



정답과 해설

공통수학 1

01 / 다항식의 연산

A 개념 확인

8~11쪽

0001 **답** (1) $(3y+5y^2)x^2+4xy^2+y-6$
 (2) $-6+(3x^2+1)y+(4x+5x^2)y^2$

0002 **답** $3x^2+5xy+2y^2$
 $(4x^2+3y^2)-(x^2-2xy)+(3xy-y^2)$
 $=4x^2+3y^2-x^2+2xy+3xy-y^2$
 $=3x^2+5xy+2y^2$

0003 **답** $3x^3+7x^2-2x+9$
 $(4x^3-x)-(-5x^2+x-3)+(2x^2-x^3+6)$
 $=4x^3-x+5x^2-x+3+2x^2-x^3+6$
 $=3x^3+7x^2-2x+9$

0004 **답** $4a^2+4ab-6b^2$
 $2(a^2-b^2)-(a^2-ab+b^2)+3(a^2+ab-b^2)$
 $=2a^2-2b^2-a^2+ab-b^2+3a^2+3ab-3b^2$
 $=4a^2+4ab-6b^2$

0005 **답** $5x^2-9xy-2y^2$
 $A+3B=(2x^2+3xy+y^2)+3(x^2-4xy-y^2)$
 $=2x^2+3xy+y^2+3x^2-12xy-3y^2$
 $=5x^2-9xy-2y^2$

0006 **답** $x^2+40xy+11y^2$
 $4A-7B=4(2x^2+3xy+y^2)-7(x^2-4xy-y^2)$
 $=8x^2+12xy+4y^2-7x^2+28xy+7y^2$
 $=x^2+40xy+11y^2$

0007 **답** $-5x^2-13xy-4y^2$
 $2B-(3A+B)=2B-3A-B$
 $=B-3A$
 $=(x^2-4xy-y^2)-3(2x^2+3xy+y^2)$
 $=x^2-4xy-y^2-6x^2-9xy-3y^2$
 $=-5x^2-13xy-4y^2$

0008 **답** $-x^3-2x^2-7x+5$
 $A-B+C=(-3x^3-x^2+5)-(x^2+4x)+(2x^3-3x)$
 $=-3x^3-x^2+5-x^2-4x+2x^3-3x$
 $=-x^3-2x^2-7x+5$

0009 **답** $-7x^3-4x^2-7x+15$
 $3A-(B-C)=3A-B+C$
 $=3(-3x^3-x^2+5)-(x^2+4x)+(2x^3-3x)$
 $=-9x^3-3x^2+15-x^2-4x+2x^3-3x$
 $=-7x^3-4x^2-7x+15$

0010 **답** $2x^3+2x^2+5x$
 $(A+2B)-(A-C)=A+2B-A+C$
 $=2B+C$
 $=2(x^2+4x)+(2x^3-3x)$
 $=2x^2+8x+2x^3-3x$
 $=2x^3+2x^2+5x$

0011 **답** $\frac{18x^2}{y^5}$
 $(3x^2y)^2 \div (-xy^2)^4 \times 2x^2y = 9x^4y^2 \times \frac{1}{x^4y^8} \times 2x^2y = \frac{18x^2}{y^5}$

0012 **답** $-2a^4b^4$
 $(-2a^2b)^2 \div \left(-\frac{1}{4}a^3b^4\right) \times \left(\frac{1}{2}ab^2\right)^3 = 4a^4b^2 \times \left(-\frac{4}{a^3b^4}\right) \times \frac{a^3b^6}{8}$
 $= -2a^4b^4$

0013 **답** $4x^3-4x^2+12x$

0014 **답** x^3-4x^2+4x-1

0015 **답** $2x^3-11x^2y+13xy^2-4y^3$

0016 **답** $6x^2-7xy+17x+2y^2-10y+12$

0017 **답** $4x^2-12xy+9y^2$

0018 **답** $9a^2-b^2$

0019 **답** $x^2+4x-21$

0020 **답** $6x^2-11xy-10y^2$

0021 **답** $a^2+4b^2+c^2-4ab-4bc+2ca$

0022 **답** $x^3+6x^2+12x+8$

0023 **답** $27a^3-27a^2b+9ab^2-b^3$

0024 **답** $27x^3+1$

0025 **답** a^3-1

0026 **답** $x^3+9x^2+26x+24$

0027 **답** $x^3+y^3-3xy+1$

0028 **답** x^4+9x^2+81

0029 **답** (1) 11 (2) 36

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2 \times (-1)=11$

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=3^3-3 \times (-1) \times 3=36$

0030 **답** (1) 14 (2) 22

(1) $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=(-2)^2+2 \times 5=14$

(2) $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
 $=(-2)^3-3 \times 5 \times (-2)=22$

0043 답 $8x^2+3x-1$

$2x^2-3x+5$	㉠	$6x^2-x+3$
	㉡	
	$3x^2-4x+6$	A

위의 표에서 가로에 놓인 세 다항식의 합이 $15x^2+6$ 이므로

$$(2x^2-3x+5)+㉠+(6x^2-x+3)=15x^2+6$$

$$\therefore ㉠=15x^2+6-(2x^2-3x+5)-(6x^2-x+3)$$

$$=7x^2+4x-2$$

또 세로에 놓인 세 다항식의 합이 $15x^2+6$ 이므로

$$(7x^2+4x-2)+㉡+(3x^2-4x+6)=15x^2+6$$

$$\therefore ㉡=15x^2+6-(7x^2+4x-2)-(3x^2-4x+6)$$

$$=5x^2+2$$

따라서 대각선에 놓인 세 다항식의 합이 $15x^2+6$ 이므로

$$(2x^2-3x+5)+(5x^2+2)+A=15x^2+6$$

$$\therefore A=15x^2+6-(2x^2-3x+5)-(5x^2+2)$$

$$=8x^2+3x-1$$

0044 답 11

$(x^3+4x-1)(2x^2-x+3)$ 의 전개식에서 x^3 항은

$$x^3 \times 3 + 4x \times 2x^2 = 3x^3 + 8x^3 = 11x^3$$

따라서 x^3 의 계수는 11이다.

0045 답 ①

$(x-2y-3)(4x+5y-6)$ 의 전개식에서 xy 항은

$$x \times 5y + (-2y) \times 4x = 5xy - 8xy = -3xy$$

따라서 xy 의 계수는 -3이다.

0046 답 ③

$(2x^2+x-3)(x^2-5x+k)$ 의 전개식에서 x^2 항은

$$2x^2 \times k + x \times (-5x) + (-3) \times x^2$$

$$= 2kx^2 - 5x^2 - 3x^2 = (2k-8)x^2$$

따라서 x^2 의 계수는 $2k-8$ 이므로 $2k-8=-6 \quad \therefore k=1$

0047 답 -1

$$(1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+x^{50})^2$$

$$=(1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+x^{50})(1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+x^{50})$$

이므로 주어진 다항식의 전개식에서 x^4 항은

$$1 \times x^4 + (-x) \times (-x^3) + x^2 \times x^2 + (-x^3) \times (-x) + x^4 \times 1$$

$$= x^4 + x^4 + x^4 + x^4 + x^4 = 5x^4$$

$$\therefore a=5 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

또 주어진 다항식의 전개식에서 x^5 항은

$$1 \times (-x^5) + (-x) \times x^4 + x^2 \times (-x^3) + (-x^3) \times x^2$$

$$+ x^4 \times (-x) + (-x^5) \times 1$$

$$= -x^5 - x^5 - x^5 - x^5 - x^5 - x^5 = -6x^5$$

$$\therefore b=-6 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

$$\therefore a+b=5+(-6)=-1 \quad \cdots \cdots \text{㉢}$$

채점 기준

㉠ a 의 값 구하기	40 %
㉡ b 의 값 구하기	40 %
㉢ $a+b$ 의 값 구하기	20 %

0048 답 ⑤

$$\textcircled{1} (a-b-1)^2$$

$$= a^2 + (-b)^2 + (-1)^2 + 2 \times a \times (-b) + 2 \times (-b) \times (-1)$$

$$+ 2 \times (-1) \times a$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab - 2a + 2b + 1$$

$$\textcircled{2} (a+2b)^3 = a^3 + 3 \times a^2 \times 2b + 3 \times a \times (2b)^2 + (2b)^3$$

$$= a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$$

$$\textcircled{3} (x+1)(x^2-x+1) = (x+1)(x^2-x \times 1 + 1^2) = x^3 + 1$$

$$\textcircled{4} (x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$$

$$= (x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$$

$$= (x^4-y^4)(x^4+y^4) = x^8 - y^8$$

0049 답 $x^3-y^3+z^3+3xyz$

$$(x-y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx)$$

$$= \{x+(-y)+z\}$$

$$\times \{x^2+(-y)^2+z^2-x \times (-y) - (-y) \times z - z \times x\}$$

$$= x^3 + (-y)^3 + z^3 - 3 \times x \times (-y) \times z$$

$$= x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz$$

0050 답 36

$$(x-y-2z)^2 = x^2 + (-y)^2 + (-2z)^2 + 2 \times x \times (-y)$$

$$+ 2 \times (-y) \times (-2z) + 2 \times (-2z) \times x$$

$$= x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy + 4yz - 4zx$$

$$= (x^2 + y^2 + 4z^2) - 2(xy - 2yz + 2zx)$$

$$= 62 - 2 \times 13 = 36$$

0051 답 ②

$$(x+3)(x-3)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$$

$$= \{(x+3)(x^2-3x+9)\} \{(x-3)(x^2+3x+9)\}$$

$$= (x^3+27)(x^3-27)$$

$$= x^6 - 729$$

0052 답 ②

$$x+y+z=2 \text{에서}$$

$$x+y=2-z, y+z=2-x, z+x=2-y$$

$$\therefore (x+y)(y+z)(z+x)$$

$$= (2-z)(2-x)(2-y)$$

$$= 2^3 - (x+y+z) \times 2^2 + (xy+yz+zx) \times 2 - xyz$$

$$= 8 - 2 \times 4 + (-1) \times 2 - (-2) = 0$$

0053 답 -2

$$(x^2+x-3)(x^2-4x-3) = (x^2-3+x)(x^2-3-4x) \text{에서}$$

$$x^2-3=X \text{로 놓으면}$$

$$(x^2-3+x)(x^2-3-4x) = (X+x)(X-4x)$$

$$= X^2 - 3xX - 4x^2$$

$$= (x^2-3)^2 - 3x(x^2-3) - 4x^2$$

$$= x^4 - 6x^2 + 9 - 3x^3 + 9x - 4x^2$$

$$= x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 9x + 9$$

따라서 $a=-3, b=-10, c=9$ 이므로

$$a-b-c=-2$$

0054 답 ④

$x+y=X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}(x+y+z)(x+y-z) &= (X+z)(X-z) = X^2 - z^2 \\ &= (x+y)^2 - z^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 - z^2\end{aligned}$$

