수학의 신

수학 I

정답과 해설

빠른 정답

01 지수

step 1 핵심 문제 18~19쪽

01 ① 02 11 03 −10 04 17 05 ⑤ 06 ③
07 ③ 08 37 09 ② 10 $\frac{24}{5}$ 11 ④ 12 ③

step 2 고난도 문제 20~23쪽

01 3 02 ① 03 ③ 04 9 05 −34 06 ②
07 4 08 2 09 ① 10 8 11 ⑤ 12 $\sqrt{6}$
13 ⑤ 14 41 15 24 16 55 17 ④ 18 ⑤
19 $2\sqrt{2}$ 20 ③ 21 225 22 ② 23 5

step 3 최고난도 문제 24~25쪽

01 3 02 ② 03 18 04 ⑤ 05 5 06 ④
07 ④ 08 ②

02 로그

step 1 핵심 문제 26~27쪽

01 56 02 ⑤ 03 ② 04 20 05 ① 06 ③
07 −11 08 ⑤ 09 ① 10 16 11 ⑤ 12 ②

step 2 고난도 문제 28~31쪽

01 0 02 ① 03 3 04 75 05 22 06 36
07 ① 08 54 09 10 10 45 11 ③ 12 $\frac{1}{2}$
13 1 14 ④ 15 −5 16 ② 17 45 18 30
19 7120 20 ② 21 7 22 ① 23 4 24 1.66

step 3 최고난도 문제 32~33쪽

01 ② 02 −1 03 ① 04 78 05 79 06 ③
07 7 08 ③

03 지수함수

step 1 핵심 문제 34~35쪽

01 ① 02 ④ 03 4 04 ② 05 9 06 ⑤
07 ③ 08 ④ 09 5 10 ① 11 $2\sqrt{5}$ 12 ②

step 2 고난도 문제 36~40쪽

01 130 02 49 03 ⑤ 04 50 05 ④ 06 $\sqrt{2}$
07 ④ 08 ① 09 ⑤ 10 $-\frac{1}{2}$ 11 ② 12 2
13 ③ 14 ⑤ 15 2 16 ④ 17 ② 18 12
19 3 20 ③ 21 $\sqrt{2}<a<8$ 22 ③ 23 ①
24 14 25 ⑤

step 3 최고난도 문제 41~43쪽

01 ② 02 60 03 ① 04 ⑤ 05 49 06 196
07 ④ 08 ② 09 $4+\sqrt{3}$ 10 2 11 ⑤

04 로그함수

step 1 핵심 문제 44~45쪽

01 10 02 3 03 ② 04 ④ 05 $-\frac{11}{3}$
06 ⑤ 07 ③ 08 ① 09 2 10 ⑤ 11 6
12 5

step 2 고난도 문제 46~50쪽

01 ④ 02 5 03 4 04 9 05 ⑤ 06 $\frac{11}{4}$
07 ⑤ 08 9 09 3 10 192 11 45 12 $\frac{5}{2}$
13 ② 14 12 15 ② 16 ① 17 −7 18 ④
19 ③ 20 5 21 ⑤ 22 8 23 10 24 ①
25 ③ 26 ③

step 3 최고난도 문제 51~53쪽

01 $\sqrt{2}$ 02 54 03 -1 04 ① 05 ④ 06 1021
07 39 08 ④ 09 ② 10 ③

기출 변형 문제로 단원 마스터 54~57쪽

01 ④ 02 -70 03 ③ 04 198 05 ② 06 28
07 ② 08 242 09 ④ 10 5 11 53 12 15
13 ⑤ 14 ⑤

05 삼각함수

step 1 핵심 문제 60~61쪽

01 ② 02 2 03 ④ 04 ① 05 $\frac{11\sqrt{3}}{7}$ 06 $\frac{1}{3}$
07 ⑤ 08 $\cos\theta-\tan\theta$ 09 ① 10 ③ 11 ②
12 $\frac{1}{3}$

step 2 고난도 문제 62~65쪽

01 제2사분면 또는 제4사분면 02 $\frac{34}{3}\pi$ 03 ⑤ 04 ④
05 $3\sqrt{3}$ 06 $\frac{2}{3}\pi$ 07 ④ 08 6 09 80 10 ③
11 17 12 2 13 ㄱ, ㄴ 14 ② 15 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
16 $\frac{11}{9}$ 17 6π 18 $\frac{\sqrt{7}}{4}$ 19 ① 20 20 21 ④
22 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

step 3 최고난도 문제 66~67쪽

01 13 02 ③ 03 9 04 8 05 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 06 ③
07 ①

06 삼각함수의 그래프

step 1 핵심 문제 68~69쪽

01 ② 02 ⑤ 03 $\frac{2}{3}\pi$ 04 10 05 ③ 06 $\frac{2}{3}$
07 -1 08 $\frac{3}{2}$ 09 ④ 10 ④
11 $-\frac{5}{6}\pi\le x\le-\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5}{6}\pi$ 12 ①

step 2 고난도 문제 70~74쪽

01 $\frac{93}{2}\pi$ 02 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 03 ③ 04 ③ 05 ④ 06 ⑤
07 ④ 08 16 09 ④ 10 $\frac{1}{36}$ 11 $\frac{3}{2}\pi$
12 $0<\alpha\le2$ 13 40 14 ④ 15 $\sqrt{3}$ 16 ③
17 2 18 $-2\sqrt{2}$ 19 ② 20 ③ 21 ⑤
22 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 23 $\frac{14}{3}$ 24 $\frac{\sqrt{2}}{2}\le\overline{PQ}\le\frac{\sqrt{3}}{2}$ 25 9
26 $0<\theta\le\frac{\pi}{3}$

step 3 최고난도 문제 75~77쪽

01 ① 02 ② 03 5 04 ② 05 15 06 ④
07 $\frac{5}{2}\pi$ 08 ① 09 ② 10 $-\frac{1}{8}$ 11 ②

빠른 정답

07 사인법칙과 코사인법칙

step 1 핵심 문제 78~79쪽

01 $\frac{16}{25}$ 02 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 03 ② 04 $2\sqrt{6}$ 05 ③

06 $20\sqrt{2}$ m 07 ⑤ 08 ④ 09 7 10 ②

11 $\frac{40\sqrt{3}}{9}$ 12 $\frac{7\sqrt{15}}{4}$

step 2 고난도 문제 80~84쪽

01 $\frac{40}{13}$ 02 ① 03 $12\sqrt{2}$ 04 ② 05 ④ 06 ⑤

07 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 08 $\sqrt{34}-\sqrt{2}$ 09 84 10 5 11 ①

12 ④ 13 2 14 $\sqrt{15}$ 15 $\frac{6}{5}$ 16 ③

17 $6+4\sqrt{2}$ 18 $\frac{23}{27}$ 19 $6\sqrt{2}$ 20 $4\sqrt{6}+6\sqrt{2}$

21 30 22 24π 23 ③ 24 13 25 $\frac{5}{2}$

step 3 최고난도 문제 85~87쪽

01 $3\sqrt{2}\pi$ 02 6 03 ① 04 23 05 ④ 06 $\frac{13\sqrt{2}}{2}$

07 $\frac{1+\sqrt{3}}{8}$ 08 36 09 15 10 ① 11 -1

12 $\frac{87}{10}$

기출 변형 문제로 단원 마스터 88~91쪽

01 73 02 4 03 ① 04 $\frac{10\sqrt{2}}{3}\pi$ 05 7

06 ② 07 ③ 08 2 09 ⑤ 10 ① 11 $5\sqrt{5}$

12 $18\sqrt{11}$ 13 $\frac{\sqrt{14}}{4}$ 14 $2\sqrt{19}+3\sqrt{3}$ 15 4π 16 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

08 등차수열과 등비수열

step 1 핵심 문제 94~95쪽

01 86 02 ① 03 93 04 ④ 05 ① 06 ①

07 ② 08 9 09 36 10 25400원 11 86

12 ⑤

step 2 고난도 문제 96~100쪽

01 ⑤ 02 26 03 117 04 $\frac{32}{3}$ 05 ④ 06 ④

07 $\frac{1}{144}$ 08 30 09 $\frac{3}{4}$ 10 26 11 ③ 12 65

13 448 14 18 15 ② 16 ① 17 ⑤ 18 117

19 3 20 ③ 21 $\sqrt{3}+1$ 22 ① 23 5

24 ② 25 ③

step 3 최고난도 문제 101~103쪽

01 ④ 02 ㄱ, ㄴ 03 -9 04 273 05 ④ 06 23

07 477 08 84 09 ④ 10 $\frac{3}{8}$ 11 10

09 수열의 합

step 1 핵심 문제 104~105쪽

01 12 02 ② 03 700 04 ② 05 1541 06 ⑤

07 514 08 ③ 09 ⑤ 10 $\sqrt{2}$ 11 ④

step 2 고난도 문제 106~110쪽

01 0 02 -3 03 ④ 04 21 05 ③ 06 ③

07 $\frac{485}{32}$ 08 8 09 ④ 10 ⑤ 11 ③ 12 136

13 $\frac{108}{55}$ 14 696 15 ② 16 ① 17 66 18 ⑤

19 ③ 20 ① 21 15 22 650 23 553 24 725

25 ③ 26 1156 27 ③

step 3 최고난도 문제 111~113쪽

01 ③ 02 $\frac{957}{1024}$ 03 ⑤ 04 117 05 ④ 06 5

07 8 08 164 09 3433 10 ⑤

10 수학적 귀납법

step 1 핵심 문제 114~115쪽

01 57 02 12 03 ② 04 ③ 05 ③ 06 6

07 32 08 8 09 ④ 10 ③ 11 ⑤

step 2 고난도 문제 116~120쪽

01 16 02 747 03 9 04 120 05 25 06 ④

07 8 08 17 09 616 10 1 11 162 12 ⑤

13 13 14 -2 15 ⑤ 16 18 17 132 18 ④

19 ③ 20 64 21 풀이 참조 22 ③

step 3 최고난도 문제 121~123쪽

01 ③ 02 150 03 24 04 ② 05 48 06 ①

07 20 08 41 09 ① 10 ④ 11 $\frac{633}{260}$ 12 ④

기출 변형 문제로 단원 마스터 124~127쪽

01 25 02 156 03 ① 04 45 05 ②

06 $80+24\sqrt{5}$ 07 1330 08 ③ 09 ② 10 440

11 ③ 12 288 13 ⑤ 14 8 15 15

01 지수

step 1 핵심 문제 | 18~19쪽

01 ①	02 11	03 −10	04 17	05 ⑤	06 ③
07 ③	08 37	09 ②	10 $\frac{24}{5}$	11 ④	12 ③

01 답 ①

ㄱ. $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$이므로 3의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{3}$뿐이다.

ㄴ. $\sqrt[4]{(-2)^4}=\sqrt[4]{2^4}=2$이므로 2의 네제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{2}$, $-\sqrt[4]{2}$이다.

ㄷ. 16의 네제곱근은 방정식 $x^4=16$의 근이다.

$x^4=16$에서

$x^4-16=0$, $(x^2+4)(x^2-4)=0$

$(x^2+4)(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2i$ 또는 $x=2i$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 16의 네제곱근은 4개이다.

ㄹ. n이 짝수일 때, -25의 n제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

02 답 11

$n(C)$의 값은 b의 a제곱근 중 실수인 것의 개수이다.

$A=\{5, 6\}$, $B=\{-3, -2, 2, 3, 4\}$이고 $a\in A$, $b\in B$이므로

(i) $a=5$일 때,

b의 값의 부호에 관계없이 b의 5제곱근 중 실수인 것은 1개씩 존재한다.

따라서 b의 5제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{-3}$, $\sqrt[5]{-2}$, $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[5]{4}$의 5개이다.

(ii) $a=6$일 때,

b가 양수이면 b의 6제곱근 중 실수인 것은 2개씩 존재하고, b가 음수이면 b의 6제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않는다.

따라서 b의 6제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[6]{2}$, $-\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[6]{3}$, $-\sqrt[6]{4}$, $\sqrt[6]{4}$의 6개이다.

(i), (ii)에서

$n(C)=5+6=11$

03 답 −10

(i) $x<0$일 때,

$\sqrt{x^2}+\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[4]{x^4}+\cdots+\sqrt[12]{x^{12}}=-x+x+(-x)+\cdots+(-x)$

$=6\times(-x)+5x=-x$

즉, $-x=11$이므로 $x=-11$ ····· 배점 30%

(ii) $x=0$일 때,

$\sqrt{x^2}+\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[4]{x^4}+\cdots+\sqrt[12]{x^{12}}=0$이므로 주어진 식을 만족시키지 않는다. ····· 배점 30%

(iii) $x>0$일 때,

$\sqrt{x^2}+\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[4]{x^4}+\cdots+\sqrt[12]{x^{12}}=x+x+x+\cdots+x=11x$

즉, $11x=11$이므로 $x=1$ ····· 배점 30%

(i), (ii), (iii)에서 모든 실수 x의 값의 합은

$-11+1=-10$ ····· 배점 10%

비법 NOTE

2 이상의 자연수 n에 대하여

(1) $x<0$일 때

- n이 짝수이면 $\sqrt[n]{x^n}=|x|=-x$
- n이 홀수이면 $\sqrt[n]{x^n}=x$

(2) $x>0$일 때, $\sqrt[n]{x^n}=x$

04 답 17

$f(a)=\sqrt[3]{\frac{(2a)^8-a^8}{(2a)^6-a^5}}=\sqrt[3]{\frac{a^8(2^8-1)}{a^5(2^6a-1)}}$

$=\sqrt[3]{a^3}\times\sqrt[3]{\frac{2^8-1}{2^6a-1}}=a\times\sqrt[3]{\frac{2^8-1}{2^6a-1}}$

이므로

$f(4)=4\times\sqrt[3]{\frac{2^8-1}{2^6\times4-1}}=4\times\sqrt[3]{\frac{2^8-1}{2^8-1}}=4$

$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\times\sqrt[3]{\frac{2^8-1}{2^6\times\frac{1}{4}-1}}=\frac{1}{4}\times\sqrt[3]{\frac{2^8-1}{2^4-1}}$

$=\frac{1}{4}\times\sqrt[3]{\frac{(2^4+1)(2^4-1)}{2^4-1}}=\frac{1}{4}\times\sqrt[3]{2^4+1}=\frac{1}{4}\sqrt[3]{17}$

$\therefore f(4)f\left(\frac{1}{4}\right)=4\times\frac{1}{4}\sqrt[3]{17}=\sqrt[3]{17}$

$\therefore b=17$

05 답 ⑤

$\sqrt[4]{3\sqrt{3}}=\sqrt[4]{\sqrt{27}}=\sqrt[8]{27}$

$\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{8}}=\sqrt[4]{8}=\sqrt[8]{8^2}=\sqrt[8]{64}$

$\sqrt{2\sqrt[4]{3}}=\sqrt{\sqrt[4]{48}}=\sqrt[8]{48}$

$\sqrt[8]{27}<\sqrt[8]{48}<\sqrt[8]{64}$이므로 $a=\sqrt[8]{64}$, $b=\sqrt[8]{48}$, $c=\sqrt[8]{27}$

$\therefore \frac{ac}{b}=\frac{\sqrt[8]{64}\times\sqrt[8]{27}}{\sqrt[8]{48}}=\sqrt[8]{\frac{64\times27}{48}}=\sqrt[8]{36}=\sqrt[8]{6^2}=\sqrt[4]{6}$

06 답 ③

$\sqrt[m]{\sqrt{4}}\times\sqrt[n]{\sqrt{2}}\times\sqrt[m]{\sqrt[3]{\sqrt{8}}}=\sqrt[2m]{2^2}\times\sqrt[2n]{2}\times\sqrt[3mn]{2^3}$

$=\sqrt[m]{2}\times\sqrt[2n]{2}\times\sqrt[mn]{2}$

$=2^{\frac{1}{m}}\times2^{\frac{1}{2n}}\times2^{\frac{1}{mn}}=2^{\frac{1}{m}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{mn}}$

$\left(2^{\sqrt{5}}\times\frac{1}{4}\right)^{\frac{\sqrt{5}}{2}+1}=(2^{\sqrt{5}-2})^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+2)}$

$=2^{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=2^{\frac{1}{2}}$

즉, $\frac{1}{m}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{mn}=\frac{1}{2}$이므로 양변에 $2mn$을 곱하면

$2n+m+2=mn$, $mn-m-2n=2$

$(m-2)(n-1)=4$

이때 m, n은 2 이상의 자연수이므로 $m-2$는 0 이상의 정수, $n-1$은 1 이상의 자연수이다.

(i) $m-2=1$, $n-1=4$일 때,

$m=3$, $n=5$이므로 $m^2+n^2=9+25=34$

(ii) $m-2=2$, $n-1=2$일 때,

$m=4$, $n=3$이므로 $m^2+n^2=16+9=25$

(iii) $m-2=4$, $n-1=1$일 때,

$m=6$, $n=2$이므로 $m^2+n^2=36+4=40$

(i), (ii), (iii)에서 m^2+n^2의 최댓값은 40이다.

07 답 ③

(i) $a=4$일 때,

$(\sqrt[n]{4})^3=4^{\frac{3}{n}}=(2^2)^{\frac{3}{n}}=2^{\frac{6}{n}}$이 자연수가 되려면 $\frac{6}{n}$이 자연수이어야 하므로 n은 6의 양의 약수이어야 한다.

따라서 2 이상의 자연수 n의 값은 2, 3, 6이므로 n의 최댓값은 6이다.

$\therefore f(4)=6$

(ii) $a=27$일 때,

$(\sqrt[n]{27})^3=27^{\frac{3}{n}}=(3^3)^{\frac{3}{n}}=3^{\frac{9}{n}}$이 자연수가 되려면 $\frac{9}{n}$가 자연수이어야 하므로 n은 9의 양의 약수이어야 한다.

따라서 2 이상의 자연수 n의 값은 3, 9이므로 n의 최댓값은 9이다.

$\therefore f(27)=9$

(i), (ii)에서

$f(4)+f(27)=6+9=15$

08 답 37

$2^{-a}+2^{-b}+2^{-c}=3$에서

$\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^b}+\frac{1}{2^c}=3$, $\frac{2^b\times2^c+2^a\times2^c+2^a\times2^b}{2^a\times2^b\times2^c}=3$

$\frac{2^{a+b}+2^{b+c}+2^{a+c}}{2^{a+b+c}}=3$

이때 $a+b+c=1$이므로

$\frac{2^{a+b}+2^{b+c}+2^{a+c}}{2}=3$

$\therefore 2^{a+b}+2^{b+c}+2^{a+c}=6$ ····· 배점 30%

$\therefore 4^a+4^b+4^c=(2^2)^a+(2^2)^b+(2^2)^c=(2^a)^2+(2^b)^2+(2^c)^2$

$=(2^a+2^b+2^c)^2-2(2^{a+b}+2^{b+c}+2^{a+c})$

$=\left(\frac{9}{2}\right)^2-2\times6=\frac{33}{4}$ ····· 배점 50%

따라서 $p=4$, $q=33$이므로 $p+q=37$ ····· 배점 20%

09 답 ②

$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=7$에서 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=7$

$(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}})^2=x^{\frac{1}{2}}+2+x^{-\frac{1}{2}}=7+2=9$이므로

$x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=3$ ($\because x>0$)

$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=7$의 양변을 세제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3=343$

$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})=343$

$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3\times7=343$ $\therefore x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=322$

$\therefore x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}+x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=3+322=325$

10 답 $\frac{24}{5}$

$\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}=\frac{3}{2}$의 좌변의 분모, 분자에 2^x을 곱하면

$\frac{2^x(2^x+2^{-x})}{2^x(2^x-2^{-x})}=\frac{3}{2}$, $\frac{2^{2x}+1}{2^{2x}-1}=\frac{3}{2}$

$2(2^{2x}+1)=3(2^{2x}-1)$ $\therefore 2^{2x}=5$

$\therefore 4^x-4^{-x}=2^{2x}-(2^{2x})^{-1}=5-\frac{1}{5}=\frac{24}{5}$

11 답 ④

$15^x=8$에서 $15^x=2^3$ $\therefore 15=2^{\frac{3}{x}}$ ····· ㉠

$a^y=2$에서 $a=2^{\frac{1}{y}}$ ····· ㉡

㉠×㉡을 하면

$15a=2^{\frac{3}{x}}\times2^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{3}{x}+\frac{1}{y}}$

이때 $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=2$이므로

$15a=2^2$ $\therefore a=\frac{4}{15}$

12 답 ③

$I=I_0$, $r=r_1$, $x=x_1$, $B=B_1$을 주어진 관계식에 대입하면

$B_1=\frac{kI_0r_1^2}{2(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$

$I=I_0$, $r=3r_1$, $x=3x_1$, $B=B_2$를 주어진 관계식에 대입하면

$B_2=\frac{kI_0(3r_1)^2}{2\{(3x_1)^2+(3r_1)^2\}^{\frac{3}{2}}}=\frac{9kI_0r_1^2}{2(3^2x_1^2+3^2r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$

$=\frac{9kI_0r_1^2}{2\times(3^2)^{\frac{3}{2}}(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{9kI_0r_1^2}{2\times3^3(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$

$=\frac{kI_0r_1^2}{6(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\therefore \frac{B_2}{B_1}=\frac{\frac{kI_0r_1^2}{6(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{kI_0r_1^2}{2(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}}=\frac{1}{3}$

step 2 고난도 문제 | 20~23쪽

01 3	02 ①	03 ③	04 9	05 −34	06 ②
07 4	08 2	09 ①	10 8	11 ⑤	12 $\sqrt{6}$
13 ⑤	14 41	15 24	16 55	17 ④	18 ⑤
19 $2\sqrt{2}$	20 ③	21 225	22 ②	23 5	

01 답 3

(i) $a>0$, $b>0$ 또는 $a<0$, $b<0$일 때,

a, b의 n제곱근 중 실수인 것의 개수가 같으므로 $f(n)=g(n)$

$\therefore f(n)-g(n)=0$

즉, $f(m_1)+f(m_2)+f(m_3)-g(m_1)-g(m_2)-g(m_3)=4$를 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$, $b>0$일 때,

n이 짝수이면 a의 n제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않고, b의 n제곱근 중 실수인 것은 2개이므로

$f(n)=0$, $g(n)=2$ $\therefore f(n)-g(n)=-2$

n이 홀수이면 a, b의 n제곱근 중 실수인 것은 1개이므로

$f(n)=1$, $g(n)=1$ $\therefore f(n)-g(n)=0$

즉, $f(m_1)+f(m_2)+f(m_3)-g(m_1)-g(m_2)-g(m_3)=4$를 만족시키지 않는다.

(iii) $a>0$, $b<0$일 때,
n이 짝수이면 a의 n제곱근 중 실수인 것은 2개이고, b의 n제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로
$f(n)=2$, $g(n)=0$ $\therefore f(n)-g(n)=2$
n이 홀수이면 a, b의 n제곱근 중 실수인 것은 1개이므로
$f(n)=1$, $g(n)=1$ $\therefore f(n)-g(n)=0$
이때 $f(m_1)+f(m_2)+f(m_3)-g(m_1)-g(m_2)-g(m_3)=4$를 만족시키려면 m_1, m_2, m_3 중 짝수가 2개, 홀수가 1개이어야 한다.
$10<m_1<m_2<m_3<16$에서 10보다 크고 16보다 작은 짝수는 12, 14, 홀수는 11, 13, 15이므로 순서쌍 (m_1, m_2, m_3)은
(11, 12, 14), (12, 13, 14), (12, 14, 15)의 3개이다.
(i), (ii), (iii)에서 순서쌍 (m_1, m_2, m_3)의 개수는 3이다.

02 답 ①

$-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하려면
$-n^2+9n-18<0$이고 n은 홀수이거나 $-n^2+9n-18>0$이고 n은 짝수이어야 한다.
(i) $-n^2+9n-18<0$이고 n은 홀수일 때,
$-n^2+9n-18<0$에서 $n^2-9n+18>0$
$(n-3)(n-6)>0$ $\therefore n<3$ 또는 $n>6$
그런데 $2\le n\le 11$이므로 $2\le n<3$ 또는 $6<n\le 11$
이때 n은 홀수이므로 n의 값은 7, 9, 11이다.
(ii) $-n^2+9n-18>0$이고 n은 짝수일 때,
$-n^2+9n-18>0$에서 $n^2-9n+18<0$
$(n-3)(n-6)<0$ $\therefore 3<n<6$
그런데 $2\le n\le 11$이므로 $3<n<6$
이때 n은 짝수이므로 n의 값은 4이다.
(i), (ii)에서 모든 자연수 n의 값의 합은
$7+9+11+4=31$

03 답 ③

$n(n-4)$의 세제곱근 중 실수인 것은 1개이므로 $f(n)=1$
(i) $n(n-4)<0$일 때,
$n(n-4)<0$에서 $0<n<4$
이때 $n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로
$g(n)=0$
(ii) $n(n-4)=0$일 때,
$n(n-4)=0$에서 $n=0$ 또는 $n=4$
그런데 n은 자연수이므로 $n=4$
이때 $n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것은 1개이므로 $g(n)=1$
(iii) $n(n-4)>0$일 때,
$n(n-4)>0$에서 $n<0$ 또는 $n>4$
그런데 n은 자연수이므로 $n>4$
이때 $n(n-4)$의 네제곱근 중 실수인 것은 2개이므로 $g(n)=2$
(i), (ii), (iii)에서 $g(n)=\begin{cases}0 & (0<n<4)\\ 1 & (n=4)\\ 2 & (n>4)\end{cases}$
이때 $f(n)>g(n)$을 만족시키려면 $g(n)<1$이어야 하므로 $g(n)=0$
$\therefore 0<n<4$
따라서 자연수 n의 값은 1, 2, 3이므로 그 합은
$1+2+3=6$

04 답 9

함수 $y=x^2+6x+9+n$의 그래프와 직선 $y=2\sqrt{n}(x+3)$이 만나는 점의 x좌표를 구하면
$x^2+6x+9+n=2\sqrt{n}(x+3)$
$x^2+(6-2\sqrt{n})x+9-6\sqrt{n}+n=0$
$x^2+2(3-\sqrt{n})x+(3-\sqrt{n})^2=0$
$(x+3-\sqrt{n})^2=0$ $\therefore x=\sqrt{n}-3$
$\therefore f(n)=\sqrt{n}-3$
(i) $f(n)<0$일 때,
$f(n)<0$에서 $\sqrt{n}-3<0$, $\sqrt{n}<3$
이때 n은 1보다 큰 자연수이므로 $1<n<9$
n이 짝수이면 $f(n)$의 n제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않고, n이 홀수이면 $f(n)$의 n제곱근 중 실수인 것은 1개이므로
$g(2)=g(4)=g(6)=g(8)=0$, $g(3)=g(5)=g(7)=1$
(ii) $f(n)=0$일 때,
$f(n)=0$에서 $\sqrt{n}-3=0$, $\sqrt{n}=3$ $\therefore n=9$
$f(n)$의 n제곱근 중 실수인 것은 1개이므로 $g(9)=1$
(iii) $f(n)>0$일 때,
$f(n)>0$에서 $\sqrt{n}-3>0$, $\sqrt{n}>3$ $\therefore n>9$
n이 짝수이면 $f(n)$의 n제곱근 중 실수인 것은 2개이고, n이 홀수이면 $f(n)$의 n제곱근 중 실수인 것은 1개이므로
$g(10)=g(12)=2$, $g(11)=1$
(i), (ii), (iii)에서
$g(2)+g(3)+g(4)+\cdots+g(12)=1\times 5+2\times 2=9$

05 답 −34

$\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=10$에서 $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=t$로 놓으면
$t+t^2-2=10$, $t^2+t-12=0$
$(t+4)(t-3)=0$
$\therefore t=-4$ 또는 $t=3$ ····· 배점 30%
(i) $t=-4$일 때,
$\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=-4$이므로 $\sqrt[3]{x}=s$로 놓으면
$s+\frac{1}{s}=-4$, $s^2+4s+1=0$
이 이차방정식의 두 실근을 α, β라 할 때 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=1$
이때 $\sqrt[3]{x}=s$에서 $x=s^3$이므로 x의 값은 α^3, β^3이다.
$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-4)^3-3\times 1\times(-4)=-52$ ····· 배점 30%
(ii) $t=3$일 때,
$\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=3$이므로 $\sqrt[3]{x}=s$로 놓으면
$s+\frac{1}{s}=3$, $s^2-3s+1=0$
이 이차방정식의 두 실근을 γ, δ라 할 때 근과 계수의 관계에 의하여
$\gamma+\delta=3$, $\gamma\delta=1$
이때 $\sqrt[3]{x}=s$에서 $x=s^3$이므로 x의 값은 γ^3, δ^3이다.
$\therefore \gamma^3+\delta^3=(\gamma+\delta)^3-3\gamma\delta(\gamma+\delta)$
$=3^3-3\times 1\times 3=18$ ····· 배점 30%
(i), (ii)에서 모든 실수 x의 값의 합은
$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3=-52+18=-34$ ····· 배점 10%

개념 NOTE

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

06 답 ②

이차방정식 $x^2-\sqrt[4]{a}x+\sqrt[4]{b^2}=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-\sqrt[4]{a})^2-4\times\sqrt[4]{b^2}=0$

$\sqrt{a}-4\sqrt{b}=0$, $\sqrt{a}=4\sqrt{b}$ $\therefore a=16b$

$x^2-\sqrt[4]{a}x+\sqrt[4]{b^2}=0$에서

$x^2-\sqrt[4]{16b}x+\sqrt[4]{b^2}=0$, $x^2-2\sqrt[4]{b}x+\sqrt[4]{b^2}=0$

$(x-\sqrt[4]{b})^2=0$ $\therefore x=\sqrt[4]{b}$

$\therefore a=\sqrt[4]{b}$

$2a^4-3a^2<2$에서

$2(\sqrt[4]{b})^4-3(\sqrt[4]{b})^2<2$, $2(\sqrt{b})^2-3\sqrt{b}-2<0$

$(2\sqrt{b}+1)(\sqrt{b}-2)<0$ $\therefore -\frac{1}{2}<\sqrt{b}<2$

이때 b는 자연수이므로 $1\le b<4$

따라서 b의 값은 1, 2, 3이고, $a=16b$이므로 순서쌍 (a, b)는 (16, 1), (32, 2), (48, 3)의 3개이다.

idea

07 답 4

$\left[\sqrt[n]{a}+\frac{1}{2}\right]=k$($k$는 정수)로 놓으면

$k\le\sqrt[n]{a}+\frac{1}{2}<k+1$

$k+1\le\sqrt[n]{a}+\frac{3}{2}<k+2$이므로 $\left[\sqrt[n]{a}+\frac{3}{2}\right]=k+1$

$k+2\le\sqrt[n]{a}+\frac{5}{2}<k+3$이므로 $\left[\sqrt[n]{a}+\frac{5}{2}\right]=k+2$

$\left[\sqrt[n]{a}+\frac{1}{2}\right]+\left[\sqrt[n]{a}+\frac{3}{2}\right]+\left[\sqrt[n]{a}+\frac{5}{2}\right]=6$에서

$k+(k+1)+(k+2)=6$, $3k=3$

$\therefore k=1$

즉, $1\le\sqrt[n]{a}+\frac{1}{2}<2$이므로 $\frac{1}{2}\le\sqrt[n]{a}<\frac{3}{2}$

$\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\le\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{\left(\frac{3}{2}\right)^n}$ $\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^n\le a<\left(\frac{3}{2}\right)^n$

이때 자연수 n에 대하여 $0<\left(\frac{1}{2}\right)^n<1$이므로 자연수 a의 개수가 4 이상이려면 $\left(\frac{3}{2}\right)^n>4$이어야 한다.

$\left(\frac{3}{2}\right)^n>4$에서 $3^n>4\times2^n$

$\therefore 3^n>2^{n+2}$

n은 1보다 큰 자연수이므로

$n=2$일 때, $3^2=9$, $2^4=16$이므로 $3^2<2^{2+2}$

$n=3$일 때, $3^3=27$, $2^5=32$이므로 $3^3<2^{3+2}$

$n=4$일 때, $3^4=81$, $2^6=64$이므로 $3^4>2^{4+2}$

따라서 자연수 n의 최솟값은 4이다.

비법 NOTE

$[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수일 때, 정수 n에 대하여

(1) $n\le x<n+1$이면 $[x]=n$

(2) $[x]=n$이면 $n\le x<n+1$

08 답 2

대소를 비교하려면 $\sqrt[6]{n^2}$, $\sqrt[8]{1-n}$, $\sqrt[6]{n+6}$의 값이 모두 실수이어야 하므로

$n^2\ge0$, $1-n\ge0$, $n+6\ge0$

$\therefore -6\le n\le1$

$\sqrt[6]{n^2}<\sqrt[8]{1-n}<\sqrt[6]{n+6}$에서 $\sqrt[6]{n^2}<\sqrt[6]{n+6}$이므로

$n^2<n+6$, $n^2-n-6<0$

$(n+2)(n-3)<0$ $\therefore -2<n<3$

그런데 $-6\le n\le1$이므로 $-2<n\le1$

이때 n은 정수이므로 $n=-1$ 또는 $n=0$ 또는 $n=1$

(i) $n=-1$일 때,

$\sqrt[6]{n^2}=\sqrt[6]{1}=\sqrt[24]{1}$

$\sqrt[8]{1-n}=\sqrt[8]{2}=\sqrt[24]{2^3}=\sqrt[24]{8}$

$\sqrt[6]{n+6}=\sqrt[6]{5}=\sqrt[24]{5^4}=\sqrt[24]{625}$

따라서 $\sqrt[6]{n^2}<\sqrt[8]{1-n}<\sqrt[6]{n+6}$을 만족시킨다.

(ii) $n=0$일 때,

$\sqrt[6]{n^2}=0$

$\sqrt[8]{1-n}=\sqrt[8]{1}=1=\sqrt[6]{1}$

$\sqrt[6]{n+6}=\sqrt[6]{6}$

따라서 $\sqrt[6]{n^2}<\sqrt[8]{1-n}<\sqrt[6]{n+6}$을 만족시킨다.

(iii) $n=1$일 때,

$\sqrt[6]{n^2}=\sqrt[6]{1}$

$\sqrt[8]{1-n}=0$

$\sqrt[6]{n+6}=\sqrt[6]{7}$

따라서 $\sqrt[6]{n^2}<\sqrt[8]{1-n}<\sqrt[6]{n+6}$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 정수 n은 -1, 0의 2개이다.

09 답 ①

㈎에서 $(\sqrt[3]{a})^m=b$이므로 $b=a^{\frac{m}{3}}$ …… ㉠

㈏에서 $(\sqrt{b})^n=c$이므로 $c=b^{\frac{n}{2}}$ …… ㉡

㈐에서 $c^4=a^{12}$ …… ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$(b^{\frac{n}{2}})^4=a^{12}$, $b^{2n}=a^{12}$

㉠을 대입하면

$(a^{\frac{m}{3}})^{2n}=a^{12}$

$a^{\frac{2mn}{3}}=a^{12}$

즉, $\frac{2mn}{3}=12$이므로 $mn=18$

이때 m, n은 1이 아닌 자연수이므로 순서쌍 (m, n)은 (2, 9), (3, 6), (6, 3), (9, 2)의 4개이다.

10 답 8

$x=\sqrt{5}+\sqrt{2}$, $y=\sqrt{5}-\sqrt{2}$에서

$x+y=2\sqrt{5}$, $xy=3$

$a^{\frac{3}{x}}a^{\frac{3}{y}}=3a^{\frac{2}{3}x}a^{\frac{2}{3}y}+16a^{\frac{3-xy}{5xy}}$에서

$a^{\frac{3}{x}+\frac{3}{y}}=3a^{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y}+16a^{\frac{3-xy}{5xy}}$

$a^{\frac{3(x+y)}{xy}}=3a^{\frac{2}{3}(x+y)}+16a^{\frac{3-xy}{5xy}}$

$a^{\frac{3\times2\sqrt{5}}{3}}=3a^{\frac{2}{3}\times2\sqrt{5}}+16a^{\frac{3-3}{5\times3}}$

$a^{2\sqrt{5}}=3a^{\frac{4\sqrt{5}}{3}}+16$

이때 $a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}}=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^3=3t^2+16$, $t^3-3t^2-16=0$

$(t-4)(t^2+t+4)=0$

$\therefore\ t=4$ ($\because$ t는 실수)

따라서 $a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}}=4$이므로

$a^{\sqrt{5}}=4^{\frac{3}{2}}=(2^2)^{\frac{3}{2}}=2^3=8$

11 답 ⑤

점 $P_1(a,\ f(a))$에서 $Q_1(a,\ 0)$

정사각형 OQ_1AB의 한 변의 길이가 a이므로 $B(0,\ a)$

$Q_2(b,\ 0)$이므로 $P_2(b,\ a)$

이때 점 P_2는 곡선 $y=x^3$ 위의 점이므로

$a=b^3$ $\quad\therefore\ b=a^{\frac{1}{3}}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

정사각형 OQ_2CD의 한 변의 길이가 b이므로 $D(0,\ b)$

$Q_3(c,\ 0)$이므로 $P_3(c,\ b)$

이때 점 P_3은 곡선 $y=x^2$ 위의 점이므로

$b=c^2$ $\quad\therefore\ c=b^{\frac{1}{2}}$ ($\because$ $c>0$)

㉠을 대입하면

$c=(a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{6}}$

$\therefore\ bc=a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{2}}$

$bc=2$가 되려면

$a^{\frac{1}{2}}=2$

$\therefore\ a=2^2=4$

따라서 점 $P_1(4,\ f(4))$의 y좌표는

$f(4)=4^2=16$

12 답 $\sqrt{6}$

발효를 시작한 지 $4a$시간 후의 이스트의 양은

$100(1+r^{-\frac{4a}{50}})=100(1+r^{-\frac{2a}{25}})$

발효를 시작한 지 $2a$시간 후의 이스트의 양은

$100(1+r^{-\frac{2a}{50}})=100(1+r^{-\frac{a}{25}})$

$4a$시간 후의 이스트의 양이 $2a$시간 후의 이스트의 양의 $\frac{5}{6}$배이므로

$100(1+r^{-\frac{2a}{25}})=\frac{5}{6}\times 100(1+r^{-\frac{a}{25}})$

$6(1+r^{-\frac{2a}{25}})=5(1+r^{-\frac{a}{25}})$

이때 $r^{-\frac{a}{25}}=s\,(s>0)$로 놓으면

$6(1+s^2)=5(1+s)$

$6s^2-5s+1=0$

$(3s-1)(2s-1)=0$

$\therefore\ s=\frac{1}{3}$ 또는 $s=\frac{1}{2}$

즉, $r^{-\frac{a}{25}}=\frac{1}{3}$ 또는 $r^{-\frac{a}{25}}=\frac{1}{2}$이므로

$r^a=\left(\frac{1}{3}\right)^{-25}$ 또는 $r^a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-25}$

$\therefore\ r^a=3^{25}$ 또는 $r^a=2^{25}$

따라서 모든 r^a의 값의 곱은

$3^{25}\times 2^{25}=(3\times 2)^{25}=6^{25}=(\sqrt{6})^{50}$

$\therefore\ k=\sqrt{6}$

13 답 ⑤

(i) p, q가 모두 홀수일 때,

$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{9\times 2^{p+1}}\times\sqrt[4]{9\times 2^{q+1}}$

$=\sqrt[4]{3^4\times 2^{p+1}\times 2^{q+1}}=3\times\sqrt[4]{2^{p+q+2}}$

$=3\times 2^{\frac{p+q+2}{4}}$

$f(p)\times f(q)$가 자연수가 되려면 $2^{\frac{p+q+2}{4}}$이 자연수이어야 하므로

$p+q+2$가 4의 배수이어야 한다.

p, q는 10 이하의 홀수이므로

$p+q+2=4$, 즉 $p+q=2$일 때, 순서쌍 $(p,\ q)$는 $(1,\ 1)$의 1개이다.

$p+q+2=8$, 즉 $p+q=6$일 때, 순서쌍 $(p,\ q)$는 $(1,\ 5)$, $(3,\ 3)$, $(5,\ 1)$의 3개이다.

$p+q+2=12$, 즉 $p+q=10$일 때, 순서쌍 $(p,\ q)$는 $(1,\ 9)$, $(3,\ 7)$, $(5,\ 5)$, $(7,\ 3)$, $(9,\ 1)$의 5개이다.

$p+q+2=16$, 즉 $p+q=14$일 때, 순서쌍 $(p,\ q)$는 $(5,\ 9)$, $(7,\ 7)$, $(9,\ 5)$의 3개이다.

$p+q+2=20$, 즉 $p+q=18$일 때, 순서쌍 $(p,\ q)$는 $(9,\ 9)$의 1개이다.

따라서 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는

$1+3+5+3+1=13$

(ii) p는 홀수, q는 짝수일 때,

$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{9\times 2^{p+1}}\times\sqrt[4]{4\times 3^q}$

$=\sqrt[4]{3^2\times 2^{p+1}\times 2^2\times 3^q}=\sqrt[4]{2^{p+3}\times 3^{q+2}}$

$=2^{\frac{p+3}{4}}\times 3^{\frac{q+2}{4}}$

$f(p)\times f(q)$가 자연수가 되려면 $2^{\frac{p+3}{4}}$, $3^{\frac{q+2}{4}}$이 모두 자연수이어야 하므로 $p+3$, $q+2$가 모두 4의 배수이어야 한다.

따라서 p의 값은 1, 5, 9이고, q의 값은 2, 6, 10이므로 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는

$3\times 3=9$

(iii) p는 짝수, q는 홀수일 때,

(ii)와 같은 방법으로 하면 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는

$3\times 3=9$

(iv) p, q가 모두 짝수일 때,

$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{4\times 3^p}\times\sqrt[4]{4\times 3^q}$

$=\sqrt[4]{2^4\times 3^p\times 3^q}=2\times\sqrt[4]{3^{p+q}}$

$=2\times 3^{\frac{p+q}{4}}$

$f(p)\times f(q)$가 자연수가 되려면 $3^{\frac{p+q}{4}}$이 자연수이어야 하므로 $p+q$가 4의 배수이어야 한다.

p, q는 10 이하의 짝수이므로

$p+q=4$일 때, 순서쌍 $(p,\ q)$는 $(2,\ 2)$의 1개이다.

$p+q=8$일 때, 순서쌍 $(p,\ q)$는 $(2,\ 6)$, $(4,\ 4)$, $(6,\ 2)$의 3개이다.

$p+q=12$일 때, 순서쌍 $(p,\ q)$는 $(2,\ 10)$, $(4,\ 8)$, $(6,\ 6)$, $(8,\ 4)$, $(10,\ 2)$의 5개이다.

$p+q=16$일 때, 순서쌍 $(p,\ q)$는 $(6,\ 10)$, $(8,\ 8)$, $(10,\ 6)$의 3개이다.

$p+q=20$일 때, 순서쌍 $(p,\ q)$는 $(10,\ 10)$의 1개이다.

따라서 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는

$1+3+5+3+1=13$

(i)~(iv)에서 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는

$13+9+9+13=44$

14 답 41

$n=2^x\times3^y\times5^z$일 때,

$$\sqrt{\frac{n}{3}}=\sqrt{\frac{2^x\times3^y\times5^z}{3}}$$
$$=(2^x\times3^{y-1}\times5^z)^{\frac{1}{2}}$$
$$=2^{\frac{x}{2}}\times3^{\frac{y-1}{2}}\times5^{\frac{z}{2}}$$

$\sqrt{\frac{n}{3}}$이 자연수가 되려면 x, z는 모두 짝수이고,

$y=2k+1$(k는 음이 아닌 정수) 꼴이어야 한다.

$$\sqrt[3]{\frac{n}{4}}=\sqrt[3]{\frac{2^x\times3^y\times5^z}{4}}$$
$$=(2^{x-2}\times3^y\times5^z)^{\frac{1}{3}}$$
$$=2^{\frac{x-2}{3}}\times3^{\frac{y}{3}}\times5^{\frac{z}{3}}$$

$\sqrt[3]{\frac{n}{4}}$이 자연수가 되려면 y, z는 모두 3의 배수이고,

$x=3l+2$(l은 음이 아닌 정수) 꼴이어야 한다.

$$\sqrt[5]{\frac{n}{5}}=\sqrt[5]{\frac{2^x\times3^y\times5^z}{5}}$$
$$=(2^x\times3^y\times5^{z-1})^{\frac{1}{5}}$$
$$=2^{\frac{x}{5}}\times3^{\frac{y}{5}}\times5^{\frac{z-1}{5}}$$

$\sqrt[5]{\frac{n}{5}}$이 자연수가 되려면 x, y는 모두 5의 배수이고,

$z=5m+1$(m은 음이 아닌 정수) 꼴이어야 한다.

x는 짝수이면서 5의 배수이므로 10의 배수이고,

$x=3l+2$(l은 음이 아닌 정수) 꼴이므로 이를 만족시키는 x의 최솟값은 20이다. $\therefore p=20$

y는 3의 배수이면서 5의 배수이므로 15의 배수이고,

$y=2k+1$(k는 음이 아닌 정수) 꼴이므로 이를 만족시키는 y의 최솟값은 15이다. $\therefore q=15$

z는 짝수이면서 3의 배수이므로 6의 배수이고,

$z=5m+1$(m은 음이 아닌 정수) 꼴이므로 이를 만족시키는 z의 최솟값은 6이다. $\therefore r=6$

$\therefore p+q+r=20+15+6=41$

15 답 24

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 (나)에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 음수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 (가)에서 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$이 중근인 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 방정식 $x^n-64=0$, $f(x)=0$은 각각 서로 다른 두 실근을 갖고, 이 두 실근이 서로 같아야 한다.

(i) n이 홀수일 때,

방정식 $x^n-64=0$, 즉 $x^n=64$의 실근은 $\sqrt[n]{64}$의 1개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) n이 짝수일 때,

방정식 $x^n-64=0$, 즉 $x^n=64$의 실근은 $-\sqrt[n]{64}$, $\sqrt[n]{64}$이다.

이는 방정식 $f(x)=0$의 두 실근과 같으므로

$f(x)=(x+\sqrt[n]{64})(x-\sqrt[n]{64})$
$=x^2-(\sqrt[n]{64})^2=x^2-2^{\frac{12}{n}}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값이 $-2^{\frac{12}{n}}$이다.

(나)에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 음의 정수이므로 $\frac{12}{n}$가 자연수이어야 한다.

즉, n은 12의 양의 약수이고 짝수이므로 n의 값은 2, 4, 6, 12이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n의 값의 합은

$2+4+6+12=24$

16 답 55

$$\frac{10}{10^{-10}+1}+\frac{9}{10^{-9}+1}+\cdots+\frac{1}{10^{-1}+1}+\frac{1}{10^0+1}$$
$$+\frac{1}{10^1+1}+\frac{2}{10^2+1}+\cdots+\frac{10}{10^{10}+1}$$
$$=10\left(\frac{1}{10^{-10}+1}+\frac{1}{10^{10}+1}\right)+9\left(\frac{1}{10^{-9}+1}+\frac{1}{10^9+1}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{10^{-1}+1}+\frac{1}{10^1+1}\right)+\frac{1}{10^0+1}$$
$$=10\times\frac{10^{10}+1+10^{-10}+1}{(10^{-10}+1)(10^{10}+1)}+9\times\frac{10^9+1+10^{-9}+1}{(10^{-9}+1)(10^9+1)}$$
$$+\cdots+\frac{10^1+1+10^{-1}+1}{(10^{-1}+1)(10^1+1)}+\frac{1}{1+1}$$
$$=10\times\frac{10^{10}+1+10^{-10}+1}{1+10^{-10}+10^{10}+1}+9\times\frac{10^9+1+10^{-9}+1}{1+10^{-9}+10^9+1}$$
$$+\cdots+\frac{10^1+1+10^{-1}+1}{1+10^{-1}+10^1+1}+\frac{1}{2}$$
$$=10+9+8+\cdots+1+\frac{1}{2}$$
$$=55+\frac{1}{2}$$

즉, $n<55+\frac{1}{2}$이므로 정수 n의 최댓값은 55이다.

17 답 ④

$$\frac{a^2-2a\sqrt{2a}+2\sqrt{2a}+1}{2a}=\frac{a}{2}-\sqrt{2a}+\frac{\sqrt{2a}}{a}+\frac{1}{2a}$$
$$=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(a+a^{-1})-\sqrt{2}(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}) \quad \cdots\cdots ㉠$$

$a^{\frac{1}{4}}=3-2\sqrt{2}$에서

$$a^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3-2\sqrt{2}}=\frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=3+2\sqrt{2}$$

이때 $a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}=6$, $a^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{4}}=-4\sqrt{2}$이므로

$$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=(a^{\frac{1}{4}})^2-(a^{-\frac{1}{4}})^2=(a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{4}})$$
$$=6\times(-4\sqrt{2})=-24\sqrt{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=-24\sqrt{2}$의 양변을 제곱하면

$(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2=(-24\sqrt{2})^2$

$a+a^{-1}-2=24^2\times2$ $\therefore a+a^{-1}=24^2\times2+2$ $\cdots\cdots ㉢$

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$$\frac{a^2-2a\sqrt{2a}+2\sqrt{2a}+1}{2a}=\frac{1}{2}(a+a^{-1})-\sqrt{2}(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})$$
$$=\frac{1}{2}(24^2\times2+2)-\sqrt{2}\times(-24\sqrt{2})$$
$$=24^2+1+24\times2$$
$$=(24+1)^2=25^2$$

$\therefore n=25$

18 답 ⑤

$\dfrac{\{f(m)\}^2}{f(2m)}=\dfrac{(a^m-a^{-m})^2}{a^{2m}-a^{-2m}}$

$=\dfrac{(a^m-a^{-m})^2}{(a^m+a^{-m})(a^m-a^{-m})}$

$=\dfrac{a^m-a^{-m}}{a^m+a^{-m}}$

같은 방법으로 하면

$\dfrac{\{f(n)\}^2}{f(2n)}=\dfrac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}$

이때 $\dfrac{\{f(m)\}^2}{f(2m)}=\dfrac{2\{f(n)\}^2}{f(2n)}$에서

$\dfrac{a^m-a^{-m}}{a^m+a^{-m}}=\dfrac{2(a^n-a^{-n})}{a^n+a^{-n}}$

$(a^m-a^{-m})(a^n+a^{-n})=2(a^m+a^{-m})(a^n-a^{-n})$

$a^{m+n}+a^{m-n}-a^{-m+n}-a^{-m-n}=2a^{m+n}-2a^{m-n}+2a^{-m+n}-2a^{-m-n}$

$a^{m+n}-3a^{m-n}+3a^{-m+n}-a^{-m-n}=0$

$a^{m+n}-a^{-(m+n)}=3\{a^{m-n}-a^{-(m-n)}\}$

$f(m+n)=3f(m-n)$

$\therefore \dfrac{f(m+n)}{f(m-n)}=3$

19 답 $2\sqrt{2}$

㈎의 $x^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}$에서 양변을 제곱하면

$(x^{\frac{1}{2}})^2=(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2$

$x=a+a^{-1}-2$

$\therefore x+2=a+a^{-1}$ …… ㉠

양변을 제곱하면

$(x+2)^2=(a+a^{-1})^2$

$x^2+4x+4=a^2+a^{-2}+2$

$\therefore x^2+4x=a^2+a^{-2}-2=(a-a^{-1})^2$ …… ㉡

$a>1$이므로 $0<\dfrac{1}{a}<1$ $\therefore a-a^{-1}>0$

㈏의 $\dfrac{x+2-\sqrt{x^2+4x}}{x+2+\sqrt{x^2+4x}}=\dfrac{1}{8}$에서 좌변에 ㉠, ㉡을 대입하면

$\dfrac{x+2-\sqrt{x^2+4x}}{x+2+\sqrt{x^2+4x}}=\dfrac{a+a^{-1}-\sqrt{(a-a^{-1})^2}}{a+a^{-1}+\sqrt{(a-a^{-1})^2}}$

$=\dfrac{a+a^{-1}-(a-a^{-1})}{a+a^{-1}+(a-a^{-1})}$ ($\because a-a^{-1}>0$)

$=\dfrac{2a^{-1}}{2a}=\dfrac{1}{a^2}$

즉, $\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{8}$이므로 $a^2=8$

$\therefore a=2\sqrt{2}$ ($\because a>1$)

20 답 ③

$(a^{\frac{3}{4}}-a^{-\frac{3}{4}})^2=a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}-2$이므로

$(a^{\frac{3}{4}}-a^{-\frac{3}{4}})^4=(a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}-2)^2$

$=(a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}})^2-4(a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}})+4$

$=a^3+a^{-3}+2-4(a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}})+4$

$=a^3+a^{-3}-4(a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}})+6$

$3(a^{\frac{3}{4}}-a^{-\frac{3}{4}})^4+12(a^{\frac{3}{4}}-a^{-\frac{3}{4}})^2=4$에서

$3\{a^3+a^{-3}-4(a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}})+6\}+12(a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}-2)=4$

$3(a^3+a^{-3})-10=0$, $3a^6-10a^3+3=0$

$(3a^3-1)(a^3-3)=0$

$\therefore a^3=\dfrac{1}{3}$ 또는 $a^3=3$

a는 실수이므로

$a=\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}$ 또는 $a=\sqrt[3]{3}$

따라서 양수 a의 최댓값은 $\sqrt[3]{3}$이다.

21 답 225

$3^a=4$에서 $3^a=2^2$ $\therefore 3=2^{\frac{2}{a}}$

$2^b=5$이므로

$100=2^2\times5^2=2^2\times(2^b)^2=2^{2b+2}$

$\therefore 100^{\frac{2}{a(b+1)}}=(2^{2b+2})^{\frac{2}{a(b+1)}}=2^{\frac{4}{a}}$

$=(2^{\frac{2}{a}})^2=3^2=9$ …… 배점 40%

$3^a=4$, $2^b=5$이므로

$3^{ab}=(3^a)^b=4^b=(2^b)^2=5^2=25$ …… 배점 40%

$\therefore 100^{\frac{2}{a(b+1)}}\times3^{ab}=9\times25=225$ …… 배점 20%

22 답 ②

$(ab)^{\frac{3}{2}}=(a^2b)^{\frac{6}{5}}=(ab^2)^x=k$ ($k>1$)로 놓으면

$(ab)^{\frac{3}{2}}=k$에서 $ab=k^{\frac{2}{3}}$ …… ㉠

$(a^2b)^{\frac{6}{5}}=k$에서 $a^2b=k^{\frac{5}{6}}$ …… ㉡

$(ab^2)^x=k$에서 $ab^2=k^{\frac{1}{x}}$ …… ㉢

㉡×㉢을 하면 $a^3b^3=k^{\frac{5}{6}}\times k^{\frac{1}{x}}$

$(ab)^3=k^{\frac{5}{6}+\frac{1}{x}}$

㉠을 대입하면 $(k^{\frac{2}{3}})^3=k^{\frac{5}{6}+\frac{1}{x}}$

$k^2=k^{\frac{5}{6}+\frac{1}{x}}$

즉, $2=\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{x}$이므로

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{6}$ $\therefore x=\dfrac{6}{7}$

다른 풀이

$(ab)^{\frac{3}{2}}=(a^2b)^{\frac{6}{5}}=(ab^2)^x=k$ ($k>1$)로 놓으면

$(ab)^{\frac{3}{2}}=k$에서 $ab=k^{\frac{2}{3}}$ …… ㉠

$(a^2b)^{\frac{6}{5}}=k$에서 $a^2b=k^{\frac{5}{6}}$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면 $a^2b\div ab=k^{\frac{5}{6}}\div k^{\frac{2}{3}}$

$\therefore a=k^{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}=k^{\frac{1}{6}}$ …… ㉢

㉠÷㉢을 하면 $ab\div a=k^{\frac{2}{3}}\div k^{\frac{1}{6}}$

$\therefore b=k^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}=k^{\frac{1}{2}}$ …… ㉣

㉢, ㉣을 $(ab^2)^x=k$에 대입하면

$\{k^{\frac{1}{6}}(k^{\frac{1}{2}})^2\}^x=k$, $(k^{\frac{1}{6}+1})^x=k$, $k^{\frac{7}{6}x}=k$

즉, $\dfrac{7}{6}x=1$이므로 $x=\dfrac{6}{7}$

23 답 5

$2^x=m^y=n^z=k\,(k>1)$로 놓으면

$2^x=k$에서 $2=k^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$m^y=k$에서 $m=k^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

$n^z=k$에서 $n=k^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢

$xz-yz=\frac{xy}{2}$의 양변을 xyz로 나누면

$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2z}$ $\therefore \frac{1}{y}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2z}=0$

㉢에서 $n^{\frac{1}{2}}=k^{\frac{1}{2z}}$ $\therefore \sqrt{n}=k^{\frac{1}{2z}}$ …… ㉣

㉡÷㉠÷㉣을 하면 $m\div2\div\sqrt{n}=k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{1}{x}}\div k^{\frac{1}{2z}}$

$\frac{m}{2\sqrt{n}}=k^{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2z}}$, $\frac{m}{2\sqrt{n}}=k^0=1$

$\therefore m=2\sqrt{n}$

이때 m, n은 두 자리의 자연수이므로 n은 제곱수이어야 한다.

$n=4^2=16$일 때, $m=8$ ⟶ m이 두 자리의 자연수가 아니다.

$n=5^2=25$일 때, $m=10$

$n=6^2=36$일 때, $m=12$

$n=7^2=49$일 때, $m=14$

$n=8^2=64$일 때, $m=16$

$n=9^2=81$일 때, $m=18$

따라서 순서쌍 (m, n)은 $(10, 25)$, $(12, 36)$, $(14, 49)$, $(16, 64)$, $(18, 81)$의 5개이다.

step 3 최고난도 문제 | 24~25쪽

01 3	02 ②	03 18	04 ⑤	05 5	06 ④
07 ④	08 ②				

01 답 3

1단계 $(n^2-11n+24)^3>0$**일 때,** $f(n)$**의 값 구하기**

$g(n)=n^2-11n+24=(n-3)(n-8)$이라 하자.

(i) $g(n)>0$일 때,

$(n-3)(n-8)>0$에서 $n<3$ 또는 $n>8$

그런데 $n>1$이므로

$1<n<3$ 또는 $n>8$

$g(n)>0$이면 $\{g(n)\}^3>0$

n이 짝수이면 $\{g(n)\}^3$의 n제곱근 중 실수인 것은 2개이므로

└→ $1<n<3$ 또는 $n>8$이므로 n의 값은 2, 10, 12, 14, …

$f(2)=f(10)=f(12)=f(14)=\cdots=2$

n이 홀수이면 $\{g(n)\}^3$의 n제곱근 중 실수인 것은 1개이므로

└→ $1<n<3$ 또는 $n>8$이므로 n의 값은 9, 11, 13, …

$f(9)=f(11)=f(13)=\cdots=1$

2단계 $(n^2-11n+24)^3=0$**일 때,** $f(n)$**의 값 구하기**

(ii) $g(n)=0$일 때,

$(n-3)(n-8)=0$에서 $n=3$ 또는 $n=8$

$\{g(n)\}^3$의 n제곱근 중 실수인 것은 1개이므로

$f(3)=f(8)=1$

3단계 $(n^2-11n+24)^3<0$**일 때,** $f(n)$**의 값 구하기**

(iii) $g(n)<0$일 때,

$(n-3)(n-8)<0$에서 $3<n<8$

$g(n)<0$이면 $\{g(n)\}^3<0$

n이 짝수이면 $\{g(n)\}^3$의 n제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로

└→ $3<n<8$이므로 n의 값은 4, 6

$f(4)=f(6)=0$

n이 홀수이면 $\{g(n)\}^3$의 n제곱근 중 실수인 것은 1개이므로

└→ $3<n<8$이므로 n의 값은 5, 7

$f(5)=f(7)=1$

4단계 $f(n)$ **구하기**

(i), (ii), (iii)에서

$$f(n)=\begin{cases}0\ (n=4 \text{ 또는 } n=6)\\ 1\ (n=8 \text{ 또는 } n\text{은 } 3 \text{ 이상의 홀수})\\ 2\ (n=2 \text{ 또는 } n\text{은 } 10 \text{ 이상의 짝수})\end{cases}$$

5단계 k**의 값 구하기**

이때 $f(k)+f(k+1)+f(k+2)+\cdots+f(k+6)$의 항이 7개이므로 그 값이 최소가 되려면

$k=3$

02 답 ②

1단계 **집합** A**에서** x**의 값의 범위 구하기**

집합 A에서 $2\sqrt[3]{2}\times(-3\sqrt[3]{4})=-6\sqrt[3]{8}=-6\times2=-12$이므로

$x^2+(2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{4})x-12<0$에서

$(x+2\sqrt[3]{2})(x-3\sqrt[3]{4})<0$

$\therefore -2\sqrt[3]{2}<x<3\sqrt[3]{4}$

2단계 **집합** B**에서** x**의 값의 범위 구하기**

집합 B에서 $3\sqrt[n]{2^6}\times(-3\sqrt[n]{2^{2n-6}})=-9\sqrt[n]{2^{2n}}=-9\times2^2=-36$이므로

$x^2+(3\sqrt[n]{2^6}-3\sqrt[n]{2^{2n-6}})x-36>0$에서

$(x+3\sqrt[n]{2^6})(x-3\sqrt[n]{2^{2n-6}})>0$

$\therefore x<-3\sqrt[n]{2^6}$ 또는 $x>3\sqrt[n]{2^{2n-6}}$

3단계 **자연수** n**의 개수 구하기**

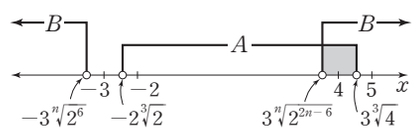
$\sqrt[3]{8}<2\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{16}<\sqrt[3]{27}$이므로 $2<2\sqrt[3]{2}<3$

$\therefore -3<-2\sqrt[3]{2}<-2$

또 $n>1$이므로 $3\sqrt[n]{2^6}>3$

$\therefore -3\sqrt[n]{2^6}<-3$

$\sqrt[3]{64}<3\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{108}<\sqrt[3]{125}$이므로 $4<3\sqrt[3]{4}<5$



집합 $A\cap B$에 정수가 포함되려면 4를 반드시 포함해야 하므로

$3\sqrt[n]{2^{2n-6}}<4$

$\sqrt[n]{2^{2n-6}}<\sqrt[n]{\left(\frac{4}{3}\right)^n}$

즉, $2^{2n-6}<\left(\frac{4}{3}\right)^n$이므로

$3^n<\frac{4^n}{2^{2n-6}}$, $3^n<\frac{2^{2n}}{2^{2n-6}}$

$3^n<2^6$ $\therefore 3^n<64$

이때 $n>1$이고 $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$이므로 조건을 만족시키는 자연수 n은 2, 3의 2개이다.

idea

03 답 18

1단계 점 P의 좌표 구하기

두 직선 $y=2^n x$, $y=-x+1$이 만나는 점 P의 x좌표를 구하면

$2^n x=-x+1$, $(2^n+1)x=1$

$\therefore x=\frac{1}{2^n+1}$

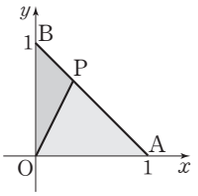
$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{1}{2^n+1}, \frac{2^n}{2^n+1}\right)$

2단계 $S(n)+T(n)$ 구하기

삼각형 OAP의 넓이 $S(n)$은

$S(n)=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{2^n}{2^n+1}$

$=\frac{2^n}{2(2^n+1)}$ …… ㉠



삼각형 OBP의 넓이 $T(n)$은

$T(n)=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2^n+1}$

$=\frac{1}{2(2^n+1)}$ …… ㉡

$\therefore S(n)+T(n)=\frac{2^n}{2(2^n+1)}+\frac{1}{2(2^n+1)}$

$=\frac{2^n+1}{2(2^n+1)}=\frac{1}{2}$ ⟶ 삼각형 OAB의 넓이와 같다.

3단계 $S(-n)$, $T(-n)$ 구하기

㉠, ㉡에서

$S(-n)=\frac{2^{-n}}{2(2^{-n}+1)}=\frac{1}{2(1+2^n)}=T(n)$

$T(-n)=\frac{1}{2(2^{-n}+1)}=\frac{2^n}{2(1+2^n)}=S(n)$

4단계 식의 값 구하기

$\therefore 5S(-9)-T(-9)+5S(-8)-T(-8)$

$+\cdots+5S(-1)-T(-1)+5S(1)-T(1)$

$+5S(2)-T(2)+\cdots+5S(9)-T(9)$

$=5T(9)-S(9)+5T(8)-S(8)+\cdots+5T(1)-S(1)$

$+5S(1)-T(1)+5S(2)-T(2)+\cdots+5S(9)-T(9)$

$=4\{S(1)+T(1)\}+4\{S(2)+T(2)\}+\cdots+4\{S(9)+T(9)\}$

$=4\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{2}+\cdots+4\times\frac{1}{2}$

$=2\times 9$

$=18$

04 답 ⑤

1단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. 집합 A_4는 $2^a=\frac{4}{b}$, 즉 $2^a\times b=4$를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 원소로 갖는다.

이때 $2^1\times 2=4$, $2^2\times 1=4$이므로

$A_4=\{(1, 2), (2, 1)\}$

2단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. $m=2^k$이면 $2^a=\frac{m}{b}$에서

$2^a=\frac{2^k}{b}$

$\therefore b=\frac{2^k}{2^a}=2^{k-a}$

따라서 $A_m=\{(1, 2^{k-1}), (2, 2^{k-2}), (3, 2^{k-3}), \cdots, (k, 1)\}$이므로

$n(A_m)=k$

3단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. 집합 A_m은 $2^a=\frac{m}{b}$, 즉 $2^a\times b=m$을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 원소로 가지므로 $n(A_m)=1$을 만족시키는 원소를 (a', b')이라 하면

$2^{a'}\times b'=m$

이때 $a'>1$이면

$m=2\times 2\times\cdots\times b'$

즉, 순서쌍 $(1, 2^{a'-1}b')$, $(2, 2^{a'-2}b')$, …이 원소이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore a'=1$

이때 b'이 짝수, 즉 $b'=2k$(k는 자연수) 꼴이면

$m=2^1\times 2k=2^2k$

즉, 순서쌍 $(1, 2k)$가 원소이면 순서쌍 $(2, k)$도 원소이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 b'은 홀수이어야 한다.

$m=2^1\times$(홀수) 꼴이므로 두 자리의 자연수 m은 2×5, 2×7, 2×9, …, 2×49의 23개이다.

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

05 답 5

1단계 n의 값의 경우를 나누어 순서쌍의 개수를 a에 대한 식으로 나타내기

(i) $n=1$일 때,

$\sqrt[4]{1^m}=1$은 모든 자연수 m에 대하여 자연수가 된다.

따라서 순서쌍 (m, n)은 $(4a, 1)$, $(4a+1, 1)$, $(4a+2, 1)$, …, $(8a, 1)$이므로 그 개수는

$8a-4a+1=4a+1$

(ii) $n=2^4=16$일 때,

$\sqrt[4]{2^{4m}}=2^m$은 모든 자연수 m에 대하여 자연수가 된다.

따라서 순서쌍 (m, n)은 $(4a, 16)$, $(4a+1, 16)$, $(4a+2, 16)$, …, $(8a, 16)$이므로 그 개수는

$8a-4a+1=4a+1$

(iii) $n=2^2=4$ 또는 $n=3^2=9$일 때,

$\sqrt[4]{2^{2m}}=2^{\frac{m}{2}}$, $\sqrt[4]{3^{2m}}=3^{\frac{m}{2}}$이 각각 자연수가 되려면 m은 짝수이어야 한다.

따라서 순서쌍 (m, n)은 $(4a, 4)$, $(4a+2, 4)$, $(4a+4, 4)$, …, $(8a, 4)$, $(4a, 9)$, $(4a+2, 9)$, $(4a+4, 9)$, …, $(8a, 9)$이므로 그 개수는

$2(2a+1)=4a+2$

(iv) n의 값이 (i), (ii), (iii)의 경우를 제외한 값일 때,

조건을 만족시키는 자연수 n은 16개이다.

$\sqrt[4]{n^m}=n^{\frac{m}{4}}$이 자연수가 되려면 m은 4의 배수이어야 하므로 자연수 m은 $4a$, $4a+4$, $4a+8$, …, $4a+4a$의 $(a+1)$개이다.

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$16(a+1)=16a+16$

(i)~(iv)에서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$(4a+1)+(4a+1)+(4a+2)+(16a+16)=28a+20$

2단계 a의 값 구하기

즉, $28a+20=160$이므로

$28a=140$ $\therefore a=5$

idea

06 답 ④

1단계 $f(n)$ 구하기

두 직선 $y=3^n x$, $y=3^{-n}x-3^{-n}$이 만나는 점의 x좌표를 구하면

$3^n x=3^{-n}x-3^{-n}$

$(3^n-3^{-n})x=-3^{-n}$

$\therefore x=-\dfrac{3^{-n}}{3^n-3^{-n}}$

따라서 두 직선이 만나는 점의 y좌표 $f(n)$은

$f(n)=-\dfrac{3^{-n}}{3^n-3^{-n}}\times 3^n$

$=-\dfrac{1}{3^n-3^{-n}}$

2단계 $f(1)+f(2)+f(2^2)+\cdots+f(2^{10})$의 값 구하기

$f(2^k)=-\dfrac{1}{3^{2^k}-3^{-2^k}}$

$=-\dfrac{3^{2^k}}{(3^{2^k})^2-1}$

$=-\dfrac{3^{2^k}}{(3^{2^k}+1)(3^{2^k}-1)}$

$=-\dfrac{3^{2^k}+1}{(3^{2^k}+1)(3^{2^k}-1)}+\dfrac{1}{(3^{2^k}+1)(3^{2^k}-1)}$

$=-\dfrac{1}{3^{2^k}-1}+\dfrac{1}{3^{2^{k+1}}-1}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(2^2)+\cdots+f(2^{10})$

$=f(2^0)+f(2^1)+f(2^2)+\cdots+f(2^{10})$

$=\left(-\dfrac{1}{3^{2^0}-1}+\dfrac{1}{3^{2^1}-1}\right)+\left(-\dfrac{1}{3^{2^1}-1}+\dfrac{1}{3^{2^2}-1}\right)$

$+\left(-\dfrac{1}{3^{2^2}-1}+\dfrac{1}{3^{2^3}-1}\right)+\cdots+\left(-\dfrac{1}{3^{2^{10}}-1}+\dfrac{1}{3^{2^{11}}-1}\right)$

$=-\dfrac{1}{3^1-1}+\dfrac{1}{3^{2^{11}}-1}$

$=\dfrac{1}{2}\left(-1+\dfrac{2}{3^{2^{11}}-1}\right)$

3단계 $p+q$의 값 구하기

따라서 $p=1$, $q=11$이므로

$p+q=12$

07 답 ④

1단계 5^a을 수로 나타내기

$(a-4)(b-2)=8$에서

$ab-2a-4b+8=8$ $\therefore ab=2a+4b$

$(5^a)^b=5^{ab}=5^{2a+4b}=(5^a)^2\times 5^{4b}$이고 $5^a=7^b$이므로

$(5^a)^b=(7^b)^2\times 5^{4b}=(5^4\times 7^2)^b$

$\therefore 5^a=5^4\times 7^2$ …… ㉠

2단계 a의 값의 범위 구하기

이때 $5^2<7^2<5^3$이므로

$5^4\times 5^2<5^a=5^4\times 7^2<5^4\times 5^3$

$5^6<5^a<5^7$

$\therefore 6<a<7$

3단계 b의 값의 범위 구하기

또 $5^a=7^b$이므로 ㉠에서 $7^b=5^4\times 7^2$

이때 $7^3<5^4<7^4$이므로

$7^3\times 7^2<7^b=5^4\times 7^2<7^4\times 7^2$

$7^5<7^b<7^6$

$\therefore 5<b<6$

4단계 $[a]+[b]$의 값 구하기

따라서 $[a]=6$, $[b]=5$이므로

$[a]+[b]=11$

08 답 ②

1단계 $2\sqrt[3]{a^2}=3\sqrt[5]{b}=k$로 놓고 k의 최솟값 구하기

$2\sqrt[3]{a^2}=3\sqrt[5]{b}=k\,(k>0)$로 놓으면

$2\sqrt[3]{a^2}=k$에서 $2\times a^{\frac{2}{3}}=k$

양변을 세제곱하면

$2^3\times a^2=k^3$ …… ㉠

$3\sqrt[5]{b}=k$에서 $3\times b^{\frac{1}{5}}=k$

양변을 5제곱하면

$3^5\times b=k^5$ …… ㉡

이때 $k=\dfrac{k^6}{k^5}=\dfrac{(k^3)^2}{k^5}=\dfrac{(2^3\times a^2)^2}{3^5\times b}=\dfrac{2^6\times a^4}{3^5\times b}$이고 a, b는 자연수이므로

k는 양의 유리수이다.

$k=\dfrac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)라 하면 ㉠에서

$2^3\times a^2=\dfrac{q^3}{p^3}$

즉, $\dfrac{q^3}{p^3}$이 자연수이므로 p^3은 q^3의 약수이다.

이때 p, q는 서로소인 자연수이므로 $p=1$

$k=q$이므로 ㉠, ㉡에서

$2^3\times a^2=q^3$, $3^5\times b=q^5$

따라서 q는 2, 3을 인수로 가지므로 6의 배수이다.

$q=6m$ (m은 자연수)이라 하면 $2^3\times a^2=q^3$에서

$2^3\times a^2=6^3m^3$, $a^2=3^3m^3$

$\therefore a=(3m)^{\frac{3}{2}}$

a는 자연수이므로 $m=3n^2$ (n은 자연수) 꼴이어야 한다.

따라서 m의 최솟값은 3이므로 q, 즉 k의 최솟값은 18이다.

2단계 $\sqrt[5]{(17a^2+6b)^2}$의 최솟값 구하기

㉠, ㉡에서 $a^2=\dfrac{k^3}{2^3}$, $b=\dfrac{k^5}{3^5}$이므로

$\sqrt[5]{(17a^2+6b)^2}=\sqrt[5]{\left(17\times\dfrac{k^3}{2^3}+6\times\dfrac{k^5}{3^5}\right)^2}$

$=\left\{17\times\left(\dfrac{k}{2}\right)^3+6\times\left(\dfrac{k}{3}\right)^5\right\}^{\frac{2}{5}}$

$\geq\left\{17\times\left(\dfrac{18}{2}\right)^3+6\times\left(\dfrac{18}{3}\right)^5\right\}^{\frac{2}{5}}$ ⟶ $k=18$일 때 최솟값을 갖는다.

$=(17\times 3^6+6^6)^{\frac{2}{5}}$

$=\{17\times 3^6+(2\times 3)^6\}^{\frac{2}{5}}$

$=\{3^5(17\times 3+2^6\times 3)\}^{\frac{2}{5}}$

$=(3^5)^{\frac{2}{5}}\times(17\times 3+2^6\times 3)^{\frac{2}{5}}$

$=9\{3(17+2^6)\}^{\frac{2}{5}}$

$=9(3\times 81)^{\frac{2}{5}}$

$=9\times(3^5)^{\frac{2}{5}}$

$=9\times 9=81$

따라서 $\sqrt[5]{(17a^2+6b)^2}$의 최솟값은 81이다.

02 로그

step 1 핵심 문제 | 26~27쪽

01 56	02 ⑤	03 ②	04 20	05 ①	06 ③
07 −11	08 ⑤	09 ①	10 16	11 ⑤	12 ②

01 답 56

(밑)>0, (밑)≠1이어야 하므로

$a-3>0$, $a-3\neq1$

$\therefore a>3$, $a\neq4$ …… ㉠ …… 배점 30%

(진수)>0이어야 하므로

$ax^2+ax+3>0$

이때 ㉠에서 $a>3$이므로 모든 실수 x에 대하여 이 부등식이 성립하려면

이차방정식 $ax^2+ax+3=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=a^2-12a<0$

$a(a-12)<0$ $\therefore 0<a<12$ …… ㉡ …… 배점 30%

㉠, ㉡에서 $3<a<4$ 또는 $4<a<12$

따라서 정수 a의 값은 5, 6, 7, …, 11이므로 그 합은

$5+6+7+8+9+10+11=56$ …… 배점 40%

개념 NOTE

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 주어진 이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다.

(1) $ax^2+bx+c>0$ ➡ $a>0$, $D<0$

(2) $ax^2+bx+c\geq0$ ➡ $a>0$, $D\leq0$

(3) $ax^2+bx+c<0$ ➡ $a<0$, $D<0$

(4) $ax^2+bx+c\leq0$ ➡ $a<0$, $D\leq0$

02 답 ⑤

$\log_6 3=\log_6\frac{6}{2}=\log_6 6-\log_6 2=1-\log_6 2$

$\frac{1}{\log_4 6}=\log_6 4=\log_6 2^2=2\log_6 2$

$\therefore (2\log_6 3)^2+\frac{1+3\log_6 3+\log_6 2}{\log_4 6}$

$=4(1-\log_6 2)^2+\{1+3(1-\log_6 2)+\log_6 2\}\times2\log_6 2$

$=4-8\log_6 2+4(\log_6 2)^2+(4-2\log_6 2)\times2\log_6 2$

$=4-8\log_6 2+4(\log_6 2)^2+8\log_6 2-4(\log_6 2)^2$

$=4$

다른 풀이

$\frac{1}{\log_4 6}=\log_6 4=\log_6 2^2=2\log_6 2$이므로

$(2\log_6 3)^2+\frac{1+3\log_6 3+\log_6 2}{\log_4 6}$

$=(2\log_6 3)^2+(1+3\log_6 3+\log_6 2)\times2\log_6 2$ …… ㉠

$\log_6 3=X$, $\log_6 2=Y$로 놓으면

$X+Y=\log_6 3+\log_6 2=\log_6(3\times2)=\log_6 6=1$이므로 ㉠에서

$(2\log_6 3)^2+\frac{1+3\log_6 3+\log_6 2}{\log_4 6}=(2X)^2+(X+Y+3X+Y)\times2Y$

$=4X^2+8XY+4Y^2$

$=4(X+Y)^2=4\times1^2=4$

03 답 ②

$f(n)=\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{n}+\frac{1}{\log_{n+1}2}-\log_{\frac{1}{4}}(n^2-2n+1)$

$=\log_{2^{\frac{1}{2}}}n^{-1}+\log_2(n+1)-\log_{2^{-2}}(n-1)^2$

$=-2\log_2 n+\log_2(n+1)+\log_2(n-1)$

$=\log_2 n^{-2}+\log_2(n+1)+\log_2(n-1)$

$=\log_2\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$

$\therefore f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(16)$

$=\log_2\frac{1\times3}{2\times2}+\log_2\frac{2\times4}{3\times3}+\log_2\frac{3\times5}{4\times4}+\cdots+\log_2\frac{15\times17}{16\times16}$

$=\log_2\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{15}{16}\times\frac{17}{16}\right)$

$=\log_2\left(\frac{1}{2}\times\frac{17}{16}\right)=\log_2\frac{17}{32}$

$=\log_2 17-\log_2 32=\log_2 17-\log_2 2^5$

$=-5+\log_2 17$

04 답 20

$\log_a b=\frac{\log_b c}{2}=\frac{\log_c a}{3}=k$에서

$\log_a b=k$, $\log_b c=2k$, $\log_c a=3k$

세 식의 각 변끼리 곱하면

$\log_a b\times\log_b c\times\log_c a=6k^3$

$\log_a b\times\frac{\log_a c}{\log_a b}\times\frac{1}{\log_a c}=6k^3$

$1=6k^3$ $\therefore k^3=\frac{1}{6}$

$\therefore 120k^3=120\times\frac{1}{6}=20$

05 답 ①

$a=\log_9(3-2\sqrt{2})=\log_{3^2}(\sqrt{2}-1)^2=\log_3(\sqrt{2}-1)$이므로

$3^a=3^{\log_3(\sqrt{2}-1)}=(\sqrt{2}-1)^{\log_3 3}=\sqrt{2}-1$

$3^{-a}=\frac{1}{3^a}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$

$\therefore 3^a-3^{-a}=-2$

또 $3^a+3^{-a}=2\sqrt{2}$이므로 양변을 세제곱하면

$(3^a+3^{-a})^3=(2\sqrt{2})^3$

$3^{3a}+3^{-3a}+3(3^a+3^{-a})=16\sqrt{2}$

$3^{3a}+3^{-3a}+3\times2\sqrt{2}=16\sqrt{2}$

$\therefore 3^{3a}+3^{-3a}=10\sqrt{2}$

$\therefore \frac{3^{3a}+3^{-3a}}{3^a-3^{-a}}=\frac{10\sqrt{2}}{-2}=-5\sqrt{2}$

06 답 ③

두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$와 원점이 한 직선 위에 있으므로

점 $(2, \log_4 a)$와 원점을 지나는 직선의 기울기와 점 $(3, \log_2 b)$와 원점을 지나는 직선의 기울기가 같다.

즉, $\frac{\log_4 a}{2}=\frac{\log_2 b}{3}$이므로

$\frac{\log_{2^2} a}{2}=\frac{\log_2 b}{3}$, $\frac{\log_2 a}{4}=\frac{\log_2 b}{3}$

$\frac{\log_2 b}{\log_2 a}=\frac{3}{4}$ $\therefore \log_a b=\frac{3}{4}$

07 답 −11

이차방정식 $x^2-6x-4=0$의 두 근이 $\log_2 a$, $\log_2 b$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 a+\log_2 b=6$, $\log_2 a\times\log_2 b=-4$

$$\therefore \log_a b+\log_b a=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}+\frac{\log_2 a}{\log_2 b}$$
$$=\frac{(\log_2 a)^2+(\log_2 b)^2}{\log_2 a\times\log_2 b}$$
$$=\frac{(\log_2 a+\log_2 b)^2-2\log_2 a\times\log_2 b}{\log_2 a\times\log_2 b}$$
$$=\frac{6^2-2\times(-4)}{-4}=-11$$

08 답 ⑤

$3^a=5$에서 $a=\log_3 5$

$4^b=3$에서 $b=\log_4 3=\log_{2^2} 3=\frac{1}{2}\log_2 3$

즉, $2b=\log_2 3$이므로 $\log_3 2=\frac{1}{2b}$

$$\therefore \log_{24} 450=\frac{\log_3 450}{\log_3 24}$$
$$=\frac{\log_3(2\times 3^2\times 5^2)}{\log_3(2^3\times 3)}$$
$$=\frac{\log_3 2+\log_3 3^2+\log_3 5^2}{\log_3 2^3+\log_3 3}$$
$$=\frac{2+\log_3 2+2\log_3 5}{1+3\log_3 2}$$
$$=\frac{2+\frac{1}{2b}+2a}{1+\frac{3}{2b}}$$
$$=\frac{4ab+4b+1}{2b+3}$$

09 답 ①

$$\log_n 4\times\log_2 9=\frac{\log_2 4}{\log_2 n}\times\log_2 9$$
$$=\frac{\log_2 2^2}{\log_2 n}\times\log_2 3^2$$
$$=\frac{2}{\log_2 n}\times 2\log_2 3$$
$$=4\times\frac{\log_2 3}{\log_2 n}$$
$$=4\log_n 3$$

$4\log_n 3=k$ (k는 자연수)라 하면

$\log_n 3=\frac{k}{4}$

즉, $n^{\frac{k}{4}}=3$이므로 $n=3^{\frac{4}{k}}$

이때 n이 2 이상의 자연수이므로 $\frac{4}{k}$가 자연수이어야 한다.

즉, k는 4의 양의 약수이어야 하므로 1, 2, 4이다.

$k=1$일 때, $n=3^4=81$

$k=2$일 때, $n=3^2=9$

$k=4$일 때, $n=3^1=3$

따라서 모든 n의 값의 합은

$81+9+3=93$

10 답 16

$$\frac{\log_3 25}{\log_3 4}=\frac{\log_3 5^2}{\log_3 2^2}=\frac{2\log_3 5}{2\log_3 2}=\frac{\log_3 5}{\log_3 2}=\log_2 5$$

$\log_2 4=2$, $\log_2 8=3$이므로 $\log_2 5$의 정수 부분은 2이고, 소수 부분은 $\log_2 5-2$이다.

따라서 $a=2$, $b=\log_2 5-2$이므로

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2-(\log_2 5-2)}{2+(\log_2 5-2)}=\frac{4-\log_2 5}{\log_2 5}$$
$$=-1+\frac{4}{\log_2 5}=-1+4\log_5 2$$
$$=-1+\log_5 2^4$$
$$=-1+\log_5 16$$

$\therefore n=16$

11 답 ⑤

$\log x$와 $\log\sqrt[4]{x}$의 소수 부분이 같으면 두 상용로그의 차가 정수이다.

즉, $\log x-\log\sqrt[4]{x}=\log x-\frac{1}{4}\log x=\frac{3}{4}\log x$가 정수이다.

$\log x$의 정수 부분이 2이므로

$2\le\log x<3$

$\therefore \frac{3}{2}\le\frac{3}{4}\log x<\frac{9}{4}$

이때 $\frac{3}{4}\log x$가 정수이므로

$\frac{3}{4}\log x=2$, $\log x=\frac{8}{3}$

$\therefore x=10^{\frac{8}{3}}$

12 답 ②

두 약물 A, B의 흡수율을 각각 K_A, K_B, 배설률을 각각 E_A, E_B라 하자.

두 약물 A, B의 흡수율은 같고, 배설률은 각각 흡수율의 $\frac{1}{2}$배, $\frac{1}{4}$배이므로

$K_A=K_B$, $E_A=\frac{1}{2}K_A$, $E_B=\frac{1}{4}K_B=\frac{1}{4}K_A$

약물 A를 투여한 지 3시간 후에 혈중농도가 최고치에 도달하므로

$$3=c\times\frac{\log K_A-\log E_A}{K_A-E_A}=c\times\frac{\log K_A-\log\frac{1}{2}K_A}{K_A-\frac{1}{2}K_A}$$
$$=c\times\frac{\log 2}{\frac{1}{2}K_A}=c\times\frac{2\log 2}{K_A}$$

$$\therefore \frac{c}{K_A}=\frac{3}{2\log 2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

약물 B를 투여한 지 a시간 후에 혈중농도가 최고치에 도달하므로

$$a=c\times\frac{\log K_B-\log E_B}{K_B-E_B}=c\times\frac{\log K_A-\log\frac{1}{4}K_A}{K_A-\frac{1}{4}K_A}$$
$$=c\times\frac{\log 4}{\frac{3}{4}K_A}=\frac{c}{K_A}\times\frac{4\times 2\log 2}{3}$$
$$=\frac{3}{2\log 2}\times\frac{8\log 2}{3} \ (\because ㉠)$$
$$=4$$

step 2 고난도 문제 | 28~31쪽

01 0	02 ①	03 3	04 75	05 22	06 36
07 ①	08 54	09 10	10 45	11 ③	12 $\frac{1}{2}$
13 1	14 ④	15 −5	16 ②	17 45	18 30
19 7120	20 ②	21 7	22 ①	23 4	24 1.66

01 답 0

$\log_{16} a=\log_6 b=\log_{81}(a+b^2)=k$ (k는 실수)로 놓으면

$\log_{16} a=k$에서 $a=16^k$ …… ㉠

$\log_6 b=k$에서 $b=6^k$ …… ㉡

$\log_{81}(a+b^2)=k$에서 $a+b^2=81^k$

㉠, ㉡을 대입하면

$16^k+(6^k)^2=81^k$

$\therefore 16^k+36^k=81^k$ …… ㉢

$$\therefore \log_{12}\left(\frac{b^2}{a}-\frac{a}{b^2}\right)=\log_{12}\frac{b^4-a^2}{ab^2}$$

$$=\log_{12}\frac{(b^2+a)(b^2-a)}{ab^2}$$

$$=\log_{12}\frac{81^k\{(6^k)^2-16^k\}}{16^k\times(6^k)^2}$$

$$=\log_{12}\frac{81^k(36^k-16^k)}{16^k\times 36^k}$$

$$=\log_{12}\frac{9^k\times 9^k(9^k\times 4^k-4^k\times 4^k)}{16^k\times 9^k\times 4^k}$$

$$=\log_{12}\frac{9^k(9^k-4^k)}{16^k}$$

$$=\log_{12}\frac{81^k-36^k}{16^k}$$

$$=\log_{12}\frac{16^k}{16^k}\ (\because \text{㉢})$$

$$=\log_{12}1=0$$

02 답 ①

(i) m, n이 모두 홀수일 때,

mn도 홀수이므로

$f(mn)=\log_3 mn$

$=\log_3 m+\log_3 n$

$=f(m)+f(n)$

즉, 모든 m, n에 대하여 $f(mn)=f(m)+f(n)$을 만족시킨다.

이때 20 이하의 자연수 중 홀수의 개수는 10이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$10\times 10=100$

(ii) m은 홀수, n은 짝수일 때,

mn은 짝수이므로 $f(mn)=f(m)+f(n)$에서

$\log_2 mn=\log_3 m+\log_2 n$

$\log_2 m+\log_2 n=\log_3 m+\log_2 n$

$\log_2 m=\log_3 m$

이를 만족시키는 자연수 m의 값은 1뿐이고 20 이하의 자연수 중 짝수의 개수는 10이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$1\times 10=10$

(iii) m은 짝수, n은 홀수일 때,

(ii)와 같은 방법으로 하면

$\log_2 n=\log_3 n$

이를 만족시키는 자연수 n의 값은 1뿐이고 20 이하의 자연수 중 짝수의 개수는 10이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$10\times 1=10$

(iv) m, n이 모두 짝수일 때,

mn도 짝수이므로

$f(mn)=\log_2 mn$

$=\log_2 m+\log_2 n$

$=f(m)+f(n)$

즉, 모든 m, n에 대하여 $f(mn)=f(m)+f(n)$을 만족시킨다.

이때 20 이하의 자연수 중 짝수의 개수는 10이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$10\times 10=100$

(i)~(iv)에서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$100+10+10+100=220$

03 답 3

$$\log_3\left(1+\frac{2a+2}{a^2+a+1}\right)+\log_3\left\{1+\frac{2(a+1)+2}{(a+1)^2+(a+1)+1}\right\}$$

$$+\log_3\left\{1+\frac{2(a+2)+2}{(a+2)^2+(a+2)+1}\right\}$$

$$+\cdots+\log_3\left\{1+\frac{2(b-1)+2}{(b-1)^2+(b-1)+1}\right\}$$

$$=\log_3\left(1+\frac{2a+2}{a^2+a+1}\right)+\log_3\left(1+\frac{2a+4}{a^2+3a+3}\right)$$

$$+\log_3\left(1+\frac{2a+6}{a^2+5a+7}\right)+\cdots+\log_3\left\{1+\frac{2(b-1)+2}{(b-1)^2+(b-1)+1}\right\}$$

$$=\log_3\frac{a^2+3a+3}{a^2+a+1}+\log_3\frac{a^2+5a+7}{a^2+3a+3}+\log_3\frac{a^2+7a+13}{a^2+5a+7}$$

$$+\cdots+\log_3\frac{(b-1)^2+3(b-1)+3}{(b-1)^2+(b-1)+1}$$

$$=\log_3\left\{\frac{a^2+3a+3}{a^2+a+1}\times\frac{a^2+5a+7}{a^2+3a+3}\times\frac{a^2+7a+13}{a^2+5a+7}\right.$$

$$\left.\times\cdots\times\frac{(b-1)^2+3(b-1)+3}{(b-1)^2+(b-1)+1}\right\}$$

$$=\log_3\frac{(b-1)^2+3(b-1)+3}{a^2+a+1}$$

$$=\log_3\frac{b^2+b+1}{a^2+a+1}$$

즉, $\log_3\frac{b^2+b+1}{a^2+a+1}=\log_3\frac{(a^3+1)(a-1)}{b-1}$이므로

$$\frac{b^2+b+1}{a^2+a+1}=\frac{(a^3+1)(a-1)}{b-1}$$

$(b-1)(b^2+b+1)=(a^3+1)(a-1)(a^2+a+1)$

$b^3-1=(a^3+1)(a^3-1)$

$b^3-1=a^6-1$

$\therefore b^3=a^6$

이때 a, b는 자연수이므로

$b=a^2$

$1<a<b\le 20$이므로 순서쌍 (a, b)는 $(2, 4)$, $(3, 9)$, $(4, 16)$의 3개이다.

04 답 75

(가)에서 $3^a=5^b=k^c=m\ (m>1)$으로 놓으면

$3^a=m$에서 $a=\log_3 m$ …… ㉠

$5^b=m$에서 $b=\log_5 m$ …… ㉡

$k^c=m$에서 $c=\log_k m$ …… ㉢

(나)의 $\log c=\log(2ab)-\log(2a+b)$에서

$$\log c=\log\frac{2ab}{2a+b}$$

즉, $c=\frac{2ab}{2a+b}$이므로

$$\frac{1}{c}=\frac{2a+b}{2ab} \quad \therefore \frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{2a}$$

㉠, ㉡, ㉢을 대입하면

$$\frac{1}{\log_k m}=\frac{1}{\log_5 m}+\frac{1}{2\log_3 m}$$

$$\log_m k=\log_m 5+\frac{1}{2}\log_m 3$$

$$\log_m k=\log_m(5\times 3^{\frac{1}{2}})$$

따라서 $k=5\times 3^{\frac{1}{2}}$이므로

$$k^2=(5\times 3^{\frac{1}{2}})^2=25\times 3=75$$

05 답 22

$\frac{\log_c b}{\log_a b}=\frac{1}{2}$에서

$$\frac{\frac{1}{\log_b c}}{\frac{1}{\log_b a}}=\frac{1}{2},\ \frac{\log_b a}{\log_b c}=\frac{1}{2}$$

$\log_b c=2\log_b a$, $\log_b c=\log_b a^2$

$\therefore c=a^2$ …… 배점 30%

$\frac{\log_b c}{\log_a c}=\frac{1}{4}$에서

$$\frac{\frac{1}{\log_c b}}{\frac{1}{\log_c a}}=\frac{1}{4},\ \frac{\log_c a}{\log_c b}=\frac{1}{4}$$

$\log_c b=4\log_c a$, $\log_c b=\log_c a^4$

$\therefore b=a^4$ …… 배점 30%

a, b, c는 1보다 크고 20보다 작은 자연수이므로

$1<a<c=a^2<b=a^4<20$

$\therefore a=2,\ c=2^2=4,\ b=2^4=16$

$\therefore a+b+c=2+16+4=22$ …… 배점 40%

06 답 36

$x=\log_2 a$, $y=\log_2 b$에서 $a=2^x$, $b=2^y$이므로

$$k=\log_8 a^{\frac{1}{y}}+\log_8 b^{\frac{1}{x}}$$

$$=\log_8(2^x)^{\frac{1}{y}}+\log_8(2^y)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\log_{2^3}2^{\frac{x}{y}}+\log_{2^3}2^{\frac{y}{x}}$$

$$=\frac{x}{3y}+\frac{y}{3x}=\frac{x^2+y^2}{3xy}$$

이때 $x^2-4xy+y^2=0$에서 $x^2+y^2=4xy$이므로

$$k=\frac{x^2+y^2}{3xy}=\frac{4xy}{3xy}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore 27k=27\times\frac{4}{3}=36$$

idea

07 답 ①

$\log_4 a_1+\log_4 a_2+\log_4 a_3+\cdots+\log_4 a_n=14$에서

$\log_4(a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n)=14$

$\therefore a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n=4^{14}=2^{28}$

a_1, a_2, a_3, …, a_n은 자연수 N의 양의 약수이고 곱이 2^{28}이므로 N은 2^k(k는 자연수) 꼴이다.

$N=2^k$의 양의 약수는 1, 2, 2^2, …, 2^k이므로

$1\times 2\times 2^2\times\cdots\times 2^k=2^{28}$

$2^{1+2+3+\cdots+k}=2^{28}$

즉, $1+2+3+\cdots+k=28$이므로

$k=7$ $\quad\therefore N=2^7$

08 답 54

$\frac{3}{2}\log_{a+b}c=1$에서

$$\frac{3}{2}=\frac{1}{\log_{a+b}c} \quad \therefore \log_c(a+b)=\frac{3}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\frac{1}{2}\log_{a-b}c=1$에서

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{\log_{a-b}c} \quad \therefore \log_c(a-b)=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$\log_c(a+b)+\log_c(a-b)=2$

$\log_c(a+b)(a-b)=2$

$\log_c(a^2-b^2)=2$

즉, $a^2-b^2=c^2$이므로

$a^2=b^2+c^2$

a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 길이가 a인 변을 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

따라서 이 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}\times 108=54$$

09 답 10

(가)에서 $\log a$와 $\log a^{3n}$의 소수 부분이 같으므로 두 상용로그의 차가 정수이다.

즉, $\log a^{3n}-\log a=3n\log a-\log a=(3n-1)\log a$가 정수이다.

(나)의 $(2n+1)\log a=10n^2+n+4$에서

$$\log a=\frac{10n^2+n+4}{2n+1}=\frac{(2n+1)(5n-2)+6}{2n+1}$$

$$=5n-2+\frac{6}{2n+1}$$

$$\therefore (3n-1)\log a=(5n-2)(3n-1)+\frac{6(3n-1)}{2n+1}$$

$$=(5n-2)(3n-1)+9-\frac{15}{2n+1}$$

이때 n은 자연수이므로 $(3n-1)\log a$가 정수이려면 $\frac{15}{2n+1}$가 정수이어야 한다.

즉, $2n+1$은 15의 양의 약수이어야 하고, $n\geq 1$에서 $2n+1\geq 3$이므로

$2n+1=3$ 또는 $2n+1=5$ 또는 $2n+1=15$

$\therefore n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=7$

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$1+2+7=10$

10 답 45

$\log_2 a-[\log_2 a]=\log_2 b-[\log_2 b]$에서

$\log_2 b-\log_2 a=[\log_2 b]-[\log_2 a]$

$\log_2 \frac{b}{a}=[\log_2 b]-[\log_2 a]$

이때 $[\log_2 b]-[\log_2 a]$는 정수이므로 $\log_2 \frac{b}{a}$도 정수이다.

$\log_2 \frac{b}{a}=m$ (m은 정수)이라 하면

$\frac{b}{a}=2^m$ $\therefore b=2^m\times a$ …… ㉠

또 $\log_2 a-[\log_2 a]=\log_2 a^3-[\log_2 a^3]$에서

$\log_2 a^3-\log_2 a=[\log_2 a^3]-[\log_2 a]$

$\log_2 a^2=[\log_2 a^3]-[\log_2 a]$

이때 $[\log_2 a^3]-[\log_2 a]$는 정수이므로 $\log_2 a^2$도 정수이다.

$\log_2 a^2=n$ (n은 정수)이라 하면

$a^2=2^n$ $\therefore a=2^{\frac{n}{2}}$ ($\because a>0$)

a는 1보다 큰 자연수이므로 $a=2^t$ (t는 자연수)이라 하고 ㉠에 대입하면

$b=2^m\times 2^t=2^{m+t}$

즉, 자연수 a, b는 모두 2의 거듭제곱 꼴이다.

$1<a\le b<1000$이므로

$a=2$일 때, b의 값은 $2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^9$이다.

$a=2^2$일 때, b의 값은 $2^2, 2^3, 2^4, \cdots, 2^9$이다.

$a=2^3$일 때, b의 값은 $2^3, 2^4, 2^5, \cdots, 2^9$이다.

⋮

$a=2^9$일 때, b의 값은 2^9이다.

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$9+8+7+\cdots+1=45$

idea

11 답 ③

$\log_{ab} a^4+\log_{ab} a^6+\log_{ab} b^4+\log_{ab} b^6=\log_{ab}(ab)^{10}=10$

이때 $[\log_{ab} a^4]\le\log_{ab} a^4$, $[\log_{ab} a^6]\le\log_{ab} a^6$, $[\log_{ab} b^4]\le\log_{ab} b^4$, $[\log_{ab} b^6]\le\log_{ab} b^6$이므로

$[\log_{ab} a^4]+[\log_{ab} a^6]+[\log_{ab} b^4]+[\log_{ab} b^6]=10$을 만족시키려면

$\log_{ab} a^4$, $\log_{ab} a^6$, $\log_{ab} b^4$, $\log_{ab} b^6$은 모두 정수이어야 한다.

$\log_{ab} a^4=m$, $\log_{ab} a^6=n$ (m, n은 정수, $m\le n$)이라 하면

$a^4=(ab)^m$, $a^6=(ab)^n$

이때 $\frac{a^6}{a^4}=\frac{(ab)^n}{(ab)^m}$이므로 $a^2=(ab)^{n-m}$ …… ㉠

a, b는 자연수이고 $a\le ab$이므로

$0\le n-m\le 2$

이때 m, n이 정수이므로 $n-m$도 정수이다.

(i) $n-m=0$일 때,

㉠에서 $a^2=1$ $\therefore a=1$ ($\because a$는 자연수)

로그의 밑의 조건에 의하여 $ab\ne 1$이므로 $b\ne 1$

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, …, $(1, 9)$의 8개이다.

(ii) $n-m=1$일 때,

㉠에서 $a^2=ab$, $a^2-ab=0$

$a(a-b)=0$ $\therefore a=b$ ($\because a$는 자연수)

로그의 밑의 조건에 의하여 $ab\ne 1$이므로 순서쌍 (a, b)는 $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, …, $(9, 9)$의 8개이다.

(iii) $n-m=2$일 때,

㉠에서 $a^2=(ab)^2$, $a^2-a^2b^2=0$

$a^2(1-b^2)=0$ $\therefore b^2=1$ ($\because a$는 자연수)

$\therefore b=1$ ($\because b$는 자연수)

로그의 밑의 조건에 의하여 $ab\ne 1$이므로 $a\ne 1$

따라서 순서쌍 (a, b)는 $(2, 1)$, $(3, 1)$, $(4, 1)$, …, $(9, 1)$의 8개이다.

(i), (ii), (iii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$8+8+8=24$

idea

12 답 $\frac{1}{2}$

$\log_{11} x=n+\alpha$이므로 $(\log_{11} x)^2+\alpha^2=10$에서

$(n+\alpha)^2+\alpha^2=10$ …… ㉠

$n^2+2n\alpha+2\alpha^2=10$, $n^2+2\alpha(n+\alpha)=10$

$n^2+2\alpha\log_{11} x=10$

이때 $2\alpha\ge 0$, $\log_{11} x>0$이므로

$n^2\le 10$

이때 $\log_{11} x$가 양수이므로 n은 음이 아닌 정수이다.

따라서 n의 값은 0, 1, 2, 3이다.

(i) $n=0$일 때,

㉠에서 $\alpha^2+\alpha^2=10$, $\alpha^2=5$

$\therefore \alpha=\pm\sqrt{5}$

그런데 $0\le\alpha<1$이므로 α의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $n=1$일 때,

㉠에서 $(1+\alpha)^2+\alpha^2=10$

$2\alpha^2+2\alpha-9=0$ $\therefore \alpha=\frac{-1\pm\sqrt{19}}{2}$

그런데 $0\le\alpha<1$이므로 α의 값이 존재하지 않는다.

(iii) $n=2$일 때,

㉠에서 $(2+\alpha)^2+\alpha^2=10$

$2\alpha^2+4\alpha-6=0$, $\alpha^2+2\alpha-3=0$

$(\alpha+3)(\alpha-1)=0$

$\therefore \alpha=-3$ 또는 $\alpha=1$

그런데 $0\le\alpha<1$이므로 α의 값이 존재하지 않는다.

(iv) $n=3$일 때,

㉠에서 $(3+\alpha)^2+\alpha^2=10$

$2\alpha^2+6\alpha-1=0$ $\therefore \alpha=\frac{-3\pm\sqrt{11}}{2}$

그런데 $0\le\alpha<1$이므로 $\alpha=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$

(i)~(iv)에서 $n=3$, $\alpha=\frac{-3+\sqrt{11}}{2}$이므로

$\log_{11}(n+2\alpha)=\log_{11}(3-3+\sqrt{11})=\log_{11}\sqrt{11}$

$=\log_{11} 11^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

13 답 1

$a^3b^2=243$에서 $\log_3 a^3b^2=\log_3 243$

$\log_3 a^3+\log_3 b^2=\log_3 3^5$

$3\log_3 a+2\log_3 b=5$

$3\log_3 a=\alpha$, $2\log_3 b=\beta$로 놓으면

$\alpha+\beta=5$

$\log_3 a \times \log_3 b = -14$에서

$\alpha\beta = 3\log_3 a \times 2\log_3 b = 6\log_3 a \times \log_3 b$

$= 6 \times (-14) = -84$

따라서 α, β는 이차방정식 $x^2-5x-84=0$의 두 근이다.

$x^2-5x-84=0$에서 $(x+7)(x-12)=0$

$\therefore x=-7$ 또는 $x=12$

(i) $\alpha=-7$, $\beta=12$인 경우

$3\log_3 a=-7$에서 $\log_3 a=-\frac{7}{3}$

$2\log_3 b=12$에서 $\log_3 b=6$

이는 $\log_3 a>\log_3 b$를 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha=12$, $\beta=-7$인 경우

$3\log_3 a=12$에서 $\log_3 a=4$

$2\log_3 b=-7$에서 $\log_3 b=-\frac{7}{2}$

이는 $\log_3 a>\log_3 b$를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $\log_3 a=4$, $\log_3 b=-\frac{7}{2}$이므로

$2\log_3 ab = 2(\log_3 a+\log_3 b)$

$= 2\left(4-\frac{7}{2}\right) = 8-7=1$

개념 NOTE

두 수 α, β를 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

14 답 ④

$\alpha=\log_2 n$이므로

$\beta=\log_n \frac{1}{2}=\log_n 2^{-1}=-\log_n 2=-\frac{1}{\log_2 n}=-\frac{1}{\alpha}$

$\therefore \beta+\frac{1}{\beta}=-\frac{1}{\alpha}-\alpha=-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$

즉, 이차방정식 $x^2-kx-4=0$의 두 근이 $\alpha+\frac{1}{\alpha}$, $-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$이므로

근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$\alpha+\frac{1}{\alpha}-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)=k \qquad \therefore k=0$

두 근의 곱은 $-\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2=-4$

$\therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=-2$ 또는 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=2$

(i) $\alpha+\frac{1}{\alpha}=-2$일 때,

$\alpha^2+2\alpha+1=0$

$(\alpha+1)^2=0 \qquad \therefore \alpha=-1$

즉, $\log_2 n=-1$이므로

$n=2^{-1}=\frac{1}{2}$

그런데 n은 1보다 큰 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha+\frac{1}{\alpha}=2$일 때,

$\alpha^2-2\alpha+1=0$

$(\alpha-1)^2=0 \qquad \therefore \alpha=1$

즉, $\log_2 n=1$이므로

$n=2$

(i), (ii)에서 $n=2$

$\therefore k+n=0+2=2$

15 답 −5

$\log_a b=\alpha$, $\log_b c=\beta$, $\log_c a=\gamma$라 하면

$\alpha\beta\gamma=\log_a b \times \log_b c \times \log_c a$

$= \log_a b \times \frac{\log_a c}{\log_a b} \times \frac{1}{\log_a c}=1$

$\log_a b+\log_b c+\log_c a=3$에서

$\alpha+\beta+\gamma=3$

$\log_b a+\log_c b+\log_a c=-5$에서

$\frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_b c}+\frac{1}{\log_c a}=-5$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=-5$

$\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-5$

$\therefore \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5$

따라서 α, β, γ는 삼차방정식 $x^3-3x^2-5x-1=0$의 세 근이다.

$x^3-3x^2-5x-1=0$에서

$(x+1)(x^2-4x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2\pm\sqrt{5}$

$\log_a b<\log_b c<\log_c a$에서 $\alpha<\beta<\gamma$이므로

$\alpha=-1$, $\beta=2-\sqrt{5}$, $\gamma=2+\sqrt{5}$

$$\log_{a^2b} a+\log_{bc} b+\log_{ca} c=\frac{1}{\log_a a^2b}+\frac{1}{\log_b bc}+\frac{1}{\log_c ca}$$
$$=\frac{1}{2+\log_a b}+\frac{1}{1+\log_b c}+\frac{1}{1+\log_c a}$$
$$=\frac{1}{2+\alpha}+\frac{1}{1+\beta}+\frac{1}{1+\gamma}$$
$$=1+\frac{1}{3-\sqrt{5}}+\frac{1}{3+\sqrt{5}}$$
$$=1+\frac{3+\sqrt{5}+3-\sqrt{5}}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$$
$$=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

$$\log_{a^2b} b+\log_{bc} c+\log_{ca} a=\frac{1}{\log_b a^2b}+\frac{1}{\log_c bc}+\frac{1}{\log_a ca}$$
$$=\frac{1}{1+2\log_b a}+\frac{1}{1+\log_c b}+\frac{1}{1+\log_a c}$$
$$=\frac{1}{1+\frac{2}{\log_a b}}+\frac{1}{1+\frac{1}{\log_b c}}+\frac{1}{1+\frac{1}{\log_c a}}$$
$$=\frac{1}{1+\frac{2}{\alpha}}+\frac{1}{1+\frac{1}{\beta}}+\frac{1}{1+\frac{1}{\gamma}}$$
$$=\frac{\alpha}{\alpha+2}+\frac{\beta}{\beta+1}+\frac{\gamma}{\gamma+1}$$
$$=-1+\frac{2-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}+\frac{2+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$
$$=-1+\frac{(2-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})+(2+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$$
$$=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{\log_{a^2b} a+\log_{bc} b+\log_{ca} c}{\log_{a^2b} b+\log_{bc} c+\log_{ca} a}=\frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}}=-5$$

개념 NOTE

세 수 α, β, γ를 근으로 하고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$

16 답 ②

자연수 a, b에 대하여 $a\log_5 b$가 자연수이려면 $b=5^n$(n은 자연수) 꼴이어야 하므로

$a\log_5 b=a\log_5 5^n=an$

즉, $an=k$를 만족시키는 순서쌍 (a, n)의 개수가 순서쌍 (a, b)의 개수와 같다.

이때 순서쌍 (a, n)의 개수는 k의 양의 약수의 개수와 같다.

↳ $an=2^p$일 때, $(1, 2^p)$, $(2, 2^{p-1})$, $(2^2, 2^{p-2})$, …, $(2^p, 1)$의 $(p+1)$개

$f(2^p)+f(3^p)+f(6^p)=35$에서

$f(2^p)+f(3^p)+f(2^p\times 3^p)=35$

$(p+1)+(p+1)+(p+1)\times(p+1)=35$

$p^2+4p-32=0$

$(p+8)(p-4)=0$

$\therefore p=-8$ 또는 $p=4$

그런데 p는 자연수이므로 $p=4$

비법 NOTE

자연수 N이 $N=p^q q^b r^c$(p, q, r는 서로 다른 소수, a, b, c는 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, N의 양의 약수의 개수는

$(a+1)(b+1)(c+1)$

17 답 45

집합 C의 원소 x는 집합 $A\cap B$의 원소 중 자연수인 것이므로 두 집합 A, B에서 자연수인 원소를 찾는다.

집합 A에서 $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$이 자연수이려면 $a=m^2$(m은 자연수) 꼴이어야 한다.

즉, a의 값은 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, …이므로 자연수인 원소 $\sqrt{a}$로 이루어진 집합 A의 부분집합을 A'이라 하면

$A'=\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$

집합 B에서 $\log_{\sqrt{3}} b=2\log_3 b$가 자연수이려면 $b=3^n$(n은 자연수) 꼴이어야 한다.

