



정답과 해설

공통수학 2

I. 도형의 방정식

I-1. 평면좌표

01 두 점 사이의 거리

개념 확인

9쪽

001 ㉠ (1) 4 (2) 5 (3) 6 (4) 3

$$(1) \overline{AB} = |5-1| = 4$$

$$(2) \overline{AB} = |-3-2| = 5$$

$$(3) \overline{AB} = |4-(-2)| = 6$$

$$(4) \overline{OA} = |3-0| = 3$$

002 ㉠ (1) 5 (2) $\sqrt{2}$ (3) $2\sqrt{5}$

(4) $5\sqrt{2}$ (5) $\sqrt{10}$ (6) 10

$$(1) \overline{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (5-1)^2} \\ = \sqrt{25} = 5$$

$$(2) \overline{AB} = \sqrt{(1-2)^2 + \{0-(-1)\}^2} = \sqrt{2}$$

$$(3) \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + \{-1-(-3)\}^2} \\ = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$(4) \overline{AB} = \sqrt{\{2-(-5)\}^2 + (7-6)^2} \\ = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$(5) \overline{OA} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$(6) \overline{OA} = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$$

유제

11~19쪽

003 ㉠ 3

$$\overline{AB} = \sqrt{41} \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{(a+2-1)^2 + \{2-(-3)\}^2} = \sqrt{41}$$

$$\sqrt{a^2 + 2a + 26} = \sqrt{41}$$

양변을 제곱하면

$$a^2 + 2a + 26 = 41, a^2 + 2a - 15 = 0$$

$$(a+5)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = -5 \text{ 또는 } a = 3$$

따라서 양수 a 의 값은 3이다.

004 ㉠ 1, 3

$$\overline{AB} = 2\overline{BC} \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{(3-5)^2 + \{2-(-2)\}^2} = 2\sqrt{(1-3)^2 + (a-2)^2}$$

$$2\sqrt{5} = 2\sqrt{a^2 - 4a + 8}$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{a^2 - 4a + 8}$$

양변을 제곱하면

$$5 = a^2 - 4a + 8, a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$(a-1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 3$$

005 ㉠ 1

$$\overline{AB} = \sqrt{(a-3)^2 + (-1-a)^2}$$

$$= \sqrt{2a^2 - 4a + 10}$$

$$= \sqrt{2(a-1)^2 + 8}$$

따라서 선분 AB의 길이는 $a=1$ 일 때 최소가 된다.

|참고| 선분 AB의 길이는 $a=1$ 일 때 최소이고 그때의 길이는 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ 이다.

006 ㉠ 8

$$\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 2 \text{ 에서 } 2\overline{AC} = \overline{BC} \text{ 이므로}$$

$$2\sqrt{4^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{(4-a)^2 + (-2-6)^2}$$

$$10 = \sqrt{a^2 - 8a + 80}$$

양변을 제곱하면

$$100 = a^2 - 8a + 80$$

$$a^2 - 8a - 20 = 0$$

$$(a+2)(a-10) = 0$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 10$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$-2 + 10 = 8$$

|참고| 이차방정식 $a^2 - 8a - 20 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 a 의 값의 합이 8임을 알 수도 있다.

007 ㉠ (0, -1)

y 축 위의 점 P의 좌표를 $(0, a)$ 라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{ 에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{ 이므로}$$

$$\{ -(-3) \}^2 + (a-1)^2 = (-2)^2 + \{ a-(-4) \}^2$$

$$a^2 - 2a + 10 = a^2 + 8a + 20$$

$$-10a = 10$$

$$\therefore a = -1$$

따라서 점 P의 좌표는 $(0, -1)$ 이다.

008 ㉡ (3, 1)

직선 $y=x-2$ 위의 점 P의 좌표를 $(a, a-2)$ 라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} \{a-(-2)\}^2+\{a-2-(-1)\}^2 \\ &= (a-1)^2+(a-2-6)^2 \\ (a+2)^2+(a-1)^2 &= (a-1)^2+(a-8)^2 \\ (a+2)^2 &= (a-8)^2 \\ a^2+4a+4 &= a^2-16a+64 \\ 20a &= 60 \quad \therefore a=3 \end{aligned}$$

따라서 점 P의 좌표는 (3, 1)이다.

009 ㉡ $\sqrt{5}$

x 축 위의 점 P의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} \{a-(-1)\}^2+(-1)^2 &= (a-1)^2+\{-(-3)\}^2 \\ a^2+2a+2 &= a^2-2a+10 \\ 4a &= 8 \quad \therefore a=2 \end{aligned}$$

$\therefore P(2, 0)$

또 y 축 위의 점 Q의 좌표를 $(0, b)$ 라 하면

$\overline{AQ}=\overline{BQ}$ 에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} \{-(-1)\}^2+(b-1)^2 &= (-1)^2+\{b-(-3)\}^2 \\ b^2-2b+2 &= b^2+6b+10 \\ -8b &= 8 \quad \therefore b=-1 \end{aligned}$$

$\therefore Q(0, -1)$

$$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

010 ㉡ 2

점 $P(a, b)$ 가 직선 $y=-2x+1$ 위의 점이므로

$$b=-2a+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore P(a, -2a+1)$$

$\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} \{a-(-2)\}^2+\{-2a+1-(-1)\}^2 \\ &= (a-3)^2+(-2a+1-4)^2 \\ 5a^2-4a+8 &= 5a^2+6a+18 \\ -10a &= 10 \quad \therefore a=-1 \end{aligned}$$

이를 ㉠에 대입하면 $b=3$

$$\therefore a+b=2$$

011 ㉡ 정삼각형

$$\overline{AB}=\sqrt{\{-(-\sqrt{3})\}^2+(4-1)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1-4)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$\overline{CA}=\sqrt{(-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+(1-1)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

|참고| 두 점 A, C의 y 좌표가 같으므로 $\overline{CA}$ 의 길이를

$$|-\sqrt{3}-\sqrt{3}|=2\sqrt{3} \text{과 같이 구할 수도 있다.}$$

012 ㉡ $\angle A=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형

$$\overline{AB}=\sqrt{(-3-1)^2+(-2-1)^2}=5$$

$$\overline{BC}=\sqrt{\{4-(-3)\}^2+\{-3-(-2)\}^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

$$\overline{CA}=\sqrt{(1-4)^2+\{1-(-3)\}^2}=5$$

$$\overline{AB}^2=25, \overline{BC}^2=50, \overline{CA}^2=25 \text{이므로}$$

$$\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=\overline{BC}^2$$

또 $\overline{AB}=\overline{CA}$ 이므로 삼각형 ABC는 $\angle A=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이다.

013 ㉡ $-3\sqrt{3}$

삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$$

$$\overline{AB}=\overline{BC} \text{에서 } \overline{AB}^2=\overline{BC}^2 \text{이므로}$$

$$(\sqrt{3}-3)^2+(a-1)^2=(-3-\sqrt{3})^2+(-1-a)^2$$

$$a^2-2a+13-6\sqrt{3}=a^2+2a+13+6\sqrt{3}$$

$$-4a=12\sqrt{3}$$

$$\therefore a=-3\sqrt{3}$$

014 ㉡ 1, 6

$$\overline{AB}=\sqrt{(5-2)^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(a-5)^2+4^2}=\sqrt{a^2-10a+41}$$

$$\overline{CA}=\sqrt{(2-a)^2+(5-4)^2}=\sqrt{a^2-4a+5}$$

삼각형 ABC가 $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형이 되려면

$$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2 \text{이어야 하므로}$$

$$a^2-10a+41+a^2-4a+5=34$$

$$a^2-7a+6=0, (a-1)(a-6)=0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=6$$

015 ㉡ 79, (0, -1)

y 축 위의 점 P의 좌표를 $(0, a)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$$

$$=\{-(-6)\}^2+(a-2)^2+(-5)^2+\{a-(-4)\}^2$$

$$=2a^2+4a+81$$

$$=2(a+1)^2+79$$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 은 $a=-1$ 일 때 최솟값 79를 갖고, 그때의 점 P의 좌표는 (0, -1)이다.

016 ㉮ $2\sqrt{13}$

A(-5, -2), B(1, 2), P(x, y)라 하면

$$\sqrt{(x+5)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} \\ =\overline{AP}+\overline{BP}$$

$\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 값이 최소인 경우는 점 P가 선분 AB 위에 있을 때이므로

$$\overline{AP}+\overline{BP}\geq\overline{AB} \\ =\sqrt{\{1-(-5)\}^2+\{2-(-2)\}^2} \\ =\sqrt{52}=2\sqrt{13}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{13}$ 이다.

017 ㉮ (1, 1)

직선 $y=x$ 위의 점 P의 좌표를 (a, a)라 하면

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2 \\ =(a-1)^2+(a-5)^2+\{a-(-2)\}^2+a^2 \\ =4a^2-8a+30 \\ =4(a-1)^2+26$$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 은 $a=1$ 일 때 최솟값 26을 갖고, 그때의 점 P의 좌표는 (1, 1)이다.

018 ㉮ $\sqrt{5}$

$$\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5}=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$$

O(0, 0), A(1, -2), P(x, y)라 하면

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\overline{OP}+\overline{AP}$$

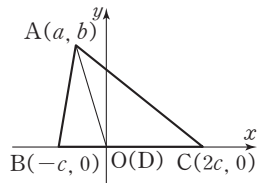
$\overline{OP}+\overline{AP}$ 의 값이 최소인 경우는 점 P가 선분 OA 위에 있을 때이므로

$$\overline{OP}+\overline{AP}\geq\overline{OA}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{5}$ 이다.

019 ㉮ 풀이 참조

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 D는 원점이 된다.



A(a, b), B(-c, 0)이라 하면 $2\overline{BD}=\overline{CD}$ 에서 C(2c, 0)이므로

$$\overline{AB}^2=(-c-a)^2+(-b)^2=a^2+2ac+c^2+b^2 \\ \overline{AC}^2=(2c-a)^2+(-b)^2=a^2-4ac+4c^2+b^2 \\ \overline{AD}^2=a^2+b^2 \\ \overline{BD}^2=c^2$$

따라서

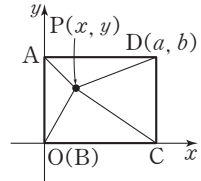
$$2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=3(a^2+b^2+2c^2), \\ 3(\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2)=3(a^2+b^2+2c^2)$$

이므로

$$2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2)$$

020 ㉮ 풀이 참조

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축, 직선 AB를 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이 된다.



D(a, b)라 하면 A(0, b),

C(a, 0)이므로 P(x, y)라 하면

$$\overline{AP}^2=x^2+(y-b)^2, \overline{CP}^2=(x-a)^2+y^2 \\ \overline{BP}^2=x^2+y^2, \overline{DP}^2=(x-a)^2+(y-b)^2$$

따라서

$$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=x^2+(y-b)^2+(x-a)^2+y^2, \\ \overline{BP}^2+\overline{DP}^2=x^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2$$

이므로

$$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=\overline{BP}^2+\overline{DP}^2$$

021 ㉮ (가) $-c$ (나) b^2 (다) a^2+b^2 (라) c^2

오른쪽 그림과 같이

직선 BC를 x 축, 점

E를 지나고 직선

BC에 수직인 직선

을 y 축으로 하는 좌

표평면을 잡으면 점 E는 원점이 된다.

A(a, b), C(c, 0)이라 하면 B(-2c, 0),

D($\frac{a}{2} - c$, 0)이므로

$$\overline{AB}^2=(a+2c)^2+(\frac{a}{2}-c)^2b^2=a^2+4ac+4c^2+b^2$$

$$\overline{AC}^2=(a-c)^2+(\frac{a}{2}-c)^2b^2=a^2-2ac+c^2+b^2$$

$$\overline{AD}^2=(a+c)^2+b^2=a^2+2ac+c^2+b^2$$

$$\overline{AE}^2=(\frac{a}{2})^2+b^2$$

$$\overline{DE}^2=(\frac{a}{2})^2c^2$$

따라서

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2a^2+2ac+5c^2+2b^2,$$

$$\overline{AD}^2+\overline{AE}^2+4\overline{DE}^2=2a^2+2ac+5c^2+2b^2$$

이므로

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2+4\overline{DE}^2$$

022 ㉓ ②

$\overline{AB}=3$ 이므로

$$\sqrt{\{3-(a+1)\}^2+\{-2-(a-1)\}^2}=3$$

$$\sqrt{2a^2-2a+5}=3$$

양변을 제곱하면

$$2a^2-2a+5=9, a^2-a-2=0$$

$$(a+1)(a-2)=0 \quad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$-1+2=1$$

023 ㉓ 2

$$l^2=(-1-2t)^2+\{2t-(-3)\}^2$$

$$=8t^2+16t+10$$

$$=8(t+1)^2+2$$

따라서 l^2 은 $t=-1$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.

024 ㉓ 5

$\overline{AC}=2\overline{BC}$ 이므로

$$\sqrt{(a-1)^2+\{3-(-1)\}^2}=2\sqrt{(a-2)^2+(3-1)^2}$$

$$\sqrt{a^2-2a+17}=2\sqrt{a^2-4a+8}$$

양변을 제곱하면

$$a^2-2a+17=4(a^2-4a+8)$$

$$3a^2-14a+15=0, (3a-5)(a-3)=0$$

$$\therefore a=\frac{5}{3} \text{ 또는 } a=3$$

따라서 모든 a 의 값의 곱은

$$\frac{5}{3} \times 3=5$$

[참고] 이차방정식 $3a^2-14a+15=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 a 의 값의 곱이 $\frac{15}{3}=5$ 임을 알 수도 있다.

025 ㉓ ⑤

점 $P(a, b)$ 가 직선 $3x-y+2=0$ 위의 점이므로

$$3a-b+2=0 \quad \therefore b=3a+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore P(a, 3a+2)$$

$\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로

$$\{a-(-1)\}^2+\{3a+2-2\}^2$$

$$=\{a-(-4)\}^2+\{3a+2-5\}^2$$

$$10a^2+2a+1=10a^2-10a+25$$

$$12a=24 \quad \therefore a=2$$

이를 ①에 대입하면 $b=8$

$$\therefore ab=16$$

026 ㉓ 30

x 축 위의 점 C 의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면

$\overline{AC}=\overline{BC}$ 에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$ 이므로

$$\{a-(-2)\}^2=a^2+(-6)^2$$

$$a^2+4a+4=a^2+36$$

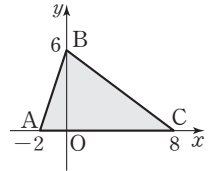
$$4a=32 \quad \therefore a=8$$

$$\therefore C(8, 0)$$

따라서 오른쪽 그림에서 삼각

형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times |8-(-2)| \times 6=30$$



027 ㉓ ④

$$\overline{AB}=\sqrt{(-1-3)^2+(-2-1)^2}=5$$

$$\overline{BC}=\sqrt{\{1-(-1)\}^2+\{2-(-2)\}^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$\overline{CA}=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$$

$$\overline{AB}^2=25, \overline{BC}^2=20, \overline{CA}^2=5 \text{이므로}$$

$$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$$

따라서 삼각형 ABC 는 $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

028 ㉓ 30

직선 $y=x-1$ 위의 점 P 의 좌표를 $(a, a-1)$ 이라 하면

..... ①

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$$

$$=\{a-(-4)\}^2+\{a-1-1\}^2$$

$$+\{a-3\}^2+\{a-1-(-2)\}^2$$

$$=4a^2+30$$

..... ②

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 은 $a=0$ 일 때 최솟값 30을 갖는다.

..... ③

단계	채점 기준	비율
①	점 P 의 좌표를 a 를 이용하여 나타내기	20 %
②	$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 을 a 에 대한 식으로 나타내기	50 %
③	$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 의 최솟값 구하기	30 %

029 ㉓ -6

평행사변형 $ABCD$ 에서 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같으므로

$$\overline{AB}=\overline{CD}, \overline{AD}=\overline{BC} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 평행사변형 $ABCD$ 의 둘레의 길이가 $6\sqrt{13}$ 이므로

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{AD}=6\sqrt{13}$$

$$2(\overline{AB}+\overline{BC})=6\sqrt{13} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} = 3\sqrt{13}$$

$$\sqrt{\{-3-(-1)\}^2 + \{-3\}^2} + \sqrt{\{1-(-3)\}^2 + k^2} = 3\sqrt{13}$$

$$\sqrt{13} + \sqrt{16+k^2} = 3\sqrt{13}, \sqrt{16+k^2} = 2\sqrt{13}$$

양변을 제곱하면

$$16+k^2=52, k^2=36 \quad \therefore k=\pm 6$$

따라서 음수 k 의 값은 -6 이다.

030 ㉡ ④

외심 P의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 P에서 세 꼭짓점 A, B, C에 이르는 거리가 같으므로

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$(a-2)^2 + (b-3)^2 = (a-1)^2 + b^2$$

$$a^2 + b^2 - 4a - 6b + 13 = a^2 + b^2 - 2a + 1$$

$$-2a - 6b = -12 \quad \therefore a + 3b = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\overline{BP} = \overline{CP} \text{에서 } \overline{BP}^2 = \overline{CP}^2 \text{이므로}$$

$$(a-1)^2 + b^2 = (a-5)^2 + (b-4)^2$$

$$a^2 + b^2 - 2a + 1 = a^2 + b^2 - 10a - 8b + 41$$

$$8a + 8b = 40 \quad \therefore a + b = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

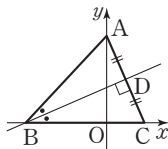
$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{을 연립하여 풀면 } a = \frac{9}{2}, b = \frac{1}{2}$$

따라서 외심 P의 좌표는 $(\frac{9}{2}, \frac{1}{2})$ 이다.

|참고| 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.

031 ㉡ ③

오른쪽 그림과 같이 $\angle ABC$ 의 이등분선이 선분 AC와 만나는 점을 D라 하면 직선 BD가 선분 AC를 수직이등분한다.



즉, 삼각형 ABC가 $\overline{BA} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{BA}^2 = \overline{BC}^2 \text{에서}$$

$$\{ -(-3) \}^2 + a^2 = \{ 1 - (-3) \}^2$$

$$a^2 + 9 = 16, a^2 = 7$$

$$\therefore a = \pm\sqrt{7}$$

따라서 양수 a 의 값은 $\sqrt{7}$ 이다.

032 ㉡ $\frac{17}{4}$

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-2)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-3)^2 + (k-1-2)^2} = \sqrt{k^2 - 6k + 10}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(2-4)^2 + (-k+1)^2} = \sqrt{k^2 - 2k + 5}$$

(i) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{이므로}$$

$$5 = k^2 - 6k + 10, k^2 - 6k + 5 = 0$$

$$(k-1)(k-5) = 0 \quad \therefore k=1 \text{ 또는 } k=5$$

$$\text{이때 } k=5 \text{이면 } \overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{5}, \overline{CA} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

에서 $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{CA}$ 이므로 삼각형이 만들어지지 않는다.

$$\therefore k=1$$

(ii) $\overline{BC} = \overline{CA}$ 일 때

$$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 \text{이므로}$$

$$k^2 - 6k + 10 = k^2 - 2k + 5$$

$$4k = 5 \quad \therefore k = \frac{5}{4}$$

(iii) $\overline{CA} = \overline{AB}$ 일 때

$$\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 \text{이므로}$$

$$k^2 - 2k + 5 = 5, k^2 - 2k = 0$$

$$k(k-2) = 0 \quad \therefore k=0 \text{ 또는 } k=2$$

따라서 양수 k 의 값은 2이다.

(i), (ii), (iii)에서 모든 양수 k 의 값의 합은

$$1 + \frac{5}{4} + 2 = \frac{17}{4}$$

033 ㉡ (0, -1)

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\overline{AP}^2 = \{a - (-6)\}^2 + \{b - (-5)\}^2$$

$$= a^2 + b^2 + 12a + 10b + 61$$

$$\overline{BP}^2 = (a-4)^2 + \{b - (-1)\}^2$$

$$= a^2 + b^2 - 8a + 2b + 17$$

$$\overline{CP}^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2$$

$$= a^2 + b^2 - 4a - 6b + 13$$

$$\therefore \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$$

$$= 3a^2 + 3b^2 + 6b + 91$$

$$= 3a^2 + 3(b+1)^2 + 88$$

▶▶▶▶▶ ①

모든 실수 a, b 에 대하여 $a^2 \geq 0, (b+1)^2 \geq 0$ 이므로

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 은 $a=0, b=-1$ 일 때 최솟값 88

을 갖고, 그때의 점 P의 좌표는 $(0, -1)$ 이다.

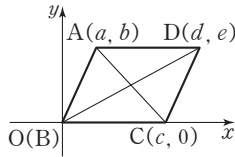
▶▶▶▶▶ ②

단계	채점 기준	비율
①	점 P의 좌표를 (a, b) 로 놓고 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 을 a, b 에 대한 식으로 나타내기	60%
②	$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 값이 최소가 될 때 의 점 P의 좌표 구하기	40%

034 ㉠ (가) $a+c$ (나) $2a^2+2b^2+2c^2$

(다) $a^2+b^2+c^2$

오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축, 점 B를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이 된다.



$A(a, b)$, $C(c, 0)$, $D(d, e)$ 라 하면 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{a+c}{2} = \frac{d}{2}, \frac{b}{2} = \frac{e}{2}$$

$$\therefore d = a+c, e = b$$

$$\therefore D(\boxed{a+c}, b)$$

$$\overline{AC}^2 = (c-a)^2 + (-b)^2 = a^2 - 2ac + c^2 + b^2$$

$$\overline{BD}^2 = (a+c)^2 + b^2 = a^2 + 2ac + c^2 + b^2$$

$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2$$

$$\overline{BC}^2 = c^2$$

따라서

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \boxed{2a^2 + 2b^2 + 2c^2},$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \boxed{a^2 + b^2 + c^2}$$

이므로

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2)$$

035 ㉠ 116

▶ 접근 방법 정사각형은 모두 닮은 도형이고, 서로 닮은 세 평면도형의 닮음비가 $a:b:c$ 일 때, 넓이의 비는 $a^2:b^2:c^2$ 임을 이용한다.

$$B_4(30, 18) \text{이므로}$$

$$\overline{OA_4} = 30, \overline{B_4A_4} = 18$$

$$\overline{A_3A_4} = \overline{B_4A_4} = 18 \text{이므로}$$

$$\overline{OA_3} = \overline{OA_4} - \overline{A_3A_4}$$

$$= 30 - 18 = 12$$

$$\therefore A_3(12, 0)$$

이때 정사각형 $OA_1B_1C_1$, $A_1A_2B_2C_2$, $A_2A_3B_3C_3$ 의 넓이의 비가 $1:4:9$ 이므로 닮음비는 $1:2:3$ 이다.

즉, $\overline{OA_1} : \overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3} = 1:2:3$ 이므로

$$\overline{OA_1} = \overline{OA_3} \times \frac{1}{1+2+3} = 12 \times \frac{1}{6} = 2$$

$$\overline{A_1A_2} = \overline{OA_3} \times \frac{2}{1+2+3} = 12 \times \frac{2}{6} = 4$$

$$\overline{A_2A_3} = \overline{OA_3} \times \frac{3}{1+2+3} = 12 \times \frac{3}{6} = 6$$

이때 $\overline{B_1A_1} = \overline{OA_1} = 2$ 이므로

$$B_1(2, 2)$$

또 $\overline{B_3A_3} = \overline{A_2A_3} = 6$ 이므로

$$B_3(12, 6)$$

$$\therefore \overline{B_1B_3}^2 = (12-2)^2 + (6-2)^2 = 116$$

036 ㉠ ②

▶ 접근 방법 | (거리) = (속력) × (시간)임을 이용하여 t 초 후의 두 사람의 위치를 좌표로 나타낸다.

O 지점을 원점으로 하는 좌표

평면 위에 주어진 조건을 나타

내면 오른쪽 그림과 같다.

A, B 두 사람은 각각 초속 3m,

초속 5m의 속력으로 움직이

므로 t 초 동안 움직인 거리는 각각 $3t$ m, $5t$ m이다.

A, B 두 사람이 처음 출발한 위치가 각각 $(-11, 0)$, $(0, -7)$ 이므로 출발한 지 t 초 후의 위치를 각각 P, Q라 하면

$$P(-11+3t, 0), Q(0, -7+5t)$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{\{ -(-11+3t) \}^2 + (-7+5t)^2}$$

$$= \sqrt{9t^2 - 66t + 121 + 25t^2 - 70t + 49}$$

$$= \sqrt{34t^2 - 136t + 170}$$

$$= \sqrt{34(t-2)^2 + 34}$$

즉, $t=2$ 일 때, $\overline{PQ}$ 는 최솟값 $\sqrt{34}$ 를 갖는다.

따라서 두 사람이 가장 가까이 있을 때의 거리는 $\sqrt{34}$ m이다.

037 ㉠ ③

$$A(3, 0), B(0, k), P(x, y) \text{라 하면}$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-k)^2} = \overline{AP} + \overline{BP}$$

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값이 최소인 경우는 점 P가 선분 AB 위에 있을 때이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} \geq \overline{AB}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + k^2}$$

$$= \sqrt{9+k^2}$$

즉, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $\sqrt{9+k^2}$ 이므로

$$\sqrt{9+k^2} = 5$$

양변을 제곱하면

$$9+k^2=25, k^2=16$$

$$\therefore k = \pm 4$$

따라서 양수 k 의 값은 4이다.

02 선분의 내분점

개념 확인

25쪽

038 ㉠ (1) B (2) C (3) 2

039 ㉠ (1) 3 (2) 5 (3) 4

$$(1) \frac{2 \times 9 + 3 \times (-1)}{2+3} = 3$$

$$(2) \frac{2 \times (-1) + 3 \times 9}{2+3} = 5$$

$$(3) \frac{-1+9}{2} = 4$$

040 ㉠ (1) (4, -2) (2) $(-1, \frac{1}{2})$ (3) (2, -1)

$$(1) \left(\frac{2 \times 8 + 1 \times (-4)}{2+1}, \frac{2 \times (-4) + 1 \times 2}{2+1} \right)$$

$$\therefore (4, -2)$$

$$(2) \left(\frac{3 \times (-4) + 1 \times 8}{3+1}, \frac{3 \times 2 + 1 \times (-4)}{3+1} \right)$$

$$\therefore \left(-1, \frac{1}{2} \right)$$

$$(3) \left(\frac{-4+8}{2}, \frac{2+(-4)}{2} \right)$$

$$\therefore (2, -1)$$

유제

27-37쪽

041 ㉠ $2\sqrt{5}$

선분 AB를 5 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{5 \times 4 + 1 \times (-2)}{5+1}, \frac{5 \times (-9) + 1 \times 3}{5+1} \right)$$

$$\therefore (3, -7)$$

선분 AB의 중점 M의 좌표는

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3-9}{2} \right)$$

$$\therefore (1, -3)$$

따라서 두 점 P, M 사이의 거리는

$$\sqrt{(1-3)^2 + \{-3-(-7)\}^2} = 2\sqrt{5}$$

042 ㉠ 20

선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점의 좌표가 (b, 1)이므로

$$\frac{1 \times 2 + 3 \times (-6)}{1+3} = b, \frac{1 \times a + 3 \times 3}{1+3} = 1$$

$$-4 = b, a + 9 = 4$$

$$\therefore a = -5, b = -4$$

$$\therefore ab = 20$$

043 ㉠ $(\frac{5}{2}, 1)$

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 5 + 1 \times (-1)}{2+1}, \frac{2 \times 2 + 1 \times 5}{2+1} \right)$$

$$\therefore (3, 3)$$

선분 BC를 3 : 4로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-2) + 4 \times 5}{3+4}, \frac{3 \times (-5) + 4 \times 2}{3+4} \right)$$

$$\therefore (2, -1)$$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+2}{2}, \frac{3-1}{2} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{5}{2}, 1 \right)$$

044 ㉠ $a=5, b=-2$

선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표가

(b+3, a-5)이므로

$$\frac{1 \times a + 2 \times (-1)}{1+2} = b+3, \frac{1 \times b + 2 \times 1}{1+2} = a-5$$

$$\frac{a-2}{3} = b+3, \frac{b+2}{3} = a-5$$

$$a-3b=11, 3a-b=17$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=5, b=-2$$

045 ㉠ $0 < t < \frac{3}{8}$ $t : (1-t)$ 에서 $t > 0, 1-t > 0$ 이므로

$$0 < t < 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 AB를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{t \times 5 + (1-t) \times (-3)}{t+(1-t)}, \frac{t \times (-1) + (1-t) \times 4}{t+(1-t)} \right)$$

$$\therefore (8t-3, -5t+4)$$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$$8t-3 < 0, -5t+4 > 0 \quad \text{---} (x\text{좌표}) < 0, (y\text{좌표}) > 0$$

$$\therefore t < \frac{3}{8} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면

$$0 < t < \frac{3}{8}$$

046 ㉠ -1

선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 7 + 1 \times (-5)}{3+1}, \frac{3 \times a + 1 \times 3}{3+1} \right)$$

$$\therefore \left(4, \frac{3a+3}{4} \right)$$

이 점이 x축 위에 있으므로 $\triangleleft (y\text{좌표})=0$

$$\frac{3a+3}{4}=0, 3a+3=0$$

$$\therefore a=-1$$

047 ㉠ $\frac{11}{15}$

$(1-t) : t$ 에서 $t > 0, 1-t > 0$ 이므로

$$0 < t < 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

선분 AB를 $(1-t) : t$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{(1-t) \times 1 + t \times (-2)}{(1-t)+t}, \frac{(1-t) \times (-4) + t \times 6}{(1-t)+t} \right)$$

$$\therefore (-3t+1, 10t-4)$$

이 점이 제3사분면 위에 있으므로

$$-3t+1 < 0, 10t-4 < 0 \quad \triangleleft (x\text{좌표}) < 0, (y\text{좌표}) < 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} < t < \frac{2}{5} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{의 공통부분을 구하면 } \frac{1}{3} < t < \frac{2}{5}$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{2}{5} \text{이므로}$$

$$\alpha + \beta = \frac{11}{15}$$

048 ㉠ ③

선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 6 + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times 0 + 2 \times a}{1+2} \right)$$

$$\therefore \left(2, \frac{2a}{3} \right)$$

이 점이 직선 $y = -x$ 위에 있으므로

$$\frac{2a}{3} = -2 \quad \therefore a = -3$$

049 ㉠ $(-7, -2)$

$$3\overline{AB} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 3$$

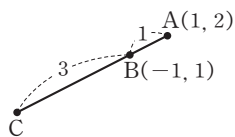
x좌표가 음수인 점 C에 대

하여 세 점 A, B, C의 위

치를 그림으로 나타내면 오

른쪽과 같으므로 점 B는

선분 AC를 1 : 3으로 내분하는 점이다.



점 C의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\frac{1 \times a + 3 \times 1}{1+3} = -1, \frac{1 \times b + 3 \times 2}{1+3} = 1$$

$$a+3=-4, b+6=4$$

$$\therefore a=-7, b=-2$$

따라서 점 C의 좌표는 $(-7, -2)$ 이다.

050 ㉠ $(-5, 4)$

$$\overline{AB} = 2\overline{BC} \text{에서 } \overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 1$$

세 점 A, B, C의 위치를

그림으로 나타내면 오른쪽

과 같으므로 점 B는 선분

AC를 2 : 1로 내분하는 점

이다.

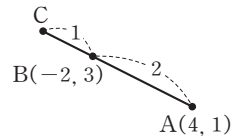
점 C의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\frac{2 \times a + 1 \times 4}{2+1} = -2, \frac{2 \times b + 1 \times 1}{2+1} = 3$$

$$2a+4=-6, 2b+1=9$$

$$\therefore a=-5, b=4$$

따라서 점 C의 좌표는 $(-5, 4)$ 이다.



051 ㉠ 15

$$3\overline{AB} = 2\overline{BC} \text{에서 } \overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 3$$

점 C(a, b)에서 $a > 0$ 이므로

세 점 A, B, C의 위치를 그림

으로 나타내면 오른쪽과 같다.

즉, 점 B는 선분 AC를 2 : 3

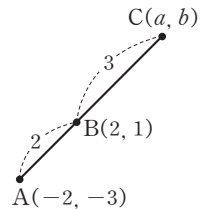
으로 내분하는 점이므로

$$\frac{2 \times a + 3 \times (-2)}{2+3} = 2,$$

$$\frac{2 \times b + 3 \times (-3)}{2+3} = 1$$

$$2a-6=10, 2b-9=5 \quad \therefore a=8, b=7$$

$$\therefore a+b=15$$



052 ㉠ 7

$$5\overline{AP} = 2\overline{BP} \text{에서 } \overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 5$$

세 점 A, B, P의 위치를 그림

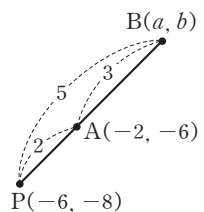
으로 나타내면 오른쪽과 같다.

즉, 점 A는 선분 BP를 3 : 2

로 내분하는 점이므로

$$\frac{3 \times (-6) + 2 \times a}{3+2} = -2,$$

$$\frac{3 \times (-8) + 2 \times b}{3+2} = -6$$



$$-18+2a=-10, -24+2b=-30$$

$$\therefore a=4, b=-3$$

$$\therefore a-b=7$$

053 ㉡ $a=-1, b=6$

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 선분 AC의 중점과 선분 BD의 중점이 일치한다.

선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+8}{2}, \frac{1+1}{2}\right) \therefore (5, 1) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

선분 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+b}{2}, \frac{a+3}{2}\right) \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$5=\frac{4+b}{2}, 1=\frac{a+3}{2}$$

$$\therefore a=-1, b=6$$

054 ㉡ $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right)$

선분 OC가 $\angle AOB$ 의 이등분선이므로

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{AC} : \overline{BC}$$

$$\text{이때 } \overline{OA} = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10},$$

$$\overline{OB} = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10} \text{이므로}$$

$$\overline{AC} : \overline{BC} = 2\sqrt{10} : \sqrt{10} = 2 : 1$$

따라서 점 C는 변 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 1 + 1 \times (-6)}{2+1}, \frac{2 \times (-3) + 1 \times (-2)}{2+1}\right)$$

$$\therefore \left(-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right)$$

055 ㉡ $a=7, b=11$

마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 선분 AC의 중점과 선분 BD의 중점이 일치한다.

선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+9}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+9}{2}, 4\right) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

선분 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{5+b}{2}, \frac{7+1}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{5+b}{2}, 4\right) \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$\frac{a+9}{2} = \frac{5+b}{2}$$

$$\therefore a-b=-4 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

또 마름모의 네 변의 길이는 모두 같으므로

$$\overline{AB} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$$

$$(5-a)^2 + (7-3)^2 = (9-5)^2 + (5-7)^2$$

$$a^2 - 10a + 21 = 0, (a-3)(a-7) = 0$$

$$\therefore a=7 (\because a>5)$$

이를 ㉢에 대입하면

$$b=11$$

056 ㉡ 3

선분 AD가 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

$$\text{이때 } \overline{AB} = \sqrt{(-4+1)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{13},$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(8+1)^2 + (-1-5)^2} = 3\sqrt{13} \text{이므로}$$

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \sqrt{13} : 3\sqrt{13} = 1 : 3$$

즉, 점 D는 변 BC를 1 : 3으로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 8 + 3 \times (-4)}{1+3}, \frac{1 \times (-1) + 3 \times 3}{1+3}\right)$$

$$\therefore (-1, 2)$$

따라서 선분 AD의 길이는

$$|5-2|=3$$

057 ㉡ $3x-y-4=0$

점 B의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 B가 직선

$$3x-y-1=0 \text{ 위의 점이므로}$$

$$3a-b-1=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{1 \times a + 3 \times 1}{1+3} = \frac{a+3}{4}$$

$$y = \frac{1 \times b + 3 \times (-2)}{1+3} = \frac{b-6}{4}$$

$$\therefore a=4x-3, b=4y+6$$

이를 ㉠에 대입하면

$$3(4x-3) - (4y+6) - 1 = 0$$

$$\therefore 3x-y-4=0$$

058 ㉡ $\frac{40}{9}$

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (a, b) 이므로

$$\frac{2+4-1}{3} = a, \frac{5+3}{3} = b$$

$$\therefore a = \frac{5}{3}, b = \frac{8}{3}$$

$$\therefore ab = \frac{40}{9}$$

059 ㉠ $a = -1, b = 1$

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(-2, 1)$ 이므로

$$\frac{3+a-8}{3} = -2, \frac{-2+4+b}{3} = 1$$

$$a-5 = -6, 2+b = 3$$

$$\therefore a = -1, b = 1$$

060 ㉠ $(2, 5)$

두 점 B, C의 좌표를 각각 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 라 하면

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(3, 2)$ 이므로

$$\frac{5+x_1+x_2}{3} = 3, \frac{-4+y_1+y_2}{3} = 2$$

$$\therefore x_1+x_2 = 4, y_1+y_2 = 10$$

따라서 선분 BC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2} \right)$$

$$\therefore (2, 5)$$

061 ㉠ $(4, 2)$

삼각형 DEF의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심

과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{4-2+10}{3}, \frac{-3+6+3}{3} \right)$$

$$\therefore (4, 2)$$

|다른 풀이|

선분 AB를 1:2로 내분하는 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-2) + 2 \times 4}{1+2}, \frac{1 \times 6 + 2 \times (-3)}{1+2} \right)$$

$$\therefore (2, 0)$$

선분 BC를 1:2로 내분하는 점 E의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 10 + 2 \times (-2)}{1+2}, \frac{1 \times 3 + 2 \times 6}{1+2} \right)$$

$$\therefore (2, 5)$$

선분 CA를 1:2로 내분하는 점 F의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 4 + 2 \times 10}{1+2}, \frac{1 \times (-3) + 2 \times 3}{1+2} \right)$$

$$\therefore (8, 1)$$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+2+8}{3}, \frac{0+5+1}{3} \right)$$

$$\therefore (4, 2)$$

연습문제

38~40쪽

062 ㉠ ③

선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표가 $(0, 1)$ 이므로

$$\frac{1 \times (b+1) + 2 \times 2}{1+2} = 0, \frac{1 \times 3 + 2 \times (a-2)}{1+2} = 1$$

$$\frac{b+5}{3} = 0, \frac{2a-1}{3} = 1$$

$$b+5 = 0, 2a-1 = 3$$

$$\therefore a = 2, b = -5$$

따라서 B $(-4, 3)$, C $(4, -5)$ 이므로 선분 BC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+4}{2}, \frac{3-5}{2} \right)$$

$$\therefore (0, -1)$$

063 ㉠ $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$

선분 AB를 b:2로 내분하는 점의 좌표가 $(1, 2)$ 이므로

$$\frac{b \times 3 + 2 \times a}{b+2} = 1, \frac{b \times 4 + 2 \times (-1)}{b+2} = 2$$

$$2a+3b=b+2, 4b-2=2b+4$$

$$\therefore a = -2, b = 3$$

따라서 A $(-2, -1)$ 이므로 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 3 + 3 \times (-2)}{1+3}, \frac{1 \times 4 + 3 \times (-1)}{1+3} \right)$$

$$\therefore \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

064 ㉠ $\frac{1}{3}$

$t : (1-t)$ 에서 $t > 0, 1-t > 0$ 이므로

$$0 < t < 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

선분 AB를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{t \times (-1) + (1-t) \times 5}{t+(1-t)}, \frac{t \times 3 + (1-t) \times (-2)}{t+(1-t)} \right)$$

$$\therefore (-6t+5, 5t-2)$$

이 점이 제1사분면 위에 있으므로

$$-6t+5 > 0, 5t-2 > 0$$

$$\therefore \frac{2}{5} < t < \frac{5}{6} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$\frac{2}{5} < t < \frac{5}{6}$$

따라서 $\alpha = \frac{2}{5}$, $\beta = \frac{5}{6}$ 이므로

$$\alpha\beta = \frac{1}{3}$$

065 ㉔ ②

선분 AB를 $k : 1$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{k \times 2 + 1 \times (-2)}{k+1}, \frac{k \times 4 + 1 \times 0}{k+1} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{2k-2}{k+1}, \frac{4k}{k+1} \right)$$

이 점이 직선 $y=2x+1$ 위에 있으므로

$$\frac{4k}{k+1} = 2 \times \frac{2k-2}{k+1} + 1$$

$$\frac{4k}{k+1} = \frac{5k-3}{k+1}$$

$$4k = 5k - 3$$

$$\therefore k = 3$$

066 ㉔ (-5, -3)

$$3\overline{AB} = 2\overline{BC} \text{에서 } \overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 3$$

점 C는 제3사분면 위의 점이므로 점 C의 x 좌표는 음수이다.

따라서 세 점 A, B, C의

위치를 그림으로 나타내

면 오른쪽과 같으므로 점

A는 선분 BC를 $2 : 1$ 로 내분하는 점이다.

점 C의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\frac{2 \times a + 1 \times 4}{2+1} = -2, \quad \frac{2 \times b + 1 \times 3}{2+1} = -1$$

$$2a + 4 = -6, \quad 2b + 3 = -3$$

$$\therefore a = -5, \quad b = -3$$

따라서 점 C의 좌표는 $(-5, -3)$ 이다.

067 ㉔ C(1, -3), D(4, -1)

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 선분 AC의 중점과 선분 BD의 중점이 일치한다. 이때 두 대각선 AC, BD의 교점의 좌표가 $(1, 0)$ 이므로 선분 AC의 중점과 선분 BD의 중점의 좌표는 모두 $(1, 0)$ 이다. >>>>> ①

점 C의 좌표를 (a, b) 라 하면 선분 AC의 중점의 좌표가 $(1, 0)$ 이므로

$$\frac{1+a}{2} = 1, \quad \frac{3+b}{2} = 0$$

$$1+a=2, \quad 3+b=0$$

$$\therefore a=1, \quad b=-3$$

$$\therefore C(1, -3)$$

>>>>> ②

점 D의 좌표를 (c, d) 라 하면 선분 BD의 중점의 좌표가 $(1, 0)$ 이므로

$$\frac{-2+c}{2} = 1, \quad \frac{1+d}{2} = 0$$

$$-2+c=2, \quad 1+d=0$$

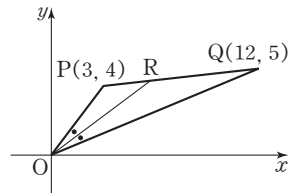
$$\therefore c=4, \quad d=-1$$

$$\therefore D(4, -1)$$

>>>>> ③

단계	채점 기준	비율
①	AC, BD의 중점의 좌표 구하기	20 %
②	점 C의 좌표 구하기	40 %
③	점 D의 좌표 구하기	40 %

068 ㉔ 13



위의 그림과 같이 $\angle POQ$ 의 이등분선과 선분 PQ와의 교점을 R라 하면

$$\overline{OP} : \overline{OQ} = \overline{PR} : \overline{QR}$$

$$\text{이때 } \overline{OP} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \overline{OQ} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ 이므로}$$

$$\overline{PR} : \overline{QR} = 5 : 13$$

즉, 점 R는 선분 PQ를 $5 : 13$ 으로 내분하는 점이므로

점 R의 x 좌표는

$$\frac{5 \times 12 + 13 \times 3}{5 + 13} = \frac{11}{2}$$

따라서 $a=2$, $b=11$ 이므로

$$a+b=13$$

069 ㉔ ①

삼각형 ABC의 무게중심은 세 변 AB, BC, CA의 중점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3-1+4}{3}, \frac{1+6+5}{3} \right)$$

$$\therefore (2, 4)$$

| 다른 풀이 |

세 점 A, B, C의 좌표를 각각 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) 이라 하자.

선분 AB의 중점의 좌표가 (3, 1)이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2}=3, \frac{y_1+y_2}{2}=1$$

$$\therefore x_1+x_2=6, y_1+y_2=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

선분 BC의 중점의 좌표가 (-1, 6)이므로

$$\frac{x_2+x_3}{2}=-1, \frac{y_2+y_3}{2}=6$$

$$\therefore x_2+x_3=-2, y_2+y_3=12 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

선분 CA의 중점의 좌표가 (4, 5)이므로

$$\frac{x_3+x_1}{2}=4, \frac{y_3+y_1}{2}=5$$

$$\therefore x_1+x_3=8, y_1+y_3=10 \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

⑦, ⑧, ⑨에서

$$2(x_1+x_2+x_3)=12, 2(y_1+y_2+y_3)=24$$

$$\therefore x_1+x_2+x_3=6, y_1+y_2+y_3=12$$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3} \right)$$

$$\therefore (2, 4)$$

070 ㉞ (7, 6)

점 P⊙Q는 선분 PQ를 1:2로 내분하는 점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-5) + 2 \times 7}{1+2}, \frac{1 \times 2 + 2 \times (-4)}{1+2} \right)$$

$$\therefore (3, -2)$$

점 R⊙(P⊙Q)는 두 점 (9, 10), (3, -2)를 이은 선분을 1:2로 내분하는 점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 3 + 2 \times 9}{1+2}, \frac{1 \times (-2) + 2 \times 10}{1+2} \right)$$

$$\therefore (7, 6)$$

071 ㉞ ①

선분 AB가 y축에 의하여 m:n으로 내분되므로 선분 AB를 m:n으로 내분하는 점은 y축 위에 있다.

선분 AB를 m:n으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{m \times 3 + n \times (-1)}{m+n}, \frac{m \times (-1) + n \times 4}{m+n} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{3m-n}{m+n}, \frac{-m+4n}{m+n} \right)$$

이 점이 y축 위에 있으므로

$$\frac{3m-n}{m+n}=0$$

$$3m-n=0$$

$$\therefore \frac{n}{m}=3$$

072 ㉞ ④

오른쪽 그림에서 두 삼각형 ABP, APC의 두 밑변 BP, PC에 대한 높이가 같으므로 $\overline{BP}$, $\overline{PC}$ 의 길이의 비는 두 삼각형의 넓이의 비와 같다.

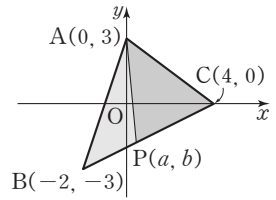
$$\therefore \overline{BP} : \overline{PC} = \triangle ABP : \triangle APC = 3 : 4$$

따라서 점 P(a, b)는 선분 BC를 3:4로 내분하는 점

$$\frac{3 \times 4 + 4 \times (-2)}{3+4} = a, \frac{3 \times 0 + 4 \times (-3)}{3+4} = b$$

$$\therefore a = \frac{4}{7}, b = -\frac{12}{7}$$

$$\therefore a-b = \frac{16}{7}$$



073 ㉞ (7, 9), (-1, -7)

$$4\overline{AB} = \overline{BC} \text{에서 } \overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 4$$

(i) 세 점 A, B, C의 위치가 오른쪽 그림과 같은 경우 점 B는 선분 AC를 1:4로 내분하는 점이다.

점 C의 좌표를 (a, b)라 하면

$$\frac{1 \times a + 4 \times 2}{1+4} = 3,$$

$$\frac{1 \times b + 4 \times (-1)}{1+4} = 1$$

$$a+8=15, b-4=5$$

$$\therefore a=7, b=9$$

따라서 이때의 점 C의 좌표는 (7, 9)이다.

(ii) 세 점 A, B, C의 위치가

오른쪽 그림과 같은 경우

점 A는 선분 BC를 1:3

으로 내분하는 점이다.

점 C의 좌표를 (c, d)라

하면

$$\frac{1 \times c + 3 \times 3}{1+3} = 2, \frac{1 \times d + 3 \times 1}{1+3} = -1$$

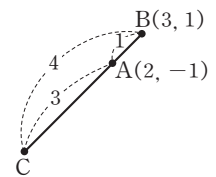
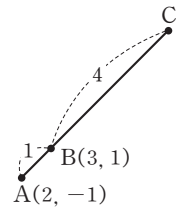
$$c+9=8, d+3=-4$$

$$\therefore c=-1, d=-7$$

따라서 이때의 점 C의 좌표는 (-1, -7)이다.

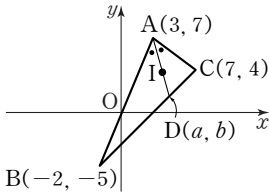
(i), (ii)에서 구하는 점 C의 좌표는

(7, 9), (-1, -7)



074 ㉔ 6

삼각형의 내심은 삼각형의 내각의 이등분선의 교점이므로 다음 그림에서 직선 AI는 $\angle A$ 의 이등분선이다.



$$\therefore \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

$$\text{이때 } \overline{AB} = \sqrt{(-2-3)^2 + (-5-7)^2} = 13,$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(7-3)^2 + (4-7)^2} = 5 \text{ 이므로}$$

$$\overline{BD} : \overline{CD} = 13 : 5$$

즉, 점 D는 변 BC를 13 : 5로 내분하는 점이므로 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{13 \times 7 + 5 \times (-2)}{13+5}, \frac{13 \times 4 + 5 \times (-5)}{13+5} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$\text{따라서 } a = \frac{9}{2}, b = \frac{3}{2} \text{ 이므로}$$

$$a+b=6$$

075 ㉔ 14

두 점 A, B는 직선 $y=2x+6$ 위의 점이므로 두 점의 좌표를 각각 $(\alpha, 2\alpha+6)$, $(\beta, 2\beta+6)$ 이라 하면 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+\alpha+\beta}{3}, \frac{0+2\alpha+6+2\beta+6}{3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{\alpha+\beta}{3}, \frac{2(\alpha+\beta)+12}{3} \right) \quad \dots\dots ㉑$$

이때 이차함수 $y=x^2-8x+1$ 의 그래프와 직선 $y=2x+6$ 이 만나는 두 점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2-8x+1=2x+6$, 즉 $x^2-10x-5=0$ 의 두 실근과 같으므로 이차방정식 $x^2-10x-5=0$ 의 두 실근은 α, β 이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=10$$

이를 ㉑에 대입하면 삼각형 OAB의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{10}{3}, \frac{2 \times 10 + 12}{3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{10}{3}, \frac{32}{3} \right)$$

$$\text{따라서 } a = \frac{10}{3}, b = \frac{32}{3} \text{ 이므로}$$

$$a+b=14$$

076 ㉔ ④

점 B의 좌표를 (a, b) 라 하면 변 AB의 중점의 좌표가 $(3, 0)$ 이므로

$$\frac{2+a}{2} = 3, \frac{4+b}{2} = 0$$

$$2+a=6, 4+b=0 \quad \therefore a=4, b=-4$$

$$\therefore B(4, -4)$$

점 C의 좌표를 (c, d) 라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(4, 2)$ 이므로

$$\frac{2+4+c}{3} = 4, \frac{4-4+d}{3} = 2$$

$$6+c=12, d=6 \quad \therefore c=6, d=6$$

$$\therefore C(6, 6)$$

따라서 변 AC를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 6 + 2 \times 2}{1+2}, \frac{1 \times 6 + 2 \times 4}{1+2} \right) \quad \therefore \left(\frac{10}{3}, \frac{14}{3} \right)$$

077 ㉔ ②

| 접근 방법 | 평행선과 선분의 길이의 비를 이용하여

$\overline{BA} : \overline{AP}$ 를 구한 후 점 A가 선분 BP의 내분점임을 이용한다.

삼각형 BCP에서 $\overline{AD} \parallel \overline{PC}$ 이므로

$$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{BA} : \overline{AP}$$

$$\text{이때 } \overline{BC} = \sqrt{\{5-(-7)\}^2 + \{1-(-8)\}^2} = 15,$$

$$\overline{DC} = \overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-4)^2} = 5 \text{ 이므로}$$

$$\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{DC} = 15 - 5 = 10$$

$$\therefore \overline{BA} : \overline{AP} = 10 : 5 = 2 : 1$$

따라서 점 A는 선분 BP를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\frac{2 \times a + 1 \times (-7)}{2+1} = 1, \frac{2 \times b + 1 \times (-8)}{2+1} = 4$$

$$2a-7=3, 2b-8=12 \quad \therefore a=5, b=10$$

$$\therefore b-a=5$$

078 ㉔ ⑤

| 접근 방법 | 선분 AP의 중점의 좌표를 점 P의 좌표에 대한 식으로 나타낸다.

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 P가 직선

$y=-2x+3$ 위의 점이므로

$$b=-2a+3 \quad \dots\dots ㉑$$

선분 AP의 중점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{2+a}{2}, y = \frac{3+b}{2} \quad \therefore a=2x-2, b=2y-3$$

이를 ㉑에 대입하면

$$2y-3=-2(2x-2)+3$$

$$\therefore 2x+y-5=0$$

01 두 직선의 위치 관계

개념 확인

45쪽

079 ㉡ (1) $y=2x+7$ (2) $y=-x+2$

(3) $x+3y=-6$

(1) $y-1=2\{x-(-3)\} \quad \therefore y=2x+7$

(2) $y-(-2)=\frac{3-(-2)}{-1-4}(x-4) \quad \therefore y=-x+2$

(3) $\frac{x}{-6}+\frac{y}{-2}=1 \quad \therefore x+3y=-6$

080 ㉡ (1) $x=-2$ (2) $y=1$

081 ㉡ (1) 제3사분면, 제4사분면

(2) 제1사분면, 제4사분면

(3) 제2사분면, 제4사분면

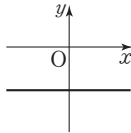
(4) 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면

(1) $ax+by+c=0$ 에서 $a=0, b \neq 0$ 이므로

$$by+c=0 \quad \therefore y=-\frac{c}{b}$$

이때 $b>0, c>0$ 이므로 $-\frac{c}{b}<0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$ 의 개
형은 오른쪽 그림과 같으므로 제3
사분면, 제4사분면을 지난다.

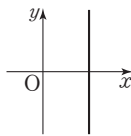


(2) $ax+by+c=0$ 에서 $a \neq 0, b=0$ 이므로

$$ax+c=0 \quad \therefore x=-\frac{c}{a}$$

이때 $a>0, c<0$ 이므로 $-\frac{c}{a}>0$

따라서 직선 $ax+by+c=0$ 의 개
형은 오른쪽 그림과 같으므로 제1
사분면, 제4사분면을 지난다.



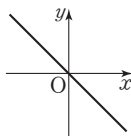
(3) $ab>0$ 이므로 $b \neq 0$

$ax+by+c=0$ 에서 $b \neq 0, c=0$ 이므로

$$ax+by=0 \quad \therefore y=-\frac{a}{b}x$$

이때 $ab>0$ 이므로 $-\frac{a}{b}<0$

즉, 직선 $ax+by+c=0$ 의 기울기
는 음수이고 원점을 지나므로 직
선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.
따라서 직선은 제2사분면, 제4사
분면을 지난다.



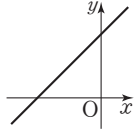
(4) $ax+by+c=0$ 에서 $b \neq 0$ 이므로

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

이때 $a>0, b<0, c>0$ 이므로

$$-\frac{a}{b}>0, -\frac{c}{b}>0$$

즉, 직선 $ax+by+c=0$ 의 기울
기와 y 절편이 모두 양수이므로 직
선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.
따라서 직선은 제1사분면, 제2사
분면, 제3사분면을 지난다.



082 ㉡ (1) $(0, 1)$ (2) $(-3, -2)$

(1) $(x+y-1)+k(x-y+1)=0$ 이 k 의 값에 관계
없이 항상 성립해야 하므로

$$x+y-1=0, x-y+1=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=0, y=1$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(0, 1)$ 이다.

(2) $(x-3y-3)+k(3x-2y+5)=0$ 이 k 의 값에 관
계없이 항상 성립해야 하므로

$$x-3y-3=0, 3x-2y+5=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=-3, y=-2$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-3, -2)$ 이다.

유제

47~57쪽

083 ㉡ $y=4x-2$

두 점 $(5, -2), (-3, 6)$ 을 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{5-3}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) \quad \therefore (1, 2)$$

따라서 점 $(1, 2)$ 를 지나고 기울기가 4인 직선의 방정
식은

$$y-2=4(x-1) \quad \therefore y=4x-2$$

084 ㉡ $y=-x+5$

세 점 $A(1, 4), B(-3, 5), C(-1, 9)$ 를 꼭짓점으
로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1-3-1}{3}, \frac{4+5+9}{3}\right) \quad \therefore (-1, 6)$$

따라서 두 점 $(-1, 6), A(1, 4)$ 를 지나는 직선의 방
정식은

$$y-4=\frac{4-6}{1-(-1)}(x-1) \quad \therefore y=-x+5$$

085 ㉠ $y=x+9$

직선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$

따라서 점 $(-2, 7)$ 을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y-7=x-(-2) \quad \therefore y=x+9$$

086 ㉡ ②

두 점 $(-2, 5), (1, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{1-5}{1-(-2)}(x-1)$$

$$\therefore y=-\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}$$

따라서 구하는 y 절편은 $\frac{7}{3}$ 이다.

087 ㉢ -6

x 절편이 2이고 y 절편이 5인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1$$

이 직선이 점 $(-k, 2k+2)$ 를 지나므로

$$\frac{-k}{2}+\frac{2k+2}{5}=1$$

$$-5k+2(2k+2)=10$$

$$-k+4=10 \quad \therefore k=-6$$

088 ㉣ -1

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{1-k}{-1-(-4)}=\frac{3-1}{2-(-1)}$$

$$\frac{1-k}{3}=\frac{2}{3}, 1-k=2 \quad \therefore k=-1$$

|다른 풀이|

두 점 B $(-1, 1)$, C $(2, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{3-1}{2-(-1)}\{x-(-1)\}$$

$$\therefore y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$$

점 A $(-4, k)$ 가 직선 $y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$ 위의 점이므로

$$k=\frac{2}{3}\times(-4)+\frac{5}{3}=-1$$

089 ㉤ $\frac{x}{5}-\frac{y}{3}=1$

직선 $\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=1$ 의 x 절편은 5이므로

P $(5, 0)$

직선 $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}=1$, 즉 $\frac{x}{4}+\frac{y}{-3}=1$ 의 y 절편은 -3

이므로

Q $(0, -3)$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{-3}=1 \quad \therefore \frac{x}{5}-\frac{y}{3}=1$$

090 ㉥ ①

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{1-a}{1-(-1)}=\frac{-7-1}{a-1}$$

$$\frac{1-a}{2}=\frac{-8}{a-1}, (a-1)^2=16$$

$$a-1=\pm 4 \quad \therefore a=-3 \text{ 또는 } a=5$$

따라서 양수 a 의 값은 5이다.

091 ㉦ $y=\frac{1}{3}x$

원점을 지나는 직선이 삼각형 AOB의 넓이를 이등분 하려면 그 직선은 선분 AB의 중점을 지나야 한다.

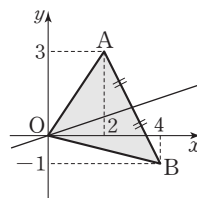
선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{3-1}{2}\right)$$

$$\therefore (3, 1)$$

따라서 원점과 점 $(3, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{3}x$$



092 ㉧ $y=x$

점 $(1, 1)$ 을 지나는 직선이 마름모 ABCD의 넓이를 이등분하려면 그 직선은 마름모 ABCD의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

오른쪽 그림에서 마름모

ABCD의 두 대각선의 교

점은 두 점 $(0, 4), (8, 4)$

를 이은 선분의 중점이므로

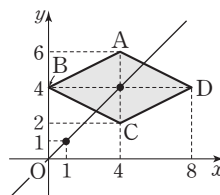
그 좌표는

$$\left(\frac{8}{2}, \frac{4+4}{2}\right) \quad \therefore (4, 4)$$

따라서 두 점 $(1, 1), (4, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=\frac{4-1}{4-1}(x-1)$$

$$\therefore y=x$$



093 ㉮ $\frac{7}{2}$

직선 $y=ax-2$ 는 점 $B(0, -2)$ 를 지나므로 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 선분 AC의 중점을 지나야 한다.

선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+7}{2}\right)$$

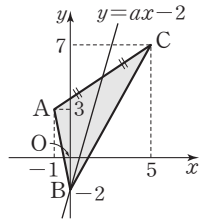
$$\therefore (2, 5)$$

따라서 직선 $y=ax-2$ 가 점 $(2, 5)$ 를 지나야 하므로

$$5=2a-2 \quad \therefore a=\frac{7}{2}$$

[참고] 직선 $y=ax-2$ 에서 a 는 두 점 $B(0, -2)$, $(2, 5)$ 를 지나는 직선의 기울기이므로

$$a=\frac{5-(-2)}{2}=\frac{7}{2}$$



094 ㉮ $y=\frac{2}{3}x$

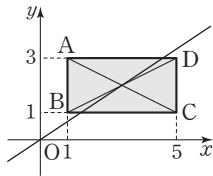
원점을 지나는 직선이 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 그 직선은 직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

오른쪽 그림과 같이 직사각형의 두 대각선의 교점은 두 점 $A(1, 3)$, $C(5, 1)$ 을 이은 선분의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right) \quad \therefore (3, 2)$$

따라서 원점과 점 $(3, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{2}{3}x$$



095 ㉮ 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면

$ab<0$, $bc<0$ 이므로 $b\neq 0$

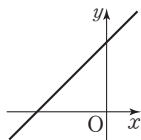
따라서 $ax+by+c=0$ 에서

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

$$ab<0, bc<0 \text{에서 } -\frac{a}{b}>0, -\frac{c}{b}>0$$

즉, 직선 $ax+by+c=0$ 의 기울기와 y 절편은 모두 양수이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 직선은 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면을 지난다.



096 ㉮ 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면

$ac<0$, $bc>0$ 이므로 $a\neq 0$, $b\neq 0$

따라서 $ax+by+c=0$ 에서

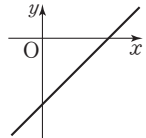
$$y=0 \text{일 때, } ax+c=0 \quad \therefore x=-\frac{c}{a}$$

$$x=0 \text{일 때, } by+c=0 \quad \therefore y=-\frac{c}{b}$$

$$ac<0, bc>0 \text{에서 } -\frac{c}{a}>0, -\frac{c}{b}<0$$

즉, 직선 $ax+by+c=0$ 의 x 절편은 양수이고 y 절편은 음수이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 직선은 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지난다.



[다른 풀이]

$b\neq 0$ 이므로 $ax+by+c=0$ 에서

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

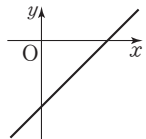
$ac<0, bc>0$ 이므로 $\begin{cases} a, c \text{의 부호는 서로 다르고,} \\ b, c \text{의 부호는 서로 같다.} \end{cases}$

$a>0, b<0, c<0$ 또는 $a<0, b>0, c>0$

$$\therefore -\frac{a}{b}>0, -\frac{c}{b}<0$$

즉, 직선 $ax+by+c=0$ 의 기울기는 양수이고 y 절편은 음수이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 직선은 제1사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지난다.



097 ㉮ 제2사분면, 제3사분면

$ac>0$, $bc=0$ 이므로 $a\neq 0$, $b=0$, $c\neq 0$

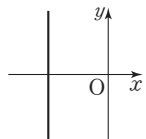
따라서 $ax+by+c=0$ 에서

$$ax+c=0 \quad \therefore x=-\frac{c}{a}$$

$$ac>0 \text{에서 } -\frac{c}{a}<0 \text{이므로 직선}$$

$ax+by+c=0$ 의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 직선은 제2사분면, 제3사분면을 지난다.



098 ㉮ 제3사분면

주어진 직선이 y 축에 평행하지 않으므로 $b\neq 0$

따라서 $ax+by+c=0$ 에서

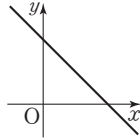
$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

이때 주어진 직선의 기울기가 양수이고 y 절편이 음수

$$-\frac{a}{b} > 0, -\frac{c}{b} < 0$$

$$cx+by+a=0 \text{에서 } y=-\frac{c}{b}x-\frac{a}{b}$$

즉, 직선 $cx+by+a=0$ 의 기울기는 음수이고 y 절편은 양수이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.
따라서 직선은 제3사분면을 지나지 않는다.



099 ㉠ (1, 2)

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(x+4y-9)+k(2x+y-4)=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+4y-9=0, 2x+y-4=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=1, y=2$$

따라서 구하는 점의 좌표는 (1, 2)이다.

100 ㉠ $x+y+3=0$

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(x-2y-3)+k(3x+y+5)=0 \text{ (단, } k \text{는 실수)}$$

..... ㉠

직선 ㉠이 점 (1, -4)를 지나므로

$$(1+8-3)+k(3-4+5)=0$$

$$6+4k=0 \quad \therefore k=-\frac{3}{2}$$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$(x-2y-3)-\frac{3}{2}(3x+y+5)=0$$

$$2(x-2y-3)-3(3x+y+5)=0$$

$$-7x-7y-21=0$$

$$\therefore x+y+3=0$$

| 다른 풀이 |

$x-2y-3=0, 3x+y+5=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=-1, y=-2$$

즉, 주어진 두 직선의 교점의 좌표는 (-1, -2)이다.

따라서 구하는 직선은 두 점 (1, -4), (-1, -2)를 지나는 직선이므로

$$y-(-4)=\frac{-2-(-4)}{-1-1}(x-1)$$

$$\therefore x+y+3=0$$

101 ㉠ $\sqrt{5}$

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(2x-3y-1)+k(-x+5y-3)=0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$2x-3y-1=0, -x+5y-3=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=2, y=1$$

즉, 점 P의 좌표는 (2, 1)이다.

