



정답과 해설

공통수학 2

01 / 평면좌표

A 개념 확인

8~9쪽

0001 답 4

$$\overline{AB} = |6 - 2| = 4$$

0002 답 8

$$\overline{AB} = |7 - (-1)| = 8$$

0003 답 3

$$\overline{AB} = |3 - 0| = 3$$

0004 답 6

$$\overline{AB} = |-8 - (-2)| = 6$$

0005 답 5

$$\overline{AB} = \sqrt{\{3 - (-1)\}^2 + \{4 - 1\}^2} = 5$$

0006 답 10

$$\overline{AB} = \sqrt{(-4 - 2)^2 + \{2 - (-6)\}^2} = 10$$

0007 답 $3\sqrt{2}$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

0008 답 $2\sqrt{5}$

$$\overline{AB} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

0009 답 -2

$$\frac{1 \times 8 + 2 \times (-7)}{1 + 2} = -2$$

0010 답 2

$$\frac{3 \times 8 + 2 \times (-7)}{3 + 2} = 2$$

0011 답 $\frac{1}{2}$

$$\frac{-7 + 8}{2} = \frac{1}{2}$$

0012 답 -1

$$\frac{1 \times 11 + 3a}{1 + 3} = 2 \text{ 이므로}$$

$$11 + 3a = 8 \quad \therefore a = -1$$

0013 답 3

$$\frac{-1 + a}{2} = 1 \text{ 이므로}$$

$$-1 + a = 2 \quad \therefore a = 3$$

0014 답 (1, -2)

$$\left(\frac{2 \times (-2) + 3 \times 3}{2 + 3}, \frac{2 \times 1 + 3 \times (-4)}{2 + 3} \right)$$

$$\therefore (1, -2)$$

0015 답 (0, -1)

$$\left(\frac{2 \times 3 + 3 \times (-2)}{2 + 3}, \frac{2 \times (-4) + 3 \times 1}{2 + 3} \right)$$

$$\therefore (0, -1)$$

0016 답 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$$\left(\frac{3 + (-2)}{2}, \frac{-4 + 1}{2} \right) \quad \therefore \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

0017 답 $a=3, b=6$

$$\frac{1 \times b + 2 \times 0}{1 + 2} = 2 \text{ 이므로 } b = 6$$

$$\frac{1 \times 0 + 2 \times a}{1 + 2} = 2 \text{ 이므로 } 2a = 6 \quad \therefore a = 3$$

0018 답 $a=5, b=1$

$$\frac{-3 + b}{2} = -1 \text{ 이므로 } -3 + b = -2 \quad \therefore b = 1$$

$$\frac{a + 1}{2} = 3 \text{ 이므로 } a + 1 = 6 \quad \therefore a = 5$$

0019 답 $\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$

$$\left(\frac{0 + (-5) + 1}{3}, \frac{1 + (-3) + 8}{3} \right) \quad \therefore \left(-\frac{4}{3}, 2 \right)$$

0020 답 (5, 4)

$$\left(\frac{4 + 8 + 3}{3}, \frac{2 + 3 + 7}{3} \right) \quad \therefore (5, 4)$$

0021 답 (0, 1)

$$\left(\frac{-3 + 1 + 2}{3}, \frac{1 + (-2) + 4}{3} \right) \quad \therefore (0, 1)$$

B 유형 완성

10~17쪽

0022 답 -2

$$\overline{AB} = 5\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{(-1 - a)^2 + (4 + 1)^2} = 5\sqrt{2}$$

양변을 제곱하면

$$(a + 1)^2 + 25 = 50, \quad a^2 + 2a - 24 = 0$$

$$(a + 6)(a - 4) = 0 \quad \therefore a = -6 \text{ 또는 } a = 4$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$-6 + 4 = -2$$

참고 이차방정식 $a^2 + 2a - 24 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 a 의 값의 합이 -2임을 알 수도 있다.

0023 답 ⑤

$$\overline{AB} = 2\overline{CD} \text{이므로}$$

$$\sqrt{(1-a)^2 + (a+1)^2} = 2\sqrt{2^2 + (-1-1)^2}$$

양변을 제곱하면

$$(1-a)^2 + (a+1)^2 = 32$$

$$a^2 = 15 \quad \therefore a = \pm\sqrt{15}$$

따라서 양수 a 의 값은 $\sqrt{15}$ 이다.

0024 답 29

$$\overline{AB} = \sqrt{(4+1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{29}$$

따라서 정사각형의 넓이는

$$\overline{AB}^2 = 29$$

0025 답 3

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(k-1)^2 + (2-k+3)^2} = \sqrt{2k^2 - 12k + 26} \\ &= \sqrt{2(k-3)^2 + 8} \end{aligned}$$

따라서 $k=3$ 일 때 $\overline{AB}$ 의 길이가 최소가 된다.

중3 다시보기

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 에서

(1) $a>0$ 일 때 $\Rightarrow x=p$ 에서 최솟값 q 를 갖고 최댓값은 없다.

(2) $a<0$ 일 때 $\Rightarrow x=p$ 에서 최댓값 q 를 갖고 최솟값은 없다.

0026 답 ⑤

점 $P(a, b)$ 가 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로

$$b=a+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$(a+2)^2 + (b-2)^2 = (a-3)^2 + (b-1)^2$$

$$\therefore 5a-b=1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a+b=2$$

0027 답 (0, 3)

$P(0, b)$ 라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(-4)^2 + (b-1)^2 = (-2)^2 + (b+1)^2$$

$$4b=12 \quad \therefore b=3$$

따라서 점 P 의 좌표는 $(0, 3)$ 이다.

0028 답 $10\sqrt{2}$

$P(a, 0)$ 이라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a-2)^2 + (-4)^2 = (a-6)^2 + (-8)^2$$

$$8a=80 \quad \therefore a=10$$

$$\therefore P(10, 0)$$

$Q(0, b)$ 라 하면 $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서 $\overline{AQ}^2 = \overline{BQ}^2$ 이므로

$$(-2)^2 + (b-4)^2 = (-6)^2 + (b-8)^2$$

$$8b=80 \quad \therefore b=10$$

$$\therefore Q(0, 10)$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{(-10)^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$$

$\dots\dots \textcircled{i}$

$\dots\dots \textcircled{ii}$

$\dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① 점 P의 좌표 구하기	40 %
② 점 Q의 좌표 구하기	40 %
③ 선분 PQ의 길이 구하기	20 %

0029 답 ④

점 $P(a, b)$ 가 삼각형 ABC 의 외심이므로

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$(a-1)^2 + (b-2)^2 = a^2 + (b+1)^2$$

$$\therefore a+3b=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overline{BP} = \overline{CP} \text{에서 } \overline{BP}^2 = \overline{CP}^2 \text{이므로}$$

$$a^2 + (b+1)^2 = (a-4)^2 + (b-3)^2$$

$$\therefore a+b=3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

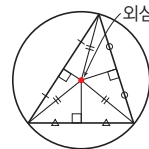
$$a = \frac{7}{2}, b = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore a-b=4$$

중2 다시보기

(1) 삼각형의 외심은 세 변의 수직이등분선의 교점이다.

(2) 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.



0030 답 ③

오른쪽 그림과 같이 학교 A에서 동쪽으로 2 km 떨어진 지점을 원점으로 하고 두 학교 A, B가 x 축 위에, 학교 C가 y 축 위에 오도록 좌표평면을 잡으면

$$A(-2, 0), B(4, 0), C(0, 4)$$

박물관을 만들려는 지점을 $P(x, y)$ 라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$(x+2)^2 + y^2 = (x-4)^2 + y^2$$

$$12x=12 \quad \therefore x=1$$

$$\overline{BP} = \overline{CP} \text{에서 } \overline{BP}^2 = \overline{CP}^2 \text{이므로}$$

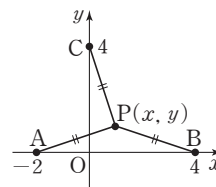
$$(x-4)^2 + y^2 = x^2 + (y-4)^2$$

$$x=y \quad \therefore y=1$$

따라서 $P(1, 1)$ 이므로

$$\overline{AP} = \sqrt{(1+2)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

즉, 박물관에서 각 학교까지의 거리는 $\sqrt{10}$ km이다.



0031 답 ③

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(1+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

따라서 삼각형 ABC 는 $\overline{BC} = \overline{CA}$ 인 이등변삼각형이다.

0032 [답] ③

삼각형 ABC가 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이 되려면

$$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 \text{ 이어야 하므로}$$

$$(1-4)^2 + (k-1)^2 + (-1-1)^2 + (2-k)^2 = (4+1)^2 + (1-2)^2$$

$$k^2 - 3k - 4 = 0, (k+1)(k-4) = 0$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 4$$

따라서 양수 k 의 값은 4이다.

0033 [답] 15

$$\overline{AB} = \sqrt{(-4-1)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-2+4)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(1+2)^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 \text{ 이므로 삼각형 ABC는 } \angle A = 90^\circ \text{인 직각삼각형이다.} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CA} = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 15 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 길이 구하기	40 %
② 삼각형 ABC가 어떤 삼각형인지 구하기	30 %
③ 삼각형 ABC의 넓이 구하기	30 %

0034 [답] 3

삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} \text{ 에서 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{ 이므로}$$

$$(1+1)^2 + (-1-1)^2 = (a-1)^2 + (b+1)^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 - 2a + 2b - 6 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\overline{BC} = \overline{CA} \text{ 에서 } \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 \text{ 이므로}$$

$$(a-1)^2 + (b+1)^2 = (-1-a)^2 + (1-b)^2$$

$$\therefore a = b \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -\sqrt{3}, b = -\sqrt{3} \text{ 또는 } a = \sqrt{3}, b = \sqrt{3}$$

$$\therefore ab = 3$$

0035 [답] ④

$P(a, 0)$ 이라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = (a+2)^2 + (-5)^2 + (a-4)^2 + (-1)^2$$

$$= 2a^2 - 4a + 46$$

$$= 2(a-1)^2 + 44$$

따라서 $a=1$ 일 때 주어진 식의 최솟값은 44이다.

0036 [답] (2, 6)

점 P가 직선 $y=x+4$ 위의 점이므로 $P(a, a+4)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = (a-3)^2 + (a+4-6)^2 + (a-2)^2 + (a+4-5)^2$$

$$= 4a^2 - 16a + 18$$

$$= 4(a-2)^2 + 2 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

따라서 $a=2$ 일 때 주어진 식의 값이 최소이므로 구하는 점 P의 좌표는 (2, 6)이다. \dots\dots \textcircled{ii}

채점 기준

① $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 식 세우기	60 %
② $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소일 때의 점 P의 좌표 구하기	40 %

0037 [답] ④

$P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$$

$$= (a-1)^2 + (b-2)^2 + (a-2)^2 + (b-5)^2 + (a-3)^2 + (b+1)^2$$

$$= 3a^2 - 12a + 3b^2 - 12b + 44$$

$$= 3(a-2)^2 + 3(b-2)^2 + 20$$

따라서 $a=2, b=2$ 일 때 주어진 식의 최솟값은 20이다.

0038 [답] 13

$A(1, -1), B(6, 11), P(a, b)$ 라 하면

$$\sqrt{(a-1)^2 + (b+1)^2} + \sqrt{(a-6)^2 + (b-11)^2}$$

$$= \overline{AP} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{AB} = \sqrt{(6-1)^2 + (11+1)^2} = 13$$

따라서 구하는 최솟값은 13이다.

0039 [답] ②

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-5)^2 + (b-3)^2} = \overline{OA} + \overline{AB}$$

$$\geq \overline{OB} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{34}$ 이다.

0040 [답] ③

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}$$

$$= \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$$

$A(1, 0), B(0, -2), P(x, y)$ 라 하면

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2} = \overline{AP} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{AB} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{5}$ 이다.

0041 [답] (가) $-c$ (나) $2ac$ (다) $a^2 + b^2$

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축, 점 M을

지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y 축으로 하

는 좌표평면을 잡으면 점 M은 원점이 된다.

이때 $A(a, b), C(c, 0)$ 이라 하면

$$B(-c, 0) \text{ 이므로}$$

$$\overline{AB}^2 = (-c-a)^2 + (-b)^2 = a^2 + \boxed{(가) 2ac} + c^2 + b^2$$

$$\overline{AC}^2 = (c-a)^2 + (-b)^2 = a^2 - \boxed{(나) 2ac} + c^2 + b^2$$

$$\overline{AM}^2 = \boxed{(다) a^2 + b^2}$$

$$\overline{BM}^2 = (-c)^2 = c^2$$

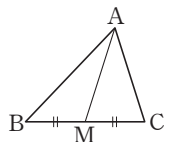
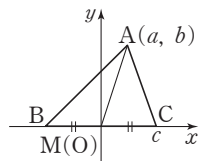
$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

만렙 Note

삼각형 ABC에서 $\overline{BM} = \overline{CM}$ 일 때,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

을 파푸스 정리(중선 정리)라 한다.



0042 **답** 풀이 참조

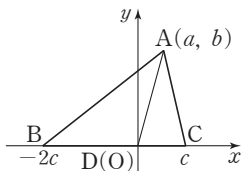
오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 D는 원점이 된다.

이때 $A(a, b)$, $C(c, 0)$ 이라 하면

$B(-2c, 0)$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 &= \{(-2c-a)^2 + (-b)^2\} + 2\{(c-a)^2 + (-b)^2\} \\ &= 3a^2 + 3b^2 + 6c^2 \\ &= 3(a^2 + b^2 + 2c^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2 + 2\overline{CD}^2 &= \{(-a)^2 + (-b)^2\} + 2(-c)^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2c^2 \\ \therefore \overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 &= 3(\overline{AD}^2 + 2\overline{CD}^2)\end{aligned}$$

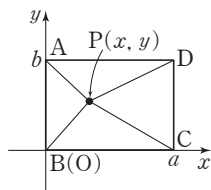
0043 **답** 풀이 참조

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축, 직선 AB를 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이 된다.

이때 $D(a, b)$ 라 하면 $A(0, b)$, $C(a, 0)$

이므로 $P(x, y)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 &= \{x^2 + (y-b)^2\} + \{(x-a)^2 + y^2\} \\ \overline{BP}^2 + \overline{DP}^2 &= \{x^2 + y^2\} + \{(x-a)^2 + (y-b)^2\} \\ &= \{x^2 + (y-b)^2\} + \{(x-a)^2 + y^2\} \\ \therefore \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 &= \overline{BP}^2 + \overline{DP}^2\end{aligned}$$

0044 **답** (3, 3)

$$P\left(\frac{3 \times (-3) + 2 \times 7}{3+2}, \frac{3 \times 6 + 2 \times 1}{3+2}\right)$$

$$\therefore P(1, 4)$$

$$Q\left(\frac{1 \times (-3) + 4 \times 7}{1+4}, \frac{1 \times 6 + 4 \times 1}{1+4}\right)$$

$$\therefore Q(5, 2)$$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{4+2}{2}\right) \therefore (3, 3)$$

0045 **답** ①

선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표가 $(-1, 2)$ 이므로

$$\frac{3 \times (-2) + 1 \times a}{3+1} = -1, \frac{3 \times b + 1 \times (-1)}{3+1} = 2$$

$$-6 + a = -4, 3b - 1 = 2$$

$$\therefore a = 2, b = 3$$

$$\therefore a + b = 5$$

0046 **답** $\sqrt{2}$

$$P\left(\frac{3 \times 6 + 2 \times (-4)}{3+2}, \frac{3 \times (-7) + 2 \times 3}{3+2}\right) \therefore P(2, -3)$$

$$M\left(\frac{-4+6}{2}, \frac{3-7}{2}\right) \therefore M(1, -2)$$

$$\therefore \overline{PM} = \sqrt{(1-2)^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{2}$$

0047 **답** ④

점 C는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$C\left(\frac{1 \times 3 + 2 \times (-3)}{1+2}, \frac{1 \times 5 + 2 \times (-1)}{1+2}\right)$$

$$\therefore C(-1, 1)$$

점 D는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$D\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times (-3)}{2+1}, \frac{2 \times 5 + 1 \times (-1)}{2+1}\right)$$

$$\therefore D(1, 3)$$

따라서 $a = -1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 3$ 이므로

$$cd - ab = 3 - (-1) = 4$$

0048 **답** $\frac{2}{7} < a < \frac{5}{6}$

$a > 0$, $1 - a > 0$ 이므로 $0 < a < 1$ ㉠

선분 AB를 $a : (1-a)$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{a \times 5 + (1-a) \times (-2)}{a + (1-a)}, \frac{a \times (-1) + (1-a) \times 5}{a + (1-a)}\right)$$

$$\therefore (7a-2, 5-6a)$$

이 점이 제1사분면 위의 점이므로

$$7a-2 > 0, 5-6a > 0$$

$$\therefore \frac{2}{7} < a < \frac{5}{6} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$\frac{2}{7} < a < \frac{5}{6}$$

0049 **답** ③

선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 2 + 1 \times a}{3+1}, \frac{3 \times (-4) + 1 \times 0}{3+1}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{6+a}{4}, -3\right)$$

이 점이 y 축 위에 있으므로

$$\frac{6+a}{4} = 0 \quad \therefore a = -6$$

따라서 $A(-6, 0)$ 이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(2+6)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{5}$$

0050 **답** 3

선분 AB가 x 축에 의하여 2 : k 로 내분되므로 선분 AB를 2 : k 로 내분하는 점은 x 축 위에 있다.

선분 AB를 2 : k 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 2 + k \times 5}{2+k}, \frac{2 \times (-3) + k \times 2}{2+k}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{4+5k}{2+k}, \frac{-6+2k}{2+k}\right) \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이 점이 x 축 위에 있으므로

$$\frac{-6+2k}{2+k} = 0, -6+2k = 0$$

$$\therefore k = 3 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① 선분 AB를 2 : k 로 내분하는 점의 좌표 구하기	60 %
② k 의 값 구하기	40 %

0051 답 ②

선분 AB를 $a : 1$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{a \times (-2) + 1 \times 3}{a+1}, \frac{a \times 3 + 1 \times (-2)}{a+1} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{-2a+3}{a+1}, \frac{3a-2}{a+1} \right)$$

이 점이 직선 $3x+y+1=0$ 위에 있으므로

$$\frac{3(-2a+3)}{a+1} + \frac{3a-2}{a+1} + 1 = 0$$

$$-2a+8=0 \quad \therefore a=4$$

0052 답 18

$$2\overline{AB}=\overline{BC} \text{에서 } \overline{AB} : \overline{BC}=1 : 2$$

이때 $a > 0$ 이므로 점 B는 $\overline{AC}$ 를 $1 : 2$

로 내분하는 점이다.

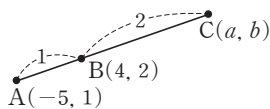
$$\text{따라서 } \frac{1 \times a + 2 \times (-5)}{1+2} = 4,$$

$$\frac{1 \times b + 2 \times 1}{1+2} = 2 \text{이므로}$$

$$a-10=12, b+2=6$$

$$\therefore a=22, b=4$$

$$\therefore a-b=18$$



0053 답 ④

$$2\overline{AB}=3\overline{BC} \text{에서 } \overline{AB} : \overline{BC}=3 : 2$$

따라서 점 B는 $\overline{AC}$ 를 $3 : 2$ 로 내분하는 점이므로

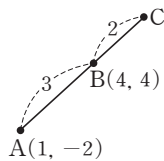
점 C의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\frac{3 \times a + 2 \times 1}{3+2} = 4, \frac{3 \times b + 2 \times (-2)}{3+2} = 4$$

$$3a+2=20, 3b-4=20$$

$$\therefore a=6, b=8$$

따라서 점 C의 좌표는 $(6, 8)$ 이다.



0054 답 $6\sqrt{2}$

$$3\overline{AB}=\overline{BP} \text{에서 } \overline{AB} : \overline{BP}=1 : 3$$

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면

(i) $a < 3$ 일 때

점 A는 $\overline{BP}$ 를 $1 : 2$ 로 내분하는 점이므로

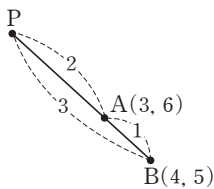
로

$$\frac{1 \times a + 2 \times 4}{1+2} = 3, \frac{1 \times b + 2 \times 5}{1+2} = 6$$

$$a+8=9, b+10=18$$

$$\therefore a=1, b=8$$

$$\therefore P(1, 8)$$



..... ①

(ii) $a > 4$ 일 때

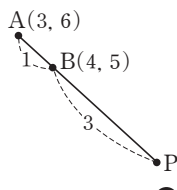
점 B는 $\overline{AP}$ 를 $1 : 3$ 으로 내분하는 점이므로

$$\frac{1 \times a + 3 \times 3}{1+3} = 4, \frac{1 \times b + 3 \times 6}{1+3} = 5$$

$$a+9=16, b+18=20$$

$$\therefore a=7, b=2$$

$$\therefore P(7, 2)$$



..... ②

(i), (ii)에서 구하는 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(7-1)^2 + (2-8)^2} = 6\sqrt{2}$$

..... ③

채점 기준

① 점 P의 x좌표가 점 A의 x좌표보다 작을 때 점 P의 좌표 구하기	40 %
② 점 P의 x좌표가 점 B의 x좌표보다 클 때 점 P의 좌표 구하기	40 %
③ 두 점 사이의 거리 구하기	20 %

다른 풀이

$$3\overline{AB}=\overline{BP} \text{에서 } \overline{AB} : \overline{BP}=1 : 3$$

이를 만족시키는 점 P를 오른쪽 그림과

같이 P_1, P_2 라 하면 점 A는 $\overline{BP_1}$ 을 $1 : 2$

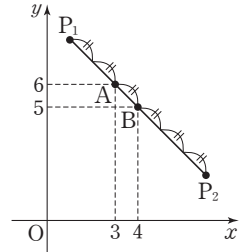
로 내분하는 점이고, 점 B는 $\overline{AP_2}$ 를 $1 : 3$

으로 내분하는 점이므로

$$\overline{P_1P_2}=6\overline{AB}$$

$$\overline{AB}=\sqrt{(4-3)^2 + (5-6)^2}=\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\overline{P_1P_2}=6\sqrt{2}$$



0055 답 $(5, 0), (8, 3)$

$$\overline{AC}=3\overline{BC} \text{에서 } \overline{AC} : \overline{BC}=3 : 1$$

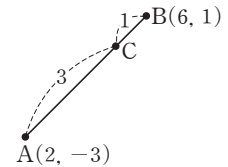
(i) 점 C가 $\overline{AB}$ 위에 있을 때

점 C는 $\overline{AB}$ 를 $3 : 1$ 로 내분하는 점이므로

로 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 6 + 1 \times 2}{3+1}, \frac{3 \times 1 + 1 \times (-3)}{3+1} \right)$$

$$\therefore (5, 0)$$



(ii) 점 C가 $\overline{AB}$ 의 연장선 위에 있을 때

점 B는 $\overline{AC}$ 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점이므로

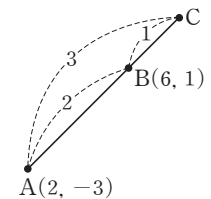
점 C의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\frac{2 \times a + 1 \times 2}{2+1} = 6, \frac{2 \times b + 1 \times (-3)}{2+1} = 1$$

$$a+1=9, 2b-3=3$$

$$\therefore a=8, b=3$$

따라서 점 C의 좌표는 $(8, 3)$ 이다.



(i), (ii)에서 점 C의 좌표는 $(5, 0), (8, 3)$ 이다.

0056 답 ⑤

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{7+4}{2}, \frac{8-1}{2} \right) \quad \therefore \left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2} \right) \quad \dots\dots ㉠$$

D(a, b)라 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{5+b}{2} \right) \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$\frac{11}{2} = \frac{a}{2}, \frac{7}{2} = \frac{5+b}{2}$$

$$\therefore a=11, b=2$$

따라서 점 D의 좌표는 $(11, 2)$ 이다.

0057 답 $C(-4, 6), D(-2, -1)$

$C(a, b)$ 라 하면 대각선 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{4+a}{2}, \frac{b}{2} \right)$ 이므로

$$\frac{4+a}{2} = 0, \frac{b}{2} = 3$$

$$\therefore a=-4, b=6$$

$$\therefore C(-4, 6)$$

D(c, d)라 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는 $(\frac{2+c}{2}, \frac{7+d}{2})$ 이고,
 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치하므로
 $\frac{2+c}{2}=0, \frac{7+d}{2}=3$
 $\therefore c=-2, d=-1$
 $\therefore D(-2, -1)$

0058 답 19

두 대각선 OB와 AC의 중점이 일치하므로

$$\frac{b}{2}=\frac{a+5}{2}, \frac{c}{2}=\frac{7+5}{2}$$

$$\therefore b=a+5, c=12 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 $\overline{OA}=\overline{OC}$ 에서 $\overline{OA}^2=\overline{OC}^2$ 이므로

$$a^2+7^2=5^2+5^2, a^2=1 \quad \therefore a=\pm 1$$

그런데 a는 양수이므로 $a=1$

이를 ⑦에 대입하면 $b=6$

$$\therefore a+b+c=19$$

0059 답 ②

주어진 평행사변형의 네 꼭짓점을 A, B, C, D라 하면 두 대각선 AC와 BD의 중점이 일치한다.

(i) A(a, b), C(-3, -1)일 때

$$\frac{a-3}{2}=\frac{-1+1}{2}, \frac{b-1}{2}=\frac{5+3}{2}$$

$$\therefore a=3, b=9 \quad \therefore ab=27$$

(ii) A(a, b), C(-1, 5)일 때

$$\frac{a-1}{2}=\frac{-3+1}{2}, \frac{b+5}{2}=\frac{-1+3}{2}$$

$$\therefore a=-1, b=-3 \quad \therefore ab=3$$

(iii) A(a, b), C(1, 3)일 때

$$\frac{a+1}{2}=\frac{-3-1}{2}, \frac{b+3}{2}=\frac{-1+5}{2}$$

$$\therefore a=-5, b=1 \quad \therefore ab=-5$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 ab의 값의 합은

$$27+3+(-5)=25$$

0060 답 $(-1, -\frac{4}{3})$

$$\overline{AB}=\sqrt{(-7+1)^2+(-4-4)^2}=10$$

$$\overline{AC}=\sqrt{(2+1)^2+(-4)^2}=5$$

이때 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=10:5=2:1$$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$ 를 2:1로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 2 + 1 \times (-7)}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times (-4)}{2+1}\right) \quad \therefore \left(-1, -\frac{4}{3}\right)$$

0061 답 13

$$\overline{OA}=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$$

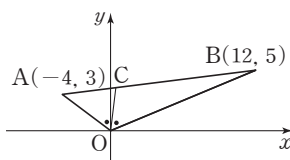
$$\overline{OB}=\sqrt{12^2+5^2}=13$$

오른쪽 그림과 같이 $\angle AOB$ 의 이

등분선과 $\overline{AB}$ 의 교점을 C라 하면

$$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{OA}:\overline{OB}$$

$$=5:13 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$



즉, 점 C는 $\overline{AB}$ 를 5:13으로 내분하는 점이므로 점 C의 x좌표는

$$\frac{5 \times 12 + 13 \times (-4)}{5+13} = \frac{4}{9} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 $a=9, b=4$ 이므로

$$a+b=13 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① $\overline{AC}:\overline{BC}$ 구하기	40%
② $\angle AOB$ 의 이등분선과 선분 AB의 교점의 x좌표 구하기	40%
③ $a+b$ 의 값 구하기	20%

0062 답 ③

$$\overline{AB}=\sqrt{(-8-2)^2+(4+1)^2}=5\sqrt{5}$$

$$\overline{AC}=\sqrt{(4-2)^2+(3+1)^2}=2\sqrt{5}$$

이때 점 I가 삼각형 ABC의 내심

이므로 직선 AI는 $\angle A$ 의 이등분

선이고, 오른쪽 그림과 같이 직선

AI가 변 BC와 만나는 점을 D라

하면

$$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=5\sqrt{5}:2\sqrt{5}=5:2$$

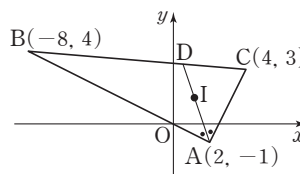
즉, 점 D는 $\overline{BC}$ 를 5:2로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{5 \times 4 + 2 \times (-8)}{5+2}, \frac{5 \times 3 + 2 \times 4}{5+2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{4}{7}, \frac{23}{7}\right)$$

따라서 $a=\frac{4}{7}, b=\frac{23}{7}$ 이므로

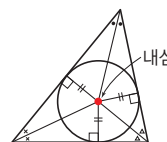
$$a+b=\frac{27}{7}$$



중2 다시보기

(1) 삼각형의 내심은 세 내각의 이등분선의 교점이다.

(2) 삼각형의 내심에서 세 변에 이르는 거리는 같다.



0063 답 -2

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (-3, 3)이므로

$$\frac{-3+a-1-2b}{3}=-3, \frac{4+b+1+a}{3}=3$$

$$\frac{a-2b-4}{3}=-3, \frac{a+b+5}{3}=3$$

$$\therefore a-2b=-5, a+b=4$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=3$

$$\therefore a-b=-2$$

0064 답 7

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+4+8}{3}, \frac{6+1+a}{3}\right) \quad \therefore \left(\frac{14}{3}, \frac{7+a}{3}\right)$$

이 점이 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$$\frac{7+a}{3}=\frac{14}{3} \quad \therefore a=7$$

0065 답 ⑤

삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M, 무게중심을 G라 하면 점 G는 선분 AM을 2:1로 내분하는 점이므로 점 G의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 7 + 1 \times 1}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2+1}\right) \therefore (5, 3)$$

따라서 $a=5, b=3$ 이므로

$$a+b=8$$

0066 답 (-2, -3)

삼각형 ABC의 무게중심이 원점이므로

$$\frac{4+x_1+x_2}{3}=0, \frac{6+y_1+y_2}{3}=0$$

$$\therefore x_1+x_2=-4, y_1+y_2=-6$$

따라서 선분 BC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \therefore (-2, -3)$$

0067 답 12

삼각형 PQR의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로 그 좌표는

$$\left(\frac{-1+7+3}{3}, \frac{4+2+6}{3}\right) \therefore (3, 4)$$

따라서 $a=3, b=4$ 이므로

$$ab=12$$

다른 풀이

$$P\left(\frac{-1+7}{2}, \frac{4+2}{2}\right) \therefore P(3, 3)$$

$$Q\left(\frac{7+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right) \therefore Q(5, 4)$$

$$R\left(\frac{3-1}{2}, \frac{6+4}{2}\right) \therefore R(1, 5)$$

삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3+5+1}{3}, \frac{3+4+5}{3}\right) \therefore (3, 4)$$

따라서 $a=3, b=4$ 이므로

$$ab=12$$

0068 답 3

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+3-1}{3}, \frac{2+4+3}{3}\right)$$

$$\therefore (1, 3) \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+3+5}{3}, \frac{-1+2+b}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+8}{3}, \frac{b+1}{3}\right) \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

①, ②이 일치하므로

$$\frac{a+8}{3}=1, \frac{b+1}{3}=3 \therefore a=-5, b=8$$

$$\therefore a+b=3 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표 구하기	40%
② 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표 구하기	40%
③ $a+b$ 의 값 구하기	20%

0069 답 ①

$P(a, b)$ 라 하면 점 P가 직선 $y=-4x+2$ 위의 점이므로

$$b=-4a+2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$Q(x, y)$ 라 하면 점 Q는 선분 OP를 1:2로 내분하는 점이므로

$$x=\frac{1 \times a + 2 \times 0}{1+2}=\frac{a}{3}, y=\frac{1 \times b + 2 \times 0}{1+2}=\frac{b}{3}$$

$$\therefore a=3x, b=3y \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

②를 ①에 대입하면

$$3y=-4 \times 3x+2 \therefore y=-4x+\frac{2}{3}$$

따라서 $m=-4, n=\frac{2}{3}$ 이므로

$$m+n=-\frac{10}{3}$$

0070 답 $6x-5y-12=0$

$P(x, y)$ 라 하면 $\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = 5$ 에서

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 - \{(x-5)^2 + (y+2)^2\} = 5$$

$$x^2 + 2x + y^2 - 6y + 10 - (x^2 - 10x + y^2 + 4y + 29) = 5$$

$$\therefore 6x - 5y - 12 = 0$$

0071 답 $x-y+1=0$

두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점을 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 8y + 17 = x^2 - 6x + y^2 - 4y + 13$$

$$\therefore x - y + 1 = 0$$

AB 유형 점검

18~20쪽

0072 답 ②

$\overline{OA}=4$ 이므로 $\sqrt{a^2+3^2}=4$

양변을 제곱하면

$$a^2+9=16 \therefore a^2=7$$

0073 답 2

$3\overline{AB}=\overline{BC}$ 에서 $9\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$ 이므로

$$9\{(a+1)^2 + (2a-a)^2\} = (4a-a)^2 + (-5-2a)^2$$

$$5a^2 - 2a - 16 = 0, (5a+8)(a-2)=0$$

$$\therefore a=-\frac{8}{5} \text{ 또는 } a=2$$

따라서 정수 a 의 값은 2이다.

0074 답 ①

$P(a, 0)$ 이라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

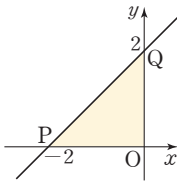
$$a^2+2^2=(a+4)^2+(-2)^2$$

$$8a=-16 \therefore a=-2$$

$$\therefore P(-2, 0)$$

$Q(0, b)$ 라 하면 $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서 $\overline{AQ}^2 = \overline{BQ}^2$ 이므로
 $(b+2)^2 = 4^2 + (b-2)^2$
 $8b = 16 \quad \therefore b = 2$
 $\therefore Q(0, 2)$

따라서 오른쪽 그림에서 삼각형 OPQ의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$



0075 답 ②

점 P가 직선 $y = -x$ 위의 점이므로 그 좌표를 $(a, -a)$ 라 하자.

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로
 $(a-2)^2 + (-a-4)^2 = (a-5)^2 + (-a-1)^2$
 $12a = 6 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$

따라서 $P(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 이므로

$$\overline{OP} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

0076 답 ①

$$\overline{AB} = |2 - (-2)| = 4$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-2)^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{3})^2} = 4$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(-2)^2 + (-\sqrt{3} - \sqrt{3})^2} = 4$$

따라서 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ 이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

0077 답 2

$$\overline{AB}^2 = k^2 + (2+1)^2 = k^2 + 9$$

$$\overline{BC}^2 = (-1-k)^2 + (2k-2)^2 = 5k^2 - 6k + 5$$

$$\overline{CA}^2 = 1^2 + (-1-2k)^2 = 4k^2 + 4k + 2$$

삼각형 ABC가 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 \text{에서 } k^2 + 9 + 5k^2 - 6k + 5 = 4k^2 + 4k + 2$$

$$k^2 - 5k + 6 = 0, (k-2)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = 2 \text{ 또는 } k = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC가 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{에서 } k^2 + 9 = 5k^2 - 6k + 5$$

$$2k^2 - 3k - 2 = 0, (2k+1)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } k = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } k = 2$$

0078 답 72

두 점 B, C는 x 축 위의 점이므로 $P(a, 0) (-2 \leq a \leq 3)$ 이라 하면

$$\begin{aligned} \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (a-4)^2 + (-3)^2 + (a+2)^2 \\ &= 2a^2 - 4a + 29 \\ &= 2(a-1)^2 + 27 \end{aligned}$$

따라서 $a = -2$ 일 때 최댓값은 45, $a = 1$ 일 때 최솟값은 27이므로
 구하는 합은

$$45 + 27 = 72$$

공통수학1 다시보기

x 의 값의 범위가 $\alpha \leq x \leq \beta$ 일 때, 이차함수 $f(x) = a(x-p)^2 + q$ 의 최댓값과 최솟값은 다음과 같다.

(1) 꼭짓점의 x 좌표가 $\alpha \leq x \leq \beta$ 에 포함될 때

① $a > 0$ 이면 $f(p)$ 가 최솟값이다.

② $a < 0$ 이면 $f(p)$ 가 최댓값이다.

(2) 꼭짓점의 x 좌표가 $\alpha \leq x \leq \beta$ 에 포함되지 않을 때

$f(\alpha), f(\beta)$ 의 값 중 큰 값이 최댓값이고 작은 값이 최솟값이다.

0079 답 ②

$A(1, -2), B(5, 2), P(a, b)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \sqrt{(a-1)^2 + (b+2)^2} + \sqrt{(a-5)^2 + (b-2)^2} \\ = \overline{AP} + \overline{BP} \end{aligned}$$

$$\geq \overline{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{2}$ 이다.

0080 답 (가) $2a$ (나) $\sqrt{3}a$ (다) $2\sqrt{3}a$

$B(6a, 0)$ 이라 하면 $C(2a, 0), D(4a, 0)$ 이고 점 E의 y 좌표는 정삼각형 ADE의 높이이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 4a = 2\sqrt{3}a \quad \therefore E(\boxed{\text{가}} 2a, 2\sqrt{3}a)$$

또 점 F의 y 좌표는 정삼각형 DBF의 높이이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a = \sqrt{3}a \quad \therefore F(5a, \boxed{\text{나}} \sqrt{3}a)$$

이때 $\overline{EC}, \overline{CF}, \overline{FE}$ 의 길이를 각각 구하면

$$\overline{EC} = 2\sqrt{3}a$$

$$\overline{CF} = \sqrt{(5a-2a)^2 + (\sqrt{3}a)^2} = 2\sqrt{3}a$$

$$\overline{FE} = \sqrt{(2a-5a)^2 + (2\sqrt{3}a-\sqrt{3}a)^2} = 2\sqrt{3}a$$

$$\therefore \overline{EC} = \overline{CF} = \overline{FE} = \boxed{\text{다}} 2\sqrt{3}a$$

따라서 삼각형 ECF는 정삼각형이다.

0081 답 160

$A(a, b), B(c, d)$ 라 하면 선분 AB의 중점의 좌표가 $(1, 2)$ 이므로

$$\frac{a+c}{2} = 1, \frac{b+d}{2} = 2$$

$$\therefore a+c=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, b+d=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표가 $(4, 3)$ 이므로

$$\frac{3 \times c + 1 \times a}{3+1} = 4, \frac{3 \times d + 1 \times b}{3+1} = 3$$

$$\therefore a+3c=16 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}, b+3d=12 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=-5, c=7$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{을 연립하여 풀면 } b=0, d=4$$

따라서 $A(-5, 0), B(7, 4)$ 이므로

$$\overline{AB}^2 = (7+5)^2 + 4^2 = 160$$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 중점 M, 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점을 P라 하면

$$\overline{AB} = 4\overline{MP}$$

$$= 4\sqrt{(4-1)^2 + (3-2)^2} = 4\sqrt{10}$$

$$\therefore \overline{AB}^2 = (4\sqrt{10})^2 = 160$$



0082 답 21

선분 AB를 3 : b로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-12) + b \times 4}{3+b}, \frac{3 \times a + b \times (-8)}{3+b} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{-36+4b}{3+b}, \frac{3a-8b}{3+b} \right)$$

이 점이 점 (-2, 1)과 일치하므로

$$\frac{-36+4b}{3+b} = -2, \frac{3a-8b}{3+b} = 1$$

$$-36+4b = -2(3+b), 3a-8b = 3+b$$

$$b=5, a-3b=1 \quad \therefore a=16, b=5$$

$$\therefore a+b=21$$

0083 답 ③

$$t > 0, 1-t > 0 \text{이므로 } 0 < t < 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

선분 AB를 t : (1-t)로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{t \times 6 + (1-t) \times (-2)}{t+(1-t)}, \frac{t \times (-2) + (1-t) \times 3}{t+(1-t)} \right)$$

$$\therefore (8t-2, 3-5t)$$

이 점이 제4사분면 위의 점이므로

$$8t-2 > 0, 3-5t < 0$$

$$\therefore t > \frac{3}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$\frac{3}{5} < t < 1$$

$$\text{따라서 } a = \frac{3}{5}, b = 1 \text{이므로}$$

$$a+b = \frac{8}{5}$$

0084 답 (15, -10)

$$3\overline{AB} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 3$$

이때 점 C의 x좌표가 양수이므로 점 B는 $\overline{AC}$ 를 1 : 3으로 내분하는 점이다.

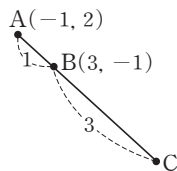
점 C의 좌표를 (a, b)라 하면

$$\frac{1 \times a + 3 \times (-1)}{1+3} = 3, \frac{1 \times b + 3 \times 2}{1+3} = -1$$

$$a-3=12, b+6=-4$$

$$\therefore a=15, b=-10$$

따라서 점 C의 좌표는 (15, -10)이다.



0085 답 ③

두 대각선 AC와 BD의 중점의 좌표는 일치하므로 중점의 x좌표는

$$\frac{4+a}{2} = \frac{1+b}{2} \quad \therefore b=a+3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로

$$(1-4)^2 + (5-2)^2 = (a-1)^2 + (2-5)^2$$

$$a^2 - 2a - 8 = 0, (a+2)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 4$$

그런데 a=4이면 점 A와 점 C가 일치하므로 사각형 ABCD가 만들 어지지 않는다.

따라서 a=-2이므로 이를 ㉠에 대입하면 b=1

$$\therefore a+2b = -2+2=0$$

0086 답 ④

$$\overline{AB} = \sqrt{(14-2)^2 + (8-3)^2} = 13$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(-4-2)^2 + (-5-3)^2} = 10$$

이때 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

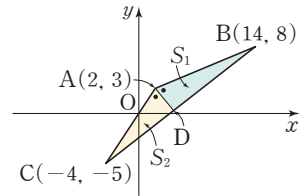
$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 10$$

따라서

$$S_1 : S_2 = \overline{BD} : \overline{CD} = 13 : 10$$

이므로

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{13}{10}$$



0087 답 ⑤

$$\overline{AC} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \text{이므로}$$

$$(a+2)^2 + b^2 = a^2 + (b-4)^2$$

$$\therefore a+2b-3=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2+a}{3}, \frac{4+b}{3} \right)$$

이 점이 y축 위에 있으므로

$$\frac{-2+a}{3} = 0 \quad \therefore a=2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$2+2b-3=0 \quad \therefore b=\frac{1}{2}$$

$$\therefore a+b = \frac{5}{2}$$

0088 답 $y=3x-5$

P(a, b)라 하면 점 P가 직선 $y=3x+8$ 위의 점이므로

$$b=3a+8 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

선분 AP의 중점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x = \frac{6+a}{2}, y = \frac{b}{2}$$

$$\therefore a=2x-6, b=2y \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$2y=3(2x-6)+8$$

$$\therefore y=3x-5$$

0089 답 8

$$\overline{AB} \leq 5 \text{에서 } \overline{AB}^2 \leq 5^2 \text{이므로}$$

$$(2-a)^2 + (a-1)^2 \leq 25$$

$$a^2 - 3a - 10 \leq 0$$

..... ㉠

$$(a+2)(a-5) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq a \leq 5$$

..... ㉡

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5의 8개이다.

..... ㉢

채점 기준

㉠ a에 대한 부등식 세우기	40 %
㉡ 부등식 풀기	30 %
㉢ 정수 a의 개수 구하기	30 %

공통수학1 다시보기

$\alpha < \beta$ 일 때

$$(1) (x-\alpha)(x-\beta) \geq 0 \Rightarrow x \leq \alpha \text{ 또는 } x \geq \beta$$

$$(2) (x-\alpha)(x-\beta) \leq 0 \Rightarrow \alpha \leq x \leq \beta$$

0090 답 5

선분 AB를 $m:n$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{6m-3n}{m+n}, \frac{-m+5n}{m+n} \right) \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이 점이 x 축 위에 있으므로

$$\frac{-m+5n}{m+n}=0, 5n=m \quad \therefore \frac{m}{n}=5 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① 선분 AB를 $m:n$ 으로 내분하는 점의 좌표 구하기	50%
② $\frac{m}{n}$ 의 값 구하기	50%

0091 답 3

$$\overline{BA}=\sqrt{(-2-1)^2+(1+1)^2}=\sqrt{13}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(10-1)^2+(5+1)^2}=3\sqrt{13}$$

이때 $\overline{BD}$ 는 $\angle B$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AD}:\overline{CD}=\overline{BA}:\overline{BC}$$

$$=\sqrt{13}:3\sqrt{13}$$

$$=1:3 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

즉, 점 D는 $\overline{AC}$ 를 1:3으로 내분하

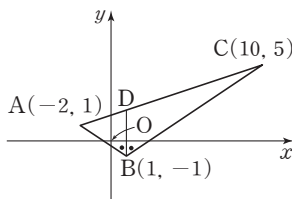
는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 10 + 3 \times (-2)}{1+3}, \frac{1 \times 5 + 3 \times (-1)}{1+3} \right) \quad \therefore (1, 2) \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore \overline{BD}=|2-(-1)|=3 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① $\overline{AD}:\overline{CD}$ 구하기	40%
② 점 D의 좌표 구하기	40%
③ 선분 BD의 길이 구하기	20%



C 실력 향상

21쪽

0092 답 7

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 두 도로를 각

각 x 축, y 축으로, O 지점을 원점으로 잡으면 출

발한 지 t 시간 후의 A의 위치는 $(-5+4t, 0)$,

B의 위치는 $(0, -10+3t)$ 이다.

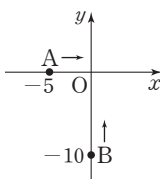
이때 두 사람 사이의 거리는

$$\sqrt{(5-4t)^2+(-10+3t)^2}=\sqrt{25t^2-100t+125}$$

$$=\sqrt{25(t-2)^2+25}(\text{km})$$

두 사람 사이의 거리가 가장 가까워지는 것은 $t=2$ 일 때, 즉 출발한 지 2시간 후이고 그때의 거리는 $\sqrt{25}=5(\text{km})$ 이다.

따라서 $a=2$, $d=5$ 이므로 $a+d=7$



0093 답 14

두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 α , β 라 하면 α , β 는 이차방정식

$x^2-2x=3x+k$, 즉 $x^2-5x-k=0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}, \alpha\beta=-k \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

선분 PQ를 1:2로 내분하는 점의 x 좌표가 1이므로

$$\frac{1 \times \beta + 2 \times \alpha}{1+2}=1 \quad \therefore 2\alpha+\beta=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $\alpha=-2$, $\beta=7$

이를 ㉡에 대입하면

$$-14=-k \quad \therefore k=14$$

공통수학1 다시보기

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α , β 라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

0094 답 ⑤

$$\overline{AC}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$$

$$\overline{AB}=\sqrt{(-5)^2+(-9-3)^2}=13$$

$$\overline{AD}=\overline{AC}=5\text{이므로}$$

$$\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{AD}=13-5=8$$

$\triangle BPA$ 에서 $\overline{AP} \parallel \overline{DC}$ 이므로

$$\overline{BC}:\overline{CP}=\overline{BD}:\overline{DA}=8:5$$

따라서 점 C는 $\overline{BP}$ 를 8:5로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표를

(a, b) 라 하면

$$\frac{8 \times a + 5 \times (-5)}{8+5}=4, \frac{8 \times b + 5 \times (-9)}{8+5}=0$$

$$8a-25=52, 8b-45=0$$

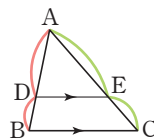
$$\therefore a=\frac{77}{8}, b=\frac{45}{8}$$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{77}{8}, \frac{45}{8}\right)$ 이다.

중2 다시보기

$\triangle ABC$ 에서 $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ 이면

$$\Rightarrow \overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$$

0095 답 $\left(6, \frac{15}{7}\right)$

점 P는 삼각형 AOB의 두 중선의 교점이므로 삼각형 AOB의 무게 중심이다.

두 점 A, B가 각각 두 직선 $y=5x$, $y=\frac{1}{8}x$ 위의 점이므로

$A(a, 5a)$, $B\left(b, \frac{1}{8}b\right)$ 라 하면

$$\frac{a+b}{3}=6, \frac{5a+\frac{1}{8}b}{3}=4$$

$$\therefore a+b=18, 40a+b=96$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=16$

즉, $A(2, 10)$, $B(16, 2)$ 이므로

$$C\left(\frac{2}{2}, \frac{10}{2}\right), D\left(\frac{16}{2}, \frac{2}{2}\right) \quad \therefore C(1, 5), D(8, 1)$$

따라서 선분 CD를 5:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{5 \times 8 + 2 \times 1}{5+2}, \frac{5 \times 1 + 2 \times 5}{5+2} \right) \quad \therefore \left(6, \frac{15}{7} \right)$$

02 / 직선의 방정식

A 개념 확인

22~25쪽

0096 답 $y=2x+7$

$y-3=2(x+2) \quad \therefore y=2x+7$

0097 답 $y=-3x+2$

$y+7=-3(x-3) \quad \therefore y=-3x+2$

0098 답 $y=1$

0099 답 $x=-5$

0100 답 $y=x-4$

$y-0=\frac{-2-0}{2-4}(x-4) \quad \therefore y=x-4$

0101 답 $y=-\frac{1}{3}x+1$

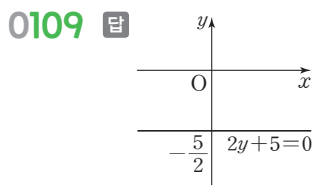
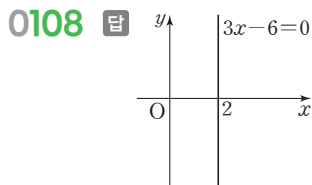
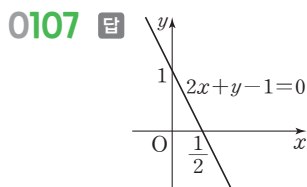
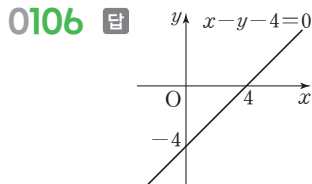
$y-2=\frac{3-2}{-6+3}(x+3) \quad \therefore y=-\frac{1}{3}x+1$

0102 답 $x=2$

0103 답 $y=-1$

0104 답 $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$

0105 답 $-\frac{x}{6}+\frac{y}{2}=1$

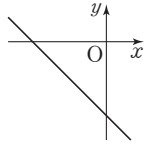


0110 답 제2, 3, 4사분면

$b \neq 0$ 이므로 $ax+by+c=0$ 에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $-\frac{a}{b} < 0$, $-\frac{c}{b} < 0$ 이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 제2, 3, 4사분면을 지난다.

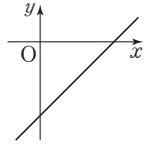


0111 답 제1, 3, 4사분면

$b \neq 0$ 이므로 $ax+by+c=0$ 에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이때 $-\frac{a}{b} > 0$, $-\frac{c}{b} < 0$ 이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 제1, 3, 4사분면을 지난다.

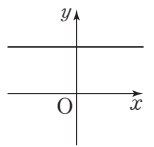


0112 답 제1, 2사분면

$a=0$, $b \neq 0$ 이므로 $ax+by+c=0$ 에서 $y=-\frac{c}{b}$

이때 $-\frac{c}{b} > 0$ 이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 제1, 2사분면을 지난다.

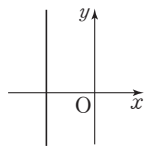


0113 답 제2, 3사분면

$a \neq 0$, $b=0$ 이므로 $ax+by+c=0$ 에서 $x=-\frac{c}{a}$

이때 $-\frac{c}{a} < 0$ 이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 제2, 3사분면을 지난다.



0114 답 $(-1, 2)$

주어진 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x-y+3=0$, $x+y-1=0$

두 식을 연립하여 풀면

$x=-1$, $y=2$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-1, 2)$ 이다.

0115 답 $(1, 5)$

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$k(x-1)+(-y+5)=0$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x-1=0$, $-y+5=0$

$\therefore x=1$, $y=5$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(1, 5)$ 이다.

0116 답 $2x-y=0$

두 직선 $3x+y-5=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$3x+y-5+k(x-2y+3)=0$ (단, k 는 실수) ㉠

직선 ㉠이 원점을 지나므로

$-5+3k=0 \quad \therefore k=\frac{5}{3}$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$2x-y=0$

0117 답 $2x+y+2=0$

두 직선 $2x-y+2=0$, $x+y+1=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$2x-y+2+k(x+y+1)=0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(0, -2)$ 를 지나므로

$$4-k=0 \quad \therefore k=4$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$2x+y+2=0$$

0118 답 -5

$$-4=m+1 \text{이므로 } m=-5$$

0119 답 $-\frac{3}{4}$

$$-4(m+1)=-1 \text{이므로 } m+1=\frac{1}{4} \quad \therefore m=-\frac{3}{4}$$

0120 답 $\neg$

$\neg$. $\frac{4}{4}=\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{2}$ 이므로 두 직선 $4x+y-1=0$, $4x+y+2=0$ 은 서로 평행하다.

0121 답 κ

κ . $4 \times 1 + 1 \times (-4) = 0$ 이므로 두 직선 $4x+y-1=0$, $x-4y=0$ 은 서로 수직이다.

참고 $\sqcup$. $\frac{4}{4} \neq \frac{1}{-1}$ 이므로 두 직선 $4x+y-1=0$, $4x-y+1=0$ 은 한 점에서 만난다.

$\sqsubset$. $\frac{4}{1} \neq \frac{1}{4}$ 이므로 두 직선 $4x+y-1=0$, $x+4y-3=0$ 은 한 점에서 만난다.

0122 답 1

$$\frac{a}{2} = \frac{-1}{a-3} \neq \frac{-1}{-1} \text{이므로}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{-1}{a-3} \text{에서 } a(a-3)=-2, a^2-3a+2=0$$

$$(a-1)(a-2)=0 \quad \therefore a=1 \text{ 또는 } a=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a}{2} \neq \frac{-1}{-1} \text{에서 } a \neq 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 $a=1$

0123 답 -3

$$2a-(a-3)=0 \text{이므로 } a+3=0 \quad \therefore a=-3$$

0124 답 $y=-2x+3$

직선 $y=-2x+1$ 에 평행한 직선의 기울기는 -2 이므로 기울기가 -2 이고 점 $(4, -5)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y+5=-2(x-4) \quad \therefore y=-2x+3$$

0125 답 $y=-4x-7$

직선 $y=\frac{1}{4}x-3$ 에 수직인 직선의 기울기는 -4 이므로 기울기가 -4 이고 점 $(-2, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=-4(x+2) \quad \therefore y=-4x-7$$

0126 답 $5x-2y-15=0$

직선 $5x-2y+2=0$, 즉 $y=\frac{5}{2}x+1$ 에 평행한 직선의 기울기는 $\frac{5}{2}$

이므로 기울기가 $\frac{5}{2}$ 이고 점 $(3, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{5}{2}(x-3) \quad \therefore 5x-2y-15=0$$

0127 답 $x+3y+16=0$

직선 $3x-y-1=0$, 즉 $y=3x-1$ 에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$ 이

므로 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 이고 점 $(-1, -5)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y+5=-\frac{1}{3}(x+1) \quad \therefore x+3y+16=0$$

0128 답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{|1 \times (-1) + 1 \times 6 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

0129 답 $\sqrt{5}$

$$\frac{|2 \times 1 + 1 \times (-4) - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$$

0130 답 $\sqrt{10}$

$$\frac{|1 \times 3 + 3 \times 1 + 4|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \sqrt{10}$$

0131 답 1

$$\frac{|-5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 1$$

0132 답 3

$$|2 - (-1)| = 3$$

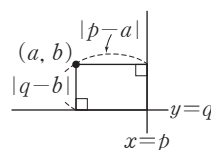
만렙 Note

(1) 점 (a, b) 와 직선 $x=p$ 사이의 거리

$$\Rightarrow |p-a|$$

(2) 점 (a, b) 와 직선 $y=q$ 사이의 거리

$$\Rightarrow |q-b|$$

**0133** 답 5

$$|2 - (-3)| = 5$$

0134 답 $\sqrt{10}$

구하는 두 직선 사이의 거리는 직선 $x+3y=0$ 위의 점 $(0, 0)$ 과 직선 $x+3y+10=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|10|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \sqrt{10}$$

0135 답 2

구하는 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x+4y+4=0$ 위의 점 $(0, -1)$ 과 직선 $3x+4y-6=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|4 \times (-1) - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

0136 답 $y = -x + 3$

두 점 $(-1, 3), (5, -1)$ 을 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3-1}{2}\right) \therefore (2, 1)$$

따라서 점 $(2, 1)$ 을 지나고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y - 1 = -(x - 2)$$

$$\therefore y = -x + 3$$

0137 답 ④

구하는 직선의 기울기는 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

따라서 기울기가 $\sqrt{3}$ 이고 점 $(2, -\sqrt{3})$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y + \sqrt{3} = \sqrt{3}(x - 2)$$

$$\therefore y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$$

0138 답 ⑤

$$2x - 3y + 5 = 0 \text{에서 } y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$$

즉, 기울기가 $\frac{2}{3}$ 이고 점 $(-3, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x + 3) \therefore 2x - 3y + 12 = 0$$

따라서 $a = 2, b = 12$ 이므로

$$b - a = 10$$

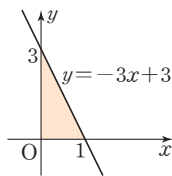
0139 답 $\frac{3}{2}$

점 $(2, -3)$ 을 지나고 기울기가 -3 인 직선의 방정식은

$$y + 3 = -3(x - 2) \therefore y = -3x + 3$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{2}$$



0140 답 $y = 2x$

선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 4 + 2 \times (-1)}{3+2}, \frac{3 \times 6 + 2 \times 1}{3+2}\right) \therefore (2, 4)$$

따라서 두 점 $(2, 4), (-1, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 4 = \frac{-2-4}{-1-2}(x - 2)$$

$$\therefore y = 2x$$

0141 답 ①

두 점 $(-3, 5), (1, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 5 = \frac{-3-5}{1+3}(x + 3) \therefore y = -2x - 1$$

두 점 $(a, 1), (-2, b)$ 가 직선 $y = -2x - 1$ 위의 점이므로

$$1 = -2a - 1, b = 4 - 1$$

$$\therefore a = -1, b = 3$$

$$\therefore ab = -3$$

0142 답 5

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-3+2+4}{3}, \frac{-2+4+7}{3}\right) \therefore (1, 3)$$

두 점 $(1, 3), (-1, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 3 = \frac{1-3}{-1-1}(x - 1)$$

$$\therefore y = x + 2$$

따라서 $a = 1, b = 2$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 1 + 4 = 5$$

채점 기준

① 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표 구하기	40 %
② 직선의 방정식 구하기	40 %
③ $a^2 + b^2$ 의 값 구하기	20 %

0143 답 7

$\triangle PAB : \triangle PBC = 3 : 2$ 이므로

$$\overline{PA} : \overline{PC} = 3 : 2$$

즉, 점 P는 선분 AC를 3 : 2로 내분하는 점이므로

$$P\left(\frac{3 \times 6 + 2 \times 1}{3+2}, \frac{3 \times 8 + 2 \times 3}{3+2}\right) \therefore P(4, 6)$$

두 점 B, P를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 4 = \frac{6-4}{4-5}(x - 5)$$

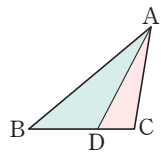
$$\therefore y = -2x + 14$$

따라서 이 직선의 x 절편은 7이다.

중2 다시보기

높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 길이의 비와 같다.

$$\Rightarrow \triangle ABD : \triangle ADC = \overline{BD} : \overline{DC}$$



0144 답 ①

x 절편이 3이고 y 절편이 -6 인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-6} = 1$$

이 직선이 점 $(a, -4)$ 를 지나므로

$$\frac{a}{3} + \frac{-4}{-6} = 1, \frac{a}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

$$\therefore a = 1$$

0145 답 ③

y 절편을 $a (a \neq 0)$ 라 하면 x 절편은 $2a$ 이므로 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{a} = 1$$

이 직선이 점 $(4, -1)$ 을 지나므로

$$\frac{4}{2a} + \frac{-1}{a} = 1, \frac{1}{a} = 1 \therefore a = 1$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

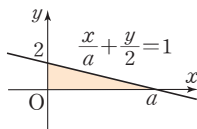
$$\frac{x}{2} + y = 1$$

0146 답 8

직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{2} = 1$ 의 x 절편은 $a(a > 0)$ 이고 y 절편은 2이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

이때 이 직선과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이므로

$$\frac{1}{2} \times a \times 2 = 8 \quad \therefore a = 8$$



0147 답 4

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{-k+1}{2-1} = \frac{-9+1}{(k-2)-1}, \quad -k+1 = \frac{-8}{k-3}$$

$$(k-1)(k-3) = 8, \quad k^2 - 4k - 5 = 0$$

$$(k+1)(k-5) = 0 \quad \therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 5$$

따라서 모든 k 의 값의 합은

$$-1 + 5 = 4$$

0148 답 $2\sqrt{10}$

점 A가 직선 BC 위에 있으려면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{4-1}{2-1} = \frac{(2k-1)-4}{(k+1)-2}, \quad 3 = \frac{2k-5}{k-1}$$

$$3(k-1) = 2k-5, \quad 3k-3 = 2k-5$$

$$\therefore k = -2 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

따라서 C(-1, -5)이므로 두 점 A, C 사이의 거리는

$$\sqrt{(-1-1)^2 + (-5-1)^2} = 2\sqrt{10} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① k 의 값 구하기	60%
② 두 점 A, C 사이의 거리 구하기	40%

0149 답 ④

서로 다른 세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 한다.

즉, 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{8+1}{2-k} = \frac{8-(3k-4)}{2+3}, \quad \frac{9}{2-k} = \frac{-3k+12}{5}$$

$$45 = 3(k-4)(k-2), \quad k^2 - 6k - 7 = 0$$

$$(k+1)(k-7) = 0 \quad \therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 7$$

따라서 양수 k 의 값은 7이다.

0150 답 ③

점 A를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 선분 BC의 중점을 지나야 한다.

선분 BC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-5-3}{2}\right) \quad \therefore (2, -4)$$

따라서 두 점 (3, 3), (2, -4)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-3 = \frac{-4-3}{2-3}(x-3) \quad \therefore y = 7x-18$$

0151 답 ④

직선 $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$ 이 x 축과 만나는 점을 A, y 축과 만나는 점을 B라 하면

$$A(3, 0), B(0, 6)$$

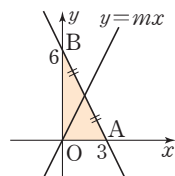
오른쪽 그림에서 직선 $y = mx$ 가 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하므로 이 직선은 선분 AB의 중점을 지나야 한다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{6}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{3}{2}, 3\right)$$

따라서 직선 $y = mx$ 가 점 $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ 을 지나므로

$$3 = \frac{3}{2}m \quad \therefore m = 2$$

0152 답 $\frac{3}{2}$

주어진 마름모의 넓이를 이등분하는 직선은 마름모의 두 대각선의 교점 (3, 2)를 지나야 한다. $\dots\dots \textcircled{i}$

두 점 (0, -2), (3, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y+2 = \frac{2+2}{3}x \quad \therefore y = \frac{4}{3}x - 2 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 이 직선의 x 절편은 $\frac{3}{2}$ 이다. $\dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① 직선이 지나야 하는 한 점의 좌표 구하기	40%
② 직선의 방정식 구하기	40%
③ 직선의 x 절편 구하기	20%

0153 답 6

두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 직사각형의 두 대각선의 교점을 모두 지난다.

오른쪽 그림과 같이 두 직사각형의 두 대각선의 교점을 각각 M, M'이라 하면 점 M은 두 점 (0, 5), (2, 3)을 이은 선분의 중점이므로

$$M\left(\frac{0+2}{2}, \frac{5+3}{2}\right) \quad \therefore M(1, 4)$$

점 M'은 두 점 (2, 2), (6, 0)을 이은 선분의 중점이므로

$$M'\left(\frac{2+6}{2}, \frac{2+0}{2}\right) \quad \therefore M'(4, 1)$$

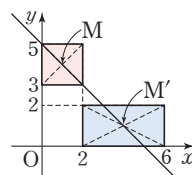
두 점 M, M'을 지나는 직선의 방정식은

$$y-4 = \frac{1-4}{4-1}(x-1)$$

$$\therefore x+y-5=0$$

따라서 $a=1$, $b=-5$ 이므로

$$a-b=6$$



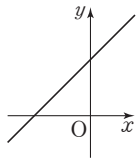
0154 답 ④

$$b \neq 0 \text{이므로 } ax+by+c=0 \text{에서 } y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$ab < 0$ 에서 $-\frac{a}{b} > 0$ 이므로 직선 ①의 기울기는 양수이다.

$bc < 0$ 에서 $-\frac{c}{b} > 0$ 이므로 직선 ①의 y 절편은 양수이다.

따라서 직선 $ax+by+c=0$ 의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나지 않는다.



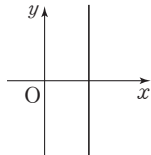
0155 답 ②

$ab=0$, $ac<0$ 에서 $a\neq 0$, $b=0$

$ax+by+c=0$ 에서 $x=-\frac{c}{a}$

이때 $ac<0$ 에서 $-\frac{c}{a}>0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$ 의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 4사분면을 지난다.



0156 답 ⑤

직선 $ax+by+c=0$ 의 개형이 주어진 그림과 같으려면 $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$

$ax+by+c=0$ 에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

이 직선의 기울기는 음수, y 절편은 양수이므로

$-\frac{a}{b}<0$, $-\frac{c}{b}>0$ $\therefore ab>0$, $bc<0$

즉, $a>0$, $b>0$, $c<0$ 또는 $a<0$, $b<0$, $c>0$ 이므로 $ac<0$

한편 $cx+ay+b=0$ 에서 $y=-\frac{c}{a}x-\frac{b}{a}$ ㉠

$ac<0$ 에서 $-\frac{c}{a}>0$ 이므로 직선 ㉠의 기울기는 양수이다.

$ab>0$ 에서 $-\frac{b}{a}<0$ 이므로 직선 ㉠의 y 절편은 음수이다.

따라서 직선 $cx+ay+b=0$ 의 개형은 ⑤이다.

0157 답 ④

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$(3x+y+6)+k(x+y-2)=0$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$3x+y+6=0$, $x+y-2=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-4$, $y=6$

따라서 항상 점 $(-4, 6)$ 을 지나므로

$a=-4$, $b=6$

$\therefore a^2+b^2=16+36=52$

0158 답 -9

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$(x-y+a)+k(x+2y+3)=0$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x-y+a=0$, $x+2y+3=0$

이때 점 $(3, b)$ 는 이 두 직선의 교점이므로

$3-b+a=0$, $3+2b+3=0$

$\therefore a=-6$, $b=-3$

$\therefore a+b=-9$

0159 답 $y=3x+8$

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$(x-y+4)+k(x+3y-4)=0$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x-y+4=0$, $x+3y-4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=2$

$\therefore P(-2, 2)$

..... ㉠

따라서 기울기가 3이고 점 P를 지나는 직선의 방정식은

$y-2=3(x+2)$ $\therefore y=3x+8$

..... ㉡

채점 기준

㉠ 점 P의 좌표 구하기	60 %
㉡ 직선의 방정식 구하기	40 %

0160 답 (4, 1)

점 (a, b) 가 직선 $2x-y=3$ 위에 있으므로

$2a-b=3$ $\therefore b=2a-3$

이를 $ax-2by=6$ 에 대입하면 $ax-2(2a-3)y=6$

이 식을 a 에 대하여 정리하면 $a(x-4y)+(6y-6)=0$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$x-4y=0$, $6y-6=0$ $\therefore x=4$, $y=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 (4, 1)이다.

0161 답 ②

$mx-y-5m+4=0$ 을 m 에 대하여 정리하면

$m(x-5)-(y-4)=0$ ㉠

이므로 직선 ㉠은 m 의 값에 관계없이 항상 점 (5, 4)를 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠을 직선

$x+y-3=0$ 과 제1사분면에서 만나

도록 움직여 보면

(i) 직선 ㉠이 점 (0, 3)을 지날 때

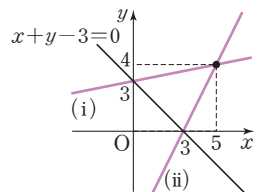
$-5m+1=0$ $\therefore m=\frac{1}{5}$

(ii) 직선 ㉠이 점 (3, 0)을 지날 때

$-2m+4=0$ $\therefore m=2$

(i), (ii)에서 m 의 값의 범위는 $\frac{1}{5}<m<2$

따라서 $\alpha=\frac{1}{5}$, $\beta=2$ 이므로 $\alpha\beta=\frac{2}{5}$



0162 답 ③

$kx-y+k+2=0$ 을 k 에 대하여 정리하면

$k(x+1)-(y-2)=0$ ㉠

이므로 직선 ㉠은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 2)$ 를 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠을 선분 AB와

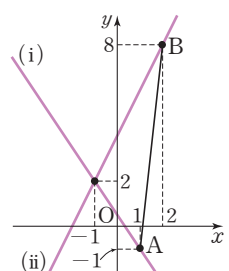
한 점에서 만나도록 움직여 보면

(i) 직선 ㉠이 점 A(1, -1)을 지날 때

$2k+3=0$ $\therefore k=-\frac{3}{2}$

(ii) 직선 ㉠이 점 B(2, 8)을 지날 때

$3k-6=0$ $\therefore k=2$



(i), (ii)에서 k 의 값의 범위는

$$-\frac{3}{2} \leq k \leq 2$$

따라서 정수 k 는 $-1, 0, 1, 2$ 의 4개이다.

0163 답 4

$y=kx+2k-2$ 를 k 에 대하여 정리하면

$$k(x+2)-(y+2)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이므로 직선 $\textcircled{1}$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, -2)$ 를 지난다.

$\cdots \cdots \textcircled{i}$

오른쪽 그림과 같이 직선 $\textcircled{1}$ 을 주어진 정사각형과 만나도록 움직여 보면

(i) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(0, 4)$ 를 지날 때

$$2k-6=0 \quad \therefore k=3$$

(ii) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(2, 2)$ 를 지날 때

$$4k-4=0 \quad \therefore k=1$$

(i), (ii)에서 k 의 값의 범위는

$$1 \leq k \leq 3$$

$\cdots \cdots \textcircled{ii}$

따라서 $M=3, m=1$ 이므로

$$M+m=4$$

$\cdots \cdots \textcircled{iii}$

채점 기준

① 직선이 k 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표 구하기	30%
② k 의 값의 범위 구하기	50%
③ $M+m$ 의 값 구하기	20%

0164 답 $-3 < m < -\frac{1}{2}$

$mx-y-3m+2=0$ 을 m 에 대하여 정리하면

$$m(x-3)-(y-2)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이므로 직선 $\textcircled{1}$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(3, 2)$ 를 지난다.

직선 $\textcircled{1}$ 이 삼각형 ABC와 만나지 않으려면 직선 $\textcircled{1}$ 은 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 있어야 하므로

(i) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $A(1, 3)$ 을 지날 때

$$-2m-1=0 \quad \therefore m=-\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $B(4, -1)$ 을 지날 때

$$m+3=0 \quad \therefore m=-3$$

(i), (ii)에서 구하는 m 의 값의 범위는

$$-3 < m < -\frac{1}{2}$$

0165 답 1

두 직선 $x+2y+4=0, 2x-3y-5=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x+2y+4+k(2x-3y-5)=0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$8-4k=0 \quad \therefore k=2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$5x-4y-6=0$$

따라서 $a=5, b=-4$ 이므로

$$a+b=1$$

0166 답 ⑤

두 직선 $2x-y+4=0, x+4y-3=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$2x-y+4+k(x+4y-3)=0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$8+8k=0 \quad \therefore k=-1$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$x-5y+7=0$$

따라서 이 직선 위의 점인 것은 ⑤이다.

0167 답 ④

직선 $3x-y+3=0$ 의 x 절편은 -1 이므로

$$A(-1, 0)$$

직선 $x+y-7=0$ 의 x 절편은 7 이므로

$$B(7, 0)$$

이때 점 C를 지나는 직선의 방정식은

$$3x-y+3+k(x+y-7)=0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 선분 AB의 중점을 지나야 한다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+7}{2}, \frac{0}{2}\right) \quad \therefore (3, 0)$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(3, 0)$ 을 지나야 하므로

$$12-4k=0 \quad \therefore k=3$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$3x+y-9=0$$

따라서 $a=3, b=1$ 이므로

$$a^2+b^2=9+1=10$$

0168 답 ③

두 점 $A(1, 2), B(4, 8)$ 을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{8-2}{4-1}=2$ 이므로

로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

선분 AB를 $2:1$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2+1}, \frac{2 \times 8 + 1 \times 2}{2+1}\right) \quad \therefore (3, 6)$$

즉, 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 점 $(3, 6)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-6=-\frac{1}{2}(x-3) \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$$

따라서 이 직선의 x 절편은 15 이다.

0169 답 5

두 점 $(-2, -3), (2, 1)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{1+3}{2+2}=1$$

따라서 기울기가 1 이고 x 절편이 -3 , 즉 점 $(-3, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y=x+3$$

이 직선이 점 $(2, k)$ 를 지나므로

$$k=2+3=5$$

0170 답 ⑤

$3x+2y-5=0$, $3x+y-1=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=-1, y=4$$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는 $(-1, 4)$ 이다.

직선 $2x-y+4=0$, 즉 $y=2x+4$ 에 평행한 직선의 기울기는 2이므로
기울기가 2이고 점 $(-1, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-4=2(x+1) \quad \therefore y=2x+6$$

따라서 구하는 직선의 y 절편은 6이다.

다른 풀이

두 직선 $3x+2y-5=0$, $3x+y-1=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$3x+2y-5+k(3x+y-1)=0$$

$$\therefore (3+3k)x+(2+k)y-5-k=0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수}) \quad \dots\dots ①$$

직선 ①이 직선 $2x-y+4=0$ 에 평행하므로

$$\frac{3+3k}{2}=\frac{2+k}{-1} \neq \frac{-5-k}{4}$$

$$\frac{3+3k}{2}=\frac{2+k}{-1} \text{에서 } -3-3k=4+2k$$

$$5k=-7 \quad \therefore k=-\frac{7}{5}$$

이를 ①에 대입하면

$$-\frac{6}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{18}{5}=0 \quad \therefore 2x-y+6=0$$

따라서 구하는 직선의 y 절편은 6이다.

0171 답 5

직선 $3x-2y+5=0$, 즉 $y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$ 의 기울기가 $\frac{3}{2}$ 이므로 직선
AH의 기울기는 $-\frac{2}{3}$ 이다.

즉, 기울기가 $-\frac{2}{3}$ 이고 점 A(4, 2)를 지나는 직선 AH의 방정식은

$$y-2=-\frac{2}{3}(x-4) \quad \therefore 2x+3y-14=0 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

점 H는 두 직선 $3x-2y+5=0$, $2x+3y-14=0$ 의 교점이므로 두
식을 연립하여 풀면

$$x=1, y=4$$

따라서 H(1, 4)이므로 $a=1$, $b=4$

$$\therefore a+b=5 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① 직선 AH의 방정식 구하기	50 %
② $a+b$ 의 값 구하기	50 %

0172 답 ③

오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 M
이라 하면 점 M은 직선 $y=m(x-2)$ 와
 y 축에서 만나는 점이므로

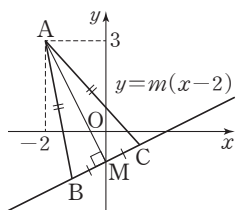
$$M(0, -2m)$$

삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 인 이등변삼각
형이므로

$$\overline{AM} \perp \overline{BC}$$

두 점 A(-2, 3), M(0, -2m)을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-2m-3}{2}$$



두 직선 AM, BC가 서로 수직이므로

$$\frac{-2m-3}{2} \times m = -1$$

$$2m^2+3m-2=0, (m+2)(2m-1)=0$$

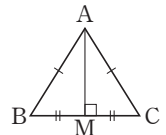
$$\therefore m=-2 \text{ 또는 } m=\frac{1}{2}$$

따라서 양수 m 의 값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

중2 다시보기

$\overline{AB}=\overline{AC}$ 인 이등변삼각형 ABC에서 $\overline{BC}$ 의 중
점을 M이라 하면 $\overline{AM}$ 은 $\overline{BC}$ 의 수직이등분선이
다.

$$\rightarrow \overline{BM}=\overline{CM}, \overline{AM} \perp \overline{BC}$$



0173 답 10

직선 $x+3y-2=0$ 이 직선 $ax-by+3=0$ 에 수직이므로

$$1 \times a + 3 \times (-b) = 0 \quad \therefore a = 3b \quad \dots\dots ①$$

직선 $x+3y-2=0$ 이 직선 $x-ay-1=0$ 에 평행하므로

$$\frac{1}{1} = \frac{3}{-a} \neq \frac{-2}{-1} \quad \therefore a = -3$$

이를 ①에 대입하면

$$-3 = 3b \quad \therefore b = -1$$

$$\therefore a^2+b^2=9+1=10$$

0174 답 ⑤

직선 $bx-y+5=0$ 이 직선 $4x-2y+1=0$ 에 평행하므로

$$\frac{b}{4} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{5}{1} \quad \therefore b = 2$$

직선 $bx-y+5=0$, 즉 $2x-y+5=0$ 이 점 $(1, a)$ 를 지나므로

$$2-a+5=0 \quad \therefore a=7$$

$$\therefore ab=14$$

0175 답 6

두 직선 $3x+(k+3)y-5=0$, $2x+(k-4)y+1=0$ 이 서로 평행
하려면

$$\frac{3}{2} = \frac{k+3}{k-4} \neq \frac{-5}{1}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{k+3}{k-4} \text{에서 } 3(k-4)=2(k+3)$$

$$3k-12=2k+6 \quad \therefore k=18$$

$$\therefore \alpha=18 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

두 직선이 서로 수직이 되려면

$$3 \times 2 + (k+3)(k-4) = 0$$

$$k^2-k-6=0, (k+2)(k-3)=0$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=3$$

$$\text{그런데 } \beta > 0 \text{이므로 } \beta=3 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore \frac{\alpha}{\beta} = \frac{18}{3} = 6 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① α 의 값 구하기	40 %
② β 의 값 구하기	40 %
③ $\frac{\alpha}{\beta}$ 의 값 구하기	20 %

0176 **답** ⑤

두 직선 $kx+y-3=0$, $5x+(k-4)y+1=0$ 의 교점이 존재하지 않으려면 두 직선이 서로 평행해야 하므로

$$\frac{k}{5} = \frac{1}{k-4} \neq \frac{-3}{1}$$

$$\frac{k}{5} = \frac{1}{k-4} \text{에서 } k(k-4)=5$$

$$k^2-4k-5=0, (k+1)(k-5)=0$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } k=5$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은

$$-1+5=4$$

0177 **답** 1

직선 $(k+3)x-y+1=0$ 은 y 축과 점 $(0, 1)$ 에서 만나므로 두 점 $(4, 0)$, $(0, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{1} = 1 \quad \therefore x+4y-4=0$$

두 직선 $(k+3)x-y+1=0$, $x+4y-4=0$ 이 서로 수직이므로

$$(k+3) \times 1 + (-1) \times 4 = 0$$

$$k-1=0 \quad \therefore k=1$$

0178 **답** ③

두 점 $A(-1, 2)$, $B(5, 4)$ 를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{4-2}{5+1} = \frac{1}{3}$ 이므로 선분 AB 의 수직이등분선의 기울기는 -3 이다.

선분 AB 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \quad \therefore (2, 3)$$

즉, 기울기가 -3 이고 점 $(2, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=-3(x-2) \quad \therefore y=-3x+9$$

따라서 이 직선이 점 $(a, 6)$ 을 지나므로

$$6=-3a+9 \quad \therefore a=1$$

0179 **답** ①

직선 $2x+y-4=0$ 의 x 절편은 2, y 절편은 4이므로

$$A(2, 0), B(0, 4)$$

선분 AB 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2}{2}, \frac{4}{2}\right) \quad \therefore (1, 2)$$

직선 $2x+y-4=0$, 즉 $y=-2x+4$ 의 기울기는 -2 이므로 선분

AB 의 수직이등분선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\therefore x-2y+3=0$$

0180 **답** 15

직선 AB 와 직선 $y=-2x+b$ 가 서로 수직이므로

$$\frac{a-3}{5-1} \times (-2) = -1$$

$$a-3=2 \quad \therefore a=5$$

즉, $B(5, 5)$ 이므로 선분 AB 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+5}{2}\right) \quad \therefore (3, 4)$$

따라서 직선 $y=-2x+b$ 는 점 $(3, 4)$ 를 지나므로

$$4=-6+b \quad \therefore b=10$$

$$\therefore a+b=15$$

0181 **답** $\frac{7}{2}$

세 직선이 삼각형을 이루지 않으려면 세 직선이 모두 평행하거나 세 직선 중 두 직선이 서로 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다. 두 직선 $x+y=0$, $x-2y+3=0$ 은 서로 평행하지 않으므로 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 $x+y=0$, $ax+y+2=0$ 이 서로 평행할 때

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{1} \neq \frac{0}{2} \quad \therefore a=1$$

(ii) 두 직선 $x-2y+3=0$, $ax+y+2=0$ 이 서로 평행할 때

$$\frac{1}{a} = \frac{-2}{1} \neq \frac{3}{2} \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

(iii) 직선 $ax+y+2=0$ 이 두 직선 $x+y=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지날 때

$$x+y=0, x-2y+3=0 \text{을 연립하여 풀면}$$

$$x=-1, y=1$$

직선 $ax+y+2=0$ 이 점 $(-1, 1)$ 을 지나야 하므로

$$-a+1+2=0 \quad \therefore a=3$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{7}{2}$$

0182 **답** ②

주어진 세 직선에 의하여 생기는 교점이 2개가 되려면 세 직선 중 두 직선이 서로 평행해야 한다.

(i) 두 직선 $3x+y-6=0$, $ax+2y+1=0$ 이 서로 평행할 때

$$\frac{3}{a} = \frac{1}{2} \neq \frac{-6}{1} \quad \therefore a=6$$

(ii) 두 직선 $2x-y-3=0$, $ax+2y+1=0$ 이 서로 평행할 때

$$\frac{2}{a} = \frac{-1}{2} \neq \frac{-3}{1} \quad \therefore a=-4$$

(i), (ii)에서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$6 + (-4) = 2$$

0183 **답** 0

서로 다른 세 직선이 좌표평면을 4개의 영역으로 나누려면 세 직선이 모두 평행해야 한다.

(i) 두 직선 $ax-y-3=0$, $2x+y+5=0$ 이 서로 평행할 때

$$\frac{a}{2} = \frac{-1}{1} \neq \frac{-3}{5} \quad \therefore a=-2$$

(ii) 두 직선 $4x+by-5=0$, $2x+y+5=0$ 이 서로 평행할 때

$$\frac{4}{2} = \frac{b}{1} \neq \frac{-5}{5} \quad \therefore b=2$$

(i), (ii)에서 $a=-2$, $b=2$ 이므로

$$a+b=0$$

0184 답 2

세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 되려면 세 직선 중 두 직선이 서로 수직이고 나머지 한 직선은 두 직선에 평행하지 않아야 한다. ❶

두 직선 $3x+2y=0$, $x+2y-4=0$ 은 서로 수직이 아니므로 주어진 세 직선으로 둘러싸인 삼각형이 직각삼각형이 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 $3x+2y=0$, $ax-y+2=0$ 이 서로 수직일 때

$$3 \times a + 2 \times (-1) = 0 \quad \therefore a = \frac{2}{3}$$

(ii) 두 직선 $x+2y-4=0$, $ax-y+2=0$ 이 서로 수직일 때

$$1 \times a + 2 \times (-1) = 0 \quad \therefore a = 2 \quad \dots\dots \text{❷}$$

(i), (ii)에서 정수 a 의 값은 2이다. ❸

채점 기준

❶ 직각삼각형이 되는 경우 찾기	40 %
❷ 각 경우의 a 의 값 구하기	50 %
❸ 정수 a 의 값 구하기	10 %

0185 답 $-\frac{15}{4}$

직선 $3x-4y+17=0$, 즉 $y=\frac{3}{4}x+\frac{17}{4}$ 에 평행한 직선의 방정식을 $y=\frac{3}{4}x+k$, 즉 $3x-4y+4k=0$ 이라 하면 점 $(-1, -2)$ 와 이 직선 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|3 \times (-1) - 4 \times (-2) + 4k|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2$$

$$\frac{|5+4k|}{5} = 2, |5+4k| = 10, 5+4k = \pm 10$$

$$\therefore k = \frac{5}{4} \text{ 또는 } k = -\frac{15}{4}$$

이때 구하는 y 절편은 k 이고 음수이므로 $-\frac{15}{4}$ 이다.

0186 답 2

점 $(-2, 3)$ 과 직선 $4x+3y-k=0$ 사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|4 \times (-2) + 3 \times 3 - k|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1, \frac{|1-k|}{5} = 1$$

$$|1-k| = 5, 1-k = \pm 5 \quad \therefore k = -4 \text{ 또는 } k = 6$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은

$$-4 + 6 = 2$$

0187 답 ④

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(2x-2y+3) + k(x+2y) = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$2x-2y+3=0, x+2y=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x = -1, y = \frac{1}{2} \quad \therefore P\left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

따라서 점 P와 직선 $3x+4y-9=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times (-1) + 4 \times \frac{1}{2} - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

0188 답 ②

$P(a, 0)$ 이라 하면 점 P에서 두 직선 $2x-y+3=0$, $x-2y-6=0$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2a+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|a-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$$|2a+3| = |a-6|, 2a+3 = \pm(a-6)$$

$$\therefore a = -9 \text{ 또는 } a = 1$$

$$\therefore P(-9, 0) \text{ 또는 } P(1, 0)$$

따라서 보기에서 점 P의 좌표가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0189 답 ⑤

두 점 $(6, 0)$, $(0, 3)$ 을 지나는 직선 l 의 방정식은

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore x+2y-6=0$$

$\overline{AB}$ 의 길이는 점 $A(a, 6)$ 과 직선 l 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{AB} = \frac{|a+2 \times 6-6|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|a+6|}{\sqrt{5}}$$

따라서 한 변의 길이가 $\frac{|a+6|}{\sqrt{5}}$ 인 정사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{81}{5}$

이므로

$$\left(\frac{|a+6|}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{81}{5}, (a+6)^2 = 81$$

$$a+6 = \pm 9 \quad \therefore a = -15 \text{ 또는 } a = 3$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 3$

0190 답 3

$$f(k) = \frac{|2k+2 \times 5-2k-4|}{\sqrt{k^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{k^2+4}}$$

따라서 k^2+4 가 최소일 때, $f(k)$ 의 값이 최대이다.

$k=0$ 일 때 k^2+4 는 최솟값 4를 가지므로 구하는 최댓값은

$$f(0) = \frac{6}{\sqrt{4}} = 3$$

0191 답 ③

두 직선 $7x+y=0$, $7x+y+a=0$ 이 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $7x+y=0$ 위의 한 점 $(0, 0)$ 과 직선 $7x+y+a=0$ 사이의 거리와 같고, 이 거리가 $3\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|a|}{\sqrt{7^2+1^2}} = 3\sqrt{2}, |a| = 30 \quad \therefore a = \pm 30$$

따라서 양수 a 의 값은 30이다.

0192 답 1

두 직선 $2x-4y+a=0$, $x+by-1=0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{2}{1} = \frac{-4}{b} \neq \frac{a}{-1} \quad \therefore b = -2 \quad \dots\dots \text{❶}$$

두 직선 사이의 거리는 직선 $x+by-1=0$ 위의 한 점 $(1, 0)$ 과 직선 $2x-4y+a=0$ 사이의 거리와 같고, 이 거리가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 이므로

$$\frac{|2+a|}{\sqrt{2^2+(-4)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$|2+a| = 5, 2+a = \pm 5$$

$$\therefore a = -7 \text{ 또는 } a = 3$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 3$

$$\therefore a+b=1$$

..... ❷

..... ❸

채점 기준

i b의 값 구하기	30%
ii a의 값 구하기	60%
iii a+b의 값 구하기	10%

0193 답 ①

사각형 ABCD가 평행사변형이므로 두 직선 AD, BC는 서로 평행하다.

즉, 두 직선 AD, BC 사이의 거리는 직선 AD 위의 한 점 A(0, 2)와 직선 BC 사이의 거리와 같다.

두 점 B(2, 0), C(5, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{5-2}(x-2) \quad \therefore x-3y-2=0$$

따라서 구하는 거리는

$$\frac{|-3 \times 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

0194 답 ④

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

직선 AB의 방정식은

$$y = \frac{2}{3-1}(x-1) \quad \therefore x-y-1=0$$

점 C(2, 5)와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|2-5-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$$

0195 답 5

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1 \quad \therefore x+y-2=0$$

점 C(3, a)와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|3+a-2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|a+1|}{\sqrt{2}}$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{|a+1|}{\sqrt{2}} = 6$$

$$|a+1| = 6, a+1 = \pm 6$$

$$\therefore a = -7 \text{ 또는 } a = 5$$

따라서 양수 a의 값은 5이다.

0196 답 6

직선 OA와 직선 $2x-3y+12=0$ 은 기울기가 $\frac{2}{3}$ 로 같으므로 서로 평행하다.

이때 삼각형 OAP에서 $\overline{OA}$ 를 밑변으로 하면 원점과 직선

$2x-3y+12=0$ 사이의 거리가 높이가 된다.

$$\overline{OA} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

원점과 직선 $2x-3y+12=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|12|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{12\sqrt{13}}{13}$$

따라서 삼각형 OAP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \frac{12\sqrt{13}}{13} = 6$$

0197 답 7

세 직선의 기울기가 모두 다르고 한 점에서 만나지 않으므로 세 직선으로 둘러싸인 도형은 삼각형이다.

두 직선 $x-2y=0$, $2x+3y-21=0$ 의 교점을 A라 하고 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$$x=6, y=3 \quad \therefore A(6, 3)$$

두 직선 $2x+3y-21=0$, $4x-y-7=0$ 의 교점을 B라 하고 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$$x=3, y=5 \quad \therefore B(3, 5)$$

두 직선 $x-2y=0$, $4x-y-7=0$ 의 교점을 C라 하고 두 직선의 방정식을 연립하여 풀면

$$x=2, y=1 \quad \therefore C(2, 1)$$

즉, 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표는

$$A(6, 3), B(3, 5), C(2, 1) \quad \dots \textcircled{i}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(2-6)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

점 B(3, 5)와 직선 AC, 즉 $x-2y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+(-2) \times 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} \quad \dots \textcircled{ii}$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{7\sqrt{5}}{5} = 7 \quad \dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

i 세 직선으로 둘러싸인 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표 구하기	40%
ii 삼각형의 밑변의 길이와 높이 구하기	40%
iii 세 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	20%

0198 답 ①

두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 P(x, y)라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x+3y+2|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|3x+y-2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}}$$

$$|x+3y+2| = |3x+y-2|$$

$$x+3y+2 = \pm(3x+y-2)$$

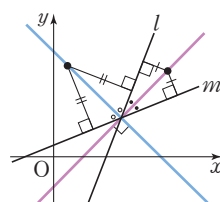
$$\therefore x-y-2=0 \text{ 또는 } x+y=0$$

따라서 y절편이 음수인 직선의 방정식은

$$x-y-2=0$$

만렙 Note

- 오른쪽 그림과 같이 두 직선 l , m 이 한 점에서 만나면 두 쌍의 맞꼭지각이 생기므로 두 직선이 이루는 각의 이등분선도 두 개이고, 서로 수직이다.
- 두 직선이 이루는 각의 이등분선은 두 직선으로부터 같은 거리에 있는 점이 나타내는 도형이다.



0199 답 ③

$P(x, y)$ 라 하면 점 P 에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3x+2y+1|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{|2x-3y-5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}$$

$$|3x+2y+1| = |2x-3y-5|$$

$$3x+2y+1 = \pm(2x-3y-5)$$

$$\therefore x+5y+6=0 \text{ 또는 } 5x-y-4=0$$

따라서 보기에서 점 P 가 나타내는 도형의 방정식인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0200 답 5

점 $(3, a)$ 에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3+2a+1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|2 \times 3 + a + 3|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$|2a+4| = |a+9|$$

$$2a+4 = \pm(a+9)$$

$$\therefore a=5 \text{ 또는 } a=-\frac{13}{3}$$

따라서 정수 a 의 값은 5이다.

AB 유형 점검

36~38쪽

0201 답 ③

점 $(2, 4)$ 를 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y-4=3(x-2) \quad \therefore y=3x-2$$

따라서 $m=3, n=-2$ 이므로

$$m+n=1$$

0202 답 -1

선분 BC 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{7+3}{2}, \frac{-1+13}{2}\right) \quad \therefore (5, 6)$$

두 점 $(1, 4), (5, 6)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-4=\frac{6-4}{5-1}(x-1) \quad \therefore x-2y+7=0$$

따라서 $a=1, b=-2$ 이므로

$$a+b=-1$$

0203 답 ②

x 절편을 $a(a \neq 0)$ 라 하면 y 절편은 $-a$ 이므로 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{a} = 1$$

이 직선이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$\frac{-1}{a} - \frac{2}{a} = 1 \quad \therefore a=-3$$

따라서 직선의 x 절편은 -3 이다.

0204 답 $y=3x+5$

세 점 A, B, C 가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB 와 직선 AC 의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{8+1}{k+2} = \frac{(5k+6)+1}{2+2}$$

$$\frac{9}{k+2} = \frac{5k+7}{4}, 36 = (5k+7)(k+2)$$

$$5k^2+17k-22=0, (5k+22)(k-1)=0$$

$$\therefore k=-\frac{22}{5} \text{ 또는 } k=1$$

그런데 $k>0$ 이므로 $k=1$

따라서 직선 l 은 기울기가 $\frac{9}{k+2}=3$ 이고 점 $A(-2, -1)$ 을 지나므로 직선 l 의 방정식은

$$y+1=3(x+2)$$

$$\therefore y=3x+5$$

0205 답 ⑤

직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

두 점 $(2, 3), (6, 5)$ 를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+6}{2}, \frac{3+5}{2}\right) \quad \therefore (4, 4)$$

두 점 $(1, -2), (4, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y+2=\frac{4+2}{4-1}(x-1)$$

$$\therefore y=2x-4$$

따라서 $a=2, b=-4$ 이므로

$$a-b=6$$

0206 답 ④

$a \neq 0, b \neq 0$ 일 때, 직선 $ax+by+c=0$, 즉 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ 의 기울

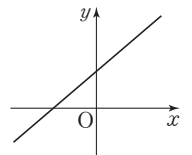
기는 $-\frac{a}{b}$, x 절편은 $-\frac{c}{a}$, y 절편은 $-\frac{c}{b}$ 이다.

ㄱ. $ac>0$ 에서 $-\frac{c}{a}<0, bc<0$ 에서 $-\frac{c}{b}>0$ 이므로 주어진 직선은

x 절편이 음수, y 절편이 양수이다.

따라서 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같으

므로 제1, 2, 3사분면을 지난다.

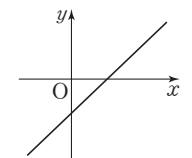


ㄴ. $ab<0$ 에서 $-\frac{a}{b}>0, bc>0$ 에서 $-\frac{c}{b}<0$ 이므로 주어진 직선은

기울기가 양수, y 절편이 음수이다.

따라서 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같으

므로 제1, 3, 4사분면을 지난다.



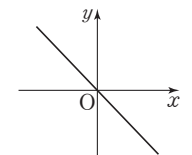
ㄷ. $ab>0, bc=0$ 에서 $b \neq 0, c=0$ 이므로 $y=-\frac{a}{b}x$

이때 $ab>0$ 에서 $-\frac{a}{b}<0$ 이므로 주어진 직선은 기울기가 음수이

고 원점을 지난다.

따라서 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같으

므로 제2, 4사분면을 지난다.



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

다른 풀이

7. $ac > 0, bc < 0$ 이면

$$a > 0, b < 0, c > 0 \text{ 또는 } a < 0, b > 0, c < 0$$

$$\text{즉, } ab < 0, bc < 0 \text{ 이므로 } -\frac{a}{b} > 0, -\frac{c}{b} > 0$$

따라서 주어진 직선은 기울기와 y 절편이 모두 양수이므로 제1, 2, 3사분면을 지난다.

0207 답 ③

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(x-2y-5)+k(4x+y-2)=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x-2y-5=0, 4x+y-2=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=1, y=-2$$

따라서 $P(1, -2)$ 이므로 점 P 와 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

0208 답 $-2 < m < -\frac{1}{4}$

$mx-y-2m-1=0$ 을 m 에 대하여 정리하면

$$m(x-2)-(y+1)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이므로 직선 $\textcircled{1}$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(2, -1)$ 을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 $\textcircled{1}$ 을 직선

$3x-2y+6=0$ 과 제2사분면에서 만나

도록 움직여 보면

(i) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(-2, 0)$ 을 지날 때

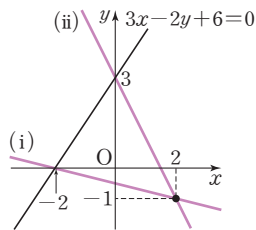
$$-4m-1=0 \quad \therefore m=-\frac{1}{4}$$

(ii) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(0, 3)$ 을 지날 때

$$-2m-4=0 \quad \therefore m=-2$$

(i), (ii)에서 m 의 값의 범위는

$$-2 < m < -\frac{1}{4}$$



0209 답 ④

두 직선 $x-2y+2=0, 2x+y-6=0$ 이 만나는 점을 지나는 직선의 방정식은

$$x-2y+2+k(2x+y-6)=0 \text{ (단, } k \text{는 실수)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(4, 0)$ 을 지나므로

$$6+2k=0 \quad \therefore k=-3$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$x+y-4=0 \quad \therefore y=-x+4$$

따라서 이 직선의 y 절편은 4이다.

