

수학의 신

수학Ⅱ

정답과 해설



01 함수의 극한

step ① 핵심 문제

18~19쪽

01 -1 02 ④ 03 9 04 ② 05 ④ 06 11
07 16 08 ③ 09 ③ 10 6 11 2

step ② 고난도 문제

20~24쪽

01 ⑤ 02 ① 03 ② 04 $\frac{3}{2}$ 05 64 06 1
07 ⑤ 08 77 09 0 10 20 11 ③ 12 22
13 60 14 ④ 15 ⑤ 16 ③ 17 -3 18 ①
19 1 20 ③ 21 ③ 22 ④ 23 ② 24 ②
25 2

step ③ 최고난도 문제

25~27쪽

01 ⑤ 02 $\frac{52}{3}$ 03 ② 04 ③ 05 -1 06 ②
07 ⑤ 08 ② 09 ① 10 208

02 함수의 연속

step ① 핵심 문제

28~29쪽

01 ⑤ 02 ② 03 ② 04 12 05 3 06 3
07 24 08 ① 09 23 10 ③ 11 3

step ② 고난도 문제

30~34쪽

01 ④ 02 ② 03 ③ 04 ③ 05 ② 06 30
07 20 08 ④ 09 7 10 ④ 11 51 12 3
13 64 14 ① 15 14 16 ③ 17 ③ 18 5
19 9 20 8 21 2 22 3 23 ⑤ 24 7
25 ① 26 5

step ③ 최고난도 문제

35~37쪽

01 ④ 02 20 03 4 04 ③ 05 ④ 06 -5
07 -15 08 ⑤ 09 ① 10 ③

기출 변형 문제로 단원 마스터

38~41쪽

01 ② 02 15 03 6 04 ⑤ 05 ③ 06 19
07 12 08 ④ 09 ③ 10 2 11 10 12 ②
13 ③

03 미분계수와 도함수

step ① 핵심 문제

44~45쪽

01 ① 02 27 03 ⑤ 04 4 05 $\frac{3}{4}$ 06 ③
07 ② 08 ① 09 10 10 ③ 11 15 12 7

step ② 고난도 문제

46~50쪽

01 ④ 02 17 03 130 04 ③ 05 ⑤ 06 $\frac{5}{2}$
07 $\frac{3}{2}$ 08 ③ 09 29 10 ② 11 7 12 5
13 ⑤ 14 53 15 18 16 36 17 4 18 ③
19 ② 20 ④ 21 12 22 11 23 ④ 24 $\frac{1}{32}$
25 ③ 26 186

step ③ 최고난도 문제

51~53쪽

01 30 02 ③ 03 243 04 $\frac{17}{4}$ 05 17 06 9
07 13 08 8 09 ② 10 ⑤

04 도함수의 활용(1)

step ① 핵심 문제

54~55쪽

01 ④ 02 ③ 03 48 04 -9 05 ⑤ 06 -1
07 ① 08 13 09 ② 10 $\frac{1}{2}$ 11 ①

step ② 고난도 문제

56~60쪽

01 ⑤ 02 15 03 ② 04 5 05 29 06 ①
07 79 08 $\neg, \perp$ 09 ③ 10 8 11 6
12 20 13 107 14 ④ 15 ① 16 ⑤ 17 32
18 6 19 24 20 ③ 21 ② 22 10 23 6
24 40 25 ① 26 ③

step ③ 최고난도 문제 61~63쪽

01 ② 02 $\frac{5}{2}$ 03 ④ 04 ① 05 90 06 ③
07 105 08 $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ 09 39 10 $\frac{39}{16}$ 11 ⑤

05 도함수의 활용 (2)

step ① 핵심 문제 64~65쪽

01 12 02 ② 03 4 04 9 05 27 06 26
07 ④ 08 2 09 3 10 ① 11 ③
12 $-\frac{5\sqrt{3}}{8}$

step ② 고난도 문제 66~70쪽

01 ④ 02 ⑤ 03 12 04 ② 05 ⑤ 06 2
07 ③ 08 9 09 ② 10 ④ 11 13 12 21
13 ① 14 ④ 15 52 16 5 17 34 18 130
19 ② 20 ④ 21 $\frac{5}{6}$ 22 11 23 3
24 $12\sqrt{3}\text{cm}^2$ 25 ④ 26 90

step ③ 최고난도 문제 71~73쪽

01 ④ 02 51 03 12 04 ④ 05 38 06 ③
07 16 08 ⑤ 09 ② 10 ①

기출 변형 문제로 단원 마스터 74~77쪽

01 -3 02 ⑤ 03 ③ 04 20 05 ⑤ 06 14
07 ② 08 256 09 ② 10 ⑤ 11 ① 12 ③
13 16 14 27

06 부정적분과 정적분

step ① 핵심 문제 80~81쪽

01 ② 02 9 03 ③ 04 -21 05 15 06 ⑤
07 16 08 ① 09 $\frac{1}{6}$ 10 ⑤ 11 5 12 5

step ② 고난도 문제 82~86쪽

01 12 02 2 03 ⑤ 04 -2 05 ③ 06 17
07 ② 08 400 09 9 10 ② 11 ⑤ 12 18
13 -57 14 110 15 ① 16 ④ 17 ⑤ 18 -6
19 3 20 0 21 $\frac{27}{4}$ 22 ② 23 ① 24 ②
25 38 26 ⑤

step ③ 최고난도 문제 87~89쪽

01 4 02 340 03 209 04 ⑤ 05 ② 06 1
07 2 08 ⑤ 09 251 10 ⑤

07 정적분의 활용

step ① 핵심 문제 90~91쪽

01 12 02 ③ 03 ③ 04 40 05 ④ 06 $\frac{16}{3}$
07 64 08 38 09 ③ 10 ⑤ 11 ②

step ② 고난도 문제 92~95쪽

01 ② 02 $-\frac{2}{3}$ 03 16 04 ④ 05 ⑤ 06 ④
07 16 08 8 09 ② 10 2 11 8 12 2
13 ③ 14 $12-6\sqrt{2}$ 15 ② 16 $\frac{9}{4}$ 17 $12\sqrt{3}$
18 21 19 $\frac{38}{3}$ 20 ③ 21 ④

step ③ 최고난도 문제 96~97쪽

01 41 02 ③ 03 17 04 ② 05 $\frac{16}{7}$ 06 10
07 ③

기출 변형 문제로 단원 마스터 98~101쪽

01 6 02 ⑤ 03 ③ 04 384 05 $\neg, \cup, \cap$
06 49 07 ② 08 ⑤ 09 ⑤ 10 ② 11 ③
12 10 13 ④ 14 ⑤

step ① 핵심 문제

| 18~19쪽

01 -1 02 ④ 03 9 04 ② 05 ④ 06 11

07 16 08 ③ 09 ③ 10 6 11 2

01 답 -1

 $a = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x+a) - \lim_{x \rightarrow -1+} f(1-x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x+2) - \lim_{x \rightarrow -2-} f(1-x)$$

 $x+2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1+$ 일 때 $t \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x+2) = \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) = -1$$

 $1-x=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow -2-$ 일 때 $s \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(1-x) = \lim_{s \rightarrow -1+} f(s) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} f(x+2) - \lim_{x \rightarrow -2-} f(1-x) = -1 - 0 = -1$$

02 답 ④

$$f(x) = \frac{|x+2|}{x+2} + \frac{x^2-1}{|x-1|} + \frac{|x|}{x^2-2x}$$

$$= \frac{|x+2|}{x+2} + \frac{(x+1)(x-1)}{|x-1|} + \frac{|x|}{x(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} \left\{ \frac{-(x+2)}{x+2} + \frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)} + \frac{-x}{x(x-2)} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2-} \left\{ -1 - (x+1) - \frac{1}{x-2} \right\}$$

$$= -1 - (-2+1) - \frac{1}{-2-2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ \frac{x+2}{x+2} + \frac{(x+1)(x-1)}{-(x-1)} + \frac{x}{x(x-2)} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ 1 - (x+1) + \frac{1}{x-2} \right\}$$

$$= 1 - 1 - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \left\{ \frac{x+2}{x+2} + \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} + \frac{x}{x(x-2)} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \left\{ 1 + (x+1) + \frac{1}{x-2} \right\}$$

$$= 1 + (1+1) + \frac{1}{1-2}$$

$$= 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{7}{4}$$

03 답 9

 $|a| \neq 2$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 로 극한값이 존재하므로 모든 실수 a 에대하여 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재하면 $a = -2$, $a = 2$ 일 때도 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재한다. 배점 10%(i) $a = -2$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} (-x^2 + x) = -4 - 2 = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} (x^2 + ax + b) = 4 - 2a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{의 값이 존재하면 } \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) \text{이므로}$$

$$-6 = 4 - 2a + b$$

$$\therefore 2a - b = 10 \quad \dots\dots \textcircled{7} \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

(ii) $a = 2$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} (-x^2 + x) = -4 + 2 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{의 값이 존재하면 } \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) \text{이므로}$$

$$4 + 2a + b = -2$$

$$\therefore 2a + b = -6 \quad \dots\dots \textcircled{8} \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

 $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = -8$$

$$\therefore a - b = 9 \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$

04 답 ②

 $2f(x) - 3g(x) = h(x)$ 로 놓으면

$$f(x) = \frac{1}{2}h(x) + \frac{3}{2}g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4f(x) + g(x)}{3f(x) - g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4\left\{\frac{1}{2}h(x) + \frac{3}{2}g(x)\right\} + g(x)}{3\left\{\frac{1}{2}h(x) + \frac{3}{2}g(x)\right\} - g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2h(x) + 7g(x)}{\frac{3}{2}h(x) + \frac{7}{2}g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4h(x) + 14g(x)}{3h(x) + 7g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \times \frac{h(x)}{g(x)} + 14}{3 \times \frac{h(x)}{g(x)} + 7}$$

$$= \frac{4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{g(x)} + 14}{3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{g(x)} + 7}$$

$$= \frac{0 + 14}{0 + 7} = 2$$

05 답 ④

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x+1)}{(x+1)^2} = 2 \text{에서 } x+1=t \text{로 놓으면 } x \rightarrow -1 \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t^2} = 2 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2g(x)}{f(x) - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2 \times \frac{g(x)}{x}}{x \times \frac{f(x)}{x^2} - 3}$$

$$= \frac{0 - 2 \times 3}{0 - 3} = 2$$

06 답 11

$b \leq 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{a^2x^2+6x}-bx-3b) = \infty$ 이므로 $b > 0$ 이다.

$a^2 \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{a^2x^2+6x}-bx-3b) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{a^2x^2+6x}-bx-3b)(\sqrt{a^2x^2+6x}+bx+3b)}{\sqrt{a^2x^2+6x}+bx+3b} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(a^2x^2+6x-(bx+3b)^2)}{\sqrt{a^2x^2+6x}+bx+3b} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\{(a^2-b^2)x^2+(6-6b^2)x-9b^2\}}{\sqrt{a^2x^2+6x}+bx+3b} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a^2-b^2)x^3+(6-6b^2)x^2-9b^2x}{\sqrt{a^2x^2+6x}+bx+3b} \end{aligned}$$

이때 극한값이 존재하므로

$$a^2-b^2=0, \quad 6-6b^2=0$$

$$6-6b^2=0 \text{에서}$$

$$b^2=1 \quad \therefore b=1 \quad (\because b>0)$$

이를 $a^2-b^2=0$ 에 대입하면

$$a^2-1=0 \quad \therefore a^2=1$$

$$\therefore c = \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{a^2x^2+6x}-bx-3b)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9x}{\sqrt{x^2+6x}+x+3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9}{\sqrt{1+\frac{6}{x}}+1+\frac{3}{x}}$$

$$= \frac{-9}{1+1} = -\frac{9}{2}$$

$$\therefore a^2+b-2c=1+1-2 \times \left(-\frac{9}{2}\right)=11$$

07 답 16

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x^2+ax+b}-1) = 0 \text{에서}$$

$$\sqrt{1+a+b}-1=0, \quad \sqrt{1+a+b}=1$$

$$1+a+b=1 \quad \therefore b=-a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+ax+b}-1}{x^2-4x+3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+ax-a-1}}{x^2-4x+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+ax-a-1})(\sqrt{x^2+ax-a-1}+1)}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2+ax-a-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax-a-1}{(x^2-4x+3)(\sqrt{x^2+ax-a-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+a+1)}{(x-1)(x-3)(\sqrt{x^2+ax-a-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+a+1}{(x-3)(\sqrt{x^2+ax-a-1}+1)} \\ &= \frac{1+a+1}{-2 \times (1+1)} = -\frac{a+2}{4} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{a+2}{4} = -\frac{5}{2} \text{이므로}$$

$$a+2=10 \quad \therefore a=8$$

이를 ①에 대입하면 $b=-8$

$$\therefore a-b=8-(-8)=16$$

08 답 ③

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1$ 에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 \text{에서 } f(-1) = 0$$

따라서 $f(x) = (x+1)(x^2+ax+b)$ (a, b 는 상수)라 하고

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2 \text{의 좌변에 대입하면}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2+ax+b)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x^2+ax+b) \\ &= 1-a+b \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 1-a+b=2 \text{이므로}$$

$$b=a+1$$

$$\therefore f(x) = (x+1)(x^2+ax+a+1)$$

$$f(1) \leq 12 \text{에서}$$

$$2(2a+2) \leq 12, \quad 4a \leq 8$$

$$\therefore a \leq 2$$

$$f(2) = 3(3a+5) = 9a+15 \text{이므로}$$

$$9a+15 \leq 9 \times 2 + 15$$

$$\therefore f(2) \leq 33$$

따라서 $f(2)$ 의 최댓값은 33이다.

09 답 ③

0이 아닌 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2+3x < f(x) < 2x^2+3x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2+3x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2+3x) = 0$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

(i) $x > 0$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{의 각 변을 } x \text{로 나누면 } x+3 < \frac{f(x)}{x} < 2x+3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (x+3) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} (2x+3) = 3 \text{이므로 함수의 극한의 대소 관계}$$

에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = 3$$

(ii) $x < 0$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{의 각 변을 } x \text{로 나누면 } 2x+3 < \frac{f(x)}{x} < x+3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} (2x+3) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} (x+3) = 3 \text{이므로 함수의 극한의 대소 관계}$$

에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)}{x} = 3$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)}{x} = 3 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5f(x)-2x}{2xf(x)+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \times \frac{f(x)}{x} - 2}{2f(x)+1} = \frac{5 \times 3 - 2}{0+1} = 13$$

10 답 6

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $A(-2, 0)$ 을 지나므로 $f(x)=(x+2)(x+a)$ (a 는 상수)라 하자. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $P(t, t+2)$ 를 지나므로 $f(t)=t+2$ 에서 $(t+2)(t+a)=t+2$, $t+a=1$ ($\because t \neq -2$)

$$\therefore a=-t+1 \quad \therefore f(x)=(x+2)(x-t+1)$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점이 Q 이므로

$$Q(0, -2t+2)$$

$$\overline{AP}=\sqrt{(t+2)^2+(t+2)^2}=\sqrt{2}|t+2|,$$

$$\overline{AQ}=\sqrt{2^2+(-2t+2)^2}=\sqrt{4t^2-8t+8}=2\sqrt{t^2-2t+2}\text{이므로}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \times \overline{AP} - \overline{AQ})$$

$$=\lim_{t \rightarrow \infty} (2|t+2| - 2\sqrt{t^2-2t+2})$$

$$=2\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(|t+2| - \sqrt{t^2-2t+2})(|t+2| + \sqrt{t^2-2t+2})}{|t+2| + \sqrt{t^2-2t+2}}$$

$$=2\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6t+2}{|t+2| + \sqrt{t^2-2t+2}} = 2\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{6+\frac{2}{t}}{1+\frac{2}{t} + \sqrt{1-\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}}}$$

$$=2 \times \frac{6}{1+1} = 6$$

11 답 2

점 P_1 은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이고 x 좌표가 t 이므로

$$t^2+y^2=4\text{에서 } y^2=4-t^2$$

이때 점 P_1 은 제1사분면 위의 점이므로 $y=\sqrt{4-t^2}$

따라서 $P_1(t, \sqrt{4-t^2})$, $P_2(t, \sqrt{2t+4})$ 이므로

$$S_1(t)=\frac{1}{2} \times (\sqrt{2t+4}-\sqrt{4-t^2}) \times t \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

점 Q_1 은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이고 y 좌표가 $\sqrt{t}$ 이므로

$$x^2+t=4\text{에서 } x^2=4-t$$

이때 점 Q_1 은 제2사분면 위의 점이므로 $x=-\sqrt{4-t}$

점 Q_2 는 곡선 $y=\sqrt{2x+4}$ 위의 점이고 y 좌표가 $\sqrt{t}$ 이므로

$$\sqrt{t}=\sqrt{2x+4}\text{에서 } t=2x+4 \quad \therefore x=\frac{1}{2}t-2$$

따라서 $Q_1(-\sqrt{4-t}, \sqrt{t})$, $Q_2(\frac{1}{2}t-2, \sqrt{t})$ 이므로

$$S_2(t)=\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}t-2+\sqrt{4-t}\right) \times \sqrt{t} \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S_1(t)}{\sqrt{t}S_2(t)}$$

$$=\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2} \times (\sqrt{2t+4}-\sqrt{4-t^2}) \times t}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}t-2+\sqrt{4-t}\right) \times t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2(\sqrt{2t+4}-\sqrt{4-t^2})}{t-4+2\sqrt{4-t}}$$

$$=\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2(\sqrt{2t+4}-\sqrt{4-t^2})(\sqrt{2t+4}+\sqrt{4-t^2})(t-4-2\sqrt{4-t})}{(t-4+2\sqrt{4-t})(t-4-2\sqrt{4-t})(\sqrt{2t+4}+\sqrt{4-t^2})}$$

$$=\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2(t^2+2t)(t-4-2\sqrt{4-t})}{(t^2-4t)(\sqrt{2t+4}+\sqrt{4-t^2})}$$

$$=\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2t(t+2)(t-4-2\sqrt{4-t})}{t(t-4)(\sqrt{2t+4}+\sqrt{4-t^2})}$$

$$=\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2(t+2)(t-4-2\sqrt{4-t})}{(t-4)(\sqrt{2t+4}+\sqrt{4-t^2})}$$

$$=\frac{2 \times 2 \times (-4-4)}{-4 \times (2+2)} = 2 \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

step 2 고난도 문제

| 20~24쪽

01 ⑤	02 ①	03 ②	04 $\frac{3}{2}$	05 64	06 1
07 ⑤	08 77	09 0	10 20	11 ③	12 22
13 60	14 ④	15 ⑤	16 ③	17 -3	18 ①
19 1	20 ③	21 ③	22 ④	23 ②	24 ②
25 2					

01 답 ⑤

ㄱ. $\frac{t+4}{t+1}=s$ 로 놓으면

$$s=\frac{(t+1)+3}{t+1}=\frac{3}{t+1}+1$$

$t \rightarrow \infty$ 일 때 $s \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{t+4}{t+1}\right)=\lim_{s \rightarrow 1+} f(s)=1$$

$\frac{2+t}{1-t}=u$ 로 놓으면

$$u=\frac{(t-1)+3}{-(t-1)}=-\frac{3}{t-1}-1$$

$t \rightarrow -\infty$ 일 때 $u \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f\left(\frac{2+t}{1-t}\right)=\lim_{u \rightarrow -1+} f(u)=1$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{t+4}{t+1}\right)+\lim_{t \rightarrow -\infty} f\left(\frac{2+t}{1-t}\right)=1+1=2$$

ㄴ. $g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(g(x))=\lim_{t \rightarrow 0+} f(t)=1$$

ㄷ. $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} g(f(x))=\lim_{t \rightarrow 1-} g(t)=1$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 $t=-1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} g(f(x))=g(-1)=1$$

즉, $\lim_{x \rightarrow -1+} g(f(x))=\lim_{x \rightarrow -1-} g(f(x))=1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow -1} g(f(x))$ 의 값이 존재한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

02 답 ①

$n < x < n+1$ 일 때, $[x]=n$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow n+} \frac{[x]^2+ax}{[x]}=\frac{n^2+an}{n}=n+a$$

$n-1 < x < n$ 일 때, $[x]=n-1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow n-} \frac{[x]^2+ax}{[x]}=\frac{(n-1)^2+an}{n-1}=n-1+\frac{an}{n-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow n+} \frac{[x]^2+ax}{[x]}=\lim_{x \rightarrow n-} \frac{[x]^2+ax}{[x]}=n^2-4n+7\text{이므로}$$

$$n+a=n-1+\frac{an}{n-1}=n^2-4n+7$$

$$n+a=n-1+\frac{an}{n-1}\text{에서}$$

$$a+1=\frac{an}{n-1}$$

$$(a+1)(n-1)=an$$

$$\therefore a=n-1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$n+a=n^2-4n+7$ 에 ①을 대입하면

$$n+(n-1)=n^2-4n+7$$

$$n^2-6n+8=0, (n-2)(n-4)=0$$

$$\therefore n=2 \text{ 또는 } n=4$$

①에서

$$n=2 \text{ 일 때, } a=1 \quad \therefore a^2+n^2=1+4=5$$

$$n=4 \text{ 일 때, } a=3 \quad \therefore a^2+n^2=9+16=25$$

따라서 모든 a^2+n^2 의 값의 합은

$$5+25=30$$

비법 NOTE

$[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수일 때, 정수 n 에 대하여

$$(1) n \leq x < n+1 \text{ 이면 } [x]=n$$

$$(2) [x]=n \text{ 이면 } n \leq x < n+1$$

03 답 ②

ㄱ. [반례] $f(x)=\frac{1}{x-a}$, $g(x)=1$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)=1$,

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} (x-a) = 0$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x-a}$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases} 1 & (x < 0) \\ 0 & (x \geq 0) \end{cases}$, $g(x)=x^2$ 이라 하자.

$g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = 0$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \alpha$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} \times \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} \times f(x)g(x) \right\} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \{g(x)\}^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{\{g(x)\}^2} = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

idea 04 답 3/2

$6x=[6x]+\alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$)라 하면 $[6x]=6x-\alpha$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2+[6x]}-2x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2+6x-\alpha}-2x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2+6x-\alpha}-2x)(\sqrt{4x^2+6x-\alpha}+2x)}{\sqrt{4x^2+6x-\alpha}+2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x-\alpha}{\sqrt{4x^2+6x-\alpha}+2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-\frac{\alpha}{x}}{\sqrt{4+\frac{6}{x}-\frac{\alpha}{x^2}}+2}$$

$$= \frac{6}{2+2} = \frac{3}{2}$$

05 답 64

$y=x^2+4x$ ($x \geq 0$)라 하면 $y=(x+2)^2-4$

$$(x+2)^2=y+4, x+2=\sqrt{y+4} \quad \therefore x=\sqrt{y+4}-2$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{x+4}-2$

따라서 $f(x)=x^2+4x$ ($x \geq 0$), $f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}-2$ ($x \geq 0$)이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(f(x))}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(x^2+4x)^2+4(x^2+4x)}{x^2+4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} (x^2+4x+4) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{(x^2+4x)(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x(x+4)(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{(x+4)(\sqrt{x+4}+2)} \\ &= \frac{1}{4 \times (2+2)} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{17f(f(x))}{f(x)+f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{17 \times \frac{f(f(x))}{f(x)}}{1 + \frac{f^{-1}(x)}{f(x)}} = \frac{17 \times 4}{1 + \frac{1}{16}} = 64$$

06 답 1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a+x^{2n}-\sqrt{a^2+x^n}}{x^6+x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x^{2n}-\sqrt{a^2+x^n})(a+x^{2n}+\sqrt{a^2+x^n})}{(x^6+x^4)(a+x^{2n}+\sqrt{a^2+x^n})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x^{2n})^2-(a^2+x^n)}{(x^6+x^4)(a+x^{2n}+\sqrt{a^2+x^n})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{4n}+2ax^{2n}-x^n}{(x^6+x^4)(a+x^{2n}+\sqrt{a^2+x^n})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n(x^{3n}+2ax^n-1)}{x^4(x^2+1)(a+x^{2n}+\sqrt{a^2+x^n})} \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \text{배점 30\%} \end{aligned}$$

(i) $n < 4$ 일 때,

①에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a+x^{2n}-\sqrt{a^2+x^n}}{x^6+x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{3n}+2ax^n-1}{x^{4-n}(x^2+1)(a+x^{2n}+\sqrt{a^2+x^n})}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$, (분자) $\rightarrow -1$ 이므로 극한값이 존재하지 않는다. $\dots\dots$ 배점 20%

(ii) $n = 4$ 일 때,

①에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a+x^{2n}-\sqrt{a^2+x^n}}{x^6+x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4(x^{12}+2ax^4-1)}{x^4(x^2+1)(a+x^8+\sqrt{a^2+x^4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{12}+2ax^4-1}{(x^2+1)(a+x^8+\sqrt{a^2+x^4})} \\ &= \frac{-1}{a+a} = -\frac{1}{2a} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{1}{2a} = 2(a-1) \text{ 이므로}$$

$$-1 = 4a(a-1), 4a^2-4a+1=0$$

$$(2a-1)^2=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

$$\therefore n-4a=4-4 \times \frac{1}{2}=2 \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

(iii) $n > 4$ 일 때,

㉠에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + x^{2n} - \sqrt{a^2 + x^{2n}}}{x^6 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{n-4}(x^{3n} + 2ax^n - 1)}{(x^2 + 1)(a + x^{2n} + \sqrt{a^2 + x^{2n}})}$$

$$= \frac{0}{a + a} = 0$$

즉, $0 = 2(a-1)$ 이므로

$$a = 1$$

$n = 5$ 일 때, $n - 4a = 5 - 4 = 1$

$n = 6$ 일 때, $n - 4a = 6 - 4 = 2$

$n = 7$ 일 때, $n - 4a = 7 - 4 = 3$

⋮

따라서 $n - 4a$ 의 최솟값은 1이다. 배점 20%

(i), (ii), (iii)에서 $n - 4a$ 의 최솟값은 1이다. 배점 10%

07 답 ⑤

$$\frac{f(\sqrt[3]{f(x)} - 1)}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

$$= \frac{f(\sqrt[3]{f(x)} - 1)}{\sqrt[3]{f(x)} - 1} \times \frac{\sqrt[3]{f(x)} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

$$= \frac{f(\sqrt[3]{f(x)} - 1)}{\sqrt[3]{f(x)} - 1} \times \frac{\{ \sqrt[3]{f(x)} - 1 \} [\sqrt[3]{\{f(x)\}^2 + \sqrt[3]{f(x)} + 1 }]}{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{x} + 1})}$$

$$\times \frac{\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{x} + 1}}{\sqrt[3]{\{f(x)\}^2 + \sqrt[3]{f(x)} + 1}}$$

$$= \frac{f(\sqrt[3]{f(x)} - 1)}{\sqrt[3]{f(x)} - 1} \times \frac{f(x) - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{x} + 1}}{\sqrt[3]{\{f(x)\}^2 + \sqrt[3]{f(x)} + 1}}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 2$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 1\} = 0$ 에서

$$f(1) - 1 = 0 \quad \therefore f(1) = 1$$

$\sqrt[3]{f(x)} - 1 = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $f(x) \rightarrow 1$ 이므로 $t \rightarrow 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(\sqrt[3]{f(x)} - 1)}{\sqrt[3]{f(x)} - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(\sqrt[3]{f(x)} - 1)}{\sqrt[3]{x} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(\sqrt[3]{f(x)} - 1)}{\sqrt[3]{f(x)} - 1} \times \frac{f(x) - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{x} + 1}}{\sqrt[3]{\{f(x)\}^2 + \sqrt[3]{f(x)} + 1}} \right]$$

$$= 3 \times 2 \times \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1 + 1} = 6$$

08 답 77

㉡의 $f(x) + ax + b = (x-3)^2 g(x)$ 에서

$$f(x) = (x-3)^2 g(x) - ax - b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉢의 $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$ 에서 $g(2) = 3$

㉢의 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - g(x)}{x - 2} = 1$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - g(x)\} = 0$ 에서

$$f(2) - g(2) = 0 \quad \therefore f(2) = g(2)$$

이때 $g(2) = 3$ 이므로 $f(2) = 3$

㉠의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(2) = g(2) - 2a - b$$

$$\therefore b = -2a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore f(x) = (x-3)^2 g(x) - ax + 2a$$

이를 ㉢의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - g(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)^2 g(x) - ax + 2a - g(x)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 6x + 8)g(x) - ax + 2a}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-4)g(x) - a(x-2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \{(x-4)g(x) - a\}$$

$$= -2 \times 3 - a = -a - 6$$

즉, $-a - 6 = 1$ 이므로 $a = -7$

이를 ㉢에 대입하면 $b = 14$

따라서 $f(x) = (x-3)^2 g(x) + 7x - 14$ 이므로

$$f(3) = 21 - 14 = 7$$

$$\therefore af(2) + bf(3) = -7 \times 3 + 14 \times 7 = 77$$

09 답 0

$f(x)$ 를 $x^2 - 1$ 로 나누었을 때의 몫이 $g(x)$ 이므로

$$f(x) = (x^2 - 1)g(x) + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하자.}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x^2 + x}{x - 1} = 3$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재

하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + x^2 + x\} = 0$ 에서

$$f(1) + 1 + 1 = 0 \quad \therefore f(1) = -2$$

$f(x) = (x^2 - 1)g(x) + ax + b$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$-2 = a + b \quad \therefore b = -a - 2$$

$$\therefore f(x) = (x^2 - 1)g(x) + ax - a - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이를 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x^2 + x}{x - 1} = 3$ 의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x^2 + x}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)g(x) + ax - a - 2 + x^2 + x}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)g(x) + a(x-1) + (x+2)(x-1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \{(x+1)g(x) + a + x + 2\}$$

$$= 2g(1) + a + 3$$

즉, $2g(1) + a + 3 = 3$ 이므로

$$2g(1) + a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x)g(x) + 2g(x)|}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x) + 2| \times |g(x)|}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|(x^2 - 1)g(x) + ax - a| \times |g(x)|}{x - 1} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|(x+1)(x-1)g(x) + a(x-1)| \times |g(x)|}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1| \times |(x+1)g(x) + a| \times |g(x)|}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{|x-1|}{x-1} \times |(x+1)g(x) + a| \times |g(x)| \right\}$$

$x > 1$ 일 때 $\frac{|x-1|}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|f(x)g(x) + 2g(x)|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \{ |(x+1)g(x) + a| \times |g(x)| \}$$

$$= |2g(1) + a| \times |g(1)| = 0 \quad (\because \textcircled{C})$$

$x < 1$ 일 때 $\frac{|x-1|}{x-1} = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|f(x)g(x) + 2g(x)|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \{ -|(x+1)g(x) + a| \times |g(x)| \}$$

$$= -|2g(1) + a| \times |g(1)| = 0 \quad (\because \textcircled{C})$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x)g(x) + 2g(x)|}{x-1} = 0$$

10 답 20

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x-1}$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x-1) = 0$ 에서 $f(0) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 1$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ 에서 $f(2) = 0$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x) + 6x^2}{f(x) + x^3} = 1$ 에서 $f(x)$ 가 이차 이하의 다항함수이면

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x) + 6x^2}{f(x) + x^3} = 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

□ (분자의 차수) < (분모의 차수)
또 $f(x)$ 가 사차 이상의 다항함수이면 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x) + 6x^2}{f(x) + x^3} = 2$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다. □ (분자의 차수) = (분모의 차수)

따라서 $f(x)$ 는 삼차함수이고 $f(0) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $f(x) = x(x-2)(ax+b)$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하자.

이를 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x) + 6x^2}{f(x) + x^3} = 1$ 의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x) + 6x^2}{f(x) + x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x(x-2)(ax+b) + 6x^2}{x(x-2)(ax+b) + x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\left(1 - \frac{2}{x}\right)\left(a + \frac{b}{x}\right) + \frac{6}{x}}{\left(1 - \frac{2}{x}\right)\left(a + \frac{b}{x}\right) + 1} = \frac{2a}{a+1}$$

즉, $\frac{2a}{a+1} = 1$ 이므로

$$2a = a+1 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore f(x) = x(x-2)(x+b)$$

이를 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 1$ 의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(x+b)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} x(x+b)$$

$$= 2(2+b)$$

즉, $2(2+b) = 1$ 이므로

$$2b = -3 \quad \therefore b = -\frac{3}{2}$$

따라서 $f(x) = x(x-2)\left(x - \frac{3}{2}\right)$ 이므로

$$f(4) = 4 \times 2 \times \frac{5}{2} = 20$$

11 답 ③

(i) $n = 1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 4x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} = 6 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①에서 $f(x) - 4x^3 + 3x^2$ 은 최고차항의 계수가 6인 이차함수이므로

$f(x) - 4x^3 + 3x^2 = 6x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 + ax + b$$

②에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 에서

$$f(0) = 0 \quad \therefore b = 0$$

$$\therefore f(x) = 4x^3 + 3x^2 + ax$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + 3x^2 + ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (4x^2 + 3x + a) = a$$

$$\therefore a = 4$$

따라서 $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 4x$ 이므로

$$f(1) = 4 + 3 + 4 = 11$$

(ii) $n = 2$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 4x^3 + 3x^2}{x^3 + 1} = 6 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

③에서 $f(x) - 4x^3 + 3x^2$ 은 최고차항의 계수가 6인 삼차함수이므로

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 10인 삼차함수이고, ④에서 $f(x)$ 는 x^2 을 인수로 가지므로 $f(x) = 10x^2(x+c)$ (c 는 상수)라 하자.

이를 ③의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x^2(x+c)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 10(x+c) = 10c$$

즉, $10c = 4$ 이므로 $c = \frac{2}{5}$

따라서 $f(x) = 10x^2\left(x + \frac{2}{5}\right)$ 이므로

$$f(1) = 10 \times \frac{7}{5} = 14$$

(iii) $n \geq 3$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 4x^3 + 3x^2}{x^{n+1} + 1} = 6 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{F}$$

⑤에서 $f(x) - 4x^3 + 3x^2$ 은 최고차항의 계수가 6인 $(n+1)$ 차 함수

이므로 $f(x)$ 도 최고차항의 계수가 6인 $(n+1)$ 차 함수이고, ⑥에서

$f(x)$ 는 x^n 을 인수로 가지므로 $f(x) = 6x^n(x+d)$ (d 는 상수)라 하자.

이를 ⑤의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^n(x+d)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} 6(x+d) = 6d$$

즉, $6d = 4$ 이므로 $d = \frac{2}{3}$

따라서 $f(x) = 6x^n\left(x + \frac{2}{3}\right)$ 이므로

$$f(1) = 6 \times \frac{5}{3} = 10$$

(i), (ii), (iii)에서 $f(1)$ 의 최댓값은 14이다.

12 답 22

(가)의 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2 - f(x^2)}{x^3 f(x)} = 2$ 에서 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a ($a \neq 0$)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2 - f(x^2)}{x^3 f(x)} = \frac{a^2 - a}{a} = a - 1$$

즉, $a - 1 = 2$ 이므로 $a = 3$

따라서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 삼차함수이다. 배점 30%

(나)에서 $\alpha\beta = 0$ 이므로

$\alpha = 0$ 또는 $\beta = 0$

(i) $\alpha = 0$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 에서 $f(0) = 0$

따라서 $f(x) = 3x(x^2 + bx + c)$ (b, c 는 상수)라 하고 $\textcircled{1}$ 의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x(x^2 + bx + c)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 3(x^2 + bx + c) = 3c \end{aligned}$$

즉, $3c = 0$ 이므로 $c = 0$

$\therefore f(x) = 3x(x^2 + bx) = 3x^2(x + b)$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \beta$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 1\} = 0$ 에서

$$f(1) - 1 = 0 \quad \therefore f(1) = 1$$

$f(x) = 3x^2(x + b)$ 에서

$$3(1 + b) = 1, \quad 3b = -2 \quad \therefore b = -\frac{2}{3}$$

따라서 $f(x) = 3x^2\left(x - \frac{2}{3}\right)$ 이므로

$$f(2) = 3 \times 4 \times \frac{4}{3} = 16 \quad \dots \dots \dots \text{배점 30\%}$$

(ii) $\beta = 0$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 0 \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 1\} = 0$ 에서

$$f(1) - 1 = 0$$

$f(x) - 1 = 3(x - 1)(x^2 + dx + e)$ (d, e 는 상수)라 하고 $\textcircled{2}$ 의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x - 1)(x^2 + dx + e)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} 3(x^2 + dx + e) = 3(1 + d + e) \end{aligned}$$

즉, $3(1 + d + e) = 0$ 이므로 $e = -d - 1$

$$\therefore f(x) - 1 = 3(x - 1)(x^2 + dx - d - 1) = 3(x - 1)^2(x + d + 1)$$

$$\therefore f(x) = 3(x - 1)^2(x + d + 1) + 1$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 에서 $f(0) = 0$

$$f(x) = 3(x - 1)^2(x + d + 1) + 1 \text{에서}$$

$$3(d + 1) + 1 = 0, \quad 3d = -4 \quad \therefore d = -\frac{4}{3}$$

따라서 $f(x) = 3(x - 1)^2\left(x - \frac{1}{3}\right) + 1$ 이므로

$$f(2) = 3 \times 1 \times \frac{5}{3} + 1 = 6 \quad \dots \dots \dots \text{배점 30\%}$$

(i), (ii)에서 모든 $f(2)$ 의 값의 합은

$$16 + 6 = 22 \quad \dots \dots \dots \text{배점 10\%}$$

비법 NOTE

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = 0$ 이면 $x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 에서 $f(a) = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - a$ 를 인수로 갖는다.

$$f(x) = (x - a)g(x) \text{라 하면 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x - a} = 0 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)g(x)}{x - a} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \therefore g(a) = 0$$

따라서 $g(x)$ 도 $x - a$ 를 인수로 가지므로 $f(x)$ 는 $(x - a)^2$ 을 인수로 갖는다.

13 답 60

(가)에서 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 5x}{x^2 - 4}$ 의 값이 존재하므로

$x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 인 경우에도 극한값이 존재한다.

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^2 - 4) = 0 \text{에서 } a^2 - 4 = 0$$

$$(a + 2)(a - 2) = 0 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 2$$

$a = -2$ 이면 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 5x}{x^2 - 4}$ 에서 $x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -2} \{f(x) - 5x\} = 0$ 에서

$$f(-2) + 10 = 0 \quad \therefore f(-2) = -10$$

또 $a = 2$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5x}{x^2 - 4}$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - 5x\} = 0$ 에서

$$f(2) - 10 = 0 \quad \therefore f(2) = 10$$

(나)에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{f(x)} - 3x + 1\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{\sqrt{f(x)} - 3x + 1\} \{\sqrt{f(x)} + 3x - 1\}}{\sqrt{f(x)} + 3x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (3x - 1)^2}{\sqrt{f(x)} + 3x - 1} \quad \dots \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$f(x)$ 가 일차 이하의 다항함수이면 $\textcircled{1}$ 에서 분자의 최고차항의 차수는 이차, 분모의 최고차항의 차수는 일차이므로 극한값이 존재하지 않는다.

$f(x)$ 가 삼차 이상의 다항함수이면 $\textcircled{1}$ 에서 분자의 최고차항의 차수가 분모의 최고차항의 차수보다 항상 크므로 극한값이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$ 는 이차함수이므로

$f(x) = bx^2 + cx + d$ (b, c, d 는 상수, $b \neq 0$)라 하면 $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - (3x - 1)^2}{\sqrt{f(x)} + 3x - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx^2 + cx + d - (3x - 1)^2}{\sqrt{bx^2 + cx + d} + 3x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(b - 9)x^2 + (c + 6)x + d - 1}{\sqrt{bx^2 + cx + d} + 3x - 1} \end{aligned}$$

이때 극한값이 존재하므로

$$b - 9 = 0 \quad \therefore b = 9$$

$$\therefore f(x) = 9x^2 + cx + d$$

$f(-2) = -10$ 에서
 $36 - 2c + d = -10 \quad \therefore 2c - d = 46 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$
 $f(2) = 10$ 에서
 $36 + 2c + d = 10 \quad \therefore 2c + d = -26 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$
 $\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒}$ 을 연립하여 풀면
 $c = 5, d = -36$
 따라서 $f(x) = 9x^2 + 5x - 36$ 이므로
 $f(3) = 81 + 15 - 36 = 60$

14 답 ④

모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{|x-1||x-2|}$ 의 값이 존재하므로 $x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 인 경우에도 극한값이 존재한다.
 $a=1$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{|x-1||x-2|}$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 에서 $f(1) = 0$
 또 $a=2$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{|x-1||x-2|}$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ 에서 $f(2) = 0$
 사차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(1) = 0, f(2) = 0$ 이므로
 $f(x) = (x-1)(x-2)(x^2 + bx + c)$ (b, c 는 상수)라 하자.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{|x-1||x-2|}$ 의 값이 존재하므로
 $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{|x-1||x-2|} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{|x-1||x-2|}$ 에서
 $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{|x-1||x-2|} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)(x-2)(x^2 + bx + c)}{-(x-1)(x-2)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1+} \{-(x^2 + bx + c)\} = -1 - b - c$
 $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{|x-1||x-2|} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x-1)(x-2)(x^2 + bx + c)}{(x-1)(x-2)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2 + bx + c) = 1 + b + c$
 즉, $-1 - b - c = 1 + b + c$ 이므로
 $c = -b - 1$
 $\therefore f(x) = (x-1)(x-2)(x^2 + bx - b - 1)$
 $= (x-1)^2(x-2)(x+b+1)$
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{|x-1||x-2|}$ 의 값이 존재하므로
 $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)}{|x-1||x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)}{|x-1||x-2|}$ 에서
 $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)}{|x-1||x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-1)^2(x-2)(x+b+1)}{(x-1)(x-2)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2+} (x-1)(x+b+1) = b+3$
 $\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)}{|x-1||x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x-1)^2(x-2)(x+b+1)}{-(x-1)(x-2)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2-} \{-(x-1)(x+b+1)\} = -b-3$
 즉, $b+3 = -b-3$ 이므로
 $2b = -6$
 $\therefore b = -3$
 따라서 $f(x) = (x-1)^2(x-2)^2$ 이므로
 $f(-1) + f(0) = 4 \times 9 + 1 \times 4 = 40$

idea

15 답 ⑤

$0 \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ 에서
 $0 \leq 2f(x) \leq 2g(x) \leq 2h(x) \leq 3h(x)$ 이므로
 $0 \leq 2h(x) - 2f(x) \leq 3h(x) - 2f(x)$
 이때 $\lim_{x \rightarrow a} \{3h(x) - 2f(x)\} = 0$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여
 $\lim_{x \rightarrow a} \{2h(x) - 2f(x)\} = 0$
 $\{3h(x) - 2f(x)\} - \{2h(x) - 2f(x)\} = h(x)$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} [\{3h(x) - 2f(x)\} - \{2h(x) - 2f(x)\}] = 0$
 $0 \leq f(x) \leq h(x)$ 에서 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$
 또 $0 \leq g(x) \leq h(x)$ 에서 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow a} \{2 - f(x)\} \{3 - g(x)\} \{4 - h(x)\} = 2 \times 3 \times 4 = 24$

16 답 ③

$|xf(x) + f(x)g(x)| \leq |x - g(x)|$ 에서
 $0 \leq |f(x)| \times |x + g(x)| \leq |x - g(x)| \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$
 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$ 에서 $g(1) = 1$
 ㄱ. ㉑의 각 변을 $|x + g(x)|$ 로 나누면 $\rightarrow g(1) = 1$ 에서 $g(x) \neq -x$ 이므로 $x + g(x) \neq 0$
 $0 \leq |f(x)| \leq \frac{|x - g(x)|}{|x + g(x)|}$
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - g(x)|}{|x + g(x)|} = \frac{|1 - 1|}{|1 + 1|} = 0$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여
 $\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)| = 0$
 이때 $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$
 ㄴ. $f(x) \neq 0$ 일 때, ㉑의 각 변을 $|f(x)|$ 로 나누면
 $0 \leq |x + g(x)| \leq \frac{|x - g(x)|}{|f(x)|}$
 $\lim_{x \rightarrow 1} |x + g(x)| = |1 + 1| = 2$ 이고,
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - g(x)}{f(x)} = a$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - g(x)|}{|f(x)|} = |a| = a$ ($\because a > 0$)이므로
 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $a \geq 2$
 따라서 양수 a 의 최솟값은 2이다.
 ㄷ. $x - xf(x) = g(x) + f(x)g(x)$ 에서
 $f(x)\{x + g(x)\} = x - g(x) \quad \therefore f(x) = \frac{x - g(x)}{x + g(x)}$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - g(x)}{x + g(x)} = \frac{-g(0)}{g(0)} = -1$
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x-1)$ 에서 $x-1 = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x-1) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = -1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + g(x)}{f(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{x^3 + g(x)\}}{\lim_{x \rightarrow 1} f(x-1)} = \frac{1+1}{-1} = -2$
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

17 답 -3

$$-2x = 2x^3 - 8x^2 + 6x \text{에서}$$

$$2x^3 - 8x^2 + 8x = 0, 2x(x-2)^2 = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

$$x \geq 0 \text{에서 } -2x \leq f(x) \leq 2x^3 - 8x^2 + 6x \text{이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (-2x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0+} (2x^3 - 8x^2 + 6x) = 0 \text{이므로 함수의 극한의 대소}$$

관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0 \quad \therefore f(0) = 0$$

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow 2} (-2x) = -4, \lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 8x^2 + 6x) = -4 \text{이므로 함수의 극한의}$$

대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -4 \quad \therefore f(2) = -4$$

따라서 다항함수 $f(x)$ 는 상수함수가 아니다.

(i) $f(x)$ 가 일차함수일 때,

최고차항의 계수가 1인 일차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(0)=0$ 이므로

$$f(x) = x$$

이때 $f(1)=1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다. $\rightarrow f(2)=-4$ 도 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)$ 가 이차함수일 때,

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(0)=0$ 이므로

$$f(x) = x(x+a) \text{ (} a \text{는 상수)라 하자.}$$

$$f(2) = -4 \text{에서}$$

$$2(2+a) = -4$$

$$2a = -8 \quad \therefore a = -4$$

$$\therefore f(x) = x(x-4)$$

이때 $f(1) = -3$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $f(x)$ 가 삼차함수일 때,

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(0)=0$ 이므로

$$f(x) = x(x^2 + bx + c) \text{ (} b, c \text{는 상수)라 하자.}$$

$$f(2) = -4 \text{에서}$$

$$2(4 + 2b + c) = -4$$

$$\therefore 2b + c = -6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(1) = -1 \text{에서}$$

$$1 + b + c = -1$$

$$\therefore b + c = -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$b = -4, c = 2$$

$$\therefore f(x) = x(x^2 - 4x + 2)$$

(iv) $f(x)$ 가 사차 이상의 다항함수일 때,

최고차항의 계수가 1인 사차 이상의 다항함수 $f(x)$ 를

$f(x) = x^n + g(x)$ (n 은 4 이상의 자연수, $g(x)$ 는 $(n-1)$ 차 이하의 다항함수)라 하자.

$$-2x \leq f(x) \leq 2x^3 - 8x^2 + 6x \text{에서}$$

$$x^n + g(x) \leq 2x^3 - 8x^2 + 6x$$

$$x > 0 \text{에서}$$

$$1 + \frac{g(x)}{x^n} \leq \frac{2x^3 - 8x^2 + 6x}{x^n}$$

그런데 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x^n} = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{g(x)}{x^n} \right\} = 1$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 8x^2 + 6x}{x^n} = 0 \text{이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

(i)~(iv)에서 $f(x) = x(x^2 - 4x + 2)$ 이므로

$$f(3) = 3 \times (9 - 12 + 2) = -3$$

18 답 ①

$$f(x) = \left| \frac{kx}{x-1} \right| = \left| \frac{k(x-1)+k}{x-1} \right| \\ = \left| \frac{k}{x-1} + k \right|$$

이고 $k > 0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 그림과 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 개수 $g(t)$ 는

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t = 0 \text{ 또는 } t = k) \\ 2 & (0 < t < k \text{ 또는 } t > k) \end{cases}$$

모든 양수 a 에 대하여 $\lim_{t \rightarrow a-} g(t) = 2$ 이므로 $\rightarrow$

$$\lim_{t \rightarrow 2-} g(t) = 2$$

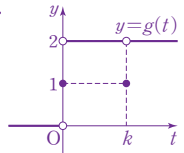
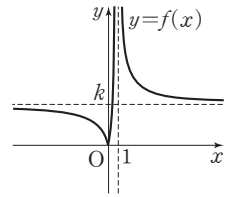
$$\lim_{t \rightarrow 0+} g(t) + \lim_{t \rightarrow 2-} g(t) + g(4) = 5 \text{에서}$$

$$2 + 2 + g(4) = 5 \quad \therefore g(4) = 1$$

$$\therefore k = 4 \text{ (} \because k > 0 \text{)}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \left| \frac{4x}{x-1} \right| \text{이므로}$$

$$f(3) = \left| \frac{12}{3-1} \right| = 6$$



19 답 1

원 C 가 점 $P(0, t)$ 에서 y 축에 접하므로

원 C 의 중심을 C 라 하면

$$C(r(t), t)$$

원 C 의 방정식은

$$\{x - r(t)\}^2 + \{y - t\}^2 = \{r(t)\}^2$$

이 원이 점 $A(1, 0)$ 을 지나므로

$$\{1 - r(t)\}^2 + t^2 = \{r(t)\}^2$$

$$2r(t) = t^2 + 1$$

$$\therefore r(t) = \frac{t^2 + 1}{2}$$

원의 중심 C 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{OH} = r(t), \overline{OA} = 1$$

$$\therefore \overline{AH} = r(t) - 1$$

삼각형 CAB 는 이등변삼각형이므로 $\overline{AH} = \overline{BH}$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\{r(t) - 1\}$$

따라서 삼각형 PAB 의 넓이는

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OP} = \frac{1}{2} \times 2\{r(t) - 1\} \times t$$

$$= t\{r(t) - 1\} = t \left\{ \frac{t^2 + 1}{2} - 1 \right\}$$

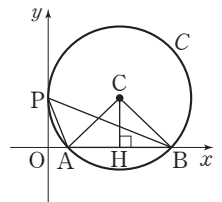
$$= \frac{t(t^2 - 1)}{2}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{S(t)}{(t-1)r(t)} = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\frac{t(t^2 - 1)}{2}}{\frac{(t-1)(t^2 + 1)}{2}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{t(t+1)(t-1)}{(t-1)(t^2 + 1)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{t(t+1)}{t^2 + 1}$$

$$= \frac{1 \times 2}{1 + 1} = 1$$

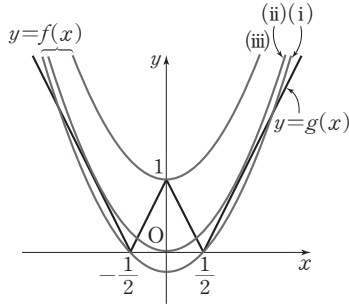


20 답 ③

$$g(x) = ||2x| - 1|$$

$$= \begin{cases} -2x-1 & (x < -\frac{1}{2}) \\ 2x+1 & (-\frac{1}{2} \leq x < 0) \\ -2x+1 & (0 \leq x < \frac{1}{2}) \\ 2x-1 & (x \geq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같고 모두 y 축에 대하여 대칭이다.



(i) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(\frac{1}{2}, 0)$ 을 지날 때,

$f(\frac{1}{2})=0$ 에서 $\rightarrow$ 점 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 을 지나는 경우와 같다.

$$\frac{1}{4} + a = 0 \quad \therefore a = -\frac{1}{4}$$

(ii) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=2x-1$ 에 접할 때,

$x^2+a=2x-1$ 에서 $\rightarrow$ 직선 $y=-2x-1$ 에 접하는 경우와 같다.

$$x^2 - 2x + a + 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - (a+1) = 0 \quad \therefore a = 0$$

(iii) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지날 때,

$$f(0)=1 \text{에서 } a=1$$

(i), (ii), (iii)에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수 $h(a)$ 는

$$h(a) = \begin{cases} 2 & (a < -\frac{1}{4} \text{ 또는 } 0 < a < 1) \\ 4 & (a = -\frac{1}{4} \text{ 또는 } a = 0) \\ 6 & (-\frac{1}{4} < a < 0) \\ 1 & (a = 1) \\ 0 & (a > 1) \end{cases}$$

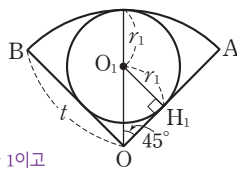
따라서 $\lim_{a \rightarrow k} h(a)$ 의 값이 존재하지 않도록 하는 실수 k 는 $-\frac{1}{4}$, 0, 1의 3개이다.

21 답 ③

부채꼴 AOB의 내접원의 중심을 O_1 , 내접원이 선분 OA와 접하는 점을 H_1 이라 하면 $\angle OH_1O_1 = 90^\circ$

직각삼각형 OH_1O_1 에서 $\angle O_1OH_1 = 45^\circ$ 이

므로 $\sin 45^\circ = \frac{O_1H_1}{OO_1}$ $\rightarrow$ 직선 OA의 기울기가 1이고 $\tan 45^\circ = 1$ 이므로 $\angle O_1OH_1 = 45^\circ$



$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{r_1}{t-r_1}, \quad 2r_1 = \sqrt{2}(t-r_1), \quad (2+\sqrt{2})r_1 = \sqrt{2}t$$

$$\therefore r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}t = \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}t = (\sqrt{2}-1)t$$

부채꼴 BOC의 내접원의 중심을 O_2 , 내접원이 선분 OB와 접하는 점을 H_2 라 하면

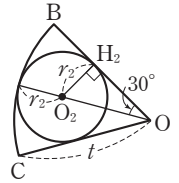
$$\angle OH_2O_2 = 90^\circ$$

직각삼각형 OH_2O_2 에서 $\angle O_2OH_2 = 30^\circ$ 이므로

$$\sin 30^\circ = \frac{O_2H_2}{OO_2}, \quad \frac{1}{2} = \frac{r_2}{t-r_2}$$

$$2r_2 = t - r_2, \quad 3r_2 = t \quad \therefore r_2 = \frac{1}{3}t$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{3r_2 - r_1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t - (\sqrt{2}-1)t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{(2-\sqrt{2})t}{t} = 2 - \sqrt{2}$$



22 답 ④

함수 $f(x) = \frac{ax+5}{x-1}$ 의 그래프와 직선 $y=ax$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{ax+5}{x-1} = ax, \quad ax+5 = ax^2 - ax$$

$$ax^2 - 2ax - 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 α, β ($\alpha > \beta$)라 하면 α, β 는 이차방정식 ①의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -\frac{5}{a}$$

$$f(x) = \frac{a(x-1)+a+5}{x-1} = \frac{a+5}{x-1} + a$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=ax$ 는 그림과 같다.

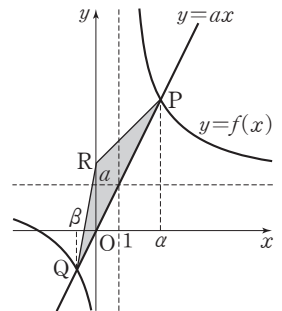
따라서 삼각형 PRQ의 넓이는

$$\begin{aligned} \triangle PRQ &= \triangle OPR + \triangle OQR \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{OR} \times \alpha + \frac{1}{2} \times \overline{OR} \times (-\beta) \\ &= \frac{1}{2} \overline{OR} (\alpha - \beta) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \overline{OR} (\alpha - \beta) = 3 \text{이므로}$$

$$\overline{OR} = \frac{6}{\alpha - \beta} = \frac{6}{\sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}} = \frac{6}{\sqrt{4 + \frac{20}{a}}} = \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{5}{a}}}$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow \infty} \overline{OR} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{5}{a}}} = 3$$



23 답 ②

두 선분 OP, AB가 만나는 점을 M이라 하면 선분 OP는 선분 AB를 수직이등분한다.

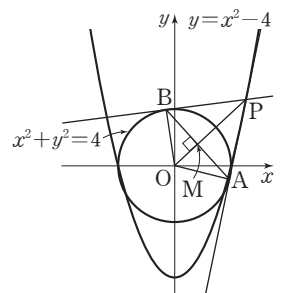
$$\angle OAP = \angle OMA = 90^\circ \text{이고}$$

$$\angle AOP \text{는 공통이므로}$$

$$\triangle OAP \sim \triangle OMA \text{ (AA 닮음)}$$

두 삼각형 OAP, OMA의 닮음비는

$$\overline{OP} : \overline{OA} \text{이므로 넓이의 비는 } \overline{OP}^2 : \overline{OA}^2$$



한편 삼각형 OAB의 넓이가 $S(t)$, 삼각형 PBA의 넓이가 $T(t)$ 이므로 삼각형 OAP의 넓이는 $\frac{S(t)+T(t)}{2}$, 삼각형 OMA의 넓이는 $\frac{S(t)}{2}$ 이다.

$$\therefore \frac{S(t)+T(t)}{2} : \frac{S(t)}{2} = \overline{OP}^2 : \overline{OA}^2 \text{이므로}$$

$$\overline{OP}^2 \times S(t) = \overline{OA}^2 \{S(t)+T(t)\}$$

$$(\overline{OP}^2 - \overline{OA}^2)S(t) = \overline{OA}^2 \times T(t)$$

$$\therefore \frac{T(t)}{S(t)} = \frac{\overline{OP}^2 - \overline{OA}^2}{\overline{OA}^2}$$

이때 $\overline{OA}=2$, $\overline{OP}=\sqrt{t^2+(t^2-4)^2}$ 이므로

$$\frac{T(t)}{S(t)} = \frac{\overline{OP}^2 - \overline{OA}^2}{\overline{OA}^2} = \frac{t^2 + (t^2-4)^2 - 4}{4} = \frac{t^4 - 7t^2 + 12}{4}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -2+} \frac{T(t)}{(t-2)S(t)} &= \lim_{t \rightarrow -2+} \frac{t^4 - 7t^2 + 12}{4(t-2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow -2+} \frac{(t+2)(t-2)(t^2-3)}{4(t-2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow -2+} \frac{(t+2)(t^2-3)}{4} \\ &= \frac{4 \times 1}{4} = 1 \end{aligned}$$

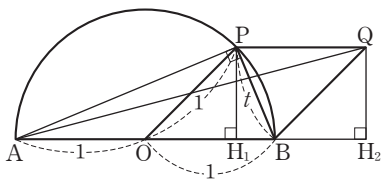
$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^4 - 7t^2 + 12}{4(t^4-2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^4 - 7t^2 + 12}{4t^4 - 8} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{7}{t^2} + \frac{12}{t^4}}{4 - \frac{8}{t^4}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow -2+} \frac{T(t)}{(t-2)S(t)} + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{T(t)}{(t^4-2)S(t)} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

24 답 ②

반원의 중심이 O이므로 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OP}=1$

그림과 같이 두 점 P, Q에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 각각 H₁, H₂라 하자.



원의 지름에 대한 원주각의 크기는 90°이므로 $\angle APB=90^\circ$

직각삼각형 ABP에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = \overline{AB}^2, \overline{AP}^2 + t^2 = 2^2$$

$$\therefore \overline{AP}^2 = 4 - t^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직각삼각형 OH₁P에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{OH_1}^2 + \overline{PH_1}^2 = \overline{OP}^2, \overline{OH_1}^2 + \overline{PH_1}^2 = 1^2$$

$$\therefore \overline{PH_1}^2 = 1 - \overline{OH_1}^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

직각삼각형 AH₁P에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AH_1}^2 + \overline{PH_1}^2 = \overline{AP}^2$$

$$(1 + \overline{OH_1})^2 + (1 - \overline{OH_1})^2 = 4 - t^2 \quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2})$$

$$2 + 2\overline{OH_1} = 4 - t^2$$

$$\therefore \overline{OH_1} = \frac{2-t^2}{2}$$

직각삼각형 AH₂Q에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AH_2}^2 + \overline{QH_2}^2 = \overline{AQ}^2$$

이때 $\overline{BH_2}=\overline{OH_1}$, $\overline{QH_2}=\overline{PH_1}$ 이므로

$$\overline{AQ}^2 = (2 + \overline{OH_1})^2 + \overline{PH_1}^2$$

$$= (2 + \overline{OH_1})^2 + (1 - \overline{OH_1})^2 \quad (\because \textcircled{2})$$

$$= 4\overline{OH_1} + 5$$

$$= 4 \times \frac{2-t^2}{2} + 5$$

$$= 9 - 2t^2$$

$$\therefore \overline{AQ} = \sqrt{9 - 2t^2} \quad (\because \overline{AQ} > 0)$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{3 - \overline{AQ}}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{3 - \sqrt{9 - 2t^2}}{t^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{(3 - \sqrt{9 - 2t^2})(3 + \sqrt{9 - 2t^2})}{t^2(3 + \sqrt{9 - 2t^2})}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2t^2}{t^2(3 + \sqrt{9 - 2t^2})}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2}{3 + \sqrt{9 - 2t^2}}$$

$$= \frac{2}{3+3} = \frac{1}{3}$$

25 답 2

접선 l의 기울기를 m ($m > 0$)이라 하면 직선 l의 방정식은

$$y = m(x + a)$$

$$\therefore y = mx + am$$

점 (2, 0)과 직선 $y = mx + am$, 즉 $mx - y + am = 0$ 사이의 거리는

원 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ 의 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|2m + am|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2, \frac{(2m + am)^2}{m^2 + 1} = 4$$

$$m^2(a+2)^2 = 4(m^2+1), m^2(a^2+4a) = 4$$

$$m^2 = \frac{4}{a^2+4a} \quad (\because a > 0) \quad \therefore m = \frac{2}{\sqrt{a^2+4a}} \quad (\because m > 0)$$

따라서 직선 l의 방정식은 $y = \frac{2}{\sqrt{a^2+4a}}x + \frac{2a}{\sqrt{a^2+4a}}$ 이므로

$$P\left(0, \frac{2a}{\sqrt{a^2+4a}}\right)$$

점 P에서 원에 그은 접선의 길이는 같으므로 $\overline{PO} = \overline{PQ}$ 이고

$\angle APO = \angle RPQ$ (맞꼭지각), $\angle POA = \angle PQR = 90^\circ$ 이므로

$\triangle POA \cong \triangle PQR$ (ASA 합동)

$$\therefore \overline{PQ} = \overline{PO} = \frac{2a}{\sqrt{a^2+4a}},$$

$$\overline{QR} = \overline{OA} = a,$$

$$\overline{PR} = \overline{PA} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{2a}{\sqrt{a^2+4a}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^4 + 4a^3 + 4a^2}{a^2 + 4a}} = \sqrt{\frac{(a^2 + 2a)^2}{a^2 + 4a}}$$

$$= \frac{a^2 + 2a}{\sqrt{a^2 + 4a}} \quad (\because a > 0)$$

따라서 삼각형 PQR의 둘레의 길이는

$$l(a) = \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{PR} = \frac{2a}{\sqrt{a^2+4a}} + a + \frac{a^2+2a}{\sqrt{a^2+4a}} = a + \sqrt{a^2+4a}$$

삼각형 PQR의 넓이는

$$S(a) = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{QR} = \frac{1}{2} \times \frac{2a}{\sqrt{a^2+4a}} \times a = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+4a}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{l(a)}{S(a)} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a}}{a^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a\sqrt{a^2 + 4a} + a^2 + 4a}{a^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{a}} + 1 + \frac{4}{a} \right) \\ &= 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

개념 NOTE

점 $P(x_1, y_1)$ 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

step 3 최고난도 문제

| 25~27쪽

01 ⑤ 02 $\frac{52}{3}$ 03 ② 04 ③ 05 -1 06 ②
07 ⑤ 08 ② 09 ① 10 208

01 답 ⑤

1단계 극한을 포함한 식 변형하기

$$\frac{ax-3a}{x+2} = t \text{로 놓으면}$$

$$t = \frac{a(x+2)-5a}{x+2} = -\frac{5a}{x+2} + a$$

$x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow a+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{ax-3a}{x+2}\right) = \lim_{t \rightarrow a+} f(t)$$

$$\frac{ax-3a}{x} = s \text{로 놓으면 } s = -\frac{3a}{x} + a$$

$x \rightarrow \infty$ 일 때 $s \rightarrow a-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{ax-3a}{x}\right) = \lim_{s \rightarrow a-} f(s)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{ax-3a}{x+2}\right) + \lim_{x \rightarrow \infty} f\left(\frac{ax-3a}{x}\right) = 2 \text{에서}$$

$$\lim_{t \rightarrow a+} f(t) + \lim_{s \rightarrow a-} f(s) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a+} f(x) + \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

2단계 조건을 만족시키는 a 의 값 구하기

(i) $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = 1 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$$

① $0 < a < 1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow a} (x-1) = 1$$

$$a-1=1 \quad \therefore a=2$$

그런데 $0 < a < 1$ 이므로 조건을 만족시키는 a 의 값이 존재하지 않는다.

② $1 < a < 4$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow a} (x-2)^2 = 1$$

$$(a-2)^2 = 1, \quad a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$(a-1)(a-3) = 0 \quad \therefore a=1 \text{ 또는 } a=3$$

그런데 $1 < a < 4$ 이므로 $a=3$

③ $a > 4$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow a} (-x+2) = 1$$

$$-a+2=1 \quad \therefore a=1$$

그런데 $a > 4$ 이므로 조건을 만족시키는 a 의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-} f(x) \text{를 만족시키는 } a \text{의 값은 } 1 \text{ 또는 } 4 \text{이다.}$$

① $a=1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x-2)^2 + \lim_{x \rightarrow 1-} (x-1) = 1 + 0 = 1$$

이는 ①을 만족시키지 않는다.

② $a=4$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4+} (-x+2) + \lim_{x \rightarrow 4-} (x-2)^2 = -2 + 4 = 2$$

이는 ①을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=3$ 또는 $a=4$

3단계 a 의 값의 합 구하기

따라서 모든 양수 a 의 값의 합은

$$3+4=7$$

02 답 $\frac{52}{3}$

1단계 a 가 정수일 때, $a+b$ 의 값 구하기

(i) a 가 정수일 때,

$$\lim_{x \rightarrow a+} [x] = a \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{[x]^2 + 3x}{[x]} = \frac{a^2 + 3a}{a} = a+3$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} [x] = a-1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} \frac{[x]^2 + 3x}{[x]} = \frac{(a-1)^2 + 3a}{a-1} = a-1 + \frac{3a}{a-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{[x]^2 + 3x}{[x]} = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{[x]^2 + 3x}{[x]} = b \text{이므로}$$

$$a+3 = a-1 + \frac{3a}{a-1} = b$$

$$a+3 = a-1 + \frac{3a}{a-1} \text{에서 } \frac{3a}{a-1} = 4$$

$$3a = 4a - 4 \quad \therefore a = 4$$

$$a+3=b \text{에서 } b=7$$

$$\therefore a+b=4+7=11$$

2단계 a 가 정수가 아닐 때, $a+b$ 의 값 구하기

(ii) a 가 정수가 아닐 때,

$a = n + \alpha$ (n 은 음이 아닌 정수, $0 < \alpha < 1$)라 하자.

$$\lim_{x \rightarrow a} [x] = n \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{[x]^2 + 3x}{[x]} = \frac{n^2 + 3(n+\alpha)}{n}$$

$$\text{즉, } \frac{n^2 + 3(n+\alpha)}{n} = b \text{이므로}$$

$$n^2 + 3(n+\alpha) = bn$$

$$3\alpha = -n^2 + bn - 3n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$-n^2 + bn - 3n$ 은 정수이므로 3α 도 정수이다.

이때 $0 < \alpha < 1$ 이므로

$$\alpha = \frac{1}{3} \text{ 또는 } \alpha = \frac{2}{3}$$

① $a = \frac{1}{3}$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } 1 = -n^2 + bn - 3n$$

$$1 = n(-n + b - 3)$$

n 은 음이 아닌 정수, $-n + b - 3$ 은 정수이므로

$$n = 1, -n + b - 3 = 1 \quad \therefore b = 5$$

따라서 $a = n + a = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ 이므로

$$a + b = \frac{4}{3} + 5 = \frac{19}{3}$$

② $a = \frac{2}{3}$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2 = -n^2 + bn - 3n$$

$$2 = n(-n + b - 3)$$

n 은 음이 아닌 정수, $-n + b - 3$ 은 정수이므로

$$n = 1, -n + b - 3 = 2 \text{ 또는 } n = 2, -n + b - 3 = 1$$

$$\therefore n = 1, b = 6 \text{ 또는 } n = 2, b = 6$$

$n = 1$ 일 때, $a = n + a = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ 이므로

$$a + b = \frac{5}{3} + 6 = \frac{23}{3}$$

$n = 2$ 일 때, $a = n + a = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ 이므로

$$a + b = \frac{8}{3} + 6 = \frac{26}{3}$$

3단계 $a + b$ 의 최댓값과 최솟값의 합 구하기

(i), (ii)에서 $a + b$ 의 최댓값은 11, 최솟값은 $\frac{19}{3}$ 이므로 그 합은

$$11 + \frac{19}{3} = \frac{52}{3}$$

idea 03 답 ②

1단계 인수분해를 이용하여 주어진 극한의 식 변형하기

$$x^{n+1} - 1 = (x - 1)(x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)$$

$$x^{2n+2} - (2n+2)x + 2n+1$$

$$= x^{2n+2} - x - (2n+1)x + 2n+1$$

$$= x(x^{2n+1} - 1) - (2n+1)(x - 1)$$

$$= x(x - 1)(x^{2n} + x^{2n-1} + x^{2n-2} + \cdots + 1) - (2n+1)(x - 1)$$

$$= (x - 1)(x^{2n+1} + x^{2n} + x^{2n-1} + \cdots + x - 2n - 1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2n+2} - (2n+2)x + 2n+1}{(x^{n+1} - 1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{2n+1} + x^{2n} + x^{2n-1} + \cdots + x - 2n - 1)}{(x - 1)^2(x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2n+1} - 1 + x^{2n} - 1 + x^{2n-1} - 1 + \cdots + x - 1}{(x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^{2n+1} - 1}{x - 1} + \frac{x^{2n} - 1}{x - 1} + \frac{x^{2n-1} - 1}{x - 1} + \cdots + \frac{x - 1}{x - 1}}{(x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)^2}$$

..... ①

2단계 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^k - 1}{x - 1}$ 꼴의 극한값 알기

이때 자연수 k 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^k - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{k-1} + x^{k-2} + x^{k-3} + \cdots + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x^{k-1} + x^{k-2} + x^{k-3} + \cdots + 1)$$

$$= 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = k$$

3단계 n 의 값 구하기

따라서 ①에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2n+2} - (2n+2)x + 2n+1}{(x^{n+1} - 1)^2} &= \frac{(2n+1) + 2n + (2n-1) + \cdots + 1}{(1+1+1+\cdots+1)^2} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{2n+1} k}{(n+1)^2} = \frac{\frac{(2n+1)(2n+2)}{2}}{(n+1)^2} \\ &= \frac{2n+1}{n+1} \end{aligned}$$

즉, $\frac{2n+1}{n+1} = \frac{21}{11}$ 이므로

$$11(2n+1) = 21(n+1) \quad \therefore n = 10$$

개념 NOTE

자연수 n 에 대하여

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

04 답 ③

1단계 주어진 극한을 식으로 나타내기

$$f(x) = x - a, g(x) = (x - b)(x - b^2)(x - b^3),$$

$$g\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{x}{2} - b\right)\left(\frac{x}{2} - b^2\right)\left(\frac{x}{2} - b^3\right) = \frac{1}{8}(x - 2b)(x - 2b^2)(x - 2b^3)$$

이므로

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{g\left(\frac{x}{2}\right)}{f(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{(x - 2b)(x - 2b^2)(x - 2b^3)}{8(x - a)(x - b)(x - b^2)(x - b^3)} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

2단계 순서쌍 (a, b, c) 의 개수 구하기

(i) $b = b^2$ 일 때,

$$b = b^2 \text{에서 } b(b - 1) = 0 \quad \therefore b = 1 (\because b \text{는 자연수})$$

이를 ①에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{g\left(\frac{x}{2}\right)}{f(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{(x - 2)^3}{8(x - a)(x - 1)^3}$$

극한값이 존재하지 않도록 하는 c 가 오직 하나뿐이므로

$$c = 1 \text{이고 } a = 1 \text{ 또는 } a = 2$$

따라서 순서쌍 (a, b, c) 는 $(1, 1, 1), (2, 1, 1)$ 의 2개이다.

(ii) $b \neq b^2$ 일 때,

$$b \neq b^2 \text{에서 } b(b - 1) \neq 0 \text{이므로 } b \neq 0, b \neq 1$$

즉, b 는 1보다 큰 자연수이다.

$b < b^2 < b^3, b < 2b < 2b^2 < 2b^3$ 이므로 ①에서 극한값이 존재하지 않도록 하는 c 가 오직 하나뿐이려면

$$2b = b^2 \text{ 또는 } 2b = b^3 \text{ 또는 } 2b^2 = b^3$$

$$b(b - 2) = 0 \text{ 또는 } b(b^2 - 2) = 0 \text{ 또는 } b^2(b - 2) = 0$$

$$\therefore b = 2 (\because b \text{는 자연수})$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} \frac{g\left(\frac{x}{2}\right)}{f(x)g(x)} &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{(x - 4)(x - 8)(x - 16)}{8(x - a)(x - 2)(x - 4)(x - 8)} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{x - 16}{8(x - a)(x - 2)} \end{aligned}$$

극한값이 존재하지 않도록 하는 c 가 오직 하나뿐이므로

$$c = 2 \text{이고 } a = 2 \text{ 또는 } a = 16$$

따라서 순서쌍 (a, b, c) 는 $(2, 2, 2), (16, 2, 2)$ 의 2개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$2 + 2 = 4$$

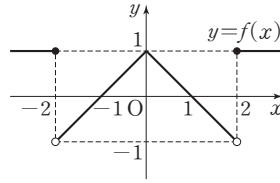
05 답 -1

1단계 $y=f(x)$ 의 그래프 그리기

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 2) \\ 1-|x| & (|x| < 2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & (x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ 1+x & (-2 < x < 0) \\ 1-x & (0 \leq x < 2) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



2단계 $g(x)$ 구하기

$g(x) = \lim_{t \rightarrow x+} \frac{|f(t)|}{f(t)} - \lim_{t \rightarrow x-} \frac{|f(t)|}{f(t)}$ 이므로 $t=x$ 의 좌우에서 $f(t)$ 의 값의 부호가 바뀌는 x 의 값 $-2, -1, 1, 2$ 를 기준으로 구간을 나누어 생각한다.

(i) $x < -2$ 또는 $-1 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 일 때,
 $f(t) > 0$ 이므로

$$g(x) = \lim_{t \rightarrow x+} \frac{|f(t)|}{f(t)} - \lim_{t \rightarrow x-} \frac{|f(t)|}{f(t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow x+} \frac{f(t)}{f(t)} - \lim_{t \rightarrow x-} \frac{f(t)}{f(t)} = 1 - 1 = 0$$

(ii) $-2 < x < -1$ 또는 $1 < x < 2$ 일 때,
 $f(t) < 0$ 이므로

$$g(x) = \lim_{t \rightarrow x+} \frac{|f(t)|}{f(t)} - \lim_{t \rightarrow x-} \frac{|f(t)|}{f(t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow x+} \frac{-f(t)}{f(t)} - \lim_{t \rightarrow x-} \frac{-f(t)}{f(t)} = -1 - (-1) = 0$$

(iii) $x = -2$ 일 때,
 $-2 < t < -1$ 에서 $f(t) < 0$, $t < -2$ 에서 $f(t) > 0$ 이므로

$$g(-2) = \lim_{t \rightarrow -2+} \frac{|f(t)|}{f(t)} - \lim_{t \rightarrow -2-} \frac{|f(t)|}{f(t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -2+} \frac{-f(t)}{f(t)} - \lim_{t \rightarrow -2-} \frac{f(t)}{f(t)} = -1 - 1 = -2$$

(iv) $x = -1$ 일 때,
 $-1 < t < 0$ 에서 $f(t) > 0$, $-2 < t < -1$ 에서 $f(t) < 0$ 이므로

$$g(-1) = \lim_{t \rightarrow -1+} \frac{|f(t)|}{f(t)} - \lim_{t \rightarrow -1-} \frac{|f(t)|}{f(t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow -1+} \frac{f(t)}{f(t)} - \lim_{t \rightarrow -1-} \frac{-f(t)}{f(t)} = 1 - (-1) = 2$$

(v) $x = 1$ 일 때,
 $1 < t < 2$ 에서 $f(t) < 0$, $0 < t < 1$ 에서 $f(t) > 0$ 이므로

$$g(1) = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{|f(t)|}{f(t)} - \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{|f(t)|}{f(t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{-f(t)}{f(t)} - \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{f(t)}{f(t)} = -1 - 1 = -2$$

(vi) $x = 2$ 일 때,
 $t > 2$ 에서 $f(t) > 0$, $1 < t < 2$ 에서 $f(t) < 0$ 이므로

$$g(2) = \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{|f(t)|}{f(t)} - \lim_{t \rightarrow 2-} \frac{|f(t)|}{f(t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 2+} \frac{f(t)}{f(t)} - \lim_{t \rightarrow 2-} \frac{-f(t)}{f(t)} = 1 - (-1) = 2$$

(i)~(vi)에서

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq -2, x \neq -1, x \neq 1, x \neq 2) \\ 2 & (x = -1 \text{ 또는 } x = 2) \\ -2 & (x = -2 \text{ 또는 } x = 1) \end{cases}$$

3단계 $\lim_{x \rightarrow -2+} g(f(x)) + \lim_{x \rightarrow -1} f(g(x)) + \lim_{x \rightarrow -1} g(g(x))$ 의 값 구하기

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

$f(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $s=1$ 이므로

로

$$\lim_{x \rightarrow -2+} g(f(x)) = g(1)$$

$$= -2$$

$g(x)=u$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $u=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(g(x)) = f(0)$$

$$= 1$$

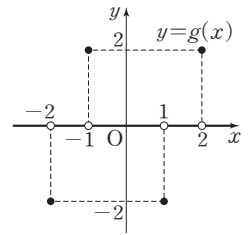
$x \rightarrow -1$ 일 때 $u=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(g(x)) = g(0)$$

$$= 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2+} g(f(x)) + \lim_{x \rightarrow -1} f(g(x)) + \lim_{x \rightarrow -1} g(g(x)) = -2 + 1 + 0$$

$$= -1$$



06 답 ②

1단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$\neg$. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재해야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} |x-8| = \lim_{x \rightarrow 0-} (x^2 - 2ax + 8a)$$

$$8 = 8a \quad \therefore a = 1$$

2단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$\neg$. $\lim_{x \rightarrow 0} f(f(x))$ 의 값이 존재해야 하므로

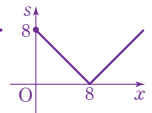
$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(f(x)) \quad \dots \dots \ominus$$

$f(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $s \rightarrow 8$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 8-} f(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 8-} |s-8|$$

$$= 0$$



$x < 0$ 일 때 $f(x) = x^2 - 2ax + 8a = (x-a)^2 - a^2 + 8a$ 이므로 a 의 값의 범위에 따라 $\lim_{x \rightarrow 0-} f(f(x))$ 의 값을 구해 보자.

(i) $a < 0$ 일 때,

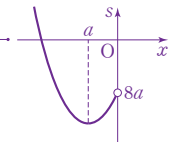
$$x \rightarrow 0- \text{ 일 때 } s \rightarrow 8a- \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 8a-} f(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 8a-} (s^2 - 2as + 8a)$$

$$= 64a^2 - 16a^2 + 8a$$

$$= 48a^2 + 8a$$



①에서

$$0 = 48a^2 + 8a$$

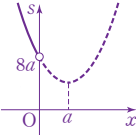
$$8a(6a+1) = 0$$

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = -\frac{1}{6}$$

그런데 $a < 0$ 이므로

$$a = -\frac{1}{6}$$

(ii) $a \geq 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} x \rightarrow 0- \text{일 때 } s &\rightarrow 8a+ \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 0-} f(f(x)) &= \lim_{s \rightarrow 8a+} f(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 8a+} |s-8| \\ &= |8a-8| \end{aligned}$$


㉠에서

$$0 = |8a-8|$$

$$\therefore a=1$$

(i), (ii)에서 모든 a 의 값의 합은

$$-\frac{1}{6} + 1 = \frac{5}{6}$$

3단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. 0이 아닌 모든 실수 t 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow t} f(x)$ 의 값이 존재한다.

이때 $\lim_{x \rightarrow t} f(x) = k$ ($k \neq 0$)이면

$$\lim_{x \rightarrow t} f(f(x)) = f(k)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow t} f(x)$ 의 값이 0이 아니면 $\lim_{x \rightarrow t} f(f(x))$ 의 값이 항상 존재한다.

(i) $t > 0$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow t} f(x) = 0 \text{이면 } \lim_{x \rightarrow t} |x-8| = 0$$

$$|t-8| = 0 \quad \therefore t=8$$

$f(x) = s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 8$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 0+} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0+} |s-8| = 8$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow t} f(f(x))$ 의 값이 존재한다.

(ii) $t < 0$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow t} f(x) = 0 \text{이면 } \lim_{x \rightarrow t} (x^2 - 2ax + 8a) = 0$$

$$t^2 - 2at + 8a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 8a$$

㉠ $D > 0$ 인 경우

$$a^2 - 8a > 0 \text{에서 } a(a-8) > 0$$

$$\therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 8$$

이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $2a$, 곱은 $8a$ 이다.

$a > 8$ 이면 두 근의 합과 곱이 모두 양수이므로 $t < 0$ 에서 이차방정식 ㉠의 실근이 존재하지 않는다. $\hookrightarrow$ 두 근이 모두 양수이다.

즉, $a > 8$ 일 때 $\lim_{x \rightarrow t} f(x) \neq 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow t} f(f(x))$ 의 값이 존재한다.

$a < 0$ 이면 두 근의 합과 곱이 모두 음수이므로 $t < 0$ 에서 이차방정식 ㉠은 한 실근만 존재한다. $\hookrightarrow$ 한 근은 양수, 다른 한 근은 음수이다.

이 근을 a 라 하자.

$f(x) = s$ 로 놓으면 $x \rightarrow a+$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 0+} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0+} (s^2 - 2as + 8a) = 8a$$

$x \rightarrow a-$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 0+} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0+} |s-8| = 8$$

이때 $a < 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(f(x)) \neq \lim_{x \rightarrow a-} f(f(x))$$

즉, $a < 0$ 일 때 $\lim_{x \rightarrow t} f(f(x))$ 의 값이 존재하지 않는 경우가 있다.

㉠ $D=0$ 인 경우

$$a^2 - 8a = 0 \text{에서}$$

$$a(a-8) = 0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=8$$

$$a=0 \text{이면 } \textcircled{1} \text{에서 } t^2 = 0 \quad \therefore t=0$$

따라서 $t < 0$ 에서 이차방정식 ㉠의 실근이 존재하지 않는다.

즉, $a=0$ 이면 $t < 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow t} f(x) \neq 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow t} f(f(x))$ 의

값이 존재한다.

$$a=8 \text{이면 } \textcircled{1} \text{에서 } t^2 - 16t + 64 = 0$$

$$(t-8)^2 = 0 \quad \therefore t=8$$

따라서 $t < 0$ 에서 이차방정식 ㉠의 실근이 존재하지 않는다.

즉, $a=8$ 이면 $t < 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow t} f(x) \neq 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow t} f(f(x))$ 의

값이 존재한다.

㉠ $D < 0$ 인 경우

$$a^2 - 8a < 0 \text{에서}$$

$$a(a-8) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 8$$

이때 이차방정식 ㉠은 실근을 갖지 않는다.

즉, $0 < a < 8$ 일 때 $\lim_{x \rightarrow t} f(x) \neq 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow t} f(f(x))$ 의 값이

존재한다.

㉠, ㉠, ㉠에서 $a \geq 0$ 일 때 $\lim_{x \rightarrow t} f(f(x))$ 의 값이 존재한다.

(i), (ii)에서 $a \geq 0$

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

07 답 ⑤

1단계 $a=1$ 일 때, $ab+cd$ 의 값 구하기

(i) $a=1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4-x^2-cx}{(x-1)(x-b)} = d \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (4-x^2-cx) = 0$ 에서

$$4-1-c=0 \quad \therefore c=3$$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4-x^2-cx}{(x-1)(x-b)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2-3x+4}{(x-1)(x-b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+4)(x-1)}{(x-1)(x-b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+4)}{x-b} \end{aligned}$$

이때 극한값이 존재하므로 $b \neq 1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4-x^2-cx}{(x-1)(x-b)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+4)}{x-b} = -\frac{5}{1-b}$$

$$\text{즉, } -\frac{5}{1-b} = d \text{이므로}$$

$$d(b-1) = 5$$

이때 b, d 는 자연수이므로

$$b-1=1, d=5 \text{ 또는 } b-1=5, d=1$$

$$\therefore b=2, d=5 \text{ 또는 } b=6, d=1$$

따라서 $ab+cd$ 의 값은

$$1 \times 2 + 3 \times 5 = 17 \text{ 또는 } 1 \times 6 + 3 \times 1 = 9$$

2단계 $a \neq 1, b=1$ 일 때, $ab+cd$ 의 값 구하기

(ii) $a \neq 1, b=1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4-ax^2-cx}{(x-a)(x-1)} = d \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} (4-ax^2-cx) = 0 \text{에서}$$

$$4-a-c=0$$

$$\therefore a+c=4$$

이때 a, c 는 자연수이고 $a \neq 1$ 이므로

$$a=2, c=2 \text{ 또는 } a=3, c=1$$

① $a=2, c=2$ 일 때,

②에서

$$d = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4-2x^2-2x}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x+2)(x-1)}{(x-2)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x+2)}{x-2} = \frac{-2 \times 3}{-1} = 6$$

$$\therefore ab+cd = 2 \times 1 + 2 \times 6 = 14$$

② $a=3, c=1$ 일 때,

②에서

$$d = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4-3x^2-x}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(3x+4)(x-1)}{(x-3)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(3x+4)}{x-3} = \frac{7}{2}$$

이는 d 가 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

①, ②에서 $ab+cd$ 의 값은 14이다.