따라서 점 P와 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

102 ㉠ $\frac{1}{2}$

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(2x+y-2)+k(4x-3y-2)=0 \text{ (단, } k \text{는 실수)}$$

..... ㉠

직선 ㉠이 점 (-2, -1)을 지나므로

$$(-4-1-2)+k(-8+3-2)=0$$

$$-7-7k=0 \quad \therefore k=-1$$

이를 ㉠에 대입하면

$$(2x+y-2)-(4x-3y-2)=0$$

$$-2x+4y=0 \quad \therefore y=\frac{1}{2}x$$

따라서 구하는 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

103 ㉠ $\frac{1}{2} < m < 3$

$mx-y-m+1=0$ 을 m 에 대하여 정리하면

$$(x-1)m-(y-1)=0 \quad \text{..... ㉠}$$

이 식이 m 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x-1=0, y-1=0 \quad \therefore x=1, y=1$$

즉, 직선 ㉠은 m 의 값에 관계없이 항상 점 (1, 1)을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 두 직선

이 제3사분면에서 만나도

록 직선 ㉠을 움직여 보면

(i) 직선 ㉠이 점 (-1, 0)

을 지날 때

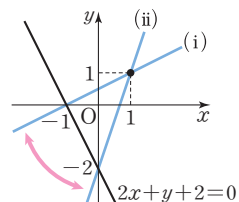
$$-2m+1=0 \quad \therefore m=\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 ㉠이 점 (0, -2)를 지날 때

$$-m+3=0 \quad \therefore m=3$$

(i), (ii)에서 m 의 값의 범위는

$$\frac{1}{2} < m < 3$$



104 $\text{㉠ } m < -1 \text{ 또는 } m > \frac{5}{3}$

$mx - y + 3m - 3 = 0$ 을 m 에 대하여 정리하면

$$(x+3)m - (y+3) = 0 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

이 식이 m 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+3=0, y+3=0$$

$$\therefore x=-3, y=-3$$

즉, 직선 ㉠은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-3, -3)$ 을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 두 직선

이 제2사분면에서 만나도록

직선 ㉠을 움직여 보면

(i) 직선 ㉠이 점 $(-6, 0)$

을 지날 때

$$-3m-3=0$$

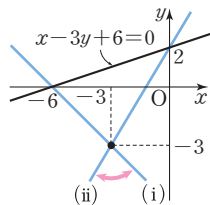
$$\therefore m=-1$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0, 2)$ 를 지날 때

$$3m-5=0 \quad \therefore m=\frac{5}{3}$$

(i), (ii)에서 m 의 값의 범위는

$$m < -1 \text{ 또는 } m > \frac{5}{3}$$



105 $\text{㉠ } -\frac{1}{2} \leq m \leq 2$

$mx - y - m + 2 = 0$ 을 m 에 대하여 정리하면

$$(x-1)m - (y-2) = 0 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

이 식이 m 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x-1=0, y-2=0$$

$$\therefore x=1, y=2$$

즉, 직선 ㉠은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 2)$ 를 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이

선분 AB와 만나도록 직선 ㉠

을 움직여 보면

(i) 직선 ㉠이 점 A(2, 4)를

지날 때

$$m-2=0$$

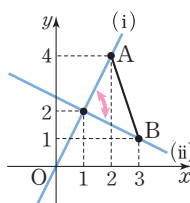
$$\therefore m=2$$

(ii) 직선 ㉠이 점 B(3, 1)을 지날 때

$$2m+1=0 \quad \therefore m=-\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 m 의 값의 범위는

$$-\frac{1}{2} \leq m \leq 2$$



106 $\text{㉠ } -2 \leq m \leq 0$

$mx + y - 2m - 4 = 0$ 을 m 에 대하여 정리하면

$$(x-2)m + y - 4 = 0 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

이 식이 m 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x-2=0, y-4=0 \quad \therefore x=2, y=4$$

즉, 직선 ㉠은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 4)$ 를 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이

제4사분면을 지나지 않도록 직

선 ㉠을 움직여 보면

(i) 직선 ㉠이 점 $(0, 0)$ 을 지

날 때

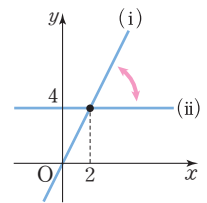
$$-2m-4=0 \quad \therefore m=-2$$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0, 4)$ 를 지날 때

$$-2m=0 \quad \therefore m=0$$

(i), (ii)에서 m 의 값의 범위는

$$-2 \leq m \leq 0$$



개념 확인

59쪽

107 $\text{㉠ } (1) 5 \quad (2) -\frac{1}{5}$

$$(2) 5 \times m = -1 \quad \therefore m = -\frac{1}{5}$$

108 $\text{㉠ } (1) 4 \quad (2) -1$

$$(1) \frac{a}{2} = \frac{2}{1} \neq \frac{3}{-1} \quad \therefore a=4$$

$$(2) a \times 2 + 2 \times 1 = 0 \quad \therefore a = -1$$

유제

61~65쪽

109 $\text{㉠ } y = -\frac{3}{2}x + 1$

x 절편이 2이고 y 절편이 3인 직선은 두 점 $(2, 0)$,

$(0, 3)$ 을 지나는 직선이므로 이 직선의 기울기는

$$-\frac{3}{2} \text{이다.}$$

따라서 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 이고 점 $(-2, 4)$ 를 지나는 직

선의 방정식은

$$y-4 = -\frac{3}{2}\{x-(-2)\}$$

$$\therefore y = -\frac{3}{2}x + 1$$

110 ㉮ $y = -2x - 1$

직선 $y = \frac{1}{2}x + 9$ 에 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면

$$\frac{1}{2} \times m = -1 \quad \therefore m = -2$$

따라서 기울기가 -2 이고 점 $(1, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - (-3) = -2(x - 1)$$

$$\therefore y = -2x - 1$$

111 ㉮ 4

$x + y - 7 = 0$ 에서 $y = -x + 7$ 이므로 이 직선의 기울기는 -1 이다.

따라서 기울기가 -1 이고 점 $(5, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 3 = -(x - 5)$$

$$\therefore y = -x + 8$$

이 직선이 점 $(4, a)$ 를 지나므로

$$a = -4 + 8 = 4$$

112 ㉮ $y = 4x - 7$

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+1}{2}, \frac{-5+7}{2} \right) \quad \therefore (2, 1)$$

$x + 4y - 2 = 0$ 에서 $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ 이므로 이 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$ 이다.

직선 $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ 에 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면

$$-\frac{1}{4} \times m = -1 \quad \therefore m = 4$$

따라서 기울기가 4 이고 점 $(2, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 1 = 4(x - 2)$$

$$\therefore y = 4x - 7$$

113 ㉮ 4

두 직선이 서로 평행하려면

$$\frac{1}{k} = \frac{k-3}{4} \neq \frac{1}{-1}$$

$$(i) \frac{1}{k} = \frac{k-3}{4} \text{에서 } k(k-3) = 4$$

$$k^2 - 3k - 4 = 0, (k+1)(k-4) = 0$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 4$$

$$(ii) \frac{1}{k} \neq \frac{1}{-1} \text{에서 } k \neq -1$$

$$(i), (ii) \text{에서 } k = 4$$

114 ㉮ -12

두 직선이 서로 수직이라면

$$a \times 1 + 3 \times \{-(a+8)\} = 0$$

$$-2a - 24 = 0$$

$$\therefore a = -12$$

115 ㉮ $\frac{4}{3}$

두 직선이 서로 평행하려면

$$\frac{2a-1}{a} = \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{3}$$

$$\frac{2a-1}{a} = \frac{1}{-1} \text{에서 } -(2a-1) = a$$

$$-3a = -1 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a = \frac{1}{3}$$

두 직선이 서로 수직이라면

$$(2a-1) \times a + 1 \times (-1) = 0$$

$$2a^2 - a - 1 = 0, (2a+1)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } a = 1$$

그런데 $\beta > 0$ 이므로 $\beta = 1$

$$\therefore a + \beta = \frac{4}{3}$$

116 ㉮ 3

두 직선 $ax + y + 1 = 0$, $2x + by - 3 = 0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{b} \neq \frac{1}{-3}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{b} \text{에서 } ab = 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

두 직선 $ax + y + 1 = 0$, $x - (b-1)y + 4 = 0$ 이 서로 수직이므로

$$a \times 1 + 1 \times \{-(b-1)\} = 0$$

$$\therefore b = a + 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하면

$$a(a+1) = 2, a^2 + a - 2 = 0$$

$$(a+2)(a-1) = 0 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 1$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 1$

이를 ⑦에 대입하면 $b = 2$

$$\therefore a + b = 3$$

117 $y=4x-1$

두 점 A(-3, 4), B(5, 2)를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{2-4}{5-(-3)} = -\frac{1}{4}$$

선분 AB의 수직이등분선의 기울기를 m 이라 하면

$$-\frac{1}{4} \times m = -1 \quad \therefore m=4$$

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{4+2}{2}\right) \quad \therefore (1, 3)$$

따라서 기울기가 4이고 점 (1, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=4(x-1) \quad \therefore y=4x-1$$

118 ㉠ 9

$$2x-y-4=0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$x+2y-7=0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$ax-4y-1=0 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

(i) 세 직선이 모두 평행할 때

두 직선 ㉠, ㉡의 기울기는 각각 2, $-\frac{1}{2}$ 이므로

세 직선이 모두 평행한 경우는 없다.

(ii) 세 직선 중 두 직선이 서로 평행할 때

두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행하면

$$\frac{2}{a} = \frac{-1}{-4} \neq \frac{-4}{-1} \quad \therefore a=8$$

두 직선 ㉡, ㉢이 서로 평행하면

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{-4} \neq \frac{-7}{-1} \quad \therefore a=-2$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$x=3, y=2$$

즉, 직선 ㉢이 점 (3, 2)를 지나야 하므로

$$3a-8-1=0 \quad \therefore a=3$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$8+(-2)+3=9$$

119 $y=3x-8$

$x+3y-6=0$ 에서

$$y=0\text{일 때}, x-6=0 \quad \therefore x=6$$

$$x=0\text{일 때}, 3y-6=0 \quad \therefore y=2$$

$$\therefore A(6, 0), B(0, 2)$$

두 점 A(6, 0), B(0, 2)를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

선분 AB의 수직이등분선의 기울기를 m 이라 하면

$$-\frac{1}{3} \times m = -1 \quad \therefore m=3$$

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{6}{2}, \frac{2}{2}\right) \quad \therefore (3, 1)$$

따라서 기울기가 3이고 점 (3, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=3(x-3)$$

$$\therefore y=3x-8$$

120 ㉠ -3, 10

세 직선에 의하여 생기는 교점이 두 개가 되려면 오른쪽 그림과 같이 세 직선 중 두 직선만 평행해야 한다.



$$3x+2y-4=0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$5x-y+2=0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$ax-2y+3=0 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

이때 두 직선 ㉠, ㉡의 기울기는 각각 $-\frac{3}{2}$, 5이므로 서로 평행하지 않다.

즉, 세 직선에 의하여 생기는 교점이 두 개가 되는 경우는 다음과 같다.

(i) 두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행할 때

$$\frac{3}{a} = \frac{2}{-2} \neq \frac{-4}{3} \quad \therefore a=-3$$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 서로 평행할 때

$$\frac{5}{a} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{2}{3} \quad \therefore a=10$$

(i), (ii)에서 상수 a 의 값은 -3, 10이다.

연습문제

66~69쪽

121 ㉠ 9

$5x-2y+7=0$ 에서 $y=\frac{5}{2}x+\frac{7}{2}$ 이므로 이 직선의

기울기는 $\frac{5}{2}$ 이다.

기울기가 $\frac{5}{2}$ 이고 점 (-2, 4)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-4=\frac{5}{2}\{x-(-2)\}$$

$$\therefore y=\frac{5}{2}x+9$$

따라서 구하는 y 절편은 9이다.

122 ㉔ -6

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB의 기울기와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{3 - (-2k + 1)}{(k + 2) - 4} = \frac{(k + 3) - 3}{(k - 2) - (k + 2)}$$

$$\frac{2k + 2}{k - 2} = \frac{k}{-4}$$

$$-4(2k + 2) = k(k - 2)$$

$$k^2 + 6k + 8 = 0, (k + 4)(k + 2) = 0$$

$$\therefore k = -4 \text{ 또는 } k = -2$$

따라서 모든 k 의 값의 합은

$$-4 + (-2) = -6$$

123 ㉔ ③

$ab > 0$ 이므로 $b \neq 0$

따라서 $ax + by + c = 0$ 에서

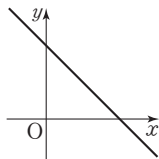
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

$ab > 0, ac < 0$ 이므로 $\begin{cases} a, b \text{의 부호는 서로 같고} \\ a, c \text{의 부호는 서로 다르다.} \end{cases}$

$a > 0, b > 0, c < 0$ 또는 $a < 0, b < 0, c > 0$

$$\therefore -\frac{a}{b} < 0, -\frac{c}{b} > 0$$

따라서 직선 $ax + by + c = 0$ 의 기울기는 음수이고 y 절편은 양수이므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



124 ㉔ $y = 2x + 7$

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(x + 2y - 9) + k(3x + y - 2) = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x + 2y - 9 = 0, 3x + y - 2 = 0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x = -1, y = 5$$

$$\therefore P(-1, 5)$$

▶▶▶▶▶ ①

따라서 두 점 $P(-1, 5), (1, 9)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 5 = \frac{9 - 5}{1 - (-1)}\{x - (-1)\}$$

$$\therefore y = 2x + 7$$

▶▶▶▶▶ ②

단계	채점 기준	비율
①	점 P의 좌표 구하기	50 %
②	점 P와 점 (1, 9)를 지나는 직선의 방정식 구하기	50 %

125 ㉔ ⑤

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(2x - y - 4) + k(x + 3y + 2) = 0 \text{ (단, } k \text{는 실수)}$$

..... ㉔

직선 ㉔이 점 $(2, -2)$ 를 지나므로

$$(4 + 2 - 4) + k(2 - 6 + 2) = 0$$

$$2 - 2k = 0 \quad \therefore k = 1$$

이를 ㉔에 대입하면

$$(2x - y - 4) + (x + 3y + 2) = 0$$

$$\therefore 3x + 2y - 2 = 0$$

⑤ $3 \times 4 + 2 \times (-5) - 2 = 0$ 이므로 점 $(4, -5)$ 는 이 직선 위에 있다.

126 ㉔ $3x + 2y - 5 = 0$

$x + 2y - 3 = 0, x - 2y + 1 = 0$ 을 연립하여 풀면

$$x = 1, y = 1$$

즉, 주어진 두 직선의 교점의 좌표는 $(1, 1)$ 이다.

$3x + 2y + 2 = 0$ 에서 $y = -\frac{3}{2}x - 1$ 이므로 이 직선에

평행한 직선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이다.

따라서 점 $(1, 1)$ 을 지나고 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 1)$$

$$\therefore 3x + 2y - 5 = 0$$

|다른 풀이|

두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(x + 2y - 3) + k(x - 2y + 1) = 0 \text{ (단, } k \text{는 실수)}$$

..... ㉔

$$\therefore (1 + k)x + (2 - 2k)y - 3 + k = 0$$

이 직선이 직선 $3x + 2y + 2 = 0$ 에 평행하므로

$$\frac{1 + k}{3} = \frac{2 - 2k}{2} \neq \frac{-3 + k}{2}$$

$$\frac{1 + k}{3} = \frac{2 - 2k}{2} \text{에서}$$

$$2(1 + k) = 3(2 - 2k)$$

$$8k = 4 \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

이를 ㉔에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$(x + 2y - 3) + \frac{1}{2}(x - 2y + 1) = 0$$

$$2(x + 2y - 3) + (x - 2y + 1) = 0$$

$$\therefore 3x + 2y - 5 = 0$$

127 ㉓ ③

$3x+2y-1=0$ 에서 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ 이므로 이 직선의 기울기는 $-\frac{3}{2}$ 이다.

직선 $3x+2y-1=0$ 에 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면

$$-\frac{3}{2} \times m = -1 \quad \therefore m = \frac{2}{3}$$

따라서 기울기가 $\frac{2}{3}$ 이고 점 $(6, a)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-a=\frac{2}{3}(x-6) \quad \therefore y=\frac{2}{3}x+a-4$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0=a-4 \quad \therefore a=4$$

128 ㉓ ②

두 직선 $x+ay+2=0$, $2x+by+1=0$ 이 서로 수직이므로

$$1 \times 2 + ab = 0 \quad \therefore ab = -2$$

두 직선 $x+ay+2=0$, $x-(b-1)y+3=0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{1}{1} = \frac{a}{-(b-1)} \neq \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{a}{-(b-1)} \text{에서}$$

$$a = -b+1 \quad \therefore a+b=1$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2+b^2 &= (a+b)^2-2ab \\ &= 1^2-2 \times (-2) = 5 \end{aligned}$$

참고 $a=-b+1$ 을 $ab=-2$ 에 대입하면

$$b(-b+1)=-2, \quad b^2-b-2=0$$

$$(b+1)(b-2)=0 \quad \therefore b=-1 \text{ 또는 } b=2$$

$$\therefore a=2, b=-1 \text{ 또는 } a=-1, b=2$$

이는 모두 $\frac{a}{-(b-1)} \neq \frac{2}{3}$ 를 만족시킨다.

129 ㉓ -15

두 점 $A(a, -7)$, $B(1, b)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{b-(-7)}{1-a} = \frac{b+7}{1-a}$$

선분 AB의 수직이등분선 $x+3y+4=0$, 즉

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3} \text{의 기울기가 } -\frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$\frac{b+7}{1-a} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$$

$$\frac{b+7}{1-a} = 3, \quad b+7=3-3a$$

$$\therefore 3a+b=-4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+1}{2}, \frac{-7+b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $x+3y+4=0$ 위의 점이므로

$$\frac{a+1}{2} + 3 \times \frac{-7+b}{2} + 4 = 0$$

$$\therefore a+3b=12 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=-3, b=5$$

$$\therefore ab=-15$$

130 ㉓ $\frac{1}{3}$

$$x-y+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x+y+3=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$y=k(x-1) \text{에서 } kx-y-k=0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

(i) 세 직선이 모두 평행할 때

두 직선 ①, ②의 기울기는 각각 1, -1이므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 없다.

(ii) 세 직선 중 두 직선이 서로 평행할 때

두 직선 ①, ③이 서로 평행하면

$$\frac{1}{k} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{1}{-k} \quad \therefore k=1$$

두 직선 ②, ③이 서로 평행하면

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{-1} \neq \frac{3}{-k} \quad \therefore k=-1$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때

①, ②를 연립하여 풀면

$$x=-2, y=-1$$

즉, 직선 ③이 점 $(-2, -1)$ 을 지나야 하므로

$$-2k+1-k=0 \quad \therefore k=\frac{1}{3}$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 상수 k 의 값의 합은

$$1+(-1)+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$131 \text{ ㉓ (1) } y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4} \quad (2) y = \frac{1}{2}x$$

$$(3) \left(3, \frac{3}{2}\right)$$

$$(1) y = \frac{-3}{5-1}(x-5)$$

$$\therefore y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4} \quad \text{..... ①}$$

$$(2) y = \frac{2}{4}x \quad \therefore y = \frac{1}{2}x \quad \text{..... ②}$$

$$(3) -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4} = \frac{1}{2}x \text{에서}$$

$$-3x + 15 = 2x \quad \therefore x = 3$$

이를 $y = \frac{1}{2}x$ 에 대입하면

$$y = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

따라서 두 대각선의 교점의 좌표는 $(3, \frac{3}{2})$ 이다.

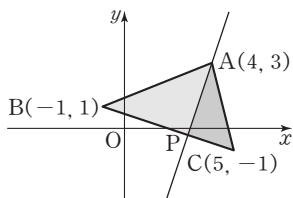
▶▶▶▶▶ ⑤

단계	채점 기준	비율
①	두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식 구하기	30 %
②	두 점 O, C를 지나는 직선의 방정식 구하기	30 %
③	두 대각선의 교점의 좌표 구하기	40 %

132 ㉡ $10x - 3y - 31 = 0$

다음 그림에서 두 삼각형 ABP, APC의 두 밑변 BP, PC에 대한 높이가 같으므로 $\overline{BP}$, $\overline{PC}$ 의 길이의 비는 두 삼각형의 넓이의 비와 같다.

$$\therefore \overline{BP} : \overline{PC} = \triangle ABP : \triangle APC = 2 : 1$$



즉, 점 P는 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 5 + 1 \times (-1)}{2+1}, \frac{2 \times (-1) + 1 \times 1}{2+1} \right)$$

$$\therefore \left(3, -\frac{1}{3} \right)$$

따라서 두 점 A(4, 3), $P(3, -\frac{1}{3})$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 3 = \frac{-\frac{1}{3} - 3}{3 - 4}(x - 4)$$

$$\therefore 10x - 3y - 31 = 0$$

133 ㉡ ③

직선 l 의 y 절편을 $a(a \neq 0)$ 라 하면 x 절편은 $3a$ 이므로 직선 l 의 방정식은

$$\frac{x}{3a} + \frac{y}{a} = 1$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x + a$$

즉, 직선 l 의 기울기는 $-\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 이고 점 $(-7, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 3 = -\frac{1}{3}\{x - (-7)\}$$

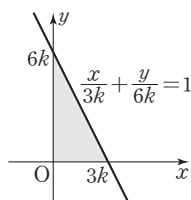
$$\therefore x + 3y - 2 = 0$$

134 ㉡ 4

$k \neq 0$ 이므로 $2x + y - 6k = 0$ 에서

$$\frac{x}{3k} + \frac{y}{6k} = 1$$

이 직선의 x 절편, y 절편은 각각 $3k, 6k$ 이고 $k > 0$ 이므로 오른쪽 그림에서 이 직선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\frac{1}{2} \times 3k \times 6k = 9k^2$$

즉, $9k^2 = 144$ 이므로

$$k^2 = 16 \quad \therefore k = \pm 4$$

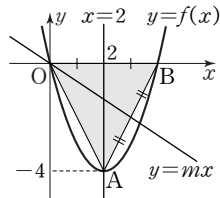
따라서 양수 k 의 값은 4이다.

135 ㉡ ④

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2, -4)$ 이므로 이 그래프는 직선 $x = 2$ 에 대하여 대칭이다.

이때 이 그래프가 원점을 지나므로 점 B의 좌표는 $(4, 0)$ 이다.

직선 $y = mx$ 는 원점 O를 지나므로 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 중점을 지나야 한다.



선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-4}{2} \right) \quad \therefore (3, -2)$$

따라서 직선 $y = mx$ 가 점 $(3, -2)$ 를 지나야 하므로

$$-2 = 3m \quad \therefore m = -\frac{2}{3}$$

136 ㉡ $(2, -2)$

$a - b = 2$ 에서 $b = a - 2$

이를 $ax + by = 4$ 에 대입하면

$$ax + (a - 2)y = 4$$

$$\therefore (x+y)a - 2y - 4 = 0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+y=0, -2y-4=0$$

$$\therefore x=2, y=-2$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(2, -2)$ 이다.

137 ㉡ $-2 \leq m \leq 1$

$mx - y + m + 2 = 0$ 을 m 에 대하여 정리하면

$$(x+1)m - (y-2) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 식이 m 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+1=0, y-2=0$$

$$\therefore x=-1, y=2$$

즉, 직선 $\textcircled{1}$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 2)$ 를 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 $\textcircled{1}$ 이 주어진 직사각형과 만나도록 직선 $\textcircled{1}$ 을 움직여 보면

(i) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(0, 0)$ 을 지날 때

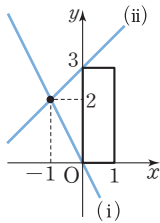
$$m+2=0 \quad \therefore m=-2$$

(ii) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(0, 3)$ 을 지날 때

$$m-1=0 \quad \therefore m=1$$

(i), (ii)에서 m 의 값의 범위는

$$-2 \leq m \leq 1$$



138 ㉡ 21

직선 l_1 은 점 $(1, 2)$ 를 지나고 기울기가 1인 직선이므로 그 직선의 방정식은

$$y-2=x-1$$

$$\therefore y=x+1$$

$6x-y-4=0$ 에서 $y=6x-4$ 이므로 이 직선의 기울기는 6이다.

직선 l_2 의 기울기를 m 이라 하면

$$6 \times m = -1 \quad \therefore m = -\frac{1}{6}$$

따라서 직선 l_2 는 점 $(-1, 0)$ 을 지나고 기울기가

$-\frac{1}{6}$ 인 직선이므로 그 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{6}\{x - (-1)\}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$$

직선 l_3 은 점 $(5, -3)$ 을 지나고 x 축에 수직인 직선이므로 그 직선의 방정식은

$$x=5$$

두 직선 l_1, l_2 의 교점의 좌표를 구하면

$$x+1 = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{6} \text{에서}$$

$$\frac{7}{6}x = -\frac{7}{6} \quad \therefore x = -1$$

이를 $y=x+1$ 에 대입하면 $y=0$

따라서 두 직선 l_1, l_2 의 교점의 좌표는 $(-1, 0)$ 이다.

$y=x+1$ 에 $x=5$ 를 대입하면 $y=6$ 이므로 두 직선 l_1, l_3 의 교점의 좌표는 $(5, 6)$ 이다.

$y = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$ 에 $x=5$ 를 대입하면 $y=-1$ 이므로 두

직선 l_2, l_3 의 교점의 좌표는 $(5, -1)$ 이다.

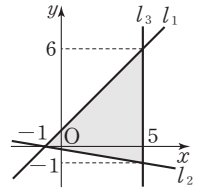
따라서 오른쪽 그림에서 구하

는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{5 - (-1)\}$$

$$\times \{6 - (-1)\}$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 7 = 21$$



139 ㉡ ③

ㄱ. $a=0$ 일 때

$$\text{직선 } l \text{의 방정식은 } -y+2=0 \quad \therefore y=2$$

$$\text{직선 } m \text{의 방정식은 } 4x+8=0 \quad \therefore x=-2$$

따라서 두 직선 l, m 은 각각 x 축, y 축에 평행하므로 서로 수직이다.

ㄴ. $ax - y + a + 2 = 0$ 을 a 에 대하여 정리하면

$$(x+1)a - (y-2) = 0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+1=0, y-2=0 \quad \therefore x=-1, y=2$$

따라서 직선 l 이 a 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표는 $(-1, 2)$ 이다.

ㄷ. (i) $a=0$ 일 때

두 직선 l 과 m 은 서로 수직이다. ($\because$ ㄱ)

(ii) $a \neq 0$ 일 때

두 직선이 평행하려면

$$\frac{a}{4} = \frac{-1}{a} \neq \frac{a+2}{3a+8}$$

$$\frac{a}{4} = \frac{-1}{a} \text{에서 } a^2 = -4$$

그런데 이를 만족시키는 실수 a 의 값은 존재하지 않으므로 두 직선 l 과 m 이 평행이 되기 위한 a 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

|참고| 실수 a 에 대하여 $a \neq 0$ 일 때, $a^2 > 0$ 이다.

140 ㉡ $3x-2y-8=0$

마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 직선 BD는 선분 AC의 수직이등분선이다.

두 점 A(1, 4), C(7, 0)을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{-4}{7-1} = -\frac{2}{3}$

선분 AC의 수직이등분선의 기울기를 m 이라 하면

$$-\frac{2}{3} \times m = -1 \quad \therefore m = \frac{3}{2}$$

선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+7}{2}, \frac{4}{2}\right) \quad \therefore (4, 2)$$

따라서 기울기가 $\frac{3}{2}$ 이고 점 (4, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2 = \frac{3}{2}(x-4)$$

$$\therefore 3x-2y-8=0$$

141 ㉡ 1

세 직선이 좌표평면을 네 개의 영역으로 나누려면 오른쪽 그림과 같이 모두 평행해야 한다.



$$ax+y+3=0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$8x-(b+1)y+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$8x+2y-5=0 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

(i) 두 직선 ㉠, ㉡이 서로 평행할 때

$$\frac{a}{8} = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{-5} \quad \therefore a=4$$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 서로 평행할 때

$$\frac{8}{8} = \frac{-(b+1)}{2} \neq \frac{b}{-5}$$

$$\frac{8}{8} = \frac{-(b+1)}{2} \text{에서}$$

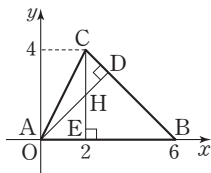
$$b+1=-2 \quad \therefore b=-3$$

(i), (ii)에서 $a+b=1$

142 ㉡ 4

㉠ 접근 방법 삼각형의 두 꼭짓점에서 그 대변에 내린 두 수선의 방정식을 구하여 두 수선의 교점의 좌표를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D, 점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 E라 하고, 두 직선 AD, CE의 교점을 H하자.



직선 BC의 기울기는 $\frac{4}{2-6} = -1$ 이므로 직선 AD의 기울기를 m 이라 하면

$$m \times (-1) = -1 \quad \therefore m=1$$

즉, 직선 AD는 점 A(0, 0)을 지나고 기울기가 1인 직선이므로 그 직선의 방정식은

$$y=x$$

직선 CE는 점 (2, 0)을 지나고 y 축에 평행하므로 그 직선의 방정식은

$$x=2$$

따라서 점 H는 두 직선 $y=x$, $x=2$ 의 교점이므로

$$H(2, 2)$$

이때 구하는 세 수선의 교점이 점 H와 같으므로

$$a=2, b=2 \quad \therefore a+b=4$$

143 ㉡ 125

㉠ 접근 방법 이차함수의 그래프와 직선이 접하면 이차함수의 식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식이 중근을 가짐을 이용하여 점 P의 좌표를 구한다.

직선 l_1 의 기울기를 m 이라 하면 직선 l_1 은 점 P(1, 1)을 지나고 기울기가 m 인 직선이므로 그 직선의 방정식은

$$y-1=m(x-1)$$

$$\therefore y=mx-m+1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

직선 l_1 이 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프와 접하므로 이차방정식 $x^2=mx-m+1$, 즉 $x^2-mx+m-1=0$ 은 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-m)^2-4(m-1)=0$$

$$m^2-4m+4=0, (m-2)^2=0 \quad \therefore m=2$$

이를 ㉠에 대입하면 직선 l_1 의 방정식은

$$y=2x-2+1 \quad \therefore y=2x-1$$

이 직선의 y 절편은 -1 이므로 Q(0, -1)

직선 l_2 의 기울기를 n 이라 하면 두 직선 l_1 , l_2 가 서로 수직이므로

$$2 \times n = -1 \quad \therefore n = -\frac{1}{2}$$

즉, 직선 l_2 는 점 P(1, 1)을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 직선이므로 그 직선의 방정식은

$$y-1 = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

직선 l_2 와 이차함수 $y=x^2$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \text{에서 } 2x^2 + x - 3 = 0$$

$$(2x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x=1$$

이때 점 R는 점 P가 아닌 점이므로 $x = -\frac{3}{2}$

이를 ㉠에 대입하면

$$y = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} = \frac{9}{4} \quad \therefore R\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

$$\text{따라서 } \overline{PQ} = \sqrt{(-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{5},$$

$$\overline{PR} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{9}{4}-1\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{4} \text{이므로}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{PR} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{5\sqrt{5}}{4} = \frac{25}{8}$$

$$\therefore 40S = 40 \times \frac{25}{8} = 125$$

144 ㉠ 1

| 접근 방법 | 평행한 두 직선은 만나지 않음을 이용한다.

$ax+y-a+3=0$ 을 a 에 대하여 정리하면

$$(x-1)a+y+3=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x-1=0, y+3=0 \quad \therefore x=1, y=-3$$

즉, 직선 ㉠은 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(1, -3)$ 을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 두 직선

이 제1사분면에서 만나도록

직선 ㉠을 움직여 보면

(i) 직선 ㉠이 점 $(3, 0)$ 을 지

날 때

$$2a+3=0 \quad \therefore a = -\frac{3}{2}$$

(ii) 직선 ㉠, 즉 $ax+y-a+3=0$ 이 직선

$x-3y-3=0$ 에 평행할 때

$$\frac{a}{1} = \frac{1}{-3} \neq \frac{-a+3}{-3} \quad \therefore a = -\frac{1}{3}$$

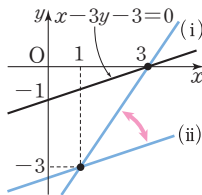
(i), (ii)에서 a 의 값의 범위는

$$-\frac{3}{2} < a < -\frac{1}{3}$$

따라서 $m = -\frac{3}{2}, n = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$2mn = 1$$

| 참고 | 직선 $ax+y-a+3=0$ 의 기울기는 $-a$ 이고, 위의 그림에서 조건을 만족시키는 직선의 기울기는 양수이므로 직선의 기울기가 커질수록 a 의 값이 작아짐에 주의한다.



02 점과 직선 사이의 거리

개념 확인

71쪽

145 ㉠ (1) 2 (2) $\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{13}$ (4) $\sqrt{5}$

$$(1) \frac{|3 \times 4 + 4 \times 0 - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$(2) \frac{|1 \times 0 - 1 \times 2 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$(3) \frac{|2 \times 1 + 3 \times (-5)|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$(4) \frac{|-5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

146 ㉠ (1) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (2) $\sqrt{10}$

(1) 평행한 두 직선 $x+2y=0$, $x+2y+1=0$ 사이의 거리는 직선 $x+2y=0$ 위의 한 점 $(0, 0)$ 과 직선 $x+2y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

(2) 평행한 두 직선 $3x+y+1=0$, $3x+y-9=0$ 사이의 거리는 직선 $3x+y+1=0$ 위의 한 점 $(0, -1)$ 과 직선 $3x+y-9=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3 \times 0 + 1 \times (-1) - 9|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

유제

73~77쪽

147 ㉠ -10

점 $(2, -1)$ 과 직선 $x-3y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이라면

$$\frac{|1 \times 2 - 3 \times (-1) + k|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \sqrt{10}$$

$$|5+k|=10$$

$$5+k=\pm 10$$

$$\therefore k = -15 \text{ 또는 } k=5$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은

$$-15+5=-10$$

148 ㉮ $2x-3y-10=0$ 또는 $2x-3y+16=0$

$$2x-3y+1=0 \text{에서 } y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$

구하는 직선의 기울기가 $\frac{2}{3}$ 이므로 직선의 방정식을

$$y=\frac{2}{3}x+a \text{라 하면}$$

$$2x-3y+3a=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 $(-3, -1)$ 과 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리가 $\sqrt{13}$ 이므로

$$\frac{|2 \times (-3) - 3 \times (-1) + 3a|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{13}$$

$$|3a-3|=13, 3a-3=\pm 13$$

$$\therefore 3a=-10 \text{ 또는 } 3a=16$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$2x-3y-10=0 \text{ 또는 } 2x-3y+16=0$$

149 ㉮ $-7, 15$

점 $(2, 8)$ 과 직선 $x-2y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1 \times 2 - 2 \times 8 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}}$$

점 $(2, 8)$ 과 직선 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 \times 2 - 1 \times 8 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k-4|}{\sqrt{5}}$$

점 $(2, 8)$ 에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{11}{\sqrt{5}} = \frac{|k-4|}{\sqrt{5}}$$

$$|k-4|=11, k-4=\pm 11$$

$$\therefore k=-7 \text{ 또는 } k=15$$

150 ㉮ $x+2y=0$

구하는 직선의 기울기를 m 이라 하면 원점을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y=mx \quad \therefore mx-y=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 $(1, 2)$ 과 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|m \times 1 - 1 \times 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

$$|m-2| = \sqrt{5(m^2+1)}$$

양변을 제곱하면

$$m^2-4m+4=5m^2+5$$

$$4m^2+4m+1=0$$

$$(2m+1)^2=0 \quad \therefore m=-\frac{1}{2}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$-\frac{1}{2}x-y=0 \quad \therefore x+2y=0$$

151 ㉮ $-25, 15$

평행한 두 직선 $x+7y+a=0$, $x+7y-5=0$ 사이의 거리는 직선 $x+7y-5=0$ 위의 한 점 $(5, 0)$ 과 직선 $x+7y+a=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 점 $(5, 0)$ 과 직선 $x+7y+a=0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|1 \times 5 + a|}{\sqrt{1^2 + 7^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$|5+a|=20, 5+a=\pm 20$$

$$\therefore a=-25 \text{ 또는 } a=15$$

152 ㉮ $\frac{13}{2}$

변 OA의 길이는

$$\sqrt{3^2+4^2}=5$$

직선 OA의 방정식은

$$y=\frac{4}{3}x \quad \therefore 4x-3y=0$$

오른쪽 그림과 같이 점

B $(-1, 3)$ 과 직선

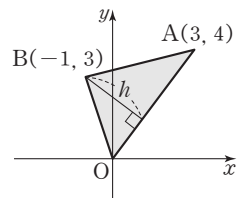
$4x-3y=0$ 사이의 거리를

h 라 하면

$$h = \frac{|4 \times (-1) - 3 \times 3|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{5}$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times h = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{13}{5} = \frac{13}{2}$$



153 ㉮ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

두 직선 $x+2y+3=0$, $2x+ay+1=0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{a} \neq \frac{3}{1} \quad \therefore a=4$$

평행한 두 직선 $x+2y+3=0$, $2x+4y+1=0$ 사이의 거리는 직선 $x+2y+3=0$ 위의 한 점 $(-3, 0)$ 과 직선 $2x+4y+1=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 거리는

$$\frac{|2 \times (-3) + 1|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

154 ㉮ 3

변 AB의 길이는

$$\sqrt{(5-1)^2 + \{2-(-2)\}^2} = 4\sqrt{2}$$

직선 AB의 방정식은

$$y - (-2) = \frac{2 - (-2)}{5 - 1}(x - 1)$$

$$\therefore x - y - 3 = 0$$

오른쪽 그림과 같이 점

C(2, a)와 직선

$x - y - 3 = 0$ 사이의 거리

를 h 라 하면

$$h = \frac{|1 \times 2 - 1 \times a - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{|-1 - a|}{\sqrt{2}}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h &= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \frac{|-1 - a|}{\sqrt{2}} \\ &= 2|-1 - a| \end{aligned}$$

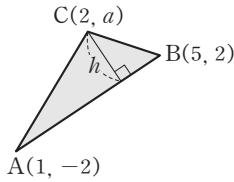
즉, $2|-1 - a| = 8$ 이므로

$$|-1 - a| = 4$$

$$-1 - a = \pm 4$$

$$\therefore a = -5 \text{ 또는 } a = 3$$

따라서 양수 a 의 값은 3이다.



155 ㉠ $x - y + 2 = 0$ 또는 $x + y = 0$

두 직선 $x + 3y - 2 = 0$, $3x + y + 2 = 0$ 이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 점 P에서 주어진 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x + 3y - 2|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|3x + y + 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}}$$

$$|x + 3y - 2| = |3x + y + 2|$$

$$x + 3y - 2 = \pm(3x + y + 2)$$

$$\therefore x - y + 2 = 0 \text{ 또는 } x + y = 0$$

156 ㉠ $2x - 2y - 1 = 0$

두 직선 $x + 2y = 0$, $4x + 2y - 1 = 0$ 이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 점 P에서 주어진 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x + 2y|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|4x + 2y - 1|}{\sqrt{4^2 + 2^2}}$$

$$2|x + 2y| = |4x + 2y - 1|$$

$$2(x + 2y) = \pm(4x + 2y - 1)$$

$$\therefore 2x - 2y - 1 = 0 \text{ 또는 } 6x + 6y - 1 = 0$$

따라서 기울기가 양수인 직선의 방정식은

$$2x - 2y - 1 = 0$$

157 ㉠ $3x - 9y + 2 = 0$ 또는 $3x + y + 2 = 0$

x 축, 즉 직선 $y = 0$ 과 직선 $3x - 4y + 2 = 0$ 이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 점 P에서 주어진 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$|y| = \frac{|3x - 4y + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$5|y| = |3x - 4y + 2|$$

$$5y = \pm(3x - 4y + 2)$$

$$\therefore 3x - 9y + 2 = 0 \text{ 또는 } 3x + y + 2 = 0$$

158 ㉠ $4x + 6y - 7 = 0$ 또는 $6x - 4y + 3 = 0$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 점 P에서 두 직선 $x - 5y + 5 = 0$, $5x + y - 2 = 0$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x - 5y + 5|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2}} = \frac{|5x + y - 2|}{\sqrt{5^2 + 1^2}}$$

$$|x - 5y + 5| = |5x + y - 2|$$

$$x - 5y + 5 = \pm(5x + y - 2)$$

$$\therefore 4x + 6y - 7 = 0 \text{ 또는 } 6x - 4y + 3 = 0$$

연습문제

78~80쪽

159 ㉠ 1

주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(2x - y - 5) + k(x + y + 2) = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$2x - y - 5 = 0, x + y + 2 = 0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x = 1, y = -3$$

즉, 점 P의 좌표는 $(1, -3)$ 이다.

따라서 점 P(1, -3)과 직선 $4x + 3y + 10 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4 \times 1 + 3 \times (-3) + 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1$$

160 ㉠ ①

점 $(-4, 3)$ 과 직선 $x + ay + 3 = 0$ 사이의 거리가

$2\sqrt{2}$ 이라면

$$\frac{|1 \times (-4) + a \times 3 + 3|}{\sqrt{1^2 + a^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$|-1 + 3a| = 2\sqrt{2(1 + a^2)}$$

양변을 제곱하면

$$1-6a+9a^2=8+8a^2$$

$$a^2-6a-7=0, (a+1)(a-7)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=7$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 곱은

$$(-1) \times 7 = -7$$

161 ㉨ 28

$$x-4y+6=0 \text{에서 } y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$$

이 직선의 기울기는 $\frac{1}{4}$ 이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면

$$\frac{1}{4} \times m = -1 \quad \therefore m = -4$$

기울기가 -4 인 직선의 방정식을 $y=-4x+a$ 라 하면
 $4x+y-a=0$ ㉠

점 $(5, -6)$ 과 직선 ㉠ 사이의 거리가 $\sqrt{17}$ 이므로

$$\frac{|4 \times 5 + 1 \times (-6) - a|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \sqrt{17}$$

$$|14-a|=17, 14-a=\pm 17$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=31$$

이때 직선 ㉠의 y 절편은 a 이므로 두 직선의 y 절편은 $-3, 31$ 이다.

따라서 구하는 합은

$$-3+31=28$$

단계	채점 기준	비율
①	직선 $x-4y+6=0$ 에 수직인 직선의 방정식 세우기	30%
②	두 직선의 y 절편 구하기	60%
③	두 직선의 y 절편의 합 구하기	10%

162 ㉨ 10

평행한 두 직선 $y=-4x+7$, $y=-4x-k$ 사이의 거리는 직선 $y=-4x+7$ 위의 한 점 $(0, 7)$ 과 직선 $y=-4x-k$, 즉 $4x+y+k=0$ 사이의 거리와 같다.
 즉, 점 $(0, 7)$ 과 직선 $4x+y+k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{17}$ 이므로

$$\frac{|1 \times 7 + k|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \sqrt{17}$$

$$|7+k|=17, 7+k=\pm 17$$

$$\therefore k=-24 \text{ 또는 } k=10$$

따라서 양수 k 의 값은 10이다.

163 ㉨ ③

두 직선 $2x+(a-1)y+1=0$, $ax+y-5=0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{2}{a} = \frac{a-1}{1} \neq \frac{1}{-5}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{a-1}{1} \text{에서}$$

$$a(a-1)=2$$

$$a^2-a-2=0, (a+1)(a-2)=0$$

$$\therefore a=2 (\because a>0)$$

평행한 두 직선 $2x+y+1=0$, $2x+y-5=0$ 사이의 거리는 직선 $2x+y+1=0$ 위의 한 점 $(0, -1)$ 과 직선 $2x+y-5=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$$\frac{|1 \times (-1) - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

164 ㉨ ②

$x+2y-4=0$ 에서

$$y=0 \text{일 때, } x-4=0 \quad \therefore x=4$$

$$x=0 \text{일 때, } 2y-4=0 \quad \therefore y=2$$

$$\therefore A(4, 0), B(0, 2)$$

변 AB의 길이는

$$\sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

오른쪽 그림과 같이 점

$C(2, 4)$ 와 직선

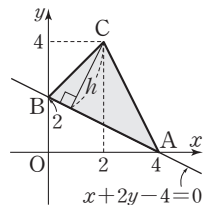
$x+2y-4=0$ 사이의 거리를 h 라 하면

$$h = \frac{|1 \times 2 + 2 \times 4 - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{6\sqrt{5}}{5} = 6$$



165 ㉨ $4x-y-3=0$ 또는 $8x-7y-1=0$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 $d=2d'$ 이므로

$$\frac{|2x-3y+1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = 2 \times \frac{|3x-2y-1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}$$

$$|2x-3y+1| = 2|3x-2y-1|$$

$$2x-3y+1 = \pm 2(3x-2y-1)$$

$$\therefore 4x-y-3=0 \text{ 또는 } 8x-7y-1=0$$

166 ㉡ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

$2x - y - 1 + k(x + 2y) = 0$ 에서

$$(2+k)x + (-1+2k)y - 1 = 0$$

이 직선과 원점 사이의 거리 $f(k)$ 는

$$f(k) = \frac{|-1|}{\sqrt{(2+k)^2 + (-1+2k)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5(k^2+1)}}$$

이때 $f(k)$ 는 분모가 최소일 때 최댓값을 갖고, $k^2 + 1$ 은 $k=0$ 일 때 최솟값 1을 가지므로 $f(k)$ 의 최댓값은

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

|다른 풀이|

$2x - y - 1 = 0$, $x + 2y = 0$ 을 연립하여 풀면

$$x = \frac{2}{5}, y = -\frac{1}{5}$$

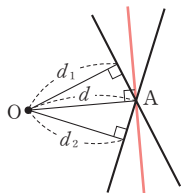
즉, 직선 $2x - y - 1 + k(x + 2y) = 0$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ 을 지난다.

따라서 주어진 직선과 원점 사이의 거리의 최댓값은

점 $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ 과 원점 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

|참고| 오른쪽 그림에서 $d_1 < d$, $d_2 < d$ 이므로 점 A를 지나는 임의의 직선과 점 O 사이의 거리의 최댓값은 점 O에서 $\overline{OA}$ 에 수직인 직선 사이의 거리 d , 즉 $\overline{OA}$ 의 길이와 같음을 알 수 있다.



167 ㉡ 6

점 $(-2, 2)$ 를 지나는 직선의 기울기를 m 이라 하면 직선의 방정식은

$$y - 2 = m\{x - (-2)\}$$

$$\therefore mx - y + 2m + 2 = 0$$

원점과 이 직선 사이의 거리가 k 이므로

$$\frac{|2m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = k$$

$$|2m+2| = k\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$4m^2 + 8m + 4 = k^2m^2 + k^2$$

$$(k^2 - 4)m^2 - 8m + k^2 - 4 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

두 직선의 기울기의 합은 m 에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근의 합과 같으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{-8}{k^2-4} = 4$$

$$4k^2 - 16 = 8$$

$$\therefore k^2 = 6$$

168 ㉡ ㉡

학교를 원점, 도서관과 체육관을 각각 점 A, B라 하고 좌표평면 위에 주어진 조건을 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

이때 직선 도로 l 은 x 절편이 3, y 절편이 -4 인 직선이므로 직선 l 의 방정식은

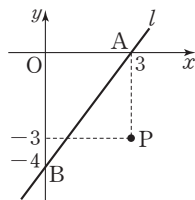
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1$$

$$\therefore 4x - 3y - 12 = 0$$

점 $P(3, -3)$ 과 이 직선 사이의 거리는

$$\frac{|4 \times 3 - 3 \times (-3) - 12|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{9}{5}$$

따라서 새로 만드는 도로의 길이는 $\frac{9}{5}$ km이다.



169 ㉡ ㉠

변 BC의 길이는

$$\sqrt{(7-3)^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{5}$$

직선 BC의 방정식은

$$y - 2 = \frac{4-2}{7-3}(x - 3)$$

$$\therefore x - 2y + 1 = 0$$

점 $D(5, 6)$ 과 직선 $x - 2y + 1 = 0$ 사이의 거리를 h 라 하면

$$h = \frac{|1 \times 5 - 2 \times 6 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$\overline{BC} \times h = 2\sqrt{5} \times \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$= 12$$

170 ㉡ 20

$$x - y + 1 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x + 7y + 9 = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

$$3x + y - 13 = 0 \quad \dots\dots ㉢$$

삼각형의 세 꼭짓점은 두 직선 ㉠과 ㉡, ㉡과 ㉢, ㉠과 ㉢의 교점과 같다.

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$$x = -2, y = -1$$

㉡과 ㉢을 연립하여 풀면

$$x = 5, y = -2$$

㉠과 ㉢을 연립하여 풀면

$$x = 3, y = 4$$

따라서 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표는

$$(-2, -1), (5, -2), (3, 4) \quad \text{..... ①}$$

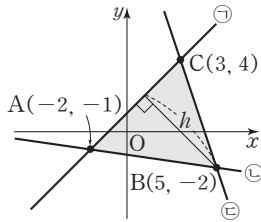
삼각형의 세 꼭짓점을 A(-2, -1), B(5, -2), C(3, 4)라 하자.

변 AC의 길이는

$$\sqrt{\{3 - (-2)\}^2 + \{4 - (-1)\}^2} = 5\sqrt{2}$$

다음 그림과 같이 점 B(5, -2)와 직선

$x - y + 1 = 0$ 사이의 거리를 h 라 하면



$$h = \frac{|1 \times 5 - 1 \times (-2) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 4\sqrt{2} \quad \text{..... ②}$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times h &= \frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} \\ &= 20 \quad \text{..... ③} \end{aligned}$$

단계	채점 기준	비율
①	삼각형의 세 꼭짓점의 좌표 구하기	40 %
②	삼각형의 밑변의 길이와 높이 구하기	40 %
③	삼각형의 넓이 구하기	20 %

171 ㉡ 6

주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점 $(2, a)$ 에서 두 직선 $5x + 2y - 6 = 0$, $2x - 5y + 7 = 0$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|5 \times 2 + 2 \times a - 6|}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = \frac{|2 \times 2 - 5 \times a + 7|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}}$$

$$|2a + 4| = |-5a + 11|$$

$$2a + 4 = \pm(-5a + 11)$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 5$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$1 + 5 = 6$$

172 ㉡ ④

㉡ 접근 방법 점 P에서 마름모 위의 어떤 점까지의 거리가 최대, 최소인지 파악한다.

점 P에서 마름모 ABCD 위의 점까지의 거리의 최댓값은 점 P와 점 A 사이의 거리와 같고 최솟값은 점 P와 직선 CD 사이의 거리와 같다.

P(4, 5), A(-4, 0)이므로

$$\overline{PA} = \sqrt{(-4 - 4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{89}$$

$$\therefore M = \sqrt{89}$$

두 점 C, D를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

$$\therefore 3x + 4y - 12 = 0$$

이 직선과 점 P 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times 4 + 4 \times 5 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$$

$$\therefore m = 4$$

$$\therefore M^2 + m^2 = 89 + 16 = 105$$

173 ㉡ ③

㉡ 접근 방법 점 B가 x 축 위의 점임을 이용하여 점 B의 좌표를 미지수를 이용하여 나타낸다.

원점과 점 A(8, 6)을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{3}{4}x \quad \therefore 3x - 4y = 0$$

점 B가 선분 OH 위의 점이므로 점 B의 좌표를

$(a, 0)$ ($a > 0$)이라 하면 점 B와 직선 $3x - 4y = 0$ 사이의 거리는

$$\overline{BI} = \frac{|3a|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3a}{5} \quad (\because a > 0)$$

이때 H(8, 0)이므로

$$\overline{BH} = \overline{OH} - \overline{OB} = 8 - a$$

$$\overline{BH} = \overline{BI} \text{에서}$$

$$8 - a = \frac{3a}{5} \quad \therefore a = 5$$

즉, B(5, 0)이므로 직선 AB의 방정식은

$$y = \frac{-6}{5-8}(x-5) \quad \therefore y = 2x - 10$$

따라서 $m = 2$, $n = -10$ 이므로

$$m + n = -8$$

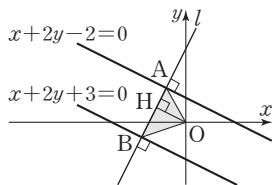
174 $\square$ $2x - y + 4 = 0$

| 접근 방법 | 선분 AB의 길이는 평행한 두 직선

$x + 2y - 2 = 0$, $x + 2y + 3 = 0$ 사이의 거리와 같다.

다음 그림에서 평행한 두 직선 $x + 2y - 2 = 0$, $x + 2y + 3 = 0$ 사이의 거리는 직선 $x + 2y - 2 = 0$ 위의 한 점 (2, 0)과 직선 $x + 2y + 3 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{AB} = \frac{|1 \times 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$



원점 O에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 OAB의 넓이가 2이므로

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \overline{OH} = 2$$

$$\therefore \overline{OH} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

직선 $x + 2y - 2 = 0$, 즉 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 에 수직인 직선

l 의 기울기를 m 이라 하면

$$-\frac{1}{2} \times m = -1 \quad \therefore m = 2$$

따라서 직선 l 의 방정식을 $y = 2x + a$ 라 하면 원점 O와 직선 l , 즉 $2x - y + a = 0$ 사이의 거리는 $\overline{OH}$ 의 길이와 같으므로

$$\frac{|a|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$|a| = 4 \quad \therefore a = \pm 4$$

그런데 점 A가 제2사분면 위의 점이므로 직선

$y = 2x + a$ 의 y 절편이 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 의 y 절편보다 크다.

즉, $a > 1$ 이므로

$$a = 4$$

따라서 구하는 직선 l 의 방정식은

$$y = 2x + 4$$

$$\therefore 2x - y + 4 = 0$$

175 $\square$ $3x + y - 6 = 0$

| 접근 방법 | 삼각형의 내심의 정의를 이용하여 구하는 직선이 어떤 직선인지 파악한다.

삼각형의 내심은 세 내각의 이등분선의 교점이므로 점 A와 삼각형 ABC의 내심을 지나는 직선은 $\angle A$ 의 이등분선과 같다.

직선 AB의 방정식은

$$y - 1 = \frac{1 - 3}{-1}x$$

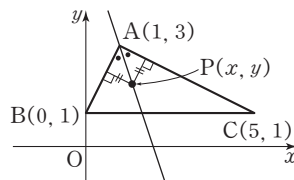
$$\therefore 2x - y + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 AC의 방정식은

$$y - 3 = \frac{1 - 3}{5 - 1}(x - 1)$$

$$\therefore x + 2y - 7 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

다음 그림과 같이 두 직선 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로



$$\frac{|2x - y + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|x + 2y - 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2}}$$

$$|2x - y + 1| = |x + 2y - 7|$$

$$2x - y + 1 = \pm(x + 2y - 7)$$

$$\therefore x - 3y + 8 = 0 \text{ 또는 } 3x + y - 6 = 0$$

위의 그림에서 $\angle A$ 의 이등분선의 기울기는 음수이어야 하므로 구하는 직선의 방정식은

$$3x + y - 6 = 0$$

| 참고 | 두 직선 AB와 AC가 이루는 각의 이등분선은 2개이고, 이때 삼각형 ABC의 내심을 지나는 직선은 기울기가 음수인 직선이다.

01 원의 방정식

개념 확인

85쪽

176 ㉠ (1) $(0, 0), \sqrt{6}$ (2) $(1, 0), 1$
 (3) $(0, -3), \sqrt{3}$ (4) $(-1, 2), 2$

177 ㉠ (1) $x^2 + y^2 = 5$
 (2) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$

178 ㉠ (1) $(3, 0), 3$ (2) $(-1, -2), 4$

(1) $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 에서
 $(x-3)^2 + y^2 = 9$
 따라서 원의 중심의 좌표는 $(3, 0)$ 이고 반지름의 길이는 3이다.

(2) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 11 = 0$ 에서
 $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 16$
 따라서 원의 중심의 좌표는 $(-1, -2)$ 이고 반지름의 길이는 4이다.

179 ㉠ (1) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$
 (2) $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 4$
 (3) $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$

180 ㉠ (1) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$
 (2) $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$
 (3) $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$

181 ㉠ $2x - 4y + 3 = 0$

$x^2 + y^2 - 3 - (x^2 + y^2 - 4x + 8y - 9) = 0$
 $\therefore 2x - 4y + 3 = 0$

유제

87-101쪽

182 ㉠ (1) $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 25$
 (2) $x^2 + y^2 = 13$

(1) 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은
 $(x-5)^2 + (y-3)^2 = r^2$
 이 원이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로
 $(1-5)^2 + (-3)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 25$
 따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 25$

(2) 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은
 $x^2 + y^2 = r^2$
 이 원이 점 $(2, -3)$ 을 지나므로
 $2^2 + (-3)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 13$
 따라서 구하는 원의 방정식은
 $x^2 + y^2 = 13$

183 ㉠ (1) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 20$
 (2) $(x+1)^2 + y^2 = 9$

(1) 원의 중심은 선분 AB의 중점과 같으므로 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{5-3}{2}, \frac{-1-5}{2}\right) \quad \therefore (1, -3)$

원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 와 같으므로

$\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(-3-5)^2 + \{-5-(-1)\}^2}$
 $= 2\sqrt{5}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 20$

(2) 원의 중심은 선분 AB의 중점과 같으므로 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{-4+2}{2}, 0\right) \quad \therefore (-1, 0)$

원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 와 같으므로

$\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times |2 - (-4)| = 3$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2 + y^2 = 9$

184 ㉠ $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$

원 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 7$ 의 중심의 좌표는

$(2, -3)$

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = r^2$

이 원이 점 $(4, -2)$ 를 지나므로

$(4-2)^2 + (-2+3)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5$

185 ㉠ 1

원의 중심은 두 점 $(-2, -3), (4, -1)$ 을 이은 선분의 중점과 같으므로 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-3-1}{2}\right) \quad \therefore (1, -2)$

원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\sqrt{\{4-(-2)\}^2+\{-1-(-3)\}^2}=\sqrt{10}$$

따라서 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(y+2)^2=10$$

이 원이 점 $(2, a)$ 를 지나므로

$$1^2+(a+2)^2=10, (a+2)^2=9=3^2$$

$$a+2=\pm 3 \quad \therefore a=-5 \text{ 또는 } a=1$$

따라서 양수 a 의 값은 1이다.

186 $\Rightarrow x^2+(y-4)^2=20$

원의 중심이 y 축 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(0, a)$,

반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$x^2+(y-a)^2=r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

원 $\textcircled{A}$ 이 점 $(-4, 6)$ 을 지나므로

$$(-4)^2+(6-a)^2=r^2$$

$$\therefore a^2-12a+52=r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

원 $\textcircled{A}$ 이 점 $(2, 8)$ 을 지나므로

$$2^2+(8-a)^2=r^2$$

$$\therefore a^2-16a+68=r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

$\textcircled{B}-\textcircled{C}$ 을 하면

$$4a-16=0 \quad \therefore a=4$$

이를 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$16-48+52=r^2 \quad \therefore r^2=20$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+(y-4)^2=20$$

| 다른 풀이 |

중심의 좌표를 $(0, a)$ 라 하면 이 점과 두 점 $(-4, 6)$,

$(2, 8)$ 사이의 거리가 서로 같으므로

$$\sqrt{(-4)^2+(6-a)^2}=\sqrt{2^2+(8-a)^2}$$

양변을 제곱하면

$$a^2-12a+52=a^2-16a+68$$

$$4a=16 \quad \therefore a=4$$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(0, 4)$ 이고, 원의 반지름의 길이는 두 점 $(0, 4)$, $(2, 8)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{2^2+(8-4)^2}=2\sqrt{5}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+(y-4)^2=20$$

187 $\Rightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=5$

원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 중심의 좌표를

(a, a) , 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a)^2=r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

원 $\textcircled{A}$ 이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$(1-a)^2+(-a)^2=r^2$$

$$\therefore 2a^2-2a+1=r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

원 $\textcircled{A}$ 이 점 $(4, 3)$ 을 지나므로

$$(4-a)^2+(3-a)^2=r^2$$

$$\therefore 2a^2-14a+25=r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

$\textcircled{B}-\textcircled{C}$ 을 하면

$$12a-24=0 \quad \therefore a=2$$

이를 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$8-4+1=r^2 \quad \therefore r^2=5$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-2)^2=5$$

| 다른 풀이 |

중심의 좌표를 (a, a) 라 하면 이 점과 두 점 $(1, 0)$,

$(4, 3)$ 사이의 거리가 서로 같으므로

$$\sqrt{(1-a)^2+(-a)^2}=\sqrt{(4-a)^2+(3-a)^2}$$

양변을 제곱하면

$$2a^2-2a+1=2a^2-14a+25$$

$$12a=24 \quad \therefore a=2$$

즉, 원의 중심의 좌표는 $(2, 2)$ 이고, 원의 반지름의 길

이는 두 점 $(2, 2)$, $(1, 0)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(1-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-2)^2=5$$

188 $\Rightarrow 10\pi$

원의 중심이 x 축 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, 0)$,

반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+y^2=r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

원 $\textcircled{A}$ 이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$(2-a)^2+1^2=r^2$$

$$\therefore a^2-4a+5=r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

원 $\textcircled{A}$ 이 점 $(-2, -3)$ 을 지나므로

$$(-2-a)^2+(-3)^2=r^2$$

$$\therefore a^2+4a+13=r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

$\textcircled{B}-\textcircled{C}$ 을 하면

$$8a+8=0 \quad \therefore a=-1$$

이를 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$1+4+5=r^2 \quad \therefore r^2=10$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi r^2=10\pi$$

189 ㉮ 5

원의 중심이 직선 $y = -x + 2$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, -a + 2)$, 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y + a - 2)^2 = r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉮}$$

원 $\textcircled{㉮}$ 이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$(1 - a)^2 + a^2 = r^2$$

$$\therefore 2a^2 - 2a + 1 = r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉮}$$

원 $\textcircled{㉮}$ 이 점 $(0, -5)$ 를 지나므로

$$(-a)^2 + (a - 7)^2 = r^2$$

$$\therefore 2a^2 - 14a + 49 = r^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉮}$$

$\textcircled{㉮} - \textcircled{㉮}$ 을 하면

$$12a - 48 = 0 \quad \therefore a = 4$$

이를 $\textcircled{㉮}$ 에 대입하면

$$32 - 8 + 1 = r^2 \quad \therefore r^2 = 25$$

$$\therefore r = 5 \quad (\because r > 0)$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 5이다.

190 ㉮ $a = -8, b = 1, c = -4$

$x^2 + y^2 - 2x + 8y + a = 0$ 에서

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = -a + 17$$

이 원의 중심의 좌표는 $(1, -4)$ 이므로

$$b = 1, c = -4$$

이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{-a + 17}$ 이므로

$$\sqrt{-a + 17} = 5$$

양변을 제곱하면

$$-a + 17 = 25 \quad \therefore a = -8$$

191 ㉮ $a < -\frac{5}{3}$ 또는 $a > \frac{5}{3}$

$x^2 + y^2 + 4x + 6ay + 29 = 0$ 에서

$$(x + 2)^2 + (y + 3a)^2 = 9a^2 - 25$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$9a^2 - 25 > 0, a^2 > \frac{25}{9}$$

$$\therefore a < -\frac{5}{3} \text{ 또는 } a > \frac{5}{3}$$

192 ㉮ 2

$x^2 + y^2 + 2kx + 4ky + 6k^2 - 4k + 3 = 0$ 에서

$$(x + k)^2 + (y + 2k)^2 = -k^2 + 4k - 3$$

이 원의 넓이가 π 이라면 반지름의 길이가 1이어야 하므로

$$-k^2 + 4k - 3 = 1, k^2 - 4k + 4 = 0$$

$$(k - 2)^2 = 0 \quad \therefore k = 2$$

193 ㉮ $-6 \leq k < 10$

$x^2 + y^2 + 6x - 2y + k = 0$ 에서

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 10 - k$$

이 방정식이 반지름의 길이가 4 이하인 원을 나타내려면

$$0 < \sqrt{10 - k} \leq 4, 0 < 10 - k \leq 16$$

$$\therefore -6 \leq k < 10$$

194 ㉮ $x^2 + y^2 - x + 17y = 0$

구하는 원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓으면 이 원이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$C = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + Ax + By = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉮}$$

원 $\textcircled{㉮}$ 이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$1 + A = 0 \quad \therefore A = -1$$

원 $\textcircled{㉮}$ 이 점 $(-5, -2)$ 를 지나므로

$$25 + 4 - 5A - 2B = 0$$

$$34 - 2B = 0 \quad \therefore B = 17$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - x + 17y = 0$$

195 ㉮ 10

주어진 세 점을 $A(0, 0), B(6, 0), C(-4, 4)$ 라 하고

원의 중심을 $P(p, q)$ 라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$p^2 + q^2 = (p - 6)^2 + q^2$$

$$-12p + 36 = 0 \quad \therefore p = 3$$

$$\overline{AP} = \overline{CP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{CP}^2 \text{이므로}$$

$$p^2 + q^2 = \{p - (-4)\}^2 + (q - 4)^2$$

$$8p - 8q + 32 = 0$$

$$-8q + 56 = 0 \quad \therefore q = 7$$

$$\therefore p + q = 10$$

| 다른 풀이 |

구하는 원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓으면 이 원이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$C = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + Ax + By = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉮}$$

원 $\textcircled{㉮}$ 이 점 $(6, 0)$ 을 지나므로

$$36 + 6A = 0 \quad \therefore A = -6$$

원 $\textcircled{㉮}$ 이 점 $(-4, 4)$ 를 지나므로

$$16 + 16 - 4A + 4B = 0$$

$$56 + 4B = 0 \quad \therefore B = -14$$

즉, 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 6x - 14y = 0$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y-7)^2 = 58$$

따라서 원의 중심의 좌표는 (3, 7)이므로

$$p=3, q=7 \quad \therefore p+q=10$$

[참고] 세 점을 지나는 원의 중심의 좌표를 구하는 문제는 원의 중심과 주어진 세 점 사이의 거리가 서로 같음을 이용하면 원의 방정식을 구하지 않아도 해결할 수 있다.

196 ㉠ 100π

주어진 세 점을 A(0, 1), B(2, 3), C(2, 15)라 하고

원의 중심을 P(a, b)라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$a^2 + (b-1)^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2$$

$$\therefore a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$\overline{BP} = \overline{CP} \text{에서 } \overline{BP}^2 = \overline{CP}^2 \text{이므로}$$

$$(a-2)^2 + (b-3)^2 = (a-2)^2 + (b-15)^2$$

$$24b=216 \quad \therefore b=9$$

이를 ㉠에 대입하여 풀면

$$a=-6$$

즉, 원의 중심은 P(-6, 9)이므로 반지름의 길이는

$$\overline{AP} = \sqrt{(-6)^2 + (9-1)^2} = 10$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times 10^2 = 100\pi$$

197 ㉠ 1

원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓으

면 이 원이 점 (0, 0)을 지나므로

$$C=0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + Ax + By = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

원 ㉠이 점 (0, -5)를 지나므로

$$25 - 5B = 0 \quad \therefore B=5$$

원 ㉠이 점 (3, 1)을 지나므로

$$9 + 1 + 3A + B = 0$$

$$15 + 3A = 0 \quad \therefore A=-5$$

즉, 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 5x + 5y = 0$$

이 원이 점 (2, k)를 지나므로

$$4 + k^2 - 10 + 5k = 0$$

$$k^2 + 5k - 6 = 0, (k+6)(k-1) = 0$$

$$\therefore k=-6 \text{ 또는 } k=1$$

따라서 양수 k의 값은 1이다.

198 ㉠ $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$

선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-1) + 2 \times 5}{1+2}, \frac{1 \times 2 + 2 \times (-4)}{1+2} \right)$$

$$\therefore (3, -2)$$

즉, 원의 중심의 좌표는 (3, -2)이고 이 원이 y축에

접하므로 반지름의 길이는 |3|=3이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$$

199 ㉠ $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$

원의 중심의 좌표를 (a, b)라 하면 이 원이 x축에 접

하므로 반지름의 길이는 |b|이다.

즉, 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

원 ㉠이 점 (1, 1)을 지나므로

$$(1-a)^2 + (1-b)^2 = b^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

원 ㉠이 점 (7, 1)을 지나므로

$$(7-a)^2 + (1-b)^2 = b^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

㉠-㉡을 하면

$$(7-a)^2 - (1-a)^2 = 0$$

$$48 - 12a = 0 \quad \therefore a=4$$

이를 ㉡에 대입하면

$$(-3)^2 + (1-b)^2 = b^2$$

$$10 - 2b = 0 \quad \therefore b=5$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$$

200 ㉠ 18

원의 중심의 좌표를 (a, b)라 하면 이 원이 y축에 접

하므로 반지름의 길이는 |a|이다.

즉, 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

원 ㉠이 점 (-6, 0)을 지나므로

$$(-6-a)^2 + (-b)^2 = a^2$$

$$\therefore b^2 + 12a + 36 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

원 ㉠이 점 (-3, 3)을 지나므로

$$(-3-a)^2 + (3-b)^2 = a^2$$

$$\therefore b^2 - 6b + 6a + 18 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

㉡-㉢을 하면

$$6a + 6b + 18 = 0$$

$$\therefore a = -b - 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{D}$$

㉔을 ㉓에 대입하면

$$b^2 + 12(-b-3) + 36 = 0$$

$$b^2 - 12b = 0, b(b-12) = 0$$

$$\therefore b=0 \text{ 또는 } b=12$$

이를 ㉔에 대입하면

$$b=0 \text{ 일 때 } a=-3, b=12 \text{ 일 때 } a=-15$$

따라서 두 원의 반지름의 길이는 각각 $|-3|=3$,

$$|-15|=15 \text{ 이므로 구하는 합은}$$

$$3+15=18$$

201 ㉔ $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$ 또는

$$(x-11)^2 + (y-10)^2 = 100$$

원의 중심이 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, a-1)$ 이라 하면 이 원이 x 축에 접하므로 반지름의 길이는 $|a-1|$ 이다.