즉, b의 값은 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, …이므로 자연수인 원소 $\log_{\sqrt{3}} b$로 이루어진 집합 B의 부분집합을 B'이라 하면

$B'=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$

이때 $A'\cap B'=\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$이므로 $n(C)=3$이 되려면

$C=\{2, 4, 6\}$

즉, 두 집합 A, B는 2, 4, 6은 반드시 원소로 갖고 8 이상은 원소로 갖지 않아야 한다.

이를 만족시키려면

$36\le k<81$

따라서 자연수 k는 36, 37, 38, …, 80의 45개이다.

18 답 30

$\log_2(-x^2+ax+4)$에서 $f(x)=-x^2+ax+4$라 하면 진수의 조건에서

$f(x)>0$

$\log_2 f(x)=n$(n은 자연수)이라 하면

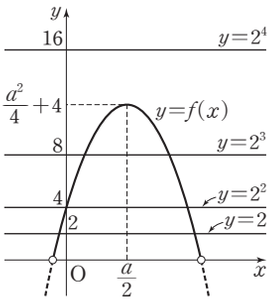
$f(x)=2^n$

$\log_2 f(x)$의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 x의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2^n$이 만나는 점의 개수와 같다.

$f(x)=-x^2+ax+4$

$=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+4$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 위로 볼록하고, 꼭짓점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}+4\right)$는 제1사분면에 있다.



$\log_2 f(x)$의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 x의 개수가 6이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 세 직선 $y=2$, $y=2^2$, $y=2^3$과 각각 서로 다른 두 점에서 만나고, 직선 $y=2^4$과 만나지 않아야 한다.

따라서 $2^3<\frac{a^2}{4}+4<2^4$이므로

$4<\frac{a^2}{4}<12$, $16<a^2<48$

이를 만족시키는 자연수 a의 값은 5, 6이므로 그 곱은

$5\times 6=30$

19 답 7120

$a^{50}=10^3$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log a^{50}=\log 10^3$

$50\log a=3$ $\therefore \log a=\frac{3}{50}$

$b^{80}=10^7$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log b^{80}=\log 10^7$

$80\log b=7$ $\therefore \log b=\frac{7}{80}$

$N=a^{19}b^{31}$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log N=\log a^{19}b^{31}$

$=19\log a+31\log b$

$=19\times\frac{3}{50}+31\times\frac{7}{80}$

$=\frac{1541}{400}=3.8525$

$=3+0.8525$

$=\log 10^3+\log 7.12$

$=\log 7120$

$\therefore N=7120$

20 답 ②

$\log a+\log b=3$에서

$\log ab=3$ $\therefore ab=10^3=1000$

$0<\log a-\log b<1$에서 $0<\log\frac{a}{b}<1$

$\log 1=0$, $\log 10=1$이므로

$\log 1<\log\frac{a}{b}<\log 10$ $\therefore 1<\frac{a}{b}<10$

$b>0$이므로 $b<a<10b$

$a<10b$에서 $ab<10b^2$

$1000<10b^2$, $b^2>100$

$\therefore b>10$ ($\because b>0$)

$ab=1000=2^3\times 5^3$이고 $10<b<a$이므로 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(2^3\times 5, 5^2)$, $(2\times 5^2, 2^2\times 5)$

즉, $a=40$, $b=25$ 또는 $a=50$, $b=20$이므로

$a+b=65$ 또는 $a+b=70$

따라서 $a+b$의 최댓값은 70이다.

21 답 7

(i) $1 \le n < 10$일 때,

$0 \le \log n < 1$이므로 $f(n)=0$

$f(3n+1)=2f(n)+1$에서 $f(3n+1)=1$

즉, $\log(3n+1)$의 정수 부분이 1이므로

$1 \le \log(3n+1) < 2$

$\log 10=1$, $\log 100=2$이므로

$\log 10 \le \log(3n+1) < \log 100$

따라서 $10 \le 3n+1 < 100$이므로

$9 \le 3n < 99$

$\therefore\ 3 \le n < 33$

그런데 $1 \le n < 10$이므로

$3 \le n < 10$

(ii) $10 \le n < 100$일 때,

$1 \le \log n < 2$이므로 $f(n)=1$

$f(3n+1)=2f(n)+1$에서 $f(3n+1)=3$

즉, $\log(3n+1)$의 정수 부분이 3이므로

$3 \le \log(3n+1) < 4$

$\log 1000=3$, $\log 10000=4$이므로

$\log 1000 \le \log(3n+1) < \log 10000$

따라서 $1000 \le 3n+1 < 10000$이므로

$999 \le 3n < 9999$

$\therefore\ 333 \le n < 3333$

그런데 $10 \le n < 100$이므로 n의 값이 존재하지 않는다.

(iii) $n=100$일 때,

$\log n=\log 100=2$이므로 $f(n)=2$

$\log(3n+1)=\log 301$이고 $\log 100 < \log 301 < \log 1000$이므로

$2 < \log 301 < 3$

$\therefore\ f(3n+1)=2$

이는 $f(3n+1)=2f(n)+1$을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $3 \le n < 10$

따라서 자연수 n은 3, 4, 5, …, 9의 7개이다.

22 답 ①

$f(n)=\dfrac{99999^2+199999}{(5^n-1)^3+3\times5^n(5^n-1)+1}$라 하면

$99999^2+199999=(10^5-1)^2+2\times10^5-1$

$=(10^5)^2=10^{10}$

$(5^n-1)^3+3\times5^n(5^n-1)+1$

$=5^{3n}-3\times5^{2n}+3\times5^n-1+3\times5^{2n}-3\times5^n+1$

$=5^{3n}$

$\therefore\ f(n)=\dfrac{10^{10}}{5^{3n}}=\dfrac{(2\times5)^{10}}{5^{3n}}=2^{10}\times5^{10-3n}$

$2^{10}\times5^{10-3n}$이 정수가 되려면 $10-3n$이 자연수이어야 하므로 n의 값은 1, 2, 3이다.

따라서 자연수 n의 최댓값은 3이므로

$m=3$

$\dfrac{99999^2+199999}{(5^{m-2}-1)^3+3\times5^{m-2}(5^{m-2}-1)+1}$는 $f(m-2)$의 값과 같으므로

$\dfrac{99999^2+199999}{(5^{m-2}-1)^3+3\times5^{m-2}(5^{m-2}-1)+1}=f(m-2)=f(1)$

$=2^{10}\times5^7$

$2^{10}\times5^7$에 상용로그를 취하면

$\log(2^{10}\times5^7)=\log(2^3\times10^7)$

$=7+3\log 2$

$=7+3\times0.301$

$=7.903$

따라서 $2^{10}\times5^7$은 8자리의 자연수이므로 $k=8$

$\therefore\ m+k=3+8=11$

23 답 4

$\dfrac{a^3}{b}$이 정수 부분이 16자리인 수이면 $\log\dfrac{a^3}{b}$의 정수 부분이 15이므로

$15 \le \log\dfrac{a^3}{b} < 16$

$\therefore\ 15 \le 3\log a-\log b < 16$ …… ㉠

$\dfrac{a}{b^3}$가 소수점 아래 셋째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나면

$\log\dfrac{a}{b^3}$의 정수 부분이 -3이므로

$-3 \le \log\dfrac{a}{b^3} < -2$

$\therefore\ -3 \le \log a-3\log b < -2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$12 \le 4\log a-4\log b < 14$

$3 \le \log a-\log b < \dfrac{7}{2}$

$\therefore\ 3 \le \log\dfrac{a}{b} < \dfrac{7}{2}$

따라서 $\log\dfrac{a}{b}$의 정수 부분은 3이므로 $n=3$

이때 $\log\dfrac{a}{b}$의 소수 부분이 0.25이므로

$\log\dfrac{a}{b}=3+0.25=\dfrac{13}{4}$

$\therefore\ \dfrac{a}{b}=10^{\frac{13}{4}}=10^3\times\sqrt[4]{10}$

이때 $\sqrt[4]{1} < \sqrt[4]{10} < \sqrt[4]{16}$이므로

$10^3\times1 < 10^3\times\sqrt[4]{10} < 10^3\times2$

$\therefore\ 1000 < \dfrac{a}{b} < 2000$

따라서 $\dfrac{a}{b}$의 최고 자리의 숫자는 1이므로 $k=1$

$\therefore\ n+k=3+1=4$

24 답 1.66

유소년층 인구 수는 매년 2 %씩 감소하므로 현재 유소년층 인구 수를 a라 하면 30년 후 유소년층 인구 수는

$a\left(1-\dfrac{2}{100}\right)^{30}=a\times0.98^{30}$

노년층 인구 수는 매년 3 %씩 증가하므로 현재 노년층 인구 수를 b라 하면 30년 후 노년층 인구 수는

$b\left(1+\dfrac{3}{100}\right)^{30}=b\times1.03^{30}$ …… 배점 20%

30년 후 노령화 지수가 현재의 k^3배이므로

$\dfrac{b\times1.03^{30}}{a\times0.98^{30}}=k^3\times\dfrac{b}{a}$ → (노령화 지수)=$\dfrac{\text{(노년층 인구 수)}}{\text{(유소년층 인구 수)}}$

$\therefore\ k^3=\dfrac{1.03^{30}}{0.98^{30}}$ …… 배점 30%

양변에 상용로그를 취하면

$\log k^3=\log\dfrac{1.03^{30}}{0.98^{30}}$

$3\log k=30\log 1.03-30\log 0.98$

$\log k=10\log 1.03-10\log 0.98$

$=10\log 1.03-10\log\dfrac{9.8}{10}$

$=10\log 1.03-10(\log 9.8-1)$

$=10\times 0.013-10\times(0.991-1)$

$=0.13+0.09=0.22$

$=\log 1.66$

$\therefore\ k=1.66$ ····· 배점 50%

step 3 최고난도 문제 | 32~33쪽

01 ② 02 −1 03 ① 04 78 05 79 06 ③

07 7 08 ③

01 답 ②

1단계 $\log_2 a$의 조건 알기

(나)에서

$\log_a n\times\log_n(n\times a^2)=\log_a n\times\dfrac{\log_a(n\times a^2)}{\log_a n}$

$=\log_a(n\times a^2)$

$=\log_a n+\log_a a^2$

$=\dfrac{\log_2 n}{\log_2 a}+2$

즉, $\dfrac{\log_2 n}{\log_2 a}+2$가 자연수이므로 $\dfrac{\log_2 n}{\log_2 a}$은 −1 이상의 정수이다.

(가)에서 $\log_2 a$는 0이 아닌 정수이고 $\log_2 n$은 자연수이므로 $\log_2 a$는 $-\log_2 n$이거나 $\log_2 n$의 양의 약수이다.

2단계 n의 최솟값 구하기

$f(n)=5$이면 $\log_2 n$의 양의 약수의 개수가 4이다.

양의 약수의 개수가 4인 자연수 중 가장 작은 값은 $2\times 3=6$이므로

$\log_2 n=6$에서 $n=2^6=64$

따라서 n의 최솟값은 64이다.

idea

02 답 −1

1단계 $4(\log_x y-\log_y x)$의 값의 범위 구하기

$\log_x y=t$ (t는 유리수)로 놓으면

$4(\log_x y-\log_y x)=4\left(\log_x y-\dfrac{1}{\log_x y}\right)=4\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$

$\log_x y=2+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\dfrac{a_3}{2^3}+\cdots+\dfrac{a_{100}}{2^{100}}$에서

$2\le\log_x y<3$ $\therefore\ 2\le t<3$

또 $\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{t}\le\dfrac{1}{2}$이므로 $\dfrac{3}{2}\le t-\dfrac{1}{t}<\dfrac{8}{3}$

$\therefore\ 6\le 4\left(t-\dfrac{1}{t}\right)<\dfrac{32}{3}$ ····· ㉠

2단계 $\log_x y$의 값 구하기

$4(\log_x y-\log_y x)=4\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$은 자연수이므로

$4\left(t-\dfrac{1}{t}\right)=m$ (m은 자연수)이라 하면

$4t^2-mt-4=0$

$\therefore\ t=\dfrac{m\pm\sqrt{m^2+64}}{8}$ ····· ㉡

이때 $t=\log_x y$는 유리수이므로 m^2+64는 제곱수이어야 한다.

$m^2+64=s^2$ (s는 자연수)이라 하면

$s^2-m^2=64$

$(s+m)(s-m)=64$

$0<s-m<s+m$이므로 순서쌍 $(s+m,\ s-m)$은

$(64,\ 1),\ (32,\ 2),\ (16,\ 4)$

(i) $s+m=64$, $s-m=1$일 때,

두 식을 연립하여 풀면

$s=\dfrac{65}{2}$, $m=\dfrac{63}{2}$

이는 s, m이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $s+m=32$, $s-m=2$일 때,

두 식을 연립하여 풀면

$s=17$, $m=15$

그런데 ㉠에서 $6\le m<\dfrac{32}{3}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $s+m=16$, $s-m=4$일 때,

두 식을 연립하여 풀면

$s=10$, $m=6$

(i), (ii), (iii)에서 $m=6$

$m=6$을 ㉡에 대입하면

$t=\dfrac{6\pm\sqrt{36+64}}{8}$

$\therefore\ t=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $t=2$

그런데 $2\le t<3$이므로 $t=2$

3단계 $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)+\cdots+(a_{100}-b_{100})$의 값 구하기

따라서 $\log_x y=2$이므로

$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_{100}=0$

$\log_y x=\dfrac{1}{\log_x y}=\dfrac{1}{2}$이므로

$b_1=1$, $b_2=b_3=b_4=\cdots=b_{100}=0$

$\therefore\ (a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)+\cdots+(a_{100}-b_{100})=-b_1=-1$

다른 풀이 **2단계** $\log_x y$의 값 구하기

㉠에서 $4\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$은 자연수이므로

(i) $4\left(t-\dfrac{1}{t}\right)=6$일 때,

$4t^2-6t-4=0$, $2t^2-3t-2=0$

$(2t+1)(t-2)=0$

$\therefore\ t=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $t=2$

그런데 $2\le t<3$이므로 $t=2$

(ii) $4\left(t-\dfrac{1}{t}\right)=7$일 때,

$4t^2-7t-4=0$ $\therefore\ t=\dfrac{7\pm\sqrt{113}}{8}$

이는 t가 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $4\left(t-\frac{1}{t}\right)=8$일 때,

$4t^2-8t-4=0$, $t^2-2t-1=0$

$\therefore\ t=1\pm\sqrt{2}$

이는 t가 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $4\left(t-\frac{1}{t}\right)=9$일 때,

$4t^2-9t-4=0$ $\quad\therefore\ t=\frac{9\pm\sqrt{145}}{8}$

이는 t가 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(v) $4\left(t-\frac{1}{t}\right)=10$일 때,

$4t^2-10t-4=0$, $2t^2-5t-2=0$

$\therefore\ t=\frac{5\pm\sqrt{41}}{4}$

이는 t가 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(v)에서 $t=2$

03 답 ①

1단계 a, b**를 밑이 같은 지수 꼴로 나타내기**

집합 $A=\{k\,|\,k=\log_a b,\ k$는 유리수$\}$에서 $a<b$이고 k가 유리수이므로

$\log_a b=\frac{q}{p}$(p, q는 서로소인 자연수)라 하면 $n(A)$의 값은 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수와 같다.

$\log_a b=\frac{q}{p}$에서

$b=a^{\frac{q}{p}}$, $a=b^{\frac{p}{q}}$

a, b, p, q가 모두 자연수이므로 1보다 큰 자연수 c에 대하여

$a=c^p$, $b=c^q$으로 나타낼 수 있다.

2단계 $\log_a b=\frac{q}{p}$**를 만족시키는 순서쌍** $(p,\ q)$**의 개수 구하기**

$4<a<b<200$에서

$4<c^p<c^q<200$

(i) $c=2$일 때,

$4<2^p<2^q<200$에서

$2^2<2^p<2^q\le 2^7<200$ $\quad\therefore\ 2<p<q\le 7$

이를 만족시키는 서로소인 자연수 p, q의 순서쌍 $(p,\ q)$는 $(3,\ 4)$, $(3,\ 5)$, $(3,\ 7)$, $(4,\ 5)$, $(4,\ 7)$, $(5,\ 6)$, $(5,\ 7)$, $(6,\ 7)$이다.

(ii) $c=3$일 때,

$4<3^p<3^q<200$에서

$4<3^2\le 3^p<3^q\le 3^4<200$ $\quad\therefore\ 2\le p<q\le 4$

이를 만족시키는 서로소인 자연수 p, q의 순서쌍 $(p,\ q)$는 $(2,\ 3)$, $(3,\ 4)$이다.

(iii) $c=4$일 때,

$4<4^p<4^q<200$에서

$4^1<4^p<4^q\le 4^3<200$ $\quad\therefore\ 1<p<q\le 3$

이를 만족시키는 서로소인 자연수 p, q의 순서쌍 $(p,\ q)$는 $(2,\ 3)$이다.

(iv) $c=5$일 때,

$4<5^p<5^q<200$에서

$4<5^1\le 5^p<5^q\le 5^3<200$ $\quad\therefore\ 1\le p<q\le 3$

이를 만족시키는 서로소인 자연수 p, q의 순서쌍 $(p,\ q)$는 $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(2,\ 3)$이다.

(v) $6\le c\le 14$일 때,

$4<c^p<c^q<200$에서

$4<c^1\le c^p<c^q\le c^2<200<c^3$ $\quad\therefore\ 1\le p<q\le 2$

이를 만족시키는 서로소인 자연수 p, q의 순서쌍 $(p,\ q)$는 $(1,\ 2)$이다.

(vi) $c\ge 15$일 때,

$4<c^p<c^q<200$에서

$4<c^1\le c^p<c^q<200<c^2$

이를 만족시키는 서로소인 자연수 p, q의 순서쌍 $(p,\ q)$는 존재하지 않는다.

(i)~(vi)에서 서로 다른 순서쌍 $(p,\ q)$는 $(1,\ 2)$, $(1,\ 3)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 4)$, $(3,\ 5)$, $(3,\ 7)$, $(4,\ 5)$, $(4,\ 7)$, $(5,\ 6)$, $(5,\ 7)$, $(6,\ 7)$의 11개이다.

3단계 $n(A)$**의 값 구하기**

$\therefore\ n(A)=11$

04 답 78

1단계 a**의 값의 범위 구하기**

$\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)$이므로

$na-a^2=nb-b^2$

$b^2-a^2-n(b-a)=0$

$(b-a)(b+a)-n(b-a)=0$

$(b-a)(b+a-n)=0$

이때 $b-a>0$이므로 $b+a-n=0$

$\therefore\ b=n-a$

$0<b-a\le\frac{n}{2}$에서

$0<(n-a)-a\le\frac{n}{2}$, $0<n-2a\le\frac{n}{2}$

$-n<-2a\le-\frac{n}{2}$

$\therefore\ \frac{n}{4}\le a<\frac{n}{2}$

2단계 n^2**의 값의 범위 구하기**

한편 $\log_2(na-a^2)$이 자연수이므로

$\log_2(na-a^2)=k$(k는 자연수)라 하면

$na-a^2=2^k$

$a^2-na+2^k=0$

$\therefore\ a=\frac{n\pm\sqrt{n^2-4\times 2^k}}{2}=\frac{n\pm\sqrt{n^2-2^{k+2}}}{2}$

그런데 $\frac{n}{4}\le a<\frac{n}{2}$이므로 $a=\frac{n-\sqrt{n^2-2^{k+2}}}{2}$

이를 $\frac{n}{4}\le a<\frac{n}{2}$에 대입하면

$\frac{n}{4}\le\frac{n-\sqrt{n^2-2^{k+2}}}{2}<\frac{n}{2}$

$\frac{n}{2}\le n-\sqrt{n^2-2^{k+2}}<n$

$-\frac{n}{2}\le-\sqrt{n^2-2^{k+2}}<0$

$0<\sqrt{n^2-2^{k+2}}\le\frac{n}{2}$

각 변을 제곱하면

$0<n^2-2^{k+2}\le\frac{n^2}{4}$

$0<n^2-2^{k+2}$에서 $n^2>2^{k+2}$ …… ㉠

$n^2-2^{k+2}\le\frac{n^2}{4}$에서 $\frac{3}{4}n^2\le 2^{k+2}$

$\therefore n^2\le\frac{2^{k+4}}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2^{k+2}<n^2\le\frac{2^{k+4}}{3}$ …… ㉢

3단계 n**의 값의 합 구하기**

k는 자연수, n은 20 이하의 자연수이므로

(i) $k=1$일 때,

㉢에서 $8<n^2\le\frac{32}{3}$이므로 자연수 n의 값은 3이다.

(ii) $k=2$일 때,

㉢에서 $16<n^2\le\frac{64}{3}$이므로 이를 만족시키는 자연수 n의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $k=3$일 때,

㉢에서 $32<n^2\le\frac{128}{3}$이므로 자연수 n의 값은 6이다.

(iv) $k=4$일 때,

㉢에서 $64<n^2\le\frac{256}{3}$이므로 자연수 n의 값은 9이다.

(v) $k=5$일 때,

㉢에서 $128<n^2\le\frac{512}{3}$이므로 자연수 n의 값은 12, 13이다.

(vi) $k=6$일 때,

㉢에서 $256<n^2\le\frac{1024}{3}$이므로 자연수 n의 값은 17, 18이다.

(vii) $k\ge 7$일 때,

㉢에서 $n^2>512$이므로 이를 만족시키는 20 이하의 자연수 n의 값은 존재하지 않는다.

(i)~(vii)에서 모든 자연수 n의 값의 합은

$3+6+9+12+13+17+18=78$

05 답 79

1단계 $f(a)$, $g(b)$**의 값 구하기**

$10^{f(k)+g(k)}=k$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log 10^{f(k)+g(k)}=\log k$

$\therefore \log k=f(k)+g(k)$

이때 $f(k)$는 정수이고 $0\le g(k)<1$이므로 $f(k)$는 $\log k$의 정수 부분, $g(k)$는 $\log k$의 소수 부분이다.

㈎의 $f(a)+g(b)=\frac{9}{4}$에서

$f(a)+g(b)=2+\frac{1}{4}$

$\therefore f(a)=2,\ g(b)=\frac{1}{4}$

2단계 $\log a$**의 소수 부분 구하기**

$\log a=2+\alpha\ (0\le\alpha<1)$, $\log b=n+\frac{1}{4}$(n은 정수)이라 하자.

$\log\frac{1}{a}=-\log a=-2-\alpha=-3+(1-\alpha)$이므로

㈏의 $g(a)=g\left(\frac{1}{a}\right)+g(b)$에서

$\alpha=(1-\alpha)+\frac{1}{4}$

$2\alpha=\frac{5}{4}$ $\therefore \alpha=\frac{5}{8}$

3단계 $\log b$**의 정수 부분 구하기**

$\log a^5=5\log a=5\left(2+\frac{5}{8}\right)=\frac{105}{8}=13+\frac{1}{8}$,

$\log\frac{1}{b}=-\log b=-n-\frac{1}{4}=-n-1+\frac{3}{4}$이므로

㈐의 $f(b)=f(a^5)+f\left(\frac{1}{b}\right)$에서

$n=13+(-n-1)$

$2n=12$ $\therefore n=6$

4단계 $p+q$**의 값 구하기**

$\log a=2+\frac{5}{8}$, $\log b=6+\frac{1}{4}$이므로

$\log ab=\log a+\log b=2+\frac{5}{8}+6+\frac{1}{4}=\frac{71}{8}$

따라서 $p=8$, $q=71$이므로

$p+q=79$

06 답 ③

1단계 $p(4)$, $p(8)$**의 값 구하기**

$f(x)=[\log x]$, $g(x)=\log x-[\log x]$이므로 $f(x)$는 $\log x$의 정수 부분, $g(x)$는 $\log x$의 소수 부분이다.

(i) $1\le x<10$일 때,

$0\le\log x<1$이므로

$f(x)=0$, $g(x)=\log x$

$f(m)\le f(x)$에서 $f(m)\le 0$이고 m이 자연수이므로

$f(m)=0$

이를 만족시키는 자연수 m의 값은 1, 2, 3, …, 9이다.

이때 $h(m)=5f(m)+m=m$이므로 $g(h(m))\le g(x)$에서

$g(m)\le g(x)$

→ $g(1)=0$, $g(2)=\log 2$, $g(3)=\log 3$, …, $g(9)=\log 9$

$g(m)\le g(4)=\log 4$를 만족시키는 자연수 m의 값은 1, 2, 3, 4의 4개이므로

$p(4)=4$

$g(m)\le g(8)=\log 8$을 만족시키는 자연수 m의 값은 1, 2, 3, …, 8의 8개이므로

$p(8)=8$

2단계 $p(12)$, $p(16)$, $p(20)$**의 값 구하기**

(ii) $10\le x<100$일 때,

$1\le\log x<2$이므로

$f(x)=1$, $g(x)=\log x-1=\log\frac{x}{10}$

$f(m)\le f(x)$에서 $f(m)\le 1$이고 m이 자연수이므로

$f(m)=0$ 또는 $f(m)=1$

ⓘ $f(m)=0$일 때,

$f(m)=0$을 만족시키는 자연수 m의 값은 1, 2, 3, …, 9이다.

이때 $h(m)=5f(m)+m=m$이므로 $g(h(m))\le g(x)$에서

$g(m)\le g(x)$

→ $g(1)=0$, $g(2)=\log 2$, $g(3)=\log 3$, …, $g(9)=\log 9$

$g(m)\le g(12)=\log 1.2$를 만족시키는 자연수 m의 값은 1의 1개이다.

$g(m)\le g(16)=\log 1.6$을 만족시키는 자연수 m의 값은 1의 1개이다.

$g(m)\le g(20)=\log 2$를 만족시키는 자연수 m의 값은 1, 2의 2개이다.

ⅱ $f(m)=1$일 때,

$f(m)=1$을 만족시키는 자연수 m의 값은 10, 11, 12, …, 99이다.

이때 $h(m)=5f(m)+m=m+5$이므로 $g(h(m))\le g(x)$에서

$g(m+5)\le g(x)$

→ $g(10+5)=\log 1.5$, $g(11+5)=\log 1.6$, …, $g(94+5)=\log 9.9$

또 $100\le x<1000$일 때 $g(x)=\log x-2=\log\frac{x}{100}$이므로

$g(95+5)=0$, $g(96+5)=\log 1.01$, …, $g(99+5)=\log 1.04$

$g(m+5)\le g(12)=\log 1.2$를 만족시키는 자연수 m의 값은 95, 96, 97, 98, 99의 5개이다.

$g(m+5)\le g(16)=\log 1.6$을 만족시키는 자연수 m의 값은 10, 11, 95, 96, 97, 98, 99의 7개이다.

$g(m+5)\le g(20)=\log 2$를 만족시키는 자연수 m의 값은 10, 11, …, 15, 95, 96, 97, 98, 99의 11개이다.

ⅰ, ⅱ에서

$p(12)=1+5=6$

$p(16)=1+7=8$

$p(20)=2+11=13$

3단계 $p(4)+p(8)+p(12)+p(16)+p(20)$**의 값 구하기**

(ⅰ), (ⅱ)에서

$p(4)+p(8)+p(12)+p(16)+p(20)=4+8+6+8+13=39$

07 답 7

1단계 k**의 값이 유일할 조건 이해하기**

$[\sqrt[n]{a^3b}]$의 값이 k자리의 자연수이므로 $\sqrt[n]{a^3b}$는 정수 부분이 k자리인 양수이다.

이때 k가 유일하게 존재하려면 $\log\sqrt[n]{a^3b}$의 정수 부분이 유일하게 존재해야 한다.

2단계 $\log\sqrt[n]{a^3b}$**의 값의 범위 구하기**

$\log a^2b=15$에서

$2\log a+\log b=15$ $\therefore\ \log b=15-2\log a$

$\therefore\ \log\sqrt[n]{a^3b}=\frac{1}{n}\log a^3b=\frac{1}{n}(3\log a+\log b)$

$=\frac{1}{n}(3\log a+15-2\log a)=\frac{1}{n}(\log a+15)$

$0\le\log a\le 5$이므로

$\frac{15}{n}\le\frac{1}{n}(\log a+15)\le\frac{20}{n}$ $\therefore\ \frac{15}{n}\le\log\sqrt[n]{a^3b}\le\frac{20}{n}$ …… ㉠

3단계 n**의 최솟값 구하기**

(ⅰ) $2\le n\le 5$일 때,

$\frac{20}{n}-\frac{15}{n}=\frac{5}{n}\ge 1$이므로 ㉠에 반드시 하나 이상의 자연수가 포함된다.

즉, $\log\sqrt[n]{a^3b}$의 정수 부분이 바뀌는 경우가 있으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $n=6$일 때,

㉠에서 $\frac{5}{2}\le\log\sqrt[n]{a^3b}\le\frac{10}{3}$

즉, $\log\sqrt[n]{a^3b}$의 정수 부분이 2 또는 3이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $n=7$일 때,

㉠에서 $\frac{15}{7}\le\log\sqrt[n]{a^3b}\le\frac{20}{7}$

$\log\sqrt[n]{a^3b}$의 정수 부분은 항상 2이므로 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 자연수 n의 최솟값은 7이다.

08 답 ③

1단계 $ab=100$**일 때, 순서쌍** (a, b)**의 개수 구하기**

ab가 세 자리의 자연수이므로 $100\le ab<1000$

(ⅰ) $ab=100$일 때,

$\log\frac{1}{ab}=\log\frac{1}{100}=\log 10^{-2}=-2$이므로

$\left[\log\frac{1}{ab}\right]=-2$

$[\log a]-[\log b]+\left[\log\frac{1}{ab}\right]=-2$에서

$[\log a]-[\log b]-2=-2$

$\therefore\ [\log a]=[\log b]$ …… ㉠

ⅰ $1\le a<10$일 때,

$0\le\log a<1$이므로 $[\log a]=0$

$ab=100$에서 $10<b\le 100$이므로

$1<\log b\le 2$

$\therefore\ [\log b]=1$ 또는 $[\log b]=2$

이는 ㉠을 만족시키지 않는다.

ⅱ $a=10$일 때,

$\log a=\log 10=1$이므로 $[\log a]=1$

$ab=100$에서 $b=10$이므로

$\log b=\log 10=1$

$\therefore\ [\log b]=1$

이는 ㉠을 만족시킨다.

ⅲ $10<a<100$일 때,

$1<\log a<2$이므로 $[\log a]=1$

$ab=100$에서 $1<b<10$이므로

$0<\log b<1$

$\therefore\ [\log b]=0$

이는 ㉠을 만족시키지 않는다.

ⅳ $a=100$일 때,

$\log a=\log 100=2$이므로 $[\log a]=2$

$ab=100$에서 $b=1$이므로

$\log b=\log 1=0$

$\therefore\ [\log b]=0$

이는 ㉠을 만족시키지 않는다.

ⅰ~ⅳ에서 순서쌍 (a, b)는 $(10, 10)$의 1개이다.

2단계 $100<ab<1000$**일 때, 순서쌍** (a, b)**의 개수 구하기**

(ⅱ) $100<ab<1000$일 때,

$2<\log ab<3$이므로

$-3<-\log ab<-2$

$\therefore\ -3<\log\frac{1}{ab}<-2$

$\therefore\ \left[\log\frac{1}{ab}\right]=-3$

$[\log a]-[\log b]+\left[\log\frac{1}{ab}\right]=-2$에서

$[\log a]-[\log b]-3=-2$

$\therefore\ [\log b]=[\log a]-1$ …… ㉡

자연수 b에 대하여 $[\log b]\ge 0$이므로

$[\log a]-1\ge 0$ $\therefore\ [\log a]\ge 1$

그런데 $[\log a]\ge 2$이면 $[\log b]\ge 1$이므로

$a\ge 100$, $b\ge 10$

이는 $100<ab<1000$을 만족시키지 않는다.

따라서 $[\log a]=1$이므로

$1\le\log a<2$

$\therefore\ 10\le a<100$

또 ㉡에서 $[\log b]=0$이므로

$0\le\log b<1$

$\therefore\ 1\le b<10$

ⓘ $b=1$일 때,

$100<ab<1000$에서 $100<a<1000$

그런데 $10\le a<100$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

ⓘⓘ $b=2$일 때,

$100<ab<1000$에서 $100<2a<1000$

$\therefore\ 50<a<500$

그런데 $10\le a<100$이므로

$50<a<100$

a의 값은 51, 52, …, 99이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 49이다.

ⓘⓘⓘ $b=3$일 때,

ⓘⓘ와 같은 방법으로 하면

$\frac{100}{3}<a<100$

a의 값은 34, 35, …, 99이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 66이다.

ⓘⓥ $b=4$일 때,

ⓘⓘ와 같은 방법으로 하면

$25<a<100$

a의 값은 26, 27, …, 99이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 74이다.

ⓥ $b=5$일 때,

ⓘⓘ와 같은 방법으로 하면

$20<a<100$

a의 값은 21, 22, …, 99이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 79이다.

ⓥⓘ $b=6$일 때,

ⓘⓘ와 같은 방법으로 하면

$\frac{50}{3}<a<100$

a의 값은 17, 18, …, 99이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 83이다.

ⓥⓘⓘ $b=7$일 때,

ⓘⓘ와 같은 방법으로 하면

$\frac{100}{7}<a<100$

a의 값은 15, 16, …, 99이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 85이다.

ⓥⓘⓘⓘ $b=8$일 때,

ⓘⓘ와 같은 방법으로 하면

$\frac{25}{2}<a<100$

a의 값은 13, 14, …, 99이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 87이다.

ⓘⓧ $b=9$일 때,

ⓘⓘ와 같은 방법으로 하면

$\frac{100}{9}<a<100$

a의 값은 12, 13, …, 99이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 88이다.

ⓘ~ⓘⓧ에서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$49+66+74+79+83+85+87+88=611$

3단계 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$1+611=612$

03 지수함수

step 1 핵심 문제 | 34~35쪽

01 ①	02 ④	03 4	04 ②	05 9	06 ⑤
07 ③	08 ④	09 5	10 ①	11 $2\sqrt{5}$	12 ②

01 답 ①

$f(\alpha)=3$, $f(\beta)=12$에서 $a^{\alpha}=3$, $a^{\beta}=12$이므로

$f\left(\frac{5\alpha+3\beta}{n}\right)=a^{\frac{5\alpha+3\beta}{n}}=a^{\frac{5\alpha}{n}}\times a^{\frac{3\beta}{n}}$

$=(a^{\alpha})^{\frac{5}{n}}\times(a^{\beta})^{\frac{3}{n}}$

$=3^{\frac{5}{n}}\times 12^{\frac{3}{n}}=3^{\frac{5}{n}}\times(2^2\times 3)^{\frac{3}{n}}$

$=3^{\frac{5}{n}}\times 2^{\frac{6}{n}}\times 3^{\frac{3}{n}}=2^{\frac{6}{n}}\times 3^{\frac{8}{n}}$

$f\left(\frac{5\alpha+3\beta}{n}\right)$의 값이 자연수가 되려면 $2^{\frac{6}{n}}$, $3^{\frac{8}{n}}$이 모두 자연수이어야 한다.

즉, $\frac{6}{n}$, $\frac{8}{n}$이 모두 자연수이어야 하므로 n은 6과 8의 공약수이어야 한다.

따라서 자연수 n의 값은 1, 2이므로 그 합은

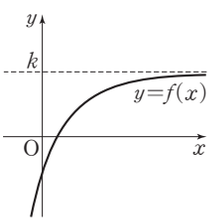
$1+2=3$

02 답 ④

$f(x)=-2^{4-3x}+k=-2^{-3\left(x-\frac{4}{3}\right)}+k$

$=-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-\frac{4}{3}}+k$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{4}{3}$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.



이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려면 $f(0)\le 0$이어야 하므로

$-2^4+k\le 0$

$\therefore\ k\le 16$

따라서 자연수 k의 최댓값은 16이다.

03 답 4

$A(a, 4^a)$, $B(b, 4^b)$이고, 직선 AB의 기울기가 2이므로

$\frac{4^b-4^a}{b-a}=2$

$\therefore\ b-a=\frac{1}{2}(4^b-4^a)$ …… ㉠

또 $\overline{AB}=2\sqrt{5}$에서 $\overline{AB}^2=20$이므로

$(b-a)^2+(4^b-4^a)^2=20$

㉠을 대입하면

$\frac{1}{4}(4^b-4^a)^2+(4^b-4^a)^2=20$

$\frac{5}{4}(4^b-4^a)^2=20$

$(4^b-4^a)^2=16$

이때 $a<b$에서 $4^a<4^b$이므로

$4^b-4^a=4$

04 답 ②

$a>0$이므로 $a<ab$에서 양변을 a로 나누면

$1<b$ $\therefore$ $0<a<1<b$

$0<a<1$이고 $a<b$이므로

$a^b<a^a$ …… ㉠

$b>1$이고 $a<b$이므로

$b^a<b^b$ …… ㉡

$a>0$, $b>0$이고 $a<b$이므로

$a^a<b^a$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $a^b<a^a<b^a<b^b$

05 답 9

(i) $\frac{3}{a}>1$, 즉 $0<a<3$일 때,

함수 $f(x)=\left(\frac{3}{a}\right)^x$의 밑이 1보다 크므로 $-2\le x\le 2$에서 $x=-2$일 때 최솟값 $\left(\frac{3}{a}\right)^{-2}$을 갖는다.

즉, $\left(\frac{3}{a}\right)^{-2}=\frac{1}{4}$이므로 $\frac{a^2}{9}=\frac{1}{4}$

$a^2=\frac{9}{4}$ $\therefore$ $a=\frac{3}{2}$ ($\because$ $0<a<3$) ····· 배점 30%

(ii) $\frac{3}{a}=1$, 즉 $a=3$일 때,

$f(x)=1$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이 될 수 없다. ····· 배점 20%

(iii) $0<\frac{3}{a}<1$, 즉 $a>3$일 때,

함수 $f(x)=\left(\frac{3}{a}\right)^x$의 밑이 1보다 작으므로 $-2\le x\le 2$에서 $x=2$일 때 최솟값 $\left(\frac{3}{a}\right)^2$을 갖는다.

즉, $\left(\frac{3}{a}\right)^2=\frac{1}{4}$이므로 $\frac{9}{a^2}=\frac{1}{4}$

$a^2=36$ $\therefore$ $a=6$ ($\because$ $a>3$) ····· 배점 30%

(i), (ii), (iii)에서 모든 양수 a의 값의 곱은

$\frac{3}{2}\times 6=9$ ····· 배점 20%

06 답 ⑤

$y=2^{x+3}-4^{x+1}=-4\times(2^x)^2+8\times 2^x$

$2^x=t$ ($t>0$)로 놓으면 $-1\le x\le 2$에서

$2^{-1}\le t\le 2^2$ $\therefore$ $\frac{1}{2}\le t\le 4$

이때 주어진 함수는

$y=-4t^2+8t=-4(t-1)^2+4$

따라서 $\frac{1}{2}\le t\le 4$에서 $t=1$일 때 최댓값이 4, $t=4$일 때 최솟값이 -32이므로

$M=4$, $m=-32$

$\therefore$ $M-m=36$

07 답 ③

$(3\sqrt{3})^{x^2}=\left(\frac{1}{9}\right)^{2x-\frac{3}{4}}$에서 $(3^{\frac{3}{2}})^{x^2}=(3^{-2})^{2x-\frac{3}{4}}$

$3^{\frac{3}{2}x^2}=3^{-4x+\frac{3}{2}}$

즉, $\frac{3}{2}x^2=-4x+\frac{3}{2}$이므로 $3x^2+8x-3=0$

$(x+3)(3x-1)=0$ $\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

이때 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=-3$, $\beta=\frac{1}{3}$

$\therefore$ $\beta-\alpha=\frac{10}{3}$

08 답 ④

$4^x-k\times 2^{x+1}+16=0$에서 $(2^x)^2-2k\times 2^x+16=0$

$2^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$t^2-2kt+16=0$ …… ㉠

주어진 방정식이 오직 하나의 실근 α를 가지므로 이차방정식 ㉠은 $t>0$에서 한 실근만 갖는다. 즉, ㉠은 양수인 중근을 갖거나 양수인 근과 음수인 근을 각각 1개씩 갖는다.

이때 이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $16>0$이므로 두 근의 부호가 같다.

따라서 이차방정식 ㉠이 양수인 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-16=0$

$(k+4)(k-4)=0$ $\therefore$ $k=-4$ 또는 $k=4$

이때 이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $2k$이고, ㉠이 양수인 중근을 가지므로

$2k>0$

즉, $k>0$이므로 $k=4$

이를 ㉠에 대입하면 $t^2-8t+16=0$

$(t-4)^2=0$ $\therefore$ $t=4$

즉, $2^x=2^2$이므로 $x=2$ $\therefore$ $\alpha=2$

$\therefore$ $k+\alpha=4+2=6$

개념 NOTE

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 할 때

(1) $D>0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $D=0$이면 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.

(3) $D<0$이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

09 답 5

$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2}>\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}x+6}$에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2}>\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}x+6}$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2}>\left(\frac{1}{5}\right)^{x+12}$

밑이 1보다 작으므로

$x^2<x+12$, $x^2-x-12<0$

$(x+3)(x-4)<0$ $\therefore$ $-3<x<4$

$\therefore$ $A=\{x\mid -3<x<4\}$

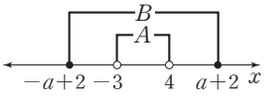
$3^{|x-2|}\le 3^a$에서 밑이 1보다 크므로

$|x-2|\le a$

$-a\le x-2\le a$ $\therefore$ $-a+2\le x\le a+2$

$\therefore$ $B=\{x\mid -a+2\le x\le a+2\}$

이때 $A\cap B=A$, 즉 $A\subset B$를 만족시키려면



$-a+2\le -3$, $a+2\ge 4$

$\therefore$ $a\ge 5$

따라서 양수 a의 최솟값은 5이다.

10 답 ①

$(2^{2x}-2^{x+1}-8)(3^{2x}-2\times3^{x+2}-243)\le0$에서

$\{(2^x)^2-2\times2^x-8\}\{(3^x)^2-18\times3^x-243\}\le0$

$2^x=s\,(s>0)$, $3^x=t\,(t>0)$로 놓으면

$(s^2-2s-8)(t^2-18t-243)\le0$

$(s+2)(s-4)(t+9)(t-27)\le0$

이때 $s+2>0$, $t+9>0$이므로

$(s-4)(t-27)\le0$

$\therefore\ s-4\ge0,\ t-27\le0$ 또는 $s-4\le0,\ t-27\ge0$

$\therefore\ s\ge4,\ t\le27$ 또는 $s\le4,\ t\ge27$

(i) $s\ge4,\ t\le27$일 때,

$s\ge4$에서 $2^x\ge2^2$

밑이 1보다 크므로 $x\ge2$ …… ㉠

$t\le27$에서 $3^x\le3^3$

밑이 1보다 크므로 $x\le3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2\le x\le3$

(ii) $s\le4,\ t\ge27$일 때,

$s\le4$에서 $2^x\le2^2$

밑이 1보다 크므로 $x\le2$ …… ㉢

$t\ge27$에서 $3^x\ge3^3$

밑이 1보다 크므로 $x\ge3$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $2\le x\le3$

따라서 자연수 x의 값은 2, 3이므로 그 합은

$2+3=5$

11 답 $2\sqrt{5}$

두 함수 $f(x)=3^x+2$, $g(x)=3^{x+1}$의 그래프가 만나는 점 P의 x좌표를 구하면

$3^x+2=3^{x+1}$, $3^x+2=3\times3^x$

$3^x=1$ $\therefore\ x=0$

$\therefore$ P(0, 3)

두 점 A$(a,\ 3^a+2)$, B$(b,\ 3^{b+1})$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{3^a+2+3^{b+1}}{2}\right)$

두 점 A, B의 중점이 P이므로

$\dfrac{a+b}{2}=0$에서 $a+b=0$ $\therefore\ b=-a$ …… ㉠

$\dfrac{3^a+2+3^{b+1}}{2}=3$에서 $3^a+3\times3^b-4=0$

$\therefore\ 3^a+3\times3^{-a}-4=0$ ($\because$ ㉠)

$3^a=t\,(t>0)$로 놓으면

$t+\dfrac{3}{t}-4=0$, $t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$ $\therefore\ t=1$ 또는 $t=3$

즉, $3^a=1$ 또는 $3^a=3$이므로

$a=0$ 또는 $a=1$

그런데 $a=0$이면 세 점 A, B, P의 좌표가 모두 같으므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ a=1$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-1$

따라서 A(1, 5), B(−1, 1)이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$

12 답 ②

$Q(2)=Q_0(1-2^{-\frac{2}{a}})$, $Q(4)=Q_0(1-2^{-\frac{4}{a}})$이므로

$$\frac{Q(4)}{Q(2)}=\frac{Q_0(1-2^{-\frac{4}{a}})}{Q_0(1-2^{-\frac{2}{a}})}=\frac{1-(2^{-\frac{2}{a}})^2}{1-2^{-\frac{2}{a}}}$$

$$=\frac{(1+2^{-\frac{2}{a}})(1-2^{-\frac{2}{a}})}{1-2^{-\frac{2}{a}}}=1+2^{-\frac{2}{a}}$$

즉, $1+2^{-\frac{2}{a}}=\dfrac{3}{2}$이므로 $2^{-\frac{2}{a}}=\dfrac{1}{2}$, $2^{-\frac{2}{a}}=2^{-1}$

따라서 $-\dfrac{2}{a}=-1$이므로 $a=2$

step 2 고난도 문제

| 36~40쪽

01 130	02 49	03 ⑤	04 50	05 ④	06 $\sqrt{2}$
07 ④	08 ①	09 ⑤	10 $-\dfrac{1}{2}$	11 ②	12 2
13 ③	14 ⑤	15 2	16 ④	17 ②	18 12
19 3	20 ③	21 $\sqrt{2}<a<8$		22 ③	23 ①
24 14	25 ⑤				

01 답 130

$f(p)f(q)=14$에서 $(a^{2p}+a^{-2p})(a^{2q}+a^{-2q})=14$

$a^{2p+2q}+a^{2p-2q}+a^{-2p+2q}+a^{-2p-2q}=14$ …… ㉠ ····· 배점 20%

$g(p)g(q)=8$에서 $(a^{2p}-a^{-2p})(a^{2q}-a^{-2q})=8$

$a^{2p+2q}-a^{2p-2q}-a^{-2p+2q}+a^{-2p-2q}=8$ …… ㉡ ····· 배점 20%

㉠+㉡을 하면 $2a^{2p+2q}+2a^{-2p-2q}=22$

$a^{2(p+q)}+a^{-2(p+q)}=11$ $\therefore\ f(p+q)=11$ ····· 배점 20%

㉠−㉡을 하면 $2a^{2p-2q}+2a^{-2p+2q}=6$

$a^{2(p-q)}+a^{-2(p-q)}=3$ $\therefore\ f(p-q)=3$ ····· 배점 20%

$\therefore\ \{f(p-q)\}^2+\{f(p+q)\}^2=3^2+11^2=9+121=130$ ····· 배점 20%

idea

02 답 49

$f(x)=\dfrac{9^x}{9^x-3}$에서

$$f(1-x)=\frac{9^{1-x}}{9^{1-x}-3}=\frac{9}{9-3\times9^x}=\frac{3}{3-9^x}=-\frac{3}{9^x-3}$$

$$\therefore\ f(x)+f(1-x)=\frac{9^x}{9^x-3}+\left(-\frac{3}{9^x-3}\right)=\frac{9^x-3}{9^x-3}=1$$

따라서 $f\left(\dfrac{1}{99}\right)+f\left(\dfrac{98}{99}\right)=1$, $f\left(\dfrac{2}{99}\right)+f\left(\dfrac{97}{99}\right)=1$,

$f\left(\dfrac{3}{99}\right)+f\left(\dfrac{96}{99}\right)=1$, …, $f\left(\dfrac{49}{99}\right)+f\left(\dfrac{50}{99}\right)=1$이므로

$f\left(\dfrac{1}{99}\right)+f\left(\dfrac{2}{99}\right)+f\left(\dfrac{3}{99}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{98}{99}\right)=49\times1=49$

참고

$$f\left(\frac{1}{99}\right)+f\left(\frac{98}{99}\right)=\frac{9^{\frac{1}{99}}}{9^{\frac{1}{99}}-3}+\frac{9^{\frac{98}{99}}}{9^{\frac{98}{99}}-3}=\frac{9^{\frac{1}{99}}(9^{\frac{98}{99}}-3)+9^{\frac{98}{99}}(9^{\frac{1}{99}}-3)}{(9^{\frac{1}{99}}-3)(9^{\frac{98}{99}}-3)}$$

$$=\frac{9-3\times9^{\frac{1}{99}}+9-3\times9^{\frac{98}{99}}}{9-3\times9^{\frac{1}{99}}-3\times9^{\frac{98}{99}}+9}=1$$

같은 방법으로 하면

$$\frac{9^{\frac{2}{99}}}{9^{\frac{2}{99}}-3}+\frac{9^{\frac{97}{99}}}{9^{\frac{97}{99}}-3}=\cdots=\frac{9^{\frac{49}{99}}}{9^{\frac{49}{99}}-3}+\frac{9^{\frac{50}{99}}}{9^{\frac{50}{99}}-3}=1$$

03 답 ⑤

ㄱ. $x=-x'(x'>0)$으로 놓으면

$f(x)=a^x=a^{-x'}=\left(\frac{1}{a}\right)^{x'}$, $g(x)=b^x=b^{-x'}=\left(\frac{1}{b}\right)^{x'}$

$0<a<b$이면 $0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$이므로

$\left(\frac{1}{b}\right)^{x'}<\left(\frac{1}{a}\right)^{x'}$ $\therefore g(x)<f(x)$

↳ 양수 a, b, n에 대하여 $a<b \iff a^n<b^n$

ㄴ. $f(2)<1$에서 $a^2<1$, $a^2-1<0$

$(a+1)(a-1)<0$ $\therefore -1<a<1$

그런데 $a>0$이므로 $0<a<1$ …… ㉠

$1<g(2)$에서 $1<b^2$, $b^2-1>0$

$(b+1)(b-1)>0$ $\therefore b<-1$ 또는 $b>1$

그런데 $b>0$이므로 $b>1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a<1<b$

ㄷ. $f(-x)=g(x)$에서 $a^{-x}=b^x$ $\therefore \left(\frac{1}{a}\right)^x=b^x$

이 식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로 $\frac{1}{a}=b$

$0<a<b$에서 $0<a<\frac{1}{a}$

$a<\frac{1}{a}$에서 $a^2<1$, $a^2-1<0$

$(a+1)(a-1)<0$ $\therefore -1<a<1$

그런데 $a>0$이므로 $0<a<1$

$b=\frac{1}{a}$이므로 $b>1$

$\therefore 0<a<1<b$

$f(-a)=a^{-a}=\left(\frac{1}{a}\right)^a=b^a$, $g(b)=b^b$이고 $b^a<b^b$이므로

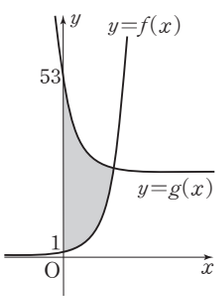
$f(-a)<g(b)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

04 답 50

$g(x)=3^{-(x-3)}+26=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}+26$이므로

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 그림과 같다.



이때 집합 A에 속하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면 a, b는 모두 자연수이어야 한다.

(i) $a=1$일 때,

$f(1)=3$, $g(1)=9+26=35$이므로

$3<b<35$

따라서 점 (a, b)는 $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$, …, $(1, 34)$의 31개이다.

(ii) $a=2$일 때,

$f(2)=9$, $g(2)=3+26=29$이므로

$9<b<29$

따라서 점 (a, b)는 $(2, 10)$, $(2, 11)$, $(2, 12)$, …, $(2, 28)$의 19개이다.

(iii) $a=3$일 때,

$f(3)=27$, $g(3)=1+26=27$

점 $(3, 27)$은 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점이므로 집합 A에 속하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서

$n(A)=31+19=50$

05 답 ④

$P(p, 2p+k)$, $Q(q, 2q+k)$ $(p<q)$라 하면

$\overline{PQ}=\sqrt{5}$에서 $\overline{PQ}^2=5$이므로

$(q-p)^2+(2q-2p)^2=5$, $(q-p)^2+4(q-p)^2=5$

$5(q-p)^2=5$, $(q-p)^2=1$

$\therefore q-p=1$ ($\because p<q$) …… ㉠

점 P는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1$의 그래프 위의 점이므로

$2p+k=\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+1$ …… ㉡

점 Q는 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$의 그래프 위의 점이므로

$2q+k=\left(\frac{2}{3}\right)^{q+1}+\frac{8}{3}$ …… ㉢

㉢−㉡을 하면

$2(q-p)=\left(\frac{2}{3}\right)^{q+1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+\frac{5}{3}$

㉠에서 $q=p+1$이므로

$2=\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{p+3}+\frac{5}{3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{p+2}=1$

즉, $p+2=0$이므로 $p=-2$

이를 ㉡에 대입하면

$-4+k=\frac{2}{3}+1$ $\therefore k=\frac{17}{3}$

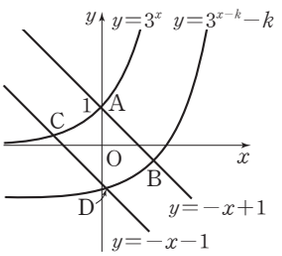
06 답 $\sqrt{2}$

곡선 $y=3^{x-k}-k$는 곡선 $y=3^x$을 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 것이다.

두 곡선 $y=3^x$, $y=3^{x-k}-k$와 직선 $y=-x+1$이 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선 $y=3^x$, $y=3^{x-k}-k$와 직선 $y=-x-1$이 만나는 점을 각각 C, D라 하자.

곡선 $y=3^x$과 직선 $y=-x+1$은 그림과 같이 점 $(0, 1)$에서 만나므로

A$(0, 1)$

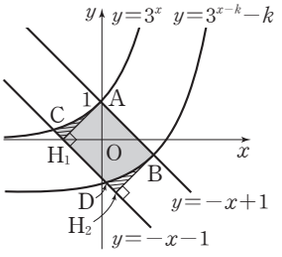


한편 직선 $y=-x+1$을 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동하여도 직선 $y=-x+1$이므로 점 B는 점 A를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 것과 같다.

$\therefore$ B$(k, 1-k)$

또 직선 $y=-x-1$을 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동하여도 직선 $y=-x-1$이므로 점 D는 점 C를 x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 두 점 A, B에서 직선 $y=-x-1$에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 그림에서 빗금 친 부분의 넓이가 서로 같으므로 두 곡선 $y=3^x$, $y=3^{x-k}-k$와 두 직선 $y=-x+1$, $y=-x-1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 사각형 AH_1H_2B의 넓이와 같다.



A(0, 1), B(k, $1-k$)에서

$\overline{AB}=\sqrt{k^2+(-k)^2}=\sqrt{2}k$

선분 AH_1의 길이는 점 A와 직선 $y=-x-1$, 즉 $x+y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{AH_1}=\frac{|1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

사각형 AH_1H_2B의 넓이가 k^3이므로

$\sqrt{2}k\times\sqrt{2}=k^3$

$k^3-2k=0$

$k(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})=0$

이때 $k>0$이므로

$k=\sqrt{2}$

개념 NOTE

점 $P(x_1, y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는

$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

07 답 ④

곡선 $y=a^x$을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 곡선이 $y=g(x)$이고, 선분 PQ가 x축에 평행하므로 정삼각형 PQR의 한 변 PQ의 길이는 2이다.

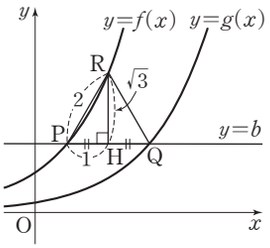
곡선 $y=a^x$과 직선 $y=b$가 만나는 점 P의 x좌표를 구하면

$a^x=b$

$\therefore x=\log_a b$

$\therefore$ P($\log_a b$, b)

이때 그림과 같이 점 R에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 RH는 선분 PQ의 수직이등분선이므로



$\overline{PH}=\frac{1}{2}\times2=1$

$\overline{PR}=2$이므로 $\overline{RH}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

즉, 점 R는 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $\sqrt{3}$만큼 평행이동한 것과 같으므로

R($\log_a b+1$, $b+\sqrt{3}$)

이때 점 R는 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$b+\sqrt{3}=a^{\log_a b+1}$

$b+\sqrt{3}=a^{\log_a ab}$

$b+\sqrt{3}=ab$

$\therefore b(a-1)=\sqrt{3}$ ····· ㉠

$a+b=a-1+b+1$이고 $a-1>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a-1+b+1\geq2\sqrt{b(a-1)}+1$

$=2\sqrt{\sqrt{3}}+1$ ($\because$ ㉠)

$=2\sqrt[4]{3}+1$ (단, 등호는 $a-1=b$일 때 성립)

따라서 $a+b$의 최솟값은 $2\sqrt[4]{3}+1$이다.

개념 NOTE

$a>0$, $b>0$일 때, 산술평균과 기하평균의 관계는 다음과 같다.

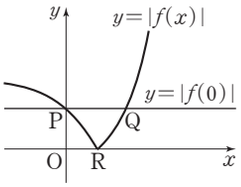
$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

08 답 ①

$f(x)=a^x-3$이므로 $|f(x)|=|a^x-3|$에서

$|f(0)|=|1-3|=2$

$\therefore$ P(0, 2)



곡선 $y=|f(x)|$와 x축이 만나는 점 R의 x좌표를 구하면

$a^x-3=0$, $a^x=3$ $\therefore x=\log_a 3$

$\therefore$ R($\log_a 3$, 0)

곡선 $y=|f(x)|$와 직선 $y=2$가 만나는 점 Q의 x좌표가 α이므로

$a^\alpha-3=2$, $a^\alpha=5$ $\therefore \alpha=\log_a 5$

$\therefore$ Q($\log_a 5$, 2)

$\overline{PR}=2\overline{PQ}$에서 $\overline{PR}^2=4\overline{PQ}^2$이므로

$(\log_a 3)^2+(-2)^2=4(\log_a 5)^2$

$\left(\frac{\log_5 3}{\log_5 a}\right)^2+4=4\left(\frac{1}{\log_5 a}\right)^2$ → 구하는 식이 $\log_5 a$를 포함하고 있으므로 밑이 5인 로그 꼴로 고친다.

$\log_5 a=t$로 놓으면

$\frac{(\log_5 3)^2}{t^2}+4=\frac{4}{t^2}$, $\frac{(\log_5 3)^2-4}{t^2}=-4$

$t^2=-\frac{(\log_5 3)^2-4}{4}=-\frac{(\log_5 3)^2}{4}+1$

$\therefore 1-t^2=\frac{(\log_5 3)^2}{4}$

$\therefore \sqrt{(1+\log_5 a)(1-\log_5 a)}=\sqrt{1-(\log_5 a)^2}$

$=\sqrt{1-t^2}$

$=\sqrt{\frac{(\log_5 3)^2}{4}}$

$=\frac{1}{2}\log_5 3$

09 답 ⑤

P(α, 2^α), Q(β, 2^β)이므로

$P_1(\alpha, 0)$, $Q_1(\beta, 0)$, $P_2(0, 2^\alpha)$, $Q_2(0, 2^\beta)$

ㄱ. $S_1+S_2=\square OQ_1QQ_2-\square OP_1PP_2=\beta\times2^\beta-\alpha\times2^\alpha$

이때 $S_1=S_2$이므로

$2S_1=\beta\times2^\beta-\alpha\times2^\alpha$

$\therefore S_1=S_2=\frac{\beta\times2^\beta-\alpha\times2^\alpha}{2}$ ····· ㉠

ㄴ. $S_1=\frac{1}{2}(2^\alpha+2^\beta)(\beta-\alpha)$

$=\frac{1}{2}(\beta\times2^\alpha-\alpha\times2^\alpha+\beta\times2^\beta-\alpha\times2^\beta)$

$S_2=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(2^\beta-2^\alpha)$

$=\frac{1}{2}(\alpha\times2^\beta-\alpha\times2^\alpha+\beta\times2^\beta-\beta\times2^\alpha)$

$S_1=S_2$에서 $S_2-S_1=0$이므로

$\alpha\times2^\beta-\beta\times2^\alpha=0$

$\alpha\times2^\beta=\beta\times2^\alpha$ ····· ㉡

$\therefore \frac{2^\alpha}{\alpha}=\frac{2^\beta}{\beta}$

이때 $\frac{2^\alpha}{\alpha}$은 직선 OP의 기울기이고, $\frac{2^\beta}{\beta}$은 직선 OQ의 기울기이다.

따라서 두 직선 OP, OQ는 기울기가 서로 같고 모두 원점 O를 지나므로 세 점 O, P, Q는 한 직선 위에 있다.

ㄷ. $\beta=\alpha+1$을 ㉡에 대입하면

$\alpha\times2^{\alpha+1}=(\alpha+1)\times2^{\alpha}$

$2\alpha\times2^{\alpha}=(\alpha+1)\times2^{\alpha}$

$(\alpha-1)\times2^{\alpha}=0$

$\therefore\ \alpha=1\ (\because\ 2^{\alpha}>0)$

$\beta=\alpha+1$이므로 $\beta=2$

$\alpha=1$, $\beta=2$를 ㉠에 대입하면

$S_1=\dfrac{2\times2^2-1\times2}{2}=3$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 답 $-\dfrac{1}{2}$

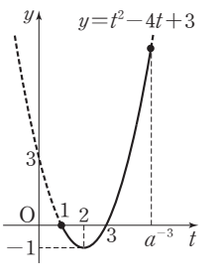
(i) $0<a<1$일 때,

$a^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $-3\le x\le0$에서

$a^0\le t\le a^{-3}$ $\therefore\ 1\le t\le a^{-3}$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$



$a^{-3}\le3$이면 $1\le t\le a^{-3}$에서 $t=1$일 때 최댓값이 0이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore\ a^{-3}>3$

$1\le t\le a^{-3}$에서 $t=a^{-3}$일 때 최댓값이 35이므로

$(a^{-3})^2-4a^{-3}+3=35$

$(a^{-3})^2-4a^{-3}-32=0$

$(a^{-3}+4)(a^{-3}-8)=0$

$\therefore\ a^{-3}=8\ (\because\ a^{-3}>3)$

$\therefore\ a=8^{-\frac{1}{3}}=(2^3)^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}$

따라서 함수 $y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$은 $1\le t\le8$에서 $t=2$일 때 최솟값이 -1이므로

$m=-1$ ····· 배점 40%

(ii) $a=1$일 때,

주어진 함수는 $y=0$이므로 최댓값이 35일 수 없다. ····· 배점 20%

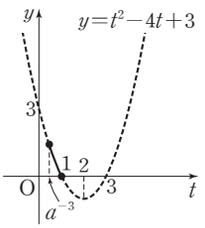
(iii) $a>1$일 때,

$a^x=t\ (t>0)$로 놓으면 $-3\le x\le0$에서

$a^{-3}\le t\le a^0$ $\therefore\ a^{-3}\le t\le1$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$



$a^{-3}\le t\le1$에서 $t=a^{-3}$일 때 최댓값을 갖는다.

그런데 $a^{-3}>0$이므로 최댓값은 3보다 작다.

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

····· 배점 30%

(i), (ii), (iii)에서 $a=\dfrac{1}{2}$, $m=-1$이므로

$a+m=-\dfrac{1}{2}$ ····· 배점 10%

11 답 ②

$2^{x^2-2x+1}>0$, $2^{x^2}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2^{x^2-2x+1}+2^{x^2}\ge2\sqrt{2^{x^2-2x+1}\times2^{x^2}}$

$=2\sqrt{2^{2x^2-2x+1}}$ (단, 등호는 $2^{x^2-2x+1}=2^{x^2}$일 때 성립)

$2^{x^2-2x+1}=2^{x^2}$일 때 최소이므로

$x^2-2x+1=x^2$, $2x=1$ $\therefore\ x=\dfrac{1}{2}$

$x=\dfrac{1}{2}$일 때, $2\sqrt{2^{2x^2-2x+1}}=2\sqrt{2^{\frac{1}{2}}}=2^{\frac{5}{4}}$

따라서 함수 $y=2^{x^2-2x+1}+2^{x^2}$이 $x=\dfrac{1}{2}$에서 최솟값 $2^{\frac{5}{4}}$을 가지므로

$\alpha=\dfrac{1}{2}$, $m=2^{\frac{5}{4}}$

$\therefore\ \alpha\times m^4=\dfrac{1}{2}\times2^5=2^4=16$

idea

12 답 2

$5(6^x+4^x)=4(9^x-4^x)$에서

$5\times6^x+5\times4^x=4\times9^x-4\times4^x$

$9\times4^x+5\times6^x-4\times9^x=0$

양변을 9^x으로 나누면

$9\times\left(\dfrac{4}{9}\right)^x+5\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^x-4=0$

$9\times\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\right\}^2+5\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^x-4=0$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$9t^2+5t-4=0$

$(t+1)(9t-4)=0$ $\therefore\ t=\dfrac{4}{9}\ (\because\ t>0)$

따라서 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$이므로

$x=2$

다른 풀이

$5(6^x+4^x)=4(9^x-4^x)$에서

$5\{(2\times3)^x+2^{2x}\}=4(3^{2x}-2^{2x})$

$5\times2^x(3^x+2^x)=4(3^x+2^x)(3^x-2^x)$

$3^x+2^x>0$이므로

$5\times2^x=4(3^x-2^x)$

$5\times2^x=4\times3^x-4\times2^x$

$9\times2^x=4\times3^x$

$\dfrac{2^x}{3^x}=\dfrac{4}{9}$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

$\therefore\ x=2$

13 답 ③

$2^x=3^y$에서 양변을 제곱하면

$2^{2x}=3^{2y}$

$3^{2x-2}=2^{2y+2}$에서

$\dfrac{1}{9}\times3^{2x}=4\times2^{2y}$

이때 $2^{2x}=3^{2y}$이므로

$\dfrac{1}{3^{2y}}\times\dfrac{1}{9}\times3^{2x}=\dfrac{1}{2^{2x}}\times4\times2^{2y}$

$\dfrac{1}{9}\times3^{2x-2y}=4\times\dfrac{1}{2^{2x-2y}}$

$3^{2x-2y}\times2^{2x-2y}=36$

$6^{2x-2y}=6^2$

따라서 $2x-2y=2$이므로

$x-y=1$

다른 풀이

$2^x=3^y$에서 양변을 제곱하면

$2^{2x}=3^{2y}$

$2^{2x}=3^{2y}>0$이므로 $3^{2x-2}=2^{2y+2}$에서

$\frac{3^{2x-2}}{3^{2y}}=\frac{2^{2y+2}}{2^{2x}}$, $3^{2x-2y-2}=2^{-2x+2y+2}$

$3^{2x-2y-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2y-2}$

밑이 서로 다르고 지수가 같으므로

$2x-2y-2=0$, $2x-2y=2$

$\therefore x-y=1$

14 답 ⑤

$9^{2x}+9^{2y}+k^2(x^2+y^2)-2k(x\times 9^x+y\times 9^y)=0$에서

$\{(9^x)^2-2kx\times 9^x+k^2x^2\}+\{(9^y)^2-2ky\times 9^y+k^2y^2\}=0$

$(9^x-kx)^2+(9^y-ky)^2=0$

$(9^x-kx)^2\geq 0$, $(9^y-ky)^2\geq 0$이므로

$9^x-kx=0$, $9^y-ky=0$

$\therefore k=\frac{9^x}{x}$, $k=\frac{9^y}{y}$

즉, $\frac{9^x}{x}=\frac{9^y}{y}$이므로 $x=3y$를 대입하면

$\frac{9^{3y}}{3y}=\frac{9^y}{y}$, $9^{3y}=3\times 9^y$

$3^{6y}=3\times 3^{2y}$, $3^{6y}=3^{2y+1}$

즉, $6y=2y+1$이므로

$4y=1$ $\therefore y=\frac{1}{4}$

$\therefore k=\frac{9^y}{y}=4\times 9^{\frac{1}{4}}=4\times 3^{\frac{1}{2}}=4\sqrt{3}$

15 답 2

$a^{2x}+a^{-2x}-2(a^x+a^{-x})+n=0$에서 $a^x+a^{-x}=t$로 놓으면 $a^x>0$, $a^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

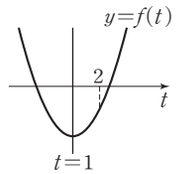
$a^x+a^{-x}\geq 2\sqrt{a^x\times a^{-x}}=2$ (단, 등호는 $a^x=a^{-x}$, 즉 $x=0$일 때 성립)

$\therefore t\geq 2$ ····· 배점 30%

$a^{2x}+a^{-2x}=(a^x+a^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 방정식은

$t^2-2t+n-2=0$ ····· ㉠

주어진 방정식이 적어도 하나의 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 $t\geq 2$에서 적어도 하나의 실근을 가져야 한다.



$f(t)=t^2-2t+n-2=(t-1)^2+n-3$이라 하면 함수 $y=f(t)$의 그래프의 축이 직선 $t=1$이므로 $f(2)\leq 0$이어야 한다. ····· 배점 40%

$f(2)\leq 0$에서 $n-2\leq 0$ $\therefore n\leq 2$

따라서 자연수 n은 1, 2의 2개이다. ····· 배점 30%

16 답 ④

$p=\sqrt{2}-1$이라 하면 $0<p<1$이고

$p^2=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$

$(\sqrt{2}-1)^m\geq(3-2\sqrt{2})^{5-n}$에서

$p^m\geq(p^2)^{5-n}$ $\therefore p^m\geq p^{10-2n}$

밑이 1보다 작으므로

$m\leq 10-2n$ ····· ㉠

(i) $n=1$일 때,

㉠에서 $m\leq 8$이므로 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은 $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(3, 1)$, …, $(8, 1)$의 8개이다.

(ii) $n=2$일 때,

㉠에서 $m\leq 6$이므로 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은 $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$, …, $(6, 2)$의 6개이다.

(iii) $n=3$일 때,

㉠에서 $m\leq 4$이므로 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은 $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$, $(4, 3)$의 4개이다.

(iv) $n=4$일 때,

㉠에서 $m\leq 2$이므로 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은 $(1, 4)$, $(2, 4)$의 2개이다.

(v) $n\geq 5$일 때,

㉠을 만족시키는 자연수 m은 존재하지 않는다.

(i)~(v)에서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$8+6+4+2=20$

17 답 ②

$f(35)g(85)=2^{365}$에서 $a^{35}\times b^{85}=2^{365}$이므로 자연수 a, b의 소인수는 2뿐이다.

즉, $a=2^m$, $b=2^n$ $(m, n$은 자연수$)$이라 하면 $a^{35}\times b^{85}=2^{365}$에서

$(2^m)^{35}\times(2^n)^{85}=2^{365}$, $2^{35m+85n}=2^{365}$

즉, $35m+85n=365$이므로

$7m+17n=73$ ····· ㉠

(i) $n=1$일 때,

㉠에서 $7m=56$이므로 $m=8$

(ii) $n=2$일 때,

㉠에서 $7m=39$이므로 자연수 m은 존재하지 않는다.

(iii) $n=3$일 때,

㉠에서 $7m=22$이므로 자연수 m은 존재하지 않는다.

(iv) $n=4$일 때,

㉠에서 $7m=5$이므로 자연수 m은 존재하지 않는다.

(v) $n\geq 5$일 때,

㉠에서 $7m\leq -12$이므로 자연수 m은 존재하지 않는다.

(i)~(v)에서 $m=8$, $n=1$이므로

$a=2^8$, $b=2$ $\therefore f(x)=2^{8x}$, $g(x)=2^x$

$f(x)\geq g(x^2+x-60)$에서

$2^{8x}\geq 2^{x^2+x-60}$

밑이 1보다 크므로

$8x\geq x^2+x-60$, $x^2-7x-60\leq 0$

$(x+5)(x-12)\leq 0$ $\therefore -5\leq x\leq 12$

따라서 정수 x는 -5, -4, -3, …, 12의 18개이다.

18 답 12

$\left(\frac{1}{4}\right)^x-(3n+16)\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+48n\leq 0$에서

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-(3n+16)\times\left(\frac{1}{2}\right)^x+48n\leq 0$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-(3n+16)t+48n\leq 0$

$(t-3n)(t-16)\leq 0$ ····· ㉠

(i) $3n<16$일 때,

부등식 ㉠의 해는 $3n\le t\le 16$이므로

$3n\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le 16$

$3n\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

이를 만족시키는 정수 x가 2개이어야 하므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}<3n\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

$4<3n\le 8$ $\therefore \frac{4}{3}<n\le\frac{8}{3}$

따라서 자연수 n은 2의 1개이다.

(ii) $3n>16$일 때,

부등식 ㉠의 해는 $16\le t\le 3n$이므로

$16\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le 3n$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\le\left(\frac{1}{2}\right)^x\le 3n$

이를 만족시키는 정수 x가 2개이어야 하므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}\le 3n<\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$

$32\le 3n<64$ $\therefore \frac{32}{3}\le n<\frac{64}{3}$

따라서 자연수 n은 11, 12, 13, ⋯, 21의 11개이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n의 개수는

$1+11=12$

idea

19 답 3

$x^{ax+7}\ge x^{4x^2+6}$에서 $x=1$이면 $1\ge 1$이므로 항상 성립한다.

이때 주어진 부등식을 만족시키는 양수 x의 값이 오직 한 개만 존재하므로 $x\ne 1$, $x>0$일 때 부등식이 성립하지 않아야 한다.

(i) $0<x<1$일 때,

$x^{ax+7}\ge x^{4x^2+6}$에서 밑이 1보다 작으므로

$ax+7\le 4x^2+6$

$4x^2-ax-1\ge 0$

이때 이 부등식이 성립하지 않아야 하므로 $0<x<1$에서 부등식 $4x^2-ax-1<0$이 성립해야 한다.

따라서 $f(x)=4x^2-ax-1$이라 하면 $f(0)\le 0$, $f(1)\le 0$이어야 한다.

$f(0)\le 0$에서 $-1\le 0$

$f(1)\le 0$에서 $3-a\le 0$

$\therefore a\ge 3$

(ii) $x>1$일 때,

$x^{ax+7}\ge x^{4x^2+6}$에서 밑이 1보다 크므로

$ax+7\ge 4x^2+6$

$4x^2-ax-1\le 0$

이때 이 부등식이 성립하지 않아야 하므로 $x>1$에서 부등식 $4x^2-ax-1>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $4x^2-ax-1=0$의 판별식을 D라 하면 $D=a^2+16>0$

이므로 이차방정식 $4x^2-ax-1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 $f(x)=4x^2-ax-1=4\left(x-\frac{a}{8}\right)^2-1-\frac{a^2}{16}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=\frac{a}{8}$이므로 $\frac{a}{8}<1$이어야 하고, $f(1)\ge 0$이어야 한다.

$\frac{a}{8}<1$에서 $a<8$ ····· ㉠

$f(1)\ge 0$에서 $3-a\ge 0$ $\therefore a\le 3$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서

$a\le 3$

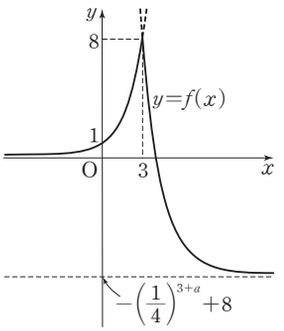
(i), (ii)에서 $a\ge 3$, $a\le 3$이므로

$a=3$

20 답 ③

곡선 $y=2^x$의 점근선은 직선 $y=0$, 곡선 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$의 점근선은 직선 $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$이고,

$f(3)=8$이므로 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같다.



$x<3$에서 y좌표가 정수인 점은 7개이고 ($y=1, 2, 3, \cdots, 7$), $x\ge 3$에서 y좌표가 음이 아닌 정수인 점은 9개 ($y=0, 1, 2, \cdots, 8$)이므로 조건을 만족시키려면 $x\ge 3$에서 y좌표가 음의 정수인 점이 7개이어야 한다.

따라서 곡선 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$의 점근선이 직선 $y=-8$이거나 직선 $y=-8$과 직선 $y=-7$ 사이에 있어야 하므로

$-8\le-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8<-7$

$15<\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}\le 16$

$15<4^{-3-a}\le 16$

$4<15<4^{-3-a}\le 4^2$

이를 만족시키는 정수 a의 값은 -5이다.

21 답 $\sqrt{2}<a<8$

$f(x)=2^{3|x-1|}+1$, $g(x)=a^{x+1}$이라 하면

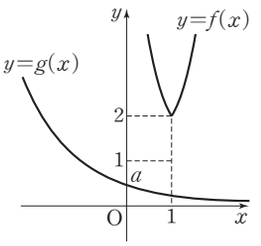
$$f(x)=\begin{cases}2^{-3(x-1)}+1 & (x<1)\\ 2^{3(x-1)}+1 & (x\ge 1)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}+1 & (x<1)\\ 8^{x-1}+1 & (x\ge 1)\end{cases}$$

방정식 $2^{3|x-1|}+1=a^{x+1}$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

(i) $0<a<1$일 때,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같고 $g(1)=a^2<1$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 $x\ge 1$에서 만나지 않고 $x<1$에서 한 점에서 만나거나 만나지 않는다. ($0<a<\frac{1}{8}$인 경우)

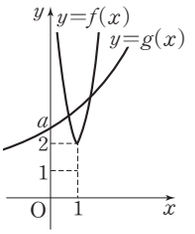


(ii) $a=1$일 때,

$g(x)=1$이고, 함수 $f(x)$의 최솟값은 2이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

(iii) $a>1$일 때,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 그림과 같이 $g(1)>2$이고, $a<8$이어야 한다.



$g(1)>2$에서 $a^2>2$

$a^2-2>0$, $(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})>0$

$\therefore a>\sqrt{2}$ ($\because a>1$)

이때 $a<8$이므로 $\sqrt{2}<a<8$

(i), (ii), (iii)에서 $\sqrt{2}<a<8$

22 답 ③

두 곡선 $y=2^{x-3}+1$, $y=2^{x-1}-2$가 만나는 점 A의 x좌표를 구하면

$2^{x-3}+1=2^{x-1}-2$

$\frac{1}{8}\times 2^x+1=\frac{1}{2}\times 2^x-2$

$\frac{3}{8}\times 2^x=3$

$2^x=2^3$ $\therefore x=3$

$\therefore$ A(3, 2)

점 B의 x좌표를 p라 하면 B(p, $2^{p-3}+1$)

두 점 B, C는 기울기가 -1인 직선 위의 점이고 $\overline{BC}=\sqrt{2}$이므로 점 C는 점 B를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

$\therefore$ C($p-1$, $2^{p-3}+2$)

이때 점 C는 곡선 $y=2^{x-1}-2$ 위의 점이므로

$2^{p-3}+2=2^{p-2}-2$

$\frac{1}{8}\times 2^p+2=\frac{1}{4}\times 2^p-2$

$\frac{1}{8}\times 2^p=4$

$2^p=2^5$ $\therefore p=5$

$\therefore$ B(5, 5), C(4, 6)

점 B는 직선 $y=-x+k$ 위의 점이므로

$5=-5+k$ $\therefore k=10$

삼각형 ABC에서 선분 BC를 밑변으로 하면 높이는 점 A와 직선 $y=-x+10$, 즉 $x+y-10=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|3+2-10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$

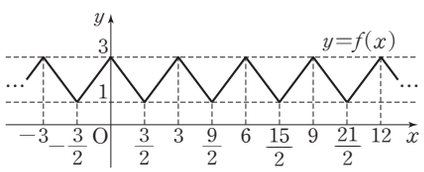
따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5}{2}$

23 답 ①

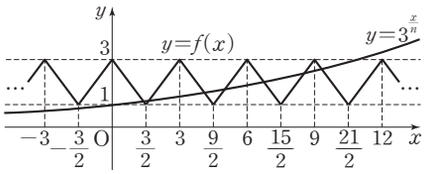
$$f(x)=\left|\frac{4}{3}x-2\right|+1=\begin{cases}-\frac{4}{3}x+3 & \left(0\le x<\frac{3}{2}\right)\\ \frac{4}{3}x-1 & \left(\frac{3}{2}\le x<3\right)\end{cases}$$

모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



자연수 n에 대하여 함수 $y=3^{\frac{x}{n}}$의 그래프는 두 점 (0, 1), (n, 3)을 지나므로 $x\le 0$, $x>n$일 때 두 함수 $y=3^{\frac{x}{n}}$, $y=f(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

$n=9$일 때 두 함수 $y=3^{\frac{x}{9}}$, $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점은 6개이고, $n=12$일 때 두 함수 $y=3^{\frac{x}{12}}$, $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점은 8개이므로 두 함수 $y=3^{\frac{x}{n}}$, $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점이 7개가 되려면 그림과 같아야 한다.



즉, $f(9)>3^{\frac{9}{n}}$, $f(12)<3^{\frac{12}{n}}$이어야 하고, $f(9)=f(12)=3$이므로

$3^{\frac{9}{n}}<3<3^{\frac{12}{n}}$

밑이 1보다 크므로

$\frac{9}{n}<1<\frac{12}{n}$

$\therefore 9<n<12$ ($\because n>0$)

따라서 자연수 n의 값은 10, 11이므로 그 합은

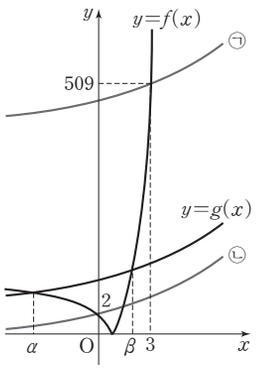
$10+11=21$

24 답 14

$f(x)=|8^x-3|$, $g(x)=2^{x+k}$이라 하자.

$f(0)=|1-3|=2$,

$f(3)=|512-3|=509$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 두 점의 x좌표 α, β에 대하여 그림과 같이 곡선 $y=g(x)$가 ㉠보다 위쪽에 있으면 $\beta>3$이고, ㉡보다 아래쪽에 있으면 $\alpha>0$이다.



따라서 $\alpha<0$, $0<\beta<3$을 만족시키려면 곡선 $y=g(x)$가 ㉠과 ㉡ 사이에 있어야 한다.

즉, $g(0)>f(0)$, $g(3)<f(3)$이어야 한다.

(i) $g(0)>f(0)$일 때,

$g(0)>2$에서 $2^k>2$

밑이 1보다 크므로

$k>1$

(ii) $g(3)<f(3)$일 때,

$g(3)<509$에서 $2^{3+k}<509$

$8\times 2^k<509$

$2^k<63.625$

이때 k는 자연수이므로

$2^k\le 2^5<63.625<2^6$

밑이 1보다 크므로

$k\le 5$

(i), (ii)에서

$1<k\le 5$

따라서 자연수 k의 값은 2, 3, 4, 5이므로 그 합은

$2+3+4+5=14$

25 답 ⑤

두 곡선 $y=2^x$, $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+t$가 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<0<\beta)$라 하면

$A(\alpha, 2^\alpha)$, $B(\beta, 2^\beta)$

$2^x=-\left(\frac{1}{2}\right)^x+t$에서 양변에 2^x을 곱하여 정리하면

$(2^x)^2-t\times 2^x+1=0$

$2^x=k\,(k>0)$로 놓으면

$k^2-tk+1=0$

이 이차방정식의 두 근은 2^α, 2^β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$2^\alpha+2^\beta=t$ ····· ㉠

두 근의 곱은

$2^\alpha\times 2^\beta=1$, $2^{\alpha+\beta}=1$

$\therefore\ \alpha+\beta=0$ ····· ㉡

ㄱ. C(0, 1), D(0, $t-1$)이므로

$\overline{CD}=(t-1)-1=t-2$

ㄴ. $\overline{AC}=\sqrt{(-\alpha)^2+(1-2^\alpha)^2}$

$\overline{DB}=\sqrt{\beta^2+(2^\beta-t+1)^2}$

이때 ㉠에서 $2^\beta-t=-2^\alpha$, ㉡에서 $\beta=-\alpha$이므로

$\overline{DB}=\sqrt{(-\alpha)^2+(1-2^\alpha)^2}$

$\therefore\ \overline{AC}=\overline{DB}$ ····· ㉢

ㄷ. $\overline{AD}=\sqrt{(-\alpha)^2+(t-1-2^\alpha)^2}$

$\overline{CB}=\sqrt{\beta^2+(2^\beta-1)^2}$

이때 ㉠에서 $2^\beta=t-2^\alpha$, ㉡에서 $\beta=-\alpha$이므로

$\overline{CB}=\sqrt{(-\alpha)^2+(t-2^\alpha-1)^2}$

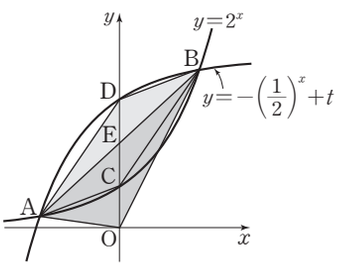
$\therefore\ \overline{AD}=\overline{CB}$

또 ㉢에서 $\overline{AC}=\overline{DB}$이므로 사각형 ACBD는 평행사변형이다.

사각형 ACBD의 두 대각선의 교점을 E라 하면 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{CE}=\overline{DE}$

즉, 점 E는 선분 CD의 중점이므로

$E\left(0, \frac{t}{2}\right)$



삼각형 ABD의 넓이를 S_1이라 하면 S_1은 두 삼각형 ADE, BDE의 넓이의 합과 같고 $\overline{DE}=(t-1)-\frac{t}{2}=\frac{t-2}{2}$이므로

$S_1=\frac{1}{2}\times\frac{t-2}{2}\times(-\alpha)+\frac{1}{2}\times\frac{t-2}{2}\times\beta$

$=\frac{(t-2)(-\alpha+\beta)}{4}$

$=\frac{2\beta(t-2)}{4}$ $(\because$ ㉡$)$

$=\frac{\beta(t-2)}{2}$

삼각형 AOB의 넓이를 S_2라 하면 S_2는 두 삼각형 AOE, BOE의 넓이의 합과 같으므로

$S_2=\frac{1}{2}\times\frac{t}{2}\times(-\alpha)+\frac{1}{2}\times\frac{t}{2}\times\beta$

$=\frac{t(-\alpha+\beta)}{4}=\frac{2\beta t}{4}$ $(\because$ ㉡$)$

$=\frac{\beta t}{2}$

$\therefore\ \frac{S_1}{S_2}=\frac{t-2}{t}$

따라서 삼각형 ABD의 넓이는 삼각형 AOB의 넓이의 $\frac{t-2}{t}$배이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

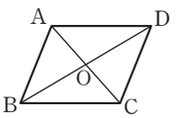
개념 NOTE

평행사변형의 성질은 다음과 같다.

(1) 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다.
➡ $\overline{AB}=\overline{DC}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$

(2) 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다.
➡ $\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$

(3) 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.
➡ $\overline{AO}=\overline{CO}$, $\overline{BO}=\overline{DO}$



step 3 최고난도 문제 | 41~43쪽

01 ②	02 60	03 ①	04 ⑤	05 49	06 196
07 ④	08 ②	09 $4+\sqrt{3}$		10 2	11 ⑤

01 답 ②

1단계 $h(x)$의 식 구하기

$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$

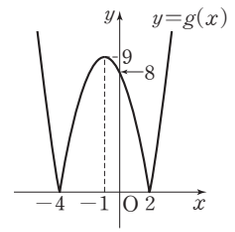
$=a^{g(x)}=a^{|x^2+2x-8|}$

2단계 $y=g(x)$의 그래프 그리기

$g(x)=|x^2+2x-8|=|(x+4)(x-2)|$

$=\begin{cases} x^2+2x-8 & (x\le -4 \text{ 또는 } x\ge 2) \\ -x^2-2x+8 & (-4<x<2) \end{cases}$

$-x^2-2x+8=-(x+1)^2+9$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



3단계 a의 값의 범위 구하기

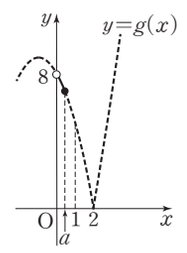
(i) $0<a<1$일 때,

함수 $h(x)=a^{g(x)}$은 $g(x)$의 값이 최소일 때 최댓값을 갖고, $g(x)$의 값이 최대일 때 최솟값을 갖는다.

즉, 함수 $h(x)$가 $0<x\le a$에서 최솟값을 갖고 최댓값을 갖지 않으려면 함수 $g(x)$가 $0<x\le a$에서 최댓값을 갖고 최솟값을 갖지 않아야 한다.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 $0<x\le a$에서 함수 $g(x)$는 $x=a$일 때 최솟값을 갖고 최댓값은 갖지 않는다.

즉, 조건을 만족시키지 않는다.



(ii) $a>1$일 때,

함수 $h(x)=a^{g(x)}$은 $g(x)$의 값이 최대일 때 최댓값을 갖고, $g(x)$의 값이 최소일 때 최솟값을 갖는다.

즉, 함수 $h(x)$가 $0<x\le a$에서 최솟값을 갖고 최댓값을 갖지 않으려면 함수 $g(x)$가 $0<x\le a$에서 최솟값을 갖고 최댓값을 갖지 않아야 한다.

$g(0)=8$이므로 $x\ge2$에서 $g(a)=8$을 만족시키는 a의 값을 구하면

$a^2+2a-8=8$

$a^2+2a-16=0$

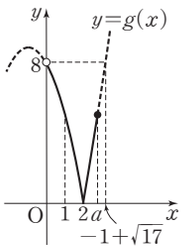
$\therefore\ a=-1+\sqrt{17}\ (\because\ a\ge2)$

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $g(x)$가 $0<x\le a$에서 최솟값을 갖고 최댓값을 갖지 않으려면

$a<-1+\sqrt{17}$

이때 $a>1$이므로

$1<a<-1+\sqrt{17}$



(i), (ii)에서 양수 a의 값의 범위는

$1<a<-1+\sqrt{17}$

4단계 $m+n$의 값 구하기

따라서 $m=1$, $n=-1+\sqrt{17}$이므로

$m+n=\sqrt{17}$

02 답 60

1단계 $0\le x\le8$에서 $y=f(x)$의 그래프 그리기

(가)에서 $f(x)=\begin{cases}2^x-1 & (0\le x\le1)\\ 2-2^{x-1} & (1<x\le2)\end{cases}$이므로

(나)에서 $n=1$일 때,

$$f(x)=\frac{1}{2}f(x-2)=\begin{cases}2^{x-3}-\frac{1}{2} & (2<x\le3)\\ 1-2^{x-4} & (3<x\le4)\end{cases}$$

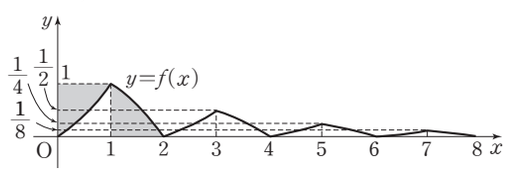
$n=2$일 때,

$$f(x)=\frac{1}{2^2}f(x-4)=\begin{cases}2^{x-6}-\frac{1}{4} & (4<x\le5)\\ \frac{1}{2}-2^{x-7} & (5<x\le6)\end{cases}$$

$n=3$일 때,

$$f(x)=\frac{1}{2^3}f(x-6)=\begin{cases}2^{x-9}-\frac{1}{8} & (6<x\le7)\\ \frac{1}{4}-2^{x-10} & (7<x\le8)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



2단계 $32S$의 값 구하기

함수 $y=2^x-1\ (0\le x\le1)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 함수 $y=2-2^{x-1}\ (1\le x\le2)$의 그래프와 같으므로 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같다.

즉, $0\le x\le2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$1\times1=1$

함수 $y=2^{x-3}-\frac{1}{2}\ (2\le x\le3)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼 평행이동하면 함수 $y=1-2^{x-4}\ (3\le x\le4)$의 그래프와 같으므로 $2\le x\le4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

함수 $y=2^{x-6}-\frac{1}{4}\ (4\le x\le5)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동하면 함수 $y=\frac{1}{2}-2^{x-7}\ (5\le x\le6)$의 그래프와 같으므로 $4\le x\le6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

함수 $y=2^{x-9}-\frac{1}{8}\ (6\le x\le7)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 $\frac{1}{8}$만큼 평행이동하면 함수 $y=\frac{1}{4}-2^{x-10}\ (7\le x\le8)$의 그래프와 같으므로 $6\le x\le8$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$1\times\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$

$\therefore\ S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}$

$\therefore\ 32S=32\times\frac{15}{8}=60$

03 답 ①

1단계 두 점 A_1, A_2의 좌표 구하기

정육각형 $A_1A_2A_4A_6A_5A_3$에서 두 변 A_1A_3, A_4A_6이 y축에 평행하므로 두 선분 A_1A_4, A_3A_6은 x축에 평행하다.

꼭짓점 A_2에서 선분 A_1A_4에 내린 수선의 발을 H라 하면

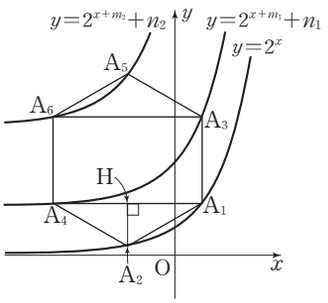
$\angle A_1A_2H=60^\circ$이므로

$\overline{A_1H}=\overline{A_1A_2}\sin60^\circ$

$=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

$\overline{A_2H}=\overline{A_1A_2}\cos60^\circ$

$=2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}$



즉, 점 A_2는 점 A_1을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 $-\sqrt{3}$만큼 평행이동한 것과 같으므로 점 A_1의 좌표를 $(a,\ 2^a)$이라 하면

$A_2(a-3,\ 2^a-\sqrt{3})$

점 A_2는 곡선 $y=2^x$ 위의 점이므로

$2^a-\sqrt{3}=2^{a-3}$, $2^a-\sqrt{3}=\frac{1}{8}\times2^a$

$\frac{7}{8}\times2^a=\sqrt{3}$ $\therefore\ 2^a=\frac{8\sqrt{3}}{7}$ …… ㉠

$\therefore\ A_1\left(a,\ \frac{8\sqrt{3}}{7}\right)$, $A_2\left(a-3,\ \frac{\sqrt{3}}{7}\right)$

2단계 2^{m_1}의 값 구하기

$\overline{A_1A_3}=2\sqrt{3}$이므로 $A_3\left(a,\ \frac{22\sqrt{3}}{7}\right)$ → 점 A_1을 y축의 방향으로 $2\sqrt{3}$만큼 평행이동한 것과 같다.

점 A_3은 곡선 $y=2^{x+m_1}+n_1$ 위의 점이므로

$\frac{22\sqrt{3}}{7}=2^{a+m_1}+n_1$

$\frac{22\sqrt{3}}{7}=\frac{8\sqrt{3}}{7}\times 2^{m_1}+n_1\ (\because$ ㉠$)$ …… ㉡

$\overline{A_1A_4}=2\overline{A_1H}=6$이므로 $A_4\left(a-6,\ \frac{8\sqrt{3}}{7}\right)$ → 점 A_1을 x축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것과 같다.

점 A_4는 곡선 $y=2^{x+m_1}+n_1$ 위의 점이므로

$\frac{8\sqrt{3}}{7}=2^{a-6+m_1}+n_1$

$\frac{8\sqrt{3}}{7}=\frac{8\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{64}\times 2^{m_1}+n_1\ (\because$ ㉠$)$

$\frac{8\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{56}\times 2^{m_1}+n_1$ …… ㉢

㉡−㉢을 하면

$2\sqrt{3}=\frac{9\sqrt{3}}{8}\times 2^{m_1}$ $\therefore\ 2^{m_1}=\frac{16}{9}$

3단계 2^{m_2}의 값 구하기

점 A_5는 점 $A_3\left(a,\ \frac{22\sqrt{3}}{7}\right)$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 $\sqrt{3}$만큼 평행이동한 것과 같으므로

$A_5\left(a-3,\ \frac{29\sqrt{3}}{7}\right)$

점 A_5는 곡선 $y=2^{x+m_2}+n_2$ 위의 점이므로

$\frac{29\sqrt{3}}{7}=2^{a-3+m_2}+n_2$

$\frac{29\sqrt{3}}{7}=\frac{8\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{8}\times 2^{m_2}+n_2\ (\because$ ㉠$)$

$\frac{29\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{7}\times 2^{m_2}+n_2$ …… ㉣

$\overline{A_3A_6}=\overline{A_1A_4}=6$이므로 $A_6\left(a-6,\ \frac{22\sqrt{3}}{7}\right)$ → 점 A_3을 x축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것과 같다.

점 A_6은 곡선 $y=2^{x+m_2}+n_2$ 위의 점이므로

$\frac{22\sqrt{3}}{7}=2^{a-6+m_2}+n_2$

$\frac{22\sqrt{3}}{7}=\frac{8\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{64}\times 2^{m_2}+n_2\ (\because$ ㉠$)$

$\frac{22\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{56}\times 2^{m_2}+n_2$ …… ㉤

㉣−㉤을 하면

$\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{8}\times 2^{m_2}$ $\therefore\ 2^{m_2}=8$

4단계 $2^{m_1+m_2}$의 값 구하기

$\therefore\ 2^{m_1+m_2}=2^{m_1}\times 2^{m_2}=\frac{16}{9}\times 8=\frac{128}{9}$

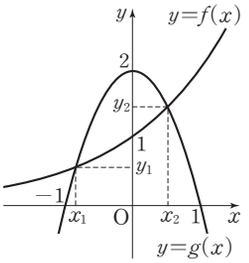
04 답 ⑤

1단계 두 곡선 $y=2^x$, $y=-2x^2+2$ 그리기

$f(x)=2^x$, $g(x)=-2x^2+2$라 하면

$g(x)=-2(x+1)(x-1)$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 그림과 같다.



2단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. 그림에서 $0<x<x_2$일 때 $f(x)<g(x)$이고, $x_2<x<1$일 때 $f(x)>g(x)$이다.

$x=\frac{1}{2}$일 때,

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

$g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$ → $\frac{3}{2}=\sqrt{2.25}$

따라서 $f\left(\frac{1}{2}\right)<g\left(\frac{1}{2}\right)$이므로 $x=\frac{1}{2}$은 $0<x<x_2$에 속한다.

$\therefore\ x_2>\frac{1}{2}$ …… ㉠

3단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. 그림에서 $-1<x<x_1$일 때 $f(x)>g(x)$이고, $x_1<x<0$일 때 $f(x)<g(x)$이다.

$x=-\frac{1}{2}$일 때,

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$ → $\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{9}}{2}$

이때 $f\left(-\frac{1}{2}\right)<g\left(-\frac{1}{2}\right)$이므로 $x=-\frac{1}{2}$은 $x_1<x<0$에 속한다.

$\therefore\ x_1<-\frac{1}{2}$

따라서 $-1<x_1<-\frac{1}{2}$이고, ㉠에서 $\frac{1}{2}<x_2<1$이므로

$-\frac{1}{2}<x_1+x_2<\frac{1}{2}$ …… ㉡

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$y_2-y_1-(x_2-x_1)=(-2x_2^2+2)-(-2x_1^2+2)+x_1-x_2$

$=2(x_1^2-x_2^2)+x_1-x_2$

$=2(x_1+x_2)(x_1-x_2)+x_1-x_2$

$=(x_1-x_2)\{2(x_1+x_2)+1\}$

이때 $x_1<x_2$에서

$x_1-x_2<0$

㉡에서 $0<2(x_1+x_2)+1<2$이므로

$y_2-y_1-(x_2-x_1)<0$

$\therefore\ y_2-y_1<x_2-x_1$

4단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. 그림에서 $y_2>y_1$이므로 $y_2-y_1>0$

$\therefore\ y_2-y_1=(-2x_2^2+2)-(-2x_1^2+2)$

$=2(x_1^2-x_2^2)=2(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0$

이때 $x_1-x_2<0$이므로

$x_1+x_2<0$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$-\frac{1}{2}<x_1+x_2<0$ …… ㉣

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$y_1y_2=2^{x_1}\times 2^{x_2}=2^{x_1+x_2}$

㉣에서 $2^{-\frac{1}{2}}<2^{x_1+x_2}<2^0$이므로

$\frac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1$

5단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

05 답 49

1단계 $y=g(x)$의 그래프 이해하기

$$g(x)=|f(x)-k|+k=\begin{cases}-f(x)+2k & (f(x)<k)\\ f(x) & (f(x)\geq k)\end{cases}$$

$f(x)<k$에서 함수 $y=-f(x)+2k$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=k$에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=k$와 만나거나 위쪽에 있는 부분은 그대로 두고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=k$보다 아래쪽에 있는 부분은 직선 $y=k$에 대하여 대칭이동한 것이다.

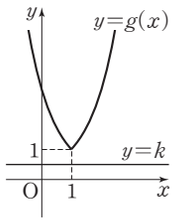
2단계 $k\leq 1$일 때, 정수 k의 개수 구하기

(i) $k\leq 1$일 때,

$f(x)\geq 1$이므로 $f(x)\geq k$ $\therefore\ g(x)=f(x)$

즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 x축에 평행한 직선 $y=h(k)$와 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 존재하지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.



3단계 $k>1$일 때, 정수 k의 개수 구하기

(ii) $k>1$일 때,

함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 x축에 평행한 직선 $y=h(k)$와 서로 다른 세 점에서 만나려면 $h(k)=g(1)$이어야 한다.

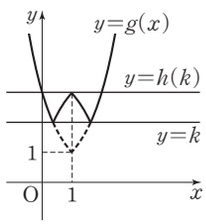
$\therefore\ h(k)=g(1)=-f(1)+2k=2k-1$

$h(k)<100$에서 $2k-1<100$

$\therefore\ k<\dfrac{101}{2}$

그런데 $k>1$이므로 $1<k<\dfrac{101}{2}$

따라서 정수 k는 2, 3, 4, …, 50의 49개이다.



4단계 정수 k의 개수 구하기

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 정수 k는 49개이다.

개념 NOTE

함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=k$(k는 상수)에 대하여 대칭이동한 그래프의 식을 $y=g(x)$라 하면

$$\frac{f(x)+g(x)}{2}=k \qquad \therefore\ g(x)=2k-f(x)$$

06 답 196

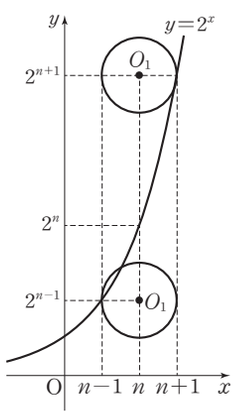
1단계 ㈏를 만족시키는 b의 값의 범위 구하기

㈏에서 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$을 O_1이라 하자.

$a=n$(n은 자연수)일 때, 반지름의 길이가 1인 원 O_1이 곡선 $y=2^x$과 만나는 경우는 그림과 같다.

곡선 $y=2^x$과 원 O_1이 $b=2^{n-1}$일 때 처음으로 만나고, $b=2^{n+1}$일 때 마지막으로 만나므로 곡선 $y=2^x$과 원 O_1이 만나지 않는 b의 값의 범위는

$b<2^{n-1}$ 또는 $b>2^{n+1}$ …… ㉠



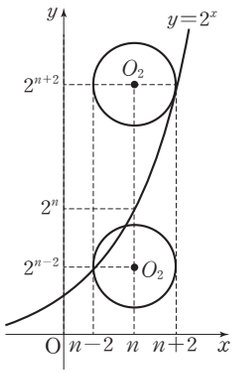
2단계 ㈐를 만족시키는 b의 값의 범위 구하기

㈐에서 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$를 O_2라 하자.

$a=n$(n은 자연수)일 때, 반지름의 길이가 2인 원 O_2가 곡선 $y=2^x$과 만나는 경우는 그림과 같다.

곡선 $y=2^x$과 원 O_2가 $b=2^{n-2}$일 때 처음으로 만나고, $b=2^{n+2}$일 때 마지막으로 만나므로 곡선 $y=2^x$과 원 O_2가 만나는 b의 값의 범위는

$2^{n-2}\leq b\leq 2^{n+2}$ …… ㉡



3단계 b의 값의 범위 구하기

㉠, ㉡에서

$2^{n-2}\leq b<2^{n-1}$ 또는 $2^{n+1}<b\leq 2^{n+2}$

4단계 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기

㈎에서 $1\leq a\leq 10$, $1\leq b\leq 100$이고 $2^7>100$이므로

$1\leq n<9$

(i) $a=n=1$일 때,

$2^{-1}\leq b<2^0$ 또는 $2^2<b\leq 2^3$

$\therefore\ 4<b\leq 8$ ($\because\ 1\leq b\leq 100$)

따라서 자연수 b는 5, 6, 7, 8의 4개이므로 순서쌍 (a, b)는 4개이다.

(ii) $a=n=2$일 때,

$2^0\leq b<2$ 또는 $2^3<b\leq 2^4$

$\therefore\ 1\leq b<2$ 또는 $8<b\leq 16$

따라서 자연수 b는 1, 9, 10, 11, …, 16의 9개이므로 순서쌍 (a, b)는 9개이다.

(iii) $a=n=3$일 때,

$2\leq b<2^2$ 또는 $2^4<b\leq 2^5$

$\therefore\ 2\leq b<4$ 또는 $16<b\leq 32$

따라서 자연수 b는 2, 3, 17, 18, 19, …, 32의 18개이므로 순서쌍 (a, b)는 18개이다.

(iv) $a=n=4$일 때,

$2^2\leq b<2^3$ 또는 $2^5<b\leq 2^6$

$\therefore\ 4\leq b<8$ 또는 $32<b\leq 64$

따라서 자연수 b는 4, 5, 6, 7, 33, 34, 35, …, 64의 36개이므로 순서쌍 (a, b)는 36개이다.

(v) $a=n=5$일 때,

$2^3\leq b<2^4$ 또는 $2^6<b\leq 2^7$

$\therefore\ 8\leq b<16$ 또는 $64<b\leq 100$ ($\because\ 1\leq b\leq 100$)

따라서 자연수 b는 8, 9, …, 15, 65, 66, …, 100의 44개이므로 순서쌍 (a, b)는 44개이다.

(vi) $a=n=6$일 때,

$2^4\leq b<2^5$ 또는 $2^7<b\leq 2^8$

$\therefore\ 16\leq b<32$ ($\because\ 1\leq b\leq 100$)

따라서 자연수 b는 16, 17, 18, …, 31의 16개이므로 순서쌍 (a, b)는 16개이다.

(vii) $a=n=7$일 때,

$2^5\leq b<2^6$ 또는 $2^8<b\leq 2^9$

$\therefore\ 32\leq b<64$ ($\because\ 1\leq b\leq 100$)

따라서 자연수 b는 32, 33, 34, …, 63의 32개이므로 순서쌍 (a, b)는 32개이다.

(viii) $a=n=8$일 때,

$2^6 \le b < 2^7$ 또는 $2^9 < b \le 2^{10}$

$\therefore 64 \le b \le 100$ ($\because 1 \le b \le 100$)

따라서 자연수 b는 64, 65, 66, …, 100의 37개이므로 순서쌍 (a, b)는 37개이다.

(i)~(viii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$4+9+18+36+44+16+32+37=196$

07 답 ④

1단계 주어진 방정식을 치환하여 나타내기

$9^x+2^{-2y}=11+2\times 3^{x+1}+2^{3-y}$에서

$(3^x)^2+\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^y\right\}^2=11+6\times 3^x+8\times\left(\frac{1}{2}\right)^y$

$3^x=X$, $\left(\frac{1}{2}\right)^y=Y$ ($X>0$, $Y>0$)로 놓으면

$X^2+Y^2=11+6X+8Y$

$X^2-6X+Y^2-8Y=11$

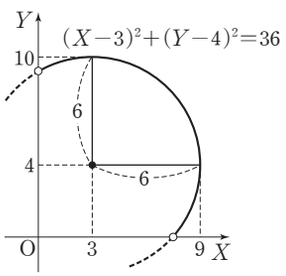
$\therefore (X-3)^2+(Y-4)^2=36$

2단계 α의 값 구하기

$X>0$, $Y>0$이므로 점 (X, Y)는 그림과 같이 제1사분면에서 원 $(X-3)^2+(Y-4)^2=36$ 위에 있다.

$X=3^x$이므로 x의 값이 최대이면 X의 값도 최대이다.

이때 $0<X\le 9$이므로 X의 최댓값은 9이다.



즉, $3^x=3^2$이므로

$x=2$ $\therefore \alpha=2$

3단계 β의 값 구하기

$Y=\left(\frac{1}{2}\right)^y$이므로 y의 값이 최소이면 Y의 값은 최대이다.

이때 $0<Y\le 10$이므로 Y의 최댓값은 10이다.

즉, $\left(\frac{1}{2}\right)^y=10$이므로

$y=-\log_2 10$

$\therefore \beta=-\log_2 10$

4단계 $\alpha^{-\beta}$의 값 구하기

$\therefore \alpha^{-\beta}=2^{\log_2 10}=10$

idea

08 답 ②

1단계 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만날 조건 알기

두 함수 $f(x)=4^x+4^{-x}+11$, $g(x)=a(2^x+2^{-x})$의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만나려면 방정식 $4^x+4^{-x}+11=a(2^x+2^{-x})$의 서로 다른 실근이 4개이어야 한다.

$4^x+4^{-x}+11=a(2^x+2^{-x})$에서

$(2^x+2^{-x})^2-a(2^x+2^{-x})+9=0$ …… ㉠

$2^x+2^{-x}=t$로 놓으면

$t^2-at+9=0$ …… ㉡

방정식 ㉠이 서로 다른 네 실근을 가지려면 이차방정식 ㉡은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근에 대하여 $2^x+2^{-x}=t$가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉡의 실근을 k라 하고 $2^x+2^{-x}=k$에서 $2^x=s$ ($s>0$)로 놓으면

$s+\frac{1}{s}=k$, $s^2-ks+1=0$

이 이차방정식이 $s>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=k^2-4>0$, $(k+2)(k-2)>0$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>2$ …… ㉢

두 근의 합이 양수이어야 하므로 $k>0$ …… ㉣

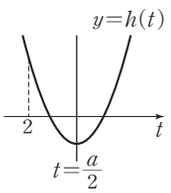
두 근의 곱이 양수이어야 하므로 $1>0$

㉢, ㉣에서 $k>2$

따라서 이차방정식 ㉡은 2보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

2단계 a의 값의 범위 구하기

$h(t)=t^2-at+9=\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+9-\frac{a^2}{4}$이라 할 때, 이차방정식 ㉡의 서로 다른 두 실근이 2보다 크려면 이차함수 $y=h(t)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $t^2-at+9=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=a^2-36>0$, $(a+6)(a-6)>0$

$\therefore a<-6$ 또는 $a>6$

(ii) $h(2)>0$이어야 하므로

$13-2a>0$ $\therefore a<\frac{13}{2}$

(iii) 함수 $y=h(t)$의 그래프의 축이 직선 $t=\frac{a}{2}$이므로

$\frac{a}{2}>2$ $\therefore a>4$

(i), (ii), (iii)에서 $6<a<\frac{13}{2}$

3단계 $\alpha\beta$의 값 구하기

따라서 $\alpha=6$, $\beta=\frac{13}{2}$이므로

$\alpha\beta=6\times\frac{13}{2}=39$

09 답 $4+\sqrt{3}$

1단계 a의 값 구하기

$\log_{a^2}(4^t-2\times 6^t-2\times 9^t)$이 정의되려면 $4^t-2\times 6^t-2\times 9^t>0$이어야 한다.

