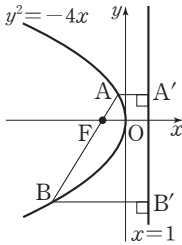
$$\overline{AF} = \overline{AA'} = 1-a$$

$$\overline{BF} = \overline{BB'} = 1-b$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF}$$

$$= (1-a) + (1-b)$$

$$= 2 - (a+b) = 6 \quad (\because a+b = -4)$$



- 21** 포물선 $x^2 = 12y$ 의 초점은 $F(0, 3)$ 이고, 준선의 방정식은 $y = -3$ 이다.

세 점 A, B, C의 y 좌표를 각각 y_1, y_2, y_3 이라 하면 초점 F가 삼각형 ABC의 무게중심과 같으므로

$$\frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 3$$

$$\therefore y_1 + y_2 + y_3 = 9$$

세 점 A, B, C에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A', B', C' 이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AA'} = y_1 + 3$$

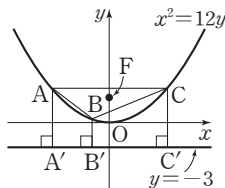
$$\overline{BF} = \overline{BB'} = y_2 + 3$$

$$\overline{CF} = \overline{CC'} = y_3 + 3$$

$$\therefore \overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF}$$

$$= (y_1 + 3) + (y_2 + 3) + (y_3 + 3)$$

$$= y_1 + y_2 + y_3 + 9 = 18 \quad (\because y_1 + y_2 + y_3 = 9)$$



- 22** 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점은 $F(2, 0)$, 준선의 방정식은 $x = -2$ 이고, 포물선 $y^2 = -4(x+3)$ 의 초점은 $F'(-1-3, 0)$, 즉 $F'(-4, 0)$, 준선의 방정식은 $x = 1-3$, 즉 $x = -2$ 이다.

이때 선분 FF'의 길이는 $\overline{FF'} = |-4 - 2| = 6$

두 포물선의 준선이 서로 같으므로 직선 $y=k$ 와 준선의 교점을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AH}, \overline{BF'} = \overline{BH}$$

이때 사각형 ABF'F의 둘

레의 길이가 24이므로

$$\overline{AB} + \overline{BF'} + \overline{F'F} + \overline{AF} = 24$$

$$\overline{AB} + \overline{BH} + \overline{F'F} + \overline{AH} = 24$$

$$\overline{AB} + (\overline{BH} + \overline{AH}) + \overline{F'F} = 24$$

$$2\overline{AB} + 6 = 24$$

$$\therefore \overline{AB} = 9$$

두 점 A, B의 y 좌표가 k 이므로

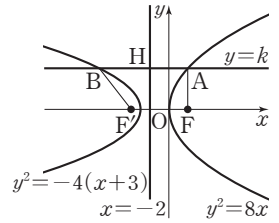
$$A\left(\frac{k^2}{8}, k\right), B\left(-\frac{k^2}{4}-3, k\right)$$

$$\overline{AB} = 9 \text{이므로}$$

$$\frac{k^2}{8} - \left(-\frac{k^2}{4}-3\right) = 9, \frac{3}{8}k^2 = 6$$

$$k^2 = 16$$

$$\therefore k = 4 \quad (\because k > 0)$$



- 23** 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점을 F라 하면 $F(2, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x = -2$ 이다.

포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH} = \overline{PF}$$

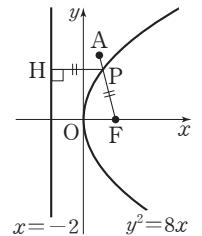
$$\therefore \overline{AP} + \overline{PH} = \overline{AP} + \overline{PF}$$

$$\geq \overline{AF}$$

$$= \sqrt{(2-1)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{17}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{17}$ 이다.



- 24** 포물선 $x^2 = 4y$ 의 초점은 $F(0, 1)$ 이고, 준선의 방정식은 $y = -1$ 이다.

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = \overline{PH}$$

$$\therefore \overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PH}$$

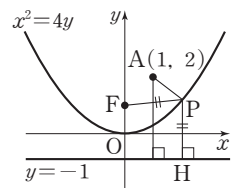
즉, 세 점 A, P, H가 직선

$x=1$ 위에 있을 때 $\overline{AP} + \overline{PF}$ 의 값이 최소이다.

이때 점 P의 x 좌표가 1이므로

$$P\left(1, \frac{1}{4}\right)$$

따라서 $a=1, b=\frac{1}{4}$ 이므로 $ab=\frac{1}{4}$



- 25 포물선 $y^2=12x$ 의 초점은 $F(3, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x=-3$ 이다.

점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H, 점 A에서 준선에 내린 수선의 발을 H'이라 하면

포물선의 정의에 의하여

$\overline{PF}=\overline{PH}$ 이므로 삼각형 APF

의 둘레의 길이는

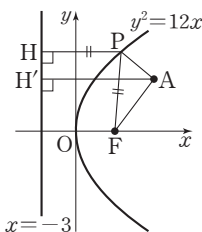
$$\overline{AP}+\overline{PF}+\overline{AF}=\overline{AP}+\overline{PH}+\overline{AF}$$

$$\geq \overline{AH'}+\overline{AF}$$

$$=|6-(-3)|+\sqrt{(6-3)^2+4^2}$$

$$=9+5=14$$

따라서 구하는 최솟값은 14이다.



- 26 점 C의 좌표를 (x, y) 라 하면 점 C에서 점 $(5, 3)$ 까지의 거리와 직선 $x=-1$ 까지의 거리가 서로 같으므로

$$\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}=|x-(-1)|$$

양변을 제곱하면 구하는 도형의 방정식은

$$(x-5)^2+(y-3)^2=(x+1)^2$$

$$\therefore (y-3)^2=12(x-2)$$

- 27 포물선 위의 점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$b^2=14a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 AP의 중점 M의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x=\frac{-2+a}{2}, y=\frac{b}{2} \quad \therefore a=2x+2, b=2y$$

이를 ①에 대입하면 구하는 도형의 방정식은

$$(2y)^2=14(2x+2) \quad \therefore y^2=7(x+1)$$

- 28 $x^2-4x+4y+4=0$ 에서

$$x^2-4x+4=-4y \quad \therefore (x-2)^2=-4y$$

즉, 초점은 $F(2, -1)$

$$A(a, b) \text{라 하면 } (a-2)^2=-4b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 AF를 1:2로 내분하는 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x=\frac{2+2a}{3}, y=\frac{-1+2b}{3}$$

$$\therefore a=\frac{3x-2}{2}, b=\frac{3y+1}{2}$$

이를 ①에 대입하면

$$\left(\frac{3x-2}{2}-2\right)^2=-4 \times \frac{3y+1}{2}$$

$$\frac{9}{4}(x-2)^2=-2(3y+1)$$

$$\therefore (x-2)^2=-\frac{8}{3}\left(y+\frac{1}{3}\right)$$

따라서 이 포물선의 초점의 좌표는

$$\left(2, -\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right) \quad \therefore (2, -1)$$

I-1 02 타원

기초 문제 Training

9쪽

- 1 (1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ (2) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$
(3) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ (4) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{14}=1$

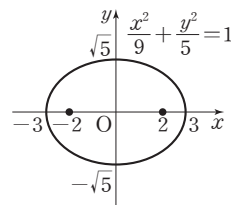
- 2 (1) 초점의 좌표: $(2, 0), (-2, 0)$

꼭짓점의 좌표: $(3, 0), (-3, 0), (0, \sqrt{5}),$

$(0, -\sqrt{5})$

중심의 좌표: $(0, 0)$

장축의 길이: 6, 단축의 길이: $2\sqrt{5}$

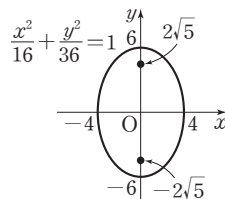


- (2) 초점의 좌표: $(0, 2\sqrt{5}), (0, -2\sqrt{5})$

꼭짓점의 좌표: $(4, 0), (-4, 0), (0, 6), (0, -6)$

중심의 좌표: $(0, 0)$

장축의 길이: 12, 단축의 길이: 8



- 3 (1) $\frac{(x+2)^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{2}=1$

$$(2) (x-4)^2+\frac{(y+5)^2}{10}=1$$

- 4 (1) 초점의 좌표: $(0, 0), (-2, 0)$

꼭짓점의 좌표: $(1, 0), (-3, 0), (-1, \sqrt{3}),$

$(-1, -\sqrt{3})$

중심의 좌표: $(-1, 0)$

장축의 길이: 4, 단축의 길이: $2\sqrt{3}$

- (2) 초점의 좌표: $(3, 3), (3, -5)$

꼭짓점의 좌표: $(6, -1), (0, -1), (3, 4),$

$(3, -6)$

중심의 좌표: $(3, -1)$

장축의 길이: 10, 단축의 길이: 6

- 5 (1) 초점의 좌표: $(-3, 0), (-3, -4)$
장축의 길이: $2\sqrt{6}$, 단축의 길이: $2\sqrt{2}$
(2) 초점의 좌표: $(2, 2), (0, 2)$
장축의 길이: 4, 단축의 길이: $2\sqrt{3}$

핵심 유형 Training

10~13쪽

- 1 42 2 ③ 3 ① 4 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{61} = 1$
5 $\frac{96}{5}$ 6 ② 7 ④ 8 4
9 $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$ 10 46 11 ④
12 ② 13 ① 14 ① 15 5 16 ①
17 ⑤ 18 ③ 19 ① 20 ⑤ 21 ②
22 72 23 ④ 24 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 25 ⑤
26 $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

- 1 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점의 좌표는
 $(0, \sqrt{16-9}), (0, -\sqrt{16-9})$
 $\therefore (0, \sqrt{7}), (0, -\sqrt{7})$
따라서 두 초점 사이의 거리는
 $d = |\sqrt{7} - (-\sqrt{7})| = 2\sqrt{7} \quad \therefore d^2 = 28$
타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 장축의 길이는 $a = 2 \times 4 = 8$, 단축의 길이는 $b = 2 \times 3 = 6$ 이므로
 $d^2 + a + b = 28 + 8 + 6 = 42$
- 2 포물선 $x^2 = -12y$ 의 초점의 좌표는 $(0, -3)$
이 초점이 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{k} = 1$ 의 한 초점과 일치하므로
 $k - 9 = (-3)^2 \quad \therefore k = 18$
- 3 두 점 A, B는 초점이므로 중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있는 타원의 방정식은
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (단, $a > b > 0$)
두 초점으로부터 거리의 합이 6이므로
 $2a = 6 \quad \therefore a = 3$
 $b^2 = a^2 - 2^2$ 이므로 $b^2 = 3^2 - 2^2 = 5$
따라서 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 이 점 $(0, p)$ 를 지나므로
 $\frac{p^2}{5} = 1, p^2 = 5 \quad \therefore p = \sqrt{5} (\because p > 0)$

- 4 중심이 원점이고 두 초점이 y 축 위에 있으므로 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } b > a > 0)$$

단축의 길이가 12이므로

$$2a = 12 \quad \therefore a = 6$$

한 초점의 좌표가 $(0, 5)$ 이고 $b^2 = a^2 + 5^2$ 이므로

$$b^2 = 6^2 + 5^2 = 61$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{61} = 1$$

- 5 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 두 초점 F, F'은

$$F(\sqrt{25-16}, 0), F'(-\sqrt{25-16}, 0)$$

$$\therefore F(3, 0), F'(-3, 0)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 6$$

두 점 A, B의 x 좌표가 3이므로 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에 $x=3$ 을

대입하면

$$\frac{9}{25} + \frac{y^2}{16} = 1, y^2 = \frac{256}{25} \quad \therefore y = \pm \frac{16}{5}$$

$$\therefore \overline{AB} = \frac{32}{5}$$

따라서 구하는 삼각형 AF'B의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{FF'} = \frac{1}{2} \times \frac{32}{5} \times 6 = \frac{96}{5}$$

- 6 중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > b > 0)$$

장축과 단축의 길이의 차가 $2\sqrt{3}$ 이므로

$$2a - 2b = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore a - b = \sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a^2 - b^2 = 3^2 \text{이므로 } a^2 - b^2 = 9$$

$$\therefore (a+b)(a-b) = 9$$

이 식에 ①을 대입하면

$$(a+b) \times \sqrt{3} = 9$$

$$\therefore a+b = 3\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = 2\sqrt{3}, b = \sqrt{3}$$

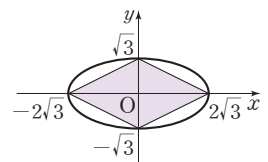
즉, 타원의 네 꼭짓점의 좌표는

$$(2\sqrt{3}, 0), (-2\sqrt{3}, 0),$$

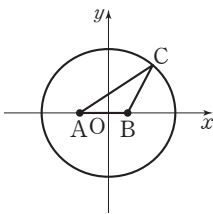
$$(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$$

따라서 구하는 사각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 12$$



- 7 오른쪽 그림과 같이 두 꼭짓점 A, B가 x 축 위에 있고 변 AB의 중점이 원점이 되도록 좌표평면 위에 삼각형 ABC를 놓자. 두 점 A, B를 초점으로 하고 점 C를 지나는 타원의 방정식은



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > b > 0)$$

두 초점으로부터 거리의 합은 $\overline{CA} + \overline{BC} = 7 + 5 = 12$ 이므로 $2a = 12 \quad \therefore a = 6$

중심에서 초점까지의 거리가 2이고 $b^2 = a^2 - 2^2$ 이므로 $b^2 = 6^2 - 2^2 = 32$

따라서 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$ 의 단축의 길이는 $2 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

- 8 타원 $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{3} = 1$ 은 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 두 초점의 좌표는 $(2, -1), (0, -1)$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$

- 9 타원의 중심은 선분 FF'의 중점이므로 중심의 좌표가 $(1, 2)$ 이고 두 초점이 y 축에 평행한 직선 위에 있는 타원의 방정식은

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } b > a > 0)$$

두 초점으로부터 거리의 합이 10이므로 $2b = 10 \quad \therefore b = 5$

중심에서 초점까지의 거리가 4이고 $a^2 = b^2 - 4^2$ 이므로 $a^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

따라서 구하는 타원의 방정식은 $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$

- 10 A(-2, 2), B(3, -2), C(8, 2)라 하자.

두 점 A, C의 y 좌표가 같으므로 선분 AC의 중점이 타원의 중심과 같다.

타원의 중심을 M이라 하면 M(3, 2)

이때 $\overline{AM} = 5, \overline{BM} = 4$ 이므로 장축은 선분 AC이고 x 축에 평행한 직선 위에 있다.

따라서 타원의 방정식은

$$\frac{(x-3)^2}{5^2} + \frac{(y-2)^2}{4^2} = 1 \quad \therefore \frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

따라서 $a = 25, b = 16, m = 3, n = 2$ 이므로

$$a + b + m + n = 46$$

- 11 $(x-6)^2 + (y-5)^2 = 34$ 에 $y=0$ 을 대입하면 $(x-6)^2 + 25 = 34, x^2 - 12x + 27 = 0$

$$(x-3)(x-9) = 0 \quad \therefore x = 3 \text{ 또는 } x = 9$$

즉, 두 점 $(3, 0), (9, 0)$ 을 초점으로 하고 점 $(6, 5)$ 를 지나는 타원이다.

타원의 중심은 두 초점을 이은 선분의 중점이므로 중심의 좌표가 $(6, 0)$ 이고 두 초점이 x 축 위에 있는 타원의 방정식은

$$\frac{(x-6)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > b > 0)$$

이 타원이 점 $(6, 5)$ 를 지나므로

$$\frac{25}{b^2} = 1 \quad \therefore b^2 = 25$$

중심에서 초점까지의 거리가 3이고 $a^2 = b^2 + 3^2$ 이므로 $a^2 = 25 + 3^2 = 34$

따라서 타원 $\frac{(x-6)^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$ 의 장축의 길이는 $2 \times \sqrt{34} = 2\sqrt{34}$

- 12 $x^2 + 4y^2 - 8x + 8y + 8 = 0$ 에서

$$(x^2 - 8x + 16) + 4(y^2 + 2y + 1) = 12$$

$$\therefore \frac{(x-4)^2}{12} + \frac{(y+1)^2}{3} = 1$$

이 타원의 중심의 좌표는 $(4, -1)$, 장축의 길이는 $2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$, 단축의 길이는 $2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ 이므로

$$a = 4, b = -1, c = 4\sqrt{3}, d = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore ab + cd = -4 + 24 = 20$$

- 13 $3x^2 + 2y^2 - 6x - 4y - 1 = 0$ 에서

$$3(x^2 - 2x + 1) + 2(y^2 - 2y + 1) = 6$$

$$\therefore 3(x-1)^2 + 2(y-1)^2 = 6$$

즉, 이 타원을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 타원 $3x^2 + 2y^2 = 6$ 과 겹쳐진다.

따라서 $m = -1, n = -1, k = 6$ 이므로

$$m + n + k = 4$$

- 14 $x^2 + 5y^2 - 4x - 10y - 1 = 0$ 에서

$$(x^2 - 4x + 4) + 5(y^2 - 2y + 1) = 10$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{10} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$$

$$\therefore \text{단축의 길이는 } 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

ㄴ. 평행이동하여 타원 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{2} = 1$ 과 겹쳐지지만 타원

$$\frac{x^2}{5} + y^2 = 1 \text{과는 겹쳐지지 않는다.}$$

ㄷ. 두 초점의 좌표는 $(2\sqrt{2} + 2, 1), (-2\sqrt{2} + 2, 1)$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.

- 15 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 (4, 0), (-4, 0)

이므로 두 점 A, B는 타원의 초점이다.

타원의 정의에 의하여

$$\overline{PA} + \overline{PB} = 2 \times 5 = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\overline{PA} : \overline{PB} = 3 : 1 \text{에서}$$

$$\overline{PA} = 3\overline{PB} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$\overline{PA} = \frac{15}{2}, \overline{PB} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \overline{PA} - \overline{PB} = 5$$

- 16 타원 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 (0, 2), (0, -2)

이므로 두 초점 F, F' 사이의 거리는

$$\overline{FF'} = 4$$

$\overline{PF} = m, \overline{PF'} = n$ 이라 하면 타원의 정의에 의하여

$$m + n = 2 \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

삼각형 PFF'이 직각삼각형이므로

$$m^2 + n^2 = 4^2$$

$$\therefore (m+n)^2 - 2mn = 16$$

이 식에 ①을 대입하면

$$(2\sqrt{6})^2 - 2mn = 16, 2mn = 8$$

$$\therefore mn = 4$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}mn = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

- 17 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 (0, 4), (0, -4)

이므로 두 초점 F, F' 사이의 거리는

$$\overline{FF'} = 8$$

$\overline{PF} = m, \overline{PF'} = n$ 이라 하면 타

원의 정의에 의하여

$$m + n = 2 \times 5 = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\overline{OP} = \overline{OF} = \overline{OF'}$ 이므로 점 P는 선
분 FF'을 지름으로 하는 원 위의 점
이다.

$$\therefore \angle FPF' = 90^\circ$$

삼각형 PFF'이 직각삼각형이므로

$$m^2 + n^2 = 8^2$$

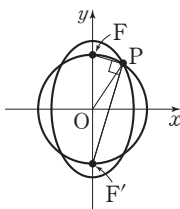
$$\therefore (m+n)^2 - 2mn = 64$$

이 식에 ①을 대입하면

$$10^2 - 2mn = 64, 2mn = 36$$

$$\therefore mn = 18$$

$$\therefore \overline{PF} \times \overline{PF'} = 18$$



- 18 타원 $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ 은 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 을 x

축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한
것이므로 두 초점의 좌표는

$$(6, 2), (0, 2)$$

즉, 두 점 A, B는 타원의 초점이다

따라서 타원의 정의에 의하여

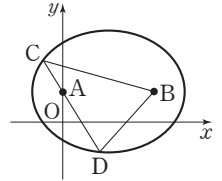
$$\overline{CA} + \overline{CB} = 2 \times 5 = 10$$

$$\overline{DA} + \overline{DB} = 2 \times 5 = 10$$

따라서 구하는 삼각형 BCD의 둘

레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{BD} &= \overline{BC} + (\overline{CA} + \overline{DA}) + \overline{BD} \\ &= (\overline{CB} + \overline{CA}) + (\overline{DA} + \overline{DB}) \\ &= 10 + 10 = 20 \end{aligned}$$



- 19 두 점 A, B는 타원

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 위의 점이므로}$$

타원의 정의에 의하여

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = 2a$$

$$\overline{BF} + \overline{BF'} = 2a$$

삼각형 ABF'의 둘레의 길이가 $4\sqrt{6}$ 이므로

$$\overline{AB} + \overline{BF'} + \overline{AF'} = 4\sqrt{6}$$

$$(\overline{AF} + \overline{BF}) + \overline{BF'} + \overline{AF'} = 4\sqrt{6}$$

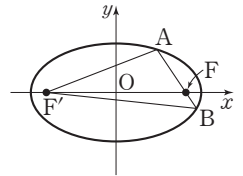
$$(\overline{AF} + \overline{AF'}) + (\overline{BF} + \overline{BF'}) = 4\sqrt{6}$$

$$2a + 2a = 4\sqrt{6} \quad \therefore a = \sqrt{6}$$

$$b^2 = a^2 - 2^2 \text{이므로 } b^2 = (\sqrt{6})^2 - 2^2 = 2$$

$$\therefore b = \sqrt{2} (\because b > 0)$$

$$\therefore ab = \sqrt{6} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$$



- 20 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점이 x축 위에 있으므로

F(c, 0), F'(-c, 0) (c > 0)이라 하자.

x좌표가 양수인 꼭짓점 A의 좌표는 (a, 0)

두 삼각형 PFF', PFA의 넓이의 비가 2 : 1이므로

$$\overline{F'F} : \overline{FA} = 2 : 1, \overline{F'F} = 2\overline{FA}$$

$$2c = 2(a - c) \quad \therefore a = 2c \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

타원의 정의에 의하여 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ 이고, 삼각형 PFF'
의 둘레의 길이가 12이므로

$$\overline{PF'} + \overline{F'F} + \overline{PF} = 12, (\overline{PF} + \overline{PF'}) + \overline{F'F} = 12$$

$$2a + 2c = 12 \quad \therefore a + c = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = 4, c = 2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 \text{이므로 } b^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 16 + 12 = 28$$

21 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 4$$

$\overline{PF} > 0, \overline{PF'} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} \geq 2\sqrt{\overline{PF} \times \overline{PF'}}$$

$$4 \geq 2\sqrt{\overline{PF} \times \overline{PF'}}$$

$$\therefore \sqrt{\overline{PF} \times \overline{PF'}} \leq 2 \text{ (단, 등호는 } \overline{PF} = \overline{PF'} \text{ 일 때 성립)}$$

양변을 제곱하면

$$\overline{PF} \times \overline{PF'} \leq 4$$

따라서 구하는 최댓값은 4이다.

22 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 6 = 12$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 &= (\overline{PF} + \overline{PF'})^2 - 2\overline{PF} \times \overline{PF'} \\ &= 144 - 2\overline{PF} \times \overline{PF'} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\overline{PF} > 0, \overline{PF'} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} \geq 2\sqrt{\overline{PF} \times \overline{PF'}}$$

$$12 \geq 2\sqrt{\overline{PF} \times \overline{PF'}}$$

$$\therefore \sqrt{\overline{PF} \times \overline{PF'}} \leq 6 \text{ (단, 등호는 } \overline{PF} = \overline{PF'} \text{ 일 때 성립)}$$

양변을 제곱하면

$$\overline{PF} \times \overline{PF'} \leq 36$$

이때 ①에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 &= 144 - 2\overline{PF} \times \overline{PF'} \\ &\geq 144 - 2 \times 36 = 72 \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 72이다.

23 $D(a, b) (a > 0, b > 0)$ 라 하면 직사각형 ABCD의 넓이는

$$2a \times 2b = 4ab$$

점 $D(a, b)$ 는 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{36} = 1$$

$\frac{a^2}{16} > 0, \frac{b^2}{36} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{36} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{16} \times \frac{b^2}{36}}$$

$$1 \geq \frac{ab}{12}$$

$$\therefore ab \leq 12 \text{ (단, 등호는 } \frac{a^2}{16} = \frac{b^2}{36} \text{ 일 때 성립)}$$

따라서 $4ab \leq 48$ 이므로 구하는 넓이의 최댓값은 48이다.