즉, 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-a+1)^2 = (a-1)^2$$

이 원이 점 $(5, 2)$ 를 지나므로

$$(5-a)^2 + (3-a)^2 = (a-1)^2$$

$$a^2 - 14a + 33 = 0, (a-3)(a-11) = 0$$

$$\therefore a=3 \text{ 또는 } a=11$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4 \text{ 또는}$$

$$(x-11)^2 + (y-10)^2 = 100$$

202 ㉔ $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$,

$$(x-10)^2 + (y+10)^2 = 100$$

점 $(2, -4)$ 를 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 두 원은 제4사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심의 좌표는 $(r, -r)$ 이다.

즉, 원의 방정식은

$$(x-r)^2 + (y+r)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(2, -4)$ 를 지나므로

$$(2-r)^2 + (-4+r)^2 = r^2$$

$$r^2 - 12r + 20 = 0, (r-2)(r-10) = 0$$

$$\therefore r=2 \text{ 또는 } r=10$$

따라서 구하는 두 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4, (x-10)^2 + (y+10)^2 = 100$$

203 ㉔ 4

점 $(-1, -1)$ 을 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 두 원은 제3사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심의 좌표는 $(-r, -r)$ 이다.

즉, 원의 방정식은

$$(x+r)^2 + (y+r)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(-1, -1)$ 을 지나므로

$$(-1+r)^2 + (-1+r)^2 = r^2$$

$$r^2 - 4r + 2 = 0 \quad \therefore r = 2 \pm \sqrt{2}$$

따라서 두 원의 반지름의 길이는 각각 $2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}$

이므로 구하는 합은

$$(2-\sqrt{2}) + (2+\sqrt{2}) = 4$$

|참고| 이차방정식 $r^2 - 4r + 2 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 반지름의 길이의 합은 4이다.

204 ㉔ $12\sqrt{2}$

점 $(-3, 6)$ 을 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 두 원은 제2사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심의 좌표는 $(-r, r)$ 이다.

즉, 원의 방정식은

$$(x+r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(-3, 6)$ 을 지나므로

$$(-3+r)^2 + (6-r)^2 = r^2$$

$$r^2 - 18r + 45 = 0, (r-3)(r-15) = 0$$

$$\therefore r=3 \text{ 또는 } r=15$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 각각 $(-3, 3),$

$(-15, 15)$ 이므로 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{\{-15-(-3)\}^2 + \{15-3\}^2} = 12\sqrt{2}$$

205 ㉔ $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$

원의 중심이 제1사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 중심의 좌표는 (r, r) 이다.

즉, 원의 방정식은

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

이때 원의 중심 (r, r) 가 직선 $x+2y=9$ 위에 있으므로

$$r+2r=9, 3r=9 \quad \therefore r=3$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$$

|다른 풀이|

원의 중심이 직선 $x+2y=9$, 즉 $y=\frac{9-x}{2}$ 위에 있

으므로 중심의 좌표를 $(a, \frac{9-a}{2})$ 라 하자.

이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하므로

$$|a| = \left| \frac{9-a}{2} \right|, \frac{9-a}{2} = \pm a$$

$$\therefore a=-9 \text{ 또는 } a=3$$

이때 원의 중심은 제1사분면 위에 있으므로 $a > 0$

$$\therefore a=3$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$$

206 ㉮ 50

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 15 = 0 \text{에서}$$

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 5$$

원점과 원의 중심 $(-2, 4)$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

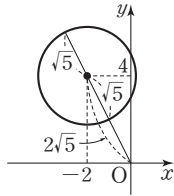
원의 반지름의 길이를 r 라 하면 $r = \sqrt{5}$

따라서 오른쪽 그림에서

$$M = d + r = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

$$m = d - r = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$$

$$\therefore M^2 + m^2 = 45 + 5 = 50$$



207 ㉮ $x^2 + y^2 = 8$

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2 \text{에서 } 2\overline{AP} = \overline{BP}$$

$$\therefore 4\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

$P(x, y)$ 라 하면 점 P 가 나타내는 도형의 방정식은

$$4\{(x-1)^2 + (y-1)^2\} = (x-4)^2 + (y-4)^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 8$$

208 ㉮ 4

점 $(-3, 3)$ 과 원 $x^2 + (y+1)^2 = r^2$ 의 중심 $(0, -1)$

사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \sqrt{(-3)^2 + \{3 - (-1)\}^2} = 5$$

원의 반지름의 길이는 r 이므로

오른쪽 그림에서 점 $(-3, 3)$

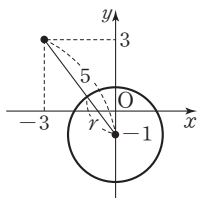
과 원 위의 점 사이의 거리의 최

솟값은

$$d - r = 5 - r$$

이때 최솟값이 1이므로

$$5 - r = 1 \quad \therefore r = 4$$



209 ㉮ 6π

$P(x, y)$ 라 하면 점 P 가 나타내는 도형의 방정식은

$$\{x - (-2)\}^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 = 36$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0 \quad \therefore (x-1)^2 + y^2 = 9$$

따라서 점 P 가 나타내는 도형은 중심이 점 $(1, 0)$ 이고

반지름의 길이가 3인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$$2\pi \times 3 = 6\pi$$

210 ㉮ -3

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 3y - 7 - (x^2 + y^2 + 5x - y - 1) = 0$$

$$\therefore 5x + 2y + 6 = 0$$

$$x=0 \text{일 때, } 2y+6=0 \quad \therefore y=-3$$

따라서 구하는 y 절편은 -3 이다.

211 ㉮ $x^2 + y^2 - 10x + 5y = 0$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 + k(x^2 + y^2 - 6x + 2y - 2) = 0$$

(단, $k \neq -1$)

..... ㉠

원 ㉠이 원점을 지나므로

$$-6 - 2k = 0 \quad \therefore k = -3$$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 - 3(x^2 + y^2 - 6x + 2y - 2) = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 10x + 5y = 0$$

212 ㉮ 2

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 3x - 2y - 5 - (x^2 + y^2 - x + 4y - 3) = 0$$

$$\therefore 2x - 3y - 1 = 0$$

이 직선이 점 $(a, 1)$ 을 지나므로

$$2a - 3 - 1 = 0 \quad \therefore a = 2$$

213 ㉮ 1

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 4x - 5 + k(x^2 + y^2 - 2x - 3ay + 1) = 0$$

(단, $k \neq -1$)

..... ㉠

원 ㉠이 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로

$$1 - 4 - 5 + k(1 + 2 + 1) = 0$$

$$-8 + 4k = 0 \quad \therefore k = 2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$x^2 + y^2 + 4x - 5 + 2(x^2 + y^2 - 2x - 3ay + 1) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2ay - 1 = 0$$

$$\therefore x^2 + (y-a)^2 = a^2 + 1$$

원의 넓이가 2π 이려면

$$a^2 + 1 = 2, a^2 = 1$$

$$\therefore a = \pm 1$$

따라서 양수 a 의 값은 1이다.

214 ㉮ ③

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 7 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 6$$

이 원의 중심의 좌표는 $(2, -3)$

구하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(-4, 5)$ 를 지나므로

$$(-4-2)^2 + (5+3)^2 = r^2$$

$$r^2 = 100$$

$$\therefore r = 10 \quad (\because r > 0)$$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 10이다.

215 ㉮ $x^2 + (y-6)^2 = 5$

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-6) + 1 \times 6}{2+1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times 9}{2+1} \right)$$

$$\therefore (-2, 5)$$

선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-6) + 2 \times 6}{1+2}, \frac{1 \times 3 + 2 \times 9}{1+2} \right)$$

$$\therefore (2, 7)$$

구하는 원의 중심은 선분 PQ의 중점과 같으므로 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{5+7}{2} \right) \quad \therefore (0, 6)$$

원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2} \overline{PQ}$ 와 같으므로

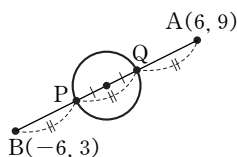
$$\frac{1}{2} \overline{PQ} = \frac{1}{2} \sqrt{\{2 - (-2)\}^2 + \{7 - 5\}^2} = \sqrt{5}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + (y-6)^2 = 5$$

| 다른 풀이 |

두 점 P, Q는 다음 그림과 같이 선분 AB의 삼등분점
이므로 구하는 원의 중심의 좌표는 선분 AB의 중점의
좌표와 같다.



즉, 구하는 원의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{6-6}{2}, \frac{9+3}{2} \right) \quad \therefore (0, 6)$$

이때 원의 지름의 길이는 $\frac{1}{3} \overline{AB}$ 이므로 반지름의 길이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \overline{AB} \right) &= \frac{1}{6} \overline{AB} \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{(-6-6)^2 + (3-9)^2} \\ &= \frac{1}{6} \times 6\sqrt{5} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + (y-6)^2 = 5$$

216 ㉮ ④

$x^2 + y^2 - 4x - 2ay - 19 = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y-a)^2 = a^2 + 23$$

이 원의 중심의 좌표는 $(2, a)$

따라서 직선 $y = 2x + 3$ 이 점 $(2, a)$ 를 지나므로

$$a = 2 \times 2 + 3 = 7$$

217 ㉮ $\frac{5}{3}$

$x^2 + y^2 + 2ky + 4k^2 - k - 2 = 0$ 에서

$$x^2 + (y+k)^2 = -3k^2 + k + 2 \quad \text{①}$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$-3k^2 + k + 2 > 0, \quad 3k^2 - k - 2 < 0$$

$$(3k+2)(k-1) < 0$$

$$\therefore -\frac{2}{3} < k < 1 \quad \text{②}$$

따라서 $\alpha = -\frac{2}{3}, \beta = 1$ 이므로

$$\beta - \alpha = \frac{5}{3} \quad \text{③}$$

단계	채점 기준	비율
①	방정식 변형하기	40 %
②	k 의 값의 범위 구하기	40 %
③	$\beta - \alpha$ 의 값 구하기	20 %

218 ㉮ 8

점 $(2, 2)$ 를 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 두 원
은 제1사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r
라 하면 원의 중심의 좌표는 (r, r) 이다.

즉, 원의 방정식은

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(2, 2)$ 를 지나므로

$$(2-r)^2 + (2-r)^2 = r^2$$

$$r^2 - 8r + 8 = 0 \quad \therefore r = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(4-2\sqrt{2}, 4-2\sqrt{2})$,
 $(4+2\sqrt{2}, 4+2\sqrt{2})$ 이므로 두 점 사이의 거리는
 $\sqrt{\{4+2\sqrt{2}-(4-2\sqrt{2})\}^2+\{4+2\sqrt{2}-(4-2\sqrt{2})\}^2}$
 $=8$

219 ㉮ ⑤

$x^2+y^2-2x+6y-6=0$ 에서

$$(x-1)^2+(y+3)^2=16$$

점 A(-4, a)와 원의 중심 (1, -3) 사이의 거리를
d라 하면

$$d=\sqrt{\{1-(-4)\}^2+(-3-a)^2}$$

$$=\sqrt{(a+3)^2+25}$$

원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$r=4$$

오른쪽 그림에서 선분 AP
의 길이의 최댓값은

$$d+r=\sqrt{(a+3)^2+25}+4$$

이때 최댓값이 17이므로

$$\sqrt{(a+3)^2+25}+4=17$$

$$\sqrt{(a+3)^2+25}=13$$

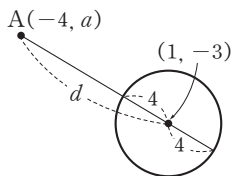
양변을 제곱하면

$$(a+3)^2+25=169$$

$$(a+3)^2=144, a+3=\pm 12$$

$$\therefore a=-15 \text{ 또는 } a=9$$

따라서 양수 a의 값은 9이다.



220 ㉮ 4

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-3x-5y-1-(x^2+y^2+ay-3)=0$$

$$\therefore 3x+(a+5)y-2=0$$

이 직선이 직선 $y=3x+5$, 즉 $3x-y+5=0$ 에 수직
이므로

$$3 \times 3 + (a+5) \times (-1) = 0$$

$$-a+4=0 \quad \therefore a=4$$

221 ㉮ -3

$x^2+y^2-8x+6y+10=0$ 에서

$$(x-4)^2+(y+3)^2=15$$

직선 $y=ax+9$ 가 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의
중심 (4, -3)을 지나야 하므로

$$-3=4a+9$$

$$\therefore a=-3$$

222 ㉮ $\frac{3}{2}$

$x^2+y^2-2(m+1)x+2my+3m^2-m-3=0$ 에서
 $\{x-(m+1)\}^2+(y+m)^2=-m^2+3m+4$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$-m^2+3m+4>0, m^2-3m-4<0$$

$$(m+1)(m-4)<0 \quad \therefore -1<m<4$$

이 원의 넓이를 S라 하면

$$S=\pi(-m^2+3m+4)$$

$$=-\pi\left\{\left(m-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right\}$$

따라서 $-1<m<4$ 에서 $m=\frac{3}{2}$ 일 때 S의 값이 최대
이다.

223 ㉮ ④

$$x-2y=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$x+y=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$x-3y+4=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=0, y=0$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-1, y=1$

㉢, ㉠을 연립하여 풀면 $x=8, y=4$

즉, 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표는

$$(0, 0), (-1, 1), (8, 4)$$

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 으
로 놓으면 이 원이 점 (0, 0)을 지나므로

$$C=0$$

$$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

원 ㉣이 점 (-1, 1)을 지나므로

$$1+1-A+B=0$$

$$\therefore A-B=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉤}$$

원 ㉣이 점 (8, 4)를 지나므로

$$64+16+8A+4B=0$$

$$\therefore 2A+B=-20 \quad \dots\dots \textcircled{㉥}$$

㉤, ㉥을 연립하여 풀면

$$A=-6, B=-8$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-6x-8y=0$$

224 ㉮ -1

원 $(x+k)^2+(y-4)^2=2k^2-3k-10$ 의 중심

$(-k, 4)$ 가 제2사분면 위에 있으므로

$$-k<0 \quad \therefore k>0$$

이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $| -k |$ 이다.

따라서 $(-k)^2 = 2k^2 - 3k - 10$ 이므로
 $k^2 - 3k - 10 = 0, (k+2)(k-5) = 0$
 $\therefore k = 5 (\because k > 0)$ ▶▶▶▶▶ ①
 즉, 주어진 원의 방정식은
 $(x+5)^2 + (y-4)^2 = 25$
 $y=0$ 을 대입하면
 $(x+5)^2 + (-4)^2 = 25, x^2 + 10x + 16 = 0$
 $(x+8)(x+2) = 0 \quad \therefore x = -8 \text{ 또는 } x = -2$
 따라서 주어진 원이 x 축과 만나는 두 점의 좌표는
 $(-8, 0), (-2, 0)$ 이므로
 $\alpha = -8, \beta = -2 (\because \alpha < \beta)$ ▶▶▶▶▶ ②
 $\therefore k + \alpha - \beta = -1$ ▶▶▶▶▶ ③

단계	채점 기준	비율
①	k 의 값 구하기	50 %
②	α, β 의 값 구하기	40 %
③	$k + \alpha - \beta$ 의 값 구하기	10 %

225 ㉡ ②

점 $A(3, 4)$ 와 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 한 점 P 를 지름의 양 끝 점으로 하는 원 중에서 반지름의 길이가 최소인 원의 지름의 길이는 두 점 A, P 사이의 거리의 최솟값과 같다.

점 $A(3, 4)$ 와 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 반지름의 길

이를 r 라 하면 $r = 1$

오른쪽 그림에서 두 점 A, P

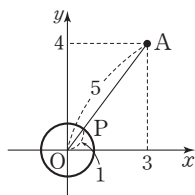
사이의 거리의 최솟값은

$$d - r = 5 - 1 = 4$$

따라서 반지름의 길이가 최소일 때의 원의 반지름의

길이는 $\frac{4}{2} = 2$ 이므로 구하는 넓이는

$$\pi \times 2^2 = 4\pi$$



226 ㉡ 3

점 P 에서 두 점 $A(-2, 1), B(1, 1)$ 에 이르는 거리의 비가 $2:1$ 이므로 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2:1$ 에서

$$\overline{AP} = 2\overline{BP} \quad \therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$$

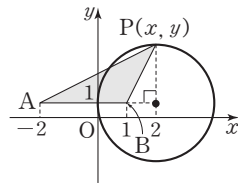
$P(x, y)$ 라 하면 점 P 가 나타내는 도형의 방정식은

$$\{x - (-2)\}^2 + \{y - 1\}^2 = 4\{(x - 1)^2 + (y - 1)^2\}$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

따라서 점 P 는 중심이 점 $(2, 1)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원 위를 움직이므로 다음 그림과 같이 삼각형 ABP 의 넓이는 $\overline{AB}$ 가 밑변이고 높이가 원의 반지름의 길이와 같을 때 최대이다.



따라서 삼각형 ABP 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times |1 - (-2)| \times 2 = 3$$

227 ㉡ ①

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4x - 2 + k(x^2 + y^2 + 4x + 6y - 2) = 0$$

(단, $k \neq -1$)

$$\therefore (k+1)x^2 + (k+1)y^2 + 4(k-1)x + 6ky - 2(k+1) = 0$$

이때 $k \neq -1$ 이므로

$$x^2 + y^2 + \frac{4(k-1)}{k+1}x + \frac{6k}{k+1}y - 2 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

원 ㉠의 중심이 y 축 위에 있으므로 원의 중심의 x 좌표는 0이다.

즉, ㉠의 x 항의 계수가 0이어야 하므로

$$\frac{4(k-1)}{k+1} = 0, k-1=0 \quad \therefore k=1$$

이를 ㉠에 대입하면 $x^2 + y^2 + 3y - 2 = 0$

따라서 $a=3, b=-2$ 이므로

$$ab = -6$$

228 ㉡ 14

| 접근 방법 | $\angle BOA$ 는 반원에 대한 원주각이므로 선분 AB 가 원의 지름임을 이용한다.

$\angle BOA = 90^\circ$ 이므로 선분 AB 는 원의 지름이다.

점 A 가 x 축 위의 점이므로 $A(t, 0) (t > 0)$ 이라 하면

$$\overline{OA} = t$$

$$(가)에서 \overline{OB} = \overline{OA} + 4 \text{이므로 } \overline{OB} = t + 4$$

즉, $B(0, t+4)$ 이므로 선분 AB 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{t}{2}, \frac{t+4}{2}\right)$$

이 점이 원의 중심 C 와 일치하고, (나)에서 점 C 는 직선

$y=3x$ 위에 있으므로

$$\frac{t+4}{2} = 3 \times \frac{t}{2}, t+4=3t \quad \therefore t=2$$

즉, $C(1, 3)$ 이므로 $a=1, b=3$

또 원의 반지름의 길이 r 는 두 점 $A(2, 0), C(1, 3)$

사이의 거리와 같으므로 $r=\overline{AC}$ 에서

$$r^2=\overline{AC}^2 \quad \therefore r^2=(1-2)^2+3^2=10$$

$$\therefore a+b+r^2=14$$

|다른 풀이|

(나)에서 원의 중심 $C(a, b)$ 가 직선 $y=3x$ 위의 점이므로

$$b=3a \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\therefore C(a, 3a)$$

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-3a)^2=r^2$$

이 원이 원점을 지나므로

$$(-a)^2+(-3a)^2=r^2 \quad \therefore r^2=10a^2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

오른쪽 그림과 같이 점 C 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을

각각 D, E 라 하면

$$D(a, 0), E(0, 3a)$$

이때 두 삼각형 CBO, COA

는 모두 이등변삼각형이므로

$$\overline{OD}=\overline{AD}, \overline{OE}=\overline{CE}$$

$$\therefore \overline{OA}=2\overline{OD}=2a, \overline{OB}=2\overline{OE}=2 \times 3a=6a$$

(가)에서 $\overline{OB}-\overline{OA}=4$ 이므로

$$6a-2a=4 \quad \therefore a=1$$

이를 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에 각각 대입하면

$$b=3, r^2=10$$

$$\therefore a+b+r^2=14$$

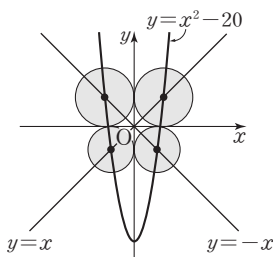
|참고| 이등변삼각형의 꼭지각의 꼭짓점에서 밑변에 내린 수선의 발은 밑변의 중점이다.

229 82π

x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.

따라서 주어진 원의 중심은 다음 그림과 같이 곡선

$y=x^2-20$ 과 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 의 교점이다.



(i) 원의 중심이 곡선 $y=x^2-20$ 과 직선 $y=x$ 의 교점인 경우

$$x^2-20=x \text{에서}$$

$$x^2-x-20=0, (x+4)(x-5)=0$$

$$\therefore x=-4 \text{ 또는 } x=5$$

즉, 이때 원의 중심의 좌표는 각각

$$(-4, -4), (5, 5)$$

(ii) 원의 중심이 곡선 $y=x^2-20$ 과 직선 $y=-x$ 의 교점인 경우

$$x^2-20=-x \text{에서}$$

$$x^2+x-20=0, (x+5)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-5 \text{ 또는 } x=4$$

즉, 이때 원의 중심의 좌표는 각각

$$(-5, 5), (4, -4)$$

(i), (ii)에서 네 원의 반지름의 길이는 각각 4, 5, 5, 4
이므로 네 원의 넓이의 합은

$$\begin{aligned} \pi \times 4^2 + \pi \times 5^2 + \pi \times 5^2 + \pi \times 4^2 \\ = 16\pi + 25\pi + 25\pi + 16\pi = 82\pi \end{aligned}$$

230 2

$B(a, b)$ 라 하면 점 B 는 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 위의 점이므로

$$(a-1)^2+(b+2)^2=4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$M(x, y)$ 라 하면

$$x=\frac{3+a}{2}, y=\frac{2+b}{2}$$

$$\therefore a=2x-3, b=2y-2$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$(2x-4)^2+(2y)^2=4$$

$$\therefore (x-2)^2+y^2=1$$

따라서 점 M 이 나타내는 도형은 중심이 점 $(2, 0)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

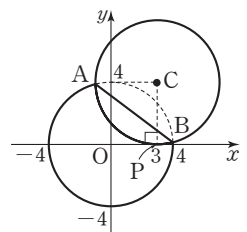
$$2\pi \times 1 = 2\pi$$

231 6x+8y-25=0

|접근 방법| 세 점 A, B, P 를 지나는 원이 원 $x^2+y^2=16$ 과 합동임을 이용하여 원의 방정식을 구한다.

오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, P 를 지나는 원은 반지름의 길이가 4이고 x 축에 접하므로 이 원의 중심을 C 라 하면

$$C(3, 4)$$



따라서 세 점 A, B, P를 지나는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 16$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$$

이때 직선 AB는 두 원 $x^2 + y^2 = 16$,

$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$ 의 교점을 지나는 직선이므로

$$x^2 + y^2 - 16 - (x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9) = 0$$

$$\therefore 6x + 8y - 25 = 0$$

I-3. 원의 방정식

02 원과 직선의 위치 관계

개념 확인

105쪽

232 ㉠ (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다(접한다).

(3) 만나지 않는다.

(1) $x - y - 3 = 0$ 에서 $y = x - 3$ 이므로 이를

$$x^2 + y^2 = 8 \text{에 대입하면}$$

$$x^2 + (x-3)^2 = 8$$

$$\therefore 2x^2 - 6x + 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 2 \times 1 = 7 > 0$$

따라서 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $x + y - 4 = 0$ 에서 $y = -x + 4$ 이므로 이를

$$x^2 + y^2 = 8 \text{에 대입하면}$$

$$x^2 + (-x+4)^2 = 8$$

$$\therefore x^2 - 4x + 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 1 \times 4 = 0$$

따라서 한 점에서 만난다(접한다).

(3) $x + y + 6 = 0$ 에서 $y = -x - 6$ 이므로 이를

$$x^2 + y^2 = 8 \text{에 대입하면}$$

$$x^2 + (-x-6)^2 = 8$$

$$\therefore x^2 + 6x + 14 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 3^2 - 1 \times 14 = -5 < 0$$

따라서 만나지 않는다.

|다른 풀이| 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용

원 $x^2 + y^2 = 8$ 의 중심의 좌표는 $(0, 0)$

반지름의 길이를 r 라 하면 $r = 2\sqrt{2}$

(1) 원의 중심과 직선 $x - y - 3 = 0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|-3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore d < r$$

따라서 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 원의 중심과 직선 $x + y - 4 = 0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|-4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore d = r$$

따라서 한 점에서 만난다(접한다).

(3) 원의 중심과 직선 $x + y + 6 = 0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|6|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore d > r$$

따라서 만나지 않는다.

유제

107~119쪽

233 ㉠ (1) $-\sqrt{10} < k < \sqrt{10}$

$$(2) k = \pm\sqrt{10}$$

$$(3) k < -\sqrt{10} \text{ 또는 } k > \sqrt{10}$$

$y = 3x + k$ 를 $x^2 + y^2 = 1$ 에 대입하면

$$x^2 + (3x+k)^2 = 1$$

$$\therefore 10x^2 + 6kx + k^2 - 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (3k)^2 - 10(k^2 - 1) = -k^2 + 10$$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$-k^2 + 10 > 0, k^2 - 10 < 0$$

$$(k + \sqrt{10})(k - \sqrt{10}) < 0$$

$$\therefore -\sqrt{10} < k < \sqrt{10}$$

(2) 한 점에서 만나려면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$-k^2 + 10 = 0, k^2 = 10$$

$$\therefore k = \pm\sqrt{10}$$

(3) 만나지 않으려면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\begin{aligned} -k^2 + 10 < 0, \quad k^2 - 10 > 0 \\ (k + \sqrt{10})(k - \sqrt{10}) > 0 \\ \therefore k < -\sqrt{10} \text{ 또는 } k > \sqrt{10} \end{aligned}$$

|다른 풀이| 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용

원 $x^2 + y^2 = 1$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y = 3x + k$, 즉 $3x - y + k = 0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|k|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{10}}$$

반지름의 길이를 r 라 하면 $r = 1$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$ 이어야 하므로

$$\begin{aligned} \frac{|k|}{\sqrt{10}} < 1, \quad |k| < \sqrt{10} \\ \therefore -\sqrt{10} < k < \sqrt{10} \end{aligned}$$

(2) 한 점에서 만나려면 $d = r$ 이어야 하므로

$$\begin{aligned} \frac{|k|}{\sqrt{10}} = 1, \quad |k| = \sqrt{10} \\ \therefore k = \pm\sqrt{10} \end{aligned}$$

(3) 만나지 않으려면 $d > r$ 이어야 하므로

$$\begin{aligned} \frac{|k|}{\sqrt{10}} > 1, \quad |k| > \sqrt{10} \\ \therefore k < -\sqrt{10} \text{ 또는 } k > \sqrt{10} \end{aligned}$$

234 $\Rightarrow -2\sqrt{2} \leq k \leq 2\sqrt{2}$

$x + y - k = 0$ 에서 $y = -x + k$ 이므로 이를 $x^2 + y^2 = 4$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} x^2 + (-x + k)^2 &= 4 \\ \therefore 2x^2 - 2kx + k^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 2(k^2 - 4) = -k^2 + 8$$

원과 직선이 만나려면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\begin{aligned} -k^2 + 8 \geq 0, \quad k^2 - 8 \leq 0 &\quad \text{서로 다른 두 점에서 만나거나 한 점에서 만나야 한다.} \\ (k + 2\sqrt{2})(k - 2\sqrt{2}) \leq 0 \\ \therefore -2\sqrt{2} \leq k \leq 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

|다른 풀이| 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $x + y - k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

이때 원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} \leq 2, \quad |k| \leq 2\sqrt{2} \quad \therefore -2\sqrt{2} \leq k \leq 2\sqrt{2}$$

235 $\Rightarrow k < -3$ 또는 $k > 7$

$x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ 에서

$$(x - 1)^2 + y^2 = 5$$

원의 중심 $(1, 0)$ 과 직선 $y = -2x + k$, 즉

$2x + y - k = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 - k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2 - k|}{\sqrt{5}}$$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|2 - k|}{\sqrt{5}} > \sqrt{5}, \quad |2 - k| > 5$$

$$2 - k < -5 \text{ 또는 } 2 - k > 5$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > 7$$

|다른 풀이| 판별식 이용

$y = -2x + k$ 를 $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ 에 대입하면

$$x^2 + (-2x + k)^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\therefore 5x^2 - 2(1 + 2k)x + k^2 - 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \{-(1 + 2k)\}^2 - 5(k^2 - 4) \\ &= -k^2 + 4k + 21 \end{aligned}$$

원과 직선이 만나지 않으려면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$-k^2 + 4k + 21 < 0, \quad k^2 - 4k - 21 > 0$$

$$(k + 3)(k - 7) > 0$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > 7$$

|참고| 원과 직선의 위치 관계를 파악할 때, 원의 중심이 원 점이 아닌 경우에는 원의 중심과 직선 사이의 거리를 이용하는 것이 편리하다.

236 $\Rightarrow \frac{3}{4}$

원의 중심 $(-1, 3)$ 과 직선 $y = kx$, 즉 $kx - y = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-k - 3|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = \frac{|-k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

이때 원의 반지름의 길이는 3이므로 직선이 원에 접하려면

$$\frac{|-k - 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3, \quad |-k - 3| = 3\sqrt{k^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$k^2 + 6k + 9 = 9k^2 + 9$$

$$4k^2 - 3k = 0, \quad k(4k - 3) = 0$$

$$\therefore k = \frac{3}{4} \quad (\because k \neq 0)$$

237 ㉮ 4√5

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y - 16 = 0 \text{에서}$$

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 36$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(-2, 4)$ 라 하고, 점 C 에서 직선

$$3x + 4y + 10 = 0 \text{에 내린}$$

수선의 발을 H 라 하자.

선분 CH 의 길이는 점 C 와

직선 $3x + 4y + 10 = 0$ 사

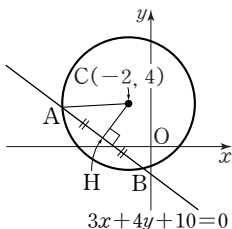
이의 거리와 같으므로

$$\overline{CH} = \frac{|-6 + 16 + 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$$

삼각형 CAH 는 직각삼각형이고 $\overline{CA} = 6$ 이므로

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$



238 ㉮ 6

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y + 8 = 0 \text{에서}$$

$$(x+3)^2 + (y+2)^2 = 5$$

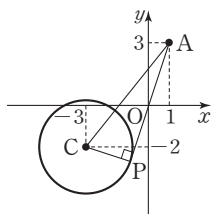
오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(-3, -2)$ 라 하면 반지름 CP 는 접선 AP 와 수직이므로 삼각형 ACP 는 $\angle CPA = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

두 점 $A(1, 3)$, $C(-3, -2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AC} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{41}$$

직각삼각형 ACP 에서 $\overline{CP} = \sqrt{5}$ 이므로

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2} = \sqrt{(\sqrt{41})^2 - (\sqrt{5})^2} = 6$$



239 ㉮ √14

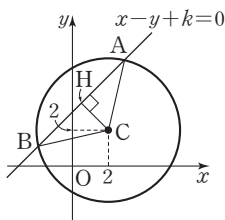
오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 A , B 라 하고, 원의 중심을 $C(2, 2)$ 라 하자.

점 C 에서 직선 $x - y + k = 0$

에 내린 수선의 발을 H 라

하면 선분 CH 의 길이는 점 C 와 직선 $x - y + k = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{CH} = \frac{|2 - 2 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}}$$



원과 직선이 만나서 생기는 현의 길이가 6이므로

$$\overline{AB} = 6$$

$$\therefore \overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

이때 삼각형 CAH 는 직각삼각형이고 $\overline{CA} = 4$ 이므로

$$\overline{CH}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{AH}^2 \text{에서}$$

$$\frac{k^2}{2} = 4^2 - 3^2, k^2 = 14 \quad \therefore k = \pm\sqrt{14}$$

따라서 양수 k 의 값은 $\sqrt{14}$ 이다.

240 ㉮ 1

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y = 20 \text{에서}$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $C(-2, 1)$ 이라 하면

반지름 CP 는 접선 AP 와

수직이므로 삼각형 APC 는

$\angle APC = 90^\circ$ 인 직각삼각

형이다.

두 점 $A(a, -4)$, $C(-2, 1)$ 사이의 거리는

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \sqrt{(-2-a)^2 + \{1-(-4)\}^2} \\ &= \sqrt{a^2 + 4a + 29} \end{aligned}$$

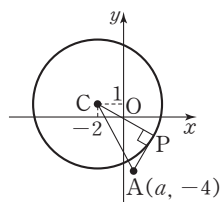
직각삼각형 APC 에서 $\overline{CP} = 5$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2} = \sqrt{a^2 + 4a + 29 - 5^2} \\ &= \sqrt{(a+2)^2} = |a+2| \end{aligned}$$

즉, $|a+2| = 3$ 이므로

$$a+2 = \pm 3 \quad \therefore a = -5 \text{ 또는 } a = 1$$

따라서 양수 a 의 값은 1이다.



241 ㉮ 4

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0 \text{에서}$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$$

원의 중심 $(-1, 3)$ 과 직선 $2x - 3y - 2 = 0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|-2 - 9 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{13}$$

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 $r = 3$

오른쪽 그림에서 원 위의

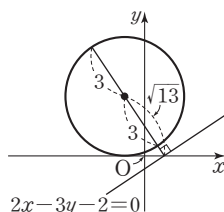
점과 직선 사이의 거리의

최댓값은

$$d + r = \sqrt{13} + 3$$

최솟값은

$$d - r = \sqrt{13} - 3$$



따라서 $M=\sqrt{13}+3$, $m=\sqrt{13}-3$ 이므로
 $Mm=(\sqrt{13}+3)(\sqrt{13}-3)=13-9=4$

242 ㉡ ①

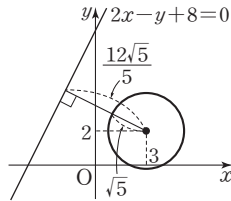
원의 중심 (3, 2)와 직선 $2x-y+8=0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|6-2+8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 $r=\sqrt{5}$

오른쪽 그림에서 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값은

$$\begin{aligned} d-r &= \frac{12\sqrt{5}}{5} - \sqrt{5} \\ &= \frac{7\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$



243 ㉡ 5

$x^2+y^2+6x+7=0$ 에서

$$(x+3)^2+y^2=2$$

원의 중심 (-3, 0)과 직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|-3-k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|-3-k|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 $r=\sqrt{2}$

오른쪽 그림에서 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값은

$$\begin{aligned} d+r &= \frac{|-3-k|}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

이때 최댓값은 $5\sqrt{2}$ 이므로

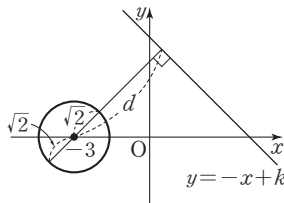
$$\frac{|-3-k|}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\frac{|-3-k|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

$$|-3-k|=8, -3-k=\pm 8$$

$$\therefore k=-11 \text{ 또는 } k=5$$

따라서 양수 k 의 값은 5이다.



244 ㉡ 4

원의 중심 (0, 0)과 직선 $4x+3y-10=0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|-10|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 2$$

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 $r=1$

오른쪽 그림에서 원 위의 점

P와 직선 사이의 거리를 l 이

라 하면 l 의 최댓값은

$$d+r=2+1=3$$

l 의 최솟값은

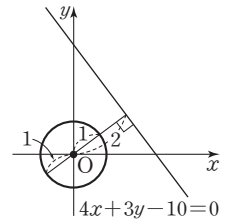
$$d-r=2-1=1$$

$$\therefore 1 \leq l \leq 3$$

따라서 자연수 l 의 값은 1, 2, 3이다.

이때 $l=1$, $l=3$ 이 되는 점 P는 각각 1개이고 $l=2$ 가 되는 점 P는 2개이므로 구하는 점 P의 개수는

$$1+1+2=4$$



245 ㉡ $y=\sqrt{3}x\pm 2$

원 $x^2+y^2=1$ 의 반지름의 길이는 1이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}$$

$$\therefore y=\sqrt{3}x\pm 2$$

|다른 풀이| 판별식 이용

기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식을 $y=\sqrt{3}x+n$ 이라 하자.

$y=\sqrt{3}x+n$ 을 $x^2+y^2=1$ 에 대입하면

$$x^2+(\sqrt{3}x+n)^2=1$$

$$\therefore 4x^2+2\sqrt{3}nx+n^2-1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, 원과 직선이 접하려면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(\sqrt{3}n)^2-4(n^2-1)=0$$

$$n^2=4$$

$$\therefore n=\pm 2$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=\sqrt{3}x\pm 2$$

|다른 풀이| 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용

기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식을 $y=\sqrt{3}x+n$, 즉

$$\sqrt{3}x-y+n=0$$
이라 하자.

이 직선과 원이 접하려면 원의 중심 (0, 0)과 이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=1$$

$$|n|=2$$

$$\therefore n=\pm 2$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y=\sqrt{3}x\pm 2$$

246 ㉮ $y = -3x \pm 4\sqrt{5}$

직선 $x - 3y - 1 = 0$, 즉 $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ 에 수직인 직선

의 기울기는 -3 이고, 원 $x^2 + y^2 = 8$ 의 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y = -3x \pm 2\sqrt{2} \times \sqrt{(-3)^2 + 1}$$

$$\therefore y = -3x \pm 4\sqrt{5}$$

247 ㉮ 18

직선 $y = x + 2$ 에 평행한 직선의 기울기는 1이고, 원 $x^2 + y^2 = 9$ 의 반지름의 길이는 3이므로 접선의 방정식은

$$y = x \pm 3\sqrt{1^2 + 1} \quad \therefore y = x \pm 3\sqrt{2}$$

따라서 $k = \pm 3\sqrt{2}$ 이므로

$$k^2 = 18$$

248 ㉮ 5

기울기가 -2 인 직선의 방정식을 $y = -2x + n$, 즉 $2x + y - n = 0$ 이라 하자.

이 직선과 원이 접하려면 원의 중심 $(-1, 2)$ 와 이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같아야 하므로

$$\frac{|-2 + 2 - n|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}, |n| = 5 \quad \therefore n = \pm 5$$

따라서 두 직선 $y = -2x - 5$, $y = -2x + 5$ 가 x 축과 만나는 두 점의 좌표는 각각 $(-\frac{5}{2}, 0)$, $(\frac{5}{2}, 0)$ 이다.

$$\therefore \overline{AB} = \left| \frac{5}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right) \right| = 5$$

249 ㉮ 3

원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(-1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-x + 2y = 5 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

이 식이 $y = mx + n$ 과 일치하므로

$$m = \frac{1}{2}, n = \frac{5}{2} \quad \therefore m + n = 3$$

|다른 풀이| 수직임을 이용

원의 중심 $(0, 0)$ 과 접점 $(-1, 2)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{2}{-1} = -2$$

원의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선에 수직이므로

$$\text{접선의 기울기는 } \frac{1}{2}$$

따라서 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고 점 $(-1, 2)$ 를 지나는 접선의 방정식은

$$y - 2 = \frac{1}{2}\{x - (-1)\} \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

이 식이 $y = mx + n$ 과 일치하므로

$$m = \frac{1}{2}, n = \frac{5}{2} \quad \therefore m + n = 3$$

250 ㉮ ⑤

원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(3, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$3x + y = 10$$

이 접선이 점 $(1, a)$ 를 지나므로

$$3 + a = 10 \quad \therefore a = 7$$

251 ㉮ 8

점 (a, b) 가 원 $x^2 + y^2 = 20$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 20 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$ax + by = 20 \quad \therefore y = -\frac{a}{b}x + \frac{20}{b}$$

이 접선의 기울기가 -2 이므로

$$-\frac{a}{b} = -2 \quad \therefore a = 2b$$

이를 ①에 대입하면

$$4b^2 + b^2 = 20, b^2 = 4 \quad \therefore b = \pm 2$$

이를 $a = 2b$ 에 대입하면

$$b = -2 \text{ 일 때 } a = -4, b = 2 \text{ 일 때 } a = 4$$

$$\therefore ab = 8$$

|참고| 직선 $ax + by = 20$ 에서 $a = 0$ 일 때와 $b = 0$ 일 때의 직선은 각각 x 축과 y 축에 평행하므로 직선의 기울기가 -2 일 수 없다.

따라서 $a \neq 0, b \neq 0$ 이다.

252 ㉮ -1

원의 중심 $(1, -2)$ 와 접점 $(-2, 2)$ 를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{2 - (-2)}{-2 - 1} = -\frac{4}{3}$$

원의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선에 수직이므로

$$\text{접선의 기울기는 } \frac{3}{4}$$

따라서 기울기가 $\frac{3}{4}$ 이고 점 $(-2, 2)$ 를 지나는 접선의 방정식은

$$y - 2 = \frac{3}{4}\{x - (-2)\} \quad \therefore 3x - 4y + 14 = 0$$

이 식이 $ax+by+14=0$ 과 일치하므로

$$a=3, b=-4$$

$$\therefore a+b=-1$$

253 ㉡ $y=2$ 또는 $12x-5y-26=0$

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$3x_1+2y_1=4$$

$$\therefore 2y_1=4-3x_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

또 점점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면

$$x_1=0, y_1=2 \text{ 또는 } x_1=\frac{24}{13}, y_1=-\frac{10}{13}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=2 \text{ 또는 } 12x-5y-26=0$$

|다른 풀이| 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용

접선의 기울기를 m 이라 하면 점 $(3, 2)$ 를 지나는 접선의 방정식은

$$y-2=m(x-3)$$

$$\therefore mx-y-3m+2=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

원의 중심 $(0, 0)$ 과 점선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같아야 하므로

$$\frac{|-3m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$$|-3m+2|=2\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$9m^2-12m+4=4m^2+4$$

$$5m^2-12m=0, m(5m-12)=0$$

$$\therefore m=0 \text{ 또는 } m=\frac{12}{5}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=2 \text{ 또는 } 12x-5y-26=0$$

|다른 풀이| 판별식 이용

접선의 기울기를 m 이라 하면 점 $(3, 2)$ 를 지나는 접선의 방정식은

$$y-2=m(x-3)$$

$$\therefore y=mx-3m+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이를 $x^2+y^2=4$ 에 대입하면

$$x^2+(mx-3m+2)^2=4$$

$$\therefore (m^2+1)x^2+2(-3m^2+2m)x+9m^2-12m=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, 원과 직선이 접하려면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-3m^2+2m)^2-(m^2+1)(9m^2-12m)=0$$

$$5m^2-12m=0, m(5m-12)=0$$

$$\therefore m=0 \text{ 또는 } m=\frac{12}{5}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=2 \text{ 또는 } 12x-5y-26=0$$

254 ㉡ $x+y+4=0$ 또는 $x-y-4=0$

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(0, -4)$ 를 지나므로

$$-4y_1=8 \quad \therefore y_1=-2$$

또 점점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2+y^2=8$ 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=8$$

$y_1=-2$ 를 대입하면

$$x_1^2+(-2)^2=8, x_1^2=4$$

$$\therefore x_1=\pm 2$$

따라서 $x_1=-2, y_1=-2$ 또는 $x_1=2, y_1=-2$ 이므로

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 점선의 방정식은

$$x+y+4=0 \text{ 또는 } x-y-4=0$$

255 ㉡ ㉢

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(2, -4)$ 를 지나므로

$$2x_1-4y_1=2 \quad \therefore x_1=2y_1+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

또 점점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면

$$x_1=-1, y_1=-1 \text{ 또는 } x_1=\frac{7}{5}, y_1=\frac{1}{5}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 점선의 방정식은

$$y=-x-2 \text{ 또는 } y=-7x+10$$

따라서 두 점선이 y 축과 만나는 점의 좌표는 각각

$(0, -2), (0, 10)$ 이므로

$$a=-2, b=10 \text{ 또는 } a=10, b=-2$$

$$\therefore a+b=8$$

256 ㉡ $y=0$ 또는 $4x-3y=0$

$x^2+y^2+4x+2y+4=0$ 에서

$$(x+2)^2+(y+1)^2=1$$

접선의 기울기를 m 이라 하면 원점을 지나는 접선의 방정식은

$$y=mx \quad \therefore mx-y=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

원의 중심 $(-2, -1)$ 과 접선 $\textcircled{7}$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

$$\frac{|-2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

$$|-2m+1|=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$4m^2-4m+1=m^2+1$$

$$3m^2-4m=0, m(3m-4)=0$$

$$\therefore m=0 \text{ 또는 } m=\frac{4}{3}$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=0 \text{ 또는 } 4x-3y=0$$

연습문제

120~122쪽

257 ㉔ ②

원의 중심 $(1, 0)$ 과 직선 $x+2y+5=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 r 와 같으므로

$$r=\frac{|1+5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

258 ㉔ 2√5

$x^2+y^2-6x+4y+4=0$ 에서

$$(x-3)^2+(y+2)^2=9$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심

$C(3, -2)$ 에서 직선

$4x+3y+4=0$ 에 내린 수선

의 발을 H 라 하면 선분 CH 의

길이는 점 C 와 직선

$4x+3y+4=0$ 사이의 거리

와 같으므로

$$\overline{CH}=\frac{|12-6+4|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

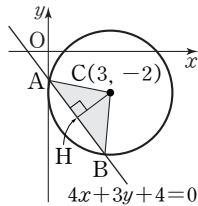
삼각형 CAH 는 직각삼각형이고 $\overline{CA}=3$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CH}^2} \\ &= \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=2 \times \sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

따라서 삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 2 = 2\sqrt{5}$$



259 ㉔ 4

오른쪽 그림과 같이 원의 중심

을 $C(-1, 1)$ 이라 하면 반지름

CT 는 접선 PT 와 수직이므로

삼각형 CTP 는

$\angle CTP=90^\circ$ 인 직각삼각형

이다.

두 점 $P(0, a)$, $C(-1, 1)$ 사이의 거리는

$$\overline{PC}=\sqrt{(-1)^2+(1-a)^2}=\sqrt{a^2-2a+2}$$

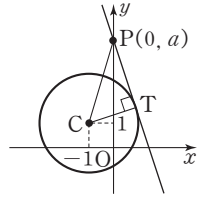
직각삼각형 CTP 에서 $\overline{PT}=\sqrt{7}$, $\overline{CT}=\sqrt{3}$ 이고

$$\overline{PC}^2=\overline{PT}^2+\overline{CT}^2 \text{이므로}$$

$$a^2-2a+2=7+3, a^2-2a-8=0$$

$$(a+2)(a-4)=0 \quad \therefore a=-2 \text{ 또는 } a=4$$

따라서 양수 a 의 값은 4이다.



260 ㉔ 30

원의 중심 $(3, 0)$ 과 직선 $3x-y+11=0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|9+11|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=2\sqrt{10}$$

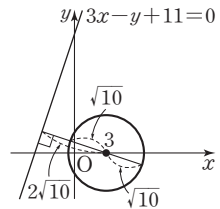
원의 반지름의 길이를 r 라 하면 $r=\sqrt{10}$

오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned} M &= d+r \\ &= 2\sqrt{10} + \sqrt{10} \\ &= 3\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= d-r \\ &= 2\sqrt{10} - \sqrt{10} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\therefore Mm=30$$



261 ㉔ y=x+2

직선 $x+y+2=0$, 즉 $y=-x-2$ 에 수직인 직선의

기울기는 1이고, 원 $x^2+y^2=2$ 의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$

이므로 접선의 방정식은

$$y=x \pm \sqrt{2} \times \sqrt{1^2+1}$$

$$\therefore y=x \pm 2$$

▶▶▶▶▶ ①

따라서 제4사분면을 지나지 않는 직선의 방정식은

$$y=x+2$$

▶▶▶▶▶ ②

단계	채점 기준	비율
①	접선의 방정식 구하기	70 %
②	접선 중 제4사분면을 지나지 않는 직선의 방정식 구하기	30 %

262 ㉔ 2

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0 \text{에서}$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$$

원의 중심 (3, 2)와 점 (1, 3)을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{3-2}{1-3} = -\frac{1}{2}$$

원의 중심과 점 (1, 3)을 지나는 직선은 접선에 수직이므로 접선의 기울기는 2

따라서 기울기가 2이고 점 (1, 3)을 지나는 접선의 방정식은

$$y-3=2(x-1) \quad \therefore 2x-y+1=0$$

이 식이 $ax-y+b=0$ 과 일치하므로

$$a=2, b=1$$

$$\therefore ab=2$$

263 ㉔ ②

접선의 기울기를 m 이라 하면 점 (4, -1)을 지나는 접선의 방정식은

$$y+1=m(x-4)$$

$$\therefore mx-y-4m-1=0$$

원의 중심 (0, 0)과 이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 3과 같아야 하므로

$$\frac{|-4m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$$

$$|-4m-1|=3\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$16m^2+8m+1=9m^2+9$$

$$\therefore 7m^2+8m-8=0$$

이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 갖고, 이 두 실근은 접선의 기울기와 같으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 접선의 기울기의 합은 $-\frac{8}{7}$ 이다.

|참고| 이차방정식 $7m^2+8m-8=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4^2-7 \times (-8)=72>0$$

따라서 이차방정식 $7m^2+8m-8=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

264 ㉔ 1

a, b 의 값은 원과 직선의 교점의 개수이므로

0 또는 1 또는 2

이때 $a+b=3$ 이므로 $a=1, b=2$ ($\because a < b$)

(i) $a=1$ 일 때

직선 $y=-x+k$ 와 원 $x^2+(y-3)^2=2$ 가 접해야 한다.

원의 중심 (0, 3)과 직선 $y=-x+k$, 즉

$x+y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|3-k|}{\sqrt{2}}$$

이때 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|3-k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}, |3-k|=2$$

$$3-k=\pm 2 \quad \therefore k=1 \text{ 또는 } k=5$$

(ii) $b=2$ 일 때

직선 $y=-x+k$ 와 원 $(x-1)^2+(y+1)^2=1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

원의 중심 (1, -1)과 직선 $y=-x+k$, 즉

$x+y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이는 1이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<1, |k|<\sqrt{2} \quad \therefore -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$$

(i), (ii)에서 $k=1$

265 ㉔ $2\sqrt{3}\pi$

두 점 A, B를 지나는 원 중에서 그 둘레의 길이가 최소인 원은 반지름의 길이가 최소인 원, 즉 선분 AB를 지름으로 하는 원이다.

$$x^2+y^2+2x-8y+1=0 \text{에서}$$

$$(x+1)^2+(y-4)^2=16$$

오른쪽 그림과 같이 원의

중심을 C(-1, 4)라 하고,

점 C에서 직선

$$2x+3y+3=0 \text{에 내린}$$

수선의 발을 H라 하면 선

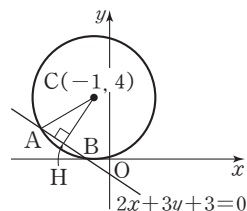
분 CH의 길이는 점 C와

직선 $2x+3y+3=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{CH}=\frac{|-2+12+3|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\sqrt{13}$$

삼각형 CAH는 직각삼각형이고 $\overline{CA}=4$ 이므로

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{4^2-(\sqrt{13})^2}=\sqrt{3}$$



따라서 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 그 둘레의 길이가 최소인 원의 반지름의 길이는 선분 AH의 길이와 같으므로 구하는 둘레의 길이는

$$2\pi \times \overline{AH} = 2\pi \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}\pi$$

266 ㉨ 20

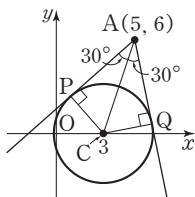
오른쪽 그림과 같이 원의 중심

을 C(3, 0)이라 하면

$\angle PAC = \angle QAC$ 이므로

$$\angle PAC = \frac{1}{2} \angle PAQ$$

$$= \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$



이때 반지름 PC는 접선 AP와 수직이므로 삼각형 APC는 $\angle APC = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

두 점 A(5, 6), C(3, 0) 사이의 거리는

$$\overline{AC} = \sqrt{(3-5)^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{10}$$

따라서 직각삼각형 APC에서

$$\overline{AP} = \overline{AC} \cos 30^\circ = 2\sqrt{10} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{30}$$

$$\overline{PC} = \overline{AC} \sin 30^\circ = 2\sqrt{10} \times \frac{1}{2} = \sqrt{10}$$

$$\therefore k = \sqrt{30}, r = \sqrt{10}$$

$$\therefore k^2 - r^2 = 30 - 10 = 20$$

267 ㉨ -14

원의 중심이 직선 $y = x - 1$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, a-1)$ 이라 하면 이 원이 x 축에 접하므로 반지름의 길이는 $|a-1|$ 이다.

즉, 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-a+1)^2 = (a-1)^2 \quad \dots\dots ㉠$$

원 ㉠이 점 (1, 2)를 지나므로

$$(1-a)^2 + (3-a)^2 = (a-1)^2$$

$$(3-a)^2 = 0 \quad \therefore a = 3$$

이를 ㉠에 대입하면 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$$

직선 $3x - y + 1 = 0$ 에서 $y = 3x + 1$ 이므로 이 직선에 평행한 직선의 방정식을 $y = 3x + n$, 즉

$$3x - y + n = 0 \text{이라 하자.}$$

이 직선과 원이 접하려면 원의 중심 (3, 2)와 이 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같아야 하므로

$$\frac{|9-2+n|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = 2, |7+n| = 2\sqrt{10}$$

$$7+n = \pm 2\sqrt{10}$$

$$\therefore n = -7 - 2\sqrt{10} \text{ 또는 } n = -7 + 2\sqrt{10}$$

직선 $y = 3x + n$ 의 y 절편은 n 이므로 구하는 y 절편의 합은

$$(-7 - 2\sqrt{10}) + (-7 + 2\sqrt{10}) = -14$$

268 ㉨ ㉠

점 $(a, 4\sqrt{3})$ 은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점이므로

$$a^2 + (4\sqrt{3})^2 = r^2 \quad \therefore a^2 + 48 = r^2 \quad \dots\dots ㉡$$

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점 $(a, 4\sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은

$$ax + 4\sqrt{3}y = r^2 \quad \therefore ax + 4\sqrt{3}y - r^2 = 0$$

이 식이 $x - \sqrt{3}y + b = 0$ 과 일치하므로

$$\frac{a}{1} = \frac{4\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = \frac{-r^2}{b}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{4\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} \text{에서 } a = -4$$

이를 ㉡에 대입하면

$$64 = r^2 \quad \therefore r = 8 (\because r > 0)$$

$$\text{또 } \frac{4\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = \frac{-r^2}{b} \text{에서}$$

$$4b = r^2 = 64 \quad \therefore b = 16$$

$$\therefore a + b + r = 20$$

269 ㉨ -5

$$x^2 + y^2 - 18x + 71 = 0 \text{에서}$$

$$(x-9)^2 + y^2 = 10$$

원의 중심 (9, 0)과 접점 (6, 1)을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{1}{6-9} = -\frac{1}{3}$$

원의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선에 수직이므로 접선의 기울기는 3

따라서 기울기가 3이고 점 (6, 1)을 지나는 접선의 방정식은

$$y-1 = 3(x-6)$$

$$\therefore 3x - y - 17 = 0 \quad \dots\dots ㉢$$

▶▶▶▶▶ ㉠

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + k = 0 \text{에서}$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5-k$$

이 원과 직선 ㉢이 접하려면 원의 중심 (2, -1)과 직선 ㉢ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5-k}$ 와 같아야 하므로

$$\frac{|6+1-17|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \sqrt{5-k}, \sqrt{10} = \sqrt{5-k}$$

양변을 제곱하면

$$10=5-k \quad \therefore k=-5$$

▶▶▶▶▶ ②

단계	채점 기준	비율
①	접선의 방정식 구하기	50%
②	k의 값 구하기	50%

270 ㉡ 2

점 (4, 0)을 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y=m(x-4)$$

$$\therefore mx-y-4m=0$$

이 직선과 원의 중심 (0, a) 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$ 과 같아야 하므로

$$\frac{|-a-4m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

$$|-a-4m|=\sqrt{10(m^2+1)}$$

양변을 제곱하면

$$a^2+8am+16m^2=10m^2+10$$

$$\therefore 6m^2+8am+a^2-10=0$$

이 이차방정식의 두 실근은 두 접선의 기울기와 같고, 두 접선이 수직이므로 이 이차방정식의 두 근의 곱은 -1이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{a^2-10}{6}=-1, a^2=4 \quad \therefore a=\pm 2$$

따라서 양수 a 의 값은 2이다.

271 ㉡ 5

$$x^2+y^2+2x-4y=0에서$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=5$$

점 (2, 1)을 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y-1=m(x-2)$$

$$\therefore mx-y-2m+1=0 \quad \dots\dots ㉠$$

원의 중심 (-1, 2)와 접선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같아야 하므로

$$\frac{|-m-2-2m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

$$|-3m-1|=\sqrt{5(m^2+1)}$$

양변을 제곱하면

$$9m^2+6m+1=5m^2+5$$

$$2m^2+3m-2=0, (m+2)(2m-1)=0$$

$$\therefore m=-2 \text{ 또는 } m=\frac{1}{2}$$

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

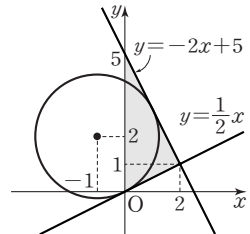
$$2x+y-5=0 \text{ 또는 } \frac{1}{2}x-y=0$$

$$\therefore y=-2x+5 \text{ 또는 } y=\frac{1}{2}x$$

따라서 오른쪽 그림에서

구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 5=5$$



272 ㉡ ⑤

(가)에서 원 C가 원점을 지나므로

$$a^2-9=0, a^2=9 \quad \therefore a=\pm 3$$

(i) $a=-3$ 일 때

$$\text{원 C의 방정식은 } x^2+y^2-4x+6y=0$$

$$\therefore (x-2)^2+(y+3)^2=13$$

(ii) $a=3$ 일 때

$$\text{원 C의 방정식은 } x^2+y^2-4x-6y=0$$

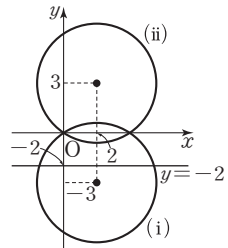
$$\therefore (x-2)^2+(y-3)^2=13$$

오른쪽 그림에서 $a=3$ 일

때, 원 C는 직선 $y=-2$ 와

만나지 않으므로 (나)에서

$$a=-3$$



오른쪽 그림과 같이 원

$$(x-2)^2+(y+3)^2=13과$$

직선 $y=-2$ 의 두 교점을

A, B라 하고, 원의 중심을

C(2, -3)이라 하자.

점 C에서 직선 $y=-2$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH의 길이는 점 C와 직선 $y=-2$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{CH}=|-3-(-2)|=1$$

삼각형 ACH는 직각삼각형이고 $\overline{AC}=\sqrt{13}$ 이므로

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-1^2}=2\sqrt{3}$$

따라서 구하는 두 점 사이의 거리는

$$\overline{AB}=2\overline{AH}=2 \times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

273 ㉔ 4

| 접근 방법 | 두 원의 공통인 현은 두 원의 교점을 지나는 직선의 일부를 이용한다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 17 - (x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9) = 0$$

$$\therefore 3x + 2y - 13 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

오른쪽 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B라 하고 원 $x^2 + y^2 = 17$ 의 중심인 원점 O에서 직선 ㉔에 내린 수선의 발을 H라 하자.

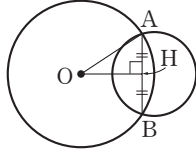
선분 OH의 길이는 점 O와 직선 ㉔ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{OH} = \frac{|-13|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \sqrt{13}$$

삼각형 AOH는 직각삼각형이고 $\overline{OA} = \sqrt{17}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{17})^2 - (\sqrt{13})^2} = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 2 = 4$$



274 ㉔ ④

| 접근 방법 | 삼각형 ABP의 밑변을 $\overline{AB}$ 로 생각할 때, 점 P의 위치에 따라 삼각형 ABP의 높이가 달라짐을 이용한다.

$$\overline{AB} = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

삼각형 ABP에서 밑변을 $\overline{AB}$ 라 하면 높이는 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리와 같다.

삼각형 ABP의 높이를 h 라 하면 삼각형 ABP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h = \frac{1}{2} \times 2 \times h = h$$

즉, 삼각형 ABP의 넓이가 자연수가 되려면 h 가 자연수이어야 한다.

이때 직선 AB의 방정식은

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 1$$

$$\therefore \sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$$

원의 중심 (1, 10)과 직선 $\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|\sqrt{3} + 10 - \sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = 5$$

원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$r = 3$$

오른쪽 그림에서 원 위의 점과 직선 AB 사이의 거리, 즉 h 의 값이 최대일 때는 점 P가 점 P_1 일 때이므로 최댓값은

$$d + r = 5 + 3 = 8$$

최소일 때는 점 P가 점 P_2 일 때이므로 최솟값은

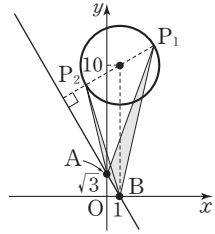
$$d - r = 5 - 3 = 2$$

$$\therefore 2 \leq h \leq 8$$

따라서 h 가 될 수 있는 자연수는 2, 3, 4, ..., 8이다.

이때 $h=2$, $h=8$ 이 되는 점 P는 P_1 , P_2 의 각각 1개이고 $h=3, 4, 5, 6, 7$ 이 되는 점 P는 각각 2개이므로 구하는 점 P의 개수는

$$1 + 1 + 2 \times 5 = 12$$



275 ㉔ ②

| 접근 방법 | $\frac{y}{x}$ 는 원점 (0, 0)과 점 $P(x, y)$ 를 지나는 직선의 기울기와 같음을 이용한다.

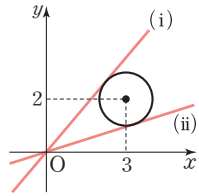
$$\frac{y}{x} = k \quad (k \text{는 상수}) \text{로 놓으면}$$

$$y = kx \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

점 $P(x, y)$ 가 원 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$ 위의 점이므로 ㉔은 원 위의 점 P와 원점을 지나고 기울기가 k 인 직선이다.

즉, k 는 오른쪽 그림에서 직선 ㉔이 (i)일 때 최댓값, (ii)일 때 최솟값을 갖는다.

두 직선 (i), (ii)는 모두 원과 접하므로 원의 중심 (3, 2)와 직선 $y = kx$, 즉 $kx - y = 0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같다.



$$\text{따라서 } \frac{|3k-2|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = 1 \text{이므로}$$

$$|3k-2| = \sqrt{k^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$9k^2 - 12k + 4 = k^2 + 1$$

$$\therefore 8k^2 - 12k + 3 = 0$$

이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖고, M , m 은 이 이차방정식의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$Mm = \frac{3}{8} \quad \therefore 8Mm = 3$$

01 평행이동

개념 확인

125쪽

276 ㉡ (1) $(3, -2)$ (2) $(-2, -1)$

(2) $(-5+3, 1-2)$ $\therefore (-2, -1)$

277 ㉡ (1) $x-2y+7=0$

(2) $y=x^2+8x+18$

(3) $(x+4)^2+(y-1)^2=3$

(1) $(x+4)-2(y-1)+1=0$ $\therefore x-2y+7=0$

(2) $y-1=(x+4)^2+1$ $\therefore y=x^2+8x+18$

유제

127~131쪽

278 ㉡ $a=1, b=5$

평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+2, y+5)$ 는 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동하는 것이다. 이 평행이동에 의하여 점 $(3, a)$ 가 옮겨지는 점의 좌표는

$(3+2, a+5)$ $\therefore (5, a+5)$

이 점이 점 $(b, 6)$ 과 일치하므로

$5=b, a+5=6$ $\therefore a=1, b=5$

279 ㉡ $(6, 4)$

점 $(-3, 2)$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(1, -2)$ 라 하면 $-3+a=1, 2+b=-2$ $\therefore a=4, b=-4$

이 평행이동에 의하여 점 $(2, 8)$ 이 옮겨지는 점의 좌표는

$(2+4, 8-4)$ $\therefore (6, 4)$

280 ㉡ 5

평행이동 $(x, y) \rightarrow (x-2, y+6)$ 은 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 6만큼 평행이동하는 것이다.

이 평행이동에 의하여 점 $(-1, a)$ 가 옮겨지는 점의 좌표는

$(-1-2, a+6)$ $\therefore (-3, a+6)$

이 점이 직선 $y=-3x+2$ 위에 있으므로

$a+6=-3 \times (-3)+2$

$\therefore a=5$

281 ㉡ 7

점 $(-4, 3)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(1, 5)$ 이므로

$-4+a=1, 3+b=5$

$\therefore a=5, b=2$

$\therefore a+b=7$

282 ㉡ $a=2, n=-2$

직선 $ax-y+3=0$ 을 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$a(x-5)-(y-n)+3=0$

$\therefore ax-y-5a+n+3=0$

이 직선이 직선 $2x-y-9=0$ 과 일치하므로

$a=2, -5a+n+3=-9$

 $a=2$ 를 $-5a+n+3=-9$ 에 대입하면

$-10+n+3=-9$

$\therefore n=-2$

283 ㉡ $a=-3, b=6$

점 $(1, 2)$ 를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(-1, 3)$ 이라 하면

$1+p=-1, 2+q=3$

$\therefore p=-2, q=1$

이 평행이동에 의하여 직선 $x-3y+1=0$ 이 옮겨지는 직선의 방정식은

$(x+2)-3(y-1)+1=0$

$\therefore x-3y+6=0$

이 직선이 직선 $x+ay+b=0$ 과 일치하므로

$a=-3, b=6$

284 ㉡ -3

직선 $y=-x-7$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-5=-(x-a)-7$

$\therefore y=-x+a-2$

이 직선이 점 $(-6, 1)$ 을 지나므로

$1=6+a-2$

$\therefore a=-3$

285 ㉡ -1

평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+a, y+a+3)$ 은 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $a+3$ 만큼 평행이동하는 것이다.