3단계 $a \neq 1, b \neq 1$ 일 때, $ab+cd$ 의 값 구하기

(iii) $a \neq 1, b \neq 1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4-ax^2-cx}{(x-a)(x-b)} = \frac{4-a-c}{(1-a)(1-b)} = d \text{에서}$$

$$d(a-1)(b-1) = 4-a-c \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

a, b 는 자연수이고 $a \neq 1, b \neq 1$ 이므로 $a-1 \geq 1, b-1 \geq 1$

따라서 ②에서 $4-a-c \geq 1$ 이므로 $a+c \leq 3$

이때 a, c 는 자연수이고 $a \neq 1$ 이므로

$$a=2, c=1$$

이를 ②에 대입하면 $d(b-1)=1$

이때 b, d 는 자연수이므로

$$b-1=1, d=1$$

$$\therefore b=2, d=1$$

$$\therefore ab+cd = 2 \times 2 + 1 \times 1 = 5$$

4단계 $ab+cd$ 의 값의 합 구하기

(i), (ii), (iii)에서 모든 $ab+cd$ 의 값의 합은

$$17+9+14+5=45$$

08 답 ②

1단계 직선 l 의 방정식 세우기

정사각형 OABC의 넓이를 이등분하는 직선 l 은 정사각형 OABC의 두 대각선이 만나는 점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 직선 l 의 방정식은

$$y-1=m(x+1) \quad \therefore y=mx+m+1$$

2단계 직선 AP의 방정식 세우기

두 점 A(0, 2), P(t, 0)을 지나는 직선 AP의 방정식은

$$\frac{x}{t} + \frac{y}{2} = 1 \quad \therefore y = -\frac{2}{t}x + 2$$

3단계 $f(t)$ 구하기

직선 AP와 직선 l 이 만나는 점을

Q라 하고 점 Q의 x 좌표를 구하면

$$-\frac{2}{t}x + 2 = mx + m + 1$$

$$\left(m + \frac{2}{t}\right)x = -m + 1$$

$$\therefore x = \frac{-m+1}{m+\frac{2}{t}} = \frac{-mt+t}{mt+2}$$

직선 l 이 y 축과 만나는 점을 R라 하면 R(0, $m+1$)이므로

$$AR = 2 - (m+1) = 1-m$$

삼각형 ARQ의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \times (1-m) \times \frac{-mt+t}{mt+2} = \frac{t(1-m)^2}{2mt+4}$$

삼각형 AOP의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \frac{1}{2} \times t \times 2 = t$$

삼각형 ARQ의 넓이는 삼각형 AOP의 넓이의 $\frac{1}{2}$ 이므로 $S_1 = \frac{1}{2}S_2$ 에서

$$\frac{t(1-m)^2}{2mt+4} = \frac{1}{2}t, (1-m)^2 = mt+2 (\because t > 0)$$

$$m^2 - (t+2)m - 1 = 0$$

$$\therefore m = \frac{t+2 \pm \sqrt{(t+2)^2 + 4}}{2} = \frac{t+2 \pm \sqrt{t^2 + 4t + 8}}{2}$$

이때 $0 < m+1 < 2$ 이므로 $-1 < m < 1$

양수 t 에 대하여

$$\frac{t+2+\sqrt{t^2+4t+8}}{2} > \frac{t+2+\sqrt{t^2+4t+4}}{2} = t+2 > 2 \text{이므로}$$

$$m = \frac{t+2+\sqrt{t^2+4t+8}}{2} \text{은 } -1 < m < 1 \text{을 만족시키지 않는다.}$$

$$\therefore m = \frac{t+2-\sqrt{t^2+4t+8}}{2}$$

따라서 직선 l 의 y 절편 $f(t)$ 는

$$\begin{aligned} f(t) &= m+1 = \frac{t+2-\sqrt{t^2+4t+8}}{2} + 1 \\ &= \frac{t+4-\sqrt{t^2+4t+8}}{2} \end{aligned}$$

4단계 $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$ 의 값 구하기

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t+4-\sqrt{t^2+4t+8}}{2} = \frac{4-\sqrt{8}}{2} = 2-\sqrt{2}$$

09 답 ①

1단계 $S_1(t)$ 구하기

원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P의 x 좌표가 t 이므로

$$t^2+y^2=1, y^2=1-t^2 \quad \therefore y = \pm\sqrt{1-t^2}$$

점 P는 제1사분면 위의 점이므로 P($t, \sqrt{1-t^2}$)

점 Q는 점 P와 y 축에 대하여 대칭이므로 Q($-t, \sqrt{1-t^2}$)

원 $x^2+y^2=1$ 과 점 (0, 1)에서 접하면서

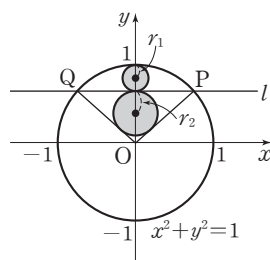
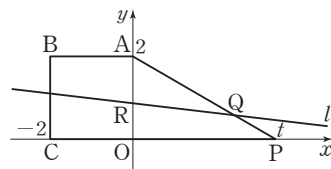
직선 l 과 접하는 원의 반지름의 길이를

r_1 이라 하면

$$r_1 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-t^2})$$

$$\therefore S_1(t) = \pi r_1^2$$

$$= \frac{\pi}{4}(1-\sqrt{1-t^2})^2$$



2단계 $S_2(t)$ 구하기

삼각형 OPQ의 내접원의 반지름의 길이를 r_2 라 하면

$$\frac{1}{2} \times r_2 \times (\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{PQ}) = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \sqrt{1-t^2}$$

$$r_2 \times (1+1+2t) = 2t \times \sqrt{1-t^2}$$

$$\therefore r_2 = \frac{2t\sqrt{1-t^2}}{2t+2} = \frac{t\sqrt{1-t^2}}{t+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_2(t) &= \pi r_2^2 = \frac{t^2(1-t^2)}{(t+1)^2} \pi \\ &= \frac{t^2(1+t)(1-t)}{(t+1)^2} \pi \\ &= \frac{t^2(1-t)}{t+1} \pi \end{aligned}$$

3단계 $\frac{S_1(t)}{S_2(t)}$ 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \frac{S_1(t)}{S_2(t)} &= \frac{\frac{\pi}{4}(1-\sqrt{1-t^2})^2}{\frac{t^2(1-t)}{t+1} \pi} \\ &= \frac{(1-\sqrt{1-t^2})^2(t+1)}{4t^2(1-t)} \\ &= \frac{(1-\sqrt{1-t^2})^2(1+\sqrt{1-t^2})^2(t+1)}{4t^2(1-t)(1+\sqrt{1-t^2})^2} \\ &= \frac{t^4(t+1)}{4t^2(1-t)(1+\sqrt{1-t^2})^2} \\ &= \frac{t^2(t+1)}{4(1-t)(1+\sqrt{1-t^2})^2} \end{aligned}$$

4단계 조건을 만족시키는 n 의 값의 합 구하기

(i) $n=1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S_1(t)}{tS_2(t)} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t^2(t+1)}{4t(1-t)(1+\sqrt{1-t^2})^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t(t+1)}{4(1-t)(1+\sqrt{1-t^2})^2} \\ &= \frac{0}{4 \times 1 \times 2^2} = 0 \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S_1(t)}{tS_2(t)}$ 의 값이 존재한다.

(ii) $n=2$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S_1(t)}{t^2S_2(t)} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t^2(t+1)}{4t^2(1-t)(1+\sqrt{1-t^2})^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t+1}{4(1-t)(1+\sqrt{1-t^2})^2} \\ &= \frac{1}{4 \times 1 \times 2^2} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S_1(t)}{t^2S_2(t)}$ 의 값이 존재한다.

(iii) $n \geq 3$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S_1(t)}{t^nS_2(t)} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t^2(t+1)}{4t^n(1-t)(1+\sqrt{1-t^2})^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t+1}{4t^{n-2}(1-t)(1+\sqrt{1-t^2})^2} \end{aligned}$$

$t \rightarrow 0+$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$, (분자) $\rightarrow 1$ 이므로 극한값이 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 자연수 n 의 값은 1, 2이므로 그 합은 $1+2=3$

10 답 208

1단계 L, S 의 식 세우기

$\overline{AB}=1$ 이므로 $\overline{BI}=x$ ($x>0$)라 하면 직

각삼각형 ABI에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{AI}^2 = 1^2 + x^2$$

$$\therefore \overline{AI} = \sqrt{x^2+1} \quad (\because \overline{AI} > 0)$$

$$\angle ARI = \angle ABI = 90^\circ \text{이고}$$

$$\overline{AB} = \overline{AR} = 1, \text{ 변 AI는 공통이므로}$$

$$\triangle ABI \equiv \triangle ARI \text{ (RHS 합동)}$$

$$\therefore \angle AIB = \angle AIR, \overline{BI} = \overline{RI}$$

직선 AI가 선분 CQ와 만나는 점을 H라 하면

$$\angle CIH = \angle AIB \text{ (맞꼭지각)}, \angle QIH = \angle AIR \text{ (맞꼭지각)이므로}$$

$$\angle CIH = \angle QIH$$

$$\text{또 } \overline{CI} = \overline{BC} - \overline{BI} = \overline{QR} - \overline{RI} = \overline{QI} \text{이고, 변 IH는 공통이므로}$$

$$\triangle CIH \equiv \triangle QIH \text{ (SAS 합동)}$$

$$\therefore \angle CHI = \angle QHI = 90^\circ, \overline{CH} = \overline{QH}$$

$$\text{따라서 } \angle ABI = \angle CHI = 90^\circ, \angle AIB = \angle CIH \text{이므로}$$

$$\triangle ABI \sim \triangle CHI \text{ (AA 닮음)}$$

$$\text{이때 } \overline{AI} : \overline{CI} = \overline{BI} : \overline{HI} \text{이므로}$$

$$\sqrt{x^2+1} : (1-x) = x : \overline{HI} \rightarrow \overline{CI} = \overline{BC} - \overline{BI} = 1-x$$

$$\therefore \overline{HI} = \frac{x(1-x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{또 } \overline{AI} : \overline{CI} = \overline{AB} : \overline{CH} \text{이므로}$$

$$\sqrt{x^2+1} : (1-x) = 1 : \overline{CH}$$

$$\therefore \overline{CH} = \frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\therefore \overline{CQ} = 2\overline{CH} = \frac{2(1-x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

삼각형 IQC의 둘레의 길이 L 은

$$\begin{aligned} L &= \overline{CI} + \overline{QI} + \overline{CQ} = 2(1-x) + \frac{2(1-x)}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= 2(1-x) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) \end{aligned}$$

삼각형 IQC의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{CQ} \times \overline{HI} = \frac{1}{2} \times \frac{2(1-x)}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{x(1-x)}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x(1-x)^2}{x^2+1}$$

2단계 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{L^2}{S}$ 의 값 구하기

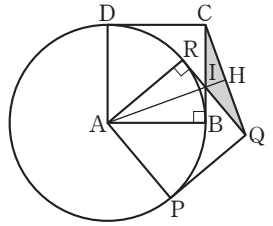
점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 점 I는 점 C에 한없이 가까워지므로 선분 BI의 길이 x 는 선분 BC의 길이 1에 한없이 가까워진다.

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{L^2}{S} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(1-x)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)^2}{\frac{x(1-x)^2}{x^2+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)^2 (x^2+1)}{x} \\ &= 4 \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \times 2 \\ &= 12 + 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

3단계 a^2+b^2 의 값 구하기

따라서 $a=12, b=8$ 이므로

$$a^2+b^2=144+64=208$$



step 1 핵심 문제

| 28~29쪽

01 ⑤ 02 ② 03 ② 04 12 05 3 06 3
07 24 08 ① 09 23 10 ③ 11 3

01 답 ⑤

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \\ = 0 \times (-1) = 0 \quad \dots \quad \text{㉠}$$

$$\neg. f(1)g(1) = 0 \times (-1) = 0$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = 1 \times 1 = 1$$

그런데 ㉠에서 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

02 답 ②

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속하려면 $g(x) \neq 0$ 이어야 한다.

즉, $(x^2+ax+25)(ax^2-2x+2a+1) \neq 0$ 이어야 하므로

$$x^2+ax+25 \neq 0, \quad ax^2-2x+2a+1 \neq 0$$

따라서 두 방정식 $x^2+ax+25=0$, $ax^2-2x+2a+1=0$ 의 실근이 존재하지 않아야 한다.

(i) 방정식 $x^2+ax+25=0$ 의 실근이 존재하지 않을 때,

이차방정식 $x^2+ax+25=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = a^2 - 100 < 0, \quad (a+10)(a-10) < 0$$

$$\therefore -10 < a < 10$$

(ii) 방정식 $ax^2-2x+2a+1=0$ 의 실근이 존재하지 않을 때,

$$a=0 \text{이면 } -2x+1=0 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$$

즉, 실근이 존재하므로 $a \neq 0$

이차방정식 $ax^2-2x+2a+1=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = 1 - a(2a+1) < 0, \quad 2a^2 + a - 1 > 0$$

$$(a+1)(2a-1) > 0 \quad \therefore a < -1 \text{ 또는 } a > \frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 $-10 < a < -1$ 또는 $\frac{1}{2} < a < 10$

따라서 정수 a 는 $-9, -8, \dots, -2, 1, 2, \dots, 9$ 의 17개이다.

03 답 ②

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = g(0)$

$x > 0$ 일 때, $f(x) + 2g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ 에서

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2 - 2g(x) \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \{2x^3 - 3x^2 + 5x + 2 - 2g(x)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} (2x^3 - 3x^2 + 5x + 2) - 2 \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) \\ &= 2 - 2g(0) \end{aligned}$$

$x < 0$ 일 때, $2f(x) - g(x) = 5x^2 - 7x + 6$ 에서

$$f(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 3 + \frac{1}{2}g(x) \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \left\{ \frac{5}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 3 + \frac{1}{2}g(x) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{5}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 3 \right) + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) \\ &= 3 + \frac{1}{2}g(0) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 4 \text{에서}$$

$$2 - 2g(0) - \left\{ 3 + \frac{1}{2}g(0) \right\} = 4$$

$$-\frac{5}{2}g(0) = 5 \quad \therefore g(0) = -2$$

04 답 12

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x+7}+b}{x-2} = \frac{1}{2} \quad \dots \quad \text{㉠}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} (a\sqrt{x+7}+b) = 0$ 에서

$$3a+b=0 \quad \therefore b=-3a \quad \dots \quad \text{㉡}$$

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x+7}+b}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x+7}-3a}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{\sqrt{x+7}+3} \\ &= \frac{a}{3+3} = \frac{a}{6} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{a}{6} = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } a=3$$

이를 ㉡에 대입하면 $b=-9$

$$\therefore a-b=3-(-9)=12$$

비법 NOTE

함수 $f(x) = \begin{cases} g(x) & (x \neq a) \\ b & (x = a) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=a$ 에서도 연속

이므로

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$$

05 답 3

$$x^2+x-2=0 \text{에서 } (x+2)(x-1)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

$$(x^2+x-2)f(x) = ax^3+2x^2+bx+c \text{에서 } x \neq -2, x \neq 1 \text{일 때,}$$

$$f(x) = \frac{ax^3+2x^2+bx+c}{x^2+x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3+2x^2+bx+c}{x(x^2+x-2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a+\frac{2}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = a$$

$$\therefore a=1 \quad \dots \quad \text{배점 30\%}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=-2$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 + bx + c}{x^2 + x - 2} = f(-2)$$

$x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 2x^2 + bx + c) = 0 \text{에서}$$

$$-8 + 8 - 2b + c = 0 \quad \therefore 2b - c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 + bx + c}{x^2 + x - 2} = f(1)$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 2x^2 + bx + c) = 0 \text{에서}$$

$$1 + 2 + b + c = 0 \quad \therefore b + c = -3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $b = -1, c = -2$ 배점 40%

$$x \neq -2, x \neq 1 \text{일 때, } f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \text{이므로}$$

$$f(0) = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

$$\therefore f(0) + f(1) = 1 + 2 = 3 \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

비밀 NOTE

실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 $(x-a)f(x) = g(x)$ 를 만족시키면

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x-a}$$

06 답 3

$$f(x+2) = (x+2)^2 - (x+2) + a = x^2 + 3x + a + 2 \text{이므로}$$

$$g(x) = \begin{cases} x+6a & (x < a) \\ x^2 + 3x + a + 2 & (x \geq a) \end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이라면 $x=a$ 에서도 연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)g(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} (x^2 - x + a)(x^2 + 3x + a + 2)$$

$$= a^2(a^2 + 4a + 2) = a^4 + 4a^3 + 2a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} (x^2 - x + a)(x+6a)$$

$$= a^2 \times 7a = 7a^3$$

$$\text{즉, } a^4 + 4a^3 + 2a^2 = 7a^3 \text{이므로}$$

$$a^4 - 3a^3 + 2a^2 = 0, a^2(a-1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=1 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은 $0+1+2=3$

비밀 NOTE

함수 $f(x) = \begin{cases} g(x) & (x < a) \\ h(x) & (x \geq a) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=a$ 에서도 연속

이므로

$$\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} g(x)$$

이때 $\lim_{x \rightarrow a^+} h(x) = f(a)$ 이므로 $f(a)$ 의 값까지 비교하지 않아도 된다.

07 답 24

이차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하자.

함수 $f(x)$ 는 $x=-1, x=1$ 에서 불연속이고 다항함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $h(x) = f(x)g(x)$ 가 구간 $(-2, 2)$ 에서 연속이면 $x=-1, x=1$ 에서도 연속이다.

함수 $h(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} h(x)$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + ax + b) \\ &= -1 \times (1 - a + b) = a - b - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + ax + b) \\ &= 0 \times (1 - a + b) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } a - b - 1 = 0 \text{이므로 } a - b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수 $h(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x)$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + ax + b) \\ &= 2 \times (1 + a + b) = 2a + 2b + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax + b) \\ &= 1 \times (1 + a + b) = a + b + 1 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2a + 2b + 2 = a + b + 1 \text{이므로 } a + b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a=0, b=-1$

따라서 $g(x) = x^2 - 1$ 이므로

$$g(5) = 25 - 1 = 24$$

08 답 ①

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \text{에서 } (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

직선 $2x+y=t$ 가 원 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ 에 접하면 원의 중심 $(1, -2)$ 와 직선 $2x+y=t$, 즉 $2x+y-t=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$$\frac{|2-2-t|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5}, |t|=5 \quad \therefore t=-5 \text{ 또는 } t=5$$

따라서 원과 직선이 만나는 점의 개수

$f(t)$ 를 구하면

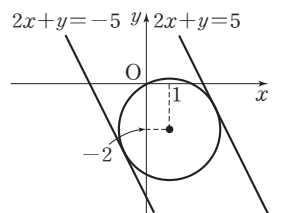
$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < -5 \text{ 또는 } t > 5) \\ 1 & (t = -5 \text{ 또는 } t = 5) \\ 2 & (-5 < t < 5) \end{cases}$$

함수 $f(t)$ 는 $t=-5, t=5$ 에서 불연속

이므로 $a=-5$ 또는 $a=5$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

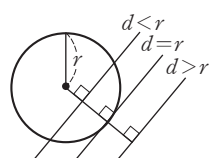
$$-5 \times 5 = -25$$



개념 NOTE

반지름의 길이가 r 인 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d 라 하면 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

- (1) $d < r$ 이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
- (2) $d = r$ 이면 한 점에서 만난다.(접한다.)
- (3) $d > r$ 이면 만나지 않는다.



09 답 23

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-2$, $x=2$ 에서도 연속이다.

함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow -2+} (x^2 + bx + 7) = \lim_{x \rightarrow -2-} (-2x + a)$$

$$4 - 2b + 7 = 4 + a \quad \therefore a + 2b = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2+} (-2x + a) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x^2 + bx + 7)$$

$$-4 + a = 4 + 2b + 7 \quad \therefore a - 2b = 15 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=11$, $b=-2$ $\dots\dots \text{배점 10\%}$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -2x + 11 & (|x| > 2) \\ x^2 - 2x + 7 & (|x| \leq 2) \end{cases} = \begin{cases} -2x + 11 & (x < -2 \text{ 또는 } x > 2) \\ (x-1)^2 + 6 & (-2 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

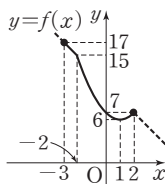
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로

$-3 \leq x \leq 2$ 일 때, 함수 $f(x)$ 는 $x=-3$ 에서 최댓값

17, $x=1$ 에서 최솟값 6을 갖는다. $\dots\dots \text{배점 40\%}$

따라서 $M=17$, $m=6$ 이므로

$$M+m=23 \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$



10 답 ③

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(-1, 2)$, $(1, 0)$ 을 지나므로

$$f(-1)=2, f(1)=0$$

ㄱ. $f(x)=x$ 에서 $f(x)-x=0$

$$g(x)=f(x)-x \text{라 하면}$$

$$g(-1)=f(-1)-1=2-1=1, g(1)=f(1)-1=0-1=-1$$

$g(-1)g(1)<0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$ 은 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $g(x)=f(x)+3x-1$ 이라 하면

$$g(-1)=f(-1)-3-1=2-4=-2$$

$$g(1)=f(1)+3-1=0+2=2$$

$g(-1)g(1)<0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$ 은 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $xf(x)=2$ 에서 $xf(x)-2=0$

$$g(x)=xf(x)-2 \text{라 하면}$$

$$g(-1)=-f(-1)-2=-2-2=-4$$

$$g(1)=f(1)-2=0-2=-2$$

$g(-1)g(1)>0$ 이므로 방정식 $g(x)=0$ 이 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 반드시 실근을 갖는다고는 할 수 없다.

따라서 보기에서 반드시 실근이 존재하는 방정식인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

11 답 3

$$f(x)=\sqrt{x+3} \text{에서 } f(x)-\sqrt{x+3}=0$$

$$g(x)=f(x)-\sqrt{x+3} \text{이라 하면}$$

$$g(-2)=f(-2)-1=-2-1=-3<0$$

$$g(-1)=f(-1)-\sqrt{2}=1-\sqrt{2}<0$$

$$g(0)=f(0)-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}>0$$

$$g(1)=f(1)-2=1-2=-1<0$$

$$g(2)=f(2)-\sqrt{5}=3-\sqrt{5}>0$$

사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$ 은 열린구간 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 열린구간 $(-2, 2)$ 에서 적어도 3개의 실근을 가지므로

$$n=3$$

step 2 고난도 문제

| 30~34쪽

01 ④	02 ②	03 ③	04 ③	05 ②	06 30
07 20	08 ④	09 7	10 ④	11 51	12 3
13 64	14 ①	15 14	16 ③	17 ③	18 5
19 9	20 8	21 2	22 3	23 ⑤	24 7
25 ①	26 5				

01 답 ④

ㄱ. $x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x+1) = \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) = 0$$

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x+1) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x+1) = 0$$

$$\text{또 } f(0+1)=f(1)=0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x+1)=f(0+1)$$

따라서 함수 $f(x+1)$ 은 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄴ. $-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)+f(-x)\} &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) \\ &= 1 + (-1) = 0 \end{aligned}$$

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)+f(-x)\} &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) \\ &= -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+f(-x)\} = 0$$

$$\text{또 } f(0)+f(0)=-1+(-1)=-2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+f(-x)\} \neq f(0)+f(0)$$

따라서 함수 $f(x)+f(-x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

ㄷ. $2-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 2-$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)f(2-x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \times \lim_{t \rightarrow 2-} f(t) \\ &= 1 \times (-1) = -1 \end{aligned}$$

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 2+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)f(2-x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \times \lim_{t \rightarrow 2+} f(t) \\ &= -1 \times 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x)f(2-x) = -1$$

$$\text{또 } f(0)f(2-0)=f(0)f(2)=-1 \times 1 = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)f(2-x) = f(0)f(2-0)$$

따라서 함수 $f(x)f(2-x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄹ. $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = 0$$

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (f \circ f)(x) = 0$$

$$\text{또 } (f \circ f)(0)=f(f(0))=f(-1)=0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ f)(x) = (f \circ f)(0)$$

따라서 함수 $(f \circ f)(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

따라서 보기에서 $x=0$ 에서 연속인 함수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

02 답 ②

- ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = -1 + 2 = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = 0 + (-1) = -1$
 즉, $\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x) + g(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) + g(x)\}$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\}$ 의 값이 존재하지 않는다.
 따라서 함수 $f(x) + g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.
- ㄴ. $g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 2-$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 2-} f(t) = -2$
 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t = -1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(g(x)) = f(-1) = -2$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = -2$
 또 $f(g(1)) = f(0) = -2$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = f(g(1))$
 따라서 함수 $f(g(x))$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.
- ㄷ. $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} g(t) = -1$
 $x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} g(t) = -1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = -1$
 또 $g(f(0)) = g(-2) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) \neq g(f(0))$
 따라서 함수 $g(f(x))$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

03 답 ③

- ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x) + |f(x)|\}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0+} |f(x)|$
 $= 0 + 0 = 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x) + |f(x)|\}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0-} |f(x)|$
 $= -1 + |-1| = 0$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ ㉠
- ㄴ. $-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x) + f(-x)\}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{t \rightarrow 0-} f(t)$
 $= 0 + (-1) = -1$
 $x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x) + f(-x)\}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{t \rightarrow 0+} f(t)$
 $= -1 + 0 = -1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} |h(x)| = 1$ ㉡
- 또 $|h(0)| = |f(0) + f(0)| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right| = 1$ 이므로 ㉢
 $\lim_{x \rightarrow 0} |h(x)| = |h(0)|$
 따라서 함수 $|h(x)|$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄷ. ㉠, ㉡에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) |h(x)| = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \times \lim_{x \rightarrow 0} |h(x)| = 0 \times 1 = 0$$

$$g(0) = f(0) + |f(0)| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{이고 } ㉢ \text{에서 } |h(0)| = 1 \text{이므로}$$

$$g(0) |h(0)| = 1 \times 1 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(x) |h(x)| \neq g(0) |h(0)|$$

따라서 함수 $g(x) |h(x)|$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

04 답 ③

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=b$, $x=b+2$ 에서도 연속이다.

함수 $f(x)$ 가 $x=b$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow b+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow b+} (ax+4) = \lim_{x \rightarrow b-} (x^2 - ax + 4a)$$

$$ab+4 = b^2 - ab + 4a$$

$$\therefore b^2 - 2ab + 4a - 4 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

함수 $f(x)$ 가 $x=b+2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow (b+2)+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (b+2)-} f(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow (b+2)+} (x^2 - ax + 4a) = \lim_{x \rightarrow (b+2)-} (ax+4)$$

$$(b+2)^2 - a(b+2) + 4a = a(b+2) + 4$$

$$\therefore b^2 - 2ab + 4b = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠-㉡을 하면

$$4a - 4 - 4b = 0 \quad \therefore a = b + 1 \quad \dots\dots ㉢$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$b^2 - 2(b+1)b + 4b = 0, \quad b^2 - 2b = 0$$

$$b(b-2) = 0 \quad \therefore b = 2 \quad (\because b > 0)$$

이를 ㉢에 대입하면 $a = 3$

$$\therefore a + b = 3 + 2 = 5$$

05 답 ②

함수 $f(x)$ 는 $0 \leq x \leq 4$ 에서 x 가 정수인 경우를 기준으로 구간이 나누어 지므로 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 는 0, 1, 2, 3, 4 중 3개이다.

함수 $y = x^2 - 3x + 5$ 의 그래프에서 $0 \leq x \leq 4$ 이고 x 좌표가 정수인 점의 좌표는

(0, 5), (1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 9)

함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 개수가 3이므로 직선 $y = ax + b$ 가 이 5개의 점 중 2개의 점을 지나야 한다.

(i) $a < 0$ 일 때 $\rightarrow$ 직선의 기울기가 음수이다.

㉠ 직선 $y = ax + b$ 가 두 점 (0, 5), (1, 3)을 지날 때,

점 (0, 5)를 지나므로 $b = 5$

점 (1, 3)을 지나므로 $a + b = 3$

$$a + 5 = 3 \quad \therefore a = -2$$

$$\therefore a - b = -2 - 5 = -7$$

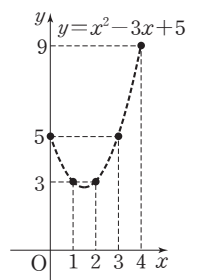
㉡ 직선 $y = ax + b$ 가 두 점 (0, 5), (2, 3)을 지날 때,

점 (0, 5)를 지나므로 $b = 5$

점 (2, 3)을 지나므로 $2a + b = 3$

$$2a + 5 = 3 \quad \therefore a = -1$$

$$\therefore a - b = -1 - 5 = -6$$



(ii) $a=0$ 일 때 $\rightarrow$ 직선이 x 축에 평행하다.

① 직선 $y=ax+b$ 가 두 점 $(0, 5), (3, 5)$ 를 지날 때,
 $b=5$ 이므로
 $a-b=0-5=-5$

② 직선 $y=ax+b$ 가 두 점 $(1, 3), (2, 3)$ 을 지날 때,
 $b=3$ 이므로
 $a-b=0-3=-3$

(i), (ii)에서 모든 $a-b$ 의 값의 합은
 $-7+(-6)+(-5)+(-3)=-21$

06 답 30

(나)의 $f(x)=f(x+4)$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $f(0)=f(4)$

(가)에서 $f(0)=-c, f(4)=-24+30=6$ 이므로

$-c=6 \quad \therefore c=-6$ 배점 20%

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1, x=3$ 에서도 연속이다.

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2+bx-6}{x-1}=d \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (ax^2+bx-6)=0$ 에서

$$a+b-6=0 \quad \therefore a+b=6 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x)=\lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3+} (-6x+30) &= \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{ax^2+bx-6}{x-1} \\ -18+30 &= \frac{9a+3b-6}{2} \quad \therefore 3a+b=10 \quad \dots\dots \textcircled{C} \end{aligned}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=2, b=4$ 배점 40%

이를 ③에 대입하면

$$\begin{aligned} d &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+4x-6}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x+3)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} 2(x+3) = 2 \times 4 = 8 \quad \dots\dots \text{배점 20\%} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+4x-6}{x-1} & (0 \leq x < 1 \text{ 또는 } 1 < x < 3) \\ 8 & (x=1) \\ -6x+30 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases} \quad \text{이고}$$

$f(x)=f(x+4)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(53)+f(54)+f(55) &= f(1)+f(2)+f(3) \\ &= 8+10+12=30 \quad \dots\dots \text{배점 20\%} \end{aligned}$$

07 답 20

함수 $y=[x]$ 는 x 가 정수일 때 불연속이고 나머지 구간에서는 연속이다.
 따라서 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 임의의 정수 n 에 대하여 $x=n$ 에서도 연속이다.

$\lim_{x \rightarrow n+} [x]=n, \lim_{x \rightarrow n-} [x]=n-1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow n+} f(x)=\lim_{x \rightarrow n-} f(x)$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow n+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow n+} \{(x-2)[x]^2+(ax^2+bx+c)[x]\} \\ &= (n-2)n^2+(an^2+bn+c)n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow n-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow n-} \{(x-2)[x]^2+(ax^2+bx+c)[x]\} \\ &= (n-2)(n-1)^2+(an^2+bn+c)(n-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(n-2)n^2+(an^2+bn+c)n \\ &= (n-2)(n-1)^2+(an^2+bn+c)(n-1) \end{aligned}$$

이므로

$$(n-2)(2n-1)+an^2+bn+c=0$$

$$(a+2)n^2+(b-5)n+c+2=0$$

이 등식은 모든 n 의 값에 대하여 성립하므로

$$a+2=0, b-5=0, c+2=0$$

$$\therefore a=-2, b=5, c=-2 \quad \therefore abc=20$$

08 답 ④

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)}{x}=0$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하
 므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+g(x)\}=0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$\neg$. $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)-g(x)\}=0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{f(x)+g(x)\}+\{f(x)-g(x)\}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+g(x)\} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)-g(x)\} \\ &= 0+0=0 \end{aligned}$$

또 $f(0)=0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$\neg$. [반례] $f(x)=\begin{cases} 1 & (x<0) \\ 0 & (x \geq 0) \end{cases}, g(x)=\begin{cases} -1 & (x<0) \\ 0 & (x \geq 0) \end{cases}$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)}{x}=0, f(0)=g(0)=0 \text{을 만족시킨다.}$$

$x^4+x^2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x^4+x^2)=\lim_{t \rightarrow 0+} f(t)=0$$

그런데 $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x)=0, \lim_{x \rightarrow 0-} g(x)=-1$, 즉 $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} g(x)$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$\neg$. ①에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+g(x)\}=0$ 이고 $f(0)+g(0)=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+g(x)\}=f(0)+g(0)$$

따라서 함수 $f(x)+g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)=0, f(0)g(0)=0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$$

따라서 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)\}^2=0, \{f(0)\}^2=0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)\}^2=\{f(0)\}^2$$

따라서 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 $x=0$ 에서 연속이다.

즉, 세 함수 $f(x)+g(x), f(x)g(x), \{f(x)\}^2$ 은 $x=0$ 에서 연속이고 $\{g(x)\}^2=\{f(x)+g(x)\}^2-2f(x)g(x)-\{f(x)\}^2$ 이므로 연속 함수의 성질에 의하여 함수 $\{g(x)\}^2$ 도 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} \{g(x)\}^2=0$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0} |g(x)|=\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\{g(x)\}^2}=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)=0$$

또 $g(0)=0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)=g(0)$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

09 답 7

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $g(x)$ 는 $x \neq 1, x \neq 3$ 인 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1, x=3$ 에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속일 때,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) \text{에서} \\ \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 - 2ax + a^2 - a + 1)(x + b) \\ &= (1 - 2a + a^2 - a + 1)(1 + b) \\ &= (a^2 - 3a + 2)(b + 1) \\ \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2 - 2ax + a^2 - a + 1)(7 - b) \\ &= (a^2 - 3a + 2)(7 - b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{즉, } (a^2 - 3a + 2)(b + 1) &= (a^2 - 3a + 2)(7 - b) \text{이므로} \\ (a^2 - 3a + 2)(2b - 6) &= 0, (a - 1)(a - 2)(b - 3) = 0 \\ \therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 2 \text{ 또는 } b = 3\end{aligned}$$

(ii) 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속일 때,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)g(x) \text{에서} \\ \lim_{x \rightarrow 3+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3+} (x^2 - 2ax + a^2 - a + 1)(7 - b) \\ &= (9 - 6a + a^2 - a + 1)(7 - b) \\ &= (a^2 - 7a + 10)(7 - b) \\ \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3-} (x^2 - 2ax + a^2 - a + 1)(x + b) \\ &= (a^2 - 7a + 10)(3 + b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{즉, } (a^2 - 7a + 10)(7 - b) &= (a^2 - 7a + 10)(3 + b) \text{이므로} \\ (a^2 - 7a + 10)(4 - 2b) &= 0, (a - 2)(a - 5)(b - 2) = 0 \\ \therefore a = 2 \text{ 또는 } a = 5 \text{ 또는 } b = 2\end{aligned}$$

$a=1$ 일 때, 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로 $x=3$ 에서도 연속이려면 $b=2$

$a=2$ 일 때, 함수 $f(x)g(x)$ 는 b 의 값에 관계없이 $x=1, x=3$ 에서 연속이다.

$a=5$ 일 때, 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이려면 $b=3$

따라서 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (5, 3)$ 의 7개이다. ↳ b 는 5 이하의 자연수이다.

10 답 ④

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이고 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0, x=a$ 에서도 연속이어야 한다.

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(i) $a < 0$ 일 때,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} (-2x + 2)(2x - 1) = 2 \times (-1) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} (-2x + 3)(2x - 1) = 3 \times (-1) = -3\end{aligned}$$

이는 $\textcircled{1}$ 을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = 0$ 일 때,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} (-2x + 2)(2x - 1) = 2 \times (-1) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \{(-2x + 3) \times 2x\} = 3 \times 0 = 0\end{aligned}$$

이는 $\textcircled{1}$ 을 만족시키지 않는다.

(iii) $a > 0$ 일 때,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \{(-2x + 2) \times 2x\} = 2 \times 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \{(-2x + 3) \times 2x\} = 3 \times 0 = 0\end{aligned}$$

이는 $\textcircled{1}$ 을 만족시키므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

(i), (ii), (iii)에서 $a > 0$

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이어야 하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x) \text{에서} \\ \lim_{x \rightarrow a+} (-2x + 2)(2x - 1) &= \lim_{x \rightarrow a-} \{(-2x + 2) \times 2x\} \\ (-2a + 2)(2a - 1) &= (-2a + 2) \times 2a \\ 2a - 2 &= 0 \quad \therefore a = 1\end{aligned}$$

11 답 51

a, b, c 는 1부터 6까지의 자연수를 값으로 갖는다.

(i) $a=b$ 일 때,

c 의 값에 관계없이 $f(x)=0$ 이므로

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 2$$

즉, 함수 $(g \circ f)(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 $6 \times 1 \times 6 = 36$

(ii) $a \neq b$ 일 때,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} -1 & (f(x) < 0) \\ 2 & (f(x) \geq 0) \end{cases}$$

함수 $(g \circ f)(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 모든 실수 x 에 $f(x) < 0$ 이거나 $f(x) \geq 0$ 이어야 한다.

① 모든 실수 x 에서 $f(x) < 0$ 일 때,

$$f(x) < 0 \text{에서 } (a - b)(x^2 + 4bx + c) < 0$$

즉, $a - b < 0, x^2 + 4bx + c > 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $x^2 + 4bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4b^2 - c < 0 \quad \therefore c > 4b^2$$

$b=1$ 일 때, $c > 4$ 이므로 c 의 값은 5, 6이다.

이때 $a - b < 0$, 즉 $a < 1$ 이므로 a 의 값은 존재하지 않는다.

$b \geq 2$ 일 때, $c > 16$ 이므로 c 의 값은 존재하지 않는다.

② 모든 실수 x 에서 $f(x) \geq 0$ 일 때,

$$f(x) \geq 0 \text{에서 } (a - b)(x^2 + 4bx + c) \geq 0$$

즉, $a - b > 0, x^2 + 4bx + c \geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $x^2 + 4bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4b^2 - c \leq 0 \quad \therefore c \geq 4b^2$$

$b=1$ 일 때, $c \geq 4$ 이므로 c 의 값은 4, 5, 6이다.

이때 $a - b > 0$, 즉 $a > 1$ 이므로 a 의 값은 2, 3, 4, 5, 6이다.

$b \geq 2$ 일 때, $c \geq 16$ 이므로 c 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 $5 \times 1 \times 3 = 15$

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$36 + 15 = 51$$

개념 NOTE

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, 모든 실수 x 에 대하여 주어진 이차부등식이 항상 성립할 조건은 다음과 같다.

$$(1) ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow a > 0, D < 0$$

$$(2) ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow a > 0, D \leq 0$$

$$(3) ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow a < 0, D < 0$$

$$(4) ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow a < 0, D \leq 0$$

idea
12 답 3

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이려면 $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} g(x)$

$x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 1+$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x) + af(x+1)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{t \rightarrow 1+} af(t) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} (x+1) + \lim_{t \rightarrow 1+} a(t^2+a) \\ &= 1+a(1+a) = a^2+a+1\end{aligned}$$

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x) + af(x+1)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{t \rightarrow 1-} af(t)\end{aligned}$$

이때 $f(x) = f(x+2)$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{t \rightarrow 1-} af(t) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) + \lim_{t \rightarrow 1-} af(t) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} (x^2+a) + \lim_{t \rightarrow 1-} a(t+1) \\ &= 4+a+a \times 2 = 3a+4\end{aligned}$$

즉, $a^2+a+1=3a+4$ 이므로 $a^2-2a-3=0$

$$(a+1)(a-3)=0 \quad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=3$$

$f(x) = f(x+2)$ 에서 $f(-1) = f(1)$ 이므로 $f(-1) > 0$ 에서 $f(1) > 0$

즉, $1+a > 0$ 이므로 $a > -1$

$$\therefore a=3$$

13 답 64

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x^3-x+5} = 1$ 에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이다.

또 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 8$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ 에서 $f(1) = 0$

$f(x) = 2(x-1)(x^2+ax+b)$ (a, b 는 상수)라 하고 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 8$ 의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x^2+ax+b)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} 2(x^2+ax+b) = 2(1+a+b)\end{aligned}$$

즉, $2(1+a+b) = 8$ 이므로 $b = -a+3$

$$\therefore f(x) = 2(x-1)(x^2+ax-a+3)$$

다항함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $g(x)$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=-1$ 에서도 연속이다.

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x) = f(-1)g(-1)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4(x-1)(x^2+ax-a+3)}{x+1} = 8a-16$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} 4(x-1)(x^2+ax-a+3) = 0$ 에서

$$4 \times (-2) \times (1-a-a+3) = 0$$

$$-2a+4=0 \quad \therefore a=2$$

따라서 $f(x) = 2(x-1)(x^2+2x+1)$ 이므로

$$f(3) = 2 \times 2 \times (9+6+1) = 64$$

14 답 ①

이차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$g(x) = x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하자.}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=-3, x=3$ 에서 불연속이고 다항함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=-3, x=3$ 에서도 연속이다.

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=-3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -3+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -3-} f(x)g(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3+} (3-|x|)(x^2+ax+b) = \lim_{x \rightarrow -3-} 3(x^2+ax+b)$$

$$0 = 3(9-3a+b)$$

$$\therefore 3a-b=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)g(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} 3(x^2+ax+b) = \lim_{x \rightarrow 3-} (3-|x|)(x^2+ax+b)$$

$$3(9+3a+b) = 0$$

$$\therefore 3a+b=-9 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=0, b=-9$$

$$\therefore g(x) = x^2 - 9$$

함수 $f(x)$ 는 $x=-3, x=3$ 에서 불연속이고 다항함수 $g(x+k)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x+k)$ 가 불연속인 x 의 개수가 1이려면 $x=-3$ 에서는 연속이거나 $x=3$ 에서는 연속이어야 한다.

(i) $x=-3$ 에서 연속일 때,

$$\lim_{x \rightarrow -3+} f(x)g(x+k) = \lim_{x \rightarrow -3-} f(x)g(x+k) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3+} (3-|x|)\{(x+k)^2-9\} = \lim_{x \rightarrow -3-} 3\{(x+k)^2-9\}$$

$$0 = 3\{(-3+k)^2-9\}$$

$$k^2-6k=0, k(k-6)=0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=6$$

(ii) $x=3$ 에서 연속일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x)g(x+k) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)g(x+k) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} 3\{(x+k)^2-9\} = \lim_{x \rightarrow 3-} (3-|x|)\{(x+k)^2-9\}$$

$$3\{(3+k)^2-9\} = 0$$

$$k^2+6k=0, k(k+6)=0$$

$$\therefore k=-6 \text{ 또는 } k=0$$

(i), (ii)에서 $k=0$ 이면 함수 $f(x)g(x+k)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 불연속인 x 의 개수가 1이려면

$$k=6 \text{ 또는 } k=-6$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 곱은

$$6 \times (-6) = -36$$

15 답 14

다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^3$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하고,

$R(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x-1)^3 Q(x) + ax^2 + bx + c$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-x^3}{x-1} = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - x^3\} = 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{(x-1)^3 Q(x) + ax^2 + bx + c - x^3\} = 0$$

$$a + b + c - 1 = 0$$

$$\therefore c = 1 - a - b \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$f(x) = (x-1)^3 Q(x) + ax^2 + bx + 1 - a - b$ 를 $\textcircled{A}$ 의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^3}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3 Q(x) + ax^2 + bx + 1 - a - b - x^3}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3 Q(x) + a(x^2 - 1) + b(x-1) - (x^3 - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3 Q(x) + a(x+1)(x-1) + b(x-1) - (x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \{(x-1)^2 Q(x) + a(x+1) + b - (x^2 + x + 1)\} \\ &= 2a + b - 3 \end{aligned}$$

즉, $2a + b - 3 = 3$ 이므로

$$b = -2a + 6$$

이를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$c = 1 - a - (-2a + 6) = a - 5$$

$$\therefore R(x) = ax^2 + (-2a + 6)x + a - 5$$

(i) $a = 0$ 일 때,

방정식 $R(x) = 0$ 에서

$$6x - 5 = 0 \quad \therefore x = \frac{5}{6}$$

따라서 방정식 $R(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 개수는 1이므로

$$R(x) = 6x - 5$$

$$\therefore R(-1) = -6 - 5 = -11$$

(ii) $a \neq 0$ 일 때,

방정식 $R(x) = 0$ 에서

$$ax^2 + (-2a + 6)x + a - 5 = 0$$

이 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a + 3)^2 - a(a - 5) = 0$$

$$-a + 9 = 0 \quad \therefore a = 9$$

따라서 $R(x) = 9x^2 - 12x + 4$ 이므로

$$R(-1) = 9 + 12 + 4 = 25$$

(i), (ii)에서 모든 $R(-1)$ 의 값의 합은

$$-11 + 25 = 14$$

16 답 ③

$\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0$ 에서

$$\{f(x)\}^2 \{f(x) - 1\} - x^2 \{f(x) - 1\} = 0$$

$$\{f(x) - 1\} [\{f(x)\}^2 - x^2] = 0$$

$$\{f(x) - 1\} \{f(x) + x\} \{f(x) - x\} = 0$$

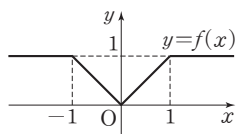
$$\therefore f(x) = 1 \text{ 또는 } f(x) = -x \text{ 또는 } f(x) = x$$

이때 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서

연속이고 최댓값이 1, 최솟값이 0이므로

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -x & (-1 < x \leq 0) \\ x & (0 < x < 1) \end{cases}$$

$$\therefore f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$



17 답 ③

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & (x \leq 2) \\ -x^2 + ax & (x > 2) \end{cases} = \begin{cases} (x-1)(x-3) & (x \leq 2) \\ -x(x-a) & (x > 2) \end{cases} \text{이고, } a > 2 \text{이}$$

므로 $f(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x = 1 \text{ 또는 } x = a$$

$$\text{한편 } \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (-x^2 + ax) = -4 + 2a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x^2 - 4x + 3) = -1 \text{이고, } a > 2 \text{에서 } -4 + 2a > 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 불연속이다.

함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 1, x = a, x = 2$ 에서도 연속이다.

함수 $h(x)$ 가 $x = 1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)} = h(1) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$ 에서 $g(1) = 0$

함수 $h(x)$ 가 $x = a$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = h(a)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = h(a) \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 에서 $g(a) = 0$

함수 $h(x)$ 가 $x = 2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} h(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x)}{f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x)}{-x^2 + ax} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x)}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\frac{g(2)}{-4 + 2a} = \frac{g(2)}{-1}$$

$$-g(2) = (-4 + 2a)g(2), (2a - 3)g(2) = 0$$

$$\therefore g(2) = 0 \quad (\because a > 2)$$

삼차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $g(1) = 0, g(2) = 0,$

$g(a) = 0$ 이므로

$$g(x) = (x-1)(x-2)(x-a)$$

$\textcircled{A}$ 에서

$$\begin{aligned} h(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{x^2 - 4x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-1)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-a)}{x-3} \\ &= \frac{1-a}{2} \quad \dots\dots \textcircled{B} \end{aligned}$$

$\textcircled{B}$ 에서

$$\begin{aligned} h(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{-x^2 + ax} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{-x(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-1)(x-2)}{-x} \\ &= -\frac{(a-1)(a-2)}{a} \end{aligned}$$

(나)의 $h(1)=h(a)$ 에서

$$\frac{1-a}{2} = -\frac{(a-1)(a-2)}{a}$$

$$a(a-1)=2(a-1)(a-2)$$

$$(a-1)(a-4)=0$$

$$\therefore a=4 \quad (\because a>2)$$

$$\text{이를 ㉔에 대입하면 } h(1)=\frac{1-4}{2}=-\frac{3}{2}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & (x\leq 2) \\ -x^2+4x & (x>2) \end{cases}, g(x)=(x-1)(x-2)(x-4) \text{이므로}$$

$$h(3)=\frac{g(3)}{f(3)}=\frac{2\times 1\times (-1)}{-9+12}=-\frac{2}{3}$$

$$\therefore h(1)+h(3)=-\frac{3}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{13}{6}$$

18 ㉔ 5

$$ax^2-2(a-6)x+3(a-6)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $a=0$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } 12x-18=0 \quad \therefore x=\frac{3}{2}$$

$$\therefore f(a)=1$$

(ii) $a\neq 0$ 일 때,

이차방정식 ㉔의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(a-6)^2-3a(a-6)$$

$$=(a-6)(-2a-6)$$

$$=-2(a+3)(a-6)$$

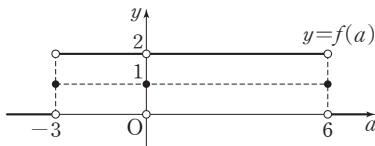
$$a<-3 \text{ 또는 } a>6 \text{ 일 때, } D<0 \text{ 이므로 } f(a)=0$$

$$a=-3 \text{ 또는 } a=6 \text{ 일 때, } D=0 \text{ 이므로 } f(a)=1$$

$$-3<a<0 \text{ 또는 } 0<a<6 \text{ 일 때, } D>0 \text{ 이므로 } f(a)=2$$

(i), (ii)에서

$$f(a)=\begin{cases} 0 & (a<-3 \text{ 또는 } a>6) \\ 1 & (a=-3 \text{ 또는 } a=0 \text{ 또는 } a=6) \\ 2 & (-3<a<0 \text{ 또는 } 0<a<6) \end{cases}$$



$\lim_{a \rightarrow k+} f(a) \neq \lim_{a \rightarrow k-} f(a)$ 를 만족시키는 실수 k 는 $-3, 6$ 의 2개이므로

$$m=2$$

함수 $f(a)$ 가 불연속인 a 는 $-3, 0, 6$ 의 3개이므로

$$n=3$$

$$\therefore m+n=2+3=5$$

19 ㉔ 9

함수 $f(x)=\begin{cases} 3x^2+12x+8 & (x<0) \\ 2x^2-8x+8 & (x\geq 0) \end{cases}$ 은 $x\neq 0$ 인 실수 전체의 집합에서

연속이다.

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (2x^2-8x+8) = 8,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (3x^2+12x+8) = 8 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0) \text{이므로 함수 } f(x) \text{는 } x=0 \text{에서 연속이다.}$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ 2k-f(x) & (x\geq a) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속

이려면 $x=a$ 에서도 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \lim_{x \rightarrow a-} g(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} \{2k-f(x)\} = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$$

$$2k-f(a)=f(a)$$

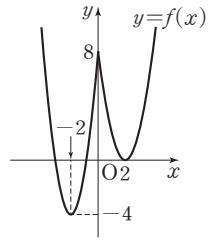
$$\therefore f(a)=k \quad \dots\dots\dots \text{배점 50\%}$$

이를 만족시키는 실수 a 의 개수가 $h(k)$ 이므로 $h(k)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 만나는 점의 개수와 같다.

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+12x+8 & (x<0) \\ 2x^2-8x+8 & (x\geq 0) \end{cases} = \begin{cases} 3(x+2)^2-4 & (x<0) \\ 2(x-2)^2 & (x\geq 0) \end{cases} \text{에서 함수}$$

$y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로

$$h(k)=\begin{cases} 0 & (k<-4) \\ 1 & (k=-4) \\ 2 & (-4<k<0 \text{ 또는 } k>8) \\ 3 & (k=0 \text{ 또는 } k=8) \\ 4 & (0<k<8) \end{cases}$$



$h(k)=3$ 인 정수 k 는 $0, 8$ 의 2개이므로 $m=2$

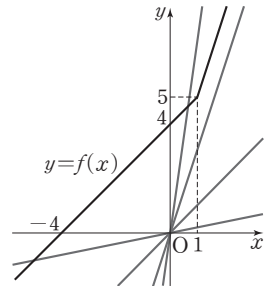
$h(k)=4$ 인 정수 k 는 $1, 2, 3, \dots, 7$ 의 7개이므로 $n=7$

$$\therefore m+n=2+7=9 \quad \dots\dots\dots \text{배점 50\%}$$

20 ㉔ 8

$$f(x)=2x+3+|x-1| = \begin{cases} 2x+3-(x-1) & (x<1) \\ 2x+3+(x-1) & (x\geq 1) \end{cases} = \begin{cases} x+4 & (x<1) \\ 3x+2 & (x\geq 1) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같고, 직선 $y=mx$ 는 원점을 지나므로 기울기 m 의 값이 1 또는 3일 때를 기준으로 교점의 개수가 바뀐다.



$$\therefore g(m)=\begin{cases} 1 & (m<1 \text{ 또는 } m>3) \\ 0 & (1\leq m\leq 3) \end{cases}$$

이차함수 $h(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$h(x)=x^2+ax+b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하자.}$$

함수 $g(x)$ 는 $x=1, x=3$ 에서 불연속이고 다항함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1, x=3$ 에서도 연속이다.

함수 $g(x)h(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} g(x)h(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} g(x)h(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{0 \times (x^2+ax+b)\} = \lim_{x \rightarrow 1-} \{1 \times (x^2+ax+b)\}$$

$$0=1+a+b \quad \therefore a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수 $g(x)h(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} g(x)h(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} g(x)h(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} \{1 \times (x^2+ax+b)\} = \lim_{x \rightarrow 3-} \{0 \times (x^2+ax+b)\}$$

$$9+3a+b=0 \quad \therefore 3a+b=-9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=-4, b=3$$

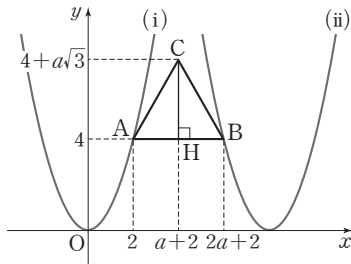
$$\text{따라서 } h(x)=x^2-4x+3 \text{이므로}$$

$$h(5)=25-20+3=8$$

21 답 2

삼각형 ABC의 꼭짓점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면
 $H(a+2, 4)$ 이므로
 $\overline{AH}=\overline{BH}=a, \overline{CH}=a\sqrt{3}$

따라서 $\angle CAB=\angle CBA=60^\circ$ 이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.



그림에서 (i)과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 A를 지나고 삼각형 ABC의 왼쪽에 있을 때의 t 의 값의 좌우에서 $g(t)$ 의 값이 바뀐다. 또 (ii)와 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 B를 지나고 삼각형 ABC의 오른쪽에 있을 때의 t 의 값의 좌우에서 $g(t)$ 의 값이 바뀐다.

(i) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 A를 지나고 $t < 2$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 A를 지나므로 $f(2)=4$ 에서

$$(2-t)^2=4, t^2-4t=0$$

$$t(t-4)=0 \quad \therefore t=0 \quad (\because t < 2)$$

(ii) 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 B를 지나고 $t > 2a+2$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 B를 지나므로 $f(2a+2)=4$ 에서

$$(2a+2-t)^2=4$$

$$(2a+2-t)^2-2^2=0$$

$$(2a+4-t)(2a-t)=0$$

$$\therefore t=2a+4 \quad (\because t > 2a+2)$$

(i), (ii)에서

$$g(0)=1, g(2a+4)=1$$

$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)=2, \lim_{t \rightarrow 0^-} g(t)=0$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 $t=0$ 에서 불연속이고,

$\lim_{t \rightarrow (2a+4)^+} g(t)=0, \lim_{t \rightarrow (2a+4)^-} g(t)=2$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 $t=2a+4$ 에서 불연속이다.

또 $t < 0$ 또는 $t > 2a+4$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $g(t)=0$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 $t < 0$ 또는 $t > 2a+4$ 에서 연속이다.

따라서 함수 $g(t)$ 가 불연속인 t 의 개수가 2이려면 $0 < t < 2a+4$ 에서 연속이어야 한다.

즉, $0 < t < 2a+4$ 에서 $g(t)=2$ 이어야 하므로 $t=a+2$ 일 때 함수 $y=f(x)$, 즉 $y=(x-a-2)^2$ 의 그래프는 두 점 A, B를 지나야 한다.

따라서 $f(2)=4, f(2a+2)=4$ 이어야 하므로

$$a^2=4$$

$$\therefore a=2 \quad (\because a > 0)$$

22 답 3

(i) 원 O가 삼각형 ABC의 변 BC에 접할 때,

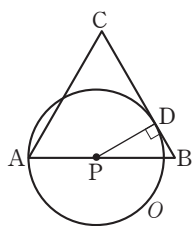
접점을 D라 하면

$$\overline{PA}=\overline{PD}=x, \overline{PB}=4-x$$

$\angle BDP=90^\circ, \angle PBD=60^\circ$ 이므로

$$\sin 60^\circ = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{4-x}$$



$$2x=4\sqrt{3}-\sqrt{3}x$$

$$(2+\sqrt{3})x=4\sqrt{3}$$

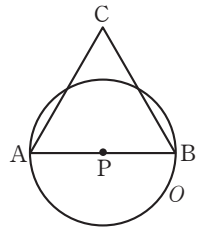
$$\therefore x = \frac{4\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = -12+8\sqrt{3}$$

(ii) 원 O가 삼각형 ABC의 꼭짓점 B를 지날 때,

변 AB가 원 O의 지름과 같으므로

$$x = \frac{1}{2} \times \overline{AB}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 = 2$$



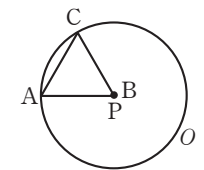
(iii) 원 O가 삼각형 ABC의 꼭짓점 C를 지날 때,

삼각형 ABC는 정삼각형이므로 점 B에서 두

점 A, C까지의 거리가 같다.

즉, 점 P는 점 B와 같으므로

$$x = \overline{AB} = 4$$



(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} 3 & (0 < x < -12+8\sqrt{3} \text{ 또는 } 2 < x < 4) \\ 4 & (x = -12+8\sqrt{3} \text{ 또는 } x = 2) \\ 5 & (-12+8\sqrt{3} < x < 2) \\ 2 & (x = 4) \end{cases}$$

따라서 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 는 $-12+8\sqrt{3}, 2, 4$ 의 3개이다.

23 답 ⑤

(㉞)의 $f(-x)=-f(x)$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0)=-f(0)$$

$$\therefore f(0)=0$$

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 0을 근으로 갖는다.

(㉞)에서 $n=1, 2, 3$ 일 때, $f(n)f(n+1)f(n+2) < 0$ 이므로

$$f(1)f(2)f(3) < 0 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(2)f(3)f(4) < 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$f(3)f(4)f(5) < 0 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉞} \text{에서 } f(3) > 0 \quad \cdots \textcircled{㉣}$$

(i) $f(2) > 0$ 일 때,

$\textcircled{㉠} \sim \textcircled{㉣}$ 에서

$$f(1) < 0, f(4) < 0, f(5) > 0$$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 (1, 2),

(3, 4), (4, 5)에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(ii) $f(2) < 0$ 일 때,

$\textcircled{㉠} \sim \textcircled{㉣}$ 에서

$$f(1) > 0, f(4) > 0, f(5) < 0$$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 (1, 2),

(2, 3), (4, 5)에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 (1, 5)에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

이때 (㉞)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 (-5, -1)에서도 적어도 3개의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 (-5, 5)에서 적어도 7개의 실근을 가지므로

$$k=7$$

idea
24 답 7

함수 $f(x)$ 는 이차함수이고 $f(-3)=f(1)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=-\frac{3+1}{2}$, 즉 $x=-1$ 에 대하여 대칭이다.

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \text{이므로}$$

$$-\frac{b}{2a}=-1 \quad \therefore b=2a$$

$$\therefore f(x)=ax^2+2ax+c$$

열린구간 $(-2, -1)$ 에서 방정식 $f(x)=0$ 의 실근이 존재하므로

$$f(-2)f(-1)<0$$

$$c(c-a)<0$$

이때 $c<a$ 에서 $c-a<0$ 이므로 $c>0$

$$\therefore 0<c<a$$

$$f(1)=a+2a+c=3a+c \text{이고 } 0<c<a \text{이므로}$$

$$3a<3a+c<3a+a$$

$$\therefore 3a<f(1)<4a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

a, c 가 정수이므로 $f(1)$ 의 값은 정수이고 $a>0$ 이므로 a 는 양의 정수이다.

(i) $a=1$ 일 때,

$\textcircled{1}$ 에서 $3<f(1)<4$ 이므로 $f(1)$ 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a=2$ 일 때,

$\textcircled{1}$ 에서 $6<f(1)<8$ 이므로 $f(1)=7$

(iii) $a\geq 3$ 일 때,

$\textcircled{1}$ 에서 $f(1)>9$ 이므로 $f(1)$ 의 값은 10 이상이다.

(i), (ii), (iii)에서 $f(1)$ 의 최솟값은 7이다.

25 답 ①

$f(x)=\begin{cases} (x-a)^2 & (x\leq a) \\ (x-2)(x-a) & (x>a) \end{cases}$ 는 $x\neq a$ 인 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$$\text{또 } \lim_{x\rightarrow a^-} f(x)=\lim_{x\rightarrow a^-} (x-2)(x-a)=0, \lim_{x\rightarrow a^-} f(x)=\lim_{x\rightarrow a^-} (x-a)^2=0$$

에서 $\lim_{x\rightarrow a^+} f(x)=\lim_{x\rightarrow a^+} f(x)=f(a)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

즉, 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

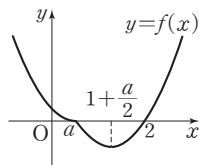
(i) $0<a<2$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같고

$$f(0)=(-a)^2=a^2>0$$

$$f\left(1+\frac{a}{2}\right)=\left(1+\frac{a}{2}-2\right)\left(1+\frac{a}{2}-a\right)$$

$$=-\left(\frac{a}{2}-1\right)^2<0$$



따라서 사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$ 인 c 가 열린구간

$\left(0, 1+\frac{a}{2}\right)$ 에 적어도 하나 존재하므로 $(\textcircled{1})$ 를 만족시킨다.

(ii)에서 세 점 $(2, f(2)), (a, f(a)), \left(1+\frac{a}{2}, f\left(1+\frac{a}{2}\right)\right)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{8}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times (2-a) \times \left\{ -f\left(1+\frac{a}{2}\right) \right\} = \frac{1}{8}$$

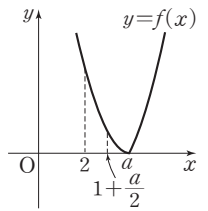
$$\frac{1}{2} (2-a) \left(\frac{a}{2}-1 \right)^2 = \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{8} (2-a)^3 = \frac{1}{8}$$

$$(2-a)^3=1 \quad \therefore a=1 \quad (\because a \text{는 실수})$$

(ii) $a>2$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

함수 $f(x)$ 는 $0<x<1+\frac{a}{2}$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)>0$ 이므로 $(\textcircled{1})$ 를 만족시키지 않는다.



$$(i), (ii) \text{에서 } a=1 \text{이므로 } f(x)=\begin{cases} (x-1)^2 & (x\leq 1) \\ (x-2)(x-1) & (x>1) \end{cases}$$

$$\therefore f(3a)=f(3)=1\times 2=2$$

26 답 5

$\lim_{x\rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}=4$ 에서 $x\rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x\rightarrow -1} f(x)=0 \text{에서 } f(-1)=0$$

$\lim_{x\rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}=1$ 에서 $x\rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x\rightarrow 0} f(x)=0 \text{에서 } f(0)=0$$

$\lim_{x\rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}=2$ 에서 $x\rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x\rightarrow 1} f(x)=0 \text{에서 } f(1)=0$$

따라서 다항함수 $g(x)$ 에 대하여

$$f(x)=x(x+1)(x-1)g(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \cdots \cdots \text{배점 } 40\%$$

$\textcircled{1}$ 을 $\lim_{x\rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}=4$ 의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x\rightarrow -1} \frac{x(x+1)(x-1)g(x)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\rightarrow -1} x(x-1)g(x) = 2g(-1)$$

$$\text{즉, } 2g(-1)=4 \text{이므로 } g(-1)=2$$

$\textcircled{1}$ 을 $\lim_{x\rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}=1$ 의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\rightarrow 0} \frac{x(x+1)(x-1)g(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\rightarrow 0} (x+1)(x-1)g(x) = -g(0)$$

$$\text{즉, } -g(0)=1 \text{이므로 } g(0)=-1$$

$\textcircled{1}$ 을 $\lim_{x\rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}=2$ 의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\rightarrow 1} \frac{x(x+1)(x-1)g(x)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\rightarrow 1} x(x+1)g(x) = 2g(1)$$

$$\text{즉, } 2g(1)=2 \text{이므로 } g(1)=1 \quad \cdots \cdots \text{배점 } 30\%$$

다항함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 $g(-1)g(0)<0$, $g(0)g(1)<0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 $g(c_1)=0$ 인 c_1 이 열린구간 $(-1, 0)$ 에 적어도 하나 존재하고 $g(c_2)=0$ 인 c_2 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 방정식 $f(x)=0$, 즉

$x(x+1)(x-1)g(x)=0$ 의 실근은 $-1, c_1, 0, c_2, 1$ 이므로 방정식

$f(x)=0$ 은 적어도 5개의 실근을 갖는다.

$$\therefore n=5 \quad \cdots \cdots \text{배점 } 30\%$$

01 ④ 02 20 03 4 04 ③ 05 ④ 06 -5
07 -15 08 ⑤ 09 ① 10 ③

01 답 ④

1단계 b 의 값 구하기

㉞에서 $a=1$ 이면 모든 실수 x 에 대하여 $b(x-1)(x-2)=0$ 을 만족시켜야 하므로 $b=0$

이는 조건을 만족시키지 않으므로 $a \neq 1$

㉞에서 $\sqrt{x^2+ax-3b}-\sqrt{x^2+x-3ab} \neq 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{b(x-1)(x-2)}{\sqrt{x^2+ax-3b}-\sqrt{x^2+x-3ab}} \\ &= \frac{b(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+ax-3b}+\sqrt{x^2+x-3ab})}{(\sqrt{x^2+ax-3b}-\sqrt{x^2+x-3ab})(\sqrt{x^2+ax-3b}+\sqrt{x^2+x-3ab})} \\ &= \frac{b(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+ax-3b}+\sqrt{x^2+x-3ab})}{(a-1)x+3b(a-1)} \\ &= \frac{b(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+ax-3b}+\sqrt{x^2+x-3ab})}{(a-1)(x+3b)} \quad \dots\dots ㉞ \end{aligned}$$

㉞에서 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$3b = -1 \text{ 또는 } 3b = -2$$

$$\therefore b = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } b = -\frac{2}{3}$$

2단계 순서쌍 (a, b) 의 개수 구하기

(i) $b = -\frac{1}{3}$ 일 때,

㉞에서

$$f(x) = -\frac{(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+ax+1}+\sqrt{x^2+x+a})}{3(a-1)(x-1)}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$ 에서도 연속이므로

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+ax+1}+\sqrt{x^2+x+a})}{3(a-1)(x-1)} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+ax+1}+\sqrt{x^2+x+a})}{3(a-1)} \\ &= -\frac{2\sqrt{a+2}}{3(a-1)} \end{aligned}$$

$$f(2)=0 \text{ 이므로 ㉞의 } f(1)+f(2)=\frac{4}{3} \text{ 에서}$$

$$\frac{2\sqrt{a+2}}{3(a-1)} = \frac{4}{3}, \quad \sqrt{a+2} = 2(a-1)$$

$$a+2 = 4(a-1)^2$$

$$4a^2 - 9a + 2 = 0$$

$$(4a-1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{4} \text{ 또는 } a = 2$$

따라서 순서쌍 (a, b) 는 $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}), (2, -\frac{1}{3})$ 의 2개이다.

(ii) $b = -\frac{2}{3}$ 일 때,

㉞에서

$$f(x) = -\frac{2(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+ax+2}+\sqrt{x^2+x+2a})}{3(a-1)(x-2)}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=2$ 에서도 연속이므로

$$\begin{aligned} f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \\ &= -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+ax+2}+\sqrt{x^2+x+2a})}{3(a-1)(x-2)} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-1)(\sqrt{x^2+ax+2}+\sqrt{x^2+x+2a})}{3(a-1)} \\ &= -\frac{4\sqrt{2a+6}}{3(a-1)} \end{aligned}$$

$$f(1)=0 \text{ 이므로 ㉞의 } f(1)+f(2)=\frac{4}{3} \text{ 에서}$$

$$-\frac{4\sqrt{2a+6}}{3(a-1)} = \frac{4}{3}, \quad -\sqrt{2a+6} = a-1$$

$$2a+6 = (a-1)^2, \quad a^2 - 4a - 5 = 0$$

$$(a+1)(a-5) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 5$$

따라서 순서쌍 (a, b) 는 $(-1, -\frac{2}{3}), (5, -\frac{2}{3})$ 의 2개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$2+2=4$$

참고 ㉞에서 $(a-1)(x+3b)$ 가 $\sqrt{x^2+ax-3b}+\sqrt{x^2+x-3ab}$ 와 같으려면 $x^2+ax-3b, x^2+x-3ab$ 가 모두 완전제곱식이어야 한다.

$x^2+ax-3b$ 가 완전제곱식이면 이차방정식 $x^2+ax-3b=0$ 의 판별식을

D_1 이라 할 때,

$$D_1 = a^2 + 12b = 0 \quad \dots\dots ㉞$$

$x^2+x-3ab$ 가 완전제곱식이면 이차방정식 $x^2+x-3ab=0$ 의 판별식을

D_2 라 할 때,

$$D_2 = 1 + 12ab = 0$$

$$ab = -\frac{1}{12} \quad \therefore a = -\frac{1}{12b} \quad (\because b \neq 0) \quad \dots\dots ㉞$$

$$\text{이를 ㉞에 대입하면 } \frac{1}{12^2b^2} + 12b = 0$$

$$1 + 12^3b^3 = 0, \quad b^3 = -\frac{1}{12^3} \quad \therefore b = -\frac{1}{12} \quad (\because b \text{는 실수})$$

이를 ㉞에 대입하면 $a=1$

이는 $a \neq 1$ 을 만족시키지 않는다.

따라서 $(a-1)(x+3b)$ 가 $\sqrt{x^2+ax-3b}+\sqrt{x^2+x-3ab}$ 와 같게 되는 경우는 생각하지 않는다.

02 답 20

1단계 a, b, c 에 대한 식 세우기

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \text{ 에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \left(cx^2 + \frac{5}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow 1-} (ax+b)$$

$$\therefore c + \frac{5}{2} = a + b \quad \dots\dots ㉞$$

2단계 a 와 c 의 부호 알기

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하면 일대일대응이므로 x 의 값이 커질 때 y 의 값도 커지거나 x 의 값이 커질 때 y 의 값은 작아져야 한다.

즉, a, c 의 부호가 같아야 하므로

$$a > 0, c > 0 \text{ 또는 } a < 0, c < 0$$

$a > 0, c > 0$ 이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프

의 교점은 모두 직선 $y=x$ 위에 있고 교점의 x 좌표가 $-1, 1, 2$ 이므로

$$f(-1) = -1, f(1) = 1, f(2) = 2$$

$$f(1)=1 \text{에서 } c+\frac{5}{2}=1$$

$$\therefore c=-\frac{3}{2}$$

이는 $c>0$ 이라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a<0, c<0$ 이다.

3단계 $y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점의 좌표 구하기

$a<0, c<0$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

x 좌표가 $-1, 1, 2$ 인 세 교점을 각각 A, B, C라 하면 점 B는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 B(1, 1)

또 두 점 A, C는 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이므로

A(-1, 2), C(2, -1)

4단계 $2a+4b-10c$ 의 값 구하기

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 점 A, C를 지나므로

$$f(-1)=2 \text{에서 } -a+b=2 \quad \therefore a-b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

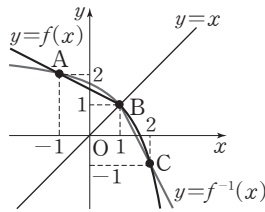
$$f(2)=-1 \text{에서 } 4c+5=-1$$

$$4c=-6 \quad \therefore c=-\frac{3}{2}$$

$$\text{이를 } \textcircled{A} \text{에 대입하면 } a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{을 연립하여 풀면 } a=-\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}$$

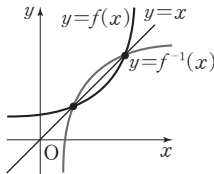
$$\therefore 2a+4b-10c=2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \times \frac{3}{2} - 10 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\ = -1 + 6 + 15 = 20$$



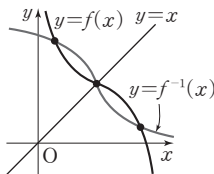
비밀 NOTE

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수가 존재할 때

- (1) 함수 $f(x)$ 가 증가하는 함수이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 모두 직선 $y=x$ 위에만 존재한다.



- (2) 함수 $f(x)$ 가 감소하는 함수이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점 중 1개는 직선 $y=x$ 위에 있고, 나머지 교점은 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.



03 답 4

1단계 $f(2x)f(x+b)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 조건 찾기

$$f(x)=\begin{cases} a(x+2)(x-4) & (x<0) \\ (x-1)(x-2)(x-4) & (x\geq 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$f(2x)=\begin{cases} a(2x+2)(2x-4) & (2x<0) \\ (2x-1)(2x-2)(2x-4) & (2x\geq 0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 4a(x+1)(x-2) & (x<0) \\ 4(2x-1)(x-1)(x-2) & (x\geq 0) \end{cases}$$

$$f(x+b)=\begin{cases} a(x+b+2)(x+b-4) & (x+b<0) \\ (x+b-1)(x+b-2)(x+b-4) & (x+b\geq 0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} a(x+b+2)(x+b-4) & (x<-b) \\ (x+b-1)(x+b-2)(x+b-4) & (x\geq -b) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(2x) = -8, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(2x) = -8a \text{이고 } a \neq 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(2x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(2x)$$

즉, 함수 $f(2x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow -b^+} f(x+b) = -8, \lim_{x \rightarrow -b^-} f(x+b) = -8a \text{이고 } a \neq 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -b^+} f(x+b) \neq \lim_{x \rightarrow -b^-} f(x+b)$$

즉, 함수 $f(x+b)$ 는 $x=-b$ 에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(2x)f(x+b)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0, x=-b$ 에서도 연속이다.

2단계 $b-a^2$ 의 최댓값 구하기

(i) $b>0$ 일 때 $\rightarrow -b<0$

① 함수 $f(2x)f(x+b)$ 가 $x=0$ 에서 연속일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(2x)f(x+b) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(2x)f(x+b) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 4(2x-1)(x-1)(x-2)(x+b-1)(x+b-2)(x+b-4)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} 4a(x+1)(x-2)(x+b-1)(x+b-2)(x+b-4)$$

$$-8(b-1)(b-2)(b-4) = -8a(b-1)(b-2)(b-4)$$

$$(8a-8)(b-1)(b-2)(b-4) = 0$$

$$(a-1)(b-1)(b-2)(b-4) = 0$$

$$\therefore b=1 \text{ 또는 } b=2 \text{ 또는 } b=4 \quad (\because a \neq 1)$$

② 함수 $f(2x)f(x+b)$ 가 $x=-b$ 에서 연속일 때,

$$\lim_{x \rightarrow -b^+} f(2x)f(x+b) = \lim_{x \rightarrow -b^-} f(2x)f(x+b) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow -b^+} 4a(x+1)(x-2)(x+b-1)(x+b-2)(x+b-4)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -b^-} \{4a(x+1)(x-2) \times a(x+b+2)(x+b-4)\}$$

$$4a(-b+1)(-b-2) \times (-8) = 4a(-b+1)(-b-2) \times (-8a)$$

$$(32a^2-32a)(-b+1)(-b-2) = 0$$

$$a(a-1)(b-1)(b+2) = 0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } b=1 \quad (\because a \neq 1, b>0)$$

①, ②에서

$$a=0, b=2 \text{ 또는 } a=0, b=4 \text{ 또는 } a \text{의 값에 관계없이 } b=1$$

$$\therefore b-a^2=2 \text{ 또는 } b-a^2=4 \text{ 또는 } b-a^2=1$$

(ii) $b \leq 0$ 일 때,

조건을 만족시키는 a, b 의 값이 존재하면

$$b-a^2 \leq 0$$

(i), (ii)에서 $b-a^2$ 의 최댓값은 4이다.

04 답 ③

1단계 $f(x)$ 의 식 세우기

㉞의 $f(x)g(x)=2(x-3)(x-6)$ 의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$f(3)g(3)=0$$

이때 ㉞에서 $g(3)=-6$ 이므로

$$f(3)=0$$

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=(x-3)(x^2+ax+b)$ (a, b 는 상수)라 하자.

2단계 $g(2)$ 의 최댓값과 최솟값의 곱 구하기

㉞의 $f(x)g(x)=2(x-3)(x-6)$ 에서

$$(x-3)(x^2+ax+b)g(x)=2(x-3)(x-6) \text{이므로}$$

$x \neq 3, x^2+ax+b \neq 0$ 일 때,

$$g(x) = \frac{2(x-3)(x-6)}{(x-3)(x^2+ax+b)} = \frac{2(x-6)}{x^2+ax+b} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=3$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = g(3) \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -6$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-6)}{x^2+ax+b} = -6$$

$$\frac{-6}{9+3a+b} = -6, 9+3a+b=1$$

$$\therefore b = -3a - 8$$

한편 $\textcircled{㉠}$ 에서 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면

$$x^2+ax+b \neq 0 \quad \therefore x^2+ax-3a-8 \neq 0$$

이차방정식 $x^2+ax-3a-8=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 4(-3a-8) < 0$$

$$a^2 + 12a + 32 < 0, (a+8)(a+4) < 0$$

$$\therefore -8 < a < -4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

한편 $f(x) = (x-3)(x^2+ax-3a-8)$ 에서

$$f(2) = -(4+2a-3a-8) = a+4$$

$f(2)$ 의 값이 정수이므로 a 도 정수이다.

이때 $\textcircled{㉡}$ 에서 $a = -7$ 또는 $a = -6$ 또는 $a = -5$

$$\text{따라서 } g(2) = \frac{-8}{4+2a-3a-8} = \frac{8}{a+4} \text{은 } a = -7 \text{에서 최댓값 } -\frac{8}{3},$$

$a = -5$ 에서 최솟값 -8 을 가지므로 최댓값과 최솟값의 곱은

$$-\frac{8}{3} \times (-8) = \frac{64}{3}$$

idea 05 답 ④

1단계 $g(x)-1=0, g(x)-4=0$ 의 근 찾기

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{|g(x)-1||g(x)-4|} & (g(x) \neq 1, g(x) \neq 4) \\ 0 & (g(x) = 1 \text{ 또는 } g(x) = 4) \end{cases}$$

함수 $(f \circ g)(x)$ 가 불연속인 x 의 값이 $-1, 0, 2, 3$ 이므로 방정식

$$|g(x)-1||g(x)-4|=0 \text{의 네 근이 } -1, 0, 2, 3 \text{이다.}$$

$g(x)$ 는 이차함수이므로 $g(x) = ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하자.

이차방정식 $g(x)-1=0$, 즉 $ax^2+bx+c-1=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-\frac{b}{a}$, 두 근의 곱은 $\frac{c-1}{a}$ 이다.

또 이차방정식 $g(x)-4=0$, 즉 $ax^2+bx+c-4=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 $-\frac{b}{a}$, 두 근의 곱은 $\frac{c-4}{a}$ 이다.

두 이차방정식 $g(x)-1=0, g(x)-4=0$ 의 두 근의 합이 같으므로 $g(x)-1=0$ 의 두 근이 -1 과 3 , $g(x)-4=0$ 의 두 근이 0 과 2 이거나 $g(x)-1=0$ 의 두 근이 0 과 2 , $g(x)-4=0$ 의 두 근이 -1 과 3 이다.

2단계 $(g \circ f)(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값의 합 구하기

(i) 이차방정식 $g(x)-1=0$ 의 두 근이 -1 과 3 , 이차방정식

$$g(x)-4=0 \text{의 두 근이 } 0 \text{과 } 2 \text{일 때,}$$

두 이차방정식 $g(x)-1=0, g(x)-4=0$ 의 두 근의 곱은 각각

$$\frac{c-1}{a} = -3, \frac{c-4}{a} = 0$$

$$\therefore a = -1, c = 4$$

이차방정식 $g(x)-1=0$ 의 두 근의 합은

$$-\frac{b}{a} = 2$$

$$a = -1 \text{을 대입하면 } b = 2$$

$$\therefore g(x) = -x^2 + 2x + 4$$

$$\text{방정식 } (g \circ f)(x) = 0 \text{에서 } g(f(x)) = 0$$

$$- \{f(x)\}^2 + 2f(x) + 4 = 0$$

$$\{f(x)\}^2 - 2f(x) - 4 = 0$$

$$\therefore f(x) = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$\text{이때 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x-1||x-4|} & (x \neq 1, x \neq 4) \\ 0 & (x = 1 \text{ 또는 } x = 4) \end{cases} \text{에서 } f(x) \geq 0 \text{이}$$

므로

$$f(x) = 1 + \sqrt{5}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{|x-1||x-4|} = 1 + \sqrt{5} \text{에서}$$

$$|x^2-5x+4| = \frac{1}{1+\sqrt{5}}, |x^2-5x+4| = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\therefore x^2-5x+4 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ 또는 } x^2-5x+4 = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\therefore x^2-5x+\frac{17-\sqrt{5}}{4} = 0 \text{ 또는 } x^2-5x+\frac{15+\sqrt{5}}{4} = 0$$

이차방정식 $x^2-5x+\frac{17-\sqrt{5}}{4}=0$ 의 두 근을 α_1, β_1 이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 판별식을 D 라 하면 $D=25-(17-\sqrt{5})=8+\sqrt{5}>0$
 $\alpha_1+\beta_1=5$

이차방정식 $x^2-5x+\frac{15+\sqrt{5}}{4}=0$ 의 두 근을 α_2, β_2 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 판별식을 D 라 하면 $D=25-(15+\sqrt{5})=10-\sqrt{5}>0$
 $\alpha_2+\beta_2=5$

(ii) 이차방정식 $g(x)-1=0$ 의 두 근이 0 과 2 , 이차방정식 $g(x)-4=0$ 의 두 근이 -1 과 3 일 때,

두 이차방정식 $g(x)-1=0, g(x)-4=0$ 의 두 근의 곱은 각각

$$\frac{c-1}{a} = 0, \frac{c-4}{a} = -3$$

$$\therefore a = 1, c = 1$$

이차방정식 $g(x)-1=0$ 의 두 근의 합은

$$-\frac{b}{a} = 2$$

$$a = 1 \text{을 대입하면 } -b = 2$$

$$\therefore b = -2$$

$$\therefore g(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$\text{방정식 } (g \circ f)(x) = 0 \text{에서 } g(f(x)) = 0$$

$$\{f(x)\}^2 - 2f(x) + 1 = 0$$

$$\{f(x)-1\}^2 = 0$$

$$\therefore f(x) = 1$$

$$\text{즉, } \frac{1}{|x-1||x-4|} = 1 \text{에서}$$

$$|x^2-5x+4| = 1$$

$$\therefore x^2-5x+4 = 1 \text{ 또는 } x^2-5x+4 = -1$$

$$\therefore x^2-5x+3 = 0 \text{ 또는 } x^2-5x+5 = 0$$

이차방정식 $x^2-5x+3=0$ 의 두 근을 α_3, β_3 이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 판별식을 D 라 하면 $D=25-12=13>0$

$$\alpha_3+\beta_3=5$$

이차방정식 $x^2-5x+5=0$ 의 두 근을 α_4, β_4 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 판별식을 D 라 하면 $D=25-20=5>0$

$$\alpha_4+\beta_4=5$$

(i), (ii)에서 방정식 $(g \circ f)(x)=0$ 을 만족시키는 모든 x 의 값의 합은

$$\alpha_1+\beta_1+\alpha_2+\beta_2+\alpha_3+\beta_3+\alpha_4+\beta_4=5+5+5+5=20$$

1단계 $f(r)$ 구하기

$a > 1$ 에서 $2a > 2$ 이므로 중심의 좌표가 $(0, 2a)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원 C 는 그림과 같다.

x 축에 접하는 원과 원 C 의 접점이 y 축 위에 있으면 x 축에 접하는 원의 지름이 $2a-2$ 또는 $2a+2$ 이므로 $r=a-1$, $r=a+1$ 일 때를 기준으로 경우를 나누어 $f(r)$ 를 구해 보자.

(i) $0 < r < a-1$ 일 때,

원 C 와 한 점에서 만나면서 x 축에 접하는 원은 존재하지 않으므로 $f(r)=0$

(ii) $r=a-1$ 일 때,

원 C 와 한 점에서 만나면서 x 축에 접하는 원은 중심이 $(0, a-1)$ 인 원 1개뿐이므로 $f(r)=1$

(iii) $a-1 < r < a+1$ 일 때,

원 C 와 한 점에서 만나면서 x 축에 접하는 원은 중심의 x 좌표가 양수인 원과 음수인 원의 2개이므로 $f(r)=2$

(iv) $r=a+1$ 일 때,

원 C 와 한 점에서 만나면서 x 축에 접하는 원은 중심이 $(0, a+1)$ 인 원 1개와 원 C 에 외접하는 원 2개이므로 $f(r)=3$

(v) $r > a+1$ 일 때,

원 C 와 한 점에서 만나면서 x 축에 접하는 원은 원 C 에 외접하는 원 2개와 내접하는 원 2개이므로 $f(r)=4$

(i)~(v)에서

$$f(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < a-1) \\ 1 & (r=a-1) \\ 2 & (a-1 < r < a+1) \\ 3 & (r=a+1) \\ 4 & (r > a+1) \end{cases}$$

2단계 m, n 을 a 에 대한 식으로 나타내기

$g(x) = (x^2 + mx + n)f(x)$ 에서 $h(x) = x^2 + mx + n$ 이라 하자.

함수 $h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $f(x)$ 는 $x \neq a-1$, $x \neq a+1$ 인 양의 실수 x 에서 연속이므로 함수 $g(x) = h(x)f(x)$ 가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=a-1$, $x=a+1$ 에서도 연속이다. 함수 $h(x)f(x)$ 가 $x=a-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow (a-1)^+} h(x)f(x) = \lim_{x \rightarrow (a-1)^-} h(x)f(x) = h(a-1)f(a-1) \text{에서}$$

$$h(a-1) \times 2 = h(a-1) \times 0 = h(a-1) \times 1$$

$$\therefore h(a-1) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

함수 $h(x)f(x)$ 가 $x=a+1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow (a+1)^+} h(x)f(x) = \lim_{x \rightarrow (a+1)^-} h(x)f(x) = h(a+1)f(a+1) \text{에서}$$

$$h(a+1) \times 4 = h(a+1) \times 2 = h(a+1) \times 3$$

$$\therefore h(a+1) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서 $a-1$, $a+1$ 은 이차방정식 $h(x)=0$, 즉 $x^2 + mx + n = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a-1 + (a+1) = -m, (a-1)(a+1) = n$$

$$\therefore m = -2a, n = a^2 - 1$$

3단계 $m+n-2a$ 의 최솟값 구하기

$$\therefore m+n-2a = -2a + (a^2 - 1) - 2a$$

$$= a^2 - 4a - 1 = (a-2)^2 - 5$$

따라서 $a > 1$ 일 때, $m+n-2a$ 는 $a=2$ 에서 최솟값 -5 를 갖는다.

07 답 -15

1단계 집합 $(A \cup B) \cap C$ 의 원소의 개수의 의미 알기

집합 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 2\}$ 의 원소는 중심의 좌표가 $(0, 0)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원 위의 점이고, 집합 $B = \{(x, y) | y = x^2\}$ 의 원소는 꼭짓점의 좌표가 $(0, 0)$ 이고 아래로 볼록한 포물선 위의 점이다. 또 집합 $C = \{(x, y) | y = x + t\}$ 의 원소는 기울기가 1이고 y 절편이 t 인 직선 위의 점이다.

이때 집합 $(A \cup B) \cap C$ 의 원소의 개수는 직선 $y = x + t$ 가 원 $x^2 + y^2 = 2$ 또는 곡선 $y = x^2$ 과 만나는 점의 개수와 같다.

2단계 $f(t)$ 구하기

(i) 직선 $y = x + t$ 가 원 $x^2 + y^2 = 2$ 에 접할 때,

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y = x + t$, 즉 $x - y + t = 0$ 사이의 거리가 반지름의 길이인 $\sqrt{2}$ 와 같으므로

$$\frac{|t|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}, |t| = 2 \quad \therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 2$$

(ii) 직선 $y = x + t$ 가 곡선 $y = x^2$ 에 접할 때,

$$x + t = x^2 \text{에서 } x^2 - x - t = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1 + 4t = 0 \quad \therefore t = -\frac{1}{4}$$

(iii) 직선 $y = x + t$ 가 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 곡선 $y = x^2$ 이 만나는 점을 지날 때,

원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 곡선 $y = x^2$ 이 만나는 점의 y 좌표를 구하면

$$y + y^2 = 2, y^2 + y - 2 = 0$$

$$(y+2)(y-1) = 0 \quad \therefore y = 1 \quad (\because y \geq 0)$$

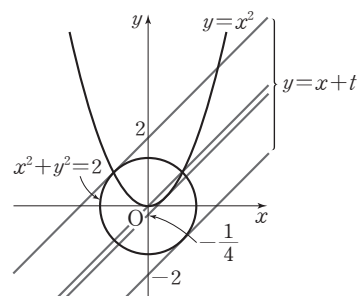
원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 곡선 $y = x^2$ 이 만나는 점의 좌표는 $(-1, 1)$, $(1, 1)$ 이다.

직선 $y = x + t$ 가 점 $(-1, 1)$ 을 지나면

$$1 = -1 + t \quad \therefore t = 2 \quad \text{--- (i)에서 구한 } t \text{의 값과 같다.}$$

직선 $y = x + t$ 가 점 $(1, 1)$ 을 지나면

$$1 = 1 + t \quad \therefore t = 0$$



(i), (ii), (iii)에서 t 의 값이 $-2, -\frac{1}{4}, 0, 2$ 일 때를 기준으로 구간을 나누어 집합 $(A \cup B) \cap C$ 의 원소의 개수 $f(t)$ 를 구하면

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < -2) \\ 1 & (t = -2) \\ 2 & (-2 < t < -\frac{1}{4} \text{ 또는 } t \geq 2) \\ 3 & (t = -\frac{1}{4} \text{ 또는 } t = 0) \\ 4 & (-\frac{1}{4} < t < 0 \text{ 또는 } 0 < t < 2) \end{cases}$$

3단계 $g(x)$ 구하기

함수 $f(x)$ 는 $x = -2, x = -\frac{1}{4}, x = 0, x = 2$ 에서 불연속이고 다항함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 연속이면 $x = -2, x = -\frac{1}{4}, x = 0, x = 2$ 에서도 연속이다.