24 $A(a, 0), B(0, b)$ 라 하면 $\overline{AB} = 3$ 에서

$$\sqrt{(-a)^2 + b^2} = 3$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 AB를 2:1로 내분하는 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{a}{3}, y = \frac{2b}{3}$$

$$\therefore a = 3x, b = \frac{3y}{2}$$

이를 ①에 대입하면 구하는 도형의 방정식은

$$(3x)^2 + \left(\frac{3y}{2}\right)^2 = 9$$

$$\therefore x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

25 타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점 P의 좌표를 (m, n) 이라 하면

$$\frac{m^2}{3} + \frac{n^2}{4} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$H(0, n)$ 이므로 선분 PH의 중점 M의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{m}{2}, y = n$$

$$\therefore m = 2x, n = y$$

이를 ①에 대입하면

$$\frac{(2x)^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \therefore 16x^2 + 3y^2 = 12$$

따라서 $a = 16, b = 3$ 이므로

$$a - b = 13$$

26 두 원 C_1, C_2 의 중심을 각각 C_1, C_2 라 하고, 중심이 점 P인 원의 반지름의 길이를 r 라 하자.

$$\overline{C_1P} = 5 - r, \overline{C_2P} = 1 + r \text{이므로 } \overline{C_1P} + \overline{C_2P} = 6$$

즉, 점 P에서 두 점 C_1, C_2 까지의 거리의 합이 6으로 일정하다.

따라서 점 P가 나타내는 도형은 두 점 $C_1(0, 0),$

$C_2(-2, 0)$ 을 초점으로 하고 장축의 길이가 6인 타원이다.

타원의 중심은 선분 C_1C_2 의 중점이므로 중심의 좌표가 $(-1, 0)$ 이고 두 초점이 x 축 위에 있는 타원의 방정식은

$$\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (단, } a > b > 0)$$

장축의 길이가 6이므로

$$2a = 6 \quad \therefore a = 3$$

중심에서 초점까지의 거리가 1이고 $b^2 = a^2 - 1^2$ 이므로

$$b^2 = 3^2 - 1^2 = 8$$

따라서 구하는 도형의 방정식은

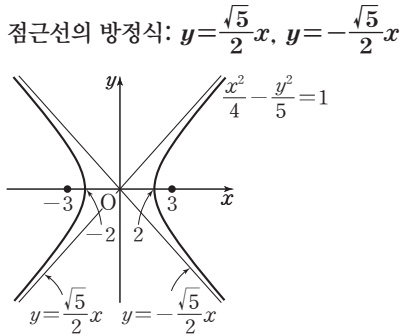
$$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

기초 문제 Training

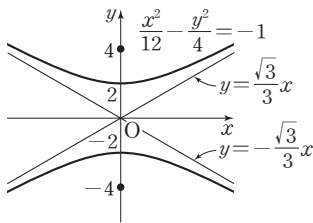
14쪽

- 1 (1) $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$ (2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = -1$
 (3) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{51} = 1$ (4) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = -1$

- 2 (1) 초점의 좌표: (3, 0), (-3, 0)
 꼭짓점의 좌표: (2, 0), (-2, 0)
 중심의 좌표: (0, 0)
 주축의 길이: 4



- (2) 초점의 좌표: (0, 4), (0, -4)
 꼭짓점의 좌표: (0, 2), (0, -2)
 중심의 좌표: (0, 0)
 주축의 길이: 4
 점근선의 방정식: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$



- 3 (1) 초점의 좌표: (3, 3), (-7, 3)
 꼭짓점의 좌표: (1, 3), (-5, 3)
 중심의 좌표: (-2, 3)
 주축의 길이: 6
 점근선의 방정식: $y = \frac{4}{3}x + \frac{17}{3}$, $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$
 (2) 초점의 좌표: (0, 7), (0, 3)
 꼭짓점의 좌표: (0, 6), (0, 4)
 중심의 좌표: (0, 5)
 주축의 길이: 2
 점근선의 방정식: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 5$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 5$

- 4 (1) 초점의 좌표: (5, -4), (-1, -4)
 주축의 길이: $2\sqrt{3}$
 (2) 초점의 좌표: (-3, 2), (-3, -6)
 주축의 길이: 6

- 5 (1) 포물선 (2) 타원 (3) 쌍곡선 (4) 원

핵심 유형 Training

15~18쪽

- 1 $\sqrt{10}$ 2 ⑤ 3 10 4 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$
 5 5 6 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$
 7 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{6} = 1$, $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{6} = -1$ 8 ① 9 ③
 10 1 11 ② 12 ① 13 ①, ② 14 ③
 15 ② 16 ⑤ 17 ③ 18 9 19 3
 20 ① 21 $\frac{x^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{36} = 1$ 22 ③
 23 ③ 24 ④ 25 4

- 1 타원 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{25} = 1$ 의 두 초점의 좌표는
 $(0, \sqrt{15})$, $(0, -\sqrt{15})$
 이 두 점이 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{a^2} = -1$ 의 두 초점이므로
 $5 + a^2 = (\sqrt{15})^2$, $a^2 = 10$
 $\therefore a = \sqrt{10}$ ($\because a > 0$)

- 2 중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식은
 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (단, $a > 0$, $b > 0$)
 주축의 길이가 2이므로
 $2a = 2 \quad \therefore a = 1$
 $b^2 = (\sqrt{3})^2 - a^2$ 이므로 $b^2 = 3 - 1 = 2$
 즉, 쌍곡선의 방정식은
 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \quad \therefore 2x^2 - y^2 = 2$
 따라서 $p = 2$, $q = 2$ 이므로 $p + q = 4$

- 3 중심이 원점이고 두 초점이 y 축 위에 있는 쌍곡선의 방정식은
 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (단, $a > 0$, $b > 0$)

두 점 $(0, 3)$, $(4, 3\sqrt{2})$ 를 지나므로

$$-\frac{9}{b^2} = -1, \frac{16}{a^2} - \frac{18}{b^2} = -1$$

$$\therefore a^2 = 16, b^2 = 9$$

즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$ 의 두 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{16+9}), (0, -\sqrt{16+9})$$

$$\therefore (0, 5), (0, -5)$$

따라서 두 초점 사이의 거리는 10이다.

- 4 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 의 두 꼭짓점의 좌표는

$$(2, 0), (-2, 0)$$

이 두 점을 초점으로 하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$a^2 + b^2 = 2^2 \text{이므로 } b^2 = 4 - a^2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

쌍곡선 $\textcircled{A}$ 이 점 $(3, \sqrt{2})$ 를 지나므로

$$\frac{9}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{B}$ 을 $\textcircled{C}$ 에 대입하면

$$\frac{9}{a^2} - \frac{2}{4-a^2} = 1, 9(4-a^2) - 2a^2 = a^2(4-a^2)$$

$$(a^2-3)(a^2-12)=0 \quad \therefore a^2=3 \text{ 또는 } a^2=12$$

그런데 $\textcircled{B}$ 에서 $4-a^2 > 0$, 즉 $a^2 < 4$ 이므로

$$a^2=3, b^2=1$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$$

- 5 주축의 길이가 4이므로

$$2a=4 \quad \therefore a=2$$

한 점근선의 방정식이 $y = \frac{3}{2}x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \quad \therefore b = \frac{3}{2}a = \frac{3}{2} \times 2 = 3$$

$$\therefore a+b=2+3=5$$

- 6 타원 $x^2+5y^2=5$, 즉 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 의 두 초점의 좌표는

$$(2, 0), (-2, 0)$$

이 두 점을 꼭짓점으로 하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } b > 0)$$

점근선의 방정식이 $y = \frac{1}{2}x$, $y = -\frac{1}{2}x$ 이므로

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{2} \quad \therefore b=1$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

- 7 두 점근선이 원점을 지나므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 또는 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

이때 점근선의 방정식은 $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ 이고 두 점근

선이 서로 수직이므로

$$\frac{b}{a} \times \left(-\frac{b}{a}\right) = -1 \quad \therefore b^2 = a^2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

한편 쌍곡선의 두 초점의 좌표는

$$(\sqrt{a^2+b^2}, 0), (-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$$

$$\text{또는 } (0, \sqrt{a^2+b^2}), (0, -\sqrt{a^2+b^2})$$

이때 두 초점 사이의 거리가 $4\sqrt{3}$ 이므로

$$2\sqrt{a^2+b^2} = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore a^2+b^2=12 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } a^2=b^2=6$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{6} = 1 \text{ 또는 } \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{6} = -1$$

- 8 점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$a^2 - \frac{b^2}{4} = -1$$

$$\therefore 4a^2 - b^2 = -4 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$ 의 점근선의 방정식은

$$y=2x, y=-2x \quad \therefore 2x-y=0, 2x+y=0$$

점 P(a, b)와 직선 $2x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2a-b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|2a-b|}{\sqrt{5}}$$

또 점 P(a, b)와 직선 $2x+y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2a+b|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|2a+b|}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PA} \times \overline{PB} &= \frac{|2a-b|}{\sqrt{5}} \times \frac{|2a+b|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{|4a^2-b^2|}{5} = \frac{|-4|}{5} \quad (\because \textcircled{A}) \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

- 9 쌍곡선 $\frac{(x+6)^2}{20} - \frac{(y-4)^2}{16} = -1$ 은 쌍곡선

$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = -1$ 을 x 축의 방향으로 -6만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = -1$ 의 두 초점의 좌표는 $(0, 6)$,

$(0, -6)$, 주축의 길이는 $2 \times 4 = 8$ 이므로 주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는 $(-6, 10)$, $(-6, -2)$, 주축의 길이는 8이다.

$$\therefore ab+cd+l = -60+12+8 = -40$$

- 10 쌍곡선의 중심은 선분 FF' 의 중점이므로 중심의 좌표가 $(1, 1)$ 이고 두 초점이 x 축에 평행한 직선 위에 있는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-1)^2}{a^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

두 초점으로부터 거리의 차가 6이므로

$$2a=6 \quad \therefore a=3$$

중심에서 초점까지의 거리가 5이고 $b^2=5^2-a^2$ 이므로

$$b^2=5^2-3^2=16$$

따라서 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

이 쌍곡선이 점 $(-2, k)$ 를 지나므로

$$1 - \frac{(k-1)^2}{16} = 1, (k-1)^2 = 0 \quad \therefore k=1$$

- 11 두 점근선의 교점을 구하면 $\frac{1}{2}x+1=-\frac{1}{2}x-1$ 에서

$$x=-2$$

즉, 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-2, 0)$ 이고 이 점은 쌍곡선의 중심과 같다.

중심 $(-2, 0)$ 과 한 초점 $(-2, \sqrt{10})$ 이 y 축에 평행한 직선 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x+2)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (\text{단, } a > 0, b > 0)$$

한 점근선의 방정식이 $y=\frac{1}{2}x+1$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \quad \therefore a=2b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

중심에서 초점까지의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$a^2+b^2=10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a^2=8, b^2=2$$

따라서 쌍곡선 $\frac{(x+2)^2}{8} - \frac{y^2}{2} = -1$ 의 주축의 길이는

$$2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

- 12 $3x^2-y^2+4y-1=0$ 에서 $3x^2-(y^2-4y+4)=-3$

$$\therefore x^2 - \frac{(y-2)^2}{3} = -1$$

따라서 이 쌍곡선을 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = -1$ 과 겹쳐진다.

- 13 $5x^2-3y^2-20x-6y-13=0$ 에서

$$5(x^2-4x+4) - 3(y^2+2y+1) = 30$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{6} - \frac{(y+1)^2}{10} = 1$$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{10} = 1$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. 주축의 길이는 $2\sqrt{6}$ 이다.

ㄴ. 두 초점의 좌표는 $(6, -1), (-2, -1)$

즉, 두 초점 사이의 거리는 $|-2-6|=8$

ㄷ. 두 점근선의 교점은 쌍곡선의 중심과 같으므로 교점의 좌표는 $(2, -1)$ 이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

- 14 $4x^2-y^2-32x-2y+47=0$ 에서

$$4(x^2-8x+16) - (y^2+2y+1) = 16$$

$$\therefore \frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ 을 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 점근선의 방정식은

$$y+1=2(x-4), y+1=-2(x-4)$$

$$\therefore y=2x-9, y=-2x+7$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times (7+9) = 32$$

- 15 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(6, 0),$

$(-6, 0)$ 이므로 두 초점 F, F' 사이의 거리는

$$\overline{FF'}=12$$

이때 $\overline{PF}=m, \overline{PF'}=n$ 이라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$$|m-n|=2 \times 4=8$$

양변을 제곱하면

$$m^2-2mn+n^2=64 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 $PF F'$ 이 직각삼각형이므로

$$m^2+n^2=144$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$144-2mn=64 \quad \therefore mn=40$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}mn = \frac{1}{2} \times 40 = 20$$

- 16 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(5, 0), (-5, 0)$

이므로 두 점 A, B 는 이 쌍곡선의 초점이다.

따라서 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{CB}-\overline{CA}=2 \times 4=8, \overline{DB}-\overline{DA}=2 \times 4=8$$

$$\therefore \overline{CB}+\overline{DB}-\overline{CA}-\overline{DA}=16$$

이때 $\overline{CA}+\overline{DA}=\overline{CD}$ 이므로

$$\overline{CB}+\overline{DB}-\overline{CD}=16 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 삼각형 BCD 의 둘레의 길이가 30이므로

$$\overline{CB}+\overline{DB}+\overline{CD}=30 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2}-\textcircled{1} \text{을 하면 } 2\overline{CD}=14 \quad \therefore \overline{CD}=7$$

- 17 $\overline{PF} : \overline{PF'} = 4 : 1$ 에서

$$\overline{PF} = 4\overline{PF'} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$\overline{PF} > \overline{PF'}$ 이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2 \times 3 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$\overline{PF} = 8, \overline{PF'} = 2$$

삼각형 $\overline{PFF'}$ 이 직각삼각형이므로

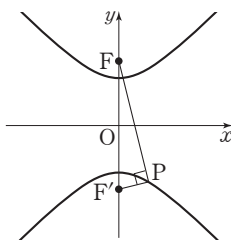
$$\overline{FF'} = \sqrt{\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2} = \sqrt{8^2 + 2^2} = 2\sqrt{17}$$

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = -1$ 의 두 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{a^2+9}), (0, -\sqrt{a^2+9}) \text{이므로}$$

$$2\sqrt{a^2+9} = 2\sqrt{17}, a^2 = 8$$

$$\therefore a = 2\sqrt{2} (\because a > 0)$$



- 18 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = -1$ 의 두 초점 중 y 좌표가 음수인 점을 F' 이라 하면

$F(0, 4), F'(0, -4)$
쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2 \times 2 = 4$$

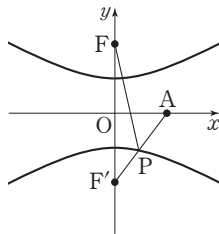
$$\therefore \overline{PF} = \overline{PF'} + 4$$

$$\therefore \overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PF'} + 4 \geq \overline{AF'} + 4$$

이때 $\overline{AF'} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{PF} \geq 9$$

따라서 구하는 최솟값은 9이다.



- 19 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 의 두 초점 F, F' 은

$$F(4, 0), F'(-4, 0)$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 의 한 꼭짓점을 $A(3, 0)$ 이라 하면 원 C 는 중심이 F 이고 반지름의 길이가 $\overline{AF} = 1$ 이다.

점 Q 는 원의 접점이므로 $\angle PQF = 90^\circ$

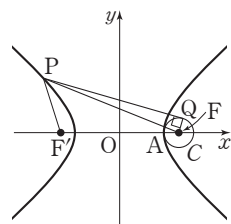
즉, 삼각형 PQF 는 직각삼각형이므로

$$\overline{PF} = \sqrt{\overline{PQ}^2 + \overline{FQ}^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 + 1^2} = 9$$

쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = 6$$

$$9 - \overline{PF'} = 6 \quad \therefore \overline{PF'} = 3$$



- 20 점 P 의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} : |x-1| = 2 : 1$$

$$\therefore \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2|x-1|$$

양변을 제곱하면 구하는 도형의 방정식은

$$(x-4)^2 + y^2 = 4(x-1)^2, 3x^2 - y^2 = 12$$

$$\therefore \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

- 21 점 P 의 좌표를 (x, y) 라 하면 점 Q 의 좌표는 $(0, y)$

$$\overline{AQ} = 3\overline{PQ} \text{에서}$$

$$\sqrt{6^2 + (y-5)^2} = 3|x|$$

양변을 제곱하면 구하는 도형의 방정식은

$$36 + (y-5)^2 = 9x^2, 9x^2 - (y-5)^2 = 36$$

$$\therefore \frac{x^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{36} = 1$$

- 22 점 P 의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$4a^2 - b^2 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

선분 PA 의 중점 M 의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{a+4}{2}, y = \frac{b}{2}$$

$$\therefore a = 2x - 4, b = 2y$$

이를 ①에 대입하면

$$4(2x-4)^2 - (2y)^2 = -1$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{\frac{1}{16}} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = -1$$

따라서 주축의 길이는

$$2 \times \frac{1}{2} = 1$$

- 23 $(k+2)x^2 + (k-3)y^2 + 3x - 4y - 2 = 0$ 이 쌍곡선이라면

$$(k+2)(k-3) < 0$$

$$\therefore -2 < k < 3$$

따라서 정수 k 는 $-1, 0, 1, 2$ 의 4개이다.

- 24 $kx^2 + y^2 + 4x = 0$ 이 타원이라면

$$k \times 1 > 0, k \neq 1$$

$$\therefore 0 < k < 1 \text{ 또는 } k > 1$$

따라서 상수 k 의 값이 될 수 있는 것은 ④ $\frac{1}{2}$ 이다.

- 25 $(x^2 + 2y^2 - x)k - 4x^2 + 3y^2 - x = 0$ 에서

$$(k-4)x^2 + (2k+3)y^2 - (k+1)x = 0$$

이때 y 항이 없으므로 포물선이라면

$$k-4=0, (2k+3)(k+1) \neq 0$$

$$\therefore k=4$$

I-2 01 이차곡선과 직선

기초 문제 Training

20쪽

- 1 (1) 만나지 않는다.
(2) 한 점에서 만난다.(접한다.)
(3) 서로 다른 두 점에서 만난다.
- 2 (1) $y=3x+\frac{1}{2}$ (2) $y=-4x-12$
- 3 (1) $y=-x-1$ (2) $y=-x+2$
- 4 (1) $y=-x\pm\sqrt{6}$ (2) $y=2x\pm 3$
- 5 (1) $y=-x+4$ (2) $y=2x-3$
- 6 (1) $y=x\pm\sqrt{2}$ (2) $y=-2x\pm 1$
- 7 (1) $y=-x+1$ (2) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

핵심 유형 Training

21~26쪽

1 ①	2 ②	3 ④	4 ③	
5 $-3 < k < 3$		6 ④	7 2	8 ③
9 ①	10 ①	11 ③	12 $\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$	
13 ④	14 $\frac{3}{2}$	15 -3	16 -16	17 2
18 ③	19 ⑤	20 ④	21 ④	22 45
23 ⑤	24 5	25 $12\sqrt{3}$	26 1	27 ④
28 -12	29 ②	30 $\frac{4}{5}$	31 ①	32 ④
33 -2	34 1	35 ④	36 $\frac{\sqrt{5}}{5}$	37 $\frac{9}{8}$
38 10	39 12	40 ②	41 ④	42 4

- 1 $x-y+k=0$, 즉 $y=x+k$ 를 $y^2=x$ 에 대입하면
 $(x+k)^2=x \quad \therefore x^2+(2k-1)x+k^2=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D=(2k-1)^2-4k^2=0, -4k+1=0 \quad \therefore k=\frac{1}{4}$
- 2 $n(A \cap B)=0$ 이므로 포물선 $(x-2)^2=4y$ 와 직선
 $y=\frac{1}{2}x+k$ 는 만나지 않는다.

$y=\frac{1}{2}x+k$ 를 $(x-2)^2=4y$ 에 대입하면

$$x^2-4x+4=4\left(\frac{1}{2}x+k\right) \quad \therefore x^2-6x-4k+4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=3^2-(-4k+4)<0$$

$$4k+5<0 \quad \therefore k<-\frac{5}{4}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -2 이다.

- 3 $y=2x-1$ 을 $y^2=8x$ 에 대입하면

$$(2x-1)^2=8x \quad \therefore 4x^2-12x+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(x_1, 2x_1-1), (x_2, 2x_2-1)$
 이라 하면 x_1, x_2 는 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 실근이므로 근과 계
 수의 관계에 의하여

$$x_1+x_2=3, x_1x_2=\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB &= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (2x_2-1-2x_1+1)^2} \\ &= \sqrt{5(x_2-x_1)^2} \\ &= \sqrt{5\{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2\}} \\ &= \sqrt{5\left(3^2 - 4 \times \frac{1}{4}\right)} = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

- 4 $y=mx+5$ 를 $9x^2+4y^2=36$ 에 대입하면

$$9x^2+4(mx+5)^2=36$$

$$\therefore (4m^2+9)x^2+40mx+64=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(20m)^2-64(4m^2+9)=0$$

$$m^2=4 \quad \therefore m=-2 \text{ 또는 } m=2$$

따라서 모든 실수 m 의 값의 곱은 $-2 \times 2 = -4$

- 5 직선 $y=x$ 를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 직선의
 방정식은

$$y=x-k$$

이를 $2x^2+y^2=6$ 에 대입하면

$$2x^2+(x-k)^2=6 \quad \therefore 3x^2-2kx+k^2-6=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-3(k^2-6)>0$$

$$-2k^2+18>0, k^2<9 \quad \therefore -3< k < 3$$

- 6 $\therefore$ 쌍곡선 $x^2-4y^2=16$, 즉 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ 의 점근선의 방
 정식은

$$y=\frac{1}{2}x, y=-\frac{1}{2}x$$

따라서 직선 $x+2y=0$ 은 점근선이므로 주어진 쌍곡
 선과 만나지 않는다.

ㄴ. $x+y+1=0$, 즉 $y=-x-1$ 을 $x^2-4y^2=16$ 에 대입하면

$$x^2-4(-x-1)^2=16 \quad \therefore 3x^2+8x+20=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4^2-3 \times 20=-44<0$$

따라서 직선 $x+y+1=0$ 은 주어진 쌍곡선과 만나지 않는다.