0055 답 $x^4+2x^3-25x^2-26x+120$

$$\begin{aligned}(x-2)(x-4)(x+3)(x+5) &= \{(x-2)(x+3)\}\{(x-4)(x+5)\} \\ &= (x^2+x-6)(x^2+x-20) \\ x^2+x &= X \text{로 놓으면} \\ (x^2+x-6)(x^2+x-20) &= (X-6)(X-20) = X^2 - 26X + 120 \\ &= (x^2+x)^2 - 26(x^2+x) + 120 \\ &= x^4 + 2x^3 + x^2 - 26x^2 - 26x + 120 \\ &= x^4 + 2x^3 - 25x^2 - 26x + 120\end{aligned}$$

0056 답 ①

$$\begin{aligned}(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-3x^2+1) &= (x^4+x^2+1)(x^4-3x^2+1) \\ x^4+1 &= X \text{로 놓으면} \\ (x^4+x^2+1)(x^4-3x^2+1) &= (X+x^2)(X-3x^2) \\ &= X^2 - 2x^2X - 3x^4 \\ &= (x^4+1)^2 - 2x^2(x^4+1) - 3x^4 \\ &= x^8 + 2x^4 + 1 - 2x^6 - 2x^2 - 3x^4 \\ &= x^8 - 2x^6 - x^4 - 2x^2 + 1\end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=-1$, $d=-2$ 이므로
 $abcd = -4$

0057 답 -108

$$\begin{aligned}(3+2a)^3 &= A, (3-2a)^3 = B \text{로 놓으면} \\ \{(3+2a)^3 + (3-2a)^3\}^2 - \{(3+2a)^3 - (3-2a)^3\}^2 &= (A+B)^2 - (A-B)^2 \\ &= (A^2 + 2AB + B^2) - (A^2 - 2AB + B^2) = 4AB \\ &= 4(3+2a)^3(3-2a)^3 = 4(9-4a^2)^3 \\ &= 4(9-4 \times 3)^3 = 4 \times (-3)^3 \\ &= -108\end{aligned}$$

0058 답 7

$$\begin{aligned}x^2+y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \text{에서} \\ 5 &= 1^2 - 2xy \quad \therefore xy = -2 \\ \therefore x^3+y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= 1^3 - 3 \times (-2) \times 1 = 7\end{aligned}$$

0059 답 $10\sqrt{13}$

$$\begin{aligned}a^2+b^2 &= (a+b)^2 - 2ab \text{에서} \\ 11 &= 3^2 - 2ab \quad \therefore ab = -1 \\ \therefore (a-b)^2 &= (a+b)^2 - 4ab = 3^2 - 4 \times (-1) = 13 \\ \text{그런데 } a > b &\text{이므로 } a-b = \sqrt{13} \\ \therefore a^3-b^3 &= (a-b)^3 + 3ab(a-b) \\ &= (\sqrt{13})^3 + 3 \times (-1) \times \sqrt{13} \\ &= 13\sqrt{13} - 3\sqrt{13} = 10\sqrt{13}\end{aligned}$$

0060 답 2

$$\begin{aligned}x^3-y^3 &= (x-y)^3 + 3xy(x-y) \text{에서} \\ 28 &= 4^3 + 3xy \times 4, \quad -36 = 12xy \\ \therefore xy &= -3 \quad \dots\dots \textcircled{i} \\ (x+y)^2 &= (x-y)^2 + 4xy = 4^2 + 4 \times (-3) = 4 \text{이므로} \\ |x+y| &= 2 \quad \dots\dots \textcircled{ii}\end{aligned}$$

채점 기준

① xy 의 값 구하기	40 %
② $ x+y $ 의 값 구하기	60 %

0061 답 -14

$$\begin{aligned}x+y &= (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 2 \\ xy &= (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = -1 \\ \therefore \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} &= \frac{x^3+y^3}{xy} \\ &= \frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{xy} \\ &= \frac{2^3 - 3 \times (-1) \times 2}{-1} = -14\end{aligned}$$

0062 답 ⑤

$$\begin{aligned}a^2+ab+b^2 &= 14 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \\ a^2-ab+b^2 &= 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \\ \textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} \text{을 하면} \\ 2ab &= 4 \quad \therefore ab = 2 \\ \textcircled{㉠} \text{에서 } a^2+2+b^2 &= 14 \text{이므로} \\ a^2+b^2 &= 12 \\ \therefore (a+b)^2 &= a^2+b^2+2ab \\ &= 12+2 \times 2 = 16 \\ \text{그런데 } a > 0, b > 0 &\text{이므로 } a+b = 4 \\ \therefore a^3+b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\ &= 4^3 - 3 \times 2 \times 4 = 40\end{aligned}$$

0063 답 (1) 7 (2) 11

$$\begin{aligned}(1) \quad x^3+y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \text{에서} \\ 4 &= 1^3 - 3xy \times 1 \quad \therefore xy = -1 \\ x^2+y^2 &= (x+y)^2 - 2xy = 1^2 - 2 \times (-1) = 3 \text{이므로} \\ x^4+y^4 &= (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 \\ &= 3^2 - 2 \times (-1)^2 = 7 \\ (2) \quad (x^2+y^2)(x^3+y^3) &= x^5+y^5+x^2y^3+x^3y^2 \\ &= x^5+y^5+x^2y^2(x+y) \\ \text{이므로} \\ x^5+y^5 &= (x^2+y^2)(x^3+y^3) - x^2y^2(x+y) \\ &= 3 \times 4 - (-1)^2 \times 1 = 11\end{aligned}$$

0064 답 ④

$$\begin{aligned}x^2-x-1 &= 0 \text{에서 } x \neq 0 \text{이므로 양변을 } x \text{로 나누면} \\ x-1-\frac{1}{x} &= 0 \quad \therefore x-\frac{1}{x} = 1 \\ \therefore x^3-\frac{1}{x^3} &= \left(x-\frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x-\frac{1}{x}\right) \\ &= 1^3 + 3 \times 1 = 4\end{aligned}$$

0065 답 36

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = (\sqrt{13})^2 - 4 = 9 \text{ 이고}$$

$$x > 1 \text{ 이면 } x - \frac{1}{x} > 0 \text{ 이므로 } x - \frac{1}{x} = 3$$

$$\therefore x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 3^3 + 3 \times 3 = 36$$

0066 답 ②

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \text{ 에서}$$

$$5 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \quad \therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 7$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x + \frac{1}{x} = \sqrt{7}$

$$\therefore x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= (\sqrt{7})^3 - 3 \times \sqrt{7} = 4\sqrt{7}$$

0067 답 120

$$x^2 - 6x + 1 = 0 \text{ 에서 } x \neq 0 \text{ 이므로 양변을 } x \text{ 로 나누면}$$

$$x - 6 + \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x + \frac{1}{x} = 6 \quad \dots\dots \text{ i}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 6^2 - 2 = 34$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 6^3 - 3 \times 6 = 198 \quad \dots\dots \text{ ii}$$

$$\therefore x^3 - 2x^2 - 10 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 10$$

$$= 198 - 2 \times 34 - 10 = 120 \quad \dots\dots \text{ iii}$$

채점 기준

i $x + \frac{1}{x}$ 의 값 구하기	30 %
ii $x^2 + \frac{1}{x^2}, x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값 구하기	50 %
iii 주어진 식의 값 구하기	20 %

0068 답 14

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$$

$$= (-6)^2 - 2 \times 4 = 28$$

$$\therefore \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} = \frac{28}{2} = 14$$

0069 답 ①

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) \text{ 에서}$$

$$21 = (-1)^2 - 2(ab + bc + ca) \quad \therefore ab + bc + ca = -10$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$$

$$= (-1) \times \{21 - (-10)\} + 3 \times (-8) = -55$$

0070 답 9

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) \text{ 에서}$$

$$6 = 2^2 - 2(xy + yz + zx) \quad \therefore xy + yz + zx = -1$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz \text{ 에서}$$

$$8 = 2 \times \{6 - (-1)\} + 3xyz \quad \therefore xyz = -2$$

$$\therefore x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2$$

$$= (xy + yz + zx)^2 - 2(xy^2z + yz^2x + zx^2y)$$

$$= (xy + yz + zx)^2 - 2xyz(x + y + z)$$

$$= (-1)^2 - 2 \times (-2) \times 2 = 9$$

0071 답 ②

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) \text{ 에서}$$

$$19 = 3^2 - 2(xy + yz + zx) \quad \therefore xy + yz + zx = -5$$

$$x + y + z = 3 \text{ 에서 } x + y = 3 - z, y + z = 3 - x, z + x = 3 - y \text{ 이므로}$$

$$(x + y)(y + z)(z + x)$$

$$= (3 - z)(3 - x)(3 - y)$$

$$= 3^3 - (x + y + z) \times 3^2 + (xy + yz + zx) \times 3 - xyz$$

$$= 27 - 3 \times 9 + (-5) \times 3 - (-4) = -11$$

0072 답 ②

$$a - b = 5, b - c = -2 \text{ 를 변끼리 더하면 } a - c = 3$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$= \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$$