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x = -2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)g(x) = f(-2)g(-2) \text{에서}$$

$$2 \times g(-2) = 0 \times g(-2) = 1 \times g(-2)$$

$$\therefore g(-2) = 0$$

함수 $f(x)g(x)$ 는 $x = -\frac{1}{4}, x = 0, x = 2$ 에서도 연속이므로 같은 방법으로 하면

$$g\left(-\frac{1}{4}\right) = 0, g(0) = 0, g(2) = 0$$

사차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$g(x) = x(x+2)\left(x+\frac{1}{4}\right)(x-2)$$

4단계 $f(1)g(1)$ 의 값 구하기

$$\therefore f(1)g(1) = 4 \times 1 \times 3 \times \frac{5}{4} \times (-1) = -15$$

08 답 ⑤

1단계 $f(t)$ 구하기

삼각형 ABP에서 $\overline{AB} = \sqrt{2+2} = 2$ 이므로 점 P와 직선 AB 사이의 거리를 h 라 하면

$$\triangle ABP = \frac{1}{2} \times 2 \times h = h$$

이때 삼각형 ABP의 넓이가 자연수이려면 점 P와 직선 AB 사이의 거리 h 가 자연수이어야 한다.

직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 1 \quad \therefore x + y - \sqrt{2} = 0$$

원 C의 중심 O(0, 0)과 직선 AB 사이의 거리는

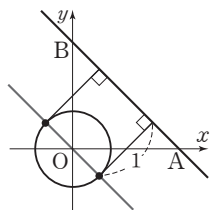
$$\frac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 1$$

따라서 원의 반지름의 길이 t 의 값을 기준으로 구간을 나누어 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수 $f(t)$ 를 구한다.

(i) $0 < t < 1$ 일 때,

그림과 같이 직선 AB와 거리가 1인 직선을 그어 원과 만나는 점의 개수를 확인하면 $h=1$ 이 되는 점 P는 2개이다.

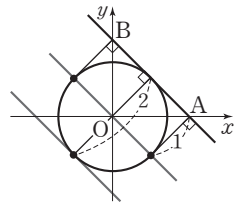
$$\therefore f(t) = 2$$



(ii) $t=1$ 일 때,

그림과 같이 직선 AB와 거리가 각각 1, 2인 직선을 그어 원과 만나는 점의 개수를 확인하면 $h=1$ 이 되는 점 P는 2개, $h=2$ 가 되는 점 P는 1개이다.

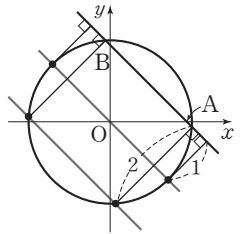
$$\therefore f(t) = 3$$



(iii) $1 < t < 2$ 일 때,

그림과 같이 직선 AB와 거리가 각각 1, 2인 직선을 그어 원과 만나는 점의 개수를 확인하면 $h=1$ 이 되는 점 P는 2개, $h=2$ 가 되는 점 P는 2개이다.

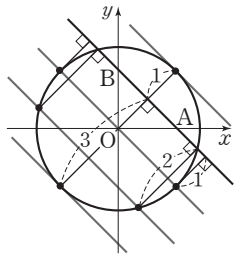
$$\therefore f(t) = 4$$



(iv) $t=2$ 일 때,

그림과 같이 직선 AB와 거리가 각각 1, 2, 3인 직선을 그어 원과 만나는 점의 개수를 확인하면 $h=1$ 이 되는 점 P는 3개, $h=2$ 가 되는 점 P는 2개, $h=3$ 이 되는 점 P는 1개이다.

$$\therefore f(t) = 6$$



(i)~(iv)와 같은 방법으로 점 P의 개수 $f(t)$ 를 구하면

$$f(t) = \begin{cases} 2 & (0 < t < 1) \\ 3 & (t = 1) \\ 4 & (1 < t < 2) \\ 6 & (t = 2) \\ 8 & (2 < t < 3) \\ 10 & (t = 3) \\ 12 & (3 < t < 4) \\ \vdots & \end{cases}$$

2단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$$\neg. f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

3단계 $\sqsubset$ 이 옳은지 확인하기

$$\sqsubset. \lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = 4, f(1) = 3 \text{이므로}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) \neq f(1)$$

4단계 $\sqsupset$ 이 옳은지 확인하기

$\sqsupset$. 함수 $f(t)$ 는 $t=1, t=2, t=3, \dots$ 에서 불연속이므로 $0 < a < 4$ 인 실수 a 에 대하여 $t=a$ 에서 불연속인 a 는 1, 2, 3의 3개이다.

5단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \sqsubset, \sqsupset$ 이다.

09 답 ①

1단계 a, b, c 의 부호 알기

함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0^-} |f(x)| \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x^2 + bx + c| = \lim_{x \rightarrow 0^-} |2x + a|$$

$$|c| = |a|$$

$$\therefore a = c \text{ 또는 } a = -c \quad \dots \text{ ㉠}$$

함수 $f(x)$ 에서

$$-|2x+a| = \begin{cases} 2x+a & (x < -\frac{a}{2}) \\ -2x-a & (x \geq -\frac{a}{2}) \end{cases}$$

$$x^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c$$

(7)에서 함수 $g(t)$ 의 함숫값이 4이려면 직선 $y=t$ 가 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 $x < 0$ 에서 서로 다른 두 점에서 만나고, $x \geq 0$ 에서 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 그림과 같아야 한다.

$$\text{즉, } -\frac{a}{2} < 0, -\frac{b}{2} > 0, c > -a \text{ 이므로}$$

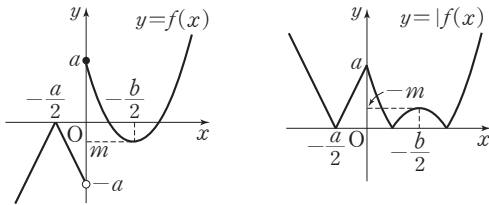
$$a > 0, b < 0, c = a \quad (\because \text{㉑}) \quad \dots\dots \text{㉒}$$

2단계 $h(t)$ 구하기

함수 $y=x^2+bx+a (x \geq 0)$ 의 최솟값 $-\frac{b^2}{4}+a$ 를 m 이라 하자.

(i) $-a < m < 0$ 일 때,

두 함수 $y=f(x), y=|f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



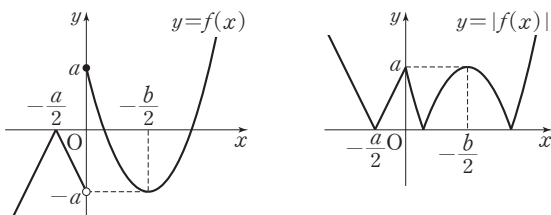
직선 $y=t$ 가 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 만나는 점의 개수 $h(t)$ 는

$$h(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 3 & (t=0 \text{ 또는 } t=a) \\ 6 & (0 < t < -m) \\ 5 & (t=-m) \\ 4 & (-m < t < a) \\ 2 & (t > a) \end{cases}$$

그런데 모든 t 의 값에 대하여 우극한과 좌극한의 값의 곱이 12가 되는 경우가 존재하지 않으므로 (4)를 만족시키지 않는다.

(ii) $m = -a$ 일 때,

두 함수 $y=f(x), y=|f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=t$ 가 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 만나는 점의 개수 $h(t)$ 는

$$h(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 3 & (t=0) \\ 6 & (0 < t < a) \\ 4 & (t=a) \\ 2 & (t > a) \end{cases}$$

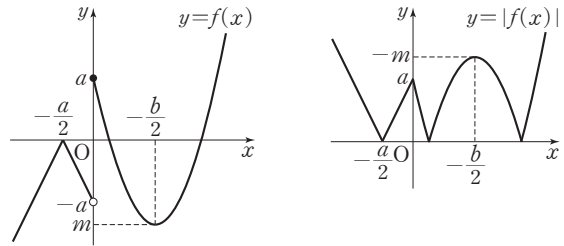
이때 $\lim_{t \rightarrow a^-} h(t) = 6, \lim_{t \rightarrow a^+} h(t) = 2$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow a^-} h(t) \times \lim_{t \rightarrow a^+} h(t) = 12$$

따라서 $a=2$ 일 때 (4)를 만족시킨다.

(iii) $m < -a$ 일 때,

두 함수 $y=f(x), y=|f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=t$ 가 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 만나는 점의 개수 $h(t)$ 는

$$h(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 3 & (t=0 \text{ 또는 } t=-m) \\ 6 & (0 < t < a) \\ 5 & (t=a) \\ 4 & (a < t < -m) \\ 2 & (t > -m) \end{cases}$$

그런데 모든 t 의 값에 대하여 우극한과 좌극한의 값의 곱이 12가 되는 경우가 존재하지 않으므로 (4)를 만족시키지 않는다.

3단계 a, b, c 의 값 구하기

(i), (ii), (iii)에서 $a=2$

㉒에서 $c=a$ 이므로 $c=2$

$m=-a$ 이므로 $m=-2$

$$m = -\frac{b^2}{4} + a \text{ 이므로}$$

$$-2 = -\frac{b^2}{4} + 2$$

$$b^2 = 16 \quad \therefore b = -4 \quad (\because b < 0)$$

4단계 $f(-2)+f(6)$ 의 값 구하기

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} -|2x+2| & (x < 0) \\ x^2-4x+2 & (x \geq 0) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$f(-2)+f(6) = -|-4+2| + (36-24+2) = 12$$

10 답 ③

1단계 7이 올은지 확인하기

7. $x > 1$ 에서 $f(x) > f(1)$ 을 만족시키는 실수 x 가 존재한다고 가정하자.

$f(x)$ 가 일대일함수이면 $f(0) \neq f(1)$ 이므로 $f(0) \geq f(1)$ 에서 $f(0) > f(1)$

$\frac{f(1)+f(0)}{2}, \frac{f(1)+f(x)}{2}$ 의 값 중에서 작거나 같은 것을 m 이라 하자.

(i) $\frac{f(1)+f(0)}{2} = m$ 일 때,

$f(0) > f(1)$ 에서

$$\frac{f(1)+f(1)}{2} < \frac{f(1)+f(0)}{2} < \frac{f(0)+f(0)}{2}$$

$$\therefore f(1) < m < f(0) \quad \dots\dots \text{㉑}$$

$f(x) > f(1)$ 에서

$$\frac{f(1)+f(x)}{2} < \frac{f(x)+f(x)}{2} = f(x)$$

이때 $\frac{f(1)+f(x)}{2} \geq m$ 이므로

$$f(x) > m \quad \dots\dots \text{㉒}$$

$$\text{㉑, ㉒에서 } f(1) < m < f(x)$$

$$(ii) \frac{f(1)+f(x)}{2}=m \text{ 일 때,}$$

$$f(x) > f(1) \text{ 에서}$$

$$\frac{f(1)+f(1)}{2} < \frac{f(1)+f(x)}{2} < \frac{f(x)+f(x)}{2}$$

$$\therefore f(1) < m < f(x) \quad \dots\dots \textcircled{a}$$

$$f(0) > f(1) \text{ 에서}$$

$$\frac{f(1)+f(0)}{2} < \frac{f(0)+f(0)}{2} = f(0)$$

$$\text{이때 } \frac{f(1)+f(0)}{2} \geq m \text{ 이므로 } f(0) > m \quad \dots\dots \textcircled{b}$$

$$\textcircled{a}, \textcircled{b} \text{ 에서 } f(1) < m < f(0)$$

$$(i), (ii) \text{ 에서 } f(1) < m < f(0), f(1) < m < f(x)$$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 $f(c_1)=m$ 인 c_1 이 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재하고, $f(c_2)=m$ 인 c_2 가 열린구간 $(1, x)$ 에 적어도 하나 존재한다.

즉, $f(c_1)=f(c_2)$ 이지만 $c_1 \neq c_2$ 이므로 $f(x)$ 가 일대일함수라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $x > 1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) < f(1)$ 이다.

2단계 L이 옳은지 확인하기

L. (i) 닫힌구간 $[0, 1]$ 에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(0)$

이면 $0 < \alpha < \beta < 1$ 인 실수 α, β 에 대하여

$$f(\alpha)=f(\beta)=f(0)$$

(ii) 닫힌구간 $[0, 1]$ 에 속하는 어떤 실수 k 에 대하여 $f(k) \neq f(0)$

이면 $k \neq 0, k \neq 1$

$$m = \frac{f(0)+f(k)}{2} \text{ 라 하면 } m \text{ 은 } f(0) \text{ 과 } f(k) \text{ 사이의 값이므로 사}$$

잇값의 정리에 의하여 $f(a)=m$ 인 a 가 열린구간 $(0, k)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$\text{또 } f(0)=f(1) \text{ 에서 } m = \frac{f(1)+f(k)}{2} \text{ 이므로 } m \text{ 은 } f(k) \text{ 와 } f(1)$$

사이의 값이다. 즉, 사잇값의 정리에 의하여 $f(\beta)=m$ 인 β 가 열린구간 $(k, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $f(a)=f(\beta)$ 이고 $0 < \alpha < k < \beta < 1$ 인 α, β 가 존재한다.

(i), (ii)에서 $f(0)=f(1)$ 이면 $f(a)=f(\beta)$ ($0 < \alpha < \beta < 1$)인 α, β 가 존재한다.

3단계 D이 옳은지 확인하기

$$D. [반례] f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & (x \leq -1) \\ -x^2 + 2 & (-1 < x < 1) \\ \frac{1}{x} & (x \geq 1) \end{cases} \text{ 이라 하면}$$

$$f(0)=2, f(1)=1 \text{ 이므로 } f(0) \geq f(1)$$

함수 $f(x)$ 는 $x \neq -1, x \neq 1$ 인 실수 전체의 집합에서 연속이고,

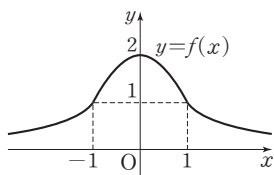
$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1 \text{ 이므로}$$

$x = -1, x = 1$ 에서도 연속이다.

즉, 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

이지만 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 존재하지 않는다.



4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

01 ②

02 15

03 6

04 ⑤

05 ③

06 19

07 12

08 ④

09 ③

10 2

11 10

12 ②

13 ③

01 답 ②

(i) $n=1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)+3x^3+6x^2}{2x^2} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{b}$$

㉑에서 $f(x)+3x^3+6x^2$ 은 최고차항의 계수가 6인 이차함수이므로

$$f(x)+3x^3+6x^2=6x^2+ax+b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f(x) = -3x^3+ax+b$$

㉒에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{ 에서}$$

$$f(0)=0 \quad \therefore b=0$$

$$\therefore f(x) = -3x^3+ax$$

이를 ㉒의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x^3+ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (-3x^2+a) = a$$

$$\therefore a=2$$

$$\text{따라서 } f(x) = -3x^3+2x \text{ 이므로}$$

$$f(-1) = 3-2=1$$

(ii) $n=2$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)+3x^3+6x^2}{x^3+x^2} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{c}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{d}$$

㉓에서 $f(x)+3x^3+6x^2$ 은 최고차항의 계수가 3인 삼차함수이므로

$f(x)$ 는 이차 이하의 다항함수이고, ㉔에서 $f(x)$ 는 x^2 을 인수로 가지므로 $f(x)=cx^2$ (c 는 상수)이라 하자.

이를 ㉔의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{cx^2}{x^2} = c$$

$$\therefore c=2$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2x^2 \text{ 이므로}$$

$$f(-1) = 2$$

(iii) $n \geq 3$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)+3x^3+6x^2}{x^{n+1}+x^2} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{f}$$

㉕에서 $f(x)+3x^3+6x^2$ 은 최고차항의 계수가 3인 $(n+1)$ 차 함수이므로 $f(x)$ 도 최고차항의 계수가 3인 $(n+1)$ 차 함수이고, ㉖에서 $f(x)$ 는 x^n 을 인수로 가지므로 $f(x)=3x^n(x+d)$ (d 는 상수)라 하자.

이를 ㉖의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^n(x+d)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} 3(x+d) = 3d$$

$$\text{즉, } 3d=2 \text{ 이므로 } d=\frac{2}{3}$$

따라서 $f(x) = 3x^n \left(x + \frac{2}{3}\right)$ 이므로

n 이 홀수일 때, $f(-1) = 3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1$

n 이 짝수일 때, $f(-1) = 3 \times 1 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$

(i), (ii), (iii)에서 $f(-1)$ 의 최댓값은 2, 최솟값은 -1이므로 그 합은 $2 + (-1) = 1$

02 답 15

(가)에서 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 5x - 2}{x^2 - 1}$ 의 값이 존재하므로

$x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 인 경우에도 극한값이 존재한다.

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^2 - 1) = 0 \text{에서 } a^2 - 1 = 0$$

$$(a+1)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 1$$

$a = -1$ 이면 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 5x - 2}{x^2 - 1}$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} \{f(x) - 5x - 2\} = 0 \text{에서}$$

$$f(-1) + 5 - 2 = 0 \quad \therefore f(-1) = -3$$

$a = 1$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5x - 2}{x^2 - 1}$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 5x - 2\} = 0 \text{에서}$$

$$f(1) - 5 - 2 = 0 \quad \therefore f(1) = 7$$

(나)에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{f(x)} - x\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{\sqrt{f(x)} - x\} \{\sqrt{f(x)} + x\}}{\sqrt{f(x)} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^2}{\sqrt{f(x)} + x} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$f(x)$ 가 일차 이하의 다항함수이면 ①에서 분자의 최고차항의 차수는 이차, 분모의 최고차항의 차수는 일차이므로 극한값이 존재하지 않는다.

$f(x)$ 가 삼차 이상의 다항함수이면 ①에서 분자의 최고차항의 차수가 분모의 최고차항의 차수보다 항상 크므로 극한값이 존재하지 않는다.

따라서 $f(x)$ 는 이차함수이므로

$f(x) = bx^2 + cx + d$ (b, c, d 는 상수, $b \neq 0$)라 하면 ①에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^2}{\sqrt{f(x)} + x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx^2 + cx + d - x^2}{\sqrt{bx^2 + cx + d} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(b-1)x^2 + cx + d}{\sqrt{bx^2 + cx + d} + x} \end{aligned}$$

이때 극한값이 존재하므로

$$b-1=0 \quad \therefore b=1$$

$$\therefore f(x) = x^2 + cx + d$$

$$f(-1) = -3 \text{에서}$$

$$1 - c + d = -3 \quad \therefore c - d = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$f(1) = 7 \text{에서}$$

$$1 + c + d = 7 \quad \therefore c + d = 6 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

②, ③을 연립하여 풀면

$$c=5, d=1$$

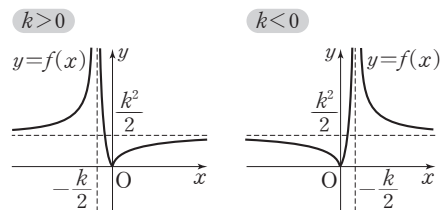
따라서 $f(x) = x^2 + 5x + 1$ 이므로

$$f(2) = 4 + 10 + 1 = 15$$

03 답 6

$$f(x) = \left| \frac{k^2 x}{2x+k} \right| = \left| \frac{k^2 \left(x + \frac{k}{2}\right) - \frac{k^3}{2}}{2\left(x + \frac{k}{2}\right)} \right| = \left| -\frac{k^3}{4\left(x + \frac{k}{2}\right)} + \frac{k^2}{2} \right|$$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 k 의 값의 부호에 따라 그림과 같다.



따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 개수 $g(t)$ 는

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t=0 \text{ 또는 } t=\frac{k^2}{2}) \\ 2 & (0 < t < \frac{k^2}{2} \text{ 또는 } t > \frac{k^2}{2}) \end{cases}$$

모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{t \rightarrow a+} g(t), \lim_{t \rightarrow a-} g(t)$ 의 값은 0 또는 2이므로

$$\lim_{t \rightarrow (k-4)-} g(t) + \lim_{t \rightarrow k+} g(t) + g(k+4) = 3 \text{을 만족시키려면}$$

$$g(k+4) = 1 \quad \therefore k+4=0 \text{ 또는 } k+4=\frac{k^2}{2}$$

$$k+4=0 \text{에서 } k=-4$$

$$k+4=\frac{k^2}{2} \text{에서 } k^2-2k-8=0$$

$$(k+2)(k-4)=0 \quad \therefore k=-2 \text{ 또는 } k=4$$

(i) $k=-4$ 일 때,

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t=0 \text{ 또는 } t=8) \\ 2 & (0 < t < 8 \text{ 또는 } t > 8) \end{cases} \quad \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow (k-4)-} g(t) + \lim_{t \rightarrow k+} g(t) + g(k+4) \\ = \lim_{t \rightarrow -8-} g(t) + \lim_{t \rightarrow -4+} g(t) + g(0) = 0 + 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

따라서 $k=-4$ 이면 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k=-2$ 일 때,

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t=0 \text{ 또는 } t=2) \\ 2 & (0 < t < 2 \text{ 또는 } t > 2) \end{cases} \quad \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow (k-4)-} g(t) + \lim_{t \rightarrow k+} g(t) + g(k+4) \\ = \lim_{t \rightarrow -6-} g(t) + \lim_{t \rightarrow -2+} g(t) + g(2) = 0 + 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

따라서 $k=-2$ 이면 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $k=4$ 일 때,

$$g(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t=0 \text{ 또는 } t=8) \\ 2 & (0 < t < 8 \text{ 또는 } t > 8) \end{cases} \quad \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow (k-4)-} g(t) + \lim_{t \rightarrow k+} g(t) + g(k+4) \\ = \lim_{t \rightarrow 0-} g(t) + \lim_{t \rightarrow 4+} g(t) + g(8) = 0 + 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

따라서 $k=4$ 이면 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서 $k=4$

$$\text{따라서 } f(x) = \left| \frac{16x}{2x+4} \right| = \left| \frac{8x}{x+2} \right| \text{이므로}$$

$$f(k+2) = f(6) = \left| \frac{48}{6+2} \right| = 6$$

삼각형 MRD의 둘레의 길이 L 은

$$L = \overline{DM} + \overline{RM} + \overline{DR} = 2(1-x) + \frac{2\sqrt{3}(1-x)}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$= 2(1-x) \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}} \right)$$

삼각형 MRD의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{DR} \times \overline{HM} = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}(1-x)}{\sqrt{x^2+3}} \times \frac{x(1-x)}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{\sqrt{3}x(1-x)^2}{x^2+3}$$

점 P가 점 B에 한없이 가까워지면 점 M은 점 D에 한없이 가까워지므로 선분 CM의 길이 x 는 선분 CD의 길이 1에 한없이 가까워진다.

$$\therefore \lim_{P \rightarrow B} \frac{4S}{L^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{4\sqrt{3}x(1-x)^2}{x^2+3}}{4(1-x)^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}} \right)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3}x}{(x^2+3) \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3}} \right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4 \times \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2}$$

$$= -12 + 7\sqrt{3}$$

따라서 $a = -12$, $b = 7$ 이므로 $b - a = 19$

07 답 12

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $g(x)$ 는 $x \neq -1$, $x \neq 4$ 인 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x = -1$, $x = 4$ 에서도 연속이어야 한다.

(i) 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x = -1$ 에서 연속일 때,

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x^2 - 3ax + a^2 - a - 4)(2x + b)$$

$$= (1 + 3a + a^2 - a - 4)(-2 + b)$$

$$= (a^2 + 2a - 3)(b - 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (x^2 - 3ax + a^2 - a - 4)(8 - b)$$

$$= (a^2 + 2a - 3)(8 - b)$$

$$\text{즉, } (a^2 + 2a - 3)(b - 2) = (a^2 + 2a - 3)(8 - b) \text{이므로}$$

$$(a^2 + 2a - 3)(2b - 10) = 0, (a + 3)(a - 1)(b - 5) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 1 \text{ 또는 } b = 5$$

(ii) 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x = 4$ 에서 연속일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} f(x)g(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 4+} (x^2 - 3ax + a^2 - a - 4)(8 - b)$$

$$= (16 - 12a + a^2 - a - 4)(8 - b)$$

$$= (a^2 - 13a + 12)(8 - b)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} (x^2 - 3ax + a^2 - a - 4)(2x + b)$$

$$= (a^2 - 13a + 12)(8 + b)$$

$$\text{즉, } (a^2 - 13a + 12)(8 - b) = (a^2 - 13a + 12)(8 + b) \text{이므로}$$

$$-2b(a^2 - 13a + 12) = 0, b(a - 1)(a - 12) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } b = 0 \quad (\because |a| \leq 5)$$

$a = -3$ 일 때, 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이므로 $x = 4$ 에서도 연속이려면 $b = 0$

$a = 1$ 일 때, 함수 $f(x)g(x)$ 는 b 의 값에 관계없이 $x = -1$, $x = 4$ 에서 연속이다.

따라서 순서쌍 (a, b) 는 $(-3, 0)$, $(1, -5)$, $(1, -4)$, $(1, -3)$, $\dots$, $(1, 5)$ 의 12개이다.
 $\hookrightarrow |b| \leq 5$ 인 정수 b 는 $-5, -4, -3, \dots, 5$ 의 11개이다.

08 답 ④

$$f(x+3) = \begin{cases} (x+3)-2 & (x+3 < 3) \\ -(x+3)+5 & (x+3 \geq 3) \end{cases} = \begin{cases} x+1 & (x < 0) \\ -x+2 & (x \geq 0) \end{cases} \text{이므로 함수}$$

$f(x+3)$ 은 $x=0$ 에서 불연속이다. 또 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이므로 함수 $f(x+3)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=0$, $x=a$ 에서도 연속이어야 한다.

함수 $f(x+3)g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x+3)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x+3)g(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $a < 0$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x+3)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x+2)(3x-4) = 2 \times (-4) = -8$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x+3)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (x+1)(3x-4) = 1 \times (-4) = -4$$

이는 $\textcircled{1}$ 을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = 0$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x+3)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x+2)(3x-4) = 2 \times (-4) = -8$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x+3)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \{(x+1) \times 3x\} = 1 \times 0 = 0$$

이는 $\textcircled{1}$ 을 만족시키지 않는다.

(iii) $a > 0$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x+3)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \{(-x+2) \times 3x\} = 2 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x+3)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \{(x+1) \times 3x\} = 1 \times 0 = 0$$

이는 $\textcircled{1}$ 을 만족시키므로 함수 $f(x+3)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

(i), (ii), (iii)에서 $a > 0$

함수 $f(x+3)g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x+3)g(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x+3)g(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} (-x+2)(3x-4) = \lim_{x \rightarrow a-} \{(-x+2) \times 3x\}$$

$$(-a+2)(3a-4) = (-a+2) \times 3a$$

$$-4(-a+2) = 0 \quad \therefore a = 2$$

09 답 ③

$$\{f(x)\}^3 - (x^2 - x + 4)\{f(x)\}^2 - x(x-2)^2f(x) + 4x^3 = 0 \text{에서}$$

$$\{f(x)\}^3 - (x^2 - x + 4)\{f(x)\}^2 - (x^3 - 4x^2 + 4x)f(x) + 4x^3 = 0$$

$$\{4 - f(x)\}x^3 + f(x)\{4 - f(x)\}x^2 - f(x)\{4 - f(x)\}x$$

$$- \{f(x)\}^2\{4 - f(x)\} = 0$$

$$\{4 - f(x)\}[x^3 + x^2f(x) - xf(x) - \{f(x)\}^2] = 0$$

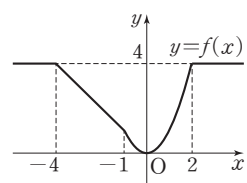
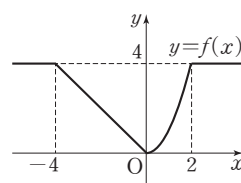
$$\{4 - f(x)\}\{x + f(x)\}\{x^2 - f(x)\} = 0$$

$$\therefore f(x) = 4 \text{ 또는 } f(x) = -x \text{ 또는 } f(x) = x^2$$

이때 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 4, 최솟값이 0이고 $f(-2) = 2$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} 4 & (x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -x & (-4 < x \leq 0) \\ x^2 & (0 < x < 2) \end{cases}$$

$$\text{또는 } f(x) = \begin{cases} 4 & (x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -x & (-4 < x \leq -1) \\ x^2 & (-1 < x < 2) \end{cases}$$



$$\therefore f(-3) + f(0) + f(1) = 3 + 0 + 1 = 4$$

10 답 2

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & (x \leq 3) \\ -2x^2 + 2ax & (x > 3) \end{cases} = \begin{cases} (x-2)(x-4) & (x \leq 3) \\ -2x(x-a) & (x > 3) \end{cases} \text{이고, } a > 3 \text{이}$$

므로 $f(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x=2 \text{ 또는 } x=a$$

$$\text{한편 } \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} (-2x^2 + 2ax) = -18 + 6a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} (x^2 - 6x + 8) = -1 \text{이고, } a > 3 \text{에서 } -18 + 6a > 0 \text{이}$$

므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.

함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$, $x=a$, $x=3$ 에서도 연속이다.

함수 $h(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = h(2)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)} = h(2) \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0 \text{에서 } g(2) = 0$$

함수 $h(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = h(a)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = h(a) \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{에서 } g(a) = 0$$

함수 $h(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 3+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} h(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{g(x)}{f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{g(x)}{-2x^2 + 2ax} = \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{g(x)}{x^2 - 6x + 8}$$

$$\frac{g(3)}{-18 + 6a} = \frac{g(3)}{-1}, \quad -g(3) = (-18 + 6a)g(3)$$

$$(6a - 17)g(3) = 0 \quad \therefore g(3) = 0 \quad (\because a > 3)$$

삼차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 2이고 $g(2)=0$, $g(3)=0$,

$g(a)=0$ 이므로

$$g(x) = 2(x-2)(x-3)(x-a)$$

㉠에서

$$\begin{aligned} h(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x-3)(x-a)}{x^2 - 6x + 8} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x-3)(x-a)}{(x-2)(x-4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-3)(x-a)}{x-4} \\ &= \frac{2 \times (-1) \times (2-a)}{-2} = 2-a \quad \dots\dots \text{㉢} \end{aligned}$$

㉡에서

$$\begin{aligned} h(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x-2)(x-3)(x-a)}{-2x^2 + 2ax} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x-2)(x-3)(x-a)}{-2x(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-2)(x-3)}{-x} \\ &= -\frac{(a-2)(a-3)}{a} \end{aligned}$$

㉢의 $h(2)=2h(a)$ 에서

$$2-a = -\frac{2(a-2)(a-3)}{a}$$

$$a(a-2) = 2(a-2)(a-3)$$

$$(a-2)(a-6) = 0$$

$$\therefore a=6 \quad (\because a > 3)$$

이를 ㉢에 대입하면

$$h(2) = 2-6 = -4$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & (x \leq 3) \\ -2x^2 + 12x & (x > 3) \end{cases}, \quad g(x) = 2(x-2)(x-3)(x-6) \text{이므로}$$

$$h(4) = \frac{g(4)}{f(4)} = \frac{2 \times 2 \times 1 \times (-2)}{-32 + 48} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore h(2) \times h(4) = -4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

11 답 10

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (cx + d) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2 + ax + b)$$

$$\therefore c + d = 1 + a + b \quad \dots\dots \text{㉠}$$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하면 일대일대응이므로 x 의 값이 커질 때 y 의 값도 커지거나 x 의 값이 커질 때 y 의 값은 작아져야 한다.

$$y = x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b \text{가 } x < 1 \text{에서 일대일대응이므로}$$

$$-\frac{a}{2} \geq 1 \quad \therefore a \leq -2$$

$x < 1$ 에서 $y = x^2 + ax + b$ 는 x 의 값이 커질 때 y 의 값은 작아지므로

$x \geq 1$ 에서 $y = cx + d$ 도 x 의 값이 커질 때 y 의 값은 작아져야 한다.

$$\therefore c < 0$$

$a \leq -2$, $c < 0$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표가 $-1, 1, 5$ 이므로 이 세 점을 각각 A, B, C라 하자.

점 B는 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$$B(1, 1)$$

또 두 점 A, C는 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이므로

$$A(-1, 5), C(5, -1)$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 세 점 A, B, C를 지나므로

$$f(-1)=5 \text{에서 } 1-a+b=5 \quad \therefore a-b=-4 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$f(1)=1 \text{에서 } c+d=1 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$f(5)=-1 \text{에서 } 5c+d=-1 \quad \dots\dots \text{㉣}$$

$$\text{㉢, ㉣을 연립하여 풀면 } c = -\frac{1}{2}, d = \frac{3}{2}$$

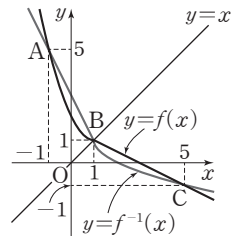
㉡을 ㉠에 대입하면

$$1 = 1 + a + b \quad \therefore a + b = 0 \quad \dots\dots \text{㉤}$$

$$\text{㉡, ㉤을 연립하여 풀면 } a = -2, b = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & (x < 1) \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & (x \geq 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(-2) + f(3) = (4 + 4 + 2) + \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) = 10$$



12 답 ②

삼각형 OAP에서 변 OA의 길이는 1이므로 점 P와 직선 OA 사이의 거리를 h 라 하면

$$\triangle OAP = \frac{1}{2} \times 1 \times h = \frac{1}{2}h$$

이때 삼각형 OAP의 넓이가 자연수이려면 점 P와 직선 OA 사이의 거리 h 가 2의 배수이어야 한다.

(i) $0 < t < 2$ 일 때,

점 P는 원 C 위의 점이므로 $h < 2$

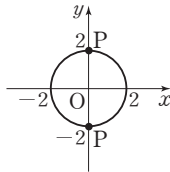
따라서 h 가 2의 배수가 되는 점 P가 존재하지 않는다.

$$\therefore f(t) = 0$$

(ii) $t = 2$ 일 때,

그림과 같이 $h = 2$ 가 되는 점 P는 2개이므로

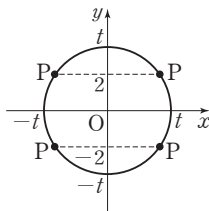
$$f(t) = 2$$



(iii) $2 < t < 4$ 일 때,

그림과 같이 $h = 2$ 가 되는 점 P는 4개이므로

$$f(t) = 4$$

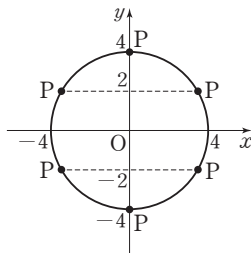


(iv) $t = 4$ 일 때,

그림과 같이 $h = 2$ 가 되는 점 P는 4개,

$h = 4$ 가 되는 점 P는 2개이므로

$$f(t) = 6$$



(i)~(iv)와 같은 방법으로 점 P의 개수 $f(t)$ 를 구하면

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 < t < 2) \\ 2 & (t = 2) \\ 4 & (2 < t < 4) \\ 6 & (t = 4) \\ 8 & (4 < t < 6) \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$$\therefore f(3) = 4$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 4+} f(t) = 8, f(4) = 6 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{t \rightarrow 4+} f(t) \neq f(4)$$

ㄷ. 함수 $f(t)$ 는 t 가 2의 배수일 때 불연속이므로 $0 < a < 50$ 인 실수 a 에 대하여 $t=a$ 에서 불연속인 a 는 2, 4, 6, ..., 48의 24개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

13 답 ③

함수 $y = -\frac{3}{4}(x+a)^2 + b$ 의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(-a, b)$ 이고 위로 볼록한 포물선이고, 함수 $y = (x-|c|)^2 + 1$ 의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(|c|, 1)$ 이고 아래로 볼록한 포물선이다.

함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서도 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow 0-} |f(x)| \text{ 에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} |(x-|c|)^2 + 1| = \lim_{x \rightarrow 0-} \left| -\frac{3}{4}(x+a)^2 + b \right|$$

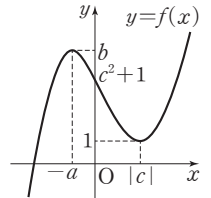
$$|c^2 + 1| = \left| -\frac{3}{4}a^2 + b \right|$$

$$\therefore c^2 + 1 = -\frac{3}{4}a^2 + b \text{ 또는 } c^2 + 1 = \frac{3}{4}a^2 - b$$

(i) $c^2 + 1 = -\frac{3}{4}a^2 + b$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

그런데 직선 $y=t$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나는 경우가 있으므로 $(*)$ 를 만족시키지 않는다. $\rightarrow g(t)=3$



(ii) $c^2 + 1 = \frac{3}{4}a^2 - b$ 일 때,

$(*)$ 에서 직선 $y=t$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 한 점 또는 두 점에서 만 만나므로 두 함수 $y = -\frac{3}{4}(x+a)^2 + b$, $y = (x-|c|)^2 + 1$ 의 그래프의 꼭짓점의 y 좌표가 같아야 한다.

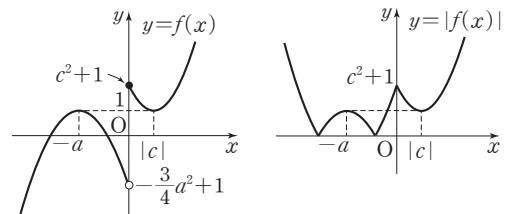
$$\therefore b = 1$$

이를 $c^2 + 1 = \frac{3}{4}a^2 - b$ 에 대입하면

$$c^2 + 1 = \frac{3}{4}a^2 - 1$$

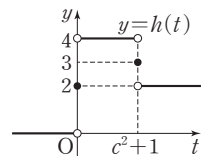
$$\therefore c^2 = \frac{3}{4}a^2 - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=t$ 가 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 만나는 점의 개수 $h(t)$ 는

$$h(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 2 & (t = 0 \text{ 또는 } t > c^2 + 1) \\ 4 & (0 < t < c^2 + 1) \\ 3 & (t = c^2 + 1) \end{cases}$$



이때 $\lim_{t \rightarrow a-} h(t) \times \lim_{t \rightarrow a+} h(t) = 8$ 이므로

$$a = c^2 + 1 \quad \therefore c^2 = a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a - 1 = \frac{3}{4}a^2 - 2$$

$$3a^2 - 4a - 4 = 0, (3a+2)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$c^2 = 1 \quad \therefore |c| = 1$$

(i), (ii)에서 $a = 2$, $b = 1$, $|c| = 1$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}(x+2)^2 + 1 & (x < 0) \\ (x-1)^2 + 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$\therefore f(-2) + f(3) = 1 + (4+1) = 6$$

step 1 핵심 문제

| 44~45쪽

01 ① 02 27 03 ⑤ 04 4 05 $\frac{3}{4}$ 06 ③
 07 ② 08 ① 09 10 10 ③ 11 15 12 7

01 답 ①

$$\begin{aligned} A(n) &= \frac{f(n)-f(1)}{n-1} = \frac{(n^3+an^2+bn)-(1+a+b)}{n-1} \\ &= \frac{(n-1)\{n^2+(a+1)n+a+b+1\}}{n-1} \\ &= n^2+(a+1)n+a+b+1 \end{aligned}$$

$$A(2)=1 \text{에서 } 4+2(a+1)+a+b+1=1$$

$$\therefore 3a+b=-6 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$A(3)=3 \text{에서 } 9+3(a+1)+a+b+1=3$$

$$\therefore 4a+b=-10 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{을 연립하여 풀면 } a=-4, b=6$$

$$\text{따라서 } f(x)=x^3-4x^2+6x \text{이므로 } f'(x)=3x^2-8x+6$$

$$\therefore f'(1)=3-8+6=1$$

다른 풀이 정의를 이용하여 미분계수 구하기

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-4x^2+6x-3}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2-3x+3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2-3x+3) = 1 \end{aligned}$$

02 답 27

$$\frac{1}{n}=h \text{로 놓으면 } n \rightarrow \infty \text{일 때 } h \rightarrow 0+ \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f\left(1+\frac{1}{n}\right)g\left(1+\frac{3}{n}\right) - f(1)g(1) \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h)g(1+3h) - f(1)g(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h)g(1+3h) - f(1+h)g(1) + f(1+h)g(1) - f(1)g(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{g(1+3h) - g(1)}{3h} \times 3f(1+h) + \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \times g(1) \\ &= 3g'(1)f(1) + f'(1)g(1) \\ &= 3 \times 2 \times 2 + 3 \times 5 = 27 \end{aligned}$$

03 답 ⑤

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(1) - f(x^2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(1) - f(1) + f(1) - f(x^2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{(x^2-1)f(1)}{x-1} - \frac{f(x^2)-f(1)}{x-1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{(x+1)(x-1)f(1)}{x-1} - \frac{f(x^2)-f(1)}{(x-1)(x+1)} \times (x+1) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ (x+1)f(1) - \frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1} \times (x+1) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)f(1) - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \\ &= 2f(1) - f'(1) \times 2 = 2 \times 3 - 2 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{f(x)-f(1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{f(x)-f(1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}} \\ &= 2 \times \frac{1}{f'(1)} \\ &= 2 \times \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(1) - f(x^2)}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{f(x)-f(1)} = 2 + 1 = 3$$

04 답 4

(7)의 $f(-x) = -f(x)$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(-1) = -f(1) \quad \therefore f(1) = -f(-1)$$

(*)에서

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+2h) + f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+2h) - f(-1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+2h) - f(-1)}{2h} \times 2 \\ &= 2f'(-1) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2f'(-1) = 4 \text{이므로}$$

$$f'(-1) = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1) + f(-1) - f(-1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1) - f(-1-h)}{-h} \\ &= f'(-1) + f'(-1) \\ &= 2f'(-1) \\ &= 2 \times 2 = 4 \end{aligned}$$

05 답 $\frac{3}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2) + g(x)}{x^2-4} \text{에서 } x-2=t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 2 \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2) + g(x)}{x^2-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2) + g(x)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) + g(2+t)}{t(t+4)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t(t+4)} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(2+t)}{t(t+4)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t+4} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(2+t) - g(2)}{t} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t+4} \\ &= 2 \times \frac{1}{4} + g'(2) \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

06 답 ③

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, -4)$ 에서의 접선의 기울기가 m 이므로

$$f'(2) = m$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h)-f(2-3h)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h)-f(2)+f(2)-f(2-3h)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h)-f(2)}{2h} \times 2 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-3h)-f(2)}{-3h} \times 3 \\&= 2f'(2) + 3f'(2) \\&= 5f'(2) = 5m\end{aligned}$$

즉, $5m = -m + 2$ 이므로

$$6m = 2 \quad \therefore m = \frac{1}{3}$$

07 답 ②

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) \quad \therefore f(0) = 0$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x) + f(h) + 2xh\} - f(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} 2x \\&= f'(0) + 2x \\&= 2x + 1\end{aligned}$$

$$\therefore f'(-1) + f'(1) + f'(3) = (-2+1) + (2+1) + (6+1) = 9$$

08 답 ①

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)}{x} = 3$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + g(x)\} = 0 \text{에서}$$

$$f(0) + g(0) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+g(x)-\{f(0)+g(0)\}}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x} \\&= f'(0) + g'(0)\end{aligned}$$

$$\therefore f'(0) + g'(0) = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{xg(x)} = 2$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + 3\} = 0 \text{에서}$$

$$f(0) + 3 = 0 \quad \therefore f(0) = -3$$

이를 ①에 대입하면

$$-3 + g(0) = 0 \quad \therefore g(0) = 3$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3}{xg(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{xg(x)} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)} \\&= f'(0) \times \frac{1}{g(0)} \\&= \frac{1}{3}f'(0)\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{3}f'(0) = 2 \text{이므로 } f'(0) = 6$$

이를 ②에 대입하면

$$6 + g'(0) = 3 \quad \therefore g'(0) = -3$$

이때 $h(x) = f(x)g(x)$ 에서

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\begin{aligned}\therefore h'(0) &= f'(0)g(0) + f(0)g'(0) \\&= 6 \times 3 + (-3) \times (-3) = 27\end{aligned}$$

09 답 10

$$f(x) = x^n + 3x^2 + ax + b \text{에서}$$

$$g(x) = f'(x) = nx^{n-1} + 6x + a$$

$\{g(x)\}^2$ 의 차수는 $2(n-1) = 2n-2$ 이므로 $\frac{d}{dx}\{g(x)\}^2$ 의 차수는

$$2n-3 \text{이다.}$$

$\frac{d}{dx}\{g(x)\}^2 = 36f(x)$ 에서 $\frac{d}{dx}\{g(x)\}^2$ 의 차수와 $f(x)$ 의 차수가 같으므로

$$2n-3 = n \quad \therefore n = 3$$

$$\therefore f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b, \quad g(x) = 3x^2 + 6x + a$$

$$\frac{d}{dx}\{g(x)\}^2 = 2g(x)g'(x) \text{이고 } g'(x) = 6x + 6 \text{이므로}$$

$$\frac{d}{dx}\{g(x)\}^2 = 36f(x) \text{에서}$$

$$2(3x^2 + 6x + a)(6x + 6) = 36(x^3 + 3x^2 + ax + b)$$

$$(x+1)(3x^2 + 6x + a) = 3(x^3 + 3x^2 + ax + b)$$

$$3x^3 + 9x^2 + (a+6)x + a = 3x^3 + 9x^2 + 3ax + 3b$$

$$\text{즉, } a+6 = 3a, \quad a = 3b \text{이므로}$$

$$a = 3, \quad b = 1$$

$$\therefore n + 2a + b = 3 + 6 + 1 = 10$$

10 답 ③

$x^{10}(x^2+ax+b)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $2^{10}(x-2)$ 이므로

$$x^{10}(x^2+ax+b) = (x-2)^2Q(x) + 2^{10}(x-2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$2^{10}(4+2a+b) = 0 \quad \therefore 4+2a+b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$10x^9(x^2+ax+b) + x^{10}(2x+a) = 2(x-2)Q'(x) + (x-2)^2Q'(x) + 2^{10}$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$10 \times 2^9(4+2a+b) + 2^{10}(4+a) = 2^{10}$$

$$2^{10}(4+a) = 2^{10} \quad (\because \textcircled{2})$$

$$a+4 = 1 \quad \therefore a = -3$$

이를 ②에 대입하면

$$4-6+b = 0 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore a+2b = -3+4 = 1$$

11 답 15

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다. 배점 10%

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (3ax^2 + x + b) = \lim_{x \rightarrow 1-} (ax^3 + 4x)$$

$$3a+1+b = a+4$$

$$\therefore 2a+b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=1$ 에서도 미분가능하다.

즉, 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하고, $f'(x) = \begin{cases} 3ax^2+4 & (x<1) \\ 6ax+1 & (x>1) \end{cases}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (6ax+1) = \lim_{x \rightarrow 1-} (3ax^2+4)$$

$$6a+1=3a+4, 3a=3 \quad \therefore a=1 \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$2+b=3 \quad \therefore b=1 \quad \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$

따라서 $f(x) = \begin{cases} x^3+4x & (x<1) \\ 3x^2+x+1 & (x \geq 1) \end{cases}$ 이므로

$$f(-2)+f(3) = (-8-8) + (27+3+1) = 15 \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

다른 풀이 미분계수의 정의를 이용하여 a 의 값 구하기

미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{3ax^2+x+b-(3a+1+b)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{3ax^2+x-3a-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)(3ax+3a+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (3ax+3a+1) = 6a+1 \\ \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{ax^3+4x-(a+4)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x-1)(ax^2+ax+a+4)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (ax^2+ax+a+4) = 3a+4 \end{aligned}$$

즉, $6a+1=3a+4$ 이므로

$$3a=3 \quad \therefore a=1$$

12 답 7

함수 $f(x)$ 는 $x=-1, x=0, x=1, x=3$ 에서 미분가능하지 않으므로 $m=4$

한편 함수 $y=x$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $xf(x)$ 의 미분가능성은 함수 $f(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 에 대해서만 미분가능성을 확인하면 된다.

(i) $x=-1$ 일 때,

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 불연속이므로 함수 $xf(x)$ 도 $x=-1$ 에서 불연속이다. 따라서 함수 $xf(x)$ 는 $x=-1$ 에서 미분가능하지 않다.

(ii) $x=0$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{x}$ 이므로 함수 $xf(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

(iii) $x=1$ 일 때,

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 불연속이므로 함수 $xf(x)$ 도 $x=1$ 에서 불연속이다. 따라서 함수 $xf(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

(iv) $x=3$ 일 때,

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & (x<3) \\ 3x-9 & (x \geq 3) \end{cases} \text{이므로 } xf(x) = \begin{cases} -x^2+3x & (x<3) \\ 3x^2-9x & (x \geq 3) \end{cases}$$

$$\text{이때 } g(x) = xf(x) \text{라 하면 } g'(x) = \begin{cases} -2x+3 & (x<3) \\ 6x-9 & (x>3) \end{cases}$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 3+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} (6x-9) = 9,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} (-2x+3) = -3 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} g'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3-} g'(x)$$

즉, 미분계수 $g'(3)$ 이 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$, 즉 함수 $xf(x)$ 는 $x=3$ 에서 미분가능하지 않다.

(i)~(iv)에서 함수 $xf(x)$ 는 $x=-1, x=1, x=3$ 에서 미분가능하지 않으므로

$$n=3$$

$$\therefore m+n=4+3=7$$

다른 풀이 미분계수의 정의를 이용하여 $x=3$ 에서의 미분가능성 확인하기

(iv) $x=3$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{xf(x)-3f(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{x(3x-9)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3+} 3x = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} \frac{xf(x)-3f(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{x(-x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3-} (-x) = -3$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{xf(x)-3f(3)}{x-3} \neq \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{xf(x)-3f(3)}{x-3}$ 이므로 함수 $xf(x)$ 는 $x=3$ 에서 미분가능하지 않다.

step 2 고난도 문제

| 46~50쪽

01 ④	02 17	03 130	04 ③	05 ⑤	06 $\frac{5}{2}$
07 $\frac{3}{2}$	08 ③	09 29	10 ②	11 7	12 5
13 ⑤	14 53	15 18	16 36	17 4	18 ③
19 ②	20 ④	21 12	22 11	23 ④	24 $\frac{1}{32}$
25 ③	26 186				

01 답 ④

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{27f(x)-x^3f(3)}{9g(x)-x^2g(3)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{27f(x)-27f(3)+27f(3)-x^3f(3)}{9g(x)-9g(3)+9g(3)-x^2g(3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{27\{f(x)-f(3)\}-(x^3-27)f(3)}{9\{g(x)-g(3)\}-(x^2-9)g(3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{27\{f(x)-f(3)\}-(x-3)(x^2+3x+9)f(3)}{9\{g(x)-g(3)\}-(x+3)(x-3)g(3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{27 \times \frac{f(x)-f(3)}{x-3} - \lim_{x \rightarrow 3} (x^2+3x+9)f(3)}{\lim_{x \rightarrow 3} 9 \times \frac{g(x)-g(3)}{x-3} - \lim_{x \rightarrow 3} (x+3)g(3)} \\ &= \frac{27f'(3)-27f(3)}{9g'(3)-6g(3)} = \frac{9\{f'(3)-f(3)\}}{3g'(3)-2g(3)} \end{aligned}$$

이때 $f'(3)=f(3)+8$ 에서 $f'(3)-f(3)=8$, $g'(3)=\frac{2}{3}g(3)+2$ 에서 $3g'(3)-2g(3)=6$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{27f(x)-x^3f(3)}{9g(x)-x^2g(3)} = \frac{9\{f'(3)-f(3)\}}{3g'(3)-2g(3)} = \frac{9 \times 8}{6} = 12$$

02 답 17

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \text{에서}$$

$$f^2(x) = f(f(x)) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{-x}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = \frac{1}{1-x} = f(x)$$

즉, 음이 아닌 정수 k 에 대하여

$$f^{3k+1}(x) = \frac{1}{1-x}, f^{3k+2}(x) = \frac{x-1}{x}, f^{3k+3}(x) = x \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

(i) $n = 3k + 1$ 일 때,

$g(x) = f^{3k+1}(x) = \frac{1}{1-x}$ 이므로 x 의 값이 2에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{g(3) - g(2)}{3 - 2} = \frac{-\frac{1}{2} - (-1)}{3 - 2} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

(ii) $n = 3k + 2$ 일 때,

$g(x) = f^{3k+2}(x) = \frac{x-1}{x}$ 이므로 x 의 값이 2에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{g(3) - g(2)}{3 - 2} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{3 - 2} = \frac{1}{6} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

(iii) $n = 3k + 3$ 일 때,

$g(x) = f^{3k+3}(x) = x$ 이므로 x 의 값이 2에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{g(3) - g(2)}{3 - 2} = \frac{3 - 2}{3 - 2} = 1 \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

(i), (ii), (iii)에서 x 의 값이 2에서 3까지 변할 때의 평균변화율이 $\frac{1}{6}$ 인 자연수 n 은 $n = 3k + 2$ 꼴이다.

이때 $1 \leq n \leq 50$ 이므로 자연수 n 은 2, 5, 8, ..., 50의 17개이다.

..... 배점 10%

03 답 130

$$f(x) = f\left(n \times \frac{x}{n}\right) = n^3 f\left(\frac{x}{n}\right) \text{이므로}$$

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n^3} f(x)$$

미분계수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{n}\right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{n} + h\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1+nh}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n^3} f(1+nh) - \frac{1}{n^3} f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+nh) - f(1)}{nh} \times \frac{1}{n^2} \\ &= f'(1) \times \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{120}{n^2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } nf'\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{120}{n} \text{이므로}$$

$$2f'\left(\frac{1}{2}\right) + 3f'\left(\frac{1}{3}\right) + 4f'\left(\frac{1}{4}\right) = 60 + 40 + 30 = 130$$

04 답 ③

(㉞)에서 $f(a)$ 와 $f(b)$ 의 값의 부호가 서로 다르고 $f(a) \neq 0, f(b) \neq 0$

..... ㉟

(㉝)의 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{f(x)-3} = \frac{1}{3}$ 에서 $x \rightarrow a$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - 3\} = 0$ 에서 $f(a) = 3$ ㉞

$\hookrightarrow f(a)$ 의 값은 양수이다.

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{f(x)-3} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{f(x)-f(a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} \\ &= \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$\therefore f'(a) = 3$ ㉞

$\hookrightarrow x=a$ 인 점에서의 접선의 기울기가 양수이다.

(㉝)에서 $f'(a) + f'(b) = 3$ 이고, $f'(a) = 3$ 이므로

$f'(b) = 0$ ㉞

$\hookrightarrow x=b$ 인 점에서의 접선의 기울기가 0이다.

따라서 ㉟~㉞에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은 ③이다.

05 답 ⑤

ㄱ. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이므로 그림과 같다.

따라서 $x=-2$ 인 점에서의 접선의 기울기와 $x=4$ 인 점에서의 접선의 기울기는 부호가 반대이고 그 절댓값의 크기가 같으므로

$$f'(-2) = -f'(4)$$

$$\therefore m=0 \text{이면 } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \text{에서 } f(a) = f(b)$$

이때 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $x=1$ 이고 $a < b$ 이므로 $a < 1, b > 1$ 이다.

ㄷ. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이므로

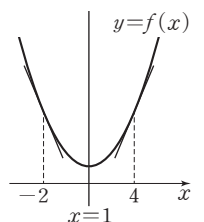
$f(x) = p(x-1)^2 + q$ (p, q 는 상수, $p > 0$)라 하면

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ &= \frac{\{p(b-1)^2 + q\} - \{p(a-1)^2 + q\}}{b-a} \\ &= \frac{pb^2 - 2pb + p + q - pa^2 + 2pa - p - q}{b-a} \\ &= \frac{p(b^2 - a^2) - 2p(b-a)}{b-a} \\ &= \frac{p(b-a)(b+a) - 2p(b-a)}{b-a} \\ &= \frac{p(b-a)(b+a-2)}{b-a} \\ &= p(a+b-2) \end{aligned}$$

이때 $a+b > 2$ 이면 $p(a+b-2) > 0$ 이므로

$$m > 0$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.



06 답 $\frac{5}{2}$

$(x-2)f'(x)=3f(x)-x^2-x$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면
 $0=3f(2)-6, 3f(2)=6$
 $\therefore f(2)=2$

$x \neq 2$ 일 때, $f'(x)=\frac{3f(x)-x^2-x}{x-2}$

다항함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

따라서 $x=2$ 에서도 연속이므로

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} f'(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)-x^2-x}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)-3f(2)+3f(2)-x^2-x}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\{f(x)-f(2)\}-x^2-x+6}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\{f(x)-f(2)\}-(x+3)(x-2)}{x-2} \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} - \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) \\ &= 3f'(2) - 5 \end{aligned}$$

즉, $f'(2)=3f'(2)-5$ 이므로

$$2f'(2)=5 \quad \therefore f'(2)=\frac{5}{2}$$

07 답 $\frac{3}{2}$

$f(x-y)=f(x)-f(y)+axy(x-y)$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면
 $f(0)=f(0)-f(0)$

$\therefore f(0)=0$ 배점 20%

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x)-f(-h)-axh(x+h)\}-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h)-f(0)}{-h} - \lim_{h \rightarrow 0} ax(x+h) \\ &= f'(-h) - ax^2 \\ &= -ax^2 + 2 \quad \dots\dots\dots\text{배점 40\%} \end{aligned}$$

이때 $f'(a)=-6$ 에서

$$-a^2+2=-6, a^2=8$$

$\therefore a=2$ ($\because a$ 는 실수)배점 20%

따라서 $f'(x)=-2x^2+2$ 이므로

$$f'\left(\frac{a}{4}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2} \quad \dots\dots\dots\text{배점 20\%}$$

08 답 ③

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy(x+y) \quad \dots\dots\dots\text{㉠}$$

㉠의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)$$

$$\therefore f(0)=0$$

㉠의 양변에 $y=-x$ 를 대입하면 $f(0)=f(x)+f(-x)$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 이다.

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

㉡. 도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x)+f(h)+2xh(x+h)\}-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} 2x(x+h) \\ &= f'(0) + 2x^2 \\ &= 2x^2 + a \quad \dots\dots\dots\text{㉢} \end{aligned}$$

이때 $f'(3)=2f'(1)+1$ 에서

$$18+a=2(2+a)+1 \quad \therefore a=13$$

㉢. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)-4bx}{x-2}=3-2b$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \{2f(x)-4bx\}=0$ 에서

$$2f(2)-8b=0 \quad \therefore f(2)=4b$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)-4bx}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\{f(x)-4b\}-4b(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2\{f(x)-f(2)\}}{x-2} - \lim_{x \rightarrow 2} 4b \\ &= 2f'(2) - 4b \\ &= 2(8+a) - 4b \quad (\because \text{㉢}) \\ &= 16+2a-4b \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 16+2a-4b=3-2b \text{이므로 } a-b=-\frac{13}{2}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

09 답 29

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h)g(x-h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h)g(x-h)-f(x)g(x-h)+f(x)g(x-h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+2h)-f(x)\}g(x-h)+f(x)\{g(x-h)-g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h)-f(x)}{2h} \times 2g(x-h) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x-h)-g(x)}{-h} \times f(x) \\ &= 2f'(x)g(x) - g'(x)f(x) \\ &= 2\{g(x)\}^2 - g'(x)f(x) \quad (\because f'(x)=g(x)) \end{aligned}$$

이때 $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a>0$)라 하면

$$g(x)=f'(x)=2ax+b, g'(x)=2a$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h)g(x-h)-f(x)g(x)}{h} \\ &= 2\{g(x)\}^2 - g'(x)f(x) \\ &= 2(2ax+b)^2 - 2a(ax^2+bx+c) \\ &= 6a^2x^2+6abx+2b^2-2ac \end{aligned}$$

즉, $6a^2x^2+6abx+2b^2-2ac=24x^2-12x-10$ 에서

$$6a^2=24, 6ab=-12, 2b^2-2ac=-10$$

$$6a^2=24 \text{에서 } a^2=4 \quad \therefore a=2 \quad (\because a>0)$$

$a=2$ 를 $6ab=-12$ 에 대입하면

$$12b=-12 \quad \therefore b=-1$$

$a=2, b=-1$ 을 $2b^2-2ac=-10$ 에 대입하면

$$2-4c=-10, 4c=12 \quad \therefore c=3$$

따라서 $f(x)=2x^2-x+3, g(x)=4x-1$ 이므로

$$f(3)+g(3)=(18-3+3)+(12-1)=29$$

10 답 ②

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 a 이고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$ 이므로 $f(x)=a(x-1)^2+b$ (b 는 상수)라 하면

$$f'(x)=2a(x-1)=2ax-2a$$

$$|f'(x)| \leq 4x^2+5 \text{에서 } |2ax-2a| \leq 4x^2+5$$

$$-4x^2-5 \leq 2ax-2a \leq 4x^2+5$$

$$(i) -4x^2-5 \leq 2ax-2a \text{에서}$$

$$4x^2+2ax-2a+5 \geq 0$$

모든 실수 x 에 대하여 이 부등식이 성립하려면 이차방정식

$$4x^2+2ax-2a+5=0 \text{의 판별식을 } D_1 \text{이라 할 때,}$$

$$\frac{D_1}{4}=a^2-4(-2a+5) \leq 0$$

$$a^2+8a-20 \leq 0, (a+10)(a-2) \leq 0 \quad \therefore -10 \leq a \leq 2$$

$$(ii) 2ax-2a \leq 4x^2+5 \text{에서}$$

$$4x^2-2ax+2a+5 \geq 0$$

모든 실수 x 에 대하여 이 부등식이 성립하려면 이차방정식

$$4x^2-2ax+2a+5=0 \text{의 판별식을 } D_2 \text{라 할 때,}$$

$$\frac{D_2}{4}=a^2-4(2a+5) \leq 0$$

$$a^2-8a-20 \leq 0, (a+2)(a-10) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq a \leq 10$$

$$(i), (ii) \text{에서 } -2 \leq a \leq 2$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $-2 \leq a < 0$ 또는 $0 < a \leq 2$

따라서 a 의 최댓값은 2이다.

11 답 7

$x^4-2x^2+3x \leq f(x) \leq 2x^4+x^2+3x$ 의 각 변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 \leq f(0) \leq 0 \quad \therefore f(0)=0$$

$$(i) -1 \leq x < 0 \text{일 때,}$$

$$x^4-2x^2+3x \leq f(x) \leq 2x^4+x^2+3x \text{에서}$$

$$2x^3+x+3 \leq \frac{f(x)}{x} \leq x^3-2x+3$$

$$\therefore 2x^3+x+3 \leq \frac{f(x)-f(0)}{x} \leq x^3-2x+3$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0-} (2x^3+x+3)=3, \lim_{x \rightarrow 0-} (x^3-2x+3)=3$ 이므로 함수의

극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x}=3$$

$$(ii) 0 < x \leq 1 \text{일 때,}$$

$$x^4-2x^2+3x \leq f(x) \leq 2x^4+x^2+3x \text{에서}$$

$$x^3-2x+3 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 2x^3+x+3$$

$$\therefore x^3-2x+3 \leq \frac{f(x)-f(0)}{x} \leq 2x^3+x+3$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0+} (x^3-2x+3)=3, \lim_{x \rightarrow 0+} (2x^3+x+3)=3$ 이므로 함수의

극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x}=3$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x}=3, \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x}=3 \text{이므로}$$

$$f'(0)=3$$

$$\text{한편 } g(x)=(2x+1)f(x)+3x^2+4x \text{에서}$$

$$g'(x)=2f(x)+(2x+1)f'(x)+6x+4$$

$$\therefore g'(0)=2f(0)+f'(0)+4=0+3+4=7$$

idea

12 답 5

$$g(x)=x^{n+1}+3x^n \text{이라 하면 } g(1)=4 \text{이므로}$$

$$f(n)=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^{n+1}+3x^n-4}=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{g(x)-g(1)} \\ =\frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}}=\frac{1}{g'(1)}$$

$$g'(x)=(n+1)x^n+3nx^{n-1} \text{이므로}$$

$$g'(1)=n+1+3n=4n+1$$

$$\therefore f(n)=\frac{1}{4n+1}$$

$$\therefore f(n)f(n+1)=\frac{1}{4n+1} \times \frac{1}{4n+5}=\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5} \right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^k f(n)f(n+1)=\sum_{n=1}^k \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5} \right) \\ =\frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13} \right) + \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{17} \right) \right. \\ \left. + \cdots + \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+5} \right) \right\} \\ =\frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4k+5} \right)$$

$$\text{즉, } \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4k+5} \right) = \frac{1}{25} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{4k+5} = \frac{4}{25}, \frac{1}{4k+5} = \frac{1}{25}$$

$$4k+5=25, 4k=20 \quad \therefore k=5$$

개념 NOTE

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

13 답 ⑤

$$f(x+p)+f(x-p)=2f(x) \text{에서}$$

$$f(x)-f(x-p)=f(x+p)-f(x)$$

$$\frac{f(x)-f(x-p)}{p} = \frac{f(x+p)-f(x)}{p}$$

$$\therefore \frac{f(x)-f(x-p)}{x-(x-p)} = \frac{f(x+p)-f(x)}{(x+p)-x}$$

따라서 두 점 $(x-p, f(x-p)), (x, f(x))$ 를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(x, f(x)), (x+p, f(x+p))$ 를 지나는 직선의 기울기가 항상 같으므로 $f(x)$ 는 일차 이하의 다항함수이다.

$$f(x)=ax+b(a, b \text{는 상수}) \text{라 하면 } f'(x)=a$$

$$\text{이때 } f'(p)=3 \text{에서 } a=3$$

$$\text{따라서 } f'(x)=3 \text{이므로}$$

$$f'(-p)+f'(0)+f'(2p)=3+3+3=9$$

14 답 53

상수 k 에 대하여 $f(1)=f(2)=f(3)=k$ 라 하면 방정식 $f(x)-k=0$ 의 세 근이 1, 2, 3이다.

즉, 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 p 라 하면

$$f(x)-k=p(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\text{따라서 } f(x)=p(x-1)(x-2)(x-3)+k \text{이므로}$$

$$g(x)=(x-a)f(x)=p(x-a)(x-1)(x-2)(x-3)+k(x-a)$$

$$\therefore g'(x)=p(x-1)(x-2)(x-3)+p(x-a)(x-2)(x-3) \\ +p(x-a)(x-1)(x-3)+p(x-a)(x-1)(x-2)+k$$

배점 30%

이때 곡선 $y=g(x)$ 위의 x 좌표가 1, 2, 3인 점에서의 접선의 기울기가 각각 -11, 11, -3이므로
 $g'(1)=-11, g'(2)=11, g'(3)=-3$ 배점 20%
 $g'(1)=-11$ 에서 $2p(1-a)+k=-11$
 $\therefore 2ap-k=2p+11$ ㉠
 $g'(2)=11$ 에서 $-p(2-a)+k=11$
 $\therefore ap+k=2p+11$ ㉡
 $g'(3)=-3$ 에서 $2p(3-a)+k=-3$
 $\therefore 2ap-k=6p+3$ ㉢
㉠, ㉢에서 $2p+11=6p+3, 4p=8 \quad \therefore p=2$
이를 ㉠, ㉡에 각각 대입하면
 $4a-k=15, 2a+k=15$
두 식을 연립하여 풀면 $a=5, k=5$ 배점 30%
 $\therefore g'(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)+2(x-5)(x-2)(x-3)$
 $+2(x-5)(x-1)(x-3)+2(x-5)(x-1)(x-2)+5$
 $\therefore g'(a)=g'(5)=2 \times 4 \times 3 \times 2+5=53$ 배점 20%

15 답 18

(가)의 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=0$ 에서 $f(1)=0$
(나)의 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)f'(x)} = a$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
즉, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=0$ 에서 $f(2)=0$
 $f(1)=0, f(2)=0$ 이므로
 $f(x)=a(x-1)(x-2)(x+b)$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면
 $f'(x)=a(x-2)(x+b)+a(x-1)(x+b)+a(x-1)(x-2)$
이때 $b \neq -2$ 이면
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-1)(x-2)(x+b)}{(x-2)f'(x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-1)(x+b)}{f'(x)}$
 $= \frac{a(2+b)}{a(2+b)} = 1$
그런데 (나)에서 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)f'(x)} \neq 1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.
 $\therefore b = -2$
따라서 $f(x)=a(x-1)(x-2)^2$ 이므로 (가)에서
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)(x-2)^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} a(x-2)^2 = a$
 $\therefore a=3$
따라서 $f(x)=3(x-1)(x-2)^2, f'(x)=3(x-2)^2+6(x-1)(x-2)$
이므로 (나)에서
 $a = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-1)(x-2)^2}{3(x-2)^3+6(x-1)(x-2)^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x-2+2(x-1)} = \frac{1}{2}$
 $\therefore a \times f(4) = \frac{1}{2} \times (3 \times 3 \times 4) = 18$

16 답 36

(가)에서 $f(1)=-\frac{4}{5}$ 이므로 $a+2b=-\frac{4}{5}$ ㉠
(나)에서 $g(x)=x^{n+1}+ax^n+b$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면
 $x^{n+1}+ax^n+b=(x-1)^2Q_1(x)$ ㉡
㉡의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $1+a+b=0$ ㉢
㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-\frac{6}{5}, b=\frac{1}{5}$
㉡의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $(n+1)x^n+anx^{n-1}=2(x-1)Q_1(x)+(x-1)^2Q_1'(x)$
양변에 $x=1$ 을 대입하면 $n+1+an=0$
 $a=-\frac{6}{5}$ 이므로 $n+1-\frac{6}{5}n=0$
 $\frac{1}{5}n=1 \quad \therefore n=5$
따라서 다항식 $bx^{n+1}-ax^n=\frac{1}{5}x^6+\frac{6}{5}x^5$ 을 $(x-1)^2(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면 나머지가 $h(x)$ 이므로
 $\frac{1}{5}x^6+\frac{6}{5}x^5=(x-1)^2(x-2)Q_2(x)+h(x)$
양변을 x 에 대하여 미분하면
 $\frac{6}{5}x^5+6x^4=2(x-1)(x-2)Q_2(x)+(x-1)^2Q_2'(x)$
 $+ (x-1)^2(x-2)Q_2'(x)+h'(x)$
양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $h'(1)=\frac{36}{5} \quad \therefore 5h'(1)=36$

개념 NOTE

다항식 $f(x)$ 를 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 라 하면
 $R=f(a)$

17 답 4

(가)에서 $f(1)=f(2)=0$ 이므로
 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ (a 는 상수)라 하자.
또 (가)에서 $g(1)=0$ 이므로
 $g(x)=(x-1)(x^2+bx+c)$ (b, c 는 상수)라 하자.
이때 (나)에서
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-1)(x^2+bx+c)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-a)}{x^2+bx+c} = 0$
 $\therefore a=1$
 $\therefore f(x)=(x-1)^2(x-2)=x^3-4x^2+5x-2$
따라서 $f'(x)=3x^2-8x+5$ 이고, $g'(x) \neq 0$ 이므로 (다)에서
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{g(x)-g(2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}} = \frac{f'(2)}{g'(2)} = \frac{1}{g'(2)}$
즉, $\frac{1}{g'(2)} = \frac{1}{13}$ 이므로 $g'(2)=13$
같은 방법으로 하면 $\frac{f'(3)}{g'(3)} = \frac{8}{g'(3)}$
즉, $\frac{8}{g'(3)} = \frac{2}{7}$ 이므로 $g'(3)=28$
이때 $g(x)=x^3+(b-1)x^2+(c-b)x-c$ 에서
 $g'(x)=3x^2+2(b-1)x+(c-b)$

$$g'(2)=13 \text{에서 } 3b+c+8=13$$

$$\therefore 3b+c=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$g'(3)=28 \text{에서 } 5b+c+21=28$$

$$\therefore 5b+c=7 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $b=1, c=2$

따라서 $g'(x)=3x^2+1$ 이므로

$$g'(-1)=3+1=4$$

18 답 ③

$$\textcircled{7} \text{에서 } -1+a-b > -1 \quad \therefore a > b \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

$$\textcircled{8} \text{에서 } (1+a+b) - (-1+a-b) > 8$$

$$2+2b > 8, 2b > 6 \quad \therefore b > 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{10}$$

$$\textcircled{9}, \textcircled{10} \text{에서 } a > b > 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{11}$$

$$\neg. f(x)=x^3+ax^2+bx \text{에서 } f'(x)=3x^2+2ax+b$$

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=a^2-3b$$

이때 ⑩에 의하여

$$a^2-3b > b^2-3b=b(b-3) > 0$$

즉, $D_1 > 0$ 이므로 방정식 $f'(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$$\neg. f'(x)=3x^2+2ax+b \text{에서}$$

$$f'(-1)=3-2a+b=(3-a)+(b-a) < 0 \quad (\because \textcircled{11})$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b=3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2-\frac{a^2}{3}+b \text{이므로 함수 } f'(x) \text{는}$$

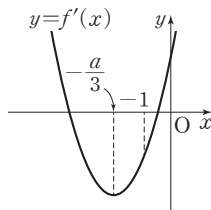
$$x=-\frac{a}{3} \text{에서 최소이고}$$

$$-\frac{a}{3} < -1 \quad (\because \textcircled{11})$$

따라서 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프의 개형

이 그림과 같으므로 $-1 < x < 1$ 에서

$f'(x) < 0$ 인 부분이 존재한다.



$$\neg. \text{ 방정식 } f(x)-f'(k)x=0 \text{에서}$$

$$x^3+ax^2+bx-(3k^2+2ak+b)x=0$$

$$x(x^2+ax-3k^2-2ak)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{12}$$

따라서 삼차방정식 ⑫의 한 근이 0이므로 삼차방정식 ⑫의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 이차방정식 $x^2+ax-3k^2-2ak=0$ 이 0이 아닌 중근을 갖거나 0과 0이 아닌 한 실근을 가져야 한다.

(i) 방정식 $x^2+ax-3k^2-2ak=0$ 이 0이 아닌 중근을 갖는 경우

방정식 $x^2+ax-3k^2-2ak=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2=a^2-4(-3k^2-2ak)=0$$

$$12k^2+8ak+a^2=0, (2k+a)(6k+a)=0$$

$$\therefore k=-\frac{a}{2} \text{ 또는 } k=-\frac{a}{6} \quad \text{⑫에 } k \text{의 값을 대입하면 } x\left(x+\frac{a}{2}\right)=0 \text{이고}$$

$a \neq 0$ 이므로 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

(ii) 방정식 $x^2+ax-3k^2-2ak=0$ 이 0과 0이 아닌 한 실근을 갖는 경우

방정식 $x^2+ax-3k^2-2ak=0$ 의 한 근이 0이므로

$$-3k^2-2ak=0, k(3k+2a)=0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=-\frac{2}{3}a \quad \text{⑫에 } k \text{의 값을 대입하면 } x^2(x+a)=0 \text{이고}$$

$a \neq 0$ 이므로 서로 다른 실근의 개수가 2이다.

(i), (ii)에서 모든 실수 k 의 개수는 4이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \textcircled{12}$ 이다.

19 답 ②

함수 $f(x)$ 의 최고차항을 x^n (n 은 자연수)이라 하면 $f'(x)$ 의 최고차항은 nx^{n-1} 이다.

$(3x+1)f(x)-(x^2-1)f'(x)=2x^2+x+1$ 에서 좌변의 최고차항은 $3x^{n+1}-nx^{n+1}$, 즉 $(3-n)x^{n+1}$ 이고 우변의 최고차항은 $2x^2$ 이므로 $n=1$ 또는 $n=3$

(i) $n=1$ 일 때,

$$f(x)=x+a \text{ (} a \text{는 상수)라 하면 } f'(x)=1 \text{이므로}$$

$$(3x+1)f(x)-(x^2-1)f'(x)=(3x+1)(x+a)-(x^2-1)$$

$$=2x^2+(3a+1)x+a+1$$

$$\text{즉, } 2x^2+(3a+1)x+a+1=2x^2+x+1 \text{이므로}$$

$$3a+1=1, a+1=1$$

$$\therefore a=0$$

따라서 $f(x)=x$ 이므로

$$f(3)=3$$

(ii) $n=3$ 일 때,

$$f(x)=x^3+bx^2+cx+d \text{ (} b, c, d \text{는 상수)라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2+2bx+c \text{이므로}$$

$$(3x+1)f(x)-(x^2-1)f'(x)$$

$$=(3x+1)(x^3+bx^2+cx+d)-(x^2-1)(3x^2+2bx+c)$$

$$=3x^4+(3b+1)x^3+(b+3c)x^2+(c+3d)x+d$$

$$-\{3x^4+2bx^3+(c-3)x^2-2bx-c\}$$

$$=(b+1)x^3+(b+2c+3)x^2+(2b+c+3d)x+c+d$$

$$\text{즉, } (b+1)x^3+(b+2c+3)x^2+(2b+c+3d)x+c+d=2x^2+x+1$$

이므로

$$b+1=0, b+2c+3=2, 2b+c+3d=1, c+d=1$$

$$\therefore b=-1, c=0, d=1$$

따라서 $f(x)=x^3-x^2+1$ 이므로

$$f(3)=27-9+1=19$$

(i), (ii)에서 모든 $f(3)$ 의 값의 합은

$$3+19=22$$

20 답 ④

$$\textcircled{12} \text{의 } g(x)=x^2f(x) \text{에서}$$

$$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$$

이를 ⑦의 등식에 대입하면

$$xf'(x)+2xf(x)+x^2f'(x)=4x\{f(x)+1\}$$

$$(x^2+x)f'(x)=2xf(x)+4x$$

$$x(x+1)f'(x)=2x\{f(x)+2\}$$

$$\therefore (x+1)f'(x)=2\{f(x)+2\} \quad \cdots \cdots \textcircled{13}$$

(i) $f(x)$ 가 상수함수일 때,

$$f(0)=0 \text{이므로 } f(x)=0$$

이는 ⑬을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)$ 가 일차 이상의 함수일 때,

함수 $f(x)$ 의 최고차항을 ax^n ($a \neq 0, n$ 은 자연수)이라 하면 $f'(x)$ 의 최고차항은 anx^{n-1} 이다.

⑬에서 좌변의 최고차항은 anx^n 이고 우변의 최고차항은 $2ax^n$ 이므로

$$an=2a \quad \therefore n=2 \quad (\because a \neq 0)$$

따라서 $f(x)$ 는 이차함수이고 $f(0)=0$ 이므로

$$f(x)=ax^2+bx \text{ (} b \text{는 상수)라 하면}$$

$$f'(x)=2ax+b$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}(x+1)(2ax+b) &= 2(ax^2+bx+2) \\ 2ax^2+(2a+b)x+b &= 2ax^2+2bx+4 \\ \text{즉, } 2a+b &= 2b, b=4 \text{이므로 } a=2 \\ \therefore f(x) &= 2x^2+4x\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $f(x)=2x^2+4x$ 이므로
 $f(1)=2+4=6$

21 답 12

(가)의 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0=g(1)+1 \quad \therefore g(1)=-1$$

(가)의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}2(x-1)f(x)+(x-1)^2f'(x) \\ = 2(x-2)g(x)+(x-2)^2g'(x)+3x^2-4x-1\end{aligned}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0=-2g(1)+g'(1)-2$$

이때 $g(1)=-1$ 이므로

$$0=2+g'(1)-2 \quad \therefore g'(1)=0$$

(i) $g(x)$ 가 일차함수일 때,

(나)에서 함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$g(x)=x+a(a \text{는 상수}) \text{라 하면 } g'(x)=1$$

그런데 $g'(1)=0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $g(x)$ 가 이차함수일 때,

(나)에서 함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$g(x)=x^2+bx+c(b, c \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$g'(x)=2x+b$$

$$g(1)=-1 \text{에서 } 1+b+c=-1 \quad \therefore b+c=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$g'(1)=0 \text{에서 } 2+b=0 \quad \therefore b=-2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$-2+c=-2 \quad \therefore c=0$$

(i), (ii)에서 $g_1(x)=x^2-2x$

이를 (가)의 등식의 우변 $g(x)$ 에 대입하면

$$\begin{aligned}(x-2)^2g(x)+x^3-2x^2-x+3 &= (x-2)^2(x^2-2x)+x^3-2x^2-x+3 \\ &= x^4-5x^3+10x^2-9x+3 \\ &= (x-1)^2(x^2-3x+3)\end{aligned}$$

즉, $(x-1)^2f_1(x)=(x-1)^2(x^2-3x+3)$ 이므로

$$f_1(x)=x^2-3x+3$$

따라서 $f_1'(x)=2x-3$, $g_1'(x)=2x-2$ 이므로

$$f_1'(3)g_1'(3)=(6-3)(6-2)=12$$

22 답 11

(나)의 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{x-2}=3$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)=0$ 에서 $h(2)=0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = h'(2)=3$$

한편 $h(x)=f(x-2)-g(x)=(x-2)^4-4(x-2)^2-g(x)$ 에서

$$h'(x)=4(x-2)^3-8(x-2)-g'(x)$$

이때 $h(2)=-g(2)=0$, $h'(2)=-g'(2)=3$ 이므로

$$g(2)=0, g'(2)=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(i) $g(x)$ 가 일차함수일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } g(x)=-3(x-2)=-3x+6 \text{이므로 } g'(x)=-3$$

이를 (가)의 등식에 대입하면

$$\begin{aligned}-3(x^2-1) &= 2x(-3x+6)+ax^2+bx-5 \\ -3x^2+3 &= (a-6)x^2+(b+12)x-5\end{aligned}$$

이때 모든 실수 x 에 대하여 등식을 만족시키는 상수 a, b 는 존재하지 않는다.

(ii) $g(x)$ 가 이차 이상의 함수일 때,

함수 $g(x)$ 의 최고차항을 px^n ($p \neq 0, n \geq 2$)이라 하면 $g'(x)$ 의 최고차항은 npx^{n-1} 이다.

(가)의 등식에서 좌변의 최고차항은 npx^{n+1} 이고 우변의 최고차항은 $2px^{n+1}$ 이므로

$$np=2p \quad \therefore n=2 (\because p \neq 0)$$

따라서 $g(x)$ 는 이차함수이고 ㉠에서 $g(2)=0$ 이므로

$$g(x)=(x-2)(px+q)=px^2-(2p-q)x-2q (q \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$g'(x)=2px-2p+q$$

$$\textcircled{1} \text{의 } g'(2)=-3 \text{에서}$$

$$2p+q=-3 \quad \therefore q=-2p-3$$

$$\therefore g(x)=px^2-(2p+2p+3)x-2(-2p-3)$$

$$=px^2-(4p+3)x+4p+6,$$

$$g'(x)=2px-4p-3$$

이를 (가)의 등식에 대입하면

$$\begin{aligned}(x^2-1)(2px-4p-3) \\ = 2x\{px^2-(4p+3)x+4p+6\}+ax^2+bx-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

이때 좌변의 상수항은 $4p+3$, 우변의 상수항은 -5 이므로

$$4p+3=-5, 4p=-8 \quad \therefore p=-2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}(x^2-1)(-4x+5) &= 2x(-2x^2+5x-2)+ax^2+bx-5 \\ -4x^3+5x^2+4x-5 &= -4x^3+(a+10)x^2+(b-4)x-5\end{aligned}$$

즉, $a+10=5, b-4=4$ 이므로 $a=-5, b=8$

(i), (ii)에서 $a=-5, b=8$ 이므로

$$a+2b=-5+16=11$$

23 답 ④

ㄱ. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 각각 $x=2$ 에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 도 $x=2$ 에서 연속이다.

$1 < x \leq 2$ 에서 $f(x)=-x+3, g(x)=x$ 이고, $2 < x < 3$ 에서

$$f(x)=2x-3, g(x)=-x+4 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}f(x)g(x) &= \begin{cases} (-x+3)x & (1 < x \leq 2) \\ (2x-3)(-x+4) & (2 < x < 3) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -x^2+3x & (1 < x \leq 2) \\ -2x^2+11x-12 & (2 < x < 3) \end{cases}\end{aligned}$$

이때 $h(x)=f(x)g(x)$ 라 하면

$$h'(x) = \begin{cases} -2x+3 & (1 < x < 2) \\ -4x+11 & (2 < x < 3) \end{cases}$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 2+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (-4x+11) = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (-2x+3) = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} h'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2-} h'(x)$$

즉, 미분계수 $h'(2)$ 가 존재하지 않으므로 함수 $h(x)$, 즉 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x=4$ 에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$ 도 $x=4$ 에서 연속이다.

$3 < x \leq 4$ 에서 $f(x) = x-2$ 이고, $4 < x \leq 6$ 에서 $f(x) = -x+6$ 이므로

$$\begin{aligned}\{f(x)\}^2 &= \begin{cases} (x-2)^2 & (3 < x \leq 4) \\ (-x+6)^2 & (4 < x \leq 6) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2-4x+4 & (3 < x \leq 4) \\ x^2-12x+36 & (4 < x \leq 6) \end{cases}\end{aligned}$$

이때 $h(x) = \{f(x)\}^2$ 이라 하면

$$h'(x) = \begin{cases} 2x-4 & (3 < x < 4) \\ 2x-12 & (4 < x < 6) \end{cases}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 4+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 4+} (2x-12) = -4$,

$$\lim_{x \rightarrow 4-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} (2x-4) = 4 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+} h'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4-} h'(x)$$

즉, 미분계수 $h'(4)$ 가 존재하지 않으므로 함수 $h(x)$, 즉 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 $x=4$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. 함수 $g(x)$ 는 $x=1$, $x=3$, $x=4$ 에서 불연속이므로 함수 $\{g(x)\}^2$ 도 $x=1$, $x=3$, $x=4$ 에서 불연속이다.

따라서 함수 $\{g(x)\}^2$ 은 $x=1$, $x=3$, $x=4$ 에서 미분가능하지 않다.

(i) $x=2$ 일 때,

함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로 함수 $\{g(x)\}^2$ 도 $x=2$ 에서 연속이다.

$1 < x \leq 2$ 에서 $g(x) = x$ 이고, $2 < x < 3$ 에서 $g(x) = -x+4$ 이므로

$$\begin{aligned}\{g(x)\}^2 &= \begin{cases} x^2 & (1 < x \leq 2) \\ (-x+4)^2 & (2 < x < 3) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2 & (1 < x \leq 2) \\ x^2-8x+16 & (2 < x < 3) \end{cases}\end{aligned}$$

이때 $h(x) = \{g(x)\}^2$ 이라 하면

$$h'(x) = \begin{cases} 2x & (1 < x < 2) \\ 2x-8 & (2 < x < 3) \end{cases}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (2x-8) = -4$,

$$\lim_{x \rightarrow 2-} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} 2x = 4 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} h'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2-} h'(x)$$

즉, 미분계수 $h'(2)$ 가 존재하지 않으므로 함수 $h(x)$, 즉 함수 $\{g(x)\}^2$ 은 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

(ii) $x=5$ 일 때,

함수 $g(x)$ 가 $x=5$ 에서 연속이므로 함수 $\{g(x)\}^2$ 도 $x=5$ 에서 연속이다.

$4 < x \leq 5$ 에서 $g(x) = -x+5$ 이고, $5 < x \leq 6$ 에서 $g(x) = x-5$ 이므로

$$\begin{aligned}\{g(x)\}^2 &= \begin{cases} (-x+5)^2 & (4 < x \leq 5) \\ (x-5)^2 & (5 < x \leq 6) \end{cases} \\ &= x^2-10x+25 \quad (4 < x \leq 6)\end{aligned}$$

이때 $h(x) = \{g(x)\}^2$ 이라 하면

$$h'(x) = 2x-10 \quad (4 < x < 6)$$

따라서 $h'(5) = 0$ 에서 미분계수 $h'(5)$ 가 존재하므로 함수

$h(x)$, 즉 함수 $\{g(x)\}^2$ 은 $x=5$ 에서 미분가능하다.

즉, 함수 $\{g(x)\}^2$ 이 미분가능하지 않은 x 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

24 답 ① $\frac{1}{32}$

$1 < x < 2$ 일 때 $[x] = 1$, $2 \leq x < 3$ 일 때 $[x] = 2$ 이므로

$$f(x) = \frac{ax^2+bx-4}{[x]} = \begin{cases} \frac{ax^2+bx-4}{1} & (1 < x < 2) \\ \frac{ax^2+bx-4}{2} & (2 \leq x < 3) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 열린구간 $(1, 3)$ 에서 미분가능하면 연속이므로 $x=2$ 에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{ax^2+bx-4}{2} = \lim_{x \rightarrow 2-} (ax^2+bx-4)$$

$$2a+b-2 = 4a+2b-4 \quad \therefore 2a+b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 가 열린구간 $(1, 3)$ 에서 미분가능하면 $x=2$ 에서도 미분가능하다.