ㄷ. $x+3y+2=0$, 즉 $x=-3y-2$ 를 $x^2-4y^2=16$ 에 대입하면

$$(-3y-2)^2-4y^2=16 \quad \therefore 5y^2+12y-12=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=6^2-5 \times (-12)=96>0$$

따라서 직선 $x+3y+2=0$ 은 주어진 쌍곡선과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

7 $y=kx-1$ 을 $x^2-\frac{y^2}{3}=-1$ 에 대입하면

$$x^2-\frac{(kx-1)^2}{3}=-1 \quad \therefore (3-k^2)x^2+2kx+2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-2(3-k^2)<0$$

$$3k^2-6<0, k^2<2 \quad \therefore -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 1, 최솟값은 -1 이므로

$$M-m=1-(-1)=2$$

8 직선 $x+2y-10=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+5$ 에 수직인 직선의 기울기는 2이므로 포물선 $y^2=3x$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y=2x+\frac{3}{8}$$

이 직선이 점 $(0, k)$ 를 지나므로 $k=\frac{3}{8}$

9 포물선 $x^2=ay$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y=x-\frac{a}{4} \quad \therefore x-y-\frac{a}{4}=0$$

$$\text{즉, } -1=b, -\frac{a}{4}=-1 \text{이므로}$$

$$a=4, b=-1 \quad \therefore ab=-4$$

10 직선 $x-y+3=0$, 즉 $y=x+3$ 에 수직인 직선의 기울기는 -1 이므로 포물선 $y^2=ax$ 에 접하고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y=-x-\frac{a}{4}$$

이를 $y^2=ax$ 에 대입하면

$$\left(-x-\frac{a}{4}\right)^2=ax, x^2-\frac{a}{2}x+\frac{a^2}{16}=0$$

$$\left(x-\frac{a}{4}\right)^2=0 \quad \therefore x=\frac{a}{4}$$

즉, 점 A의 좌표는 $\left(\frac{a}{4}, -\frac{a}{2}\right)$ 이고 초점 F의 좌표는

$$\left(\frac{a}{4}, 0\right) \text{이므로 } \overline{AF}=\left|\frac{a}{2}\right|$$

$$\overline{AF}=1 \text{에서 } \left|\frac{a}{2}\right|=1 \text{이므로 } a=-2 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 곱은 $-2 \times 2 = -4$

11 포물선 $y^2=4x$ 에 접하고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y=-x-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 $y^2=4x$ 에 대입하면

$$(-x-1)^2=4x, x^2-2x+1=0$$

$$(x-1)^2=0 \quad \therefore x=1$$

즉, 점점 A의 좌표는 $(1, -2)$

또 직선 ①은 포물선 $x^2=4y$ 의 접선이므로 ①을 $x^2=4y$ 에 대입하면

$$x^2=4(-x-1), x^2+4x+4=0$$

$$(x+2)^2=0 \quad \therefore x=-2$$

즉, 점점 B의 좌표는 $(-2, 1)$

$$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(-2-1)^2+(1+2)^2}=3\sqrt{2}$$

12 포물선 $y^2=8x$ 에 접하고 기울기가 $\sqrt{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y=\sqrt{2}x+\sqrt{2}$$

이를 $y^2=8x$ 에 대입하면

$$(\sqrt{2}x+\sqrt{2})^2=8x, x^2-2x+1=0$$

$$(x-1)^2=0 \quad \therefore x=1$$

즉, 점점 P의 좌표는 $(1, 2\sqrt{2})$

한편 점 Q의 좌표는 $(-1, 0)$, 포물선의 초점 F의 좌표는 $(2, 0)$ 이므로 삼각형 PQF의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1-1+2}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \quad \therefore \left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

13 직선 $2x-y+2=0$, 즉 $y=2x+2$ 에 평행한 직선의 기울기는 2이므로 포물선 $y^2=\frac{8}{3}x$ 에 접하고 기울기가 2인 직

선의 방정식은 $y=2x+\frac{1}{3}$

따라서 포물선 $y^2=\frac{8}{3}x$ 와 직선 $2x-y+2=0$ 사이의 거리의 최솟값은 직선 $2x-y+2=0$ 위의 점 $(0, 2)$ 와 직선 $y=2x+\frac{1}{3}$, 즉 $6x-3y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-6+1|}{\sqrt{6^2+(-3)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

- 14 포물선 $y^2=16x$ 위의 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행할 때, 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최소이므로 삼각형 APB의 넓이도 최소이다.

직선 AB의 기울기가 $\frac{4}{3}$ 이므로 포물선 $y^2=16x$ 에 접하고 기울기가 $\frac{4}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y=\frac{4}{3}x+3$$

따라서 점 A와 직선 $y=\frac{4}{3}x+3$, 즉 $4x-3y+9=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-12+9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{3}{5}$$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+4^2}=5$ 이므로 삼각형 APB의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2} \times 5 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{2}$$

- 15 포물선 $y^2=6x$ 위의 점 $(3, 3\sqrt{2})$ 에서의 접선의 방정식은 $3\sqrt{2}y=3(x+3)$

$$\therefore y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

이 직선이 점 $(k, 0)$ 을 지나므로

$$0=\frac{\sqrt{2}}{2}k+\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore k=-3$$

- 16 포물선 $x^2=8y$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은 $x_1x=4(y+y_1)$

$$\therefore y=\frac{x_1}{4}x-y_1$$

두 점 $(a, b), (c, d)$ 에서의 접선의 기울기는 각각 $\frac{a}{4}, \frac{c}{4}$

이고 두 접선이 서로 수직이므로

$$\frac{a}{4} \times \frac{c}{4} = -1$$

$$\therefore ac = -16$$

- 17 포물선 $y^2=ax$ 위의 점 (a, a) 에서의 접선의 방정식은

$$ay=\frac{a}{2}(x+a)$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{a}{2}$$

즉, $A(-a, 0), B(0, \frac{a}{2})$ 이므로

$$\overline{AB}=\sqrt{a^2+(\frac{a}{2})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a (\because a>0)$$

따라서 $\frac{\sqrt{5}}{2}a=\sqrt{5}$ 이므로 $a=2$

- 18 점 $P(a, b)$ 가 포물선 $y^2=\frac{3}{2}x$ 위의 점이므로

$$b^2=\frac{3}{2}a \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 포물선 $y^2=\frac{3}{2}x$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$by=\frac{3}{4}(x+a) \quad \therefore y=\frac{3}{4b}x+\frac{3a}{4b}$$

이 접선이 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는 각각

$$(-a, 0), (0, \frac{3a}{4b})$$

이때 접선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{9}{2}$

이므로

$$\frac{1}{2} \times a \times \frac{3a}{4b} = \frac{9}{2} \quad \therefore a^2=12b \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a=6, b=3$

$$\therefore a+b=9$$

- 19 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$y_1y=4(x+x_1)$$

이 직선이 점 $(-8, 0)$ 을 지나므로

$$0=4(-8+x_1) \quad \therefore x_1=8 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로

$$y_1^2=8x_1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ 을 $\textcircled{8}$ 에 대입하면 $y_1^2=64 \quad \therefore y_1=\pm 8$

따라서 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}x+4 \text{ 또는 } y=-\frac{1}{2}x-4$$

그런데 $m>0, n>0$ 이므로 $m=\frac{1}{2}, n=4$

$$\therefore mn=2$$

- 20 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x=-(y+y_1)$$

이 직선이 점 $(2, 6)$ 을 지나므로

$$2x_1=-(6+y_1) \quad \therefore y_1=-2x_1-6 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 포물선 $x^2=-2y$ 위의 점이므로

$$x_1^2=-2y_1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ 을 $\textcircled{8}$ 에 대입하면

$$x_1^2=-2(-2x_1-6), x_1^2-4x_1-12=0$$

$$(x_1+2)(x_1-6)=0 \quad \therefore x_1=-2 \text{ 또는 } x_1=6$$

$\textcircled{7}$ 에서 $x_1=-2$ 일 때 $y_1=-2, x_1=6$ 일 때 $y_1=-18$ 이

므로 접선의 방정식은

$$y=2x+2 \text{ 또는 } y=-6x+18$$

따라서 기울기가 양수인 직선 $y=2x+2$ 가 점 $(1, k)$ 를 지나므로 $k=4$

- 21 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점선의 방정식은

$$y_1 y = -3(x + x_1)$$

이 직선이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$y_1 = -3(2 + x_1) \quad \therefore x_1 = -\frac{1}{3}y_1 - 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 포물선 $y^2 = -6x$ 위의 점이므로

$$y_1^2 = -6x_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①을 ②에 대입하면

$$y_1^2 = -6\left(-\frac{1}{3}y_1 - 2\right) \quad \therefore y_1^2 - 2y_1 - 12 = 0$$

이 이차방정식의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 2$

이때 점점 P, Q의 좌표가 각각 $\left(-\frac{\alpha^2}{6}, \alpha\right), \left(-\frac{\beta^2}{6}, \beta\right)$ 이므로 직선 PQ의 기울기는

$$\frac{\beta - \alpha}{-\frac{\beta^2}{6} + \frac{\alpha^2}{6}} = \frac{-6(\beta - \alpha)}{(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)} = -\frac{6}{\alpha + \beta} = -3$$

- 22 직선 $x + 3y + 12 = 0$, 즉 $y = -\frac{1}{3}x - 4$ 에 수직인 직선의

기울기는 3이므로 타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{3 \times 3^2 + 9} \quad \therefore y = 3x \pm 6$$

따라서 $m = 3, n = \pm 6$ 이므로 $m^2 + n^2 = 9 + 36 = 45$

- 23 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > a > 0$)이라 하면 초점의 좌표가 $(0, 2), (0, -2)$ 이므로

$$b^2 - a^2 = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은 $y = x \pm \sqrt{a^2 + b^2}$

즉, 직선 $y = x - \sqrt{a^2 + b^2}$ 이 직선 $y = x - 4$ 와 일치하므로 $\sqrt{a^2 + b^2} = 4 \quad \therefore a^2 + b^2 = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$

①, ②에서 $a^2 = 6, b^2 = 10$

따라서 타원 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{10} = 1$ 의 장축의 길이는

$$2 \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

- 24 타원 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{a + 4}$$

따라서 두 접선 사이의 거리는 직선 $y = x + \sqrt{a + 4}$ 위의 점 $(0, \sqrt{a + 4})$ 와 직선 $y = x - \sqrt{a + 4}$, 즉

$x - y - \sqrt{a + 4} = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-\sqrt{a + 4} - \sqrt{a + 4}|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 3\sqrt{2}, \sqrt{2a + 8} = 3\sqrt{2} \quad \therefore a = 5$$

- 25 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 직선 AB의 기울기는

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

타원 $x^2 + 8y^2 = 8$, 즉 $\frac{x^2}{8} + y^2 = 1$ 에 접하고 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{3}x \pm \sqrt{8 \times (\sqrt{3})^2 + 1} \quad \therefore y = \sqrt{3}x \pm 5$$

이때 직선 AB의 방정식은 $y = \sqrt{3}x + 5$ 이므로

$$A(0, 5), B(-2\sqrt{3}, -1)$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-1 - 5)^2} = 4\sqrt{3}$$

따라서 한 변의 길이가 $4\sqrt{3}$ 인 정삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (4\sqrt{3})^2 = 12\sqrt{3}$$

- 26 점 $(-1, a)$ 가 타원 $x^2 + 2y^2 = 9$ 위의 점이므로

$$1 + 2a^2 = 9, a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

따라서 타원 $x^2 + 2y^2 = 9$ 위의 점 $(-1, 2)$ 에서의 점선의 방정식은

$$-x + 4y = 9 \quad \therefore y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$$

이 직선이 점 $(b, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \frac{1}{4}b + \frac{9}{4} \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore b - a = 3 - 2 = 1$$

- 27 점 $(2, 1)$ 이 타원 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{4}{a} + \frac{1}{b} = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또 타원 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 점선의 방정식은

$$\frac{2x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \therefore y = -\frac{2b}{a}x + b$$

이 직선의 y절편이 3이므로 $b = 3$

이를 ①에 대입하여 풀면 $a = 6$

$$\therefore a + b = 6 + 3 = 9$$

- 28 타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$ 위의 점 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 에서의 점선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{2}x}{3} + \frac{\sqrt{2}y}{6} = 1 \quad \therefore y = -2x + 3\sqrt{2}$$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이므로 기울기가 $\frac{1}{2}$

이고 타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$ 의 두 초점 $(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$ 을 각각 지나는 두 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + \sqrt{3}, y = \frac{1}{2}x - \sqrt{3}$$

따라서 두 직선의 x절편은 각각 $-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$ 이므로 그 곱은 $-2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = -12$

- 29 타원 $x^2+16y^2=16$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$ax+16by=16 \quad \therefore y=-\frac{a}{16b}x+\frac{1}{b}$$

이 직선의 x 절편은 $\frac{16}{a}$, y 절편은 $\frac{1}{b}$ 이므로 접선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{16}{|a|} \times \frac{1}{|b|} = \frac{8}{|ab|}$$

또 점 (a, b) 는 타원 $x^2+16y^2=16$ 위의 점이므로

$$a^2+16b^2=16$$

$a^2 > 0$, $16b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2+16b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \times 16b^2}$$

$$16 \geq 8|ab|$$

$\therefore |ab| \leq 2$ (단, 등호는 $a^2=16b^2$ 일 때 성립)

따라서 $\frac{8}{|ab|} \geq \frac{8}{2}=4$ 이므로 구하는 삼각형의 넓이의 최솟값은 4이다.

- 30 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{4}+y_1y=1$$

이 직선이 점 $(4, 1)$ 을 지나므로

$$x_1+y_1=1 \quad \therefore y_1=-x_1+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\frac{x_1^2}{4}+(-x_1+1)^2=1, 5x_1^2-8x_1=0$$

$$x_1(5x_1-8)=0 \quad \therefore x_1=0 \text{ 또는 } x_1=\frac{8}{5}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $x_1=0$ 일 때 $y_1=1$, $x_1=\frac{8}{5}$ 일 때 $y_1=-\frac{3}{5}$ 이므로

두 점점의 좌표는 $(0, 1)$, $(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5})$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{8}{5} = \frac{4}{5}$$

- 31 점점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$5x_1x+9y_1y=45$$

이 직선이 점 $A(0, a)$ 를 지나므로

$$9ay_1=45 \quad \therefore y_1=\frac{5}{a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $\overline{OP}=\overline{AP}$ 에서

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2+(y_1-a)^2}$$

$$x_1^2+y_1^2=x_1^2+y_1^2-2ay_1+a^2 \quad \therefore y_1=\frac{a}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$\frac{5}{a}=\frac{a}{2}, a^2=10 \quad \therefore a=\sqrt{10} (\because a>0)$$

- 32 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점점의 방정식은

$$9x_1x+y_1y=3$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$9x_1=3 \quad \therefore x_1=\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 타원 $9x^2+y^2=3$ 위의 점이므로

$$9x_1^2+y_1^2=3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$1+y_1^2=3, y_1^2=2 \quad \therefore y_1=\pm\sqrt{2}$$

따라서 점점의 방정식은

$$3x\pm\sqrt{2}y=3 \quad \therefore 3x\pm\sqrt{2}y-3=0$$

이 직선이 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 접하려면 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 r 와 같아야 하므로

$$r=\frac{|-3|}{\sqrt{3^2+(\pm\sqrt{2})^2}}=\frac{3}{\sqrt{11}}$$

$$\therefore r^2=\frac{9}{11}$$

- 33 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{10}=-1$ 에 접하고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$$y=-2x\pm\sqrt{10-2\times(-2)^2}$$

$$\therefore y=-2x\pm\sqrt{2}$$

따라서 두 직선의 y 절편은 각각 $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ 이므로 그 곱은 $-\sqrt{2}\times\sqrt{2}=-2$

- 34 쌍곡선 $3x^2-4y^2=12$, 즉 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 에 접하고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{4m^2-3}$$

이 직선이 점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$-1=\pm\sqrt{4m^2-3}, 4m^2-3=1$$

$$m^2=1 \quad \therefore m=1 (\because m>0)$$

- 35 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{a}=-1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y=x\pm\sqrt{a-2}$$

직선 $y=x-\sqrt{a-2}$ 가 직선 $y=x-1$ 과 일치하므로

$$\sqrt{a-2}=1 \quad \therefore a=3$$

즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=-1$ 의 두 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{5}), (0, -\sqrt{5})$$

따라서 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{5}$ 이다.

36 쌍곡선 $8x^2 - y^2 = 16$, 즉 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{16} = 1$ 에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{2 \times 3^2 - 16} \quad \therefore y = 3x \pm \sqrt{2}$$

따라서 구하는 거리의 최솟값은 직선 $y = 3x$ 위의 점 $(0, 0)$ 과 직선 $y = 3x + \sqrt{2}$, 즉 $3x - y + \sqrt{2} = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

37 점 $(a, 1)$ 이 쌍곡선 $4x^2 - y^2 = 3$ 위의 점이므로

$$4a^2 - 1 = 3, a^2 = 1 \quad \therefore a = -1 (\because a < 0)$$

쌍곡선 $4x^2 - y^2 = 3$ 위의 점 $(-1, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-4x - y = 3 \quad \therefore y = -4x - 3$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times 3 = \frac{9}{8}$$

38 점 $(1, 2)$ 는 타원 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = -1$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x}{3} - \frac{2y}{3} = -1 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

또 타원 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x}{a} + \frac{2y}{b} = 1 \quad \therefore y = -\frac{b}{2a}x + \frac{b}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

두 직선 $\textcircled{㉡}$, $\textcircled{㉢}$ 이 서로 수직이므로

$$\frac{1}{2} \times \left(-\frac{b}{2a}\right) = -1 \quad \therefore b = 4a \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉣} \text{을 연립하여 풀면 } a = 2, b = 8 \quad \therefore a + b = 10$$

39 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 12$ 위의 점 $(4, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4x - 2y = 12 \quad \therefore y = 2x - 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이때 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 12$, 즉 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{12} = 1$ 의 점근선의 방정식은 $y = x$, $y = -x$ 이므로 두 점근선은 서로 수직이다.

$$y = x \text{를 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } x = 2x - 6 \quad \therefore x = 6$$

직선 $\textcircled{㉠}$ 과 점근선 $y = x$ 의 교점을 A라 하면

$$A(6, 6) \quad \therefore \overline{OA} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$

또 $y = -x$ 를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$-x = 2x - 6 \quad \therefore x = 2$$

직선 $\textcircled{㉠}$ 과 점근선 $y = -x$ 의 교점을 B라 하면

$$B(2, -2) \quad \therefore \overline{OB} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 구하는 삼각형의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 12$$

40 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점선의 방정식은

$$x_1x - y_1y = -4$$

이 직선이 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$2x_1 = -4 \quad \therefore x_1 = -2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 쌍곡선 $x^2 - y^2 = -4$ 위의 점이므로

$$x_1^2 - y_1^2 = -4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면

$$4 - y_1^2 = -4, y_1^2 = 8 \quad \therefore y_1 = \pm 2\sqrt{2}$$

즉, 점선의 방정식은

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2} \text{ 또는 } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$$

따라서 두 점선의 기울기의 곱은

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

41 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점선의 방정식은

$$2x_1x - y_1y = 1$$

이 직선이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$2x_1 - 3y_1 = 1 \quad \therefore y_1 = \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 쌍곡선 $2x^2 - y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$2x_1^2 - y_1^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면

$$2x_1^2 - \left(\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}\right)^2 = 1, 7x_1^2 + 2x_1 - 5 = 0$$

$$(x_1 + 1)(7x_1 - 5) = 0 \quad \therefore x_1 = -1 \text{ 또는 } x_1 = \frac{5}{7}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } x_1 = -1 \text{일 때 } y_1 = -1, x_1 = \frac{5}{7} \text{일 때 } y_1 = \frac{1}{7} \text{이므로}$$

로 점선의 방정식은

$$y = 2x + 1 \text{ 또는 } y = 10x - 7$$

$$\text{그런데 } m > 0, n > 0 \text{이므로 } m = 2, n = 1 \quad \therefore mn = 2$$

42 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점선의 방정식은

$$x_1x - 2y_1y = 2$$

이 직선이 점 $A(0, 1)$ 을 지나므로

$$-2y_1 = 2 \quad \therefore y_1 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 쌍곡선 $x^2 - 2y^2 = 2$ 위의 점이므로

$$x_1^2 - 2y_1^2 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면 } x_1^2 - 2 = 2, x_1^2 = 4 \quad \therefore x_1 = \pm 2$$

따라서 $P(-2, -1)$, $Q(2, -1)$ 이므로 구하는 삼각형 APQ의 넓이는

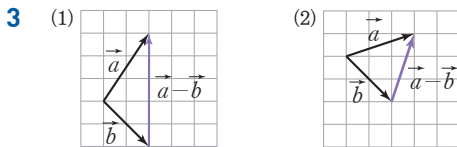
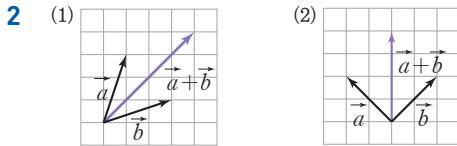
$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

II-1 01 벡터의 연산

기초 문제 Training

28쪽

1 (1) $\vec{f}, \vec{h}$ (2) $\vec{b}, \vec{d}, \vec{f}$ (3) $\vec{f}$ (4) $\vec{d}$



4 (1) $\vec{AE}$ (2) $\vec{0}$ (3) $\vec{DC}$ (4) $\vec{AD}$

5 (1) $3\vec{a}+2\vec{b}$ (2) $-2\vec{a}-5\vec{b}$

6 (1) $5\vec{a}+4\vec{b}$ (2) $4\vec{a}+6\vec{b}$

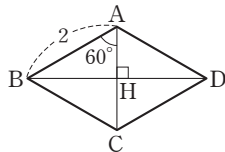
7 $\vec{c}, \vec{d}$

핵심 유형 Training

29~32쪽

1 $2\sqrt{3}$	2 π, κ	3 4	4 ⑤	5 ⑤
6 1	7 ⑤	8 $-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$	9 $\frac{1}{2}$	
10 $2\sqrt{5}$	11 ④	12 5	13 -8	14 ②
15 ③	16 ①	17 ④	18 ①	19 ④
20 ③	21 20	22 3	23 11	24 13
25 ③	26 2			

- 1 오른쪽 그림과 같이 두 대각선의 교점을 H라 하면 $\vec{AC} \perp \vec{BD}$ 이고 $\angle BAC = 60^\circ$ 이므로 $\vec{BH} = \vec{AB} \sin 60^\circ = \sqrt{3}$ $\therefore |\vec{BD}| = \vec{BD} = 2\vec{BH} = 2\sqrt{3}$



- 2 서로 같은 벡터는 시점의 위치에 관계없이 크기와 방향이 각각 같은 벡터이므로 $\vec{OB}$ 와 서로 같은 벡터는 $\vec{EO}, \vec{FA}, \vec{DC}$ 따라서 보기 중 $\vec{OB}$ 와 서로 같은 벡터는 π, κ 이다.