$$= \frac{1}{2}\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2\}$$

$$= \frac{1}{2} \times \{5^2 + (-2)^2 + 3^2\} = 19$$

0073 답 ④

$$(3 + 2)(3^2 + 2^2)(3^4 + 2^4) = (3 - 2)(3 + 2)(3^2 + 2^2)(3^4 + 2^4)$$

$$= (3^2 - 2^2)(3^2 + 2^2)(3^4 + 2^4)$$

$$= (3^4 - 2^4)(3^4 + 2^4)$$

$$= 3^8 - 2^8$$

0074 답 ②

$$1024 = a \text{ 로 놓으면}$$

$$\frac{1024^2}{1023(1024^2 + 1025) + 1} = \frac{a^2}{(a - 1)(a^2 + a + 1) + 1}$$

$$= \frac{a^2}{(a^3 - 1) + 1} = \frac{a^2}{a^3}$$

$$= \frac{1}{a} = \frac{1}{1024}$$

0075 답 8

$$100 = a \text{ 로 놓으면}$$

$$99^3 + 101^3 = (a - 1)^3 + (a + 1)^3$$

$$= (a^3 - 3a^2 + 3a - 1) + (a^3 + 3a^2 + 3a + 1)$$

$$= 2a^3 + 6a = 2 \times 100^3 + 6 \times 100 = 2000600$$

따라서 구하는 각 자리의 숫자의 합은 $2 + 6 = 8$

0076 답 $5\sqrt{2}$

직육면체의 가로 길이를 a , 세로 길이를 b , 높이를 c 라 하면 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 48 이므로

$$4(a + b + c) = 48 \quad \therefore a + b + c = 12$$

또 겹넓이가 94 이므로

$$2(ab + bc + ca) = 94 \quad \therefore ab + bc + ca = 47$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$$

$$= 12^2 - 2 \times 47 = 50$$

따라서 직육면체의 대각선의 길이는

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

0077 답 ②

직사각형의 가로, 세로의 길이를 a , b 라 하면 직사각형의 둘레의 길이가 16이므로

$$2(a+b)=16 \quad \therefore a+b=8$$

또 직사각형이 반지름의 길이가 3인 원에 내접하므로 대각선의 길이는 원의 지름의 길이인 6이다.

$$a^2+b^2=6^2=36$$

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab \text{에서}$$

$$36=8^2-2ab \quad \therefore ab=14$$

따라서 직사각형의 넓이는 14이다.

0078 답 270

두 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 a , b 라 하면 두 정육면체의 한 모서리의 길이의 합이 9이므로

$$a+b=9$$

또 두 정육면체의 부피의 합이 243이므로

$$a^3+b^3=243 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b) \text{에서}$$

$$243=9^3-3ab \times 9 \quad \therefore ab=18$$

따라서 두 정육면체의 겉넓이의 합은

$$6(a^2+b^2)=6\{(a+b)^2-2ab\}$$

$$=6 \times (9^2-2 \times 18)=270 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① 주어진 조건을 두 정육면체의 모서리의 길이에 대한 식으로 나타내기	30 %
② 두 정육면체의 겉넓이의 합 구하기	70 %

0079 답 108

$\overline{AC}=a$, $\overline{BC}=b$ 라 하면 직각삼각형 ABC에서

$$a^2+b^2=(2\sqrt{6})^2=24$$

삼각형 ABC의 넓이가 3이므로

$$\frac{1}{2}ab=3 \quad \therefore ab=6$$

$$\therefore (a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$

$$=24+2 \times 6=36$$

그런데 $a>0$, $b>0$ 이므로 $a+b=6$

$$\therefore \overline{AC}^3+\overline{BC}^3=a^3+b^3$$

$$=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

$$=6^3-3 \times 6 \times 6=108$$

0080 답 ④

다항식 $3x^3-2x^2+10$ 을 x^2-x+5 로 나누면

$$\begin{array}{r} 3x+1 \\ x^2-x+5 \overline{) 3x^3-2x^2 +10} \\ \underline{3x^3-3x^2+15x} \\ x^2-15x+10 \\ \underline{x^2-x+5} \\ -14x+5 \end{array}$$

따라서 몫은 $3x+1$, 나머지는 $-14x+5$ 이므로

$$a=3, b=1, c=-14, d=5$$

$$\therefore ad+bc=15+(-14)=1$$

0081 답 7

$$\begin{array}{r} 2x^2+x-1 \\ 2x-1 \overline{) 4x^3 -3x+2} \\ \underline{4x^3-2x^2} \\ 2x^2-3x \\ \underline{2x^2-x} \\ -2x+2 \\ \underline{-2x+1} \\ 1 \end{array}$$

따라서 $a=2$, $b=2$, $c=2$, $d=1$ 이므로

$$a+b+c+d=7$$

0082 답 9

다항식 $2x^3-x^2+x+3$ 을 $x+1$ 로 나누면

$$\begin{array}{r} 2x^2-3x+4 \\ x+1 \overline{) 2x^3-x^2+x+3} \\ \underline{2x^3+2x^2} \\ -3x^2+x \\ \underline{-3x^2-3x} \\ 4x+3 \\ \underline{4x+4} \\ -1 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=2x^2-3x+4$ 이므로

$$Q(-1)=2+3+4=9$$

0083 답 -3

다항식 x^3-4x^2+ax-5 를 x^2+x+b 로 나누면

$$\begin{array}{r} x-5 \\ x^2+x+b \overline{) x^3-4x^2+ -5} \\ \underline{x^3+x^2+ } \\ -5x^2+(a-b)x-5 \\ \underline{-5x^2- -5b} \\ (a-b+5)x-5+5b \end{array}$$

..... ①

이때 나머지가 0이어야 하므로

$$a-b+5=0, -5+5b=0 \quad \therefore a=-4, b=1$$

$$\therefore a+b=-3 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① 미지수를 포함하여 나눗셈 계산하기	50 %
② $a+b$ 의 값 구하기	50 %

0084 답 ④

다항식 $2x^3+3x^2-x+2$ 를 다항식 A 로 나누었을 때의 몫이 $2x+1$ 이고 나머지가 3이므로

$$2x^3+3x^2-x+2=A(2x+1)+3$$

$$A(2x+1)=2x^3+3x^2-x-1$$

$$\therefore A=(2x^3+3x^2-x-1) \div (2x+1)$$

다항식 $2x^3+3x^2-x-1$ 을 $2x+1$ 로 나누면

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 1 \\ 2x+1 \overline{) 2x^3+3x^2-x-1} \\ \underline{2x^3+x^2} \\ 2x^2-x \\ \underline{2x^2+x} \\ -2x-1 \\ \underline{-2x-1} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore A=x^2+x-1$

0085 [답] 몫: $3x+7$, 나머지: 7

다항식 $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 몫이 $3x-5$ 이고 나머지가 3
이므로

$$f(x)=(x+2)(3x-5)+3=3x^2+x-7$$

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누면

$$\begin{array}{r} 3x+7 \\ x-2 \overline{) 3x^2+x-7} \\ \underline{3x^2-6x} \\ 7x-7 \\ \underline{7x-14} \\ 7 \end{array}$$

따라서 구하는 몫은 $3x+7$, 나머지는 7이다.

0086 [답] 40

다항식 $x^4+5x^3-3x^2-40x+14$ 를 x^2-2x-2 로 나누면

$$\begin{array}{r} x^2+7x+13 \\ x^2-2x-2 \overline{) x^4+5x^3-3x^2-40x+14} \\ \underline{x^4-2x^3-2x^2} \\ 7x^3-x^2-40x \\ \underline{7x^3-14x^2-14x} \\ 13x^2-26x+14 \\ \underline{13x^2-26x-26} \\ 40 \end{array}$$

$$\therefore x^4+5x^3-3x^2-40x+14=(x^2-2x-2)(x^2+7x+13)+40 \\ =40 \quad (\because x^2-2x-2=0)$$

0087 [답] ①

다항식 $f(x)$ 를 $x+\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이
므로

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+R=(2x+1)\times\frac{1}{2}Q(x)+R$$

따라서 다항식 $f(x)$ 를 $2x+1$ 로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{2}Q(x)$, 나머
지는 R 이다.

0088 [답] ⑤

다항식 $f(x)$ 를 $3x-2$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이
므로

$$f(x)=(3x-2)Q(x)+R$$

이 식의 양변에 x 를 곱하면

$$\begin{aligned} xf(x) &= x(3x-2)Q(x)+Rx \\ &= 3x\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}R \\ &= \left(x-\frac{2}{3}\right)\{3xQ(x)+R\}+\frac{2}{3}R \end{aligned}$$

따라서 다항식 $xf(x)$ 를 $x-\frac{2}{3}$ 로 나누었을 때의 몫은

$$3xQ(x)+R, \text{ 나머지는 } \frac{2}{3}R \text{이다.}$$

0089 [답] -3

조립제법을 이용하여 다항식 x^3+2x-3 을 $x+1$ 로 나누었을 때의
몫과 나머지를 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ & & -1 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & -6 \end{array}$$

따라서 $a=-1, b=0, c=1, d=3, e=-6$ 이므로

$$a+b+c+d+e=-3$$

0090 [답] $x-4$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -3 & -6 & 9 \\ & & -2 & 10 & -8 \\ \hline 1 & 1 & -5 & 4 & 1 \\ & & 1 & -4 & \\ \hline & 1 & -4 & 0 & \end{array}$$

오른쪽과 같이 조립제법을 이용하면
다항식 x^3-3x^2-6x+9 를 $x+2$ 로 나
누었을 때의 몫은 x^2-5x+4 이므로
 $Q(x)=x^2-5x+4$ ①
따라서 $Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때
의 몫은 $x-4$ 이다. ②

채점 기준

① $Q(x)$ 구하기	50 %
② $Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫 구하기	50 %

0091 [답] ④

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{3} & 3 & -7 & 5 & 1 \\ & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & 3 & -6 & 3 & 2 \end{array}$$

이므로

$$\begin{aligned} 3x^3-7x^2+5x+1 &= \left(x-\frac{1}{3}\right)\left(\boxed{3x^2-6x+3}\right)+2 \\ &= (3x-1)\left(\boxed{x^2-2x+1}\right)+2 \end{aligned}$$

이다. 따라서 몫은 $\boxed{x^2-2x+1}$, 나머지는 2이다.

$$\begin{aligned} \text{즉, } f(x) &= 3x^2-6x+3, g(x) = x^2-2x+1 \text{이므로} \\ f(2)+g(2) &= 3+1=4 \end{aligned}$$