즉, 미분계수 $f'(2)$ 가 존재하고, $f'(x) = \begin{cases} 2ax+b & (1 < x < 2) \\ ax+\frac{b}{2} & (2 < x < 3) \end{cases}$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 2+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f'(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \left(ax + \frac{b}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow 2-} (2ax+b)$$

$$2a + \frac{b}{2} = 4a + b \quad \therefore 4a + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -1$, $b = 4$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \begin{cases} -x^2+4x-4 & (1 < x < 2) \\ \frac{-x^2+4x-4}{2} & (2 \leq x < 3) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -(x-2)^2 & (1 < x < 2) \\ -\frac{1}{2}(x-2)^2 & (2 \leq x < 3) \end{cases}\end{aligned}$$

$$\therefore f\left(\frac{3}{2}\right)f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{4} \times \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{32}$$

25 답 ③

(i) $n=1$ 일 때,

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x(1+|x|)}{|x|} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} = \begin{cases} x-1 & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ x+1 & (x > 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x+1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (x-1) = -1$$

$$f_1(0) = 0$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0+} f_1(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f_1(x) \neq f_1(0)$ 이므로 함수 $f_1(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이 아니다.

$$\therefore \langle f_1(0) \rangle = 1$$

(ii) $n=2$ 일 때,

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2(1+|x|)}{|x|} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} = \begin{cases} x(x-1) & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ x(x+1) & (x > 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x(x+1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} x(x-1) = 0$$

$$f_2(0) = 0$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0+} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f_2(x) = f_2(0)$ 이므로 함수 $f_2(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$f_2'(x) = \begin{cases} 2x-1 & (x < 0) \\ 2x+1 & (x > 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f_2'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (2x+1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f_2'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (2x-1) = -1$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0+} f_2'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f_2'(x)$ 에서 미분계수 $f_2'(0)$ 이 존재하지 않음

므로 함수 $f_2(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

$$\therefore \langle f_2(0) \rangle = 2$$

(iii) $n \geq 3$ 일 때,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^n(1+|x|)}{|x|} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} = \begin{cases} x^{n-1}(x-1) & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ x^{n-1}(x+1) & (x > 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x^{n-1}(x+1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} x^{n-1}(x-1) = 0$$

$$f_n(0) = 0$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f_n(x) = f_n(0)$ 이므로 함수 $f_n(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$f_n'(x) = \begin{cases} nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2} & (x < 0) \\ nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} & (x > 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f_n'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \{nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2}\} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f_n'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \{nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2}\} = 0$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0+} f_n'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f_n'(x)$ 에서 미분계수 $f_n'(0)$ 이 존재하므로 함수 $f_n(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

$$\therefore \langle f_3(0) \rangle = \langle f_4(0) \rangle = \langle f_5(0) \rangle = \dots = 3$$

(i), (ii), (iii)에서

$$\langle f_1(0) \rangle + \langle f_2(0) \rangle + \langle f_3(0) \rangle + \dots + \langle f_{50}(0) \rangle = 1 + 2 + 3 \times 48 = 147$$

26 답 186

$P(x, f(x))$ 라 하면 $x < 1$ 일 때, $P(x, x+1)$ 이므로

$$\overline{AP}^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2 = 2x^2 + 6x + 5$$

$$\overline{BP}^2 = (x-1)^2 + (x-1)^2 = 2x^2 - 4x + 2$$

이때 점 P에서 점 A까지의 거리의 제곱이 점 B까지의 거리의 제곱보다 크지 않은 x 의 값의 범위를 구하면

$$2x^2 + 6x + 5 \leq 2x^2 - 4x + 2$$

$$10x \leq -3 \quad \therefore x \leq -\frac{3}{10}$$

$$\text{즉, } x \leq -\frac{3}{10} \text{일 때 } g(x) = \overline{AP}^2 \text{이고, } -\frac{3}{10} < x < 1 \text{일 때 } g(x) = \overline{BP}^2$$

이므로

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 + 6x + 5 & \left(x \leq -\frac{3}{10}\right) \\ 2x^2 - 4x + 2 & \left(-\frac{3}{10} < x < 1\right) \end{cases} \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $x \geq 1$ 일 때, $P(x, -2x+4)$ 이므로

$$\overline{AP}^2 = (x+1)^2 + (-2x+5)^2 = 5x^2 - 18x + 26$$

$$\overline{BP}^2 = (x-1)^2 + (-2x+2)^2 = 5x^2 - 10x + 5$$

이때 점 P에서 점 A까지의 거리의 제곱이 점 B까지의 거리의 제곱보다 크지 않은 x 의 값의 범위를 구하면

$$5x^2 - 18x + 26 \leq 5x^2 - 10x + 5$$

$$-8x \leq -21 \quad \therefore x \geq \frac{21}{8}$$

즉, $x \geq \frac{21}{8}$ 일 때 $g(x) = \overline{AP}^2$ 이고, $1 \leq x < \frac{21}{8}$ 일 때 $g(x) = \overline{BP}^2$ 이므로

$$g(x) = \begin{cases} 5x^2 - 10x + 5 & \left(1 \leq x < \frac{21}{8}\right) \\ 5x^2 - 18x + 26 & \left(x \geq \frac{21}{8}\right) \end{cases} \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } g(x) = \begin{cases} 2x^2 + 6x + 5 & \left(x \leq -\frac{3}{10}\right) \\ 2x^2 - 4x + 2 & \left(-\frac{3}{10} < x < 1\right) \\ 5x^2 - 10x + 5 & \left(1 \leq x < \frac{21}{8}\right) \\ 5x^2 - 18x + 26 & \left(x \geq \frac{21}{8}\right) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 는 $x \neq -\frac{3}{10}$, $x \neq 1$, $x \neq \frac{21}{8}$ 인 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$$g'(x) = \begin{cases} 4x + 6 & \left(x < -\frac{3}{10}\right) \\ 4x - 4 & \left(-\frac{3}{10} < x < 1\right) \\ 10x - 10 & \left(1 < x < \frac{21}{8}\right) \\ 10x - 18 & \left(x > \frac{21}{8}\right) \end{cases} \text{이므로}$$

(i) $x = -\frac{3}{10}$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{10}+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{10}+} (4x - 4) = -\frac{26}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{10}-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{10}-} (4x + 6) = \frac{24}{5}$$

즉, $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{10}+} g'(x) \neq \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{10}-} g'(x)$ 에서 미분계수 $g'\left(-\frac{3}{10}\right)$ 이 존재

하지 않으므로 함수 $g(x)$ 는 $x = -\frac{3}{10}$ 에서 미분가능하지 않다.

(ii) $x = 1$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (10x - 10) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (4x - 4) = 0$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} g'(x)$ 에서 미분계수 $g'(1)$ 이 존재하므로 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

(iii) $x = \frac{21}{8}$ 일 때,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{21}{8}+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{21}{8}+} (10x - 18) = \frac{33}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{21}{8}-} g'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{21}{8}-} (10x - 10) = \frac{65}{4}$$

즉, $\lim_{x \rightarrow \frac{21}{8}+} g'(x) \neq \lim_{x \rightarrow \frac{21}{8}-} g'(x)$ 에서 미분계수 $g'\left(\frac{21}{8}\right)$ 이 존재하지

않으므로 함수 $g(x)$ 는 $x = \frac{21}{8}$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하지 않은 a 의 값은 $-\frac{3}{10}, \frac{21}{8}$ 이므로

$$p = -\frac{3}{10} + \frac{21}{8} = \frac{186}{80}$$

$$\therefore 80p = 80 \times \frac{186}{80} = 186$$

01 30 02 ③ 03 243 04 $\frac{17}{4}$ 05 17 06 9
07 13 08 8 09 ② 10 ⑤

01 답 30

1단계 $f'(a)$ 의 값 구하기

(*)에서

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) + f(a) - f(a-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{-h} \\ &= f'(a) + f'(a) \\ &= 2f'(a) \end{aligned}$$

즉, $2f'(a) = 12$ 이므로

$$f'(a) = 6$$

2단계 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+2g(x)) - f(a-h(x))}{g(x) - h(x)}$ 의 값 구하기

$$\frac{h(x)}{g(x)} = k(x) \text{로 놓으면 } h(x) = k(x)g(x) \text{이고 (*)의 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{1}{2} \text{에}$$

서 $\lim_{x \rightarrow 0} k(x) = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+2g(x)) - f(a-h(x))}{g(x) - h(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+2g(x)) - f(a-k(x)g(x))}{g(x) - k(x)g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+2g(x)) - f(a) + f(a) - f(a-k(x)g(x))}{\{1-k(x)\}g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+2g(x)) - f(a) - f(a-k(x)g(x)) + f(a)}{g(x)} \\ & \quad \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-k(x)} \\ &= \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+2g(x)) - f(a)}{2g(x)} \times 2 \right. \\ & \quad \left. + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a-k(x)g(x)) - f(a)}{-k(x)g(x)} \times k(x) \right\} \\ & \quad \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= \left\{ 2f'(a) + f'(a) \times \frac{1}{2} \right\} \times 2$$

$$= 4f'(a) + f'(a)$$

$$= 5f'(a)$$

$$= 5 \times 6 = 30$$

02 답 ③

1단계 $f(0)$ 의 값 구하기

$$f(xy) = f(x)g(y) + f(y)g(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0)g(y) + f(y)g(0)$$

$$\therefore \{f(0)+1\}g(y) = 0$$

이때 모든 실수 y 에 대하여 $g(y)=0$ 이 성립하지 않으므로

$$f(0) = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

2단계 $f'(x)$ 구하기

$x \neq 0$ 일 때, ①의 양변에 $y=1+\frac{h}{x}$ (h 는 0이 아닌 실수)를 대입하면

$$f(x+h) = f(x)g\left(1+\frac{h}{x}\right) + f\left(1+\frac{h}{x}\right)g(x)$$

$$f(x+h) - f(x) = \{f(x)+1\}g\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \{f(x)+1\} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

$$= \{f(x)+1\} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g\left(1+\frac{h}{x}\right) - g(1)}{\frac{h}{x}} \times \frac{1}{x} \quad (\because g(1)=0)$$

$$= \frac{1}{x} \{f(x)+1\} g'(1)$$

$$= \frac{2}{x} \{f(x)+1\} \quad (\because g'(1)=2)$$

3단계 $f(x)$ 구하기

$$f'(x) = \frac{2}{x} \{f(x)+1\} \text{에서}$$

$$xf'(x) = 2\{f(x)+1\} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

함수 $f(x)$ 의 최고차항을 ax^n ($a \neq 0$)이라 하면 $f'(x)$ 의 최고차항은 anx^{n-1} 이다.

③에서 좌변의 최고차항은 anx^n 이고, 우변의 최고차항은 $2ax^n$ 이므로

$$an = 2a \quad \therefore n = 2 \quad (\because a \neq 0)$$

따라서 $f(x)$ 는 이차함수이고 ③에서 $f(0) = -1$ 이므로

$$f(x) = ax^2 + bx - 1 \quad (b \text{는 상수}) \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

이를 ③에 대입하면

$$x(2ax+b) = 2(ax^2+bx-1)$$

$$2ax^2+bx = 2ax^2+2bx$$

$$\text{즉, } b = 2b \text{이므로 } b = 0$$

$$\therefore f(x) = ax^2 - 1$$

이때 $f(1) = 3$ 에서

$$a - 1 = 3 \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore f(x) = 4x^2 - 1$$

4단계 $g(x)$ 구하기

①에서

$$4(xy)^2 - 1 = (4x^2 - 1)g(y) + (4x^2 - 1) + g(y)$$

$$4(xy)^2 = 4x^2\{g(y)+1\}$$

$$g(y)+1 = y^2, \quad g(y) = y^2 - 1$$

$$\therefore g(x) = x^2 - 1$$

5단계 $f'(2) + g'(3)$ 의 값 구하기

따라서 $f'(x) = 8x, \quad g'(x) = 2x$ 이므로

$$f'(2) + g'(3) = 16 + 6 = 22$$

03 답 243

1단계 $f(x) - g(x)$ 의 식 세우기

$h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면 (*)의 $f(a) = g(a)$ 에서

$$h(a) = f(a) - g(a) = 0$$

$h'(x) = f'(x) - g'(x)$ 이므로 (*)의 $f'(a) = g'(a)$ 에서

$$h'(a) = f'(a) - g'(a) = 0$$

즉, $h(x)$ 는 $(x-a)^2$ 을 인수로 갖는다.

삼차함수 $h(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$h(x) = (x-\alpha)^2(x-\gamma) \quad (\gamma \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2(x-\alpha)(x-\gamma) + (x-\alpha)^2 \\ &= (x-\alpha)(3x-\alpha-2\gamma) \end{aligned}$$

(㉠)의 $f'(\beta) = g'(\beta)$ 에서

$$h'(\beta) = f'(\beta) - g'(\beta) = 0$$

$$\therefore (\beta-\alpha)(3\beta-\alpha-2\gamma) = 0$$

이때 (㉠), (㉠)의 $f'(\alpha) = -16$, $f'(\beta) = 16$ 에서 $\alpha \neq \beta$ 이므로

$$3\beta - \alpha - 2\gamma = 0$$

$$\therefore \gamma = \frac{3\beta - \alpha}{2}$$

$$\therefore h(x) = (x-\alpha)^2 \left(x - \frac{3\beta - \alpha}{2} \right)$$

2단계 $\alpha - \beta$ 의 값 구하기

한편 이차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 2이므로

$$g(x) = 2x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$g'(x) = 4x + a$$

(㉡), (㉠)의 $g'(\alpha) = -16$, $g'(\beta) = 16$ 에서

$$4\alpha + a = -16 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$4\beta + a = 16 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉢} - \textcircled{㉣}$ 을 하면

$$4\alpha - 4\beta = -32$$

$$\therefore \alpha - \beta = -8$$

3단계 $g(\beta+1) - f(\beta+1)$ 의 값 구하기

$$\therefore f(\beta+1) - g(\beta+1) = h(\beta+1)$$

$$= (\beta+1-\alpha)^2 \left(\beta+1 - \frac{3\beta-\alpha}{2} \right)$$

$$= (\alpha - \beta - 1)^2 \times \frac{\alpha - \beta + 2}{2}$$

$$= (-8-1)^2 \times \frac{-8+2}{2}$$

$$= -243$$

$$\therefore g(\beta+1) - f(\beta+1) = 243$$

idea
04 답 $\frac{17}{4}$

1단계 (㉠)을 이용하여 $f'(0)$, $g'(0)$ 사이의 관계식 구하기

두 다항함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 모두 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$f(0)=1, g(0)=1$$

(㉡)에서

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax - 3 + 3f(x)}{ax - 1 + f(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax + 3\{f(x) - 1\}}{ax + \{f(x) - 1\}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax + 3\{f(x) - f(0)\}}{ax + \{f(x) - f(0)\}}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2a + \lim_{x \rightarrow 0} 3 \times \frac{f(x) - f(0)}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} a + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}}$$

$$= \frac{2a + 3f'(0)}{a + f'(0)}$$

즉, $f'(0)\{a + f'(0)\} = 2a + 3f'(0)$ 이므로

$$\{f'(0)\}^2 + (a-3)f'(0) - 2a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉤}$$

(㉠)에서

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax + a - ag(x)}{-3x - 1 + g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax - a\{g(x) - 1\}}{-3x + \{g(x) - 1\}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2ax - a\{g(x) - g(0)\}}{-3x + \{g(x) - g(0)\}}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2a - \lim_{x \rightarrow 0} a \times \frac{g(x) - g(0)}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} (-3) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x}}$$

$$= \frac{2a - ag'(0)}{-3 + g'(0)}$$

즉, $g'(0)\{-3 + g'(0)\} = 2a - ag'(0)$ 이므로

$$\{g'(0)\}^2 + (a-3)g'(0) - 2a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉥}$$

$\textcircled{㉤}$, $\textcircled{㉥}$ 에서 $f'(0)$, $g'(0)$ 은 이차방정식

$$t^2 + (a-3)t - 2a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉦}$$

의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$f'(0) + g'(0) = -(a-3) \quad \dots\dots \textcircled{㉧}$$

2단계 모든 $\frac{g'(0)}{f'(0)}$ 의 값의 합 구하기

(㉡)에서 $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 이므로

$$h'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$$

$$= f'(0) + g'(0)$$

$$= -(a-3) \quad (\because \textcircled{㉧})$$

이때 (㉡)의 $h'(0) = 5$ 에서

$$-(a-3) = 5 \quad \therefore a = -2$$

$\textcircled{㉦}$ 에서 $t^2 - 5t + 4 = 0$

$$(t-1)(t-4) = 0 \quad \therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 4$$

즉, $f'(0) = 1$, $g'(0) = 4$ 또는 $f'(0) = 4$, $g'(0) = 1$ 이므로

$$\frac{g'(0)}{f'(0)} = 4 \text{ 또는 } \frac{g'(0)}{f'(0)} = \frac{1}{4}$$

따라서 모든 $\frac{g'(0)}{f'(0)}$ 의 값의 합은 $4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$

05 답 17

1단계 $f(x)$ 의 차수의 범위 구하기

$f(x)$ 가 상수함수이면 (㉡)에서 좌변은 0이고 우변은 이차함수이므로 조건이 성립하지 않는다.

또 $f(x)$ 가 일차함수이면 (㉡)에서 좌변은 일차함수이고 우변은 이차함수이므로 조건이 성립하지 않는다.

이때 $f(x)$ 가 n ($n \geq 2$)차 함수이면 (㉡)에서 좌변은 n 차 함수이고 우변도 n 차 함수이므로 조건을 만족시킨다.

2단계 $f(x)$ 가 이차함수일 때, $g(0)$ 의 값 구하기

(i) $f(x)$ 가 이차함수일 때,

함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 -1 이므로

$$f(x) = -x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = -2x + a$$

이를 (㉡)의 등식에 대입하면

$$(x-1)(-2x+a) = 3(-x^2+ax+b) + (x-1)^2$$

$$-2x^2 + (a+2)x - a = -2x^2 + (3a-2)x + 3b + 1$$

$$\text{즉, } a+2 = 3a-2, -a = 3b+1 \text{이므로}$$

$$a = 2, b = -1$$

$$\therefore f(x) = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2$$

이때 (㉠)에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ 는 0이 아닌 실수로 수렴하고 사차함수 $g(x)$

의 최고차항의 계수가 1이므로

$$g(x) = (x-1)^2(x^2 + px + q) \quad (p, q \text{는 상수}) \text{라 하자.}$$

(㉠)에서 $k=1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{g(x) - g(1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{x^2 + px + q} \right) \\ &= -\frac{1}{1+p+q} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{1}{1+p+q} = -\frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$1+p+q=3 \quad \therefore p+q=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

또 (㉠)에서 $k=2$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{g(x) - g(2)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2}} \\ &= \frac{f'(2)}{g'(2)} \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = -2x + 2$ 이고,

$$g'(x) = 2(x-1)(x^2 + px + q) + (x-1)^2(2x+p) \text{이므로}$$

$$\frac{f'(2)}{g'(2)} = \frac{-2}{5p+2q+12}$$

$$\text{즉, } \frac{-2}{5p+2q+12} = 1 \text{이므로}$$

$$5p+2q+12 = -2 \quad \therefore 5p+2q = -14 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$p = -6, q = 8$$

$$\text{따라서 } g(x) = (x-1)^2(x^2 - 6x + 8) \text{이므로}$$

$$g(0) = 8$$

3단계 $f(x)$ 가 삼차 이상의 함수일 때, $g(0)$ 의 값 구하기

(ii) $f(x)$ 가 삼차 이상의 함수일 때,

함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 -1 이므로 $f(x)$ 의 최고차항을 $-x^n$ ($n \geq 3$)이라 하면 $f'(x)$ 의 최고차항은 $-nx^{n-1}$ 이다.

(㉠)의 등식에서 좌변의 최고차항은 $-nx^n$ 이고, 우변의 최고차항은 $-3x^n$ 이므로

$$n=3$$

$f(x)$ 는 삼차함수이므로 $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$$

이를 (㉠)의 등식에 대입하면

$$\begin{aligned} (x-1)(-3x^2 + 2ax + b) &= 3(-x^3 + ax^2 + bx + c) + (x-1)^2 \\ &= -3x^3 + (2a+3)x^2 + (b-2a)x - b \end{aligned}$$

$$= -3x^3 + (3a+1)x^2 + (3b-2)x + 3c+1$$

$$\text{즉, } 2a+3=3a+1, b-2a=3b-2, -b=3c+1 \text{이므로}$$

$$a=2, b=-1, c=0$$

$$\therefore f(x) = -x^3 + 2x^2 - x = -x(x-1)^2$$

이때 (㉠)에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ 는 0이 아닌 실수로 수렴하고 사차함수 $g(x)$

의 최고차항의 계수가 1이므로

$$g(x) = (x-1)^2(x^2 + px + q) \quad (p, q \text{는 상수}) \text{라 하자.}$$

(㉠)에서 $k=1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{g(x) - g(1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x}{x^2 + px + q} \\ &= -\frac{1}{1+p+q} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{1}{1+p+q} = -\frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$1+p+q=3 \quad \therefore p+q=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

또 (㉠)에서 $k=2$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{g(x) - g(2)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2}} \\ &= \frac{f'(2)}{g'(2)} \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = -3x^2 + 4x - 1$ 이고,

$$g'(x) = 2(x-1)(x^2 + px + q) + (x-1)^2(2x+p) \text{이므로}$$

$$\frac{f'(2)}{g'(2)} = \frac{-5}{5p+2q+12}$$

$$\text{즉, } \frac{-5}{5p+2q+12} = 1 \text{이므로}$$

$$5p+2q+12 = -5 \quad \therefore 5p+2q = -17 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$p = -7, q = 9$$

$$\text{따라서 } g(x) = (x-1)^2(x^2 - 7x + 9) \text{이므로}$$

$$g(0) = 9$$

4단계 모든 $g(0)$ 의 값의 합 구하기

(i), (ii)에서 모든 $g(0)$ 의 값의 합은 $8+9=17$

06 답 9

1단계 $f(x)$ 의 식 세우기

방정식 $f'(x)=0$ 은 이차방정식이고 (㉠)에서 이 방정식의 실근의 개수가 2인 경우가 있으므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근을 α, β ($\alpha < \beta$)라 하자.

방정식 $f'(x)=0$ 이 길이가 2인 닫힌구간

$[t, t+2]$ 에서 갖는 실근의 개수가 $g(t)$ 이므로

$\beta - \alpha < 2$ 이면 어떤 실수 a 에 대하여

$$\lim_{t \rightarrow a+} g(t) = 2, \lim_{t \rightarrow a-} g(t) = 2$$

즉, $\lim_{t \rightarrow a+} g(t) + \lim_{t \rightarrow a-} g(t) = 4$ 이므로 (㉠)을 만족시키지 않는다.

또 $\beta - \alpha > 2$ 이면 $g(t)=2$ 인 경우가 존재하지 않으므로 (㉠)을 만족시키지 않는다.

따라서 $\beta - \alpha = 2$ 이므로 $\beta = \alpha + 2$

방정식 $f'(x)=0$ 이 닫힌구간 $[t, t+2]$ 에서 실근의 개수가 2이려면

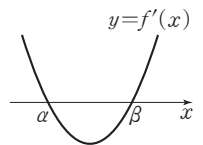
$t=\alpha$ 이어야 하고 (㉠)의 $g(f(1))=g(f(4))=2$ 에서

$$f(1)=f(4)=\alpha$$

이때 $f(1)-\alpha=0, f(4)-\alpha=0$ 이고 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$f(x) - \alpha = \frac{1}{2}(x-1)(x-4)(x+k) \quad (k \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-4)(x+k) + \alpha$$



2단계 $f(x)$ 구하기

$$\begin{aligned}\therefore f'(x) &= \frac{1}{2}(x-4)(x+k) + \frac{1}{2}(x-1)(x+k) + \frac{1}{2}(x-1)(x-4) \\ &= \frac{3}{2}x^2 + (k-5)x - \frac{5}{2}k + 2\end{aligned}$$

$$\text{방정식 } f'(x)=0 \text{에서 } \frac{3}{2}x^2 + (k-5)x - \frac{5}{2}k + 2 = 0$$

$$3x^2 + 2(k-5)x - 5k + 4 = 0$$

이 이차방정식의 두 근이 $\alpha, \alpha+2$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{두 근의 합은 } \alpha + \alpha + 2 = -\frac{2(k-5)}{3}$$

$$3\alpha + 3 = -k + 5 \quad \therefore k = -3\alpha + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{두 근의 곱은 } \alpha(\alpha+2) = \frac{-5k+4}{3}$$

①을 대입하면

$$\alpha^2 + 2\alpha = \frac{-5(-3\alpha+2)+4}{3}, \quad \alpha^2 + 2\alpha = 5\alpha - 2$$

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0, \quad (\alpha-1)(\alpha-2) = 0$$

$$\therefore \alpha = 1 \text{ 또는 } \alpha = 2$$

따라서 ①에서

$$\alpha = 1 \text{일 때 } k = -1, \quad \alpha = 2 \text{일 때 } k = -4$$

(i) $\alpha = 1, k = -1$ 일 때,

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2(x-4) + 1 \text{이므로}$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \times 1 \times (-4) + 1 = -1$$

$\alpha = 1$ 이므로 방정식 $f'(x)=0$ 의 두 실근은 1, 3이고 닫힌구간

$[f(0), f(0)+2]$, 즉 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에 속하는 실근의 개수는 1이므로

$$g(f(0)) = 1$$

이는 ㉔를 만족시킨다.

(ii) $\alpha = 2, k = -4$ 일 때,

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-4)^2 + 2 \text{이므로}$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \times (-1) \times 16 + 2 = -6$$

$\alpha = 2$ 이므로 방정식 $f'(x)=0$ 의 두 실근은 2, 4이고 닫힌구간

$[f(0), f(0)+2]$, 즉 닫힌구간 $[-6, -4]$ 에 속하는 실근의 개수는 0이므로

$$g(f(0)) = 0$$

이는 ㉔를 만족시키지 않는다.

$$(i), (ii) \text{에서 } f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2(x-4) + 1$$

3단계 $f(5)$ 의 값 구하기

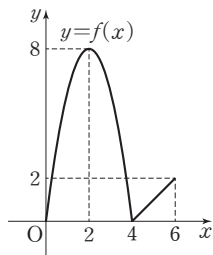
$$\therefore f(5) = \frac{1}{2} \times 16 \times 1 + 1 = 9$$

07 답 13

1단계 $y=f(x)$ 의 그래프 그리기

$$y = -2x(x-4) = -2(x-2)^2 + 8 \text{이므로}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



2단계 $h(t)$ 구하기

함수 $g(x) = |t-f(x)| = |f(x)-t|$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $-t$ 만큼 평행이동한 후 x 축보다 아래쪽에 있는 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

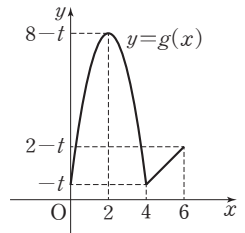
(i) $t \leq 0$ 일 때,

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같고,

꺾인 점이 1개 있으므로 열린구간

$(0, 6)$ 에서 함수 $g(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수는 1이다.

$$\therefore h(t) = 1$$



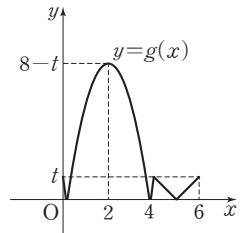
(ii) $0 < t < 2$ 일 때,

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같고,

꺾인 점이 4개 있으므로 열린구간

$(0, 6)$ 에서 함수 $g(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수는 4이다.

$$\therefore h(t) = 4$$



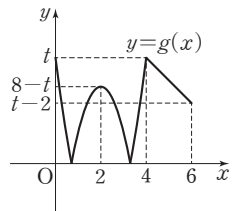
(iii) $2 \leq t < 8$ 일 때,

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같고,

꺾인 점이 3개 있으므로 열린구간

$(0, 6)$ 에서 함수 $g(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수는 3이다.

$$\therefore h(t) = 3$$



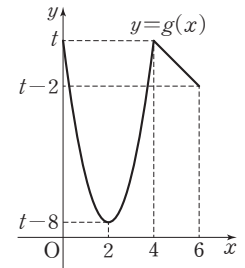
(iv) $t \geq 8$ 일 때,

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같고,

꺾인 점이 1개 있으므로 열린구간

$(0, 6)$ 에서 함수 $g(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수는 1이다.

$$\therefore h(t) = 1$$



$$(i) \sim (iv) \text{에서 } h(t) = \begin{cases} 1 & (t \leq 0 \text{ 또는 } t \geq 8) \\ 4 & (0 < t < 2) \\ 3 & (2 \leq t < 8) \end{cases}$$

3단계 $m+n$ 의 값 구하기

함수 $h(t)$ 는 $t=0, t=2, t=8$ 에서 불연속이므로

$$m=3, \quad n=0+2+8=10$$

$$\therefore m+n=13$$

08 답 8

1단계 m 의 값 구하기

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{2}(x^2-2) & (x < 1) \\ \sqrt{2}(x-2)^2 & (x \geq 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2\sqrt{2}x & (x < 1) \\ 2\sqrt{2}(x-2) & (x \geq 1) \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -2\sqrt{2}x = -2\sqrt{2}$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

이때 $f'(0)=0$, $f'(2)=0$ 이므로 0과 2가 아닌 유리수 p 에 대하여 $f'(p)$ 의 값은 무리수이다. ㉠

$$\text{또 } g(x)=\begin{cases} (x+2)^2-4 & (x<0) \\ -(x-2)^2+4 & (x\geq 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$g'(x)=\begin{cases} 2(x+2) & (x<0) \\ -2(x-2) & (x>0) \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} g'(x) = 4$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

이때 유리수 p 에 대하여 $g'(p)$ 의 값은 유리수이다. ㉡

㉠, ㉡에서 0과 2가 아닌 유리수 p 에 대하여 $f'(p)$ 의 값과 $g'(p)$ 의 값은 같을 수 없다.

따라서 함수 $h(x)=\begin{cases} g(x-a)+2 & (x<p) \\ f(x)+b & (x\geq p) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서

미분가능하려면

$$p=0 \text{ 또는 } p=2$$

$$\therefore m=2$$

2단계 n 의 값 구하기

$$f(x)+b=\begin{cases} -\sqrt{2}(x^2-2)+b & (x<1) \\ \sqrt{2}(x-2)^2+b & (x\geq 1) \end{cases} \text{에서}$$

$$\{f(x)+b\}'=\begin{cases} -2\sqrt{2}x & (x<1) \\ 2\sqrt{2}(x-2) & (x>1) \end{cases}$$

$$g(x-a)+2=\begin{cases} (x-a+2)^2-2 & (x<a) \\ -(x-a-2)^2+6 & (x\geq a) \end{cases} \text{에서}$$

$$\{g(x-a)+2\}'=\begin{cases} 2(x-a+2) & (x<a) \\ -2(x-a-2) & (x>a) \end{cases}$$

(i) $p=0$ 일 때

① $a\geq 0$ 이면

함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} h(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \{-\sqrt{2}(x^2-2)+b\} = \lim_{x \rightarrow 0-} \{(x-a+2)^2-2\}$$

$$2\sqrt{2}+b=(-a+2)^2-2 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능해야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} h'(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (-2\sqrt{2}x) = \lim_{x \rightarrow 0-} 2(x-a+2)$$

$$0=-2a+4 \quad \therefore a=2$$

이를 ㉢에 대입하면

$$2\sqrt{2}+b=-2 \quad \therefore b=-2-2\sqrt{2}$$

② $a<0$ 이면

함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} h(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \{-\sqrt{2}(x^2-2)+b\} = \lim_{x \rightarrow 0-} \{-(x-a-2)^2+6\}$$

$$2\sqrt{2}+b=-(a+2)^2+6 \quad \dots\dots \text{㉣}$$

함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능해야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} h'(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (-2\sqrt{2}x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \{-2(x-a-2)\}$$

$$0=2a+4 \quad \therefore a=-2$$

이를 ㉣에 대입하면

$$2\sqrt{2}+b=6 \quad \therefore b=6-2\sqrt{2}$$

(ii) $p=2$ 일 때

① $a\geq 2$ 이면

함수 $h(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} h(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \{\sqrt{2}(x-2)^2+b\} = \lim_{x \rightarrow 2-} \{(x-a+2)^2-2\}$$

$$b=(4-a)^2-2 \quad \dots\dots \text{㉤}$$

함수 $h(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능해야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} h'(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} 2\sqrt{2}(x-2) = \lim_{x \rightarrow 2-} 2(x-a+2)$$

$$0=-2a+8 \quad \therefore a=4$$

이를 ㉤에 대입하면

$$b=-2$$

② $a<2$ 이면

함수 $h(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이어야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} h(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \{\sqrt{2}(x-2)^2+b\} = \lim_{x \rightarrow 2-} \{-(x-a-2)^2+6\}$$

$$b=-a^2+6 \quad \dots\dots \text{㉥}$$

함수 $h(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능해야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} h'(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} 2\sqrt{2}(x-2) = \lim_{x \rightarrow 2-} \{-2(x-a-2)\}$$

$$0=2a \quad \therefore a=0$$

이를 ㉥에 대입하면

$$b=6$$

(i), (ii)에서 b 의 최솟값은 $-2-2\sqrt{2}$ 이므로

$$n=-2-2\sqrt{2}$$

3단계 $(m+n)^2$ 의 값 구하기

$$\therefore (m+n)^2=(2-2-2\sqrt{2})^2=8$$

09 답 ②

1단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서도 연

속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} p(x)f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} p(x)f(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} p(x)f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x-1)p(x) = -p(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} p(x)f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \{-xp(x)\} = 0$$

즉, $-p(0)=0$ 이므로

$$p(0)=0$$

2단계 $\angle$ 이 옳은지 확인하기

ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=2$ 에서도 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{p(x)f(x)-p(2)f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(2x-3)p(x)-p(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(2x-3)p(x)-p(x)+p(x)-p(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{2(x-2)p(x)}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{p(x)-p(2)}{x-2}$$

$$= 2p(2)+p'(2)$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{p(x)f(x) - p(2)f(2)}{x-2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-1)p(x) - p(2)}{x-2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-1)p(x) - p(x) + p(x) - p(2)}{x-2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)p(x)}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{p(x) - p(2)}{x-2} \\
&= p(2) + p'(2) \\
&\text{즉, } 2p(2) + p'(2) = p(2) + p'(2) \text{ 이므로} \\
&p(2) = 0
\end{aligned}$$

3단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

$$\text{ㄷ. } \{f(x)\}^2 = \begin{cases} x^2 & (x \leq 0) \\ (x-1)^2 & (0 < x \leq 2) \\ (2x-3)^2 & (x > 2) \end{cases} \text{ 이고, 함수 } p(x)\{f(x)\}^2 \text{ 이 실수}$$

전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0, x=2$ 에서도 미분가능하다.

(i) $x=0$ 일 때,

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{p(x)\{f(x)\}^2 - p(0)\{f(0)\}^2}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-1)^2 p(x)}{x} \\
& \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{p(x)\{f(x)\}^2 - p(0)\{f(0)\}^2}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 p(x)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^-} x p(x) = 0
\end{aligned}$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x-1)^2 p(x)}{x} = 0$ 이어야 하므로 $p(x)$ 는 x^2 을 인수로 가져야 한다.

(ii) $x=2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{p(x)\{f(x)\}^2 - p(2)\{f(2)\}^2}{x-2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x-3)^2 p(x) - p(2)}{x-2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x-3)^2 p(x) - p(x) + p(x) - p(2)}{x-2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\{(2x-3)^2 - 1\}p(x)}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{p(x) - p(2)}{x-2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4(x-1)(x-2)p(x)}{x-2} + p'(2) \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} 4(x-1)p(x) + p'(2) \\
&= 4p(2) + p'(2) \\
& \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{p(x)\{f(x)\}^2 - p(2)\{f(2)\}^2}{x-2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-1)^2 p(x) - p(2)}{x-2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-1)^2 p(x) - p(x) + p(x) - p(2)}{x-2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\{(x-1)^2 - 1\}p(x)}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{p(x) - p(2)}{x-2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x(x-2)p(x)}{x-2} + p'(2) \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^-} x p(x) + p'(2) \\
&= 2p(2) + p'(2) \\
&\text{즉, } 4p(2) + p'(2) = 2p(2) + p'(2) \text{ 이므로} \\
&p(2) = 0
\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $p(x) = x^2(x-2)g(x)$ ($g(x)$ 는 다항식) 꼴이므로 $p(x)$ 는 $x^2(x-2)^2$ 으로 항상 나누어떨어지는 것은 아니다.

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

10 답 ⑤

1단계 a, k, m 에 대한 식 세우기

$f(x) = x^2 - 2x + a$ 이므로

$$\begin{aligned}
g(x) &= \begin{cases} -f(-x) & (x < -k) \\ mx & (-k \leq x < k) \\ f(x) & (x \geq k) \end{cases} \\
&= \begin{cases} -(x^2 + 2x + a) & (x < -k) \\ mx & (-k \leq x < k) \\ x^2 - 2x + a & (x \geq k) \end{cases} \\
\therefore g'(x) &= \begin{cases} -2x - 2 & (x < -k) \\ m & (-k < x < k) \\ 2x - 2 & (x > k) \end{cases}
\end{aligned}$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=k$ 에서도 미분가능하고 연속이다.

$x=k$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow k^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} g(x)$ 에서

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow k^+} (x^2 - 2x + a) = \lim_{x \rightarrow k^-} mx \\
&\therefore k^2 - 2k + a = mk \quad \cdots \cdots \textcircled{1}
\end{aligned}$$

$x=k$ 에서 미분가능하면 $\lim_{x \rightarrow k^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} g'(x)$ 에서

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow k^+} (2x - 2) = \lim_{x \rightarrow k^-} m \\
&\therefore 2k - 2 = m \quad \cdots \cdots \textcircled{2}
\end{aligned}$$

이를 ①에 대입하면

$$k^2 - 2k + a = (2k - 2)k$$

$$k^2 - 2k + a = 2k^2 - 2k$$

$$\therefore a = k^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

2단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. $a=1$ 을 ③에 대입하면

$$k^2 = 1 \quad \therefore k = 1 \quad (\because k > 0)$$

이를 ②에 대입하면

$$m = 2 \times 1 - 2 = 0$$

$$\therefore k + m = 1 + 0 = 1$$

3단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. (i) $0 < a < 1$ 일 때,

③에서 $0 < k^2 < 1$ 이고 $k > 0$ 이므로

$$0 < k < 1$$

$$\text{이때 } g(-1) = -(1 - 2 + a) = -(a - 1),$$

$$g(1) = 1 - 2 + a = a - 1 \text{ 이므로}$$

$$g(-1)g(1) = -(a - 1)^2 < 0$$

(ii) $a > 1$ 일 때,

③에서 $k^2 > 1$ 이고 $k > 0$ 이므로 $k > 1$

②에서 $2k - 2 = m$ 이고 $2k - 2 > 0$ 이므로

$$m > 0$$

$$\text{이때 } g(-1) = -m, \quad g(1) = m \text{ 이므로}$$

$$g(-1)g(1) = -m^2 < 0$$

(i), (ii)에서 $a \neq 1$ 이면 $g(-1)g(1) < 0$

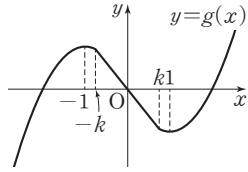
4단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. (i) $0 < a < 1$ 일 때,

㉠, ㉡에서

$$0 < k < 1, -2 < m < 0$$

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



이때 $\frac{g(k)}{k}$ 는 두 점 $(0, 0), (k, g(k))$ 를 지나는 직선의 기울기와 같으므로

$$\frac{g(k)}{k} = m$$

또 $g(1) = 1 - 2 + a = a - 1$ 이므로 $\frac{g(k)}{k} = g(1)$ 이라고 가정하면 $m = a - 1$

㉠, ㉡을 대입하면

$$2k - 2 = k^2 - 1$$

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$(k-1)^2 = 0$$

$$\therefore k = 1$$

이는 $0 < k < 1$ 을 만족시키지 않는다.

$$\therefore \frac{g(k)}{k} \neq g(1)$$

이때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 세 점에서 만난다.

(ii) $a = 1$ 일 때,

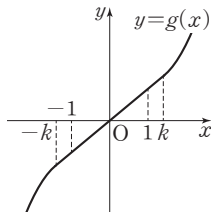
㉡에서 $k = 1$

이때 $\frac{g(k)}{k} = g(1)$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a > 1$ 일 때,

㉠, ㉡에서 $k > 1, m > 0$

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



이때 $\frac{g(k)}{k}$ 는 두 점 $(0, 0), (k, g(k))$ 를 지나는 직선의 기울기와 같으므로

$$\frac{g(k)}{k} = m$$

이때 $g(1) = m$ 이므로

$$\frac{g(k)}{k} = g(1)$$

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 세 점에서 만난다.

5단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

04 도함수의 활용(1)

step 1 핵심 문제

| 54~55쪽

01 ④	02 ③	03 48	04 -9	05 ⑤	06 -1
07 ①	08 13	09 ②	10 $\frac{1}{2}$	11 ①	

01 답 ④

점 $(3, 1)$ 은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(3) = 1$$

또 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(3)$ 이므로

$$f'(3) = 2$$

$g(x) = (x^2 - 2x + 1)f(x)$ 라 하면

$$g(3) = 4f(3) = 4 \times 1 = 4$$

이때 $g'(x) = (2x - 2)f(x) + (x^2 - 2x + 1)f'(x)$ 이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(3, 4)$ 에서의 접선의 기울기는

$$g'(3) = 4f(3) + 4f'(3)$$

$$= 4 \times 1 + 4 \times 2 = 12$$

즉, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(3, 4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 4 = 12(x - 3) \quad \therefore y = 12x - 32$$

이 접선이 점 $(k, 16)$ 을 지나므로

$$16 = 12k - 32 \quad \therefore k = 4$$

02 답 ③

$f(x) = x(x-3)^2$ 이라 하면

$$f'(x) = (x-3)^2 + x \times 2(x-3)$$

$$= 3x^2 - 12x + 9$$

$$= 3(x-2)^2 - 3$$

즉, 접선의 기울기는 $x=2$ 일 때 최솟값이 -3 이고, 그때의 접점의 좌표는 $(2, 2)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 2 = -3(x - 2), 3x + y - 8 = 0$$

$$\therefore \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y - 2 = 0$$

따라서 $a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{4}$ 이므로

$$a - b = \frac{1}{2}$$

03 답 48

$f(x) = x^3 - ax$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - a$$

접점의 좌표를 $(t, t^3 - at)$ 라 하면 접선의 기울기는 $f'(t) = 3t^2 - a$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (t^3 - at) = (3t^2 - a)(x - t)$$

$$\therefore y = (3t^2 - a)x - 2t^3$$

이 직선이 점 $(0, 16)$ 을 지나므로

$$16 = -2t^3, t^3 = -8 \quad \therefore t = -2 (\because t \text{는 실수})$$

이때 접선의 기울기가 8이므로 $f'(-2) = 8$ 에서

$$12 - a = 8 \quad \therefore a = 4$$

따라서 $f(x) = x^3 - 4x$ 이므로

$$f(a) = f(4) = 64 - 16 = 48$$

04 답 -9

$f(x) = -x^3 - 2x^2 + 3$, $g(x) = 2x^2 + 4x + 3$ 이라 하면

$$f'(x) = -3x^2 - 4x, g'(x) = 4x + 4$$

두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하자.

$x=t$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t) = g(t)$ 에서

$$-t^3 - 2t^2 + 3 = 2t^2 + 4t + 3$$

$$t^3 + 4t^2 + 4t = 0, t(t+2)^2 = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x=t$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로 $f'(t) = g'(t)$ 에서

$$-3t^2 - 4t = 4t + 4$$

$$3t^2 + 8t + 4 = 0, (t+2)(3t+2) = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = -\frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $t = -2$

즉, 접점의 좌표는 $(-2, 3)$ 이고 접선의 기울기는 -4 이므로 접선의 방정식은

$$y - 3 = -4(x + 2) \quad \therefore y = -4x - 5$$

따라서 $a = -4$, $b = -5$ 이므로

$$a + b = -9$$

05 답 ⑤

$f(x) = x^2$ 에서

$$f'(x) = 2x$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $P(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 2$ 이므로 접선 l 의 방정식은

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \therefore y = 2x - 1$$

점 Q 의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 Q 는 접선 l 위의 점이므로

$$b = 2a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$g(x) = -(x-3)^2 + k$ 에서

$$g'(x) = -2(x-3)$$

곡선 $y = g(x)$ 위의 점 Q 에서의 접선의 기울기는 2이므로 $g'(a) = 2$ 에서

$$-2(a-3) = 2$$

$$-2a = -4 \quad \therefore a = 2$$

이를 ①에 대입하면

$$b = 4 - 1 = 3$$

$$\therefore Q(2, 3)$$

점 Q 는 곡선 $y = g(x)$ 위의 점이므로 $g(2) = 3$ 에서

$$-1 + k = 3 \quad \therefore k = 4$$

$$\therefore g(x) = -(x-3)^2 + 4$$

곡선 $y = g(x)$ 와 x 축이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$-(x-3)^2 + 4 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0, (x-1)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 5$$

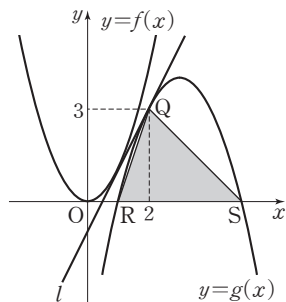
즉, 두 점 R, S 의 좌표는 $(1, 0)$,

$(5, 0)$ 이므로

$$RS = 4$$

따라서 삼각형 QRS 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$



06 답 -1

함수 $f(x) = x^3 - ax + 2$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하다. 이때 $f(-1) = f(2)$ 이면

$$a + 1 = 10 - 2a$$

$$3a = 9$$

$$\therefore a = 3$$

즉, 함수 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ 에서 물의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \text{ 이므로 } f'(c) = 0 \text{ 에서}$$

$$3c^2 - 3 = 0$$

$$c^2 = 1$$

$$\therefore c = 1 \quad (\because -1 < c < 2)$$

또 평균값 정리를 만족시키는 상수가 2이므로 $\frac{f(4) - f(b)}{4 - b} = f'(2)$ 에서

$$\frac{54 - (b^3 - 3b + 2)}{4 - b} = 9$$

$$b^3 - 12b - 16 = 0$$

$$(b + 2)^2(b - 4) = 0$$

$$\therefore b = -2 \quad (\because b < 4)$$

$$\therefore b + c = -2 + 1 = -1$$

07 답 ①

$$y = \{f(x)\}^2 \text{ 에서}$$

$$y' = 2f(x)f'(x)$$

ㄱ. 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 $f(x) \leq 0$, $f'(x) \geq 0$ 이므로

$$2f(x)f'(x) \leq 0$$

따라서 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 감소한다.

ㄴ. 닫힌구간 $[3, 4]$ 에서 $f(x) \geq 0$, $f'(x) \leq 0$ 이므로

$$2f(x)f'(x) \leq 0$$

따라서 닫힌구간 $[3, 4]$ 에서 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 감소한다.

ㄷ. 닫힌구간 $[4, 5]$ 에서 $f(x) \leq 0$, $f'(x) \leq 0$ 이므로

$$2f(x)f'(x) \geq 0$$

따라서 닫힌구간 $[4, 5]$ 에서 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 증가한다.

ㄹ. 닫힌구간 $[6, 7]$ 에서 $f(x) \geq 0$, $f'(x) > 0$ 이므로

$$2f(x)f'(x) \geq 0$$

따라서 닫힌구간 $[6, 7]$ 에서 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 증가한다.

따라서 보기에서 함수 $\{f(x)\}^2$ 이 감소하는 구간이 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

08 답 13

함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 역함수가 존재하려면 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + (2a+1)x + 1 \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + 2a + 1$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.배점 30%

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 6(2a+1) \leq 0$$

$$a^2 - 12a - 6 \leq 0$$

$$\therefore 6 - \sqrt{42} \leq a \leq 6 + \sqrt{42} \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, ..., 12의 13개이다.배점 30%

09 답 ②

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3(a^2 - 1)x \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3(a^2 - 1)$$

$$= 3\{x^2 - 2ax + (a-1)(a+1)\}$$

$$= 3\{x - (a-1)\}\{x - (a+1)\}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = a-1 \text{ 또는 } x = a+1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$a-1$	...	$a+1$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	극대	\	극소	/

함수 $f(x)$ 는 $x = a-1$ 에서 극대이고 극댓값이 4이므로 $f(a-1) = 4$ 에서

$$(a-1)^3 - 3a(a-1)^2 + 3(a^2-1)(a-1) = 4$$

$$a^3 - 3a - 2 = 0$$

$$(a+1)^2(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

(i) $a = -1$ 일 때,

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

$$\text{이때 } f(-2) = -8 + 12 = 4 > 0 \text{이므로 조건을 만족시킨다.}$$

(ii) $a = 2$ 일 때,

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$\text{이때 } f(-2) = -8 - 24 - 18 = -50 < 0 \text{이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

(i), (ii)에서 $f(x) = x^3 + 3x^2$ 이므로

$$f(-1) = -1 + 3 = 2$$

10 답 $\frac{1}{2}$

(가)에서 함수 $f(x)$ 는 $-1 < x < 1$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 $-1 < x < 1$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + ax \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a$$

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3a > 0$$

$$a(a-3) > 0 \quad \therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f'(-1) > 0 \text{이어야 하므로}$$

$$3 - a > 0 \quad \therefore a < 3 \quad \dots\dots ㉡$$

$$f'(1) > 0 \text{이어야 하므로}$$

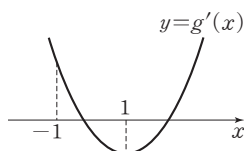
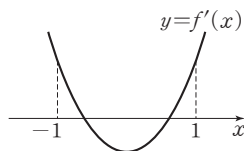
$$3 + 3a > 0 \quad \therefore a > -1 \quad \dots\dots ㉢$$

함수 $y = f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = -\frac{a}{3}$ 이므로

$$-1 < -\frac{a}{3} < 1 \quad \therefore -3 < a < 3 \quad \dots\dots ㉣$$

$$\textcircled{1} \sim \textcircled{4} \text{에서 } a \text{의 값의 범위는 } -1 < a < 0 \quad \dots\dots ㉤$$

(나)에서 함수 $g(x)$ 는 $-1 < x < 1$ 에서 극댓값을 갖고, $x > 1$ 에서 극솟값을 가지므로 이차방정식 $g'(x) = 0$ 이 $-1 < x < 1$ 에서 한 실근을 갖고, $x > 1$ 에서 다른 한 실근을 가져야 한다.



$$g(x) = x^3 + 2ax^2 - 4a^2x \text{에서}$$

$$g'(x) = 3x^2 + 4ax - 4a^2$$

$$g'(-1) > 0 \text{이어야 하므로}$$

$$3 - 4a - 4a^2 > 0, 4a^2 + 4a - 3 < 0$$

$$(2a+3)(2a-1) < 0 \quad \therefore -\frac{3}{2} < a < \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉥$$

$$g'(1) < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$3 + 4a - 4a^2 < 0, 4a^2 - 4a - 3 > 0$$

$$(2a+1)(2a-3) > 0 \quad \therefore a < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } a > \frac{3}{2} \quad \dots\dots ㉦$$

$$\textcircled{㉥}, \textcircled{㉦} \text{에서 } a \text{의 값의 범위는 } -\frac{3}{2} < a < -\frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉧$$

$$\textcircled{㉧}, \textcircled{㉨} \text{에서 } a \text{의 값의 범위는 } -1 < a < -\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$a = -1, \beta = -\frac{1}{2} \quad \therefore a\beta = \frac{1}{2}$$

11 답 ①

함수 $y = f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 $-1, 1, 3, 5$ 이므로 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...	3	...	5	...
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	/	극대	\		\	극소	/	극대	\

ㄱ. 함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖는 x 의 값은 $-1, 5$ 이므로 그 합은 $-1 + 5 = 4$

ㄴ. 함수 $y = -f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

이때 함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 극솟값을 가지므로 함수 $-f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 극댓값을 갖는다.

따라서 함수 $-f(x)$ 의 극댓값은 1개이다.

ㄷ. 함수 $y = f(x-2)$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 극솟값을 가지므로 함수 $f(x-2)$ 는 $x = 5$ 에서 극솟값을 갖는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

step 2 고난도 문제

| 56~60쪽

01 ⑤	02 15	03 ②	04 5	05 29	06 ①
07 79	08 ㄱ, ㄴ	09 ③	10 8	11 6	
12 20	13 107	14 ④	15 ①	16 ⑤	17 32
18 6	19 24	20 ③	21 ②	22 10	23 6
24 40	25 ①	26 ③			

01 답 ⑤

점 $(0, 0)$ 은 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로 $f(0) = 0$

점 $(1, 2)$ 는 곡선 $y = xf(x)$ 위의 점이므로 $f(1) = 2$

접선의 기울기는 두 점 $(0, 0)$, $(1, 2)$ 를 지나는 직선의 기울기와 같으므로

$$\frac{2-0}{1-0}=2$$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 2이므로

$$f'(0)=2$$

$\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$ 이고, 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 2이므로

$$f(1)+f'(1)=2$$

$$2+f'(1)=2 \quad \therefore f'(1)=0$$

삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(0)=0$ 이므로

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx \quad (a, b, c \text{는 상수}, a \neq 0) \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$f(1)=2 \text{에서 } a+b+c=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(0)=2 \text{에서 } c=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$f'(1)=0 \text{에서 } 3a+2b+c=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①을 ②, ③에 각각 대입하면

$$a+b+2=2, \quad 3a+2b+2=0$$

$$\therefore a+b=0, \quad 3a+2b=-2$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2, b=2$

따라서 $f'(x)=-6x^2+4x+2$ 이므로

$$f'(2)=-24+8+2=-14$$

02 답 15

$$f(x)=x^3-3x^2-5x+6 \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2-6x-5$$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2-5t+6) 이라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2-6t-5$$

이때 직선 l 의 기울기를 m 이라 하면

$$3t^2-6t-5=m \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 l 을 제외한 곡선 $y=f(x)$ 의 접선 중 기울기가 m 인 직선이 존재하지 않으려면 이차방정식 ①이 중근을 가져야 한다.

이차방정식 $3t^2-6t-5-m=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=9-3(-5-m)=0$$

$$24+3m=0 \quad \therefore m=-8$$

이를 ①에 대입하면

$$3t^2-6t-5=-8$$

$$3t^2-6t+3=0, \quad (t-1)^2=0 \quad \therefore t=1$$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 l 의 접점의 좌표는 $(1, -1)$ 이므로 직선 l 의 방정식은

$$y+1=-8(x-1) \quad \therefore y=-8x+7$$

따라서 직선 l 의 x 절편은 $\frac{7}{8}$ 이므로

$$p=8, q=7 \quad \therefore p+q=15$$

03 답 ②

$$f(x)=ax^3-ax \text{에서}$$

$$f'(x)=3ax^2-a$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(-1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)$ 이므로

$$f'(-1)=2a$$

즉, 점 P 에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는

$$-\frac{1}{f'(-1)}=-\frac{1}{2a}$$

기울기가 $-\frac{1}{2a}$ 이고 점 P 를 지나는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2a}(x+1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선과 곡선 $y=ax^3-ax$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$ax^3-ax=-\frac{1}{2a}(x+1)$$

$$ax^3-\left(a-\frac{1}{2a}\right)x+\frac{1}{2a}=0$$

$$(x+1)\left(ax^2-ax+\frac{1}{2a}\right)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } ax^2-ax+\frac{1}{2a}=0$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 ①이 점 P 가 아닌 점에서 만나려면 이차방

정식 $ax^2-ax+\frac{1}{2a}=0$ 이 $x \neq -1$ 인 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $ax^2-ax+\frac{1}{2a}=0$ 에 $x=-1$ 을 대입하면

$$2a+\frac{1}{2a}=0 \rightarrow a>0 \text{이므로 } 2a+\frac{1}{2a}>0 \text{이다.}$$

이 등식은 성립하지 않으므로 $x=-1$ 은 이차방정식 $ax^2-ax+\frac{1}{2a}=0$ 의 근이 아니다.

이때 이차방정식 $ax^2-ax+\frac{1}{2a}=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=a^2-4a \times \frac{1}{2a} \geq 0$$

$$a^2-2 \geq 0$$

$$\therefore a \geq \sqrt{2} \quad (\because a>0)$$

따라서 양수 a 의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

개념 NOTE

두 직선 $y=mx+n, y=m'x+n'$ 이 서로 수직이면 $mm'=-1$ 이다.

04 답 5

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-x$

가 두 점에서 접하려면 그림과 같이

$-1 < x < 1$ 에서 한 점에서 접하고,

$1 < x < 2$ 에서 한 점에서 접해야 한다.

$$g(x)=ax(x+1)(x-1) \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

이라 하면

$$g'(x)=a(x+1)(x-1)+ax(x-1)+ax(x+1)$$

$$=a(3x^2-1) \quad (-1 < x < 1)$$

$$h(x)=bx(x-1)(x-2) \quad (1 < x \leq 2) \text{라 하면}$$

$$h'(x)=b(x-1)(x-2)+bx(x-2)+bx(x-1)$$

$$=b(3x^2-6x+2) \quad (1 < x < 2)$$

(i) $-1 < x < 1$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-x$ 가 접할 때,

접점의 좌표를 $(a, aa(a+1)(a-1)) \quad (-1 < a < 1)$ 이라 하면 접선

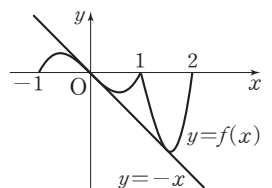
의 기울기는 $g'(a)=a(3a^2-1)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-aa(a+1)(a-1)=a(3a^2-1)(x-a)$$

$$\therefore y=a(3a^2-1)x-2aa^3$$

이는 직선 $y=-x$ 와 같으므로

$$a(3a^2-1)=-1, \quad -2aa^3=0$$



$-2aa^3=0$ 에서 a 는 양수이므로

$$a^3=0 \quad \therefore a=0$$

이를 $a(3a^2-1)=-1$ 에 대입하면

$$-a=-1 \quad \therefore a=1$$

(ii) $1 < x < 2$ 에서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-x$ 가 접할 때,

접점의 좌표를 $(\beta, b\beta(\beta-1)(\beta-2))$ ($1 < \beta < 2$)라 하면 접선의

기울기는 $h'(\beta)=b(3\beta^2-6\beta+2)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-b\beta(\beta-1)(\beta-2)=b(3\beta^2-6\beta+2)(x-\beta)$$

$$\therefore y=b(3\beta^2-6\beta+2)x-b(2\beta^3-3\beta^2)$$

이는 직선 $y=-x$ 와 같으므로

$$b(3\beta^2-6\beta+2)=-1, \quad -b(2\beta^3-3\beta^2)=0$$

$$-b(2\beta^3-3\beta^2)=0 \text{에서 } b \text{는 양수이므로}$$

$$2\beta^3-3\beta^2=0, \quad 2\beta^2\left(\beta-\frac{3}{2}\right)=0$$

$$\therefore \beta=\frac{3}{2} \quad (\because 1 < \beta < 2)$$

이를 $b(3\beta^2-6\beta+2)=-1$ 에 대입하면

$$-\frac{b}{4}=-1 \quad \therefore b=4$$

(i), (ii)에서 $a=1, b=4$ 이므로

$$a+b=5$$

05 답 29

$f(x)=x^3-3x, g(x)=x^3-3x+a$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-3, g'(x)=3x^2-3$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x_1, x_1^3-3x_1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(x_1)=3x_1^2-3 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(x_1^3-3x_1)=(3x_1^2-3)(x-x_1)$$

$$\therefore y=(3x_1^2-3)x-2x_1^3 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

또 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(x_2, x_2^3-3x_2+a)$ 에서의 접선의 기울기는

$$g'(x_2)=3x_2^2-3 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(x_2^3-3x_2+a)=(3x_2^2-3)(x-x_2)$$

$$\therefore y=(3x_2^2-3)x-2x_2^3+a \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

이때 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 이 서로 같은 직선이므로

$$3x_1^2-3=3x_2^2-3 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$-2x_1^3=-2x_2^3+a \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$$\textcircled{C} \text{에서 } x_1^2-x_2^2=0$$

$$(x_1+x_2)(x_1-x_2)=0$$

그런데 $|x_2-x_1|=3$ 이므로 $x_1 \neq x_2$

$$\therefore x_1=-x_2$$

이를 $\textcircled{D}$ 에 대입하면

$$2x_2^3=-2x_2^3+a$$

$$\therefore a=4x_2^3 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

또 $|x_2-x_1|=3$ 에서

$$|2x_2|=3 \quad \therefore x_2=-\frac{3}{2} \text{ 또는 } x_2=\frac{3}{2}$$

이를 $\textcircled{E}$ 에 대입하면

$$x_2=-\frac{3}{2} \text{ 일 때 } a=-\frac{27}{2}, \quad x_2=\frac{3}{2} \text{ 일 때 } a=\frac{27}{2}$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a=\frac{27}{2}$

따라서 $p=2, q=27$ 이므로

$$p+q=29$$

06 답 ①

$f(x)=x^4-2x^2+2$ 라 하면

$$f'(x)=4x^3-4x$$

점점의 좌표를 (t, t^4-2t^2+2) 라 하면 점선의 기울기는 $f'(t)=4t^3-4t$

이므로 점선의 방정식은

$$y-(t^4-2t^2+2)=(4t^3-4t)(x-t)$$

$$\therefore y=(4t^3-4t)x-3t^4+2t^2+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(a, 1)$ 을 지나므로

$$1=(4t^3-4t)a-3t^4+2t^2+2$$

$$3t^4-4at^3-2t^2+4at-1=0$$

$$(t+1)(t-1)(3t^2-4at+1)=0$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=1 \text{ 또는 } 3t^2-4at+1=0$$

이때 $t=-1, t=1$ 을 각각 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $y=1$

즉, 직선 $y=1$ 은 곡선 $y=x^4-2x^2+2$ 에 접하는 직선 중 하나이므로 점

$(a, 1)$ 에서 곡선 $y=x^4-2x^2+2$ 에 그은 점선이 두 개 존재하려면 이차

방정식 $3t^2-4at+1=0$ 이 $t \neq -1, t \neq 1$ 인 중근을 갖거나 $t=-1$ 또는

$t=1$ 을 한 근으로 갖고 $t \neq -1, t \neq 1$ 인 한 근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $3t^2-4at+1=0$ 이 $t \neq -1, t \neq 1$ 인 중근을 가질 때,

이차방정식 $3t^2-4at+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4a^2-3=0, \quad a^2=\frac{3}{4}$$

$$\therefore a=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } a=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

① $a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 을 이차방정식 $3t^2-4at+1=0$ 에 대입하면

$$3t^2+2\sqrt{3}t+1=0$$

$$(\sqrt{3}t+1)^2=0 \quad \therefore t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

이는 $t \neq -1, t \neq 1$ 이라는 조건을 만족시킨다.

② $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 을 이차방정식 $3t^2-4at+1=0$ 에 대입하면

$$3t^2-2\sqrt{3}t+1=0$$

$$(\sqrt{3}t-1)^2=0 \quad \therefore t=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

이는 $t \neq -1, t \neq 1$ 이라는 조건을 만족시킨다.

(ii) 이차방정식 $3t^2-4at+1=0$ 이 $t=-1$ 또는 $t=1$ 을 한 근으로 갖고

$t \neq -1, t \neq 1$ 인 한 근을 가질 때,

① $t=-1$ 을 이차방정식 $3t^2-4at+1=0$ 에 대입하면

$$4+4a=0 \quad \therefore a=-1$$

이를 $3t^2-4at+1=0$ 에 대입하면

$$3t^2+4t+1=0, \quad (t+1)(3t+1)=0$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=-\frac{1}{3}$$

이는 조건을 만족시킨다.

② $t=1$ 을 이차방정식 $3t^2-4at+1=0$ 에 대입하면

$$4-4a=0 \quad \therefore a=1$$

이를 $3t^2-4at+1=0$ 에 대입하면

$$3t^2-4t+1=0, \quad (3t-1)(t-1)=0$$

$$\therefore t=\frac{1}{3} \text{ 또는 } t=1$$

이는 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 a 의 값은 $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1$ 이므로 그 곱은

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-1) \times 1 = \frac{3}{4}$$

07 답 79

(가)에서 삼차식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지와 x^2-3x+2 로 나누었을 때의 나머지가 서로 같으므로 나머지를 $k(k$ 는 상수)라 하면 $f(x)-k$ 는 $x+1$ 과 x^2-3x+2 로 나누어떨어진다.

$f(x)$ 의 최고차항의 계수를 $a(a \neq 0)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x)-k &= a(x+1)(x^2-3x+2) \\ &= a(x+1)(x-1)(x-2) \\ &= a(x^2-1)(x-2) \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = a(x^2-1)(x-2) + k \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

이때 (나)에서 점 $(1, f(1))$ 은 직선 $y = -4x+1$ 위의 점이므로

$$f(1) = -4+1 = -3$$

$$f(1) = -3 \text{에서 } k = -3 \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$

또 $f'(x) = a \times 2x(x-2) + a(x^2-1) = a(3x^2-4x-1)$ 이고 (나)에서

$$f'(1) = -4 \text{이므로}$$

$$-2a = -4 \quad \therefore a = 2 \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$

즉, $f(x) = 2(x^2-1)(x-2) - 3$, $f'(x) = 2(3x^2-4x-1)$ 이므로

$$f(2) = -3, f'(2) = 2(12-8-1) = 6$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, -3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y+3=6(x-2) \quad \therefore y=6x-15 \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

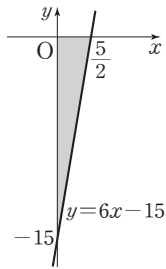
즉, 직선 $y=6x-15$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인

부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 15 = \frac{75}{4} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

따라서 $p=4$, $q=75$ 이므로

$$p+q=79 \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$



개념 NOTE

다항식 A 를 다항식 $B(B \neq 0)$ 로 나누었을 때의 몫을 Q , 나머지를 R 라 하면

$$A = BQ + R \quad (\text{단, } R \text{는 상수 또는 } (R \text{의 차수}) < (B \text{의 차수}))$$

08 답 ㄱ, ㄴ

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 \text{이라 하면 } f'(x) = x^2$$

점점 P의 좌표를 $(t, \frac{1}{3}t^3)$ 이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t) = t^2$ 이므로

접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{3}t^3 = t^2(x-t) \quad \therefore y = t^2x - \frac{2}{3}t^3 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

직선 ㉠이 점 $A(0, a)$ 를 지나므로

$$a = -\frac{2}{3}t^3 \quad \therefore A(0, -\frac{2}{3}t^3)$$

이때 $a > 0$ 이므로 $t < 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 ㉠이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{3}x^3 = t^2x - \frac{2}{3}t^3, x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0$$

$$(x+2t)(x-t)^2 = 0 \quad \therefore x = -2t \text{ 또는 } x = t$$

그런데 점 P의 x 좌표가 t 이므로 $Q(-2t, -\frac{8}{3}t^3)$

직선 ㉠이 x 축과 만나는 점 B의 x 좌표를 구하면

$$t^2x - \frac{2}{3}t^3 = 0 \quad \therefore x = \frac{2}{3}t \quad (\because t \neq 0)$$

$$\therefore B(\frac{2}{3}t, 0)$$

$$\neg. \overline{AP} = \sqrt{t^2 + (t^3)^2} = \sqrt{t^2(1+t^4)}$$

$$= |t|\sqrt{1+t^4}$$

$$\overline{AQ} = \sqrt{(2t)^2 + (2t^3)^2} = \sqrt{4t^2(1+t^4)}$$

$$= 2|t|\sqrt{1+t^4}$$

$$\therefore \overline{AP} : \overline{AQ} = 1 : 2$$

$$\neg. a = -\frac{2}{3}t^3 \text{이므로 } -\frac{2}{3}t^3 = \frac{16}{3}$$

$$t^3 = -8 \quad \therefore t = -2 \quad (\because t \text{는 실수})$$

따라서 $B(-\frac{4}{3}, 0)$, $P(-2, -\frac{8}{3})$ 이므로

$$\overline{PB} = \sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (\frac{8}{3})^2} = \frac{2\sqrt{17}}{3}$$

ㄷ. 삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{9}{8}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times (-\frac{2}{3}t) \times (-\frac{2}{3}t^3) = \frac{9}{8}$$

$$\frac{2}{9}t^4 = \frac{9}{8}, t^4 = \frac{81}{16}$$

$$\therefore t = -\frac{3}{2} \quad (\because \text{㉢})$$

$$\therefore A(0, \frac{9}{4}), B(-1, 0), P(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{8}), Q(3, 9)$$

삼각형 OBP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{9}{8} = \frac{9}{16}$$

삼각형 OAQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{9}{4} \times 3 = \frac{27}{8}$$

따라서 삼각형 OBP의 넓이는 삼각형 OAQ의 넓이의 $\frac{1}{6}$ 배이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

09 답 ㉢

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 2kx$$

두 접선 l, m 의 기울기가 $3k^2$ 이므로 $x^2 - 2kx = 3k^2$ 에서

$$x^2 - 2kx - 3k^2 = 0$$

$$(x+k)(x-3k) = 0$$

$$\therefore x = -k \text{ 또는 } x = 3k$$

이때 $A(-k, 1 - \frac{4}{3}k^3)$, $B(3k, 1)$ 이라 하자.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선 l 의 방정식은

$$y - (1 - \frac{4}{3}k^3) = 3k^2(x+k)$$

$$\therefore y = 3k^2x + \frac{5}{3}k^3 + 1$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선 m 의 방정식은

$$y - 1 = 3k^2(x-3k)$$

$$\therefore y = 3k^2x - 9k^3 + 1$$

곡선 $y=f(x)$ 에 접하고 x 축에 평행한 접선의 기울기는 0이므로

$$x^2 - 2kx = 0 \text{에서}$$

$$x(x-2k) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2k$$

$$f(0) = 1, f(2k) = 1 - \frac{4}{3}k^3 \text{이므로 } x \text{축에 평행한 두 접선의 방정식은}$$

$$y = 1, y = 1 - \frac{4}{3}k^3$$

점 A의 y 좌표가 $1 - \frac{4}{3}k^3$ 이므로 점 A는

직선 l 과 직선 $y = 1 - \frac{4}{3}k^3$ 이 만나는 점

이고, 점 B의 y 좌표가 1이므로 점 B는
직선 m 과 직선 $y = 1$ 이 만나는 점이다.

이때 직선 l 과 직선 $y = 1$ 이 만나는 점을

C, 직선 m 과 직선 $y = 1 - \frac{4}{3}k^3$ 이 만나는 점을 D라 하면 사각형

ADBC는 평행사변형이다.

점 D의 x 좌표를 구하면

$$3k^2x - 9k^3 + 1 = 1 - \frac{4}{3}k^3, \quad 3k^2x = \frac{23}{3}k^3 \quad \therefore x = \frac{23}{9}k$$

$$\therefore D\left(\frac{23}{9}k, 1 - \frac{4}{3}k^3\right)$$

$$\therefore \overline{AD} = \frac{23}{9}k - (-k) = \frac{32}{9}k$$

두 직선 $y = 1 - \frac{4}{3}k^3$, $y = 1$ 사이의 거리는

$$1 - \left(1 - \frac{4}{3}k^3\right) = \frac{4}{3}k^3$$

이때 평행사변형 ADBC의 넓이가 24이므로

$$\frac{32}{9}k \times \frac{4}{3}k^3 = 24, \quad k^4 = \frac{81}{16}$$

$$\therefore k = \frac{3}{2} \quad (\because k > 0)$$

10 답 8

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$ 인 c 가 열린구간 (x_1, x_2) 에 적어도 하나 존재한다.

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 4 \text{에서}$$

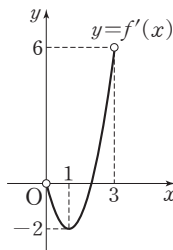
$$f'(x) = 2x^2 - 4x = 2(x-1)^2 - 2 \text{이므로}$$

$$f'(c) = 2(c-1)^2 - 2$$

이때 $0 \leq x_1 < c < x_2 \leq 3$ 에서 $0 < c < 3$ 이므로

$$-2 \leq f'(c) < 6$$

따라서 $A = \{a \mid -2 \leq a < 6\}$ 이므로 집합 A의 원소 중 정수인 것은 $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 의 8개이다.



11 답 6

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 (4)에서 $-1 < c < 3$ 인 c 에 대하여 $|f'(c)| \leq 4$ 이므로 평균값 정리에 의하여

$$\left| \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} \right| \leq 4, \quad \left| \frac{3 - f(-1)}{4} \right| \leq 4 \quad (\because (7))$$

$$-4 \leq \frac{3 - f(-1)}{4} \leq 4, \quad -19 \leq -f(-1) \leq 13$$

$$\therefore -13 \leq f(-1) \leq 19$$

따라서 $f(-1)$ 의 최댓값은 19, 최솟값은 -13 이므로 구하는 합은 $19 + (-13) = 6$

12 답 20

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[x-2, x+2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(x-2, x+2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x+2) - f(x-2)}{(x+2) - (x-2)} = f'(c) \text{인 } c \text{가 열린구간 } (x-2, x+2) \text{에 적어도}$$

하나 존재한다.

이때 $x-2 < c < x+2$ 에서 $x \rightarrow \infty$ 이면 $c \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x+2) - f(x-2)\} &= 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+2) - f(x-2)}{(x+2) - (x-2)} \\ &= 4 \lim_{c \rightarrow \infty} f'(c) \\ &= 4 \times 3 \quad (\because \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 3) \\ &= 12 \end{aligned}$$

또 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-x-2, -x+2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-x-2, -x+2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(-x+2) - f(-x-2)}{(-x+2) - (-x-2)} = f'(d) \text{인 } d \text{가 열린구간 } (-x-2, -x+2)$$

에 적어도 하나 존재한다.

이때 $-x-2 < d < -x+2$ 에서 $x \rightarrow \infty$ 이면 $d \rightarrow -\infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(-x+2) - f(-x-2)\} &= 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(-x+2) - f(-x-2)}{(-x+2) - (-x-2)} \\ &= 4 \lim_{d \rightarrow -\infty} f'(d) \\ &= 4 \times 2 \quad (\because \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 2) \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(-x+2) + f(x+2) - f(-x-2) - f(x-2)\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x+2) - f(x-2)\} + \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(-x+2) - f(-x-2)\}$$

$$= 12 + 8 = 20$$

13 답 107

$f(x) = (x-2)(x-5)$ 에서

$$f'(x) = (x-5) + (x-2) = 2x-7 \quad \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$f'(1) = -5 \text{이므로}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = -5 \text{를 만족시키는 두 점}$$

$P(a, f(a)), Q(b, f(b))$ 가 존재하려면 그림과 같이 $a < 1$ 이어야 한다.

그런데 $1 < a < b$ 이므로 두 점 P, Q는 존재하지 않는다.

$$\therefore g(1) = -1 \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$f'(n) = 2n-7 \text{에서}$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 2n-7 \text{을 만족시키는 두}$$

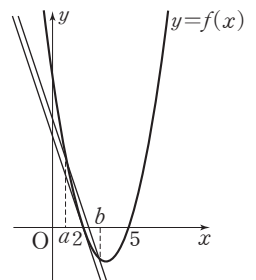
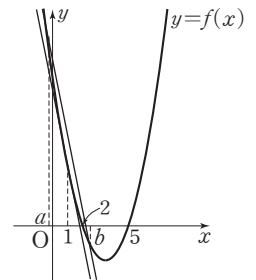
점 $P(a, f(a)), Q(b, f(b))$ 가 그림과 같이 항상 존재한다.

$$\therefore g(n) = a + b \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{이때 } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 2n-7 \text{에서}$$

$$\frac{(b-2)(b-5) - (a-2)(a-5)}{b - a} = 2n-7$$

$$\frac{(b^2 - 7b + 10) - (a^2 - 7a + 10)}{b - a} = 2n-7$$



$$\frac{(b^2-a^2)-7(b-a)}{b-a}=2n-7$$

$$\frac{(b-a)(b+a-7)}{b-a}=2n-7$$

$$b+a-7=2n-7 \quad \therefore a+b=2n$$

㉠에서 $g(n)=2n$ 배점 40%

(i), (ii)에서

$$\sum_{n=1}^{10} g(n) = g(1) + \sum_{n=2}^{10} 2n = g(1) + \sum_{n=1}^{10} 2n - 2$$

$$= -1 + 2 \times \frac{10 \times 11}{2} - 2 = 107 \quad \text{..... 배점 10\%}$$

개념 NOTE

자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

14 답 ④

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 36|x-3a| + 3$ 에서

(i) $x \geq 3a$ 일 때,

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 36(x-3a) + 3 \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 36 = 3(x+2)^2 + 24 > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x \geq 3a$ 에서 증가한다.

(ii) $x < 3a$ 일 때,

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 36(x-3a) + 3 \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x - 36 = 3(x+6)(x-2)$$

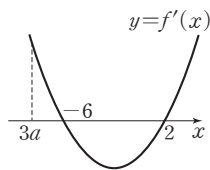
함수 $f(x)$ 가 $x < 3a$ 에서 증가하려면

$x < 3a$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$3a \leq -6 \quad \therefore a \leq -2$$

(i), (ii)에서 $a \leq -2$

따라서 상수 a 의 최댓값은 -2 이다.



15 답 ①

ㄱ. 함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이고 역함수가 존재하므로 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$$g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{에서 } g'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하면 모든 실수 x 에 대하여 $g'(x) \geq 0$ 이다.

이차방정식 $g'(x)=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - 3b \leq 0 \quad \therefore a^2 \leq 3b \quad \text{..... ㉠}$$

ㄴ. $2f(x) = g(x) - g(-x)$ 에서

$$f(x) = \frac{1}{2} \{g(x) - g(-x)\}$$

$$= \frac{1}{2} \{x^3 + ax^2 + bx + c - (-x^3 + ax^2 - bx + c)\}$$

$$= x^3 + bx$$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 + b$$

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = -12b$$

이때 ㉠에서 $a^2 \geq 0$ 이므로 $3b \geq 0 \quad \therefore b \geq 0$

$$\therefore D_2 = -12b \leq 0 \quad \text{..... ㉡}$$

따라서 이차방정식 $f'(x)=0$ 은 중근 또는 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄷ. ㉡에서 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 실근을 가지면

$$-12b = 0 \quad \therefore b = 0$$

이를 ㉠에 대입하면 $a^2 \leq 0$

이때 a 는 실수이므로 $a=0$

따라서 $g(x) = x^3 + c$ 이므로

$$g'(x) = 3x^2 \quad \therefore g'(1) = 3$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

16 답 ⑤

㉠에서 $f(0)=1, f'(0)=0, g(2)=1, g'(2)=0$

$f(0)=1$ 이므로 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$ (a 는 자연수, b, c 는 상수)이라 하면

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(0)=0 \text{에서 } c=0$$

$$\therefore f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$$

이차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 -1 이므로

$g(x) = -x^2 + dx + e$ (d, e 는 상수)라 하면

$$g'(x) = -2x + d$$

$$g(2)=1, g'(2)=0 \text{에서}$$

$$-4 + 2d + e = 1, -4 + d = 0 \quad \therefore d=4, e=-3$$

즉, $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ 이므로

$$h(x) = f(x) - g(x) = (ax^3 + bx^2 + 1) - (-x^2 + 4x - 3)$$

$$= ax^3 + (b+1)x^2 - 4x + 4$$

$$\therefore h'(x) = 3ax^2 + 2(b+1)x - 4$$

㉡에서 함수 $h(x)$ 가 증가하는 x 의 값의 범위가 $x \leq -\frac{4}{3}$ 또는 $x \geq 1$ 이

므로 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{4}{3}$	...	1	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

이차방정식 $h'(x)=0$, 즉 $3ax^2 + 2(b+1)x - 4 = 0$ 의 두 근이 $-\frac{4}{3}, 1$

이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{1}{3} = -\frac{2(b+1)}{3a}, -\frac{4}{3} = -\frac{4}{3a} \quad \therefore a=1, b=-\frac{1}{2}$$

따라서 $h(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$ 이므로

$$h(-2) = -8 + 2 + 8 + 4 = 6$$

17 답 32

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

㉠에서 $f'(6)=0$ 이므로

$$108 + 12a + b = 0 \quad \therefore 12a + b = -108 \quad \text{..... ㉡}$$

㉢에서 $f'(4-x) = f'(4+x)$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f'(2) = f'(6)$$

즉, $f'(2)=0$ 이므로

$$12 + 4a + b = 0 \quad \therefore 4a + b = -12 \quad \text{..... ㉣}$$

㉠, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-12, b=36$

$$\therefore f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + c$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	2	...	6	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$32+c$ 극대	↘	c 극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이고, $x=6$ 에서 극소이므로 극댓값과 극솟값의 차는

$$f(2) - f(6) = (32+c) - c = 32$$

18 답 6

$$g(x) = \begin{cases} b-f(x) & (x < 3) \\ f(x) & (x \geq 3) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x^3+6x^2-ax+b-10 & (x < 3) \\ x^3-6x^2+ax+10 & (x \geq 3) \end{cases}$$

$$\text{이므로 } g'(x) = \begin{cases} -3x^2+12x-a & (x < 3) \\ 3x^2-12x+a & (x > 3) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} g(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} (x^3-6x^2+ax+10) = \lim_{x \rightarrow 3-} (-x^3+6x^2-ax+b-10)$$

$$-17+3a=17-3a+b \quad \therefore 6a-b=34 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=3$ 에서도 미분가능하다.

$$\text{즉, 미분계수 } g'(3) \text{이 존재하므로 } \lim_{x \rightarrow 3+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} g'(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} (3x^2-12x+a) = \lim_{x \rightarrow 3-} (-3x^2+12x-a)$$

$$-9+a=9-a, 2a=18 \quad \therefore a=9$$

이를 ①에 대입하면

$$54-b=34 \quad \therefore b=20$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} -x^3+6x^2-9x+10 & (x < 3) \\ x^3-6x^2+9x+10 & (x \geq 3) \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} -3x^2+12x-9 & (x < 3) \\ 3x^2-12x+9 & (x \geq 3) \end{cases}$$

$$x < 3 \text{에서 } g'(x) = -3x^2+12x-9 = -3(x-1)(x-3) \text{이므로}$$

$$g'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \text{ (} \because x < 3 \text{)}$$

$$x \geq 3 \text{에서 } g'(x) = 3x^2-12x+9 = 3(x-1)(x-3) \text{이므로}$$

$$g'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=3 \text{ (} \because x \geq 3 \text{)}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$g'(x)$	-	0	+	0	+
$g(x)$	↘	6 극소	↗	10	↗

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값 6을 갖는다.

idea 19 답 24

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 $x=1$ 인 점에서 만나고 $x=4$ 인 점에서 접하므로 삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$ 은 한 근 1과 중근 4를 갖는다.

이때 삼차함수 $f(x)-g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x)-g(x)=(x-1)(x-4)^2$$

일차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$g(x)=x+a \text{ (} a \text{는 상수)라 하면}$$

$$f(x)=(x-1)(x-4)^2+x+a$$

$$=x^3-9x^2+25x+a-16$$

$$\therefore f'(x)=3x^2-18x+25$$

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근을 α, β ($\alpha < \beta$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=6, \alpha\beta=\frac{25}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 합이 46이므로

$$f(\alpha)+f(\beta)=46$$

$$\alpha^3-9\alpha^2+25\alpha+a-16+\beta^3-9\beta^2+25\beta+a-16=46$$

$$\alpha^3+\beta^3-9(\alpha^2+\beta^2)+25(\alpha+\beta)+2a-32=46$$

$$\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}-9\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+25(\alpha+\beta)+2a=78$$

$$\left(6^3-3 \times \frac{25}{3} \times 6\right)-9\left(6^2-2 \times \frac{25}{3}\right)+25 \times 6+2a=78 \text{ (} \because \textcircled{1} \text{)}$$

$$66-174+150+2a=78$$

$$2a=36 \quad \therefore a=18$$

$$\text{따라서 } f(x)=x^3-9x^2+25x+2 \text{이므로}$$

$$f(2)=8-36+50+2=24$$

20 답 ③

$$f(x)=x^3-2x^2 \text{에서 } f'(x)=3x^2-4x$$

$$\therefore f(1)=1-2=-1, f'(1)=3-4=-1$$

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A(1, -1)에서의 접선의 방정식은

$$y+1=-(x-1) \quad \therefore y=-x$$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$x^3-2x^2=-x$$

$$x^3-2x^2+x=0$$

$$x(x-1)^2=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

그런데 점 A의 x 좌표가 1이므로

$$B(0, 0)$$

$g(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a > 0$)라 하면 ㉠에 의하여

$$g(1)=-1, g(0)=0 \text{이므로}$$

$$a+b+c=-1, c=0$$

$$\therefore b=-a-1$$

$$\therefore g(x)=ax^2-(a+1)x \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$f(x)+g(x)=x^3+(a-2)x^2-(a+1)x \text{에서}$$

$$\{f(x)+g(x)\}'=3x^2+2(a-2)x-(a+1)$$

이때 이차방정식 $\{f(x)+g(x)\}'=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2+3(a+1)>0 \text{ (} \because a>0 \text{)}$$

즉, 방정식 $\{f(x)+g(x)\}'=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 ㉠에서 함수 $f(x)+g(x)$ 가 극값을 갖는 모든 x 의 값의 합이 $\frac{2}{3}$ 이

므로 이차방정식 $\{f(x)+g(x)\}'=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$\frac{2}{3}=-\frac{2(a-2)}{3}$$

$$\therefore a=1$$

$$\text{이를 ㉡에 대입하면 } g(x)=x^2-2x \text{이므로}$$

$$g(4)=16-8=8$$

21 답 ②

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $(x-2)$ 에서 $f(2n)=0$ 이므로 $f(x)=(x-2n)(x^2+ax+b)$ (a, b 는 상수)라 하자.

$(x-2n)$ 에서 모든 실수 x 에 대하여 $(x-n)(x-2n)(x^2+ax+b) \geq 0$ 이려면 $x^2+ax+b=(x-n)(x-2n)$ ↪ 좌변이 완전제곱식이어야 한다.

$$\therefore f(x)=(x-n)(x-2n)^2$$

$$f'(x)=(x-2n)^2+(x-n) \times 2(x-2n) \\ = (3x-4n)(x-2n)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=\frac{4}{3}n \text{ 또는 } x=2n$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\frac{4}{3}n$	...	$2n$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}n^3$ 극대	↘	0 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{4}{3}n$ 에서 극댓값 $\frac{4}{27}n^3$ 을 가지므로

$$a_n = \frac{4}{27}n^3$$

이때 n 은 자연수이므로 a_n 이 자연수가 되려면 n^3 이 27의 배수이어야 한다.

따라서 자연수 n 의 최솟값은 3이다.

22 답 10

함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극값을 가지면 $g'(2)=0$ 이므로 $g(x)$ 는 $(x-2)^2$ 을 인수로 갖는다.

이때 삼차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 3이고

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2 \text{이므로}$$

$$g(x)=3(x-1)(x-2)^2 \text{ 또는 } g(x)=3(x-2)^2(x-3)$$

(i) $g(x)=3(x-1)(x-2)^2$ 일 때,

$$g'(x)=3(x-2)^2+3(x-1) \times 2(x-2) \\ = 3(3x-4)(x-2)$$

$$g'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=\frac{4}{3} \text{ 또는 } x=2$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\frac{4}{3}$	...	2	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값을 가지므로 $x=2$ 에서 극댓값을 갖는다는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$ 일 때,

$$g'(x)=3 \times 2(x-2)(x-3)+3(x-2)^2 \\ = 3(x-2)(3x-8)$$

$$g'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=2 \text{ 또는 } x=\frac{8}{3}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	2	...	$\frac{8}{3}$	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 가지므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$

이때 $f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$ 이므로

$$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$$

$$\therefore f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)(x-3)+\frac{1}{3}(x-1)^2$$

$$\therefore f'(0)=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

따라서 $p=3, q=7$ 이므로

$$p+q=10$$

23 답 6

$$f(x)=x^4+2mx^3+(m^2+1)x^2-m^3+m+n \text{에서}$$

$$f'(x)=4x^3+6mx^2+2(m^2+1)x \\ = 2x(2x^2+3mx+m^2+1)$$

함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$ 는 항상 극솟값을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$ 는 오직 하나의 극값을 가지므로 삼차방정식 $f'(x)=0$

이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

$$2x(2x^2+3mx+m^2+1)=0 \text{에서}$$

$$x=0 \text{ 또는 } 2x^2+3mx+m^2+1=0$$

따라서 이차방정식 $2x^2+3mx+m^2+1=0$ 의 한 근이 0이거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $2x^2+3mx+m^2+1=0$ 의 한 근이 0일 때,

$$m^2+1=0 \quad \therefore m=\pm i$$

이는 m 이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 이차방정식 $2x^2+3mx+m^2+1=0$ 이 중근 또는 허근을 가질 때,

이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=9m^2-8(m^2+1) \leq 0$$

$$m^2-8 \leq 0 \quad \therefore 0 < m \leq 2\sqrt{2} \quad (\because m \text{은 자연수})$$

따라서 자연수 m 이 될 수 있는 값은 1, 2이다.

① $m=1$ 일 때,

$$\text{함수 } f(x)=x^4+2x^3+2x^2+n \text{의 극솟값은 } f(0) \text{이므로}$$

$$f(0) \leq 0 \text{에서 } n \leq 0$$

이를 만족시키는 자연수 n 은 존재하지 않는다.