양변을 9^t으로 나누면

$\left(\frac{4}{9}\right)^t-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^t-2>0$

$\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^t\right\}^2-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^t-2>0$

$\left(\frac{2}{3}\right)^t=s$ ($s>0$)로 놓으면

$s^2-2s-2>0$

$\therefore s>1+\sqrt{3}$ ($\because s>0$)

즉, $\left(\frac{2}{3}\right)^t>1+\sqrt{3}$이므로

$\left(\frac{2}{3}\right)^t>\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}}(1+\sqrt{3})}$

밑이 1보다 작으므로

$t<\log_{\frac{2}{3}}(1+\sqrt{3})$ $\therefore \alpha=1+\sqrt{3}$

2단계 β의 값 구하기

$\log_{a^2}(4^t-2\times6^t-2\times9^t)=\log_{b^2}4^t=\log_{ab}6^t=k$ (k는 실수)로 놓으면

$(a^2)^k=4^t-2\times6^t-2\times9^t$이므로

$a^{2k}=(2^t)^2-2\times2^t\times3^t-2\times(3^t)^2$ …… ㉠

$(b^2)^k=4^t$이므로 $b^{2k}=(2^t)^2$ …… ㉡

$(ab)^k=6^t$이므로 $a^kb^k=2^t\times3^t$ …… ㉢

$2^t=p$, $3^t=q$ ($p>0$, $q>0$)로 놓으면 ㉠, ㉡, ㉢에서

$a^{2k}=p^2-2pq-2q^2$, $b^{2k}=p^2$, $a^kb^k=pq$

$a^{2k}b^{2k}=(a^kb^k)^2$이므로

$(p^2-2pq-2q^2)\times p^2=p^2q^2$

$p^2(p^2-2pq-3q^2)=0$, $p^2(p+q)(p-3q)=0$

이때 $p>0$, $q>0$이므로 $p=3q$

$p=2^t$, $q=3^t$이므로 $2^t=3\times3^t$

양변을 3^t으로 나누면

$\left(\frac{2}{3}\right)^t=3$ ∴ $t=\log_{\frac{2}{3}}3$

∴ $\beta=3$

3단계 $\alpha+\beta$의 값 구하기

∴ $\alpha+\beta=(1+\sqrt{3})+3=4+\sqrt{3}$

10 답 2

1단계 주어진 부등식을 이용하여 x에 대한 부등식 세우기

$2^{x^2+2x-b}\le3^{x^2+2x}$에서 $3^{x^2+2x}=(2^{\log_2 3})^{x^2+2x}$이므로

$2^{x^2+2x-b}\le2^{(\log_2 3)(x^2+2x)}$

밑이 1보다 크므로

$x^2+2x-b\le(\log_2 3)(x^2+2x)$

$(\log_2 3-1)x^2+2(\log_2 3-1)x+b\ge0$

이때 $1=\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4=2$에서 $\log_2 3-1>0$이므로 양변을 $\log_2 3-1$로 나누면

$x^2+2x+\frac{b}{\log_2 3-1}\ge0$

2단계 a의 값 구하기

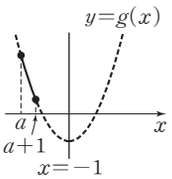
$g(x)=x^2+2x+\frac{b}{\log_2 3-1}=(x+1)^2+\frac{b}{\log_2 3-1}-1$이라 할 때,

$a\le x\le a+1$에서 $g(x)\ge0$이 성립할 조건을 확인하자.

↳ ($g(x)$의 최솟값)≥0이어야 한다.

(i) $a\le-2$일 때,

$a+1\le-1$이므로 $g(a+1)\ge0$이어야 한다.



즉, $(a+2)^2+\frac{b}{\log_2 3-1}-1\ge0$이므로

$\frac{b}{\log_2 3-1}\ge-(a+2)^2+1$

$b\ge-(\log_2 3-1)(a^2+4a+3)$

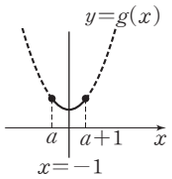
∴ $f(a)=-(\log_2 3-1)(a^2+4a+3)$

이때 $f(a)=0$에서 $a^2+4a+3=0$

$(a+3)(a+1)=0$ ∴ $a=-3$ ($\because a\le-2$)

(ii) $-2<a\le-1$일 때,

$a\le-1<a+1\le0$이므로 $g(-1)\ge0$이어야 한다.



즉, $\frac{b}{\log_2 3-1}-1\ge0$이므로

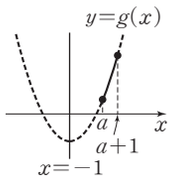
$b\ge\log_2 3-1$

∴ $f(a)=\log_2 3-1$

이때 $f(a)=0$을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $a>-1$일 때,

$a+1>0$이므로 $g(a)\ge0$이어야 한다.



즉, $a^2+2a+\frac{b}{\log_2 3-1}\ge0$이므로

$\frac{b}{\log_2 3-1}\ge-(a^2+2a)$

$b\ge-(\log_2 3-1)(a^2+2a)$

∴ $f(a)=-(\log_2 3-1)(a^2+2a)$

이때 $f(a)=0$에서 $a^2+2a=0$

$a(a+2)=0$ ∴ $a=0$ ($\because a>-1$)

3단계 a의 개수 구하기

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 a는 -3, 0의 2개이다.

11 답 ⑤

1단계 주어진 부등식을 치환하여 나타내기

$2^{2x}-13(n-2)2^x-n^2+7n\le0$에서 $2^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$t^2-13(n-2)t-n^2+7n\le0$ …… ㉠

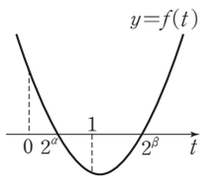
2단계 정수 n의 값 구하기

주어진 부등식의 해가 $\alpha\le x\le\beta$이므로

$2^\alpha\le2^x\le2^\beta$ ∴ $2^\alpha\le t\le2^\beta$

이때 $\alpha<0<\beta$이므로 $0<2^\alpha<1<2^\beta$ …… ㉡

따라서 $f(t)=t^2-13(n-2)t-n^2+7n$이라 하면 이차방정식 $f(t)=0$의 두 근이 2^α, 2^β이고 ㉡을 만족시켜야 하므로 그림과 같이 $f(0)>0$, $f(1)<0$이어야 한다.



$f(0)>0$에서 $-n^2+7n>0$

$n^2-7n<0$, $n(n-7)<0$

∴ $0<n<7$ …… ㉢

$f(1)<0$에서 $-n^2-6n+27<0$

$n^2+6n-27>0$, $(n+9)(n-3)>0$

∴ $n<-9$ 또는 $n>3$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $3<n<7$

따라서 정수 n의 값은 4, 5, 6이다.

3단계 n의 값에 따라 $\alpha+\beta$의 값 구하기

(i) $n=4$일 때,

㉠에서 $t^2-26t+12\le0$이고, 이 부등식의 해가 $2^\alpha\le t\le2^\beta$이므로 이 차방정식 $t^2-26t+12=0$의 두 근은 2^α, 2^β이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$2^\alpha\times2^\beta=12$, $2^{\alpha+\beta}=12$ ∴ $\alpha+\beta=\log_2 12$

(ii) $n=5$일 때,

㉠에서 $t^2-39t+10\le0$이고, 이 부등식의 해가 $2^\alpha\le t\le2^\beta$이므로 이 차방정식 $t^2-39t+10=0$의 두 근은 2^α, 2^β이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$2^\alpha\times2^\beta=10$, $2^{\alpha+\beta}=10$ ∴ $\alpha+\beta=\log_2 10$

(iii) $n=6$일 때,

㉠에서 $t^2-52t+6\le0$이고, 이 부등식의 해가 $2^\alpha\le t\le2^\beta$이므로 이 차방정식 $t^2-52t+6=0$의 두 근은 2^α, 2^β이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$2^\alpha\times2^\beta=6$, $2^{\alpha+\beta}=6$ ∴ $\alpha+\beta=\log_2 6$

4단계 $\alpha+\beta$의 값의 합 구하기

(i), (ii), (iii)에서 모든 $\alpha+\beta$의 값의 합은

$\log_2 12+\log_2 10+\log_2 6=\log_2(12\times10\times6)=\log_2 720$

04 로그함수

step 1 핵심 문제 | 44~45쪽

01 10 02 3 03 ② 04 ④ 05 $-\frac{11}{3}$

06 ⑤ 07 ③ 08 ① 09 2 10 ⑤ 11 6

12 5

01 답 10

$f(a)+f(2a)+f(3a)+\cdots+f(99a)$

$=\log(a+a)+\log\left(a+\frac{a}{2}\right)+\log\left(a+\frac{a}{3}\right)+\cdots+\log\left(a+\frac{a}{99}\right)$

$=\log 2a+\log\frac{3}{2}a+\log\frac{4}{3}a+\cdots+\log\frac{100}{99}a$

$=\log\left(2a\times\frac{3}{2}a\times\frac{4}{3}a\times\cdots\times\frac{100}{99}a\right)$

$=\log 100a^{99}$

$=2+99\log a$

즉, $2+99\log a=101$이므로

$99\log a=99$

$\log a=1$

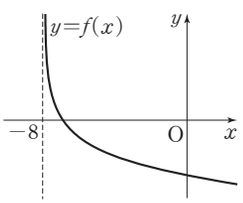
$\therefore a=10$

02 답 3

함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -8만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면

$y=-\log_2(x+8)+k$

$f(x)=-\log_2(x+8)+k$라 할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 $f(0)\le 0$이어야 하므로



$-\log_2 8+k\le 0$

$k-3\le 0$

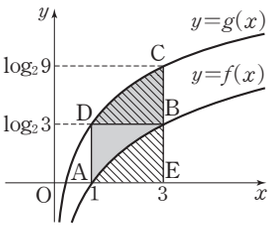
$\therefore k\le 3$

따라서 정수 k의 최댓값은 3이다.

03 답 ②

$g(x)=\log_2 3x=\log_2 3+\log_2 x$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $\log_2 3$만큼 평행이동한 것이다.

A(1, 0), B(3, $\log_2 3$), C(3, $\log_2 9$), D(1, $\log_2 3$)이므로 점 (3, 0)을 E라 하면



$\overline{AE}=\overline{DB}$, $\overline{BE}=\overline{BC}$

이때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 평행이동한 것이므로 그림에서 빗금 친 부분의 넓이가 서로 같다.

따라서 구하는 넓이는 사각형 AEBD의 넓이와 같으므로

$\overline{AE}\times\overline{AD}=2\times\log_2 3=2\log_2 3$

04 답 ④

$2<a<x<a^2$에서 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면 밑이 1보다 크므로

$\log_a 2<1<\log_a x<2$ ····· ㉠

$1<\log_a x<2$에서 각 변에 밑이 a인 로그를 취하면 밑이 1보다 크므로

$0<\log_a(\log_a x)<\log_a 2$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $C<\log_a 2<1<A<2$이므로 $C<A$

$A-B=\log_a x-(\log_a x)^2=(\log_a x)(1-\log_a x)<0$이므로

(∵ $1<\log_a x$이므로 $\log_a x>0$, $1-\log_a x<0$)

$A<B$

$\therefore C<A<B$

05 답 $-\frac{11}{3}$

$(g\circ g\circ g)(a)=243$에서 $g(g(g(a)))=243$

이때 $g(g(a))=b$로 놓으면 $g(b)=243$에서 $f(243)=b$

$\therefore b=f(243)=\log_3 243-2=5-2=3$ $\therefore g(g(a))=3$

이때 $g(a)=c$로 놓으면 $g(c)=3$에서 $f(3)=c$

$\therefore c=f(3)=\frac{1}{3}\times 3-3=-2$ $\therefore g(a)=-2$

즉, $f(-2)=a$이므로

$a=f(-2)=\frac{1}{3}\times(-2)-3=-\frac{11}{3}$

개념 NOTE

함수 f의 역함수가 f^{-1}일 때,

$f^{-1}(a)=b \iff f(b)=a$

06 답 ⑤

$y=\{\log_2(x^2-4x+20)\}^2-\log_2(x^2-4x+20)^2+5$

$=\{\log_2(x^2-4x+20)\}^2-2\log_2(x^2-4x+20)+5$

$f(x)=x^2-4x+20=(x-2)^2+16$이라 하면 $-2\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$일 때 최댓값이 32, $x=2$일 때 최솟값이 16이므로

$16\le f(x)\le 32$

$\log_2 f(x)=t$로 놓으면 로그의 밑이 1보다 크므로

$\log_2 16\le t\le\log_2 32$ $\therefore 4\le t\le 5$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t+5=(t-1)^2+4$

따라서 $4\le t\le 5$에서 $t=5$일 때 최댓값이 20, $t=4$일 때 최솟값이 13이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$20+13=33$

07 답 ③

$\log_{\sqrt{5}} x+\log_5 y^2=4\log_{25}(x+y+8)$에서

$2\log_5 x+2\log_5 y=2\log_5(x+y+8)$

$\log_5 x+\log_5 y=\log_5(x+y+8)$, $\log_5 xy=\log_5(x+y+8)$

즉, $xy=x+y+8$이므로 $(x-1)(y-1)=9$

이때 x, y는 자연수이므로

(i) $x-1=1$, $y-1=9$일 때,

$x=2$, $y=10$ $\therefore 2x+y=14$

(ii) $x-1=3$, $y-1=3$일 때,

$x=4$, $y=4$ $\therefore 2x+y=12$

(iii) $x-1=9$, $y-1=1$일 때,

$x=10$, $y=2$ $\therefore 2x+y=22$

(i), (ii), (iii)에서 $2x+y$의 최댓값은 22이다.

08 답 ①

$2\log_4 8x\times\log_2\frac{x}{4}=6$에서

$\log_2 8x\times\log_2\frac{x}{4}=6$

$(3+\log_2 x)(\log_2 x-2)=6$

$(\log_2 x)^2+\log_2 x-12=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2+t-12=0$

$(t+4)(t-3)=0$

$\therefore\ t=-4$ 또는 $t=3$

즉, $\log_2 x=-4$ 또는 $\log_2 x=3$이므로

$x=2^{-4}=\frac{1}{16}$ 또는 $x=2^3=8$

따라서 $\alpha=\frac{1}{16}$, $\beta=8$ 또는 $\alpha=8$, $\beta=\frac{1}{16}$이므로

$2\alpha\beta=1$

다른 풀이

$2\log_4 8x\times\log_2\frac{x}{4}=6$에서

$\log_2 8x\times\log_2\frac{x}{4}=6$

$(3+\log_2 x)(\log_2 x-2)=6$

$(\log_2 x)^2+\log_2 x-12=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2+t-12=0$ …… ㉠

주어진 방정식의 두 근이 α, β이므로 이차방정식 ㉠의 두 근은

$\log_2\alpha$, $\log_2\beta$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$\log_2\alpha+\log_2\beta=-1$

$\log_2\alpha\beta=-1$

$\therefore\ \alpha\beta=2^{-1}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 2\alpha\beta=2\times\frac{1}{2}=1$

09 답 2

이차방정식 $x^2+kx+4=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=k^2-16>0$

$(k+4)(k-4)>0$

$\therefore\ k<-4$ 또는 $k>4$ …… ㉠ ····· 배점 20%

이차방정식 $x^2+kx+4=0$의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-k$, $\alpha\beta=4$ ····· 배점 10%

따라서 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=k^2-8$이므로 주어진 부등식의 좌변에서

$\log_3(\alpha^2+\alpha+3)+\log_3(\beta^2+\beta+3)$

$=\log_3(\alpha^2+\alpha+3)(\beta^2+\beta+3)$

$=\log_3\{(\alpha\beta)^2+\alpha\beta(\alpha+\beta)+3(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+9\}$

$=\log_3\{16-4k+3(k^2-8)+4-3k+9\}$

$=\log_3(3k^2-7k+5)$

즉, $\log_3(3k^2-7k+5)<4$이므로

$\log_3(3k^2-7k+5)<\log_3 3^4$

로그의 밑이 1보다 크므로

$3k^2-7k+5<81$

$3k^2-7k-76<0$, $(k+4)(3k-19)<0$

$\therefore\ -4<k<\frac{19}{3}$ …… ㉡ ····· 배점 40%

㉠, ㉡에서 $4<k<\frac{19}{3}$

따라서 자연수 k는 5, 6의 2개이다. ····· 배점 30%

10 답 ⑤

(밑)$\neq$1이어야 하므로 $x\sqrt{x}\neq1$에서 $x\neq1$

즉, 자연수 x의 값의 범위는 $x>1$

$\log_9 x^2+\log_{x\sqrt{x}}27<3$에서

$\log_3 x+2\log_x 3<3$

$\log_3 x+\frac{2}{\log_3 x}<3$

$\log_3 x=t\ (t>0)$로 놓으면

$x>1$이므로 $t=\log_3 x>0$

$t+\frac{2}{t}<3$

$t^2-3t+2<0$, $(t-1)(t-2)<0$ $\therefore\ 1<t<2$

즉, $1<\log_3 x<2$이므로

$\log_3 3<\log_3 x<\log_3 3^2$

로그의 밑이 1보다 크므로

$3<x<9$

따라서 자연수 x의 값은 4, 5, 6, 7, 8이므로 그 합은

$4+5+6+7+8=30$

11 답 6

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $3x^2-2(\log_2 n)x+\log_2 n>0$이 성립하려면 이차방정식 $3x^2-2(\log_2 n)x+\log_2 n=0$의 판별식을 D라 할 때,

$\frac{D}{4}=(\log_2 n)^2-3\log_2 n<0$

$\log_2 n=t$로 놓으면

$t^2-3t<0$, $t(t-3)<0$ $\therefore\ 0<t<3$

즉, $0<\log_2 n<3$이므로

$\log_2 2^0<\log_2 n<\log_2 2^3$

로그의 밑이 1보다 크므로

$1<n<8$

따라서 자연수 n은 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6개이다.

12 답 5

$K=160$일 때 $S=6$이므로

$6=c\log 160+m$ …… ㉠

$K=10$일 때 $S=4$이므로

$4=c+m$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $2=c(\log 160-1)$

$2=c\log 16$

$\therefore\ c=\frac{2}{\log 16}=\frac{2}{4\log 2}=\frac{1}{2\log 2}$

이를 ㉡에 대입하면

$4=\frac{1}{2\log 2}+m$ $\therefore\ m=4-\frac{1}{2\log 2}$

$K=x$일 때 $S=1.5$이므로

$1.5=\frac{1}{2\log 2}\times\log x+4-\frac{1}{2\log 2}$

$\frac{3}{2}\times 2\log 2=\log x+4\times 2\log 2-1$

$\log x=3\log 2-8\log 2+1$

$=1-5\log 2$

$=\log\frac{10}{2^5}=\log\frac{5}{16}$

$\therefore x=\frac{5}{16}$ $\therefore 16x=5$

step 2 고난도 문제 | 46~50쪽

01 ④	02 5	03 4	04 9	05 ⑤	06 $\frac{11}{4}$
07 ⑤	08 9	09 3	10 192	11 45	12 $\frac{5}{2}$
13 ②	14 12	15 ②	16 ①	17 −7	18 ④
19 ③	20 5	21 ⑤	22 8	23 10	24 ①
25 ③	26 ③				

01 답 ④

ㄱ. $\left\{f\left(\frac{m}{n}\right)\right\}^2=\left(\log_a\frac{m}{n}\right)^2=(\log_a m-\log_a n)^2$

$=(\log_a n-\log_a m)^2=\left(\log_a\frac{n}{m}\right)^2$

$=\left\{f\left(\frac{n}{m}\right)\right\}^2$

ㄴ. $f(m+1)-f(m)=\log_a(m+1)-\log_a m$

$=\log_a\frac{m+1}{m}$

$=\log_a\left(1+\frac{1}{m}\right)$

$f(m+2)-f(m+1)=\log_a(m+2)-\log_a(m+1)$

$=\log_a\frac{m+2}{m+1}$

$=\log_a\left(1+\frac{1}{m+1}\right)$

$m>0$에서 $\frac{1}{m}>\frac{1}{m+1}$이므로

$1+\frac{1}{m}>1+\frac{1}{m+1}$

이때 $a>1$이므로

$\log_a\left(1+\frac{1}{m}\right)>\log_a\left(1+\frac{1}{m+1}\right)$

$\therefore f(m+1)-f(m)>f(m+2)-f(m+1)$

ㄷ. $f\left(\frac{m+n}{2}\right)=\log_a\frac{m+n}{2}$

$\frac{f(m)+f(n)}{2}=\frac{\log_a m+\log_a n}{2}=\frac{1}{2}\log_a mn$

$=\log_a\sqrt{mn}$

$m>0$, $n>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{m+n}{2}\geq\sqrt{mn}$ (단, 등호는 $m=n$일 때 성립)

이때 $a>1$이므로 $\log_a\frac{m+n}{2}\geq\log_a\sqrt{mn}$

$\therefore f\left(\frac{m+n}{2}\right)\geq\frac{f(m)+f(n)}{2}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

02 답 5

함수 $h(x)=\log_{f(x)}g(x)$에서 $\log_{f(x)}g(x)$가 정의되려면

$f(x)>0$, $f(x)\neq 1$, $g(x)>0$

$f(x)>0$에서

$\frac{1}{6}(x-3)(10-x)>0$

$(x-3)(x-10)<0$ $\therefore 3<x<10$ …… ㉠

$f(x)\neq 1$에서

$\frac{1}{6}(x-3)(10-x)\neq 1$

$(x-3)(x-10)\neq -6$, $x^2-13x+36\neq 0$

$(x-4)(x-9)\neq 0$ $\therefore x\neq 4$, $x\neq 9$ …… ㉡

$g(x)>0$에서

$(x-2)(10-x)>0$

$(x-2)(x-10)<0$ $\therefore 2<x<10$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$3<x<4$ 또는 $4<x<9$ 또는 $9<x<10$

$\therefore A=\{5, 6, 7, 8\}$

이때 $h(5)=\log_{\frac{5}{3}}15$, $h(6)=\log_2 16$, $h(7)=\log_2 15$, $h(8)=\log_{\frac{5}{3}}12$

이므로

$B=\{\log_{\frac{5}{3}}15, \log_2 16, \log_2 15, \log_{\frac{5}{3}}12\}$

이때 $\log_{\frac{5}{3}}12<\log_{\frac{5}{3}}15$, $\log_2 15<\log_2 16$이므로 최댓값을 찾기 위하여

$\log_{\frac{5}{3}}15$와 $\log_2 16=4$의 대소를 비교해 보자.

$125=5^3<3^5=243$에서 $\frac{5^3}{3^4}<3$

$\left(\frac{5}{3}\right)^4<15$

양변에 밑이 $\frac{5}{3}$인 로그를 취하면

$4<\log_{\frac{5}{3}}15$

따라서 집합 B의 원소 중 최댓값은 $h(5)=\log_{\frac{5}{3}}15$이므로

$n=5$

03 답 4

함수 $f(x)=2\log_2[x]$가 $x\geq 1$에서 정의되므로

$1\leq x<2$일 때, $[x]=1$ $\therefore f(x)=2\log_2 1=0$

$2\leq x<3$일 때, $[x]=2$ $\therefore f(x)=2\log_2 2=2$

$3\leq x<4$일 때, $[x]=3$ $\therefore f(x)=2\log_2 3$

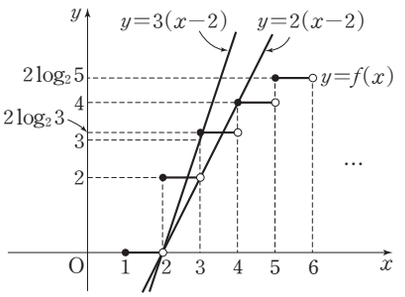
$4\leq x<5$일 때, $[x]=4$ $\therefore f(x)=2\log_2 4=4$

$5\leq x<6$일 때, $[x]=5$ $\therefore f(x)=2\log_2 5$

⋮

$$\therefore f(x)=2\log_2[x]=\begin{cases}0 & (1\leq x<2)\\ 2 & (2\leq x<3)\\ 2\log_2 3 & (3\leq x<4)\\ 4 & (4\leq x<5)\\ 2\log_2 5 & (5\leq x<6)\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 직선 $g(x)=n(x-2)$는 n의 값에 관계없이 항상 점 $(2,\ 0)$을 지난다.

(i) $n=2$일 때,

$g(x)=2(x-2)$이므로

$g(3)=2,\ g(4)=4,\ g(5)=6>2\log_2 5$

$\log_2 2^6>\log_2 5^2$

$\therefore\ h(2)=2$

(ii) $n=3$일 때,

$g(x)=3(x-2)$이므로

$g(3)=3<2\log_2 3,\ g(4)=6>4$

$\log_2 2^3<\log_2 3^2$

$\therefore\ h(3)=2$

(i), (ii)에서

$h(2)+h(3)=2+2=4$

04 답 9

$\mathrm{P}(p,\ -\log_a p)$, $\mathrm{Q}(q,\ -\log_a q)\ (p<q)$라 하면 선분 PQ가 원 C의 지름이므로 선분 PQ의 중점은 원의 중심 $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$과 같다.

선분 PQ의 중점의 좌표는 $\left(\frac{p+q}{2},\ \frac{-\log_a p-\log_a q}{2}\right)$

$\frac{p+q}{2}=\frac{5}{3}$에서 $p+q=\frac{10}{3}$

$\frac{-\log_a p-\log_a q}{2}=0$에서 $\log_a pq=0$

$\therefore\ pq=1$ ····· 배점 40%

따라서 p, q는 이차방정식 $t^2-\frac{10}{3}t+1=0$의 두 근이다.

$t^2-\frac{10}{3}t+1=0$에서

$3t^2-10t+3=0$

$(3t-1)(t-3)=0$

$\therefore\ t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=3$

$p<q$이므로 $p=\frac{1}{3},\ q=3$ ····· 배점 30%

점 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3},\ -\log_a\frac{1}{3}\right)$은 원 C 위의 점이므로

$\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}\right)^2+\left(-\log_a\frac{1}{3}\right)^2=\frac{73}{36}$

$\frac{16}{9}+(\log_a 3)^2=\frac{73}{36}$

$(\log_a 3)^2=\frac{1}{4}$

이때 $a>1$이면 $\log_a 3>\log_a 1=0$이므로

$\log_a 3=\frac{1}{2}$

$3=a^{\frac{1}{2}}$ $\therefore\ a=3^2=9$ ····· 배점 30%

05 답 ⑤

$\mathrm{P}(p,\ a^p)\ (p<0)$이라 하면 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(a^p,\ p)$

$\angle\mathrm{PQR}=45°$이고 직선 PQ의 기울기가 -1이므로 두 점 Q, R의 x좌표는 같다. → 직선 QR는 y축에 평행하다.

점 R의 x좌표가 a^p이고 점 R는 곡선 $y=-\log_a x$ 위의 점이므로 점 R의 y좌표를 구하면

$y=-\log_a a^p=-p$ $\therefore\ \mathrm{R}(a^p,\ -p)$

직선 PR의 기울기가 $\frac{1}{7}$이므로 $\frac{-p-a^p}{a^p-p}=\frac{1}{7}$

$a^p-p=-7p-7a^p,\ 8a^p=-6p$

$\therefore\ a^p=-\frac{3}{4}p$ ····· ㉠

$\overline{\mathrm{PR}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$에서 $\overline{\mathrm{PR}}^2=\frac{25}{2}$이므로

$(a^p-p)^2+(-p-a^p)^2=\frac{25}{2}$

㉠을 대입하면

$\left(-\frac{3}{4}p-p\right)^2+\left(-p+\frac{3}{4}p\right)^2=\frac{25}{2}$

$\frac{25}{8}p^2=\frac{25}{2},\ p^2=4$

$\therefore\ p=-2\ (\because\ p<0)$

이를 ㉠에 대입하면

$a^{-2}=\frac{3}{2},\ a^2=\frac{2}{3}$

$\therefore\ a=\frac{\sqrt{6}}{3}\ (\because\ 0<a<1)$

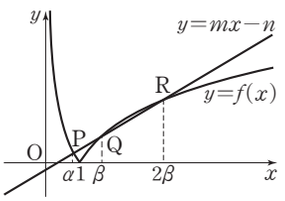
비법 NOTE

좌표평면 위의 두 점 P, Q가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이면 직선 PQ와 직선 $y=x$는 서로 수직이므로 직선 PQ의 기울기는 -1이다.

06 답 $\frac{11}{4}$

$f(x)=|\log_2 x|=\begin{cases}-\log_2 x & (x<1)\\ \log_2 x & (x\geq 1)\end{cases}$

이므로 함수 $f(x)=|\log_2 x|$의 그래프와 직선 $y=mx-n$이 서로 다른 세 점에서 만나려면 그림과 같이 $m>0$이고 $0<\alpha<1<\beta$이어야 한다.



$\therefore\ \mathrm{P}(\alpha,\ -\log_2\alpha),\ \mathrm{Q}(\beta,\ \log_2\beta),\ \mathrm{R}(2\beta,\ \log_2 2\beta)$

이때 세 점 P, Q, R가 한 직선 위에 있고, $2\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$이므로 점 Q는 선분 PR를 1 : 2로 내분하는 점이다.

선분 PR를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\beta+2\alpha}{3},\ \frac{\log_2 2\beta-2\log_2\alpha}{3}\right)$

$\frac{2\beta+2\alpha}{3}=\beta$에서 $\beta=2\alpha$ ····· ㉠

$\frac{\log_2 2\beta-2\log_2\alpha}{3}=\log_2\beta$에서 ㉠을 대입하면

$\frac{\log_2 4\alpha-2\log_2\alpha}{3}=\log_2 2\alpha$

$2+\log_2\alpha-2\log_2\alpha=3(1+\log_2\alpha)$

$4\log_2\alpha=-1$

$\log_2\alpha=-\frac{1}{4}$ $\therefore\ \alpha=2^{-\frac{1}{4}}$

이를 ㉠에 대입하면

$\beta=2\times2^{-\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$

두 점 Q, R를 지나는 직선의 기울기 m은

$m=\dfrac{\log_2 2\beta-\log_2\beta}{2\beta-\beta}=\dfrac{1}{\beta}=2^{-\frac{3}{4}}$

점 $\mathrm{P}\left(2^{-\frac{1}{4}},\ \dfrac{1}{4}\right)$은 직선 $y=2^{-\frac{3}{4}}x-n$ 위의 점이므로

$\dfrac{1}{4}=2^{-\frac{3}{4}}\times2^{-\frac{1}{4}}-n$

$\therefore\ n=\dfrac{1}{4}=2^{-2}$

$\therefore\ f(mn)=f(2^{-\frac{3}{4}}\times2^{-2})$

$=f(2^{-\frac{11}{4}})$

$=|\log_2 2^{-\frac{11}{4}}|=\dfrac{11}{4}$

07 답 ⑤

ㄱ. 점 B는 두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 만나는 점이다.

이때 $f(1)=1+a-1=a$, $h(1)=a+\log_2 1=a$이므로

$f(1)=h(1)=a$ ⟶ $y=f(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 모두 점 $(1,\ a)$를 지난다.

따라서 점 B의 좌표는 $(1,\ a)$이다. …… ㉠

ㄴ. 점 A의 x좌표가 4일 때, 점 A는 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점이므로 y좌표를 구하면

$y=\log_2 4=2$ $\therefore\ \mathrm{A}(4,\ 2)$

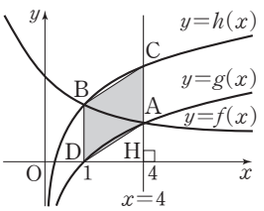
또 점 A는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$2=\dfrac{1}{8}+a-1$ $\therefore\ a=\dfrac{23}{8}$

함수 $h(x)=\dfrac{23}{8}+\log_2 x$의 그래프는 함수 $g(x)=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 $\dfrac{23}{8}$만큼 평행이동한 것이다.

함수 $g(x)=\log_2 x$의 그래프가 x축과 만나는 점 D의 좌표는 $(1,\ 0)$이고 ㉠에서 $\mathrm{B}(1,\ a)$이므로 직선 BD의 방정식은 $x=1$

따라서 두 직선 BD, CA가 평행하고, $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CA}}=a=\dfrac{23}{8}$이므로 사각형 ACBD는 평행사변형이다.



점 A를 지나고 x축에 수직인 직선 $x=4$가 x축과 만나는 점 H의 좌표는 $(4,\ 0)$이므로 사각형 ACBD의 넓이는

$\overline{\mathrm{CA}}\times\overline{\mathrm{DH}}=\dfrac{23}{8}\times(4-1)=\dfrac{69}{8}$

ㄷ. 점 A의 x좌표를 k라 하면 점 A는 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점이므로

$\mathrm{A}(k,\ \log_2 k)$

$\overline{\mathrm{CA}}:\overline{\mathrm{AH}}=3:2$에서 $2\overline{\mathrm{CA}}=3\overline{\mathrm{AH}}$이고, $\overline{\mathrm{CA}}=a$, $\overline{\mathrm{AH}}=\log_2 k$이므로

$2a=3\log_2 k$ …… ㉡

점 A는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$\log_2 k=2^{1-k}+a-1$

이를 ㉡에 대입하면

$2a=3(2^{1-k}+a-1)$, $3\times2^{1-k}=3-a$

$\therefore\ 2^{1-k}=1-\dfrac{a}{3}$ …… ㉢

$a>0$일 때, 점 A의 x좌표 k는 1보다 크므로 $k>1$에서

$-k<-1$ $\therefore\ 1-k<0$

따라서 $0<2^{1-k}<2^0$이므로

$0<1-\dfrac{a}{3}<1$ ($\because$ ㉢)

$-1<-\dfrac{a}{3}<0$ $\therefore\ 0<a<3$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

08 답 9

함수 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-4}+3$의 역함수를 구하면

$y-3=2^{-x+4}$에서 $-x+4=\log_2(y-3)$

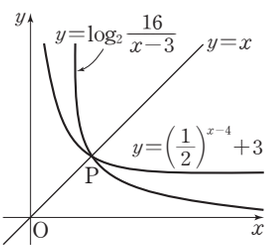
$x=-\log_2(y-3)+4$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=-\log_2(x-3)+4=\log_2\dfrac{16}{x-3}$

즉, 두 함수 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-4}+3$,

$y=\log_2\dfrac{16}{x-3}$은 서로 역함수 관계이므로 그 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.



이때 점 P는 두 곡선 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-4}+3$, $y=\log_2\dfrac{16}{x-3}$이 만나는 점이므로 직선 $y=x$ 위의 점이다.

$\therefore\ \beta=\alpha$ $\therefore\ \mathrm{P}(\alpha,\ \alpha)$

두 곡선 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-4}+3$, $y=\log_2\dfrac{16}{x-3}=-\log_2(x-3)+4$를 각각 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}$, $y=-\log_2 x+1$

또 점 P를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점을 P′이라 하면

$\mathrm{P}'(\alpha-3,\ \alpha-3)$

두 함수 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}$, $y=-\log_2 x+1$은 서로 역함수 관계이므로 그 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

이때 점 P′은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 두 곡선 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}$, $y=-\log_2 x+1$이 만나는 점은 P′이다.

곡선 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1}$과 직선 $y=x$가 만나는 점은 $(1,\ 1)$이므로

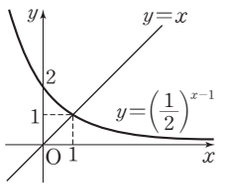
$\alpha-3=1$ $\therefore\ \alpha=4$

점 $\mathrm{P}(4,\ 4)$는 곡선 $y=a\log_2 x+2a$ 위의 점이므로

$4=a\log_2 4+2a$

$4a=4$ $\therefore\ a=1$

$\therefore\ a+\alpha+\beta=1+4+4=9$



09 답 3

두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계이므로 그 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

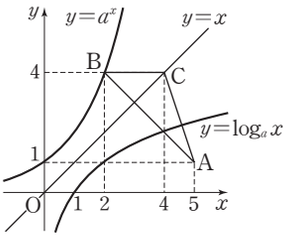
(i) $n(M_1)=1$, $n(M_2)=2$, $n(M_1\cap M_2)=0$일 때,

$n(M_1)=1$이려면 곡선 $y=a^x$이 점 B(2, 4)를 지나야 하므로

$a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>1$)

이때 곡선 $y=\log_2 x$는 두 점 (4, 2), (5, $\log_2 5$)를 지나고 $2<\log_2 5<3$이므로 그림과 같이 $n(M_2)=2$이고, $n(M_1\cap M_2)=0$이다.



따라서 $a=2$일 때, $n(M_1\cup M_2)=3$

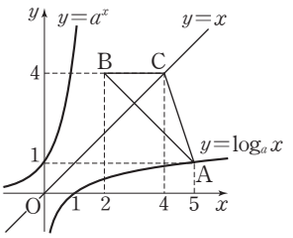
(ii) $n(M_1)=2$, $n(M_2)=1$, $n(M_1\cap M_2)=0$일 때,

$n(M_2)=1$이려면 곡선 $y=\log_a x$가 점 A(5, 1)을 지나야 하므로

$\log_a 5=1$

$\therefore a=5$

이때 곡선 $y=5^x$은 점 (2, 25)를 지나므로 그림과 같이 $n(M_1)=0$이다.



따라서 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $n(M_1)=2$, $n(M_2)=2$, $n(M_1\cap M_2)=1$일 때,

$n(M_1\cap M_2)\neq 0$이므로 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$가 만나는 점이 존재하고 이 점은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 다음과 같은 경우가 있다.

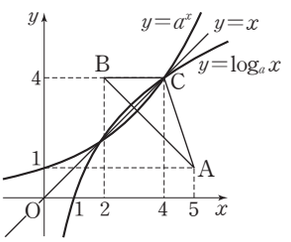
ⓘ 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$가 모두 점 C(4, 4)를 지날 때,

곡선 $y=a^x$이 점 C를 지나므로

$a^4=4$

$\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>1$)

이때 곡선 $y=\log_{\sqrt{2}} x$도 점 C를 지나므로 그림과 같이 $a=\sqrt{2}$일 때, $n(M_1\cup M_2)=3$



ⓘⓘ 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$가 모두 직선 $y=x$와 직선 AB가 만나는 점을 지날 때,

직선 AB의 방정식을 구하면

$y=\dfrac{4-1}{2-5}(x-5)+1$ $\therefore y=-x+6$

두 직선 $y=-x+6$, $y=x$가 만나는 점의 x좌표를 구하면

$-x+6=x$, $2x=6$ $\therefore x=3$

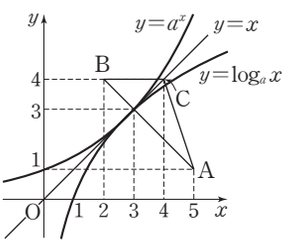
따라서 두 직선 $y=-x+6$, $y=x$가 만나는 점의 좌표는 (3, 3)

곡선 $y=a^x$이 점 (3, 3)을 지나므로

$a^3=3$

$\therefore a=\sqrt[3]{3}$ ($\because a$는 실수)

이때 곡선 $y=\log_{\sqrt[3]{3}} x$도 점 (3, 3)을 지나므로 그림과 같이 $a=\sqrt[3]{3}$일 때, $n(M_1\cup M_2)=3$



ⓘ, ⓘⓘ에서 $a=\sqrt{2}$ 또는 $a=\sqrt[3]{3}$

(i), (ii), (iii)에서 실수 a는 $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, 2의 3개이다.

10 답 192

곡선 $y=a^{x-1}$은 곡선 $y=a^x$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\log_a(x-1)$은 곡선 $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계이므로 그 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

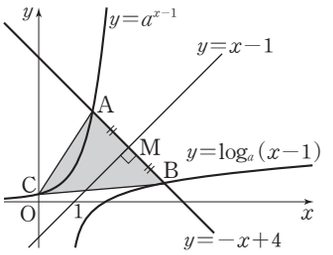
따라서 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 직선 $y=x-1$에 대하여 서로 대칭이다.

두 직선 $y=x-1$, $y=-x+4$가 만나는 점을 M이라 하고 점 M의 x좌표를 구하면

$x-1=-x+4$

$2x=5$ $\therefore x=\dfrac{5}{2}$

$\therefore \mathrm{M}\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$



이때 두 직선 $y=x-1$, $y=-x+4$는 서로 수직이므로 점 M은 선분 AB의 중점이다.

$\therefore \overline{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

점 A는 직선 $y=-x+4$ 위의 점이므로 $\mathrm{A}(k, -k+4)$ $\left(0<k<\dfrac{5}{2}\right)$라 하면 $\overline{\mathrm{AM}}^2=2$에서

$\left(k-\dfrac{5}{2}\right)^2+\left(-k+\dfrac{5}{2}\right)^2=2$

$2k^2-10k+\dfrac{25}{2}=2$, $4k^2-20k+21=0$

$(2k-3)(2k-7)=0$ $\therefore k=\dfrac{3}{2}$ $\left(\because 0<k<\dfrac{5}{2}\right)$

$\therefore \mathrm{A}\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

점 A는 곡선 $y=a^{x-1}$ 위의 점이므로

$\dfrac{5}{2}=a^{\frac{1}{2}}$

$\therefore a=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$

점 C는 곡선 $y=\left(\dfrac{25}{4}\right)^{x-1}$이 y축과 만나는 점이므로

$\mathrm{C}\left(0, \dfrac{4}{25}\right)$

삼각형 ABC에서 선분 AB를 밑변으로 하면 높이는 점 C와 직선 $y=-x+4$, 즉 $x+y-4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{\left|\dfrac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{96}{25\sqrt{2}}$

$\therefore S=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{96}{25\sqrt{2}}=\dfrac{96}{25}$

$\therefore 50\times S=50\times\dfrac{96}{25}=192$

idea

11 답 45

함수 $g(x)=2^x+3$의 역함수를 구하면

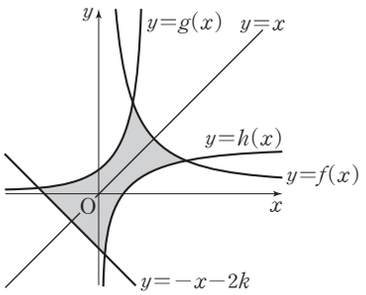
$y=2^x+3$에서 $y-3=2^x$

$x=\log_2(y-3)$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\log_2(x-3)$

즉, 두 함수 $g(x)=2^x+3$, $h(x)=\log_2(x-3)$은 서로 역함수 관계이므로 그 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.
또 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 직선 $y=-x-2k$도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
따라서 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=-x-2k$로 둘러싸인 부분을 S라 하면 S는 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



즉, S의 경계 및 내부의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중에서 직선 $y=x$ 위의 점을 제외한 점의 개수는 짝수이다.
따라서 S의 경계 및 내부의 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수가 홀수가 되려면 S의 경계 및 내부의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중에서 직선 $y=x$ 위의 점의 개수가 홀수이어야 한다.
함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표를 구하면
$\frac{100}{x}=x$, $x^2=100$
$\therefore x=10$ ($\because x>0$)
두 직선 $y=-x-2k$, $y=x$가 만나는 점의 x좌표를 구하면
$-x-2k=x$, $2x=-2k$
$\therefore x=-k$
즉, S의 경계 및 내부의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중에서 직선 $y=x$ 위의 점은 $(-k, -k)$, $(-k+1, -k+1)$, …, $(0, 0)$, $(1, 1)$, …, $(10, 10)$이므로 그 개수는
$k+11$
따라서 $k+11$이 홀수가 되려면 k는 짝수이어야 하므로 두 자리의 자연수 k는 10, 12, 14, …, 98의 45개이다.

12 답 $\frac{5}{2}$

$y=\log_a 2x\times\log_a\frac{4}{x}$
$=(\log_a 2+\log_a x)(2\log_a 2-\log_a x)$
$=-(\log_a x)^2+\log_a 2\times\log_a x+2(\log_a 2)^2$
$\log_a x=t$로 놓으면
$y=-t^2+(\log_a 2)t+2(\log_a 2)^2$
$=-\left(t-\frac{1}{2}\log_a 2\right)^2+\frac{9}{4}(\log_a 2)^2$
$=-(t-\log_a\sqrt{2})^2+\frac{9}{4}(\log_a 2)^2$
따라서 주어진 함수는 $t=\log_a\sqrt{2}$일 때 최댓값을 갖는다.
$t=\log_a x$이므로
$\log_a x=\log_a\sqrt{2}$ $\therefore x=\sqrt{2}$ $\therefore a=\sqrt{2}$
이때 최댓값이 $\frac{9}{4}(\log_a 2)^2$이므로
$M=\frac{9}{4}(\log_a 2)^2$
$a^4M=9$에서
$(\sqrt{2})^4\times\frac{9}{4}(\log_a 2)^2=9$, $(\log_a 2)^2=1$
$\therefore \log_a 2=1$ 또는 $\log_a 2=-1$
$\therefore a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$
따라서 모든 양수 a의 값의 합은
$2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

13 답 ②

$y=|\log_2 x-1|+|\log_2 4x^2-1|+|\log_2 8x^3-1|$
$+|\log_2 16x^4-1|+|\log_2 32x^5-1|$
$=|\log_2 x-1|+|2\log_2 x+1|+|3\log_2 x+2|$
$+|4\log_2 x+3|+|5\log_2 x+4|$
$\log_2 x=t$로 놓으면
$y=|t-1|+|2t+1|+|3t+2|+|4t+3|+|5t+4|$
(i) $t<-\frac{4}{5}$일 때,
$y=-(t-1)-(2t+1)-(3t+2)-(4t+3)-(5t+4)$
$=-15t-9$
이때 t의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
(ii) $-\frac{4}{5}\le t<-\frac{3}{4}$일 때,
$y=-(t-1)-(2t+1)-(3t+2)-(4t+3)+(5t+4)$
$=-5t-1$
이때 t의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
(iii) $-\frac{3}{4}\le t<-\frac{2}{3}$일 때,
$y=-(t-1)-(2t+1)-(3t+2)+(4t+3)+(5t+4)$
$=3t+5$
이때 t의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
(iv) $-\frac{2}{3}\le t<-\frac{1}{2}$일 때,
$y=-(t-1)-(2t+1)+(3t+2)+(4t+3)+(5t+4)$
$=9t+9$
이때 t의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
(v) $-\frac{1}{2}\le t<1$일 때,
$y=-(t-1)+(2t+1)+(3t+2)+(4t+3)+(5t+4)$
$=13t+11$
이때 t의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
(vi) $t\ge 1$일 때,
$y=(t-1)+(2t+1)+(3t+2)+(4t+3)+(5t+4)$
$=15t+9$
이때 t의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
(i)~(vi)에서 주어진 함수는 $t=-\frac{3}{4}$일 때 최솟값을 갖는다.
$t=-\frac{3}{4}$에서 직선의 기울기의 부호가 음에서 양으로 바뀐다.
$t=\log_2 x$이므로
$\log_2 x=-\frac{3}{4}$ $\therefore x=2^{-\frac{3}{4}}$ $\therefore a=2^{-\frac{3}{4}}$
이때 최솟값이 m이므로
$m=3\times\left(-\frac{3}{4}\right)+5=\frac{11}{4}$
$\therefore a\times 2^m=2^{-\frac{3}{4}}\times 2^{\frac{11}{4}}=2^2=4$

14 답 12

$(\log_3 x)^2+\log_x y=3$에서 $(\log_3 x)^2+\dfrac{\log_3 y}{\log_3 x}=3$

$\log_3 x\times\log_{\sqrt{3}} y=4$에서

$\log_3 x\times 2\log_3 y=4$ $\therefore \log_3 x\times\log_3 y=2$

$\log_3 x=X$, $\log_3 y=Y$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} X^2+\dfrac{Y}{X}=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ XY=2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $Y=\dfrac{2}{X}$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$X^2+\dfrac{2}{X^2}=3$, $X^4-3X^2+2=0$

$(X^2-1)(X^2-2)=0$

$(X+\sqrt{2})(X+1)(X-1)(X-\sqrt{2})=0$

$\therefore X=-\sqrt{2}$ 또는 $X=-1$ 또는 $X=1$ 또는 $X=\sqrt{2}$

$Y=\dfrac{2}{X}$이므로

$X=-\sqrt{2}$일 때 $Y=-\sqrt{2}$, $X=-1$일 때 $Y=-2$,

$X=1$일 때 $Y=2$, $X=\sqrt{2}$일 때 $Y=\sqrt{2}$

(i) $X=-\sqrt{2}$, $Y=-\sqrt{2}$일 때,

$\log_3 x=-\sqrt{2}$, $\log_3 y=-\sqrt{2}$이므로

$x=3^{-\sqrt{2}}$, $y=3^{-\sqrt{2}}$ $\therefore x+y=2\times 3^{-\sqrt{2}}$

(ii) $X=-1$, $Y=-2$일 때,

$\log_3 x=-1$, $\log_3 y=-2$이므로

$x=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$, $y=3^{-2}=\dfrac{1}{9}$ $\therefore x+y=\dfrac{4}{9}$

(iii) $X=1$, $Y=2$일 때,

$\log_3 x=1$, $\log_3 y=2$이므로

$x=3$, $y=3^2=9$ $\therefore x+y=12$

(iv) $X=\sqrt{2}$, $Y=\sqrt{2}$일 때,

$\log_3 x=\sqrt{2}$, $\log_3 y=\sqrt{2}$이므로

$x=3^{\sqrt{2}}$, $y=3^{\sqrt{2}}$ $\therefore x+y=2\times 3^{\sqrt{2}}$

(i)~(iv)에서 $x+y$의 값은

$\dfrac{4}{9}$, 12, $2\times 3^{-\sqrt{2}}$, $2\times 3^{\sqrt{2}}$

이때 $\dfrac{4}{9}<12$, $2\times 3^{-\sqrt{2}}<2\times 3^{\sqrt{2}}$이므로 최댓값을 찾기 위하여 12와 $2\times 3^{\sqrt{2}}$의 대소를 비교해 보자.

$27=3^3<6^2=36$에서 $3^{\frac{3}{2}}<6$이고, $3^{\sqrt{2}}<3^{\frac{3}{2}}$이므로

$3^{\sqrt{2}}<3^{\frac{3}{2}}<6$ $\therefore 2\times 3^{\sqrt{2}}<12$

따라서 $x+y$의 최댓값은 12이다.

15 답 ②

$(\log_3 x)^2-a\log_3 x+2a+1=0$에서 $\log_3 x=t$로 놓으면

$t^2-at+2a+1=0$ ····· ㉠

이때 주어진 방정식의 두 실근이 α, β이므로 이차방정식 ㉠의 두 실근은 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이다.

$\dfrac{1}{9}<\alpha<\dfrac{1}{3}$에서 $\log_3\dfrac{1}{9}<\log_3\alpha<\log_3\dfrac{1}{3}$

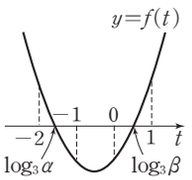
$\therefore -2<\log_3\alpha<-1$

$1<\beta<3$에서 $\log_3 1<\log_3\beta<\log_3 3$

$\therefore 0<\log_3\beta<1$

따라서 $f(t)=t^2-at+2a+1$이라 할 때,

$-2<\log_3\alpha<-1$, $0<\log_3\beta<1$이려면 그림과 같이 $f(-2)>0$, $f(-1)<0$, $f(0)<0$, $f(1)>0$이어야 한다.



$f(-2)>0$에서 $4a+5>0$

$\therefore a>-\dfrac{5}{4}$ ····· ㉡

$f(-1)<0$에서 $3a+2<0$ $\therefore a<-\dfrac{2}{3}$ ····· ㉢

$f(0)<0$에서 $2a+1<0$ $\therefore a<-\dfrac{1}{2}$ ····· ㉣

$f(1)>0$에서 $a+2>0$ $\therefore a>-2$ ····· ㉤

㉡~㉤에서

$-\dfrac{5}{4}<a<-\dfrac{2}{3}$

따라서 정수 a의 값은 -1이다.

16 답 ①

$\log_n(7a+n)=\log_n(a^2+2)+1$에서

$\log_n(7a+n)=\log_n n(a^2+2)$

즉, $7a+n=n(a^2+2)$이므로

$na^2-7a+n=0$ ····· ㉠

주어진 방정식을 만족시키는 양수 a가 존재하려면 이차방정식 ㉠을 만족시키는 양의 실근이 존재해야 한다.

$f(a)=na^2-7a+n=n\left(a-\dfrac{7}{2n}\right)^2+n-\dfrac{49}{4n}$라 하면 함수 $y=f(a)$의 그래프의 축은 직선 $a=\dfrac{7}{2n}$이고, n은 자연수이므로

$\dfrac{7}{2n}>0$

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=49-4n^2\geq 0$

$4n^2-49\leq 0$

$(2n+7)(2n-7)\leq 0$

$\therefore -\dfrac{7}{2}\leq n\leq\dfrac{7}{2}$

그런데 n은 1이 아닌 자연수이므로

$1<n\leq\dfrac{7}{2}$

따라서 자연수 n의 값은 2, 3이므로 그 합은

$2+3=5$

17 답 -7

$(x^2+y^2-3)^{\log_2(x^2+y^2-3)^3}\times 2^{\{\log_2(x-y+k)\}^2}=1$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2\{(x^2+y^2-3)^{\log_2(x^2+y^2-3)^3}\times 2^{\{\log_2(x-y+k)\}^2}\}=0$

$3\{\log_2(x^2+y^2-3)\}^2+\{\log_2(x-y+k)\}^2=0$

이때 $\{\log_2(x^2+y^2-3)\}^2\geq 0$, $\{\log_2(x-y+k)\}^2\geq 0$이므로

$\log_2(x^2+y^2-3)=0$, $\log_2(x-y+k)=0$

$x^2+y^2-3=1$, $x-y+k=1$

$\therefore x^2+y^2-4=0$, $y=x+k-1$

$y=x+k-1$을 $x^2+y^2-4=0$에 대입하면

$x^2+(x+k-1)^2-4=0$

$2x^2+2(k-1)x+k^2-2k-3=0$

이때 이 이차방정식의 실근이 존재하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-2(k^2-2k-3)\geq 0$

$k^2-2k-7\leq 0$

$\therefore\ 1-2\sqrt{2}\leq k\leq 1+2\sqrt{2}$

따라서 실수 k의 최댓값은 $1+2\sqrt{2}$, 최솟값은 $1-2\sqrt{2}$이므로 그 곱은

$(1+2\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})=1-8=-7$

18 답 ④

$(\log_2 x)^2-|\log_2 x^4|+\log_{\sqrt{2}} x=a$에서

$(\log_2 x)^2-|4\log_2 x|+2\log_2 x=a$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-|4t|+2t=a$

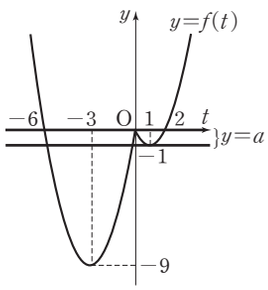
이때 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지므로 함수

$y=t^2-|4t|+2t$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$f(t)=t^2-|4t|+2t$라 하면

$f(t)=\begin{cases} t^2+6t & (t<0) \\ t^2-2t & (t\geq 0) \end{cases}=\begin{cases} (t+3)^2-9 & (t<0) \\ (t-1)^2-1 & (t\geq 0) \end{cases}$

함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나려면 그림과 같이 $a=-1$ 또는 $a=0$이어야 한다.



(i) $a=-1$일 때,

$t<0$이면 $t^2+6t=-1$에서

$t^2+6t+1=0$

$\therefore\ t=-3-2\sqrt{2}$ 또는 $t=-3+2\sqrt{2}$

$t\geq 0$이면 $t^2-2t=-1$에서

$t^2-2t+1=0$

$(t-1)^2=0$

$\therefore\ t=1$

$t=\log_2 x$이고 주어진 방정식의 세 실근이 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$이므로

$\log_2\alpha=-3-2\sqrt{2}$, $\log_2\beta=-3+2\sqrt{2}$, $\log_2\gamma=1$

이때 $\log_2\alpha+\log_2\beta+\log_2\gamma=-5$이므로

$\log_2\alpha\beta\gamma=-5$ $\quad\therefore\ \alpha\beta\gamma=2^{-5}=\frac{1}{32}$

$\therefore\ \alpha\beta\gamma+a=\frac{1}{32}+(-1)=-\frac{31}{32}$

(ii) $a=0$일 때,

$t<0$이면 $t^2+6t=0$에서

$t(t+6)=0$

$\therefore\ t=-6$ $(\because\ t<0)$

$t\geq 0$이면 $t^2-2t=0$에서

$t(t-2)=0$

$\therefore\ t=0$ 또는 $t=2$

$t=\log_2 x$이고 주어진 방정식의 세 실근이 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$이므로

$\log_2\alpha=-6$, $\log_2\beta=0$, $\log_2\gamma=2$

이때 $\log_2\alpha+\log_2\beta+\log_2\gamma=-4$이므로

$\log_2\alpha\beta\gamma=-4$ $\quad\therefore\ \alpha\beta\gamma=2^{-4}=\frac{1}{16}$

$\therefore\ \alpha\beta\gamma+a=\frac{1}{16}$

(i), (ii)에서 $\alpha\beta\gamma+a$의 최솟값은 $-\frac{31}{32}$이다.

19 답 ③

$(g\circ f)(n)=g(f(n))=g(n^2-6n+11)$

$\quad=\log_3(n^2-6n+11)$

이때 $n^2-6n+11=(n-3)^2+2>0$이므로 진수의 조건을 항상 만족시킨다.

$k<(g\circ f)(n)<k+2$에서

$k<\log_3(n^2-6n+11)<k+2$

$\log_3 3^k<\log_3(n^2-6n+11)<\log_3 3^{k+2}$

로그의 밑이 1보다 크므로

$3^k<n^2-6n+11<3^{k+2}$

$\therefore\ 3^k<(n-3)^2+2<3^{k+2}$

(i) $k=0$일 때,

$1<(n-3)^2+2<9$에서

$-1<(n-3)^2<7$ ⟶ $-1<0\leq(n-3)^2\leq 2^2<7$

따라서 자연수 n은 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

$\therefore\ h(0)=5$

(ii) $k=3$일 때,

$27<(n-3)^2+2<243$에서

$25<(n-3)^2<241$ ⟶ $25<6^2\leq(n-3)^2\leq 15^2<241$

따라서 자연수 n은 9, 10, 11, …, 18의 10개이다.

$\therefore\ h(3)=10$

(i), (ii)에서

$h(0)+h(3)=5+10=15$

20 답 5

$\log_2(x-1)+\log_2(a-2x)<\log_2\left(\frac{a^2}{8}-x\right)$에서

$\log_2(x-1)(a-2x)<\log_2\left(\frac{a^2}{8}-x\right)$

로그의 밑이 1보다 크므로

$(x-1)(a-2x)<\frac{a^2}{8}-x$

$\therefore\ 2x^2-(a+3)x+a+\frac{a^2}{8}>0$ ····· 배점 30%

$f(x)=2x^2-(a+3)x+a+\frac{a^2}{8}=2\left(x-\frac{a+3}{4}\right)^2-\frac{(a+3)^2}{8}+a+\frac{a^2}{8}$

이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=\frac{a+3}{4}$이다.

(i) $1<x<\frac{a}{2}$에 $x=\frac{a+3}{4}$이 속할 때,

$\frac{a+3}{4}<\frac{a}{2}$이므로 $a+3<2a$

↳ $a>2$이므로 $\frac{a+3}{4}>1$이 항상 성립한다.

$\therefore\ a>3$ ····· ㉠

$1<x<\frac{a}{2}$에서 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면 $f\left(\frac{a+3}{4}\right)>0$이어야 하므로

$-\frac{(a+3)^2}{8}+a+\frac{a^2}{8}>0$

$-(a+3)^2+8a+a^2>0$

$2a-9>0$ $\quad\therefore\ a>\frac{9}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서

$a>\frac{9}{2}$

(ii) $1<x<\frac{a}{2}$에 $x=\frac{a+3}{4}$이 속하지 않을 때,

$\frac{a+3}{4}\geq\frac{a}{2}$이므로 $a+3\geq 2a$ $\therefore a\leq 3$

↳ $a>2$이므로 $\frac{a+3}{4}>1$이 항상 성립한다.

그런데 $a>2$이므로 $2<a\leq 3$ …… ㉣

$1<x<\frac{a}{2}$에서 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면 $f\left(\frac{a}{2}\right)\geq 0$이어야 하므로

$\frac{a^2}{2}-\frac{a}{2}(a+3)+a+\frac{a^2}{8}\geq 0$

$\frac{a^2}{8}-\frac{a}{2}\geq 0$, $a^2-4a\geq 0$, $a(a-4)\geq 0$

$\therefore a\leq 0$ 또는 $a\geq 4$

그런데 $a>2$이므로 $a\geq 4$ …… ㉤

㉣, ㉤의 공통부분은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a>\frac{9}{2}$ …… 배점 50%

따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다. …… 배점 20%

21 답 ⑤

$2\log_2 x-3=0$에서 $\log_2 x=\frac{3}{2}$ $\therefore x=2^{\frac{3}{2}}$

이때 $8=2^3<3^2=9$에서 $2^{\frac{3}{2}}<3$이고, x는 자연수이므로

$(\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2-|2\log_2 x-3|$

$=\begin{cases}(\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2+2\log_2 x-3 & (x=1,\ 2)\\ (\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2-2\log_2 x+3 & (x\geq 3)\end{cases}$

(i) $x=1$일 때,

$\log_2 x=0$이므로 주어진 부등식은

$(\log_2 y)^2-3\leq 1$

$(\log_2 y)^2\leq 4$, $-2\leq\log_2 y\leq 2$

$\log_2 2^{-2}\leq\log_2 y\leq\log_2 2^2$

로그의 밑이 1보다 크므로

$\frac{1}{4}\leq y\leq 4$

따라서 자연수 y의 값은 1, 2, 3, 4이므로 순서쌍 (x, y)는 (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)의 4개이다.

(ii) $x=2$일 때,

$\log_2 x=1$이므로 주어진 부등식은

$(\log_2 y)^2\leq 1$, $-1\leq\log_2 y\leq 1$

$\log_2 2^{-1}\leq\log_2 y\leq\log_2 2$

로그의 밑이 1보다 크므로

$\frac{1}{2}\leq y\leq 2$

따라서 자연수 y의 값은 1, 2이므로 순서쌍 (x, y)는 (2, 1), (2, 2)의 2개이다.

(iii) $x\geq 3$일 때,

주어진 부등식은

$(\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2-2\log_2 x+3\leq 1$

$(\log_2 x-1)^2+(\log_2 y)^2+2\leq 1$

$\therefore (\log_2 x-1)^2+(\log_2 y)^2\leq -1$

이때 $(\log_2 x-1)^2\geq 0$, $(\log_2 y)^2\geq 0$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x, y는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 순서쌍 (x, y)의 개수는

$4+2=6$

22 답 8

$(\log_5 x)^2+(\log_5 y)^2=\log_5 5x^2+\log_{\sqrt{5}} y^2$에서

$(\log_5 x)^2+(\log_5 y)^2=1+2\log_5 x+4\log_5 y$

$(\log_5 x)^2+(\log_5 y)^2-2\log_5 x-4\log_5 y-1=0$

$\log_5 x=X$, $\log_5 y=Y$로 놓으면

$X^2+Y^2-2X-4Y-1=0$ …… ㉠

$\log_5 x^2y=k$라 하면

$2\log_5 x+\log_5 y=k$

$2X+Y=k$ $\therefore Y=-2X+k$

이를 ㉠에 대입하면

$X^2+(-2X+k)^2-2X-4(-2X+k)-1=0$

$5X^2-2(2k-3)X+k^2-4k-1=0$

이 이차방정식의 실근이 존재하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2k-3)^2-5(k^2-4k-1)\geq 0$

$k^2-8k-14\leq 0$

$\therefore 4-\sqrt{30}\leq k\leq 4+\sqrt{30}$

즉, $4-\sqrt{30}\leq\log_5 x^2y\leq 4+\sqrt{30}$이므로

$\log_5 5^{4-\sqrt{30}}\leq\log_5 x^2y\leq\log_5 5^{4+\sqrt{30}}$

로그의 밑이 1보다 크므로

$5^{4-\sqrt{30}}\leq x^2y\leq 5^{4+\sqrt{30}}$

따라서 x^2y의 최댓값은 $5^{4+\sqrt{30}}$, 최솟값은 $5^{4-\sqrt{30}}$이므로 그 곱은

$5^{4+\sqrt{30}}\times 5^{4-\sqrt{30}}=5^8$

$\therefore a=8$

다른 풀이

$(\log_5 x)^2+(\log_5 y)^2=\log_5 5x^2+\log_{\sqrt{5}} y^2$에서

$(\log_5 x)^2+(\log_5 y)^2-2\log_5 x-4\log_5 y-1=0$

$\log_5 x=X$, $\log_5 y=Y$로 놓으면

$X^2+Y^2-2X-4Y-1=0$

$\therefore (X-1)^2+(Y-2)^2=6$ …… ㉠

$\log_5 x^2y=k$라 하면

$2\log_5 x+\log_5 y=k$ $\therefore 2X+Y-k=0$ …… ㉡

원 ㉠과 직선 ㉡이 서로 만나려면 원 ㉠의 중심 (1, 2)와 직선 ㉡ 사이의 거리가 원 ㉠의 반지름의 길이 $\sqrt{6}$보다 작거나 같아야 하므로

$\frac{|2+2-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}\leq\sqrt{6}$

$|4-k|\leq\sqrt{30}$

$-\sqrt{30}\leq 4-k\leq\sqrt{30}$

$\therefore 4-\sqrt{30}\leq k\leq 4+\sqrt{30}$

즉, $4-\sqrt{30}\leq\log_5 x^2y\leq 4+\sqrt{30}$이므로

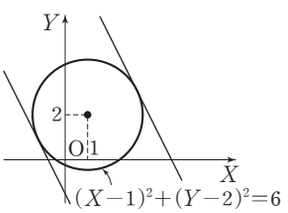
$\log_5 5^{4-\sqrt{30}}\leq\log_5 x^2y\leq\log_5 5^{4+\sqrt{30}}$

로그의 밑이 1보다 크므로

$5^{4-\sqrt{30}}\leq x^2y\leq 5^{4+\sqrt{30}}$

따라서 x^2y의 최댓값은 $5^{4+\sqrt{30}}$, 최솟값은 $5^{4-\sqrt{30}}$이므로 그 곱은

$5^{4+\sqrt{30}}\times 5^{4-\sqrt{30}}=5^8$ $\therefore a=8$



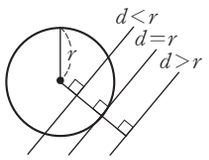
개념 NOTE

반지름의 길이가 r인 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d라 하면 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

(1) $d<r$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $d=r$이면 한 점에서 만난다.(접한다.)

(3) $d>r$이면 만나지 않는다.



23 답 10

처음 햄버거 한 개의 무게를 Ag, 가격을 B원이라 하자.

무게를 4 %씩 n번 줄인 후 햄버거의 무게는

$(1-0.04)^n A=0.96^n A(\mathrm{g})$

한편 처음 햄버거 1g의 가격은 $\frac{B}{A}$원이고, 햄버거 한 개의 가격은 변함이 없으므로 무게를 n번 줄인 후 햄버거 1g의 가격은 $\frac{B}{0.96^n A}$원이다.

무게를 n번 줄인 후 햄버거 1g의 가격이 처음의 1.5배 이상이 되어야 하므로

$\frac{B}{0.96^n A}\geq 1.5\times\frac{B}{A}$

$0.96^n\leq\frac{2}{3}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 0.96^n\leq\log\frac{2}{3}$

$n\log\frac{2^5\times 3}{100}\leq\log\frac{2}{3}$

$n(5\log 2+\log 3-2)\leq\log 2-\log 3$

$n(5\times 0.301+0.4771-2)\leq 0.301-0.4771$

$-0.0179n\leq -0.1761$

$\therefore\ n\geq\frac{1761}{179}=9.8\cdots$

따라서 자연수 n의 최솟값은 10이다.

24 답 ①

$y=\log_3 9x=2+\log_3 x$이므로 함수 $y=\log_3 9x$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

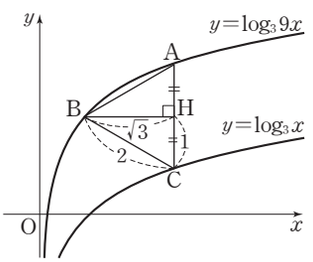
이때 선분 AC가 y축에 평행하므로 정삼각형 ABC의 한 변 AC의 길이는 2이다.

점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 BH는 선분 AC의 수직이등분선이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=\frac{1}{2}\times 2=1$

$\overline{\mathrm{BC}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$



즉, 점 C는 점 B$(p,\ q)$를 x축의 방향으로 $\sqrt{3}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것과 같으므로

C$(p+\sqrt{3},\ q-1)$

점 C는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프 위의 점이므로

$q-1=\log_3(p+\sqrt{3})$ ····· ㉠

점 B는 함수 $y=\log_3 9x$의 그래프 위의 점이므로

$q=\log_3 9p$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\log_3 9p-1=\log_3(p+\sqrt{3})$

$\log_3 3p=\log_3(p+\sqrt{3})$

즉, $3p=p+\sqrt{3}$이므로

$2p=\sqrt{3}\qquad\therefore\ p=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이를 ㉡에 대입하면 $q=\log_3\frac{9\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ p\times 3^q=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3^{\log_3\frac{9\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{9\sqrt{3}}{2}=\frac{27}{4}$

25 답 ③

$y=|\log_2(-x+k)|=\begin{cases}\log_2(-x+k) & (x<k-1)\\ -\log_2(-x+k) & (k-1\leq x<k)\end{cases}$

$y=|\log_2 x|=\begin{cases}-\log_2 x & (0<x<1)\\ \log_2 x & (x\geq 1)\end{cases}$

점 P는 두 곡선 $y=\log_2(-x+k)$, $y=-\log_2 x$가 만나는 점이고 x좌표가 x_1이므로

$\log_2(-x_1+k)=-\log_2 x_1$

$\log_2(-x_1+k)=\log_2\frac{1}{x_1}$

즉, $-x_1+k=\frac{1}{x_1}$이므로

${x_1}^2-kx_1+1=0$ ····· ㉠

점 R는 두 곡선 $y=-\log_2(-x+k)$, $y=\log_2 x$가 만나는 점이고 x좌표가 x_3이므로

$-\log_2(-x_3+k)=\log_2 x_3$

$\log_2\frac{1}{-x_3+k}=\log_2 x_3$

즉, $\frac{1}{-x_3+k}=x_3$이므로

${x_3}^2-kx_3+1=0$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 x_1, x_3은 이차방정식 $x^2-kx+1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$x_1x_3=1$

이때 $x_3-x_1=2\sqrt{3}$이므로

$(x_1+x_3)^2=(x_3-x_1)^2+4x_1x_3$

$\qquad=(2\sqrt{3})^2+4\times 1=16$

$\therefore\ x_1+x_3=4\ (\because\ 0<x_1<x_3)$

26 답 ③

곡선 $y=2^x-1$이 직선 $y=1$과 만나는 점 A의 x좌표를 구하면

$2^x-1=1,\ 2^x=2$

$\therefore\ x=1\qquad\therefore$ A$(1,\ 1)$

두 직선 $y=-(1+\log_2 n)x+7$, $y=1$이 만나는 점 B의 x좌표를 구하면

$-(1+\log_2 n)x+7=1,\ (1+\log_2 n)x=6$

$\therefore\ x=\frac{6}{1+\log_2 n}\qquad\therefore$ B$\left(\frac{6}{1+\log_2 n},\ 1\right)$

$\therefore\ f(n)=\left|\frac{6}{1+\log_2 n}-1\right|$

ㄱ. $f(2)=\left|\frac{6}{1+\log_2 2}-1\right|=|3-1|=2$

ㄴ. $f(n)\geq 1$에서

$\left|\frac{6}{1+\log_2 n}-1\right|\geq 1$

이때 n이 자연수이므로 $\frac{6}{1+\log_2 n}-1\leq -1$일 수 없다.

즉, $\frac{6}{1+\log_2 n}-1\geq 1$이므로

$\frac{6}{1+\log_2 n}\geq 2,\ \frac{1+\log_2 n}{6}\leq\frac{1}{2}$

$1+\log_2 n\leq 3,\ \log_2 n\leq 2$

$\log_2 n\leq\log_2 2^2$

로그의 밑이 1보다 크므로

$n\leq 4$

따라서 자연수 n은 1, 2, 3, 4의 4개이다.

ㄷ. $|f(n)-1|\geq\frac{2}{3}$에서

$f(n)-1\leq-\frac{2}{3}$ 또는 $f(n)-1\geq\frac{2}{3}$

$\therefore f(n)\leq\frac{1}{3}$ 또는 $f(n)\geq\frac{5}{3}$

(i) $f(n)\leq\frac{1}{3}$일 때,

$\left|\frac{6}{1+\log_2 n}-1\right|\leq\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3}\leq\frac{6}{1+\log_2 n}-1\leq\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}\leq\frac{6}{1+\log_2 n}\leq\frac{4}{3}$

$\frac{3}{4}\leq\frac{1+\log_2 n}{6}\leq\frac{3}{2}$

$\frac{9}{2}\leq1+\log_2 n\leq9$

$\frac{7}{2}\leq\log_2 n\leq8$

$\log_2 2^{\frac{7}{2}}\leq\log_2 n\leq\log_2 2^8$

로그의 밑이 1보다 크므로

$2^{\frac{7}{2}}\leq n\leq2^8$

이때 $\sqrt{121}<2^{\frac{7}{2}}=\sqrt{128}<\sqrt{144}$이므로

$11<2^{\frac{7}{2}}<12$

$\therefore 11<2^{\frac{7}{2}}<12\leq n\leq256$

따라서 자연수 n은 12, 13, 14, …, 256의 245개이다.

(ii) $f(n)\geq\frac{5}{3}$일 때,

$\left|\frac{6}{1+\log_2 n}-1\right|\geq\frac{5}{3}$

이때 n이 자연수이므로 $\frac{6}{1+\log_2 n}-1\leq-\frac{5}{3}$일 수 없다.

즉, $\frac{6}{1+\log_2 n}-1\geq\frac{5}{3}$이므로

$\frac{6}{1+\log_2 n}\geq\frac{8}{3}$

$\frac{1+\log_2 n}{6}\leq\frac{3}{8}$

$1+\log_2 n\leq\frac{9}{4}$

$\log_2 n\leq\frac{5}{4}$

$\log_2 n\leq\log_2 2^{\frac{5}{4}}$

로그의 밑이 1보다 크므로

$n\leq2^{\frac{5}{4}}$

이때 $\sqrt[4]{16}<2^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{32}<\sqrt[4]{81}$이므로

$2<2^{\frac{5}{4}}<3$

$\therefore n\leq2<2^{\frac{5}{4}}<3$

따라서 자연수 n은 1, 2의 2개이다.

(i), (ii)에서 자연수 n의 개수는

$245+2=247$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

step 3 최고난도 문제 | 51~53쪽

01 $\sqrt{2}$	02 54	03 -1	04 ①	05 ④	06 1021
07 39	08 ④	09 ②	10 ③		

01 답 $\sqrt{2}$

1단계 주어진 조건을 이용하여 관계식 세우기

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β ($\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha\neq\beta$)라 하면 곡선 $y=\log_a 4x$와 직선 $y=mx+4$가 만나는 점이 A, B이므로

$\log_a 4\alpha=m\alpha+4$ …… ㉠

$\log_a 4\beta=m\beta+4$

각 변끼리 빼면

$\log_a 4\alpha-\log_a 4\beta=m\alpha-m\beta$, $\log_a\frac{\alpha}{\beta}=m\alpha-m\beta$

$\therefore\frac{\alpha}{\beta}=a^{m\alpha-m\beta}$ …… ㉡

또 곡선 $y=a^x+4$와 직선 $y=mx+4$가 만나는 점이 A, B이므로

$a^\alpha+4=m\alpha+4$ $\therefore a^\alpha=m\alpha$ …… ㉢

$a^\beta+4=m\beta+4$ $\therefore a^\beta=m\beta$ …… ㉣

2단계 m의 값 구하기

㉡에서

$\frac{\alpha}{\beta}=a^{m\alpha-m\beta}=\frac{a^{m\alpha}}{a^{m\beta}}$

$=\left(\frac{a^\alpha}{a^\beta}\right)^m=\left(\frac{m\alpha}{m\beta}\right)^m$ (∵ ㉢, ㉣)

$=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^m$

이때 $\alpha>0$에서 $\frac{\alpha}{\beta}\neq0$이고, $\alpha\neq\beta$에서 $\frac{\alpha}{\beta}\neq1$이므로

$m=1$

3단계 a의 값 구하기

$m=1$을 ㉢에 대입하면 $a^\alpha=\alpha$ …… ㉤

$m=1$을 ㉠에 대입하면 $\log_a 4\alpha=\alpha+4$

좌변에 ㉤을 대입하면

$\log_a 4a^\alpha=\alpha+4$, $\log_a 4+\alpha=\alpha+4$

$\log_a 4=4$, $a^4=4$ $\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>0$)

4단계 am의 값 구하기

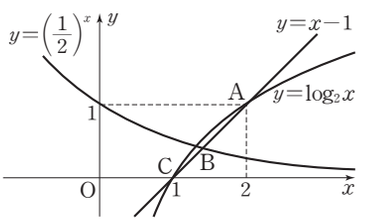
$\therefore am=\sqrt{2}\times1=\sqrt{2}$

02 답 54

1단계 n의 값 구하기

(i) $n=1$일 때,

A(2, 1)이고 직선 $y=x-1$이 x축과 만나는 점을 C라 하면 C(1, 0)



$\overline{AC}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$이고, 그림에서 $\overline{AB}<\overline{AC}$이므로

$\overline{AB}<\sqrt{2}$

따라서 $\frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}<1$이므로 $1<\frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}<10$을 만족시키지 않는다.

(ii) $n \geq 2$일 때,

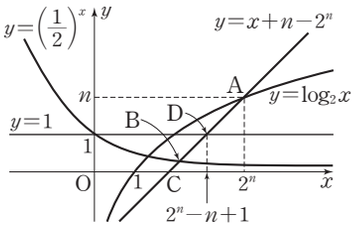
직선 $y=x+n-2^n$이 x축과 만나는 점을 C라 하면

$C(2^n-n,\ 0)$

$n \geq 2$일 때, $2^n-n \geq 2$이므로 점 C의 x좌표는 점 $(1,\ 0)$의 x좌표보다 크다.

직선 $y=x+n-2^n$이 직선 $y=1$과 만나는 점을 D라 하면

$D(2^n-n+1,\ 1)$



$A(2^n,\ n)$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{(-n)^2+(-n)^2}=\sqrt{2n^2}=\sqrt{2}n$

$\overline{AD}=\sqrt{(-n+1)^2+(1-n)^2}=\sqrt{2(n-1)^2}=\sqrt{2}(n-1)$

그림에서 $\overline{AD}<\overline{AB}<\overline{AC}$이므로

$\sqrt{2}(n-1)<\overline{AB}<\sqrt{2}n$

$\therefore\ n-1<\dfrac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}<n$

$1<\dfrac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}<10$을 만족시키려면

$n-1 \geq 1,\ n \leq 10$

$\therefore\ 2 \leq n \leq 10$

따라서 자연수 n의 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10이다.

2단계 자연수 n의 값의 합 구하기

(i), (ii)에서 모든 자연수 n의 값의 합은

$2+3+4+5+6+7+8+9+10=54$

03 답 -1

1단계 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=n$으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기

$g(x)=\begin{cases} 2^x-1 & (0 \leq x \leq 1) \\ \log_2(3-x) & (1<x \leq 2) \end{cases}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 것이다.

$0 \leq x \leq 1$에서 $y=2^x-1$의 역함수를 구하면

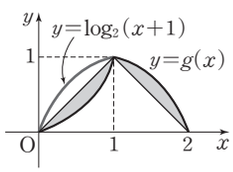
$y=\log_2(x+1)$

즉, 두 함수 $y=2^x-1$, $y=\log_2(x+1)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 함수 $y=2^x-1$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면 함수 $y=\log_2(x+1)$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이도 S이다.

함수 $y=\log_2(x+1)$의 그래프와 직선 $y=x$를 각각 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y=\log_2(-x+3)$, $y=-x+2$

즉, 함수 $y=\log_2(3-x)$의 그래프와 직선 $y=-x+2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 S와 같다.



따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 두 직선 $y=x$, $y=-x+2$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$\dfrac{1}{2}\times 2\times 1=1$

평행이동하여도 도형의 넓이는 변하지 않으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=n$으로 둘러싸인 부분의 넓이도 1이다.

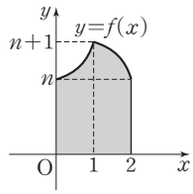
2단계 n의 값 구하기

(i) $n>0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $1+2\times n$이므로

$1+2n=21$

$\therefore\ n=10$



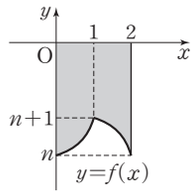
(ii) $n<0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$2\times(-n)-1$이므로

$-2n-1=21$

$\therefore\ n=-11$



3단계 정수 n의 값의 합 구하기

(i), (ii)에서 모든 정수 n의 값의 합은

$10+(-11)=-1$

04 답 ①

1단계 주어진 함수의 양변에 밑이 3인 로그를 취하여 정리하기

$y=kx^{-4+\log_3 x}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 y=\log_3 kx^{-4+\log_3 x}$

$=\log_3 k+(-4+\log_3 x)\log_3 x$

$=(\log_3 x)^2-4\log_3 x+\log_3 k$ …… ㉠

2단계 k의 값 구하기

$\log_3 x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{3} \leq x \leq 9$에서

$\log_3 3^{-1} \leq t \leq \log_3 3^2$

$\therefore\ -1 \leq t \leq 2$

이때 ㉠에서

$\log_3 y=t^2-4t+\log_3 k$

$=(t-2)^2+\log_3 k-4$

따라서 $-1 \leq t \leq 2$에서 $t=-1$일 때 최댓값 $\log_3 k+5$를 가지므로

$\log_3 k+5=\log_3 9$ ⟶ y의 최댓값이 9이므로 $\log_3 y$의 최댓값은 $\log_3 9$이다.

$\log_3 k=-3$

$\therefore\ k=3^{-3}$

3단계 a, m의 값 구하기

따라서 $\log_3 y=(t-2)^2-7$은 $-1 \leq t \leq 2$에서 $t=2$일 때 최솟값을 갖는다.

$t=\log_3 x$이므로

$\log_3 x=2$

$\therefore\ x=3^2$

$\therefore\ a=3^2$

이때 최솟값이 -7이므로

$-7=\log_3 m$ ⟶ y의 최솟값이 m이므로 $\log_3 y$의 최솟값은 $\log_3 m$이다.

$\therefore\ m=3^{-7}$

4단계 $\dfrac{am}{k}$의 값 구하기

$\therefore\ \dfrac{am}{k}=\dfrac{3^2\times 3^{-7}}{3^{-3}}=3^{-2}=\dfrac{1}{9}$

05 답 ④

1단계 $f(a)$, $f(b)$를 각각 $\log a$, $\log b$에 대하여 나타내기

$1 \le a < 10$일 때 $0 \le \log a < 1$이므로 $f(a) = \log a$

$10 \le a < 100$일 때 $1 \le \log a < 2$이므로 $f(a) = \log a - 1$

$1 \le b < 10$일 때 $0 \le \log b < 1$이므로 $f(b) = \log b$

$10 \le b < 100$일 때 $1 \le \log b < 2$이므로 $f(b) = \log b - 1$

2단계 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기

(i) $1 \le a \le b < 10$일 때,

$f(a) = \log a$, $f(b) = \log b$이므로

$\log b - \log a = f(a) - f(b)$에서

$\log b - \log a = \log a - \log b$

$2\log b = 2\log a$ $\therefore b = a$

따라서 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, …, $(9, 9)$의 9개이다.

(ii) $1 \le a < 10$, $10 \le b \le 20$일 때,

$f(a) = \log a$, $f(b) = \log b - 1$이므로

$\log b - \log a = f(a) - f(b)$에서

$\log b - \log a = \log a - (\log b - 1)$

$2\log b = 2\log a + 1$

$\log b^2 = \log 10a^2$

$\therefore b^2 = 10a^2$ $\therefore b = \sqrt{10}a$

이를 만족시키는 자연수 a, b는 존재하지 않는다.

(iii) $10 \le a \le b \le 20$일 때,

$f(a) = \log a - 1$, $f(b) = \log b - 1$이므로

$\log b - \log a = f(a) - f(b)$에서

$\log b - \log a = \log a - 1 - (\log b - 1)$

$2\log b = 2\log a$ $\therefore b = a$

따라서 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(10, 10)$, $(11, 11)$, $(12, 12)$, …, $(20, 20)$의 11개이다.

(i), (ii), (iii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $9 + 11 = 20$

idea

06 답 1021

1단계 $\log_2(x^2+nxy+y^2) - \log_2(x^2-xy+y^2)$이 최댓값을 갖는 조건 알기

$$\log_2(x^2+nxy+y^2) - \log_2(x^2-xy+y^2) = \log_2 \frac{x^2+nxy+y^2}{x^2-xy+y^2}$$

$t = \dfrac{x^2+nxy+y^2}{x^2-xy+y^2}$이라 하면 $\log_2 t$에서 로그의 밑이 1보다 크므로 t가 최댓값을 가질 때 $\log_2 t$도 최댓값을 갖는다.

2단계 $f(n)$ 구하기

$$t = \frac{x^2-xy+y^2+(n+1)xy}{x^2-xy+y^2} = 1 + \frac{(n+1)xy}{x^2-xy+y^2}$$

$$= 1 + \frac{n+1}{\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}}$$

$xy > 0$에서 $\dfrac{x}{y} > 0$, $\dfrac{y}{x} > 0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t = 1 + \frac{n+1}{\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}} \le 1 + \frac{n+1}{2\sqrt{\frac{x}{y} \times \frac{y}{x}} - 1} = n + 2$$

$\left(\text{단, 등호는 } \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{x}, \text{ 즉 } x = y\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $xy > 0$일 때 t의 최댓값이 $n+2$이므로

$f(n) = \log_2(n+2)$

3단계 자연수 n의 최댓값 구하기

$f(n) < 10$에서 $\log_2(n+2) < 10$

$\log_2(n+2) < \log_2 2^{10}$

로그의 밑이 1보다 크므로

$n + 2 < 2^{10}$ $\therefore n < 1022$

따라서 자연수 n의 최댓값은 1021이다.

07 답 39

1단계 x의 값의 범위 구하기

(밑) $\neq 1$이어야 하므로 자연수 a의 값의 범위는 $a > 1$

$2(\log_a x)^2 - 7\log_a x + 5 < 0$에서 $\log_a x = t$로 놓으면

$2t^2 - 7t + 5 < 0$, $(t-1)(2t-5) < 0$

$\therefore 1 < t < \dfrac{5}{2}$

즉, $1 < \log_a x < \dfrac{5}{2}$이므로

$\log_a a < \log_a x < \log_a a^{\frac{5}{2}}$

로그의 밑이 1보다 크므로

$a < x < a^{\frac{5}{2}}$

2단계 a의 값 구하기

(i) $a^{\frac{5}{2}}$이 자연수일 때,

a는 제곱수이어야 하므로 $a = n^2$ (n은 1보다 큰 자연수)이라 하면

$f(a) = a^{\frac{5}{2}} - a - 1 = n^5 - n^2 - 1$

$27 \le f(a) \le 233$에서

$27 \le n^5 - n^2 - 1 \le 233$

$27 \le n^5 - n^2 - 1$에서

$n^5 - n^2 - 28 \ge 0$

$(n-2)(n^4+2n^3+4n^2+7n+14) \ge 0$

그런데 $n > 1$이므로

$n^4+2n^3+4n^2+7n+14 > 0$

$\therefore n \ge 2$ …… ㉠

$n^5 - n^2 - 1 \le 233$에서

$n^5 - n^2 - 234 \le 0$

$(n-3)(n^4+3n^3+9n^2+26n+78) \le 0$

그런데 $n > 1$이므로

$n^4+3n^3+9n^2+26n+78 > 0$

$\therefore 1 < n \le 3$ ($\because n > 1$) …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2 \le n \le 3$이므로 n의 값은 2, 3이다.

따라서 자연수 a의 값은 2^2, 3^2, 즉 4, 9이다.

(ii) $a^{\frac{5}{2}}$이 자연수가 아닐 때,

$a^{\frac{5}{2}}$이 자연수가 아니면 $a < x < a^{\frac{5}{2}}$을 만족시키는 정수 x의 개수는

$f(a) = [a^{\frac{5}{2}}] - a$ (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

$a^{\frac{5}{2}} - 1 < [a^{\frac{5}{2}}] < a^{\frac{5}{2}}$이므로

$a^{\frac{5}{2}} - a - 1 < [a^{\frac{5}{2}}] - a < a^{\frac{5}{2}} - a$

$\therefore a^{\frac{5}{2}} - a - 1 < f(a) < a^{\frac{5}{2}} - a$ …… ㉢

$27 \le f(a) \le 233$에서 $f(a)$는 정수이므로

$27 \le f(a) < 234$ → (i)과 같은 방법으로 부등식의 해를 구하기 위하여 식을 변형한다.

㉢이 이 부등식을 만족시키려면

$a^{\frac{5}{2}} - a - 1 > 27$, $a^{\frac{5}{2}} - a < 234$

ⓘ $a^{\frac{5}{2}}-a-1>27$일 때,

$a^{\frac{1}{2}}=s\,(s>1)$로 놓으면

$s^5-s^2-1>27$, $s^5-s^2-28>0$

$(s-2)(s^4+2s^3+4s^2+7s+14)>0$

그런데 $s>1$이므로

$s^4+2s^3+4s^2+7s+14>0$

$\therefore\ s>2$

즉, $a^{\frac{1}{2}}>2$이므로

$a>4$

ⓘⓘ $a^{\frac{5}{2}}-a<234$일 때,

$a^{\frac{1}{2}}=s\,(s>1)$로 놓으면

$s^5-s^2<234$, $s^5-s^2-234<0$

$(s-3)(s^4+3s^3+9s^2+26s+78)<0$

그런데 $s>1$이므로

$s^4+3s^3+9s^2+26s+78>0$

$\therefore\ 1<s<3\ (\because\ s>1)$

즉, $1<a^{\frac{1}{2}}<3$이므로

$1<a<9$

ⓘ, ⓘⓘ에서

$4<a<9$

이때 $a^{\frac{5}{2}}$이 자연수가 아니므로 a는 제곱수가 아니어야 한다.

따라서 자연수 a의 값은 5, 6, 7, 8이다.

3단계 자연수 a의 값의 합 구하기

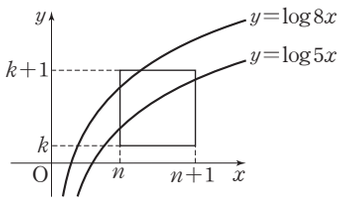
(i), (ii)에서 모든 자연수 a의 값의 합은

$4+5+6+7+8+9=39$

08 답 ④

1단계 주어진 조건을 이용하여 부등식 세우기

(가), (다)에서 자연수 n, k에 대하여 한 변의 길이가 1인 정사각형의 네 꼭짓점의 좌표를 $(n,\ k)$, $(n,\ k+1)$, $(n+1,\ k)$, $(n+1,\ k+1)$이라 할 때, 정사각형이 두 함수 $y=\log 5x$, $y=\log 8x$의 그래프와 모두 만나려면 그림과 같아야 한다.



따라서 $\log 8n\le k+1$, $\log 5(n+1)\ge k$이어야 한다.

$\log 8n\le k+1$에서 $\log 8n\le\log 10^{k+1}$

로그의 밑이 1보다 크므로

$8n\le 10^{k+1}$ $\quad\therefore\ n\le\dfrac{10^{k+1}}{8}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\log 5(n+1)\ge k$에서 $\log 5(n+1)\ge\log 10^k$

로그의 밑이 1보다 크므로

$5(n+1)\ge 10^k$ $\quad\therefore\ n\ge\dfrac{10^k}{5}-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{10^k}{5}-1\le n\le\dfrac{10^{k+1}}{8}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

(나)에서 x좌표가 200 이하이므로

$n+1\le 200$ $\quad\therefore\ n\le 199$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

2단계 정사각형의 개수 구하기

$x=200$을 $y=\log 8x$에 대입하면

$y=\log 1600=\log 16+2$

이때 $1<\log 16<2$이므로

$3<\log 16+2<4$

따라서 자연수 k가 될 수 있는 값은 1, 2, 3이므로 k의 값에 따라 자연수 n의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) $k=1$일 때,

㉢에서 $1\le n\le 12.5$이므로 자연수 n은 1, 2, 3, …, 12의 12개이다.

(ii) $k=2$일 때,

㉢에서 $19\le n\le 125$이므로 자연수 n은 19, 20, 21, …, 125의 107개이다.

(iii) $k=3$일 때,

㉢에서 $199\le n\le 1250$

이때 ㉣에서 $n\le 199$이므로 자연수 n은 199의 1개이다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 정사각형의 개수는 자연수 n의 개수와 같으므로

$12+107+1=120$

09 답 ②

1단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. 두 점 A, B를 지나는 직선 l의 기울기가 $\dfrac{1}{3}$이므로

$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ y_2-y_1=\dfrac{1}{3}(x_2-x_1)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{AB}=\sqrt{10}$에서 $\overline{AB}^2=10$이므로

$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=10$

㉠을 대입하면

$(x_2-x_1)^2+\dfrac{1}{9}(x_2-x_1)^2=10$

$\dfrac{10}{9}(x_2-x_1)^2=10$

$(x_2-x_1)^2=9$

이때 $x_1<x_2$이므로

$x_2-x_1=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

2단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. ㉠에서 $y_2-y_1=\dfrac{1}{3}(x_2-x_1)$이고 ㉡에서 $x_2-x_1=3$이므로

$y_2-y_1=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉢

두 점 B, C를 지나는 직선의 기울기는 -3이므로

$\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=-3$

$\therefore\ y_3-y_2=-3(x_3-x_2)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉣

$\overline{BC}=\sqrt{10}$에서 $\overline{BC}^2=10$이므로

$(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2=10$

㉣을 대입하면

$(x_3-x_2)^2+9(x_3-x_2)^2=10$

$10(x_3-x_2)^2=10$

$(x_3-x_2)^2=1$

이때 $x_2<x_3$이므로

$x_3-x_2=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉤

이를 ㉣에 대입하면

$y_3-y_2=-3$ …… ㉤

㉡+㉤을 하면

$x_3-x_1=4$

㉢+㉤을 하면

$y_3-y_1=-2$ $\therefore y_1-y_3=2$

$\therefore x_3-x_1=2(y_1-y_3)$

3단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. ㉡에서 $x_2=x_1+3$이고, ㉢에서 $y_2=y_1+1$이므로

$B(x_1+3,\ y_1+1)$

두 점 A, B는 곡선 $y=\log_4 ax$ 위의 점이므로

$y_1=\log_4 ax_1$ …… ㉥

$y_1+1=\log_4 a(x_1+3)$ …… ㉦

㉥을 ㉦에 대입하면

$\log_4 ax_1+1=\log_4 a(x_1+3)$

$\log_4 a+\log_4 x_1+1=\log_4 a+\log_4 (x_1+3)$

$\log_4 4x_1=\log_4 (x_1+3)$

즉, $4x_1=x_1+3$이므로 $x_1=1$

이를 ㉥에 대입하면 $y_1=\log_4 a$

$\therefore A(1,\ \log_4 a)$

점 A는 곡선 $y=b\times\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 위의 점이므로

$\log_4 a=\frac{b}{3}$, $a=4^{\frac{b}{3}}$ $\therefore a^2=4^{\frac{2}{3}b}$

$b>0$이므로 $4^{\frac{2}{3}b}\neq 4^b$ $\therefore a^2\neq 4^b$

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

10 답 ③

1단계 $y=\log_2|kx|$를 x의 값의 범위에 따라 나타내기

$k>1$이므로

$$y=\log_2|kx|=\begin{cases}\log_2(-kx) & (x<0)\\ \log_2 kx & (x>0)\end{cases}$$

2단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. 점 A는 두 곡선 $y=\log_2(-kx)$, $y=\log_2(x+4)$가 만나는 점이고 x좌표가 x_1이므로

$\log_2(-kx_1)=\log_2(x_1+4)$

즉, $-kx_1=x_1+4$이므로

$x_1=-\frac{4}{k+1}$ …… ㉠

점 B는 두 곡선 $y=\log_2 kx$, $y=\log_2(x+4)$가 만나는 점이고 x좌표가 x_2이므로

$\log_2 kx_2=\log_2(x_2+4)$

즉, $kx_2=x_2+4$이므로

$x_2=\frac{4}{k-1}$ …… ㉡

$x_2=-2x_1$에서 $\frac{4}{k-1}=\frac{8}{k+1}$

$k+1=2k-2$ $\therefore k=3$

3단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. 점 B는 두 곡선 $y=\log_2(-x+m)$, $y=\log_2 kx$가 만나는 점이고 x좌표가 x_2이므로

$\log_2(-x_2+m)=\log_2 kx_2$

즉, $-x_2+m=kx_2$이므로

$m=(k+1)x_2=\frac{4(k+1)}{k-1}$ ($\because$ ㉡) …… ㉢

점 C는 두 곡선 $y=\log_2(-x+m)$, $y=\log_2(-kx)$가 만나는 점이고 x좌표가 x_3이므로

$\log_2(-x_3+m)=\log_2(-kx_3)$

즉, $-x_3+m=-kx_3$이므로

$x_3=-\frac{m}{k-1}=-\frac{4(k+1)}{(k-1)^2}$ ($\because$ ㉢)

$\therefore x_1x_3=-\frac{4}{k+1}\times\left\{-\frac{4(k+1)}{(k-1)^2}\right\}$ ($\because$ ㉠)

$=\left(\frac{4}{k-1}\right)^2=x_2^2$ ($\because$ ㉡) …… ㉣

4단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. ㉣에서 $\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_3}{x_2}$이므로

$\frac{x_2}{x_1}=\frac{\frac{4}{k-1}}{-\frac{4}{k+1}}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=-\frac{k+1}{k-1}=-1-\frac{2}{k-1}<-1$ ($\because k>1$)

이때 $\frac{x_2}{x_1}=l\ (l<-1)$이라 하면

$x_2=lx_1$ …… ㉤

이를 $x_2^2=x_1x_3$에 대입하면

$l^2x_1^2=x_1x_3$ $\therefore x_3=l^2x_1$

세 점 A, B, C의 y좌표를 각각 y_1, y_2, y_3이라 하면

$y_1=\log_2(-kx_1)$, $y_2=\log_2 kx_2$, $y_3=\log_2(-kx_3)$

두 직선 AB, AC의 기울기의 합이 0이므로

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=0$

$\frac{\log_2 kx_2-\log_2(-kx_1)}{lx_1-x_1}+\frac{\log_2(-kx_3)-\log_2(-kx_1)}{l^2x_1-x_1}=0$

$\frac{\log_2\left(-\frac{x_2}{x_1}\right)}{(l-1)x_1}+\frac{\log_2\frac{x_3}{x_1}}{(l^2-1)x_1}=0$

$\frac{\log_2(-l)}{(l-1)x_1}+\frac{\log_2 l^2}{(l^2-1)x_1}=0$

$\frac{\log_2(-l)}{(l-1)x_1}+\frac{2\log_2(-l)}{(l^2-1)x_1}=0$

$\frac{(l+3)\log_2(-l)}{(l^2-1)x_1}=0$

$(l+3)\log_2(-l)=0$에서 $\log_2(-l)>\log_2 1=0$이므로

$l+3=0$ $\therefore l=-3$

이를 ㉤에 대입하면

$x_2=-3x_1$

$\frac{4}{k-1}=\frac{12}{k+1}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$k+1=3k-3$, $2k=4$

$\therefore k=2$

이를 ㉢에 대입하면

$m=\frac{4(2+1)}{2-1}=12$

$\therefore m+k^2=12+4=16$

5단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

기출 변형 문제로 단원 마스터 | 54~57쪽

01 ④	02 −70	03 ③	04 198	05 ②	06 28
07 ②	08 242	09 ④	10 5	11 53	12 15
13 ⑤	14 ⑤				

01 답 ④

(i) p, q가 모두 홀수일 때,

$f(p)\times f(q)=\sqrt[6]{8\times 3^p}\times\sqrt[6]{8\times 3^q}$

$=\sqrt[6]{2^6\times 3^p\times 3^q}=2\times\sqrt[6]{3^{p+q}}$

$=2\times 3^{\frac{p+q}{6}}$

$f(p)\times f(q)$가 자연수가 되려면 $3^{\frac{p+q}{6}}$이 자연수이어야 하므로 $p+q$가 6의 배수이어야 한다.

p, q는 10 이하의 홀수이므로

$p+q=6$일 때, 순서쌍 (p, q)는 (1, 5), (3, 3), (5, 1)의 3개이다.

$p+q=12$일 때, 순서쌍 (p, q)는 (3, 9), (5, 7), (7, 5), (9, 3)의 4개이다.

$p+q=18$일 때, 순서쌍 (p, q)는 (9, 9)의 1개이다.

따라서 순서쌍 (p, q)의 개수는

$3+4+1=8$

(ii) p는 홀수, q는 짝수일 때,

$f(p)\times f(q)=\sqrt[6]{8\times 3^p}\times\sqrt[6]{27\times 2^{q+3}}$

$=\sqrt[6]{2^3\times 3^p\times 3^3\times 2^{q+3}}=\sqrt[6]{2^{q+6}\times 3^{p+3}}$

$=2^{\frac{q+6}{6}}\times 3^{\frac{p+3}{6}}$

$f(p)\times f(q)$가 자연수가 되려면 $2^{\frac{q+6}{6}}$, $3^{\frac{p+3}{6}}$이 모두 자연수이어야 하므로 $p+3$, $q+6$이 모두 6의 배수이어야 한다.

따라서 p의 값은 3, 9이고, q의 값은 6이므로 순서쌍 (p, q)의 개수는

$2\times 1=2$

(iii) p는 짝수, q는 홀수일 때,

(ii)와 같은 방법으로 하면 순서쌍 (p, q)의 개수는

$1\times 2=2$

(iv) p, q가 모두 짝수일 때,

$f(p)\times f(q)=\sqrt[6]{27\times 2^{p+3}}\times\sqrt[6]{27\times 2^{q+3}}$

$=\sqrt[6]{3^6\times 2^{p+3}\times 2^{q+3}}=3\times\sqrt[6]{2^{p+q+6}}$

$=3\times 2^{\frac{p+q+6}{6}}$

$f(p)\times f(q)$가 자연수가 되려면 $2^{\frac{p+q+6}{6}}$이 자연수이어야 하므로

$p+q+6$이 6의 배수이어야 한다.

p, q는 10 이하의 짝수이므로

$p+q+6=12$, 즉 $p+q=6$일 때, 순서쌍 (p, q)는 (2, 4), (4, 2)의 2개이다.

$p+q+6=18$, 즉 $p+q=12$일 때, 순서쌍 (p, q)는 (2, 10), (4, 8), (6, 6), (8, 4), (10, 2)의 5개이다.

$p+q+6=24$, 즉 $p+q=18$일 때, 순서쌍 (p, q)는 (8, 10), (10, 8)의 2개이다.

따라서 순서쌍 (p, q)의 개수는

$2+5+2=9$

(i)~(iv)에서 순서쌍 (p, q)의 개수는

$8+2+2+9=21$

02 답 −70

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 −1이고 (나)에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 양수이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 (가)에서 방정식 $(x^n-32)f(x)=0$이 중근인 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 방정식 $x^n-32=0$, $f(x)=0$은 각각 서로 다른 두 실근을 갖고, 이 두 실근이 서로 같아야 한다.

(i) n이 홀수일 때,

방정식 $x^n-32=0$, 즉 $x^n=32$의 실근은 $\sqrt[n]{32}$의 1개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) n이 짝수일 때,

방정식 $x^n-32=0$, 즉 $x^n=32$의 실근은 $-\sqrt[n]{32}$, $\sqrt[n]{32}$이다.

이는 방정식 $f(x)=0$의 두 실근과 같으므로

$f(x)=-(x+\sqrt[n]{32})(x-\sqrt[n]{32})$

$=-x^2+(\sqrt[n]{32})^2$

$=-x^2+2^{\frac{10}{n}}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값이 $2^{\frac{10}{n}}$이다.

(나)에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 자연수이므로 $\frac{10}{n}$이 자연수이어야 한다.

즉, n은 10의 양의 약수이고 짝수이므로 n의 값은 2, 10이다.

(i), (ii)에서 $n=2$ 또는 $n=10$

$n=2$일 때, $f(x)=-x^2+2^5$이므로

$f(n)=f(2)=-4+32=28$

$n=10$일 때, $f(x)=-x^2+2$이므로

$f(n)=f(10)=-100+2=-98$

따라서 모든 $f(n)$의 값의 합은

$28+(-98)=-70$

03 답 ③

ㄱ. 집합 A_{27}은 $3^a=\frac{27}{b}$, 즉 $3^a\times b=27$을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 원소로 갖는다.

이때 $3^1\times 9=27$, $3^2\times 3=27$, $3^3\times 1=27$이므로

$A_{27}=\{(1, 9), (2, 3), (3, 1)\}$

ㄴ. $m=9^k$이면 $3^a=\frac{m}{b}$에서

$3^a=\frac{9^k}{b}$ $\therefore b=\frac{9^k}{3^a}=3^{2k-a}$

따라서 $A_m=\{(1, 3^{2k-1}), (2, 3^{2k-2}), (3, 3^{2k-3}), \cdots, (2k, 1)\}$이므로

$n(A_m)=2k$

ㄷ. 집합 A_m은 $3^a=\frac{m}{b}$, 즉 $3^a\times b=m$을 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)를 원소로 가지므로 $n(A_m)=1$을 만족시키는 원소를 (a', b')이라 하면

$3^{a'}\times b'=m$

이때 $a'>1$이면

$m=3\times 3\times\cdots\times b'$

즉, 순서쌍 $(1, 3^{a'-1}b')$, $(2, 3^{a'-2}b')$, …이 원소이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore a'=1$

이때 b'이 3의 배수, 즉 $b'=3k$(k는 자연수) 꼴이면

$m=3^1\times 3k=3^2k$

즉, 순서쌍 $(1, 3k)$가 원소이면 순서쌍 $(2, k)$도 원소이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 b'은 3의 배수가 아니어야 한다. ⟶ $b'=1, 2, 4, 5, 7, 8, \cdots$

$m=3^1\times b'$ 꼴이므로 한 자리의 자연수 m은 3×1, 3×2의 2개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

04 답 198

㈎에서 $9^a=64^b=k^c=m\,(m>1)$으로 놓으면

$9^a=m$에서 $a=\log_9 m$ …… ㉠

$64^b=m$에서 $b=\log_{64} m$ …… ㉡

$k^c=m$에서 $c=\log_k m$ …… ㉢

㈏의 $\log c=\log(3nab)-\log(3a+n^2b)$에서

$\log c=\log\dfrac{3nab}{3a+n^2b}$

즉, $c=\dfrac{3nab}{3a+n^2b}$이므로

$\dfrac{1}{c}=\dfrac{3a+n^2b}{3nab}$ $\therefore\ \dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{nb}+\dfrac{n}{3a}$

㉠, ㉡, ㉢을 대입하면

$\dfrac{1}{\log_k m}=\dfrac{1}{n\log_{64} m}+\dfrac{n}{3\log_9 m}$

$\log_m k=\dfrac{1}{n}\log_m 64+\dfrac{n}{3}\log_m 9$

$\log_m k=\log_m(2^{\frac{6}{n}}\times 3^{\frac{2n}{3}})$

$\therefore\ k=2^{\frac{6}{n}}\times 3^{\frac{2n}{3}}$

이때 k는 자연수이므로 $2^{\frac{6}{n}}$, $3^{\frac{2n}{3}}$이 모두 자연수이어야 한다.

즉, n은 6의 양의 약수이고 3의 배수이어야 하므로 n의 값은 3, 6이다.

$n=3$일 때, $k=2^2\times 3^2=36$

$n=6$일 때, $k=2\times 3^4=162$

따라서 모든 k의 값의 합은

$36+162=198$

05 답 ②

집합 $A=\{k\,|\,k=\log_a 3b,\ k$는 유리수$\}$에서 $a<3b$이고 k가 유리수이므로 $\log_a 3b=\dfrac{q}{p}$(p, q는 서로소인 자연수)라 하면 $n(A)$의 값은 순서쌍 (p, q)의 개수와 같다.

$\log_a 3b=\dfrac{q}{p}$에서 $3b=a^{\frac{q}{p}}$, $a=(3b)^{\frac{p}{q}}$

a, b, p, q가 모두 자연수이므로 1보다 큰 자연수 c에 대하여 $a=c^p$, $3b=c^q$으로 나타낼 수 있다.

이때 $3b=c^q$에서 c는 3의 배수이어야 한다.

$2<a<b<300$에서 $2<c^p<\dfrac{c^q}{3}<300$

(i) $c=3$일 때,

$2<3^p<\dfrac{3^q}{3}<300$에서

$2<3^1\le 3^p<3^{q-1}\le 3^5<300$

이를 만족시키는 서로소인 자연수 p, q의 순서쌍 (p, q)는 $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 5)$이다.

(ii) $c=6$, 9일 때,

$2<c^p<\dfrac{c^q}{3}<300$에서

$2<c^1\le c^p<\dfrac{c^q}{3}\le\dfrac{c^3}{3}<300<\dfrac{c^4}{3}$

이를 만족시키는 서로소인 자연수 p, q의 순서쌍 (p, q)는 $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$이다.

(iii) $c=12, 15, \cdots, 27$일 때,

$2<c^p<\dfrac{c^q}{3}<300$에서

$2<c^1\le c^p<\dfrac{c^q}{3}\le\dfrac{c^2}{3}<300<\dfrac{c^3}{3}$

이를 만족시키는 서로소인 자연수 p, q의 순서쌍 (p, q)는 $(1, 2)$이다.

(iv) $c\ge 30$일 때,

$2<c^p<\dfrac{c^q}{3}<300$에서

$2<c^1\le c^p<\dfrac{c^q}{3}<300\le\dfrac{c^2}{3}$

이를 만족시키는 서로소인 자연수 p, q의 순서쌍 (p, q)는 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 서로 다른 순서쌍 (p, q)는 $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$, $(2, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 5)$의 8개이다.

$\therefore\ n(A)=8$

06 답 28

$\log_2(na+2a^2)=\log_2(nb+2b^2)$이므로

$na+2a^2=nb+2b^2$

$n(a-b)+2(a^2-b^2)=0$

$n(a-b)+2(a+b)(a-b)=0$

$(a-b)(n+2a+2b)=0$

$\therefore\ a=b$ 또는 $n+2a+2b=0$

(i) $a=b$일 때,

$-\dfrac{3n}{4}\le b+2a\le-\dfrac{n}{4}$에서

$-\dfrac{3n}{4}\le 3a\le-\dfrac{n}{4}$

$\therefore\ -\dfrac{n}{4}\le a\le-\dfrac{n}{12}$

한편 $\log_2(na+2a^2)$이 자연수이므로

$\log_2(na+2a^2)=k$(k는 자연수)라 하면

$na+2a^2=2^k$

$2a^2+na-2^k=0$

$\therefore\ a=\dfrac{-n\pm\sqrt{n^2+8\times 2^k}}{4}=\dfrac{-n\pm\sqrt{n^2+2^{k+3}}}{4}$

그런데 $-\dfrac{n}{4}\le a\le-\dfrac{n}{12}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n+2a+2b=0$일 때, ⟶ $\dfrac{-n-\sqrt{n^2+2^{k+3}}}{4}<-\dfrac{n}{4}$, $\dfrac{-n+\sqrt{n^2+2^{k+3}}}{4}>0$

$2b=-2a-n$ $\therefore\ b=-a-\dfrac{n}{2}$

$-\dfrac{3n}{4}\le b+2a\le-\dfrac{n}{4}$에서

$-\dfrac{3n}{4}\le\left(-a-\dfrac{n}{2}\right)+2a\le-\dfrac{n}{4}$

$\therefore\ -\dfrac{n}{4}\le a\le\dfrac{n}{4}$

한편 $\log_2(na+2a^2)$이 자연수이므로

$\log_2(na+2a^2)=k$ (k는 자연수)라 하면

$na+2a^2=2^k$

$2a^2+na-2^k=0$

$\therefore a=\dfrac{-n\pm\sqrt{n^2+8\times 2^k}}{4}$

$=\dfrac{-n\pm\sqrt{n^2+2^{k+3}}}{4}$

그런데 $-\dfrac{n}{4}\le a\le\dfrac{n}{4}$이므로

$a=\dfrac{-n+\sqrt{n^2+2^{k+3}}}{4}$

이를 $-\dfrac{n}{4}\le a\le\dfrac{n}{4}$에 대입하면

$-\dfrac{n}{4}\le\dfrac{-n+\sqrt{n^2+2^{k+3}}}{4}\le\dfrac{n}{4}$

$0\le\sqrt{n^2+2^{k+3}}\le 2n$

각 변을 제곱하면

$0\le n^2+2^{k+3}\le 4n^2$ ⟶ $0\le n^2+2^{k+3}$은 항상 성립하므로 $n^2+2^{k+3}\le 4n^2$인 경우만 확인한다.