AB 유형 점검

20~22쪽

0092 [답] ③

$$A+B=2x^3-x^2+4x+6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$B+C=x^3-2x \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$C+A=3x^3-x^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} \text{을 하면 } 2(A+B+C) = 6x^3 - 2x^2 + 2x + 6$$

$$\therefore A+B+C = 3x^3 - x^2 + x + 3$$

0093 답 6

$(x^2 - 2x + 1)(2x^3 - x + 3)$ 의 전개식에서

$$x^2 \text{항은 } x^2 \times 3 + (-2x) \times (-x) = 3x^2 + 2x^2 = 5x^2$$

$$\therefore a = 5$$

$$x^3 \text{항은 } x^2 \times (-x) + 1 \times 2x^3 = -x^3 + 2x^3 = x^3$$

$$\therefore b = 1$$

$$\therefore a+b = 5+1 = 6$$

0094 답 ③

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) + (x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

$$= x^3 + y^3 + x^3 - 8y^3$$

$$= 2x^3 - 7y^3$$

0095 답 ④

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0 \text{에서 } \frac{bc+ca-ab}{abc} = 0 \quad \therefore ab-bc-ca=0$$

$$\therefore (a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab-bc-ca)$$

$$= 9 + 2 \times 0 = 9$$

0096 답 ④

$x^2 + 2x = X$ 로 놓으면

$$(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x - 2) = (X+1)(X-2) = X^2 - X - 2$$

$$= (x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x) - 2$$

$$= x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^2 - 2x - 2$$

$$= x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x - 2$$

따라서 $a=4, b=3, c=-2$ 이므로 $a-b-c=3$

0097 답 ①

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \text{에서}$$

$$6 = (-2)^2 - 2xy \quad \therefore xy = -1$$

$$\therefore x^3 + y^3 - 2xy = (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 2xy$$

$$= (-2)^3 - 3 \times (-1) \times (-2) - 2 \times (-1) = -12$$

0098 답 38

$$(x-1)^3 + (y-1)^3$$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + y^3 - 3y^2 + 3y - 1$$

$$= x^3 + y^3 - 3(x^2 + y^2) + 3(x+y) - 2$$

$$= (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 3\{(x+y)^2 - 2xy\} + 3(x+y) - 2$$

$$= 4^3 - 3 \times (-2) \times 4 - 3 \times \{4^2 - 2 \times (-2)\} + 3 \times 4 - 2 = 38$$

0099 답 ⑤

$$\left(3x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 = 70 \text{에서}$$

$$9x^2 + 6 + \frac{1}{x^2} + x^2 - 6 + \frac{9}{x^2} = 70$$

$$10x^2 + \frac{10}{x^2} = 70 \quad \therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 7 + 2 = 9$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x + \frac{1}{x} = 3$

$$\begin{aligned} \therefore x + x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)\right\} \\ &= 3 + (3^3 - 3 \times 3) = 21 \end{aligned}$$

0100 답 ②

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{에서}$$

$$12 = 2^2 - 2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore ab+bc+ca = -4$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \text{에서}$$

$$23 = 2 \times \{12 - (-4)\} + 3abc$$

$$\therefore abc = -3$$

0101 답 ③

$100 = a$ 로 놓으면

$$99 \times (100^2 + 101) = (a-1)(a^2 + a + 1) = a^3 - 1$$

$$= 100^3 - 1 = 10^6 - 1$$

$$\therefore n = 6$$

0102 답 56

$\overline{BC} = a, \overline{CD} = b, \overline{CG} = c$ 라 하면 직육면체의 길이가 136이므로

$$2(ab+bc+ca) = 136$$

$$\therefore ab+bc+ca = 68 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 120이므로

$$\overline{BD}^2 + \overline{DG}^2 + \overline{BG}^2 = 120$$

$$(a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) = 120$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 120$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 60 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

$$= 60 + 2 \times 68 = 196$$

그런데 $a+b+c > 0$ 이므로

$$a+b+c = 14$$

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$$4(a+b+c) = 4 \times 14 = 56$$

0103 답 ④

다항식 $2x^3 - x^2 - 4x + 5$ 를 $x^2 + x - 1$ 로 나누면

$$\begin{array}{r} 2x-3 \\ x^2+x-1 \overline{) 2x^3-x^2-4x+5} \\ \underline{2x^3+2x^2-2x} \\ -3x^2-2x+5 \\ \underline{-3x^2-3x+3} \\ x+2 \end{array}$$

따라서 $Q(x) = 2x - 3, R(x) = x + 2$ 이므로

$$Q(3) + R(2) = 3 + 4 = 7$$

0104 답 ①

다항식 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫이 $x^2 - 3$ 이고 나머지가 -1 이므로

$$f(x) = (x-2)(x^2 - 3) - 1 = x^3 - 2x^2 - 3x + 5$$

다항식 $f(x)$ 를 x^2+1 로 나누면

$$\begin{array}{r} x-2 \\ x^2+1 \overline{) x^3-2x^2-3x+5} \\ \underline{x^3 + x} \\ -2x^2-4x+5 \\ \underline{-2x^2 -2} \\ -4x+7 \end{array}$$

따라서 나머지가 $-4x+7$ 이므로 $a=-4$

0105 답 ①

다항식 $f(x)$ 를 x^2+1 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$f(x)=(x^2+1)Q(x)+x+1$ 이므로

$\{f(x)\}^2$

$$\begin{aligned} &= (x^2+1)^2\{Q(x)\}^2 + 2(x^2+1)(x+1)Q(x) + (x+1)^2 \\ &= (x^2+1)[(x^2+1)\{Q(x)\}^2 + 2(x+1)Q(x)] + x^2+2x+1 \\ &= (x^2+1)[(x^2+1)\{Q(x)\}^2 + 2(x+1)Q(x)] + (x^2+1)+2x \\ &= (x^2+1)[(x^2+1)\{Q(x)\}^2 + 2(x+1)Q(x)+1] + 2x \end{aligned}$$

따라서 $R(x)=2x$ 이므로 $R(3)=6$

0106 답 몫: $3Q(x)$, 나머지: R

다항식 $f(x)$ 를 $3x+9$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로

$$f(x)=(3x+9)Q(x)+R=(x+3)\times 3Q(x)+R$$

따라서 다항식 $f(x)$ 를 $x+3$ 으로 나누었을 때의 몫은 $3Q(x)$, 나머지는 R 이다.

0107 답 ①

조립제법을 이용하여 다항식 x^3-3x+a 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -3 & a \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}$$

$$\therefore b=1, c=0, d=1, e=-2$$

이때 $a-2=-1$ 이므로 $a=1$

0108 답 $2x^3+8x-4$

밑면의 모양이 사다리꼴이므로 사각기둥의 밑넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{(x-1)+(x-4)\} \times 4 = 4x-10 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

사각기둥의 옆넓이는

$$\{(x-1)+4+(x-4)+5\} \times (x^2-2x+4)$$

$$=2(x+2)(x^2-2x+4)$$

$$=2(x^3+8)$$

$$=2x^3+16 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 사각기둥의 겉넓이는

$$(4x-10) \times 2 + (2x^3+16) = 2x^3+8x-4 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 사각기둥의 밑넓이 구하기	30 %
② 사각기둥의 옆넓이 구하기	50 %
③ 사각기둥의 겉넓이 구하기	20 %

0109 답 -25

$x^2-3x-1=0$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면

$$x-3-\frac{1}{x}=0$$

$$\therefore x-\frac{1}{x}=3 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^4+1}{x^2}-\frac{x^6-1}{x^3} &= x^2+\frac{1}{x^2}-\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right) \\ &= \left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2-\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)\right\} \\ &= 3^2+2-(3^3+3 \times 3) \\ &= -25 \quad \dots\dots \textcircled{ii} \end{aligned}$$

채점 기준

① $x-\frac{1}{x}$ 의 값 구하기	30 %
② 주어진 식의 값 구하기	70 %

0110 답 48

직사각형 OCDE의 가로의 길이를 a , 세로의 길이를 b 라 하면 직사각형 OCDE의 둘레의 길이가 28이므로

$$2(a+b)=28 \quad \therefore a+b=14$$

직사각형 OCDE의 대각선의 길이가 사분원 OAB의 반지름의 길이와 같으므로

$$a^2+b^2=10^2=100 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab \text{에서}$$

$$100=14^2-2ab \quad \therefore ab=48$$

따라서 직사각형 OCDE의 넓이는 48이다. $\dots\dots \textcircled{ii}$

채점 기준

① 주어진 조건을 직사각형 OCDE의 가로, 세로의 길이에 대한 식으로 나타내기	50 %
② 직사각형 OCDE의 넓이 구하기	50 %

C 실력 향상

23쪽

0111 답 -232

$$(xz+yw)+(xw+yz)=x(z+w)+y(w+z)$$

$$=(x+y)(z+w)$$

$$=(-1) \times 4 = -4$$

$$(xz+yw)(xw+yz)=x^2zw+xyz^2+xyw^2+y^2zw$$

$$=(x^2+y^2)zw+xy(z^2+w^2) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(-1)^2-2 \times (-2)=5,$$

$$z^2+w^2=(z+w)^2-2zw=4^2-2 \times 2=12 \text{이므로 } \textcircled{㉠} \text{에서}$$

$$(xz+yw)(xw+yz)=5 \times 2 + (-2) \times 12$$

$$=-14$$

$$\therefore (xz+yw)^3+(xw+yz)^3$$

$$=\{(xz+yw)+(xw+yz)\}^3$$

$$-3(xz+yw)(xw+yz)\{(xz+yw)+(xw+yz)\}$$

$$=(-4)^3-3 \times (-14) \times (-4)$$

$$=-232$$

0112 답 8

$$\begin{aligned}
 7 \times 13 \times 109 \times 10081 &= (10-3)(10+3)(10^2+3^2)(10^4+3^4) \\
 &= (10^2-3^2)(10^2+3^2)(10^4+3^4) \\
 &= (10^4-3^4)(10^4+3^4) = 10^8-3^8 \\
 2 \times 4 \times 10 \times 82 &= (3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1) \\
 &= (3^2-1)(3^2+1)(3^4+1) \\
 &= (3^4-1)(3^4+1) = 3^8-1 \\
 \therefore 7 \times 13 \times 109 \times 10081 + 2 \times 4 \times 10 \times 82 \\
 &= (10^8-3^8) + (3^8-1) = 10^8-1 \\
 \therefore a &= 8
 \end{aligned}$$