② $m=2$ 일 때,

$$\text{함수 } f(x)=x^4+4x^3+5x^2-6+n \text{의 극솟값은 } f(0) \text{이므로}$$

$$f(0) \leq 0 \text{에서}$$

$$-6+n \leq 0 \quad \therefore n \leq 6$$

따라서 자연수 n 의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 순서쌍 (m, n) 은 6개이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n) 의 개수는 6이다.

24 답 40

$$f(x)=3x^3-9x^2-27x+k \text{에서}$$

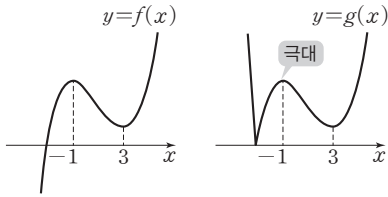
$$f'(x)=9x^2-18x-27=9(x+1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

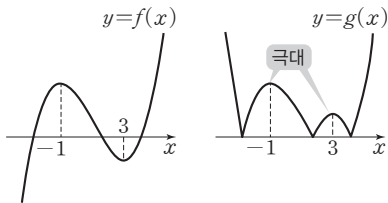
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$k+15$ 극대	↘	$k-81$ 극소	↗

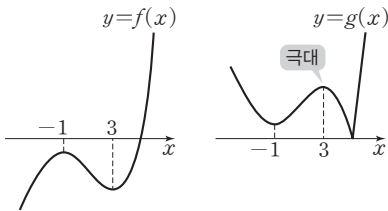
- (i) $k+15>0, k-81>0$, 즉 $k>81$ 일 때,
두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



- (ii) $k+15>0, k-81<0$, 즉 $-15<k<81$ 일 때,
두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



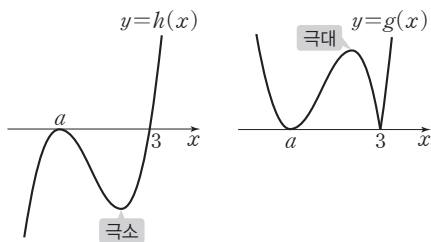
- (iii) $k+15<0, k-81<0$, 즉 $k<-15$ 일 때,
두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



- (i), (ii), (iii)에서 함수 $g(x)$ 가 2개의 극댓값을 가지려면
 $-15<k<81$ ㉠
또 $g(a)=|k+15|=k+15, g(b)=|k-81|=-k+81$ 이므로
 $|g(a)-g(b)|>54$ 에서
 $|k+15+k-81|>54, |2k-66|>54$
 $2k-66<-54$ 또는 $2k-66>54$
 $\therefore k<6$ 또는 $k>60$ ㉡
㉠, ㉡에서
 $-15<k<6$ 또는 $60<k<81$
따라서 정수 k 는 $-14, -13, \dots, 5, 61, 62, \dots, 80$ 의 40개이다.

25 답 ①

$h(x)=(x-a)f(x)$ 라 할 때, $g(x)=|h(x)|$ 가 $x=3$ 에서만 미분가능하지 않고 $a<3$ 이므로
 $f(x)=(x-a)(x-3)$
 $\therefore h(x)=(x-a)^2(x-3), g(x)=|(x-a)^2(x-3)|$
따라서 두 함수 $y=h(x), y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 함수 $g(x)$ 의 극댓값이 32이므로 함수 $h(x)$ 의 극솟값은 -32 이다.
 $h(x)=(x-a)^2(x-3)$ 에서
 $h'(x)=2(x-a)(x-3)+(x-a)^2$
 $= (x-a)(3x-a-6)$

$h'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=a$ 또는 $x=\frac{a+6}{3}$

함수 $h(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대이므로 $x=\frac{a+6}{3}$ 에서 극소이다.

이때 함수 $h(x)$ 의 극솟값이 -32 이므로

$$h\left(\frac{a+6}{3}\right)=-32$$

$$\left(\frac{a+6}{3}-a\right)^2\left(\frac{a+6}{3}-3\right)=-32$$

$$\left\{-\frac{2}{3}(a-3)\right\}^2 \times \frac{1}{3}(a-3)=-32$$

$$(a-3)^3=-216, a-3=-6 (\because a \text{는 실수})$$

$$\therefore a=-3$$

따라서 $f(x)=(x+3)(x-3)$ 이므로

$$f(4)=7 \times 1=7$$

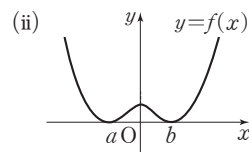
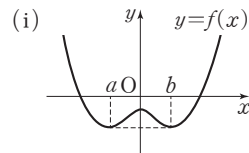
26 답 ③

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 $a, 0, b$ 이므로
 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

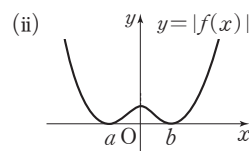
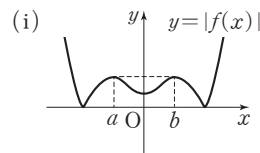
x	$\dots$	a	$\dots$	0	$\dots$	b	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

이때 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서 함수 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수도 양수이다.

또 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나고
 $f(a)=f(b)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 될 수 있는 것은 그림과 같이 2가지 경우가 있다.



따라서 각각의 경우에 대하여 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이고 $x=a, x=b$ 에서 극소이므로 극값은 3개이다.

ㄴ. $f(0)<0$ 인 경우는 (i)이므로 함수 $|f(x)|$ 의 극솟값은 3개이다.

ㄷ. $f(0)>0$ 인 경우는 (ii)이므로 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $|f(x)| \geq |f(a)|$ 이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

01 ②	02 $\frac{5}{2}$	03 ④	04 ①	05 90	06 ③
07 105	08 $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$	09 39	10 $\frac{39}{16}$	11 ⑤	

01 답 ②

1단계 접점의 x 좌표 사이의 관계식 구하기

$f(x)=x^4-6x^2-8x+10$ 이라 하면 $f'(x)=4x^3-12x-8$

접점의 x 좌표를 각각 $\alpha, \beta (\alpha \neq \beta)$ 라 하자.

점 $(\alpha, \alpha^4-6\alpha^2-8\alpha+10)$ 에서의 접선의 기울기는

$f'(\alpha)=4\alpha^3-12\alpha-8$ 이므로 접선의 방정식은

$y-(\alpha^4-6\alpha^2-8\alpha+10)=(4\alpha^3-12\alpha-8)(x-\alpha)$

$\therefore y=(4\alpha^3-12\alpha-8)x-3\alpha^4+6\alpha^2+10 \quad \dots\dots ㉠$

점 $(\beta, \beta^4-6\beta^2-8\beta+10)$ 에서의 접선의 기울기는

$f'(\beta)=4\beta^3-12\beta-8$ 이므로 접선의 방정식은

$y-(\beta^4-6\beta^2-8\beta+10)=(4\beta^3-12\beta-8)(x-\beta)$

$\therefore y=(4\beta^3-12\beta-8)x-3\beta^4+6\beta^2+10$

이때 두 접선이 일치하므로

$4\alpha^3-12\alpha-8=4\beta^3-12\beta-8 \quad \dots\dots ㉡$

$-3\alpha^4+6\alpha^2+10=-3\beta^4+6\beta^2+10 \quad \dots\dots ㉢$

㉡에서 $4(\alpha^3-\beta^3)=12(\alpha-\beta)$ 이므로

$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=3(\alpha-\beta)$

$\therefore \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=3 (\because \alpha \neq \beta) \quad \dots\dots ㉣$

㉢에서 $3(\alpha^4-\beta^4)=6(\alpha^2-\beta^2)$ 이므로

$(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

$(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)-2(\alpha+\beta)=0 (\because \alpha \neq \beta)$

$\therefore (\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-2)=0$

2단계 접점의 x 좌표 구하기

(i) $\alpha+\beta=0$ 일 때,

$\beta=-\alpha$ 이므로 ㉣에 대입하면

$\alpha^2=3 \quad \therefore \alpha=-\sqrt{3} \text{ 또는 } \alpha=\sqrt{3}$

이를 $\beta=-\alpha$ 에 대입하면

$\alpha=-\sqrt{3}$ 일 때 $\beta=\sqrt{3}, \alpha=\sqrt{3}$ 일 때 $\beta=-\sqrt{3}$

(ii) $\alpha^2+\beta^2-2=0$ 일 때,

$\alpha^2+\beta^2=2$ 이므로 ㉣에 대입하면

$\alpha\beta+2=3 \quad \therefore \alpha\beta=1$

즉, $\alpha^2+\beta^2-2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2=0$ 에서 $\alpha=\beta$

이는 $\alpha \neq \beta$ 라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\alpha=-\sqrt{3}, \beta=\sqrt{3}$ 또는 $\alpha=\sqrt{3}, \beta=-\sqrt{3}$

3단계 a^2+b^2 의 값 구하기

$\alpha=-\sqrt{3}$ 또는 $\alpha=\sqrt{3}$ 을 ㉠에 대입하면 직선의 방정식은

$y=-8x+1$

따라서 $a=-8, b=1$ 이므로

$a^2+b^2=64+1=65$

다른 풀이

$f(x)=x^4-6x^2-8x+10$ 이라 하면 $f'(x)=4x^3-12x-8$

접점의 좌표를 $(t, t^4-6t^2-8t+10)$ 이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=4t^3-12t-8$ 이므로 접선의 방정식은

$y-(t^4-6t^2-8t+10)=(4t^3-12t-8)(x-t)$

$\therefore y=(4t^3-12t-8)x-3t^4+6t^2+10 \quad \dots\dots ㉠$

직선 ㉠과 곡선 $y=f(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$x^4-6x^2-8x+10=(4t^3-12t-8)x-3t^4+6t^2+10$

$x^4-6x^2-(4t^3-12t)x+3t^4-6t^2=0$

$(x-t)\{x^3+tx^2+(t^2-6)x-3t^3+6t\}=0$

$(x-t)^2(x^2+2tx+3t^2-6)=0 \quad \dots\dots ㉡$

이때 직선 ㉠과 곡선 $y=f(x)$ 가 서로 다른 두 점에서 각각 접하려면 방정식 ㉡이 서로 다른 두 중근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2+2tx+3t^2-6=0$ 이 $x \neq t$ 인 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4}=t^2-(3t^2-6)=0$

$-2t^2+6=0, t^2=3 \quad \therefore t=-\sqrt{3} \text{ 또는 } t=\sqrt{3} \quad \dots\dots ㉢$

이때 이차방정식 $x^2+2tx+3t^2-6=0$ 의 근이 t 가 아니어야 하므로

$t^2+2t^2+3t^2-6 \neq 0, 6t^2 \neq 6$

$t^2 \neq 1 \quad \therefore t \neq -1, t \neq 1$

따라서 ㉢은 조건을 만족시킨다.

$t=-\sqrt{3}$ 또는 $t=\sqrt{3}$ 을 ㉠에 대입하면 직선의 방정식은

$y=-8x+1$

따라서 $a=-8, b=1$ 이므로

$a^2+b^2=64+1=65$

02 답 $\frac{5}{2}$

1단계 접선의 방정식 구하기

원 C 의 중심을 $A(0, a)$ 라 하고, 원 C 와 곡선 $y=f(x)$ 가 만나는 점 P

의 좌표를 $(t, \frac{1}{3}t^3-3t+1)$ ($t < 0$)이라 하자.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x+1$ 에서 $f'(x)=x^2-3$

점 P 에서의 접선을 l 이라 하면 접선 l 의 기울기는 $f'(t)=t^2-3$ 이므로

접선 l 의 방정식은

$y-(\frac{1}{3}t^3-3t+1)=(t^2-3)(x-t)$

$\therefore y=(t^2-3)x-\frac{2}{3}t^3+1 \quad \dots\dots ㉠$

2단계 점 P 의 좌표 구하기

직선 AP 와 직선 l 이 수직이므로

$\frac{\frac{1}{3}t^3-3t+1-a}{t} \times (t^2-3) = -1$

↳ (직선 AP 의 기울기) $\times$ (직선 l 의 기울기) $= -1$

$\frac{1}{3}t^3-3t+1-a = -\frac{t}{t^2-3}$

$\therefore a = \frac{1}{3}t^3-3t+1 + \frac{t}{t^2-3} \quad \dots\dots ㉡$

$\overline{AP} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 이므로 $\overline{AP}^2 = \frac{5}{4}$ 에서 $\overline{AP}$ 는 원 C 의 반지름의 길이이다.

$t^2 + (\frac{1}{3}t^3-3t+1-a)^2 = \frac{5}{4}$

㉡을 대입하면 $t^2 + (-\frac{t}{t^2-3})^2 = \frac{5}{4}$

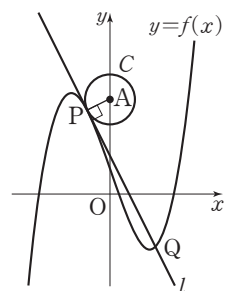
$t^2 = s (s > 0)$ 로 놓으면 $s + \frac{s}{(s-3)^2} = \frac{5}{4}$

$4s(s-3)^2 + 4s = 5(s-3)^2, 4s^3 - 29s^2 + 70s - 45 = 0$

$(s-1)(4s^2 - 25s + 45) = 0$

이때 $s > 0$ 이므로 $4s^2 - 25s + 45 > 0$

$\therefore s = 1$



즉, $t^2=1$ 이므로 $t=-1$ ($\because t < 0$)

$$\therefore P\left(-1, \frac{11}{3}\right)$$

3단계 점 Q의 좌표 구하기

㉠에서 직선 l 의 방정식은 $y=-2x+\frac{5}{3}$

직선 l 과 곡선 $y=f(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{3}x^3-3x+1=-2x+\frac{5}{3}$$

$$x^3-3x-2=0, (x+1)^2(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

그런데 점 P의 x 좌표가 -1 이므로

$$Q\left(2, -\frac{7}{3}\right)$$

4단계 삼각형 OPQ의 넓이 구하기

직선 l 이 x 축과 만나는 점을 R라 하면

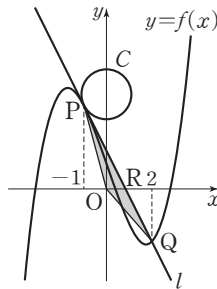
$$R\left(\frac{5}{6}, 0\right)$$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$$\triangle OPR + \triangle OQR$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \times \frac{11}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \times \frac{7}{3}$$

$$= \frac{5}{2}$$



03 답 ④

1단계 점 B의 x 좌표 구하기

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 -1 이므로

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x)=-3x^2+2ax+b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(-1)=0$$

점 B의 x 좌표를 α 라 하면 $x=\alpha$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f'(\alpha)=0$$

따라서 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근이 $-1, \alpha$ ($\alpha > -1$)이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+\alpha=\frac{2}{3}\alpha, -\alpha=-\frac{b}{3}$$

$$\therefore a=\frac{3}{2}(\alpha-1), b=3\alpha \quad \dots\dots ㉠$$

점 A($-1, 1+a-b+c$)는 직선 $y=8x$ 위의 점이므로

$$1+a-b+c=-8 \quad \therefore a-b+c=-9$$

$$\textcircled{1}\text{을 대입하면 } \frac{3}{2}(\alpha-1)-3\alpha+c=-9$$

$$\therefore c=\frac{3}{2}\alpha-\frac{15}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

점 B($\alpha, -\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c$)는 직선 $y=8x$ 위의 점이므로

$$-\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=8\alpha$$

$$\alpha^3-a\alpha^2+(8-b)\alpha-c=0$$

㉠, ㉡을 대입하면

$$\alpha^3-\frac{3}{2}(\alpha-1)\alpha^2+(8-3\alpha)\alpha-\left(\frac{3}{2}\alpha-\frac{15}{2}\right)=0$$

$$-\frac{1}{2}\alpha^3-\frac{3}{2}\alpha^2+\frac{13}{2}\alpha+\frac{15}{2}=0$$

$$\alpha^3+3\alpha^2-13\alpha-15=0, (\alpha+5)(\alpha+1)(\alpha-3)=0$$

$$\therefore \alpha=-5 \text{ 또는 } \alpha=-1 \text{ 또는 } \alpha=3$$

그런데 $\alpha > -1$ 이므로 $\alpha=3$

2단계 $f'(x)$ 구하기

㉠, ㉡에서 $a=3, b=9, c=-3$ 이므로

$$f'(x)=-3x^2+6x+9$$

3단계 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 의 최댓값 구하기

한편 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하므로 평균

값 정리에 의하여 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(k)$ 인 k 가 열린구간 (x_1, x_2) 에 적

어도 하나 존재한다.

이때 $f'(k)=-3k^2+6k+9=-3(k-1)^2+12$ 이므로 $f'(k)$, 즉

$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ 의 최댓값은 12이다.

04 답 ①

1단계 a 의 값 구하기

$x < 0$ 일 때,

$$f(x)=(-x-a)^3-6(-x-a)^2-15(-x-a)+b$$

$$=-x^3-3ax^2-3a^2x-a^3-6(x^2+2ax+a^2)+15x+15a+b$$

$$=-x^3-3(a+2)x^2-3(a^2+4a-5)x-a^3-6a^2+15a+b$$

이므로

$$f'(x)=-3x^2-6(a+2)x-3(a^2+4a-5)$$

$$=-3\{x^2+(2a+4)x+(a+5)(a-1)\}$$

$$=-3\{x+(a+5)\}\{x+(a-1)\}$$

$x \geq 0$ 일 때,

$$f(x)=(x-a)^3-6(x-a)^2-15(x-a)+b$$

$$=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3-6(x^2-2ax+a^2)-15x+15a+b$$

$$=x^3-3(a+2)x^2+3(a^2+4a-5)x-a^3-6a^2+15a+b$$

이므로

$$f'(x)=3x^2-6(a+2)x+3(a^2+4a-5)$$

$$=3\{x^2-(2a+4)x+(a+5)(a-1)\}$$

$$=3\{x-(a+5)\}\{x-(a-1)\}$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases} -3\{x+(a+5)\}\{x+(a-1)\} & (x < 0) \\ 3\{x-(a+5)\}\{x-(a-1)\} & (x \geq 0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$ 에서도 미분가능하다.

즉, 미분계수 $f'(0)$ 이 존재하므로 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3\{x-(a+5)\}\{x-(a-1)\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} [-3\{x+(a+5)\}\{x+(a-1)\}]$$

$$3(a+5)(a-1)=-3(a+5)(a-1)$$

$$6(a+5)(a-1)=0 \quad \therefore a=-5 \text{ 또는 } a=1$$

2단계 b 의 값 구하기

(i) $a=-5$ 일 때,

$$f'(x)=\begin{cases} -3x(x-6) & (x < 0) \\ 3x(x+6) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이므로 함수 $f(x)$ 가 극댓값 0을 갖는다는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=1$ 일 때,

$$f'(x) = \begin{cases} -3x(x+6) & (x < 0) \\ 3x(x-6) & (x \geq 0) \end{cases}$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-6$ 또는 $x=0$ 또는 $x=6$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-6	...	0	...	6	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	극소	/	극대	\	극소	/

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이고 극댓값이 0이므로 $f(0)=0$ 에서

$$-a^3 - 6a^2 + 15a + b = 0$$

이때 $a=1$ 이므로

$$8+b=0 \quad \therefore b=-8$$

3단계 ab 의 값 구하기

(i), (ii)에서 $a=1$, $b=-8$ 이므로

$$ab=-8$$

★ idea

05 답 90

1단계 b 의 값 구하기

$$f(x) = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) \text{에서}$$

$$f'(x) = 3(x-1)^2 + 2a(x-1) + b$$

(*)에서 $f'(1) = -1$ 이므로

$$b = -1$$

2단계 a 의 값의 부호 파악하기

$$\therefore f(x) = (x-1)^3 + a(x-1)^2 - (x-1)$$

이때 $g(x) = x^3 + ax^2 - x$ 라 하면 곡선 $y=f(x)$ 는 곡선 $y=g(x)$ 를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 극댓값과 극솟값은 서로 같다.

$$g(x) = x^3 + ax^2 - x \text{에서}$$

$$g'(x) = 3x^2 + 2ax - 1$$

이차방정식 $g'(x)=0$ 의 두 근을 α , β ($\alpha < \beta$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{2}{3}a, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 $x=\alpha$ 에서 극대이고 $x=\beta$ 에서 극소이다.

$$g(\alpha) = \alpha^3 + a\alpha^2 - \alpha, \quad g(\beta) = \beta^3 + a\beta^2 - \beta \text{이고 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$g(\alpha) + g(\beta) > 0 \text{이므로}$$

$$\alpha^3 + a\alpha^2 - \alpha + \beta^3 + a\beta^2 - \beta > 0$$

$$(\alpha^3 + \beta^3) + a(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha + \beta) > 0$$

$$(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + a\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} - (\alpha + \beta) > 0$$

$\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$-\frac{8}{27}\alpha^3 - \frac{2}{3}a + a\left(\frac{4}{9}\alpha^2 + \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}a > 0$$

$$\frac{4}{27}a\left(\alpha^2 + \frac{9}{2}\right) > 0$$

$$\text{그런데 } \alpha^2 + \frac{9}{2} > 0 \text{이므로 } a > 0$$

3단계 a 의 값 구하기

$$\textcircled{1} \text{에서 } g(\alpha) - g(\beta) = \frac{7\sqrt{21}}{18} \text{이므로}$$

$$\alpha^3 + a\alpha^2 - \alpha - (\beta^3 + a\beta^2 - \beta) = \frac{7\sqrt{21}}{18}$$

$$(\alpha^3 - \beta^3) + a(\alpha^2 - \beta^2) - (\alpha - \beta) = \frac{7\sqrt{21}}{18}$$

$$(\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) + a(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) = \frac{7\sqrt{21}}{18}$$

$$(\alpha - \beta)\{(\alpha - \beta)^2 + 3\alpha\beta + a(\alpha + \beta) - 1\} = \frac{7\sqrt{21}}{18} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에서

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{4}{9}\alpha^2 + \frac{4}{3} = \frac{4}{9}(\alpha^2 + 3)$$

$$\therefore \alpha - \beta = -\frac{2}{3}\sqrt{\alpha^2 + 3} \quad (\because \alpha < \beta) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$-\frac{2}{3}\sqrt{\alpha^2 + 3} \times \left\{ \frac{4}{9}(\alpha^2 + 3) - \frac{2}{3}\alpha^2 - 2 \right\} = \frac{7\sqrt{21}}{18}$$

$$-\frac{2}{3}\sqrt{\alpha^2 + 3} \times \left\{ -\frac{2}{9}(\alpha^2 + 3) \right\} = \frac{7\sqrt{21}}{18}$$

$$\frac{4}{27}\sqrt{(\alpha^2 + 3)^3} = \frac{7\sqrt{21}}{18}, \quad \sqrt{(\alpha^2 + 3)^3} = \frac{21\sqrt{21}}{8}$$

양변을 제곱하면

$$(\alpha^2 + 3)^3 = \frac{21^3}{64} = \left(\frac{21}{4}\right)^3$$

$$\alpha^2 + 3 = \frac{21}{4}, \quad \alpha^2 = \frac{9}{4}$$

$$\therefore \alpha = \frac{3}{2} \quad (\because \alpha > 0)$$

4단계 $36(a-b)$ 의 값 구하기

$$\therefore 36(a-b) = 36\left\{\frac{3}{2} - (-1)\right\} = 36 \times \frac{5}{2} = 90$$

06 답 ③

1단계 집합 A 구하기

$$f(x) = -\frac{1}{2}k(x^3 + 3x^2) + 8 \text{에서}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}k(3x^2 + 6x) = -\frac{3}{2}kx(x+2)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

$k>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	$-2k+8$ 극소	/	8 극대	\

$$\therefore A = \{-2k+8, 8\}$$

2단계 모든 자연수 k 의 값의 합 구하기

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 후 x 축보다 아래쪽에 있는 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

(i) $k=1$ 일 때,

$$g(x) = |f(x) - 4| \text{에서}$$

$$f(-2) - 4 = -2k + 8 - 4 = 2 \text{이므로}$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

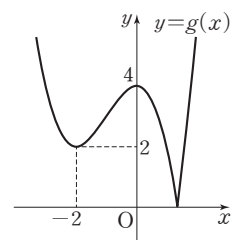
즉, 함수 $g(x)$ 는 0, 2, 4를 극값으로 가지므로

$$B = \{0, 2, 4\}$$

$$\text{이때 } A = \{6, 8\} \text{이므로}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

즉, 조건을 만족시키지 않는다.



(ii) $k=2$ 일 때,

$$g(x) = |f(x) - 4| \text{에서}$$

$$f(-2) - 4 = -2k + 8 - 4 = 0 \text{이므로 함수}$$

$y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

즉, 함수 $g(x)$ 는 0, 4를 극값으로 가지므로

$$B = \{0, 4\}$$

이때 $A = \{4, 8\}$ 이므로

$$A \cap B \neq \emptyset$$

즉, 조건을 만족시킨다.

(iii) $k \geq 3$ 일 때,

$$g(x) = |f(x) - 4| \text{에서}$$

$$f(-2) - 4 = -2k + 8 - 4 = -2k + 4 < 0$$

이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

즉, 함수 $g(x)$ 는 0, $2k-4$, 4를 극값으로 가지므로

$$B = \{0, 2k-4, 4\}$$

$A \cap B \neq \emptyset$ 이려면

$$-2k+8=0 \text{ 또는 } -2k+8=2k-4 \text{ 또는 } 2k-4=8$$

$$\textcircled{i} \quad -2k+8=0 \text{ 일 때, } k=4 \quad \rightarrow -2k+8 \leq 2 \text{ 이므로 } -2k+8 \neq 4$$

$$\textcircled{ii} \quad -2k+8=2k-4 \text{ 일 때, } k=3$$

$$\textcircled{iii} \quad 2k-4=8 \text{ 일 때, } k=6$$

$$\textcircled{i}, \textcircled{ii}, \textcircled{iii} \text{에서 } k=3 \text{ 또는 } k=4 \text{ 또는 } k=6$$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 자연수 k 의 값은 2, 3, 4, 6이므로 그 합은

$$2+3+4+6=15$$

07 답 105

1단계 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형 그리기

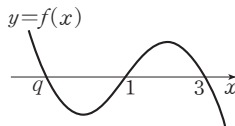
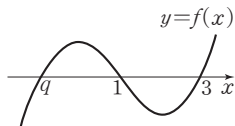
(가)에서 $f(x)=p(x-1)(x-3)(x-q)$ (p, q 는 상수, $p \neq 0$)라 하면 함수 $f(x)$ 는 극값이 존재한다.

(나)에서 함수 $f(x)$ 는 $x \geq 1$ 에서 극값이 하나만 존재하므로 $q < 1$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

(i) $p > 0$ 일 때,

(ii) $p < 0$ 일 때,



2단계 $f(x)$ 의 식 세우기

$$g(x) = |f(x)f(a-x)| \text{에서}$$

$$f(a-x) = p(a-x-1)(a-x-3)(a-x-q)$$

$$= -p(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)$$

$$\therefore f(x)f(a-x)$$

$$= -p^2(x-1)(x-3)(x-q)(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)$$

이때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)f(a-x)$ 의 그래프에서 x 축보다 아래쪽에 있는 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이고, 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프에서 꺾인 점이 없어야 한다.

즉, $g(x)=p^2|(x-a)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2|$ 꼴이어야 한다.

$q < 1$ 에서 $a-3 < a-1 < a-q$ 이므로

$$a-3=q, \quad a-1=1, \quad a-q=3$$

$$\therefore a=2, \quad q=-1$$

$$\therefore f(x)=p(x+1)(x-1)(x-3)$$

3단계 $\frac{g(4a)}{f(0) \times f(4a)}$ 의 값 구하기

$$\therefore \frac{g(4a)}{f(0) \times f(4a)} = \frac{g(8)}{f(0) \times f(8)}$$

$$= \frac{|f(8)f(-6)|}{f(0) \times f(8)}$$

$$= \frac{|p \times 9 \times 7 \times 5 \times p \times (-5) \times (-7) \times (-9)|}{p \times 1 \times (-1) \times (-3) \times p \times 9 \times 7 \times 5}$$

$$= 105$$

08 답 $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

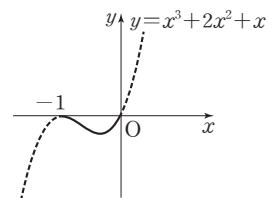
1단계 $y=g(x)$ 의 그래프 그리기

(가), (나)에서

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 + x & (-1 \leq x \leq 0) \\ x^3 - 2x^2 + x & (0 < x \leq 1) \end{cases}$$

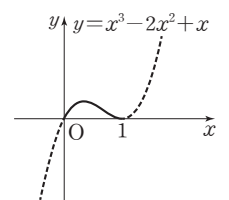
$$y = x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2 \text{이므로}$$

$-1 \leq x \leq 0$ 에서 함수 $y = x^3 + 2x^2 + x$ 의 그래프는 그림과 같다.

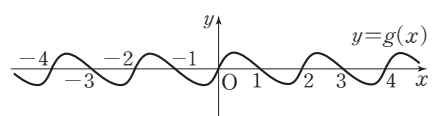


$$\text{또 } y = x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2 \text{이므로}$$

$0 < x \leq 1$ 에서 함수 $y = x^3 - 2x^2 + x$ 의 그래프는 그림과 같다.

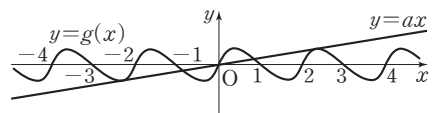


이때 (다)에서 모든 실수 x 에 대하여 $g(x+2)=g(x)$ 이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



2단계 직선의 방정식 구하기

함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=ax$ ($a > 0$)가 서로 다른 5개의 점에서 만나는 경우는 그림과 같이 직선 $y=ax$ 가 $-3 < x < -2$ 와 $2 < x < 3$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 접할 때이다.



이때 $2 < x < 3$ 에서의 접점이 점 P가 되므로 점 P의 x 좌표를 t ($2 < t < 3$)라 하자.

$2 < x \leq 3$ 일 때, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수

$y = x^3 - 2x^2 + x$ ($0 < x \leq 1$)의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$$g(x) = (x-2)^3 - 2(x-2)^2 + (x-2)$$

$$= x^3 - 8x^2 + 21x - 18$$

$$\therefore g'(x) = 3x^2 - 16x + 21 \quad (2 < x \leq 3)$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프 위의 점 $P(t, t^3-8t^2+21t-18)$ 에서의 접선의 기울기는 $g'(t)=3t^2-16t+21$ 이므로 접선의 방정식은 $y-(t^3-8t^2+21t-18)=(3t^2-16t+21)(x-t)$
 $\therefore y=(3t^2-16t+21)x-2t^3+8t^2-18 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

3단계 점 P의 x좌표 구하기

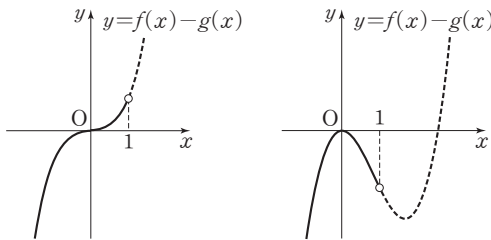
직선 $\textcircled{1}$ 이 원점을 지나므로
 $0=-2t^3+8t^2-18$
 $t^3-4t^2+9=0, (t-3)(t^2-t-3)=0$
 $\therefore t=3$ 또는 $t=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$
 그런데 $2<t<3$ 이므로 $t=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$
 따라서 점 P의 x좌표는 $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ 이다.

09 답 39

1단계 $f(0)-g(0), f'(0)-g'(0)$ 의 값 구하기

$h(0)=0$ 에서
 $|f(0)-g(0)|=0$
 $\therefore f(0)-g(0)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

즉, 함수 $y=f(x)-g(x)$ 의 그래프는 원점을 지난다.
 이때 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x<1$ 에서 함수 $|f(x)-g(x)|$ 가 미분가능하다.
 즉, $x<1$ 에서 함수 $y=|f(x)-g(x)|$ 의 그래프에 꺾임 점이 없어야 하므로 삼차함수 $y=f(x)-g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$\therefore f'(0)-g'(0)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

2단계 $f'(1), f(1)$ 의 값 구하기

함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=1$ 에서도 미분가능하다.

즉, 미분계수 $h'(1)$ 이 존재하므로
 $\lim_{x \rightarrow 1+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} h'(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $f(x) \geq g(x)$ 라고 가정하면

$$|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$$

$\textcircled{3}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{f'(x)+g'(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1-} \{f'(x)-g'(x)\}$$

$$f'(1)+g'(1)=f'(1)-g'(1)$$

$$\therefore g'(1)=0$$

이는 $g(x)$ 가 일차함수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$\hookrightarrow g(x)=px+q$ 라 하면 $g'(x)=p$ 이므로 $g'(1)=p=0$ 에서 $g(x)$ 는 상수함수이다.

따라서 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $f(x) < g(x)$ 이므로

$$|f(x)-g(x)|=g(x)-f(x)$$

$\textcircled{3}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{f'(x)+g'(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1-} \{g'(x)-f'(x)\}$$

$$f'(1)+g'(1)=g'(1)-f'(1)$$

$$\therefore f'(1)=0$$

함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$ 에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} h(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)+g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1-} \{g(x)-f(x)\}$$

$$f(1)+g(1)=g(1)-f(1)$$

$$\therefore f(1)=0$$

3단계 $f(x), g(x)$ 구하기

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0, f'(1)=0$ 이므로

$f(x)=(x-1)^2(x+a)$ (a 는 상수)라 하고, $g(x)$ 는 일차함수이므로

$g(x)=px+q$ (p, q 는 상수, $p \neq 0$)라 하면

$$f'(x)=2(x-1)(x+a)+(x-1)^2, g'(x)=p$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } a-q=0 \quad \therefore q=a \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } -2a+1-p=0 \quad \therefore p=-2a+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$h(2)=5 \text{에서 } f(2)+g(2)=5$$

$$2+a+2p+q=5$$

$\textcircled{4}, \textcircled{5}$ 을 대입하면

$$2+a+2(-2a+1)+a=5$$

$$-2a=1 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

이를 $\textcircled{4}, \textcircled{5}$ 에 각각 대입하면

$$q=-\frac{1}{2}, p=2$$

$$\therefore f(x)=(x-1)^2\left(x-\frac{1}{2}\right), g(x)=2x-\frac{1}{2}$$

4단계 $h(4)$ 의 값 구하기

$$\therefore h(4)=f(4)+g(4)=9 \times \frac{7}{2} + \left(8-\frac{1}{2}\right)=39$$

idea 10 답 39/16

1단계 $f(x)$ 의 상수항 구하기

$\textcircled{a}$ 에 의하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

사차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x)=x^4+ax^2+b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f'(x)=4x^3+2ax=2x(2x^2+a)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{-\frac{a}{2}}$$

이때 $\textcircled{b}$ 에서 함수 $f(x)$ 는 극댓값을 가지므로

$a < 0 \rightarrow a \geq 0$ 이면 $2x^2+a \geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 극솟값 $f(0)$ 만을 갖는다.

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{-\frac{a}{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{-\frac{a}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이고 $\textcircled{b}$ 에서 극댓값이 $\frac{5}{2}$ 이므로

$$f(0)=\frac{5}{2} \text{에서 } b=\frac{5}{2}$$

2단계 $f(x)$ 의 이차항의 계수 구하기

한편 $g(x)=f(x)-kx$ 라 할 때, 함수 $|g(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 x 축과 접하거나 x 축보다 위쪽에 있어야 한다.

즉, $f(x)-kx \geq 0$ 이어야 하므로 $f(x) \geq kx$

이때 (ㄷ)에서 함수 $|g(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 실수 k 의 최댓값이 3이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=3x$ 는 $x>0$ 인 점에서 서로 접한다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=3x$ 의 접점의 x 좌표를 $t(t>0)$ 라 하면

$$f(t)=3t \text{에서 } t^4+at^2+\frac{5}{2}=3t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(t)=3 \text{에서 } 4t^3+2at=3$$

$$\therefore a=-2t^2+\frac{3}{2t} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$t^4+\left(-2t^2+\frac{3}{2t}\right)t^2+\frac{5}{2}=3t, \quad t^4+\frac{3}{2}t-\frac{5}{2}=0$$

$$2t^4+3t-5=0, \quad (t-1)(2t^3+2t^2+2t+5)=0$$

이때 $t>0$ 이므로 $2t^3+2t^2+2t+5>0$

$$\therefore t=1$$

$$\text{이를 ②에 대입하면 } a=-\frac{1}{2}$$

3단계 $f(x)$ 의 극솟값 구하기

따라서 $f(x)=x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$ 이므로 극솟값은

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}-\frac{1}{8}+\frac{5}{2}=\frac{39}{16}$$

11 답 ⑤

1단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$$\neg. f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-4=-\frac{15}{4}$$

$m=-1$ 일 때, $g(x)=-2x-4(x\geq 0)$ 이므로

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=-1-4=-5$$

$$\therefore h\left(\frac{1}{2}\right)=-5$$

2단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$\neg. f(x)=2x^3-8x=2x(x+2)(x-2)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

$m=-1$ 이면

$$g(x)=\begin{cases} 47x-4 & (x<0) \\ -2x-4 & (x\geq 0) \end{cases}$$

(i) $x<0$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=47x-4$ 는 한 점에서 만나므로 만나는 점의 x 좌표를 x_1 이라 하자.

$x\leq x_1$ 일 때 $f(x)\leq g(x)$, $x_1<x<0$ 일 때 $g(x)<f(x)$ 이므로

$$h(x)=\begin{cases} 2x^3-8x & (x\leq x_1) \\ 47x-4 & (x_1<x<0) \end{cases}$$

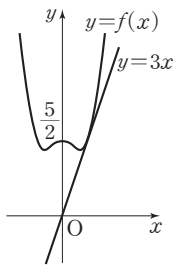
즉, 함수 $y=h(x)$ 의 그래프가 $x=x_1$ 인 점에서 꺾인 모양이므로 미분가능하지 않다.

(ii) $x=0$ 일 때,

$f(0)=0$, $g(0)=-4$, 즉 $g(0)<f(0)$ 이므로 $x=0$ 에서의 함수 $h(x)$ 의 미분가능성은 함수 $g(x)$ 의 미분가능성과 같다.

$$g'(x)=\begin{cases} 47 & (x<0) \\ -2 & (x>0) \end{cases} \text{이므로 } \lim_{x\rightarrow 0^-} g'(x) \neq \lim_{x\rightarrow 0^+} g'(x)$$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않으므로 함수 $h(x)$ 도 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.



(iii) $x>0$ 일 때,

점 $(0, -4)$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에 그은 접선의 방정식을 구해 보자.

$$f(x)=2x^3-8x \text{에서 } f'(x)=6x^2-8$$

접점의 좌표를 $(t, 2t^3-8t)$ 라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=6t^2-8 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(2t^3-8t)=(6t^2-8)(x-t)$$

$$\therefore y=(6t^2-8)x-4t^3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(0, -4)$ 를 지나므로

$$-4=-4t^3, \quad t^3=1 \quad \therefore t=1 \quad (\because t \text{는 실수})$$

이를 ①에 대입하면 $y=-2x-4$

즉, $x>0$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 접선이므로

$$g(x)\leq f(x)$$

$$\therefore h(x)=-2x-4 \quad (\text{단, } x>0)$$

따라서 함수 $h(x)$ 는 $x>0$ 에서 미분가능하다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $h(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수는 2이다.

3단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$\neg. \text{ 양수 } m \text{에 대하여 } x>0 \text{일 때, 함수 } y=f(x) \text{의 그래프와 직선}$

$$y=2mx+\frac{4}{m^3} \text{는 한 점에서 만나므로 만나는 점의 } x \text{좌표를 } x_1 \text{이라}$$

하면 함수 $h(x)$ 는 $x=x_1$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 함수 $h(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수가 1이려면 $x\leq 0$ 에서 미분가능해야 한다.

$$x=0 \text{일 때, } f(0)=0, \quad g(0)=\frac{4}{m^3}, \quad \text{즉 } f(0)<g(0) \text{이므로 함수}$$

$h(x)$ 의 미분가능성은 함수 $f(x)$ 의 미분가능성과 같다.

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하므로 함수 $h(x)$ 도 $x=0$ 에서 미분가능하다.

$x<0$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-\frac{47}{m}x+\frac{4}{m^3}$ 는 접하거나 만나지 않아야 한다.

$x<0$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 접할 때, 접점의 x 좌표를 t 라 하면 $f(t)=g(t)$ 이므로

$$2t^3-8t=-\frac{47}{m}t+\frac{4}{m^3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(x)=6x^2-8, \quad g'(x)=-\frac{47}{m} \text{이고 } f'(t)=g'(t) \text{이므로}$$

$$6t^2-8=-\frac{47}{m} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②을 ①의 우변에 대입하면

$$2t^3-8t=(6t^2-8)t+\frac{4}{m^3}$$

$$4t^3=-\frac{4}{m^3}, \quad t^3=-\frac{1}{m^3} \quad \therefore t=-\frac{1}{m} \quad (\because t \text{는 실수})$$

이를 ②에 대입하면

$$\frac{6}{m^2}-8=-\frac{47}{m}, \quad 8m^2-47m-6=0$$

$$(8m+1)(m-6)=0 \quad \therefore m=6 \quad (\because m>0)$$

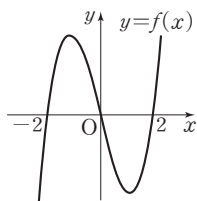
따라서 직선 $y=-\frac{47}{m}x+\frac{4}{m^3}$ 의 기울기가 $-\frac{47}{6}$ 이거나 기울기의 절댓값이 더 커야 하므로

$$0<m\leq 6$$

따라서 양수 m 의 최댓값은 6이다.

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.



step ① 핵심 문제

| 64~65쪽

01 12 02 ② 03 4 04 9 05 27 06 26

07 ④ 08 2 09 3 10 ① 11 ③

12 $-\frac{5\sqrt{3}}{8}$

01 답 12

$$f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x + 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - a^2 \\ = (x+a)(3x-a)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-a \text{ 또는 } x=\frac{a}{3}$$

$-a \leq x \leq a$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-a$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	a^3+2	$\searrow$	$-\frac{5}{27}a^3+2$ 극소	$\nearrow$	a^3+2

함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{a}{3}$ 에서 최소이고 최솟값이 $\frac{14}{27}$ 이므로

$$f\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{14}{27} \text{에서}$$

$$-\frac{5}{27}a^3 + 2 = \frac{14}{27}$$

$$a^3 = 8 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a \text{는 실수})$$

함수 $f(x)$ 는 $x=-a$ 또는 $x=a$ 에서 최대이므로 최댓값은

$$M = a^3 + 2 = 8 + 2 = 10$$

$$\therefore a + M = 2 + 10 = 12$$

02 답 ②

$$f(x) = ax^4 - 4ax^3 + b + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4ax^3 - 12ax^2 \\ = 4ax^2(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

$a > 0$ 이므로 $-2 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$48a+b+3$	$\searrow$	$b+3$	$\searrow$	$-27a+b+3$ 극소	$\nearrow$	$b+3$

함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 최대이고 최댓값이 66, $x=3$ 에서 최소이고 최솟값이 -9 이므로 $f(-2)=66$, $f(3)=-9$ 에서

$$48a + b + 3 = 66, \quad -27a + b + 3 = -9$$

$$\therefore 48a + b = 63, \quad 27a - b = 12$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 1, \quad b = 15$$

$$\therefore ab = 15$$

03 답 4

점 P의 x 좌표를 t ($0 < t < a$)라 하면

$$P(t, t(t-a)^2)$$

$\overline{OH}=t$, $\overline{PH}=t(t-a)^2$ 이므로 삼각형 POH의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{1}{2} \times t \times t(t-a)^2 = \frac{1}{2} t^2(t-a)^2$$

$$\therefore S'(t) = t(t-a)^2 + t^2(t-a) \\ = t(t-a)(2t-a)$$

$$S'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=\frac{a}{2} \quad (\because 0 < t < a)$$

$0 < t < a$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$	a
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{a^4}{32}$ 극대	$\searrow$	

삼각형 POH의 넓이 $S(t)$ 는 $t=\frac{a}{2}$ 에서 최대이고 최댓값이 8이므로

$$S\left(\frac{a}{2}\right) = 8 \text{에서}$$

$$\frac{a^4}{32} = 8, \quad a^4 = 256$$

$$\therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$

04 답 9

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면 겉넓이가 54π 이므로

$$2\pi r^2 + 2\pi rh = 54\pi$$

$$rh = 27 - r^2$$

$r > 0$ 이므로 양변을 r 로 나누면

$$h = \frac{27}{r} - r \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $h > 0$ 이므로

$$\frac{27}{r} - r > 0$$

$$r^2 - 27 < 0, \quad (r+3\sqrt{3})(r-3\sqrt{3}) < 0$$

$$\therefore 0 < r < 3\sqrt{3} \quad (\because r > 0)$$

원기둥의 부피를 $V(r)$ 라 하면

$$V(r) = \pi r^2 h \\ = \pi r^2 \left(\frac{27}{r} - r \right) \quad (\because \textcircled{1}) \\ = \pi(27r - r^3)$$

$$\therefore V'(r) = \pi(27 - 3r^2)$$

$$= 3\pi(3+r)(3-r)$$

$$V'(r)=0 \text{인 } r \text{의 값은 } r=3 \quad (\because 0 < r < 3\sqrt{3})$$

$0 < r < 3\sqrt{3}$ 에서 함수 $V(r)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	$\cdots$	3	$\cdots$	$3\sqrt{3}$
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		$\nearrow$	54π 극대	$\searrow$	

원기둥의 부피 $V(r)$ 는 $r=3$ 에서 최대이고 그때의 h 의 값은 $\textcircled{1}$ 에서

$$h = 9 - 3 = 6$$

따라서 $a=3$, $b=6$ 이므로

$$a+b=9$$

05 답 27

방정식 $|x^3 - 6x^2 + 9x - 4| = k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y = |x^3 - 6x^2 + 9x - 4|$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 만나는 점의 개수와 같다.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \text{라 하면}$$

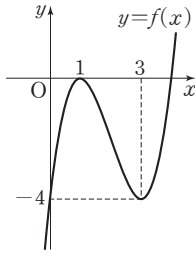
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$

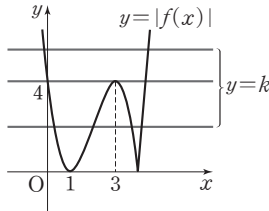
이때 $f(0) = -4$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



즉, 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같으므로 k 의 값에 따라 직선 $y = k$ 를 그어 보면 실근의 개수 a_k 는

$$a_k = \begin{cases} 4 & (k=1, 2, 3) \\ 3 & (k=4) \\ 2 & (k=5, 6, 7, 8, 9, 10) \end{cases}$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = 4 \times 3 + 3 \times 1 + 2 \times 6 = 27$$



06 답 26

두 곡선 $y = 2x^3 + x^2 - 7x + a$, $y = 4x^2 + 5x$ 가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $2x^3 + x^2 - 7x + a = 4x^2 + 5x$, 즉 $-2x^3 + 3x^2 + 12x = a$ 가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

따라서 함수 $y = -2x^3 + 3x^2 + 12x$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 만나는 점이 3개이어야 한다.

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = -6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

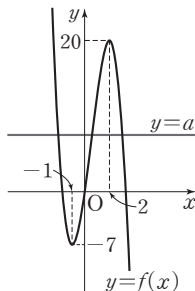
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-7 극소	$\nearrow$	20 극대	$\searrow$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 만나는 점이 3개가 되도록 직선 $y = a$ 를 그어 보면 a 의 값의 범위는

$$-7 < a < 20$$

따라서 정수 a 는 $-6, -5, -4, \cdots, 19$ 의 26개이다.



다른 풀이

두 곡선 $y = 2x^3 + x^2 - 7x + a$, $y = 4x^2 + 5x$ 가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $2x^3 + x^2 - 7x + a = 4x^2 + 5x$, 즉 $2x^3 - 3x^2 - 12x + a = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + a \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$= 6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 극값은

$$f(-1) = a+7, f(2) = a-20$$

삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(-1)f(2) < 0$ 이어야 하므로

$$(a+7)(a-20) < 0$$

$$\therefore -7 < a < 20$$

따라서 정수 a 는 $-6, -5, -4, \cdots, 19$ 의 26개이다.

07 답 ④

방정식 $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 3 - a = 0$ 에서

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 3 = a$$

이 방정식의 실근은 함수 $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 3$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 만나는 점의 x 좌표와 같다.

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 3 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$$

$$= 4(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

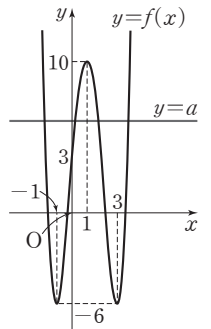
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-6 극소	$\nearrow$	10 극대	$\searrow$	-6 극소	$\nearrow$

이때 $f(0) = 3$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

따라서 주어진 조건을 만족시키도록 직선 $y = a$ 를 그어 보면 a 의 값의 범위는

$$3 < a < 10$$



08 답 2

$$f(x) = x^4 - 2a^2x^2 + 16 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4a^2x = 4x(x+a)(x-a)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-a \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=a$$

$a > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$16-a^4$ 극소	$\nearrow$	16 극대	$\searrow$	$16-a^4$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=-a$ 또는 $x=a$ 에서 최솟값 $16-a^4$ 을 가지므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x)>0$ 이 성립하려면

$$16-a^4>0 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$a^4-16<0, (a^2+4)(a^2-4)<0$$

$$\text{이때 } a^2+4>0 \text{이므로}$$

$$a^2-4<0, (a+2)(a-2)<0$$

$$\therefore 0<a<2 \quad (\because a>0) \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\text{따라서 } \alpha=0, \beta=2 \text{이므로}$$

$$\beta-\alpha=2 \quad \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$

09 답 3

$f(x) \geq 3g(x)$ 에서

$$x^3+3x^2-k \geq 3(2x^2+3x-10)$$

$$\therefore x^3-3x^2-9x+30-k \geq 0$$

$$h(x)=x^3-3x^2-9x+30-k \text{라 하면}$$

$$h'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

$$h'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

$-1 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	3	...	4
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	$35-k$	$\searrow$	$3-k$ 극소	$\nearrow$	$10-k$

함수 $h(x)$ 는 $x=3$ 에서 최솟값 $3-k$ 를 가지므로 닫힌구간 $[-1, 4]$ 에서 부등식 $h(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$3-k \geq 0 \quad \therefore k \leq 3$$

따라서 k 의 최댓값은 3이다.

10 답 ①

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 2at + b$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$\frac{dv}{dt} = 6t + 2a$$

운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 시각 $t=1$ 에서의 점 P의 속도는 0이다.

$$\therefore 3+2a+b=0 \quad \dots\dots\dots \text{㉠}$$

또 시각 $t=2$ 에서의 점 P의 가속도가 0이므로

$$12+2a=0 \quad \therefore a=-6$$

이를 ㉠에 대입하면

$$-9+b=0 \quad \therefore b=9$$

$$\therefore a+b=3$$

11 답 ③

ㄱ. $0 \leq t \leq 6$ 에서 $t=3$ 일 때 $|x(t)|$ 의 값이 가장 크므로 $t=3$ 일 때 원 점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

ㄴ. $0 < t < 1$ 에서 t 의 값이 커질수록 그 점에서의 접선의 기울기는 점점 작아지므로 속도는 감소한다.

ㄷ. $t=2.5$ 인 점에서의 접선의 기울기는 음수이므로 $v < 0$

$t=5.5$ 인 점에서의 접선의 기울기는 음수이므로 $v < 0$

따라서 $t=2.5$ 일 때와 $t=5.5$ 일 때 속도의 부호가 서로 같으므로 운동 방향이 서로 같다.

ㄹ. $t=1, t=3, t=5$ 인 점에서의 접선의 기울기는 0이고 좌우에서 접선의 기울기의 부호가 바뀌므로 $0 < t < 6$ 에서 운동 방향을 세 번 바꾼다.

ㅁ. 출발 후 두 번째로 원점을 지나는 시각은 $t=4$ 이고, $t=4$ 인 점에서의 접선의 기울기는 0보다 크므로 출발 후 두 번째로 원점을 지나는 순간의 속도는 0보다 크다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다.

12 답 $-\frac{5\sqrt{3}}{8}$

두 점 P, Q가 동시에 출발한 지 t 초 후의 두 선분 PB, BQ의 길이는

$$\overline{PB}=3-\frac{t}{2}, \overline{BQ}=3+t \quad (\text{단, } 0 \leq t \leq 6)$$

삼각형 PBQ의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{BQ} \times \overline{PB} \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times (3+t) \times \left(3-\frac{t}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{8}(t^2-3t-18)$$

$$\text{이때 } S = \frac{7\sqrt{3}}{4} \text{에서 } -\frac{\sqrt{3}}{8}(t^2-3t-18) = \frac{7\sqrt{3}}{4}$$

$$t^2-3t-4=0, (t+1)(t-4)=0$$

$$\therefore t=4 \quad (\because 0 \leq t \leq 6)$$

시각 t 에 대한 넓이 S 의 변화율은

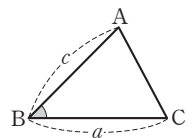
$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\sqrt{3}}{8}(2t-3)$$

따라서 $t=4$ 에서의 삼각형 PBQ의 넓이의 변화율은 $-\frac{5\sqrt{3}}{8}$ 이다.

개념 NOTE

삼각형 ABC의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}ac \sin B$$



step 2 고난도 문제

| 66~70쪽

01 ④	02 ⑤	03 12	04 ②	05 ⑤	06 2
07 ③	08 9	09 ②	10 ④	11 13	12 21
13 ①	14 ④	15 52	16 5	17 34	18 130
19 ②	20 ④	21 $\frac{5}{6}$	22 11	23 3	
24 $12\sqrt{3}\text{cm}^2$	25 ④	26 90			

01 답 ④

$g(x)=x^2-6x+8=(x-3)^2-1$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq -1$

이때 $g(x)=t$ 로 놓으면 $t \geq -1$ 이고,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(t) \\ = -t^3 + 3t + 5$$

$$f'(t) = -3t^2 + 3 = -3(t+1)(t-1)$$

$$f'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=-1 \text{ 또는 } t=1$$

$t \geq -1$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	...	1	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$	3	↗	7 극대	↘

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t=1$ 에서 최댓값 7을 가지므로 함수 $(f \circ g)(x)$ 의 최댓값은 7이다.

02 답 ⑤

$$x^2 + x - 2y = 5 \text{에서}$$

$$y = \frac{1}{2}(x^2 + x - 5) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $y \leq \frac{1}{2}$ 에서

$$\frac{1}{2}(x^2 + x - 5) \leq \frac{1}{2}$$

$$x^2 + x - 6 \leq 0, (x+3)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 2 \quad (\because x \geq 0)$$

①에서 $xy = \frac{1}{2}(x^3 + x^2 - 5x)$ 이므로 $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x^2 - 5x)$ 라 하면

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 + 2x - 5)$$

$$= \frac{1}{2}(3x+5)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \quad (\because 0 \leq x \leq 2)$$

$0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{3}{2}$ 극소	↗	1

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 1, $x=1$ 에서 최솟값 $-\frac{3}{2}$ 을 가지므로

$$M=1, m=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore 6(M-m) = 6 \times \frac{5}{2} = 15$$

idea 03 답 12

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 6 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-\sqrt{2} \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=\sqrt{2}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\sqrt{2}$	...	0	...	$\sqrt{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	2 극소	↗	6 극대	↘	2 극소	↗

한편 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \leq f(c)$ 이면 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 $f(c)$ 이다.

이때 $f(x) \leq f(c)$ 를 만족시키는 실수 c 가 3개

이려면 그림과 같이 $a < 0 < b$ 이고

$f(a) = f(b) = 6$ 이어야 한다.

$$f(a) = 6 \text{에서 } a^4 - 4a^2 + 6 = 6$$

$$a^4 - 4a^2 = 0, a^2(a+2)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -2 \quad (\because a < 0)$$

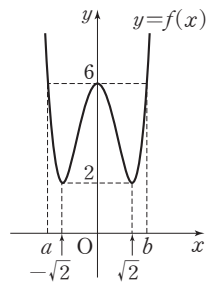
같은 방법으로 하면

$$b = 2 \quad (\because b > 0)$$

따라서 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$ 에서 최댓값 6, $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$ 에서 최솟값 2를 가지므로

$$M=6, m=2$$

$$\therefore M+m-ab = 6+2-(-2) \times 2 = 12$$



04 답 ②

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}ax^2 - 3a \text{에서}$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3ax = -\frac{3}{2}x(x-2a)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=2a$$

(i) $2a \leq 0$, 즉 $a \leq 0$ 일 때,

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 감소한다.

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최댓값을 가지므로

$$g(a) = f(0) = -3a$$

(ii) $0 < 2a < 2$, 즉 $0 < a < 1$ 일 때,

$0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$2a$	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-3a$	↗	$2a^3 - 3a$ 극대	↘	$3a - 4$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=2a$ 에서 최댓값을 가지므로

$$g(a) = f(2a) = 2a^3 - 3a$$

(iii) $2a \geq 2$, 즉 $a \geq 1$ 일 때,

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값을 가지므로

$$g(a) = f(2) = 3a - 4$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } g(a) = \begin{cases} -3a & (a \leq 0) \\ 2a^3 - 3a & (0 < a < 1) \\ 3a - 4 & (a \geq 1) \end{cases}$$

$a \leq 0$ 일 때, $g(a) = -3a$ 는 감소하므로 함수 $g(a)$ 는 $a=0$ 에서 최솟값이고 최솟값은

$$g(0) = 0$$

$0 < a < 1$ 일 때, $g(a) = 2a^3 - 3a$ 이므로

$$g'(a) = 6a^2 - 3 = 6\left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$g'(a)=0 \text{인 } a \text{의 값은 } a = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because 0 < a < 1)$$

$0 < a < 1$ 에서 함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	1
$g'(a)$		-	0	+	
$g(a)$		↘	$-\sqrt{2}$ 극소	↗	

즉, 함수 $g(a)$ 는 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 최솟값을 가지므로 최솟값은

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$a \geq 1$ 일 때, $g(a) = 3a - 4$ 는 증가하므로 함수 $g(a)$ 는 $a = 1$ 에서 최소이고 최솟값은

$$g(1) = -1$$

따라서 함수 $g(a)$ 의 최솟값은 $-\sqrt{2}$ 이다.

05 답 ⑤

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{는 상수})$$

라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 0$ 에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} g(x)$ 에서

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \therefore c = \frac{1}{2}$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x = 0$ 에서도 미분가능하다.

즉, 미분계수 $g'(0)$ 이 존재하고, $g'(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ f'(x) & (x > 0) \end{cases}$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} g'(x) \text{에서}$$

$$f'(0) = 0 \quad \therefore b = 0$$

$$\therefore f(x) = x^3 + ax^2 + \frac{1}{2}$$

ㄱ. $g(0) + g'(0) = f(0) + f'(0)$

$$= \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

ㄴ. $f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$ 이므로 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 0$ 또는 $x = -\frac{2}{3}a$

그런데 $-\frac{2}{3}a \leq 0$ 이면 $x \geq 0$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

즉, $x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 최솟값 $\frac{1}{2}$ 을 가지므로 함수 $g(x)$ 의 최솟값도 $\frac{1}{2}$ 이다.

이는 $g(x)$ 의 최솟값이 $\frac{1}{2}$ 보다 작다는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $-\frac{2}{3}a > 0$ 이므로

$$a < 0$$

$$\therefore g(1) = f(1) = a + \frac{3}{2} < \frac{3}{2}$$

ㄷ. 함수 $g(x)$ 의 최솟값이 0이면 $x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0이다.

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$-\frac{2}{3}a$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{4}{27}a^3 + \frac{1}{2}$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{2}{3}a$ 에서 최소이고 최솟값이 0이므로

$$f\left(-\frac{2}{3}a\right) = 0 \text{에서}$$

$$\frac{4}{27}a^3 + \frac{1}{2} = 0, \quad a^3 = -\frac{27}{8}$$

$$\therefore a = -\frac{3}{2} \quad (\because a \text{는 실수})$$

따라서 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ 이므로

$$g(2) = f(2) = 8 - 6 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

06 답 2

점 $P(1, 2)$ 를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y - 2 = m(x - 1)$$

$$\therefore y = mx - m + 2$$

이 직선과 곡선 $y = x^2 + \frac{3}{4}$ 이 만나는 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β

라 하면 α, β 는 이차방정식 $x^2 + \frac{3}{4} = mx - m + 2$ 의 두 근이다.

$$x^2 + \frac{3}{4} = mx - m + 2 \text{에서}$$

$$x^2 - mx + m - \frac{5}{4} = 0$$

이 이차방정식에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = m, \quad \alpha\beta = m - \frac{5}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

이때 $A(\alpha, m\alpha - m + 2), B(\beta, m\beta - m + 2)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + (m\alpha - m\beta)^2} \\ &= \sqrt{(1 + m^2)(\alpha - \beta)^2} \\ &= \sqrt{(1 + m^2)\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}} \\ &= \sqrt{(1 + m^2)\left\{m^2 - 4\left(m - \frac{5}{4}\right)\right\}} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \sqrt{(1 + m^2)(m^2 - 4m + 5)} \\ &= \sqrt{m^4 - 4m^3 + 6m^2 - 4m + 5} \quad \dots\dots \text{배점 30\%} \end{aligned}$$

$f(m) = m^4 - 4m^3 + 6m^2 - 4m + 5$ 라 하면

$$f'(m) = 4m^3 - 12m^2 + 12m - 4 = 4(m - 1)^3$$

$f'(m) = 0$ 인 m 의 값은 $m = 1$

함수 $f(m)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

m	...	1	...
$f'(m)$	-	0	+
$f(m)$	$\searrow$	4 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(m)$ 은 $m = 1$ 에서 최솟값 4를 가지므로 $\overline{AB}$ 의 최솟값은 $\sqrt{4} = 2$ 배점 30%

07 답 ③

$f(x) = x(x - a)(x - 6) = x^3 - (a + 6)x^2 + 6ax$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 2(a + 6)x + 6a$$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(0) = 6a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 원점을 지나고 다른 한 점에서 곡선에 접하는 접선의 접점의 좌표를 $(t, t^3 - (a+6)t^2 + 6at)$ ($t \neq 0$)라 하면 접선의 기울기는 $f'(t) = 3t^2 - 2(a+6)t + 6a$ 이므로 접선의 방정식은 $y - \{t^3 - (a+6)t^2 + 6at\} = \{3t^2 - 2(a+6)t + 6a\}(x - t)$
 $\therefore y = \{3t^2 - 2(a+6)t + 6a\}x - 2t^3 + (a+6)t^2$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = -2t^3 + (a+6)t^2$$

$$t^2\{2t - (a+6)\} = 0$$

$$\therefore t = \frac{a+6}{2} \quad (\because t \neq 0)$$

이때 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{a+6}{2}\right) = \frac{3(a+6)^2}{4} - (a+6)^2 + 6a$$

$$= -\frac{1}{4}a^2 + 3a - 9 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

①, ②에서 두 접선의 기울기의 곱을 $g(a)$ 라 하면

$$g(a) = 6a\left(-\frac{1}{4}a^2 + 3a - 9\right)$$

$$= -\frac{3}{2}a^3 + 18a^2 - 54a$$

$$g'(a) = -\frac{9}{2}a^2 + 36a - 54$$

$$= -\frac{9}{2}(a-2)(a-6)$$

$g'(a) = 0$ 인 a 의 값은

$$a = 2 \quad (\because 0 < a < 6)$$

$0 < a < 6$ 에서 함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	2	...	6
$g'(a)$		-	0	+	
$g(a)$		\	-48 극소	/	

따라서 함수 $g(a)$ 는 $a=2$ 에서 최솟값 -48을 가지므로 두 접선의 기울기의 곱의 최솟값은 -48이다.

08 답 9

그림과 같이 꼭짓점 O에서 밑면에 내린 수선의 발을 H라 하고, 밑면의 한 변의 길이를 x 라 하자. 이때 밑면 ABCDEF는 정육각형이므로 삼각형 ABH는 정삼각형이다.

즉, $\overline{AH} = x$ 이므로 삼각형 OAH에서

$$\overline{OH} = \sqrt{9 - x^2}$$

이때 $x > 0$, $9 - x^2 > 0$ 에서

$$0 < x < 3$$

또 밑면의 넓이는 삼각형 ABH의 넓이의 6배이므로

$$6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

따라서 정육각뿔 O-ABCDEF의 부피는

$$\frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \times \sqrt{9 - x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{9x^4 - x^6}$$

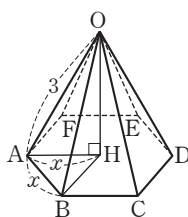
$f(x) = 9x^4 - x^6$ 이라 하면

$$f'(x) = 36x^3 - 6x^5$$

$$= -6x^3(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$x = \sqrt{6} \quad (\because 0 < x < 3)$$



$0 < x < 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\sqrt{6}$	...	3
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		/	108 극대	\	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \sqrt{6}$ 에서 최댓값 108을 가지므로 정육각뿔의 부피의 최댓값은

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{108} = 9$$

09 답 ②

정사각형 ABCD를 점 B를 원점, 직선 BC를 x 축, 직선 AB를 y 축으로 하여 그림과 같이 좌표평면 위에 나타내자.

포물선의 꼭짓점이 $E(2, 0)$ 이므로 포물선이 나타내는 식을

$y = a(x-2)^2$ ($a > 0$)이라 하면 이 포물선이 점 $A(0, 4)$ 를 지나므로

$$4 = 4a \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore y = (x-2)^2$$

또 $F(4, 2)$ 이므로 직선 AF의 방정식은

$$y - 2 = -\frac{2}{4}(x - 4) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + 4$$

포물선 $y = (x-2)^2$ 과 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 4$ 가 만나는 점 G의 x 좌표를 구하면

$$(x-2)^2 = -\frac{1}{2}x + 4$$

$$x^2 - 4x + 4 = -\frac{1}{2}x + 4, \quad x^2 - \frac{7}{2}x = 0$$

$$x\left(x - \frac{7}{2}\right) = 0 \quad \therefore x = \frac{7}{2} \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore G\left(\frac{7}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

점 P의 x 좌표를 t ($0 < t < \frac{7}{2}$)라 하면

$$P\left(t, -\frac{1}{2}t + 4\right), \quad Q(t, (t-2)^2)$$

삼각형 AQP의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{1}{2}t\left\{-\frac{1}{2}t + 4 - (t-2)^2\right\} = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{7}{4}t^2$$

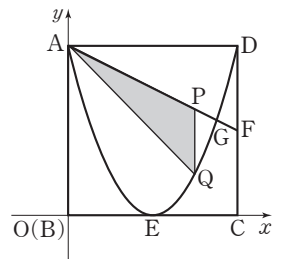
$$\therefore S'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{7}{2}t = -\frac{3}{2}t\left(t - \frac{7}{3}\right)$$

$$S'(t) = 0 \text{인 } t \text{의 값은 } t = \frac{7}{3} \quad (\because 0 < t < \frac{7}{2})$$

$0 < t < \frac{7}{2}$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\frac{7}{3}$	...	$\frac{7}{2}$
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		/	$\frac{343}{108}$ 극대	\	

따라서 함수 $S(t)$ 는 $t = \frac{7}{3}$ 에서 최댓값 $\frac{343}{108}$ 을 가지므로 삼각형 AQP의 넓이의 최댓값은 $\frac{343}{108}$ 이다.



10 답 ④

두 점 A(1, 3), B(-2, -3)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{6}{3}(x-1) \quad \therefore y=2x+1$$

곡선 $y=x^3-3x^2-7x+a$ 와 선분 AB가 만나려면 $-2 \leq x \leq 1$ 에서 방정식 $x^3-3x^2-7x+a=2x+1$, 즉 $-x^3+3x^2+9x+1=a$ 가 실근을 가져야 한다.

따라서 함수 $y=-x^3+3x^2+9x+1$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 만나는 점이 존재해야 한다.

$$f(x)=-x^3+3x^2+9x+1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=-3x^2+6x+9$$

$$=-3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 (\because -2 \leq x \leq 1)$$

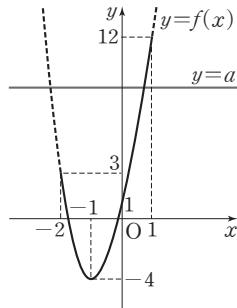
$-2 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	3	\	-4 극소	/	12

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 만나는 점을 갖도록 직선 $y=a$ 를 그어 보면 a 의 값의 범위는

$$-4 \leq a \leq 12$$

따라서 정수 a 는 -4, -3, -2, ..., 12의 17개이다.



11 답 13

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2 \text{이라 하면 } f'(x)=x^3-3x$$

접점의 좌표를 $(t, \frac{1}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2)$ 이라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=t^3-3t \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-\left(\frac{1}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2\right)=(t^3-3t)(x-t)$$

$$\therefore y=(t^3-3t)x-\frac{3}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2$$

이 직선이 점 $(\frac{1}{3}, a)$ 를 지나므로

$$a=(t^3-3t) \times \frac{1}{3}-\frac{3}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2$$

$$\therefore -\frac{3}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-t=a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 $(\frac{1}{3}, a)$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선이 세 개 존재하려면 사차방정식 ①이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

따라서 함수 $y=-\frac{3}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-t$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 만나는 점이 3개이어야 한다.

$$g(t)=-\frac{3}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-t \text{라 하면}$$

$$g'(t)=-3t^3+t^2+3t-1$$

$$=-(t+1)(t-1)(3t-1)$$

$$g'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=-1 \text{ 또는 } t=\frac{1}{3} \text{ 또는 } t=1$$

함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

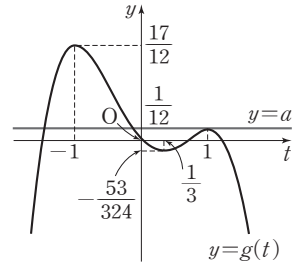
t	...	-1	...	$\frac{1}{3}$	...	1	...
$g'(t)$	+	0	-	0	+	0	-
$g(t)$	/	$\frac{17}{12}$ 극대	\	$-\frac{53}{324}$ 극소	/	$\frac{1}{12}$ 극대	\

이때 $g(0)=0$ 이므로 함수 $y=g(t)$ 의 그래프는 그림과 같고, 만나는 점이 3개가 되도록 직선 $y=a$ 를 그어 보면 양수 a 의 값은

$$a=\frac{1}{12}$$

따라서 $p=12, q=1$ 이므로

$$p+q=13$$



12 답 21

$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k \text{에서}$$

$$f(x)+|f(x)+x|-6x=k$$

따라서 함수 $y=f(x)+|f(x)+x|-6x$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 만나는 점이 4개이어야 한다.

$$g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x \text{라 하자.}$$

$$f(x)+x=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x+x$$

$$=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+11x$$

$$=\frac{1}{2}x(x^2-9x+22)$$

$$\text{이때 } x^2-9x+22=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0 \text{이므로 } x<0 \text{일 때 } f(x)+x<0,$$

$$x \geq 0 \text{일 때 } f(x)+x \geq 0 \text{이다.}$$

$$\therefore g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x$$

$$=\begin{cases} -7x & (x<0) \\ 2f(x)-5x & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -7x & (x<0) \\ x^3-9x^2+15x & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$h(x)=x^3-9x^2+15x \text{ (} x \geq 0 \text{)라 하면}$$

$$h'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$$

$$h'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \text{ 또는 } x=5$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

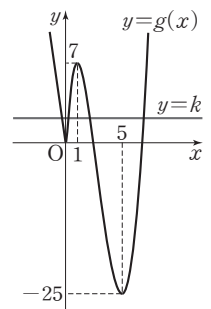
x	0	...	1	...	5	...
$h'(x)$		+	0	-	0	+
$h(x)$	0	/	7 극대	\	-25 극소	/

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 만나는 점이 4개가 되도록 직선 $y=k$ 를 그어 보면 k 의 값의 범위는

$$0 < k < 7$$

따라서 정수 k 의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 합은

$$1+2+3+4+5+6=21$$



13 답 ①

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 (가)에서 $f(0)=0$ 이므로
 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

(가)에서 $g(0)=0$ 이므로 $g(0)=f(0)+|f'(0)|$ 에서

$$|b|=0 \quad \therefore b=0$$

$$\therefore f(x)=x^3+ax^2, f'(x)=3x^2+2ax$$

방정식 $f(x)=0$ 에서 $x^3+ax^2=0$

$$x^2(x+a)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=-a$$

(나)에서 방정식 $f(x)=0$ 이 양의 실근을 가지므로

$$-a>0 \quad \therefore a<0$$

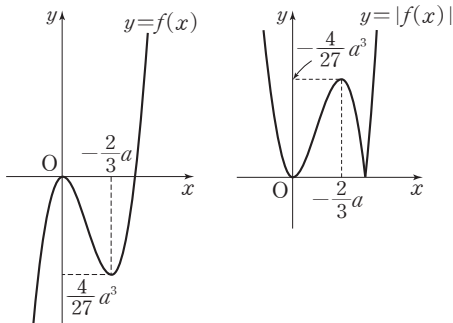
$f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$ 에서 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은

$$x=0 \text{ 또는 } x=-\frac{2}{3}a$$

$a<0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	$-\frac{2}{3}a$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	0 극대	↘	$\frac{4}{27}a^3$ 극소	↗

두 함수 $y=f(x), y=|f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



(다)에서 방정식 $|f(x)|=4$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 함수
 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=4$ 가 만나는 점이 3개이다.

따라서 $-\frac{4}{27}a^3=4$ 이므로

$$a^3=-27 \quad \therefore a=-3 \quad (\because a \text{는 실수})$$

즉, $f(x)=x^3-3x^2, f'(x)=3x^2-6x$ 이므로

$$g(x)=x^3-3x^2+|3x^2-6x|$$

$$\therefore g(3)=27-27+|27-18|=9$$

14 답 ④

$f(x)=ax^3+a^2x^2+bx$ 에서

$$f'(x)=3ax^2+2a^2x=ax(3x+2a)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=-\frac{2}{3}a$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

(i) $a>0$ 일 때,

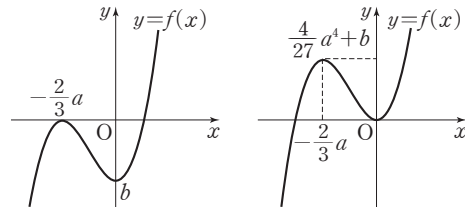
x	...	$-\frac{2}{3}a$	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}a^4+b$ 극대	↘	b 극소	↗

(ii) $a<0$ 일 때,

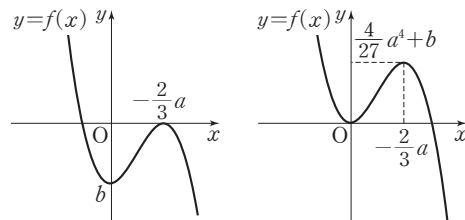
x	...	0	...	$-\frac{2}{3}a$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	b 극소	↗	$\frac{4}{27}a^4+b$ 극대	↘

ㄱ. 방정식 $f(x)=0$ 이 중근을 가지면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축에 접한다.

(i) $a>0$ 일 때,



(ii) $a<0$ 일 때,



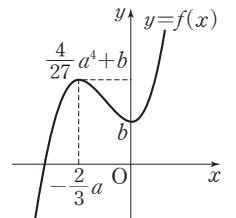
(i), (ii)에서 $f(-\frac{2}{3}a)=0$ 또는 $f(0)=0$ 이어야 하므로

$$\frac{4}{27}a^4+b=0 \text{ 또는 } b=0 \quad \therefore b=-\frac{4}{27}a^4 \text{ 또는 } b=0$$

ㄴ. $b>0$ 일 때

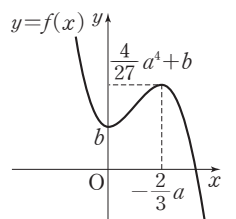
(i) $a>0$ 이면 그림과 같이 함수 $y=f(x)$

의 그래프가 x 축과 한 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$ 은 오직 한 개의 실근을 갖는다.



(ii) $a<0$ 이면 그림과 같이 함수 $y=f(x)$

의 그래프가 x 축과 한 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$ 은 오직 한 개의 실근을 갖는다.

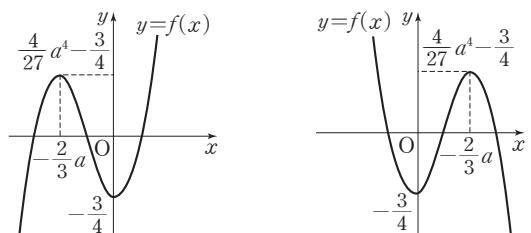


(i), (ii)에서 $b>0$ 이면 방정식 $f(x)=0$ 은 오직 한 개의 실근을 갖는다.

ㄷ. $b=-\frac{3}{4}$ 일 때, 방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점이 3개이어야 한다.

(i) $a>0$ 일 때,

(ii) $a<0$ 일 때,



(i), (ii)에서 $f\left(-\frac{2}{3}a\right) > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{4}{27}a^4 - \frac{3}{4} > 0, a^4 - \frac{81}{16} > 0$$

$$\left(a^2 + \frac{9}{4}\right)\left(a + \frac{3}{2}\right)\left(a - \frac{3}{2}\right) > 0$$

그런데 $a^2 + \frac{9}{4} > 0$ 이므로

$$\left(a + \frac{3}{2}\right)\left(a - \frac{3}{2}\right) > 0$$

$$\therefore a < -\frac{3}{2} \text{ 또는 } a > \frac{3}{2}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

idea 15 답 52

$$a\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -9, a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 27 \text{ 이므로}$$

$$(a + \beta + \gamma)^2 = a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(a\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ = 27 - 18 = 9$$

$$\therefore a + \beta + \gamma = -3 \text{ 또는 } a + \beta + \gamma = 3$$

(i) $a + \beta + \gamma = -3$ 일 때,

$a\beta\gamma = a$ 라 하면 α, β, γ 는 방정식 $x^3 + 3x^2 - 9x - a = 0$ 의 서로 다른 세 실근이다.

방정식 $x^3 + 3x^2 - 9x - a = 0$ 에서

$$x^3 + 3x^2 - 9x = a$$

따라서 함수 $y = x^3 + 3x^2 - 9x$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 만나는 점이 3개이어야 한다.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ 인 } x \text{의 값은 } x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

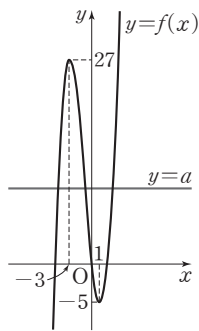
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	27 극대	$\searrow$	-5 극소	$\nearrow$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로
만나는 점이 3개가 되도록 직선 $y = a$ 를 그
어 보면 a 의 값의 범위는

$$-5 < a < 27$$

$$\therefore -5 < a\beta\gamma < 27$$



(ii) $a + \beta + \gamma = 3$ 일 때,

$a\beta\gamma = b$ 라 하면 α, β, γ 는 방정식 $x^3 - 3x^2 - 9x - b = 0$ 의 서로 다른 세 실근이다.

방정식 $x^3 - 3x^2 - 9x - b = 0$ 에서

$$x^3 - 3x^2 - 9x = b$$

따라서 함수 $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ 의 그래프와 직선 $y = b$ 가 만나는 점이 3개이어야 한다.

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 9x \text{ 라 하면}$$

$$g'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$g'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 3$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	-27 극소	$\nearrow$

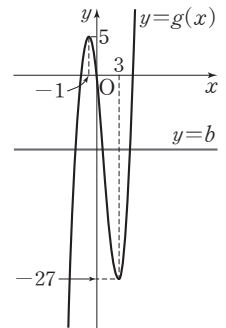
함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므

로 만나는 점이 3개가 되도록 직선 $y = b$

를 그어 보면 b 의 값의 범위는

$$-27 < b < 5$$

$$\therefore -27 < a\beta\gamma < 5$$



(i), (ii)에서 $-27 < a\beta\gamma < 27$

따라서 정수 $a\beta\gamma$ 의 최댓값은 26, 최솟값은 -26이므로

$$M = 26, m = -26$$

$$\therefore M - m = 52$$

개념 NOTE

세 수 α, β, γ 를 근으로 하고 x^3 의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3 - (a + \beta + \gamma)x^2 + (a\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - a\beta\gamma = 0$$

16 답 5

부등식 $f(x) > g(x)$ 에서

$$2x^{n+2} - (n+5)(n-6) > (n+2)x^2$$

$$2x^{n+2} - (n+2)x^2 - (n+5)(n-6) > 0$$

$$h(x) = 2x^{n+2} - (n+2)x^2 - (n+5)(n-6) \text{ 이라 하면}$$

$$h'(x) = 2(n+2)x^{n+1} - 2(n+2)x = 2(n+2)x(x^n - 1)$$

$$h'(x) = 0 \text{ 인 } x \text{의 값은 } x = 1 (\because x > 0)$$

$\hookrightarrow n$ 이 홀수, 짝수임에 관계없이 $x > 0$ 에서 $x^n - 1 = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은 1뿐이다.

$x > 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	$-n^2 + 30$ 극소	$\nearrow$

배점 50%

함수 $h(x)$ 는 $x = 1$ 에서 최솟값 $-n^2 + 30$ 을 가지므로 $x > 0$ 에서 부등식 $h(x) > 0$ 이 성립하려면

$$-n^2 + 30 > 0 \quad \therefore n^2 < 30 \quad \text{배점 30\%}$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n 은 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

배점 20%

17 답 34

(i) $f(x) \leq 12x + k$ 에서

$$-x^4 - 2x^3 - x^2 \leq 12x + k$$

$$\therefore x^4 + 2x^3 + x^2 + 12x + k \geq 0$$

$$h(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 12x + k \text{ 라 하면}$$

$$h'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x + 12 = 2(x+2)(2x^2 - x + 3)$$

$$h'(x) = 0 \text{ 인 } x \text{의 값은 } x = -2 (\because 2x^2 - x + 3 > 0)$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	\	$k-20$ 극소	/

함수 $h(x)$ 는 $x=-2$ 에서 최솟값 $k-20$ 을 가지므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $h(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$k-20 \geq 0 \quad \therefore k \geq 20$$

(ii) $12x+k \leq g(x)$ 에서

$$12x+k \leq 3x^2+a \quad \therefore 3x^2-12x+a-k \geq 0$$

이 이차부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하려면 이차방정식

$$3x^2-12x+a-k=0 \text{의 판별식을 } D \text{라 할 때,}$$

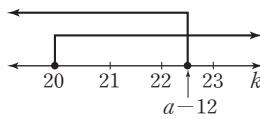
$$\frac{D}{4} = 36-3(a-k) \leq 0, \quad 3k \leq 3a-36 \quad \therefore k \leq a-12$$

(i), (ii)에서 $k \geq 20$, $k \leq a-12$ 이고 이를

만족시키는 자연수 k 의 개수가 3이므로

$$22 \leq a-12 < 23 \quad \therefore 34 \leq a < 35$$

따라서 자연수 a 의 값은 34이다.



18 답 130

$$f(x) = x^3 - mx^2 + (m^2 - 2m)x + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2mx + m^2 - 2m$$

이때 함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 할 때,

$$\frac{D}{4} = m^2 - 3(m^2 - 2m) > 0$$

$$-2m^2 + 6m > 0, \quad m(m-3) < 0 \quad \therefore 0 < m < 3$$

따라서 자연수 m 의 값은 1, 2이다.

(i) $m=1$ 일 때,

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \quad (\because x \geq 0)$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	5	\	4 극소	/

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 4를 가지므로 $x \geq 0$ 에서 부등식

$$f(x) \geq k \text{가 성립하려면}$$

$$k \leq 4$$

(ii) $m=2$ 일 때,

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x-4)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=\frac{4}{3}$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{4}{3}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	5	\	$\frac{103}{27}$ 극소	/

함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{4}{3}$ 에서 최솟값 $\frac{103}{27}$ 을 가지므로 $x \geq 0$ 에서 부등식

$$f(x) \geq k \text{가 성립하려면}$$

$$k \leq \frac{103}{27}$$

(i), (ii)에서 $k \leq \frac{103}{27}$

따라서 k 의 최댓값이 $\frac{103}{27}$ 이므로

$$p=27, \quad q=103$$

$$\therefore p+q=130$$

19 답 ②

$x > 0$ 이므로 주어진 부등식의 양변에 x 를 곱하면

$$3x^4 - kx^3 \geq 3 - k$$

$$3x^4 - kx^3 - 3 + k \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) = 3x^4 - kx^3 - 3 + k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 12x^3 - 3kx^2 = 3x^2(4x - k)$$

(i) $k \leq 0$ 일 때,

$x > 0$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가하고,

$f(0) = k - 3 < 0$ 이므로 $f(x) < 0$ 인 x 의 값이 존재한다.

즉, 부등식 $\textcircled{1}$ 은 성립하지 않는다.

(ii) $k > 0$ 일 때,

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=\frac{k}{4} \quad (\because x > 0)$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{k}{4}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$f(\frac{k}{4})$ 극소	/

함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{k}{4}$ 에서 최솟값 $f(\frac{k}{4})$ 를 가지므로 $x > 0$ 에서 부등

식 $\textcircled{1}$ 이 성립하려면

$$3\left(\frac{k}{4}\right)^4 - k\left(\frac{k}{4}\right)^3 - 3 + k \geq 0, \quad -\left(\frac{k}{4}\right)^4 - 3 + k \geq 0$$

$$g(k) = -\left(\frac{k}{4}\right)^4 - 3 + k \text{라 하면}$$

$$g'(k) = -\frac{k^3}{64} + 1 = -\frac{1}{64}(k^3 - 64)$$

$$= -\frac{1}{64}(k-4)(k^2 + 4k + 16)$$

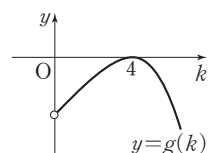
$$g'(k)=0 \text{인 } k \text{의 값은 } k=4 \quad (\because k^2 + 4k + 16 > 0)$$

$k > 0$ 에서 함수 $g(k)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	0	...	4	...
$g'(k)$		+	0	-
$g(k)$		/	0 극대	\

$k > 0$ 에서 함수 $y=g(k)$ 의 그래프는 그림

과 같으므로 부등식 $g(k) \geq 0$ 을 만족시키는 k 의 값은 4이다.



(i), (ii)에서 $x > 0$ 일 때, 주어진 부등식을 만족시키는 k 의 값은 4이다.

24 **답** $12\sqrt{3}\text{cm}^2$

정사각형의 한 변의 길이가 매초 4cm씩 늘어나므로 t 초 후의 정사각형의 한 변의 길이를 $l\text{cm}$ 라 하면

$$l = 4 + 4t$$

즉, t 초 후의 정사각형의 넓이를 $S\text{cm}^2$ 라 하면

$$S = l^2 = (4 + 4t)^2 = 16t^2 + 32t + 16$$

시각 t 에 대한 넓이 S 의 변화율은

$$\frac{dS}{dt} = 32t + 32 (\text{cm}^2/\text{s})$$

즉, $32t + 32 = 96$ 이므로

$$t = 2$$

한편 이등변삼각형도 그 모양을 유지하면서

같은 속도로 크기가 커지므로 빗변의 길이가

$(4 + 4t)\text{cm}$ 인 이등변삼각형의 높이는

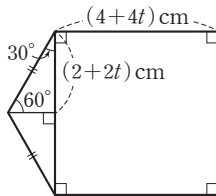
$$(2 + 2t) \tan 30^\circ = \frac{2 + 2t}{\sqrt{3}} (\text{cm})$$

즉, 이등변삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (4 + 4t) \times \frac{2 + 2t}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}(1 + t)^2}{3} (\text{cm}^2)$$

따라서 $t = 2$ 일 때, 이등변삼각형의 넓이는

$$\frac{4\sqrt{3} \times 9}{3} = 12\sqrt{3} (\text{cm}^2)$$



25 **답** ④

세 점 P, Q, R가 동시에 출발한 지 t 초 후의 세 선분 AP, AQ, AR의 길이는

$$\overline{AP} = t, \overline{AQ} = t, \overline{AR} = 2t \quad (\text{단, } 0 \leq t \leq 3)$$

사면체 A-PQR의 부피를 V 라 하자.