$n^2+2^{k+3}\le 4n^2$에서

$2^{k+3}\le 3n^2$

이때 $n\le 20$이므로

$2^{k+3}\le 1200$

$\therefore 2^k\le 150$

이를 만족시키는 자연수 k의 값은

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

(i), (ii)에서 모든 $k=\log_2(na+2a^2)$의 값의 합은

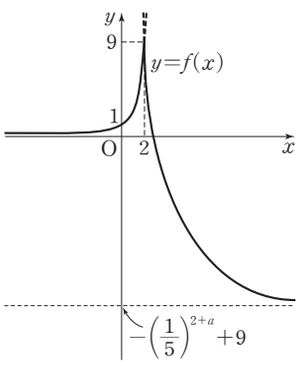
$1+2+3+4+5+6+7=28$

07 답 ②

곡선 $y=3^x$의 점근선은 직선 $y=0$,

곡선 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{5}\right)^{2+a}+9$의

점근선은 직선 $y=-\left(\frac{1}{5}\right)^{2+a}+9$이고, $f(2)=9$이므로 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같다.



$x<2$에서 y좌표가 정수인 점은 8개 ⟶ $y=1, 2, \cdots, 8$

이고, $x\ge 2$에서 y좌표가 음이 아닌 정수인 점은 10개이므로 조건을 만족 ⟶ $y=0, 1, 2, \cdots, 9$

시키려면 $x\ge 2$에서 y좌표가 음의 정수인 점이 15개이어야 한다.

따라서 곡선 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{5}\right)^{2+a}+9$의 점근선이 직선 $y=-16$이거나 직선 $y=-16$과 직선 $y=-15$ 사이에 있어야 하므로

$-16\le-\left(\frac{1}{5}\right)^{2+a}+9<-15$

$24<\left(\frac{1}{5}\right)^{2+a}\le 25$

$24<5^{-2-a}\le 25$

$5<24<5^{-2-a}\le 5^2$

이를 만족시키는 정수 a의 값은 -4이다.

08 답 242

(나)에서 $n=1$일 때,

$$f(x)=\frac{1}{3}f(x-2)=\begin{cases}3^{x-3}-\frac{1}{3} & (2<x\le 3)\\ 1-3^{x-4} & (3<x\le 4)\end{cases}$$

$n=2$일 때,

$$f(x)=\frac{1}{3^2}f(x-4)=\begin{cases}3^{x-6}-\frac{1}{9} & (4<x\le 5)\\ \frac{1}{3}-3^{x-7} & (5<x\le 6)\end{cases}$$

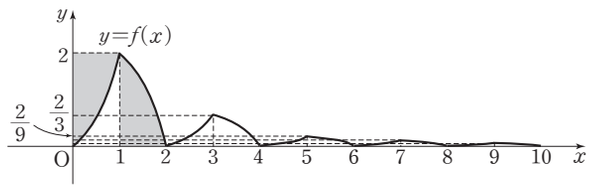
$n=3$일 때,

$$f(x)=\frac{1}{3^3}f(x-6)=\begin{cases}3^{x-9}-\frac{1}{27} & (6<x\le 7)\\ \frac{1}{9}-3^{x-10} & (7<x\le 8)\end{cases}$$

$n=4$일 때,

$$f(x)=\frac{1}{3^4}f(x-8)=\begin{cases}3^{x-12}-\frac{1}{81} & (8<x\le 9)\\ \frac{1}{27}-3^{x-13} & (9<x\le 10)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=3^x-1$ $(0\le x\le 1)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 함수 $y=3-3^{x-1}$ $(1\le x\le 2)$의 그래프와 같으므로 위의 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같다.

즉, $0\le x\le 2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$1\times 2=2$

같은 방법으로 하면 $2\le x\le 4$, $4\le x\le 6$, $6\le x\le 8$, $8\le x\le 10$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 각각

$1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$, $1\times\frac{2}{9}=\frac{2}{9}$, $1\times\frac{2}{27}=\frac{2}{27}$, $1\times\frac{2}{81}=\frac{2}{81}$

$\therefore S=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}=\frac{242}{81}$

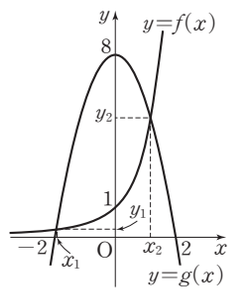
$\therefore 81S=81\times\frac{242}{81}=242$

09 답 ④

$f(x)=4^x$, $g(x)=-2x^2+8$이라 하면

$g(x)=-2(x+2)(x-2)$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 그림과 같다.



ㄱ. 그림에서 $0<x<x_2$일 때

$f(x)<g(x)$이고, $x_2<x<2$일 때

$f(x)>g(x)$이다.

$x=1$일 때,

$f(1)=4$, $g(1)=-2+8=6$

따라서 $f(1)<g(1)$이므로 $x=1$은 $0<x<x_2$에 속한다.

$\therefore x_2>1$ …… ㉠

ㄴ. 그림에서 $-2<x<x_1$일 때 $f(x)>g(x)$이고, $x_1<x<0$일 때 $f(x)<g(x)$이다.

$x=-1$일 때,

$f(-1)=4^{-1}=\frac{1}{4}$, $g(-1)=-2+8=6$

이때 $f(-1)<g(-1)$이므로 $x=-1$은 $x_1<x<0$에 속한다.

$\therefore x_1<-1$

따라서 $-2<x_1<-1$이고, ㉠에서 $1<x_2<2$이므로

$-1<x_1+x_2<1$ …… ㉡

그림에서 $y_2>y_1$이므로 $y_2-y_1>0$이고 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$y_2-y_1=(-2x_2^2+8)-(-2x_1^2+8)$

$=2x_1^2-2x_2^2=2(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0$

이때 $x_1-x_2<0$이므로 $x_1+x_2<0$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $-1<x_1+x_2<0$ …… ㉣

ㄷ. 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$y_1y_2=4^{x_1}\times4^{x_2}=4^{x_1+x_2}$

㉣에서 $4^{-1}<4^{x_1+x_2}<4^0$이므로

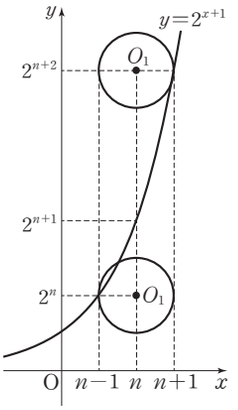
$\frac{1}{4}<y_1y_2<1$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

10 답 5

㈎에서 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=1$을 O_1이라 하자.

$a=n$ (n은 자연수)일 때, 반지름의 길이가 1인 원 O_1이 곡선 $y=2^{x+1}$과 만나는 경우는 그림과 같다.

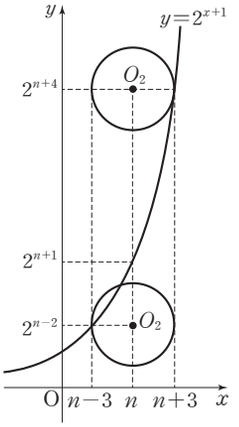


곡선 $y=2^{x+1}$과 원 O_1이 $b=2^n$일 때 처음으로 만나고, $b=2^{n+2}$일 때 마지막으로 만나므로 곡선 $y=2^{x+1}$과 원 O_1이 만나지 않는 b의 값의 범위는

$b<2^n$ 또는 $b>2^{n+2}$ …… ㉠

㈏에서 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=9$를 O_2라 하자.

$a=n$ (n은 자연수)일 때, 반지름의 길이가 3인 원 O_2가 곡선 $y=2^{x+1}$과 만나는 경우는 그림과 같다.



곡선 $y=2^{x+1}$과 원 O_2가 $b=2^{n-2}$일 때 처음으로 만나고, $b=2^{n+4}$일 때 마지막으로 만나므로 곡선 $y=2^{x+1}$과 원 O_2가 만나는 b의 값의 범위는

$2^{n-2}\le b\le2^{n+4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$2^{n-2}\le b<2^n$ 또는 $2^{n+2}<b\le2^{n+4}$

$n=a$이므로 $a=1$일 때,

$2^{-1}\le b<2$ 또는 $2^3<b\le2^5$

$\therefore \frac{1}{2}\le b<2$ 또는 $8<b\le32$

자연수 b는 1, 9, 10, 11, …, 32의 25개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a\ge2$일 때,

$2^{a-2}\le b<2^a$ 또는 $2^{a+2}<b\le2^{a+4}$

2^{a-2}, 2^a, 2^{a+2}, 2^{a+4}은 모두 자연수이므로 자연수 b의 개수는

$(2^a-2^{a-2})+(2^{a+4}-2^{a+2})=2^a-\frac{1}{4}\times2^a+16\times2^a-4\times2^a$

$=\frac{51}{4}\times2^a$

즉, $\frac{51}{4}\times2^a=408$이므로

$2^a=32=2^5$

$\therefore a=5$

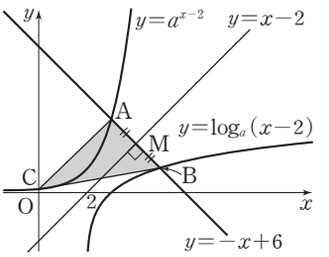
11 답 53

곡선 $y=a^{x-2}$은 곡선 $y=a^x$을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\log_a(x-2)$는 곡선 $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계이므로 그 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

따라서 두 곡선 $y=a^{x-2}$, $y=\log_a(x-2)$는 직선 $y=x-2$에 대하여 서로 대칭이다.

두 직선 $y=x-2$, $y=-x+6$이 만나는 점을 M이라 하고 점 M의 x좌표를 구하면



$x-2=-x+6$

$2x=8$

$\therefore x=4$

$\therefore$ M(4, 2)

이때 두 직선 $y=x-2$, $y=-x+6$은 서로 수직이므로 점 M은 선분 AB의 중점이다.

$\therefore \overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

점 A는 직선 $y=-x+6$ 위의 점이므로 $A(k, -k+6)$ $(0<k<4)$이라 하면 $\overline{AM}^2=2$이므로

$(4-k)^2+(k-4)^2=2$

$2k^2-16k+32=2$

$k^2-8k+15=0$

$(k-3)(k-5)=0$

$\therefore k=3$ ($\because 0<k<4$)

$\therefore$ A(3, 3)

점 A는 곡선 $y=a^{x-2}$ 위의 점이므로

$a=3$

점 C는 곡선 $y=3^{x-2}$이 y축과 만나는 점이므로

$C\left(0, \frac{1}{9}\right)$

삼각형 ABC에서 선분 AB를 밑변으로 하면 높이는 점 C와 직선 $y=-x+6$, 즉 $x+y-6=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{\left|\frac{1}{9}-6\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{53}{9\sqrt{2}}$

$\therefore S=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{53}{9\sqrt{2}}=\frac{53}{9}$

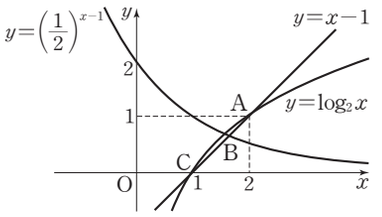
$\therefore a^2S=3^2\times\frac{53}{9}=53$

12 답 15

(i) $n=1$일 때,

A(2, 1)이고 직선 $y=x-1$이 x축과 만나는 점을 C라 하면

C(1, 0)



$\overline{AC}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$이고, 그림에서 $\overline{AB}<\overline{AC}$이므로

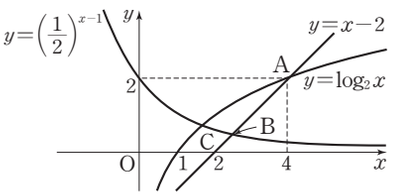
$\overline{AB}<\sqrt{2}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=2$일 때,

A(4, 2)이고 직선 $y=x-2$가 x축과 만나는 점을 C라 하면

C(2, 0)



$\overline{AC}=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$이고, 그림에서 $\overline{AB}<\overline{AC}$이므로

$\overline{AB}<2\sqrt{2}$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $n\geq 3$일 때,

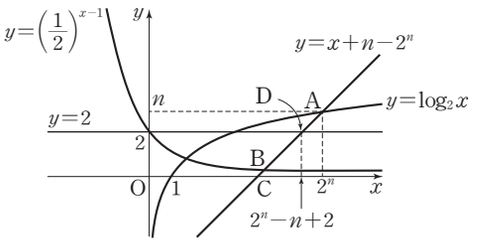
직선 $y=x+n-2^n$이 x축과 만나는 점을 C라 하면

C(2^n-n, 0)

$n\geq 3$일 때, $2^n-n\geq 5$이므로 점 C의 x좌표는 점 (1, 0)의 x좌표보다 크다.

직선 $y=x+n-2^n$이 직선 $y=2$와 만나는 점을 D라 하면

D(2^n-n+2, 2)



A(2^n, n)이므로

$\overline{AC}=\sqrt{(-n)^2+(-n)^2}$

$=\sqrt{2n^2}=\sqrt{2}n$

$\overline{AD}=\sqrt{(-n+2)^2+(2-n)^2}$

$=\sqrt{2(n-2)^2}=\sqrt{2}(n-2)$

그림에서 $\overline{AD}<\overline{AB}<\overline{AC}$이므로

$\sqrt{2}(n-2)<\overline{AB}<\sqrt{2}n$

$2\sqrt{2}<\overline{AB}<6\sqrt{2}$를 만족시키려면

$\sqrt{2}(n-2)\geq 2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}n\leq 6\sqrt{2}$

$\therefore\ 4\leq n\leq 6$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 4, 5, 6이다.

(i), (ii), (iii)에서 모든 자연수 n의 값의 합은 $4+5+6=15$

13 답 ⑤

ㄱ. 두 점 A, B를 지나는 직선 l의 기울기가 $\frac{\sqrt{5}}{5}$이므로

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore\ y_2-y_1=\frac{\sqrt{5}}{5}(x_2-x_1)$ …… ㉠

$\overline{AB}=\sqrt{6}$에서 $\overline{AB}^2=6$이므로

$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=6$

㉠을 대입하면

$(x_2-x_1)^2+\frac{1}{5}(x_2-x_1)^2=6$

$\frac{6}{5}(x_2-x_1)^2=6$, $(x_2-x_1)^2=5$

이때 $x_1<x_2$이므로

$x_2-x_1=\sqrt{5}$ …… ㉡

ㄴ. ㉠에서 $y_2-y_1=\frac{\sqrt{5}}{5}(x_2-x_1)$이고 ㉡에서 $x_2-x_1=\sqrt{5}$이므로

$y_2-y_1=1$ …… ㉢

두 점 B, C를 지나는 직선의 기울기는 $-\sqrt{5}$이므로

$\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=-\sqrt{5}$

$\therefore\ y_3-y_2=-\sqrt{5}(x_3-x_2)$ …… ㉣

$\overline{BC}=3\sqrt{2}$에서 $\overline{BC}^2=18$이므로

$(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2=18$

㉣을 대입하면

$(x_3-x_2)^2+5(x_3-x_2)^2=18$

$6(x_3-x_2)^2=18$, $(x_3-x_2)^2=3$

이때 $x_2<x_3$이므로 $x_3-x_2=\sqrt{3}$ …… ㉤

이를 ㉣에 대입하면 $y_3-y_2=-\sqrt{15}$ …… ㉥

㉡+㉤을 하면 $x_3-x_1=\sqrt{5}+\sqrt{3}$

㉢+㉥을 하면 $y_3-y_1=1-\sqrt{15}$ $\therefore\ y_1-y_3=\sqrt{15}-1$

이때 $\sqrt{3}(x_3-x_1)-4(y_2-y_1)=\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3})-4\times 1=\sqrt{15}-1$이므로

$y_1-y_3=\sqrt{3}(x_3-x_1)-4(y_2-y_1)$

ㄷ. ㉡에서 $x_2=x_1+\sqrt{5}$이고, ㉢에서 $y_2=y_1+1$이므로

B($x_1+\sqrt{5}$, y_1+1)

두 점 A, B는 곡선 $y=\log_4 ax$ 위의 점이므로

$y_1=\log_4 ax_1$ …… ㉮

$y_1+1=\log_4 a(x_1+\sqrt{5})$ …… ㉯

㉮을 ㉯에 대입하면

$\log_4 ax_1+1=\log_4 a(x_1+\sqrt{5})$

$\log_4 a+\log_4 x_1+1=\log_4 a+\log_4(x_1+\sqrt{5})$

$\log_4 4x_1=\log_4(x_1+\sqrt{5})$

즉, $4x_1=x_1+\sqrt{5}$이므로 $x_1=\frac{\sqrt{5}}{3}$

이를 ㉮에 대입하면 $y_1=\log_4\frac{\sqrt{5}}{3}a$ $\therefore\ A\left(\frac{\sqrt{5}}{3},\ \log_4\frac{\sqrt{5}}{3}a\right)$

점 A는 곡선 $y=b\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3\sqrt{5}}{5}x}$ 위의 점이므로

$\log_4\frac{\sqrt{5}}{3}a=\frac{b}{2}$

$\frac{\sqrt{5}}{3}a=4^{\frac{b}{2}}$, $\sqrt{5}a=3\times 2^b$

양변을 제곱하면 $5a^2=9\times 2^{2b}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14 답 ⑤

$y=\log_2|x|=\begin{cases}\log_2(-x) & (x<0)\\ \log_2 x & (x>0)\end{cases}$

ㄱ. 점 A는 두 곡선 $y=\log_2(-x)$, $y=\log_4(x+k)$가 만나는 점이고 x좌표가 x_1이므로

$\log_2(-x_1)=\log_4(x_1+k)$

$\log_4(-x_1)^2=\log_4(x_1+k)$

즉, ${x_1}^2=x_1+k$이므로

${x_1}^2-x_1-k=0$ …… ㉠

점 B는 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_4(x+k)$가 만나는 점이고 x좌표가 x_2이므로

$\log_2 x_2=\log_4(x_2+k)$

$\log_4 {x_2}^2=\log_4(x_2+k)$

즉, ${x_2}^2=x_2+k$이므로

${x_2}^2-x_2-k=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 x_1, x_2는 이차방정식 $x^2-x-k=0$의 서로 다른 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=1$, $x_1x_2=-k$ …… ㉢

$x_2=-2x_1$이면 ㉢의 $x_1+x_2=1$에서

$x_1-2x_1=1$ $\therefore x_1=-1$

$\therefore x_2=2$

$\therefore k=-x_1x_2=-(-1)\times 2=2$

ㄴ. 점 B는 두 곡선 $y=\log_4(-x+m)$, $y=\log_2 x$가 만나는 점이고 x좌표가 x_2이므로

$\log_4(-x_2+m)=\log_2 x_2$

$\log_4(-x_2+m)=\log_4 {x_2}^2$

즉, $-x_2+m={x_2}^2$이므로

${x_2}^2+x_2-m=0$ …… ㉣

점 C는 두 곡선 $y=\log_4(-x+m)$, $y=\log_2(-x)$가 만나는 점이고 x좌표가 x_3이므로

$\log_4(-x_3+m)=\log_2(-x_3)$

$\log_4(-x_3+m)=\log_4(-x_3)^2$

즉, $-x_3+m={x_3}^2$이므로

${x_3}^2+x_3-m=0$ …… ㉤

㉣, ㉤에서 x_2, x_3은 이차방정식 $x^2+x-m=0$의 서로 다른 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$x_2+x_3=-1$

$\therefore x_3=-1-x_2$ …… ㉥

㉢에서 $x_1=1-x_2$이므로

$x_1x_3=(1-x_2)(-1-x_2)$

$x_1x_3={x_2}^2-1$

$\therefore {x_2}^2=x_1x_3+1$

ㄷ. ㉣−㉡을 하면

$2x_2-m+k=0$ $\therefore x_2=\dfrac{m-k}{2}$ …… ㉦

㉢에서 $x_1=1-x_2$이므로

$x_1=1-\dfrac{m-k}{2}$ …… ㉧

㉢에서 $x_1x_2=-k$이므로 ㉦, ㉧을 대입하면

$\left(1-\dfrac{m-k}{2}\right)\times\dfrac{m-k}{2}=-k$

$\dfrac{m-k}{2}-\dfrac{(m-k)^2}{4}=-k$

$2(m-k)-(m-k)^2=-4k$

$\therefore 2(m+k)=(m-k)^2$ …… ㉨

두 점 A, C의 y좌표를 각각 y_1, y_3이라 하면

$A(x_1, y_1)$, $C(x_3, y_3)$

㉢, ㉥에서

$x_3-x_1=-1-x_2-(1-x_2)=-2$

$\therefore x_3=x_1-2$

$\overline{AC}=\sqrt{5}$에서 $\overline{AC}^2=5$이므로

$(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2=5$

$(-2)^2+(y_3-y_1)^2=5$

$(y_3-y_1)^2=1$

이때 $y_1<y_3$이므로

$y_3-y_1=1$

$\therefore y_3=y_1+1$

$\therefore C(x_1-2, y_1+1)$

점 A는 곡선 $y=\log_4(x+k)$ 위의 점이므로

$y_1=\log_4(x_1+k)$ …… ㉩

또 점 C는 곡선 $y=\log_4(-x+m)$ 위의 점이므로

$y_1+1=\log_4(-x_1+2+m)$

㉩을 대입하면

$\log_4(x_1+k)+1=\log_4(-x_1+2+m)$

$\log_4 4(x_1+k)=\log_4(-x_1+2+m)$

즉, $4(x_1+k)=-x_1+2+m$이므로

$5x_1+4k=m+2$

㉦을 대입하면

$5\left(1-\dfrac{m-k}{2}\right)+4k=m+2$

$10-5(m-k)+8k=2m+4$

$7m=13k+6$

$\therefore m=\dfrac{13k+6}{7}$ …… ㉪

이를 ㉨에 대입하면

$2\left(\dfrac{13k+6}{7}+k\right)=\left(\dfrac{13k+6}{7}-k\right)^2$

$\dfrac{4(10k+3)}{7}=\dfrac{36(k+1)^2}{49}$

$7(10k+3)=9(k^2+2k+1)$

$9k^2-52k-12=0$

$(9k+2)(k-6)=0$

$\therefore k=6$ ($\because k>0$)

이를 ㉪에 대입하면

$m=12$

$\therefore m+k=12+6=18$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

05 삼각함수

step 1 핵심 문제 | 60~61쪽

01 ② 02 2 03 ④ 04 ① 05 $\frac{11\sqrt{3}}{7}$ 06 $\frac{1}{3}$

07 ⑤ 08 $\cos\theta-\tan\theta$ 09 ① 10 ③ 11 ②

12 $\frac{1}{3}$

01 답 ②

(i) $\frac{n}{11}\pi$가 제3사분면의 각이므로

$2l\pi+\pi<\frac{n}{11}\pi<2l\pi+\frac{3}{2}\pi$ (단, l은 정수)

$l=0$일 때, $\pi<\frac{n}{11}\pi<\frac{3}{2}\pi$이므로 $11<n<\frac{33}{2}$

$\therefore n=12, 13, 14, 15, 16$

$l=1$일 때, $3\pi<\frac{n}{11}\pi<\frac{7}{2}\pi$이므로 $33<n<\frac{77}{2}$

$\therefore n=34, 35, 36, 37, 38$

$l=2$일 때, $5\pi<\frac{n}{11}\pi<\frac{11}{2}\pi$이므로 $55<n<\frac{121}{2}$

그런데 $1\le n\le 50$이므로 이를 만족시키는 n의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $\frac{n}{8}\pi$가 제2사분면의 각이므로

$2m\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{n}{8}\pi<2m\pi+\pi$ (단, m은 정수)

$m=0$일 때, $\frac{\pi}{2}<\frac{n}{8}\pi<\pi$이므로 $4<n<8$

$\therefore n=5, 6, 7$

$m=1$일 때, $\frac{5}{2}\pi<\frac{n}{8}\pi<3\pi$이므로 $20<n<24$

$\therefore n=21, 22, 23$

$m=2$일 때, $\frac{9}{2}\pi<\frac{n}{8}\pi<5\pi$이므로 $36<n<40$

$\therefore n=37, 38, 39$

$m=3$일 때, $\frac{13}{2}\pi<\frac{n}{8}\pi<7\pi$이므로 $52<n<56$

그런데 $1\le n\le 50$이므로 이를 만족시키는 n의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\frac{n}{11}\pi$, $\frac{n}{8}\pi$가 각각 제3사분면, 제2사분면의 각이 되도록 하는 자연수 n은 37, 38의 2개이다.

02 답 2

각 θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+3\theta=2n\pi+\frac{3}{2}\pi$ (단, n은 정수)

$4\theta=\frac{4n+3}{2}\pi$ $\therefore \theta=\frac{4n+3}{8}\pi$ …… ㉠

이때 $0<\theta<\pi$이므로 $0<\frac{4n+3}{8}\pi<\pi$, $0<4n+3<8$

$-3<4n<5$, $-\frac{3}{4}<n<\frac{5}{4}$

따라서 정수 n의 값은 0, 1이므로 이를 ㉠에 대입하면 θ는 $\frac{3}{8}\pi$, $\frac{7}{8}\pi$의 2개이다.

비법 NOTE

정수 n에 대하여 두 각 θ_1, θ_2를 나타내는 동경이

(1) 일치한다. $\Longleftrightarrow \theta_1-\theta_2=2n\pi$

(2) x축에 대하여 대칭이다. $\Longleftrightarrow \theta_1+\theta_2=2n\pi$

(3) y축에 대하여 대칭이다. $\Longleftrightarrow \theta_1+\theta_2=(2n+1)\pi$

(4) 원점에 대하여 대칭이다. $\Longleftrightarrow \theta_1-\theta_2=(2n+1)\pi$

(5) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. $\Longleftrightarrow \theta_1+\theta_2=2n\pi+\frac{\pi}{2}$

(6) 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이다. $\Longleftrightarrow \theta_1+\theta_2=2n\pi+\frac{3}{2}\pi$

03 답 ④

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 둘레의 길이가 8이므로

$2r+l=8$ $\therefore l=8-2r$

이때 $r>0$, $8-2r>0$이므로 $0<r<4$

부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}r(8-2r)=-r^2+4r=-(r-2)^2+4$

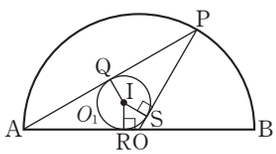
따라서 부채꼴의 넓이는 $0<r<4$에서 $r=2$일 때 최댓값 4를 가지므로 이때의 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$\frac{1}{2}\times 2^2\times\theta=4$ $\therefore \theta=2$

04 답 ①

그림과 같이 원 O_1의 중심을 I라 하면 원 O_1은 삼각형 AOP의 내접원이므로

$\angle IRO=\frac{\pi}{2}$, $\angle ISO=\frac{\pi}{2}$



사각형 IROS에서

$\angle ROS=\pi-\angle RIS$이므로

$\angle POB=\pi-\angle ROS=\angle RIS$

$\overset{\frown}{QR}:\overset{\frown}{RS}:\overset{\frown}{SQ}=5:2:5$이므로

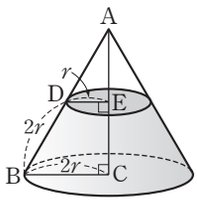
$\angle RIS=\frac{2}{12}\times 2\pi=\frac{\pi}{3}$ $\therefore \angle POB=\frac{\pi}{3}$

이때 $\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{AB}=2$이므로 부채꼴 POB의 호의 길이는

$2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

05 답 $\frac{11\sqrt{3}}{7}$

그림과 같이 점 A, B, C, D, E를 정하면 두 삼각형 ADE, ABC는 서로 닮음이므로



$\overline{AD}:\overline{AB}=\overline{DE}:\overline{BC}=1:2$

$\therefore \overline{AD}=\overline{DB}=2r$

직각삼각형 ADE에서

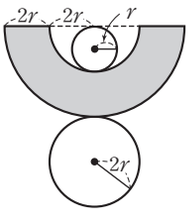
$\overline{AE}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{DE}^2}$

$=\sqrt{(2r)^2-(r)^2}=\sqrt{3}r$

이때 $\overline{AE}:\overline{AC}=1:2$이므로

$\overline{AC}=2\overline{AE}=2\sqrt{3}r$

따라서 원뿔대의 옆면의 넓이는 반지름의 길이가 $4r$이고 호의 길이가 $4\pi r$인 부채꼴의 넓이에서 반지름의 길이가 $2r$이고 호의 길이가 $2\pi r$인 부채꼴의 넓이를 뺀 값이므로



$\frac{1}{2}\times 4r\times 4\pi r-\frac{1}{2}\times 2r\times 2\pi r=6\pi r^2$

$\therefore S=\pi r^2+\pi(2r)^2+6\pi r^2=11\pi r^2$

원뿔대의 부피는 밑면의 반지름의 길이가 $2r$이고 높이가 $2\sqrt{3}r$인 원뿔의 부피에서 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 $\sqrt{3}r$인 원뿔의 부피를 뺀 값이므로

$V=\frac{1}{3}\times\pi(2r)^2\times 2\sqrt{3}r-\frac{1}{3}\times\pi r^2\times\sqrt{3}r$

$=\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi r^3$

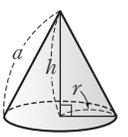
이때 $S=V$이므로 $11\pi r^2=\frac{7\sqrt{3}}{3}\pi r^3$

$\therefore r=\frac{33}{7\sqrt{3}}=\frac{11\sqrt{3}}{7}$

개념 NOTE

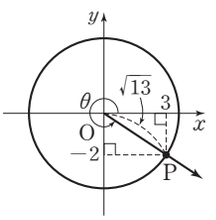
밑면의 반지름의 길이가 r, 모선의 길이가 a, 높이가 h인 원뿔의 겉넓이를 S, 부피를 V라 하면

$S=\pi r^2+\pi ra$, $V=\frac{1}{3}\pi r^2h$



06 답 $\frac{1}{3}$

점 $\mathrm{P}(3,\ k)$에 대하여 $\tan\theta=-\frac{2}{3}$이므로



삼각함수의 정의에 의하여

$\frac{k}{3}=-\frac{2}{3}$ $\therefore k=-2$

즉, $\mathrm{P}(3,\ -2)$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

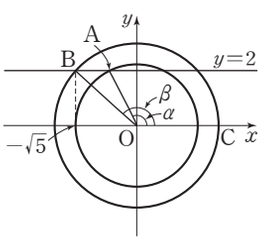
따라서 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=-\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$

$\therefore \frac{k}{13\sin\theta\cos\theta}=\frac{-2}{13\times\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\times\frac{3}{\sqrt{13}}}=\frac{1}{3}$

07 답 ⑤

점 A의 y좌표는 2이고 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{5}$이므로



삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$

직선 $y=2$가 원 $x^2+y^2=9$와 만나는 점 B의 x좌표는

$x^2+2^2=9$, $x^2=5$

$\therefore x=-\sqrt{5}$ 또는 $x=\sqrt{5}$

그런데 점 B는 제2사분면에 있으므로 $x=-\sqrt{5}$

점 B의 x좌표는 $-\sqrt{5}$이고 $\overline{\mathrm{OB}}=3$이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$\cos\beta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore \sin\alpha\times\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=-\frac{2}{3}$

08 답 $\cos\theta-\tan\theta$

(i) $\sin\theta\cos\theta<0$일 때,

$\sin\theta$, $\cos\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\tan\theta<0$일 때,

$\cos\theta$, $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제4사분면의 각이다.

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$에서 $\sin\theta-\cos\theta<0$이므로

$\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}=|\sin\theta-\cos\theta|=\cos\theta-\sin\theta$

또 $\tan\theta<0$에서 $\tan\theta-1<0$이므로

$\sqrt[4]{(\tan\theta-1)^4}=|\tan\theta-1|=1-\tan\theta$

$\therefore \sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}+\sqrt[4]{(\tan\theta-1)^4}+\sqrt[3]{(\sin\theta-1)^3}$

$=(\cos\theta-\sin\theta)+(1-\tan\theta)+(\sin\theta-1)$

$=\cos\theta-\tan\theta$

09 답 ①

$\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$의 양변에 $\tan\theta$를 곱하여 정리하면

$\tan^2\theta-\tan\theta-6=0$

$(\tan\theta+2)(\tan\theta-3)=0$

$\therefore \tan\theta=3$ $\left(\because \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi\right)$

즉, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=3$이므로

$\sin\theta=3\cos\theta$ ····· ㉠

이를 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$(3\cos\theta)^2+\cos^2\theta=1$, $\cos^2\theta=\frac{1}{10}$

$\therefore \cos\theta=-\frac{\sqrt{10}}{10}$ $\left(\because \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi\right)$

이를 ㉠에 대입하면

$\sin\theta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}+\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

10 답 ③

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\times\frac{2}{5}=\frac{9}{5}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{\cos\theta-\cos^2\theta+\sin\theta-\sin^2\theta}{(1-\sin\theta)(1-\cos\theta)}$

$=\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{1-(\sin\theta+\cos\theta)+\sin\theta\cos\theta}$

$=\frac{\frac{3\sqrt{5}}{5}-1}{1-\frac{3\sqrt{5}}{5}+\frac{2}{5}}=\frac{3\sqrt{5}-5}{7-3\sqrt{5}}$

$=\frac{(3\sqrt{5}-5)(7+3\sqrt{5})}{(7-3\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}$

$=\frac{3\sqrt{5}+5}{2}$

11 답 ②

$\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\tan\theta}=1$에서

$\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{(1-\cos\theta)\cos\theta}{\sin\theta}=1$

$\frac{\sin^2\theta\cos\theta+(1-\cos\theta)^2\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=1$

$\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\cos\theta+1)\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=1$

$\frac{2(1-\cos\theta)\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=1$, $\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}=1$

$\therefore \sin\theta=2\cos\theta$ ····· ㉠

이때 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값의 부호가 같은 경우는

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$, $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$

그런데 $\pi<\theta<2\pi$이므로 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 ㉠을 대입하면

$(2\cos\theta)^2+\cos^2\theta=1$, $\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

$\therefore \cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\because \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi\right)$

12 답 $\frac{1}{3}$

이차방정식 $5x^2+mx-3=0$의 두 근이 $\cos\theta$, $\tan\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\cos\theta+\tan\theta=-\frac{m}{5}$ ····· ㉠

$\cos\theta\times\tan\theta=-\frac{3}{5}$, $\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{3}{5}$

$\therefore \sin\theta=-\frac{3}{5}$

따라서 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다. ····· 배점 20%

(i) θ가 제3사분면의 각일 때,

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$이므로

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{4}$

이때 $\frac{1}{\tan\theta}=\frac{4}{3}$, $-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{5}{3}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식 $f(x)=0$에서 두 근의 합은 $\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=3$, 두 근의 곱은 $\frac{4}{3}\times\frac{5}{3}=\frac{20}{9}$이므로 $f(x)=x^2-3x+\frac{20}{9}$

이때 $f(0)=\frac{20}{9}>0$이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) θ가 제4사분면의 각일 때,

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$이므로

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{3}{4}$

이때 $\frac{1}{\tan\theta}=-\frac{4}{3}$, $-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{5}{3}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식 $f(x)=0$에서 두 근의 합은 $-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$, 두 근의 곱은 $-\frac{4}{3}\times\frac{5}{3}=-\frac{20}{9}$이므로 $f(x)=x^2-\frac{1}{3}x-\frac{20}{9}$

그런데 $f(0)=-\frac{20}{9}<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $f(x)=x^2-3x+\frac{20}{9}$ ····· 배점 50%

이때 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$, $\tan\theta=\frac{3}{4}$이므로 ㉠에서

$-\frac{4}{5}+\frac{3}{4}=-\frac{m}{5}$ $\therefore m=\frac{1}{4}$

$\therefore m\times f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$ ····· 배점 30%

step 2 고난도 문제 | 62~65쪽

01 제2사분면 또는 제4사분면 **02** $\frac{34}{3}\pi$ **03** ⑤ **04** ④

05 $3\sqrt{3}$ **06** $\frac{2}{3}\pi$ **07** ④ **08** 6 **09** 80 **10** ③

11 17 **12** 2 **13** ㄱ, ㄴ **14** ② **15** $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

16 $\frac{11}{9}$ **17** 6π **18** $\frac{\sqrt{7}}{4}$ **19** ① **20** 20 **21** ④

22 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

01 답 제2사분면 또는 제4사분면

θ가 제1사분면의 각이므로

$\theta=2n\pi+\alpha\left(\text{단, } n\text{은 정수, } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \frac{\theta}{2}=n\pi+\frac{\alpha}{2}$

(i) $n=2m$ (m은 정수)일 때,

$\frac{\theta}{2}=2m\pi+\frac{\alpha}{2}$에서 $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$이므로 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면의 각이다.

이는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=2m+1$ (m은 정수)일 때,

$\frac{\theta}{2}=(2m+1)\pi+\frac{\alpha}{2}=2m\pi+\pi+\frac{\alpha}{2}$에서 $\pi<\pi+\frac{\alpha}{2}<\frac{5}{4}\pi$이므로

$\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면의 각이고 $\frac{\theta}{2}=2m\pi+\pi+\frac{\alpha}{2}$이므로

$\frac{\theta}{4}=m\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{4}$

ⓘ $m=2k$ (k는 정수)일 때,

$\frac{\theta}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{4}$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{4}<\frac{5}{8}\pi$이므로 $\frac{\theta}{4}$는 제2사분면의 각이다.

ⓘⓘ $m=2k+1$ (k는 정수)일 때,

$\frac{\theta}{4}=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{4}=2k\pi+\frac{3}{2}\pi+\frac{\alpha}{4}$에서

$\frac{3}{2}\pi<\frac{3}{2}\pi+\frac{\alpha}{4}<\frac{13}{8}\pi$이므로 $\frac{\theta}{4}$는 제4사분면의 각이다.

ⓘ, ⓘⓘ에서 θ, $\frac{\theta}{2}$, $\frac{\theta}{4}$가 모두 다른 사분면의 각일 때, $\frac{\theta}{4}$가 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면 또는 제4사분면이다.

다른 풀이

$\frac{\theta}{4}=2n\pi+\alpha$ (n은 정수, $0<\alpha<2\pi$)라 하면

$\frac{\theta}{2}=4n\pi+2\alpha$, $\theta=8n\pi+4\alpha$

$0<4\alpha<8\pi$이고 θ가 제1사분면의 각이므로

$0<4\alpha<\frac{\pi}{2}$ 또는 $2\pi<4\alpha<\frac{5}{2}\pi$ 또는 $4\pi<4\alpha<\frac{9}{2}\pi$ 또는

$6\pi<4\alpha<\frac{13}{2}\pi$

(i) $0<4\alpha<\frac{\pi}{2}$일 때,

$0<2\alpha<\frac{\pi}{4}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{8}$이므로 $\frac{\theta}{2}$, $\frac{\theta}{4}$도 제1사분면의 각이다.

이는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $2\pi<4\alpha<\frac{5}{2}\pi$일 때,

$\pi<2\alpha<\frac{5}{4}\pi$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{5}{8}\pi$이므로 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면, $\frac{\theta}{4}$는 제2사분면의 각이다.

(iii) $4\pi<4\alpha<\frac{9}{2}\pi$일 때,

$2\pi<2\alpha<\frac{9}{4}\pi$, $\pi<\alpha<\frac{9}{8}\pi$이므로 $\frac{\theta}{2}$는 제1사분면, $\frac{\theta}{4}$는 제3사분면의 각이다.

이는 조건을 만족시키지 않는다.

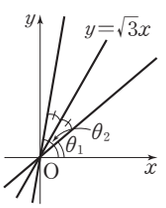
(iv) $6\pi<4\alpha<\frac{13}{2}\pi$일 때,

$3\pi<2\alpha<\frac{13}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi<\alpha<\frac{13}{8}\pi$이므로 $\frac{\theta}{2}$는 제3사분면, $\frac{\theta}{4}$는 제4사분면의 각이다.

(i)~(iv)에서 θ, $\frac{\theta}{2}$, $\frac{\theta}{4}$가 모두 다른 사분면의 각일 때, $\frac{\theta}{4}$가 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면 또는 제4사분면이다.

02 답 $\frac{34}{3}\pi$

각 θ_1을 나타내는 동경과 각 θ_2를 나타내는 동경이 직선 $y=\sqrt{3}x$에 대하여 대칭이므로 각 $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$를 나타내는 동경은 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위에 있다.



이때 $\theta_2=2\theta_1$에서 $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=\frac{3}{2}\theta_1$이고 $0<\theta_1<4\pi$이므로

$0<\frac{3}{2}\theta_1<6\pi$

직선 $y=\sqrt{3}x$의 기울기는 $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$이므로 각 $\frac{3}{2}\theta_1$이 될 수 있는 각의 크기는

$\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}+\pi$, $\frac{\pi}{3}+2\pi$, $\frac{\pi}{3}+3\pi$, $\frac{\pi}{3}+4\pi$, $\frac{\pi}{3}+5\pi$

따라서 모든 각 $\frac{3}{2}\theta_1$의 크기의 합은 17π이므로 모든 각 θ_1의 크기의 합은

$\frac{2}{3}\times17\pi=\frac{34}{3}\pi$

개념 NOTE

직선 $y=ax+b$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=a$

03 답 ⑤

$n\pi+(-1)^n\times\frac{n}{11}\pi$에서 동경이 나타내는 각 중 $2n\pi+\alpha$ ($0\le\alpha<2\pi$)인 α를 구하면

$n=1$일 때, $\pi-\frac{\pi}{11}=\frac{10}{11}\pi$

$n=2$일 때, $2\pi+\frac{2}{11}\pi$이므로 $\frac{2}{11}\pi$

$n=3$일 때, $3\pi-\frac{3}{11}\pi=2\pi+\frac{8}{11}\pi$이므로 $\frac{8}{11}\pi$

$n=4$일 때, $4\pi+\frac{4}{11}\pi$이므로 $\frac{4}{11}\pi$

$n=5$일 때, $5\pi-\frac{5}{11}\pi=4\pi+\frac{6}{11}\pi$이므로 $\frac{6}{11}\pi$

$n=6$일 때, $6\pi+\frac{6}{11}\pi$이므로 $\frac{6}{11}\pi$

$n=7$일 때, $7\pi-\frac{7}{11}\pi=6\pi+\frac{4}{11}\pi$이므로 $\frac{4}{11}\pi$

$n=8$일 때, $8\pi+\frac{8}{11}\pi$이므로 $\frac{8}{11}\pi$

$n=9$일 때, $9\pi-\frac{9}{11}\pi=8\pi+\frac{2}{11}\pi$이므로 $\frac{2}{11}\pi$

$n=10$일 때, $10\pi+\frac{10}{11}\pi$이므로 $\frac{10}{11}\pi$

$n=11$일 때, $11\pi-\pi=10\pi$이므로 0

$n=12$일 때, $12\pi+\frac{12}{11}\pi$이므로 $\frac{12}{11}\pi$

$n=13$일 때, $13\pi-\frac{13}{11}\pi=10\pi+\frac{20}{11}\pi$이므로 $\frac{20}{11}\pi$

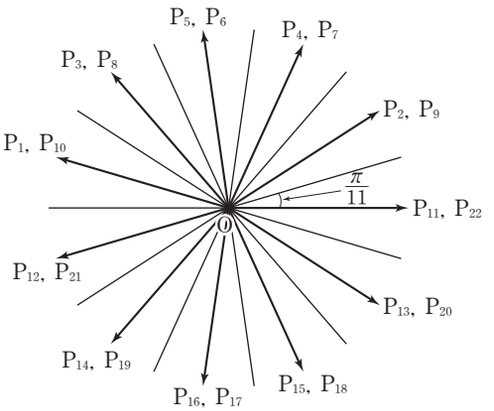
같은 방법으로 하면

$n=14$, $n=19$일 때 $\frac{14}{11}\pi$, $n=15$, $n=18$일 때 $\frac{18}{11}\pi$,

$n=16$, $n=17$일 때 $\frac{16}{11}\pi$, $n=20$일 때 $\frac{20}{11}\pi$,

$n=21$일 때 $\frac{12}{11}\pi$, $n=22$일 때 0

따라서 OP_1, OP_2, OP_3, …, OP_{22}는 그림과 같다.



이때 크기가 $\frac{2}{11}\pi$인 각을 나타내는 동경은

$1\le n\le22$에서 2번째, 9번째인 OP_2, OP_9이다.

같은 방법으로 생각하면

$23\le n\le44$에서 2번째, 9번째인 OP_{24}, OP_{31}

$45\le n\le66$에서 2번째, 9번째인 OP_{46}, OP_{53}

$67\le n\le88$에서 2번째, 9번째인 OP_{68}, OP_{75}

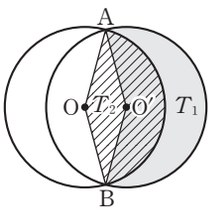
$89\le n\le110$에서 2번째, 9번째인 OP_{90}, OP_{97}

따라서 구하는 OP_n의 개수는 10이다.

04 답 ④

마름모 AOBO′에서 $\angle AO'B=\angle AOB=\frac{5}{6}\pi$

원 O'에서 중심각의 크기가 $2\pi-\frac{5}{6}\pi=\frac{7}{6}\pi$인 부채꼴 AO′B의 넓이를 T_1, 원 O에서 중심각의 크기가 $\frac{5}{6}\pi$인 부채꼴 AOB의 넓이를 T_2라 하면



$S_1=T_1+S_2-T_2$

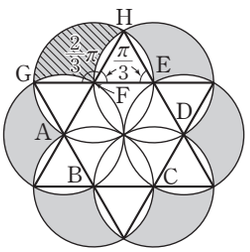
$=\left(\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{7}{6}\pi\right)+S_2-\left(\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{5}{6}\pi\right)$

$=\frac{3}{2}\pi+S_2$

$\therefore\ S_1-S_2=\frac{3}{2}\pi$

05 답 $3\sqrt{3}$

그림과 같이 색칠한 부분을 6등분하고 두 점 G, H를 정하자.



삼각형 EHF는 정삼각형이므로

$\angle HFE=\frac{\pi}{3}$, $\angle HEF=\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ \angle GFH=\pi-\angle HFE=\frac{2}{3}\pi$

이때 빗금 친 부분의 넓이는

(부채꼴 GFH의 넓이)$-2\{$(부채꼴 FEH의 넓이)$-\triangle FEH\}$

$=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2}{3}\pi-2\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2\right)$

$=\frac{\pi}{3}-2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

06 답 $\frac{2}{3}\pi$

$\overset{\frown}{AP}=\frac{2}{3}\pi$, $\overline{OA}=2$이므로 $\angle AOP=\theta$라 하면

$2\theta=\frac{2}{3}\pi\qquad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}$

따라서 $\angle POB=\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$이고, $\overline{OP}=\overline{OB}$이므로 삼각형 OBP는 정삼각형이다.

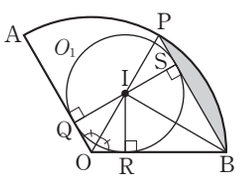
$\angle POB=\frac{\pi}{3}$이므로 호 PB와 선분 PB로 둘러싸인 부분의 넓이는

(부채꼴 OBP의 넓이)$-\triangle OBP$

$=\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2$

$=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$

원 O_1의 중심을 I, 원 O_1의 반지름의 길이를 r라 하자.



직각삼각형 IOR에서 $\overline{IR}=r$, $\angle IOR=\frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{OR}=\frac{\overline{IR}}{\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{r}{\sqrt{3}}$

$\triangle BIR\equiv\triangle BIS$ (RHS 합동)이므로

$\angle IBR=\frac{1}{2}\angle PBO=\frac{\pi}{6}$

직각삼각형 IRB에서

$\overline{RB}=\frac{\overline{IR}}{\tan\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}r$

이때 $\overline{OB}=\overline{OR}+\overline{RB}$이므로

$2=\frac{r}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}r$, $2=\frac{4}{\sqrt{3}}r$

$\therefore\ r=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 호 PB와 선분 PB로 둘러싸인 부분의 넓이와 원 O_1의 지름의 길이의 합은

$\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{3}\pi$

07 답 ④

반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{5}{12}\pi$인 부채꼴 AOB의 호의 길이는

$6\times\frac{5}{12}\pi=\frac{5}{2}\pi$

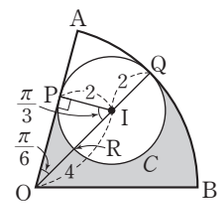
원 C의 둘레의 길이는 부채꼴 AOB의 호의 길이의 $\frac{8}{5}$배이므로

$\frac{5}{2}\pi\times\frac{8}{5}=4\pi$

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면

$2\pi r=4\pi\qquad\therefore\ r=2$

원 C의 중심을 I라 하고 원 C가 직선 OQ와 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R라 하자.



원 C는 호 AB와 점 Q에서 접하므로 점 I는 직선 OQ 위에 있다.

$\overline{QI}=\overline{PI}=2$이므로

$\overline{OI}=\overline{OQ}-\overline{QI}=6-2=4$

직각삼각형 IPO에서

$\overline{OP}=\sqrt{\overline{OI}^2-\overline{PI}^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

이때 직각삼각형 IPO에서 $\overline{PI}:\overline{OI}:\overline{OP}=1:2:\sqrt{3}$이므로

$\angle POI=\frac{\pi}{6}$, $\angle PIO=\frac{\pi}{3}$

$\therefore\ \angle QOB=\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

(부채꼴 QOB의 넓이)$-\frac{1}{2}$(원 C의 넓이)

$+\triangle IPO-$(부채꼴 RIP의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\times4\pi+\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{3}$

$=\frac{9}{2}\pi-2\pi+2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$

$=\frac{11}{6}\pi+2\sqrt{3}$

따라서 $a=11$, $b=2$이므로

$a+b=13$

개념 NOTE

세 내각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형의 세 변의 길이의 비는

$1:\sqrt{3}:2$

08 답 6

반지름의 길이가 10이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

$l=10\theta$, $S=\frac{1}{2}\times10^2\times\theta=50\theta$

$l+S=54\pi$이므로

$10\theta+50\theta=54\pi$, $60\theta=54\pi$

$\therefore\ \theta=\frac{9}{10}\pi$ ····· 배점 20%

각 θ와 각 $n\theta$를 나타내는 동경이 서로 수직이므로

$n\theta-\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ 또는 $n\theta-\theta=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ (단, k는 정수)

$\therefore\ \theta=\frac{2\pi}{n-1}k+\frac{\pi}{2(n-1)}$ 또는 $\theta=\frac{2\pi}{n-1}k-\frac{\pi}{2(n-1)}$ ····· 배점 30%

(i) $\theta=\frac{2\pi}{n-1}k+\frac{\pi}{2(n-1)}$일 때,

$\frac{2\pi}{n-1}k+\frac{\pi}{2(n-1)}=\frac{9}{10}\pi$에서

$k=\frac{n-1}{2}\left\{\frac{9}{10}-\frac{1}{2(n-1)}\right\}=\frac{9n-14}{20}$

k는 정수이므로 $9n-14=20p$ (p는 정수)가 되는 자연수 n의 최솟값은 6이다.

(ii) $\theta=\frac{2\pi}{n-1}k-\frac{\pi}{2(n-1)}$일 때,

$\frac{2\pi}{n-1}k-\frac{\pi}{2(n-1)}=\frac{9}{10}\pi$에서

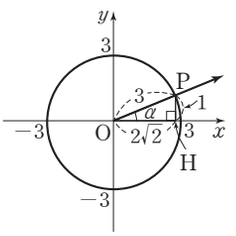
$k=\frac{n-1}{2}\left\{\frac{9}{10}+\frac{1}{2(n-1)}\right\}=\frac{9n-4}{20}$

k는 정수이므로 $9n-4=20q$ (q는 정수)가 되는 자연수 n의 최솟값은 16이다.

(i), (ii)에서 자연수 n의 최솟값은 6이다. ····· 배점 50%

09 답 80

$\sin\alpha=\frac{1}{3}$이므로 그림과 같이 제1사분면에 있는 점 P를 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



직각삼각형 OHP에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{PH}^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$이므로

점 P의 좌표는

$(2\sqrt{2},\ 1)$

점 Q는 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 Q의 좌표는

$(1,\ 2\sqrt{2})$

$\overline{OQ}=3$이므로 삼각함수의 정의에 의하여 $\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

또 점 R는 점 Q를 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 R의 좌표는

$(-1,\ -2\sqrt{2})$

삼각함수의 정의에 의하여 $\tan\gamma=\frac{-2\sqrt{2}}{-1}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ 9(\sin^2\beta+\tan^2\gamma)=9\left\{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2+(2\sqrt{2})^2\right\}$

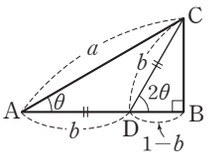
$=9\left(\frac{8}{9}+8\right)$

$=8+72=80$

idea

10 답 ③

그림과 같이 선분 AB 위에 $\overline{AD}=\overline{CD}$를 만족시키는 점 D를 잡으면 $\angle ACD=\angle CAD=\theta$이므로



$\angle CDB=\angle ACD+\angle CAD=2\theta$

$\overline{CD}=b$라 하면 $\overline{AD}=b$이므로

$\overline{BD}=1-b$

직각삼각형 BCD에서

$\overline{BC}^2=\overline{CD}^2-\overline{BD}^2=b^2-(1-b)^2=2b-1$ ····· ㉠

또 직각삼각형 ABC에서

$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2-\overline{AB}^2=a^2-1$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $2b-1=a^2-1$이므로

$2b=a^2$ $\therefore\ b=\frac{a^2}{2}$

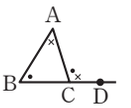
따라서 직각삼각형 BCD에서

$\cos2\theta=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\frac{1-b}{b}=\frac{1}{b}-1=\frac{2}{a^2}-1$

개념 NOTE

삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

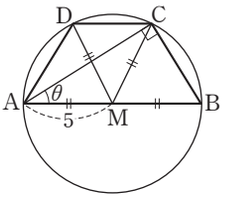
➡ $\angle ACD=\angle ABC+\angle BAC$



idea

11 답 17

$\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MC}=\overline{MD}=5$이므로 그림과 같이 등변사다리꼴 ABCD는 점 M을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원에 내접한다.



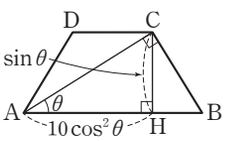
이 원의 지름이 선분 AB이므로

$\angle BCA=\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\overline{AB}\cos\theta=10\cos\theta$

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 AHC에서



$\overline{CH}=\overline{AC}\sin\theta=10\cos\theta\sin\theta$

$\overline{AH}=\overline{AC}\cos\theta=10\cos^2\theta$

이때 $\overline{HB}=\overline{AB}-\overline{AH}=10-10\cos^2\theta$이므로

$\overline{DC}=\overline{AB}-2\overline{HB}$

$=10-2(10-10\cos^2\theta)$

$=20\cos^2\theta-10$

등변사다리꼴 ABCD의 넓이가 $5\sqrt{34}$이므로

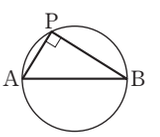
$\frac{1}{2}\times(20\cos^2\theta-10+10)\times10\cos\theta\sin\theta=5\sqrt{34}$

$100\sin\theta\cos^3\theta=5\sqrt{34}$, $20\sin\theta\cos^3\theta=\sqrt{34}$

$\therefore\ 200\sin^2\theta\cos^6\theta=\frac{1}{2}(20\sin\theta\cos^3\theta)^2=\frac{1}{2}\times34=17$

개념 NOTE

선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$이다.



12 답 2

(i) θ가 제1사분면의 각일 때,

$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta>0$이므로 $\sin\theta\cos\theta>0$

$\therefore f(\sin\theta)-f(\cos\theta)+2f(\sin\theta\cos\theta)+f(\tan\theta)$

$=1-1+2\times1+1=3$

(ii) θ가 제2사분면의 각일 때,

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$이므로 $\sin\theta\cos\theta<0$

$\therefore f(\sin\theta)-f(\cos\theta)+2f(\sin\theta\cos\theta)+f(\tan\theta)$

$=1-(-1)+2\times(-1)-1=-1$

(iii) θ가 제3사분면의 각일 때,

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로 $\sin\theta\cos\theta>0$

$\therefore f(\sin\theta)-f(\cos\theta)+2f(\sin\theta\cos\theta)+f(\tan\theta)$

$=-1-(-1)+2\times1+1=3$

(iv) θ가 제4사분면의 각일 때,

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$이므로 $\sin\theta\cos\theta<0$

$\therefore f(\sin\theta)-f(\cos\theta)+2f(\sin\theta\cos\theta)+f(\tan\theta)$

$=-1-1+2\times(-1)-1=-5$

(i)~(iv)에서 θ는 제2사분면의 각이므로

$n=2$

13 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $\sin\theta\neq0$, $\dfrac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta}}=-\sqrt{\tan\theta}=-\sqrt{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

따라서 θ는 제2사분면의 각이다.

ㄴ. $\sin\theta\tan\theta<0$에서 $\sin\theta$, $\tan\theta$의 값의 부호가 서로 다르므로 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i) θ가 제2사분면의 각일 때,

$\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$이므로 $\sin\theta>\tan\theta$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) θ가 제3사분면의 각일 때,

$\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로 $\tan\theta>\sin\theta$

(i), (ii)에서 θ는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

$\therefore |\sin\theta|+|\cos\theta|=-\sin\theta-\cos\theta$

ㄷ. $\sin\theta<0$, $\tan\theta<0$에서 θ는 제4사분면의 각이므로

$\theta=2n\pi-\alpha\left(n\text{은 정수, }0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\dfrac{\theta}{2}=n\pi-\dfrac{\alpha}{2}$

$0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\dfrac{\theta}{2}$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

이때 $\dfrac{\theta}{2}$가 제2사분면의 각이면 $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$, $\tan\dfrac{\theta}{2}<0$이므로

$\sin\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\theta}{2}<0$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

개념 NOTE

음수의 제곱근의 성질

(1) $a>0$, $b<0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면 $a>0$, $b<0$ 또는 $a=0$, $b\neq0$

14 답 ②

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{5}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{5}{4}$

$2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{8}$

$\sin\theta=-\cos\theta+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$이므로

$64\sin^3\theta\cos\theta+32\sqrt{5}\sin\theta\cos^2\theta$

$=32\sin\theta\cos\theta(2\sin^2\theta+\sqrt{5}\cos\theta)$

$=32\sin\theta\cos\theta\{2(1-\cos^2\theta)+\sqrt{5}\cos\theta\}$

$=32\sin\theta\cos\theta\left\{2+2\cos\theta\left(-\cos\theta+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$

$=32\sin\theta\cos\theta(2+2\cos\theta\sin\theta)$

$=64\sin\theta\cos\theta+64\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=64\times\dfrac{1}{8}+64\times\left(\dfrac{1}{8}\right)^2$

$=8+1=9$

15 답 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\sin\theta+\cos\theta=\alpha$라 하고 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\alpha^2$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\alpha^2$

$2\sin\theta\cos\theta=\alpha^2-1$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\dfrac{\alpha^2-1}{2}$

이때 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta\cos\theta<0$

즉, $\dfrac{\alpha^2-1}{2}<0$이므로 $\alpha^2-1<0$

$(\alpha+1)(\alpha-1)<0$ $\quad\therefore -1<\alpha<1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}=2$에서 $\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=2$이므로

$\dfrac{\alpha}{\frac{\alpha^2-1}{2}}=2$, $\alpha=\alpha^2-1$

$\alpha^2-\alpha-1=0$

$\therefore \alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ($\because$ ㉠)

16 답 $\dfrac{11}{9}$

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{3}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{3}$

$2\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$

$$\sin^5\theta+\cos^5\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin^3\theta+\cos^3\theta)$$
$$-\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$
$$=\sin^3\theta+\cos^3\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$
$$=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$$
$$-\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$
$$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$$
$$-\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$
$$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta)$$
$$\therefore\ \frac{\sin^5\theta+\cos^5\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}$$
$$=1-\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$=1-\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{11}{9}$$

17 답 6π

$x=3\sin\theta-5$에서 $x+5=3\sin\theta$

양변을 제곱하면 $(x+5)^2=9\sin^2\theta$

$\therefore\ \sin^2\theta=\dfrac{(x+5)^2}{9}$

$y=-3\cos\theta+2$에서 $y-2=-3\cos\theta$

양변을 제곱하면 $(y-2)^2=9\cos^2\theta$

$\therefore\ \cos^2\theta=\dfrac{(y-2)^2}{9}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\dfrac{(x+5)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$

$\therefore\ (x+5)^2+(y-2)^2=9$

따라서 점 (x, y)가 나타내는 도형은 중심이 점 $(-5, 2)$이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 이 도형의 둘레의 길이는

$2\pi\times3=6\pi$

개념 NOTE

중심이 점 (a, b)이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

18 답 $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

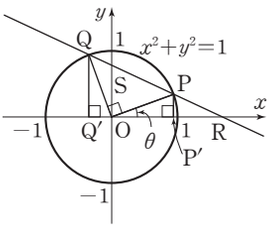
$P(\cos\theta, \sin\theta)$ (단, $\cos\theta>0$, $\sin\theta>0$)

그림과 같이 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하면

$\triangle OP'P\equiv\triangle QQ'O$ (RHA 합동)이고

점 Q는 제2사분면의 점이므로

$Q(-\sin\theta, \cos\theta)$



두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$$y-\sin\theta=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{-\sin\theta-\cos\theta}(x-\cos\theta)$$

$$\therefore\ y=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}(x-\cos\theta)+\sin\theta \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $x=0$을 대입하면

$$y=\frac{-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}+\sin\theta$$

$$=\frac{-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$$

$$\therefore\ S\left(0,\ \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\right)$$

㉠에 $y=0$을 대입하면

$$0=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}(x-\cos\theta)+\sin\theta$$

$$\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}(x-\cos\theta)=-\sin\theta$$

$$x-\cos\theta=\frac{-\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}$$

$$x=\frac{-\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta-\sin\theta}$$

$$\therefore\ R\left(\frac{1}{\cos\theta-\sin\theta},\ 0\right)$$

삼각형 ORS의 넓이가 4이므로

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos\theta-\sin\theta}\times\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}=4$$

$$\frac{1}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=8,\ \cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{1}{8}$$

$$\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)=\frac{1}{8},\ 2\cos^2\theta=\frac{9}{8}$$

$$\cos^2\theta=\frac{9}{16} \qquad \therefore\ \cos\theta=\frac{3}{4}\ (\because\ \cos\theta>0)$$

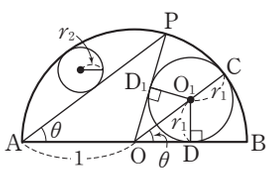
$$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}\ (\because\ \sin\theta>0)$$

따라서 점 P의 y좌표는 $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$이다.

19 답 ①

그림과 같이 부채꼴 OBP에 내접하는 원의 중심을 O_1이라 하고, 이 원이 호 BP와 만나는 점을 C, 선분 OB와 만나는 점을 D라 하면

$\overline{O_1D}=\overline{O_1C}=r_1$



$\angle BAP=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\angle BOP=2\angle BAP=2\theta$

중심이 점 O_1인 원이 선분 OP와 만나는 점을 D_1이라 하면

$\triangle ODO_1\equiv\triangle OD_1O_1$ (RHS 합동)이므로 $\angle DOO_1=\angle D_1OO_1$에서

$\angle BOC=\dfrac{1}{2}\angle BOP=\theta$

삼각형 O_1OD는 직각삼각형이므로

$$\sin\theta=\frac{\overline{O_1D}}{\overline{OO_1}}=\frac{r_1}{1-r_1}$$

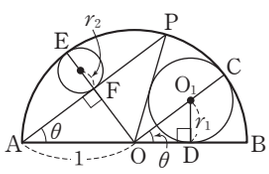
이때 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$이고 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5} \quad \cdots\cdots ㉡$$

즉, $\dfrac{r_1}{1-r_1}=\dfrac{3}{5}$이므로

$5r_1=3-3r_1$, $8r_1=3$ $\qquad \therefore\ r_1=\dfrac{3}{8}$

그림과 같이 호 AP를 이등분하는 점을 E, 선분 AP의 중점을 F라 하면 삼각형 OFA는 직각삼각형이므로



$\overline{OF}=\overline{OA}\sin\theta=\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ ($\because$ ㉡)

이때 $\overline{OE}=\overline{OF}+\overline{EF}$이므로

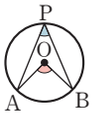
$1=\dfrac{3}{5}+2r_2$, $2r_2=\dfrac{2}{5}$ $\qquad \therefore\ r_2=\dfrac{1}{5}$

$$\therefore\ r_1r_2=\frac{3}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{40}$$

개념 NOTE

한 호에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이다.

➡ $\angle AOB=2\angle APB$



20 답 20

이차방정식 $x^2-k=0$의 두 근이 $6\cos\theta$, $5\tan\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$6\cos\theta+5\tan\theta=0$ ····· ㉠

$6\cos\theta\times5\tan\theta=-k$ ····· ㉡

㉠에서 $6\cos\theta=-5\tan\theta$

$6\cos\theta=-\dfrac{5\sin\theta}{\cos\theta}$, $6\cos^2\theta=-5\sin\theta$

$\therefore \cos^2\theta=-\dfrac{5}{6}\sin\theta$ ····· ㉢

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$이므로 $1-\sin^2\theta=-\dfrac{5}{6}\sin\theta$

$6\sin^2\theta-5\sin\theta-6=0$, $(3\sin\theta+2)(2\sin\theta-3)=0$

$\therefore \sin\theta=-\dfrac{2}{3}$ 또는 $\sin\theta=\dfrac{3}{2}$

이때 ㉢에서 $\sin\theta<0$이므로 $\sin\theta=-\dfrac{2}{3}$

㉡에서 $6\cos\theta\times\dfrac{5\sin\theta}{\cos\theta}=-k$

$\therefore k=-30\sin\theta=-30\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)=20$

21 답 ④

$x^6-ax^4-bx^2+a+b-1=0$에서 $x^2=t\,(t>0)$로 놓으면 t에 대한 방정식

$t^3-at^2-bt+a+b-1=0$ ····· ㉠

은 $\cos^2\theta$, $\sin^2\theta$, k^2을 근으로 갖는다.

이때 서로 다른 세 양수 조건에서

$\cos^2\theta\neq\sin^2\theta$, $\cos^2\theta\neq k^2$, $\sin^2\theta\neq k^2$

따라서 $\cos^2\theta$, $\sin^2\theta$, k^2은 방정식 ㉠의 서로 다른 세 실근이다.

㉠에서 $(t-1)\{t^2+(-a+1)t-a-b+1\}=0$

즉, 방정식 ㉠은 $t=1$을 근으로 갖고,

	1	$-a$	$-b$	$a+b-1$
1		1	$-a+1$	$-a-b+1$
	1	$-a+1$	$-a-b+1$	0

$0<\sin\theta<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos\theta<1$에서

$\sin^2\theta\neq1$, $\cos^2\theta\neq1$이므로

$k^2=1$ $\therefore k=1$ ($\because k>0$)

따라서 t에 대한 이차방정식 $t^2+(-a+1)t-a-b+1=0$의 두 근이 $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=a-1$ ····· ㉡

$\sin^2\theta\cos^2\theta=-a-b+1$ ····· ㉢

㉡에서 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$1=a-1$ $\therefore a=2$

$k+a+b=\dfrac{16}{9}$에서

$1+2+b=\dfrac{16}{9}$ $\therefore b=-\dfrac{11}{9}$

따라서 ㉢에서

$\sin^2\theta\cos^2\theta=-a-b+1=-2-\left(-\dfrac{11}{9}\right)+1=\dfrac{2}{9}$

22 답 $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$x\neq0$이므로 $x^4-x^3-6x^2+2x+4=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2-x-6+\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}=0$

$x^2+\dfrac{4}{x^2}-\left(x-\dfrac{2}{x}\right)-6=0$

$\therefore \left(x-\dfrac{2}{x}\right)^2-\left(x-\dfrac{2}{x}\right)-2=0$

$x-\dfrac{2}{x}=t$로 놓으면 $t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

$\therefore x-\dfrac{2}{x}=-1$ 또는 $x-\dfrac{2}{x}=2$ ····· 배점 30%

(i) $x-\dfrac{2}{x}=-1$일 때,

$x^2+x-2=0$이고 이차방정식 $x^2-(3\sin\theta)x-2=0$과 공통인 근이 존재하므로

$x^2+x-2=x^2-(3\sin\theta)x-2$

$1=-3\sin\theta$ $\therefore \sin\theta=-\dfrac{1}{3}$

(ii) $x-\dfrac{2}{x}=2$일 때,

$x^2-2x-2=0$이고 이차방정식 $x^2-(3\sin\theta)x-2=0$과 공통인 근이 존재하므로

$x^2-2x-2=x^2-(3\sin\theta)x-2$

$2=3\sin\theta$ $\therefore \sin\theta=\dfrac{2}{3}$

그런데 $\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$에서 $\sin\theta<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\sin\theta=-\dfrac{1}{3}$ ····· 배점 50%

$\therefore \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}$

$=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ $\left(\because \pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi\right)$ ····· 배점 20%

step 3 최고난도 문제 | 66~67쪽

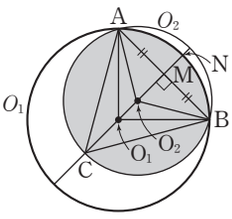
01 13 02 ③ 03 9 04 8 05 $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ 06 ③ 07 ①

01 답 13

1단계 원 O_1과 원 O_2의 공통부분의 넓이 구하기

원 O_1의 중심을 O_1, 원 O_2의 중심을 O_2라 할 때, 직선 O_1O_2가 선분 AB와 만나는 점을 M, 직선 O_1O_2가 원 O_1과 만나는 두 점 중에서 점 M에 가까운 점을 N이라 하면

$\overline{O_1A}=6$, $\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=3\sqrt{2}$



직각삼각형 AO_1M에서

$\overline{O_1M}=\sqrt{\overline{O_1A}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

즉, $\overline{AM}=\overline{O_1M}$이므로 삼각형 AO_1M은 직각이등변삼각형이다.

$\therefore \angle AO_1M=\frac{\pi}{4}$

따라서 부채꼴 AO_1N의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{9}{2}\pi$

원 O_2는 정삼각형 ACB의 외접원이므로

$\angle AO_2C=2\angle ABC=\frac{2}{3}\pi$

$\therefore \angle AO_2M=\pi-\angle AO_2C=\frac{\pi}{3}$

직각삼각형 AO_2M에서 $\angle O_2AM=\frac{\pi}{2}-\angle AO_2M=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{AO_2}=\frac{\overline{AM}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{6}$

$\overline{O_2M}=\overline{AM}\tan\frac{\pi}{6}=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{6}$

따라서 원 O_2에서 점 B를 포함하지 않는 부채꼴 AO_2C의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(2\sqrt{6})^2\times\frac{2}{3}\pi=8\pi$

또 $\overline{O_1O_2}=\overline{O_1M}-\overline{O_2M}=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$이므로 삼각형 AO_1O_2의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{O_1O_2}\times\overline{AM}=\frac{1}{2}\times(3\sqrt{2}-\sqrt{6})\times 3\sqrt{2}$

$=9-3\sqrt{3}$

따라서 원 O_1과 원 O_2의 공통부분의 넓이는

$2\{(\text{부채꼴 } AO_1N\text{의 넓이})+(\text{부채꼴 } AO_2C\text{의 넓이})-\triangle AO_1O_2\}$

$=2\left\{\frac{9}{2}\pi+8\pi-(9-3\sqrt{3})\right\}$

$=-18+6\sqrt{3}+25\pi$

2단계 $p+q+r$**의 값 구하기**

따라서 $p=-18$, $q=6$, $r=25$이므로

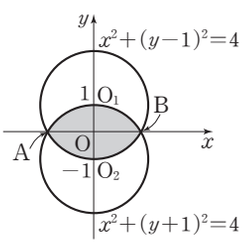
$p+q+r=13$

idea

02 답 ③

1단계 **두 원** $x^2+(y-1)^2=4$, $x^2+(y+1)^2=4$**가 겹치는 영역의 넓이 구하기**

그림과 같이 두 원 $x^2+(y-1)^2=4$, $x^2+(y+1)^2=4$의 중심을 각각 O_1, O_2라 하고, 이 두 원이 겹치는 영역, 즉 색칠한 부분을 S라 하자.



두 원이 만나는 두 점을 A, B라 하면 $\overline{O_1A}=\overline{O_2A}=\overline{O_1O_2}=2$이므로 삼각형 O_1AO_2는 정삼각형이다.

즉, $\angle AO_1O=\frac{\pi}{3}$이므로 $\angle AO_1B=2\angle AO_1O=\frac{2}{3}\pi$

직각삼각형 O_1AO에서

$\overline{AO}=\sqrt{\overline{O_1A}^2-\overline{O_1O}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AO}=2\sqrt{3}$

따라서 영역 S의 넓이는

$2\{(\text{부채꼴 } O_1AB\text{의 넓이})-\triangle O_1AB\}$

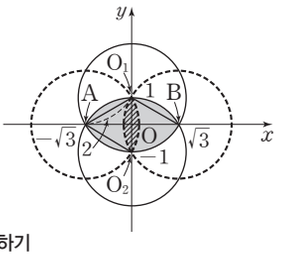
$=2\left(\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 1\right)$

$=\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}$

2단계 **점** $P(a, b)$**의 위치 파악하기**

두 원 $x^2+(y-1)^2=4$, $x^2+(y+1)^2=4$가 겹치는 영역의 넓이와 세 원이 동시에 겹치는 영역의 넓이가 같으므로 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$는 영역 S를 모두 포함해야 한다.

따라서 그림과 같이 점 $P(a, b)$는 점 $A(-\sqrt{3}, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 $(x+\sqrt{3})^2+y^2=4$와 점 $B(\sqrt{3}, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 $(x-\sqrt{3})^2+y^2=4$가 겹치는 영역에 존재해야 한다.



3단계 **점** $P(a, b)$**가 나타내는 도형의 넓이 구하기**

두 원 $(x+\sqrt{3})^2+y^2=4$, $(x-\sqrt{3})^2+y^2=4$가 겹치는 영역, 즉 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는

$2\{(\text{부채꼴 } AO_2O_1\text{의 넓이})-\triangle O_1AO_2\}$

$=2\left(\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\right)$

$=\frac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}$

즉, 점 $P(a, b)$가 나타내는 도형의 넓이는 $\frac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}$이다.

4단계 $p+q$**의 값 구하기**

따라서 $p=\frac{4}{3}$, $q=-2$이므로

$p+q=-\frac{2}{3}$

03 답 9

1단계 $f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(4n)$**이 나타내는 의미 파악하기**

$P_2(\cos\theta, \sin\theta)$, $P_3(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$, $P_4(\cos 3\theta, \sin 3\theta)$, …에서

$P_{n+1}(\cos n\theta, \sin n\theta)$ (n은 자연수)이므로

$f(n)=(\cos n\theta-\cos\theta)^2+(\sin n\theta-\sin\theta)^2$

$=\overline{P_2P_{n+1}}^2$

$\therefore f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(4n)$

$=\overline{P_2P_3}^2+\overline{P_2P_4}^2+\overline{P_2P_5}^2+\cdots+\overline{P_2P_{4n}}^2+\overline{P_2P_1}^2$ ($P_{4n+1}=P_1$)

2단계 $f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(4n)$ **구하기**

자연수 k에 대하여 $\overline{P_kP_{2n+k}}$는 원의 지름이므로

$\overline{P_kP_{2n+k}}=2$

이때 지름을 한 변으로 하고 원에 내접하는 삼각형은 직각삼각형이므로

$\overline{P_2P_3}^2+\overline{P_2P_{2n+3}}^2=\overline{P_3P_{2n+3}}^2=4$

$\overline{P_2P_4}^2+\overline{P_2P_{2n+4}}^2=\overline{P_4P_{2n+4}}^2=4$

⋮

$\overline{P_2P_n}^2+\overline{P_2P_{3n}}^2=\overline{P_nP_{3n}}^2=4$

$\overline{P_2P_{n+1}}^2+\overline{P_2P_{3n+1}}^2=\overline{P_{n+1}P_{3n+1}}^2=4$

⋮

$\overline{P_2P_{2n}}^2+\overline{P_2P_{4n}}^2=\overline{P_{2n}P_{4n}}^2=4$

$\overline{P_2P_{2n+1}}^2+\overline{P_2P_1}^2=\overline{P_{2n+1}P_1}^2=4$

$\overline{P_2P_{2n+2}}^2=4$

$\therefore f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(4n)=4(2n+2-3+1)$

$=8n$

3단계 **자연수** n**의 값 구하기**

즉, $8n=72$이므로

$n=9$

04 답 8

1단계 집합 A 구하기

$A=\left\{n\left|\sin\left(\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2^n}\right)<0\right.\right\}$의 $\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2^n}$에서

n이 짝수이면 $\pi+\frac{\pi}{2^n}$이고 $\pi<\pi+\frac{\pi}{2^n}\le\frac{5}{4}\pi$이므로

$\sin\left(\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2^n}\right)<0$

n이 홀수이면 $\pi-\frac{\pi}{2^n}$이고 $\frac{\pi}{2}\le\pi-\frac{\pi}{2^n}<\pi$이므로

$\sin\left(\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2^n}\right)>0$

따라서 n은 짝수이므로

$A=\{2, 4, 6, \cdots, 50\}$

2단계 집합 B 구하기

$\theta_n=\frac{14-n}{3}\pi$라 하면 음이 아닌 정수 m에 대하여

(i) $n=6m+1$일 때,

$\theta_n=\frac{14-(6m+1)}{3}\pi=\frac{\pi}{3}+2(2-m)\pi$에서 θ_n은 제1사분면의 각이므로 $\tan\theta_n>0$

(ii) $n=6m+2$ 또는 $n=6m+5$일 때,

$\theta_n=\frac{14-(6m+2)}{3}\pi=2(2-m)\pi$ 또는

$\theta_n=\frac{14-(6m+5)}{3}\pi=\pi+2(1-m)\pi$

$\therefore \tan\theta_n=0$

(iii) $n=6m+3$일 때,

$\theta_n=\frac{14-(6m+3)}{3}\pi=\frac{5}{3}\pi+2(1-m)\pi$에서 θ_n은 제4사분면의 각이므로 $\tan\theta_n<0$

(iv) $n=6m+4$일 때,

$\theta_n=\frac{14-(6m+4)}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi+2(1-m)\pi$에서 θ_n은 제3사분면의 각이므로 $\tan\theta_n>0$

(v) $n=6m+6$일 때,

$\theta_n=\frac{14-(6m+6)}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi+2(1-m)\pi$에서 θ_n은 제2사분면의 각이므로 $\tan\theta_n<0$

(i)~(v)에서 $n=6m+3$ 또는 $n=6m+6$

$\therefore B=\{3, 9, 15, \cdots, 45\}\cup\{6, 12, 18, \cdots, 48\}$

3단계 $n(A\cap B)$의 값 구하기

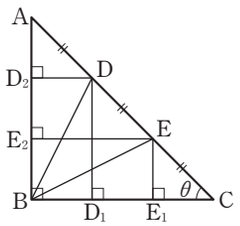
따라서 $A\cap B=\{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$이므로

$n(A\cap B)=8$

05 답 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

1단계 $\overline{BD}^2+\overline{BE}^2=1$임을 이용하여 식 세우기

그림과 같이 두 점 D, E에서 변 BC에 내린 수선의 발을 각각 D_1, E_1이라 하고, 변 AB에 내린 수선의 발을 각각 D_2, E_2라 하자.



$\overline{BC}=3a$, $\overline{AB}=3b$라 하면

$\overline{BD_1}=\overline{D_1E_1}=\overline{E_1C}=a$

$\overline{BE_2}=\overline{E_2D_2}=\overline{D_2A}=b$

$\overline{BD}=\sin\theta$, $\overline{DD_1}=\overline{D_2B}=2b$이고 직각삼각형 BD_1D에서

$\overline{BD}^2=\overline{BD_1}^2+\overline{DD_1}^2$이므로

$\sin^2\theta=a^2+(2b)^2$

$\therefore \sin^2\theta=a^2+4b^2$ ····· ㉠

$\overline{BE}=\cos\theta$, $\overline{BE_1}=2a$, $\overline{EE_1}=\overline{E_2B}=b$이고 직각삼각형 BE_1E에서

$\overline{BE}^2=\overline{BE_1}^2+\overline{EE_1}^2$이므로

$\cos^2\theta=(2a)^2+b^2$

$\therefore \cos^2\theta=4a^2+b^2$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=a^2+4b^2+4a^2+b^2$

$1=5(a^2+b^2)$

$\therefore a^2+b^2=\frac{1}{5}$ ····· ㉢

2단계 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값 구하기

직각삼각형 ABC에서 $\tan\theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{b}{a}$이므로

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{b}{a}$ $\therefore a\sin\theta=b\cos\theta$

양변을 제곱하면

$a^2\sin^2\theta=b^2\cos^2\theta$

㉠, ㉡을 대입하면

$a^2(a^2+4b^2)=b^2(4a^2+b^2)$

$a^4-b^4=0$, $(a^2-b^2)(a^2+b^2)=0$

$(a+b)(a-b)(a^2+b^2)=0$

$\therefore a=b$ ($\because a>0$, $b>0$)

이를 ㉢에 대입하면

$a^2+a^2=\frac{1}{5}$

$a^2=\frac{1}{10}$ $\therefore a=\frac{\sqrt{10}}{10}$ ($\because a>0$)

$a=b$이므로

$\overline{AB}=\overline{BC}=3a=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

또 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로

$\theta=\frac{\pi}{4}$

$\therefore \sin\theta=\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3단계 $\overline{BC}\sin\theta+\overline{AB}\cos\theta$의 값 구하기

$\therefore \overline{BC}\sin\theta+\overline{AB}\cos\theta=2\overline{BC}\sin\theta$

$=2\times\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

06 답 ③

1단계 $\cos\theta=t$로 놓고 t에 대한 이차방정식의 근 판별하기

$2\cos^2\theta-2a\cos\theta+a^2-1=0$에서 $\cos\theta=t$로 놓으면 $\cos\theta$는 t에 대한 이차방정식 $2t^2-2at+a^2-1=0$의 근이다.

이차방정식 $2t^2-2at+a^2-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-2(a^2-1)=2-a^2$

$1<a<\sqrt{2}$에서 $1<a^2<2$이므로

$\frac{D}{4}=2-a^2>0$

따라서 이차방정식 $2t^2-2at+a^2-1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

2단계 a의 값 구하기

이차방정식 $2t^2-2at+a^2-1=0$의 두 근을 α, $\cos\theta$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\cos\theta=a$ …… ㉠

$\alpha\cos\theta=\dfrac{a^2-1}{2}$ …… ㉡

㉠의 양변을 제곱하면 $\alpha^2+2\alpha\cos\theta+\cos^2\theta=a^2$

㉡을 대입하면 $\alpha^2+2\times\dfrac{a^2-1}{2}+\cos^2\theta=a^2$

$\alpha^2+a^2-1+\cos^2\theta=a^2$

$\therefore\ \alpha^2+\cos^2\theta=1$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $\alpha^2=\sin^2\theta$이므로

$\alpha=-\sin\theta$ 또는 $\alpha=\sin\theta$

이때 $1<a^2<2$이므로 ㉡에서 $\alpha\cos\theta>0$이고, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta>0$

이므로 $\alpha>0$

$\therefore\ \alpha=\sin\theta$

따라서 $\sin\theta$는 이차방정식 $2t^2-2at+a^2-1=0$의 근이므로

$2\sin^2\theta-2a\sin\theta+a^2-1=0$

$\therefore\ \sin^2\theta-a\sin\theta=\dfrac{1-a^2}{2}$

이를 $\sin^2\theta-a\sin\theta+a^4-2=0$에 대입하면

$\dfrac{1-a^2}{2}+a^4-2=0,\ 2a^4-a^2-3=0$

$(2a^2-3)(a^2+1)=0$ $\therefore\ a^2=\dfrac{3}{2}$ $(\because\ a^2>0)$

$\therefore\ a=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ $(\because\ 1<a<\sqrt{2})$

3단계 $a+\sin\theta+\cos\theta$의 값 구하기

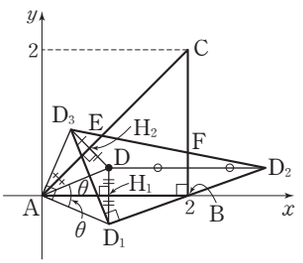
㉠에서 $a=\alpha+\cos\theta=\sin\theta+\cos\theta$이므로

$a+\sin\theta+\cos\theta=2a=\sqrt{6}$

07 답 ①

1단계 $\overline{D_1D_3}$의 길이 구하기

그림과 같이 점 D에서 두 선분 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자.



$\triangle AH_1D\equiv\triangle AH_1D_1$ (RHS 합동)

이므로

$\angle DAH_1=\angle D_1AH_1$

$\triangle AH_2D\equiv\triangle AH_2D_3$ (RHS 합동)

이므로

$\angle DAH_2=\angle D_3AH_2$

삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로

$\angle BAC=\dfrac{\pi}{4}$ $\therefore\ \angle D_3AD_1=2\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$

또 $\overline{AD}=1$에서 $\overline{AD_1}=\overline{AD_3}=1$이므로 삼각형 D_3AD_1은 직각이등변삼각형이다.

$\therefore\ \overline{D_1D_3}=\sqrt{2}\,\overline{AD_1}=\sqrt{2}$

2단계 세 점 D_1, D_2, D_3의 좌표 구하기

한편 $\overline{AD}=1$, $\angle DAB=\theta$이므로 $D(\cos\theta,\ \sin\theta)$

선분 AB는 x축 위에 있으므로 점 D_1은 점 D를 x축에 대하여 대칭이동한 점이다.

$\therefore\ D_1(\cos\theta,\ -\sin\theta)$

선분 BC는 직선 $x=2$ 위에 있으므로 점 D_2는 점 D를 직선 $x=2$에 대하여 대칭이동한 점이다.

$\therefore\ D_2(4-\cos\theta,\ \sin\theta)$

선분 AC는 직선 $y=x$ 위에 있으므로 점 D_3은 점 D를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이다.

$\therefore\ D_3(\sin\theta,\ \cos\theta)$

3단계 $\overline{D_2D_3}^2$의 값 구하기

$\overline{D_1D_2}^2=(4-\cos\theta-\cos\theta)^2+(\sin\theta+\sin\theta)^2$

$=(4-2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2$

$=16-16\cos\theta+4\cos^2\theta+4\sin^2\theta$

$=16-16\cos\theta+4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$=20-16\cos\theta$

$\overline{D_2D_3}^2=(\sin\theta-4+\cos\theta)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2$

$=(\sin\theta+\cos\theta-4)^2+(\cos\theta-\sin\theta)^2$

$=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-8(\sin\theta+\cos\theta)+16$

$\quad+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-8(\sin\theta+\cos\theta)+16$

$=18-8(\sin\theta+\cos\theta)$

직각삼각형 $D_1D_2D_3$에서 $\overline{D_2D_3}^2=\overline{D_1D_2}^2+\overline{D_1D_3}^2$이므로

$18-8(\sin\theta+\cos\theta)=20-16\cos\theta+(\sqrt{2})^2$

$8\cos\theta-8\sin\theta=4$

$\therefore\ \cos\theta-\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

양변을 제곱하면

$\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta=\dfrac{1}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$

$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{8}$

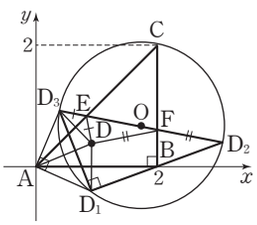
$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{7}{4}$이고 θ는 제1사분면의 각이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$\therefore\ \overline{D_2D_3}^2=18-8\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}=18-4\sqrt{7}$

4단계 $(\overline{DE}+\overline{EO})^2+(\overline{DF}+\overline{FO})^2$의 값 구하기

직각삼각형의 외심은 빗변의 중점과 같으므로 점 O는 선분 D_2D_3의 중점이다.



이때 $\overline{DE}=\overline{D_3E}$, $\overline{DF}=\overline{D_2F}$이므로

$\overline{DE}+\overline{EO}=\overline{D_3E}+\overline{EO}=\overline{D_3O}=\dfrac{1}{2}\overline{D_2D_3}$

$\overline{DF}+\overline{FO}=\overline{D_2F}+\overline{FO}=\overline{D_2O}=\dfrac{1}{2}\overline{D_2D_3}$

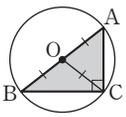
$\therefore\ (\overline{DE}+\overline{EO})^2+(\overline{DF}+\overline{FO})^2=2\times\left(\dfrac{1}{2}\overline{D_2D_3}\right)^2=\dfrac{1}{2}\overline{D_2D_3}^2$

$=\dfrac{1}{2}(18-4\sqrt{7})=9-2\sqrt{7}$

개념 NOTE

직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이다.

➡ $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$



06 삼각함수의 그래프

step 1 핵심 문제 | 68~69쪽

01 ② 02 ⑤ 03 $\frac{2}{3}\pi$ 04 10 05 ③ 06 $\frac{2}{3}$

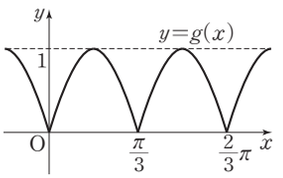
07 -1 08 $\frac{3}{2}$ 09 ④ 10 ④

11 $-\frac{5}{6}\pi \le x \le -\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5}{6}\pi$ 12 ①

01 답 ②

$a>0$이므로 함수 $f(x)=\cos ax+1$의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$이다.

함수 $y=\sin 3x$의 주기는 $\frac{2\pi}{3}$이고, 함수 $g(x)=|\sin 3x|$의 그래프는 $y=\sin 3x$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 함수 $g(x)=|\sin 3x|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $g(x)=|\sin 3x|$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$이다.

이때 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 주기가 서로 같으므로

$\frac{2\pi}{a}=\frac{\pi}{3}$ $\therefore a=6$

02 답 ⑤

㈎의 $f(x+\pi)=f(x)$에서 함수 $f(x)$의 주기는 π이다.

㈏의 $f(-x)=f(x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

① 함수 $f(x)=\sin x$의 주기는 2π이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
또 최댓값과 최솟값의 차는 $1-(-1)=2$이다.

② 함수 $f(x)=2\cos x$의 주기는 2π이고, 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
또 최댓값과 최솟값의 차는 $2-(-2)=4$이다.

③ 함수 $f(x)=2\tan x$의 주기는 π이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
또 최댓값과 최솟값은 없다.

④ 함수 $f(x)=2\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
또 최댓값과 최솟값의 차는 $2-(-2)=4$이다.

⑤ 함수 $f(x)=2\cos 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이고, 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
또 최댓값과 최솟값의 차는 $2-(-2)=4$이다.

따라서 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$는 ⑤이다.

개념 NOTE

함수 $f(x)$에 대하여
(1) 주기가 p이다. $\Longleftrightarrow f(x+p)=f(x)$
(2) 그래프가 y축에 대하여 대칭이다. $\Longleftrightarrow f(-x)=f(x)$
(3) 그래프가 원점에 대하여 대칭이다. $\Longleftrightarrow f(-x)=-f(x)$

03 답 $\frac{2}{3}\pi$

함수 $y=a\cos b(x+c)+d$의 최댓값은 3, 최솟값은 1이고 $a>0$이므로

$a+d=3$, $-a+d=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $d=2$

주기는 $\frac{5}{6}\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$이고, $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\therefore b=2$

함수 $y=\cos 2(x+c)+2$의 그래프가 점 $\left(-\frac{\pi}{6}, 3\right)$을 지나므로

$3=\cos 2\left(-\frac{\pi}{6}+c\right)+2$, $\cos\left(2c-\frac{\pi}{3}\right)=1$

$\therefore 2c-\frac{\pi}{3}=2n\pi$ (단, n은 정수)

이때 $0<c<\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}<2c-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{3}\pi$이므로

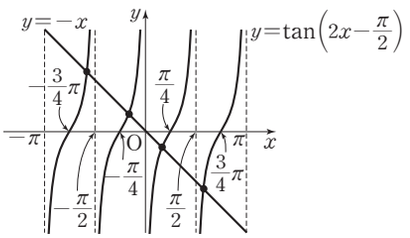
$2c-\frac{\pi}{3}=0$ $\therefore c=\frac{\pi}{6}$

$\therefore abcd=1\times 2\times\frac{\pi}{6}\times 2=\frac{2}{3}\pi$

04 답 10

(i) $n=2$일 때,

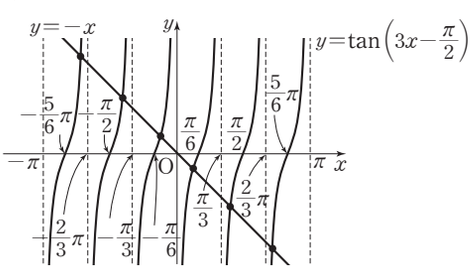
함수 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\tan 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고, 함수 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\tan 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동한 것이므로 $-\pi<x<\pi$에서 함수 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프와 직선 $y=-x$는 그림과 같다.



이때 두 함수의 그래프의 교점의 개수는 4이므로 $a_2=4$

(ii) $n=3$일 때,

함수 $y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=\tan 3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$이고, 함수 $y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 $y=\tan 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이므로 $-\pi<x<\pi$에서 함수 $y=\tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프와 직선 $y=-x$는 그림과 같다.

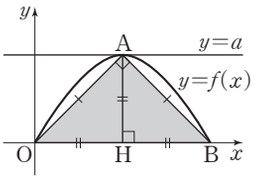


이때 두 함수의 그래프의 교점의 개수는 6이므로 $a_3=6$

(i), (ii)에서 $a_2+a_3=4+6=10$

05 답 ③

$\overline{AO}=\overline{AB}$이므로 삼각형 OAB는 직각이등변삼각형이다.



삼각형 OAB의 넓이가 4이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AO}^2=4$

$\overline{AO}^2=8$

$\therefore \overline{AO}=2\sqrt{2}$ ($\because \overline{AO}>0$)

직각이등변삼각형 OAB에서

$\overline{OB}=\sqrt{2}\,\overline{AO}=4$

점 A에서 변 OB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH}=\overline{OH}=\overline{BH}=\frac{1}{2}\overline{OB}=2$

$\therefore a=2$

한편 $b>0$이므로 함수 $f(x)=a\sin bx$의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이다.

변 OB의 길이는 함수 $f(x)=a\sin bx$의 주기의 $\frac{1}{2}$과 같으므로

$\frac{2\pi}{b}\times\frac{1}{2}=4 \quad \therefore b=\frac{\pi}{4}$

$\therefore a+b=2+\frac{\pi}{4}$

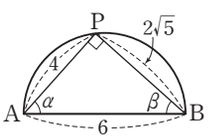
06 답 $\frac{2}{3}$

원의 지름에 대한 원주각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$이므로

$\angle APB=\frac{\pi}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=\pi-\angle APB=\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 PAB에서



$\overline{AB}=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{PB}^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{5})^2}=6$

$\therefore \sin(2\alpha+\beta)=\sin\{(\alpha+\beta)+\alpha\}$

$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

$=\cos\alpha=\frac{\overline{PA}}{\overline{AB}}$

$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

07 답 -1

$\theta=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$에서 $6\theta=\pi$이므로

$\cos 7\theta=\cos(6\theta+\theta)=\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\cos 8\theta=\cos(6\theta+2\theta)=\cos(\pi+2\theta)=-\cos 2\theta$

$\cos 9\theta=\cos(6\theta+3\theta)=\cos(\pi+3\theta)=-\cos 3\theta$

$\cos 10\theta=\cos(6\theta+4\theta)=\cos(\pi+4\theta)=-\cos 4\theta$

$\cos 11\theta=\cos(6\theta+5\theta)=\cos(\pi+5\theta)=-\cos 5\theta$

$\therefore \cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 11\theta$

$=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta+\cos 5\theta+\cos 6\theta$

$\quad -\cos\theta-\cos 2\theta-\cos 3\theta-\cos 4\theta-\cos 5\theta$

$=\cos 6\theta$

$=\cos\pi$

$=-1$

08 답 $\frac{3}{2}$

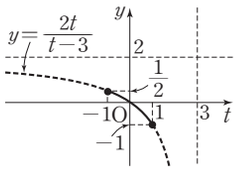
$y=\frac{2\sin(\pi-x)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)-3}=\frac{2\sin x}{\sin x-3}$이므로 $\sin x=t$로 놓으면

$y=\frac{2t}{t-3}=\frac{6}{t-3}+2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $-1\le\sin x\le 1$이므로

$-1\le t\le 1$

따라서 $-1\le t\le 1$에서 함수 ㉠의 그래프는 그림과 같으므로



$t=-1$일 때, $M=\frac{1}{2}$

$t=1$일 때, $m=-1$

$\therefore M-m=\frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}$

09 답 ④

$2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin^2 x=\cos^2 x-2$에서

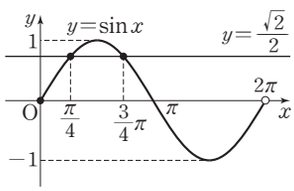
$-2\sqrt{2}\sin x+\sin^2 x=1-\sin^2 x-2$

$2\sin^2 x-2\sqrt{2}\sin x+1=0$

$(\sqrt{2}\sin x-1)^2=0$

$\therefore \sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi$이므로 주어진 방정식의 해는



$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

이때 $\alpha<\beta$이므로

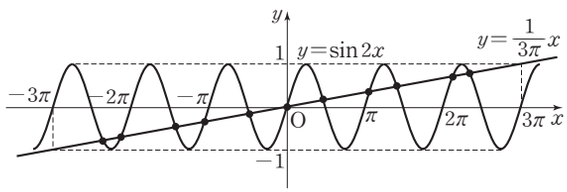
$\alpha=\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{3}{4}\pi$

$\therefore \beta-\alpha=\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

10 답 ④

방정식 $\sin 2x=\frac{1}{3\pi}x$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\sin 2x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3\pi}x$의 교점의 개수와 같다.

함수 $y=\sin 2x$의 최댓값은 1, 최솟값은 -1, 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$이고, 직선 $y=\frac{1}{3\pi}x$는 세 점 $(-3\pi, -1)$, $(0, 0)$, $(3\pi, 1)$을 지나므로 함수 $y=\sin 2x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3\pi}x$는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=\sin 2x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3\pi}x$의 교점의 개수는 11이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 11이다.

11 답 $-\frac{5}{6}\pi \le x \le -\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5}{6}\pi$

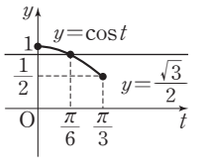
$\left|\frac{\pi}{3}\sin x\right| = t$로 놓으면 $-\pi \le x \le \pi$에서 $-1 \le \sin x \le 1$이므로

$-\frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{3}\sin x \le \frac{\pi}{3}$ $\quad \therefore 0 \le t \le \frac{\pi}{3}$

따라서 주어진 부등식은

$\cos t \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\left(\text{단, } 0 \le t \le \frac{\pi}{3}\right)$ ····· 배점 40%

$0 \le t \le \frac{\pi}{3}$에서 함수 $y=\cos t$의 그래프는 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는

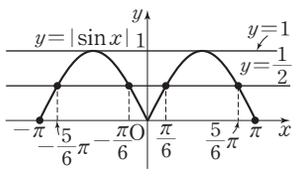


$\frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{3}$

$t = \left|\frac{\pi}{3}\sin x\right|$이므로 $\frac{\pi}{6} \le \left|\frac{\pi}{3}\sin x\right| \le \frac{\pi}{3}$

$\therefore \frac{1}{2} \le |\sin x| \le 1$ ····· 배점 30%

함수 $y=|\sin x|$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $-\pi \le x \le \pi$에서 함수 $y=|\sin x|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 구하는 x의 값의 범위는

$-\frac{5}{6}\pi \le x \le -\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5}{6}\pi$ ····· 배점 30%

12 답 ①

이차방정식 $x^2-(2\sin\theta)x-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-\sin\theta)^2-(-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5) \ge 0$

$\sin^2\theta+3\cos^2\theta+5\sin\theta-5 \ge 0$

$\sin^2\theta+3(1-\sin^2\theta)+5\sin\theta-5 \ge 0$

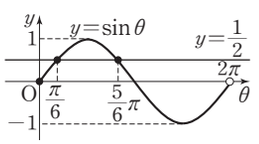
$2\sin^2\theta-5\sin\theta+2 \le 0$

$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-2) \le 0$

이때 $\sin\theta-2<0$이므로

$2\sin\theta-1 \ge 0$ $\quad \therefore \sin\theta \ge \frac{1}{2}$

$0 \le \theta < 2\pi$에서 함수 $y=\sin\theta$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 그림과 같다.



따라서 부등식 $\sin\theta \ge \frac{1}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5}{6}\pi$

이때 θ의 최솟값은 $\frac{\pi}{6}$, 최댓값은 $\frac{5}{6}\pi$이므로

$\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$

$\therefore 4\beta-2\alpha=4\times\frac{5}{6}\pi-2\times\frac{\pi}{6}=3\pi$

개념 NOTE

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 $D=b^2-4ac$라 할 때

(1) $D>0$ ⟺ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $D=0$ ⟺ 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.

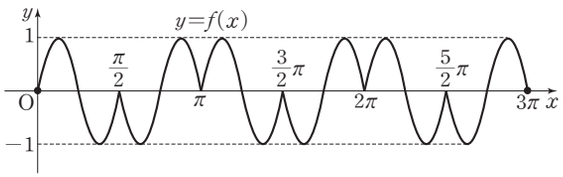
(3) $D<0$ ⟺ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

step 2 고난도 문제 | 70~74쪽

01 $\frac{93}{2}\pi$	02 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	03 ③	04 ③	05 ④	06 ⑤
07 ④	08 16	09 ④	10 $\frac{1}{36}$	11 $\frac{3}{2}\pi$	
12 $0<\alpha\le 2$		13 40	14 ④	15 $\sqrt{3}$	16 ③
17 2	18 $-2\sqrt{2}$		19 ②	20 ③	21 ⑤
22 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$		23 $\frac{14}{3}$	24 $\frac{\sqrt{2}}{2} \le \overline{PQ} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$		25 9
26 $0<\theta\le\frac{\pi}{3}$					

01 답 $\frac{93}{2}\pi$

$f(x)=\begin{cases}\sin 4x & \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)\\ -\sin 4x & \left(\frac{\pi}{2} < x \le \pi\right)\end{cases}$이고 (가)에서 함수 $f(x)$의 주기는 π이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭이다.

(i) $\alpha=1$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6이라 하면

$\frac{a_1+a_6}{2}=\frac{3}{2}\pi$, $\frac{a_2+a_5}{2}=\frac{3}{2}\pi$, $\frac{a_3+a_4}{2}=\frac{3}{2}\pi$

즉, $a_1+a_6=3\pi$, $a_2+a_5=3\pi$, $a_3+a_4=3\pi$이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=9\pi$

$\therefore g(1)=9\pi$

(ii) $\alpha=\frac{1}{3}$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3}$이 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 b_1, b_2, b_3, …, b_{12}라 하면

$\frac{b_1+b_{12}}{2}=\frac{3}{2}\pi$, $\frac{b_2+b_{11}}{2}=\frac{3}{2}\pi$, $\frac{b_3+b_{10}}{2}=\frac{3}{2}\pi$, $\frac{b_4+b_9}{2}=\frac{3}{2}\pi$,

$\frac{b_5+b_8}{2}=\frac{3}{2}\pi$, $\frac{b_6+b_7}{2}=\frac{3}{2}\pi$

즉, $b_1+b_{12}=3\pi$, $b_2+b_{11}=3\pi$, $b_3+b_{10}=3\pi$, $b_4+b_9=3\pi$,

$b_5+b_8=3\pi$, $b_6+b_7=3\pi$이므로

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{12}=18\pi$

$\therefore g\left(\frac{1}{3}\right)=18\pi$

(iii) $\alpha=0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 c_1, c_2, c_3, …, c_{13}이라 하면

$\frac{c_1+c_{13}}{2}=\frac{3}{2}\pi$, $\frac{c_2+c_{12}}{2}=\frac{3}{2}\pi$, $\frac{c_3+c_{11}}{2}=\frac{3}{2}\pi$, $\frac{c_4+c_{10}}{2}=\frac{3}{2}\pi$,

$\frac{c_5+c_9}{2}=\frac{3}{2}\pi$, $\frac{c_6+c_8}{2}=\frac{3}{2}\pi$, $c_7=\frac{3}{2}\pi$

즉, $c_1+c_{13}=3\pi$, $c_2+c_{12}=3\pi$, $c_3+c_{11}=3\pi$, $c_4+c_{10}=3\pi$,

$c_5+c_9=3\pi$, $c_6+c_8=3\pi$, $c_7=\frac{3}{2}\pi$이므로

$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{13}=\frac{39}{2}\pi$ $\therefore g(0)=\frac{39}{2}\pi$

(i), (ii), (iii)에서

$g(1)+g\left(\frac{1}{3}\right)+g(0)=9\pi+18\pi+\frac{39}{2}\pi=\frac{93}{2}\pi$

비법 NOTE

(1) 함수 $f(x)=\sin x\,(0\le x\le\pi)$에서

$f(a)=f(b)\,(a\ne b)$이면 ➡ $\frac{a+b}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore a+b=\pi$

(2) 함수 $f(x)=\cos x\,(0\le x\le 2\pi)$에서

$f(a)=f(b)\,(a\ne b)$이면 ➡ $\frac{a+b}{2}=\pi$ $\therefore a+b=2\pi$

(3) 함수 $f(x)=\tan x$에서

$f(a)=f(b)$이면 ➡ $a-b=n\pi$ (단, n은 정수)

02 답 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$b>0$이므로 함수 $y=a\sin b\pi x$의 주기는

$\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$ $\therefore \mathrm{B}\left(\frac{2}{b},\ 0\right)$

$\therefore \mathrm{C}\left(\frac{1}{2b},\ a\right)$, $\mathrm{A}\left(\frac{3}{2b},\ -a\right)$

직선 OC의 기울기는 $\frac{a}{\frac{1}{2b}}=2ab$

직선 OA의 기울기는 $\frac{-a}{\frac{3}{2b}}=-\frac{2ab}{3}$

직선 OC와 직선 OA는 서로 수직이므로 $2ab\times\left(-\frac{2ab}{3}\right)=-1$

$\frac{4}{3}a^2b^2=1$ $\therefore a^2b^2=\frac{3}{4}$

$\therefore ab=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because a>0,\ b>0$) …… ㉠

직각삼각형 OAB에서 $\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{OB}}^2$

직각삼각형 OBC에서 $\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CO}}^2=\overline{\mathrm{OB}}^2$

직사각형 OABC의 네 변의 길이의 제곱의 합이 $16a$이므로

$\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CO}}^2=16a$

$2\overline{\mathrm{OB}}^2=16a$, $\overline{\mathrm{OB}}^2=8a$

이때 $\overline{\mathrm{OB}}^2=\frac{4}{b^2}$이므로 $\frac{4}{b^2}=8a$ $\therefore ab^2=\frac{1}{2}$

㉠을 대입하면 $\frac{\sqrt{3}}{2}b=\frac{1}{2}$ $\therefore b=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이를 ㉠에 대입하면 $\frac{\sqrt{3}}{3}a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore a=\frac{3}{2}$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

03 답 ③

$a>0$이므로 함수 $y=\tan\frac{\pi x}{a}$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$

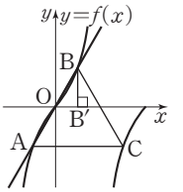
이때 변 AC의 길이는 함수 $y=\tan\frac{\pi x}{a}$의 주기와 같으므로

$\overline{\mathrm{AC}}=a$

함수 $y=\tan\frac{\pi x}{a}$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{a}{2}$ ⟶ 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 a인 정삼각형이다.

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 B′이라 하면 삼각형 ABC는 정삼각형이고 변 AC는 x축에 평행하므로



$\angle\mathrm{BOB}'=\frac{\pi}{3}$

직각삼각형 BOB′에서

$\overline{\mathrm{OB}'}=\overline{\mathrm{OB}}\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{a}{4}$

$\overline{\mathrm{BB}'}=\overline{\mathrm{OB}}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{a}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a$

$\therefore \mathrm{B}\left(\frac{a}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$

이때 점 B는 함수 $y=\tan\frac{\pi x}{a}$의 그래프 위에 있으므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}a=\tan\left(\frac{\pi}{a}\times\frac{a}{4}\right)$, $\frac{\sqrt{3}}{4}a=\tan\frac{\pi}{4}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}a=1$ $\therefore a=\frac{4}{\sqrt{3}}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{\mathrm{AC}}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{16}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

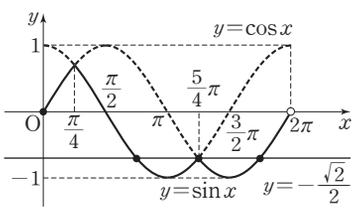
04 답 ③

두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프에 대하여

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi\le x<2\pi$일 때, $\sin x\le\cos x$

$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{5}{4}\pi$일 때, $\cos x\le\sin x$

따라서 함수 $y=\min(\sin x,\ \cos x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=\min(\sin x,\ \cos x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 3이려면

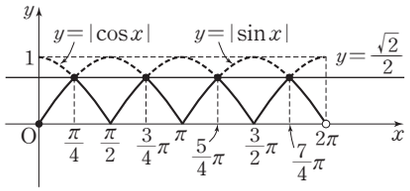
$k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

두 함수 $y=|\sin x|$, $y=|\cos x|$의 그래프에 대하여

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$, $\frac{3}{4}\pi\le x\le\frac{5}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi\le x<2\pi$일 때, $|\sin x|\le|\cos x|$

$\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi\le x\le\frac{7}{4}\pi$일 때, $|\cos x|\le|\sin x|$

따라서 함수 $y=\min(|\sin x|,\ |\cos x|)$의 그래프는 그림과 같다.



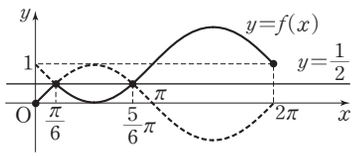
따라서 함수 $y=\min(|\sin x|,\ |\cos x|)$의 그래프와 직선 $y=|k|$, 즉 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 개수는 4이다.

05 답 ④

(i) $k=1$일 때,

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$이므로 $f(x)=\begin{cases}\sin x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{6}\right)\\ 1-\sin x & \left(\frac{\pi}{6}<x\le 2\pi\right)\end{cases}$

$0\le x\le 2\pi$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 그림과 같다.