다른 풀이

$x-2y+2=0, 2x+y-6=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=2, y=2$$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(2, 2)$ 이다.

두 점 $(2, 2), (4, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{-2}{4-2}(x-4) \quad \therefore y=-x+4$$

따라서 이 직선의 y 절편은 4이다.

0210 답 ④

직선 $2x-y+3=0$, 즉 $y=2x+3$ 에 평행한 직선의 기울기는 2이므로 기울기가 2이고 점 $(1, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=2(x-1) \quad \therefore y=2x+1$$

따라서 직선 위의 점인 것은 ④이다.

0211 답 ②

$$\text{직선 AP의 기울기는 } \frac{4-2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\text{직선 BP의 기울기는 } \frac{4-2}{4-n}=\frac{2}{4-n}$$

두 직선 AP와 BP는 서로 수직이므로

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{4-n} = -1 \quad \therefore n=5$$

$$\therefore B(5, 2)$$

삼각형 ABP의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+5+4}{3}, \frac{2+2+4}{3}\right) \quad \therefore \left(3, \frac{8}{3}\right)$$

따라서 $a=3, b=\frac{8}{3}$ 이므로

$$a+b=\frac{17}{3}$$

0212 답 16

직선 $ax-2y+1=0$ 이 직선 $bx-3y+2=0$ 에 수직이므로

$$ab+(-2) \times (-3)=0 \quad \therefore ab=-6$$

직선 $ax-2y+1=0$ 이 직선 $(b+2)x+2y+4=0$ 에 평행하므로

$$\frac{a}{b+2}=\frac{-2}{2} \neq \frac{1}{4}$$

$$\frac{a}{b+2}=\frac{-2}{2} \text{에서 } a=-(b+2) \quad \therefore a+b=-2$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2+b^2 &= (a+b)^2-2ab \\ &= (-2)^2-2 \times (-6)=16 \end{aligned}$$

0213 답 ①

직선 $2x+y-1=0$, 즉 $y=-2x+1$ 이 직선 AB와 수직이므로

$$-2 \times \frac{b-4}{a-1} = -1, a-1=2b-8$$

$$\therefore a-2b=-7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 직선 $2x+y-1=0$ 은 선분 AB의 중점 $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{4+b}{2}\right)$ 를 지나

므로

$$2 \times \frac{1+a}{2} + \frac{4+b}{2} - 1 = 0$$

$$\therefore 2a+b=-4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=-3, b=2$$

$$\therefore a-b=-5$$

0214 답 6

세 직선이 좌표평면을 6개의 영역으로 나누려면 세 직선 중 두 직선만 서로 평행하거나 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.

(i) 두 직선 $3x-y-1=0, y=mx-3$, 즉 $mx-y-3=0$ 이 서로 평행할 때

$$\frac{3}{m}=\frac{-1}{-1} \neq \frac{-1}{-3} \quad \therefore m=3$$

(ii) 두 직선 $x+y-7=0$, $y=mx-3$, 즉 $mx-y-3=0$ 이 서로 평행할 때

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{-1} \neq \frac{-7}{-3} \quad \therefore m = -1$$

(iii) 직선 $y=mx-3$ 이 두 직선 $3x-y-1=0$, $x+y-7=0$ 의 교점을 지날 때

$$3x-y-1=0, x+y-7=0 \text{을 연립하여 풀면}$$

$$x=2, y=5$$

$$\text{직선 } y=mx-3 \text{이 점 } (2, 5) \text{를 지나므로}$$

$$5=2m-3 \quad \therefore m=4$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 상수 m 의 값의 합은

$$3+(-1)+4=6$$

0215 답 7x-y-9=0

점 $(1, -2)$ 를 지나는 직선의 기울기를 $m(m>0)$ 이라 하면 이 직선의 방정식은

$$y+2=m(x-1)$$

$$\therefore mx-y-m-2=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(0, 1)$ 과 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|-1-m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}$$

$$|-m-3| = \sqrt{2(m^2+1)}$$

양변을 제곱하면

$$m^2+6m+9=2m^2+2$$

$$m^2-6m-7=0, (m+1)(m-7)=0$$

$$\therefore m=7 (\because m>0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$7x-y-9=0$$

0216 답 ④

두 직선 $x+ky+4=0$, $kx+y-2=0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{1}{k} = \frac{k}{1} \neq \frac{4}{-2}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{k}{1} \text{에서 } k^2=1 \quad \therefore k=1 (\because k>0)$$

즉, 두 직선의 방정식은

$$x+y+4=0, x+y-2=0$$

이때 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 평행한 두 직선 사이의 거리와 같고, 이는 직선 $x+y-2=0$ 위의 한 점 $(2, 0)$ 과 직선

$$x+y+4=0 \text{ 사이의 거리와 같으므로}$$

$$\frac{|2+4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 정사각형 ABCD의 넓이는 } (3\sqrt{2})^2=18$$

0217 답 ①

직선 $2x+y-12=0$ 과 직선 $y=x$ 의 교점의 좌표를 구하면

$$2x+x-12=0 \quad \therefore x=4$$

$$\therefore A(4, 4)$$

직선 $2x+y-12=0$ 과 직선 $y=2x$ 의 교점의 좌표를 구하면

$$2x+2x-12=0 \quad \therefore x=3$$

$$\therefore B(3, 6)$$

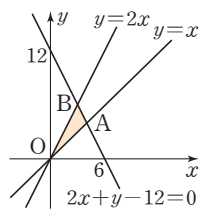
$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(3-4)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{5}$$

원점 O와 직선 $2x+y-12=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-12|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{12\sqrt{5}}{5} = 6$$



0218 답 9

직선과 y 축이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 점 P에서 직선과 y 축에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3x-4y+7|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = |x|$$

$$|3x-4y+7| = 5|x|, 3x-4y+7 = \pm 5x$$

$$\therefore 2x+4y-7=0 \text{ 또는 } 8x-4y+7=0$$

$$2x+4y-7=0 \text{ 일 때, } a=2, b=-7$$

$$8x-4y+7=0, \text{ 즉 } -8x+4y-7=0 \text{ 일 때, } a=-8, b=-7$$

$$\text{그런데 } a>0 \text{ 이므로 } a=2, b=-7$$

$$\therefore a-b=9$$

0219 답 (0, 2)

두 점 $A(4, 0)$, $C(-2, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{3}{-2-4}(x-4) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x+2 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

두 점 $O(0, 0)$, $B(0, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$x=0 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\text{이를 } y = -\frac{1}{2}x+2 \text{에 대입하면 } y=2$$

따라서 사각형 OABC의 두 대각선의 교점의 좌표는

$$(0, 2) \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 두 점 A, C를 지나는 직선의 방정식 구하기	40 %
② 두 점 O, B를 지나는 직선의 방정식 구하기	30 %
③ 두 대각선의 교점의 좌표 구하기	30 %

0220 답 -1

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$k(x-1)-(y-2)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이므로 직선 $\textcircled{1}$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 2)$ 를 지난다.

$\dots\dots \textcircled{i}$

오른쪽 그림과 같이 직선 $\textcircled{1}$ 을 주어진 삼각형과 만나도록 움직여 보면

(i) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(5, 0)$ 을 지날 때

$$4k+2=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(3, 6)$ 을 지날 때

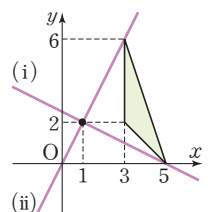
$$2k-4=0 \quad \therefore k=2$$

(i), (ii)에서 k 의 값의 범위는

$$-\frac{1}{2} \leq k \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\text{따라서 } M=2, m=-\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$Mm=-1 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$



채점 기준

i 주어진 직선이 항상 지나는 점의 좌표 구하기	30%
ii k의 값의 범위 구하기	50%
iii Mm의 값 구하기	20%

0221 답 $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

정사각형의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 직선 BD는 선분 AC의 수직이등분선이다. i

직선 AC의 기울기는 $\frac{3-6}{9-3} = -\frac{1}{2}$ 이므로 직선 AC와 수직인 직선 BD의 기울기는 2이다.

선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+9}{2}, \frac{6+3}{2}\right) \therefore \left(6, \frac{9}{2}\right)$$

즉, 직선 BD의 방정식은

$$y - \frac{9}{2} = 2(x - 6) \therefore 4x - 2y - 15 = 0 \quad \dots \text{ii}$$

따라서 원점 O와 직선 BD 사이의 거리는

$$\frac{|-15|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \quad \dots \text{iii}$$

채점 기준

i 직선 BD가 선분 AC의 수직이등분선임을 알기	30%
ii 직선 BD의 방정식 구하기	40%
iii 원점 O와 직선 BD 사이의 거리 구하기	30%

C 실력 향상

39쪽

0222 답 ④

$\triangle ADE$ 와 $\triangle ABC$ 에서

$$\angle ADE = \angle ABC, \angle AED = \angle ACB (\because \text{㉞})$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC \text{ (AA 닮음)}$$

이때 ㉞에서 $\triangle ADE$ 와 $\triangle ABC$ 의 닮음비가 1 : 3이므로

$$\overline{AE} : \overline{AC} = 1 : 3 \therefore \overline{AE} : \overline{EC} = 1 : 2$$

따라서 점 E는 $\overline{AC}$ 를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$E\left(\frac{1 \times 6 + 2 \times 3}{1+2}, \frac{1 \times (-1) + 2 \times 5}{1+2}\right) \therefore E(4, 3)$$

두 점 B(0, 1), E(4, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 1 = \frac{3-1}{4}x \therefore y = \frac{1}{2}x + 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

중2 다시보기

서로 닮은 두 평면도형의 닮음비가 $m : n$ 이면 넓이의 비는 $m^2 : n^2$ 이다.

0223 답 ①

(㉞), (㉞), (㉞)에서

$$\triangle OAP : \triangle OPB = 1 : 2 \text{ 또는 } \triangle OAP : \triangle OPB = 2 : 1$$

따라서 점 P는 선분 AB를 1 : 2 또는 2 : 1로 내분하는 점이다.

(i) 점 P가 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점일 때

$$P\left(\frac{1 \times 0 + 2 \times 2}{1+2}, \frac{1 \times 6 + 2 \times 0}{1+2}\right) \therefore P\left(\frac{4}{3}, 2\right)$$

직선 l은 원점과 점 $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$ 를 지나므로

직선 l의 기울기는

$$\frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}$$

직선 m은 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OB}$ 의

중점 (0, 3)을 지나므로 두 점 $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$,

(0, 3)을 지나는 직선 m의 기울기는

$$\frac{3-2}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$$

따라서 두 직선 l, m의 기울기의 합은

$$\frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

(ii) 점 P가 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점일 때

$$P\left(\frac{2 \times 0 + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2+1}\right) \therefore P\left(\frac{2}{3}, 4\right)$$

직선 l은 원점과 점 $\left(\frac{2}{3}, 4\right)$ 를 지나므로

직선 l의 기울기는

$$\frac{4}{\frac{2}{3}} = 6$$

직선 m은 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$ 의

중점 (1, 0)을 지나므로 두 점 $\left(\frac{2}{3}, 4\right)$,

(1, 0)을 지나는 직선 m의 기울기는

$$\frac{-4}{1-\frac{2}{3}} = -12$$

따라서 두 직선 l, m의 기울기의 합은

$$6 + (-12) = -6$$

(i), (ii)에서 구하는 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

0224 답 10

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OB}$, $\overline{AC}$ 를 그으면

삼각형 COB에서

$$\overline{CG} : \overline{GO} = \overline{CF} : \overline{FB} = 2 : 1$$

$$\therefore \overline{GF} \parallel \overline{OB}$$

같은 방법으로 삼각형 ABO, OAC, BCA

에서 각각 $\overline{DE} \parallel \overline{OB}$, $\overline{DG} \parallel \overline{AC}$,

$\overline{FE} \parallel \overline{CA}$ 이므로 사각형 DEFG는 평행사변형이다.

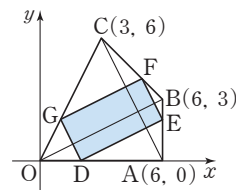
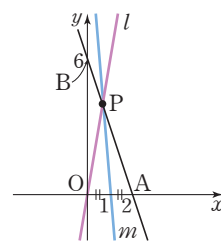
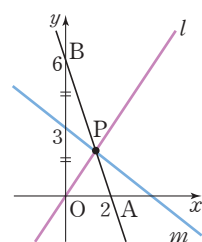
세 점 G, D, E는 각각 $\overline{OC}$, $\overline{OA}$, $\overline{BA}$ 를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$G\left(\frac{1 \times 3 + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times 6 + 2 \times 0}{1+2}\right) \therefore G(1, 2)$$

$$D\left(\frac{1 \times 6 + 2 \times 0}{1+2}, 0\right) \therefore D(2, 0)$$

$$E\left(6, \frac{1 \times 0 + 2 \times 3}{1+2}\right) \therefore E(6, 2)$$

$$\therefore \overline{DE} = \sqrt{(6-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$



직선 DE의 방정식은

$$y = \frac{2}{6-2}(x-2) \quad \therefore x-2y-2=0$$

점 G(1, 2)와 직선 DE 사이의 거리는

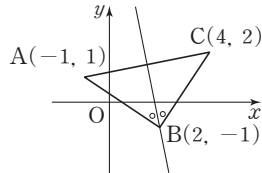
$$\frac{|1-2 \times 2-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \sqrt{5}$$

따라서 사각형 DEFG의 넓이는

$$2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 10$$

0225 답 $5x+y-9=0$

삼각형의 내심은 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이므로 점 B와 삼각형 ABC의 내심을 지나는 직선은 오른쪽 그림과 같이 $\angle B$ 의 이등분선과 같다.



직선 AB의 방정식은

$$y-1 = \frac{-1-1}{2+1}(x+1)$$

$$\therefore 2x+3y-1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 BC의 방정식은

$$y+1 = \frac{2+1}{4-2}(x-2)$$

$$\therefore 3x-2y-8=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 두 직선 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을

P(x, y)라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2x+3y-1|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{|3x-2y-8|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}$$

$$|2x+3y-1| = |3x-2y-8|$$

$$2x+3y-1 = \pm(3x-2y-8)$$

$$\therefore x-5y-7=0 \text{ 또는 } 5x+y-9=0$$

그런데 $\angle B$ 의 이등분선의 기울기는 음수이어야 하므로 구하는 직선의 방정식은

$$5x+y-9=0$$

참고 직선 AB와 직선 BC가 이루는 각의 이등분선은 2개이고, 이때 삼각형 ABC의 내심을 지나는 직선은 기울기가 음수인 직선이다.

다른 풀이

$$\overline{AB} = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{13}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{13}$$

즉, 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이므로 점 B와 삼각형 ABC의 내심을 지나는 직선은 $\overline{AC}$ 의 수직 이등분선이다.

$\overline{AC}$ 의 중점을 D라 하면 직선 AC의 기

울기는 $\frac{2-1}{4+1} = \frac{1}{5}$ 이므로 직선 AC와 수직인 직선 BD의 기울기는 -5 이다.

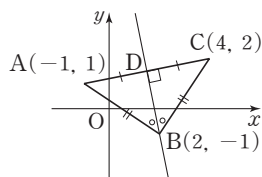
선분 AC의 중점 D의 좌표는

$$\left(\frac{-1+4}{2}, \frac{1+2}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

즉, 구하는 직선의 방정식은

$$y - \frac{3}{2} = -5\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore 5x+y-9=0$$



03 / 원의 방정식

A 개념 확인

40~43쪽

0226 답 (0, 0), $\sqrt{5}$

0227 답 (0, 3), 1

0228 답 (-5, 0), $\sqrt{2}$

0229 답 (2, -1), 3

0230 답 $x^2+y^2=16$

0231 답 $(x+3)^2+(y-1)^2=4$

0232 답 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$$

이 원이 원점을 지나므로

$$(-1)^2+(-2)^2=r^2 \quad \therefore r^2=5$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-2)^2=5$$

0233 답 $x^2+(y-4)^2=25$

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$x^2+(y-4)^2=r^2$$

이 원이 점 (3, 0)을 지나므로

$$3^2+(-4)^2=r^2 \quad \therefore r^2=25$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+(y-4)^2=25$$

0234 답 $(x-5)^2+(y-3)^2=9$

원의 중심의 좌표가 (5, 3), 반지름의 길이가 3이므로 구하는 원의 방정식은

$$(x-5)^2+(y-3)^2=9$$

0235 답 $(x-2)^2+(y+4)^2=4$

원의 중심의 좌표가 (2, -4), 반지름의 길이가 2이므로 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y+4)^2=4$$

0236 답 $(x-3)^2+(y-3)^2=9$

원의 중심의 좌표가 (3, 3), 반지름의 길이가 3이므로 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-3)^2=9$$

0237 답 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$

원의 중심의 좌표가 (-1, 1), 반지름의 길이가 1이므로 구하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-1)^2=1$$

0238 **답** $x^2 + (y+2)^2 = 4$

0239 **답** $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 1$

0240 **답** $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$

0241 **답** $(2, 0), 1$

$$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0 \text{에서}$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 1$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(2, 0)$, 반지름의 길이는 1이다.

0242 **답** $(0, 1), 2$

$$x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + (y-1)^2 = 4$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(0, 1)$, 반지름의 길이는 2이다.

0243 **답** $(3, -4), 5$

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0 \text{에서}$$

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(3, -4)$, 반지름의 길이는 5이다.

0244 **답** $(-1, -2), \sqrt{10}$

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 5 = 0 \text{에서}$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 10$$

따라서 원의 중심의 좌표는 $(-1, -2)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이다.

0245 **답** $k < 8$

$$x^2 + y^2 + 4x - 4y + k = 0 \text{에서}$$

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 8 - k$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$8 - k > 0 \quad \therefore k < 8$$

0246 **답** $k < -2$ 또는 $k > 2$

$$x^2 + y^2 - 2kx - 8y + 20 = 0 \text{에서}$$

$$(x-k)^2 + (y-4)^2 = k^2 - 4$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$k^2 - 4 > 0, k^2 > 4$$

$$\therefore k < -2 \text{ 또는 } k > 2$$

0247 **답** $3x - 4y - 1 = 0$

$$x^2 + y^2 + 4y - (x^2 + y^2 + 3x - 1) = 0$$

$$\therefore 3x - 4y - 1 = 0$$

0248 **답** $x^2 + y^2 + 3x + y = 0$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 1 + k(x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3) = 0 \quad (\text{단, } k \neq -1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

원 $\textcircled{1}$ 이 원점을 지나므로

$$-1 - 3k = 0 \quad \therefore k = -\frac{1}{3}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x^2 + y^2 - 1 - \frac{1}{3}(x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3) = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + 3x + y = 0$$

0249 **답** 서로 다른 두 점에서 만난다.

$$y = x - 1 \text{을 } x^2 + y^2 = 3 \text{에 대입하면}$$

$$x^2 + (x-1)^2 = 3 \quad \therefore x^2 - x - 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-1)^2 - 4 \times (-1) = 5 > 0$$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

0250 **답** 만나지 않는다.

$$2x + y - 3 = 0, \text{ 즉 } y = -2x + 3 \text{을 } x^2 + y^2 = 1 \text{에 대입하면}$$

$$x^2 + (-2x+3)^2 = 1 \quad \therefore 5x^2 - 12x + 8 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-6)^2 - 5 \times 8 = -4 < 0$$

따라서 원과 직선은 만나지 않는다.

0251 **답** 한 점에서 만난다(접한다).

$$x + y - 2 = 0, \text{ 즉 } y = -x + 2 \text{를 } x^2 + y^2 = 2 \text{에 대입하면}$$

$$x^2 + (-x+2)^2 = 2 \quad \therefore x^2 - 2x + 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 1 = 0$$

따라서 원과 직선은 한 점에서 만난다(접한다).

0252 **답** 만나지 않는다.

원의 중심 $(1, -3)$ 과 직선 $y = -x$, 즉 $x + y = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이는 1이고, $\sqrt{2} > 1$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

0253 **답** 한 점에서 만난다(접한다).

원의 중심 $(0, 2)$ 와 직선 $3x + 4y + 2 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|8+2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2$$

이때 원의 반지름의 길이는 2이므로 원과 직선은 한 점에서 만난다(접한다).

0254 **답** 서로 다른 두 점에서 만난다.

$$x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0 \text{에서 } (x+1)^2 + y^2 = 9$$

원의 중심 $(-1, 0)$ 과 직선 $x + 2y - 4 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1-4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \sqrt{5}$$

이때 원의 반지름의 길이는 3이고, $\sqrt{5} < 3$ 이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

0255 **답** 2

$$y = 2x + 3 \text{을 } x^2 + y^2 = 5 \text{에 대입하면}$$

$$x^2 + (2x+3)^2 = 5 \quad \therefore 5x^2 + 12x + 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 6^2 - 5 \times 4 = 16 > 0$$

따라서 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만나므로 교점의 개수는 2이다.

0256 [답] 1

원의 중심 $(-1, -1)$ 과 직선 $x-y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1+1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로 원과 직선은 한 점에서 만난다.
따라서 교점의 개수는 1이다.

0257 [답] (1) $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

(2) $k=\pm\sqrt{2}$

(3) $k<-\sqrt{2}$ 또는 $k>\sqrt{2}$

$x-y+k=0$, 즉 $y=x+k$ 를 $x^2+y^2=1$ 에 대입하면

$$x^2+(x+k)^2=1 \quad \therefore 2x^2+2kx+k^2-1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-1)=-k^2+2$$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D>0$ 이어야 하므로

$$-k^2+2>0, k^2<2 \quad \therefore -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$$

(2) 한 점에서 만나려면 $D=0$ 이어야 하므로

$$-k^2+2=0, k^2=2 \quad \therefore k=\pm\sqrt{2}$$

(3) 만나지 않으려면 $D<0$ 이어야 하므로

$$-k^2+2<0, k^2>2 \quad \therefore k<-\sqrt{2} \text{ 또는 } k>\sqrt{2}$$

0258 [답] $y=x\pm2\sqrt{2}$

$$y=x\pm2\sqrt{1^2+1} \quad \therefore y=x\pm2\sqrt{2}$$

0259 [답] $y=\sqrt{3}x\pm2$

$$y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{(\sqrt{3})^2+1} \quad \therefore y=\sqrt{3}x\pm2$$

0260 [답] $y=-2x\pm5$

$$y=-2x\pm\sqrt{5\times\sqrt{(-2)^2+1}} \quad \therefore y=-2x\pm5$$

0261 [답] $y=2\sqrt{2}x\pm9$

$$y=2\sqrt{2}x\pm3\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1} \quad \therefore y=2\sqrt{2}x\pm9$$

0262 [답] $x-y+2=0$

$$-x+y=2 \quad \therefore x-y+2=0$$

0263 [답] $2x-3y-13=0$

$$2x-3y=13 \quad \therefore 2x-3y-13=0$$

0264 [답] $3x+4y-25=0$

$$3x+4y=25 \quad \therefore 3x+4y-25=0$$

0265 [답] $3x+y+10=0$

$$-3x-y=10 \quad \therefore 3x+y+10=0$$

0266 [답] (1) $x_1x+y_1y=5$

(2) $x_1=-2, y_1=1$ 또는 $x_1=2, y_1=1$

(3) $2x-y+5=0, 2x+y-5=0$

(1) 접점의 좌표가 (x_1, y_1) 이므로 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(2) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(0, 5)$ 를 지나므로

$$5y_1=5 \quad \therefore y_1=1$$

접점 (x_1, y_1) , 즉 $(x_1, 1)$ 은 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

$$x_1^2+1=5, x_1^2=4 \quad \therefore x_1=\pm2$$

$$\therefore x_1=-2, y_1=1 \text{ 또는 } x_1=2, y_1=1$$

(3) $x_1=-2, y_1=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-2x+y=5 \quad \therefore 2x-y+5=0$$

$x_1=2, y_1=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2x+y=5 \quad \therefore 2x+y-5=0$$

B 유형 완성

44~55쪽

0267 [답] ⑤

원 $(x+3)^2+(y-5)^2=12$ 의 중심의 좌표가 $(-3, 5)$ 이므로 원의

반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x+3)^2+(y-5)^2=r^2$$

이 원이 점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$3^2+(-1-5)^2=r^2 \quad \therefore r^2=45$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi r^2=\pi \times 45=45\pi$$

0268 [답] -1

중심의 좌표가 $(-1, 2)$ 이고 반지름의 길이가 3이므로 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-2)^2=9$$

이 원이 점 $(a, 5)$ 를 지나므로

$$(a+1)^2+(5-2)^2=9$$

$$(a+1)^2=0 \quad \therefore a=-1$$

0269 [답] ④

선분 AB를 3:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3\times1+2\times(-4)}{3+2}, \frac{3\times(-2)+2\times3}{3+2}\right) \quad \therefore (-1, 0)$$

즉, 원의 중심의 좌표가 $(-1, 0)$ 이므로 원의 반지름의 길이를 r 라

하면 원의 방정식은

$$(x+1)^2+y^2=r^2$$

이 원이 점 A $(-4, 3)$ 을 지나므로

$$(-4+1)^2+3^2=r^2 \quad \therefore r^2=18$$

$$\therefore (x+1)^2+y^2=18$$

0270 [답] ④

원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{5+3}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) \quad \therefore (4, -1)$$

원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{(3-5)^2+(1+3)^2}=\sqrt{5}$$

즉, 원의 방정식은

$$(x-4)^2+(y+1)^2=5$$

따라서 $a=4, b=-1, c=5$ 이므로

$$a+b+c=8$$

0271 답 10π

$4x+3y-24=0$ 에서 $y=0$ 일 때 $x=6$, $x=0$ 일 때 $y=8$ 이므로

A(6, 0), B(0, 8) ①

두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 지름의 길이는

$$AB=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10 \quad \text{..... ②}$$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는 10π 이다. ③

채점 기준

① 두 점 A, B의 좌표 구하기	40 %
② 원의 지름의 길이 구하기	50 %
③ 원의 둘레의 길이 구하기	10 %

0272 답 ④

원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3-1}{2}\right) \quad \therefore (2, 1)$$

원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\sqrt{(5+1)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{13}$$

즉, 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-1)^2=13$$

$x=0$ 을 대입하면

$$(-2)^2+(y-1)^2=13$$

$$(y-1)^2=9, y-1=\pm 3$$

$$\therefore y=-2 \text{ 또는 } y=4$$

따라서 y 축과 만나는 두 점 P, Q의 좌표는 (0, -2), (0, 4)이므로

$$PQ=|4-(-2)|=6$$

0273 답 ⑤

원의 중심의 좌표를 (a, 0), 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+y^2=r^2 \quad \text{..... ①}$$

원 ㉠이 점 (2, 3)을 지나므로

$$(2-a)^2+9=r^2 \quad \therefore a^2-4a+13=r^2 \quad \text{..... ②}$$

원 ㉡이 점 (-5, 4)를 지나므로

$$(-5-a)^2+16=r^2 \quad \therefore a^2+10a+41=r^2 \quad \text{..... ③}$$

②, ③을 연립하여 풀면 $a=-2$, $r^2=25$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2+y^2=25$$

0274 답 2

원의 중심의 좌표를 (k, k)라 하면 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원의 방정식은

$$(x-k)^2+(y-k)^2=2$$

이 원이 원점을 지나므로

$$(-k)^2+(-k)^2=2, k^2=1 \quad \therefore k=\pm 1$$

(i) $k=1$ 일 때

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2 \quad \therefore a=1, b=1, c=2$$

(ii) $k=-1$ 일 때

$$(x+1)^2+(y+1)^2=2 \quad \therefore a=-1, b=-1, c=2$$

(i), (ii)에서 $abc=2$

0275 답 ⑤

원의 중심의 좌표를 (a, a-2), 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a+2)^2=r^2 \quad \text{..... ①}$$

원 ㉠이 점 (1, 2)를 지나므로

$$(1-a)^2+(2-a+2)^2=r^2 \quad \therefore 2a^2-10a+17=r^2 \quad \text{..... ②}$$

원 ㉡이 점 (3, -2)를 지나므로

$$(3-a)^2+(-2-a+2)^2=r^2 \quad \therefore 2a^2-6a+9=r^2 \quad \text{..... ③}$$

②, ③을 연립하여 풀면 $a=2$, $r^2=5$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi r^2=\pi \times 5=5\pi$$

0276 답 1

$x^2+y^2+2x-8y+13=0$ 에서

$$(x+1)^2+(y-4)^2=4$$

이 원의 중심의 좌표는 (-1, 4), 반지름의 길이는 2이므로

$$a=-1, b=4, r=2$$

$$\therefore a+b-r=1$$

0277 답 4

$x^2+y^2+6x-2y+2k-1=0$ 에서

$$(x+3)^2+(y-1)^2=-2k+11 \quad \text{..... ①}$$

이 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 이므로

$$-2k+11=3 \quad \therefore k=4 \quad \text{..... ②}$$

채점 기준

① 식 변형하기	50 %
② k 의 값 구하기	50 %

0278 답 ②

$$y=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$$

이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$$(2, a-4) \quad \text{..... ①}$$

$x^2+y^2+bx+4y-17=0$ 에서

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{b^2}{4}+21$$

이 원의 중심의 좌표는 $\left(-\frac{b}{2}, -2\right)$ ②

①, ②이 일치하므로

$$2=-\frac{b}{2}, a-4=-2 \quad \therefore a=2, b=-4$$

$$\therefore a+b=-2$$

0279 답 $2x-3y+7=0$

$$x^2+y^2+4x-2y-4=0 \text{에서 } (x+2)^2+(y-1)^2=9$$

$$x^2+y^2-2x-6y+6=0 \text{에서 } (x-1)^2+(y-3)^2=4$$

두 원의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 두 원의 중심인 두 점

(-2, 1), (1, 3)을 지나야 하므로 그 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{3-1}{1+2}(x+2) \quad \therefore 2x-3y+7=0$$

0280 [답] ③

$x^2+y^2-4x+4ky+5k^2-5k+4=0$ 에서
 $(x-2)^2+(y+2k)^2=-k^2+5k$
 이 방정식이 원을 나타내려면
 $-k^2+5k>0$
 $k^2-5k<0, k(k-5)<0$
 $\therefore 0<k<5$
 따라서 정수 k 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

0281 [답] $-3 \leq k < -2$ 또는 $0 < k \leq 1$

$x^2+y^2-2ky-2k^2-6k=0$ 에서
 $x^2+(y-k)^2=3k^2+6k$ ①
 이 방정식이 반지름의 길이가 3 이하인 원을 나타내려면
 $0 < \sqrt{3k^2+6k} \leq 3 \quad \therefore 0 < 3k^2+6k \leq 9$ ②
 $3k^2+6k > 0$ 에서 $k(k+2) > 0$
 $\therefore k < -2$ 또는 $k > 0$ ③
 $3k^2+6k \leq 9$ 에서 $k^2+2k-3 \leq 0$
 $(k+3)(k-1) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq k \leq 1$ ④
 ③, ④의 공통부분을 구하면
 $-3 \leq k < -2$ 또는 $0 < k \leq 1$ ⑤

채점 기준

① 식 변형하기	20 %
② k 에 대한 부등식 세우기	30 %
③ k 의 값의 범위 구하기	50 %

0282 [답] ③

$x^2+y^2-6kx+2ky+11k^2-2k-3=0$ 에서
 $(x-3k)^2+(y+k)^2=-k^2+2k+3$
 이 방정식이 원을 나타내려면
 $-k^2+2k+3 > 0$
 $k^2-2k-3 < 0, (k+1)(k-3) < 0$
 $\therefore -1 < k < 3$
 원의 넓이가 최대하려면 반지름의 길이 $\sqrt{-k^2+2k+3}$ 이 최대이어야 한다.
 $\sqrt{-k^2+2k+3} = \sqrt{-(k-1)^2+4}$ 이므로 $-1 < k < 3$ 에서 $k=1$ 일 때 반지름의 길이는 최대이고, 그때의 반지름의 길이는 $\sqrt{4}=2$ 이다.

0283 [답] $x^2+y^2+x-3y=0$

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 으로 놓으면 이 원이 원점을 지나므로 $C=0$
 $\therefore x^2+y^2+Ax+By=0$ ①
 원 ①이 점 (1, 2)를 지나므로
 $1+4+A+2B=0 \quad \therefore A+2B=-5$ ②
 원 ①이 점 (-1, 3)을 지나므로
 $1+9-A+3B=0 \quad \therefore A-3B=10$ ③
 ②, ③을 연립하여 풀면
 $A=1, B=-3$
 따라서 구하는 원의 방정식은
 $x^2+y^2+x-3y=0$

0284 [답] 4

원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 으로 놓으면 이 원이 점 (0, 0)을 지나므로 $C=0$
 $\therefore x^2+y^2+Ax+By=0$ ①
 원 ①이 점 (-2, 4)를 지나므로
 $4+16-2A+4B=0 \quad \therefore A-2B=10$ ②
 원 ①이 점 (2, 6)을 지나므로
 $4+36+2A+6B=0 \quad \therefore A+3B=-20$ ③
 ②, ③을 연립하여 풀면
 $A=-2, B=-6$
 $\therefore x^2+y^2-2x-6y=0$
 이 원이 점 (p, 2)를 지나므로
 $p^2+4-2p-12=0$
 $p^2-2p-8=0, (p+2)(p-4)=0$
 $\therefore p=-2$ 또는 $p=4$
 그런데 $p>0$ 이므로 $p=4$

0285 [답] 25π

원의 중심을 P(a, b)라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$
 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로
 $(a+3)^2+(b-1)^2=(a+2)^2+(b+6)^2$
 $\therefore a-7b=15$ ①
 $\overline{AP}=\overline{CP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$ 이므로
 $(a+3)^2+(b-1)^2=(a-1)^2+(b-3)^2$
 $\therefore 2a+b=0$ ②
 ①, ②을 연립하여 풀면
 $a=1, b=-2$
 즉, P(1, -2)이므로 원의 반지름의 길이는
 $\overline{AP}=\sqrt{(1+3)^2+(-2-1)^2}=5$
 따라서 구하는 원의 넓이는
 $\pi \times 5^2=25\pi$

0286 [답] ②

$x+3y=0$ ①
 $2x+y=0$ ②
 $x-2y+5=0$ ③
 두 직선 ①, ②의 교점의 좌표는 (0, 0), 두 직선 ①, ③의 교점의 좌표는 (-3, 1), 두 직선 ②, ③의 교점의 좌표는 (-1, 2)이다.
 외접원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 으로 놓으면 이 원이 점 (0, 0)을 지나므로 $C=0$
 $\therefore x^2+y^2+Ax+By=0$ ④
 원 ④이 점 (-3, 1)을 지나므로
 $9+1-3A+B=0 \quad \therefore 3A-B=10$ ⑤
 원 ④이 점 (-1, 2)를 지나므로
 $1+4-A+2B=0 \quad \therefore A-2B=5$ ⑥
 ⑤, ⑥을 연립하여 풀면
 $A=3, B=-1$
 따라서 구하는 외접원의 방정식은
 $x^2+y^2+3x-y=0$

0287 답 ①

원의 중심의 좌표를 $(a, a+3)$ 이라 하면 x 축에 접하는 원의 방정식은 $(x-a)^2 + (y-a-3)^2 = (a+3)^2$

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$(1-a)^2 + (2-a-3)^2 = (a+3)^2$$

$$a^2 - 6a - 7 = 0, (a+1)(a-7) = 0 \quad \therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 7$$

따라서 두 원의 반지름의 길이는 각각 $|-1+3|=2, |7+3|=10$

이므로 두 원의 넓이의 합은

$$\pi \times 2^2 + \pi \times 10^2 = 104\pi$$

0288 답 1

원의 중심의 좌표를 (a, b) 라 하면 y 축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 $\textcircled{1}$ 이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$a^2 + (2-b)^2 = a^2, (2-b)^2 = 0 \quad \therefore b = 2$$

원 $\textcircled{1}$ 이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$(1-a)^2 + (3-b)^2 = a^2$$

$$(1-a)^2 + (3-2)^2 = a^2, -2a+2=0 \quad \therefore a = 1$$

따라서 구하는 반지름의 길이는 1이다.

0289 답 $\frac{3}{2}$

$$x^2 + y^2 + 4kx - 4y + 9 = 0 \text{에서}$$

$$(x+2k)^2 + (y-2)^2 = 4k^2 - 5 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

원 $\textcircled{i}$ 의 중심의 좌표는 $(-2k, 2)$ 이고, 이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$$-2k < 0 \quad \therefore k > 0 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

원 $\textcircled{i}$ 이 x 축에 접하므로

$$\sqrt{4k^2 - 5} = |2|$$

양변을 제곱하면

$$4k^2 - 5 = 4, k^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore k = \pm \frac{3}{2}$$

그런데 $k > 0$ 이므로 상수 k 의 값은 $\frac{3}{2}$ 이다. $\dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① 식 변형하기	20%
② k 의 부호 구하기	30%
③ k 의 값 구하기	50%

0290 답 ②

$$x^2 + y^2 - 2ax - 4y - b + 2 = 0 \text{에서}$$

$$(x-a)^2 + (y-2)^2 = a^2 + b + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 $\textcircled{1}$ 이 y 축에 접하므로

$$\sqrt{a^2 + b + 2} = |a|$$

양변을 제곱하면

$$a^2 + b + 2 = a^2 \quad \therefore b = -2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$(x-a)^2 + (y-2)^2 = a^2$$

이 원이 점 $(6, 2)$ 를 지나므로

$$(6-a)^2 + (2-2)^2 = a^2, -12a+36=0 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

0291 답 $4\sqrt{2}$

점 $(-1, 2)$ 를 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하므로 원의 중심이 제2사분면 위에 있어야 한다.

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심의 좌표는 $(-r, r)$ 이므로 원의 방정식은

$$(x+r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$(-1+r)^2 + (2-r)^2 = r^2$$

$$r^2 - 6r + 5 = 0, (r-1)(r-5) = 0$$

$$\therefore r = 1 \text{ 또는 } r = 5$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(-1, 1), (-5, 5)$ 이므로 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(-5+1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{2}$$

0292 답 ③

원의 중심이 제4사분면 위에 있고 x 축과 y 축에 동시에 접하므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심의 좌표는 $(r, -r)$ 이다.

이때 원의 중심이 직선 $3x+y-4=0$ 위에 있으므로

$$3r - r - 4 = 0 \quad \therefore r = 2$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times 2^2 = 4\pi$$

0293 답 6

$$x^2 + y^2 + 6x + 2ay + 6 - b = 0 \text{에서}$$

$$(x+3)^2 + (y+a)^2 = a^2 + b + 3$$

이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하므로

$$\sqrt{a^2 + b + 3} = |-3| = |-a| \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$|-3| = |-a| \text{에서 } a = \pm 3$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 3$

$$\sqrt{a^2 + b + 3} = |-3| \text{에서 양변을 제곱하면}$$

$$a^2 + b + 3 = 9, 9 + b + 3 = 9 \quad \therefore b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore a - b = 6 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① a, b 에 대한 식 세우기	50%
② a, b 의 값 구하기	40%
③ $a - b$ 의 값 구하기	10%

0294 답 1

원의 중심이 제2사분면에 있고 x 축과 y 축에 동시에 접하므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심의 좌표는 $(-r, r)$ 이다.

즉, 원의 방정식은 $(x+r)^2 + (y-r)^2 = r^2$

$$\therefore x^2 + y^2 + 2rx - 2ry + r^2 = 0$$

이때 원의 중심이 곡선 $y = x^2 - x - 1$ 위에 있으므로

$$r = (-r)^2 - (-r) - 1, r^2 = 1 \quad \therefore r = \pm 1$$

그런데 $r > 0$ 이므로 $r = 1$

따라서 원의 방정식은 $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

$$\therefore a = 2, b = -2, c = 1$$

$$\therefore a + b + c = 1$$

참고 (원의 반지름의 길이) > 0 이므로 $r > 0$ 이다.

다른 풀이

원의 중심의 좌표를 (k, k^2-k-1) ($k < 0$)이라 하면 이 점이 제2사분면에 있고 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하므로
 $-k = k^2 - k - 1, k^2 = 1 \quad \therefore k = -1$ ($\because k < 0$)

이 원의 반지름의 길이는 $|k| = |-1| = 1$

따라서 중심의 좌표가 $(-1, 1)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$\therefore x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$$

따라서 $a=2, b=-2, c=1$ 이므로

$$a+b+c=1$$

0295 답 ⑤

$$x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 \text{에서 } (x-1)^2 + y^2 = 2$$

점 $A(-2, 3)$ 과 원의 중심 $(1, 0)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(1+2)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로

$$M = 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2}, m = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore Mm = 16$$

0296 답 ①

점 $A(4, 3)$ 과 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

원의 반지름의 길이가 4이므로 선분 AP 의 길이의 최솟값은

$$5 - 4 = 1$$

0297 답 169

$A(6, 8)$ 이라 하면

$$(a-6)^2 + (b-8)^2 = \overline{AP}^2$$

이때 $\overline{AP}$ 의 길이가 최대일 때 $\overline{AP}^2$ 의 값도 최대이다.

점 $A(6, 8)$ 과 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

원의 반지름의 길이가 3이므로 $\overline{AP}$ 의 길이의 최댓값은

$$10 + 3 = 13$$

따라서 $\overline{AP}^2$ 의 최댓값은 $13^2 = 169$ 이므로 구하는 최댓값은 169이다.

0298 답 ②

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2 \text{이므로}$$

$$2\overline{AP} = \overline{BP} \quad \therefore 4\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

따라서 $P(x, y)$ 라 하면 점 P 가 나타내는 도형의 방정식은

$$4\{(x-3)^2 + (y-2)^2\} = (x-6)^2 + (y+1)^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5 = 0$$

0299 답 ③

$P(x, y)$ 라 하면 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 26$ 에서

$$(x+1)^2 + y^2 + (x-3)^2 + y^2 = 26$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0 \quad \therefore (x-1)^2 + y^2 = 9$$

따라서 점 P 가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(1, 0)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$$2\pi \times 3 = 6\pi$$

0300 답 $x^2 + y^2 - y - 6 = 0$

$P(a, b)$ 라 하면

$$a^2 + b^2 + 4a - 6b - 12 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 선분 AP 의 중점을 $Q(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{a+2}{2}, y = \frac{b-2}{2}$$

$$\therefore a = 2x - 2, b = 2y + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면 점 Q 가 나타내는 도형의 방정식은

$$(2x-2)^2 + (2y+2)^2 + 4(2x-2) - 6(2y+2) - 12 = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - y - 6 = 0$$

0301 답 ③

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4 - (x^2 + y^2 - 2x + 6y + 7) = 0$$

$$\therefore 2x - 6y - 11 = 0$$

따라서 $a = -6, b = -11$ 이므로

$$a - b = 5$$

0302 답 ⑤

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 6x - y + 4 - (x^2 + y^2 + ax - 2y + 1) = 0$$

$$(6-a)x + y + 3 = 0 \quad \therefore y = (a-6)x - 3$$

이 직선의 기울기가 -2 이므로

$$a - 6 = -2 \quad \therefore a = 4$$

0303 답 ④

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 + ax - 4y + 3 - (x^2 + y^2 - ax - 8y + 7) = 0$$

$$\therefore ax + 2y - 2 = 0$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$a - 2 = 0 \quad \therefore a = 2$$

0304 답 4

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 13 \text{에서 } x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8 = 0$$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 16 - (x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8) = 0$$

$$\therefore 2x - y - 4 = 0$$

..... ①

이 직선의 x 절편은 2, y 절편은 -4 이므로

$$A(2, 0), B(0, -4)$$

..... ②

따라서 삼각형 OAB 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

..... ③

채점 기준

① 직선의 방정식 구하기	40 %
② 두 점 A, B의 좌표 구하기	30 %
③ 삼각형 OAB의 넓이 구하기	30 %

0305 답 ④

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2 + k(x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2) = 0 \text{ (단, } k \neq -1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

원 ①이 원점을 지나므로

$$-2 + 2k = 0 \quad \therefore k = 1$$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x^2 + y^2 - x + 2y = 0$$

따라서 $a = -1$, $b = 2$ 이므로

$$a + b = 1$$

0306 답 $x^2 + y^2 - x + 5y - 6 = 0$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2ax - 5 + k(x^2 + y^2 - 6x + 10y - 7) = 0 \quad (\text{단, } k \neq -1)$$

..... ㉠

원 ㉠이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$-4 + 4k = 0 \quad \therefore k = 1$$

원 ㉠이 점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$-2a - 3 - k = 0, \quad -2a - 3 - 1 = 0 \quad \therefore a = -2$$

$a = -2$, $k = 1$ 을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x^2 + y^2 - x + 5y - 6 = 0$$

0307 답 ㉢

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4 + k(x^2 + y^2 + ax - 2y - 2) = 0 \quad (\text{단, } k \neq -1) \quad \text{..... ㉠}$$

원 ㉠이 원점을 지나므로

$$-4 - 2k = 0 \quad \therefore k = -2$$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x^2 + y^2 + 2ax - 4y = 0 \quad \therefore (x + a)^2 + (y - 2)^2 = a^2 + 4$$

이 원의 넓이가 20π 이므로

$$\pi(a^2 + 4) = 20\pi$$

$$a^2 + 4 = 20, \quad a^2 = 16 \quad \therefore a = \pm 4$$

따라서 양수 a 의 값은 4이다.

0308 답 ㉢

원의 중심 $(1, 2)$ 와 직선 $x - 2y + n = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1 - 4 + n|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|n - 3|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|n - 3|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5}, \quad |n - 3| < 5$$

$$-5 < n - 3 < 5 \quad \therefore -2 < n < 8$$

따라서 정수 n 은 $-1, 0, 1, \dots, 7$ 의 9개이다.

다른 풀이

$x = 2y - n$ 을 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ 에 대입하면

$$(2y - n - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

$$\therefore 5y^2 - 4(n + 2)y + n^2 + 2n = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$\frac{D}{4} = 4(n + 2)^2 - 5(n^2 + 2n) > 0$$

$$n^2 - 6n - 16 < 0, \quad (n + 2)(n - 8) < 0$$

$$\therefore -2 < n < 8$$

따라서 정수 n 은 $-1, 0, 1, \dots, 7$ 의 9개이다.

참고 원의 중심이 원점이 아닌 경우에는 판별식을 이용하는 것보다 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하는 것이 계산이 더 편리하다.

0309 답 $-2\sqrt{3} < k < 2\sqrt{3}$

$y = x + k$ 를 $x^2 + y^2 = 6$ 에 대입하면

$$x^2 + (x + k)^2 = 6 \quad \therefore 2x^2 + 2kx + k^2 - 6 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - 2(k^2 - 6) > 0$$

$$-k^2 + 12 > 0, \quad k^2 < 12 \quad \therefore -2\sqrt{3} < k < 2\sqrt{3}$$

0310 답 8

원의 중심을 $C(k, 0)$ 이라 하면 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로

$$(k - 4)^2 + (-3)^2 = (k + 1)^2 + (-2)^2$$

$$-10k = -20 \quad \therefore k = 2$$

즉, 원의 중심의 좌표가 $(2, 0)$ 이므로 반지름의 길이는

$$\overline{AC} = \sqrt{(2 - 4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \quad \text{..... i}$$

원의 중심 $(2, 0)$ 과 직선 $2x + 3y + a = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4 + a|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{|a + 4|}{\sqrt{13}}$$

따라서 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|a + 4|}{\sqrt{13}} < \sqrt{13}, \quad |a + 4| < 13$$

$$-13 < a + 4 < 13 \quad \therefore -17 < a < 9 \quad \text{..... ii}$$

$$\text{따라서 정수 } a \text{의 최댓값은 8이다.} \quad \text{..... iii}$$

채점 기준

i 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이 구하기	40 %
ii a 의 값의 범위 구하기	50 %
iii 정수 a 의 최댓값 구하기	10 %

0311 답 12

원의 중심 $(1, 3)$ 과 직선 $y = -3x + k$, 즉 $3x + y - k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 + 3 - k|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|k - 6|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|k - 6|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}, \quad |k - 6| = 10$$

$$k - 6 = \pm 10 \quad \therefore k = -4 \text{ 또는 } k = 16$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-4 + 16 = 12$$

다른 풀이

$y = -3x + k$ 를 $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$ 에 대입하면

$$(x - 1)^2 + (-3x + k - 3)^2 = 10$$

$$\therefore 10x^2 - 2(3k - 8)x + k^2 - 6k = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 접하므로

$$\frac{D}{4} = (3k - 8)^2 - 10(k^2 - 6k) = 0$$

$$k^2 - 12k - 64 = 0, \quad (k + 4)(k - 16) = 0$$

$$\therefore k = -4 \text{ 또는 } k = 16$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-4 + 16 = 12$$

0312 답 9

원의 중심 (0, 0)과 직선 $\sqrt{3}x+y-6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-6|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=3$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{a}$ 이므로 원과 직선이 한 점에서 만나려면 $3=\sqrt{a} \quad \therefore a=9$

0313 답 $\frac{1}{6}$

원의 중심이 제1사분면 위에 있고 x 축과 y 축에 동시에 접하므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심의 좌표는 (r, r) 이다.

이때 원과 직선 $3x-4y+1=0$ 이 접하려면

$$\frac{|3r-4r+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=r, \quad |r-1|=5r$$

$$r-1=\pm 5r \quad \therefore r=-\frac{1}{4} \text{ 또는 } r=\frac{1}{6}$$

그런데 $r>0$ 이므로 $r=\frac{1}{6}$

0314 답 ④

두 점 $(-3, 0)$, $(1, 0)$ 을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-3+1}{2}, 0\right) \quad \therefore (-1, 0)$$

원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \times |1-(-3)|=2$$

원과 직선 $kx+y-2=0$ 이 오직 한 점에서 만나려면

$$\frac{|-k-2|}{\sqrt{k^2+1^2}}=2, \quad |k+2|=2\sqrt{k^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$k^2+4k+4=4k^2+4, \quad 3k^2-4k=0$$

$$k(3k-4)=0 \quad \therefore k=0 \text{ 또는 } k=\frac{4}{3}$$

따라서 양수 k 의 값은 $\frac{4}{3}$ 이다.

0315 답 ④

원의 중심 $(2, 0)$ 과 직선 $y=x+n$, 즉 $x-y+n=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|n+2|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$ 이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|n+2|}{\sqrt{2}}>3\sqrt{2}, \quad |n+2|>6$$

$$n+2<-6 \text{ 또는 } n+2>6 \quad \therefore n<-8 \text{ 또는 } n>4$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 5이다.

다른 풀이

$y=x+n$ 을 $(x-2)^2+y^2=18$ 에 대입하면

$$(x-2)^2+(x+n)^2=18$$

$$\therefore 2x^2+2(n-2)x+n^2-14=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$$\frac{D}{4}=(n-2)^2-2(n^2-14)<0$$

$$n^2+4n-32>0, \quad (n+8)(n-4)>0 \quad \therefore n<-8 \text{ 또는 } n>4$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 5이다.

0316 답 ②

원의 중심의 좌표는 $(0, 0)$, 반지름의 길이는 2이다.

① 점 $(0, 0)$ 과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=0<2 \text{이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.}$$

② 점 $(0, 0)$ 과 직선 $y=2x-5$, 즉 $2x-y-5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}>2 \text{이므로 원과 직선은 만나지 않는다.}$$

③ 점 $(0, 0)$ 과 직선 $y=2x+1$, 즉 $2x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}<2 \text{이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.}$$

④ 점 $(0, 0)$ 과 직선 $y=3x+5$, 즉 $3x-y+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}<2 \text{이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.}$$

⑤ 점 $(0, 0)$ 과 직선 $y=4x-1$, 즉 $4x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{17}}{17}<2 \text{이므로 원과 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.}$$

따라서 원 $x^2+y^2=4$ 와 만나지 않는 직선은 ②이다.

0317 답 $-\frac{3}{2}$

원의 중심 $(k, 0)$ 과 직선 $4x+y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4k+3|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\frac{|4k+3|}{\sqrt{17}} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{17}$ 이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|4k+3|}{\sqrt{17}}>\sqrt{17}, \quad |4k+3|>17$$

$$4k+3<-17 \text{ 또는 } 4k+3>17$$

$$\therefore k<-5 \text{ 또는 } k>\frac{7}{2} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 $\alpha=-5, \beta=\frac{7}{2}$ 이므로

$$\alpha+\beta=-\frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 원의 중심과 직선 사이의 거리를 k 에 대한 식으로 나타내기	30 %
② k 의 값의 범위 구하기	50 %
③ $\alpha+\beta$ 의 값 구하기	20 %

0318 답 ③

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(3, 2)$

라 하고, 점 C 에서 직선 $4x+3y-3=0$ 에

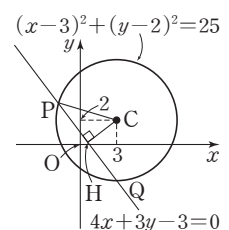
내린 수선의 발을 H 라 하면

$$CH=\frac{|12+6-3|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3$$

직각삼각형 CPH 에서 $\overline{CP}$ 의 길이는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{PH}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

$$\therefore \overline{PQ}=2\overline{PH}=8$$



0319 답 6

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 8 = 0 \text{에서 } (x-3)^2 + (y-1)^2 = 18$$

오른쪽 그림과 같이 원과 y 축의 두 교점을 A, B라 하면 원과 y 축이 만나서 생기는 현은 $\overline{AB}$ 이다.

원의 중심을 C(3, 1)이라 하고, 점 C에서 y 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{CH}=3$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA}$ 의 길이는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 3^2} = 3$$

따라서 구하는 현의 길이는

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 6$$

다른 풀이

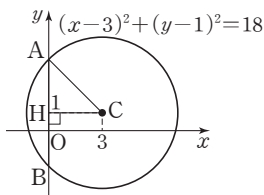
$x=0$ 을 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 18$ 에 대입하면

$$(-3)^2 + (y-1)^2 = 18, (y-1)^2 = 9$$

$$y-1 = \pm 3 \quad \therefore y = -2 \text{ 또는 } y = 4$$

따라서 원이 y 축과 만나는 두 점의 좌표는 (0, -2), (0, 4)이므로 구하는 현의 길이는

$$4 - (-2) = 6$$



0320 답 ①

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + k = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 - k$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C(1, 2)라 하고, 점 C에서 직선 $2x - y + 5 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

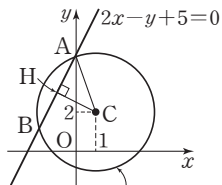
$$\overline{CH} = \frac{|2-2+5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

직각삼각형 CAH에서 $\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 2$ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 - k$

이고, $\overline{AC}$ 의 길이는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2$$

$$(\sqrt{5-k})^2 = 2^2 + (\sqrt{5})^2, 5-k=9 \quad \therefore k=-4$$



0321 답 20

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y - 33 = 0 \text{에서}$$

$$(x-4)^2 + (y-1)^2 = 50$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심 C(4, 1)에서 직선 $3x - y + 9 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH} = \frac{|12-1+9|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{10} \quad \dots \textcircled{i}$$

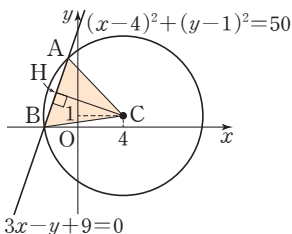
직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA}$ 의 길이는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{(\sqrt{50})^2 - (2\sqrt{10})^2} = \sqrt{10}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{10} \quad \dots \textcircled{ii}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times 2\sqrt{10} = 20 \quad \dots \textcircled{iii}$$



채점 기준

① 점 C와 직선 사이의 거리 구하기	40 %
② $\overline{AB}$ 의 길이 구하기	30 %
③ 삼각형 ABC의 넓이 구하기	30 %

0322 답 ④

오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B라 하면 두 원의 공통인 현은 $\overline{AB}$ 이다.

두 원의 교점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 16$$

$$- (x^2 + y^2 - 2x - 4y - 6) = 0$$

$$\therefore x + 2y - 5 = 0$$

이때 원 $x^2 + y^2 = 16$ 의 중심 O(0, 0)에서 직선 $x + 2y - 5 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

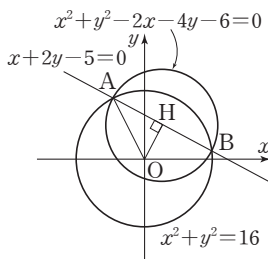
$$\overline{OH} = \frac{|-5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

직각삼각형 AOH에서 $\overline{OA}$ 의 길이는 원 $x^2 + y^2 = 16$ 의 반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{11}$$

따라서 두 원의 공통인 현의 길이는

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\sqrt{11}$$



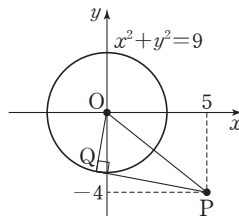
0323 답 ③

점 P(5, -4)와 원의 중심 O(0, 0) 사이의 거리는

$$\overline{OP} = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$$

직각삼각형 OQP에서 $\overline{OQ}$ 의 길이는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OQ}^2} = \sqrt{(\sqrt{41})^2 - 3^2} = 4\sqrt{2}$$



0324 답 5

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + k = 0 \text{에서}$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10 - k \quad \dots \textcircled{i}$$

즉, C(3, 1)이므로

$$\overline{CA} = \sqrt{(-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$$

직각삼각형 ACQ에서 $\overline{CQ}$ 의 길이는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{AQ} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CQ}^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - (\sqrt{10-k})^2} = \sqrt{k} \quad \dots \textcircled{ii}$$

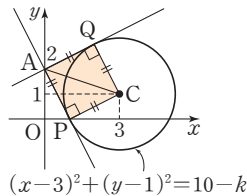
사각형 APCQ가 정사각형이므로

$$\overline{AQ} = \overline{CQ}$$

$$\sqrt{k} = \sqrt{10-k}$$

양변을 제곱하면

$$k = 10 - k \quad \therefore k = 5 \quad \dots \textcircled{iii}$$



채점 기준

i 식 변형하기	20 %
ii 접선의 길이를 k 에 대한 식으로 나타내기	40 %
iii k 의 값 구하기	40 %

0325 답 ⑤

$C(-1, 1)$ 이므로

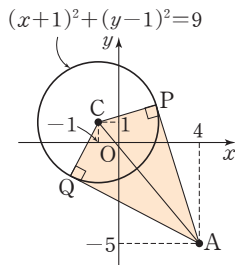
$$\overline{AC} = \sqrt{(-1-4)^2 + (1+5)^2} = \sqrt{61}$$

직각삼각형 APC에서 $\overline{CP}$ 의 길이는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{61})^2 - 3^2} \\ &= 2\sqrt{13}\end{aligned}$$

따라서 사각형 APCQ의 넓이는

$$2\triangle APC = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{13} \times 3 \right) = 6\sqrt{13}$$



0326 답 ②

원의 중심 $(1, -3)$ 과 직선 $2x+y+11=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-3+11|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 2\sqrt{5}$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이므로

$$M = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}, \quad m = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$\therefore Mm = 15$$

0327 답 ③

$$x^2 + y^2 - 10y = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + (y-5)^2 = 25$$

원의 중심 $(0, 5)$ 와 직선 $3x-4y-15=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-20-15|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 7$$

원의 반지름의 길이는 5이므로 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은 $7+5=12$, 최솟값은 $7-5=2$ 이다.

이때 원 위의 점과 직선 사이의 거리 중 자연수인 것은 2, 3, 4, ..., 12의 11개이고, 거리가 2, 12일 때만 점이 1개이고 나머지 거리일 때는 점이 2개씩 있으므로 구하는 점의 개수는

$$1+1+2 \times (11-2) = 20$$

0328 답 22

직선 l 은 오른쪽 그림과 같이 원점과 점 $(3, 4)$ 를 지나는 직선에 수직이어야 한다.

원점과 점 $(3, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{4}{3}x \text{이므로 직선 } l \text{의 기울기는 } -\frac{3}{4} \text{이다.}$$

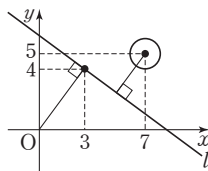
따라서 직선 l 의 방정식은

$$y-4 = -\frac{3}{4}(x-3)$$

$$\therefore 3x+4y-25=0$$

원의 중심 $(7, 5)$ 와 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|21+20-25|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{16}{5}$$



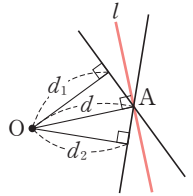
원의 반지름의 길이는 1이므로 원 위의 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값은

$$m = \frac{16}{5} - 1 = \frac{11}{5}$$

$$\therefore 10m = 22$$

만렙 Note

오른쪽 그림에서 $d_1 < d$, $d_2 < d$ 이므로 점 A를 지나는 임의의 직선 l 과 점 O 사이의 거리가 최대일 때는 직선 l 이 $\overline{OA}$ 와 수직일 때이다.



0329 답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 정삼각형 ABC의 높이 $\overline{AH}$ 의 길이가 최대일 때, 삼각형 ABC의 넓이도 최대가 된다.

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y=x+4$, 즉 $x-y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로 점 A와 직선 $y=x+4$ 사이의 거리, 즉 $\overline{AH}$ 의 길이의 최댓값은

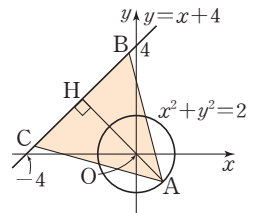
$$2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

이때 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a 라 하면

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a = 3\sqrt{2} \quad \therefore a = 2\sqrt{6}$$

따라서 구하는 넓이의 최댓값은

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{6})^2 = 6\sqrt{3}$$



중3 다시보기

한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 높이를 h , 넓이를 S 라 하면

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

0330 답 ⑤

직선 $2x-y+3=0$, 즉 $y=2x+3$ 에 평행한 직선의 기울기는 2이고 원 $x^2+y^2=9$ 의 반지름의 길이는 3이므로 접선의 방정식은

$$y = 2x \pm 3\sqrt{2^2+1}$$

$$\therefore y = 2x \pm 3\sqrt{5}$$

따라서 $m=2$, $n=\pm 3\sqrt{5}$ 이므로

$$m^2+n^2=4+45=49$$

0331 답 ③

기울기가 1인 접선의 방정식을

$$y=x+k, \text{ 즉 } x-y+k=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

으로 놓으면 원의 중심 $(1, -2)$ 와 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리는

$$\frac{|1+2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|k+3|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로 원과 직선 ㉠이 접하려면

$$\frac{|k+3|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

$$|k+3|=4, k+3=\pm 4$$

$$\therefore k=-7 \text{ 또는 } k=1$$

즉, 두 직선은 $y=x-7$, $y=x+1$ 이므로 x 절편은 각각 7, -1이다.

따라서 구하는 x 절편의 차는

$$7-(-1)=8$$

0332 답 2π

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 인 직선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$ 이므로 기울기가 1이고 점 (3, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=x-3$$

$$\therefore x-y-2=0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

원의 중심 (3, -1)과 직선 $x-y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

따라서 원과 직선이 접하려면 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이어야 하므로 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{2})^2=2\pi \quad \dots\dots \text{㉢}$$

채점 기준

㉠ 접선의 방정식 구하기	40%
㉡ 원의 중심과 접선 사이의 거리 구하기	30%
㉢ 원의 넓이 구하기	30%

0333 답 ④

$$x^2+y^2-2x=0 \text{에서 } (x-1)^2+y^2=1$$

직선 $x+2y+3=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ 에 수직인 직선의 기울기는 2

이므로 기울기가 2인 접선의 방정식을

$$y=2x+k, \text{ 즉 } 2x-y+k=0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

으로 놓으면 원의 중심 (1, 0)과 직선 ㉠ 사이의 거리는

$$\frac{|2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k+2|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이는 1이므로 원과 직선 ㉠이 접하려면

$$\frac{|k+2|}{\sqrt{5}}=1$$

$$|k+2|=\sqrt{5}, k+2=\pm\sqrt{5}$$

$$\therefore k=-2\pm\sqrt{5}$$

따라서 $A(0, -2-\sqrt{5})$, $B(0, -2+\sqrt{5})$ 또는 $A(0, -2+\sqrt{5})$,

$B(0, -2-\sqrt{5})$ 이므로

$$AB=|-2+\sqrt{5}-(-2-\sqrt{5})|=2\sqrt{5}$$

0334 답 ①

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 (2, -4)에서의 접선의 방정식은

$$2x-4y=20 \quad \therefore y=\frac{1}{2}x-5$$

따라서 $m=\frac{1}{2}$, $n=-5$ 이므로

$$4m+n=-3$$

0335 답 -3

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 (a, b)에서의 접선의 방정식은

$$ax+by=10 \quad \therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{10}{b}$$

이 직선의 기울기가 3이므로

$$-\frac{a}{b}=3 \quad \therefore a=-3b \quad \dots\dots \text{㉠}$$

한편 점 (a, b)는 원 $x^2+y^2=10$ 위에 있으므로

$$a^2+b^2=10 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-3, b=1 \text{ 또는 } a=3, b=-1$$

$$\therefore ab=-3$$

0336 답 6

$$x^2+y^2-8x+4y+10=0 \text{에서}$$

$$(x-4)^2+(y+2)^2=10$$

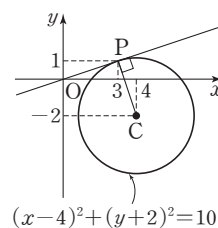
오른쪽 그림과 같이 원의 중심을

C(4, -2)라 하면 직선 CP의 기울기는

$$\frac{1+2}{3-4}=-3$$

이때 원의 접선은 직선 CP와 수직이므로

원의 접선의 기울기는 $\frac{1}{3}$ 이다. $\dots\dots \text{㉠}$



따라서 기울기가 $\frac{1}{3}$ 이고 점 P(3, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{1}{3}(x-3) \quad \therefore y=\frac{1}{3}x \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이 직선이 점 (a, 2)를 지나므로

$$2=\frac{1}{3}a \quad \therefore a=6 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

채점 기준

㉠ 접선의 기울기 구하기	60%
㉡ 접선의 방정식 구하기	30%
㉢ a의 값 구하기	10%

0337 답 8

원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 (3, -4)에서의 접선의 방정식은

$$3x-4y=25 \quad \therefore 3x-4y-25=0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

원 $(x-6)^2+(y-8)^2=r^2$ 의 중심 (6, 8)과 직선 ㉠ 사이의 거리는

$$\frac{|18-32-25|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{39}{5}$$

따라서 직선 ㉠이 원 $(x-6)^2+(y-8)^2=r^2$ 과 만나려면

$$r \geq \frac{39}{5}$$

즉, 자연수 r의 최솟값은 8이다.

0338 답 ②

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=4$$

이 직선이 점 (4, -2)를 지나므로

$$4x_1-2y_1=4 \quad \therefore y_1=2x_1-2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

한편 접점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2+y^2=4$ 위에 있으므로

$$x_1^2+y_1^2=4 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$x_1^2 + (2x_1 - 2)^2 = 4$$

$$5x_1^2 - 8x_1 = 0, x_1(5x_1 - 8) = 0$$

$$\therefore x_1 = 0 \text{ 또는 } x_1 = \frac{8}{5}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$x_1 = 0, y_1 = -2 \text{ 또는 } x_1 = \frac{8}{5}, y_1 = \frac{6}{5}$$

즉, 접선의 방정식은

$$-2y = 4 \text{ 또는 } \frac{8}{5}x + \frac{6}{5}y = 4$$

$$\therefore y + 2 = 0 \text{ 또는 } 4x + 3y - 10 = 0$$

$$y + 2 = 0 \text{ 일 때, } -5y - 10 = 0 \text{ 이므로 } a = 0, b = -5$$

$$4x + 3y - 10 = 0 \text{ 일 때, } a = 4, b = 3$$

$$\text{그런데 } a \neq 0 \text{ 이므로 } a = 4, b = 3$$

$$\therefore a + b = 7$$

0339 답 ①

원점을 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y = mx \quad \therefore mx - y = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0 \text{ 에서}$$

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 2$$

원의 중심의 좌표가 $(1, 3)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이므로 원과 직선

㉠이 접하려면

$$\frac{|m - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

$$|m - 3| = \sqrt{2}\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$(m - 3)^2 = 2(m^2 + 1)$$

$$m^2 + 6m - 7 = 0, (m + 7)(m - 1) = 0$$

$$\therefore m = -7 \text{ 또는 } m = 1$$

따라서 구하는 두 접선의 기울기의 곱은

$$-7 \times 1 = -7$$

0340 답 ⑤

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 6$$

이 직선이 점 $P(6, 0)$ 을 지나므로

$$6x_1 = 6 \quad \therefore x_1 = 1$$

한편 접점 (x_1, y_1) , 즉 $(1, y_1)$ 은 원 $x^2 + y^2 = 6$ 위에 있으므로

$$1 + y_1^2 = 6, y_1^2 = 5 \quad \therefore y_1 = \pm\sqrt{5}$$

즉, 점 P에서 원에 그은 접선의 방정식은

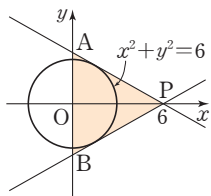
$$x + \sqrt{5}y = 6 \text{ 또는 } x - \sqrt{5}y = 6$$

두 접선이 y 축과 만나는 점의 y 좌표는 $\frac{6\sqrt{5}}{5}, -\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 이므로

$$\overline{AB} = \left| \frac{6\sqrt{5}}{5} - \left(-\frac{6\sqrt{5}}{5} \right) \right| = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{OP} &= \frac{1}{2} \times \frac{12\sqrt{5}}{5} \times 6 \\ &= \frac{36\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$



다른 풀이

접선이 y 축과 만나는 점의 y 좌표를 k 라 하면 접선은 x 절편이 6, y 절편이 k 인 직선이므로 접선의 방정식은

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{k} = 1 \quad \therefore kx + 6y - 6k = 0$$

원의 중심 $(0, 0)$ 과 이 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{6}$ 과 같으므로

$$\frac{|-6k|}{\sqrt{k^2 + 6^2}} = \sqrt{6}$$

$$|6k| = \sqrt{6}\sqrt{k^2 + 36}$$

양변을 제곱하면

$$36k^2 = 6(k^2 + 36)$$

$$k^2 = \frac{36}{5} \quad \therefore k = \pm \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

즉, 두 접선이 y 축과 만나는 점의 y 좌표는 $\frac{6\sqrt{5}}{5}, -\frac{6\sqrt{5}}{5}$ 이므로

$$\overline{AB} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{12\sqrt{5}}{5} \times 6 = \frac{36\sqrt{5}}{5}$$

0341 답 3

접선의 기울기를 m 이라 하면 기울기가 m 이고 점 $(0, a)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = mx + a \quad \therefore mx - y + a = 0$$

원의 중심 $(1, 0)$ 과 이 직선 사이의 거리는

$$\frac{|m + a|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|m + a|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|m + a|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$|m + a| = \sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$m^2 + 2am + a^2 = 5(m^2 + 1)$$

$$\therefore 4m^2 - 2am - a^2 + 5 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 두 접선이 서로 수직이면 m 에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근의 곱이 -1 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{-a^2 + 5}{4} = -1, a^2 = 9 \quad \therefore a = \pm 3$$

따라서 양수 a 의 값은 3이다.

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 두 접점을 P, Q라 하고, $A(0, a)$ 라 하자.

원의 중심을 $C(1, 0)$ 이라 하면 두 접선이 서로 수직이므로 사각형 AQCP는 한 변의 길이가 원의 반지름의 길이와 같은 정사각형이다.

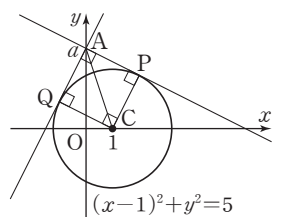
$$\therefore \overline{AP} = \overline{CP} = \sqrt{5}$$

직각삼각형 ACP에서 $\overline{AC}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2$ 이므로

$$1^2 + (-a)^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2$$

$$a^2 = 9 \quad \therefore a = \pm 3$$

따라서 양수 a 의 값은 3이다.



0342 답 $x^2 + (y-1)^2 = 2$

$$G\left(\frac{1+3-4}{3}, \frac{2+6-5}{3}\right) \quad \therefore G(0, 1)$$

$$\therefore \overline{AG} = \sqrt{(-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$$

따라서 중심의 좌표가 (0, 1)이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원의 방정식은

$$x^2 + (y-1)^2 = 2$$

0343 답 2π

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{2-10}{2}, \frac{-4+8}{2}\right) \quad \therefore M(-4, 2)$$

선분 AB를 1:2로 내분하는 점을 N이라 하면

$$N\left(\frac{1 \times (-10) + 2 \times 2}{1+2}, \frac{1 \times 8 + 2 \times (-4)}{1+2}\right)$$

$$\therefore N(-2, 0)$$

두 점 M, N을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \overline{MN} = \frac{1}{2} \times \sqrt{(-2+4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{2}$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{2})^2 = 2\pi$$

0344 답 ④

원의 중심의 좌표를 (0, a), 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$$x^2 + (y-a)^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

원 ㉠이 점 (4, 0)을 지나므로

$$16 + (-a)^2 = r^2$$

$$\therefore a^2 + 16 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

원 ㉠이 점 (3, 7)을 지나므로

$$9 + (7-a)^2 = r^2$$

$$\therefore a^2 - 14a + 58 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a=3, r^2=25$$

따라서 원의 방정식은

$$x^2 + (y-3)^2 = 25 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

ㄱ. 중심의 좌표는 (0, 3)이다.

ㄴ. 반지름의 길이가 5이므로 지름의 길이는 10이다.

ㄷ. $x=5$ 를 ㉣에 대입하면

$$25 + (y-3)^2 = 25$$

$$(y-3)^2 = 0 \quad \therefore y=3$$

즉, 점 (5, 3)을 지난다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0345 답 25

$$x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0 \text{에서}$$

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = 25$$

따라서 원의 넓이는 25π 이므로

$$k=25$$

0346 답 $-3 < a < 2$

$$x^2 + y^2 + 2(a-1)y + 2a^2 - a - 5 = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + \{y + (a-1)\}^2 = -a^2 - a + 6$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$-a^2 - a + 6 > 0$$

$$a^2 + a - 6 < 0, (a+3)(a-2) < 0$$

$$\therefore -3 < a < 2$$

0347 답 ①

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y = 0 \text{에서}$$

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 17$$

이 원의 중심의 좌표가 (4, -1)이므로 구하는 원의 반지름의 길이는 1이다.

0348 답 ③

중심이 점 (3, -3)이고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9$$

이 원이 점 (k , -2)를 지나므로

$$(k-3)^2 + (-2+3)^2 = 9$$

$$\therefore k^2 - 6k + 1 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k 의 값의 합은 6이다.

0349 답 ⑤

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$$

점 A(4, -2)와 원의 중심 (1, 2) 사이의 거리는

$$\sqrt{(1-4)^2 + (2+2)^2} = 5$$

원의 반지름의 길이가 4이므로 $\overline{AP}$ 의 길이의 최댓값은 $5+4=9$,

$\overline{AP}$ 의 길이의 최솟값은 $5-4=1$ 이다.

따라서 $1 \leq l \leq 9$ 이므로 l 의 값이 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, ..., 9의 9개이다.

0350 답 2

원 $x^2 + y^2 - ax - 4y - 3 = 0$ 이 원 $x^2 + y^2 - 2x - 4ay + 13 = 0$ 의 둘레의 길이를 이등분하려면 두 원의 교점을 지나는 직선이 원

$x^2 + y^2 - 2x - 4ay + 13 = 0$ 의 중심을 지나야 한다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - ax - 4y - 3 - (x^2 + y^2 - 2x - 4ay + 13) = 0$$

$$\therefore (2-a)x + (4a-4)y - 16 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4ay + 13 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + (y-2a)^2 = 4a^2 - 12$$

직선 ㉠이 이 원의 중심 (1, 2a)를 지나야 하므로

$$2 - a + 2a(4a-4) - 16 = 0$$

$$8a^2 - 9a - 14 = 0$$

$$(8a+7)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{7}{8} \text{ 또는 } a = 2$$

따라서 정수 a 의 값은 2이다.

0351 답 ③

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 + k(x^2 + y^2 - 2y - 5) = 0 \quad (\text{단, } k \neq -1) \quad \dots\dots ㉠$$

원 ㉠이 점 $(-1, -1)$ 을 지나므로

$$1 - k = 0 \quad \therefore k = 1$$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 + y^2 = 5$$

따라서 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이므로 구하는 원의 넓이는 5π 이다.

0352 답 -1

$y = mx + 2$ 를 $x^2 + y^2 = 2$ 에 대입하면

$$x^2 + (mx + 2)^2 = 2$$

$$\therefore (m^2 + 1)x^2 + 4mx + 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 만나므로

$$\frac{D}{4} = (2m)^2 - 2(m^2 + 1) \geq 0$$

$$2m^2 - 2 \geq 0, m^2 \geq 1 \quad \therefore m \leq -1 \text{ 또는 } m \geq 1$$

따라서 $\alpha = -1, \beta = 1$ 이므로

$$\alpha\beta = -1$$

0353 답 50

직선 $y = x$ 위의 점을 중심으로 하고 x 축과 y 축에 동시에 접하므로 원의 중심의 좌표를 (r, r) 라 하면 원의 반지름의 길이는 $|r|$ 이다.

원과 직선 $3x - 4y + 12 = 0$ 이 접하므로

$$\frac{|3r - 4r + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = |r|$$

$$|r - 12| = 5|r|, r - 12 = \pm 5r$$

$$\therefore r = -3 \text{ 또는 } r = 2$$

따라서 두 원의 중심 A, B의 좌표는 $(-3, -3), (2, 2)$ 이므로

$$\overline{AB}^2 = (2+3)^2 + (2+3)^2 = 50$$

0354 답 ⑤

원 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 8$ 의 중심의 좌표는 $(1, 3)$ 이고 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이므로 직선 $x - y + n = 0$ 과 만나지 않으려면

$$\frac{|1 - 3 + n|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} > 2\sqrt{2}, |n - 2| > 4$$

$$n - 2 < -4 \text{ 또는 } n - 2 > 4$$

$$\therefore n < -2 \text{ 또는 } n > 6 \quad \dots\dots ㉠$$

원 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 7 = 0$, 즉 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 18$ 의 중심의 좌표는 $(4, 3)$ 이고 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$ 이므로 직선 $x - y + n = 0$ 과 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|4 - 3 + n|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} < 3\sqrt{2}$$

$$|n + 1| < 6, -6 < n + 1 < 6$$

$$\therefore -7 < n < 5 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 n 의 값의 범위는

$$-7 < n < -2$$

따라서 정수 n 의 최솟값은 -6 이다.

0355 답 ③

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을

$C(-1, 3)$ 이라 하고 점 C에서

직선 $y = mx + 2$ 에 내린 수선의

발을 H라 하면 직각삼각형 CAH

에서 $\overline{CA}$ 는 원의 반지름의 길이와

$$\text{같고, } \overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

따라서 점 $C(-1, 3)$ 과 직선 $y = mx + 2$, 즉 $mx - y + 2 = 0$ 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

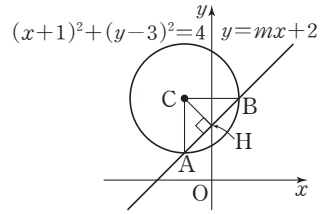
$$\frac{|-m - 3 + 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

$$|m + 1| = \sqrt{2}\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$m^2 + 2m + 1 = 2(m^2 + 1)$$

$$m^2 - 2m + 1 = 0, (m-1)^2 = 0 \quad \therefore m = 1$$



0356 답 ③

점 $A(4, 3)$ 과 원의 중심 $O(0, 0)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

직각삼각형 POA에서 $\overline{OP}$ 의 길이는 원의 반지름의 길이와 같으므로

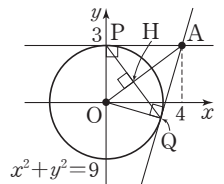
$$\overline{PA} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$\overline{OA}$ 와 $\overline{PQ}$ 의 교점을 H라 하면 $\overline{OA} \perp \overline{PQ}$ 이므로 직각삼각형 POA에서

$$\overline{PA} \times \overline{OP} = \overline{OA} \times \overline{PH}$$

$$4 \times 3 = 5 \times \overline{PH} \quad \therefore \overline{PH} = \frac{12}{5}$$

$$\therefore \overline{PQ} = 2\overline{PH} = \frac{24}{5}$$



0357 답 ②

$$x^2 + y^2 - 4x + 8y + 2 = 0 \text{에서 } (x-2)^2 + (y+4)^2 = 18$$

원의 중심 $(2, -4)$ 와 직선 $x - y + k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 + 4 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k + 6|}{\sqrt{2}}$$

원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값이 $8\sqrt{2}$ 이고, 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|k + 6|}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}, |k + 6| = 10$$

$$k + 6 = \pm 10 \quad \therefore k = -16 \text{ 또는 } k = 4$$

따라서 양수 k 의 값은 4이다.

0358 답 49

직선 $y = \frac{1}{3}x - 1$ 에 수직인 직선의 기울기는 -3 이고 원 $x^2 + y^2 = 4$

의 반지름의 길이는 2이므로 접선의 방정식은

$$y = -3x \pm 2\sqrt{(-3)^2 + 1} \quad \therefore y = -3x \pm 2\sqrt{10}$$

따라서 $m = -3, n = \pm 2\sqrt{10}$ 이므로

$$m^2 + n^2 = 9 + 40 = 49$$

0359 **답** 18

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 1$$

이 직선이 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3y_1 = 1 \quad \therefore y_1 = \frac{1}{3}$$

한편 접점 (x_1, y_1) , 즉 $(x_1, \frac{1}{3})$ 은 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위에 있으므로

$$x_1^2 + \frac{1}{9} = 1, x_1^2 = \frac{8}{9} \quad \therefore x_1 = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

즉, 점 $(0, 3)$ 에서 원에 그은 접선의 방정식은

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}x + \frac{1}{3}y = 1 \quad \text{또는} \quad -\frac{2\sqrt{2}}{3}x + \frac{1}{3}y = 1$$

$$\therefore 2\sqrt{2}x + y = 3 \quad \text{또는} \quad 2\sqrt{2}x - y = -3$$

따라서 두 접선이 x 축과 만나는 점의 x 좌표는

$$\frac{3\sqrt{2}}{4} \quad \text{또는} \quad -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{따라서 } k = \pm \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{이므로 } k^2 = \frac{9}{8} \quad \therefore 16k^2 = 18$$

다른 풀이

접선은 x 절편이 k , y 절편이 3인 직선이므로 접선의 방정식은

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{3} = 1 \quad \therefore 3x + ky - 3k = 0$$

원의 중심 $(0, 0)$ 과 이 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|-3k|}{\sqrt{3^2 + k^2}} = 1, |3k| = \sqrt{9 + k^2}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 9k^2 = 9 + k^2$$

$$8k^2 = 9 \quad \therefore k^2 = \frac{9}{8} \quad \therefore 16k^2 = 18$$

0360 **답** -4

$A(0, 2)$, $B(-2, 2)$, $C(0, -4)$ 라 하고, 원의 중심을 $P(p, q)$ 라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$p^2 + (q-2)^2 = (p+2)^2 + (q-2)^2$$

$$p^2 = (p+2)^2, 4p+4=0 \quad \therefore p=-1$$

$$\overline{AP} = \overline{CP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{CP}^2 \text{이므로}$$

$$p^2 + (q-2)^2 = p^2 + (q+4)^2$$

$$(q-2)^2 = (q+4)^2, -4q+4=8q+16 \quad \therefore q=-1$$

$$\therefore P(-1, -1)$$

원의 반지름의 길이는

$$\overline{AP} = \sqrt{(-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}$$

따라서 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 10$$

이 원이 점 $(a, -2)$ 를 지나므로

$$(a+1)^2 + (-2+1)^2 = 10, (a+1)^2 = 9$$

$$a+1 = \pm 3 \quad \therefore a = -4 \quad \text{또는} \quad a = 2$$

따라서 음수 a 의 값은 -4 이다.

채점 기준

i 원의 중심의 좌표 구하기	40 %
ii 원의 방정식 구하기	30 %
iii 음수 a 의 값 구하기	30 %

0361 **답** 4π

$P(x, y)$ 라 하면 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 10$ 에서

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (x-3)^2 + (y+1)^2 = 10$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0 \quad \therefore (x-3)^2 + y^2 = 4 \quad \dots\dots \text{i}$$

따라서 점 P 가 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(3, 0)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 그 넓이는

$$\pi \times 2^2 = 4\pi \quad \dots\dots \text{ii}$$

채점 기준

i 점 P 가 나타내는 도형의 방정식 구하기	70 %
ii 도형의 넓이 구하기	30 %

0362 **답** $3x - y = 10$

$2x + y - 5 = 0$, 즉 $y = -2x + 5$ 를 $x^2 + y^2 = 10$ 에 대입하면

$$x^2 + (-2x+5)^2 = 10, x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0 \quad \therefore x=1 \quad \text{또는} \quad x=3$$

이를 $y = -2x + 5$ 에 대입하면

$$x=1 \text{일 때 } y=3, x=3 \text{일 때 } y=-1$$

따라서 직선과 원의 교점의 좌표는

$$(1, 3), (3, -1) \quad \dots\dots \text{i}$$

점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$x + 3y = 10$$

점 $(3, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$3x - y = 10 \quad \dots\dots \text{ii}$$

따라서 제2사분면을 지나지 않는 접선의 방정식은

$$3x - y = 10 \quad \dots\dots \text{iii}$$

채점 기준

i 직선과 원의 교점의 좌표 구하기	50 %
ii 접선의 방정식 구하기	30 %
iii 제2사분면을 지나지 않는 접선의 방정식 구하기	20 %

C 실력 향상

59쪽

0363 **답** 4

오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, P

P 를 지나는 원은 반지름의 길이가 4이고 y 축에 접하므로 이 원의

중심을 C 라 하면

$C(-4, -1)$

즉, 세 점 A, B, P 를 지나는 원의 방정식은

$$(x+4)^2 + (y+1)^2 = 16 \quad \therefore x^2 + y^2 + 8x + 2y + 1 = 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

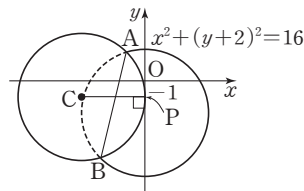
$$x^2 + (y+2)^2 = 16 \text{에서 } x^2 + y^2 + 4y - 12 = 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이때 직선 AB 는 두 원 ㉠, ㉡의 교점을 지나는 직선이므로

$$x^2 + y^2 + 8x + 2y + 1 - (x^2 + y^2 + 4y - 12) = 0$$

$$\therefore y = 4x + \frac{13}{2}$$

따라서 직선 AB 의 기울기는 4이다.



다른 풀이

세 점 A, B, P를 지나는 원의 중심을 C(-4, -1)이라 하고 원 $x^2 + (y+2)^2 = 16$ 의 중심을 C'(0, -2)라 하면 직선 AB는 $\overline{CC'}$ 의 수직이등분선이다.

직선 CC'의 기울기는 $\frac{-2+1}{4} = -\frac{1}{4}$

따라서 직선 AB의 기울기는 4이다.

0364 답 80

P(a, 0)이라 하면 원이 x축에 접하고 반지름의 길이가 2이므로 원의 중심을 C라 하면 C(a, 2)

직선 PQ는 직선 OC에 수직이고 직선 OC의 기울기가 $\frac{2}{a}$ 이므로 직선 PQ의 기울기는 $-\frac{a}{2}$ 이다.

즉, 직선 PQ의 방정식은

$$y = -\frac{a}{2}(x-a) \quad \therefore y = -\frac{a}{2}x + \frac{a^2}{2}$$

$$\therefore R\left(0, \frac{a^2}{2}\right)$$

삼각형 ROP의 넓이가 16이므로

$$\frac{1}{2} \times a \times \frac{a^2}{2} = 16, a^3 = 64 \quad \therefore a = 4$$

따라서 점 C(4, 2)와 직선 $y = mx$, 즉 $mx - y = 0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|4m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 2, |4m-2| = 2\sqrt{m^2+1}$$

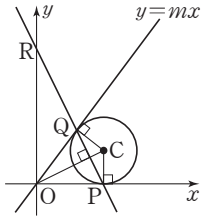
양변을 제곱하면

$$(4m-2)^2 = 4(m^2+1), 3m^2-4m=0$$

$$m(3m-4)=0 \quad \therefore m=0 \text{ 또는 } m=\frac{4}{3}$$

그런데 $m > 0$ 이므로 $m = \frac{4}{3}$

$$\therefore 60m = 80$$



0365 답 4

오른쪽 그림과 같이 두 원 C_1 , C_2 의 중심을 각각 $C_1(0, b)$, $C_2(6, 4)$ 라 하고, 두 점 C_1 , C_2 에서 직선 l_2 에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자.

점 C_2 에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$H(6, 0)$$

두 직각삼각형 C_1PA , C_2PB 는 닮음이고 닮음비는

$$\overline{C_1A} : \overline{C_2B} = \sqrt{3} : 2\sqrt{3} = 1 : 2$$

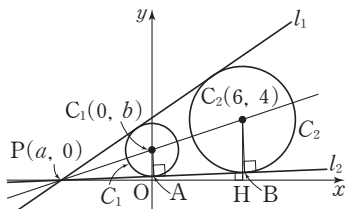
이때 두 직각삼각형 C_1PO , C_2PH 도 닮음이고 닮음비는

$$\overline{C_1P} : \overline{C_2P} = 1 : 2$$

$$\overline{C_1O} : \overline{C_2H} = 1 : 2 \text{에서 } b : 4 = 1 : 2 \text{이므로}$$

$$2b = 4 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore C_1(0, 2)$$



따라서 직선 C_1C_2 의 방정식은

$$y-2 = \frac{4-2}{6}x \quad \therefore y = \frac{1}{3}x + 2$$

이 직선이 점 P(a, 0)을 지나므로

$$0 = \frac{1}{3}a + 2 \quad \therefore a = -6$$

$$\therefore P(-6, 0)$$

점 P(-6, 0)에서 원 $C_1: x^2 + (y-2)^2 = 3$ 에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$$y = m(x+6) \quad \therefore mx - y + 6m = 0$$

원의 중심 $C_1(0, 2)$ 와 이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{3}$ 과 같으므로

$$\frac{|-2+6m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \sqrt{3}, |-2+6m| = \sqrt{3}\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$(-2+6m)^2 = 3(m^2+1)$$

$$\therefore 33m^2 - 24m + 1 = 0$$

이 이차방정식의 두 근이 두 직선 l_1 , l_2 의 기울기이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$c = -\frac{-24}{33} = \frac{8}{11}$$

$$\therefore a + b + 11c = 4$$

0366 답 ④

$2\overline{AH} = \overline{HB}$ 이므로 $\overline{AH} = k$ 라 하면

$$\overline{HB} = 2k$$

원의 반지름의 길이가 2이므로

$$\overline{OH} = \overline{AH} - \overline{AO} = k - 2$$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OP}$ 를 그으면 직

각삼각형 POB에서

$$\begin{aligned} \overline{PO}^2 &= \overline{OH} \times \overline{OB} \\ &= \overline{OH} \times (\overline{OH} + \overline{HB}) \end{aligned}$$

$$2^2 = (k-2)\{(k-2)+2k\}$$

$$3k^2 - 8k = 0, k(3k-8) = 0 \quad \therefore k=0 \text{ 또는 } k=\frac{8}{3}$$

그런데 $k > 2$ 이므로 $k = \frac{8}{3}$

$$\therefore \overline{HB} = \frac{16}{3}, \overline{OH} = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

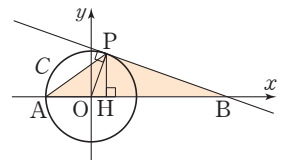
$$\therefore \overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB} = \frac{8}{3} + \frac{16}{3} = 8$$

직각삼각형 POH에서

$$\overline{PH} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

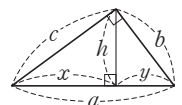
$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH} = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$$



중2 다시보기

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형에서

$$c^2 = ax, b^2 = ay, h^2 = xy$$



참고 $\overline{AO} = 20$ 이므로 $k = \overline{AH} = \overline{AO} + \overline{OH} > 2$

04 / 도형의 이동

A 개념 확인

60~63쪽

0367 답 (1, -3)

$(0+1, 0-3) \quad \therefore (1, -3)$

0368 답 (3, 1)

$(2+1, 4-3) \quad \therefore (3, 1)$

0369 답 (-4, 0)

$(-5+1, 3-3) \quad \therefore (-4, 0)$

0370 답 (8, -4)

$(7+1, -1-3) \quad \therefore (8, -4)$

0371 답 (-2, 5)

$(1-3, 3+2) \quad \therefore (-2, 5)$

0372 답 (1, 2)

$(4-3, 0+2) \quad \therefore (1, 2)$

0373 답 (3, 1)

$(6-3, -1+2) \quad \therefore (3, 1)$

0374 답 (-5, -3)

$(-2-3, -5+2) \quad \therefore (-5, -3)$

0375 답 (-1, 6)

$x+1=0, y-4=2$ 이므로

$x=-1, y=6$

$\therefore (-1, 6)$

0376 답 (4, 7)

$x+1=5, y-4=3$ 이므로

$x=4, y=7$

$\therefore (4, 7)$

0377 답 (-2, 5)

$x+1=-1, y-4=1$ 이므로

$x=-2, y=5$

$\therefore (-2, 5)$

0378 답 (2, 2)

$x+1=3, y-4=-2$ 이므로

$x=2, y=2$

$\therefore (2, 2)$

0379 답 $x+3y+5=0$

$(x-2)+3(y+3)-2=0$

$\therefore x+3y+5=0$

0380 답 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$

$(x-2+1)^2+(y+3-2)^2=1$

$\therefore (x-1)^2+(y+1)^2=1$

0381 답 $y=(x-3)^2-1$

$y+3=(x-2-1)^2+2$

$\therefore y=(x-3)^2-1$

0382 답 $3x-2y+8=0$

$3x-2y+1=0$ 을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$3(x+1)-2(y-2)+1=0$

$\therefore 3x-2y+8=0$

0383 답 $(x+1)^2+(y-5)^2=4$

$x^2+(y-3)^2=4$ 를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$(x+1)^2+(y-2-3)^2=4$

$\therefore (x+1)^2+(y-5)^2=4$

0384 답 $y=(x+3)^2$

$y=(x+2)^2-2$ 를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$y-2=(x+1+2)^2-2$

$\therefore y=(x+3)^2$

0385 답 $x+2y-4=0$

$x+2y-5=0$ 을 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$(x+3)+2(y-1)-5=0$

$\therefore x+2y-4=0$

0386 답 $(x+7)^2+(y-1)^2=9$

$(x+4)^2+y^2=9$ 를 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$(x+3+4)^2+(y-1)^2=9$

$\therefore (x+7)^2+(y-1)^2=9$

0387 답 $y=-x^2-4x-3$

$y=-x^2+2x-1$ 을 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$y-1=-(x+3)^2+2(x+3)-1 \quad \therefore y=-x^2-4x-3$

다른 풀이

$y=-x^2+2x-1=-(x-1)^2$ 을 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$y-1=-(x+3-1)^2$

$y=-(x+2)^2+1 \quad \therefore y=-x^2-4x-3$

0388 답 (-5, -1)

0389 답 (5, 1)

0390 답 (5, -1)

0391 답 (1, -5)

0392 답 $x-4y-1=0$

$x+4(-y)-1=0 \quad \therefore x-4y-1=0$

0393 답 $x-4y+1=0$

$-x+4y-1=0 \quad \therefore x-4y+1=0$

0394 답 $x+4y+1=0$

$-x+4(-y)-1=0 \quad \therefore x+4y+1=0$

0395 답 $4x+y-1=0$

$y+4x-1=0 \quad \therefore 4x+y-1=0$

0396 답 $(x+3)^2+(y+1)^2=1$

$(x+3)^2+(-y-1)^2=1$
 $\therefore (x+3)^2+(y+1)^2=1$

0397 답 $(x-3)^2+(y-1)^2=1$

$(-x+3)^2+(y-1)^2=1$
 $\therefore (x-3)^2+(y-1)^2=1$

0398 답 $(x-3)^2+(y+1)^2=1$

$(-x+3)^2+(-y-1)^2=1$
 $\therefore (x-3)^2+(y+1)^2=1$

0399 답 $(x-1)^2+(y+3)^2=1$

$(y+3)^2+(x-1)^2=1$
 $\therefore (x-1)^2+(y+3)^2=1$

0400 답 $y=-x^2-4x-1$

$-y=x^2+4x+1 \quad \therefore y=-x^2-4x-1$

0401 답 $y=x^2-4x+1$

$y=(-x)^2+4(-x)+1 \quad \therefore y=x^2-4x+1$

0402 답 $y=-x^2+4x-1$

$-y=(-x)^2+4(-x)+1 \quad \therefore y=-x^2+4x-1$

0403 답 $(-1, 5)$

점 P는 두 점 (1, 4), (-3, 6)을 이은 선분의 중점이므로 그 좌표는 $\left(\frac{1-3}{2}, \frac{4+6}{2}\right) \quad \therefore (-1, 5)$

0404 답 $(1, -3)$

점 P는 두 점 (0, -5), (2, -1)을 이은 선분의 중점이므로 그 좌표는 $\left(\frac{2}{2}, \frac{-5-1}{2}\right) \quad \therefore (1, -3)$

0405 답 $(3, -5)$

구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면 점 (1, 1)은 두 점 (-1, 7), (a, b)를 이은 선분의 중점이므로 $\frac{-1+a}{2}=1, \frac{7+b}{2}=1 \quad \therefore a=3, b=-5$
 따라서 구하는 점의 좌표는 (3, -5)이다.