(i) 삼각형 APQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times t \times t = \frac{1}{2} t^2$$

$$\therefore V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} t^2 \times 2t$$

$$= \frac{1}{3} t^3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 삼각형 PQR에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{t^2 + t^2} = \sqrt{2}t$$

$$\overline{PR} = \overline{QR} = \sqrt{t^2 + (2t)^2} = \sqrt{5}t$$

그림과 같이 점 R에서 변 PQ에 내린 수선의 발을 T라 하면

$$\begin{aligned} \overline{RT} &= \sqrt{\overline{PR}^2 - \overline{PT}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{5}t)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2} \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}}t \end{aligned}$$

즉, 삼각형 PQR의 넓이는

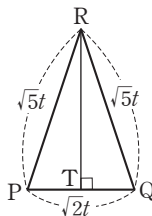
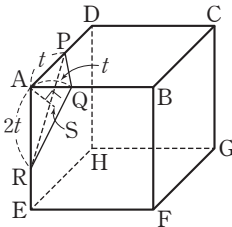
$$\frac{1}{2} \times \sqrt{2}t \times \frac{3}{\sqrt{2}}t = \frac{3}{2} t^2$$

이때 $\overline{AS} = a$ 라 하면

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} t^2 \times a = \frac{1}{2} at^2$$

(i), (ii)에서

$$\frac{1}{3} t^3 = \frac{1}{2} at^2 \quad \therefore a = \frac{2}{3} t$$



$\overline{AS} = \frac{4}{3}$ 가 될 때의 시각 t 는

$$\frac{2}{3}t = \frac{4}{3} \quad \therefore t = 2$$

㉠에서 시각 t 에 대한 부피 V 의 변화율은

$$\frac{dV}{dt} = t^2$$

따라서 $t = 2$ 일 때, 사면체 A-PQR의 부피의 변화율은

$$2^2 = 4$$

26 **답** 90

A($t, 0$), B($t-3, 6$)이므로 직선 AB의 방정식은

$$y = -\frac{6}{3}(x-t)$$

$$\therefore y = -2x + 2t$$

선분 AB와 직선 $y = x$ 가 만나는 점을 P라 하고 점 P의 x 좌표를 구하면

$$-2x + 2t = x$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}t$$

$$\therefore P\left(\frac{2}{3}t, \frac{2}{3}t\right)$$

(i) $0 < t < 3$ 일 때,

삼각형 OAP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times t \times \frac{2}{3}t = \frac{1}{3}t^2$$

$$\therefore V = \frac{1}{3}t^2 \times t = \frac{1}{3}t^3$$

시각 t 에 대한 부피 V 의 변화율은

$$\frac{dV}{dt} = t^2$$

따라서 $t = 2$ 일 때, 부피 V 의 변화율 a 는

$$a = 2^2 = 4$$

(ii) $3 < t < 9$ 일 때,

선분 BC와 직선 $y = x$ 가 만나는 점을 Q라

하면 Q($t-3, t-3$)이므로 사각형 APQC

의 넓이는

$$\triangle ABC - \triangle PBQ$$

$$= \frac{1}{2} \times \{t - (t-3)\} \times 6$$

$$= \frac{1}{2} \times \{6 - (t-3)\} \times \left\{ \frac{2}{3}t - (t-3) \right\}$$

$$= 9 - \frac{1}{2}(9-t)\left(3 - \frac{1}{3}t\right)$$

$$= -\frac{1}{6}t^2 + 3t - \frac{9}{2}$$

$$\therefore V = \left(-\frac{1}{6}t^2 + 3t - \frac{9}{2}\right) \times t$$

$$= -\frac{1}{6}t^3 + 3t^2 - \frac{9}{2}t$$

시각 t 에 대한 부피 V 의 변화율은

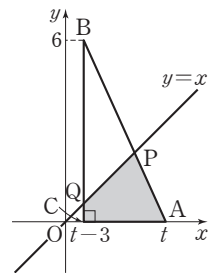
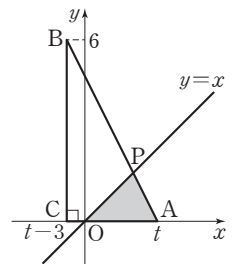
$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2}t^2 + 6t - \frac{9}{2}$$

따라서 $t = 4$ 일 때, 부피 V 의 변화율 b 는

$$b = -8 + 24 - \frac{9}{2} = \frac{23}{2}$$

(i), (ii)에서

$$12(b-a) = 12\left(\frac{23}{2} - 4\right) = 90$$



01 ④ 02 51 03 12 04 ④ 05 38 06 ③
07 16 08 ⑤ 09 ② 10 ①

01 답 ④

1단계 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내기

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^4 - 4(a-1)x^3 - 6ax^2 \\ f'(x) &= 12x^3 - 12(a-1)x^2 - 12ax \\ &= 12x(x+1)(x-a) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=a$

$a>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	a	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	$-2a-1$ 극소	/	0 극대	\	$-a^4-2a^3$ 극소	/

2단계 $f(-1) \leq f(a)$ 일 때, $g(t)$ 의 미분가능성 보기

(i) $f(-1) \leq f(a)$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$t < -1$ 이면

$$g(t) = f(t) = 3t^4 - 4(a-1)t^3 - 6at^2$$

$t \geq -1$ 이면

$$g(t) = f(-1) = -2a-1$$

이때 함수 $g(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $t=-1$ 에서 미분가능해야 하므로 미분계수 $g'(-1)$ 이 존재해야 한다.

$$g'(t) = \begin{cases} 12t^3 - 12(a-1)t^2 - 12at & (t < -1) \\ 0 & (t > -1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\lim_{t \rightarrow -1+} g'(t) = \lim_{t \rightarrow -1+} 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -1-} g'(t) &= \lim_{t \rightarrow -1-} \{12t^3 - 12(a-1)t^2 - 12at\} \\ &= -12 - 12(a-1) + 12a = 0 \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{t \rightarrow -1+} g'(t) = \lim_{t \rightarrow -1-} g'(t)$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 $t=-1$ 에서 미분가능하다.

3단계 $f(-1) > f(a)$ 일 때, $g(t)$ 의 미분가능성 보기

(ii) $f(-1) > f(a)$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

이때 $0 < k < a$ 인 실수 k 에 대하여

$$f(-1) = f(k)$$

$t < -1$ 이면

$$g(t) = f(t) = 3t^4 - 4(a-1)t^3 - 6at^2$$

$-1 \leq t \leq k$ 이면

$$g(t) = f(-1) = -2a-1$$

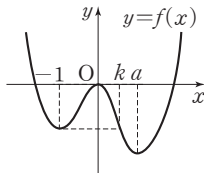
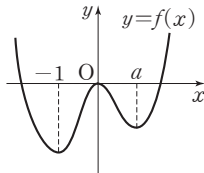
$k < t < a$ 이면

$$g(t) = f(t) = 3t^4 - 4(a-1)t^3 - 6at^2$$

$t \geq a$ 이면

$$g(t) = f(a) = -a^4 - 2a^3$$

이때 함수 $g(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $t=-1$, $t=k$, $t=a$ 에서 미분가능해야 하므로 미분계수 $g'(-1)$, $g'(k)$, $g'(a)$ 가 존재해야 한다.



$$g'(t) = \begin{cases} 12t^3 - 12(a-1)t^2 - 12at & (t < -1) \\ 0 & (-1 < t < k) \\ 12t^3 - 12(a-1)t^2 - 12at & (k < t < a) \\ 0 & (t > a) \end{cases} \text{이므로}$$

① $t=-1$ 일 때,

$$\lim_{t \rightarrow -1+} g'(t) = \lim_{t \rightarrow -1+} 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -1-} g'(t) &= \lim_{t \rightarrow -1-} \{12t^3 - 12(a-1)t^2 - 12at\} \\ &= -12 - 12(a-1) + 12a = 0 \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{t \rightarrow -1+} g'(t) = \lim_{t \rightarrow -1-} g'(t)$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 $t=-1$ 에서 미분가능하다.

② $t=k$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow k+} g'(t) &= \lim_{t \rightarrow k+} \{12t^3 - 12(a-1)t^2 - 12at\} \\ &= 12k^3 - 12(a-1)k^2 - 12ak \\ &= 12k(k+1)(k-a) \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow k-} g'(t) = \lim_{t \rightarrow k-} 0 = 0$$

이때 $0 < k < a$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow k+} g'(t) \neq 0$$

따라서 $\lim_{t \rightarrow k+} g'(t) \neq \lim_{t \rightarrow k-} g'(t)$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 $t=k$ 에서 미분가능하지 않다.

③ $t=a$ 일 때,

$$\lim_{t \rightarrow a+} g'(t) = \lim_{t \rightarrow a+} 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a-} g'(t) &= \lim_{t \rightarrow a-} \{12t^3 - 12(a-1)t^2 - 12at\} \\ &= 12a^3 - 12(a-1)a^2 - 12a^2 = 0 \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{t \rightarrow a+} g'(t) = \lim_{t \rightarrow a-} g'(t)$ 이므로 함수 $g(t)$ 는 $t=a$ 에서 미분가능하다.

①, ②, ③에서 함수 $g(t)$ 는 $t=k$ 에서 미분가능하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

4단계 a 의 최댓값 구하기

(i), (ii)에서 $f(-1) \leq f(a)$ 일 때 함수 $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f(-1) - f(a) \leq 0$ 에서

$$-2a-1 - (-a^4-2a^3) \leq 0$$

$$a^4 + 2a^3 - 2a - 1 \leq 0$$

$$(a+1)^3(a-1) \leq 0$$

그런데 $a > 0$ 에서 $(a+1)^3 > 0$ 이므로

$$a-1 \leq 0$$

$$\therefore 0 < a \leq 1 \quad (\because a > 0)$$

따라서 a 의 최댓값은 1이다.

02 답 51

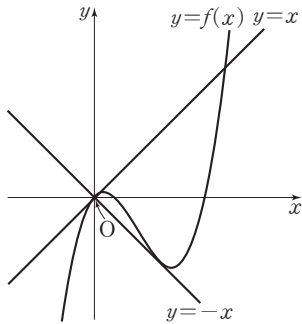
1단계 $f(x)$ 의 식 세우기

(가)에서 방정식 $f(x) - x = 0$, 즉 $f(x) = x$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점이 2개이다.

또 (나)에서 방정식 $f(x) + x = 0$, 즉 $f(x) = -x$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-x$ 가 만나는 점이 2개이다.

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-x$ 가 만나는 점이 2개이려면 $f(x)$ 의 극값이 존재해야 한다.

이때 $f(0)=0$ 이고 두 직선 $y=x$, $y=-x$ 도 원점을 지나므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 원점에서 직선 $y=x$ 에 접하고 원점이 아닌 다른 한 점에서 직선 $y=-x$ 에 접해야 한다.



함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점 중 원점이 아닌 점의 x 좌표를 b 라 하고

$$f(x)-x=ax^2(x-b) \quad (a, b \text{는 상수}, a>0)$$

라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2(x-b) + x \\ &= ax^3 - abx^2 + x \end{aligned}$$

$$f'(x) = 3ax^2 - 2abx + 1 \text{ 이므로 } f'(1) = 1 \text{ 에서}$$

$$3a - 2ab + 1 = 1$$

$$a(3-2b) = 0 \quad \therefore b = \frac{3}{2} \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore f(x) = ax^3 - \frac{3}{2}ax^2 + x$$

2단계 $f(3)$ 의 값 구하기

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-x$ 는 원점에서 만나고 다른 한 점에서 접하므로 삼차방정식 $f(x)+x=0$ 은 0과 0이 아닌 중근을 갖는다. 방정식 $f(x)+x=0$ 에서

$$ax^3 - \frac{3}{2}ax^2 + 2x = 0$$

$$2ax^3 - 3ax^2 + 4x = 0$$

$$\therefore x(2ax^2 - 3ax + 4) = 0$$

즉, 이차방정식 $2ax^2 - 3ax + 4 = 0$ 이 0이 아닌 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D = 9a^2 - 32a = 0$$

$$a(9a - 32) = 0$$

$$\therefore a = \frac{32}{9} \quad (\because a > 0)$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{32}{9}x^3 - \frac{16}{3}x^2 + x \text{ 이므로}$$

$$f(3) = 96 - 48 + 3 = 51$$

03 답 12

1단계 출발 후 10초 동안 A, B가 서로 만난 횟수의 의미 파악하기

A, B가 t 초 동안 움직인 거리를 각각 $f(t)$, $g(t)$ 라 하면

$$f(t) = \frac{1}{3}t^3, \quad g(t) = \frac{5}{2}t^2 + 6t$$

이때 트랙의 둘레의 길이가 10이고 처음 A, B 사이의 거리가 5이므로 A, B는 $f(t)-g(t)=10n+5$ (n 은 정수)일 때 서로 만난다.

$$\frac{1}{3}t^3 - \left(\frac{5}{2}t^2 + 6t\right) = 10n + 5 \text{ 에서}$$

$$\frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 6t - 5 = 10n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 A, B가 서로 만난 횟수는 t 에 대한 방정식 $\textcircled{1}$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같으므로 출발 후 10초 동안 A, B가 서로 만난 횟수는

$0 < t \leq 10$ 에서 함수 $y = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 6t - 5$ 의 그래프와 직선 $y = 10n$ 이 만나는 점의 개수와 같다.

2단계 출발 후 10초 동안 A, B가 서로 만난 횟수 구하기

$$h(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 6t - 5 \text{ 라 하면}$$

$$h'(t) = t^2 - 5t - 6 = (t+1)(t-6)$$

$$h'(t) = 0 \text{ 인 } t \text{의 값은 } t = 6 \quad (\because 0 < t \leq 10)$$

$0 < t \leq 10$ 에서 함수 $h(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	6	$\cdots$	10
$h'(t)$		-	0	+	
$h(t)$		$\searrow$	-59 극소	$\nearrow$	$\frac{55}{3}$

이때 $h(0) = -5$ 이므로 $0 < t \leq 10$ 에서 함수 $y = h(t)$ 의 그래프는 그림과 같고 만나는 점이 생기도록 직선 $y = 10n$ 을 그려 보면

(i) $10n = -59$ 일 때,

이를 만족시키는 정수 n 은 존재하지 않는다.

(ii) $-59 < 10n < -5$ 일 때,

$$-\frac{59}{10} < n < -\frac{1}{2}$$

즉, 정수 n 은 $-5, -4, -3, -2, -1$ 의 5개이다.

이때 정수 n 의 값에 따라 t 의 값은 2개씩 존재하므로 함수 $y = h(t)$ 의 그래프와 직선 $y = 10n$ 이 만나는 점의 개수는

$$2 \times 5 = 10$$

(iii) $-5 \leq 10n \leq \frac{55}{3}$ 일 때,

$$-\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{11}{6}$$

즉, 정수 n 은 0, 1의 2개이다.

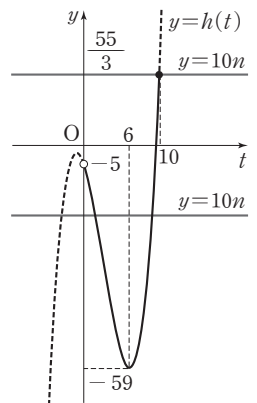
이때 정수 n 의 값에 따라 t 의 값은 1개씩 존재하므로 함수 $y = h(t)$ 의 그래프와 직선 $y = 10n$ 이 만나는 점의 개수는

$$1 \times 2 = 2$$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $y = h(t)$ 의 그래프와 직선 $y = 10n$ 이 만나는 점의 개수는

$$10 + 2 = 12$$

따라서 출발 후 10초 동안 A, B가 서로 만난 횟수는 12이다.



04 답 ④

1단계 $f(t)$ 구하기

$$y = x^3 - ax^2 + 3x - 5 \text{ 에서}$$

$$y' = 3x^2 - 2ax + 3$$

점 $(0, t)$ 를 지나고 곡선 $y = x^3 - ax^2 + 3x - 5$ 에 접하는 접선의 접점의 좌표를 $(k, k^3 - ak^2 + 3k - 5)$ 라 하면 접선의 기울기는 $3k^2 - 2ak + 3$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (k^3 - ak^2 + 3k - 5) = (3k^2 - 2ak + 3)(x - k)$$

$$\therefore y = (3k^2 - 2ak + 3)x - 2k^3 + ak^2 - 5$$

이 직선이 점 $(0, t)$ 를 지나므로

$$t = -2k^3 + ak^2 - 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 서로 다른 접선의 개수 $f(t)$ 는 k 에 대한 삼차방정식 $\textcircled{1}$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다. $\rightarrow$ 접선의 개수는 접점의 개수와 같으므로 접점의 x 좌표인 k 의 개수를 구하면 된다.

방정식 $\textcircled{1}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y = -2k^3 + ak^2 - 5$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 가 만나는 점의 개수와 같다.

$$h(k) = -2k^3 + ak^2 - 5 \text{라 하면}$$

$$h'(k) = -6k^2 + 2ak = -2k(3k - a)$$

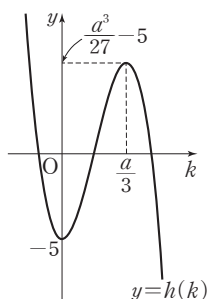
$$h'(k) = 0 \text{인 } k \text{의 값은 } k = 0 \text{ 또는 } k = \frac{a}{3}$$

a 는 자연수이므로 함수 $h(k)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$
$h'(k)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(k)$	$\searrow$	-5 극소	$\nearrow$	$\frac{a^3}{27} - 5$ 극대	$\searrow$

따라서 함수 $y = h(k)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같으므로 직선 $y = t$ 와 만나는 점의 개수 $f(t)$ 는

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (t < -5 \text{ 또는 } t > \frac{a^3}{27} - 5) \\ 2 & (t = -5 \text{ 또는 } t = \frac{a^3}{27} - 5) \\ 3 & (-5 < t < \frac{a^3}{27} - 5) \end{cases}$$



2단계 a 의 값의 범위 구하기

$$\therefore g(t) = (f \circ f)(t) = f(f(t))$$

$$= \begin{cases} f(1) & (t < -5 \text{ 또는 } t > \frac{a^3}{27} - 5) \\ f(2) & (t = -5 \text{ 또는 } t = \frac{a^3}{27} - 5) \\ f(3) & (-5 < t < \frac{a^3}{27} - 5) \end{cases}$$

이때 $f(t)$ 의 값은 1 또는 2 또는 3이므로 $g(t)$ 의 값인 $f(1), f(2), f(3)$ 도 1 또는 2 또는 3이다.

(가)에서 $g(t) > 1$ 이고, (나)에서 함수 $g(t)$ 의 치역의 원소의 개수가 1이므로 $g(t) = 2$ 또는 $g(t) = 3$

(i) $g(t) = 2$ 인 경우

$f(1) = f(2) = f(3) = 2$ 이지만 함수 $f(t)$ 에서 $t = -5, t = \frac{a^3}{27} - 5$ 인 경우에만 $f(t) = 2$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $g(t) = 3$ 인 경우

$f(1) = f(2) = f(3) = 3$ 이어야 하므로 $\rightarrow 1, 2, 3$ 이 $-5 < t < \frac{a^3}{27} - 5$ 에 모두 속해야 한다.

$$\frac{a^3}{27} - 5 > 3, \quad a^3 - 216 > 0$$

$$(a - 6)(a^2 + 6a + 36) > 0$$

이때 $a^2 + 6a + 36 > 0$ 이므로

$$a - 6 > 0$$

$$\therefore a > 6$$

(i), (ii)에서 $a > 6$

3단계 $m + g(m)$ 의 값 구하기

따라서 자연수 a 의 최솟값은 $m = 7$ 이고, $g(t) = 3$ 이므로

$$m + g(m) = 7 + 3 = 10$$

05 답 38

1단계 $y = h(x)$ 의 그래프의 개형 그리기

이차함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 극대이면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하고 $x = -1$ 에서 최대이므로

$$f(x) = a(x + 1)^2 + b \quad (a, b \text{는 상수}, a < 0) \text{라 하자.}$$

함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x = 0$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = h(0) \text{에서}$$

$$g(0) = f(0) = h(0)$$

또 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x = 0$ 에서도 미분 가능하다.

$$\text{즉, 미분계수 } h'(0) \text{이 존재하고, } h'(x) = \begin{cases} f'(x) & (x < 0) \\ g'(x) & (x > 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f'(0) = g'(0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(가)에서 방정식 $h(x) = h(0)$ 의 실근은 함수 $y = h(x)$ 의 그래프와 직선 $y = h(0)$, 즉 직선 $y = f(0)$ 이 만나는 점의 x 좌표와 같다.

이때 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = -1$ 에 대하여 대칭이므로 $x \leq 0$ 에서 방정식 $f(x) = f(0)$ 의 실근은

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

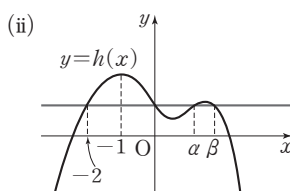
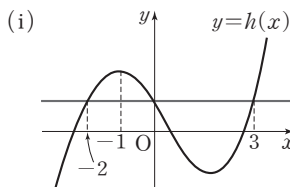
따라서 $x \leq 0$ 에서 방정식 $f(x) = f(0)$ 의 실근의 합은 -2 이므로 (가)를 만족시키려면 $x > 0$ 에서 방정식 $g(x) = f(0)$ 의 실근의 합이 3이어야 한다.

한편 $f'(x) = 2a(x + 1)$ 이므로

$$f'(0) = 2a < 0$$

$\textcircled{1}$ 에서 $g'(0) < 0$ 이므로 함수 $y = g(x)$ 의 그래프 위의 $x = 0$ 인 점에서의 접선의 기울기는 음수이다.

따라서 삼차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수의 부호에 따라 경우를 나누어 함수 $y = h(x)$ 의 그래프의 개형을 그리면 그림과 같다.



2단계 $h'(x)$ 구하기

(i) 함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수인 경우

$$g(x) - f(0) = cx(x - 3)(x + d) \quad (c, d \text{는 상수}, c > 0, d > 0) \text{라 하면}$$

$$g(x) = cx^3 + c(d - 3)x^2 - 3cdx + f(0)$$

이때 함수 $g(x)$ 의 이차항의 계수가 0이므로

$$c(d - 3) = 0$$

$$\therefore d = 3 \quad (\because c > 0)$$

$$g(x) = cx^3 - 9cx + f(0) \text{이므로}$$

$$g'(x) = 3cx^2 - 9c = 3c(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

$$g'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = \sqrt{3} \quad (\because x > 0)$$

$x > 0$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\sqrt{3}$	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $g(x)$ 는 $x = \sqrt{3}$ 에서 최소이므로 최솟값은

$$g(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}c - 9\sqrt{3}c + f(0) = -6\sqrt{3}c + f(0)$$

한편 $x \leq 0$ 에서 함수 $f(x) = a(x+1)^2 + b$ 의 최댓값은 b 이고

$$f(0) = a + b \text{ 이므로}$$

$$b = f(0) - a$$

(나)에서 최댓값과 최솟값의 차가 $3 + 4\sqrt{3}$ 이므로

$$\{f(0) - a\} - \{-6\sqrt{3}c + f(0)\} = 3 + 4\sqrt{3}$$

$$\therefore -a + 6\sqrt{3}c = 3 + 4\sqrt{3} \quad \cdots \textcircled{나}$$

㉠에서 $f'(0) = g'(0)$ 이므로

$$2a = -9c \quad \therefore a = -\frac{9}{2}c \quad \cdots \textcircled{다}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -3, c = \frac{2}{3}$$

$$\therefore f'(x) = -6(x+1), g'(x) = 2x^2 - 6$$

(ii) 함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수인 경우

$$g(x) - f(0) = cx(x-\alpha)(x-\beta) \quad (c, \alpha, \beta \text{는 상수}, c < 0, \alpha + \beta = 3)$$

라 하면

$$\begin{aligned} g(x) &= cx^3 - c(\alpha + \beta)x^2 + c\alpha\beta x + f(0) \\ &= cx^3 - 3cx^2 + c\alpha\beta x + f(0) \end{aligned}$$

이때 $c < 0$ 에서 함수 $g(x)$ 의 이차항의 계수는 0이 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서

$$h'(x) = \begin{cases} -6(x+1) & (x \leq 0) \\ 2x^2 - 6 & (x > 0) \end{cases}$$

3단계 $h'(-3) + h'(4)$ 의 값 구하기

$$\therefore h'(-3) + h'(4) = 12 + (32 - 6) = 38$$

idea 06 답 ③

1단계 부등식을 만족시키는 k 의 최솟값 파악하기

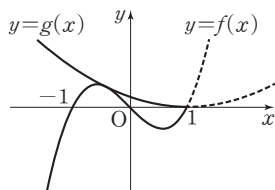
$$x^3 - kx^2 + (2k-1)x - k \leq 0 \text{에서}$$

$$x^3 - x \leq kx^2 - 2kx + k$$

$$x^3 - x \leq k(x-1)^2$$

이때 $f(x) = x^3 - x = x(x+1)(x-1)$, $g(x) = k(x-1)^2$ 이라 하면

$x \leq 1$ 에서 부등식 $f(x) \leq g(x)$ 를 만족시키는 k 의 최솟값은 그림과 같이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 제2사분면에서 접할 때의 k 의 값과 같다.



2단계 k 의 최솟값 구하기

두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 접점의 x 좌표를 $t(t < 0)$ 라 하면 $f(t) = g(t)$ 이므로

$$t^3 - t = k(t-1)^2$$

$$t(t+1)(t-1) = k(t-1)^2$$

$$\therefore t^2 + t = k(t-1) \quad (\because t < 0) \quad \cdots \textcircled{1}$$

또 $f'(x) = 3x^2 - 1$, $g'(x) = 2k(x-1)$ 이고 $f'(t) = g'(t)$ 이므로

$$3t^2 - 1 = 2k(t-1)$$

㉠을 대입하면

$$3t^2 - 1 = 2(t^2 + t)$$

$$t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\therefore t = 1 - \sqrt{2} \quad (\because t < 0)$$

이를 ㉠에 대입하면

$$(3 - 2\sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = -\sqrt{2}k$$

$$4 - 3\sqrt{2} = -\sqrt{2}k$$

$$\therefore k = 3 - 2\sqrt{2} = 3 - \sqrt{8}$$

3단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p = 3$, $q = 8$ 이므로

$$p + q = 11$$

idea 07 답 16

1단계 $f(x)$ 구하기

(나)에서 $x = 0$ 을 대입하면 $f(2) \neq 0$ 이면 $\{f(2)\}^2 < 0$ 이다.

그런데 $f(2)$ 는 실수이므로 $\{f(2)\}^2 \geq 0$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore f(2) = 0$$

또 (나)에서 $x = -4$ 를 대입하면 $f(-2) \neq 0$ 이면 $f(-2)f(6) < 0$ 이다.

그런데 (나)에서 $f(6) = 0$ 이므로

$$f(-2)f(6) = 0$$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore f(-2) = 0$$

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) = (x+2)(x-2)(x-6)$$

2단계 주어진 부등식 정리하기

부등식 $\{f(x)\}^2 \leq k(x+2)^2$ 에서

$$(x+2)^2(x-2)^2(x-6)^2 \leq k(x+2)^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때 $2 \leq x \leq 6$ 에서 $(x+2)^2 > 0$ 이므로 부등식 ㉠의 양변을 $(x+2)^2$ 으로 나누면

$$(x-2)^2(x-6)^2 \leq k$$

$$\therefore (x-2)^2(x-6)^2 - k \leq 0$$

3단계 k 의 최솟값 구하기

$$g(x) = (x-2)^2(x-6)^2 - k \text{라 하면}$$

$$g'(x) = 2(x-2)(x-6)^2 + (x-2)^2 \times 2(x-6)$$

$$= 4(x-2)(x-4)(x-6)$$

$$g'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=2 \text{ 또는 } x=4 \text{ 또는 } x=6$$

$2 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	2	...	4	...	6
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	$-k$	$\nearrow$	$16-k$ 극대	$\searrow$	$-k$

함수 $g(x)$ 는 $x = 4$ 에서 최댓값 $16 - k$ 를 가지므로 부등식 $g(x) \leq 0$ 이 성립하려면

$$16 - k \leq 0 \quad \therefore k \geq 16$$

따라서 상수 k 의 최솟값은 16이다.

08 답 ⑤

1단계 $|f(x_1)| \leq g(x_2)$ 가 성립하는 의미 파악하기

닫힌구간 $[-1, 1]$ 에 속하는 실수 x_1, x_2 에 대하여 $|f(x_1)| \leq g(x_2)$ 이려면 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $(|f(x)| \text{의 최댓값}) \leq (g(x) \text{의 최솟값})$ 이어야 한다.

2단계 $|f(x)|$ 의 최댓값 구하기

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + t \text{에서}$$

$$f'(x) = 12x^2 - 6x - 6$$

$$= 6(2x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

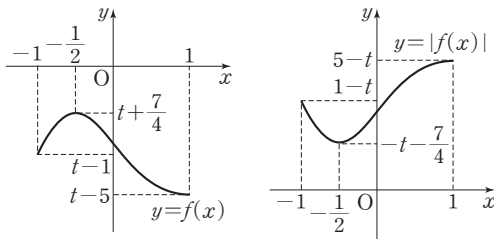
$$x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	$-\frac{1}{2}$	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$t-1$	$\nearrow$	$t+\frac{7}{4}$ 극대	$\searrow$	$t-5$

(i) $t \leq -\frac{7}{4}$ 일 때,

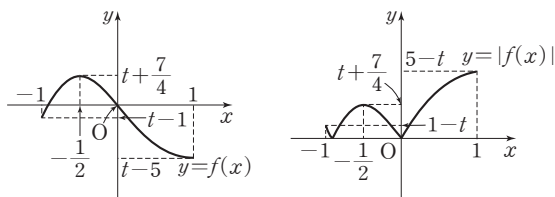
$-1 \leq x \leq 1$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



즉, 함수 $y=|f(x)|$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 $|f(1)|$ 을 갖는다.

(ii) $-\frac{7}{4} < t < 5$ 일 때,

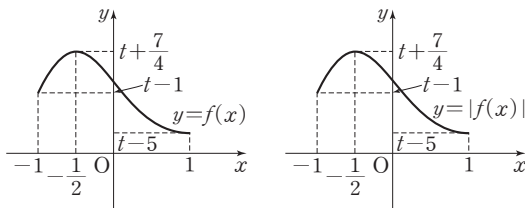
$-1 \leq x \leq 1$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



즉, 함수 $y=|f(x)|$ 는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ 에서 최댓값 $|f(-\frac{1}{2})|$ 또는 $|f(1)|$ 을 갖는다.

(iii) $t \geq 5$ 일 때,

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



즉, 함수 $y=|f(x)|$ 는 $x=-\frac{1}{2}$ 에서 최댓값 $|f(-\frac{1}{2})|$ 을 갖는다.

(i), (ii), (iii)에서 t 의 값에 관계없이 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값은 $|f(1)|$ 또는 $|f(-\frac{1}{2})|$ 이다.

$$\text{그런데 } t + \frac{7}{4} = -(t-5) \text{에서 } t = \frac{13}{8}$$

즉, $t = \frac{13}{8}$ 일 때 $f(-\frac{1}{2}) = -f(1)$ 이므로 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수

$|f(x)|$ 의 최댓값은 $t < \frac{13}{8}$ 일 때 $|f(1)| = |t-5| = 5-t$ 이고, $t \geq \frac{13}{8}$

일 때 $|f(-\frac{1}{2})| = |t+\frac{7}{4}| = t+\frac{7}{4}$ 이다.

3단계 $g(x)$ 의 최솟값 구하기

$$g(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + s \text{에서}$$

$$g'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 6x$$

$$= 6x(x+1)(2x-1)$$

$g'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = \frac{1}{2}$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	$s-2$	$\nearrow$	s 극대	$\searrow$	$s-\frac{5}{16}$ 극소	$\nearrow$	$s+2$

따라서 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $g(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최솟값 $s-2$ 를 갖는다.

4단계 $\alpha + \beta$ 의 값 구하기

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $(|f(x)| \text{의 최댓값}) \leq (g(x) \text{의 최솟값})$ 이 성립하는 s 의 값의 범위는

$t < \frac{13}{8}$ 일 때, $5-t \leq s-2$ 에서 $s \geq 7-t$

$t \geq \frac{13}{8}$ 일 때, $t+\frac{7}{4} \leq s-2$ 에서 $s \geq t+\frac{15}{4}$

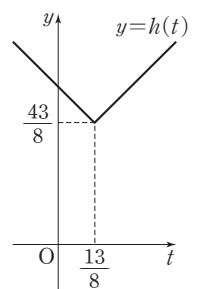
$$\therefore h(t) = \begin{cases} 7-t & (t < \frac{13}{8}) \\ t+\frac{15}{4} & (t \geq \frac{13}{8}) \end{cases}$$

함수 $y=h(t)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 함수

$h(t)$ 는 $t = \frac{13}{8}$ 에서 최솟값 $\frac{43}{8}$ 을 갖는다.

따라서 $\alpha = \frac{13}{8}$, $\beta = \frac{43}{8}$ 이므로

$$\alpha + \beta = 7$$



09 답 ②

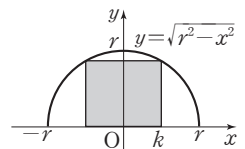
1단계 V 구하기

반구의 반지름의 길이가 매초 1씩 늘어나므로 t 초 후의 반구의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$r = 1 + t \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

반구를 정면에서 봤을 때의 반원의 중심을 원점으로 하여 좌표평면 위에 나타내면 그림과 같으므로

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (y \geq 0)$$



또 이 반원에 내접하는 직사각형을 그리고 x 축 위에 있는 직사각형의 한 꼭짓점의 좌표를 $(k, 0)$ ($0 < k < r$)이라 하면 직사각형의 높이는 $\sqrt{r^2 - k^2}$

즉, 원기둥의 부피 V 는

$$V = \pi k^2 \sqrt{r^2 - k^2} \\ = \pi \sqrt{k^4(r^2 - k^2)} \quad (\text{단, } 0 < k < r)$$

2단계 V 가 최대가 되도록 하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이 구하기

$$f(k) = k^4(r^2 - k^2) \text{이라 하면}$$

$$f'(k) = 4k^3(r^2 - k^2) - 2k^5 \\ = -2k^3(3k^2 - 2r^2)$$

$$f'(k) = 0 \text{인 } k \text{의 값은 } k = \sqrt{\frac{2}{3}}r \quad (\because 0 < k < r)$$

$0 < k < r$ 에서 함수 $f(k)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	0	...	$\sqrt{\frac{2}{3}}r$	...	r
$f'(k)$		+	0	-	
$f(k)$		↗	극대	↘	

함수 $f(k)$ 는 $k = \sqrt{\frac{2}{3}}r$ 일 때 최댓값을 가지므로 V 도 $k = \sqrt{\frac{2}{3}}r$ 일 때 최대가 된다.

3단계 시각에 대한 V^2 의 변화율 구하기

$$\text{이때 ㉠에서 } k = \sqrt{\frac{2}{3}}r = \sqrt{\frac{2}{3}}(1+t) \text{이므로}$$

$$V^2 = \pi^2 k^4(r^2 - k^2) \\ = \pi^2 \times \frac{4}{9}(1+t)^4 \left\{ (1+t)^2 - \frac{2}{3}(1+t)^2 \right\} \\ = \frac{4}{27}(1+t)^6 \pi^2$$

시각 t 에 대한 V^2 의 변화율은

$$\frac{dV^2}{dt} = \frac{8}{9}(1+t)^5 \pi^2$$

4단계 a 의 값 구하기

한편 ㉠에서 반구의 반지름의 길이가 3이 될 때의 시각 t 는

$$1+t=3$$

$$\therefore t=2$$

따라서 $t=2$ 일 때, V^2 의 변화율은

$$\frac{8}{9} \times 3^5 \pi^2 = 216\pi^2$$

$$\therefore a=216$$

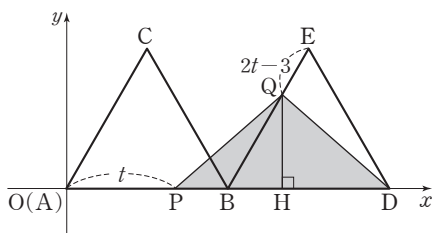
10 답 ①

1단계 a 의 값 구하기

두 삼각형 ABC, BDE를 점 A를 원점, 직선 AD를 x 축, 점 A를 지나고 직선 AD에 수직인 직선을 y 축으로 하여 좌표평면 위에 나타내자.

시각 t (초)에 대하여

(i) $\frac{3}{2} < t < 3$ 일 때,



$$\overline{AP} = t \text{이므로}$$

$$\overline{PD} = 6 - t$$

$$\text{또 } \overline{EQ} = 2t - 3 \text{이므로}$$

$$\overline{BQ} = 3 - (2t - 3) = 6 - 2t$$

이때 점 Q에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{QH} = \overline{BQ} \sin 60^\circ$$

$$= (6 - 2t) \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{3}(3 - t)$$

삼각형 PDQ의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{PD} \times \overline{QH}$$

$$= \frac{1}{2} \times (6 - t) \times \sqrt{3}(3 - t)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(t^2 - 9t + 18)$$

시각 t 에 대한 넓이 S 의 변화율은

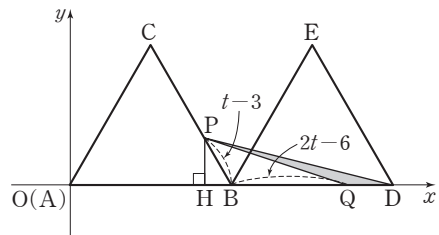
$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2t - 9)$$

따라서 $t=2$ 일 때, 삼각형 PDQ의 넓이의 변화율 a 는

$$a = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

2단계 b 의 값 구하기

(ii) $3 < t < \frac{9}{2}$ 일 때,



$\overline{PB} = t - 3$ 이므로 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{PH} = \overline{PB} \sin 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(t - 3)$$

$$\text{또 } \overline{BQ} = 2t - 6 \text{이므로}$$

$$\overline{QD} = 3 - (2t - 6) = 9 - 2t$$

삼각형 PDQ의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{QD} \times \overline{PH}$$

$$= \frac{1}{2} \times (9 - 2t) \times \frac{\sqrt{3}}{2}(t - 3)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(-2t^2 + 15t - 27)$$

시각 t 에 대한 넓이 S 의 변화율은

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4}(-4t + 15)$$

따라서 $t=4$ 일 때, 삼각형 PDQ의 넓이의 변화율 b 는

$$b = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

3단계 $(2b - a)^2$ 의 값 구하기

$$\therefore (2b - a)^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 12$$

01 -3	02 ⑤	03 ③	04 20	05 ⑤	06 14
07 ②	08 256	09 ②	10 ⑤	11 ①	12 ③
13 16	14 27				

01 답 -3

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 a 이고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 대칭축이 직선 $x=2$ 이므로 $f(x)=a(x-2)^2+b$ (b 는 상수)라 하면

$$f'(x)=2a(x-2)=2ax-4a$$

$$|f'(x)| \leq x^2+21 \text{에서}$$

$$|2ax-4a| \leq x^2+21$$

$$-x^2-21 \leq 2ax-4a \leq x^2+21$$

$$(i) -x^2-21 \leq 2ax-4a \text{에서}$$

$$x^2+2ax-4a+21 \geq 0$$

모든 실수 x 에 대하여 이 부등식이 성립하려면 이차방정식

$$x^2+2ax-4a+21=0 \text{의 판별식을 } D_1 \text{이라 할 때,}$$

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - (-4a+21) \leq 0$$

$$a^2+4a-21 \leq 0$$

$$(a+7)(a-3) \leq 0$$

$$\therefore -7 \leq a \leq 3$$

$$(ii) 2ax-4a \leq x^2+21 \text{에서}$$

$$x^2-2ax+4a+21 \geq 0$$

모든 실수 x 에 대하여 이 부등식이 성립하려면 이차방정식

$$x^2-2ax+4a+21=0 \text{의 판별식을 } D_2 \text{라 할 때,}$$

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - (4a+21) \leq 0$$

$$a^2-4a-21 \leq 0$$

$$(a+3)(a-7) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq a \leq 7$$

$$(i), (ii) \text{에서 } -3 \leq a \leq 3$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로

$$-3 \leq a < 0 \text{ 또는 } 0 < a \leq 3$$

따라서 a 의 최솟값은 -3 이다.

02 답 ⑤

$$f(1) < 2 \text{에서}$$

$$2-a+b < 2 \quad \therefore a > b \quad \dots\dots ㉠$$

$$f(-1)-f(1) < -16 \text{에서}$$

$$(-2-a-b)-(2-a+b) < -16$$

$$-4-2b < -16, 2b > 12$$

$$\therefore b > 6 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{에서 } a > b > 6 \quad \dots\dots ㉢$$

$$\neg. f(x)=2x^3-ax^2+bx \text{에서}$$

$$f'(x)=6x^2-2ax+b$$

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - 6b$$

이때 ㉢에 의하여

$$a^2-6b > b^2-6b=b(b-6) > 0$$

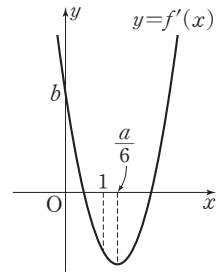
즉, $D_1 > 0$ 이므로 방정식 $f'(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$$\neg. f'(x)=6x^2-2ax+b=6\left(x-\frac{a}{6}\right)^2-\frac{a^2}{6}+b \text{이므로 함수 } f'(x) \text{는}$$

$$x=\frac{a}{6} \text{에서 최소이고}$$

$$\frac{a}{6} > 1 \quad (\because ㉢)$$

따라서 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프의 개형이
그림과 같고, $b > 6$ 이므로 $-1 < x < 0$ 에서
 $f'(x) > 0$ 이다.



$$\neg. \text{ 방정식 } f(x)-f'(k)x=0 \text{에서}$$

$$2x^3-ax^2+bx-(6k^2-2ak+b)x=0$$

$$x(2x^2-ax-6k^2+2ak)=0 \quad \dots\dots ㉣$$

따라서 삼차방정식 ㉣의 한 근이 0이므로 삼차방정식 ㉣의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 이차방정식 $2x^2-ax-6k^2+2ak=0$ 이 0이 아닌 중근을 갖거나 0과 0이 아닌 한 실근을 가져야 한다.

$$(i) \text{ 방정식 } 2x^2-ax-6k^2+2ak=0 \text{이 0이 아닌 중근을 갖는 경우}$$

방정식 $2x^2-ax-6k^2+2ak=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = a^2 - 8(-6k^2+2ak) = 0$$

$$48k^2 - 16ak + a^2 = 0, (12k-a)(4k-a) = 0$$

$$\therefore k = \frac{a}{12} \text{ 또는 } k = \frac{a}{4} \quad \text{㉣에 } k \text{의 값을 대입하면 } 2x\left(x-\frac{a}{4}\right)^2=0 \text{이므로 서로 다른 실근의 개수는 2이다.}$$

$$(ii) \text{ 방정식 } 2x^2-ax-6k^2+2ak=0 \text{이 0과 0이 아닌 한 실근을 갖는 경우}$$

방정식 $2x^2-ax-6k^2+2ak=0$ 의 한 근이 0이므로

$$-6k^2+2ak=0$$

$$2k(3k-a)=0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=\frac{a}{3}$$

$$(i), (ii) \text{에서 양수 } k \text{의 개수는 3이다.}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

03 답 ③

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면 ㉠의 $f(a)=g(a)$ 에서

$$h(a)=f(a)-g(a)=0$$

$$h'(x)=f'(x)-g'(x) \text{이므로 ㉠의 } f'(a)=g'(a) \text{에서}$$

$$h'(a)=f'(a)-g'(a)=0$$

즉, $h(x)$ 는 $(x-a)^2$ 을 인수로 갖는다.

삼차함수 $h(x)$ 의 최고차항의 계수가 2이므로

$$h(x)=2(x-a)^2(x-\gamma) \quad (\gamma \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$h'(x)=4(x-a)(x-\gamma)+2(x-a)^2$$

$$=2(x-a)(3x-a-2\gamma)$$

$$㉡ \text{의 } f'(\beta)=g'(\beta) \text{에서}$$

$$h'(\beta)=f'(\beta)-g'(\beta)=0$$

$$\therefore 2(\beta-a)(3\beta-a-2\gamma)=0$$

이때 ㉠, ㉡의 $f'(a)=-9, f'(\beta)=9$ 에서 $a \neq \beta$ 이므로

$$3\beta-a-2\gamma=0 \quad \therefore \gamma=\frac{3\beta-a}{2}$$

$$\therefore h(x)=2(x-a)^2\left(x-\frac{3\beta-a}{2}\right)$$

한편 이차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 3이므로

$$g(x)=3x^2+ax+b(a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$g'(x)=6x+a$$

$$(\text{㉑}), (\text{㉒}) \text{의 } g'(a)=-9, g'(\beta)=9 \text{에서}$$

$$6a+a=-9 \quad \cdots \cdots \text{㉓}$$

$$6\beta+a=9 \quad \cdots \cdots \text{㉔}$$

㉓-㉔을 하면

$$6a-6\beta=-18 \quad \therefore a-\beta=-3$$

$$\therefore f(\beta)-g(\beta)=h(\beta)$$

$$=2(\beta-a)^2\left(\beta-\frac{3\beta-a}{2}\right)$$

$$=2(a-\beta)^2 \times \frac{a-\beta}{2}$$

$$=2 \times (-3)^2 \times \frac{-3}{2}$$

$$=-27$$

04 답 20

방정식 $f'(x)=0$ 은 이차방정식이고 ㉒에서 이 방정식의 실근의 개수가 2인 경우가 있으므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하자.

방정식 $f'(x)=0$ 이 길이가 4인 닫힌구간 $[t, t+4]$ 에서 갖는 실근의 개수가 $g(t)$ 이므로 $\beta-\alpha < 4$ 이면 어떤 실수 a 에 대하여

$$\lim_{t \rightarrow a+} g(t)=2, \lim_{t \rightarrow a-} g(t)=2$$

즉, $\lim_{t \rightarrow a+} g(t) + \lim_{t \rightarrow a-} g(t) = 4$ 이므로 ㉑를 만족시키지 않는다.

또 $\beta-\alpha > 4$ 이면 $g(t)=2$ 인 경우가 존재하지 않으므로 ㉒를 만족시키지 않는다.

따라서 $\beta-\alpha=4$ 이므로

$$\beta=\alpha+4$$

방정식 $f'(x)=0$ 이 닫힌구간 $[t, t+4]$ 에서 실근의 개수가 2이려면

$$t=a \text{이어야 하고 ㉒의 } g(f(1))=g(f(7))=2 \text{에서}$$

$$f(1)=f(7)=a$$

이때 $f(1)-a=0, f(7)-a=0$ 이고 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x)-a=(x-1)(x-7)(x+k) (k \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f(x)=(x-1)(x-7)(x+k)+a$$

$$\therefore f'(x)=(x-7)(x+k)+(x-1)(x+k)+(x-1)(x-7)$$

$$=3x^2+(2k-16)x-8k+7$$

$$\text{방정식 } f'(x)=0 \text{에서 } 3x^2+(2k-16)x-8k+7=0$$

이 이차방정식의 두 근이 $\alpha, \alpha+4$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\text{두 근의 합은 } \alpha+\alpha+4=-\frac{2(k-8)}{3}$$

$$3\alpha+6=-k+8 \quad \therefore k=-3\alpha+2 \quad \cdots \cdots \text{㉕}$$

$$\text{두 근의 곱은 } \alpha(\alpha+4)=\frac{-8k+7}{3}$$

㉕을 대입하면

$$\alpha^2+4\alpha=\frac{-8(-3\alpha+2)+7}{3}$$

$$\alpha^2+4\alpha=8\alpha-3$$

$$\alpha^2-4\alpha+3=0, (\alpha-1)(\alpha-3)=0$$

$$\therefore \alpha=1 \text{ 또는 } \alpha=3$$

따라서 ㉕에서

$$\alpha=1 \text{일 때 } k=-1, \alpha=3 \text{일 때 } k=-7$$

(i) $\alpha=1, k=-1$ 일 때,

$$f(x)=(x-1)^2(x-7)+1 \text{이므로}$$

$$f(3)=4 \times (-4)+1=-15$$

(ii) $\alpha=3, k=-7$ 일 때,

$$f(x)=(x-1)(x-7)^2+3 \text{이므로}$$

$$f(3)=2 \times 16+3=35$$

(i), (ii)에서 모든 $f(3)$ 의 값의 합은

$$-15+35=20$$

05 답 ⑤

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=2$ 에서도 연속

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2+} p(x)f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} p(x)f(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} p(x)f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (2x-5)p(x)$$

$$=-p(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} p(x)f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (-x+2)p(x)$$

$$=0$$

즉, $-p(2)=0$ 이므로

$$p(2)=0$$

ㄴ. 함수 $\{p(x)\}^2 f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=3$ 에서도 미분가능하므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{\{p(x)\}^2 f(x) - \{p(3)\}^2 f(3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{(-2x+7)\{p(x)\}^2 - \{p(3)\}^2}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{(-2x+7)\{p(x)\}^2 - \{p(x)\}^2 + \{p(x)\}^2 - \{p(3)\}^2}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3+} \left[\frac{-2(x-3)\{p(x)\}^2}{x-3} + \frac{\{p(x)-p(3)\}\{p(x)+p(3)\}}{x-3} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3+} \left[-2\{p(x)\}^2 + \frac{p(x)-p(3)}{x-3} \times \{p(x)+p(3)\} \right]$$

$$=-2\{p(3)\}^2 + 2p'(3)p(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} \frac{\{p(x)\}^2 f(x) - \{p(3)\}^2 f(3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{(2x-5)\{p(x)\}^2 - \{p(3)\}^2}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{(2x-5)\{p(x)\}^2 - \{p(x)\}^2 + \{p(x)\}^2 - \{p(3)\}^2}{x-3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3-} \left[\frac{2(x-3)\{p(x)\}^2}{x-3} + \frac{\{p(x)-p(3)\}\{p(x)+p(3)\}}{x-3} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3-} \left[2\{p(x)\}^2 + \frac{p(x)-p(3)}{x-3} \times \{p(x)+p(3)\} \right]$$

$$=2\{p(3)\}^2 + 2p'(3)p(3)$$

즉, $-2\{p(3)\}^2 + 2p'(3)p(3) = 2\{p(3)\}^2 + 2p'(3)p(3)$ 이므로

$$4\{p(3)\}^2=0$$

$$\therefore p(3)=0$$

ㄷ. $p(x)=(x-2)^2(x-3)g(x)$ ($g(x)$ 는 다항식)라 하자.

$$h(x)=p(x)\{f(x)\}^2 \text{이라 하면}$$

$$h(x)=\begin{cases} (x-2)^4(x-3)g(x) & (x \leq 2) \\ (x-2)^2(x-3)(2x-5)^2g(x) & (2 < x \leq 3) \\ (x-2)^2(x-3)(2x-7)^2g(x) & (x > 3) \end{cases}$$

함수 $h(x)$ 는 $x \neq 2, x \neq 3$ 인 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=2, x=3$ 일 때의 미분가능성을 확인해 보자.

(i) $x=2$ 일 때,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-2)^2(x-3)(2x-5)^2g(x)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} (x-2)(x-3)(2x-5)^2g(x)=0 \\ \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x-2)^4(x-3)g(x)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} (x-2)^3(x-3)g(x)=0\end{aligned}$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{h(x)-h(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{h(x)-h(2)}{x-2}$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

(ii) $x=3$ 일 때,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{h(x)-h(3)}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{(x-2)^2(x-3)(2x-7)^2g(x)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3+} (x-2)^2(2x-7)^2g(x)=g(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{h(x)-h(3)}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{(x-2)^2(x-3)(2x-5)^2g(x)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3-} (x-2)^2(2x-5)^2g(x)=g(3) \\ \text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{h(x)-h(3)}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{h(x)-h(3)}{x-3} \text{ 이므로 함수 } h(x) \text{는 } x=3 \text{에서 미분가능하다.}\end{aligned}$$

(i), (ii)에서 함수 $h(x)=p(x)\{f(x)\}^2$ 은 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

06 답 14

함수 $g(x)$ 가 $x=3$ 에서 극값을 가지면 $g'(3)=0$ 이므로 $g(x)$ 는 $(x-3)^2$ 을 인수로 갖는다.

이때 함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 2이고

$$f(x)g(x)=(x-1)^2(x-3)^2(x-5)^2 \text{ 이므로}$$

$$g(x)=2(x-1)(x-3)^2 \text{ 또는 } g(x)=2(x-3)^2(x-5)$$

(i) $g(x)=2(x-1)(x-3)^2$ 일 때,

$$g'(x)=2(x-3)^2+2(x-1) \times 2(x-3)=2(3x-5)(x-3)$$

$$g'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=\frac{5}{3} \text{ 또는 } x=3$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\frac{5}{3}$	...	3	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 함수 $g(x)$ 가 $x=3$ 에서 극솟값을 가지므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $g(x)=2(x-3)^2(x-5)$ 일 때,

$$g'(x)=2 \times 2(x-3)(x-5)+2(x-3)^2=2(x-3)(3x-13)$$

$$g'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=3 \text{ 또는 } x=\frac{13}{3}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	3	...	$\frac{13}{3}$	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 극댓값을 가지므로 $x=3$ 에서 극솟값을 갖는다는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $g(x)=2(x-1)(x-3)^2$

이때 $f(x)g(x)=(x-1)^2(x-3)^2(x-5)^2$ 이므로

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-5)^2$$

$$\therefore f'(x)=\frac{1}{2}(x-5)^2+(x-1)(x-5)$$

$$\therefore f'(7)=2+12=14$$

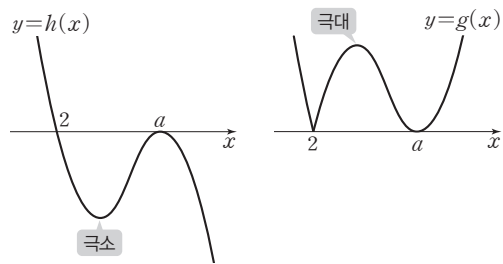
07 답 ②

$h(x)=(x-a)f(x)$ 라 할 때, $g(x)=|h(x)|$ 가 $x=2$ 에서만 미분가능하지 않고 $a>2$ 이므로

$$f(x)=-(x-2)(x-a)$$

$$\therefore h(x)=-(x-2)(x-a)^2, g(x)=|-(x-2)(x-a)^2|$$

따라서 두 함수 $y=h(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 함수 $g(x)$ 의 극댓값이 108이므로 함수 $h(x)$ 의 극솟값이 -108이다.

$$h(x)=-(x-2)(x-a)^2 \text{ 에서}$$

$$\begin{aligned}h'(x) &= -(x-a)^2 - (x-2) \times 2(x-a) \\ &= -(x-a)(3x-a-4)\end{aligned}$$

$$h'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=a \text{ 또는 } x=\frac{a+4}{3}$$

함수 $h(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대이므로 $x=\frac{a+4}{3}$ 에서 극소이다.

이때 함수 $h(x)$ 의 극솟값이 -108이므로

$$h\left(\frac{a+4}{3}\right)=-108 \text{ 에서}$$

$$-\left(\frac{a+4}{3}-2\right)\left(\frac{a+4}{3}-a\right)^2=-108$$

$$\frac{1}{3}(a-2) \times \left\{-\frac{2}{3}(a-2)\right\}^2=108$$

$$(a-2)^3=729$$

$$a-2=9 \text{ (} \because a \text{는 실수)}$$

$$\therefore a=11$$

따라서 $f(x)=-(x-2)(x-11)$ 이므로

$$f(4)=-2 \times (-7)=14$$

08 답 256

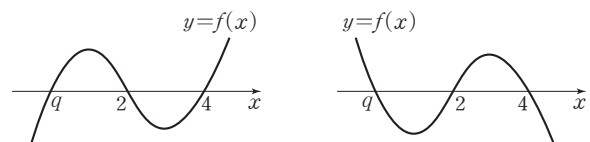
(㉠)에서 $f(x)=p(x-2)(x-4)(x-q)$ (p, q 는 상수, $p \neq 0$)라 하면 함수 $f(x)$ 는 극값이 존재한다.

(㉡)에서 함수 $f(x)$ 는 $x \geq 2$ 에서 극값이 하나만 존재하므로 $q < 2$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

(i) $p>0$ 일 때,

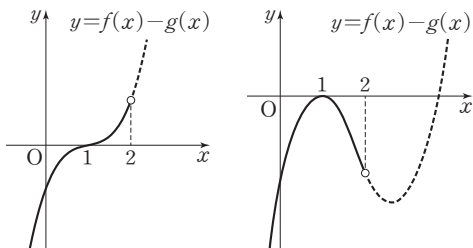
(ii) $p<0$ 일 때,



$$\begin{aligned}
g(x) &= |f(x)f(2a-x)| \text{에서} \\
f(2a-x) &= p(2a-x-2)(2a-x-4)(2a-x-q) \\
&= -p(x-2a+2)(x-2a+4)(x-2a+q) \\
\therefore f(x)f(2a-x) &= -p^2(x-2)(x-4)(x-q)(x-2a+2)(x-2a+4)(x-2a+q) \\
\text{이때 함수 } y=g(x) \text{의 그래프는 함수 } y=f(x)f(2a-x) \text{의 그래프에서} & \\
x \text{축보다 아래쪽에 있는 부분을 } x \text{축에 대하여 대칭이동한 것이고, 함수} & \\
g(x) \text{가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 함수 } y=g(x) \text{의 그래프} & \\
\text{에서 꺾인 점이 없어야 한다.} & \\
\text{즉, } g(x) &= p^2|(x-a)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2| \text{ 꼴이어야 한다.} \\
q < 2 \text{에서 } 2a-4 < 2a-2 < 2a-q \text{이므로} & \\
2a-4=q, 2a-2=2, 2a-q=4 & \\
\therefore a=2, q=0 & \\
\therefore f(x) &= px(x-2)(x-4) \\
\therefore \frac{g(4a)}{f(1) \times f(3a)} &= \frac{g(8)}{f(1) \times f(6)} \\
&= \frac{|f(8)f(-4)|}{f(1) \times f(6)} \\
&= \frac{|p \times 8 \times 6 \times 4 \times p \times (-4) \times (-6) \times (-8)|}{p \times 1 \times (-1) \times (-3) \times p \times 6 \times 4 \times 2} \\
&= 256
\end{aligned}$$

09 답 ②

$h(1)=0$ 에서
 $|f(1)-g(1)|=0$
 $\therefore f(1)-g(1)=0$ ㉠
 즉, 함수 $y=f(x)-g(x)$ 의 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지난다.
 이때 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x < 2$ 에서 함수
 $|f(x)-g(x)|$ 가 미분가능하다.
 즉, $x < 2$ 에서 함수 $y=|f(x)-g(x)|$ 의 그래프에 꺾인 점이 없어야
 하므로 삼차함수 $y=f(x)-g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$\therefore f'(1)-g'(1)=0$ ㉡
 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=2$ 에서도 미분가능
 하다.
 즉, 미분계수 $h'(2)$ 가 존재하므로
 $\lim_{x \rightarrow 2+} h'(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} h'(x)$ ㉢
 $x \rightarrow 2-$ 일 때 $f(x) \geq g(x)$ 라고 가정하면
 $|f(x)-g(x)| = f(x)-g(x)$
 ㉢에서
 $\lim_{x \rightarrow 2+} \{f'(x)+g'(x)\} = \lim_{x \rightarrow 2-} \{f'(x)-g'(x)\}$
 $f'(2)+g'(2) = f'(2)-g'(2)$
 $\therefore g'(2)=0$
 이는 $g(x)$ 가 일차함수라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $x \rightarrow 2-$ 일 때 $f(x) < g(x)$ 이므로

$$|f(x)-g(x)| = g(x)-f(x)$$

㉢에서

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \{f'(x)+g'(x)\} = \lim_{x \rightarrow 2-} \{g'(x)-f'(x)\}$$

$$f'(2)+g'(2) = g'(2)-f'(2)$$

$$\therefore f'(2)=0$$

함수 $h(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로 실수 전체의 집합에서 미분가능하면
 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} h(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \{f(x)+g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 2-} \{g(x)-f(x)\}$$

$$f(2)+g(2) = g(2)-f(2)$$

$$\therefore f(2)=0$$

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 2이고 $f(2)=0, f'(2)=0$ 이므로

$f(x) = 2(x-2)^2(x+a)$ (a 는 상수)라 하고, $g(x)$ 는 일차함수이므로

$g(x) = px+q$ (p, q 는 상수, $p \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = 4(x-2)(x+a) + 2(x-2)^2, g'(x) = p$$

㉠에서

$$2(1+a) - (p+q) = 0$$

$$\therefore q = 2+2a-p \quad \dots\dots ㉣$$

㉡에서

$$-4(1+a) + 2-p = 0$$

$$\therefore p = -4a-2 \quad \dots\dots ㉤$$

㉣을 ㉣에 대입하면

$$q = 6a+4 \quad \dots\dots ㉥$$

$$h(3)=10 \text{에서 } f(3)+g(3)=10$$

$$2(3+a) + 3p+q = 10$$

㉢, ㉤을 대입하면

$$6+2a-12a-6+6a+4=10$$

$$-4a=6 \quad \therefore a = -\frac{3}{2}$$

이를 ㉢, ㉤에 각각 대입하면

$$p=4, q=-5$$

$$\therefore f(x) = 2(x-2)^2\left(x-\frac{3}{2}\right), g(x) = 4x-5$$

$$\therefore h(5) = f(5) + g(5)$$

$$= 2 \times 9 \times \frac{7}{2} + (20-5) = 78$$

10 답 ⑤

$$\neg. f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} - 1 = -\frac{8}{9}$$

$m=-1$ 일 때, $g(x)=6x-6$ ($x \geq 0$)이므로

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = 2-6 = -4$$

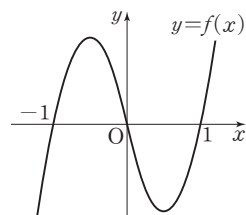
$$\therefore h\left(\frac{1}{3}\right) = -4$$

$$\neg. f(x) = 3x^3 - 3x = 3x(x+1)(x-1)$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림
과 같다.

$m=-1$ 이면

$$g(x) = \begin{cases} 26x-6 & (x < 0) \\ 6x-6 & (x \geq 0) \end{cases}$$



(i) $x < 0$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=26x-6$ 은 한 점에서 만나므로 만나는 점의 x 좌표를 x_1 이라 하자.

$x \leq x_1$ 일 때 $f(x) \leq g(x)$, $x_1 < x < 0$ 일 때 $g(x) < f(x)$ 이므로

$$h(x) = \begin{cases} 3x^3 - 3x & (x \leq x_1) \\ 26x - 6 & (x_1 < x < 0) \end{cases}$$

즉, 함수 $y=h(x)$ 의 그래프가 $x=x_1$ 인 점에서 꺾인 모양이므로 미분가능하지 않다.

(ii) $x=0$ 일 때,

$f(0)=0$, $g(0)=-6$, 즉 $g(0) < f(0)$ 이므로 $x=0$ 에서의 함수 $h(x)$ 의 미분가능성은 함수 $g(x)$ 의 미분가능성과 같다.

$$g'(x) = \begin{cases} 26 & (x < 0) \\ 6 & (x > 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} g'(x)$$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않으므로 함수 $h(x)$ 도 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

(iii) $x > 0$ 일 때,

점 $(0, -6)$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에 그은 접선의 방정식을 구해 보자.

$$f(x) = 3x^3 - 3x \text{에서 } f'(x) = 9x^2 - 3$$

접점의 좌표를 $(t, 3t^3 - 3t)$ 라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t) = 9t^2 - 3 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - (3t^3 - 3t) = (9t^2 - 3)(x - t)$$

$$\therefore y = (9t^2 - 3)x - 6t^3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(0, -6)$ 을 지나므로

$$-6 = -6t^3$$

$$t^3 = 1 \quad \therefore t = 1 \quad (\because t \text{는 실수})$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$y = 6x - 6$$

즉, $x > 0$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 접선이므로

$$g(x) \leq f(x)$$

$$\therefore h(x) = 6x - 6 \quad (\text{단, } x > 0)$$

따라서 함수 $h(x)$ 는 $x > 0$ 에서 미분가능하다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $h(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수는 2이다.

ㄷ. 자연수 m 에 대하여 $x > 0$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선

$y = -6mx + \frac{6}{m^3}$ 은 한 점에서 만나므로 만나는 점의 x 좌표를 x_1 이라 하면 함수 $h(x)$ 는 $x=x_1$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 함수 $h(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수가 1이려면 $x \leq 0$ 에서 미분가능해야 한다.

$x=0$ 일 때, $f(0)=0$, $g(0)=\frac{6}{m^3}$, 즉 $f(0) < g(0)$ 이므로 함수

$h(x)$ 의 미분가능성은 함수 $f(x)$ 의 미분가능성과 같다.

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하므로 함수 $h(x)$ 도 $x=0$ 에서 미분가능하다.

$x < 0$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{26}{m}x + \frac{6}{m^3}$ 은 접하거나 만나지 않아야 한다.

$x < 0$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 접할 때, 접점의 x 좌표를 t 라 하면 $f(t)=g(t)$ 이므로

$$3t^3 - 3t = -\frac{26}{m}t + \frac{6}{m^3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$f'(x) = 9x^2 - 3, g'(x) = -\frac{26}{m} \text{이고 } f'(t) = g'(t) \text{이므로}$$

$$9t^2 - 3 = -\frac{26}{m} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ 을 $\textcircled{2}$ 의 우변에 대입하면

$$3t^3 - 3t = (9t^2 - 3)t + \frac{6}{m^3}$$

$$6t^3 = -\frac{6}{m^3}, t^3 = -\frac{1}{m^3} \quad \therefore t = -\frac{1}{m} \quad (\because t \text{는 실수})$$

이를 $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$\frac{9}{m^2} - 3 = -\frac{26}{m}$$

$$3m^2 - 26m - 9 = 0$$

$$(3m+1)(m-9) = 0$$

$$\therefore m = 9 \quad (\because m > 0)$$

따라서 직선 $y = -\frac{26}{m}x + \frac{6}{m^3}$ 의 기울기가 $-\frac{26}{9}$ 이거나 기울기의 절댓값이 더 커야 하므로

$$0 < m \leq 9$$

따라서 자연수 m 은 1, 2, 3, ..., 9의 9개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 답 ①

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 -2 이고 (ㄱ) 에서 $f(0)=0$ 이므로

$f(x) = -2x^3 + ax^2 + bx$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f'(x) = -6x^2 + 2ax + b$$

(ㄴ) 에서 $g(0)=0$ 이므로 $g(0)=f(0)+|f'(0)|$ 에서

$$|b|=0 \quad \therefore b=0$$

$$\therefore f(x) = -2x^3 + ax^2, f'(x) = -6x^2 + 2ax$$

방정식 $f(x)=0$ 에서

$$-2x^3 + ax^2 = 0, -2x^2\left(x - \frac{a}{2}\right) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{a}{2}$$

(ㄴ) 에서 방정식 $f(x)=0$ 이 음의 실근을 가지므로

$$\frac{a}{2} < 0 \quad \therefore a < 0$$

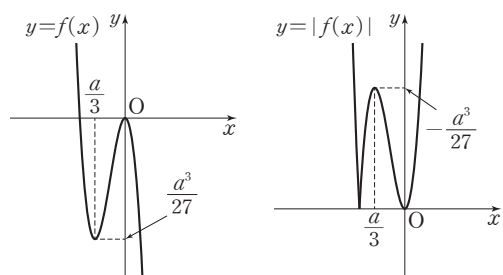
$f'(x) = -6x^2 + 2ax = -2x(3x - a)$ 에서 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은

$$x = \frac{a}{3} \text{ 또는 } x=0$$

$a < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\frac{a}{3}$	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		$\frac{a^3}{27}$ 극소		0 극대	

두 함수 $y=f(x)$, $y=|f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



(다)에서 방정식 $|f(x)|=8$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=8$ 이 만나는 점이 3개이다.

따라서 $-\frac{a^3}{27}=8$ 이므로

$$a^3=-216$$

$\therefore a=-6$ ($\because a$ 는 실수)

즉, $f(x)=-2x^3-6x^2$, $f'(x)=-6x^2-12x$ 이므로

$$g(x)=-2x^3-6x^2+|-6x^2-12x|$$

$$\therefore g(2)=-16-24+|-24-24|=8$$

12 답 ③

(가)에서 방정식 $f(x)-2x=0$, 즉 $f(x)=2x$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2x$ 가 만나는 점이 2개이다.

또 (나)에서 방정식 $f(x)+2x=0$, 즉 $f(x)=-2x$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-2x$ 가 만나는 점이 2개이다.

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=-2x$ 와 서로 다른 두 점에서 만나려면 $f(x)$ 의 극값이 존재해야 한다.

이때 $f(0)=0$ 이고 두 직선 $y=2x$,

$y=-2x$ 도 원점을 지나므로 함수 $y=f(x)$

의 그래프는 그림과 같이 원점에서 직선

$y=2x$ 에 접하고 원점이 아닌 다른 한 점에

서 직선 $y=-2x$ 에 접해야 한다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2x$ 가 만나는 점 중 원점이 아닌 점의 x 좌표를 b 라고 하고

$$f(x)-2x=ax^2(x-b)$$

(a, b 는 상수, $a>0$)

라 하면

$$f(x)=ax^2(x-b)+2x$$

$$=ax^3-abx^2+2x$$

$f'(x)=3ax^2-2abx+2$ 이므로 $f'(2)=2$ 에서

$$12a-4ab+2=2$$

$$4a(3-b)=0 \quad \therefore b=3 \quad (\because a>0)$$

$$\therefore f(x)=ax^3-3ax^2+2x$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-2x$ 는 원점에서 만나고 다른 한 점에서 접하므로 삼차방정식 $f(x)+2x=0$ 은 실근 0과 0이 아닌 중근을 갖는다.

방정식 $f(x)+2x=0$ 에서

$$ax^3-3ax^2+4x=0$$

$$\therefore x(ax^2-3ax+4)=0$$

즉, 이차방정식 $ax^2-3ax+4=0$ 이 0이 아닌 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

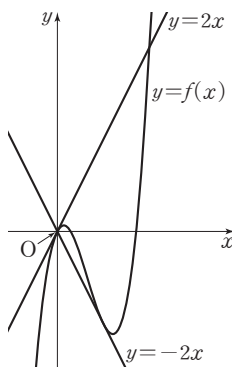
$$D=9a^2-16a=0$$

$$a(9a-16)=0$$

$$\therefore a=\frac{16}{9} \quad (\because a>0)$$

따라서 $f(x)=\frac{16}{9}x^3-\frac{16}{3}x^2+2x$ 이므로

$$f(-3)=-48-48-6=-102$$



13 답 16

$y=2x^3-ax^2+6x-13$ 에서

$$y'=6x^2-2ax+6$$

점 $(0, t)$ 를 지나고 곡선 $y=2x^3-ax^2+6x-13$ 에 접하는 접선의 접점의 좌표를 $(k, 2k^3-ak^2+6k-13)$ 이라 하면 접선의 기울기는

$6k^2-2ak+6$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(2k^3-ak^2+6k-13)=(6k^2-2ak+6)(x-k)$$

$$\therefore y=(6k^2-2ak+6)x-4k^3+ak^2-13$$

이 직선이 점 $(0, t)$ 를 지나므로

$$t=-4k^3+ak^2-13 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 서로 다른 접선의 개수 $f(t)$ 는 k 에 대한 삼차방정식 $\textcircled{1}$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

방정식 $\textcircled{1}$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=-4k^3+ak^2-13$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 개수와 같다.

$$h(k)=-4k^3+ak^2-13 \text{이라 하면}$$

$$h'(k)=-12k^2+2ak$$

$$=-2k(6k-a)$$

$$h'(k)=0 \text{인 } k \text{의 값은}$$

$$k=0 \text{ 또는 } k=\frac{a}{6}$$

a 는 자연수이므로 함수 $h(k)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{a}{6}$	$\cdots$
$h'(k)$	-	0	+	0	-
$h(k)$	$\searrow$	-13 극소	$\nearrow$	$\frac{a^3}{108}-13$ 극대	$\searrow$

따라서 함수 $y=h(k)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같으므로 직선 $y=t$ 와 만나는 점의 개수 $f(t)$ 는

$$f(t)=\begin{cases} 1 & (t < -13 \text{ 또는 } t > \frac{a^3}{108}-13) \\ 2 & (t = -13 \text{ 또는 } t = \frac{a^3}{108}-13) \\ 3 & (-13 < t < \frac{a^3}{108}-13) \end{cases}$$

$$\therefore g(t)=(f \circ f)(t)$$

$$=f(f(t))$$

$$=\begin{cases} f(1) & (t < -13 \text{ 또는 } t > \frac{a^3}{108}-13) \\ f(2) & (t = -13 \text{ 또는 } t = \frac{a^3}{108}-13) \\ f(3) & (-13 < t < \frac{a^3}{108}-13) \end{cases}$$

이때 $f(t)$ 의 값은 1 또는 2 또는 3이므로 $g(t)$ 의 값인 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 도 1 또는 2 또는 3이다.

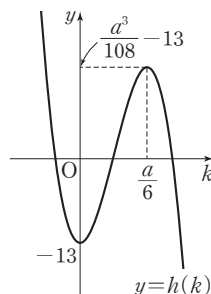
(가)에서 $g(t)>1$ 이고, (나)에서 함수 $g(t)$ 의 치역의 원소의 개수가 1이므로

$$g(t)=2 \text{ 또는 } g(t)=3$$

(i) $g(t)=2$ 인 경우

$$f(1)=f(2)=f(3)=2 \text{이지만 함수 } f(t) \text{에서 } t=-13,$$

$$t=\frac{a^3}{108}-13 \text{인 경우에만 } f(t)=2 \text{이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$



(ii) $g(t)=3$ 인 경우

$$f(1)=f(2)=f(3)=3\text{이어야 하므로}$$

$$\frac{a^3}{108}-13>3$$

$$a^3-1728>0$$

$$(a-12)(a^2+12a+144)>0$$

$$\text{이때 } a^2+12a+144>0\text{이므로}$$

$$a-12>0$$

$$\therefore a>12$$

(i), (ii)에서 $a>12$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 $m=13$ 이고, $g(t)=3$ 이므로

$$m+g(m)=13+3=16$$

14 답 27

이차함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 극대이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하고 $x=-2$ 에서 최대이므로

$$f(x)=a(x+2)^2+b(a, b\text{는 상수}, a<0)\text{라 하자.}$$

함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = h(0)\text{에서}$$

$$g(0)=f(0)=h(0)$$

또 함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$ 에서도 미분 가능하다.

$$\text{즉, 미분계수 } h'(0)\text{이 존재하고, } h'(x) = \begin{cases} f'(x) & (x<0) \\ g'(x) & (x>0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f'(0)=g'(0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(㉞)에서 방정식 $h(x)=h(0)$ 의 실근은 함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=h(0)$, 즉 직선 $y=f(0)$ 이 만나는 점의 x 좌표와 같다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=-2$ 에 대하여 대칭이므로 $x \leq 0$ 에서 방정식 $f(x)=f(0)$ 의 실근은

$$x=-4 \text{ 또는 } x=0$$

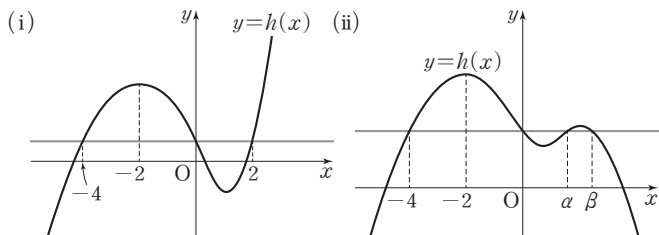
따라서 $x \leq 0$ 에서 방정식 $f(x)=f(0)$ 의 실근의 합은 -4 이므로 (㉞)를 만족시키려면 $x>0$ 에서 방정식 $g(x)=f(0)$ 의 실근의 합이 2이어야 한다.

$$\text{한편 } f'(x)=2a(x+2)\text{이므로}$$

$$f'(0)=4a<0$$

(㉞)에서 $g'(0)<0$ 이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프 위의 $x=0$ 인 점에서의 접선의 기울기는 음수이다.

따라서 삼차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수의 부호에 따라 경우를 나누어 함수 $y=h(x)$ 의 그래프의 개형을 그리면 그림과 같다.



(i) 함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수인 경우

$$g(x)-f(0)=cx(x-2)(x+d) \quad (c, d\text{는 상수}, c>0, d>0)\text{라 하면}$$

$$g(x)=cx^3+c(d-2)x^2-2cdx+f(0)$$

이때 함수 $g(x)$ 의 이차항의 계수가 0이므로

$$c(d-2)=0$$

$$\therefore d=2 \quad (\because c>0)$$

$$g(x)=cx^3-4cx+f(0)\text{이므로}$$

$$g'(x)=3cx^2-4c$$

$$=3c\left(x+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(x-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$g'(x)=0$ 인 x 의 값은

$$x=\frac{2}{\sqrt{3}} \quad (\because x>0)$$

$x>0$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	...
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$		\	극소	/

함수 $g(x)$ 는 $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ 에서 최소이므로 최솟값은

$$g\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{8\sqrt{3}}{9}c-\frac{8\sqrt{3}}{3}c+f(0)=-\frac{16\sqrt{3}}{9}c+f(0)$$

한편 $x \leq 0$ 에서 함수 $f(x)=a(x+2)^2+b$ 의 최댓값은 b 이고

$$f(0)=4a+b\text{이므로}$$

$$b=f(0)-4a$$

(㉞)에서 최댓값과 최솟값의 차가 $9+4\sqrt{3}$ 이므로

$$\{f(0)-4a\}-\left\{-\frac{16\sqrt{3}}{9}c+f(0)\right\}=9+4\sqrt{3}$$

$$\therefore -4a+\frac{16\sqrt{3}}{9}c=9+4\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(㉞)에서 $f'(0)=g'(0)$ 이므로

$$4a=-4c$$

$$\therefore a=-c \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

(㉞), (㉞)을 연립하여 풀면

$$a=-\frac{9}{4}, c=\frac{9}{4}$$

$$\therefore f'(x)=-\frac{9}{2}(x+2), g'(x)=\frac{27}{4}x^2-9$$

(ii) 함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수인 경우

$$g(x)-f(0)=cx(x-\alpha)(x-\beta) \quad (c, \alpha, \beta\text{는 상수}, c<0, \alpha+\beta=2)\text{라 하면}$$

$$g(x)=cx^3-c(\alpha+\beta)x^2+c\alpha\beta x+f(0)$$

$$=cx^3-2cx^2+c\alpha\beta x+f(0)$$

이때 $c<0$ 에서 함수 $g(x)$ 의 이차항의 계수는 0이 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서

$$h'(x) = \begin{cases} -\frac{9}{2}(x+2) & (x \leq 0) \\ \frac{27}{4}x^2-9 & (x > 0) \end{cases}$$

$$\therefore h'(-4)+h'(2)=-\frac{9}{2} \times (-2) + (27-9)=27$$

step 1 핵심 문제

| 80~81쪽

01 ②	02 9	03 ③	04 -21	05 15	06 ⑤
07 16	08 ①	09 $\frac{1}{6}$	10 ⑤	11 5	12 5

01 답 ②

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int dx + 16 \int x dx + 81 \int x^2 dx + \cdots + n^4 \int x^{n-1} dx \\
 &= \int (1 + 16x + 81x^2 + \cdots + n^4 x^{n-1}) dx \\
 &= x + 8x^2 + 27x^3 + \cdots + n^3 x^n + C \\
 f(0) &= -3 \text{에서 } C = -3 \\
 f(1) &= 97 \text{에서} \\
 1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 &= 97 \\
 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 &= 100 \\
 \text{이때 } 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= 100 \text{이므로} \\
 n &= 4
 \end{aligned}$$

02 답 9

(i) $x < 0$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int f(x) dx = \int (-2x) dx \\
 &= -x^2 + C_1
 \end{aligned}$$

(ii) $x \geq 0$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int f(x) dx = \int k(2x - x^2) dx \\
 &= k\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + C_2
 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 + C_1 & (x < 0) \\ k\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + C_2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

함수 $F(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} F(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ k\left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + C_2 \right\} = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x^2 + C_1)$$

$$\therefore C_2 = C_1$$

따라서 $F(2) - F(-3) = 21$ 에서

$$k\left(4 - \frac{8}{3}\right) + C_1 - (-9 + C_1) = 21 \quad (\because C_2 = C_1)$$

$$\frac{4}{3}k = 12 \quad \therefore k = 9$$

03 답 ③

$$f'(x) = 2ax - 4a^2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2ax - 4a^2) dx \\
 &= ax^2 - 4a^2x + C \\
 &= a(x - 2a)^2 + C - 4a^3
 \end{aligned}$$

이때 $a > 0$ 이면 함수 $f(x)$ 는 최댓값을 갖지 않으므로 $a < 0$

함수 $f(x)$ 는 $x = 2a$ 일 때 최댓값 $C - 4a^3$ 을 가지므로

$$C - 4a^3 = 2$$

$$\therefore f(x) = a(x - 2a)^2 + 2$$

$a < 0$ 에서 $2a < a$ 이므로 닫힌구간 $[a, a+2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = a+2$ 일 때 최솟값 $7a$ 를 갖는다.

즉, $f(a+2) = 7a$ 이므로

$$a(-a+2)^2 + 2 = 7a$$

$$a^3 - 4a^2 + 4a + 2 = 7a$$

$$a^3 - 4a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$(a+1)(a^2 - 5a + 2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

그런데 $a < 0$ 이므로 $a = -1$

04 답 -21

(가)의 $\frac{d}{dx} \int f'(x) dx = 3x^2 + 4x + a$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 4x + a$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (3x^2 + 4x + a) dx \\
 &= x^3 + 2x^2 + ax + C
 \end{aligned}$$

(나)의 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2a+1$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재

하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{에서 } f(1) = 0$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) \text{이므로}$$

$$f'(1) = 2a + 1$$

$$3 + 4 + a = 2a + 1 \quad \therefore a = 6$$

$$\therefore f(x) = x^3 + 2x^2 + 6x + C$$

$$f(1) = 0 \text{에서}$$

$$1 + 2 + 6 + C = 0 \quad \therefore C = -9$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 + 2x^2 + 6x - 9 \text{이므로}$$

$$f(-2) = -8 + 8 - 12 - 9 = -21$$

05 답 15

$F(x) = xf(x) - 2x^3 + x^2 + 3$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 6x^2 + 2x$$

$$xf'(x) = 6x^2 - 2x$$

$$\therefore f'(x) = 6x - 2 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (6x - 2) dx$$

$$= 3x^2 - 2x + C \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

$F(x) = xf(x) - 2x^3 + x^2 + 3$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$F(1) = f(1) - 2 + 1 + 3$$

$$10 = f(1) + 2 \quad (\because F(1) = 10)$$

$$\therefore f(1) = 8 \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

$$f(x) = 3x^2 - 2x + C \text{에서}$$

$$3 - 2 + C = 8 \quad \therefore C = 7$$

$$\text{따라서 } f(x) = 3x^2 - 2x + 7 \text{이므로}$$

$$f(2) = 12 - 4 + 7 = 15 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

06 답 ⑤

$f(x+y)=f(x)+f(y)+6xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면
 $f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+6xh-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+6xh}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 6x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} + 6x \quad (\because f(0)=0) \\ &= f'(0) + 6x \end{aligned}$$

$f'(0)=k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f'(x)=6x+k$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (6x+k) dx \\ &= 3x^2+kx+C \end{aligned}$$

$f(0)=0$ 에서 $C=0$

$f(-1)=9$ 에서 $3-k=9$

$$\therefore k=-6$$

따라서 $f(x)=3x^2-6x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^2 (3x^2-6x) dx \\ &= \left[x^3-3x^2 \right]_0^2 \\ &= -4 \end{aligned}$$

07 답 16

$h(x)=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$ 라 하자.

(i) $f(x) \geq g(x)$ 일 때,

$$x^2+1 \geq -x^2+4x+1 \text{에서}$$

$$2x^2-4x \geq 0$$

$$2x(x-2) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 2$$

이때 $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$ 이므로

$$h(x)=\frac{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)}{2}=f(x)$$

(ii) $f(x) \leq g(x)$ 일 때,

$$x^2+1 \leq -x^2+4x+1 \text{에서}$$

$$2x^2-4x \leq 0$$

$$2x(x-2) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 2$$

이때 $|f(x)-g(x)|=-f(x)+g(x)$ 이므로

$$h(x)=\frac{f(x)+g(x)-f(x)+g(x)}{2}=g(x)$$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned} h(x) &= \begin{cases} f(x) & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ g(x) & (0 \leq x \leq 2) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2+1 & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -x^2+4x+1 & (0 \leq x \leq 2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^3 \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^2+1) dx + \int_0^2 (-x^2+4x+1) dx + \int_2^3 (x^2+1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3+x \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+x \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3+x \right]_2^3 \\ &= -\left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{22}{3} + \left(12-\frac{14}{3}\right) = 16 \end{aligned}$$

08 답 ①

모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 이므로

$g(x)=xf(x)$ 라 하면

$$g(-x)=-xf(-x)=xf(x)=g(x)$$

$h(x)=x^2f(x)$ 라 하면

$$h(-x)=(-x)^2f(-x)=-x^2f(x)=-h(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-3}^3 (3x^2-x+4)f(x) dx \\ &= 3 \int_{-3}^3 x^2f(x) dx - \int_{-3}^3 xf(x) dx + 4 \int_{-3}^3 f(x) dx \\ &= 0 - 2 \int_0^3 xf(x) dx + 0 \\ &= -2 \times 6 \\ &= -12 \end{aligned}$$

09 답 $\frac{1}{6}$

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+3)=f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_9^{11} f(x) dx &= \int_6^8 f(x) dx = \int_3^5 f(x) dx \\ &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_0^1 (6x-4) dx + \int_1^2 (-x^2+x+2) dx \\ &= \left[3x^2-4x \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x \right]_1^2 \\ &= -1 + \left(\frac{10}{3} - \frac{13}{6} \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

10 답 ⑤

$3xf(x)=9 \int_1^x f(t) dt + 2x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3f(x)+3xf'(x)=9f(x)+2$$

$$6f(x)=3xf'(x)-2$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}xf'(x)-\frac{1}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$3xf(x)=9 \int_1^x f(t) dt + 2x$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$3f(1)=9 \int_1^1 f(t) dt + 2$$

$$3f(1)=2 \quad \therefore f(1)=\frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1)=\frac{1}{2}f'(1)-\frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}f'(1)-\frac{1}{3} \quad (\because \textcircled{2})$$

$$\frac{1}{2}f'(1)=1 \quad \therefore f'(1)=2$$

11 답 5

$$f(x) = \frac{3}{7}x^2 - \frac{2}{3}x \int_1^2 f(t) dt + \left\{ \int_1^2 f(t) dt \right\}^2 \text{에서}$$

$$\int_1^2 f(t) dt = a \text{ (a는 상수)로 놓으면}$$

$$f(x) = \frac{3}{7}x^2 - \frac{2}{3}ax + a^2 \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\int_1^2 f(t) dt = a \text{에서}$$

$$\int_1^2 \left(\frac{3}{7}t^2 - \frac{2}{3}at + a^2 \right) dt = a$$

$$\left[\frac{1}{7}t^3 - \frac{2}{3}at^2 + a^2t \right]_1^2 = a, \quad 1 - a + a^2 = a$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0, \quad (a-1)^2 = 0$$

$$\therefore a = 1 \quad \dots\dots \text{배점 50\%}$$

$$\text{즉, } \int_1^2 f(x) dx = 1 \text{이므로}$$

$$5 \int_1^2 f(x) dx = 5 \times 1 = 5 \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

12 답 5

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$g'(x) = f(x) = -x^2 - 4x + a = -(x+2)^2 + a + 4$$

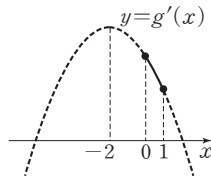
$$\text{함수 } g(x) \text{가 닫힌구간 } [0, 1] \text{에서 증가하려면}$$

$$0 \leq x \leq 1 \text{에서 } g'(x) \geq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$g'(1) \geq 0$$

$$-1 - 4 + a \geq 0 \quad \therefore a \geq 5$$

$$\text{따라서 } a \text{의 최솟값은 } 5 \text{이다.}$$



step 2 고난도 문제

| 82~86쪽

01 12	02 2	03 ⑤	04 -2	05 ③	06 17
07 ②	08 400	09 9	10 ②	11 ⑤	12 18
13 -57	14 110	15 ①	16 ④	17 ⑤	18 -6
19 3	20 0	21 $\frac{27}{4}$	22 ②	23 ①	24 ②
25 38	26 ⑤				

01 답 12

$$\frac{d}{dx} \{f(x) + g(x)\} = 4x + 1 \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx} \{f(x) + g(x)\} \right] dx = \int (4x + 1) dx$$

$$f(x) + g(x) = 2x^2 + x + C_1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} \right] dx = \int (4x^3 + 3x^2 - 6x - 5) dx$$

$$f(x)g(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x + C_2$$

이때 $g(2) = 0$ 에서 $f(2)g(2) = 0$ 이므로

$$16 + 8 - 12 - 10 + C_2 = 0$$

$$\therefore C_2 = -2$$

$$\therefore f(x)g(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$$

$$= (x+1)^3(x-2) \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $f(x)$, $g(x)$ 는 모두 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고

$$g(2) = 0 \text{이므로}$$

$$g(x) = (x+1)(x-2), \quad f(x) = (x+1)^2$$

$$\therefore f(3) - g(3) = 16 - 4 \times 1 = 12$$

02 답 2

$$\text{(㉠)의 } g(x) = \int \{2x^2 + f(x)\} dx \text{에서}$$

$$g'(x) = 2x^2 + f(x) \quad \dots\dots \text{㉢}$$

(i) $n = 1$ 일 때,

$g'(x)$ 는 상수함수이고 $2x^2 + f(x)$ 는 이차함수이므로 ㉢을 만족시키지 않는다.