- 3 서로 같은 벡터는 시점의 위치에 관계없이 크기와 방향이 각각 같은 벡터이므로 $\vec{ED}$ 와 서로 같은 벡터는 $\vec{BG}$ 또 $\vec{FG}$ 와 서로 같은 벡터는 $\vec{EH}, \vec{OD}, \vec{BO}$ 따라서 $m=1, n=3$ 이므로 $m+n=4$

- 4 ① $\vec{AA} = \vec{0}$ 이므로 $|\vec{AA}| = 0$
 ② $\vec{AB} = \vec{BA}$ 이므로 $|\vec{AB}| = |\vec{BA}|$
 ③ $\vec{AC} + \vec{CA} = \vec{AA} = \vec{0}$
 ④ $\vec{AB} - \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$
 ⑤ $\vec{AB} - \vec{AC} + \vec{BD} = \vec{CB} + \vec{BD} = \vec{CD}$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

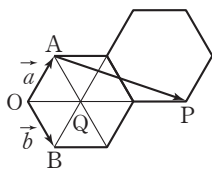
5 $\vec{AB} + \vec{BC} - \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{DC}$
 $= \vec{AC} + \vec{FA}$
 $= \vec{FC}$

- 6 $\vec{AD} - \vec{AP} = \vec{PD}$ 이므로 $|\vec{AD} - \vec{AP}| = |\vec{PD}| = \vec{PD}$
 선분 PD의 길이는 점 P가 점 B에 위치할 때 최대이므로 최댓값은 $\sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3$
 또 선분 PD의 길이는 점 P가 점 C에 위치할 때 최소이므로 최솟값은 2
 따라서 $|\vec{AD} - \vec{AP}|$ 의 최댓값은 3, 최솟값은 2이므로 그 차는 $3 - 2 = 1$

- 7 ① $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} = \frac{1}{3}\vec{a}$
 ② $\vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{b}$
 ③ $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$
 ④ $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
 ⑤ $\vec{NB} = \vec{AB} - \vec{AN} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

- 8 $\vec{BF} = \vec{AF} - \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \vec{FC} = 2\vec{AB} = 2\vec{a}$ 이므로 $\vec{BC} = \vec{BF} + \vec{FC}$
 $= (\vec{b} - \vec{a}) + 2\vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$
 $\therefore \vec{FM} = \frac{1}{2}\vec{FE} = \frac{1}{2}\vec{BC}$
 $= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
 $\therefore \vec{CM} = \vec{FM} - \vec{FC}$
 $= \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) - 2\vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

- 9 $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$
 이므로
 $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$
 $= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CM}$
 $= \vec{a} - \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
 $\therefore \overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$
 $\therefore \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NM} - \overrightarrow{CM}$
 $= \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right) - \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)$
 $= -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$
 따라서 $p = -\frac{1}{4}$, $q = \frac{3}{4}$ 이므로 $p+q = \frac{1}{2}$
- 10 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})$
 $= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}$
 $= 2\overrightarrow{AC}$
 이때 $|\overrightarrow{AC}| = \overline{AC} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ 이므로
 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}| = |2\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{5}$
- 11 $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$
 $= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{BC}$
 $= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}$
 $= 2\overrightarrow{BC}$
 이때 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 8$ 이므로 $|2\overrightarrow{BC}| = 8$
 $2|\overrightarrow{BC}| = 8$, $|\overrightarrow{BC}| = 4 \quad \therefore \overline{BC} = 4$
 따라서 정삼각형의 한 변의 길이는 4이다.
- 12 오른쪽 그림과 같이 한 정육각형의 대각선의 교점을 Q라 하면
 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$
 $= \vec{a} + \vec{b}$
 $\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$
 $= 3\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA}$
 $= 3(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a}$
 $= 2\vec{a} + 3\vec{b}$
 따라서 $m=2$, $n=3$ 이므로 $m+n=5$
- 13 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AH}$
 $= (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + \dots + (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA})$
 $= (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \dots + \overrightarrow{OH}) - 7\overrightarrow{OA}$
 $= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \dots + \overrightarrow{OH}) - 8\overrightarrow{OA}$
 $= -8\overrightarrow{OA} (\because \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \dots + \overrightarrow{OH} = \vec{0})$
 $\therefore k = -8$



- 14 $3\vec{x} - \vec{a} + 2\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{5}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{x}$ 에서
 $\frac{5}{2}\vec{x} = \frac{4}{3}\vec{a} - \frac{11}{3}\vec{b} \quad \therefore \vec{x} = \frac{8}{15}\vec{a} - \frac{22}{15}\vec{b}$
 따라서 $m = \frac{8}{15}$, $n = -\frac{22}{15}$ 이므로
 $m - n = 2$
- 15 $\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\vec{y} = -\vec{a} + 2\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 2$ 를 하면
 $\vec{x} + 2\vec{y} = (2\vec{a} - 3\vec{b}) + 2(-\vec{a} + 2\vec{b})$
 $\therefore \vec{b} = \vec{x} + 2\vec{y}$
 이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $\vec{y} = -\vec{a} + 2(\vec{x} + 2\vec{y}) \quad \therefore \vec{a} = 2\vec{x} + 3\vec{y}$
 $\therefore 2\vec{a} - 5\vec{b} = 2(2\vec{x} + 3\vec{y}) - 5(\vec{x} + 2\vec{y}) = -\vec{x} - 4\vec{y}$
 따라서 $m = -1$, $n = -4$ 이므로
 $mn = 4$
- 16 $2\vec{x} - \vec{y} = 5\vec{a} - 3\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $3\vec{x} + 2\vec{y} = 4\vec{a} - \vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2}$ 를 하면
 $7\vec{x} = 14\vec{a} - 7\vec{b} \quad \therefore \vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $2(2\vec{a} - \vec{b}) - \vec{y} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$
 $\therefore \vec{y} = -\vec{a} + \vec{b}$
 $\therefore 4\vec{x} + 6\vec{y} = 4(2\vec{a} - \vec{b}) + 6(-\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} + 2\vec{b}$
- 17 두 벡터가 서로 같을 조건에서
 $3m + n - 4 = 0$, $m + n = 0$
 두 식을 연립하여 풀면 $m = 2$, $n = -2$
 $\therefore m - n = 4$
- 18 두 벡터가 서로 같을 조건에서
 $x - 4 = y + 4$, $2x - 7 = -(y - 3)$
 $\therefore x - y = 8$, $2x + y = 10$
 두 식을 연립하여 풀면 $x = 6$, $y = -2$
 $\therefore x + y = 4$
- 19 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3\vec{a} - \vec{b}) - (\vec{a} + 3\vec{b}) = 2\vec{a} - 4\vec{b}$
 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (2\vec{a} + k\vec{b}) - (\vec{a} + 3\vec{b})$
 $= \vec{a} + (k-3)\vec{b}$
 이때 $m\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AC}$ 에서
 $m(2\vec{a} - 4\vec{b}) = 4\{\vec{a} + (k-3)\vec{b}\}$
 $\therefore 2m\vec{a} - 4m\vec{b} = 4\vec{a} + (4k-12)\vec{b}$
 따라서 $2m = 4$, $-4m = 4k - 12$ 이므로
 $m = 2$, $k = 1 \quad \therefore km = 2$

- 20 두 벡터 $2\vec{a}+5\vec{b}$, $m\vec{a}+(m-6)\vec{b}$ 가 서로 평행하려면 0이 아닌 실수 k 에 대하여
 $m\vec{a}+(m-6)\vec{b}=k(2\vec{a}+5\vec{b})$
 $\therefore m\vec{a}+(m-6)\vec{b}=2k\vec{a}+5k\vec{b}$
 따라서 $m=2k$, $m-6=5k$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면
 $k=-2$, $m=-4$

- 21 두 벡터 $\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{p}+\vec{r}$ 가 서로 평행하려면
 $\vec{p}+\vec{r}=k(\vec{p}-\vec{q})$ ㉠
 를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.
 $\vec{p}-\vec{q}=(\vec{a}+2\vec{b})-(-2\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}+\vec{b}$
 $\vec{p}+\vec{r}=(\vec{a}+2\vec{b})+(m\vec{a}+5\vec{b})=(m+1)\vec{a}+7\vec{b}$
 이를 ㉠에 대입하면
 $(m+1)\vec{a}+7\vec{b}=k(3\vec{a}+\vec{b})$
 $\therefore (m+1)\vec{a}+7\vec{b}=3k\vec{a}+k\vec{b}$
 따라서 $m+1=3k$, $7=k$ 이므로
 $m=20$

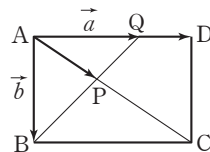
- 22 두 벡터 $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ 가 서로 평행하려면
 $\vec{AC}=k\vec{AB}$ ㉠
 를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.
 $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(\vec{a}-3\vec{b})-(2\vec{a}-\vec{b})$
 $=-\vec{a}-2\vec{b}$
 $\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=(4\vec{a}+m\vec{b})-(2\vec{a}-\vec{b})$
 $=2\vec{a}+(m+1)\vec{b}$
 이를 ㉠에 대입하면
 $2\vec{a}+(m+1)\vec{b}=k(-\vec{a}-2\vec{b})$
 $\therefore 2\vec{a}+(m+1)\vec{b}=-k\vec{a}-2k\vec{b}$
 따라서 $2=-k$, $m+1=-2k$ 이므로
 $k=-2$, $m=3$

- 23 두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$ 가 서로 평행하려면
 $\vec{x}=k\vec{y}$ ㉠
 를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.
 $2\vec{a}+\vec{y}=m\vec{a}+3\vec{b}$ 에서
 $\vec{y}=(m-2)\vec{a}+3\vec{b}$ ㉡
 ㉠을 $\vec{x}-3\vec{y}=-3\vec{a}-\vec{b}$ 에 대입하면
 $\vec{x}-3\{(m-2)\vec{a}+3\vec{b}\}=-3\vec{a}-\vec{b}$
 $\therefore \vec{x}=(3m-9)\vec{a}+8\vec{b}$ ㉢
 ㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면
 $(3m-9)\vec{a}+8\vec{b}=k\{(m-2)\vec{a}+3\vec{b}\}$
 $\therefore (3m-9)\vec{a}+8\vec{b}=(mk-2k)\vec{a}+3k\vec{b}$
 따라서 $3m-9=mk-2k$, $8=3k$ 이므로
 $k=\frac{8}{3}$, $m=11$

- 24 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면
 $\vec{AC}=k\vec{AB}$ ㉠
 를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.
 $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(-2\vec{a}+5\vec{b})-(3\vec{a}+2\vec{b})=-5\vec{a}+3\vec{b}$
 $\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=(m\vec{a}-4\vec{b})-(3\vec{a}+2\vec{b})$
 $= (m-3)\vec{a}-6\vec{b}$
 이를 ㉠에 대입하면
 $(m-3)\vec{a}-6\vec{b}=k(-5\vec{a}+3\vec{b})$
 $\therefore (m-3)\vec{a}-6\vec{b}=-5k\vec{a}+3k\vec{b}$
 따라서 $m-3=-5k$, $-6=3k$ 이므로
 $k=-2$, $m=13$

- 25 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면
 $\vec{AC}=k\vec{AB}$ ㉠
 를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.
 $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{b}-\vec{a}$
 $\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=\{4m\vec{a}+(4-6m)\vec{b}\}-\vec{a}$
 $= (4m-1)\vec{a}+(4-6m)\vec{b}$
 이를 ㉠에 대입하면
 $(4m-1)\vec{a}+(4-6m)\vec{b}=k(\vec{b}-\vec{a})$
 $\therefore (4m-1)\vec{a}+(4-6m)\vec{b}=-k\vec{a}+k\vec{b}$
 따라서 $4m-1=-k$, $4-6m=k$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면
 $k=-5$, $m=\frac{3}{2}$

- 26 세 점 B, P, Q가 한 직선 위에 있으려면
 $\vec{BP}=k\vec{BQ}$ ㉠
 를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 한다.
 오른쪽 그림과 같이 $\vec{AD}=\vec{a}$,
 $\vec{AB}=\vec{b}$ 라 하면
 $\vec{AP}=\frac{2}{5}\vec{AC}=\frac{2}{5}(\vec{AD}+\vec{AB})$
 $=\frac{2}{5}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$
 $\therefore \vec{BP}=\vec{AP}-\vec{AB}$
 $=\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)-\vec{b}=\frac{2}{5}\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}$ ㉡



- 또 $\vec{AQ}=\frac{m}{m+1}\vec{AD}=\frac{m}{m+1}\vec{a}$ 이므로
 $\vec{BQ}=\vec{AQ}-\vec{AB}=\frac{m}{m+1}\vec{a}-\vec{b}$ ㉢
 ㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면
 $\frac{2}{5}\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}=k\left(\frac{m}{m+1}\vec{a}-\vec{b}\right)$
 $\therefore \frac{2}{5}\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}=\frac{mk}{m+1}\vec{a}-k\vec{b}$
 따라서 $\frac{2}{5}=\frac{mk}{m+1}$, $-\frac{3}{5}=-k$ 이므로 $k=\frac{3}{5}$, $m=2$

II-2 01 평면벡터의 성분

기초 문제 Training

34쪽

- 1 (1) $-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ (2) $-4\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c}$
- 2 (1) $\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$ (2) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ (3) $-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{3}\vec{b}$
- 3 $-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$
- 4 (1) (1, 4) (2) (0, -5)
- 5 $\vec{a}=2\vec{e}_1+3\vec{e}_2$, $\vec{b}=-4\vec{e}_1+2\vec{e}_2$
- 6 (1) (7, -7) (2) (-12, -1)
- 7 (1) 3 (2) $\sqrt{29}$
- 8 (1) (1, -3), $\sqrt{10}$ (2) (4, 3), 5

핵심 유형 Training

35~39쪽

- | | | | |
|--|-----------------|------------------------|--------------------------------------|
| 1 $-\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{9}{5}\vec{b}$ | 2 ① | 3 $-\frac{7}{12}$ | 4 $\frac{6}{25}$ |
| 5 ③ | 6 $\frac{1}{4}$ | 7 $\frac{2}{3}$ | 8 $m=-\frac{1}{6}$, $n=\frac{1}{6}$ |
| 9 ① | 10 ① | 11 ② | 12 18 |
| 13 3 | 14 (0, 4) | 15 ④ | 16 ④ |
| 17 -6 | 18 ③ | 19 ① | 20 $5\sqrt{2}$ |
| 21 $\frac{7}{5}$ | 22 ① | 23 $(-\frac{1}{3}, 0)$ | 24 ① |
| 25 (6, 2) | 26 ⑤ | 27 ③ | 28 $-\frac{1}{3}$ |
| 29 $-\frac{3}{4}$ | 30 ② | 31 $\frac{10}{3}$ | 32 $3x-2y-5=0$ |
| 33 ② | 34 ② | | |

- 1 세 점 P, Q, M의 위치벡터를 각각 $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{m}$ 이라 하면
 $\vec{p}=\frac{3\vec{b}+2\vec{a}}{3+2}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$, $\vec{q}=\frac{3\vec{b}-2\vec{a}}{3-2}=-2\vec{a}+3\vec{b}$
 $\therefore \vec{m}=\frac{1}{2}\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}=-\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{9}{5}\vec{b}$

$$\begin{aligned} 2 \quad \vec{p} &= \frac{3\vec{b}+5\vec{a}}{3+5} = \frac{5}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b} \\ \vec{q} &= \frac{5\vec{b}-3\vec{a}}{5-3} = -\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b} \\ \therefore 4\vec{p}+3\vec{q} &= 4\left(\frac{5}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}\right) + 3\left(-\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b}\right) \\ &= -2\vec{a} + 9\vec{b} \end{aligned}$$

따라서 $x=-2$, $y=9$ 이므로
 $x+y=7$

$$\begin{aligned} 3 \quad \overrightarrow{BD} &= \vec{a} + \vec{b} \text{이므로} \\ \overrightarrow{BP} &= \frac{3\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}}{3+1} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} \\ \overrightarrow{BQ} &= \frac{2\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}}{2+1} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b} \\ \therefore \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BP} \\ &= \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}\right) - \left(\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right) \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \end{aligned}$$

따라서 $m=-\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{4}$ 이므로

$$m-n = -\frac{7}{12}$$

- 4 선분 BP가 $\angle B$ 의 이등분선이므로
 $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BA} : \overrightarrow{BC} = 2 : 3$
 즉, 점 P는 대각선 AC를 2 : 3으로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{BP} = \frac{2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{BA}}{2+3} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$$

따라서 $m=\frac{3}{5}$, $n=\frac{2}{5}$ 이므로

$$mn = \frac{6}{25}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad \overrightarrow{BQ} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BP} &= \frac{2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}}{2+1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \\ \therefore \overrightarrow{QP} &= \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BQ} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} \\ \text{또 } \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} \text{이므로} \\ 3\overrightarrow{QP} - \overrightarrow{CA} &= 3\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}\right) - (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{3}{2}$$

6 $\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{b}$ 이므로
 $\overrightarrow{BP} = \frac{3\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{BA}}{3+2} = \frac{3}{5}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{2}{5}\vec{a} = \vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$
삼각형 ABP에서 $\overrightarrow{BQ} : \overrightarrow{QP} = m : (1-m)$ 이라 하면
 $\overrightarrow{BQ} = m\overrightarrow{BP} = m\vec{a} + \frac{3}{5}m\vec{b}$ ㉠

삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AQ} : \overrightarrow{QC} = n : (1-n)$ 이라 하면
 $\overrightarrow{BQ} = \frac{n\overrightarrow{BC} + (1-n)\overrightarrow{BA}}{n + (1-n)} = (1-n)\vec{a} + n\vec{b}$ ㉡

㉠, ㉡에서

$$m\vec{a} + \frac{3}{5}m\vec{b} = (1-n)\vec{a} + n\vec{b}$$

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 는 서로 평행하지 않으므로

$$m = 1-n, \frac{3}{5}m = n$$

두 식을 연립하여 풀면 $m = \frac{5}{8}, n = \frac{3}{8}$

따라서 $x = \frac{5}{8}, y = \frac{3}{8}$ 이므로 $x - y = \frac{1}{4}$

7 두 점 G, P의 위치벡터를 각각 $\vec{g}, \vec{p}$ 라 하면

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}, \vec{p} = \frac{3\vec{b} + \vec{a}}{3+1} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{GP} &= \vec{p} - \vec{g} = \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right) - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \\ &= -\frac{1}{12}\vec{a} + \frac{5}{12}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

따라서 $l = -\frac{1}{12}, m = \frac{5}{12}, n = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$l + m - n = \frac{2}{3}$$

8 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{a}$ 이므로

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

변 BC의 중점을 N이라 하면

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3} \times \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{GM} &= \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AG} = \left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) - \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \\ &= -\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} \end{aligned}$$

$$\therefore m = -\frac{1}{6}, n = \frac{1}{6}$$

9 점 A, B, C, D, E, F, G의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ 라 하면

$$\vec{d} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \vec{e} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \vec{f} = \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2}, \vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FG} &= (\vec{g} - \vec{d}) + (\vec{g} - \vec{e}) + (\vec{g} - \vec{f}) \\ &= 3\vec{g} - (\vec{d} + \vec{e} + \vec{f}) \\ &= 3 \times \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} - \left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2}\right) \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{0} \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{FG} &= -(\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}) \\ &= -\left(\frac{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}}{2} + \frac{\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}{2} + \frac{\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA}}{2}\right) \\ &= -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0} \end{aligned}$$

10 네 점 A, B, C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$ 라 하면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{CB} \text{에서} \\ (\vec{a} - \vec{p}) + (\vec{b} - \vec{p}) + 2(\vec{c} - \vec{p}) &= \vec{b} - \vec{c} \end{aligned}$$

$$4\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{c} \quad \therefore \vec{p} = \frac{\vec{a} + 3\vec{c}}{4}$$

즉, 점 P는 변 AC를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$$m = 3, n = 1 \quad \therefore m - n = 2$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{CB} \text{에서} \\ \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC} \\ \therefore \overrightarrow{PA} &= -3\overrightarrow{PC} \end{aligned}$$

즉, 점 P는 변 AB를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$$m = 3, n = 1 \quad \therefore m - n = 2$$

11 $3\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{OB}$ 에서

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{OP} + 2(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) &= 3\overrightarrow{OB} \\ 6\overrightarrow{OP} &= 2\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} \quad \therefore \overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{3} \end{aligned}$$

즉, 점 P는 변 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\triangle OAP : \triangle OPB = \overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = 2 : 1$$

$$\therefore \triangle OPB = \frac{1}{3}\triangle OAB = \frac{1}{3} \times 15 = 5$$

12 $6\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PC} = 4\overrightarrow{BP}$ 에서

$$6\overrightarrow{AP} = 4\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} \quad \therefore 6\overrightarrow{AP} = 7 \times \frac{4\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC}}{7}$$

이때 $\frac{4\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC}}{7} = \overrightarrow{PQ}$ 라 하면 점 Q는 변 BC를 3 : 4로 내분하는 점이다.

또 $6\overrightarrow{AP} = 7\overrightarrow{PQ}$ 에서 $|\overrightarrow{AP}| : |\overrightarrow{PQ}| = 7 : 6$ 이므로 점 P는 선분 AQ를 7 : 6으로 내분하는 점이다.

따라서 점 Q는 직선 AP와 변 BC의 교점이므로 점 E와 일치한다.

$$\therefore \overrightarrow{BE} : \overrightarrow{EC} = 3 : 4$$

24 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
 $\overrightarrow{AP} = (x+2, y-3)$, $\overrightarrow{BP} = (x-3, y-4)$,
 $\overrightarrow{PC} = (-x+2, -y+2)$
 $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PC}$ 이므로
 $(x+2, y-3) + (x-3, y-4) = (-x+2, -y+2)$
 $(2x-1, 2y-7) = (-x+2, -y+2)$
 $\therefore 2x-1 = -x+2, 2y-7 = -y+2$
따라서 $x=1, y=3$ 이므로 $\overrightarrow{BP} = (-2, -1)$
 $\therefore |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

25 점 C의 좌표를 (x, y) 라 하면 $\overrightarrow{BC} = (x-3, y-1)$
 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ 이므로
 $(1, 2) = (x-3, y-1)$
 $\therefore 1 = x-3, 2 = y-1$
따라서 $x=4, y=3$ 이므로 점 C의 좌표는 $(4, 3)$
점 D의 좌표를 (a, b) 라 하면
 $\overrightarrow{AB} = (2, -1)$, $\overrightarrow{CD} = (a-4, b-3)$
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 이므로
 $(2, -1) = (a-4, b-3)$
 $\therefore 2 = a-4, -1 = b-3$
따라서 $a=6, b=2$ 이므로 점 D의 좌표는 $(6, 2)$

26 선분 OP가 $\angle AOB$ 의 이등분선이므로
 $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OB} = 2 : 5$
즉, 점 P는 선분 AB를 2 : 5로 내분하는 점이므로
 $\overrightarrow{OP} = \frac{2\overrightarrow{OB} + 5\overrightarrow{OA}}{2+5} = \frac{5}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{7}\overrightarrow{OB}$
 $= \frac{5}{7}(2, 0) + \frac{2}{7}(-3, 4) = \left(\frac{4}{7}, \frac{8}{7}\right)$
따라서 $7\overrightarrow{OP} = (4, 8)$ 이므로
 $|7\overrightarrow{OP}| = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$

27 점 P의 좌표를 $\left(t, \frac{4}{t}\right)$ ($t > 0$)라 하면
 $\overrightarrow{PA} = \left(-t-2, -\frac{4}{t}\right)$, $\overrightarrow{PB} = \left(-t+2, -\frac{4}{t}\right)$ 이므로
 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \left(-2t, -\frac{8}{t}\right)$
 $\therefore |\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}| = \sqrt{4t^2 + \frac{64}{t^2}}$
 $t^2 > 0$ 이므로
 $4t^2 + \frac{64}{t^2} \geq 2\sqrt{4t^2 \times \frac{64}{t^2}} = 32$
(단, 등호는 $4t^2 = \frac{64}{t^2}$, 즉 $t=2$ 일 때 성립)
따라서 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}|$ 의 최솟값은 $4\sqrt{2}$ 이다.