0113 답 ③

삼각형 ABC가 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 에서
 $x^2 + y^2 = 10$ ㉠

삼각형 ABC와 삼각형 APS는 서로 닮음이고, 닮음비는
 $\overline{BC} : \overline{PS} = \sqrt{10} : \frac{2\sqrt{10}}{7} = 7 : 2$ 이므로
 $\overline{AP} = \frac{2}{7}x$, $\overline{AS} = \frac{2}{7}y$

또 삼각형 APS와 삼각형 RSC가 서로 닮음이므로
 $\overline{AP} : \overline{PS} = \overline{RS} : \overline{SC}$ 에서
 $\frac{2}{7}x : \frac{2\sqrt{10}}{7} = \frac{2\sqrt{10}}{7} : \left(y - \frac{2}{7}y\right)$
 $x : \sqrt{10} = \frac{2\sqrt{10}}{7} : \frac{5}{7}y$, $\frac{5}{7}xy = \frac{20}{7}$
 $\therefore xy = 4$ ㉡

㉠, ㉡에서 $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 10 - 2 \times 4 = 2$
 이때 $x > y$ 이므로 $x - y = \sqrt{2}$
 $\therefore x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$
 $= (\sqrt{2})^3 + 3 \times 4 \times \sqrt{2} = 14\sqrt{2}$

0114 답 ①

$x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 에서 $2x-1 = \sqrt{3}$
 양변을 제곱하면
 $4x^2 - 4x + 1 = 3$ $\therefore 2x^2 - 2x - 1 = 0$
 이때 다항식 $2x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 5x + 3$ 을 $2x^2 - 2x - 1$ 로 나누면

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 3x + 3 \\
 2x^2 - 2x - 1 \overline{) 2x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 5x + 3} \\
 \underline{2x^4 - 2x^3 - x^2} \\
 -6x^3 + 12x^2 - 5x \\
 \underline{-6x^3 + 6x^2 + 3x} \\
 6x^2 - 8x + 3 \\
 \underline{6x^2 - 6x - 3} \\
 -2x + 6
 \end{array}$$

$\therefore 2x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 5x + 3$
 $= (2x^2 - 2x - 1)(x^2 - 3x + 3) - 2x + 6$
 이때 $2x^2 - 2x - 1 = 0$ 이므로
 $2x^4 - 8x^3 + 11x^2 - 5x + 3 = -2x + 6$
 $= -2 \times \frac{1+\sqrt{3}}{2} + 6 = 5 - \sqrt{3}$

02 / 나머지 정리와 인수분해

A 개념 확인

24~27쪽

0115 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

0116 답 $a = -3, b = 4, c = -2$

0117 답 $a = -2, b = -3, c = 1$

0118 답 $a = -1, b = -1, c = -2$

$a - b = 0, c + 2 = 0, 2b - c = 0$ 이므로
 $c = -2, 2b = c, a = b$
 $\therefore a = -1, b = -1, c = -2$

0119 답 $a = 1, b = 3, c = 6$

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $c=6$
 주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $-b+c=3$ $\therefore b=3$
 우변의 최고차항인 x^2 의 계수가 1이므로
 $a=1$

다른 풀이

주어진 등식의 좌변을 x 에 대하여 정리하면
 $ax^2 + (-a+b)x - b + c = x^2 + 2x + 3$
 $a=1, -a+b=2, -b+c=3$ 이므로
 $a=1, b=3, c=6$

0120 답 $a = 0, b = -1, c = -1$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면
 $0 = -6c - 6$ $\therefore c = -1$
 주어진 등식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면
 $3a = 0$ $\therefore a = 0$
 주어진 등식의 양변에 $x=-3$ 을 대입하면
 $-2a + 10b = -10$ $\therefore b = -1$

0121 답 $a = -3, b = 2$

$a - b + 5 = 0, 3a + 2b + 5 = 0$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면
 $a = -3, b = 2$

0122 답 $a = -5, b = -3$

0123 답 $a = 2, b = -2$

주어진 등식의 좌변을 x, y 에 대하여 정리하면
 $(a-b)x + (a+2b)y - 3 = 4x - 2y - 3$
 $a - b = 4, a + 2b = -2$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면
 $a = 2, b = -2$

0124 답 (1) -1 (2) 9

(1) $f(-3) = -27 + 18 + 9 - 1 = -1$
 (2) $f(2) = 8 + 8 - 6 - 1 = 9$

0125 답 2

$$f(-1)=3 \text{이므로}$$

$$-4+a+2+3=3 \quad \therefore a=2$$

0126 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

ㄱ. $f(-2)=-8+4+8-4=0$ 이므로 $x+2$ 는 $f(x)$ 의 인수이다.
 ㄴ. $f(-1)=-1+1+4-4=0$ 이므로 $x+1$ 은 $f(x)$ 의 인수이다.
 ㄷ. $f(1)=1+1-4-4 \neq 0$ 이므로 $x-1$ 은 $f(x)$ 의 인수가 아니다.
 ㄹ. $f(2)=8+4-8-4=0$ 이므로 $x-2$ 는 $f(x)$ 의 인수이다.
 따라서 $f(x)$ 의 인수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

0127 답 (1) -8 (2) -5

(1) $f(-2)=0$ 이므로

$$-16-4-2k+4=0 \quad \therefore k=-8$$

(2) $f(1)=0$ 이므로

$$2-1+k+4=0 \quad \therefore k=-5$$

0128 답 $a=1, b=-4$

$f(x)$ 가 $(x+1)(x-2)$ 로 나누어떨어지면 $x+1, x-2$ 로도 나누어떨어지므로 $f(-1)=0, f(2)=0$ 이다.
 $f(-1)=0$ 에서 $-1+a-b-4=0$
 $a-b=5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $f(2)=0$ 에서 $8+4a+2b-4=0$
 $2a+b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=-4$

0129 답 $3a(2a-3b^2)$

0130 답 $(x+2)(y-3)$

$$xy-3x+2y-6=x(y-3)+2(y-3)=(x+2)(y-3)$$

0131 답 $(3x+4y)^2$

0132 답 $(2a-3)^2$

0133 답 $8(2x+y)(2x-y)$

$$32x^2-8y^2=8(4x^2-y^2)=8(2x+y)(2x-y)$$

0134 답 $(a+6)(a-3)$

0135 답 $(3x+5)(2x-1)$

0136 답 $(x-y+2)^2$

$$x^2+y^2-2xy+4x-4y+4$$

$$=x^2+(-y)^2+2 \times x \times (-y)+2 \times (-y) \times 2+2 \times x \times 2$$

$$=(x-y+2)^2$$

0137 답 $(2a+b-c)^2$

$$4a^2+b^2+c^2+4ab-2bc-4ac$$

$$=(2a)^2+b^2+(-c)^2+2 \times 2a \times b+2 \times b \times (-c)+2 \times 2a \times (-c)$$

$$=(2a+b-c)^2$$

0138 답 $(x+3)^3$

$$x^3+9x^2+27x+27=x^3+3 \times x^2 \times 3+3 \times x \times 3^2+3^3$$

$$=(x+3)^3$$

0139 답 $(a-4b)^3$

$$a^3-12a^2b+48ab^2-64b^3$$

$$=a^3-3 \times a^2 \times 4b+3 \times a \times (4b)^2-(4b)^3$$

$$=(a-4b)^3$$

0140 답 $(x+3)(x^2-3x+9)$

0141 답 $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$

0142 답 $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$

0143 답 $(9a^2+3ab+b^2)(9a^2-3ab+b^2)$

0144 답 $(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$

0145 답 $(x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)$

0146 답 $(x+1)(x-1)$

$x+2=X$ 로 놓으면

$$(x+2)^2-4(x+2)+3=X^2-4X+3$$

$$=(X-1)(X-3)$$

$$=(x+2-1)(x+2-3)$$

$$=(x+1)(x-1)$$

0147 답 $(x-1)(x-2)(x+2)(x-5)$

$x^2-3x=X$ 로 놓으면

$$(x^2-3x-3)(x^2-3x-5)-35=(X-3)(X-5)-35$$

$$=X^2-8X-20$$

$$=(X+2)(X-10)$$

$$=(x^2-3x+2)(x^2-3x-10)$$

$$=(x-1)(x-2)(x+2)(x-5)$$

0148 답 $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

$x^2=X$ 로 놓으면

$$x^4-5x^2+4=X^2-5X+4$$

$$=(X-1)(X-4)$$

$$=(x^2-1)(x^2-4)$$

$$=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$$

0149 답 $(x^2+2x+5)(x^2-2x+5)$

$$x^4+6x^2+25=(x^4+10x^2+25)-4x^2$$

$$=(x^2+5)^2-(2x)^2$$

$$=(x^2+5+2x)(x^2+5-2x)$$

$$=(x^2+2x+5)(x^2-2x+5)$$

0150 답 $(x+a)(x-y-a)$

y 에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$x^2-xy-ay-a^2=-(x+a)y+x^2-a^2$$

$$=-(x+a)y+(x+a)(x-a)$$

$$=(x+a)(x-y-a)$$

0151 답 $(x+y+2)(x+y-3)$

x 에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2xy - x - y - 6 &= x^2 + (2y-1)x + y^2 - y - 6 \\ &= x^2 + (2y-1)x + (y+2)(y-3) \\ &= (x+y+2)(x+y-3) \end{aligned}$$

0152 답 $(x-1)(x+2)(x+3)$

$f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ 이라 하면

$f(1) = 1 + 4 + 1 - 6 = 0$ 이므로 $x-1$ 은

$f(x)$ 의 인수이다.