(ii) $n = 2$ 일 때,

$g'(x)$ 는 일차함수이므로 ㉢을 만족시키려면 $2x^2 + f(x)$ 가 일차함수이어야 한다.

따라서 이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 -2 일 때, ㉢을 만족시킨다.

(iii) $n \geq 3$ 일 때,

$g'(x)$ 는 $(n-1)$ 차 함수이고, $2x^2 + f(x)$ 는 n 차 함수이므로 ㉢을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $n = 2$

이때 이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 -2 이므로

$$f(x) = -2x^2 + ax + b \text{ (a, b는 상수)라 하면 ㉢에서}$$

$$g'(x) = ax + b$$

$$\therefore g(x) = \int g'(x) dx = \int (ax + b) dx = \frac{a}{2}x^2 + bx + C_1$$

$$\text{(㉠)의 } xg(x) = \int f(x) dx \text{에서}$$

$$x \left(\frac{a}{2}x^2 + bx + C_1 \right) = \int (-2x^2 + ax + b) dx$$

$$\frac{a}{2}x^3 + bx^2 + C_1x = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 + bx + C_2$$

위의 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$\frac{a}{2} = -\frac{2}{3}, \quad b = \frac{a}{2}, \quad C_1 = b, \quad C_2 = 0$$

$$\therefore a = -\frac{4}{3}, \quad b = C_1 = -\frac{2}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x) = -2x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}, \quad g(x) = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$g(1) - f(1) = \left(-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) - \left(-2 - \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \right) = 2$$

03 답 ⑤

$f(x)$ 가 삼차함수이므로 $f'(x)$ 는 이차함수이다.

도함수 $y = f'(x)$ 의 그래프가 위로 볼록한 포물선이고, x 축과 만나는 점의 x 좌표가 -3 , 2 이므로 $f'(x) = a(x+3)(x-2)$ ($a < 0$)라 하자.

이때 도함수 $y = f'(x)$ 의 그래프가 점 $(0, 12)$ 를 지나므로

$$f'(0) = 12 \text{에서 } -6a = 12 \quad \therefore a = -2$$

즉, $f'(x) = -2(x+3)(x-2) = -2x^2 - 2x + 12$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (-2x^2 - 2x + 12) dx$$

$$= -\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 12x + C$$

이때 $f(0) = 1$ 에서 $C = 1$

$$\therefore f(x) = -\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 12x + 1$$

방정식 $f(x) = k$ 가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$$f'(x) = -2(x+3)(x-2) \text{에서}$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

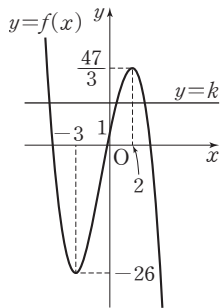
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-26 극소	$\nearrow$	$\frac{47}{3}$ 극대	$\searrow$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로
만나는 점이 3개가 되도록 직선 $y = k$ 를 그어
보면 k 의 값의 범위는

$$-26 < k < \frac{47}{3}$$

따라서 정수 k 는 $-25, -24, -23, \dots, 15$
의 41개이다.



04 답 -2

$$f'(x) = x^2 - 4x + n \text{에서}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^2 - 4x + n) dx = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + nx + C$$

이때 $f(0) = 0$ 에서 $C = 0$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + nx$$

삼차함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 가지므로 이차방정식 $f'(x) = 0$,

즉 $x^2 - 4x + n = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 $x^2 - 4x + n = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4 - n > 0 \quad \therefore n < 4$$

따라서 자연수 n 의 값은 1, 2, 3이다.

이차방정식 $x^2 - 4x + n = 0$ 의 서로 다른 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = n$$

함수 $f(x)$ 의 극댓값이 $f(\alpha)$, 극솟값이 $f(\beta)$ 이므로

$$M + m = f(\alpha) + f(\beta)$$

$$= \frac{1}{3}\alpha^3 - 2\alpha^2 + n\alpha + \frac{1}{3}\beta^3 - 2\beta^2 + n\beta$$

$$= \frac{1}{3}(\alpha^3 + \beta^3) - 2(\alpha^2 + \beta^2) + n(\alpha + \beta)$$

$$= \frac{1}{3}\{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)\} - 2\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} + n(\alpha + \beta)$$

$$= \frac{1}{3}(4^3 - 3n \times 4) - 2(4^2 - 2n) + 4n$$

$$= 4n - \frac{32}{3}$$

(i) $n = 1$ 일 때,

$$n + M + m = 1 + 4 - \frac{32}{3} = -\frac{17}{3}$$

(ii) $n = 2$ 일 때,

$$n + M + m = 2 + 8 - \frac{32}{3} = -\frac{2}{3}$$

(iii) $n = 3$ 일 때,

$$n + M + m = 3 + 12 - \frac{32}{3} = \frac{13}{3}$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 $n + M + m$ 의 값의 합은

$$-\frac{17}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{13}{3} = -2$$

05 답 ③

사차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $x = -1, x = 0, x = 4$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(x) = 4x(x+1)(x-4)$$

$$= 4x^3 - 12x^2 - 16x$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (4x^3 - 12x^2 - 16x) dx$$

$$= x^4 - 4x^3 - 8x^2 + C$$

$$f(-1) = -3 + C, f(0) = C, f(4) = -128 + C \text{이므로}$$

$$g(-1) = |f(-1) - 1| = |C - 4|$$

$$g(0) = |f(0) - 1| = |C - 1|$$

$$g(4) = |f(4) - 1| = |C - 129|$$

세 점 $A(-1, g(-1)), B(0, g(0)), C(4, g(4))$ 가 한 직선 위에 있으므로

$$\frac{g(0) - g(-1)}{0 - (-1)} = \frac{g(4) - g(0)}{4 - 0}$$

$$|C - 1| - |C - 4| = \frac{|C - 129| - |C - 1|}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $C < 1$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } -(C - 1) + (C - 4) = \frac{-(C - 129) + (C - 1)}{4}$$

$$-3 \neq 32 \text{이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

(ii) $1 \leq C < 4$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } C - 1 + (C - 4) = \frac{-(C - 129) - (C - 1)}{4}$$

$$2C - 5 = \frac{-2C + 130}{4}$$

$$8C - 20 = -2C + 130$$

$$10C = 150 \quad \therefore C = 15$$

그런데 $1 \leq C < 4$ 이므로 조건을 만족시키는 C 의 값이 존재하지 않는다.

(iii) $4 \leq C < 129$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } C - 1 - (C - 4) = \frac{-(C - 129) - (C - 1)}{4}$$

$$3 = \frac{-2C + 130}{4}$$

$$12 = -2C + 130$$

$$2C = 118 \quad \therefore C = 59$$

(iv) $C \geq 129$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } C - 1 - (C - 4) = \frac{C - 129 - (C - 1)}{4}$$

$$3 \neq -32 \text{이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

(i)~(iv)에서 $C = 59$

따라서 함수 $f(x)$ 의 모든 극값의 합은
 $f(-1)+f(0)+f(4)=(-3+C)+C+(-128+C)$
 $=3C-131=3\times 59-131=46$

개념 NOTE

좌표평면 위의 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 이 한 직선 위에 있을 때, 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같으므로

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$$

06 답 17

$$f'(x)=m\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}\right)\text{에서}$$

$$f(x)=\int f'(x)dx$$

$$=\int m\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}\right)dx$$

$$=m\left\{x+\frac{x^2}{1\times 2}+\frac{x^3}{2\times 3}+\frac{x^4}{3\times 4}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right\}+C$$

$$\text{이때 } f(0)=\frac{1}{8}\text{에서 } C=\frac{1}{8}$$

$$f(1)=4\text{에서}$$

$$f(1)=m\left\{1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right\}+\frac{1}{8}$$

$$=m\left\{1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}+\frac{1}{8}$$

$$=m\left(1+1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{8}$$

$$=\frac{m(2n+1)}{n+1}+\frac{1}{8}$$

$$\text{즉, } \frac{m(2n+1)}{n+1}+\frac{1}{8}=4\text{이므로}$$

$$\frac{m(2n+1)}{n+1}=\frac{31}{8}$$

$$8m(2n+1)=31(n+1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$16mn+8m-31n-31=0$$

$$mn+\frac{1}{2}m-\frac{31}{16}n-\frac{31}{16}=0$$

$$\left(m-\frac{31}{16}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{31}{32}=0$$

$$32\left(m-\frac{31}{16}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)-31=0$$

$$(16m-31)(2n+1)=31$$

이때 m, n 이 자연수이므로 $16m-31$ 은 -15 이상의 정수, $2n+1$ 은 3 이상의 자연수이다.

따라서 $16m-31=1, 2n+1=31$ 이므로

$$m=2, n=15$$

$$\therefore m+n=17$$

다른 풀이

①에서 $m=31k$ 또는 $2n+1=31k$ (단, k 는 자연수)

(i) $m=31k$ 일 때,

$$8k(2n+1)=n+1$$

$$\text{이때 } 2n+1>n+1, 8k\geq 1\text{이므로}$$

$$8k(2n+1)>n+1$$

즉, 조건을 만족시키는 k 의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $2n+1=31k$ 일 때,

$$8mk=n+1\text{이므로 } 16mk=2n+2$$

$$\text{이때 } 2n+1=31k\text{에서 } 16mk=31k+1$$

$$\therefore k(16m-31)=1$$

k 는 자연수, $16m-31$ 은 정수이므로

$$k=1, 16m-31=1 \quad \therefore m=2$$

$$k=1\text{을 } 2n+1=31k\text{에 대입하여 풀면 } n=15$$

$$(i), (ii)\text{에서 } m=2, n=15 \quad \therefore m+n=17$$

07 답 ②

$$f(x)=2x^2-|x^2-6tx|$$

$$=\begin{cases} 2x^2-(x^2-6tx) & (x^2-6tx\geq 0) \\ 2x^2+(x^2-6tx) & (x^2-6tx\leq 0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x^2+6tx & (x\leq 0 \text{ 또는 } x\geq 6t) \\ 3x^2-6tx & (0\leq x\leq 6t) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} (x+3t)^2-9t^2 & (x\leq 0 \text{ 또는 } x\geq 6t) \\ 3(x-t)^2-3t^2 & (0\leq x\leq 6t) \end{cases}$$

$$\therefore g(t)=-9t^2$$

$$\therefore \int_2^3 g(t)dt=\int_2^3 (-9t^2)dt=\left[-3t^3\right]_2^3$$

$$=-81-(-24)=-57$$

08 답 400

$$|x-\sqrt{t}|^3=\begin{cases} -(x-\sqrt{t})^3 & (x\leq \sqrt{t}) \\ (x-\sqrt{t})^3 & (x\geq \sqrt{t}) \end{cases}\text{이므로}$$

$$f(t)=\int_0^{2\sqrt{t}} \frac{1}{2}|x-\sqrt{t}|^3 dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{t}} \left\{-\frac{1}{2}(x-\sqrt{t})^3\right\} dx+\int_{\sqrt{t}}^{2\sqrt{t}} \frac{1}{2}(x-\sqrt{t})^3 dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{t}} (-x^3+3\sqrt{t}x^2-3tx+t\sqrt{t}) dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\sqrt{t}}^{2\sqrt{t}} (x^3-3\sqrt{t}x^2+3tx-t\sqrt{t}) dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}x^4+\sqrt{t}x^3-\frac{3}{2}tx^2+t\sqrt{t}x\right]_0^{\sqrt{t}}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4-\sqrt{t}x^3+\frac{3}{2}tx^2-t\sqrt{t}x\right]_{\sqrt{t}}^{2\sqrt{t}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{t^2}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{t^2}{4}$$

$$=\frac{t^2}{4}$$

$$\text{따라서 } f(\sqrt{k(k+1)})=\frac{k(k+1)}{4}\text{이므로}$$

$$\frac{1}{f(\sqrt{k(k+1)})}=\frac{4}{k(k+1)}=\frac{4}{k}-\frac{4}{k+1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(\sqrt{k(k+1)})}=\frac{1}{f(\sqrt{1\times 2})}+\frac{1}{f(\sqrt{2\times 3})}+\cdots+\frac{1}{f(\sqrt{n(n+1)})}$$

$$=\left(\frac{4}{1}-\frac{4}{2}\right)+\left(\frac{4}{2}-\frac{4}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{4}{n}-\frac{4}{n+1}\right)$$

$$=4-\frac{4}{n+1}$$

$$\text{즉, } 4-\frac{4}{n+1}>\frac{399}{100}\text{이므로 } \frac{1}{n+1}<\frac{1}{400}$$

$$n+1>400 \quad \therefore n>399$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 400이다.

09 답 9

$$|x-a| = \begin{cases} -x+a & (x \leq a) \\ x-a & (x \geq a) \end{cases} \text{이고 } 0 < a < b \text{이므로}$$

$$\int_0^b |x-a| dx = \int_0^a (-x+a) dx + \int_a^b (x-a) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + ax \right]_0^a + \left[\frac{1}{2}x^2 - ax \right]_a^b$$

$$= \frac{a^2}{2} + \left\{ \frac{b^2}{2} - ab - \left(-\frac{a^2}{2} \right) \right\}$$

$$= a^2 + \frac{b^2}{2} - ab \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$|x-b| = \begin{cases} -x+b & (x \leq b) \\ x-b & (x \geq b) \end{cases} \text{이고 } 0 < a < b \text{이므로}$$

$$\int_0^a |x-b| dx = \int_0^a (-x+b) dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + bx \right]_0^a$$

$$= -\frac{a^2}{2} + ab \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

즉, $a^2 + \frac{b^2}{2} - ab = -\frac{a^2}{2} + ab$ 이므로

$$\frac{3}{2}a^2 + \frac{b^2}{2} - 2ab = 0, \quad 3a^2 - 4ab + b^2 = 0$$

$$(3a-b)(a-b) = 0 \quad \therefore 3a = b \quad (\because a \neq b) \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

$$\therefore 2b - a^2 = 6a - a^2 = -(a-3)^2 + 9$$

따라서 $a > 0$ 일 때, $2b - a^2$ 은 $a=3$ 에서 최댓값 9를 갖는다.배점 20%

10 답 ②

(가)의 $ax + a^2 \leq x^2 - a^2$ 에서

$$x^2 - ax - 2a^2 \geq 0, \quad (x+a)(x-2a) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -a \text{ 또는 } x \geq 2a$$

(나)의 $ax + a^2 \geq x^2 - a^2$ 에서

$$x^2 - ax - 2a^2 \leq 0, \quad (x+a)(x-2a) \leq 0$$

$$\therefore -a \leq x \leq 2a$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^2 - a^2 & (x \leq -a \text{ 또는 } x \geq 2a) \\ ax + a^2 & (-a \leq x \leq 2a) \end{cases}$$

(i) $0 < 2a < 2$, 즉 $0 < a < 1$ 일 때,

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^{2a} (ax + a^2) dx + \int_{2a}^2 (x^2 - a^2) dx$$

$$= \left[\frac{a}{2}x^2 + a^2x \right]_0^{2a} + \left[\frac{1}{3}x^3 - a^2x \right]_{2a}^2$$

$$= 4a^3 + \left(\frac{8}{3} - 2a^2 - \frac{2}{3}a^3 \right) = \frac{10}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{8}{3}$$

$$g(a) = \frac{10}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{8}{3} \text{이라 하면}$$

$$g'(a) = 10a^2 - 4a = 2a(5a - 2)$$

$$g'(a) = 0 \text{인 } a \text{의 값은 } a = \frac{2}{5} \quad (\because 0 < a < 1)$$

$0 < a < 1$ 에서 함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0		$\frac{2}{5}$		1
$g'(a)$		-	0	+	
$g(a)$			$\frac{64}{25}$ 극소		

따라서 $0 < a < 1$ 일 때, $g(a) = \int_0^2 f(x) dx$ 는 $a = \frac{2}{5}$ 에서 최솟값 $\frac{64}{25}$ 를 갖는다.

(ii) $2a \geq 2$, 즉 $a \geq 1$ 일 때,

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (ax + a^2) dx$$

$$= \left[\frac{a}{2}x^2 + a^2x \right]_0^2$$

$$= 2a + 2a^2$$

$$= 2 \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2}$$

따라서 $a \geq 1$ 일 때, $\int_0^2 f(x) dx$ 는 $a=1$ 에서 최솟값 4를 갖는다.

(i), (ii)에서 $\int_0^2 f(x) dx$ 의 최솟값은 $\frac{64}{25}$ 이고 이때 a 의 값은 $\frac{2}{5}$ 이다.

11 답 ⑤

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로 $f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이고 $f'(0) = f'(2) = 0$ 이므로

$$f'(x) = 3x(x-2) = 3x^2 - 6x$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 6x) dx = x^3 - 3x^2 + C$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(0) & (x \leq 0) \\ f(x+p) - f(p) & (x > 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$f(x) - f(0) = x^3 - 3x^2 + C - C = x^3 - 3x^2$$

$$f(x+p) - f(p) = (x+p)^3 - 3(x+p)^2 + C - (p^3 - 3p^2 + C)$$

$$= x^3 + 3(p-1)x^2 + 3p(p-2)x$$

따라서 $g(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & (x \leq 0) \\ x^3 + 3(p-1)x^2 + 3p(p-2)x & (x > 0) \end{cases}$ 이므로

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & (x < 0) \\ 3x^2 + 6(p-1)x + 3p(p-2) & (x > 0) \end{cases}$$

ㄱ. $p=1$ 일 때, $x > 0$ 에서 $g'(x) = 3x^2 - 3$ 이므로 $g'(1) = 0$

ㄴ. 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=0$ 에서도 미분가능해야 한다.

즉, 미분계수 $g'(0)$ 이 존재해야 하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \{3x^2 + 6(p-1)x + 3p(p-2)\} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 - 6x)$$

$$3p(p-2) = 0$$

$$\therefore p = 2 \quad (\because p > 0)$$

따라서 양수 p 는 2의 1개이다.

ㄷ. $\int_{-1}^1 g(x) dx$

$$= \int_{-1}^0 (x^3 - 3x^2) dx + \int_0^1 \{x^3 + 3(p-1)x^2 + 3p(p-2)x\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{4}x^4 + (p-1)x^3 + \frac{3}{2}p(p-2)x^2 \right]_0^1$$

$$= -\frac{5}{4} + \left(\frac{3}{2}p^2 - 2p - \frac{3}{4} \right)$$

$$= \frac{3}{2}p^2 - 2p - 2$$

$$= \frac{3}{2} \left(p - \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{8}{3}$$

따라서 $p \geq 2$ 일 때, $\int_{-1}^1 g(x) dx$ 는 $p=2$ 에서 최솟값 0을 가지므로

$$\int_{-1}^1 g(x) dx \geq 0$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

12 **답** 18

$g(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & (x \leq 0) \\ ax^2+bx+c & (x > 0) \end{cases}$$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases} -2x & (x < 0) \\ 2ax+b & (x > 0) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$ 에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (ax^2+bx+c) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x^2)$$

$$\therefore c=0$$

또 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$ 에서도 미분 가능하다.

즉, 미분계수 $f'(0)$ 이 존재하므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (2ax+b) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-2x)$$

$$\therefore b=0$$

따라서 $f'(x)=\begin{cases} -2x & (x < 0) \\ 2ax & (x > 0) \end{cases}$ 이고, 닫힌구간 $[-5, 5]$ 에서

$$|f'(x)| \leq 10 \text{ 이므로}$$

$$|10a| \leq 10, |a| \leq 1$$

$$\therefore 0 < |a| \leq 1 \quad (\because a \neq 0)$$

$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & (x \leq 0) \\ ax^2 & (x > 0) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 |f(x)| dx &= \int_{-3}^0 |-x^2| dx + \int_0^3 |ax^2| dx \\ &= \int_{-3}^0 x^2 dx + |a| \int_0^3 x^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-3}^0 + |a| \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 \\ &= 9 + 9|a| \end{aligned}$$

따라서 $0 < |a| \leq 1$ 일 때, $\int_{-3}^3 |f(x)| dx$ 는 $|a|=1$ 에서 최댓값 18을 갖는다.

13 **답** -57

$$f(x)=\begin{cases} t(x-t) & (x \leq 0) \\ 2x^3-3tx^2-12t^2x-t^2 & (x > 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} t & (x < 0) \\ 6x^2-6tx-12t^2 & (x > 0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} t & (x < 0) \\ 6(x+t)(x-2t) & (x > 0) \end{cases} \end{aligned}$$

(i) $t < 0$ 일 때,

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-t$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x		0		$-t$	
$f'(x)$	-		-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-t^2$	$\searrow$	$7t^3-t^2$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-t$ 에서 극솟값 $7t^3-t^2$ 을 가지므로 $g(t)=7t^3-t^2$

(ii) $t > 0$ 일 때,

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=2t$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x		0		$2t$	
$f'(x)$	+		-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$-t^2$ 극대	$\searrow$	$-20t^3-t^2$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 $-t^2$, $x=2t$ 에서 극솟값 $-20t^3-t^2$ 을 가지므로

$$g(t)=-t^2+(-20t^3-t^2)=-20t^3-2t^2$$

$$(i), (ii) \text{에서 } g(t)=\begin{cases} 7t^3-t^2 & (t < 0) \\ -20t^3-2t^2 & (t > 0) \end{cases} \text{이고 } g(0)=0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 20tg(t) dt &= \int_{-1}^0 (140t^4-20t^3) dt + \int_0^1 (-400t^4-40t^3) dt \\ &= \left[28t^5-5t^4 \right]_{-1}^0 + \left[-80t^5-10t^4 \right]_0^1 \\ &= -(-33)+(-90)=-57 \end{aligned}$$

14 **답** 110

(i)의 $f(x+1)-xf(x)=ax+b$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(1)=b$$

닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x)=x$ 이므로 $b=1$

즉, $f(x+1)-xf(x)=ax+1$ 이므로 $0 \leq x \leq 1$ 에서

$$f(x+1)-x^2=ax+1$$

$$\therefore f(x+1)=x^2+ax+1$$

이때 $x+1=t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq 1$ 에서 $1 \leq t \leq 2$ 이고

$$\begin{aligned} f(t) &= (t-1)^2+a(t-1)+1 \\ &= t^2+(a-2)t+2-a \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\therefore f'(t)=2t+a-2$$

닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x)=x$ 이고 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서

미분가능하므로 $f'(x)=1$ 에서

$$f'(1)=1 \quad \therefore a=1$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $1 \leq t \leq 2$ 에서 $f(t)=t^2-t+1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 (x^2-x+1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + x \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{5}{6} = \frac{11}{6} \\ \therefore 60 \times \int_1^2 f(x) dx &= 60 \times \frac{11}{6} = 110 \end{aligned}$$

★ idea

15 **답** ①

$$f(x)=f(-x), g(x)=-g(-x) \text{에서}$$

$$h(-x)=f(-x)g(-x)=f(x) \times \{-g(x)\}$$

$$=-f(x)g(x)=-h(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 다항함수 $h(x)$ 는 홀수 차수의 항만 있으므로 $h'(x)$ 는 짝수 차수의 항 또는 상수항만 있고, $x^3h'(x), xh'(x)$ 는 홀수 차수의 항만 있다.

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-5}^5 (x^3+2x+3)h'(x) dx \\ &= \int_{-5}^5 x^3h'(x) dx + 2 \int_{-5}^5 xh'(x) dx + 3 \int_{-5}^5 h'(x) dx \\ &= 3 \int_{-5}^5 h'(x) dx = 3 \times 2 \int_0^5 h'(x) dx \\ &= 6 \left[h(x) \right]_0^5 = 6\{h(5)-h(0)\} \end{aligned}$$

즉, $6\{h(5)-h(0)\}=30$ 이므로

$$h(5)-h(0)=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

한편 $\textcircled{A}$ 에서 $h(-x)=-h(x)$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$h(0)=-h(0) \quad \therefore h(0)=0$$

이를 $\textcircled{C}$ 에 대입하면

$$h(5)=5$$

$$\therefore h(-5)=-h(5)=-5$$

16 답 ④

$h(x)=xf(x)$ 라 하면 $(\forall x)$ 의 $f(x)=f(-x)$ 에서

$$h(-x)=-xf(-x)=-xf(x)=-h(x) \text{이므로}$$

$$\int_{-1}^1 xf(x) dx = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^1 (3x-1)f(x) dx &= 3 \int_{-1}^1 xf(x) dx - \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 f(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{즉, } - \int_{-1}^1 f(x) dx = -5 \text{이므로}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 5$$

$$2 \int_0^1 f(x) dx = 5 \text{이므로 } \int_0^1 f(x) dx = \frac{5}{2}$$

$(\forall x)$ 에서 $\int_0^2 f(x) dx = \int_2^4 f(x) dx = \cdots = \int_{12}^{14} f(x) dx$ 이고

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx, \int_{14}^{15} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{15} f(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx + \cdots + \int_{12}^{14} f(x) dx \\ &\quad + \int_{14}^{15} f(x) dx \end{aligned}$$

$$= 7 \int_0^2 f(x) dx + \int_{14}^{15} f(x) dx$$

$$= 7 \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$$

$$= 7 \times 5 + \frac{5}{2} = \frac{75}{2}$$

$$\therefore \int_0^{15} 2f(x) dx = 2 \int_0^{15} f(x) dx = 2 \times \frac{75}{2} = 75$$

17 답 ⑤

$g(x)=f(x)+f(-x)$ 라 하면

$$g(-x)=f(-x)+f(x)=g(x)$$

즉, 함수 $g(x)$ 는 짝수 차수의 항 또는 상수항만 있다.

$(\forall x)$ 의 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)+f(-x)}{x^2} = 3$ 에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x^2} = 3$ 이므로 $g(x)$ 는 최고차

항의 계수가 3인 이차함수이다.

$(\forall x)$ 에서

$$g(0)=f(0)+f(0)=-1+(-1)=-2$$

따라서 $g(x)=3x^2-2$ 이므로

$$f(x)+f(-x)=3x^2-2$$

한편 다항함수 $f(x)$ 의 짝수 차수의 항과 상수항으로 이루어진 함수를

$h_1(x)$, 홀수 차수의 항으로 이루어진 함수를 $h_2(x)$ 라 하면

$$f(x)=h_1(x)+h_2(x) \text{이고 } h_1(-x)=h_1(x), h_2(-x)=-h_2(x) \text{이므로}$$

$$f(-x)=h_1(-x)+h_2(-x)=h_1(x)-h_2(x)$$

$$\int_{-3}^3 f(x) dx = \int_{-3}^3 \{h_1(x)+h_2(x)\} dx = 2 \int_0^3 h_1(x) dx \text{이고,}$$

$$\int_{-3}^3 f(-x) dx = \int_{-3}^3 \{h_1(x)-h_2(x)\} dx = 2 \int_0^3 h_1(x) dx \text{이므로}$$

$$\int_{-3}^3 f(x) dx = \int_{-3}^3 f(-x) dx$$

$$\therefore \int_{-3}^3 \{f(x)+f(-x)\} dx = \int_{-3}^3 f(x) dx + \int_{-3}^3 f(-x) dx$$

$$= 2 \int_{-3}^3 f(x) dx$$

$$\therefore \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-3}^3 \{f(x)+f(-x)\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-3}^3 (3x^2-2) dx$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \int_0^3 (3x^2-2) dx$$

$$= [x^3-2x]_0^3 = 21$$

18 답 -6

$$x^3-3x+x \int_a^x f(t) dt = 0 \text{에서}$$

$$x \int_a^x f(t) dt = -x^3+3x$$

$$\therefore \int_a^x f(t) dt = -x^2+3 \text{ (단, } x \neq 0)$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = -2x \text{ (단, } x \neq 0)$$

$$x^3-3x+x \int_a^x f(t) dt = 0 \text{에 } x=a \text{를 대입하면}$$

$$a^3-3a=0$$

$$a(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})=0$$

$$\therefore a=\sqrt{3} \text{ (} \because a>0)$$

$$\therefore af(a)=\sqrt{3}f(\sqrt{3})=\sqrt{3} \times (-2\sqrt{3})=-6$$

19 답 3

$$\int_0^1 \{f(x)+g(x)\} dx = a, \int_0^1 \{f(x)-kg(x)\} dx = b \text{ (} a, b \text{는 상수)}$$

로 놓으면 $f(x)=2x+a, g(x)=6x^2+b$ 이므로

$$f(x)+g(x)=6x^2+2x+a+b$$

$$f(x)-kg(x)=2x+a-k(6x^2+b)=-6kx^2+2x+a-bk$$

$$\int_0^1 \{f(x)+g(x)\} dx = a \text{에서}$$

$$\int_0^1 (6x^2+2x+a+b) dx = a$$

$$\left[2x^3+x^2+(a+b)x \right]_0^1 = a$$

$$3+a+b=a \quad \therefore b=-3$$

$$\int_0^1 \{f(x)-kg(x)\} dx = b \text{에서}$$

$$\int_0^1 (-6kx^2+2x+a+3k) dx = -3 \text{ (} \because b=-3)$$

$$\left[-2kx^3+x^2+(a+3k)x \right]_0^1 = -3$$

$$k+1+a=-3 \quad \therefore a=-k-4$$

따라서 $f(x)=2x-k-4, g(x)=6x^2-3$ 이므로

$$f(2)=4-k-4=-k, g(1)=6-3=3$$

$$\therefore f(2)+g(1)+k=-k+3+k=3$$

20 ② 0

$f(x)=3x^2+ax+\int_1^x g(t) dt$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $f(1)=3+a$ ㉠
 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면
 $f(x)=(x-1)^2 Q(x)+3x-3$ ㉡
 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $f(1)=0$ ㉢
 ㉠, ㉢에서 $3+a=0 \quad \therefore a=-3$ 배점 40%
 따라서 $f(x)=3x^2-3x+\int_1^x g(t) dt$ 이므로 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f'(x)=6x-3+g(x)$
 $\therefore g(x)=f'(x)-6x+3$ ㉣ 배점 20%
 ㉣의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2 Q'(x)+3$
 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $f'(1)=3$ 배점 20%
 따라서 ㉣에서
 $g(1)=f'(1)-6+3=3-3=0$ 배점 20%

21 ② $\frac{27}{4}$

$3f(x)=\int_1^x \frac{\{f'(t)\}^2}{t(t+2)} dt+6$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $3f(1)=6 \quad \therefore f(1)=2$
 $3f(x)=\int_1^x \frac{\{f'(t)\}^2}{t(t+2)} dt+6$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $3f'(x)=\frac{\{f'(x)\}^2}{x(x+2)}, \{f'(x)\}^2=3x(x+2)f'(x)$
 $f'(x)\{f'(x)-(3x^2+6x)\}=0$
 $\therefore f'(x)=0$ 또는 $f'(x)=3x^2+6x$
 (i) $f'(x)=0$ 일 때,
 $f(x)=\int f'(x) dx=C_1$
 이때 $f(1)=2$ 에서 $C_1=2$
 $\therefore f(x)=2$
 $\therefore \int_{-1}^2 f(x) dx=\int_{-1}^2 2 dx$
 $=\left[2x\right]_{-1}^2=4-(-2)=6$
 (ii) $f'(x)=3x^2+6x$ 일 때,
 $f(x)=\int f'(x) dx=\int (3x^2+6x) dx$
 $=x^3+3x^2+C_2$
 이때 $f(1)=2$ 에서
 $1+3+C_2=2 \quad \therefore C_2=-2$
 $\therefore f(x)=x^3+3x^2-2$
 $\therefore \int_{-1}^2 f(x) dx=\int_{-1}^2 (x^3+3x^2-2) dx$
 $=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3-2x\right]_{-1}^2$
 $=8-\frac{5}{4}=\frac{27}{4}$
 (i), (ii)에서 $\int_{-1}^2 f(x) dx$ 의 최댓값은 $\frac{27}{4}$ 이다.

22 ② ②

$g(x)=\int_0^x f(t) dt+f(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $g'(x)=f(x)+f'(x)$ ㉠
 $g(x)=\int_0^x f(t) dt+f(x)$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $g(0)=f(0)$ ㉡
 ㉠에서 $g'(0)=0, g(0)=0$ 이므로 ㉠, ㉡에서
 $f(0)+f'(0)=0, f(0)=0$
 $\therefore f'(0)=0$
 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=0, f(0)=0$ 이므로
 $f(x)=x^2(x+a)=x^3+ax^2$ (a 는 상수)이라 하면
 $f'(x)=3x^2+2ax$
 ㉠에서
 $g'(x)=(x^3+ax^2)+(3x^2+2ax)$
 $=x^3+(a+3)x^2+2ax$
 ㉢에서 $g'(-x)=-g'(x)$ 이므로 $g'(x)$ 는 홀수 차수의 항만 있다.
 즉, $a+3=0$ 이므로 $a=-3$
 따라서 $f(x)=x^3-3x^2$ 이므로
 $f(2)=8-12=-4$

23 ② ①

$F'(x)=f(x)$ 라 하면 ㉠에서
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)-F(1)}{x-1}$
 $=F'(1)=f(1)$
 $\therefore f(1)=-108$
 ㉡의 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = -27$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}$ 의 값
 이 모두 존재한다.
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로
 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=0$ 에서 $f(0)=0$
 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로
 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=0$ 에서 $f(-1)=0$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}$
 $=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} + \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}$
 $=f'(0)+f'(-1)$
 $\therefore f'(0)+f'(-1)=-27$
 삼차함수 $f(x)$ 에서 $f(0)=0, f(-1)=0$ 이므로
 $f(x)=x(x+1)(ax+b)$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면
 $f'(x)=(x+1)(ax+b)+x(ax+b)+ax(x+1)$
 $f(1)=-108$ 이므로 $2(a+b)=-108$
 $\therefore a+b=-54$ ㉢
 $f'(0)+f'(-1)=-27$ 이므로
 $b+(a-b)=-27 \quad \therefore a=-27$
 이를 ㉢에 대입하면
 $-27+b=-54 \quad \therefore b=-27$

즉, $f(x) = x(x+1)(-27x-27) = -27x(x+1)^2$ 이므로
 $f'(x) = -27(x+1)^2 - 54x(x+1)$
 $= -27(x+1)(3x+1)$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = -\frac{1}{3}$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	$-\frac{1}{3}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		0 극소		4 극대	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{1}{3}$ 에서 극댓값 4, $x = -1$ 에서 극솟값 0을 가지므로 극댓값과 극솟값의 합은
 $4+0=4$

24 답 ②

$f(x) = \int_0^x (t-a)(t-b) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f'(x) = (x-a)(x-b)$

(가)에서 $f'(\frac{1}{2}) = 0$ 이므로

$(\frac{1}{2}-a)(\frac{1}{2}-b) = 0$

$\therefore a = \frac{1}{2}$ 또는 $b = \frac{1}{2}$ ㉠

(나)에서

$$\begin{aligned} f(a) - f(b) &= \int_0^a (t-a)(t-b) dt - \int_0^b (t-a)(t-b) dt \\ &= \int_0^a (t-a)(t-b) dt + \int_b^0 (t-a)(t-b) dt \\ &= \int_b^a (t-a)(t-b) dt \\ &= \int_b^a \{t^2 - (a+b)t + ab\} dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{a+b}{2}t^2 + abt \right]_b^a \\ &= \left(-\frac{a^3}{6} + \frac{a^2b}{2} \right) - \left(-\frac{b^3}{6} + \frac{ab^2}{2} \right) \\ &= -\frac{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}{6} \\ &= -\frac{(a-b)^3}{6} \end{aligned}$$

즉, $-\frac{(a-b)^3}{6} = \frac{1}{6}$ 이므로

$(a-b)^3 = -1$

$\therefore a-b = -1$ ($\because a, b$ 는 실수) ㉡

㉠에서 $a = \frac{1}{2}$ 을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{2} - b = -1 \quad \therefore b = \frac{3}{2}$

㉠에서 $b = \frac{1}{2}$ 을 ㉡에 대입하면

$a - \frac{1}{2} = -1 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$

그런데 a 는 양수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$ 이므로

$a+b=2$

25 답 38

$g(x) = \int_0^x (t^2+t-6)f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$g'(x) = (x^2+x-6)f(x)$

$h(x) = |g'(x)| = |(x+3)(x-2)(x^2+ax+b)|$ 이므로 함수 $y=h(x)$

의 그래프와 x 축이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$(x+3)(x-2)(x^2+ax+b) = 0$

$\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$ 또는 $x^2+ax+b=0$

함수 $h(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수가 1이므로 이차방정식

$x^2+ax+b=0$ 이 -3 을 중근으로 갖거나 2 를 중근으로 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 이 -3 을 중근으로 가질 때,

-3 을 중근으로 갖고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$(x+3)^2 = 0 \quad \therefore x^2+6x+9=0$

따라서 $a=6, b=9$ 이므로 $ab=54$

(ii) 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 이 2 를 중근으로 가질 때,

2 를 중근으로 갖고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-2)^2 = 0 \quad \therefore x^2-4x+4=0$

따라서 $a=-4, b=4$ 이므로 $ab=-16$

(i), (ii)에서 모든 ab 의 값의 합은

$54 + (-16) = 38$

26 답 ⑤

ㄱ. $g(x) = \int_0^x tf(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$g'(x) = xf(x) \quad \therefore g'(0) = 0$

ㄴ. 함수 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[0, \alpha]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, \alpha)$ 에서

미분가능하며, $g(0) = g(\alpha) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $g'(c) = 0$

인 c 가 열린구간 $(0, \alpha)$ 에 적어도 하나 존재한다. $\hookrightarrow g(0) = \int_0^0 tf(t) dt = 0$

$g'(c) = 0$ 에서 $cf(c) = 0 \quad \therefore f(c) = 0$ ($\because c > 0$)

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(0, \alpha)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $\beta > 0$ 이고 $g(0) = g(\beta) = 0$ 이므로 ㄴ에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(0, \beta)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이 실근을 γ ($0 < \gamma < \beta$)라 하면 이차함수 $f(x)$ 에 대하여

$f(\beta) = f(\gamma) = 0$ 이므로 $f(x) = a(x-\gamma)(x-\beta)$ ($a > 0$)라 하자.

$g'(x) = xf(x) = ax(x-\gamma)(x-\beta)$ 이므로

$g'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 0$ 또는 $x = \gamma$ 또는 $x = \beta$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	γ	...	β	...
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$		0 극소		극대		0 극소	

함수 $g(x)$ 의 최솟값이 0이므로 모든 실수 x 에 대하여

$g(x) \geq 0$

$\therefore \int_{\beta}^x tf(t) dt = \int_{\beta}^0 tf(t) dt + \int_0^x tf(t) dt$

$= -\int_0^{\beta} tf(t) dt + \int_0^x tf(t) dt$

$= -g(\beta) + g(x) = g(x)$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 $\int_{\beta}^x tf(t) dt \geq 0$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

01 4 02 340 03 209 04 ⑤ 05 ② 06 1
07 2 08 ⑤ 09 251 10 ⑤

01 답 4

1단계 n 의 값 구하기

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로 $F(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이다.

이때 사차함수 $F(x)$ 가 극댓값을 가지므로 방정식 $F'(x)=0$, 즉

$f(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$ 에서 $4x^3-8x-4n=0$

$$\therefore 4x^3-8x=4n$$

이 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지므로 함수 $y=4x^3-8x$ 의 그래프와 직선 $y=4n$ 이 서로 다른 세 점에서 만난다.

$h(x)=4x^3-8x$ 라 하면

$$h'(x)=12x^2-8$$

$$h'(x)=0\text{인 }x\text{의 값은 }x=-\frac{\sqrt{6}}{3}\text{ 또는 }x=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$	...	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$		$\frac{16\sqrt{6}}{9}$ 극대		$-\frac{16\sqrt{6}}{9}$ 극소	

함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 직선 $y=4n$ 과 서로 다른 세 점에서 만나려면

$$-\frac{16\sqrt{6}}{9} < 4n < \frac{16\sqrt{6}}{9}$$

$$\therefore -\frac{4\sqrt{6}}{9} < n < \frac{4\sqrt{6}}{9}$$

$$\text{이때 } 1 < \frac{4\sqrt{6}}{9} = \sqrt{\frac{96}{81}} < 2 \text{이고 } n \text{은 자연수}$$

이므로

$$n=1$$

2단계 k 의 값 구하기

$$f(x)=4x^3-8x-4\text{이므로}$$

$$F(x)=\int f(x)dx$$

$$=\int (4x^3-8x-4)dx$$

$$=x^4-4x^2-4x+C$$

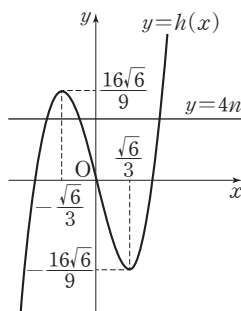
$$f(x)=4x^3-8x-4=4(x+1)(x^2-x-1)\text{에서}$$

$f(x)=0$ 인 x 의 값은

$$x=-1 \text{ 또는 } x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

함수 $F(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	...	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	...
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$F(x)$		$1+C$ 극소		극대		극소	



$$F(x)=x^4-4x^2-4x+C$$

$$=x(x^3-2x-1)-2x^2-3x+C$$

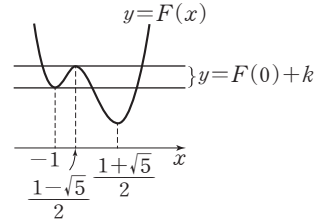
$$=x(x^3-2x-1)-2(x^2-x-1)-5x-2+C$$

이므로 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 일 때, $x^3-2x-1=0$, $x^2-x-1=0$ 이다.

$$F\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{5\sqrt{5}-9}{2}+C, F\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{-5\sqrt{5}-9}{2}+C$$

$$\therefore F\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) < F(-1) < F\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

따라서 함수 $y=F(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



함수 $g(x)=\begin{cases} F(x) & (x \leq a \text{ 또는 } x \geq b) \\ F(0)+k & (a < x < b) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연

속이고 미분가능하지 않은 x 의 개수가 1이려면

$$F(0)+k=F(-1) \text{ 또는 } F(0)+k=F\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\text{이때 } F(0)=C, F(-1)=1+C, F\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{5\sqrt{5}-9}{2}+C\text{에서}$$

$$k=1 \text{ 또는 } k=\frac{5\sqrt{5}-9}{2}$$

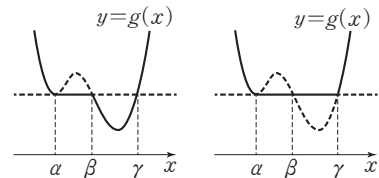
3단계 순서쌍 (n, a, b, k) 의 개수 구하기

(i) $k=1$ 일 때,

함수 $y=F(x)$ 의 그래프와 직선 $y=F(0)+k$ 가 만나는 세 점의 x 좌표를 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$)라 할 때, 함수 $g(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수가 1이려면

$$a=\alpha, b=\beta \text{ 또는 } a=\alpha, b=\gamma$$

$x=\beta$ 에서만 미분가능하지 않다. $x=\gamma$ 에서만 미분가능하지 않다.



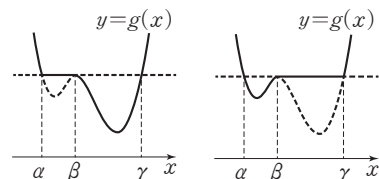
따라서 순서쌍 (n, a, b, k) 의 개수는 2이다.

(ii) $k=\frac{5\sqrt{5}-9}{2}$ 일 때,

함수 $y=F(x)$ 의 그래프와 직선 $y=F(0)+k$ 가 만나는 세 점의 x 좌표를 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$)라 할 때, 함수 $g(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 개수가 1이려면

$$a=\alpha, b=\beta \text{ 또는 } a=\beta, b=\gamma$$

$x=\alpha$ 에서만 미분가능하지 않다. $x=\gamma$ 에서만 미분가능하지 않다.



따라서 순서쌍 (n, a, b, k) 의 개수는 2이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (n, a, b, k) 의 개수는

$$2+2=4$$

02 답 340

1단계 $f(x)$ 구하기

(나)의 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 에서 $f(0) = 0$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$ 이므로

$f'(0) = 0$

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ 이므로

$f(x) = x^2$

2단계 a 의 값과 $g(x)$ 구하기

(가)에서 $g(0) = f(0) = 0$

(나)의 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x-a} = 0$ 에서 $x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 에서 $g(a) = 0$

따라서 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = g'(a)$ 이므로

$g'(a) = 0$

삼차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $g(0) = 0$, $g(a) = 0$,

$g'(a) = 0$ 이므로

$g(x) = x(x-a)^2 = x^3 - 2ax^2 + a^2x$

(다)에서

$$\begin{aligned} \int_0^a \{g(x) - f(x)\} dx &= \int_0^a \{(x^3 - 2ax^2 + a^2x) - x^2\} dx \\ &= \int_0^a \{x^3 - (2a+1)x^2 + a^2x\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2a+1}{3}x^3 + \frac{a^2}{2}x^2 \right]_0^a = \frac{a^4}{12} - \frac{a^3}{3} \end{aligned}$$

즉, $\frac{a^4}{12} - \frac{a^3}{3} = 36$ 이므로

$$a^4 - 4a^3 - 432 = 0$$

$$(a-6)(a^3 + 2a^2 + 12a + 72) = 0$$

이때 $a > 0$ 이면 $a^3 + 2a^2 + 12a + 72 > 0$ 이므로

$$a = 6$$

$$\therefore g(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$$

3단계 $3 \int_0^a |f(x) - g(x)| dx$ 의 값 구하기

$f(x) - g(x) = 0$ 에서

$$x^2 - (x^3 - 12x^2 + 36x) = 0, \quad x^3 - 13x^2 + 36x = 0$$

$$x(x-4)(x-9) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 4 \text{ 또는 } x = 9$$

$$0 \leq x \leq 6 \text{에서 } |f(x) - g(x)| = \begin{cases} x^3 - 13x^2 + 36x & (0 \leq x \leq 4) \\ -x^3 + 13x^2 - 36x & (4 \leq x \leq 6) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^6 |f(x) - g(x)| dx &= \int_0^4 (x^3 - 13x^2 + 36x) dx + \int_4^6 (-x^3 + 13x^2 - 36x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{3}x^3 + 18x^2 \right]_0^4 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 18x^2 \right]_4^6 \\ &= \frac{224}{3} + \left\{ -36 - \left(-\frac{224}{3} \right) \right\} = \frac{340}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 3 \int_0^a |f(x) - g(x)| dx &= 3 \int_0^6 |f(x) - g(x)| dx \\ &= 3 \times \frac{340}{3} = 340 \end{aligned}$$

idea

03 답 209

1단계 $f(x)$ 의 식 세우기

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x) + |f(x) - t|}{2} \\ &= \begin{cases} \frac{f(x) + \{f(x) - t\}}{2} & (f(x) \geq t) \\ \frac{f(x) - \{f(x) - t\}}{2} & (f(x) \leq t) \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x) - \frac{t}{2} & (f(x) \geq t) \\ \frac{t}{2} & (f(x) \leq t) \end{cases} \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 삼차함수이므로 함수 $g(x)$ 는 $f(x) \neq t$ 인 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(가)에서 함수 $g(x)$ 는 $x=0$, $x=n$, $x=2n$ 에서 미분가능하지 않으므로 $f(x) = t$ 인 x 의 값이 0 , n , $2n$ 이다.

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 -9 이므로

$$f(x) - t = -9x(x-n)(x-2n)$$

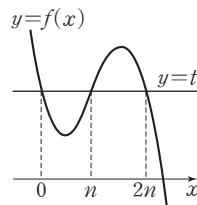
$$\therefore f(x) = -9x(x-n)(x-2n) + t$$

2단계 $4 \int_0^4 g(x) dx$ 의 값의 합 구하기

$0 \leq x \leq n$ 또는 $x \geq 2n$ 에서 $f(x) \leq t$ 이고,

$x \leq 0$ 또는 $n \leq x \leq 2n$ 에서 $f(x) \geq t$ 이므로

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - \frac{t}{2} & (x \leq 0 \text{ 또는 } n \leq x \leq 2n) \\ \frac{t}{2} & (0 \leq x \leq n \text{ 또는 } x \geq 2n) \end{cases}$$



(나)에서

$$\begin{aligned} \int_n^{2n} |f(x) - g(x)| dx &= \int_n^{2n} \left| f(x) - \left\{ f(x) - \frac{t}{2} \right\} \right| dx \\ &= \int_n^{2n} \frac{t}{2} dx \quad (\because t \text{는 자연수}) \\ &= \left[\frac{t}{2} x \right]_n^{2n} \\ &= tn - \frac{tn}{2} = \frac{tn}{2} \end{aligned}$$

즉, $\frac{tn}{2} = 2$ 이므로

$$tn = 4$$

이때 t , n 은 자연수이므로

$$t=1, n=4 \text{ 또는 } t=2, n=2 \text{ 또는 } t=4, n=1$$

(i) $t=1$, $n=4$ 일 때,

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - \frac{1}{2} & (x \leq 0 \text{ 또는 } 4 \leq x \leq 8) \\ \frac{1}{2} & (0 \leq x \leq 4 \text{ 또는 } x \geq 8) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\int_0^4 g(x) dx = \int_0^4 \frac{1}{2} dx = \left[\frac{1}{2} x \right]_0^4 = 2$$

$$\therefore 4 \int_0^4 g(x) dx = 4 \times 2 = 8$$

(ii) $t=2$, $n=2$ 일 때,

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} f(x) - 1 & (x \leq 0 \text{ 또는 } 2 \leq x \leq 4) \\ 1 & (0 \leq x \leq 2 \text{ 또는 } x \geq 4) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -9x(x-2)(x-4) + 2 - 1 & (x \leq 0 \text{ 또는 } 2 \leq x \leq 4) \\ 1 & (0 \leq x \leq 2 \text{ 또는 } x \geq 4) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -9x^3 + 54x^2 - 72x + 1 & (x \leq 0 \text{ 또는 } 2 \leq x \leq 4) \\ 1 & (0 \leq x \leq 2 \text{ 또는 } x \geq 4) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^4 g(x) dx &= \int_0^2 dx + \int_2^4 (-9x^3 + 54x^2 - 72x + 1) dx \\ &= \left[x \right]_0^2 + \left[-\frac{9}{4}x^4 + 18x^3 - 36x^2 + x \right]_2^4 \\ &= 2 + \{4 - (-34)\} = 40\end{aligned}$$

$$\therefore 4 \int_0^4 g(x) dx = 4 \times 40 = 160$$

(iii) $t=4$, $n=1$ 일 때,

$$\begin{aligned}g(x) &= \begin{cases} f(x) - 2 & (x \leq 0 \text{ 또는 } 1 \leq x \leq 2) \\ 2 & (0 \leq x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 2) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -9x(x-1)(x-2) + 4 - 2 & (x \leq 0 \text{ 또는 } 1 \leq x \leq 2) \\ 2 & (0 \leq x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 2) \end{cases} \\ &= \begin{cases} -9x^3 + 27x^2 - 18x + 2 & (x \leq 0 \text{ 또는 } 1 \leq x \leq 2) \\ 2 & (0 \leq x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 2) \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^4 g(x) dx &= \int_0^1 2 dx + \int_1^2 (-9x^3 + 27x^2 - 18x + 2) dx + \int_2^4 2 dx \\ &= \left[2x \right]_0^1 + \left[-\frac{9}{4}x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 2x \right]_1^2 + \left[2x \right]_2^4 \\ &= 2 + \left\{ 4 - \left(-\frac{1}{4} \right) \right\} + (8 - 4) = \frac{41}{4}\end{aligned}$$

$$\therefore 4 \int_0^4 g(x) dx = 4 \times \frac{41}{4} = 41$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 $4 \int_0^4 g(x) dx$ 의 값의 합은

$$8 + 160 + 41 = 209$$

04 답 ⑤

1단계 $g(t)$ 의 식 세우기

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

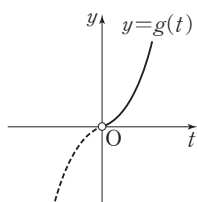
$$\begin{aligned}g(t) &= \int_{-t}^t f(x) dx \\ &= \int_{-t}^t (ax^3 + bx^2 + cx + d) dx \\ &= 2 \int_0^t (bx^2 + d) dx \\ &= 2 \left[\frac{b}{3}x^3 + dx \right]_0^t \\ &= 2 \left(\frac{b}{3}t^3 + dt \right) \\ &= \frac{2}{3}bt^3 + 2dt\end{aligned}$$

2단계 $g(t)$ 의 삼차항과 일차항의 계수의 부호 알기

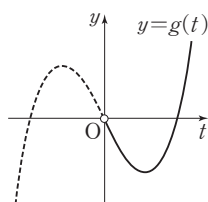
(i) $b > 0$ 일 때,

$g(t) = \frac{2}{3}bt^3 + 2dt = \frac{2}{3}bt \left(t^2 + \frac{3d}{b} \right)$ 에서 함수 $y = g(t)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

① $d \geq 0$ 일 때,



② $d < 0$ 일 때,

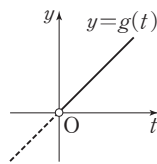


$d \geq 0$ 일 때 $t > 0$ 에서 함수 $g(t)$ 는 최솟값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

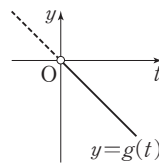
(ii) $b = 0$ 일 때,

$g(t) = 2dt$ 이므로 함수 $y = g(t)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

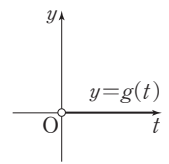
① $d > 0$ 일 때,



② $d < 0$ 일 때,



③ $d = 0$ 일 때,

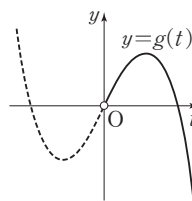


$d \neq 0$ 일 때 $t > 0$ 에서 함수 $g(t)$ 는 최솟값을 갖지 않고, $d = 0$ 일 때 최솟값이 0이므로 모든 상수 d 에 대하여 조건을 만족시키지 않는다.

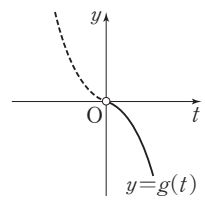
(iii) $b < 0$ 일 때,

$g(t) = \frac{2}{3}bt^3 + 2dt = \frac{2}{3}bt \left(t^2 + \frac{3d}{b} \right)$ 에서 함수 $y = g(t)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

① $d > 0$ 일 때,



② $d \leq 0$ 일 때,



모든 상수 d 에 대하여 $t > 0$ 에서 함수 $g(t)$ 는 최솟값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서

$b > 0, d < 0$

3단계 $\int_{-3}^3 f(x) dx$ 의 값 구하기

$$g(t) = \frac{2}{3}bt^3 + 2dt \text{에서}$$

$$g'(t) = 2bt^2 + 2d$$

$g'(t) = 0$ 인 t 의 값은

$$t = \sqrt{-\frac{d}{b}} \quad (\because t > 0)$$

$t > 0$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\sqrt{-\frac{d}{b}}$	...
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$		\	$\frac{4d}{3}\sqrt{-\frac{d}{b}}$ 극소	/

함수 $g(t)$ 는 $t = \sqrt{-\frac{d}{b}}$ 에서 최솟값 $\frac{4d}{3}\sqrt{-\frac{d}{b}}$ 를 가지므로

$$\sqrt{-\frac{d}{b}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{4d}{3}\sqrt{-\frac{d}{b}} = -4\sqrt{3}$$

따라서 $\frac{4d}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -4\sqrt{3}$ 이므로

$$d = -6$$

이를 $\sqrt{-\frac{d}{b}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 에 대입하면

$$\sqrt{\frac{6}{b}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{6}{b} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore b = 8$$

따라서 $g(t) = \frac{16}{3}t^3 - 12t$ 이므로

$$\int_{-3}^3 f(x) dx = g(3) = 144 - 36 = 108$$

05 답 ②

1단계 a 의 값 구하기

$$f(x) = (x-2a)|x-a^2+3|$$

$$= \begin{cases} -(x-2a)(x-a^2+3) & (x \leq a^2-3) \\ (x-2a)(x-a^2+3) & (x \geq a^2-3) \end{cases}$$

(i) $2a < a^2-3$ 일 때,

$$a^2-2a-3 > 0, (a+1)(a-3) > 0 \quad \therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 3$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

$$\text{따라서 함수 } f(x) \text{는 } x = \frac{2a+a^2-3}{2},$$

$x = a^2-3$ 에서 극값을 가지므로 그 값은

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{2a+a^2-3}{2}\right) + f(a^2-3) \\ &= -\left(\frac{2a+a^2-3}{2}-2a\right)\left(\frac{2a+a^2-3}{2}-a^2+3\right) + 0 \\ &= \frac{1}{4}(a^2-2a-3)^2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{4}(a^2-2a-3)^2 = 36 \text{에서 } (a^2-2a-3)^2 = 144$$

이때 $a^2-2a-3 > 0$ 이므로

$$a^2-2a-3 = 12, a^2-2a-15 = 0$$

$$(a+3)(a-5) = 0 \quad \therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 5$$

(ii) $2a = a^2-3$ 일 때,

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2a)^2 & (x \leq 2a) \\ (x-2a)^2 & (x \geq 2a) \end{cases} \text{이므로 함수}$$

$y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 극값을 갖지 않는다.

(iii) $2a > a^2-3$ 일 때,

$$a^2-2a-3 < 0, (a+1)(a-3) < 0 \quad \therefore -1 < a < 3$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = a^2-3$,

$$x = \frac{a^2-3+2a}{2} \text{에서 극값을 가지므로 그 값은}$$

$$f(a^2-3) + f\left(\frac{a^2-3+2a}{2}\right)$$

$$\text{이때 } f(a^2-3) = 0, f\left(\frac{a^2-3+2a}{2}\right) < 0 \text{이므로}$$

$$f(a^2-3) + f\left(\frac{a^2-3+2a}{2}\right) < 0$$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a = -3$ 또는 $a = 5$

2단계 $\int_{2a}^{a^2-3|a|} xf(x) dx$ 의 값의 합 구하기

$$a = -3 \text{일 때, } f(x) = \begin{cases} -(x+6)(x-6) & (x \leq 6) \\ (x+6)(x-6) & (x \geq 6) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{2a}^{a^2-3|a|} xf(x) dx &= \int_{-6}^0 xf(x) dx \\ &= \int_{-6}^0 \{-x(x+6)(x-6)\} dx \\ &= \int_{-6}^0 (-x^3+36x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4+18x^2\right]_{-6}^0 \\ &= -324 \end{aligned}$$

$$a = 5 \text{일 때, } \int_{2a}^{a^2-3|a|} xf(x) dx = \int_{10}^{10} xf(x) dx = 0$$

따라서 모든 $\int_{2a}^{a^2-3|a|} xf(x) dx$ 의 값의 합은

$$-324+0 = -324$$

06 답 1

1단계 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값 구하기

$$f(x) = x^3-3x^2+a \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2-6x = 3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	a 극대	$\searrow$	$a-4$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 a , $x=2$ 에서 극솟값 $a-4$ 를 갖는다.

2단계 a 의 값의 범위에 따라 $\int_0^2 g(t) dt$ 의 최솟값 구하기

(i) $0 < a < 2$ 일 때,

$-4 < a-4 < -2$ 이므로 $x \geq 0$ 에서 함수

$y = |f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.

이때 $a < 4-a$ 이므로 방정식 $-f(x) = a$ 의

해를 $x = \alpha$ ($0 < \alpha < 2$)라 하면

$$-a^3+3a^2-a = a$$

$$\therefore 2a = -a^3+3a^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$g(t) = \begin{cases} f(0) & (0 \leq t \leq \alpha) \\ -f(t) & (\alpha \leq t \leq 2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a & (0 \leq t \leq \alpha) \\ -t^3+3t^2-a & (\alpha \leq t \leq 2) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 g(t) dt &= \int_0^\alpha a dt + \int_\alpha^2 (-t^3+3t^2-a) dt \\ &= \left[at\right]_0^\alpha + \left[-\frac{1}{4}t^4+t^3-at\right]_\alpha^2 \\ &= a\alpha + \left\{4-2a - \left(-\frac{\alpha^4}{4} + \alpha^3 - a\alpha\right)\right\} \\ &= 2a\alpha + 4 - 2a + \frac{\alpha^4}{4} - \alpha^3 \\ &= (-\alpha^3+3\alpha^2)\alpha + 4 - (-\alpha^3+3\alpha^2) + \frac{\alpha^4}{4} - \alpha^3 \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= -\frac{3}{4}\alpha^4 + 3\alpha^3 - 3\alpha^2 + 4 \end{aligned}$$

$$h(\alpha) = -\frac{3}{4}\alpha^4 + 3\alpha^3 - 3\alpha^2 + 4 \text{라 하면}$$

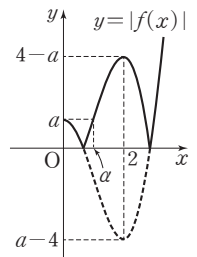
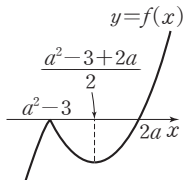
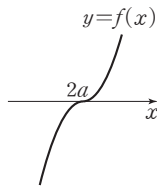
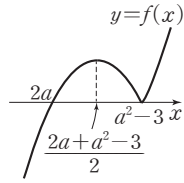
$$h'(\alpha) = -3\alpha^3 + 9\alpha^2 - 6\alpha = -3\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$$

$$h'(\alpha) = 0 \text{인 } \alpha \text{의 값은 } \alpha = 1 \quad (\because 0 < \alpha < 2)$$

$0 < \alpha < 2$ 에서 함수 $h(\alpha)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

α	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$h'(\alpha)$		-	0	+	
$h(\alpha)$		$\searrow$	$\frac{13}{4}$ 극소	$\nearrow$	

함수 $h(\alpha) = \int_0^2 g(t) dt$ 는 $\alpha = 1$ 에서 최솟값 $\frac{13}{4}$ 을 갖는다.

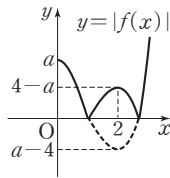


(ii) $2 \leq a < 4$ 일 때,

$-2 \leq a-4 < 0$ 이므로 $x \geq 0$ 에서 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.
이때 $4-a \leq a$ 이므로 $0 \leq t \leq 2$ 에서 $g(t) = f(0) = a$

$$\therefore \int_0^2 g(t) dt = \int_0^2 a dt = \left[at \right]_0^2 = 2a$$

이때 $4 \leq 2a < 8$ 이므로 $\int_0^2 g(t) dt$ 는 $a=2$ 에서 최솟값 4를 갖는다.



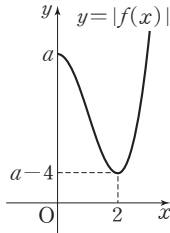
(iii) $a \geq 4$ 일 때,

$a-4 \geq 0$ 이므로 $x \geq 0$ 에서 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 그림과 같다.

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $|f(x)|$ 가 감소하므로 $0 \leq t \leq 2$ 에서 $g(t) = f(0) = a$

$$\therefore \int_0^2 g(t) dt = \int_0^2 a dt = \left[at \right]_0^2 = 2a$$

이때 $2a \geq 8$ 이므로 $\int_0^2 g(t) dt$ 는 $a=4$ 에서 최솟값 8을 갖는다.



(i), (ii), (iii)에서 $\int_0^2 g(t) dt$ 의 최솟값은 $\frac{13}{4}$ 이다.

3단계 양수 a의 값 구하기

따라서 $a=1$ 일 때 $\int_0^2 g(t) dt$ 가 최소이므로 이때 a의 값은 ①에서

$$a = \frac{-a^3 + 3a^2}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

07 답 2

1단계 $-1 \leq x \leq 0$ 일 때, $g(x)$ 구하기

(i) $-1 \leq x \leq 0$ 일 때,

$$f(x) = 3(x+1)^2$$

닫힌구간 $[-1, x]$ 에 속하는 모든 t에 대하여

$$f(t) \leq f(x) \quad \therefore f(x) - f(t) \geq 0$$

$$\therefore g(x) = \int_{-1}^x |f(x) - f(t)| dt$$

$$= \int_{-1}^x \{f(x) - f(t)\} dt$$

$$= f(x) \int_{-1}^x dt - \int_{-1}^x f(t) dt$$

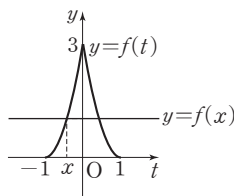
$$= f(x) \left[t \right]_{-1}^x - \int_{-1}^x 3(t+1)^2 dt$$

$$= (x+1)f(x) - \int_{-1}^x (3t^2 + 6t + 3) dt$$

$$= 3(x+1)^3 - \left[t^3 + 3t^2 + 3t \right]_{-1}^x$$

$$= 3x^3 + 9x^2 + 9x + 3 - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$$

$$= 2x^3 + 6x^2 + 6x + 2$$



2단계 $0 \leq x \leq 1$ 일 때, $g(x)$ 구하기

(ii) $0 \leq x \leq 1$ 일 때,

$$f(x) = 3(x-1)^2$$

$$g(x) = \int_{-1}^x |f(x) - f(t)| dt$$

$$= \int_{-1}^{-x} |f(x) - f(t)| dt + \int_{-x}^x |f(x) - f(t)| dt \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$-1 \leq -x \leq 0$ 이므로 (i)에서

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-x} |f(x) - f(t)| dt &= 2(-x)^3 + 6(-x)^2 + 6 \times (-x) + 2 \\ &= -2x^3 + 6x^2 - 6x + 2 \end{aligned}$$

닫힌구간 $[-x, x]$ 에 속하는 모든 t에

대하여

$$f(t) \geq f(x) \quad \therefore f(x) - f(t) \leq 0$$

$$\therefore \int_{-x}^x |f(x) - f(t)| dt$$

$$= \int_{-x}^x \{f(t) - f(x)\} dt$$

$$= \int_{-x}^x f(t) dt - f(x) \int_{-x}^x dt \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 함수 $y = f(t)$ 의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-x}^x f(t) dt = 2 \int_0^x f(t) dt \quad \leftarrow f(-t) = f(t)$$

②에서

$$\int_{-x}^x |f(x) - f(t)| dt = 2 \int_0^x f(t) dt - f(x) \int_{-x}^x dt$$

$$= 2 \int_0^x 3(t-1)^2 dt - f(x) \left[t \right]_{-x}^x$$

$$= 2 \int_0^x (3t^2 - 6t + 3) dt - 2xf(x)$$

$$= 2 \left[t^3 - 3t^2 + 3t \right]_0^x - 2x \times 3(x-1)^2$$

$$= 2(x^3 - 3x^2 + 3x) - (6x^3 - 12x^2 + 6x)$$

$$= -4x^3 + 6x^2$$

따라서 ①에서

$$\begin{aligned} g(x) &= -2x^3 + 6x^2 - 6x + 2 + (-4x^3 + 6x^2) \\ &= -6x^3 + 12x^2 - 6x + 2 \end{aligned}$$

3단계 $\int_{-1}^1 g(x) dx$ 의 값 구하기

$$(i), (ii) \text{에서 } g(x) = \begin{cases} 2x^3 + 6x^2 + 6x + 2 & (-1 \leq x \leq 0) \\ -6x^3 + 12x^2 - 6x + 2 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-1}^1 g(x) dx$$

$$= \int_{-1}^0 (2x^3 + 6x^2 + 6x + 2) dx + \int_0^1 (-6x^3 + 12x^2 - 6x + 2) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{3}{2}x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x \right]_0^1$$

$$= -\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} = 2$$

08 답 ⑤

1단계 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수의 범위 구하기

(*)에서

$$f(x) = \int_0^x \{2 - |f'(t) - 2|\} dt$$

$$= \int_0^x 2 dt - \int_0^x |f'(t) - 2| dt$$

$$= \left[2t \right]_0^x - \int_0^x |f'(t) - 2| dt$$

$$= 2x - \int_0^x |f'(t) - 2| dt$$

$$\therefore f(x) - 2x = - \int_0^x |f'(t) - 2| dt \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $f(0)=0$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) - 2 = -|f'(x) - 2|$$

$$f'(x) - 2 \leq 0 \text{ 이므로 } f'(x) \leq 2 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

한편 (㉡)에서 삼차함수 $f(x)$ 가 $x=0$, $x=2$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(x) = ax(x-2) = ax^2 - 2ax = a(x-1)^2 - a \quad (a \neq 0) \text{라 하자.}$$

㉡에서 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 2$ 이므로 이차함수 $f'(x)$ 의 최댓값이 2보다 작거나 같다.

따라서 $a < 0$ 이고, $-2 \leq a$ 이므로

$$-2 \leq a < 0$$

2단계 3M의 최댓값 구하기

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (ax^2 - 2ax) dx$$

$$= \frac{a}{3}x^3 - ax^2 + C$$

이때 $f(0) = 0$ 에서 $C = 0$

$$\therefore f(x) = \frac{a}{3}x^3 - ax^2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	0	$\dots$	2	$\dots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$	$-\frac{4}{3}a$ 극대	$\searrow$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값 $-\frac{4}{3}a$ 를 가지므로

$$M = -\frac{4}{3}a \quad \therefore 3M = -4a$$

이때 $-2 \leq a < 0$ 이므로

$$0 < -4a \leq 8$$

따라서 3M의 최댓값은 8이다.

09 답 251

1단계 $h(x)$ 를 a 를 포함한 식으로 나타내기

$$f(x) = 3x + a \text{에서}$$

$$g(x) = \int_2^x (t+a)f(t) dt$$

$$= \int_2^x (t+a)(3t+a) dt$$

$$= \int_2^x (3t^2 + 4at + a^2) dt$$

$$= \left[t^3 + 2at^2 + a^2t \right]_2^x$$

$$= x^3 + 2ax^2 + a^2x - 8 - 8a - 2a^2$$

$$\therefore h(x) = f(x)g(x)$$

$$= (3x+a)(x^3 + 2ax^2 + a^2x - 8 - 8a - 2a^2)$$

$$= (3x+a)(x-2)\{x^2 + 2(a+1)x + (a+2)^2\}$$

2단계 $h(-1)$ 의 값 구하기

(㉡)에서 곡선 $y=h(x)$ 가 $x=k$ 인 점에서 x 축에 접한다고 하면 $h(x)$ 는 $(x-k)^2$ 을 인수로 갖는다.

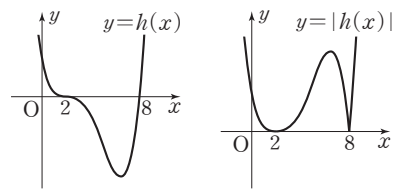
(i) 방정식 $3x+a=0$ 의 근이 2인 경우

$$3x+a=0 \text{에 } x=2 \text{를 대입하면}$$

$$6+a=0 \quad \therefore a=-6$$

$$\begin{aligned} \therefore h(x) &= (3x-6)(x-2)(x^2-10x+16) \\ &= 3(x-2)^3(x-8) \end{aligned}$$

따라서 두 곡선 $y=h(x)$, $y=|h(x)|$ 는 그림과 같다.



이때 곡선 $y=|h(x)|$ 가 x 축에 평행한 직선과 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 4이므로 (㉡)를 만족시킨다.

$$\therefore h(-1) = 3 \times (-27) \times (-9) = 729$$

(ii) 이차방정식 $x^2 + 2(a+1)x + (a+2)^2 = 0$ 의 한 근이 2인 경우

$$x^2 + 2(a+1)x + (a+2)^2 = 0 \text{에 } x=2 \text{를 대입하면}$$

$$4 + 4(a+1) + (a+2)^2 = 0$$

$$a^2 + 8a + 12 = 0$$

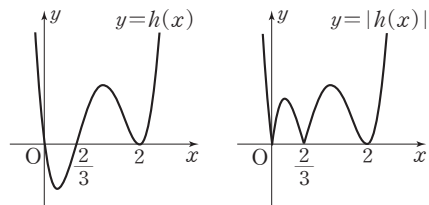
$$(a+6)(a+2) = 0$$

$$\therefore a = -6 \text{ 또는 } a = -2$$

이때 $a = -6$ 이면 (i)과 같으므로 $a = -2$

$$\begin{aligned} \therefore h(x) &= (3x-2)(x-2)(x^2-2x) \\ &= x(3x-2)(x-2)^2 \end{aligned}$$

따라서 두 곡선 $y=h(x)$, $y=|h(x)|$ 는 그림과 같다.



이때 곡선 $y=|h(x)|$ 가 x 축에 평행한 직선과 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 6이므로 (㉡)를 만족시키지 않는다.

(iii) 이차방정식 $x^2 + 2(a+1)x + (a+2)^2 = 0$ 의 한 근이 $-\frac{a}{3}$ 인 경우

$$x^2 + 2(a+1)x + (a+2)^2 = 0 \text{에 } x = -\frac{a}{3} \text{를 대입하면}$$

$$\frac{a^2}{9} - \frac{2}{3}a(a+1) + (a+2)^2 = 0$$

$$4a^2 + 30a + 36 = 0$$

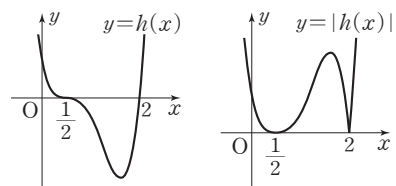
$$2(a+6)(2a+3) = 0$$

$$\therefore a = -6 \text{ 또는 } a = -\frac{3}{2}$$

이때 $a = -6$ 이면 (i)과 같으므로 $a = -\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \therefore h(x) &= \left(3x - \frac{3}{2}\right)(x-2)\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) \\ &= 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^3(x-2) \end{aligned}$$

따라서 두 곡선 $y=h(x)$, $y=|h(x)|$ 는 그림과 같다.



이때 곡선 $y=|h(x)|$ 가 x 축에 평행한 직선과 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 4이므로 (㉡)를 만족시킨다.

$$\therefore h(-1) = 3 \times \left(-\frac{27}{8}\right) \times (-3) = \frac{243}{8}$$

(iv) $x^2 + 2(a+1)x + (a+2)^2 = (x-k)^2$ 인 경우
 $x^2 + 2(a+1)x + (a+2)^2 = x^2 - 2kx + k^2$ 에서
 $k = -a-1, k^2 = (a+2)^2$
 즉, $(-a-1)^2 = (a+2)^2$ 이므로
 $a^2 + 2a + 1 = a^2 + 4a + 4$
 $2a = -3$
 $\therefore a = -\frac{3}{2}$

이때 $a = -\frac{3}{2}$ 이면 (iii)과 같다.

3단계 $p+q$ 의 값 구하기

(i)~(iv)에서 $h(-1)$ 의 최솟값은 $\frac{243}{8}$ 이므로

$$p=8, q=243$$

$$\therefore p+q=251$$

10 답 ⑤

1단계 $g(x)$ 의 식 세우기

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=f'(0)=0$ 이므로
 $f(x)=4x^2(x+a)=4x^3+4ax^2$ (a 는 상수)이라 하면

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \int_0^x (4t^3 + 4at^2) dt \\ &= \left[t^4 + \frac{4}{3}at^3 \right]_0^x \\ &= x^4 + \frac{4}{3}ax^3 \\ \therefore g(x) &= \begin{cases} \int_0^x f(t) dt + 5 & (x < c) \\ \left| \int_0^x f(t) dt - \frac{13}{3} \right| & (x \geq c) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^4 + \frac{4}{3}ax^3 + 5 & (x < c) \\ \left| x^4 + \frac{4}{3}ax^3 - \frac{13}{3} \right| & (x \geq c) \end{cases} \end{aligned}$$

2단계 c 의 값 구하기

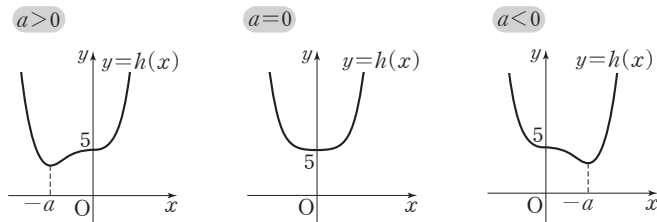
$$h(x) = x^4 + \frac{4}{3}ax^3 + 5 \text{라 하면}$$

$$h'(x) = 4x^3 + 4ax^2 = 4x^2(x+a)$$

$$h'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=-a$$

이때 $x=0$ 의 좌우에서 $h'(x)$ 의 함숫값의 부호는 바뀌지 않고, $x=-a$ 의 좌우에서 $h'(x)$ 의 함숫값의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $h(x)$ 는 $x=-a$ 에서 극소이다.

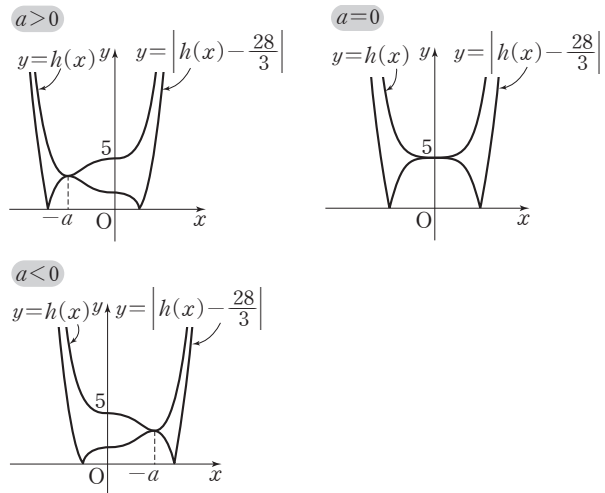
또 $h(0)=5$ 이므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$$\text{함수 } g(x) = \begin{cases} h(x) & (x < c) \\ \left| h(x) - \frac{28}{3} \right| & (x \geq c) \end{cases} \text{에서 함수 } y=h(x) - \frac{28}{3} \text{의 그래프}$$

는 함수 $y=h(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $-\frac{28}{3}$ 만큼 평행이동한 것과 같다.

또 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 c 의 개수가 1이려면 두 함수 $y=h(x), y=\left|h(x) - \frac{28}{3}\right|$ 의 그래프가 그림과 같이 오직 한 점에서만 만나야 한다.



따라서 함수 $h(x)$ 의 극솟값과 함수 $\left|h(x) - \frac{28}{3}\right|$ 의 극댓값, 즉 함수 $-h(x) + \frac{28}{3}$ 의 극댓값이 서로 같아야 하고, 두 함수의 그래프가 만나는 점의 x 좌표가 c 이어야 한다.

즉, $x=-a$ 에서 두 함수 $h(x), -h(x) + \frac{28}{3}$ 의 함숫값이 같아야 하므로

$$h(-a) = -h(-a) + \frac{28}{3}$$

$$h(-a) = \frac{14}{3}$$

$$(-a)^4 + \frac{4}{3}a \times (-a)^3 + 5 = \frac{14}{3}$$

$$-\frac{a^4}{3} + 5 = \frac{14}{3}$$

$$\frac{a^4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$a^4 = 1$$

$$(a^2+1)(a+1)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 1 \text{ } (\because a \text{는 실수})$$

이때 $c = -a$ 이므로

$$a = -1 \text{ 일 때, } c = 1$$

$$a = 1 \text{ 일 때, } c = -1$$

3단계 $g(1)$ 의 최댓값 구하기

(i) $a = -1, c = 1$ 일 때,

$$g(x) = \begin{cases} x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 5 & (x < 1) \\ \left| x^4 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{13}{3} \right| & (x \geq 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$g(1) = \left| 1 - \frac{4}{3} - \frac{13}{3} \right| = \left| -\frac{14}{3} \right| = \frac{14}{3}$$

(ii) $a = 1, c = -1$ 일 때,

$$g(x) = \begin{cases} x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 5 & (x < -1) \\ \left| x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{13}{3} \right| & (x \geq -1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$g(1) = \left| 1 + \frac{4}{3} - \frac{13}{3} \right| = |-2| = 2$$

(i), (ii)에서 $g(1)$ 의 최댓값은 $\frac{14}{3}$ 이다.

step 1 핵심 문제

| 90~91쪽

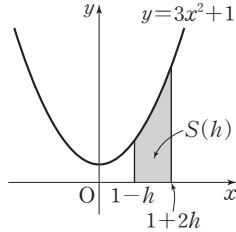
01 12 02 ③ 03 ③ 04 40 05 ④ 06 $\frac{16}{3}$
 07 64 08 38 09 ③ 10 ⑤ 11 ②

01 답 12

$1-h \leq x \leq 1+2h$ 에서 $y > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} S(h) &= \int_{1-h}^{1+2h} (3x^2+1) dx \\ &= \left[x^3 + x \right]_{1-h}^{1+2h} \\ &= 9h^3 + 9h^2 + 12h \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{S(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} (9h^2 + 9h + 12) = 12$$



다른 풀이

$f(x) = 3x^2 + 1$, $F'(x) = f(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{S(h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\int_{1-h}^{1+2h} f(x) dx}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{[F(x)]_{1-h}^{1+2h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{F(1+2h) - F(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{F(1+2h) - F(1) + F(1) - F(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{F(1+2h) - F(1)}{2h} \times 2 + \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{F(1) - F(1-h)}{-h} \\ &= 2F'(1) + F'(1) \\ &= 3F'(1) \\ &= 3f(1) \\ &= 3 \times 4 \\ &= 12 \end{aligned}$$

02 답 ③

곡선 $y = x(x-1)(x-a)$ 와 x 축이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$x(x-1)(x-a) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=a$$

(i) $0 < a < 1$ 일 때,

곡선 $y = x(x-1)(x-a)$ 와 x 축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

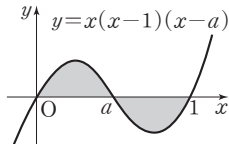
$$\int_0^1 x(x-1)(x-a) dx = 0$$

$$\int_0^1 \{x^3 - (a+1)x^2 + ax\} dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^1 = 0$$

$$\frac{a}{6} - \frac{1}{12} = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$



(ii) $a > 1$ 일 때,

곡선 $y = x(x-1)(x-a)$ 와 x 축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^a x(x-1)(x-a) dx = 0$$

$$\int_0^a \{x^3 - (a+1)x^2 + ax\} dx = 0$$

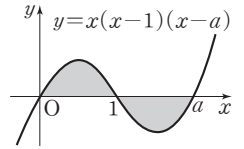
$$\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^a = 0$$

$$-\frac{a^4}{12} + \frac{a^3}{6} = 0$$

$$a^3(a-2) = 0 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 1)$$

(i), (ii)에서 모든 양수 a 의 값의 곱은

$$\frac{1}{2} \times 2 = 1$$



03 답 ③

곡선 $y = x^2$ 과 직선 $y = 4x - 3$ 이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$x^2 = 4x - 3, \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

$1 \leq x \leq 3$ 에서 $4x - 3 \geq x^2$ 이므로 곡선 $y = x^2$

과 직선 $y = 4x - 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_1^3 (4x - 3 - x^2) dx \\ &= \left[2x^2 - 3x - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

곡선 $y = x^2$ 과 직선 $y = 4x - 3$ 및 두 직선 $x=1$, $x=k$ ($1 < k < 3$)로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^k (4x - 3 - x^2) dx \\ &= \left[2x^2 - 3x - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^k \\ &= -\frac{k^3}{3} + 2k^2 - 3k + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

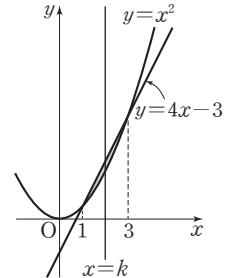
이때 $S_1 = 2S_2$ 이므로

$$\frac{4}{3} = 2 \left(-\frac{k^3}{3} + 2k^2 - 3k + \frac{4}{3} \right)$$

$$k^3 - 6k^2 + 9k - 2 = 0, \quad (k-2)(k^2 - 4k + 1) = 0$$

$$\therefore k=2 \text{ 또는 } k=2 \pm \sqrt{3}$$

그런데 $1 < k < 3$ 이므로 $k=2$



04 답 40

점 $P(a, b)$ 가 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ 의 그래프 위의 점이므로 $b = \frac{a^3}{2}$

$$S_1 = \int_0^1 \frac{1}{2}x^3 dx = \left[\frac{1}{8}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^a \left(b - \frac{1}{2}x^3 \right) dx = \int_1^a \left(\frac{a^3}{2} - \frac{1}{2}x^3 \right) dx \\ &= \left[\frac{a^3}{2}x - \frac{1}{8}x^4 \right]_1^a = \frac{3}{8}a^4 - \frac{a^3}{2} + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$S_1 = S_2 \text{에서 } \frac{1}{8} = \frac{3}{8}a^4 - \frac{a^3}{2} + \frac{1}{8}$$

$$3a^4 - 4a^3 = 0, \quad a^3(3a - 4) = 0 \quad \therefore a = \frac{4}{3} \quad (\because a > 1)$$

$$\therefore 30a = 30 \times \frac{4}{3} = 40$$

05 답 ④

$x > 0$ 일 때, 점 B에서 두 함수 $y = ax^2 + 2$, $y = 2x$ 의 그래프가 접하므로
이차방정식 $ax^2 + 2 = 2x$, 즉 $ax^2 - 2x + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - 2a = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

점 B의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0 \quad \therefore x = 2$$

주어진 두 함수의 그래프가 모두 y 축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = 2 \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 2 - 2x \right) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{6}x^3 + 2x - x^2 \right]_0^2$$

$$= 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

06 답 $\frac{16}{3}$

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $a^2x^2 \geq -x^2$ 이므로

$$S(a) = \int_0^2 \{a^2x^2 - (-x^2)\} dx$$

$$= \int_0^2 (a^2 + 1)x^2 dx$$

$$= \left[\frac{a^2 + 1}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3}(a^2 + 1) \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

$$\therefore \frac{S(a)}{a} = \frac{8}{3}a + \frac{8}{3a} \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$

이때 $a > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{8}{3}a + \frac{8}{3a} \geq 2\sqrt{\frac{8}{3}a \times \frac{8}{3a}}$$

$$= 2 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3} \quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{8}{3}a = \frac{8}{3a} \text{일 때 성립} \right) \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

따라서 $\frac{S(a)}{a}$ 의 최솟값은 $\frac{16}{3}$ 이다. $\dots\dots \text{배점 20\%}$

개념 NOTE

$a > 0$, $b > 0$ 일 때, 산술평균과 기하평균의 관계는 다음과 같다.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립})$$

07 답 64

$g(1) = a$ 라 하면 $f(a) = 1$ 이므로

$$a^3 + a - 1 = 1, \quad a^3 + a - 2 = 0$$

$$(a-1)(a^2 + a + 2) = 0$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a \text{는 실수})$$

또 $g(29) = b$ 라 하면 $f(b) = 29$ 이므로

$$b^3 + b - 1 = 29, \quad b^3 + b - 30 = 0$$

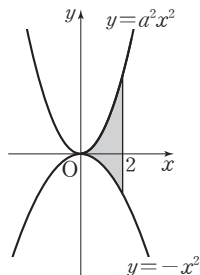
$$(b-3)(b^2 + 3b + 10) = 0$$

$$\therefore b = 3 \quad (\because b \text{는 실수})$$

한편 $f(x) = x^3 + x - 1$ 에서

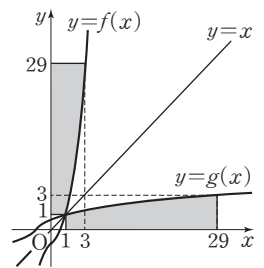
$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.



따라서 곡선 $y = f(x)$ 는 그림과 같고 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭이므로 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이는 서로 같다.