이 평행이동에 의하여 직선 $2x+y+9=0$ 이 옮겨지는 직선의 방정식은

$$2(x-a)+(y-a-3)+9=0$$

$$\therefore 2x+y-3a+6=0$$

이 직선이 처음 직선과 일치하므로

$$-3a+6=9$$

$$\therefore a=-1$$

286 ㉮ ⑤

원 $x^2+(y+4)^2=10$ 을 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x+4)^2+(y-2+4)^2=10$$

$$(x+4)^2+(y+2)^2=10$$

$$\therefore x^2+y^2+8x+4y+10=0$$

이 원이 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 과 일치하므로

$$a=8, b=4, c=10$$

$$\therefore a+b+c=22$$

287 ㉮ $a=4, b=11$

포물선 $y=x^2$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y+5=(x-a)^2$$

$$\therefore y=x^2-2ax+a^2-5$$

이 포물선이 포물선 $y=x^2-8x+b$ 와 일치하므로

$$-2a=-8, a^2-5=b$$

$$\therefore a=4, b=11$$

| 다른 풀이 |

포물선 $y=x^2$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$

이 점을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(a, -5)$$

이 점이 포물선 $y=x^2-8x+b=(x-4)^2+b-16$ 의 꼭짓점 $(4, b-16)$ 과 일치하므로

$$a=4, -5=b-16$$

$$\therefore a=4, b=11$$

288 ㉮ $a=-8, b=-1, k=16$

점 $(3, 0)$ 을 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(-1, 2)$ 라 하면

$$3+p=-1, q=2 \quad \therefore p=-4, q=2$$

$$x^2+y^2+8x+6y+k=0에서$$

$$(x+4)^2+(y+3)^2=25-k$$

이 원의 중심의 좌표가 $(-4, -3)$ 이므로 주어진 평행이동에 의하여 이 원의 중심이 옮겨지는 점의 좌표는

$$(-4-4, -3+2) \quad \therefore (-8, -1)$$

$$\therefore a=-8, b=-1$$

또 두 원의 반지름의 길이는 일치하므로

$$\sqrt{25-k}=3$$

양변을 제곱하면

$$25-k=9 \quad \therefore k=16$$

| 다른 풀이 |

원 $x^2+y^2+8x+6y+k=0$ 에서

$$(x+4)^2+(y+3)^2=25-k$$

주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는 원의 방정식은

$$(x+4+4)^2+(y+3+2)^2=25-k$$

$$\therefore (x+8)^2+(y+5)^2=25-k$$

따라서 이 원의 중심의 좌표는 $(-8, -1)$ 이므로

$$a=-8, b=-1$$

또 두 원의 반지름의 길이는 일치하므로

$$\sqrt{25-k}=3$$

양변을 제곱하면

$$25-k=9 \quad \therefore k=16$$

| 참고 | 평행이동한 원의 중심이나 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구할 때는 각각 원의 중심, 포물선의 꼭짓점의 평행이동을 이용하는 것이 편리하다.

289 ㉮ -10

포물선 $y=x^2+4x-3=(x+2)^2-7$ 의 꼭짓점의 좌표는

$$(-2, -7)$$

도형 $f(x, y)=0$ 을 도형 $f(x-3, y+4)=0$ 으로 옮기는 평행이동은 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동하는 것이므로 이 평행이동에 의하여 포물선의 꼭짓점이 옮겨지는 점의 좌표는

$$(-2+3, -7-4) \quad \therefore (1, -11)$$

따라서 $a=1, b=-11$ 이므로

$$a+b=-10$$

| 다른 풀이 |

$$y=x^2+4x-3=(x+2)^2-7$$

주어진 평행이동에 의하여 이 포물선이 옮겨지는 포물선의 방정식은

$$y+4=(x-3+2)^2-7$$

$$\therefore y=(x-1)^2-11$$

따라서 이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(1, -11)$ 이므로
 $a=1, b=-11$
 $\therefore a+b=-10$

연습문제

132-134쪽

290 ㉮ 7

점 $(6, 1)$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 점의 좌표는
 $(6-3, 1+a) \quad \therefore (3, 1+a)$
 이 점이 점 $(b, 5)$ 와 일치하므로
 $3=b, 1+a=5 \quad \therefore a=4, b=3$
 $\therefore a+b=7$

291 ㉮ ④

점 $(-1, 3)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(2, -5)$ 라 하면
 $-1+a=2, 3+b=-5$
 $\therefore a=3, b=-8$
 이 평행이동에 의하여 점 $(5, 2)$ 로 옮겨지는 점의 좌표를 (c, d) 라 하면
 $c+3=5, d-8=2$
 $\therefore c=2, d=10$
 따라서 구하는 점의 좌표는 $(2, 10)$ 이다.

|다른 풀이|

주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 -8 만큼 평행이동하는 것이다.
 따라서 이 평행이동에 의하여 점 $(5, 2)$ 로 옮겨지는 점은 점 $(5, 2)$ 를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 8 만큼 평행이동한 점이므로 구하는 점의 좌표는
 $(5-3, 2+8) \quad \therefore (2, 10)$

292 ㉮ -4

평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+a, y-1)$ 은 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하는 것이다.
 이 평행이동에 의하여 점 $(3, -1)$ 이 옮겨지는 점의 좌표는
 $(3+a, -1-1) \quad \therefore (3+a, -2)$
 이 점이 직선 $2x-y=0$ 위에 있으므로
 $2(3+a)-(-2)=0$
 $2a=-8 \quad \therefore a=-4$

293 ㉮ ②

직선 $2x+y+5=0$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $2(x-2)+(y+1)+5=0$
 $\therefore 2x+y+2=0$
 이 직선이 직선 $2x+y+a=0$ 과 일치하므로
 $a=2$

294 ㉮ ①

직선 $y=ax+b$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $y-2=a(x+1)+b$
 $\therefore y=ax+a+b+2$
 이 직선이 직선 $y=2x+3$ 과 y 축 위에서 수직으로 만나므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이고, y 절편은 서로 같다.
 즉, $a \times 2 = -1, a+b+2=3$ 이므로
 $a=-\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}$
 $\therefore ab=-\frac{3}{4}$

295 ㉮ 10

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=a$ 를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 원의 방정식은
 $(x+3-2)^2+(y-m+1)^2=a$
 $\therefore (x+1)^2+(y-m+1)^2=a \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $x^2+y^2+2x-2y-3=0$ 에서
 $(x+1)^2+(y-1)^2=5 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$ 과 $\textcircled{㉡}$ 이 일치하므로
 $-m+1=-1, a=5 \quad \therefore a=5, m=2$
 $\therefore am=10$

|다른 풀이|

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=a$ 의 중심의 좌표는 $(2, -1)$
 이 점을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 점의 좌표는
 $(2-3, -1+m) \quad \therefore (-1, -1+m)$
 이 점이 원 $x^2+y^2+2x-2y-3=0$, 즉
 $(x+1)^2+(y-1)^2=5$ 의 중심 $(-1, 1)$ 과 일치하므로
 $-1+m=1 \quad \therefore m=2$
 또 두 원의 반지름의 길이는 일치하므로
 $a=5$
 $\therefore am=10$

296 ㉮ ⑤

포물선 $y=x^2-2x-5=(x-1)^2-6$ 의 꼭짓점의 좌표는

$$(1, -6)$$

이 점을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(1+1, -6+a) \quad \therefore (2, -6+a)$$

이 점이 x 축 위에 있으므로

$$-6+a=0 \quad \therefore a=6$$

297 ㉮ ③

점 $A(3, 0)$ 을 x 축의 방향으로 -6 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 점 B 의 좌표는

$$(3-6, a) \quad \therefore (-3, a)$$

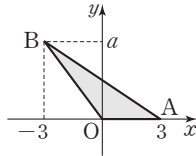
이때 $a>0$ 이므로 오른쪽 그림

에서 삼각형 OAB 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times a = \frac{3}{2}a$$

$$\text{즉, } \frac{3}{2}a=6 \text{이므로}$$

$$a=4$$



298 ㉮ -8

평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+5, y+a)$ 는 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동하는 것이다.

이 평행이동에 의하여 점 $A(-2, 4)$ 가 옮겨지는 점 B 의 좌표는

$$(-2+5, 4+a) \quad \therefore (3, 4+a)$$

$$\overline{OA} : \overline{OB} = 2 : 3 \text{에서 } 3\overline{OA} = 2\overline{OB}$$

$$\text{따라서 } 9\overline{OA}^2 = 4\overline{OB}^2 \text{이므로}$$

$$9\{(-2)^2 + 4^2\} = 4\{3^2 + (4+a)^2\}$$

$$180 = 36 + 4(4+a)^2$$

$$(4+a)^2 = 36, 4+a = \pm 6$$

$$\therefore a = -10 \text{ 또는 } a = 2$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$-10 + 2 = -8$$

299 ㉮ ④

직선 $3x+4y+17=0$ 을 x 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$3(x-n)+4y+17=0$$

$$\therefore 3x+4y-3n+17=0$$

이 직선이 원 $x^2+y^2=1$ 에 접하므로 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 사이의 거리는 원의 반지름의 길이 1과 같다.

$$\text{즉, } \frac{|-3n+17|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1 \text{이므로}$$

$$|-3n+17| = 5$$

$$-3n+17 = \pm 5$$

$$\therefore n=4 \text{ 또는 } n=\frac{22}{3}$$

따라서 자연수 n 의 값은 4이다.

300 ㉮ ④

직선 $y=3x+2$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y-b=3(x-a)+2$$

$$\therefore y=3x-3a+b+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(2-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(-2)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{13}$$

$$\overline{DA} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

즉, 사각형 $ABCD$ 는 마름모이므로 직선 $\textcircled{1}$ 이 사각형 $ABCD$ 의 넓이를 이등분하려면 두 대각선 AC 와 BD 의 교점, 즉 선분 AC 의 중점을 지나야 한다.

선분 AC 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+2}{2}, \frac{0+6}{2} \right)$$

$$\therefore (2, 3)$$

따라서 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(2, 3)$ 을 지나야 하므로

$$3 = 3 \times 2 - 3a + b + 2$$

$$\therefore 3a - b = 5$$

301 ㉮ $\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$$x^2+y^2-2x+6y+6=0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2+(y+3)^2=4$$

원의 중심 $(1, -3)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 원 $x^2+y^2=4$ 의 중심 $(0, 0)$ 으로 옮겨지므로

$$1+a=0, -3+b=0$$

$$\therefore a=-1, b=3$$

▶▶▶▶▶ ①

따라서 이 평행이동에 의하여 직선 $3x-y+4=0$ 이 옮겨지는 직선 l' 의 방정식은

$$3(x+1)-(y-3)+4=0$$

$$\therefore 3x-y+10=0$$

▶▶▶▶▶ ②

따라서 두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 $3x-y+4=0$ 위의 한 점 $(0, 4)$ 와 직선 $3x-y+10=0$ 사이의 거리와 같으므로 구하는 거리는

$$\frac{|-4+10|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{5} \quad \text{..... ㉓}$$

단계	채점 기준	비율
①	평행이동 구하기	40%
②	직선 l' 의 방정식 구하기	30%
③	두 직선 l, l' 사이의 거리 구하기	30%

302 ㉔ ④

평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+4, y-5)$ 는 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -5만큼 평행이동하는 것이다.

이 평행이동에 의하여 포물선 $y=(x+2)^2+8$ 이 옮겨지는 포물선의 방정식은

$$y+5=(x-4+2)^2+8, y=(x-2)^2+3$$

$$\therefore y=x^2-4x+7 \quad \text{..... ㉑}$$

$$x^2-4x+7=-2x+10 \text{에서 } x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

이를 $y=-2x+10$ 에 대입하면

$$x=-1 \text{일 때 } y=12, x=3 \text{일 때 } y=4$$

따라서 포물선 ㉑이 직선 $y=-2x+10$ 과 만나는 두 점 A, B의 좌표는 $(-1, 12), (3, 4)$ 이므로 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{12+4}{2}\right) \quad \therefore (1, 8)$$

303 ㉔ 6

원 $(x-a)^2+(y-a)^2=b^2$ 을 y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y+2-a)^2=b^2 \quad \text{..... ㉑}$$

원 ㉑이 직선 $y=x$ 와 접하므로 원의 중심 $(a, a-2)$ 와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 b 와 같다.

$$\text{즉, } \frac{|a-(a-2)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=b \text{이므로 } b=\sqrt{2}$$

원 ㉑이 x 축과 접하므로 반지름의 길이는 $|a-2|$

따라서 $|a-2|=|b|$ 이므로

$$a-2=b \quad (\because a>2, b>0)$$

$$\therefore a=b+2=2+\sqrt{2}$$

$$\therefore a^2-4b=(2+\sqrt{2})^2-4\sqrt{2}=6$$

304 ㉔ $2\sqrt{5}$

점 $(-1, 1)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(1, -1)$ 이라 하면 $-1+a=1, 1+b=-1$

$$\therefore a=2, b=-2 \quad \text{..... ㉑}$$

이 평행이동에 의하여 원 $x^2+y^2=9$ 가 옮겨지는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y+2)^2=9 \quad \text{..... ㉒}$$

$x=0$ 을 ㉒에 대입하면

$$(-2)^2+(y+2)^2=9, (y+2)^2=5$$

$$y+2=\pm\sqrt{5} \quad \therefore y=-2\pm\sqrt{5}$$

즉, 원 ㉒이 y 축과 만나는 두 점의 좌표는

$$(0, -2-\sqrt{5}), (0, -2+\sqrt{5}) \quad \text{..... ㉓}$$

따라서 원 ㉒이 y 축에 의하여 잘리는 현의 길이는 이 두 점 사이의 거리와 같으므로

$$|-2+\sqrt{5}-(-2-\sqrt{5})|=2\sqrt{5} \quad \text{..... ㉔}$$

단계	채점 기준	비율
①	평행이동 구하기	40%
②	평행이동한 원이 y 축과 만나는 두 점의 좌표 구하기	40%
③	평행이동한 원이 y 축에 의하여 잘리는 현의 길이 구하기	20%

305 ㉔ $(3, 3)$

I 접근 방법 I 평행사변형의 두 대각선의 중점이 일치함을 이용하여 점 C의 좌표를 구한 후 평행사변형 AOBC를 DEFG로 옮기는 평행이동을 찾는다.

사각형 AOBC가 평행사변형이므로 두 대각선 AB와 OC의 중점이 일치한다.

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2-1}{2}\right) \quad \therefore \left(2, \frac{1}{2}\right)$$

$C(a, b)$ 라 하면 선분 OC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

$$\text{따라서 } 2=\frac{a}{2}, \frac{1}{2}=\frac{b}{2} \text{이므로}$$

$$a=4, b=1 \quad \therefore C(4, 1)$$

즉, 평행이동에 의하여 점 $C(4, 1)$ 이 점 $G(6, 2)$ 로 옮겨진 것이므로 점 $(4, 1)$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(6, 2)$ 라 하면

$$4+m=6, 1+n=2 \quad \therefore m=2, n=1$$

따라서 이 평행이동에 의하여 점 A(1, 2)가 옮겨지는 점 D의 좌표는
 $(1+2, 2+1) \quad \therefore (3, 3)$

306 ㉡ 11

| 접근 방법 | 원과 직선이 두 점에서 만나려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이보다 짧아야 함을 이용한다.

원 $(x-2)^2+(y-3)^2=9$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 원 C_1 의 방정식은

$$(x-m-2)^2+(y-3)^2=9$$

원 C_1 의 중심 $(m+2, 3)$ 과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4(m+2)-9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|4m-1|}{5}$$

원 C_1 의 반지름의 길이는 3이므로 (가)에서

$$\frac{|4m-1|}{5} < 3, |4m-1| < 15$$

$$-15 < 4m-1 < 15$$

$$\therefore -\frac{7}{2} < m < 4 \quad \dots\dots \textcircled{가}$$

원 $(x-m-2)^2+(y-3)^2=9$ 를 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 원 C_2 의 방정식은

$$(x-m-2)^2+(y-n-3)^2=9$$

원 C_2 의 중심 $(m+2, n+3)$ 과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4(m+2)-3(n+3)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|4m-3n-1|}{5}$$

원 C_2 의 반지름의 길이는 3이므로 (나)에서

$$\frac{|4m-3n-1|}{5} < 3$$

$$|4m-3n-1| < 15$$

$$-15 < 4m-3n-1 < 15$$

$$-14-4m < -3n < 16-4m$$

$$\therefore \frac{4m-16}{3} < n < \frac{4m+14}{3} \quad \dots\dots \textcircled{나}$$

㉠, ㉡에서 $m+n$ 의 값이 최대이려면 m 의 값이 최대이어야 한다.

㉠에서 자연수 m 의 최댓값은 3이고, $m=3$ 일 때 ㉡

에서 $-\frac{4}{3} < n < \frac{26}{3}$ 이므로 자연수 n 의 최댓값은 8이다.

따라서 $m+n$ 의 최댓값은

$$3+8=11$$

02 대칭이동

개념 확인

137쪽

307 ㉡ (1) (1, -2) (2) (-1, 2)

(3) (-1, -2) (4) (2, 1)

308 ㉡ (1) $x+2y+1=0$ (2) $x+2y-1=0$

(3) $x-2y-1=0$ (4) $2x-y-1=0$

(1) $x-2(-y)+1=0 \quad \therefore x+2y+1=0$

(2) $-x-2y+1=0 \quad \therefore x+2y-1=0$

(3) $-x-2(-y)+1=0 \quad \therefore x-2y-1=0$

(4) $y-2x+1=0 \quad \therefore 2x-y-1=0$

309 ㉡ (1) $(x+5)^2+(y+4)^2=1$

(2) $(x-5)^2+(y-4)^2=1$

(3) $(x-5)^2+(y+4)^2=1$

(4) $(x-4)^2+(y+5)^2=1$

(1) $(x+5)^2+(-y-4)^2=1$

$\therefore (x+5)^2+(y+4)^2=1$

(2) $(-x+5)^2+(y-4)^2=1$

$\therefore (x-5)^2+(y-4)^2=1$

(3) $(-x+5)^2+(-y-4)^2=1$

$\therefore (x-5)^2+(y+4)^2=1$

(4) $(y+5)^2+(x-4)^2=1$

$\therefore (x-4)^2+(y+5)^2=1$

310 ㉡ (1) $y=-(x+2)^2+3$

(2) $y=(x-2)^2-3$

(3) $y=-(x-2)^2+3$

(1) $-y=(x+2)^2-3 \quad \therefore y=-(x+2)^2+3$

(2) $y=(-x+2)^2-3 \quad \therefore y=(x-2)^2-3$

(3) $-y=(-x+2)^2-3 \quad \therefore y=-(x-2)^2+3$

유제

139~151쪽

311 ㉡ ①

점 (3, 2)를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 A의 좌표는 (2, 3)

점 A(2, 3)을 원점에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 (-2, -3)

따라서 선분 AB의 길이는

$$\sqrt{(-2-2)^2+(-3-3)^2}=2\sqrt{13}$$

312 ㉮ $y = -2x$

점 $(-1, -2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는 $(-1, 2)$

점 $(-1, -2)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(1, -2)$

따라서 직선 PQ의 방정식은

$$y - 2 = \frac{-2 - 2}{1 - (-1)} \{x - (-1)\} \quad \therefore y = -2x$$

313 ㉮ $a = -5, b = 3$

점 $(3, a)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-3, a)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(3, -a)$

이 점이 점 $(b, 5)$ 와 일치하므로

$$3 = b, -a = 5 \quad \therefore a = -5, b = 3$$

314 ㉮ 6

점 $(-2, k)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점 A의 좌표는 $(2, -k)$

점 $(-2, k)$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 $(k, -2)$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AB} &= \sqrt{(k-2)^2 + \{-2 - (-k)\}^2} \\ &= |k-2| \times \sqrt{2} \end{aligned}$$

즉, $|k-2| \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ 이므로

$$|k-2| = 4, k-2 = \pm 4$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 6$$

따라서 양수 k 의 값은 6이다.

315 ㉮ ①

직선 $y = ax - 6$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y = ax - 6 \quad \therefore y = -ax + 6$$

이 직선이 점 $(2, 4)$ 를 지나므로

$$4 = -2a + 6 \quad \therefore a = 1$$

316 ㉮ 12

원 $x^2 + y^2 + 8x - 2y + k = 0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-x)^2 + (-y)^2 + 8(-x) - 2(-y) + k = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 8x + 2y + k = 0$$

이 원이 점 $(3, -3)$ 을 지나므로

$$9 + 9 - 24 - 6 + k = 0$$

$$\therefore k = 12$$

317 ㉮ $a = -2, b = 3$

포물선 $y = x^2 + ax + b$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y = (-x)^2 + a(-x) + b$$

$$\therefore y = x^2 - ax + b$$

포물선 $y = x^2 - ax + b = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b$ 의 꼭짓

점의 좌표는

$$\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + b\right)$$

이 점이 점 $(-1, 2)$ 와 일치하므로

$$\frac{a}{2} = -1, -\frac{a^2}{4} + b = 2$$

$$\therefore a = -2, b = 3$$

| 다른 풀이 |

포물선 $y = x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b$ 의 꼭짓

점의 좌표는

$$\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + b\right)$$

이 점을 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + b\right) \quad \text{— 포물선의 대칭이동은 포물선의 꼭짓점의 대칭이동으로 생각할 수 있다.}$$

이 점이 점 $(-1, 2)$ 와 일치하므로

$$\frac{a}{2} = -1, -\frac{a^2}{4} + b = 2$$

$$\therefore a = -2, b = 3$$

318 ㉮ $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 1 = 0$

원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 1 = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$$

이 원을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$x^2 + (-y)^2 - 6x + 4(-y) - 1 = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 6x - 4y - 1 = 0$$

319 ㉮ $y = -x^2 - 14x - 38$

포물선 $y = x^2 - 6x + 1$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y = (-x)^2 - 6(-x) + 1$$

$$\therefore y = -x^2 - 6x - 1$$

이 포물선을 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y - 3 = -(x + 4)^2 - 6(x + 4) - 1$$

$$\therefore y = -x^2 - 14x - 38$$

320 $(x-6)^2+(y+3)^2=4$

원 $(x+1)^2+(y-5)^2=4$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 원의 방정식은 $(x+2+1)^2+(y-1-5)^2=4$
 $\therefore (x+3)^2+(y-6)^2=4$
 이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 $(x-6)^2+(y+3)^2=4$

321 $a=1, b=3$

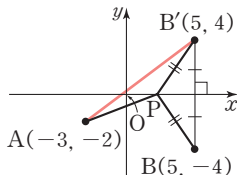
점 $(-1, 2)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(1, -2)$
 이 점을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(2, 1)$ 이므로
 $1+a=2, -2+b=1$
 $\therefore a=1, b=3$

322 -3

직선 $y=5x-1$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y-2=5(x-a)-1$
 $\therefore y=5x-5a+1$
 이 직선을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $y=5(-x)-5a+1$
 $\therefore y=-5x-5a+1$
 이 직선이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로
 $1=-15-5a+1$
 $\therefore a=-3$

323 10

점 $B(5, -4)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면 $B'(5, 4)$
 이때 $\overline{BP}=\overline{B'P}$ 이므로



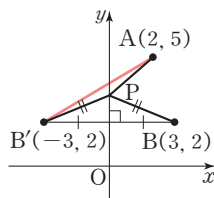
$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$

$$\begin{aligned} &\geq \overline{AB'} \\ &= \sqrt{\{5-(-3)\}^2+\{4-(-2)\}^2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값은 10 이다.

324 $\sqrt{34}$

점 $B(3, 2)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면 $B'(-3, 2)$



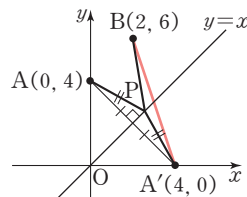
이때 $\overline{BP}=\overline{B'P}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP}+\overline{BP} &= \overline{AP}+\overline{B'P} \\ &\geq \overline{AB'} \\ &= \sqrt{(-3-2)^2+(2-5)^2} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값은 $\sqrt{34}$ 이다.

325 $(3, 3), 2\sqrt{10}$

점 $A(0, 4)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면 $A'(4, 0)$



이때 $\overline{AP}=\overline{A'P}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP}+\overline{BP} &= \overline{A'P}+\overline{BP} \\ &\geq \overline{A'B} \\ &= \sqrt{(2-4)^2+6^2} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{10}$ 이다.

이때 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 가 최솟값을 갖도록 하는 점 P는 직선 $A'B$ 와 직선 $y=x$ 의 교점이다.

직선 $A'B$ 의 방정식은

$$y=\frac{6}{2-4}(x-4)$$

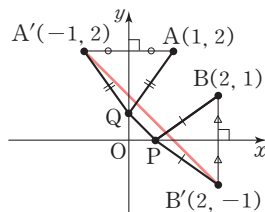
$$\therefore y=-3x+12$$

$$-3x+12=x \text{에서 } x=3$$

따라서 점 P의 좌표는 $(3, 3)$ 이다.

326 $3\sqrt{2}$

점 $A(1, 2)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면 $A'(-1, 2)$



점 $B(2, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면 $B'(2, -1)$

$B'(2, -1)$

$$\begin{aligned} \text{이때 } \overline{AQ} &= \overline{A'Q}, \overline{BP} = \overline{B'P} \text{이므로} \\ \overline{AQ} + \overline{QP} + \overline{PB} &= \overline{A'Q} + \overline{QP} + \overline{B'P} \\ &\geq \overline{A'B'} \\ &= \sqrt{\{2 - (-1)\}^2 + \{-1 - 2\}^2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AQ} + \overline{QP} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 $3\sqrt{2}$ 이다.

327 $\square (x+7)^2 + (y-3)^2 = 5$

원 $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 5$ 의 중심의 좌표는 $(-1, -3)$

이 점을 점 $(-4, 0)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 $(-4, 0)$ 은 두 점 $(-1, -3)$, (a, b) 를 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{-1+a}{2} = -4, \frac{-3+b}{2} = 0 \quad \therefore a = -7, b = 3$$

따라서 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 $(-7, 3)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 원이므로 구하는 원의 방정식은 $(x+7)^2 + (y-3)^2 = 5$

328 $\square a=4, b=9$

점 $(-2, 4)$ 는 두 점 $(a, -1)$, $(-8, b)$ 를 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{a-8}{2} = -2, \frac{-1+b}{2} = 4$$

$$\therefore a=4, b=9$$

329 $\square a=3, b=8, c=4$

원 $(x-4)^2 + (y+a)^2 = 4$ 의 중심의 좌표는 $(4, -a)$

원 $(x+b)^2 + (y-1)^2 = c$ 의 중심의 좌표는 $(-b, 1)$

즉, 점 $(4, -a)$ 를 점 $(-2, -1)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(-b, 1)$ 이다.

따라서 점 $(-2, -1)$ 은 두 점 $(4, -a)$, $(-b, 1)$ 을 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{4-b}{2} = -2, \frac{-a+1}{2} = -1 \quad \therefore a=3, b=8$$

또 두 원의 반지름의 길이가 같으므로 $c=4$

330 $\square -1$

포물선 $y=x^2-8x+17=(x-4)^2+1$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(4, 1)$

즉, 점 $(4, 1)$ 을 점 (a, b) 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(-6, -1)$ 이다.

따라서 점 (a, b) 는 두 점 $(4, 1)$, $(-6, -1)$ 을 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{4-6}{2} = a, \frac{1-1}{2} = b$$

$$\therefore a = -1, b = 0$$

$$\therefore a+b = -1$$

331 $\square (7, 1)$

점 $(-1, 5)$ 를 직선 $2x-y-3=0$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b) 라 하자.

두 점 $(-1, 5)$, (a, b) 를 이은 선분의 중점

$$\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{5+b}{2}\right) \text{가 직선 } 2x-y-3=0 \text{ 위의 점이}$$

므로

$$2 \times \frac{-1+a}{2} - \frac{5+b}{2} - 3 = 0$$

$$\therefore 2a-b=13 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 점 $(-1, 5)$, (a, b) 를 지나는 직선과 직선

$2x-y-3=0$, 즉 $y=2x-3$ 은 서로 수직이므로

$$\frac{b-5}{a-(-1)} \times 2 = -1$$

$$\therefore a+2b=9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=7, b=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(7, 1)$ 이다.

332 $\square x-3y+2=0$

직선 $y=3x$ 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 를 직선

$y=-x+1$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하자.

선분 PP' 의 중점 $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$ 이 직선

$y=-x+1$ 위의 점이므로

$$\frac{y+y'}{2} = -\frac{x+x'}{2} + 1$$

$$\therefore x+y = -x'-y'+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 PP' 과 직선 $y=-x+1$ 은 서로 수직이므로

$$\frac{y'-y}{x'-x} \times (-1) = -1$$

$$\therefore x-y = x'-y' \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 x, y 에 대하여 풀면

$$x = -y' + 1, y = -x' + 1$$

점 P 는 직선 $y=3x$ 위의 점이므로

$$-x'+1 = 3(-y'+1) \quad \therefore x'-3y'+2=0$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$x-3y+2=0$$

333 ㉡ $a=-3, b=-1$

두 점 $(1, 1), (-2, 0)$ 을 이은 선분의 중점

$(\frac{1-2}{2}, \frac{1}{2})$, 즉 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}a + b \quad \therefore a - 2b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

두 점 $(1, 1), (-2, 0)$ 을 지나는 직선과 직선 $y=ax+b$ 는 서로 수직이므로

$$-\frac{1}{2-1} \times a = -1 \quad \therefore a = -3$$

이를 ㉡에 대입하면

$$-3 - 2b = -1 \quad \therefore b = -1$$

334 ㉡ $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$

원 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ 의 중심 $(-1, 2)$ 를 직선 $y=x+4$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b) 라 하자.

두 점 $(-1, 2), (a, b)$ 를 이은 선분의 중점

$(\frac{-1+a}{2}, \frac{2+b}{2})$ 가 직선 $y=x+4$ 위의 점이므로

$$\frac{2+b}{2} = \frac{-1+a}{2} + 4 \quad \therefore a - b = -5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

두 점 $(-1, 2), (a, b)$ 를 지나는 직선과 직선 $y=x+4$ 는 서로 수직이므로

$$\frac{b-2}{a-(-1)} \times 1 = -1 \quad \therefore a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-2, b=3$

따라서 대칭이동한 원은 중심이 점 $(-2, 3)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 원의 방정식은 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$

연습문제

152~154쪽

335 ㉡ ①

점 $P(2, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점 Q 의 좌표는 $(2, -1)$

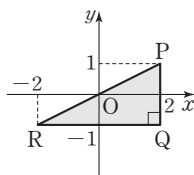
점 $P(2, 1)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 R 의 좌표는 $(-2, -1)$

따라서 오른쪽 그림과 같이 세

점 P, Q, R 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 PQR 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{RQ} \times \overline{PQ}$$

$$= \frac{1}{2} \times \{2 - (-2)\} \times \{1 - (-1)\} = 4$$



336 ㉡ $y=-3x-1$

직선 $y=3x-2$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$x=3y-2 \quad \therefore y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 -3 이므로 기울기가 -3 이고 점 $(-2, 5)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-5=-3\{x-(-2)\}$$

$$\therefore y=-3x-1$$

337 ㉡ 2

포물선 $y=x^2+2mx+m^2-6=(x+m)^2-6$ 의 꼭짓점의 좌표는

$$(-m, -6)$$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점 $(m, 6)$ 이 점 $(-4, a)$ 와 일치하므로

$$m=-4, a=6$$

$$\therefore a+m=2$$

338 ㉡ ②

원 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

이 원을 x 축의 방향으로 -5 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x+5-2)^2 + (y-3+1)^2 = 5$$

$$\therefore (x+3)^2 + (y-2)^2 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$y=0$ 을 ㉡에 대입하면

$$(x+3)^2 + (-2)^2 = 5, (x+3)^2 = 1$$

$$x+3=\pm 1 \quad \therefore x=-4 \text{ 또는 } x=-2$$

즉, 원 ㉡이 x 축과 만나는 두 점의 좌표는 $(-4, 0), (-2, 0)$ 이므로 구하는 거리는

$$|-2 - (-4)| = 2$$

339 ㉡ ③

점 $B(4, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면

$$B'(4, -1)$$

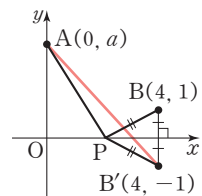
이때 $\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P}$$

$$\geq \overline{AB'}$$

$$= \sqrt{4^2 + (-1-a)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + 2a + 17}$$



따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $\sqrt{a^2 + 2a + 17}$ 이므로
 $\sqrt{a^2 + 2a + 17} = 4\sqrt{2}$

양변을 제곱하면

$$a^2 + 2a + 17 = 32, a^2 + 2a - 15 = 0$$

$$(a+5)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 3 (\because a > 0)$$

340 ㉠ 8

포물선 $y = x^2 - 8x + 2 = (x-4)^2 - 14$ 의 꼭짓점의 좌표는

$$(4, -14)$$

포물선 $y = -x^2 + 16x - 54 = -(x-8)^2 + 10$ 의 꼭짓점의 좌표는

$$(8, 10)$$

즉, 점 $(4, -14)$ 를 점 (a, b) 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표가 $(8, 10)$ 이다.

따라서 점 (a, b) 는 두 점 $(4, -14)$, $(8, 10)$ 을 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{4+8}{2} = a, \frac{-14+10}{2} = b \quad \therefore a = 6, b = -2$$

$$\therefore a - b = 8$$

341 ㉠ ①

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0 \text{에서}$$

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 + 8x + c = 0 \text{에서}$$

$$(x+4)^2 + y^2 = 16 - c$$

두 원의 반지름의 길이가 같으므로

$$9 = 16 - c \quad \therefore c = 7$$

두 원의 중심 $(4, 2)$, $(-4, 0)$ 을 이은 선분의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4-4}{2}, \frac{2}{2}\right) \quad \therefore (0, 1)$$

이 점이 직선 $y = ax + b$ 위의 점이므로

$$b = 1$$

두 점 $(4, 2)$, $(-4, 0)$ 을 지나는 직선과 직선

$y = ax + b$ 는 서로 수직이므로

$$\frac{-2}{-4-4} \times a = -1 \quad \therefore a = -4$$

$$\therefore a + b + c = 4$$

342 ㉠ (1) $a > 0, b < 0$ (2) 제1사분면

(1) 점 (a, b) 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a, b)$

▶▶▶▶▶ ①

이 점이 제3사분면 위에 있으므로

$$-a < 0, b < 0$$

$$\therefore a > 0, b < 0$$

▶▶▶▶▶ ②

(2) 점 $(a-b, ab)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(a-b, -ab)$$

▶▶▶▶▶ ③

이때 $a > 0, b < 0$ 이므로

$$a-b > 0, -ab > 0$$

따라서 점 $(a-b, -ab)$ 가 속하는 사분면은 제1사분면이다.

▶▶▶▶▶ ④

단계	채점 기준	비율
①	점 (a, b) 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표 구하기	20 %
②	a, b 의 부호 구하기	30 %
③	점 $(a-b, ab)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표 구하기	20 %
④	점 $(a-b, ab)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점이 속하는 사분면 구하기	30 %

343 ㉠ -2

직선 $x-2y+k=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-x-2(-y)+k=0 \quad \therefore x-2y-k=0$$

오른쪽 그림에서 사각형

ABCD는 정사각형이고 직선

$x-2y-k=0$ 이 사각형

ABCD의 넓이를 이등분하려면

직선 $x-2y-k=0$ 은 사각형

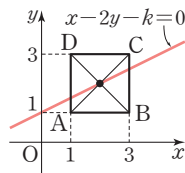
ABCD의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

이때 두 대각선의 교점은 선분 AC의 중점이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+3}{2}\right) \quad \therefore (2, 2)$$

따라서 직선 $x-2y-k=0$ 이 점 $(2, 2)$ 를 지나야 하므로

$$2-4-k=0 \quad \therefore k=-2$$



344 ㉠ 4

직선 $2x+y+k=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-2x+y+k=0$$

$$\therefore 2x-y-k=0$$

이 직선을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 직선 l' 의 방정식은

$$2(x-1)-(y+2)-k=0$$

$$\therefore 2x-y-k-4=0$$

두 직선 l, l' 의 방정식을 연립하여 풀면

$$x=1, y=-k-2$$

즉, 두 직선 l, l' 의 교점의 좌표는

$$(1, -k-2)$$

이때 $k > 0$ 이므로 두 직선 l, l' 은 오른쪽 그림과 같고 x 축과 두 직선 l, l' 으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 18이므로

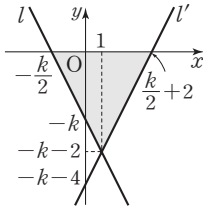
$$\frac{1}{2} \times \left\{ \frac{k}{2} + 2 - \left(-\frac{k}{2} \right) \right\}$$

$$\times (k+2) = 18$$

$$(k+2)^2 = 36, k+2 = \pm 6$$

$$\therefore k = -8 \text{ 또는 } k = 4$$

따라서 구하는 양수 k 의 값은 4이다.



345 ㉠

직선 $y = -\frac{1}{2}x - 3$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2}(x-a) - 3$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{a}{2} - 3$$

이 직선을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선 l 의 방정식은

$$x = -\frac{1}{2}y + \frac{a}{2} - 3 \quad \therefore 2x + y - a + 6 = 0$$

직선 l 이 원 $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 5$ 와 접하려면 원의 중심 $(-1, 3)$ 과 직선 l 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같아야 하므로

$$\frac{|-2+3-a+6|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5}$$

$$|-a+7| = 5, -a+7 = \pm 5$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = 12$$

따라서 구하는 합은

$$2+12=14$$

346 ㉡

중심이 점 $(4, 2)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원 O_1 의 방정식은

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$$

원 O_1 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$$

이 원을 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 원 O_2 의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-a-4)^2 = 4$$

오른쪽 그림과 같이 두 원

O_1, O_2 의 중심을 각각 C, D라 하면 두 원 O_1, O_2 의 반지름의 길이가 같으므로 사각형 ACBD는 마름모이다.

따라서 $\overline{AB}$ 와 $\overline{CD}$ 는 서로를 수직이등분하므로 $\overline{AB}$ 와 $\overline{CD}$ 가 만나는 점을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

이때 삼각형 ACH는 $\angle AHC = 90^\circ$ 인 직각삼각형이고 $\overline{AC} = 2$ 이므로 직각삼각형 ACH에서

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2}$$

$$= \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$$

$$\therefore \overline{CD} = 2\overline{CH} = 2 \times 1 = 2$$

이때 C(4, 2), D(2, a+4)이므로

$$\sqrt{(2-4)^2 + \{(a+4)-2\}^2} = 2$$

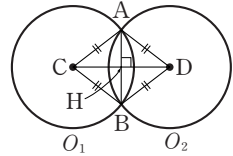
$$\sqrt{a^2 + 4a + 8} = 2$$

양변을 제곱하면

$$a^2 + 4a + 8 = 4, a^2 + 4a + 4 = 0$$

$$(a+2)^2 = 0$$

$$\therefore a = -2$$



347 ㉢ $2\sqrt{29}$

점 A(7, 3)을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A', x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A''이라 하면

$$A'(3, 7), A''(7, -3)$$

$$\text{이때 } \overline{AB} = \overline{A'B},$$

$$\overline{CA} = \overline{CA''} \text{이므로 삼각형}$$

ABC의 둘레의 길이는

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$$

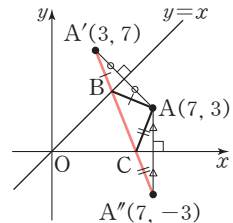
$$= \overline{A'B} + \overline{BC} + \overline{CA''}$$

$$\geq \overline{A'A''}$$

$$= \sqrt{(7-3)^2 + (-3-7)^2}$$

$$= 2\sqrt{29}$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{29}$ 이다.



348 ㉮ 14

직선 $y=2x+5$ 위의 임의의 점 $P(x, y)$ 를 점 $(-1, 4)$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하면 선분 PP' 의 중점이 점 $(-1, 4)$ 이므로

$$\frac{x+x'}{2} = -1, \frac{y+y'}{2} = 4$$

$$\therefore x = -2 - x', y = 8 - y'$$

이를 $y=2x+5$ 에 대입하면

$$8 - y' = 2(-2 - x') + 5 \quad \therefore y' = 2x' + 7$$

따라서 대칭이동한 직선의 방정식은 $y=2x+7$ 이므로

$$a=2, b=7$$

$$\therefore ab=14$$

349 ㉮ $\sqrt{5}$

ㄹ 접근 방법 점 P 를 주어진 방법대로 이동한 점을 차례대로 구하여 규칙을 찾는다.

점 $P(1, -3)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점 P_1 의 좌표는

$$(1, 3)$$

점 P_1 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_2 의 좌표는 $(-1, -3)$

점 P_2 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점 P_3 의 좌표는 $(-1, 3)$

점 P_3 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_4 의 좌표는 $(1, -3)$

점 P_4 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점 P_5 의 좌표는 $(1, 3)$

⋮

즉, 점 $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$ 의 좌표는 $(1, 3), (-1, -3), (-1, 3), (1, -3)$ 이 이 순서대로 반복된다.

⋮⋮⋮⋮⋮ ①

이때 $103=4 \times 25+3$ 에서 점 P_{103} 의 좌표는 점 P_3 의 좌표와 같으므로

$$P_{103}(-1, 3)$$

⋮⋮⋮⋮⋮ ②

따라서 점 P_{103} 과 직선 $x+2y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1+6|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \sqrt{5}$$

⋮⋮⋮⋮⋮ ③

단계	채점 기준	비율
①	점 $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$ 의 좌표의 규칙 찾기	50%
②	점 P_{103} 의 좌표 구하기	40%
③	점 P_{103} 과 직선 $x+2y=0$ 사이의 거리 구하기	10%

350 ㉮ ④

ㄹ 접근 방법 $f(x, y)=0$ 에 x, y 대신 각각 어떤 식을 대입하면 $f(x+1, -y)=0$ 이 되는지 생각해 본다.

$f(x, y)=0 \rightarrow f(x+1, y)=0 \rightarrow f(x+1, -y)=0$ 따라서 방정식 $f(x+1, -y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 후 x 축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 ④이다.

ㄹ 다른 풀이

$f(x, y)=0 \rightarrow f(x, -y)=0 \rightarrow f(x+1, -y)=0$ 따라서 방정식 $f(x+1, -y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것과 같으므로 ④이다.

351 ㉮ ③

ㄹ 접근 방법 점 B 에서 일정한 거리에 있는 점 P 가 어떤 도형 위의 점인지 파악한다.

$B(5, 4)$ 에 대하여 $\overline{BP}=3$ 인 점 P 는 중심이 점 $(5, 4)$ 이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점이다.

즉, 구하는 최솟값은 점 A 와 원

$(x-5)^2+(y-4)^2=9$ 위의 점 P , x 축 위의 점 Q 에 대하여 $\overline{AQ}+\overline{QP}$ 의 최솟값과 같다.

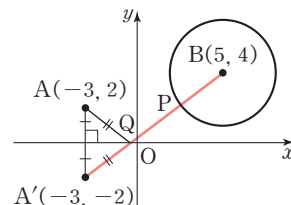
점 $A(-3, 2)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면

$$A'(-3, -2)$$

$$\overline{AQ}=\overline{A'Q} \text{이므로}$$

$$\overline{AQ}+\overline{QP}=\overline{A'Q}+\overline{QP}$$

이때 $\overline{A'Q}+\overline{QP}$ 는 다음 그림과 같이 두 점 P, Q 가 선분 $A'B$ 위에 있을 때 최솟값을 갖는다.



$$\therefore \overline{AQ}+\overline{QP}=\overline{A'Q}+\overline{QP}$$

$$\geq \overline{A'B}-\overline{BP}$$

$$=\sqrt{\{5-(-3)\}^2+\{4-(-2)\}^2}-3$$

$$=10-3=7$$

따라서 $\overline{AQ}+\overline{QP}$ 의 최솟값은 7이다.

II. 집합과 명제

II-1. 집합의 뜻과 집합 사이의 포함 관계

01 집합의 뜻과 집합 사이의 포함 관계

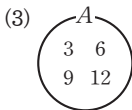
개념 확인

157쪽

352 ㉡ (1) 1, 2, 3, 4, 5 (2) 1, 3, 5, 7, 9

353 ㉡ (1) $A = \{3, 6, 9, 12\}$

(2) 예 $A = \{x | x \text{는 } 12 \text{ 이하의 } 3 \text{의 양의 배수}\}$



354 ㉡ (1) ㄱ, ㄷ (2) ㄴ, ㄷ (3) ㄷ

ㄱ. $A = \{1, 3, 9\} \Rightarrow$ 유한집합

ㄴ. $B = \{10, 20, 30, 40, \dots\} \Rightarrow$ 무한집합

ㄷ. $C = \{8, 10, 12, 14, \dots\} \Rightarrow$ 무한집합

ㄹ. 1보다 작은 자연수는 존재하지 않는다.

$\Rightarrow$ 공집합, 유한집합

유제

159~165쪽

355 ㉡ ㄷ, ㅅ

ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅅ. ‘많은’, ‘가까운’, ‘잘하는’, ‘무서운’은 기준이 명확하지 않아 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

ㄷ. 원소가 12, 18, 24, 30, ...인 집합이다.

ㅅ. 원소가 1인 집합이다.

따라서 보기에서 집합인 것은 ㄷ, ㅅ이다.

356 ㉡ ③

$A = \{2, 7, 12, 17, \dots\}$

① 6은 집합 A 의 원소가 아니므로 $6 \notin A$

② 7은 집합 A 의 원소이므로 $7 \in A$

③ 8은 집합 A 의 원소가 아니므로 $8 \notin A$

④ 10은 집합 A 의 원소가 아니므로 $10 \notin A$

⑤ 12는 집합 A 의 원소이므로 $12 \in A$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

357 ㉡ ④

① 원소가 1, 2, 3, 4, ...인 집합이다.

② 원소가 2, 4, 6, 8, ..., 18인 집합이다.

③ 원소가 5, 15, 25, 35, ...인 집합이다.

④ ‘쉬운’은 기준이 명확하지 않아 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

⑤ 12월에 태어난 학생은 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다.

따라서 집합이 아닌 것은 ④이다.

358 ㉡ ㄴ, ㄷ, ㄹ

$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ 에서

$x(x+1)(x-3) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 3$

$\therefore A = \{-1, 0, 3\}$

ㄱ. -1은 집합 A 의 원소이므로 $-1 \in A$

ㄴ. 0은 집합 A 의 원소이므로 $0 \in A$

ㄷ. 1은 집합 A 의 원소가 아니므로 $1 \notin A$

ㄹ. 3은 집합 A 의 원소이므로 $3 \in A$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

359 ㉡ $A = \{-1, 4\}$

$x^2 - 3x - 4 = 0$ 에서 $(x+1)(x-4) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = 4$

$\therefore A = \{-1, 4\}$

360 ㉡ ㉡ $A = \{x | x = 4k - 3, k \text{는 } 13 \text{ 이하의}$

자연수}

361 ㉡ 원소나열법: $A = \{3, 6, 9\}$

조건제시법:

㉡ $A = \{x | x \text{는 } 9 \text{ 이하의 } 3 \text{의 양의 배수}\}$

362 ㉡ ④

①, ②, ③, ⑤ $\{1, 2, 3, 4, \dots, 8\}$

④ $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

따라서 집합 $\{1, 2, 3, 4, \dots, 8\}$ 을 조건제시법으로 나타낸 것으로 옳지 않은 것은 ④이다.

363 ㉡ $C = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$

집합 A 의 원소 a 와 집합 B

의 원소 b 에 대하여 $a - b$ 의

값은 오른쪽 표와 같으므로

$C = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$

$a \setminus b$	1	2	3
0	-1	-2	-3
2	1	0	-1

364 ㉓ 3

ㄱ. 집합 $A = \{100, 101, 102, 103, \dots, 999\}$ 는 유한 집합이다.

ㄴ. 3으로 나누어떨어지는 양수는 3의 양의 배수이므로 $B = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$

즉, 집합 B 는 무한집합이다.

ㄷ. 9의 양의 약수는 1, 3, 9이고 이 중 짝수는 없으므로 집합 C 는 공집합이다.

ㄹ. 5와 7의 양의 공배수는 35의 양의 배수와 같으므로 $D = \{35, 70, 105, 140, \dots\}$

즉, 집합 D 는 무한집합이다.

ㅁ. $x^2 - 3x < 0$ 에서 $x(x-3) < 0$

$$\therefore 0 < x < 3$$

이를 만족시키는 유리수 x 는 무수히 많으므로 집합 E 는 무한집합이다.

따라서 보기에서 무한집합인 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ의 3개이다.

365 ㉓ 9

집합 A 의 원소 a 와 b 에 대하여 ab 의 값은 오른쪽 표와 같으므로

$$B = \{-3, -1, 1, 3, 9\}$$

따라서 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$-3 + (-1) + 1 + 3 + 9 = 9$$

$a \setminus b$	-1	1	3
-1	1	-1	-3
1	-1	1	3
3	-3	3	9

366 ㉓ ④

① 주어진 집합의 원소는 1개이므로 공집합이 아니다.

② 두 자리 소수는 11, 13, 17, 19, ..., 97이므로 주어진 집합은 공집합이 아니다.

③ 주어진 집합의 원소는 7, 14, 21, 28, ...이므로 공집합이 아니다. ◀ 무한집합이다.

④ $3 < x < 4$ 를 만족시키는 정수는 없으므로 주어진 집합은 공집합이다.

⑤ 주어진 집합의 원소는 -1, 1이므로 공집합이 아니다.

따라서 공집합인 것은 ④이다.

367 ㉓ ㄷ, ㄹ

$$\text{ㄱ. } n(\{0\}) = 1$$

$$\text{ㄴ. } n(\{3, 4, 5\}) = 3, n(\{3, 4\}) = 2 \text{이므로}$$

$$n(\{3, 4, 5\}) - n(\{3, 4\}) = 1$$

$$\text{ㄷ. } A = \emptyset \text{이므로 } n(A) = 0$$

$$\text{ㄹ. } A = \{1, 5, 25\} \text{이므로 } n(A) = 3$$

$$\text{이때 } n(B) = 3 \text{이므로 } n(A) = n(B)$$

$$\text{ㅁ. } n(A) = 4, n(B) = 4 \text{이므로 } n(A) = n(B)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

368 ㉓ ⑤

$$\text{① } n(\emptyset) = 0$$

$$\text{② } n(\{0\}) = 1, n(\{1\}) = 1 \text{이므로}$$

$$n(\{0\}) = n(\{1\})$$

$$\text{③ } n(\{0, 1, 2\}) = 3$$

$$\text{④ } n(\{x \mid x \text{는 } 16 \text{의 양의 약수}\})$$

$$= n(\{1, 2, 4, 8, 16\}) = 5$$

$$\text{⑤ } n(\{x \mid 0 < x < 100, x \text{는 } 5 \text{의 배수}\})$$

$$= n(\{5, 10, 15, 20, \dots, 95\}) = 19$$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

369 ㉓ 10

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \text{이므로 } n(A) = 8$$

이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-1)^2 - 4 = -3 < 0$$

따라서 이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 을 만족시키는 실수

x 는 존재하지 않으므로 $n(B) = 0$

$$\text{이때 } n(C) = 2 \text{이므로}$$

$$n(A) + n(B) + n(C) = 10$$

370 ㉓ 9

집합 A 의 원소 a 와 b 에 대하여

$a+b$ 의 값은 오른쪽 표와 같으므로

$$B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\therefore n(B) = 5$$

ab 의 값은 오른쪽 표와 같으

$$\text{므로}$$

$$C = \{0, 1, 2, 4\}$$

$$\therefore n(C) = 4$$

$$\therefore n(B) + n(C) = 9$$

$a \setminus b$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

$a \setminus b$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4

개념 확인

167쪽

371 ㉓ (1) $\not\subset$, $\subset$ (2) $\subset$, $\not\subset$

$$(1) A = \{3, 6, 9, 12, \dots\}, B = \{6, 12, 18, 24, \dots\}$$

이므로

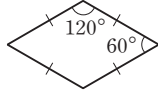
$$A \not\subset B, B \subset A$$

(2) 모든 정사각형은 마름모이므로 $A \subset B$

오른쪽 그림과 같은 마름모는

정사각형이 아니므로

$B \not\subset A$



372 ㉠ (1) = (2) ≠

(1) $B = \{1, 3, 5\}$ 이므로 $A = B$

(2) $B = \{1, 3, 7, 21\}$ 이므로 $A \neq B$

373 ㉠ ㄱ, ㄴ

ㄱ. $A \subset B$, $A \neq B$ 이므로 A 는 B 의 진부분집합이다.

ㄴ. $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로

$A \not\subset B$

따라서 A 는 B 의 진부분집합이 아니다.

ㄷ. $B = \{2, 3, 4\}$ 이므로 $A \subset B$, $A \neq B$

따라서 A 는 B 의 진부분집합이다.

따라서 보기에서 A 가 B 의 진부분집합인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

유제

169쪽

374 ㉠ ③

① $\emptyset$ 는 집합 A 의 원소가 아니므로 $\emptyset \notin A$

② c 는 집합 A 의 원소가 아니므로 $c \notin A$

③ a, b 는 집합 A 의 원소이므로 $\{a, b\} \subset A$

④ $\{b, c\}$ 는 집합 A 의 원소이므로 $\{b, c\} \in A$

⑤ $a, b, \{a\}$ 는 집합 A 의 원소이므로

$\{a, b, \{a\}\} \subset A$

따라서 옳은 것은 ③이다.

375 ㉠ (1) 2 (2) -1

(1) $A \subset B$ 이면 $-1 \in A$ 에서 $-1 \in B$ 이므로

$$a^2 - a - 3 = -1, a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a+1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

따라서 양수 a 의 값은 2이다.

(2) $A = B$ 이면 $4 \in B$ 에서 $4 \in A$ 이므로

$$a^2 - 3a = 4, a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$(a+1)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 4$$

(i) $a = -1$ 일 때

$$A = \{-2, 4, 8\}, B = \{-2, 4, 8\}$$

$$\therefore A = B$$

(ii) $a = 4$ 일 때

$$A = \{-2, 4, 8\}, B = \{3, 4, 8\}$$

$$\therefore A \neq B$$

(i), (ii)에서 $a = -1$

376 ㉠ ④

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

① $\emptyset$ 는 집합 A 의 부분집합이므로 $\emptyset \subset A$

② 3, 4는 집합 A 의 원소이므로 $\{3, 4\} \subset A$

③ 10은 집합 A 의 원소가 아니므로 $10 \notin A$

④ 1, 6, 12는 집합 A 의 원소이므로 $\{1, 6, 12\} \subset A$

⑤ 5는 집합 A 의 원소가 아니므로 $\{2, 5, 12\} \not\subset A$

따라서 옳은 것은 ④이다.

377 ㉠ 6

$$x^2 - 5x - 6 \leq 0 \text{에서 } (x+1)(x-6) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 6$$

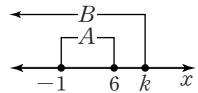
$A \subset B$ 가 성립하도록 두 집합

A, B 를 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로

$$k \geq 6$$

따라서 상수 k 의 최솟값은 6이다.



개념 확인

171쪽

378 ㉠ (1) 32 (2) 31

$$(1) 2^5 = 32$$

$$(2) 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$$

379 ㉠ (1) 4 (2) 8 (3) 4

$$(1) 2^{4-2} = 2^2 = 4$$

$$(2) 2^{4-1} = 2^3 = 8$$

$$(3) 2^{4-1-1} = 2^2 = 4$$

유제

173쪽

380 ㉠ (1) 32 (2) 24

$$(1) A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

3의 배수는 3, 6, 9의 3개이고 5의 배수는 5의 1개

이므로 구하는 부분집합의 개수는

$$2^{9-3-1} = 2^5 = 32$$

(2) 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$

집합 A 의 부분집합 중에서 짝수 2, 4를 원소로 갖

지 않는 부분집합의 개수는 $2^{5-2} = 2^3 = 8$

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$$32-8=24$$

381 ㉠ 8

$(x-2)(x-4)=0$ 에서 $x=2$ 또는 $x=4$

$$\therefore A=\{2, 4\}$$

이때 $B=\{1, 2, 4, 8, 16\}$ 이고 집합 X 의 개수는 집합 B 의 부분집합 중에서 2, 4를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{5-2}=2^3=8$$

382 ㉠ 16

부분집합 X 의 개수는 집합 A 의 부분집합 중에서 a, c 는 반드시 원소로 갖고 g 는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{7-2-1}=2^4=16$$

383 ㉠ 6

집합 X 의 개수는 집합 B 의 부분집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{n-2}$$

$$\text{즉, } 2^{n-2}=16 \text{이므로 } 2^{n-2}=2^4$$

$$n-2=4 \quad \therefore n=6$$

연습문제

174~176쪽

384 ㉠ ②

ㄱ, ㄴ, ㄷ. ‘높은’, ‘멋있는’, ‘가까운’은 기준이 명확하지 않아 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

ㄴ. 우리 학교 1학년 학생의 모임은 대상을 분명하게 정할 수 있으므로 집합이다.

ㄷ. 원소가 4, 5, 6, 7, ...인 집합이다.

따라서 보기에서 집합인 것은 ㄴ, ㄷ의 2개이다.

385 ㉠ ⑤

집합 A 는 2와 3만을 반드시 소인수로 갖는 자연수의 집합이다.

$$\textcircled{1} 6=2 \times 3 \text{이므로 } 6 \in A$$

$$\textcircled{2} 12=2^2 \times 3 \text{이므로 } 12 \in A$$

$$\textcircled{3} 16=2^4 \text{이므로 } 16 \notin A$$

$$\textcircled{4} 28=2^2 \times 7 \text{이므로 } 28 \notin A$$

$$\textcircled{5} 30=2 \times 3 \times 5 \text{이므로 } 30 \notin A$$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

386 ㉠ 11

$$X=\{4, 8, 12, 16\} \text{이므로 } n(X)=4 \quad \text{.....} \textcircled{1}$$

$$2x^3-5x^2-3x=0 \text{에서 } x(2x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

이때 x 는 정수이므로

$$Y=\{0, 3\} \quad \therefore n(Y)=2 \quad \text{.....} \textcircled{2}$$

$$Z=\{3, 5, 7, 11, 13\} \text{이므로 } n(Z)=5 \quad \text{.....} \textcircled{3}$$

$$\therefore n(X)+n(Y)+n(Z)=11 \quad \text{.....} \textcircled{4}$$

단계	채점 기준	비율
①	$n(X)$ 구하기	30 %
②	$n(Y)$ 구하기	30 %
③	$n(Z)$ 구하기	30 %
④	$n(X)+n(Y)+n(Z)$ 의 값 구하기	10 %

387 ㉠ ⑤

①, ② $\emptyset, \{\emptyset\}$ 은 집합 A 의 원소이므로 $\{\emptyset\} \subset A$,
 $\{\emptyset\} \in A$

③ 0은 집합 A 의 원소가 아니므로 $0 \notin A$

④ -1은 집합 A 의 원소이므로 $\{-1\} \subset A$

⑤ -1, $\{-1, 0\}$ 은 집합 A 의 원소이므로
 $\{-1, \{-1, 0\}\} \subset A$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

388 ㉠ 5

$$(x-5)(x-a)=0 \text{에서 } x=5 \text{ 또는 } x=a$$

$$A \subset B \text{이려면 } a=-3 \text{ 또는 } a=5$$

따라서 양수 a 의 값은 5이다.

389 ㉠ 3

$$A \subset B \text{이고 } B \subset A \text{이면 } A=B$$

$$A=B \text{이면 } 1 \in A \text{에서 } 1 \in B \text{이므로}$$

$$3a+2b=1 \quad \text{.....} \textcircled{1}$$

$$\text{또 } -4 \in B \text{에서 } -4 \in A \text{이므로}$$

$$2a-b=-4 \quad \text{.....} \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=-1, b=2$$

$$\therefore b-a=3$$

390 ㉠ ③

$$A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

따라서 집합 A 의 부분집합 중에서 0은 반드시 원소로 갖고 홀수 1, 3, 5는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 $2^{7-1-3}=2^3=8$

391 ㉡ 15

집합 X 의 개수는 집합 B 의 부분집합 중에서 a, c 를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{6-2}=2^4=16$$

이때 $X \neq B$ 이라면 집합 B 는 제외해야 하므로 구하는 집합 X 의 개수는

$$16-1=15$$

392 ㉡ -1

집합 A 의 원소 a 와 집합 B 의 원소 b 에 대하여 $\frac{b}{a}$ 의 값은 오른쪽

$a \backslash b$	1	3
-1	-1	-3
1	1	3

표와 같으므로

$$A \otimes B = \{-3, -1, 1, 3\} \quad \text{▶▶▶▶▶ ①}$$

집합 B 의 원소 b 와 집합 $A \otimes B$ 의 원소 c 에

$b \backslash c$	-3	-1	1	3
1	-3	-1	1	3
3	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

대하여 $\frac{c}{b}$ 의 값은 오른쪽 표와 같으므로

$$B \otimes (A \otimes B) = \left\{-3, -1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 3\right\} \quad \text{▶▶▶▶▶ ②}$$

따라서 집합 $B \otimes (A \otimes B)$ 의 모든 원소의 곱은

$$-3 \times (-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} \times 1 \times 3 = -1 \quad \text{▶▶▶▶▶ ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	집합 $A \otimes B$ 구하기	40%
②	집합 $B \otimes (A \otimes B)$ 구하기	40%
③	집합 $B \otimes (A \otimes B)$ 의 모든 원소의 곱 구하기	20%

393 ㉡ 12

$|x| + |y| = 3$ 을 만족시키는 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는

(i) $|x| = 0, |y| = 3$ 일 때

$$x = 0, y = \pm 3 \text{이므로}$$

$$(0, 3), (0, -3)$$

(ii) $|x| = 1, |y| = 2$ 일 때

$$x = \pm 1, y = \pm 2 \text{이므로}$$

$$(-1, -2), (-1, 2), (1, -2), (1, 2)$$

(iii) $|x| = 2, |y| = 1$ 일 때

$$x = \pm 2, y = \pm 1 \text{이므로}$$

$$(-2, -1), (-2, 1), (2, -1), (2, 1)$$

(iv) $|x| = 3, |y| = 0$ 일 때

$$x = \pm 3, y = 0 \text{이므로}$$

$$(3, 0), (-3, 0)$$

(i)~(iv)에서 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$2 + 4 + 4 + 2 = 12$$

$$\therefore n(X) = 12$$

394 ㉡ 15

$n(A) = 0$ 이라면 집합 A 는 공집합이어야 하므로

$k \leq x < 10$ 인 5의 배수 x 가 존재하지 않아야 한다.

$$\therefore 5 < k < 10$$

따라서 자연수 k 의 최댓값은 9, 최솟값은 6이므로 그 합은

$$9 + 6 = 15$$

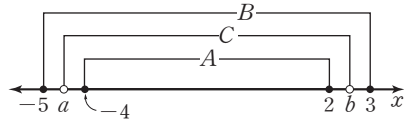
395 ㉡ ②

$$x^2 + 2x - 8 \leq 0 \text{에서 } (x+4)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq x \leq 2$$

$$\therefore A = \{x \mid -4 \leq x \leq 2\}$$

따라서 $A \subset C \subset B$ 이도록 세 집합 A, B, C 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore -5 \leq a < -4, 2 < b \leq 3$$

이때 a, b 는 정수이므로

$$a = -5, b = 3$$

$$\therefore ab = -15$$

396 ㉡ 48

$$\sqrt{25} = 5 \text{이므로 } A_{25} = \{1, 3, 5\}$$

$$A_n \subset A_{25} \text{이라면 } 1 \leq \sqrt{n} < 7 \text{이어야 하므로}$$

$$1 \leq n < 49$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 48이다.

397 ㉡ 24

$$x^2 - 6x \leq 0 \text{에서 } x(x-6) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq x \leq 6$$

$$\therefore A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

이때 홀수인 원소가 2개인 부분집합은 원소 1, 3, 5 중에서 1, 3 또는 1, 5 또는 3, 5만을 원소로 가져야 한다.

(i) 1, 3은 반드시 원소로 갖고 5는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-2-1}=2^3=8$$

(ii) 1, 5는 반드시 원소로 갖고 3은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-2-1}=2^3=8$$

(iii) 3, 5는 반드시 원소로 갖고 1은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-2-1}=2^3=8$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 부분집합의 개수는

$$8+8+8=24$$

398 ㉔ ④

$$B=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

따라서 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중에서 2, 6, 8을 반드시 원소로 갖고 나머지 원소 1, 3, 4, 12, 24 중에서 2개 이상을 원소로 갖는 집합이다.

즉, 집합 X 의 개수는 집합 $\{1, 3, 4, 12, 24\}$ 의 부분집합의 개수에서 원소가 하나도 없거나 원소의 개수가 1인 부분집합의 개수를 뺀 것과 같다.

이때 원소가 하나도 없는 부분집합은 공집합의 1개이고 원소의 개수가 1인 집합은 $\{1\}, \{3\}, \{4\}, \{12\}, \{24\}$ 의 5개이므로 구하는 집합 X 의 개수는

$$2^5-1-5=26$$

399 ㉔ 9

| 접근 방법 | $n(X)=100$ 이 되려면 $x+y$ 의 값 중 중복된 수가 있어야 함을 이용한다.

집합 A 의 원소 x 와 집합 B 의 원소 y 에 대하여 $x+y$ 의 값은 오른쪽 표와 같으므로 $X=\{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, k+2, k+4, k+6\}$

이때 $n(X)=10$ 이 되려면 $k+2=11$ 또는 $k+2=12$

$$\therefore k=9 \text{ 또는 } k=10$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 9이다.

| 참고 | $k=1, 2, 7, 8$ 이면 $n(X)=9$

$k=3, 4, 5, 6$ 이면 $n(X)=8$

$k=9, 10$ 이면 $n(X)=10$

$k \geq 11$ 이면 $n(X)=11$

$x \setminus y$	2	4	6
3	5	7	9
4	6	8	10
5	7	9	11
6	8	10	12
k	$k+2$	$k+4$	$k+6$

400 ㉔ 4

| 접근 방법 | 집합 A 의 각 부분집합의 원소 중 가장 작은 원소를 기준으로 경우를 나누어 부분집합이 반드시 갖거나 갖지 않는 원소를 찾는다.

집합 A 의 공집합이 아닌 부분집합의 원소 중 가장 작은 원소는 $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$ 중 하나이다.

(i) 가장 작은 원소가 $\frac{1}{8}$ 인 집합은 $\frac{1}{8}$ 을 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로 그 개수는

$$2^{4-1}=2^3=8$$

(ii) 가장 작은 원소가 $\frac{1}{4}$ 인 집합은 $\frac{1}{4}$ 을 반드시 원소로 갖고 $\frac{1}{8}$ 은 원소로 갖지 않는 부분집합이므로

그 개수는

$$2^{4-1-1}=2^2=4$$

(iii) 가장 작은 원소가 $\frac{1}{2}$ 인 집합은 $\frac{1}{2}$ 을 반드시 원소로 갖고 $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ 은 원소로 갖지 않는 부분집합이므로

그 개수는

$$2^{4-1-2}=2$$

(iv) 가장 작은 원소가 1인 부분집합은 $\{1\}$ 의 1개이다.

(i)~(iv)에서

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15}$$

$$=\frac{1}{8} \times 8 + \frac{1}{4} \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 + 1 \times 1$$

$$=1+1+1+1=4$$

401 ㉔ ④

| 접근 방법 | a 와 $\frac{81}{a}$ 이 모두 자연수이어야 하므로 a 가 81의 양의 약수이어야 함을 이용한다.

조건을 만족시키려면 집합 A 의 원소는 81의 양의 약수이어야 한다.

81의 양의 약수는

$$1, 3, 9, 27, 81$$

조건에서 1과 81, 3과 27은 각각 둘 중 하나가 집합 A 의 원소이면 나머지 하나도 집합 A 의 원소이다.

즉, 집합 A 의 원소가 될 수 있는 것은

$$1, 81 \text{ 또는 } 3, 27 \text{ 또는 } 9$$

따라서 구하는 집합 A 의 개수는 집합 $\{1, 3, 9\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^3-1=8-1=7$$

01 집합의 연산

개념 확인

181쪽

402 ㉠ (1) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$

$A \cap B = \{c\}$

(2) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}$

$A \cap B = \{3, 6\}$

(3) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 10\}$

$A \cap B = \{1, 2, 5\}$

(3) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 5, 10\}$

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 10\},$

$A \cap B = \{1, 2, 5\}$

403 ㉠ (1) 서로소가 아니다. (2) 서로소이다.