28 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하므로
 $\vec{b} = k\vec{a}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $(t+1, 2t+3) = k(2, 7) = (2k, 7k)$
 $\therefore t+1 = 2k, 2t+3 = 7k$
두 식을 연립하여 풀면 $k = \frac{1}{3}, t = -\frac{1}{3}$

29 $\vec{a} + 2\vec{b} = (-2, 2p+3)$, $2\vec{a} + \vec{b} = (-7, p+6)$
두 벡터 $\vec{a} + 2\vec{b}, 2\vec{a} + \vec{b}$ 가 서로 평행하므로
 $2\vec{a} + \vec{b} = k(\vec{a} + 2\vec{b})$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $(-7, p+6) = k(-2, 2p+3)$
 $\therefore -7 = -2k, p+6 = k(2p+3)$
 $\therefore k = \frac{7}{2}, p = -\frac{3}{4}$

30 $\vec{a} - 2\vec{c} = (-6, 4)$, $t\vec{b} + \vec{c} = (2t+4, -2t+2)$
두 벡터 $\vec{a} - 2\vec{c}, t\vec{b} + \vec{c}$ 가 서로 평행하므로
 $t\vec{b} + \vec{c} = k(\vec{a} - 2\vec{c})$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $(2t+4, -2t+2) = k(-6, 4) = (-6k, 4k)$
 $\therefore 2t+4 = -6k, -2t+2 = 4k$
두 식을 연립하여 풀면 $k = -3, t = 7$

31 $\overrightarrow{AB} = (-1, -a+4)$, $\overrightarrow{AC} = (-3, 2)$
세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면
 $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $(-1, -a+4) = k(-3, 2) = (-3k, 2k)$
 $\therefore -1 = -3k, -a+4 = 2k$
 $\therefore k = \frac{1}{3}, a = \frac{10}{3}$

32 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
 $\overrightarrow{AP} = (x-6, y)$, $\overrightarrow{BP} = (x, y-4)$
 $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$ 이므로
 $\sqrt{(x-6)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-4)^2}$
양변을 제곱하면
 $x^2 - 12x + 36 + y^2 = x^2 + y^2 - 8y + 16$
 $\therefore 3x - 2y - 5 = 0$

33 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
 $\overrightarrow{AP} = (x-1, y-1)$, $\overrightarrow{BP} = (x-4, y-1)$,
 $\overrightarrow{CP} = (x-1, y-4)$
 $\therefore \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} = (3x-6, 3y-6)$
 $|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP}| = 3\sqrt{5}$ 이므로
 $\sqrt{(3x-6)^2 + (3y-6)^2} = 3\sqrt{5}$

양변을 제곱하면

$$9(x-2)^2 + 9(y-2)^2 = 45$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 (2, 2)이고 반

지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원이므로 그 둘레의 길이는

$$2\pi \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}\pi$$

- 34** 두 점 P, Q의 좌표를 각각 (x, y) , (x', y') 이라 하면

$$\overrightarrow{AP} = (x-4, y-6), \overrightarrow{BP} = (x-4, y+4),$$

$$\overrightarrow{BQ} = (x'-4, y'+4)$$

$$2\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BQ} \text{이므로}$$

$$2(x-4, y-6) + (x-4, y+4) = (x'-4, y'+4)$$

$$(3x-12, 3y-8) = (x'-4, y'+4)$$

$$\therefore 3x-12 = x'-4, 3y-8 = y'+4$$

$$\therefore x = \frac{x'+8}{3}, y = \frac{y'+12}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 P는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이므로 $x^2 + y^2 = 1$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$\left(\frac{x'+8}{3}\right)^2 + \left(\frac{y'+12}{3}\right)^2 = 1$$

$$\therefore (x'+8)^2 + (y'+12)^2 = 9$$

따라서 점 Q가 나타내는 도형은 중심이 점 $(-8, -12)$

이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 그 넓이는

$$\pi \times 3^2 = 9\pi$$

II-2 02 평면벡터의 내적

기초 문제 Training

40쪽

1 (1) 6 (2) $3\sqrt{3}$ (3) $3\sqrt{2}$ (4) -3

2 (1) -4 (2) -1 (3) 4 (4) 2

3 (1) -5 (2) -2

4 (1) 45° (2) 60° (3) 150° (4) 120°

5 (1) 4 (2) $-\frac{5}{2}$

6 (1) $-\frac{2}{5}$ (2) -8

핵심 유형 Training

41~44쪽

1 3	2 ②	3 ③	4 ①	5 ④
6 84	7 -18	8 ①	9 ②	10 ②
11 -9	12 ⑤	13 ④	14 19	15 $4\sqrt{3}$
16 ③	17 $2\sqrt{3}$	18 3	19 ②	20 $\frac{4}{5}$
21 135°	22 $\frac{\sqrt{3}}{3}$	23 45°	24 ③	25 $\sqrt{2}$
26 $\frac{7}{12}$	27 $\frac{4}{5}$	28 $\frac{1}{2}, 4$	29 ①	30 ⑤
31 (3, 3)				

- 1** 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 가 이루는 각의 크기는 60° 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ \\ &= \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \frac{1}{2} = 3 \end{aligned}$$

2 $|\overrightarrow{OM}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$|\overrightarrow{OP}| = \frac{1}{3} |\overrightarrow{OA}| = 1$$

이때 $\angle MOP = 30^\circ$ 이므로

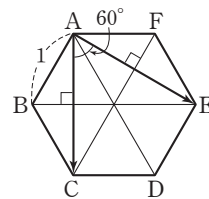
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} &= |\overrightarrow{OM}| |\overrightarrow{OP}| \cos 30^\circ \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

- 3** 오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AC}| &= |\overrightarrow{AE}| \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 \right) = \sqrt{3} \end{aligned}$$

이때 $\angle EAC = 60^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} &= |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AE}| \cos 60^\circ \\ &= \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$



- 4** 변 BC의 중점을 M이라 하면

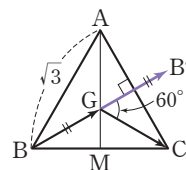
$$\overrightarrow{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore |\overrightarrow{BG}| = |\overrightarrow{GC}| = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM} = 1$$

오른쪽 그림에서 $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GB'}$ 이므로

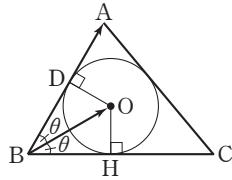
$$\angle B'GC = 60^\circ$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{GC} &= \overrightarrow{GB'} \cdot \overrightarrow{GC} \\ &= |\overrightarrow{GB'}| |\overrightarrow{GC}| \cos 60^\circ \\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



- 5 두 벡터 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면
 $\theta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 3$ 이므로 $|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cos 60^\circ = 3$
 $3 \times |\overrightarrow{BC}| \times \frac{1}{2} = 3 \quad \therefore |\overrightarrow{BC}| = 2$
따라서 $\overrightarrow{BC} = 2$ 이므로 구하는 평행사변형 ABCD의 넓이는
 $2\triangle ABC = 2\left(\frac{1}{2} \times \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AB} \sin 60^\circ\right)$
 $= 2\left(\frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$

- 6 오른쪽 그림과 같이 점 O에서
변 AB에 내린 수선의 발을
D라 하면



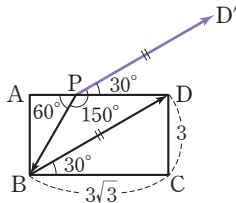
$$\triangle BOH \equiv \triangle BOD$$

두 벡터 $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{BA}$ 가 이루는
각의 크기를 θ 라 하면

$$\angle OBD = \angle OBH = \theta$$

따라서 직각삼각형 OBH에서 $\overrightarrow{BO} \cos \theta = \overrightarrow{BH} = 7$ 이므로
 $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{BO}| |\overrightarrow{BA}| \cos \theta = |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BO}| \cos \theta$
 $= |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BH}| = 12 \times 7 = 84$

- 7 삼각형 BCD에서 $\overrightarrow{BD} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = 6$
 $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD} = \sqrt{3}$ 이므로 삼각형 ABP에서
 $\overrightarrow{PB} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$
이때 $\angle DBC = 30^\circ$,
 $\angle BPA = 60^\circ$ 이므로 오른쪽
그림과 같이 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{PD'}$ 이 되
도록 점 D'을 잡으면
 $\angle D'PB = 150^\circ$
 $\therefore \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD'}$
 $= -|\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PD'}| \cos(180^\circ - 150^\circ)$
 $= -2\sqrt{3} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -18$



- 8 $\vec{a} + \vec{b} = (2, 1)$, $\vec{a} - \vec{b} = (-6, 7)$ 이므로
 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -12 + 7 = -5$
- 9 $\vec{a} + \vec{b} = (k+2, 3k-4)$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 10$ 이므로
 $\sqrt{(k+2)^2 + (3k-4)^2} = 10$
양변을 제곱하면
 $k^2 + 4k + 4 + 9k^2 - 24k + 16 = 100$
 $k^2 - 2k - 8 = 0$, $(k+2)(k-4) = 0$
 $\therefore k = -2$ 또는 $k = 4$
그런데 $k < 0$ 이므로 $k = -2$
따라서 $\vec{a} = (-4, -4)$, $\vec{b} = (4, -6)$ 이므로
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -16 + 24 = 8$

- 10 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 16$ 이므로
 $-x + 7y = 16 \quad \therefore x - 7y = -16 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -5$ 이므로
 $-(x-3) - y = -5 \quad \therefore x + y = 8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$x = 5, y = 3$$

따라서 A(5, 7), B(-1, 3), C(2, -1)이므로

$$\overrightarrow{AB} = (-6, -4), \overrightarrow{AC} = (-3, -8)$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 18 + 32 = 50$$

- 11 두 점 P, Q의 좌표를 각각 $\left(\frac{a^2}{6}, a\right)$, $\left(\frac{b^2}{6}, b\right)$ 라 하면

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \left(\frac{a^2}{6}, a\right) \cdot \left(\frac{b^2}{6}, b\right) = \frac{1}{36}(ab)^2 + ab$$

$$= \frac{1}{36}(ab + 18)^2 - 9$$

따라서 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 는 $ab = -18$ 일 때 최솟값 -9 를 갖는다.

- 12 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 2 \times \cos 60^\circ = 1$ 이므로
 $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b})$
 $= 6|\vec{a}|^2 + 7\vec{a} \cdot \vec{b} - 3|\vec{b}|^2$
 $= 6 \times 1^2 + 7 \times 1 - 3 \times 2^2 = 1$

- 13 $|2\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{5}$ 의 양변을 제곱하면
 $4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 20$
 $4 \times 3^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 2^2 = 20 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 5$

- 14 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$ 의 양변을 제곱하면
 $|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$ 의 양변을 제곱하면
 $|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면 $2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) = 16$
 $\therefore |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 8$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면 $4\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$
 $\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$
 $\therefore (3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b}) = 3|\vec{a}|^2 + 10\vec{a} \cdot \vec{b} + 3|\vec{b}|^2$
 $= 3(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) + 10\vec{a} \cdot \vec{b}$
 $= 3 \times 8 + 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 19$

- 15 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times |\vec{b}| \times \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} |\vec{b}|$
 $|2\vec{a} - \vec{b}| = 4$ 의 양변을 제곱하면
 $4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16$
 $4 \times 4^2 - 4 \times 2\sqrt{3} |\vec{b}| + |\vec{b}|^2 = 16$
 $|\vec{b}|^2 - 8\sqrt{3} |\vec{b}| + 48 = 0$, $(|\vec{b}| - 4\sqrt{3})^2 = 0$
 $\therefore |\vec{b}| = 4\sqrt{3}$

16 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ = \sqrt{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$

$|\vec{a} - k\vec{b}| = 2$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 - 2k\vec{a} \cdot \vec{b} + k^2|\vec{b}|^2 = 4$$

$$(\sqrt{2})^2 - 2k \times 4 + k^2 \times 4^2 = 4$$

$$\therefore 8k^2 - 4k - 1 = 0$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은 $-\frac{-4}{8} = \frac{1}{2}$

17 $\overline{AB} = 3$, $\angle B = 30^\circ$ 이므로

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} \overline{BC}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}) = 27 \text{이므로}$$

$$|\overrightarrow{BA}|^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 27$$

$$3^2 + 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \overline{BC} = 27 \quad \therefore \overline{BC} = 2\sqrt{3}$$

18 정사각형의 한 변의 길이를 k 라 하면 $\angle CAB = 45^\circ$,

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}k \text{이므로}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ = k \times \sqrt{2}k \times \frac{\sqrt{2}}{2} = k^2$$

$$(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - 2\vec{b}) = 27 \text{이므로}$$

$$3|\vec{a}|^2 - 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 27$$

$$3k^2 - 8k^2 + 4 \times (\sqrt{2}k)^2 = 27$$

$$k^2 = 9 \quad \therefore k = 3$$

따라서 정사각형의 한 변의 길이는 3이다.

19 선분 AP가 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{BP} : \overline{PC} = \overline{AB} : \overline{AC} = 5 : 3$$

즉, 점 P는 변 BC를 5 : 3으로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AP} = \frac{5\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}}{5+3} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{8}\overrightarrow{AC}$$

한편 $\angle A = 120^\circ$ 이므로

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos (180^\circ - 120^\circ)$$

$$= -10 \times 6 \times \frac{1}{2} = -30$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\frac{3}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{8}\overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{5}{8}|\overrightarrow{AC}|^2$$

$$= \frac{3}{8} \times (-30) + \frac{5}{8} \times 6^2 = \frac{45}{4}$$

20 $2\vec{a} + \vec{b} = (4, 5)$ 에서

$$2\vec{a} = (4, 5) - \vec{b} \quad \therefore \vec{a} = (1, 2)$$

따라서 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 2 = 4 > 0$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{4}{\sqrt{1^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{5}$$

21 $2\vec{a} + 3\vec{b} = (1, 3)$, $2\vec{a} - 3\vec{b} = (-2, -1)$ 이므로

$$(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}) = -2 - 3 = -5 < 0$$

따라서 두 벡터 $2\vec{a} + 3\vec{b}$, $2\vec{a} - 3\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를

θ ($90^\circ < \theta \leq 180^\circ$)라 하면

$$\begin{aligned} \cos (180^\circ - \theta) &= \frac{(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b})}{|2\vec{a} + 3\vec{b}| |2\vec{a} - 3\vec{b}|} \\ &= \frac{-5}{\sqrt{1^2 + 3^2} \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

그런데 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 이므로

$$180^\circ - \theta = 45^\circ \quad \therefore \theta = 135^\circ$$

22 $\overrightarrow{AB} = (0, -2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{CD} = (\sqrt{6}, -\sqrt{3})$ 이므로

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 + 6 = 6 > 0$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CD}|}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{0^2 + (-2\sqrt{3})^2} \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

23 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$ 이므로

$$x^2 - x + 3 = 5, \quad x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 2$

$$\therefore \vec{a} = (2, 1), \quad \vec{b} = (1, 3)$$

따라서 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 > 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각의

크기를 θ ($0^\circ \leq \theta < 90^\circ$)라 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{2^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

그런데 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ 이므로 $\theta = 45^\circ$

24 $|3\vec{a} - \vec{b}| = 3\sqrt{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$9|\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 27$$

$$9 \times 2^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 3^2 = 27 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 3$$

따라서 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를

θ ($0^\circ \leq \theta < 90^\circ$)라 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3}{2 \times 3} = \frac{1}{2}$$

그런데 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ 이므로 $\theta = 60^\circ$

25 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -14$ 이므로

$$2|\vec{a}|^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2 = -14$$

$$2 \times (2\sqrt{2})^2 - 3 \times 4 - 2|\vec{b}|^2 = -14 \quad \therefore |\vec{b}| = 3$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{4}{2\sqrt{2} \times 3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore 3 \cos \theta = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$

26 $\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ 에서 $\vec{a}-2\vec{b}=-\vec{c}$
 $|\vec{a}-2\vec{b}|=|-\vec{c}|$ 의 양변을 제곱하면
 $|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2$
 $3^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\times 4^2=(3\sqrt{5})^2$
 $\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=7$
따라서 $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ 이므로
 $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{7}{3\times 4}=\frac{7}{12}$

27 $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$ 의 양변을 제곱하면
 $|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
 $4\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0$
 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 이므로
 $|2\vec{a}+\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4\times 1^2+1^2=5$
 $\therefore |2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5}$
 $|\vec{a}+2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=1^2+4\times 1^2=5$
 $\therefore |\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{5}$
 $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=2|\vec{a}|^2+5\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2$
 $=2\times 1^2+2\times 1^2=4$
따라서 $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})>0$ 이므로
 $\cos\theta=\frac{(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})}{|2\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}+2\vec{b}|}=\frac{4}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$

28 두 벡터 $\vec{p}, \vec{q}$ 가 서로 수직이므로 $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$
 $(2t-2, t)\cdot(t-2, -3)=0$
 $(2t-2)(t-2)-3t=0$
 $2t^2-9t+4=0, (2t-1)(t-4)=0$
 $\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=4$

29 $3\vec{a}+\vec{b}=(10, 8), \vec{a}+m\vec{b}=(-2m+4, 2m+2)$
두 벡터 $3\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+m\vec{b}$ 가 서로 수직이므로
 $(3\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+m\vec{b})=0$
 $(10, 8)\cdot(-2m+4, 2m+2)=0$
 $-20m+40+16m+16=0$
 $\therefore m=14$

30 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 수직이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
 $(p, -2)\cdot(-5, q)=0, -5p-2q=0$
 $\therefore 5p=-2q \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
또 두 벡터 $\vec{a}, \vec{c}$ 가 서로 평행하므로
 $\vec{a}=k\vec{c}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $(p, -2)=k(3, 1)=(3k, k)$
 $\therefore p=3k, -2=k$
 $\therefore k=-2, p=-6$

$p=-6$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면
 $q=15$
 $\therefore p+q=-6+15=9$

31 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
 $\overrightarrow{AP}=(x-1, y-2), \overrightarrow{AC}=(1, -2), \overrightarrow{AB}=(2, 6),$
 $\overrightarrow{CP}=(x-2, y)$
두 벡터 $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}$ 가 서로 수직이므로
 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}=0$
 $(x-1, y-2)\cdot(1, -2)=0$
 $(x-1)-2(y-2)=0$
 $\therefore x-2y+3=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CP}$ 가 서로 평행하므로
 $\overrightarrow{CP}=k\overrightarrow{AB}$ (단, k 는 0이 아닌 실수)
 $(x-2, y)=k(2, 6)=(2k, 6k)$
 $\therefore x-2=2k, y=6k$
 $\therefore x=2k+2, y=6k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면
 $k=\frac{1}{2}, x=3, y=3$
따라서 점 P의 좌표는 $(3, 3)$

II-2 03 직선과 원의 방정식

기초 문제 Training

45쪽

1 (1) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+5}{-2}$ (2) $y=1$

2 (1) $\frac{x+2}{7}=\frac{y+5}{8}$ (2) $\frac{x}{2}=\frac{y-5}{-9}$

3 (1) $x+5y-10=0$ (2) $2x-3y+14=0$

4 (1) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (2) $\frac{\sqrt{6}}{9}$

5 (1) 2 (2) $-\frac{25}{2}$

6 (1) $x^2+y^2=4$ (2) $(x-2)^2+(y+3)^2=16$

1 ①	2 ②	3 1	4 $x-1=\frac{y+3}{-2}$	
5 (4, -1)	6 $\sqrt{13}$	7 ④	8 ③	9 $\frac{4}{5}$
10 ①	11 -3	12 2	13 ④	14 ③
15 -2	16 3	17 ⑤	18 ③	19 ①
20 ②	21 ④	22 (-4, 6)		

- 1 점 (-2, 3)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(5, 2)$ 인 직선의 방정식은 $\frac{x+2}{5}=\frac{y-3}{2}$
이 직선이 점 (a, -3)을 지나므로 $\frac{a+2}{5}=\frac{-3-3}{2} \therefore a=-17$
- 2 점 (4, -10)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(-1, 2)$ 인 직선의 방정식은 $\frac{x-4}{-1}=\frac{y+10}{2}$
 $\therefore A(-1, 0), B(0, -2)$
따라서 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$
- 3 점 (3, 1)을 지나고 방향벡터가 $\vec{AB}=(-3, a-4)$ 인 직선의 방정식은 $\frac{x-3}{-3}=\frac{y-1}{a-4}$
 $x=0, y=-2$ 를 대입하면 $\frac{-3}{-3}=\frac{-2-1}{a-4} \therefore a=1$
- 4 $3-x=\frac{1-y}{2}$ 에서 $2x-y=5$ ㉠
 $\frac{x+2}{3}=\frac{y+1}{-2}$ 에서 $2x+3y=-7$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1, y=-3 \therefore (1, -3)$
직선 $x-1=\frac{5-y}{2}$ 의 방향벡터는 (1, -2)
따라서 점 (1, -3)을 지나고 방향벡터가 (1, -2)인 직선의 방정식은 $x-1=\frac{y+3}{-2}$
- 5 점 (1, -3)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(3, 2)$ 인 직선의 방정식은 $\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{2} \therefore 2x-3y=11$ ㉠
점 (5, -3)을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(2, 1)$ 인 직선의 방정식은 $2(x-5)+(y+3)=0 \therefore 2x+y=7$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=4, y=-1$
따라서 구하는 교점의 좌표는 (4, -1)

- 6 점 (2, -1)을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(3, 2)$ 인 직선의 방정식은 $3(x-2)+2(y+1)=0 \therefore 3x+2y-4=0$
따라서 점 (3, 4)와 직선 $3x+2y-4=0$ 사이의 거리는 $\frac{|9+8-4|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\sqrt{13}$
- 7 직선 $\frac{x-2}{3}=\frac{3-y}{2}$ 의 방향벡터는 (3, -2)
점 (-1, 4)를 지나고 법선벡터가 (3, -2)인 직선의 방정식은 $3(x+1)-2(y-4)=0 \therefore y=\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}$
따라서 $m=\frac{3}{2}, n=\frac{11}{2}$ 이므로 $n-m=4$
- 8 삼각형 ABC가 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 인 이등변삼각형이므로 $\overline{AM} \perp \overline{BC}$
두 점 B, C를 지나는 직선의 법선벡터는 $\vec{AM}=(2, -1)$
이고, 이 직선이 점 M(4, 2)를 지나므로 $2(x-4)-(y-2)=0 \therefore 2x-y-6=0$
이 직선이 점 (a, a+1)을 지나므로 $2a-(a+1)-6=0 \therefore a=7$
- 9 두 직선 $\frac{x-3}{2}=y+1, x=\frac{y-3}{2}$ 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면 $\vec{u}=(2, 1), \vec{v}=(1, 2)$
 $\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|2+2|}{\sqrt{2^2+1^2} \sqrt{1^2+2^2}} = \frac{4}{5}$
- 10 $x+y=5$ 에서 $x=\frac{y-5}{-1}$
두 직선 $x+1=\frac{y-3}{2}, x=\frac{y-5}{-1}$ 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면 $\vec{u}=(1, 2), \vec{v}=(1, -1)$
 $\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|1-2|}{\sqrt{1^2+2^2} \sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$
 $\therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{10}$
- 11 두 직선 $\frac{x+2}{2}=1-y, \frac{x-1}{k}=\frac{y+3}{4}$ 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면 $\vec{u}=(2, -1), \vec{v}=(k, 4)$
 $\cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 이므로 $\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$
 $\frac{|2k-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2} \sqrt{k^2+4^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, |k-2| = \sqrt{k^2+16}$
양변을 제곱하면 $k^2-4k+4=k^2+16 \therefore k=-3$

- 12 두 직선 $\frac{x-3}{\sqrt{3}} = \frac{1-y}{a+1}$, $\frac{x+1}{a+1} = \frac{y-2}{-\sqrt{3}}$ 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (\sqrt{3}, -a-1), \vec{v} = (a+1, -\sqrt{3})$$

두 직선이 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \cos 30^\circ$$

$$\frac{|\sqrt{3}(a+1) + \sqrt{3}(a+1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-a-1)^2} \sqrt{(a+1)^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4|a+1| = a^2 + 2a + 4$$

그런데 $a > 0$ 이므로

$$4(a+1) = a^2 + 2a + 4, a^2 - 2a = 0$$

$$a(a-2) = 0 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

- 13 두 점 A(a, 4), B(2, a)를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2-a, a-4)$$

직선 $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-3}$ 의 방향벡터를 $\vec{v}$ 라 하면

$$\vec{v} = (4, -3)$$

두 직선이 서로 평행하므로

$$\vec{u} = k\vec{v} \quad (\text{단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

$$(2-a, a-4) = k(4, -3) = (4k, -3k)$$

$$\therefore 2-a = 4k, a-4 = -3k$$

두 식을 연립하여 풀면

$$k = -2, a = 10$$

- 14 $mx + 6y - 12 = 0$ 에서 $\frac{x}{-6} = \frac{y-2}{m}$

두 직선 $\frac{x}{-6} = \frac{y-2}{m}$, $\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{3}$ 의 방향벡터를 각각

$\vec{u}$, $\vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (-6, m), \vec{v} = (5, 3)$$

두 직선이 서로 수직이므로 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$(-6, m) \cdot (5, 3) = 0, -30 + 3m = 0$$

$$\therefore m = 10$$

- 15 두 직선 $\frac{1-x}{k} = \frac{y+1}{2}$, $\frac{x+5}{k} = \frac{3-y}{2(k+1)}$ 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (-k, 2), \vec{v} = (k, -2(k+1))$$

두 직선이 서로 수직이므로 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$(-k, 2) \cdot (k, -2(k+1)) = 0$$

$$-k^2 - 4(k+1) = 0$$

$$(k+2)^2 = 0 \quad \therefore k = -2$$

- 16 두 직선 $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{t}$, $\frac{x-1}{t-1} = \frac{y+2}{3}$ 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$ 라 하면 $\vec{u} = (2, t)$, $\vec{v} = (t-1, 3)$

두 직선이 서로 평행하므로

$$\vec{v} = k\vec{u} \quad (\text{단, } k \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

$$(t-1, 3) = k(2, t) = (2k, kt)$$

$$\therefore t-1 = 2k, 3 = kt$$

두 식을 연립하여 풀면

$$t = -2, k = -\frac{3}{2} \quad \text{또는} \quad t = 3, k = 1$$

그런데 $t = -2$ 일 때 두 직선은 $x + y + 1 = 0$ 으로 서로 같으므로 $t = 3$

- 17 세 직선 l , m , n 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ 이라 하면

$$\vec{u}_1 = (a, 3), \vec{u}_2 = \left(1, \frac{3}{2}\right), \vec{u}_3 = (6, -b)$$

$l \parallel m$ 이므로 $\vec{u}_1 = k\vec{u}_2$ (단, k 는 0 이 아닌 실수)

$$(a, 3) = k\left(1, \frac{3}{2}\right) = \left(k, \frac{3}{2}k\right)$$

$$\therefore a = k, 3 = \frac{3}{2}k \quad \therefore k = 2, a = 2$$

$l \perp n$ 이므로 $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 0$

$$(2, 3) \cdot (6, -b) = 0, 12 - 3b = 0 \quad \therefore b = 4$$

$$\therefore a + b = 2 + 4 = 6$$

- 18 점 H(a, b)는 직선 $l: \frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3}$ 위의 점이므로

$$\frac{a+3}{2} = \frac{b-5}{3} \quad \therefore 3a - 2b = -19 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면 $\vec{u} = (2, 3)$