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^{29} g(x) dx &= 3 \times 29 - 1 \times 1 - \int_1^3 f(x) dx \\ &= 87 - 1 - \int_1^3 (x^3 + x - 1) dx \\ &= 86 - \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^3 \\ &= 86 - 22 = 64 \end{aligned}$$



08 답 38

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭이므로 구하는 넓이는 곡선 $y = f(x)$ 와 두 직선 $y = -x - 6$, $y = x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$x^3 - 6 = x, \quad x^3 - x - 6 = 0$$

$$(x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \quad (\because x \text{는 실수})$$

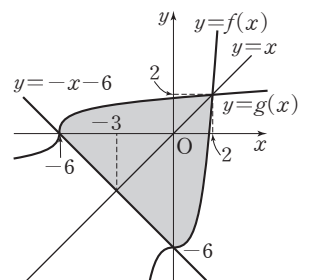
두 직선 $y = x$, $y = -x - 6$ 이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$x = -x - 6, \quad 2x = -6$$

$$\therefore x = -3$$

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $x \geq x^3 - 6$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= 2 \left[\int_0^2 \{x - (x^3 - 6)\} dx + \frac{1}{2} \times 6 \times 3 \right] \\ &= 2 \left\{ \int_0^2 (-x^3 + x + 6) dx + 9 \right\} \\ &= 2 \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_0^2 + 18 \\ &= 2 \times 10 + 18 = 38 \end{aligned}$$



09 답 ③

시각 t 에서의 점 P의 가속도는 $v'(t) = -12t^2 + 24t$

시각 $t = k$ 에서 점 P의 가속도가 12이므로 $v'(k) = 12$ 에서

$$-12k^2 + 24k = 12, \quad k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$(k-1)^2 = 0 \quad \therefore k = 1$$

$$v(t) = 0 \text{에서 } -4t^3 + 12t^2 = 0$$

$$-4t^2(t-3) = 0$$

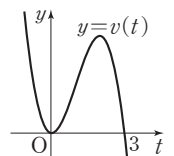
$$\therefore t = 3 \quad (\because t > 0)$$

이때 $3k = 3$, $4k = 4$ 이고 $3 \leq t \leq 4$ 에서

$$-4t^3 + 12t^2 \leq 0 \text{이므로 시각 } t = 3 \text{에서 } t = 4 \text{까지 점}$$

P가 움직인 거리는

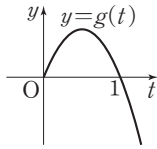
$$\begin{aligned} \int_3^4 |v(t)| dt &= \int_3^4 (4t^3 - 12t^2) dt \\ &= \left[t^4 - 4t^3 \right]_3^4 \\ &= 27 \end{aligned}$$



10 답 ⑤

ㄱ. 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $f(t)=0$ 에서
 $t^3-3t^2+2t=0$, $t(t-1)(t-2)=0$
 $\therefore t=1$ 또는 $t=2$ ($\because t>0$)
 따라서 점 P는 시각 $t=1$, $t=2$ 에서 운동 방향을 바꾸므로 출발 후
 운동 방향을 2번 바꾼다.

ㄴ. $g(t)=0$ 에서 $-3t^2+3t=0$
 $t(t-1)=0 \therefore t=0$ 또는 $t=1$
 $0 \leq t \leq 1$ 에서 $g(t) \geq 0$, $t \geq 1$ 에서 $g(t) \leq 0$ 이므로
 시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 Q가 움직인 거리는



$$\begin{aligned} \int_0^3 |g(t)| dt &= \int_0^1 (-3t^2+3t) dt + \int_1^3 (3t^2-3t) dt \\ &= \left[-t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^1 + \left[t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_1^3 = \frac{1}{2} + 14 = \frac{29}{2} \end{aligned}$$

ㄷ. 시각 $t=x(x>0)$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^x f(t) dt &= \int_0^x (t^3-3t^2+2t) dt \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4-t^3+t^2\right]_0^x = \frac{1}{4}x^4-x^3+x^2 \end{aligned}$$

시각 $t=x(x>0)$ 에서의 점 Q의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^x g(t) dt &= \int_0^x (-3t^2+3t) dt \\ &= \left[-t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^x = -x^3+\frac{3}{2}x^2 \end{aligned}$$

두 점 P, Q가 만나면 위치가 같으므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}x^4-x^3+x^2 &= -x^3+\frac{3}{2}x^2, \quad \frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2=0 \\ x^2(x^2-2) &= 0 \quad \therefore x=\sqrt{2} (\because x>0) \end{aligned}$$

따라서 두 점 P, Q는 출발한 후 시각 $t=\sqrt{2}$ 에서 한 번 만난다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

11 답 ②

$v(t)=0$ 인 t 의 값의 좌우에서 $v(t)$ 의 값의 부호가 바뀌면 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

따라서 시각 $t=1$ 에서 처음으로 운동 방향이 바뀌고 시각 $t=7$ 에서 두 번째로 운동 방향이 바뀌므로 구하는 거리는

$$\int_1^7 |v(t)| dt = \frac{1}{2} \times (4+2) \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 7$$

step 2 고난도 문제

| 92~95쪽

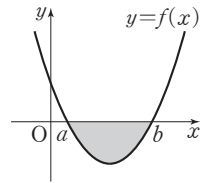
01 ②	02 $-\frac{2}{3}$	03 16	04 ④	05 ⑤	06 ④
07 16	08 8	09 ②	10 2	11 8	12 2
13 ③	14 $12-6\sqrt{2}$	15 ②	16 $\frac{9}{4}$	17 $12\sqrt{3}$	
18 21	19 $\frac{38}{3}$	20 ③	21 ④		

01 답 ②

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축이 만나는 점의 x 좌표를 구하면
 $(x-a)(x-b)=0 \therefore x=a$ 또는 $x=b$

$a \leq x \leq b$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \{-f(x)\} dx = -\int_a^b f(x) dx \\ &= -\left\{\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx\right\} \\ &= -\left\{-\int_0^a f(x) dx + \int_0^b f(x) dx\right\} \\ &= -\left(-\frac{11}{6} - \frac{8}{3}\right) = \frac{9}{2} \end{aligned}$$



02 답 $-\frac{2}{3}$

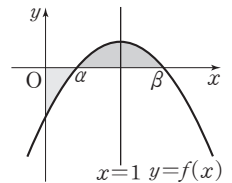
$f(x)=-x^2+2x+k=-(x-1)^2+k+1$ 이라 하면 곡선 $y=f(x)$ 는 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축이 만나는 점의 x 좌표를 α, β ($\alpha < \beta$)라 하면

$$\begin{aligned} \int_a^1 f(x) dx &= \int_1^\beta f(x) dx \\ S_1 &= \int_0^a \{-f(x)\} dx = -\int_0^a f(x) dx \\ S_2 &= \int_a^\beta f(x) dx = \int_a^1 f(x) dx + \int_1^\beta f(x) dx = 2 \int_a^1 f(x) dx \end{aligned}$$

이때 $S_1 : S_2 = 1 : 2$ 에서 $S_1 = \frac{1}{2}S_2$ 이므로

$$\begin{aligned} -\int_0^a f(x) dx &= \int_a^1 f(x) dx \\ \int_0^a f(x) dx + \int_a^1 f(x) dx &= 0 \\ \int_0^1 f(x) dx &= 0, \quad \int_0^1 (-x^2+2x+k) dx = 0 \\ \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+kx\right]_0^1 &= 0 \\ k + \frac{2}{3} &= 0 \quad \therefore k = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$



03 답 16

$$\begin{aligned} \int_0^{3000} f(x) dx &= \int_3^{3000} f(x) dx \text{에서} \\ \int_0^{3000} f(x) dx - \int_3^{3000} f(x) dx &= 0 \\ \int_0^3 f(x) dx + \int_{3000}^3 f(x) dx &= 0 \\ \therefore \int_0^3 f(x) dx &= 0 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%} \end{aligned}$$

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(3)=0$ 이므로
 $f(x)=(x-3)(x+a)=x^2+(a-3)x-3a$ (a 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx &= \int_0^3 \{x^2+(a-3)x-3a\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a-3}{2}x^2-3ax\right]_0^3 = -\frac{9}{2}a-\frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{9}{2}a-\frac{9}{2}=0 \text{이므로 } a=-1$$

$$\therefore f(x)=x^2-4x+3 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

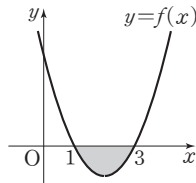
$$\begin{aligned} x^2-4x+3 &= 0, \quad (x-1)(x-3)=0 \\ \therefore x &= 1 \text{ 또는 } x=3 \end{aligned}$$

$1 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이므로

$$S = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^3 = \frac{4}{3} \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\therefore 12S = 12 \times \frac{4}{3} = 16 \quad \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$



04 답 ④

(나)에서 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$ 가 $x=\alpha$, $x=\beta$ 에서 극값 0을 가지므로 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$
 (㉠)에서 $f(x)=f(-x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

이때 $\beta < 0 < \alpha$ 라 하면 $\beta = -\alpha$ 이므로

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x+\alpha)^2 = (x^2-\alpha^2)^2 = x^4 - 2\alpha^2x^2 + \alpha^4$$

$$\therefore f'(x) = 4x^3 - 4\alpha^2x = 4x(x+\alpha)(x-\alpha)$$

곡선 $y=f'(x)$ 와 x 축이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$4x(x+\alpha)(x-\alpha) = 0 \quad \therefore x = -\alpha \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = \alpha$$

곡선 $y=f'(x)$ 는 그림과 같이 원점에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f'(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하면

$$S = 2 \int_{-\alpha}^0 f'(x) dx = 2 \int_{-\alpha}^0 (4x^3 - 4\alpha^2x) dx$$

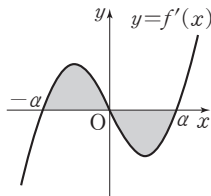
$$= 2 \left[x^4 - 2\alpha^2x^2 \right]_{-\alpha}^0 = 2\alpha^4$$

$$\text{즉, } 2\alpha^4 = 162 \text{이므로 } \alpha^4 = 81$$

$$(\alpha^2+9)(\alpha+3)(\alpha-3) = 0 \quad \therefore \alpha = 3 \quad (\because \alpha > 0)$$

따라서 $f(x) = x^4 - 18x^2 + 81$ 이므로

$$f(1) = 1 - 18 + 81 = 64$$



05 답 ⑤

$$\neg. f'(-x) = -f'(x) \text{에서 } f'(-1) = -f'(1) = 0 \quad \dots\dots\dots \text{㉠}$$

나. 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 $f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이다.

$f'(-x) = -f'(x)$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f'(0) = -f'(0) \quad \therefore f'(0) = 0$$

$f'(1)=0$ 이고 ㉠에서 $f'(-1)=0$ 이므로

$$f'(x) = 4x(x+1)(x-1) = 4x^3 - 4x$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (4x^3 - 4x) dx = x^4 - 2x^2 + C$$

$$\text{이때 } f(1)=2 \text{에서 } 1-2+C=2 \quad \therefore C=3$$

$$\therefore f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$$

함수 $f(x)$ 는 $f(x)=f(-x)$ 를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

따라서 모든 실수 k 에 대하여

$$\int_{-k}^0 f(x) dx = \int_0^k f(x) dx$$

다. $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	2 극소	$\nearrow$	3 극대	$\searrow$	2 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

이때 $\int_{-t}^t f(x) dx$ 의 값은 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선

$x=-t$, $x=t$ 로 둘러싸인 부분의 넓

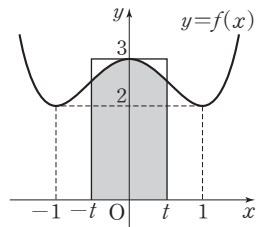
이와 같고, 이는 세 직선 $x=-t$,

$x=t$, $y=3$ 및 x 축으로 둘러싸인 직사각형의 넓이인 $6t$ 보다 작으

므로

$$\int_{-t}^t f(x) dx < 6t$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.



06 답 ④

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고 $\int_0^6 f(x) dx = 0$ 이므로

$6 \leq x \leq 9$ 에서 $f(x) > 0$ 이다.

구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_6^9 f(x) dx = \int_6^9 \{f(x-3) + 4\} dx \quad (\because \text{㉠})$$

$$= \int_6^9 f(x-3) dx + \int_6^9 4 dx = \int_3^6 f(x) dx + [4x]_6^9$$

$$= \int_3^6 f(x) dx + 12 \quad \dots\dots\dots \text{㉡} \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{a+p}^{b+p} f(x-p) dx$$

(㉠)의 좌변에서

$$\int_0^6 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx$$

$$= \int_0^3 f(x) dx + \int_3^6 \{f(x-3) + 4\} dx \quad (\because \text{㉠})$$

$$= \int_0^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x-3) dx + \int_3^6 4 dx$$

$$= \int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx + [4x]_3^6$$

$$= 2 \int_0^3 f(x) dx + 12 \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{a+p}^{b+p} f(x-p) dx$$

$$\text{즉, } 2 \int_0^3 f(x) dx + 12 = 0 \text{이므로 } \int_0^3 f(x) dx = -6$$

$$\int_0^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx = 0 \text{이므로 } \int_3^6 f(x) dx = 6$$

따라서 구하는 넓이 S 는 ㉡에서

$$S = 6 + 12 = 18$$

07 답 16

곡선 $y=a^2x^2$ 과 직선 $y=1$ 이 만나는

점의 x 좌표를 구하면

$$a^2x^2 = 1, \quad x^2 = \frac{1}{a^2}$$

$$\therefore x = -\frac{1}{a} \text{ 또는 } x = \frac{1}{a}$$

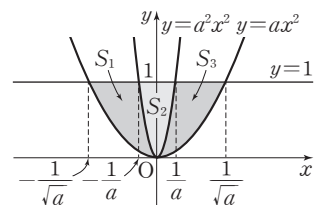
곡선 $y=a^2x^2$ 은 y 축에 대하여 대칭

이므로

$$S_2 = 2 \int_0^{\frac{1}{a}} (1 - a^2x^2) dx$$

$$= 2 \left[x - \frac{a^2}{3}x^3 \right]_0^{\frac{1}{a}}$$

$$= 2 \times \frac{2}{3a} = \frac{4}{3a}$$



곡선 $y=ax^2$ 과 직선 $y=1$ 이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$ax^2=1, x^2=\frac{1}{a} \quad \therefore x=-\frac{1}{\sqrt{a}} \text{ 또는 } x=\frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_3 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \times 1 - \frac{1}{2} S_2 - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} ax^2 dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{2} \times \frac{4}{3a} - \left[\frac{a}{3} x^3 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{2}{3a} - \frac{1}{3\sqrt{a}} = \frac{2}{3\sqrt{a}} - \frac{2}{3a} \end{aligned}$$

$S_2 : S_3 = 2 : 3$ 에서 $3S_2 = 2S_3$ 이므로

$$3 \times \frac{4}{3a} = 2 \times \left(\frac{2}{3\sqrt{a}} - \frac{2}{3a} \right)$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{3\sqrt{a}} - \frac{1}{3a}, \quad \frac{4}{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$4 = \sqrt{a} \quad \therefore a = 16$$

08 답 8

곡선 $y=-x^2+2mx$ 와 x 축이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$-x^2+2mx=0, x(x-2m)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2m$$

$0 \leq x \leq 2m$ 에서 $-x^2+2mx \geq 0$ 이므로 곡선 $y=-x^2+2mx$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^{2m} (-x^2+2mx) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + mx^2 \right]_0^{2m} = \frac{4}{3}m^3$$

곡선 $y=-x^2+2mx$ 와 직선 $y=nx$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$-x^2+2mx=nx, x^2+(-2m+n)x=0$$

$$x(x-2m+n)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=2m-n$$

$0 \leq x \leq 2m-n$ 에서 $-x^2+2mx \geq nx$ 이므로 곡선 $y=-x^2+2mx$ 와 직선 $y=nx$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{2m-n} (-x^2+2mx-nx) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{2m-n}{2}x^2 \right]_0^{2m-n} = \frac{(2m-n)^3}{6} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } S_1 = 2S_2 \text{이므로 } \frac{4}{3}m^3 = 2 \times \frac{(2m-n)^3}{6}$$

$$(2m-n)^3 = 4m^3, \left(\frac{2m-n}{m} \right)^3 = 4$$

$$\left(2 - \frac{n}{m} \right)^3 = 4, 2 - \frac{n}{m} = \sqrt[3]{4} \rightarrow 2m-n > 0, m > 0 \text{에서 } 2 - \frac{n}{m} > 0$$

$$\therefore \frac{n}{m} = 2 - \sqrt[3]{4}$$

$$\text{따라서 } a=2, b=4 \text{이므로 } ab=8$$

09 답 ②

S_1+S_2 는 삼각형 OAB의 넓이와 같으므로

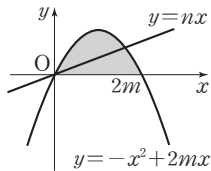
$$S_1+S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$$

$$S_1 : S_2 = 13 : 3 \text{에서}$$

$$S_1 = 3 \times \frac{13}{16} = \frac{39}{16} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 점 A(2, 0), B(0, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore y = -\frac{3}{2}x + 3$$



직선 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 과 곡선 $y=ax^2$ 이 제1사분면에서 만나는 점의 x 좌표

를 p ($0 < p < 2$)라 하면

$$-\frac{3}{2}p+3=ap^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_1 &= \int_0^p \left(-\frac{3}{2}x+3-ax^2 \right) dx \\ &= \left[-\frac{3}{4}x^2+3x-\frac{a}{3}x^3 \right]_0^p \\ &= -\frac{a}{3}p^3-\frac{3}{4}p^2+3p \\ &= -\frac{1}{3}p \left(-\frac{3}{2}p+3 \right) - \frac{3}{4}p^2+3p \quad (\because \textcircled{2}) \\ &= -\frac{1}{4}p^2+2p \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } -\frac{1}{4}p^2+2p = \frac{39}{16} \text{이므로}$$

$$4p^2-32p+39=0, (2p-3)(2p-13)=0$$

$$\therefore p = \frac{3}{2} \quad (\because 0 < p < 2)$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$-\frac{9}{4}+3=\frac{9}{4}a, \quad \frac{9}{4}a=\frac{3}{4}$$

$$\therefore a = \frac{1}{3}$$

10 답 2

두 점 A(a, a^2), B(1, 0)을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{a^2}{a-1}(x-1)$$

직선 AB와 곡선 $y=x^2$ 이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{a^2}{a-1}(x-1)=x^2, (a-1)x^2-a^2x+a^2=0$$

$$(x-a)\{(a-1)x-a\}=0$$

$$\therefore x=a \text{ 또는 } x=\frac{a}{a-1} \rightarrow x=a \text{인 점은 A이다.}$$

$$\therefore C \left(\frac{a}{a-1}, \left(\frac{a}{a-1} \right)^2 \right)$$

곡선 $y=x^2$ 과 선분 BC 및 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S_3(a)$ 라 하면

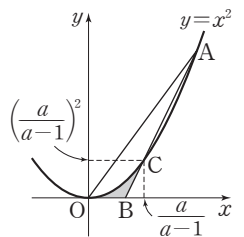
$$\begin{aligned} S_3(a) &= \int_0^{\frac{a}{a-1}} x^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \times \left(\frac{a}{a-1}-1 \right) \times \left(\frac{a}{a-1} \right)^2 \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\frac{a}{a-1}} - \frac{a^2}{2(a-1)^3} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{a}{a-1} \right)^3 - \frac{a^2}{2(a-1)^3} \\ &= \frac{2a^3-3a^2}{6(a-1)^3} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } S_2(a) = \frac{1}{2} \times 1 \times a^2 = \frac{1}{2}a^2 \text{이므로}$$

$$S_1(a) = S_2(a) - S_3(a) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{2a^3-3a^2}{6(a-1)^3}$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow 2+} \frac{3S_1(a)}{S_2(a)} = \lim_{a \rightarrow 2+} \frac{\frac{3}{2}a^2 - \frac{2a^3-3a^2}{2(a-1)^3}}{\frac{1}{2}a^2}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 2+} \left\{ 3 - \frac{2a-3}{(a-1)^3} \right\} = 3-1=2$$



11 답 8

$$f(x)=x^3-3x+2 \text{에서 } f'(x)=3x^2-3$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-(a^3-3a+2)=(3a^2-3)(x-a)$$

$$\therefore y=(3a^2-3)x-2a^3+2$$

곡선 $y=f(x)$ 와 접선이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$x^3-3x+2=(3a^2-3)x-2a^3+2$$

$$x^3-3a^2x+2a^3=0$$

$$(x+2a)(x-a)^2=0$$

$$\therefore x=-2a \text{ 또는 } x=a$$

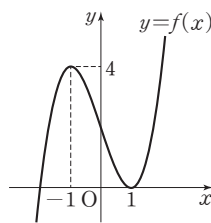
$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1) \text{에서}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$ 극대	$\searrow$	$\frac{0}{3}$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



(i) $a < 0$ 일 때,

$$a \leq x \leq -2a \text{에서}$$

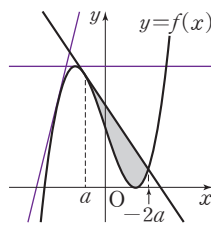
$$(3a^2-3)x-2a^3+2 \geq x^3-3x+2 \text{이므로}$$

$$S = \int_a^{-2a} \{ (3a^2-3)x-2a^3+2 - (x^3-3x+2) \} dx$$

$$= \int_a^{-2a} (-x^3+3a^2x-2a^3) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}a^2x^2 - 2a^3x \right]_a^{-2a}$$

$$= \frac{27}{4}a^4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$



$\hookrightarrow a < 0$ 일 때, $a < x < -2a$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 인 점에서의 접선보다 아래쪽에 있다.

(ii) $a > 0$ 일 때,

$$-2a \leq x \leq a \text{에서}$$

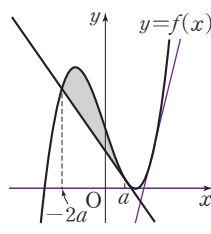
$$x^3-3x+2 \geq (3a^2-3)x-2a^3+2 \text{이므로}$$

$$S = \int_{-2a}^a [x^3-3x+2 - \{ (3a^2-3)x-2a^3+2 \}] dx$$

$$= \int_{-2a}^a (x^3-3a^2x+2a^3) dx$$

$$= \int_{-2a}^a (-x^3+3a^2x-2a^3) dx$$

$$= \frac{27}{4}a^4 \quad (\because \textcircled{1})$$



$\hookrightarrow a > 0$ 일 때, $-2a < x < a$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 는 $x=a$ 인 점에서의 접선보다 위쪽에 있다.

$$(i), (ii) \text{에서 } S = \frac{27}{4}a^4$$

$$S \leq 2700 \text{에서 } \frac{27}{4}a^4 \leq 2700$$

$$a^4 \leq 400, a^2 \leq 20$$

$$\therefore -2\sqrt{5} \leq a \leq 2\sqrt{5}$$

이때 $a \neq 0$ 이므로 정수 a 는 $-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4$ 의 8개이다.

12 답 2

$f(1-x)=-f(1+x)$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(1)=-f(1) \quad \therefore f(1)=0$$

$f(1-x)=-f(1+x)$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(0)=-f(2) \quad \therefore f(2)=0 \quad (\because f(0)=0)$$

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=f(1)=f(2)=0$ 이

므로

$$f(x)=x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$$

두 곡선 $y=f(x), y=-6x^2$ 이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$x^3-3x^2+2x=-6x^2, x^3+3x^2+2x=0$$

$$x(x+2)(x+1)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=-1 \text{ 또는 } x=0$$

$$-2 \leq x \leq -1 \text{에서 } x^3-3x^2+2x \geq -6x^2,$$

$$-1 \leq x \leq 0 \text{에서 } -6x^2 \geq x^3-3x^2+2x \text{이}$$

므로

$$S = \int_{-2}^{-1} \{ x^3-3x^2+2x - (-6x^2) \} dx$$

$$+ \int_{-1}^0 \{ -6x^2 - (x^3-3x^2+2x) \} dx$$

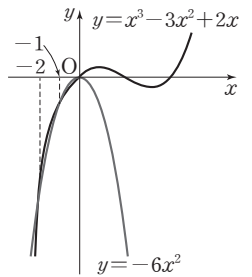
$$= \int_{-2}^{-1} (x^3+3x^2+2x) dx$$

$$+ \int_{-1}^0 (-x^3-3x^2-2x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2 \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{4}x^4 - x^3 - x^2 \right]_{-1}^0$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 4S = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$



idea

13 답 3

두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 2이므로

$$\int_{-1}^1 |f(x)-g(x)| dx = 2$$

$$\int_{-1}^1 \{ f(x)-g(x) \} dx = -2 \text{이므로 } -1 \leq x \leq 1 \text{에서}$$

$$f(x)-g(x) \leq 0$$

$$h(x)=f(x)-g(x) \text{라 하면 } -1 \leq x \leq 1 \text{에서}$$

$$h(x) \leq 0 \text{이고, } h(-1)=h(0)=h(1)=0 \text{이므로}$$

사차함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 그림과 같이

$x=-1, x=1$ 에서 x 축과 만나고 $x=0$ 에서 x 축

에 접한다.

$$h(x)=ax^2(x+1)(x-1)=ax^4-ax^2(a \neq 0)$$

$$\text{이라 하면 } \int_{-1}^1 \{ f(x)-g(x) \} dx = -2 \text{에서}$$

$$\int_{-1}^1 \{ f(x)-g(x) \} dx = \int_{-1}^1 (ax^4-ax^2) dx = 2 \int_0^1 (ax^4-ax^2) dx$$

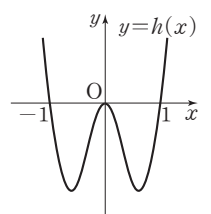
$$= 2 \left[\frac{a}{5}x^5 - \frac{a}{3}x^3 \right]_0^1$$

$$= 2 \times \left(-\frac{2}{15}a \right) = -\frac{4}{15}a$$

$$\text{즉, } -\frac{4}{15}a = -2 \text{이므로 } a = \frac{15}{2}$$

$$\text{따라서 } h(x)=f(x)-g(x)=\frac{15}{2}x^4-\frac{15}{2}x^2 \text{이므로}$$

$$f(2)-g(2)=120-30=90$$



14 답 12-6√2

$$f(x)=6(|x|-1)^2=\begin{cases} 6(x+1)^2 & (x\leq 0) \\ 6(x-1)^2 & (x\geq 0) \end{cases}$$

$g(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$ 이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 그림과 같다.

곡선 $y=g(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 빗금 친 부분의 넓이가 같으므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이 S 는

$$S=2\times 6=12 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

곡선 $y=g(x)$ 를 y 축의 방향으로 k 만큼 평행 이동한 곡선을 $y=h(x)$ 라 하면

$$h(x)=6x^2-6+k$$

이때 $k\leq 0$ 또는 $k\geq 6$ 이면 곡선 $y=h(x)$ 가 S 를 이등분할 수 없으므로 $0<k<6$

$x\geq 0$ 에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=h(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$\begin{aligned} 6(x-1)^2 &= 6x^2-6+k \\ 6x^2-12x+6 &= 6x^2-6+k \\ -12x &= -12+k \end{aligned}$$

$$\therefore x=1-\frac{k}{12} \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

세 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$ 가 모두 y 축에 대하여 대칭이고 곡선 $y=h(x)$ 가 S 를 이등분하므로

$$2\int_0^{1-\frac{k}{12}} \{f(x)-h(x)\} dx = 12 \times \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{1-\frac{k}{12}} \{f(x)-h(x)\} dx = 3$$

$$\int_0^{1-\frac{k}{12}} \{6(x-1)^2 - (6x^2-6+k)\} dx = 3$$

$$\int_0^{1-\frac{k}{12}} (-12x+12-k) dx = 3$$

$$\left[-6x^2+(12-k)x\right]_0^{1-\frac{k}{12}} = 3$$

$$-6\left(1-\frac{k}{12}\right)^2 + (12-k)\left(1-\frac{k}{12}\right) = 3$$

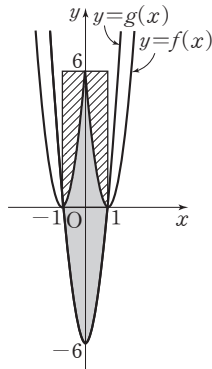
$$6\left(1-\frac{k}{12}\right)^2 = 3$$

$$k^2-24k+72=0$$

$$\therefore k=12\pm 6\sqrt{2}$$

그런데 $0<k<6$ 이므로

$$k=12-6\sqrt{2} \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$



15 답 ②

$$f_n(x)=x^3-nx^2+4x-1$$

$$f'_n(x)=3x^2-2nx+4$$

함수 $f_n(x)$ 가 역함수를 가지려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'_n(x)\geq 0$ 이어야 하므로

$$3x^2-2nx+4\geq 0$$

이차방정식 $3x^2-2nx+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=n^2-12\leq 0$$

$$n^2\leq 12 \quad \therefore -2\sqrt{3}\leq n\leq 2\sqrt{3}$$

이때 정수 n 의 최댓값은 3이므로 $k=3$

$$\therefore f_k(x)=f_3(x)=x^3-3x^2+4x-1$$

$f_3(x)=x^3-3x^2+4x-1$ 에서 $f_3(0)=-1$ 이고, 함수 $f_3(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

함수 $y=f_3(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$x^3-3x^2+4x-1=x$$

$$x^3-3x^2+3x-1=0$$

$$(x-1)^3=0 \quad \therefore x=1$$

두 직선 $y=-x-1$, $y=x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$-x-1=x, 2x=-1$$

$$\therefore x=-\frac{1}{2}$$

함수 $y=f_3(x)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이고 직선 $y=-x-1$ 은 직선 $y=x$

에 대하여 대칭이므로 넓이 S 는 곡선

$y=f_3(x)$ 와 두 직선 $y=-x-1$, $y=x$

로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배와 같다.

$$\therefore S=2\left[\frac{1}{2}\times 1\times \frac{1}{2}\right.$$

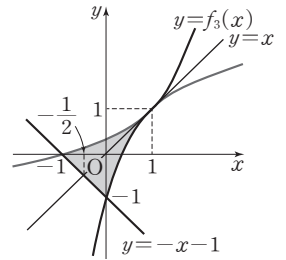
$$\left. +\int_0^1 \{x-(x^3-3x^2+4x-1)\} dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}+2\int_0^1 (-x^3+3x^2-3x+1) dx$$

$$=\frac{1}{2}+2\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-\frac{3}{2}x^2+x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}+2\times \frac{1}{4}=1$$

$$\therefore k+S=3+1=4$$



16 답 9/4

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2$$

$$f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+3x=-\frac{3}{2}x(x-2)$$

$$f'(x)=0$$
인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

$0\leq x\leq 2$ 에서 $f'(x)\geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 증가한다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2=x, x^3-3x^2+2x=0$$

$$x(x-1)(x-2)=0$$

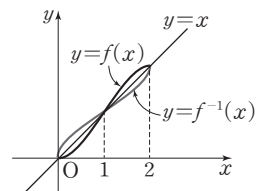
$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수

$y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x=0) \\ f^{-1}(x) & (0<x<1) \\ f(x) & (1\leq x\leq 2) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} f^{-1}(x) & (0\leq x\leq 1) \\ f(x) & (1\leq x\leq 2) \end{cases} \quad \rightarrow x=0, x=1, x=2 \text{에서 } f(x)=f^{-1}(x)$$



두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이

와 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 같다.

$$\begin{aligned}
&\therefore \int_0^2 g(x) dx \\
&= \int_0^1 f^{-1}(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\
&= 1 - \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\
&= 1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right) dx + \int_1^2 \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right) dx \\
&= 1 - \left[-\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3\right]_1^2 = 1 - \frac{3}{8} + \frac{13}{8} = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

17 답 12√3

시각 $t=x(x>0)$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned}
0 + \int_0^x v_P(t) dt &= \int_0^x (-3t^2 + 4t + 20) dt \\
&= \left[-t^3 + 2t^2 + 20t\right]_0^x = -x^3 + 2x^2 + 20x
\end{aligned}$$

시각 $t=x(x>0)$ 에서의 점 Q의 위치는

$$\begin{aligned}
0 + \int_0^x v_Q(t) dt &= \int_0^x (3t^2 + 4t + 2) dt \\
&= \left[t^3 + 2t^2 + 2t\right]_0^x = x^3 + 2x^2 + 2x
\end{aligned}$$

두 점 P, Q가 만나면 위치가 같으므로

$$-x^3 + 2x^2 + 20x = x^3 + 2x^2 + 2x$$

$$2x^3 - 18x = 0, 2x(x+3)(x-3) = 0 \quad \therefore x = 3 \quad (\because x > 0)$$

즉, 두 점 P, Q는 출발 후 시각 $t=3$ 에서 처음으로 다시 만난다.

두 점 P, Q 사이의 거리는

$$|-x^3 + 2x^2 + 20x - (x^3 + 2x^2 + 2x)| = |-2x^3 + 18x|$$

$f(x) = -2x^3 + 18x$ 라 하면

$$f'(x) = -6x^2 + 18 = -6(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = \sqrt{3} \quad (\because 0 < x \leq 3)$$

$0 < x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\sqrt{3}$	...	3
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	$\frac{12\sqrt{3}}{\text{극대}}$	↘	0

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \sqrt{3}$ 에서 최댓값 $12\sqrt{3}$ 을 갖는다.

이때 $0 < x \leq 3$ 에서 $|f(x)| = f(x)$ 이므로 구하는 최댓값은 $12\sqrt{3}$ 이다.

↳ $f(0)=0, f(3)=0$ 이므로 $0 < x \leq 3$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이다.

18 답 21

시각 $t=x(x>0)$ 에서의 점 P의 위치는

$$10 + \int_0^x (-3t^2 + 4nt) dt = 10 + \left[-t^3 + 2nt^2\right]_0^x = -x^3 + 2nx^2 + 10$$

시각 $t=x(x>0)$ 에서의 점 Q의 위치는

$$k + \int_0^x (-2nt) dt = k + \left[-nt^2\right]_0^x = -nx^2 + k$$

두 점 P, Q가 출발한 후 2번 만나려면 방정식

$-x^3 + 2nx^2 + 10 = -nx^2 + k$, 즉 $-x^3 + 3nx^2 + 10 = k$ 가 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가져야 하므로 함수 $y = -x^3 + 3nx^2 + 10$ 의 그래프와

직선 $y=k$ 가 $x>0$ 에서 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x) = -x^3 + 3nx^2 + 10$ 이라 하면

$$f'(x) = -3x^2 + 6nx = -3x(x - 2n)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 2n \quad (\because x > 0)$$

$x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$2n$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{4n^3+10}{\text{극대}}$	↘

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 $x>0$ 에서 직선 $y=k$ 와 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$10 < k < 4n^3 + 10$$

이를 만족시키는 자연수 k 의 개수는 $4n^3 - 1$

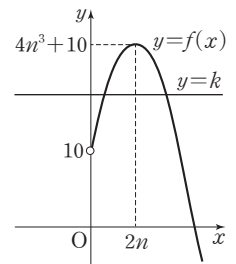
이므로 $4n^3 - 1 \leq 1000$ 에서

$$4n^3 \leq 1001 \quad \therefore n^3 \leq \frac{1001}{4} = 250.25$$

이때 $6^3 = 216, 7^3 = 343$ 이므로 자연수 n 의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이다.

따라서 모든 n 의 값의 합은

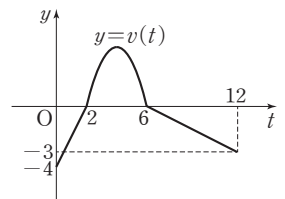
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$



19 답 $\frac{38}{3}$

$$v(t) = \begin{cases} 2t-4 & (0 \leq t < 2) \\ -t^2+8t-12 & (2 \leq t < 6) \\ -\frac{1}{2}t+3 & (6 \leq t \leq 12) \end{cases} = \begin{cases} 2(t-2) & (0 \leq t \leq 2) \\ -(t-2)(t-6) & (2 \leq t \leq 6) \\ -\frac{1}{2}(t-6) & (6 \leq t \leq 12) \end{cases}$$

에서 함수 $y=v(t)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 점 P는 원점을 출발한 후 시각 $t=2$ 까지는 음의 방향으로 움직이고 시각 $t=2$ 에서 $t=6$ 까지는 양의 방향으로 움직이며 시각 $t=6$ 이후에 다시 음의 방향으로 움직인다.



시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P의 위치의 변화량을 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 (2t-4) dt = \left[t^2 - 4t\right]_0^2 = -4$$

시각 $t=2$ 에서 $t=6$ 까지 점 P의 위치의 변화량을 S_2 라 하면

$$\begin{aligned}
S_2 &= \int_2^6 v(t) dt = \int_2^6 (-t^2 + 8t - 12) dt \\
&= \left[-\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 - 12t\right]_2^6 = \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

시각 $t=6$ 에서 $t=12$ 까지 점 P의 위치의 변화량을 S_3 이라 하면

$$\begin{aligned}
S_3 &= \int_6^{12} v(t) dt = \int_6^{12} \left(-\frac{1}{2}t + 3\right) dt \\
&= \left[-\frac{1}{4}t^2 + 3t\right]_6^{12} = -9
\end{aligned}$$

따라서 시각 $t=2$ 에서의 점 P의 위치는

$$S_1 = -4$$

시각 $t=6$ 에서의 점 P의 위치는

$$S_1 + S_2 = -4 + \frac{32}{3} = \frac{20}{3}$$

시각 $t=12$ 에서의 점 P의 위치는

$$S_1 + S_2 + S_3 = -4 + \frac{32}{3} - 9 = -\frac{7}{3}$$

따라서 시각 $t=6$ 일 때 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있고, 이때 원점

과 점 P 사이의 거리는 $\frac{20}{3}$ 이므로

$$a = 6, l = \frac{20}{3} \quad \therefore a + l = \frac{38}{3}$$

20 답 ③

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 출발 후 시간 $t=a$ 에서 처음으로 운동 방향을 바꾼다.

즉, 시간 $t=a$ 에서의 점 P의 위치는 -8 이므로

$$0 + \int_0^a v(t) dt = -8 \quad \therefore \int_0^a v(t) dt = -8$$

시간 $t=c$ 에서의 점 P의 위치는 -6 이므로

$$0 + \int_0^c v(t) dt = -6 \quad \therefore \int_0^c v(t) dt = -6$$

$$\int_0^b v(t) dt = \int_b^c v(t) dt \text{에서}$$

$$\int_0^b v(t) dt = \int_b^0 v(t) dt + \int_0^c v(t) dt$$

$$\int_0^b v(t) dt = -\int_0^b v(t) dt + \int_0^c v(t) dt$$

$$2\int_0^b v(t) dt = \int_0^c v(t) dt$$

$$\therefore \int_0^b v(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^c v(t) dt = \frac{1}{2} \times (-6) = -3$$

$a \leq t \leq b$ 에서 $v(t) \geq 0$ 이므로 시간 $t=a$ 부터 $t=b$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_a^b |v(t)| dt &= \int_a^b v(t) dt = \int_a^0 v(t) dt + \int_0^b v(t) dt \\ &= -\int_0^a v(t) dt + \int_0^b v(t) dt \\ &= -(-8) + (-3) = 5 \end{aligned}$$

21 답 ④

$$\neg. S_1 = \int_0^a |v(t)| dt, S_2 = \int_a^c |v(t)| dt,$$

$$S_3 = \int_c^d |v(t)| dt \text{라 하자.}$$

$$\int_0^a |v(t)| dt = \int_a^d |v(t)| dt \text{에서}$$

$$S_1 = S_2 + S_3$$

점 P가 출발한 후 다시 원점을 지나려면 $\int_0^x v(t) dt = 0$ 인

$x (0 < x \leq d)$ 의 값이 존재해야 한다.

$$\int_0^a v(t) dt = S_1, \int_a^c v(t) dt = -S_2, \int_c^d v(t) dt = S_3 \text{이고 } S_1 > S_2$$

이므로

$$\int_0^a v(t) dt = S_1 > 0$$

$$\int_0^c v(t) dt = S_1 - S_2 > 0$$

$$\int_0^d v(t) dt = S_1 - S_2 + S_3 > 0$$

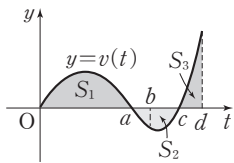
따라서 조건을 만족시키는 x 의 값이 존재하지 않으므로 점 P는 출발한 후 다시 원점을 지나지 않는다.

$$\neg. \int_0^a |v(t)| dt = \int_a^d |v(t)| dt \text{에서}$$

$$\int_0^a v(t) dt = \int_a^c \{-v(t)\} dt + \int_c^d v(t) dt$$

$$\int_0^a v(t) dt + \int_a^c v(t) dt = \int_c^d v(t) dt$$

$$\therefore \int_0^c v(t) dt = \int_c^d v(t) dt \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$



$$\begin{aligned} \neg. \int_b^d |v(t)| dt &= \int_b^c \{-v(t)\} dt + \int_c^d v(t) dt \\ &= -\int_b^c v(t) dt + \int_0^c v(t) dt \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \int_c^b v(t) dt + \int_0^c v(t) dt \\ &= \int_0^b v(t) dt \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

step 3 최고난도 문제

| 96~97쪽

01 41 02 ③ 03 17 04 ② 05 $\frac{16}{7}$ 06 10
07 ③

01 답 41

1단계 $\int_3^6 g(x) dx$ 의 값을 넓이로 이해하기

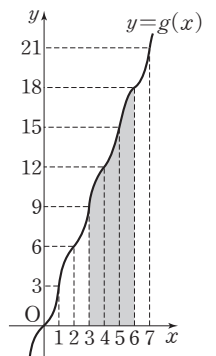
(4)에서 $n=1$ 일 때, 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

$n=2$ 일 때, 닫힌구간 $[3, 5]$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 12만큼 평행이동한 것이다.

또 $n=3$ 일 때, 닫힌구간 $[5, 7]$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 6만큼, y 축의 방향으로 18만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같고

$3 \leq x \leq 6$ 에서 $g(x) > 0$ 이므로 $\int_3^6 g(x) dx$ 의 값은 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=3$, $x=6$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



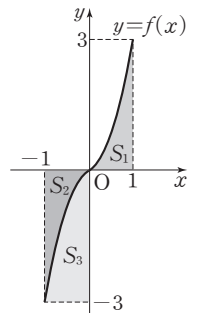
2단계 $\int_3^6 g(x) dx$ 의 값 구하기

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=-1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 , 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $y=-3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_3 이라 하자.

$S_1 = \int_0^1 f(x) dx = 1$ 이고, $f(-x) = -f(x)$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$$S_2 = S_1 = 1$$

$$\therefore S_3 = 1 \times 3 - S_2 = 3 - 1 = 2$$



그림과 같이 평행이동한 각 부분의 넓이는 같으
므로

$$\int_3^4 g(x) dx = 1 \times 9 + S_3$$

$$= 9 + 2 = 11$$

$$\int_4^5 g(x) dx = 1 \times 12 + S_1$$

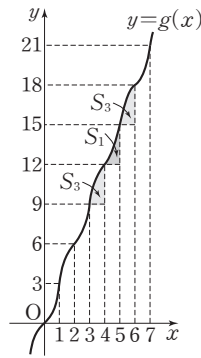
$$= 12 + 1 = 13$$

$$\int_5^6 g(x) dx = 1 \times 15 + S_3$$

$$= 15 + 2 = 17$$

$$\therefore \int_3^6 g(x) dx = \int_3^4 g(x) dx + \int_4^5 g(x) dx + \int_5^6 g(x) dx$$

$$= 11 + 13 + 17 = 41$$

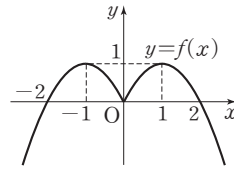


02 답 ③

1단계 $g(t)$ 구하기

$$f(x) = 2|x| - |x|^2 = \begin{cases} -x^2 - 2x & (x \leq 0) \\ -x^2 + 2x & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -(x+1)^2 + 1 & (x \leq 0) \\ -(x-1)^2 + 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$



이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

함수 $f(x)$ 는 $x \leq -1$, $0 \leq x \leq 1$ 에서 증가하고 $-1 \leq x \leq 0$, $x \geq 1$ 에서 감소하므로 닫힌구간 $[t, t+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 다음과 같다.

(i) $t < -2$ 일 때,

닫힌구간 $[t, t+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(t+1)$ 이므로

$$g(t) = f(t+1) = -(t+2)^2 + 1 = -t^2 - 4t - 3$$

(ii) $-2 \leq t \leq -1$ 일 때,

닫힌구간 $[t, t+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 1이므로

$$g(t) = 1$$

(iii) $-1 < t \leq -\frac{1}{2}$ 일 때, $\rightarrow t = -\frac{1}{2}$ 일 때, $f(t) = f(t+1)$

닫힌구간 $[t, t+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(t)$ 이므로

$$g(t) = f(t) = -t^2 - 2t$$

(iv) $-\frac{1}{2} < t < 0$ 일 때,

닫힌구간 $[t, t+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(t+1)$ 이므로

$$g(t) = f(t+1) = -t^2 + 1$$

(v) $0 \leq t \leq 1$ 일 때,

닫힌구간 $[t, t+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 1이므로

$$g(t) = 1$$

(vi) $t > 1$ 일 때,

닫힌구간 $[t, t+1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(t)$ 이므로

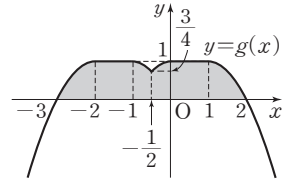
$$g(t) = f(t) = -t^2 + 2t$$

(i)~(vi)에서

$$g(t) = \begin{cases} -t^2 - 4t - 3 & (t < -2) \\ 1 & (-2 \leq t \leq -1 \text{ 또는 } 0 \leq t \leq 1) \\ -t^2 - 2t & \left(-1 < t \leq -\frac{1}{2}\right) \\ -t^2 + 1 & \left(-\frac{1}{2} < t < 0\right) \\ -t^2 + 2t & (t > 1) \end{cases}$$

2단계 곡선 $y=g(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기

곡선 $y=g(x)$ 는 그림과 같다.



$-3 \leq x \leq 2$ 에서 $g(x) \geq 0$ 이므로 곡선 $y=g(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_{-3}^{-2} (-x^2 - 4x - 3) dx + 1 \times 1 + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-x^2 - 2x) dx$$

$$+ \int_{-\frac{1}{2}}^0 (-x^2 + 1) dx + 1 \times 1 + \int_1^2 (-x^2 + 2x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x \right]_{-3}^{-2} + 1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}$$

$$+ \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-\frac{1}{2}}^0 + 1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_1^2$$

$$= \frac{2}{3} + 1 + \frac{11}{24} + \frac{11}{24} + 1 + \frac{2}{3} = \frac{17}{4}$$

03 답 17

1단계 A, B, C 구하기

(㉞)의 $\int_a^b f'(x) dx = 5$ 에서

$$f(b) - f(a) = 5 \quad \therefore f(b) = 5 + f(a) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값을 α, β ($\alpha < \beta$)라 하면 함수 $f(x)$ 는 $x = \alpha$ 에서 극소이고 $x = \beta$ 에서 극대이므로 (㉞)에서

$$f(\alpha) = -3, f(\beta) = 7$$

$\alpha \leq x \leq \alpha$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이므로

$$A = -\int_{\alpha}^{\alpha} f'(x) dx = \int_{\alpha}^{\alpha} f'(x) dx$$

$$= f(\alpha) - f(\alpha) = f(\alpha) + 3$$

$\alpha \leq x \leq \beta$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이므로

$$B = \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx = f(\beta) - f(\alpha) = 7 + 3 = 10$$

$\beta \leq x \leq b$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이므로

$$C = -\int_{\beta}^b f'(x) dx = \int_{\beta}^b f'(x) dx$$

$$= f(\beta) - f(b) = 7 - f(b)$$

$$= 7 - \{5 + f(\alpha)\} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 2 - f(\alpha)$$

2단계 $g(20) + g(30) + g(40) + g(50)$ 의 값 구하기

(㉞)의 $A : C = B : t$ 에서

$$\{f(\alpha) + 3\} : \{2 - f(\alpha)\} = 10 : t$$

$$20 - 10f(\alpha) = tf(\alpha) + 3t$$

$$(t+10)f(\alpha) = 20 - 3t$$

$$\therefore f(\alpha) = \frac{20-3t}{t+10} = \frac{-3(t+10)+50}{t+10} = -3 + \frac{50}{t+10}$$

이를 ㉞에 대입하면

$$f(b) = 5 + \left(-3 + \frac{50}{t+10}\right) = 2 + \frac{50}{t+10}$$

$\alpha \leq x \leq b$ 에서 방정식 $f(x) = k$ 가 서로 다른 두 실근을 가지려면

$\alpha \leq x \leq b$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로

$$-3 < k \leq -3 + \frac{50}{t+10}$$

$$\text{또는 } 2 + \frac{50}{t+10} \leq k < 7$$

(i) $t=20$ 일 때,

$$-3 < k \leq -\frac{4}{3} \text{ 또는 } \frac{11}{3} \leq k < 7$$

따라서 정수 k 는 $-2, 4, 5, 6$ 의 4개이다.

$$\therefore g(20)=4$$

(ii) $t=30$ 일 때,

$$-3 < k \leq -\frac{7}{4} \text{ 또는 } \frac{13}{4} \leq k < 7$$

따라서 정수 k 는 $-2, 4, 5, 6$ 의 4개이다.

$$\therefore g(30)=4$$

(iii) $t=40$ 일 때,

$$-3 < k \leq -2 \text{ 또는 } 3 \leq k < 7$$

따라서 정수 k 는 $-2, 3, 4, 5, 6$ 의 5개이다.

$$\therefore g(40)=5$$

(iv) $t=50$ 일 때,

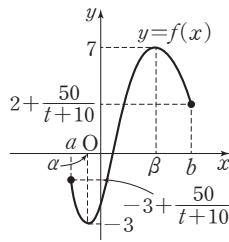
$$-3 < k \leq -\frac{13}{6} \text{ 또는 } \frac{17}{6} \leq k < 7$$

따라서 정수 k 는 $3, 4, 5, 6$ 의 4개이다.

$$\therefore g(50)=4$$

(i)~(iv)에서

$$g(20)+g(30)+g(40)+g(50)=4+4+5+4=17$$



04 답 ②

1단계 $g(x)$ 를 a 를 이용하여 나타내기

$g(x)=px^2+qx+r$ (p, q, r 는 상수, $p \neq 0$)라 하고

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} h(x) &= x^4 - 4x^3 + ax^2 + (8-2a)x - (px^2 + qx + r) \\ &= x^4 - 4x^3 + (a-p)x^2 + (8-2a-q)x - r \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{1}$$

㉞의 $f(b)=g(b)$, $f(b+2)=g(b+2)$ 에서

$$\begin{aligned} f(b)-g(b) &= 0, f(b+2)-g(b+2) = 0 \\ \therefore h(b) &= 0, h(b+2) = 0 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{2}$$

㉞의 $f'(b)=g'(b)$, $f'(b+2)=g'(b+2)$ 에서

$$\begin{aligned} f'(b)-g'(b) &= 0, f'(b+2)-g'(b+2) = 0 \\ \therefore h'(b) &= 0, h'(b+2) = 0 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{3}$$

㉞, ㉞에서 $h(x)$ 는 $(x-b)^2$, $(x-b-2)^2$ 을 인수로 갖고 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$$\begin{aligned} h(x) &= (x-b)^2(x-b-2)^2 \\ &= \{x^2 - 2(b+1)x + b(b+2)\}^2 \\ &= x^4 + 4(b+1)^2x^2 + b^2(b+2)^2 - 4(b+1)x^3 \\ &\quad + 2b(b+2)x^2 - 4b(b+1)(b+2)x \\ &= x^4 - 4(b+1)x^3 + (6b^2 + 12b + 4)x^2 - 4b(b+1)(b+2)x \\ &\quad + b^2(b+2)^2 \end{aligned}$$

㉞과 삼차항의 계수를 비교하면

$$4 = 4b + 4 \quad \therefore b = 0$$

$$\therefore h(x) = x^2(x-2)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$

㉞에서 $a-p=4$, $8-2a-q=0$, $r=0$

$$\therefore p=a-4, q=8-2a, r=0$$

$$\therefore g(x) = (a-4)x^2 + (8-2a)x = (a-4)x(x-2) \quad \cdots \textcircled{4}$$

2단계 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축이 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$x^4 - 4x^3 + ax^2 + (8-2a)x = 0$$

$$x(x-2)(x^2-2x-4+a)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x^2-2x-4+a=0$$

이차방정식 $x^2-2x-4+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - (-4+a) = 5-a < 0 \quad (\because a > 5)$$

따라서 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^2 \{-f(x)\} dx \\ &= \int_0^2 \{-x^4 + 4x^3 - ax^2 - (8-2a)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{5}x^5 + x^4 - \frac{a}{3}x^3 - (4-a)x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{3}a - \frac{32}{5} \end{aligned}$$

3단계 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$f(x)=g(x), f(x)-g(x)=0, h(x)=0$$

$$x^2(x-2)^2=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $h(x) \geq 0$, 즉 $f(x) \geq g(x)$ 이므로 두 곡선 $y=f(x)$,

$y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^2 \{f(x)-g(x)\} dx = \int_0^2 h(x) dx \\ &= \int_0^2 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{16}{15} \end{aligned}$$

4단계 a 의 값 구하기

㉞에서 $S_1=4S_2$ 이므로

$$\frac{4}{3}a - \frac{32}{5} = 4 \times \frac{16}{15}$$

$$\frac{4}{3}a = \frac{32}{3} \quad \therefore a=8$$

5단계 $a+g(b+1)$ 의 값 구하기

㉞에서 $g(x)=4x(x-2)$ 이므로

$$a+g(b+1)=8+g(1)=8+4 \times (-1)=4$$

05 답 $\frac{16}{7}$

1단계 직선 l 의 방정식 구하기

두 점 $A(-1, f(-1))$, $B(2, f(2))$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{8n+10-(-n-5)}{3} = 3n+5$$

직선 l 의 기울기는 $3n+5$ 이고 $f(x)=nx^3+5x$ 에서 $f'(x)=3nx^2+5$ 이므로

$$3nx^2+5=3n+5$$

$$3nx^2=3n, x^2=1 \quad (\because n \neq 0)$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1 \rightarrow x=-1 \text{인 점은 A이다.}$$

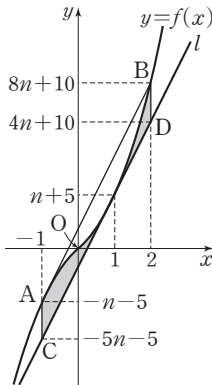
즉, 직선 l 과 곡선 $y=f(x)$ 는 점 $(1, n+5)$ 에서 접하므로 직선 l 의 방정식은

$$y-(n+5)=(3n+5)(x-1)$$

$$\therefore y=(3n+5)x-2n$$

2단계 $\frac{S_1(n)}{S_2(n)}$ 의 값 구하기

$A(-1, -n-5), B(2, 8n+10),$
 $C(-1, -5n-5), D(2, 4n+10)$ 이고
 사각형 ACDB는 평행사변형이므로
 $S_1(n) = 3 \times 4n = 12n$
 $-1 \leq x \leq 2$ 에서
 $nx^3 + 5x \geq (3n+5)x - 2n$ 이므로
 $S_2(n)$
 $= \int_{-1}^2 [nx^3 + 5x - \{(3n+5)x - 2n\}] dx$
 $= \int_{-1}^2 (nx^3 - 3nx + 2n) dx$
 $= \left[\frac{n}{4}x^4 - \frac{3}{2}nx^2 + 2nx \right]_{-1}^2$
 $= \frac{21}{4}n$
 $\therefore \frac{S_1(n)}{S_2(n)} = \frac{12n}{\frac{21}{4}n} = \frac{16}{7}$



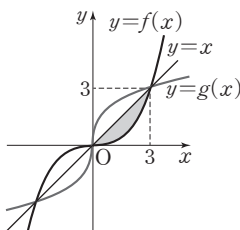
06 답 10

1단계 $f(x)$ 의 최고차항의 계수의 범위 구하기

(가)의 $f(-x) = -f(x)$ 에서 삼차함수 $f(x)$ 가 홀수 차수의 항만 있으므로
 $f(x) = ax^3 + bx$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하자.
 $f'(x) = 3ax^2 + b$ 이므로 (가)의 $f'(x) \geq 0$ 에서
 $3ax^2 + b \geq 0$
 $\therefore a > 0, b \geq 0$
 (나)의 $f(3) = g(3)$ 에서 $f(3) = 3$
 $27a + 3b = 3 \quad \therefore b = -9a + 1$
 $\therefore f(x) = ax^3 + (-9a + 1)x$
 이때 $b \geq 0$ 에서 $-9a + 1 \geq 0$ 이므로 $a \leq \frac{1}{9}$
 $\therefore 0 < a \leq \frac{1}{9}$

2단계 S 구하기

두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 4배이다.
 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $x \geq f(x)$ 이므로



$S = 4 \int_0^3 \{x - f(x)\} dx$
 $= 4 \int_0^3 [x - \{ax^3 + (-9a + 1)x\}] dx$
 $= 4 \int_0^3 (-ax^3 + 9ax) dx$
 $= 4 \left[-\frac{a}{4}x^4 + \frac{9}{2}ax^2 \right]_0^3$
 $= 4 \times \frac{81}{4}a$
 $= 81a$

3단계 $S + 9f\left(\frac{g(3)}{3}\right)$ 의 값 구하기

따라서 $0 < a \leq \frac{1}{9}$ 일 때, S 는 $a = \frac{1}{9}$ 에서 최댓값 9를 갖는다.
 이때 $f(x) = \frac{1}{9}x^3$ 이고 $g(3) = f(3) = 3$ 이므로
 $S + 9f\left(\frac{g(3)}{3}\right) = 9 + 9f(1)$
 $= 9 + 9 \times \frac{1}{9} = 10$

07 답 ③

1단계 ㄱ이 옳은지 확인하기

ㄱ. $x(t) = t(t-1)(at+b)$ 에서
 $x(0) = 0, x(1) = 0$
 즉, 시각 $t=0$ 에서의 점 P의 위치가 0이고, 시각 $t=1$ 에서의 점 P의 위치도 0이므로 점 P의 시각 $t=0$ 에서 $t=1$ 까지의 위치의 변화량이 0이다.
 $\therefore \int_0^1 v(t) dt = 0$

2단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. $|x(t_1)| > 1$ 인 t_1 이 열린구간 $(0, 1)$ 에 존재하면 시각 $t=t_1$ 에서 점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 크다.
 즉, 시각 $t=0$ 에서 $t=t_1$ 까지 점 P가 움직인 거리가 1보다 크므로
 $\int_0^{t_1} |v(t)| dt > 1 \quad \dots\dots ㉑$
 또 시각 $t=1$ 에서의 점 P의 위치가 원점이므로
 $\int_{t_1}^1 |v(t)| dt > 1 \quad \dots\dots ㉒$
 ㉑, ㉒에서
 $\int_0^{t_1} |v(t)| dt + \int_{t_1}^1 |v(t)| dt > 2$
 $\therefore \int_0^1 |v(t)| dt > 2$
 이는 $\int_0^1 |v(t)| dt = 2$ 라는 조건을 만족시키지 않는다.
 따라서 $|x(t_1)| > 1$ 인 t_1 이 열린구간 $(0, 1)$ 에 존재하지 않는다.

3단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. $0 \leq t \leq 1$ 인 모든 t 에 대하여 $|x(t)| < 1$ 이면 점 P와 원점 사이의 거리가 모두 1보다 작다.
 $x(t_2) = 0$ 인 t_2 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 존재하지 않는다고 가정하면
 $0 < t < 1$ 에서 점 P는 원점을 지나지 않는다.
 점 P가 시각 $t=0$ 에서 원점을 출발하여 시각 $t=1$ 일 때 원점으로 돌아오므로 $0 < t < 1$ 에서 운동 방향이 한 번 바뀐다.
 점 P가 $0 < t < 1$ 에서 운동 방향을 바꾸는 시각을 $t=k$ 라 하면
 $\int_0^k |v(t)| dt < 1, \int_k^1 |v(t)| dt < 1$ 이므로
 $\int_0^k |v(t)| dt + \int_k^1 |v(t)| dt < 2$
 $\therefore \int_0^1 |v(t)| dt < 2$
 이는 $\int_0^1 |v(t)| dt = 2$ 라는 조건을 만족시키지 않는다.
 따라서 $x(t_2) = 0$ 인 t_2 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 존재한다.

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

01 6	02 ⑤	03 ③	04 384	05 ㄱ, ㄴ, ㄷ
06 49	07 ②	08 ⑤	09 ⑤	10 ② 11 ③
12 10	13 ④	14 ⑤		

01 답 6

(ㄴ)의 $f(x+1)-3xf(x)=ax+b$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(1)=b$$

닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x)=2x$ 이므로 $b=2$

즉, $f(x+1)-3xf(x)=ax+2$ 이므로 $0 \leq x \leq 1$ 에서

$$f(x+1)-3x \times 2x=ax+2 \quad \therefore f(x+1)=6x^2+ax+2$$

이때 $x+1=t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq 1$ 에서 $1 \leq t \leq 2$ 이고

$$f(t)=6(t-1)^2+a(t-1)+2=6t^2+(a-12)t-a+8 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\therefore f'(t)=12t+a-12$$

닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x)=2x$ 이고 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능

하므로 $\lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (12x+a-12) = \lim_{x \rightarrow 1-} 2 \quad \therefore a=2$$

이를 ㉠에 대입하면 $1 \leq t \leq 2$ 에서 $f(t)=6t^2-10t+6$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 2x dx + \int_1^2 (6x^2-10x+6) dx \\ &= \left[x^2 \right]_0^1 + \left[2x^3-5x^2+6x \right]_1^2 = 1+5=6 \end{aligned}$$

02 답 ⑤

$g(x)=f(x)+f(-x)$ 라 하면

$$g(-x)=f(-x)+f(x)=g(x)$$

즉, 함수 $g(x)$ 는 짝수 차수의 항 또는 상수항만 있다.

(ㄷ)의 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)+f(-x)}{2x^2-3} = 3$ 에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{2x^2-3} = 3$ 이므로 $g(x)$ 는 최고 차항의 계수가 6인 이차함수이다.

(ㄴ)의 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=2$ 에서 $f(0)=2$

$$\therefore g(0)=f(0)+f(0)=2+2=4$$

따라서 $g(x)=6x^2+4$ 이므로 $f(x)+f(-x)=6x^2+4$

한편 다항함수 $f(x)$ 의 짝수 차수의 항과 상수항으로 이루어진 함수를

$h_1(x)$, 홀수 차수의 항으로 이루어진 함수를 $h_2(x)$ 라 하면

$f(x)=h_1(x)+h_2(x)$ 이고 $h_1(-x)=h_1(x)$, $h_2(-x)=-h_2(x)$ 이므로

$$f(-x)=h_1(-x)+h_2(-x)=h_1(x)-h_2(x)$$

$$\int_{-4}^4 f(x) dx = \int_{-4}^4 \{h_1(x)+h_2(x)\} dx = 2 \int_0^4 h_1(x) dx \text{이고,}$$

$$\int_{-4}^4 f(-x) dx = \int_{-4}^4 \{h_1(x)-h_2(x)\} dx = 2 \int_0^4 h_1(x) dx \text{이므로}$$

$$\int_{-4}^4 f(x) dx = \int_{-4}^4 f(-x) dx$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-4}^4 \{f(x)+f(-x)\} dx &= \int_{-4}^4 f(x) dx + \int_{-4}^4 f(-x) dx \\ &= 2 \int_{-4}^4 f(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-4}^4 f(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{-4}^4 \{f(x)+f(-x)\} dx = \frac{1}{2} \int_{-4}^4 (6x^2+4) dx \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \int_0^4 (6x^2+4) dx = \left[2x^3+4x \right]_0^4 = 144 \end{aligned}$$

03 답 ③

$g(x)=\int_0^x f(t) dt+(x+1)f(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} g'(x) &= f(x)+f(x)+(x+1)f'(x) \\ &= 2f(x)+(x+1)f'(x) \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

$g(x)=\int_0^x f(t) dt+(x+1)f(x)$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$g(0)=f(0) \quad \dots\dots ㉡$$

(ㄷ)에서 $g(0)=1$, $g'(0)=0$ 이므로 ㉠, ㉡에서

$$2f(0)+f'(0)=0, f(0)=1$$

$$\therefore f'(0)=-2$$

이차함수 $f(x)$ 에서 $f(0)=1$ 이므로

$f(x)=ax^2+bx+1$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면

$$f'(x)=2ax+b$$

$$f'(0)=-2 \text{이므로 } b=-2$$

$$\therefore f(x)=ax^2-2x+1, f'(x)=2ax-2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2(ax^2-2x+1)+(x+1)(2ax-2) \\ &= 4ax^2+(2a-6)x \end{aligned}$$

(ㄴ)에서 $g'(-x)=g'(x)$ 이므로 $g'(x)$ 는 짝수 차수의 항 또는 상수항만 있다.

즉, $2a-6=0$ 이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=3x^2-2x+1$ 이므로

$$f(2)=12-4+1=9$$

04 답 384

$f(x)=\int_0^x (t-a)(t-a^2) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=(x-a)(x-a^2)$$

함수 $f(x)$ 가 $x=4$ 에서 극값을 가지므로 $f'(4)=0$

$$(4-a)(4-a^2)=0$$

$$(a+2)(a-2)(a-4)=0$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=4 \quad (\because a>0) \quad \dots\dots ㉠$$

$$\begin{aligned} f(a)-f(a^2) &= \int_0^a (t-a)(t-a^2) dt - \int_0^{a^2} (t-a)(t-a^2) dt \\ &= \int_0^a (t-a)(t-a^2) dt + \int_a^{a^2} (t-a)(t-a^2) dt \\ &= \int_a^{a^2} (t-a)(t-a^2) dt \\ &= \int_a^{a^2} \{t^2-(a^2+a)t+a^3\} dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{a^2+a}{2}t^2 + a^3t \right]_a^{a^2} \\ &= \frac{a^6-3a^5+3a^4-a^3}{6} \\ &= \frac{a^3(a-1)^3}{6} \end{aligned}$$

㉠에서

$$a=2 \text{일 때, } f(a)-f(a^2) = \frac{8 \times 1}{6} = \frac{4}{3}$$

$$a=4 \text{일 때, } f(a)-f(a^2) = \frac{64 \times 27}{6} = 288$$

따라서 모든 $f(a)-f(a^2)$ 의 값의 곱은

$$\frac{4}{3} \times 288 = 384$$

05 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $g(x) = \int_0^x (t+1)f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = (x+1)f(x) \quad \therefore g'(-1) = 0$$

ㄴ. $g(0) = g(a) = g(\beta) = 0 \rightarrow g(0) = \int_0^0 (t+1)f(t) dt = 0$

(i) $-1 \leq a < \beta < 0$ 일 때,

함수 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, \beta]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, β) 에서 미분가능하며, $g(a) = g(\beta) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $g'(c_1) = 0$ 인 c_1 이 열린구간 (a, β) 에 적어도 하나 존재한다.
 $g'(c_1) = 0$ 에서 $(c_1+1)f(c_1) = 0 \quad \therefore f(c_1) = 0 \quad (\because c_1 > -1)$
 따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 (a, β) 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

또 함수 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[\beta, 0]$ 에서 연속이고 열린구간 $(\beta, 0)$ 에서 미분가능하며, $g(\beta) = g(0) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $g'(c_2) = 0$ 인 c_2 가 열린구간 $(\beta, 0)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 $g'(c_2) = 0$ 에서 $(c_2+1)f(c_2) = 0 \quad \therefore f(c_2) = 0 \quad (\because c_2 > -1)$
 따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(\beta, 0)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

즉, 이차방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근 c_1, c_2 를 갖는다.

(ii) $-1 \leq a < 0 < \beta$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(a, 0)$, $(0, \beta)$ 에서 각각 하나의 실근을 가지므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(iii) $0 < a < \beta$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(0, a)$, (a, β) 에서 각각 하나의 실근을 가지므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii), (iii)에서 방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $a \neq 1$ 이면 $a^2 + 1 > 2a \geq -1$ 이고 $g(0) = g(2a) = g(a^2 + 1) = 0$ 이므로 ㄴ에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 을 만족시키는 서로 다른 두 실근이 존재하며 이 두 실근은 $2a$ 가 아니고 $f(2a) = 0$ 이다. 즉, 이차방정식 $f(x) = 0$ 은 서로 다른 세 실근을 가지므로 성립하지 않는다.

$$\therefore a = 1$$

$f(2) = g(2) = 0$ 이고 $g(0) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $g'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 2)$ 에 존재한다.

$$g'(c) = 0 \text{에서 } (c+1)f(c) = 0 \quad \therefore f(c) = 0 \quad (\because 0 < c < 2)$$

이차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(2) = 0$, $f(c) = 0$ 이므로

$$f(x) = a(x-c)(x-2) \quad (a > 0) \text{라 하면}$$

$$g'(x) = (x+1)f(x) = a(x+1)(x-c)(x-2)$$

$$g'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = c \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

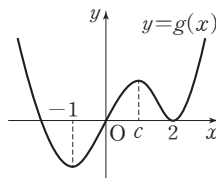
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	c	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

$g(0) = g(2) = 0$ 이므로 $g(c) > 0$ 이고

$g(2) > g(-1)$ 이다.

따라서 함수 $g(x)$ 의 최솟값은 $g(-1)$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$g(x) \geq g(-1)$$



$$\begin{aligned} \therefore \int_{-a}^x (t+1)f(t) dt &= \int_{-1}^x (t+1)f(t) dt \\ &= \int_{-1}^0 (t+1)f(t) dt + \int_0^x (t+1)f(t) dt \\ &= \int_0^x (t+1)f(t) dt - \int_0^{-1} (t+1)f(t) dt \\ &= g(x) - g(-1) \end{aligned}$$

$$\text{따라서 모든 실수 } x \text{에 대하여 } \int_{-a}^x (t+1)f(t) dt \geq 0$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

06 답 49

(㉠)의 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} = a$ 에서 $x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 에서 $f(a) = 0$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a) \text{이므로 } f'(a) = a$$

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(a) = 0$ 이므로

$$f(x) = (x-a)(x+b) \quad (b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = x + b + x - a = 2x - a + b$$

$$f'(a) = a \text{에서}$$

$$2a - a + b = a \quad \therefore b = 0$$

$$\therefore f(x) = x(x-a) = x^2 - ax$$

(㉡)의 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 0$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ 에서 $g(0) = 0$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x-0} = g'(0) \text{이므로 } g'(0) = 0$$

(㉢)의 $f(a) = g(a)$ 에서 $f(a) = 0$ 이므로

$$g(a) = 0$$

삼차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$,

$$g(a) = 0 \text{이므로}$$

$$g(x) = x^2(x-a) = x^3 - ax^2$$

(㉣)에서

$$\begin{aligned} \int_0^a \{2g(x) + f(x)\} dx &= \int_0^a (2x^3 - 2ax^2 + x^2 - ax) dx \\ &= \int_0^a \{2x^3 - (2a-1)x^2 - ax\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{2a-1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 \right]_0^a \\ &= -\frac{a^4}{6} - \frac{a^3}{6} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{a^4}{6} - \frac{a^3}{6} = -\frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$a^4 + a^3 - 2 = 0$$

$$(a-1)(a^3 + 2a^2 + 2a + 2) = 0$$

이때 $a > 0$ 이면 $a^3 + 2a^2 + 2a + 2 > 0$ 이므로

$$a = 1$$

$$\therefore f(x) = x^2 - x, g(x) = x^3 - x^2$$

$$f(x) - g(x) = 0 \text{에서}$$

$$x^2 - x - x^3 + x^2 = 0, x^3 - 2x^2 + x = 0$$

$$x(x-1)^2 = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\begin{aligned}
 |f(x)-g(x)| &= \begin{cases} -x^3+2x^2-x & (x \leq 0) \\ x^3-2x^2+x & (x \geq 0) \end{cases} \text{이므로} \\
 \int_{-a}^{3a} |f(x)-g(x)| dx &= \int_{-1}^3 |f(x)-g(x)| dx \\
 &= \int_{-1}^0 (-x^3+2x^2-x) dx + \int_0^3 (x^3-2x^2+x) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^3 \\
 &= \frac{17}{12} + \frac{27}{4} = \frac{49}{6} \\
 \therefore 6 \int_{-a}^{3a} |f(x)-g(x)| dx &= 6 \times \frac{49}{6} = 49
 \end{aligned}$$

07 답 ②

$f(x)=x+a$ 에서

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_1^x 6tf(t) dt = \int_1^x (6t^2+6at) dt \\
 &= \left[2t^3+3at^2 \right]_1^x = 2x^3+3ax^2-2-3a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore h(x) &= f(x)g(x) \\
 &= (x+a)(2x^3+3ax^2-2-3a) \\
 &= (x+a)(x-1)\{2x^2+(3a+2)x+3a+2\}
 \end{aligned}$$

곡선 $y=h(x)$ 가 $x=k$ 인 점에서 x 축에 접한다고 하면 $h(x)$ 는 $(x-k)^2$ 을 인수로 갖는다.

(i) 방정식 $x+a=0$ 의 근이 1인 경우

$x+a=0$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$1+a=0 \quad \therefore a=-1$$

따라서 $h(x)=(x-1)^2(2x^2-x-1)$ 이므로

$$h(-1)=4 \times 2=8$$

(ii) 이차방정식 $2x^2+(3a+2)x+3a+2=0$ 의 한 근이 1인 경우

$2x^2+(3a+2)x+3a+2=0$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$6a+6=0 \quad \therefore a=-1$$

이때 $a=-1$ 이면 (i)과 같다.

(iii) 이차방정식 $2x^2+(3a+2)x+3a+2=0$ 의 한 근이 $-a$ 인 경우

$2x^2+(3a+2)x+3a+2=0$ 에 $x=-a$ 를 대입하면

$$2a^2-(3a+2)a+3a+2=0, \quad a^2-a-2=0$$

$$(a+1)(a-2)=0 \quad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=2$$

이때 $a=-1$ 이면 (i)과 같으므로 $a=2$

따라서 $h(x)=(x+2)(x-1)(2x^2+8x+8)$ 이므로

$$h(-1)=1 \times (-2) \times 2 = -4$$

(iv) $2x^2+(3a+2)x+3a+2=2(x-k)^2$ 인 경우

이차방정식 $2x^2+(3a+2)x+3a+2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=(3a+2)^2-8(3a+2)=0$$

$$(3a+2)(3a-6)=0 \quad \therefore a=-\frac{2}{3} \text{ 또는 } a=2$$

이때 $a=2$ 이면 (iii)과 같으므로 $a=-\frac{2}{3}$

따라서 $h(x)=2x^2\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)$ 이므로

$$h(-1)=2 \times \left(-\frac{5}{3}\right) \times (-2) = \frac{20}{3}$$

(i)~(iv)에서 모든 $h(-1)$ 의 값의 합은

$$8+(-4)+\frac{20}{3}=\frac{32}{3}$$

08 답 ⑤

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=f(1)=f(a)=0$ 이므로

$$f(x)=4x(x-1)(x-a)=4x^3-4(a+1)x^2+4ax$$

$$\therefore \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \{4t^3-4(a+1)t^2+4at\} dt$$

$$= \left[t^4 - \frac{4}{3}(a+1)t^3 + 2at^2 \right]_0^x$$

$$= x^4 - \frac{4}{3}(a+1)x^3 + 2ax^2$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t) dt + a^4 & (x < b) \\ \left| \int_0^x f(t) dt + \frac{a^4}{3} \right| & (x \geq b) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^4 - \frac{4}{3}(a+1)x^3 + 2ax^2 + a^4 & (x < b) \\ \left| x^4 - \frac{4}{3}(a+1)x^3 + 2ax^2 + \frac{a^4}{3} \right| & (x \geq b) \end{cases}$$

$h(x)=x^4-\frac{4}{3}(a+1)x^3+2ax^2+a^4$ 이라 하면

$$h'(x)=4x^3-4(a+1)x^2+4ax=4x(x-a)(x-1)$$

$h'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$$h(a)=a^4-\frac{4}{3}(a+1)a^3+2a^3+a^4=\frac{2}{3}a^4+\frac{2}{3}a^3$$

$$=\frac{2}{3}a^3(a+1) > 0 \quad (\because a < -1)$$

$$h(0)=a^4 > 0$$

$$h(1)=1-\frac{4}{3}(a+1)+2a+a^4=a^4+\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}$$

$$h(a)-h(1)=\frac{2}{3}a^4+\frac{2}{3}a^3-\left(a^4+\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}\right)$$

$$=-\frac{1}{3}(a+1)(a-1)^3 < 0 \quad (\because a < -1)$$

$$\therefore h(a) < h(1)$$

$$\text{함수 } g(x) = \begin{cases} h(x) & (x < b) \\ \left| h(x) - \frac{2}{3}a^4 \right| & (x \geq b) \end{cases}$$

에서 함수 $y=h(x)-\frac{2}{3}a^4$ 의 그래프는

함수 $y=h(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로

로 $-\frac{2}{3}a^4$ 만큼 평행이동한 것과 같다.

또 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서

연속이 되도록 하는 실수 b 의 개수가 1이려면 그림과 같이 두 함수

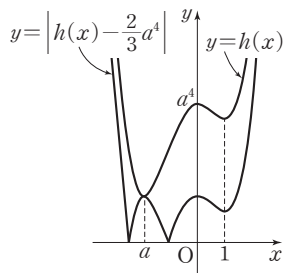
$y=h(x)$, $y=\left|h(x)-\frac{2}{3}a^4\right|$ 의 그래프가 오직 한 점에서만 만나야 한다.

따라서 $x=a$ 에서 두 함수 $h(x)$, $-h(x)+\frac{2}{3}a^4$ 의 함수값이 같아야 하므로

$$h(a)=-h(a)+\frac{2}{3}a^4, \quad h(a)=\frac{a^4}{3}$$

$$\frac{2}{3}a^4+\frac{2}{3}a^3=\frac{a^4}{3}, \quad a^4+2a^3=0$$

$$a^3(a+2)=0 \quad \therefore a=-2 \quad (\because a < -1)$$



이때 두 함수의 그래프가 만나는 점의 x 좌표가 b 이어야 하므로
 $b=a=-2$

$$\text{따라서 } g(x)=\begin{cases} x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+16 & (x<-2) \\ \left|x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+\frac{16}{3}\right| & (x\geq-2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$g(-3)=81-36-36+16=25$$

09 답 ⑤

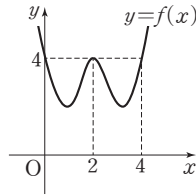
ㄱ. $f(2-x)=f(2+x)$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(0)=f(4)$$

$$\therefore f(4)=4$$

$f(2-x)=f(2+x)$ 이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이고 $f(x)>0$ 이므로 그림과 같이 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극대이다.

$$\therefore f'(2)=0$$



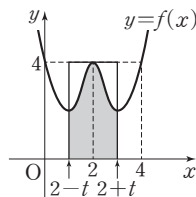
ㄴ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로 모든 실수 k 에 대하여

$$\int_{2-k}^2 f(x) dx = \int_2^{2+k} f(x) dx$$

$$\therefore \int_{-k}^0 f(x+2) dx = \int_2^{k+2} f(x) dx$$

ㄷ. $\int_{2-t}^{2+t} f(x) dx$ 의 값은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=2-t$, $x=2+t$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같고, 이는 세 직선 $x=2-t$, $x=2+t$, $y=4$ 및 x 축으로 둘러싸인 직사각형의 넓이인 $8t$ 보다 작으므로

$$\int_{2-t}^{2+t} f(x) dx < 8t$$



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 답 ②

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고 $\int_0^4 f(x) dx=2$ 이므로

$6 \leq x \leq 8$ 에서 $f(x)>0$ 이다.

구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_6^8 f(x) dx \\ &= \int_6^8 \{2f(x-2)+4\} dx \quad (\because \textcircled{7}) \\ &= 2 \int_6^8 f(x-2) dx + \int_6^8 4 dx \\ &= 2 \int_4^6 f(x) dx + [4x]_6^8 \\ &= 2 \int_4^6 \{2f(x-2)+4\} dx + 8 \quad (\because \textcircled{7}) \\ &= 4 \int_4^6 f(x-2) dx + 2 \int_4^6 4 dx + 8 \\ &= 4 \int_2^4 f(x) dx + 2 [4x]_4^6 + 8 \\ &= 4 \int_2^4 f(x) dx + 2 \times 8 + 8 \\ &= 4 \int_2^4 f(x) dx + 24 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ㄴ)의 좌변에서

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \\ &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 \{2f(x-2)+4\} dx \quad (\because \textcircled{7}) \\ &= \int_0^2 f(x) dx + 2 \int_2^4 f(x-2) dx + \int_2^4 4 dx \\ &= \int_0^2 f(x) dx + 2 \int_0^2 f(x) dx + [4x]_2^4 \\ &= 3 \int_0^2 f(x) dx + 8 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 3 \int_0^2 f(x) dx + 8 = 2 \text{이므로 } \int_0^2 f(x) dx = -2$$

$$\int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = 2 \text{이므로 } \int_2^4 f(x) dx = 4$$

따라서 구하는 넓이 S 는 ㉠에서

$$S = 4 \times 4 + 24 = 40$$

11 답 ③

S_1+S_2 는 삼각형 OAB 의 넓이와 같으므로

$$S_1+S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

$$S_1:S_2=7:20 \text{에서 } S_2=4 \times \frac{20}{27} = \frac{80}{27} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 점 $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{4} = 1 \quad \therefore y = 2x + 4$$

직선 $y=2x+4$ 와 곡선 $y=ax^2$ 이 제2사분면에서 만나는 점의 x 좌표를

$$p \quad (-2 < p < 0) \text{라 하면 } 2p+4=ap^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_2 &= \int_p^0 (2x+4-ax^2) dx = \left[x^2+4x-\frac{a}{3}x^3 \right]_p^0 \\ &= \frac{a}{3}p^3 - p^2 - 4p = \frac{1}{3}p(2p+4) - p^2 - 4p \quad (\because \textcircled{2}) \\ &= -\frac{1}{3}p^2 - \frac{8}{3}p \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } -\frac{1}{3}p^2 - \frac{8}{3}p = \frac{80}{27} \text{이므로 } 9p^2+72p+80=0$$

$$(3p+20)(3p+4)=0 \quad \therefore p = -\frac{4}{3} \quad (\because -2 < p < 0)$$

이를 ㉡에 대입하면

$$-\frac{8}{3}+4 = \frac{16}{9}a, \quad \frac{16}{9}a = \frac{4}{3} \quad \therefore a = \frac{3}{4}$$

12 답 10

점 P 가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 출발 후 시각 $t=b$ 에서 처음으로 운동 방향을 바꾼다.

즉, 시각 $t=b$ 에서의 점 P 의 위치는 22이므로

$$0 + \int_0^b v(t) dt = 22 \quad \therefore \int_0^b v(t) dt = 22$$

시각 $t=e$ 에서의 점 P 의 위치는 0이므로

$$0 + \int_0^e v(t) dt = 0 \quad \therefore \int_0^e v(t) dt = 0$$

$$\int_b^c |v(t)| dt = s_1, \quad \int_c^e |v(t)| dt = s_2 \text{라 하자.}$$

$b \leq t \leq e$ 에서 $v(t) \leq 0$ 이므로

$$\int_0^e v(t) dt = \int_0^b v(t) dt - \int_b^c |v(t)| dt - \int_c^e |v(t)| dt$$

$$0 = 22 - s_1 - s_2 \quad \therefore s_2 = 22 - s_1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

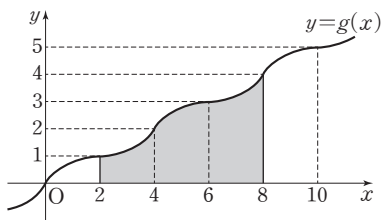
$$\begin{aligned}
& 3 \int_0^c |v(t)| dt = 8 \int_c^e |v(t)| dt \text{에서} \\
& 3 \int_0^b |v(t)| dt + 3 \int_b^c |v(t)| dt = 8 \int_c^e |v(t)| dt \\
& 3 \times 22 + 3s_1 = 8s_2, \quad 66 + 3s_1 = 8(22 - s_1) \quad (\because \text{㉠}) \\
& 11s_1 = 110 \quad \therefore s_1 = 10 \\
& \therefore \int_b^c |v(t)| dt = 10
\end{aligned}$$

13 답 ④

(나)에서 $n=1$ 일 때, 닫힌구간 $[2, 6]$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$n=2$ 일 때, 닫힌구간 $[6, 10]$ 에서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 8만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

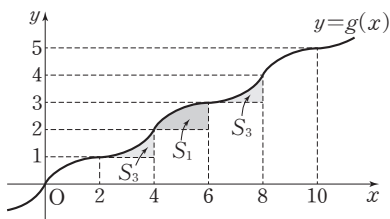


$2 \leq x \leq 8$ 에서 $g(x) > 0$ 이므로 $\int_2^8 g(x) dx$ 의 값은 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=2, x=8$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=-2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 , 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 y 축 및 직선 $y=-1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_3 이라 하자.

$S_1 = \int_0^2 f(x) dx = \frac{4}{3}$ 이고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $S_2 = S_1 = \frac{4}{3}$

$$\therefore S_3 = 1 \times 2 - S_2 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$



그림과 같이 평행이동한 각 부분의 넓이는 같으므로

$$\int_2^4 g(x) dx = S_3 + 2 \times 1 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$

$$\int_4^6 g(x) dx = S_1 + 2 \times 2 = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3}$$

$$\int_6^8 g(x) dx = S_3 + 2 \times 3 = \frac{2}{3} + 6 = \frac{20}{3}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int_2^8 g(x) dx &= \int_2^4 g(x) dx + \int_4^6 g(x) dx + \int_6^8 g(x) dx \\
&= \frac{8}{3} + \frac{16}{3} + \frac{20}{3} = \frac{44}{3}
\end{aligned}$$

14 답 ⑤

ㄱ. $x(t) = t(t-2)(at-b)$ 에서 $x(0)=0, x(2)=0$

즉, 시각 $t=0$ 에서의 점 P의 위치가 0이고, 시각 $t=2$ 에서의 점 P의 위치도 0이므로 점 P의 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지의 위치의 변화량이 0이다.

$$\therefore \int_0^2 v(t) dt = 0$$

ㄴ. 시각 $t=0$ 에서 $t=m$ 까지의 점 P의 위치의 변화량이 0이므로

$$t(t-2)(at-b) = 0 \text{에서 } t=0 \text{ 또는 } t=2 \text{ 또는 } t=\frac{b}{a}$$

이때 $m > 0$ 이고 m 의 값이 하나뿐이므로

$$2 = \frac{b}{a} \quad \therefore b = 2a$$

$$x(t) = t(t-2)(at-2a) = at(t-2)^2 \text{이므로}$$

$$v(t) = x'(t) = a(t-2)^2 + 2at(t-2)$$

$$= a(3t-2)(t-2)$$

$$v(t) = 0 \text{인 } t \text{의 값은 } t = \frac{2}{3} \text{ 또는 } t = 2$$

$$\text{따라서 모든 } t \text{의 값의 합은 } \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$$

ㄷ. $a=1$ 이면 $x(t) = t(t-2)(t-b)$

$0 \leq t \leq 2$ 인 모든 t 에 대하여 $|x(t)| < 2$ 이면 점 P와 원점 사이의 거리가 항상 2보다 작다.

$b \geq 2$ 이면 $0 < t < 2$ 에서 점 P는 원점을 지나지 않고, 점 P가 시각 $t=0$ 에서 원점을 출발하여 시각 $t=2$ 일 때 원점으로 돌아오므로 $0 < t < 2$ 에서 운동 방향이 한 번 바뀐다.

점 P가 $0 < t < 2$ 에서 운동 방향을 바꾸는 시각을 $t=k$ 라 하면

$$\int_0^k |v(t)| dt < 2, \quad \int_k^2 |v(t)| dt < 2$$

$$\therefore \int_0^2 |v(t)| dt < 4$$

이는 $\int_0^2 |v(t)| dt = 4$ 라는 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore 0 < b < 2$$

$x(t) = t(t-2)(t-b)$ 에서

$$v(t) = x'(t) = (t-2)(t-b) + t(t-b) + t(t-2)$$

$$= 3t^2 - 2(2+b)t + 2b = 3\left(t - \frac{2+b}{3}\right)^2 - \frac{(2+b)^2}{3} + 2b$$

$$0 < b < 2 \text{에서 } \frac{2}{3} < \frac{2+b}{3} < \frac{4}{3}$$

$$v(0) = 2b \text{이고 } 0 < 2b < 4 \text{이므로}$$

$$|v(0)| < 4$$

$$v(2) = 4 - 2b \text{이고 } 0 < 4 - 2b < 4 \text{이므로}$$

$$|v(2)| < 4$$

$$v\left(\frac{2+b}{3}\right) = -\frac{(2+b)^2}{3} + 2b$$

$$= -\frac{1}{3}b^2 + \frac{2}{3}b - \frac{4}{3}$$

$$= -\frac{1}{3}(b-1)^2 - 1$$

$$\text{이고 } -\frac{4}{3} < -\frac{1}{3}(b-1)^2 - 1 \leq -1 \text{이므로}$$

$$1 \leq \left|v\left(\frac{2+b}{3}\right)\right| < \frac{4}{3}$$

따라서 $|v(t)| < 4$ 를 만족시킨다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