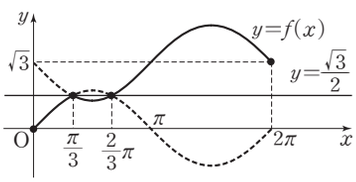
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 개수는 2이므로

$a_1=2$

(ii) $k=2$일 때,

$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $f(x)=\begin{cases}\sin x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{3}\right)\\ \sqrt{3}-\sin x & \left(\frac{\pi}{3}<x\le 2\pi\right)\end{cases}$

$0\le x\le 2\pi$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$은 그림과 같다.



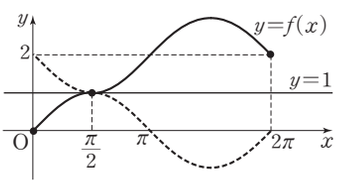
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 개수는 2이므로

$a_2=2$

(iii) $k=3$일 때,

$\sin\frac{\pi}{2}=1$이므로 $f(x)=\begin{cases}\sin x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\\ 2-\sin x & \left(\frac{\pi}{2}<x\le 2\pi\right)\end{cases}$

$0\le x\le 2\pi$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1$은 그림과 같다.



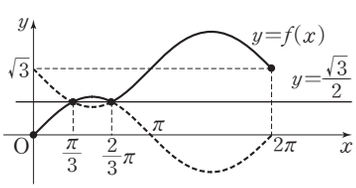
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1$의 교점의 개수는 1이므로

$a_3=1$

(iv) $k=4$일 때,

$\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $f(x)=\begin{cases}\sin x & \left(0\le x\le\frac{2}{3}\pi\right)\\ \sqrt{3}-\sin x & \left(\frac{2}{3}\pi<x\le 2\pi\right)\end{cases}$

$0\le x\le 2\pi$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$은 그림과 같다.



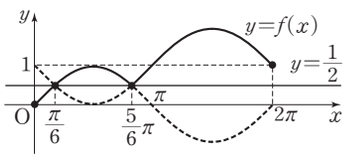
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 개수는 2이므로

$a_4=2$

(v) $k=5$일 때,

$\sin\frac{5}{6}\pi=\frac{1}{2}$이므로 $f(x)=\begin{cases}\sin x & \left(0\le x\le\frac{5}{6}\pi\right)\\ 1-\sin x & \left(\frac{5}{6}\pi<x\le 2\pi\right)\end{cases}$

$0\le x\le 2\pi$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 그림과 같다.



이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 개수는 2이므로

$a_5=2$

(i)~(v)에서

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2+2+1+2+2=9$

06 답 ⑤

ㄱ. $\tan x^\circ\times\tan(90^\circ-x^\circ)=\tan x^\circ\times\frac{1}{\tan x^\circ}=1$이므로

$\tan 1^\circ\times\tan 89^\circ=1$, $\tan 2^\circ\times\tan 88^\circ=1$, $\tan 3^\circ\times\tan 87^\circ=1$, …,

$\tan 44^\circ\times\tan 46^\circ=1$, $\tan 45^\circ=1$

$\therefore \log_2\tan 1^\circ+\log_2\tan 2^\circ+\log_2\tan 3^\circ+\cdots+\log_2\tan 89^\circ$

$=\log_2(\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\tan 3^\circ\times\cdots\times\tan 89^\circ)$

$=\log_2\{(\tan 1^\circ\times\tan 89^\circ)\times\cdots\times(\tan 44^\circ\times\tan 46^\circ)\times\tan 45^\circ\}$

$=\log_2 1=0$

ㄴ. $f(x+1)=\cos\frac{\pi}{2}(x+1)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}x$

$f(x-1)=\cos\frac{\pi}{2}(x-1)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}\right)$

$=\cos\left\{-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)\right\}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x\right)=\sin\frac{\pi}{2}x$

$\therefore f(x+1)=-f(x-1)$

ㄷ. $\alpha+\beta+\gamma=\pi$이므로 $\alpha+\gamma=\pi-\beta$

$\therefore \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}=\sin\frac{\pi-\beta}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)=\cos\frac{\beta}{2}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

07 답 ④

$\angle\mathrm{COD}=\pi-\theta$이고 $\overline{\mathrm{OB}}=1$이므로 직각삼각형 OCB에서

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{OB}}\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

삼각형 OAD는 $\angle\mathrm{OAD}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이고 $\overline{\mathrm{OA}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{OD}}=\frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\cos(\pi-\theta)}=-\frac{1}{\cos\theta}$

따라서 어두운 부분의 넓이는

$\triangle\mathrm{OCD}-(\text{부채꼴 OAB의 넓이})$

$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{OD}}-\frac{1}{2}\times 1^2\times(\pi-\theta)$

$=\frac{1}{2}\times(-\tan\theta)\times\left(-\frac{1}{\cos\theta}\right)-\frac{1}{2}(\pi-\theta)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\pi+\theta\right)$

08 답 16

$y=\cos^2x-2\sin^2x+|6\cos x-3|$

$=\cos^2x-2(1-\cos^2x)+|6\cos x-3|$

$=3\cos^2x-2+|6\cos x-3|$

$\cos x=t$로 놓으면 $y=3t^2-2+|6t-3|$

이때 $-1\le\cos x\le1$이므로 $-1\le t\le1$ ····· 배점 30%

(i) $-1\le t<\frac{1}{2}$일 때,

$y=3t^2-2-(6t-3)=3t^2-6t+1=3(t-1)^2-2$

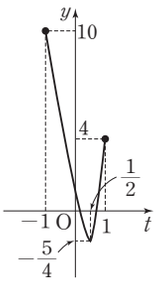
(ii) $\frac{1}{2}\le t\le1$일 때,

$y=3t^2-2+6t-3=3t^2+6t-5=3(t+1)^2-8$

(i), (ii)에서 함수

$y=3t^2-2+|6t-3|\ (-1\le t\le1)$

의 그래프는 그림과 같으므로 $t=-1$에서 최댓값 10을 갖고, $t=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $-\frac{5}{4}$를 갖는다.



····· 배점 50%

따라서 $\cos\alpha=-1$, $M=10$, $\cos\beta=\frac{1}{2}$, $m=-\frac{5}{4}$

이므로

$\frac{\cos\alpha\times M}{\cos\beta\times m}=\frac{(-1)\times10}{\frac{1}{2}\times\left(-\frac{5}{4}\right)}=16$ ····· 배점 20%

09 답 ④

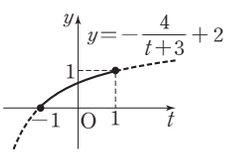
임의의 실수 a, b에 대하여 $f(a)\le g(b)$를 만족시키려면 함수 $g(x)$의 최솟값이 함수 $f(x)$의 최댓값보다 크거나 같아야 한다.

$y=\frac{2\cos x+2}{\cos x+3}$에서 $\cos x=t$로 놓으면

$y=\frac{2t+2}{t+3}=-\frac{4}{t+3}+2$

이때 $-1\le\cos x\le1$이므로 $-1\le t\le1$

$-1\le t\le1$에서 함수 $y=-\frac{4}{t+3}+2$의 그래프는 그림과 같으므로 $t=1$에서 최댓값 1을 갖는다.



따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.

$y=(\sin x)^2+2k\sin x+3+k$에서 $\sin x=s$로 놓으면

$y=s^2+2ks+3+k=(s+k)^2-k^2+k+3$

이때 $-1\le\sin x\le1$이므로 $-1\le s\le1$

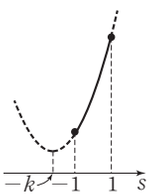
(i) $-k<-1$, 즉 $k>1$일 때,

$s=-1$에서 최솟값 $4-k$를 갖는다.

$g(x)$의 최솟값이 $f(x)$의 최댓값보다 크거나 같아야 하므로

$4-k\ge1$, $-k\ge-3$ $\therefore k\le3$

그런데 $k>1$이므로 $1<k\le3$



(ii) $-1\le-k\le1$, 즉 $-1\le k\le1$일 때,

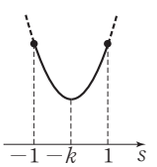
$s=-k$에서 최솟값 $-k^2+k+3$을 갖는다.

$g(x)$의 최솟값이 $f(x)$의 최댓값보다 크거나 같아야 하므로

$-k^2+k+3\ge1$, $k^2-k-2\le0$

$(k+1)(k-2)\le0$ $\therefore -1\le k\le2$

그런데 $-1\le k\le1$이므로 $-1\le k\le1$



(iii) $-k>1$, 즉 $k<-1$일 때,

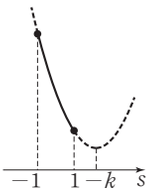
$s=1$에서 최솟값 $3k+4$를 갖는다.

$g(x)$의 최솟값이 $f(x)$의 최댓값보다 크거나 같아야 하므로

$3k+4\ge1$, $3k\ge-3$

$\therefore k\ge-1$

그런데 $k<-1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.



(i), (ii), (iii)에서 $-1\le k\le3$

따라서 실수 k의 최댓값은 3, 최솟값은 -1이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$3+(-1)=2$

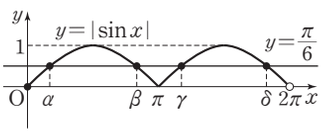
10 답 $\frac{1}{36}$

$6|\sin x|^2-7\pi|\sin x|+\pi^2=0$에서

$(6|\sin x|-\pi)(|\sin x|-\pi)=0$

$\therefore\ |\sin x|=\frac{\pi}{6}\ (\because\ 0\le|\sin x|\le1)$

함수 $y=|\sin x|$의 그래프는 $y=\sin x$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=|\sin x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{\pi}{6}$는 그림과 같다.



함수 $y=|\sin x|$의 그래프가 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=|\sin x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{\pi}{6}$가 만나는 네 점 α, β, γ, δ에 대하여

$\frac{\alpha+\delta}{2}=\pi$, $\frac{\beta+\gamma}{2}=\pi$

$\therefore\ \alpha+\delta=2\pi$, $\beta+\gamma=2\pi$

따라서 $\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta=2(\alpha+\beta+\gamma+\delta)-\alpha=8\pi-\alpha$이므로

$\frac{\cos^2(\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta)}{36-\pi^2}=\frac{\cos^2(8\pi-\alpha)}{36-\pi^2}=\frac{\cos^2\alpha}{36-\pi^2}$

$=\frac{1-\sin^2\alpha}{36-\pi^2}$

이때 $|\sin\alpha|=\frac{\pi}{6}$에서 $\sin^2\alpha=\frac{\pi^2}{36}$이므로

$\frac{\cos^2(\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta)}{36-\pi^2}=\frac{1-\sin^2\alpha}{36-\pi^2}$

$=\frac{1-\frac{\pi^2}{36}}{36-\pi^2}=\frac{1}{36}$

idea

11 답 $\frac{3}{2}\pi$

$f(\cos x)=\sin4x$이므로

$f(\sin x)=f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\sin4\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

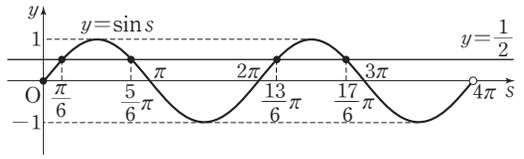
$=\sin(2\pi-4x)=-\sin4x$

$f(\cos t)-f(\sin t)=1$에서

$\sin4t+\sin4t=1$ $\therefore\ \sin4t=\frac{1}{2}$

$4t=s$로 놓으면 $0\le t<\pi$에서 $0\le s<4\pi$이고 방정식은

$\sin s=\frac{1}{2}$



$\therefore\ s=\frac{\pi}{6}$ 또는 $s=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $s=\frac{13}{6}\pi$ 또는 $s=\frac{17}{6}\pi$

$t=\frac{s}{4}$이므로 $t=\frac{\pi}{24}$ 또는 $t=\frac{5}{24}\pi$ 또는 $t=\frac{13}{24}\pi$ 또는 $t=\frac{17}{24}\pi$

따라서 모든 실수 t의 값의 합은

$\frac{\pi}{24}+\frac{5}{24}\pi+\frac{13}{24}\pi+\frac{17}{24}\pi=\frac{3}{2}\pi$

12 답 $0<a\le 2$

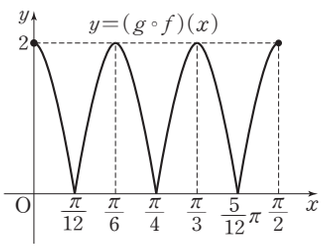
$f(x)=2\sin 6x$, $g(x)=\sqrt{4-x^2}$이므로

$(g\circ f)(x)=\sqrt{4-(2\sin 6x)^2}=\sqrt{4-4\sin^2 6x}$

$=\sqrt{4(1-\sin^2 6x)}=\sqrt{4\cos^2 6x}=2|\cos 6x|$

함수 $y=2\cos 6x$의 주기는 $\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$, 최댓값은 2, 최솟값은 -2이고,

$(g\circ f)(x)=2|\cos 6x|$의 그래프는 $y=2\cos 6x$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{\pi}{4}$에 대하여 대칭이다.

(i) $a=2$일 때,

함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=2$가 만나는 점의 x좌표가 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$이므로 방정식 $(g\circ f)(x)=2$의 근은 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$이고, 그 합은

$0+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\pi$

(ii) $0<a<2$일 때,

함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6이라 하면

$\frac{a_1+a_6}{2}=\frac{\pi}{4}$, $\frac{a_2+a_5}{2}=\frac{\pi}{4}$, $\frac{a_3+a_4}{2}=\frac{\pi}{4}$

즉, $a_1+a_6=\frac{\pi}{2}$, $a_2+a_5=\frac{\pi}{2}$, $a_3+a_4=\frac{\pi}{2}$이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=\frac{3}{2}\pi$

따라서 방정식 $(g\circ f)(x)=a$의 모든 실근의 합은 $\frac{3}{2}\pi$이다.

(iii) $a=0$일 때,

함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표가 $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{12}\pi$이므로 방정식 $(g\circ f)(x)=0$의 근은 $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{12}\pi$이고, 그 합은

$\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}+\frac{5}{12}\pi=\frac{3}{4}\pi$

(i), (ii), (iii)에서 방정식 $(g\circ f)(x)=a$의 모든 실근의 합이 π 이상이 되도록 하는 a의 값의 범위는

$0<a\le 2$

13 답 40

함수 $f(x)=2\sin ax+b$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}\pi,\ 0\right)$을 지나므로 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{7}{2}\pi\right)$에서

$2\sin\left(-\frac{a}{2}\pi\right)+b=2\sin\frac{7a}{2}\pi+b$

$\therefore\ \sin\frac{7a}{2}\pi=-\sin\frac{a}{2}\pi$

이때 $0<a<\frac{4}{7}$에서 $0<\frac{a}{2}\pi<\frac{2}{7}\pi$, $0<\frac{7a}{2}\pi<2\pi$

$\sin(\pi+x)=-\sin x$, $\sin(2\pi-x)=-\sin x$이므로

$\frac{7a}{2}\pi=\pi+\frac{a}{2}\pi$ 또는 $\frac{7a}{2}\pi=2\pi-\frac{a}{2}\pi$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

(i) $a=\frac{1}{3}$일 때,

$f(x)=2\sin\frac{1}{3}x+b$에서

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+b$

$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+b$

$=-1+b$

즉, $-1+b=0$이므로 $b=1$

따라서 $f(x)=2\sin\frac{1}{3}x+1$이므로

$f\left(\frac{7}{2}\pi\right)=2\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)+1$

$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0$

(ii) $a=\frac{1}{2}$일 때,

$f(x)=2\sin\frac{1}{2}x+b$에서

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+b$

$=2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+b$

$=-\sqrt{2}+b$

즉, $-\sqrt{2}+b=0$이므로 $b=\sqrt{2}$

이는 b가 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{3}$, $b=1$

$\therefore\ 30(a+b)=30\left(\frac{1}{3}+1\right)=40$

idea

14 답 ④

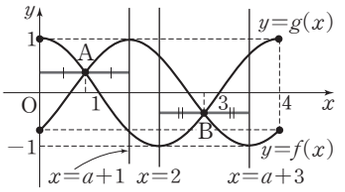
$f(x)=\sin\frac{\pi(x-a)}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi(x-a-1)}{2}\right)$

$=\cos\frac{\pi\{x-(a+1)\}}{2}$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $a+1$만큼 평행이동한 것이다. …… ㉠

함수 $g(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이므로 $y=g(x)$의 그래프는 두 직선 $x=0$, $x=2$에 대하여 각각 대칭이다.

이때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 두 직선 $x=0$, $x=2$에 대하여 각각 대칭이므로 ㉠에 의하여 $y=f(x)$의 그래프는 두 직선 $x=a+1$, $x=a+3$ $(0<a<1)$에 대하여 각각 대칭이다.



두 점 A, B의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2) $(0<x_1<1<x_2)$라 하면

$x_1=\frac{a+1}{2}$, $x_2=\frac{2+a+3}{2}=\frac{a+5}{2}$, $y_2=-y_1$

직선 AB의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{1}{2}$, $\frac{-y_1-y_1}{\frac{a+5}{2}-\frac{a+1}{2}}=-\frac{1}{2}$

$\therefore y_1=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi x_1}{2}$에서 $0<x_1<1$이므로

$\frac{\pi x_1}{2}=\frac{\pi}{3}$ $\therefore x_1=\frac{2}{3}$

따라서 $x_1=\frac{a+1}{2}$에서

$a=2x_1-1=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$

15 답 $\sqrt{3}$

$a=0$이면 $f(x)=0$이므로 $f(x)=g(x)$에서

$\left|\cos\frac{x}{2}\right|=0$ $\therefore \cos\frac{x}{2}=0$

$0\le x\le 5\pi$에서 $0\le\frac{x}{2}\le\frac{5}{2}\pi$이므로

$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{x}{2}=\frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{x}{2}=\frac{5}{2}\pi$

$\therefore x=\pi$ 또는 $x=3\pi$ 또는 $x=5\pi$

이때 서로 다른 실근의 합이 $\pi+3\pi+5\pi=9\pi$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore a\neq 0$ ····· 배점 20%

$f(x)=g(x)$에서 $a\left|\sin\frac{x}{2}\right|=\left|\cos\frac{x}{2}\right|$

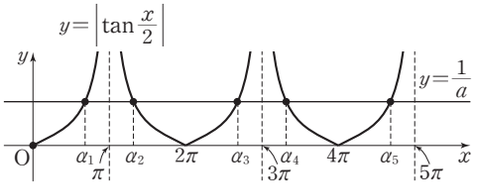
이때 $\cos\frac{x}{2}=0$이면 $\sin\frac{x}{2}=0$이어야 하는데 이를 동시에 만족시키는 x의 값은 존재하지 않으므로 $\cos\frac{x}{2}\neq 0$이고 $\sin\frac{x}{2}\neq 0$

또 $\left|\sin\frac{x}{2}\right|>0$, $\left|\cos\frac{x}{2}\right|>0$이므로 $a>0$

따라서 $\frac{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}=\frac{1}{a}$이므로 방정식 $\left|\tan\frac{x}{2}\right|=\frac{1}{a}$ $(a>0)$의 서로 다른 실근의 합이 $\frac{37}{3}\pi$가 되는 a의 값을 구하면 된다. ····· 배점 20%

함수 $y=\tan\frac{x}{2}$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$이고, 함수 $y=\left|\tan\frac{x}{2}\right|$의 그래프는 $y=\tan\frac{x}{2}$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 $0\le x\le 5\pi$에서 함수 $y=\left|\tan\frac{x}{2}\right|$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=\left|\tan\frac{x}{2}\right|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{a}$이 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 α_1, α_2, α_3, α_4, α_5라 하면

$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=\pi$, $\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}=3\pi$, $\alpha_5=4\pi+\alpha_1$

즉, $\alpha_1+\alpha_2=2\pi$, $\alpha_3+\alpha_4=6\pi$, $\alpha_5=4\pi+\alpha_1$이므로

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=2\pi+6\pi+4\pi+\alpha_1=12\pi+\alpha_1$

이때 서로 다른 실근의 합이 $\frac{37}{3}\pi$이므로

$12\pi+\alpha_1=\frac{37}{3}\pi$ $\therefore \alpha_1=\frac{\pi}{3}$ ····· 배점 40%

따라서 $\left|\tan\frac{\alpha_1}{2}\right|=\left|\tan\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{a}$이므로

$a=\sqrt{3}$ ····· 배점 20%

16 답 ③

삼차방정식 $x^3+ax+b=0$의 세 근이 1, $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$1+\sin\theta+\cos\theta=0$ ····· ㉠

$\sin\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos\theta=a$ ····· ㉡

$\sin\theta\cos\theta=-b$ ····· ㉢

㉠에서 $\sin\theta+\cos\theta=-1$ ····· ㉣

양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1$

$1+2\sin\theta\cos\theta=1$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=0$ ····· ㉤

㉣, ㉤을 ㉡에 대입하면 $a=-1$

㉤을 ㉢에 대입하면 $b=0$

한편 $\sin\theta+\cos\theta=-1$, $\sin\theta\cos\theta=0$이므로 $\sin\theta$, $\cos\theta$를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은 $t^2+t=0$

$t(t+1)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=0$

즉, $\sin\theta=0$, $\cos\theta=-1$ 또는 $\sin\theta=-1$, $\cos\theta=0$이므로

$\theta=\pi$ 또는 $\theta=\frac{3}{2}\pi$

그런데 $\pi<\theta<2\pi$이므로 $\theta=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore \theta+a+b=\frac{3}{2}\pi-1$

개념 NOTE

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

17 답 2

함수 $f(x)$의 주기가 3π이므로

$f(x+3\pi)=f(x)$

$x=0$을 대입하면 $f(3\pi)=f(0)$

$f(3\pi)=\dfrac{\cos 6\pi}{\sqrt{1+\cos 6\pi}}+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{3\pi}{n+1}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sin^2\dfrac{n-8}{3(n+1)}\pi$

$f(0)=\dfrac{\cos 0}{\sqrt{1+\cos 0}}+\sin^2\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3}{4}$

즉, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sin^2\dfrac{n-8}{3(n+1)}\pi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3}{4}$이므로

$\sin^2\dfrac{n-8}{3(n+1)}\pi=\dfrac{3}{4}$

$\therefore \sin\dfrac{n-8}{3(n+1)}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\sin\dfrac{n-8}{3(n+1)}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$-2\pi\le x\le 2\pi$에서 $\dfrac{n-8}{3(n+1)}\pi$의 값은

$-\dfrac{5}{3}\pi,\ -\dfrac{4}{3}\pi,\ -\dfrac{2}{3}\pi,\ -\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

한편 $\dfrac{n-8}{3(n+1)}\pi$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례대로 대입하면

$-\dfrac{7}{6}\pi,\ -\dfrac{2}{3}\pi,\ -\dfrac{5}{12}\pi,\ -\dfrac{4}{15}\pi,\ -\dfrac{\pi}{6},\ \cdots$

따라서 구하는 자연수 n의 값은 2이다.

18 답 $-2\sqrt{2}$

$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(4x^2-4\sqrt{2}\sin\theta x+3\cos\theta)=0$에서

$g(x)=4x^2-4\sqrt{2}\sin\theta x+3\cos\theta$라 하자.

(i) $g(x)=0$이 중근을 가질 때,

이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-2\sqrt{2}\sin\theta)^2-4\times 3\cos\theta=0$

$8\sin^2\theta-12\cos\theta=0,\ 8(1-\cos^2\theta)-12\cos\theta=0$

$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0,\ (2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)=0$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{1}{2}\ (\because\ -1\le\cos\theta\le 1)$

$0\le\theta\le 2\pi$에서 방정식 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$의 해는 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\theta=\dfrac{5}{3}\pi$

$\therefore \tan\theta=-\sqrt{3}$ 또는 $\tan\theta=\sqrt{3}$

(ii) $g(x)=0$이 $x=\dfrac{3}{2}$을 근으로 가질 때,

$g\left(\dfrac{3}{2}\right)=0$에서 $4\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-4\sqrt{2}\sin\theta\times\dfrac{3}{2}+3\cos\theta=0$

$9-6\sqrt{2}\sin\theta+3\cos\theta=0$ $\therefore \cos\theta=2\sqrt{2}\sin\theta-3$ ····· ㉠

이를 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$\sin^2\theta+(2\sqrt{2}\sin\theta-3)^2=1,\ 9\sin^2\theta-12\sqrt{2}\sin\theta+8=0$

$(3\sin\theta-2\sqrt{2})^2=0$ $\therefore \sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

이를 ㉠에 대입하면 $\cos\theta=2\sqrt{2}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}-3=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore \tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}}=-2\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 모든 $\tan\theta$의 값의 합은

$-\sqrt{3}+\sqrt{3}-2\sqrt{2}=-2\sqrt{2}$

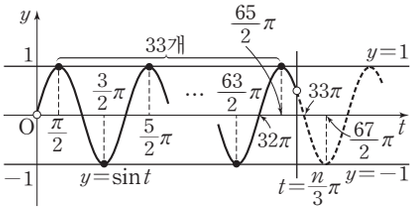
19 답 ②

$4x=t$로 놓으면 $0<x<\dfrac{n}{12}\pi$에서 $0<t<\dfrac{n}{3}\pi$이고 방정식은

$\sin^2 t-1=0$

$(\sin t+1)(\sin t-1)=0$ $\therefore \sin t=-1$ 또는 $\sin t=1$

즉, $f(n)=33$이 되려면 $0<t<\dfrac{n}{3}\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 두 직선 $y=-1$, $y=1$이 만나는 점의 개수가 33이어야 한다.



이때 $0<t\le 2\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 두 직선 $y=-1$, $y=1$이 만나는 점의 개수가 2이므로 $0<t\le 32\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 두 직선 $y=-1$, $y=1$이 만나는 점의 개수는 32이다.

따라서 $0<t<\dfrac{n}{3}\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 두 직선 $y=-1$, $y=1$이 만나는 점의 개수가 33이려면

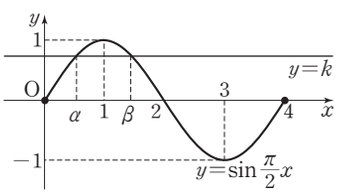
$\dfrac{65}{2}\pi<\dfrac{n}{3}\pi\le\dfrac{67}{2}\pi$ $\therefore 97.5<n\le 100.5$

따라서 자연수 n의 값은 98, 99, 100이므로 모든 n의 값의 합은

$98+99+100=297$

20 답 ③

함수 $y=\sin\dfrac{\pi}{2}x$의 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$이고, 주기는 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이다.



$0\le x\le 4$에서 함수 $y=\sin\dfrac{\pi}{2}x$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 주어진 함수식에서 $f(t)=2$인 t의 값은 α의 1개이어야 한다.

(i) $\beta-\alpha>1$이면 $f(t)=2$를 만족시키는 t의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $\beta-\alpha<1$이면 $f(t)=2$를 만족시키는 t의 값이 유일하지 않다.

(i), (ii)에서 $\beta-\alpha=1$ ····· ㉠

이때 $f(0)=1$이므로 $0\le k\le 1$이고, $f(3)=0$이므로 $k>0$

따라서 $0<k\le 1$이므로 사인함수의 그래프의 대칭성에 의하여

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1$ $\therefore \alpha+\beta=2$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\beta=\dfrac{3}{2}$

$\therefore k=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{1}{2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $0\le t<\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{2}<t\le\dfrac{3}{2}$일 때 $f(t)=1$, $t=\dfrac{1}{2}$일 때 $f(t)=2$,

$\dfrac{3}{2}<t\le 3$일 때 $f(t)=0$이므로 $a=\dfrac{1}{2}$, $b=\dfrac{3}{2}$

$\therefore a^2+b^2+k^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=3$

21 답 ⑤

$f(x)=\sqrt{3}|\sin x|+\sqrt{3}\sin x$, $g(x)=|\cos x|+\cos x$라 하면

$f(x)\le g(x)$

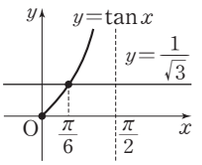
(i) $0\le x<\frac{\pi}{2}$일 때,

$f(x)\le g(x)$에서 $2\sqrt{3}\sin x\le 2\cos x$

이때 $\cos x>0$이므로 양변을 $2\sqrt{3}\cos x$로 나누면

$\tan x\le\frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 $0\le x<\frac{\pi}{2}$에서 주어진 부등식의 해는



$0\le x\le\frac{\pi}{6}$

(ii) $\frac{\pi}{2}\le x<\pi$일 때,

$f(x)>0$, $g(x)=0$이므로 $f(x)>g(x)$

따라서 주어진 부등식을 만족시키지 않는다.

(iii) $\pi\le x\le 2\pi$일 때,

$f(x)=0$, $g(x)\ge 0$이므로 $f(x)\le g(x)$

$\therefore\ \pi\le x\le 2\pi$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\pi\le x\le 2\pi$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{6}$, $\gamma=\pi$, $\delta=2\pi$이므로

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=0+\frac{\pi}{6}+\pi+2\pi=\frac{19}{6}\pi$

22 답 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$

$g(x)<f(x)$에서 $2x\tan\theta<x^2+2\sin^2\theta$

$\therefore\ x^2-2x\tan\theta+2\sin^2\theta>0$ ····· ㉠

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 ㉠을 만족시켜야 하므로 x에 대한 이차방정식 $x^2-2x\tan\theta+2\sin^2\theta=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\tan^2\theta-2\sin^2\theta<0$, $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}<2\sin^2\theta$

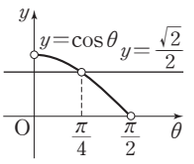
$\theta\ne 0$이고 $\sin^2\theta>0$, $\cos^2\theta>0$이므로 양변에 $\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$를 곱하면

$1<2\cos^2\theta$, $2\cos^2\theta-1>0$

$(\sqrt{2}\cos\theta+1)(\sqrt{2}\cos\theta-1)>0$

$\therefore\ \cos\theta<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $\cos\theta>\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 구하는 θ의 값의 범위는



$0<\theta<\frac{\pi}{4}$

23 답 $\frac{14}{3}$

a가 양수이고 ㈎에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 2이므로

$a=2$

$f(x)=2\sin bx$, $g(x)=x^2-(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{3}=(x+1)(x-\sqrt{3})$이므로

$g(f(x))\ge 0$에서

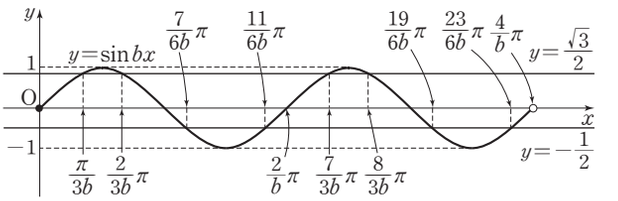
$\{f(x)+1\}\{f(x)-\sqrt{3}\}\ge 0$

$\therefore\ f(x)\le -1$ 또는 $f(x)\ge\sqrt{3}$

$2\sin bx\le -1$ 또는 $2\sin bx\ge\sqrt{3}$이므로

$\sin bx\le -\frac{1}{2}$ 또는 $\sin bx\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$

함수 $y=\sin bx$의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이므로 $0\le x<\frac{4}{b}\pi$에서 함수 $y=\sin bx$의 그래프와 두 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$은 그림과 같다.



$\therefore\ \frac{\pi}{3b}\le x\le\frac{2}{3b}\pi$ 또는 $\frac{7}{6b}\pi\le x\le\frac{11}{6b}\pi$ 또는 $\frac{7}{3b}\pi\le x\le\frac{8}{3b}\pi$ 또는 $\frac{19}{6b}\pi\le x\le\frac{23}{6b}\pi$

따라서 $q-p$의 값은 $\frac{\pi}{3b}$ 또는 $\frac{2}{3b}\pi$

이때 $q-p$의 최댓값이 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\frac{2}{3b}\pi=\frac{\pi}{4}$ $\therefore\ b=\frac{8}{3}$

$\therefore\ a+b=2+\frac{8}{3}=\frac{14}{3}$

24 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}\le\overline{PQ}\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$에서 $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$이므로

$\sin^2\beta=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos^2\alpha$

$4\le\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\tan^2\alpha+2\tan\alpha\le 4+2\sqrt{3}$에서

$4\le\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\tan^2\alpha+2\tan\alpha\le 4+2\sqrt{3}$

$4\le 1+\tan^2\alpha+2\tan\alpha\le 4+2\sqrt{3}$

$\therefore\ 3\le\tan^2\alpha+2\tan\alpha\le 3+2\sqrt{3}$

(i) $3\le\tan^2\alpha+2\tan\alpha$일 때,

$\tan^2\alpha+2\tan\alpha-3\ge 0$

$(\tan\alpha+3)(\tan\alpha-1)\ge 0$

$\therefore\ \tan\alpha\le -3$ 또는 $\tan\alpha\ge 1$

그런데 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 $\tan\alpha>0$

$\therefore\ \tan\alpha\ge 1$

(ii) $\tan^2\alpha+2\tan\alpha\le 3+2\sqrt{3}$일 때,

$\tan^2\alpha+2\tan\alpha-\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)\le 0$

$(\tan\alpha+\sqrt{3}+2)(\tan\alpha-\sqrt{3})\le 0$

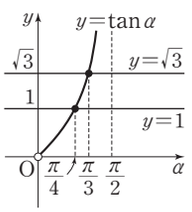
$\therefore\ -\sqrt{3}-2\le\tan\alpha\le\sqrt{3}$

그런데 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 $\tan\alpha>0$

$\therefore\ 0<\tan\alpha\le\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 $1\le\tan\alpha\le\sqrt{3}$

따라서 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 α의 값의 범위는



$\frac{\pi}{4}\le\alpha\le\frac{\pi}{3}$

이때 $\overline{PQ}=\sin\alpha$이고 $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\frac{\sqrt{2}}{2}\le\overline{PQ}\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

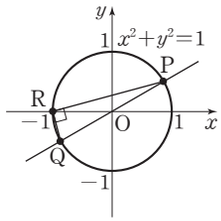
25 답 9

점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위를 시계 반대 방향으로 1초에 $\frac{\pi}{12}$만큼 이동하므로

$P\left(\cos\frac{n}{12}\pi,\ \sin\frac{n}{12}\pi\right)$

점 Q는 점 P와 원점에 대하여 대칭이므로

$Q\left(-\cos\frac{n}{12}\pi,\ -\sin\frac{n}{12}\pi\right)$



R(−1, 0)이므로

$$\overline{QR}=\sqrt{\left(-1+\cos\frac{n}{12}\pi\right)^2+\left(\sin\frac{n}{12}\pi\right)^2}$$
$$=\sqrt{1-2\cos\frac{n}{12}\pi+\cos^2\frac{n}{12}\pi+\sin^2\frac{n}{12}\pi}$$
$$=\sqrt{2\left(1-\cos\frac{n}{12}\pi\right)}$$

$$\overline{PR}=\sqrt{\left(-1-\cos\frac{n}{12}\pi\right)^2+\left(-\sin\frac{n}{12}\pi\right)^2}$$
$$=\sqrt{1+2\cos\frac{n}{12}\pi+\cos^2\frac{n}{12}\pi+\sin^2\frac{n}{12}\pi}$$
$$=\sqrt{2\left(1+\cos\frac{n}{12}\pi\right)}$$

이때 삼각형 PQR는 $\angle PRQ=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$$f(n)=\frac{1}{2}\times\overline{QR}\times\overline{PR}$$
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2\left(1-\cos\frac{n}{12}\pi\right)}\times\sqrt{2\left(1+\cos\frac{n}{12}\pi\right)}$$
$$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{\left(1-\cos^2\frac{n}{12}\pi\right)}$$
$$=\sqrt{\sin^2\frac{n}{12}\pi}=\left|\sin\frac{n}{12}\pi\right|$$

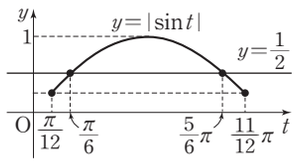
이때 $2f(n)\ge1$에서

$2\left|\sin\frac{n}{12}\pi\right|\ge1$, $\left|\sin\frac{n}{12}\pi\right|\ge\frac{1}{2}$

$\frac{n}{12}\pi=t$로 놓으면 $|\sin t|\ge\frac{1}{2}$이고 $1\le n\le11$에서

$\frac{\pi}{12}\le t\le\frac{11}{12}\pi$

함수 $y=|\sin t|$의 그래프는 $y=\sin t$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 t축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $\frac{\pi}{12}\le t\le\frac{11}{12}\pi$에서 함수 $y=|\sin t|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 그림과 같다.



$|\sin t|\ge\frac{1}{2}$을 만족시키는 t의 값의 범위는

$\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{5}{6}\pi$

이때 $n=\frac{12}{\pi}t$이므로 $2\le n\le10$

따라서 자연수 n의 값은 2, 3, 4, …, 10의 9개이다.

26 답 $0<\theta\le\frac{\pi}{3}$

원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$에서의 접선의 방정식은

$x\cos\theta+y\sin\theta=1$

$\therefore\ y=\frac{1}{\sin\theta}(1-x\cos\theta)$

이를 $(x+1)^2+y^2=4$에 대입하면

$(x+1)^2+\left\{\frac{1}{\sin\theta}(1-x\cos\theta)\right\}^2=4$

$\sin^2\theta(x+1)^2+(1-x\cos\theta)^2=4\sin^2\theta$

$\sin^2\theta(x^2+2x-3)+1-2x\cos\theta+x^2\cos^2\theta=0$

$x^2+2x(\sin^2\theta-\cos\theta)-3\sin^2\theta+1=0$

이 x에 대한 이차방정식의 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2(\sin^2\theta-\cos\theta)$

$\therefore\ f(\theta)=-2(\sin^2\theta-\cos\theta)$

$f(\theta)\ge-\frac{1}{2}$에서 $-2(\sin^2\theta-\cos\theta)\ge-\frac{1}{2}$

$\sin^2\theta-\cos\theta\le\frac{1}{4}$, $1-\cos^2\theta-\cos\theta-\frac{1}{4}\le0$

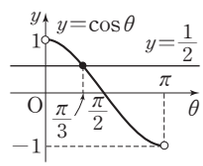
$4\cos^2\theta+4\cos\theta-3\ge0$, $(2\cos\theta+3)(2\cos\theta-1)\ge0$

그런데 $2\cos\theta+3>0$이므로

$2\cos\theta-1\ge0$ $\quad\therefore\ \cos\theta\ge\frac{1}{2}$

따라서 $0<\theta<\pi$에서 구하는 θ의 값의 범위는

$0<\theta\le\frac{\pi}{3}$



step 3 최고난도 문제 | 75~77쪽

01 ①	02 ②	03 5	04 ②	05 15	06 ④
07 $\frac{5}{2}\pi$	08 ①	09 ②	10 $-\frac{1}{8}$	11 ②	

01 답 ①

1단계 점 $P(\theta)$의 좌표 구하기

$f(x)=x^2-2\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right|x-\sin^2\theta+|\sin\theta|$

$=x^2-2|\cos\theta|x-\sin^2\theta+|\sin\theta|$

$=(x-|\cos\theta|)^2-\cos^2\theta-\sin^2\theta+|\sin\theta|$

$=(x-|\cos\theta|)^2-1+|\sin\theta|$

$\therefore\ P(\theta)(|\cos\theta|,\ -1+|\sin\theta|)$

2단계 점 $P(\theta)$가 나타내는 도형의 길이 구하기

이때 $X=|\cos\theta|$, $Y=-1+|\sin\theta|$로 놓으면 $0\le\theta\le2\pi$에서

$0\le X\le1$, $-1\le Y\le0$

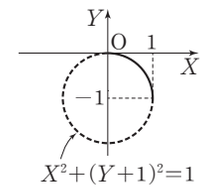
$X=|\cos\theta|$, $Y+1=|\sin\theta|$이므로

$X^2+(Y+1)^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta$

$\therefore\ X^2+(Y+1)^2=1$ (단, $0\le X\le1$, $-1\le Y\le0$)

따라서 점 $P(\theta)$가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 1인 원의 $\frac{1}{4}$이므로 이 도형의 길이는

$\frac{1}{4}\times2\pi\times1=\frac{\pi}{2}$



02 답 ②

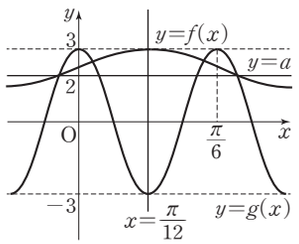
1단계 $\{x|f(x)=a\}\subset\{x|g(x)=a\}$의 의미 파악하기

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 y좌표 a에 대하여 $\{x|f(x)=a\}\subset\{x|g(x)=a\}$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$의 교점은 반드시 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=a$의 교점이어야 한다. …… ㉠

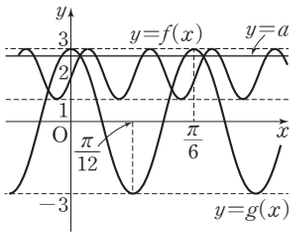
2단계 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 그려 조건 파악하기

함수 $f(x)=\sin kx+2$의 주기는 $\frac{2\pi}{k}$, 최댓값은 3, 최솟값은 1이고, 함수 $g(x)=3\cos 12x$의 주기는 $\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$, 최댓값은 3, 최솟값은 -3이다.

이때 [그림 1]과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 동시에 대칭이 되는 직선이 존재하면 두 함수의 교점도 같은 직선에 대하여 대칭이므로 ㉠을 만족시키지만 [그림 2]와 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 동시에 대칭이 되는 직선이 존재하지 않으면 ㉠을 만족시키지 않는다.



[그림 1]



[그림 2]

3단계 자연수 k의 개수 구하기

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{2n-1}{2k}\pi$ (n은 정수)에 대하여 대칭이고 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{m}{12}\pi$ (m은 정수)에 대하여 대칭이므로 $A=\left\{x\middle|x=\frac{2n-1}{2k}\pi,\ n\text{은 정수}\right\}$,

$B=\left\{x\middle|x=\frac{m}{12}\pi,\ m\text{은 정수}\right\}$라 하면 $A\subset B$이어야 한다.

이때 집합 A의 원소 $\frac{\pi}{2k}$가 집합 B의 원소이면 집합 A의 나머지 원소도 반드시 집합 B에 속한다.

즉, $\frac{\pi}{2k}=\frac{m}{12}\pi$를 만족시키는 정수 m이 존재하면 된다.

$k=\frac{6}{m}$에서 k가 자연수이므로 m은 6의 양의 약수이어야 한다.

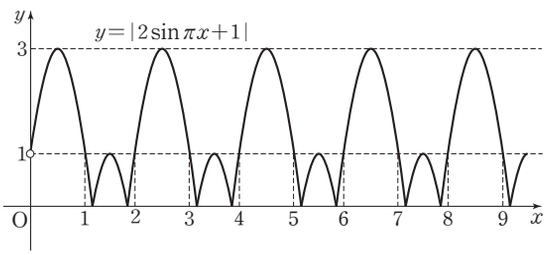
따라서 m의 값은 1, 2, 3, 6이고 그 각각의 경우에 자연수 k는 6, 3, 2, 1이므로 자연수 k의 개수는 4이다.

idea

03 답 5

1단계 함수 $f(x)=|2\sin\pi x+1|$의 그래프 그리기

함수 $y=2\sin\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$, 최댓값은 2, 최솟값은 -2이고, 함수 $y=|2\sin\pi x+1|$의 그래프는 $y=2\sin\pi x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 함수 $y=|2\sin\pi x+1|$의 그래프는 그림과 같다.

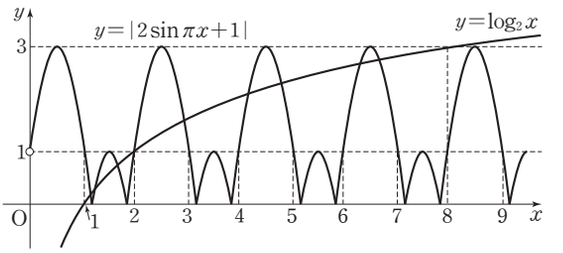


2단계 a가 짝수일 때, 교점의 개수 구하기

함수 $f(x)$의 최댓값은 3이고, $a>1$인 자연수 a에 대하여 $g(a^3)=\log_a a^3=3$이므로 $x\geq a^3$인 경우 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

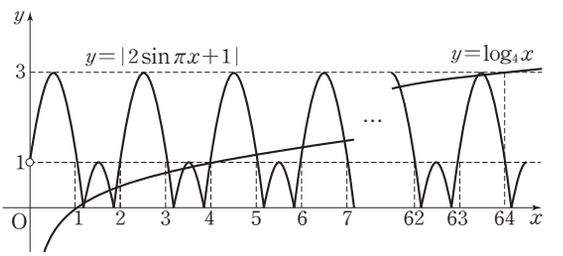
(i) a가 짝수일 때,

두 함수 $f(x)=|2\sin\pi x+1|$, $g(x)=\log_2 x$의 그래프는 그림과 같다.



두 함수 $f(x)=|2\sin\pi x+1|$, $g(x)=\log_2 x$의 그래프는 $0<x<2$일 때 세 점에서 만나고, $2\leq x<4$, $4<x<6$, $6<x<8$일 때 각각 두 점에서 만난다.

또 두 함수 $f(x)=|2\sin\pi x+1|$, $g(x)=\log_4 x$의 그래프는 그림과 같다.



두 함수 $f(x)=|2\sin\pi x+1|$, $g(x)=\log_4 x$의 그래프는 $0<x<4$일 때 7개의 점에서 만나고, $4\leq x<6$, $6<x<8$, …, $62<x<64$일 때 각각 두 점에서 만난다.

$0<x<a$일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 M이라 하면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 $a\leq x<a+2$, $a+2<x<a+4$, …, $a^3-2<x<a^3$일 때 각각 두 점에서 만나므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수는

$M+2\left\{\frac{a^3-(a+2)}{2}+1\right\}=M+a^3-a$

$a=2$이면 $M=3$이고 $a^3-a=6$이므로 $3+6\neq 129$

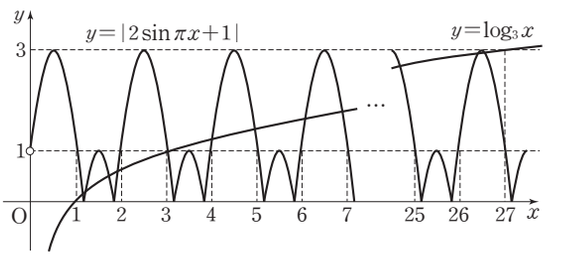
$a=4$이면 $M=7$이고 $a^3-a=60$이므로 $7+60\neq 129$

$a\geq 6$이면 $a^3-a\geq 210>129$

3단계 a가 홀수일 때, 교점의 개수 구하기

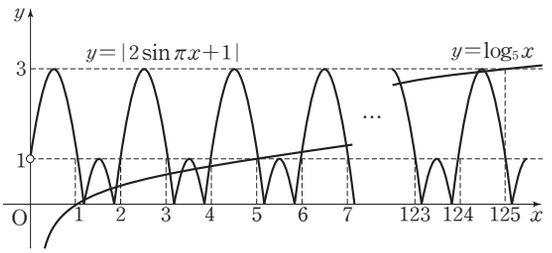
(ii) a가 홀수일 때,

두 함수 $f(x)=|2\sin\pi x+1|$, $g(x)=\log_3 x$의 그래프는 그림과 같다.



두 함수 $f(x)=|2\sin\pi x+1|$, $g(x)=\log_3 x$의 그래프는 $0<x<3$일 때 네 점에서 만나고, $x=3$일 때 한 점에서 만나며, $3<x<5$, $5<x<7$, …, $25<x<27$일 때 각각 두 점에서 만난다.

또 두 함수 $f(x)=|2\sin\pi x+1|$, $g(x)=\log_5 x$의 그래프는 그림과 같다.



두 함수 $f(x)=|2\sin\pi x+1|$, $g(x)=\log_5 x$의 그래프는 $0<x<5$일 때 8개의 점에서 만나고, $x=5$일 때 한 점에서 만나며, $5<x<7$, $7<x<9$, …, $123<x<125$일 때 각각 두 점에서 만난다.

$0<x<a$일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 M이라 하면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 $x=a$일 때 한 점에서 만나고, $a<x<a+2$, $a+2<x<a+4$, …, $a^3-2<x<a^3$일 때 각각 두 점에서 만나므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수는

$$M+1+2\left\{\frac{a^3-(a+2)}{2}+1\right\}=M+a^3-a+1$$

$a=3$이면 $M=4$이고 $a^3-a+1=25$이므로 $4+25=29\neq 129$

$a=5$이면 $M=8$이고 $a^3-a+1=121$이므로 $8+121=129$

4단계 자연수 a의 값 구하기

(i), (ii)에서 자연수 a의 값은 5이다.

04 답 ②

1단계 집합 A_k 파악하기

$A_k=\left\{\sin\frac{2(m-1)}{k}\pi \,\middle|\, m\text{은 자연수}\right\}$에서

$f(x)=\sin\frac{2(x-1)}{k}\pi$ $(x=1, 2, 3, \cdots)$라 하면 함수 $f(x)$의 주기는

$\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{k}}=k$이므로 집합 A_k는 $x=1, 2, 3, \cdots, k$에서의

$f(x)=\sin\frac{2(x-1)}{k}\pi$의 값을 원소로 갖는다.

$\therefore A_k=\left\{\sin 0, \sin\frac{2}{k}\pi, \sin\frac{4}{k}\pi, \cdots, \sin\frac{2(k-1)}{k}\pi\right\}$ …… ㉠

2단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. $A_3=\left\{\sin 0, \sin\frac{2}{3}\pi, \sin\frac{4}{3}\pi\right\}$이므로 $A_3=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

3단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. 1이 집합 A_k의 원소가 되려면 $\sin\frac{2(m-1)}{k}\pi=1$을 만족시키는 자연수 m이 존재해야 한다.

이때 $\sin\frac{\pi}{2}=1$이므로

$\frac{2(m-1)}{k}\pi=\frac{\pi}{2}$, $\frac{2(m-1)}{k}=\frac{1}{2}$

$\therefore k=4(m-1)$

이때 m이 자연수이므로 k는 0 또는 4의 배수이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 두 자리 자연수 k는 12, 16, 20, …, 96의 22개이다.

4단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. ㉠에서 각 원소는 $0\le x<2\pi$인 x의 값을 k등분하였을 때의 0과 각 등분점에서의 $\sin x$의 값이다.

함수 $y=\sin x$의 그래프는 두 직선 $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭이므로 k가 홀수인 경우는 y의 값이 모두 다르고, k가 짝수인 경우는 y의 값이 같은 경우가 생긴다.

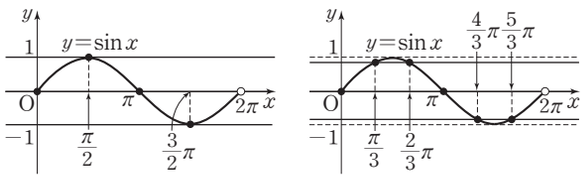
(i) k가 홀수일 때,

각 등분점에서의 y의 값이 모두 다르므로 $n(A_k)=k$

따라서 $n(A_k)=11$을 만족시키는 k의 값은 $k=11$

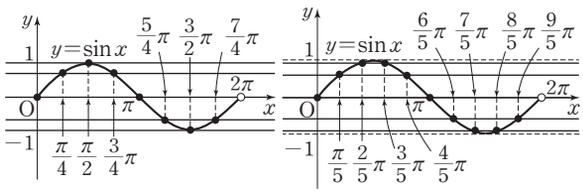
(ii) k가 짝수일 때,

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프를 4등분, 6등분하면 그림과 같다.



그림에서 y의 값은 3개이므로 $n(A_4)=n(A_6)=3$

$0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프를 8등분, 10등분하면 그림과 같다.



그림에서 y의 값은 5개이므로 $n(A_8)=n(A_{10})=5$

즉, 자연수 m에 대하여 $n(A_{4m})=n(A_{4m+2})=2m+1$이 성립하므로 원소의 개수가 11인 경우는 $2m+1=11$ $\therefore m=5$

따라서 $n(A_k)=11$을 만족시키는 k의 값은 $4m$, $4m+2$이므로 20, 22이다.

(i), (ii)에서 k의 값은 11, 20, 22이므로 모든 k의 값의 합은 $11+20+22=53$

5단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

05 답 15

1단계 a의 값 구하기

함수 $y=a\sin\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)+a-2$에 $x=0$을 대입하면

$y=a\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+a-2=\frac{a}{2}-2$

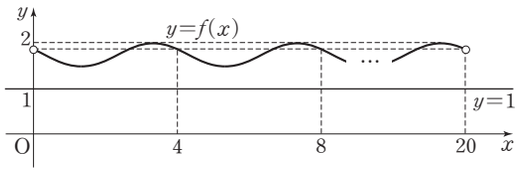
따라서 함수 $y=a\sin\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)+a-2$의 그래프는 점 $\left(0, \frac{a}{2}-2\right)$를 지나고, 이 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$, 최댓값은 $a+a-2=2a-2$, 최솟값은 $-a+a-2=-2$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=a\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{3}$만큼, y축의 방향으로 $a-2$만큼 평행이동한 후 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

$2a-2$의 값의 범위에 따라 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그려 보자.

(i) $2a-2<-1$, 즉 $0<a<\frac{1}{2}$일 때,

$-2<\frac{a}{2}-2<-\frac{7}{4}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$은 그림과 같다.

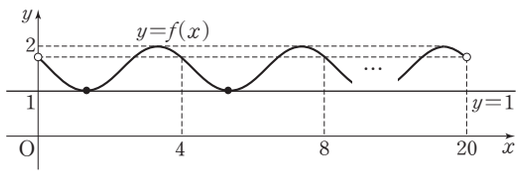


함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$은 만나지 않으므로

$g(20)=0$

(ii) $2a-2=-1$, 즉 $a=\frac{1}{2}$일 때,

$\frac{a}{2}-2=-\frac{7}{4}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$은 그림과 같다.

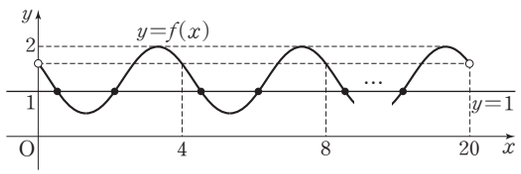


$0<x<4$, $4<x<8$, …, $16<x<20$일 때 직선 $y=1$과 각각 한 점에서 만나므로

$g(20)=5\times1=5$

(iii) $-1<2a-2\le0$, 즉 $\frac{1}{2}<a\le1$일 때,

$-\frac{7}{4}<\frac{a}{2}-2\le-\frac{3}{2}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$은 그림과 같다.

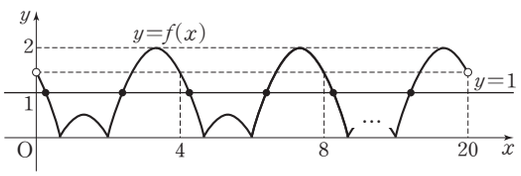


$0<x<4$, $4<x<8$, …, $16<x<20$일 때 직선 $y=1$과 각각 두 점에서 만나므로

$g(20)=5\times2=10$

(iv) $0<2a-2<1$, 즉 $1<a<\frac{3}{2}$일 때,

$-\frac{3}{2}<\frac{a}{2}-2<-\frac{5}{4}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$은 그림과 같다.

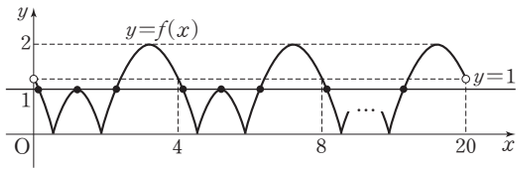


$0<x<4$, $4<x<8$, …, $16<x<20$일 때 직선 $y=1$과 각각 두 점에서 만나므로

$g(20)=5\times2=10$

(v) $2a-2=1$, 즉 $a=\frac{3}{2}$일 때,

$\frac{a}{2}-2=-\frac{5}{4}$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$은 그림과 같다.

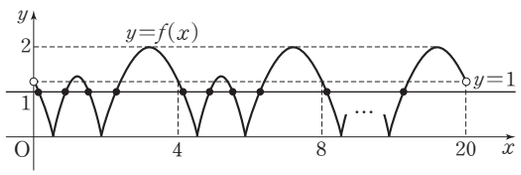


$0<x<4$, $4<x<8$, …, $16<x<20$일 때 직선 $y=1$과 각각 세 점에서 만나므로

$g(20)=5\times3=15$

(vi) $1<2a-2<2$, 즉 $\frac{3}{2}<a<2$일 때,

$-\frac{5}{4}<\frac{a}{2}-2<-1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$은 그림과 같다.

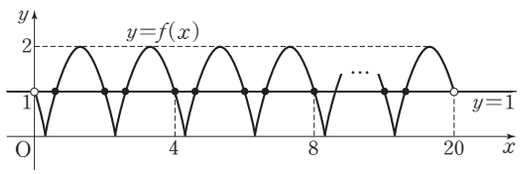


$0<x<4$, $4<x<8$, …, $16<x<20$일 때 직선 $y=1$과 각각 네 점에서 만나므로

$g(20)=5\times4=20$

(vii) $2a-2=2$, 즉 $a=2$일 때,

$\frac{a}{2}-2=-1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$은 그림과 같다.



$0<x\le4$, $4<x\le8$, $8<x\le12$, $12<x\le16$일 때 직선 $y=1$과 각각 네 점에서 만나고, $16<x<20$일 때 직선 $y=1$과 세 점에서 만나므로

$g(20)=4\times4+3=19$

(viii) $2a-2>2$, 즉 $a>2$일 때,

(vi)의 경우와 마찬가지로 $0<x<4$, $4<x<8$, …, $16<x<20$일 때 직선 $y=1$과 각각 네 점에서 만나므로

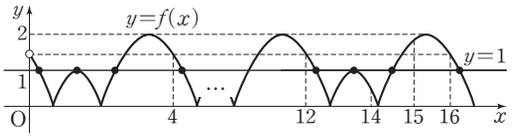
$g(20)=5\times4=20$

(i)~(viii)에서 $a=\frac{3}{2}$

2단계 $g(a)=8a$**를 만족시키는 자연수** a**의 최솟값 구하기**

$a=\frac{3}{2}$이므로

$g(a)=8a=8\times\frac{3}{2}=12$



그림과 같이 함수 $f(x)=\left|\frac{3}{2}\sin\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\right|$의 그래프는 $0<x<4$, $4<x<8$, $8<x<12$, $12<x<16$일 때 직선 $y=1$과 각각 세 점에서 만나고 $g(14)=11$, $g(15)=12$이므로 자연수 a의 최솟값은 15이다.

06 답 ④

1단계 $\sin x=t$로 놓고 t에 대한 방정식이 실근을 갖는 경우 파악하기

$\sin x=t$로 놓으면

$\cos x=-\sqrt{1-\sin^2 x}=-\sqrt{1-t^2}$ $\left(\because \frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3}{2}\pi\right)$

$\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3}{2}\pi$에서 $-1\le\sin x\le1$이므로

$-1\le t\le1$

따라서 주어진 방정식은

$-\sqrt{1-t^2}-at-3a-1=0$ (단, $-1\le t\le1$)

이때 $-\sqrt{1-t^2}=a(t+3)+1$을 만족시키는 실수 t가 존재해야 하므로 $f(t)=-\sqrt{1-t^2}$, $g(t)=a(t+3)+1$이라 하면 두 함수 $y=f(t)$, $y=g(t)$의 그래프가 만나야 한다.

2단계 a의 값이 최대, 최소가 되는 경우 파악하기

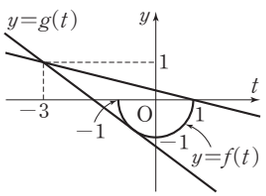
$f(t)=-\sqrt{1-t^2}$에서 $y=-\sqrt{1-t^2}$의 양변을 제곱하면

$y^2=1-t^2$ $\quad\therefore t^2+y^2=1$ (단, $y\le0$)

따라서 함수 $f(t)=-\sqrt{1-t^2}$의 그래프는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원의 일부이다.

함수 $g(t)=a(t+3)+1$의 그래프는 t의 값에 관계없이 항상 점 $(-3, 1)$을 지나는 직선이다.

그림과 같이 두 함수 $y=f(t)$, $y=g(t)$의 그래프가 만나려면 $a<0$이어야 하고, 함수 $y=g(t)$의 그래프가 점 $(1, 0)$을 지날 때 a의 값은 최대이고, 함수 $y=g(t)$의 그래프가 원 $t^2+y^2=1$과 제3사분면에서 접할 때 a의 값은 최소이다.



3단계 실수 a의 값의 범위 구하기

a의 최댓값은 $g(1)=0$에서

$4a+1=0$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{4}$

a의 최솟값은 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 $y=a(t+3)+1$, 즉 $at-y+3a+1=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같을 때이므로

$\frac{|3a+1|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=1$, $|3a+1|=\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하면

$9a^2+6a+1=a^2+1$

$8a^2+6a=0$, $2a(4a+3)=0$

$\therefore a=-\frac{3}{4}$ $(\because a<0)$

따라서 실수 a의 값의 범위는

$-\frac{3}{4}\le a\le-\frac{1}{4}$

07 답 $\frac{5}{2}\pi$

1단계 $\sin a$의 값 구하기

$f(x)=\sin x$, $g(x)=\frac{25x^2+9}{5x}=5x+\frac{9}{5x}$이므로

$(g\circ f)(x)=5\sin x+\frac{9}{5\sin x}$

$0<x<\pi$에서 $\sin x>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(g\circ f)(x)=5\sin x+\frac{9}{5\sin x}\ge2\sqrt{5\sin x\times\frac{9}{5\sin x}}$

$=2\times3=6$

$\left(\text{단, 등호는 } 5\sin x=\frac{9}{5\sin x}\text{일 때 성립}\right)$

즉, $5\sin x=\frac{9}{5\sin x}$일 때 $(g\circ f)(x)$가 최솟값을 가지므로

$25\sin^2 x=9$, $\sin^2 x=\frac{9}{25}$

$\therefore \sin x=\frac{3}{5}$ $(\because \sin x>0)$

함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=a$에서 최솟값을 가지므로

$\sin a=\frac{3}{5}$

2단계 $f(4\theta)=\frac{\tan a}{\cos a}(\sin a-1)$을 θ에 대한 방정식으로 나타내기

$\frac{\tan a}{\cos a}(\sin a-1)=\frac{\sin a}{\cos^2 a}(\sin a-1)$

$=\frac{\sin a}{1-\sin^2 a}(\sin a-1)$

$=\frac{\sin a}{-\sin a-1}$

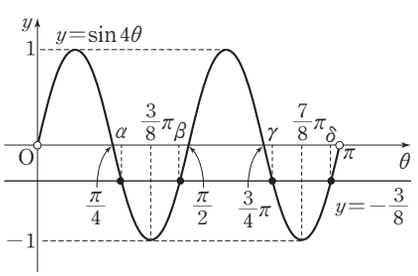
$=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{3}{5}-1}=-\frac{3}{8}$

즉, $f(4\theta)=-\frac{3}{8}$에서

$\sin4\theta=-\frac{3}{8}$

3단계 모든 θ의 값의 합 구하기

$0<\theta<\pi$이고 함수 $y=\sin4\theta$의 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$이므로 함수 $y=\sin4\theta$의 그래프와 직선 $y=-\frac{3}{8}$은 그림과 같다.



$y=\sin4\theta$의 그래프와 직선 $y=-\frac{3}{8}$이 만나는 점의 θ좌표를 작은 것부터 차례대로 α, β, γ, δ라 하면 사인함수의 그래프의 대칭성에 의하여

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{8}\pi$, $\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{7}{8}\pi$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{3}{4}\pi$, $\gamma+\delta=\frac{7}{4}\pi$

따라서 모든 θ의 값의 합은

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{3}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi=\frac{5}{2}\pi$

08 답 ①

1단계 $f(x)=g\left(\frac{3}{2}\right)$을 만족시키는 자연수 a의 값 구하기

$g(x)=a^2\sin\pi x+2a$이므로

$g\left(\frac{3}{2}\right)=a^2\sin\frac{3}{2}\pi+2a=-a^2+2a$

$f(x)=|\tan\pi(a^2x+2a)|$이므로 $f(x)=g\left(\frac{3}{2}\right)$에서

$|\tan\pi(a^2x+2a)|=-a^2+2a$ …… ㉠

이때 $|\tan\pi(a^2x+2a)|\geq0$이므로 $-a^2+2a\geq0$

$a^2-2a\leq0$, $a(a-2)\leq0$

$\therefore\ 0\leq a\leq2$

이때 a는 자연수이므로

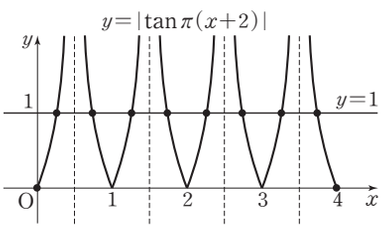
$a=1$ 또는 $a=2$

2단계 $f(x)=g\left(\frac{3}{2}\right)$의 서로 다른 실근의 개수가 짝수가 되는 a의 값 구하기

(i) $a=1$일 때,

$0\leq x\leq4a$, ㉠에서 $|\tan\pi(x+2)|=1$ (단, $0\leq x\leq4$)

함수 $y=\tan\pi(x+2)$의 주기는 $\frac{\pi}{\pi}=1$이고, $y=|\tan\pi(x+2)|$의 그래프는 $y=\tan\pi x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 후 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $0\leq x\leq4$에서 함수 $y=|\tan\pi(x+2)|$의 그래프와 직선 $y=1$은 그림과 같다.

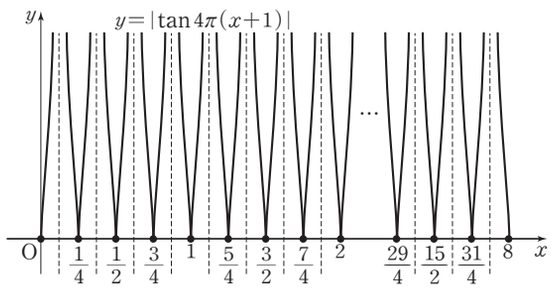


따라서 방정식 $|\tan\pi(x+2)|=1$의 서로 다른 실근의 개수는 8이다.

(ii) $a=2$일 때,

$0\leq x\leq4a$, ㉠에서 $|\tan4\pi(x+1)|=0$ (단, $0\leq x\leq8$)

함수 $y=\tan4\pi(x+1)$의 주기는 $\frac{\pi}{4\pi}=\frac{1}{4}$이고, 함수 $y=|\tan4\pi(x+1)|$의 그래프는 $y=\tan4\pi x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $0\leq x\leq8$에서 함수 $y=|\tan4\pi(x+1)|$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=\tan|4\pi(x+1)|$의 그래프는 x축과 $x=0$일 때 한 점에서 만나고, $0<x\leq1$, $1<x\leq2$, …, $7<x\leq8$일 때 각각 네 점에서 만나므로 방정식 $|\tan4\pi(x+1)|=0$의 서로 다른 실근의 개수는

$1+4\times8=33$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

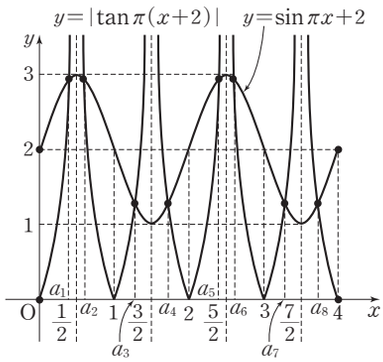
(i), (ii)에서 $a=1$

3단계 $0\leq x\leq4a$일 때, $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 합 구하기

$a=1$일 때 $f(x)=|\tan\pi(x+2)|$, $g(x)=\sin\pi x+2$이므로 $0\leq x\leq4$일 때 방정식 $|\tan\pi(x+2)|=\sin\pi x+2$의 해를 구하면 된다.

이때 함수 $y=\sin\pi x+2$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이고, 최댓값은 3, 최솟값은 1이다.

따라서 $0\leq x\leq4$에서 두 함수 $y=|\tan\pi(x+2)|$, $y=\sin\pi x+2$의 그래프는 그림과 같다.



두 함수 $y=|\tan\pi(x+2)|$, $y=\sin\pi x+2$의 그래프가 만나는 점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 a_1, a_2, a_3, …, a_8이라 하면 사인함수의 그래프의 대칭성에 의하여

$\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{a_3+a_4}{2}=\frac{3}{2}$, $\frac{a_5+a_6}{2}=\frac{5}{2}$, $\frac{a_7+a_8}{2}=\frac{7}{2}$

$\therefore\ a_1+a_2=1$, $a_3+a_4=3$, $a_5+a_6=5$, $a_7+a_8=7$

따라서 서로 다른 실근의 합은

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=1+3+5+7=16$

09 답 ②

1단계 함수 $h(a)$의 의미 파악하기

$f(x)=g(x)$에서

$4\sin^2x=-4\cos x+a$

$4(1-\cos^2x)=-4\cos x+a$

$\therefore\ a=-4\cos^2x+4\cos x+4$

$\cos x=t$로 놓으면 $0\leq x<2\pi$에서

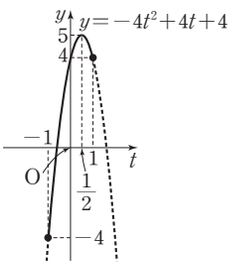
$-1\leq t\leq1$

따라서 $-1\leq t\leq1$에서 함수 $y=-4t^2+4t+4$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 점의 t좌표를 s라 할 때, $\cos x=s$를 만족시키는 x의 값의 개수가 $h(a)$이다.

2단계 함수 $h(a)$ 구하기

$y=-4t^2+4t+4=-4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+5$

$-1\leq t\leq1$에서 함수 $y=-4t^2+4t+4$의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $y=-4t^2+4t+4$의 최댓값은 5, 최솟값은 -4이다.



(i) $a<-4$ 또는 $a>5$일 때,

함수 $y=-4t^2+4t+4$의 그래프와 직선 $y=a$는 만나지 않는다.

$\therefore\ h(a)=0$

(ii) $a=-4$일 때,

$t=-1$이므로 $\cos x=-1$에서

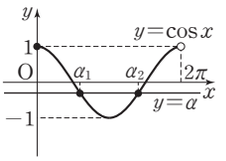
$x=\pi$ ($\because$ $0\le x<2\pi$)

$\therefore$ $h(a)=1$

(iii) $-4<a<4$일 때,

함수 $y=-4t^2+4t+4$의 그래프와 직선 $y=a$는 한 점에서 만난다.

이 점의 t좌표를 α라 하면 $-1<\alpha<0$이고, $\cos x=\alpha$를 만족시키는 x의 값 α_1, α_2 ($\alpha_1<\alpha_2$)가 존재한다.



$\therefore$ $h(a)=2$

(iv) $a=4$일 때,

$t=0$ 또는 $t=1$이므로 $\cos x=0$ 또는 $\cos x=1$에서

$x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because$ $0\le x<2\pi$)

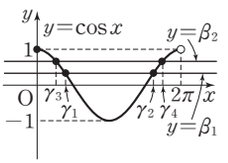
$\therefore$ $h(a)=3$

(v) $4<a<5$일 때,

함수 $y=-4t^2+4t+4$의 그래프와 직선 $y=a$는 두 점에서 만난다.

이 점의 t좌표를 β_1, β_2라 하면

$0<\beta_1<\frac{1}{2}<\beta_2<1$이고, $\cos x=\beta_1$을 만족시키는 x의 값 γ_1, γ_2 ($\gamma_1<\gamma_2$), $\cos x=\beta_2$를 만족시키는 x의 값 γ_3, γ_4 ($\gamma_3<\gamma_4$)가 존재한다.



$\therefore$ $h(a)=4$

(vi) $a=5$일 때,

$t=\frac{1}{2}$이므로 $\cos x=\frac{1}{2}$에서

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because$ $0\le x<2\pi$)

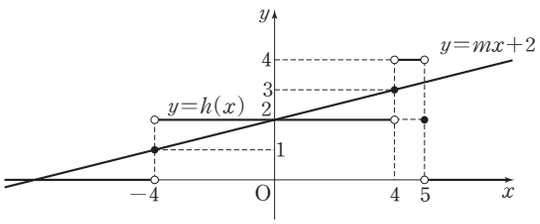
$\therefore$ $h(5)=2$

(i)~(vi)에서

$$h(a)=\begin{cases}0\ (a<-4 \text{ 또는 } a>5)\\ 1\ (a=-4)\\ 2\ (-4<a<4 \text{ 또는 } a=5)\\ 3\ (a=4)\\ 4\ (4<a<5)\end{cases}$$

3단계 상수 m의 값 구하기

따라서 직선 $y=mx+2$는 m의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=mx+2$가 네 점에서 만나려면 그림과 같이 직선 $y=mx+2$가 두 점 $(-4,\ 1)$, $(4,\ 3)$을 지나야 한다.



따라서 $y=mx+2$에 $x=-4$, $y=1$을 대입하면

$1=-4m+2$

$\therefore$ $m=\frac{1}{4}$

idea

10 답 $-\frac{1}{8}$

1단계 $\sin(\pi\cos\alpha)$, $\cos\pi\left(\frac{1}{2}-\sin\beta\right)$의 값 구하기

$-\pi\le\alpha\le\pi$에서 $-1\le\cos\alpha\le1$이므로

$-\pi\le\pi\cos\alpha\le\pi$

$-1\le\sin(\pi\cos\alpha)\le1$

$\therefore$ $-5\le5\sin(\pi\cos\alpha)\le5$ ····· ㉠

$0\le\beta\le\pi$에서 $0\le\sin\beta\le1$이므로

$-1\le-\sin\beta\le0$

$-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}-\sin\beta\le\frac{1}{2}$

$-\frac{\pi}{2}\le\pi\left(\frac{1}{2}-\sin\beta\right)\le\frac{\pi}{2}$

$0\le\cos\pi\left(\frac{1}{2}-\sin\beta\right)\le1$

$\therefore$ $0\le3\cos\pi\left(\frac{1}{2}-\sin\beta\right)\le3$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서

$-5\le5\sin(\pi\cos\alpha)+3\cos\pi\left(\frac{1}{2}-\sin\beta\right)\le8$

그런데 $5\sin(\pi\cos\alpha)+3\cos\pi\left(\frac{1}{2}-\sin\beta\right)\ge8$이므로

$5\sin(\pi\cos\alpha)+3\cos\pi\left(\frac{1}{2}-\sin\beta\right)=8$

$\therefore$ $\sin(\pi\cos\alpha)=1$, $\cos\pi\left(\frac{1}{2}-\sin\beta\right)=1$

2단계 α, β의 값 구하기

$\sin(\pi\cos\alpha)=1$에서 $-\pi\le\pi\cos\alpha\le\pi$이므로

$\pi\cos\alpha=\frac{\pi}{2}$ $\therefore$ $\cos\alpha=\frac{1}{2}$

$-\pi\le\alpha\le\pi$이므로

$\alpha=-\frac{\pi}{3}$ 또는 $\alpha=\frac{\pi}{3}$

$\cos\pi\left(\frac{1}{2}-\sin\beta\right)=1$에서 $-\frac{\pi}{2}\le\pi\left(\frac{1}{2}-\sin\beta\right)\le\frac{\pi}{2}$이므로

$\pi\left(\frac{1}{2}-\sin\beta\right)=0$ $\therefore$ $\sin\beta=\frac{1}{2}$

$0\le\beta\le\pi$이므로

$\beta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\beta=\frac{5}{6}\pi$

3단계 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$의 값이 될 수 있는 모든 값의 곱 구하기

(i) $\alpha=-\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{6}$일 때,

$\alpha+\beta=-\frac{\pi}{6}$, $\alpha-\beta=-\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}+0=-\frac{1}{2}$

(ii) $\alpha=-\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$일 때,

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, $\alpha-\beta=-\frac{7}{6}\pi$이므로

$\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(iii) $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{6}$일 때,

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, $\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}$이므로

$\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

(iv) $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$일 때,

$\alpha+\beta=\frac{7}{6}\pi$, $\alpha-\beta=-\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}+0=-\frac{1}{2}$

(i)~(iv)에서 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$의 값이 될 수 있는 모든 값의 곱은

$\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{8}$

11 답 ②

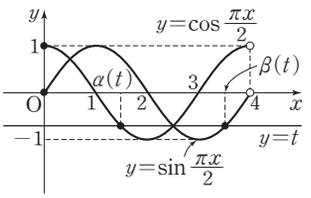
1단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. 방정식 $\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$에서

$\sin\frac{\pi x}{2}=t$ 또는 $\cos\frac{\pi x}{2}=t$

이 방정식의 실근은 두 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 x좌표와 같다.

한편 두 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 주기는 모두 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이므로 $-1\le t<0$에서 두 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 그래프와 직선 $y=t$는 그림과 같다.



이때 함수 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 그래프는 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$의 그래프를 평행이동하면 겹쳐질 수 있고, $\alpha(t)=1+k\,(0<k\le1)$라 하면

$\beta(t)=4-k$ $\quad\therefore\ \alpha(t)+\beta(t)=5$

2단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. $\alpha(t)$, $\beta(t)$는 집합 $\{x\mid0\le x<4\}$의 원소이므로

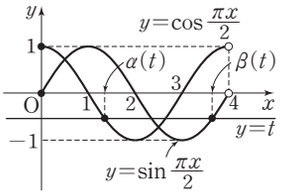
$\alpha(0)=0$, $\beta(0)=3$

$\therefore\ \{t\mid\beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\{t\mid\beta(t)-\alpha(t)=3\}$

(i) $-1\le t<0$일 때,

$1<\alpha(t)\le2$, $3\le\beta(t)<4$이므로

$1\le\beta(t)-\alpha(t)<3$



(ii) $0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때,

ⓘ $t=0$인 경우

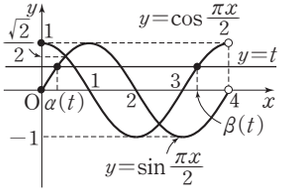
$\beta(0)-\alpha(0)=3$

ⓘⓘ $t\ne0$인 경우

$\alpha(t)=p\left(0<p\le\frac{1}{2}\right)$라 하면 $\beta(t)=3+p$

$\therefore\ \beta(t)-\alpha(t)=3$

ⓘ, ⓘⓘ에서 $\beta(t)-\alpha(t)=3$



(iii) $\frac{\sqrt{2}}{2}<t<1$일 때,

$\alpha(t)=q\left(0<q<\frac{1}{2}\right)$라 하면

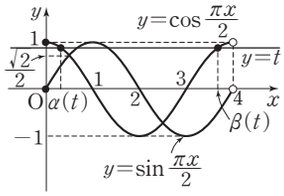
$\beta(t)=4-q$

$\therefore\ \beta(t)-\alpha(t)=4-2q$

이때 $0<2q<1$이므로

$3<4-2q<4$

$\therefore\ 3<\beta(t)-\alpha(t)<4$



(iv) $t=1$일 때,

$\alpha(1)=0$, $\beta(1)=1$이므로

$\beta(1)-\alpha(1)=1$

(i)~(iv)에서

$\{t\mid\beta(t)-\alpha(t)=3\}=\left\{t\,\middle|\,0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

3단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$이려면

$0<t_1<\frac{\sqrt{2}}{2}<t_2$

$\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=\alpha$라 하면

$t_1=\sin\frac{\pi\alpha}{2}$, $t_2=\cos\frac{\pi\alpha}{2}$

이때 $t_2=t_1+\frac{1}{2}$이므로

$\cos\frac{\pi\alpha}{2}=\sin\frac{\pi\alpha}{2}+\frac{1}{2}$

이를 $\sin^2\frac{\pi\alpha}{2}+\cos^2\frac{\pi\alpha}{2}=1$에 대입하면

$\sin^2\frac{\pi\alpha}{2}+\left(\sin\frac{\pi\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=1$

$2\sin^2\frac{\pi\alpha}{2}+\sin\frac{\pi\alpha}{2}+\frac{1}{4}=1$

$8\sin^2\frac{\pi\alpha}{2}+4\sin\frac{\pi\alpha}{2}-3=0$

$\therefore\ \sin\frac{\pi\alpha}{2}=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}\ \left(\because\ \sin\frac{\pi\alpha}{2}>0\right)$

$t_1=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}$이므로

$t_2=t_1+\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$

$\therefore\ t_1\times t_2=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}\times\frac{1+\sqrt{7}}{4}=\frac{3}{8}$

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

07 사인법칙과 코사인법칙

step 1 핵심 문제 | 78~79쪽

01 $\frac{16}{25}$ 02 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 03 ② 04 $2\sqrt{6}$ 05 ③

06 $20\sqrt{2}$ m 07 ⑤ 08 ④ 09 7 10 ②

11 $\frac{40\sqrt{3}}{9}$ 12 $\frac{7\sqrt{15}}{4}$

01 답 $\frac{16}{25}$

두 삼각형 ABC, ABD의 외접원이 같으므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}=\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)}$

$\frac{4}{\sin(\angle ABC)}=\frac{5}{\frac{4}{5}}$ $\therefore \sin(\angle ABC)=\frac{16}{25}$

02 답 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin C}=\frac{\overline{AC}}{\sin 30^\circ}$, $\frac{2}{\frac{2}{3}}=\frac{\overline{AC}}{\frac{1}{2}}$ $\therefore \overline{AC}=\frac{3}{2}$

직각삼각형 ABH에서 $\angle ABH=30^\circ$이므로

$\overline{AB}:\overline{AH}=2:1$ $\therefore \overline{AH}=1$

따라서 직각삼각형 AHC에서

$\overline{CH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-1}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

다른 풀이

직각삼각형 ABH에서 $\angle ABH=30^\circ$이므로

$\overline{AB}:\overline{AH}=2:1$ $\therefore \overline{AH}=1$

직각삼각형 AHC에서 $\overline{AC}=\frac{\overline{AH}}{\sin C}$이므로

$\overline{AC}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$

$\therefore \overline{CH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AH}^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

03 답 ②

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

$\therefore \frac{\sin A\sin C}{\sin^2 B}=\frac{\frac{a}{2R}\times\frac{c}{2R}}{\left(\frac{b}{2R}\right)^2}=\frac{ac}{b^2}$

$ab:ca=8:6$에서 $b:c=8:6$

$8c=6b$ $\therefore c=\frac{3}{4}b$

$bc:ca=9:6$에서 $b:a=9:6$

$9a=6b$ $\therefore a=\frac{2}{3}b$

$\therefore \frac{\sin A\sin C}{\sin^2 B}=\frac{ac}{b^2}=\frac{\frac{2}{3}b\times\frac{3}{4}b}{b^2}=\frac{1}{2}$

04 답 $2\sqrt{6}$

$5c^2=5a^2+2ab+5b^2$에서

$c^2=a^2+b^2+\frac{2}{5}ab$ …… ㉠

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{2}{5}ab=-2ab\cos C$

$\therefore \cos C=-\frac{1}{5}$ …… 배점 40%

이때 $\cos C<0$이므로 $\frac{\pi}{2}<C<\pi$

$\therefore \sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ …… 배점 20%

삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$이므로

$\tan(A+B)=\tan(\pi-C)=-\tan C$

$=-\frac{\sin C}{\cos C}=-\frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{-\frac{1}{5}}=2\sqrt{6}$ …… 배점 40%

05 답 ③

삼각형 ABC의 내접원과 두 변 AB, CA가 만나는 점을 각각 E, F라 하면

$\overline{BE}=\overline{BD}=4$, $\overline{CF}=\overline{CD}=3$

$\overline{AE}=\overline{AF}=x$라 하면

$\overline{AB}=x+4$, $\overline{BC}=7$, $\overline{CA}=x+3$이므로

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$7^2=(x+4)^2+(x+3)^2-2\times(x+4)\times(x+3)\times\cos\frac{\pi}{3}$

$49=2x^2+14x+25-2(x^2+7x+12)\times\frac{1}{2}$

$x^2+7x-36=0$ $\therefore x=\frac{-7+\sqrt{193}}{2}$ ($\because x>0$)

삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$(-7+\sqrt{193})+8+6=7+\sqrt{193}$

따라서 $m=7$, $n=193$이므로

$m+n=200$

개념 NOTE

(1) 원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.

➡ $\overline{AP}=\overline{AQ}$

(2) 원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름과 수직이다.

➡ $\overline{AP}\perp\overline{PI}$, $\overline{AQ}\perp\overline{QI}$

06 답 $20\sqrt{2}$ m

$\overline{PQ}=x$ m라 하면

직각삼각형 PAQ에서 $\overline{PA}=\frac{\overline{PQ}}{\sin 45^\circ}=\sqrt{2}x$

직각삼각형 PQB에서 $\overline{PB}=\frac{\overline{PQ}}{\sin 30^\circ}=2x$

삼각형 PAB에서 코사인법칙에 의하여

$40^2=(\sqrt{2}x)^2+(2x)^2-2\times\sqrt{2}x\times 2x\times\cos 45^\circ$

$1600=6x^2-4\sqrt{2}x^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$, $1600=2x^2$

$x^2=800$ $\therefore x=20\sqrt{2}$ (m)

따라서 건물의 높이 PQ는 $20\sqrt{2}$ m이다.

07 답 ⑤

$\overline{AD}=\overline{AB}=6$이므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{6^2+6^2-(\sqrt{15})^2}{2\times6\times6}=\dfrac{19}{24}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=6^2+10^2-2\times6\times10\times\dfrac{19}{24}=41$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{41}$

08 답 ④

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=3^2+1^2-2\times3\times1\times\cos\dfrac{\pi}{3}$

$=10-6\times\dfrac{1}{2}=7$

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{7}$

선분 AP가 $\angle BAC$의 이등분선이고 $\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$이므로

$\overline{BP}:\overline{PC}=3:1$

따라서 $\overline{PC}=\dfrac{1}{4}\overline{BC}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$이고, $\angle PAC=\dfrac{1}{2}\angle BAC=\dfrac{\pi}{6}$이므로 삼각형 APC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{PC}}{\sin\dfrac{\pi}{6}}=2R,\ \dfrac{\dfrac{\sqrt{7}}{4}}{\dfrac{1}{2}}=2R$

$\therefore R=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

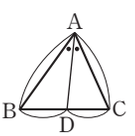
따라서 삼각형 APC의 외접원의 넓이는

$\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2=\dfrac{7}{16}\pi$

개념 NOTE

삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 하면

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$



09 답 7

$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=1:2:\sqrt{2}$이므로 $\overline{AB}=k$, $\overline{BC}=2k$, $\overline{CA}=\sqrt{2}k$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{2}k)^2=k^2+(2k)^2-2\times k\times2k\times\cos B$

$4k^2\cos B=3k^2$

$\therefore \cos B=\dfrac{3}{4}$

$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}\ (\because 0<B<\pi)$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 외접원의 넓이가 28π이므로

$\pi R^2=28\pi \quad \therefore R=2\sqrt{7}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{CA}}{\sin B}=2R,\ \dfrac{\overline{CA}}{\dfrac{\sqrt{7}}{4}}=4\sqrt{7}$

$\therefore \overline{CA}=7$

10 답 ②

$A+B+C=180^\circ$이므로

$\sin(A+C)=\sin(180^\circ-B)=\sin B$

$2\cos A\sin(A+C)=\sin C$에서

$2\cos A\sin B=\sin C$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$2\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\dfrac{b}{2R}=\dfrac{c}{2R}$

$b^2+c^2-a^2=c^2,\ a^2=b^2$

$\therefore a=b\ (\because a>0,\ b>0)$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

11 답 $\dfrac{40\sqrt{3}}{9}$

$\angle BAD=\angle CAD=\dfrac{1}{2}\angle BAC=30^\circ$

$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ADC$이므로

$\dfrac{1}{2}\times10\times8\times\sin60^\circ=\dfrac{1}{2}\times10\times\overline{AD}\times\sin30^\circ+\dfrac{1}{2}\times\overline{AD}\times8\times\sin30^\circ$

$40\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\overline{AD}\times\dfrac{1}{2}+4\overline{AD}\times\dfrac{1}{2}$

$20\sqrt{3}=\dfrac{9}{2}\overline{AD} \quad \therefore \overline{AD}=\dfrac{40\sqrt{3}}{9}$

12 답 $\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$

$\angle BAD=\theta\ (0<\theta<\pi)$라 하면 사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$\angle BAD+\angle DCB=\pi$

$\therefore \angle DCB=\pi-\theta$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=2^2+4^2-2\times2\times4\times\cos\theta$

$=20-16\cos\theta \quad \cdots\cdots$ ㉠

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos(\pi-\theta)$

$=13+12\cos\theta \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$20-16\cos\theta=13+12\cos\theta$

$28\cos\theta=7 \quad \therefore \cos\theta=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}\ (\because 0<\theta<\pi)$

$\therefore \square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\dfrac{1}{2}\times2\times4\times\sin\theta+\dfrac{1}{2}\times3\times2\times\sin(\pi-\theta)$

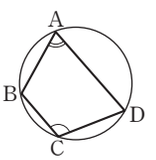
$=4\sin\theta+3\sin\theta=7\sin\theta$

$=7\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{7\sqrt{15}}{4}$

개념 NOTE

원에 내접하는 사각형에서 마주 보는 두 내각의 크기의 합은 π이다.

➡ $\angle BAD+\angle BCD=\pi$



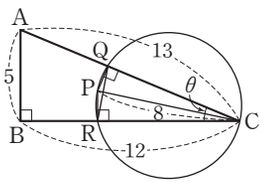
step 2 고난도 문제 | 80~84쪽

01 $\frac{40}{13}$	02 ①	03 $12\sqrt{2}$	04 ②	05 ④	06 ⑤
07 $\frac{\sqrt{3}}{2}$	08 $\sqrt{34}-\sqrt{2}$		09 84	10 5	11 ①
12 ④	13 2	14 $\sqrt{15}$	15 $\frac{6}{5}$	16 ③	
17 $6+4\sqrt{2}$		18 $\frac{23}{27}$	19 $6\sqrt{2}$	20 $4\sqrt{6}+6\sqrt{2}$	
21 30	22 24π	23 ③	24 13	25 $\frac{5}{2}$	

01 답 $\frac{40}{13}$

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$이므로 삼각형 ABC는 $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

$\angle CQP=\angle CRP=\frac{\pi}{2}$이므로 그림과 같이 사각형 CQPR는 선분 CP를 지름으로 하는 원에 내접한다.



삼각형 CQR에서 $\angle QCR=\theta$라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{QR}}{\sin\theta}=8$ …… ㉠

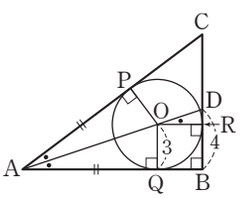
이때 직각삼각형 ABC에서 $\sin\theta=\frac{5}{13}$

이를 ㉠에 대입하면 $\frac{\overline{QR}}{\frac{5}{13}}=8$

$\therefore \overline{QR}=\frac{40}{13}$

02 답 ①

삼각형 ABC에 내접하는 원이 세 선분 CA, AB, BC와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자.



$\overline{OQ}=\overline{RB}=3$이므로

$\overline{DR}=\overline{DB}-\overline{RB}=4-3=1$

직각삼각형 ORD에서

$\overline{DO}=\sqrt{\overline{OR}^2+\overline{DR}^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

$\therefore \sin(\angle DOR)=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\triangle OAQ\backsim\triangle DOR$ (AA 닮음)이므로

$\angle OAQ=\angle DOR$ …… ㉠

또 $\overline{OQ}:\overline{DR}=\overline{AQ}:\overline{OR}$이므로

$3:1=\overline{AQ}:3$ $\therefore \overline{AQ}=9$

이때 점 O가 삼각형 ABC의 내심이므로

$\overline{AP}=\overline{AQ}=9$

$\angle CAD=\angle DAB$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\angle CAD=\angle DOR$이므로

$\sin(\angle CAD)=\sin(\angle DOR)=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\overline{CD}=x$라 하면

$\overline{CP}=\overline{CR}=\overline{CD}+\overline{DR}=x+1$

$\overline{AB}=\overline{AQ}+\overline{QB}=12$, $\overline{AC}=\overline{AP}+\overline{CP}=x+10$,

$\overline{CB}=\overline{CD}+\overline{DB}=x+4$이므로 직각삼각형 ABC에서

$(x+10)^2=12^2+(x+4)^2$

$x^2+20x+100=x^2+8x+160$

$12x=60$ $\therefore x=5$

$\overline{CD}=5$이므로 삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=2R$, $\frac{5}{\frac{1}{\sqrt{10}}}=2R$ $\therefore R=\frac{5\sqrt{10}}{2}$

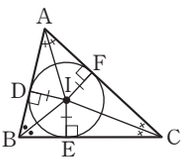
따라서 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는

$\pi\times\left(\frac{5\sqrt{10}}{2}\right)^2=\frac{125}{2}\pi$

개념 NOTE

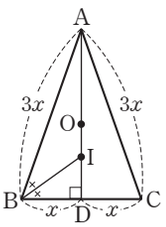
(1) 삼각형의 내접원의 중심(내심)은 세 내각의 이등분선의 교점이다.
➡ $\angle IAD=\angle IAF$, $\angle IBD=\angle IBE$, $\angle ICE=\angle ICF$

(2) 내심에서 삼각형의 세 변에 이르는 거리는 내접원의 반지름의 길이와 같다.
➡ $\overline{DI}=\overline{EI}=\overline{FI}=$(내접원의 반지름의 길이)



03 답 $12\sqrt{2}$

삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이므로 선분 BC의 중점을 D라 하면 선분 AD는 변 BC의 수직이등분선이고 두 점 O, I는 선분 AD 위에 있다.



$\overline{AB}=3x$, $\overline{BC}=2x$, $\overline{CA}=3x$라 하면 직각삼각형 ABD에서

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BD}^2}=\sqrt{(3x)^2-x^2}=2\sqrt{2}x$

이때 점 I는 삼각형 ABC의 내심이므로 선분 BI는 $\angle ABD$의 이등분선이다.

$\overline{AI}:\overline{ID}=\overline{AB}:\overline{BD}=3:1$이므로

$\overline{ID}=\frac{1}{4}\overline{AD}=\frac{\sqrt{2}}{2}x$

한편 직각삼각형 ABD에서 $\sin B=\frac{2\sqrt{2}x}{3x}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이므로 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CA}}{\sin B}=2R$, $\frac{3x}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=2R$ $\therefore R=\frac{9\sqrt{2}}{8}x$

따라서 $\overline{AO}=\frac{9\sqrt{2}}{8}x$이므로

$\overline{OI}=\overline{AD}-\overline{ID}-\overline{AO}=2\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{9\sqrt{2}}{8}x=\frac{3\sqrt{2}}{8}x$

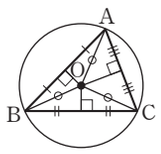
즉, $\frac{3\sqrt{2}}{8}x=3$이므로 $x=4\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AB}=3x=12\sqrt{2}$

개념 NOTE

(1) 삼각형 ABC의 외접원의 중심(외심)은 세 변의 수직이등분선의 교점이다.

(2) 외심에서 삼각형의 세 꼭짓점에 이르는 거리는 외접원의 반지름의 길이와 같다.
➡ $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=$(외접원의 반지름의 길이)



04 답 ②

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{10}{\sin C}=2\times3\sqrt{5}$ $\therefore \sin C=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore \cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}\left(\because 0<C<\frac{\pi}{2}\right)$ …… ㉠

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$10^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$\therefore a^2+b^2-ab\cos C=100+ab\cos C$

이를 $\frac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\frac{4}{3}$에 대입하면

$\frac{100+ab\cos C}{ab}=\frac{4}{3}$, $\frac{100+\frac{2}{3}ab}{ab}=\frac{4}{3}$ (∵ ㉠)

$300+2ab=4ab$, $2ab=300$ $\therefore ab=150$

05 답 ④

점 R를 선분 OA에 대하여 대칭이동한 점을 R′, 선분 OB에 대하여 대칭이동한 점을 R″이라 하면

$l=\overline{RP}+\overline{PQ}+\overline{QR}$

$=\overline{R'P}+\overline{PQ}+\overline{QR''}\geq\overline{R'R''}$

이때 $\angle R'OR''=2\angle AOB=\frac{3}{4}\pi$,

$\overline{OR'}=\overline{OR''}=2$이므로 삼각형 R′R″O에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{R'R''}^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos\frac{3}{4}\pi$

$=8-8\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ → $\cos\frac{3}{4}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=8+4\sqrt{2}$

따라서 l^2의 최솟값은 $8+4\sqrt{2}$이다.

06 답 ⑤

$\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 하고 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 코사인법칙과 사인법칙에 의하여

$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\frac{a}{2R}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{abc}{R(b^2+c^2-a^2)}$

$\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\frac{b}{2R}}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}=\frac{abc}{R(a^2+c^2-b^2)}$

$\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\frac{c}{2R}}{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}=\frac{abc}{R(a^2+b^2-c^2)}$

$\frac{\tan B}{\tan A}=9$에서 $\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2}=9$

$9(a^2+c^2-b^2)=b^2+c^2-a^2$

$\therefore 5a^2-5b^2+4c^2=0$ …… ㉠

$\frac{\tan C}{\tan A}=\frac{5}{3}$에서 $\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+b^2-c^2}=\frac{5}{3}$

$5(a^2+b^2-c^2)=3(b^2+c^2-a^2)$

$\therefore 4a^2+b^2-4c^2=0$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $9a^2-4b^2=0$

$9a^2=4b^2$, $3a=2b$ (∵ $a>0$, $b>0$)

$\therefore b=\frac{3}{2}a$

㉠+5×㉡을 하면 $25a^2-16c^2=0$

$25a^2=16c^2$, $5a=4c$ (∵ $a>0$, $c>0$)

$\therefore c=\frac{5}{4}a$

$\therefore \frac{\sin A}{\sin C}+\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$

$=\frac{\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}}{\frac{c}{2R}}$

$=\frac{a+b}{c}=\frac{a+\frac{3}{2}a}{\frac{5}{4}a}=2$

07 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{OA}=x$ $(0<x<1)$, $\overline{AB}=y$라 하면 삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{y^2+1^2-x^2}{2y}=\frac{1}{2}\left(y+\frac{1-x^2}{y}\right)$ …… 배점 30%

이때 $0<x<1$에서 $1-x^2>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(y+\frac{1-x^2}{y}\right)\geq\frac{1}{2}\times2\sqrt{y\times\frac{1-x^2}{y}}=\sqrt{1-x^2}$

$\left(\text{단, 등호는 } y=\frac{1-x^2}{y}\text{일 때 성립}\right)$ …… 배점 30%

따라서 $\cos\theta$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$이므로

$\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}$, $1-x^2=\frac{1}{4}$, $x^2=\frac{3}{4}$

$\therefore x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (∵ $0<x<1$)

$\therefore \overline{OA}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ …… 배점 40%

개념 NOTE

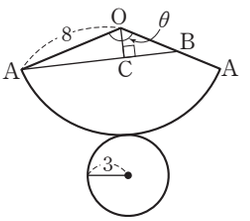
산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$일 때, $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

idea

08 답 $\sqrt{34}-\sqrt{2}$

주어진 원뿔의 전개도를 그리면 그림과 같다.



부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면 부채꼴의 호의 길이는 밑면의 둘레의 길이와 같으므로

$8\theta=2\pi\times3$ $\therefore \theta=\frac{3}{4}\pi$

점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 C라 하면 $\overline{AC}$는 오르막길의 길이이고 $\overline{BC}$는 내리막길의 길이이다.

$\overline{OB}=x$, $\overline{BC}=y$라 하면 오르막길의 길이가 내리막길의 길이의 2배이므로

$\overline{AC}=2y$ $\therefore \overline{AB}=3y$

삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$(3y)^2=8^2+x^2-2\times8\times x\times\cos\frac{3}{4}\pi$

$9y^2=64+x^2-16x\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore\ 9y^2=x^2+8\sqrt{2}x+64$ …… ㉠

두 직각삼각형 OAC, OBC에서 $\overline{OC}^2=\overline{OA}^2-\overline{AC}^2=\overline{OB}^2-\overline{BC}^2$이므로

$64-4y^2=x^2-y^2$ $\therefore\ 3y^2=64-x^2$

이를 ㉠에 대입하면

$3(64-x^2)=x^2+8\sqrt{2}x+64$

$x^2+2\sqrt{2}x-32=0$ $\therefore\ x=-\sqrt{2}+\sqrt{34}$ ($\because\ x>0$)

$\therefore\ \overline{OB}=\sqrt{34}-\sqrt{2}$

09 답 84

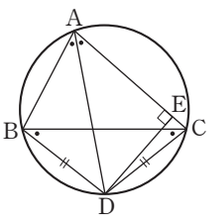
원주각의 성질에 의하여

$\angle BCD=\angle BAD$, $\angle CBD=\angle CAD$

이때 $\angle BAD=\angle CAD$이므로

$\angle BCD=\angle CBD$

$\therefore\ \overline{BD}=\overline{CD}$



$\overline{AD}=x$, $\angle BAD=\angle CAD=\theta$라 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=6^2+x^2-2\times6\times x\times\cos\theta$

$=36+x^2-12x\cos\theta$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CD}^2=x^2+8^2-2\times x\times8\times\cos\theta$

$=x^2+64-16x\cos\theta$

이때 $\overline{BD}=\overline{CD}$에서 $\overline{BD}^2=\overline{CD}^2$이므로

$36+x^2-12x\cos\theta=x^2+64-16x\cos\theta$

$4x\cos\theta=28$ $\therefore\ x\cos\theta=7$

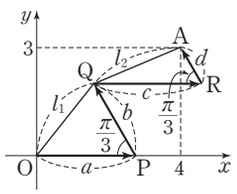
직각삼각형 ADE에서 $\overline{AE}=\overline{AD}\cos\theta$이므로

$k=x\cos\theta=7$ $\therefore\ 12k=84$

10 답 5

그림과 같이 세 점 P, Q, R를 정하고

$\overline{OQ}=l_1$, $\overline{QA}=l_2$라 하자.



$y=-\sqrt{3}x$에서 $-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$이므로

$\angle OPQ=\angle QRA=\frac{\pi}{3}$

삼각형 OPQ에서 코사인법칙에 의하여

$l_1^2=a^2+b^2-2\times a\times b\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=a^2+b^2-2ab\times\frac{1}{2}=a^2-ab+b^2$

$\therefore\ l_1=\sqrt{a^2-ab+b^2}$

삼각형 QRA에서 코사인법칙에 의하여

$l_2^2=c^2+d^2-2\times c\times d\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=c^2+d^2-2cd\times\frac{1}{2}=c^2-cd+d^2$

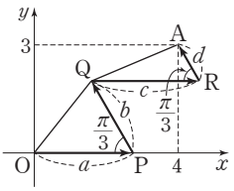
$\therefore\ l_2=\sqrt{c^2-cd+d^2}$

$\therefore\ l_1+l_2=\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{c^2-cd+d^2}$

이때 $l_1+l_2\geq\overline{OA}$이고 $\overline{OA}=\sqrt{4^2+3^2}=5$이므로 l_1+l_2, 즉 $\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{c^2-cd+d^2}$의 최솟값은 5이다.

다른 풀이

그림과 같이 세 점 P, Q, R를 정하면



$y=-\sqrt{3}x$에서 $-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$이므로

$\angle OPQ=\angle QRA=\frac{\pi}{3}$

$P(a,\ 0)$이므로

$Q\left(a-b\cos\frac{\pi}{3},\ b\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore\ Q\left(a-\frac{b}{2},\ \frac{\sqrt{3}b}{2}\right)$

$\therefore\ \overline{OQ}=\sqrt{\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}b}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-ab+b^2}$

$R\left(a-\frac{b}{2}+c,\ \frac{\sqrt{3}b}{2}\right)$이므로

$A\left(a-\frac{b}{2}+c-d\cos\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}b}{2}+d\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore\ A\left(a-\frac{b}{2}+c-\frac{d}{2},\ \frac{\sqrt{3}b}{2}+\frac{\sqrt{3}d}{2}\right)$

$\therefore\ \overline{QA}=\sqrt{\left(c-\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}d}{2}\right)^2}=\sqrt{c^2-cd+d^2}$

이때 $\overline{OQ}+\overline{QA}\geq\overline{OA}=\sqrt{4^2+3^2}=5$이므로

$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{c^2-cd+d^2}$의 최솟값은 5이다.

11 답 ①

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면 원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$이므로

$\pi R^2=\frac{49}{3}\pi$ $\therefore\ R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\times\frac{7\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\overline{BC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \overline{BC}=7$

$\overline{AC}=x$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$7^2=x^2+3^2-2\times x\times3\times\cos\frac{\pi}{3}$

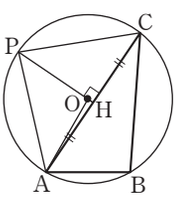
$49=x^2+9-6x\times\frac{1}{2}$

$x^2-3x-40=0$

$(x+5)(x-8)=0$

$\therefore\ x=8$ ($\because\ x>0$)

삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되려면 그림과 같이 점 P는 선분 AC의 수직이등분선과 원 C의 두 교점 중 직선 AC로부터 멀리 떨어져 있는 점이어야 한다.



원 C의 중심을 O, 점 P에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 PH는 점 O를 지난다. → 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.

$\overline{AH}=\overline{CH}=4$이므로 직각삼각형 AHO에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2-4^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \overline{PH}=\overline{PO}+\overline{OH}=\frac{7\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

따라서 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{PH}=\frac{1}{2}\times8\times\frac{8\sqrt{3}}{3}=\frac{32\sqrt{3}}{3}$

12 답 ④

$b\cos^2 B=c\cos^2 C+(b-c)\cos^2 A$에서

$b(1-\sin^2 B)=c(1-\sin^2 C)+(b-c)(1-\sin^2 A)$

$b-b\sin^2 B=c-c\sin^2 C+b-c-(b-c)\sin^2 A$

$b\sin^2 B=c\sin^2 C+(b-c)\sin^2 A$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$b\times\frac{b^2}{4R^2}=c\times\frac{c^2}{4R^2}+(b-c)\times\frac{a^2}{4R^2}$

$b^3=c^3+(b-c)a^2$

$b^3-c^3-(b-c)a^2=0$

$(b-c)(b^2+bc+c^2)-(b-c)a^2=0$

$(b-c)(b^2+bc+c^2-a^2)=0$

$\therefore b=c$ 또는 $b^2+bc+c^2=a^2$

(i) $b=c$인 경우

삼각형 ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

(ii) $b^2+bc+c^2=a^2$인 경우

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$이므로

$b^2+bc+c^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$bc=-2bc\cos A$

$\cos A=-\frac{1}{2}$

$\therefore A=120^\circ$ ($\because 0^\circ<A<180^\circ$)

(i), (ii)에서 삼각형 ABC가 될 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

13 답 2

주어진 방정식이 이차방정식이므로

$2\cos A\neq 0$ $\therefore A\neq\frac{\pi}{2}$ ($\because 0<A<\pi$)

이때 삼각형 ABC는 직각삼각형이고 $\overline{AB}>\overline{AC}$이므로

$B\neq\frac{\pi}{2}$ $\therefore C=\frac{\pi}{2}$

이차방정식 $(2\cos A)x^2-(2t\sin B)x+\sin B\sin C=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=t^2\sin^2 B-2\cos A\sin B\sin C=0$

$\sin B(t^2\sin B-2\cos A\sin C)=0$

$\therefore \sin B=0$ 또는 $t^2\sin B=2\cos A\sin C$

이때 $0<B<\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin B\neq 0$

$\therefore t^2\sin B=2\cos A\sin C$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하고 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$t^2\times\frac{b}{2R}=2\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\frac{c}{2R}$

$\therefore b^2t^2=b^2+c^2-a^2$ …… ㉠

한편 삼각형 ABC가 $C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$a^2+b^2=c^2$

이를 ㉠에 대입하면

$b^2t^2=2b^2$, $t^2=2$

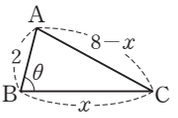
$\therefore t=-\sqrt{2}$ 또는 $t=\sqrt{2}$

따라서 t는 $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$의 2개이다.

14 답 $\sqrt{15}$

$\overline{BC}=x$라 하면 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=10$에서

$2+x+\overline{CA}=10$ $\therefore \overline{CA}=8-x$



삼각형 ABC에서 $\angle B=\theta$ $(0<\theta<\pi)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{2^2+x^2-(8-x)^2}{2\times 2\times x}=\frac{16x-60}{4x}=\frac{4x-15}{x}$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{4x-15}{x}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{-15x^2+120x-225}{x^2}}=\frac{\sqrt{-15(x-4)^2+15}}{x}$ …… ㉠

한편 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 2\times x\times\sin\theta=x\sin\theta$

이때 ㉠에서 $x\sin\theta=\sqrt{-15(x-4)^2+15}$이므로 $x=4$일 때 $x\sin\theta$의 최댓값은 $\sqrt{15}$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은 $\sqrt{15}$이다.

다른 풀이 헤론의 공식

$\overline{BC}=x$라 하면 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=10$에서

$2+x+\overline{CA}=10$ $\therefore \overline{CA}=8-x$

헤론의 공식에서 $s=\frac{10}{2}=5$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\sqrt{5\times 3\times(5-x)\times(-3+x)}=\sqrt{-15(x^2-8x+15)}$

$=\sqrt{-15(x-4)^2+15}$

따라서 $x=4$일 때 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은 $\sqrt{15}$이다.

15 답 $\frac{6}{5}$

$\overline{AD}=x$라 하면

$\triangle ABD=\frac{1}{2}\times 5\times x\times\sin\alpha=\frac{5}{2}x\sin\alpha$

$\triangle ADC=\frac{1}{2}\times x\times 4\times\sin\beta=2x\sin\beta$ …… ㉠

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{2}{3}$에서 $\sin\beta=\frac{3}{2}\sin\alpha$

이를 ㉠에 대입하면 $\triangle ADC=2x\times\frac{3}{2}\sin\alpha=3x\sin\alpha$

$\therefore m:n=\overline{BD}:\overline{DC}=\triangle ABD:\triangle ADC$ → 두 삼각형 ABD, ADC의 높이가 같으므로 밑변의 길이의 비와 넓이의 비는 같다.

$=\frac{5}{2}x\sin\alpha:3x\sin\alpha=5:6$

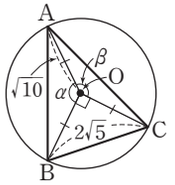
$\therefore \frac{n}{m}=\frac{6}{5}$

16 답 ③

$\overline{BC}=2\sqrt{5}$, $\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{10}$에서 $\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=\overline{BC}^2$이므로 삼각형 OBC는 $\overline{OB}=\overline{OC}$인 직각이등변삼각형이다.