$\overrightarrow{PH} = (a-1, b+2)$, $\overrightarrow{PH} \perp l$ 이므로 $\overrightarrow{PH} \cdot \vec{u} = 0$ 에서

$$(a-1, b+2) \cdot (2, 3) = 0$$

$$2(a-1) + 3(b+2) = 0 \quad \therefore 2a + 3b = -4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -5, b = 2 \quad \therefore b - a = 7$$

- 19 점 A(1, 7)에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H(a, b)라 하면 점 H는 직선 l 위의 점이므로

$$\frac{a+3}{3} = \frac{b}{2} \quad \therefore 2a - 3b = -6 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면 $\vec{u} = (3, 2)$

$\overrightarrow{AH} = (a-1, b-7)$, $\overrightarrow{AH} \perp l$ 이므로 $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ 에서

$$(a-1, b-7) \cdot (3, 2) = 0$$

$$3(a-1) + 2(b-7) = 0 \quad \therefore 3a + 2b = 17 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{9}$, $\textcircled{10}$ 을 연립하여 풀면 $a = 3, b = 4 \quad \therefore H(3, 4)$

정삼각형 ABC의 무게중심은 선분 AH를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times 1}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 7}{2+1}\right) \quad \therefore \left(\frac{7}{3}, 5\right)$$

20 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
 $\overrightarrow{AP} = (x+1, y-5)$, $\overrightarrow{BP} = (x-5, y+3)$
 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ 이므로

$$(x+1, y-5) \cdot (x-5, y+3) = 0$$

$$(x+1)(x-5) + (y-5)(y+3) = 0$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

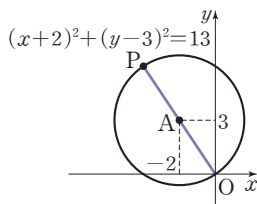
따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $(2, 1)$ 이고 반지름의 길이가 5인 원이므로 그 도형의 둘레의 길이는
 $2\pi \times 5 = 10\pi$

다른 풀이

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ 이므로 점 P가 나타내는 도형은 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.
 원의 반지름의 길이는
 $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(5+1)^2 + (-3-5)^2} = 5$
 따라서 구하는 도형의 둘레의 길이는
 $2\pi \times 5 = 10\pi$

21 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{17}$ 이므로
 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{17}$
 양변을 제곱하면
 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 17$
 즉, 점 P는 원 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 17$ 위의 점이므로 점 $(1, 2)$ 와 직선 $3x-4y-20=0$ 사이의 거리는
 $\frac{|3-8-20|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5$
 따라서 $M = 5 + \sqrt{17}$, $m = 5 - \sqrt{17}$ 이므로
 $Mm = 8$

22 $\vec{p} - \vec{a} = (x+2, y-3)$
 $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 13$ 이므로
 $(x+2, y-3) \cdot (x+2, y-3) = 13$
 $\therefore (x+2)^2 + (y-3)^2 = 13$
 즉, 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $A(-2, 3)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$ 인 원이다.
 따라서 $|\vec{p}|$ 가 최대가 되도록 하는 점 P는 오른쪽 그림과 같이 선분 OP가 지름일 때의 원 위의 점이므로 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면
 $\frac{x+0}{2} = -2, \frac{y+0}{2} = 3$
 $\therefore x = -4, y = 6$
 $\therefore P(-4, 6)$



III-1 01 직선과 평면의 위치 관계

기초 문제 Training

50쪽

- 1 L, C
- 2 (1) 직선 AB, 직선 AF, 직선 GH, 직선 GL
 (2) 직선 ED, 직선 GH, 직선 KJ
 (3) 직선 AG, 직선 BH, 직선 EK, 직선 FL, 직선 GH, 직선 HI, 직선 KJ, 직선 LK
- 3 (1) 평면 AEFB, 평면 AEHD
 (2) 평면 ABCD, 평면 AEFB, 평면 AEHD, 평면 DHGC
 (3) 평면 DHGC, 평면 EFGH
 (4) 직선 AD, 직선 AE, 직선 DH, 직선 EH
- 4 (1) 직선 AB
 (2) 평면 DEF
 (3) 평면 ADEB, 평면 ADFC, 평면 ABC, 평면 DEF
- 5 (1) 90° (2) 45° (3) 90°
- 6 (1) 45° (2) 90° (3) 60°

핵심 유형 Training

51~52쪽

- | | | | | |
|---------------|-----|-----|---------------|--------|
| 1 2 | 2 7 | 3 ③ | 4 ④ | 5 L, C |
| 6 14 | 7 ① | 8 ④ | 9 120° | 10 ① |
| 11 60° | | | | |

- 1 한 점에서 만나는 두 직선으로 만들 수 있는 평면은 평면 BCDEF
 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점으로 만들 수 있는 평면은 평면 AFD
 따라서 구하는 평면의 개수는 2

2 네 개의 점 A, E, G, C는 한 평면 위에 있으므로 이 네 개의 점으로 만들 수 있는 평면은 평면 AEGC
한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점으로 만들 수 있는 평면은 평면 ACD, 평면 AED, 평면 AGD,
평면 CDE, 평면 CDG, 평면 DEG
따라서 구하는 평면의 개수는 7

3 직선 l과 네 개의 점 P, Q, R, S 중에서 한 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는 4
네 개의 점 P, Q, R, S 중에서 세 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는 ${}_4C_3=4$
따라서 구하는 평면의 최대 개수는 $4+4=8$

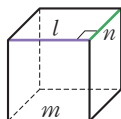
4 ④ 두 직선 AF, CE는 꼬인 위치에 있으므로 만나지 않는다.

5. ㄱ. 두 직선 AB, NM은 한 평면 위에 있지 않으므로 꼬인 위치에 있다.
 나. 두 직선 BC, NM은 한 평면 위에 있고 평행하지 않으므로 한 점에서 만난다.
 다. 두 직선 AC, NM은 한 평면 위에 있지 않으므로 꼬인 위치에 있다.
 라. 두 직선 BE, NM은 한 평면 위에 있고 평행하지 않으므로 한 점에서 만난다.

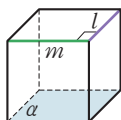
따라서 보기 중 직선 NM과 꼬인 위치에 있는 것은 ㄱ, 다이다.

6 직선 AG와 꼬인 위치에 있는 직선은
 직선 BC, 직선 CD, 직선 ED, 직선 FE, 직선 HI,
 직선 IJ, 직선 KJ, 직선 LK $\therefore m=8$
 평면 EKJD와 평행한 직선은
 직선 AB, 직선 AG, 직선 BH, 직선 CI, 직선 FL,
 직선 GH $\therefore n=6$
 $\therefore m+n=8+6=14$

7. [반례] 오른쪽 그림에서 $l \parallel m$, $l \perp n$ 이지만 두 직선 m , n 은 꼬인 위치에 있다.

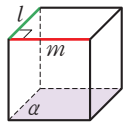


ㄷ. [반례] 오른쪽 그림에서 $l \perp m$, $l \parallel \alpha$ 이지만 $m \parallel \alpha$ 이다.

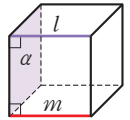


따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.

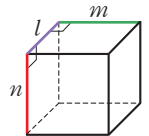
8 ① [반례] 한 평면에 평행한 서로 다른 두 직선은 서로 수직이다.



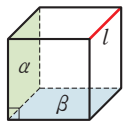
② [반례] 한 평면에 수직인 서로 다른 두 직선은 서로 평행하다.



③ [반례] 한 직선에 수직인 서로 다른 두 직선은 꼬인 위치에 있다.



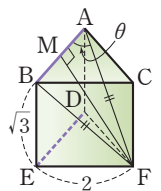
⑤ [반례] 한 직선에 평행한 서로 다른 두 평면은 서로 수직이다.



따라서 옳은 것은 ④이다.

9 $\overline{AC} \parallel \overline{EF}$ 이므로 두 직선 AB, EF가 이루는 각의 크기는 두 직선 AB, AC가 이루는 각의 크기와 같다.
 이때 삼각형 ABC는 정삼각형이므로 $\alpha = \angle CAB = 60^\circ$
 $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$ 이므로 두 직선 AD, BE가 이루는 각의 크기는 두 직선 AD, CD가 이루는 각의 크기와 같다.
 이때 삼각형 ACD는 정삼각형이므로 $\beta = \angle CDA = 60^\circ$
 $\therefore \alpha + \beta = 120^\circ$

10 오른쪽 그림에서 $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ 이므로
 $\angle FAB = \theta$



이때 삼각형 ABF는

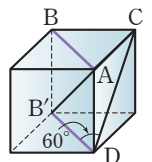
$$\overline{AF} = \overline{BF} = \sqrt{\overline{BE}^2 + \overline{EF}^2} = \sqrt{7} \text{인 이등}$$

린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 1$

따라서 직각삼각형 FAM에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{AM}}{\overline{AF}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

11 주어진 전개도로 만든 정육면체는 오른쪽 그림과 같다.



점 D를 지나면서 직선 AB에 평행한 선분을 DB'이라 하면 $\overline{DB'} \parallel \overline{AB}$ 이므로 두 직선 AB, CD가 이루는 각의 크기는 두 직선 DB', CD가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 삼각형 $CB'D$ 는 정삼각형이므로

$$\angle B'DC = 60^\circ$$

따라서 두 직선 AB, CD가 이루는 각의 크기는 60° 이다.

III-1 02 삼수선의 정리와 정사영

기초 문제 Training

53쪽

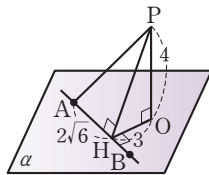
- (가) l (나) $\overline{OH}$ (다) $\overline{PH}$
- (1) 90° (2) 45°
- (1) 점 A (2) 선분 EF (3) 삼각형 EFG (4) 선분 BC
- (1) $6\sqrt{3}$ (2) 60°
- (1) 10 (2) 45°

핵심 유형 Training

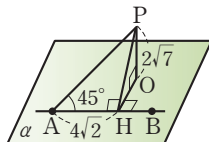
54~58쪽

- | | | | | |
|--------------------------|-------------------------|-------------------------|---------------------------|--------------------------|
| 1 7 | 2 2 | 3 $2\sqrt{10}$ | 4 $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ | 5 $\frac{5}{13}$ |
| 6 $\frac{4\sqrt{30}}{5}$ | 7 60° | 8 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ | 9 $3\sqrt{5}$ | 10 ⑤ |
| 11 6 | 12 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ | 13 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 14 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ | 15 2 |
| 16 ⑤ | 17 8 | 18 $\sqrt{13}$ | 19 ③ | 20 $6\sqrt{3}\pi$ |
| 21 4 | 22 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 23 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ | 24 $\frac{2}{7}$ | 25 $\frac{\sqrt{3}}{12}$ |
| 26 $\sqrt{6}$ | 27 20π | 28 $54\sqrt{3}\pi$ | 29 ③ | |
| 30 12cm | | | | |

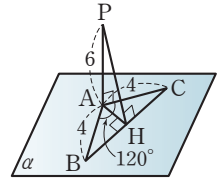
- 오른쪽 그림과 같이 선분 PH를
그으면 직각삼각형 PHO에서
 $\overline{PH} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
이때 $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로
삼수선의 정리에 의하여
 $\overline{PH} \perp \overline{AB}$
따라서 직각삼각형 PAH에서
 $\overline{AP} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + 5^2} = 7$



- 오른쪽 그림과 같이 선분 PH를
그으면 $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로
삼수선의 정리에 의하여
 $\overline{PH} \perp \overline{AB}$
직각삼각형 PAH에서 $\angle PAH = 45^\circ$ 이므로
 $\overline{PH} = \overline{AH} \tan 45^\circ = 4\sqrt{2}$
따라서 직각삼각형 PHO에서
 $\overline{OH} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{7})^2} = 2$



- 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 직
선 BC에 내린 수선의 발을 H라
하면 $\overline{PA} \perp \alpha$, $\overline{PH} \perp \overline{BC}$ 이므로
삼수선의 정리에 의하여
 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$



이때 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로
 $\angle BAH = 60^\circ$
직각삼각형 ABH에서

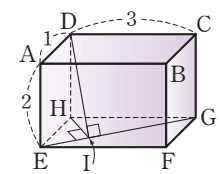
$$\overline{AH} = \overline{AB} \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

직각삼각형 PAH에서

$$\overline{PH} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$$

따라서 점 P와 직선 BC 사이의 거리는 $2\sqrt{10}$ 이다.

- 오른쪽 그림과 같이 선분 HI를
그으면 $\overline{DH} \perp$ (평면 EFGH),
 $\overline{DI} \perp \overline{EG}$ 이므로 삼수선의 정리에
의하여
 $\overline{HI} \perp \overline{EG}$



삼각형 EGH의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{HE} \times \overline{HG} = \frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{HI}$$

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{1}{2} \times \sqrt{3^2 + 1^2} \times \overline{HI}$$

$$\therefore \overline{HI} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

따라서 직각삼각형 DHI에서

$$\overline{DI} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \frac{7\sqrt{10}}{10}$$

- $\overline{OC} \perp \overline{OA}$, $\overline{OC} \perp \overline{OB}$ 이므로
 $\overline{OC} \perp$ (평면 OAB)
 $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여
 $\overline{OH} \perp \overline{AB}$

삼각형 OAB의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OH}$$

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} \times \sqrt{4^2 + 3^2} \times \overline{OH}$$

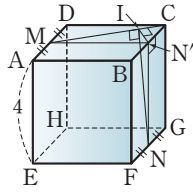
$$\therefore \overline{OH} = \frac{12}{5}$$

따라서 직각삼각형 COH에서

$$\overline{CH} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{13}{5}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\overline{OC}}{\overline{CH}} = \frac{\frac{13}{5}}{\frac{13}{5}} = \frac{5}{13}$$

- 6 오른쪽 그림과 같이 점 N에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 N'이라 하고 선분 N'I를 그으면 $\overline{NN'} \perp$ (평면 ABCD), $\overline{NI} \perp \overline{CM}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{N'I} \perp \overline{CM}$



삼각형 CMN'의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{MN'} \times \overline{CN'} = \frac{1}{2} \times \overline{CM} \times \overline{N'I}$$

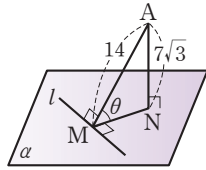
$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = \frac{1}{2} \times \sqrt{4^2 + 2^2} \times \overline{N'I}$$

$$\therefore \overline{N'I} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

따라서 직각삼각형 NN'I에서

$$\overline{NI} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{30}}{5}$$

- 7 오른쪽 그림과 같이 선분 MN을 그으면 $\overline{AN} \perp \alpha$, $\overline{AM} \perp l$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{MN} \perp l$



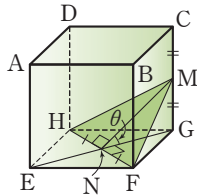
이때 점 A와 직선 l에 의하여 결

정되는 평면과 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\angle AMN = \theta$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\overline{AN}}{\overline{AM}} = \frac{7\sqrt{3}}{14} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

- 8 오른쪽 그림과 같이 선분 HF의 중점을 N이라 하면 두 삼각형 MHF, GHF는 이등변삼각형이므로



$$\overline{MN} \perp \overline{HF}, \overline{GN} \perp \overline{HF}$$

$$\therefore \angle MNG = \theta$$

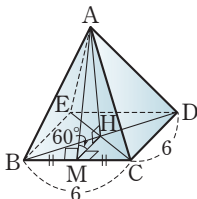
이때 $\overline{GN} = \frac{1}{2} \overline{GE} = \sqrt{2}$, $\overline{MG} = 1$ 이므로 직각삼각형

MNG에서

$$\overline{MN} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{GN}}{\overline{MN}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

- 9 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 밑면인 정사각형의 두 대각선의 교점이므로 $\overline{BH} = \overline{CH}$



모서리 BC의 중점을 M이라 하면 두 삼각형 ABC, HBC는 이등변삼각형이므로

$$\overline{AM} \perp \overline{BC}, \overline{HM} \perp \overline{BC}$$

$$\therefore \angle AMH = 60^\circ$$

직각삼각형 AMH에서

$$\overline{AM} = \frac{\overline{MH}}{\cos 60^\circ} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

따라서 직각삼각형 ABM에서

$$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$$

- 10 $\overline{AB} \perp \overline{AD}$, $\overline{AC} \perp \overline{AD}$ 이므로

$$\angle BAC = \theta$$

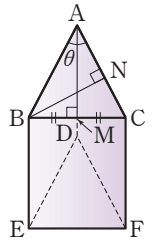
오른쪽 그림과 같이 두 꼭짓점 A, B에서 두 모서리 BC, AC에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하자. 삼각형 ABC의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AM} = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BN}$$

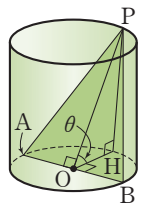
$$\frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \overline{BN}$$

$$\therefore \overline{BN} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\overline{BN}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{8\sqrt{5}}{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$



- 11 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 반대쪽에 있는 밑면에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PH} \perp$ (원 O를 포함한 밑면), $\overline{PO} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HO} \perp \overline{AB}$



$$\therefore \angle POH = \theta$$

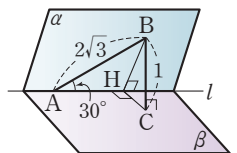
직각삼각형 POH에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{HO}}{\overline{PO}} = \frac{3}{\overline{PO}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \therefore \overline{PO} = 3\sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{PH} = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 3^2} = 6$$

따라서 원기둥의 높이는 6이다.

- 12 오른쪽 그림과 같이 점 B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{BC} \perp \beta$, $\overline{BH} \perp l$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{CH} \perp l$



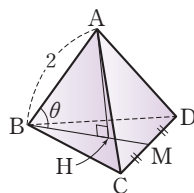
$$\therefore \angle BHC = \theta$$

이때 $\overline{BH} = 2\sqrt{3} \sin 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$ 이므로 직각삼각형 BHC에서

$$\overline{CH} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$$

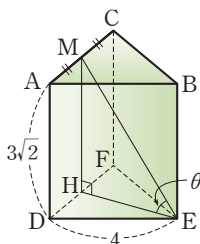
$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{CH}}{\overline{BH}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

- 13** 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 밑면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면
- $\angle ABH = \theta$
- 모서리 CD의 중점을 M이라 하면
- 점 H는 정삼각형 BCD의 무게중심이므로
- $$\overline{BH} = \frac{2}{3} \overline{BM} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$
- 따라서 직각삼각형 ABH에서



$$\cos \theta = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- 14** 오른쪽 그림과 같이 점 M에서 평면 DEF에 내린 수선의 발을 H라 하면
- $\angle MEH = \theta$
- 점 H는 모서리 DF의 중점이므로



$$\overline{EH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

따라서 직각삼각형 MHE에서

$$\overline{EM} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{30}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{EH}}{\overline{EM}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

- 15** 점 F에서 평면 AEHD에 내린 수선의 발이 E이므로
- $\angle FDE = \alpha$

$$\overline{DF} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}, \overline{DE} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

점 D에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발이 H이므로

$\angle DFH = \beta$

$$\overline{FH} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{이므로}$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{FH}}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

점 F에서 평면 DHGC에 내린 수선의 발이 G이므로

$\angle FDG = \gamma$

$$\overline{DG} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{이므로}$$

$$\cos \gamma = \frac{\overline{DG}}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

$$\therefore \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{2}{6} + \frac{5}{6} + \frac{5}{6} = 2$$

- 16** $\overline{AB} = a$ 라 하면

$$\overline{A_1B_1} = \overline{AB} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\overline{A_2B_2} = \overline{A_1B_1} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} a$$

$$\therefore \overline{A_1B_1}^2 + \overline{A_2B_2}^2 = \frac{3}{4} a^2 + \frac{9}{16} a^2 = \frac{21}{16} a^2$$

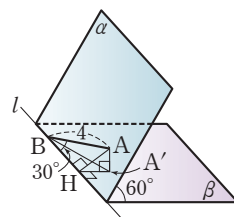
$$\text{따라서 } \frac{21}{16} a^2 = \frac{21}{2} \text{이므로}$$

$$a^2 = 8 \quad \therefore a = 2\sqrt{2} (\because a > 0)$$

- 17** 타원의 장축의 밑면 위로의 정사영은 밑면인 원의 지름이므로 타원의 장축의 길이를 a 라 하면

$$a \cos 60^\circ = 4 \quad \therefore a = 8$$

- 18** 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 β 에 내린 수선의 발을 A' , 점 A에서 교선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하면
- $\overline{AA'} \perp \beta$, $\overline{AH} \perp \overline{BH}$ 이므로



삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{A'H} \perp \overline{BH}$$

직각삼각형 ABH에서

$$\overline{AH} = \overline{AB} \sin 30^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\overline{BH} = \overline{AB} \cos 30^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

두 평면 α , β 가 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\angle AHA' = 60^\circ$$

$$\therefore \overline{A'H} = \overline{AH} \cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

따라서 선분 AB의 평면 β 위로의 정사영은 선분 $A'B$ 이므로 구하는 길이는

$$\overline{A'B} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{13}$$

- 19** 원기둥의 단면의 밑면을 포함한 평면 위로의 정사영은 원기둥의 밑면인 원이다.

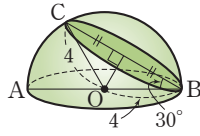
구하는 단면의 넓이를 S 라 하면 밑면인 원의 넓이는

$$\pi \times (2\sqrt{2})^2 = 8\pi \text{이므로}$$

$$S \cos 60^\circ = 8\pi, S \times \frac{1}{2} = 8\pi$$

$$\therefore S = 16\pi$$

- 20 오른쪽 그림과 같이 밑면과 30° 의 각을 이루는 평면으로 자른 단면은 원이다.



단면인 원의 지름을 선분 BC 라 하면 삼각형 OBC 는 $\overline{OB}=\overline{OC}=4$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{BC}=2 \times \overline{OB} \cos 30^\circ = 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

이때 단면의 넓이는

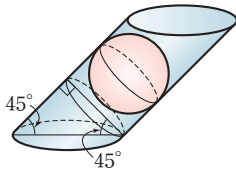
$$\pi \times (2\sqrt{3})^2 = 12\pi$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$12\pi \cos 30^\circ = 12\pi \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\pi$$

- 21 구와 입체도형이 접하는 점들을 연결하면 구와 반지름의 길이가 같은 원이 된다.

이 원을 다음 그림과 같이 밑면과 한 점에서 만나도록 행이동하면 이 원과 밑면이 이루는 각의 크기는 45° 이다.



이 원을 포함하는 평면을 α 라 하면 밑면인 타원의 평면 α 위로의 정사영이 이 원이므로 그 넓이는

$$16\sqrt{2}\pi \cos 45^\circ = 16\sqrt{2}\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 16\pi$$

구의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\pi r^2 = 16\pi, r^2 = 16$$

$$\therefore r=4 (\because r>0)$$

- 22 삼각형 ABC 의 평면 DEF 위로의 정사영은 삼각형 DEF 이므로

$$\triangle DEF = \triangle ABC \cos \theta$$

$\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{BC}=\overline{CA}=\sqrt{5}$ 이므로 삼각형 ABC 는 이등변 삼각형이다.