0406 답 $(-8, -3)$

구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면 점 (-2, 0)은 두 점 (4, 3), (a, b)를 이은 선분의 중점이므로 $\frac{4+a}{2}=-2, \frac{3+b}{2}=0 \quad \therefore a=-8, b=-3$
 따라서 구하는 점의 좌표는 (-8, -3)이다.

0407 답 (1) $(-5, 0)$ (2) $(9, 2)$

(3) $(x-9)^2+(y-2)^2=4$

- (1) 원 C의 중심의 좌표는 (-5, 0)
 (2) 구하는 점의 좌표를 (a, b)라 하면 점 (2, 1)은 두 점 (-5, 0), (a, b)를 이은 선분의 중점이므로 $\frac{-5+a}{2}=2, \frac{b}{2}=1 \quad \therefore a=9, b=2$
 따라서 구하는 점의 좌표는 (9, 2)이다.
 (3) 원 C'의 중심의 좌표는 (9, 2)이고, 반지름의 길이는 원 C의 반지름의 길이와 같으므로 원 C'의 방정식은 $(x-9)^2+(y-2)^2=4$

0408 답 (1) $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$ (2) 1 (3) $(-1, 1)$

- (1) 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$
 (2) 직선 AB와 직선 $x+y-2=0$, 즉 $y=-x+2$ 가 서로 수직이므로 직선 AB의 기울기는 1이다.
 (3) 선분 AB의 중점 $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+3}{2}\right)$ 이 직선 $x+y-2=0$ 위에 있으므로 $\frac{a+1}{2}+\frac{b+3}{2}-2=0 \quad \therefore a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 직선 AB의 기울기는 1이므로 $\frac{b-3}{a-1}=1 \quad \therefore a-b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1, b=1$
 따라서 점 B의 좌표는 (-1, 1)이다.

B 유형 완성

64~73쪽

0409 답 ②

점 (a, 3)을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(a+2, 3-5) \quad \therefore (a+2, -2)$
 이 점이 점 (3, b)와 일치하므로 $a+2=3, -2=b \quad \therefore a=1, b=-2$
 $\therefore a+b=-1$

0410 답 ④

점 (1, 3)이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는 $(1-2, 3+a) \quad \therefore (-1, 3+a)$
 이 점이 점 (b, 5)와 일치하므로 $-1=b, 3+a=5 \quad \therefore a=2, b=-1$
 $\therefore a+b=1$

0411 답 (5, -7)

점 $(-1, 2)$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(3, -4)$ 라 하면

$$-1+m=3, 2+n=-4 \quad \therefore m=4, n=-6$$

따라서 점 $(1, -1)$ 을 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(1+4, -1-6) \quad \therefore (5, -7)$$

0412 답 ⑤

점 $P(a, a^2)$ 을 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$\left(a-\frac{1}{2}, a^2+2\right)$$

이 점이 직선 $y=4x$ 위에 있으므로

$$a^2+2=4\left(a-\frac{1}{2}\right)$$

$$a^2-4a+4=0, (a-2)^2=0$$

$$\therefore a=2$$

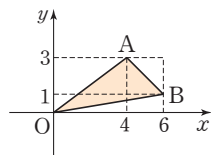
0413 답 7

점 $A(4, 3)$ 이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점은

$$B(4+2, 3-2) \quad \therefore B(6, 1)$$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$$6 \times 3 - \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 3 + \frac{1}{2} \times 6 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2\right) = 7$$

**채점 기준**

① 점 B의 좌표 구하기

50%

② 삼각형 AOB의 넓이 구하기

50%

0414 답 ②

직선 $y=-3x+k$ 를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y+2=-3(x-4)+k \quad \therefore y=-3x+k+10$$

이 직선이 직선 $y=-3x+5$ 와 일치하므로

$$k+10=5 \quad \therefore k=-5$$

0415 답 ③

직선 $y=2x+1$ 을 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-1=2(x+2)+1 \quad \therefore y=2x+6$$

따라서 이 직선의 y 절편은 6이다.

0416 답 ④

주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 $-p$ 만큼 평행이동하는 것이므로 직선 $y=4x+2$ 가 이 평행이동에 의하여 옮겨지는 직선의 방정식은

$$y+p=4(x-p)+2 \quad \therefore y=4x-5p+2$$

이 직선이 직선 $y=4x-8$ 과 일치하므로

$$-5p+2=-8 \quad \therefore p=2$$

0417 답 ③

직선 $2x+y-1=0$ 이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 직선의 방정식은

$$2(x+1)+(y-4)-1=0 \quad \therefore 2x+y-3=0$$

따라서 $a=1, b=-3$ 이므로 $ab=-3$

0418 답 -1

직선 $y=2x+3$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y+2=2(x-1)+3 \quad \therefore y=2x-1$$

..... ①

이 직선이 주어진 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(m, -3)$ 을 지나야 하므로

$$-3=2m-1 \quad \therefore m=-1$$

..... ②

채점 기준

① 평행이동한 직선의 방정식 구하기

50%

② m 의 값 구하기

50%

0419 답 14

직선 $y=2x+k$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y+3=2(x-2)+k \quad \therefore 2x-y+k-7=0$$

원 $x^2+y^2=5$ 의 중심의 좌표가 $(0, 0)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 직선과 원이 한 점에서 만나려면

$$\frac{|k-7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}, |k-7|=5$$

$$k-7=\pm 5 \quad \therefore k=2 \text{ 또는 } k=12$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은 $2+12=14$

0420 답 ④

원 $(x-1)^2+(y+b)^2=4$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a-1)^2+(y-2+b)^2=4 \quad \text{..... ㉠}$$

한편 $x^2+y^2+2x+c-1=0$ 에서

$$(x+1)^2+y^2=2-c \quad \text{..... ㉡}$$

㉠과 ㉡이 일치하므로

$$-a-1=1, -2+b=0, 4=2-c$$

$$\therefore a=-2, b=2, c=-2 \quad \therefore abc=8$$

다른 풀이

원 $(x-1)^2+(y+b)^2=4$ 의 중심의 좌표는

$$(1, -b) \quad \text{..... ㉢}$$

원 $x^2+y^2+2x+c-1=0$, 즉 $(x+1)^2+y^2=2-c$ 의 중심의 좌표는

$$(-1, 0) \quad \text{..... ㉣}$$

점 ㉢을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(1+a, -b+2)$$

이 점이 점 ㉣과 일치하므로

$$1+a=-1, -b+2=0 \quad \therefore a=-2, b=2$$

원은 평행이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않으므로

$$2-c=4 \quad \therefore c=-2$$

$$\therefore abc=8$$

0421 답 ③

주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동하는 것이다.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$$

이 원이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 원의 방정식은

$$(x-2-1)^2 + (y+3+2)^2 = 1 \quad \therefore (x-3)^2 + (y+5)^2 = 1$$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(3, -5)$ 이다.

다른 풀이

주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동하는 것이다.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$$

이 원의 중심의 좌표는 $(1, -2)$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 점 $(1, -2)$ 가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표와 같으므로

$$(1+2, -2-3) \quad \therefore (3, -5)$$

0422 답 1

원 $x^2 + (y-1)^2 = 9$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+3-1)^2 = 9$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y+2)^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

원의 중심의 좌표가 $(2, -2)$ 이고 반지름의 길이가 3이므로 이 원이 직선 $3x - 4y + k = 0$ 과 만나려면

$$\frac{|6+8+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} \leq 3, |14+k| \leq 15$$

$$-15 \leq 14+k \leq 15 \quad \therefore -29 \leq k \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 k 의 최댓값은 1이다. $\dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① 평행이동한 원의 방정식 구하기	40 %
② k 의 값의 범위 구하기	50 %
③ k 의 최댓값 구하기	10 %

0423 답 ①

원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -8만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-3-a)^2 + (y+8-b)^2 = b^2$$

$$\therefore \{x-(a+3)\}^2 + \{y-(b-8)\}^2 = b^2$$

이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하므로

$$|a+3| = |b-8| = |b|$$

$$\therefore a+3 = |b-8| = b \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$|b-8| = b \text{에서 } b = \pm(b-8)$$

이때 $b = b-8$ 을 만족시키는 b 의 값은 존재하지 않으므로

$$b = -(b-8)$$

$$2b = 8 \quad \therefore b = 4$$

이를 $a+3 = b$ 에 대입하면

$$a+3 = 4 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a+b = 5$$

0424 답 ⑤

주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동하는 것이므로 포물선 $y = x^2 + 1$ 이 이 평행이동에 의하여 옮겨지는 포물선의 방정식은

$$y-2 = (x+1)^2 + 1$$

$$\therefore y = x^2 + 2x + 4$$

이 포물선이 점 $(3, p)$ 를 지나므로

$$p = 9 + 6 + 4 = 19$$

0425 답 ①

점 $(1, 3)$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(-1, 2)$ 라 하면

$$1+m = -1, 3+n = 2$$

$$\therefore m = -2, n = -1$$

즉, 포물선 $y = x^2 + 2x - 1$ 을 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y+1 = (x+2)^2 + 2(x+2) - 1$$

$$y = x^2 + 6x + 6$$

$$\therefore y = (x+3)^2 - 3$$

따라서 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-3, -3)$ 이므로

$$a = -3, b = -3$$

$$\therefore a+b = -6$$

다른 풀이

주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동하는 것이다.

포물선 $y = x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2$ 의 꼭짓점의 좌표는

$$(-1, -2)$$

즉, 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 포물선의 꼭짓점의 좌표는 점 $(-1, -2)$ 가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표와 같으므로

$$(-1-2, -2-1) \quad \therefore (-3, -3)$$

따라서 $a = -3, b = -3$ 이므로

$$a+b = -6$$

중3 다시보기

이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$$y = a(x-p)^2 + q \text{ 꼴로 변형하여 구한다.}$$

➡ 꼭짓점의 좌표: (p, q)

0426 답 (0, 8)

$$y = x^2 + 2x + 6a = (x+1)^2 + 6a - 1$$

이 포물선을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-3 = (x-a+1)^2 + 6a - 1$$

$$\therefore y = (x-a+1)^2 + 6a + 2$$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(a-1, 6a+2)$ 이고 이 점이 y 축 위에 있으므로

$$a-1 = 0 \quad \therefore a = 1$$

따라서 구하는 꼭짓점의 좌표는 $(0, 8)$ 이다.

0427 답 ⑤

P(3, -4), Q(4, 3)이므로

$$PQ = \sqrt{(4-3)^2 + (3+4)^2} = 5\sqrt{2}$$

0428 답 4

점 (-2, 5)를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
(2, -5)

따라서 점 (2, -5)와 직선 $3x-4y-6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6+20-6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 4$$

0429 답 ①

점 (1, a)를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점은 A(a, 1)

점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (a, -1)

이 점이 점 (2, b)와 일치하므로

$$a=2, b=-1$$

$$\therefore a+b=1$$

0430 답 ④

$$(가)에서 \frac{3}{1} \times \frac{5}{a} = -1 \quad \therefore a = -15$$

즉, B(-15, 5)이므로 점 B를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(5, -15)$$

(나)에서 이 점이 점 C(b, c)와 일치하므로

$$b=5, c=-15$$

C(5, -15)이므로 직선 AC의 방정식은

$$y-3 = \frac{-15-3}{5-1}(x-1)$$

$$\therefore y = -\frac{9}{2}x + \frac{15}{2}$$

따라서 직선 AC의 y절편은 $\frac{15}{2}$ 이다.

0431 답 제4사분면

점 (a, b)를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
(a, -b)

이 점이 제3사분면 위에 있으므로

$$a < 0, -b < 0 \quad \therefore a < 0, b > 0$$

점 (a-b, ab)를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
(-a+b, ab)

이때 $-a+b > 0, ab < 0$ 이므로 이 점은 제4사분면 위에 있다.

..... ①

..... ②

채점 기준

① a, b의 부호 구하기

50%

② 점이 있는 사분면 구하기

50%

0432 답 2

직선 $ax+(2a-1)y+7=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-ax-(2a-1)y+7=0$$

$$\therefore ax+(2a-1)y-7=0$$

이 직선이 점 (-1, 3)을 지나므로

$$-a+3(2a-1)-7=0$$

$$5a-10=0 \quad \therefore a=2$$

0433 답 ④

직선 $x+3y-5=0$ 을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-x+3y-5=0$$

이 직선을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y+3x-5=0$$

$$\therefore 3x-y-5=0$$

0434 답 ①

직선 $x-2y=9$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$y-2x=9 \quad \therefore 2x-y+9=0 \quad \cdots \cdots ㉠$$

원 $(x-3)^2+(y+5)^2=k$ 의 중심의 좌표가 (3, -5)이고 반지름의 길이가 $\sqrt{k}$ 이므로 직선 ㉠이 이 원에 접하려면

$$\frac{|6+5+9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \sqrt{k}, 4\sqrt{5} = \sqrt{k}$$

양변을 제곱하면 $k=80$

0435 답 ④

직선 $l: y=4x+2$ 를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 각각

$$m: y=-4x-2$$

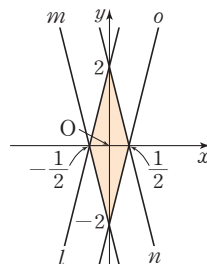
$$n: y=-4x+2$$

$$o: y=4x-2$$

따라서 오른쪽 그림과 같이 네 직선 l, m,

n, o로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 4 = 2$$



0436 답 -5

원 $x^2+y^2-2ax+6y+a^2=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$x^2+y^2+6x-2ay+a^2=0$$

$$\therefore (x+3)^2+(y-a)^2=9$$

이 원의 중심 (-3, a)가 직선 $2x-y+1=0$ 위에 있으므로

$$-6-a+1=0 \quad \therefore a=-5$$

0437 답 ②

원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$x^2+y^2+4x-2y-4=0$$

$$\therefore (x+2)^2+(y-1)^2=9$$

이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-x+2)^2+(-y-1)^2=9$$

$$\therefore (x-2)^2+(y+1)^2=9$$

이 원이 점 (2, a)를 지나므로

$$(a+1)^2=9, a+1=\pm 3$$

$$\therefore a=-4 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 양수 a의 값은 2이다.

0438 답 $y = -x$

원 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원 C_1 의 방정식은

$$(x+1)^2 + (-y-1)^2 = 16 \quad \therefore x^2 + y^2 + 2x + 2y - 14 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

원 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 원 C_2 의 방정식은

$$(-x+1)^2 + (y-1)^2 = 16 \quad \therefore x^2 + y^2 - 2x - 2y - 14 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

두 원 C_1, C_2 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 14 - (x^2 + y^2 - 2x - 2y - 14) = 0 \\ 4x + 4y = 0 \quad \therefore y = -x \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 원 C_1 의 방정식 구하기	30 %
② 원 C_2 의 방정식 구하기	30 %
③ 두 원 C_1, C_2 의 교점을 지나는 직선의 방정식 구하기	40 %

0439 답 6

포물선 $y = x^2 - 4x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y = x^2 + 4x + k \quad \therefore y = -x^2 - 4x - k$$

포물선 $y = -x^2 - 4x - k = -(x+2)^2 - k + 4$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, -k+4)$

이 점이 점 $(a, -4)$ 와 일치하므로

$$-2 = a, -k + 4 = -4 \quad \therefore a = -2, k = 8 \\ \therefore a + k = 6$$

다른 풀이

포물선 $y = x^2 - 4x + k = (x-2)^2 + k - 4$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(2, k-4)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2, -k+4)$

이 점이 점 $(a, -4)$ 와 일치하므로

$$-2 = a, -k + 4 = -4 \quad \therefore a = -2, k = 8 \\ \therefore a + k = 6$$

0440 답 ③

포물선 $y = x^2 + 3x - 2$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y = x^2 + 3x - 2 \quad \therefore y = -x^2 - 3x + 2$$

이 포물선이 점 $(1, a)$ 를 지나므로

$$a = -1 - 3 + 2 = -2$$

0441 답 3

포물선 $y = x^2 - 2x - 6$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y = x^2 + 2x - 6 \quad \therefore y = -x^2 - 2x + 6 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이 포물선을 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y = -x^2 + 2x + 6 = -(x-1)^2 + 7 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 이 포물선의 꼭짓점 $(1, 7)$ 이 직선 $y = 4x + a$ 위에 있으므로

$$7 = 4 + a \quad \therefore a = 3 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식 구하기	40 %
② y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식 구하기	40 %
③ a 의 값 구하기	20 %

0442 답 ④

점 $(a-2, -a)$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(a-2-1, -a+2) \quad \therefore (a-3, -a+2)$$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-a+3, a-2)$$

이 점이 직선 $2x - y + 4 = 0$ 위에 있으므로

$$2(-a+3) - (a-2) + 4 = 0 \\ -3a = -12 \quad \therefore a = 4$$

0443 답 7

원 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $(x-2)^2 + (-y+1)^2 = 9 \quad \therefore (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$

이 원을 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x+4-2)^2 + (y-3-1)^2 = 9 \\ \therefore x^2 + y^2 + 4x - 8y + 11 = 0$$

따라서 $a = 4, b = -8, c = 11$ 이므로

$$a + b + c = 7$$

0444 답 -4

직선 $y = 2x + 1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y = 2x + 1 \quad \therefore y = -2x - 1$$

이 직선을 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y - a = -2(x-3) - 1 \quad \therefore y = -2x + a + 5$$

이 직선을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$y = 2x + a + 5$$

이 직선과 직선 $y = 2x + 1$ 이 일치하므로

$$a + 5 = 1 \quad \therefore a = -4$$

0445 답 $(-3, 0)$

포물선 $y = x^2 - 2$ 를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y - 2 = (x-3)^2 - 2 \quad \therefore y = x^2 - 6x + 9$$

이 포물선을 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

따라서 이 포물선이 x 축과 만나는 점의 좌표는 $(-3, 0)$ 이다.

0446 답 ⑤

이차함수 $y = -x^2$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = -x^2 \quad \therefore y = x^2$$

이 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y - m = (x-4)^2 \quad \therefore y = x^2 - 8x + m + 16$$

이 그래프가 직선 $y=2x+3$ 에 접하므로 이차방정식 $x^2-8x+m+16=2x+3$, 즉 $x^2-10x+m+13=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-5)^2-(m+13)=0 \quad \therefore m=12$$

0447 답 6

중심이 점 $(0, -3)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 원의 방정식은 $x^2+(y+3)^2=10$ i

이 원을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-5+3)^2=10 \quad \therefore (x+1)^2+(y-2)^2=10 \quad \dots\dots \text{ii}$$

이 원을 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-x-2)^2+(-y+1)^2=10 \quad \therefore (x+2)^2+(y-1)^2=10 \quad \dots\dots \text{iii}$$

$y=0$ 을 대입하면 $(x+2)^2=9$

$$x+2=\pm 3 \quad \therefore x=-5 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 원이 x 축과 만나는 두 점의 좌표는 $(-5, 0), (1, 0)$ 이므로 두 점 사이의 거리는

$$|1-(-5)|=6 \quad \dots\dots \text{iv}$$

채점 기준

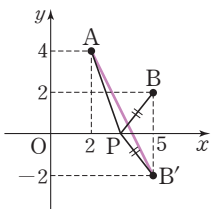
i 원의 방정식 구하기	20%
ii 평행이동한 원의 방정식 구하기	20%
iii 대칭이동한 원의 방정식 구하기	20%
iv 두 점 사이의 거리 구하기	40%

0448 답 $3\sqrt{5}$

점 $B(5, 2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면 $B'(5, -2)$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AP}+\overline{BP} &= \overline{AP}+\overline{B'P} \\ &\geq \overline{AB'} \\ &= \sqrt{3^2+(-6)^2}=3\sqrt{5} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $3\sqrt{5}$ 이다.

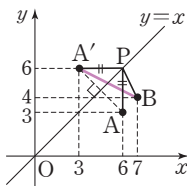


0449 답 ④

점 $A(6, 3)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AP}+\overline{BP} &= \overline{A'P}+\overline{BP} \\ &\geq \overline{A'B} \\ &= \sqrt{4^2+(-2)^2}=2\sqrt{5} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{5}$ 이다.



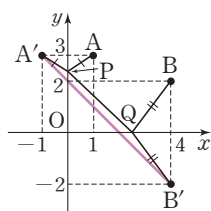
0450 답 $5\sqrt{2}$

점 A 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면

$$A'(-1, 3) \quad \dots\dots \text{i}$$

점 B 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면

$$B'(4, -2) \quad \dots\dots \text{ii}$$



$$\begin{aligned} \therefore \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB} &= \overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'} \\ &\geq \overline{A'B'} \\ &= \sqrt{5^2+(-5)^2}=5\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{2}$ 이다. iii

채점 기준

i 점 A 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표 구하기	20%
ii 점 B 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표 구하기	20%
iii $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 의 최솟값 구하기	60%

0451 답 ①

점 $A(0, -5)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(0, 5)$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AQ}+\overline{QP} &= \overline{A'Q}+\overline{QP} \\ &\geq \overline{A'P} \end{aligned}$$

즉, $\overline{AQ}+\overline{QP}$ 의 최솟값은 $\overline{A'P}$ 의 길이의 최솟값과 같고, 이때 $\overline{A'P}$ 의 길이의 최솟값은 원 밖의 점 A' 과 원 위의 점 P 사이의 거리의 최솟값이다.

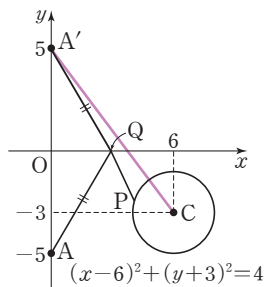
원의 중심을 $C(6, -3)$ 이라 하면

$$\overline{A'C}=\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$$

원의 반지름의 길이가 2이므로 $\overline{A'P}$ 의 길이의 최솟값은

$$10-2=8$$

따라서 $\overline{AQ}+\overline{QP} \geq 8$ 이므로 구하는 최솟값은 8이다.



0452 답 ④

점 $A(2, 3)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면

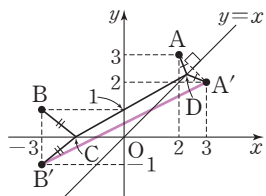
$$A'(3, 2)$$

점 $B(-3, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면

$$B'(-3, -1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AD}+\overline{CD}+\overline{BC} &= \overline{A'D}+\overline{CD}+\overline{B'C} \\ &\geq \overline{A'B'} \\ &= \sqrt{(-6)^2+(-3)^2}=3\sqrt{5} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $3\sqrt{5}$ 이다.



0453 답 $2\sqrt{10}$

점 A 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면

$$A'(-2, 4)$$

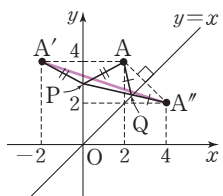
점 A 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A'' 이라 하면

$$A''(4, 2)$$

삼각형 APQ 의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QA} &= \overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QA''} \\ &\geq \overline{A'A''} \\ &= \sqrt{6^2+(-2)^2}=2\sqrt{10} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{10}$ 이다.



0454 **답** ③

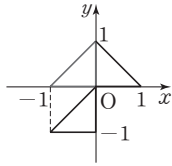
방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 y 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(-x, y)=0$$

방정식 $f(-x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(-x, y+1)=0$$

따라서 방정식 $f(-x, y+1)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 y 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 ③이다.



0455 **답** ⑤

방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(y, x)=0$$

방정식 $f(y, x)=0$ 이 나타내는 도형을 y 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

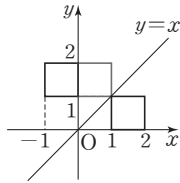
$$f(y, -x)=0$$

따라서 방정식 $f(y, -x)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ⑤이다.

다른 풀이

방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(x, -y)=0$

방정식 $f(x, -y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, -x)=0$

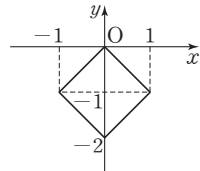


0456 **답** ③

ㄱ. 방정식 $f(x-1, y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 [그림 2]와 같다.

ㄴ. 방정식 $f(-x+1, -y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 [그림 2]와 같다.

ㄷ. 방정식 $f(y+1, x)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 보기에서 [그림 2]와 같은 도형을 나타내는 방정식인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

참고 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형은 x 축, y 축, 원점, 직선 $y=x$ 에 대하여 각각 대칭이동하여도 처음 도형과 일치한다.

0457 **답** ④

두 점 $(2a-1, -4)$, $(3, b+1)$ 을 이은 선분의 중점의 좌표가 $(4, -5)$ 이므로

$$\frac{2a-1+3}{2}=4, \frac{-4+b+1}{2}=-5$$

$$\therefore a=3, b=-7 \quad \therefore a+b=-4$$

0458 **답** 1

$$x^2+y^2-4x-6y+4=0 \text{에서 } (x-2)^2+(y-3)^2=9$$

이 원의 중심의 좌표는 $(2, 3)$

$$x^2+y^2+8x+14y+56=0 \text{에서 } (x+4)^2+(y+7)^2=9$$

이 원의 중심의 좌표는 $(-4, -7)$

..... ①

따라서 점 (a, b) 는 두 점 $(2, 3)$, $(-4, -7)$ 을 이은 선분의 중점

$$a=\frac{2-4}{2}=-1, b=\frac{3-7}{2}=-2$$

$$\therefore a-b=1$$

..... ②

채점 기준

① 처음 원과 대칭이동한 원의 중심의 좌표 구하기

40 %

② $a-b$ 의 값 구하기

60 %

0459 **답** ①

원 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 의 중심 $(1, 2)$ 를 점 $(-1, 5)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b) 라 하면 두 점 $(1, 2)$, (a, b) 를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(-1, 5)$ 이므로

$$\frac{1+a}{2}=-1, \frac{2+b}{2}=5 \quad \therefore a=-3, b=8$$

즉, 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 $(-3, 8)$ 이고 반지름의 길이가 2 이므로 원의 방정식은

$$(x+3)^2+(y-8)^2=4$$

따라서 이 원 위에 있는 점은 ①이다.

0460 **답** -4

포물선 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 2)$

포물선 $y=-x^2-6x+a=-(x+3)^2+a+9$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(-3, a+9)$

따라서 점 $(b, 4)$ 는 두 점 $(1, 2)$, $(-3, a+9)$ 를 이은 선분의 중점

$$\frac{1-3}{2}=b, \frac{2+a+9}{2}=4 \quad \therefore a=-3, b=-1$$

$$\therefore a+b=-4$$

0461 **답** ④

직선 $y=2x+3$ 위의 점 (x, y) 를 점 $(-2, 4)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (x', y') 이라 하면 두 점 (x, y) , (x', y') 을 이은 선분의 중점의 좌표가 $(-2, 4)$ 이므로

$$\frac{x+x'}{2}=-2, \frac{y+y'}{2}=4 \quad \therefore x=-x'-4, y=-y'+8$$

점 (x, y) 는 직선 $y=2x+3$ 위의 점이므로

$$-y'+8=2(-x'-4)+3 \quad \therefore y'=2x'+13$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=2x+13$$

0462 **답** ①

두 점 $(-3, 1)$, (a, b) 를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+a}{2}, \frac{1+b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $x-y-2=0$ 위에 있으므로

$$\frac{-3+a}{2}-\frac{1+b}{2}-2=0 \quad \therefore a-b=8 \quad \dots\dots ①$$

두 점 $(-3, 1)$, (a, b) 를 지나는 직선과 직선 $x-y-2=0$, 즉 $y=x-2$ 가 서로 수직이므로

$$\frac{b-1}{a+3} \times 1 = -1 \quad \therefore a+b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-5$

$$\therefore ab=-15$$

0463 답 ⑤

$$x^2+y^2-2x+6y+9=0 \text{에서 } (x-1)^2+(y+3)^2=1$$

이 원의 중심의 좌표는 $(1, -3)$

$$x^2+y^2-8x+15=0 \text{에서 } (x-4)^2+y^2=1$$

이 원의 중심의 좌표는 $(4, 0)$

두 점 $(1, -3)$, $(4, 0)$ 을 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+4}{2}, \frac{-3+0}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

이 점이 직선 $ax+by-1=0$ 위에 있으므로

$$\frac{5}{2}a - \frac{3}{2}b - 1 = 0 \quad \therefore 5a - 3b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

두 점 $(1, -3)$, $(4, 0)$ 을 지나는 직선과 직선 $ax+by-1=0$, 즉

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{1}{b} \text{이 서로 수직이므로}$$

$$\frac{3}{4-1} \times \left(-\frac{a}{b}\right) = -1 \quad \therefore a=b \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{B}$, $\textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$

$$\therefore a+b=2$$

0464 답 6

직선 $y=3x+a$ 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 를 직선 $y=x-1$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하자.

$$\text{선분 } PP' \text{의 중점의 좌표는 } \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=x-1$ 위의 점이므로

$$\frac{y+y'}{2} = \frac{x+x'}{2} - 1$$

$$\therefore x-y = -x'+y'+2 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

직선 PP' 과 직선 $y=x-1$ 이 서로 수직이므로

$$\frac{y'-y}{x'-x} \times 1 = -1$$

$$\therefore x+y = x'+y' \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$\textcircled{i}$, $\textcircled{ii}$ 을 연립하여 x, y 에 대하여 풀면

$$x=y'+1, y=x'-1$$

점 $P(x, y)$ 는 직선 $y=3x+a$ 위의 점이므로

$$x'-1=3(y'+1)+a \quad \therefore x'-3y'-a-4=0$$

따라서 직선 $y=3x+a$ 를 직선 $y=x-1$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$x-3y-a-4=0 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

이 직선이 직선 $x-by-6=0$ 과 일치하므로

$$-3=-b, -a-4=-6 \quad \therefore a=2, b=3$$

$$\therefore ab=6 \quad \dots\dots \textcircled{iv}$$

채점 기준

① 중점 조건을 이용하여 식 세우기	30%
② 수직 조건을 이용하여 식 세우기	30%
③ 대칭이동한 직선의 방정식 구하기	30%
④ ab 의 값 구하기	10%

0465 답 76

원 C_2 의 중심의 좌표를 (a, b) 라 하면 두 원 C_1, C_2 의 중심

$(3, -1)$, (a, b) 를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $2x-y+3=0$ 위에 있으므로

$$3+a - \frac{-1+b}{2} + 3 = 0 \quad \therefore 2a-b=-13 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

두 점 $(3, -1)$, (a, b) 를 지나는 직선과 직선 $2x-y+3=0$, 즉

$y=2x+3$ 이 서로 수직이므로

$$\frac{b+1}{a-3} \times 2 = -1 \quad \therefore a+2b=1 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=3$

이때 두 원 C_1, C_2 의 중심 $(3, -1)$, $(-5, 3)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(-8)^2+4^2}=4\sqrt{5}$$

두 원의 반지름의 길이는 모두 1이므로

$$M=4\sqrt{5}+(1+1)=4\sqrt{5}+2, m=4\sqrt{5}-(1+1)=4\sqrt{5}-2$$

$$\therefore Mm=76$$

만렙 Note

서로 만나지 않는 두 원 C_1, C_2 에서 원 C_1

위의 한 점 P와 원 C_2 위의 한 점 Q에 대

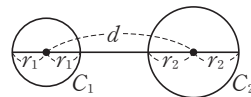
하여 두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이를 각각

r_1, r_2 라 하고, 중심 사이의 거리를 d 라 하

면 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값과 최솟값은

(1) 최댓값 $\Rightarrow d+(r_1+r_2)$

(2) 최솟값 $\Rightarrow d-(r_1+r_2)$



AB 유형 점검

74~76쪽

0466 답 ⑤

점 $(2, k)$ 가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$$(2-4, k+3) \quad \therefore (-2, k+3)$$

이 점이 직선 $y=-x+6$ 위의 점이므로

$$k+3=2+6 \quad \therefore k=5$$

0467 답 ③

점 (a, b) 를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(a+4, b+3)$ $\dots\dots \textcircled{A}$

점 (c, d) 를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(c-1, d-3)$ $\dots\dots \textcircled{B}$

$\textcircled{A}$ 과 $\textcircled{B}$ 이 일치하므로

$$a+4=c-1, b+3=d-3 \quad \therefore a-c=-5, b-d=-6$$

$$\therefore a-b-c+d=(a-c)-(b-d)=-5-(-6)=1$$

0468 답 -3

직선 $3x+y-1=0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$3(x-a)+(y-b)-1=0 \quad \therefore 3x+y-3a-b-1=0$$

이 직선이 원래의 직선과 일치하므로

$$-1=-3a-b-1, b=-3a \quad \therefore \frac{b}{a}=-3$$

0469 답 0

$x^2+y^2-4x-2y-4=0$ 에서 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$
 이 원을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한
 원의 방정식은
 $(x-a-2)^2+(y-b-1)^2=9$
 이 원의 중심의 좌표는 $(a+2, b+1)$ 이고 반지름의 길이는 3이다.
 즉, $r=3$ 이고, 점 $(a+2, b+1)$ 과 원점이 일치하므로
 $a+2=0, b+1=0 \quad \therefore a=-2, b=-1$
 $\therefore a+b+r=0$

다른 풀이

원 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ 의 중심의 좌표는 $(2, 1)$ 이므로 이 점이
 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는
 $(2+a, 1+b)$
 이 점이 원점과 일치하므로
 $2+a=0, 1+b=0 \quad \therefore a=-2, b=-1$
 원은 평행이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않으므로
 $r=3$
 $\therefore a+b+r=0$

0470 답 ③

원 $x^2+(y-1)^2=9$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만
 큼 평행이동한 원 C 의 방정식은
 $(x-m)^2+(y-n-1)^2=9$
 $\therefore (x-m)^2+\{y-(n+1)\}^2=9$
 ㄴ. 원 C 가 x 축에 접하려면
 $|n+1|=3, n+1=\pm 3 \quad \therefore n=-4$ 또는 $n=2$
 따라서 실수 n 의 값은 2개이다.
 ㄷ. $m \neq 0$ 일 때, 직선 $y=\frac{n+1}{m}x$ 는 원 C 의 중심 $(m, n+1)$ 을 지
 나므로 원의 넓이를 이등분한다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0471 답 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

포물선 $y=x^2-4x=(x-2)^2-4$ 의 꼭짓점의 좌표는
 $(2, -4)$
 포물선 $y=x^2-6x+6=(x-3)^2-3$ 의 꼭짓점의 좌표는
 $(3, -3)$
 점 $(2, -4)$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행
 이동한 점의 좌표를 $(3, -3)$ 이라 하면
 $2+m=3, -4+n=-3 \quad \therefore m=1, n=1$
 즉, 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만
 큼 평행이동하는 것이다.
 직선 $l: 2x-y=0$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼
 평행이동한 직선 l' 의 방정식은
 $2(x-1)-(y-1)=0 \quad \therefore 2x-y-1=0$
 평행한 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 점 $(0, 0)$ 과 직선 l' ,
 즉 $2x-y-1=0$ 사이의 거리와 같으므로
 $\frac{|-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

0472 답 ⑤

직선 $3x+4y-12=0$ 이 x 축, y 축과 만나는 점은 각각
 $A(4, 0), B(0, 3)$
 점 P 는 선분 AB 를 2 : 1로 내분하는 점이므로
 $P\left(\frac{2 \times 0 + 1 \times 4}{2+1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times 0}{2+1}\right) \quad \therefore P\left(\frac{4}{3}, 2\right)$
 점 P 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $Q\left(\frac{4}{3}, -2\right)$
 점 P 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점은 $R\left(-\frac{4}{3}, 2\right)$
 따라서 삼각형 RQP 의 무게중심의 좌표는
 $\left(\frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right), \frac{2-2+2}{3}\right) \quad \therefore \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{3}\right)$
 즉, $a=\frac{4}{9}, b=\frac{2}{3}$ 이므로
 $a+b=\frac{10}{9}$

0473 답 7

직선 $x+3y-1=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $x-3y-1=0$
 이 직선을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $y-3x-1=0 \quad \therefore y=3x+1$
 이 직선이 점 $(2, p)$ 를 지나므로
 $p=6+1=7$

0474 답 -2

원 $x^2+y^2-2x+2ay-6=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의
 방정식은
 $x^2+y^2+2ax-2y-6=0 \quad \therefore (x+a)^2+(y-1)^2=a^2+7$
 이 원의 중심의 좌표는 $(-a, 1)$ ㉠
 포물선 $y=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$ 의 꼭짓점의 좌표는
 $(2, 1)$ ㉡
 ㉠과 ㉡이 일치하므로
 $-a=2 \quad \therefore a=-2$

0475 답 -2

포물선 $y=-x^2+2x+1$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방
 정식은
 $-y=-x^2-2x+1 \quad \therefore y=x^2+2x-1$
 이 포물선이 직선 $y=kx-5$ 에 접하므로 이차방정식
 $x^2+2x-1=kx-5$, 즉 $x^2+(2-k)x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D=(2-k)^2-4 \times 4=0$
 $(2-k)^2=16, 2-k=\pm 4 \quad \therefore k=-2$ 또는 $k=6$
 따라서 음수 k 의 값은 -2이다.

0476 답 ④

점 $A(-3, 4)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점은
 $B(4, -3)$
 점 $B(4, -3)$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평
 행이동한 점은
 $C(4+2, -3+k) \quad \therefore C(6, -3+k)$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{-3-4}{4+3} = \frac{-3+k+3}{6-4}$$

$$-1 = \frac{k}{2} \quad \therefore k = -2$$

0477 답 (3, 3)

점 A(4, 1)을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

$$A'(1, 4)$$

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{A'B}$$

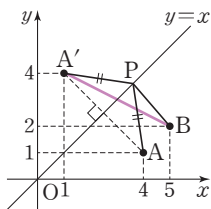
즉, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최솟값을 갖는 점 P는 직선 A'B와 직선 $y=x$ 의 교점이다.

직선 A'B의 방정식은

$$y-4 = \frac{2-4}{5-1}(x-1) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} = x \text{에서 } \frac{3}{2}x = \frac{9}{2} \quad \therefore x = 3$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 (3, 3)이다.



0478 답 ②

방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(x, -y)=0$$

방정식 $f(x, -y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x+1, -(y-2))=0 \quad \therefore f(x+1, 2-y)=0$$

따라서 방정식 $f(x+1, 2-y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식

$f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 ②이다.

0479 답 ③

선분 PQ의 중점의 좌표가 (3, -2)이므로

$$\frac{2+b}{2}=3, \frac{a-3}{2}=-2 \quad \therefore a=-1, b=4$$

따라서 P(2, -1), Q(4, -3)이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

0480 답 ①

두 점 (-4, 2), (12, -2)를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+12}{2}, \frac{2-2}{2}\right) \quad \therefore (4, 0)$$

이 점이 직선 $y=mx+n$ 위에 있으므로

$$0=4m+n \quad \therefore n=-4m \quad \dots\dots ㉠$$

두 점 (-4, 2), (12, -2)를 지나는 직선과 직선 $y=mx+n$ 이 서로 수직이므로

$$\frac{-2-2}{12+4} \times m = -1 \quad \therefore m=4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $n=-16$

$$\therefore m+n=-12$$

0481 답 4

직선 $y=-2x+1$ 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 를 직선 $y=x+1$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하자.

$$\text{선분 PP'의 중점의 좌표는 } \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로

$$\frac{y+y'}{2} = \frac{x+x'}{2} + 1 \quad \therefore x-y = -x'+y'-2 \quad \dots\dots ㉠$$

직선 PP'과 직선 $y=x+1$ 이 서로 수직이므로

$$\frac{y'-y}{x'-x} \times 1 = -1 \quad \therefore x+y = x'+y' \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 x, y 에 대하여 풀면

$$x=y'-1, y=x'+1$$

점 $P(x, y)$ 는 직선 $y=-2x+1$ 위의 점이므로

$$x'+1 = -2(y'-1)+1 \quad \therefore x'+2y'-2=0$$

따라서 직선 $y=-2x+1$ 을 직선 $y=x+1$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$x+2y-2=0$$

이 직선이 $x+ay+b=0$ 과 일치하므로

$$a=2, b=-2$$

$$\therefore a-b=4$$

0482 답 4

직선 $y=-2x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y=-2(x-a) \quad \therefore 2x+y-2a=0 \quad \dots\dots ㉠ \quad \dots\dots ㉢$

원 $(x-3)^2+(y-1)^2=5$ 의 중심의 좌표가 (3, 1)이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 직선 ㉠이 이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|6+1-2a|}{\sqrt{2^2+1^2}} < \sqrt{5}$$

$$|7-2a| < 5, -5 < 7-2a < 5$$

$$-12 < -2a < -2$$

$$\therefore 1 < a < 6 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{따라서 정수 } a \text{는 } 2, 3, 4, 5 \text{의 } 4 \text{개이다.} \quad \dots\dots ㉢$$

채점 기준

㉠ 평행이동한 직선의 방정식 구하기	40 %
㉡ a 의 값의 범위 구하기	50 %
㉢ 정수 a 의 개수 구하기	10 %

0483 답 14

포물선 $y=x^2-4x+2$ 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -9만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y+9=(x-1)^2-4(x-1)+2$$

$$\therefore y=x^2-6x-2 \quad \dots\dots ㉠$$

이 포물선을 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y=x^2+6x-2 \quad \dots\dots ㉡$$

이 포물선이 점 (2, a)를 지나므로

$$a=4+12-2=14 \quad \dots\dots ㉢$$

채점 기준

㉠ 평행이동한 포물선의 방정식 구하기	40 %
㉡ 대칭이동한 포물선의 방정식 구하기	40 %
㉢ a 의 값 구하기	20 %

0484 답 26

점 A(2, 3)을 직선 $y=x-1$ 에 대하여 대칭 이동한 점을 $A'(a, b)$ 라 하자.

선분 AA'의 중점의 좌표는 $(\frac{a+2}{2}, \frac{b+3}{2})$

이 점이 직선 $y=x-1$ 위의 점이므로

$$\frac{b+3}{2} = \frac{a+2}{2} - 1 \quad \therefore a-b=3 \quad \text{..... ㉠}$$

직선 AA'과 직선 $y=x-1$ 이 서로 수직이므로

$$\frac{b-3}{a-2} \times 1 = -1 \quad \therefore a+b=5 \quad \text{..... ㉡}$$

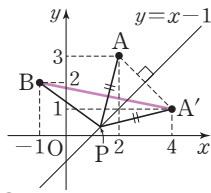
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4, b=1$

$$\therefore A'(4, 1) \quad \text{..... i}$$

$$\therefore \overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{A'B} = \sqrt{(-5)^2 + 1^2} = \sqrt{26}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{26}$ 이다. ii



채점 기준

i 점 A를 직선 $y=x-1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표 구하기	50 %
ii $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값 구하기	50 %

C 실력 향상

77쪽

0485 답 12

원 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 원 C' 의 방정식은

$$(x-a-1)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

두 원 C, C'의 중심을 각각 C, C'이라 하면

$$C(1, 0), C'(a+1, b)$$

(나)에서 직선 $4x-3y+21=0$ 은 원 C에 접하므로 점 C(1, 0)과 직선 $4x-3y+21=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 r 와 같다.

$$\therefore r = \frac{|4+21|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 5$$

따라서 원 C'의 방정식은 $(x-a-1)^2 + (y-b)^2 = 25$

(다)에서 이 원은 점 C(1, 0)을 지나므로

$$(1-a-1)^2 + (-b)^2 = 25 \quad \therefore a^2 + b^2 = 25 \quad \text{..... ㉠}$$

오른쪽 그림과 같이 두 점 C, C'에서 직선 $4x-3y+21=0$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면 사각형 CC'H'H는 정사각형이다.

직선 CC'은 직선 $4x-3y+21=0$, 즉

$$y = \frac{4}{3}x + 7 \text{에 평행하므로}$$

$$\frac{b}{(a+1)-1} = \frac{4}{3} \quad \therefore a = \frac{3}{4}b$$

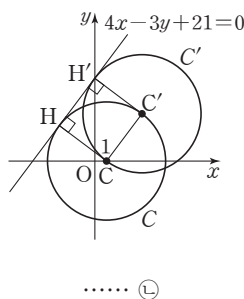
㉠을 ㉠에 대입하면

$$\left(\frac{3}{4}b\right)^2 + b^2 = 25, b^2 = 16 \quad \therefore b = \pm 4$$

그런데 $b > 0$ 이므로 $b=4$

이를 ㉠에 대입하면 $a=3$

$$\therefore a+b+r=12$$



0486 답 5

주어진 규칙에 따라 옮겨지는 점의 좌표를 차례대로 구해 보면

$$A_1(3, 2), B_1(-3, -2)$$

$$A_2(-2, -3), B_2(2, 3)$$

$$A_3(3, 2), B_3(-3, -2)$$

$$A_4(-2, -3), B_4(2, 3)$$

⋮

$$\text{즉, } n \text{이 홀수일 때, } A_n(3, 2), B_n(-3, -2)$$

$$n \text{이 짝수일 때, } A_n(-2, -3), B_n(2, 3)$$

따라서 $A_{35}(3, 2), B_{30}(2, 3)$ 이므로

$$\alpha=3, \beta=2 \quad \therefore \alpha+\beta=5$$

0487 답 3

원 C_1 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원을 C_1' , 원 C_2 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원을 C_2' 이라 하면

$$C_1': (x-8)^2 + (y+2)^2 = 4, C_2': (x+4)^2 + (y-3)^2 = 4$$

점 A를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A', 점 B를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 두 점 A', B'은 각각 두 원 C_1' , C_2' 위의 점이고

$$\overline{AP} = \overline{A'P}, \overline{BQ} = \overline{B'Q}$$

두 원 C_1' , C_2' 의 중심을 각각 C_1' , C_2' 이라 하면 오른쪽 그림과 같이

두 점 A', B'이 모두 직선 $C_1'C_2'$

위에 있을 때 두 점 A', B' 사이의

거리는 최소가 된다.

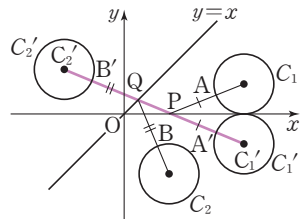
$$C_1'(8, -2), C_2'(-4, 3) \text{이므로}$$

$$\overline{C_1'C_2'} = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = 13$$

두 원의 반지름의 길이가 모두 2이므로

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'}$$

$$\geq \overline{A'B'} = \overline{C_1'C_2'} - (2+2) = 13-4=9$$



0488 답 3√2

오른쪽 그림과 같이 점 R을 변 OA에 대

하여 대칭이동한 점을 R1, 변 OB에 대

하여 대칭이동한 점을 R2라 하면

$$\overline{RP} = \overline{R_1P}, \overline{QR} = \overline{QR_2} \text{이므로}$$

$$(\triangle PQR \text{의 둘레의 길이})$$

$$= \overline{RP} + \overline{PQ} + \overline{QR}$$

$$= \overline{R_1P} + \overline{PQ} + \overline{QR_2}$$

$$\geq \overline{R_1R_2} \quad \text{..... ㉠}$$

이때 $\angle R_1OA = \angle ROA, \angle R_2OB = \angle ROB$ 이므로

$$\angle R_1OA + \angle R_2OB = \angle ROA + \angle ROB = \angle AOB = 45^\circ$$

$$\therefore \angle R_1OR_2 = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

또 $\overline{OR} = \overline{OR_1}, \overline{OR} = \overline{OR_2}$ 이고, $\overline{OR} = 3$ 이므로

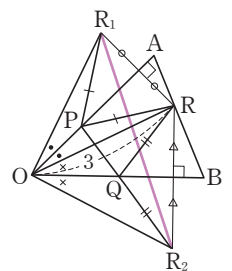
$$\overline{OR_1} = \overline{OR_2} = 3$$

$\triangle R_1OR_2$ 가 직각삼각형이므로

$$\overline{R_1R_2}^2 = \overline{OR_1}^2 + \overline{OR_2}^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \quad \therefore \overline{R_1R_2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 ㉠에서 삼각형 PQR의 둘레의 길이의 최솟값은 $\overline{R_1R_2}$ 의 길이

와 같으므로 $3\sqrt{2}$ 이다.



05 / 집합의 뜻과 집합 사이의 포함 관계

A 개념 확인

80~83쪽

0489 답 ○

0490 답 ×

0491 답 ×

0492 답 ○

0493 답 ×

0494 답 ○

0495 답 1, 2, 3, 4, 6, 12

0496 답 1, 3, 5, 7, 9

0497 답 ∉

0은 10의 양의 약수가 아니므로 $0 \notin A$

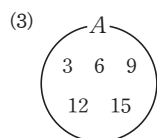
0498 답 ∈

2는 10의 양의 약수이므로 $2 \in A$

0499 답 ∈

5는 10의 양의 약수이므로 $5 \in A$

0500 답 ∉

6은 10의 양의 약수가 아니므로 $6 \notin A$ 0501 답 (1) $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ (2) 예 $A = \{x | x \text{는 } 15 \text{ 이하의 } 3 \text{의 양의 배수}\}$ 

0502 답 무

0503 답 유

0504 답 유, 공

원소가 하나도 없으므로 공집합이고 유한집합이다.

0505 답 무

1 이하의 정수는 1, 0, -1, -2, ...이므로 무한집합이다.

0506 답 4

0507 답 20

0508 답 0

 $x^2 + 1 = 0$ 을 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않으므로 $n(A) = 0$

0509 답 5

 $x^2 - 4 \leq 0$ 에서 $(x+2)(x-2) \leq 0$ $\therefore -2 \leq x \leq 2$ 따라서 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ 이므로 $n(A) = 5$ 0510 답 $A \subset B$ 0511 답 $A \subset B$ $x^2 = 9$ 에서 $x = \pm 3$ 따라서 $B = \{-3, 3\}$ 이므로 $A \subset B$ 0512 답 $B \subset A$ $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, $B = \{3, 5, 7\}$ 이므로 $B \subset A$ 0513 답 $B \subset A$ $A = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$, $B = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$ 이므로 $B \subset A$ 0514 답 $\emptyset$ 0515 답 $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ 0516 답 $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ 0517 답 $\{1, 2, 3\}$ 0518 답 $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ 0519 답 $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}$ 0520 답 $A \neq B$ $B = \{1, 3\}$ 이므로 $A \neq B$ 0521 답 $A = B$ $A = \{7, 14, 21, 28, \dots\}$ 이므로 $A = B$ 0522 답 $A = B$ $x^2 - 5x + 6 = 0$ 에서 $(x-2)(x-3) = 0$ $\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$ 따라서 $A = \{2, 3\}$ 이므로 $A = B$ 0523 답 $A \neq B$ $x^2 = 1$ 에서 $x = \pm 1$ 따라서 $A = \{-1, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 이므로 $A \neq B$ 0524 답 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}$ 주어진 집합을 원소나열법으로 나타내면 $\{1, 2, 4\}$ 이므로 구하는 진 부분집합은 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}$

0525 **답** $\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\},$
 $\{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\},$
 $\{3, 5, 6\}, \{4, 5, 6\}$

주어진 집합을 원소나열법으로 나타내면 $\{3, 4, 5, 6\}$ 이므로 구하는
진부분집합은

$\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\},$
 $\{5, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{3, 5, 6\}, \{4, 5, 6\}$

0526 **답** 16

$$2^4 = 16$$

0527 **답** 15

$$2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$$

0528 **답** 8

$$2^{4-1} = 2^3 = 8$$

0529 **답** 4

$$2^{4-2} = 2^2 = 4$$

B 유형 완성

84~91쪽

0530 **답** ③

ㄴ, ㄷ. '잘하는', '유명한'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하
게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 보기에서 집합인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

0531 **답** ④

④ '좋은'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으
므로 집합이 아니다.

0532 **답** 2

ㄱ, ㄴ. '많은', '큰'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정
할 수 없으므로 집합이 아니다.

따라서 보기에서 집합인 것은 ㄷ, ㄹ의 2개이다.

0533 **답** ④

집합 A 의 원소는 1, 2, 3, 6, 9, 18이므로

① $1 \in A$ ② $4 \notin A$ ③ $6 \in A$ ④ $9 \in A$ ⑤ $18 \in A$

따라서 옳은 것은 ④이다.

0534 **답** ①

$$x^3 - x^2 - 2x = 0 \text{에서}$$

$$x(x^2 - x - 2) = 0, x(x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 집합 A 의 원소는 -1, 0, 2이므로

① $-2 \notin A$ ② $-1 \in A$ ③ $0 \in A$ ④ $1 \notin A$ ⑤ $2 \in A$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

0535 **답** ④

① $\sqrt{2}$ 는 무리수이므로 $\sqrt{2} \notin Q$

② 3은 정수이고, 정수는 유리수에 포함되므로 $3 \in Q$

③ $\frac{2}{5}$ 는 유리수이고, 유리수는 실수에 포함되므로 $\frac{2}{5} \in R$

④ $\sqrt{3}$ 은 무리수이고, 무리수는 실수에 포함되므로 $\sqrt{3} \in R$

⑤ $1 + \sqrt{2}$ 는 무리수이고, 무리수는 실수에 포함되므로 $1 + \sqrt{2} \in R$
따라서 옳은 것은 ④이다.

0536 **답** ③

① $A = \{1, 2, 4\}$

② $A = \{1, 2, 4, 8\}$

③ $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$

④ $A = \{2, 4, 6, 8, \dots, 16\}$

⑤ $A = \{4, 8, 12, 16, 20\}$

따라서 집합 A 를 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은 ③이다.

0537 **답** ④

①, ②, ③, ⑤ $\{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$

④ $\{1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ④이다.

0538 **답** 24

k 의 값이 될 수 있는 자연수는 21, 22, 23, 24이므로 k 의 최댓값은
24이다.

0539 **답** $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$a \in A, b \in B$ 인 a, b 에 대하여 $a+b$ 의

값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$a \backslash b$	2	4	6
0	2	4	6
1	3	5	7
2	4	6	8

0540 **답** 4

$a \in A, b \in A$ 인 a, b 에 대하여

ab 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같
으므로

$B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$

..... ①

따라서 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$-2 + (-1) + 0 + 1 + 2 + 4 = 4$$

..... ②

채점 기준

① 집합 B 구하기

80 %

② 집합 B 의 모든 원소의 합 구하기

20 %

0541 **답** ②

$x = 2^a \times 3^b$ 에서 a, b 는 자연수이므로 x 는 2와 3을 모두 인수로 갖는다.

① $6 = 2^1 \times 3^1$

② $9 = 3^2$

③ $12 = 2^2 \times 3^1$

④ $18 = 2^1 \times 3^2$

⑤ $24 = 2^3 \times 3^1$

따라서 집합 B 의 원소가 아닌 것은 ②이다.

0542 답 ③

- ① $\{1\} \Rightarrow$ 유한집합
 ② $\{10, 12, 14, 16, \dots, 98\} \Rightarrow$ 유한집합
 ③ $-1 < x < 1$ 인 유리수는 무수히 많으므로 무한집합이다.
 ④ $\emptyset \Rightarrow$ 유한집합
 ⑤ $\{-1, 3\} \Rightarrow$ 유한집합
 따라서 무한집합인 것은 ③이다.

0543 답 ①

- ㄱ. $\emptyset \Rightarrow$ 유한집합
 ㄴ. $\{0\} \Rightarrow$ 유한집합
 ㄷ. $\{4, 8, 12, 16, \dots\} \Rightarrow$ 무한집합
 ㄹ. $\{3, 4, 5, 6, \dots\} \Rightarrow$ 무한집합
 따라서 보기에서 유한집합인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0544 답 ④

- ① 원소가 1개 있으므로 공집합이 아니다.
 ② $\{2\}$ 이므로 공집합이 아니다.
 ③ $\{-1, 0, 1\}$ 이므로 공집합이 아니다.
 ④ $x^2 + 4x + 3 < 0$ 에서 $(x+3)(x+1) < 0$
 $\therefore -3 < x < -1$
 이때 $-3 < x < -1$ 을 만족시키는 자연수 x 는 존재하지 않으므로 공집합이다.
 ⑤ $\{ab \mid 0 \leq ab \leq 1\}$ 은 무한집합이므로 공집합이 아니다.
 따라서 공집합인 것은 ④이다.

공통수학1 다시보기

- $\alpha < \beta$ 일 때
 (1) $(x-\alpha)(x-\beta) > 0 \Rightarrow x < \alpha$ 또는 $x > \beta$
 (2) $(x-\alpha)(x-\beta) < 0 \Rightarrow \alpha < x < \beta$

0545 답 20

$A = \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로 $n(A) = 4$
 $B = \{3, 6, 9, 12, \dots, 48\}$ 이므로 $n(B) = 16$
 $\therefore n(A) + n(B) = 20$

0546 답 ⑤

⑤ $n(\{1, 2, 3\}) - n(\{1, 2\}) = 3 - 2 = 1$

0547 답 ②

$A = \{(0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)\}$ 이므로
 $n(A) = 4$

0548 답 5

$A = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로 $n(A) = 4$
 $B = \{1, 2, 3, 4, \dots, k\}$ 이므로 $n(B) = k$
 이때 $n(A) + n(B) = 9$ 이므로
 $4 + k = 9 \therefore k = 5$

- ①
 ②
 ③

채점 기준

① $n(A)$ 구하기	30 %
② $n(B)$ 구하기	30 %
③ k 의 값 구하기	40 %

0549 답 3

$A = \{i, -1, -i, 1\}$

$z_1 \in A, z_2 \in A$ 인 z_1, z_2 에 대하여 $z_1^2 + z_2^2$ 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$B = \{-2, 0, 2\}$
 $\therefore n(B) = 3$

$z_1 \backslash z_2$	i	-1	$-i$	1
i	-2	0	-2	0
-1	0	2	0	2
$-i$	-2	0	-2	0
1	0	2	0	2

공통수학1 다시보기

복소수 i 에 대하여

$i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$

$\Rightarrow$ 자연수 n 에 대하여 i^n 의 값은 $i, -1, -i, 1$ 이 이 순서대로 반복된다.

0550 답 ②

ㄴ. c 는 집합 A 의 원소가 아니므로 $c \notin A$
 ㄹ. $\{b, c\}$ 는 집합 A 의 원소이므로 $\{b, c\} \in A$
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0551 답 ⑤

$A = \{3, 6, 9, 12\}, B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로
 ⑤ $\{1, 2, 4, 8\} \not\subset B$

0552 답 ④

④ $\emptyset$ 은 집합 A 의 원소이므로 $\{\emptyset\} \subset A$

0553 답 ②

② $\emptyset$ 은 집합 A 의 원소가 아니므로 $\{\emptyset\} \not\subset A$

0554 답 ②

$x \in A, y \in A$ 인 x, y 에 대하여 $x+y, xy$ 의 값을 구하면 각각 다음 표와 같다.

$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

$[x+y]$

$x \backslash y$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

$[xy]$

따라서 $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}, C = \{0, 1, 2, 4\}$ 이므로
 $A \subset C \subset B$

0555 답 $\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{9\}, \{1, 3\}, \{1, 9\}, \{3, 9\}$

$\{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 양의 약수}\} = \{1, 3, 9\}$ 이므로 $\{1, 3, 9\}$ 의 진부분집합을 구하면

$\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{9\}, \{1, 3\}, \{1, 9\}, \{3, 9\}$

0556 답 ④

$B = \{-1, 1\}$, $C = \{-1, 0, 1\}$ 이므로
 $B \subset C \subset A$

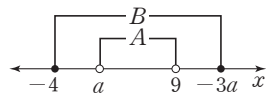
0557 답 ②

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이므로 $A = B$

- ① $B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ 이므로 $A \neq B$
 ② $B = \{1, 2, 3, 4\}$ 이므로 $A = B$
 ③ $A = \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로 $A \neq B$
 ④ $A = \{0, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 이므로 $A \neq B$
 ⑤ $A = \{1, 2, 3, 6\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$ 이므로 $A \neq B$
 따라서 $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 인 것은 ②이다.

0558 답 $-4 \leq a \leq -3$

$A \subset B$ 가 성립하도록 두 집합 A, B 를
 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과
 같으므로



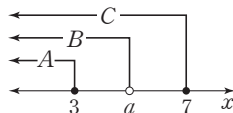
$$\begin{aligned} -4 \leq a, 9 \leq -3a \\ 9 \leq -3a \text{에서 } a \leq -3 \text{이므로} \\ -4 \leq a \leq -3 \end{aligned}$$

0559 답 10

$A = \{2, a\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 가 성립하려면
 $a = 1$ 또는 $a = 3$ 또는 $a = 6$
 따라서 모든 자연수 a 의 값의 합은
 $1 + 3 + 6 = 10$

0560 답 ②

$A \subset B \subset C$ 가 성립하도록 세 집합 $A, B,$
 C 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림
 과 같으므로



$$\begin{aligned} 3 < a \leq 7 \\ \text{따라서 정수 } a \text{는 } 4, 5, 6, 7 \text{의 } 4 \text{개이다.} \end{aligned}$$

0561 답 ④

$A \subset B$ 이면 $1 \in A$ 에서 $1 \in B$ 이므로
 $a - 1 = 1$ 또는 $2a - 1 = 1$ $\therefore a = 2$ 또는 $a = 1$
 (i) $a = 1$ 일 때

- $A = \{1, 3\}$, $B = \{0, 1, 4\}$ 이므로 $A \not\subset B$
 (ii) $a = 2$ 일 때
 $A = \{1, 4\}$, $B = \{1, 3, 4\}$ 이므로 $A \subset B$
 (i), (ii)에서 $a = 2$

0562 답 ①

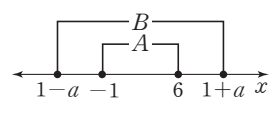
$A \subset B$ 가 성립하려면 $8 \in A$ 에서 $8 \in B$ 이므로
 $a^2 - 2a = 8$, $a^2 - 2a - 8 = 0$
 $(a + 2)(a - 4) = 0$
 $\therefore a = -2$ 또는 $a = 4$

- (i) $a = -2$ 일 때
 $A = \{-1, 8\}$, $B = \{-1, 8, 11\}$ 이므로 $A \subset B$
 (ii) $a = 4$ 일 때
 $A = \{8, 11\}$, $B = \{-1, 8, 11\}$ 이므로 $A \subset B$
 (i), (ii)에서 $a = -2$ 또는 $a = 4$
 따라서 모든 상수 a 의 값의 곱은
 $-2 \times 4 = -8$

0563 답 ②

$x^2 - 5x - 6 \leq 0$ 에서 $(x + 1)(x - 6) \leq 0$
 $\therefore -1 \leq x \leq 6$
 $\therefore A = \{x \mid -1 \leq x \leq 6\}$
 $|x - 1| \leq a$ 에서 $-a \leq x - 1 \leq a$
 $\therefore 1 - a \leq x \leq 1 + a$
 $\therefore B = \{x \mid 1 - a \leq x \leq 1 + a\}$

$A \subset B$ 가 성립하도록 두 집합 A, B
 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림
 과 같으므로



$$\begin{aligned} 1 - a \leq -1, 6 \leq 1 + a \\ \therefore a \geq 5 \\ \text{따라서 양수 } a \text{의 최솟값은 } 5 \text{이다.} \end{aligned}$$

0564 답 5

$A = B$ 이면 $1 \in B$ 에서 $1 \in A$ 이므로
 $a = 1$ 또는 $a + 2 = 1$
 $\therefore a = 1$ 또는 $a = -1$
 그런데 a 는 양수이므로 $a = 1$
 $\therefore A = \{1, 3, 6, 9\}$
 또 $A = B$ 이면 $3 \in A$ 에서 $3 \in B$ 이므로
 $b - 1 = 3$ $\therefore b = 4$
 $\therefore a + b = 5$

0565 답 ②

$A = B$ 이면 $2 \in A$, $4 \in B$ 에서 $2 \in B$, $4 \in A$
 $\therefore a = 4$, $b = 2$
 $\therefore a \times b = 8$

0566 답 100

$A = B$ 이면 $b \in B$, $4 \in B$ 에서 $b \in A$, $4 \in A$
 따라서 b , 4 는 이차방정식 $x^2 + x + a = 0$ 의 두 근이다.
 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $b + 4 = -1$, $b \times 4 = a$
 $\therefore a = -20$, $b = -5$
 $\therefore ab = 100$

- ①
 ②
 ③

채점 기준

① 집합 B 의 원소가 집합 A 의 이차방정식의 두 근임을 알기	40 %
② a , b 의 값 구하기	40 %
③ ab 의 값 구하기	20 %

0567 [답] -1

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이므로 $A=B$

$6 \in B$ 에서 $6 \in A$ 이므로

$$a^2 - 2a + 3 = 6, a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a+1)(a-3)=0 \quad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=3$$

(i) $a=-1$ 일 때

$$A=\{2, 6, 9\}, B=\{2, 6, 9\} \text{이므로 } A=B$$

(ii) $a=3$ 일 때

$$A=\{2, 6, 9\}, B=\{-7, 6, 10\} \text{이므로 } A \neq B$$

(i), (ii)에서 $a=-1$

0568 [답] ④

$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ 이므로 $n(A)=9$

따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는

$$2^9=512$$

0569 [답] ⑤

$A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 이므로 $n(A)=6$

따라서 집합 A 의 진부분집합의 개수는

$$2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$$

0570 [답] ④

두 집합 A, B 의 원소의 개수를 각각 a, b 라 하면

$$2^a = 128, 2^b - 1 = 255$$

$$2^a = 128 = 2^7 \text{에서 } a=7$$

$$2^b = 256 = 2^8 \text{에서 } b=8$$

$$\therefore n(A) + n(B) = a + b = 15$$

0571 [답] 16

$A=\{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합 중에서 1, 5를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$$2^{6-2} = 2^4 = 16$$

0572 [답] ①

$A=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ 이므로 집합 A 의 진부분집합 중에서 6의 배수인 6, 12를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$$2^{7-2} - 1 = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$$

0573 [답] 8

집합 A 의 부분집합 중에서 a, c 는 반드시 원소로 갖고 e 는 원소로 갖지 않는 부분집합 X 의 개수는

$$2^{6-2-1} = 2^3 = 8$$

0574 [답] 11

$n(A)=k$ 이므로 2, 7은 반드시 원소로 갖고 3, 4, 5는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{k-2-3} = 2^{k-5}$$

따라서 $2^{k-5} = 64 = 2^6$ 이므로

$$k-5=6 \quad \therefore k=11$$

0575 [답] ②

집합 X 의 개수는 집합 B 의 부분집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{5-2} = 2^3 = 8$$

0576 [답] 63

$$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

..... ①

(가), (나)에서 집합 X 의 개수는 집합 A 의 진부분집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같다. ②

따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$$2^{8-2} - 1 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$$

..... ③

채점 기준

① 집합 A 구하기	20 %
② 조건을 만족시키는 집합 X 의 개수의 의미 파악하기	50 %
③ 집합 X 의 개수 구하기	30 %

0577 [답] 9

집합 X 의 개수는 집합 A 의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 6을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{n-4} = 32 = 2^5$$

따라서 $n-4=5$ 이므로 $n=9$

0578 [답] ③

$A=\{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합 중에서 5 또는 8을 원소로 갖는 부분집합은 집합 A 의 부분집합에서 집합 $\{2, 11, 14, 17, 20\}$ 의 부분집합을 제외하면 된다.

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$$2^7 - 2^5 = 128 - 32 = 96$$

0579 [답] 15

$A=\{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합 중에서 소수인 원소만으로 이루어진 부분집합은 집합 $\{2, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합에서 공집합을 제외하면 된다.

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$$2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$$

0580 [답] 56

$A=\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합 중에서 적어도 1개의 홀수를 원소로 갖는 부분집합은 집합 A 의 부분집합에서 집합 $\{10, 20, 30\}$ 의 부분집합을 제외하면 된다.

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$$2^6 - 2^3 = 64 - 8 = 56$$

0581 [답] 44

구하는 부분집합의 개수는 $A=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ 의 부분집합의 개수에서 짝수가 없거나 1개인 부분집합의 개수를 빼면 된다.

(i) 집합 A 의 부분집합의 원소 중에서 짝수가 없는 경우

집합 A 의 부분집합 중에서 2, 4, 10, 20을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-4} = 2^2 = 4$$

(ii) 집합 A 의 부분집합의 원소 중에서 짝수가 1개인 경우

① 집합 A 의 부분집합 중에서 2는 반드시 원소로 갖고 4, 10, 20은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-1-3}=2^2=4$$

② 집합 A 의 부분집합 중에서 4는 반드시 원소로 갖고 2, 10, 20은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-1-3}=2^2=4$$

③ 집합 A 의 부분집합 중에서 10은 반드시 원소로 갖고 2, 4, 20은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-1-3}=2^2=4$$

④ 집합 A 의 부분집합 중에서 20은 반드시 원소로 갖고 2, 4, 10은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-1-3}=2^2=4$$

①~④에서 집합 A 의 부분집합 중에서 짝수가 1개인 부분집합의 개수는

$$4 \times 4 = 16$$

(i), (ii)에서 짝수가 없거나 1개인 부분집합의 개수는

$$4 + 16 = 20$$

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$$2^6 - 20 = 64 - 20 = 44$$

AB 유형 점검

92~94쪽

0582 답 ④

④ ‘못하는’은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

0583 답 ⑤

$A = \{4, 8, 12, 16, 20, \dots\}$, $B = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ 이므로

⑤ $24 \notin B$

0584 답 ③

① $\{1, 2, 4, 8\}$

② $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

③ $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

④ $\{2, 4, 6, 8, \dots, 24\}$

⑤ $\{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$

따라서 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은 ③이다.

0585 답 ①

$x^2 - 2x - 3 < 0$ 에서 $(x+1)(x-3) < 0$

$$\therefore -1 < x < 3$$

$$\therefore A = \{0, 1, 2\}$$

따라서 집합 A 의 모든 원소의 합은

$$0 + 1 + 2 = 3$$

0586 답 $C = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$

$a \in A$, $b \in B$ 인 a , b 에 대하여 ab 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$$C = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$$

$a \backslash b$	1	2
-2	-2	-4
0	0	0
2	2	4

0587 답 ④

ㄱ. $\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\} \Rightarrow$ 유한집합

ㄴ. $0 < x < 1$ 인 실수 x 는 무수히 많으므로 무한집합이다.

ㄷ. $\{101, 103, 105, 107, \dots, 999\} \Rightarrow$ 유한집합

ㄹ. $\{\dots, -2, -1, 1, 2, \dots\} \Rightarrow$ 무한집합

따라서 보기에서 무한집합인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

0588 답 ⑤

⑤ 집합 $\{1, 2, \{3, 4\}\}$ 의 원소는 1, 2, $\{3, 4\}$ 의 3개이므로

$$n(\{1, 2, \{3, 4\}\}) = 3$$

0589 답 8

$x \in A$, $y \in B$ 인 x , y 에 대하여 $x+y$ 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$$X = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

$$a+1, a+3, a+5\}$$

이때 $n(X) = 10$ 이 되려면

$$a+1 = 8 \text{ 또는 } a+1 = 9$$

$$\therefore a = 7 \text{ 또는 } a = 8$$

따라서 자연수 a 의 최댓값은 8이다.

$x \backslash y$	1	3	5
1	2	4	6
2	3	5	7
3	4	6	8
4	5	7	9
a	$a+1$	$a+3$	$a+5$

0590 답 ③

ㄴ. $\{\emptyset\}$ 은 집합 A 의 원소이므로 $\{\emptyset\} \in A$

ㄷ. $\{2, 3\}$ 은 집합 A 의 원소이므로 $\{2, 3\} \in A$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

0591 답 ①

모든 정수는 유리수이고 모든 유리수는 실수이므로

$$Z \subset Q \subset R$$

따라서 포함 관계를 바르게 나타낸 것은 ①이다.

0592 답 4

$$x^2 - 4x - 12 < 0 \text{에서 } (x+2)(x-6) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 6$$

$$\therefore C = \{x \mid -2 < x < 6\}$$

이때 $B = \{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$ 이므로

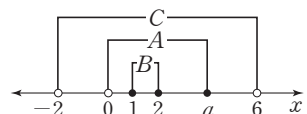
$B \subset A \subset C$ 가 성립하도록 세 집합

A , B , C 를 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore 2 \leq a < 6$$

따라서 구하는 정수 a 는 2, 3, 4, 5의 4개이다.



0593 답 ⑤

$A=B$ 이면 $2 \in B$ 에서 $2 \in A$ 이므로

$$a+2=2 \text{ 또는 } a^2-2=2$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=0 \text{ 또는 } a=2$$

(i) $a=-2$ 일 때

$$A=\{0, 2\}, B=\{2, 8\} \text{이므로 } A \neq B$$

(ii) $a=0$ 일 때

$$A=\{-2, 2\}, B=\{2, 6\} \text{이므로 } A \neq B$$

(iii) $a=2$ 일 때

$$A=\{2, 4\}, B=\{2, 4\} \text{이므로 } A=B$$

(i), (ii), (iii)에서 $a=2$

0594 답 2047

$A=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ 이므로 $n(A)=10$

집합 A 의 부분집합의 개수는

$$2^{10}=1024 \quad \therefore a=1024$$

집합 A 의 진부분집합의 개수는

$$2^{10}-1=1024-1=1023 \quad \therefore b=1023$$

$$\therefore a+b=2047$$

0595 답 ②

집합 A 의 원소의 개수를 n 이라 하면

$$2^n-1=31, 2^n=32=2^5 \quad \therefore n=5$$

즉, $A=\{2, 3, 5, 7, 11\}$ 이어야 하므로

$$11 < k \leq 13$$

$$\therefore k=12 \text{ 또는 } k=13$$

따라서 모든 k 의 값의 합은

$$12+13=25$$

0596 답 ⑤

$A=\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합 중에서 4, 20은 반드시 원소로 갖고 8, 16, 24는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{10-2-3}=2^5=32$$

0597 답 8

$A=\{1, 2, 4\}, B=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 집합 X 의 개수는 집합 B 의 부분집합 중에서 1, 2, 4를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같다.

따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$$2^{6-3}=2^3=8$$

0598 답 56

$A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합 중에서 적어도 1개의 짝수를 원소로 갖는 부분집합은 집합 A 의 부분집합에서 집합 $\{1, 3, 9\}$ 의 부분집합을 제외하면 된다.

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$$2^6-2^3=64-8=56$$

0599 답 4

$n(A)=1$ 이 되려면 이차방정식 $x^2-4x+k=0$ 이 중근을 가져야 한다. ①

이차방정식 $x^2-4x+k=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-k=0$$

$$\therefore k=4$$

..... ②

채점 기준

① 이차방정식이 중근을 가짐을 알기	50 %
② k 의 값 구하기	50 %

공통수학1 다시보기

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D 라 할 때, 이 이차방정식이 중근을 가지면

$$D=b^2-4ac=0$$

0600 답 4

$$x^2-x-6=0 \text{에서}$$

$$(x+2)(x-3)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=3$$

$$\therefore A=\{-2, 3\}$$

..... ①

$A \subset B$ 가 성립하려면 $-2 \in A, 3 \in A$ 에서 $-2 \in B, 3 \in B$

$$\therefore a > 3$$

..... ②

따라서 정수 a 의 최솟값은 4이다.

..... ③

채점 기준

① 집합 A 구하기	30 %
② a 의 값의 범위 구하기	50 %
③ 정수 a 의 최솟값 구하기	20 %

0601 답 57

$B=\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$ 이므로 (가), (나)에서 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중에서 1, 5, 9, 13을 반드시 원소로 갖고 나머지 원소 3, 7, 11, 15, 17, 19 중 2개 이상을 원소로 갖는 집합이다.

..... ①

따라서 구하는 집합 X 의 개수는 집합 $\{3, 7, 11, 15, 17, 19\}$ 의 부분집합의 개수에서 원소의 개수가 1인 부분집합 6개와 공집합을 제외한 것과 같으므로

$$2^6-6-1=64-7=57$$

..... ②

채점 기준

① 집합 X 에 포함되는 원소 찾기	50 %
② 집합 X 의 개수 구하기	50 %

C 실력 향상

95쪽

0602 답 7

조건을 만족시키려면 집합 A 의 원소는 16의 양의 약수이어야 한다. 이때 16의 양의 약수는 1, 2, 4, 8, 16이고, 조건에서 1과 16, 2와 8은 둘 중 하나가 집합 A 의 원소이면 나머지 하나도 집합 A 의 원소이다.

즉, 집합 A 의 원소가 될 수 있는 것은

1, 16 또는 2, 8 또는 4

따라서 구하는 집합 A 의 개수는 집합 $\{1, 2, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$$

0603 답 ③

원소의 합이 25 이상이라면 원소가 3개 이상이어야 한다.

(i) 원소가 3개인 경우

$\{6, 9, 10\}, \{7, 8, 10\}, \{7, 9, 10\}, \{8, 9, 10\}$ 의 4개

(ii) 원소가 4개인 경우

$\{6, 7, 8, 9\}, \{6, 7, 8, 10\}, \{6, 7, 9, 10\}, \{6, 8, 9, 10\},$
 $\{7, 8, 9, 10\}$ 의 5개

(iii) 원소가 5개인 경우

$\{6, 7, 8, 9, 10\}$ 의 1개

(i), (ii), (iii)에서 구하는 부분집합의 개수는

$$4 + 5 + 1 = 10$$

0604 답 ②

(i) 집합 X 가 6을 원소로 갖는 경우

(가)를 만족시키려면 $\{3, 4, 5, 7\}$ 의 부분집합 중에서 공집합을 제외하면 되므로 집합 X 의 개수는

$$2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$$

(ii) 집합 X 가 6을 원소로 갖지 않는 경우

(나)를 만족시키려면 집합 X 는 3, 4를 반드시 원소로 가져야 한다.

즉, 집합 X 의 개수는 집합 A 의 부분집합 중에서 3, 4는 반드시 원소로 갖고 6은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{5-2-1} = 2^2 = 4$$

(i), (ii)에서 구하는 집합 X 의 개수는

$$15 + 4 = 19$$

0605 답 48

집합 A 의 부분집합 중에서 1을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는 $2^{4-1} = 2^3 = 8$ 이므로 집합 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{15}$ 중 1을 원소로 갖는 집합은 8개이다.

같은 방법으로 하면 2, 4, 8을 원소로 갖는 집합은 각각 8개이므로

$$\begin{aligned} f(A_1) \times f(A_2) \times \dots \times f(A_{15}) &= 1^8 \times 2^8 \times 4^8 \times 8^8 \\ &= 1^8 \times 2^8 \times (2^2)^8 \times (2^3)^8 \\ &= 2^8 \times 2^{16} \times 2^{24} \\ &= 2^{8+16+24} \\ &= 2^{48} \end{aligned}$$

$\therefore k = 48$

중2 다시보기

m, n 이 자연수일 때

$$(1) a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(2) (a^m)^n = a^{mn}$$

06 / 집합의 연산

A 개념 확인

96~99쪽

0606 답 $\{2, 4, 5, 8, 10, 12\}$

0607 답 $\{a, b, c, d, e, f\}$

0608 답 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12\}$

$A = \{1, 2, 5, 10\}, B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12\}$$

0609 답 $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$

$A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}, B = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$ 이므로

$$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

0610 답 $\{3, 9\}$

0611 답 $\emptyset$

0612 답 $\{5, 10\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}, B = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$ 이므로

$$A \cap B = \{5, 10\}$$

0613 답 $\{x | 0 \leq x \leq 3\}$

0614 답 $\emptyset$

$A \cap B = \emptyset$ 이므로 서로소이다.

0615 답 $\times$

$A \cap B = \{2\} \neq \emptyset$ 이므로 서로소가 아니다.

0616 답 $\emptyset$

$A \cap B = \emptyset$ 이므로 서로소이다.

0617 답 $\times$

$A = \{3, 6, 9, 12, \dots\}, B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

따라서 $A \cap B = \{3, 6, 12\} \neq \emptyset$ 이므로 서로소가 아니다.

0618 답 $\{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$

0619 답 $\{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$

0620 답 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이므로

$$C^c = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

0621 답 $\emptyset$

$D = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ 이므로 $D^c = \emptyset$

0622 답 $\{a, b, d\}$ 0623 답 $\{2, 4, 6, 8\}$

0624 답 $\{3, 15\}$

$A = \{1, 3, 5, 15\}$, $B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ 이므로

$A - B = \{3, 15\}$

0625 답 $\emptyset$

$A = \{8, 16, 24, 32, \dots\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$ 이므로

$A - B = \emptyset$

0626 답 $\{2, 3, 4, 7, 8\}$

0627 답 $\{1, 2, 6, 8\}$

0628 답 $\{1, 6\}$

0629 답 $\{3, 4, 7\}$

0630 답 $\{2, 8\}$

0631 답 $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$

0632 답 A

0633 답 $\emptyset$

0634 답 U

0635 답 A

0636 답 U

0637 답 $\emptyset$

0638 답 $\{1, 5\}$

$A \cap B^c = A - B = \{1, 5\}$

0639 답 $\{6\}$

$B \cap A^c = B - A = \{6\}$

0640 답 $\{3\}$

$A - B^c = A \cap (B^c)^c = A \cap B = \{3\}$

0641 답 $\{3\}$

$B - A^c = B \cap (A^c)^c = B \cap A = \{3\}$

0642 답 $\{2, 3\}$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = \{2, 3\}$

0643 답 $\{2, 3, 4, 5, 7\}$

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$
 $= \{2, 3, 4, 5, 7\}$

0644 답 $\{2, 4\}$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{2, 4\}$

0645 답 $\{4\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ 이므로

$(A \cup B)^c = \{4\}$

0646 답 $\{4\}$

$A^c = \{2, 4, 6\}$, $B^c = \{4, 5, 7\}$ 이므로

$A^c \cap B^c = \{4\}$

0647 답 $\{2, 4, 5, 6, 7\}$

$A \cap B = \{1, 3\}$ 이므로 $(A \cap B)^c = \{2, 4, 5, 6, 7\}$

0648 답 $\{2, 4, 5, 6, 7\}$

$A^c = \{2, 4, 6\}$, $B^c = \{4, 5, 7\}$ 이므로

$A^c \cup B^c = \{2, 4, 5, 6, 7\}$

0649 답 ㉠ 드모르간 법칙, ㉡ 교환법칙, ㉢ 분배법칙

0650 답 10

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서

$35 = 25 + 20 - n(A \cap B)$

$\therefore n(A \cap B) = 10$

0651 답 23

$n(A^c) = n(U) - n(A) = 50 - 27 = 23$

0652 답 18

$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 30 - 12 = 18$

0653 답 15

$n(A \cap B^c) = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 27 - 12 = 15$

0654 답 38

$n(A^c \cup B^c) = n((A \cap B)^c)$
 $= n(U) - n(A \cap B)$
 $= 50 - 12 = 38$

0655 답 10

$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c)$
 $= n(U) - n(A \cup B)$
 $= n(U) - \{n(A) + n(B) - n(A \cap B)\}$
 $= 45 - (20 + 22 - 7) = 10$

0656 답 43

$n(A \cup B \cup C)$
 $= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A)$
 $\quad + n(A \cap B \cap C)$
 $= 16 + 18 + 21 - 3 - 6 - 5 + 2 = 43$

B 유형 완성

100~109쪽

0657 답 $\{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

$A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$,

$C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ 이므로

$A \cup (B \cap C) = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{1, 2, 3, 6\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

0658 답 ⑤

$C = \{1, 2, 7, 14\}$ 이므로

⑤ $A \cup (B \cap C) = \{2, 4, 6, 7\}$

0659 답 3

$a \in A, b \in A$ 인 a, b 에 대하여 ab 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$B = \{0, 1, 2, 4\}$

$\therefore A \cap B = \{0, 1, 2\}$

따라서 집합 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합은 $0+1+2=3$

$a \backslash b$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

0660 답 ②

④ $\{8, 16, 24, 32, \dots\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

따라서 집합 $\{1, 2, 4, 8\}$ 과 서로소인 집합은 ②이다.

0661 답 ③

③ $A \subset B$ 이므로 $A \cap B \neq \emptyset$

④ $A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$ 이므로 $A \cap B = \emptyset$

⑤ $A = \{-1, 0\}, B = \{1, 2\}$ 이므로 $A \cap B = \emptyset$

따라서 두 집합 A, B 가 서로소가 아닌 것은 ③이다.

0662 답 ②

집합 $A = \{a, b, c, d, e\}$ 의 부분집합 중에서 집합 $B = \{d, e\}$ 와 서로소인 집합은 원소 d, e 를 원소로 갖지 않는 부분집합이다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$2^{5-2} = 2^3 = 8$

0663 답 ④

$U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 12\}, A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로

$A^c = \{5, 7, 8, 9, 10, 11\}$

이때 $B = \{4, 8, 12\}$ 이므로

$A^c - B = \{5, 7, 9, 10, 11\}$

따라서 집합 $A^c - B$ 의 모든 원소의 합은

$5+7+9+10+11=42$

0664 답 ③

$A = \{3, 5, 7, 9\}, B = \{2, 5, 8\}$ 이므로

$A - B = \{3, 7, 9\}$

$\therefore (A - B)^c = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$

따라서 집합 $(A - B)^c$ 의 원소의 개수는 7이다.

0665 답 2

$U = \{x \mid -5 \leq x \leq 5\}$ 이므로

$A^c = \{x \mid -5 \leq x < -2 \text{ 또는 } 3 \leq x \leq 5\}$

$\therefore A^c \cup B = \{x \mid -5 \leq x < -2 \text{ 또는 } 1 < x \leq 5\}$

따라서 집합 $A^c \cup B$ 의 원소 중 정수는 $-5, -4, -3, 2, 3, 4, 5$ 이므로 정수인 모든 원소의 합은

$-5+(-4)+(-3)+2+3+4+5=2$

채점 기준

① 집합 A^c 구하기

40%

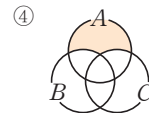
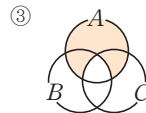
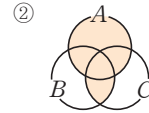
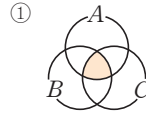
② 집합 $A^c \cup B$ 구하기

40%

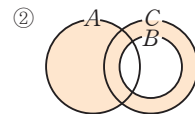
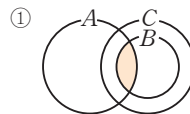
③ 정수인 모든 원소의 합 구하기

20%

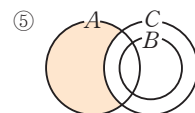
0666 답 ⑤



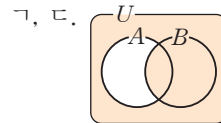
0667 답 ④



③ $(A \cap B) - C = \emptyset$



0668 답 ④

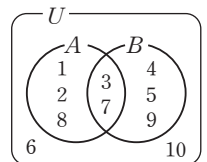


따라서 보기에서 색칠한 부분을 나타내는 집합인 것은 $A \cap B$ 이다.

0669 답 $\{3, 4, 5, 7, 9\}$

$U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ 이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

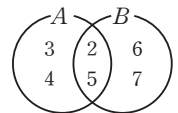
$\therefore B = \{3, 4, 5, 7, 9\}$



0670 답 $\{2, 5, 6, 7\}$

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$B = \{2, 5, 6, 7\}$



0671 답 ④

집합 $(A - B) \cup (B - A)$ 는 오른쪽 벤 다이어그램의 색칠한 부분과 같고,

$A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ 이므로

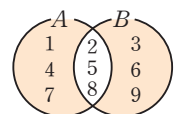
$A - B = \{1, 4, 7\}$

$B - A = \{3, 6, 9\}$

$\therefore B = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$

따라서 집합 B 의 모든 원소의 합은

$2+3+5+6+8+9=33$



0672 답 3

$B - A = \{4\}$ 에서 $2 \in (A \cap B)$ 이므로
 $a^2 - 2a - 1 = 2, a^2 - 2a - 3 = 0$
 $(a+1)(a-3) = 0 \quad \therefore a = -1$ 또는 $a = 3$
 (i) $a = -1$ 일 때
 $A = \{2, 3, 5\}, B = \{-7, 2, 4\}$ 이므로
 $B - A = \{-7, 4\}$
 따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
 (ii) $a = 3$ 일 때
 $A = \{2, 3, 5\}, B = \{2, 4, 5\}$ 이므로
 $B - A = \{4\}$
 (i), (ii)에서 $a = 3$

0673 답 4

$A \cap B = \{-2, 5\}$ 에서 $5 \in A, -2 \in B$ 이므로
 $2a + b = 5, a - b = -2$ i
 두 식을 연립하여 풀면
 $a = 1, b = 3$ ii
 $\therefore a + b = 4$ iii

채점 기준

i a, b에 대한 식 세우기	60%
ii a, b의 값 구하기	30%
iii a+b의 값 구하기	10%

0674 답 ⑤

$A \cap B = \{2\}$ 에서 $2 \in A$ 이므로
 $a^3 - 3a = 2, a^3 - 3a - 2 = 0$
 $(a+1)^2(a-2) = 0 \quad \therefore a = -1$ 또는 $a = 2$
 (i) $a = -1$ 일 때
 $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2\}$ 이므로 $A \cap B = \{1, 2\}$
 따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
 (ii) $a = 2$ 일 때
 $A = \{1, 2\}, B = \{2, 4\}$ 이므로 $A \cap B = \{2\}$
 (i), (ii)에서 $a = 2$ 이고, $A = \{1, 2\}, B = \{2, 4\}$
 $\therefore A \cup B = \{1, 2, 4\}$
 따라서 집합 $A \cup B$ 의 모든 원소의 합은
 $1 + 2 + 4 = 7$

0675 답 3

$A \cup B = \{-2, 1, 3, 4\}$ 에서 $-2 \in A$ 또는 $1 \in A$ 이므로
 $a - 2 = -2$ 또는 $a - 2 = 1 \quad \therefore a = 0$ 또는 $a = 3$
 (i) $a = 0$ 일 때
 $A = \{-2, 3, 4\}, B = \{-3, -2, 1\}$ 이므로
 $A \cup B = \{-3, -2, 1, 3, 4\}$
 따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
 (ii) $a = 3$ 일 때
 $A = \{1, 3, 4\}, B = \{-2, 3, 4\}$ 이므로
 $A \cup B = \{-2, 1, 3, 4\}$
 (i), (ii)에서 $a = 3$

0676 답 ③

$A \cup B = A$ 이므로 $B \subset A$
 $\neg, B \subset A \quad \text{라, } A^c - B^c = \emptyset$
 따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0677 답 ④

③ $U - A^c = (A^c)^c = A$
 ④ $A - B = A \cap B^c$
 따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0678 답 ④

$A - B = A$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소이다.
 ① $A \cap B = \emptyset$
 ② $B - A = B$
 ③, ⑤ $A \subset B^c, B \subset A^c$
 따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

0679 답 ③

② $A - B^c = A \cap (B^c)^c = A \cap B$
 ③ $A \cup (B \cap B^c) = A \cup \emptyset = A$
 ④ $(U - A^c) \cap B = \{U \cap (A^c)^c\} \cap B$
 $= (U \cap A) \cap B = A \cap B$
 ⑤ $(A \cap B) \cap (A \cup A^c) = (A \cap B) \cap U = A \cap B$
 따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

0680 답 ②

$B^c \subset A^c$ 이므로 $A \subset B$
 ① $A \cup B = B$
 ② $B - A^c = B \cap (A^c)^c = B \cap A = A$
 ③ $B \cap (A \cup B) = B \cap B = B$
 ④ $B \cup (A \cap B) = B \cup A = B$
 ⑤ $B \cup (A - B) = B \cup \emptyset = B$
 따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다.

0681 답 8

$(A \cap B) \cup X = X$ 에서 $(A \cap B) \subset X$
 $(A \cup B) \cap X = X$ 에서 $X \subset (A \cup B)$
 $\therefore (A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$
 이때 $A \cap B = \{3, 5, 7\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 이므로
 $\{3, 5, 7\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$
 따라서 집합 X 는 집합 $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 의 부분집합 중에서 3, 5, 7을 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로 집합 X 의 개수는
 $2^{6-3} = 2^3 = 8$

0682 답 32

$U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}, A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ i
 $A \cup X = U$ 이므로 집합 X 는 집합 U 의 부분집합 중에서 집합 A^c 의 원소 1, 3, 5, 7, 9를 반드시 원소로 갖는 부분집합이다. ii
 따라서 구하는 집합 X 의 개수는
 $2^{10-5} = 2^5 = 32$ iii

채점 기준

i 두 집합 U, A 구하기	20 %
ii 집합 X 에 반드시 포함되는 원소 찾기	50 %
iii 집합 X 의 개수 구하기	30 %

0683 답 64

$A \cup C = B \cup C$ 이므로 집합 C 는 집합 U 의 부분집합 중에서 두 집합 A, B 의 공통인 원소 1, 3, 5를 제외한 나머지 원소 2, 4, 7, 9를 반드시 원소로 갖는 부분집합이다.

따라서 구하는 집합 C 의 개수는

$$2^{10-4} = 2^6 = 64$$

0684 답 16

$$A = \{6, 12, 18, 24, \dots, 48\}, B = \{4, 8, 12, 16, \dots, 48\}$$

$A \cup X = A$ 에서 $X \subset A$ 이고, $B \cap X = \emptyset$ 이므로 집합 X 는 집합 $A - B$ 의 부분집합이다.

집합 $A - B$ 는 6의 배수 중에서 4의 배수가 아닌 수의 집합이므로

$$A - B = \{6, 18, 30, 42\}$$

따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$$2^4 = 16$$

0685 답 16

$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}, B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 집합 $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$ 의 원소 중에서 3개는 반드시 원소로 갖고 1개는 원소로 갖지 않는 부분집합이다.

(i) 1, 2, 3은 반드시 원소로 갖고 6은 원소로 갖지 않는 집합 X 의 개수는

$$2^{6-3-1} = 2^2 = 4$$

(ii) 1, 2, 6은 반드시 원소로 갖고 3은 원소로 갖지 않는 집합 X 의 개수는

$$2^{6-3-1} = 2^2 = 4$$

(iii) 1, 3, 6은 반드시 원소로 갖고 2는 원소로 갖지 않는 집합 X 의 개수는

$$2^{6-3-1} = 2^2 = 4$$

(iv) 2, 3, 6은 반드시 원소로 갖고 1은 원소로 갖지 않는 집합 X 의 개수는

$$2^{6-3-1} = 2^2 = 4$$

(i)~(iv)에서 구하는 집합 X 의 개수는

$$4 + 4 + 4 + 4 = 16$$

0686 답 ①

$$A - B = \{1, 2\} \text{이고 } (A - B) \cap X = \{2\} \text{이므로}$$

$$2 \in X, 1 \notin X$$

$$B \cup X = X \text{에서 } B \subset X \text{이므로}$$

$$\{5, 10\} \subset X$$

따라서 집합 X 는 집합 $U = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ 의 부분집합 중에서 2, 5, 10은 반드시 원소로 갖고 1은 원소로 갖지 않는 부분집합이므로 집합 X 의 개수는

$$2^{6-3-1} = 2^2 = 4$$

0687 답 ⑤

$$\begin{aligned} (A - C) - (B - C) &= (A \cap C^c) - (B \cap C^c) \\ &= (A \cap C^c) \cap (B \cap C^c)^c \\ &= (A \cap C^c) \cap (B^c \cup C) \\ &= (A \cap C^c \cap B^c) \cup (A \cap C^c \cap C) \\ &= \{A \cap (C^c \cap B^c)\} \cup \emptyset \\ &= A \cap (B^c \cap C^c) \\ &= A \cap (B \cup C)^c \\ &= A - (B \cup C) \end{aligned}$$

0688 답 ⑤

$$\begin{aligned} \{(A - B) \cup B\}^c &= \{(A \cap B^c) \cup B\}^c \\ &= \{(A \cup B) \cap (B^c \cup B)\}^c \\ &= \{(A \cup B) \cap U\}^c \\ &= (A \cup B)^c \end{aligned}$$

즉, $(A \cup B)^c = \emptyset$ 이므로 $A \cup B = U$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

0689 답 ②

$$\begin{aligned} \textcircled{1} A \cap (A^c \cup B) &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} (A - B) \cup (A - C) &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \\ &= A \cap (B^c \cup C^c) \\ &= A \cap (B \cap C)^c \\ &= A - (B \cap C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} A - (B - C) &= A - (B \cap C^c) \\ &= A \cap (B \cap C^c)^c \\ &= A \cap (B^c \cup C) \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) \\ &= (A - B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} (A \cup B) \cap (A^c \cap B^c) = (A \cup B) \cap (A \cup B)^c = \emptyset$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} (A \cap B) - (A \cap C) &= (A \cap B) \cap (A \cap C)^c \\ &= (A \cap B) \cap (A^c \cup C^c) \\ &= (A \cap B \cap A^c) \cup (A \cap B \cap C^c) \\ &= (A \cap A^c \cap B) \cup (A \cap B \cap C^c) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B \cap C^c) \\ &= (A \cap B) \cap C^c \\ &= (A \cap B) - C \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

0690 답 ③

$$\begin{aligned} \{(A \cap B) \cup (A - B)\} \cup B &= \{(A \cap B) \cup (A \cap B^c)\} \cup B \\ &= \{A \cap (B \cup B^c)\} \cup B \\ &= (A \cap U) \cup B \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

즉, $A \cup B = B$ 이므로 $A \subset B$

$$\textcircled{1} A \subset B \qquad \textcircled{2} A \cap B = A$$

$$\textcircled{4} B \cap A^c = B - A \neq B \qquad \textcircled{5} A^c \cup B = U$$

따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

0691 답 ③

$$\begin{aligned}(A^c \cap B^c) \cup A &= (A^c \cup A) \cap (B^c \cup A) \\ &= U \cap (B^c \cup A) \\ &= B^c \cup A\end{aligned}$$

즉, $B^c \cup A = U$ 이므로 $B \subset A$

- ① $A^c \subset B^c$ ② $A \cap B = B$
④ $B - A = \emptyset$ ⑤ $B^c \cup A = U$

따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

0692 답 5

$$\begin{aligned}\{(A \cup B) \cap (A^c - B^c)^c\} \cap B \\ &= [(A \cup B) \cap \{(A^c \cap (B^c)^c)^c\}] \cap B \\ &= \{(A \cup B) \cap (A^c \cap B)^c\} \cap B \\ &= \{(A \cup B) \cap (A \cup B^c)\} \cap B \\ &= \{A \cup (B \cap B^c)\} \cap B \\ &= (A \cup \emptyset) \cap B \\ &= A \cap B\end{aligned}$$

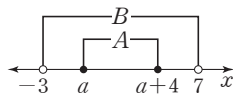
즉, $A \cap B = A$ 이므로 $A \subset B$

따라서 오른쪽 그림에서

$$a > -3, a + 4 < 7$$

$$\therefore -3 < a < 3$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.