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 + x - 6 &= (x-1)(x^2 + 5x + 6) \\ &= (x-1)(x+2)(x+3) \end{aligned}$$

0153 답 $(x+1)(x-2)(x^2-4x+2)$

$f(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 6x - 4$ 라 하면

$f(-1) = 1 + 5 + 4 - 6 - 4 = 0$,

$f(2) = 16 - 40 + 16 + 12 - 4 = 0$

이므로 $x+1$, $x-2$ 는 $f(x)$ 의 인수이다. 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -5 & 4 & 6 & -4 \\ & & -1 & 6 & -10 & 4 \\ \hline 2 & 1 & -6 & 10 & -4 & 0 \\ & & 2 & -8 & 4 & \\ \hline & 1 & -4 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 6x - 4 = (x+1)(x-2)(x^2 - 4x + 2)$$

B 유형 완성

28~39쪽

0154 답 3

주어진 등식의 우변을 전개하면

$$x^3 - 2x^2 + ax - 32 = x^3 + (b+c)x^2 + (bc-16)x - 16b$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$-2 = b+c, a = bc-16, -32 = -16b$$

$$-32 = -16b \text{에서 } b=2$$

$$-2 = b+c \text{에서 } -2 = 2+c \quad \therefore c = -4$$

$$a = bc - 16 \text{에서 } a = -8 - 16 = -24$$

$$\therefore \frac{a}{bc} = \frac{-24}{2 \times (-4)} = 3$$

0155 답 ①

주어진 등식을 k 에 대하여 정리하면

$$(x+y-3)k + 2x - 3y + 4 = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$x+y-3=0, 2x-3y+4=0$$

$$\therefore x+y=3, 2x-3y=-4$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1, y=2$

$$\therefore xy=2$$

0156 답 6

주어진 등식의 좌변을 x, y 에 대하여 정리하면

$$(a+b)x + (a-2b)y + c = 4x + y + 2$$

이 등식이 x, y 에 대한 항등식이므로

$$a+b=4, a-2b=1, c=2$$

$$a+b=4, a-2b=1 \text{을 연립하여 풀면}$$

$$a=3, b=1$$

$$\therefore abc = 3 \times 1 \times 2 = 6$$

0157 답 ⑤

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$-2b = -4 \quad \therefore b=2$$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$3c = -3 \quad \therefore c = -1$$

주어진 등식의 양변에 $x=2$ 을 대입하면

$$6a = 6 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a+b+c = 1+2+(-1) = 2$$

0158 답 -4

주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$-28 = -24 + b \quad \therefore b = -4$$

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 4a + b, 0 = 4a - 4 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore ab = 1 \times (-4) = -4$$

채점 기준

① b 의 값 구하기	40 %
② a 의 값 구하기	40 %
③ ab 의 값 구하기	20 %

0159 답 ①

주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$0 = 1 + a + b \quad \therefore a+b = -1 \quad \cdots \textcircled{7}$$

주어진 등식의 양변에 $x^2=2$ 을 대입하면

$$0 = 4 + 2a + b \quad \therefore 2a+b = -4 \quad \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $a=-3, b=2$

$$\therefore ab = -6$$

0160 답 2

$x+y=2$ 에서 $y=2-x$ 이므로 주어진 등식에 대입하면

$$ax^2 + bx(2-x) + c(2-x)^2 = 4$$

$$(a-b+c)x^2 + 2(b-2c)x + 4c-4 = 0$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a-b+c=0, b-2c=0, 4c-4=0$$

$$4c-4=0 \text{에서 } c=1$$

$$b-2c=0 \text{에서 } b-2=0 \quad \therefore b=2$$

$$a-b+c=0 \text{에서 } a-2+1=0 \quad \therefore a=1$$

$$\therefore abc = 1 \times 2 \times 1 = 2$$

0161 [답] ③

$ax+by=(3-b)x+2(a-1)y-9$ 에서
 $(a+b-3)x+(-2a+b+2)y+9=0$
 이때 $x-y=3$ 에서 $y=x-3$ 이므로 위의 등식에 대입하면
 $(a+b-3)x+(-2a+b+2)(x-3)+9=0$
 $(-a+2b-1)x+6a-3b+3=0$
 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 $-a+2b-1=0, 6a-3b+3=0$
 $\therefore a-2b=-1, 2a-b=-1$
 두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{3}, b=\frac{1}{3}$
 $\therefore a+b=0$

0162 [답] ②

주어진 방정식에 $x=1$ 을 대입하면
 $1+k(2p-3)-(p^2-2)k+q+2=0$
 $(-p^2+2p-1)k+q+3=0$
 이 등식이 k 에 대한 항등식이므로
 $-p^2+2p-1=0, q+3=0$
 $-p^2+2p-1=0$ 에서 $p^2-2p+1=0$
 $(p-1)^2=0$
 $\therefore p=1$
 $q+3$ 에서 $q=-3$
 $\therefore p+q=-2$

0163 [답] -1

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $-1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{14} \quad \cdots \textcircled{1}$
 주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면
 $1=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{14} \quad \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면 $-2=2(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{13})$
 $\therefore a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{13}=-1$

0164 [답] ④

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $-1=a_0 \quad \cdots \textcircled{1}$
 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $0=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9$
 $\textcircled{1}$ 을 대입하면 $0=-1+a_1+a_2+\cdots+a_9$
 $\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9=1$

0165 [답] ①

주어진 등식의 양변에 $x=3$ 을 대입하면
 $3^{20}+1=a_{20}+a_{19}+\cdots+a_1+a_0 \quad \cdots \textcircled{1}$
 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $2=a_{20}-a_{19}+\cdots-a_1+a_0 \quad \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}+\textcircled{2}$ 을 하면 $3^{20}+3=2(a_{20}+a_{18}+\cdots+a_2+a_0)$
 $\therefore a_{20}+a_{18}+\cdots+a_2+a_0=\frac{3^{20}+3}{2}$
 $=\frac{3(3^{19}+1)}{2}$

0166 [답] ⑤

x^3+ax^2+b 를 x^2-x+3 으로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c 는 상수)라 하면
 $x^3+ax^2+b=(x^2-x+3)(x+c)+2$
 $=x^3+(c-1)x^2+(-c+3)x+3c+2$
 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 $a=c-1, 0=-c+3, b=3c+2$
 $0=-c+3$ 에서 $c=3$
 $a=c-1$ 에서 $a=3-1=2$
 $b=3c+2$ 에서 $b=9+2=11$
 $\therefore a+b=13$

0167 [답] -10

x^3-5x^2+ax+6 을 x^2-4x+b 로 나누었을 때의 몫을
 $x+c$ (c 는 상수)라 하면
 $x^3-5x^2+ax+6=(x^2-4x+b)(x+c)+3x+4$
 $=x^3+(c-4)x^2+(b-4c+3)x+bc+4 \cdots \textcircled{i}$
 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 $-5=c-4, a=b-4c+3, 6=bc+4 \cdots \textcircled{ii}$
 $-5=c-4$ 에서 $c=-1$
 $6=bc+4$ 에서 $6=-b+4 \quad \therefore b=-2$
 $a=b-4c+3$ 에서 $a=-2+4+3=5 \quad \cdots \textcircled{iii}$
 $\therefore ab=-10 \quad \cdots \textcircled{iii}$

채점 기준

① 몫을 이용하여 항등식 세우기	30 %
② a, b 의 값 구하기	60 %
③ ab 의 값 구하기	10 %

0168 [답] ②

$x^4+2x^3+4x^2+4$ 를 x^2+ax+b 로 나누었을 때의 몫이 x^2+1 이고
 나머지가 $-2x+1$ 이므로
 $x^4+2x^3+4x^2+4=(x^2+ax+b)(x^2+1)-2x+1$
 $=x^4+ax^3+(b+1)x^2+(a-2)x+b+1$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 $2=a, 4=b+1, 0=a-2, 4=b+1$
 따라서 $a=2, b=3$ 이므로 $a-b=-1$

0169 [답] 3

$(x+2)(x-1)(x+a)+b(x-1)$ 을 x^2+4x+5 로 나누었을 때의
 몫을 $x+c$ (c 는 상수)라 하면
 $(x+2)(x-1)(x+a)+b(x-1)=(x^2+4x+5)(x+c)$
 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $0=10(1+c) \quad \therefore c=-1$
 양변에 $x=-2$ 를 대입하면
 $-3b=-2+c=-3 \quad \therefore b=1$
 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $-2a-b=5c$
 $-2a-1=-5 \quad \therefore a=2$
 $\therefore a+b=2+1=3$

0170 답 ③

오른쪽 조립제법에서

$$x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

$$= (x-1)(x^2 + 4x + 2) + 3$$

$$= (x-1)\{(x-1)(x+5) + 7\} + 3$$

$$= (x-1)^2(x+5) + 7(x-1) + 3$$

$$= (x-1)^2\{(x-1) + 6\} + 7(x-1) + 3$$

$$= (x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 7(x-1) + 3$$

따라서 $a=6$, $b=7$, $c=3$ 이므로

$$a-b+c=2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ & & 1 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ & & 1 & 5 & \\ \hline 1 & 1 & 5 & 7 & \\ & & 1 & & \\ \hline & 1 & 6 & & \end{array}$$

0171 답 ①주어진 조립제법에서 $p+6=5$, $q-3=-2$ 이므로

$$p=-1, q=1$$

$$\therefore 2x^3 - x^2 - 16x + 1$$

$$= (x-3)(2x^2 + 5x - 1) - 2$$

$$= (x-3)\{(x-3)(2x+11) + 32\} - 2$$

$$= (x-3)^2(2x+11) + 32(x-3) - 2$$

$$= (x-3)^2\{2(x-3) + 17\} + 32(x-3) - 2$$

$$= 2(x-3)^3 + 17(x-3)^2 + 32(x-3) - 2$$

따라서 $a=2$, $b=17$, $c=32$, $d=-2$ 이므로

$$(p-q)(a-b+c+d) = (-2) \times 15 = -30$$

0172 답 37

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 64 & -32 & -4 & 7 \\ & & 32 & 0 & -2 \\ \hline \frac{1}{2} & 64 & 0 & -4 & 5 \\ & & 32 & 16 & \\ \hline \frac{1}{2} & 64 & 32 & 12 & \\ & & 32 & & \\ \hline & 64 & 64 & & \end{array}$$