변 AB 의 중점을 M 이라 하면

$$\overline{CM} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

$$\text{또 } \triangle DEF = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3} \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- 23 오른쪽 그림과 같이 두 점 P, R 에서 평면 $EFGH$ 에 내린 수선의 발을 각각 P', R' 이라 하면 삼각형 PQR 의 평면 $EFGH$ 위로의 정사영은 삼각형 $P'QR'$ 이므로

$$\triangle P'QR' = \triangle PQR \cos \theta$$

이때 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 $2a$ 라 하면

$$\overline{P'Q} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(2a)^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{6}a$$

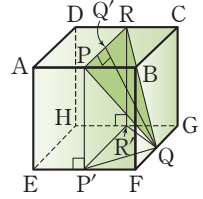
점 Q 에서 선분 PR 에 내린 수선의 발을 Q' 이라 하면

$$\overline{QQ'} = \sqrt{(\sqrt{6}a)^2 - a^2} = \sqrt{5}a$$

$$\therefore \triangle PQR = \frac{1}{2} \times 2a \times \sqrt{5}a = \sqrt{5}a^2$$

$$\text{또 } \triangle P'QR' = \frac{1}{2} \times 2a \times a = a^2 \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\triangle P'QR'}{\triangle PQR} = \frac{a^2}{\sqrt{5}a^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$



- 24 삼각형 ADC 의 평면 ABC 위로의 정사영은 삼각형 AHC 이므로

$$\triangle AHC = \triangle ADC \cos \theta$$

$$\overline{BH} : \overline{HC} = 5 : 2 \text{이므로}$$

$$\triangle ABH : \triangle AHC = 5 : 2$$

$$\therefore \triangle AHC = \frac{2}{7} \triangle ABC$$

$$\text{또 } \triangle ADC = \triangle ABC \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\triangle AHC}{\triangle ADC} = \frac{\frac{2}{7} \triangle ABC}{\triangle ABC} = \frac{2}{7}$$

- 25 두 평면 ABC, BCD 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 삼각형 ABC 의 평면 BCD 위로의 정사영이 삼각형 GBC 이므로

$$\triangle GBC = \triangle ABC \cos \theta$$

$$\triangle GBC = \frac{1}{3} \triangle BCD = \frac{1}{3} \triangle ABC \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\triangle GBC}{\triangle ABC} = \frac{\frac{1}{3} \triangle ABC}{\triangle ABC} = \frac{1}{3}$$

따라서 삼각형 GBC 의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle GBC \cos \theta = \left\{ \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{3})^2 \right\} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

- 26 두 평면 $MFND, EFGH$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 사각형 $MFND$ 의 평면 $EFGH$ 위로의 정사영이 사각형 $EFGH$ 이므로

$$\square EFGH = \square MFND \cos \theta$$

정육면체의 한 모서리의 길이를 $2a$ 라 하면 직각삼각형 MEF에서

$$\overline{MF} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}a$$

이때 $\overline{MF} = \overline{FN} = \overline{ND} = \overline{DM}$ 이므로 사각형 MFND는 마름모이다.

마름모 MFND의 두 대각선의 길이는

$$\overline{MN} = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2} = 2\sqrt{2}a$$

$$\overline{DF} = \sqrt{(2a)^2 + (2\sqrt{2}a)^2} = 2\sqrt{3}a$$

즉, 마름모 MFND의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2}a \times 2\sqrt{3}a = 2\sqrt{6}a^2$$

이때 $\square EFGH = 4a^2$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\square EFGH}{\square MFND} = \frac{4a^2}{2\sqrt{6}a^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 사각형 EFGH의 평면 MFND 위로의 정사영의 넓이는

$$\square EFGH \cos \theta = 4a^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{4\sqrt{6}}{3}a^2$$

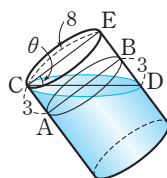
$$\text{즉, } \frac{4\sqrt{6}}{3}a^2 = 2\sqrt{6} \text{이므로}$$

$$a^2 = \frac{3}{2} \quad \therefore a = \frac{\sqrt{6}}{2} (\because a > 0)$$

따라서 정육면체의 한 모서리의 길이는

$$2a = 2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$

- 27** 오른쪽 그림과 같이 컵을 기울이기 전의 수면의 지름을 선분 AB라 하고, 컵을 물이 쏟아지기 직전까지 기울였을 때의 수면의 모양은 타원이므로 수면의 장축을 선분 CD, 원기둥의 밑면의 지름을 선분 CE라 하자.



컵을 기울이면 한쪽 수면이 올라온 만큼 반대쪽 수면은 내려가므로

$$\overline{AC} = \overline{BD} = 3 \quad \therefore \overline{DE} = 6$$

직각삼각형 CDE에서

$$\overline{CD} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$\angle DCE = \theta$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

이때 컵의 밑면의 넓이는

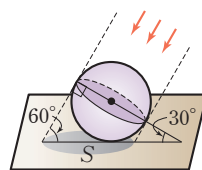
$$\pi \times 4^2 = 16\pi$$

따라서 구하는 수면의 넓이를 S 라 하면

$$S \cos \theta = 16\pi, S \times \frac{4}{5} = 16\pi$$

$$\therefore S = 20\pi$$

- 28** 다음 그림과 같이 애드벌룬이 지면과 접하도록 이동하면 태양 광선과 수직이고 애드벌룬의 중심을 지나는 평면이 지면과 이루는 각의 크기는 30° 이다.



애드벌룬의 중심을 지나는 단면인 원의 넓이는

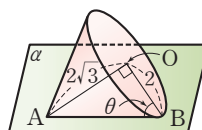
$$\pi \times 9^2 = 81\pi$$

이때 그림자의 넓이를 S 라 하면

$$81\pi = S \cos 30^\circ, 81\pi = S \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore S = 54\sqrt{3}\pi$$

- 29** 다음 그림과 같이 평면 α 위에 있는 원뿔의 모선의 양 끝 점을 각각 A, B, 밑면의 중심을 O라 하면 원뿔의 밑면과 평면 α 가 이루는 각의 크기는 $\angle ABO$ 의 크기와 같다.



$\angle ABO = \theta$ 라 하면 직각삼각형 ABO에서

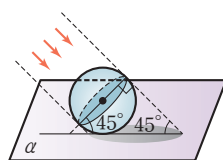
$$\overline{AB} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{BO}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$$

따라서 그림자의 넓이는 원뿔의 밑면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이와 같으므로

$$(\text{밑면의 넓이}) \times \cos \theta = \pi \times 2^2 \times \frac{1}{2} = 2\pi$$

- 30** 다음 그림과 같이 태양 광선과 수직이고 공의 중심을 지나는 평면이 지면과 이루는 각의 크기는 45° 이다.



이때 공의 반지름의 길이를 r cm라 하면 공의 그림자의 넓이가 $144\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$ 이므로

$$\pi r^2 = 144\sqrt{2}\pi \cos 45^\circ$$

$$\pi r^2 = 144\sqrt{2}\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r^2 = 144 \quad \therefore r = 12 (\because r > 0)$$

따라서 공의 반지름의 길이는 12 cm이다.

III-2 01 공간에서의 점의 좌표

기초 문제 Training

60쪽

- 1 (1) (1, 3, 2) (2) (1, 3, 0) (3) (1, 0, 2)
- 2 (1) (1, 0, 0) (2) (0, 5, 0) (3) (0, 0, -3)
- 3 (1) (7, -4, 0) (2) (0, -4, 2) (3) (7, 0, 2)
- 4 (1) (-2, -6, -3) (2) (2, 6, -3) (3) (2, -6, 3)
- 5 (1) (1, -3, 5) (2) (-1, -3, -5)
(3) (1, 3, -5) (4) (-1, 3, 5)
- 6 (1) $\sqrt{3}$ (2) 7 (3) $\sqrt{14}$
- 7 (1) $(\frac{13}{3}, \frac{1}{3}, \frac{14}{3})$ (2) (5, 1, 4) (3) (11, 7, -2)
- 8 (1) $(3, -1, \frac{1}{3})$ (2) (1, -2, 2)

핵심 유형 Training

61~65쪽

- | | | | |
|--------------------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 1 -8 | 2 4 | 3 (3, -6, 1) | 4 8 |
| 5 $2\sqrt{5}$ | 6 ④ | 7 ⑤ | 8 -1 |
| 10 6 | 11 ⑤ | 12 ③ | 13 $\frac{15}{4}$ |
| 14 $(-\frac{9}{4}, -\frac{9}{2}, 0)$ | 15 ⑤ | 16 (2, 1, 0), (3, 2, 0) | |
| 17 $3\sqrt{5}$ | 18 1 | 19 ④ | 20 $2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$ |
| 21 ② | 22 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 23 ② | 24 45° |
| 25 (3, 3, 4) | 26 ④ | 27 (35, 2, -13) | |
| 28 $\frac{5}{4}$ | 29 3 | 30 ② | 31 ⑤ |
| 32 (1, 1, 2) | 33 $\sqrt{83}$ | 34 3 | 35 6 |
| 36 ① | 37 (0, -17, 0) | 38 3 | |
| 39 (1, 2, -2) | | | |

- 1 점 A(2, -3, 6)에서 zx 평면에 내린 수선의 발 B의 좌표는 (2, 0, 6)
점 B와 y 축에 대하여 대칭인 점 C의 좌표는 (-2, 0, -6)
따라서 $a=-2, b=0, c=-6$ 이므로
 $a+b+c=-8$

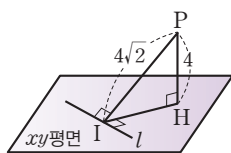
- 2 점 A($a, 2, b-1$)과 원점에 대하여 대칭인 점 B의 좌표는 ($-a, -2, -b+1$) ㉠
점 C($b+2, -2, 2a+6$)과 xy 평면에 대하여 대칭인 점의 좌표는 ($b+2, -2, -2a-6$) ㉡
㉠, ㉡이 일치하므로
 $-a=b+2, -b+1=-2a-6$
두 식을 연립하여 풀면
 $a=-3, b=1 \quad \therefore b-a=4$
- 3 점 A의 좌표를 (a, b, c)라 하자.
점 A와 x 축에 대하여 대칭인 점 B의 좌표는 ($a, -b, -c$)
점 B와 yz 평면에 대하여 대칭인 점 C의 좌표는 ($-a, -b, -c$)
이 점이 점 (-3, 6, -1)과 일치하므로
 $-a=-3, -b=6, -c=-1$
 $\therefore a=3, b=-6, c=1 \quad \therefore A(3, -6, 1)$
- 4 점 C는 점 B에서 yz 평면에 내린 수선의 발이므로
 $C(0, a, 3)$
점 C와 x 축에 대하여 대칭인 점의 좌표는 ($0, -a, -3$)
이 점이 점 (0, -5, b)와 일치하므로
 $-a=-5, -3=b$
 $\therefore a=5, b=-3 \quad \therefore a-b=8$
- 5 점 A(-2, 3, 1)과 xy 평면에 대하여 대칭인 점 B의 좌표는 (-2, 3, -1)
점 A(-2, 3, 1)과 yz 평면에 대하여 대칭인 점 C의 좌표는 (2, 3, 1)
 $\therefore \overline{BC}=\sqrt{(2+2)^2+(3-3)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{5}$
- 6 $\overline{AB}=2\overline{AC}$ 에서 $\overline{AB}^2=4\overline{AC}^2$ 이므로
 $(1-2)^2+(3-5)^2+(a+2-2)^2$
 $=4\{(3-2)^2+(4-5)^2+(1-2)^2\}$
 $a^2+5=12, a^2=7 \quad \therefore a=\sqrt{7} (\because a>0)$
- 7 점 A($a, 2, -4$)와 yz 평면에 대하여 대칭인 점 P의 좌표는 ($-a, 2, -4$)
점 A($a, 2, -4$)와 x 축에 대하여 대칭인 점 Q의 좌표는 ($a, -2, 4$)
 $\overline{PQ}=10$ 에서 $\overline{PQ}^2=100$ 이므로
 $(a+a)^2+(-2-2)^2+(4+4)^2=100$
 $4a^2+80=100, a^2=5 \quad \therefore a=\sqrt{5} (\because a>0)$

- 8 $\overline{AB}^2 = (a+1)^2 + (-2)^2 + (1-1)^2 = a^2 + 2a + 5$
 $\overline{BC}^2 = (-a)^2 + (-1)^2 + (3-1)^2 = a^2 + 5$
 $\overline{CA}^2 = (-1)^2 + (2+1)^2 + (1-3)^2 = 14$
삼각형 ABC가 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로
 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$
 $14 = a^2 + 2a + 5 + a^2 + 5, a^2 + a - 2 = 0$
 $(a+2)(a-1) = 0 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 1$
따라서 모든 a 의 값의 합은 $-2+1 = -1$

- 9 좌표공간에서 원점을 O라 하고 직선 $z = \sqrt{3}y$ 위의 점 H의 좌표를 $(0, a, \sqrt{3}a) (a \neq 0)$ 라 하면 삼각형 OHP는 $\angle OHP = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로
 $\overline{OP}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{PH}^2$
 $(\sqrt{5})^2 + 4^2 = a^2 + (\sqrt{3}a)^2 + (-\sqrt{5})^2 + a^2 + (\sqrt{3}a - 4)^2$
 $8a^2 - 8\sqrt{3}a = 0, 8a(a - \sqrt{3}) = 0$
 $\therefore a = \sqrt{3} (\because a \neq 0)$
 $\therefore \overline{PH} = \sqrt{(-\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2 + (3-4)^2} = 3$

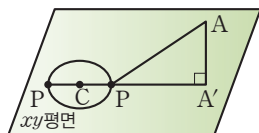
- 10 $\overline{AB} = \sqrt{(2-x-1)^2 + (-x+2)^2 + (x-1-2)^2}$
 $= \sqrt{3x^2 - 12x + 14} = \sqrt{3(x-2)^2 + 2}$
따라서 두 점 A, B 사이의 거리는 $x=2$ 일 때 최소이고
최소값은 $\sqrt{2}$ 이다.
즉, $\alpha = 2, \beta = \sqrt{2}$ 이므로 $\alpha^2 + \beta^2 = 6$

- 11 오른쪽 그림과 같이 점 P에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 I라 하자.
 $\overline{PH} \perp (xy\text{평면}), \overline{PI} \perp l$ 이므로
삼수선의 정리에 의하여
 $\overline{HI} \perp l$



$H(2, 3, 0)$ 이므로 $\overline{PH} = 4$
직각삼각형 PIH에서 $\overline{HI} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - 4^2} = 4$
따라서 점 H와 직선 l 사이의 거리는 4이다.

- 12 오른쪽 그림과 같이 점 $A(2, 4, -2)$ 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 A' 이라 하면 $A'(2, 4, 0)$



원의 중심을 $C(-1, 0, 0)$ 이라 하면
 $\overline{A'C} = \sqrt{(-1-2)^2 + (-4)^2} = 5$
 $\overline{A'P}$ 의 최댓값은 $\overline{A'C} + 1 = 6$, 최솟값은 $\overline{A'C} - 1 = 4$
 $\overline{AA'} = 2$ 이므로 직각삼각형 APA' 에서
 $M = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}, m = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$
 $\therefore M^2 + m^2 = 60$

- 13 구하는 점을 $P(0, 0, c)$ 라 하면
 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로
 $(-3)^2 + 2^2 + (c-4)^2 = 3^2 + (-1)^2 + (c-2)^2$
 $c^2 - 8c + 29 = c^2 - 4c + 14$
 $-4c = -15 \quad \therefore c = \frac{15}{4}$

따라서 구하는 점의 z 좌표는 $\frac{15}{4}$

- 14 직선 $y=2x$ 위의 점을 $P(a, 2a, 0)$ 이라 하면
 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로
 $(a-1)^2 + (2a-2)^2 + (-2)^2 = (a-3)^2 + (2a)^2 + 3^2$
 $5a^2 - 10a + 9 = 5a^2 - 6a + 18$
 $-4a = 9 \quad \therefore a = -\frac{9}{4}$
따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(-\frac{9}{4}, -\frac{9}{2}, 0)$

- 15 점 P가 yz 평면 위의 점이므로 $a=0$
 $\therefore P(0, b, c)$
 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로
 $(-2)^2 + b^2 + c^2 = (-1)^2 + b^2 + (c-1)^2$
 $2c = -2 \quad \therefore c = -1$
 $\overline{BP} = \overline{CP}$ 에서 $\overline{BP}^2 = \overline{CP}^2$ 이므로
 $(-1)^2 + b^2 + (c-1)^2 = (-3)^2 + (b-2)^2 + (c-1)^2$
 $4b = 12 \quad \therefore b = 3$
 $\therefore a+b+c = 2$

- 16 xy 평면 위의 점 C의 좌표를 $(a, b, 0)$ 이라 하자.
삼각형 ABC가 정삼각형이므로 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$
 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로
 $(3-2)^2 + (1-2)^2 + (-1+1)^2 = (a-3)^2 + (b-1)^2 + 1^2$
 $2 = a^2 + b^2 - 6a - 2b + 11$
 $\therefore a^2 + b^2 - 6a - 2b + 9 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\overline{BC} = \overline{CA}$ 에서 $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$ 이므로
 $(a-3)^2 + (b-1)^2 + 1^2 = (2-a)^2 + (2-b)^2 + (-1)^2$
 $a^2 + b^2 - 6a - 2b + 11 = a^2 + b^2 - 4a - 4b + 9$
 $\therefore a = b + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $(b+1)^2 + b^2 - 6(b+1) - 2b + 9 = 0$
 $b^2 - 3b + 2 = 0, (b-1)(b-2) = 0$
 $\therefore b = 1 \text{ 또는 } b = 2$
 $\therefore a = 2, b = 1 \text{ 또는 } a = 3, b = 2$
따라서 구하는 점 C의 좌표는
 $(2, 1, 0), (3, 2, 0)$

- 17 두 점 A, B의 z 좌표의 부호가 다르므로 두 점 A, B는 xy 평면을 기준으로 서로 반대쪽에 있다.

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AP} + \overline{BP} &\geq \overline{AB} \\ &= \sqrt{(2-4)^2 + (-5+1)^2 + (1+4)^2} \\ &= 3\sqrt{5}\end{aligned}$$

- 18 두 점 A, B의 y 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 zx 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 zx 평면에 대하여 대칭인 점을 A'이라 하면

$$A'(1, -3, 4)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{A'P} + \overline{BP} \\ &\geq \overline{A'B} \\ &= \sqrt{(-2-1)^2 + (a+3)^2 + (4-4)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + 6a + 18}\end{aligned}$$

즉, $\sqrt{a^2 + 6a + 18} = 5$ 이므로 양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 + 6a - 7 = 0, (a+7)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = 1 (\because a > 0)$$

- 19 두 점 A, B의 y 좌표가 0이고 z 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 zx 평면 위에 있고 x 축을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 x 축에 대하여 대칭인 점을 A'이라 하면

$$A'(-3, 0, -1)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{A'P} + \overline{BP} \\ &\geq \overline{A'B} \\ &= \sqrt{(4+3)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{58}\end{aligned}$$

- 20 두 점 A, B의 x 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 yz 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A와 yz 평면에 대하여 대칭인 점을 A'이라 하면

$$A'(-1, 4, 3)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로 삼각형 ABP의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{AP} + \overline{PB} &= \overline{AB} + \overline{A'P} + \overline{PB} \\ &\geq \overline{AB} + \overline{A'B} \\ &= \sqrt{(3-1)^2 + (2-4)^2 + (1-3)^2} \\ &\quad + \sqrt{(3+1)^2 + (2-4)^2 + (1-3)^2} \\ &= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

- 21 두 점 A, B의 yz 평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라 하면 A'(0, -1, 2), B'(0, -3, 1)

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(-3+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$22 \overline{AB} = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2 + (8-3)^2} = 5\sqrt{2}$$

두 점 A, B의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라

$$\text{하면 } A'(2, 1, 0), B'(5, 5, 0)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = 5$$

이때 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 이므로

$$5 = 5\sqrt{2} \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$23 \overline{AB} = \sqrt{(2-3)^2 + (-a)^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{a^2 + 3}$$

두 점 A, B의 zx 평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라

$$\text{하면 } A'(3, 0, 0), B'(2, 0, -\sqrt{2})$$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(2-3)^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$$

이때 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 60^\circ$ 이므로

$$\sqrt{3} = \sqrt{a^2 + 3} \times \frac{1}{2}, 2\sqrt{3} = \sqrt{a^2 + 3}$$

$$12 = a^2 + 3, a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 (\because a > 0)$$

$$24 \overline{AB} = |4-1| = 3$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-2)^2 + (4-4)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(2-4)^2 + (1-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{17}$$

이때 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 이므로 삼각형 ABC는 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

세 점 A, B, C의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A', B', C'이라 하면

$$A'(2, 1, 0), B'(2, 4, 0), C'(4, 4, 0)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = |4-1| = 3, \overline{B'C'} = |4-2| = 2,$$

$$\overline{C'A'} = \sqrt{(2-4)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{13}$$

이때 $\overline{C'A'}^2 = \overline{A'B'}^2 + \overline{B'C'}^2$ 이므로 삼각형 A'B'C'은

$\angle B' = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\therefore \triangle A'B'C' = \frac{1}{2} \times \overline{A'B'} \times \overline{B'C'} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$$

이때 삼각형 ABC와 xy 평면이 이루는 예각의 크기를 θ 라

하면 $\triangle A'B'C' = \triangle ABC \cos \theta$ 이므로

$$3 = 3\sqrt{2} \cos \theta, \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \theta = 45^\circ$$

- 25 선분 AB를 1:2로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-1) + 2 \times 2}{1+2}, \frac{1 \times (-5) + 2 \times 1}{1+2}, \frac{1 \times 0 + 2 \times 3}{1+2} \right)$$

$$\therefore (1, -1, 2)$$

선분 AB를 1:2로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-1) - 2 \times 2}{1-2}, \frac{1 \times (-5) - 2 \times 1}{1-2}, \frac{1 \times 0 - 2 \times 3}{1-2} \right)$$

$$\therefore (5, 7, 6)$$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{-1+7}{2}, \frac{2+6}{2}\right) \quad \therefore (3, 3, 4)$$

- 26 선분 PQ를 2 : 1로 외분하는 점 R의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 8 - 1 \times a}{2-1}, \frac{2 \times b - 1 \times 6}{2-1}, \frac{2 \times 3 - 1 \times 5}{2-1}\right)$$

$$\therefore (16-a, 2b-6, 1)$$

이 점이 점 (13, 4, c)와 일치하므로

$$16-a=13, 2b-6=4, 1=c$$

$$\therefore a=3, b=5, c=1 \quad \therefore a+b+c=9$$

- 27 점 B의 좌표를 (a, b, c)라 하면 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times a + 3 \times 5}{2+3}, \frac{2 \times b + 3 \times 2}{2+3}, \frac{2 \times c + 3 \times (-3)}{2+3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{2a+15}{5}, \frac{2b+6}{5}, \frac{2c-9}{5}\right)$$

이 점이 점 (-1, 2, -1)과 일치하므로

$$\frac{2a+15}{5}=-1, \frac{2b+6}{5}=2, \frac{2c-9}{5}=-1$$

$$\therefore a=-10, b=2, c=2$$

따라서 두 점 A(5, 2, -3), B(-10, 2, 2)를 2 : 3으로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-10) - 3 \times 5}{2-3}, \frac{2 \times 2 - 3 \times 2}{2-3}, \frac{2 \times 2 - 3 \times (-3)}{2-3}\right)$$

$$\therefore (35, 2, -13)$$

- 28 점 P가 $\angle A$ 의 이등분선과 변

BC의 교점이므로

$$\overline{BP} : \overline{CP} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

$$\text{이때 } \overline{AB} = \sqrt{(-1)^2 + (1+1)^2 + (-1-1)^2} = 3,$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-2-1)^2 + (3+1)^2 + (1-1)^2} = 5 \text{이므로}$$

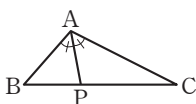
$$\overline{BP} : \overline{CP} = 3 : 5$$

따라서 점 P는 변 BC를 3 : 5로 내분하는 점이므로

$$a = \frac{3 \times (-2) + 5 \times 0}{3+5} = -\frac{3}{4}, b = \frac{3 \times 3 + 5 \times 1}{3+5} = \frac{7}{4},$$

$$c = \frac{3 \times 1 + 5 \times (-1)}{3+5} = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore a+b-c = \frac{5}{4}$$



- 29 선분 AB를 1 : m으로 내분하는 점이 xy평면 위에 있으므로 내분점의 z좌표는 0이다.

$$\text{즉, } \frac{1 \times (-3) + m \times 1}{1+m} = 0 \text{이므로}$$

$$-3+m=0 \quad \therefore m=3$$

- 30 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이 yz평면 위에 있으므로 내분점의 x좌표는 0이다.

$$\text{즉, } \frac{2 \times a + 1 \times 2}{2+1} = 0 \text{이므로}$$

$$2a+2=0 \quad \therefore a=-1$$

또 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점이 x축 위에 있으므로 외분점의 y좌표와 z좌표는 모두 0이다.

$$\text{즉, } \frac{3 \times b - 2 \times 5}{3-2} = 0, \frac{3 \times c - 2 \times 4}{3-2} = 0 \text{이므로}$$

$$3b-10=0, 3c-8=0 \quad \therefore b=\frac{10}{3}, c=\frac{8}{3}$$

$$\therefore a+b+c=5$$

- 31 $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = k$ 라 하면 $\overline{BC} = k \overline{AC}$ 에서 $\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : k$

따라서 점 C는 선분 AB를 1 : k로 내분하는 점이다.