채점 기준

① 주어진 조건의 좌변을 간단히 하기	40 %
② 두 집합 A, B 사이의 포함 관계 구하기	20 %
③ a의 값의 범위 구하기	20 %
④ 정수 a의 개수 구하기	20 %

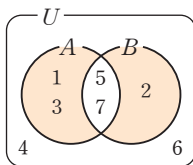
0693 답 3

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= \{1, 2, 3\}\end{aligned}$$

따라서 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore B = \{2, 5, 7\}$$

따라서 집합 B의 원소의 개수는 3이다.



0694 답 ⑤

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A^c \cap B = B \cap A^c = B - A = \{3, 4, 5\}$$

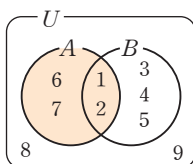
$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{8, 9\}$$

이때 $A \cap B = \{1, 2\}$ 이므로 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore A = \{1, 2, 6, 7\}$$

따라서 집합 A의 모든 원소의 합은

$$1 + 2 + 6 + 7 = 16$$



0695 답 36

$$\begin{aligned}A &= \{4, 8, 12, 16, 20\}, B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\} \text{이므로} \\ (A^c \cup B)^c &= (A^c)^c \cap B^c = A \cap B^c = A - B \\ &= \{8, 12, 16\}\end{aligned}$$

따라서 집합 $(A^c \cup B)^c$ 의 모든 원소의 합은

$$8 + 12 + 16 = 36$$

0696 답 ③

- ① $A \star \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A) = A \cup \emptyset = A$
② $U \star A = (U - A) \cup (A - U) = A^c \cup \emptyset = A^c$
③ $A \star A^c = (A - A^c) \cup (A^c - A) = A \cup A^c = U$
④ $U \star \emptyset = (U - \emptyset) \cup (\emptyset - U) = U \cup \emptyset = U$
⑤ $A \star B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \star A$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

0697 답 ②

$$\begin{aligned}B \odot A &= (B \cup A) \cap (B \cup A^c) \\ &= B \cup (A \cap A^c) \\ &= B \cup \emptyset = B\end{aligned}$$

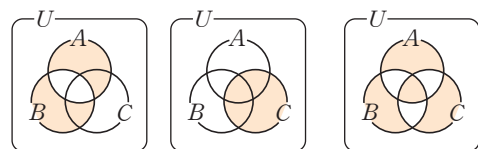
즉, $B \odot A = B$ 이므로

$$(B \odot A) \odot A = B \odot A = B$$

0698 답 ③

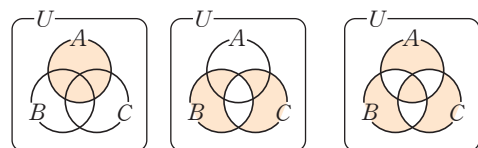
$$\begin{aligned}\neg. A \triangle B &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (B \cup A) - (B \cap A) = B \triangle A \\ \neg. A^c \triangle B^c &= (A^c \cup B^c) - (A^c \cap B^c) \\ &= (A \cap B)^c - (A \cup B)^c \\ &= (A \cap B)^c \cap \{(A \cup B)^c\}^c \\ &= (A \cap B)^c \cap (A \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= A \triangle B \neq (A \triangle B)^c\end{aligned}$$

ㄷ. $(A \triangle B) \triangle C$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면



$$(A \triangle B) \triangle C = (A \triangle B) \triangle C$$

$A \triangle (B \triangle C)$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면



$$A \triangle (B \triangle C) = A \triangle (B \triangle C)$$

$$\therefore (A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0699 답 24

$$(A_2 \cap A_3) \cap (A_8 \cup A_{16}) = A_6 \cap A_8 = A_{24}$$

$$\therefore n = 24$$

0700 답 ④

$$\begin{aligned} A_{16} \cap A_{24} \cap A_{32} &= (A_{16} \cap A_{24}) \cap A_{32} \\ &= A_8 \cap A_{32} = A_8 \\ &= \{1, 2, 4, 8\} \end{aligned}$$

따라서 집합 $A_{16} \cap A_{24} \cap A_{32}$ 에 속하는 원소가 아닌 것은 ④이다.

0701 답 ③

$$\begin{aligned} A_6 \cap (A_3 \cup A_4) &= (A_6 \cap A_3) \cup (A_6 \cap A_4) \\ &= A_6 \cup A_{12} = A_6 \end{aligned}$$

따라서 100 이하의 자연수 중에서 6의 배수는 16개이므로 구하는 원소의 개수는 16이다.

0702 답 30

$A_4 \cap A_5 = A_{20}$ 이므로 $A_p \subset A_{20}$ 을 만족시키는 자연수 p 는 20의 양의 배수이다.

$B_{20} \cap B_{30} = B_{10}$ 이므로 $B_q \subset B_{10}$ 을 만족시키는 자연수 q 는 10의 양의 약수이다.

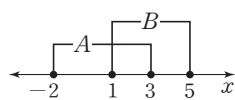
따라서 자연수 p 의 최솟값은 20, 자연수 q 의 최댓값은 10이므로 구하는 합은

$$20 + 10 = 30$$

0703 답 ①

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 \leq 0 \text{에서} \\ (x+2)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq x \leq 3 \\ \therefore A = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\} \end{aligned}$$

이때 $A \cap B = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$,
 $A \cup B = \{x \mid -2 \leq x \leq 5\}$ 이므로 오른쪽
 그림에서



$$\begin{aligned} B &= \{x \mid 1 \leq x \leq 5\} \\ &= \{x \mid (x-1)(x-5) \leq 0\} \\ &= \{x \mid x^2 - 6x + 5 \leq 0\} \end{aligned}$$

따라서 $a = -6$, $b = 5$ 이므로

$$a - b = -11$$

공통수학1 다시보기

$\alpha < \beta$ 일 때

(1) 해가 $\alpha < x < \beta$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-\alpha)(x-\beta) < 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta < 0$$

(2) 해가 $x < \alpha$ 또는 $x > \beta$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-\alpha)(x-\beta) > 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta > 0$$

0704 답 -1

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 = 0 \text{에서} \\ (x-2)(x-3) = 0 \quad \therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3 \\ \therefore A = \{2, 3\} \end{aligned}$$

이때 $A - B = \{3\}$ 에서 $2 \in B$

따라서 $x^3 - ax^2 - 4a(x-1) = 0$ 의 한 근이 2이므로

$$8 - 4a - 4a = 0 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore B = \{x \mid x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0\}$$

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)(x^2-4) = 0$$

$$(x-1)(x+2)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore B = \{-2, 1, 2\}$$

따라서 $B - A = \{-2, 1\}$ 이므로 집합 $B - A$ 의 모든 원소의 합은

$$-2 + 1 = -1$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -1 & -4 & 4 \\ & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

채점 기준

i 집합 A 구하기	20 %
ii a의 값 구하기	30 %
iii 집합 B 구하기	30 %
iv 집합 B-A의 모든 원소의 합 구하기	20 %

공통수학1 다시보기

삼차방정식 $f(x) = 0$ 은 $f(x)$ 를 인수분해한 후 $ABC = 0$ 이면

$A = 0$ 또는 $B = 0$ 또는 $C = 0$ 임을 이용하여 해를 구한다.

이때 $f(x)$ 는 인수분해 공식을 이용하거나 $f(a) = 0$ 을 만족시키는 a 의 값을 찾은 후 조립제법을 이용하여 $f(x) = (x-a)Q(x)$ 꼴로 인수분해한다.

0705 답 3

$$x^2 - 7x + 6 < 0 \text{에서}$$

$$(x-1)(x-6) < 0 \quad \therefore 1 < x < 6$$

$$\therefore A = \{x \mid 1 < x < 6\}$$

$$x^2 - 2(k+1)x + 4k < 0 \text{에서}$$

$$(x-2)(x-2k) < 0 \quad \therefore 2 < x < 2k \quad (\because k > 1)$$

$$\therefore B = \{x \mid 2 < x < 2k\}$$

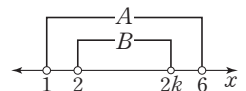
이때 $A \cap B = B$ 이므로 $B \subset A$

따라서 오른쪽 그림에서

$$2k \leq 6$$

$$\therefore 1 < k \leq 3 \quad (\because k > 1)$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 3이다.



0706 답 ①

$$n(A \cap B^c) = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \text{이므로}$$

$$5 = 12 - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A \cap B) = 7$$

$$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 12 + 15 - 7 = 20$$

$$\therefore n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c)$$

$$= n(U) - n(A \cup B)$$

$$= 30 - 20 = 10$$

0707 답 20

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$10 = 15 - n(A \cap B)$$

$$\therefore n(A \cap B) = 5$$

$$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 15 + 10 - 5 = 20$$

0708 답 ②

$n(A^c \cup B^c) = n((A \cap B)^c) = n(U) - n(A \cap B)$ 이므로
 $20 = 25 - n(A \cap B) \quad \therefore n(A \cap B) = 5$
 $n(A) = n(U) - n(A^c) = 25 - 16 = 9$ 이므로
 $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 9 - 5 = 4$

0709 답 ④

$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$ 이므로
 $5 = 50 - n(A \cup B) \quad \therefore n(A \cup B) = 45$
 $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ 이고
 $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ 이므로
 $n((A - B) \cup (B - A)) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$
 $= 45 - 12 = 33$

0710 답 ②

$A \cap B = \emptyset$ 이므로 $A \cap B \cap C = \emptyset$
 $n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C)$ 에서
 $16 = 8 + 14 - n(A \cap C) \quad \therefore n(A \cap C) = 6$
 $n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C)$ 에서
 $18 = 9 + 14 - n(B \cap C) \quad \therefore n(B \cap C) = 5$
 $\therefore n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$
 $= 8 + 9 + 14 - 0 - 5 - 6 + 0 = 20$

0711 답 ④

학생 전체의 집합을 U , 축구를 좋아하는 학생의 집합을 A , 농구를 좋아하는 학생의 집합을 B 라 하면
 $n(U) = 35, n(A) = 23, n(B) = 16, n((A \cup B)^c) = 7$
 $n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$ 에서
 $7 = 35 - n(A \cup B) \quad \therefore n(A \cup B) = 28$
 축구와 농구를 모두 좋아하는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이므로
 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 23 + 16 - 28 = 11$
 따라서 구하는 학생 수는 11이다.

0712 답 2

학생 전체의 집합을 U , 수학 참고서를 가지고 있는 학생의 집합을 A , 영어 참고서를 가지고 있는 학생의 집합을 B 라 하면
 $n(U) = 40, n(A) = 32, n(B) = 24, n(A \cap B) = 18$
 $\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= 32 + 24 - 18 = 38$
 두 참고서 중 어느 것도 가지고 있지 않은 학생의 집합은 $(A \cup B)^c$ 이므로
 $n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 40 - 38 = 2$
 따라서 구하는 학생 수는 2이다.

0713 답 15

학생 전체의 집합을 U , 피자를 좋아하는 학생의 집합을 A , 햄버거를 좋아하는 학생의 집합을 B 라 하면
 $n(U) = 50, n(A) = 22, n((A \cup B)^c) = 13$ ①
 $n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$ 에서
 $13 = 50 - n(A \cup B) \quad \therefore n(A \cup B) = 37$ ②

햄버거만 좋아하는 학생의 집합은 $B - A$ 이므로
 $n(B - A) = n(A \cup B) - n(A)$
 $= 37 - 22 = 15$
 따라서 구하는 학생 수는 15이다. ③

채점 기준

① $n(U), n(A), n((A \cup B)^c)$ 구하기	40 %
② $n(A \cup B)$ 구하기	30 %
③ 햄버거만 좋아하는 학생 수 구하기	30 %

0714 답 75

학생 전체의 집합을 U , 문학 체험을 신청한 학생의 집합을 A , 역사 체험을 신청한 학생의 집합을 B , 과학 체험을 신청한 학생의 집합을 C 라 하면
 $n(U) = 212, n(A) = 80, n(B) = 90, n(A \cap B) = 45,$
 $n((A \cup B \cup C)^c) = 12$
 $n((A \cup B \cup C)^c) = n(U) - n(A \cup B \cup C)$ 에서
 $12 = 212 - n(A \cup B \cup C) \quad \therefore n(A \cup B \cup C) = 200$
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= 80 + 90 - 45 = 125$
 과학 체험만 신청한 학생의 집합은 $C - (A \cup B)$ 이므로
 $n(C - (A \cup B)) = n(A \cup B \cup C) - n(A \cup B)$
 $= 200 - 125 = 75$
 따라서 구하는 학생 수는 75이다.

0715 답 ①

$n(A) = n(U) - n(A^c) = 50 - 16 = 34$
 (i) $n(A \cap B)$ 가 최대인 경우는 $B \subset A$ 일 때이므로
 $M = n(B) = 28$
 (ii) $n(A \cap B)$ 가 최소인 경우는 $n(A \cup B)$ 가 최대일 때이므로
 $A \cup B = U$
 $\therefore n(A \cup B) = n(U) = 50$
 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$ 에서
 $m = 34 + 28 - 50 = 12$
 (i), (ii)에서 $M - m = 28 - 12 = 16$

0716 답 5

$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$
 $= 25 - n(A \cap B)$ ㉠
 따라서 $n(B - A)$ 가 최소인 경우는 $n(A \cap B)$ 가 최대일 때이다. ①
 $n(A \cap B)$ 가 최대인 경우는 $A \subset B$ 일 때이므로
 $n(A \cap B) = n(A) = 20$ ②
 이를 ㉠에 대입하면
 $n(B - A) = 25 - 20 = 5$
 따라서 $n(B - A)$ 의 최솟값은 5이다. ③

채점 기준

① $n(B - A)$ 가 최소인 경우 찾기	40 %
② $n(A \cap B)$ 의 최댓값 구하기	40 %
③ $n(B - A)$ 의 최솟값 구하기	20 %

0717 답 ⑤

고객 전체의 집합을 U , 손거울을 구매한 고객의 집합을 A , 책갈피를 구매한 고객의 집합을 B 라 하면

$$n(U)=28, n(A)=16, n(B)=12$$

손거울과 책갈피 중 어느 것도 구매하지 않은 고객의 집합은 $(A \cup B)^c$ 이므로

$$\begin{aligned} n((A \cup B)^c) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 28 - n(A \cup B) \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

에서 $n((A \cup B)^c)$ 가 최대인 경우는 $n(A \cup B)$ 가 최소일 때이다.

$n(A \cup B)$ 가 최소인 경우는 $B \subset A$ 일 때이므로

$$n(A \cup B) = n(A) = 16$$

이를 ㉠에 대입하면

$$n((A \cup B)^c) = 28 - 16 = 12$$

따라서 $n((A \cup B)^c)$ 의 최댓값은 12이므로 구하는 고객 수의 최댓값은 12이다.

0718 답 ④

$n(A \cap B)$ 가 최대인 경우는 $A \subset B$ 일 때이므로

$$n(A \cap B) \leq n(A) = 8$$

$$\therefore 3 \leq n(A \cap B) \leq 8 \quad (\because n(A \cap B) \geq 3) \quad \dots\dots ㉠$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 23 - n(A \cap B) \text{이므로}$$

$$n(A \cap B) = 23 - n(A \cup B) \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } 3 \leq 23 - n(A \cup B) \leq 8$$

$$\therefore 15 \leq n(A \cup B) \leq 20$$

$$\text{따라서 } M=20, m=15 \text{이므로 } M+m=35$$

AB 유형 점검

110~112쪽

0719 답 5

$A=\{2, 3, 5, 7\}, B=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}, C=\{1, 2, 4\}$ 이므로

$$(A \cap B) \cup C = \{2, 3, 5\} \cup \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

따라서 구하는 원소의 개수는 5이다.

0720 답 ①

$B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합 중에서 집합 B 와 서로소인 집합은 1, 3, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합이다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$$2^{5-3} = 2^2 = 4$$

0721 답 ⑤

$U=\{1, 2, 3, 4, \dots, 8\}, B=\{4, 8\}$ 이므로

$$B^c = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$$

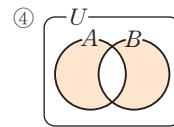
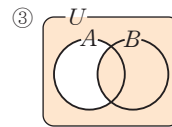
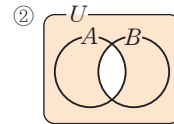
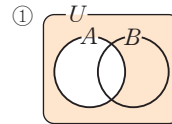
이때 $A=\{1, 2, 4, 8\}$ 이므로

$$A - B^c = \{4, 8\}$$

따라서 집합 $A - B^c$ 의 모든 원소의 합은

$$4+8=12$$

0722 답 ⑤



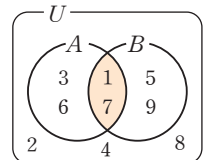
0723 답 ①

$$U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$$

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로

$$A \cap B = \{1, 7\}$$



0724 답 ③

$A - B = \{3\}$ 에서 $7 \in B, a+b \in B$ 이므로

$$-a+3b=7, a+b=5$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=2, b=3$$

$$\therefore ab=6$$

0725 답 ②

$$\begin{aligned} (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) &= (B \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \\ &= (B - A) \cup (A - B) = \emptyset \end{aligned}$$

즉, $B - A = \emptyset, A - B = \emptyset$ 이므로

$$B \subset A, A \subset B$$

$$\therefore A = B$$

0726 답 ④

$$U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$$

$A \cap B = \emptyset$ 이므로 집합 B 는 전체집합 U 의 부분집합 중에서 2, 3, 5, 6을 원소로 갖지 않는 부분집합이다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$$2^{10-4} = 2^6 = 64$$

0727 답 ④

$$\neg. (A \cap B^c) \cup B = (A \cup B) \cap (B^c \cup B)$$

$$= (A \cup B) \cap U$$

$$= A \cup B$$

$$\neg. (A - B)^c \cap A = (A \cap B^c)^c \cap A = (A^c \cup B) \cap A$$

$$= (A^c \cap A) \cup (B \cap A)$$

$$= \emptyset \cup (A \cap B)$$

$$= A \cap B$$

$$\neg. (A \cap B) \cup (A^c \cup B)^c = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

$$= A \cap (B \cup B^c)$$

$$= A \cap U = A$$

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

0728 답 ⑤

$$\begin{aligned}
 (A-B)^c \cap B^c &= (A \cap B^c)^c \cap B^c \\
 &= (A^c \cup B) \cap B^c \\
 &= (A^c \cap B^c) \cup (B \cap B^c) \\
 &= (A \cup B)^c \cup \emptyset \\
 &= (A \cup B)^c
 \end{aligned}$$

즉, $(A \cup B)^c = A^c$ 이므로 $A \cup B = A$

$\therefore B \subset A$

①, ② $B \subset A$ ③ $A \cap B = B$ ④ $A - B \neq A$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

0729 답 ③

$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{1, 2, 4, 5\}$ 이므로 $A \cap B = \{3\}$

또 $B \cap (A \cap B)^c = B - (A \cap B) = \{5\}$ 이므로

$B = \{3, 5\}$

$\therefore B^c = \{1, 2, 4\}$

0730 답 ③

$$A \supset B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B)$$

$$= (A \cap A^c) \cup B$$

$$= \emptyset \cup B = B$$

따라서 $A \supset B = B$ 이므로

$$(A \supset B) \supset C = B \supset C = C$$

0731 답 5

$A_n \cap A_2 = A_{2n}$ 에서 n 과 2는 서로소이므로 n 은 홀수이다.

또 $A_n - A_3 = \emptyset$ 에서 $A_n \subset A_3$ 이므로 n 은 3의 배수이다.

따라서 n 은 3의 배수인 홀수이므로 30 이하의 자연수 n 은 3, 9, 15, 21, 27의 5개이다.

0732 답 -7

$$x^2 - 6x + 8 > 0 \text{에서 } (x-2)(x-4) > 0$$

$$\therefore x < 2 \text{ 또는 } x > 4$$

$$\therefore A = \{x \mid x < 2 \text{ 또는 } x > 4\}$$

$$x^2 + 2x + 4 > 0 \text{에서 } (x+1)^2 + 3 > 0 \text{이므로}$$

$$C = \{x \mid x \text{는 모든 실수}\}$$

이때 $A \cup B = \{x \mid x \text{는 모든 실수}\}$,

$$A \cap B = \{x \mid -1 \leq x < 2\} \text{이므로 오}$$

른쪽 그림에서

$$B = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}$$

$$= \{x \mid (x+1)(x-4) \leq 0\}$$

$$= \{x \mid x^2 - 3x - 4 \leq 0\}$$

따라서 $a = -3$, $b = -4$ 이므로

$$a + b = -7$$

0733 답 14

$$n(A^c \cap B) = n(B - A) = 7 \text{이므로}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B - A) = 21 + 7 = 28$$

$$\begin{aligned}
 \therefore n(A \cap B) &= n(A \cup B) - n((A - B) \cup (B - A)) \\
 &= 28 - 14 = 14
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$n(A^c \cap B) = n(B - A) = 7 \text{이므로}$$

$$n((A - B) \cup (B - A)) = n(A - B) + n(B - A) \text{에서}$$

$$14 = n(A - B) + 7 \quad \therefore n(A - B) = 7$$

$$\therefore n(A \cap B) = n(A) - n(A - B) = 21 - 7 = 14$$

0734 답 12

학생 전체의 집합을 U , 영화 A 를 관람한 학생의 집합을 A , 영화 B 를 관람한 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 36, n(A - B) = 20, n((A \cup B)^c) = 4$$

$$n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) \text{에서}$$

$$4 = 36 - n(A \cup B) \quad \therefore n(A \cup B) = 32$$

$$\therefore n(B) = n(A \cup B) - n(A - B) = 32 - 20 = 12$$

따라서 구하는 학생 수는 12이다.

0735 답 10

(i) $n(A \cap B)$ 가 최대인 경우는 $A \subset B$ 일 때이므로

$$n(A \cap B) = n(A) = 14$$

(ii) $n(A \cap B)$ 가 최소인 경우는 $n(A \cup B)$ 가 최대일 때이므로

$$A \cup B = U$$

$$\therefore n(A \cup B) = n(U) = 28$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) \text{에서}$$

$$n(A \cap B) = 14 + 18 - 28 = 4$$

(i), (ii)에서 $n(A \cap B)$ 의 최댓값은 14, 최솟값은 4이므로 구하는 차는 $14 - 4 = 10$

0736 답 16

$$A = \{1, 2, 5, 10\}, B = \{1, 2, 4, 8\} \text{이므로 } A - B = \{5, 10\}$$

$$(A - B) \cup X = X \text{에서 } (A - B) \subset X$$

$$\therefore \{5, 10\} \subset X \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$B \cup X = X \text{에서 } B \subset X$$

$$\therefore \{1, 2, 4, 8\} \subset X \quad \dots\dots \text{㉡}$$

따라서 집합 X 는 집합 $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ 의 부분집합 중에서 1, 2, 4, 5, 8, 10을 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로 집합 X 의 개수는

$$2^{10-6} = 2^4 = 16 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

채점 기준

㉠ 두 집합 $A - B$, X 사이의 포함 관계 구하기	30 %
㉡ 두 집합 B , X 사이의 포함 관계 구하기	30 %
㉢ 집합 X 의 개수 구하기	40 %

0737 답 10

$$A \cap B = \{1\} \text{에서 } 1 \in A \text{이므로}$$

$$a^2 - 3a + 3 = 1, a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$(a-1)(a-2) = 0 \quad \therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 2$$

(i) $a = 1$ 일 때

$$A = \{0, 1, 3\}, B = \{0, 1, 3\} \text{이므로 } A \cap B = \{0, 1, 3\}$$

(ii) $a = 2$ 일 때

$$A = \{0, 1, 3\}, B = \{1, 2, 4\} \text{이므로 } A \cap B = \{1\}$$

(i), (ii)에서 $a = 2$ 이고, $A = \{0, 1, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ $\dots\dots \text{㉠}$

$$\therefore (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)^c = (A - B) \cup (A \cup B) = A \cup B$$

$$= \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad \dots \textcircled{ii}$$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \quad \dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 두 집합 A, B 구하기	50 %
② 집합 $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)^c$ 구하기	40 %
③ 모든 원소의 합 구하기	10 %

0738 답 34

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) \text{이므로}$$

$$24 = 42 - n(A \cup B) \quad \therefore n(A \cup B) = 18 \quad \dots \textcircled{i}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{에서}$$

$$18 = n(A) + n(B) - 16$$

$$\therefore n(A) + n(B) = 34 \quad \dots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① $n(A \cup B)$ 구하기	50 %
② $n(A) + n(B)$ 의 값 구하기	50 %

C 실력 향상

113쪽

0739 답 ②

(ㄱ)에서 집합 X 는 두 집합 A, B 의 공통인 원소 3, 4, 5를 제외한 집합 $A \cup B$ 의 나머지 원소 1, 2, 6, 7을 반드시 원소로 가져야 한다.

(ㄴ)에서

$$(X - A) \cap (X - B) = (X \cap A^c) \cap (X \cap B^c)$$

$$= X \cap (A^c \cap B^c) = X \cap (A \cup B)^c$$

$$= X - (A \cup B)$$

$$= X - \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \neq \emptyset$$

즉, 집합 X 는 원소 8, 9, 10 중 적어도 하나를 원소로 가져야 한다.

이때 (ㄷ)에서 집합 X 의 모든 원소의 합이 최소이려면

$$3 \in X, 8 \in X, 9 \notin X, 10 \notin X$$

따라서 집합 X 의 모든 원소의 합의 최솟값은

$$1 + 2 + 3 + 6 + 7 + 8 = 27$$

0740 답 ⑤

$$B - A = B \cap A^c = A^c \cap B = (A \cup B^c)^c = U - (A \cup B^c) \text{이므로}$$

$$n(B - A) = n(U) - n(A \cup B^c)$$

$$2 = k - 7 \quad \therefore k = 9$$

(ㄱ)에서 집합 A 의 모든 원소의 합과 집합 B 의 모든 원소의 합은 서로 같고 (ㄷ)에서 집합 $B - A$ 의 모든 원소의 합이 11이므로 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합도 11이어야 한다.

따라서 집합 A 의 모든 원소의 합은 11 이상이어야 한다.

또 $B - A = \{4, 7\}$ 이므로 자연수 m 은 4와 7 중 어느 수도 약수로 갖지 않아야 한다.

따라서 m 의 값이 될 수 있는 자연수는 6 또는 9이다.

(i) $m=6$ 일 때

$A = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로 $A - B = \{2, 3, 6\}$ 이면 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합은 11이다.

(ii) $m=9$ 일 때

$A = \{1, 3, 9\}$ 이므로 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합이 11인 경우는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $m=6$ 이고, $A = \{1, 2, 3, 6\}$

$$\therefore A \cup B = A \cup (B - A) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$$

이때 $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$ 이므로

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = U - (A \cup B) = \{5, 8, 9\}$$

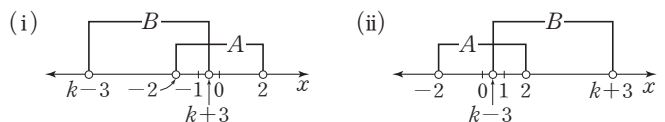
따라서 집합 $A^c \cap B^c$ 의 모든 원소의 합은

$$5 + 8 + 9 = 22$$

참고 m 이 1, 2, 3, 5인 경우에는 약수의 합이 11 이상일 수 없고, 4, 7, 8인 경우에는 $B - A = \{4, 7\}$ 을 만족시키지 않는다.

0741 답 $-4 < k \leq -3$ 또는 $3 \leq k < 4$

$A = \{x \mid -2 < x < 2\}$, $B = \{x \mid k - 3 < x < k + 3\}$ 이므로 집합 $A \cap B$ 에 속하는 정수가 1개가 되는 경우는 다음 그림과 같이 2가지가 있다.



(i) $-1 < k + 3 \leq 0$ 에서 $-4 < k \leq -3$

(ii) $0 \leq k - 3 < 1$ 에서 $3 \leq k < 4$

(i), (ii)에서 상수 k 의 값의 범위는

$$-4 < k \leq -3 \text{ 또는 } 3 \leq k < 4$$

0742 답 ①

학생 전체의 집합을 U , 한국사 체험 학습을 신청한 학생의 집합을 A , 과학 체험 학습을 신청한 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 100$$

$$n(A) = n(B) + 10 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$$n((A \cup B)^c) = n(A \cup B) - 40 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉡에서 $n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$ 이므로

$$n(U) - n(A \cup B) = n(A \cup B) - 40$$

$$100 - n(A \cup B) = n(A \cup B) - 40$$

$$\therefore n(A \cup B) = 70$$

이때 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 에서

$$70 = n(B) + 10 + n(B) - n(A \cap B) \quad (\because \textcircled{㉠})$$

$$2 \times n(B) = 60 + n(A \cap B) \quad \therefore n(B) = 30 + \frac{1}{2} \times n(A \cap B)$$

과학 체험 학습만 신청한 학생의 집합은 $B - A$ 이므로

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 30 + \frac{1}{2} \times n(A \cap B) - n(A \cap B)$$

$$= 30 - \frac{1}{2} \times n(A \cap B)$$

이때 $n(B - A)$ 가 최대인 경우는 $n(A \cap B)$ 가 최소일 때이고 $n(A \cap B)$ 의 최솟값은 0이므로 $n(B - A)$ 의 최댓값은 30이다.

따라서 구하는 학생 수의 최댓값은 30이다.

07 / 명제

A 개념 확인

114~117쪽

0743 답 ○

0744 답 ×

0745 답 ○

0746 답 ×

0747 답 {2, 3, 5, 7}

0748 답 {1, 2, 3, 4}

$x^2 - 3x - 4 \leq 0$ 에서

$(x+1)(x-4) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 4$

따라서 조건 q 의 진리집합은

{1, 2, 3, 4}

0749 답 정수는 유리수가 아니다. (거짓)

0750 답 $\sqrt{9}$ 는 무리수가 아니다. (참)

0751 답 x 는 12의 약수가 아니다., {8, 10}

$\sim p$: x 는 12의 약수가 아니다.

이때 12의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이므로 조건 $\sim p$ 의 진리집합은 {8, 10}

0752 답 $x^2 - 10x + 24 \neq 0$, {1, 2, 8, 10, 12}

$x^2 - 10x + 24 = 0$ 에서

$(x-4)(x-6) = 0 \quad \therefore x=4$ 또는 $x=6$

조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면

$Q = \{4, 6\}$

따라서 조건 $\sim q$ 의 진리집합은

$Q^c = \{1, 2, 8, 10, 12\}$

0753 답 가정: 6의 배수이다., 결론: 2의 배수이다.

0754 답 가정: x 는 소수이다., 결론: x 는 홀수이다.

0755 답 거짓

[반례] $x = -5$ 이면 $|x| = 5$ 이지만 $x \neq 5$ 이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

0756 답 참

0757 답 거짓

[반례] $x=0$ 이면 $|x|=0$ 이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

0758 답 참

$x=0$ 이면 $\sqrt{x}=0$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

0759 답 어떤 실수 x 에 대하여 $3x+5 \leq 8$ 이다. (참)

0760 답 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+4 \neq 0$ 이다. (참)

0761 답 역: $x=0$ 이고 $y=0$ 이면 $xy=0$ 이다. (참)

대우: $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이면 $xy \neq 0$ 이다. (거짓)

0762 답 역: 이등변삼각형이면 정삼각형이다. (거짓)

대우: 이등변삼각형이 아니면 정삼각형이 아니다. (참)

0763 답 충분조건

$|x| < 1$ 에서 $-1 < x < 1$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$P = \{x | -1 < x < 1\}, Q = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$

$P \subset Q$ 이므로 $p \implies q$

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

0764 답 필요조건

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, Q = \{1, 2, 4\}$

$Q \subset P$ 이므로 $q \implies p$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

0765 답 필요충분조건

$x^2 - 2x - 3 = 0$ 에서

$(x+1)(x-3) = 0 \quad \therefore x = -1$ 또는 $x = 3$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$P = \{-1, 3\}, Q = \{-1, 3\}$

$P = Q$ 이므로 $p \iff q$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

0766 답 (가) 짝수 (나) 짝수 (다) $k+l$

주어진 명제의 대우 '자연수 a, b 에 대하여 a, b 가 모두 (가) 짝수 이면 $a+b$ 는 (나) 짝수이다.'가 참임을 보이면 된다.

a, b 가 모두 (가) 짝수 이면

$a=2k, b=2l$ (k, l 은 자연수)

로 나타낼 수 있으므로

$a+b=2k+2l=2((\text{다}) k+l)$

이때 $(\text{다}) k+l$ 은 자연수이므로 $a+b$ 는 (나) 짝수 이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

0767 답 (가) $b=0$ (나) $\neq$ (다) $=$

주어진 명제의 결론을 부정하여 $a \neq 0$ 또는 (가) $b \neq 0$ 이라 가정하면

$a^2 + b^2 (\text{나}) \neq 0$

그런데 이것은 $a^2 + b^2 (\text{다}) = 0$ 이라는 가정에 모순이다.

따라서 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 = 0$ 이면 $a=0$ 이고 $b=0$ 이다.

0768 답 ×

[반례] $x=1$ 이면 $x-2 < 0$ 이다.

0769 답 ×

[반례] $x=3$ 이면 $|x-3| = 0$ 이다.

0770 답 ○

0771 답 ○

0772 답 (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (다) $a=b$

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 + (\sqrt{b})^2}{2} \\ = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (단, 등호는 $(\text{다}) a=b$ 일 때 성립)

0773 답 2

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{1}{x}} = 2 \quad (\text{단, 등호는 } x = \frac{1}{x}, \text{ 즉 } x=1 \text{ 일 때 성립})$$

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

0774 답 12

$$9x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{9x \times \frac{4}{x}} = 12 \quad (\text{단, 등호는 } 9x = \frac{4}{x}, \text{ 즉 } x = \frac{2}{3} \text{ 일 때 성립})$$

따라서 구하는 최솟값은 12이다.

0775 답 (가) $bx-ay$ (나) bx

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) - (ax+by)^2 \\ = a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) \\ = b^2x^2 - 2abxy + a^2y^2 \\ = (\sqrt{b}x - \sqrt{a}y)^2 \geq 0$$

$$\therefore (a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$$

이때 등호는 $bx-ay=0$, 즉 $ay = (\text{가}) bx$ 일 때 성립한다.

B 유형 완성

118~129쪽

0776 답 ③

①, ④ x 의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

②, ⑤ ‘향기롭다’, ‘크다’는 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

③ 거짓인 명제이다.

따라서 명제인 것은 ③이다.

0777 답 ②

①, ③, ⑤ 거짓인 명제이다.

② x 의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

④ 참인 명제이다.

따라서 명제가 아닌 것은 ②이다.

0778 답 ③

ㄱ. x 의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

ㄴ, ㄷ. 거짓인 명제이다.

ㄹ. ‘차갑다’는 기준이 명확하지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

따라서 보기에서 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0779 답 ④

$p: x^2 - 3x - 4 \geq 0$ 에서

$$(x+1)(x-4) \geq 0 \quad \therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 4$$

$q: x^2 - 1 \leq 0$ 에서

$$(x+1)(x-1) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 1$$

‘ p 그리고 $\sim q$ ’의 부정은 ‘ $\sim p$ 또는 q ’이다.

$$\sim p: -1 < x < 4, q: -1 \leq x \leq 1 \text{ 이므로 } \sim p \text{ 또는 } q \text{ 는 } -1 \leq x < 4$$

0780 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. 부정: $3 \leq 5$ (참)

ㄴ. 부정: 2는 소수가 아니다. (거짓)

ㄷ. 부정: 6은 12의 약수이다. (참)

ㄹ. 부정: 정사각형은 평행사변형이 아니다. (거짓)

따라서 보기에서 그 부정이 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0781 답 ①

‘ $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \neq 0$ ’의 부정은

‘ $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$ ’이므로

$$a-b=0 \text{ 이고 } b-c=0 \text{ 이고 } c-a=0$$

$$\therefore a=b=c$$

0782 답 $\{-4, -3, -1, 1, 2, 3, 4\}$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 조건 ‘ p 또는 $\sim q$ ’의 진리집합은 $P \cup Q^c$ 이다.

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \text{ 에서 } (x+4)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore P = \{-4, 2\}$$

$$x^3 - 4x = 0 \text{ 에서 } x(x+2)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore Q = \{-2, 0, 2\}$$

이때 $U = \{-4, -3, -2, -1, \dots, 4\}$ 이므로

$$Q^c = \{-4, -3, -1, 1, 3, 4\}$$

$$\therefore P \cup Q^c = \{-4, -3, -1, 1, 2, 3, 4\}$$

0783 답 ②

조건 p 의 진리집합은 $\{1, 3, 5, 7\}$ 이므로 조건 $\sim p$ 의 진리집합은 $\{2, 4, 6\}$

따라서 조건 $\sim p$ 의 진리집합의 원소의 개수는 3이다.

0784 답 ④

$P = \{x | x > 2\}$ 에서 $P^c = \{x | x \leq 2\}$ 이고, $Q = \{x | x \geq -4\}$ 이므로 조건 ‘ $-4 \leq x \leq 2$ ’의 진리집합은 $P^c \cap Q$ 이다.

0785 답 ④

- ① $x = -\sqrt{2}$ 이면 $x^2 = (-\sqrt{2})^2 = 2$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
 ② $p: x < -2, q: x^2 - 4 > 0$ 이라 하고 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{x | x < -2\}, Q = \{x | x < -2 \text{ 또는 } x > 2\}$
 따라서 $P \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
 ④ [반례] $x = 10$ 이면 x 는 10의 양의 약수이지만 5의 양의 약수는 아니다.
 따라서 거짓인 명제는 ④이다.

0786 답 ①

- ① $n = 2$ 이면 n 은 소수이지만 $n^2 = 4$ 이므로 홀수가 아니다.

0787 답 ①

- ① $p: |x| > 2, q: x^2 > 1$ 이라 하고 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{x | x < -2 \text{ 또는 } x > 2\}, Q = \{x | x < -1 \text{ 또는 } x > 1\}$
 따라서 $P \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
 ② [반례] $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x \neq 1$ 이다.
 ③ [반례] $x = 0, y = 1$ 이면 $xy = 0$ 이지만 $x^2 + y^2 \neq 0$ 이다.
 ④ [반례] $x = -1, y = 2$ 이면 $x + y > 0$ 이지만 $xy < 0$ 이다.
 ⑤ [반례] $x = 1, y = -1$ 이면 $x^2 = y^2$ 이지만 $x \neq y$ 이다.
 따라서 참인 명제는 ①이다.

0788 답 ⑤

명제 $q \rightarrow p$ 가 참이므로 $Q \subset P$

- ①, ② $P^c \subset Q^c$
 ③ $P \cap Q = Q$
 ④ $P \cup Q = P$
 ⑤ $P^c \cap Q^c = (P \cup Q)^c = P^c$
 따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

0789 답 ②

두 집합 P, Q 가 서로소이므로

$$P \subset Q^c, Q \subset P^c$$

따라서 명제 $p \rightarrow \sim q$ 와 $q \rightarrow \sim p$ 는 항상 참이다.

0790 답 ①

명제 ' p 이면 $\sim q$ 이다.'가 거짓임을 보이려면 집합 P 의 원소 중에서 Q^c 의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다.
 따라서 구하는 집합은
 $P \cap (Q^c)^c = P \cap Q$

0791 답 ㄱ, ㄴ

- ㄱ. $P \subset R^c$ 이므로 명제 $p \rightarrow \sim r$ 는 참이다.
 ㄴ. $Q \not\subset P^c$ 이므로 명제 $q \rightarrow \sim p$ 는 참이 아니다.
 ㄷ. $Q \not\subset R$ 이므로 명제 $q \rightarrow r$ 는 참이 아니다.
 ㄹ. $R \subset Q$ 이므로 명제 $r \rightarrow q$ 는 참이다.
 따라서 보기에서 항상 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

0792 답 16

$U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ 이므로

$$P = \{1, 3, 5, 7, 9\}, Q = \{2, 3, 5, 7\}$$

명제 ' p 또는 q 이면 r 이다.'가 참이므로

$$(P \cup Q) \subset R$$

..... ①

그런데 R 는 전체집합 U 의 부분집합이므로

$$(P \cup Q) \subset R \subset U$$

이때 $P \cup Q = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ 이므로 집합 R 는 전체집합 U 의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 5, 7, 9를 반드시 원소로 갖는 부분집합이다.

..... ②

따라서 구하는 집합 R 의 개수는

$$2^{10-6} = 2^4 = 16$$

..... ③

채점 기준

① 주어진 명제의 진리집합 사이의 포함 관계 구하기	40 %
② 집합 R 가 반드시 포함하는 원소 구하기	40 %
③ 집합 R 의 개수 구하기	20 %

0793 답 3

$$|x-1| \leq a \text{에서 } -a \leq x-1 \leq a \quad \therefore 1-a \leq x \leq 1+a$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

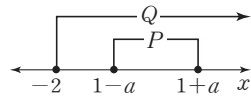
$$P = \{x | 1-a \leq x \leq 1+a\}, Q = \{x | x \geq -2\}$$

이때 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면

$P \subset Q$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$1-a \geq -2 \quad \therefore 0 < a \leq 3 \quad (\because a > 0)$$

따라서 양수 a 의 최댓값은 3이다.



0794 답 ②

$p: a-2 \leq x < a+3, q: -1 < x < 5$ 라 하고 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

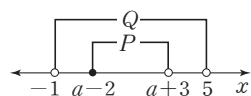
$$P = \{x | a-2 \leq x < a+3\}, Q = \{x | -1 < x < 5\}$$

이때 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면

$P \subset Q$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$a-2 > -1, a+3 \leq 5$$

$$\therefore 1 < a \leq 2$$



0795 답 1

$$q: x < 1 \text{에서 } \sim q: x \geq 1$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

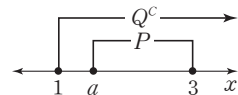
$$P = \{x | a \leq x \leq 3\}, Q^c = \{x | x \geq 1\}$$

이때 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이 되려면

$P \subset Q^c$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$a \geq 1 \quad \therefore 1 \leq a \leq 3 \quad (\because a \leq 3)$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 1이다.



0796 답 ④

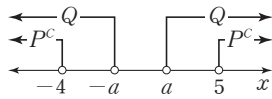
$$\sim p: (x+4)(x-5) > 0 \quad \therefore x < -4 \text{ 또는 } x > 5$$

$$\therefore P^c = \{x | x < -4 \text{ 또는 } x > 5\}$$

$$|x| > a \text{에서 } x < -a \text{ 또는 } x > a$$

$$\therefore Q = \{x | x < -a \text{ 또는 } x > a\}$$

이때 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참이 되려면
 $P^C \subset Q$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서
 $-a \geq -4, a \leq 5$



$\therefore a \leq 4$

따라서 자연수 a 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

0797 답 1

$q: x < a$ 에서 $\sim q: x \geq a$

세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$P = \{x \mid -2 \leq x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3\}$,

$Q^C = \{x \mid x \geq a\}, R = \{x \mid x \geq b\}$

..... ①

명제 $\sim q \rightarrow p$ 가 참이 되려면 $Q^C \subset P$

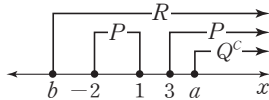
명제 $p \rightarrow r$ 가 참이 되려면 $P \subset R$

즉, $Q^C \subset P \subset R$ 이어야 하므로 오른쪽

그림에서

$a \geq 3, b \leq -2$

..... ②



따라서 $m=3, M=-2$ 이므로

$m+M=1$

..... ③

채점 기준

① 세 조건 $p, \sim q, r$ 의 진리집합 구하기	40%
② a, b 의 값의 범위 구하기	40%
③ $m+M$ 의 값 구하기	20%

0798 답 ③

ㄱ. $p: x^2 - x < 0$ 이라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면 $P = \emptyset$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

ㄴ. $p: |x| \geq x$ 라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

따라서 $P=U$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄷ. $p: 2x+1 \geq -3$ 이라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

따라서 $P=U$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄹ. $p: x-2 > 0$ 이라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면 $P = \emptyset$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

따라서 보기에서 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0799 답 ①

ㄱ. $P=U$ 이면 $P \neq \emptyset$ 이므로 명제 '어떤 x 에 대하여 p 이다.'는 참이다.

ㄴ. $P \neq \emptyset$ 이고 $P=U$ 이면 명제 '모든 x 에 대하여 p 이다.'는 참이다.

ㄷ. $P \neq U$ 이고 $P=\emptyset$ 이면 명제 '어떤 x 에 대하여 p 이다.'는 거짓이다.

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ이다.

0800 답 ③

① [반례] 2는 소수이지만 짝수이다.

② [반례] $x=0$ 이면 $x^2=0$ 이다.

③ $x=\frac{1}{2}$ 이면 $x^2 < x$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

④ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+2x+2=(x+1)^2+1 > 0$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

⑤ [반례] $x=1+\sqrt{2}$ 는 무리수이지만 $x^2=3+2\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다. 따라서 참인 명제는 ③이다.

0801 답 ⑤

주어진 명제의 부정은

'모든 실수 x 에 대하여 $x^2-8x+k \geq 0$ 이다.'

이차방정식 $x^2-8x+k=0$ 의 판별식을 D 라 할 때, 주어진 명제의 부정이 참이 되려면

$$\frac{D}{4} = (-4)^2 - k \leq 0, 16 - k \leq 0 \quad \therefore k \geq 16$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 16이다.

공통수학1 다시보기

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ ($a > 0$)의 판별식을 D 라 할 때, 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2+bx+c \geq 0$ 이 성립 $\Rightarrow D \leq 0$

0802 답 ①

ㄱ. 역: $x < 0$ 이고 $y < 0$ 이면 $x+y < 0$ 이다. (참)

ㄴ. 역: $z-x < z-y$ 이면 $x < y$ 이다. (거짓)

ㄷ. 역: $xy=0$ 이면 $|x|+|y|=0$ 이다. (거짓)

[반례] $x=0, y=1$ 이면 $xy=0$ 이지만 $|x|+|y| \neq 0$ 이다.

따라서 보기에서 그 역이 참인 명제인 것은 ㄱ이다.

0803 답 ④

명제 $p \rightarrow \sim q$ 의 역이 참이므로 $\sim q \rightarrow p$ 가 참이다.

따라서 명제 $\sim q \rightarrow p$ 의 대우 $\sim p \rightarrow q$ 도 참이다.

0804 답 ④

①, ② 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

③ 대우: $x^2-3x+2 < 0$ 이면 $1 < x < 2$ 이다. (참)

④ 대우: $x \leq 0$ 또는 $y \leq 0$ 이면 $xy \leq 0$ 이다. (거짓)

[반례] $x=-1, y=-2$ 이면 $x \leq 0$ 또는 $y \leq 0$ 이지만

$xy > 0$ 이다.

⑤ 대우: x, y 가 유리수이면 $x+y$ 는 유리수이다. (참)

따라서 그 대우가 거짓인 명제는 ④이다.

0805 답 ⑤

① 역: $x > 1$ 이면 $x > 0$ 이다. (참)

대우: $x \leq 1$ 이면 $x \leq 0$ 이다. (거짓)

[반례] $x=1$ 이면 $x \leq 1$ 이지만 $x > 0$ 이다.

② 역: $x=2$ 이면 $x^2=4$ 이다. (참)

대우: $x \neq 2$ 이면 $x^2 \neq 4$ 이다. (거짓)

[반례] $x=-2$ 이면 $x^2 \neq 4$ 이지만 $x^2=4$ 이다.

③ 역: $x^2=y^2$ 이면 $x=y$ 이다. (거짓)

[반례] $x=1, y=-1$ 이면 $x^2=y^2$ 이지만 $x \neq y$ 이다.

대우: $x^2 \neq y^2$ 이면 $x \neq y$ 이다. (참)

④ 역: $x^2 > y^2$ 이면 $x > y$ 이다. (거짓)

[반례] $x=-2, y=1$ 이면 $x^2 > y^2$ 이지만 $x < y$ 이다.

대우: $x^2 \leq y^2$ 이면 $x \leq y$ 이다. (거짓)

[반례] $x=1, y=-2$ 이면 $x^2 \leq y^2$ 이지만 $x > y$ 이다.

⑤ 역: $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이면 $xy \neq 0$ 이다. (참)

대우: $x=0$ 또는 $y=0$ 이면 $xy=0$ 이다. (참)

따라서 그 역과 대우가 모두 참인 명제는 ⑤이다.

0806 답 2

주어진 명제가 참이므로 그 대우 ' $a \geq k$ 이고 $b \geq 3$ 이면 $a+b \geq 5$ 이다.'도 참이다.

$a \geq k$, $b \geq 3$ 에서 $a+b \geq k+3$ 이므로

$$k+3 \geq 5 \quad \therefore k \geq 2$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 2이다.

0807 답 ①

주어진 명제가 참이 되려면 그 대우 ' $x-a=0$ 이면 $x^2-6x+5=0$ 이다.'가 참이 되어야 한다.

$x-a=0$ 에서 $x=a$ 를 $x^2-6x+5=0$ 에 대입하면

$$a^2-6a+5=0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 a 의 값의 합은 6이다.

0808 답 5

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 가 참이 되어야 한다.

$p: |x-a| \geq 3$ 에서 $\sim p: |x-a| < 3$

$|x-a| < 3$ 에서 $-3 < x-a < 3$

$$\therefore a-3 < x < a+3$$

조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$P^c = \{x | a-3 < x < a+3\}$$

..... ①

$q: |x-2| \geq 1$ 에서 $\sim q: |x-2| < 1$

$|x-2| < 1$ 에서 $-1 < x-2 < 1$

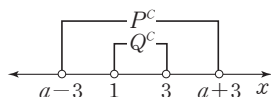
$$\therefore 1 < x < 3$$

조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면

$$Q^c = \{x | 1 < x < 3\}$$

..... ②

이때 명제 $\sim q \rightarrow \sim p$ 가 참이 되려면 $Q^c \subset P^c$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$$a-3 \leq 1, a+3 \geq 3$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 4$$

..... ③

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

..... ④

채점 기준

① 조건 $\sim p$ 의 진리집합 구하기	20%
② 조건 $\sim q$ 의 진리집합 구하기	20%
③ a 의 값의 범위 구하기	40%
④ 정수 a 의 개수 구하기	20%

0809 답 ②

명제 $r \rightarrow \sim p$ 가 참이므로 그 대우 $p \rightarrow \sim r$ 도 참이다.

또 명제 $\sim r \rightarrow q$ 가 참이므로 그 대우 $\sim q \rightarrow r$ 도 참이다.

이때 두 명제 $p \rightarrow \sim r$, $\sim r \rightarrow q$ 가 모두 참이므로 명제

$p \rightarrow q$ 가 참이고 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ②이다.

0810 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우 $q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

ㄴ. 두 명제 $s \rightarrow q$, $q \rightarrow r$ 가 모두 참이므로 명제 $s \rightarrow r$ 가 참이다.

ㄷ. 명제 $s \rightarrow q$ 가 참이므로 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim s$ 도 참이다.

이때 두 명제 $p \rightarrow \sim q$, $\sim q \rightarrow \sim s$ 가 모두 참이므로 명제

$p \rightarrow \sim s$ 가 참이다.

따라서 보기에서 항상 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0811 답 ⑤

명제 $r \rightarrow \sim s$ 가 참이므로 그 대우 $s \rightarrow \sim r$ 도 참이다.

두 명제 $p \rightarrow q$, $s \rightarrow \sim r$ 가 모두 참이므로 명제 $p \rightarrow \sim r$ 가 참이

되려면 명제 $q \rightarrow s$ 가 참이거나 그 대우 $\sim s \rightarrow \sim q$ 가 참이어야 한다.

따라서 명제 $p \rightarrow \sim r$ 가 참임을 보이기 위해 필요한 참인 명제는

⑤이다.

0812 답 ④

세 조건 p , q , r 를

p : 축구를 좋아한다.

q : 농구를 좋아한다.

r : 달리기를 좋아한다.

라 하면 명제 $p \rightarrow q$, $\sim p \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 각각의 대우

$\sim q \rightarrow \sim p$, $r \rightarrow p$ 도 참이다.

이때 두 명제 $r \rightarrow p$, $p \rightarrow q$ 가 모두 참이므로 명제 $r \rightarrow q$ 가 참

이고 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim r$ 도 참이다.

$$\textcircled{1} p \rightarrow r$$

$$\textcircled{2} q \rightarrow r$$

$$\textcircled{3} \sim p \rightarrow \sim q$$

$$\textcircled{4} \sim q \rightarrow \sim r$$

$$\textcircled{5} r \rightarrow \sim q$$

따라서 항상 참인 명제는 ④이다.

0813 답 ②

① $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow p$ 가 모두 참이므로 $p \Leftrightarrow q$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

② $p \rightarrow q$: 거짓

[반례] $x=1$, $y=-1$ 이면 $x^2=y^2$ 이지만 $x \neq y$ 이다.

$q \rightarrow p$: 참

따라서 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

③ $p \rightarrow q$: $x^2+y^2=0$ 이면 $x=0$, $y=0$ 이므로 $xy=0$ 이다. (참)

$q \rightarrow p$: 거짓

[반례] $x=1$, $y=0$ 이면 $xy=0$ 이지만 $x^2+y^2 \neq 0$ 이다.

따라서 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

④ $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow p$ 가 모두 참이므로 $p \Leftrightarrow q$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

⑤ $p \rightarrow q$: 참

$q \rightarrow p$: 거짓

[반례] $x=-1$, $y=-2$ 이면 $|x+y|=|x|+|y|$ 이지만 $x < 0$, $y < 0$ 이다.

따라서 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

따라서 p 가 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 ②이다.

0814 [답] (가) 충분 (나) 필요

- $ab < 0$ 이면 $a < 0$ 또는 $b < 0$ 이다. (참)
 $a < 0$ 또는 $b < 0$ 이면 $ab < 0$ 이다. (거짓)
 [반례] $a = -1, b = -2$ 이면 $a < 0$ 또는 $b < 0$ 이지만 $ab > 0$ 이다.
 따라서 $ab < 0$ 은 $a < 0$ 또는 $b < 0$ 이기 위한 [가] 충분 조건이다.
- $ab = 0$ 이면 $|a| + |b| = 0$ 이다. (거짓)
 [반례] $a = 1, b = 0$ 이면 $ab = 0$ 이지만 $|a| + |b| \neq 0$ 이다.
 $|a| + |b| = 0$ 이면 $ab = 0$ 이다. (참)
 따라서 $ab = 0$ 은 $|a| + |b| = 0$ 이기 위한 [나] 필요 조건이다.

0815 [답] ②

- ㄱ. $p \rightarrow q$: 거짓
 [반례] $x = -1, y = -2$ 이면 $|xy| = xy$ 이지만 $x < 0, y < 0$ 이다.
 $q \rightarrow p$: 참
 따라서 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
- ㄴ. $p \rightarrow q$: 참
 $q \rightarrow p$: 거짓
 [반례] $x = 1, y = -1$ 이면 $x^2 = y^2$ 이지만 $|x| \neq |y|$ 이다.
 따라서 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
- ㄷ. $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow p$ 가 모두 참이므로 $p \Leftrightarrow q$
 따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
- ㄹ. $p \rightarrow q$: 참
 $q \rightarrow p$: 거짓
 [반례] $x = 0, y = -1$ 이면 $x^2 + y^2 > 0$ 이지만 $x + y < 0$ 이다.
 따라서 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
 따라서 보기에서 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄷ이다.

0816 [답] ㄱ, ㄷ

p 는 q 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow q \quad \therefore \sim q \Rightarrow \sim p$
 $\sim r$ 는 $\sim p$ 이기 위한 필요조건이므로 $\sim p \Rightarrow \sim r \quad \therefore r \Rightarrow p$
 이때 $\sim q \Rightarrow \sim p, \sim p \Rightarrow \sim r$ 이므로 $\sim q \Rightarrow \sim r$
 따라서 보기에서 항상 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0817 [답] ③

- q 는 p 이기 위한 필요조건이므로 $p \Rightarrow q \quad \therefore \sim q \Rightarrow \sim p$
 r 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로 $r \Rightarrow \sim q \quad \therefore q \Rightarrow \sim r$
 이때 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow \sim r$ 이므로 $p \Rightarrow \sim r \quad \therefore r \Rightarrow \sim p$
 - ① $p \Rightarrow \sim r$ 이므로 p 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이다.
 - ② $q \Rightarrow \sim r$ 이므로 q 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이다.
 - ③ $r \Rightarrow \sim q$ 이므로 $r \not\Rightarrow q$
 따라서 q 는 r 이기 위한 필요조건이 아니다.
 - ④ $\sim q \Rightarrow \sim p$ 이므로 $\sim p$ 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이다.
 - ⑤ $r \Rightarrow \sim p$ 이므로 $\sim p$ 는 r 이기 위한 필요조건이다.
- 따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

0818 [답] ⑤

q 는 p 이기 위한 필요조건이므로 $p \Rightarrow q \quad \therefore P \subset Q$
 따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

0819 [답] ⑤

- p 는 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$
 $\sim q$ 는 $\sim r$ 이기 위한 필요조건이므로 $R^c \subset Q^c \quad \therefore Q \subset R$
 $\therefore P \subset Q \subset R$
- ④ $Q \cup R = R$ 이므로 $P \subset (Q \cup R)$
- ⑤ $Q \cap R = Q$ 이므로 $P \subset (Q \cap R)$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

0820 [답] ③

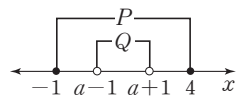
- ㄱ. $P \subset R^c$ 이므로 p 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이다.
- ㄴ. $P \subset Q^c$ 이므로 $\sim q$ 는 p 이기 위한 필요조건이다.
- ㄷ. $Q \subset R$ 에서 $R^c \subset Q^c$ 이므로 $\sim r$ 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.
 따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0821 [답] ⑤

- $(P - Q) \cup (Q - R^c) = \emptyset$ 이므로
 $P - Q = \emptyset, Q - R^c = \emptyset \quad \therefore P \subset Q, Q \cap R = \emptyset$
- ① $P \subset Q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
- ② $Q \cap R = \emptyset$ 이므로 q 는 r 이기 위한 충분조건이 아니다.
- ③ $P \subset Q$ 이고 $Q \cap R = \emptyset$ 이므로 $P \cap R = \emptyset$
 따라서 r 는 p 이기 위한 필요조건이 아니다.
- ④ $P \cap R = \emptyset$ 에서 $R \subset P^c$ 이므로 $\sim p$ 는 r 이기 위한 필요조건이다.
- ⑤ $P \cap R = \emptyset$ 에서 $P \subset R^c$ 이므로 $\sim r$ 는 p 이기 위한 필요조건이다.
 따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

0822 [답] 4

- $x^2 - 3x - 4 \leq 0$ 에서 $(x+1)(x-4) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 4$
 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면
 $P = \{x | -1 \leq x \leq 4\}$
- $|x-a| < 1$ 에서 $-1 < x-a < 1 \quad \therefore a-1 < x < a+1$
 조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면
 $Q = \{x | a-1 < x < a+1\}$
- 이때 q 가 p 이기 위한 충분조건이 되려면
 $Q \subset P$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서
 $a-1 \geq -1, a+1 \leq 4$
 $\therefore 0 \leq a \leq 3$



따라서 정수 a 는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

0823 [답] -2

- $x-2 \neq 0$ 이 $x^2 - ax - 8 \neq 0$ 이기 위한 필요조건이므로 명제
 ‘ $x^2 - ax - 8 \neq 0$ 이면 $x-2 \neq 0$ 이다.’가 참이다.
 따라서 이 명제의 대우 ‘ $x-2=0$ 이면 $x^2 - ax - 8=0$ 이다.’도 참이다.
 $x-2=0$ 에서 $x=2$ 를 $x^2 - ax - 8=0$ 에 대입하면
 $4 - 2a - 8 = 0 \quad \therefore a = -2$

0824 [답] ③

- $x^2 - 4x - 12 = 0$ 에서
 $(x+2)(x-6) = 0 \quad \therefore x = -2$ 또는 $x = 6$
 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면
 $P = \{-2, 6\}$

$q: |x-3| > k$ 에서 $\sim q: |x-3| \leq k$
 $|x-3| \leq k$ 에서 $-k \leq x-3 \leq k \quad \therefore 3-k \leq x \leq 3+k$
 조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면
 $Q^c = \{x | 3-k \leq x \leq 3+k\}$
 이때 p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이 되려면 $P \subset Q^c$ 이어야 하므로
 $3-k \leq -2, 3+k \geq 6$
 $\therefore k \geq 5$
 따라서 자연수 k 의 최솟값은 5이다.

0825 답 3

세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면
 $P = \{x | -2 < x < 3 \text{ 또는 } x > 5\}$,
 $Q = \{x | x \geq a\}$,
 $R = \{x | x \leq b\}$ ①
 이때 q 는 p 이기 위한 필요조건이고 $\sim r$ 는 p 이기 위한 충분조건이므로
 $P \subset Q, R^c \subset P \quad \therefore R^c \subset P \subset Q$
 이때 $R^c = \{x | x > b\}$ 이므로 오른쪽 그림에서
 $a \leq -2, b \geq 5$ ②
 따라서 a 의 최댓값은 -2 , b 의 최솟값은 5이므로 구하는 합은
 $-2+5=3$ ③

채점 기준

① 세 조건 p, q, r 의 진리집합 구하기	20 %
② a, b 의 값의 범위 구하기	60 %
③ a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합 구하기	20 %

0826 답 (가) $3k-2$ (나) $3k^2-4k+1$ (다) $3k^2-2k$

n 이 3의 배수가 아니면
 $n = \boxed{(가) 3k-2}$ 또는 $n = 3k-1$ (k 는 자연수)
 로 나타낼 수 있으므로
 $n^2 = (3k-2)^2 = 9k^2 - 12k + 4$
 $= 3(\boxed{(나) 3k^2-4k+1}) + 1$
 또는
 $n^2 = (3k-1)^2 = 9k^2 - 6k + 1$
 $= 3(\boxed{(다) 3k^2-2k}) + 1$
 이때 $\boxed{(나) 3k^2-4k+1}, \boxed{(다) 3k^2-2k}$ 는 0 또는 자연수이므로 n^2 은 3의 배수가 아니다.

0827 답 ②

주어진 명제의 대우 '자연수 x, y 에 대하여 x, y 가 모두 (가) 홀수'이면 xy 도 (가) 홀수이다.'가 참임을 보이려면 된다.
 x, y 가 모두 (가) 홀수이면
 $x = 2m-1, y = \boxed{(나) 2n-1}$ (m, n 은 자연수)
 로 나타낼 수 있으므로
 $xy = (2m-1)(\boxed{(나) 2n-1})$
 $= 4mn - 2m - 2n + 1$
 $= 2(\boxed{(다) 2mn - m - n}) + 1$
 이때 $\boxed{(다) 2mn - m - n}$ 은 0 또는 자연수이므로 xy 는 (가) 홀수이다.

0828 답 (가) 유리수 (나) 짝수 (다) $2k$

$\sqrt{2}$ 가 (가) 유리수라 가정하면
 $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ (a, b 는 서로소인 자연수)
 로 나타낼 수 있다.
 양변을 제곱하면
 $2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \therefore a^2 = 2b^2 \quad \dots\dots ①$
 이때 a^2 이 (나) 짝수이므로 a 도 (나) 짝수이다.
 a 가 짝수이면 $a = \boxed{(다) 2k}$ (k 는 자연수)로 나타낼 수 있으므로 ①에 대입하면
 $(\boxed{(다) 2k})^2 = 2b^2 \quad \therefore b^2 = 2k^2$
 이때 b^2 이 (나) 짝수이므로 b 도 (나) 짝수이다.
 그런데 a, b 가 모두 (나) 짝수이면 a, b 가 서로소라는 가정에 모순이므로 $\sqrt{2}$ 는 무리수이다.

0829 답 ⑤

이는 $\sqrt{5}$ 가 (가) 무리수라는 사실에 모순이므로 $\boxed{(나) b=0}$ 이다.
 $a+b\sqrt{5}=0$ 에 $\boxed{(나) b=0}$ 을 대입하면 $a=0$ 이다.
 따라서 유리수 a, b 에 대하여 $a+b\sqrt{5}=0$ 이면 $\boxed{(다) a=b=0}$ 이다.

0830 답 (가) $x-y$ (나) $\geq$ (다) 0

$x^2 + 3y^2 - 2xy = (\boxed{(가) x-y})^2 + 2y^2 \geq 0$
 $\therefore x^2 + 3y^2 \boxed{(나) \geq} 2xy$
 이때 등호는 $x=y=\boxed{(다) 0}$ 일 때 성립한다.

0831 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $(x^2+16)-8x = x^2-8x+16$
 $= (x-4)^2 \geq 0$
 $\therefore x^2+16 \geq 8x$
 ㄴ. $x^2-xy+y^2 = \left(x-\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$
 ㄷ. $x > 0, y > 0$ 일 때,
 $(x+y)^2 - (\sqrt{x^2+y^2})^2 = x^2+2xy+y^2 - (x^2+y^2)$
 $= 2xy > 0$
 $\therefore (x+y)^2 > (\sqrt{x^2+y^2})^2$
 그런데 $x+y > 0, \sqrt{x^2+y^2} > 0$ 이므로
 $x+y > \sqrt{x^2+y^2}$
 따라서 보기에서 항상 참인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0832 답 (가) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (나) $a=b$

$\sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}(a+b) - 2ab}{a+b}$
 $= \frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$
 $= \frac{\sqrt{ab}(\boxed{(가) \sqrt{a}-\sqrt{b}})^2}{a+b} \geq 0$
 $\therefore \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$
 이때 등호는 $\boxed{(나) a=b}$ 일 때 성립한다.

0833 [답 ④]

$$\begin{aligned} (|a|+|b|)^2 - |a+b|^2 &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a+b)^2 \\ &= a^2 + 2|ab| + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\ &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \quad (\because |ab| \geq ab) \end{aligned}$$

따라서 $(|a|+|b|)^2 \geq |a+b|^2$ 이다.

그런데 $|a|+|b| \geq 0$, $|a+b| \geq 0$ 이므로

$$|a|+|b| \geq |a+b|$$

이때 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $ab \geq 0$ 일 때 성립한다.

0834 [답 19]

$x > 0$, $y > 0$ 에서 $3x > 0$, $4y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3x + 4y \geq 2\sqrt{3x \times 4y} = 4\sqrt{3xy}$$

이때 $3x + 4y = 24$ 이므로

$$24 \geq 4\sqrt{3xy}, \sqrt{3xy} \leq 6$$

양변을 제곱하면

$$3xy \leq 36 \quad \therefore xy \leq 12$$

등호는 $3x = 4y$ 일 때 성립하므로 $3x + 4y = 24$ 에서

$$6x = 24, 8y = 24 \quad \therefore x = 4, y = 3$$

따라서 xy 는 $x = 4$, $y = 3$ 일 때 최댓값 12를 가지므로

$$\alpha = 12, \beta = 4, \gamma = 3 \quad \therefore \alpha + \beta + \gamma = 19$$

0835 [답 ③]

$a > 0$, $b > 0$ 에서 $2a > 0$, $4b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2a + 4b \geq 2\sqrt{2a \times 4b} = 4\sqrt{2ab}$$

이때 $ab = 8$ 이므로

$$2a + 4b \geq 4\sqrt{2 \times 8} = 16 \quad (\text{단, 등호는 } a = 2b \text{일 때 성립})$$

따라서 구하는 최솟값은 16이다.

0836 [답 3]

$a > 0$, $b > 0$ 에서 $a^2 > 0$, $4b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a^2 + 4b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \times 4b^2} = 4ab \quad (\because ab > 0)$$

이때 $a^2 + 4b^2 = 8$ 이므로

$$8 \geq 4ab \quad \therefore ab \leq 2$$

등호는 $a^2 = 4b^2$ 일 때 성립하므로 $a^2 + 4b^2 = 8$ 에서

$$4b^2 + 4b^2 = 8, b^2 = 1 \quad \therefore b = 1 \quad (\because b > 0)$$

이를 $a^2 = 4b^2$ 에 대입하여 풀면 $a = 2$ ($\because a > 0$)

따라서 ab 는 $a = 2$, $b = 1$ 일 때 최댓값 2를 가지므로

$$p = 2, q = 2, r = 1 \quad \therefore p + q - r = 3$$

0837 [답 4]

$$\frac{3}{a} + \frac{4}{b} = \frac{4a + 3b}{ab} = \frac{12}{ab} \quad (\because 4a + 3b = 12) \quad \dots\dots ①$$

$a > 0$, $b > 0$ 에서 $4a > 0$, $3b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4a + 3b \geq 2\sqrt{4a \times 3b} = 4\sqrt{3ab}$$

이때 $4a + 3b = 12$ 이므로

$$12 \geq 4\sqrt{3ab}, \sqrt{3ab} \leq 3 \quad (\text{단, 등호는 } 4a = 3b \text{일 때 성립})$$

양변을 제곱하면

$$3ab \leq 9 \quad \therefore ab \leq 3$$

$$\text{즉, } \frac{1}{ab} \geq \frac{1}{3} \text{이므로 } \frac{12}{ab} \geq 4$$

따라서 ①에서 구하는 최솟값은 4이다.

0838 [답 ⑤]

$a > 0$, $b > 0$ 에서 $ab > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{9}{a}\right) &= ab + 9 + 1 + \frac{9}{ab} \\ &\geq 2\sqrt{ab \times \frac{9}{ab}} + 10 = 16 \end{aligned}$$

이때 등호는 $ab = \frac{9}{ab}$ 일 때 성립하므로

$$(ab)^2 = 9 \quad \therefore ab = 3 \quad (\because ab > 0)$$

따라서 주어진 식은 $ab = 3$ 일 때 최솟값 16을 가지므로

$$p = 3, q = 16 \quad \therefore p + q = 19$$

0839 [답 12]

$x > -2$ 에서 $x + 2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} x + \frac{16}{x+2} &= x + 2 + \frac{16}{x+2} - 2 \\ &\geq 2\sqrt{(x+2) \times \frac{16}{x+2}} - 2 = 6 \end{aligned}$$

$$\therefore m = 6$$

..... i

이때 등호는 $x + 2 = \frac{16}{x+2}$ 일 때 성립하므로

$$(x+2)^2 = 16, x+2 = 4 \quad (\because x+2 > 0) \quad \therefore x = 2$$

$$\therefore n = 2$$

..... ii

$$\therefore mn = 12$$

..... iii

채점 기준

i m의 값 구하기	40 %
ii n의 값 구하기	40 %
iii mn의 값 구하기	20 %

0840 [답 ③]

$a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} &= \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} \\ &= \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \\ &\geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{b} \times \frac{b}{c}} + 2\sqrt{\frac{a}{c} \times \frac{c}{a}} \\ &= 6 \quad (\text{단, 등호는 } a = b = c \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 6이다.

0841 [답 8]

이차방정식 $x^2 - 2x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - a < 0 \quad \therefore a - 1 > 0$$

$a - 1 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 4a + \frac{1}{a-1} &= 4(a-1) + \frac{1}{a-1} + 4 \\ &\geq 2\sqrt{4(a-1) \times \frac{1}{a-1}} + 4 \\ &= 8 \quad (\text{단, 등호는 } 4(a-1) = \frac{1}{a-1}, \text{ 즉 } a = \frac{3}{2} \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 8이다.

0842 [답] ①

$x > 0, a > 0$ 에서 $\frac{a}{x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4x + \frac{a}{x} \geq 2\sqrt{4x \times \frac{a}{x}} = 4\sqrt{a} \quad \left(\text{단, 등호는 } 4x = \frac{a}{x} \text{일 때 성립} \right)$$

이때 최솟값이 2이므로

$$4\sqrt{a} = 2, \sqrt{a} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = \frac{1}{4}$$

0843 [답] 4

$a > b$ 에서 $a - b > 0$ 이고 $c > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} (a-b+c)\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{c}\right) &= \{(a-b)+c\}\left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{c}\right) \\ &= 1 + \frac{a-b}{c} + \frac{c}{a-b} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{\frac{a-b}{c} \times \frac{c}{a-b}} + 2 \\ &= 4 \quad (\text{단, 등호는 } a-b=c \text{일 때 성립}) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

0844 [답] 10

$x > 4$ 에서 $x - 4 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 4x + 9}{x - 4} &= \frac{x(x-4) + 9}{x-4} \\ &= x + \frac{9}{x-4} \\ &= x - 4 + \frac{9}{x-4} + 4 \\ &\geq 2\sqrt{(x-4) \times \frac{9}{x-4}} + 4 \\ &= 10 \quad \left(\text{단, 등호는 } x-4 = \frac{9}{x-4}, \text{ 즉 } x=7 \text{일 때 성립} \right) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 10이다.

0845 [답] 13

x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(2^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (2x + 3y)^2$$

이때 $x^2 + y^2 = 13$ 이므로

$$13 \times 13 \geq (2x + 3y)^2, (2x + 3y)^2 \leq 13^2$$

$$\therefore -13 \leq 2x + 3y \leq 13 \quad (\text{단, 등호는 } 2y = 3x \text{일 때 성립})$$

따라서 구하는 최댓값은 13이다.

0846 [답] ③

x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right\} (x^2 + y^2) \geq \left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} \right)^2$$

이때 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = \frac{5}{4}$ 이므로

$$\frac{25}{9 \times 16} (x^2 + y^2) \geq \left(\frac{5}{4} \right)^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 \geq \frac{25}{16} \times \frac{9 \times 16}{25} = 9 \quad (\text{단, 등호는 } \frac{y}{3} = \frac{x}{4} \text{일 때 성립})$$

따라서 구하는 최솟값은 9이다.

0847 [답] 10

$$x^2 + y^2 = 5 \text{이므로 } x^2 + x + y^2 + 2y = x + 2y + 5$$

x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 2y)^2$$

이때 $x^2 + y^2 = 5$ 이므로

$$5 \times 5 \geq (x + 2y)^2, (x + 2y)^2 \leq 5^2$$

$$\therefore -5 \leq x + 2y \leq 5 \quad (\text{단, 등호는 } y = 2x \text{일 때 성립})$$

$$\therefore 0 \leq x + 2y + 5 \leq 10$$

따라서 구하는 최댓값은 10이다.

0848 [답] 200 m²

전체 구역의 가로의 길이를 a m, 세로의 길이를 b m라 하면

$$2a + 4b = 80 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

구역의 전체 넓이는 ab m²

$a > 0, b > 0$ 에서 $2a > 0, 4b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2a + 4b \geq 2\sqrt{2a \times 4b} = 4\sqrt{2ab} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$80 \geq 4\sqrt{2ab}, \sqrt{2ab} \leq 20 \quad (\text{단, 등호는 } a = 2b \text{일 때 성립})$$

양변을 제곱하면

$$2ab \leq 400 \quad \therefore ab \leq 200$$

따라서 구하는 최댓값은 200 m²이다.

0849 [답] 8

직사각형의 가로 길이를 x , 세로 길이를 y 라 하면

$$x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

직사각형의 둘레의 길이는 $2(x+y)$

x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 1^2)(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

㉠, ㉡에서

$$2 \times 8 \geq (x + y)^2, (x + y)^2 \leq 4^2$$

이때 $x > 0, y > 0$ 이므로

$$0 < x + y \leq 4 \quad (\text{단, 등호는 } x = y \text{일 때 성립})$$

$$\therefore 0 < 2(x + y) \leq 8 \quad \dots\dots \textcircled{iii} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

$$\text{따라서 구하는 최댓값은 8이다.} \quad \dots\dots \textcircled{iv} \quad \dots\dots \textcircled{iv}$$

채점 기준

① $x^2 + y^2$ 의 값 구하기	20 %
② 코시-슈바르츠의 부등식 이용하기	30 %
③ 둘레의 길이의 범위 구하기	30 %
④ 둘레의 길이의 최댓값 구하기	20 %

0850 [답] ③

$\overline{AC} = x, \overline{BC} = y$ 라 하면 삼각형 ABC의 넓이가 16이므로

$$\frac{1}{2}xy = 16 \quad \therefore xy = 32$$

$\overline{AB}^2 = x^2 + y^2$ 이고 $x > 0, y > 0$ 에서 $x^2 > 0, y^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 y^2} = 2xy \quad (\because xy > 0)$$

$$= 64 \quad (\text{단, 등호는 } x = y \text{일 때 성립})$$

따라서 구하는 최솟값은 64이다.

0851 답 ①

- ① x 의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
 ② $2x+1 > 2(x-3)$ 에서 $1 > -6$ 이므로 참인 명제이다.
 ③, ⑤ 참인 명제이다.
 ④ 거짓인 명제이다.
 따라서 명제가 아닌 것은 ①이다.

0852 답 ③

' $\sim p$ 또는 q '의 부정은 ' p 그리고 $\sim q$ '이다.
 $p: x > 1$, $\sim q: x < 5$ 이므로 ' p 그리고 $\sim q$ '는
 $1 < x < 5$

0853 답 15

$U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ 이므로 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{2, 3, 5, 7\}$, $Q = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
 이때 조건 ' p 그리고 $\sim q$ '의 진리집합은 $P \cap Q^c$ 이고
 $Q^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이므로
 $P \cap Q^c = \{3, 5, 7\}$
 따라서 구하는 모든 원소의 합은
 $3+5+7=15$

0854 답 ④

- ㄱ. $x^2+y^2=0$ 이면 $x=0$ 이고 $y=0$ 이므로 $xy=0$ 이다.
 ㄴ. [반례] $x=y=0$, $z=2$ 이면 $xy=yz=zx=0$ 이지만 $x=y=0$,
 $z \neq 0$ 이다.
 ㄷ. $x+y=2$ 에서 $y=2-x$
 이를 $x^2+y^2=2$ 에 대입하면
 $x^2+(2-x)^2=2$, $x^2-2x+1=0$
 $(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$
 $\therefore x=y=1$
 즉, 주어진 명제는 참이다.
 따라서 보기에서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0855 답 ③

명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 $P \subset Q^c$
 $\therefore P \cap Q = \emptyset$
 따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

0856 답 ②

- ② [반례] $x=8$ 이면 $2x=16$ 이므로 $2x \notin U$ 이다.

0857 답 ⑤

- ① 역: $x=1$ 이면 $x^2=1$ 이다. (참)
 ② 역: x, y 가 모두 유리수이면 xy 는 유리수이다. (참)
 ③ 역: xy 가 홀수이면 $x+y$ 는 짝수이다. (참)
 ④ 역: $x \leq 3$ 이고 $y \leq 3$ 이면 $x+y \leq 6$ 이다. (참)

- ⑤ 역: $x^2+y^2 > 0$ 이면 $x > 0$ 또는 $y > 0$ 이다. (거짓)
 [반례] $x=-1$, $y=-2$ 이면 $x^2+y^2 > 0$ 이지만 $x < 0$, $y < 0$ 이다.

따라서 그 역이 거짓인 명제는 ⑤이다.

0858 답 12

주어진 명제가 참이므로 그 대우 ' $x \leq -2$ 이고 $y \leq a$ 이면 $x+y \leq 10$ 이다.'도 참이다.
 $x \leq -2$, $y \leq a$ 에서 $x+y \leq a-2$ 이므로
 $a-2 \leq 10 \quad \therefore a \leq 12$
 따라서 실수 a 의 최댓값은 12이다.

0859 답 ④

명제 $p \rightarrow r$ 가 참이므로 그 대우 $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.
 또 명제 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 그 대우 $r \rightarrow \sim q$ 도 참이다.
 이때 두 명제 $p \rightarrow r$, $r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참이므로 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이고 그 대우 $q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.
 따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ④이다.

0860 답 ③

- ① $p \rightarrow q: x^3=1$ 이면 $x=1$ 이므로 $x^2=1$ 이다. (참)
 $q \rightarrow p$: 거짓
 [반례] $x=-1$ 이면 $x^2=1$ 이지만 $x^3 \neq 1$ 이다.
 따라서 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
 ② $p \rightarrow q: x^2=9$ 이면 $x=\pm 3$ 이므로 $|x|=3$ 이다. (참)
 $q \rightarrow p: |x|=3$ 이면 $x=\pm 3$ 이므로 $x^2=9$ 이다. (참)
 따라서 $p \Leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
 ③ $p \rightarrow q$: 거짓
 [반례] $x=-3$ 이면 $x^2 > 4$ 이지만 $x \leq 2$ 이다.
 $q \rightarrow p$: 참
 따라서 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
 ④ $p \rightarrow q: x+2=3$ 이면 $x=1$ 이므로 $x^2-2x+1=0$ 이다. (참)
 $q \rightarrow p: x^2-2x+1=0$ 이면 $(x-1)^2=0$ 에서 $x=1$ 이므로
 $x+2=3$ 이다. (참)
 따라서 $p \Leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
 ⑤ $p \rightarrow q$: 참
 $q \rightarrow p$: 거짓
 [반례] $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ 이면 $x+y$ 는 정수이지만 x, y 는 모두 정수가 아니다.

따라서 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
 따라서 p 가 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 ⑤이다.

0861 답 ③

명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우 $q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.
 또 $\sim r \rightarrow q$ 가 참이므로 그 대우 $\sim q \rightarrow r$ 도 참이다.
 ㄱ. 두 명제 $p \rightarrow \sim q$, $\sim q \rightarrow r$ 가 모두 참이므로 명제 $p \rightarrow r$ 가 참이다.
 따라서 p 는 r 이기 위한 충분조건이다.
 ㄴ. 명제 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이므로 q 는 $\sim p$ 이기 위한 충분조건이다.
 ㄷ. 명제 $\sim q \rightarrow r$ 가 참이므로 r 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0862 답 ④

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P$
 p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset R$
 $\therefore Q \subset P \subset R$

0863 답 ④

$|x| \leq n$ 에서 $-n \leq x \leq n$

조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$P = \{x \mid -n \leq x \leq n\}$$

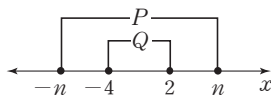
$$x^2 + 2x - 8 \leq 0 \text{에서 } (x+4)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq x \leq 2$$

조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면

$$Q = \{x \mid -4 \leq x \leq 2\}$$

이때 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되려면 $Q \subset P$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$$-n \leq -4, n \geq 2$$

$$\therefore n \geq 4$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

0864 답 (가) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (나) $>$ (다) $>$

$$\begin{aligned} (\sqrt{a-b})^2 - (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 &= (a-b) - (a-2\sqrt{ab}+b) \\ &= 2\sqrt{ab} - 2b \\ &= 2\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) > 0 \quad (\because \sqrt{a} > \sqrt{b} > 0) \end{aligned}$$

따라서 $(\sqrt{a-b})^2 > (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ 이다.

그런데 $\sqrt{a-b}$ (가) $>$ 0, $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (나) $>$ 0이므로

$$\sqrt{a-b} > \sqrt{a}-\sqrt{b}$$

0865 답 0

$a > 0$ 에서 $a^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \left(a - \frac{2}{a}\right) \left(2a - \frac{1}{a}\right) &= 2a^2 - 1 - 4 + \frac{2}{a^2} \\ &= 2a^2 + \frac{2}{a^2} - 5 \\ &\geq 2\sqrt{2a^2 \times \frac{2}{a^2}} - 5 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\therefore m = -1$$

이때 등호는 $2a^2 = \frac{2}{a^2}$ 일 때 성립하므로

$$a^4 = 1 \quad \therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore a = 1$$

$$\therefore m + a = 0$$

0866 답 20

x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2 + 3^2) \{ (2x)^2 + y^2 \} \geq (2x + 3y)^2$$

$$(1^2 + 3^2)(4x^2 + y^2) \geq (2x + 3y)^2$$

이때 $4x^2 + y^2 = 10$ 이므로

$$10 \times 10 \geq (2x + 3y)^2, (2x + 3y)^2 \leq 10^2$$

$$\therefore -10 \leq 2x + 3y \leq 10 \quad (\text{단, 등호는 } y = 6x \text{일 때 성립})$$

따라서 $2x + 3y$ 의 최댓값은 10, 최솟값은 -10이므로 그 차는 20이다.

0867 답 ⑤

$$A\left(-2 - \frac{3}{m}, 0\right), B(0, 2m+3)$$

므로 오른쪽 그림에서 삼각형 OAB의

넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left(2 + \frac{3}{m}\right) \times (2m+3)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(4m + 12 + \frac{9}{m}\right)$$

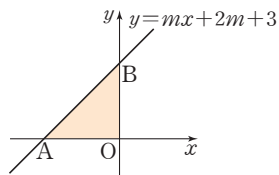
$$= 2m + \frac{9}{2m} + 6$$

$m > 0$ 에서 $2m > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2m + \frac{9}{2m} + 6 \geq 2\sqrt{2m \times \frac{9}{2m}} + 6$$

$$= 12 \quad (\text{단, 등호는 } 2m = \frac{9}{2m}, \text{ 즉 } m = \frac{3}{2} \text{일 때 성립})$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이의 최솟값은 12이다.



0868 답 3

$p: |x-1| > k$ 에서 $\sim p: |x-1| \leq k$

$|x-1| \leq k$ 에서 $-k \leq x-1 \leq k$

$$\therefore 1-k \leq x \leq 1+k$$

조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$P^c = \{x \mid 1-k \leq x \leq 1+k\}$$

$|x+1| \leq 5$ 에서 $-5 \leq x+1 \leq 5$

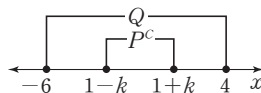
$$\therefore -6 \leq x \leq 4$$

조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면

$$Q = \{x \mid -6 \leq x \leq 4\}$$

이때 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참이 되려면

$P^c \subset Q$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$$1-k \geq -6, 1+k \leq 4$$

$$\therefore 0 < k \leq 3 \quad (\because k > 0)$$

따라서 양수 k 의 최댓값은 3이다.

채점 기준

i 조건 $\sim p$ 의 진리집합 구하기	30 %
ii 조건 q 의 진리집합 구하기	20 %
iii k 의 값의 범위 구하기	40 %
iv 양수 k 의 최댓값 구하기	10 %

0869 답 풀이 참조

주어진 명제의 대우 '자연수 n 에 대하여 n 이 짝수이면 n^2 도 짝수이다.'가 참임을 보이면 된다.

n 이 짝수이면 $n = 2k$ (k 는 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

$$= 2(2k^2)$$

이때 $2k^2$ 이 자연수이므로 n^2 은 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

채점 기준

i 주어진 명제의 대우 구하기	40 %
ii 대우를 이용하여 증명하기	60 %

0870 **답** 17

$$\frac{x^2+4}{x} + \frac{y^2+4}{y} = x + \frac{4}{x} + y + \frac{4}{y} = x + y + \frac{4(x+y)}{xy}$$

$$= 16 + \frac{64}{xy} \quad (\because x+y=16) \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

이때 $x+y=16$ 이므로

$$16 \geq 2\sqrt{xy}, \sqrt{xy} \leq 8 \quad (\text{단, 등호는 } x=y \text{ 일 때 성립})$$

양변을 제곱하면

$$xy \leq 64 \quad \therefore \frac{1}{xy} \geq \frac{1}{64} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 $\textcircled{i}$ 에서

$$\frac{x^2+4}{x} + \frac{y^2+4}{y} \geq 16 + 1 = 17$$

즉, 구하는 최솟값은 17이다. $\dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① 주어진 식 간단히 하기	20 %
② $\frac{1}{xy}$ 의 값의 범위 구하기	50 %
③ 주어진 식의 최솟값 구하기	30 %

C 실력 향상

133쪽

0871 **답** ②

$$|x-k| \leq 2 \text{에서 } -2 \leq x-k \leq 2$$

$$\therefore k-2 \leq x \leq k+2$$

조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$P = \{x | k-2 \leq x \leq k+2\}$$

$$x^2-4x-5 \leq 0 \text{에서 } (x+1)(x-5) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 5$$

조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면

$$Q = \{x | -1 \leq x \leq 5\}$$

명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓이 되려면 $P \not\subset Q$ 이어야 한다.

이때 $k-2 \geq -1$ 이고 $k+2 \leq 5$, 즉 $1 \leq k \leq 3$ 이면 $P \subset Q$ 가 되므로

조건을 만족시키려면 $k < 1$ 또는 $k > 3$ 이어야 한다.

또 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 거짓이 되려면 $P \not\subset Q^c$ 이어야 하므로

$P \cap Q \neq \emptyset$ 이어야 한다.

(i) $k < 1$ 일 때

$P \cap Q \neq \emptyset$ 이어야 하므로 오른쪽

그림에서

$$k+2 \geq -1 \quad \therefore k \geq -3$$

$$\therefore -3 \leq k < 1 \quad (\because k < 1)$$

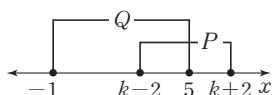
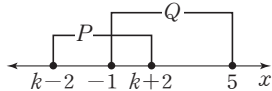
(ii) $k > 3$ 일 때

$P \cap Q \neq \emptyset$ 이어야 하므로 오른쪽

그림에서

$$k-2 \leq 5 \quad \therefore k \leq 7$$

$$\therefore 3 < k \leq 7 \quad (\because k > 3)$$



(i), (ii)에서 $-3 \leq k < 1$ 또는 $3 < k \leq 7$

따라서 모든 정수 k 의 값의 합은

$$-3 + (-2) + (-1) + 0 + 4 + 5 + 6 + 7 = 16$$

0872 **답** ①

실수 전체의 집합을 U , 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

‘모든 실수 x 에 대하여 p 이다.’가 참인 명제가 되려면 $P=U$ 이어야

하므로 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+2ax+1 \geq 0$ 이어야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2+2ax+1=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - 1 \leq 0, a^2 \leq 1$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

또 ‘ p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.’가 참인 명제가 되려면 $P \subset Q^c$

이어야 하고 $P=U$ 이므로 $Q^c=U$ 이다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $x^2+2bx+9 > 0$ 이어야 하므로 이차방정식

$x^2+2bx+9=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = b^2 - 9 < 0, b^2 < 9$$

$$\therefore -3 < b < 3 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$\textcircled{i}, \textcircled{ii}$ 에서 정수 a 가 될 수 있는 수는 $-1, 0, 1$ 의 3개이고 정수 b 가

될 수 있는 수는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이므로 정수 a, b 의 순서쌍

(a, b) 의 개수는

$$3 \times 5 = 15$$

0873 **답** ④

$$(\sqrt{2x} + \sqrt{3y})^2 = 2x + 2\sqrt{2x \cdot 3y} + 3y$$

$$= 2x + 3y + 2\sqrt{6xy} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$x > 0, y > 0$ 에서 $2x > 0, 3y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계

에 의하여

$$2x + 3y \geq 2\sqrt{2x \cdot 3y} = 2\sqrt{6xy}$$

이때 $2x + 3y = 8$ 이므로

$$8 \geq 2\sqrt{6xy} \quad (\text{단, 등호는 } 2x=3y \text{ 일 때 성립}) \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$\textcircled{i}, \textcircled{ii}$ 에서

$$(\sqrt{2x} + \sqrt{3y})^2 = (2x + 3y) + 2\sqrt{6xy} \leq 8 + 8 = 16$$

이때 $\sqrt{2x} + \sqrt{3y} > 0$ 이므로

$$0 < \sqrt{2x} + \sqrt{3y} \leq \sqrt{16} = 4$$

따라서 $\sqrt{2x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은 4이다.

0874 **답** ⑤

$x-y-2z=-3$ 에서

$$y+2z=x+3 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$x^2+y^2+z^2=9$ 에서

$$y^2+z^2=9-x^2 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

y, z 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2+2^2)(y^2+z^2) \geq (y+2z)^2 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

$\textcircled{i}, \textcircled{ii}$ 을 $\textcircled{iii}$ 에 대입하면

$$5(9-x^2) \geq (x+3)^2, 45-5x^2 \geq x^2+6x+9$$

$$x^2+x-6 \leq 0, (x+3)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 2 \quad (\text{단, 등호는 } z=2y \text{ 일 때 성립})$$

따라서 x 의 최댓값은 2이다.

08 / 함수

A 개념 확인

136~139쪽

0875 **답** 함수이다., 정의역: $\{1, 2, 3\}$,
공역: $\{a, b, c\}$, 치역: $\{a, b, c\}$

0876 **답** 함수이다., 정의역: $\{1, 2, 3\}$,
공역: $\{a, b, c, d\}$, 치역: $\{a, b, d\}$

0877 **답** 함수가 아니다.

집합 X 의 원소 2에 대응하는 집합 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

0878 **답** 함수가 아니다.

집합 X 의 원소 3에 대응하는 집합 Y 의 원소가 b, d 의 2개이므로 함수가 아니다.

0879 **답** $\{-1, 1, 3\}$

$$f(-1) = -2 \times (-1) + 1 = 3$$

$$f(0) = -2 \times 0 + 1 = 1$$

$$f(1) = -2 \times 1 + 1 = -1$$

따라서 치역은 $\{-1, 1, 3\}$

0880 **답** $\{1, 2, 3\}$

$$f(-1) = (-1)^3 + 2 = 1, f(0) = 0^3 + 2 = 2, f(1) = 1^3 + 2 = 3$$

따라서 치역은 $\{1, 2, 3\}$

0881 **답** $\{y | y \text{는 모든 실수}\}$

0882 **답** $\{y | y \geq 0\}$

0883 **답** $\{y | y \leq 2\}$

0884 **답** $\{y | y \geq -7\}$

0885 **답** 서로 같은 함수이다.

$$f(-1) = g(-1) = 1, f(1) = g(1) = 1$$

$$\therefore f = g$$

0886 **답** 서로 같은 함수가 아니다.

$$f(-1) = g(-1) = -2$$

$$f(1) = 0, g(1) = 2 \text{이므로 } f(1) \neq g(1)$$

$$\therefore f \neq g$$

0887 **답** $\neg, \subset$

0888 **답** $\neg, \subset$

0889 **답** $\neg$

0890 **답** $\subset$

0891 **답** $\subset, \subset$

0892 **답** $\subset, \subset$

0893 **답** $\subset$

0894 **답** $\neg$

0895 **답** 5

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(6) = 5$$

0896 **답** 1

$$(g \circ f)(7) = g(f(7)) = g(4) = 1$$

0897 **답** 4

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(7) = 4$$

0898 **답** 2

$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(1) = 2$$

0899 **답** $(f \circ g)(x) = 2x + 6$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 3)$$

$$= 2(x + 3)$$

$$= 2x + 6$$

0900 **답** $(g \circ h)(x) = x^2 + 2$

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(x^2 - 1)$$

$$= (x^2 - 1) + 3$$

$$= x^2 + 2$$

0901 **답** $((f \circ g) \circ h)(x) = 2x^2 + 4$

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = (f \circ g)(x^2 - 1)$$

$$= 2(x^2 - 1) + 6$$

$$= 2x^2 + 4$$

0902 **답** $(f \circ (g \circ h))(x) = 2x^2 + 4$

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(x^2 + 2)$$

$$= 2(x^2 + 2)$$

$$= 2x^2 + 4$$

0903 **답** $\neg, \subset$

역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로 $\neg, \subset$ 이다.

0904 **답** 3

0905 **답** 2

0906 **답** 7

$$f(2) + f^{-1}(5) = 6 + 1 = 7$$

0907 **답** 2

$$f^{-1}(3) = a \text{에서 } f(a) = 3 \text{이므로}$$

$$-a + 5 = 3 \quad \therefore a = 2$$

0908 답 7

$$f^{-1}(a) = -2 \text{에서 } f(-2) = a \\ -(-2) + 5 = a \quad \therefore a = 7$$

0909 답 $y = \frac{1}{3}x - 2$

$y = 3x + 6$ 을 x 에 대하여 풀면

$$3x = y - 6 \quad \therefore x = \frac{1}{3}y - 2$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{1}{3}x - 2$

0910 답 $y = 4x - 6$

$y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ 을 x 에 대하여 풀면

$$\frac{1}{4}x = y - \frac{3}{2} \quad \therefore x = 4y - 6$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = 4x - 6$

0911 답 8

$$(f^{-1})^{-1}(1) = f(1) = 8$$

0912 답 6

$$(f^{-1})^{-1}(5) = f(5) = 6$$

0913 답 3

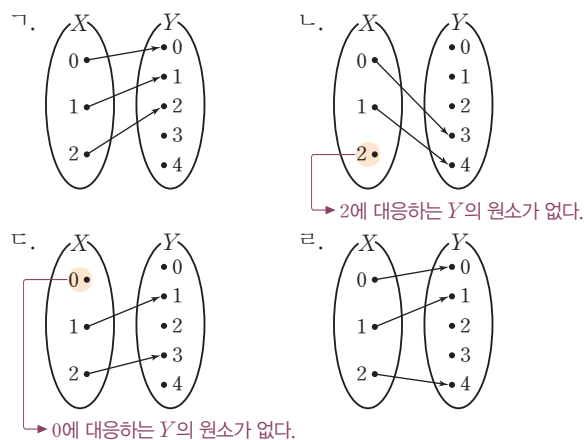
0914 답 2

B 유형 완성

140~153쪽

0915 답 ③

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 보기에서 함수인 것은 가, 라이다.