(1) $A = \{1, 2, 4, 8\}, B = \{1, 7\}$

$A \cap B = \{1\} \neq \emptyset$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.

(2) $x^2 + 3x + 2 = 0$ 에서 $(x+2)(x+1) = 0$

$\therefore x = -2$ 또는 $x = -1$

$\therefore A = \{-2, -1\}$

$(x-1)^2 = 0$ 에서 $x = 1$

$\therefore B = \{1\}$

따라서 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소이다.

404 ㉠ (1) $\{1, 3, 5, 7\}$ (2) $\{3, 4, 5\}$

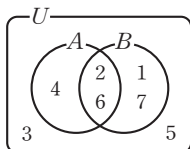
(3) $\{4\}$

(4) $\{1, 7\}$

(5) $\{3, 5\}$

(6) $\{1, 3, 4, 5, 7\}$

전체집합 U 와 두 집합 A, B 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



(1) $A^c = \{1, 3, 5, 7\}$

(2) $B^c = \{3, 4, 5\}$

(3) $A - B = \{4\}$

(4) $B - A = \{1, 7\}$

(5) $(A \cup B)^c = \{3, 5\}$

(6) $(A \cap B)^c = \{1, 3, 4, 5, 7\}$

405 ㉠ ㄴ, ㄷ

ㄴ. $A \cup A^c = U$

ㄷ. $(A^c)^c \cup U = A \cup U = U$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

유제

183~189쪽

406 ㉠ (1) $\{1, 5, 15\}$

(2) $\{1, 2, 5, 10, 15\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$

$B = \{5, 10, 15, 20\}$

$C = \{1, 2, 5, 10\}$

(1) $B \cup C = \{1, 2, 5, 10, 15, 20\}$

$\therefore A \cap (B \cup C) = \{1, 5, 15\}$

(2) $A \cap B = \{5, 15\}$

$\therefore (A \cap B) \cup C = \{1, 2, 5, 10, 15\}$

407 ㉠ ⑤

② $\{2, 3, 4\}$

③ $\{2, 3, 5\}$

④ $\{4, 8\}$

⑤ $x^2 - 2x - 3 < 0$ 에서 $(x+1)(x-3) < 0$

$\therefore -1 < x < 3$

이때 자연수 x 는 1, 2이므로 주어진 집합은

$\{1, 2\}$

따라서 집합 $\{3, 4, 5\}$ 와 서로소인 집합은 ⑤이다.

408 ㉠ 8

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 18\}$

$A \cap B = \{2, 6\}$

$\therefore n(A \cup B) - n(A \cap B) = 10 - 2 = 8$

409 ㉠ 16

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, B = \{1, 2, 4, 8\}$

구하는 집합의 개수는 집합 A 의 부분집합 중에서 1,

2, 4를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$2^{7-3} = 2^4 = 16$

410 ㉠ (1) $\{1\}$

(2) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(3) $\{2, 4, 6, 8\}$ (4) $\{6\}$

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, A = \{2, 4, 6, 8\},$

$B = \{1, 2, 4, 8\}$ 이므로

$A^c = \{1, 3, 5, 7\}, B^c = \{3, 5, 6, 7\}$

(1) $A^c \cap B = \{1\}$

(2) $A \cup B^c = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(3) $U - A^c = \{2, 4, 6, 8\}$

(4) $B^c - A^c = \{6\}$

|다른 풀이| 여집합과 차집합의 성질 이용

$$\begin{aligned}(3) U - A^C &= U \cap (A^C)^C \\ &= U \cap A = A \\ &= \{2, 4, 6, 8\}\end{aligned}$$

411 ㉮ 13

$A = \{6, 12\}$ 이므로

$$A^C = \{1, 3, 9\}$$

따라서 집합 A^C 의 모든 원소의 합은

$$1 + 3 + 9 = 13$$

412 ㉮ 2

$A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ 이므로

$$B - A = \{12, 20\}$$

$$\therefore n(B - A) = 2$$

413 ㉮ {3, 4, 5, 9, 10, 11}

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{1, 4, 7, 10\}$ 이므로

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11\}$$

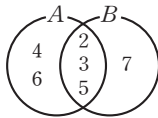
$$A \cap B = \{1, 7\}$$

$$\therefore (A \cup B) - (A \cap B) = \{3, 4, 5, 9, 10, 11\}$$

414 ㉮ {2, 3, 5, 7}

주어진 조건을 만족시키는 두 집합 A, B 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore B = \{2, 3, 5, 7\}$$



415 ㉮ 1

$A \cap B = \{-3, 0\}$ 에서 $-3 \in B$ 이므로

$$a^2 - 4a = -3$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$(a-1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 3$$

(i) $a = 1$ 일 때

$$A = \{-3, -2, 0\}, B = \{-3, 0, 1\}$$

$$\therefore A \cap B = \{-3, 0\}$$

(ii) $a = 3$ 일 때

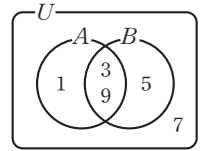
$$A = \{-2, -1, 0\}, B = \{-3, 0, 1\}$$

이때 $A \cap B = \{0\}$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a = 1$

416 ㉮ {3, 5, 9}

주어진 조건을 만족시키는 두 집합 A, B 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$$\therefore B = \{3, 5, 9\}$$

417 ㉮ 2

$B - A = \{4\}$ 에서 $6 \in A$ 이므로

$$a^2 + a = 6, a^2 + a - 6 = 0$$

$$(a+3)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 2$$

(i) $a = -3$ 일 때

$$A = \{1, 3, 6\}, B = \{-4, 4, 6\}$$

이때 $B - A = \{-4, 4\}$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = 2$ 일 때

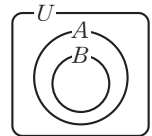
$$A = \{1, 3, 6\}, B = \{1, 4, 6\}$$

$$\therefore B - A = \{4\}$$

(i), (ii)에서 $a = 2$

418 ㉮ $\neg, \subset$

$A \cup B = A$ 이면 $B \subset A$ 이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$$\therefore A \cap B = B$$

$$\therefore A^C \subset B^C$$

$$\therefore A \cup B = A \text{ 이므로}$$

$$(A \cup B) - B = A - B$$

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 $\neg, \subset$ 이다.

419 ㉮ 4

$$A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$B \cap X = X \text{ 에서 } X \subset B$$

$$(B - A) \cup X = X \text{ 에서}$$

$$(B - A) \subset X$$

$$\therefore (B - A) \subset X \subset B$$

이때 $B - A = \{5, 7\}$ 이므로

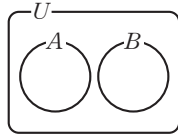
$$\{5, 7\} \subset X \subset \{2, 3, 5, 7\}$$

따라서 집합 X 는 집합 B 의 부분집합 중에서 5, 7을 반드시 원소로 갖는 부분집합이므로 구하는 집합 X 의 개수는

$$2^{4-2} = 2^2 = 4$$

420 ㉡ ㄱ, ㄴ, ㄷ

두 집합 A, B 가 서로소이면 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $A - B = A$

ㄴ. $B \cap A^c = B - A = B$

ㄷ. $A \subset B^c$

ㄹ. $A^c \cup B^c = U$

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

421 ㉡ 16

$A - X = \emptyset$ 에서 $A \subset X$

$B \cap X^c = B$ 에서

$B - X = B$

$\therefore B \cap X = \emptyset$

따라서 집합 X 는 집합 U 의 부분집합 중에서 1, 2, 3은 반드시 원소로 갖고 5, 8은 원소로 갖지 않는 부분집합이므로 구하는 집합 X 의 개수는

$2^{9-3-2} = 2^4 = 16$

개념 확인

191쪽

422 ㉡ (1) {1, 2, 3} (2) {1, 2, 3}

(1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 5\}$ 이므로

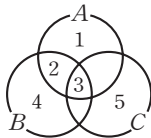
$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3\}$

(2) $B \cap C = \{3\}$ 이므로

$A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3\}$

|참고| (1), (2)의 집합이 서로 같음을 알 수 있다.

• 주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



423 ㉡ (1) {7} (2) {7}

(1) $A \cup B = \{1, 3, 5, 9\}$ 이므로

$(A \cup B)^c = \{7\}$

(2) $A^c = \{7, 9\}$, $B^c = \{5, 7\}$ 이므로

$A^c \cap B^c = \{7\}$

|참고| (1), (2)의 집합이 서로 같음을 알 수 있다.

유제

193~195쪽

424 ㉡ (1) $A \cap B$ (2) A

(1) $A \cap (A - B)^c$

$= A \cap (A \cap B^c)^c$

$= A \cap (A^c \cup B)$

◀ 드모르간 법칙

$= (A \cap A^c) \cup (A \cap B)$

◀ 분배법칙

$= \emptyset \cup (A \cap B)$

$= A \cap B$

(2) $(A - B) \cup (A - B^c)$

$= (A \cap B^c) \cup \{A \cap (B^c)^c\}$

$= (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$

$= A \cap (B^c \cup B)$

◀ 분배법칙

$= A \cap U$

$= A$

425 ㉡ ③

$\{(A \cap B) \cup (B - A)\} \cap A$

$= \{(A \cap B) \cup (B \cap A^c)\} \cap A$

$= \{(A \cap B) \cup (A^c \cap B)\} \cap A$

$= \{(A \cup A^c) \cap B\} \cap A$

$= (U \cap B) \cap A$

$= B \cap A = A \cap B$

즉, $A \cap B = A$ 이므로 $A \subset B$

따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

426 ㉡ ②

$(A \cup B) - (A^c \cap B) = (A \cup B) \cap (A^c \cap B)^c$

$= (A \cup B) \cap (A \cup B^c)$

$= A \cup (B \cap B^c)$

$= A \cup \emptyset$

$= A$

따라서 주어진 식과 항상 같은 집합은 ②이다.

427 ㉡ ㄱ, ㄷ

$\{(A \cup B) \cap (A^c \cup B)\} \cap A^c$

$= \{(A \cap A^c) \cup B\} \cap A^c$

$= (\emptyset \cup B) \cap A^c$

$= B \cap A^c = B - A$

즉, $B - A = \emptyset$ 이므로 $B \subset A$

ㄴ. $A \cap B = B$

ㄷ. $A \cup B^c = U$

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

428 □ 1

$$\begin{aligned}\neg. A^c \diamond B^c &= (A^c \cup B^c) - (A^c \cap B^c) \\ &= (A^c \cup B^c) \cap (A^c \cap B^c)^c \\ &= (A^c \cup B^c) \cap (A \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= A \diamond B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg. B \diamond U &= (B \cup U) - (B \cap U) \\ &= U - B \\ &= B^c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg. A^c \diamond U &= (A^c \cup U) - (A^c \cap U) \\ &= U - A^c \\ &= A\end{aligned}$$

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 1이다.

429 □ (1) 40 (2) 12

(1) $A_8 \cap A_{10}$ 은 8과 10의 공배수, 즉 40의 배수의 집합이므로

$$A_8 \cap A_{10} = A_{40}$$

즉, $A_n \subset A_{40}$ 에서 n 은 40의 배수이므로 자연수 n 의 최솟값은 40이다.

(2) $A_6 \cap (A_8 \cup A_{12}) = (A_6 \cap A_8) \cup (A_6 \cap A_{12})$

$A_6 \cap A_8$ 은 6과 8의 공배수, 즉 24의 배수의 집합이므로

$$A_6 \cap A_8 = A_{24}$$

12는 6의 배수이므로 $A_{12} \subset A_6$

$$\therefore A_6 \cap A_{12} = A_{12}$$

이때 24는 12의 배수이므로 $A_{24} \subset A_{12}$

따라서 $A_6 \cap (A_8 \cup A_{12}) = A_{24} \cup A_{12} = A_{12}$ 이므로 $n=12$

430 □ ③

$$\begin{aligned}A \odot B &= (A - B) \cup (B - A^c) \\ &= (A \cap B^c) \cup \{B \cap (A^c)^c\} \\ &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A) \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap (B^c \cup B) \\ &= A \cap U \\ &= A\end{aligned}$$

$$\therefore A^c \odot (B \odot A) = A^c \odot B = A^c$$

431 □ 3

$$(A_4 \cup A_{10}) \cap A_{16} = (A_4 \cap A_{16}) \cup (A_{10} \cap A_{16})$$

16은 4의 배수이므로 $A_{16} \subset A_4$

$$\therefore A_4 \cap A_{16} = A_{16}$$

$A_{10} \cap A_{16}$ 은 10과 16의 공배수, 즉 80의 배수의 집합이므로

$$A_{10} \cap A_{16} = A_{80}$$

이때 80은 16의 배수이므로 $A_{80} \subset A_{16}$

$$\therefore (A_4 \cup A_{10}) \cap A_{16} = A_{16} \cup A_{80} = A_{16}$$

전체집합 U 에서 16의 배수는 16, 32, 48이므로 구하는 원소의 개수는 3이다.

개념 확인

197쪽

432 □ (1) 12 (2) 4 (3) 7

$$\begin{aligned}(1) n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 8 + 6 - 2 = 12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{이므로} \\ n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 9 + 5 - 10 = 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{이므로} \\ n(B) &= n(A \cup B) - n(A) + n(A \cap B) \\ &= 11 - 5 + 1 = 7\end{aligned}$$

433 □ 24

$$\begin{aligned}n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) \\ &\quad - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \\ &= 10 + 12 + 15 - 7 - 4 - 5 + 3 \\ &= 24\end{aligned}$$

434 □ (1) 20 (2) 5

$$\begin{aligned}(1) n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) \\ &= 30 - 10 = 20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) n(B - A) &= n(B) - n(A \cap B) \\ &= 15 - 10 = 5\end{aligned}$$

435 □ (1) 22 (2) 20 (3) 10 (4) 32

$$\begin{aligned}(1) n(A^c) &= n(U) - n(A) \\ &= 40 - 18 = 22\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) n(B^c) &= n(U) - n(B) \\ &= 40 - 20 = 20\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad n(A^c \cap B^c) &= n((A \cup B)^c) \\
 &= n(U) - n(A \cup B) \\
 &= 40 - 30 = 10 \\
 (4) \quad n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\
 &= 18 + 20 - 30 = 8 \\
 \therefore n((A \cap B)^c) &= n(U) - n(A \cap B) \\
 &= 40 - 8 = 32
 \end{aligned}$$

유제

199-203쪽

436 ㉮ 31

$$\begin{aligned}
 A^c \cup B^c &= (A \cap B)^c \text{이므로} \\
 n((A \cap B)^c) &= 42 \\
 n((A \cap B)^c) &= n(U) - n(A \cap B) \text{이므로} \\
 n(A \cap B) &= n(U) - n((A \cap B)^c) \\
 &= 60 - 42 = 18 \\
 \therefore n(B) &= n(A \cup B) - n(A) + n(A \cap B) \\
 &= 50 - 37 + 18 = 31
 \end{aligned}$$

437 ㉮ 25

$$\begin{aligned}
 n(A - B) &= n(A \cup B) - n(B) \text{이므로} \\
 n(A \cup B) &= n(A - B) + n(B) \\
 &= 6 + 15 = 21 \\
 \therefore n(B - A) &= n(A \cup B) - n(A) \\
 &= 21 - 16 = 5 \\
 \therefore n((B - A)^c) &= n(U) - n(B - A) \\
 &= 30 - 5 = 25
 \end{aligned}$$

438 ㉮ 23

$$\begin{aligned}
 A^c \cap B^c &= (A \cup B)^c \text{이므로} \\
 n((A \cup B)^c) &= 25 \\
 n((A \cup B)^c) &= n(U) - n(A \cup B) \text{이므로} \\
 n(A \cup B) &= n(U) - n((A \cup B)^c) \\
 &= 40 - 25 = 15 \\
 \therefore n(A) + n(B) &= n(A \cup B) + n(A \cap B) \\
 &= 15 + 8 = 23
 \end{aligned}$$

439 ㉮ 9

$$\begin{aligned}
 A \cap C &= \emptyset \text{에서} \\
 A \cap B \cap C &= (A \cap C) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset \\
 \therefore n(A \cap C) &= 0, n(A \cap B \cap C) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\
 &= 5 + 6 - 7 = 4 \\
 n(B \cap C) &= n(B) + n(C) - n(B \cup C) \\
 &= 6 + 3 - 8 = 1 \\
 \therefore n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) \\
 &\quad - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\
 &= 5 + 6 + 3 - 4 - 1 - 0 + 0 = 9
 \end{aligned}$$

440 ㉮ 3

전체 학생의 집합을 U , 박물관에 가 본 학생의 집합을 A , 미술관에 가 본 학생의 집합을 B 라 하면

$$\begin{aligned}
 n(U) &= 35, n(A) = 15, n(B) = 13 \\
 \text{박물관과 미술관에 모두 가 보지 못한 학생의 집합은} \\
 A^c \cap B^c &= (A \cup B)^c \text{이므로} \\
 n((A \cup B)^c) &= 10 \\
 n((A \cup B)^c) &= n(U) - n(A \cup B) \text{이므로} \\
 n(A \cup B) &= n(U) - n((A \cup B)^c) \\
 &= 35 - 10 = 25
 \end{aligned}$$

박물관과 미술관에 모두 가 본 학생의 집합은 $A \cap B$ 이므로

$$\begin{aligned}
 n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\
 &= 15 + 13 - 25 = 3
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 학생 수는 3이다.

441 ㉮ 21

전체 학생의 집합을 U 라 하면

$$\begin{aligned}
 n(U) &= 40 \\
 \text{여동생이 있는 학생의 집합을 } A, \text{ 남동생이 있는 학생} \\
 \text{의 집합을 } B \text{라 하면 여동생만 있는 학생의 집합은} \\
 A - B \text{이므로} \\
 n(A - B) &= 14 \\
 \text{동생이 없는 학생의 집합은 } A^c \cap B^c &= (A \cup B)^c \text{이} \\
 \text{므로} \\
 n((A \cup B)^c) &= 5 \\
 n((A \cup B)^c) &= n(U) - n(A \cup B) \text{이므로} \\
 n(A \cup B) &= n(U) - n((A \cup B)^c) \\
 &= 40 - 5 = 35 \\
 n(A - B) &= n(A \cup B) - n(B) \text{이므로} \\
 n(B) &= n(A \cup B) - n(A - B) \\
 &= 35 - 14 = 21
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 학생 수는 21이다.

442 12

전체 회원의 집합을 U , 책 A를 읽은 회원의 집합을 A , 책 B를 읽은 회원의 집합을 B 라 하면

$$n(U)=20, n(A)=12, n(B)=16$$

모두 한 권 이상의 책을 읽었으므로

$$A \cup B = U$$

$$\therefore n(A \cup B) = n(U) = 20$$

$$\begin{aligned} \therefore n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 12 + 16 - 20 = 8 \end{aligned}$$

두 책 중 한 권만 읽은 회원의 집합은

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

이때 $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ 이므로

$$\begin{aligned} n((A \cup B) - (A \cap B)) &= n(A \cup B) - n(A \cap B) \\ &= 20 - 8 = 12 \end{aligned}$$

따라서 구하는 회원 수는 12이다.

443 29

전체 학생의 집합을 U , 동아리 A에 가입한 학생의 집합을 A , 동아리 B에 가입한 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U)=56, n(A)=35, n(B)=27$$

(가)에서 $A \cup B = U$ 이므로

$$n(A \cup B) = n(U) = 56$$

동아리 A에만 가입한 학생의 집합은 $A - B$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A - B) &= n(A \cup B) - n(B) \\ &= 56 - 27 = 29 \end{aligned}$$

따라서 구하는 학생 수는 29이다.

444 30

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 18 + 24 - n(A \cup B) \\ &= 42 - n(A \cup B) \end{aligned}$$

(i) $n(A \cap B)$ 가 최대인 경우는 $n(A \cup B)$ 가 최소일 때이다.

이때 $n(A) < n(B)$ 이므로 $A \subset B$

$$\therefore M = n(A) = 18$$

(ii) $n(A \cap B)$ 가 최소인 경우는 $n(A \cup B)$ 가 최대일 때이므로

$$A \cup B = U$$

$$\begin{aligned} \therefore m &= 42 - n(U) \\ &= 42 - 30 = 12 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $M + m = 30$

| 다른 풀이 |

$A \subset (A \cup B), B \subset (A \cup B)$ 이므로

$$n(A) \leq n(A \cup B), n(B) \leq n(A \cup B)$$

$$\therefore 24 \leq n(A \cup B) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$(A \cup B) \subset U$ 이므로 $n(A \cup B) \leq n(U)$

$$\therefore n(A \cup B) \leq 30 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서

$$24 \leq n(A \cup B) \leq 30$$

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 18 + 24 - n(A \cap B) \\ &= 42 - n(A \cap B) \end{aligned}$$

즉, $24 \leq 42 - n(A \cap B) \leq 30$ 이므로

$$12 \leq n(A \cap B) \leq 18$$

따라서 $M = 18, m = 12$ 이므로

$$M + m = 30$$

445 42

전체 학생의 집합을 U , 버스를 이용하는 학생의 집합을 A , 지하철을 이용하는 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U)=50, n(A)=34, n(B)=29$$

버스와 지하철을 모두 이용하는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이고

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 34 + 29 - n(A \cup B) \\ &= 63 - n(A \cup B) \end{aligned}$$

(i) $n(A \cap B)$ 가 최대인 경우는 $n(A \cup B)$ 가 최소일 때이다.

이때 $n(B) < n(A)$ 이므로 $B \subset A$

따라서 $n(A \cap B)$ 의 최댓값은

$$n(B) = 29$$

(ii) $n(A \cap B)$ 가 최소인 경우는 $n(A \cup B)$ 가 최대일 때이므로

$$A \cup B = U$$

따라서 $n(A \cap B)$ 의 최솟값은

$$63 - n(U) = 63 - 50 = 13$$

(i), (ii)에서 최댓값과 최솟값의 합은

$$29 + 13 = 42$$

446 8

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 20 + 25 - n(A \cap B) \\ &= 45 - n(A \cap B) \end{aligned}$$

- (i) $n(A \cup B)$ 가 최대인 경우는 $n(A \cap B)$ 가 최소일 때이므로
 $n(A \cap B) = 12$
 $\therefore M = 45 - 12 = 33$
- (ii) $n(A \cup B)$ 가 최소인 경우는 $n(A \cap B)$ 가 최대일 때이다.
 이때 $n(A) < n(B)$ 이므로 $A \subset B$
 $\therefore n(A \cap B) = n(A) = 20$
 $\therefore m = 45 - 20 = 25$
- (i), (ii)에서 $M - m = 8$

447 ㉠ 8

전체 학생의 집합을 U , 양로원 A에 간 학생의 집합을 A , 양로원 B에 간 학생의 집합을 B 라 하면
 $n(U) = 25, n(A) = 13, n(B) = 17$
 양로원 B에만 간 학생의 집합은 $B - A$ 이고
 $n(B - A) = n(A \cup B) - n(A)$
 $= n(A \cup B) - 13$

- (i) $n(B - A)$ 가 최대인 경우는 $n(A \cup B)$ 가 최대일 때이므로
 $A \cup B = U$
 $\therefore M = n(U) - 13 = 25 - 13 = 12$
- (ii) $n(B - A)$ 가 최소인 경우는 $n(A \cup B)$ 가 최소일 때이다.
 이때 $n(A) < n(B)$ 이므로 $A \subset B$
 $\therefore n(A \cup B) = n(B) = 17$
 $\therefore m = n(B) - 13 = 17 - 13 = 4$
- (i), (ii)에서 $M - m = 8$

연습문제

204-206쪽

448 ㉠ ③

$U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 12\}, A = \{2, 4, 6, 8\},$
 $B = \{2, 5, 8, 11\}, C = \{4, 8, 12\}$

③ $C - A = \{12\}$

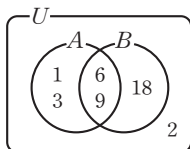
따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

449 ㉠ {1, 3, 6, 9}

$U = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

주어진 조건을 만족시키는 두 집합 A, B 를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore A = \{1, 3, 6, 9\}$



450 ㉠ 42

$A - B = \{3\}$ 에서

$5 \in B, 8 \in A$

$\therefore -a + 2b = 5, 2a - b = 8$

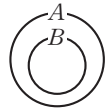
두 식을 연립하여 풀면

$a = 7, b = 6$

$\therefore ab = 42$

451 ㉠ ⑤

$A \cap B = B$ 이면 $B \subset A$ 이므로 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



② $A \cup B = A$

③ $(A \cup B) \subset A$

④ $B \subset (A \cap B)$

⑤ $A \cup (A \cap B) = A \cup B = A$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

452 ㉠ ㄴ, ㄷ

$$\begin{aligned} \neg. A \cap (A^c \cup B) &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } (A \cap B) \cup (A^c \cap B) &= (A \cup A^c) \cap B \\ &= U \cap B = B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } (A - B) \cup (A \cap B) &= (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap (B^c \cup B) \\ &= A \cap U = A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄹ. } (A - B) \cup (A - C) &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \\ &= A \cap (B^c \cup C^c) \\ &= A \cap (B \cap C)^c \\ &= A - (B \cap C) \end{aligned}$$

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

453 ㉠ ④

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap A^c &= (A \cap A^c) \cup (B \cap A^c) \\ &= \emptyset \cup (B - A) \\ &= B - A \end{aligned}$$

즉, $B - A = B$ 이므로 $A \cap B = \emptyset$

①, ② $A \subset B^c, B \subset A^c$

③ $A \cup B \neq U$

⑤ $A \cup B^c = B^c$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

454 ㉔ 8

$$\begin{aligned} A^c \cap B &= B \cap A^c = B - A \text{이므로} \\ n(A^c \cap B) &= n(B - A) \\ &= n(A \cup B) - n(A) \\ &= 43 - 35 = 8 \end{aligned}$$

455 ㉔ 24

전체 학생의 집합을 U , 여행지 A에 가 본 학생의 집합을 A, 여행지 B에 가 본 학생의 집합을 B라 하면 두 여행지 A, B에 모두 가 본 학생의 집합은 $A \cap B$ 이고, 모두 가 보지 못한 학생의 집합은 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이므로

$$\begin{aligned} n(U) &= 45, n(A) = 25, n(A \cap B) = 7, \\ n((A \cup B)^c) &= 3 \end{aligned} \quad \text{..... ①}$$

$$\begin{aligned} n((A \cup B)^c) &= n(U) - n(A \cup B) \text{이므로} \\ n(A \cup B) &= n(U) - n((A \cup B)^c) \\ &= 45 - 3 = 42 \end{aligned} \quad \text{..... ②}$$

$$\begin{aligned} \therefore n(B) &= n(A \cup B) - n(A) + n(A \cap B) \\ &= 42 - 25 + 7 = 24 \end{aligned}$$

따라서 구하는 학생 수는 24이다. ③

단계	채점 기준	비율
①	$n(U), n(A), n(A \cap B), n((A \cup B)^c)$ 구하기	40%
②	$n(A \cup B)$ 구하기	30%
③	조건을 만족시키는 학생 수 구하기	30%

456 ㉔ ⑤

$B - A = \{5, 6\}$ 이므로 집합 B의 모든 원소의 합이 12가 되려면

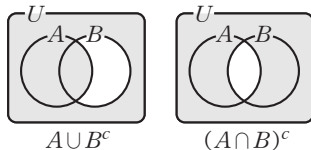
$$B = \{1, 5, 6\} \quad \therefore A - B = \{2, 3, 4\}$$

따라서 집합 $A - B$ 의 모든 원소의 합은

$$2 + 3 + 4 = 9$$

457 ㉔ ⑤

$A \cup B^c = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
 $(A \cap B)^c = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 두 집합 $A \cup B^c, (A \cap B)^c$ 를 각각 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



ㄱ. 벤 다이어그램에서

$$\begin{aligned} U &= (A \cup B^c) \cup (A \cap B)^c \\ &= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 13\} \end{aligned}$$

ㄴ. 벤 다이어그램에서

$$A \cap B = (A \cup B^c)^c - (A \cap B)^c = \{11, 13\}$$

ㄷ. ㄱ에서 $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 13\}$ 이므로 벤 다이어그램에서

$$\begin{aligned} B - A &= U - (A \cup B^c) = \{4, 6\} \\ \therefore n(B - A) &= 2 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

458 ㉔ 32

$A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}, B = \{6, 7, 8, 9, \dots, 16\}$
 $n(B) = 11$ 이므로 $n(X \cup B) = 16$ 을 만족시키려면 집합 X의 원소에서 집합 B의 원소를 제외한 원소의 개수가 5이어야 한다.
 이때 $X \subset A$ 이므로 집합 X는 집합 A의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 4, 5를 반드시 원소로 갖는 부분집합이다.
 따라서 구하는 집합 X의 개수는

$$2^{10-5} = 2^5 = 32$$

459 ㉔ ㄱ, ㄴ

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } A \odot B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (B - A) \cup (A - B) = B \odot A \\ \text{ㄴ. } A^c \odot B^c &= (A^c - B^c) \cup (B^c - A^c) \\ &= \{A^c \cap (B^c)^c\} \cup \{B^c \cap (A^c)^c\} \\ &= (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A) \\ &= (B \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \\ &= (B - A) \cup (A - B) \\ &= B \odot A = A \odot B (\because \text{ㄱ}) \\ \text{ㄷ. } A \odot A &= (A - A) \cup (A - A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \\ \therefore B \odot (A \odot A) &= B \odot \emptyset \\ &= (B - \emptyset) \cup (\emptyset - B) \\ &= B \cup \emptyset = B \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

460 ㉔ 46

$A_9 \cap A_{12}$ 는 9와 12의 공배수, 즉 36의 배수의 집합이므로

$$A_9 \cap A_{12} = A_{36}$$

즉, $A_n \subset A_{36}$ 에서 n 은 36의 배수이므로 자연수 n 의 최솟값은 36이다.

$$\therefore a = 36$$

또 20은 10의 배수이므로 $A_{20} \subset A_{10}$ 에서

$$A_{10} \cup A_{20} = A_{10}$$

즉, $A_{10} \subset A_m$ 에서 m 은 10의 양의 약수이므로 자연수 m 의 최댓값은 10이다.

$$\therefore b=10$$

$$\therefore a+b=46$$

461 ㉡ ④

$$A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\},$$

$$B = \{3, 6, 9, 12, \dots, 48\}$$

$$A^c \cup B = (A \cap B^c)^c = (A - B)^c \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} n(A^c \cup B) &= n((A - B)^c) \\ &= n(U) - n(A - B) \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때 $A \cap B = \{3, 6, 15, 30\}$ 이므로

$$\begin{aligned} n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) \\ &= 8 - 4 = 4 \end{aligned}$$

따라서 ①에서

$$n(A^c \cup B) = 50 - 4 = 46$$

462 ㉡ ④

(i) $n(A \cap B)$ 가 최대인 경우는 $A=B$ 일 때이므로

$$\begin{aligned} M &= n(A) = n(B) \\ &= \frac{1}{2} \times \{n(A) + n(B)\} \\ &= \frac{1}{2} \times 32 = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 32 - n(A \cup B) \end{aligned}$$

따라서 $n(A \cap B)$ 가 최소인 경우는 $n(A \cup B)$ 가 최대일 때이므로

$$\begin{aligned} A \cup B &= U \\ \therefore m &= 32 - n(U) = 32 - 30 = 2 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $M+m=18$

| 다른 풀이 |

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 32 - n(A \cap B) \end{aligned}$$

$(A \cap B) \subset (A \cup B)$ 이므로

$$n(A \cap B) \leq n(A \cup B)$$

$$n(A \cap B) \leq 32 - n(A \cap B)$$

$$2 \times n(A \cap B) \leq 32$$

$$\therefore n(A \cap B) \leq 16 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$(A \cup B) \subset U$ 이므로

$$n(A \cup B) \leq n(U)$$

$$n(A \cup B) \leq 30, 32 - n(A \cap B) \leq 30$$

$$\therefore n(A \cap B) \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 2 \leq n(A \cap B) \leq 16$$

따라서 $M=16, m=2$ 이므로

$$M+m=18$$

463 ㉡ 22

| 접근 방법 | $2 \in A, 2 \in B$ 이므로 $2 \in X$ 인 경우와 $2 \notin X$ 인 경우로 나누어 생각한다.

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cap B = \{2\}$$

(i) $2 \in X$ 인 경우

$X \cap A \neq \emptyset, X \cap B \neq \emptyset$ 을 만족시키는 집합 X 의 개수는 집합 U 의 부분집합 중에서 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{5-1} = 2^4 = 16$$

(ii) $2 \notin X$ 인 경우

$X \cap A \neq \emptyset, X \cap B \neq \emptyset$ 을 만족시키는 집합 X 는 집합 U 의 원소 1, 3, 4, 5 중에서 1을 반드시 원소로 갖고 3 또는 4를 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 이때의 집합 X 는 $\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}$ 의 6개이다.

(i), (ii)에서 구하는 집합 X 의 개수는

$$16 + 6 = 22$$

464 ㉡ 21

전체 학생의 집합을 U , A 문제를 푼 학생의 집합을 A , B 문제를 푼 학생의 집합을 B , C 문제를 푼 학생의 집합을 C 라 하면

$$\begin{aligned} n(U) &= 50, n(A) = 30, n(B) = 27, n(C) = 24, \\ n(A \cap B \cap C) &= 5 \end{aligned}$$

한 문제도 풀지 못한 학생의 집합은 $(A \cup B \cup C)^c$ 이므로 $(A \cup B \cup C)^c = \emptyset$ 에서

$$A \cup B \cup C = U$$

$$\therefore n(A \cup B \cup C) = n(U) = 50$$

$$n(A \cup B \cup C)$$

$$\begin{aligned} &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) \\ &\quad - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} &n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) \\ &= n(A) + n(B) + n(C) + n(A \cap B \cap C) \\ &\quad - n(A \cup B \cup C) \end{aligned}$$

$$= 30 + 27 + 24 + 5 - 50 = 36$$

따라서 두 문제만 푼 학생 수는

$$\begin{aligned} n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) \\ - 3 \times n(A \cap B \cap C) \\ = 36 - 3 \times 5 = 21 \end{aligned}$$

465 ㉮ 25

전체 학생의 집합을 U , 체험 활동 A를 신청한 학생의 집합을 A, 체험 활동 B를 신청한 학생의 집합을 B라 하면

$$n(U) = 100, n(A) = n(B) + 20$$

어느 체험 활동도 신청하지 않은 학생의 집합은 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이고 하나 이상의 체험 활동을 신청한 학생의 집합은 $A \cup B$ 이므로

$$n((A \cup B)^c) = n(A \cup B) - 40$$

이때

$$\begin{aligned} n((A \cup B)^c) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 100 - n(A \cup B) \end{aligned}$$

이므로

$$100 - n(A \cup B) = n(A \cup B) - 40$$

$$2 \times n(A \cup B) = 140$$

$$\therefore n(A \cup B) = 70 \quad \text{..... ①}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{이므로}$$

$$70 = n(B) + 20 + n(B) - n(A \cap B)$$

$$2 \times n(B) = n(A \cap B) + 50$$

$$\therefore n(B) = \frac{1}{2} \times n(A \cap B) + 25 \quad \text{..... ②}$$

체험 활동 B만 신청한 학생의 집합은 $B - A$ 이므로

$$\begin{aligned} n(B - A) &= n(B) - n(A \cap B) \\ &= \frac{1}{2} \times n(A \cap B) + 25 - n(A \cap B) \\ &= 25 - \frac{1}{2} \times n(A \cap B) \quad \text{..... ③} \end{aligned}$$

즉, $n(B - A)$ 는 $n(A \cap B)$ 가 최소일 때 최대이고 $n(A \cap B)$ 의 최솟값은 0이므로 $n(B - A)$ 의 최댓값은 25이다. $\underline{A \cap B = \emptyset \text{인 경우}}$

따라서 구하는 학생 수의 최댓값은 25이다. ④

단계	채점 기준	비율
①	$n(A \cup B)$ 구하기	30%
②	$n(B)$ 를 $n(A \cap B)$ 에 대한 식으로 나타내기	30%
③	$n(B - A)$ 를 $n(A \cap B)$ 에 대한 식으로 나타내기	20%
④	체험 활동 B만 신청한 학생 수의 최댓값 구하기	20%

01 명제와 조건

개념 확인

209쪽

466 ㉮ (1) {1, 2, 5, 10} (2) {1, 2}

(1) 10의 약수는 1, 2, 5, 10이므로 조건 p 의 진리집합은 {1, 2, 5, 10}이다.

$$\begin{aligned} (2) x^2 - 3x + 2 = 0 \text{에서 } (x-1)(x-2) = 0 \\ \therefore x=1 \text{ 또는 } x=2 \end{aligned}$$

따라서 조건 q 의 진리집합은 {1, 2}이다.

467 ㉮ (1) {2} (2) {3, 4}

$$(1) 3x - 6 = 0 \text{에서 } x = 2$$

따라서 조건 p 의 진리집합은 {2}이다.

$$(2) x^2 + 1 > 5 \text{에서 } x^2 > 4 \quad \therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 2$$

따라서 조건 q 의 진리집합은 {3, 4}이다.

468 ㉮ (1) 무리수는 실수가 아니다.

$$(2) x \neq 3 \text{ 또는 } x \neq 7$$

유제

211~213쪽

469 ㉮ (1) 거짓인 명제 (2) 참인 명제

(3) 명제가 아니다.

- (1) 오른쪽 그림과 같은 이등변삼각형은 정삼각형이 아니므로 거짓인 명제이다. 
- (2) 9의 배수는 모두 3의 배수이므로 참인 명제이다.
- (3) x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

470 ㉮ (1) 8은 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.

$$(2) -1 < x \leq 5$$

- (1) ‘~이거나 ~이다.’의 부정은 ‘~아니고 ~아니다.’이므로 주어진 명제의 부정은 8은 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.
- (2) ‘≤ 또는 >’의 부정은 ‘> 그리고 ≤’이므로 주어진 조건의 부정은 $x > -1$ 그리고 $x \leq 5 \quad \therefore -1 < x \leq 5$

471 ㉮ ㄱ, ㄴ

ㄱ. 직사각형은 두 쌍의 대변이 각각 평행하므로 모두 평행사변형이다.

따라서 참인 명제이다.

ㄴ. 0은 자연수가 아니므로 거짓인 명제이다.

ㄷ. 짝수와 홀수를 곱하면 짝수이므로 거짓인 명제이다.
 ㄹ. 9의 양의 약수는 1, 3, 9이고 18의 양의 약수는 1, 2, 3, 6, 9, 18이므로 참인 명제이다.
 따라서 보기에서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

472 ㉠ ㄴ, ㄷ

ㄱ. 주어진 명제의 부정은 ' $2 \geq \sqrt{5}$ '이고, 거짓인 명제이다.
 ㄴ. 주어진 명제의 부정은 ' $x+1 \neq x+5$ '이고 이 식을 정리하면 $1 \neq 5$
 즉, 참인 명제이다.
 ㄷ. 주어진 명제의 부정은 '12는 소수가 아니다.'이고, 참인 명제이다.
 ㄹ. 주어진 명제의 부정은 ' $\sqrt{4}$ 는 유리수가 아니다.'이고, $\sqrt{4}=2$ 는 유리수이므로 거짓인 명제이다.
 따라서 보기에서 그 부정이 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

473 ㉠ (1) {1, 2, 5, 6} (2) {3} (3) {2, 3, 4, 6}

조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$P = \{1, 3, 5\}$$

$$q: x^2 - 7x + 12 = 0 \text{에서}$$

$$(x-3)(x-4) = 0 \quad \therefore x=3 \text{ 또는 } x=4$$

조건 q 의 진리집합을 Q 라 하면

$$Q = \{3, 4\}$$

(1) 조건 $\sim q$ 의 진리집합은 Q^c 이므로

$$Q^c = \{1, 2, 5, 6\}$$

(2) 조건 ' p 그리고 q '의 진리집합은 $P \cap Q$ 이므로

$$P \cap Q = \{3\}$$

(3) 조건 ' $\sim p$ 또는 q '의 진리집합은 $P^c \cup Q$

$$\text{이때 } P^c = \{2, 4, 6\} \text{이므로}$$

$$P^c \cup Q = \{2, 3, 4, 6\}$$

474 ㉠ ②

조건 p 의 진리집합을 P 라 하면

$$P = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

조건 $\sim p$ 의 진리집합은 P^c 이므로

$$P^c = \{5, 7\}$$

따라서 구하는 모든 원소의 합은

$$5 + 7 = 12$$

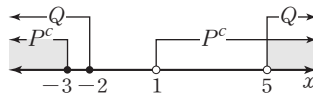
475 ㉠ $\{x | x \leq -3 \text{ 또는 } x > 5\}$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x | -3 < x \leq 1\}, Q = \{x | x \leq -2 \text{ 또는 } x > 5\}$$

조건 ' $\sim p$ 그리고 q '의 진리집합은 $P^c \cap Q$

이때 $P^c = \{x | x \leq -3 \text{ 또는 } x > 1\}$ 이므로 다음 그림에서

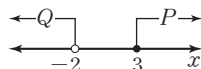


$$P^c \cap Q = \{x | x \leq -3 \text{ 또는 } x > 5\}$$

476 ㉠ ⑤

$P = \{x | x \geq 3\}$, $Q = \{x | x < -2\}$ 이므로 두 집합 P ,

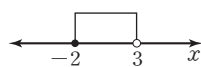
Q 를 수직선 위에 나타내면 오



른쪽 그림과 같다.

또 조건 ' $-2 \leq x < 3$ '의 진리집합 $\{x | -2 \leq x < 3\}$ 을

수직선 위에 나타내면 오른쪽



그림과 같다.

따라서 구하는 집합은

$$P^c \cap Q^c = (P \cup Q)^c$$

개념 확인

215쪽

477 ㉠ (1) 가정: 5의 배수이다.

결론: 10의 배수이다.

(2) 가정: $x=1$ 이다.

결론: $2x-1=0$ 이다.

478 ㉠ (1) 참 (2) 거짓

(1) $p: |x| \geq 0$ 이라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면 모든 실수 x 에 대하여 $|x| \geq 0$ 이 성립하므로

$$P = U$$

따라서 주어진 명제는 참이다.

(2) $p: |x| < 0$ 이라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면 $|x| < 0$ 을 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않으므로

$$P = \emptyset$$

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

유제

217~221쪽

479 ㉠ (1) 거짓 (2) 거짓 (3) 참

(1) [반례] $x=2$ 이면 x 는 소수이지만 짝수이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

(2) [반례] $x=-1$, $y=-3$ 이면 $xy=3 > 0$ 이지만 $x < 0$ 이고 $y < 0$ 이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

(3) $p: x^2-1=0, q: -2 < x < 2$ 라 하자.

$$x^2-1=0 \text{에서 } x^2=1 \quad \therefore x=\pm 1$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P=\{-1, 1\}, Q=\{x \mid -2 < x < 2\}$$

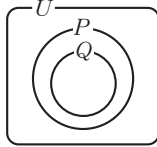
따라서 $P \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

480 ㉠ ④

명제 $q \rightarrow p$ 가 참이므로 $Q \subset P$

이를 벤 다이어그램으로 나타내면

오른쪽 그림과 같다.



①, ② $Q \subset P$

③ $P \cap Q = Q$

⑤ $Q - P = \emptyset$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

481 ㉠ ㄷ

ㄱ. [반례] $x=1, y=-2$ 이면 $x > y$ 이지만 $x^2 < y^2$ 이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

ㄴ. [반례] $x=-4, y=4$ 이면 $x+y=0$ 이지만

$$x^2+y^2 \neq 0 \text{이다.}$$

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

ㄷ. $p: x^3=8, q: x^2=4$ 라 하고 두 조건 p, q 의 진리 집합을 각각 P, Q 라 하자.

$$x^3=8 \text{에서 } x^3-8=0$$

$$(x-2)(x^2+2x+4)=0 \quad \therefore x=2$$

$$\therefore P=\{2\}$$

$$x^2=4 \text{에서 } x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

$$\therefore Q=\{-2, 2\}$$

따라서 $P \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

따라서 보기에서 참인 명제인 것은 ㄷ이다.

|참고| $x^3=8$ 에서 $(x-2)(x^2+2x+4)=0$

이때 이차방정식 $x^2+2x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=1^2-4 < 0 \text{이므로 이 이차방정식은 실근을 갖지 않는다.}$$

따라서 $x^3=8$ 을 만족시키는 실수 x 는 $x-2=0$ 에서 $x=2$ 뿐이다.

482 ㉠ ②

① $P \not\subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 거짓이다.

② $R \subset P$ 에서 $P^c \subset R^c$ 이므로 명제 $\sim p \rightarrow \sim r$ 는 참이다.

③ $Q \not\subset P$ 이므로 명제 $q \rightarrow p$ 는 거짓이다.

④ $Q^c \not\subset R$ 이므로 명제 $\sim q \rightarrow r$ 는 거짓이다.

⑤ $R \not\subset Q$ 이므로 명제 $r \rightarrow q$ 는 거짓이다.

따라서 항상 참인 명제는 ②이다.

483 ㉠ $a > 2$

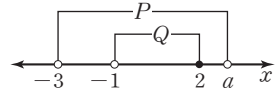
두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P=\{x \mid -3 < x < a\}, Q=\{x \mid -1 < x \leq 2\}$$

명제 $q \rightarrow p$ 가 참이 되

려면 $Q \subset P$ 이어야 하

므로 오른쪽 그림에서



$a > 2$

484 ㉠ $0 < a \leq 5$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P=\{x \mid 1-a \leq x \leq 1+a\},$$

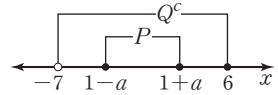
$$Q=\{x \mid x \leq -7 \text{ 또는 } x > 6\}$$

명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q^c$ 이어야 한다.

이때

$$Q^c=\{x \mid -7 < x \leq 6\}$$

이므로 오른쪽 그림에서



$$-7 < 1-a, 1+a \leq 6 \quad \therefore a \leq 5$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $0 < a \leq 5$

485 ㉠ 3

$p: x=a, q: x^2+2x-15=0$ 이라 하자.

$$x^2+2x-15=0 \text{에서 } (x+5)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-5 \text{ 또는 } x=3$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P=\{a\}, Q=\{-5, 3\}$$

주어진 명제가 참이 되려면 $P \subset Q$ 이어야 하므로

$$a \in Q \text{에서 } a=-5 \text{ 또는 } a=3$$

따라서 양수 a 의 값은 3이다.

486 ㉠ -2

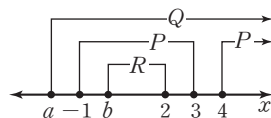
세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P=\{x \mid -1 \leq x \leq 3 \text{ 또는 } x \geq 4\},$$

$$Q=\{x \mid x \geq a\}, R=\{x \mid b \leq x \leq 2\}$$

두 명제 $p \rightarrow q, r \rightarrow p$ 가 모두 참이 되려면

$P \subset Q, R \subset P$ 이어야 하므로 다음 그림에서



$$a \leq -1, -1 \leq b \leq 2$$

따라서 a 의 최댓값은 $-1, b$ 의 최솟값은 -1 이므로

그 합은

$$-1 + (-1) = -2$$

487 ㉮ (1) 참 (2) 거짓

- (1) $p: |x-2| \geq 0$ 이라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면 모든 실수 x 에 대하여 $|x-2| \geq 0$ 이 성립하므로 실수 전체의 집합 U 에 대하여 $P=U$
따라서 주어진 명제는 참이다.
- (2) $p: x^2 < 0$ 이라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면 $x^2 < 0$ 을 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않으므로 $P=\emptyset$
따라서 주어진 명제는 거짓이다.

488 ㉮ (1) 어떤 실수 x 에 대하여 $x^2-6x+5 \leq 0$ 이다. (참)

(2) 모든 실수 x 에 대하여 $(x-2)^2 > 0$ 이다. (거짓)

- (1) 주어진 명제의 부정은
'어떤 실수 x 에 대하여 $x^2-6x+5 \leq 0$ 이다.'
 $p: x^2-6x+5 \leq 0$ 이라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하자.
 $x^2-6x+5 \leq 0$ 에서
 $(x-1)(x-5) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq x \leq 5$
 $\therefore P = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$
따라서 $P \neq \emptyset$ 이므로 주어진 명제의 부정은 참이다.
- (2) 주어진 명제의 부정은
'모든 실수 x 에 대하여 $(x-2)^2 > 0$ 이다.'
 $p: (x-2)^2 > 0$ 이라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면 $x \neq 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $(x-2)^2 > 0$ 이 성립하므로
 $P = \{x | x \neq 2 \text{인 실수}\}$
따라서 실수 전체의 집합 U 에 대하여 $P \neq U$ 이므로 주어진 명제의 부정은 거짓이다.

489 ㉮ ⑤

- ① $p: x+5 \leq 15$ 라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하자.
 $x+5 \leq 15$ 에서 $x \leq 10$
 $\therefore P = \{1, 2, 5, 10\}$
따라서 $P=U$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
- ② $p: x^2 > 10$ 이라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하자.
 $x^2 > 10$ 에서 $x < -\sqrt{10}$ 또는 $x > \sqrt{10}$
 $\therefore P = \{5, 10\}$
따라서 $P \neq \emptyset$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

- ③ $p: x$ 는 짝수라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면
 $P = \{2, 10\}$
따라서 $P \neq \emptyset$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
- ④ $p: 10$ 의 양의 약수라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면
 $P = \{1, 2, 5, 10\}$
따라서 $P=U$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
- ⑤ $p: \sqrt{x}$ 는 무리수라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면
 $P = \{2, 5, 10\}$
따라서 $P \neq U$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
따라서 거짓인 명제는 ⑤이다.

490 ㉮ -4

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2+4x-k \geq 0$ 이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+4x-k=0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = 2^2 + k \leq 0$
 $\therefore k \leq -4$
따라서 k 의 최댓값은 -4 이다.

연습문제

222~223쪽

491 ㉮ ③

' $(x-y)(y-z)(z-x)=0$ '의 부정은
' $(x-y)(y-z)(z-x) \neq 0$ '이므로
 $x-y \neq 0$ 이고 $y-z \neq 0$ 이고 $z-x \neq 0$
 $\therefore x \neq y$ 이고 $y \neq z$ 이고 $z \neq x$

492 ㉮ 14

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{1, 3, 5, 7, \dots\}, Q = \{1, 2, 4, 8\}$
조건 ' $\sim p$ 그리고 q '의 진리집합은 $P^c \cap Q$ 이므로
 $P^c \cap Q = Q \cap P^c = Q - P$
 $= \{2, 4, 8\}$
따라서 구하는 모든 원소의 합은
 $2+4+8=14$

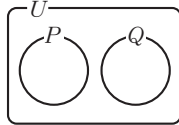
493 ㉮ ③

- ① [반례] $x=3, y=0$ 이면 $x+y \geq 2$ 이지만 $x \geq 1$ 이고 $y < 1$ 이다.
- ② [반례] $x=-2$ 이면 $x < 1$ 이지만 $x^2 > 1$ 이다.

- ③ 실수 x, y 에 대하여 $x^3=y^3$ 이면 $x=y$ 이므로 $x^2=y^2$ 이다. (참)
 ④ [반례] $x=1, y=-1$ 이면 $x^3+y^3=0$ 이지만 $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이다.
 ⑤ [반례] $a=2, b=3, c=4$ 이면 a, b 가 서로소이고 b, c 가 서로소이지만 a, c 는 서로소가 아니다.
 따라서 참인 명제는 ③이다.

494 ㉔ ③

$P \cap Q = \emptyset$ 을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



- ① $P \not\subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 거짓이다.
 ② $Q \not\subset P$ 이므로 명제 $q \rightarrow p$ 는 거짓이다.
 ③ $P \subset Q^c$ 이므로 명제 $p \rightarrow \sim q$ 는 참이다.
 ④ $P^c \not\subset Q$ 이므로 명제 $\sim p \rightarrow q$ 는 거짓이다.
 ⑤ $Q^c \not\subset P$ 이므로 명제 $\sim q \rightarrow p$ 는 거짓이다.
 따라서 항상 참인 명제는 ③이다.

495 ㉔ ㄱ, ㄷ

실수 전체의 집합을 U 라 하자.

ㄱ. $p: x^2-2x=0$ 이라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하자.

$$x^2-2x=0 \text{에서 } x(x-2)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2 \quad \therefore P=\{0, 2\}$$

따라서 $P \neq \emptyset$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄴ. $p: 2x+1>5$ 라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하자.

$$2x+1>5 \text{에서 } x>2 \quad \therefore P=\{x|x>2\}$$

따라서 $P \neq U$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

ㄷ. $p: x^2-x+1>0$ 이라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하자.

모든 실수 x 에 대하여

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0 \text{이 성립하므로}$$

$$P=U$$

따라서 주어진 명제는 참이다.

따라서 보기에서 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

496 ㉔ ⑤

$f(x)g(x) \neq 0$ 에서 $f(x) \neq 0$ 이고 $g(x) \neq 0$

$p: f(x)=0$ 에서 $\sim p: f(x) \neq 0$ 이므로

$$P^c=\{x|f(x) \neq 0\}$$

$q: g(x)=0$ 에서 $\sim q: g(x) \neq 0$ 이므로

$$Q^c=\{x|g(x) \neq 0\}$$

따라서 조건 ' $f(x)g(x) \neq 0$ '의 진리집합과 항상 같은 집합은

$$P^c \cap Q^c = (P \cup Q)^c$$

497 ㉔ ⑤

명제 ' $\sim p$ 이면 q 이고 $\sim r$ 이다.'가 거짓임을 보이는 원소는 집합 P^c 에는 속하고 집합 $Q \cap R^c$ 에는 속하지 않는다.

따라서 구하는 집합은

$$\begin{aligned} P^c \cap (Q \cap R^c)^c &= P^c \cap (Q^c \cup R) \\ &= (P^c \cap Q^c) \cup (P^c \cap R) \\ &= (P \cup Q)^c \cup (R - P) \end{aligned}$$

498 ㉔ 64

24의 약수 중 8 이하의 자연수는 1, 2, 3, 4, 6, 8이므로 $P=\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P^c \subset Q$ 이어야 한다.

따라서 집합 Q 의 개수는 집합 U 의 부분집합 중에서 P^c 의 모든 원소를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같다.

이때 $P^c=\{5, 7\}$ 이므로 구하는 집합의 개수는

$$2^{8-2}=2^6=64$$

499 ㉔ 2

$p: x^2-(a+b)x+ab \geq 0$ 에서

$$(x-a)(x-b) \geq 0$$

$$\therefore x \leq a \text{ 또는 } x \geq b$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

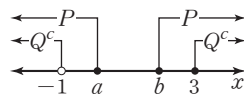
$$P=\{x|x \leq a \text{ 또는 } x \geq b\},$$

$$Q=\{x|-1 \leq x < 3\}$$

▶▶▶▶▶ ①

명제 $\sim q \rightarrow p$ 가 참이 되려면 $Q^c \subset P$ 이어야 한다.

이때 $Q^c=\{x|x < -1 \text{ 또는 } x \geq 3\}$ 이므로 다음 그림에서



$$a \geq -1, b \leq 3$$

▶▶▶▶▶ ②

따라서 a 의 최솟값은 -1 이고 b 의 최댓값은 3 이므로 그 합은

$$-1+3=2$$

▶▶▶▶▶ ③

단계	채점 기준	비율
①	두 조건 p, q 의 진리집합 구하기	30%
②	a, b 의 값의 범위 구하기	50%
③	a 의 최솟값과 b 의 최댓값의 합 구하기	20%

500 ㉮ 5

주어진 명제의 부정은

‘모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - ax + 2 > 0$ 이다.’

즉, 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2 - ax + 2 > 0$ 이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2 - ax + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-a)^2 - 4 \times 2 < 0, a^2 - 8 < 0$$

$$a^2 < 8 \quad \therefore -2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.

501 ㉮ ②

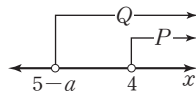
세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하자.

$$P = \{x | x > 4\}, Q = \{x | x > 5 - a\}$$

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면

$P \subset Q$ 이어야 하므로 오른쪽

그림에서



$$5 - a \leq 4 \quad \therefore a \geq 1 \quad \dots\dots ㉠$$

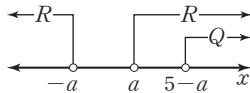
따라서 $(x - a)(x + a) > 0$ 에서 $x < -a$ 또는 $x > a$

$$\therefore R = \{x | x < -a \text{ 또는 } x > a\}$$

명제 $q \rightarrow r$ 가 참이 되

려면 $Q \subset R$ 이어야 하

므로 오른쪽 그림에서



$$a \leq 5 - a \quad \therefore a \leq \frac{5}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{에서 } 1 \leq a \leq \frac{5}{2}$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 $\frac{5}{2}$, 최솟값은 1이므로 그

합은

$$\frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$$

502 ㉮ 15

| 접근 방법 | 두 조건 p, q 에서 순서쌍 (x, y) 를 각각 원과 직선 위의 점의 좌표로 생각한다.

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{(x, y) | (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2\},$$

$$Q = \{(x, y) | y = -x + a\}$$

주어진 명제가 참이 되려면 $P \cap Q \neq \emptyset$ 을 만족시키는 실수 x, y 가 존재해야 하므로 원

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + a$ 가 만나야 한다.

원의 중심 $(1, 2)$ 와 직선 $y = -x + a$, 즉

$x + y - a = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1+2-a|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|3-a|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이므로 원과 직선이 만나려면

$$\frac{|3-a|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2}, |3-a| \leq 2$$

$$-2 \leq 3-a \leq 2 \quad \therefore 1 \leq a \leq 5$$

따라서 정수 a 는 1, 2, 3, 4, 5이므로 그 합은

$$1+2+3+4+5=15$$

II-3. 명제

02 명제의 역과 대우

개념 확인

225쪽

503 ㉮ (1) 역: x 가 6의 양의 약수이면 x 는 12의 양의 약수이다.

대우: x 가 6의 양의 약수가 아니면 x 는 12의 양의 약수가 아니다.

(2) 역: $x^2 = 9$ 이면 $x = -3$ 이다.

대우: $x^2 \neq 9$ 이면 $x \neq -3$ 이다.

(3) 역: $x > 5$ 이면 $x > 3$ 이다.

대우: $x \leq 5$ 이면 $x \leq 3$ 이다.

(4) 역: $a > 0$ 또는 $b > 0$ 이면 $a + b > 0$ 이다.

대우: $a \leq 0$ 이고 $b \leq 0$ 이면 $a + b \leq 0$ 이다.

504 ㉮ ㄴ

ㄴ. 명제 $q \rightarrow p$ 가 참이면 그 대우 $\sim p \rightarrow \sim q$ 도 참이다.

따라서 보기에서 항상 참인 명제인 것은 ㄴ이다.

505 ㉮ ㄱ, ㄷ

ㄱ. 두 명제 $p \rightarrow q, q \rightarrow r$ 가 모두 참이면 명제 $p \rightarrow r$ 가 참이다.

ㄷ. ㄱ에서 명제 $p \rightarrow r$ 가 참이므로 그 대우 $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

따라서 보기에서 항상 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

506 ㉡ (1) 역: $x=0$ 또는 $x=1$ 이면 $x^2=x$ 이다. (참)

대우: $x \neq 0$ 이고 $x \neq 1$ 이면 $x^2 \neq x$ 이다.
(참)

(2) 역: $2x-1 < 7$ 이면 $x < 2$ 이다. (거짓)

대우: $2x-1 \geq 7$ 이면 $x \geq 2$ 이다. (참)

(2) 역: [반례] $x=3$ 이면 $2x-1=5 < 7$ 이지만 $x > 2$ 이다.

대우: $2x-1 \geq 7$ 이면 $x \geq 4$ 이므로 $x \geq 2$ 이다.

| 다른 풀이 |

(2) $x < 2$ 이면 $2x < 4$

$\therefore 2x-1 < 3 < 7$

따라서 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.

507 ㉡ 4

주어진 명제가 참이므로 그 대우

‘ $x \leq k$ 이고 $y \leq 1$ 이면 $x+y \leq 5$ 이다.’도 참이다.

$x \leq k$ 이고 $y \leq 1$ 에서 $x+y \leq k+1$ 이므로

$k+1 \leq 5$

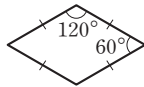
$\therefore k \leq 4$

따라서 실수 k 의 최댓값은 4이다.

508 ㉡ ④

① 역: 마름모이면 정사각형이다. (거짓)

[반례] 오른쪽 그림과 같은 사각형은 마름모이지만 정사각형이 아니다.



대우: 마름모가 아니면 정사각형이 아니다. (참)

② 역: $a \neq 2$ 또는 $b \neq 3$ 이면 $ab \neq 6$ 이다. (거짓)

[반례] $a=1$, $b=6$ 이면 $a \neq 2$ 또는 $b \neq 3$ 이지만 $ab=6$ 이다.

대우: $a=2$ 이고 $b=3$ 이면 $ab=6$ 이다. (참)

③ 역: ab 가 정수이면 $a+b$ 는 정수이다. (거짓)

[반례] $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$ 이면 ab 는 정수이지만 $a+b$ 는 정수가 아니다.

대우: ab 가 정수가 아니면 $a+b$ 는 정수가 아니다.
(거짓)

[반례] $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ 이면 ab 는 정수가 아니지만 $a+b$ 는 정수이다.

④ 역: $a=0$ 이고 $b=0$ 이면 $|a|+|b|=0$ 이다. (참)

대우: $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이면 $|a|+|b| \neq 0$ 이다. (참)

⇒ $a \neq 0$ 이면 $|a| > 0$

이때 $|b| \geq 0$ 이므로 $|a|+|b| > 0$

$b \neq 0$ 일 때도 같은 방법으로 하면

$|a|+|b| > 0$

$\therefore |a|+|b| \neq 0$

⑤ 역: $x > 10$ 이면 $x > 5$ 이다. (참)

대우: $x \leq 10$ 이면 $x \leq 5$ 이다. (거짓)

[반례] $x=7$ 이면 $x \leq 10$ 이지만 $x > 5$ 이다.

따라서 역과 대우가 모두 참인 명제인 것은 ④이다.

509 ㉡ ②

주어진 명제가 참이므로 그 대우

‘ $x=3$ 이면 $x^2-ax+9=0$ 이다.’도 참이다.

따라서 $9-3a+9=0$ 이므로

$a=6$

510 ㉡ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 명제 $r \rightarrow \sim p$ 가 참이면 그 대우 $p \rightarrow \sim r$ 도 참이다.

ㄴ. 두 명제 $q \rightarrow p$, $p \rightarrow \sim r$ 가 모두 참이므로 명제 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이다.

ㄷ. ㄴ에서 명제 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 그 대우 $r \rightarrow \sim q$ 도 참이다.

따라서 보기에서 항상 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

511 ㉡ ①

명제 $q \rightarrow r$ 가 참이면 그 대우 $\sim r \rightarrow \sim q$ 도 참이다.

이때 두 명제 $p \rightarrow \sim r$, $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참이므로 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이다.

따라서 항상 참인 것은 ①이다.

512 ㉡ ③

세 명제 $p \rightarrow q$, $\sim p \rightarrow r$, $s \rightarrow \sim q$ 가 모두 참이므로 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$, $\sim r \rightarrow p$, $q \rightarrow \sim s$ 도 모두 참이다.

이때 두 명제 $p \rightarrow q$, $q \rightarrow \sim s$ 가 모두 참이므로 명제 $p \rightarrow \sim s$ 가 참이고 그 대우 $s \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

또 두 명제 $\sim r \rightarrow p$, $p \rightarrow q$ 가 모두 참이므로 명제 $\sim r \rightarrow q$ 가 참이다.

따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ③이다.

513 ㉡ ④

명제 (가), (나)에서

p : A가 김밥을 주문한다.

q : B가 김밥을 주문한다.

r : C가 김밥을 주문한다.

라 하자.

(가)에서 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 그 대우

$\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

(나)에서 명제 $\sim p \rightarrow r$ 가 참이다.

이때 두 명제 $\sim q \rightarrow \sim p$, $\sim p \rightarrow r$ 가 모두 참이므

로 명제 $\sim q \rightarrow r$ 가 참이다.

한편 주어진 명제는 각각 다음과 같다.

$$\textcircled{1} p \rightarrow \sim r \qquad \textcircled{2} \sim p \rightarrow \sim q$$

$$\textcircled{3} q \rightarrow r \qquad \textcircled{4} \sim q \rightarrow r$$

$$\textcircled{5} r \rightarrow \sim q$$

따라서 항상 참인 명제인 것은 ④이다.

개념 확인

231쪽

514 ㉡ (1) 충분 (2) 필요 (3) 필요충분

515 ㉡ (1) 충분 (2) 필요

(1) $P \cap Q = P$ 에서 $P \subset Q$ 이므로

$$p \implies q$$

(2) $P \subset Q$ 이므로 $Q^c \subset P^c$

$$\therefore \sim q \implies \sim p$$

유제

233-235쪽

516 ㉡ (1) 충분조건 (2) 필요조건 (3) 필요충분조건

(1) 명제 $p \rightarrow q$: $x^3=1$ 이면 $x=1$ 이므로 $x^2=1$ (참)

명제 $q \rightarrow p$: [반례] $x=-1$ 이면 $x^2=1$ 이지만

$x^3 \neq 1$ 이다. (거짓)

따라서 $p \implies q$, $q \not\implies p$ 이므로 p 는 q 이기 위한
충분조건이다.

(2) 명제 $p \rightarrow q$: [반례] $x=\frac{3}{2}$ 이면 $2x-1>1$ 이지만

$x<2$ 이다. (거짓)

명제 $q \rightarrow p$: $x>2$ 이면 $2x>4$ 이므로

$2x-1>3>1$ (참)

따라서 $p \not\implies q$, $q \implies p$ 이므로 p 는 q 이기 위한
필요조건이다.

(3) 명제 $p \rightarrow q$: $x+1=2$ 이면 $x=1$ 이므로

$$x^2-2x+1=0 \text{ (참)}$$

명제 $q \rightarrow p$: $x^2-2x+1=0$ 이면 $(x-1)^2=0$ 이

므로 $x=1$ (참)

따라서 $p \iff q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조
건이다.

517 ㉡ ④

p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로 $p \implies \sim q$ 에서

$$P \subset Q^c$$

$$\therefore P \cap Q = \emptyset$$

$$\textcircled{1} P \cap Q = \emptyset$$

$$\textcircled{2} P \cup Q \neq Q$$

$$\textcircled{3} P \cap Q^c = P - Q = P$$

$$\textcircled{5} P - Q^c = \emptyset$$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

518 ㉡ ③

① 명제 $p \rightarrow q$: 10의 배수는 모두 5의 배수이다. (참)

명제 $q \rightarrow p$: [반례] $x=5$ 이면 x 는 5의 배수이
지만 10의 배수가 아니다. (거짓)

따라서 $p \implies q$, $q \not\implies p$ 이므로 p 는 q 이기 위한
충분조건이다.

② 명제 $p \rightarrow q$: $x=1$ 이고 $y=2$ 이면 $x+y=3$ 이다.