$\therefore \angle BOC=\frac{\pi}{2}$

$\angle AOB=\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$, $\angle AOC=\beta$ $(0<\beta<\pi)$라 하면



$S_1=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\alpha=5\sin\alpha$

$S_2=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\beta=5\sin\beta$

$3S_1=4S_2$에서

$3\times 5\sin\alpha=4\times 5\sin\beta$ $\therefore \sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\beta$

이때 $\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=2\pi$이므로 $\beta=\frac{3}{2}\pi-\alpha$

$\therefore \sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\frac{4}{3}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$=-\frac{4}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\frac{4}{3}\cos\alpha$ ····· ㉠

$\sin\alpha=-\frac{4}{3}\cos\alpha$를 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$에 대입하면

$\frac{16}{9}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\therefore \cos^2\alpha=\frac{9}{25}$

$0<\alpha<\pi$에서 $\sin\alpha>0$이므로 ㉠에서 $\cos\alpha<0$

$\therefore \cos\alpha=-\frac{3}{5}$

삼각형 ABO에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=32$

$\therefore \overline{AB}=4\sqrt{2}$

17 답 $6+4\sqrt{2}$

$\overline{AB}=x$라 하면 ㈏에서 $\overline{BC}=2x$, $\overline{CA}=2\sqrt{2}x$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{x^2+4x^2-8x^2}{2\times x\times 2x}=-\frac{3}{4}$

$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ($\because 0<B<\pi$)

····· 배점 40%

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times x\times 2x\times\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}x^2$ ····· ㉠ ····· 배점 20%

또 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{7}\times(x+2x+2\sqrt{2}x)=\frac{\sqrt{7}(3+2\sqrt{2})}{2}x$ ····· ㉡ ····· 배점 20%

㉠, ㉡에서 $\frac{\sqrt{7}}{4}x^2=\frac{\sqrt{7}(3+2\sqrt{2})}{2}x$

$x>0$이므로 양변을 x로 나누면

$\frac{\sqrt{7}}{4}x=\frac{\sqrt{7}(3+2\sqrt{2})}{2}$ $\therefore x=6+4\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AB}=6+4\sqrt{2}$ ····· 배점 20%

18 답 $\frac{23}{27}$

$\overline{AC}=x$라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\sin B=\frac{x}{2R}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6\times 4\times\sin B=12\times\frac{x}{2R}=\frac{6x}{R}$ ····· ㉠

또 $r\times R=3$에서 $r=\frac{3}{R}$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times r\times(6+4+x)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{R}\times(10+x)=\frac{30+3x}{2R}$ ····· ㉡

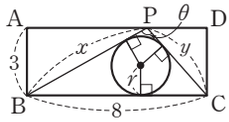
㉠, ㉡에서 $\frac{6x}{R}=\frac{30+3x}{2R}$이므로

$12x=30+3x$, $9x=30$ $\therefore x=\frac{10}{3}$

따라서 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{6^2+4^2-\left(\frac{10}{3}\right)^2}{2\times 6\times 4}=\frac{23}{27}$

19 답 $6\sqrt{2}$



삼각형 PBC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 8\times 3=12$

$\angle BPC=\theta$, $\overline{BP}=x$, $\overline{CP}=y$라 하면 삼각형 PBC의 내접원의 반지름의 길이가 r이므로 삼각형 PBC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times r\times(x+y+8)=12$

$r(x+y+8)=24$ $\therefore r=\frac{24}{x+y+8}$ ····· ㉠

또 삼각형 PBC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times x\times y\times\sin\theta=12$

$xy\sin\theta=24$ $\therefore \sin\theta=\frac{24}{xy}$ ····· ㉡

삼각형 PBC의 외접원의 반지름의 길이가 R이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{8}{\sin\theta}=2R$ $\therefore R=\frac{4}{\sin\theta}=\frac{xy}{6}$ ($\because$ ㉡)

$\therefore r(\sqrt{3}R+2\sqrt{2})=r\left(\sqrt{\frac{xy}{2}}+2\sqrt{2}\right)$

$=\frac{12\sqrt{2}(\sqrt{xy}+4)}{x+y+8}$ ($\because$ ㉠)

이때 $x>0$, $y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{12\sqrt{2}(\sqrt{xy}+4)}{x+y+8}\le\frac{12\sqrt{2}\left(\frac{x+y}{2}+4\right)}{x+y+8}$

$=\frac{6\sqrt{2}(x+y+8)}{x+y+8}$

$=6\sqrt{2}$ (단, 등호는 $x=y$일 때 성립)

따라서 $r(\sqrt{3}R+2\sqrt{2})$의 최댓값은 $6\sqrt{2}$이다.

20 답 $4\sqrt{6}+6\sqrt{2}$

$\overline{AD}=x$, $\overline{AE}=y$, $\overline{DE}=z$라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 6\times 8\times\sin\frac{2}{3}\pi=24\times\frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{3}$

$\triangle ADE=\frac{1}{2}\times x\times y\times\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{xy}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}xy}{4}$

이때 $\triangle ADE=\frac{1}{2}\triangle ABC$이므로

$\frac{\sqrt{3}xy}{4}=6\sqrt{3}$ $\therefore xy=24$

삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$z^2=x^2+y^2-2\times x\times y\times\cos\frac{2}{3}\pi$

$=x^2+y^2-2xy\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=x^2+y^2+xy$

$=x^2+y^2+24$

이때 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\ge 2\sqrt{x^2y^2}=2xy=48$ (단, 등호는 $x^2=y^2$일 때 성립)

$x>0$, $y>0$이므로 등호는 $x=y$일 때 성립한다.

$xy=24$에서 $x^2=24$ $\therefore x=2\sqrt{6}$ ($\because x>0$)

$x=2\sqrt{6}$일 때 x^2+y^2의 최솟값은 48이므로 z^2의 최솟값은 $48+24=72$이고, z의 최솟값은 $6\sqrt{2}$이다.

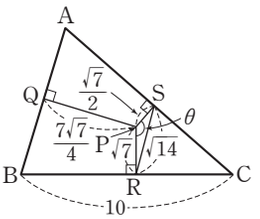
$\therefore x+y+z\ge 2\sqrt{6}+2\sqrt{6}+6\sqrt{2}=4\sqrt{6}+6\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ADE의 둘레의 길이의 최솟값은 $4\sqrt{6}+6\sqrt{2}$이다.

21 답 30

$\angle RPS=\theta\ (0<\theta<\pi)$라 하면 삼각형 PRS에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{7})^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-(\sqrt{14})^2}{2\times\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{7}}{2}}=-\frac{3}{4}$$



$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$$=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}\ (\because\ 0<\theta<\pi)$$

$\angle PSC=\angle PRC=\frac{\pi}{2}$이므로 사각형 CSPR는 한 원에 내접한다.

$\angle SCR+\angle RPS=\pi$에서 $\angle SCR=\pi-\theta$

$\therefore \sin(\angle SCR)=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\overline{CA}=x$라 하면 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 10\times x\times \underbrace{\sin C}_{\sin C=\sin(\angle SCR)=\frac{\sqrt{7}}{4}}=5x\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{5\sqrt{7}}{4}x \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 삼각형 ABC의 넓이는 세 삼각형 PAB, PBC, PCA의 넓이의 합과 같으므로 $\overline{AB}=y$라 하면 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{7\sqrt{7}}{4}y+10\sqrt{7}+\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)=\frac{7\sqrt{7}}{8}y+5\sqrt{7}+\frac{\sqrt{7}}{4}x \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{5\sqrt{7}}{4}x=\frac{7\sqrt{7}}{8}y+5\sqrt{7}+\frac{\sqrt{7}}{4}x$$

$$10\sqrt{7}x=7\sqrt{7}y+40\sqrt{7}+2\sqrt{7}x$$

$$\therefore\ y=\frac{8}{7}(x-5) \quad \cdots\cdots ㉢$$

또 $\cos(\angle SCR)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\frac{3}{4}$이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$y^2=x^2+10^2-2\times x\times 10\times \underbrace{\cos C}_{\cos C=\cos(\angle SCR)=\frac{3}{4}}$$

$$=x^2+100-20x\times\frac{3}{4}$$

$$=x^2-15x+100$$

$y^2=x^2-15x+100$에 ㉢을 대입하면

$$\left\{\frac{8}{7}(x-5)\right\}^2=x^2-15x+100$$

$$64(x^2-10x+25)=49(x^2-15x+100)$$

$$3x^2+19x-660=0$$

$$(3x+55)(x-12)=0$$

$\therefore\ x=12\ (\because\ x>0)$

이를 ㉢에 대입하면

$$y=\frac{8}{7}(12-5)=8$$

따라서 삼각형 ABC의 세 변의 길이의 합은

$10+12+8=30$

22 답 24π

원 O_1의 반지름의 길이를 R_1, 원 O_2의 반지름의 길이를 R_2라 하자.

원의 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의하여

$$\angle CBD=\angle CAB=\frac{\pi}{6}$$

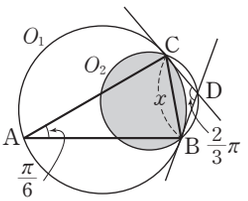
$$\angle BCD=\angle BAC=\frac{\pi}{6}$$

삼각형 BCD에서

$$\angle BDC=\pi-\angle CBD-\angle BCD=\frac{2}{3}\pi$$

$\overline{BC}=x$라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{x}{\sin\frac{\pi}{6}}=2R_1,\ \frac{x}{\frac{1}{2}}=2R_1$$



$\therefore\ R_1=x$

삼각형 BDC에서 사인법칙에 의하여

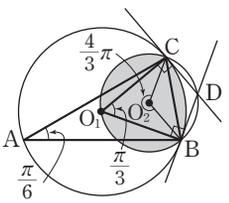
$$\frac{x}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2R_2,\ \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R_2$$

$$\therefore\ R_2=\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{R_1}{\sqrt{3}} \quad \cdots\cdots ㉠$$ ····· 배점 30%

그림과 같이 원 O_1의 중심을 O_1이라 하면

$\angle CO_1B=2\angle A=\frac{\pi}{3}$

$\overline{O_1C}=\overline{O_1B}$이므로 삼각형 O_1BC는 정삼각형이다.



이때 $\angle CO_1B+\angle BDC=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi=\pi$이므로 점 O_1은 원 O_2 위에 있다.

원 O_2의 중심을 O_2라 하면 $\angle CO_2B=2\angle CO_1B=\frac{2}{3}\pi$이므로 점 O_1을 포함하는 부채꼴 O_2CB의 중심각의 크기는

$$2\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi$$

따라서 두 원 O_1, O_2의 공통부분의 넓이는 반지름의 길이가 R_1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 O_1BC의 넓이에서 정삼각형 O_1BC의 넓이를 빼고 반지름의 길이가 R_2이고 중심각의 크기가 $\frac{4}{3}\pi$인 부채꼴 O_2CB의 넓이와 삼각형 O_2BC의 넓이를 더하면 된다.

$$\left(\frac{1}{2}\times R_1^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}R_1^2\right)+\frac{1}{2}\times R_2^2\times\frac{4}{3}\pi+\frac{1}{2}\times R_2^2\times\sin\frac{2}{3}\pi$$

$$=\frac{\pi}{6}R_1^2-\frac{\sqrt{3}}{4}R_1^2+\frac{2}{3}\pi R_2^2+\frac{\sqrt{3}}{4}R_2^2$$

$$=\frac{\pi}{6}R_1^2-\frac{\sqrt{3}}{4}R_1^2+\frac{2}{9}\pi R_1^2+\frac{\sqrt{3}}{12}R_1^2\ (\because\ ㉠)$$

$$=\frac{7}{18}\pi R_1^2-\frac{\sqrt{3}}{6}R_1^2$$

$$=\frac{R_1^2}{18}(7\pi-3\sqrt{3})$$

즉, $\frac{R_1^2}{18}(7\pi-3\sqrt{3})=7\pi-3\sqrt{3}$이므로

$$\frac{R_1^2}{18}=1 \quad \therefore\ R_1=3\sqrt{2}\ (\because\ R_1>0)$$ ····· 배점 50%

이를 ㉠에 대입하면

$$R_2=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}$$ ····· 배점 10%

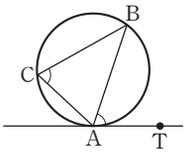
따라서 두 원 O_1, O_2의 넓이의 합은

$$\pi\times(3\sqrt{2})^2+\pi\times(\sqrt{6})^2=18\pi+6\pi=24\pi$$ ····· 배점 10%

개념 NOTE

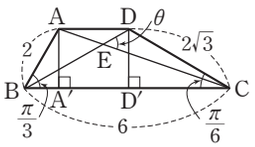
원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.

➡ $\angle BAT=\angle BCA$



23 답 ③

그림과 같이 두 점 A, D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 각각 A′, D′이라 하자.



직각삼각형 ABA′에서 $\angle ABA'=\frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{BA'}=\overline{AB}\cos\frac{\pi}{3}=2\times\frac{1}{2}=1$, $\overline{AA'}=\overline{AB}\sin\frac{\pi}{3}=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

직각삼각형 DD′C에서 $\angle DCD'=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{D'C}=\overline{CD}\cos\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$, $\overline{DD'}=\overline{CD}\sin\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}$

이때 $\overline{AA'}=\overline{DD'}$에서 $\overline{AD}/\!/\overline{BC}$이므로

$\overline{AD}=\overline{BC}-\overline{BA'}-\overline{D'C}=2$

$\therefore \square ABCD=\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{AA'}$

$=\frac{1}{2}\times(2+6)\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ …… ㉠

$\overline{A'C}=\overline{BC}-\overline{BA'}=5$이므로 직각삼각형 AA′C에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AA'}^2+\overline{A'C}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+5^2}=2\sqrt{7}$

$\overline{BD'}=\overline{BC}-\overline{D'C}=3$이므로 직각삼각형 BD′D에서

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{DD'}^2+\overline{BD'}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}=2\sqrt{3}$

$\angle CED=\theta$라 하면

$\square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\theta$

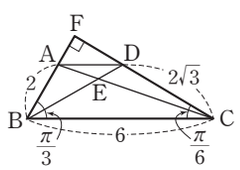
$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{7}\times2\sqrt{3}\times\sin\theta=2\sqrt{21}\sin\theta$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $4\sqrt{3}=2\sqrt{21}\sin\theta$이므로 $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{7}}$

$\therefore \sin^2\theta=\frac{4}{7}$

다른 풀이

그림과 같이 선분 BA의 연장선과 선분 CD의 연장선의 교점을 F라 하면



$\angle CFB=\pi-(\angle B+\angle C)=\frac{\pi}{2}$

따라서 삼각형 BCF는 $\angle F=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$\overline{FB}=\overline{BC}\cos\frac{\pi}{3}=6\times\frac{1}{2}=3$, $\overline{FC}=\overline{BC}\cos\frac{\pi}{6}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

이때 $\overline{FA}=\overline{FB}-\overline{AB}=1$, $\overline{FD}=\overline{FC}-\overline{CD}=\sqrt{3}$이므로 직각삼각형 FAD에서

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{FA}^2+\overline{FD}^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

△FAD∽△FBC (SAS 닮음)이므로 $\angle FAD=\frac{\pi}{3}$

$\therefore \angle BAD=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

$\therefore \square ABCD=\triangle ABD+\triangle DBC$

$=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\times6\times2\sqrt{3}\times\sin\frac{\pi}{6}$

$=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+6\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=4\sqrt{3}$ …… ㉠

직각삼각형 FAC에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{FA}^2+\overline{FC}^2}=\sqrt{1^2+(3\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$

직각삼각형 FBD에서

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{FB}^2+\overline{FD}^2}=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

$\angle CED=\theta$라 하면

$\square ABCD=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{7}\times2\sqrt{3}\times\sin\theta=2\sqrt{21}\sin\theta$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $4\sqrt{3}=2\sqrt{21}\sin\theta$이므로

$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{7}}$ $\therefore \sin^2\theta=\frac{4}{7}$

24 답 13

$\overline{AB}=x$라 하면 $\overline{DA}=2x$이므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=x^2+(2x)^2-2\times x\times2x\times\cos\frac{2}{3}\pi=5x^2-4x^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7x^2$

$\therefore \overline{BD}=\sqrt{7}x$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이가 1이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{7}x}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2$, $\frac{\sqrt{7}x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$ $\therefore x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$

$\therefore \overline{AB}=x=\frac{\sqrt{21}}{7}$, $\overline{DA}=2x=\frac{2\sqrt{21}}{7}$

한편 $\angle ABC=\theta$라 하면 $\angle ADC=\pi-\theta$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7}\times\overline{BC}\times\sin\theta$

$=\frac{\sqrt{21}}{14}\times\overline{BC}\times\sin\theta$

$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times\overline{DA}\times\overline{DC}\times\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{21}}{7}\times\overline{DC}\times\sin\theta$

$=\frac{\sqrt{21}}{7}\times\overline{DC}\times\sin\theta$

$\overline{BE}:\overline{ED}=3:4$에서 $\triangle ABC:\triangle ACD=3:4$이므로

$3\triangle ACD=4\triangle ABC$

$3\times\frac{\sqrt{21}}{7}\times\overline{DC}\times\sin\theta=4\times\frac{\sqrt{21}}{14}\times\overline{BC}\times\sin\theta$

$3\overline{DC}=2\overline{BC}$ $\therefore \overline{BC}=\frac{3}{2}\overline{DC}$

$\overline{DC}=y$라 하면 $\overline{BC}=\frac{3}{2}y$

$\angle DAB=\frac{2}{3}\pi$이므로 $\angle BCD=\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$

$\overline{BD}=\sqrt{7}x=\sqrt{3}$이므로 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{3})^2=\left(\frac{3}{2}y\right)^2+y^2-2\times\frac{3}{2}y\times y\times\cos\frac{\pi}{3}$

$3=\frac{13}{4}y^2-3y^2\times\frac{1}{2}$, $\frac{7}{4}y^2=3$, $y^2=\frac{12}{7}$ $\therefore y=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$

$\therefore \overline{DC}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$, $\overline{BC}=\frac{3}{2}\times\frac{2\sqrt{21}}{7}=\frac{3\sqrt{21}}{7}$

$\therefore \square ABCD=\triangle ABD+\triangle BCD$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{DA}\times\sin(\angle DAB)$

$+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{DC}\times\sin(\angle BCD)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7}\times\frac{2\sqrt{21}}{7}\times\sin\frac{2}{3}\pi$

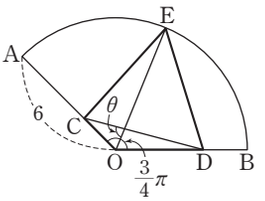
$+\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{21}}{7}\times\frac{2\sqrt{21}}{7}\times\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{3}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{6\sqrt{3}}{7}$

따라서 $p=7$, $q=6$이므로 $p+q=13$

25 답 $\frac{5}{2}$

그림과 같이 사각형 CODE의 두 대각선 CD, OE가 이루는 각의 크기를 θ라 하면



$S=\frac{1}{2}\times\overline{OE}\times\overline{CD}\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times6\times\overline{CD}\times\sin\theta$

$=3\sin\theta\times\overline{CD}$

$\therefore S^2=9\sin^2\theta\times\overline{CD}^2$

이때 $0<\theta<\pi$에서 $0<\sin\theta\le1$, 즉 $0<\sin^2\theta\le1$이므로

$S^2=9\sin^2\theta\times\overline{CD}^2\le9\overline{CD}^2$

따라서 S^2의 최댓값은 $9\overline{CD}^2$이므로

$9\overline{CD}^2=36(5+2\sqrt{2})$ $\therefore \overline{CD}^2=20+8\sqrt{2}$ …… ㉠

$\overline{OA}=\overline{OB}$이므로 $\overline{CA}=\overline{OD}$, $\overline{OC}=\overline{DB}$

$\overline{OC}=x$라 하면 $\overline{OD}=\overline{CA}=6-x$

삼각형 COD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CD}^2=x^2+(6-x)^2-2\times x\times(6-x)\times\cos\frac{3}{4}\pi$

$=2x^2-12x+36-(12x-2x^2)\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=(2-\sqrt{2})x^2-6(2-\sqrt{2})x+36$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$20+8\sqrt{2}=(2-\sqrt{2})x^2-6(2-\sqrt{2})x+36$

$(2-\sqrt{2})x^2-6(2-\sqrt{2})x+8(2-\sqrt{2})=0$

$x^2-6x+8=0$, $(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

이때 $\overline{OC}=\frac{m}{1+m}\overline{AO}=\frac{6m}{1+m}$이므로

$\frac{6m}{1+m}=2$ 또는 $\frac{6m}{1+m}=4$ $\therefore m=\frac{1}{2}$ 또는 $m=2$

따라서 모든 m의 값의 합은

$\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

step 3 최고난도 문제 | 85~87쪽

01 $3\sqrt{2}\pi$	02 6	03 ①	04 23	05 ④
06 $\frac{13\sqrt{2}}{2}$	07 $\frac{1+\sqrt{3}}{8}$	08 36	09 15	10 ①
11 -1	12 $\frac{87}{10}$			

01 답 $3\sqrt{2}\pi$

1단계 **두 삼각형 ABC, BCD의 외접원의 반지름의 길이 구하기**

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $\overline{BC}=2$, $\angle BAC=\frac{3}{4}\pi$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{2}{\sin\frac{3}{4}\pi}=2R$, $\frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R$ $\therefore R=\sqrt{2}$

따라서 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

2단계 **∠BDC의 크기 구하기**

$\overline{BC}=2$이고, $\cos(\angle BDC)>0$이므로 $\angle BDC=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2}{\sin\theta}=2\sqrt{2}$ $\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$

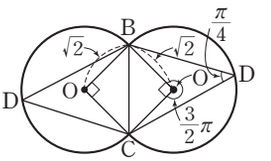
이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{4}$

3단계 **점 D가 나타내는 곡선의 길이 구하기**

삼각형 BCD의 외접원의 중심을 O라 하면 $\angle BDC=\frac{\pi}{4}$이므로 원주각의 성질에 의하여

$\angle BOC=2\angle BDC=\frac{\pi}{2}$

따라서 점 D는 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이고 중심각의 크기가 $2\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$인 부채꼴의 호 위에 있고, 그림과 같이 선분 BC를 기준으로 양쪽에 2개의 부채꼴을 그릴 수 있으므로 점 D가 나타내는 곡선의 길이는



$2\left(\sqrt{2}\times\frac{3}{2}\pi\right)=3\sqrt{2}\pi$

idea

02 답 6

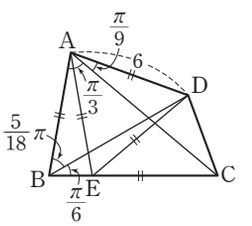
1단계 **∠DCA의 크기 구하기**

삼각형 ABD에서 $\angle ABD=\frac{5}{18}\pi$, $\angle BAD=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{9}=\frac{4}{9}\pi$이므로

$\angle ADB=\pi-\frac{5}{18}\pi-\frac{4}{9}\pi=\frac{5}{18}\pi$

따라서 $\angle ABD=\angle ADB$이므로 삼각형 ABD는 $\overline{AB}=\overline{AD}$인 이등변삼각형이다.

선분 BC 위에 $\angle ABE=\angle AEB=\frac{4}{9}\pi$가 되도록 점 E를 잡으면



$\angle BAE=\pi-\frac{4}{9}\pi-\frac{4}{9}\pi=\frac{\pi}{9}$

$\therefore \angle EAD=\angle BAD-\angle BAE$

$=\frac{4}{9}\pi-\frac{\pi}{9}=\frac{\pi}{3}$

이때 $\overline{AB}=\overline{AE}$, $\overline{AB}=\overline{AD}$에서 $\overline{AE}=\overline{AD}$이므로 삼각형 AED는 정삼각형이다.

$\therefore \overline{ED}=\overline{AE}=\overline{AD}$

삼각형 AEC에서

$\angle EAC=\angle BAC-\angle BAE=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{9}=\frac{2}{9}\pi$

$\angle AEC=\pi-\angle AEB=\pi-\frac{4}{9}\pi=\frac{5}{9}\pi$

$\therefore \angle ACE=\pi-\frac{2}{9}\pi-\frac{5}{9}\pi=\frac{2}{9}\pi$

따라서 $\angle EAC=\angle ACE$이므로 삼각형 AEC는 $\overline{AE}=\overline{EC}$인 이등변삼각형이다.

이때 $\overline{DE}=\overline{AE}=\overline{EC}$이므로 삼각형 DEC도 이등변삼각형이다.

삼각형 DEC에서

$\angle CED=\angle AEC-\angle AED=\frac{5}{9}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{9}\pi$

$\therefore \angle DCE=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{2}{9}\pi\right)=\frac{7}{18}\pi$

$\therefore \angle DCA=\angle DCE-\angle ACE=\frac{7}{18}\pi-\frac{2}{9}\pi=\frac{\pi}{6}$

2단계 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이 구하기

따라서 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{6}{\sin\frac{\pi}{6}}=2R,\ \frac{6}{\frac{1}{2}}=2R \qquad \therefore R=6$

03 답 ①

1단계 사각형 $P_1P_2P_3P_4$가 한 원에 내접함을 알기

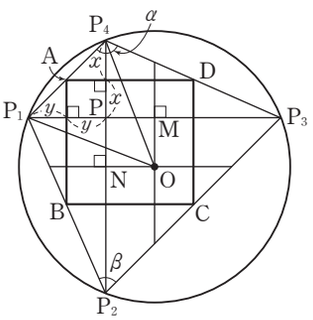
$\sin\alpha=\sin\beta$에서 $\alpha\neq\beta$이므로 사인함수의 그래프의 대칭성에 의하여

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore \alpha+\beta=\pi$

따라서 사각형 $P_1P_2P_3P_4$는 한 원에 내접한다.

2단계 $\overline{AD}$와 점 P, $\overline{AB}$와 점 P 사이의 거리 구하기

선분 AD와 점 P 사이의 거리를 x, 선분 AB와 점 P 사이의 거리를 y라 하고, 사각형 $P_1P_2P_3P_4$의 외접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 R라 하자.



$\overline{P_1P_3}=\overline{P_1P}+\overline{PP_3}=2\overline{AD}=4$

$\overline{P_2P_4}=\overline{P_2P}+\overline{PP_4}=2\overline{AB}=4$

사각형 $P_1P_2P_3P_4$의 외접원과 삼각형 $P_1P_3P_4$의 외접원이 같으므로 삼각형 $P_1P_3P_4$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{P_1P_3}}{\sin\alpha}=2R,\ \frac{4}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=2R \qquad \therefore R=\sqrt{5}$

이때 점 O는 삼각형 $P_1P_3P_4$의 외접원의 중심이므로 선분 P_1P_3의 수직이등분선 위에 있고, 삼각형 $P_1P_2P_4$의 외접원의 중심이므로 선분 P_2P_4의 수직이등분선 위에 있다.

두 선분 P_1P_3, P_2P_4의 중점을 각각 M, N이라 하면 $\overline{P_1M}=2$, $\overline{P_4N}=2$이므로

$\overline{MO}=\overline{PN}=\overline{P_4N}-\overline{P_4P}=2-2x$

$\overline{NO}=\overline{PM}=\overline{P_1M}-\overline{P_1P}=2-2y$

직각삼각형 P_1OM에서 $\overline{OP_1}^2=\overline{P_1M}^2+\overline{MO}^2=4+(2-2x)^2$

이때 $\overline{OP_1}$은 사각형 $P_1P_2P_3P_4$의 외접원의 반지름이므로 $\overline{OP_1}=\sqrt{5}$에서 $\overline{OP_1}^2=5$

즉, $4+(2-2x)^2=5$이므로 $4x^2-8x+3=0$

$(2x-1)(2x-3)=0 \qquad \therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

직각삼각형 P_4NO에서 $\overline{OP_4}^2=\overline{P_4N}^2+\overline{NO}^2=4+(2-2y)^2$

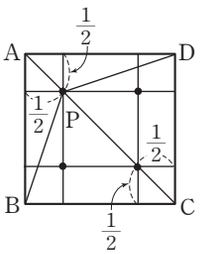
이때 $\overline{OP_4}$는 사각형 $P_1P_2P_3P_4$의 외접원의 반지름이므로 $\overline{OP_4}=\sqrt{5}$에서 $\overline{OP_4}^2=5$

즉, $4+(2-2y)^2=5$이므로 $4y^2-8y+3=0$

$(2y-1)(2y-3)=0 \qquad \therefore y=\frac{1}{2}$ 또는 $y=\frac{3}{2}$

3단계 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$의 값 구하기

따라서 점 P는 그림과 같이 네 가지 경우가 있고 각 점에서 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$의 값은 같으므로



$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$

$=\overline{AC}+2\overline{PB}$

$=2\sqrt{2}+2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$=2\sqrt{2}+\sqrt{10}$

04 답 23

1단계 $\overline{AE}$, $\overline{BE}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$의 길이 구하기

선분 AE는 삼각형 ABE의 외접원의 지름이므로 $\angle ABE=\frac{\pi}{2}$

$\sin(\angle BAE)=\frac{3}{5}$이므로

$\cos(\angle BAE)=\sqrt{1-\sin^2(\angle BAE)}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}\left(\because 0<\angle BAE<\frac{\pi}{2}\right)$

이때 직각삼각형 ABE에서

$\overline{AE}=\frac{\overline{AB}}{\cos(\angle BAE)}=\frac{2}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{2}$

$\therefore \overline{BE}=\overline{AE}\sin(\angle BAE)=\frac{5}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{2}$

$\overline{BE}=3\overline{BC}$이므로 $\overline{BC}=\frac{1}{3}\overline{BE}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore \overline{BD}=2\overline{BC}=2\times\frac{1}{2}=1$

2단계 $\cos(\angle BAC)$, $\cos(\angle BAD)$, $\cos(\angle ACB)$, $\cos(\angle ADB)$의 값 구하기

삼각형 ABC의 외접원의 지름이 $\overline{AE}$이므로 사인법칙에 의하여

$\sin(\angle BAC)=\frac{\overline{BC}}{\overline{AE}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{1}{5}$

$\therefore \cos(\angle BAC)=\sqrt{1-\sin^2(\angle BAC)}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}\left(\because 0<\angle BAC<\frac{\pi}{2}\right)$

삼각형 ABD의 외접원의 지름이 $\overline{AE}$이므로 사인법칙에 의하여

$\sin(\angle BAD)=\frac{\overline{BD}}{\overline{AE}}=\frac{1}{\frac{5}{2}}=\frac{2}{5}$

$\therefore \cos(\angle BAD)=\sqrt{1-\sin^2(\angle BAD)}$

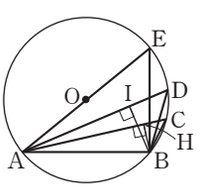
$=\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{5}\left(\because 0<\angle BAD<\frac{\pi}{2}\right)$

또 직각삼각형 ABE에서 $\cos(\angle AEB)=\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{3}{5}$이고 원주각의 성질에 의하여 $\angle AEB=\angle ADB=\angle ACB$이므로

$\cos(\angle AEB)=\cos(\angle ADB)=\cos(\angle ACB)=\frac{3}{5}$

3단계 $\overline{AC}$, $\overline{AD}$의 길이 구하기

점 B에서 $\overline{AC}$, $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하자.



삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\overline{AH}+\overline{HC}$

$=\overline{AB}\cos(\angle BAC)+\overline{BC}\cos(\angle ACB)$

$=2\times\frac{2\sqrt{6}}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}$

$=\frac{4\sqrt{6}}{5}+\frac{3}{10}$

삼각형 ABD에서

$\overline{AD}=\overline{AI}+\overline{ID}$

$=\overline{AB}\cos(\angle BAD)+\overline{BD}\cos(\angle ADB)$

$=2\times\frac{\sqrt{21}}{5}+1\times\frac{3}{5}$

$=\frac{2\sqrt{21}}{5}+\frac{3}{5}$

4단계 $a+b+c$의 값 구하기

$\therefore \overline{AC}+\overline{AD}+\overline{AE}=\left(\frac{4\sqrt{6}}{5}+\frac{3}{10}\right)+\left(\frac{2\sqrt{21}}{5}+\frac{3}{5}\right)+\frac{5}{2}$

$=\frac{2\sqrt{21}+4\sqrt{6}+17}{5}$

따라서 $a=2$, $b=4$, $c=17$이므로

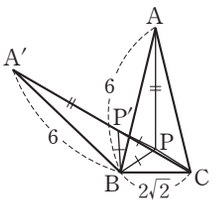
$a+b+c=23$

idea

05 답 ④

1단계 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$의 값이 최소가 되는 경우 알기

그림과 같이 점 B를 중심으로 $\overline{PB}$, $\overline{AB}$를 각각 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 회전한 것을 각각 $\overline{P'B}$, $\overline{A'B}$라 하자.



$\overline{PB}=\overline{P'B}$이고 $\angle PBP'=\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 P′BP는 정삼각형이다.

$\therefore \overline{PB}=\overline{P'B}=\overline{PP'}$

또 $\overline{A'B}=\overline{AB}$, $\overline{BP'}=\overline{BP}$, $\angle P'BA'=\angle PBA$이므로

$\triangle A'BP'\equiv\triangle ABP$ (SAS 합동) $\therefore \overline{P'A'}=\overline{PA}$

따라서 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{P'A'}+\overline{PP'}+\overline{PC}\geq\overline{A'C}$이므로

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$의 최솟값은 선분 A′C의 길이와 같다.

2단계 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$의 최솟값 구하기

삼각형 A′BC에서 $\angle A'BC=\frac{5}{12}\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi$이므로 코사인법칙에 의하여

$\overline{A'C}^2=6^2+(2\sqrt{2})^2-2\times6\times2\sqrt{2}\times\cos\frac{3}{4}\pi$

$=44-24\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=68$

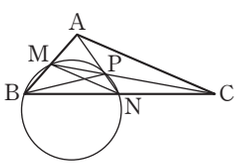
$\therefore \overline{A'C}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$

따라서 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$의 최솟값은 $2\sqrt{17}$이다.

06 답 $\frac{13\sqrt{2}}{2}$

1단계 $\overline{AN}$과 $\overline{CM}$의 교점을 P라 할 때, $\overline{AP}$, $\overline{CP}$의 길이 구하기

그림과 같이 두 선분 AN, CM의 교점을 P라 하면 $\angle ANB+\angle BMC=\pi$이므로 사각형 BNPM은 한 원에 내접한다.



원주각의 성질에 의하여

$\angle MBP=\angle MNP$이고 $\angle BAN$은 공통이므로

$\triangle ABP\backsim\triangle ANM$ (AA 닮음)

$\overline{AB}:\overline{AP}=\overline{AN}:\overline{AM}$이므로 $\overline{AP}\times\overline{AN}=\overline{AB}\times\overline{AM}$

$\therefore \overline{AP}\times\overline{AN}=5\times\frac{5}{2}=\frac{25}{2}$ …… ㉠

한편 삼각형 ABC에서 두 중선 AN, CM의 교점이 P이므로 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

즉, $\overline{AP}:\overline{PN}=2:1$이므로 $\overline{AN}=\frac{3}{2}\overline{AP}$

이를 ㉠에 대입하면 $\overline{AP}\times\frac{3}{2}\overline{AP}=\frac{25}{2}$

$\overline{AP}^2=\frac{25}{3}$ $\therefore \overline{AP}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$

원주각의 성질에 의하여 $\angle PMN=\angle PBN$이고 $\angle BCM$은 공통이므로

$\triangle CMN\backsim\triangle CBP$ (AA 닮음)

$\overline{CN}:\overline{CM}=\overline{CP}:\overline{CB}$이므로 $\overline{CM}\times\overline{CP}=\overline{CN}\times\overline{CB}$

$\therefore \overline{CM}\times\overline{CP}=6\times12=72$ …… ㉡

점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{CP}:\overline{PM}=2:1$ $\therefore \overline{CM}=\frac{3}{2}\overline{CP}$

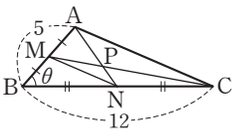
이를 ㉡에 대입하면 $\frac{3}{2}\overline{CP}\times\overline{CP}=72$

$\overline{CP}^2=48$ $\therefore \overline{CP}=4\sqrt{3}$

2단계 $\overline{AC}$의 길이 구하기

$\angle ABC=\theta$라 하면

$\angle APC=\angle MPN=\pi-\theta$



삼각형 MBN에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2+6^2-\overline{MN}^2}{2\times\frac{5}{2}\times6}=\frac{\frac{169}{4}-\overline{MN}^2}{30}$ …… ㉢

삼각형 APC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\pi-\theta)=\frac{\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2+(4\sqrt{3})^2-\overline{AC}^2}{2\times\frac{5\sqrt{3}}{3}\times4\sqrt{3}}=\frac{\frac{169}{3}-\overline{AC}^2}{40}$

$\therefore \cos\theta=\frac{\overline{AC}^2-\frac{169}{3}}{40}$ …… ㉣

㉢, ㉣에서

$\frac{\frac{169}{4}-\overline{MN}^2}{30}=\frac{\overline{AC}^2-\frac{169}{3}}{40}$

이때 $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{AC}$이므로

$\frac{\frac{169}{4}-\frac{1}{4}\overline{AC}^2}{30}=\frac{\overline{AC}^2-\frac{169}{3}}{40}$

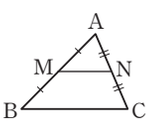
$169-\overline{AC}^2=3\overline{AC}^2-169$, $\overline{AC}^2=\frac{169}{2}$

$\therefore \overline{AC}=\frac{13\sqrt{2}}{2}$

개념 NOTE

삼각형 ABC에서 두 선분 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하면

$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$



07 답 $\frac{1+\sqrt{3}}{8}$

1단계 $\overline{AP}=x$로 놓고 $\cos\theta$의 값을 x에 대한 식으로 나타내기

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=2^2+2^2-2\times2\times2\times\cos\frac{\pi}{6}$

$=8-8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=8-4\sqrt{3}$

$\overline{AP}=x$라 하면 $\angle PAB=\frac{\pi}{6}$이므로 삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BP}^2=2^2+x^2-2\times2\times x\times\cos\frac{\pi}{6}$

$=4+x^2-4x\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=x^2-2\sqrt{3}x+4$

삼각형 PBC는 $\overline{BP}=\overline{CP}$인 이등변삼각형이므로 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{BP}^2+\overline{CP}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{BP}\times\overline{CP}}$$
$$=\frac{\overline{BP}^2+\overline{BP}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{BP}\times\overline{BP}}$$
$$=\frac{2(x^2-2\sqrt{3}x+4)-(8-4\sqrt{3})}{2(x^2-2\sqrt{3}x+4)}$$
$$=1-\frac{4-2\sqrt{3}}{x^2-2\sqrt{3}x+4}$$

2단계 $\cos\theta$**의 최솟값 구하기**

이때 $x^2-2\sqrt{3}x+4=(x-\sqrt{3})^2+1$은 $x=\sqrt{3}$일 때 최솟값 1을 가지므로

$$\cos\theta=1-\frac{4-2\sqrt{3}}{x^2-2\sqrt{3}x+4}\ge1-(4-2\sqrt{3})=2\sqrt{3}-3$$

따라서 $\cos\theta$의 최솟값은 $2\sqrt{3}-3$이므로

$$\cos(\angle BP_0C)=2\sqrt{3}-3$$

3단계 R^2**의 값 구하기**

$$\therefore\ \sin^2(\angle BP_0C)=1-\cos^2(\angle BP_0C)$$
$$=1-(2\sqrt{3}-3)^2$$
$$=12\sqrt{3}-20$$

삼각형 P_0BC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BP_0C)}=2R$$
$$\therefore\ R^2=\frac{\overline{BC}^2}{4\sin^2(\angle BP_0C)}$$
$$=\frac{8-4\sqrt{3}}{4(12\sqrt{3}-20)}=\frac{2-\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-5)}$$
$$=\frac{(2-\sqrt{3})(3\sqrt{3}+5)}{4(3\sqrt{3}-5)(3\sqrt{3}+5)}=\frac{1+\sqrt{3}}{8}$$

08 답 36

1단계 **삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이 구하기**

$\angle BAC=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos\theta$$
$$=25-24\cos\theta$$
$$\therefore\ \overline{BC}=\sqrt{25-24\cos\theta}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R_1이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R_1\qquad\therefore\ R_1=\frac{\overline{BC}}{2\sin\theta}=\frac{\sqrt{25-24\cos\theta}}{2\sin\theta}$$

2단계 **삼각형 ADE의 외접원의 반지름의 길이 구하기**

직각삼각형 ABD에서

$$\overline{AD}=\overline{AB}\cos\theta=3\cos\theta$$

직각삼각형 ACE에서

$$\overline{AE}=\overline{AC}\cos\theta=4\cos\theta$$

삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{DE}^2=(3\cos\theta)^2+(4\cos\theta)^2-2\times3\cos\theta\times4\cos\theta\times\cos\theta$$
$$=25\cos^2\theta-24\cos^3\theta$$
$$=\cos^2\theta(25-24\cos\theta)$$
$$\therefore\ \overline{DE}=\cos\theta\sqrt{25-24\cos\theta}$$

삼각형 ADE의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{DE}}{\sin\theta}=2R_2\qquad\therefore\ R_2=\frac{\overline{DE}}{2\sin\theta}=\frac{\cos\theta\sqrt{25-24\cos\theta}}{2\sin\theta}$$

3단계 **삼각형 PDE의 외접원의 넓이 구하기**

삼각형 ABC의 외접원의 넓이와 삼각형 ADE의 외접원의 넓이의 차가 4π이므로

$$\pi R_1^2-\pi R_2^2=4\pi$$
$$\pi\left(\frac{\sqrt{25-24\cos\theta}}{2\sin\theta}\right)^2-\pi\left(\frac{\cos\theta\sqrt{25-24\cos\theta}}{2\sin\theta}\right)^2=4\pi$$
$$\frac{25-24\cos\theta}{4\sin^2\theta}-\frac{\cos^2\theta(25-24\cos\theta)}{4\sin^2\theta}=4$$
$$\frac{(25-24\cos\theta)(1-\cos^2\theta)}{4\sin^2\theta}=4\ \longrightarrow\ 1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$$
$$\frac{25-24\cos\theta}{4}=4,\ 25-24\cos\theta=16$$
$$24\cos\theta=9\qquad\therefore\ \cos\theta=\frac{3}{8}\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{55}}{8}\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

$\angle AEP=\angle ADP=\frac{\pi}{2}$이므로 사각형 AEPD는 한 원에 내접하고, 삼각형 PDE의 외접원과 삼각형 ADE의 외접원은 같다.

따라서 삼각형 PDE의 외접원의 넓이는 πR_2^2이므로 ㉠, ㉡에서

$$\pi R_2^2=\pi\left(\frac{\cos\theta\sqrt{25-24\cos\theta}}{2\sin\theta}\right)^2$$
$$=\frac{\cos^2\theta(25-24\cos\theta)}{4\sin^2\theta}\pi$$
$$=\frac{\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(25-24\times\frac{3}{8}\right)}{4\left(\frac{\sqrt{55}}{8}\right)^2}\pi$$
$$=\frac{36}{55}\pi$$

4단계 $55a$**의 값 구하기**

따라서 $a=\frac{36}{55}$이므로 $55a=36$

09 답 15

1단계 $\angle CAB=\theta$**로 놓고** $\overline{BC}$, $\overline{AD}$**를** r, R, θ**에 대한 식으로 나타내기**

$\angle CAB=\theta$라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2r\qquad\therefore\ \overline{BC}=2r\sin\theta\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

$\overline{AC}\parallel\overline{BD}$이므로 $\angle ABD=\pi-\theta$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin(\pi-\theta)}=2R,\ \frac{\overline{AD}}{\sin\theta}=2R$$
$$\therefore\ \overline{AD}=2R\sin\theta\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

2단계 $\overline{AC}=k$**로 놓고** $\overline{BC}^2$, $\overline{AD}^2$**을** k**에 대한 식으로 나타내기**

$\overline{AH}:\overline{HB}=1:3$이므로

$$\overline{AH}=\frac{1}{4}\overline{AB}=\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}$$

$\overline{AC}=k$라 하면 $\overline{BD}=2k$

직각삼각형 AHC에서 $\cos\theta=\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}=\frac{1}{2k}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=2^2+k^2-2\times2\times k\times\cos\theta$$
$$=4+k^2-4k\times\frac{1}{2k}$$
$$=k^2+2\qquad\cdots\cdots\ ㉢$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=2^2+(2k)^2-2\times2\times2k\times\underbrace{\cos(\pi-\theta)}_{\hookrightarrow -\cos\theta}$

$=4+4k^2-8k\times\left(-\frac{1}{2k}\right)$

$=4k^2+8$ …… ㉣

3단계 $\overline{AC}^2$**의 값 구하기**

㉠을 ㉢에 대입하면

$4r^2\sin^2\theta=k^2+2$ …… ㉤

㉡을 ㉣에 대입하면

$4R^2\sin^2\theta=4k^2+8$ …… ㉥

㉥−㉤을 하면

$4(R^2-r^2)\sin^2\theta=3k^2+6$

$4(R^2-r^2)\times\sin^2\theta=51$에서 $3k^2+6=51$ $\therefore k^2=15$

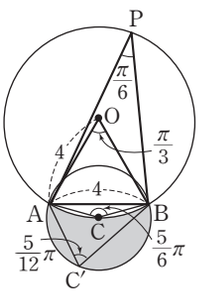
$\therefore \overline{AC}^2=15$

idea

10 답 ①

1단계 **점 M의 위치 알기**

그림과 같이 무대 앞에 $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\angle ACB=\frac{5}{6}\pi$를 만족시키는 점 C를 잡고, 삼각형 ACB의 외접원의 중심을 O라 하자.



점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{AC}$인 원 위의 점 C′에 대하여

$\angle AC'B=\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{5}{12}\pi$

삼각형 ACB의 외접원에서 점 C를 포함하지 않는 호 AB 위의 점 P에 대하여 사각형 ACBP는 원에 내접하므로

$\angle APB=\pi-\angle ACB=\pi-\frac{5}{6}\pi=\frac{\pi}{6}$

$\therefore \angle AOB=2\angle APB=\frac{\pi}{3}$

이때 $\overline{OA}=\overline{OB}$이므로 삼각형 OAB는 정삼각형이다.

$\therefore \overline{AB}=\overline{OA}=\overline{OB}=4$

따라서 R석에 해당하는 부분의 넓이는 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로 반지름의 길이가 $\overline{AC}$이고 중심각의 크기가 $\frac{7}{6}\pi$인 부채꼴 CAB의 넓이에서 사각형 OACB의 넓이를 더하고 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 OAB의 넓이를 빼면 된다.

2단계 **R석에 해당하는 부분의 넓이 구하기**

$\overline{AC}=\overline{CB}=x$라 하면 삼각형 ACB에서 코사인법칙에 의하여

$4^2=x^2+x^2-2\times x\times x\times\cos\frac{5}{6}\pi$

$16=2x^2-2x^2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $(2+\sqrt{3})x^2=16$

$\therefore x^2=\frac{16}{2+\sqrt{3}}=\frac{16(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=32-16\sqrt{3}$ …… ㉠

따라서 R석에 해당하는 부분의 넓이는

$\left(\frac{1}{2}\times x^2\times\frac{7}{6}\pi\right)+\underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2+\frac{1}{2}\times x^2\times\sin\frac{5}{6}\pi\right)}_{\hookrightarrow \triangle OAB+\triangle ACB}-\left(\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{\pi}{3}\right)$

㉠을 대입하면

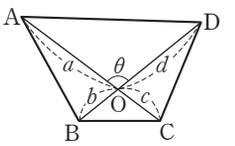
$\frac{7}{12}\pi(32-16\sqrt{3})+\left\{4\sqrt{3}+(16-8\sqrt{3})\times\frac{1}{2}\right\}-\frac{8}{3}\pi$

$=\frac{48-28\sqrt{3}}{3}\pi+8$

11 답 −1

1단계 $\overline{AO}=a$, $\overline{BO}=b$, $\overline{CO}=c$, $\overline{DO}=d$, $\angle AOD=\theta$**로 놓고** $\sin\theta$**의 값을** a, b, c, d**에 대한 식으로 나타내기**

$\overline{AO}=a$, $\overline{BO}=b$, $\overline{CO}=c$, $\overline{DO}=d$라 하고 $\angle AOD=\theta$라 하면 사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{49}{6}$이므로



$\frac{1}{2}(a+c)(b+d)\sin\theta=\frac{49}{6}$

$\therefore \sin\theta=\frac{49}{3(ab+bc+cd+ad)}$ …… ㉠

2단계 $\triangle ABO+\triangle DOC$**의 값을** a, b, c, d**에 대한 식으로 나타내기**

삼각형 AOD의 넓이가 삼각형 BCO의 넓이의 $\frac{9}{2}$배이므로

$\frac{1}{2}ad\sin\theta=\frac{9}{2}\times\frac{1}{2}bc\sin\theta$

$\therefore ad=\frac{9}{2}bc$ …… ㉡

삼각형 ABO의 넓이와 삼각형 DOC의 넓이의 합은

$\frac{1}{2}ab\sin(\pi-\theta)+\frac{1}{2}cd\sin(\pi-\theta)$

$=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{2}cd\sin\theta$

$=\frac{\sin\theta(ab+cd)}{2}$

$=\frac{49(ab+cd)}{6(ab+bc+cd+ad)}$ (∵ ㉠)

$=\frac{49}{6}\times\frac{ab+cd}{ab+cd+bc+\frac{9}{2}bc}$ (∵ ㉡)

$=\frac{49}{6}\times\frac{1}{\frac{ab+cd+bc+\frac{9}{2}bc}{ab+cd}}$

$=\frac{49}{6}\times\frac{1}{1+\frac{11bc}{2(ab+cd)}}$

3단계 $\triangle ABO+\triangle DOC$**의 최솟값 구하기**

$ab>0$, $cd>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$ab+cd\geq2\sqrt{abcd}$ (단, 등호는 $ab=cd$일 때 성립)

$\therefore \frac{bc}{ab+cd}\leq\frac{bc}{2\sqrt{abcd}}=\frac{bc}{2\sqrt{\frac{9}{2}(bc)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$ (∵ ㉡)

따라서 $\frac{bc}{ab+cd}$의 최댓값이 $\frac{\sqrt{2}}{6}$이므로

$\frac{49}{6}\times\frac{1}{1+\frac{11bc}{2(ab+cd)}}\geq\frac{49}{6}\times\frac{1}{1+\frac{11}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{6}}$

$=\frac{98}{12+11\sqrt{2}}$

$=\frac{98(12-11\sqrt{2})}{(12+11\sqrt{2})(12-11\sqrt{2})}$

$=-12+11\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ABO의 넓이와 삼각형 DOC의 넓이의 합의 최솟값은 $-12+11\sqrt{2}$이다.

4단계 $m+n$**의 값 구하기**

따라서 $m=-12$, $n=11$이므로

$m+n=-1$

12 답 $\frac{87}{10}$

1단계 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이 구하기

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=6^2+12^2-2\times6\times12\times\cos\frac{\pi}{3}$

$=180-144\times\frac{1}{2}=108$

$\therefore\ \overline{AC}=6\sqrt{3}$

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r'이라 하면 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times r'\times(6+12+6\sqrt{3})=(9+3\sqrt{3})r'$ …… ㉠

또 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times12\times\sin\frac{\pi}{3}=36\times\frac{\sqrt{3}}{2}=18\sqrt{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$r'(9+3\sqrt{3})=18\sqrt{3}$

$\therefore\ r'=\frac{18\sqrt{3}}{9+3\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

$=\frac{6\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=3\sqrt{3}-3$

2단계 $\overline{EF}-2r$의 값을 m, n에 대한 식으로 나타내기

두 삼각형 ABC, EBF가 닮음이고 닮음비가 $(m+n):n$이므로

$r':r=(m+n):n$

$\therefore\ r=r'\times\frac{n}{m+n}$

$\therefore\ 2r=2r'\times\frac{n}{m+n}=\frac{(6\sqrt{3}-6)n}{m+n}$

또 $\overline{AC}:\overline{EF}=(m+n):n$이므로

$\overline{EF}=\frac{n}{m+n}\overline{AC}=\frac{6\sqrt{3}n}{m+n}$

$\therefore\ \overline{EF}-2r=\frac{6\sqrt{3}n}{m+n}-\frac{(6\sqrt{3}-6)n}{m+n}$

$=\frac{6n}{m+n}=\frac{6}{\frac{m}{n}+1}$

3단계 $\overline{EF}-2r$의 값이 자연수가 되는 경우 구하기

$\overline{EF}-2r$의 값이 자연수가 되려면 $\frac{6}{\frac{m}{n}+1}=k$라 할 때, $k\left(\frac{m}{n}+1\right)=6$인 자연수 k가 존재해야 한다.

이때 $k>5$이면 $\frac{mk}{n}+k\ge\frac{6m}{n}+6>6$이므로 $1\le k\le5$이다.

$k=1$일 때, $\frac{m}{n}=5$

$k=2$일 때, $\frac{m}{n}=2$

$k=3$일 때, $\frac{m}{n}=1$

$k=4$일 때, $\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$

$k=5$일 때, $\frac{m}{n}=\frac{1}{5}$

4단계 모든 $\frac{m}{n}$의 값의 합 구하기

따라서 모든 $\frac{m}{n}$의 값의 합은

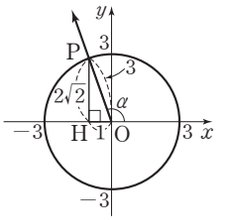
$5+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{87}{10}$

기출 변형 문제로 단원 마스터 | 88~91쪽

01 73	02 4	03 ①	04 $\frac{10\sqrt{2}}{3}\pi$	05 7	
06 ②	07 ③	08 2	09 ⑤	10 ①	11 $5\sqrt{5}$
12 $18\sqrt{11}$	13 $\frac{\sqrt{14}}{4}$	14 $2\sqrt{19}+3\sqrt{3}$	15 4π	16 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$	

01 답 73

$\cos\alpha=-\frac{1}{3}$이므로 그림과 같이 제2사분면에 있는 점 P를 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



직각삼각형 PHO에서

$\overline{PH}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OH}^2}=2\sqrt{2}$이므로 점 P의 좌표는 $(-1,\ 2\sqrt{2})$

점 Q는 점 P를 y축에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 Q의 좌표는 $(1,\ 2\sqrt{2})$

$\overline{OQ}=3$이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

또 점 R는 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 R의 좌표는 $(2\sqrt{2},\ -1)$

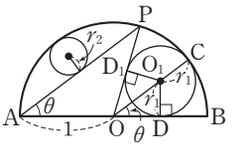
삼각함수의 정의에 의하여 $\tan\gamma=\frac{-1}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore\ 72(\sin^2\beta+\tan^2\gamma)=72\left\{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right\}$

$=72\left(\frac{8}{9}+\frac{1}{8}\right)=64+9=73$

02 답 4

그림과 같이 부채꼴 OBP에 내접하는 원의 중심을 O_1이라 하고, 이 원이 호 BP와 만나는 점을 C, 선분 OB와 만나는 점을 D라 하면



$\overline{O_1D}=\overline{O_1C}=r_1$

$\angle BAP=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\angle BOP=2\angle BAP=2\theta$

부채꼴 OBP에 내접하는 원이 선분 OP와 만나는 점을 D_1이라 하면

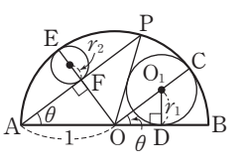
$\triangle ODO_1\equiv\triangle OD_1O_1$ (RHS 합동)이므로 $\angle DOO_1=\angle D_1OO_1$에서

$\angle BOC=\frac{1}{2}\angle BOP=\theta$

삼각형 O_1OD는 직각삼각형이므로

$\sin\theta=\frac{\overline{O_1D}}{\overline{OO_1}}=\frac{r_1}{1-r_1}$ …… ㉠

그림과 같이 호 AP를 이등분하는 점을 E, 선분 AP의 중점을 F라 하면 삼각형 OFA는 직각삼각형이므로



$\overline{OF}=\overline{OA}\sin\theta=\sin\theta$

이때 $\overline{OE}=\overline{OF}+\overline{EF}$이므로

$1=\sin\theta+2r_2$ $\therefore\ \sin\theta=1-2r_2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{r_1}{1-r_1}=1-2r_2$ ····· ㉢

$r_1+2r_2=\frac{31}{40}$에서 $2r_2=\frac{31}{40}-r_1$이므로 이를 ㉢에 대입하면

$\frac{r_1}{1-r_1}=1-\frac{31}{40}+r_1$, $\frac{r_1}{1-r_1}=\frac{9+40r_1}{40}$

$40r_1^2+9r_1-9=0$, $(8r_1-3)(5r_1+3)=0$

$\therefore r_1=\frac{3}{8}$ ($\because r_1>0$)

이를 ㉠에 대입하면

$\sin\theta=\frac{\frac{3}{8}}{1-\frac{3}{8}}=\frac{3}{5}$

$\therefore \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore 5\cos(\angle BAP)=5\times\frac{4}{5}=4$

03 답 ①

이차방정식 $x^2+x+k=0$의 두 근이 $2\cos\theta$, $\sin\theta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$2\cos\theta+\sin\theta=-1$ ····· ㉠

$2\cos\theta\sin\theta=k$ ····· ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$4\cos^2\theta+4\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta=1$

$4\cos^2\theta+4\cos\theta\sin\theta+1-\cos^2\theta=1$

$3\cos^2\theta+4\cos\theta\sin\theta=0$, $\cos\theta(3\cos\theta+4\sin\theta)=0$

$\therefore \cos\theta=0$ 또는 $\cos\theta=-\frac{4}{3}\sin\theta$

이때 $\cos\theta=0$이면 이차방정식 $x^2+x+k=0$이 $x=0$을 근으로 가지므로 $k=0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore \cos\theta=-\frac{4}{3}\sin\theta$ ····· ㉢

㉢을 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$\sin^2\theta+\left(-\frac{4}{3}\sin\theta\right)^2=1$

$\frac{25}{9}\sin^2\theta=1$, $\sin^2\theta=\frac{9}{25}$

$\therefore \sin\theta=-\frac{3}{5}$ 또는 $\sin\theta=\frac{3}{5}$

이를 ㉢에 대입하면

$\sin\theta=-\frac{3}{5}$일 때 $\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\sin\theta=\frac{3}{5}$일 때 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{25}$

따라서 ㉡에서

$k=2\cos\theta\sin\theta=2\times\left(-\frac{12}{25}\right)=-\frac{24}{25}$

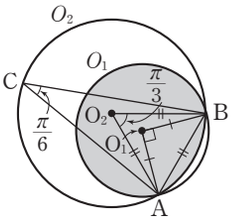
04 답 $\frac{10\sqrt{2}}{3}\pi$

원 O_1의 중심을 O_1, 원 O_2의 중심을 O_2라 하면 삼각형 O_1AB에서 $\overline{O_1A}=\overline{O_1B}=a$, $\overline{AB}=\sqrt{2}a$이므로 삼각형 O_1AB는 직각이등변삼각형이다.

원 O_2에서 $\angle AO_2B=2\angle ACB=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$이고 $\overline{O_2A}=\overline{O_2B}$이므로 삼각형 O_2AB는 정삼각형이다.

$\therefore \overline{O_2A}=\overline{AB}=\sqrt{2}a$

따라서 그림에서 원 O_1과 원 O_2의 공통부분의 넓이는



(부채꼴 O_2AB의 넓이)$-\triangle O_2AB$

$+\frac{3}{4}$(원 O_1의 넓이)$+\triangle O_1AB$

$=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}a)^2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2}a)^2$

$+\frac{3}{4}\times\pi\times a^2+\frac{1}{2}\times a\times a$

$=a^2\left(\frac{13}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

이때 $\frac{13}{3}\pi-2(\sqrt{3}-1)=4\left(\frac{13}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$이므로

$a^2=4$ $\therefore a=2$ ($\because a>0$)

원 O_2의 반지름의 길이는 $\overline{O_2A}=\sqrt{2}a=2\sqrt{2}$

따라서 점 C가 나타내는 곡선은 중심각의 크기가 $2\pi-\angle AO_2B=\frac{5}{3}\pi$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$인 부채꼴의 호와 같으므로 구하는 곡선의 길이는

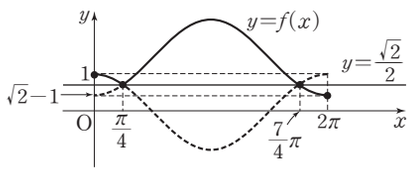
$2\sqrt{2}\times\frac{5}{3}\pi=\frac{10\sqrt{2}}{3}\pi$

05 답 7

(i) $k=1$일 때,

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $f(x)=\begin{cases}\cos x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)\\ \sqrt{2}-\cos x & \left(\frac{\pi}{4}<x\le 2\pi\right)\end{cases}$

$0\le x\le 2\pi$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$는 그림과 같다.



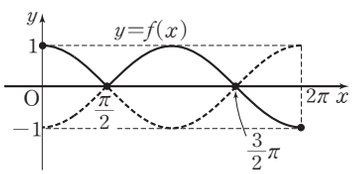
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 개수는 2이므로

$a_1=2$

(ii) $k=2$일 때,

$\cos\frac{\pi}{2}=0$이므로 $f(x)=\begin{cases}\cos x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\\ -\cos x & \left(\frac{\pi}{2}<x\le 2\pi\right)\end{cases}$

$0\le x\le 2\pi$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=0$은 그림과 같다.



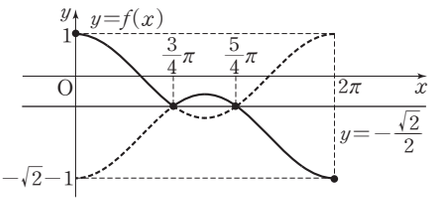
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=0$의 교점의 개수는 2이므로

$a_2=2$

(iii) $k=3$일 때,

$\cos\frac{3}{4}\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $f(x)=\begin{cases}\cos x & \left(0\le x\le\frac{3}{4}\pi\right)\\ -\sqrt{2}-\cos x & \left(\frac{3}{4}\pi<x\le 2\pi\right)\end{cases}$

$0\le x\le 2\pi$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$는 그림과 같다.



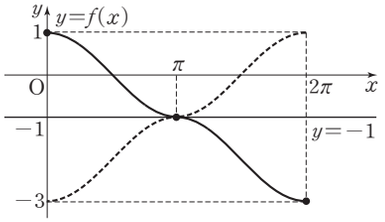
이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 개수는 2이므로

$a_3=2$

(iv) $k=4$일 때,

$\cos\pi=-1$이므로 $f(x)=\begin{cases}\cos x & (0\le x\le\pi)\\ -2-\cos x & (\pi<x\le 2\pi)\end{cases}$

$0\le x\le 2\pi$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-1$은 그림과 같다.



이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-1$의 교점의 개수는 1이므로

$a_4=1$

(i)~(iv)에서

$a_1+a_2+a_3+a_4=2+2+2+1=7$

06 답 ②

함수 $f(x)=3\cos ax+b$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(5\pi,\ \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\pi,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나므로 $f(5\pi)=f(\pi)$에서

$3\cos 5a\pi+b=3\cos a\pi+b$

$\therefore\ \cos 5a\pi=\cos a\pi$

이때 $0\le a<\frac{2}{5}$에서 $0\le a\pi<\frac{2}{5}\pi$, $0\le 5a\pi<2\pi$

$\cos(2\pi-x)=\cos x$이므로

$5a\pi=2\pi-a\pi$, $6a\pi=2\pi$

$\therefore\ a=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=3\cos\frac{x}{3}+b$이므로

$f(\pi)=3\cos\frac{\pi}{3}+b=3\times\frac{1}{2}+b=\frac{3}{2}+b$

즉, $\frac{3}{2}+b=\frac{1}{2}$이므로 $b=-1$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{3}+(-1)=-\frac{2}{3}$

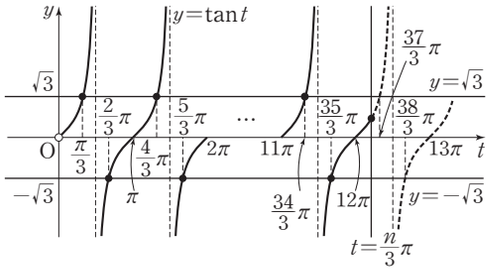
07 답 ③

$2x=t$로 놓으면 $0<x\le\frac{n}{6}\pi$에서 $0<t\le\frac{n}{3}\pi$이고 방정식은

$\tan^2 t-3=0$

$(\tan t+\sqrt{3})(\tan t-\sqrt{3})=0$ $\quad\therefore\ \tan t=-\sqrt{3}$ 또는 $\tan t=\sqrt{3}$

즉, $f(n)=24$가 되려면 $0<t\le\frac{n}{3}\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 두 직선 $y=-\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}$이 만나는 점의 개수가 24이어야 한다.



이때 $0<t\le\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 두 직선 $y=-\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}$이 만나는 점의 개수가 2이므로 $0<t\le 12\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 두 직선 $y=-\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}$이 만나는 점의 개수는 24이다.

따라서 $0<t\le\frac{n}{3}\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 두 직선 $y=-\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}$이 만나는 점의 개수가 24이려면

$\frac{35}{3}\pi\le\frac{n}{3}\pi<\frac{37}{3}\pi$ $\quad\therefore\ 35\le n<37$

따라서 자연수 n의 값은 35, 36이므로 모든 n의 값의 합은

$35+36=71$

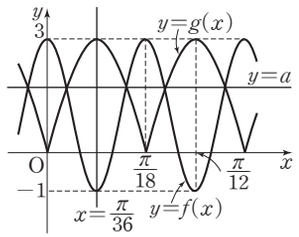
08 답 2

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 y좌표 a에 대하여 $\{x\,|\,g(x)=a\}\subset\{x\,|\,f(x)=a\}$이면 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=a$의 교점은 반드시 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$의 교점이어야 한다. …… ㉠

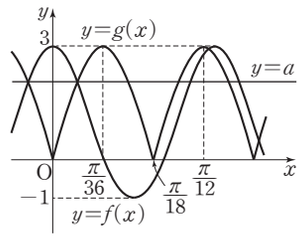
함수 $f(x)=2\cos kx+1$의 주기는 $\frac{2\pi}{k}$, 최댓값은 3, 최솟값은 -1이고,

함수 $g(x)=3|\sin 18x|$의 주기는 $\frac{\pi}{18}$, 최댓값은 3, 최솟값은 0이다.

이때 [그림 1]과 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 동시에 대칭이 되는 직선이 존재하면 두 함수의 교점도 같은 직선에 대하여 대칭이므로 ㉠을 만족시키지만 [그림 2]와 같이 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 동시에 대칭이 되는 직선이 존재하지 않으면 ㉠을 만족시키지 않는다.



[그림 1]



[그림 2]

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{n}{k}\pi$ (n은 정수)에 대하여 대칭이고

함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{m}{36}\pi$ (m은 정수)에 대하여 대칭이므로 $A=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{n}{k}\pi,\ n\text{은 정수}\right\}$, $B=\left\{x\,\middle|\,x=\frac{m}{36}\pi,\ m\text{은 정수}\right\}$라 하면 $B\subset A$이어야 한다.

이때 집합 B의 원소 $\frac{\pi}{36}$가 집합 A의 원소이면 집합 B의 나머지 원소도 반드시 집합 A에 속한다.

즉, $\frac{n}{k}\pi=\frac{\pi}{36}$를 만족시키는 정수 n이 존재하면 된다.

$k=36n$에서 자연수 k는 36의 배수이므로 100 이하의 자연수 k는 36, 72의 2개이다.

09 답 ⑤

$A_k=\left\{\cos\frac{2m}{k}\pi \,\middle|\, m\text{은 자연수}\right\}$에서 $f(x)=\cos\frac{2x}{k}\pi\ (x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$라 하면 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{k}}=k$이므로 집합 A_k는 $x=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$, k에서의 $f(x)=\cos\frac{2x}{k}\pi$의 값을 원소로 갖는다.

$\therefore A_k=\left\{\cos\frac{2}{k}\pi,\ \cos\frac{4}{k}\pi,\ \cos\frac{6}{k}\pi,\ \cdots,\ \cos 2\pi\right\}$ ····· ㉠

ㄱ. $A_6=\left\{\cos\frac{\pi}{3},\ \cos\frac{2}{3}\pi,\ \cos\pi,\ \cos\frac{4}{3}\pi,\ \cos\frac{5}{3}\pi,\ \cos 2\pi\right\}$이므로

$A_6=\left\{-1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$

ㄴ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$가 집합 A_k의 원소가 되려면 $\cos\frac{2m}{k}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$를 만족시키는 자연수 m이 존재해야 한다.

이때 $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\frac{2m}{k}\pi=\frac{\pi}{4}$ $\therefore k=8m$

이때 m이 자연수이므로 k는 8의 배수이어야 한다.

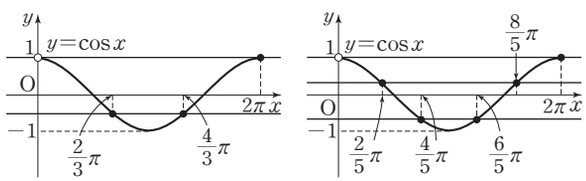
따라서 조건을 만족시키는 20 이하의 자연수 k는 8, 16의 2개이다.

ㄷ. ㉠에서 각 원소는 $0<x\le 2\pi$인 x의 값을 k등분하였을 때의 각 등분점과 $x=2\pi$에서의 $\cos x$의 값이다.

함수 $y=\cos x$의 그래프는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로 자연수 k에 대하여 y의 값이 같은 경우가 생긴다.

(i) k가 홀수일 때,

$0<x\le 2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프를 3등분, 5등분하면 그림과 같다.



$\therefore n(A_3)=2,\ n(A_5)=3$

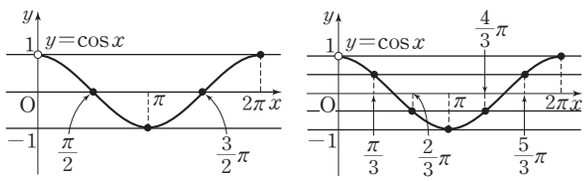
즉, 자연수 m에 대하여 $n(A_{2m+1})=m+1$이 성립하므로 원소의 개수가 11인 경우는 $m+1=11$ $\therefore m=10$

따라서 $n(A_k)=11$을 만족시키는 k의 값은

$2m+1=20+1=21$

(ii) k가 짝수일 때,

$0<x\le 2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프를 4등분, 6등하면 그림과 같다.



$\therefore n(A_4)=3,\ n(A_6)=4$

즉, 자연수 m에 대하여 $n(A_{2m+2})=m+2$가 성립하므로 원소의 개수가 11인 경우는 $m+2=11$ $\therefore m=9$

따라서 $n(A_k)=11$을 만족시키는 k의 값은

$2m+2=18+2=20$

(i), (ii)에서 $n(A_k)=11$을 만족시키는 k의 값은 20, 21이므로 모든 k의 값의 합은 $20+21=41$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

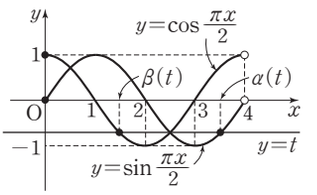
10 답 ①

ㄱ. 등식 $\left(\sin\frac{a\pi}{2}-t\right)^2+\left(\cos\frac{b\pi}{2}-t\right)^2=0$을 만족시키려면

$\sin\frac{a\pi}{2}-t=0,\ \cos\frac{b\pi}{2}-t=0$, 즉 $\sin\frac{a\pi}{2}=t,\ \cos\frac{b\pi}{2}=t$이어야 한다.

a의 값은 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 x좌표와 같고, b의 값은 함수 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 x좌표와 같다.

한편 두 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 주기는 모두 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$이므로 $-1\le t<0$일 때의 두 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$, $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 그래프와 직선 $y=t$는 그림과 같다.



이때 함수 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$의 그래프는 함수 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$의 그래프를 평행이동하면 겹쳐질 수 있으므로 $\beta(t)=1+k\ (0<k\le 1)$라 하면 $\alpha(t)=4-k$ $\therefore \alpha(t)+\beta(t)=5$

ㄴ. $\alpha(t)$, $\beta(t)$는 집합 $\{x\,|\,0\le x<4\}$의 원소이므로

$\alpha(0)=2,\ \beta(0)=1$

$\therefore \{t\,|\,\alpha(t)-\beta(t)=\alpha(0)-\beta(0)\}=\{t\,|\,\alpha(t)-\beta(t)=1\}$

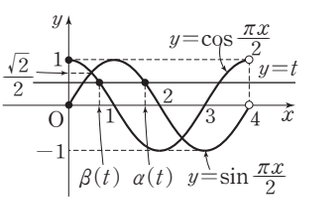
(i) $t=-1$일 때,

$\alpha(-1)-\beta(-1)=3-2=1$

(ii) $-1<t<0$일 때,

$3<\alpha(t)<4,\ 1<\beta(t)<2$이므로 $1<\alpha(t)-\beta(t)<3$

(iii) $0\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때,



ⓘ $t=0$인 경우

$\alpha(0)-\beta(0)=2-1=1$

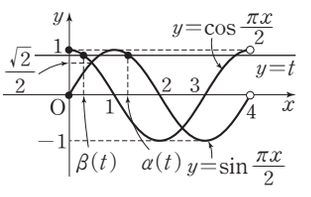
ⓘⓘ $t\ne 0$인 경우

$\beta(t)=p\left(\frac{1}{2}\le p<1\right)$라 하면 $\alpha(t)=1+p$

$\therefore \alpha(t)-\beta(t)=1$

ⓘ, ⓘⓘ에서 $\alpha(t)-\beta(t)=1$

(iv) $\frac{\sqrt{2}}{2}<t<1$일 때,



$\beta(t)=q\left(0<q<\frac{1}{2}\right)$라 하면 $\alpha(t)=1+q$

$\therefore\ \alpha(t)-\beta(t)=1$

(v) $t=1$일 때,

$\alpha(1)=1,\ \beta(1)=0$이므로 $\alpha(1)-\beta(1)=1$

(i)~(v)에서 $\{t|\alpha(t)-\beta(t)=1\}=\{t|t=-1 \text{ 또는 } 0\le t\le 1\}$

ㄷ. ㄱ, ㄴ에 의하여

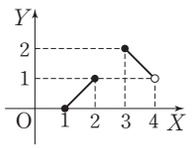
$$\beta(t)=\begin{cases}5-\alpha(t) & (-1\le t<0)\\ \alpha(t)-1 & (0\le t\le 1)\end{cases}$$

$-1\le t<0$일 때 $3\le\alpha(t)<4$이고, $0\le t\le 1$일 때 $1\le\alpha(t)\le 2$이므로 $\alpha(t)=X,\ \beta(t)=Y$라 하면

$$Y=\begin{cases}5-X & (3\le X<4)\\ X-1 & (1\le X\le 2)\end{cases}$$

$\{\alpha(t)\}^2+\{\beta(t)-2\}^2=X^2+(Y-2)^2$이므로 $\{\alpha(t)\}^2+\{\beta(t)-2\}^2$의 값은 점 $(X,\ Y)$와 점 $(0,\ 2)$ 사이의 거리의 제곱과 같다.

따라서 $\{\alpha(t)\}^2+\{\beta(t)-2\}^2$의 최솟값은 점 $(0,\ 2)$와 직선 $Y=X-1$, 즉 $X-Y-1=0$ 사이의 거리의 제곱과 같으므로

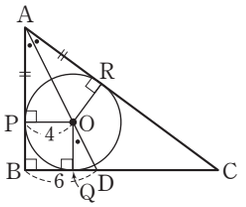


$$\left(\frac{|-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right)^2=\frac{9}{2}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

11 답 $5\sqrt{5}$

삼각형 ABC에 내접하는 원이 세 선분 AB, BC, CA와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하면 $\overline{PO}=\overline{BQ}=4$이므로



$\overline{QD}=\overline{BD}-\overline{BQ}=6-4=2$

직각삼각형 OQD에서

$\overline{OD}=\sqrt{\overline{OQ}^2+\overline{QD}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

$\therefore\ \sin(\angle DOQ)=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\triangle OAP\backsim\triangle DOQ$ (AA 닮음)이므로

$\angle OAP=\angle DOQ$ ····· ㉠

또 $\overline{PO}:\overline{QD}=\overline{AP}:\overline{OQ}$이므로

$4:2=\overline{AP}:4$ $\therefore\ \overline{AP}=8$

이때 점 O가 삼각형 ABC의 내심이므로 $\overline{AP}=\overline{AR}=8$

$\angle CAD=\angle DAB$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $\angle CAD=\angle DOQ$이므로

$\sin(\angle CAD)=\sin(\angle DOQ)=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\overline{CD}=x$라 하면 $\overline{CR}=\overline{CQ}=\overline{CD}+\overline{QD}=x+2$

$\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{BP}=12,\ \overline{BC}=\overline{CD}+\overline{BD}=x+6,$

$\overline{CA}=\overline{CR}+\overline{AR}=x+10$이므로 직각삼각형 ABC에서

$(x+10)^2=12^2+(x+6)^2,\ x^2+20x+100=x^2+12x+180$

$8x=80$ $\therefore\ x=10$

$\overline{CD}=10$이므로 삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=2R,\ \frac{10}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=2R$$

$\therefore\ R=5\sqrt{5}$

12 답 $18\sqrt{11}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin C}=2\times\frac{3\sqrt{6}}{4}$ $\therefore\ \sin C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ \cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\left(\because\ 0<C<\frac{\pi}{2}\right)$ ····· ㉠

$2(a-b)^2=3ab\cos C$에 $\cos C=\frac{1}{3}$을 대입하면

$2(a-b)^2=3ab\times\frac{1}{3},\ 2(a-b)^2=ab$

$2a^2-5ab+2b^2=0,\ (a-2b)(2a-b)=0$

$\therefore\ 2a=b\ (\because\ a<b)$ ····· ㉡

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{3})^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

㉠, ㉡을 대입하면

$12=a^2+(2a)^2-2\times a\times 2a\times\frac{1}{3}$

$12=5a^2-\frac{4}{3}a^2,\ a^2=\frac{36}{11}$

$\therefore\ a=\frac{6\sqrt{11}}{11}\ (\because\ a>0)$

이를 ㉡에 대입하면 $b=\frac{12\sqrt{11}}{11}$

$\therefore\ 11(a+b)=11\left(\frac{6\sqrt{11}}{11}+\frac{12\sqrt{11}}{11}\right)=18\sqrt{11}$

13 답 $\frac{\sqrt{14}}{4}$

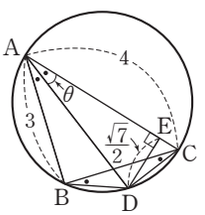
원주각 성질에 의하여

$\angle BCD=\angle BAD,\ \angle CBD=\angle CAD$

이때 $\angle BAD=\angle CAD$이므로

$\angle BCD=\angle CBD$

$\therefore\ \overline{BD}=\overline{CD}$



$\overline{AD}=x,\ \angle BAD=\angle CAD=\theta$라 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=3^2+x^2-2\times 3\times x\times\cos\theta$

$=9+x^2-6x\cos\theta$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CD}^2=x^2+4^2-2\times x\times 4\times\cos\theta$

$=x^2+16-8x\cos\theta$

이때 $\overline{BD}=\overline{CD}$에서 $\overline{BD}^2=\overline{CD}^2$이므로

$9+x^2-6x\cos\theta=x^2+16-8x\cos\theta$

$2x\cos\theta=7$ $\therefore\ \cos\theta=\frac{7}{2x}$

직각삼각형 ADE에서 $\sin\theta=\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}=\frac{\sqrt{7}}{2x}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\left(\frac{\sqrt{7}}{2x}\right)^2+\left(\frac{7}{2x}\right)^2=1$

$\frac{7}{4x^2}+\frac{49}{4x^2}=1,\ 4x^2=56$

$x^2=14$ $\therefore\ x=\sqrt{14}\ (\because\ x>0)$

$\therefore\ \cos(\angle CAD)=\frac{7}{2x}=\frac{7}{2\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{4}$

14 답 $2\sqrt{19}+3\sqrt{3}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 이 원의 넓이가 76π이므로

$\pi R^2=76\pi$ $\therefore R=2\sqrt{19}$

$\angle ACB=\frac{\pi}{6}$이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin\frac{\pi}{6}}=2\times2\sqrt{19}$, $\frac{\overline{AB}}{\frac{1}{2}}=4\sqrt{19}$ $\therefore \overline{AB}=2\sqrt{19}$

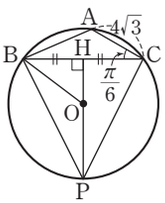
$\overline{BC}=x$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{19})^2=x^2+(4\sqrt{3})^2-2\times x\times4\sqrt{3}\times\cos\frac{\pi}{6}$

$76=x^2+48-8\sqrt{3}x\times\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x^2-12x-28=0$

$(x+2)(x-14)=0$ $\therefore x=14$ ($\because x>0$)

삼각형 PBC의 넓이가 최대가 되려면 그림과 같이 점 P는 선분 BC의 수직이등분선과 삼각형 ABC의 외접원의 두 교점 중 직선 BC로부터 멀리 떨어져 있는 점이어야 한다.



삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 PH는 점 O를 지난다.

$\overline{BH}=\overline{CH}=7$이므로 직각삼각형 BOH에서

$\overline{OH}=\sqrt{\overline{BO}^2-\overline{BH}^2}=\sqrt{(2\sqrt{19})^2-7^2}=3\sqrt{3}$

$\therefore \overline{PH}=\overline{PO}+\overline{OH}=2\sqrt{19}+3\sqrt{3}$

따라서 삼각형 PBC의 넓이가 최대일 때, 점 P와 변 BC 사이의 거리는 $2\sqrt{19}+3\sqrt{3}$이다.

15 답 4π

$\angle BAC=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=6^2+4^2-2\times6\times4\times\cos\theta$

$=52-48\cos\theta=4(13-12\cos\theta)$

$\therefore \overline{BC}=2\sqrt{13-12\cos\theta}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R_1이라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R_1$ $\therefore R_1=\frac{\overline{BC}}{2\sin\theta}=\frac{\sqrt{13-12\cos\theta}}{\sin\theta}$

직각삼각형 ABD에서 $\overline{AD}=\overline{AB}\cos\theta=6\cos\theta$

직각삼각형 AEC에서 $\overline{AE}=\overline{AC}\cos\theta=4\cos\theta$

삼각형 AED에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DE}^2=(6\cos\theta)^2+(4\cos\theta)^2-2\times6\cos\theta\times4\cos\theta\times\cos\theta$

$=52\cos^2\theta-48\cos^3\theta=4\cos^2\theta(13-12\cos\theta)$

$\therefore \overline{DE}=2\cos\theta\sqrt{13-12\cos\theta}$

삼각형 AED의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{DE}}{\sin\theta}=2R_2$ $\therefore R_2=\frac{\overline{DE}}{2\sin\theta}=\frac{\cos\theta\sqrt{13-12\cos\theta}}{\sin\theta}$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이와 삼각형 AED의 외접원의 넓이의 차가 5π이므로 $\pi R_1^2-\pi R_2^2=5\pi$에서

$\pi\left(\frac{\sqrt{13-12\cos\theta}}{\sin\theta}\right)^2-\pi\left(\frac{\cos\theta\sqrt{13-12\cos\theta}}{\sin\theta}\right)^2=5\pi$

$\frac{13-12\cos\theta}{\sin^2\theta}-\frac{\cos^2\theta(13-12\cos\theta)}{\sin^2\theta}=5$

$\frac{(13-12\cos\theta)(1-\cos^2\theta)}{\sin^2\theta}=5$

$13-12\cos\theta=5$ $\therefore \cos\theta=\frac{2}{3}$ …… ㉠

$\therefore \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ …… ㉡

$\angle AEP=\angle ADP=\frac{\pi}{2}$이므로 사각형 AEPD는 한 원에 내접하므로 삼각형 PDE의 외접원과 삼각형 AED의 외접원은 같다.

따라서 삼각형 PDE의 외접원의 넓이는 πR_2^2이므로 ㉠, ㉡에서

$\pi R_2^2=\pi\left(\frac{\cos\theta\sqrt{13-12\cos\theta}}{\sin\theta}\right)^2$

$=\frac{\cos^2\theta(13-12\cos\theta)}{\sin^2\theta}\pi$

$=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(13-12\times\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}\pi=4\pi$

따라서 삼각형 PDE의 외접원의 넓이는 4π이다.

16 답 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

$\angle DBA=\theta$라 하면 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AD}}{\sin\theta}=2R$ $\therefore \overline{AD}=2R\sin\theta$ …… ㉠

$\overline{AC}/\!/\overline{BD}$이므로 $\angle CAB=\pi-\theta$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin(\pi-\theta)}=2r$, $\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2r$

$\therefore \overline{BC}=2r\sin\theta$ …… ㉡

$\overline{AH}:\overline{HB}=1:2$이므로 $\overline{AH}=\frac{1}{3}\overline{AB}=\frac{1}{3}\times3\sqrt{3}=\sqrt{3}$

$\overline{AC}=x$라 하면 $\overline{BD}=3x$

직각삼각형 AHC에서

$\cos(\pi-\theta)=\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{3}}{x}$

$\therefore \cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{x}$ → $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AD}^2=(3\sqrt{3})^2+(3x)^2-2\times3\sqrt{3}\times3x\times\cos\theta$

$=27+9x^2-18\sqrt{3}x\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{x}\right)$

$=9x^2+81$ …… ㉢

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=(3\sqrt{3})^2+x^2-2\times3\sqrt{3}\times x\times\cos(\pi-\theta)$

$=27+x^2-6\sqrt{3}x\times\frac{\sqrt{3}}{x}$

$=x^2+9$ …… ㉣

㉠을 ㉢에 대입하면 $4R^2\sin^2\theta=9x^2+81$ …… ㉤

㉡을 ㉣에 대입하면 $4r^2\sin^2\theta=x^2+9$ …… ㉥

㉤+㉥을 하면 $4(R^2+r^2)\sin^2\theta=10x^2+90$

$4(R^2+r^2)\times\sin^2\theta=105$이므로

$10x^2+90=105$, $x^2=\frac{3}{2}$ $\therefore x=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ($\because x>0$)

$\therefore \overline{BD}=3x=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

08 등차수열과 등비수열

step 1 핵심 문제 | 94~95쪽

01 86 02 ① 03 93 04 ④ 05 ① 06 ①
07 ② 08 9 09 36 10 25400원 11 86
12 ⑤

01 답 86

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_1+a_2+a_3=-12$에서
$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)=-12$
$3a_1+3d=-12$
$\therefore a_1+d=-4$ …… ㉠
$a_3+a_4+a_5+a_6=34$에서
$(a_1+2d)+(a_1+3d)+(a_1+4d)+(a_1+5d)=34$
$4a_1+14d=34$
$\therefore 2a_1+7d=17$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1=-9$, $d=5$
$\therefore a_{20}=a_1+19d=-9+19\times5=86$

02 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 $d(d>0)$라 하면
㈎에서 $(a+5d)+(a+7d)=0$
$2a=-12d$ $\therefore a=-6d$ …… ㉠
㈏에서 $|a+5d|=|a+6d|+3$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$|-6d+5d|=|-6d+6d|+3$
$|-d|=3$ $\therefore d=3$ ($\because d>0$)
이를 ㉠에 대입하면 $a=-18$
$\therefore a_2=a+d=-18+3=-15$

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$에서 a_7은 a_6과 a_8의 등차중항이므로
$a_6+a_8=2a_7$
㈎에서 $a_6+a_8=0$이므로 $a_7=0$
이를 ㈏의 $|a_6|=|a_7|+3$에 대입하면
$|a_6|=3$
이때 공차가 양수이고 $a_7=0$이므로
$a_6<0$ $\therefore a_6=-3$
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$d=a_7-a_6=0-(-3)=3$
$\therefore a_2=a_7-5d=0-5\times3=-15$

03 답 93

주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항이 x, 제$(m+2)$항이 y이므로
$y=x+(m+2-1)d$
$\therefore y-x=(m+1)d$
$a_m-a_{m-4}=\{a+(m-1)d\}-\{a+(m-4-1)d\}=4d$
이때 $x\neq y$이므로 $d\neq0$
$\therefore \dfrac{a_m-a_{m-4}}{y-x}=\dfrac{4d}{(m+1)d}=\dfrac{4}{m+1}$
즉, $\dfrac{4}{m+1}=\dfrac{2}{47}$이므로
$m+1=94$ $\therefore m=93$

04 답 ④

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2b=a+c$
$a+b+c=12$에서 $2b+b=12$ $\therefore b=4$
이때 주어진 등차수열의 공차를 $d(d>0)$라 하면
$a=4-d$, $c=4+d$
$abc=-420$에서 $(4-d)\times4\times(4+d)=-420$
$16-d^2=-105$, $d^2=121$ $\therefore d=11$ ($\because d>0$)
따라서 $a=-7$, $b=4$, $c=15$이므로
$c-a-b=18$

05 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3=26$에서 $a+2d=26$ …… ㉠
$a_9=8$에서 $a+8d=8$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=32$, $d=-3$
$\therefore a_n=32+(n-1)\times(-3)=-3n+35$
$-3n+35>0$에서 $3n<35$ $\therefore n<\dfrac{35}{3}=11.6\cdots$
즉, 수열 $\{a_n\}$은 제11항까지 양수이고 제12항부터 음수이므로 첫째항부터 제11항까지의 합이 최대이다.
따라서 구하는 자연수 n의 값은 11이다.

06 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면
$2a_{n+2}-a_n=2ar^{n+1}-ar^{n-1}=(2ar^2-a)r^{n-1}$
이때 수열 $\{2a_{n+2}-a_n\}$은 첫째항이 12, 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이므로
$2ar^2-a=12$, $r=\sqrt{2}$
$r=\sqrt{2}$를 $2ar^2-a=12$에 대입하면
$4a-a=12$ $\therefore a=4$
$\therefore a_3=ar^2=4\times(\sqrt{2})^2=8$

07 답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r(r>1)$라 하면
㈎에서 $ar^2\times ar^4\times ar^6=125$
$a^3r^{12}=125$, $(ar^4)^3=5^3$ $\therefore ar^4=5$
㈏에서 $\dfrac{ar^3+ar^7}{ar^5}=\dfrac{13}{6}$
$\dfrac{1}{r^2}+r^2=\dfrac{13}{6}$, $6r^4-13r^2+6=0$
$(3r^2-2)(2r^2-3)=0$ $\therefore r^2=\dfrac{2}{3}$ 또는 $r^2=\dfrac{3}{2}$
이때 $r>1$에서 $r^2>1$이므로 $r^2=\dfrac{3}{2}$
$\therefore a_9=ar^8=ar^4\times r^4=5\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{45}{4}$

08 답 9

다항식 $f(x)=x^2+ax+b$를 $x+1$, x, $x-1$로 각각 나누었을 때의 나머지는

$f(-1)=1-a+b$, $f(0)=b$, $f(1)=1+a+b$

세 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\{f(0)\}^2=f(-1)\times f(1)$

$b^2=(1-a+b)(1+a+b)$

$b^2=(1+b)^2-a^2$, $b^2=1+2b+b^2-a^2$

$\therefore a^2=2b+1$ …… ㉠

이때 다항식 $f(x)=x^2+ax+b$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 $\frac{3}{2}$이므로 $f(2)=\frac{3}{2}$에서

$4+2a+b=\frac{3}{2}$ $\therefore b=-2a-\frac{5}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a^2=2\left(-2a-\frac{5}{2}\right)+1$, $a^2=-4a-4$

$a^2+4a+4=0$, $(a+2)^2=0$

$\therefore a=-2$

이를 ㉡에 대입하면 $b=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore 2b-3a=2\times\frac{3}{2}-3\times(-2)=9$

개념 NOTE

다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면 $R=f(a)$이다.

09 답 36

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 첫째항이 2이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=12$에서

$\frac{2(r^5-1)}{r-1}=12$ …… ㉠ …… 배점 20%

$a_1+a_2+\cdots+a_{20}=180$에서

$\frac{2(r^{20}-1)}{r-1}=180$, $\frac{2(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}=180$

$\therefore \frac{2(r^5-1)(r^5+1)(r^{10}+1)}{r-1}=180$ …… ㉡ …… 배점 20%

㉡÷㉠을 하면 $(r^5+1)(r^{10}+1)=15$

$r^5=X$로 놓으면 $(X+1)(X^2+1)=15$

$X^3+X^2+X-14=0$

$(X-2)(X^2+3X+7)=0$

이때 X가 실수이므로 $X=2$

$\therefore r^5=2$ …… 배점 40%

$$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{10}=\frac{2(r^{10}-1)}{r-1}=\frac{2(r^5-1)(r^5+1)}{r-1}=\frac{2(r^5-1)}{r-1}\times(r^5+1)=12(2+1)=36$$ …… 배점 20%

10 답 25400원

54만 원의 24개월 동안의 원리합계는

$54(1+0.01)^{24}=54\times1.01^{24}=54\times1.27$(만 원)

또 이달 말부터 매달 a만 원씩 24개월 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$a+a(1+0.01)+a(1+0.01)^2+\cdots+a(1+0.01)^{23}$

$=\frac{a\{(1+0.01)^{24}-1\}}{(1+0.01)-1}=\frac{a(1.27-1)}{0.01}=27a$(만 원)

이때 적립금의 원리합계가 54×1.27만 원이어야 하므로

$27a=54\times1.27$ $\therefore a=2.54$

따라서 매달 지불해야 하는 금액은 25400원이다.

11 답 86

$S_n=an^2-2n+b$에서 $a_1=S_1=a-2+b$

이때 $a_1=3$이므로 $a-2+b=3$

$\therefore a+b=5$ …… ㉠

$a_6=S_6-S_5$

$=(a\times6^2-2\times6+b)-(a\times5^2-2\times5+b)$

$=11a-2$

즉, $11a-2=31$이므로 $a=3$

이를 ㉠에 대입하면 $3+b=5$ $\therefore b=2$

$\therefore S_n=3n^2-2n+2$

$\therefore a_{15}=S_{15}-S_{14}$

$=(3\times15^2-2\times15+2)-(3\times14^2-2\times14+2)$

$=85$

$\therefore a-b+a_{15}=3-2+85=86$

다른 풀이

$S_n=an^2-2n+b$에서 $a_1=S_1=a-2+b$

이때 $a_1=3$이므로 $a-2+b=3$

$\therefore a+b=5$ …… ㉠

$n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=an^2-2n+b-\{a(n-1)^2-2(n-1)+b\}$

$=2an-a-2$ …… ㉡

이때 $a_6=31$이므로 $12a-a-2=31$

$11a=33$ $\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $3+b=5$ $\therefore b=2$

$a=3$을 ㉡에 대입하면 $a_n=6n-5$

$\therefore a_{15}=6\times15-5=85$

$\therefore a-b+a_{15}=3-2+85=86$

12 답 ⑤

$S_n=3^{n+1}+18$에서

(i) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^{n+1}+18)-(3^n+18)$

$=3^n(3-1)=2\times3^n$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3^2+18=27$ …… ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같지 않으므로 일반항 a_n은

$a_1=27$, $a_n=2\times3^n$ $(n\geq2)$

$$\therefore \frac{a_9}{a_1+a_3}=\frac{2\times3^9}{27+2\times3^3}=\frac{2\times3^9}{3^3(1+2)}=\frac{2\times3^9}{3^4}=2\times3^5=486$$

step 2 고난도 문제 | 96~100쪽

01 ⑤	02 26	03 117	04 $\frac{32}{3}$	05 ④	06 ④
07 $\frac{1}{144}$	08 30	09 $\frac{3}{4}$	10 26	11 ③	12 65
13 448	14 18	15 ②	16 ①	17 ⑤	18 117
19 3	20 ③	21 $\sqrt{3}+1$		22 ①	23 5
24 ②	25 ③				

01 답 ⑤

부등식 $(x-a_n)^2 \le (x-a_{n+2})^2$에서

$(x-a_n)^2-(x-a_{n+2})^2 \le 0$

$\{(x-a_n)-(x-a_{n+2})\}\{(x-a_n)+(x-a_{n+2})\} \le 0$

$(a_{n+2}-a_n)\{2x-(a_n+a_{n+2})\} \le 0$

이때 수열 $\{a_n\}$은 공차가 음수인 등차수열이므로

$a_{n+2} < a_n \quad \therefore a_{n+2}-a_n < 0$

따라서 $2x-(a_n+a_{n+2}) \ge 0$이므로

$x \ge \frac{a_n+a_{n+2}}{2}$

즉, 주어진 부등식을 만족시키는 x의 최솟값은

$b_n=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 첫째항이 1이므로

$a_n=1+(n-1)d$

$\therefore b_n=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}$

$=\frac{\{1+(n-1)d\}+\{1+(n+1)d\}}{2}$

$=1+nd$

이때 $b_{49}+b_{51}=-198$에서

$(1+49d)+(1+51d)=-198$

$2+100d=-198$

$\therefore d=-2$

$\therefore \frac{a_6}{a_3}=\frac{1+5d}{1+2d}$

$=\frac{1+5\times(-2)}{1+2\times(-2)}=3$

02 답 26

$A_1=\{3, 5, 7, 9, 11\}$

$A_2=\{9, 11, 13, \cdots, 21\}$

$A_3=\{15, 17, 19, \cdots, 31\}$

$A_4=\{21, 23, 25, \cdots, 41\}$

⋮

$A_k=\{6k-3, 6k-1, 6k+1, \cdots, 10k+1\}$

$\therefore A_{15}=\{87, 89, 91, \cdots, 151\}$

$p>15$에서 $A_{15} \cap A_p=\varnothing$을 만족시키려면 집합 A_p의 가장 작은 원소 $6p-3$이 집합 A_{15}의 가장 큰 원소보다 커야 하므로

$6p-3>151$

$\therefore p>\frac{77}{3}=25.6\cdots$

따라서 자연수 p의 최솟값은 26이다.

idea

03 답 117

(i) 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d_1, d_2라 하면 수열 $\{a_n+2b_n\}$은 a_1+2b_1, a_2+2b_2, a_3+2b_3, …이므로

$a_2+2b_2-(a_1+2b_1)=\{(a_1+d_1)+2(b_1+d_2)\}-(a_1+2b_1)$

$=d_1+2d_2$

$a_3+2b_3-(a_2+2b_2)=\{(a_1+2d_1)+2(b_1+2d_2)\}$

$-\{(a_1+d_1)+2(b_1+d_2)\}$

$=d_1+2d_2$

⋮

$\therefore a_{n+1}+2b_{n+1}-(a_n+2b_n)=d_1+2d_2$

따라서 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 각각 공차가 d_1, d_2인 등차수열이면 수열 $\{a_n+2b_n\}$은 공차가 d_1+2d_2인 등차수열이다.

$a_n+2b_n=p_n$이라 하고, 수열 $\{p_n\}$의 첫째항을 p, 공차를 d_3이라 하면

$p_n=p+(n-1)d_3$

이때 (가)에서 $p_3=4$, $p_9=34$이므로

$p+2d_3=4$, $p+8d_3=34$

두 식을 연립하여 풀면

$p=-6$, $d_3=5$

따라서 $p_n=-6+(n-1)\times 5=5n-11$이므로

$a_n+2b_n=5n-11$

(ii) (i)과 같은 방법으로 하면 수열 $\{a_n+2c_n\}$도 등차수열이므로

$a_n+2c_n=q_n$이라 하고, 수열 $\{q_n\}$의 첫째항을 q, 공차를 d_4라 하면

$q_n=q+(n-1)d_4$

이때 (나)에서 $q_4=2$, $q_{10}=26$이므로

$q+3d_4=2$, $q+9d_4=26$

두 식을 연립하여 풀면

$q=-10$, $d_4=4$

따라서 $q_n=-10+(n-1)\times 4=4n-14$이므로

$a_n+2c_n=4n-14$

(i), (ii)에서

$3a_n+2b_n+4c_n=(a_n+2b_n)+2(a_n+2c_n)$

$=(5n-11)+2(4n-14)$

$=13n-39$

$\therefore 3a_{12}+2b_{12}+4c_{12}=13\times 12-39$

$=117$

04 답 $\frac{32}{3}$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -12, 공차가 d이므로

$a_1=-12$, $a_2=-12+d$, $a_3=-12+2d$, $a_4=-12+3d$

이때 $d \le 0$이면 $|a_1| \le |a_2| \le |a_3| \le |a_4|$이므로

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4| \ge 4\times 12=48$

$\therefore d>0$

(i) $a_2 \ge 0$일 때,

$-12+d \ge 0$에서 $d \ge 12$

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|$

$=12+(-12+d)+(-12+2d)+(-12+3d)$

$=-24+6d$

즉, $-24+6d=32$이므로 $d=\frac{28}{3}$

이는 $d \ge 12$를 만족시키지 않는다.

(ii) $a_2<0\le a_3$일 때,

$-12+d<0\le -12+2d$에서 $6\le d<12$

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|$

$=12+(12-d)+(-12+2d)+(-12+3d)$

$=4d$

즉, $4d=32$이므로 $d=8$

(iii) $a_3<0\le a_4$일 때,

$-12+2d<0\le -12+3d$에서 $4\le d<6$

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|$

$=12+(12-d)+(12-2d)+(-12+3d)$

$=24\neq 32$

즉, 주어진 조건을 만족시키는 실수 d의 값은 존재하지 않는다.

(iv) $a_4<0$일 때,

$-12+3d<0$에서 $d<4$

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|$

$=12+(12-d)+(12-2d)+(12-3d)$

$=48-6d$

즉, $48-6d=32$이므로 $d=\frac{8}{3}$

(i)~(iv)에서 모든 실수 d의 값의 합은 $8+\frac{8}{3}=\frac{32}{3}$

05 답 ④

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

$\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\delta}$, $\frac{1}{\beta}$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면

$\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+3d$, $3d=\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}$ $\therefore d=\frac{\alpha-\beta}{3\alpha\beta}$

$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha}+d$이므로

$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha-\beta}{3\alpha\beta}=\frac{3\beta+\alpha-\beta}{3\alpha\beta}$

$=\frac{\alpha+2\beta}{3\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)+\beta}{3\alpha\beta}=\frac{3+\beta}{3}$

$\frac{1}{\delta}=\frac{1}{\alpha}+2d$이므로

$\frac{1}{\delta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{2(\alpha-\beta)}{3\alpha\beta}=\frac{3\beta+2\alpha-2\beta}{3\alpha\beta}$

$=\frac{2\alpha+\beta}{3\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)+\alpha}{3\alpha\beta}=\frac{3+\alpha}{3}$

$\therefore \gamma+\delta=\frac{3}{3+\beta}+\frac{3}{3+\alpha}=\frac{3(\alpha+\beta+6)}{(3+\alpha)(3+\beta)}$

$=\frac{3(\alpha+\beta+6)}{9+3(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$

$=\frac{3(3+6)}{9+3\times 3+1}=\frac{27}{19}$,

$\gamma\delta=\frac{3}{3+\beta}\times\frac{3}{3+\alpha}=\frac{9}{(3+\alpha)(3+\beta)}$

$=\frac{9}{9+3(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$

$=\frac{9}{9+3\times 3+1}=\frac{9}{19}$

이때 γ, δ를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 19인 이차방정식은

$19\left(x^2-\frac{27}{19}x+\frac{9}{19}\right)=0$ $\therefore 19x^2-27x+9=0$

따라서 $a=-27$, $b=9$이므로 $b-a=36$

06 답 ④

세 수 $\log a$, $\log b$, $\log c$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\log b=\log a+\log c$

$\log abc=15$에서 $\log a+\log b+\log c=15$이므로

$2\log b+\log b=15$

$3\log b=15$ $\therefore \log b=5$

즉, 공차가 자연수인 등차수열 $\log a$, $\log b$, $\log c$의 순서쌍 $(\log a, \log b, \log c)$는

$(4, 5, 6)$, $(3, 5, 7)$, $(2, 5, 8)$, $(1, 5, 9)$

$\log\frac{ac^2}{b}=\log a+2\log c-\log b$

$=2\log b+\log c-\log b$

$=\log b+\log c$

$=5+\log c$

따라서 $\log\frac{ac^2}{b}$은 $\log c=9$일 때 최댓값이 $5+9=14$

07 답 $\frac{1}{144}$

$x^2=t$로 놓으면 이차방정식 $t^2-\frac{16a+1}{4}t+a=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

이때 두 양의 실근을 α, β $(0<\alpha<\beta)$라 하면 $t=\alpha$, $t=\beta$에서

$x=\pm\sqrt{\alpha}$, $x=\pm\sqrt{\beta}$

네 실근을 크기가 작은 것부터 차례대로 나열하면

$-\sqrt{\beta}$, $-\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$

이 네 수가 등차수열을 이루므로

$2\sqrt{\alpha}=-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\beta}=3\sqrt{\alpha}$ $\therefore \beta=9\alpha$ …… ㉠

또 이차방정식 $t^2-\frac{16a+1}{4}t+a=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{16a+1}{4}$ …… ㉡, $\alpha\beta=a$ …… ㉢

㉠을 ㉡, ㉢에 각각 대입하면

$10\alpha=\frac{16a+1}{4}$ …… ㉣, $9\alpha^2=a$ …… ㉤

㉤을 ㉣에 대입하면 $10\alpha=\frac{144\alpha^2+1}{4}$

$144\alpha^2-40\alpha+1=0$

$(36\alpha-1)(4\alpha-1)=0$

$\therefore \alpha=\frac{1}{36}$ 또는 $\alpha=\frac{1}{4}$

(i) $\alpha=\frac{1}{36}$일 때,

$\beta=\frac{1}{4}$이므로 네 실근은 $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$

따라서 공차는 $\frac{1}{3}$이므로 정수가 아니다.

(ii) $\alpha=\frac{1}{4}$일 때,

$\beta=\frac{9}{4}$이므로 네 실근은 $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$

이때 공차는 1이므로 공차는 정수가 아니라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\alpha=\frac{1}{36}$

따라서 ㉤에서 $a=9\alpha^2=9\times\left(\frac{1}{36}\right)^2=\frac{1}{144}$

08 답 30

주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항이 10이고, 제$(m+2)$항이 25, 제$(m+n+3)$항이 55이므로

$10+(m+1)d=25$

$\therefore (m+1)d=15$ …… ㉠

$10+(m+n+2)d=55$

$\therefore (m+n+2)d=45$ …… ㉡

이 수열의 합이 520이므로

$\frac{(m+n+3)(10+55)}{2}=520$

$m+n+3=16$

$\therefore m+n=13$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 풀면 $d=3$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $m=4$

이를 ㉢에 대입하여 풀면 $n=9$

$\therefore 3m+2n=3\times4+2\times9=30$

09 답 $\frac{3}{4}$

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항을 각각 a, b, 공차를 각각 d_1, d_2라 하면

$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d_1\}}{2}$, $T_n=\frac{n\{2b+(n-1)d_2\}}{2}$

$\therefore \frac{T_n}{S_n}=\frac{\frac{n\{2b+(n-1)d_2\}}{2}}{\frac{n\{2a+(n-1)d_1\}}{2}}=\frac{2b+(n-1)d_2}{2a+(n-1)d_1}$

$\frac{T_n}{S_n}=\frac{4n+27}{7n+1}$에서

$\frac{2b+(n-1)d_2}{2a+(n-1)d_1}=\frac{4n+27}{7n+1}$ …… ㉠

이때 $a_{11}=a+10d_1$, $b_{11}=b+10d_2$이므로 ㉠에 $n=21$을 대입하면

$\frac{2b+20d_2}{2a+20d_1}=\frac{111}{148}$ $\therefore \frac{b+10d_2}{a+10d_1}=\frac{3}{4}$

$\therefore \frac{b_{11}}{a_{11}}=\frac{b+10d_2}{a+10d_1}=\frac{3}{4}$

10 답 26

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k$이므로 (가)에서 $S_k>S_{k+1}$, 즉 $S_{k+1}-S_k<0$을 만족시키는 가장 작은 자연수 k는 $a_{k+1}<0$을 만족시키는 가장 작은 자연수이다.

따라서 $n\le k$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\ge0$이고, $d<0$이어야 한다.

(나)의 $a_8=-\frac{5}{4}a_5$에서 $a_5>0$, $a_8<0$

$a_5a_6a_7<0$에서 $a_5>0$이므로 $a_6>0$, $a_7<0$

따라서 $a_{k+1}=a_7$이므로 $k=6$

(가)에서 $S_6=102$이므로 $\frac{6(2a+5d)}{2}=102$

$\therefore 2a+5d=34$ …… ㉠

(나)의 $a_8=-\frac{5}{4}a_5$에서 $a+7d=-\frac{5}{4}(a+4d)$

$\therefore 3a+16d=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=32$, $d=-6$

$\therefore a_2=a+d=32+(-6)=26$

idea

11 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 8, 공차가 -2이므로 일반항 a_n은

$a_n=8+(n-1)\times(-2)=-2n+10$

즉, $a_{2m-1}=-2(2m-1)+10=-4m+12$이므로

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2m-1}=\frac{m(a_1+a_{2m-1})}{2}$

$=\frac{m\{8+(-4m+12)\}}{2}$

$=-2m^2+10m$

또 $a_{2m}=-2\times2m+10=-4m+10$이므로

$a_2=-4+10=6$

$\therefore a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2m}=\frac{m(a_2+a_{2m})}{2}$

$=\frac{m\{6+(-4m+10)\}}{2}$

$=-2m^2+8m$

$(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2m-1})(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2m})=p\times m^2$에서

$(-2m^2+10m)(-2m^2+8m)=p\times m^2$

$4m^4-36m^3+80m^2=p\times m^2$

$\therefore m^2-9m+20-\frac{p}{4}=0$ …… ㉠

이를 만족시키는 자연수 m의 개수가 2이므로 이차방정식 ㉠의 두 근을 α, β라 하면 α, β는 모두 자연수이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=9$, $\alpha\beta=20-\frac{p}{4}$

(i) $\alpha=1$, $\beta=8$ 또는 $\alpha=8$, $\beta=1$일 때,

$8=20-\frac{p}{4}$ $\therefore p=48$

(ii) $\alpha=2$, $\beta=7$ 또는 $\alpha=7$, $\beta=2$일 때,

$14=20-\frac{p}{4}$ $\therefore p=24$

(iii) $\alpha=3$, $\beta=6$ 또는 $\alpha=6$, $\beta=3$일 때,

$18=20-\frac{p}{4}$ $\therefore p=8$

(iv) $\alpha=4$, $\beta=5$ 또는 $\alpha=5$, $\beta=4$일 때,

$20=20-\frac{p}{4}$ $\therefore p=0$

(i)~(iv)에서 모든 상수 p의 값의 합은

$0+8+24+48=80$

12 답 65

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 일반항 a_n은

$a_n=97+(n-1)d$

$|S_{32}|<|S_{33}|$, $|S_{33}|>|S_{34}|$에서 $a_{33}>0$, $a_{34}<0$이므로

$97+32d>0$, $97+33d<0$ $\therefore -\frac{97}{32}<d<-\frac{97}{33}$

그런데 d는 정수이므로 $d=-3$

$\therefore a_n=97+(n-1)\times(-3)=-3n+100$ …… 배점 30%

이때 첫째항이 97이므로

$S_n=\frac{n\{97+(-3n+100)\}}{2}=\frac{n(197-3n)}{2}$

$S_n>0$에서 $\frac{n(197-3n)}{2}>0$

$n(3n-197)<0$ $\therefore 0<n<\frac{197}{3}$

그런데 n은 자연수이므로 $1\le n\le65$ …… 배점 30%

이때 $a_{33}>0$, $a_{34}<0$이므로

(i) $1\le n\le 32$일 때,

$a_{n+1}>0$이므로 $0<S_n<S_{n+1}$ $\therefore |S_n|<|S_{n+1}|$

(ii) $33\le n\le 64$일 때,

$a_{33}>0$, $a_{n+1}<0$이므로 $0<S_{n+1}<S_n$ $\therefore |S_n|>|S_{n+1}|$

(iii) $n=65$일 때,

$S_{65}=\frac{65(197-3\times 65)}{2}=65$, $S_{66}=\frac{66(197-3\times 66)}{2}=-33$이므로

$|S_n|>|S_{n+1}|$

(iv) $n\ge 66$일 때,

$a_n<0$이고 $S_{n+1}<S_n<0$이므로 $|S_n|<|S_{n+1}|$

(i)~(iv)에서 $|S_n|>|S_{n+1}|$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값은 65이다.