0916 답 ⑤

⑤ 집합 X 의 원소 2에 대응하는 집합 Y 의 원소가 a, c 의 2개이므로 함수가 아니다.

0917 답 ③

정의역의 각 원소 k 에 대하여 y 축에 평행한 직선 $x=k$ 와 오직 한 점에서 만나는 그래프는 ③이다.

0918 답 ①

3은 유리수이므로

$$f(3) = -3 \times 3 + 1 = -8$$

$\sqrt{5}$ 는 무리수이므로

$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 + 4 = 9$$

$$\therefore f(3) + f(\sqrt{5}) = 1$$

0919 답 4

$2 > 0$ 이므로

$$f(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$$

..... ①

$-1 < 0$ 이므로

$$f(-1) = -1$$

..... ②

$$\therefore f(2) - f(-1) = 4$$

..... ③

채점 기준

① $f(2)$ 의 값 구하기	40 %
② $f(-1)$ 의 값 구하기	40 %
③ $f(2) - f(-1)$ 의 값 구하기	20 %

0920 답 ⑤

$$f(2) = f(3) = f(5) = f(7) = 2$$

$$f(4) = f(9) = 3$$

$$f(6) = f(8) = f(10) = 4$$

$$\therefore f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(10) = 2 \times 4 + 3 \times 2 + 4 \times 3 \\ = 26$$

0921 답 ②

(i) $a \geq 0$ 일 때

$f(x) = ax + b$ 의 공역과 치역이 서로 같으므로

$$f(-2) = -3, f(3) = 2$$

$$-2a + b = -3, 3a + b = 2$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 1, b = -1$

그런데 $a > b$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a < 0$ 일 때

$f(x) = ax + b$ 의 공역과 치역이 서로 같으므로

$$f(-2) = 2, f(3) = -3$$

$$-2a + b = 2, 3a + b = -3$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 0$

(i), (ii)에서 $a = -1, b = 0$

$$\therefore a + b = -1$$

0922 답 $\{0, 1, 2\}$

$X = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ 이므로

$$f(-3) = 2, f(-2) = 1, f(-1) = 0, f(0) = 1, f(1) = 2$$

따라서 함수 f 의 치역은 $\{0, 1, 2\}$

0923 답 2

$f(-1)=a+1, f(0)=1, f(1)=a+1, f(2)=4a+1$
 따라서 치역은 $\{1, a+1, 4a+1\}$ ①
 치역의 모든 원소의 합이 13이므로
 $1+(a+1)+(4a+1)=13$ ②
 $5a=10 \quad \therefore a=2$ ③

채점 기준

① 함수 $f(x)$ 의 치역 구하기	40%
② a 에 대한 방정식 세우기	40%
③ a 의 값 구하기	20%

0924 답 ⑤

$f(1)=k, f(2)=1+k, f(3)=2+k$
 이때 집합 X 의 각 원소에 Y 의 원소가 오직 하나씩 대응해야 하므로
 $k=3$ 또는 $k=4$
 따라서 모든 k 의 값의 곱은
 $3 \times 4 = 12$

0925 답 ①

$y=f(x)$ 라 하면
 (i) $k < 0$ 일 때
 $x \leq k$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 $f(k)$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 치역은 $\{y | y \leq f(k)\}$
 이때 함수 $f(x)$ 의 공역과 치역이 서로 같으므로
 $f(k)=k, -k^2+6=k, k^2+k-6=0$
 $(k+3)(k-2)=0 \quad \therefore k=-3 (\because k < 0)$
 (ii) $0 \leq k < 6$ 일 때
 $x \leq k$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 6이므로 치역은 $\{y | y \leq 6\}$
 그런데 공역과 치역이 서로 같지 않다.
 (i), (ii)에서 $k=-3$

0926 답 -9

주어진 식의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면
 $f(0+0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$
 주어진 식의 양변에 $x=-1, y=1$ 을 대입하면
 $f(-1+1)=f(-1)+f(1)$
 $0=f(-1)+3 \quad \therefore f(-1)=-3$
 주어진 식의 양변에 $x=-1, y=-1$ 을 대입하면
 $f(-1+(-1))=f(-1)+f(-1)$
 $\therefore f(-2)=-3+(-3)=-6$
 $\therefore f(-1)+f(-2)=-9$

0927 답 9

주어진 식의 양변에 $x=2, y=2$ 를 대입하면
 $f(2 \times 2)=f(2)+f(2)$
 $6=2f(2) \quad \therefore f(2)=3$
 주어진 식의 양변에 $x=2, y=4$ 를 대입하면
 $f(2 \times 4)=f(2)+f(4)$
 $\therefore f(8)=3+6=9$

0928 답 ⑤

ㄱ. 주어진 식의 양변에 $x=2, y=1$ 을 대입하면
 $f(2 \times 1)=f(2)f(1), -4=-4f(1)$
 $\therefore f(1)=1$
 ㄴ. 주어진 식의 양변에 $x=2, y=2$ 를 대입하면
 $f(2 \times 2)=f(2)f(2)$
 $\therefore f(4)=-4 \times (-4)=16$
 ㄷ. $f(4)=16$
 $f(4^2)=f(4 \times 4)=f(4) \times f(4)=16^2$
 $f(4^3)=f(4^2 \times 4)=f(4^2) \times f(4)=16^3$
 $f(4^4)=f(4^3 \times 4)=f(4^3) \times f(4)=16^4$
 $\vdots$
 $\therefore f(4^n)=16^n=4^{2n}$ (단, n 은 자연수)
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0929 답 ③

$f(-2)=g(-2)$ 에서
 $-2a+b=-2$ ㉠
 $f(1)=g(1)$ 에서
 $a+b=7$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3, b=4$
 $\therefore a^2+b^2=9+16=25$

0930 답 ④

ㄱ. $f(-1)=g(-1)=-1, f(0)=g(0)=0, f(1)=g(1)=1$ 이므로
 $f=g$
 ㄴ. $f(-1)=g(-1)=1, f(0)=g(0)=0, f(1)=g(1)=1$ 이므로
 $f=g$
 ㄷ. $f(1)=1, g(1)=0$ 이므로 $f(1) \neq g(1)$
 $\therefore f \neq g$
 따라서 보기에서 $f=g$ 인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0931 답 2

$f(a)=g(a), f(b)=g(b)$ 이므로 a, b 는 이차방정식 $f(x)=g(x)$ 의 두 근이다.
 $x^2+3x-8=5x+7$ 에서 $x^2-2x-15=0$ ①
 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $a+b=2$ ②

채점 기준

① a, b 를 두 근으로 갖는 이차방정식 구하기	60%
② $a+b$ 의 값 구하기	40%

0932 답 ㄱ, ㄷ

ㄴ, ㄹ. $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1)=f(1)=1$ 이므로 일대일대응이 아니다.
 따라서 보기에서 일대일대응인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0933 답 ③

치역의 각 원소 k 에 대하여 x 축에 평행한 직선 $y=k$ 와 오직 한 점에서 만나고, 치역과 공역이 같은 함수의 그래프는 ③이다.

0934 답 ㄴ

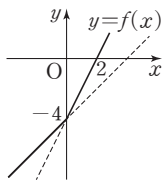
- ㄱ. 지역의 각 원소 k 에 대하여 x 축에 평행한 직선 $y=k$ 와 오직 한 점에서 만나고, 치역과 공역이 같으므로 일대일대응이다.
 ㄴ. 지역의 각 원소 k 에 대하여 x 축에 평행한 직선 $y=k$ 와 오직 한 점에서 만나므로 일대일함수이지만 치역이 $\{y|y>0\}$ 이므로 일대일대응은 아니다.
 ㄷ. 지역의 각 원소 k 에 대하여 x 축에 평행한 직선 $y=k$ 와 2개의 점에서 만나기도 하므로 일대일함수가 아니다.
 따라서 일대일함수이지만 일대일대응은 아닌 것은 ㄴ이다.

0935 답 -3

$a>0$ 이므로 함수 f 가 일대일대응이면
 $f(1)=-2, f(3)=0$
 $\therefore a+b=-2, 3a+b=0$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a=1, b=-3$
 $\therefore ab=-3$

0936 답 -4

함수 f 가 일대일대응이면 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.
 즉, 직선 $y=x+a$ 가 점 $(0, -4)$ 를 지나야 하므로
 $-4=0+a$
 $\therefore a=-4$

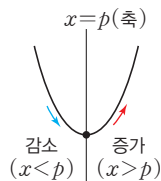


0937 답 ①

$f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$ 이므로 $x\geq 2$ 일 때 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값도 증가한다.
 따라서 함수 f 가 일대일대응이면 $f(2)=-1$ 이므로
 $4+4+k=-1$
 $\therefore k=-9$

중3 다시보기

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ ($a>0$)의 증가와 감소
 $\Rightarrow$ 그래프의 축 $x=p$ 를 기준으로 바뀐다.



0938 답 ④

함수 f 가 일대일대응이라면 x 의 값이 증가할 때, $f(x)$ 의 값은 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다.
 즉, $x<0$ 일 때, $x\geq 0$ 일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로
 $(a+3)(2-a)>0$
 $(a+3)(a-2)<0$
 $\therefore -3<a<2$
 따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0, 1$ 의 4개이다.

0939 답 4

함수 f 는 항등함수이므로 $f(x)=x$
 $f(3)=3$ 이므로 $f(3)+g(3)=8$ 에서
 $3+g(3)=8 \quad \therefore g(3)=5$
 함수 g 는 상수함수이므로
 $g(x)=g(3)=5$
 $\therefore f(-1)+g(-1)=-1+5=4$

0940 답 ④

$f(3)=4$ 이고 함수 f 는 상수함수이므로
 $f(x)=4$
 따라서 $f(1)=f(2)=f(3)=\dots=f(10)=4$ 이므로
 $f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(10)=4\times 10=40$

0941 답 ②

함수 f 는 항등함수이므로
 $f(-3)=-3, f(1)=1$
 $f(-3)=-3$ 에서
 $-6+a=-3 \quad \therefore a=3$
 $f(1)=1$ 에서
 $1-2+b=1 \quad \therefore b=2$
 $\therefore a\times b=6$

0942 답 ③

함수 f 가 항등함수가 되려면 $f(x)=x$ 이어야 하므로
 $x^3+2x^2-4x-6=x$ 에서
 $x^3+2x^2-5x-6=0, (x+3)(x+1)(x-2)=0$
 $\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$
 따라서 구하는 집합 X 의 개수는 집합 $\{-3, -1, 2\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합의 개수이므로
 $2^3-1=7$

0943 답 4

함수 g 는 항등함수이므로 $g(x)=x$
 $\therefore g(1)=1$
 또 $g(2)=2$ 이므로 $f(1)=g(2)=h(3)$ 에서
 $f(1)=h(3)=2$
 $f(1)=2$ 이므로 $f(1)+f(3)=f(2)$ 에서
 $2+f(3)=f(2)$
 이때 함수 f 는 일대일대응이므로
 $f(3)=1, f(2)=3$
 $h(3)=2$ 이고 함수 h 는 상수함수이므로 $h(x)=2$
 $\therefore h(2)=2$
 $\therefore f(3)+g(1)+h(2)=4$

채점 기준

① $g(1)$ 의 값 구하기	20%
② $f(3)$ 의 값 구하기	40%
③ $h(2)$ 의 값 구하기	30%
④ $f(3)+g(1)+h(2)$ 의 값 구하기	10%

0944 [답] ⑤

함수의 개수는 $3^3=27 \quad \therefore p=27$
 일대일대응의 개수는 $3!=6 \quad \therefore q=6$
 상수함수의 개수는 3 $\therefore r=3$
 $\therefore p+q+r=36$

0945 [답] ②

구하는 f 의 개수는 집합 X 에서 원소 1, 4를 뺀 집합을 $Y=\{2, 3, 5, 6\}$ 이라 할 때, Y 에서 Y 로의 일대일대응의 개수와 같으므로
 $4!=24$

0946 [답] 6

구하는 함수의 개수는 X 에서 Y 로의 함수의 개수에서 치역이 $\{a\}, \{b\}$ 인 함수 2개를 빼면 되므로
 $2^3-2=6$

0947 [답] ④

공역의 원소 7개 중에서 5개를 택하여 크기가 큰 수부터 순서대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4, 5에 대응시키면 되므로 구하는 함수 f 의 개수는
 ${}^7C_5={}^7C_2=21$

0948 [답] 96

$x=1$ 일 때, $1+f(1) \geq 4$ 에서 $f(1) \geq 3$ 이므로 $f(1)$ 의 값은 3, 4의 2가지
 $x=2$ 일 때, $2+f(2) \geq 4$ 에서 $f(2) \geq 2$ 이므로 $f(2)$ 의 값은 2, 3, 4의 3가지
 $x=3$ 일 때, $3+f(3) \geq 4$ 에서 $f(3) \geq 1$ 이므로 $f(3)$ 의 값은 1, 2, 3, 4의 4가지
 $x=4$ 일 때, $4+f(4) \geq 4$ 에서 $f(4) \geq 0$ 이므로 $f(4)$ 의 값은 1, 2, 3, 4의 4가지
 따라서 구하는 함수 f 의 개수는
 $2 \times 3 \times 4 \times 4=96$

0949 [답] 250

$f(2)<f(3)<f(4)$ 이므로 공역의 원소 5개 중에서 3개를 택하여 크기가 작은 수부터 순서대로 정의역의 원소 2, 3, 4에 대응시키면 된다.
 따라서 그 경우의 수는
 ${}_5C_3={}^5C_2=10$ ①
 정의역의 원소 1, 5에 대응되는 공역의 원소를 택하는 경우의 수는 각각 5이다. ②
 따라서 구하는 함수 f 의 개수는
 $10 \times 5 \times 5=250$ ③

채점 기준

① 정의역의 원소 2, 3, 4에 대응되는 공역의 원소를 택하는 경우의 수 구하기	40 %
② 정의역의 원소 1, 5에 대응되는 공역의 원소를 택하는 경우의 수 구하기	40 %
③ 함수 f 의 개수 구하기	20 %

0950 [답] ①

(㉞)에서 $f(4)=1$ 이므로 (㉞)를 만족시키려면
 $f(1)<f(2)<f(3)<f(4)=1<f(5)$
 따라서 집합 Y 의 원소 $-3, -2, -1, 0$ 중에서 3개를 택하여 크기가 작은 수부터 순서대로 집합 X 의 원소 1, 2, 3에 대응시키고, 집합 Y 의 원소 2, 3 중에서 1개를 택하여 집합 X 의 원소 5에 대응시키면 되므로 구하는 함수 f 의 개수는
 ${}_4C_3 \times {}_2C_1={}^4C_1 \times {}^2C_1=4 \times 2=8$

0951 [답] ③

(㉞)에서 함수 f 는 일대일함수이고 (㉞)에서 $f(2)=6$ 이므로 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 2, 4, 8, 10의 4개, $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은 2, 4, 8, 10 중 $f(1)$ 의 값을 제외한 3개이다.
 따라서 구하는 함수 f 의 개수는
 $4 \times 3=12$

0952 [답] 0

$(f \circ g)(2) + (g \circ f)(-2) = f(g(2)) + g(f(-2))$
 $= f(0) + g(5)$
 $= -3 + 3 = 0$

0953 [답] 8

$f(1)=1$
 $(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(4)=3$
 $(f \circ f \circ f)(4) = f(f(f(4))) = f(f(3)) = f(2)=4$
 $\therefore f(1) + (f \circ f)(2) + (f \circ f \circ f)(4) = 8$

0954 [답] 7

$(f \circ g \circ f)(\sqrt{3}) = f(g(f(\sqrt{3}))) = f(g(1))$
 $= f(-1) = 7$

0955 [답] ②

$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(a^2-1)$
 $= 2(a^2-1) - 1 = 2a^2 - 3$
 $(f \circ g)(a) = 5$ 에서
 $2a^2 - 3 = 5, a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 (\because a > 0)$

0956 [답] ④

$(f \circ (g \circ h))(-2) = ((f \circ g) \circ h)(-2)$
 $= (f \circ g)(h(-2))$
 $= (f \circ g)(1) = 3$

0957 [답] 16

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-1)$
 $= (x-1)^2 - 2(x-1) - 15$
 $= x^2 - 4x - 12 = (x-2)^2 - 16$

따라서 함수 $y = (f \circ g)(x)$ 는 $-1 \leq x \leq 6$ 에서 $x=6$ 일 때 최댓값 0, $x=2$ 일 때 최솟값 -16 을 가지므로
 $M=0, m=-16$
 $\therefore M-m=16$

0958 답 3

(가)에서 $f(2)=3$, (나)에서 $(f \circ g)(2)=f(g(2))=3$ 이고 함수 f 가 일대일대응이므로 $g(2)=2$ ①

(가)에서 $g(1)=3$, (나)에서 $(g \circ f)(3)=g(f(3))=3$ 이고 함수 g 가 일대일대응이므로 $f(3)=1$ ②

두 함수 f, g 가 일대일대응이므로

$f(1)=2, g(3)=1$ ③

$\therefore f(1)+g(3)=3$ ④

채점 기준

① $g(2)$ 의 값 구하기	30 %
② $f(3)$ 의 값 구하기	30 %
③ $f(1), g(3)$ 의 값 구하기	30 %
④ $f(1)+g(3)$ 의 값 구하기	10 %

0959 답 ③

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x+2) \\ = a(-x+2) - 4 = -ax + 2a - 4$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(ax-4) \\ = -(ax-4) + 2 = -ax + 6$$

$$f \circ g = g \circ f \text{에서 } -ax + 2a - 4 = -ax + 6$$

$$2a - 4 = 6 \quad \therefore a = 5$$

0960 답 ⑤

$$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(2a+3) \\ = a(2a+3) + 3 = 2a^2 + 3a + 3$$

$$(f \circ f)(2) = 12 \text{에서 } 2a^2 + 3a + 3 = 12$$

$$2a^2 + 3a - 9 = 0, (a+3)(2a-3) = 0$$

$$\therefore a = \frac{3}{2} (\because a > 0)$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{3}{2}x + 3 \text{이므로}$$

$$f(4) = 6 + 3 = 9$$

0961 답 $0 \leq a < 16$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 3x + 2) \\ = a(x^2 + 3x + 2) + 4$$

$$= ax^2 + 3ax + 2a + 4$$

$$(f \circ g)(x) > 0 \text{에서 } ax^2 + 3ax + 2a + 4 > 0 \quad \dots\dots ㉠$$

즉, 모든 실수 x 에 대하여 부등식 ㉠이 성립해야 한다.

(i) $a=0$ 일 때

㉠은 $4 > 0$ 이므로 이 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때

모든 실수 x 에 대하여 ㉠이 성립하려면 $a > 0$ ㉡

이차방정식 $ax^2 + 3ax + 2a + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (3a)^2 - 4a(2a+4) < 0$$

$$a^2 - 16a < 0, a(a-16) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 16 \quad \dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢의 공통부분은 $0 < a < 16$

(i), (ii)에서 구하는 실수 a 의 값의 범위는

$$0 \leq a < 16$$

0962 답 4

함수 $g \circ f$ 가 항등함수이므로

$$(g \circ f)(2) = 2, (g \circ f)(3) = 3$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(-a) \\ = a^2 - 2a + b$$

이때 $(g \circ f)(2) = 2$ 에서

$$a^2 - 2a + b = 2$$

$$\therefore a^2 - 2a + b - 2 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(0) = b$$

이때 $(g \circ f)(3) = 3$ 에서 $b = 3$

이를 ㉠에 대입하면

$$a^2 - 2a + 1 = 0, (a-1)^2 = 0 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a + b = 4$$

0963 답 3

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(bx+2a) \\ = a(bx+2a) + 2b$$

$$= abx + 2a^2 + 2b$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(ax+2b)$$

$$= b(ax+2b) + 2a$$

$$= abx + 2a + 2b^2$$

..... ①

$$f \circ g = g \circ f \text{에서 } abx + 2a^2 + 2b = abx + 2a + 2b^2$$

$$a^2 + b = a + b^2, a^2 - b^2 - a + b = 0$$

$$(a+b)(a-b) - (a-b) = 0$$

$$(a-b)(a+b-1) = 0$$

$$\therefore a = b \text{ 또는 } a + b = 1$$

이때 두 함수 f, g 는 서로 다른 함수이므로 $a \neq b$

$$\therefore a + b = 1$$

..... ②

$$\therefore f(1) + g(1) = a + 2b + b + 2a$$

$$= 3a + 3b = 3(a+b)$$

$$= 3 \times 1 = 3$$

..... ③

채점 기준

① $f \circ g, g \circ f$ 구하기	30 %
② $a+b$ 의 값 구하기	40 %
③ $f(1)+g(1)$ 의 값 구하기	30 %

0964 답 ⑤

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = h(x) - 1$$

$$(f \circ h)(x) = g(x) \text{에서 } h(x) - 1 = 2x^2 + 3$$

$$\therefore h(x) = 2x^2 + 4$$

0965 답 20

$x-3=t$ 로 놓으면 $x=t+3$ 이므로

$$f(t) = (t+3)^2 - 5 = t^2 + 6t + 4$$

$$\therefore f(2) = 4 + 12 + 4 = 20$$

다른 풀이

$x-3=2$ 일 때 $x=5$ 이므로 이를 $f(x-3)=x^2-5$ 에 대입하면

$$f(2) = 25 - 5 = 20$$

0966 답 ①

$$\begin{aligned}(h \circ g \circ f)(x) &= ((h \circ g) \circ f)(x) \\ &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= 2f(x) - 3 \\ (h \circ g \circ f)(x) &= 4x + 5 \text{에서} \\ 2f(x) - 3 &= 4x + 5 \quad \therefore f(x) = 2x + 4 \\ \therefore f(-1) &= -2 + 4 = 2\end{aligned}$$

0967 답 $h(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}(h \circ f)(x) &= h(f(x)) = h(-2x + 1) \\ h \circ f &= g \text{에서 } h(-2x + 1) = 3x - 1 \\ -2x + 1 &= t \text{로 놓으면 } x = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \text{이므로} \\ h(t) &= 3\left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{3}{2}t + \frac{1}{2} \\ \therefore h(x) &= -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

0968 답 ①

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x \\ f^2(x) &= f(f(x)) = 2(2x) = 2^2x \\ f^3(x) &= f(f^2(x)) = 2(2^2x) = 2^3x \\ f^4(x) &= f(f^3(x)) = 2(2^3x) = 2^4x \\ &\vdots \\ \therefore f^n(x) &= 2^n x \text{ (단, } n \text{은 자연수)} \\ \text{따라서 } f^9(x) &= 2^9 x \text{이므로} \\ f^9(-2) &= 2^9 \times (-2) = -2^{10}\end{aligned}$$

만렙 Note

일반적으로 합성함수에서 결합법칙이 성립하므로

$$\begin{aligned}f^n \circ f &= (f \circ f \circ f \circ \dots \circ f) \circ f \\ &= f \circ (f \circ f \circ f \circ \dots \circ f) \\ &= f \circ f^n \\ \Rightarrow f^{n+1} &= f^n \circ f = f \circ f^n\end{aligned}$$

0969 답 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{2} \\ f^2\left(\frac{1}{2}\right) &= f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ f^3\left(\frac{1}{2}\right) &= f\left(f^2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \\ f^4\left(\frac{1}{2}\right) &= f\left(f^3\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ &\vdots \\ \therefore f^n\left(\frac{1}{2}\right) &= \begin{cases} -\frac{1}{2} & (n \text{은 홀수}) \\ \frac{1}{2} & (n \text{은 짝수}) \end{cases} \\ \therefore f^{10}\left(\frac{1}{2}\right) + f^{11}\left(\frac{1}{2}\right) + f^{12}\left(\frac{1}{2}\right) + \dots + f^{50}\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

0970 답 6

$$\begin{aligned}f(100) &= \frac{100}{2} = 50 \\ f^2(100) &= f(f(100)) = f(50) = \frac{50}{2} = 25 \\ f^3(100) &= f(f^2(100)) = f(25) = 25 + 1 = 26 \\ f^4(100) &= f(f^3(100)) = f(26) = \frac{26}{2} = 13 \\ f^5(100) &= f(f^4(100)) = f(13) = 13 + 1 = 14 \\ f^6(100) &= f(f^5(100)) = f(14) = \frac{14}{2} = 7 \\ \therefore n &= 6\end{aligned}$$

0971 답 3

$$\begin{aligned}f(1) &= 2 \\ f^2(1) &= f(f(1)) = f(2) = 3 \\ f^3(1) &= f(f^2(1)) = f(3) = 1 \\ f^4(1) &= f(f^3(1)) = f(1) = 2 \\ &\vdots\end{aligned}$$

즉, $f^n(1)$ 의 값은 2, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.

따라서 $200 = 3 \times 66 + 2$ 이므로 $f^{200}(1) = 3$

채점 기준

i $f^n(1)$ 의 값의 규칙 찾기	70 %
ii $f^{200}(1)$ 의 값 구하기	30 %

0972 답 ⑤

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= \begin{cases} -f(x) & (-1 \leq f(x) < 0) \\ -\{f(x)\}^2 & (0 \leq f(x) \leq 1) \end{cases} \\ \text{(i) } -1 \leq x < 0 \text{일 때} \\ 0 < f(x) \leq 1 \text{이므로} \\ (f \circ f)(x) &= -\{f(x)\}^2 = -(-x)^2 = -x^2 \\ \text{(ii) } 0 \leq x \leq 1 \text{일 때} \\ -1 \leq f(x) \leq 0 \text{이므로} \\ (f \circ f)(x) &= -f(x) = -(-x^2) = x^2\end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} -x^2 & (-1 \leq x < 0) \\ x^2 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

따라서 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 ⑤이다.

0973 답 ④

주어진 그래프에서

$$f(x) = \begin{cases} 2 & (0 \leq x < 1) \\ -2x + 4 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -x + 1 & (0 \leq x < 1) \\ 2x - 2 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= \begin{cases} 2 & (0 \leq g(x) < 1) \\ -2g(x) + 4 & (1 \leq g(x) \leq 2) \end{cases}\end{aligned}$$

이때 $g(0)=1, g\left(\frac{3}{2}\right)=1$ 이므로 $g(x)$ 의 값이 1이 되는 x 의 값을 기준으로 구간을 나누어 $f \circ g$ 의 식을 구하면

(i) $x=0$ 일 때

$$g(x)=1 \text{이므로 } (f \circ g)(x)=-2+4=2$$

(ii) $0 < x < 1$ 일 때

$$0 < g(x) < 1 \text{이므로 } (f \circ g)(x)=2$$

(iii) $1 \leq x < \frac{3}{2}$ 일 때

$$0 \leq g(x) < 1 \text{이므로 } (f \circ g)(x)=2$$

(iv) $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ 일 때

$$1 \leq g(x) \leq 2 \text{이므로}$$

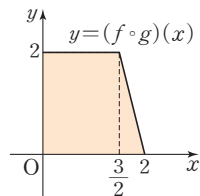
$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= -2g(x) + 4 \\ &= -2(2x-2) + 4 \\ &= -4x + 8 \end{aligned}$$

(i)~(iv)에서

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2 & \left(0 \leq x < \frac{3}{2}\right) \\ -4x + 8 & \left(\frac{3}{2} \leq x \leq 2\right) \end{cases}$$

따라서 $y=(f \circ g)(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2} + 2\right) \times 2 = \frac{7}{2}$$



0974 답 7

$$f^{-1}(1)=3, f^{-1}(-1)=5 \text{에서}$$

$$f(3)=1, f(5)=-1$$

$$\therefore 3a+b=1, 5a+b=-1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=4$

따라서 $f(x)=-x+4$ 이므로

$$f(-3)=3+4=7$$

0975 답 ②

$$\frac{3-x}{4}=t \text{로 놓으면 } x=-4t+3 \text{이므로}$$

$$f(t)=(-4t+3)-2=-4t+1$$

$$\therefore f(x)=-4x+1$$

$f^{-1}(5)=k$ (k 는 상수)라 하면 $f(k)=5$ 이므로

$$-4k+1=5 \quad \therefore k=-1$$

$$\therefore f^{-1}(5)=-1$$

0976 답 17

$$f^{-1}(2)=1 \text{에서 } f(1)=2$$

$$(f \circ f)(1)=6 \text{에서}$$

$$f(f(1))=6 \quad \therefore f(2)=6$$

$f(x)=ax+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f(1)=2 \text{에서 } a+b=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(2)=6 \text{에서 } 2a+b=6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a=4, b=-2$

$$\therefore f(x)=4x-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f^{-1}(10)=k$ (k 는 상수)라 하면 $f(k)=10$ 이므로

$$4k-2=10 \quad \therefore k=3$$

$$\therefore f(4)+f^{-1}(10)=14+3=17 \quad \dots\dots \textcircled{11}$$

채점 기준

① $f(1), f(2)$ 의 값 구하기	30 %
② 함수 $f(x)$ 구하기	30 %
③ $f(4)+f^{-1}(10)$ 의 값 구하기	40 %

0977 답 ②

$f^{-1}(7)=k$ (k 는 상수)라 하면 $f(k)=7$ 이므로

$$k^2-2k-1=7, k^2-2k-8=0$$

$$(k+2)(k-4)=0$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=4$$

그런데 함수 f 의 정의역이 $\{x|x \geq 1\}$ 이므로 $k \geq 1$

$$\therefore k=4 \quad \therefore f^{-1}(7)=4$$

0978 답 ③

$x < 2$ 일 때, $f(x)=x-1 < 1$

$x \geq 2$ 일 때, $f(x)=x^2-4x+5=(x-2)^2+1 \geq 1$

$f^{-1}(0)=a$ (a 는 상수)라 하면 $f(a)=0 < 1$ 이므로

$$a < 2$$

$$f(a)=0 \text{에서 } a-1=0 \quad \therefore a=1$$

$f^{-1}(10)=b$ (b 는 상수)라 하면 $f(b)=10 \geq 1$ 이므로

$$b \geq 2$$

$$f(b)=10 \text{에서 } b^2-4b+5=10$$

$$b^2-4b-5=0, (b+1)(b-5)=0$$

$$\therefore b=5 (\because b \geq 2)$$

$$\therefore f^{-1}(0)+f^{-1}(10)=1+5=6$$

0979 답 ⑤

함수 f 의 역함수가 존재하면 f 는 일대일대응이다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 기울기가 음수이므로

$$f(-1)=a, f(2)=2$$

$$3+b=a, -6+b=2 \quad \therefore a=11, b=8$$

$$\therefore a+b=19$$

0980 답 $-1 < k < 1$

$$f(x)=x+k|x-2|+4 \text{에서}$$

(i) $x < 2$ 일 때

$$f(x)=x-k(x-2)+4$$

$$=(1-k)x+2k+4$$

(ii) $x \geq 2$ 일 때

$$f(x)=x+k(x-2)+4$$

$$=(k+1)x-2k+4$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} (1-k)x+2k+4 & (x < 2) \\ (k+1)x-2k+4 & (x \geq 2) \end{cases}$$

함수 f 의 역함수가 존재하려면 f 는 일대일대응이어야 하므로 x 의 값이 증가할 때, $f(x)$ 의 값은 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다. 즉, $x < 2$ 일 때, $x \geq 2$ 일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$$\begin{aligned}(1-k)(k+1) &> 0 \\ (k+1)(k-1) &< 0 \\ \therefore -1 < k < 1\end{aligned}$$

0981 답 9

$f(x) = x^2 - 4x - 36 = (x-2)^2 - 40$ 이고 함수 f 의 역함수가 존재하면 f 는 일대일대응이므로

$$\begin{aligned}a \geq 2, f(a) &= a \\ f(a) = a \text{에서 } a^2 - 4a - 36 &= a \\ a^2 - 5a - 36 = 0, (a+4)(a-9) &= 0 \\ \therefore a = 9 \quad (\because a \geq 2)\end{aligned}$$

0982 답 ③

$f(1)=1, f(2)=4, f(3)=3+a, f(4)=4+a$
함수 f 의 역함수가 존재하므로 f 는 일대일대응이다.

$$\therefore f(3)=2, f(4)=3 \text{ 또는 } f(3)=3, f(4)=2$$

(i) $f(3)=2, f(4)=3$ 일 때

$$\begin{aligned}3+a &= 2, 4+a = 3 \text{이므로} \\ a &= -1\end{aligned}$$

(ii) $f(3)=3, f(4)=2$ 일 때

$$3+a = 3, 4+a = 2$$

이를 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a = -1$

따라서 $f(1)=1, f(2)=4, f(3)=2, f(4)=3$ 이므로

$$g(1)=1, g(2)=3, g(3)=4, g(4)=2$$

$$\begin{aligned}\therefore g^2(2) &= g(g(2)) = g(3) = 4, \\ g^3(2) &= g(g^2(2)) = g(4) = 2, \\ g^4(2) &= g(g^3(2)) = g(2) = 3, \\ &\vdots\end{aligned}$$

즉, $g^n(2)$ 의 값은 3, 4, 2가 이 순서대로 반복된다.

따라서 $10 = 3 \times 3 + 1, 11 = 3 \times 3 + 2$ 이므로

$$g^{10}(2) = 3, g^{11}(2) = 4$$

$$\therefore a + g^{10}(2) + g^{11}(2) = 6$$

0983 답 ③

$y = ax + 3$ 이라 하면 $ax = y - 3$

$$\therefore x = \frac{1}{a}y - \frac{3}{a}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{1}{a}x - \frac{3}{a}$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{3}{a}$$

따라서 $\frac{1}{a}x - \frac{3}{a} = \frac{1}{3}x + b$ 이므로

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{3}, -\frac{3}{a} = b \quad \therefore a = 3, b = -1$$

$$\therefore a + b = 2$$

0984 답 $h^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + 1$

$$\begin{aligned}h(x) &= (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-1) \\ &= -(3x-1) + 2 = -3x + 3\end{aligned}$$

즉, $h(x) = -3x + 3$ 이므로 $y = -3x + 3$ 이라 하면

$$3x = -y + 3 \quad \therefore x = -\frac{1}{3}y + 1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = -\frac{1}{3}x + 1$

$$\therefore h^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + 1$$

0985 답 -1

$y = ax + 1$ 이라 하면 $ax = y - 1$

$$\therefore x = \frac{1}{a}y - \frac{1}{a}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{1}{a}x - \frac{1}{a}$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{1}{a}$$

..... ①

$f = f^{-1}$ 에서 $ax + 1 = \frac{1}{a}x - \frac{1}{a}$ 이므로

$$a = \frac{1}{a}, 1 = -\frac{1}{a}$$

$$\therefore a = -1$$

..... ②

채점 기준

① 역함수 $f^{-1}(x)$ 구하기	50 %
② a 의 값 구하기	50 %

0986 답 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2$

$$2x + 3 = t \text{로 놓으면 } x = \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}$$

$$\therefore f(t) = 4 \times \left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{2} \right) + 2 = 2t - 4$$

즉, $f(x) = 2x - 4$ 이므로 $y = 2x - 4$ 라 하면

$$2x = y + 4 \quad \therefore x = \frac{1}{2}y + 2$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{1}{2}x + 2$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

0987 답 -1

$(f^{-1} \circ g)(a) = f^{-1}(g(a)) = 4$ 에서 $f(4) = g(a)$ 이므로

$$1 = 2a + 3$$

$$\therefore a = -1$$

0988 답 ②

$(f^{-1} \circ g)(4) = f^{-1}(g(4)) = k$ (k 는 상수)라 하면

$$f(k) = g(4)$$

$$g(4) = 6 \text{이므로 } f(k) = 6$$

이때 $f(2) = 6$ 이므로 $k = 2$

$$\therefore (f^{-1} \circ g)(4) = 2$$

0989 답 ③

$(f \circ g^{-1})(k) = f(g^{-1}(k)) = 7$
 $g^{-1}(k) = a$ (a 는 상수)라 하면 $f(a) = 7$ 에서
 $4a - 5 = 7 \quad \therefore a = 3$
 즉, $g^{-1}(k) = 3$ 이므로
 $k = g(3) = 10$

0990 답 2

$(f \circ g^{-1} \circ f)(a) = f(g^{-1}(f(a))) = 5$
 $g^{-1}(f(a)) = k$ (k 는 상수)라 하면 $f(k) = 5$ 에서
 $2k + 3 = 5 \quad \therefore k = 1$ ①
 $\therefore g^{-1}(f(a)) = 1$
 따라서 $g(1) = f(a)$ 이므로
 $7 = 2a + 3 \quad \therefore a = 2$ ②

채점 기준

① $g^{-1}(f(a))$ 의 값 구하기	60 %
② a 의 값 구하기	40 %

0991 답 ②

$(f^{-1} \circ g)(3) = f^{-1}(g(3)) = k$ (k 는 상수)라 하면
 $f(k) = g(3)$
 $g(3) = 2$ 이므로 $f(k) = 2$
 이때 $x \geq 0$ 에서 $f(x) = 2x^2 - 2 \geq -2$,
 $x < 0$ 에서 $f(x) = 3x - 2 < -2$ 이므로
 $k \geq 0$
 따라서 $f(k) = 2k^2 - 2$ 이므로 $2k^2 - 2 = 2$
 $k^2 = 2 \quad \therefore k = \sqrt{2} \quad (\because k \geq 0)$
 $\therefore (f^{-1} \circ g)(3) = \sqrt{2}$

0992 답 4

$(f \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(6) = (f \circ g^{-1} \circ f \circ f^{-1})(6)$
 $= (f \circ g^{-1})(6) = f(g^{-1}(6))$
 $g^{-1}(6) = k$ (k 는 상수)라 하면 $g(k) = 6$ 이므로
 $5k - 4 = 6 \quad \therefore k = 2$
 $\therefore (f \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(6) = f(g^{-1}(6))$
 $= f(2) = 4$

0993 답 ②

$(f^{-1} \circ g)(-1) + (f^{-1} \circ g)^{-1}(1) = (f^{-1} \circ g)(-1) + (g^{-1} \circ f)(1)$
 $= f^{-1}(g(-1)) + g^{-1}(f(1))$
 $= f^{-1}(-2) + g^{-1}(3)$
 $f^{-1}(-2) = k$ (k 는 상수)라 하면 $f(k) = -2$ 이므로
 $4k - 1 = -2 \quad \therefore k = -\frac{1}{4}$
 $g^{-1}(3) = l$ (l 은 상수)이라 하면 $g(l) = 3$ 이므로
 $5l + 3 = 3 \quad \therefore l = 0$
 $\therefore (f^{-1} \circ g)(-1) + (f^{-1} \circ g)^{-1}(1) = f^{-1}(-2) + g^{-1}(3)$
 $= -\frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4}$

0994 답 $\frac{11}{4}$

$(g^{-1} \circ (f \circ g^{-1})^{-1} \circ g)(x) = (g^{-1} \circ g \circ f^{-1} \circ g)(x)$
 $= (f^{-1} \circ g)(x)$
 $= f^{-1}(g(x))$ ①

이때 $y = 2x - 5$ 라 하면 $2x = y + 5$

$$\therefore x = \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

$$\therefore g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$
 ②

$$\begin{aligned} \therefore (g^{-1} \circ (f \circ g^{-1})^{-1} \circ g)(x) &= f^{-1}(g(x)) \\ &= f^{-1}\left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) + 3 \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{11}{2} \end{aligned}$$
 ③

따라서 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{11}{2}$ 이므로

$$ab = \frac{11}{4}$$
 ④

채점 기준

① 주어진 합성함수 간단히 하기	30 %
② 함수 $g(x)$ 구하기	30 %
③ 주어진 합성함수 구하기	30 %
④ ab 의 값 구하기	10 %

0995 답 $h(x) = \begin{cases} x-1 & (x < 2) \\ \frac{1}{2}x & (x \geq 2) \end{cases}$

$f \circ h = g^{-1}$ 에서

$$f^{-1} \circ f \circ h = f^{-1} \circ g^{-1}$$

$$\therefore h = (g \circ f)^{-1}$$

(i) $x < 1$ 일 때

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x) = x + 1 \\ y = x + 1 \text{이라 하면 } y < 2 \text{이고 } x &= y - 1 \end{aligned}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = x - 1$

$$\therefore (g \circ f)^{-1}(x) = x - 1 \quad (x < 2)$$

(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(2x - 1) \\ &= (2x - 1) + 1 = 2x \end{aligned}$$

$$y = 2x \text{라 하면 } y \geq 2 \text{이고 } x = \frac{1}{2}y$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{1}{2}x$$

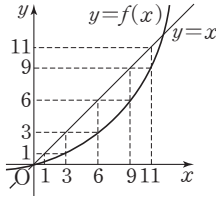
$$\therefore (g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{2}x \quad (x \geq 2)$$

(i), (ii)에서

$$h(x) = \begin{cases} x-1 & (x < 2) \\ \frac{1}{2}x & (x \geq 2) \end{cases}$$

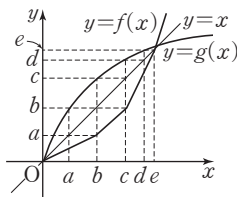
0996 **답 12**

$(f \circ f)(6) = f(f(6)) = f(3) = 1$
 한편 $f^{-1}(6) = k$ (k 는 상수)라 하면
 $f(k) = 6$ 이므로
 $k = 9$
 $f^{-1}(9) = l$ (l 은 상수)이라 하면
 $f(l) = 9$ 이므로
 $l = 11$
 $\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(6) = f^{-1}(f^{-1}(6))$
 $= f^{-1}(9) = 11$
 $\therefore (f \circ f)(6) + (f^{-1} \circ f^{-1})(6) = 12$



0997 **답 ③**

$(g \circ f)^{-1}(c) = (f^{-1} \circ g^{-1})(c) = f^{-1}(g^{-1}(c))$
 $g^{-1}(c) = k$ (k 는 상수)라 하면
 $g(k) = c$ 이므로
 $k = b$
 $f^{-1}(b) = l$ (l 은 상수)이라 하면
 $f(l) = b$ 이므로
 $l = c$
 $\therefore (g \circ f)^{-1}(c) = (f^{-1} \circ g^{-1})(c)$
 $= f^{-1}(g^{-1}(c))$
 $= f^{-1}(b) = c$



0998 **답 2**

주어진 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의
 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같으므로
 $2x-1=x$ 에서 $x=1$
 따라서 교점의 좌표는 $(1, 1)$ 이므로
 $a=1, b=1$
 $\therefore a+b=2$

0999 **답 ①**

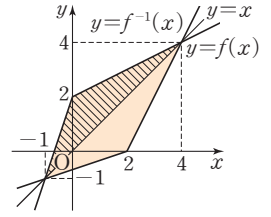
주어진 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의
 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같으므로 방
 정식 $3x+a=x$ 의 해가 $x=2$ 이어야 한다.
 따라서 $6+a=2$ 이므로 $a=-4$
 한편 점 $(2, b)$ 는 직선 $y=x$ 위의 점이므로
 $b=2$
 $\therefore a+b=-2$

1000 **답 ②**

주어진 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의
 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같으므로
 $x^2-6x+12=x$ 에서 $x^2-7x+12=0$
 $(x-3)(x-4)=0$
 $\therefore x=3$ 또는 $x=4$
 따라서 두 교점의 좌표는 $(3, 3), (4, 4)$ 이므로 두 점 사이의 거리는
 $\sqrt{(4-3)^2+(4-3)^2}=\sqrt{2}$

1001 **답 10**

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의
 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그
 래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므
 로 구하는 넓이는 함수 $y=f(x)$ 의 그
 래프와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의
 넓이의 2배이다.



함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

(i) $x < 0$ 일 때

$$3x+2=x \text{에서 } x=-1$$

(ii) $x \geq 0$ 일 때

$$\frac{1}{2}x+2=x \text{에서 } x=4$$

(i), (ii)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 두 교점의 좌표
 는 $(-1, -1), (4, 4)$ 이므로 구하는 넓이는

$$2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \right) = 10$$

AB 유형 점검

154~156쪽

1002 **답 ⑤**

$X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, Y = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

⑤ 집합 X 의 원소 $-2, -1$ 에 대응하는 집합 Y 의 원소가 없으므로
 함수가 아니다.

1003 **답 ③**

$7^1=7, 7^2=49, 7^3=343, 7^4=2401, 7^5=16807, \dots$

따라서 7^x 의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.
 이때 $10=4 \times 2 + 2$ 이므로

$$f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(10)=2 \times (7+9+3+1) + 7+9 = 56$$

1004 **답 5**

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(0, b)$ 를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

(i) $a > 0$ 일 때

$f(x)=ax^2+b$ 의 공역과 치역이 같으므로

$$b=-1, f(-1)=f(1)=1$$

즉, $a+b=1$ 이므로

$$a=2$$

$$\therefore a^2+b^2=4+1=5$$

(ii) $a < 0$ 일 때

$f(x)=ax^2+b$ 의 공역과 치역이 같으므로

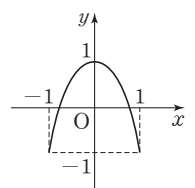
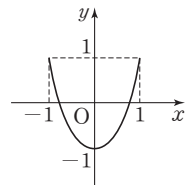
$$b=1, f(-1)=f(1)=-1$$

즉, $a+b=-1$ 이므로

$$a=-2$$

$$\therefore a^2+b^2=4+1=5$$

(i), (ii)에서 $a^2+b^2=5$



1005 답 1/64

주어진 식의 양변에 $x=1, y=0$ 을 대입하면

$$f(1+0)=f(1)f(0)$$

$$4=4f(0) \quad \therefore f(0)=1$$

주어진 식의 양변에 $x=1, y=-1$ 을 대입하면

$$f(1-1)=f(1)f(-1)$$

$$1=4f(-1) \quad \therefore f(-1)=\frac{1}{4}$$

주어진 식의 양변에 $x=-1, y=-1$ 을 대입하면

$$f(-1-1)=f(-1)f(-1)$$

$$\therefore f(-2)=\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

주어진 식의 양변에 $x=-1, y=-2$ 를 대입하면

$$f(-1-2)=f(-1)f(-2)$$

$$\therefore f(-3)=\frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{64}$$

1006 답 ④

$$f(0)=g(0) \text{에서 } 3=a+b \quad \dots\dots ①$$

$$f(1)=g(1) \text{에서 } 1=b$$

이를 ①에 대입하면

$$3=a+1 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore 2a-b=4-1=3$$

1007 답 5

일대일함수의 그래프는 치역의 각 원소 k 에 대하여 x 축에 평행한 직선 $y=k$ 와 오직 한 점에서 만나므로

$$\neg, \sqsubset, \sqsupset$$

$$\therefore a=3$$

일대일대응의 그래프는 일대일함수의 그래프 중 치역과 공역이 같은 것이므로

$$\sqsupset, \sqsubset$$

$$\therefore b=2$$

$$\therefore a+b=5$$

1008 답 ②

$|y| \leq a$ 에서 $-a \leq y \leq a$ 이므로 함수 $f(x)=2x+b$ 가 일대일대응이면

$$f(-3)=-a, f(5)=a$$

$$-6+b=-a, 10+b=a$$

$$\therefore a+b=6, a-b=10$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=8, b=-2$$

$$\therefore a^2+b^2=64+4=68$$

1009 답 32

$$\text{함수의 개수는 } 4^2=16 \quad \therefore a=16$$

$$\text{일대일함수의 개수는 } {}_4P_2=4 \times 3=12 \quad \therefore b=12$$

$$\text{상수함수의 개수는 } 4 \quad \therefore c=4$$

$$\therefore a+b+c=32$$

1010 답 24

정의역과 치역의 원소의 개수가 같으므로 $\{b\}$ 를 만족시키려면 함수 f 는 일대일대응이어야 한다.

따라서 $\{a\}, \{b\}$ 를 모두 만족시키는 순서쌍 $(f(1), f(2))$ 는

$$(6, 10), (7, 9), (9, 7), (10, 6) \text{의 4개}$$

그 각각에 대하여 함수 f 가 일대일대응이 되도록 집합 X 의 원소 3,

$$4, 5 \text{에 집합 } Y \text{의 원소를 대응시키는 경우의 수는 } 3!=6$$

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$4 \times 6 = 24$$

1011 답 ④

$$(h \circ (g \circ f))(\sqrt{2}) = ((h \circ g) \circ f)(\sqrt{2})$$

$$= (h \circ g)(f(\sqrt{2}))$$

$$= (h \circ g)(4)$$

$$= 4 - 2 = 2$$

1012 답 6

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+3)$$

$$(g \circ f)(x) = x^2 + x \text{에서 } g(2x+3) = x^2 + x$$

$$2x+3=t \text{로 놓으면 } x = \frac{1}{2}t - \frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$g(t) = \left(\frac{1}{2}t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}t - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}t^2 - t + \frac{3}{4}$$

$$\therefore g(-3) = \frac{9}{4} + 3 + \frac{3}{4} = 6$$

다른 풀이

$$g(2x+3) = x^2 + x \quad \dots\dots ①$$

$$2x+3=-3 \text{일 때 } x=-3 \text{이므로 이를 ①에 대입하면}$$

$$g(-3) = 9 - 3 = 6$$

1013 답 7

$$f^{-1}(3)=4 \text{에서 } f(4)=3 \text{이므로}$$

$$f(1)=4, f(2)=1, f(4)=3$$

$$\text{이때 } f \text{가 일대일대응이므로 } f(3)=2$$

$$f(1)=4$$

$$f^2(1)=f(f(1))=f(4)=3$$

$$f^3(1)=f(f^2(1))=f(3)=2$$

$$f^4(1)=f(f^3(1))=f(2)=1$$

$$f^5(1)=f(f^4(1))=f(1)=4$$

⋮

즉, $f^n(1)$ 의 값은 4, 3, 2, 1이 이 순서대로 반복된다.

$$\text{따라서 } 2025=4 \times 506+1, 2026=4 \times 506+2 \text{이므로}$$

$$f^{2025}(1)+f^{2026}(1)=4+3=7$$

1014 답 ②

함수 f 의 역함수가 존재하려면 f 는 일대일대응이어야 하므로 x 의 값이 증가할 때, $f(x)$ 의 값은 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다.

즉, $x < 1$ 일 때, $x \geq 1$ 일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$$(a+7)(-a+5) > 0$$

$$(a+7)(a-5) < 0$$

$$\therefore -7 < a < 5$$

따라서 정수 a 는 $-6, -5, -4, \dots, 4$ 의 11개이다.

1015 답 ①

$$y = ax + b \text{라 하면 } ax = y - b$$

$$\therefore x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} = 6bx - 4ab \text{이므로}$$

$$\frac{1}{a} = 6b, \frac{b}{a} = 4ab$$

$$\frac{b}{a} = 4ab \text{에서 } a^2 = \frac{1}{4} \text{이므로 } a = \frac{1}{2} (\because a > 0)$$

$$\text{이를 } \frac{1}{a} = 6b \text{에 대입하면}$$

$$2 = 6b \quad \therefore b = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a - b = \frac{1}{6}$$

1016 답 ⑤

$$f^{-1}(5) = k (k \text{는 상수}) \text{라 하면 } f(k) = 5 \text{이므로}$$

$$3k + 2 = 5 \quad \therefore k = 1$$

$$\therefore (f \circ g \circ f^{-1})(5) = f(g(f^{-1}(5)))$$

$$= f(g(1)) = f(-2 + a)$$

$$= 3(-2 + a) + 2 = 3a - 4$$

$$(f \circ g \circ f^{-1})(5) = 8 \text{에서}$$

$$3a - 4 = 8 \quad \therefore a = 4$$

1017 답 5

$$(f^{-1} \circ g)^{-1}(-1) + (g \circ (f \circ g)^{-1})(1)$$

$$= (g^{-1} \circ f)(-1) + (g \circ g^{-1} \circ f^{-1})(1)$$

$$= g^{-1}(f(-1)) + f^{-1}(1)$$

$$= g^{-1}(5) + f^{-1}(1)$$

$$g^{-1}(5) = k (k \text{는 상수}) \text{라 하면 } g(k) = 5 \text{이므로}$$

$$3k - 1 = 5 \quad \therefore k = 2$$

$$f^{-1}(1) = l (l \text{는 상수}) \text{이라 하면 } f(l) = 1 \text{이므로}$$

$$-l + 4 = 1 \quad \therefore l = 3$$

$$\therefore (f^{-1} \circ g)^{-1}(-1) + (g \circ (f \circ g)^{-1})(1)$$

$$= g^{-1}(5) + f^{-1}(1)$$

$$= 2 + 3 = 5$$

1018 답 ①

$$(f^{-1} \circ (g^{-1} \circ f)^{-1})(b)$$

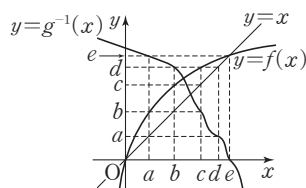
$$= f^{-1}((f^{-1} \circ g)(b))$$

$$= f^{-1}(f^{-1}(g(b))) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g(b) = k (k \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$g^{-1}(k) = b \text{이므로}$$

$$k = c$$



$$f^{-1}(c) = l (l \text{는 상수}) \text{이라 하면 } f(l) = c \text{이므로}$$

$$l = b$$

$$f^{-1}(b) = m (m \text{는 상수}) \text{이라 하면 } f(m) = b \text{이므로}$$

$$m = a$$

따라서 ㉠에서

$$(f^{-1} \circ (g^{-1} \circ f)^{-1})(b) = f^{-1}(f^{-1}(g(b)))$$

$$= f^{-1}(f^{-1}(c))$$

$$= f^{-1}(b) = a$$

1019 답 7

함수 f 는 항등함수이므로

$$f(x) = x \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$f(4) = 4 \text{이므로 } f(4) = g(-5) \text{에서}$$

$$g(-5) = 4$$

함수 g 는 상수함수이므로

$$g(x) = g(-5) = 4 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 $h(x) = x + 4$ 이므로

$$h(2) + h(-3) = 6 + 1 = 7 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 함수 $f(x)$ 구하기	30 %
② 함수 $g(x)$ 구하기	40 %
③ $h(2) + h(-3)$ 의 값 구하기	30 %

1020 답 -6

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax + b)$$

$$= a(ax + b) + b$$

$$= a^2x + ab + b$$

$$(f \circ f)(x) = 4x - 3 \text{에서}$$

$$a^2x + ab + b = 4x - 3 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\therefore a^2 = 4, ab + b = -3$$

$$a^2 = 4 \text{에서 } a = -2 (\because a < 0)$$

이를 $ab + b = -3$ 에 대입하면

$$-2b + b = -3 \quad \therefore b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore ab = -6 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 주어진 조건을 이용하여 항등식 세우기	30 %
② a, b 의 값 구하기	60 %
③ ab 의 값 구하기	10 %

1021 답 $2\sqrt{2}$

주어진 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의

교점은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.

$$-2x + 6 = x \text{에서 } x = 2$$

$$\therefore P(2, 2) \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\therefore OP = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① 점 P의 좌표 구하기	70 %
② 선분 OP의 길이 구하기	30 %

1022 답 ④

$3^1=3$ 을 4로 나누었을 때의 나머지는 3이므로 $f(1)=3$
 $3^2=9$ 를 4로 나누었을 때의 나머지는 1이므로 $f(2)=1$
 $3^3=27$ 을 4로 나누었을 때의 나머지는 3이므로 $f(3)=3$
 $3^4=81$ 을 4로 나누었을 때의 나머지는 1이므로 $f(4)=1$
 $3^5=243$ 을 4로 나누었을 때의 나머지는 3이므로 $f(5)=3$
 $\vdots$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 3 & (x \text{는 홀수}) \\ 1 & (x \text{는 짝수}) \end{cases}$$

따라서 집합 A 는 집합 $\{1, 3, 5, \dots, 19\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합
 이므로 구하는 집합 A 의 개수는

$$2^{10}-1=1024-1=1023$$

1023 답 6

$(f \circ f)(a)=f(a)$ 에서 $f(a)=t$ 로 놓으면
 $f(t)=t$

(i) $t < 2$ 일 때

$$2t+2=t \text{에서 } t=-2 \text{이므로}$$

$$f(a)=-2$$

① $a < 2$ 일 때

$$2a+2=-2 \text{이므로 } a=-2$$

② $a \geq 2$ 일 때

$$a^2-7a+16=-2$$

$$\therefore a^2-7a+18=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-7)^2-4 \times 18=-23 < 0$$

따라서 이를 만족시키는 실수 a 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $t \geq 2$ 일 때

$$t^2-7t+16=t \text{에서 } t^2-8t+16=0$$

$$(t-4)^2=0 \quad \therefore t=4$$

$$\therefore f(a)=4$$

① $a < 2$ 일 때

$$2a+2=4 \text{이므로 } a=1$$

② $a \geq 2$ 일 때

$$a^2-7a+16=4, a^2-7a+12=0$$

$$(a-3)(a-4)=0$$

$$\therefore a=3 \text{ 또는 } a=4$$

(i), (ii)에서 $a=-2$ 또는 $a=1$ 또는 $a=3$ 또는 $a=4$

따라서 구하는 합은

$$-2+1+3+4=6$$

1024 답 16

$$S=\{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99\}$$

$$9 \text{를 } 7 \text{로 나눈 나머지는 } 2 \text{이므로 } f(9)=2$$

$$18 \text{를 } 7 \text{로 나눈 나머지는 } 4 \text{이므로 } f(18)=4$$

$$27 \text{를 } 7 \text{로 나눈 나머지는 } 6 \text{이므로 } f(27)=6$$

$\vdots$

같은 방법으로 구해 보면 n 의 값이 9, 18, 27, ..., 99일 때의 $f(n)$ 의 값은

$$f(9)=f(72)=2,$$

$$f(18)=f(81)=4,$$

$$f(27)=f(90)=6,$$

$$f(36)=f(99)=1,$$

$$f(45)=3, f(54)=5, f(63)=0$$

따라서 $f(n)=0, f(n)=3, f(n)=5$ 인 n 의 값은 각각 1개이고,
 $f(n)=1, f(n)=2, f(n)=4, f(n)=6$ 인 n 의 값은 각각 2개이다.
 이때 함수 f 의 역함수가 존재하려면 f 는 일대일대응이어야 하므로
 집합 X 는 n 의 값이 각각 1개인 것은 반드시 원소로 갖고, 2개씩 있
 는 것은 그중 1개씩만 원소로 가져야 한다.

따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

1025 답 $6 \leq k < \frac{25}{4}$

$$f(x)=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4 \quad (x \geq 2)$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수

$y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에

대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x),$

$y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두

점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$

가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2-4x+k=x$, 즉 $x^2-5x+k=0$ 이 2보다 크
 거나 같은 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식

$x^2-5x+k=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-5)^2-4k > 0$$

$$\therefore k < \frac{25}{4} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 $g(x)=x^2-5x+k=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+k-\frac{25}{4}$ 라 하면 $g(2) \geq 0$ 이어야
 하므로

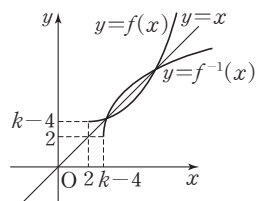
$$4-10+k \geq 0$$

$$\therefore k \geq 6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$y=g(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{5}{2}$ 이고 $\frac{5}{2} > 2$ 이다.

따라서 ⑦, ⑧에서 구하는 실수 k 의 값의 범위는

$$6 \leq k < \frac{25}{4}$$



공통수학1 다시보기

이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a>0$)에 대하여 이차방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근이 모두 p 보다 크거나 같으려면 다음을 모두 만족시켜야 한다.

(1) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D 라 할 때 $\Rightarrow D > 0$

(2) $f(p) \geq 0$

(3) 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{b}{2a}$ 이므로 $\Rightarrow -\frac{b}{2a} > p$

09 / 유리함수

A 개념 확인

158~161쪽

1026 답 ㄱ, ㄷ

1027 답 ㄴ, ㄹ, ㅁ, ㅂ

1028 답 $\frac{10by}{15a^2b^2x^2}, \frac{6ax}{15a^2b^2x^2}$

1029 답 $\frac{3x(x-2)}{(x+1)(x-1)(x-2)}, \frac{4(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$
 $\frac{3x}{x^2-1} = \frac{3x}{(x+1)(x-1)}, \frac{4}{x^2-x-2} = \frac{4}{(x+1)(x-2)}$ 를 통분하면
 $\frac{3x(x-2)}{(x+1)(x-1)(x-2)}, \frac{4(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$

1030 답 $\frac{3yz^2}{2x^2}$

1031 답 $\frac{x-4}{(x+3)(x-2)}$
 $\frac{x^2-5x+4}{x^3-7x+6} = \frac{(x-1)(x-4)}{(x+3)(x-1)(x-2)}$
 $= \frac{x-4}{(x+3)(x-2)}$

1032 답 $\frac{6x+8}{(x+3)(x-2)}$
 $\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x-2} = \frac{2(x-2)+4(x+3)}{(x+3)(x-2)}$
 $= \frac{6x+8}{(x+3)(x-2)}$

1033 답 $-\frac{2}{(x+1)(x-1)}$
 $\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} = \frac{2x-2(x+1)}{(x+1)(x-1)}$
 $= -\frac{2}{(x+1)(x-1)}$

1034 답 $\frac{x}{(2x+1)(x-4)}$
 $\frac{x+1}{2x^2+7x+3} \times \frac{x^2+3x}{x^2-3x-4}$
 $= \frac{x+1}{(2x+1)(x+3)} \times \frac{x(x+3)}{(x+1)(x-4)}$
 $= \frac{x}{(2x+1)(x-4)}$

1035 답 $\frac{(2x-1)(x-2)}{(x+5)(x-5)}$
 $\frac{x^2-6x+8}{3x^2+13x-10} \div \frac{x^2-9x+20}{6x^2-7x+2}$
 $= \frac{x^2-6x+8}{3x^2+13x-10} \times \frac{6x^2-7x+2}{x^2-9x+20}$
 $= \frac{(x-2)(x-4)}{(x+5)(3x-2)} \times \frac{(2x-1)(3x-2)}{(x-4)(x-5)}$
 $= \frac{(2x-1)(x-2)}{(x+5)(x-5)}$

1036 답 $\frac{6x^2+6}{(x+1)(2x-1)}$
 $\frac{x-3}{x+1} + \frac{4x+3}{2x-1}$
 $= \frac{(x-3)(2x-1) + (4x+3)(x+1)}{(x+1)(2x-1)}$
 $= \frac{6x^2+6}{(x+1)(2x-1)}$

1037 답 $\frac{-3x^2+2x+15}{(x+3)(x-3)}$
 $\frac{x^2-6}{x+3} - \frac{x^2-3x+1}{x-3}$
 $= \frac{(x^2-6)(x-3) - (x^2-3x+1)(x+3)}{(x+3)(x-3)}$
 $= \frac{-3x^2+2x+15}{(x+3)(x-3)}$

1038 답 $\frac{2}{(x+2)(x+4)}$
 $\frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)}$
 $= \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right)$
 $= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4}$
 $= \frac{x+4-(x+2)}{(x+2)(x+4)}$
 $= \frac{2}{(x+2)(x+4)}$

1039 답 $\frac{2}{(x+1)(x+5)}$
 $\frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)}$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5}\right)$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+5}\right)$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{x+5-(x+1)}{(x+1)(x+5)}$
 $= \frac{2}{(x+1)(x+5)}$

1040 **답** $\frac{x}{x-1}$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-1}$$

1041 **답** $x(x+1)$

$$\frac{x-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x^2}} = \frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x-1}{x^2}} = \frac{(x+1)(x-1)}{x} \times \frac{x^2}{x-1} = x(x+1)$$

1042 **답** 8

$x=3k, y=5k (k \neq 0)$ 로 놓으면

$$\frac{2(x+y)}{y-x} = \frac{2(3k+5k)}{5k-3k} = \frac{16k}{2k} = 8$$

1043 **답** $\frac{11}{13}$

$\frac{a}{3} = \frac{b}{2} = k (k \neq 0)$ 로 놓으면 $a=3k, b=2k$ 이므로

$$\frac{a^2+ab-b^2}{a^2+b^2} = \frac{9k^2+6k^2-4k^2}{9k^2+4k^2} = \frac{11k^2}{13k^2} = \frac{11}{13}$$

1044 **답** ㄴ, ㄷ, ㄱ

1045 **답** ㄱ, ㄷ, ㄴ

1046 **답** $\{x|x \neq 2 \text{인 실수}\}$

$x-2=0$ 에서 $x=2$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x \neq 2 \text{인 실수}\}$

1047 **답** $\{x|x \neq -5 \text{인 실수}\}$

$x+5=0$ 에서 $x=-5$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x \neq -5 \text{인 실수}\}$

1048 **답** $\{x|x \neq \pm 1 \text{인 실수}\}$

$x^2-1=0$ 에서 $x^2=1 \quad \therefore x=\pm 1$

따라서 주어진 함수의 정의역은

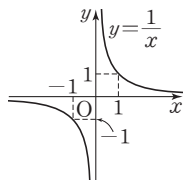
$\{x|x \neq \pm 1 \text{인 실수}\}$

1049 **답** $\{x|x \text{는 모든 실수}\}$

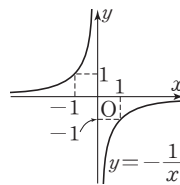
$x^2+3>0$ 이므로 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x \text{는 모든 실수}\}$

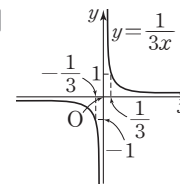
1050 **답**



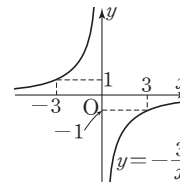
1051 **답**



1052 **답**



1053 **답**

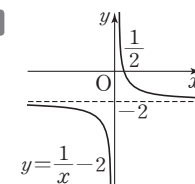


1054 **답** $y = \frac{1}{x+2} + 1$

1055 **답** $y = -\frac{3}{2x-6} - 4$

$$y = -\frac{3}{2(x-3)} - 4 = -\frac{3}{2x-6} - 4$$

1056 **답**

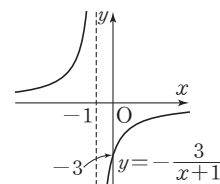


정의역: $\{x|x \neq 0 \text{인 실수}\}$

치역: $\{y|y \neq -2 \text{인 실수}\}$

점근선의 방정식: $x=0, y=-2$

1057 **답**

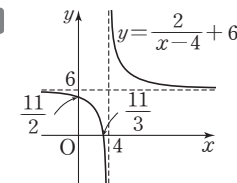


정의역: $\{x|x \neq -1 \text{인 실수}\}$

치역: $\{y|y \neq 0 \text{인 실수}\}$

점근선의 방정식: $x=-1, y=0$

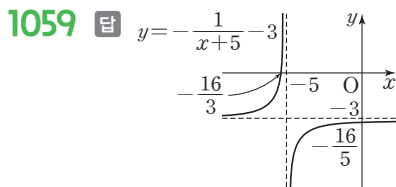
1058 **답**



정의역: $\{x|x \neq 4 \text{인 실수}\}$

치역: $\{y|y \neq 6 \text{인 실수}\}$

점근선의 방정식: $x=4, y=6$



정의역: $\{x | x \neq -5 \text{인 실수}\}$

치역: $\{y | y \neq -3 \text{인 실수}\}$

점근선의 방정식: $x = -5, y = -3$

1060 **답** $y = \frac{4}{x+1} + 3$

$$y = \frac{3x+7}{x+1} = \frac{3(x+1)+4}{x+1} = \frac{4}{x+1} + 3$$

1061 **답** $y = \frac{3}{x-3} - 2$

$$y = \frac{9-2x}{x-3} = \frac{-2(x-3)+3}{x-3} = \frac{3}{x-3} - 2$$

1062 **답** 풀이 참조

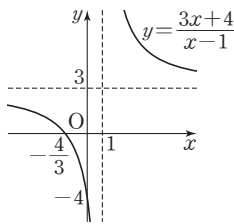
$$y = \frac{3x+4}{x-1} = \frac{3(x-1)+7}{x-1} = \frac{7}{x-1} + 3$$

따라서 $y = \frac{3x+4}{x-1}$ 의 그래프는 $y = \frac{7}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore$ 정의역: $\{x | x \neq 1 \text{인 실수}\}$,

치역: $\{y | y \neq 3 \text{인 실수}\}$,

점근선의 방정식: $x = 1, y = 3$

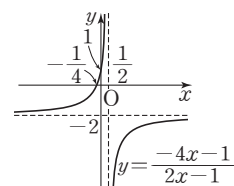


1063 **답** 풀이 참조

$$y = \frac{-4x-1}{2x-1} = \frac{-2(2x-1)-3}{2x-1} = -\frac{3}{2(x-\frac{1}{2})} - 2$$

따라서 $y = \frac{-4x-1}{2x-1}$ 의 그래프는 $y = -\frac{3}{2x}$

의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x | x \neq \frac{1}{2} \text{인 실수}\}$, 치역: $\{y | y \neq -2 \text{인 실수}\}$,

점근선의 방정식: $x = \frac{1}{2}, y = -2$

B 유형 완성

162~173쪽

1064 **답** ④

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} - \frac{2xy}{x^2-y^2} &= \frac{x(x-y)+y(x+y)-2xy}{(x+y)(x-y)} \\ &= \frac{x^2+y^2-2xy}{(x+y)(x-y)} \\ &= \frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{x-y}{x+y} \end{aligned}$$

1065 **답** ④

$$\begin{aligned} ① \quad & \frac{x+4}{x^2-x-2} - \frac{x}{x^2-3x+2} \\ &= \frac{x+4}{(x+1)(x-2)} - \frac{x}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{(x+4)(x-1)-x(x+1)}{(x+1)(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{2(x-2)}{(x+1)(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{2}{(x+1)(x-1)} \end{aligned}$$

$$② \quad \frac{x-3}{x+2} \times \frac{x^2+x-2}{x^2-3x} = \frac{x-3}{x+2} \times \frac{(x+2)(x-1)}{x(x-3)} = \frac{x-1}{x}$$

$$③ \quad \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-3}{(x+1)(x-1)}$$

$$\begin{aligned} ④ \quad & \frac{x^2+2x}{x-1} \div \frac{x^2-4}{x^2-1} = \frac{x(x+2)}{x-1} \times \frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{x(x+1)}{x-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ⑤ \quad & \frac{x-1}{x-2} + \frac{3x}{x^2-2x} = \frac{x-1}{x-2} + \frac{3x}{x(x-2)} = \frac{x(x-1)+3x}{x(x-2)} \\ &= \frac{x(x+2)}{x(x-2)} = \frac{x+2}{x-2} \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

1066 **답** ④

$$\begin{aligned} & \frac{x^2-9}{x^2+3x+9} \times \frac{x^2+4x+3}{x^2-6x+9} \div \frac{x+3}{x^3-27} \\ &= \frac{(x+3)(x-3)}{x^2+3x+9} \times \frac{(x+3)(x+1)}{(x-3)^2} \times \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x+3} \\ &= (x+3)(x+1) \\ &= x^2+4x+3 \end{aligned}$$

1067 **답** -1

주어진 식의 우변을 통분하여 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{ax-1}{x^2+x+1} + \frac{b}{x-1} &= \frac{(ax-1)(x-1)+b(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{(a+b)x^2+(-a+b-1)x+1+b}{x^3-1} \end{aligned}$$

이때 $\frac{x+2}{x^3-1} = \frac{(a+b)x^2+(-a+b-1)x+1+b}{x^3-1}$ 가 x 에 대한 항등

식이므로

$$0=a+b, 1=-a+b-1, 2=1+b$$

$$\therefore a=-1, b=1$$

$$\therefore ab=-1$$

다른 풀이

주어진 식의 양변에 $(x-1)(x^2+x+1)$ 을 곱하여 정리하면

$$x+2=(ax-1)(x-1)+b(x^2+x+1)$$

$$\therefore x+2=(a+b)x^2+(-a+b-1)x+1+b$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$0=a+b, 1=-a+b-1, 2=1+b$$

$$\therefore a=-1, b=1$$

$$\therefore ab=-1$$

- (1) $ax^2+bx+c=0$ 이 x 에 대한 항등식
 $\Leftrightarrow a=b=c=0$
 (2) $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ 이 x 에 대한 항등식
 $\Leftrightarrow a=a', b=b', c=c'$

1068 답 3

주어진 식의 양변에 $(x-1)^3$ 을 곱하여 정리하면

$$(x+1)(x-1)=a(x-1)^2+b(x-1)+c$$

$$\therefore x^2-1=ax^2-(2a-b)x+a-b+c \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$1=a, 0=2a-b, -1=a-b+c$$

$$\therefore a=1, b=2, c=0 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore a+b-c=3 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 식 변형하기	50 %
② a, b, c 의 값 구하기	40 %
③ $a+b-c$ 의 값 구하기	10 %

1069 답 ②

주어진 식의 우변을 통분하여 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{ax+b}{(x+2)^2} - \frac{b}{x-1} &= \frac{(ax+b)(x-1)-b(x+2)^2}{(x+2)^2(x-1)} \\ &= \frac{(a-b)x^2-(a+3b)x-5b}{x^3+3x^2-4} \end{aligned}$$

이때 $\frac{x^2-5x-5}{x^3+3x^2-4} = \frac{(a-b)x^2-(a+3b)x-5b}{x^3+3x^2-4}$ 가 x 에 대한 항등식이므로

$$1=a-b, 5=a+3b, 5=5b$$

$$\therefore a=2, b=1$$

$$\therefore a+b=3$$

1070 답 ⑤

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x} - \frac{x+2}{x+1} + \frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} \\ &= \frac{x+1}{x} - \frac{(x+1)+1}{x+1} + \frac{(x-2)+1}{x-2} - \frac{(x-3)+1}{x-3} \\ &= \left(1+\frac{1}{x}\right) - \left(1+\frac{1}{x+1}\right) + \left(1+\frac{1}{x-2}\right) - \left(1+\frac{1}{x-3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3}\right) \\ &= \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{x^2-5x+6-(x^2+x)}{x(x+1)(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{-6x+6}{x(x+1)(x-2)(x-3)} \end{aligned}$$

따라서 $a=-6, b=6$ 이므로

$$b-a=12$$

1071 답 $\frac{7x-1}{(x-1)(x+2)}$

$$\begin{aligned} \frac{3x^2-3x+2}{x-1} - \frac{3x^2+6x-5}{x+2} &= \frac{3x(x-1)+2}{x-1} - \frac{3x(x+2)-5}{x+2} \\ &= \left(3x+\frac{2}{x-1}\right) - \left(3x-\frac{5}{x+2}\right) \\ &= \frac{2}{x-1} + \frac{5}{x+2} \\ &= \frac{2(x+2)+5(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{7x-1}{(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

1072 답 $f(x)=-3x^3+10x^2-12x$

$$\begin{aligned} \frac{x^3+2x^2}{x^2+2x+4} + \frac{x^3-2x^2+5x}{x^2-2x+4} - 2x \\ &= \frac{x(x^2+2x+4)-4x}{x^2+2x+4} + \frac{x(x^2-2x+4)+x}{x^2-2x+4} - 2x \\ &= \frac{-4x}{x^2+2x+4} + x + \frac{x}{x^2-2x+4} + x - 2x \\ &= \frac{-4x}{x^2+2x+4} + \frac{x}{x^2-2x+4} \\ &= \frac{-4x(x^2-2x+4)+x(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)} \\ &= \frac{-3x^3+10x^2-12x}{(x^2+4)^2-(2x)^2} = \frac{-3x^3+10x^2-12x}{x^4+4x^2+16} \\ \therefore f(x) &= -3x^3+10x^2-12x \end{aligned}$$

1073 답 6

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} \\ &= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{3}{x(x+3)} \\ \text{이때 } \frac{3}{x(x+3)} &= \frac{a}{x(x+b)} \text{가 } x \text{에 대한 항등식이므로} \\ a=3, b=3 \quad \therefore a+b &= 6 \end{aligned}$$

1074 답 ④

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x^2+8x+15} \\ &= \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+5}\right) \\ &= \frac{3}{(x+5)(x-1)} \end{aligned}$$

1075 답 ③

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{10 \times 11} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{11} = \frac{9}{22} \end{aligned}$$

1076 **답** $\frac{20}{21}$

$$f(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \text{이므로}$$

$$\frac{2}{f(x)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\therefore \frac{2}{f(2)} + \frac{2}{f(4)} + \frac{2}{f(6)} + \dots + \frac{2}{f(20)}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① $\frac{2}{f(x)}$ 구하기	40 %
② $\frac{2}{f(2)} + \frac{2}{f(4)} + \frac{2}{f(6)} + \dots + \frac{2}{f(20)}$ 의 값 구하기	60 %

1077 **답** $\frac{1}{x}$

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = 1 - \frac{1}{\frac{-x}{1-x}} = 1 - \frac{x-1}{x} = \frac{1}{x}$$

1078 **답** $-x$

$$1 + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+x+1}{x-1} = \frac{2x}{x-1}$$

$$1 - \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1-(x+1)}{x-1} = \frac{-2}{x-1}$$

1079 **답** 10

$$\frac{53}{30} = 1 + \frac{23}{30} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{23}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{7}{23}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{23}{7}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{2}{7}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{7}{2}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}}$$

따라서 $a=1, b=1, c=3, d=3, e=2$ 이므로
 $a+b+c+d+e=10$

1080 **답** ②

$$(x+y):(y+z):(z+x)=3:4:5 \text{이므로}$$

$$x+y=3k, y+z=4k, z+x=5k (k \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

로 놓고 세 식을 변끼리 더하면

$$2(x+y+z)=12k$$

$$\therefore x+y+z=6k \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $x=2k, y=k, z=3k$ 이므로

$$\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} = \frac{2k \times k + k \times 3k + 3k \times 2k}{(2k)^2 + k^2 + (3k)^2}$$

$$= \frac{11k^2}{14k^2} = \frac{11}{14}$$

1081 **답** $\frac{1}{4}$

$$x=2k, y=3k, z=7k (k \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$\frac{3x-2y+z}{x+4y+2z} = \frac{6k-6k+7k}{2k+12k+14k}$$

$$= \frac{7k}{28k} = \frac{1}{4}$$

1082 **답** -2

$$\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{5} = k (k \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$x+y=3k, y+z=6k, z+x=5k \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

세 식을 변끼리 더하면

$$2(x+y+z)=14k$$

$$\therefore x+y+z=7k \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $x=k, y=2k, z=4k$ 이므로

$$\frac{xy+yz-zx}{x^2-y^2} = \frac{k \times 2k + 2k \times 4k - 4k \times k}{k^2 - (2k)^2}$$

$$= \frac{6k^2}{-3k^2} = -2$$

1083 **답** ①

$$a+b+c=0 \text{에서}$$

$$a+b=-c, b+c=-a, c+a=-b$$

$$\therefore \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} + \frac{-c}{c} = -3$$

1084 **답** ①

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = 0 \text{에서}$$

$$\frac{a+b+c}{abc} = 0 \quad \therefore a+b+c=0$$

$$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} = \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{abc}$$

$$= \frac{3abc}{abc} = 3$$

1085 **답** 5

$$x+2y+z=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$x-y+3z=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠-㉡을 하면

$$3y-2z=0 \quad \therefore y=\frac{2}{3}z \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$x+2 \times \frac{2}{3}z+z=0 \quad \therefore x=-\frac{7}{3}z \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore \frac{x+y}{x+2z} = \frac{-\frac{7}{3}z + \frac{2}{3}z}{-\frac{7}{3}z + 2z} = \frac{-\frac{5}{3}z}{-\frac{1}{3}z} = 5 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① y 를 z 에 대한 식으로 나타내기	30 %
② x 를 z 에 대한 식으로 나타내기	30 %
③ $\frac{x+y}{x+2z}$ 의 값 구하기	40 %

1086 [답 ⑤]

$$\frac{x^2 - xy + 2y^2}{x^2 - 2xy - y^2} = 2 \text{에서}$$

$$x^2 - xy + 2y^2 = 2x^2 - 4xy - 2y^2$$

$$x^2 - 3xy - 4y^2 = 0, (x+y)(x-4y) = 0$$

$$\therefore x = -y \text{ 또는 } x = 4y$$

그런데 $xy < 0$ 에서 x, y 의 부호는 서로 반대이므로

$$x = -y$$

$$\therefore \frac{3x-y}{2x+y} = \frac{3 \times (-y) - y}{2 \times (-y) + y} = \frac{-4y}{-y} = 4$$

1087 [답 2]

$$y = \frac{6-x}{x-3} = \frac{-(x-3)+3}{x-3} = \frac{3}{x-3} - 1 \text{이므로 } y = \frac{6-x}{x-3} \text{의 그래프}$$

는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=3, b=-1$ 이므로

$$a+b=2$$

1088 [답 ①]

ㄱ. $y = \frac{2}{x-2} - 3$ 의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1$ 이므로 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y = \frac{2x-5}{2-x} = \frac{5-2x}{x-2} = \frac{-2(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} - 2$ 이므로 $y = \frac{2x-5}{2-x}$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y = \frac{4x+1}{1-2x} = \frac{-4x-1}{2x-1} = \frac{-2(2x-1)-3}{2x-1} = -\frac{3}{2(x-\frac{1}{2})} - 2$ 이므로 $y = \frac{4x+1}{1-2x}$ 의 그래프는 $y = -\frac{3}{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 보기에서 그 그래프가 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 평행이동하여 겹쳐지는 함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

1089 [답 -2]

$$y = -\frac{1}{x} \text{의 그래프를 } x \text{축의 방향으로 1만큼, } y \text{축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은}$$

$$y = -\frac{1}{x-1} - 3 = \frac{-3(x-1)-1}{x-1} = \frac{-3x+2}{x-1}$$

이 식이 함수 $y = \frac{ax+b}{x-b}$ 와 일치하므로

$$a=-3, b=1$$

$$\therefore a+b=-2$$

1090 [답 2]

$$y = \frac{k}{x} \text{의 그래프를 } x \text{축의 방향으로 2만큼, } y \text{축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은}$$

$$y = \frac{k}{x-2} - 1 \dots\dots \text{ㄱ}$$

이 함수의 그래프가 점 (3, 1)을 지나므로

$$1 = \frac{k}{3-2} - 1 \quad \therefore k=2 \dots\dots \text{ㄴ}$$

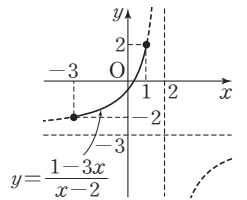
채점 기준

ㄱ 평행이동한 그래프의 식 구하기	50 %
ㄴ k의 값 구하기	50 %

1091 [답 ②]

$$y = \frac{1-3x}{x-2} = \frac{-3(x-2)-5}{x-2} = -\frac{5}{x-2} - 3 \text{이므로 주어진 함수의 그래프는 } y = -\frac{5}{x} \text{의 그래프를 } x \text{축의 방향으로 2만큼, } y \text{축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.}$$

따라서 $-3 \leq x \leq 1$ 에서 $y = \frac{1-3x}{x-2}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역은 $\{y \mid -2 \leq y \leq 2\}$



1092 [답 6]

$$y = \frac{mx+3}{x+2n} = \frac{m(x+2n)-2mn+3}{x+2n} = \frac{-2mn+3}{x+2n} + m$$

따라서 정의역은 $\{x \mid x \neq -2n \text{인 실수}\}$ 이고, 치역은 $\{y \mid y \neq m \text{인 실수}\}$ 이므로

$$-2n=6, m=-2 \quad \therefore m=-2, n=-3$$

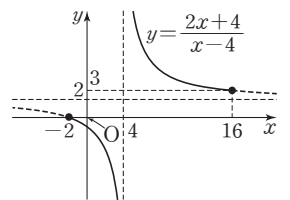
$$\therefore mn=6$$

1093 [답 ①]

$$y = \frac{2x+4}{x-4} = \frac{2(x-4)+12}{x-4} = \frac{12}{x-4} + 2 \text{이므로 주어진 함수의 그래프는 } y = \frac{12}{x} \text{의 그래프를 } x \text{축의 방향으로 4만큼, } y \text{축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.}$$

$y \leq 0$ 또는 $y \geq 3$ 에서 $y = \frac{2x+4}{x-4}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은 $\{x \mid -2 \leq x < 4 \text{ 또는 } 4 < x \leq 16\}$

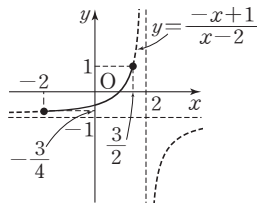
따라서 정의역에 속하는 자연수는 1, 2, 3, 5, 6, ..., 16의 15개이다.



1094 [답 1/4]

$$y = \frac{-x+1}{x-2} = \frac{-(x-2)-1}{x-2} = -\frac{1}{x-2} - 1 \text{이므로 주어진 함수의 그래프는 } y = -\frac{1}{x} \text{의 그래프를 } x \text{축의 방향으로 2만큼, } y \text{축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.}$$

$-2 \leq x \leq \frac{3}{2}$ 에서 $y = \frac{-x+1}{x-2}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x = \frac{3}{2}$ 일 때 최댓값 1, $x = -2$ 일 때 최솟값 $-\frac{3}{4}$ 을 갖는다.

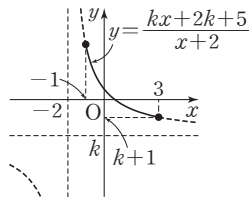


따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $1 + (-\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}$

1095 답 -2

$y = \frac{kx+2k+5}{x+2} = \frac{k(x+2)+5}{x+2} = \frac{5}{x+2} + k$ 이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = \frac{5}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

$-1 \leq x \leq 3$ 에서 $y = \frac{kx+2k+5}{x+2}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=3$ 일 때 최솟값 $\frac{3k+2k+5}{3+2}$, 즉 $k+1$ 을 갖는다.

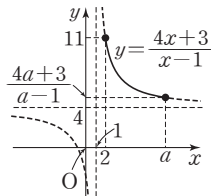


따라서 $k+1 = -1$ 이므로 $k = -2$

1096 답 ①

$y = \frac{4x+3}{x-1} = \frac{4(x-1)+7}{x-1} = \frac{7}{x-1} + 4$ 이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = \frac{7}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

$2 \leq x \leq a$ 에서 $y = \frac{4x+3}{x-1}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2$ 일 때 최댓값 11, $x=a$ 일 때 최솟값 $\frac{4a+3}{a-1}$ 을 갖는다.



따라서 $\frac{4a+3}{a-1} = 5$, $b=11$ 이므로

$a=8$, $b=11$
 $\therefore a-b=-3$

1097 답 ④

$y = \frac{4x-3}{x-a} = \frac{4(x-a)+4a-3}{x-a} = \frac{4a-3}{x-a} + 4$ 이므로 점근선의 방정식은

$x=a$, $y=4$

따라서 $a=2$, $b=4$ 이므로

$ab=8$

1098 답 27

$y = \frac{3x-5}{1-x} = \frac{-3x+5}{x-1} = \frac{-3(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} - 3$ 이므로 점근선의 방정식은

$x=1$, $y=-3$

..... ①

$$y = \frac{bx-2}{3x+a} = \frac{\frac{b}{3}(3x+a) - \frac{ab}{3} - 2}{3x+a} = \frac{-\frac{ab}{3} - 2}{3(x+\frac{a}{3})} + \frac{b}{3}$$

의 방정식은

$$x = -\frac{a}{3}, y = \frac{b}{3}$$

..... ②

두 그래프의 점근선의 방정식이 같으므로

$$1 = -\frac{a}{3}, -3 = \frac{b}{3} \quad \therefore a = -3, b = -9$$

$\therefore ab=27$

..... ③

채점 기준

① $y = \frac{3x-5}{1-x}$ 의 그래프의 점근선의 방정식 구하기	30 %
② $y = \frac{bx-2}{3x+a}$ 의 그래프의 점근선의 방정식 구하기	40 %
③ ab 의 값 구하기	30 %

1099 답 ①

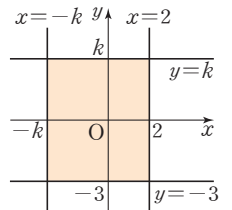
$y = \frac{-3x+1}{x+k} = \frac{-3(x+k)+3k+1}{x+k} = \frac{3k+1}{x+k} - 3$ 이므로 점근선의 방정식은

$x = -k$, $y = -3$

$y = \frac{kx+1}{x-2} = \frac{k(x-2)+2k+1}{x-2} = \frac{2k+1}{x-2} + k$ 이므로 점근선의 방정식은

$x=2$, $y=k$

k 가 양수이므로 두 함수의 그래프의 점근선은 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 부분의 넓이가 30이므로



$$(k+2)(k+3)=30$$

$$k^2+5k-24=0, (k+8)(k-3)=0$$

$$\therefore k=3 (\because k>0)$$

1100 답 ①

$y = \frac{3x+2}{x+a} = \frac{3(x+a)-3a+2}{x+a} = \frac{3a-2}{x+a} + 3$ 이므로 점근선의 방정식은

$x=-a$, $y=3$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(-a, 3)$ 에 대하여 대칭이므로

$$a=-1, b=3$$

$$\therefore ab=-3$$

1101 답 ⑤

함수 $y = \frac{3}{x-5} + k$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=5$, $y=k$

따라서 점 $(5, k)$ 는 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$$k=5$$

1102 답 ④

$y = \frac{2x-3}{x+2} = \frac{2(x+2)-7}{x+2} = -\frac{7}{x+2} + 2$ 이므로 점근선의 방정식은

$$x=-2, y=2$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(-2, 2)$ 에 대하여 대칭이므로
 $a = -2, b = 2$
 또 점 $(-2, 2)$ 는 직선 $y = x + c$ 위의 점이므로
 $2 = -2 + c \quad \therefore c = 4$
 $\therefore a + b + c = 4$

1103 답 4

$y = \frac{ax+1}{x-b} = \frac{a(x-b)+ab+1}{x-b} = \frac{ab+1}{x-b} + a$ 이므로 점근선의 방정식은

$x = b, y = a$ ①

이때 점 (b, a) 는 두 직선 $y = x + 3, y = -x + 5$ 위의 점이므로
 $a = b + 3, a = -b + 5$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 4, b = 1$ ②

$\therefore ab = 4$ ③

채점 기준

① 점근선의 방정식 구하기	50 %
② a, b 의 값 구하기	40 %
③ ab 의 값 구하기	10 %

1104 답 ⑤

$y = \frac{ax+b}{x+c} = \frac{a(x+c)-ac+b}{x+c} = \frac{b-ac}{x+c} + a$ 이므로 점근선의 방정식은

$x = -c, y = a$

이때 주어진 함수의 그래프가 점 $(2, 1)$ 에 대하여 대칭이므로
 $-c = 2, a = 1 \quad \therefore a = 1, c = -2$

따라서 $y = \frac{x+b}{x-2}$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{1+b}{1-2} \quad \therefore b = -1$$

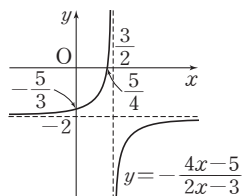
$\therefore abc = 2$

1105 답 제2사분면

$y = -\frac{4x-5}{2x-3} = -\frac{2(2x-3)+1}{2x-3} = -\frac{1}{2(x-\frac{3}{2})} - 2$ 이므로 주어진

함수의 그래프는 $y = -\frac{1}{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y = -\frac{4x-5}{2x-3}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프가 지나지 않는 사분면은 제2사분면이다.



1106 답 ③

$y = \frac{3x+k-10}{x+1} = \frac{3(x+1)+k-13}{x+1} = \frac{k-13}{x+1} + 3$ ①

이때 $k-13=0$, 즉 $k=13$ 이면 ①은 $y=3$ 이므로 그래프가 제4사분면을 지나지 않는다.

$\therefore k \neq 13$

①의 그래프는 점근선의 방정식이 $x = -1, y = 3$ 이고, 점 $(0, k-10)$ 을 지난다.

(i) $k-13 > 0$, 즉 $k > 13$ 일 때

그래프가 제4사분면을 지나지 않는다.

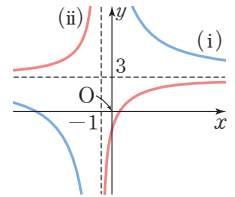
(ii) $k-13 < 0$, 즉 $k < 13$ 일 때

$x=0$ 일 때 $y < 0$ 이어야 하므로

$$k-10 < 0 \quad \therefore k < 10$$

(i), (ii)에서 $k < 10$ 이므로 자연수 k 는

1, 2, 3, ..., 9의 9개이다.



1107 답 $0 \leq a < 2$ 또는 $a > 2$

$y = \frac{-2x+a}{x-1} = \frac{-2(x-1)+a-2}{x-1} = \frac{a-2}{x-1} - 2$ 이므로 점근선의 방정식은 $x = 1, y = -2$ 이고, 그래프는 점 $(0, -a)$ 를 지난다.

(i) $a-2 > 0$, 즉 $a > 2$ 일 때

그래프가 제2사분면을 지나지 않는다.

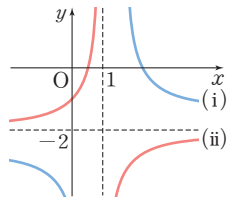
(ii) $a-2 < 0$, 즉 $a < 2$ 일 때

$x=0$ 일 때 $y \leq 0$ 이어야 하므로

$$-a \leq 0 \quad \therefore a \geq 0$$

그런데 $a < 2$ 이므로 $0 \leq a < 2$

(i), (ii)에서 $0 \leq a < 2$ 또는 $a > 2$



1108 답 ⑤

$y = \frac{3x-1}{x+2} = \frac{3(x+2)-7}{x+2} = -\frac{7}{x+2} + 3$

이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

① $y = -\frac{7}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

-2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이

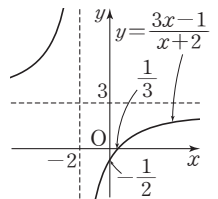
동한 것이다.

③ 점근선의 방정식은 $x = -2, y = 3$ 이므로 점 $(-2, 3)$ 에 대하여 대칭이다.

④ $y = \frac{3x-1}{x+2}$ 에 $y = 0$ 을 대입하면 $x = \frac{1}{3}$ 이므로 x 축과 점 $(\frac{1}{3}, 0)$ 에서 만난다.

⑤ 모든 사분면을 지난다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.



1109 답 ③

$y = \frac{k}{x-1} + 1$ 의 그래프는 점근선의 방정식이 $x = 1, y = 1$ 이고, 점 $(1, 1)$ 에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 점 $(1, 1)$ 을 지나고 기울기가 1인 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $f(x) = \frac{k}{x-1} + 1$ ($k > 0$)이라 하면

(i) $f(0) > 0$ 일 때

$$f(0) = -k + 1 > 0, \text{ 즉 } 0 < k < 1 \text{ 이면}$$

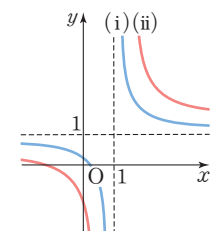
그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.

(ii) $f(0) < 0$ 일 때

$$f(0) = -k + 1 < 0, \text{ 즉 } k > 1 \text{ 이면}$$

그래프는 모든 사분면을 지난다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.



1110 답 4

점근선의 방정식이 $x=-1, y=4$ 이므로 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x+1} + 4 \quad (k < 0) \text{라 하자.}$$

이 함수의 그래프가 점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = \frac{k}{0+1} + 4 \quad \therefore k = -5$$

$$\text{따라서 } y = \frac{-5}{x+1} + 4 = \frac{4(x+1)-5}{x+1} = \frac{4x-1}{x+1} \text{이므로}$$

$$a=4, b=-1, c=1 \quad \therefore a+b+c=4$$

1111 답 5

점근선의 방정식이 $x=3, y=1$ 이므로 $a=3, b=1$

따라서 $y = \frac{k}{x-3} + 1$ 의 그래프가 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{k}{2-3} + 1 \quad \therefore k = 1$$

$$\therefore a+b+k=5$$

1112 답 ③

점근선의 방정식이 $x=2, y=2$ 이므로 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x-2} + 2 \quad (k < 0) \text{라 하자.}$$

이 함수의 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \frac{k}{0-2} + 2 \quad \therefore k = -2$$

따라서 보기에서 그 그래프가 $y = -\frac{2}{x-2} + 2$ 의 그래프를 평행이동하여 겹쳐지는 함수인 것은 ㄷ이다.