(참)

명제 $q \rightarrow p$: [반례] $x=0$, $y=3$ 이면 $x+y=3$
이지만 $x \neq 1$, $y \neq 2$ 이다. (거짓)

따라서 $p \implies q$, $q \not\implies p$ 이므로 p 는 q 이기 위한
충분조건이다.

③ 명제 $p \rightarrow q$: [반례] $x=1$, $y=-1$ 이면 $x^2=y^2$
이지만 $x \neq y$ 이다. (거짓)

명제 $q \rightarrow p$: $x=y$ 이면 $x^2=y^2$ 이다. (참)

따라서 $p \not\implies q$, $q \implies p$ 이므로 p 는 q 이기 위한
필요조건이다.

④ 명제 $p \rightarrow q$: $x>2$ 이면 $x^2>4$ 이다. (참)

명제 $q \rightarrow p$: [반례] $x=-3$ 이면 $x^2>4$ 이지만
 $x<2$ 이다. (거짓)

따라서 $p \implies q$, $q \not\implies p$ 이므로 p 는 q 이기 위한
충분조건이다.

- ⑤ 명제 $p \rightarrow q: x > 0, y > 0$ 이면 $x+y > 0$ 이고 $xy > 0$ 이다. (참)
 명제 $q \rightarrow p: xy > 0$ 이면 $x > 0$ 이고 $y > 0$ 또는 $x < 0$ 이고 $y < 0$ 이다.
 이때 $x+y > 0$ 이므로 $x > 0$ 이고 $y > 0$ 이다. (참)
 따라서 $p \Leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
 따라서 p 가 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 ③이다.

519 ㉡ ④

q 는 p 이기 위한 필요조건이므로

$$p \Rightarrow q \quad \therefore P \subset Q$$

$\sim q$ 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이므로

$$\sim q \Rightarrow \sim r \quad \therefore Q^c \subset R^c$$

$$\therefore R \subset Q$$

③ $P \subset Q, R \subset Q$ 이므로 $(P \cup R) \subset Q$

④ $P \cap Q = P$ 이므로 $(P \cap Q) \subset R$ 가 항상 옳은 것이라고 할 수 없다.

⑤ $P \subset Q$ 이므로 $Q^c \subset P^c$

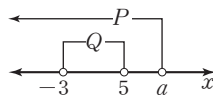
따라서 항상 옳은 것이라고 할 수 없는 것은 ④이다.

520 ㉡ 5

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x \mid x < a\}, Q = \{x \mid -3 < x < 5\}$$

p 가 q 이기 위한 필요조건이 되려면 $q \Rightarrow p$, 즉 $Q \subset P$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$$a \geq 5$$

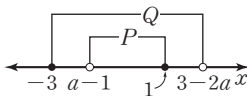
따라서 a 의 최솟값은 5이다.

521 ㉡ $-2 \leq a < 1$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x \mid a-1 < x \leq 1\}, Q = \{x \mid -3 \leq x < 3-2a\}$$

q 가 p 이기 위한 필요조건이 되려면 $p \Rightarrow q$, 즉 $P \subset Q$ 이어야 하므로 오



른쪽 그림에서

$$-3 \leq a-1, 1 < 3-2a$$

$$a \geq -2, a < 1$$

$$\therefore -2 \leq a < 1$$

522 ㉡ -6

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.

$$p: 2x+a=0 \text{에서 } x = -\frac{a}{2}$$

$$\therefore P = \left\{ -\frac{a}{2} \right\}$$

$$q: x^2-3x-4=0 \text{에서 } (x+1)(x-4)=0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 4$$

$$\therefore Q = \{-1, 4\}$$

p 가 q 이기 위한 충분조건이 되려면 $p \Rightarrow q$, 즉

$P \subset Q$ 이어야 하므로

$$-\frac{a}{2} = -1 \text{ 또는 } -\frac{a}{2} = 4$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = -8$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$2 + (-8) = -6$$

523 ㉡ 4

세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P = \{x \mid -1 \leq x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 5\},$$

$$Q = \{x \mid x \geq a\},$$

$$R = \{x \mid x > b\}$$

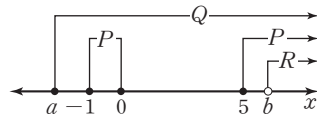
q 가 p 이기 위한 필요조건이면 $p \Rightarrow q$ 이므로

$$P \subset Q$$

r 가 p 이기 위한 충분조건이면 $r \Rightarrow p$ 이므로

$$R \subset P$$

즉, $R \subset P \subset Q$ 이므로 다음 그림에서



$$a \leq -1, b \geq 5$$

따라서 a 의 최댓값은 -1 이고 b 의 최솟값은 5 이므로 그 합은

$$-1 + 5 = 4$$

연습문제

236~238쪽

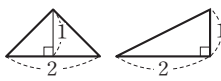
524 ㉡ ㄷ

ㄱ. 역: $x > y$ 이면 $x^2 > y^2$ 이다. (거짓)

[반례] $x=2, y=-3$ 이면 $x > y$ 이지만 $x^2 < y^2$ 이다.

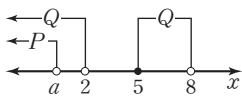
대우: $x \leq y$ 이면 $x^2 \leq y^2$ 이다. (거짓)

[반례] $x=-2, y=1$ 이면 $x \leq y$ 이지만 $x^2 > y^2$ 이다.

- ㄴ. 역: $x=0$ 이고 $y=0$ 이면 $x^2+y^2=0$ 이다. (참)
 대우: $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이면 $x^2+y^2 \neq 0$ 이다. (참)
 ㄷ. 역: 두 삼각형이 넓이가 같으면 합동이다. (거짓)
 [반례] 오른쪽 그림과 같은 두 삼각형은 넓이가 같지만 합동이 아니다.
- 
- 이때 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
 따라서 보기에서 그 역은 거짓이고 대우는 참인 명제인 것은 ㄷ이다.

525 ㉡ 2

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{x | x < a\}$, $Q = \{x | x < 2 \text{ 또는 } 5 \leq x < 8\}$
 명제 $\sim q \rightarrow \sim p$ 가 참이 되려면 그 대우 $p \rightarrow q$ 가 참이 되어야 한다.
 이때 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서 $a \leq 2$
 따라서 a 의 최댓값은 2이다.



526 ㉡ ④

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.
 또 명제 $r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 그 대우 $q \rightarrow \sim r$ 도 참이다.
 이때 두 명제 $p \rightarrow q, q \rightarrow \sim r$ 가 모두 참이므로 명제 $p \rightarrow \sim r$ 가 참이고 그 대우 $r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.
 따라서 항상 참이라고 할 수 없는 것은 ④이다.

527 ㉡ ⑤

- ① 명제 $p \rightarrow q: x = -1$ 이면 $x^2 + x = 0$ 이다. (참)
 명제 $q \rightarrow p$: [반례] $x = 0$ 이면 $x^2 + x = 0$ 이지만 $x \neq -1$ 이다. (거짓)
 따라서 $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
 ② 명제 $p \rightarrow q: x = y = z$ 이면 $x - y = 0, y - z = 0$ 이므로 $(x - y)(y - z) = 0$ 이다. (참)
 명제 $q \rightarrow p$: [반례] $x = y = 1, z = 2$ 이면 $(x - y)(y - z) = 0$ 이지만 $x = y \neq z$ 이다. (거짓)
 따라서 $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
 ③ 명제 $p \rightarrow q: x = y$ 의 양변에 z 를 곱하면 $xz = yz$ 이다. (참)

- 명제 $q \rightarrow p$: [반례] $x = 1, y = 2, z = 0$ 이면 $xz = yz = 0$ 이지만 $x \neq y$ 이다. (거짓)
 따라서 $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
 ④ 명제 $p \rightarrow q: x^2 > y^2$ 이면 $|x| > |y|$ 이다. (참)
 명제 $q \rightarrow p: |x| > |y|$ 이면 $x^2 > y^2$ 이다. (참)
 따라서 $p \Leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
 ⑤ 명제 $p \rightarrow q$: [반례] $x = -4$ 이면 $x > -5$ 이지만 $x < -3$ 이다. (거짓)
 명제 $q \rightarrow p: x > -3$ 이면 $x > -5$ 이다. (참)
 따라서 $p \not\Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
 따라서 p 가 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 ⑤이다.

528 ㉡ ⑤

주어진 벤 다이어그램에서
 $\neg R \subset Q^c$ 이므로 $r \not\Rightarrow \sim q$
 따라서 r 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이 아니다.
 $\neg P \subset Q$ 이므로 $Q^c \subset P^c$
 $\therefore \sim q \Rightarrow \sim p$
 따라서 $\sim q$ 는 $\sim p$ 이기 위한 충분조건이다.
 $\neg P \subset R^c$ 이므로 $p \Rightarrow \sim r$
 따라서 $\sim r$ 는 p 이기 위한 필요조건이다.
 따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

529 ㉡ $\frac{1}{2}$

$p: x^2 + ax - 5 \neq 0, q: x - 2 \neq 0$ 이라 하자.
 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되려면 $p \Rightarrow q$ 이어야 하고 참인 명제의 대우는 참이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$ 이어야 한다.
 따라서 $x - 2 = 0$, 즉 $x = 2$ 이면 $x^2 + ax - 5 = 0$ 이어야 하므로
 $4 + 2a - 5 = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$

530 ㉡ 8

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.
 $p: 2x - a \leq 0$ 에서 $x \leq \frac{a}{2}$
 $\therefore P = \{x | x \leq \frac{a}{2}\}$

$$q: x^2 - 5x + 4 > 0 \text{에서 } (x-1)(x-4) > 0$$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 4$$

$$\therefore Q = \{x | x < 1 \text{ 또는 } x > 4\}$$

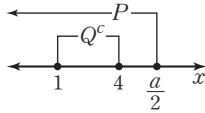
p 가 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이 되려면 $\sim q \implies p$, 즉 $Q^c \subset P$ 이어야 한다.

$$\text{이때 } Q^c = \{x | 1 \leq x \leq 4\} \text{이}$$

므로 오른쪽 그림에서

$$4 \leq \frac{a}{2} \quad \therefore a \geq 8$$

따라서 a 의 최솟값은 8이다.



531 ㉠ 8

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x | a+1 \leq x \leq a+6\},$$

$$Q = \{x | b+5 \leq x \leq ab\}$$

명제 $p \implies q$ 의 역 $q \implies p$ 가 참이므로

$$Q \subset P \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 명제 $p \implies q$ 의 대우가 참이면 명제 $p \implies q$ 도 참이므로

$$P \subset Q \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } P = Q \quad \text{>>>>> ①}$$

$$\therefore a+1=b+5, a+6=ab \quad \text{>>>>> ②}$$

$$a+1=b+5 \text{에서 } b=a-4 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

⑨을 $a+6=ab$ 에 대입하면

$$a+6=a(a-4), a^2-5a-6=0$$

$$(a+1)(a-6)=0$$

$$\therefore a=6 (\because a>0)$$

이를 ⑨에 대입하면 $b=2$

$$\therefore a+b=8 \quad \text{>>>>> ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	두 조건 p, q 의 진리집합 사이의 포함 관계 파악하기	40%
②	a, b 사이의 관계식 구하기	20%
③	$a+b$ 의 값 구하기	40%

532 ㉠ ④

p : 수학을 좋아한다.

q : 과학을 좋아한다.

r : 국어를 좋아한다.

라 하자.

이때 두 명제 $p \implies q, q \implies r$ 가 모두 참이므로 명제 $p \implies r$ 가 참이고 그 대우 $\sim r \implies \sim p$ 도 참이다.

한편 주어진 명제는 각각 다음과 같다.

$$\textcircled{1} p \implies \sim r$$

$$\textcircled{2} r \implies q$$

$$\textcircled{3} r \implies p$$

$$\textcircled{4} \sim r \implies \sim p$$

$$\textcircled{5} \sim q \implies r$$

따라서 항상 참인 명제인 것은 ④이다.

533 ㉠ ③

명제 $p \implies \sim q$ 가 참이므로 그 대우 $q \implies \sim p$ 도 참이다.

두 명제 $q \implies \sim p, \sim p \implies s$ 가 모두 참이므로 명제 $q \implies s$ 가 참이다.

따라서 명제 $q \implies \sim r$ 가 참이려면 명제 $s \implies \sim r$ 또는 그 대우 $r \implies \sim s$ 가 참이어야 한다.

따라서 필요한 참인 명제는 ③이다.

534 ㉠ ㄴ, ㄷ, ㄹ

p 는 q 이기 위한 충분조건이므로

$$p \implies q \quad \therefore \sim q \implies \sim p$$

$\sim q$ 는 $\sim s$ 이기 위한 필요조건이므로

$$\sim s \implies \sim q \quad \therefore q \implies s$$

$\sim r$ 는 s 이기 위한 필요조건이므로

$$s \implies \sim r \quad \therefore r \implies \sim s$$

$$p \implies q, q \implies s \text{이므로 } p \implies s$$

$$\therefore \sim s \implies \sim p$$

$$q \implies s, s \implies \sim r \text{이므로 } q \implies \sim r$$

따라서 보기에서 항상 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

535 ㉠ ㄴ

ㄱ. 명제 $p \implies q: A=B$ 이면 $A \cap B=B$ 이다. (참)

명제 $q \implies p$: [반례] $A=\{1, 2\}, B=\{1\}$ 이면

$A \cap B=B$ 이지만 $A \neq B$ 이다. (거짓)

따라서 $p \implies q, q \not\Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. 명제 $p \implies q: A \cap B = \emptyset$ 이면 $n(A \cap B) = 0$ 이

므로

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= n(A) + n(B) \text{ (참)}$$

명제 $q \implies p: n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ 이면

$$n(A \cap B) = 0 \text{이므로 } A \cap B = \emptyset \text{ (참)}$$

따라서 $p \iff q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분 조건이다.

ㄷ. 명제 $p \rightarrow q$: [반례] $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$ 이면 $A \not\subset B$ 이고 $B \not\subset A$ 이지만 $A \cap B = \{2\} \neq \emptyset$ 이다. (거짓)

명제 $q \rightarrow p$: $A \cap B = \emptyset$ 이면 $A \not\subset B$ 이고 $B \not\subset A$ 이다. (참)

따라서 $p \not\Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

따라서 보기에서 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 ㄴ이다.

536 ㉢

p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow \sim q$ 에서 $P \subset Q^c \quad \therefore P \cap Q = \emptyset$

①, ④ $P \subset Q^c$ 이므로 $x \in P$ 이면 $x \in Q^c$ 이다.

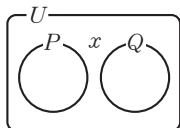
또 $P - Q = P \cap Q^c = P$ 이므로 $x \in (P - Q)$ 이면 $x \in Q^c$ 이다.

②, ⑤ $P \subset Q^c$ 에서 $Q \subset P^c$ 이므로 $x \in Q$ 이면 $x \in P^c$ 이다.

또 $Q - P = Q \cap P^c = Q$ 이므로 $x \in (Q - P)$ 이면 $x \in P^c$ 이다.

③ [반례] 오른쪽 그림에서 $x \in P^c$ 이지만 $x \notin Q$ 이다.

(거짓)



따라서 항상 참인 명제가 아닌 것은 ③이다.

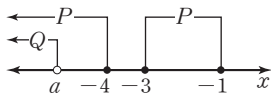
537 ㉢-3

p : $x \leq -4$ 또는 $-3 \leq x \leq -1$, q : $x < a$ 라 하고 두 조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라 하면

$P = \{x | x \leq -4 \text{ 또는 } -3 \leq x \leq -1\}$,

$Q = \{x | x < a\}$

p 가 q 이기 위한 필요 조건이면 $q \Rightarrow p$, 즉 $Q \subset P$ 이므로 오른쪽



그림에서

$a \leq -4$

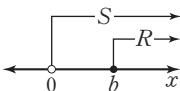
r : $x \geq b$, s : $x > 0$ 이라 하고 두 조건 r , s 의 진리집합을 각각 R , S 라 하면

$R = \{x | x \geq b\}$, $S = \{x | x > 0\}$

r 가 s 이기 위한 충분조건이면

$r \Rightarrow s$, 즉 $R \subset S$ 이므로 오른쪽

쪽 그림에서



따라서 정수 a 의 최댓값은 -4 , 정수 b 의 최솟값은 1 이므로 그 합은 $-4 + 1 = -3$

538 ㉢ ⑤

p : $|a| + |b| = 0$ 에서

$a = 0$ 이고 $b = 0$

q : $a^2 - 2ab + b^2 = 0$ 에서

$(a - b)^2 = 0 \quad \therefore a = b$

r : $|a + b| = |a - b|$ 에서

$a + b = \pm(a - b) \quad \therefore a = 0 \text{ 또는 } b = 0$

세 조건 p , q , r 의 진리집합을 각각 P , Q , R 라 하면

$P = \{(a, b) | a = 0 \text{이고 } b = 0\}$,

$Q = \{(a, b) | a = b\}$,

$R = \{(a, b) | a = 0 \text{ 또는 } b = 0\}$

$\neg$. $P \subset Q$ 이므로 $p \Rightarrow q$

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

$\neg$. $P \subset R$ 이므로 $R^c \subset P^c \quad \therefore \sim r \Rightarrow \sim p$

따라서 $\sim p$ 는 $\sim r$ 이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $Q \cap R = \{(a, b) | a = 0 \text{이고 } b = 0\}$ 이므로

$Q \cap R = P$

$\therefore (q \text{이고 } r) \Leftrightarrow p$

따라서 q 이고 r 는 p 이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

539 ㉢ 1

p 는 q 이기 위한 충분조건이므로

$p \Rightarrow q \quad \therefore P \subset Q$

r 는 p 이기 위한 필요조건이므로

$p \Rightarrow r \quad \therefore P \subset R$

$P \subset Q$ 이면 $2 \in P$ 에서 $2 \in Q$ 이므로

$a^2 - 2 = 2$ 또는 $b = 2$

$\therefore a = -2$ 또는 $a = 2$ 또는 $b = 2$

(i) $a = -2$ 일 때

$R = \{-3, 2b - 4\}$

$P \subset R$ 이면 $2 \in P$ 에서 $2 \in R$ 이므로

$2b - 4 = 2 \quad \therefore b = 3$

$\therefore a - b = -2 - 3 = -5$

(ii) $a = 2$ 일 때

$R = \{1, 2b - 4\}$

$P \subset R$ 이면 $2 \in P$ 에서 $2 \in R$ 이므로

$2b - 4 = 2 \quad \therefore b = 3$

$\therefore a - b = 2 - 3 = -1$

(iii) $b=2$ 일 때

$$R=\{a-1, 0\}$$

$P \subset R$ 이면 $2 \in P$ 에서 $2 \in R$ 이므로

$$a-1=2 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore a-b=3-2=1$$

(i), (ii), (iii)에서 $a-b$ 의 최댓값은 1이다.

| 다른 풀이 |

$P \subset R$ 이면 $2 \in P$ 에서 $2 \in R$ 이므로

$$a-1=2 \text{ 또는 } 2b-4=2$$

$$\therefore a=3 \text{ 또는 } b=3$$

(i) $a=3$ 일 때

$$Q=\{7, b\}$$

$P \subset Q$ 이면 $2 \in P$ 에서 $2 \in Q$ 이므로

$$b=2$$

$$\therefore a-b=3-2=1$$

(ii) $b=3$ 일 때

$$Q=\{a^2-2, 3\}$$

$P \subset Q$ 이면 $2 \in P$ 에서 $2 \in Q$ 이므로

$$a^2-2=2, a^2=4$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=2$$

$$\therefore a-b=-2-3=-5$$

$$\text{또는 } a-b=2-3=-1$$

(i), (ii)에서 $a-b$ 의 최댓값은 1이다.

이때 $2kl-k-l$ 은 0 또는 자연수이므로 ab 는 홀수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

541 [풀이 참조]

주어진 명제의 결론을 부정하여 $\sqrt{2}+1$ 이 유리수라 가정하면

$$\sqrt{2}+1=a \quad (a \text{는 유리수})$$

로 나타낼 수 있다.

이때 $\sqrt{2}=a-1$ 이고 $a, 1$ 은 모두 유리수이므로 $a-1$ 도 유리수이다.

이는 $\sqrt{2}$ 가 무리수라는 사실에 모순이다.

따라서 $\sqrt{2}+1$ 은 무리수이다.

542 [가] 짝수 [나] 서로소 [다] 2 [라] 대우

주어진 명제의 대우 ‘자연수 m, n 에 대하여 m 과 n 이 모두 [가] 짝수 이면 m 과 n 은 [나] 서로소 가 아니다.’

가 참임을 보이면 된다.

m 과 n 이 모두 [가] 짝수 이면 $m=2k,$

$n=2l$ (k, l 은 자연수)로 나타낼 수 있다.

이때 [다] 2 는 m 과 n 의 공약수이므로 m 과 n 이 모두

[가] 짝수 이면 m 과 n 은 [나] 서로소 가 아니다.

따라서 주어진 명제의 [라] 대우 가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

543 [풀이 참조]

주어진 명제의 결론을 부정하여 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이라 가정하자.

(i) $x \neq 0$ 이고 $y=0$ 이면 $x^2 > 0, y^2=0$ 이므로

$$x^2+y^2 > 0$$

(ii) $x=0$ 이고 $y \neq 0$ 이면 $x^2=0, y^2 > 0$ 이므로

$$x^2+y^2 > 0$$

(iii) $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이면 $x^2 > 0, y^2 > 0$ 이므로

$$x^2+y^2 > 0$$

(i), (ii), (iii)에서 $x^2+y^2 > 0$, 즉 $x^2+y^2 \neq 0$ 이므로

$x^2+y^2=0$ 이라는 가정에 모순이다.

따라서 실수 x, y 에 대하여 $x^2+y^2=0$ 이면 $x=0$ 이고 $y=0$ 이다.

II-3. 명제

03 명제의 증명

유제

241~253쪽

540 [풀이 참조]

주어진 명제의 대우 ‘자연수 a, b 에 대하여 a, b 가 모두 홀수이면 ab 가 홀수이다.’가 참임을 보이면 된다.

a, b 가 모두 홀수이면

$$a=2k-1, b=2l-1 \quad (k, l \text{은 자연수})$$

로 나타낼 수 있으므로

$$ab=(2k-1)(2l-1)$$

$$=4kl-2k-2l+1$$

$$=2(2kl-k-l)+1$$

544 ㉮ 풀이 참조

$$x^2 + 5y^2 - 4xy = x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ = (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0$$

$$\therefore x^2 + 5y^2 \geq 4xy$$

이때 등호는 $x - 2y = 0$, $y = 0$ 일 때, 즉 $x = y = 0$ 일 때 성립한다.

545 ㉮ 풀이 참조

(i) $|a| \geq |b|$ 일 때

$$|a - b|^2 - (|a| - |b|)^2 \\ = (a - b)^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2) \\ = a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|ab| + b^2) \\ = 2(|ab| - ab) \geq 0 \quad (\because |ab| \geq ab) \\ \therefore |a - b|^2 \geq (|a| - |b|)^2$$

그런데 $|a - b| \geq 0$, $|a| - |b| \geq 0$ 이므로
 $|a - b| \geq |a| - |b|$ $|a| \geq |b|$

(ii) $|a| < |b|$ 일 때

$$|a - b| > 0, |a| - |b| < 0 \text{이므로} \\ |a - b| > |a| - |b|$$

(i), (ii)에서 $|a - b| \geq |a| - |b|$

이때 등호는 $|a| \geq |b|$ 이고 $|ab| = ab$, 즉 $ab \geq 0$ 일 때 성립한다.

546 ㉮ 풀이 참조

$$a^3 + b^3 - ab(a + b) \\ = a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \\ = a^2(a - b) - b^2(a - b) \\ = (a^2 - b^2)(a - b) \\ = (a + b)(a - b)^2 \geq 0 \quad (\because a + b > 0) \\ \therefore a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$$

이때 등호는 $a - b = 0$, 즉 $a = b$ 일 때 성립한다.

547 ㉮ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $2b$ (다) $\sqrt{b}$

$$(\sqrt{a - b})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \\ = a - b - (a - 2\sqrt{ab} + b) \\ = 2\sqrt{ab} - 2b \\ = 2\sqrt{b}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) > 0 \quad (\because \sqrt{a} > \sqrt{b} > 0) \\ \therefore (\sqrt{a - b})^2 > (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \\ \text{그런데 } \sqrt{a - b} > 0, \sqrt{a} - \sqrt{b} > 0 \text{이므로} \\ \sqrt{a - b} > \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

548 ㉮ 30

$9x > 0$, $5y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9x + 5y \geq 2\sqrt{9x \times 5y} = 6\sqrt{5xy}$$

이때 $xy = 5$ 이므로

$$9x + 5y \geq 30 \quad (\text{단, 등호는 } 9x = 5y \text{일 때 성립})$$

따라서 구하는 최솟값은 30이다.

549 ㉮ $\frac{4}{3}$

$4x > 0$, $3y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4x + 3y \geq 2\sqrt{4x \times 3y} = 4\sqrt{3xy}$$

이때 $4x + 3y = 8$ 이므로

$$8 \geq 4\sqrt{3xy}$$

$$\therefore \sqrt{3xy} \leq 2 \quad (\text{단, 등호는 } 4x = 3y \text{일 때 성립})$$

양변을 제곱하면

$$3xy \leq 4 \quad \therefore xy \leq \frac{4}{3}$$

따라서 구하는 최댓값은 $\frac{4}{3}$ 이다.

550 ㉮ 3

$x^2 > 0$, $16y^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2 + 16y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \times 16y^2} = 8xy$$

이때 $x^2 + 16y^2 = 24$ 이므로

$$24 \geq 8xy$$

$$\therefore xy \leq 3 \quad (\text{단, 등호는 } x = 4y \text{일 때 성립})$$

따라서 구하는 최댓값은 3이다.

551 ㉮ 4

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{2x + y}{xy} = \frac{2}{xy} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$2x > 0$, $y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2x + y \geq 2\sqrt{2x \times y} = 2\sqrt{2xy}$$

이때 $2x + y = 2$ 이므로

$$2 \geq 2\sqrt{2xy}$$

$$\therefore \sqrt{2xy} \leq 1 \quad (\text{단, 등호는 } 2x = y \text{일 때 성립})$$

양변을 제곱하면

$$2xy \leq 1, xy \leq \frac{1}{2} \quad \therefore \frac{1}{xy} \geq 2$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{2}{xy} \geq 4$$

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

552 ㉮ 25

$\frac{x}{y} > 0, \frac{36y}{x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}(x+4y)\left(\frac{9}{x} + \frac{1}{y}\right) &= 13 + \frac{x}{y} + \frac{36y}{x} \\ &\geq 13 + 2\sqrt{\frac{x}{y} \times \frac{36y}{x}} \\ &= 13 + 12 = 25 \\ &\text{(단, 등호는 } x=6y \text{일 때 성립)}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 25이다.

553 ㉮ 2

$x+3 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}2x + \frac{8}{x+3} &= 2(x+3) + \frac{8}{x+3} - 6 \\ &\geq 2\sqrt{2(x+3) \times \frac{8}{x+3}} - 6 \\ &= 8 - 6 = 2 \\ &\text{(단, 등호는 } 2(x+3) = \frac{8}{x+3}, \text{ 즉 } x=-1 \text{일 때 성립)}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

554 ㉮ 4

$\frac{3x}{y} > 0, \frac{12y}{x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}(3x+2y)\left(\frac{6}{x} + \frac{1}{y}\right) &= 20 + \frac{3x}{y} + \frac{12y}{x} \\ &\geq 20 + 2\sqrt{\frac{3x}{y} \times \frac{12y}{x}} \\ &= 20 + 12 = 32\end{aligned}$$

이때 $3x+2y=8$ 이므로

$$\begin{aligned}8\left(\frac{6}{x} + \frac{1}{y}\right) &\geq 32 \\ \therefore \frac{6}{x} + \frac{1}{y} &\geq 4 \text{ (단, 등호는 } x=2y \text{일 때 성립)}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

555 ㉮ 11

$2x-1 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}6x+1 + \frac{3}{2x-1} &= 3(2x-1) + \frac{3}{2x-1} + 4 \\ &\geq 2\sqrt{3(2x-1) \times \frac{3}{2x-1}} + 4 \\ &= 6 + 4 = 10\end{aligned}$$

이때 등호는 $3(2x-1) = \frac{3}{2x-1}$ 일 때 성립하므로

$$(2x-1)^2 = 1, 2x-1 = 1 \text{ (} \because 2x-1 > 0 \text{)}$$

$$\therefore x=1$$

따라서 주어진 식은 $x=1$ 일 때 최솟값 10을 가지므로

$$a=1, b=10$$

$$\therefore a+b=11$$

556 ㉮ -15

a, b, x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$$

이때 $a^2+b^2=9, x^2+y^2=25$ 이므로

$$9 \times 25 \geq (ax+by)^2$$

$$15^2 \geq (ax+by)^2$$

$$\therefore -15 \leq ax+by \leq 15$$

(단, 등호는 $ay=bx$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 -15이다.

557 ㉮ 20

x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(3^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (3x+4y)^2$$

이때 $x^2+y^2=16$ 이므로

$$25 \times 16 \geq (3x+4y)^2$$

$$20^2 \geq (3x+4y)^2$$

$$\therefore -20 \leq 3x+4y \leq 20$$

(단, 등호는 $3y=4x$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최댓값은 20이다.

558 ㉮ 52

x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(3^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (3x+2y)^2$$

이때 $3x+2y=26$ 이므로

$$13(x^2+y^2) \geq 26^2$$

$$\therefore x^2+y^2 \geq 52 \text{ (단, 등호는 } 3y=2x \text{일 때 성립)}$$

따라서 구하는 최솟값은 52이다.

559 ㉮ 15

$x^2+y^2=5$ 이므로

$$\begin{aligned}x^2-2x+y^2-y+5 &= x^2+y^2+5-(2x+y) \\ &= 10-(2x+y) \quad \cdots \cdots \textcircled{7}\end{aligned}$$

즉, 주어진 식의 값은 $2x+y$ 의 값이 최소일 때 최대이다.

x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(2^2+1^2)(x^2+y^2) \geq (2x+y)^2$$

이때 $x^2+y^2=5$ 이므로

$$5^2 \geq (2x+y)^2$$

$\therefore -5 \leq 2x+y \leq 5$ (단, 등호는 $2y=x$ 일 때 성립)

㉠에서 $5 \leq 10 - (2x+y) \leq 15$

따라서 구하는 최댓값은 15이다.

560 ㉠ 18 cm²

오른쪽 그림과 같이 큰 직사

각형의 가로 길이를

x cm, 세로 길이를

y cm라 하면

$$2x+4y=24$$

$$\therefore x+2y=12$$

$x>0, 2y>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+2y \geq 2\sqrt{x \times 2y} = 2\sqrt{2xy}$$

이때 $x+2y=12$ 이므로

$$12 \geq 2\sqrt{2xy}$$

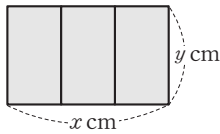
$$\therefore \sqrt{2xy} \leq 6 \text{ (단, 등호는 } x=2y \text{일 때 성립)}$$

양변을 제곱하면

$$2xy \leq 36$$

$$\therefore xy \leq 18$$

따라서 큰 직사각형 전체의 넓이는 xy cm²이므로 구하는 넓이의 최댓값은 18 cm²이다.



561 ㉠ $8\sqrt{2}$

직사각형의 가로 길이를 x , 세로 길이를 y 라 하면 직사각형의 대각선의 길이는 원의 지름의 길이와 같으므로

$$x^2+y^2=4^2=16$$

직사각형의 둘레의 길이는 $2x+2y$ 이고 x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(2^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (2x+2y)^2$$

$$8 \times 16 \geq (2x+2y)^2$$

이때 $2x+2y>0$ 이므로

$$0 < 2x+2y \leq 8\sqrt{2} \text{ (단, 등호는 } x=y \text{일 때 성립)}$$

따라서 구하는 둘레의 길이의 최댓값은 $8\sqrt{2}$ 이다.

562 ㉠ 40

$\overline{AB}=x, \overline{AC}=y$ 라 하면 직각삼각형 ABC의 넓이가 10이므로

$$\frac{1}{2}xy=10 \quad \therefore xy=20$$

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = x^2 + y^2$$

$x>0, y>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2+y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \times y^2}$$

$$=2xy=40 \text{ (단, 등호는 } x=y \text{일 때 성립)}$$

따라서 $\overline{BC}$ 의 최솟값은 40이다.

563 ㉠ 100

대각선의 길이가 10인 직사각형의 가로 길이를 x , 세로 길이를 y 라 하면

$$x^2+y^2=10^2=100$$

직사각형의 가로 길이를 3배, 세로 길이를 4배 늘인 직사각형의 둘레의 길이는

$$2(3x+4y)$$

x, y 는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(3^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (3x+4y)^2$$

$$25 \times 100 \geq (3x+4y)^2$$

$$50^2 \geq (3x+4y)^2$$

이때 $3x+4y>0$ 이므로

$$0 < 3x+4y \leq 50 \text{ (단, 등호는 } 3y=4x \text{일 때 성립)}$$

$$\therefore 0 < 2(3x+4y) \leq 100$$

따라서 구하는 둘레의 길이의 최댓값은 100이다.

연습문제

254~256쪽

564 ㉠ 풀이 참조

주어진 명제의 대우 ‘자연수 a, b, c 에 대하여 a, b, c 가 모두 홀수이면 $a^2+b^2 \neq c^2$ 이다.’가 참임을 보이면 된다.

a, b, c 가 모두 홀수이면

$$a=2l-1, b=2m-1, c=2n-1 \text{ (} l, m, n \text{은 자연수)}$$

로 나타낼 수 있으므로

$$a^2+b^2=(2l-1)^2+(2m-1)^2$$

$$=4l^2-4l+1+4m^2-4m+1$$

$$=2(2l^2-2l+2m^2-2m+1)$$

$$\begin{aligned}c^2 &= (2n-1)^2 \\&= 4n^2 - 4n + 1 \\&= 2(2n^2 - 2n) + 1\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}2l^2 - 2l + 2m^2 - 2m + 1 \\&= 2l(l-1) + 2m(m-1) + 1\end{aligned}$$

은 자연수이므로 $a^2 + b^2$ 은 짝수이다.

또 $2n^2 - 2n = 2n(n-1)$ 은 0 또는 자연수이므로 c^2

은 홀수이다.

$$\therefore a^2 + b^2 \neq c^2$$

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

565 ㉮ 풀이 참조

주어진 명제의 결론을 부정하여 n 이 3의 배수라 가정하면

$$n = 3k \quad (k \text{는 자연수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

로 나타낼 수 있다.

㉮의 양변을 제곱하면

$$n^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$$

이때 n^2 은 3의 배수이므로 n^2 이 3의 배수가 아니라는 가정에 모순이다.

따라서 n^2 이 3의 배수가 아니면 n 도 3의 배수가 아니다.

566 ㉮ ④

ㄱ. $2x+5>0$ 에서 $x>-\frac{5}{2}$ 이므로 $x\leq-\frac{5}{2}$ 일 때 성립하지 않는다.

ㄴ. 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

ㄷ. $x=-\frac{1}{2}$ 이면 $(2x+1)^2=0$ 이므로 $x=-\frac{1}{2}$ 일 때 성립하지 않는다.

ㄹ. $x^2+9\geq 6x$ 에서 $x^2-6x+9\geq 0$

$$\therefore (x-3)^2\geq 0$$

따라서 이 부등식은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

따라서 보기에서 절대부등식인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

567 ㉮ ②

$2x>0$, $9y>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2x+9y\geq 2\sqrt{2x\times 9y}=6\sqrt{2xy}$$

이때 $2x+9y=12$ 이므로

$$12\geq 6\sqrt{2xy}$$

$$\therefore \sqrt{2xy}\leq 2 \quad (\text{단, 등호는 } 2x=9y \text{일 때 성립})$$

양변을 제곱하면

$$2xy\leq 4 \quad \therefore xy\leq 2$$

따라서 구하는 최댓값은 2이다.

568 ㉮ ①

$$\begin{aligned}(x-3y)\left(\frac{3}{x}-\frac{9}{y}\right) &= 30-\frac{9x}{y}-\frac{9y}{x} \\&= 30-9\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

이므로 주어진 식의 값은 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 의 값이 최소일 때 최대이다.

$\frac{x}{y}>0$, $\frac{y}{x}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\times\frac{y}{x}}=2$$

(단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립)

㉮에서

$$\begin{aligned}(x-3y)\left(\frac{3}{x}-\frac{9}{y}\right) &= 30-9\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) \\&\leq 30-9\times 2 \\&= 12\end{aligned}$$

따라서 구하는 최댓값은 12이다.

569 ㉮ 10

a, b 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2+3^2)(a^2+b^2)\geq (a+3b)^2$$

이때 $a^2+b^2=k$ 이므로

$$(a+3b)^2\leq 10k$$

$k\geq 0$ 이므로

$$-\sqrt{10k}\leq a+3b\leq \sqrt{10k}$$

(단, 등호는 $b=3a$ 일 때 성립)

이때 $a+3b$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 20이므로

$$\sqrt{10k}-(-\sqrt{10k})=20$$

$$\sqrt{10k}=10$$

양변을 제곱하면

$$10k=100 \quad \therefore k=10$$

570 ㉮ ③

$\sqrt{n^2-1}$ 이 유리수라고 가정하면

$$\sqrt{n^2-1}=\frac{q}{p} \quad (p, q \text{는 서로소인 자연수})$$

로 놓을 수 있다.

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 $p^2(n^2-1)=q^2$

p, q 는 서로소인 자연수이므로 p 와 q^2 도 서로소이다.

또 p^2 이 q^2 의 약수이므로 p 는 q^2 의 약수이다.
 즉, $p=1$ 이므로 $n^2-1=q^2$ 에서 $n^2=\boxed{q^2+1}$ 이다.

자연수 k 에 대하여

(i) $q=2k$ 일 때

$$n^2=(2k)^2+1 \text{이므로}$$

$(2k)^2 < n^2 < \boxed{(2k+1)^2}$ 인 자연수 n 이 존재하지 않는다.

(ii) $q=2k+1$ 일 때

$$n^2=(2k+1)^2+1 \text{이므로}$$

$\boxed{(2k+1)^2} < n^2 < (2k+2)^2$ 인 자연수 n 이 존재하지 않는다.

(i)과 (ii)에 의하여

$$\sqrt{n^2-1}=\frac{q}{p} \quad (p, q \text{는 서로소인 자연수}) \text{를 만족하는}$$

자연수 n 은 존재하지 않는다.

따라서 $\sqrt{n^2-1}$ 은 무리수이다.

이때 $f(q)=q^2+1, g(k)=(2k+1)^2$ 이므로

$$f(2)+g(3)=(2^2+1)+(2 \times 3+1)^2 \\ =54$$

571 ㉠ 풀이 참조

주어진 명제의 결론을 부정하여 a, b 가 모두 홀수이거나 모두 짝수라 가정하자.

(i) a, b 가 모두 홀수이면

$$a=2k-1, b=2l-1 \quad (k, l \text{은 자연수})$$

로 나타낼 수 있으므로

$$a+b=(2k-1)+(2l-1)$$

$$=2(k+l-1)$$

이때 $k+l-1$ 은 자연수이므로 $a+b$ 는 짝수이다.

(ii) a, b 가 모두 짝수이면

$$a=2m, b=2n \quad (m, n \text{은 자연수})$$

으로 나타낼 수 있으므로

$$a+b=2m+2n=2(m+n)$$

이때 $m+n$ 은 자연수이므로 $a+b$ 는 짝수이다.

(i), (ii)에서 $a+b$ 는 짝수이므로 $a+b$ 가 홀수라는 가정에 모순이다.

따라서 자연수 a, b 에 대하여 $a+b$ 가 홀수이면 a, b 중에서 하나는 홀수이고 다른 하나는 짝수이다.

572 ㉠ ⑤

$\neg, a>b>1, c>0$ 이므로 $a+c>b+c>0$

$$\therefore \frac{1}{a+c} < \frac{1}{b+c}$$

$$\neg, ab+1-(a+b)=ab-a-b+1$$

$$=a(b-1)-(b-1)$$

$$=(a-1)(b-1)>0$$

$$(\because a>b>1)$$

$$\therefore ab+1>a+b$$

$$\neg, \frac{a}{b}-\frac{a-1}{b-1}=\frac{ab-a-ab+b}{b(b-1)}$$

$$=-\frac{a-b}{b(b-1)}<0 \quad (\because a>b>1)$$

$$\therefore \frac{a}{b} < \frac{a-1}{b-1}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

573 ㉠ 64

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 이 점 $(2, 8)$ 을 지나므로

$$\frac{2}{a}+\frac{8}{b}=1$$

▶▶▶▶▶ ①

$\frac{2}{a}>0, \frac{8}{b}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에

의하여

$$\frac{2}{a}+\frac{8}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2}{a} \times \frac{8}{b}}=8\sqrt{\frac{1}{ab}}$$

$$\text{이때 } \frac{2}{a}+\frac{8}{b}=1 \text{이므로 } 1 \geq 8\sqrt{\frac{1}{ab}}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{1}{ab}} \leq \frac{1}{8} \quad (\text{단, 등호는 } 4a=b \text{일 때 성립})$$

▶▶▶▶▶ ②

양변을 제곱하면

$$\frac{1}{ab} \leq \frac{1}{64} \quad \therefore ab \geq 64$$

따라서 구하는 최솟값은 64이다.

▶▶▶▶▶ ③

단계	채점 기준	비율
①	a, b 사이의 관계식 구하기	20%
②	산술평균과 기하평균의 관계 이용하기	40%
③	ab 의 최솟값 구하기	40%

574 ㉠ 9

$x-1>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x^2-x+16}{x-1}=\frac{x(x-1)+16}{x-1}=x-1+\frac{16}{x-1}+1$$

$$\geq 2\sqrt{(x-1) \times \frac{16}{x-1}}+1$$

$$=8+1=9$$

(단, 등호는 $x-1=\frac{16}{x-1}$, 즉 $x=5$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 9이다.

575 ㉑

이차방정식 $x^2 - 6x - 3a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 + 3a > 0 \quad \therefore a + 3 > 0$$

$a + 3 > 0$, $\frac{1}{a+3} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} 9a + \frac{1}{a+3} &= 9(a+3) + \frac{1}{a+3} - 27 \\ &\geq 2\sqrt{9(a+3) \times \frac{1}{a+3}} - 27 \\ &= 6 - 27 = -21 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $9(a+3) = \frac{1}{a+3}$, 즉 $a = -\frac{8}{3}$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 -21 이다.

576 ㉓ 36

오른쪽 그림과 같이

$\overline{AB} = x$, $\overline{BO} = y$ 라 하면

직사각형의 넓이는

$$\overline{AB} \times \overline{BC} = 2xy$$

직각삼각형 ABO에서

$$x^2 + y^2 = 36$$

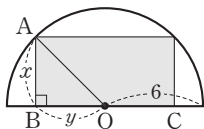
$x > 0$, $y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \times y^2} = 2xy$$

이때 $x^2 + y^2 = 36$ 이므로

$$2xy \leq 36 \quad (\text{단, 등호는 } x=y \text{일 때 성립})$$

따라서 구하는 직사각형의 넓이의 최댓값은 36이다.



577 ㉓ $\sqrt{6}$

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} + \sqrt{2y})^2 &= x + 2y + 2\sqrt{2xy} \\ &= 3 + 2\sqrt{2xy} \quad (\because x + 2y = 3) \end{aligned}$$

..... ㉑

$x > 0$, $2y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x + 2y \geq 2\sqrt{x \times 2y} = 2\sqrt{2xy}$$

이때 $x + 2y = 3$ 이므로

$$3 \geq 2\sqrt{2xy} \quad (\text{단, 등호는 } x=2y \text{일 때 성립})$$

㉑에서

$$(\sqrt{x} + \sqrt{2y})^2 = 3 + 2\sqrt{2xy} \leq 3 + 3 = 6$$

이때 $\sqrt{x} + \sqrt{2y} > 0$ 이므로

$$0 < \sqrt{x} + \sqrt{2y} \leq \sqrt{6}$$

따라서 구하는 최댓값은 $\sqrt{6}$ 이다.

578 ㉓ 2

| 접근 방법 | z 의 최댓값을 구하는 것이므로 주어진 두 식을 z 에 대한 식으로 변형한다.

$$x + y + z = 2 \text{에서 } x + y = 2 - z \quad \dots\dots ㉑$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{에서 } x^2 + y^2 = 4 - z^2 \quad \dots\dots ㉒$$

x, y 는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여 $(1^2 + 1^2)(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$

㉑, ㉒을 대입하면

$$2(4 - z^2) \geq (2 - z)^2$$

$$8 - 2z^2 \geq z^2 - 4z + 4$$

$$3z^2 - 4z - 4 \leq 0$$

$$(3z + 2)(z - 2) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{2}{3} \leq z \leq 2 \quad (\text{단, 등호는 } x=y \text{일 때 성립})$$

따라서 구하는 최댓값은 2이다.

579 ㉓ ②

| 접근 방법 | 두 점 Q, R가 각각 y 축, x 축 위의 점임을 이용하여 삼각형 OQR의 넓이를 a, b 에 대한 식으로 나타낸다.

직선 OP의 기울기는 $\frac{b}{a}$ 이므로 직선 OP에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{a}{b}$ 이다.

즉, 점 $P(a, b)$ 를 지나고 직선 OP에 수직인 직선의 방정식은

$$y - b = -\frac{a}{b}(x - a)$$

$$\therefore y = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2}{b} + b$$

$$\therefore Q\left(0, \frac{a^2}{b} + b\right)$$

오른쪽 그림에서 삼각형

OQR의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OR} \times \overline{OQ}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left| -\frac{1}{a} \right| \times \left(\frac{a^2}{b} + b \right)$$

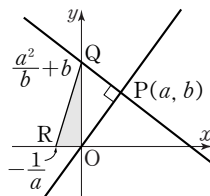
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)$$

$\frac{a}{b} > 0$, $\frac{b}{a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq \frac{1}{2} \times 2\sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}} = 1$$

(단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립)

따라서 삼각형 OQR의 넓이의 최솟값은 1이다.



III. 함수와 그래프

III-1. 함수

01 함수의 뜻과 그래프

개념 확인

261쪽

580 (1) 함수가 아니다.

(2) 함수이다.

정의역: $\{1, 2, 3, 4\}$

공역: $\{a, b, c, d\}$, 치역: $\{a, b, c, d\}$

(3) 함수가 아니다.

(4) 함수이다.

정의역: $\{1, 2, 3, 4\}$

공역: $\{a, b, c\}$, 치역: $\{a, b\}$

- (1) 집합 X 의 원소 1, 2에 대응하는 집합 Y 의 원소가 각각 a, b 와 b, c 의 2개이므로 함수가 아니다.
 (3) 집합 X 의 원소 2에 대응하는 집합 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

581 (1) $\{-2, -1, 0\}$ (2) $\{-2, -1, 2\}$

(3) $\{0, 2\}$ (4) $\{-1\}$

(1) $f(-1) = -1 - 1 = -2$

$f(0) = 0 - 1 = -1$

$f(1) = 1 - 1 = 0$

따라서 함수 f 의 치역은 $\{-2, -1, 0\}$

(2) $f(-1) = 4 - 2 = 2$

$f(0) = 1 - 2 = -1$

$f(1) = 0 - 2 = -2$

따라서 함수 f 의 치역은 $\{-2, -1, 2\}$

(3) $f(-1) = 2 \times 1 = 2$

$f(0) = 2 \times 0 = 0$

$f(1) = 2 \times 1 = 2$

따라서 함수 f 의 치역은 $\{0, 2\}$

(4) $f(-1) = -1 + 1 - 1 = -1$

$f(0) = 0 - 0 - 1 = -1$

$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1$

따라서 함수 f 의 치역은 $\{-1\}$

582 $\neg, \subset$

$\neg$. $f(0) = 0, g(0) = -1$ 이므로 $f(0) \neq g(0)$

$f(1) = -1, g(1) = 0$ 이므로 $f(1) \neq g(1)$

$\therefore f \neq g$

$\neg$. $f(0) = g(0) = 0, f(1) = g(1) = 1$ 이므로
 $f = g$

$\subset$. $f(0) = g(0) = 1, f(1) = g(1) = 3$ 이므로
 $f = g$

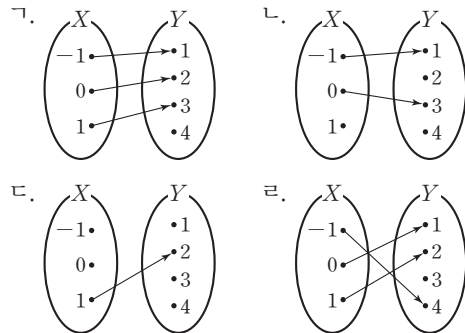
따라서 보기에서 $f = g$ 인 것은 $\neg, \subset$ 이다.

유제

263~275쪽

583 $\neg, \subset$

주어진 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



가, 나. 집합 X 의 각 원소에 집합 Y 의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

나. 집합 X 의 원소 1에 대응하는 집합 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

다. 집합 X 의 원소 $-1, 0$ 에 대응하는 집합 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 보기에서 X 에서 Y 로의 함수인 것은 가, 나이다.

584 $\{-2, -1, 0, 3, 5, 7, 9\}$

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여

(i) $x \leq 3$, 즉 $x = 1, 2, 3$ 일 때

$f(x) = x - 3$ 이므로

$f(1) = 1 - 3 = -2$

$f(2) = 2 - 3 = -1$

$f(3) = 3 - 3 = 0$

(ii) $x > 3$, 즉 $x = 4, 5, 6, 7$ 일 때

$f(x) = 2x - 5$ 이므로

$f(4) = 2 \times 4 - 5 = 3$

$f(5) = 2 \times 5 - 5 = 5$

$f(6) = 2 \times 6 - 5 = 7$

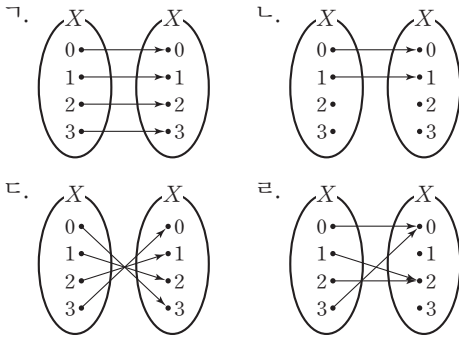
$f(7) = 2 \times 7 - 5 = 9$

따라서 함수 f 의 치역은

$\{-2, -1, 0, 3, 5, 7, 9\}$

585 ㉠ ㉡

주어진 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



가, 다, 라. 집합 X 의 각 원소에 집합 X 의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.

나. 집합 X 의 원소 2, 3에 대응하는 집합 X 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

따라서 보기에서 X 에서 X 로의 함수가 아닌 것은 나이다.

586 ㉠ 13

5는 유리수이므로

$$f(5) = 2 \times 5 + 1 = 11$$

$\sqrt{5}$ 는 무리수이므로

$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 - 3 = 2$$

$$\therefore f(5) + f(\sqrt{5}) = 13$$

587 ㉠ $a=2, b=-1$

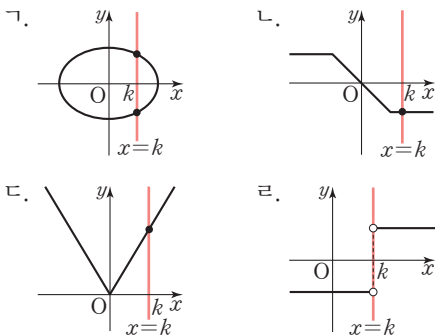
$$f(-1) = g(-1) \text{에서 } -a + b = -3 \quad \cdots \cdots ㉠$$

$$f(3) = g(3) \text{에서 } 3a + b = 5 \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, b=-1$

588 ㉠ ㉡

주어진 그래프에 직선 $x=k$ (k 는 상수)를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.



가. 직선 $x=k$ 와 만나지 않거나 두 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

나, 다. 직선 $x=k$ 와 오직 한 점에서 만나므로 함수의 그래프이다.

라. 직선 $x=k$ 와 만나지 않기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

따라서 보기에서 함수의 그래프인 것은 나, 다이다.

589 ㉠ -1

$$f(-2) = g(-2), f(2) = g(2) \text{에서}$$

$$2a + b = 7 \quad \cdots \cdots ㉠$$

$$f(0) = g(0) \text{에서 } b = 3$$

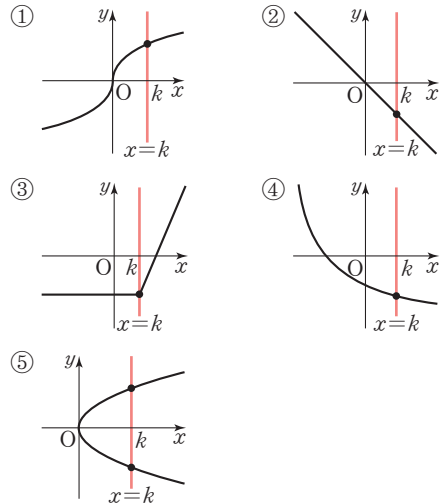
이를 ㉠에 대입하면

$$2a + 3 = 7, 2a = 4 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore a - b = -1$$

590 ㉠ ⑤

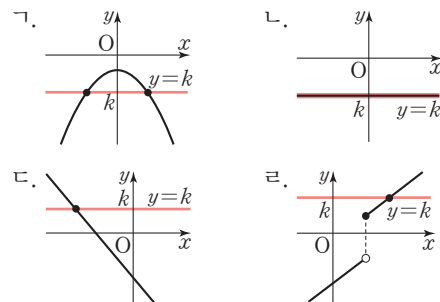
주어진 그래프에 직선 $x=k$ (k 는 상수)를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.



⑤ 직선 $x=k$ 와 만나지 않거나 두 점에서 만나기도 하므로 함수의 그래프가 아니다.

591 ㉠ (1) 다, 라 (2) 다 (3) 나

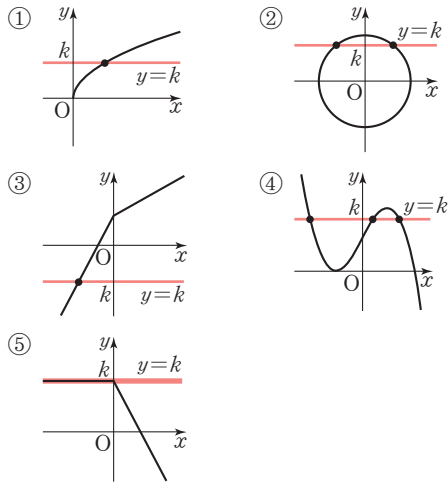
주어진 그래프에 직선 $y=k$ (k 는 상수)를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.



- (1) 일대일함수의 그래프는 치역의 각 원소 k 에 대하여 직선 $y=k$ 와의 교점이 1개인 것이므로 α , β 이다.
 (2) 일대일대응의 그래프는 일대일함수이면서 치역과 공역이 같은 함수, 즉 치역이 실수 전체의 집합인 함수의 그래프이므로 α 이다.
 (3) 상수함수의 그래프는 x 축에 평행한 직선이므로 β 이다.

592 ㉡ ③

주어진 그래프에 직선 $y=k$ (k 는 상수)를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.



- ③ 직선 $y=k$ 와의 교점이 1개이면서 치역과 공역이 같다.

593 ㉡ (1) β , α (2) β (3) $\neg$

- (1) $\neg$. $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1)=f(x_2)=5$ 이므로 일대일 대응이 아니다.
 β , α . $x_1 \neq x_2$ 일 때 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이고, 치역과 공역이 같으므로 일대일대응이다.
 β . $1 \neq -1$ 이지만 $f(1)=f(-1)=3$ 이므로 일대일대응이 아니다.
 따라서 보기에서 일대일대응인 것은 β , α 이다.
 (2) 항등함수는 $f(x)=x$ 이므로 β 이다.
 (3) 상수함수는 $f(x)=c$ (c 는 상수) 꼴이므로 $\neg$ 이다.

594 ㉡ β

- $\neg$. $1 \neq -1$ 이지만 $f(1)=f(-1)=-1$ 이므로 일대일함수가 아니다.
 β . $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이므로 일대일함수이다.

α . $0 \neq 2$ 이지만 $f(0)=f(2)=1$ 이므로 일대일함수가 아니다.

β . $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1)=f(x_2)=-3$ 이므로 일대일함수가 아니다.

따라서 보기에서 일대일함수인 것은 β 이다.

595 ㉡ -10

(i) $a > 0$ 일 때

함수 f 가 일대일대응이므로

오른쪽 그림과 같이 함수

$y=f(x)$ 의 그래프가 두 점

$(1, -3)$, $(4, 3)$ 을 지난다.

$f(1)=-3$ 에서

$$a+b=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

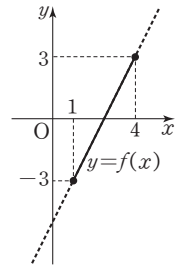
$f(4)=3$ 에서

$$4a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a=2, b=-5$$

$$\therefore ab=-10$$



(ii) $a < 0$ 일 때

함수 f 가 일대일대응이므로

오른쪽 그림과 같이 함수

$y=f(x)$ 의 그래프가 두 점

$(1, 3)$, $(4, -3)$ 을 지난다.

$f(1)=3$ 에서

$$a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$f(4)=-3$ 에서

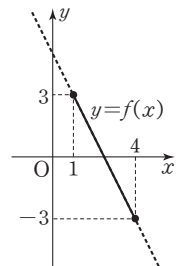
$$4a+b=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉢}$, $\textcircled{㉣}$ 을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=5$$

$$\therefore ab=-10$$

(i), (ii)에서 $ab=-10$



596 ㉡ $a=1, b=-3$

함수 f 가 일대일대응이고

$a > 0$ 이므로 오른쪽 그림과 같

이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가

두 점 $(-4, -7)$, $(3, 0)$ 을

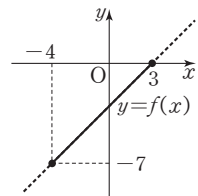
지난다.

$f(-4)=-7$ 에서

$$-4a+b=-7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$f(3)=0$ 에서

$$3a+b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

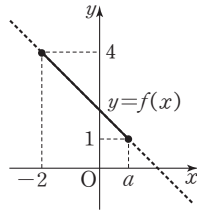


㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=1, b=-3$$

597 ㉢ $a=1, b=2$

함수 f 가 일대일대응이고 x 의 계수가 음수이므로 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(-2, 4)$, $(a, 1)$ 을 지난다.



$$f(-2)=4에서$$

$$2+b=4 \quad \therefore b=2$$

$$f(a)=1에서 -a+b=1$$

이 식에 $b=2$ 를 대입하면

$$-a+2=1 \quad \therefore a=1$$

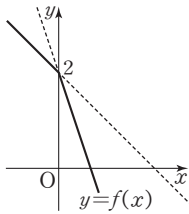
598 ㉢ 2

함수 f 가 일대일대응이라면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉, 직선 $y=-3x+a$ 가 점

$(0, 2)$ 를 지나야 하므로

$$a=2$$



599 ㉢ 15

함수 g 는 항등함수이므로 $g(x)=x$

$$g(7)=7이므로$$

$$f(3)=g(7)=7 \quad \cdots \cdots ㉠$$

함수 h 는 상수함수이고 $h(7)=g(7)=7이므로$

$$h(x)=7$$

$$g(5)=5, h(5)=7이므로 f(7)+h(5)=2g(5)에서$$

$$f(7)+7=2 \times 5$$

$$\therefore f(7)=3 \quad \cdots \cdots ㉡$$

함수 f 는 일대일대응이므로 ㉠, ㉡에서

$$f(5)=5$$

$$\therefore f(5)+g(3)+h(3)=5+3+7=15$$

600 ㉢ 8

함수 f 는 항등함수이므로 $f(x)=x$

함수 g 는 상수함수이고 $g(1)=f(5)=5이므로$

$$g(x)=5$$

따라서 $h(x)=x+5이므로$

$$h(3)=8$$

601 ㉢ -3

함수 g 는 항등함수이므로 $g(x)=x$

$$g(0)=0이므로$$

$$f(-1)=g(0)=0 \quad \cdots \cdots ㉠$$

$$g(1)=1이므로 f(1)g(1)=1에서$$

$$f(1)=1 \quad \cdots \cdots ㉡$$

함수 f 는 일대일대응이므로 ㉠, ㉡에서

$$f(0)=-1$$

함수 h 는 상수함수이고 $h(0)=f(0)=-1이므로$

$$h(x)=-1$$

$$\therefore f(0)+g(-1)+h(1)=-1+(-1)+(-1)=-3$$

602 ㉢ 22

$f(1)=2$ 이고 함수 f 는 상수함수이므로

$$f(x)=2$$

따라서 $f(1)=f(3)=f(5)=\cdots=f(21)=2이므로$

$$f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(21)=2 \times 11$$

$$=22$$

603 ㉢ (1) 256 (2) 24 (3) 4

(1) 함수의 개수는

$$4^4=256$$

(2) 일대일대응의 개수는

$$4!=4 \times 3 \times 2 \times 1=24$$

(3) 상수함수의 개수는 4이다.

604 ㉢ 35

집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 4개를 택하여 크기가 큰 것부터 순서대로 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수 f 의 개수는

$${}_7C_4={}_7C_3=\frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}=35$$

605 ㉢ 60

주어진 조건을 만족시키는 함수 f 는 일대일함수이므로 구하는 함수 f 의 개수는

$${}_5P_3=5 \times 4 \times 3=60$$

606 ㉢ 600

$f(1) \geq 4$ 이므로 $f(1)$ 의 값은 4, 5의 2가지

$f(2) \geq 3$ 이므로 $f(2)$ 의 값은 3, 4, 5의 3가지

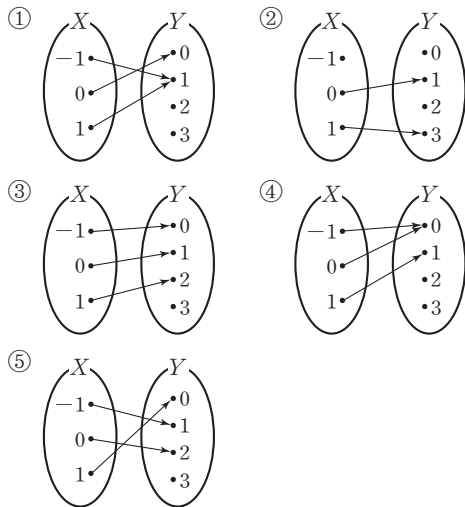
$f(3) \geq 2$ 이므로 $f(3)$ 의 값은 2, 3, 4, 5의 4가지
 $f(4) \geq 1$ 이므로 $f(4)$ 의 값은 1, 2, 3, 4, 5의 5가지
 $f(5) \geq 0$ 이므로 $f(5)$ 의 값은 1, 2, 3, 4, 5의 5가지
 따라서 구하는 함수 f 의 개수는
 $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 5 = 600$

연습문제

276~278쪽

607 ㉔ ②

주어진 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



② 집합 X 의 원소 -1 에 대응하는 집합 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

608 ㉔ 15

$$f(-2) = |2 \times (-2) - 1| + 2 = 7$$

$$f(-1) = |2 \times (-1) - 1| + 2 = 5$$

$$f(0) = |2 \times 0 - 1| + 2 = 3$$

$$f(1) = |2 \times 1 - 1| + 2 = 3$$

$$f(2) = |2 \times 2 - 1| + 2 = 5$$

따라서 함수 f 의 치역이 $\{3, 5, 7\}$ 이므로 치역의 모든 원소의 합은

$$3 + 5 + 7 = 15$$

609 ㉔ ④

정의역 X 의 모든 원소 $-1, 0, 1$ 에 대하여 네 함수 f, g, h, i 의 함수값을 각각 구하면

$$f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$$

$$g(-1) = 1, g(0) = 0, g(1) = 1$$

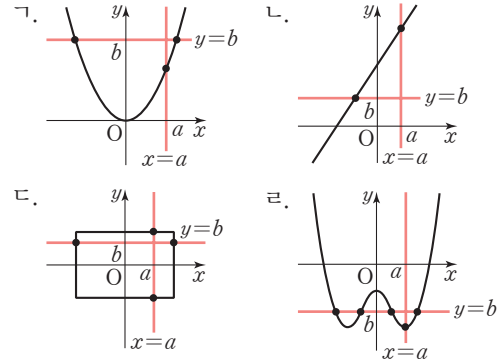
$$h(-1) = -1, h(0) = 0, h(1) = 1$$

$$i(-1) = 1, i(0) = 0, i(1) = 1$$

$$\therefore f = h, g = i$$

610 ㉔ 4

주어진 그래프에 두 직선 $x=a, y=b$ (a, b 는 상수)를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.



함수의 그래프는 직선 $x=a$ 와의 교점이 1개인 것이므로 ㉔, ㉕, ㉖

$$\therefore p = 3$$

일대일함수의 그래프는 함수의 그래프인 것 중에서 직선 $y=b$ 와의 교점이 1개인 것이므로 ㉕

$$\therefore q = 1$$

$$\therefore p + q = 4$$

611 ㉔ 7

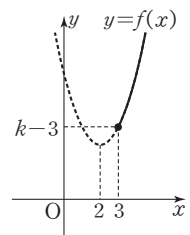
$$f(x) = x^2 - 4x + k = (x-2)^2 + k - 4$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$ 의 치역은

$$\{y | y \geq k-3\}$$

함수 f 가 일대일대응이면 함수 f 의 치역과 공역이 같으므로

$$k-3=4 \quad \therefore k=7$$



612 ㉔ 10

함수 f 는 항등함수이므로

$$f(x) = x$$

$$\therefore f(3) = 3$$

함수 g 는 상수함수이고 $g(3) = f(3) = 3$ 이므로

$$g(x) = 3$$

$$\therefore f(7) + g(7) = 7 + 3 = 10$$

➡➡➡➡➡ ①

➡➡➡➡➡ ②

➡➡➡➡➡ ③

단계	채점 기준	비율
①	f 구하기	40%
②	g 구하기	40%
③	$f(7)+g(7)$ 의 값 구하기	20%

613 ㉮ ③

함수의 개수는

$$5^3=125 \quad \therefore a=125$$

일대일함수의 개수는

$${}_5P_3=5 \times 4 \times 3=60 \quad \therefore b=60$$

상수함수의 개수는 5이다.

$$\therefore c=5$$

$$\therefore a-b-c=60$$

614 ㉮ ③

(i) $x < 0$, 즉 $x = -2, -1$ 일 때

$$f(x) = -x + a \text{이므로}$$

$$f(-2) = 2 + a, f(-1) = 1 + a$$

(ii) $x \geq 0$, 즉 $x = 0, 1, 2$ 일 때

$$f(x) = -x + 2 \text{이므로}$$

$$f(0) = 2, f(1) = 1, f(2) = 0$$

(i), (ii)에서 $x \in X$ 인 x 에 대하여 $f(x)$ 의 값을 원소로 하는 집합은

$$\{0, 1, 2, 1+a, 2+a\}$$

이때 f 가 X 에서 Y 로의 함수가 되려면

$$\{0, 1, 2, 1+a, 2+a\} \subset \{0, 1, 2, 5, 6, 8\}$$

이어야 하므로

$$1+a=0 \text{ 또는 } 1+a=1 \text{ 또는 } 1+a=5$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=0 \text{ 또는 } a=4$$

따라서 정수 a 의 개수는 3이다.