위의 조립제법에서

$$64x^3 - 32x^2 - 4x + 7$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)(64x^2 - 4) + 5$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)\left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)(64x + 32) + 12\right\} + 5$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2(64x + 32) + 12\left(x - \frac{1}{2}\right) + 5$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\left\{64\left(x - \frac{1}{2}\right) + 64\right\} + 12\left(x - \frac{1}{2}\right) + 5$$

$$= 64\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 + 64\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 12\left(x - \frac{1}{2}\right) + 5$$

$$= 8(2x-1)^3 + 16(2x-1)^2 + 6(2x-1) + 5$$

따라서 $a=8$, $b=16$, $c=6$, $d=5$ 이므로

$$ac-b+d=37$$

0173 답 -6 $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ 라 하면 나머지 정리에 의하여

$$f(-1)=1, f(-3)=-3$$

$$f(-1)=1 \text{에서 } -1+2-a+b=1$$

$$\therefore a-b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(-3)=-3 \text{에서 } -27+18-3a+b=-3$$

$$\therefore 3a-b=-6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-3$

$$\therefore a+b=-6$$

0174 답 12나머지 정리에 의하여 $f(2)=4$ 따라서 $(x+1)f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$(2+1)f(2)=3 \times 4 = 12$$

0175 답 14나머지 정리에 의하여 $f(-1)=2$ 이므로

$$-1+a+5=2 \quad \therefore a=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{i}$$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+5$ 이므로 $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$f(3)=27-18+5=14 \quad \cdots \cdots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① a 의 값 구하기	30 %
② 나머지 구하기	70 %

0176 답 ③ $f(x)=x^3+2x^2-ax+1$ 이라 하면 나머지 정리에 의하여

$$f(-2)=f(3) \text{이므로}$$

$$-8+8+2a+1=27+18-3a+1$$

$$2a+1=-3a+46 \quad \therefore a=9$$

0177 답 ⑤

나머지 정리에 의하여

$$f(4)+g(4)=3, f(4)g(4)=2$$

따라서 $\{f(x)\}^3 + \{g(x)\}^3$ 을 $x-4$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$\begin{aligned} \{f(4)\}^3 + \{g(4)\}^3 &= \{f(4)+g(4)\}^3 - 3f(4)g(4)\{f(4)+g(4)\} \\ &= 3^3 - 3 \times 2 \times 3 = 9 \end{aligned}$$

0178 답 $2x-3$

나머지 정리에 의하여

$$f(1)=-1, f(3)=3$$

 $f(x)$ 를 x^2-4x+3 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x^2-4x+3)Q(x)+ax+b$$

$$= (x-1)(x-3)Q(x)+ax+b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1)=a+b$ 에서

$$a+b=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①의 양변에 $x=3$ 을 대입하면 $f(3)=3a+b$ 에서

$$3a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

②, ③을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$ 따라서 구하는 나머지는 $2x-3$ 이다.**0179** 답 ④

나머지 정리에 의하여

$$f(-2)=1, f(2)=5$$

$x^2f(x)$ 를 x^2-4 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $x^2f(x)=(x^2-4)Q(x)+ax+b$
 $= (x+2)(x-2)Q(x)+ax+b$ ㉠
 ㉠의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면
 $(-2)^2 \times f(-2) = -2a+b$ $\therefore -2a+b=4$ ㉡
 ㉠의 양변에 $x=2$ 를 대입하면
 $2^2 \times f(2) = 2a+b$ $\therefore 2a+b=20$ ㉢
 ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=4, b=12$
 따라서 $R(x)=4x+12$ 이므로 $R(1)=16$

0180 [답] 2x

$f(x)$ 를 x^2+x-6 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면
 $f(x)=(x^2+x-6)Q_1(x)+4$
 $= (x+3)(x-2)Q_1(x)+4$
 $\therefore f(2)=4$
 $f(x)$ 를 x^2-2x-3 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면
 $f(x)=(x^2-2x-3)Q_2(x)+x-1$
 $= (x+1)(x-3)Q_2(x)+x-1$
 $\therefore f(-1)=-2$ i
 $f(x)$ 를 x^2-x-2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $f(x)=(x^2-x-2)Q(x)+ax+b$
 $= (x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$ ㉠ ii
 ㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $f(-1)=-a+b$ 에서
 $-a+b=-2$ ㉡
 ㉠의 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $f(2)=2a+b$ 에서
 $2a+b=4$ ㉢
 ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2, b=0$
 따라서 구하는 나머지는 $2x$ 이다. iii

채점 기준

i $f(-1), f(2)$ 의 값 구하기	40 %
ii $f(x)$ 에 대한 항등식으로 나타내기	20 %
iii 나머지 구하기	40 %

0181 [답] ④

$x^{10}+x^7+x^5+x^2$ 을 x^3-x 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면
 $x^{10}+x^7+x^5+x^2=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$
 $= x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ ㉠
 ㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $c=0$
 ㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $0=a-b+c$
 $\therefore a-b=0$ ㉡
 ㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $4=a+b+c$
 $\therefore a+b=4$ ㉢
 ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2, b=2$
 따라서 구하는 나머지는 $2x^2+2x$ 이다.

0182 [답] $-x^2+2x-1$

$f(x)$ 를 $x(x+1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면
 $f(x)=x(x+1)Q_1(x)+3x-1$
 $\therefore f(0)=-1, f(-1)=-4$
 $f(x)$ 를 $(x+1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면
 $f(x)=(x+1)(x-2)Q_2(x)+x-3$ $\therefore f(2)=-1$
 $f(x)$ 를 $x(x+1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면
 $f(x)=x(x+1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$ ㉠
 ㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $f(0)=c$ 에서
 $c=-1$
 ㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $f(-1)=a-b+c$ 에서
 $a-b+c=-4, a-b-1=-4$
 $\therefore a-b=-3$ ㉡
 ㉠의 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $f(2)=4a+2b+c$ 에서
 $4a+2b+c=-1, 4a+2b-1=-1$
 $\therefore 2a+b=0$ ㉢
 ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-1, b=2$
 따라서 구하는 나머지는 $-x^2+2x-1$ 이다.

0183 [답] $2x^2+5x+1$

$f(x)$ 를 $(x+1)^2(x+2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면
 $f(x)=(x+1)^2(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$ ㉠
 $f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $x-1$ 이므로 ㉠에서
 ax^2+bx+c 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $x-1$ 이다.
 $\therefore ax^2+bx+c=a(x+1)^2+x-1$ ㉡
 ㉡을 ㉠에 대입하면
 $f(x)=(x+1)^2(x+2)Q(x)+a(x+1)^2+x-1$
 한편 $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지가 -1 이므로
 $f(-2)=-1$ 에서 $a-3=-1$ $\therefore a=2$
 따라서 구하는 나머지는
 $2(x+1)^2+x-1=2x^2+5x+1$

0184 [답] 1

$f(x)=x^{100}-x^{60}+x-5$ 라 하면 $f(-1)=-6$ 이므로
 $x^{100}-x^{60}+x-5=(x+1)Q(x)-6$ ㉠
 이때 $Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 $Q(1)$ 이므로 ㉠의 양
 변에 $x=1$ 을 대입하면
 $-4=2Q(1)-6$ $\therefore Q(1)=1$

0185 [답] ②

$f(x)=(x+3)Q(x)+2$ ㉠
 이때 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 -3 이므로
 $f(2)=-3$
 $Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 $Q(2)$ 이므로 ㉠의 양변에
 $x=2$ 를 대입하면
 $f(2)=5Q(2)+2$
 $-3=5Q(2)+2$ $\therefore Q(2)=-1$

0186 답 -12

$$f(x) = (x-1)Q(x) + 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이때 $Q(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지가 5이므로 $Q(-2)=5$
 $f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 $f(-2)$ 이므로 $\textcircled{㉠}$ 의 양변에
 $x=-2$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} f(-2) &= -3Q(-2) + 3 \\ &= -3 \times 5 + 3 = -12 \end{aligned}$$

0187 답 6

$$f(x) = (x^2 - 2x + 4)Q(x) + 3x + 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$Q(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$ 라 하면

$$Q(x) = (x+2)Q'(x) + 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉡}$ 을 $\textcircled{㉢}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 2x + 4)\{(x+2)Q'(x) + 1\} + 3x + 2 \\ &= (x^3 + 8)Q'(x) + x^2 + x + 6 \end{aligned}$$

따라서 $R(x) = x^2 + x + 6$ 이므로

$$R(-1) = 1 - 1 + 6 = 6$$

0188 답 -5

$f(x)$ 를 $2x^2 + x - 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 + x - 1)Q(x) + 3x - 2 \\ &= (2x - 1)(x + 1)Q(x) + 3x - 2 \end{aligned}$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면 $f(-1) = -5$

따라서 $f(2x+3)$ 을 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(2 \times (-2) + 3) = f(-1) = -5$$

0189 답 ①

$f(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지가 -2이므로

$$f(-1) = -2$$

따라서 $f(x+6)$ 을 $x+7$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(-7+6) = f(-1) = -2$$

0190 답 8

$f(x)$ 를 $x^2 + 5x + 6$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 5x + 6)Q(x) + 3x + 7 \\ &= (x+3)(x+2)Q(x) + 3x + 7 \end{aligned}$$

양변에 $x = -2$ 를 대입하면 $f(-2) = 1$

따라서 $(4x^2 - 1)f(2x - 5)$ 를 $2x - 3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$\begin{aligned} \left(4 \times \frac{9}{4} - 1\right)f\left(2 \times \frac{3}{2} - 5\right) &= 8f(-2) \quad \leftarrow x = \frac{3}{2} \text{을 대입} \\ &= 8 \times 1 = 8 \end{aligned}$$

0191 답 ①

$9 = x$ 로 놓고 x^{50} 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$x^{50} = (x-1)Q(x) + R$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면 $R=1$

$$\therefore x^{50} = (x-1)Q(x) + 1$$

$x=9$ 이므로

$$9^{50} = 8Q(9) + 1$$

따라서 구하는 나머지는 1이다.