그런데 점 C가 xy평면 위에 있으므로 점 C의 z좌표는 0이다.

$$\text{즉, } \frac{1 \times 4 + k \times (-2)}{1+k} = 0 \text{이므로}$$

$$4-2k=0 \quad \therefore k=2$$

- 32 대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+2}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \quad \therefore (3, 0, 2)$$

점 D의 좌표를 (a, b, c)라 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{5+a}{2}, \frac{-1+b}{2}, \frac{2+c}{2}\right)$$

평행사변형의 두 대각선 AC, BD의 중점은 일치하므로

$$\frac{5+a}{2}=3, \frac{-1+b}{2}=0, \frac{2+c}{2}=2$$

$$\therefore a=1, b=1, c=2$$

따라서 점 D의 좌표는 (1, 1, 2)

- 33 점 B의 좌표를 (a, b, c)라 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a-1}{2}, \frac{b+8}{2}, \frac{c+3}{2}\right)$$

대각선 BD의 중점은 두 대각선의 교점과 일치하므로

$$\frac{a-1}{2}=-2, \frac{b+8}{2}=3, \frac{c+3}{2}=1$$

$$\therefore a=-3, b=-2, c=-1$$

따라서 B(-3, -2, -1)이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3-6)^2 + (-2+1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{83}$$

- 34 평행사변형 ABCD의 각 변의 중점을 연결하여 만든 사각형 PQRS도 평행사변형이고, 평행사변형 PQRS의 두 대각선의 교점은 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점과 일치한다.

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{2+6}{2}\right) \quad \therefore (-1, 0, 4)$$

따라서 $a=-1, b=0, c=4$ 이므로

$$a+b+c=3$$

35 대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+1}{2}, \frac{2+2}{2}, \frac{3-1}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{a+1}{2}, 2, 1\right)$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{b+2}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{1+1}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{b+2}{2}, 2, 1\right)$$

마름모의 두 대각선 AC, BD의 중점은 일치하므로

$$\frac{a+1}{2} = \frac{b+2}{2} \quad \therefore b=a-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

마름모의 네 변의 길이는 모두 같으므로

$$\overline{AD} = \overline{CD} \text{에서 } \overline{AD}^2 = \overline{CD}^2$$

$$(2-a)^2 + (-2)^2 + (1-3)^2 = (2-1)^2 + (-2)^2 + (1+1)^2$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0, (a-1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a=3 \quad (\because a>1)$$

이를 ①에 대입하면 $b=2$

$$\therefore ab=6$$

36 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+(a-6)-1}{3}, \frac{-1+2+b}{3}, \frac{3+b+(3-b)}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{2a-7}{3}, \frac{b+1}{3}, 2\right)$$

이 점이 점 $(-1, 1, c)$ 와 일치하므로

$$\frac{2a-7}{3} = -1, \frac{b+1}{3} = 1, 2=c$$

$$\therefore a=2, b=2, c=2$$

$$\therefore a+b-c=2$$

37 점 C의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 선분 CM을 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times a}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times b}{2+1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times c}{2+1}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{6+a}{3}, \frac{8+b}{3}, \frac{12+c}{3}\right)$$

이 점이 점 $G(2, -3, 4)$ 와 일치하므로

$$\frac{6+a}{3} = 2, \frac{8+b}{3} = -3, \frac{12+c}{3} = 4$$

$$\therefore a=0, b=-17, c=0$$

$$\therefore C(0, -17, 0)$$

38 삼각형 ABC에서 선분 AM은 삼각형 ABC의 중선이고 선분 AM을 2:1로 내분하는 점은 삼각형 ABC의 무게중심이다.

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+a+8}{3}, \frac{3+0+0}{3}, \frac{-4-3+b}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+10}{3}, 1, \frac{b-7}{3}\right)$$

이 점이 점 $(b-1, 1, a)$ 와 일치하므로

$$\frac{a+10}{3} = b-1, \frac{b-7}{3} = a$$

$$\therefore a-3b = -13, 3a-b = -7$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-1, b=4 \quad \therefore a+b=3$$

39 삼각형 ABC의 무게중심은 삼각형 PQR의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+2+1}{3}, \frac{1+3+2}{3}, \frac{-8+5-3}{3}\right)$$

$$\therefore (1, 2, -2)$$

III-2 02 구의 방정식

기초 문제 Training

66쪽

- 1** (1) 중심의 좌표: $(1, -2, 0)$, 반지름의 길이: 2
(2) 중심의 좌표: $(-3, -1, 4)$, 반지름의 길이: 5
- 2** (1) $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 16$
(2) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
- 3** (1) $x^2 + y^2 + z^2 = 50$
(2) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 51$
- 4** (1) 중심의 좌표: $(0, 1, -2)$, 반지름의 길이: $\sqrt{5}$
(2) 중심의 좌표: $(3, -2, -1)$, 반지름의 길이: 4
- 5** (1) $k < 13$ (2) $k > -21$
- 6** (1) $(x+4)^2 + (y-2)^2 + (z+8)^2 = 64$
(2) $(x+4)^2 + (y-2)^2 + (z+8)^2 = 16$
(3) $(x+4)^2 + (y-2)^2 + (z+8)^2 = 4$
- 7** (1) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 13$
(2) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 10$
(3) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5$
- 8** (1) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 19$
(2) $(y+4)^2 + (z-1)^2 = 11$
(3) $(x-3)^2 + (z-1)^2 = 4$

핵심 유형 Training

67~70쪽

1 18	2 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$	3 ③
4 6	5 -3	6 1
7 5	8 ④	
9 $32\sqrt{3}\pi$	10 ③	11 ④
12 54	13 4	
14 ②	15 ②	16 $2\sqrt{34}$
17 $\sqrt{11}$	18 ⑤	
19 ⑤	20 4	21 ④
22 42π	23 ③	
24 $2\sqrt{3}$	25 ④	26 6π
27 ③	28 ④	
29 16		

- 구 $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=16$ 의 중심의 좌표는 $(3, -1, 2)$
구의 반지름의 길이는 두 점 $(3, -1, 2), (2, 1, -1)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(2-3)^2+(1+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{14}$$
 즉, 구의 방정식은

$$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=14$$
 따라서 $a=3, b=-1, c=2, d=14$ 이므로
 $a+b+c+d=18$
- 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0-3+3}{3}, \frac{2+1+0}{3}, \frac{-1+3+1}{3}\right) \therefore (0, 1, 1)$$
 구의 반지름의 길이는 두 점 $(0, 1, 1), (0, 2, -1)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(2-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{5}$$
 따라서 구하는 구의 방정식은

$$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=5$$
- 선분 AB를 1:2로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-5) + 2 \times 4}{1+2}, \frac{1 \times 3 + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times (-2) + 2 \times 1}{1+2}\right)$$

$$\therefore (1, 1, 0)$$
 선분 AB를 1:2로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-5) - 2 \times 4}{1-2}, \frac{1 \times 3 - 2 \times 0}{1-2}, \frac{1 \times (-2) - 2 \times 1}{1-2}\right)$$

$$\therefore (13, -3, 4)$$
 구의 중심은 선분 PQ의 중점과 같으므로 구의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+13}{2}, \frac{1-3}{2}, \frac{0+4}{2}\right) \therefore (7, -1, 2)$$
 구의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}\sqrt{(13-1)^2+(-3-1)^2+4^2} = 2\sqrt{11}$$
 따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-7)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=44$$

- 구의 방정식을 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ 이라 하자.
점 $(0, 0, 0)$ 을 지나므로 $D=0$
점 $(2, 0, 0)$ 을 지나므로

$$4+2A=0 \therefore A=-2$$
 점 $(0, 2, 0)$ 을 지나므로

$$4+2B=0 \therefore B=-2$$
 점 $(0, 0, 2)$ 을 지나므로

$$4+2C=0 \therefore C=-2$$
 즉, 구의 방정식은 $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=0$ 이므로

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$$
 따라서 $a=1, b=1, c=1, r^2=3$ 이므로
 $a+b+c+r^2=6$
- $x^2+y^2+z^2-4x+2ky-10z-6k=0$ 을 변형하면

$$(x-2)^2+(y+k)^2+(z-5)^2=k^2+6k+29$$
 이때 구의 부피가 최소하려면 구의 반지름의 길이 $\sqrt{k^2+6k+29}$ 가 최소이어야 한다.
 $k^2+6k+29=(k+3)^2+20$ 이므로 $k=-3$ 일 때 반지름의 길이가 최소이다.
따라서 구하는 k 의 값은 -3 이다.
- $x^2+y^2+z^2-8x-4y+4z+20=0$ 을 변형하면

$$(x-4)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=4$$
 이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(4, 2, -2)$, 반지름의 길이는 2이다.
오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C, 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CB}=2, \overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{3}$$
 따라서 직각삼각형 CBH에서

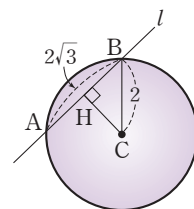
$$\overline{CH}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$$
- $x^2+y^2+z^2+2x-2y-4z-5=0$ 을 변형하면

$$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=11$$
 이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(-1, 1, 2)$
이때 구의 중심은 선분 AB의 중점이므로

$$\frac{-4+a}{2}=-1, \frac{2+b}{2}=1, \frac{1+c}{2}=2$$

$$\therefore a=2, b=0, c=3$$

$$\therefore a-b+c=5$$



8 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로 $2\overline{BP} = \overline{AP}$
 $\therefore 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$4\{x^2 + (y+1)^2 + z^2\} = x^2 + y^2 + (z-3)^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 + \frac{8}{3}y + 2z - \frac{5}{3} = 0$$

따라서 $a=0, b=\frac{8}{3}, c=2, d=-\frac{5}{3}$ 이므로

$$a-b+c-d=1$$

9 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로

$$\{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2\} + \{(x+3)^2 + (y-3)^2 + z^2\}$$

$$= (-3-1)^2 + (3+1)^2 + (-4)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 6 = 0$$

$$\therefore (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 12$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $(-1, 1, 2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 구이므로 구하는 도형의 부피는

$$\frac{4}{3}\pi \times (2\sqrt{3})^3 = 32\sqrt{3}\pi$$

10 점 A의 좌표를 (x_1, y_1, z_1) 이라 하면 점 A는 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

선분 AB의 중점의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$x = \frac{x_1+4}{2}, y = \frac{y_1-3}{2}, z = \frac{z_1+3}{2}$$

$$\therefore x_1 = 2x-4, y_1 = 2y+3, z_1 = 2z-3$$

이를 ①에 대입하면

$$(2x-4)^2 + (2y+3)^2 + (2z-3)^2 = 4$$

$$\therefore (x-2)^2 + \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = 1$$

따라서 $a=2, b=-\frac{3}{2}, c=\frac{3}{2}, r=1$ 이므로

$$a+b+c+r=3$$

11 $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 2kz + k = 0$ 을 변형하면 $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+k)^2 = k^2 - k + 13$

이 구가 xy 평면에 접하므로

$$\sqrt{k^2 - k + 13} = |-k|$$

$$k^2 - k + 13 = k^2 \quad \therefore k = 13$$

12 구가 x 축, y 축, z 축에 동시에 접하므로 구의 중심 (a, b, c) 에서 x 축, y 축, z 축에 이르는 거리는 모두 구의 반지름의 길이와 같다.

$$\text{즉, } |a| = |b| = |c| \text{이므로 } a^2 = b^2 = c^2$$

구의 중심에서 x 축에 내린 수선의 발의 좌표는 $(a, 0, 0)$

구의 반지름의 길이가 6이므로

$$\sqrt{b^2 + c^2} = 6, 2b^2 = 36 \quad \therefore b^2 = 18$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 3b^2 = 54$$

13 $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax + 4by - 2z + 9 = 0$ 을 변형하면

$$(x-a)^2 + (y+2b)^2 + (z-1)^2 = a^2 + 4b^2 - 8$$

이 구가 yz 평면에 접하므로

$$\sqrt{a^2 + 4b^2 - 8} = |a|$$

$$a^2 + 4b^2 - 8 = a^2, b^2 = 2 \quad \therefore b = \sqrt{2} \quad (\because b > 0)$$

또 이 구가 zx 평면에 접하므로

$$\sqrt{a^2 + 4b^2 - 8} = |-2b|$$

$$a^2 + 4b^2 - 8 = 4b^2, a^2 = 8 \quad \therefore a = 2\sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore ab = 4$$

14 구가 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 동시에 접하고 점

$(2, 1, -1)$ 을 지나므로 반지름의 길이를 r 라 하면 구의 방정식은

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 + (z+r)^2 = r^2$$

이 구가 점 $(2, 1, -1)$ 을 지나므로

$$(2-r)^2 + (1-r)^2 + (-1+r)^2 = r^2$$

$$r^2 - 4r + 3 = 0, (r-1)(r-3) = 0$$

$$\therefore r = 1 \text{ 또는 } r = 3$$

따라서 두 구의 반지름의 길이의 합은

$$1 + 3 = 4$$

15 주어진 구의 방정식에 $x=0, z=0$ 을 대입하면

$$y^2 + 6y + 8 = 0, (y+4)(y+2) = 0$$

$$\therefore y = -4 \text{ 또는 } y = -2$$

따라서 두 교점의 좌표는 $(0, -4, 0), (0, -2, 0)$ 이므로

$$\overline{AB} = |-2 - (-4)| = 2$$

다른 풀이

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 4z + 8 = 0 \text{을 변형하면}$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 9$$

오른쪽 그림과 같이 구의 중심

을 C라 하고 점 C(2, -3, 2)

에서 y 축에 내린 수선의 발을

H라 하면

$$H(0, -3, 0)$$

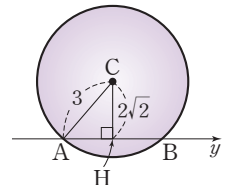
$$\therefore \overline{CH} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

따라서 직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 1$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 1 = 2$$



- 16 구의 중심은 선분 AB의 중점과 같으므로 구의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{4-8}{2}, \frac{-5+1}{2}, \frac{7+1}{2}\right) \quad \therefore (-2, -2, 4)$$

또 구의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(-8-4)^2 + (1+5)^2 + (1-7)^2} = 3\sqrt{6}$$

즉, 구의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 54$$

이 방정식에 $y=0, z=0$ 을 대입하여 정리하면

$$(x+2)^2 = 34 \quad \therefore x = -2 \pm \sqrt{34}$$

따라서 주어진 구와 x 축의 두 교점의 좌표는

$$(-2-\sqrt{34}, 0, 0), (-2+\sqrt{34}, 0, 0)$$

이므로 두 점 사이의 거리는

$$|(-2+\sqrt{34}) - (-2-\sqrt{34})| = 2\sqrt{34}$$

- 17 주어진 구의 방정식에 $x=0, y=0$ 을 대입하여 정리하면

$$z^2 + 8z + 26 - r^2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 구와 z 축이 만나는 두 점 사이의 거리가 2이므로 z 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근의 차가 2이다.

따라서 $\textcircled{1}$ 의 두 근을 $\alpha, \alpha+2$ 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (\alpha+2) = -8, \alpha(\alpha+2) = 26 - r^2$$

$$\therefore \alpha = -5, r = \sqrt{11} \quad (\because r > 0)$$

- 18 주어진 구의 방정식에 $y=0, z=0$ 을 대입하면

$$x^2 + 2x - 3 = 0, (x+3)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 주어진 구와 x 축의 두 교점의 좌표는 $(-3, 0, 0), (1, 0, 0)$ 이므로

$$\overline{AB} = |1 - (-3)| = 4$$

이때 두 점 A, B는 구 위의 점이므로 두 선분 AC, BC의 길이는 모두 구의 반지름의 길이와 같다.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 4z - 3 = 0 \text{을 변형하면}$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

$$\therefore \overline{AC} = \overline{BC} = 3$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 4 + 3 + 3 = 10$$

- 19 주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하여 정리하면

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$$

따라서 주어진 구와 xy 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 2 = 4\pi$$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C, 점 C에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H, 구와 xy 평면이 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P라 하면

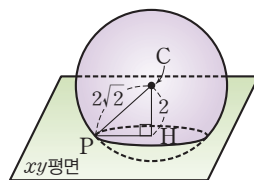
$$\overline{CP} = 2\sqrt{2}, \overline{CH} = 2$$

직각삼각형 CPH에서

$$\overline{PH} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2$$

따라서 주어진 구와 xy 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 2 = 4\pi$$



- 20 주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$y^2 + z^2 + 2y - 4z + k = 0$$

$$\therefore (y+1)^2 + (z-2)^2 = 5 - k$$

이때 주어진 구와 yz 평면이 만나서 생기는 원의 반지름의 길이가 1이므로

$$\sqrt{5-k} = 1, 5-k = 1 \quad \therefore k = 4$$

- 21 구의 중심의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 구의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 20$$

이 방정식에 $y=0$ 을 대입하여 정리하면

$$(x-a)^2 + (z-c)^2 = 20 - b^2$$

이 식이 $(x-2)^2 + z^2 = 4$ 와 일치하므로

$$a=2, c=0, 20-b^2=4$$

$$20-b^2=4 \text{에서 } b^2=16 \quad \therefore b = \pm 4$$

따라서 두 구의 중심의 좌표는 $(2, -4, 0), (2, 4, 0)$ 이므로 두 구의 중심 사이의 거리는 $|4 - (-4)| = 8$

- 22 원기둥의 한 밑면의 둘레는 구와 yz 평면이 만나서 생기는 원과 같다.

주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$y^2 + z^2 - 4y + 2z - 2 = 0$$

$$\therefore (y-2)^2 + (z+1)^2 = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

즉, 원기둥의 밑면인 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{7}$ 이다.

또 $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 2z - 2 = 0$ 을 변형하면

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 16$$

구의 중심을 $C(-3, 2, -1)$, 점 C에서 yz 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 원 $\textcircled{1}$ 의 중심이므로

$$H(0, 2, -1) \quad \therefore \overline{CH} = 3$$

따라서 원기둥의 높이는 $2\overline{CH} = 6$ 이므로 구하는 원기둥의 부피는 $\pi \times (\sqrt{7})^2 \times 6 = 42\pi$

- 23 $x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 2z - 6 = 0$ 을 변형하면
 $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 11$
 이 구의 중심을 C라 하면 $C(0, -2, 1)$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(-1)^2 + (-2-3)^2 + (1-2)^2} = 3\sqrt{3}$$

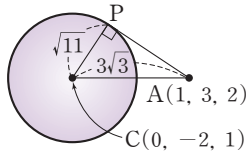
오른쪽 그림과 같이 점 A에

서 구에 그은 접선의 접점을

P라 하면 $\overline{CP} = \sqrt{11}$

따라서 직각삼각형 APC에서

$$\overline{AP} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - (\sqrt{11})^2} = 4$$



- 24 $\overline{AC} = \sqrt{(-2-3)^2 + (3-5)^2 + 2^2} = \sqrt{33}$

오른쪽 그림과 같이 점 A

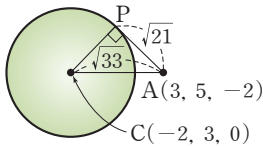
에서 구에 그은 접선의 접

점을 P라 하면

$$\overline{AP} = \sqrt{21}$$

따라서 직각삼각형 APC에서

$$\overline{CP} = \sqrt{(\sqrt{33})^2 - (\sqrt{21})^2} = 2\sqrt{3}$$



- 25 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - k = 0$ 에서
 $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2+k$
 이 구의 중심을 C라 하면 $C(1, 0, -1)$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-4)^2 + 3^2 + (-1+5)^2} = \sqrt{34}$$

오른쪽 그림과 같이 점

A에서 구에 그은 접선

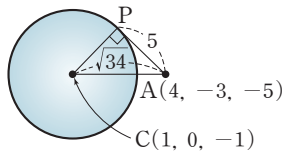
의 접점을 P라 하면

$$\overline{AP} = 5$$

직각삼각형 APC에서

$$\overline{CP} = \sqrt{(\sqrt{34})^2 - 5^2} = 3$$

따라서 $2+k=9$ 이므로 $k=7$



- 26 주어진 구의 중심을 C라 하면 $C(3, 3, 0)$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{3^2 + (3+1)^2 + (\sqrt{7})^2} = 4\sqrt{2}$$

오른쪽 그림과 같이 점

A에서 구에 그은 접선

의 접점을 P라 하면

$$\overline{CP} = 2\sqrt{2}$$

직각삼각형 ACP에서

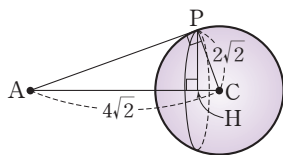
$$\overline{AP} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6}$$

직각삼각형 ACP의 꼭짓점 P에서 변 AC에 내린 수선의

발을 H라 하면 삼각형 ACP의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \overline{PH}$$

$$\therefore \overline{PH} = \sqrt{6}$$



따라서 접점이 나타내는 도형은 중심이 점 H이고 반지름
 의 길이가 $\sqrt{6}$ 인 원이므로 구하는 도형의 넓이는
 $\pi \times (\sqrt{6})^2 = 6\pi$

- 27 구의 중심을 C라 하면 $C(-1, -2, 1)$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(-1-1)^2 + (-2-2)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{6}$$

오른쪽 그림과 같이 직선 AC

가 구와 만나는 두 점을 각각

P, Q라 하면 $\overline{CP} = \overline{CQ} = 1$ 이

므로

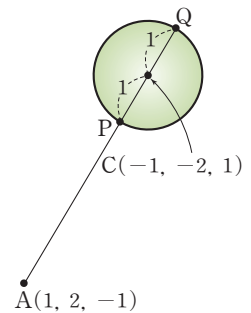
$$M = \overline{AQ} = \overline{AC} + \overline{CQ}$$

$$= 2\sqrt{6} + 1$$

$$m = \overline{AP} = \overline{AC} - \overline{CP}$$

$$= 2\sqrt{6} - 1$$

$$\therefore Mm = 24 - 1 = 23$$



- 28 구 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 의 중심의 좌표는 $(0, 0, 0)$ 이고 반지름
 의 길이는 1이다.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 6y + 8z + 34 = 0$$
을 변형하면

$$(x+5)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 16$$

이므로 이 구의 중심의 좌표는 $(-5, 3, -4)$ 이고 반지름
 의 길이는 4이다.

두 구의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(-5)^2 + 3^2 + (-4)^2} = 5\sqrt{2}$$

두 점 P, Q의 위치가 오

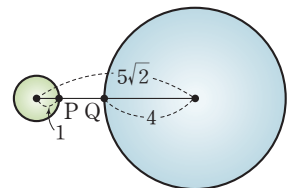
른쪽 그림과 같을 때 두

점 P, Q 사이의 거리가

최소이므로 구하는 최솟

값은

$$5\sqrt{2} - (1+4) = 5\sqrt{2} - 5$$



- 29 $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 4z + 8 = 0$ 을 변형하면

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 1$$

이 구의 중심을 C라 하면 $C(-2, -1, 2)$ 이고 반지름의
 길이는 1이다.

$$\text{원점 O에 대하여 } \overline{OP}^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

이므로 점 P가 오른쪽 그림과 같

을 때, $x^2 + y^2 + z^2$ 의 값이 최대가 $C(-2, -1, 2)$

된다.

이때

$$\overline{OC} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

이므로 $\overline{OP}$ 의 최댓값은

$$3+1=4$$

따라서 $x^2 + y^2 + z^2$ 의 최댓값은 $4^2 = 16$