615 ㉮ -10

$$f(x) = x^2 + 4x + a = (x+2)^2 + a - 4$$

이때 $f(-4) = f(0)$ 이므로

두 집합 X, Y 를 각각 정의

역, 치역으로 하는 함수

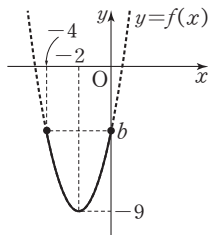
$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같다.

$$\therefore f(-4) = f(0) = b,$$

$$f(-2) = -9$$

$$f(0) = b \text{에서 } a=b$$



$$f(-2) = -9 \text{에서}$$

$$a-4 = -9 \quad \therefore a = -5$$

따라서 $b = a = -5$ 이므로

$$a+b = -10$$

616 ㉮ (1) 0 (2) -3

(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0+0) = f(0) + f(0)$$

$$\therefore f(0) = 0$$

▶▶▶▶▶ ①

(2) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 의 양변에 $x=-2, y=2$ 를 대입하면

$$f(-2+2) = f(-2) + f(2)$$

$$0 = 3 + f(2)$$

$$\therefore f(2) = -3$$

▶▶▶▶▶ ②

단계	채점 기준	비율
①	$f(0)$ 의 값 구하기	50%
②	$f(2)$ 의 값 구하기	50%

617 ㉮ $\{-1\}, \{4\}, \{-1, 4\}$

집합 X 의 모든 원소 x 에 대하여 $f(x) = g(x)$ 이어야 하므로

$$2x^2 - 3x - 2 = x^2 + 2, x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x+1)(x-4) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 집합 X 는 집합 $\{-1, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이어야 하므로 구하는 집합 X 는

$$\{-1\}, \{4\}, \{-1, 4\}$$

618 ㉮ ②

$$f(x) = |2x-1| + ax + 4 \text{에서}$$

(i) $x < \frac{1}{2}$ 일 때

$$f(x) = -(2x-1) + ax + 4$$

$$= (a-2)x + 5$$

(ii) $x \geq \frac{1}{2}$ 일 때

$$f(x) = 2x-1 + ax + 4$$

$$= (a+2)x + 3$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} (a-2)x + 5 & (x < \frac{1}{2}) \\ (a+2)x + 3 & (x \geq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

이때 함수 f 가 일대일대응이라면 x 의 값이 증가할 때, $f(x)$ 의 값은 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다.

따라서 $x < \frac{1}{2}$ 일 때, $x \geq \frac{1}{2}$ 일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$$(a+2)(a-2) > 0$$

$$\therefore a < -2 \text{ 또는 } a > 2$$

619 ㉓ ③

함수 f 가 항등함수이라면 $f(-2) = -2$,

$f(-1) = -1$, $f(3) = 3$ 이어야 한다.

$x < 0$ 일 때,

$f(-2) = -2$ 에서

$$4a - 2b - 2 = -2$$

$$\therefore 2a - b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$f(-1) = -1$ 에서

$$a - b - 2 = -1$$

$$\therefore a - b = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면

$$a = -1, b = -2$$

한편 $x \geq 0$ 일 때, $f(3) = 3$ 이 성립한다.

$$\therefore a + b = -3$$

620 ㉓ 7

$g(x)$ 는 항등함수이므로 $g(x) = x$

$g(1) = 1$ 이므로 (가)에서 $f(1) = g(1) = 1$

함수 h 는 상수함수이고 (가)에서 $h(3) = g(1) = 1$ 이므로

$$h(x) = 1$$

함수 f 는 일대일대응이므로 (나)에서

$$f(7) = 5, f(3) + f(5) = 10$$

이때 (다)에서 $f(3) = 7, f(5) = 3$

$$\therefore f(5) + g(3) + h(1) = 3 + 3 + 1 = 7$$

621 ㉓ 18

(가)에서 $f(3) = 4$ 이므로 (나)를 만족시키려면

$$f(1) < f(2) < f(3) = 4 < f(4) < f(5)$$

따라서 집합 Y 의 원소 1, 2, 3 중에서 2개를 택하여 작은 것부터 순서대로 집합 X 의 원소 1, 2에 대응시키고, 집합 Y 의 원소 5, 6, 7, 8 중에서 2개를 택하여 작은 것부터 순서대로 집합 X 의 원소 4, 5에 대응시키면 되므로 구하는 함수 f 의 개수는

$${}_3C_2 \times {}_4C_2 = {}_3C_1 \times {}_4C_2 = 3 \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 18$$

622 ㉓ ③

| 접근 방법 | 치역의 원소가 1뿐이라면 정의역의 원소는 모두 4로 나누었을 때 나머지가 1인 수이어야 한다.

$f(x) = 1$ 이라면

$$x = 4k + 1 \quad (k \text{는 음이 아닌 정수})$$

풀이어야 한다.

따라서 함수 f 의 정의역 X 는 집합 $\{1, 5, 9, 13, 17\}$

의 공집합이 아닌 부분집합이어야 하므로 구하는 정의역 X 의 개수는

$$2^5 - 1 = 31$$

623 ㉓ 12

| 접근 방법 | 두 수의 곱이 짝수이라면 두 수 중 적어도 하나는 짝수이어야 함을 이용하여 함숫값을 유추한다.

$3 \leq n \leq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $f(n)f(n+2)$ 의 값이 짝수이므로 $f(3) \times f(5)$, $f(4) \times f(6)$,

$f(5) \times f(7)$ 의 값은 모두 짝수이다.

$f(4) \times f(6)$ 의 값이 짝수이라면 $f(4)$ 의 값과 $f(6)$ 의 값 중 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

이때 함수 f 는 일대일대응이고 집합 X 의 원소 중에서 짝수는 4, 6의 2개뿐이므로 $f(3) \times f(5)$ 의 값과

$f(5) \times f(7)$ 의 값이 모두 짝수이라면 $f(5)$ 의 값이 짝수이어야 한다.

즉, $f(3)$, $f(7)$ 의 값은 모두 홀수이므로 $f(3) + f(7)$ 의 값이 최대일 때는 $f(3) = 5$, $f(7) = 7$ 또는

$f(3) = 7$, $f(7) = 5$ 일 때이다.

따라서 구하는 최댓값은

$$5 + 7 = 12$$

624 ㉓ 343

$f(0) = -f(0)$ 에서

$$2f(0) = 0$$

$$\therefore f(0) = 0$$

또 $f(-3) = -f(3)$, $f(-2) = -f(2)$,

$f(-1) = -f(1)$ 이므로 $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$ 의 값은 $f(3)$, $f(2)$, $f(1)$ 의 값에 따라 1가지로 결정된다.

이때 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 의 값은 각각

-3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 의 7가지

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$$7 \times 7 \times 7 = 343$$

02 합성함수

개념 확인

281쪽

625 ㉡ (1) **b** (2) **a** (3) **c** (4) **3** (5) **4** (6) **2**

$$(1) (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = b$$

$$(2) (g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(3) = a$$

$$(3) (g \circ f)(d) = g(f(d)) = g(2) = c$$

$$(4) (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(b) = 3$$

$$(5) (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(c) = 4$$

$$(6) (f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(d) = 2$$

626 ㉡ (1) **3** (2) **9** (3) **12** (4) **36**

$$(1) (g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(1) = 3$$

$$(2) (f \circ g)(-1) = f(g(-1)) = f(-3) = 9$$

$$(3) (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 12$$

$$(4) (f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(6) = 36$$

627 ㉡ (1) $(f \circ g)(x) = x^2 - 1$

$$(2) (g \circ h)(x) = 9x^2 + 12x + 5$$

$$(3) ((f \circ g) \circ h)(x) = 9x^2 + 12x + 3$$

$$(4) (f \circ (g \circ h))(x) = 9x^2 + 12x + 3$$

$$(1) (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f(x^2 + 1)$$

$$= (x^2 + 1) - 2$$

$$= x^2 - 1$$

$$(2) (g \circ h)(x) = g(h(x))$$

$$= g(3x + 2)$$

$$= (3x + 2)^2 + 1$$

$$= 9x^2 + 12x + 5$$

$$(3) ((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x))$$

$$= (f \circ g)(3x + 2)$$

$$= (3x + 2)^2 - 1$$

$$= 9x^2 + 12x + 3$$

$$(4) (f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x))$$

$$= f(9x^2 + 12x + 5)$$

$$= (9x^2 + 12x + 5) - 2$$

$$= 9x^2 + 12x + 3$$

참고 (1), (2)는 서로 다른 함수이고 (3), (4)는 서로 같은 함수임을 알 수 있다.

유제

283~287쪽

628 ㉡ 14

$$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(4) = 8$$

$$(f \circ f \circ f)(2) = f(f(f(2))) = f(f(4))$$

$$= f(8) = 6$$

$$\therefore (f \circ f)(2) + (f \circ f \circ f)(2) = 14$$

629 ㉡ 9

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(-4) = -11$$

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(-5) = -20$$

$$\therefore (g \circ f)(3) - (f \circ g)(3) = 9$$

630 ㉡ 3

$$(g \circ f)(x) = 6 \text{에서 } g(f(x)) = 6$$

이때 $g(c) = 6$ 이므로 $f(x) = c$

또 $f(3) = c$ 이므로 구하는 x 의 값은 3이다.

631 ㉡ 33

$$(f \circ (g \circ h))(-1) = ((f \circ g) \circ h)(-1)$$

$$= (f \circ g)(h(-1))$$

$$= (f \circ g)(-4) = 33$$

632 ㉡ 3

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x - 6)$$

$$= -(5x - 6) + a$$

$$= -5x + 6 + a$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-x + a)$$

$$= 5(-x + a) - 6$$

$$= -5x + 5a - 6$$

$f \circ g = g \circ f$ 에서

$$-5x + 6 + a = -5x + 5a - 6$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$6 + a = 5a - 6, -4a = -12$$

$$\therefore a = 3$$

633 ㉡ (1) $h(x) = 2x + 1$

$$(2) h(x) = 2x + 5$$

$$(1) (f \circ h)(x) = f(h(x)) = 2h(x) - 3$$

$f \circ h = g$ 에서

$$2h(x) - 3 = 4x - 1, 2h(x) = 4x + 2$$

$$\therefore h(x) = 2x + 1$$

$$(2) (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x-3)$$

$$h \circ f = g \text{에서 } h(2x-3) = 4x-1$$

$$2x-3=t \text{로 놓으면 } x = \frac{t+3}{2}$$

$$\therefore h(t) = 4 \times \frac{t+3}{2} - 1 = 2t+5$$

$$\therefore h(x) = 2x+5$$

634 ㉮ 3

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax+b)$$

$$= a(ax+b) + b = a^2x + ab + b$$

$$(f \circ f)(x) = 9x-16 \text{에서}$$

$$a^2x + ab + b = 9x-16$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a^2 = 9, ab + b = -16$$

$$a^2 = 9 \text{에서 } a = 3 (\because a > 0)$$

이를 $ab + b = -16$ 에 대입하면

$$4b = -16 \quad \therefore b = -4$$

$$\text{즉, } f(x) = 3x-4 \text{이므로}$$

$$f(2) - f(1) = 2 - (-1) = 3$$

635 ㉮ $f(x) = 9x+7$

$$\frac{x-2}{3} = t \text{로 놓으면 } x = 3t+2$$

$$\therefore f(t) = 3(3t+2) + 1 = 9t+7$$

$$\therefore f(x) = 9x+7$$

636 ㉮ 512

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x)$$

$$= 2 \times 2x = 2^2x$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = f(2^2x)$$

$$= 2 \times 2^2x = 2^3x$$

$$f^4(x) = (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x)) = f(2^3x)$$

$$= 2 \times 2^3x = 2^4x$$

$\vdots$

$$\therefore f^n(x) = 2^n x \text{ (단, } n \text{은 자연수)}$$

따라서 $f^8(x) = 2^8 x$ 이므로

$$f^8(2) = 2^8 \times 2 = 2^9 = 512$$

637 ㉮ 풀이 참조

주어진 그래프에서 두 함수 f, g 의 식을 구하면

$$f(x) = -x+3 \quad (0 \leq x \leq 3)$$

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x+1 & (0 \leq x < 2) \\ 3x-6 & (2 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

$$\therefore (g \circ f)(x)$$

$$= g(f(x))$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2}f(x)+1 & (0 \leq f(x) < 2) \\ 3f(x)-6 & (2 \leq f(x) \leq 3) \end{cases}$$

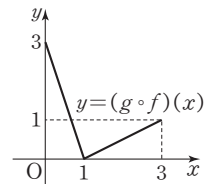
$$= \begin{cases} -\frac{1}{2}(-x+3)+1 & (0 \leq -x+3 < 2) \\ 3(-x+3)-6 & (2 \leq -x+3 \leq 3) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -3x+3 & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2} & (1 < x \leq 3) \end{cases}$$

따라서 합성함수

$y = (g \circ f)(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.



638 ㉮ -1

$$f(1) = 4$$

$$f^2(1) = (f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(4) = 3$$

$$f^3(1) = (f \circ f^2)(1) = f(f^2(1)) = f(3) = 2$$

$$f^4(1) = (f \circ f^3)(1) = f(f^3(1)) = f(2) = 1$$

$$f^5(1) = (f \circ f^4)(1) = f(f^4(1)) = f(1) = 4$$

$\vdots$

즉, $f^n(1)$ 의 값은 4, 3, 2, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $50 = 4 \times 12 + 2$ 이므로

$$f^{50}(1) = f^2(1) = 3$$

또

$$f(4) = 3$$

$$f^2(4) = (f \circ f)(4) = f(f(4)) = f(3) = 2$$

$$f^3(4) = (f \circ f^2)(4) = f(f^2(4)) = f(2) = 1$$

$$f^4(4) = (f \circ f^3)(4) = f(f^3(4)) = f(1) = 4$$

$$f^5(4) = (f \circ f^4)(4) = f(f^4(4)) = f(4) = 3$$

$\vdots$

즉, $f^n(4)$ 의 값은 3, 2, 1, 4가 이 순서대로 반복된다.

이때 $100 = 4 \times 25$ 이므로

$$f^{100}(4) = f^4(4) = 4$$

$$\therefore f^{50}(1) - f^{100}(4) = -1$$

639 ㉮ 풀이 참조

주어진 그래프에서 함수 f 의 식을 구하면

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (0 \leq x < 1) \\ -2x+4 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore (f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= \begin{cases} f(x)+1 & (0 \leq f(x) < 1) \\ -2f(x)+4 & (1 \leq f(x) \leq 2) \end{cases}\end{aligned}$$

이때 $f(0)=1, f\left(\frac{3}{2}\right)=1$ 이므로 $f(x)$ 의 값이 1이 되는 x 의 값을 기준으로 구간을 나누어 $f \circ f$ 의 식을 구하면

(i) $0 \leq x < 1$ 일 때

$$\begin{aligned}1 \leq f(x) < 2 \text{이므로} \\ (f \circ f)(x) &= -2f(x)+4 \\ &= -2(x+1)+4 \\ &= -2x+2\end{aligned}$$

(ii) $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ 일 때

$$\begin{aligned}1 \leq f(x) \leq 2 \text{이므로} \\ (f \circ f)(x) &= -2f(x)+4 \\ &= -2(-2x+4)+4 \\ &= 4x-4\end{aligned}$$

(iii) $\frac{3}{2} < x \leq 2$ 일 때

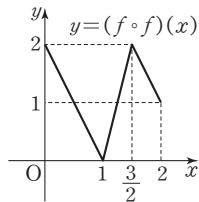
$$\begin{aligned}0 \leq f(x) < 1 \text{이므로} \\ (f \circ f)(x) &= f(x)+1 \\ &= (-2x+4)+1 \\ &= -2x+5\end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} -2x+2 & (0 \leq x < 1) \\ 4x-4 & \left(1 \leq x \leq \frac{3}{2}\right) \\ -2x+5 & \left(\frac{3}{2} < x \leq 2\right) \end{cases}$$

따라서 합성함수

$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.



연습문제

288~289쪽

640 ㉮ ⑤

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3) = 5$$

641 ㉮ ②

$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(6) = 19$$

$$(f \circ g)(-3) = f(g(-3)) = f(-8) = 30$$

$$\therefore (g \circ f)(4) + (f \circ g)(-3) = 49$$

642 ㉮ ①

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(-3a+7)$$

$$= (-3a+7)+2$$

$$= -3a+9$$

▶▶▶▶▶ ①

$$(f \circ g)(a) = 6 \text{에서 } -3a+9=6$$

$$-3a = -3 \quad \therefore a = 1$$

▶▶▶▶▶ ②

단계	채점 기준	비율
①	$(f \circ g)(a)$ 구하기	60%
②	a 의 값 구하기	40%

643 ㉮ ③

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-2x+k)$$

$$= 3(-2x+k)-2$$

$$= -6x+3k-2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-2)$$

$$= -2(3x-2)+k$$

$$= -6x+4+k$$

$f \circ g = g \circ f$ 에서

$$-6x+3k-2 = -6x+4+k$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$3k-2=4+k, 2k=6$$

$$\therefore k=3$$

644 ㉮ ②

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x+1)$$

$$h \circ f = g \text{에서 } h(2x+1) = x+4$$

$$2x+1=t \text{로 놓으면 } x = \frac{t-1}{2}$$

$$\text{따라서 } h(t) = \frac{t-1}{2} + 4 = \frac{1}{2}t + \frac{7}{2} \text{이므로}$$

$$h(-3) = 2$$

| 다른 풀이 |

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x+1)$$

$$h \circ f = g \text{에서 } h(2x+1) = x+4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$2x+1=-3$ 일 때 $x=-2$ 이므로 이를 ①에 대입하면

$$h(-3) = 2$$

645 ㉮ ⑤

$$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = 0 \text{이고 } f(0) = -1 \text{이므로}$$

$$g(-1) = 0$$

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = 0$ 이고 $g(1) = -1$ 이므로
 $f(-1) = 0$
 이때 두 함수 f, g 는 일대일대응이므로
 $f(1) = 1, g(0) = 1$
 $\therefore f(1) + g(0) = 2$

646 ㉓ 3

$f \circ g = g \circ f$ 에서
 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$
 $\therefore f(g(x)) = g(f(x)) \quad \dots\dots ㉑$
 ㉑의 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $g(2)=1, f(2)=3$ 이
 므로 $f(g(2)) = g(f(2))$ 에서
 $f(1) = g(3)$
 이때 $f(1)=4$ 이므로 $g(3)=4$
 ㉑의 양변에 $x=3$ 을 대입하면 $g(3)=4, f(3)=1$ 이
 므로 $f(g(3)) = g(f(3))$ 에서
 $f(4) = g(1)$
 이때 $f(4)=2$ 이므로 $g(1)=2$
 ㉑의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $g(1)=2, f(1)=4$ 이
 므로 $f(g(1)) = g(f(1))$ 에서
 $f(2) = g(4)$
 이때 $f(2)=3$ 이므로 $g(4)=3$

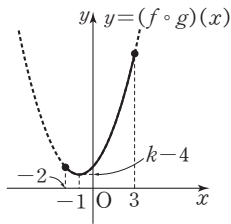
647 ㉓ ⑤

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x-1) \\
 &= (x-1)^2 + 4(x-1) + k \\
 &= x^2 + 2x + k - 3 \\
 &= (x+1)^2 + k - 4
 \end{aligned}$$

$-2 \leq x \leq 3$ 에서 함수

$y = (f \circ g)(x)$ 는
 $x = -1$ 일 때 최솟값
 $k-4$ 를 가지므로
 $k-4=1$
 $\therefore k=5$

$\therefore (f \circ g)(x) = (x+1)^2 + 1$
 따라서 함수 $y = (f \circ g)(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최댓값 17
 을 가지므로
 $M=17$
 $\therefore k+M=22$



648 ㉓ -6

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(2x+1) &= 5(2x+1) - 3 \\
 &= 10x + 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore ((h \circ f) \circ g)(2x+1) &= (h \circ (f \circ g))(2x+1) \\
 &= h((f \circ g)(2x+1)) \\
 &= h(10x+2) \quad \text{..... ㉒}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ((h \circ f) \circ g)(2x+1) &= 5x - 7 \text{에서} \\
 h(10x+2) &= 5x - 7
 \end{aligned}$$

$$10x+2=t \text{로 놓으면 } x = \frac{t-2}{10}$$

$$\text{따라서 } h(t) = 5 \times \frac{t-2}{10} - 7 = \frac{1}{2}t - 8 \text{이므로}$$

$$h(4) = 2 - 8 = -6 \quad \text{..... ㉓}$$

단계	채점 기준	비율
①	$(f \circ g)(2x+1)$ 구하기	30 %
②	$((h \circ f) \circ g)(2x+1)$ 을 h 에 대한 함수로 나타내기	30 %
③	$h(4)$ 의 값 구하기	40 %

649 ㉓ ③

$$f(50) = \frac{50}{2} = 25$$

$$f^2(50) = f(f(50)) = f(25) = \frac{25+1}{2} = 13$$

$$f^3(50) = f(f^2(50)) = f(13) = \frac{13+1}{2} = 7$$

$$f^4(50) = f(f^3(50)) = f(7) = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$f^5(50) = f(f^4(50)) = f(4) = \frac{4}{2} = 2$$

$$f^6(50) = f(f^5(50)) = f(2) = \frac{2}{2} = 1$$

$$f^7(50) = f(f^6(50)) = f(1) = \frac{1+1}{2} = 1$$

$\vdots$

따라서 $f^n(50)=1$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

650 ㉓ 40

| 접근 방법 | $f(1)=1+a>a$ 이고 $x=a$ 를 경계로 함수 $g(x)$ 의 식이 달라지므로 $a \leq 4, a > 4$ 일 때로 나누어 생각한다.

(i) $a \leq 4$ 일 때

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(1) + (f \circ g)(4) &= g(f(1)) + f(g(4)) \\
 &= g(a+1) + f(16) \\
 &= (a+1)^2 + a + 16 \\
 &= a^2 + 3a + 17
 \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(1) + (f \circ g)(4) = 57 \text{에서}$$

$$a^2 + 3a + 17 = 57$$

$$a^2 + 3a - 40 = 0$$

$$(a+8)(a-5) = 0$$

$$\therefore a = -8 \quad (\because a \leq 4)$$

(ii) $a > 4$ 일 때

$$\begin{aligned} (g \circ f)(1) + (f \circ g)(4) &= g(f(1)) + f(g(4)) \\ &= g(a+1) + f(2) \\ &= (a+1)^2 + a + 2 \\ &= a^2 + 3a + 3 \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(1) + (f \circ g)(4) = 57 \text{에서}$$

$$a^2 + 3a + 3 = 57$$

$$a^2 + 3a - 54 = 0$$

$$(a+9)(a-6) = 0$$

$$\therefore a = 6 \quad (\because a > 4)$$

(i), (ii)에서 $a = -8$ 또는 $a = 6$ 이므로

$$S = -2$$

$$\therefore 10S^2 = 10 \times 4 = 40$$

651 ㉡ 3

| 접근 방법 | 방정식 $f(f(x)) = -f(x) + 2$ 에서 $f(x) = t$ 로 놓고 t 의 값을 구한다.

주어진 그래프에서 함수 f 의 식을 구하면

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x < 1) \\ -2x + 4 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$f(f(x)) = -f(x) + 2$ 에서 $f(x) = t$ ($0 \leq t \leq 2$)로 놓으면

$$f(t) = -t + 2$$

(i) $0 \leq t < 1$ 일 때

$$2t = -t + 2, \quad 3t = 2$$

$$\therefore t = \frac{2}{3}$$

(ii) $1 \leq t \leq 2$ 일 때

$$-2t + 4 = -t + 2$$

$$\therefore t = 2$$

(i), (ii)에서 방정식 $f(f(x)) = -f(x) + 2$ 의 실근은

방정식 $f(x) = \frac{2}{3}$ 또는 $f(x) = 2$ 의 실근과 같다.

이때 오른쪽 그림과 같이 함수

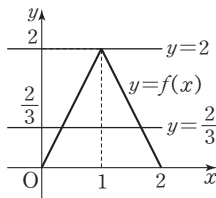
$y = f(x)$ 의 그래프는 직

선 $y = \frac{2}{3}$ 와 두 점에서 만나

고, 직선 $y = 2$ 와 한 점에서

만나므로 구하는 실근의 개

수는 3이다.



03 역함수

개념 확인

293쪽

652 ㉡ ㄴ, ㄷ

역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로 역함수가 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

653 ㉡ (1) 3 (2) 11

$$(2) f(1) + f^{-1}(4) = 6 + 5 = 11$$

654 ㉡ (1) 2 (2) 3

$$(1) f^{-1}(8) = a \text{에서 } f(a) = 8$$

$$5a - 2 = 8, \quad 5a = 10$$

$$\therefore a = 2$$

$$(2) f^{-1}(a) = 1 \text{에서 } f(1) = a$$

$$\therefore a = 5 - 2 = 3$$

655 ㉡ (1) $y = 2x - 8$ (2) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

$$(1) y = \frac{1}{2}x + 4 \text{를 } x \text{에 대하여 풀면}$$

$$\frac{1}{2}x = y - 4 \quad \therefore x = 2y - 8$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = 2x - 8$$

$$(2) y = -4x + 3 \text{을 } x \text{에 대하여 풀면}$$

$$4x = -y + 3 \quad \therefore x = -\frac{1}{4}y + \frac{3}{4}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

656 ㉡ (1) 6 (2) 5 (3) 2 (4) 7

$$(1) (f^{-1})^{-1}(1) = f(1) = 6$$

$$(2) (f^{-1})^{-1}(3) = f(3) = 5$$

유제

295-301쪽

657 ㉡ -1

$f^{-1}(9) = k$ (k 는 상수)라 하면 $f(k) = 9$ 이므로

$$-5k + 4 = 9, \quad -5k = 5 \quad \therefore k = -1$$

$$\therefore f^{-1}(9) = -1$$

658 ㉡ 14

$$f(3)=6\text{에서}$$

$$3a+b=6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f^{-1}(-2)=1\text{에서 } f(1)=-2\text{이므로}$$

$$a+b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}\text{을 연립하여 풀면 } a=4, b=-6$$

$$\text{따라서 } f(x)=4x-6\text{이므로}$$

$$f(5)=14$$

659 ㉡ 5

$$g^{-1}(5)=2\text{에서 } g(2)=5\text{이므로}$$

$$2+a=5 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore f(x)=3x-6, g(x)=x+3$$

$$f^{-1}(-3)=k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면 } f(k)=-3\text{이므로}$$

$$3k-6=-3, 3k=3 \quad \therefore k=1$$

$$\therefore f^{-1}(-3)=1$$

$$\therefore f^{-1}(-3)+g(1)=1+4=5$$

660 ㉡ -12

$$f^{-1}(0)=3\text{에서 } f(3)=0\text{이므로}$$

$$3a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$(f \circ f)(3)=f(f(3))=6\text{에서 } f(0)=6\text{이므로}$$

$$b=6$$

$$\text{이를 } \textcircled{㉠}\text{에 대입하면}$$

$$3a+6=0 \quad \therefore a=-2$$

$$\therefore ab=-12$$

661 ㉡ $a < 2$

함수 f 의 역함수가 존재하려면 함수 f 는 일대일대응이어야 한다.

따라서 $x < -1$ 일 때, $x \geq -1$ 일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$$4a-8 < 0 \quad \therefore a < 2$$

662 ㉡ 1

$$y=ax-6\text{을 } x\text{에 대하여 풀면}$$

$$ax=y+6 \quad \therefore x=\frac{1}{a}y+\frac{6}{a}$$

$$x\text{와 } y\text{를 서로 바꾸면 } y=\frac{1}{a}x+\frac{6}{a}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{a}x+\frac{6}{a}=-\frac{1}{2}x+b\text{이므로}$$

$$\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}, \frac{6}{a}=b$$

$$\text{따라서 } a=-2, b=-3\text{이므로}$$

$$a-b=1$$

663 ㉡ 15

함수 f 의 역함수가 존재하면 함수 f 는 일대일대응이다.

이때 직선 $y=f(x)$ 의 기울기가 양수이므로 직선

$y=f(x)$ 가 두 점 $(a, -1), (4, b)$ 를 지나야 한다.

$$f(a)=-1\text{에서 } 5a-6=-1$$

$$5a=5 \quad \therefore a=1$$

$$f(4)=b\text{에서 } b=14$$

$$\therefore a+b=15$$

664 ㉡ $f^{-1}(x)=-\frac{1}{4}x+2$

$$-x+3=t\text{로 놓으면 } x=-t+3$$

$$\therefore f(t)=4(-t+3)-4=-4t+8$$

$$\therefore f(x)=-4x+8$$

$$y=-4x+8\text{이라 하고 } x\text{에 대하여 풀면}$$

$$4x=-y+8$$

$$\therefore x=-\frac{1}{4}y+2$$

$$x\text{와 } y\text{를 서로 바꾸면}$$

$$y=-\frac{1}{4}x+2$$

$$\therefore f^{-1}(x)=-\frac{1}{4}x+2$$

665 ㉡ 7

$$\begin{aligned} (g \circ f^{-1})^{-1}(-2) &= (f \circ g^{-1})(-2) \\ &= f(g^{-1}(-2)) \end{aligned}$$

$$g^{-1}(-2)=k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면 } g(k)=-2\text{이므로}$$

$$3k-5=-2, 3k=3 \quad \therefore k=1$$

$$\text{따라서 } g^{-1}(-2)=1\text{이므로}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f^{-1})^{-1}(-2) &= f(g^{-1}(-2)) \\ &= f(1)=7 \end{aligned}$$

666 ㉡ -1

$$(g^{-1} \circ (f \circ g^{-1})^{-1} \circ g)(2)$$

$$= (g^{-1} \circ g \circ f^{-1} \circ g)(2)$$

$$= (f^{-1} \circ g)(2)$$

$$= f^{-1}(g(2))$$

$$= f^{-1}(8)$$

$$f^{-1}(8)=k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면 } f(k)=8\text{이므로}$$

$$-5k+3=8$$

$$\therefore k=-1$$

$$\text{따라서 } f^{-1}(8)=-1\text{이므로}$$

$$(g^{-1} \circ (f \circ g^{-1})^{-1} \circ g)(2)=f^{-1}(8)=-1$$

667 ㉡ 4

$$\begin{aligned} & (f^{-1} \circ g^{-1})^{-1}(4) + (g \circ (f \circ g)^{-1})(2) \\ &= (g \circ f)(4) + (g \circ g^{-1} \circ f^{-1})(2) \\ &= g(f(4)) + f^{-1}(2) \\ &= g(3) + 1 \\ &= 3 + 1 = 4 \end{aligned}$$

668 ㉡ 5

$$\begin{aligned} & (f^{-1} \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(k) \\ &= (f^{-1} \circ g^{-1} \circ f \circ f^{-1})(k) \\ &= (f^{-1} \circ g^{-1})(k) \\ &= (g \circ f)^{-1}(k) \end{aligned}$$

따라서 $(g \circ f)^{-1}(k) = 9$ 이므로

$$(g \circ f)(9) = k$$

$$\therefore k = g(f(9)) = g(6) = 5$$

669 ㉡ d

$$\begin{aligned} (f \circ f)^{-1}(b) &= (f^{-1} \circ f^{-1})(b) \\ &= f^{-1}(f^{-1}(b)) \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$f^{-1}(b) = k$ (k 는 상수)라 하면 $f(k) = b$

오른쪽 그림에서 $f(c) = b$

이므로 $k = c$

$$\therefore f^{-1}(b) = c$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} (f \circ f)^{-1}(b) &= f^{-1}(c) \\ &\dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

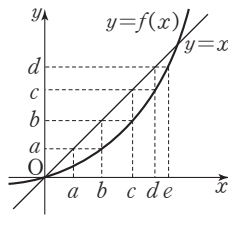
$f^{-1}(c) = l$ (l 은 상수)이라 하면 $f(l) = c$

위의 그림에서 $f(d) = c$ 이므로 $l = d$

$$\therefore f^{-1}(c) = d$$

이를 ㉡에 대입하면

$$(f \circ f)^{-1}(b) = d$$



670 ㉡ 4

오른쪽 그림과 같이 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수

$y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선

$y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두

함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의

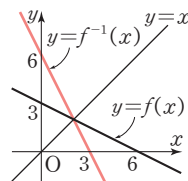
그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$

의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

$$-\frac{1}{2}x + 3 = x \text{에서 } \frac{3}{2}x = 3 \quad \therefore x = 2$$

따라서 교점의 좌표는 $(2, 2)$ 이므로

$$a = 2, b = 2 \quad \therefore a + b = 4$$



671 ㉡ 2

$$\begin{aligned} (g \circ f^{-1})^{-1}(4) &= (f \circ g^{-1})(4) \\ &= f(g^{-1}(4)) \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$g^{-1}(4) = k$ (k 는 상수)라 하면 $g(k) = 4$

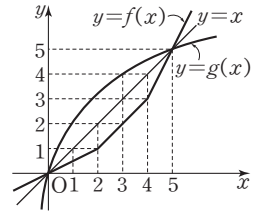
오른쪽 그림에서 $g(3) = 4$

이므로 $k = 3$

$$\therefore g^{-1}(4) = 3$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} (g \circ f^{-1})^{-1}(4) &= f(3) = 2 \end{aligned}$$



672 ㉡ $\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 그 역

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는

직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이

므로 두 함수 $y=f(x)$,

$y=g(x)$ 의 그래프의 교점은

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

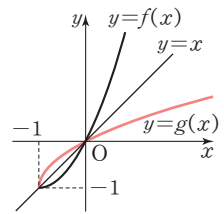
$$(x+1)^2 - 1 = x \text{에서 } x^2 + x = 0$$

$$x(x+1) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 0$$

따라서 두 교점의 좌표는 $(-1, -1)$, $(0, 0)$ 이므로

두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$



연습문제

302-304쪽

673 ㉡ ④

$f^{-1}(-3) = 1$ 에서 $f(1) = -3$ 이므로

$$2 + a = -3 \quad \therefore a = -5$$

따라서 $f(x) = 2x - 5$ 이므로

$$f(3) = 1$$

674 ㉡ 3

$4x - 3 = t$ 로 놓으면 $x = \frac{t+3}{4}$ 이므로

$$f(t) = 2 \times \frac{t+3}{4} + 5 = \frac{1}{2}t + \frac{13}{2}$$

$$\therefore f(3) = 8 \quad \text{▶▶▶▶▶ ①}$$

$f^{-1}(4) = k$ (k 는 상수)라 하면 $f(k) = 4$ 이므로

$$\frac{1}{2}k + \frac{13}{2} = 4, \quad \frac{1}{2}k = -\frac{5}{2} \quad \therefore k = -5$$

$$\therefore f^{-1}(4) = -5 \quad \text{▶▶▶▶▶ ②}$$

$$\therefore f(3) + f^{-1}(4) = 3 \quad \text{▶▶▶▶▶ ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	$f(3)$ 의 값 구하기	40%
②	$f^{-1}(4)$ 의 값 구하기	40%
③	$f(3)+f^{-1}(4)$ 의 값 구하기	20%

675 ㉮ $a < -1$ 또는 $a > 1$

$f(x) = |x+2| + ax+3$ 에서

(i) $x < -2$ 일 때

$$f(x) = -(x+2) + ax+3 = (a-1)x+1$$

(ii) $x \geq -2$ 일 때

$$f(x) = x+2 + ax+3 = (a+1)x+5$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} (a-1)x+1 & (x < -2) \\ (a+1)x+5 & (x \geq -2) \end{cases}$$

이때 함수 f 의 역함수가 존재하려면 함수 f 는 일대일 대응이어야 하므로 x 의 값이 증가할 때, $f(x)$ 의 값은 항상 증가하거나 항상 감소해야 한다.

따라서 $x < -2$ 일 때, $x \geq -2$ 일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$$(a-1)(a+1) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 1$$

676 ㉮ ③

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{9}$ 라 하고 x 에 대하여 풀면

$$\frac{2}{3}x = -y + \frac{4}{9} \quad \therefore x = -\frac{3}{2}y + \frac{2}{3}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{2}{3}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{2}{3}$$

따라서 $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{2}{3}$ 이므로

$$ab = -1$$

677 ㉮ 2

$y = ax+3$ 이라 하고 x 에 대하여 풀면

$$ax = y-3 \quad \therefore x = \frac{1}{a}y - \frac{3}{a}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{1}{a}x - \frac{3}{a}$$

$f = f^{-1}$ 에서

$$ax+3 = \frac{1}{a}x - \frac{3}{a}$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a = \frac{1}{a}, 3 = -\frac{3}{a} \quad \therefore a = -1$$

따라서 $f(x) = -x+3$ 이므로

$$f(-a) = f(1) = 2$$

678 ㉮ ③

$$\begin{aligned} (f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(2) &= (f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \circ f)(2) \\ &= (f \circ g^{-1})(2) \\ &= f(g^{-1}(2)) \end{aligned}$$

$g^{-1}(2) = k$ (k 는 상수)라 하면 $g(k) = 2$ 이므로

$$\frac{1}{2}k - 4 = 2, \frac{1}{2}k = 6 \quad \therefore k = 12$$

따라서 $g^{-1}(2) = 12$ 이므로

$$\begin{aligned} (f \circ (f \circ g)^{-1} \circ f)(2) &= f(g^{-1}(2)) \\ &= f(12) = 5 \end{aligned}$$

679 ㉮ $h(x) = x+1$

$f \circ h = g$ 에서

$$f^{-1} \circ f \circ h = f^{-1} \circ g$$

$$\therefore h = f^{-1} \circ g$$

$$\therefore h(x) = (f^{-1} \circ g)(x)$$

$$= f^{-1}(g(x))$$

$$= f^{-1}(2x+4)$$

$$= \frac{1}{2}(2x+4) - 1$$

$$= x+1$$

680 ㉮ 4

오른쪽 그림에서 $k=8$

이므로

$$\begin{aligned} (g \circ g)(k) &= (g \circ g)(8) \\ &= g(g(8)) \\ &\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$g(8) = p$ (p 는 상수)라

하면 $f(p) = 8$

위의 그림에서 $f(6) = 8$ 이므로 $p = 6$

$$\therefore g(8) = 6$$

이를 ㉠에 대입하면

$$(g \circ g)(k) = g(6) \quad \dots \textcircled{2}$$

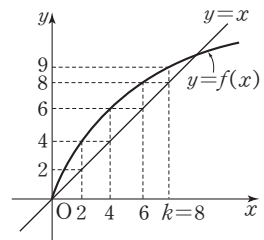
$g(6) = q$ (q 는 상수)라 하면 $f(q) = 6$

위의 그림에서 $f(4) = 6$ 이므로 $q = 4$

$$\therefore g(6) = 4$$

이를 ㉡에 대입하면

$$(g \circ g)(k) = 4$$



681 ㉔ ②

$f^{-1}(-5)=k$ (k 는 상수)라 하면 $f(k)=-5$

(i) $k < 2$ 일 때

$$-k^2 + 4k = -5 \text{에서 } k^2 - 4k - 5 = 0$$

$$(k+1)(k-5) = 0$$

$$\therefore k = -1 \quad (\because k < 2)$$

(ii) $k \geq 2$ 일 때

$$2k = -5 \text{에서 } k = -\frac{5}{2}$$

이는 $k \geq 2$ 를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $k = -1$ 이므로

$$f^{-1}(-5) = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore (f \circ f)(1) + f^{-1}(-5) &= f(f(1)) - 1 \\ &= f(3) - 1 \\ &= 6 - 1 = 5 \end{aligned}$$

682 ㉔ 5

함수 $y = (g \circ f^{-1})(x)$ 의 그래프가 점 $(1, 6)$ 을 지나므로

$$(g \circ f^{-1})(1) = 6 \quad \therefore g(f^{-1}(1)) = 6$$

$f^{-1}(1) = k$ (k 는 상수)라 하면 $g(k) = 6$ 이므로

$$k^2 - k = 6, \quad k^2 - k - 6 = 0$$

$$(k+2)(k-3) = 0 \quad \therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 3$$

(i) $k = -2$ 일 때

$$f^{-1}(1) = -2 \text{에서 } f(-2) = 1 \text{이므로}$$

$$-4 - a = 1 \quad \therefore a = -5$$

(ii) $k = 3$ 일 때

$$f^{-1}(1) = 3 \text{에서 } f(3) = 1 \text{이므로}$$

$$6 - a = 1 \quad \therefore a = 5$$

(i), (ii)에서 구하는 양수 a 의 값은 5이다.

683 ㉔ ④

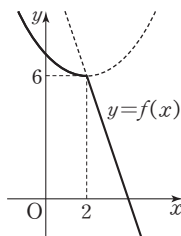
함수 f 의 역함수가 존재하면 함수 f 는 일대일대응이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

따라서 $y = a(x-2)^2 + b$ 의 그래프가 점 $(2, 6)$ 을 지나야 하므로

$$b = 6$$

또 $x \geq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는 x 의 값이 증가할 때, y 의 값이 항상 감소하므로 $x < 2$ 에서 곡선

$y = a(x-2)^2 + 6$ 이 아래로 볼록해야 한다.



즉, x^2 의 계수가 양수이어야 하므로

$$a > 0$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 1이므로 $a+b$ 의 최솟값은 $1+6=7$

684 ㉔ 9

$$f(x) = x^2 - 6x - 18 = (x-3)^2 - 27$$

함수 f 의 역함수가 존재하면 함수 f 는 일대일대응이므로 x 의 값이 증가할 때, $f(x)$ 의 값은 항상 증가하거나 감소하고, 치역과 공역이 같다.

이때 함수 $f(x)$ 는 $x \geq 3$ 에서 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값이 항상 증가하므로

$$a \geq 3, \quad f(a) = a$$

$$f(a) = a \text{에서 } a^2 - 6a - 18 = a$$

$$a^2 - 7a - 18 = 0, \quad (a+2)(a-9) = 0$$

$$\therefore a = 9 \quad (\because a \geq 3)$$

685 ㉔ 14

$$(f \circ (g^{-1} \circ f)^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

$$= (f \circ f^{-1} \circ g \circ f^{-1})(x)$$

$$= (g \circ f^{-1})(x)$$

$$= g(f^{-1}(x))$$

▶▶▶▶▶ ①

$y = 2x - 6$ 이라 하고 x 에 대하여 풀면

$$2x = y + 6 \quad \therefore x = \frac{1}{2}y + 3$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

▶▶▶▶▶ ②

$$\therefore (f \circ (g^{-1} \circ f)^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

$$= g(f^{-1}(x))$$

$$= g\left(\frac{1}{2}x + 3\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}x + 3\right) - 5$$

$$= 2x + 7$$

▶▶▶▶▶ ③

따라서 $a = 2, b = 7$ 이므로

$$ab = 14$$

▶▶▶▶▶ ④

단계	채점 기준	비율
①	$(f \circ (g^{-1} \circ f)^{-1} \circ f^{-1})(x)$ 간단히 하기	30 %
②	$f^{-1}(x)$ 구하기	30 %
③	$(f \circ (g^{-1} \circ f)^{-1} \circ f^{-1})(x)$ 구하기	30 %
④	ab 의 값 구하기	10 %

686 ㉔ ④

$$(f \circ g \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = h(x)$$

따라서 $f \circ g$ 는 항등함수이다.

이때 f 는 일대일대응이므로 g 는 f 의 역함수이다.

$g(2) = k$ (k 는 상수)라 하면 $f(k) = 2$ 이므로

$$\frac{1}{2}k + 3 = 2, \quad \frac{1}{2}k = -1 \quad \therefore k = -2$$

$$\therefore g(2) = -2$$

687 ㉔ $a < \frac{9}{4}$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수

$y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

따라서 방정식 $f(x)=g(x)$ 가 서로 다른 두 실근을 가지면 방정식 $f(x)=x$ 도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$$x^2 - 2x + a = x \text{에서 } x^2 - 3x + a = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-3)^2 - 4a > 0$$

$$\therefore a < \frac{9}{4}$$

688 ㉔ ②

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하면 함수 f 는 일대일대응이다.

$f(1) + 2f(3) = 12$ 를 만족시키는 $f(1)$, $f(3)$ 의 값은

$$f(1) = 2 \text{일 때, } f(3) = 5$$

$$f(1) = 4 \text{일 때, } f(3) = 4$$

그런데 f 가 일대일대응이므로

$$f(1) = 2, \quad f(3) = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f^{-1}(1) - f^{-1}(3) = 2$ 를 만족시키는 $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(3)$ 의 값은

$$f^{-1}(1) = 3, \quad f^{-1}(3) = 1$$

$$\text{또는 } f^{-1}(1) = 4, \quad f^{-1}(3) = 2$$

$$\text{또는 } f^{-1}(1) = 5, \quad f^{-1}(3) = 3$$

이때 ①에서 $f^{-1}(2) = 1$, $f^{-1}(5) = 3$ 이고 함수 f^{-1} 는 일대일대응이므로

$$f^{-1}(1) = 4, \quad f^{-1}(3) = 2$$

$$\therefore f(2) = 3, \quad f(4) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

함수 f 는 일대일대응이므로 ①, ②에서

$$f(5) = 4 \quad \therefore f^{-1}(4) = 5$$

$$\therefore f(4) + f^{-1}(4) = 6$$

689 ㉔ 20

▶ 접근 방법 1 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는 방정식 $f(x)=x$ 의 실근과 같음을 이용한다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수

$y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

이 두 교점의 좌표를 (α, α) , (β, β) 라 하면 α , β 는 이차방정식 $x^2 - 8x + a = x$, 즉 $x^2 - 9x + a = 0$ 의 두 실근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 9, \quad \alpha\beta = a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 두 교점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{(\beta - \alpha)^2 + (\beta - \alpha)^2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore |\beta - \alpha| = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{이므로 } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 대입하면}$$

$$1^2 = 9^2 - 4a, \quad 4a = 80$$

$$\therefore a = 20$$

690 ㉔ 12

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 구하는 도형의 넓이는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

(i) $x < 0$ 일 때

$$\frac{1}{2}x - 2 = x \text{에서 } \frac{1}{2}x = -2 \quad \therefore x = -4$$

(ii) $x \geq 0$ 일 때

$$2x - 2 = x \text{에서 } x = 2$$

(i), (ii)에서 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와

직선 $y=x$ 의 두 교점

의 좌표는 $(-4, -4)$,

$(2, 2)$ 이므로 두 함수

$y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$

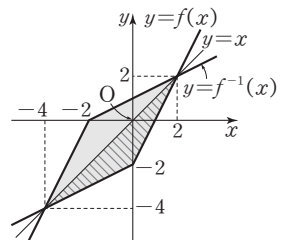
의 그래프와 직선

$y=x$ 는 위의 그림과 같다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) = 12$$

▶ 빗금 친 부분의 넓이



01 유리함수

개념 확인

307쪽

691 ㉠ (1) ㄱ, ㄴ, ㄹ (2) ㄷ, ㄹ, ㅁ

$$692 \text{ ㉠ (1) } \frac{z}{xyz}, \frac{x}{xyz}, \frac{y}{xyz}$$

$$(2) \frac{x-1}{x(x+3)(x-1)}, \frac{x^2}{x(x+3)(x-1)}$$

$$(2) \frac{1}{x^2+3x} = \frac{1}{x(x+3)},$$

$$\frac{x}{x^2+2x-3} = \frac{x}{(x+3)(x-1)} \text{ 를 통분하면 }$$

$$\frac{x-1}{x(x+3)(x-1)}, \frac{x^2}{x(x+3)(x-1)}$$

$$693 \text{ ㉠ (1) } \frac{3a}{x} \quad (2) \frac{x-3}{x(x-2)}$$

$$(2) \frac{x^2-x-6}{x^3-4x} = \frac{(x+2)(x-3)}{x(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{x-3}{x(x-2)}$$

$$694 \text{ ㉠ (1) } \frac{5x-3}{(x+5)(x-2)}$$

$$(2) \frac{3-2x}{(x+1)(x-1)}$$

$$(3) \frac{1}{(x+1)(x+3)}$$

$$(4) \frac{x}{x+1}$$

$$(1) \frac{4}{x+5} + \frac{1}{x-2} = \frac{4(x-2)+x+5}{(x+5)(x-2)}$$

$$= \frac{5x-3}{(x+5)(x-2)}$$

$$(2) \frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} - \frac{2}{x+1}$$

$$= \frac{1-2(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{3-2x}{(x+1)(x-1)}$$

$$(3) \frac{x-3}{x^2+x} \times \frac{x}{x^2-9}$$

$$= \frac{x-3}{x(x+1)} \times \frac{x}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{1}{(x+1)(x+3)}$$

$$(4) \frac{x-5}{x+4} \div \frac{x^2-4x-5}{x^2+4x}$$

$$= \frac{x-5}{x+4} \times \frac{x^2+4x}{x^2-4x-5}$$

$$= \frac{x-5}{x+4} \times \frac{x(x+4)}{(x+1)(x-5)} = \frac{x}{x+1}$$

유제

309-313쪽

$$695 \text{ ㉠ (1) } \frac{2x-1}{x(x-2)}$$

$$(2) \frac{-5x+7}{(x+1)(x+2)(x-3)}$$

$$(1) \frac{x+2}{x^2+4x} + \frac{x+7}{x^2+2x-8}$$

$$= \frac{x+2}{x(x+4)} + \frac{x+7}{(x+4)(x-2)}$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)+x(x+7)}{x(x+4)(x-2)}$$

$$= \frac{2x^2+7x-4}{x(x+4)(x-2)}$$

$$= \frac{(x+4)(2x-1)}{x(x+4)(x-2)} = \frac{2x-1}{x(x-2)}$$

$$(2) \frac{x-2}{x^2+3x+2} - \frac{x-1}{x^2-x-6}$$

$$= \frac{x-2}{(x+1)(x+2)} - \frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{(x-2)(x-3)-(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{-5x+7}{(x+1)(x+2)(x-3)}$$

$$696 \text{ ㉠ (1) } \frac{x+3}{(x+1)(x+2)} \quad (2) \frac{x+4}{(x+2)(x+3)}$$

$$(1) \frac{x^2-3x-18}{x^2+8x+7} \times \frac{x+7}{x^2-4x-12}$$

$$= \frac{(x+3)(x-6)}{(x+1)(x+7)} \times \frac{x+7}{(x+2)(x-6)}$$

$$= \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}$$

$$(2) \frac{x^2+3x-4}{x^2-9} \div \frac{x^2+x-2}{x-3}$$

$$= \frac{x^2+3x-4}{x^2-9} \times \frac{x-3}{x^2+x-2}$$

$$= \frac{(x+4)(x-1)}{(x+3)(x-3)} \times \frac{x-3}{(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{x+4}{(x+2)(x+3)}$$

$$697 \quad \frac{2(x+y)}{x-y}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2x}{x-y} - \frac{2y}{x+y} + \frac{4xy}{x^2-y^2} \\ &= \frac{2x}{x-y} - \frac{2y}{x+y} + \frac{4xy}{(x+y)(x-y)} \\ &= \frac{2x(x+y) - 2y(x-y) + 4xy}{(x+y)(x-y)} \\ &= \frac{2(x^2+2xy+y^2)}{(x+y)(x-y)} \\ &= \frac{2(x+y)^2}{(x+y)(x-y)} \\ &= \frac{2(x+y)}{x-y} \end{aligned}$$

$$698 \quad \frac{x+1}{x+3}$$

$$\begin{aligned} & \frac{x^2+x-12}{x^2+5x+6} \times \frac{x^2+2x}{x^2-x-20} \div \frac{x^2-3x}{x^2-4x-5} \\ &= \frac{x^2+x-12}{x^2+5x+6} \times \frac{x^2+2x}{x^2-x-20} \times \frac{x^2-4x-5}{x^2-3x} \\ &= \frac{(x+4)(x-3)}{(x+2)(x+3)} \times \frac{x(x+2)}{(x+4)(x-5)} \\ & \quad \times \frac{(x+1)(x-5)}{x(x-3)} \\ &= \frac{x+1}{x+3} \end{aligned}$$

$$699 \quad 6$$

주어진 식의 좌변을 통분하여 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3} &= \frac{a(x+3)+b(x+1)}{(x+1)(x+3)} \\ &= \frac{(a+b)x+(3a+b)}{x^2+4x+3} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \frac{(a+b)x+(3a+b)}{x^2+4x+3} = \frac{2x+10}{x^2+4x+3} \text{ 이 } x \text{에 대}$$

한 항등식이므로

$$a+b=2, 3a+b=10$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=4, b=-2$$

$$\therefore a-b=6$$

| 다른 풀이 |

$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$ 이므로 주어진 식의 양변에 $(x+1)(x+3)$ 을 곱하면

$$a(x+3)+b(x+1)=2x+10$$

$$\therefore (a+b)x+(3a+b)=2x+10$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a+b=2, 3a+b=10$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=4, b=-2$$

$$\therefore a-b=6$$

$$700 \quad a=2, b=1$$

주어진 식의 좌변을 통분하여 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{ax+b}{(x+1)^2} - \frac{b}{x-2} &= \frac{(ax+b)(x-2)-b(x+1)^2}{(x+1)^2(x-2)} \\ &= \frac{(a-b)x^2-(2a+b)x-3b}{x^3-3x-2} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \frac{(a-b)x^2-(2a+b)x-3b}{x^3-3x-2} = \frac{x^2-5x-3}{x^3-3x-2} \text{ 이}$$

x 에 대한 항등식이므로

$$a-b=1, 2a+b=5, 3b=3$$

$$\therefore a=2, b=1$$

$$701 \quad a=-3, b=2, c=1$$

주어진 식의 좌변을 통분하여 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3} \\ &= \frac{a(x-2)(x+3)+bx(x+3)+cx(x-2)}{x(x-2)(x+3)} \\ &= \frac{(a+b+c)x^2+(a+3b-2c)x-6a}{x^3+x^2-6x} \end{aligned}$$

이때

$$\frac{(a+b+c)x^2+(a+3b-2c)x-6a}{x^3+x^2-6x}$$

$$= \frac{x+18}{x^3+x^2-6x}$$

이 x 에 대한 항등식이므로

$$a+b+c=0, a+3b-2c=1, -6a=18$$

$$-6a=18 \text{에서 } a=-3 \text{이므로}$$

$$b+c=3, 3b-2c=4$$

두 식을 연립하여 풀면

$$b=2, c=1$$

$$702 \quad 6$$

주어진 식의 좌변을 통분하여 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{a}{x-1} - \frac{2x+b}{x^2+x+1} \\ &= \frac{a(x^2+x+1)-(2x+b)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{(a-2)x^2+(a-b+2)x+(a+b)}{x^3-1} \end{aligned}$$

이때

$$\frac{(a-2)x^2 + (a-b+2)x + (a+b)}{x^3-1} = \frac{3x+c}{x^3-1}$$

가 x 에 대한 항등식이므로

$$a-2=0, a-b+2=3, a+b=c$$

따라서 $a=2, b=1, c=3$ 이므로

$$a+b+c=6$$

$$703 \text{ ㉠} (1) \frac{9x-7}{(x+1)(x-3)} \quad (2) \frac{3}{(x+1)(x+7)}$$

$$(3) \frac{a}{2a-1}$$

$$(1) \frac{x^2-2x+1}{x+1} - \frac{x^2-6x+4}{x-3} \\ = \frac{x(x+1)-3(x+1)+4}{x+1}$$

$$- \frac{x(x-3)-3(x-3)-5}{x-3}$$

$$= \left(x-3 + \frac{4}{x+1}\right) - \left(x-3 - \frac{5}{x-3}\right)$$

$$= \frac{4}{x+1} + \frac{5}{x-3} = \frac{4(x-3)+5(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{9x-7}{(x+1)(x-3)}$$

$$(2) \frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)} \\ + \frac{1}{(x+5)(x+7)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} \right) \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+7} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+7} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{x+7-(x+1)}{(x+1)(x+7)}$$

$$= \frac{3}{(x+1)(x+7)}$$

$$(3) 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{a-1}{a}}}$$

$$= 1 - \frac{1}{1 + \frac{a}{a-1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\frac{a-1+a}{a-1}} = 1 - \frac{1}{\frac{2a-1}{a-1}}$$

$$= 1 - \frac{a-1}{2a-1}$$

$$= \frac{2a-1-(a-1)}{2a-1} = \frac{a}{2a-1}$$

$$704 \text{ ㉠} \frac{4x+2}{x(x+1)(x+2)(x-1)}$$

$$\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x} + \frac{x+3}{x+2} - \frac{x+2}{x+1}$$

$$= \frac{x-1+1}{x-1} - \frac{x+1}{x} + \frac{x+2+1}{x+2} - \frac{x+1+1}{x+1}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) - \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \left(1 + \frac{1}{x+2}\right)$$

$$- \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$= \frac{x-(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x+1-(x+2)}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{(x+1)(x+2)-x(x-1)}{x(x+1)(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{4x+2}{x(x+1)(x+2)(x-1)}$$

$$705 \text{ ㉠} a=3, b=-3, c=6$$

주어진 식의 좌변을 정리하면

$$\frac{1}{x^2-3x} + \frac{1}{x^2+3x} + \frac{1}{x^2+9x+18}$$

$$= \frac{1}{x(x-3)} + \frac{1}{x(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+6)}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} \right)$$

$$+ \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+6} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+6} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{x+6-(x-3)}{(x+6)(x-3)}$$

$$= \frac{3}{(x+6)(x-3)}$$

$$\therefore a=3, b=-3, c=6 (\because b < c)$$

$$706 \text{ ㉠} -3$$

$$1 - \frac{a+2b}{a-b} = \frac{a-b-(a+2b)}{a-b}$$

$$\frac{a}{a-b} - 1 = \frac{a-(a+b)}{a-b}$$

$$= \frac{-3b}{a-b} = -3$$

707 ㉮ (1) $\{x|x \neq 4 \text{인 실수}\}$

(2) $\{x|x \neq -1 \text{인 실수}\}$

(3) $\{x|x \neq \pm 3 \text{인 실수}\}$

(4) $\{x|x \text{는 모든 실수}\}$

(3) $x^2 - 9 = 0$ 에서 $x^2 = 9 \quad \therefore x = \pm 3$

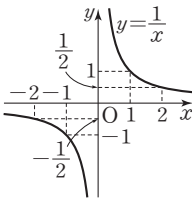
따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x \neq \pm 3 \text{인 실수}\}$

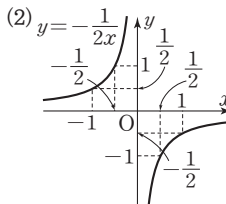
(4) $x^2 + 5 > 0$ 이므로 주어진 함수의 정의역은

$\{x|x \text{는 모든 실수}\}$

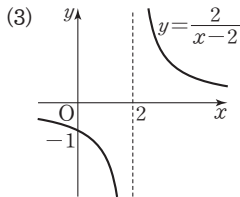
708 ㉮ (1)



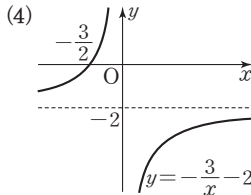
점근선의 방정식: $x=0, y=0$



점근선의 방정식: $x=0, y=0$



점근선의 방정식: $x=2, y=0$



점근선의 방정식: $x=2, y=0$

709 ㉮ (1) $y = \frac{3}{x+1} + 2$ (2) $y = \frac{4}{x+3} - 1$

(3) $y = -\frac{1}{x-2} + 4$ (4) $y = -\frac{6}{x-4} - 3$

(1) $y = \frac{2x+5}{x+1} = \frac{2(x+1)+3}{x+1} = \frac{3}{x+1} + 2$

(2) $y = \frac{1-x}{x+3} = \frac{-(x+3)+4}{x+3} = \frac{4}{x+3} - 1$

(3) $y = \frac{4x-9}{x-2} = \frac{4(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 4$

(4) $y = \frac{6-3x}{x-4} = \frac{-3(x-4)+6}{x-4} = -\frac{6}{x-4} - 3$

710 ㉮ (1) $y = -\frac{1}{x-3}$ (2) $y = \frac{5x+3}{2x-4}$

(1) $y = \frac{3x-1}{x}$ 을 x 에 대하여 풀면

$$xy = 3x - 1, (y-3)x = -1$$

$$\therefore x = -\frac{1}{y-3}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = -\frac{1}{x-3}$$

(2) $y = \frac{4x+3}{2x-5}$ 을 x 에 대하여 풀면

$$(2x-5)y = 4x+3, (2y-4)x = 5y+3$$

$$\therefore x = \frac{5y+3}{2y-4}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y = \frac{5x+3}{2x-4}$$

유제

319~331쪽

711 ㉮ 풀이 참조

$y = -\frac{3}{x-3} + 2$ 의 그래

프는 $y = -\frac{3}{x}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 3만큼, y

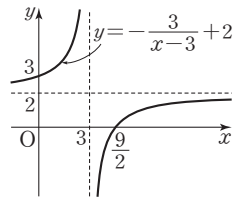
축의 방향으로 2만큼 평행

이동한 것이므로 오른쪽

그림과 같다.

$\therefore$ 정의역: $\{x|x \neq 3 \text{인 실수}\}$, 치역: $\{y|y \neq 2 \text{인 실수}\}$,

점근선의 방정식: $x=3, y=2$



712 ㉮ 풀이 참조

$y = \frac{3-x}{x-2} = \frac{-(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} - 1$

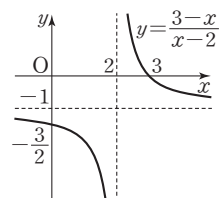
따라서 $y = \frac{3-x}{x-2}$ 의 그래프

는 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의

방향으로 2만큼, y 축의 방향

으로 -1만큼 평행이동한 것

이므로 오른쪽 그림과 같다.



∴ 정의역: $\{x | x \neq 2 \text{인 실수}\}$,
 치역: $\{y | y \neq -1 \text{인 실수}\}$,
 점근선의 방정식: $x=2, y=-1$

713 ㉠ $\{y | y \leq 0 \text{ 또는 } 1 < y \leq 3\}$

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1$$

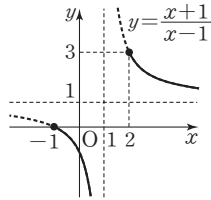
따라서 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$-1 \leq x < 1$ 또는 $x \geq 2$ 에서

$y = \frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프는 오른쪽

쪽 그림과 같으므로 치역은

$$\{y | y \leq 0 \text{ 또는 } 1 < y \leq 3\}$$



714 ㉠ 제4사분면

$$y = \frac{2x+1}{x+1} = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} + 2$$

따라서 $y = \frac{2x+1}{x+1}$ 의 그래

프는 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를

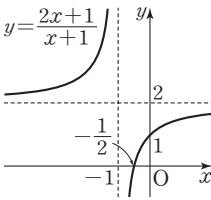
x 축의 방향으로 -1 만큼, y

축의 방향으로 2 만큼 평행이

동한 것이므로 오른쪽 그림

과 같다.

따라서 함수 $y = \frac{2x+1}{x+1}$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은 제4사분면이다.



715 ㉠ 2

$$y = \frac{5x+9}{x+3} = \frac{5(x+3)-6}{x+3}$$

$$= -\frac{6}{x+3} + 5$$

따라서 $y = \frac{5x+9}{x+3}$ 의 그래프는 $y = -\frac{6}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동한 것이다.

즉, $k=-6, a=-3, b=5$ 이므로

$$k-a+b=2$$

716 ㉠ ㉡

$y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{2}{x-a} + b$$

이 식이 $y = \frac{3x-1}{x-1} = \frac{3(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 3$ 과

일치하므로

$$a=1, b=3$$

$$\therefore a+b=4$$

717 ㉠ -1

$y = \frac{5}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{5}{x-3} + 2 = \frac{5+2(x-3)}{x-3} = \frac{2x-1}{x-3}$$

이 식이 $y = \frac{ax-1}{x+b}$ 과 일치하므로

$$a=2, b=-3$$

$$\therefore a+b=-1$$

718 ㉠ ㄱ, ㄷ

$$\text{ㄱ. } y = \frac{-2x-1}{x-1} = \frac{-2(x-1)-3}{x-1} = -\frac{3}{x-1} - 2$$

의 그래프는 $y = -\frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{ㄴ. } y = \frac{5-x}{x-2} = \frac{-(x-2)+3}{x-2} = \frac{3}{x-2} - 1 \text{의 그래}$$

프는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y

축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{ㄷ. } y = \frac{3x+3}{x+2} = \frac{3(x+2)-3}{x+2} = -\frac{3}{x+2} + 3 \text{의 그}$$

래프는 $y = -\frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2

만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{ㄹ. } y = \frac{4x-5}{2x-1} = \frac{2(2x-1)-3}{2x-1} = -\frac{3}{2(x-\frac{1}{2})} + 2$$

의 그래프는 $y = -\frac{3}{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

$\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 보기에서 그 그래프가 $y = -\frac{3}{x}$ 의 그래프를

평행이동하여 겹쳐지는 유리함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

719 ㉡ (1) 최댓값: -2 , 최솟값: $-\frac{7}{2}$

(2) 최댓값: 2 , 최솟값: -3

$$(1) y = \frac{-4x-6}{x+2} = \frac{-4(x+2)+2}{x+2} = \frac{2}{x+2} - 4$$

따라서 $y = \frac{-4x-6}{x+2}$ 의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이다.

$-1 \leq x \leq 2$ 에서

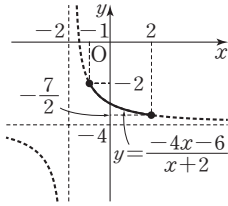
$$y = \frac{-4x-6}{x+2} \text{의 그래프}$$

프는 오른쪽 그림과 같

으므로 $x = -1$ 일 때 최

댓값 -2 , $x = 2$ 일 때

최솟값 $-\frac{7}{2}$ 을 갖는다.



$$(2) y = \frac{3x-9}{x-1} = \frac{3(x-1)-6}{x-1} = -\frac{6}{x-1} + 3$$

따라서 $y = \frac{3x-9}{x-1}$ 의 그래프는 $y = -\frac{6}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

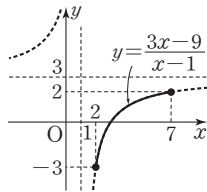
$$2 \leq x \leq 7 \text{에서 } y = \frac{3x-9}{x-1}$$

의 그래프는 오른쪽 그림

과 같으므로 $x = 7$ 에서 최

댓값 2 , $x = 2$ 에서 최솟값

-3 을 갖는다.



720 ㉡ 1

$$y = \frac{4x+a}{x-1} = \frac{4(x-1)+a+4}{x-1} = \frac{a+4}{x-1} + 4$$

$$\text{따라서 } y = \frac{4x+a}{x-1} \text{의 그래프는 } y = \frac{a+4}{x} \text{의 그래프}$$

를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a > -4$ 이므로

$-4 \leq x \leq 0$ 에서

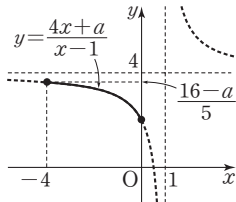
$$y = \frac{4x+a}{x-1} \text{의 그래프는}$$

오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x = -4$ 일 때 최

댓값 $\frac{16-a}{5}$ 를 가지므로

$$\frac{16-a}{5} = 3, 16-a = 15 \quad \therefore a = 1$$



721 ㉡ 2

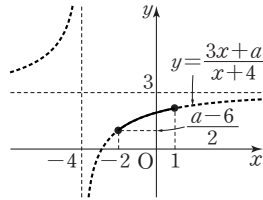
$$y = \frac{3x+a}{x+4} = \frac{3(x+4)+a-12}{x+4} = \frac{a-12}{x+4} + 3$$

$$\text{따라서 } y = \frac{3x+a}{x+4} \text{의 그래프는 } y = \frac{a-12}{x} \text{의 그래프}$$

를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a < 12$ 이므로 $-2 \leq x \leq 1$ 에서 $y = \frac{3x+a}{x+4}$ 의 그

래프는 다음의 그림과 같다.