배점 40%

13 답 448

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$라 하면 (나)에서

$a_1r^9+a_1r^{11}+a_1r^{13}+\cdots+a_1r^{19}=(a_1r^4)^2+(a_1r^5)^2+(a_1r^6)^2+\cdots+(a_1r^9)^2$

$a_1r(r^8+r^{10}+r^{12}+\cdots+r^{18})=a_1^2(r^8+r^{10}+r^{12}+\cdots+r^{18})$

$\therefore a_1r=a_1^2$ $(\because r>0)$

이때 a_1은 자연수, 즉 $a_1\ne 0$이므로 $a_1=r$ …… ㉠

(가)에서 $2<a_1+a_1r\le 6$이므로

$2<a_1+a_1^2\le 6$ $(\because$ ㉠$)$

(i) 부등식 $a_1+a_1^2>2$에서 $a_1^2+a_1-2>0$

$(a_1+2)(a_1-1)>0$ $\therefore a_1<-2$ 또는 $a_1>1$

(ii) 부등식 $a_1+a_1^2\le 6$에서 $a_1^2+a_1-6\le 0$

$(a_1+3)(a_1-2)\le 0$ $\therefore -3\le a_1\le 2$

(i), (ii)에서 $-3\le a_1<-2$ 또는 $1<a_1\le 2$

이때 a_1은 자연수이므로 $a_1=2$

따라서 $r=a_1=2$이므로

$a_9-a_6=a_1r^8-a_1r^5=2^9-2^6=448$

14 답 18

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1+a_8=a_1+(a_1+7d)=(a_1+3d)+(a_1+4d)=a_4+a_5$

$\therefore a_4+a_5=8$ …… ㉠

등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

$b_2b_7=b_1r\times b_1r^6=b_1r^3\times b_1r^4=b_4b_5$

$\therefore b_4b_5=12$

이때 $a_4=b_4$, $a_5=b_5$이므로

$a_4a_5=b_4b_5=12$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 a_4, a_5를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-8x+12=0$

$(x-2)(x-6)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=6$

이때 수열 $\{b_n\}$의 공비가 1보다 작으므로

$b_4>b_5$ $\therefore a_4>a_5$

$\therefore a_4=6$, $a_5=2$

즉, 수열 $\{a_n\}$의 공차는

$a_5-a_4=2-6=-4$

따라서 $a_4=6$에서

$a_1+3\times(-4)=6$ $\therefore a_1=18$

15 답 ②

(가)에서 a, c, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r $(r\ne 0)$라 하면

$c=ar$, $b=ar^2$ …… ㉠

(나)에서 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$

㉠을 대입하면 $\frac{2}{ar^2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{ar}$ $(\because a>0, r\ne 0)$

$\frac{2}{ar^2}=\frac{r^2+r}{ar^2}$, $r^2+r-2=0$

$(r+2)(r-1)=0$

$\therefore r=-2$ 또는 $r=1$

(i) $r=-2$일 때,

$c=-2a$, $b=4a$이므로

$f(x)=ax^2+bx+c=ax^2+4ax-2a$

$=a(x+2)^2-6a$

(다)에서 $-1\le x\le 0$일 때 $f(x)$의 최댓값은 -3이므로 $f(0)=-3$

즉, $-2a=-3$이므로 $a=\frac{3}{2}$

(ii) $r=1$일 때,

$a=b=c$이므로

$f(x)=ax^2+bx+c=ax^2+ax+a$

$=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a$

(다)에서 $-1\le x\le 0$일 때 $f(x)$의 최댓값은 -3이므로

$f(-1)=f(0)=-3$

$\therefore a=-3$

이는 a가 양수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+6x-3$이므로

$f(2)=\frac{3}{2}\times 2^2+6\times 2-3=15$

16 답 ①

(가)에서 $A_1(1, 0)$, $B_1(0, 1)$, $C_1(1, 1)$이므로 삼각형 $A_1B_1C_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$ $\therefore a_1=\frac{1}{2}$

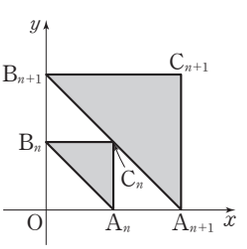
(나)에서 점 C_1은 $\overline{A_2B_2}$의 중점이므로

$A_2(2, 0)$, $B_2(0, 2)$, $C_2(2, 2)$

이때 삼각형 $A_2B_2C_2$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$

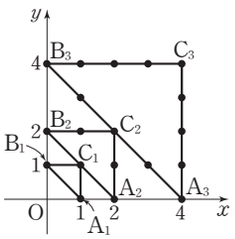
두 직각이등변삼각형 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$는 닮음이고, 넓이의 비는 $\frac{1}{2}:2=1:4$이므로 두 직각이등변삼각형 $A_nB_nC_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 넓이의 비도 1 : 4이다.



따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 4인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=\frac{1}{2}\times 4^{n-1}$

또 그림과 같이 삼각형 $A_1B_1C_1$의 세 변 위에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 3개이므로



$b_1=3$

삼각형 $A_2B_2C_2$의 세 변 위에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 6개이므로

$b_2=6$

삼각형 $A_3B_3C_3$의 세 변 위에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점은 12개이므로

$b_3=12$

⋮

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 일반항 b_n은

$b_n=3\times2^{n-1}$

$\therefore \dfrac{b_8+b_{10}}{a_4+a_5}=\dfrac{3\times2^7+3\times2^9}{\frac{1}{2}\times4^3+\frac{1}{2}\times4^4}=\dfrac{6(2^6+2^8)}{\frac{1}{2}(2^6+2^8)}=12$

17 답 ⑤

이차방정식 $a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}={a_{n+1}}^2-a_na_{n+2}$ …… ㉠

ㄱ. 수열 $\{{a_n}^2\}$이 등차수열이므로 ${a_{n+1}}^2=\dfrac{{a_n}^2+{a_{n+2}}^2}{2}$

이를 ㉠에 대입하면

$\dfrac{D}{4}=\dfrac{{a_n}^2+{a_{n+2}}^2}{2}-a_na_{n+2}$

$=\dfrac{{a_n}^2-2a_na_{n+2}+{a_{n+2}}^2}{2}$

$=\dfrac{(a_n-a_{n+2})^2}{2}$

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 서로 다르므로 $a_n\neq a_{n+2}$

따라서 $\dfrac{D}{4}=\dfrac{(a_n-a_{n+2})^2}{2}>0$이므로 수열 $\{{a_n}^2\}$은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$이 등비수열이므로

$\left(\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)^2=\dfrac{1}{a_n}\times\dfrac{1}{a_{n+2}}$ $\therefore {a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$

이를 ㉠에 대입하면

$\dfrac{D}{4}=a_na_{n+2}-a_na_{n+2}=0$

따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 항상 중근을 갖는다.

ㄷ. 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$이 등차수열이므로

$\dfrac{2}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+2}}$, $\dfrac{2}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+a_{n+2}}{a_na_{n+2}}$

$\therefore a_{n+1}=\dfrac{2a_na_{n+2}}{a_n+a_{n+2}}$

이를 ㉠에 대입하면

$\dfrac{D}{4}=\left(\dfrac{2a_na_{n+2}}{a_n+a_{n+2}}\right)^2-a_na_{n+2}$

$=\dfrac{(2a_na_{n+2})^2-a_na_{n+2}(a_n+a_{n+2})^2}{(a_n+a_{n+2})^2}$

$=\dfrac{a_na_{n+2}\{4a_na_{n+2}-(a_n+a_{n+2})^2\}}{(a_n+a_{n+2})^2}$

$=-a_na_{n+2}\left(\dfrac{a_n-a_{n+2}}{a_n+a_{n+2}}\right)^2$

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a_n>0$, $a_{n+2}>0$이고, 모든 항이 서로 다르므로 $a_n\neq a_{n+2}$

따라서 $\dfrac{D}{4}<0$이므로 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 항상 서로 다른 두 허근을 갖는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

18 답 117

모든 항이 자연수이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차는 자연수이다.

첫째항이 a_1, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=a_1+(n-1)d$

㈏에서 세 항 a_2, a_k, a_{3k-1}이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

${a_k}^2=a_2a_{3k-1}$에서

$\{a_1+(k-1)d\}^2=(a_1+d)\{a_1+(3k-2)d\}$

${a_1}^2+2(k-1)a_1d+(k-1)^2d^2={a_1}^2+(3k-1)a_1d+(3k-2)d^2$

$(k^2-5k+3)d^2=(k+1)a_1d$

$\therefore (k^2-5k+3)d=(k+1)a_1$ …… ㉠

㈎의 $a_1\leq d$에서 양변에 $k+1$을 곱하면

$(k+1)a_1\leq(k+1)d$

$(k^2-5k+3)d\leq(k+1)d$ ($\because$ ㉠)

$k^2-5k+3\leq k+1$

$k^2-6k+2\leq0$

$\therefore 3-\sqrt{7}\leq k\leq3+\sqrt{7}$

그런데 $k\geq3$이므로 $3\leq k\leq3+\sqrt{7}$

따라서 자연수 k의 값은 3, 4, 5이다.

이때 ㉠에서 $k^2-5k+3>0$이어야 하므로 $k=5$

이를 ㉠에 대입하면 $3d=6a_1$ $\therefore d=2a_1$

즉, $a_{16}=a_1+15d=31a_1$이므로 $90\leq a_{16}\leq100$에서

$90\leq31a_1\leq100$

이때 a_1은 자연수이므로 $a_1=3$

$\therefore d=2a_1=6$

$\therefore a_{20}=a_1+19d=3+19\times6=117$

19 답 3

수열 $\{a_n\}$은 첫째항과 공차가 모두 a인 등차수열이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_l=\dfrac{l\{2a+(l-1)a\}}{2}=\dfrac{al(l+1)}{2}$

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 a, 공비가 9인 등비수열이므로

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_m=\dfrac{a(9^m-1)}{9-1}=\dfrac{a(9^m-1)}{8}$

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_l=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_m$에서

$\dfrac{al(l+1)}{2}=\dfrac{a(9^m-1)}{8}$

$4l(l+1)=9^m-1$

$4l^2+4l-(9^m-1)=0$

$4l^2+4l-(3^m+1)(3^m-1)=0$

$\{2l+(3^m+1)\}\{2l-(3^m-1)\}=0$

이때 $2l+(3^m+1)>0$이므로 $2l-(3^m-1)=0$

$\therefore l=\dfrac{3^m-1}{2}=\dfrac{1}{2}\times3^m-\dfrac{1}{2}$

따라서 $p=\dfrac{1}{2}$, $q=3$, $r=-\dfrac{1}{2}$이므로

$p+q+r=3$

20 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a>0)$, 공비를 $r\,(r>0)$라 하고 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $r\neq1$이므로

$S_m=\dfrac{a(r^m-1)}{r-1}=52$ …… ㉠

$S_{2m}=\dfrac{a(r^{2m}-1)}{r-1}=1456$

$\therefore \dfrac{a(r^m+1)(r^m-1)}{r-1}=1456$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^m+1=28 \quad \therefore r^m=27$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $\dfrac{a(27-1)}{r-1}=52$

$\therefore a=2(r-1)$ …… ㉣

(i) $0<r<1$일 때,

㉣에서 $a<0$이므로 첫째항이 양수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $r>1$일 때,

제m항이 36이므로 $ar^{m-1}=36$, $ar^m=36r$

㉢을 대입하면 $27a=36r$

$\therefore a=\dfrac{4}{3}r$ …… ㉤

㉤을 ㉣에 대입하면

$\dfrac{4}{3}r=2(r-1)$, $\dfrac{2}{3}r=2 \quad \therefore r=3$

$r=3$을 ㉢에 대입하면 $3^m=27 \quad \therefore m=3$

$r=3$을 ㉤에 대입하면 $a=4$

(i), (ii)에서 $m=3$, $a=4$

$\therefore m+a_2=m+ar=3+4\times3=15$

21 답 $\sqrt{3}+1$

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항을 각각 a, b, 공비를 각각 r_1, $r_2\,(r_1>0,\ r_2>0)$라 하면

㈎에서 $\dfrac{a(r_1^4-1)}{r_1-1}=10\times\dfrac{a(r_1^2-1)}{r_1-1}$

$(r_1^2+1)(r_1^2-1)=10(r_1^2-1)$

$r_1^2+1=10,\ r_1^2=9 \quad \therefore r_1=3\ (\because r_1>0)$ …… 배점 30%

㈏에서 $\dfrac{b(r_2^6-1)}{r_2-1}=13\times\dfrac{b(r_2^2-1)}{r_2-1}$

$(r_2^2-1)(r_2^4+r_2^2+1)=13(r_2^2-1)$

$r_2^4+r_2^2+1=13,\ r_2^4+r_2^2-12=0$

$(r_2^2+4)(r_2^2-3)=0 \quad \therefore r_2^2=3\ (\because r_2^2>0)$

$\therefore r_2=\sqrt{3}\ (\because r_2>0)$ …… 배점 30%

㈐에서 $\dfrac{a(r_1^8-1)}{r_1-1}=\dfrac{b(r_2^{16}-1)}{r_2-1}$이므로

$\dfrac{a(3^8-1)}{3-1}=\dfrac{b\{(\sqrt{3})^{16}-1\}}{\sqrt{3}-1}$

$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{3}+1$ …… 배점 30%

$\therefore \dfrac{a_{10}}{b_{19}}=\dfrac{ar_1^9}{br_2^{18}}=\dfrac{a\times3^9}{b\times(\sqrt{3})^{18}}=\dfrac{a}{b}=\sqrt{3}+1$ …… 배점 10%

22 답 ①

$f(x)=2+x+x^2+x^3+\cdots+x^9$에서

$x=1$일 때, $f(1)=11$

$x\neq1$일 때, $f(x)=2+\dfrac{x(x^9-1)}{x-1}$

$(f\circ f)(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{18}x^{18}$ …… ㉠에서

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(f(0))=a_0$

이때 $f(0)=2$이므로

$a_0=f(2)=2+\dfrac{2(2^9-1)}{2-1}=2^{10}=1024$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(f(-1))=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{17}+a_{18}$

이때 $f(-1)=2+\dfrac{-1\times(-2)}{-2}=1$이므로

$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{17}+a_{18}=f(1)=11$

$\therefore (2a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{18})-(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{17})$

$=a_0+(a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{17}+a_{18})$

$=1024+11=1035$

23 답 5

직선 AP_1은 직선 $x+y=12$, 즉 $y=-x+12$와 수직이므로 기울기가 1이다.

점 $A(0,\ 6)$을 지나고 기울기가 1인 직선 AP_1의 방정식은

$y=x+6$

이때 점 P_1은 두 직선 $y=-x+12$, $y=x+6$의 교점이므로

$-x+12=x+6$에서 $2x=6 \quad \therefore x=3$

이를 $y=-x+12$에 대입하여 풀면 $y=9$

$\therefore P_1(3,\ 9) \quad \therefore \overline{P_1Q_1}=9$

직선 Q_1P_2는 점 $Q_1(3,\ 0)$을 지나고 기울기가 1이므로 직선 Q_1P_2의 방정식은

$y=x-3$

이때 점 P_2는 두 직선 $y=-x+12$, $y=x-3$의 교점이므로

$-x+12=x-3$에서 $2x=15 \quad \therefore x=\dfrac{15}{2}$

이를 $y=-x+12$에 대입하여 풀면 $y=\dfrac{9}{2}$

$\therefore P_2\left(\dfrac{15}{2},\ \dfrac{9}{2}\right) \quad \therefore \overline{P_2Q_2}=\dfrac{9}{2}$

직선 Q_2P_3은 점 $Q_2\left(\dfrac{15}{2},\ 0\right)$을 지나고 기울기가 1이므로 직선 Q_2P_3의 방정식은

$y=x-\dfrac{15}{2}$

이때 점 P_3은 두 직선 $y=-x+12$, $y=x-\dfrac{15}{2}$의 교점이므로

$-x+12=x-\dfrac{15}{2}$에서 $2x=\dfrac{39}{2} \quad \therefore x=\dfrac{39}{4}$

이를 $y=-x+12$에 대입하여 풀면 $y=\dfrac{9}{4}$

$\therefore P_3\left(\dfrac{39}{4},\ \dfrac{9}{4}\right) \quad \therefore \overline{P_3Q_3}=\dfrac{9}{4}$

⋮

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 9, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로

$l_1+l_2+l_3+\cdots+l_n=\dfrac{9\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{1}{2}}=18\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

$l_1+l_2+l_3+\cdots+l_n>17$에서

$18\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}>17,\ 1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n>\dfrac{17}{18} \quad \therefore \left(\dfrac{1}{2}\right)^n<\dfrac{1}{18}$

따라서 $2^n>18$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 5이다.

24 답 ②

$S_nT_n=n^2(n^2-1)=n^2(n+1)(n-1)$ …… ㉠

ㄱ. S_n, T_n은 각각 n에 대한 이차식이고, $b_1=T_1\neq0$이므로 T_n은 $n-1$을 인수로 갖지 않는다.

따라서 ㉠에서 $T_n=n^2$ 또는 $T_n=n(n+1)$

이때 $T_1\neq1$이므로 $T_n=n(n+1)$

$\therefore S_n=n(n-1)$

ㄴ. $a_n=2n$이면 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 2이므로 ($a_n=2+(n-1)\times2$)

$S_n=\dfrac{n\{2\times2+(n-1)\times2\}}{2}=n(n+1)$

따라서 ㉠에서 $T_n=n(n-1)$

(i) $n\geq2$일 때,

$b_n=T_n-T_{n-1}$

$=n(n-1)-(n-1)(n-2)=2n-2$ …… ㉡

(ii) $n=1$일 때,

$b_1=T_1=0$ …… ㉢

㉢은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로 일반항 b_n은

$b_n=2n-2$

ㄷ. $S_n=\dfrac{n\{2a_1+(n-1)d_1\}}{2}=\dfrac{d_1}{2}n^2+a_1n-\dfrac{d_1}{2}n$

$T_n=\dfrac{n\{2b_1+(n-1)d_2\}}{2}=\dfrac{d_2}{2}n^2+b_1n-\dfrac{d_2}{2}n$

$S_nT_n=n^2(n^2-1)$에서

$\left(\dfrac{d_1}{2}n^2+a_1n-\dfrac{d_1}{2}n\right)\left(\dfrac{d_2}{2}n^2+b_1n-\dfrac{d_2}{2}n\right)=n^2(n^2-1)$

이 등식의 n^4의 계수를 비교하면

$\dfrac{d_1d_2}{4}=1$ $\therefore d_1d_2=4$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

25 답 ③

$S_n=an^2+bn$에서

(i) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(an^2+bn)-\{a(n-1)^2+b(n-1)\}$

$=2an-a+b$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=a+b$ …… ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n은

$a_n=2an-a+b$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a+b$, 공차가 $2a$인 등차수열이다. ($a_n=a+b+(n-1)\times2a$)

㈎의 $a_6=26$에서 $12a-a+b=26$

$\therefore 11a+b=26$ …… ㉢

㈏에서

$(S_1+S_3+S_5+\cdots+S_{19})-(S_2+S_4+S_6+\cdots+S_{18})$

$=S_1+(S_3-S_2)+(S_5-S_4)+\cdots+(S_{19}-S_{18})$

$=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}=\dfrac{10(a_1+a_{19})}{2}$

$=\dfrac{10\{(a+b)+(37a+b)\}}{2}=10(19a+b)$

즉, $10(19a+b)=580$이므로

$19a+b=58$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-18$

$\therefore a-b=22$

step 3 최고난도 문제

101~103쪽

01 ④	02 ㄱ, ㄴ	03 −9	04 273	05 ④
06 23	07 477	08 84	09 ④	10 $\frac{3}{8}$
11 10				

01 답 ④

1단계 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 α_1, β_1, α_2, β_2에 대한 식 세우기

네 수 α_1, α_2, β_1, β_2가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\beta_1-\alpha_1=\beta_2-\alpha_2$

즉, $(\beta_1-\alpha_1)^2=(\beta_2-\alpha_2)^2$이므로

$(\alpha_1+\beta_1)^2-4\alpha_1\beta_1=(\alpha_2+\beta_2)^2-4\alpha_2\beta_2$ …… ㉠

이때 α_1, β_1은 이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_1+\beta_1=-p$, $\alpha_1\beta_1=q$ …… ㉡

또 α_2, β_2는 이차방정식 $x^2+qx+p=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_2+\beta_2=-q$, $\alpha_2\beta_2=p$ …… ㉢

2단계 p, q의 값 구하기

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$(-p)^2-4q=(-q)^2-4p$

$p^2-q^2+4(p-q)=0$

$(p+q)(p-q)+4(p-q)=0$

$(p-q)(p+q+4)=0$

이때 $p\neq q$이므로 $p+q+4=0$

$\therefore q=-p-4$ …… ㉣

한편 α_2는 α_1, β_1의 등차중항이므로 $2\alpha_2=\alpha_1+\beta_1$에서

$2\alpha_2=-p$ $\therefore \alpha_2=-\dfrac{p}{2}$

이를 $x^2+qx+p=0$에 대입하면

$\left(-\dfrac{p}{2}\right)^2+q\times\left(-\dfrac{p}{2}\right)+p=0$

$\dfrac{p^2}{4}-\dfrac{pq}{2}+p=0$ …… ㉤

㉣을 ㉤에 대입하면

$\dfrac{p^2}{4}-\dfrac{p(-p-4)}{2}+p=0$

$p^2+2p(p+4)+4p=0$

$3p^2+12p=0$

$3p(p+4)=0$

$\therefore p=-4$ 또는 $p=0$

이를 ㉣에 대입하면

$p=-4$일 때 $q=0$, $p=0$일 때 $q=-4$

3단계 두 이차방정식의 해 구하기

이때 두 이차방정식은

$x^2-4x=0$, $x^2-4=0$

$x^2-4x=0$에서 $x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$

$x^2-4=0$에서 $(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

4단계 $\beta_2-2\alpha_1$의 값 구하기

따라서 $\alpha_1=-2$, $\beta_1=2$, $\alpha_2=0$, $\beta_2=4$이므로

$\beta_2-2\alpha_1=4-2\times(-2)=8$

02 답 ㄱ, ㄴ

1단계 $S_5=S_4+2$를 이용하여 a_5의 값 구하기

$a_n=S_n-S_{n-1}\ (n\geq 2)$이므로

$S_5=S_4+2$에서 $S_5-S_4=2$

$\therefore a_5=2$

2단계 a_5의 값을 이용하여 a_1, a_3, a_7, a_9를 d에 대한 식으로 나타내기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 d이므로

$a_1=2-4d$, $a_3=2-2d$, $a_7=2+2d$, $a_9=2+4d$

3단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. $A=a_1^2+a_3^2+a_5^2+a_7^2$

$=(2-4d)^2+(2-2d)^2+2^2+(2+2d)^2$

$=24d^2-16d+16$

$=24\left(d-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{40}{3}$

따라서 A는 $d=\frac{1}{3}$일 때 최솟값을 갖는다.

4단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. $B=|a_3|+|a_5|+|a_7|+|a_9|$

$=|2-2d|+2+|2+2d|+|2+4d|$

$=2(|d+1|+|2d+1|+|d-1|+1)$

(i) $d\leq -1$일 때,

$B=2\{-(d+1)-(2d+1)-(d-1)+1\}=-8d$

즉, $-8d\geq 8$이므로 $B\geq 8$

(ii) $-1<d\leq -\frac{1}{2}$일 때,

$B=2\{(d+1)-(2d+1)-(d-1)+1\}=-4d+4$

즉, $6\leq -4d+4<8$이므로 $6\leq B<8$

(iii) $-\frac{1}{2}<d\leq 1$일 때,

$B=2\{(d+1)+(2d+1)-(d-1)+1\}=4d+8$

즉, $6<4d+8\leq 12$이므로 $6<B\leq 12$

(iv) $d>1$일 때,

$B=2\{(d+1)+(2d+1)+(d-1)+1\}=8d+4$

즉, $8d+4>12$이므로 $B>12$

(i)~(iv)에서 $B\geq 6$이므로 B의 최솟값은 6이다.

5단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. (i) $-1<d\leq -\frac{1}{2}$일 때,

$A=24d^2-16d+16$, $B=-4d+4$

$\therefore A+8B=24d^2-16d+16+8(-4d+4)$

$=24d^2-48d+48=24(d-1)^2+24$

따라서 $A+8B$는 $d=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값 78을 갖는다.

(ii) $-\frac{1}{2}<d<1$일 때,

$A=24d^2-16d+16$, $B=4d+8$

$\therefore A+8B=24d^2-16d+16+8(4d+8)$

$=24d^2+16d+80=24\left(d+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{232}{3}$

따라서 $A+8B$는 $d=-\frac{1}{3}$일 때 최솟값 $\frac{232}{3}$를 갖는다.

(i), (ii)에서 $-1<d<1$일 때, $A+8B$의 최솟값은 $\frac{232}{3}$이다.

6단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

03 답 -9

1단계 a_{m+1}을 m, d에 대한 식으로 나타내기

㈎의 $a_{m+1}=7$에서

$a_1+md=7$ …… ㉠

2단계 md의 값 구하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차 d가 양수이므로 $a_n<a_{n+1}$

따라서 $M=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_{m-k}}{m-k}-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}$의 값이 최대가 되는 경우는 $x_i\ (i=1, 2, \cdots, k)$의 값보다 $y_j\ (j=1, 2, \cdots, m-k)$의 값이 더 클 때이므로

$x_1+x_2+\cdots+x_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$

$y_1+y_2+\cdots+y_{m-k}=a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_m$

㈏에서 M의 최댓값은 8이므로

$\frac{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_m}{m-k}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}=8$

$\frac{1}{m-k}\times\frac{(m-k)(a_{k+1}+a_m)}{2}-\frac{1}{k}\times\frac{k(a_1+a_k)}{2}=8$

$\frac{a_{k+1}+a_m-a_1-a_k}{2}=8$

$\frac{(a_{k+1}-a_k)+(a_m-a_1)}{2}=8$

$\frac{d+\{a_1+(m-1)d-a_1\}}{2}=8$

$\therefore md=16$ …… ㉡

3단계 a_1의 값 구하기

㉡을 ㉠에 대입하면 $a_1+16=7$

$\therefore a_1=-9$

04 답 273

1단계 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차에 대한 식 세우기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\ (a\neq 0)$, 공차를 d라 하면 $S_9=S_{18}$에서

$\frac{9(2a+8d)}{2}=\frac{18(2a+17d)}{2}$

$2a+8d=2(2a+17d)$

$2a=-26d$ $\therefore a=-13d$

2단계 같은 값을 갖는 S_n의 규칙 찾기

$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{n\{-26d+(n-1)d\}}{2}$

$=\frac{n(-27d+nd)}{2}=\frac{d}{2}n(n-27)$

이므로

$S_1=S_{26}=-13d \longrightarrow S_1=\frac{d}{2}\times 1\times(-26)=\frac{d}{2}\times 26\times(-1)=S_{26}$

$S_2=S_{25}=-25d \longrightarrow S_2=\frac{d}{2}\times 2\times(-25)=\frac{d}{2}\times 25\times(-2)=S_{25}$

$S_3=S_{24}=-36d \longrightarrow S_3=\frac{d}{2}\times 3\times(-24)=\frac{d}{2}\times 24\times(-3)=S_{24}$

⋮

$S_{13}=S_{14}=-91d \longrightarrow S_{13}=\frac{d}{2}\times 13\times(-14)=\frac{d}{2}\times 14\times(-13)=S_{14}$

$S_{27}=0$, $S_{28}=14d$, $S_{29}=29d$, …

3단계 자연수 n의 값의 합 구하기

이때 집합 T_n에서 등차수열의 합이 같은 경우에는 집합의 같은 원소가 중복되므로

$T_{13}=T_{14}=T_{15}=\cdots=T_{26}=\{S_1, S_2, S_3, \cdots, S_{13}\}$

따라서 집합 T_n의 원소의 개수가 13이 되도록 하는 자연수 n의 값은 13, 14, 15, …, 26이므로 모든 자연수 n의 값의 합은

$13+14+15+\cdots+26=\frac{14(13+26)}{2}=273$

05 답 ④

1단계 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항 구하기

㈎에서 $S_1-T_1=-3$ …… ㉠

㈏의 $S_n^2=T_n^2+n^2(n-7)$에서 양변에 $n=1$을 대입하면

$S_1^2=T_1^2-6$, $S_1^2-T_1^2=-6$

$(S_1+T_1)(S_1-T_1)=-6$

$-3(S_1+T_1)=-6$ ($\because$ ㉠)

$\therefore S_1+T_1=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$S_1=-\frac{1}{2}$, $T_1=\frac{5}{2}$

$\therefore a_1=-\frac{1}{2}$, $b_1=\frac{5}{2}$

2단계 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차 구하기

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d_1, d_2 ($d_1\neq d_2$)라 하면

$$S_n+T_n=\frac{n\{2a_1+(n-1)d_1\}}{2}+\frac{n\{2b_1+(n-1)d_2\}}{2}$$
$$=\frac{n\{4+(n-1)(d_1+d_2)\}}{2}$$

$$S_n-T_n=\frac{n\{2a_1+(n-1)d_1\}}{2}-\frac{n\{2b_1+(n-1)d_2\}}{2}$$
$$=\frac{n\{-6+(n-1)(d_1-d_2)\}}{2}$$

㈏에서 $S_n^2-T_n^2=n^2(n-7)$이므로

$(S_n+T_n)(S_n-T_n)=n^2(n-7)$

즉, $(S_n+T_n)(S_n-T_n)$은 n에 대한 삼차식이므로 S_n+T_n 또는 S_n-T_n은 n에 대한 일차식이다.

그런데 $d_1\neq d_2$에서 S_n-T_n은 n에 대한 이차식이므로 S_n+T_n은 n에 대한 일차식이다.

$\therefore d_1+d_2=0$ …… ㉢

$\therefore S_n^2-T_n^2=(S_n+T_n)(S_n-T_n)$
$$=2n\times\frac{n\{-6+(n-1)(d_1-d_2)\}}{2}$$
$$=n^2\{-6+(n-1)(d_1-d_2)\}$$

$S_n^2-T_n^2=n^2(n-7)$에서

$-6+(n-1)(d_1-d_2)=n-7$

$\therefore d_1-d_2=1$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$d_1=\frac{1}{2}$, $d_2=-\frac{1}{2}$

3단계 $(a_8-b_8)(a_8+b_8)$의 값 구하기

$\therefore (a_8-b_8)(a_8+b_8)=a_8^2-b_8^2$
$$=(a_1+7d_1)^2-(b_1+7d_2)^2$$
$$=3^2-(-1)^2$$
$$=8$$

06 답 23

1단계 등차수열의 합을 이용하여 $P(1)$을 식으로 나타내기

$P(x)=a_{m+1}x^m+a_mx^{m-1}+a_{m-1}x^{m-2}+\cdots+a_2x+a_1$에서

$P(1)=a_{m+1}+a_m+a_{m-1}+\cdots+a_2+a_1$

이는 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$(m+1)$항까지의 합이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$P(1)=\frac{(m+1)(2a_1+md)}{2}$$

2단계 k의 값 구하기

$P(x)=a_{m+1}x^m+a_mx^{m-1}+a_{m-1}x^{m-2}+\cdots+a_2x+a_1$에서

$P(-1)=a_{m+1}\times(-1)^m+a_m\times(-1)^{m-1}+a_{m-1}\times(-1)^{m-2}$
$$+\cdots-a_2+a_1$$

(i) m이 홀수일 때,

$P(-1)=-a_{m+1}+a_m-a_{m-1}+\cdots-a_2+a_1$
$$=-(a_{m+1}-a_m)-(a_{m-1}-a_{m-2})-\cdots-(a_2-a_1)$$
$$=-\frac{m+1}{2}d$$

$P(1)=5P(-1)$에서

$\frac{(m+1)(2a_1+md)}{2}=5\times\left(-\frac{m+1}{2}d\right)$

$m+1\neq0$이므로 $2a_1+md=-5d$

$\therefore a_1+\frac{m+5}{2}d=0$

m은 홀수이므로 $\frac{m+5}{2}$는 자연수이고 $a_1+\frac{m+5}{2}d$는 수열 $\{a_n\}$의 제$\frac{m+7}{2}$항이다.

이때 $a_{\frac{m+7}{2}}=a_1+\frac{m+5}{2}d=0$이므로 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $P(1)=5P(-1)$을 만족시키는 홀수 m은 존재하지 않는다.

(ii) m이 짝수일 때,

$P(-1)=a_{m+1}-a_m+a_{m-1}-\cdots-a_2+a_1$
$$=(a_{m+1}-a_m)+(a_{m-1}-a_{m-2})+\cdots+(a_3-a_2)+a_1$$
$$=a_1+\frac{m}{2}d$$
$$=\frac{2a_1+md}{2}$$

$P(1)=5P(-1)$에서

$\frac{(m+1)(2a_1+md)}{2}=5\times\frac{2a_1+md}{2}$ …… ㉤

m은 짝수이므로 $\frac{m}{2}$은 자연수이고 $a_1+\frac{m}{2}d$는 수열 $\{a_n\}$의 제$\left(\frac{m}{2}+1\right)$항이다.

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니므로

$a_{\frac{m}{2}+1}=a_1+\frac{m}{2}d=\frac{2a_1+md}{2}\neq0$

$2a_1+md\neq0$이므로 ㉤에서

$m+1=5$ $\therefore m=4$

(i), (ii)에서 $m=4$이므로 $k=4$

3단계 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차에 대한 식 세우기

다항식 $a_5x^4+a_4x^3+a_3x^2+a_2x+a_1$이 $x+2$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$a_5\times(-2)^4+a_4\times(-2)^3+a_3\times(-2)^2+a_2\times(-2)+a_1=0$

$(a_1+4d)\times16+(a_1+3d)\times(-8)+(a_1+2d)\times4$
$$+(a_1+d)\times(-2)+a_1=0$$

$11a_1+46d=0$

$\therefore d=-\frac{11}{46}a_1$

4단계 $\frac{a_1}{a_{k+1}}$의 값 구하기

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\neq0$이므로

$$\frac{a_1}{a_{k+1}}=\frac{a_1}{a_5}=\frac{a_1}{a_1+4d}=\frac{a_1}{a_1-\frac{22}{23}a_1}=\frac{1}{\frac{1}{23}}=23$$

07 답 477

1단계 공비의 조건 파악하기

$A(200)$은 첫째항이 3, 공비가 2 이상의 자연수인 등비수열의 제k항이 3×2^{200}이 되는 모든 자연수 k의 값의 합이다.

첫째항이 3이므로 등비수열의 공비는 2의 거듭제곱 꼴이어야 한다.

이때 $2^{200}=(2^2)^{100}=(2^4)^{50}=(2^5)^{40}=\cdots=(2^{200})^1$이므로 공비를 2^p(p는 자연수)이라 하면 $2^{200}=(2^p)^{\frac{200}{p}}$이고 $\frac{200}{p}$은 자연수이어야 하므로 p는 200의 약수이다.

2단계 $A(200)$의 값 구하기

$3\times2^{200}=3\times(2^p)^{\frac{200}{p}}=3\times(2^p)^{\frac{200}{p}+1-1}$이므로 3×2^{200}은 첫째항이 3, 공비가 2^p인 등비수열의 제$\left(\frac{200}{p}+1\right)$항이다.

$p=1$일 때, 3×2^{200}은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열의 제201항이다.
$\therefore k=201$

$p=2$일 때, $3\times(2^2)^{100}$은 첫째항이 3, 공비가 2^2인 등비수열의 제101항이다. $\therefore k=101$

$p=4$일 때, $3\times(2^4)^{50}$은 첫째항이 3, 공비가 2^4인 등비수열의 제51항이다.
$\therefore k=51$

$p=5$일 때, $3\times(2^5)^{40}$은 첫째항이 3, 공비가 2^5인 등비수열의 제41항이다.
$\therefore k=41$

$p=8$일 때, $3\times(2^8)^{25}$은 첫째항이 3, 공비가 2^8인 등비수열의 제26항이다.
$\therefore k=26$

$p=10$일 때, $3\times(2^{10})^{20}$은 첫째항이 3, 공비가 2^{10}인 등비수열의 제21항이다. $\therefore k=21$

$p=20$일 때, $3\times(2^{20})^{10}$은 첫째항이 3, 공비가 2^{20}인 등비수열의 제11항이다. $\therefore k=11$

$p=25$일 때, $3\times(2^{25})^8$은 첫째항이 3, 공비가 2^{25}인 등비수열의 제9항이다. $\therefore k=9$

$p=40$일 때, $3\times(2^{40})^5$은 첫째항이 3, 공비가 2^{40}인 등비수열의 제6항이다.
$\therefore k=6$

$p=50$일 때, $3\times(2^{50})^4$은 첫째항이 3, 공비가 2^{50}인 등비수열의 제5항이다.
$\therefore k=5$

$p=100$일 때, $3\times(2^{100})^2$은 첫째항이 3, 공비가 2^{100}인 등비수열의 제3항이다. $\therefore k=3$

$p=200$일 때, $3\times(2^{200})^1$은 첫째항이 3, 공비가 2^{200}인 등비수열의 제2항이다. $\therefore k=2$

$\therefore A(200)=201+101+51+41+26+21+11+9+6+5+3+2$
$=477$

08 답 84

1단계 (가)를 이용하여 a, b의 부호 판단하기

$ab<0$이므로 a와 b의 부호가 다르다.

2단계 a의 값 구하기

(i) $a<0$, $b>0$일 때,

세 수 a, b, ab에서 a와 ab는 음수, b는 양수이고, 음수 두 개와 양수 한 개가 등비수열이 되는 배열은 (음수, 양수, 음수)이므로 세 수의 배열은 a, b, ab 또는 ab, b, a이다.

이때 b가 등비중항이므로

$b^2=a\times ab$ $\therefore b=a^2$

따라서 세 수 a, b, ab는 a, a^2, a^3이다.

$a<0$, $a^2>0$, $a^3<0$이므로 세 수를 배열하여 등차수열이 되는 배열은 (음수, 음수, 양수) 또는 (양수, 음수, 음수)이다.

이때 등차중항은 음수인 a 또는 a^3이다.

ⓘ a가 등차중항인 경우

$2a=a^2+a^3$, $a^2+a-2=0$

$(a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ ($\because a<0$)

ⓘⓘ a^3이 등차중항인 경우

$2a^3=a+a^2$, $2a^2-a-1=0$

$(2a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ ($\because a<0$)

ⓘ, ⓘⓘ에서 $a=-2$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$

(ii) $a>0$, $b<0$일 때,

세 수 a, b, ab에서 a는 양수, b와 ab는 음수이고, 음수 두 개와 양수 한 개가 등비수열이 되는 배열은 (음수, 양수, 음수)이므로 세 수의 배열은 b, a, ab 또는 ab, a, b이다.

이때 a가 등비중항이므로

$a^2=b\times ab$ $\therefore a=b^2$ …… ㉠

따라서 세 수 a, b, ab는 b^2, b, b^3이다.

$b<0$, $b^2>0$, $b^3<0$이므로 세 수를 배열하여 등차수열이 되는 배열은 (음수, 음수, 양수) 또는 (양수, 음수, 음수)이다.

이때 등차중항은 음수인 b 또는 b^3이다.

(i)의 ⓘ, ⓘⓘ와 같은 방법으로 하면

$b=-2$ 또는 $b=-\frac{1}{2}$

이를 각각 ㉠에 대입하여 풀면

$a=4$ 또는 $a=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 $a=-2$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{1}{4}$ 또는 $a=4$

3단계 $48k$의 값 구하기

따라서 $k=-2+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}+4=\frac{7}{4}$이므로

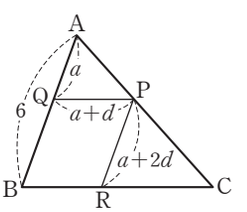
$48k=84$

09 답 ④

1단계 $\overline{AQ}$, $\overline{QP}$, $\overline{PR}$를 식으로 나타내기

(가)에서 $\overline{AQ}$, $\overline{QP}$, $\overline{PR}$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d, $\overline{AQ}=a$라 하면

$\overline{QP}=a+d$, $\overline{PR}=a+2d$



2단계 선분 PQ의 길이 구하기

$\overline{AB}/\!/\overline{PR}$이므로 $\overline{PR}=\overline{QB}$

$\therefore \overline{AQ}+\overline{PR}=\overline{AQ}+\overline{QB}=\overline{AB}=6$

$a+(a+2d)=6$ $\therefore a+d=3$

$\therefore \overline{QP}=3$

3단계 선분 PR의 길이 구하기

두 삼각형 AQP, ABC에서 $\overline{QP}/\!/\overline{BC}$이므로

$\overline{AQ}:\overline{AB}=\overline{QP}:\overline{BC}$

이때 $\overline{AB}=6$, $\overline{QP}=3$이므로

$a:6=3:\overline{BC}$ $\therefore \overline{BC}=\frac{18}{a}$

(나)에서 $\overline{AQ}$, $\overline{PR}$, $\overline{BC}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\overline{PR}^2=\overline{AQ}\times\overline{BC}$

이때 $\overline{PR}=\overline{QB}=6-a$이므로

$(6-a)^2=a\times\frac{18}{a}$

$6-a=\pm3\sqrt{2}$

$\therefore\ a=6+3\sqrt{2}$ 또는 $a=6-3\sqrt{2}$

그런데 $0<a<6$이므로 $a=6-3\sqrt{2}$

$\therefore\ \overline{PR}=6-a=6-(6-3\sqrt{2})=3\sqrt{2}$

4단계 사각형 PQBR의 둘레의 길이 구하기

사각형 PQBR의 둘레의 길이는

$2(\overline{PQ}+\overline{PR})=2(3+3\sqrt{2})$

$=6+6\sqrt{2}=6+\sqrt{72}$

5단계 $p+q$의 값 구하기

따라서 $p=6$, $q=72$이므로

$p+q=78$

10 답 $\frac{3}{8}$

1단계 a_n 구하기

첫째항이 a, 공비가 2인 등비수열의 일반항 a_n은

$a_n=a\times2^{n-1}=2^{n-1}a$

2단계 b_k+c_k의 최솟값을 a에 대한 식으로 나타내기

$b_k=a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+a_3a_{k+3}+\cdots+a_{10-k}a_{10}$

$=a\times2^ka+2a\times2^{k+1}a+2^2a\times2^{k+2}a+\cdots+2^{9-k}a\times2^9a$

$=a^2(2^k+2^{k+2}+2^{k+4}+\cdots+2^{18-k})$

$=a^2\times2^k\{1+2^2+(2^2)^2+\cdots+(2^2)^{9-k}\}$

$=a^2\times2^k\times\frac{(2^2)^{10-k}-1}{2^2-1}$

$=\frac{2^{20-k}-2^k}{3}a^2$

$c_k=a_{11-k}a_1+a_{12-k}a_2+a_{13-k}a_3+\cdots+a_{10}a_k$

$=2^{10-k}a\times a+2^{11-k}a\times2a+2^{12-k}a\times2^2a+\cdots+2^9a\times2^{k-1}a$

$=a^2(2^{10-k}+2^{12-k}+2^{14-k}+\cdots+2^{k+8})$

$=a^2\times2^{10-k}\{1+2^2+(2^2)^2+\cdots+(2^2)^{k-1}\}$

$=a^2\times2^{10-k}\times\frac{(2^2)^k-1}{2^2-1}$

$=\frac{2^{10+k}-2^{10-k}}{3}a^2$

$\therefore\ b_k+c_k=\left(\frac{2^{20-k}-2^k}{3}+\frac{2^{10+k}-2^{10-k}}{3}\right)a^2$

$=\left(\frac{2^{20-k}-2^{10-k}}{3}+\frac{2^{10+k}-2^k}{3}\right)a^2$

$=\frac{a^2}{3}\{2^{10-k}(2^{10}-1)+2^k(2^{10}-1)\}$

$=\frac{2^{10}-1}{3}a^2\left(\frac{2^{10}}{2^k}+2^k\right)$

이때 $\frac{2^{10}}{2^k}>0$, $2^k>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{2^{10}}{2^k}+2^k\ge2\sqrt{\frac{2^{10}}{2^k}\times2^k}=2\sqrt{2^{10}}=64$

$\left(\text{단, 등호는 }\frac{2^{10}}{2^k}=2^k,\ \text{즉 }k=5\text{일 때 성립}\right)$

$\therefore\ b_k+c_k=\frac{2^{10}-1}{3}a^2\left(\frac{2^{10}}{2^k}+2^k\right)\ge341a^2\times64$

따라서 b_k+c_k의 최솟값은 $341a^2\times64$이다.

3단계 a의 값 구하기

즉, $341a^2\times64=3069$이므로

$a^2=\frac{9}{64}$

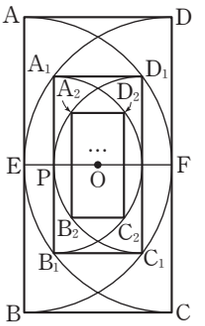
$\therefore\ a=\frac{3}{8}\ (\because\ a>0)$

11 답 10

1단계 l_n 구하기

그림과 같이 두 선분 AB, DC의 중점을 각각 E, F라 하고, 선분 EF의 중점을 O라 하자.

또 선분 A_1B_1의 중점을 P라 하고 $\overline{A_1D_1}=x$라 하면 $\overline{A_1B_1}=2\overline{A_1D_1}=2x$이므로



$\overline{A_1P}=x$

$\overline{EP}=\overline{OE}-\overline{OP}$

$=\frac{1}{2}\overline{AD}-\frac{1}{2}\overline{A_1D_1}$

$=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}x$

$\overline{FP}=\overline{AD}-\overline{EP}$

$=\frac{5}{3}-\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}x\right)$

$=\frac{5}{6}+\frac{1}{2}x$

이때 $\overline{A_1F}=\overline{EF}=\overline{AD}=\frac{5}{3}$이므로 직각삼각형 A_1PF에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{A_1P}^2+\overline{PF}^2=\overline{A_1F}^2$, $x^2+\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{2}x\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2$

$\frac{5}{4}x^2+\frac{5}{6}x-\frac{25}{12}=0$, $3x^2+2x-5=0$

$(3x+5)(x-1)=0$ $\quad\therefore\ x=1\ (\because\ x>0)$

$\therefore\ \overline{A_1D_1}=1$, $\overline{A_1B_1}=2$

즉, 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서

$l_1=2(\overline{A_1D_1}+\overline{A_1B_1})=2(1+2)=6$

두 직사각형 ABCD, $A_1B_1C_1D_1$은 닮음이고, 닮음비는

$\overline{AD}:\overline{A_1D_1}=\frac{5}{3}:1=5:3$이므로 두 직사각형 ABCD, $A_1B_1C_1D_1$의 둘레의 길이의 비는 5 : 3이다.

즉, 두 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 둘레의 길이의 비도 5 : 3이다.

따라서 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 6, 공비가 $\frac{3}{5}$인 등비수열이므로 일반항 l_n은

$l_n=6\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

2단계 n의 최솟값 구하기

$l_n<\frac{1}{10}$에서 $6\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}<\frac{1}{10}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log6+(n-1)(\log3-\log5)<\log10^{-1}$

$\log2+\log3+(n-1)\{\log3-(1-\log2)\}<-1$

$0.3+0.48+(n-1)\{0.48-(1-0.3)\}<-1$

$-0.22n<-2$

$\therefore\ n>\frac{2}{0.22}=9.09\cdots$

따라서 자연수 n의 최솟값은 10이다.

09 수열의 합

step 1 핵심 문제 | 104~105쪽

01 12 02 ② 03 700 04 ② 05 1541 06 ⑤
07 514 08 ③ 09 ⑤ 10 $\sqrt{2}$ 11 ④

01 답 12

$\sum_{k=1}^{10} a_k-\sum_{k=1}^{7}\frac{a_k}{2}=56$에서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}-\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{2}+\cdots+\frac{a_7}{2}\right)=56$

$\therefore \frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{2}+\cdots+\frac{a_7}{2}+a_8+a_9+a_{10}=56$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{10} 2a_k-\sum_{k=1}^{8} a_k=100$에서

$2a_1+2a_2+2a_3+\cdots+2a_{10}-(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8)=100$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8+2a_9+2a_{10}=100$ …… ㉡

$2\times$㉠$-$㉡을 하면

$a_8=12$

다른 풀이

$\sum_{k=1}^{10} a_k-\sum_{k=1}^{7}\frac{a_k}{2}=56$에서

$\sum_{k=1}^{10} a_k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{7} a_k=56$ …… ㉠

$\sum_{k=1}^{10} 2a_k-\sum_{k=1}^{8} a_k=100$에서

$2\sum_{k=1}^{10} a_k-\sum_{k=1}^{8} a_k=100$ …… ㉡

$2\times$㉠$-$㉡을 하면

$-\sum_{k=1}^{7} a_k+\sum_{k=1}^{8} a_k=12$ $\therefore a_8=12$

02 답 ②

$a_n=\log_2\left(1+\frac{2}{n}\right)=\log_2\frac{n+2}{n}$

$\therefore \sum_{k=1}^{m} a_k=\sum_{k=1}^{m}\log_2\frac{k+2}{k}$

$=\log_2\frac{3}{1}+\log_2\frac{4}{2}+\log_2\frac{5}{3}+\log_2\frac{6}{4}$

$+\cdots+\log_2\frac{m+1}{m-1}+\log_2\frac{m+2}{m}$

$=\log_2\left(\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{6}{4}\times\cdots\times\frac{m+1}{m-1}\times\frac{m+2}{m}\right)$

$=\log_2\frac{(m+1)(m+2)}{2}$

$\sum_{k=1}^{m} a_k>9$에서

$\log_2\frac{(m+1)(m+2)}{2}>9$

$\frac{(m+1)(m+2)}{2}>2^9$

$\therefore (m+1)(m+2)>1024$

이때 $31\times32=992$, $32\times33=1056$이므로 자연수 m의 최솟값은 31이다.

03 답 700

x에 대한 이차방정식 $x^2-n^2x-2n=0$의 두 근이 a_n, b_n이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n+b_n=n^2$, $a_nb_n=-2n$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(a_k+2)(b_k+2)=\sum_{k=1}^{10}\{a_kb_k+2(a_k+b_k)+4\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(2k^2-2k+4)$

$=2\sum_{k=1}^{10}k^2-2\sum_{k=1}^{10}k+4\sum_{k=1}^{10}1$

$=2\times\frac{10\times11\times21}{6}-2\times\frac{10\times11}{2}+4\times10$

$=700$

04 답 ②

$\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{j=1}^{6}ij\right)+\sum_{i=1}^{6}\left\{\sum_{j=1}^{4}(i+j)\right\}=\sum_{i=1}^{4}\left(i\sum_{j=1}^{6}j\right)+\sum_{i=1}^{6}\left(i\sum_{j=1}^{4}1+\sum_{j=1}^{4}j\right)$

$=\sum_{i=1}^{4}\left(i\times\frac{6\times7}{2}\right)+\sum_{i=1}^{6}\left(4i+\frac{4\times5}{2}\right)$

$=21\sum_{i=1}^{4}i+4\sum_{i=1}^{6}i+10\sum_{i=1}^{6}1$

$=21\times\frac{4\times5}{2}+4\times\frac{6\times7}{2}+10\times6$

$=354$

05 답 1541

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2+3n+1$

(i) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+3n+1)-\{(n-1)^2+3(n-1)+1\}$

$=2n+2$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2+3\times1+1=5$ …… ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같지 않으므로 일반항 a_n은

$a_1=5$, $a_n=2n+2$ $(n\geq2)$ …… 배점 50%

따라서 $k\geq2$에서 $ka_{2k-1}=k\{2(2k-1)+2\}=4k^2$ …… 배점 10%

$\therefore \sum_{k=1}^{10}ka_{2k-1}=a_1+\sum_{k=2}^{10}ka_{2k-1}$

$=5+\sum_{k=2}^{10}4k^2$

$=5+4\sum_{k=2}^{10}k^2$

$=5+4\left(\sum_{k=1}^{10}k^2-1\right)$

$=5+4\left(\frac{10\times11\times21}{6}-1\right)$

$=1541$ …… 배점 40%

06 답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{11}=5a_2$에서 $5+10d=5(5+d)$

$5d=20$ $\therefore d=4$

$\therefore a_n=5+(n-1)\times4=4n+1$

$$\therefore \sum_{k=2}^{10}\frac{8}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=2}^{10}\frac{8}{(4k+1)(4k+5)}$$
$$=2\sum_{k=2}^{10}\left(\frac{1}{4k+1}-\frac{1}{4k+5}\right)$$
$$=2\left\{\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{17}\right)+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{21}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{41}-\frac{1}{45}\right)\right\}$$
$$=2\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{45}\right)$$
$$=\frac{8}{45}$$

07 답 514

$(2^n-2a_n)(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})+2=0$에서

$$2^n-2a_n=-\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$
$$\therefore a_n=2^{n-1}+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$
$$=2^{n-1}+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})}$$
$$=2^{n-1}+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$$
$$\therefore \sum_{k=1}^{9}a_k=\sum_{k=1}^{9}(2^{k-1}+\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$
$$=\sum_{k=1}^{9}2^{k-1}+\sum_{k=1}^{9}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$
$$=\frac{2^9-1}{2-1}$$
$$+\{(\sqrt{1}-\sqrt{0})+(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{9}-\sqrt{8})\}$$
$$=511+3$$
$$=514$$

08 답 ③

(i) $n>5$일 때,

$n-5$의 n제곱근 중 실수는 n의 값이 짝수이면 2개, 홀수이면 1개이므로

$f(6)=f(8)=f(10)=\cdots=2$, $f(7)=f(9)=\cdots=1$

(ii) $n=5$일 때,

$n-5$의 n제곱근 중 실수는 0의 1개이므로

$f(5)=1$

(iii) $n<5$일 때,

$n-5$의 n제곱근 중 실수는 n의 값이 짝수이면 0개, 홀수이면 1개이므로

$f(2)=f(4)=0$, $f(3)=1$

$$\therefore \sum_{n=2}^{10}f(n)=f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(10)$$
$$=0+1+0+1+2+1+2+1+2$$
$$=10$$

09 답 ⑤

집합 A의 원소 중 1보다 작은 수는

$m=2$일 때, $\frac{1}{2}$

$m=3$일 때, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$

⋮

$m=30$일 때, $\frac{1}{30}$, $\frac{2}{30}$, $\frac{3}{30}$, …, $\frac{29}{30}$

따라서 구하는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=2}^{30}\frac{1+2+3+\cdots+(k-1)}{k}=\sum_{k=2}^{30}\left\{\frac{1}{k}\times\frac{(k-1)k}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{30}(k-1)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{29}k$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{29\times30}{2}$$
$$=\frac{435}{2}$$

10 답 $\sqrt{2}$

함수 $y=\log_a(x+1)$의 그래프와 직선 $y=n-1$이 만나는 점 A_n의 x좌표를 구하면

$\log_a(x+1)=n-1$

$x+1=a^{n-1}$

$\therefore x=a^{n-1}-1$

$\therefore A_n(a^{n-1}-1,\ n-1)$

함수 $y=\log_a(x+1)$의 그래프와 직선 $y=n$이 만나는 점 B_n의 x좌표를 구하면

$\log_a(x+1)=n$

$x+1=a^n$

$\therefore x=a^n-1$

$\therefore B_n(a^n-1,\ n)$

선분 A_nB_n을 대각선으로 하는 직사각형의 넓이는

$S_n=\{(a^n-1)-(a^{n-1}-1)\}\times\{n-(n-1)\}$

$=a^n-a^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{8}S_n=\sum_{n=1}^{8}(a^n-a^{n-1})$$
$$=(a^1-a^0)+(a^2-a^1)+(a^3-a^2)+\cdots+(a^8-a^7)$$
$$=a^8-1$$

즉, $a^8-1=15$이므로

$a^8=16$

$\therefore a=\sqrt{2}$ ($\because a>1$)

11 답 ④

n행에 나열된 모든 수의 합은

$a_n=n+2n+3n+\cdots+n^2$

$=n(1+2+3+\cdots+n)$

$=n\sum_{k=1}^{n}k$

$=n\times\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{2}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{k^3}{2}+\frac{k^2}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}k^3+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}k^2$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{8\times9}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\frac{8\times9\times17}{6}$$
$$=750$$

step 2 고난도 문제 | 106~110쪽

01 0	02 −3	03 ④	04 21	05 ③	06 ③
07 $\frac{485}{32}$	08 8	09 ④	10 ⑤	11 ③	12 136
13 $\frac{108}{55}$	14 696	15 ②	16 ①	17 66	18 ⑤
19 ③	20 ①	21 15	22 650	23 553	24 725
25 ③	26 1156	27 ③			

01 답 0

$\sum_{k=2}^{n+1} ka_k$에서 $k-1=i$라 하면

$\sum_{k=2}^{n+1} ka_k=\sum_{i=1}^{n}(i+1)a_{i+1}$

$\sum_{k=3}^{n+2} k(k-1)a_k$에서 $k-2=j$라 하면

$\sum_{k=3}^{n+2} k(k-1)a_k=\sum_{j=1}^{n}(j+1)(j+2)a_{j+2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{k=2}^{n+1} ka_k+\sum_{k=3}^{n+2} k(k-1)a_k$

$=\sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{i=1}^{n}(i+1)a_{i+1}+\sum_{j=1}^{n}(j+1)(j+2)a_{j+2}$

$=\sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{k=1}^{n}(k+1)a_{k+1}+\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)a_{k+2}$

$=\sum_{k=1}^{n}\{a_k+(k+1)a_{k+1}+(k+1)(k+2)a_{k+2}\}$

이때 $a_n=pn+q$이므로

$(pk+q)+(k+1)(pk+p+q)+(k+1)(k+2)(pk+2p+q)$

$=k^3+5k^2+7k+1$

이 등식에서 삼차항의 계수를 비교하면 $p=1$

상수항을 비교하면 $q+(p+q)+2(2p+q)=1$

$5p+4q=1$ $\therefore q=-1$ ($\because p=1$)

$\therefore p+q=1+(-1)=0$

02 답 −3

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 (가)에서

$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)=30$

$3a_1+3d=30$ $\therefore a_1+d=10$ …… ㉠

(나)의 $a_{m-2}+a_{m-1}+a_m=6$에서

$(a_m-2d)+(a_m-d)+a_m=6$

$3a_m-3d=6$ $\therefore a_m-d=2$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $a_1+a_m=12$ …… ㉢

(나)에서 $\sum_{k=1}^{m} a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m=\frac{m(a_1+a_m)}{2}$

즉, $\frac{m(a_1+a_m)}{2}=66$이므로

$\frac{m}{2}\times 12=66$ ($\because$ ㉢) $\therefore m=11$

이를 ㉡에 대입하면

$a_{11}-d=2$, $(a_1+10d)-d=2$

$\therefore a_1+9d=2$ …… ㉣

㉠, ㉣을 연립하여 풀면 $a_1=11$, $d=-1$

$\therefore a_{15}=a_1+14d=11+14\times(-1)=-3$

03 답 ④

$\sum_{k=1}^{m} a_k=\sum_{k=1}^{m}\log_2\sqrt{\frac{2(k+1)}{k+2}}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\log_2\frac{2(k+1)}{k+2}$

$=\frac{1}{2}\left\{\log_2\frac{2\times 2}{3}+\log_2\frac{2\times 3}{4}+\log_2\frac{2\times 4}{5}+\cdots+\log_2\frac{2(m+1)}{m+2}\right\}$

$=\frac{1}{2}\log_2\left\{\frac{2\times 2}{3}\times\frac{2\times 3}{4}\times\frac{2\times 4}{5}\times\cdots\times\frac{2(m+1)}{m+2}\right\}$

$=\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}$

이때 $\sum_{k=1}^{m} a_k=N$ (N은 100 이하의 자연수)이라 하면

$\frac{1}{2}\log_2\frac{2^{m+1}}{m+2}=N$, $\frac{2^{m+1}}{m+2}=2^{2N}$

$\therefore 2^{m+1-2N}=m+2$

즉, $m+2$는 2보다 큰 2의 거듭제곱이어야 한다.

(i) $m+2=2^2$, 즉 $m=2$일 때,

$2^{3-2N}=2^2$에서 $3-2N=2$ $\therefore N=\frac{1}{2}$

이는 N은 100 이하의 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $m+2=2^3$, 즉 $m=6$일 때,

$2^{7-2N}=2^3$에서 $7-2N=3$ $\therefore N=2$

(iii) $m+2=2^4$, 즉 $m=14$일 때,

$2^{15-2N}=2^4$에서 $15-2N=4$ $\therefore N=\frac{11}{2}$

이는 N은 100 이하의 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $m+2=2^5$, 즉 $m=30$일 때,

$2^{31-2N}=2^5$에서 $31-2N=5$ $\therefore N=13$

(v) $m+2=2^6$, 즉 $m=62$일 때,

$2^{63-2N}=2^6$에서 $63-2N=6$ $\therefore N=\frac{57}{2}$

이는 N은 100 이하의 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(vi) $m+2=2^7$, 즉 $m=126$일 때,

$2^{127-2N}=2^7$에서 $127-2N=7$ $\therefore N=60$

(vii) $m+2\geq 2^8$일 때, $N>100$

이는 N은 100 이하의 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(vii)에서 $m=6$ 또는 $m=30$ 또는 $m=126$

따라서 모든 자연수 m의 값의 합은

$6+30+126=162$

04 답 21

$\sum_{k=1}^{6} k^2+\sum_{k=2}^{6} k^2+\sum_{k=3}^{6} k^2+\sum_{k=4}^{6} k^2+\sum_{k=5}^{6} k^2+\sum_{k=6}^{6} k^2$

$=(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)$

$+(2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)$

$+(3^2+4^2+5^2+6^2)$

$+(4^2+5^2+6^2)$

$+(5^2+6^2)$

$+6^2$

$=1^2\times 1+2^2\times 2+3^2\times 3+\cdots+6^2\times 6$

$=1^3+2^3+3^3+\cdots+6^3$

$=\sum_{k=1}^{6} k^3=\left(\frac{6\times 7}{2}\right)^2=21^2$

$\therefore N=21$

05 답 ③

$\sum_{k=2}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = 2n^2+2$의 양변에 $n=2$를 대입하면

$a_2 - a_1 = 10$

두 식 $a_1+a_2=8$, $a_2-a_1=10$을 연립하여 풀면

$a_1=-1$, $a_2=9$

$\therefore \sum_{k=2}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = (a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})$

$= a_n - a_1$

$= a_n + 1$

즉, $a_n+1=2n^2+2$이므로

$a_n = 2n^2+1 \ (n \geq 2)$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-1$, $a_n=2n^2+1 \ (n \geq 2)$이므로

$\sum_{k=1}^{10} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{10} a_k$

$= -1 + \sum_{k=2}^{10} (2k^2+1)$

$= -1 + \sum_{k=1}^{10} (2k^2+1) - 3$

$= -4 + 2\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} 1$

$= -4 + 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 10$

$= 776$

06 답 ③

$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k x - \frac{b_k}{n} \right)^2$

$= \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 x^2 - \frac{2a_k b_k}{n} x + \frac{b_k^2}{n^2} \right)$

$= \sum_{k=1}^{n} \left(kx^2 - \frac{6k^2}{n} x + \frac{9k^3}{n^2} \right)$

$= x^2 \sum_{k=1}^{n} k - \frac{6x}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^3$

$= \frac{n(n+1)}{2} x^2 - \left\{ \frac{6}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} x + \frac{9}{n^2} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$

$= \frac{n(n+1)}{2} \left\{ x^2 - \frac{2(2n+1)}{n} x + \frac{9(n+1)}{2n} \right\}$

$= \frac{n(n+1)}{2} \left\{ \left(x - \frac{2n+1}{n} \right)^2 + \frac{n^2+n-2}{2n^2} \right\}$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$p_n = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n^2+n-2}{2n^2}$

$= \frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{4n}$

$\therefore \sum_{n=2}^{15} \frac{n}{n-1} p_n = \sum_{n=2}^{15} \left\{ \frac{n}{n-1} \times \frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{4n} \right\}$

$= \sum_{n=2}^{15} \frac{(n+1)(n+2)}{4}$

$= \sum_{n=1}^{15} \frac{(n+1)(n+2)}{4} - \frac{2 \times 3}{4}$

$= \sum_{n=1}^{15} \frac{n^2+3n+2}{4} - \frac{3}{2}$

$= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{15} n^2 + \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{15} n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{15} 1 - \frac{3}{2}$

$= \frac{1}{4} \times \frac{15 \times 16 \times 31}{6} + \frac{3}{4} \times \frac{15 \times 16}{2} + \frac{1}{2} \times 15 - \frac{3}{2}$

$= 406$

07 답 $\frac{485}{32}$

$2^{n-1} a_n = b_n$이라 하면 $\sum_{k=1}^{n} b_k = 3^n - n \ (n \geq 2)$

$n \geq 2$일 때,

$b_n = \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

$= (3^n - n) - \{3^{n-1} - (n-1)\} = 2 \times 3^{n-1} - 1$

즉, $2^{n-1} a_n = 2 \times 3^{n-1} - 1$이므로

$a_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \ (n \geq 2)$

$\therefore a_6 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{485}{32}$

08 답 8

$\sum_{k=1}^{n} (k+1) a_k = \frac{n(n-1)(2n+p)}{6}$에서

(i) $n \geq 2$일 때,

$(n+1) a_n = \sum_{k=1}^{n} (k+1) a_k - \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) a_k$

$= \frac{n(n-1)(2n+p)}{6} - \frac{(n-1)(n-2)(2n-2+p)}{6}$

$= \frac{(n-1)(6n+2p-4)}{6}$

$\therefore a_n = \frac{(n-1)(6n+2p-4)}{6(n+1)}$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때,

$2a_1 = 0 \quad \therefore a_1 = 0$ …… ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n은

$a_n = \frac{(n-1)(6n+2p-4)}{6(n+1)}$ …… 배점 30%

$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k} = qn$에서

(i) $n \geq 2$일 때,

$\frac{b_n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{k}$

$= qn - q(n-1) = q$

$\therefore b_n = qn$ …… ㉢

(ii) $n=1$일 때,

$b_1 = q$ …… ㉣

이때 ㉣은 ㉢에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로 일반항 b_n은

$b_n = qn$ …… 배점 30%

$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = n(n-1)(n+1)$에서

(i) $n \geq 2$일 때,

$a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k$

$= n(n-1)(n+1) - (n-1)(n-2)n$

$= 3n(n-1)$ …… ㉤

(ii) $n=1$일 때,

$a_1 b_1 = 0$ …… ㉥

이때 ㉥은 ㉤에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로 일반항 $a_n b_n$은

$a_n b_n = 3n(n-1)$ …… 배점 30%

즉, $\frac{(n-1)(6n+2p-4)}{6(n+1)} \times qn = 3n(n-1)$이므로

$q(6n+2p-4) = 18(n+1)$

따라서 $p=5$, $q=3$이므로 $p+q=8$ …… 배점 10%

09 답 ④

$\sum_{k=1}^{n} a_{2k}=n^2+3n$에서

$a_{2n}=\sum_{k=1}^{n} a_{2k}-\sum_{k=1}^{n-1} a_{2k}$

$=(n^2+3n)-\{(n-1)^2+3(n-1)\}=2n+2$

$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}=-n^2+n$에서

$a_{2n-1}=\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}-\sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1}$

$=(-n^2+n)-\{-(n-1)^2+(n-1)\}=-2n+2$

이때 $S_{2m}=\sum_{k=1}^{m} a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{m} a_{2k}=(-m^2+m)+(m^2+3m)=4m$이므로

$S_{2m+1}=S_{2m}+a_{2m+1}=4m+\{-2(m+1)+2\}=2m$

$S_{2m-1}=S_{2m}-a_{2m}=4m-(2m+2)=2m-2$

(i) $n=2m$일 때,

$\frac{S_n}{S_{n+1}}=\frac{S_{2m}}{S_{2m+1}}=\frac{4m}{2m}=2>\frac{49}{100}$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=2m-1$일 때,

$\frac{S_n}{S_{n+1}}=\frac{S_{2m-1}}{S_{2m}}=\frac{2m-2}{4m}=\frac{m-1}{2m}$

$\frac{S_n}{S_{n+1}}<\frac{49}{100}$에서 $\frac{m-1}{2m}<\frac{49}{100}$

$100m-100<98m$

$2m<100$ $\therefore m<50$

따라서 자연수 m의 최댓값은 49이므로 자연수 n의 최댓값은

$2\times49-1=97$

(i), (ii)에서 자연수 n의 최댓값은 97이다.

10 답 ⑤

$\sum_{k=1}^{n} a_k^2=3n^2+1$에서

(i) $n\geq2$일 때,

$a_n^2=\sum_{k=1}^{n} a_k^2-\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2$

$=(3n^2+1)-\{3(n-1)^2+1\}$

$=6n-3$

$\therefore a_n=\sqrt{6n-3}$ ($\because a_n>0$) ····· ㉠

(ii) $n=1$일 때,

$a_1^2=3\times1^2+1=4$

$\therefore a_1=2$ ($\because a_1>0$) ····· ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같지 않으므로 일반항 a_n은

$a_1=2$, $a_n=\sqrt{6n-3}$ ($n\geq2$)

$\therefore \sum_{k=1}^{37}\frac{1}{a_k+a_{k+1}}$

$=\frac{1}{a_1+a_2}+\sum_{k=2}^{37}\frac{1}{\sqrt{6k-3}+\sqrt{6k+3}}$

$=\frac{1}{2+3}+\sum_{k=2}^{37}\frac{\sqrt{6k-3}-\sqrt{6k+3}}{(\sqrt{6k-3}+\sqrt{6k+3})(\sqrt{6k-3}-\sqrt{6k+3})}$

$=\frac{1}{5}+\sum_{k=2}^{37}\frac{\sqrt{6k+3}-\sqrt{6k-3}}{6}$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\{(\sqrt{15}-\sqrt{9})+(\sqrt{21}-\sqrt{15})+(\sqrt{27}-\sqrt{21})$

$+\cdots+(\sqrt{225}-\sqrt{219})\}$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}(-3+15)=\frac{11}{5}$

11 답 ③

$1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2}$

$=\frac{(k^2+k)^2+2(k^2+k)+1}{k^2(k+1)^2}$

$=\frac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}$

이므로

$a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}$

$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{\frac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}$

$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{1+\frac{1}{k(k+1)}\right\}$

$=\frac{1}{n}\left\{(n-1)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{n}\left[(n-1)+\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}\right]$

$=\frac{1}{n}\left\{(n-1)+\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}$

$=1-\frac{1}{n^2}$

$\therefore a_2\times a_3\times a_4\times\cdots\times a_m$

$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{m^2}\right)$

$=\frac{2^2-1}{2^2}\times\frac{3^2-1}{3^2}\times\frac{4^2-1}{4^2}\times\cdots\times\frac{m^2-1}{m^2}$

$=\frac{1\times3}{2\times2}\times\frac{2\times4}{3\times3}\times\frac{3\times5}{4\times4}\times\cdots\times\frac{(m-1)(m+1)}{m\times m}$

$=\frac{m+1}{2m}$

즉, $\frac{m+1}{2m}=\frac{31}{60}$이므로

$60m+60=62m$, $2m=60$

$\therefore m=30$

12 답 136

수열 $1\times n$, $2\times(n-1)$, $3\times(n-2)$, ···, $n\times1$의 제k항을 a_k라 하면

$a_k=k\times\{n-(k-1)\}=-k^2+(n+1)k$이므로

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$

$=\sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}$

$=-\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)\sum_{k=1}^{n}k$

$=-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

$\therefore \sum_{k=1}^{9}\frac{1}{S_k}=\sum_{k=1}^{9}\frac{6}{k(k+1)(k+2)}$

$=3\sum_{k=1}^{9}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

$=3\left\{\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\left(\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{9\times10}-\frac{1}{10\times11}\right)\right\}$

$=3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{110}\right)=\frac{81}{55}$

따라서 $p=55$, $q=81$이므로 $p+q=136$

idea

13 답 $\frac{108}{55}$

카드에 적힌 모든 수의 합은 1부터 n까지의 자연수의 합과 같으므로

$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

카드에 적힌 모든 수의 제곱의 합은 1부터 n까지의 자연수의 제곱의 합과 같으므로

$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\therefore a_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k-k)^2 + \sum_{k=1}^{n} (x_k-n+k-1)^2$

$= \sum_{k=1}^{n} [(x_k-k)^2 + \{(x_k+k)-(n+1)\}^2]$

$= \sum_{k=1}^{n} [(x_k-k)^2 + \{(x_k+k)^2 - 2(x_k+k)(n+1) + (n+1)^2\}]$

$= \sum_{k=1}^{n} \{2(x_k^2+k^2) - 2(x_k+k)(n+1) + (n+1)^2\}$

$= 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} x_k - 2(n+1)\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)^2 \sum_{k=1}^{n} 1$

$= 4\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4(n+1)\times\frac{n(n+1)}{2} + n(n+1)^2$

$= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) - n(n+1)^2$

$= n(n+1)\left\{\frac{2(2n+1)}{3} - (n+1)\right\}$

$= \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$

$\therefore \sum_{n=2}^{10} \frac{n}{a_n} = \sum_{n=2}^{10} \frac{3}{(n-1)(n+1)}$

$= \frac{3}{2}\sum_{n=2}^{10} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= \frac{3}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right\}$

$= \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right) = \frac{108}{55}$

14 답 696

첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n = 2+(n-1)\times 3 = 3n-1$

부등식 $3|x-a_{n+1}| \le 2|x-a_n|$에서

$3|x-(3n+2)| \le 2|x-(3n-1)|$

(i) $x \ge 3n+2$일 때,

$3\{x-(3n+2)\} \le 2\{x-(3n-1)\}$

$3x-9n-6 \le 2x-6n+2$ $\therefore x \le 3n+8$

그런데 $x \ge 3n+2$이므로

$3n+2 \le x \le 3n+8$

(ii) $3n-1 \le x < 3n+2$일 때,

$-3\{x-(3n+2)\} \le 2\{x-(3n-1)\}$

$-3x+9n+6 \le 2x-6n+2$

$5x \ge 15n+4$ $\therefore x \ge 3n+\frac{4}{5}$

그런데 $3n-1 \le x < 3n+2$이므로

$3n+\frac{4}{5} \le x < 3n+2$

(iii) $x < 3n-1$일 때,

$-3\{x-(3n+2)\} \le -2\{x-(3n-1)\}$

$-3x+9n+6 \le -2x+6n-2$

$\therefore x \ge 3n+8$

그런데 $x < 3n-1$이므로 이를 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $3n+\frac{4}{5} \le x \le 3n+8$

따라서 $b_n = 3n+\frac{4}{5}$, $c_n = 3n+8$이므로

$\sum_{k=1}^{15} (3c_k-2b_k) = \sum_{k=1}^{15} \left\{3(3k+8) - 2\left(3k+\frac{4}{5}\right)\right\}$

$= \sum_{k=1}^{15} \left(3k+\frac{112}{5}\right) = 3\sum_{k=1}^{15} k + \frac{112}{5}\sum_{k=1}^{15} 1$

$= 3\times\frac{15\times 16}{2} + \frac{112}{5}\times 15 = 696$

15 답 ②

$(1+x+x^2+\cdots+x^9)^2 = (1+x+x^2+\cdots+x^9)(1+x+x^2+\cdots+x^9)$

$= (1+x+x^2+\cdots+x^8+x^9)$

$+ (x+x^2+\cdots+x^8+x^9+x^{10})$

$+ (x^2+\cdots+x^8+x^9+x^{10}+x^{11})$

$+ \cdots + (x^9+x^{10}+x^{11}+\cdots+x^{18})$

$= 1+2x+3x^2+\cdots+9x^8+10x^9+9x^{11}+\cdots+x^{18}$

$\therefore a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=4$, $\cdots$, $a_8=9$, $a_9=10$, $a_{10}=9$, $\cdots$, $a_{18}=1$

$\sum_{k=1}^{18} a_k = 2(2+3+4+\cdots+9)+10+1$

$= 2\sum_{k=2}^{9} k + 11 = 2\left(\sum_{k=1}^{9} k - 1\right) + 11$

$= 2\left(\frac{9\times 10}{2} - 1\right) + 11 = 99$

$\sum_{k=1}^{18} a_k^2 = 2(2^2+3^2+4^2+\cdots+9^2)+10^2+1^2$

$= 2\sum_{k=2}^{9} k^2 + 101 = 2\left(\sum_{k=1}^{9} k^2 - 1\right) + 101$

$= 2\left(\frac{9\times 10\times 19}{6} - 1\right) + 101 = 669$

$\therefore \sum_{k=1}^{18} a_k(a_k-2) = \sum_{k=1}^{18} (a_k^2-2a_k) = \sum_{k=1}^{18} a_k^2 - 2\sum_{k=1}^{18} a_k$

$= 669 - 2\times 99 = 471$

16 답 ①

$36 = 2^2\times 3^2$의 양의 약수는 1, 2, 3, 2^2, 2×3, 3^2, $2^2\times 3$, 2×3^2, $2^2\times 3^2$이므로

$f(1)=1$, $f(2)=f(3)=2$, $f(2^2)=f(3^2)=3$,

$f(2\times 3)=4$, $f(2^2\times 3)=f(2\times 3^2)=6$, $f(2^2\times 3^2)=9$

이때 $f(1)$, $f(2^2)$, $f(3^2)$, $f(2^2\times 3^2)$의 값은 홀수이고, $f(2)$, $f(3)$, $f(2\times 3)$, $f(2^2\times 3)$, $f(2\times 3^2)$의 값은 짝수이므로

$\sum_{k=1}^{9} \{(-1)^{f(a_k)}\times \log a_k\}$

$= -\log 1 + \log 2 + \log 3 - \log 2^2 + \log(2\times 3) - \log 3^2 + \log(2^2\times 3) + \log(2\times 3^2) - \log(2^2\times 3^2)$

$= -\{\log 1 + \log 2^2 + \log 3^2 + \log(2^2\times 3^2)\} + \{\log 2 + \log 3 + \log(2\times 3) + \log(2^2\times 3) + \log(2\times 3^2)\}$

$= -\log(2^4\times 3^4) + \log(2^5\times 3^5)$

$= \log\frac{2^5\times 3^5}{2^4\times 3^4} = \log(2\times 3)$

$= \log 2 + \log 3$

17 답 66

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$$
$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$$

즉, $f(n)$이 정수가 되려면 $\sqrt{2n+1}$이 홀수이어야 하므로

$\sqrt{2n+1}=2p+1$ (단, p는 자연수)

$\therefore\ 2n+1=(2p+1)^2$

$1\le n\le 300$에서 $3\le 2n+1\le 601$이고 $23^2=529$, $25^2=625$이므로

$3\le 2p+1\le 23$ ($\because$ p는 자연수)

$\therefore\ 1\le p\le 11$

이때 $f(n)=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)=\frac{1}{2}\{(2p+1)-1\}=p$이므로

$$\sum_{i=1}^{m}f(a_i)=f(a_1)+f(a_2)+f(a_3)+\cdots+f(a_{11})$$
$$=1+2+3+\cdots+11$$
$$=\frac{11\times 12}{2}=66$$

idea

18 답 ⑤

(i) $n=1$일 때,

$a_1=\left[\frac{2}{3}\right]=0$이므로 $r_1=0$

(ii) $n=2m$ ($m=1, 2, 3, \cdots$)일 때,

$$a_{2m}=\left[\frac{4^m}{3}\right]=\left[\frac{4^m-1}{4-1}+\frac{1}{3}\right]$$
$$=\left[(1+4+4^2+\cdots+4^{m-1})+\frac{1}{3}\right]$$
$$=1+4+4^2+\cdots+4^{m-1}$$

첫째항이 1, 공비가 4인 등비수열의 첫째항부터 제m항까지의 합이다.

이때 4, 4^2, $\cdots$, 4^{m-1}은 각각 4로 나누어떨어지므로

$r_{2m}=1$

(iii) $n=2m+1$ ($m=1, 2, 3, \cdots$)일 때,

$$a_{2m+1}=\left[\frac{2^{2m+1}}{3}\right]=\left[2\times\frac{4^m}{3}\right]$$
$$=\left[2\times\frac{4^m-1}{4-1}+\frac{2}{3}\right]$$
$$=\left[2(1+4+4^2+\cdots+4^{m-1})+\frac{2}{3}\right]$$
$$=2(1+4+4^2+\cdots+4^{m-1})$$

$\therefore\ r_{2m+1}=2$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{30}r_k=r_1+\sum_{k=1}^{15}r_{2k}+\sum_{k=1}^{14}r_{2k+1}$$
$$=0+15\times 1+14\times 2=43$$

19 답 ③

함수 $y=x^2-2ax+b=(x-a)^2-a^2+b$의 최솟값은 $-a^2+b$이므로

$-a^2+b>n$ $\therefore\ b>a^2+n$

$a=1$일 때, b가 될 수 있는 값은

$n+2$, $n+3$, $\cdots$, n^2

$a=2$일 때, b가 될 수 있는 값은

$n+5$, $n+6$, $\cdots$, n^2

$\vdots$

$a=k$일 때, b가 될 수 있는 값은

$n+k^2+1$, $n+k^2+2$, $\cdots$, n^2

$\vdots$

$a=n-1$일 때, b가 될 수 있는 값은

$n+(n-1)^2+1$, $n+(n-1)^2+2$, $\cdots$, n^2

$a\ge n$일 때, $b>a^2+n$을 만족시키는 b의 값은 존재하지 않는다.

즉, $b>a^2+n$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$$\sum_{k=1}^{n-1}\{n^2-(n+k^2+1)+1\}=\sum_{k=1}^{n-1}(n^2-n-k^2)$$
$$=(n^2-n)\sum_{k=1}^{n-1}1-\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$
$$=(n^2-n)(n-1)-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$
$$=n(n-1)\left(\frac{2}{3}n-\frac{5}{6}\right)$$
$$=\frac{2}{3}n^3-\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{6}n$$

따라서 $p=\frac{2}{3}$, $q=-\frac{3}{2}$, $r=\frac{5}{6}$이므로 $6(p-q+r)=18$

20 답 ①

$A_n(n, \sqrt{n})$, $B_n(n, 2\sqrt{n})$이므로

$a_n=2\sqrt{n}-\sqrt{n}=\sqrt{n}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{80}\frac{1}{(n+1)a_n+na_{n+1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{80}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{80}\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{\{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}\}\{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}\}}$$
$$=\sum_{n=1}^{80}\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{80}\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{80}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{80}}-\frac{1}{\sqrt{81}}\right)$$
$$=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

따라서 $p=9$, $q=8$이므로 $p+q=17$

21 답 15

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 C의 방정식은

C: $x^2+y^2=1$ ····· ㉠

원 C를 y축의 방향으로 $\frac{1}{n}$만큼 평행이동한 원 C_n의 방정식은

C_n: $x^2+\left(y-\frac{1}{n}\right)^2=1$ ····· ㉡ ····· 배점 20%

㉠−㉡을 하면 $y^2-\left(y-\frac{1}{n}\right)^2=0$

$\frac{2}{n}y-\frac{1}{n^2}=0$ $\therefore\ y=\frac{1}{2n}$

이를 ㉠에 대입하면 $x^2+\left(\frac{1}{2n}\right)^2=1$

$x^2=\frac{4n^2-1}{4n^2}$ $\therefore\ x=\pm\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2n}$ ····· 배점 30%

즉, 두 원 C, C_n의 공통인 현의 길이는

$a_n=\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2n}-\left(-\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2n}\right)=\frac{\sqrt{4n^2-1}}{n}$ ····· 배점 20%

$\therefore \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{ka_k}\right)^2=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{4k^2-1}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)=\frac{m}{2m+1}$

즉, $\frac{m}{2m+1}=\frac{15}{31}$이므로

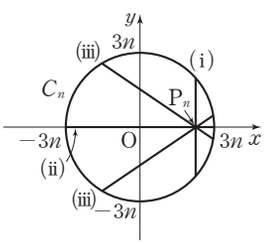
$31m=30m+15$ $\therefore m=15$ ····· 배점 30%

개념 NOTE

- 중심이 (a, b)이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은
  $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
- 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식은
  $f(x-a, y-b)=0$

22 답 650

(i) 점 P_n을 지나는 현 중에서 길이가 가장 짧은 현은 점 P_n을 지나고 x축과 수직인 현이다.
원 C_n과 직선 $x=\sqrt{5}n$의 교점의 y좌표를 구하면
$5n^2+y^2=9n^2$, $y^2=4n^2$
$\therefore y=\pm 2n$
따라서 현의 길이는 $2\times 2n=4n$이고 현의 개수는 1이다.



(ii) 점 P_n을 지나는 현 중에서 길이가 가장 긴 현은 원의 지름이다.
즉, 현의 길이는 $6n$이고 현의 개수는 1이다.

(iii) 점 P_n을 지나는 현 중에서 길이가 $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$, …, $6n-1$인 현은 2개씩 있다.

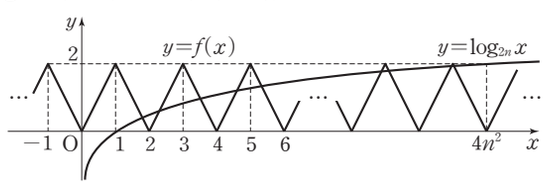
(i), (ii), (iii)에서 $a_n=1+1+2\{(6n-1)-(4n+1)+1\}=4n$

$\therefore \sum_{k=1}^{25}\frac{a_k}{2}=\sum_{k=1}^{25}2k=2\sum_{k=1}^{25}k$

$=2\times\frac{25\times 26}{2}=650$

23 답 553

(나)에서 함수 $y=f(x)$는 주기가 2인 주기함수이고, 함수 $y=\log_{2n}x$의 그래프는 두 점 $(1, 0)$, $(4n^2, 2)$를 지나므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=\log_{2n}x$의 그래프는 그림과 같다.



$n=1$일 때, $y=\log_2 x$의 그래프는 점 $(4, 2)$를 지나므로 교점의 개수는
$a_1=3=4-1$ ⟶ $1\le x\le 2$에서 1개, $2<x\le 4$에서 2개이다.

$n=2$일 때, $y=\log_4 x$의 그래프는 점 $(16, 2)$를 지나므로 교점의 개수는
$a_2=15=16-1$ ⟶ $1\le x\le 2$에서 1개, $2<x\le 4$, $4<x\le 6$, …, $14<x\le 16$에서 각각 2개이다.
⋮

$n=k$일 때, $y=\log_{2k}x$의 그래프는 점 $(4k^2, 2)$를 지나므로 교점의 개수는
$a_k=4k^2-1$

$\therefore \sum_{n=1}^{7}a_n=\sum_{n=1}^{7}(4n^2-1)=4\sum_{n=1}^{7}n^2-\sum_{n=1}^{7}1$

$=4\times\frac{7\times 8\times 15}{6}-7=553$

24 답 725

원 $x^2+y^2=\frac{n^2}{2}$에 접하고 기울기가 1, y절편이 양수인 접선의 방정식은

$y=x+\frac{n}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2+1}$ $\therefore y=x+n$

이 직선이 x축, y축과 만나는 점은 각각
$A_n(-n, 0)$, $B_n(0, n)$
점 A_n을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정식은
$y=-2(x+n)$ $\therefore y=-2x-2n$
이 직선이 y축과 만나는 점은
$C_n(0, -2n)$
삼각형 $A_nC_nB_n$과 그 내부의 점들 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수 a_n은

(i) $n=1$일 때,
x좌표가 -1인 점의 개수는 1, x좌표가 0인 점의 개수는 4이므로
$a_1=1+4=5$

(ii) $n=2$일 때,
x좌표가 -2인 점의 개수는 1, x좌표가 -1인 점의 개수는 4, x좌표가 0인 점의 개수는 7이므로
$a_2=1+4+7=12$

(iii) $n=3$일 때,
x좌표가 -3인 점의 개수는 1, x좌표가 -2인 점의 개수는 4, x좌표가 -1인 점의 개수는 7, x좌표가 0인 점의 개수는 10이므로
$a_3=1+4+7+10=22$
⋮

$\therefore a_n=1+\{4+7+10+\cdots+(3n+1)\}$

$=1+\sum_{k=1}^{n}(3k+1)$

$=1+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$=1+3\times\frac{n(n+1)}{2}+n$

$=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+1$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n+1\right)$

$=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{10}n^2+\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{10}n+\sum_{n=1}^{10}1$

$=\frac{3}{2}\times\frac{10\times 11\times 21}{6}+\frac{5}{2}\times\frac{10\times 11}{2}+10$

$=725$

개념 NOTE

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

25 답 ③

주어진 수열을 각 군의 첫째항의 분자가 1이 되도록 묶으면

$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{1}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{5}{1}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \frac{7}{1}\right), \cdots$

제n군의 항의 개수는 n이므로 제1군부터 제n군까지의 항의 개수는

$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

제1군부터 제10군까지의 항의 개수는 $\frac{10\times11}{2}=55$이므로 제63항은 제11군의 8번째 항이다.

이때 제11군의 첫째항이 $\frac{1}{2^{10}}$, k번째 항이 $\frac{2k-1}{2^{10-(k-1)}}$이므로 제63항은

$\frac{2\times8-1}{2^{10-7}}=\frac{15}{8}$

26 답 1156

n행에 나열된 모든 수의 합은

$a_n=1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)+(2n-3)+\cdots+5+3+1$

$=2\{1+3+5+\cdots+(2n-1)\}-(2n-1)$

$=2\left\{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right\}-(2n-1)$

$=2\left(2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1\right)-(2n-1)$

$=2\left\{2\times\frac{n(n+1)}{2}-n\right\}-(2n-1)$

$=2n^2-2n+1$

$\therefore \sum_{k=1}^{12}a_k=\sum_{k=1}^{12}(2k^2-2k+1)=2\sum_{k=1}^{12}k^2-2\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=1}^{12}1$

$=2\times\frac{12\times13\times25}{6}-2\times\frac{12\times13}{2}+12$

$=1156$

27 답 ③

$1\circledcirc1=1$, $2\circledcirc1=2^2$, $3\circledcirc1=3^2$, …이므로 $m\circledcirc1=m^2$

즉, 수열 $\{1\circledcirc n\}$은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열, 수열 $\{2\circledcirc n\}$은 첫째항이 2^2, 공차가 4인 등차수열, 수열 $\{3\circledcirc n\}$은 첫째항이 3^2, 공차가 6인 등차수열, …이므로 n에 대한 수열 $\{m\circledcirc n\}$은 첫째항이 m^2, 공차가 $2m$인 등차수열이다.

따라서 n에 대한 수열 $\{m\circledcirc n\}$의 일반항은

$m\circledcirc n=m^2+(n-1)\times2m=2mn+m^2-2m$

$\therefore \sum_{n=2}^{10}(m\circledcirc n)=\sum_{n=2}^{10}(2mn+m^2-2m)$

$=2m\sum_{n=2}^{10}n+(m^2-2m)\sum_{n=2}^{10}1$

$=2m\left(\sum_{n=1}^{10}n-1\right)+(m^2-2m)\times(10-1)$

$=2m\left(\frac{10\times11}{2}-1\right)+9(m^2-2m)$

$=9m^2+90m$

$\therefore \frac{1}{90}\sum_{m=3}^{10}\left\{\sum_{n=2}^{10}(m\circledcirc n)\right\}=\frac{1}{90}\sum_{m=3}^{10}(9m^2+90m)$

$=\frac{1}{10}\sum_{m=3}^{10}m^2+\sum_{m=3}^{10}m$

$=\frac{1}{10}\left\{\sum_{m=1}^{10}m^2-(1+4)\right\}+\sum_{m=1}^{10}m-(1+2)$

$=\frac{1}{10}\left(\frac{10\times11\times21}{6}-5\right)+\frac{10\times11}{2}-3$

$=90$

step 3 최고난도 문제

111~113쪽

01 ③ 02 $\frac{957}{1024}$ 03 ⑤ 04 117 05 ④ 06 5

07 8 08 164 09 3433 10 ⑤

idea

01 답 ③

1단계 집합 A의 원소 파악하기

㈎에서 집합 A의 임의의 두 원소 a_i, a_j $(i\neq j)$에 대하여 $a_i+a_j\neq20$이므로 $a_j\neq20-a_i$

즉, 원소 $20-a_i$ $(1\le i\le5)$는 집합 A에 속하지 않는다.

2단계 $\sum_{i=1}^{5}a_i^2$의 값 구하기

$\sum_{i=1}^{5}a_i^2$과 $\sum_{i=1}^{5}(20-a_i)^2$의 합은 집합 U의 모든 원소의 제곱의 합과 같으므로

$\sum_{i=1}^{5}a_i^2+\sum_{i=1}^{5}(20-a_i)^2=\sum_{k=1}^{10}(2k-1)^2$

$\sum_{i=1}^{5}a_i^2+\sum_{i=1}^{5}(a_i^2-40a_i+400)=\sum_{k=1}^{10}(4k^2-4k+1)$

$\sum_{i=1}^{5}a_i^2+\sum_{i=1}^{5}a_i^2-40\sum_{i=1}^{5}a_i+400\sum_{i=1}^{5}1=4\sum_{k=1}^{10}k^2-4\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$

이때 ㈏에서 $\sum_{i=1}^{5}a_i=51$이므로

$2\sum_{i=1}^{5}a_i^2-40\times51+400\times5=4\times\frac{10\times11\times21}{6}-4\times\frac{10\times11}{2}+10$

$2\sum_{i=1}^{5}a_i^2-40=1330$

$\therefore \sum_{i=1}^{5}a_i^2=685$

idea

02 답 $\frac{957}{1024}$

1단계 $\sum_{k=1}^{10}a_k$, $\sum_{k=1}^{10}a_k^2$의 값 구하기

$\sum_{k=1}^{10}a_k=p$, $\sum_{k=1}^{10}a_k^2=q$라 하면 ㈎에서 a_1, a_2, a_3 …, a_{10}의 값은 -1, 0, 1 중 하나이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k^3=p$, $\sum_{k=1}^{10}a_k^4=q$

㈏에서 $\sum_{k=1}^{10}a_k^2+\sum_{k=1}^{10}a_k^3=8$이므로

$p+q=8$ …… ㉠

㈐의 $\left(\sum_{k=1}^{10}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{10}a_k^4\right)=12$에서

$pq=12$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$p=2$, $q=6$ 또는 $p=6$, $q=2$

이때 $p\le q$이므로 $p=2$, $q=6$

2단계 $a_k=1$, $a_k=0$, $a_k=-1$인 항의 개수 구하기

a_1, a_2, …, a_{10} 중에서 $a_k=1$인 항의 개수를 l, $a_k=-1$인 항의 개수를 m이라 하면 $p=l-m$, $q=l+m$이므로

$l-m=2$, $l+m=6$

두 식을 연립하여 풀면

$l=4$, $m=2$

즉, $a_k=1$인 항의 개수는 4, $a_k=-1$인 항의 개수는 2이므로 $a_k=0$인 항의 개수는 4이다.

3단계 $\sum_{k=1}^{10}\frac{a_k}{2^k}$의 최댓값 구하기

따라서 $a_1=a_2=a_3=a_4=1$, $a_5=a_6=a_7=a_8=0$, $a_9=a_{10}=-1$일 때, $\sum_{k=1}^{10}\frac{a_k}{2^k}$의 값은 최대이므로 최댓값은

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^9}-\frac{1}{2^{10}}=\frac{2^9+2^8+2^7+2^6-2-1}{2^{10}}$$
$$=\frac{957}{1024}$$

03 답 ⑤

1단계 a_n 구하기

$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_{n-k}}{2^k}=\frac{1}{n+2}$에서

$$a_n+\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_{n-2}}{2^2}+\cdots+\frac{a_1}{2^{n-1}}=\frac{1}{n+2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

(i) $n=1$일 때,

㉠에서 $a_1=\frac{1}{3}$

(ii) $n\geq 2$일 때,

㉠의 양변에 n 대신 $n-1$을 대입하면

$$a_{n-1}+\frac{a_{n-2}}{2}+\frac{a_{n-3}}{2^2}+\cdots+\frac{a_1}{2^{n-2}}=\frac{1}{n+1}$$

양변에 $\frac{1}{2}$을 곱하면

$$\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_{n-2}}{2^2}+\frac{a_{n-3}}{2^3}+\cdots+\frac{a_1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2(n+1)} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠−㉡을 하면

$$a_n=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2(n+1)}$$
$$=\frac{n}{2(n+1)(n+2)} \quad \cdots\cdots ㉢$$

이때 a_1의 값은 ㉢에 $n=1$을 대입한 값과 같지 않으므로 일반항 a_n은

$a_1=\frac{1}{3}$, $a_n=\frac{n}{2(n+1)(n+2)}$ $(n\geq 2)$

2단계 $\sum_{k=1}^{10}\frac{a_k}{k}$의 값 구하기

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{a_k}{k}=a_1+\sum_{k=2}^{10}\frac{k}{2k(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{10}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right)$$
$$=\frac{11}{24}$$

3단계 $p+q$의 값 구하기

따라서 $p=24$, $q=11$이므로

$p+q=35$

04 답 117

1단계 b_7의 값 구하기

등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면 첫째항 b_1이 자연수이고 r는 음의 정수이므로

$b_1>0$, $b_2<0$, $b_3>0$, $b_4<0$, $b_5>0$

㈎, ㈏에서

$$\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)-\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=67-27$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{5}(|b_n|-b_n)=40$$

이때 $\sum_{n=1}^{5}(|b_n|-b_n)=-2(b_2+b_4)$이므로 → $(b_1-b_1)+(-b_2-b_2)+(b_3-b_3)+(-b_4-b_4)+(b_5-b_5)=-2(b_2+b_4)$

$-2(b_2+b_4)=40$, $b_2+b_4=-20$

$b_1r+b_1r^3=-20$

$$\therefore b_1r(1+r^2)=-20 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 b_1r는 음의 정수, $1+r^2$은 자연수이므로 $1+r^2$은 20의 양의 약수이다.

즉, $1+r^2$이 될 수 있는 수는 1, 2, 4, 5, 10, 20이고 r는 음의 정수이므로

$r=-1$ 또는 $r=-2$ 또는 $r=-3$ → $1+r^2=2$ 또는 $1+r^2=5$ 또는 $1+r^2=10$

이를 ㉠에 대입하면 풀면 $b_1=10$ 또는 $b_1=2$ 또는 $b_1=\frac{2}{3}$

그런데 b_1은 자연수이므로 $b_1\neq\frac{2}{3}$

따라서 $b_1=10$, $r=-1$ 또는 $b_1=2$, $r=-2$이어야 한다.

(i) $b_1=10$, $r=-1$일 때,

$\sum_{n=1}^{5}b_n=\frac{10\{1-(-1)^5\}}{1-(-1)}=10$이고 ㈎에서 $\sum_{n=1}^{5}a_n+\sum_{n=1}^{5}b_n=27$이므로

$\sum_{n=1}^{5}a_n=17$

이때 등차수열 $\{a_n\}$에서

$$\sum_{n=1}^{5}a_n=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$
$$=(a_1+a_5)+(a_2+a_4)+a_3$$
$$=2a_3+2a_3+a_3=5a_3$$

즉, $5a_3=17$이므로 $a_3=\frac{17}{5}$

그런데 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.

따라서 $b_1=10$, $r=-1$은 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $b_1=2$, $r=-2$일 때,

$\sum_{n=1}^{5}b_n=\frac{2\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)}=22$이므로 ㈎에 의하여 $\sum_{n=1}^{5}a_n=5$

즉, $5a_3=5$이므로 $a_3=1$

(i), (ii)에서 $b_1=2$, $r=-2$이므로

$b_7=b_1r^6=2\times(-2)^6=128$

2단계 a_7의 값 구하기

(ii)에서 $\sum_{n=1}^{5}a_n=5$이고 ㈏에서 $\sum_{n=1}^{5}a_n+\sum_{n=1}^{5}|b_n|=67$이므로

$\sum_{n=1}^{5}|b_n|=62$

또 ㈐에서 $\sum_{n=1}^{5}|a_n|+\sum_{n=1}^{5}|b_n|=81$이므로

$$\sum_{n=1}^{5}|a_n|=19 \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 (ii)에서 $a_3=1$이므로

$a_1=1-2d$, $a_2=1-d$, $a_4=1+d$, $a_5=1+2d$

$d<0$이므로 $a_1>a_2>a_3>0\geq a_4>a_5$

㉡에서 $(1-2d)+(1-d)+1-(1+d)-(1+2d)=19$

$1-6d=19$, $6d=-18$ $\quad\therefore d=-3$

$\therefore a_7=a_3+4d=1+4\times(-3)=-11$

3단계 a_7+b_7의 값 구하기

$\therefore a_7+b_7=-11+128=117$

05 답 ④

1단계 a의 값 구하기

S_n을 n에 대한 이차함수라 생각하고 $f(n)=n^2-28n+45$라 하면

$$\sum_{n=k}^{15}a_n=\sum_{n=1}^{15}a_n-\sum_{n=1}^{k-1}a_n$$
$$=S_{15}-S_{k-1}$$
$$=f(15)-f(k-1)$$

즉, $\sum_{n=k}^{15}a_n>0$에서 $f(15)-f(k-1)>0$

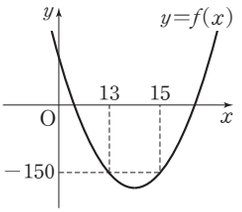
$\therefore f(k-1)<f(15)$

$f(x)=x^2-28x+45$

$=(x-13)(x-15)-150$

이므로

$f(13)=f(15)=-150$



따라서 그림에서 $f(k-1)<f(15)$를 만족시키는 자연수 $k-1$의 값은

$k-1=14$ $\therefore k=15$

$\therefore a=15$

2단계 b의 값 구하기

$$\sum_{n=m}^{20}a_n=\sum_{n=1}^{20}a_n-\sum_{n=1}^{m-1}a_n$$
$$=S_{20}-S_{m-1}$$
$$=f(20)-f(m-1)$$

즉, $\sum_{n=m}^{20}a_n>0$에서 $f(20)-f(m-1)>0$

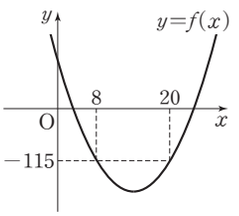
$\therefore f(m-1)<f(20)$

$f(x)=x^2-28x+45$

$=(x-8)(x-20)-115$

이므로

$f(8)=f(20)=-115$



따라서 그림에서 $f(m-1)<f(20)$을 만족시키는 자연수 $m-1$의 값은 9, 10, 11, …, 19이므로 m의 값은 10, 11, 12, …, 20

따라서 모든 자연수 m의 값의 합은

$\frac{11(10+20)}{2}=165$

$\therefore b=165$

3단계 $a+b$의 값 구하기

$\therefore a+b=15+165=180$

06 답 5

1단계 A_n 구하기

$\left[\log_2\frac{x}{y}\right]=2n-1$이므로

$2n-1\le\log_2\frac{x}{y}<2n$

$\therefore 2^{2n-1}\le\frac{x}{y}<2^{2n}$

이때 $x>0$, $y>0$이므로

$\frac{1}{2^{2n}}<\frac{y}{x}\le\frac{1}{2^{2n-1}}$

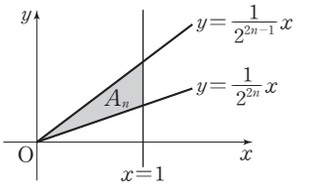
$\therefore \frac{1}{2^{2n}}x<y\le\frac{1}{2^{2n-1}}x$

$\therefore a_n=\frac{1}{2^{2n}}$, $b_n=\frac{1}{2^{2n-1}}$

직선 $y=\frac{1}{2^{2n}}x$와 직선 $x=1$의 교점의 y좌표는 $y=\frac{1}{2^{2n}}$

직선 $y=\frac{1}{2^{2n-1}}x$와 직선 $x=1$의 교점의 y좌표는 $y=\frac{1}{2^{2n-1}}$

따라서 세 직선 $y=\frac{1}{2^{2n}}x$, $y=\frac{1}{2^{2n-1}}x$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$A_n=\frac{1}{2}\times1\times\left(\frac{1}{2^{2n-1}}-\frac{1}{2^{2n}}\right)$$
$$=\frac{1}{2^{2n}}\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

2단계 자연수 n의 최솟값 구하기

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}A_k=\frac{\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

$\sum_{k=1}^{n}A_k>\frac{333}{2000}$에서

$\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}>\frac{333}{2000}$

$1-\left(\frac{1}{4}\right)^n>\frac{999}{1000}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^n<\frac{1}{1000}$

$\therefore 4^n>1000$

이때 $4^4=256$, $4^5=1024$이므로 $n\ge5$

따라서 자연수 n의 최솟값은 5이다.

07 답 8

1단계 점 A_0에서 점 A_n까지 점 P가 이동한 거리 구하기

점 A_0에서 점 A_1까지 점 P가 이동한 거리는 $\frac{1}{25}$

점 A_0에서 점 A_2까지 점 P가 이동한 거리는 $\frac{1}{25}+\frac{3}{25}$

점 A_0에서 점 A_3까지 점 P가 이동한 거리는 $\frac{1}{25}+\frac{3}{25}+\frac{5}{25}$

⋮

점 A_0에서 점 A_n까지 점 P가 이동한 거리는

$$\frac{1}{25}+\frac{3}{25}+\frac{5}{25}+\cdots+\frac{2n-1}{25}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{25}$$
$$=\frac{2}{25}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{25}\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=\frac{2}{25}\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{25}$$
$$=\frac{n^2}{25}$$
$$=\left(\frac{n}{5}\right)^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

2단계 a의 값 구하기

점 A_n의 x좌표와 y좌표의 합은 점 P가 점 A_0에서 점 A_n까지 경로를 따라 이동한 거리와 같으므로 점 A_n이 직선 $y=x$ 위에 있으려면 점 A_0에서 점 A_n까지 점 P가 이동한 거리는 짝수이어야 한다.

즉, $\left(\frac{n}{5}\right)^2$이 짝수이어야 하므로 $\frac{n}{5}$도 짝수이어야 한다.

$\frac{n}{5}=2m$ (m은 자연수)이라 하면

$n=10m$

즉, 점 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 두 번째 점은 $m=2$, 즉 $n=20$일 때이므로 점 A_{20}이다.

따라서 점 A_0에서 점 A_{20}까지 점 P가 이동한 거리는 ㉠에서

$\left(\frac{20}{5}\right)^2=4^2=16$이므로 점 A_{20}의 x좌표는 8이다.

↳ 점 A_{20}의 좌표는 (8, 8)

$\therefore a=8$

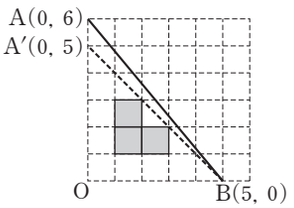
08 답 164

1단계 a_n 구하기

(i) $n=1$일 때,

A(0, 6), B(5, 0)이므로 그림에서

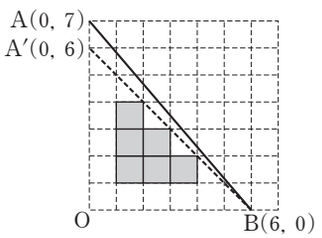
$a_1=1+2=3$



(ii) $n=2$일 때,

A(0, 7), B(6, 0)이므로 그림에서

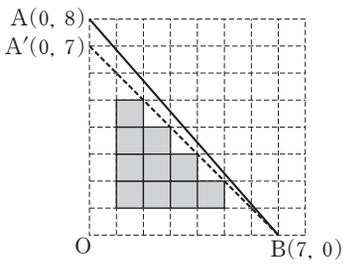
$a_2=1+2+3=6$



(iii) $n=3$일 때,

A(0, 8), B(7, 0)이므로 그림에서

$a_3=1+2+3+4=10$



⋮

$\therefore a_n=1+2+3+\cdots+n+(n+1)$

$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$=\frac{n^2+3n+2}{2}$

2단계 $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값 구하기

$\therefore \sum_{n=1}^{8} a_n=\sum_{n=1}^{8}\frac{n^2+3n+2}{2}$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{8} n^2+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{8} n+\sum_{n=1}^{8} 1$

$=\frac{1}{2}\times\frac{8\times9\times17}{6}+\frac{3}{2}\times\frac{8\times9}{2}+8$

$=164$

09 답 3433

1단계 점 P가 이동한 점의 좌표를 구하여 x좌표가 같은 순서쌍끼리 묶기

점 P(0, 1)을 i번 이동한 점의 좌표 (x_i, y_i)를 차례대로 구하면

(0, 1)에서 $x<y$이므로 점의 좌표 (x_1, y_1)은 (1, 0)

(1, 0)에서 $x\geq y$이므로 점의 좌표 (x_2, y_2)는 (1, 1)

(1, 1)에서 $x\geq y$이므로 점의 좌표 (x_3, y_3)은 (1, 2)

(1, 2)에서 $x<y$이므로 점의 좌표 (x_4, y_4)는 (2, 1)

(2, 1)에서 $x\geq y$이므로 점의 좌표 (x_5, y_5)는 (2, 2)

(2, 2)에서 $x\geq y$이므로 점의 좌표 (x_6, y_6)은 (2, 3)

(2, 3)에서 $x<y$이므로 점의 좌표 (x_7, y_7)은 (3, 2)

⋮

따라서 점 P가 이동한 점의 좌표를 차례대로 나열한 후 x좌표가 같은 순서쌍끼리 묶으면

{(1, 0), (1, 1), (1, 2)}, {(2, 1), (2, 2), (2, 3)},

{(3, 2), (3, 3), (3, 4)}, {(4, 3), (4, 4), (4, 5)}, …

2단계 제n군의 점의 x좌표와 y좌표의 합 구하기

각 군의 항의 개수는 3이므로 제1군부터 제n군까지의 항의 개수는 $3n$

이때 $100=3\times33+1$이므로 제100항인 점의 좌표 (x_{100}, y_{100})은 (34, 33)이다.

제n군에 속하는 점의 좌표는 $(n, n-1)$, (n, n), $(n, n+1)$이므로 제n군의 점의 x좌표와 y좌표의 합을 a_n이라 하면

$a_n=n+(n-1)+n+n+n+(n+1)=6n$

3단계 $\sum_{i=1}^{100}(x_i+y_i)$의 값 구하기

$\therefore \sum_{i=1}^{100}(x_i+y_i)=\sum_{k=1}^{33} 6k+(34+33)$

$=6\sum_{k=1}^{33} k+67$

$=6\times\frac{33\times34}{2}+67$

$=3433$

10 답 ⑤

1단계 m행의 일반항 구하기

1행은 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열, 2행은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열, 3행은 첫째항이 1, 공차가 5인 등차수열, …이므로 m행은 첫째항이 1, 공차가 $2m-1$인 등차수열이다.

따라서 m행의 n번째 수는

$1+(2m-1)(n-1)$

2단계 71이 나타나는 위치 구하기

$1+(2m-1)(n-1)=71$에서

$(2m-1)(n-1)=70$

$(2m-1)(n-1)=1\times2\times5\times7$이고 $2m-1$은 홀수이므로 순서쌍 $(2m-1, n-1)$은

(1, 70), (5, 14), (7, 10), (35, 2)

따라서 순서쌍 (m, n)은

(1, 71), (3, 15), (4, 11), (18, 3)

3단계 a_{71}의 값 구하기

(i) $m=1$, $n=71$일 때,

$1+2+3+\cdots+71=\frac{71(1+71)}{2}=2556$

(ii) $m=3$, $n=15$일 때,

$1+6+11+\cdots+71=\frac{15(1+71)}{2}=540$

(iii) $m=4$, $n=11$일 때,

$1+8+15+\cdots+71=\frac{11(1+71)}{2}=396$

(iv) $m=18$, $n=3$일 때,

$1+36+71=108$

(i)~(iv)에서

$a_{71}=2556+540+396+108=3600$

10 수학적 귀납법

step 1 핵심 문제 | 114~115쪽

01 57	02 12	03 ②	04 ③	05 ③	06 6
07 32	08 8	09 ④	10 ③	11 ⑤	

01 답 57

$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n$, 즉 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

이때 $a_1=3$이므로 공차를 d라 하면 $4S_n=S_{2n}$에서

$$4\times\frac{n\{2\times3+(n-1)d\}}{2}=\frac{2n\{2\times3+(2n-1)d\}}{2}$$

$2\{6+(n-1)d\}=6+(2n-1)d$

$12+2nd-2d=6+2nd-d$

$\therefore d=6$

$\therefore a_{10}=a_1+9d=3+9\times6=57$

02 답 12

이차방정식 $a_nx^2-2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}={a_{n+1}}^2-a_na_{n+2}=0$$

즉, ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_4=12$에서 $ar^3=12$ …… ㉠

$a_9=384$에서 $ar^8=384$ …… ㉡

㉡÷㉠을 하면

$r^5=32$ $\therefore r=2$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $a=\frac{3}{2}$

$\therefore a_n=\frac{3}{2}\times2^{n-1}=3\times2^{n-2}$

$a_k>3000$에서

$3\times2^{k-2}>3000$

$\therefore 2^{k-2}>1000$

이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

$k-2\geq10$

$\therefore k\geq12$

따라서 자연수 k의 최솟값은 12이다.