1113 답 -7

(가)에서 점근선의 방정식이 $x=\frac{1}{2}, y=-3$ 이므로

$$f(x) = \frac{k}{2x-1} - 3 \quad (k \neq 0) \text{이라 하자.}$$

(나)에서 그래프가 점 $(2, -1)$ 을 지나므로

$$f(2) = -1 \text{에서}$$

$$\frac{k}{4-1} - 3 = -1 \quad \therefore k = 6$$

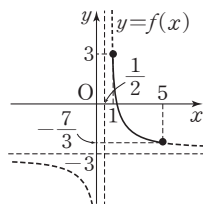
$$\therefore f(x) = \frac{6}{2x-1} - 3$$

$1 \leq x \leq 5$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=1$ 일 때 최댓값 3, $x=5$

일 때 최솟값 $-\frac{7}{3}$ 을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$$3 \times \left(-\frac{7}{3}\right) = -7$$



1114 답 ④

$$\frac{x-1}{x+1} = mx+1 \text{에서 } x-1 = (mx+1)(x+1)$$

$$\therefore mx^2 + mx + 2 = 0$$

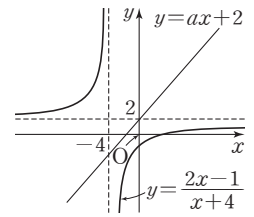
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $y = \frac{x-1}{x+1}$ 의 그래프와 직선 $y = mx+1$ 이 한 점에서 만나므로

$$D = m^2 - 8m = 0, m(m-8) = 0 \quad \therefore m = 8 \quad (\because m > 0)$$

1115 답 2

$$y = \frac{2x-1}{x+4} = \frac{2(x+4)-9}{x+4} = -\frac{9}{x+4} + 2$$

따라서 $y = \frac{2x-1}{x+4}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y = ax+2$ 는 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 2)$ 를 지난다.



(i) $a=0$ 일 때

직선 $y=2$ 는 점근선이므로 두 그래프는 만나지 않는다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때

$$\frac{2x-1}{x+4} = ax+2 \text{에서}$$

$$2x-1 = (ax+2)(x+4)$$

$$\therefore ax^2 + 4ax + 9 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, $y = \frac{2x-1}{x+4}$ 의 그래프와 직선 $y = ax+2$ 가 만나지 않으려면

$$\frac{D}{4} = 4a^2 - 9a < 0$$

$$a(4a-9) < 0 \quad \therefore 0 < a < \frac{9}{4}$$

(i), (ii)에서 $0 < a < \frac{9}{4}$

따라서 정수 a 의 최댓값은 2이다.

채점 기준

① $y = \frac{2x-1}{x+4}$ 의 그래프와 직선 $y = ax+2$ 그리기	40 %
② a 의 값의 범위 구하기	50 %
③ 정수 a 의 최댓값 구하기	10 %

1116 답 $\frac{10}{3}$

$$y = \frac{x+1}{x-2} = \frac{(x-2)+3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1$$

이므로 $3 \leq x \leq 5$ 에서 $y = \frac{x+1}{x-2}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선

$y = mx-2m+1$, 즉 $y = m(x-2)+1$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 1)$ 을 지난다.

(i) 직선이 점 $(3, 4)$ 를 지날 때

$$4 = 3m - 2m + 1$$

$$\therefore m = 3$$

(ii) 직선이 점 $(5, 2)$ 를 지날 때

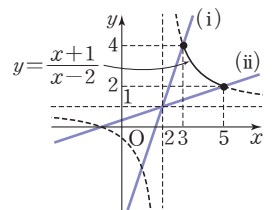
$$2 = 5m - 2m + 1$$

$$\therefore m = \frac{1}{3}$$

(i), (ii)에서 $\frac{1}{3} \leq m \leq 3$

따라서 m 의 최댓값은 3, 최솟값은 $\frac{1}{3}$ 이므로 구하는 합은

$$3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$



1117 답 ②

$y = \frac{x+1}{x-1}$ 이라 하면

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1$$

$2 \leq x \leq 3$ 에서 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같고, 두 직선

$y = ax + 1$, $y = bx + 1$ 은 a , b 의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$ 을 지난다.

이때 $2 \leq x \leq 3$ 에서 부등식

$$ax + 1 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq bx + 1 \text{이 항상 성립}$$

하려면 기울기 a 의 값은 직선 $y = ax + 1$ 이 점 $(3, 2)$ 을 지날 때보다 작거나 같고, 기울기 b 의 값은 직선 $y = bx + 1$ 이 점 $(2, 3)$ 을 지날 때보다 크거나 같아야 한다.

직선 $y = ax + 1$ 이 점 $(3, 2)$ 을 지날 때,

$$2 = 3a + 1 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

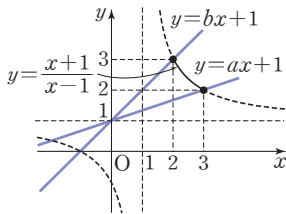
직선 $y = bx + 1$ 이 점 $(2, 3)$ 을 지날 때,

$$3 = 2b + 1 \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore a \leq \frac{1}{3}, b \geq 1$$

따라서 $b - a$ 의 값이 최소하려면 b 의 값은 최소이고 a 의 값은 최대 이어야 하므로 구하는 최솟값은

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$



1118 답 ③

$y = \frac{4}{x}$ ($x > 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{4}{x-1} + 2 \quad (x > 1)$$

점 P의 좌표를 $(k, \frac{4}{k-1} + 2)$ ($k > 1$)라 하면

$$\overline{PR} = k, \overline{PQ} = \frac{4}{k-1} + 2$$

직사각형 ROQP의 둘레의 길이는

$$2(k + \frac{4}{k-1} + 2) = 2(k-1 + \frac{4}{k-1} + 3)$$

이때 $k-1 > 0$, $\frac{4}{k-1} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$k-1 + \frac{4}{k-1} + 3 \geq 2\sqrt{(k-1) \times \frac{4}{k-1}} + 3 = 4 + 3 = 7$$

(단, 등호는 $k-1 = \frac{4}{k-1}$, 즉 $k=3$ 일 때 성립)

따라서 직사각형 ROQP의 둘레의 길이의 최솟값은

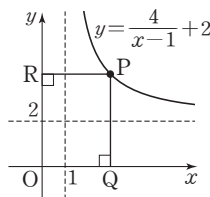
$$2 \times 7 = 14$$

참고 $k-1 = \frac{4}{k-1}$ 에서

$$(k-1)^2 = 4, k-1 = \pm 2$$

$$\therefore k = 3 \quad (\because k > 1)$$

따라서 등호는 $k=3$ 일 때 성립한다.



1119 답 6

점 P의 좌표를 $(k, \frac{1}{k-1} + 3)$ ($k > 1$)이라 하면 점 Q의 좌표는 $(k, -k)$ 이므로

$$\overline{PQ} = \frac{1}{k-1} + 3 + k$$

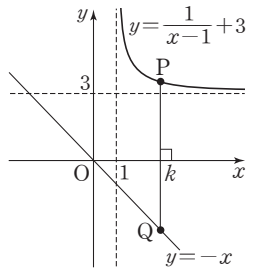
$$= k-1 + \frac{1}{k-1} + 4 \quad \dots \dots \textcircled{i}$$

이때 $k-1 > 0$, $\frac{1}{k-1} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$k-1 + \frac{1}{k-1} + 4 \geq 2\sqrt{(k-1) \times \frac{1}{k-1}} + 4 = 2 + 4 = 6$$

(단, 등호는 $k-1 = \frac{1}{k-1}$, 즉 $k=2$ 일 때 성립)

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 6이다. $\dots \dots \textcircled{ii}$



채점 기준

① 점 P의 x좌표를 k 라 하고 $\overline{PQ}$ 의 길이를 k 에 대한 식으로 나타내기	40 %
② PQ의 길이의 최솟값 구하기	60 %

1120 답 ②

점 P의 좌표를 $(a, \frac{k}{a-3} + 2)$ ($a > 3$)라 하면

$$\overline{PA} = \frac{k}{a-3} + 2 - 2 = \frac{k}{a-3}, \overline{PB} = a - 3 \text{이므로}$$

$$\overline{PA} + \overline{PB} = \frac{k}{a-3} + a - 3$$

이때 $a-3 > 0$, $\frac{k}{a-3} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a-3 + \frac{k}{a-3} \geq 2\sqrt{(a-3) \times \frac{k}{a-3}} = 2\sqrt{k} \quad (\text{단, 등호는 } a-3 = \frac{k}{a-3} \text{일 때 성립})$$

이때 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값이 6이므로

$$2\sqrt{k} = 6 \quad \therefore k = 9$$

1121 답 5

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= \frac{\frac{x-1}{x} - 1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{\frac{x-1-x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{-1}{x-1}$$

$$= \frac{-1}{x-1}$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$$

$$= \frac{\frac{-1}{x-1} - 1}{\frac{-1}{x-1}} = \frac{\frac{-1-(x-1)}{x-1}}{\frac{-1}{x-1}} = \frac{-x}{-1} = x$$

$$= x$$

$$\vdots$$

따라서 $f^3(x) = f^6(x) = f^9(x) = \dots = f^{3n}(x) = x$ (n 은 자연수)이므로

$$f^{150}(5) = f^{3 \times 50}(5) = 5$$

1122 답 ⑤

$$(f \circ f)(k) = f(f(k)) = \frac{1}{\frac{1}{k-1} - 1} = \frac{1}{\frac{1-(k-1)}{k-1}} = \frac{k-1}{2-k}$$

$$(f \circ f)(k) = -2 \text{에서 } \frac{k-1}{2-k} = -2$$

$$k-1 = -2(2-k) \quad \therefore k=3$$

1123 답 $\frac{10}{1001}$

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+x+1}{x+1}}$$

$$= \frac{x}{2x+1}$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$$

$$= \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x+2x+1}{2x+1}}$$

$$= \frac{x}{3x+1}$$

⋮

따라서 $f^n(x) = \frac{x}{nx+1}$ (n 은 자연수)이므로

$$f^{100}(x) = \frac{x}{100x+1}$$

$$\therefore f^{100}(10) = \frac{10}{100 \times 10 + 1} = \frac{10}{1001}$$

1124 답 ③

주어진 그래프에서 $f(-1)=0$, $f(0)=-1$ 이므로

$$f^2(-1) = (f \circ f)(-1) = f(f(-1)) = f(0) = -1$$

$$f^3(-1) = (f \circ f^2)(-1) = f(f^2(-1)) = f(-1) = 0$$

⋮

즉, $f^n(-1)$ 의 값은 0, -1이 이 순서대로 반복된다.

따라서 $1029 = 2 \times 514 + 1$ 이므로

$$f^{1029}(-1) = 0$$

다른 풀이

주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=1$, $y=1$ 이므로

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + 1 \quad (a>0) \text{이라 하자.}$$

함수의 그래프가 점 $(-1, 0)$, $(0, -1)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{a}{-1-1} + 1 \quad \therefore a=2$$

$$\text{즉, } f(x) = \frac{2}{x-1} + 1 \text{이므로}$$

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= \frac{2}{\frac{2}{x-1} + 1 - 1} + 1 = x$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = f(x)$$

⋮

따라서 $f^{2n}(x) = x$, $f^{2n+1}(x) = f(x)$ (n 은 자연수)이므로

$$f^{1029}(-1) = f^{2 \times 514 + 1}(-1) = f(-1) = 0$$

1125 답 ③

$$y = \frac{ax}{2x-3} \text{라 하면 } (2x-3)y = ax$$

$$(2y-a)x = 3y \quad \therefore x = \frac{3y}{2y-a}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{3x}{2x-a} \quad \therefore f^{-1}(x) = \frac{3x}{2x-a}$$

$$f = f^{-1} \text{에서 } \frac{ax}{2x-3} = \frac{3x}{2x-a}$$

$$\therefore a=3$$

다른 풀이

$$f(f(x)) = \frac{af(x)}{2f(x)-3} = \frac{a \times \frac{ax}{2x-3}}{2 \times \frac{ax}{2x-3} - 3}$$

$$= \frac{\frac{a^2x}{2x-3}}{\frac{2ax-3(2x-3)}{2x-3}} = \frac{a^2x}{2(a-3)x+9}$$

$$f = f^{-1} \text{에서 } (f \circ f)(x) = x \text{이므로}$$

$$\frac{a^2x}{2(a-3)x+9} = x$$

$$\therefore a^2x = 2(a-3)x^2 + 9x$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$0 = a-3, a^2=9 \quad \therefore a=3$$

1126 답 1

$$y = \frac{2}{x} + 1 \text{이라 하면 } y-1 = \frac{2}{x}$$

$$(y-1)x = 2 \quad \therefore x = \frac{2}{y-1}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{2}{x-1}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{2}{x-1}$$

따라서 $a=2$, $b=-1$ 이므로

$$a+b=1$$

1127 답 -2

주어진 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭
이므로 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다. ①

$$y = \frac{4x-3}{x-a} \text{이라 하면 } (x-a)y = 4x-3$$

$$(y-4)x = ay-3 \quad \therefore x = \frac{ay-3}{y-4}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{ax-3}{x-4}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{ax-3}{x-4} \quad \dots\dots \text{ ②}$$

$$g(x) = f^{-1}(x) \text{에서 } \frac{-2x+3}{bx+4} = \frac{ax-3}{x-4}$$

$$\frac{2x-3}{-bx-4} = \frac{ax-3}{x-4} \quad \therefore a=2, b=-1$$

$$\therefore ab = -2 \quad \dots\dots \text{ ③}$$

채점 기준

① 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 관계 알기	20 %
② $f(x)$ 의 역함수 구하기	50 %
③ ab 의 값 구하기	30 %

1128 [답] ⑤

$$y = \frac{2x+5}{x+3} \text{라 하면 } (x+3)y = 2x+5$$

$$(y-2)x = 5-3y \quad \therefore x = \frac{-3y+5}{y-2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{-3x+5}{x-2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-3x+5}{x-2}$$

$$y = \frac{-3x+5}{x-2} = \frac{-3(x-2)-1}{x-2} = -\frac{1}{x-2} - 3 \text{이므로 점근선의 방정식은}$$

$$x=2, y=-3$$

따라서 함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 점 $(2, -3)$ 에 대하여 대칭이므로

$$p=2, q=-3$$

$$\therefore p-q=5$$

1129 [답] -2

$$f(x) = \frac{x+b}{x-a} \text{의 그래프가 점 } (-1, 2) \text{를 지나므로}$$

$$2 = \frac{-1+b}{-1-a} \quad \therefore 2a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $f(x)$ 의 역함수의 그래프가 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$f(x) = \frac{x+b}{x-a} \text{의 그래프는 점 } (2, -1) \text{을 지난다.}$$

$$\text{즉, } -1 = \frac{2+b}{2-a} \text{이므로 } a-b=4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=1, b=-3$$

$$\therefore a+b=-2$$

1130 [답] ④

$$(f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(9) = f^{-1}(9)$$

$$f^{-1}(9) = k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면 } f(k) = 9 \text{이므로}$$

$$\frac{2k+1}{k-3} = 9, 2k+1 = 9(k-3) \quad \therefore k=4$$

$$\therefore (f^{-1} \circ f \circ f^{-1})(9) = 4$$

1131 [답] $\frac{1}{2}$

$$(f \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(3) = (f \circ g^{-1} \circ f \circ f^{-1})(3)$$

$$= (f \circ g^{-1})(3)$$

$$= f(g^{-1}(3))$$

..... ①

$$g^{-1}(3) = k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면 } g(k) = 3 \text{이므로}$$

$$\frac{2k+1}{k} = 3, 2k+1 = 3k \quad \therefore k=1$$

$$\therefore g^{-1}(3) = 1$$

..... ②

$$\therefore (f \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(3) = f(g^{-1}(3))$$

$$= f(1) = \frac{1}{2}$$

..... ③

채점 기준

① $(f \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(3)$ 을 간단히 하기

30%

② $g^{-1}(3)$ 의 값 구하기

40%

③ $(f \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(3)$ 의 값 구하기

30%

1132 [답] ①

$$f(x) = \frac{ax-5}{2x+b} \text{의 그래프가 점 } (1, 2) \text{를 지나므로}$$

$$2 = \frac{a-5}{2+b} \quad \therefore a-2b=9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(f \circ f)(x) = x \text{에서 } f = f^{-1}$$

$$y = \frac{ax-5}{2x+b} \text{라 하면 } (2x+b)y = ax-5$$

$$(2y-a)x = -by-5 \quad \therefore x = \frac{-by-5}{2y-a}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{-bx-5}{2x-a}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-bx-5}{2x-a}$$

$f = f^{-1}$ 에서

$$\frac{ax-5}{2x+b} = \frac{-bx-5}{2x-a} \quad \therefore a = -b$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } -3b=9 \quad \therefore b=-3$$

$$\text{따라서 } a=3 \text{이므로 } ab=-9$$

1133 [답] ②

$$y = \frac{a}{x-1} \text{라 하면 } (x-1)y = a$$

$$yx = y + a \quad \therefore x = \frac{y+a}{y}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{x+a}{x}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+a}{x}$$

$$(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = f^{-1}(f^{-1}(x)) = \frac{\frac{x+a}{x} + a}{\frac{x+a}{x}}$$

$$= \frac{\frac{x+a+ax}{x}}{\frac{x+a}{x}} = \frac{(a+1)x+a}{x+a}$$

$f = f^{-1} \circ f^{-1}$ 에서

$$\frac{a}{x-1} = \frac{(a+1)x+a}{x+a}$$

$$\therefore a = -1$$

AB 유형 점검

174~176쪽

1134 [답] ④

$$\left(1 + \frac{1}{x+1}\right) \div \left(1 - \frac{4}{x^2-x-2}\right) - \frac{4}{x^2-2x-3}$$

$$= \frac{x+2}{x+1} \div \frac{x^2-x-6}{x^2-x-2} - \frac{4}{x^2-2x-3}$$

$$= \frac{x+2}{x+1} \times \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-3)} - \frac{4}{(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{x-2}{x-3} - \frac{4}{(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{(x+1)(x-2)-4}{(x+1)(x-3)} = \frac{x^2-x-6}{(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{(x+2)(x-3)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x+2}{x+1}$$

1135 [답] ③

주어진 식의 좌변을 통분하여 정리하면

$$\frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-4} = \frac{a(x-4)+b(x+2)}{(x+2)(x-4)} \\ = \frac{(a+b)x-4a+2b}{x^2-2x-8}$$

이때 $\frac{(a+b)x-4a+2b}{x^2-2x-8} = \frac{4x-10}{x^2-2x-8}$ 이 x 에 대한 항등식이므로

$$a+b=4, -4a+2b=-10$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=3, b=1$$

$$\therefore a-b=2$$

다른 풀이

주어진 식의 양변에 $(x+2)(x-4)$ 를 곱하여 정리하면

$$a(x-4)+b(x+2)=4x-10$$

$$\therefore (a+b)x-4a+2b=4x-10$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a+b=4, -4a+2b=-10$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=3, b=1$$

$$\therefore a-b=2$$

1136 [답] $f(x)=4x+6$

$$\frac{x+1}{x} - \frac{2x+3}{x+1} - \frac{x+3}{x+2} + \frac{2x+7}{x+3} \\ = \frac{x+1}{x} - \frac{2(x+1)+1}{x+1} - \frac{(x+2)+1}{x+2} + \frac{2(x+3)+1}{x+3} \\ = \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(2 + \frac{1}{x+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+2}\right) + \left(2 + \frac{1}{x+3}\right) \\ = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) - \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) \\ = \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+2)(x+3)} \\ = \frac{x^2+5x+6-(x^2+x)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} \\ = \frac{4x+6}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$\therefore f(x)=4x+6$$

1137 [답] $\frac{1}{900}$

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} \\ + \dots + \frac{1}{(x+9)(x+10)} \\ = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) \\ + \dots + \left(\frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+10}\right) \\ = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} \\ \therefore f(90) = \frac{1}{90} - \frac{1}{100} = \frac{1}{900}$$

1138 [답] ①

$$1 - \frac{4}{3 - \frac{2}{1-x}} = 1 - \frac{4}{\frac{3-3x-2}{1-x}} = 1 - \frac{4}{\frac{1-3x}{1-x}} = 1 - \frac{4-4x}{1-3x} \\ = \frac{1-3x-(4-4x)}{1-3x} = \frac{x-3}{1-3x} = \frac{-x+3}{3x-1}$$

따라서 $a=-1, b=3, c=-1$ 이므로

$$a+b+c=1$$

1139 [답] ②

$$x+y-z=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x+3y+z=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$2x+4y=0 \quad \therefore x=-2y$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-2y+y-z=0 \quad \therefore z=-y$$

$$\therefore \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx} = \frac{(-2y)^2+y^2+(-y)^2}{-2y \times y + y \times (-y) + (-y) \times (-2y)} \\ = \frac{6y^2}{-y^2} = -6$$

1140 [답] 2

$y = \frac{4x-3}{x-2} = \frac{4(x-2)+5}{x-2} = \frac{5}{x-2} + 4$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{5}{x-p-2} + 4 + q \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$y = \frac{3x-10}{x-5} = \frac{3(x-5)+5}{x-5} = \frac{5}{x-5} + 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 일치하므로

$$-p-2=-5, 4+q=3 \quad \therefore p=3, q=-1$$

$$\therefore p+q=2$$

1141 [답] -1

$$y = \frac{-2x+3}{x+1} = \frac{-2(x+1)+5}{x+1} = \frac{5}{x+1} - 2$$
이므로 주어진 함수의

그래프는 $y = \frac{5}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

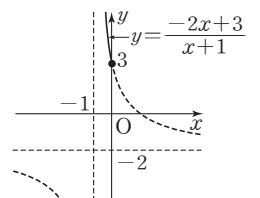
$y \geq 3$ 에서 $y = \frac{-2x+3}{x+1}$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같으므로 정의역은

$$\{x | -1 < x \leq 0\}$$

따라서 $a=-1, \beta=0$ 이므로

$$a+\beta=-1$$

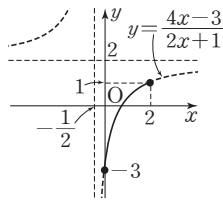


1142 [답] -2

$$y = \frac{4x-3}{2x+1} = \frac{2(2x+1)-5}{2x+1} = -\frac{5}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} + 2$$
이므로 주어진 함수

의 그래프는 $y = -\frac{5}{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $y = \frac{4x-3}{2x+1}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=2$ 일 때 최댓값 1, $x=0$ 일 때 최솟값 -3 을 갖는다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은
 $1 + (-3) = -2$



1143 답 ④

$$y = \frac{k}{x-2} + 1 \text{에 } y=0 \text{을 대입하면 } 0 = \frac{k}{x-2} + 1$$

$$-(x-2) = k \quad \therefore x = -k+2 \quad \therefore A(-k+2, 0)$$

$$y = \frac{k}{x-2} + 1 \text{에 } x=0 \text{을 대입하면 } y = -\frac{k}{2} + 1$$

$$\therefore B\left(0, -\frac{k}{2} + 1\right)$$

$$y = \frac{k}{x-2} + 1 \text{의 그래프의 점근선의 방정식은 } x=2, y=1$$

$$\therefore C(2, 1)$$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{1-0}{2-(-k+2)} = \frac{1-\left(-\frac{k}{2}+1\right)}{2-0}$$

$$k^2=4 \quad \therefore k=-2 (\because k<0)$$

1144 답 ①

$$y = \frac{4x-5}{x-2} = \frac{4(x-2)+3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 4 \text{이므로 점근선의 방정식은}$$

$$x=2, y=4$$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 (2, 4)에 대하여 대칭이고, 이 점은 직선 $x+y+k=0$ 위의 점이므로

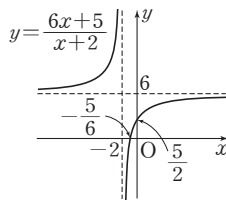
$$2+4+k=0 \quad \therefore k=-6$$

1145 답 ④

$$y = \frac{6x+5}{x+2} = \frac{6(x+2)-7}{x+2} = -\frac{7}{x+2} + 6 \text{이므로 주어진 함수의 그}$$

래프는 $y = -\frac{7}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 6 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y = \frac{6x+5}{x+2}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프가 지나지 않는 사분면은 제4사분면이다.



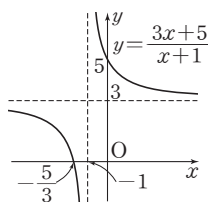
1146 답 ⑤

$$y = \frac{3x+5}{x+1} = \frac{3(x+1)+2}{x+1} = \frac{2}{x+1} + 3 \text{이}$$

$$\text{므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.}$$

③ 두 점근선의 교점의 좌표가 $(-1, 3)$ 이므로 그래프는 점 $(-1, 3)$ 을 지나고 기울기가 각각 1, -1 인 두 직선

$$y = (x+1) + 3, y = -(x+1) + 3, \text{ 즉 } y = x+4, y = -x+2 \text{에 대하여 대칭이다.}$$



⑤ $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

1147 답 -4

점근선의 방정식이 $x=2, y=-1$ 이므로 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x-2} - 1 (k<0) \text{이라 하자.}$$

이 함수의 그래프가 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{k}{-1-2} - 1 \quad \therefore k = -3$$

$$\text{따라서 } y = \frac{-3}{x-2} - 1 = \frac{-(x-2)-3}{x-2} = \frac{-x-1}{x-2} \text{이므로}$$

$$a = -1, b = -1, c = -2$$

$$\therefore a+b+c = -4$$

1148 답 ④

$$y = \frac{-2x+5}{x-2} = \frac{-2(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} - 2$$

따라서 $y = \frac{-2x+5}{x-2}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y = mx-2$ 는 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(0, -2)$ 를 지난다.

(i) $m=0$ 일 때

직선 $y = -2$ 는 점근선이므로 두 그래프는 만나지 않는다.

(ii) $m \neq 0$ 일 때

$$\frac{-2x+5}{x-2} = mx-2 \text{에서}$$

$$-2x+5 = (mx-2)(x-2)$$

$$\therefore mx^2 - 2mx - 1 = 0$$

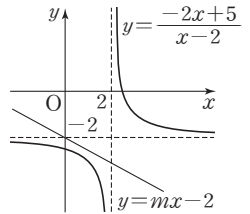
이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, $y = \frac{-2x+5}{x-2}$ 의 그래프와

직선 $y = mx-2$ 가 만나지 않으려면

$$\frac{D}{4} = m^2 + m < 0, m(m+1) < 0$$

$$\therefore -1 < m < 0$$

(i), (ii)에서 $-1 < m \leq 0$



1149 답 ③

점 P의 좌표를 $\left(k, \frac{2}{k-1} + 2\right) (k>1)$ 라 하면

$$\overline{PR} = k-1, \overline{PQ} = \frac{2}{k-1} + 2 - 2 = \frac{2}{k-1}$$

사각형 PRSQ는 직사각형이므로 그 둘레의 길이는

$$2\left(k-1 + \frac{2}{k-1}\right)$$

이때 $k-1 > 0, \frac{2}{k-1} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$k-1 + \frac{2}{k-1} \geq 2\sqrt{(k-1) \times \frac{2}{k-1}} = 2\sqrt{2}$$

(단, 등호는 $k-1 = \frac{2}{k-1}$, 즉 $k = \sqrt{2} + 1$ 일 때 성립)

따라서 사각형 PRSQ의 둘레의 길이의 최솟값은

$$2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

1150 **답** $-\frac{1}{2}$

$$(g^{-1} \circ f)(-4) = g^{-1}(f(-4)) = g^{-1}(-2)$$

$$g^{-1}(-2) = k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면 } g(k) = -2 \text{이므로}$$

$$\frac{2k+4}{k-1} = -2, 2k+4 = -2(k-1)$$

$$\therefore k = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore (g^{-1} \circ f)(-4) = g^{-1}(-2) = -\frac{1}{2}$$

1151 **답** $\frac{2}{3}$

$$(a+b):(b+c):(c+a)=5:6:7 \text{이므로}$$

$$a+b=5k, b+c=6k, c+a=7k \text{ (} k \neq 0 \text{)} \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉠}} \quad \dots\dots \textcircled{\text{i}}$$

로 놓고 세 식을 변끼리 더하면

$$2(a+b+c)=18k$$

$$\therefore a+b+c=9k \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉡}} \quad \dots\dots \textcircled{\text{ii}}$$

$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 에서 $a=3k, b=2k, c=4k$ $\dots\dots \textcircled{\text{iii}}$

$$\therefore \frac{ab}{a^2+2bc-c^2} = \frac{3k \times 2k}{(3k)^2+2 \times 2k \times 4k - (4k)^2}$$

$$= \frac{6k^2}{9k^2} = \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{\text{iv}}$$

채점 기준

㉠ $a+b, b+c, c+a$ 를 k 에 대한 식으로 나타내기	20 %
㉡ $a+b+c$ 를 k 에 대한 식으로 나타내기	20 %
iii a, b, c 를 k 에 대한 식으로 나타내기	20 %
iv $\frac{ab}{a^2+2bc-c^2}$ 의 값 구하기	40 %

1152 **답** $-\frac{3}{2}$

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= -\frac{1}{-\frac{1}{x+1}+1} = -\frac{1}{\frac{-1+x+1}{x+1}}$$

$$= -\frac{x+1}{x}$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$$

$$= -\frac{1}{-\frac{x+1}{x}+1} = \frac{-1}{\frac{-x-1+x}{x}}$$

$$= x$$

$$f^4(x) = (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x)) = f(x) = -\frac{1}{x+1}$$

$$\vdots \quad \dots\dots \textcircled{\text{i}}$$

따라서 $f^3(x) = f^6(x) = f^9(x) = \dots = f^{3n}(x) = x$ (n 은 자연수)이므로

$$f^{50}(x) = f^{3 \times 16 + 2}(x) = f^2(x) = -\frac{x+1}{x} \quad \dots\dots \textcircled{\text{ii}}$$

$$\therefore f^{50}(2) = -\frac{2+1}{2} = -\frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{\text{iii}}$$

채점 기준

㉠ $f^2(x), f^3(x), f^4(x), \dots$ 구하기	40 %
㉡ $f^{50}(x)$ 구하기	40 %
iii $f^{50}(2)$ 의 값 구하기	20 %

1153 **답** 12

$$y = -\frac{k}{x-1} + 3 \text{이라 하면 } (x-1)(y-3) = -k$$

$$(y-3)x = y - k - 3$$

$$\therefore x = \frac{y-k-3}{y-3}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{x-k-3}{x-3}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x-k-3}{x-3} \quad \dots\dots \textcircled{\text{i}}$$

$$\text{따라서 } \frac{x-k-3}{x-3} = \frac{ax+1}{x+b} \text{이므로}$$

$$a=1, b=-3, k=-4$$

$$\therefore abk = 12 \quad \dots\dots \textcircled{\text{ii}}$$

채점 기준

㉠ $f^{-1}(x)$ 구하기	60 %
㉡ abk 의 값 구하기	40 %

C 실력 향상

177쪽

1154 **답** 16

$$y = \frac{4x+7}{x+5} = \frac{4(x+5)-13}{x+5} = -\frac{13}{x+5} + 4 \text{이므로 점근선의 방정식은}$$

$$x = -5, y = 4$$

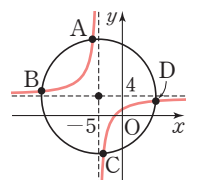
즉, 오른쪽 그림과 같이 함수 $y = \frac{4x+7}{x+5}$ 의 그래프가 중심이 점 $(-5, 4)$ 인 원과 만나는 네 점을 각각 A, B, C, D라 하면 두 점근선의 교점과 원의 중심이 일치하므로 두 점 A, C와 두 점 B, D는 각각 점 $(-5, 4)$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $\overline{AC}, \overline{BD}$ 의 중점이 모두 점 $(-5, 4)$ 이므로 네 점 A, B, C, D의 y 좌표를 각각 y_1, y_2, y_3, y_4 라 하면

$$\frac{y_1+y_3}{2} = 4, \frac{y_2+y_4}{2} = 4$$

$$\therefore y_1+y_3 = 8, y_2+y_4 = 8$$

$$\therefore y_1+y_2+y_3+y_4 = 16$$



1155 **답** ③

두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 a, b ($0 < a < b$)라 하면

$$P\left(a, \frac{k}{a}\right), Q\left(b, \frac{k}{b}\right)$$

두 점 P, Q는 함수 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프와 직선 $y = -x+8$ 의 교점이므로

$$\frac{k}{x} = -x+8 \text{에서 } x^2-8x+k=0$$

이 이차방정식의 두 근이 a, b 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+b=8 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$ab=k \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{PQ} &= \sqrt{(b-a)^2 + \left(\frac{k}{b} - \frac{k}{a}\right)^2} \\ &= \sqrt{(b-a)^2 + \left\{\frac{k(a-b)}{ab}\right\}^2} \\ &= \sqrt{(b-a)^2 + (a-b)^2} \quad (\because \text{㉔}) \\ &= \sqrt{2(b-a)^2} \\ &= \sqrt{2}(b-a) \quad (\because b-a > 0)\end{aligned}$$

원점과 직선 $y = -x + 8$, 즉 $x + y - 8 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-8|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 4\sqrt{2}$$

이때 삼각형 POQ의 넓이가 16이므로

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{2}(b-a) \times 4\sqrt{2} = 16$$

$$\therefore b-a=4 \quad \dots\dots \text{㉕}$$

㉑, ㉕을 연립하여 풀면 $a=2, b=6$

㉔에서 $k=ab=12$

다른 풀이

직선 $y = -x + 8$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하면

$$A(8, 0), B(0, 8)$$

함수 $y = \frac{k}{x}$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이고, 직선 $y = -x + 8$ 은 직선 $y = x$ 에 수직이므로 두 점 P, Q는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 두 삼각형 OAQ, OPB의 넓이는 서로 같다.

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32, \triangle OQP = 16 \text{이므로}$$

$$\triangle OAQ = \frac{1}{2}(\triangle OAB - \triangle OQP) = \frac{1}{2} \times (32 - 16) = 8$$

이때 $Q(a, b)$ ($a > 0$)라 하면

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times b = 8, \frac{1}{2} \times 8 \times b = 8 \quad \therefore b = 2$$

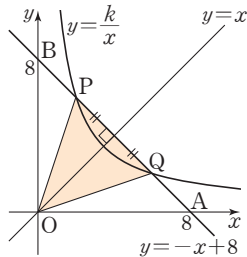
점 $Q(a, 2)$ 는 직선 $y = -x + 8$ 위의 점이므로

$$2 = -a + 8 \quad \therefore a = 6$$

$$\therefore Q(6, 2)$$

점 Q가 곡선 $y = \frac{k}{x}$ 위의 점이므로

$$2 = \frac{k}{6} \quad \therefore k = 12$$



1156 답 9

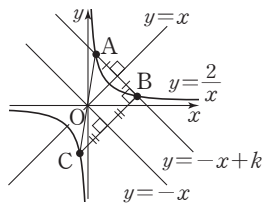
함수 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이고, 직선 $y = -x + k$ 는 직선 $y = x$ 에 수직이므로 두 점 A, B는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

또 함수 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프는 직선

$y = -x$ 에 대하여 대칭이고, $\angle ABC = 90^\circ$ 이므로 두 점 B, C는 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $A\left(a, \frac{2}{a}\right)$ ($a \neq \sqrt{2}$)라 하면

$$B\left(\frac{2}{a}, a\right), C\left(-a, -\frac{2}{a}\right)$$



점 A는 직선 $y = -x + k$ 위의 점이므로

$$\frac{2}{a} = -a + k \quad \therefore k = a + \frac{2}{a}$$

$\overline{AC} = 2\sqrt{5}$ 에서

$$\sqrt{(-a-a)^2 + \left(-\frac{2}{a} - \frac{2}{a}\right)^2} = 2\sqrt{5}$$

양변을 제곱하면

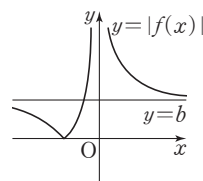
$$4a^2 + \frac{16}{a^2} = 20 \quad \therefore a^2 + \frac{4}{a^2} = 5$$

$$\therefore k^2 = \left(a + \frac{2}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{4}{a^2} + 4 = 5 + 4 = 9$$

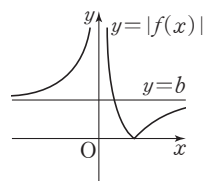
1157 답 ①

함수 $f(x) = \frac{a}{x} + b$ ($a \neq 0$)에 대하여 곡선 $y = |f(x)|$ 의 개형은 a, b 의 부호에 따라 다음과 같다.

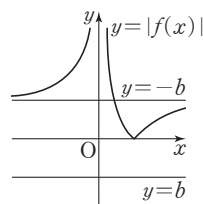
(i) $a > 0, b > 0$ 일 때



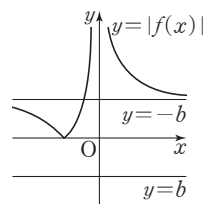
(ii) $a < 0, b > 0$ 일 때



(iii) $a > 0, b < 0$ 일 때



(iv) $a < 0, b < 0$ 일 때



(i), (ii)일 때 곡선 $y = |f(x)|$ 는 점근선 $y = b$ 와 한 점에서만 만나고,

(iii), (iv)일 때 곡선 $y = |f(x)|$ 는 직선 $y = -b$ 와 한 점에서만 만난다.

따라서 (가)에서 $b = -2$ 또는 $b = 2$

그런데 $b = 2$ 이면 점근선의 방정식이 $y = 2$ 이므로 $f^{-1}(2)$ 의 값이 존재하지 않는다.

따라서 (나)를 만족시키려면 $b = -2$

$$\therefore f(x) = \frac{a}{x} - 2$$

$f^{-1}(2) = k$ (k 는 상수)라 하면 $f(k) = 2$ 이므로

$$\frac{a}{k} - 2 = 2 \quad \therefore a = 4k \quad \dots\dots \text{㉑}$$

$$\text{(나)에서 } k = \frac{a}{2} - 2 - 1$$

㉑을 대입하면

$$k = 2k - 3 \quad \therefore k = 3$$

이를 ㉑에 대입하면 $a = 12$

$$\therefore f(x) = \frac{12}{x} - 2$$

$$\therefore f(8) = \frac{12}{8} - 2 = -\frac{1}{2}$$

만렙 Note

함수 $f(x)$ 에 대하여 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 다음과 같이 그린다.

(1) $f(x) \geq 0$ 인 부분 $\Rightarrow y = f(x)$ 의 그래프를 그린다.

(2) $f(x) < 0$ 인 부분 $\Rightarrow y = f(x)$ ($y < 0$)의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하여 그린다.

10 / 무리함수

A 개념 확인

178~181쪽

1158 **답** $x \geq 2$

$$x-2 \geq 0 \text{에서 } x \geq 2$$

1159 **답** $x \geq 3$

$$x+1 \geq 0 \text{에서 } x \geq -1$$

$$2x-6 \geq 0 \text{에서 } x \geq 3$$

$$\therefore x \geq 3$$

1160 **답** $5 \leq x < 7$

$$x-5 \geq 0 \text{에서 } x \geq 5$$

$$7-x > 0 \text{에서 } x < 7$$

$$\therefore 5 \leq x < 7$$

1161 **답** $1 < x \leq 3$

$$3-x \geq 0 \text{에서 } x \leq 3$$

$$x-1 > 0 \text{에서 } x > 1$$

$$\therefore 1 < x \leq 3$$

1162 **답** $-2a+2b$

$$b-a > 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + \sqrt{(b-a)^2} &= |a| + |b| + |b-a| \\ &= -a + b + b - a \\ &= -2a + 2b \end{aligned}$$

1163 **답** $2x-2$

$$-2 < x < 4 \text{에서 } x+2 > 0, x-4 < 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+2)^2} - \sqrt{(x-4)^2} &= |x+2| - |x-4| \\ &= (x+2) + (x-4) \\ &= 2x-2 \end{aligned}$$

1164 **답** $x-1$

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+3}+2)(\sqrt{x+3}-2) &= (\sqrt{x+3})^2 - 2^2 \\ &= (x+3) - 4 \\ &= x-1 \end{aligned}$$

1165 **답** 1

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}) &= (\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2 \\ &= (x+1) - x \\ &= 1 \end{aligned}$$

1166 **답** 4

$$\begin{aligned} &(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}) \\ &= (\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x-2})^2 \\ &= (x+2) - (x-2) \\ &= 4 \end{aligned}$$

1167 **답** $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}{3}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}} &= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2})} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}{x+1-(x-2)} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}}{3} \end{aligned}$$

1168 **답** $x+\sqrt{x^2-3}$

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-\sqrt{x^2-3}} &= \frac{3(x+\sqrt{x^2-3})}{(x-\sqrt{x^2-3})(x+\sqrt{x^2-3})} \\ &= \frac{3(x+\sqrt{x^2-3})}{x^2-(x^2-3)} \\ &= x+\sqrt{x^2-3} \end{aligned}$$

1169 **답** $\sqrt{4x^2+2x}-2x$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x}} &= \frac{\sqrt{2x}(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x})}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x})(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x})} \\ &= \frac{\sqrt{2x}\sqrt{2x+1}-2x}{2x+1-2x} \\ &= \sqrt{4x^2+2x}-2x \end{aligned}$$

1170 **답** $x+\sqrt{x^2-1}$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} &= \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})} \\ &= \frac{x+1+2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}+x-1}{x+1-(x-1)} \\ &= \frac{2x+2\sqrt{x^2-1}}{2} \\ &= x+\sqrt{x^2-1} \end{aligned}$$

1171 **답** $\frac{12}{4-x}$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2+\sqrt{x}} + \frac{3}{2-\sqrt{x}} &= \frac{3(2-\sqrt{x})+3(2+\sqrt{x})}{(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})} \\ &= \frac{6-3\sqrt{x}+6+3\sqrt{x}}{4-x} \\ &= \frac{12}{4-x} \end{aligned}$$

1172 **답** $\frac{2}{3-x}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\sqrt{x-2}} + \frac{1}{1+\sqrt{x-2}} &= \frac{1+\sqrt{x-2}+1-\sqrt{x-2}}{(1-\sqrt{x-2})(1+\sqrt{x-2})} \\ &= \frac{2}{1-(x-2)} \\ &= \frac{2}{3-x} \end{aligned}$$

1173 답 $\frac{2\sqrt{x-y}}{y}$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-y}} - \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-y}-(\sqrt{x}-\sqrt{x-y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-y})(\sqrt{x}+\sqrt{x-y})}$$

$$= \frac{2\sqrt{x-y}}{x-(x-y)}$$

$$= \frac{2\sqrt{x-y}}{y}$$

1174 답 $\frac{2x}{x-1}$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x-1}$$

$$= \frac{2x}{x-1}$$

1175 답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}} = \frac{(\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x})^2}{(\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x})(\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x})}$$

$$= \frac{2-x-2\sqrt{4-x^2}+2+x}{2-x-(2+x)}$$

$$= \frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}$$

이 식에 $x=\sqrt{3}$ 을 대입하면

$$\frac{\sqrt{4-3}-2}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

1176 답 $\sqrt{2}$

$$\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = \frac{2}{1-x}$$

이 식에 $x=1-\sqrt{2}$ 를 대입하면

$$\frac{2}{1-(1-\sqrt{2})} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

1177 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅅ

ㄱ. 다항함수

ㄴ. $y=\sqrt{(x-1)^2}$, 즉 $y=|x-1|$ 은 무리함수가 아니다.

따라서 보기에서 무리함수인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅅ이다.

1178 답 $\left\{x \mid x \geq \frac{1}{4}\right\}$

$$4x-1 \geq 0 \text{에서 } x \geq \frac{1}{4}$$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$$\left\{x \mid x \geq \frac{1}{4}\right\}$$

1179 답 $\{x \mid x \leq 5\}$

$$5-x \geq 0 \text{에서 } x \leq 5$$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$$\{x \mid x \leq 5\}$$

1180 답 $\{x \mid x \geq 2\}$

$$3x-6 \geq 0 \text{에서 } x \geq 2$$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$$\{x \mid x \geq 2\}$$

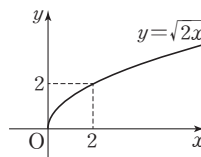
1181 답 $\{x \mid x \leq 3\}$

$$9-3x \geq 0 \text{에서 } x \leq 3$$

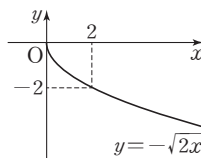
따라서 주어진 함수의 정의역은

$$\{x \mid x \leq 3\}$$

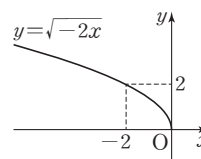
1182 답 정의역: $\{x \mid x \geq 0\}$
치역: $\{y \mid y \geq 0\}$



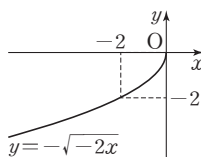
1183 답 정의역: $\{x \mid x \geq 0\}$
치역: $\{y \mid y \leq 0\}$



1184 답 정의역: $\{x \mid x \leq 0\}$
치역: $\{y \mid y \geq 0\}$



1185 답 정의역: $\{x \mid x \leq 0\}$
치역: $\{y \mid y \leq 0\}$



1186 답 $y = -\sqrt{3x}$

1187 답 $y = \sqrt{-3x}$

1188 답 $y = -\sqrt{-3x}$

1189 답 $y = \sqrt{-x+1}+2$

$$y = \sqrt{-(x-1)}+2 = \sqrt{-x+1}+2$$

1190 답 $y = -\sqrt{5x-1}-3$

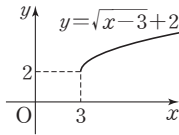
$$y = -\sqrt{5\left(x-\frac{1}{5}\right)}-3 = -\sqrt{5x-1}-3$$

1191 답 $y = \sqrt{2(x+2)}+3$

1192 답 $y = -\sqrt{-3\left(x-\frac{7}{3}\right)}-2$

1193 [답 풀이 참조]

$y = \sqrt{x-3} + 2$ 의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

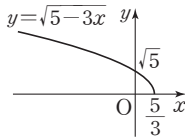


$\therefore$ 정의역: $\{x | x \geq 3\}$, 치역: $\{y | y \geq 2\}$

1194 [답 풀이 참조]

$$y = \sqrt{5-3x} = \sqrt{-3\left(x-\frac{5}{3}\right)}$$

따라서 $y = \sqrt{5-3x}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{5}{3}$ 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



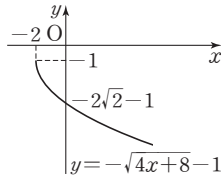
$\therefore$ 정의역: $\left\{x \mid x \leq \frac{5}{3}\right\}$, 치역: $\{y | y \geq 0\}$

1195 [답 풀이 참조]

$$y = -\sqrt{4x+8} - 1 = -\sqrt{4(x+2)} - 1$$

따라서 $y = -\sqrt{4x+8} - 1$ 의 그래프는

$y = -\sqrt{4x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x | x \geq -2\}$,

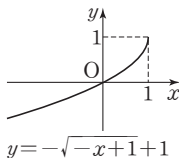
치역: $\{y | y \leq -1\}$

1196 [답 풀이 참조]

$$y = -\sqrt{-x+1} + 1 = -\sqrt{-(x-1)} + 1$$

따라서 $y = -\sqrt{-x+1} + 1$ 의 그래프는

$y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x | x \leq 1\}$, 치역: $\{y | y \leq 1\}$

B 유형 완성

182~190쪽

1197 [답 0 ≤ x < 5]

$$\sqrt{x} \text{에서 } x \geq 0$$

$$10-2x > 0 \text{에서 } x < 5$$

$$x+3 \geq 0 \text{에서 } x \geq -3$$

$$\therefore 0 \leq x < 5$$

1198 [답 ⑤]

$$-2x^2 + 11x - 14 \geq 0 \text{에서}$$

$$2x^2 - 11x + 14 \leq 0$$

$$(x-2)(2x-7) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq x \leq \frac{7}{2}$$

1199 [답 ③]

$$11-2x \geq 0 \text{에서 } x \leq \frac{11}{2}$$

그런데 $x-3 \neq 0$ 에서 $x \neq 3$ 이므로 자연수 x 는 1, 2, 4, 5이다.

따라서 구하는 합은

$$1+2+4+5=12$$

1200 [답 ②]

$$x+1 \geq 0 \text{에서 } x \geq -1$$

$$3-2x \geq 0 \text{에서 } x \leq \frac{3}{2}$$

$$\therefore -1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

따라서 $-3 \leq x-2 \leq -\frac{1}{2} < 0$ 이므로

$$\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-2)^2}$$

$$= |x-2|$$

$$= -x+2$$

1201 [답 ⑤]

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}} + \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}} \\ &= \frac{(\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x})^2 + (\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x})^2}{(\sqrt{3+x} - \sqrt{3-x})(\sqrt{3+x} + \sqrt{3-x})} \\ &= \frac{(6+2\sqrt{9-x^2}) + (6-2\sqrt{9-x^2})}{3+x-(3-x)} \\ &= \frac{12}{2x} = \frac{6}{x} \end{aligned}$$

1202 [답 ④]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} - \frac{1}{1-\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{1-\sqrt{x+1}-(1+\sqrt{x+1})}{(1+\sqrt{x+1})(1-\sqrt{x+1})} \\ &= \frac{-2\sqrt{x+1}}{1-(x+1)} \\ &= \frac{2\sqrt{x+1}}{x} \end{aligned}$$

1203 [답 ②]

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1} \\ &= \frac{4\{\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)\}}{\{\sqrt{3}-(\sqrt{2}-1)\}\{\sqrt{3}+(\sqrt{2}-1)\}} \\ &= \frac{4(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{3-(\sqrt{2}-1)^2} \\ &= \frac{4(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{6}-\sqrt{2}+2 \end{aligned}$$

따라서 $a=6$, $b=2$, $c=2$ 이므로

$$a+b+c=10$$

1204 **답** $\sqrt{2}-1$

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}} &= \frac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})^2}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1})(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1})} \\ &= \frac{2x+1-2\sqrt{4x^2-1}+2x-1}{2x+1-(2x-1)} \\ &= 2x-\sqrt{4x^2-1} \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{4 \times \frac{1}{2} - 1} \\ &= \sqrt{2}-1\end{aligned}$$

1205 **답** ③

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \\ &= \frac{5+2\sqrt{6}}{3-2} = 5+2\sqrt{6} \\ \therefore \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} &= \frac{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x+1+2\sqrt{x}+x+1-2\sqrt{x}}{x-1} \\ &= \frac{2(x+1)}{x-1} = \frac{2(5+2\sqrt{6}+1)}{5+2\sqrt{6}-1} \\ &= \frac{6+2\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{6}+2)}{\sqrt{6}+2} \\ &= \sqrt{6}\end{aligned}$$

1206 **답** $3-\sqrt{6}$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})} \\ &\quad + \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})} \\ &\quad + \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x} + \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{x+2-(x+1)} + \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}}{x+3-(x+2)} \\ &= (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) + (\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}) + (\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}) \\ &= \sqrt{x+3}-\sqrt{x} \\ &= \sqrt{6+3}-\sqrt{6} \\ &= 3-\sqrt{6}\end{aligned}$$

1207 **답** ①

$$\begin{aligned}&\sqrt{6-x}=2 \text{의 양변을 제곱하면} \\ 6-x &= 4 \quad \therefore x=2 \\ \therefore \frac{1}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)} = 1\end{aligned}$$

1208 **답** $\sqrt{21}-1$

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x} \\ &= \sqrt{x+1}-\sqrt{x} \quad \dots\dots \text{①} \\ \therefore f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(20) &= (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{21}-\sqrt{20}) \\ &= \sqrt{21}-1 \quad \dots\dots \text{②}\end{aligned}$$

채점 기준

① $f(x)$ 의 분모를 유리화하기	50 %
② $f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(20)$ 의 값 구하기	50 %

1209 **답** ④

$$\begin{aligned}x+y &= 2\sqrt{5}, \quad xy=2 \text{이므로} \\ \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} &= \frac{x+y}{\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}\end{aligned}$$

1210 **답** ②

$$\begin{aligned}x &= \frac{2}{\sqrt{2}+1} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = 2\sqrt{2}-2 \\ y &= \frac{2}{\sqrt{2}-1} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 2\sqrt{2}+2 \\ \text{따라서 } x+y &= 4\sqrt{2}, \quad x-y = -4 \text{이므로} \\ x^3+x^2y-xy^2-y^3 &= x^2(x+y) - y^2(x+y) \\ &= (x^2-y^2)(x+y) \\ &= (x+y)^2(x-y) \\ &= (4\sqrt{2})^2 \times (-4) \\ &= -128\end{aligned}$$

1211 **답** $2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = 5+2\sqrt{6} \\ y &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = 5-2\sqrt{6} \quad \dots\dots \text{①} \\ \therefore x+y &= 10, \quad xy=1 \quad \dots\dots \text{②} \\ \therefore (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 &= x+y-2\sqrt{xy} \\ &= 10-2 \times 1 \\ &= 8 \\ \text{이때 } x > y > 0 \text{에서 } \sqrt{x} > \sqrt{y} \text{이므로} \\ \sqrt{x}-\sqrt{y} &> 0 \\ \therefore \sqrt{x}-\sqrt{y} &= 2\sqrt{2} \quad \dots\dots \text{③}\end{aligned}$$

채점 기준

① x, y 의 분모를 유리화하기	40 %
② $x+y, xy$ 의 값 구하기	20 %
③ $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 의 값 구하기	40 %

1212 답 -1

$y = \sqrt{-2x+10} - 4 = \sqrt{-2(x-5)} - 4$ 이므로 $y = \sqrt{-2x+10} - 4$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a = -2$, $p = 5$, $q = -4$ 이므로

$$a + p + q = -1$$

1213 답 ②

$y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{a(x-1)} - 2$$

이 그래프가 원점을 지나므로

$$0 = \sqrt{-a} - 2$$

$$\sqrt{-a} = 2, -a = 4$$

$$\therefore a = -4$$

1214 답 ②

ㄱ. $y = \sqrt{x}$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄴ. $y = \sqrt{-x-2} = \sqrt{-(x+2)}$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 보기에서 그 그래프가 함수 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 함수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

1215 답 $(\frac{8}{3}, 0)$

$y = -\sqrt{3x+2}$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{3x+2}$$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{3(x-3)} + 2 - 1$$

$$\therefore y = \sqrt{3x-7} - 1$$

이 식에 $y = 0$ 을 대입하면

$$0 = \sqrt{3x-7} - 1, \sqrt{3x-7} = 1$$

양변을 제곱하면

$$3x - 7 = 1 \quad \therefore x = \frac{8}{3}$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(\frac{8}{3}, 0)$ 이다.

1216 답 13

$5x + a \geq 0$ 에서 $x \geq -\frac{a}{5}$ 이므로 정의역은

$$\{x \mid x \geq -\frac{a}{5}\}$$

$$\text{즉, } -\frac{a}{5} = 2 \text{이므로 } a = -10$$

또 치역은 $\{y \mid y \leq 3\}$ 이므로 $b = 3$

$$\therefore b - a = 13$$

1217 답 ④

$3x - a \geq 0$ 에서 $x \geq \frac{a}{3}$ 이므로 정의역은

$$\{x \mid x \geq \frac{a}{3}\}$$

$$\text{즉, } \frac{a}{3} = 2 \text{이므로 } a = 6$$

또 치역은 $\{y \mid y \geq b\}$ 이므로 $b = 1$

따라서 함수 $y = \sqrt{3x-6} + 1$ 의 그래프가 점 $(5, p)$ 를 지나므로

$$p = \sqrt{3 \times 5 - 6} + 1 = 4$$

$$\therefore a - b + p = 9$$

1218 답 ①

$y = -\sqrt{x-a} + a + 2$ 의 그래프가 점 $(a, -a)$ 를 지나므로

$$-a = a + 2 \quad \therefore a = -1$$

$$\therefore y = -\sqrt{x+1} + 1$$

따라서 구하는 함수의 치역은

$$\{y \mid y \leq 1\}$$

1219 답 정의역: $\{x \mid x \leq 1\}$, 치역: $\{y \mid y \geq -2\}$

$y = \frac{3x+10}{x+3} = \frac{3(x+3)+1}{x+3} = \frac{1}{x+3} + 3$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -3, y = 3$$

$$\therefore a = -3, b = 3$$

..... ①

즉, $f(x) = \sqrt{-3x+3} + c$ 이므로 $f(1) = -2$ 에서

$$c = -2$$

$$\therefore f(x) = \sqrt{-3x+3} - 2$$

..... ②

이때 $-3x+3 \geq 0$ 에서 $x \leq 1$ 이므로 정의역은 $\{x \mid x \leq 1\}$, 치역은

$\{y \mid y \geq -2\}$ 이다.

..... ③

채점 기준

① a, b 의 값 구하기	40 %
② $f(x)$ 구하기	30 %
③ $f(x)$ 의 정의역과 치역 구하기	30 %

1220 답 ⑤

$y = \sqrt{2x+k} + 3 = \sqrt{2(x+\frac{k}{2})} + 3$ 이므로 주어진 함수의 그래프는

$y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{k}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$3 \leq x \leq 15$ 에서 $y = \sqrt{2x+k} + 3$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x = 15$ 일 때 최댓값 $\sqrt{30+k} + 3$ 을 갖는다.

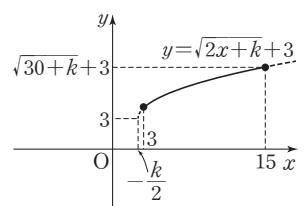
$$\text{즉, } \sqrt{30+k} + 3 = 8 \text{이므로}$$

$$\sqrt{30+k} = 5$$

양변을 제곱하면

$$30 + k = 25 \quad \therefore k = -5$$

따라서 $y = \sqrt{2x-5} + 3$ 은 $x = 3$ 일 때 최솟값 4를 갖는다.

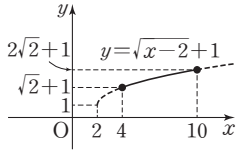


1221 답 ④

$y = \sqrt{x-2} + 1$ 의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$4 \leq x \leq 10$ 에서 $y = \sqrt{x-2} + 1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=10$ 일 때 최댓값 $2\sqrt{2} + 1$, $x=4$ 일 때 최솟값 $\sqrt{2} + 1$ 을 갖는다.

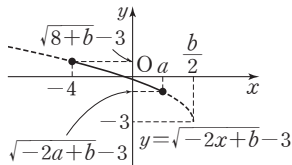
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + 1 = 3\sqrt{2} + 2$



1222 답 ①

$y = \sqrt{-2x+b-3} = \sqrt{-2(x-\frac{b}{2})-3}$ 이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{b}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

$-4 \leq x \leq a$ 에서 $y = \sqrt{-2x+b-3}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-4$ 일 때 최댓값 $\sqrt{8+b-3}$, $x=a$ 일 때 최솟값 $\sqrt{-2a+b-3}$ 을 갖는다.



따라서 $\sqrt{8+b-3}=1$, $\sqrt{-2a+b-3}=-1$ 이므로

$$\sqrt{8+b}=4, \sqrt{-2a+b}=2$$

각각의 양변을 제곱하면

$$8+b=16, -2a+b=4$$

$$\therefore a=2, b=8$$

$$\therefore a-b=-6$$

1223 답 4

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= -\sqrt{2(x-2)} - 6 + a$$

$$= -\sqrt{2(x-5)} + a \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

따라서 $y = (f \circ g)(x)$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

$7 \leq x \leq 13$ 에서 $y = (f \circ g)(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=7$ 일 때 최댓값 $-2+a$ 를 갖는다.

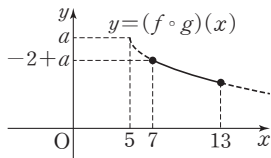
즉, $-2+a=6$ 이므로

$$a=8 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 $y = -\sqrt{2(x-5)} + 8$ 은 $x=13$ 일 때 최솟값 4를 가지므로

$$b=4 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

$$\therefore a-b=4 \quad \dots\dots \textcircled{iv}$$



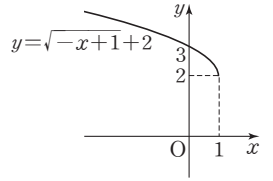
채점 기준

① $(f \circ g)(x)$ 구하기	20%
② a 의 값 구하기	30%
③ b 의 값 구하기	30%
④ $a-b$ 의 값 구하기	20%

1224 답 ⑤

$y = \sqrt{-x+1} + 2 = \sqrt{-(x-1)} + 2$ 이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y = \sqrt{-x+1} + 2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제3, 4사분면을 지나지 않는다.

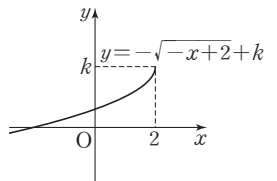


1225 답 2

$y = -\sqrt{-x+2} + k = -\sqrt{-(x-2)} + k$ 이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

$y = -\sqrt{-x+2} + k$ 의 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$ 일 때 $y \geq 0$ 이어야 하므로 $-\sqrt{2} + k \geq 0 \quad \therefore k \geq \sqrt{2}$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 2이다.



1226 답 제1, 4사분면

주어진 유리함수의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=4$ 이므로

함수의 식을 $y = \frac{k}{x-2} + 4$ ($k > 0$)라 하자.

이 함수의 그래프가 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \frac{k}{0-2} + 4 \quad \therefore k=4$$

$$\therefore y = \frac{4}{x-2} + 4 = \frac{4(x-2)+4}{x-2} = \frac{4x-4}{x-2}$$

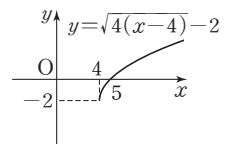
이 식이 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 와 일치하므로

$$a=4, b=-4, c=-2$$

$$\therefore y = \sqrt{a(x+b)} + c = \sqrt{4(x-4)} - 2$$

이 함수의 그래프는 $y = \sqrt{4x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y = \sqrt{4(x-4)} - 2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 4사분면을 지난다.



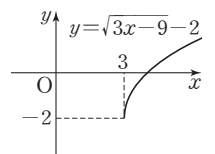
1227 답 ⑤

$y = \sqrt{3x-9} - 2 = \sqrt{3(x-3)} - 2$ 이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. 정의역은 $\{x|x \geq 3\}$, 치역은 $\{y|y \geq -2\}$ 이다.

ㄴ. 제2사분면을 지나지 않는다.

ㄷ. $y = \sqrt{3x-9} - 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 후 x 축에 대하여 대칭이동하면 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프와 겹쳐진다.

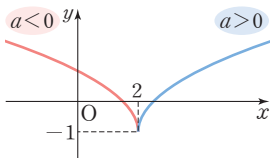


$\therefore y = \sqrt{3x-9} - 2$ 에 $y=0$ 을 대입하면
 $0 = \sqrt{3x-9} - 2, \sqrt{3x-9} = 2$
 양변을 제곱하면
 $3x-9=4 \quad \therefore x = \frac{13}{3}$

즉, x 축과 점 $(\frac{13}{3}, 0)$ 에서 만난다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

1228 답 ②

$y = \sqrt{a(x-2)} - 1$ ($a \neq 0$)의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



- ① $y = \sqrt{a(x-2)} - 1$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭인 그래프의 식은
 $y = -\sqrt{a(x-2)} + 1$
 ② $a > 0$ 일 때, 정의역은 $\{x | x \geq 2\}$, 치역은 $\{y | y \geq -1\}$ 이다.
 ③ $a < 0$ 일 때, 정의역은 $\{x | x \leq 2\}$, 치역은 $\{y | y \geq -1\}$ 이다.
 ④ $a < 0$ 이고 $x=0$ 에서 $y > 0$ 이면 제1사분면을 지난다.
 ⑤ $a = -\frac{1}{2}$ 일 때에만 원점을 지난다.
 따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

1229 답 ⑤

주어진 그래프는 $y = -\sqrt{ax}$ ($a > 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로
 -5 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로

$$y = -\sqrt{a(x+5)} + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①의 그래프가 점 $(-1, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = -\sqrt{a(-1+5)} + 2$$

$$2\sqrt{a} = 4, \sqrt{a} = 2 \quad \therefore a = 4$$

이를 ①에 대입하면

$$y = -\sqrt{4(x+5)} + 2 = -\sqrt{4x+20} + 2$$

따라서 $a=4, b=20, c=2$ 이므로

$$a+b+c=26$$

1230 답 ③

주어진 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축
 의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로

$$y = \sqrt{-(x-2)} + 1 = \sqrt{-x+2} + 1$$

따라서 $a=2, b=1$ 이므로

$$a+b=3$$

1231 답 8

주어진 그래프는 $y = a\sqrt{bx}$ ($a > 0, b > 0$)의 그래프를 x 축의 방향으
 로 2 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로

$$y = a\sqrt{b(x-2)} + 2 = a\sqrt{bx-2b} + 2$$

즉, $-2b = -4, c=2$ 이므로 $b=2, c=2$

따라서 주어진 함수의 식은

$$y = a\sqrt{2x-4} + 2$$

이 함수의 그래프가 점 $(4, 6)$ 을 지나므로

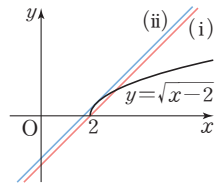
$$6 = a\sqrt{2 \times 4 - 4} + 2$$

$$6 = 2a + 2 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore abc = 8$$

1232 답 $-2 \leq k < -\frac{7}{4}$

$y = \sqrt{x-2}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이고,
 직선 $y = x+k$ 는 기울기가 1 이고 y 절편이 k
 이다.



(i) 직선 $y = x+k$ 가 점 $(2, 0)$ 을 지날 때

$$0 = 2 + k \quad \therefore k = -2$$

(ii) $y = \sqrt{x-2}$ 의 그래프와 직선 $y = x+k$ 가 접할 때

$\sqrt{x-2} = x+k$ 의 양변을 제곱하면

$$x-2 = x^2 + 2kx + k^2$$

$$\therefore x^2 + (2k-1)x + k^2 + 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (2k-1)^2 - 4(k^2+2) = 0$$

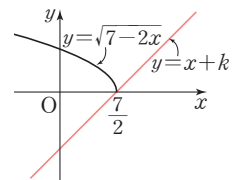
$$-4k-7=0 \quad \therefore k = -\frac{7}{4}$$

(i), (ii)에서 구하는 실수 k 의 값의 범위는

$$-2 \leq k < -\frac{7}{4}$$

1233 답 ①

$y = \sqrt{7-2x} = \sqrt{-2(x-\frac{7}{2})}$ 이므로 주어진
 함수의 그래프는 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x
 축의 방향으로 $\frac{7}{2}$ 만큼 평행이동한 것이고,
 직선 $y = x+k$ 는 기울기가 1 이고 y 절편이
 k 이다.



직선 $y = x+k$ 가 점 $(\frac{7}{2}, 0)$ 을 지날 때,

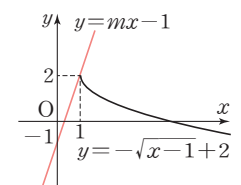
$$0 = \frac{7}{2} + k \quad \therefore k = -\frac{7}{2}$$

따라서 $y = \sqrt{7-2x}$ 의 그래프와 직선 $y = x+k$ 가 만나지 않으려면

$k < -\frac{7}{2}$ 이어야 하므로 실수 k 의 값이 될 수 있는 것은 ①이다.

1234 답 ④

$y = -\sqrt{x-1} + 2$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의
 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방
 향으로 2 만큼 평행이동한 것이고, 직선
 $y = mx-1$ 은 기울기가 m 이고 y 절편이
 -1 이다.



직선 $y = mx-1$ 이 점 $(1, 2)$ 를 지날 때,

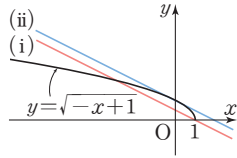
$$2 = m - 1 \quad \therefore m = 3$$

따라서 $y = -\sqrt{x-1} + 2$ 의 그래프와 직선 $y = mx-1$ 이 만나지 않
 으려면 $m > 3$ 이어야 하므로 구하는 자연수 m 의 최솟값은 4 이다.

1235 **답** $k < \frac{1}{2}$ 또는 $k=1$

$n(A \cap B)=1$ 이므로 $y=\sqrt{-x+1}$ 의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$ 가 한 점에서 만나야 한다. **i**

$y=\sqrt{-x+1}=\sqrt{-(x-1)}$ 이므로
 $y=\sqrt{-x+1}$ 의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$ 는 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 y 절편이 k 이다.



(i) 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$ 가 점 $(1, 0)$ 을 지날 때

$$0 = -\frac{1}{2} + k \quad \therefore k = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \text{ii}$$

(ii) $y=\sqrt{-x+1}$ 의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$ 가 접할 때

$\sqrt{-x+1} = -\frac{1}{2}x+k$ 의 양변을 제곱하면

$$-x+1 = \frac{1}{4}x^2 - kx + k^2$$

$$\therefore x^2 - 4(k-1)x + 4k^2 - 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-2(k-1)\}^2 - (4k^2 - 4) = 0$$

$$-8k + 8 = 0 \quad \therefore k = 1 \quad \dots\dots \text{iii}$$

(i), (ii)에서 구하는 실수 k 의 값 또는 범위는

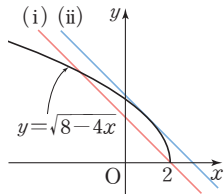
$$k < \frac{1}{2} \text{ 또는 } k=1 \quad \dots\dots \text{iv}$$

채점 기준

i $n(A \cap B)=1$ 인 조건 구하기	20 %
ii 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$ 가 점 $(1, 0)$ 을 지날 때 k 의 값 구하기	30 %
iii $y=\sqrt{-x+1}$ 의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}x+k$ 가 접할 때 k 의 값 구하기	30 %
iv 실수 k 의 값 또는 범위 구하기	20 %

1236 **답** ②

$y=\sqrt{8-4x}=\sqrt{-4(x-2)}$ 이므로
 $y=\sqrt{8-4x}$ 의 그래프는 $y=\sqrt{-4x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-x+k$ 는 기울기가 -1 이고 y 절편이 k 이다.



(i) 직선 $y=-x+k$ 가 점 $(2, 0)$ 을 지날 때

$$0 = -2 + k \quad \therefore k = 2$$

(ii) $y=\sqrt{8-4x}$ 의 그래프와 직선 $y=-x+k$ 가 접할 때

$\sqrt{8-4x} = -x+k$ 의 양변을 제곱하면

$$8-4x = x^2 - 2kx + k^2$$

$$\therefore x^2 - 2(k-2)x + k^2 - 8 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(k-2)\}^2 - (k^2 - 8) = 0$$

$$-4k + 12 = 0 \quad \therefore k = 3$$

(i), (ii)에서

$$f(k) = \begin{cases} 0 & (k > 3) \\ 1 & (k=3 \text{ 또는 } k < 2) \\ 2 & (2 \leq k < 3) \end{cases}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) + f(3) + f\left(\frac{7}{2}\right) = 1 + 2 + 1 + 0 = 4$$

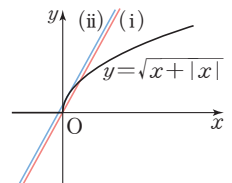
1237 **답** $0 < k < \frac{1}{4}$

$y=\sqrt{x+|x|}$ 에서

$x \geq 0$ 일 때, $y=\sqrt{x+x}=\sqrt{2x}$

$x < 0$ 일 때, $y=\sqrt{x-x}=0$

따라서 $y=\sqrt{x+|x|}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 직선 $y=2x+k$ 는 기울기가 2이고 y 절편이 k 이다.



(i) 직선 $y=2x+k$ 가 원점을 지날 때

$$k=0$$

(ii) $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프와 직선 $y=2x+k$ 가 접할 때

$\sqrt{2x} = 2x+k$ 의 양변을 제곱하면

$$2x = 4x^2 + 4kx + k^2$$

$$\therefore 4x^2 + 2(2k-1)x + k^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2k-1)^2 - 4k^2 = 0$$

$$-4k + 1 = 0 \quad \therefore k = \frac{1}{4}$$

(i), (ii)에서 구하는 실수 k 의 값의 범위는

$$0 < k < \frac{1}{4}$$

1238 **답** $\frac{3}{2}$

두 점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 가 $y=3\sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점이므로

$$b=3\sqrt{a}, d=3\sqrt{c}$$

$$b+d=6 \text{에서 } 3\sqrt{a}+3\sqrt{c}=6$$

$$\therefore \sqrt{a}+\sqrt{c}=2$$

따라서 직선 PQ 의 기울기는

$$\begin{aligned} \frac{d-b}{c-a} &= \frac{3\sqrt{c}-3\sqrt{a}}{c-a} = \frac{3(\sqrt{c}-\sqrt{a})}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{c}-\sqrt{a})} \\ &= \frac{3}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

1239 **답** $\frac{13}{2}$

오른쪽 그림과 같이 점 A 의 좌표를

(a, b) 라 하면 직사각형 $OBAC$ 의 둘레의 길이는

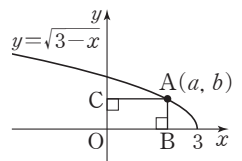
$$2(a+b) \quad \dots\dots \text{i}$$

점 A 는 $y=\sqrt{3-x}$ 의 그래프 위의 점이므로

$$b=\sqrt{3-a}$$

양변을 제곱하면 $b^2=3-a$

$$\therefore a=3-b^2$$



이때 점 A는 제1사분면 위의 점이므로

$$0 < b < \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2(a+b) &= 2\{(3-b^2)+b\} \\ &= -2b^2+2b+6 \\ &= -2\left(b-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{2} \end{aligned} \quad \dots\dots \text{ii}$$

$0 < b < \sqrt{3}$ 에서 $b = \frac{1}{2}$ 일 때 $2(a+b)$ 의 최댓값은 $\frac{13}{2}$ 이므로 직사각형 OBAC의 둘레의 길이의 최댓값은 $\frac{13}{2}$ 이다. $\dots\dots \text{iii}$

채점 기준

i 직사각형 OBAC의 둘레의 길이를 점 A의 좌표를 이용하여 나타내기	30 %
ii 직사각형 OBAC의 둘레의 길이를 이차함수로 나타내기	50 %
iii 직사각형 OBAC의 둘레의 길이의 최댓값 구하기	20 %

1240 답 ②

$y = \sqrt{a(6-x)} = \sqrt{-a(x-6)}$ 이므로 $y = \sqrt{a(6-x)}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

오른쪽 그림과 같이 점 A의 좌표를 $(k, \sqrt{k})$

라 하면 삼각형 AOB의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{k} = 6$$

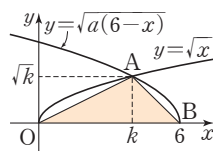
$$\sqrt{k} = 2 \quad \therefore k = 4$$

따라서 A(4, 2)이고 이 점은 $y = \sqrt{a(6-x)}$ 의 그래프 위의 점이므로

$$2 = \sqrt{a(6-4)}$$

$$\sqrt{2a} = 2, 2a = 4$$

$$\therefore a = 2$$



1241 답 $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{17}{2} (x \geq 4)$

함수 $y = f(x)$ 의 치역이 $\{y | y \geq 4\}$ 이므로 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 정의역은 $\{x | x \geq 4\}$ 이다.

$$y = \sqrt{2x-1} + 4 \text{라 하면}$$

$$y - 4 = \sqrt{2x-1}$$

양변을 제곱하면

$$y^2 - 8y + 16 = 2x - 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}y^2 - 4y + \frac{17}{2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{17}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{17}{2} (x \geq 4)$$

1242 답 27

$f^{-1}(7) = k$ (k 는 상수)라 하면 $f(k) = 7$ 이므로

$$\sqrt{k-2} + 2 = 7, \sqrt{k-2} = 5$$

양변을 제곱하면

$$k - 2 = 25 \quad \therefore k = 27$$

$$\therefore f^{-1}(7) = 27$$

1243 답 ⑤

$f(x) = \sqrt{ax+b}$ 의 그래프가 점 (2, 3)을 지나므로

$$3 = \sqrt{2a+b}$$

양변을 제곱하면

$$2a + b = 9 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또 $f(x)$ 의 역함수의 그래프가 점 (2, 3)을 지나므로

$f(x) = \sqrt{ax+b}$ 의 그래프는 점 (3, 2)를 지난다.

즉, $2 = \sqrt{3a+b}$ 이므로 양변을 제곱하면

$$3a + b = 4 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -5, b = 19$$

$$\therefore a + b = 14$$

1244 답 ①

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.

$$\sqrt{x-2} + 2 = x \text{에서 } \sqrt{x-2} = x - 2$$

양변을 제곱하면 $x - 2 = x^2 - 4x + 4$

$$x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 두 교점의 좌표는 (2, 2), (3, 3)이므로 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$$

1245 답 ③

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.

$\sqrt{2x+3} = x$ 의 양변을 제곱하면

$$2x + 3 = x^2, x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

그런데 함수 $y = f(x)$ 의 치역이 $\{y | y \geq 0\}$ 이므로 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 정의역은 $\{x | x \geq 0\}$ 이다.

$$\therefore x = 3$$

따라서 교점의 좌표는 (3, 3)이므로 $a = 3, b = 3$

$$\therefore a + b = 6$$

1246 답 10

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.

$$\sqrt{x+2} = x \text{에서 } \sqrt{x} = x - 2$$

양변을 제곱하면 $x = x^2 - 4x + 4$

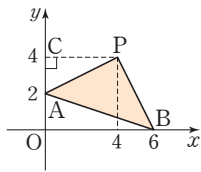
$$x^2 - 5x + 4 = 0, (x-1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

그런데 함수 $y = f(x)$ 의 치역이 $\{y | y \geq 2\}$ 이므로 역함수의 정의역은 $\{x | x \geq 2\}$ 이다.

$$\therefore x = 4$$

따라서 P(4, 4)이므로 △PAB는 오른쪽 그림과 같고, 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 C라 하면



$$\begin{aligned}\triangle PAB &= \square COBP - \triangle PCA - \triangle AOB \\ &= \frac{1}{2} \times (4+6) \times 4 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \times 6 \times 2 \\ &= 20 - 4 - 6 = 10\end{aligned}$$

1247 답 ③

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(4) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(4) \\ &= (g^{-1} \circ f)(4) \\ &= g^{-1}(f(4)) \\ &= g^{-1}(3)\end{aligned}$$

$g^{-1}(3)=k$ (k 는 상수)라 하면 $g(k)=3$ 이므로

$$\sqrt{3k-6}=3$$

양변을 제곱하면

$$3k-6=9 \quad \therefore k=5$$

$$\therefore (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(4)=5$$

1248 답 $\frac{1}{2}$

$g(3)=k$ (k 는 상수)라 하면 $f(k)=3$ 이므로

$$\sqrt{-2k+17}=3$$

양변을 제곱하면

$$-2k+17=9 \quad \therefore k=4$$

$$\therefore g(3)=4$$

..... ①

$g(4)=l$ (l 은 상수)이라 하면 $f(l)=4$ 이므로

$$\sqrt{-2l+17}=4$$

양변을 제곱하면

$$-2l+17=16 \quad \therefore l=\frac{1}{2}$$

$$\therefore g(4)=\frac{1}{2}$$

..... ②

$$\therefore (g \circ g)(3)=g(g(3))=g(4)=\frac{1}{2}$$

..... ③

채점 기준

① $g(3)$ 의 값 구하기	40%
② $g(4)$ 의 값 구하기	40%
③ $(g \circ g)(3)$ 의 값 구하기	20%

1249 답 ③

$(f \circ g)^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)=k$ (k 는 상수)라 하면

$$(f \circ g)(k)=\frac{3}{4}$$

$$(f \circ g)(k)=f(g(k))=f(\sqrt{k})=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1} \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1}=\frac{3}{4} \text{에서 } 4\sqrt{k}=3\sqrt{k}+3$$

$$\sqrt{k}=3 \quad \therefore k=9$$

$$\therefore (f \circ g)^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)=9$$

1250 답 0

$(f^{-1} \circ f^{-1})(a)=-6$ 에서 $(f \circ f)^{-1}(a)=-6$ 이므로

$$(f \circ f)(-6)=a$$

$-6 < 0$ 이므로

$$f(-6)=\sqrt{4-2 \times (-6)}=4$$

$4 > 0$ 이므로

$$f(4)=2-\sqrt{4}=0$$

$$\therefore a=f(f(-6))=f(4)=0$$

AB 유형 점검

191~193쪽

1251 답 ①

$$-2x^2-7x+4 \geq 0 \text{에서 } 2x^2+7x-4 \leq 0$$

$$(x+4)(2x-1) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$4-x^2 > 0 \text{에서 } x^2 < 4$$

$$\therefore -2 < x < 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } -2 < x \leq \frac{1}{2}$$

따라서 정수 x 는 $-1, 0$ 의 2개이다.

1252 답 ③

$$\sqrt{\{x(x-3)\}^2}=-x(x-3) \text{에서}$$

$$x(x-3) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq x \leq 3$$

따라서 $x-4 < 0, x+1 > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-4)^2}+\sqrt{(x+1)^2} &= |x-4|+|x+1| \\ &= -(x-4)+x+1 \\ &= 5\end{aligned}$$

1253 답 $2x+2$

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})^2+(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})} \\ &= \frac{(2x+2\sqrt{x^2+2x+2})+(2x-2\sqrt{x^2+2x+2})}{x+2-x} \\ &= \frac{4x+4}{2}=2x+2\end{aligned}$$

1254 답 ②

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}=\frac{(\sqrt{1-x})^2-(\sqrt{1+x})^2}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{1-x-(1+x)}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{1-\frac{8}{9}}}=\frac{-\frac{4\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}=-4\sqrt{2}\end{aligned}$$

1255 **답** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$x-y=2\sqrt{3}$, $xy=4$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} &= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 - (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \\ &= \frac{x+2\sqrt{xy}+y - (x-2\sqrt{xy}+y)}{x-y} \\ &= \frac{4\sqrt{xy}}{x-y} = \frac{4 \times \sqrt{4}}{2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

1256 **답** -24

$y=\sqrt{3x-5}+2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\sqrt{3(x+1)-5}+2+2=\sqrt{3x-2}+4$$

이 함수의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y=\sqrt{-3x-2}+4 \quad \therefore y=-\sqrt{-3x-2}-4$$

따라서 $a=-3$, $b=-2$, $c=-4$ 이므로

$$abc=-24$$

1257 **답** -1

$f(2)=4$ 에서

$$4=\sqrt{8+k}+2, \sqrt{8+k}=2$$

양변을 제곱하면

$$8+k=4 \quad \therefore k=-4$$

$$\therefore f(x)=\sqrt{4x-4}+2=\sqrt{4(x-1)}+2$$

따라서 정의역은 $\{x|x \geq 1\}$, 치역은 $\{y|y \geq 2\}$ 이므로

$$a=1, b=2$$

$$\therefore k+a+b=-1$$

1258 **답** 3

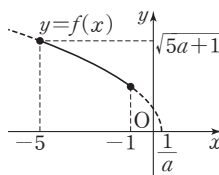
$f(x)=\sqrt{-ax+1}=\sqrt{-a\left(x-\frac{1}{a}\right)}$ 이므로 주어진 함수의 그래프는

$y=\sqrt{-ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{a}$ 만큼 평행이동한 것이다.

$-5 \leq x \leq -1$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-5$ 일 때 최댓값 $\sqrt{5a+1}$ 을 갖는다.

따라서 $\sqrt{5a+1}=4$ 이므로 양변을 제곱하면

$$5a+1=16 \quad \therefore a=3$$



1259 **답** ⑤

$$y=\sqrt{-3x+3}-2=\sqrt{-3(x-1)}-2$$

③, ④ $y=\sqrt{-3x+3}-2$ 의 그래프는

$y=\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향

으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2만

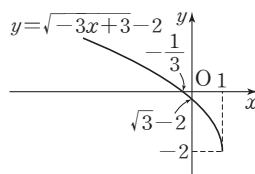
큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그

림과 같다.

즉, 제1사분면을 지나지 않는다.

⑤ $y=-\sqrt{-3x+3}+2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.



1260 **답** ②

주어진 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ ($a < 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로

$$y=\sqrt{a(x-1)}-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①의 그래프가 점 $(-3, 0)$ 을 지나므로

$$0=\sqrt{-4a}-2, \sqrt{-4a}=2$$

양변을 제곱하면

$$-4a=4 \quad \therefore a=-1$$

이를 ①에 대입하면

$$y=\sqrt{-(x-1)}-2=\sqrt{-x+1}-2$$

따라서 $a=-1$, $b=1$, $c=-2$ 이므로 $a+b+c=-2$

1261 **답** ⑤

$y=\sqrt{cx+b}+a=\sqrt{c\left(x+\frac{b}{c}\right)}+a$ 이므로 $y=\sqrt{cx+b}+a$ 의 그래프는

$y=\sqrt{cx}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{b}{c}$ 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

주어진 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프에서

(i) 아래로 볼록하므로 $a > 0$

(ii) 축의 방정식은 $x=-\frac{b}{2a}$

이때 축이 y 축의 오른쪽에 위치하므로 $-\frac{b}{2a} > 0$

그런데 (i)에서 $a > 0$ 이므로 $b < 0$

(iii) y 축과 만나는 점의 위치가 x 축보다 아래쪽이므로 $c < 0$

(i), (ii), (iii)에서 $c < 0$, $-\frac{b}{c} < 0$, $a > 0$ 이므로 $y=\sqrt{cx+b}+a$ 의 그래프의 개형은 ⑤이다.

중3 다시보기

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가

(1) ① 아래로 볼록 $\Rightarrow a > 0$

② 위로 볼록 $\Rightarrow a < 0$

(2) 축의 위치가

① y 축의 왼쪽 $\Rightarrow ab > 0$

② y 축과 일치 $\Rightarrow b = 0$

③ y 축의 오른쪽 $\Rightarrow ab < 0$

(3) y 축과 만나는 점의 위치가

① x 축보다 위쪽 $\Rightarrow c > 0$

② 원점 $\Rightarrow c = 0$

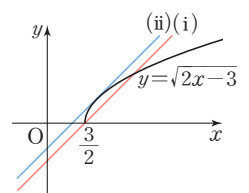
③ x 축보다 아래쪽 $\Rightarrow c < 0$

1262 **답** ④

$n(A \cap B)=2$ 이므로 $y=\sqrt{2x-3}$ 의 그래프와 직선 $y=x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$$y=\sqrt{2x-3}=\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)} \text{이므로}$$

$y=\sqrt{2x-3}$ 의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$ 는 기울기가 1이고 y 절편이 k 이다.



(i) 직선 $y=x+k$ 가 점 $(\frac{3}{2}, 0)$ 을 지날 때

$$0 = \frac{3}{2} + k \quad \therefore k = -\frac{3}{2}$$

(ii) $y=\sqrt{2x-3}$ 의 그래프와 직선 $y=x+k$ 가 접할 때

$\sqrt{2x-3}=x+k$ 의 양변을 제곱하면

$$2x-3=x^2+2kx+k^2$$

$$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2+3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k^2+3) = 0$$

$$-2k-2=0 \quad \therefore k=-1$$

(i), (ii)에서 실수 k 의 값의 범위는

$$-\frac{3}{2} \leq k < -1$$

따라서 $\alpha = -\frac{3}{2}$, $\beta = -1$ 이므로 $\alpha\beta = \frac{3}{2}$

1263 답 ④

함수 $y=f(x)$ 의 치역이 $\{y|y \geq 1\}$ 이므로 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 정의역은 $\{x|x \geq 1\}$ 이다.

$$y=\sqrt{4x+5}+1 \text{이라 하면 } y-1=\sqrt{4x+5}$$

양변을 제곱하면 $y^2-2y+1=4x+5$

$$\therefore x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}y - 1$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 (x \geq 1)$$

따라서 $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$, $c = 1$ 이므로

$$abc = \frac{1}{2}$$

1264 답 5

$y=2\sqrt{x}+4$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=2\sqrt{x-p}+4 \quad \therefore f(x)=2\sqrt{x-p}+4$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하면 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 도 접한다.

$$2\sqrt{x-p}+4=x \text{에서 } 2\sqrt{x-p}=x-4$$

양변을 제곱하면

$$4(x-p)=x^2-8x+16$$

$$\therefore x^2-12x+4p+16=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-6)^2 - (4p+16) = 0$$

$$-4p+20=0 \quad \therefore p=5$$

1265 답 $\frac{5}{2}$

$$(g^{-1} \circ f)(5) = g^{-1}(f(5)) = g^{-1}(2)$$

$g^{-1}(2)=k$ (k 는 상수)라 하면 $g(k)=2$ 이므로

$$\sqrt{2k-1}=2$$

양변을 제곱하면

$$2k-1=4 \quad \therefore k=\frac{5}{2}$$

$$\therefore (g^{-1} \circ f)(5) = \frac{5}{2}$$

1266 답 7

$y=\sqrt{-x+2k}+2=\sqrt{-(x-2k)}+2$ 이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $2k$ 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

$k-7 \leq x \leq k+2$ 에서

$y=\sqrt{-x+2k}+2$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로 $x=k+2$ 일 때 최솟

값 $\sqrt{-(k+2)+2k}+2$, 즉 $\sqrt{k-2}+2$

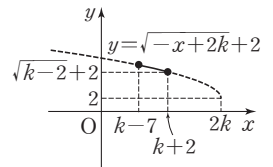
를 갖는다.

즉, $\sqrt{k-2}+2=6$ 이므로 $\sqrt{k-2}=4$

양변을 제곱하면

$$k-2=16 \quad \therefore k=18$$

따라서 $k-7 \leq x \leq k+2$, 즉 $11 \leq x \leq 20$ 에서 함수 $y=\sqrt{-x+36}+2$ 는 $x=11$ 일 때 최댓값 7 을 갖는다.



채점 기준

i $y=\sqrt{-x+2k}+2$ 의 그래프의 평행이동 파악하기	30 %
ii k 의 값 구하기	40 %
iii 함수의 최댓값 구하기	30 %

1267 답 -1

$y=\sqrt{-x+1}+k=\sqrt{-(x-1)}+k$ 이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

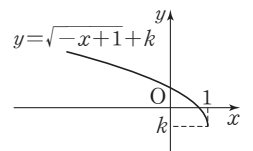
$y=\sqrt{-x+1}+k$ 의 그래프가 제3사분면을

지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이

$x=0$ 일 때 $y \geq 0$ 이어야 하므로

$$1+k \geq 0 \quad \therefore k \geq -1$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 -1 이다.



채점 기준

i $y=\sqrt{-x+1}+k$ 의 그래프의 평행이동 파악하기	30 %
ii k 의 값의 범위 구하기	60 %
iii 정수 k 의 최솟값 구하기	10 %

1268 답 4

두 함수 $y=\sqrt{x+1}$, $y=\sqrt{x}$ 의 그래프가 직선 $x=k$ 와 만나는 점의 좌표는 각각

$$P_k(k, \sqrt{k+1}), Q_k(k, \sqrt{k})$$

$$\therefore \overline{P_k Q_k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

$$\therefore \overline{P_1 Q_1} + \overline{P_2 Q_2} + \overline{P_3 Q_3} + \cdots + \overline{P_{49} Q_{49}}$$

$$= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3})$$

$$+ \cdots + (\sqrt{49}-\sqrt{48}) + (\sqrt{50}-\sqrt{49})$$

$$= -1 + \sqrt{50} = -1 + 5\sqrt{2}$$

따라서 $a = -1$, $b = 5$ 이므로

$$a + b = 4$$

..... ③

채점 기준

① $P_k Q_k$ 의 길이를 k 에 대한 식으로 나타내기	40%
② $P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + P_3 Q_3 + \dots + P_{49} Q_{49}$ 의 값 구하기	40%
③ $a + b$ 의 값 구하기	20%

C 실력 향상

194쪽

1269 답 $\frac{1}{2}$

직선 OA와 평행하고 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프에 접하는 직선의 접점이 P 일 때 삼각형 OAP의 넓이는 최대이다.

직선 OA의 방정식은 $y = x$ 이므로 직선 OA와 평행한 접선의 방정식을 $y = x + k$ (k 는 실수)라 하면

$$\sqrt{2x} = x + k$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 2x = x^2 + 2kx + k^2$$

$$\therefore x^2 + 2(k-1)x + k^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - k^2 = 0$$

$$-2k + 1 = 0 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

두 직선 $y = x$, $y = x + \frac{1}{2}$ 사이의 거리는 직선 $y = x$ 위의 점 $(0, 0)$

과 직선 $y = x + \frac{1}{2}$, 즉 $2x - 2y + 1 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

이때 $\overline{OA} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 OAP의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}$$

1270 답 10

함수 $y = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$)의 그래프는 함수 $y = x^2$ ($x < 0$)의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.

또 점 A $(-2, 4)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(4, 2)$, 즉 점 B가 된다.

따라서 오른쪽 그림의 빗금 친 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이는 삼각형 OBA의 넓이와 같다.

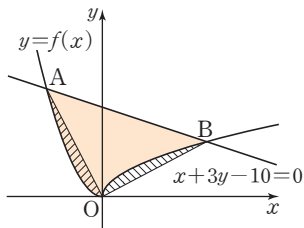
$$\overline{AB} = \sqrt{(4+2)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{10}$$

원점과 직선 $x + 3y - 10 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-10|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \sqrt{10}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\triangle OBA = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times \sqrt{10} = 10$$



다른 풀이

직선 $x + 3y - 10 = 0$ 이 y 축과 만나는 점을 C라 하면

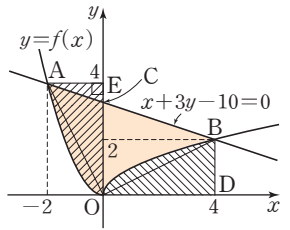
$$C\left(0, \frac{10}{3}\right)$$

또 D $(4, 0)$, E $(0, 4)$ 라 하면 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이는 사각형 CODB

의 넓이에서 삼각형 ACE의 넓이를 뺀 것과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{10}{3} + 2\right) \times 4 - \frac{1}{2} \times \left(4 - \frac{10}{3}\right) \times 2 = \frac{32}{3} - \frac{2}{3} = 10$$



1271 답 4

함수 $y = f(x)$ 의 치역이 $\{y | y \geq 0\}$ 이므로 그 역함수 $y = g(x)$ 의 정의역은 $\{x | x \geq 0\}$ 이다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수

$y = g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이

직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수

$y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.

$\sqrt{4x - k} = x$ 에서 양변을 제곱하면

$$4x - k = x^2 \quad \therefore x^2 - 4x + k = 0$$

두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

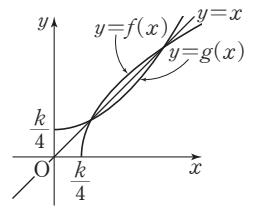
$f(x) = x^2 - 4x + k$ 라 할 때, 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - k > 0 \quad \therefore k < 4$$

또 $f(0) \geq 0$ 이어야 하므로 $k \geq 0$

$$\therefore 0 \leq k < 4$$

따라서 정수 k 는 0, 1, 2, 3의 4개이다.



1272 답 ②

함수 $f(x)$ 가 역함수를 가지려면 일대일대응이어야 하므로

$$2a + b = \sqrt{2-2} + c$$

$$\therefore 2a + b = c \quad \text{..... ㉠}$$

주어진 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같으므로 두 그래프의 교점은 직선 $y = x$ 위에 있다.

따라서 교점의 좌표는 $(-2, -2)$, $(6, 6)$ 이다.

$$-2 < 2 \text{이므로 } -2a + b = -2 \quad \text{..... ㉡}$$

$$6 > 2 \text{이므로 } \sqrt{6-2} + c = 6$$

$$2 + c = 6 \quad \therefore c = 4$$

이를 ㉠에 대입하면

$$2a + b = 4 \quad \text{..... ㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a = \frac{3}{2}, b = 1$$

$$\therefore abc = 6$$

01 / 평면좌표

2~7쪽

중단원 기출문제 ①

1 답 3

$\overline{AB}=7$ 이므로

$$|x-4|=7, x-4=\pm 7$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=11$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x=-3$

$$\therefore \overline{OA}=|0-(-3)|=3$$

2 답 ③

$\overline{AB}=\overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$ 이므로

$$(a-1-1)^2+(1-3)^2=(3-a+1)^2+(-3-1)^2$$

$$4a=24 \quad \therefore a=6$$

3 답 ③

점 P가 직선 $y=x-2$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(a, a-2)$ 라 하자.

$\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$$(a+4)^2+(a-2)^2=(a-6)^2+(a-2+2)^2$$

$$16a=16 \quad \therefore a=1$$

따라서 점 P의 좌표는 $(1, -1)$ 이다.

4 답 ①

점 P $(-1, 1)$ 이 삼각형 ABC의 외심이므로

$$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$$

$$\therefore \overline{AP}^2=\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$$

$$\overline{CP}^2=(-1+2)^2+(1+1)^2=5 \text{이므로}$$

$$\overline{AP}^2=\overline{CP}^2 \text{에서}$$

$$(-1-a)^2+(1-2)^2=5$$

$$a^2+2a-3=0$$

$$(a+3)(a-1)=0$$

$$\therefore a=1 (\because a > 0)$$

$$\overline{BP}^2=\overline{CP}^2 \text{에서}$$

$$(-1-1)^2+(1-b)^2=5$$

$$b^2-2b=0, b(b-2)=0$$

$$\therefore b=2 (\because b > 0)$$

$$\therefore a+b=3$$

5 답 ②

$$\overline{AB}=\sqrt{(5-2)^2+(-4-1)^2}=\sqrt{34}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(-5)^2+(-1+4)^2}=\sqrt{34}$$

$$\overline{CA}=\sqrt{2^2+(1+1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}$ 인 이등변삼각형이다.

6 답 9

삼각형 ABP가 $\overline{AB}$ 를 빗변으로 하는 직각삼각형이 되려면

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{AB}^2 \text{이어야 하므로}$$

$$(p-2)^2+(-5)^2+(p-7)^2+(-1)^2=(7-2)^2+(1-5)^2$$

$$\therefore p^2-9p+19=0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 p 의 값의 합은 9이다.