즉, $x = -2$ 일 때 최솟값 $\frac{a-6}{2}$ 을 가지므로

$$\frac{a-6}{2} = \frac{1}{2}, a-6 = 1$$

$$\therefore a = 7$$

따라서 함수 $y = \frac{3x+7}{x+4}$ 은 $x = 1$ 에서 최댓값 2 를 갖

는다.

722 ㉡ 7

$$y = \frac{-3x}{x+2} = \frac{-3(x+2)+6}{x+2} = \frac{6}{x+2} - 3$$

$$\text{따라서 } y = \frac{-3x}{x+2} \text{의 그래프는 } y = \frac{6}{x} \text{의 그래프를 } x \text{축}$$

의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.

$$-1 \leq x \leq a \text{에서 } y = \frac{-3x}{x+2}$$

의 그래프는 오른쪽 그림과

같으므로 $x = -1$ 일 때 최댓

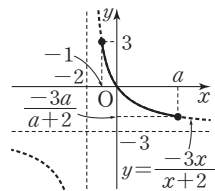
값 3 , $x = a$ 일 때 최솟값

$$\frac{-3a}{a+2} \text{를 갖는다.}$$

$$\text{따라서 } \frac{-3a}{a+2} = -2, b = 3 \text{이므로}$$

$$a = 4, b = 3$$

$$\therefore a + b = 7$$



723 ㉡ $a = 3, b = 1$

$$y = \frac{2x+5}{x+1} = \frac{2(x+1)+3}{x+1} = \frac{3}{x+1} + 2$$

따라서 $y = \frac{2x+5}{x+1}$ 의 그래프는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 점 $(-1, 2)$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 두 직선 $y=x+a$, $y=-x+b$ 가 모두 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$2 = -1 + a, 2 = 1 + b \quad \therefore a = 3, b = 1$$

|다른 풀이|

$y = \frac{2x+5}{x+1} = \frac{3}{x+1} + 2$ 의 그래프는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이고, $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프는 두 직선 $y=x$, $y=-x$ 에 대하여 대칭이므로 $y = \frac{2x+5}{x+1}$ 의 그래프는 두 직선 $y=x$, $y=-x$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 두 직선에 대하여 대칭이다.

두 직선 $y=x$, $y=-x$ 를 평행이동하면

$$y = (x+1) + 2, y = -(x+1) + 2$$

$$\therefore y = x + 3, y = -x + 1$$

이 직선이 $y=x+a$, $y=-x+b$ 와 일치하므로

$$a = 3, b = 1$$

724 ㉡ ④

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+1}{2x-1} = \frac{\frac{1}{2}(2x-1) + \frac{3}{2}}{2x-1} = \frac{\frac{3}{2}}{2x-1} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{4\left(x - \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 $y = \frac{3}{4x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것이므로 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ 이므로 $p+q=1$

725 ㉡ -6

$$y = \frac{ax-7}{x+b} = \frac{a(x+b)-ab-7}{x+b} = \frac{-ab-7}{x+b} + a$$

따라서 $y = \frac{ax-7}{x+b}$ 의 그래프는 $y = \frac{-ab-7}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-b$ 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이므로 점 $(-b, a)$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 두 직선 $y=x+1$, $y=-x-5$ 가 모두 점 $(-b, a)$ 를 지나므로

$$a = -b + 1, a = b - 5$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -2, b = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

726 ㉡ 8

$$y = \frac{ax-5}{4-2x} = \frac{a(x-2) + 2a-5}{-2(x-2)} = \frac{-2a+5}{2(x-2)} - \frac{a}{2}$$

따라서 $y = \frac{ax-5}{4-2x}$ 의 그래프는 $y = \frac{-2a+5}{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 $-\frac{a}{2}$ 만큼

평행이동한 것이므로 점 $\left(2, -\frac{a}{2}\right)$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $b=2$, $-3 = -\frac{a}{2}$ 이므로

$$a = 6, b = 2 \quad \therefore a + b = 8$$

727 ㉡ $a=4, b=2, c=1$

주어진 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=-2$, $y=1$ 이므로 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x+2} + 1 \quad (k > 0) \quad \dots\dots ㉠$$

로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \frac{k}{2} + 1 \quad \therefore k = 4$$

이를 ㉠에 대입하면 $y = \frac{4}{x+2} + 1$

$$\therefore a = 4, b = 2, c = 1$$

728 ㉡ 13

주어진 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=3$ 이므로 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x-2} + 3 \quad (k < 0) \quad \dots\dots ㉠$$

으로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(4, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{k}{4-2} + 3 \quad \therefore k = -6$$

이를 ㉠에 대입하면

$$y = \frac{-6}{x-2} + 3 = \frac{-6+3(x-2)}{x-2} = \frac{3x-12}{x-2}$$

따라서 $a=3$, $b=-12$, $c=-2$ 이므로

$$a - b + c = 13$$

729 ㉡ 4

그래프의 점근선의 방정식이 $x = -1$, $y = -2$ 이므로
함수의 식을

$$y = \frac{k}{x+1} - 2 \quad (k \neq 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

로 놓을 수 있다.

㉡의 그래프가 점 $(0, 5)$ 를 지나므로

$$5 = k - 2 \quad \therefore k = 7$$

이를 ㉡에 대입하면

$$y = \frac{7}{x+1} - 2 = \frac{7 - 2(x+1)}{x+1} = \frac{-2x+5}{x+1}$$

따라서 $a = -2$, $b = 5$, $c = 1$ 이므로

$$a + b + c = 4$$

730 ㉡ 14

주어진 그래프에서 점근선의 방정식이 $x = 2$, $y = 5$ 이
므로 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x-2} + 5 \quad (k > 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

로 놓을 수 있다.

㉡의 그래프가 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \frac{k}{-1-2} + 5 \quad \therefore k = 6$$

이를 ㉡에 대입하면

$$y = \frac{6}{x-2} + 5 = \frac{6 + 5(x-2)}{x-2} = \frac{5x-4}{x-2}$$

$$\therefore a = 5, b = -2$$

또 $y = \frac{5x-4}{x-2}$ 의 그래프가 점 $(3, c)$ 를 지나므로

$$c = \frac{15-4}{3-2} = 11$$

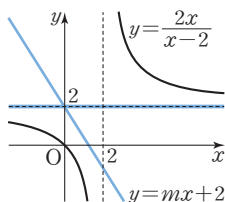
$$\therefore a + b + c = 14$$

731 ㉡ $-4 < m \leq 0$

$$y = \frac{2x}{x-2} = \frac{2(x-2)+4}{x-2} = \frac{4}{x-2} + 2$$

따라서 $y = \frac{2x}{x-2}$ 의 그래프는 $y = \frac{4}{x}$ 의 그래프를 x 축
의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동
한 것이고, $y = mx + 2$ 는 m 의 값에 관계없이 항상 점
 $(0, 2)$ 를 지나는 직선이다.

따라서 $y = \frac{2x}{x-2}$ 의 그래
프와 직선 $y = mx + 2$ 가 만
나지 않으려면 오른쪽 그림
과 같아야 한다.



(i) $m = 0$ 일 때

직선 $y = 2$ 는 점근선이므로 $y = \frac{2x}{x-2}$ 의 그래프와

만나지 않는다.

(ii) $m \neq 0$ 일 때

$$\frac{2x}{x-2} = mx + 2 \text{에서}$$

$$2x = (mx + 2)(x - 2)$$

$$2x = mx^2 - 2(m-1)x - 4$$

$$\therefore mx^2 - 2mx - 4 = 0$$

이 이차방정식의 실근이 존재하지 않아야 하므로

판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-m)^2 + 4m < 0$$

$$m(m+4) < 0$$

$$\therefore -4 < m < 0$$

(i), (ii)에서 구하는 실수 m 의 값의 범위는

$$-4 < m \leq 0$$

732 ㉡ -3

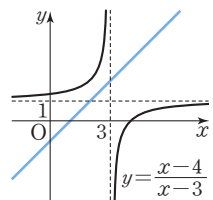
$$y = \frac{x-4}{x-3} = \frac{(x-3)-1}{x-3} = -\frac{1}{x-3} + 1$$

따라서 $y = \frac{x-4}{x-3}$ 의 그래프는 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이
동한 것이고, $y = x + m$ 은 기울기가 1이고 y 절편이
 m 인 직선이다.

따라서 $y = \frac{x-4}{x-3}$ 의 그래프

와 직선 $y = x + m$ 이 만나지
않으려면 오른쪽 그림과 같아
야 한다.



$$\frac{x-4}{x-3} = x + m \text{에서}$$

$$x - 4 = (x + m)(x - 3)$$

$$x - 4 = x^2 + (m-3)x - 3m$$

$$\therefore x^2 + (m-4)x - 3m + 4 = 0$$

이 이차방정식의 실근이 존재하지 않아야 하므로 판별

식을 D 라 하면

$$D = (m-4)^2 - 4(-3m+4) < 0$$

$$m^2 + 4m < 0$$

$$m(m+4) < 0$$

$$\therefore -4 < m < 0$$

따라서 구하는 정수 m 의 최솟값은 -3 이다.

733 ㉡ -4

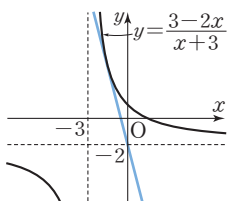
$$y = \frac{3-2x}{x+3} = \frac{-2(x+3)+9}{x+3} = \frac{9}{x+3} - 2$$

따라서 $y = \frac{3-2x}{x+3}$ 의 그래프는 $y = \frac{9}{x}$ 의 그래프를 x

축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이고, $y = ax - 2$ 는 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(0, -2)$ 를 지나는 직선이다.

따라서 $y = \frac{3-2x}{x+3}$ 의 그래

프와 직선 $y = ax - 2$ 가 한 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $a=0$ 일 때

직선 $y = -2$ 는 점근선이므로 $y = \frac{3-2x}{x+3}$ 의 그래

프와 만나지 않는다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때

$$\frac{3-2x}{x+3} = ax - 2 \text{에서 } 3-2x = (ax-2)(x+3)$$

$$3-2x = ax^2 + (3a-2)x - 6$$

$$\therefore ax^2 + 3ax - 9 = 0$$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D = (3a)^2 + 36a = 0, a^2 + 4a = 0$$

$$a(a+4) = 0 \quad \therefore a = -4 (\because a \neq 0)$$

(i), (ii)에서 구하는 실수 a 의 값은

$$a = -4$$

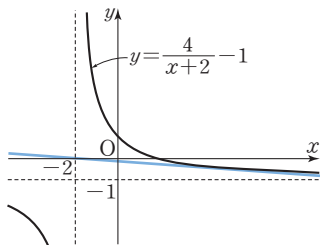
734 ㉡ $a \geq -\frac{1}{16}$

함수 $y = \frac{4}{x+2} - 1$ 의 그래프는 $y = \frac{4}{x}$ 의 그래프를 x

축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이고, $y = a(x+2)$ 는 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 0)$ 을 지나는 직선이다.

따라서 $y = \frac{4}{x+2} - 1$ 의 그래프와 직선 $y = a(x+2)$

가 만나려면 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $a=0$ 일 때

직선 $y=0$ 은 x 축이므로 $y = \frac{4}{x+2} - 1$ 의 그래프

와 만난다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때

$$\frac{4}{x+2} - 1 = a(x+2) \text{에서 } \frac{2-x}{x+2} = a(x+2)$$

$$2-x = a(x+2)^2$$

$$2-x = ax^2 + 4ax + 4a$$

$$\therefore ax^2 + (4a+1)x + 4a - 2 = 0$$

이 이차방정식의 실근이 존재해야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D = (4a+1)^2 - 4a(4a-2) \geq 0, 16a+1 \geq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{16} \leq a < 0 \text{ 또는 } a > 0 (\because a \neq 0)$$

(i), (ii)에서 구하는 실수 a 의 값의 범위는

$$a \geq -\frac{1}{16}$$

735 ㉡ $-\frac{1}{3}$

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{x-1}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x-1-(x+1)}{x+1}}{\frac{x-1+x+1}{x+1}} \\ &= \frac{-2}{x+1} = -\frac{2}{x+1} \end{aligned}$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-\frac{2}{x+1} - 1}{-\frac{2}{x+1} + 1} = \frac{\frac{-1-x}{x+1}}{\frac{-1+x}{x+1}} = \frac{1+x}{1-x} \end{aligned}$$

$$f^4(x) = (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x))$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1+x}{1-x} - 1}{\frac{1+x}{1-x} + 1} = \frac{\frac{1+x-(1-x)}{1-x}}{\frac{1+x+1-x}{1-x}} \\ &= \frac{2x}{2} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2x}{2} = x \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\therefore f^2(x) = f^6(x) = f^{10}(x) = \dots = f^{4n-2}(x) = -\frac{1}{x}$$

(단, n 은 자연수)

$$\therefore f^{30}(3) = f^{4 \times 8 - 2}(3) = -\frac{1}{3}$$

736 ㉮ $a=3, b=1, c=2$

$y = \frac{2x-1}{-x+a}$ 이라 하고 x 에 대하여 풀면

$$(-x+a)y = 2x-1, (y+2)x = ay+1$$

$$\therefore x = \frac{ay+1}{y+2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{ax+1}{x+2}$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{ax+1}{x+2}$$

$$\cong, \frac{ax+1}{x+2} = \frac{3x+b}{x+c} \text{에서}$$

$$a=3, b=1, c=2$$

737 ㉮ $\frac{5}{101}$

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$$

$$= \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1} = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x+2x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

$$f^4(x) = (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x))$$

$$= \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1}+1} = \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x+3x+1}{3x+1}} = \frac{x}{4x+1}$$

⋮

따라서 $f^n(x) = \frac{x}{nx+1}$ (n 은 자연수)이므로

$$f^{20}(x) = \frac{x}{20x+1}$$

$$\therefore f^{20}(5) = \frac{5}{101}$$

738 ㉮ 2

$y = \frac{ax-3}{x-2}$ 이라 하고 x 에 대하여 풀면

$$(x-2)y = ax-3, (y-a)x = 2y-3$$

$$\therefore x = \frac{2y-3}{y-a}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{2x-3}{x-a}$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{x-a}$$

$f = f^{-1}$ 에서 $\frac{ax-3}{x-2} = \frac{2x-3}{x-a}$ 이므로 $a=2$

| 다른 풀이 |

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= \frac{af(x)-3}{f(x)-2} = \frac{a \times \frac{ax-3}{x-2} - 3}{\frac{ax-3}{x-2} - 2} \\ &= \frac{\frac{a^2x-3a-3(x-2)}{x-2}}{\frac{ax-3-2(x-2)}{x-2}} \\ &= \frac{(a^2-3)x-3a+6}{(a-2)x+1} \end{aligned}$$

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$ 에서

$$\frac{(a^2-3)x-3a+6}{(a-2)x+1} = x$$

$$\therefore (a^2-3)x-3a+6 = (a-2)x^2+x$$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a-2=0, a^2-3=1, -3a+6=0$$

$$\therefore a=2$$

연습문제

332~334쪽

739 ㉮ $\frac{x+2}{x-2}$

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-2} + \frac{2}{x+3} - \frac{x-7}{x^2+x-6} \\ &= \frac{x+1}{x-2} + \frac{2}{x+3} - \frac{x-7}{(x+3)(x-2)} \\ &= \frac{(x+1)(x+3)+2(x-2)-(x-7)}{(x+3)(x-2)} \\ &= \frac{x^2+5x+6}{(x+3)(x-2)} \\ &= \frac{(x+2)(x+3)}{(x+3)(x-2)} \\ &= \frac{x+2}{x-2} \end{aligned}$$

740 ㉮ 10

주어진 식의 좌변을 통분하여 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x^2-3x+2} + \frac{4}{1-x} &= \frac{3x}{(x-1)(x-2)} - \frac{4}{x-1} \\ &= \frac{3x-4(x-2)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{-x+8}{(x-1)(x-2)} \end{aligned}$$

이때 $\frac{-x+8}{(x-1)(x-2)} = \frac{cx+d}{(x-a)(x-b)}$ 가 x 에 대한 항등식이므로
 $a=1, b=2, c=-1, d=8$
 또는 $a=2, b=1, c=-1, d=8$
 $\therefore ab-cd=2-(-8)=10$

741 ㉡ ⑤

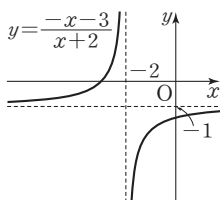
$y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y = \frac{3}{x-4} + 5$
 이 함수의 그래프가 점 $(5, a)$ 를 지나므로
 $a = \frac{3}{5-4} + 5 = 8$

742 ㉡ ⑤

$f(x) = \frac{3x+k}{x+4} = \frac{3(x+4)+k-12}{x+4}$
 $= \frac{k-12}{x+4} + 3$
 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y = \frac{k-12}{(x+2)+4} + 3 + 3$
 $\therefore y = \frac{k-12}{x+6} + 6$
 $\therefore g(x) = \frac{k-12}{x+6} + 6$
 즉, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=-6, y=6$ 이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-6, 6)$ 이다.
 따라서 점 $(-6, 6)$ 이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로
 $6 = \frac{-18+k}{-6+4} \quad \therefore k=6$

743 ㉡ ㄷ, ㄹ

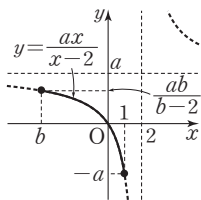
$y = \frac{-x-3}{x+2} = \frac{-(x+2)-1}{x+2} = -\frac{1}{x+2} - 1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 $\therefore y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.



ㄴ. 점근선의 방정식은 $x=-2, y=-1$ 이다.
 ㄷ. 점근선의 교점 $(-2, -1)$ 을 지나고 기울기가 1 인 직선 $y=(x+2)-1$, 즉 $y=x+1$ 에 대하여 대칭이다.
 ㄹ. 그래프는 제1사분면을 지나지 않는다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

744 ㉡ -1

$y = \frac{ax}{x-2} = \frac{a(x-2)+2a}{x-2} = \frac{2a}{x-2} + a$
 따라서 $y = \frac{ax}{x-2}$ 의 그래프는 $y = \frac{2a}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이고 $a>0$ 이므로 $b \leq x \leq 1$ 에서 $y = \frac{ax}{x-2}$ 의 그래프는 위의 그림과 같다. ▶▶▶▶▶ ①
 따라서 $x=b$ 일 때 최댓값 $\frac{ab}{b-2}$, $x=1$ 일 때 최솟값 $-a$ 를 갖는다. ▶▶▶▶▶ ②
 $\therefore \frac{ab}{b-2} = 2, -a = -3$
 $-a = -3$ 에서 $a=3$
 이를 $\frac{ab}{b-2} = 2$ 에 대입하면
 $\frac{3b}{b-2} = 2$
 $\therefore b = -4$
 $\therefore a+b = -1$ ▶▶▶▶▶ ③



단계	채점 기준	비율
①	$y = \frac{ax}{x-2}$ 의 그래프 그리기	40 %
②	최댓값, 최솟값을 a, b 에 대한 식으로 나타내기	30 %
③	$a+b$ 의 값 구하기	30 %

745 ㉡ ④

주어진 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=3, y=-1$ 이므로 함수의 식을
 $y = \frac{k}{x-3} - 1 (k>0)$ ㉠
 로 놓을 수 있다.

㉠의 그래프가 점 $(0, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = \frac{k}{-3} - 1$$

$$\therefore k=3$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{x-3} - 1 = \frac{3-(x-3)}{x-3} \\ &= \frac{6-x}{x-3} = \frac{x-6}{-x+3} \end{aligned}$$

$$\therefore a=-6, b=-1, c=3$$

$$\therefore abc=18$$

746 ㉡ -1

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g)^{-1}(-4) &= (g^{-1} \circ f)(-4) \\ &= g^{-1}(f(-4)) \\ &= g^{-1}(-1) \end{aligned}$$

$g^{-1}(-1)=k$ (k 는 상수)라 하면 $g(k)=-1$ 이므로

$$\frac{2k+3}{k} = -1, 2k+3 = -k$$

$$\therefore k=-1$$

$$\therefore (f^{-1} \circ g)^{-1}(-4) = g^{-1}(-1) = -1$$

747 ㉢ 1

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= - \left\{ \frac{x^2}{(x-y)(z-x)} + \frac{y^2}{(x-y)(y-z)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^2}{(y-z)(z-x)} \right\} \\ &= - \frac{x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) \\ &= x^2(y-z) + y^2z - xy^2 + xz^2 - yz^2 \\ &= x^2(y-z) - x(y^2 - z^2) + yz(y-z) \\ &= x^2(y-z) - x(y+z)(y-z) + yz(y-z) \\ &= (y-z)\{x^2 - (y+z)x + yz\} \\ &= (y-z)(x-y)(x-z) \\ &= -(x-y)(y-z)(z-x) \end{aligned}$$

이므로 이를 ㉠에 대입하면

$$(\text{주어진 식}) = - \frac{-(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = 1$$

748 ㉣ ③

$$\begin{aligned} \frac{2}{f(x)} &= \frac{2}{x^2+2x} = \frac{2}{x(x+2)} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{2}{f(1)} + \frac{2}{f(3)} + \frac{2}{f(5)} + \dots + \frac{2}{f(49)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{51}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{51} = \frac{50}{51} \end{aligned}$$

749 ㉤ $-\frac{1}{2}$

$$\frac{\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}} = \frac{\frac{x(x-1)+x+1}{(x+1)(x-1)}}{\frac{x-1+x+1}{(x+1)(x-1)}} = \frac{x^2+1}{2x}$$

이때 $x^2+x+1=0$ 에서 $x^2+1=-x$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}} &= \frac{x^2+1}{2x} = \frac{-x}{2x} \\ &= -\frac{1}{2} \quad (\because x \neq 0) \end{aligned}$$

|참고| $x=0$ 일 때 $x^2+x+1=0$ 이 성립하지 않으므로 $x \neq 0$ 이다.

750 ㉥ 2

$$y = \frac{2x+1}{x-k} = \frac{2(x-k)+2k+1}{x-k} = \frac{2k+1}{x-k} + 2$$

따라서 $y = \frac{2x+1}{x-k}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=k, y=2$$

$$y = \frac{1}{x+4} - k \text{의 그래프의 점근선의 방정식은}$$

$$x=-4, y=-k$$

$k > 0$ 이므로 네 점근선으로

둘러싸인 부분은 오른쪽 그

림과 같은 직사각형이다.

이때 직사각형의 넓이가 24

이므로

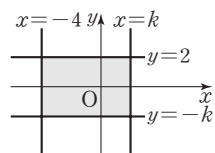
$$\{k - (-4)\} \times \{2 - (-k)\} = 24$$

$$(k+4)(k+2) = 24$$

$$k^2 + 6k - 16 = 0, (k+8)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = -8 \text{ 또는 } k = 2$$

따라서 양수 k 의 값은 2이다.



751 ㉦ $0 \leq a < 1$ 또는 $a > 1$

$$y = \frac{2a-x}{x-2} = \frac{-(x-2)+2a-2}{x-2} = \frac{2a-2}{x-2} - 1$$

따라서 $y = \frac{2a-x}{x-2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2, y=-1$ 이고, 그래프는 점 $(0, -a)$ 를 지난다.

(i) $2a-2>0$, 즉 $a>1$ 일 때
 그래프가 제2사분면을 지나지 않는다.

(ii) $2a-2<0$, 즉 $a<1$ 일 때
 $x=0$ 일 때 $y\leq 0$ 이어야 하므로

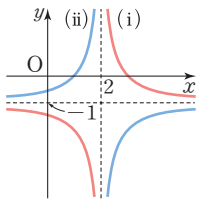
$$-a \leq 0 \quad \therefore a \geq 0$$

그런데 $a<1$ 이므로

$$0 \leq a < 1$$

(i), (ii)에서 구하는 상수 a 의 값의 범위는

$$0 \leq a < 1 \text{ 또는 } a > 1$$



752 ㉡ ①

$n(A \cap B)=1$ 이라면 함수 $y = \frac{x+2}{5-x}$ 의 그래프와 직선 $y=x+m$ 이 한 점에서 만나야 한다.

$$\frac{x+2}{5-x} = x+m \text{에서}$$

$$x+2 = (5-x)(x+m)$$

$$x+2 = -x^2 - (m-5)x + 5m$$

$$\therefore x^2 + (m-4)x - 5m + 2 = 0$$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D = (m-4)^2 - 4(-5m+2) = 0$$

$$\therefore m^2 + 12m + 8 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 m 의 값의 합은 -12 이다.

753 ㉡ 8

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= \frac{\frac{x-1}{x} - 1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{\frac{x-1-x}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{-1}{x-1}$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$$

$$= \frac{\frac{-1}{x-1} - 1}{\frac{-1}{x-1}} = \frac{\frac{-1-(x-1)}{x-1}}{\frac{-1}{x-1}} = x$$

⋮

$$\therefore f^3(x) = f^6(x) = f^9(x) = \cdots = f^{3n}(x) = x$$

(단, n 은 자연수)

$$\therefore f^{45}(8) = f^{3 \times 15}(8) = 8$$

754 ㉡ -4

$y = \frac{3x+1}{x-1}$ 이라 하고 x 에 대하여 풀면

$$(x-1)y = 3x+1, (y-3)x = y+1$$

$$\therefore x = \frac{y+1}{y-3}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{x+1}{x-3}$

$$\begin{aligned} \therefore g(x) &= \frac{x+1}{x-3} = \frac{(x-3)+4}{x-3} \\ &= \frac{4}{x-3} + 1 \end{aligned}$$

$y=g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \frac{4}{x-m-3} + 1 + n$$

$$\text{이때 } f(x) = \frac{3x+1}{x-1} = \frac{3(x-1)+4}{x-1} = \frac{4}{x-1} + 3 \text{이}$$

므로

$$\frac{4}{x-m-3} + 1 + n = \frac{4}{x-1} + 3$$

$$-m-3 = -1, 1+n = 3$$

$$\therefore m = -2, n = 2$$

$$\therefore mn = -4$$

755 ㉡ $4\sqrt{3}$

| 접근 방법 | 직사각형의 변의 길이는 양수이고 직사각형

PRSQ의 둘레의 길이가 유리식이므로 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

점 P의 좌표를 $(k, \frac{3}{k-4} + 3)$ ($k>4$)이라 하면

$$\overline{PR} = k-4$$

$$\overline{PQ} = \frac{3}{k-4} + 3 - 3 = \frac{3}{k-4}$$

따라서 직사각형 PRSQ의 둘레의 길이는

$$2\left(k-4 + \frac{3}{k-4}\right)$$

이때 $k-4>0, \frac{3}{k-4}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} k-4 + \frac{3}{k-4} &\geq 2\sqrt{(k-4) \times \frac{3}{k-4}} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

(단, 등호는 $k-4 = \frac{3}{k-4}$, 즉 $k=4+\sqrt{3}$ 일 때 성립)

따라서 직사각형 PRSQ의 둘레의 길이의 최솟값은

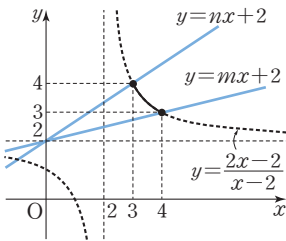
$$2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

| 접근 방법 | 주어진 부등식을 두 직선과 유리함수의 그래프의 위치 관계로 생각한다.

$$f(x) = \frac{2x-2}{x-2} \text{라 하면}$$

$$f(x) = \frac{2x-2}{x-2} = \frac{2(x-2)+2}{x-2} = \frac{2}{x-2} + 2$$

$f(3)=4$, $f(4)=3$ 이고 $y=mx+2$, $y=nx+2$ 는 각각 m , n 의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 2)$ 를 지나는 직선이므로 $3 \leq x \leq 4$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프와 두 직선 $y=mx+2$, $y=nx+2$ 는 다음 그림과 같다.



$3 \leq x \leq 4$ 에서 부등식 $mx+2 \leq \frac{2x-2}{x-2} \leq nx+2$ 가

항상 성립하려면 기울기 m 의 값은 직선 $y=mx+2$ 가 점 $(4, 3)$ 을 지날 때보다 작거나 같아야 하고, 기울기 n 의 값은 직선 $y=nx+2$ 가 점 $(3, 4)$ 를 지날 때보다 크거나 같아야 한다.

(i) 직선 $y=mx+2$ 가 점 $(4, 3)$ 을 지날 때

$$3=4m+2 \quad \therefore m=\frac{1}{4}$$

즉, 조건을 만족시키려면

$$m \leq \frac{1}{4}$$

(ii) 직선 $y=nx+2$ 가 점 $(3, 4)$ 를 지날 때

$$4=3n+2 \quad \therefore n=\frac{2}{3}$$

즉, 조건을 만족시키려면

$$n \geq \frac{2}{3}$$

(i), (ii)에서 m 의 최댓값은 $\frac{1}{4}$, n 의 최솟값은 $\frac{2}{3}$ 이므로 그 합은

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$$

01 무리함수

개념 확인

337쪽

757 ㉠ (1) $x \geq -4$

(2) $x \geq 5$

(3) $-3 < x \leq 2$

(4) $-2 \leq x < \frac{1}{2}$

(1) $x+4 \geq 0$ 에서 $x \geq -4$

(2) $x-5 \geq 0$ 에서 $x \geq 5$

$3x+6 \geq 0$ 에서 $x \geq -2$

$\therefore x \geq 5$

(3) $8-4x \geq 0$ 에서 $x \leq 2$

$x+3 > 0$ 에서 $x > -3$

$\therefore -3 < x \leq 2$

(4) $x+2 \geq 0$ 에서 $x \geq -2$

$1-2x > 0$ 에서 $x < \frac{1}{2}$

$\therefore -2 \leq x < \frac{1}{2}$

758 ㉠ (1) $\sqrt{x}+1$

(2) $\sqrt{x+9}+3$

(3) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}$

(4) $2x-1+2\sqrt{x^2-x}$

$$\begin{aligned} (1) \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} &= \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} \\ &= \sqrt{x}+1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \frac{x}{\sqrt{x+9}-3} &= \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)} \\ &= \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x+9-9} \\ &= \sqrt{x+9}+3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \frac{4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}} &= \frac{4(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})} \\ &= \frac{4(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}{x+2-(x-2)} \\ &= \sqrt{x+2}+\sqrt{x-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} &= \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})} \\
 &= \frac{x+2\sqrt{x^2-x}+x-1}{x-(x-1)} \\
 &= 2x-1+2\sqrt{x^2-x}
 \end{aligned}$$

$$759 \text{ ㉠ (1) } \frac{4}{1-x} \quad (2) \frac{2\sqrt{y}}{x-y}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \frac{2}{1+\sqrt{x}} + \frac{2}{1-\sqrt{x}} &= \frac{2(1-\sqrt{x})+2(1+\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})} \\
 &= \frac{4}{1-x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} &= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}-(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \\
 &= \frac{2\sqrt{y}}{x-y}
 \end{aligned}$$

유제

339쪽

$$760 \text{ ㉠ } 2x$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} \\
 &= \frac{x-\sqrt{x^2-1}+x+\sqrt{x^2-1}}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})} \\
 &= \frac{2x}{x^2-(x^2-1)} \\
 &= 2x
 \end{aligned}$$

$$761 \text{ ㉠ } 4+2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\
 &= \frac{x-2\sqrt{x}+1+x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \\
 &= \frac{2(x+1)}{x-1} \\
 &= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1} \quad \leftarrow x=\sqrt{3} \text{을 대입} \\
 &= \frac{2(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \\
 &= \frac{2(3+2\sqrt{3}+1)}{3-1} \\
 &= 4+2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$762 \text{ ㉠ } \sqrt{x+3}-\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}} \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}} \\
 &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})} \\
 &\quad + \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})} \\
 &\quad + \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3})} \\
 &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{x-(x+1)} + \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}}{x+1-(x+2)} \\
 &\quad + \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}}{x+2-(x+3)} \\
 &= -\{(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})+(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}) \\
 &\quad + (\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3})\} \\
 &= \sqrt{x+3}-\sqrt{x}
 \end{aligned}$$

$$763 \text{ ㉠ } \sqrt{2}-1$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\
 &= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1 \\
 y &= \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} \\
 &= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1 \\
 \therefore x+y &= 2\sqrt{2}, \quad x-y=2, \quad xy=1 \\
 \therefore \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} &= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \\
 &= \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y} \\
 &= \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2}-1
 \end{aligned}$$

개념 확인

343쪽

$$\begin{aligned}
 764 \text{ ㉠ (1) } \{x|x \geq -6\} \quad (2) \{x|x \geq 2\} \\
 (3) \{x|x \leq 5\} \quad (4) \left\{x \left| x \leq \frac{2}{3} \right. \right\}
 \end{aligned}$$

$$(1) x+6 \geq 0 \text{에서 } x \geq -6$$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$$\{x|x \geq -6\}$$

(2) $2x-4 \geq 0$ 에서 $2x \geq 4$

$\therefore x \geq 2$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x | x \geq 2\}$

(3) $5-x \geq 0$ 에서 $-x \geq -5$

$\therefore x \leq 5$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x | x \leq 5\}$

(4) $2-3x \geq 0$ 에서 $-3x \geq -2$

$\therefore x \leq \frac{2}{3}$

따라서 주어진 함수의 정의역은

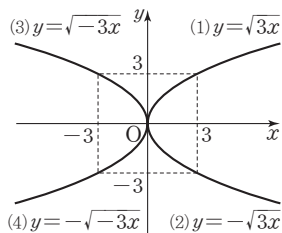
$\{x | x \leq \frac{2}{3}\}$

765 (1) 정의역: $\{x | x \geq 0\}$, 치역: $\{y | y \geq 0\}$

(2) 정의역: $\{x | x \geq 0\}$, 치역: $\{y | y \leq 0\}$

(3) 정의역: $\{x | x \leq 0\}$, 치역: $\{y | y \geq 0\}$

(4) 정의역: $\{x | x \leq 0\}$, 치역: $\{y | y \leq 0\}$



766 (1) $y = \sqrt{5(x - \frac{1}{5})} - 3$

(2) $y = -\sqrt{2(x+4)} + 1$

유제

345-355쪽

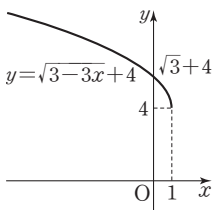
767 풀이 참조

$y = \sqrt{3-3x} + 4 = \sqrt{-3(x-1)} + 4$

따라서 $y = \sqrt{3-3x} + 4$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore$ 정의역: $\{x | x \leq 1\}$,

치역: $\{y | y \geq 4\}$



768 풀이 참조

$y = -\sqrt{2x+4} + 2 = -\sqrt{2(x+2)} + 2$

따라서 $y = -\sqrt{2x+4} + 2$

의 그래프는 $y = -\sqrt{2x}$ 의

그래프를 x 축의 방향으로

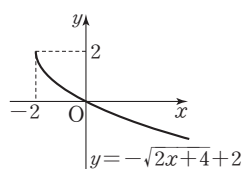
-2 만큼, y 축의 방향으로

2 만큼 평행이동한 것이므로

위의 그림과 같다.

$\therefore$ 정의역: $\{x | x \geq -2\}$,

치역: $\{y | y \leq 2\}$



769 $\{x | x \geq 6\}$

$y = \sqrt{3x-9} - 2 = \sqrt{3(x-3)} - 2$

따라서 $y = \sqrt{3x-9} - 2$ 의 그래프는 $y = \sqrt{3x}$ 의 그래

프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼

평행이동한 것이다.

이때 $y=1$ 을 $y = \sqrt{3x-9} - 2$ 에 대입하면

$1 = \sqrt{3x-9} - 2, \sqrt{3x-9} = 3$

양변을 제곱하면

$3x-9=9 \quad \therefore x=6$

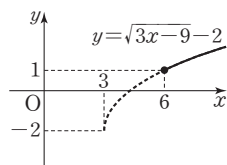
따라서 $y = \sqrt{3x-9} - 2$ 의

그래프는 점 $(6, 1)$ 을 지나

므로 $y \geq 1$ 에서 그 그래프

는 오른쪽 그림과 같다.

$\therefore$ 정의역: $\{x | x \geq 6\}$



770 제3사분면

$y = \sqrt{4-x} - 1 = \sqrt{-(x-4)} - 1$

따라서 $y = \sqrt{4-x} - 1$ 의 그래

프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x

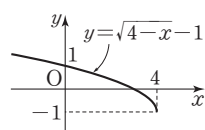
축의 방향으로 4만큼, y 축의

방향을 -1 만큼 평행이동

한 것이므로 위의 그림과 같다.

따라서 $y = \sqrt{4-x} - 1$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면

은 제3사분면이다.



771 4

$y = \sqrt{3x+1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼,

y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y = \sqrt{3(x+1)} + 1 + 3$

$\therefore y = \sqrt{3x+4} + 3$

이 함수의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{3(-x) + 4} + 3$$

$$\therefore y = \sqrt{-3x + 4} + 3$$

이 식이 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 와 일치하므로

$$a = -3, b = 4, c = 3$$

$$\therefore a + b + c = 4$$

772 ㉓ 3

$y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{-(x-a)} + b$$

$$\therefore y = \sqrt{-x+a} + b$$

이 함수의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \sqrt{-(-x)+a} + b$$

$$\therefore y = -\sqrt{x+a} - b$$

이 식이 $y = -\sqrt{x-2} - 5$ 와 일치하므로

$$a = -2, b = 5$$

$$\therefore a + b = 3$$

773 ㉓ ④

$y = \sqrt{x-1} + a$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{x-b-1} + a - 1$$

이 식이 $y = \sqrt{x-4}$ 와 일치하므로

$$-b-1 = -4, a-1 = 0$$

따라서 $a = 1, b = 3$ 이므로

$$a + b = 4$$

774 ㉓ ㄱ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄷ. $y = -\sqrt{2x} + 1$ 의 그래프는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y = \sqrt{2x+1} = \sqrt{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{2x}$

의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 보기에서 그 그래프가 무리함수 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 무리함수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

775 ㉓ (1) 최댓값: 5, 최솟값: 3

(2) 최댓값: 2, 최솟값: 0

$$(1) y = \sqrt{3-x} + 2 = \sqrt{-(x-3)} + 2$$

따라서 $y = \sqrt{3-x} + 2$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

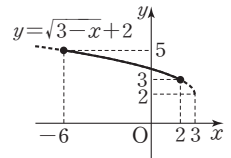
$-6 \leq x \leq 2$ 에서

$y = \sqrt{3-x} + 2$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같으며

로 $x = -6$ 일 때 최댓값

5, $x = 2$ 일 때 최솟값 3을 갖는다.



$$(2) y = -\sqrt{2x-4} + 4 = -\sqrt{2(x-2)} + 4$$

따라서 $y = -\sqrt{2x-4} + 4$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

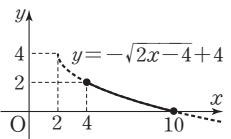
$4 \leq x \leq 10$ 에서

$y = -\sqrt{2x-4} + 4$ 의 그

래프는 오른쪽 그림과 같

으므로 $x = 4$ 일 때 최댓

값 2, $x = 10$ 일 때 최솟값 0을 갖는다.



776 ㉓ 6

$$y = -\sqrt{a-x} + 5 = -\sqrt{-(x-a)} + 5$$

따라서 $y = -\sqrt{a-x} + 5$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a > 5$ 이므로

$-3 \leq x \leq 5$ 에서

$y = -\sqrt{a-x} + 5$ 의 그

래프는 오른쪽 그림과

같다.

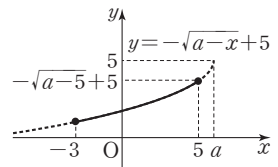
따라서 $x = 5$ 일 때 최댓값 $-\sqrt{a-5} + 5$ 를 가지므로

$$-\sqrt{a-5} + 5 = 4$$

$$\sqrt{a-5} = 1$$

양변을 제곱하면

$$a-5 = 1 \quad \therefore a = 6$$



777 ㉔ -5

$$y = -\sqrt{3x+9} + a = -\sqrt{3(x+3)} + a$$

따라서 $y = -\sqrt{3x+9} + a$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

$0 \leq x \leq 9$ 에서

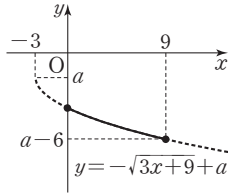
$y = -\sqrt{3x+9} + a$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, $x=9$ 일 때 최솟값

$a-6$ 을 가지므로

$$a-6 = -8 \quad \therefore a = -2$$

따라서 함수 $y = -\sqrt{3x+9} - 2$ 는 $x=0$ 에서 최댓값 -5 를 갖는다.



778 ㉔ 12

$$y = \sqrt{8-2x} + b = \sqrt{-2(x-4)} + b$$

따라서 $y = \sqrt{8-2x} + b$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다.

$a \leq x \leq 2$ 에서

$y = \sqrt{8-2x} + b$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같

으므로 $x=a$ 일 때 최댓

값 $\sqrt{8-2a} + b$, $x=2$ 일

때 최솟값 $b+2$ 를 갖는다.

따라서 $\sqrt{8-2a} + b = 1$, $b+2 = -1$ 이므로

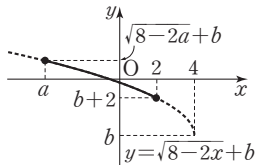
$$\sqrt{8-2a} = 1 - b, \quad b = -3$$

$$\therefore \sqrt{8-2a} = 4$$

양변을 제곱하면

$$8-2a = 16 \quad \therefore a = -4$$

$$\therefore ab = 12$$



779 ㉔ $a=2$, $b=4$, $c=1$

주어진 그래프는 $y = -\sqrt{ax}$ ($a > 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$$y = -\sqrt{a(x+2)} + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

로 놓을 수 있다.

㉔의 그래프가 점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = -\sqrt{2a} + 1, \quad \sqrt{2a} = 2$$

양변을 제곱하면

$$2a = 4 \quad \therefore a = 2$$

이를 ㉔에 대입하면

$$y = -\sqrt{2(x+2)} + 1 = -\sqrt{2x+4} + 1$$

$$\therefore b = 4, \quad c = 1$$

780 ㉔ 2

주어진 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ ($a < 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$$y = \sqrt{a(x-2)} - 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

로 놓을 수 있다.

㉔의 그래프가 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \sqrt{-2a} - 2, \quad \sqrt{-2a} = 2$$

양변을 제곱하면

$$-2a = 4 \quad \therefore a = -2$$

이를 ㉔에 대입하면

$$y = \sqrt{-2(x-2)} - 2 = \sqrt{-2x+4} - 2$$

이 함수의 그래프가 점 $(-6, k)$ 를 지나므로

$$k = \sqrt{12+4} - 2 = 2$$

781 ㉔ 7

주어진 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ ($a > 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -6 만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$$y = \sqrt{a(x+2)} - 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

으로 놓을 수 있다.

㉔의 그래프가 점 $(1, -3)$ 을 지나므로

$$-3 = \sqrt{3a} - 6, \quad \sqrt{3a} = 3$$

양변을 제곱하면

$$3a = 9 \quad \therefore a = 3$$

이를 ㉔에 대입하면

$$y = \sqrt{3(x+2)} - 6 = \sqrt{3x+6} - 6$$

$$\therefore b = -6$$

따라서 $y = \sqrt{3x+6} - 6$ 의 그래프가 점 $(c, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \sqrt{3c+6} - 6, \quad \sqrt{3c+6} = 6$$

양변을 제곱하면

$$3c+6 = 36 \quad \therefore c = 10$$

$$\therefore a+b+c = 7$$

782 ㉔ 24

주어진 그래프는 $y=a\sqrt{bx}$ ($a<0, b<0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$$y=a\sqrt{b(x-3)}+4=a\sqrt{bx-3b}+4 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

로 놓을 수 있다.

$$\text{즉, } a\sqrt{bx-3b}+4=a\sqrt{bx+9}+c \text{ 이므로}$$

$$-3b=9, 4=c$$

$$\therefore b=-3, c=4$$

이를 ㉔에 대입하면

$$y=a\sqrt{-3x+9}+4$$

이 함수의 그래프가 점 $(0, -2)$ 를 지나므로

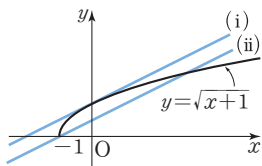
$$-2=3a+4$$

$$\therefore a=-2$$

$$\therefore abc=24$$

783 ㉔ $\frac{1}{2} \leq k < 1$

$y=\sqrt{x+1}$ 의 그래프는 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이고, $y=\frac{1}{2}x+k$ 는 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고 y 절편이 k 인 직선이다.



(i) 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$ 와 $y=\sqrt{x+1}$ 의 그래프가 접할 때

$$\frac{1}{2}x+k=\sqrt{x+1} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\frac{1}{4}x^2+kx+k^2=x+1$$

$$\therefore x^2+4(k-1)x+4k^2-4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=\{2(k-1)\}^2-(4k^2-4)=0$$

$$-8k+8=0 \quad \therefore k=1$$

(ii) 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$ 가 점 $(-1, 0)$ 을 지날 때

$$0=-\frac{1}{2}+k \quad \therefore k=\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 실수 k 의 값의 범위는

$$\frac{1}{2} \leq k < 1$$

784 ㉔ $k=\frac{7}{2}$ 또는 $k<3$

$$y=\sqrt{6-2x}=\sqrt{-2(x-3)}$$

따라서 $y=\sqrt{6-2x}$ 의 그래프

는 $y=\sqrt{-2x}$ 의 그래프

를 x 축의 방향으로 3만큼

평행이동한 것이고,

$y=-x+k$ 는 기울기가

-1 이고 y 절편이 k 인 직선이다.

(i) 직선 $y=-x+k$ 와 $y=\sqrt{6-2x}$ 의 그래프가 접할 때

$-x+k=\sqrt{6-2x}$ 의 양변을 제곱하면

$$x^2-2kx+k^2=6-2x$$

$$\therefore x^2-2(k-1)x+k^2-6=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2-6)=0$$

$$-2k+7=0$$

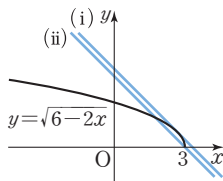
$$\therefore k=\frac{7}{2}$$

(ii) 직선 $y=-x+k$ 가 점 $(3, 0)$ 을 지날 때

$$0=-3+k \quad \therefore k=3$$

(i), (ii)에서 구하는 실수 k 의 값 또는 범위는

$$k=\frac{7}{2} \text{ 또는 } k<3$$



785 ㉔ $k < -3$

$$y=-\sqrt{5-2x}=-\sqrt{-2(x-\frac{5}{2})}$$

따라서 $y=-\sqrt{5-2x}$ 의 그래프

는 $y=-\sqrt{-2x}$ 의 그래프

를 x 축의 방향으로 $\frac{5}{2}$ 만큼 평

행이동한 것이고, $y=x+k$ 는

기울기가 1이고 y 절편이 k 인

직선이다.

$x+k=-\sqrt{5-2x}$ 의 양변을 제곱하면

$$x^2+2kx+k^2=5-2x$$

$$\therefore x^2+2(k+1)x+k^2-5=0$$

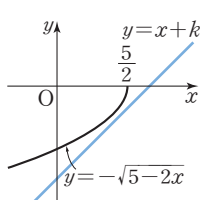
이 이차방정식의 실근이 존재하지 않아야 하므로 판별

식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k^2-5)<0$$

$$2k+6<0$$

$$\therefore k<-3$$

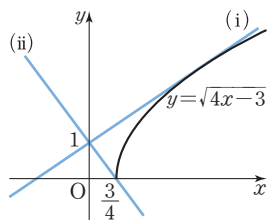


786 $\square -\frac{4}{3} \leq m \leq \frac{2}{3}$

$$y = \sqrt{4x-3} = \sqrt{4\left(x-\frac{3}{4}\right)} = 2\sqrt{x-\frac{3}{4}}$$

따라서 $y = \sqrt{4x-3}$ 의 그래프는 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{3}{4}$ 만큼 평행이동한 것이고,

$y = mx + 1$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 1)$ 을 지나는 직선이다.



(i) 직선 $y = mx + 1$ 과 $y = \sqrt{4x-3}$ 의 그래프가 접할 때

$$mx + 1 = \sqrt{4x-3} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$m^2x^2 + 2mx + 1 = 4x - 3$$

$$\therefore m^2x^2 + 2(m-2)x + 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (m-2)^2 - 4m^2 = 0$$

$$3m^2 + 4m - 4 = 0, (m+2)(3m-2) = 0$$

$$\therefore m = -2 \text{ 또는 } m = \frac{2}{3}$$

그런데 위의 그림에서 $m > 0$ 이므로 $m = \frac{2}{3}$

(ii) 직선 $y = mx + 1$ 이 점 $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ 을 지날 때

$$0 = \frac{3}{4}m + 1 \quad \therefore m = -\frac{4}{3}$$

(i), (ii)에서 구하는 실수 m 의 값의 범위는

$$-\frac{4}{3} \leq m \leq \frac{2}{3}$$

787 $\square -1$

무리함수 $y = -\sqrt{2x-3} - 1$ 의 치역이 $\{y | y \leq -1\}$ 이므로 그 역함수의 정의역은 $\{x | x \leq -1\}$ 이다.

$$y = -\sqrt{2x-3} - 1 \text{에서 } y + 1 = -\sqrt{2x-3}$$

양변을 제곱하면

$$y^2 + 2y + 1 = 2x - 3 \quad \therefore x = \frac{1}{2}y^2 + y + 2$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 주어진 무리함수의 역함수는

$$y = \frac{1}{2}x^2 + x + 2 \quad (x \leq -1)$$

따라서 $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, $c = -1$ 이므로 $abc = -1$

788 $\square (4, 4)$

$$f(x) = \sqrt{3x+4} = \sqrt{3\left(x+\frac{4}{3}\right)}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와

그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의

그래프는 오른쪽 그림과

같이 직선 $y = x$ 에 대하여

대칭이므로 두 함수

$$y = f(x), y = f^{-1}(x) \text{의}$$

그래프의 교점은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선

$y = x$ 의 교점과 같다.

$$\sqrt{3x+4} = x \text{의 양변을 제곱하면}$$

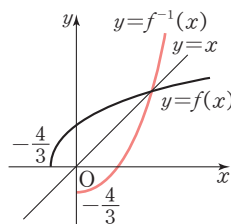
$$3x + 4 = x^2, x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x+1)(x-4) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 4$$

그런데 역함수 $f^{-1}(x)$ 의 정의역이 $\{x | x \geq 0\}$ 이므로

$$x = 4$$

따라서 교점의 좌표는 $(4, 4)$ 이다.



789 $\square -11$

$$f^{-1}(-1) = -\frac{1}{2} \text{에서 } f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \text{이므로}$$

$$\sqrt{a+1} - 3 = -1, \sqrt{a+1} = 2$$

$$\text{양변을 제곱하면 } a+1 = 4 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore f(x) = \sqrt{3-2x} - 3$$

$$f^{-1}(2) = k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면 } f(k) = 2 \text{이므로}$$

$$\sqrt{3-2k} - 3 = 2, \sqrt{3-2k} = 5$$

양변을 제곱하면

$$3 - 2k = 25 \quad \therefore k = -11$$

$$\therefore f^{-1}(2) = -11$$

790 $\square \sqrt{2}$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와

그 역함수 $y = g(x)$ 의 그래

프는 오른쪽 그림과 같이 직

선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므

로 두 함수 $y = f(x)$,

$y = g(x)$ 의 그래프의 교점은

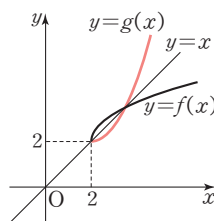
함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.

$$\sqrt{x-2} + 2 = x \text{에서 } \sqrt{x-2} = x - 2$$

양변을 제곱하면

$$x - 2 = x^2 - 4x + 4, x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0 \quad \therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$



따라서 두 교점의 좌표는 (2, 2), (3, 3)이므로 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$$

연습문제

356~358쪽

791 ㉠ 2√3

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} \\ &= \frac{3-2\sqrt{6}+2}{3-2} = 5-2\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \\ &= \frac{3+2\sqrt{6}+2}{3-2} = 5+2\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\therefore x+y=10, xy=1$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 &= x+y+2\sqrt{xy} \\ &= 10+2=12 \end{aligned}$$

이때 $x>0, y>0$ 이므로 $\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$

$$\therefore \sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

792 ㉠ ③

$y=-\sqrt{ax-2}-3$ 의 그래프가 점 (1, -4)를 지나므로
 $-4=-\sqrt{a-2}-3, \sqrt{a-2}=1$

양변을 제곱하면

$$a-2=1 \quad \therefore a=3$$

따라서 주어진 함수는

$$y=-\sqrt{3x-2}-3=-\sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}-3$$

$$\therefore \text{정의역: } \left\{x \mid x \geq \frac{2}{3}\right\}$$

793 ㉠ ③

함수 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\sqrt{2(x-1)}+3$$

이 함수의 그래프가 점 (9, a)를 지나므로

$$a=\sqrt{2 \times 8}+3=4+3=7$$

794 ㉠ (1) -2 (2) 7

$$f(x)=\sqrt{2x-4a}+3=\sqrt{2(x-2a)}+3$$

따라서 $y=f(x)$ 의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $2a$ 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이때 $a<0$ 이므로

$a \leq x \leq 4$ 에서 $y=f(x)$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ▶▶▶▶ ①

(1) $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 최솟값 $\sqrt{-2a}+3$ 을 가

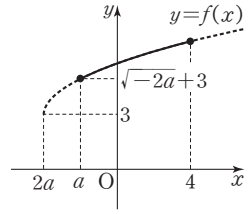
지므로

$$\sqrt{-2a}+3=5, \sqrt{-2a}=2$$

양변을 제곱하면

$$-2a=4 \quad \therefore a=-2 \quad \text{▶▶▶▶ ②}$$

(2) $f(x)=\sqrt{2x+8}+3$ 은 $x=4$ 에서 최댓값 7을 갖는다. ▶▶▶▶ ③



단계	채점 기준	비율
①	$y=f(x)$ 의 그래프 그리기	30 %
②	a 의 값 구하기	40 %
③	$f(x)$ 의 최댓값 구하기	30 %

795 ㉠ ②

주어진 그래프는 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 식은

$$y=\sqrt{x+2}-1$$

$$\therefore f(x)=\sqrt{x+2}-1$$

$$\therefore f(7)=\sqrt{7+2}-1=2$$

796 ㉠ $\frac{1}{2} < k \leq 1$

$$y=-\sqrt{2x-2}=-\sqrt{2(x-1)}$$

따라서 $y=-\sqrt{2x-2}$

의 그래프는 $y=-\sqrt{2x}$

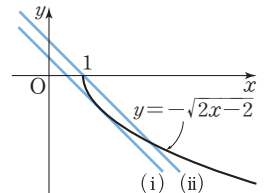
의 그래프를 x 축의 방향

으로 1만큼 평행이동한

것이고, $y=-x+k$ 는

기울기가 -1이고 y 절

편이 k 인 직선이다.



(i) 직선 $y=-x+k$ 와 $y=-\sqrt{2x-2}$ 의 그래프가 접할 때

$-x+k=-\sqrt{2x-2}$ 의 양변을 제곱하면

$$x^2-2kx+k^2=2x-2$$

$$\therefore x^2-2(k+1)x+k^2+2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(k+1)\}^2 - (k^2+2) = 0$$

$$2k-1=0 \quad \therefore k=\frac{1}{2}$$

(ii) 직선 $y=-x+k$ 가 점 $(1, 0)$ 을 지날 때

$$0=-1+k \quad \therefore k=1$$

(i), (ii)에서 구하는 실수 k 의 값의 범위는

$$\frac{1}{2} < k \leq 1$$

797 ㉔ ②

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(4) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(4) \\ &= (g^{-1} \circ f)(4) = g^{-1}(f(4)) \\ &= g^{-1}(2) \end{aligned}$$

$g^{-1}(2)=k$ (k 는 상수)라 하면 $g(k)=2$ 이므로

$$\sqrt{2k-1}=2$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 2k-1=4 \quad \therefore k=\frac{5}{2}$$

$$\therefore (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(4) = g^{-1}(2) = \frac{5}{2}$$

798 ㉔ ③

$$x+1 \geq 0 \text{에서 } x \geq -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2-x \geq 0 \text{에서 } x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $-1 \leq x \leq 2$ 이므로

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2+4x+4} + \sqrt{4x^2-24x+36} \\ &= \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{4(x-3)^2} \\ &= |x+2| + 2|x-3| \\ &= x+2-2(x-3) \quad \leftarrow 1 \leq x+2 \leq 4 \text{이므로 } x+2 > 0 \\ &= -x+8 \quad \leftarrow -4 \leq x-3 \leq -1 \text{이므로 } x-3 < 0 \\ &= -x+8 \end{aligned}$$

799 ㉔ 4

$$y = -\sqrt{12-3x} + a = -\sqrt{3(x-4)} + a$$

따라서 $y = -\sqrt{12-3x} + a$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

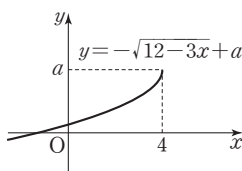
이때 $y = -\sqrt{12-3x} + a$

의 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$ 일 때

$y \geq 0$ 이어야 하므로

$$-\sqrt{12} + a \geq 0 \quad \therefore a \geq 2\sqrt{3}$$

따라서 구하는 정수 a 의 최솟값은 4이다.

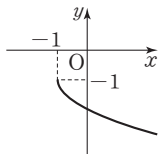


800 ㉔ ⑤

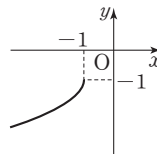
$$y = -\sqrt{ax+a} - 1 = -\sqrt{a(x+1)} - 1 \quad (a \neq 0)$$

따라서 $y = -\sqrt{ax+a} - 1$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 a 의 부호에 따라 다음 그림과 같다.

$a > 0$



$a < 0$



① $a > 0$ 일 때, 정의역은 $\{x | x \geq -1\}$

$a < 0$ 일 때, 정의역은 $\{x | x \leq -1\}$

② $a > 0$ 일 때와 $a < 0$ 일 때 모두 치역은 $\{y | y \leq -1\}$

④ 주어진 함수의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = -\sqrt{ax+a} - 1$$

$$\therefore y = \sqrt{ax+a} + 1$$

⑤ 주어진 함수의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = -\sqrt{a(-x)+a} - 1$$

$$\therefore y = -\sqrt{-ax+a} - 1$$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

801 ㉔ 3

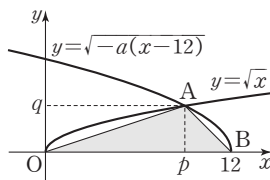
$y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{a(-x)} \quad \therefore y = \sqrt{-ax}$$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 12만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{-a(x-12)}$$

점 A의 좌표를 (p, q) ($p > 0, q > 0$)라 하면 두 함수 $y = \sqrt{-a(x-12)}, y = \sqrt{x}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



삼각형 AOB의 넓이가 18이므로

$$\frac{1}{2} \times 12 \times q = 18 \quad \therefore q = 3$$

즉, $y=\sqrt{x}$ 의 그래프가 점 $A(p, 3)$ 을 지나므로

$$3=\sqrt{p} \quad \therefore p=9$$

따라서 $y=\sqrt{-a(x-12)}$ 의 그래프가 점 $A(9, 3)$ 을 지나므로

$$3=\sqrt{-a \times (-3)}, \sqrt{3a}=3$$

양변을 제곱하면

$$3a=9 \quad \therefore a=3$$

802 ㉡ ②

$$y=(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(x+1)$$

$$=\sqrt{3-(x+1)}+2$$

$$=\sqrt{-x+2}+2$$

$$=\sqrt{-(x-2)}+2$$

따라서 $y=(f \circ g)(x)$ 의 그래프는 $y=\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$-6 \leq x \leq 0$ 에서

$y=(f \circ g)(x)$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같으므로

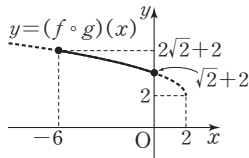
$x=-6$ 일 때 최댓값

$2\sqrt{2}+2$, $x=0$ 일 때 최솟

값 $\sqrt{2}+2$ 를 갖는다.

따라서 $M=2\sqrt{2}+2$, $m=\sqrt{2}+2$ 이므로

$$M-m=\sqrt{2}$$



803 ㉡ ①

$y=\frac{a}{x+b}+c$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$x=-b, y=c$$

주어진 유리함수의 그래프에서

$$a < 0, -b < 0, c > 0$$

$$\therefore a < 0, b > 0, c > 0$$

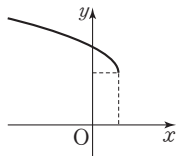
$$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$$

따라서 $y=\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프는 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $-\frac{b}{a} > 0, c > 0$ 이므로

$y=\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프의

개형은 오른쪽 그림과 같다.



804 ㉡ ①

$(f^{-1} \circ f^{-1})(k)=-4$ 에서 $(f \circ f)^{-1}(k)=-4$ 이므로

$$(f \circ f)(-4)=k \quad \therefore f(f(-4))=k$$

$-4 < 0$ 이므로

$$f(-4)=3-\sqrt{-(-4)}=1$$

$1 > 0$ 이므로

$$f(1)=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

$$\therefore k=f(f(-4))=f(1)=\sqrt{10}$$

805 ㉡ 5

$y=4\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=4\sqrt{x-a}+1$$

$$\therefore f(x)=4\sqrt{x-a}+1$$

▶▶▶▶▶ ①

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수

$y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 접하면 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 도 접한다. ▶▶▶▶▶ ②

$$4\sqrt{x-a}+1=x$$
에서

$$4\sqrt{x-a}=x-1$$

양변을 제곱하면

$$16(x-a)=x^2-2x+1$$

$$\therefore x^2-18x+16a+1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-9)^2-(16a+1)=0$$

$$-16a+80=0 \quad \therefore a=5$$

▶▶▶▶▶ ③

단계	채점 기준	비율
①	$f(x)$ 구하기	30 %
②	$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 위치 관계 알기	30 %
③	a 의 값 구하기	40 %

806 ㉡ ④

$f(x)=-\sqrt{kx+2k}+4$, $g(x)=\sqrt{-kx+2k}-4$ 라 하자.

ㄱ. 곡선 $y=f(x)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y=-\sqrt{k(-x)+2k}+4$$

$$\therefore y=\sqrt{-kx+2k}-4=g(x)$$

따라서 주어진 두 곡선은 원점에 대하여 대칭이다.

$$\text{ㄴ. } f(x) = -\sqrt{k(x+2)} + 4, g(x) = \sqrt{-k(x-2)} - 4$$

따라서 $k < 0$ 이면 두

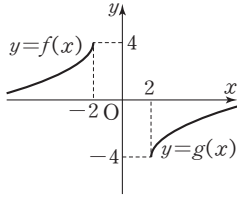
곡선 $y=f(x)$,

$y=g(x)$ 는 오른쪽

그림과 같으므로 주어

진 두 곡선은 만나지

않는다.



ㄷ. $k < 0$ 일 때 두 곡선은 만나지 않는다. ($\because$ ㄴ)

$k > 0$ 일 때 k 의 값이 커질수록 곡선 $y=f(x)$ 는 직

선 $y=4$ 와 멀어지고 곡선 $y=g(x)$ 는 직선

$y=-4$ 와 멀어진다.

또 ㄴ에서 두 곡선은 원점에

대하여 대칭이므로 두 곡선

이 서로 다른 두 점에서 만나

도록 하는 k 의 값은 오른쪽

그림과 같이 곡선 $y=f(x)$

가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점

$(2, -4)$ 를 지나고, 곡선 $y=g(x)$ 가 곡선

$y=f(x)$ 위의 점 $(-2, 4)$ 를 지날 때 최대이다.

$f(2) = -4$ 에서

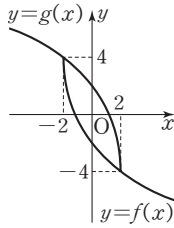
$$-\sqrt{2k+2k} + 4 = -4$$

$$2\sqrt{k} = 8, \sqrt{k} = 4$$

$$\therefore k = 16$$

즉, k 의 최댓값은 16이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

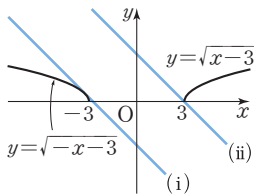


807 ㉠ $-\frac{11}{4} < a < 3$

㉠ 접근 방법 $y = \sqrt{|x|-3}$ 의 그래프를 그린 후 기울기가 -1 인 직선을 움직여 곡선과 직선의 위치 관계를 파악한다.

$$y = \sqrt{|x|-3} = \begin{cases} \sqrt{-x-3} & (x < 0) \\ \sqrt{x-3} & (x \geq 0) \end{cases}$$

$y = -x + a$ 는 기울기가 -1 이고 y 절편이 a 인 직선이다.



(i) 직선 $y = -x + a$ 와 $y = \sqrt{-x-3}$ 의 그래프가 접할 때

$$-x + a = \sqrt{-x-3} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = -x - 3$$

$$\therefore x^2 - (2a-1)x + a^2 + 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (2a-1)^2 - 4(a^2 + 3) = 0$$

$$-4a - 11 = 0 \quad \therefore a = -\frac{11}{4}$$

(ii) 직선 $y = -x + a$ 가 점 $(3, 0)$ 을 지날 때

$$0 = -3 + a \quad \therefore a = 3$$

(i), (ii)에서 구하는 실수 a 의 값의 범위는

$$-\frac{11}{4} < a < 3$$

808 ㉡ ㉡

㉡ 접근 방법 $y = f(x)$ 의 역함수를 구하여 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 사이의 관계를 파악한다.

$f(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}k$ 는 $x \geq 0$ 에서 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}k$ ($x \geq 0$)라 하고 x 에 대하여 풀면

$$\frac{1}{5}x^2 = y - \frac{1}{5}k, x^2 = 5y - k$$

$$\therefore x = \sqrt{5y - k} \quad (\because x \geq 0)$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $f(x)$ 의 역함수는

$$y = \sqrt{5x - k}$$

따라서 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.

이때 두 함수 $y = f(x)$,

$y = g(x)$ 의 그래프는 오른

쪽 그림과 같이 직선 $y = x$

에 대하여 대칭이므로 두

함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$

의 그래프의 교점은 함수

$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같다.

따라서 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 서로

다른 두 점에서 만나려면 이차방정식

$$\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}k = x, \text{ 즉 } x^2 - 5x + k = 0 \text{이 음이 아닌 서로}$$

다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

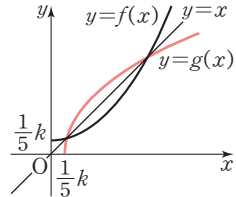
$$(i) D = (-5)^2 - 4k > 0 \quad \therefore k < \frac{25}{4}$$

(ii) (두 근의 곱) ≥ 0 이어야 하므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$k \geq 0$$

$$(i), (ii) \text{에서 } 0 \leq k < \frac{25}{4}$$

따라서 구하는 정수 k 는 0, 1, 2, ..., 6의 7개이다.



memo