03 답 ②

$a_{n+1}=\frac{3n+2}{3n-1}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 11을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$a_2=\frac{5}{2}a_1$

$a_3=\frac{8}{5}a_2$

$a_4=\frac{11}{8}a_3$

⋮

$\times)\ a_{12}=\frac{35}{32}a_{11}$

$a_{12}=\frac{35}{2}a_1=\frac{35}{2}\times4=70$

다른 풀이

$a_1=4$이므로

$a_2=\frac{5}{2}\times4=10$

$a_3=\frac{8}{5}\times10=16$

$a_4=\frac{11}{8}\times16=22$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 6인 등차수열이므로

$a_{12}=a_1+11d=4+11\times6=70$

04 답 ③

$a_{n+1}=a_n+3n$에 $n=1$을 대입하면

$a_2=a_1+3$

이를 $2a_1=a_2+3$에 대입하면

$2a_1=a_1+6$ $\therefore a_1=6$

$a_{n+1}=a_n+3n$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$a_2=a_1+3\times1$

$a_3=a_2+3\times2$

$a_4=a_3+3\times3$

⋮

$+)\ a_{10}=a_9+3\times9$

$a_{10}=a_1+3\sum_{k=1}^{9}k=6+3\times\frac{9\times10}{2}=141$

다른 풀이

$a_{n+1}=a_n+3n$에 $n=1$을 대입하면

$a_2=a_1+3$

이를 $2a_1=a_2+3$에 대입하면

$2a_1=a_1+6$ $\therefore a_1=6$

$a_{n+1}=a_n+3n$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례대로 대입하면

$a_2=a_1+3\times1=6+3=9$

$a_3=a_2+3\times2=9+6=15$

$a_4=a_3+3\times3=15+9=24$

$a_5=a_4+3\times4=24+12=36$

$a_6=a_5+3\times5=36+15=51$

$a_7=a_6+3\times6=51+18=69$

$a_8=a_7+3\times7=69+21=90$

$a_9=a_8+3\times8=90+24=114$

$\therefore a_{10}=a_9+3\times9=114+27=141$

05 답 ③

$a_{n+1}=2a_n+1$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1+1=2\times1+1=3=2^2-1$

$a_3=2a_2+1=2\times3+1=7=2^3-1$

$a_4=2a_3+1=2\times7+1=15=2^4-1$

⋮

$\therefore a_n=2^n-1$

ㄱ. $a_5=2^5-1=31$

ㄴ. $a_9=2^9-1=511$, $a_{10}=2^{10}-1=1023$이므로

$a_{10}-a_9=512$

ㄷ. $a_n=2^n-1$이므로 $a_n+1=2^n$

따라서 수열 $\{a_n+1\}$은 공비가 2인 등비수열이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

06 답 6

$a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$이고, $a_1>0$에서 $a_2>0$, $a_3>0$, …이므로

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+1}{a_n}$

$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+3$

즉, 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a_1}=1$, 공차가 3인 등차수열이므로

$\frac{1}{a_{10}}=\frac{1}{a_1}+9d=1+9\times3=28$

$\frac{1}{a_8}=\frac{1}{a_1}+7d=1+7\times3=22$

$\therefore \frac{1}{a_{10}}-\frac{1}{a_8}=6$

07 답 32

a_1이 홀수이므로 $a_2=a_1+1$ …… 배점 10%

a_2가 짝수이므로 $a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{a_1+1}{2}$ …… 배점 10%

(홀수)+(홀수)=(짝수)

(i) a_3이 홀수일 때,

$a_4=a_3+1=\frac{a_1+1}{2}+1$

즉, $\frac{a_1+1}{2}+1=6$에서 $\frac{a_1+1}{2}=5$

$a_1+1=10$ $\therefore a_1=9$ …… 배점 30%

(ii) a_3이 짝수일 때,

$a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{a_1+1}{4}$

즉, $\frac{a_1+1}{4}=6$에서

$a_1+1=24$ $\therefore a_1=23$ …… 배점 30%

(i), (ii)에서 모든 a_1의 값의 합은

$9+23=32$ …… 배점 20%

08 답 8

$a_1=6>0$이므로

$a_2=2-a_1=2-6=-4$

$a_2<0$이므로

$a_3=a_2+p=-4+p$

(i) $-4+p\geq0$, 즉 $p\geq4$일 때,

$a_4=2-a_3=2-(-4+p)=6-p$

즉, $6-p=0$이므로 $p=6$

(ii) $-4+p<0$, 즉 $p<4$일 때,

$a_4=a_3+p=(-4+p)+p=-4+2p$

즉, $-4+2p=0$이므로 $p=2$

(i), (ii)에서 $p=2$ 또는 $p=6$

따라서 모든 실수 p의 값의 합은

$2+6=8$

09 답 ④

$a_{n+1}=2a_n+b_n$, $b_{n+1}=-3a_n-2b_n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$a_2=2a_1+b_1=2\times3+1=7$

$b_2=-3a_1-2b_1=-3\times3-2\times1=-11$

$a_3=2a_2+b_2=2\times7+(-11)=3$

$b_3=-3a_2-2b_2=-3\times7-2\times(-11)=1$

$a_4=2a_3+b_3=2\times3+1=7$

$b_4=-3a_3-2b_3=-3\times3-2\times1=-11$

⋮

$\therefore a_{2n-1}=3$, $a_{2n}=7$, $b_{2n-1}=1$, $b_{2n}=-11$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

따라서 $a_{100}=7$, $b_{100}=-11$이므로

$a_{100}-3b_{100}=7-3\times(-11)$

$=40$

10 답 ③

$n=1$이 홀수이므로

$a_2=\frac{3a_1}{5a_1+2}=\frac{3\times2}{5\times2+2}=\frac{1}{2}$

$n=2$가 짝수이므로

$a_3=a_2-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

$n=3$이 홀수이므로

$a_4=\frac{3a_3}{5a_3+2}=\frac{3\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{5\times\left(-\frac{1}{2}\right)+2}=3$

$n=4$가 짝수이므로

$a_5=a_4-1=3-1=2$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 3이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

따라서 수열 $\{a_n\}$은 4개의 수가 반복되므로 $a_k=3$을 만족시키는 20 이하의 자연수 k는 4, 8, 12, 16, 20의 5개이다.

11 답 ⑤

(i) $n=2$일 때,

$2^3+3\times2^2-2=18$은 3의 배수이다.

(ii) $n=k$ $(k\geq2)$일 때,

$k^3+3k^2-k=3m$ (m은 자연수)이라 하면

$(k+1)^3+3(k+1)^2-(k+1)$

$=k^3+3k^2+3k+1+3k^2+6k+3-k-1$

$=\boxed{(가)\ k^3+6k^2+8k+3}$

$=(k^3+3k^2-k)+3k^2+9k+3$

$=3m+3\times(\boxed{(나)\ k^2+3k+1})$

따라서 $n=k+1$일 때도 n^3+3n^2-n은 3의 배수이다.

(i), (ii)에서 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 n^3+3n^2-n은 3의 배수이다.

따라서 $f(k)=k^3+6k^2+8k+3$, $g(k)=k^2+3k+1$이므로

$f(1)+g(2)=18+11=29$

step 2 고난도 문제 | 116~120쪽

01 16	02 747	03 9	04 120	05 25	06 ④
07 8	08 17	09 616	10 1	11 162	12 ⑤
13 13	14 −2	15 ⑤	16 18	17 132	18 ④
19 ③	20 64	21 풀이 참조		22 ③	

01 답 16

㈎에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$, 즉 ${a_{n+1}}^2=a_n a_{n+2}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

이때 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$라 하면

㈏에서 $a_1r^3+a_1r^4+a_1r^5=14$

$\therefore a_1r^3(1+r+r^2)=14$ …… ㉠

㈐에서 $a_1r^3\times a_1r^4\times a_1r^5=64$

${a_1}^3r^{12}=64$ $\therefore a_1r^4=4$ …… ㉡

㉠÷㉡을 하면

$\frac{a_1r^3(1+r+r^2)}{a_1r^4}=\frac{14}{4}$, $\frac{1+r+r^2}{r}=\frac{7}{2}$

$2+2r+2r^2=7r$, $2r^2-5r+2=0$

$(2r-1)(r-2)=0$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ 또는 $r=2$

이를 ㉡에 대입하여 풀면

$a_1=64$ 또는 $a_1=\frac{1}{4}$

따라서 모든 a_1의 값의 곱은

$64\times\frac{1}{4}=16$

02 답 747

$a_1=88$이고 $a_n\geq65$일 때, $a_{n+1}=a_n-3$

즉, 첫째항이 88이고 공차가 −3인 등차수열이므로

$a_n=88+(n-1)\times(-3)=-3n+91$

이때 $a_n\geq65$에서

$-3n+91\geq65$

$3n\leq26$ $\therefore n\leq\frac{26}{3}=8.666\cdots$

$\therefore a_n=-3n+91$ $(n\leq8)$

즉, $n\leq8$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

$a_8=-3\times8+91=67$이므로

$a_9=a_8-3=67-3=64$

$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ $(n\geq9)$

즉, $n\geq9$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

$\therefore \sum_{n=1}^{15}a_n=\sum_{n=1}^{8}a_n+\sum_{n=9}^{15}a_n$

$=\frac{8(a_1+a_8)}{2}+\frac{a_9\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{8(88+67)}{2}+\frac{64\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1-\frac{1}{2}}$

첫째항이 a_9, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이다.

$=620+127=747$

03 답 9

$S_n=\frac{1}{8}(a_n+2)^2$에서

(i) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=\frac{1}{8}(a_n+2)^2-\frac{1}{8}(a_{n-1}+2)^2$

$=\frac{1}{8}\{(a_n^2+4a_n+4)-(a_{n-1}^2+4a_{n-1}+4)\}$

$=\frac{1}{8}\{a_n^2-a_{n-1}^2+4(a_n-a_{n-1})\}$

$8a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+4(a_n-a_{n-1})$

$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})-4(a_n+a_{n-1})=0$

$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-4)=0$

$\therefore a_n+a_{n-1}=0$ 또는 $a_n-a_{n-1}-4=0$

이때 $a_n>0$이므로 $a_n-a_{n-1}-4=0$

$\therefore a_n=a_{n-1}+4$ $(n\geq2)$ …… 배점 30%

(ii) $n=1$일 때,

$a_1=S_1$이므로

$a_1=\frac{1}{8}(a_1+2)^2$

$8a_1=a_1^2+4a_1+4$

$a_1^2-4a_1+4=0$

$(a_1-2)^2=0$

$\therefore a_1=2$ …… 배점 20%

(i), (ii)에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 4인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$a_n=2+(n-1)\times4=4n-2$ …… 배점 20%

$\therefore \sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{m}(4k-2)=4\sum_{k=1}^{m}k-2\sum_{k=1}^{m}1$

$=4\times\frac{m(m+1)}{2}-2m=2m^2$ …… 배점 20%

즉, $2m^2=162$이므로

$m^2=81$

$\therefore m=9$ ($\because m$은 자연수) …… 배점 10%

04 답 120

$n\geq2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$이므로 $\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=2a_n$에서

$\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=2(S_n-S_{n-1})$

$\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=2(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})$

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}\neq0$

$\therefore \sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=\frac{1}{2}$ $(n\geq2)$

즉, 수열 $\{\sqrt{S_n}\}$은 첫째항이 $\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}=\sqrt{9}=3$, 공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이므로

$\sqrt{S_n}=3+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n+\frac{5}{2}$

$\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=2a_n$에서 $n\geq2$일 때,

$a_n=\frac{1}{2}(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})$

$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}n+\frac{5}{2}\right)+\left\{\frac{1}{2}(n-1)+\frac{5}{2}\right\}\right]$

$=\frac{1}{2}n+\frac{9}{4}$

$$\therefore\ a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{25}=9+\underbrace{\left(\frac{15}{4}+\frac{19}{4}+\frac{23}{4}+\cdots+\frac{59}{4}\right)}_{\text{첫째항이 }\frac{15}{4}\text{, 공차가 1인 등차수열의 첫째항부터 제12항까지의 합이다.}}$$

$$=9+\frac{12\left(\frac{15}{4}+\frac{59}{4}\right)}{2}$$

$$=120$$

05 답 25

x에 대한 이차방정식 $a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$의 한 근이 -1이므로

$a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}=0$

$\therefore\ 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ ····· ㉠

즉, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 공차를 d라 하면 $a_7=13$에서

$1+6d=13$

$6d=12$ $\therefore\ d=2$

$\therefore\ a_n=1+(n-1)\times2=2n-1$

이때 $a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$에서

$a_nx^2+(a_n+a_{n+2})x+a_{n+2}=0$ ($\because$ ㉠)

$(x+1)(a_nx+a_{n+2})=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=-\frac{a_{n+2}}{a_n}$

따라서 $b_n=-\frac{a_{n+2}}{a_n}=-\frac{2n+3}{2n-1}$이므로

$$\left|\frac{1}{b_n+1}\right|=\left|\frac{1}{-\frac{2n+3}{2n-1}+1}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\frac{-4}{2n-1}}\right|=\frac{2n-1}{4}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{10}\left|\frac{1}{b_k+1}\right|=\sum_{k=1}^{10}\frac{2k-1}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}k-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{10}1$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{10\times11}{2}-\frac{1}{4}\times10$$

$$=25$$

06 답 ④

$a_{n+1}=\frac{a_n}{n+1}$이고, $a_1>0$에서 $a_2>0$, $a_3>0$, …이므로 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{a_n}$

이 식의 n에 1, 2, 3, 4, …를 차례대로 대입하면

$\frac{1}{a_2}=\frac{2}{a_1}=2$

$\frac{1}{a_3}=\frac{3}{a_2}=2\times3$

$\frac{1}{a_4}=\frac{4}{a_3}=2\times3\times4$

$\frac{1}{a_5}=\frac{5}{a_4}=2\times3\times4\times5$

⋮

이때 $20=4\times5$이므로 $n\geq5$일 때, $\frac{1}{a_n}$의 값은 20으로 나누어떨어진다.

따라서 $\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{a_k}$을 20으로 나누었을 때의 나머지는 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}$을 20으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}=1+2+6+24=33$이므로 33을 20으로 나누었을 때의 나머지는 13이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{a_k}$을 20으로 나누었을 때의 나머지는 13이다.

07 답 8

공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 일반항 a_n은

$a_n=a\times2^{n-1}$

$\therefore\ b_{n+1}-b_n=a\times2^{n-1}$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)

즉, $b_{n+1}=b_n+a\times2^{n-1}$의 n에 1, 2, 3, 4, 5, 6을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$b_2=b_1+a\times1$

$b_3=b_2+a\times2$

$b_4=b_3+a\times2^2$

$b_5=b_4+a\times2^3$

$b_6=b_5+a\times2^4$

$+)\ b_7=b_6+a\times2^5$

$b_7=b_1+a(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5)$

$=7+a\times\frac{2^6-1}{2-1}$

$=63a+7$

즉, $63a+7=70$이므로

$63a=63$ $\therefore\ a=1$

따라서 $a_n=2^{n-1}$이므로

$a_4=2^3=8$

08 답 17

$(n+1)a_{n+1}=(n+3)a_n$, 즉 $a_{n+1}=\frac{n+3}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$a_2=\frac{4}{2}a_1$

$a_3=\frac{5}{3}a_2$

$a_4=\frac{6}{4}a_3$

$a_5=\frac{7}{5}a_4$

⋮

$a_{n-1}=\frac{n+1}{n-1}a_{n-2}$

$\times)\ a_n=\frac{n+2}{n}a_{n-1}$

$$a_n=\left(\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{6}{4}\times\frac{7}{5}\times\cdots\times\frac{n+1}{n-1}\times\frac{n+2}{n}\right)a_1$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{6}\times30$$

$$=5(n+1)(n+2)$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{5(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+2}\right)=\frac{m}{10(m+2)}$$

$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{a_k}<\frac{9}{100}$에서

$\frac{m}{10(m+2)}<\frac{9}{100}$, $\frac{m}{m+2}<\frac{9}{10}$

$10m<9(m+2)$ $\therefore\ m<18$

따라서 자연수 m의 최댓값은 17이다.

idea

09 답 616

집합 A_i의 원소는 차례대로 공차가 2인 등차수열을 이루므로 (가)에서 집합 A_i의 첫째항을 b_i라 하면 집합 A_i의 끝항은 $b_i+2(i-1)$

(나)에서 집합 A_i의 모든 원소의 평균은 b_{i+1}이므로

$$b_{i+1}=\frac{\frac{i\{b_i+b_i+2(i-1)\}}{2}}{i}$$

$\therefore b_{i+1}=b_i+i-1$

이 식의 i에 1, 2, 3, …, 10을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$b_2=b_1$

$b_3=b_2+1$

$b_4=b_3+2$

$\vdots$

$+)\ b_{11}=b_{10}+9$

$b_{11}=b_1+1+2+3+\cdots+9$

$=b_1+\frac{9\times10}{2}$

$=b_1+45$

이때 $b_1=a_1=1$이므로 $b_{11}=46$

따라서 집합 A_{11}의 모든 원소의 합은 첫째항이 46이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제11항까지의 합이므로

$\frac{11\{2\times46+(11-1)\times2\}}{2}=616$

10 답 1

$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$에서 $a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{4}\frac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}}=\sum_{k=1}^{4}\frac{a_{k+2}-a_{k+1}}{a_{k+1}a_{k+2}}$$

$$=\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_4}-\frac{1}{a_5}\right)+\left(\frac{1}{a_5}-\frac{1}{a_6}\right)$$

$$=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_6}$$

$\sum_{k=1}^{4}\frac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}}=\frac{20}{11}$에서

$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_6}=\frac{20}{11}$

$2-\frac{1}{a_6}=\frac{20}{11}$

$\frac{1}{a_6}=\frac{2}{11}$

$\therefore a_6=\frac{11}{2}$ …… ㉠

한편 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$a_3=a_2+a_1=\frac{1}{2}+a_1$

$a_4=a_3+a_2=\frac{1}{2}+a_1+\frac{1}{2}=1+a_1$

$a_5=a_4+a_3=1+a_1+\frac{1}{2}+a_1=\frac{3}{2}+2a_1$

$a_6=a_5+a_4=\frac{3}{2}+2a_1+1+a_1=\frac{5}{2}+3a_1$

㉠에서 $\frac{5}{2}+3a_1=\frac{11}{2}$이므로

$3a_1=3$ $\therefore a_1=1$

11 답 162

$a_1=2$, $a_2=4$이므로

$S_1=a_1=2$

$S_2=a_1+a_2=2+4=6$

$S_{n+1}=a_{n+1}+S_n$이므로 $a_{n+1}S_n=a_nS_{n+1}$에서

$a_{n+1}S_n=a_n(a_{n+1}+S_n)$, $(S_n-a_n)a_{n+1}=a_nS_n$

$S_{n-1}a_{n+1}=a_nS_n$

$\therefore a_{n+1}=\frac{a_nS_n}{S_{n-1}}$ $(n\geq2)$

이 식의 n에 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$a_3=\frac{a_2S_2}{S_1}=\frac{4\times6}{2}=12$

$\therefore S_3=S_2+a_3=6+12=18$

$a_4=\frac{a_3S_3}{S_2}=\frac{12\times18}{6}=36$

$\therefore S_4=S_3+a_4=18+36=54$

$a_5=\frac{a_4S_4}{S_3}=\frac{36\times54}{18}=108$

$\therefore S_5=S_4+a_5=54+108=162$

다른 풀이

$a_1=2$, $a_2=4$이므로

$S_1=a_1=2$, $S_2=a_1+a_2=2+4=6$

$a_{n+1}S_n=a_nS_{n+1}$에서

$(S_{n+1}-S_n)S_n=(S_n-S_{n-1})S_{n+1}$

$S_{n+1}S_n-S_n^2=S_nS_{n+1}-S_{n-1}S_{n+1}$

$\therefore S_n^2=S_{n-1}S_{n+1}$ $(n\geq2)$

즉, 수열 $\{S_n\}$은 등비수열이다.

이때 첫째항이 $S_1=2$, 공비가 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{6}{2}=3$이므로

$S_5=2\times3^4=162$

12 답 ⑤

$a_{n+1}=-a_n+(-1)^{n-1}$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$a_2=-a_1+(-1)^0=0+1=1$

$a_3=-a_2+(-1)^1=-1-1=-2$

$a_4=-a_3+(-1)^2=2+1=3$

$a_5=-a_4+(-1)^3=-3-1=-4$

$a_6=-a_5+(-1)^4=4+1=5$

$a_7=-a_6+(-1)^5=-5-1=-6$

$\vdots$

$\therefore a_{2n-1}=-2n+2$, $a_{2n}=2n-1$

ㄱ. $\sum_{n=1}^{20}a_n=\sum_{n=1}^{10}(a_{2n-1}+a_{2n})$

$=\sum_{n=1}^{10}\{(-2n+2)+(2n-1)\}$

$=\sum_{n=1}^{10}1=10$

ㄴ. $a_{2n-1}=-2n+2$이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 등차수열이다.

ㄷ. $a_{2n}=2n-1$이므로 $b_n=2^{a_{2n}}=2^{2n-1}=\frac{1}{2}\times4^n$

$\therefore \sum_{n=1}^{5}b_n=\sum_{n=1}^{5}\left(\frac{1}{2}\times4^n\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{4(4^5-1)}{4-1}=682$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

13 답 13

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\,(d\neq0)$라 하면 일반항 a_n은

$a_n=a_1+(n-1)d$

$b_n=\begin{cases}b_{n-1}+a_n & (n\text{이 }3\text{의 배수가 아닌 경우})\\ b_{n-1}-a_n & (n\text{이 }3\text{의 배수인 경우})\end{cases}$의 n에 2, 3, 4, …, 10을 차례대로 대입하면

$b_2=b_1+a_2=a_1+(a_1+d)=2a_1+d$

$b_3=b_2-a_3=(2a_1+d)-(a_1+2d)=a_1-d$

$b_4=b_3+a_4=(a_1-d)+(a_1+3d)=2a_1+2d$

$b_5=b_4+a_5=(2a_1+2d)+(a_1+4d)=3a_1+6d$

$b_6=b_5-a_6=(3a_1+6d)-(a_1+5d)=2a_1+d$

$b_7=b_6+a_7=(2a_1+d)+(a_1+6d)=3a_1+7d$

$b_8=b_7+a_8=(3a_1+7d)+(a_1+7d)=4a_1+14d$

$b_9=b_8-a_9=(4a_1+14d)-(a_1+8d)=3a_1+6d$

$\therefore\ b_{10}=b_9+a_{10}=(3a_1+6d)+(a_1+9d)=4a_1+15d$

$b_{10}=a_{10}$에서 $4a_1+15d=a_1+9d$, $3a_1=-6d$ $\quad\therefore\ a_1=-2d$

$\therefore\ \dfrac{b_8}{b_{10}}=\dfrac{4a_1+14d}{4a_1+15d}=\dfrac{4\times(-2d)+14d}{4\times(-2d)+15d}=\dfrac{6d}{7d}=\dfrac{6}{7}$

따라서 $p=7$, $q=6$이므로 $p+q=13$

14 답 −2

$a_{n+5}=a_n$에서 $a_{13}=a_8=a_3$이고, $a_{13}=2$이므로 $a_3=2$

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d라 하면

$a_1=2-2d$, $a_2=2-d$, $a_4=2+d$, $a_5=2+2d$

이때 수열 $\{a_n\}$은 5개의 수가 반복되어 나타나므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15}(-1)^k a_k&=\sum_{k=1}^{5}(-1)^k a_k+\sum_{k=6}^{10}(-1)^k a_k+\sum_{k=11}^{15}(-1)^k a_k\\&=\sum_{k=1}^{5}(-1)^k a_k-\sum_{k=1}^{5}(-1)^k a_k+\sum_{k=1}^{5}(-1)^k a_k\\&=\sum_{k=1}^{5}(-1)^k a_k=-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5\\&=-(2-2d)+(2-d)-2+(2+d)-(2+2d)=-2\end{aligned}$$

15 답 ⑤

$a_n=a_{n+1}-a_{n+2}$, 즉 $a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$a_3=a_2-a_1=3-1=2$

$a_4=a_3-a_2=2-3=-1$

$a_5=a_4-a_3=-1-2=-3$

$a_6=a_5-a_4=-3-(-1)=-2$

$a_7=a_6-a_5=-2-(-3)=1$

$a_8=a_7-a_6=1-(-2)=3$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 1, 3, 2, −1, −3, −2가 이 순서대로 반복하여 나타난다.

$\therefore\ a_{n+6}=a_n$

ㄱ. $a_{n+3}=-a_n$이므로 $a_{n+3}+a_n=0$

ㄴ. $90=15\times6$이므로 $a_{90}=a_6=-2$

ㄷ. $2026=337\times6+4$이고

$\sum_{k=1}^{6}a_k=1+3+2+(-1)+(-3)+(-2)=0$이므로

$\sum_{k=1}^{2026}a_k=337\sum_{k=1}^{6}a_k+a_1+a_2+a_3+a_4=1+3+2+(-1)=5$

ㄹ. $|a_1|=1$, $|a_2|=3$, $|a_3|=2$, $|a_4|=1$, $|a_5|=3$, $|a_6|=2$, …

즉, 수열 $\{|a_n|\}$은 1, 3, 2가 이 순서대로 반복하여 나타난다.

이때 $122=40\times3+2$이므로

$\sum_{k=1}^{122}|a_k|=40\sum_{k=1}^{3}|a_k|+a_1+a_2$

$=40(1+3+2)+1+3=244$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

16 답 18

$\mathrm{P}_n(x_n,\ 0)$, $\mathrm{P}_{n+1}(x_{n+1},\ 0)$, $\mathrm{P}_{n+2}(x_{n+2},\ 0)$이라 하면 점 P_{n+2}는 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$을 2 : 1로 외분하는 점이므로

$x_{n+2}=\dfrac{2x_{n+1}-x_n}{2-1}$ $\quad\therefore\ x_{n+2}=2x_{n+1}-x_n$

즉, $2x_{n+1}=x_{n+2}+x_n$이므로 수열 $\{x_n\}$은 등차수열이다.

이때 $\mathrm{P}_1(1,\ 0)$이고, $\overline{\mathrm{OP}_1}$을 2 : 1로 외분하는 점 P_2의 좌표는 $(2,\ 0)$이므로 $x_1=1$, $x_2=2$

따라서 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열이므로 $x_n=n$ ····· 배점 30%

또 $\mathrm{Q}_n(0,\ y_n)$, $\mathrm{Q}_{n+1}(0,\ y_{n+1})$, $\mathrm{Q}_{n+2}(0,\ y_{n+2})$라 하면 Q_{n+2}는 $\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}}$을 2 : 1로 내분하는 점이므로

$y_{n+2}=\dfrac{2y_{n+1}+y_n}{2+1}$ $\quad\therefore\ y_{n+2}=\dfrac{2y_{n+1}+y_n}{3}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $\mathrm{Q}_1(0,\ 1)$이고, $\overline{\mathrm{OQ}_1}$을 2 : 1로 내분하는 점 Q_2의 좌표는

$\left(0,\ \dfrac{2\times1+0}{2+1}\right)$ $\quad\therefore\ \left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$

$\therefore\ y_1=1$, $y_2=\dfrac{2}{3}$

㉠의 n에 1, 2, 3, 4를 차례대로 대입하면

$y_3=\dfrac{2y_2+y_1}{3}=\dfrac{2\times\frac{2}{3}+1}{3}=\dfrac{7}{9}$

$y_4=\dfrac{2y_3+y_2}{3}=\dfrac{2\times\frac{7}{9}+\frac{2}{3}}{3}=\dfrac{20}{27}$

$y_5=\dfrac{2y_4+y_3}{3}=\dfrac{2\times\frac{20}{27}+\frac{7}{9}}{3}=\dfrac{61}{81}$

$\therefore\ y_6=\dfrac{2y_5+y_4}{3}=\dfrac{2\times\frac{61}{81}+\frac{20}{27}}{3}=\dfrac{182}{243}$ ····· 배점 40%

$x_k>\dfrac{13}{y_6}$에서 $x_k>13\times\dfrac{243}{182}=\dfrac{243}{14}=17.35\cdots$

즉, $k>17.35\cdots$이므로 자연수 k의 최솟값은 18이다. ····· 배점 30%

17 답 132

두 점 Q_1, Q_2의 좌표가 각각 $(0,\ 0)$, $(1,\ -1)$이고 점 Q_3의 좌표를 $(a_3,\ b_3)$이라 하면 삼각형 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3$의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{0+1+a_3}{3},\ \dfrac{0-1+b_3}{3}\right)$

이때 점 P_1이 삼각형 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3$의 무게중심이고, 점 P_1의 좌표가 $(1,\ 0)$이므로

$\dfrac{1+a_3}{3}=1$, $\dfrac{-1+b_3}{3}=0$ $\quad\therefore\ a_3=2$, $b_3=1$

따라서 점 Q_3의 좌표는 $(2,\ 1)$

두 점 Q_2, Q_3의 좌표가 각각 $(1,\ -1)$, $(2,\ 1)$이고 점 Q_4의 좌표를 $(a_4,\ b_4)$라 하면 삼각형 $\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3\mathrm{Q}_4$의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{1+2+a_4}{3},\ \dfrac{-1+1+b_4}{3}\right)$

이때 점 P_2가 삼각형 $Q_2Q_3Q_4$의 무게중심이고, 점 P_2의 좌표가 $(2, a)$이므로

$\frac{3+a_4}{3}=2$, $\frac{b_4}{3}=a$ $\therefore a_4=3$, $b_4=3a$

따라서 점 Q_4의 좌표는 $(3, 3a)$

두 점 Q_3, Q_4의 좌표가 각각 $(2, 1)$, $(3, 3a)$이고 점 Q_5의 좌표를 (a_5, b_5)라 하면 삼각형 $Q_3Q_4Q_5$의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{2+3+a_5}{3}, \frac{1+3a+b_5}{3}\right)$

이때 점 P_3이 삼각형 $Q_3Q_4Q_5$의 무게중심이고, 점 P_3의 좌표가 $(3, 2a)$이므로

$\frac{5+a_5}{3}=3$, $\frac{1+3a+b_5}{3}=2a$ $\therefore a_5=4$, $b_5=3a-1$

따라서 점 Q_5의 좌표는 $(4, 3a-1)$

같은 방법으로 하면 두 점 Q_4, Q_5의 좌표가 각각 $(3, 3a)$, $(4, 3a-1)$이고 점 P_4의 좌표가 $(4, 3a)$이므로 점 Q_6의 좌표는 $(5, 3a+1)$

두 점 Q_5, Q_6의 좌표가 각각 $(4, 3a-1)$, $(5, 3a+1)$이고 점 P_5의 좌표가 $(5, 4a)$이므로 점 Q_7의 좌표는 $(6, 6a)$

두 점 Q_6, Q_7의 좌표가 각각 $(5, 3a+1)$, $(6, 6a)$이고 점 P_6의 좌표가 $(6, 5a)$이므로 점 Q_8의 좌표는 $(7, 6a-1)$

두 점 Q_7, Q_8의 좌표가 각각 $(6, 6a)$, $(7, 6a-1)$이고 점 P_7의 좌표가 $(7, 6a)$이므로 점 Q_9의 좌표는 $(8, 6a+1)$

두 점 Q_8, Q_9의 좌표가 각각 $(7, 6a-1)$, $(8, 6a+1)$이고 점 P_8의 좌표가 $(8, 7a)$이므로 점 Q_{10}의 좌표는 $(9, 9a)$

⋮

즉, 자연수 k에 대하여 점 Q_{3k+1}의 좌표는 $(3k, 3ka)$

이때 점 Q_{10}의 좌표가 $(9, 90)$이므로 $9a=90$ $\therefore a=10$

$\therefore Q_{3k+1}(3k, 30k)$

이 좌표에 $k=4$를 대입하면 점 Q_{13}의 좌표는 $(12, 120)$

따라서 $p=12$, $q=120$이므로 $p+q=132$

개념 NOTE

좌표평면 위의 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면

$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

18 답 ④

(i) $n=1$일 때, (좌변)=3, (우변)=3이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m} a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$

이다. $n=m+1$일 때,

$\sum_{k=1}^{m+1} a_k=\sum_{k=1}^{m} a_k+a_{m+1}$

$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$

$+\{2^{2(m+1)}-1\}\times 2^{(m+1)m}+m\times 2^{-(m+1)}$

$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$

$+(2^{2m+2}-1)\times \boxed{(가)\ 2^{m(m+1)}}+m\times 2^{-m-1}$

$=2^{m(m+1)}\times 2^{2m+2}+\{-(m+1)+m\times 2^{-1}\}\times 2^{-m}$

$=\boxed{(가)\ 2^{m(m+1)}}\times \boxed{(나)\ 2^{2m+2}}-\frac{m+2}{2}\times 2^{-m}$

$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times 2^{-(m+1)}$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n}$이다.

따라서 $f(m)=2^{m(m+1)}$, $g(m)=2^{2m+2}$이므로

$\frac{g(7)}{f(3)}=\frac{2^{16}}{2^{12}}=2^4=16$

19 답 ③

$S_n=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$이라 하자.

(i) $n=1$일 때,

$S_1=\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$T_1=\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{1+k}=\frac{1}{2}$

$S_1=\boxed{(가)\ \frac{1}{2}}=T_1$이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때,

(★)이 성립한다고 가정하면 $S_m=T_m$이다.

$n=m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$S_{m+1}=\sum_{k=1}^{2m+2}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$

$=\sum_{k=1}^{2m}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}+(-1)^{(2m+1)-1}\times\frac{1}{2m+1}$

$+(-1)^{(2m+2)-1}\times\frac{1}{2m+2}$

$=S_m+\frac{1}{2m+1}+\boxed{(나)\ \left(-\frac{1}{2m+2}\right)}$

$T_{m+1}=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{m+1+k}$

$=\sum_{k=1}^{m+2}\frac{1}{m+k}-\frac{1}{m+1}$

$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m+k}+\frac{1}{m+(m+1)}+\frac{1}{m+(m+2)}-\frac{1}{m+1}$

$=T_m+\boxed{(다)\ \left(-\frac{1}{m+1}\right)}+\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{2m+2}$

$S_{m+1}-T_{m+1}=S_m-T_m$이고, $S_m=T_m$이므로 $S_{m+1}=T_{m+1}$이다.

따라서 $n=m+1$일 때도 (★)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $f(m)=-\frac{1}{2m+2}$, $g(m)=-\frac{1}{m+1}$이므로

$a+\frac{g(5)}{f(14)}=\frac{1}{2}+\frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{1}{30}}=\frac{11}{2}$

20 답 64

(i) $n=6$일 때,

(좌변)$=3^6=729$

(우변)$=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\,(k\geq 6)$일 때,

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$\left(\frac{k}{2}\right)^k>k(k-1)(k-2)\times\cdots\times 1$ …… ㉠

$$\therefore \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}=\frac{(k+1)^{k+1}}{2^{k+1}}$$
$$=\frac{(k+1)(k+1)^k}{2^{k+1}}$$
$$=\frac{k+1}{2^{k+1}}\times\frac{(k+1)^k}{k^k}\times k^k$$
$$=\frac{k+1}{2}\times\frac{1}{2^k}\times\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\times k^k$$
$$=\frac{k+1}{2}\times\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\times\boxed{(가)\ \left(\frac{k}{2}\right)^k} \quad \cdots\cdots ㉡$$

이때 $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k>2$이므로 ㉠, ㉡에서

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}>\frac{k+1}{2}\times\boxed{(나)\ 2k(k-1)(k-2)\times\cdots\times1}$$
$$=(k+1)\times k\times(k-1)\times\cdots\times1$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\geq6$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 $f(k)=\left(\frac{k}{2}\right)^k$, $g(k)=2k(k-1)(k-2)\times\cdots\times1$이므로

$f(4)+g(4)=16+48=64$

21 답 풀이 참조

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n} \quad \cdots\cdots ㉠$$

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$

(우변)$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

따라서 $n=2$일 때 부등식 ㉠이 성립한다. ····· 배점 30%

(ii) $n=k\,(k\geq2)$일 때, 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$$

이 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$$
$$<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$
$$=2-\frac{(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}$$
$$=2-\frac{k(k+1)+1}{k(k+1)^2}$$
$$=2-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k(k+1)^2}$$
$$<2-\frac{1}{k+1}\left(\because \frac{1}{k(k+1)^2}>0\right)$$

따라서 $n=k+1$일 때도 부등식 ㉠이 성립한다. ····· 배점 60%

(i), (ii)에서 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다. ····· 배점 10%

22 답 ③

(i) $n=1$일 때

$\frac{1}{2}\leq\frac{1}{\sqrt{4}}$이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 (★)이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{2k-1}{2k}\times\frac{2k+1}{2k+2}$$
$$\leq\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\times\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\times\frac{1}{1+\boxed{(가)\ \frac{1}{2k+1}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\times\frac{1}{\sqrt{\left(1+\boxed{(가)\ \frac{1}{2k+1}}\right)^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3k+1}}\times\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{2k+1}+\left(\frac{1}{2k+1}\right)^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1)\times\left(\boxed{(가)\ \frac{1}{2k+1}}\right)+(3k+1)\times\left(\boxed{(가)\ \frac{1}{2k+1}}\right)^2}}$$
$$<\frac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1)\times\left(\boxed{(가)\ \frac{1}{2k+1}}\right)+(\boxed{(나)\ 2k+1})\times\left(\boxed{(가)\ \frac{1}{2k+1}}\right)^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3k+1+\frac{2(3k+1)+1}{2k+1}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 (★)이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

따라서 $f(k)=\frac{1}{2k+1}$, $g(k)=2k+1$이므로

$f(4)\times g(13)=\frac{1}{9}\times27=3$

step 3 최고난도 문제 | 121~123쪽

01 ③	02 150	03 24	04 ②	05 48	06 ①
07 20	08 41	09 ①	10 ④	11 $\frac{633}{260}$	12 ④

01 답 ③

1단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. $\sum_{k=1}^{n}\frac{4S_k}{a_k+2}=S_n$의 양변에 $n=1$을 대입하면

$\frac{4S_1}{a_1+2}=S_1$

$a_1=S_1$이므로 $\frac{4a_1}{a_1+2}=a_1$

이때 $a_1>0$이므로 $\frac{4}{a_1+2}=1$ $\therefore a_1=2$

또 $\sum_{k=1}^{n}\frac{4S_k}{a_k+2}=S_n$의 양변에 $n=2$를 대입하면

$\frac{4S_1}{a_1+2}+\frac{4S_2}{a_2+2}=S_2$

$2+\frac{4(2+a_2)}{a_2+2}=2+a_2$

$\therefore a_2=4$

2단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. (i) $n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{4S_k}{a_k+2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4S_k}{a_k+2}$$
$$=\frac{4S_n}{a_n+2}$$
$$\therefore\ 4S_n=a_n(a_n+2) \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $n=1$일 때,

$$a_1=S_1=2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에 $n=1$을 대입하면

$4S_1=a_1(a_1+2)$

$4\times 2=2\times 4$ ($\because$ ㉡)

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$4S_n=a_n(a_n+2)$

3단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. $n\geq 2$일 때,

$$4a_n=4S_n-4S_{n-1}$$
$$=a_n(a_n+2)-a_{n-1}(a_{n-1}+2)$$
$$=(a_n^2-a_{n-1}^2)+2(a_n-a_{n-1})$$
$$(a_n^2-a_{n-1}^2)-2(a_n+a_{n-1})=0$$
$$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$$

이때 $a_n+a_{n-1}>0$이므로

$$a_n-a_{n-1}-2=0$$

이때 $a_1=2$, $a_2=4$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=2$$

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

02 답 150

1단계 a_1의 값 구하기

주어진 식의 양변에 $n=1$을 대입하면

$a_1^3=3a_1^2$ $\therefore\ a_1=3$ ($\because\ a_1>0$)

2단계 a_2의 값 구하기

주어진 식의 양변에 $n=2$를 대입하면

$a_1^3+a_2^3=3(a_1+a_2)^2$

$27+a_2^3=3(3+a_2)^2$ ($\because\ a_1=3$)

$a_2^3-3a_2^2-18a_2=0$

이때 $a_2>0$이므로

$a_2^2-3a_2-18=0$

$(a_2+3)(a_2-6)=0$

$\therefore\ a_2=6$ ($\because\ a_2>0$)

3단계 a_{50}의 값 구하기

주어진 식의 양변에 $n=k$를 대입하면

$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_k^3=3(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2$ $\cdots\cdots ㉠$

주어진 식의 양변에 $n=k-1$을 대입하면

$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_{k-1}^3=3(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})^2$ $\cdots\cdots ㉡$

㉠−㉡을 하면

$$a_k^3=3\{(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2-(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})^2\}$$
$$=3\{(a_1+a_2+\cdots+a_k)+(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})\}$$
$$\times\{(a_1+a_2+\cdots+a_k)-(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})\}$$
$$=3a_k\{2(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})+a_k\}$$

이때 $a_k>0$이므로

$a_k^2=6(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})+3a_k$ $(k\geq 2)$ $\cdots\cdots ㉢$

이 식의 양변에 k 대신 $k-1$을 대입하면

$a_{k-1}^2=6(a_1+a_2+\cdots+a_{k-2})+3a_{k-1}$ $(k\geq 3)$ $\cdots\cdots ㉣$

㉢−㉣을 하면

$$a_k^2-a_{k-1}^2=6a_{k-1}+3(a_k-a_{k-1})$$
$$=3(a_k+a_{k-1})$$

이때 $(a_k+a_{k-1})(a_k-a_{k-1})=3(a_k+a_{k-1})$에서 $a_k+a_{k-1}>0$이므로

$a_k-a_{k-1}=3$ $(k\geq 3)$

따라서 $a_1=3$, $a_2=6$이고 $n\geq 3$일 때, $a_n-a_{n-1}=3$, 즉 $a_n=a_{n-1}+3$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공차가 3인 등차수열이다.

$\therefore\ a_{50}=a_1+49d=3+49\times 3=150$

03 답 24

1단계 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식 구하기

$\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이라 하면

$$S_n=2n-\frac{2}{3}a_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(i) $n=1$일 때,

$S_1=2-\frac{2}{3}a_2$ $\therefore\ a_1=2-\frac{2}{3}a_2$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=2n-\frac{2}{3}a_{n+1}-\left\{2(n-1)-\frac{2}{3}a_n\right\}$$
$$=2-\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)$$
$$\therefore\ a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+3$$

2단계 $|a_2|$의 값 구하기

이때 $b_n=a_n-2$라 하면

$$b_{n+1}=a_{n+1}-2$$
$$=\left(-\frac{1}{2}a_n+3\right)-2$$
$$=-\frac{1}{2}(a_n-2)$$
$$=-\frac{1}{2}b_n$$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 등비수열이고,

$$b_1=a_1-2$$
$$=\left(2-\frac{2}{3}a_2\right)-2=-\frac{2}{3}a_2$$

$b_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n$의 n에 1, 2, 3, 4, 5, 6을 차례대로 대입하면

$$b_2=-\frac{1}{2}b_1=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}a_2\right)=\frac{1}{3}a_2$$
$$b_3=-\frac{1}{2}b_2=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}a_2$$
$$b_4=-\frac{1}{2}b_3=\left(-\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{3}a_2$$
$$b_5=-\frac{1}{2}b_4=\left(-\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{3}a_2$$
$$b_6=-\frac{1}{2}b_5=\left(-\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{3}a_2$$
$$b_7=-\frac{1}{2}b_6=\left(-\frac{1}{2}\right)^5\times\frac{1}{3}a_2$$

$\therefore \sum_{k=1}^{7}|a_k-2|$

$=\sum_{k=1}^{7}|b_k|$

$=\left|-\frac{2}{3}a_2\right|+\left|\frac{1}{3}a_2\right|+\left|-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}a_2\right|+\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{3}a_2\right|$

$+\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{3}a_2\right|+\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{3}a_2\right|+\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^5\times\frac{1}{3}a_2\right|$

$=-\frac{2}{3}a_2+\left(-\frac{1}{3}a_2\right)\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}$ ($\because a_2<0$)

$=-\frac{1}{3}a_2\left\{2+1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}$

$=-\frac{1}{3}a_2\times\frac{2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1-\frac{1}{2}}$

$=-\frac{127}{96}a_2$

즉, $-\frac{127}{96}a_2=\frac{127}{4}$이므로 $a_2=-24$

$\therefore |a_2|=24$

04 답 ②

1단계 a_3을 a_2에 대한 식으로 나타내기

(가), (나)의 식에 각각 $n=1$을 대입하면

$a_2=a_2\times a_1+1$ …… ㉠, $a_3=a_2\times a_1-2$

두 식을 변끼리 빼면 $a_2-a_3=3$

$\therefore a_3=a_2-3$ …… ㉡

2단계 a_8, a_{15}를 a_2에 대한 식으로 나타내기

$a_8=a_2\times a_4+1$

$=a_2\times(a_2\times a_2+1)+1$

$={a_2}^3+a_2+1$ …… ㉢

$a_{15}=a_2\times a_7-2$

$=a_2\times(a_2\times a_3-2)-2$

$=a_2\times\{a_2\times(a_2-3)-2\}-2$ ($\because$ ㉡)

$={a_2}^3-3{a_2}^2-2a_2-2$

3단계 a_1, a_2의 값 구하기

$\therefore a_8-a_{15}=({a_2}^3+a_2+1)-({a_2}^3-3{a_2}^2-2a_2-2)$

$=3{a_2}^2+3a_2+3$

즉, $3{a_2}^2+3a_2+3=63$이므로

${a_2}^2+a_2-20=0$, $(a_2+5)(a_2-4)=0$

$\therefore a_2=-5$ 또는 $a_2=4$

(i) $a_2=-5$일 때,

㉠에서 $-5=-5a_1+1$, $5a_1=6$ $\therefore a_1=\frac{6}{5}$

이는 $0<a_1<1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_2=4$일 때,

㉠에서 $4=4a_1+1$, $4a_1=3$ $\therefore a_1=\frac{3}{4}$

(i), (ii)에서 $a_1=\frac{3}{4}$, $a_2=4$

4단계 $\frac{a_8}{a_1}$의 값 구하기

㉢에서 $a_8=4^3+4+1=69$

$\therefore \frac{a_8}{a_1}=\frac{69}{\frac{3}{4}}=92$

idea

05 답 48

1단계 수열 $\{a_n+b_n\}$의 일반항 구하기

$2a_{n+1}=b_n+b_{n+2}$ …… ㉠

$2b_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2(a_{n+1}+b_{n+1})=(a_n+b_n)+(a_{n+2}+b_{n+2})$

이때 $a_n+b_n=A_n$이라 하면

$2A_{n+1}=A_n+A_{n+2}$

즉, 수열 $\{A_n\}$은 등차수열이다.

$A_1=a_1+b_1=2$, $A_2=a_2+b_2=5$이므로 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열 $\{A_n\}$의 일반항 A_n은

$A_n=2+(n-1)\times3=3n-1$

2단계 수열 $\{a_n-b_n\}$의 일반항 구하기

㉠−㉡을 하면

$2(a_{n+1}-b_{n+1})=-(a_n-b_n)-(a_{n+2}-b_{n+2})$

$\therefore a_{n+2}-b_{n+2}=-2(a_{n+1}-b_{n+1})-(a_n-b_n)$

이때 $a_n-b_n=B_n$이라 하면

$B_{n+2}=-2B_{n+1}-B_n$ …… ㉢

$B_1=a_1-b_1=0$, $B_2=a_2-b_2=-1$이므로 ㉢의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하면

$B_3=-2B_2-B_1=-2\times(-1)-0=2$

$B_4=-2B_3-B_2=-2\times2-(-1)=-3$

$B_5=-2B_4-B_3=-2\times(-3)-2=4$

⋮

$\therefore B_n=(-1)^{n-1}(n-1)$

3단계 $f(n)$, $g(n)$ 구하기

즉, $a_n=\frac{1}{2}(A_n+B_n)=\frac{1}{2}\{(3n-1)+(-1)^{n-1}(n-1)\}$이므로

$f(n)=3n-1$, $g(n)=n-1$

4단계 $f(10)+g(20)$의 값 구하기

따라서 $f(10)=29$, $g(20)=19$이므로

$f(10)+g(20)=48$

06 답 ①

1단계 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식 구하기

$(n+2)a_{n+2}+pa_n=(n+1+p)a_{n+1}$, 즉

$(n+2)a_{n+2}+pa_n=(n+1)a_{n+1}+pa_{n+1}$의 n에 1, 2, 3, …, n을 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$3a_3+pa_1=2a_2+pa_2$

$4a_4+pa_2=3a_3+pa_3$

$5a_5+pa_3=4a_4+pa_4$

⋮

$+)\ (n+2)a_{n+2}+pa_n=(n+1)a_{n+1}+pa_{n+1}$

$(n+2)a_{n+2}+pa_1=2a_2+pa_{n+1}$

$(n+2)a_{n+2}+2p=2p+pa_{n+1}$

$\therefore a_{n+2}=\frac{p}{n+2}a_{n+1}\ (n\geq1)$

즉, $a_{n+1}=\frac{p}{n+1}a_n\ (n\geq2)$이고 $a_1=2$, $a_2=p$이므로

$a_{n+1}=\frac{p}{n+1}a_n\ (n\geq1)$

2단계 $\frac{a_{n+2}}{a_n}$ 구하기

따라서 $a_{n+2}=\frac{p}{n+2}\times\frac{p}{n+1}a_n=\frac{p^2}{(n+1)(n+2)}a_n$이므로

$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{p^2}{(n+1)(n+2)}$ $(n\geq1)$

3단계 p의 값 구하기

$\therefore \sum_{k=1}^{18}\frac{a_{k+2}}{a_k}=\sum_{k=1}^{18}\frac{p^2}{(k+1)(k+2)}$

$=p^2\sum_{k=1}^{18}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=p^2\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right)\right\}$

$=p^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{20}\right)$

$=\frac{9}{20}p^2$

즉, $\frac{9}{20}p^2=45$이므로

$p^2=100$

$\therefore p=10$ ($\because p>0$)

07 답 20

1단계 S_n이 최댓값을 갖는 경우 파악하기

첫째항이 a, 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=a+(n-1)\times(-3)=a-3n+3$ …… ㉠

공차가 음수이므로 $a_1>a_2>a_3>\cdots>a_{11}>a_{12}>\cdots$

이때 $S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$는 $n=11$일 때 최댓값을 가지므로

$b_{11}>0$, $b_{12}<0$ ($\because b_n\neq0$)

2단계 a의 값 구하기

(i) $a_{11}>a_{12}\geq0$일 때,

㉠에서 $a_{12}=a-33$이므로

$a-33\geq0$ $\therefore a\geq33$

이때 $b_{11}=a_{11}-11=a-41$, $b_{12}=a_{12}-12=a-45$이므로

$b_{11}>0$, $b_{12}<0$에서

$a-41>0$, $a-45<0$

$\therefore 41<a<45$

$\therefore S_{11}=\sum_{k=1}^{11}b_k=\sum_{k=1}^{11}(a_k-k)$

$=\sum_{k=1}^{11}(a+3-4k)$

$=11(a+3)-4\times\frac{11\times12}{2}$

$=11a-231$

$S_{11}=65$에서 $11a-231=65$

$11a=296$ $\therefore a=\frac{296}{11}$

이는 $41<a<45$를 만족시키지 않는다.

(ii) $a_{11}\geq0>a_{12}$일 때,

㉠에서 $a_{11}=a-30$, $a_{12}=a-33$이므로

$a-30\geq0>a-33$ $\therefore 30\leq a<33$

이때 $b_{11}=a_{11}-11=a-41$, $b_{12}=a_{12}+12=a-21$이므로

$b_{11}>0$, $b_{12}<0$에서

$a-41>0$, $a-21<0$

따라서 이를 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $0>a_{11}>a_{12}$일 때,

㉠에서 $a_{11}=a-30$이므로

$a-30<0$ $\therefore a<30$

이때 $b_{11}=a_{11}+11=a-19$, $b_{12}=a_{12}+12=a-21$이므로

$b_{11}>0$, $b_{12}<0$에서

$a-19>0$, $a-21<0$

$\therefore 19<a<21$

따라서 ㉠에서 $a_7=a-18>0$, $a_8=a-21<0$이므로

$b_n=\begin{cases}a_n-n & (n=1, 2, \cdots, 7)\\ a_n+n & (n=8, 9, \cdots)\end{cases}$

$\therefore S_{11}=\sum_{k=1}^{11}b_k=\sum_{k=1}^{7}(a_k-k)+\sum_{k=8}^{11}(a_k+k)$

$=\sum_{k=1}^{7}(a+3-4k)+\sum_{k=8}^{11}(a+3-2k)$

$=7(a+3)-4\times\frac{7\times8}{2}+4(a+3)-2(8+9+10+11)$

$=11a-155$

$S_{11}=65$에서 $11a-155=65$

$11a=220$ $\therefore a=20$

이는 $19<a<21$을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=20$

08 답 41

1단계 a_1, a_2의 값 구하기

$\begin{cases}a_{3n}=4a_n+n & \cdots\cdots ㉠\\ a_{3n+1}=a_n+2 & \cdots\cdots ㉡\\ a_{3n+2}=-3a_n-2 & \cdots\cdots ㉢\end{cases}$

㉠+㉡+㉢을 하면 $a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2}=2a_n+n$

이 식의 n에 1, 2, 3, …, 14를 차례대로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$a_3+a_4+a_5=2a_1+1$

$a_6+a_7+a_8=2a_2+2$

$a_9+a_{10}+a_{11}=2a_3+3$

$\vdots$

$+)\ a_{42}+a_{43}+a_{44}=2a_{14}+14$

$\sum_{k=3}^{44}a_k=\sum_{k=1}^{14}(2a_k+k)$

$=2\sum_{k=1}^{14}a_k+\frac{14\times15}{2}$

$=2\sum_{k=1}^{14}a_k+105$

$\sum_{k=1}^{14}a_k=(a_1+a_2)+(a_3+a_4+a_5)+(a_6+a_7+a_8)+(a_9+a_{10}+a_{11})+(a_{12}+a_{13}+a_{14})$

$=(a_1+a_2)+(2a_1+1)+(2a_2+2)+(2a_3+3)+(2a_4+4)$

$=(a_1+a_2)+(2a_1+1)+(2a_2+2)+\{2(4a_1+1)+3\}+\{2(a_1+2)+4\}$

$=13a_1+3a_2+16$

$\therefore \sum_{k=1}^{44}a_k=a_1+a_2+\sum_{k=3}^{44}a_k$

$=a_1+a_2+\{2(13a_1+3a_2+16)+105\}$

$=27a_1+7a_2+137$

즉, $27a_1+7a_2+137=124$이므로 $27a_1+7a_2=-13$

따라서 두 식 $a_1+2a_2=3$, $27a_1+7a_2=-13$을 연립하여 풀면

$a_1=-1$, $a_2=2$

2단계 a_{100}의 값 구하기

$\therefore a_{100}=a_{33}+2$

$=(4a_{11}+11)+2=4a_{11}+13$

$=4(-3a_3-2)+13=-12a_3+5$

$=-12(4a_1+1)+5=-48a_1-7$

$=48-7=41$

09 답 ①

1단계 a_5의 값 구하기

$-1\le a_5<-\frac{1}{2}$이면 $a_6=-2a_5-2$이므로 $a_5+a_6=0$에서

$-a_5-2=0 \quad \therefore a_5=-2$

그런데 $-1\le a_5<-\frac{1}{2}$이므로 a_5의 값은 존재하지 않는다.

$-\frac{1}{2}\le a_5\le\frac{1}{2}$이면 $a_6=2a_5$이므로 $a_5+a_6=0$에서

$3a_5=0 \quad \therefore a_5=0$

이때 $-\frac{1}{2}\le a_5\le\frac{1}{2}$이므로 $a_5=0$

$\frac{1}{2}<a_5\le 1$이면 $a_6=-2a_5+2$이므로 $a_5+a_6=0$에서

$-a_5+2=0 \quad \therefore a_5=2$

그런데 $\frac{1}{2}<a_5\le 1$이므로 a_5의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore a_5=0$

2단계 a_1의 값 구하기

$$a_{n+1}=\begin{cases}-2a_n-2 & \left(-1\le a_n<-\frac{1}{2}\right)\\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2}\le a_n\le\frac{1}{2}\right)\\ -2a_n+2 & \left(\frac{1}{2}<a_n\le 1\right)\end{cases}$$

에서 $a_5=0$이 되려면 $a_4=-1$ 또는 $a_4=0$ 또는 $a_4=1$이어야 한다.

(i) $a_4=-1$일 때,

$-1\le a_3<-\frac{1}{2}$이면 $a_4=-2a_3-2$이므로 $a_3=-\frac{1}{2}$

그런데 $-1\le a_3<-\frac{1}{2}$이므로 a_3의 값은 존재하지 않는다.

$-\frac{1}{2}\le a_3\le\frac{1}{2}$이면 $a_4=2a_3$이므로 $a_3=-\frac{1}{2}$

이때 $-\frac{1}{2}\le a_3\le\frac{1}{2}$이므로 $a_3=-\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}<a_3\le 1$이면 $a_4=-2a_3+2$이므로 $a_3=\frac{3}{2}$

그런데 $\frac{1}{2}<a_3\le 1$이므로 a_3의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore a_3=-\frac{1}{2}$

같은 방법으로 a_2, a_1의 값을 구하여 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1)로 나타내면

$\left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{8}\right)$, $\left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}\right)$,

$\left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{7}{8}\right)$, $\left(-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$

따라서 $\sum_{k=1}^{5}a_k>0$을 만족시키는 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1)은 존재하지 않는다.

(ii) $a_4=0$일 때,

ⓘ $-1\le a_3<-\frac{1}{2}$이면 $a_4=-2a_3-2$이므로 $a_3=-1$

이때 $-1\le a_3<-\frac{1}{2}$이므로 $a_3=-1$

같은 방법으로 a_2, a_1의 값을 구하여 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1)로 나타내면

$\left(0, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$, $\left(0, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

따라서 $\sum_{k=1}^{5}a_k>0$을 만족시키는 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1)은 존재하지 않는다.

ⓘⓘ $-\frac{1}{2}\le a_3\le\frac{1}{2}$이면 $a_4=2a_3$이므로 $a_3=0$

이때 $-\frac{1}{2}\le a_3\le\frac{1}{2}$이므로 $a_3=0$

같은 방법으로 a_2, a_1의 값을 구하여 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1)로 나타내면

$\left(0, 0, -1, -\frac{1}{2}\right)$, $(0, 0, 0, -1)$, $(0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $\left(0, 0, 1, \frac{1}{2}\right)$

이때 $\sum_{k=1}^{5}a_k>0$을 만족시키는 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1)은

$(0, 0, 0, 1)$, $\left(0, 0, 1, \frac{1}{2}\right)$이므로

$a_1=1$ 또는 $a_1=\frac{1}{2}$

ⓘⓘⓘ $\frac{1}{2}<a_3\le 1$이면 $a_4=-2a_3+2$이므로 $a_3=1$

이때 $\frac{1}{2}<a_3\le 1$이므로 $a_3=1$

같은 방법으로 a_2, a_1의 값을 구하여 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1)로 나타내면

$\left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

이때 $\sum_{k=1}^{5}a_k>0$을 만족시키는 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1)은

$\left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$이므로

$a_1=\frac{1}{4}$ 또는 $a_1=\frac{3}{4}$

ⓘ, ⓘⓘ, ⓘⓘⓘ에서

$a_1=\frac{1}{4}$ 또는 $a_1=\frac{1}{2}$ 또는 $a_1=\frac{3}{4}$ 또는 $a_1=1$

(iii) $a_4=1$일 때,

$-1\le a_3<-\frac{1}{2}$이면 $a_4=-2a_3-2$이므로

$a_3=-\frac{3}{2}$

그런데 $-1\le a_3<-\frac{1}{2}$이므로 a_3의 값은 존재하지 않는다.

$-\frac{1}{2}\le a_3\le\frac{1}{2}$이면 $a_4=2a_3$이므로 $a_3=\frac{1}{2}$

이때 $-\frac{1}{2}\le a_3\le\frac{1}{2}$이므로 $a_3=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}<a_3\le 1$이면 $a_4=-2a_3+2$이므로 $a_3=\frac{1}{2}$

그런데 $\frac{1}{2}<a_3\le 1$이므로 a_3의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore a_3=\frac{1}{2}$

같은 방법으로 a_2, a_1의 값을 구하여 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1)로 나타내면

$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}\right)$

이때 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$을 만족시키는 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1)은

$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}\right)$

이므로

$a_1=\frac{1}{8}$ 또는 $a_1=\frac{3}{8}$ 또는 $a_1=\frac{5}{8}$ 또는 $a_1=\frac{7}{8}$

(i), (ii), (iii)에서

$a_1=\frac{1}{8}$ 또는 $a_1=\frac{1}{4}$ 또는 $a_1=\frac{3}{8}$ 또는 $a_1=\frac{1}{2}$ 또는 $a_1=\frac{5}{8}$ 또는 $a_1=\frac{3}{4}$ 또는 $a_1=\frac{7}{8}$ 또는 $a_1=1$

3단계 **모든 a_1의 값의 합 구하기**

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}+\frac{5}{8}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+1=\frac{9}{2}$

10 답 ④

1단계 **수열 $\{a_n\}$에서 부호가 바뀌는 항 구하기**

$a_6 \geq 0$이라 가정하고 b_n의 n에 5, 6을 대입하면

$b_5=a_6-\frac{5}{2}$, $b_6=a_7-\frac{6}{2}$

이때 $a_6 > a_7$이므로 $b_5 > b_6$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

$a_5 < 0$이라 가정하고 b_n의 n에 5, 6을 대입하면

$b_5=a_5+\frac{5}{2}$, $b_6=a_6+\frac{6}{2}$

이때 $a_5 > a_6$이고 수열 $\{a_n\}$의 공차가 -1보다 작으므로 $b_5 > b_6$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 수열 $\{a_n\}$에서 $a_5 \geq 0$, $a_6 < 0$

2단계 **(나)를 이용하여 a_n 구하기**

(나)에서 $S_5=S_9=0$이므로

$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=0$ …… ㉠

$b_6+b_7+b_8+b_9=0$ …… ㉡ → $S_5=0$이니까 $S_9=0$이면 $b_6+b_7+b_8+b_9=0$

㉠에서 $b_1=a_2-\frac{1}{2}$, $b_2=a_3-\frac{2}{2}$, $b_3=a_4-\frac{3}{2}$, $b_4=a_5-\frac{4}{2}$, $b_5=a_6-\frac{5}{2}$

이므로

$(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\frac{5}{2}\right)=0$

→ 첫째항이 a_2, 끝항이 a_6, 항의 개수가 5인 등차수열의 합이다.

$\frac{5(a_2+a_6)}{2}-\frac{15}{2}=0$

$5(a_2+a_6)=15$

$\therefore a_2+a_6=3$ …… ㉢

㉡에서 $b_6=a_6+\frac{6}{2}$, $b_7=a_7+\frac{7}{2}$, $b_8=a_8+\frac{8}{2}$, $b_9=a_9+\frac{9}{2}$이므로

$(a_6+a_7+a_8+a_9)+\left(\frac{6}{2}+\frac{7}{2}+\frac{8}{2}+\frac{9}{2}\right)=0$

→ 첫째항이 a_6, 끝항이 a_9, 항의 개수가 4인 등차수열의 합이다.

$\frac{4(a_6+a_9)}{2}+15=0$

$2(a_6+a_9)=-15$

$\therefore a_6+a_9=-\frac{15}{2}$ …… ㉣

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

㉢에서 $(a+d)+(a+5d)=3$

$\therefore 2a+6d=3$ …… ㉤

㉣에서 $(a+5d)+(a+8d)=-\frac{15}{2}$

$\therefore 2a+13d=-\frac{15}{2}$ …… ㉥

㉤, ㉥을 연립하여 풀면 $a=6$, $d=-\frac{3}{2}$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 6, 공차가 $-\frac{3}{2}$이므로 일반항 a_n은

$a_n=6+(n-1)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}n+\frac{15}{2}$

3단계 **자연수 n의 최솟값 구하기**

$S_n \leq -70$에서 $S_9=0$이므로

$b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_n \leq -70$

이때 $n \geq 6$에서 $b_n=a_n+\frac{n}{2}=\left(-\frac{3}{2}n+\frac{15}{2}\right)+\frac{n}{2}=-n+\frac{15}{2}$이므로

$n \geq 6$에서 수열 $\{b_n\}$은 등차수열을 이룬다.

즉, $\frac{(n-9)(b_{10}+b_n)}{2} \leq -70$이므로

$\frac{(n-9)\left\{-\frac{5}{2}+\left(-n+\frac{15}{2}\right)\right\}}{2} \leq -70$

$(n-9)(-n+5) \leq -140$

$(n-9)(n-5) \geq 140$

$n^2-14n-95 \geq 0$

$(n-19)(n+5) \geq 0$

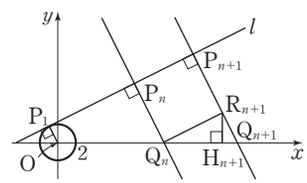
$\therefore n \geq 19$ ($\because n > 0$)

따라서 자연수 n의 최솟값은 19이다.

11 답 $\frac{633}{260}$

1단계 **$\overline{P_nQ_n}$ 구하기**

그림과 같이 점 Q_n을 지나고 직선 l과 평행한 직선이 선분 $P_{n+1}Q_{n+1}$과 만나는 점을 R_{n+1}이라 하면 사각형 $P_nQ_nR_{n+1}P_{n+1}$은 정사각형이고, 직선 l의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 직선 Q_nR_{n+1}의 기울기도 $\frac{1}{2}$이다.



따라서 점 R_{n+1}에서 x축에 내린 수선의 발을 H_{n+1}이라 하면

$\overline{Q_nH_{n+1}} : \overline{H_{n+1}R_{n+1}}=2:1$

직각삼각형 $Q_nR_{n+1}Q_{n+1}$과 직각삼각형 $Q_nH_{n+1}R_{n+1}$은 서로 닮음이므로

$\overline{Q_nR_{n+1}} : \overline{R_{n+1}Q_{n+1}}=\overline{Q_nH_{n+1}} : \overline{H_{n+1}R_{n+1}}=2:1$에서

$\overline{R_{n+1}Q_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{Q_nR_{n+1}}$

이때 $\overline{Q_nR_{n+1}}=\overline{P_{n+1}R_{n+1}}$이므로 $\overline{R_{n+1}Q_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{P_{n+1}R_{n+1}}$

따라서 $\overline{P_{n+1}Q_{n+1}}=\frac{3}{2}\overline{P_{n+1}R_{n+1}}$, 즉 $\overline{P_{n+1}Q_{n+1}}=\frac{3}{2}\overline{P_nQ_n}$이고 $\overline{P_1Q_1}=2$이므로 선분 P_nQ_n의 길이는 첫째항이 2, 공비가 $\frac{3}{2}$인 등비수열이다.

$\therefore \overline{P_nQ_n}=2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

2단계 $\overline{P_1P_n}$ 구하기

$\overline{P_nP_{n+1}}=\overline{P_nQ_n}$이므로

$$\overline{P_1P_n}=\sum_{k=1}^{n-1}\overline{P_kP_{k+1}}=\sum_{k=1}^{n-1}\overline{P_kQ_k}=\frac{2\times\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}$$

$$=4\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}$$

3단계 S_n 구하기

이때 삼각형 OQ_nP_n의 넓이는 삼각형 $P_1Q_nP_n$의 넓이와 같으므로

$$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{P_nQ_n}\times\overline{P_1P_n}$$

$$=\frac{1}{2}\times2\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\times4\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}$$

$$=4\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}$$

4단계 $\frac{S_6}{S_5}$의 값 구하기

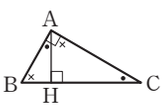
따라서 $S_5=4\left(\frac{3}{2}\right)^4\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^4-1\right\}$, $S_6=4\left(\frac{3}{2}\right)^5\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^5-1\right\}$이므로

$$\frac{S_6}{S_5}=\frac{4\left(\frac{3}{2}\right)^5\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^5-1\right\}}{4\left(\frac{3}{2}\right)^4\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^4-1\right\}}=\frac{633}{260}$$

개념 NOTE

$\angle A=90°$인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 빗변 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

$\triangle ABC\backsim\triangle HBA\backsim\triangle HAC$ (AA 닮음)

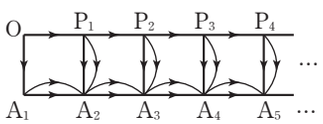


idea

12 답 ④

1단계 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식 구하기

그림과 같이 점 P_1, P_2, P_3, …을 잡고, 점 O에서 화살표를 따라 점 P_n까지 갈 수 있는 경로의 수를 p_n이라 하면 $p_n=1$



또 점 O에서 화살표를 따라 점 A_{n+1}까지 갈 수 있는 경로는

(i) $A_n\rightarrow A_{n+1}$인 경우: $2a_n$가지

(ii) $P_n\rightarrow A_{n+1}$인 경우: $2p_n$가지

$\therefore a_{n+1}=2a_n+2p_n=2a_n+2$ $(n\geq2)$

2단계 수열 $\{a_n\}$의 일반항 구하기

$a_{n+1}=2a_n+2$의 n에 2, 3, 4, …를 차례대로 대입하면

$a_3=2a_2+2=2\times4+2=10=3\times2^2-2$

$a_4=2a_3+2=2\times10+2=22=3\times2^3-2$

$a_5=2a_4+2=2\times22+2=46=3\times2^4-2$

⋮

$\therefore a_n=3\times2^{n-1}-2$ $(n\geq2)$

이때 $a_1=1$이므로 $a_n=3\times2^{n-1}-2$

3단계 자연수 k의 최솟값 구하기

$a_k>10000$에서 $3\times2^{k-1}-2>10000$

$3\times2^{k-1}>10002$ $\therefore 2^{k-1}>3334$

이때 $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$이므로

$k-1\geq12$ $\therefore k\geq13$

따라서 자연수 k의 최솟값은 13이다.

기출 변형 문제로 단원 마스터 | 124~127쪽

01 25	02 156	03 ①	04 45	05 ②
06 $80+24\sqrt{5}$	07 1330	08 ③	09 ②	10 440
11 ③	12 288	13 ⑤	14 8	15 15

01 답 25

$A_1=\{5, 7, 9, 11\}$

$A_2=\{11, 13, 15, \cdots, 23\}$

$A_3=\{17, 19, 21, \cdots, 35\}$

$A_4=\{23, 25, 27, \cdots, 47\}$

⋮

$A_k=\{6k-1, 6k+1, 6k+3, \cdots, 12k-1\}$

$\therefore A_{12}=\{71, 73, 75, \cdots, 143\}$

$p>12$에서 $A_{12}\cap A_p=\varnothing$을 만족시키려면 집합 A_p의 가장 작은 원소 $6p-1$이 집합 A_{12}의 가장 큰 원소보다 커야 하므로

$6p-1>143$ $\therefore p>24$

따라서 자연수 p의 최솟값은 25이다.

02 답 156

모든 항이 자연수이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차는 자연수이다.

첫째항이 a_1, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=a_1+(n-1)d$

㈏에서 세 항 a_3, a_k, a_{3k-1}이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_k^2=a_3a_{3k-1}$에서

$\{a_1+(k-1)d\}^2=(a_1+2d)\{a_1+(3k-2)d\}$

$a_1^2+2(k-1)a_1d+(k-1)^2d^2=a_1^2+3ka_1d+2(3k-2)d^2$

$(k^2-8k+5)d^2=(k+2)a_1d$

$\therefore (k^2-8k+5)d=(k+2)a_1$ …… ㉠

㈎의 $a_1\leq d$에서 양변에 $k+2$를 곱하면

$(k+2)a_1\leq(k+2)d$

$(k^2-8k+5)d\leq(k+2)d$ ($\because$ ㉠)

$k^2-8k+5\leq k+2$

$k^2-9k+3\leq0$

$\therefore \frac{9-\sqrt{69}}{2}\leq k\leq\frac{9+\sqrt{69}}{2}$

그런데 $k\geq4$이므로

$4\leq k\leq\frac{9+\sqrt{69}}{2}$

따라서 자연수 k의 값은 4, 5, 6, 7, 8이다.

이때 ㉠에서 $k^2-8k+5>0$이어야 하므로

$k=8$

이를 ㉠에 대입하면

$5d=10a_1$ $\therefore d=2a_1$

즉, $a_{16}=a_1+15d=31a_1$이므로 $120\leq a_{16}\leq130$에서

$120\leq31a_1\leq130$

이때 a_1은 자연수이므로 $a_1=4$

$\therefore d=2a_1=8$

$\therefore a_{20}=a_1+19d$

$=4+19\times8=156$

03 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a\neq0)$, 공차를 d라 하면

$S_{13}=S_{26}$에서

$$\frac{13(2a+12d)}{2}=\frac{26(2a+25d)}{2}$$

$2a+12d=2(2a+25d)$

$2a=-38d \qquad \therefore\ a=-19d$

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

$$=\frac{n\{-38d+(n-1)d\}}{2}$$

$$=\frac{n(-39d+nd)}{2}$$

$$=\frac{d}{2}n(n-39)$$

이므로

$S_1=S_{38}=-19d \longrightarrow S_1=\frac{d}{2}\times1\times(-38)=\frac{d}{2}\times38\times(-1)=S_{38}$

$S_2=S_{37}=-37d \longrightarrow S_2=\frac{d}{2}\times2\times(-37)=\frac{d}{2}\times37\times(-2)=S_{37}$

$S_3=S_{36}=-54d \longrightarrow S_3=\frac{d}{2}\times3\times(-36)=\frac{d}{2}\times36\times(-3)=S_{36}$

$\vdots$

$S_{19}=S_{20}=-190d \longrightarrow S_{19}=\frac{d}{2}\times19\times(-20)=\frac{d}{2}\times20\times(-19)=S_{20}$

$S_{39}=0$, $S_{40}=20d$, $S_{41}=41d$, $\cdots$

이때 집합 T_n에서 등차수열의 합이 같은 경우에는 집합의 같은 원소가 중복되므로

$T_{19}=T_{20}=T_{21}=\cdots=T_{38}=\{S_1, S_2, S_3, \cdots, S_{19}\}$

따라서 집합 T_n의 원소의 개수가 19가 되도록 하는 자연수 n의 값은 19, 20, 21, $\cdots$, 38이므로 모든 자연수 n의 값의 합은

$$19+20+21+\cdots+38=\frac{20(19+38)}{2}=570$$

04 답 45

$P(x)=a_{m+1}x^m+a_mx^{m-1}+a_{m-1}x^{m-2}+\cdots+a_2x+a_1$에서

$P(1)=a_{m+1}+a_m+a_{m-1}+\cdots+a_2+a_1$

이는 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$(m+1)$항까지의 합이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$P(1)=\frac{(m+1)(2a_1+md)}{2}$$

$P(x)=a_{m+1}x^m+a_mx^{m-1}+a_{m-1}x^{m-2}+\cdots+a_2x+a_1$에서

$P(-1)=a_{m+1}\times(-1)^m+a_m\times(-1)^{m-1}+a_{m-1}\times(-1)^{m-2}$

$\qquad +\cdots-a_2+a_1$

(i) m이 홀수일 때,

$P(-1)=-a_{m+1}+a_m-a_{m-1}+\cdots-a_2+a_1$

$=-(a_{m+1}-a_m)-(a_{m-1}-a_{m-2})-\cdots-(a_2-a_1)$

$=-\frac{m+1}{2}d$

$P(1)=7P(-1)$에서

$$\frac{(m+1)(2a_1+md)}{2}=7\times\left(-\frac{m+1}{2}d\right)$$

$m+1\neq0$이므로 $2a_1+md=-7d$

$\therefore\ a_1+\frac{m+7}{2}d=0$

m은 홀수이므로 $\frac{m+7}{2}$은 자연수이고 $a_1+\frac{m+7}{2}d$는 수열 $\{a_n\}$의 제$\frac{m+9}{2}$항이다.

이때 $a_{\frac{m+9}{2}}=a_1+\frac{m+7}{2}d=0$이므로 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $P(1)=7P(-1)$을 만족시키는 홀수 m은 존재하지 않는다.

(ii) m이 짝수일 때,

$P(-1)=a_{m+1}-a_m+a_{m-1}-\cdots-a_2+a_1$

$=(a_{m+1}-a_m)+(a_{m-1}-a_{m-2})+\cdots+(a_3-a_2)+a_1$

$=a_1+\frac{m}{2}d=\frac{2a_1+md}{2}$

$P(1)=7P(-1)$에서

$$\frac{(m+1)(2a_1+md)}{2}=7\times\frac{2a_1+md}{2} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

m은 짝수이므로 $\frac{m}{2}$은 자연수이고 $a_1+\frac{m}{2}d$는 수열 $\{a_n\}$의 제$\left(\frac{m}{2}+1\right)$항이다.

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니므로

$a_{\frac{m}{2}+1}=a_1+\frac{m}{2}d=\frac{2a_1+md}{2}\neq0$

$2a_1+md\neq0$이므로 ㉠에서

$m+1=7 \qquad \therefore\ m=6$

(i), (ii)에서 $m=6$이므로 $k=6$

다항식 $a_7x^6+a_6x^5+a_5x^4+a_4x^3+a_3x^2+a_2x+a_1$이 $x+2$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여

$a_7\times(-2)^6+a_6\times(-2)^5+a_5\times(-2)^4+a_4\times(-2)^3+a_3\times(-2)^2$

$\qquad +a_2\times(-2)+a_1=0$

$(a_1+6d)\times64+(a_1+5d)\times(-32)+(a_1+4d)\times16$

$\qquad +(a_1+3d)\times(-8)+(a_1+2d)\times4+(a_1+d)\times(-2)+a_1=0$

$43a_1+270d=0$

$\therefore\ d=-\frac{43}{270}a_1$

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\neq0$이므로

$$\frac{2a_1}{a_{k+1}}=\frac{2a_1}{a_7}=\frac{2a_1}{a_1+6d}$$

$$=\frac{2a_1}{a_1-\frac{43}{45}a_1}=\frac{2}{\frac{2}{45}}=45$$

05 답 ②

$A(80)$은 첫째항이 5, 공비가 3 이상의 자연수인 등비수열의 제n항이 5×3^{80}이 되는 모든 자연수 n의 값의 합이다.

첫째항이 5이므로 등비수열의 공비는 3의 거듭제곱 꼴이어야 한다.

이때 $3^{80}=(3^2)^{40}=(3^4)^{20}=(3^5)^{16}=\cdots=(3^{80})^1$이므로 공비를 3^p(p는 자연수)이라 하면 $3^{80}=(3^p)^{\frac{80}{p}}$이고 $\frac{80}{p}$은 자연수이어야 하므로 p는 80의 약수이다.

$5\times3^{80}=5\times(3^p)^{\frac{80}{p}}=5\times(3^p)^{\frac{80}{p}+1-1}$이므로 5×3^{80}은 첫째항이 5, 공비가 3^p인 등비수열의 제$\left(\frac{80}{p}+1\right)$항이다.

$p=1$일 때, 5×3^{80}은 첫째항이 5, 공비가 3인 등비수열의 제81항이다.

$\therefore\ n=81$

$p=2$일 때, $5\times(3^2)^{40}$은 첫째항이 5, 공비가 3^2인 등비수열의 제41항이다.

$\therefore\ n=41$

$p=4$일 때, $5\times(3^4)^{20}$은 첫째항이 5, 공비가 3^4인 등비수열의 제21항이다.

$\therefore\ n=21$

$p=5$일 때, $5\times(3^5)^{16}$은 첫째항이 5, 공비가 3^5인 등비수열의 제17항이다.
$\therefore\ n=17$
$p=8$일 때, $5\times(3^8)^{10}$은 첫째항이 5, 공비가 3^8인 등비수열의 제11항이다.
$\therefore\ n=11$
$p=10$일 때, $5\times(3^{10})^8$은 첫째항이 5, 공비가 3^{10}인 등비수열의 제9항이다.
$\therefore\ n=9$
$p=16$일 때, $5\times(3^{16})^5$은 첫째항이 5, 공비가 3^{16}인 등비수열의 제6항이다.
$\therefore\ n=6$
$p=20$일 때, $5\times(3^{20})^4$은 첫째항이 5, 공비가 3^{20}인 등비수열의 제5항이다.
$\therefore\ n=5$
$p=40$일 때, $5\times(3^{40})^2$은 첫째항이 5, 공비가 3^{40}인 등비수열의 제3항이다.
$\therefore\ n=3$
$p=80$일 때, $5\times(3^{80})^1$은 첫째항이 5, 공비가 3^{80}인 등비수열의 제2항이다.
$\therefore\ n=2$
$\therefore\ A(80)=81+41+21+17+11+9+6+5+3+2=196$

06 답 $80+24\sqrt{5}$

$ab<0$이므로 a와 b의 부호가 다르다.
(i) $a<0$, $b>0$일 때,
세 수 a, b, $2ab$에서 a와 $2ab$는 음수, b는 양수이고, 음수 두 개와 양수 한 개가 등비수열이 되는 배열은 (음수, 양수, 음수)이므로 세 수의 배열은 a, b, $2ab$ 또는 $2ab$, b, a이다.
이때 b가 등비중항이므로
$b^2=a\times 2ab$ $\therefore\ b=2a^2$
따라서 세 수 a, b, $2ab$는 a, $2a^2$, $4a^3$이다.
$a<0$, $2a^2>0$, $4a^3<0$이고 세 수를 배열하여 등차수열이 되는 배열은 (음수, 음수, 양수) 또는 (양수, 음수, 음수)이다.
이때 등차중항은 음수인 a 또는 $4a^3$이다.
ⓘ a가 등차중항인 경우
$2a=2a^2+4a^3$
$2a^2+a-1=0$
$(a+1)(2a-1)=0$
$\therefore\ a=-1$ ($\because\ a<0$)
ⓘⓘ $4a^3$이 등차중항인 경우
$8a^3=a+2a^2$
$8a^2-2a-1=0$
$(4a+1)(2a-1)=0$
$\therefore\ a=-\frac{1}{4}$ ($\because\ a<0$)
ⓘ, ⓘⓘ에서 $a=-1$ 또는 $a=-\frac{1}{4}$
(ii) $a>0$, $b<0$일 때,
세 수 a, b, $2ab$에서 a는 양수, b와 $2ab$는 음수이고, 음수 두 개와 양수 한 개가 등비수열이 되는 배열은 (음수, 양수, 음수)이므로 세 수의 배열은 b, a, $2ab$ 또는 $2ab$, a, b이다.
이때 a가 등비중항이므로
$a^2=b\times 2ab$ $\therefore\ a=2b^2$ …… ㉠
따라서 세 수 a, b, $2ab$는 $2b^2$, b, $2b^3$이다.
$b<0$, $2b^2>0$, $2b^3<0$이고 세 수를 배열하여 등차수열이 되는 배열은 (음수, 음수, 양수) 또는 (양수, 음수, 음수)이다.
이때 등차중항은 음수인 b 또는 $2b^3$이다.
ⓘ b가 등차중항인 경우
$2b=2b^2+2b^3$
$b^2+b-1=0$
$\therefore\ b=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ($\because\ b<0$)
이를 ㉠에 대입하여 풀면 $a=3+\sqrt{5}$
ⓘⓘ $2b^3$이 등차중항인 경우
$4b^3=b+2b^2$
$4b^2-2b-1=0$
$\therefore\ b=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ ($\because\ b<0$)
이를 ㉠에 대입하여 풀면
$a=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$
ⓘ, ⓘⓘ에서 $a=3+\sqrt{5}$ 또는 $a=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$
(i), (ii)에서 $a=-1$ 또는 $a=-\frac{1}{4}$ 또는 $a=3+\sqrt{5}$ 또는 $a=\frac{3-\sqrt{5}}{4}$
따라서 $k=-1+\left(-\frac{1}{4}\right)+(3+\sqrt{5})+\frac{3-\sqrt{5}}{4}=\frac{10+3\sqrt{5}}{4}$이므로
$32k=80+24\sqrt{5}$

07 답 1330

원 $x^2+y^2=\frac{n^2}{5}$에 접하고 기울기가 2, y절편이 양수인 접선의 방정식은
$y=2x+\frac{n}{\sqrt{5}}\sqrt{2^2+1}$ $\therefore\ y=2x+n$
직선 $y=2x+n$이 x축, y축과 만나는 점은 각각
$\mathrm{A}_n\left(-\frac{n}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}_n(0,\ n)$
점 A_n을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은
$y=-\left(x+\frac{n}{2}\right)$ $\therefore\ y=-x-\frac{n}{2}$
이 직선이 y축과 만나는 점은
$\mathrm{C}_n\left(0,\ -\frac{n}{2}\right)$
삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n$과 그 내부의 점들 중 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수 a_n은
(i) $n=1$일 때,
x좌표가 0인 점의 개수는 2이므로
$a_1=2$
(ii) $n=2$일 때,
x좌표가 -1인 점의 개수는 1, x좌표가 0인 점의 개수는 4이므로
$a_2=1+4=5$
(iii) $n=3$일 때,
x좌표가 -1인 점의 개수는 2, x좌표가 0인 점의 개수는 5이므로
$a_3=2+5=7$
(iv) $n=4$일 때,
x좌표가 -2인 점의 개수는 1, x좌표가 -1인 점의 개수는 4, x좌표가 0인 점의 개수는 7이므로
$a_4=1+4+7=12$
(v) $n=5$일 때,
x좌표가 -2인 점의 개수는 2, x좌표가 -1인 점의 개수는 5, x좌표가 0인 점의 개수는 8이므로
$a_5=2+5+8=15$

(vi) $n=6$일 때,

x좌표가 -3인 점의 개수는 1, x좌표가 -2인 점의 개수는 4, x좌표가 -1인 점의 개수는 7, x좌표가 0인 점의 개수는 10이므로

$a_6=1+4+7+10=22$

⋮

따라서 n이 홀수, 즉 $n=2k-1$(k는 자연수)일 때,

$$a_{2k-1}=2+5+8+\cdots+(3k-1)$$
$$=\sum_{m=1}^{k}(3m-1)=3\sum_{m=1}^{k}m-\sum_{m=1}^{k}1$$
$$=3\times\frac{k(k+1)}{2}-k$$
$$=\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{2}k$$

n이 짝수, 즉 $n=2k$(k는 자연수)일 때,

$$a_{2k}=1+\{4+7+\cdots+(3k+1)\}$$
$$=1+\sum_{m=1}^{k}(3m+1)$$
$$=1+3\sum_{m=1}^{k}m+\sum_{m=1}^{k}1$$
$$=1+3\times\frac{k(k+1)}{2}+k$$
$$=\frac{3}{2}k^2+\frac{5}{2}k+1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20}a_n=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{3}{2}k^2+\frac{1}{2}k\right)+\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{3}{2}k^2+\frac{5}{2}k+1\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}(3k^2+3k+1)$$
$$=3\sum_{k=1}^{10}k^2+3\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$$
$$=3\times\frac{10\times11\times21}{6}+3\times\frac{10\times11}{2}+10$$
$$=1330$$

08 답 ③

등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면 첫째항 b_1이 자연수이고 r는 음의 정수이므로

$b_1>0$, $b_2<0$, $b_3>0$, $b_4<0$, $b_5>0$

㈎, ㈏에서 $\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)-\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=98-38$

$\therefore \sum_{n=1}^{5}(|b_n|-b_n)=60$

즉, $\sum_{n=1}^{5}(|b_n|-b_n)=-2(b_2+b_4)$이므로

$-2(b_2+b_4)=60$, $b_2+b_4=-30$

$b_1r+b_1r^3=-30$

$\therefore b_1r(1+r^2)=-30$ …… ㉠

이때 b_1r는 음의 정수, $1+r^2$은 자연수이므로 $1+r^2$은 30의 양의 약수이다.

즉, $1+r^2$이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30이고 r는 음의 정수이므로

$r=-1$ 또는 $r=-2$ 또는 $r=-3$

이를 각각 ㉠에 대입하여 풀면

$b_1=15$ 또는 $b_1=3$ 또는 $b_1=1$

따라서 $b_1=1$, $r=-3$ 또는 $b_1=3$, $r=-2$ 또는 $b_1=15$, $r=-1$이어야 한다.

(i) $b_1=1$, $r=-3$일 때,

$\sum_{n=1}^{5}b_n=\frac{1-(-3)^5}{1-(-3)}=61$이므로 ㈎에 의하여 $\sum_{n=1}^{5}a_n=-23$

이때 등차수열 $\{a_n\}$에서

$$\sum_{n=1}^{5}a_n=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$
$$=(a_1+a_5)+(a_2+a_4)+a_3$$
$$=2a_3+2a_3+a_3=5a_3$$

즉, $5a_3=-23$이므로 $a_3=-\frac{23}{5}$

그런데 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.

따라서 $b_1=1$, $r=-3$은 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $b_1=3$, $r=-2$일 때,

$\sum_{n=1}^{5}b_n=\frac{3\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)}=33$이므로 ㈎에 의하여 $\sum_{n=1}^{5}a_n=5$

즉, $5a_3=5$이므로 $a_3=1$

(iii) $b_1=15$, $r=-1$일 때,

$\sum_{n=1}^{5}b_n=\frac{15\{1-(-1)^5\}}{1-(-1)}=15$이므로 ㈎에 의하여 $\sum_{n=1}^{5}a_n=23$

즉, $5a_3=23$이므로 $a_3=\frac{23}{5}$

그런데 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이므로 $b_1=15$, $r=-1$은 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $b_1=3$, $r=-2$이므로

$b_7=b_1r^6=3\times(-2)^6=192$

(ii)에서 $\sum_{n=1}^{5}a_n=5$이므로 ㈐에 의하여 $\sum_{n=1}^{5}|b_n|=93$이고

㈐에 의하여 $\sum_{n=1}^{5}|a_n|=25$ …… ㉡

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_3=1$이므로

$a_1=1-2d$, $a_2=1-d$, $a_4=1+d$, $a_5=1+2d$

$d<0$이므로 $a_1>a_2>a_3>0\geq a_4>a_5$

㉡에서

$(1-2d)+(1-d)+1-(1+d)-(1+2d)=25$

$1-6d=25$ $\therefore d=-4$

$\therefore a_7=a_3+4d=1+4\times(-4)=-15$

$\therefore a_7+b_7=-15+192=177$

09 답 ②

점 A_0에서 점 A_1까지 점 P가 이동한 거리는 $\frac{1}{49}$

점 A_0에서 점 A_2까지 점 P가 이동한 거리는 $\frac{1}{49}+\frac{3}{49}$

점 A_0에서 점 A_3까지 점 P가 이동한 거리는 $\frac{1}{49}+\frac{3}{49}+\frac{5}{49}$

⋮

점 A_0에서 점 A_n까지 점 P가 이동한 거리는

$$\frac{1}{49}+\frac{3}{49}+\frac{5}{49}+\cdots+\frac{2n-1}{49}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{49}$$
$$=\frac{2}{49}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{49}\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=\frac{2}{49}\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n}{49}$$
$$=\frac{n^2}{49}=\left(\frac{n}{7}\right)^2$$ …… ㉠

점 A_n의 x좌표와 y좌표의 합은 점 P가 점 A_0에서 점 A_n까지 경로를 따라 이동한 거리와 같으므로 점 A_n이 직선 $y=x$ 위에 있으려면 점 A_0에서 점 A_n까지 점 P가 이동한 거리는 짝수이어야 한다.

즉, $\left(\frac{n}{7}\right)^2$이 짝수이어야 하므로 $\frac{n}{7}$도 짝수이어야 한다.

$\frac{n}{7}=2m$ (m은 자연수)이라 하면 $n=14m$

즉, 점 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 세 번째 점은 $m=3$, 즉 $n=42$일 때이므로 점 A_{42}이다.

따라서 점 A_0에서 점 A_{42}까지 점 P가 이동한 거리는 ㉠에서

$\left(\frac{42}{7}\right)^2=6^2=36$이므로 점 A_{42}의 x좌표는 18이다.

↳ 점 A_{42}의 좌표는 (18, 18)

$\therefore a=18$

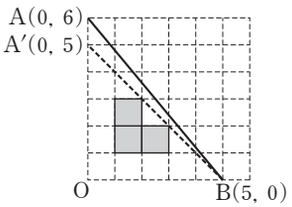
10 답 440

(i) $n=1$일 때,

A(0, 6), B(5, 0)이므로

그림에서

$a_1=2$

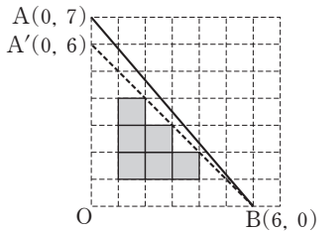


(ii) $n=2$일 때,

A(0, 7), B(6, 0)이므로

그림에서

$a_2=2+4=6$

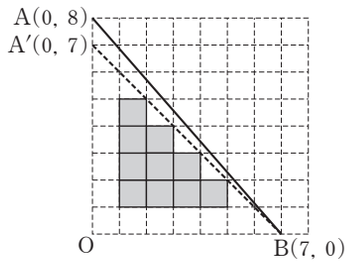


(iii) $n=3$일 때,

A(0, 8), B(7, 0)이므로

그림에서

$a_3=2+4+6=12$



⋮

$\therefore a_n=2+4+6+\cdots+2n$

$=2(1+2+3+\cdots+n)$

$=2\times\frac{n(n+1)}{2}=n^2+n$

$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{10}(n^2+n)=\sum_{n=1}^{10} n^2+\sum_{n=1}^{10} n$

$=\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}=440$

11 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d ($d\neq0$)라 하면 일반항 a_n은

$a_n=a_1+(n-1)d$

$b_n=\begin{cases} b_{n-1}+a_n & (n\text{이 }4\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ b_{n-1}-a_n & (n\text{이 }4\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$의 n에 2, 3, 4, …, 13을 차례대로 대입하면

$b_2=b_1+a_2=a_1+(a_1+d)=2a_1+d$

$b_3=b_2+a_3=(2a_1+d)+(a_1+2d)=3a_1+3d$

$b_4=b_3-a_4=(3a_1+3d)-(a_1+3d)=2a_1$

$b_5=b_4+a_5=2a_1+(a_1+4d)=3a_1+4d$

$b_6=b_5+a_6=(3a_1+4d)+(a_1+5d)=4a_1+9d$

$b_7=b_6+a_7=(4a_1+9d)+(a_1+6d)=5a_1+15d$

$b_8=b_7-a_8=(5a_1+15d)-(a_1+7d)=4a_1+8d$

$b_9=b_8+a_9=(4a_1+8d)+(a_1+8d)=5a_1+16d$

$b_{10}=b_9+a_{10}=(5a_1+16d)+(a_1+9d)=6a_1+25d$

$b_{11}=b_{10}+a_{11}=(6a_1+25d)+(a_1+10d)=7a_1+35d$

$b_{12}=b_{11}-a_{12}=(7a_1+35d)-(a_1+11d)=6a_1+24d$

$\therefore b_{13}=b_{12}+a_{13}=(6a_1+24d)+(a_1+12d)=7a_1+36d$

$b_{13}=a_{13}$에서

$7a_1+36d=a_1+12d$

$6a_1=-24d \quad \therefore a_1=-4d$

$\therefore \frac{b_6}{b_8}=\frac{4a_1+9d}{4a_1+8d}$

$=\frac{4\times(-4d)+9d}{4\times(-4d)+8d}=\frac{7}{8}$

12 답 288

두 점 Q_1, Q_2의 좌표가 각각 (0, 0), (1, −1)이고 점 Q_3의 좌표를 (a_3, b_3)이라 하면 삼각형 $Q_1Q_2Q_3$의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{0+1+a_3}{3}, \frac{0-1+b_3}{3}\right)$

이때 점 P_1이 삼각형 $Q_1Q_2Q_3$의 무게중심이고, 점 P_1의 좌표가 (1, 0)이므로

$\frac{1+a_3}{3}=1$, $\frac{-1+b_3}{3}=0$

$\therefore a_3=2$, $b_3=1$

따라서 점 Q_3의 좌표는 (2, 1)

두 점 Q_2, Q_3의 좌표가 각각 (1, −1), (2, 1)이고 점 Q_4의 좌표를 (a_4, b_4)라 하면 삼각형 $Q_2Q_3Q_4$의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{1+2+a_4}{3}, \frac{-1+1+b_4}{3}\right)$

이때 점 P_2가 삼각형 $Q_2Q_3Q_4$의 무게중심이고, 점 P_2의 좌표가 $(2, a)$이므로

$\frac{3+a_4}{3}=2$, $\frac{b_4}{3}=a$

$\therefore a_4=3$, $b_4=3a$

따라서 점 Q_4의 좌표는 $(3, 3a)$

두 점 Q_3, Q_4의 좌표가 각각 (2, 1), $(3, 3a)$이고 점 Q_5의 좌표를 (a_5, b_5)라 하면 삼각형 $Q_3Q_4Q_5$의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{2+3+a_5}{3}, \frac{1+3a+b_5}{3}\right)$

이때 점 P_3이 삼각형 $Q_3Q_4Q_5$의 무게중심이고, 점 P_3의 좌표가 $(3, 2a)$이므로

$\frac{5+a_5}{3}=3$, $\frac{1+3a+b_5}{3}=2a$

$\therefore a_5=4$, $b_5=3a-1$

따라서 점 Q_5의 좌표는 $(4, 3a-1)$

같은 방법으로 하면 두 점 Q_4, Q_5의 좌표가 각각 $(3, 3a)$, $(4, 3a-1)$이고 점 P_4의 좌표가 $(4, 3a)$이므로 점 Q_6의 좌표는 $(5, 3a+1)$

두 점 Q_5, Q_6의 좌표가 각각 $(4, 3a-1)$, $(5, 3a+1)$이고 점 P_5의 좌표가 $(5, 4a)$이므로 점 Q_7의 좌표는 $(6, 6a)$

두 점 Q_6, Q_7의 좌표가 각각 $(5, 3a+1)$, $(6, 6a)$이고 점 P_6의 좌표가 $(6, 5a)$이므로 점 Q_8의 좌표는 $(7, 6a-1)$

두 점 Q_7, Q_8의 좌표가 각각 $(6, 6a)$, $(7, 6a-1)$이고 점 P_7의 좌표가 $(7, 6a)$이므로 점 Q_9의 좌표는 $(8, 6a+1)$

⋮

즉, 자연수 k에 대하여 세 점 Q_{3k-1}, Q_{3k}, Q_{3k+1}의 좌표는 각각 $(3k-2, (3k-3)a-1)$, $(3k-1, (3k-3)a+1)$, $(3k, 3ka)$

점 Q_{12}의 좌표가 $(11, 100)$이므로

$9a+1=100$ $\therefore a=11$

$Q_{3k-1}(3k-2, 11(3k-3)-1)$에 $k=9$를 대입하면 점 Q_{26}의 좌표는 $(25, 263)$

따라서 $p=25$, $q=263$이므로

$p+q=288$

13 답 ⑤

㈎, ㈏의 식에 각각 $n=1$을 대입하면

$a_2=a_2\times a_1+2$ …… ㉠

$a_3=a_2\times a_1-3$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $a_2-a_3=5$

$\therefore a_3=a_2-5$ …… ㉢

$a_8=a_2\times a_4+2$

$=a_2\times(a_2\times a_2+2)+2$

$=a_2^3+2a_2+2$

$a_{15}=a_2\times a_7-3$

$=a_2\times(a_2\times a_3-3)-3$

$=a_2\times\{a_2\times(a_2-5)-3\}-3$ ($\because$ ㉢)

$=a_2^3-5a_2^2-3a_2-3$

$\therefore a_8-a_{15}=(a_2^3+2a_2+2)-(a_2^3-5a_2^2-3a_2-3)$

$=5a_2^2+5a_2+5$

즉, $5a_2^2+5a_2+5=155$이므로

$a_2^2+a_2-30=0$, $(a_2+6)(a_2-5)=0$

$\therefore a_2=-6$ 또는 $a_2=5$

(i) $a_2=-6$일 때,

㉠에서 $-6=-6a_1+2$

$6a_1=8$ $\therefore a_1=\frac{4}{3}$

이는 $0<a_1<1$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_2=5$일 때,

㉠에서 $5=5a_1+2$

$5a_1=3$ $\therefore a_1=\frac{3}{5}$

(i), (ii)에서 $a_1=\frac{3}{5}$, $a_2=5$

따라서 $a_4=a_2\times a_2+2=5\times5+2=27$이므로

$\frac{a_4}{a_1}=\frac{27}{\frac{3}{5}}=45$

14 답 8

$-1\le a_5<-\frac{1}{2}$이면 $a_6=-3a_5-3$이므로 $a_5+a_6=0$에서

$-2a_5-3=0$ $\therefore a_5=-\frac{3}{2}$

그런데 $-1\le a_5<-\frac{1}{2}$이므로 a_5의 값은 존재하지 않는다.

$-\frac{1}{2}\le a_5\le\frac{1}{2}$이면 $a_6=3a_5$이므로 $a_5+a_6=0$에서

$4a_5=0$ $\therefore a_5=0$

이때 $-\frac{1}{2}\le a_5\le\frac{1}{2}$이므로 $a_5=0$

$\frac{1}{2}<a_5\le1$이면 $a_6=-3a_5+3$이므로 $a_5+a_6=0$에서

$-2a_5+3=0$ $\therefore a_5=\frac{3}{2}$

그런데 $\frac{1}{2}<a_5\le1$이므로 a_5의 값은 존재하지 않는다.

$\therefore a_5=0$

$a_{n+1}=\begin{cases}-3a_n-3 & \left(-1\le a_n<-\frac{1}{2}\right)\\ 3a_n & \left(-\frac{1}{2}\le a_n\le\frac{1}{2}\right)\\ -3a_n+3 & \left(\frac{1}{2}<a_n\le1\right)\end{cases}$ 에서 $a_5=0$이 되려면 $a_4=-1$ 또는 $a_4=0$ 또는 $a_4=1$이어야 한다.

(i) $a_4=-1$일 때,

ⓘ $-1\le a_3<-\frac{1}{2}$이면 $a_4=-3a_3-3$이므로 $a_3=-\frac{2}{3}$

이때 $-1\le a_3<-\frac{1}{2}$이므로 $a_3=-\frac{2}{3}$

같은 방법으로 a_2, a_1의 값을 구하면 $a_2<0$, $a_1<0$이므로

$\sum_{k=1}^{5}a_k>0$을 만족시키는 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1)은 존재하지 않는다.

ⓘⓘ $-\frac{1}{2}\le a_3\le\frac{1}{2}$이면 $a_4=3a_3$이므로 $a_3=-\frac{1}{3}$

이때 $-\frac{1}{2}\le a_3\le\frac{1}{2}$이므로 $a_3=-\frac{1}{3}$

같은 방법으로 a_2, a_1의 값을 구하면 $a_2<0$, $a_1<0$이므로

$\sum_{k=1}^{5}a_k>0$을 만족시키는 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1)은 존재하지 않는다.

ⓘⓘⓘ $\frac{1}{2}<a_3\le1$이면 $a_4=-3a_3+3$이므로 $a_3=\frac{4}{3}$

그런데 $\frac{1}{2}\le a_3<1$이므로 a_3의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a_4=0$일 때,

ⓘ $-1\le a_3<-\frac{1}{2}$이면 $a_4=-3a_3-3$이므로 $a_3=-1$

이때 $-1\le a_3<-\frac{1}{2}$이므로 $a_3=-1$

같은 방법으로 a_2, a_1의 값을 구하면 $a_2<0$, $a_1<0$이므로

$\sum_{k=1}^{5}a_k>0$을 만족시키는 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1)은 존재하지 않는다.

ⓘⓘ $-\frac{1}{2}\le a_3\le\frac{1}{2}$이면 $a_4=3a_3$이므로 $a_3=0$

이때 $-\frac{1}{2}\le a_3\le\frac{1}{2}$이므로 $a_3=0$

같은 방법으로 $\sum_{k=1}^{5}a_k>0$을 만족시키는 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1)을 구하면 $(0, 0, 0, 1)$, $\left(0, 0, 1, \frac{1}{3}\right)$, $\left(0, 0, 1, \frac{2}{3}\right)$이므로

$a_1=\frac{1}{3}$ 또는 $a_1=\frac{2}{3}$ 또는 $a_1=1$

ⓘⓘⓘ $\frac{1}{2}<a_3\le1$이면 $a_4=-3a_3+3$이므로 $a_3=1$

이때 $\frac{1}{2}<a_3\le 1$이므로 $a_3=1$

같은 방법으로 $\sum_{k=1}^{5}a_k>0$을 만족시키는 순서쌍 $(a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1)$을 구하면 $\left(0,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9}\right)$, $\left(0,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{8}{9}\right)$, $\left(0,\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{9}\right)$, $\left(0,\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{9}\right)$이므로

$a_1=\frac{1}{9}$ 또는 $a_1=\frac{2}{9}$ 또는 $a_1=\frac{7}{9}$ 또는 $a_1=\frac{8}{9}$

ⅰ, ⅱ, ⅲ에서 $a_1=\frac{1}{9}$ 또는 $a_1=\frac{2}{9}$ 또는 $a_1=\frac{1}{3}$ 또는 $a_1=\frac{2}{3}$ 또는 $a_1=\frac{7}{9}$ 또는 $a_1=\frac{8}{9}$ 또는 $a_1=1$

(ⅲ) $a_4=1$일 때,

ⅰ $-1\le a_3<-\frac{1}{2}$이면 $a_4=-3a_3-3$이므로 $a_3=-\frac{4}{3}$

이때 $-1\le a_3<-\frac{1}{2}$이므로 a_3의 값은 존재하지 않는다.

ⅱ $-\frac{1}{2}\le a_3\le\frac{1}{2}$이면 $a_4=3a_3$이므로 $a_3=\frac{1}{3}$

이때 $-\frac{1}{2}\le a_3\le\frac{1}{2}$이므로 $a_3=\frac{1}{3}$

같은 방법으로 $\sum_{k=1}^{5}a_k>0$을 만족시키는 순서쌍 $(a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1)$을 구하면 $\left(1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{27}\right)$, $\left(1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \frac{26}{27}\right)$, $\left(1,\ \frac{1}{3},\ \frac{8}{9},\ \frac{8}{27}\right)$, $\left(1,\ \frac{1}{3},\ \frac{8}{9},\ \frac{19}{27}\right)$이므로

$a_1=\frac{1}{27}$ 또는 $a_1=\frac{8}{27}$ 또는 $a_1=\frac{19}{27}$ 또는 $a_1=\frac{26}{27}$

ⅲ $\frac{1}{2}<a_3\le 1$이면 $a_4=-3a_3+3$이므로 $a_3=\frac{2}{3}$

이때 $\frac{1}{2}<a_3\le 1$이므로 $a_3=\frac{2}{3}$

같은 방법으로 $\sum_{k=1}^{5}a_k>0$을 만족시키는 순서쌍 $(a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1)$을 구하면 $\left(1,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{9},\ \frac{2}{27}\right)$, $\left(1,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{9},\ \frac{25}{27}\right)$, $\left(1,\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{9},\ \frac{7}{27}\right)$, $\left(1,\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{9},\ \frac{20}{27}\right)$이므로

$a_1=\frac{2}{27}$ 또는 $a_1=\frac{7}{27}$ 또는 $a_1=\frac{20}{27}$ 또는 $a_1=\frac{25}{27}$

ⅰ, ⅱ, ⅲ에서 $a_1=\frac{1}{27}$ 또는 $a_1=\frac{2}{27}$ 또는 $a_1=\frac{7}{27}$ 또는 $a_1=\frac{8}{27}$ 또는 $a_1=\frac{19}{27}$ 또는 $a_1=\frac{20}{27}$ 또는 $a_1=\frac{25}{27}$ 또는 $a_1=\frac{26}{27}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$$1+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{7}{9}+\frac{8}{9}\right)+\left(\frac{1}{27}+\frac{2}{27}+\frac{7}{27}+\frac{8}{27}+\frac{19}{27}+\frac{20}{27}+\frac{25}{27}+\frac{26}{27}\right)$$

$=8$

15 답 15

$a_6\ge 0$이라 가정하고 b_n의 n에 5, 6을 대입하면

$b_5=a_6-5$, $b_6=a_7-6$

이때 $a_6>a_7$이므로 $b_5>b_6$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

$a_5<0$이라 가정하고 b_n의 n에 5, 6을 대입하면

$b_5=a_5+5$, $b_6=a_6+6$

이때 $a_5>a_6$이고 수열 $\{a_n\}$의 공차가 -1보다 작으므로 $b_5>b_6$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 수열 $\{a_n\}$에서 $a_5\ge 0$, $a_6<0$

㈏에서 $S_5=S_9=0$이므로

$b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=0$ …… ㉠

$b_6+b_7+b_8+b_9=0$ …… ㉡

㉠에서 $b_1=a_2-1$, $b_2=a_3-2$, $b_3=a_4-3$, $b_4=a_5-4$, $b_5=a_6-5$이므로

$(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)-(1+2+3+4+5)=0$

$\frac{5(a_2+a_6)}{2}-15=0$

$\therefore\ a_2+a_6=6$ …… ㉢

㉡에서 $b_6=a_6+6$, $b_7=a_7+7$, $b_8=a_8+8$, $b_9=a_9+9$이므로

$(a_6+a_7+a_8+a_9)+(6+7+8+9)=0$

$\frac{4(a_6+a_9)}{2}+30=0$

$\therefore\ a_6+a_9=-15$ …… ㉣

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

㉢에서 $(a+d)+(a+5d)=6$

$\therefore\ 2a+6d=6$ …… ㉤

㉣에서 $(a+5d)+(a+8d)=-15$

$\therefore\ 2a+13d=-15$ …… ㉥

㉤, ㉥을 연립하여 풀면 $a=12$, $d=-3$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 12, 공차가 -3이므로 일반항 a_n은

$a_n=12+(n-1)\times(-3)=-3n+15$

$S_n\le -60$에서 $S_9=0$이므로

$b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_n\le -60$

이때 $n\ge 6$에서 $b_n=a_n+n=(-3n+15)+n=-2n+15$이므로

$n\ge 6$에서 수열 $\{b_n\}$은 등차수열을 이룬다.

즉, $\frac{(n-9)(b_{10}+b_n)}{2}\le -60$이므로

$\frac{(n-9)\{-5+(-2n+15)\}}{2}\le -60$

$(n-9)(-n+5)\le -60$

$(n-9)(n-5)\ge 60$

$n^2-14n-15\ge 0$

$(n+1)(n-15)\ge 0$

$\therefore\ n\ge 15$ ($\because\ n>0$)

따라서 자연수 n의 최솟값은 15이다.

memo