7 답 ②

P $(0, a)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2^2+(a-1)^2+(-3)^2+(a+3)^2$$

$$=2a^2+4a+23$$

$$=2(a+1)^2+21$$

따라서 $a=-1$ 일 때 주어진 식의 최솟값은 21이다.

8 답 $5\sqrt{2}$

A $(-1, -3)$, B $(4, 2)$, P (a, b) 라 하면

$$\sqrt{(a+1)^2+(b+3)^2}+\sqrt{(a-4)^2+(b-2)^2}$$

$$=\overline{AP}+\overline{BP}$$

$$\geq \overline{AB}$$

$$=\sqrt{(-1-4)^2+(-3-2)^2}=5\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $5\sqrt{2}$ 이다.

9 답 ②

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축, 점 P를

지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y 축으로 하

는 좌표평면을 잡으면 점 P는 원점이 된다.

이때 A (a, b) , B $(-c, 0)$, C $(d, 0)$ 이라 하면

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2 \text{에서}$$

$$(-c-a)^2+(-b)^2=(d-a)^2+(-b)^2$$

$$(a+c)^2=(\overline{a-d})^2$$

$$a+c=\pm(a-d)$$

$$\therefore d=-c \text{ 또는 } d=\overline{2a+c}$$

그런데 $d \neq -c$ 이므로 C $(\overline{2a+c}, 0)$ 이다.

$$\therefore \overline{AP}^2=\overline{a^2+b^2}, \overline{BP}=c, \overline{CP}=\overline{2a+c}$$

$$\overline{AB}^2=(-c-a)^2+(-b)^2=(a+c)^2+b^2$$

$$\therefore \overline{AP}^2+\overline{BP} \times \overline{CP}=\overline{AB}^2$$

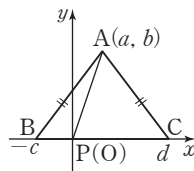
10 답 $(-1, 2)$

$$P\left(\frac{2 \times (-5)+3 \times 5}{2+3}, \frac{2 \times 3+3 \times (-2)}{2+3}\right) \quad \therefore P(1, 0)$$

$$Q\left(\frac{1 \times 1+2 \times (-5)}{1+2}, \frac{1 \times 6+2 \times 3}{1+2}\right) \quad \therefore Q(-3, 4)$$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1-3}{2}, \frac{4}{2}\right) \quad \therefore (-1, 2)$$



11 답 ④

$A(a, b)$, $B(c, d)$ 라 하면 선분 AB의 중점의 좌표가 $(-1, 3)$ 이므로

$$\frac{a+c}{2} = -1, \frac{b+d}{2} = 3$$

$$\therefore a+c = -2 \quad \dots\dots ㉠, b+d = 6 \quad \dots\dots ㉡$$

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표가 $(1, 2)$ 이므로

$$\frac{2 \times c + 1 \times a}{2+1} = 1, \frac{2 \times d + 1 \times b}{2+1} = 2$$

$$\therefore a+2c = 3 \quad \dots\dots ㉢, b+2d = 6 \quad \dots\dots ㉣$$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a = -7, c = 5$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $b = 6, d = 0$

따라서 $A(-7, 6), B(5, 0)$ 이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(5+7)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{5}$$

12 답 ③

선분 AB를 $a : 1$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{a \times (-1) + 1 \times 2}{a+1}, \frac{a \times 7 + 1 \times 3}{a+1} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{-a+2}{a+1}, \frac{7a+3}{a+1} \right)$$

이 점이 직선 $4x - y + 7 = 0$ 위에 있으므로

$$\frac{4(-a+2)}{a+1} - \frac{7a+3}{a+1} + 7 = 0$$

$$-4a = -12 \quad \therefore a = 3$$

13 답 5

선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{6m-4n}{m+n}, \frac{2m-3n}{m+n} \right)$$

이 점이 x 축 위에 있으므로

$$\frac{2m-3n}{m+n} = 0, 2m = 3n$$

$$\therefore m : n = 3 : 2$$

이때 m, n 은 서로소인 자연수이므로

$$m = 3, n = 2$$

$$\therefore m+n = 5$$

14 답 27

$$3\overline{AB} = 2\overline{BC} \text{에서 } \overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 3$$

이때 $a > 0$ 이므로 점 B는 $\overline{AC}$ 를 2 : 3으로 내분하는 점이다.

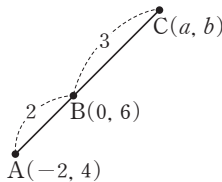
$$\text{따라서 } \frac{2 \times a + 3 \times (-2)}{2+3} = 0,$$

$$\frac{2 \times b + 3 \times 4}{2+3} = 6 \text{이므로}$$

$$2a - 6 = 0, 2b + 12 = 30$$

$$\therefore a = 3, b = 9$$

$$\therefore ab = 27$$



15 답 ③

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+3}{2}, \frac{6-3}{2} \right) \quad \therefore \left(3, \frac{3}{2} \right) \quad \dots\dots ㉠$$

$D(a, b)$ 라 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{3+b}{2} \right) \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$3 = \frac{-1+a}{2}, \frac{3}{2} = \frac{3+b}{2}$$

$$\therefore a = 7, b = 0$$

따라서 점 D의 좌표는 $(7, 0)$ 이다.

16 답 14

두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{a+7}{2} = \frac{3+b}{2}$$

$$\therefore a - b = -4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{이므로}$$

$$(3-a)^2 + (5-1)^2 = (7-3)^2 + (3-5)^2$$

$$a^2 - 6a + 5 = 0, (a-1)(a-5) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 5$$

그런데 $a > 3$ 이므로 $a = 5$

이를 ㉠에 대입하면

$$5 - b = -4 \quad \therefore b = 9$$

$$\therefore a + b = 14$$

17 답 ③

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (-3-1)^2} = 5$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(11-3)^2 + (-5-1)^2} = 10$$

이때 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

$$= 5 : 10$$

$$= 1 : 2$$

즉, 점 D는 $\overline{BC}$ 를 1 : 2로 내분하는

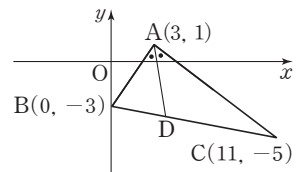
점이므로

$$D\left(\frac{1 \times 11 + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times (-5) + 2 \times (-3)}{1+2} \right)$$

$$\therefore D\left(\frac{11}{3}, -\frac{11}{3} \right)$$

$$\text{따라서 } a = \frac{11}{3}, b = -\frac{11}{3} \text{이므로}$$

$$a + b = 0$$



18 답 ①

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2+a-2b+4}{3}, \frac{3+b+a-1}{3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{a-2b+2}{3}, \frac{a+b+2}{3} \right)$$

이 점이 점 $(-2, 2)$ 와 일치하므로

$$\frac{a-2b+2}{3} = -2, \frac{a+b+2}{3} = 2$$

$$\therefore a - 2b = -8, a + b = 4$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 0, b = 4$$

$$\therefore a - b = -4$$

19 답 ④

삼각형 DEF의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로 그 좌표는

$$\left(\frac{-2+1+4}{3}, \frac{6-3+9}{3}\right) \quad \therefore (1, 4)$$

따라서 $a=1, b=4$ 이므로

$$b-a=3$$

다른 풀이

$$D\left(\frac{1 \times 1 + 2 \times (-2)}{1+2}, \frac{1 \times (-3) + 2 \times 6}{1+2}\right) \quad \therefore D(-1, 3)$$

$$E\left(\frac{1 \times 4 + 2 \times 1}{1+2}, \frac{1 \times 9 + 2 \times (-3)}{1+2}\right) \quad \therefore E(2, 1)$$

$$F\left(\frac{1 \times (-2) + 2 \times 4}{1+2}, \frac{1 \times 6 + 2 \times 9}{1+2}\right) \quad \therefore F(2, 8)$$

삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1+2+2}{3}, \frac{3+1+8}{3}\right) \quad \therefore (1, 4)$$

따라서 $a=1, b=4$ 이므로

$$b-a=3$$

20 답 $x+3y-5=0$

$P(x, y)$ 라 하면 $\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = 6$ 에서

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 - \{(x-4)^2 + (y-1)^2\} = 6$$

$$2x + 6y - 10 = 0$$

$$\therefore x + 3y - 5 = 0$$

중단원 기출문제 2회

1 답 5

$\overline{AB} = 5\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{(b-a)^2 + (-a+b)^2} = 5\sqrt{2}$$

양변을 제곱하면

$$2(a-b)^2 = 50, (a-b)^2 = 25$$

$$\therefore a-b = \pm 5$$

그런데 $a > b$ 이므로 $a-b=5$

2 답 ③

$\overline{AB} \leq 3$ 에서 $\overline{AB}^2 \leq 3^2$ 이므로

$$(t-2)^2 + (5-t)^2 \leq 9$$

$$t^2 - 7t + 10 \leq 0, (t-2)(t-5) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq t \leq 5$$

따라서 t 의 최댓값은 5이다.

3 답 -2, 0

$\overline{AB} = \overline{OB}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{OB}^2$ 이므로

$$(-1-a)^2 + (1-2)^2 = (-1)^2 + 1^2$$

$$a^2 + 2a = 0, a(a+2) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 0$$

4 답 4

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 = (a-3)^2 + (b-7)^2$$

$$\therefore a+3b=14$$

이때 $a+3b=14$ 를 만족시키는 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$$(2, 4), (5, 3), (8, 2), (11, 1)$$

따라서 구하는 점 P의 개수는 4이다.

5 답 ①

삼각형 OAB가 정삼각형이 되려면

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB}$$

$\overline{OA} = \overline{OB}$ 에서 $\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$ 이므로

$$1^2 + (\sqrt{3})^2 = (-1)^2 + a^2$$

$$a^2 = 3 \quad \therefore a = \pm\sqrt{3} \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$\overline{OA} = \overline{AB}$ 에서 $\overline{OA}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로

$$1^2 + (\sqrt{3})^2 = (-1-1)^2 + (a-\sqrt{3})^2$$

$$(a-\sqrt{3})^2 = 0 \quad \therefore a = \sqrt{3} \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } a = \sqrt{3}$$

6 답 30

$$\overline{AB} = \sqrt{(2+1)^2 + (1-10)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(8-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(-1-8)^2 + (10-3)^2} = \sqrt{130}$$

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$ 이므로 삼각형 ABC는 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} &= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{10} \times 2\sqrt{10} \\ &= 30 \end{aligned}$$

7 답 ③

$P(a, 0)$ 이라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = (a+2)^2 + (-1)^2 + (a-4)^2 + (-k)^2$$

$$= 2a^2 - 4a + k^2 + 21$$

$$= 2(a-1)^2 + k^2 + 19$$

따라서 $a=1$ 일 때 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값이 $k^2 + 19$ 이므로

$$k^2 + 19 = 35, k^2 = 16$$

$$\therefore k = \pm 4$$

따라서 양수 k 의 값은 4이다.

8 답 ③

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 6y + 9} + \sqrt{x^2 + 8x + 16 + y^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$$

$A(0, 3), B(-4, 0), P(x, y)$ 라 하면

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = \overline{AP} + \overline{PB}$$

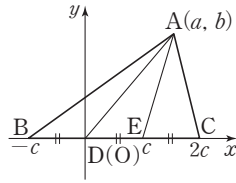
$$\geq \overline{AB}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$$

따라서 구하는 최솟값은 5이다.

9 답 풀이 참조

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 D는 원점이 된다.



이때 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$ 이라 하면

$C(2c, 0)$, $E(c, 0)$ 이므로

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \{(-c-a)^2 + (-b)^2\} + \{(2c-a)^2 + (-b)^2\}$$

$$= 2a^2 + 2b^2 + 5c^2 - 2ac$$

$$\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 + 4\overline{DE}^2$$

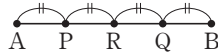
$$= \{(-a)^2 + (-b)^2\} + \{(c-a)^2 + (-b)^2\} + 4c^2$$

$$= 2a^2 + 2b^2 + 5c^2 - 2ac$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 + 4\overline{DE}^2$$

10 답 ②

선분 AB에 대하여 세 점 P, Q, R를 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 점 P는 선분 AR의 중점이다.

ㄴ. 점 R는 선분 AQ를 2 : 1로 내분하는 점이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

11 답 ⑤

선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표가 (2, 2)이므로

$$\frac{1 \times a + 2 \times (-4)}{1+2} = 2, \quad \frac{1 \times b + 2 \times 0}{1+2} = 2$$

$$a-8=6, b=6 \quad \therefore a=14, b=6$$

$$\therefore a-b=8$$

12 답 $\frac{5}{8} < t < 1$

$$1-t > 0, t > 0 \text{이므로 } 0 < t < 1 \quad \dots\dots ㉠$$

선분 AB를 $(1-t) : t$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{(1-t) \times 5 + t \times (-3)}{(1-t) + t}, \frac{(1-t) \times (-2) + t \times 6}{(1-t) + t} \right)$$

$$\therefore (-8t+5, 8t-2)$$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$$-8t+5 < 0, 8t-2 > 0$$

$$\therefore t > \frac{5}{8} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$\frac{5}{8} < t < 1$$

13 답 ②

선분 AB를 1 : k 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 0 + k \times (-2)}{1+k}, \frac{1 \times 7 + k \times 0}{1+k} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{-2k}{1+k}, \frac{7}{1+k} \right)$$

이 점이 직선 $x+y=1$ 위에 있으므로

$$\frac{-2k}{1+k} + \frac{7}{1+k} = 1, -2k+7=1+k$$

$$-3k=-6 \quad \therefore k=2$$

14 답 ⑤

선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{m \times (-1) + n \times a}{m+n}, \frac{m \times 1 + n \times b}{m+n} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{-m+an}{m+n}, \frac{m+bn}{m+n} \right)$$

(ㄱ)에서 이 점이 y 축 위의 점이므로

$$\frac{-m+an}{m+n} = 0 \quad \therefore \frac{m}{n} = a \quad \dots\dots ㉠$$

선분 AC를 $m : n$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{m \times 3 + n \times a}{m+n}, \frac{m \times (-3) + n \times b}{m+n} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{3m+an}{m+n}, \frac{-3m+bn}{m+n} \right)$$

(ㄴ)에서 이 점이 x 축 위의 점이므로

$$\frac{-3m+bn}{m+n} = 0 \quad \therefore \frac{m}{n} = \frac{b}{3} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$a = \frac{b}{3} \quad \therefore b = 3a$$

(ㄷ)에서 a, b 는 20 이하의 자연수이므로 $b=3a$ 를 만족시키는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), (5, 15), (6, 18)$

따라서 구하는 점 A의 개수는 6이다.

15 답 12

$$4\overline{AB} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AB} : \overline{BP} = 1 : 4$$

점 P의 x 좌표를 a 라 하면

(i) $a > 6$ 일 때

점 B는 $\overline{AP}$ 를 1 : 4로 내분하는 점이

므로

$$\frac{1 \times a + 4 \times 2}{1+4} = 6$$

$$a+8=30 \quad \therefore a=22$$

(ii) $a < 2$ 일 때

점 A는 $\overline{BP}$ 를 1 : 3으로 내분하는 점

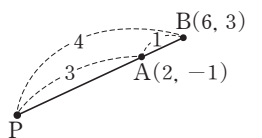
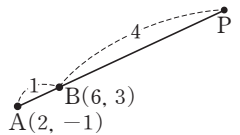
이므로

$$\frac{1 \times a + 3 \times 6}{1+3} = 2$$

$$a+18=8 \quad \therefore a=-10$$

(i), (ii)에서 점 P의 x 좌표의 합은

$$22 + (-10) = 12$$



16 답 ⑤

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{a+4}{2} \right) \quad \therefore \left(\frac{1}{2}, \frac{a+4}{2} \right) \quad \dots\dots ㉠$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+b}{2}, \frac{5+6}{2} \right) \quad \therefore \left(\frac{3+b}{2}, \frac{11}{2} \right) \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$1 = \frac{3+b}{2}, a+4 = 11$$

$$\therefore a=7, b=-2$$

$$\therefore ab=-14$$

17 답 ②

$$AB = \sqrt{(-7-5)^2 + (-4-1)^2} = 13$$

$$AC = \sqrt{(2-5)^2 + (5-1)^2} = 5$$

이때 점 I가 삼각형 ABC의 내심이므로 직선 AI는 $\angle A$ 의 이등분선이다.

$$\therefore \overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$$

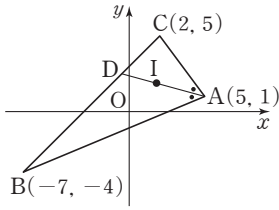
즉, 점 D는 $\overline{BC}$ 를 13 : 5로 내분하는 점이므로

$$D\left(\frac{13 \times 2 + 5 \times (-7)}{13+5}, \frac{13 \times 5 + 5 \times (-4)}{13+5}\right)$$

$$\therefore D\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

따라서 $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{5}{2}$ 이므로

$$a+b=2$$



18 답 ⑤

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2+1+4}{3}, \frac{k-10+1}{3}\right) \therefore \left(1, \frac{k-9}{3}\right)$$

이 점이 직선 $y = -2x$ 위에 있으므로

$$\frac{k-9}{3} = -2 \therefore k=3$$

19 답 (-3, 7)

$B(a, b)$, $C(c, d)$ 라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(-1, 4)$ 이므로

$$\frac{3+a+c}{3} = -1, \frac{-2+b+d}{3} = 4$$

$$\therefore a+c=-6, b+d=14 \quad \dots\dots ①$$

선분 BC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$

$$①\text{을 대입하면 } \left(\frac{-6}{2}, \frac{14}{2}\right) \therefore (-3, 7)$$

다른 풀이

삼각형 ABC의 무게중심을 $G(-1, 4)$, 선분 BC의 중점을 $D(a, b)$ 라 하면 $\overline{AG} : \overline{GD} = 2 : 1$ 이다.

즉, 점 G는 $\overline{AD}$ 를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\frac{2 \times a + 1 \times 3}{2+1} = -1, \frac{2 \times b + 1 \times (-2)}{2+1} = 4$$

$$2a+3=-3, 2b-2=12$$

$$\therefore a=-3, b=7$$

따라서 선분 BC의 중점의 좌표는 $(-3, 7)$ 이다.

20 답 7

$P(a, b)$ 라 하면 점 P가 직선 $y = -2x+1$ 위의 점이므로

$$b = -2a+1 \quad \dots\dots ①$$

$Q(x, y)$ 라 하면 점 Q는 선분 AP의 중점이므로

$$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b+1}{2} \therefore a=2x, b=2y-2 \quad \dots\dots ②$$

②을 ①에 대입하면

$$2y-2 = -2 \times 2x+1 \therefore 4x+2y-3=0$$

따라서 $m=4$, $n=-3$ 이므로

$$m-n=7$$

02 / 직선의 방정식

8~13쪽

중단원 기출문제 1회

1 답 x=1

두 점 $(4, 1)$, $(-2, 9)$ 를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4-2}{2}, \frac{1+9}{2}\right) \therefore (1, 5)$$

따라서 점 $(1, 5)$ 를 지나고 y 축에 평행한 직선의 방정식은 $x=1$

2 답 ⑤

두 점 $(1, -5)$, $(5, 7)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{7+5}{5-1}=3$$

따라서 기울기가 3이고 점 $(-3, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-4=3(x+3)$$

$$\therefore y=3x+13$$

3 답 ①

두 점 $(3, -2)$, $(1, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y+2 = \frac{-1+2}{1-3}(x-3)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

두 점 $(5, a)$, $\left(b, \frac{1}{2}\right)$ 이 직선 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 위의 점이므로

$$a = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = -3, b = -2$$

$$\therefore a+b = -5$$

4 답 ④

x 절편이 -2 이고 y 절편이 -4 인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{-4} = 1$$

이 직선이 점 $(4, a)$ 를 지나므로

$$\frac{4}{-2} + \frac{a}{-4} = 1$$

$$\therefore a = -12$$

5 답 ③

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{1+k}{2-1} = \frac{1-3}{2-(2k+1)}$$

$$k+1 = \frac{2}{2k-1}, (k+1)(2k-1)=2$$

$$2k^2+k-3=0, (2k+3)(k-1)=0$$

$$\therefore k = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } k=1$$

따라서 모든 k 의 값의 합은

$$-\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$$

6 답 7

직선 $y=ax+b$ 가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 선분 BC의 중점을 지나야 한다.

선분 BC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+2}{2}, \frac{-2-4}{2}\right) \therefore (3, -3)$$

두 점 (2, 2), (3, -3)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{-3-2}{3-2}(x-2)$$

$$\therefore y=-5x+12$$

따라서 $a=-5$, $b=12$ 이므로

$$a+b=7$$

7 답 ③

$b \neq 0$ 이므로 $ax+by+c=0$ 에서

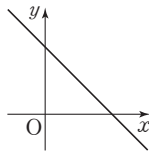
$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \quad \dots\dots ①$$

$ab > 0$ 에서 $-\frac{a}{b} < 0$ 이므로 직선 ①의 기울기는 음수이다.

$bc < 0$ 에서 $-\frac{c}{b} > 0$ 이므로 직선 ①의 y 절편은 양수이다.

따라서 직선 $ax+by+c=0$ 의 개형은 오른쪽

그림과 같으므로 제3사분면을 지나지 않는다.



8 답 7

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(3x-y-5)+k(x+2y-11)=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$3x-y-5=0, x+2y-11=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=3, y=4$$

따라서 항상 점 (3, 4)를 지나므로

$$a=3, b=4$$

$$\therefore a+b=7$$

9 답 ③

$ax-y+3a-1=0$ 을 a 에 대하여 정리하면

$$a(x+3)-(y+1)=0 \quad \dots\dots ①$$

이므로 직선 ①은 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(-3, -1)$ 을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 ①을 선분 AB와

한 점에서 만나도록 움직여 보면

(i) 직선 ①이 점 A(0, 3)을 지날 때

$$3a-4=0 \quad \therefore a=\frac{4}{3}$$

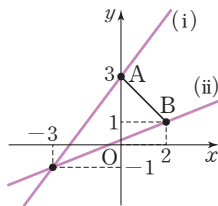
(ii) 직선 ①이 점 B(2, 1)을 지날 때

$$5a-2=0 \quad \therefore a=\frac{2}{5}$$

(i), (ii)에서 a 의 값의 범위는

$$\frac{2}{5} \leq a \leq \frac{4}{3}$$

따라서 a 의 값이 될 수 있는 것은 ③이다.



10 답 ③

두 직선 $x+y+1=0$, $3x+2y-1=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x+y+1+k(3x+2y-1)=0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수}) \quad \dots\dots ①$$

직선 ①이 점 (1, 2)를 지나므로

$$4+6k=0$$

$$\therefore k=-\frac{2}{3}$$

이를 ①에 대입하여 정리하면

$$3x+y-5=0$$

다른 풀이

$x+y+1=0$, $3x+2y-1=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=3, y=-4$$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는

$$(3, -4)$$

두 점 (3, -4), (1, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{2+4}{1-3}(x-1)$$

$$\therefore 3x+y-5=0$$

11 답 -4

두 점 A(-2, 1), B(3, 4)를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{4-1}{3-2}=\frac{3}{5}$$

따라서 이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{5}{3}$ 이다.

기울기가 $-\frac{5}{3}$ 이고 점 A를 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=-\frac{5}{3}(x+2)$$

$$\therefore y=-\frac{5}{3}x-\frac{7}{3}$$

따라서 $m=-\frac{5}{3}$, $n=-\frac{7}{3}$ 이므로

$$m+n=-4$$

12 답 ②

두 직선 $(k+3)x+2y-4=0$, $kx-2y+3=0$ 이 서로 평행하려면

$$\frac{k+3}{k}=\frac{2}{-2} \neq \frac{-4}{3}$$

$$\frac{k+3}{k}=\frac{2}{-2} \text{에서 } k+3=-k$$

$$\therefore k=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore \alpha=-\frac{3}{2}$$

두 직선이 서로 수직이 되려면

$$k(k+3)+2 \times (-2)=0$$

$$k^2+3k-4=0$$

$$(k+4)(k-1)=0$$

$$\therefore k=-4 \text{ 또는 } k=1$$

그런데 $\beta > 0$ 이므로 $\beta=1$

$$\therefore \alpha+\beta=-\frac{1}{2}$$

13 [답] ⑤

두 점 A(-3, a), B(b, 0)을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-a}{b+3}$$

직선 AB가 직선 $2x-y=0$, 즉 $y=2x$ 와 서로 수직이므로

$$\frac{-a}{b+3} \times 2 = -1$$

$$\therefore 2a-b=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+b}{2}, \frac{a}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$$\frac{a}{2} = 2 \times \frac{-3+b}{2}$$

$$\therefore a-2b=-6 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=4, b=5$$

$$\therefore ab=20$$

14 [답] ⑤

마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 직선 BD는 선분 AC의 수직이등분선이다.

직선 AC의 기울기는 $\frac{1-3}{5+1} = -\frac{1}{3}$ 이므로 직선 AC와 수직인 직선 BD의 기울기는 3이다.

선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \quad \therefore (2, 2)$$

즉, 직선 BD의 방정식은

$$y-2=3(x-2) \quad \therefore 3x-y-4=0$$

따라서 $a=3, b=-4$ 이므로

$$a-b=7$$

15 [답] -3

$2x-y=3, x+2y=-1$ 을 연립하여 풀면

$$x=1, y=-1$$

따라서 점 (1, -1)이 직선 $2x+ay=5$ 위에 있으므로

$$2-a=5 \quad \therefore a=-3$$

16 [답] -22

직선 $3x-y+5=0$, 즉 $y=3x+5$ 에 평행한 직선의 기울기는 3이므로 직선의 방정식을 $y=3x+k$ 라 하자.

$x+4y-8=0, x+y-5=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=4, y=1$$

점 (4, 1)과 직선 $y=3x+k$, 즉 $3x-y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|3 \times 4 - 1 + k|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}$$

$$|11+k|=10, 11+k=\pm 10$$

$$\therefore k=-21 \text{ 또는 } k=-1$$

즉, 두 직선의 방정식은

$$y=3x-21, y=3x-1$$

따라서 구하는 y 절편의 합은

$$-21 + (-1) = -22$$

17 [답] ④

$x+3y+10+k(2x+y)=0$ 에서

$$(1+2k)x + (3+k)y + 10 = 0$$

원점과 이 직선 사이의 거리는

$$\frac{|10|}{\sqrt{(1+2k)^2 + (3+k)^2}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$f(k)=(1+2k)^2+(3+k)^2$ 이라 하면 $f(k)$ 가 최소일 때 ①의 값이 최대가 된다.

$$f(k)=(1+2k)^2+(3+k)^2$$

$$=5k^2+10k+10$$

$$=5(k+1)^2+5$$

따라서 $k=-1$ 일 때, $f(k)$ 의 최솟값은 5이고 이때 ①의 값은

$$\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5} \text{이다.}$$

즉, $a=-1, b=2\sqrt{5}$ 이므로

$$a^2+b^2=1+20=21$$

18 [답] ②

두 직선 $x+2y+3=0, x+2y-7=0$ 이 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $x+2y+3=0$ 위의 한 점 (-3, 0)과 직선

$x+2y-7=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$$\frac{|-3-7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$$

19 [답] ①

$$AB=\sqrt{(3+2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{29}$$

직선 AB의 방정식은

$$y-1=\frac{-1-1}{3+2}(x+2)$$

$$\therefore 2x+5y-1=0$$

점 C(1, 3)과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|2+5 \times 3-1|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{16\sqrt{29}}{29}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{29} \times \frac{16\sqrt{29}}{29}=8$$

20 [답] $3x-y+4=0$

두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 P(x, y)라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x-2y+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|2x+y+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$|x-2y+3|=|2x+y+1|$$

$$x-2y+3=\pm(2x+y+1)$$

$$\therefore x+3y-2=0 \text{ 또는 } 3x-y+4=0$$

따라서 제4사분면을 지나지 않는 직선의 방정식은

$$3x-y+4=0$$

중단원 기출문제 2회

1 답 $y=x-7$

구하는 직선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$
 따라서 기울기가 1이고 점 $(5, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식은
 $y+2=x-5$
 $\therefore y=x-7$

2 답 ④

$$A\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times (-5)}{2+1}, \frac{2 \times (-1) + 1 \times 2}{2+1}\right)$$

$$\therefore A(1, 0)$$

$$B\left(\frac{3 \times (-3) + 1 \times 1}{3+1}, \frac{3 \times 7 + 1 \times 3}{3+1}\right)$$

$$\therefore B(-2, 6)$$

두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$$y = -\frac{6}{-2-1}(x-1)$$

$$\therefore y = -2x+2$$

따라서 구하는 직선의 y 절편은 2이다.

3 답 ①

직선 $\frac{x}{2} - \frac{y}{6} = 1$ 의 x 절편은 2이므로 $A(2, 0)$

직선 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ 의 y 절편은 4이므로 $B(0, 4)$

따라서 직선 AB는 x 절편이 2이고 y 절편이 4인 직선이므로 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$$

4 답 -2, 6

서로 다른 세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 한다.

즉, 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{(k+1)-3}{3-5} = \frac{-5-3}{(k+3)-5}$$

$$\frac{k-2}{-2} = \frac{-8}{k-2}$$

$$(k-2)^2 = 16, k-2 = \pm 4$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 6$$

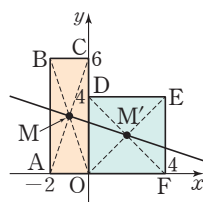
5 답 $\frac{7}{3}$

직선 $y=mx+n$ 은 직사각형과 정사각형의 넓이를 동시에 이등분하므로 직사각형의 두 대각선의 교점과 정사각형의 두 대각선의 교점을 모두 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직사각형 AOCB와 정사각형 DOFE의 두 대각선의 교점을 각각 M, M'이라 하자.

점 M은 두 점 $B(-2, 6)$, $O(0, 0)$ 을 이은 선분의 중점이므로

$$M\left(\frac{-2}{2}, \frac{6}{2}\right) \therefore M(-1, 3)$$



점 M'은 두 점 $O(0, 0)$, $E(4, 4)$ 를 이은 선분의 중점이므로

$$M'\left(\frac{4}{2}, \frac{4}{2}\right) \therefore M'(2, 2)$$

두 점 M, M'을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3 = \frac{2-3}{2+1}(x+1)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$$

따라서 $m = -\frac{1}{3}$, $n = \frac{8}{3}$ 이므로

$$m+n = \frac{7}{3}$$

6 답 ④

$a \neq 0$, $b \neq 0$ 이므로 직선 $ax+by+c=0$ 의 x 절편은 $-\frac{c}{a}$, y 절편은 $-\frac{c}{b}$ 이다.

$$ac > 0 \text{에서 } -\frac{c}{a} < 0$$

$$bc > 0 \text{에서 } -\frac{c}{b} < 0$$

따라서 주어진 직선은 x 절편과 y 절편이 모두 음수이므로 그 개형은 ④이다.

다른 풀이

$b \neq 0$ 이므로 $ax+by+c=0$ 에서

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \quad \dots\dots ①$$

$ac > 0$, $bc > 0$ 이므로

$a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ 또는 $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$

$$\therefore ab > 0$$

$ab > 0$ 에서 $-\frac{a}{b} < 0$ 이므로 직선 ①의 기울기는 음수이다.

$bc > 0$ 에서 $-\frac{c}{b} < 0$ 이므로 직선 ①의 y 절편은 음수이다.

따라서 직선 $ax+by+c=0$ 의 개형은 ④이다.

7 답 ④

주어진 식을 m 에 대하여 정리하면

$$(x+2) + m(2x+y-1) = 0 \quad \dots\dots ①$$

ㄱ. ①이 m 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+2=0, 2x+y-1=0$$

$$\therefore x = -2, y = 5$$

따라서 항상 점 $(-2, 5)$ 를 지난다.

ㄴ. $m = -\frac{1}{2}$ 을 ①에 대입하면

$$(x+2) - \frac{1}{2}(2x+y-1) = 0$$

$$\therefore y = 5$$

따라서 x 축에 평행한 직선이다.

ㄷ. $m = 0$ 을 ①에 대입하면

$$x+2=0$$

$$\therefore x = -2$$

따라서 y 축에 평행한 직선이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

8 답 ⑤

$y=mx+m+1$ 을 m 에 대하여 정리하면

$$(x+1)m-(y-1)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이므로 직선 ①은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 ①을 직선

$y=-x+2$ 와 제1사분면에서 만나도록

움직여 보면

(i) 직선 ①이 점 $(2, 0)$ 을 지날 때

$$3m+1=0$$

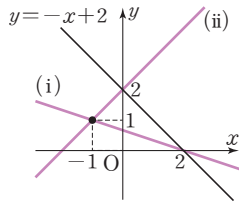
$$\therefore m=-\frac{1}{3}$$

(ii) 직선 ①이 점 $(0, 2)$ 를 지날 때

$$m-1=0 \quad \therefore m=1$$

(i), (ii)에서 m 의 값의 범위는

$$-\frac{1}{3} < m < 1$$



9 답 1

두 직선 $3x+y+4=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나는 직선 l 의 방정식은

$$3x+y+4+k(x-2y+3)=0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 ①이 점 $(1, -1)$ 을 지나므로

$$6+6k=0 \quad \therefore k=-1$$

이를 ①에 대입하여 정리하면 직선 l 의 방정식은

$$2x+3y+1=0$$

점 $(-2, a)$ 가 직선 l 위의 점이므로

$$-4+3a+1=0$$

$$\therefore a=1$$

10 답 $x-3y-7=0$

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+3+7}{3}, \frac{7-2-8}{3}\right) \quad \therefore (4, -1)$$

직선 $2x-6y+1=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}$ 에 평행한 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$

이므로 점 $(4, -1)$ 을 지나고 기울기가 $\frac{1}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y+1=\frac{1}{3}(x-4)$$

$$\therefore x-3y-7=0$$

11 답 -2

직선 AB의 기울기는

$$\frac{a+3}{3-1}=\frac{a+3}{2}$$

$a \neq 0$ 이므로 직선 $4x-ay=1$, 즉 $y=\frac{4}{a}x-\frac{1}{a}$ 의 기울기는 $\frac{4}{a}$ 이다.

두 직선이 수직이므로

$$\frac{a+3}{2} \times \frac{4}{a} = -1$$

$$2(a+3)=-a, 3a=-6$$

$$\therefore a=-2$$

12 답 ⑤

직선 $ax-y-1=0$ 이 직선 $3x+2y-1=0$ 에 수직이므로

$$3 \times a + (-1) \times 2 = 0 \quad \therefore a = \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 $ax-y-1=0$ 이 직선 $2x+by+1=0$ 에 평행하므로

$$\frac{a}{2} = \frac{-1}{b} \neq \frac{-1}{1} \quad \therefore ab = -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$\frac{2}{3}b = -2 \quad \therefore b = -3$$

$$\therefore 3a-b = 3 \times \frac{2}{3} - (-3) = 5$$

참고 $\frac{a}{2} \neq \frac{-1}{1}, \frac{-1}{b} \neq \frac{-1}{1}$ 에서 $a \neq -2, b \neq 1$

이때 $a = \frac{2}{3}, b = -3$ 은 이를 만족시킨다.

13 답 ②

두 점 A(2, 1), B(4, -3)을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-3-1}{4-2} = -2 \text{이므로 선분 AB의 수직이등분선의 기울기는 } \frac{1}{2} \text{이다.}$$

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{1-3}{2}\right) \quad \therefore (3, -1)$$

따라서 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고 점 $(3, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y+1=\frac{1}{2}(x-3)$$

$$\therefore x-2y-5=0$$

14 답 ③

주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 $2x-y=0$, $ax-y+4=0$ 이 서로 평행할 때

$$\frac{2}{a} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{4} \quad \therefore a=2$$

(ii) 두 직선 $x+y-2=0$, $ax-y+4=0$ 이 서로 평행할 때

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{4} \quad \therefore a=-1$$

(iii) 직선 $ax-y+4=0$ 이 두 직선 $2x-y=0$, $x+y-2=0$ 의 교점을 지날 때

$$2x-y=0, x+y-2=0 \text{을 연립하여 풀면}$$

$$x=\frac{2}{3}, y=\frac{4}{3}$$

직선 $ax-y+4=0$ 이 점 $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 를 지나야 하므로

$$\frac{2}{3}a - \frac{4}{3} + 4 = 0 \quad \therefore a = -4$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$2 + (-1) + (-4) = -3$$

15 답 ⑤

$(1-k)x+(2+k)y+4k-1=0$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$(x+2y-1)+k(-x+y+4)=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+2y-1=0, -x+y+4=0$$

중단원 기출문제 ①

1 답 ④

원 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$ 의 중심의 좌표가 $(-2, 3)$ 이므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$2^2 + (1-3)^2 = r^2, r^2 = 8 \quad \therefore r = \pm 2\sqrt{2}$$

그런데 $r > 0$ 이므로 $r = 2\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi$$

2 답 -12

원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-4-6}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \quad \therefore (-5, 3)$$

직선 $y = -3x + k$ 에 의하여 원의 넓이가 이등분되려면 이 직선이 원의 중심 $(-5, 3)$ 을 지나야 하므로

$$3 = -3 \times (-5) + k \quad \therefore k = -12$$

3 답 ③

원의 중심 (a, b) 가 직선 $y = 2x - 1$ 위의 점이므로

$$b = 2a - 1$$

따라서 원의 중심의 좌표가 $(a, 2a-1)$ 이므로 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-2a+1)^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 $\textcircled{1}$ 이 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$(3-a)^2 + (3-2a)^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

원 $\textcircled{1}$ 이 점 $(5, -2)$ 를 지나므로

$$(5-a)^2 + (-1-2a)^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서

$$(3-a)^2 + (3-2a)^2 = (5-a)^2 + (-1-2a)^2$$

$$\therefore a = -\frac{2}{3}$$

이를 $b = 2a - 1$ 에 대입하면 $b = -\frac{7}{3}$

$$\therefore a + b = -3$$

4 답 9π

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0 \text{에서 } (x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$$

따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 중심의 좌표가 $(2, -3)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi \times 3^2 = 9\pi$$

5 답 ②

주어진 식을 변형하면

$$\neg. (x+1)^2 + y^2 = 1 \quad \neg. x^2 + (y-3)^2 = -2$$

$$\neg. (x+2)^2 + (y+1)^2 = 4 \quad \neg. (x+2)^2 + (y+2)^2 = 0$$

따라서 보기에서 원의 방정식인 것은 $\neg, \neg$ 이다.

6 답 ①

원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓으면 이 원이 원점을 지나므로 $C = 0$

$$\therefore x^2 + y^2 + Ax + By = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 $\textcircled{1}$ 이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$16 + 4B = 0 \quad \therefore B = -4$$

원 $\textcircled{1}$ 이 점 $(3, -3)$ 을 지나므로

$$9 + 9 + 3A - 3B = 0, A - B = -6$$

$$A - (-4) = -6 \quad \therefore A = -10$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y = 0$$

7 답 ③

$$x^2 + y^2 - 8x + ky + 9 = 0 \text{에서}$$

$$(x-4)^2 + \left(y + \frac{k}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{4} + 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 $\textcircled{1}$ 의 중심 $\left(4, -\frac{k}{2}\right)$ 가 제4사분면 위에 있으므로

$$-\frac{k}{2} < 0 \quad \therefore k > 0$$

원 $\textcircled{1}$ 이 y 축에 접하므로 $\sqrt{\frac{k^2}{4} + 7} = |4|$

$$\text{양변을 제곱하면 } \frac{k^2}{4} + 7 = 16$$

$$k^2 = 36 \quad \therefore k = \pm 6$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = 6$

8 답 ④

점 $(8, 4)$ 를 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하므로 원의 중심이 제1사분면 위에 있어야 한다.

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심의 좌표는 (r, r) 이므로 원의 방정식은

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(8, 4)$ 를 지나므로

$$(8-r)^2 + (4-r)^2 = r^2$$

$$r^2 - 24r + 80 = 0, (r-4)(r-20) = 0$$

$$\therefore r = 4 \text{ 또는 } r = 20$$

따라서 두 원의 둘레의 길이의 합은

$$2\pi \times 4 + 2\pi \times 20 = 48\pi$$

9 답 2

점 $A(3, -4)$ 와 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

원의 반지름의 길이는 r 이고 선분 AP 의 길이의 최댓값이 7이므로 $5 + r = 7 \quad \therefore r = 2$

10 답 $x^2 + y^2 - 12x = 0$

$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2$ 이므로

$$2\overline{AP} = 3\overline{BP} \quad \therefore 4\overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$$

따라서 $P(x, y)$ 라 하면 점 P 가 나타내는 도형의 방정식은

$$4\{(x+3)^2 + y^2\} = 9\{(x-2)^2 + y^2\}$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 12x = 0$$

11 답 ⑤

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 + x - 5y + 1 - (x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4) = 0$$

$$3x - y + 5 = 0 \quad \therefore y = 3x + 5$$

따라서 구하는 직선의 기울기는 3이다.

12 답 ⑤

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 + k(x^2 + y^2 - 5) = 0 \quad (\text{단, } k \neq -1) \quad \dots\dots ㉠$$

원 ㉠이 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로

$$15 + 5k = 0 \quad \therefore k = -3$$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x^2 + y^2 + x - y - 6 = 0$$

따라서 $a = -1$, $b = -6$ 이므로 $a - b = 5$

13 답 $k < -2$ 또는 $k > 2$

$$x^2 + y^2 + 2y - 4 = 0 \text{에서 } x^2 + (y+1)^2 = 5$$

원의 중심 $(0, -1)$ 과 직선 $kx - y + 4 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1+4|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{5}{\sqrt{k^2 + 1}} < \sqrt{5}, \sqrt{k^2 + 1} > \sqrt{5}$$

양변을 제곱하면

$$k^2 + 1 > 5, k^2 > 4 \quad \therefore k < -2 \text{ 또는 } k > 2$$

14 답 $(x+2)^2 + y^2 = 8$

원의 중심 $(-2, 0)$ 과 직선 $x + y - 2 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2-2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$$

원과 직선이 접하려면 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이어야 한다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + y^2 = 8$$

15 답 ④

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을

$C(1, 2)$ 라 하고, 점 C에서 직선

$y = kx$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AB} = 2\overline{AH}$ 이므로 $\overline{AH}$ 의 길이가 최소일 때 $\overline{AB}$ 의 길이가 최소이다.

직각삼각형 CAH에서 $\overline{CA}$ 의 길이는

원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{3^2 - \overline{CH}^2} \quad \dots\dots ㉠$$

즉, $\overline{CH}$ 의 길이가 최대일 때, $\overline{AH}$ 의 길이가 최소이다.

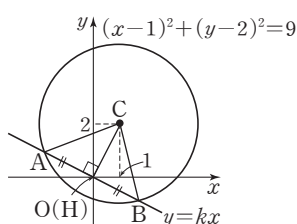
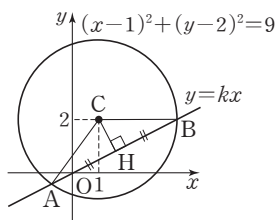
$\overline{CH}$ 의 길이가 최대일 때는 오른쪽

그림과 같이 점 H가 원점 O와 일

치할 때이므로 $\overline{CH}$ 의 길이의 최댓

값은

$$\overline{OC} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$



따라서 $\overline{AH}$ 의 길이의 최솟값은 ㉠에서 $\sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$ 이므로 $\overline{AB}$ 의 길이의 최솟값은

$$2 \times 2 = 4$$

이때 직선 OC의 기울기는 2이고 직선 AB, 즉 $y = kx$ 는 직선 OC에 수직이므로

$$k = -\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 합은 $4 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$

16 답 ④

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0 \text{에서 } (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을

C, 점 P에서 원에 그은 한 접선의

의 접점을 A라 하자.

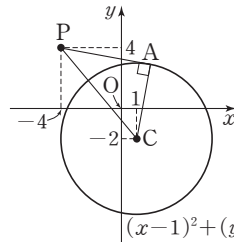
$C(1, -2)$ 이므로

$$\overline{PC} = \sqrt{(1+4)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{61}$$

직각삼각형 PCA에서 $\overline{AC}$ 의 길이는

원의 반지름의 길이와 같으므로 점 P에서 접점까지의 거리는

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{PC}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{(\sqrt{61})^2 - 5^2} = 6$$



17 답 2

원의 중심 $(3, -1)$ 과 직선 $4x + 3y + 1 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|12 - 3 + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로

$$M = 2 + \sqrt{2}, m = 2 - \sqrt{2}$$

$$\therefore Mm = 2$$

18 답 25

원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$ 이므로 기울기가 2인 접선의 방정식은

$$y = 2x \pm 2\sqrt{5} \times \sqrt{2^2 + 1} \quad \therefore y = 2x \pm 10$$

$$y = 2x + 10 \text{일 때, } A(-5, 0), B(0, 10)$$

$$y = 2x - 10 \text{일 때, } A(5, 0), B(0, -10)$$

$$\therefore \overline{OA} = 5, \overline{OB} = 10$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{1}{2} \times 5 \times 10 = 25$$

19 답 ⑤

원 $x^2 + y^2 = 17$ 위의 점 $(4, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4x + y = 17$$

20 답 ②

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 5$$

이 직선이 점 $(3, -1)$ 을 지나므로

$$3x_1 - y_1 = 5 \quad \therefore y_1 = 3x_1 - 5 \quad \dots\dots ㉠$$

한편 접점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위에 있으므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 5 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$x_1^2 + (3x_1 - 5)^2 = 5, x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0$$

$$(x_1 - 1)(x_1 - 2) = 0 \quad \therefore x_1 = 1 \text{ 또는 } x_1 = 2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$x_1 = 1, y_1 = -2 \text{ 또는 } x_1 = 2, y_1 = 1$$

즉, 접선의 방정식은 $x - 2y = 5$ 또는 $2x + y = 5$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \text{ 또는 } y = -2x + 5$$

따라서 구하는 두 접선의 기울기의 합은

$$\frac{1}{2} + (-2) = -\frac{3}{2}$$

다른 풀이

점 $(3, -1)$ 을 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y + 1 = m(x - 3) \quad \therefore mx - y - 3m - 1 = 0$$

원의 중심의 좌표가 $(0, 0)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 원과 이 직선이 접하려면

$$\frac{|-3m - 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}, |3m + 1| = \sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$(3m + 1)^2 = 5(m^2 + 1), 2m^2 + 3m - 2 = 0$$

$$(m + 2)(2m - 1) = 0 \quad \therefore m = -2 \text{ 또는 } m = \frac{1}{2}$$

따라서 구하는 두 접선의 기울기의 합은

$$-2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

중단원 기출문제 2회

1 답 $(x - 2)^2 + y^2 = 40$

직선 $y = -3x + 6$ 이 x 축, y 축과 만나는 점의 좌표는 각각

$$(2, 0), (0, 6)$$

중심의 좌표가 $(2, 0)$ 이므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x - 2)^2 + y^2 = r^2$$

이 원이 점 $(0, 6)$ 을 지나므로

$$(-2)^2 + 6^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 40$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x - 2)^2 + y^2 = 40$$

2 답 ②

선분 BC의 중점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3-5}{2}\right) \quad \therefore M(1, -1)$$

구하는 원의 방정식은 두 점 A, M을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 방정식이다.

원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+1}{2}, \frac{3-1}{2}\right) \quad \therefore (1, 1)$$

원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2} \overline{AM} = \frac{1}{2} \times |-1-3| = 2$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

3 답 ②

원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2 \quad \dots\dots ㉠$$

원 ㉠이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$(1 - a)^2 = r^2 \quad \therefore a^2 - 2a + 1 = r^2 \quad \dots\dots ㉡$$

원 ㉠이 점 $(-2, 3)$ 을 지나므로

$$(-2 - a)^2 + 9 = r^2 \quad \therefore a^2 + 4a + 13 = r^2 \quad \dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a = -2, r^2 = 9$$

따라서 원의 넓이는 9π 이다.

4 답 ②

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + k = 0 \text{에서}$$

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 10 - k \quad \dots\dots ㉠$$

원 ㉠의 중심의 좌표가 $(3, -1)$ 이므로

$$a = 3, b = -1$$

원 ㉠이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$(1 - 3)^2 + (2 + 1)^2 = 10 - k \quad \therefore k = -3$$

$$\therefore a + b + k = -1$$

5 답 $k < -1$ 또는 $k > 2$

$$x^2 + y^2 + 4kx - 2y + 4k + 9 = 0 \text{에서}$$

$$(x + 2k)^2 + (y - 1)^2 = 4k^2 - 4k - 8$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$4k^2 - 4k - 8 > 0, k^2 - k - 2 > 0$$

$$(k + 1)(k - 2) > 0 \quad \therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 2$$

6 답 ③

x 축, y 축 및 직선 $y = 2x + 4$ 로 둘러싸인 삼각형의 외접원은 세 점

$(0, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 4)$ 를 지나는 원이다.

원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓으면 이 원이 점

$(0, 0)$ 을 지나므로

$$C = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + Ax + By = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

원 ㉠이 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$4 - 2A = 0 \quad \therefore A = 2$$

원 ㉠이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$16 + 4B = 0 \quad \therefore B = -4$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$$

7 답 $12\sqrt{2}$

원의 중심의 좌표를 $(a, a + 1)$ 이라 하면 x 축에 접하는 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - a - 1)^2 = (a + 1)^2$$

이 원이 점 $(5, 3)$ 을 지나므로

$$(5 - a)^2 + (3 - a - 1)^2 = (a + 1)^2$$

$$a^2 - 16a + 28 = 0, (a - 2)(a - 14) = 0$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = 14$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 (2, 3), (14, 15)이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(14-2)^2+(15-3)^2}=12\sqrt{2}$$

8 답 4

x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.

(i) 원의 중심이 두 직선 $y=2x-3$, $y=x$ 의 교점일 때

$$2x-3=x \text{에서 } x=3 \quad \therefore y=3$$

즉, 원의 중심의 좌표는 (3, 3)이고 반지름의 길이는 3이다.

(ii) 원의 중심이 두 직선 $y=2x-3$, $y=-x$ 의 교점일 때

$$2x-3=-x \text{에서 } x=1 \quad \therefore y=-1$$

즉, 원의 중심의 좌표는 (1, -1)이고 반지름의 길이는 1이다.

(i), (ii)에서 구하는 두 원의 반지름의 길이의 합은

$$3+1=4$$

다른 풀이

원의 중심의 좌표를 $(a, 2a-3)$ 이라 하면 이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하므로

$$(\text{반지름의 길이})=|(\text{중심의 } x\text{좌표})|=|(\text{중심의 } y\text{좌표})|$$

즉, $|a|=|2a-3|$ 이므로

$$2a-3=\pm a \quad \therefore a=1 \text{ 또는 } a=3$$

따라서 두 원의 반지름의 길이는 각각 1, 3이므로 구하는 반지름의 길이의 합은

$$1+3=4$$

9 답 ①

$$x^2+y^2-8x=0 \text{에서 } (x-4)^2+y^2=16$$

이 원과 중심이 같은 원의 중심을 C(4, 0)이라 하고 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-4)^2+y^2=r^2$$

이 원이 점 (2, 2)를 지나므로

$$(2-4)^2+2^2=r^2, \quad r^2=8$$

$$\therefore r=\pm 2\sqrt{2}$$

그런데 $r>0$ 이므로 $r=2\sqrt{2}$

점 A(-3, 1)과 원의 중심 C 사이의 거리는

$$AC=\sqrt{(4+3)^2+(-1)^2}=5\sqrt{2}$$

따라서 선분 AP의 길이의 최솟값은

$$AC-r=5\sqrt{2}-2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

10 답 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$

P(a, b), G(x, y)라 하면

$$x=\frac{-2+5+a}{3}=\frac{a+3}{3}, \quad y=\frac{4+2+b}{3}=\frac{b+6}{3}$$

$$\therefore a=3x-3, \quad b=3y-6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 P(a, b)는 원 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=9$$

①을 대입하면 무게중심 G가 나타내는 도형의 방정식은

$$(3x-3)^2+(3y-6)^2=9$$

$$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=1$$

11 답 ⑤

원 C의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y-3)^2=r^2$$

$$\therefore x^2+y^2-2x-6y+10-r^2=0$$

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-2x-6y+10-r^2-(x^2+y^2-10)=0$$

$$\therefore 2x+6y+r^2-20=0$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$r^2=20 \quad \therefore r=\pm 2\sqrt{5}$$

그런데 $r>0$ 이므로 $r=2\sqrt{5}$

12 답 ②

중심이 점 (3, 2)이고 y 축에 접하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-2)^2=9$$

원의 중심 (3, 2)와 직선 $3x-4y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|9-8+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|k+1|}{5}$$

원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k+1|}{5}<3, \quad |k+1|<15$$

$$-15< k+1 < 15 \quad \therefore -16 < k < 14$$

따라서 정수 k 는 -15, -14, -13, ..., 13의 29개이다.

13 답 -1

$$x^2+y^2-4x+2y+4=0 \text{에서}$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2=1$$

이 원과 중심이 같은 원의 중심의 좌표는 (2, -1)

이때 원의 넓이가 5π 이므로 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이고, 원과 직선 $x+ky-5=0$ 이 접하려면

$$\frac{|2-k-5|}{\sqrt{1^2+k^2}}=\sqrt{5}, \quad |k+3|=\sqrt{5}\sqrt{k^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$(k+3)^2=5(k^2+1)$$

$$2k^2-3k-2=0, \quad (2k+1)(k-2)=0$$

$$\therefore k=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } k=2$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$-\frac{1}{2} \times 2 = -1$$

14 답 ②

$y=x+2k$ 를 $(x-1)^2+y^2=2$ 에 대입하면

$$(x-1)^2+(x+2k)^2=2$$

$$\therefore 2x^2+2(2k-1)x+4k^2-1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$$\frac{D}{4}=(2k-1)^2-2(4k^2-1)<0$$

$$4k^2+4k-3>0, \quad (2k+3)(2k-1)>0$$

$$\therefore k<-\frac{3}{2} \text{ 또는 } k>\frac{1}{2}$$

따라서 실수 k 의 값이 아닌 것은 ②이다.

15 답 ③

오른쪽 그림과 같이 원

$(x-1)^2+(y-1)^2=25$ 와 직선 $y=x+k$ 의 두 교점을 A, B라 하자.

또 원의 중심을 C(1, 1)이라 하고, 점 C에서 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH} = \frac{|1-1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{AB}=8 \text{이므로 } \overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB}=4$$

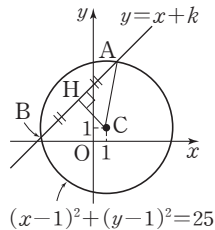
직각삼각형 CAH에서 $\overline{AC}$ 의 길이는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2 \text{에서}$$

$$5^2 = 4^2 + \left(\frac{|k|}{\sqrt{2}}\right)^2, k^2 = 18$$

$$\therefore k = \pm 3\sqrt{2}$$

따라서 양수 k 의 값은 $3\sqrt{2}$ 이다.



16 답 4

$x^2+y^2+4x-2y=11$ 에서

$$(x+2)^2+(y-1)^2=16$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을

C(-2, 1)이라 하면

$$\overline{AC} = \sqrt{(-2-2)^2+(1-a)^2} \\ = \sqrt{a^2-2a+17}$$

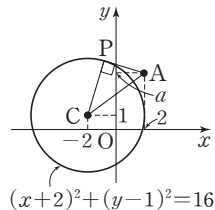
직각삼각형 CAP에서 $\overline{AP}=3$ 이고, $\overline{PC}$ 의 길이는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{AC}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PC}^2 \text{에서}$$

$$a^2-2a+17=3^2+4^2, a^2-2a-8=0$$

$$(a+2)(a-4)=0 \quad \therefore a=-2 \text{ 또는 } a=4$$

따라서 양수 a 의 값은 4이다.



17 답 ④

오른쪽 그림에서 삼각형 APB의 넓이가 최소일 때는 삼각형의 높이, 즉 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최소일 때이다. 두 점 A(0, 2), B(1, 0)을 지나는 직선 AB의 방정식은

$$y-2 = \frac{-2}{1}x \quad \therefore 2x+y-2=0$$

원의 중심 (-5, -3)과 직선 AB 사이의 거리는

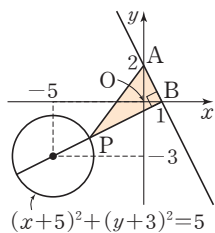
$$\frac{|-10-3-2|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 3\sqrt{5}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은

$$3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

이때 $\overline{AB} = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$ 이므로 구하는 삼각형 APB의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 5$$



18 답 $3x-y+11=0$

$x^2+y^2-2x-8y+7=0$ 에서

$$(x-1)^2+(y-4)^2=10$$

기울기가 3이고 y절편이 양수인 직선의 방정식을

$$y=3x+k, \text{ 즉 } 3x-y+k=0 (k>0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

으로 놓으면 원의 중심 (1, 4)와 직선 ① 사이의 거리는

$$\frac{|3-4+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|k-1|}{\sqrt{10}}$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$ 이므로 원과 직선 ①이 접하려면

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}, |k-1|=10$$

$$k-1 = \pm 10 \quad \therefore k=11 (\because k>0)$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$3x-y+11=0$$

19 답 16

$P(x_1, y_1)$ ($x_1>0, y_1>0$)이라 하면 점 P는 원 $x^2+y^2=16$ 위에 있으므로

$$x_1^2+y_1^2=16 \quad \therefore y_1^2=16-x_1^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편 원 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=16 \quad \therefore y = \frac{-x_1x+16}{y_1} (\because y_1 \neq 0)$$

$$\therefore f(x) = \frac{-x_1x+16}{y_1}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(-4)f(4) &= \frac{4x_1+16}{y_1} \times \frac{-4x_1+16}{y_1} \\ &= \frac{(16+4x_1)(16-4x_1)}{y_1^2} \\ &= \frac{16^2-16x_1^2}{y_1^2} \\ &= \frac{16(16-x_1^2)}{16-x_1^2} (\because \textcircled{1}) \\ &= 16 \end{aligned}$$

20 답 ①

점 (-2, 1)을 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은 $y-1=m(x+2)$

$$\therefore mx-y+2m+1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

원의 중심의 좌표가 (2, -1)이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이므로 원과 직선 ①이 접하려면

$$\frac{|2m+1+2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}$$

$$|4m+2| = \sqrt{2} \sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$(4m+2)^2 = 2(m^2+1)$$

$$7m^2+8m+1=0, (m+1)(7m+1)=0$$

$$\therefore m=-1 \text{ 또는 } m=-\frac{1}{7}$$

이를 ①에 대입하면 접선의 방정식은

$$x+y+1=0 \text{ 또는 } x+7y-5=0$$

따라서 $a=1, b=1, c=7, d=-5$ 또는 $a=7, b=-5, c=1,$

$d=1$ 이므로

$$abcd = -35$$

중단원 기출문제 ①

1 답 15

점 (3, 1)을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(3+a, 1+4) \quad \therefore (a+3, 5)$$

이 점이 점 (6, b)와 일치하므로

$$a+3=6, 5=b \quad \therefore a=3, b=5$$

$$\therefore ab=15$$

2 답 ③

점 (4, 2)를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표가 (2, 3)이라 하면

$$4+a=2, 2+b=3 \quad \therefore a=-2, b=1$$

x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동하여 점 (-1, -1)로 옮겨지는 점의 좌표를 (x , y)라 하면

$$x-2=-1, y+1=-1 \quad \therefore x=1, y=-2$$

따라서 구하는 점의 좌표는 (1, -2)이다.

3 답 ⑤

x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 옮기는 평행이동에 의하여 직선 l 이 직선 $4x-3y-18=0$ 으로 옮겨지므로 직선 $4x-3y-18=0$ 을 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 직선 l 과 일치한다.

따라서 직선 l 의 방정식은

$$4(x+2)-3(y-3)-18=0$$

$$\therefore 4x-3y-1=0$$

다른 풀이

직선 l 의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라 하면 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 직선의 방정식은

$$a(x-2)+b(y+3)+c=0$$

$$\therefore ax+by-2a+3b+c=0$$

이 직선과 직선 $4x-3y-18=0$ 이 일치하므로

$$\frac{a}{4}=\frac{b}{-3}=\frac{-2a+3b+c}{-18}$$

$$\frac{a}{4}=\frac{b}{-3} \text{에서 } b=-\frac{3}{4}a \quad \dots\dots ①$$

$$\frac{b}{-3}=\frac{-2a+3b+c}{-18} \text{에서 } b=\frac{-2a+3b+c}{6}$$

$$\therefore c=2a+3b$$

①을 대입하면

$$c=2a-\frac{9}{4}a=-\frac{1}{4}a \quad \dots\dots ②$$

①, ②을 $ax+by+c=0$ 에 대입하면

$$ax-\frac{3}{4}ay-\frac{1}{4}a=0 \quad \therefore 4x-3y-1=0 (\because a \neq 0)$$

참고

직선은 평행이동하여도 기울기가 변하지 않으므로 직선 $ax+by+c=0$ 과 직선 $4x-3y-18=0$ 은 서로 평행하다. 따라서 $a \neq 0$ 이다.

4 답 ④

$$x^2+y^2+6x+2y-6=0 \text{에서 } (x+3)^2+(y+1)^2=16 \quad \dots\dots ①$$

보기의 원을 평행이동하여 원 ①과 겹치려면 반지름의 길이가 4로 같아야 한다.

ㄱ. 원 $x^2+y^2=16$ 의 반지름의 길이는 4이다.

ㄴ. 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=9$ 의 반지름의 길이는 3이다.

ㄷ. $x^2+y^2-4x-12=0$ 에서 $(x-2)^2+y^2=16$ 이므로 이 원의 반지름의 길이는 4이다.

따라서 보기에서 평행이동하여 원 ①과 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

5 답 ①

원 $(x-3)^2+(y-1)^2=9$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a-3)^2+(y-b-1)^2=9 \quad \dots\dots ①$$

한편 $x^2+y^2-4y+c=0$ 에서

$$x^2+(y-2)^2=4-c \quad \dots\dots ②$$

①과 ②이 일치하므로

$$-a-3=0, -b-1=-2, 9=4-c$$

$$\therefore a=-3, b=1, c=-5$$

$$\therefore a+b+c=-7$$

다른 풀이

원 $(x-3)^2+(y-1)^2=9$ 의 중심의 좌표는

$$(3, 1) \quad \dots\dots ①$$

원 $x^2+y^2-4y+c=0$, 즉 $x^2+(y-2)^2=4-c$ 의 중심의 좌표는

$$(0, 2) \quad \dots\dots ②$$

점 ①을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(3+a, 1+b)$$

이 점이 점 ②과 일치하므로

$$3+a=0, 1+b=2 \quad \therefore a=-3, b=1$$

원은 평행이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않으므로

$$4-c=9 \quad \therefore c=-5$$

$$\therefore a+b+c=-7$$

6 답 17

원 $(x-1)^2+y^2=10$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-1-1)^2+(y-n)^2=10 \quad \therefore (x-2)^2+(y-n)^2=10$$

원의 중심의 좌표가 (2, n)이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 이므로 이 원이 직선 $y=3x+1$, 즉 $3x-y+1=0$ 에 접하려면

$$\frac{|6-n+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}, |n-7|=10$$

$$n-7=\pm 10 \quad \therefore n=-3 \text{ 또는 } n=17$$

따라서 양수 n 의 값은 17이다.

7 답 ⑤

주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $-2a$ 만큼 평행이동하는 것이다.

$$y=3x^2-6x-1=3(x-1)^2-4$$

이 포물선이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 포물선의 방정식은
 $y+2a=3(x-a-1)^2-4$
 $\therefore y=3(x-a-1)^2-2a-4$
 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(a+1, -2a-4)$ 이고 이 점이 직선
 $y=-3x+4$ 위에 있으므로
 $-2a-4=-3(a+1)+4$
 $-2a-4=-3a+1 \quad \therefore a=5$

8 답 ②

$A(1, -2), B(-1, 2)$ 이므로
 $AB=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

9 답 8

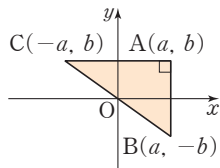
$B(a, -b), C(-a, b)$ 이고 삼각형
 ABC 의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2} \times 2|a| \times 2|b| = 6$$

$$2|ab| = 6, |ab| = 3$$

$$\therefore ab = \pm 3$$

그런데 a, b 가 정수이므로 점 A 가 될 수 있는 점은 $(1, 3), (-1, 3),$
 $(1, -3), (-1, -3), (3, 1), (-3, 1), (3, -1), (-3, -1)$ 의
 8개이다.



10 답 ③

직선 $y=ax+1$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $-y=-ax+1 \quad \therefore y=ax-1$
 이 직선이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로
 $2=a-1 \quad \therefore a=3$

11 답 ⑤

직선 $ax-3y+5=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $ax+3y+5=0 \quad \dots\dots ㉠$
 직선 $ax-3y+5=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $-ax+3y+5=0$
 $\therefore ax-3y-5=0 \quad \dots\dots ㉡$
 두 직선 ㉠과 ㉡이 서로 수직이려면
 $a \times a + 3 \times (-3) = 0$
 $a^2 = 9 \quad \therefore a = \pm 3$
 따라서 모든 상수 a 의 값의 곱은
 $-3 \times 3 = -9$

12 답 0

$x^2+y^2+4x-2y-4=0$ 에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=9$
 이 원을 y 축에 대하여 대칭이동한 원 C_1 의 방정식은
 $(-x+2)^2+(y-1)^2=9 \quad \therefore (x-2)^2+(y-1)^2=9$
 원 C_1 을 원점에 대하여 대칭이동한 원 C_2 의 방정식은
 $(-x-2)^2+(-y-1)^2=9 \quad \therefore (x+2)^2+(y+1)^2=9$
 따라서 원 C_2 의 중심의 좌표는 $(-2, -1)$, 반지름의 길이는 3이므로
 $a=-2, b=-1, c=3$
 $\therefore a+b+c=0$

13 답 ①

$x^2+y^2-4x+2y+3=0$ 에서 $(x-2)^2+(y+1)^2=2$
 이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
 $(-x-2)^2+(-y+1)^2=2$
 $\therefore (x+2)^2+(y-1)^2=2$
 $y=2$ 를 대입하면
 $(x+2)^2+(2-1)^2=2 \quad \therefore x^2+4x+3=0$
 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 두 점의 x 좌
 표의 합은 -4 이다.

14 답 ③

포물선 $y=-x^2+2ax-2$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방
 정식은
 $-y=-x^2+2ax-2 \quad \therefore y=x^2-2ax+2$
 포물선 $y=x^2-2ax+2=(x-a)^2+2-a^2$ 의 꼭짓점의 좌표는
 $(a, 2-a^2)$
 이 점이 직선 $y=-3x+2$ 위에 있으므로
 $2-a^2=-3a+2, a^2-3a=0$
 $a(a-3)=0 \quad \therefore a=0$ 또는 $a=3$
 따라서 양수 a 의 값은 3이다.

15 답 5

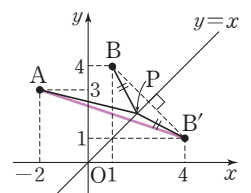
점 $(-6, 2)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
 $(2, -6)$
 이 점을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한
 점의 좌표는
 $(2-3, -6+1) \quad \therefore (-1, -5)$
 따라서 $a=-1, b=-5$ 이므로
 $ab=5$

16 답 11

주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼
 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 직선 $3x-y+a+1=0$
 이 옮겨지는 직선의 방정식은
 $3(x-2)-(y+1)+a+1=0 \quad \therefore 3x-y+a-6=0$
 이 직선을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $-3x-y+a-6=0 \quad \therefore 3x+y-a+6=0 \quad \dots\dots ㉠$
 $x^2+y^2-4x+2y=0$ 에서 $(x-2)^2+(y+1)^2=5 \quad \dots\dots ㉡$
 직선 ㉠이 원 ㉡의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(2, -1)$ 을 지나
 야 하므로
 $6-1-a+6=0 \quad \therefore a=11$

17 답 $2\sqrt{10}$

점 $B(1, 4)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭
 이동한 점을 B' 이라 하면
 $B'(4, 1)$
 $\therefore \overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P}$
 $\geq \overline{AB'}$
 $= \sqrt{6^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10}$
 따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{10}$ 이다.



18 답 ④

방정식 $f(-x, -y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.
따라서 방정식 $f(-x, -y)=0$ 이 나타내는 도형은 ④이다.

19 답 1

$$x^2 + y^2 + 2kx - 2y - 2 = 0 \text{에서}$$

$$(x+k)^2 + (y-1)^2 = k^2 + 3$$

이 원의 중심 $(-k, 1)$ 을 점 $(2, -3)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 $(2, -3)$ 은 두 점 $(-k, 1)$, (a, b) 를 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{-k+a}{2} = 2, \frac{1+b}{2} = -3$$

$$\therefore a = 4+k, b = -7$$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표는 $(4+k, -7)$ 이고, 원은 대칭이동하여도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 그 방정식은

$$(x-4-k)^2 + (y+7)^2 = k^2 + 3$$

이 원이 점 $(5, -5)$ 를 지나므로

$$(5-4-k)^2 + (-5+7)^2 = k^2 + 3$$

$$-2k+2=0 \quad \therefore k=1$$

20 답 ⑤

두 점 $(-3, 2)$, $(b, 4)$ 를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+b}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{b-3}{2}, 3\right)$$

이 점이 직선 $y = -3x + a$ 위에 있으므로

$$3 = -3 \times \frac{b-3}{2} + a \quad \therefore 2a - 3b = -3 \quad \dots\dots ㉠$$

두 점 $(-3, 2)$, $(b, 4)$ 를 지나는 직선과 직선 $y = -3x + a$ 가 서로 수직이므로

$$\frac{2}{b+3} \times (-3) = -1 \quad \therefore b=3$$

이를 ㉠에 대입하면

$$2a - 9 = -3 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore a+b=6$$

중단원 기출문제 2회

1 답 (4, -3)

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 P를 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(a-3, b+2)$$

이 점이 점 $(1, -1)$ 과 일치하므로

$$a-3=1, b+2=-1$$

$$\therefore a=4, b=-3$$

따라서 점 P의 좌표는 $(4, -3)$ 이다.

2 답 21

도형을 평행이동하여도 그 모양은 변하지 않으므로 삼각형 $O'P'Q'$ 이 정삼각형이면 삼각형 OPQ 도 정삼각형이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 점 Q에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{OP}=4$ 이므로

$$\overline{OH} = \frac{1}{2} \overline{OP} = 2, \overline{QH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{OP} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore Q(2, 2\sqrt{3})$$

점 Q를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향

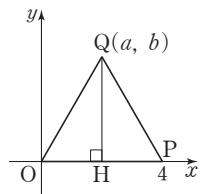
으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(2+m, 2\sqrt{3}+n)$$

이 점이 점 $Q'(5, 4\sqrt{3})$ 과 일치하므로

$$2+m=5, 2\sqrt{3}+n=4\sqrt{3} \quad \therefore m=3, n=2\sqrt{3}$$

$$\therefore m^2+n^2=9+12=21$$



3 답 ④

직선 $y=3x+n-1$ 을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-3=3(x+1)+n-1 \quad \therefore y=3x+n+5$$

이 직선이 직선 $y=3x+9$ 와 일치하므로

$$n+5=9 \quad \therefore n=4$$

4 답 ②

포물선 $y=x^2+4x+5$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-n=(x-m)^2+4(x-m)+5$$

$$\therefore y=x^2+(-2m+4)x+m^2-4m+5+n$$

이 포물선과 포물선 $y=x^2+6x+13$ 이 일치하므로

$$-2m+4=6, m^2-4m+5+n=13$$

$$\therefore m=-1, n=3$$

$$x^2+y^2-4y-9=0 \text{에서 } x^2+(y-2)^2=13$$

이 원을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-3-2)^2=13 \quad \therefore (x+1)^2+(y-5)^2=13$$

따라서 C $(-1, 5)$ 이므로

$$\overline{OC} = \sqrt{(-1)^2+5^2} = \sqrt{26}$$

다른 풀이

포물선 $y=x^2+4x+5=(x+2)^2+1$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 1)$

포물선 $y=x^2+6x+13=(x+3)^2+4$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(-3, 4)$

즉, 주어진 평행이동은 점 $(-2, 1)$ 을 점 $(-3, 4)$ 로 옮기는 평행이동이다.

점 $(-2, 1)$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-3, 4)$ 라 하면

$$-2+m=-3, 1+n=4 \quad \therefore m=-1, n=3$$

$$x^2+y^2-4y-9=0 \text{에서 } x^2+(y-2)^2=13$$

이 원의 중심 $(0, 2)$ 를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점이 점 C이므로

$$C(0-1, 2+3) \quad \therefore C(-1, 5)$$

$$\therefore \overline{OC} = \sqrt{(-1)^2+5^2} = \sqrt{26}$$

5 답 16

원 $x^2+y^2=4$ 의 중심은 $O(0, 0)$ 이므로
오른쪽 그림과 같이 점 O 에서 직선
 $3x+4y-6=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라
하면

$$\overline{OH} = \frac{|-6|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{6}{5}$$

직각삼각형 OBH 에서

$$\overline{BH} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \frac{8}{5}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{BH} = \frac{16}{5}$$

$$x^2+y^2-6x-8y+21=0 \text{에서 } (x-3)^2+(y-4)^2=4$$

즉, 원 C_2 의 중심의 좌표는 $(3, 4)$ 이므로 원 C_2 는 원 C_1 을 x 축의 방
향으로 3만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이고, 점 C 는 점
 A 가 이 평행이동에 의하여 옮겨진 점이다.

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

또 직선 AC 의 기울기는 $\frac{4}{3}$ 이므로 직선 $3x+4y-6=0$, 즉

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \text{에 수직이다.}$$

이때 선분 AB 와 호 AB 로 둘러싸인 부분의 넓이와 선분 CD 와 호
 CD 로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는 직사각
형 $ABDC$ 의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \frac{16}{5} \times 5 = 16$$

6 답 $y=x-2$

$P(-1, -3)$, $Q(3, 1)$ 이므로 두 점 P , Q 를 지나는 직선의 방정식은

$$y+3 = \frac{1+3}{3+1}(x+1)$$

$$\therefore y = x-2$$

7 답 ①

점 $(a+3, 4)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
 $(4, a+3)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
 $(-4, -a-3)$

이 점이 점 $(b, -4)$ 와 일치하므로

$$-4=b, -a-3=-4 \quad \therefore a=1, b=-4$$

$$\therefore ab=-4$$

8 답 $(2, 3)$

$Q(6, -3)$, $R(3, 6)$ 이므로 삼각형 PQR 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-3+6+3}{3}, \frac{6-3+6}{3}\right) \quad \therefore (2, 3)$$

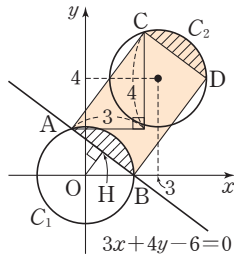
9 답 ③

ㄱ. 직선 $y=-x$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=x \quad \therefore y=-x$$

ㄴ. 포물선 $y=x^2+1$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y=x^2+1 \quad \therefore y=-x^2-1$$



ㄷ. 원 $x^2+y^2+4x=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은
 $x^2+y^2-4x=0$

ㄹ. 도형 $|x+y|=4$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은
 $|-x-y|=4 \quad \therefore |x+y|=4$

따라서 보기에서 대칭이동한 도형이 처음 도형과 일치하는 것은 ㄱ,
ㄹ이다.

10 답 24

직선 $3x-2y+p=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방
정식은

$$3y-2x+p=0 \quad \therefore 2x-3y-p=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

원 $(x-1)^2+(y+3)^2=13$ 의 중심의 좌표가 $(1, -3)$ 이고 반지름
의 길이가 $\sqrt{13}$ 이므로 직선 $\textcircled{1}$ 이 이 원에 접하려면

$$\frac{|2+9-p|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \sqrt{13}$$

$$|p-11|=13, p-11=\pm 13$$

$$\therefore p=-2 \text{ 또는 } p=24$$

따라서 양수 p 의 값은 24이다.

11 답 ①

중심이 점 $(-1, k)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-k)^2=4$$

이 원을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(-y-k)^2=4$$

$$\therefore (x+1)^2+(y+k)^2=4$$

이 원이 점 $(-3, -4)$ 를 지나므로

$$(-3+1)^2+(-4+k)^2=4$$

$$(-4+k)^2=0 \quad \therefore k=4$$

12 답 ④

포물선 $y=x^2+ax+b$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정
식은

$$-y=x^2-ax+b \quad \therefore y=-x^2+ax-b$$

포물선 $y=-x^2+ax-b=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-b$ 의 꼭짓점의 좌표는

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}-b\right)$$

이 점이 점 $(5, 8)$ 과 일치하므로

$$\frac{a}{2}=5, \frac{a^2}{4}-b=8 \quad \therefore a=10, b=17$$

$$\therefore b-a=7$$

13 답 $a < \frac{3}{4}$

포물선 $y=x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y=x^2 \quad \therefore y=-x^2$$

이 포물선을 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-a=-x^2 \quad \therefore y=-x^2+a$$

이 포물선이 직선 $y=x+1$ 과 만나지 않으려면 이차방정식

$-x^2+a=x+1$, 즉 $x^2+x-a+1=0$ 의 판별식을 D 라 할 때,

$$D=1^2-4(-a+1)<0$$

$$4a-3<0 \quad \therefore a<\frac{3}{4}$$

14 답 (0, 5)

점 A(3, 2)를 y축에 대하여 대칭이동한 점을

A'이라 하면

A'(-3, 2)

$$\therefore \overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{A'B}$$

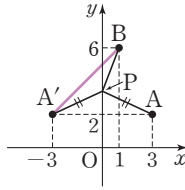
즉, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최솟값을 갖는 점 P는 직선

A'B와 y축의 교점이다.

직선 A'B의 방정식은

$$y-2 = \frac{6-2}{1+3}(x+3) \quad \therefore y = x+5$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 (0, 5)이다.



15 답 $4\sqrt{2}$

점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'

이라 하면

A'(-1, -3)

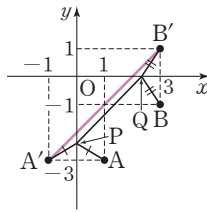
점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'

이라 하면

B'(3, 1)

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} &= \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \\ &\geq \overline{A'B'} \\ &= \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{2}$ 이다.



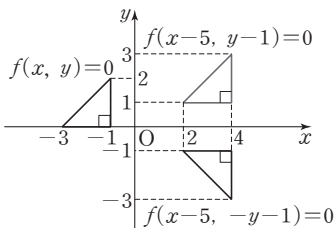
16 답 ③

방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x-5, y-1)=0$$

이 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(x-5, -y-1)=0$$



$$\therefore g(x, y) = f(x-5, -y-1)$$

17 답 0

두 점 (a, 2), (4, b)를 이은 선분의 중점의 좌표가 (1, 2)이므로

$$\frac{a+4}{2}=1, \frac{2+b}{2}=2$$

$$\therefore a=-2, b=2$$

$$\therefore a+b=0$$

18 답 ③

포물선 $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$ 의 꼭짓점의 좌표는

(-1, -4)

포물선 $y=-x^2+6x-1=-(x-3)^2+8$ 의 꼭짓점의 좌표는

(3, 8)

따라서 점 (α, β) 는 두 점 (-1, -4), (3, 8)을 이은 선분의 중점

이므로

$$\alpha = \frac{-1+3}{2}=1, \beta = \frac{-4+8}{2}=2$$

$$\therefore \alpha - \beta = -1$$

19 답 ③

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0 \text{에서}$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$$

이 원의 중심의 좌표는 (-1, 3)

원 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$ 의 중심의 좌표는 (2, 2)

두 점 (-1, 3), (2, 2)를 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{3+2}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

두 점 (-1, 3), (2, 2)를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{2-3}{2+1} = -\frac{1}{3}$$

이 직선과 직선 l은 서로 수직이므로 직선 l의 기울기는 3이다.

따라서 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 를 지나고 기울기가 3인 직선 l의 방정식은

$$y - \frac{5}{2} = 3\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore 3x - y + 1 = 0$$

20 답 $\frac{15}{2}$

점 Q의 좌표를 (a, b)라 하면 선분 OQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로

$$\frac{b}{2} = \frac{a}{2} - 1 \quad \therefore b = a - 2 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

직선 OQ와 직선 $y=x-1$ 은 서로 수직이므로

$$\frac{b}{a} \times 1 = -1 \quad \therefore b = -a \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=1, b=-1$$

$$\therefore Q(1, -1)$$

점 R의 좌표를 (c, d)라 하면 선분 PR의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{c}{2}, \frac{3+d}{2}\right)$$

이 점이 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로

$$\frac{3+d}{2} = \frac{c}{2} - 1 \quad \therefore c - d = 5 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

직선 PR와 직선 $y=x-1$ 은 서로 수직이므로

$$\frac{d-3}{c} \times 1 = -1 \quad \therefore c + d = 3 \quad \cdots \textcircled{㉣}$$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

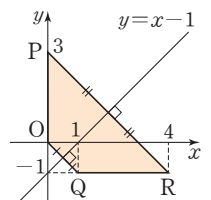
$$c=4, d=-1$$

$$\therefore R(4, -1)$$

따라서 오른쪽 그림에서 사각형 OQRP의

넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{15}{2}$$



05 / 집합의 뜻과 집합 사이의 포함 관계

26~31쪽

중단원 기출문제 ①

1 답 ②

①, ③, ④, ⑤ '착한', '소질이 있는', '잘하는', '큰'은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

2 답 ⑤

집합 A 의 원소는 2, 3, 5, 7이므로

⑤ $9 \notin A$

3 답 ③

4 답 14

$x \in A$, $x \notin B$ 를 만족시키는 x 는 2, 4이다.

$x=2$ 이면 $2x+1=5$

$x=4$ 이면 $2x+1=9$

$\therefore C = \{5, 9\}$

따라서 집합 C 의 모든 원소의 합은

$5+9=14$

5 답 ④

① $\{1, 2, 3, 4, \dots\} \rightarrow$ 무한집합

② $\{1, 3, 5, 7, \dots\} \rightarrow$ 무한집합

③ $\{2, 4, 6, 8, \dots\} \rightarrow$ 무한집합

④ $\{5, 10, 15, 20, \dots, 95\} \rightarrow$ 유한집합

⑤ $\{3, 6, 9, 12, \dots\} \rightarrow$ 무한집합

따라서 유한집합인 것은 ④이다.

6 답 ①

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 이므로

$n(A)=5$, $n(B)=6$

$\therefore n(A)+n(B)=11$

7 답 6

$x \in A$, $y \in A$ 인 x, y 에 대하여 xy 의 값

을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$B = \{1, 3, 5, 9, 15, 25\}$

$\therefore n(B)=6$

$x \backslash y$	1	3	5
1	1	3	5
3	3	9	15
5	5	15	25

8 답 ③

$A = \{1, 3, 7, 21\}$ 이므로

① $4 \notin A$ ② $7 \in A$ ④ $\{3, 7\} \subset A$ ⑤ $\{7, 14, 21\} \not\subset A$

따라서 옳은 것은 ③이다.

9 답 ③

③ $\{1, 2\}$ 는 집합 A 의 원소이므로 $\{1, 2\} \in A$

10 답 ②

$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로

$A \subset C \subset B$

11 답 0

$A \subset B$ 가 성립하도록 두 집합 A, B 를

수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과

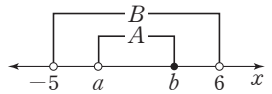
같으므로

$a \geq -5$, $b < 6$

따라서 정수 a 의 최솟값은 -5 , 정수 b 의 최댓값은 5이므로 구하는

합은

$-5+5=0$



12 답 1

$A \subset B$ 이면 $-2 \in A$ 에서 $-2 \in B$ 이므로

$a-3=-2$ 또는 $a=-2$ 또는 $a+1=-2$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=-2$ 또는 $a=1$

(i) $a=-3$ 일 때

$A = \{-2, 1, 8\}$, $B = \{-6, -3, -2, 0\}$ 이므로 $A \not\subset B$

(ii) $a=-2$ 일 때

$A = \{-2, 1, 3\}$, $B = \{-5, -2, -1, 0\}$ 이므로 $A \not\subset B$

(iii) $a=1$ 일 때

$A = \{-2, 0, 1\}$, $B = \{-2, 0, 1, 2\}$ 이므로 $A \subset B$

(i), (ii), (iii)에서 $a=1$

따라서 $B = \{-2, 0, 1, 2\}$ 이므로 집합 B 의 모든 원소의 합은

$-2+0+1+2=1$

13 답 ③

$A=B$ 이면 $2 \in B$ 에서 $2 \in A$ 이므로

$a=2$ 또는 $3a+1=2$

$\therefore a=2$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

그런데 a 는 자연수이므로 $a=2$

$\therefore A = \{2, 4, 7, 9\}$

또 $A=B$ 이면 $7 \in A$ 에서 $7 \in B$ 이므로

$3b-2=7 \quad \therefore b=3$

$\therefore ab=6$

14 답 ③

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이므로 $A=B$

$5 \in B$ 에서 $5 \in A$ 이므로 $a=5$

$20 \in A$ 에서 $20 \in B$ 이므로

$a+b=20 \quad \therefore b=15$

$\therefore a-b=-10$

15 답 ④

$A = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$ 이므로 $n(A)=6$

따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는

$2^6=64$

16 답 255

집합 X 의 개수는 집합 A 의 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^3=8$$

따라서 집합 $P(A)$ 의 원소의 개수가 8이므로 진부분집합의 개수는

$$2^8-1=256-1=255$$

17 답 ④

집합 A 의 부분집합 중에서 a, b 는 반드시 원소로 갖고 f 는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{7-2-1}=2^4=16$$

18 답 ④

$$x^2-4x+3=0 \text{에서 } (x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

$$\therefore A=\{1, 3\}$$

이때 $B=\{1, 3, 5, 15, 25, 75\}$ 이고, 집합 X 의 개수는 집합 B 의 부분집합 중에서 1, 3을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{6-2}=2^4=16$$

19 답 31

(가), (나)에서 집합 A 의 원소는 36의 양의 약수이어야 한다.

이때 36의 양의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36이고, (나)에서 1과 36, 2와 18, 3과 12, 4와 9는 둘 중 하나가 집합 A 의 원소이면 나머지 하나도 집합 A 의 원소이다.

즉, 집합 A 의 원소가 될 수 있는 것은

1, 36 또는 2, 18 또는 3, 12 또는 4, 9 또는 6

따라서 구하는 집합 A 의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 6\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^5-1=32-1=31$$

20 답 9

모든 원소의 합이 짝수이려면 부분집합의 원소 중 홀수는 2개이어야 한다.

홀수 1, 3, 5 중에서 2개를 택하는 경우는

1, 3 또는 1, 5 또는 3, 5

(i) 1, 3을 택하는 경우

집합 A 의 부분집합 중에서 1, 3은 반드시 원소로 갖고 5는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{5-2-1}=2^2=4$$

이때 원소가 2개 이하인 부분집합 $\{1, 3\}$ 을 제외해야 하므로

$$4-1=3$$

(ii) 1, 5를 택하는 경우

집합 A 의 부분집합 중에서 1, 5는 반드시 원소로 갖고 3은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{5-2-1}=2^2=4$$

이때 원소가 2개 이하인 부분집합 $\{1, 5\}$ 를 제외해야 하므로

$$4-1=3$$

(iii) 3, 5를 택하는 경우

집합 A 의 부분집합 중에서 3, 5는 반드시 원소로 갖고 1은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{5-2-1}=2^2=4$$

이때 원소가 2개 이하인 부분집합 $\{3, 5\}$ 를 제외해야 하므로

$$4-1=3$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 부분집합의 개수는

$$3+3+3=9$$

중단원 기출문제 2회

1 답 ④

④ ‘좋아하는’은 기준이 명확하지 않아 그 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

2 답 ③

① 2는 정수이고, 정수는 유리수에 포함되므로 $2 \in Q$

② $i^2=-1$ 이고, -1 은 자연수가 아니므로 $i^2 \notin N$

③ $\frac{1}{5}$ 은 유리수이고, 유리수는 실수에 포함되므로 $\frac{1}{5} \in R$

④ $\frac{1}{2}$ 은 정수가 아닌 유리수이므로 $\frac{1}{2} \notin Z$

⑤ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 은 무리수이고, 무리수는 실수에 포함되므로 $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in R$
따라서 옳은 것은 ③이다.

3 답 56

k 의 값이 될 수 있는 자연수는 26, 27, 28, 29, 30이므로 자연수 k 의 최댓값은 30, 최솟값은 26이다.

따라서 구하는 합은

$$30+26=56$$

4 답 0

$$A=\{i, -1, -i, 1\}$$

$z_1 \in A, z_2 \in A$ 인 z_1, z_2 에 대하여

$z_1 z_2$ 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로

$$B=\{i, -1, -i, 1\}$$

따라서 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$i+(-1)+(-i)+1=0$$

$z_1 \backslash z_2$	i	-1	$-i$	1
i	-1	$-i$	1	i
-1	$-i$	1	i	-1
$-i$	1	i	-1	$-i$
1	i	-1	$-i$	1

5 답 ②

① $\{1, 2, 3, 6\} \Rightarrow$ 유한집합

② $\{2, 4, 6, 8, \dots\} \Rightarrow$ 무한집합

③ $\{11, 13, 15, 17, \dots, 99\} \Rightarrow$ 유한집합

④ $\{-2, 4\} \Rightarrow$ 유한집합

⑤ $\{-2, -1, 0, 1, 2\} \Rightarrow$ 유한집합

따라서 무한집합인 것은 ②이다.

6 답 ⑤

$A = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로 $n(A) = 4$
 $B = \{1, 2, 3, 4, \dots, k-1\}$ 이므로 $n(B) = k-1$
 이때 $n(A) + n(B) = 12$ 이므로
 $4 + (k-1) = 12 \quad \therefore k = 9$

7 답 ②

$x \in A, y \in B$ 인 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로
 $C = \{2, 3, 4, 5, a+1, a+2\}$
 이때 $n(C) = 5$ 가 되려면
 $a+1 = 5 \quad \therefore a = 4$

$x \backslash y$	1	2
1	2	3
2	3	4
3	4	5
a	$a+1$	$a+2$

8 답 ⑤

⑤ $\{a, b\}$ 는 집합 A 의 원소이므로 $\{a, b\} \in A$

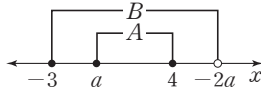
9 답 ④

$x \in A, y \in A$ 인 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 값을 구하면 오른쪽 표와 같으므로
 $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
 이때 $C = \{0\}$ 이므로
 $C \subset A \subset B$

$x \backslash y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

10 답 $-3 \leq a < -2$

$A \subset B$ 가 성립하도록 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
 $a \geq -3, 4 < -2a$
 $\therefore -3 \leq a < -2$



11 답 2

$A \subset B$ 이면 $0 \in A$ 에서 $0 \in B$ 이므로
 $a-2=0$ 또는 $a=0$ 또는 $a+1=0$
 $\therefore a = -1$ 또는 $a=0$ 또는 $a=2$
 (i) $a = -1$ 일 때
 집합 A 에서 $a^2-1=0$ 이므로 성립하지 않는다.
 (ii) $a=0$ 일 때
 $A = \{-1, 0, 2\}, B = \{-2, -1, 0, 1\}$ 이므로 $A \not\subset B$
 (iii) $a=2$ 일 때
 $A = \{0, 2, 3\}, B = \{-1, 0, 2, 3\}$ 이므로 $A \subset B$
 (i), (ii), (iii)에서 $a=2$

12 답 ⑤

$A = B$ 이면 $7 \in A, 4 \in B$ 에서 $7 \in B, 4 \in A$ 이므로
 $3a-2b=7, a+b=4$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a=3, b=1$
 $\therefore a-b=2$

13 답 -1

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이므로 $A=B$
 $-2 \in A, a \in A$ 에서 $-2 \in B, a \in B$
 따라서 $-2, a$ 는 이차방정식 $x^2+x+b=0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $-2+a=-1, -2a=b$
 $\therefore a=1, b=-2$
 $\therefore a+b=-1$

14 답 15

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로 집합 A 의 진부분집합의 개수는
 $2^4-1=16-1=15$

15 답 20

집합 A 의 부분집합 중에서 0을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는
 $2^{5-1}=2^4=16 \quad \therefore a=16$
 집합 A 의 부분집합 중에서 1, 2는 반드시 원소로 갖고 4는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는
 $2^{5-2-1}=2^2=4 \quad \therefore b=4$
 $\therefore a+b=20$

16 답 ③

② 원소가 1개인 집합 A 의 부분집합은 $\{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ 의 4개이다.
 ③ 원소가 2개인 집합 A 의 부분집합은 $\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}$ 의 6개이다.
 ④ 원소가 3개인 집합 A 의 부분집합은 $\{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{3, 4, 5\}$ 의 4개이다.
 ⑤ 원소가 4개인 집합 A 의 부분집합은 $\{2, 3, 4, 5\}$ 의 1개이다.
 따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

17 답 9

집합 A_k 중에서 2를 반드시 원소로 갖는 집합은 $\{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{2, n\}$ 의 4개이다.
 같은 방법으로 하면 3, 5, 6, n 을 반드시 원소로 갖는 집합도 각각 4개이므로
 $a_1+a_2+a_3+\dots+a_{10}=4(2+3+5+6+n)$
 $=4n+64$
 즉, $4n+64=100$ 이므로
 $n=9$

18 답 ②

$A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}, B = \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로 (가), (나)에서 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 2, 3, 5, 7을 반드시 원소로 갖는 부분집합에서 두 집합 A, B 를 제외하면 된다.
 따라서 구하는 집합 X 의 개수는
 $2^{10-4}-2=2^6-2=64-2=62$

19 답 56

집합 A 의 부분집합 중에서 적어도 1개의 소수를 원소로 갖는 부분집합은 집합 A 의 부분집합에서 집합 $\{1, 4, 6\}$ 의 부분집합을 제외하면 된다.

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$$2^6 - 2^3 = 64 - 8 = 56$$

20 답 230

원소가 3개 이상인 부분집합에서 가장 큰 원소가 될 수 있는 것은 3, 4, 5, 6이다.

(i) 가장 큰 원소가 3일 때

$\{1, 2, 3\}$ 의 1개

(ii) 가장 큰 원소가 4일 때

집합 A 의 부분집합 중에서 4는 반드시 원소로 갖고 5, 6은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-1-2} = 2^3 = 8$$

이때 원소가 2개 이하인 부분집합 $\{4\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$ 를 제외해야 하므로

$$8 - 4 = 4$$

(iii) 가장 큰 원소가 5일 때

집합 A 의 부분집합 중에서 5는 반드시 원소로 갖고 6은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-1-1} = 2^4 = 16$$

이때 원소가 2개 이하인 부분집합 $\{5\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$ 를 제외해야 하므로

$$16 - 5 = 11$$

(iv) 가장 큰 원소가 6일 때

집합 A 의 부분집합 중에서 6을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$$2^{6-1} = 2^5 = 32$$

이때 원소가 2개 이하인 부분집합 $\{6\}$, $\{1, 6\}$, $\{2, 6\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 6\}$, $\{5, 6\}$ 을 제외해야 하므로

$$32 - 6 = 26$$

(i)~(iv)에서 구하는 값은

$$3 \times 1 + 4 \times 4 + 5 \times 11 + 6 \times 26 = 230$$

06 / 집합의 연산

32~37쪽

중단원 기출문제 ①회

1 답 7

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$ 이므로 집합 $A \cup B$ 의 원소의 개수는 7이다.

2 답 ④

② $\{2, 4, 6, 8\}$

③ $\{2, 3, 5, 7\}$

④ $\{1, 3, 5, 15\}$

⑤ $\{1, 4\}$

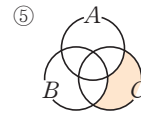
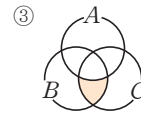
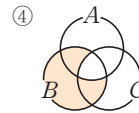
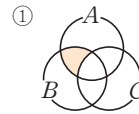
따라서 집합 $\{2, 4, 6, 8\}$ 과 서로소인 집합은 ④이다.

3 답 ⑤

$A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로

⑤ $A - B = \{1\}$

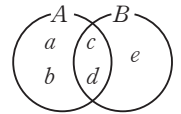
4 답 ②



5 답 $\{c, d, e\}$

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$B = \{c, d, e\}$



6 답 ①

$A - B = \{6\}$ 에서 $3 \in B$, $2a + b \in B$ 이므로

$$a + b = 3, 2a + b = 7$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 4, b = -1$$

$$\therefore a - b = 5$$

7 답 2

$A \cap B = \{1, 2\}$ 에서 $2 \in A$ 이므로

$$a^2 - a = 2, a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a+1)(a-2) = 0 \quad \therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

(i) $a = -1$ 일 때

$A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{-2, 2, 4\}$ 이므로

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = 2$ 일 때

$A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 2, 7\}$ 이므로

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

(i), (ii)에서 $a = 2$

8 답 ③

③ $B - A = \emptyset$

9 답 16

$$A \cup X = X \text{에서 } A \subset X$$

$$B \cap X = X \text{에서 } X \subset B$$

$$\therefore A \subset X \subset B$$

따라서 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중에서 2, 4, 6을 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로 집합 X 의 개수는

$$2^{7-3} = 2^4 = 16$$

10 답 ③

$$\begin{aligned} (A^c - B)^c \cap B^c &= (A^c \cap B^c)^c \cap B^c \\ &= (A \cup B) \cap B^c \\ &= (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c) \\ &= (A - B) \cup \emptyset \\ &= A - B \end{aligned}$$

11 답 ⑤

$$\begin{aligned} (A - B^c) \cup (B^c - A^c) &= \{A \cap (B^c)^c\} \cup \{B^c \cap (A^c)^c\} \\ &= (A \cap B) \cup (B^c \cap A) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \\ &= A \cap (B \cup B^c) \\ &= A \cap U \\ &= A \end{aligned}$$

즉, $A = A \cap B$ 이므로 $A \subset B$

① $B^c \subset A^c$

② $A \cap B = A$

③ $A \cup B = B$

④ $B - A \neq B$

⑤ $A \cap B^c = A - B = \emptyset$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

12 답 25

$$A \cap B^c = A - B = \{1, 5\}$$

$$(A \cap B)^c = U - (A \cap B) = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$$
이므로

$$A \cap B = \{3, 7, 9\}$$

$$\therefore A = (A - B) \cup (A \cap B) = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

따라서 집합 A 의 모든 원소의 합은

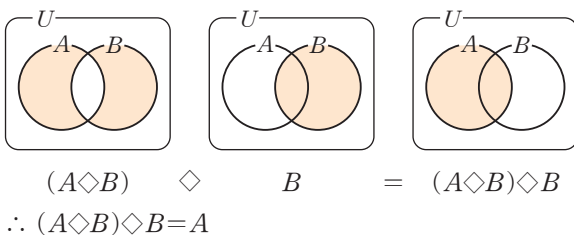
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

13 답 ③

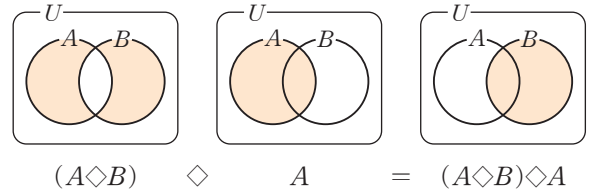
$$\begin{aligned} A \diamond B &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

$$\neg, A \diamond A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \emptyset$$

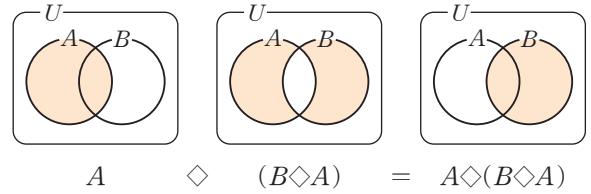
ㄴ. $(A \diamond B) \diamond B$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면



ㄷ. $(A \diamond B) \diamond A$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면



$A \diamond (B \diamond A)$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면



$$\therefore (A \diamond B) \diamond A = A \diamond (B \diamond A)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

14 답 ⑤

$$(A_3 \cup A_6) \cap (A_4 \cup A_{12}) = A_3 \cap A_4 = A_{12}$$

15 답 {0}

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \text{에서 } (x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2 \quad \therefore A = \{1, 2\}$$

이때 $A - B = \{2\}$ 에서 $1 \in B$

따라서 $x^2 - ax - a + 1 = 0$ 의 한 근이 1이므로

$$1 - a - a + 1 = 0, 2a = 2 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore B = \{x \mid x^2 - x = 0\}$$

$$x^2 - x = 0 \text{에서 } x(x-1) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1 \quad \therefore B = \{0, 1\}$$

$$\therefore B - A = \{0\}$$

16 답 2

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) \text{이므로}$$

$$4 = 18 - n(A \cup B) \quad \therefore n(A \cup B) = 14$$

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B) \text{에서}$$

$$14 = 5 + 7 + n(A \cap B) \quad \therefore n(A \cap B) = 2$$

17 답 ②

$$n((A \cup B) - (A \cap B)) = n(A - B) + n(B - A)$$

$$= n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$$

이므로

$$35 = 28 + 37 - 2 \times n(A \cap B) \quad \therefore n(A \cap B) = 15$$

$$\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 28 + 37 - 15 = 50$$

18 답 ①

야구를 좋아하는 학생의 집합을 A , 배구를 좋아하는 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(A) = 11, n(B) = 8, n(A \cap B) = 4$$

야구 또는 배구를 좋아하는 학생의 집합은 $A \cup B$ 이므로

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 11 + 8 - 4 = 15$$

따라서 구하는 학생 수는 15이다.

19 답 7

선우네 반 학생 전체의 집합을 U , 속초에 가 본 학생의 집합을 A , 부산에 가 본 학생의 집합을 B , 광주에 가 본 학생의 집합을 C 라 하면
 $n(U)=40, n(A)=15, n(B)=16, n(C)=22,$
 $n(A \cap B \cap C)=3$

이때 한 곳도 가 보지 않은 학생은 없으므로

$$n(A \cup B \cup C) = n(U) = 40$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

에서

$$40 = 15 + 16 + 22 - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + 3$$

$$\therefore n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) = 16$$

따라서 세 곳 중 두 곳만 가 본 학생 수는

$$n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3 \times n(A \cap B \cap C) \\ = 16 - 3 \times 3 = 7$$

20 답 ④

(i) $n(A \cap B)$ 가 최대인 경우는 $B \subset A$ 일 때이므로

$$M = n(B) = 12$$

(ii) $n(A \cap B)$ 가 최소인 경우는 $n(A \cup B)$ 가 최대일 때이므로

$$A \cup B = U \quad \therefore n(A \cup B) = n(U) = 24$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) \text{에서}$$

$$m = 16 + 12 - 24 = 4$$

(i), (ii)에서 $M - m = 12 - 4 = 8$

중단원 기출문제 2회

1 답 ④

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$$

$$B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9\}$$

$$\therefore A \cap B = \{1, 2, 4, 5, 6, 9\}$$

따라서 집합 $A \cap B$ 의 원소의 개수는 6이다.

2 답 ③

$A = \{1, 3, 9\}$ 이므로 집합 U 의 부분집합 중에서 집합 A 와 서로소인 집합은 1, 3, 9를 원소로 갖지 않는 부분집합이다.

따라서 구하는 집합의 개수는

$$2^{6-3} = 2^3 = 8$$

3 답 15

$A^c = \{1, 3, 5\}$ 이므로 집합 A^c 의 모든 원소의 곱은

$$1 \times 3 \times 5 = 15$$

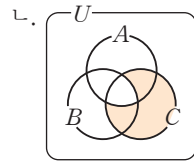
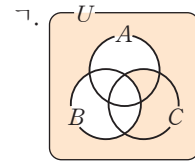
4 답 8

$$A = \{2, 4, 6, 8, \dots, 50\}, B = \{3, 6, 9, 12, \dots, 48\}$$

$$\therefore A - (A \cap B) = A \cap B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$$

따라서 구하는 원소의 개수는 8이다.

5 답 ⑤

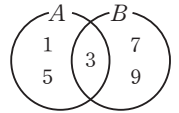


따라서 보기에서 색칠한 부분을 나타내는 집합인 것은 $\complement(A \cap B \cap C)$ 이다.

6 답 ④

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$A = \{1, 3, 5\}$$



7 답 ⑤

$A - B = \{2\}$ 에서 $2 \in A$ 이므로

$$a = 2 \text{ 또는 } a + 2 = 2 \quad \therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 2$$

(i) $a = 0$ 일 때

$$A = \{0, 2, 3\}, B = \{3, 5, 6\} \text{이므로 } A - B = \{0, 2\}$$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = 2$ 일 때

$$A = \{2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5\} \text{이므로 } A - B = \{2\}$$

(i), (ii)에서 $a = 2$

따라서 $B = \{3, 4, 5\}$ 이므로 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$3 + 4 + 5 = 12$$

8 답 ⑤

$(A - B) \cup (B - A) = \{5, 9\}$ 이고, $a + 2 \neq a + 7, a^2 + 1 \neq a^2$ 이므로

$$a + 2 = a^2 \text{ 또는 } a^2 + 1 = a + 7$$

$$a^2 - a - 2 = 0 \text{에서 } (a + 1)(a - 2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

$$a^2 - a - 6 = 0 \text{에서 } (a + 2)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 3$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = -1 \text{ 또는 } a = 2 \text{ 또는 } a = 3$$

(i) $a = -2$ 일 때

$$A = \{0, 5\}, B = \{4, 5\} \text{이므로 } (A - B) \cup (B - A) = \{0, 4\}$$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = -1$ 일 때

$$A = \{1, 2\}, B = \{1, 6\} \text{이므로 } (A - B) \cup (B - A) = \{2, 6\}$$

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a = 2$ 일 때

$$A = \{4, 5\}, B = \{4, 9\} \text{이므로 } (A - B) \cup (B - A) = \{5, 9\}$$

(iv) $a = 3$ 일 때

$$A = \{5, 10\}, B = \{9, 10\} \text{이므로 } (A - B) \cup (B - A) = \{5, 9\}$$

(i)~(iv)에서 $a = 2$ 또는 $a = 3$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$2 + 3 = 5$$

9 답 ③

$$A \cap B = A \text{이므로 } A \subset B$$

$$\textcircled{3} A - B = \emptyset$$

10 [답] ④

$$A^c \cap B = B - A = \emptyset \text{이므로 } B \subset A$$

$$\therefore B - A = \emptyset$$

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

11 [답] ②

$$A - X = \emptyset \text{이므로 } A \subset X$$

$$B \cap X^c = B - X = B \text{이므로 } B \cap X = \emptyset$$

따라서 집합 X 는 집합 U 의 부분집합 중에서 1, 3, 5, 7은 반드시 원소로 갖고 4, 8은 원소로 갖지 않는 부분집합이므로 집합 X 의 개수는

$$2^{8-4-2} = 2^2 = 4$$

12 [답] ⑤

$$\begin{aligned} A - \{(A-B) \cup (B^c-A)\} &= A - \{(A \cap B^c) \cup (B^c \cap A^c)\} \\ &= A - \{(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B^c)\} \\ &= A - \{(A \cup A^c) \cap B^c\} \\ &= A - (U \cap B^c) \\ &= A - B^c \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

13 [답] ③

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (A^c \cup B)^c &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \\ &= A \cap (B \cup B^c) \\ &= A \cap U \\ &= A \end{aligned}$$

즉, $A = A \cup B$ 이므로 $B \subset A$

$$\textcircled{1} B - A = \emptyset$$

$$\textcircled{2} A \cup B = A$$

$$\textcircled{4} A \cup B^c = U$$

$$\textcircled{5} (A \cap B)^c = B^c$$

따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

14 [답] 12

$$\begin{aligned} (A^c \cap B)^c &= A \cup B^c \\ &= \{2, 3, 6\} \cup \{1, 2\} \\ &= \{1, 2, 3, 6\} \end{aligned}$$

따라서 집합 $(A^c \cap B)^c$ 의 모든 원소의 합은

$$1+2+3+6=12$$

15 [답] ③

$$\textcircled{1} A * A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \emptyset$$

$$\textcircled{2} A * \emptyset = (A \cup \emptyset) - (A \cap \emptyset) = A - \emptyset = A$$

$$\textcircled{3} A * U = (A \cup U) - (A \cap U) = U - A = A^c$$

$$\textcircled{4} A * A^c = (A \cup A^c) - (A \cap A^c) = U - \emptyset = U$$

$$\textcircled{5} A^c * B^c = (A^c \cup B^c) - (A^c \cap B^c)$$

$$= (A^c \cup B^c) \cap (A^c \cap B^c)^c$$

$$= (A \cap B)^c \cap (A \cup B)$$

$$= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$$

$$= (A \cup B) - (A \cap B) = A * B$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

16 [답] 3

$$\begin{aligned} A_{12} \cap A_{18} \cap A_{27} &= (A_{12} \cap A_{18}) \cap A_{27} \\ &= A_6 \cap A_{27} = A_3 \end{aligned}$$

따라서 구하는 k 의 값은 3이다.

17 [답] ②

$$x^2 - 3x - 4 > 0 \text{에서 } (x+1)(x-4) > 0$$

$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 4$$

$$\therefore A = \{x \mid x < -1 \text{ 또는 } x > 4\}$$

$$\text{이때 } A \cup B = \{x \mid x \text{는 모든 실수}\},$$

$$A \cap B = \{x \mid 4 < x \leq 5\} \text{이므로 옳은}$$

쪽 그림에서

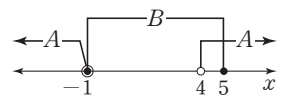
$$B = \{x \mid -1 \leq x \leq 5\}$$

$$= \{x \mid (x+1)(x-5) \leq 0\}$$

$$= \{x \mid x^2 - 4x - 5 \leq 0\}$$

따라서 $a = -4$, $b = -5$ 이므로

$$b - a = -1$$



18 [답] ④

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B - A) \\ &= 31 + 25 = 56 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore n((A \cup B)^c) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 70 - 56 = 14 \end{aligned}$$

19 [답] 1

학생 전체의 집합을 U , 연극을 좋아하는 학생의 집합을 A , 뮤지컬을 좋아하는 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 30, n(A) = 14, n(B) = 12, n((A \cup B)^c) = 5$$

$$n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) \text{에서}$$

$$5 = 30 - n(A \cup B)$$

$$\therefore n(A \cup B) = 25$$

연극과 뮤지컬을 모두 좋아하는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이므로

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 14 + 12 - 25 = 1$$

따라서 구하는 학생 수는 1이다.

20 [답] 150

학생 전체의 집합을 U , 수학 문제 A를 푼 학생의 집합을 A , 수학 문제 B를 푼 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 400, n(A \cap B) = 50, n(A) = \frac{1}{2} \times n(B)$$

이때 $n(A) = x$ 라 하면

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= x + 2x - 50$$

$$= 3x - 50$$

$n(A)$ 가 최대인 경우는 $A \cup B = U$ 일 때이므로

$$3x - 50 = 400$$

$$\therefore x = 150$$

따라서 수학 문제 A를 푼 학생 수의 최댓값은 150이다.

중단원 기출문제 ①

1 답 ①

- ① x 의 값이 정해져 있지 않아 참, 거짓을 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.
 ②, ③, ⑤ 참인 명제이다.
 ④ 거짓인 명제이다.
 따라서 명제가 아닌 것은 ①이다.

2 답 ③

' $(a-b)(b-c)=0$ '의 부정은 ' $(a-b)(b-c) \neq 0$ '이므로
 $a \neq b$ 이고 $b \neq c$

3 답 ④

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로 조건 p 의 진리집합은
 $\{1, 2, 3, 4, 6\}$
 따라서 조건 p 의 진리집합의 원소의 개수는 5이다.

4 답 ④

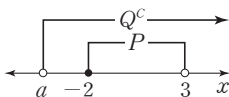
- ① $x = -1$ 이면 $(-1)^2 + (-1) = 0$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
 ② $p: |x|=1, q: x^2=1$ 이라 하고 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{-1, 1\}, Q = \{-1, 1\}$
 따라서 $P=Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
 ③ $p: |x| < 1, q: x^2 < 1$ 이라 하고 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{x | -1 < x < 1\}, Q = \{x | -1 < x < 1\}$
 따라서 $P=Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
 ④ [반례] $x=9$ 이면 x 는 3의 배수이지만 6의 배수는 아니다.
 ⑤ ' $p: x$ 가 4의 양의 약수이다.', ' $q: x$ 가 8의 양의 약수이다.'라 하고
 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{1, 2, 4\}, Q = \{1, 2, 4, 8\}$
 따라서 $P \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
 따라서 거짓인 명제는 ④이다.

5 답 ①

$P \cup Q = Q$ 에서 $P \subset Q$ 이므로 $P \cap Q = P$
 $(P \cap Q) - R = P - R = P$ 이므로 $P \cap R = \emptyset$
 ① $P \cap R = \emptyset$ 에서 $P \subset R^c$ 이므로 명제 $p \rightarrow \sim r$ 는 참이다.

6 답 $a < -2$

$q: x \leq a$ 에서 $\sim q: x > a$
 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{x | -2 \leq x < 3\}, Q^c = \{x | x > a\}$
 이때 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이 되려면
 $P \subset Q^c$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서
 $a < -2$



7 답 ②

$U = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여

- ① [반례] $x=0$ 이면 $x^2=0$ 이다.
 ② $p: x^2=x$ 라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면
 $P = \{0, 1\}$
 따라서 $P \neq \emptyset$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
 ③ [반례] $x=0$ 이면 $|x|=x$ 이다.
 ④ [반례] $x=1$ 이면 $x+2=3$ 이다.
 ⑤ $p: x-1 \geq 1$ 이라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면 $P = \emptyset$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
 따라서 참인 명제는 ②이다.

8 답 ⑤

' $a+b+c > 0$ '의 부정은 ' $a+b+c \leq 0$ '
 ' a, b, c 중 적어도 하나는 양수이다.'의 부정은
 ' a, b, c 는 모두 양수가 아니다.'
 따라서 주어진 명제의 대우는
 ' a, b, c 가 모두 양수가 아니면 $a+b+c \leq 0$ 이다.'

9 답 -5

주어진 명제가 참이므로 그 대우 ' $x=1$ 이면 $x^2+ax+4=0$ 이다.'도 참이다.

$x=1$ 을 $x^2+ax+4=0$ 에 대입하면
 $1+a+4=0 \quad \therefore a=-5$

10 답 ③

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.
 또 명제 $r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우 $q \rightarrow \sim r$ 도 참이다.
 이때 두 명제 $r \rightarrow \sim q, \sim q \rightarrow \sim p$ 가 모두 참이므로 명제
 $r \rightarrow \sim p$ 가 참이고 그 대우 $p \rightarrow \sim r$ 도 참이다.
 따라서 항상 참인 명제는 ③이다.

11 답 ②

- ① $p \rightarrow q$: 거짓
 [반례] $x=-1$ 이면 $x^2=1$ 이지만 $x \neq 1$ 이다.
 $q \rightarrow p$: 참
 따라서 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
 ② $p \rightarrow q$: 참
 $q \rightarrow p$: 거짓
 [반례] $x=-1$ 이면 $x \geq -1$ 이지만 $-1 < x < 2$ 가 아니다.
 따라서 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
 ③ $p \rightarrow q$: 거짓
 [반례] $x=-6$ 이면 $x^2+5x-6=0$ 이지만 $x \neq 1$ 이다.
 $q \rightarrow p$: 참
 따라서 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
 ④ $p \rightarrow q$: 거짓
 [반례] $x=1, y=-1$ 이면 $x+y=0$ 이지만 $x \neq 0, y \neq 0$ 이다.

$$q \rightarrow p: \text{참}$$

따라서 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

$$\textcircled{5} p \rightarrow q: \text{거짓}$$

[반례] $x=1, y=-1$ 이면 $|x|=|y|$ 이지만 $x \neq y$ 이다.

$$q \rightarrow p: \text{참}$$

따라서 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

따라서 p 가 q 이기 위한 충분조건인 것은 ②이다.

12 답 ①

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$

$$\therefore \sim p \Rightarrow \sim q$$

q 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow \sim r$

$$\therefore r \Rightarrow \sim q$$

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ①이다.

13 답 ④

p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로

$$p \Rightarrow \sim q \quad \therefore P \subset Q^c$$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

14 답 -4

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \text{에서 } (x-1)(x-3) = 0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$P = \{1, 3\}$$

$$x+a=0 \text{에서 } x=-a$$

조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면

$$Q = \{-a\}$$

이때 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되려면 $Q \subset P$ 이어야 하므로

$$-a=1 \text{ 또는 } -a=3 \quad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=-3$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$-3 + (-1) = -4$$

15 답 (가) 유리수 (나) 유리수 (다) 무리수

$\sqrt{2}+1$ 이 유리수라 가정하면

$$\sqrt{2}+1=a \text{ (} a \text{는 (가) 유리수)}$$

로 나타낼 수 있다.

$$\text{이때 } \sqrt{2}=a-1 \text{이고 } a, 1 \text{은 모두 유리수이므로 } a-1 \text{은 (나) 유리수}$$

이다.

이는 $\sqrt{2}$ 가 (다) 무리수라는 사실에 모순이다.

16 답 (가) $\frac{3}{4}b^2$ (나) 0

$$a^2 + b^2 - ab = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\text{가} \frac{3}{4}b^2\right)$$

이때 a, b 가 실수이므로

$$\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0, \left(\text{가} \frac{3}{4}b^2\right) \geq 0$$

따라서 $a^2 + b^2 - ab \geq 0$ 이므로

$$a^2 + b^2 \geq ab$$

이때 등호는 $a - \frac{b}{2} = 0, \frac{3}{4}b^2 = 0$, 즉 $a = b = \text{(나) } 0$ 일 때 성립한다.

17 답 ②

$x > 0, y > 0$ 에서 $5x > 0, 2y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$5x + 2y \geq 2\sqrt{5x \times 2y} = 2\sqrt{10xy}$$

이때 $5x + 2y = 10$ 이므로

$$10 \geq 2\sqrt{10xy}, \sqrt{10xy} \leq 5 \text{ (단, 등호는 } 5x = 2y \text{일 때 성립)}$$

양변을 제곱하면

$$10xy \leq 25 \quad \therefore xy \leq \frac{5}{2}$$

따라서 구하는 최댓값은 $\frac{5}{2}$ 이다.

18 답 ①

$x \neq 0$ 이므로 $\frac{x}{x^2 + 2x + 25}$ 의 분모와 분자를 각각 x 로 나누면

$$\frac{x}{x^2 + 2x + 25} = \frac{1}{x + 2 + \frac{25}{x}}$$

이때 $x > 0$ 에서 $\frac{25}{x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x + 2 + \frac{25}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{25}{x}} + 2$$

$$= 12 \text{ (단, 등호는 } x = \frac{25}{x}, \text{ 즉 } x = 5 \text{일 때 성립)}$$

따라서 $x + 2 + \frac{25}{x}$ 의 최솟값은 12이고, $\frac{1}{x + 2 + \frac{25}{x}}$ 은 분모가 최소

일 때 최대이므로 구하는 최댓값은 $\frac{1}{12}$ 이다.

19 답 5

x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\{2^2 + (-1)^2\}(x^2 + y^2) \geq (2x - y)^2$$

이때 $2x - y = -5$ 이므로

$$5(x^2 + y^2) \geq 25$$

$$\therefore x^2 + y^2 \geq 5 \text{ (단, 등호는 } 2y = -x \text{일 때 성립)}$$

따라서 구하는 최솟값은 5이다.

20 답 36 m^2

직각삼각형의 빗변이 아닌 두 변의 길이를 $x \text{ m}, y \text{ m}$ 라 하면

$$x^2 + y^2 = 144$$

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 y^2} = 2xy \text{ (} \because xy > 0 \text{)}$$

$$144 \geq 2xy \quad \therefore xy \leq 72 \text{ (단, 등호는 } x = y \text{일 때 성립)}$$

이때 직각삼각형의 넓이를 $S \text{ m}^2$ 라 하면

$$S = \frac{1}{2}xy \leq 36$$

따라서 구하는 밭의 넓이의 최댓값은 36 m^2 이다.

중단원 기출문제 2회

1 답 0

보기에서 명제는 $\neg, \wedge$ 이고, 조건은 $\supset, \vee$ 이므로

$$a=2, b=2 \quad \therefore a-b=0$$

2 답 {-2}

$$x^2 - x - 6 = 0 \text{에서 } (x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$P = \{-2, 3\}$$

$$x^2 - 4 \leq 0 \text{에서 } (x+2)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 2$$

조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면

$$Q = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

따라서 조건 ' p 그리고 q '의 진리집합은 $P \cap Q$ 이므로

$$P \cap Q = \{-2\}$$

3 답 3

$$p: xy < 0 \text{에서 } \sim p: xy \geq 0$$

$$\sim p \rightarrow q: \text{거짓}$$

[반례] $x=0, y=0$ 이면 $xy \geq 0$ 이지만 $x^2 + y^2 = 0$ 이다.

$$\therefore f(\sim p, q) = 1$$

조건 p, r 의 진리집합을 각각 P, R 라 하면

$$P = \{(x, y) | x > 0, y < 0 \text{ 또는 } x < 0, y > 0\}$$

$$R = \{(x, y) | x > 0, y < 0 \text{ 또는 } x < 0, y > 0\}$$

따라서 $P=R$ 이므로 명제 $p \rightarrow r$ 는 참이다.

$$\therefore f(p, r) = 2$$

$$\therefore f(\sim p, q) + f(p, r) = 3$$

4 답 ⑤

$$\sim p \rightarrow q \text{가 참이므로 } P^c \subset Q$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} P^c \subset Q, Q^c \subset P \quad \textcircled{3} P^c \cap Q = P^c \quad \textcircled{4} P \cap Q^c = Q^c$$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

5 답 3

$$x^2 \leq 2x + 15 \text{에서 } x^2 - 2x - 15 \leq 0$$

$$(x+3)(x-5) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq x \leq 5$$

조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$P = \{x | -3 \leq x \leq 5\}$$

$$q: |x-a| > 5 \text{에서 } \sim q: |x-a| \leq 5$$

$$|x-a| \leq 5 \text{에서 } -5 \leq x-a \leq 5 \quad \therefore a-5 \leq x \leq a+5$$

조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면

$$Q^c = \{x | a-5 \leq x \leq a+5\}$$

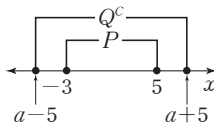
명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q^c$ 이

어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$a-5 \leq -3, a+5 \geq 5$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 2$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2의 3개이다.



6 답 ①

주어진 명제가 거짓이 되려면 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2 + 8x + 2k - 3 > 0 \text{이어야 한다.}$$

이차방정식 $x^2 + 8x + 2k - 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4^2 - (2k - 3) < 0$$

$$-2k + 19 < 0 \quad \therefore k > \frac{19}{2}$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 10이다.

7 답 ⑤

① 역: x 가 4의 배수이면 x 는 2의 배수이다. (참)

② 역: $1 < x < 2$ 이면 $x^2 - x - 2 < 0$ 이다. (참)

③ 역: $x=0$ 이면 $x^2=3x$ 이다. (참)

④ 역: $x^2 < 1$ 이면 $x < 1$ 이다. (참)

⑤ 역: xy 가 홀수이면 x 또는 y 는 짝수이다. (거짓)

[반례] $x=1, y=3$ 이면 xy 는 홀수이지만 x, y 가 모두 홀수이다.

따라서 그 역이 거짓인 명제는 ⑤이다.

8 답 6

주어진 명제가 참이므로 그 대우 ' $x > -1$ 이고 $y > a$ 이면 $x+y > 5$ 이다.'도 참이다.

$$x > -1, y > a \text{에서 } x+y > a-1 \text{이므로}$$

$$a-1 \geq 5 \quad \therefore a \geq 6$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 6이다.

9 답 ⑤

명제 $p \rightarrow r$ 가 참이므로 그 대우 $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

또 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참이므로 그 대우 $\sim q \rightarrow p$ 도 참이다.

이때 두 명제 $\sim r \rightarrow \sim p, \sim p \rightarrow q$ 가 모두 참이므로 명제

$\sim r \rightarrow q$ 가 참이고 그 대우 $\sim q \rightarrow r$ 도 참이다.

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ⑤이다.

10 답 ④

$$\neg. p \rightarrow q: \text{거짓}$$

[반례] $x=0$ 이면 $x^2 - 3x = 0$ 이지만 $x \neq 3$ 이다.

$$q \rightarrow p: \text{참}$$

따라서 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

$$\neg. p \rightarrow q \text{와 } q \rightarrow p \text{가 모두 참이므로 } p \Leftrightarrow q$$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

$$\neg. p \rightarrow q: \text{거짓}$$

[반례] $A = \{1, 2\}, B = \{1\}, C = \{2\}$ 이면

$$A \cup C = B \cup C \text{이지만 } (A \cup B) \not\subset C \text{이다.}$$

$$q \rightarrow p: \text{참}$$

따라서 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

따라서 보기에서 p 가 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 $\neg.$, $\neg$ 이다.

11 답 ④

$$Q - P = \emptyset \text{에서 } Q \subset P$$

$$P^c \cup R = P^c \text{에서 } R \subset P^c \quad \therefore P \subset R^c$$

$\neg.$ $Q \subset P$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

$\neg.$ $P \subset R^c$ 이므로 p 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이다.

$$\neg. Q \subset P, P \subset R^c \text{에서 } Q \subset R^c$$

즉, $R \subset Q^c$ 이므로 $\sim q$ 는 r 이기 위한 필요조건이다.

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 $\neg.$, $\neg$ 이다.

12 답 2

$$x^2+x-2 \leq 0 \text{에서 } (x+2)(x-1) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 1$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

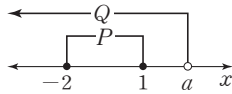
$$P = \{x \mid -2 \leq x \leq 1\}, Q = \{x \mid x < a\}$$

이때 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되려면

$P \subset Q$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$$a > 1$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 2이다.



13 답 풀이 참조

주어진 명제의 대우 '자연수 x, y, z 에 대하여 x, y, z 가 모두 홀수이면 $x^2+y^2 \neq z^2$ 이다.'가 참임을 보이면 된다.

x, y 가 모두 홀수이면 $x=2k-1, y=2l-1$ (k, l 은 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$$x^2+y^2=(2k-1)^2+(2l-1)^2$$

$$=4k^2-4k+4l^2-4l+2$$

$$=2(2k^2-2k+2l^2-2l+1)$$

이때 $2k^2-2k+2l^2-2l+1$ 은 자연수이므로 x^2+y^2 은 짝수이다.

또 z 가 홀수이면 $z=2m-1$ (m 은 자연수)로 나타낼 수 있으므로

$$z^2=(2m-1)^2=4m^2-4m+1=2(2m^2-2m)+1$$

이때 $2m^2-2m$ 은 0 또는 자연수이므로 z^2 은 홀수이다.

따라서 x^2+y^2 은 짝수이고, z^2 은 홀수이므로 $x^2+y^2 \neq z^2$ 이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

14 답 ⑤

$$\neg. [반례] x=y \text{이면 } x(x-y)=y(x-y)$$

$$\neg. (|x|+|y|)^2-|x-y|^2$$

$$=(|x|^2+2|x||y|+|y|^2)-(x-y)^2$$

$$=(x^2+2|xy|+y^2)-(x^2-2xy+y^2)$$

$$=2(|xy|+xy) \geq 0 \quad (\because |xy| \geq -xy)$$

그런데 $|x|+|y| \geq 0, |x-y| \geq 0$ 이므로

$$|x|+|y| \geq |x-y| \quad (\text{단, 등호는 } |xy|=-xy \text{ 일 때 성립})$$

$$\neg. x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$$

$$=\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} \geq 0$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$$

따라서 보기에서 절대부등식인 것은 $\neg, \neg$ 이다.

15 답 ④

$a > 0, b > 0$ 에서 $3a > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$3a+b \geq 2\sqrt{3a \times b} = 2\sqrt{3ab}$$

이때 $ab=27$ 이므로

$$3a+b \geq 2\sqrt{3 \times 27} = 18 \quad (\text{단, 등호는 } 3a=b \text{ 일 때 성립})$$

따라서 구하는 최솟값은 18이다.

16 답 ②

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{6}{ab} \quad (\because a+b=6) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

이때 $a+b=6$ 이므로

$$6 \geq 2\sqrt{ab}, \sqrt{ab} \leq 3 \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

양변을 제곱하면 $ab \leq 9$ 이므로

$$\frac{1}{ab} \geq \frac{1}{9} \quad \therefore \frac{6}{ab} \geq \frac{2}{3}$$

따라서 ①에서 구하는 최솟값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

17 답 ④

$a > 0, b > 0$ 에서 $ab > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(a + \frac{2}{b}\right)\left(b + \frac{8}{a}\right) = ab + 8 + 2 + \frac{16}{ab}$$

$$\geq 2\sqrt{ab \times \frac{16}{ab}} + 10$$

$$= 18 \quad (\text{단, 등호는 } ab=4 \text{ 일 때 성립})$$

따라서 구하는 최솟값은 18이다.

18 답 ⑤

$x > 5$ 에서 $x-5 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+4 + \frac{25}{x-5} = x-5 + \frac{25}{x-5} + 9$$

$$\geq 2\sqrt{(x-5) \times \frac{25}{x-5}} + 9 = 19$$

$$\therefore m=19$$

이때 등호는 $x-5 = \frac{25}{x-5}$ 일 때 성립하므로

$$(x-5)^2=25, x-5=5 \quad (\because x-5 > 0) \quad \therefore x=10$$

$$\therefore n=10$$

$$\therefore m+n=29$$

19 답 ①

a, b 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^2\right\}(a^2+b^2) \geq \left(\frac{a}{2} + 2b\right)^2$$

이때 $a^2+b^2=4$ 이므로

$$\frac{17}{4} \times 4 \geq \left(\frac{a}{2} + 2b\right)^2, \left(\frac{a}{2} + 2b\right)^2 \leq 17$$

$$\therefore -\sqrt{17} \leq \frac{a}{2} + 2b \leq \sqrt{17} \quad (\text{단, 등호는 } \frac{b}{2}=2a \text{ 일 때 성립})$$

따라서 최댓값은 $\sqrt{17}$, 최솟값은 $-\sqrt{17}$ 이므로 그 곱은

$$-\sqrt{17} \times \sqrt{17} = -17$$

20 답 20

직사각형의 대각선의 길이가 $2\sqrt{5}$ 이므로

$$(2a)^2+b^2=(2\sqrt{5})^2 \quad \therefore 4a^2+b^2=20$$

사각기둥의 모든 모서리의 길이의 합은 $4a+4b$

a, b 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(2^2+4^2)\{(2a)^2+b^2\} \geq (4a+4b)^2$$

이때 $4a^2+b^2=20$ 이므로

$$20 \times 20 \geq (4a+4b)^2, (4a+4b)^2 \leq 20^2$$

$$\therefore -20 \leq 4a+4b \leq 20 \quad (\text{단, 등호는 } b=4a \text{ 일 때 성립})$$

이때 $a > 0, b > 0$ 이므로

$$0 < 4a+4b \leq 20$$

따라서 구하는 최댓값은 20이다.

중단원 기출문제 ①

1 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

정의역의 각 원소 k 에 대하여 y 축에 평행한 직선 $x=k$ 와 오직 한 점에서 만나는 그래프는 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

2 답 ③

$$x^2 + 4x - 2 = 0 \text{을 풀면 } x = -2 \pm \sqrt{6}$$

이때 α, β 는 무리수이고, $\alpha\beta$ 는 유리수이므로

$$f(\alpha) = \alpha^2, f(\beta) = \beta^2, f(\alpha\beta) = \alpha\beta$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -4, \alpha\beta = -2$$

$$\begin{aligned} \therefore f(\alpha) + f(\beta) + f(\alpha\beta) &= \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta \\ &= (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta \\ &= (-4)^2 - (-2) = 18 \end{aligned}$$

3 답 {1, 3, 5}

$$X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \text{이므로}$$

$$f(-2)=5, f(-1)=3, f(0)=1, f(1)=1, f(2)=3, f(3)=5$$

따라서 함수 f 의 치역은 $\{1, 3, 5\}$

4 답 -1

주어진 식의 양변에 $a=0, b=0$ 을 대입하면

$$f(0+0)=f(0)+f(0)$$

$$\therefore f(0)=0$$

주어진 식의 양변에 $a=-2, b=2$ 를 대입하면

$$f(-2+2)=f(-2)+f(2)$$

$$0=f(-2)+1$$

$$\therefore f(-2)=-1$$

5 답 -1

$$f(0)=g(0) \text{에서 } b=-1$$

$$f(1)=g(1) \text{에서 } a+b=0 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore ab=-1$$

6 답 ④

① 상수함수이므로 일대일대응이 아니다.

② $-1 \neq 1$ 이지만 $f(-1)=f(1)=0$ 이므로 일대일대응이 아니다.

③ $-1 \neq 0$ 이지만 $f(-1)=f(0)=0$ 이므로 일대일대응이 아니다.

⑤ $-1 \neq 0$ 이지만 $f(-1)=f(0)=-1$ 이므로 일대일대응이 아니다.

따라서 일대일대응인 것은 ④이다.

7 답 -6

함수 f 가 일대일대응이라면 x 의 값이 증가할 때, $f(x)$ 의 값은 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다.

즉, $x \leq 2$ 일 때, $x > 2$ 일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$$a < 0$$

또 직선 $y=ax+a^2-21$ 이 점 $(2, f(2))$, 즉 $(2, 3)$ 을 지나야 하므로

$$3=2a+a^2-21, a^2+2a-24=0$$

$$(a+6)(a-4)=0$$

$$\therefore a=-6 (\because a < 0)$$

8 답 ③

함수 f 는 항등함수이므로 $f(x)=x$

$$f(1)=1 \text{이므로 } f(1)=g(5) \text{에서 } g(5)=1$$

함수 g 는 상수함수이므로 $g(x)=g(5)=1$

$$\therefore f(2)+3g(1)=2+3 \times 1=5$$

9 답 281

$$p=4^4=256, q=4!=4 \times 3 \times 2 \times 1=24, r=1$$

$$\therefore p+q+r=281$$

10 답 ③

정의역의 원소 a, c, d 에 대응시킬 수 있는 공역의 원소가 각각 a, b, c, d 의 4개이므로 구하는 함수 f 의 개수는

$$4^3=64$$

11 답 4

(i) x 가 홀수일 때

$x+f(x)$ 가 짝수이려면 $f(x)$ 가 홀수이어야 하므로

$$f(1)=1, f(3)=3 \text{ 또는 } f(1)=3, f(3)=1$$

(ii) x 가 짝수일 때

$x+f(x)$ 가 짝수이려면 $f(x)$ 가 짝수이어야 하므로

$$f(2)=2, f(4)=4 \text{ 또는 } f(2)=4, f(4)=2$$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$2 \times 2 = 4$$

12 답 ①

$$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(4) = -13$$

13 답 -1

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ax+2)$$

$$= 2(ax+2) - 1$$

$$= 2ax + 3$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-1)$$

$$= a(2x-1) + 2$$

$$= 2ax - a + 2$$

$$f \circ g = g \circ f \text{에서}$$

$$2ax + 3 = 2ax - a + 2$$

$$\text{따라서 } 3 = -a + 2 \text{이므로 } a = -1$$

14 답 ④

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = -h(x) + 2$$

$$(g \circ h)(x) = f(x) \text{에서}$$

$$-h(x) + 2 = 3x^2 - 1$$

$$\therefore h(x) = -3x^2 + 3$$

15 답 ②

$$f(1)=2$$

$$f^2(1)=f(f(1))=f(2)=4$$

$$f^3(1)=f(f^2(1))=f(4)=3$$

$$f^4(1)=f(f^3(1))=f(3)=1$$

⋮

따라서 $f^n(1)=1$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

같은 방법으로 하면 $f^n(2)=2$, $f^n(3)=3$, $f^n(4)=4$ 를 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 모두 4이므로 구하는 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

16 답 ⑤

$$f(2)=-5에서$$

$$2a+b=-5 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f^{-1}(1)=4에서 f(4)=1이므로$$

$$4a+b=1 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-11$

$$\therefore a-b=14$$

17 답 6

함수 f 의 역함수가 존재하면 f 는 일대일대응이다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 기울기가 양수이므로

$$f(-2)=a, f(3)=5$$

$$-4-b=a, 6-b=5 \quad \therefore a=-5, b=1$$

$$\therefore b-a=6$$

18 답 ②

$$y=2x+a라 하면 2x=y-a$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{a}{2}$$

$$x와 y를 서로 바꾸면 y=\frac{1}{2}x-\frac{a}{2}$$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{a}{2}$$

$$따라서 \frac{1}{2}x-\frac{a}{2}=bx+2이므로$$

$$\frac{1}{2}=b, -\frac{a}{2}=2 \quad \therefore a=-4, b=\frac{1}{2}$$

$$\therefore ab=-2$$

19 답 ②

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+b)$$

$$=a(2x+b)+3=2ax+ab+3$$

$$(f \circ g)(x)=-2x+12에서$$

$$2ax+ab+3=-2x+12$$

$$따라서 2a=-2, ab+3=12이므로 a=-1, b=-9$$

$$\therefore f(x)=-x+3, g(x)=2x-9$$

$$(f^{-1} \circ g)(6)=f^{-1}(g(6))=k(k는 상수)라 하면$$

$$f(k)=g(6)$$

$$g(6)=3이므로 f(k)=3$$

$$-k+3=3 \quad \therefore k=0$$

$$\therefore (f^{-1} \circ g)(6)=0$$

20 답 ④

$$(f \circ f)(a)=f(f(a))=f(b)=c$$

한편 $f^{-1}(c)=k(k는 상수)라 하면$

$$f(k)=c이므로$$

$$k=b$$

$$f^{-1}(b)=l(l은 상수)이라 하면$$

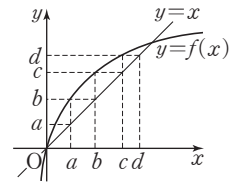
$$f(l)=b이므로$$

$$l=a$$

$$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(c)=f^{-1}(f^{-1}(c))$$

$$=f^{-1}(b)=a$$

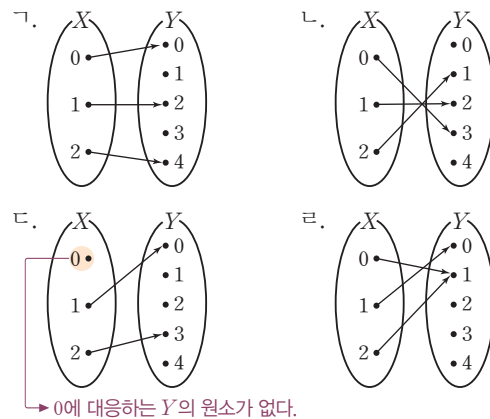
$$\therefore (f \circ f)(a)+(f^{-1} \circ f^{-1})(c)=c+a$$



중단원 기출문제 2회

1 답 ④

각 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 보기에서 함수인 것은 ㉠, ㉡, ㉣이다.

2 답 7

$$-2 < 1이므로 f(-2)=-(-2)+2=4$$

$$3 > 1이므로 f(3)=3$$

$$\therefore f(-2)+f(3)=7$$

3 답 ④

(i) $a > 0$ 일 때

$$f(x)=ax+b의 공역과 치역이 서로 같으므로$$

$$f(0)=0, f(4)=4$$

$$b=0, 4a+b=4$$

$$\therefore a=1, b=0$$

그런데 $ab=0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a < 0$ 일 때

$$f(x)=ax+b의 공역과 치역이 서로 같으므로$$

$$f(0)=4, f(4)=0$$

$$b=4, 4a+b=0$$

$$\therefore a=-1, b=4$$

(i), (ii)에서 $a=-1, b=4$

$$\therefore a+b=3$$

4 답 ⑤

ㄱ. 주어진 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1 \times y) = f(1) + f(y) \quad \therefore f(1) = 0$$

ㄴ. 주어진 식의 양변에 $x=3, y=3$ 을 대입하면

$$f(3 \times 3) = f(3) + f(3), \quad 2 = 2f(3) \quad \therefore f(3) = 1$$

주어진 식의 양변에 $x=3, y=\frac{1}{3}$ 을 대입하면

$$f\left(3 \times \frac{1}{3}\right) = f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$0 = 1 + f\left(\frac{1}{3}\right) \quad \therefore f\left(\frac{1}{3}\right) = -1$$

ㄷ. $f\left(x \times \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ 이므로

$$0 = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \therefore f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore f(x^2) = f(x \times x) = f(x) + f(x) = f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

5 답 $\{-2\}, \{5\}, \{-2, 5\}$

$f(x) = g(x)$ 이어야 하므로

$$x^2 - 2x = x + 10 \text{에서 } x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x+2)(x-5) = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 5$$

따라서 집합 X 는 집합 $\{-2, 5\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이므로

$$\{-2\}, \{5\}, \{-2, 5\}$$

6 답 ③

지역의 각 원소 k 에 대하여 x 축에 평행한 직선 $y=k$ 와 오직 한 점에서 만나고, 지역과 공역이 같은 함수의 그래프는 ③이다.

7 답 0, 8

(i) $a > 0$ 일 때

$$f(2) = 2, \quad f(4) = 6 \text{이므로}$$

$$2a + b = 2, \quad 4a + b = 6$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=-2$

(ii) $a < 0$ 일 때

$$f(2) = 6, \quad f(4) = 2 \text{이므로}$$

$$2a + b = 6, \quad 4a + b = 2$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2, b=10$

(i), (ii)에서

$$a+b=0 \text{ 또는 } a+b=8$$

8 답 ④

함수 g 는 항등함수이므로 $g(x) = x$

$$g(2) = 2 \text{이므로 } \textcircled{a} \text{에서 } f(0) = h(-1) = 2$$

함수 h 는 상수함수이므로 $h(x) = h(-1) = 2$

$$\textcircled{a} \text{에서 } f(1) = h(2) - f(0) = 2 - 2 = 0$$

이때 함수 f 는 일대일대응이므로

$$f(-1) = -1, \quad f(2) = 1 \text{ 또는 } f(-1) = 1, \quad f(2) = -1$$

$$\textcircled{a} \text{에서 } f(-1) > f(2) \text{이므로 } f(-1) = 1, \quad f(2) = -1$$

$$\therefore f(2) + g(0) + h(1) = -1 + 0 + 2 = 1$$

9 답 18

$$f(n+2) = f(n) + 4 \text{이므로}$$

$$f(n) = 0, \quad f(n+2) = 4$$

$n=0$ 일 때, $f(0)=0, f(2)=4$ 이고 일대일대응인 함수 f 의 개수는 $3! = 6$

$n=1$ 일 때, $f(1)=0, f(3)=4$ 이고 일대일대응인 함수 f 의 개수는 $3! = 6$

$n=2$ 일 때, $f(2)=0, f(4)=4$ 이고 일대일대응인 함수 f 의 개수는 $3! = 6$

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$6 + 6 + 6 = 18$$

10 답 ②

$$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(1) = 0$$

$$(f \circ f \circ f)(1) = f(f(f(1)))$$

$$= f(f(0)) = f(3) = 4$$

$$\therefore (f \circ f)(2) + (f \circ f \circ f)(1) = 4$$

11 답 ④

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+2)$$

$$= (x+2)^2 + 6(x+2) + k$$

$$= x^2 + 10x + k + 16$$

$$= (x+5)^2 + k - 9$$

따라서 함수 $y = (f \circ g)(x)$ 는 $-3 \leq x \leq 2$ 에서 $x = -3$ 일 때 최솟값 $k-5, x=2$ 일 때 최댓값 $k+40$ 을 갖는다.

$$\text{즉, } k-5 = 12 \text{이므로 } k = 17$$

$$\therefore M = k + 40 = 17 + 40 = 57$$

$$\therefore k + M = 74$$

12 답 $h(x) = 2x - 7$

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h\left(\frac{1}{2}x + 3\right)$$

$$(h \circ f)(x) = g(x) \text{에서}$$

$$h\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = x - 1$$

$$\frac{1}{2}x + 3 = t \text{로 놓으면 } x = 2t - 6 \text{이므로}$$

$$h(t) = (2t - 6) - 1 = 2t - 7$$

$$\therefore h(x) = 2x - 7$$

13 답 3

$$f(1) = 2$$

$$f^2(1) = f(f(1)) = f(2) = 3$$

$$f^3(1) = f(f^2(1)) = f(3) = 4$$

$$f^4(1) = f(f^3(1)) = f(4) = 1$$

$$f^5(1) = f(f^4(1)) = f(1) = 2$$

⋮

즉, $f^n(1)$ 의 값은 2, 3, 4, 1이 이 순서대로 반복된다.

따라서 $150 = 4 \times 37 + 2$ 이므로

$$f^{150}(1) = 3$$

14 답 2

주어진 그래프에서

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x < \frac{3}{2}) \\ -2x+6 & (\frac{3}{2} \leq x \leq 3) \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x < 1) \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & (1 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= \begin{cases} 2f(x) & (0 \leq f(x) < 1) \\ \frac{1}{2}f(x) + \frac{3}{2} & (1 \leq f(x) \leq 3) \end{cases} \end{aligned}$$

이때 $f(\frac{1}{2})=1$, $f(\frac{3}{2})=3$, $f(\frac{5}{2})=1$ 이므로 $f(x)$ 의 값이 1, 3이 되는 x 의 값을 기준으로 구간을 나누어 $g \circ f$ 의 식을 구하면

(i) $0 \leq x < \frac{1}{2}$ 일 때

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x) < 1 \text{이므로} \\ (g \circ f)(x) &= 2f(x) = 2 \times 2x = 4x \end{aligned}$$

(ii) $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ 일 때

$$\begin{aligned} 1 \leq f(x) \leq 3 \text{이므로} \\ (g \circ f)(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times 2x + \frac{3}{2} \\ &= x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

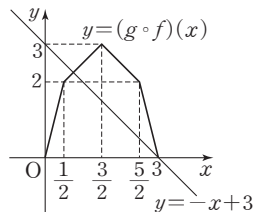
(iii) $\frac{3}{2} < x \leq \frac{5}{2}$ 일 때

$$\begin{aligned} 1 \leq f(x) < 3 \text{이므로} \\ (g \circ f)(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}(-2x+6) + \frac{3}{2} \\ &= -x + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

(iv) $\frac{5}{2} < x \leq 3$ 일 때

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x) < 1 \text{이므로} \\ (g \circ f)(x) &= 2f(x) = 2(-2x+6) \\ &= -4x+12 \end{aligned}$$

(i)~(iv)에서 $y=(g \circ f)(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 이 그래프와 직선 $y=-x+3$ 의 교점은 2개이다.



15 답 ⑤

$$\frac{2x+3}{4}=t \text{로 놓으면 } x=2t-\frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$f(t) = -2\left(2t-\frac{3}{2}\right) = -4t+3$$

$$\therefore f(x) = -4x+3$$

$$f^{-1}(7)=k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면 } f(k)=7 \text{이므로}$$

$$-4k+3=7 \quad \therefore k=-1$$

$$\therefore f^{-1}(7)=-1$$

16 답 $a < -1$ 또는 $a > 1$

$$f(x)=ax+|x-1| \text{에서}$$

(i) $x < 1$ 일 때

$$f(x)=ax-(x-1)=(a-1)x+1$$

(ii) $x \geq 1$ 일 때

$$f(x)=ax+x-1=(a+1)x-1$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} (a-1)x+1 & (x < 1) \\ (a+1)x-1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

함수 f 의 역함수가 존재하려면 f 는 일대일대응이어야 하므로 x 의 값이 증가할 때, $f(x)$ 의 값은 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다. 즉, $x < 1$ 일 때, $x \geq 1$ 일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$$(a-1)(a+1) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 1$$

17 답 $a=-\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{2}$

$$y=-4x-2 \text{에서 } -4x=y+2$$

$$\therefore x = -\frac{1}{4}y - \frac{1}{2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} = ax + b \text{이므로}$$

$$a = -\frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}$$

18 답 8

$$(f \circ g^{-1})(a) = f(g^{-1}(a)) = 2$$

$$g^{-1}(a)=k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면 } f(k)=2 \text{에서}$$

$$\frac{k-1}{2}=2 \quad \therefore k=5$$

$$\text{즉, } g^{-1}(a)=5 \text{이므로}$$

$$a=g(5)=8$$

19 답 ③

$$(f^{-1} \circ (g \circ f^{-1})^{-1})(0) = (f^{-1} \circ f \circ g^{-1})(0) = g^{-1}(0)$$

$$\text{즉, } g^{-1}(0)=-3 \text{이므로 } g(-3)=0$$

$$g(3)=4, g(-3)=0 \text{에서}$$

$$3a+b=4, -3a+b=0$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a=\frac{2}{3}, b=2$$

$$\therefore 3a+2b=2+4=6$$

20 답 -1

방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$ 의 실근은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같고, 이는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

$$x^2+2x=x \text{에서 } x^2+x=0$$

$$x(x+1)=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0$$

따라서 모든 실근의 합은 -1 이다.

중단원 기출문제 ①

1 답 $\frac{5}{x^3+1}$

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^3+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \\ = \frac{2+(x^2-x+1)-(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} \\ = \frac{2+(x^2-x+1)-(x^2-x-2)}{x^3+1} \\ = \frac{5}{x^3+1} \end{aligned}$$

2 답 ④

주어진 식의 우변을 통분하여 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{ax+b}{x^2-x+1} - \frac{b}{x+1} &= \frac{(ax+b)(x+1)-b(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)(x+1)} \\ &= \frac{(a-b)x^2+(a+2b)x}{x^3+1} \end{aligned}$$

이때 $\frac{x^2+4x}{x^3+1} = \frac{(a-b)x^2+(a+2b)x}{x^3+1}$ 가 x 에 대한 항등식이므로

$$a-b=1, a+2b=4$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=1$

$$\therefore a+b=3$$

3 답 ①

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x+1} - \frac{x+3}{x+2} - \frac{x+4}{x+3} + \frac{x+5}{x+4} \\ = \frac{(x+1)+1}{x+1} - \frac{(x+2)+1}{x+2} - \frac{(x+3)+1}{x+3} + \frac{(x+4)+1}{x+4} \\ = \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+2}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+3}\right) + \left(1 + \frac{1}{x+4}\right) \\ = \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) - \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}\right) \\ = \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+3)(x+4)} \\ = \frac{x^2+7x+12-(x^2+3x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \\ = \frac{4x+10}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \end{aligned}$$

따라서 $a=4, b=10$ 이므로

$$a-b=-6$$

4 답 $\frac{3}{x(x+6)}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+6} \right) \\ = \frac{1}{2} \times \frac{x+6-x}{x(x+6)} \\ = \frac{3}{x(x+6)} \end{aligned}$$

5 답 ④

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{x+2}{x+1}} = 1 + \frac{x+1}{x+2} = \frac{2x+3}{x+2}$$

6 답 ④

 $a=3k, b=2k, c=5k (k \neq 0)$ 로 놓으면

$$\frac{4a+3b-2c}{2a-4b+c} = \frac{12k+6k-10k}{6k-8k+5k} = \frac{8k}{3k} = \frac{8}{3}$$

7 답 -2

$$x - \frac{3}{z} = 1 \text{에서 } \frac{3}{z} = x-1, \frac{z}{3} = \frac{1}{x-1} \quad \therefore z = \frac{3}{x-1}$$

$$\frac{1}{x} - y = 1 \text{에서 } y = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

$$\therefore xyz = x \times \frac{1-x}{x} \times \frac{3}{x-1} = -3$$

$$\therefore \frac{6}{xyz} = \frac{6}{-3} = -2$$

8 답 -5

$y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\frac{2}{x+3} + b = \frac{-2+b(x+3)}{x+3} = \frac{bx-2+3b}{x+3}$$

이 식이 $y = \frac{-2x-8}{x+a}$ 과 일치하므로

$$b=-2, -2+3b=-8, a=3$$

$$\therefore b-a=-5$$

9 답 -8

$$y = \frac{bx-6}{x+a} = \frac{b(x+a)-ab-6}{x+a} = \frac{-ab-6}{x+a} + b \text{이므로 정의역은}$$

 $\{x|x \neq -a \text{인 실수}\}$ 이고, 치역은 $\{y|y \neq b \text{인 실수}\}$ 이다.따라서 $a=4, b=-2$ 이므로

$$ab=-8$$

10 답 ②

$$x^2-5x+4 \geq 0 \text{에서 } (x-1)(x-4) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 4$$

즉, 주어진 함수의 정의역은 $\{x|x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 4\}$

$$y = \frac{x+4}{x-3} = \frac{(x-3)+7}{x-3} = \frac{7}{x-3} + 1 \text{이므로 주어진 함수의 그래프}$$

는 $y = \frac{7}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

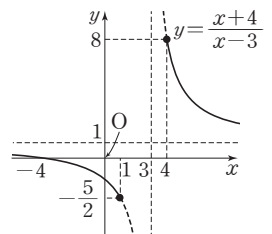
$$x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 4 \text{에서 } y = \frac{x+4}{x-3} \text{의 그래}$$

프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=4$ 일때 최댓값 8, $x=1$ 일 때 최솟값 $-\frac{5}{2}$ 를

갖는다.

$$\text{따라서 } M=8, m=-\frac{5}{2} \text{이므로}$$

$$M+m=\frac{11}{2}$$



11 [답] ⑤

$y = \frac{-3x-3}{x+a} = \frac{-3(x+a)+3a-3}{x+a} = \frac{3a-3}{x+a} - 3$ 이므로 점근선의 방정식은 $x = -a, y = -3$
따라서 $a = -1, b = -3$ 이므로 $a - b = 2$

12 [답] 4

$y = \frac{ax+4}{x-1} = \frac{a(x-1)+a+4}{x-1} = \frac{a+4}{x-1} + a$ 이므로 점근선의 방정식은 $x = 1, y = a$
따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(1, a)$ 에 대하여 대칭이므로
 $a = 3, b = 1 \quad \therefore a + b = 4$

13 [답] ⑤

$y = \frac{-3x-a}{2-x} = \frac{3x+a}{x-2} = \frac{3(x-2)+6+a}{x-2} = \frac{a+6}{x-2} + 3$ 이므로 점근선의 방정식은 $x = 2, y = 3$ 이고, 그래프는 점 $(0, -\frac{a}{2})$ 를 지난다.

(i) $a + 6 > 0$, 즉 $a > -6$ 일 때

$x = 0$ 일 때 $y \geq 0$ 이어야 하므로

$$-\frac{a}{2} \geq 0 \quad \therefore a \leq 0$$

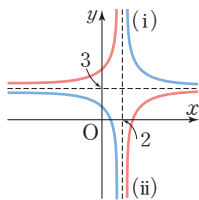
그런데 $a > -6$ 이므로 $-6 < a \leq 0$

(ii) $a + 6 < 0$, 즉 $a < -6$ 일 때

그래프가 제3사분면을 지나지 않는다.

(i), (ii)에서 $a < -6$ 또는 $-6 < a \leq 0$

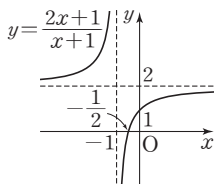
따라서 a 의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.



14 [답] ③

$y = \frac{2x+1}{x+1} = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} + 2$
이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

③ 점 $(-1, 2)$ 에 대하여 대칭이다.



15 [답] ⑤

점근선의 방정식이 $x = 1, y = -2$ 이므로 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x-1} - 2 \quad (k > 0) \text{라 하자.}$$

이 함수의 그래프가 점 $(0, -4)$ 를 지나므로

$$-4 = \frac{k}{0-1} - 2 \quad \therefore k = 2$$

따라서 $y = \frac{2}{x-1} - 2 = \frac{-2(x-1)+2}{x-1} = \frac{-2x+4}{x-1}$ 이므로

$$a = -2, b = 4, c = -1 \quad \therefore abc = 8$$

16 [답] 8

$$\frac{x+2}{5-x} = x+a \text{에서 } x+2 = (x+a)(5-x)$$

$$\therefore x^2 + (a-4)x - 5a + 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, $y = \frac{x+2}{5-x}$ 의 그래프와 직선

$y = x + a$ 가 한 점에서 만나려면

$$D = (a-4)^2 - 4(-5a+2) = 0 \quad \therefore a^2 + 12a + 8 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 곱은 8이다.

17 [답] $2\sqrt{2}$

$y = \frac{x-3}{x+1} = \frac{(x+1)-4}{x+1} = -\frac{4}{x+1} + 1$ 이므로 점근선의 방정식은
 $x = -1, y = 1$

즉, 점 $A(-1, 1)$ 은 두 점근선의 교점이
므로 두 점 A, P 사이의 거리가 최소일
때의 점 P 는 오른쪽 그림과 같이 P_1, P_2
의 2개가 존재한다.

이때 두 점 P_1, P_2 는 점 A 를 지나고 기울
기가 -1 인 직선 $y = -x$ 위의 점이다.

$$\frac{x-3}{x+1} = -x \text{에서 } x-3 = -x(x+1)$$

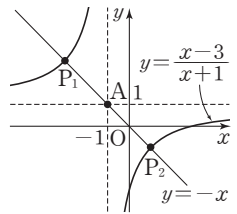
$$x^2 + 2x - 3 = 0, (x+3)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 두 점 P_1, P_2 의 좌표는 각각 $(-3, 3), (1, -1)$ 이고

$\overline{AP_1} = \overline{AP_2}$ 이므로 구하는 거리의 최솟값은

$$\overline{AP_1} = \sqrt{(-3+1)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}$$



18 [답] ③

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x+1+x-1}{x-1}}{\frac{x+1-(x-1)}{x-1}} = x$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = \frac{x+1}{x-1}$$

$\vdots$

$$\therefore f^n(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & (n \text{은 홀수}) \\ x & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$\therefore f^{2025}(3) + f^{2026}(3) = \frac{3+1}{3-1} + 3 = 5$$

19 [답] 14

$$y = \frac{bx-7}{3x+a} \text{이라 하면 } (3x+a)y = bx-7$$

$$(3y-b)x = -7-ay \quad \therefore x = \frac{-ay-7}{3y-b}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{-ax-7}{3x-b}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-ax-7}{3x-b}$$

$$\frac{-ax-7}{3x-b} = \frac{-x+c}{3x-6} \text{에서}$$

$$a = 1, b = 6, c = -7$$

$$\therefore a + b - c = 14$$

20 [답] $\frac{6}{5}$

$$(f \circ f^{-1} \circ f^{-1})(4) = f^{-1}(4)$$

$f^{-1}(4) = k$ (k 는 상수)라 하면 $f(k) = 4$ 이므로

$$\frac{-k+2}{k-1} = 4, -k+2 = 4(k-1) \quad \therefore k = \frac{6}{5}$$

$$\therefore (f \circ f^{-1} \circ f^{-1})(4) = \frac{6}{5}$$

중단원 기출문제 2회

1 답 $\frac{x+3}{2x+1}$

$$\begin{aligned} A &= \frac{x+3}{x-2} \div \frac{2x^2+5x+2}{x^3-8} \times \frac{x^3+8}{x^4+4x^2+16} \\ &= \frac{x+3}{x-2} \times \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(2x+1)} \times \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)} \\ &= \frac{x+3}{2x+1} \end{aligned}$$

2 답 ③

주어진 식의 양변에 $(x-1)(x-2)(x-3) \times \dots \times (x-7)$ 을 곱하여 정리하면

$$\begin{aligned} 1 &= a_1(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) \\ &\quad + a_2(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) \\ &\quad + \dots + a_7(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) \end{aligned}$$

이 식이 x 에 대한 항등식이고 우변에서 x^6 의 계수가

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 \text{이므로}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_7 = 0$$

3 답 $f(x) = 16x + 64$

$$\begin{aligned} &\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+4}{x+3} - \frac{x+6}{x+5} + \frac{x+8}{x+7} \\ &= \frac{(x+1)+1}{x+1} - \frac{(x+3)+1}{x+3} - \frac{(x+5)+1}{x+5} + \frac{(x+7)+1}{x+7} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+3}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+5}\right) + \left(1 + \frac{1}{x+7}\right) \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} - \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+7}\right) \\ &= \frac{2}{(x+1)(x+3)} - \frac{2}{(x+5)(x+7)} \\ &= \frac{2(x^2+12x+35) - 2(x^2+4x+3)}{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)} \\ &= \frac{16x+64}{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)} \\ \therefore f(x) &= 16x+64 \end{aligned}$$

4 답 ③

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1^2+2} + \frac{1}{3^2+6} + \frac{1}{5^2+10} + \dots + \frac{1}{49^2+98} \\ &= \frac{1}{1^2+2 \times 1} + \frac{1}{3^2+2 \times 3} + \frac{1}{5^2+2 \times 5} + \dots + \frac{1}{49^2+2 \times 49} \\ &= \frac{1}{1(1+2)} + \frac{1}{3(3+2)} + \frac{1}{5(5+2)} + \dots + \frac{1}{49(49+2)} \\ &= \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{49 \times 51} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{51}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{51}\right) \\ &= \frac{25}{51} \end{aligned}$$

따라서 $p=25$, $q=51$ 이므로

$$p+q=76$$

5 답 -5

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{4 - \frac{3}{2-x}} &= 1 - \frac{2}{\frac{4(2-x)-3}{2-x}} = 1 - \frac{2}{\frac{5-4x}{2-x}} \\ &= 1 - \frac{4-2x}{5-4x} = \frac{5-4x-(4-2x)}{5-4x} \\ &= \frac{1-2x}{5-4x} \end{aligned}$$

$$\frac{1-2x}{5-4x} = \frac{bx+c}{5+ax} \text{에서}$$

$$a=-4, b=-2, c=1$$

$$\therefore a+b+c=-5$$

6 답 ⑤

$$\frac{a+2b}{3} = \frac{2b+c}{2} = \frac{2c+a}{4} = t \ (t \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$a+2b=3t \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$2b+c=2t \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$2c+a=4t \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{A} + \textcircled{B} + \textcircled{C} \times 2$ 를 하면

$$3a+4b+5c=13t \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$$\frac{3a+4b+5c}{k} = t \text{이므로 } \textcircled{D} \text{을 대입하면}$$

$$\frac{13t}{k} = t \quad \therefore k=13$$

7 답 -3

$$a+2b+3c=0 \text{에서}$$

$$a+2b=-3c, \ 2b+3c=-a, \ a+3c=-2b$$

$$\begin{aligned} \therefore a \left(\frac{1}{2b} + \frac{1}{3c} \right) + 2b \left(\frac{1}{3c} + \frac{1}{a} \right) + 3c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2b} \right) \\ &= \frac{a}{2b} + \frac{a}{3c} + \frac{2b}{3c} + \frac{2b}{a} + \frac{3c}{a} + \frac{3c}{2b} \\ &= \frac{2b+3c}{a} + \frac{a+3c}{2b} + \frac{a+2b}{3c} \\ &= \frac{-a}{a} + \frac{-2b}{2b} + \frac{-3c}{3c} = -3 \end{aligned}$$

8 답 ③

$$\textcircled{1} \ y = \frac{-x+1}{x-2} = \frac{-(x-2)-1}{x-2} = \frac{-1}{x-2} - 1$$

$$\textcircled{2} \ y = \frac{2x+3}{x+2} = \frac{2(x+2)-1}{x+2} = \frac{-1}{x+2} + 2$$

$$\textcircled{3} \ y = \frac{2x+1}{x} = \frac{1}{x} + 2$$

$$\textcircled{4} \ y = \frac{-2x+5}{x-3} = \frac{-2(x-3)-1}{x-3} = \frac{-1}{x-3} - 2$$

$$\textcircled{5} \ y = \frac{x-2}{x-1} = \frac{(x-1)-1}{x-1} = \frac{-1}{x-1} + 1$$

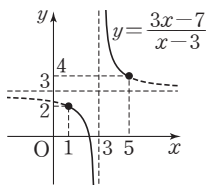
따라서 평행이동하여 서로 겹쳐질 수 없는 것은 ③이다.

9 답 4

$$y = \frac{3x-7}{x-3} = \frac{3(x-3)+2}{x-3} = \frac{2}{x-3} + 3 \text{이므로 주어진 함수의 그래}$$

프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

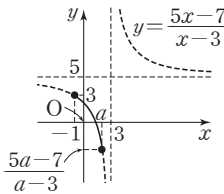
$y \leq 2$ 또는 $y \geq 4$ 에서 $y = \frac{3x-7}{x-3}$ 의 그래프
는 오른쪽 그림과 같으므로 정의역은
 $\{x | 1 \leq x < 3 \text{ 또는 } 3 < x \leq 5\}$
따라서 정의역에 속하는 정수는 1, 2, 4, 5
의 4개이다.



10 답 ②

$y = \frac{5x-7}{x-3} = \frac{5(x-3)+8}{x-3} = \frac{8}{x-3} + 5$ 이므로 주어진 함수의 그래
프는 $y = \frac{8}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 5만
큼 평행이동한 것이다.

$-1 \leq x < a$ 에서 $y = \frac{5x-7}{x-3}$ 의 그래프는 오
른쪽 그림과 같으므로 $x = -1$ 일 때 최댓값
3, $x = a$ 일 때 최솟값 $\frac{5a-7}{a-3}$ 을 갖는다.



따라서 $M=3$ 이고, $\frac{5a-7}{a-3} = -3$ 에서
 $a=2 \quad \therefore a+M=5$

참고 $a > 3$ 이면 주어진 함수는 최댓값을 갖지 않으므로 $-1 < a < 3$ 이다.

11 답 3

$y = \frac{-4x-5}{x+k} = \frac{-4(x+k)+4k-5}{x+k} = \frac{4k-5}{x+k} - 4$ 이므로 점근선의
방정식은 $x = -k, y = -4$

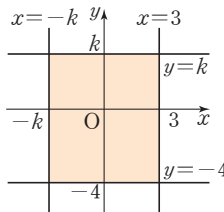
$y = \frac{kx-7}{x-3} = \frac{k(x-3)+3k-7}{x-3} = \frac{3k-7}{x-3} + k$ 이므로 점근선의 방정
식은 $x = 3, y = k$

k 가 양수이므로 두 함수의 그래프의 점근
선은 오른쪽 그림과 같고, 색칠한 부분의
넓이가 42이므로

$$(k+3)(k+4) = 42, k^2 + 7k - 30 = 0$$

$$(k+10)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = 3 (\because k > 0)$$



12 답 -3

$y = \frac{x+1}{x+2} = \frac{(x+2)-1}{x+2} = -\frac{1}{x+2} + 1$ 이므로 점근선의 방정식은
 $x = -2, y = 1$

이때 점 $(-2, 1)$ 은 두 직선 $y = -x + a, y = x + b$ 위의 점이므로
 $1 = 2 + a, 1 = -2 + b \quad \therefore a = -1, b = 3$
 $\therefore ab = -3$

13 답 ①

$y = \frac{-3x+k+10}{x-2} = \frac{-3(x-2)+k+4}{x-2} = \frac{k+4}{x-2} - 3$ 이므로 점근선
의 방정식은 $x = 2, y = -3$ 이고, 그래프는 점 $(0, -\frac{k}{2}-5)$ 를 지난다.

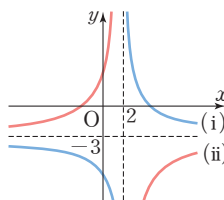
(i) $k+4 > 0$, 즉 $k > -4$ 일 때

그래프가 제2사분면을 지나지 않는다.

(ii) $k+4 < 0$, 즉 $k < -4$ 일 때

$x=0$ 일 때 $y > 0$ 이어야 하므로

$$-\frac{k}{2}-5 > 0 \quad \therefore k < -10$$



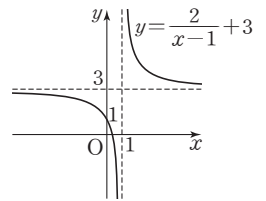
(i), (ii)에서 $k < -10$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -11 이다.

14 답 ③

ㄱ. 정의역은 $\{x | x \neq 1 \text{인 실수}\}$ 이다.

ㄴ. [반례] $k=3$ 이면 함수 $y = \frac{2}{x-1} + 3$
의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므
로 제3사분면을 지나지 않는다.



ㄷ. $k=2$ 이면 $y = \frac{2}{x-1} + 2$ 의 그래프의
점근선의 방정식은 $x=1, y=2$

따라서 주어진 함수의 그래프는 점 $(1, 2)$ 를 지나고 기울기가 -1
인 직선 $y = -(x-1) + 2$, 즉 $y = -x + 3$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

15 답 -5

점근선의 방정식이 $x = \frac{5}{2}, y = -1$ 이므로 함수의 식을

$$y = \frac{k}{2x-5} - 1 (k < 0) \text{이라 하자.}$$

이 함수의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{k}{2-5} - 1 \quad \therefore k = -3$$

따라서 $y = \frac{-3}{2x-5} - 1 = \frac{-(2x-5)-3}{2x-5} = \frac{-2x+2}{2x-5}$ 이므로
 $a = -2, b = 2, c = -5$

$$\therefore a + b + c = -5$$

16 답 ②

$$\frac{-x+2}{x-1} = mx-1 \text{에서 } -x+2 = (mx-1)(x-1)$$

$$\therefore mx^2 - mx - 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $y = \frac{-x+2}{x-1}$ 의 그래프와 직선

$y = mx-1$ 이 한 점에서 만나므로

$$D = m^2 + 4m = 0$$

$$m(m+4) = 0 \quad \therefore m = -4 (\because m < 0)$$

17 답 ⑤

$y = \frac{9}{x} (x > 0)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로
1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{9}{x-2} + 1 (x > 2)$$

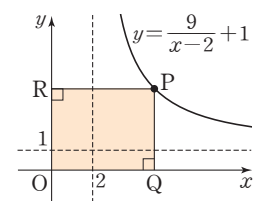
점 P의 좌표를 $(k, \frac{9}{k-2} + 1) (k > 2)$ 이
라 하면

$$\overline{PR} = k, \overline{PQ} = \frac{9}{k-2} + 1$$

직사각형 ROQP의 넓이는

$$k \times \left(\frac{9}{k-2} + 1 \right) = \frac{9k}{k-2} + k$$

$$= k - 2 + \frac{18}{k-2} + 11$$



이때 $k-2 > 0$, $\frac{18}{k-2} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$k-2 + \frac{18}{k-2} + 11 \geq 2\sqrt{(k-2) \times \frac{18}{k-2}} + 11$$

$$= 11 + 6\sqrt{2}$$

(단, 등호는 $k-2 = \frac{18}{k-2}$, 즉 $k = 3\sqrt{2} + 2$ 일 때 성립)

따라서 직사각형 ROQP의 넓이의 최솟값은 $11 + 6\sqrt{2}$ 이다.

18 답 ②

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= \frac{\frac{x}{1-x}}{1 - \frac{x}{1-x}} = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1-x-x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x}$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$$

$$= \frac{\frac{x}{1-2x}}{1 - \frac{x}{1-2x}} = \frac{\frac{x}{1-2x}}{\frac{1-2x-x}{1-2x}} = \frac{x}{1-3x}$$

$$\vdots$$

$$\therefore f^{100}(x) = \frac{x}{1-100x}$$

따라서 $\frac{x}{1-100x} = \frac{ax+b}{cx+1}$ 에서

$$a=1, b=0, c=-100$$

$$\therefore a+b+c = -99$$

19 답 ①

$$y = \frac{2x-1}{x+a} \text{이라 하면 } (x+a)y = 2x-1$$

$$(y-2)x = -ay-1 \quad \therefore x = \frac{-ay-1}{y-2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{-ax-1}{x-2}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{-ax-1}{x-2}$$

$$f = f^{-1} \text{에서 } \frac{2x-1}{x+a} = \frac{-ax-1}{x-2}$$

$$\therefore a = -2$$

20 답 10

$$y = \frac{4x+a}{3x-b} \text{라 하면 } (3x-b)y = 4x+a$$

$$(3y-4)x = by+a \quad \therefore x = \frac{by+a}{3y-4}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{bx+a}{3x-4}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{bx+a}{3x-4}$$

$$g(x) = f^{-1}(x) \text{에서}$$

$$\frac{2x+5}{cx-4} = \frac{bx+a}{3x-4}$$

$$\therefore a=5, b=2, c=3$$

$$\therefore a+b+c = 10$$

10 / 무리함수

56~61쪽

중단원 기출문제 1회

1 답 ③

$$x+4 \geq 0 \text{에서 } x \geq -4$$

$$3-x > 0 \text{에서 } x < 3$$

$$\therefore -4 \leq x < 3$$

따라서 정수 x 는 $-4, -3, -2, \dots, 2$ 의 7개이다.

2 답 $x+7$

$$-3 < x < 1 \text{에서 } x-1 < 0, x+3 > 0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{4x^2+24x+36} = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{4(x+3)^2}$$

$$= |x-1| + 2|x+3|$$

$$= -x+1 + 2(x+3)$$

$$= x+7$$

3 답 ⑤

$$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x}) - \sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}$$

$$= \frac{x+2+\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+2x}+x}{x+2-x}$$

$$= \frac{2x+2}{2} = x+1$$

4 답 ②

$$\frac{1}{f(n)} = \frac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{(\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1})(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})}$$

$$= \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{2n+1 - (2n-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \dots + \frac{1}{f(24)}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3}-\sqrt{1}) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + (\sqrt{7}-\sqrt{5}) + \dots + (\sqrt{49}-\sqrt{47}) \}$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{49}-\sqrt{1}) = 3$$

5 답 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} = \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})^2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})}$$

$$= \frac{x+2-2\sqrt{x^2-4}+x-2}{x+2-(x-2)}$$

$$= \frac{2x-2\sqrt{x^2-4}}{4} = \frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5-4}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

6 답 ②

$$y-x=-2\sqrt{2}, xy=4 \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \frac{y-x}{\sqrt{xy}} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

7 답 2

$y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\sqrt{a(x+3)}+4$$

이 그래프가 점 $(-1, 6)$ 을 지나므로

$$6=\sqrt{2a}+4, \sqrt{2a}=2$$

양변을 제곱하면

$$2a=4 \quad \therefore a=2$$

8 답 -4

$y=\sqrt{2x-3}+a$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\sqrt{2(x+1)}-3+a+2$$

이 함수의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=\sqrt{2(-x+1)}-3+a+2$$

$$\therefore y=\sqrt{-2x-1}+a+2$$

이 식이 $y=\sqrt{bx+c}+1$ 과 일치하므로

$$b=-2, c=-1$$

또 $a+2=1$ 이므로

$$a=-1$$

$$\therefore a+b+c=-4$$

9 답 ②

$-2x+6 \geq 0$ 에서 $x \leq 3$ 이므로 정의역은 $\{x|x \leq 3\}$

$$\therefore a=3$$

치역은 $\{y|y \geq 1\}$ 이므로 $b=1$

$$\therefore a+b=4$$

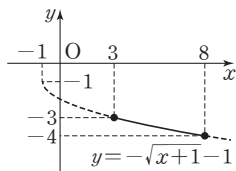
10 답 ④

$y=-\sqrt{x+1}-1$ 의 그래프는 $y=-\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

$3 \leq x \leq 8$ 에서 $y=-\sqrt{x+1}-1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=3$ 일 때 최댓값 -3 , $x=8$ 일 때 최솟값 -4 를 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$$-3 \times (-4) = 12$$



11 답 ⑤

$y=\sqrt{-x+k}+4=\sqrt{-(x-k)}+4$ 이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 k 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.

$-3 \leq x \leq 2$ 에서 $y=\sqrt{-x+k}+4$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $x=-3$ 일 때 최댓값 $\sqrt{3+k}+4$ 를 갖는다.

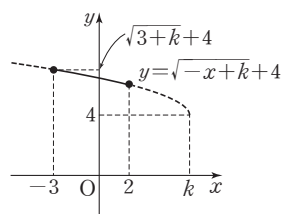
즉, $\sqrt{3+k}+4=7$ 이므로

$$\sqrt{3+k}=3$$

양변을 제곱하면

$$3+k=9 \quad \therefore k=6$$

따라서 $y=\sqrt{-x+6}+4$ 는 $x=2$ 일 때 최솟값 6 을 갖는다.

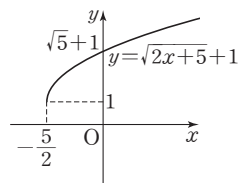


12 답 제1, 2사분면

$y=\sqrt{2x+5}+1=\sqrt{2\left(x+\frac{5}{2}\right)}+1$ 이므로 주어진 함수의 그래프는

$y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{5}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\sqrt{2x+5}+1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2사분면을 지난다.



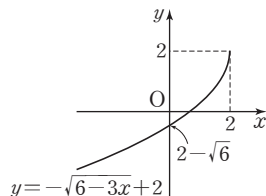
13 답 ⑤

$$y=-\sqrt{6-3x}+2$$

$$=-\sqrt{-3(x-2)}+2$$

이므로 주어진 함수의 그래프는

$y=-\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.



① 정의역은 $\{x|x \leq 2\}$ 이다.

② 치역은 $\{y|y \leq 2\}$ 이다.

③ 평행이동하면 $y=-\sqrt{-3x}$ 의 그래프와 겹쳐진다.

④ $y=-\sqrt{6-3x}+2$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$0=-\sqrt{6-3x}+2, \sqrt{6-3x}=2$$

양변을 제곱하면

$$6-3x=4 \quad \therefore x=\frac{2}{3}$$

즉, x 축과 점 $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ 에서 만난다.

⑤ 제2사분면을 지나지 않는다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

14 답 ④

주어진 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ ($a>0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로

$$y=\sqrt{a(x+2)}-2 \quad \cdots \cdots ⑦$$

⑦의 그래프가 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0=\sqrt{2a}-2, \sqrt{2a}=2$$

양변을 제곱하면

$$2a=4 \quad \therefore a=2$$

이를 ㉠에 대입하면

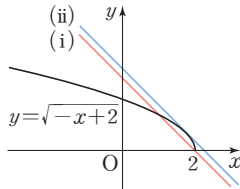
$$y = \sqrt{2(x+2)} - 2 = \sqrt{2x+4} - 2$$

따라서 $b=4$, $c=-2$ 이므로

$$a+b+c=4$$

15 답 $2 \leq k < \frac{9}{4}$

$y = \sqrt{-x+2} = \sqrt{-(x-2)}$ 이므로 주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y = -x+k$ 는 기울기가 -1 이고 y 절편이 k 이다.



(i) 직선 $y = -x+k$ 가 점 $(2, 0)$ 을 지날 때

$$0 = -2 + k \quad \therefore k = 2$$

(ii) $y = \sqrt{-x+2}$ 의 그래프와 직선 $y = -x+k$ 가 접할 때

$$\sqrt{-x+2} = -x+k \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$-x+2 = x^2 - 2kx + k^2$$

$$\therefore x^2 - (2k-1)x + k^2 - 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(2k-1)\}^2 - 4(k^2 - 2) = 0$$

$$-4k + 9 = 0 \quad \therefore k = \frac{9}{4}$$

(i), (ii)에서 구하는 실수 k 의 값의 범위는

$$2 \leq k < \frac{9}{4}$$

16 답 ⑤

$A \cap B = \emptyset$ 이므로 $y = -\sqrt{x-3}$ 의 그래프와 직선 $y = -2x+k$ 가 만나지 않아야 한다.

$y = -\sqrt{x-3}$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y = -2x+k$ 는 기울기가 -2 이고 y 절편이 k 이다.

$-\sqrt{x-3} = -2x+k$ 의 양변을 제곱하면

$$x-3 = 4x^2 - 4kx + k^2$$

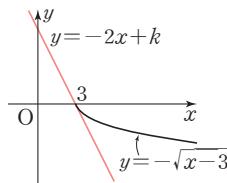
$$\therefore 4x^2 - (4k+1)x + k^2 + 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(4k+1)\}^2 - 16(k^2 + 3) < 0$$

$$8k - 47 < 0 \quad \therefore k < \frac{47}{8}$$

따라서 구하는 정수 k 의 최댓값은 5이다.



17 답 3

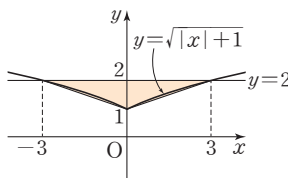
$$y = \sqrt{|x|+1} \text{에서}$$

$$x \geq 0 \text{일 때, } y = \sqrt{x+1}$$

$$x < 0 \text{일 때, } y = \sqrt{-x+1}$$

즉, $y = \sqrt{|x|+1}$ 의 그래프는 오른

쪽 그림과 같다.



이 함수는 $x=0$ 에서 최솟값 1을 가지므로

$$A(0, 1)$$

$y = \sqrt{|x|+1}$ 에 $y=2$ 를 대입하면

$$2 = \sqrt{|x|+1}$$

양변을 제곱하면

$$4 = |x| + 1, |x| = 3$$

$$\therefore x = \pm 3$$

따라서 두 점 B, C의 좌표는 $(3, 2)$, $(-3, 2)$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times |3 - (-3)| \times 1 = 3$$

18 답 ①

$f(x) = \sqrt{ax+b}$ 의 그래프가 점 $(1, 4)$ 를 지나므로

$$4 = \sqrt{a+b}$$

양변을 제곱하면

$$a+b=16 \quad \dots\dots ㉠$$

또 $f(x)$ 의 역함수의 그래프가 점 $(1, 4)$ 를 지나므로

$f(x) = \sqrt{ax+b}$ 의 그래프는 점 $(4, 1)$ 을 지난다.

따라서 $1 = \sqrt{4a+b}$ 이므로 양변을 제곱하면

$$4a+b=1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -5, b = 21$$

$$\therefore b-a=26$$

19 답 $\sqrt{2}$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선

$y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 교점은 $y=f(x)$ 의 그래프와

직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

$$\sqrt{3x+4}-2=x \text{에서 } \sqrt{3x+4}=x+2$$

양변을 제곱하면

$$3x+4 = x^2 + 4x + 4$$

$$x^2 + x = 0, x(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 0$$

따라서 두 교점의 좌표는 $(-1, -1)$, $(0, 0)$ 이므로 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

20 답 3

$$(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(5) = (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(5)$$

$$= (g^{-1} \circ f)(5)$$

$$= g^{-1}(f(5))$$

$$= g^{-1}(3)$$

$g^{-1}(3) = k$ (k 는 상수)라 하면 $g(k) = 3$ 이므로

$$\sqrt{2k+3} = 3$$

양변을 제곱하면

$$2k+3=9 \quad \therefore k=3$$

$$\therefore (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(5) = 3$$

중단원 기출문제 2회

1 답 3

모든 실수 x 에 대하여 $x^2+2kx+3 \geq 0$ 이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+2kx+3=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 3 \leq 0$$

$$k^2 \leq 3 \quad \therefore -\sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3}$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 $\sqrt{3}$ 이다.

2 답 4

$$\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} = -\sqrt{\frac{x+2}{x-3}} \text{에서 } x+2 \geq 0, x-3 < 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{x^2+4x+4} &= \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x+2)^2} \\ &= |x-3| + |x+2| \\ &= -(x-3) + x+2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

3 답 3

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2x}+\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{2x}-\sqrt{y}} &= \frac{\sqrt{2x}-\sqrt{y} - (\sqrt{2x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{2x}+\sqrt{y})(\sqrt{2x}-\sqrt{y})} \\ &= -\frac{2\sqrt{y}}{2x-y} \end{aligned}$$

4 답 $4+2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} &= \frac{(\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{x-2\sqrt{x}+1+x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \\ &= \frac{2(x+1)}{x-1} \\ &= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1} \\ &= \frac{2(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \\ &= 4+2\sqrt{3} \end{aligned}$$

5 답 5

$\sqrt{2x+3}=3$ 의 양변을 제곱하면

$$2x+3=9 \quad \therefore x=3$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{4-\frac{1}{2-\sqrt{x}}} &= \frac{1}{4-\frac{1}{2-\sqrt{3}}} = \frac{1}{4-\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} \\ &= \frac{1}{4-\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}} = \frac{1}{4-(2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3} \end{aligned}$$

6 답 $\sqrt{10}$

$$x = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = 4-\sqrt{15}$$

$$y = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = 4+\sqrt{15}$$

따라서 $x+y=8$, $xy=1$ 이므로

$$\begin{aligned} (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 &= x+y+2\sqrt{xy} \\ &= 8+2=10 \end{aligned}$$

이때 $x>0$, $y>0$ 이므로 $\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$

$$\therefore \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{10}$$

7 답 44

$y=\sqrt{2x-4}+11=\sqrt{2(x-2)}+11$ 이므로 $y=\sqrt{2x-4}+11$ 의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 11만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $a=2$, $p=2$, $q=11$ 이므로

$$apq=44$$

8 답 3

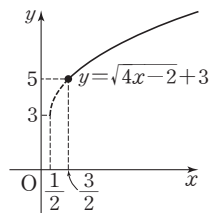
$$y=\sqrt{4x-2}+3=\sqrt{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}+3 \text{이므로 주}$$

어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{4x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 3

만큼 평행이동한 것이다.

$x=\frac{3}{2}$ 일 때 $y=5$ 이므로 정의역이

$$\left\{x \mid x \geq \frac{3}{2}\right\} \text{일 때 치역은 } \{y \mid y \geq 5\} \text{이다.}$$



9 답 0

$$y = \frac{ax-5}{x+b} = \frac{a(x+b)-ab-5}{x+b} = \frac{-ab-5}{x+b} + a \text{의 그래프의 점근선의 방정식은}$$

$$x=-b, y=a$$

$$\therefore a=-3, b=-2$$

따라서 $y=\sqrt{-3x+2}=\sqrt{-3\left(x-\frac{2}{3}\right)}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \leq \frac{2}{3}\right\}$ 이므로 정수 x 의 최댓값은 0이다.

10 답 4

$y=2\sqrt{x+2}+k$ 의 그래프는 $y=2\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

$2 \leq x \leq 7$ 에서 $y=2\sqrt{x+2}+k$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $x=7$ 일 때 최댓값 $6+k$, $x=2$ 일 때 최솟값 $4+k$ 를 갖는다.

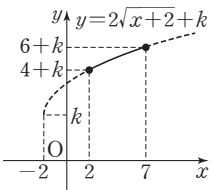
$$\therefore M=6+k, m=4+k$$

이때 $M+m=18$ 이므로

$$(6+k)+(4+k)=18$$

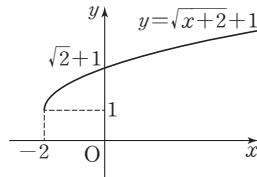
$$10+2k=18, 2k=8$$

$$\therefore k=4$$

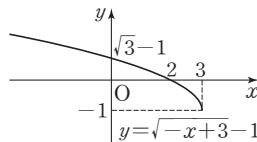


11 답 ④

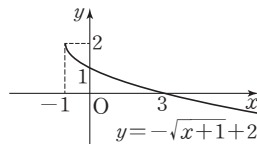
① $y=\sqrt{x+2}+1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2사분면을 지난다.



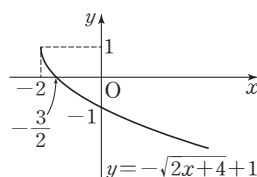
② $y=\sqrt{-x+3}-1=\sqrt{-(x-3)}-1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 4사분면을 지난다.



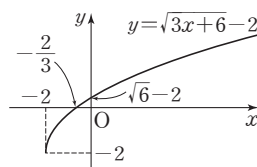
③ $y=-\sqrt{x+1}+2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 4사분면을 지난다.



④ $y=-\sqrt{2x+4}+1=-\sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2, 3, 4사분면을 지난다.



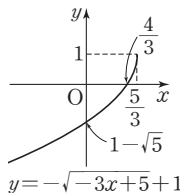
⑤ $y=\sqrt{3x+6}-2=\sqrt{3(x+2)}-2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1, 2, 3사분면을 지난다.



따라서 제1사분면을 지나지 않는 것은 ④이다.

12 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

$y=-\sqrt{-3x+5}+1=-\sqrt{-3(x-\frac{5}{3})}+1$ 의 그래프는 $y=-\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{5}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



ㄱ. $-3x+5 \geq 0$ 에서 $x \leq \frac{5}{3}$ 이므로 정의역은

$\{x \mid x \leq \frac{5}{3}\}$ 이고, 치역은 $\{y \mid y \leq 1\}$ 이다.

ㄴ. $y=-\sqrt{-3x+5}+1$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$0=-\sqrt{-3x+5}+1, \sqrt{-3x+5}=1$$

양변을 제곱하면

$$-3x+5=1 \quad \therefore x=\frac{4}{3}$$

즉, x 축과 점 $(\frac{4}{3}, 0)$ 에서 만난다.

ㄹ. 제1, 3, 4사분면을 지난다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

13 답 ①

$y=\sqrt{-ax-b}-c=\sqrt{-a(x+\frac{b}{a})}-c$ 이므로 $y=\sqrt{-ax-b}-c$ 의 그래프는 $y=\sqrt{-ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$ 만큼, y 축의 방향으로 $-c$ 만큼 평행이동한 것이다.

주어진 유리함수의 그래프에서

$$a < 0$$

$y=\frac{a}{x+b}+c$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-b$, $y=c$ 이므로

$$-b < 0, c > 0$$

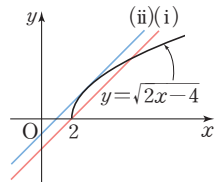
즉, $a < 0, b > 0, c > 0$ 이므로

$$-a > 0, -\frac{b}{a} > 0, -c < 0$$

따라서 $y=\sqrt{-ax-b}-c$ 의 그래프의 개형은 ①이다.

14 답 ①

$y=\sqrt{2x-4}=\sqrt{2(x-2)}$ 이므로 주어진 함수의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=x+k$ 는 기울기가 1이고 y 절편이 k 이다.



(i) 직선 $y=x+k$ 가 점 $(2, 0)$ 을 지날 때

$$0=2+k \quad \therefore k=-2$$

(ii) $y=\sqrt{2x-4}$ 의 그래프와 직선 $y=x+k$ 가 접할 때

$\sqrt{2x-4}=x+k$ 의 양변을 제곱하면

$$2x-4=x^2+2kx+k^2$$

$$\therefore x^2+2(k-1)x+k^2+4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2+4)=0$$

$$-2k-3=0 \quad \therefore k=-\frac{3}{2}$$

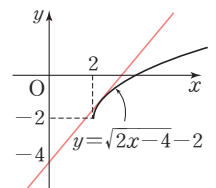
(i), (ii)에서 구하는 실수 k 의 값의 범위는

$$-2 \leq k < -\frac{3}{2}$$

15 답 ②

$y=\sqrt{2x-4}-2=\sqrt{2(x-2)}-2$ 이므로

$y=\sqrt{2x-4}-2$ 의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=mx-4$ 는 기울기가 m 이고 y 절편이 -4 이다.



$y=\sqrt{2(x-2)}-2$ 의 그래프와 직선 $y=mx-4$ 가 접할 때,

$$\sqrt{2(x-2)}-2=mx-4$$

$$\sqrt{2(x-2)}=mx-2$$

양변을 제곱하면

$$2(x-2)=m^2x^2-4mx+4$$

$$\therefore m^2x^2-2(2m+1)x+8=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(2m+1)\}^2-8m^2=0$$

$$4m^2-4m-1=0$$

$$\therefore m=\frac{1+\sqrt{2}}{2} (\because m > 0)$$

따라서 $y=\sqrt{2x-4}-2$ 의 그래프와 직선 $y=mx-4$ 가 만나지 않으려면 $m > \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 이어야 하므로 구하는 자연수 m 의 최솟값은 2이다.

16 **답** $\frac{1}{4}$

두 점 $P(a, b)$, $Q(c, d)$ 가 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점이므로

$$b=\sqrt{a}, d=\sqrt{c}$$

$$b+d=4\text{에서}$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{c}=4$$

따라서 직선 PQ의 기울기는

$$\begin{aligned}\frac{d-b}{c-a} &= \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{c-a} \\ &= \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{c}-\sqrt{a})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

17 **답** 9

두 점 A, B의 x 좌표가 a 이므로

$$A(a, \sqrt{a}), B(a, \sqrt{5a})$$

점 C의 y 좌표는 점 B의 y 좌표와 같으므로

$$y=\sqrt{x}\text{에 } y=\sqrt{5a}\text{를 대입하면}$$

$$\sqrt{5a}=\sqrt{x} \quad \therefore x=5a$$

$$\therefore C(5a, \sqrt{5a}), D(5a, 5\sqrt{a})$$

두 점 A, D를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{5\sqrt{a}-\sqrt{a}}{5a-a}=\frac{\sqrt{a}}{a}$$

$$\text{즉, } \frac{\sqrt{a}}{a}=\frac{1}{3}\text{이므로}$$

$$3\sqrt{a}=a$$

양변을 제곱하면

$$9a=a^2, a^2-9a=0$$

$$a(a-9)=0$$

$$\therefore a=9 (\because a>0)$$

18 **답** $f^{-1}(x)=x^2+2x+4 (x\geq -1)$

함수 $y=f(x)$ 의 치역이 $\{y|y\geq -1\}$ 이므로 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 정의역은 $\{x|x\geq -1\}$ 이다.

$$y=\sqrt{x-3}-1\text{이라 하면}$$

$$y+1=\sqrt{x-3}$$

양변을 제곱하면

$$y^2+2y+1=x-3$$

$$\therefore x=y^2+2y+4$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y=x^2+2x+4$$

$$\therefore f^{-1}(x)=x^2+2x+4 (x\geq -1)$$

19 **답** ⑤

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 그래프의 교점은 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

$$\sqrt{3x-a}+1=x\text{에서}$$

$$\sqrt{3x-a}=x-1$$

양변을 제곱하면

$$3x-a=x^2-2x+1$$

$$\therefore x^2-5x+a+1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 이차방정식의 두 근을 α, β 라 하면 두 교점의 좌표는 $(\alpha, \alpha), (\beta, \beta)$

두 교점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2}, (\alpha-\beta)^2=1$$

$$\therefore \alpha-\beta=\pm 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이차방정식 $\textcircled{1}$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\alpha\beta=a+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서

$$\alpha=3, \beta=2 \text{ 또는 } \alpha=2, \beta=3$$

따라서 $\textcircled{4}$ 에서

$$a=\alpha\beta-1=6-1=5$$

20 **답** ②

$$f^{-1}(4)=a\text{에서 } f(a)=4\text{이므로}$$

$$\frac{a+2}{a-1}=4, a+2=4(a-1)$$

$$\therefore a=2$$

$$\begin{aligned}\therefore (f \circ (g \circ f)^{-1})(2) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1})(2) \\ &= g^{-1}(2)\end{aligned}$$

$$\text{즉, } g^{-1}(2)=b\text{에서 } g(b)=2\text{이므로}$$

$$\sqrt{2b-1}=2$$

양변을 제곱하면

$$2b-1=4 \quad \therefore b=\frac{5}{2}$$

$$\therefore ab=5$$