0192 답 ③

$80 = x$ 로 놓고 $(x+1)^{10} + x^{10} + (x-1)^{10}$ 을 x 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$(x+1)^{10} + x^{10} + (x-1)^{10} = xQ(x) + R$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면 $R=2$

$$\therefore (x+1)^{10} + x^{10} + (x-1)^{10} = xQ(x) + 2$$

$x=80$ 이므로

$$81^{10} + 80^{10} + 79^{10} = 80Q(80) + 2$$

따라서 구하는 나머지는 2이다.

0193 답 ⑤

$$2^{223} = (2^5)^{44} \times 2^3 = 32^{44} \times 8$$

$32 = x$ 로 놓고 $8x^{44}$ 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$8x^{44} = (x-1)Q(x) + R$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면 $R=8$

$$\therefore 8x^{44} = (x-1)Q(x) + 8$$

$x=32$ 이므로

$$8 \times 32^{44} = 31Q(32) + 8 \quad \therefore 2^{223} = 31Q(32) + 8$$

따라서 구하는 나머지는 8이다.

0194 답 -10

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 15$ 라 하면 $f(x)$ 가 $x+1$, $x-3$ 으로 각각 나누어떨어지므로

$$f(-1) = 0, f(3) = 0$$

$$f(-1) = 0 \text{에서 } -1 + a - b - 15 = 0$$

$$\therefore a - b = 16 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f(3) = 0 \text{에서 } 27 + 9a + 3b - 15 = 0$$

$$\therefore 3a + b = -4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-13$

$$\therefore a + b = -10$$

0195 답 -5

$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + kx^2 - x + 7$ 이라 하면 $f(x)$ 가 $x-1$ 을 인수로 가지므로 $f(1) = 0$ 에서

$$2 - 3 + k - 1 + 7 = 0 \quad \therefore k = -5$$

0196 답 ②

$f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$$f(1) = 4$$

$$\text{즉, } 1 + a + b + 6 = 4 \text{이므로 } a + b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$f(x+2)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x+2) = (x-1)Q(x)$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(3) = 0$$

$$\text{즉, } 27 + 9a + 3b + 6 = 0 \text{이므로 } 3a + b = -11 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=1$

$$\therefore b - a = 5$$

0197 답 ③

$f(-1)=-1, f(1)=1, f(2)=2$ 에서
 $f(-1)+1=0, f(1)-1=0, f(2)-2=0$
 즉, $f(x)-x$ 는 $x+1, x-1, x-2$ 로 나누어떨어진다.
 이때 $f(x)$ 는 x^3 의 계수가 1인 삼차식이므로
 $f(x)-x=(x+1)(x-1)(x-2)$
 $\therefore f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)+x$
 따라서 $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는
 $f(3)=(3+1)(3-1)(3-2)+3=11$

0198 답 ⑤

$f(x)=x^3+x^2+ax+b$ 라 하면 $f(x)$ 가 x^2-x-2 , 즉
 $(x+1)(x-2)$ 로 나누어떨어지므로
 $f(-1)=0, f(2)=0$
 $f(-1)=0$ 에서 $-1+1-a+b=0$
 $\therefore a-b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $f(2)=0$ 에서 $8+4+2a+b=0$
 $\therefore 2a+b=-12 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-4, b=-4$
 $\therefore ab=16$

다른 풀이

다항식 x^3+x^2+ax+b 를 x^2-x-2 로 나누면

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x^2-x-2 \overline{) x^3+x^2+ax+b} \\ \underline{x^3-x^2-2x} \\ 2x^2+(a+2)x+b \\ \underline{2x^2-2x-4} \\ (a+4)x+b+4 \end{array}$$

이때 나머지가 0이어야 하므로

$$(a+4)x+b+4=0$$

이 등식은 x 에 대한 항등식이므로

$$a+4=0, b+4=0$$

$$\therefore a=-4, b=-4 \quad \therefore ab=16$$

0199 답 2

$f(x)=2x^3-11x^2+ax+b$ 가 x^2-5x+6 , 즉 $(x-2)(x-3)$ 으로
 나누어떨어지므로
 $f(2)=0, f(3)=0$
 $f(2)=0$ 에서 $16-44+2a+b=0$
 $\therefore 2a+b=28 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $f(3)=0$ 에서 $54-99+3a+b=0$
 $\therefore 3a+b=45 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=17, b=-6$ i
 $\therefore f(x)=2x^3-11x^2+17x-6$
 따라서 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는
 $f(1)=2-11+17-6=2$ ii

채점 기준

i a, b의 값 구하기	60 %
ii 나머지 구하기	40 %

0200 답 24

(가)에서 $Q(x)=-2P(x)$

(나)에서 $P(x)Q(x)=P(x) \times \{-2P(x)\}=-2\{P(x)\}^2$

따라서 $-2\{P(x)\}^2$ 이 x^2-3x+2 , 즉 $(x-1)(x-2)$ 로 나누어떨
 어지므로

$$-2\{P(1)\}^2=0, -2\{P(2)\}^2=0$$

$$\therefore P(1)=0, P(2)=0$$

$P(x)$ 는 이차다항식이므로 $P(x)=k(x-1)(x-2)$ (k 는 상수)라
 하면 $P(0)=-4$ 이므로

$$2k=-4 \quad \therefore k=-2$$

따라서 $P(x)=-2(x-1)(x-2)$ 이므로

$$Q(x)=-2P(x)=4(x-1)(x-2)$$

$$\therefore Q(4)=4 \times 3 \times 2=24$$

0201 답 3

$f(x)-3$ 이 x^2-1 , 즉 $(x+1)(x-1)$ 로 나누어떨어지므로

$$f(-1)-3=0, f(1)-3=0$$

$$\therefore f(-1)=3, f(1)=3$$

$f(x+2)$ 를 x^2+4x+3 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} f(x+2) &= (x^2+4x+3)Q(x) + ax+b \\ &= (x+3)(x+1)Q(x) + ax+b \end{aligned}$$

양변에 $x=-3$ 을 대입하면 $f(-1)=-3a+b$

$$\therefore -3a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $f(1)=-a+b$

$$\therefore -a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=0, b=3$

따라서 구하는 나머지는 3이다.

0202 답 ④

$$\textcircled{4} a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca$$

$$=a^2+(-b)^2+(2c)^2+2 \times a \times (-b)+2 \times (-b) \times 2c$$

$$+2 \times 2c \times a$$

$$=(a-b+2c)^2$$

0203 답 $x(x-3y)^3$

$$\begin{aligned} x^4-9x^3y+27x^2y^2-27xy^3 &= x(x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3) \\ &= x(x-3y)^3 \end{aligned}$$

0204 답 $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$$\begin{aligned} (x-y)(x^4+y^4) &+ x^3y^2-x^2y^3 \\ &= (x-y)(x^4+y^4)+x^2y^2(x-y) \\ &= (x-y)(x^4+y^4+x^2y^2) \\ &= (x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \end{aligned}$$

0205 답 ②

$$x^6-64=(x^3)^2-(2^3)^2=(x^3+2^3)(x^3-2^3)$$

$$=(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ②이다.

0206 [답] ③

$$\begin{aligned}
 & x^3 - 8y^3 - 7xy(x-2y) \\
 &= (x-2y)(x^2+2xy+4y^2) - 7xy(x-2y) \\
 &= (x-2y)(x^2-5xy+4y^2) \\
 &= (x-2y)(x-y)(x-4y)
 \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

0207 [답] -36

$$\begin{aligned}
 & x^3 - 27y^3 + 8z^3 + 18xyz \\
 &= x^3 + (-3y)^3 + (2z)^3 - 3 \times x \times (-3y) \times 2z \\
 &= (x-3y+2z)(x^2+9y^2+4z^2+3xy+6yz-2zx)
 \end{aligned}$$

따라서 $a=3, b=6, c=-2$ 이므로
 $abc = -36$

0208 [답] ⑤

$$\begin{aligned}
 & (x+1)(x+2)^2(x+3) - 6 = \{(x+1)(x+3)\}(x+2)^2 - 6 \\
 &= (x^2+4x+3)(x^2+4x+4) - 6 \\
 & x^2+4x = X \text{로 놓으면} \\
 & (x^2+4x+3)(x^2+4x+4) - 6 = (X+3)(X+4) - 6 \\
 &= X^2+7X+6 \\
 &= (X+1)(X+6) \\
 &= (x^2+4x+1)(x^2+4x+6)
 \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ⑤이다.

0209 [답] $(a+b-1)(a+b-2)$

$$\begin{aligned}
 & a+b = X \text{로 놓으면} \\
 & (a+b+1)(a+b-4) + 6 = (X+1)(X-4) + 6 \\
 &= X^2-3X+2 \\
 &= (X-1)(X-2) \\
 &= (a+b-1)(a+b-2)
 \end{aligned}$$

0210 [답] ④

$$\begin{aligned}
 & x^2 - x = X \text{로 놓으면} \\
 & (x^2-x)^2 + 2x^2 - 2x - 15 = (x^2-x)^2 + 2(x^2-x) - 15 \\
 &= X^2+2X-15 \\
 &= (X+5)(X-3) \\
 &= (x^2-x+5)(x^2-x-3)
 \end{aligned}$$

따라서 $a=-1, b=5, c=-3$ 또는 $a=-1, b=-3, c=5$ 이므로
 $a+b+c=1$

0211 [답] ②

$$\begin{aligned}
 & (x-3)(x-2)(x+1)(x+2)+k \\
 &= \{(x-3)(x+2)\}\{(x-2)(x+1)\}+k \\
 &= (x^2-x-6)(x^2-x-2)+k \\
 & x^2-x = X \text{로 놓으면} \\
 & (x^2-x-6)(x^2-x-2)+k = (X-6)(X-2)+k \\
 &= X^2-8X+12+k \quad \dots\dots ⑦
 \end{aligned}$$

주어진 식이 x 에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면 ⑦
 이 X 에 대한 완전제곱식으로 인수분해되어야 하므로
 $12+k=4^2 \quad \therefore k=4$

0212 [답] 45

$$\begin{aligned}
 & (x^2-4x+3)(x^2+6x+8)+21 \\
 &= (x-1)(x-3)(x+4)(x+2)+21 \\
 &= \{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+21 \\
 &= (x^2+x-2)(x^2+x-12)+21 \\
 & x^2+x = X \text{로 놓으면} \\
 & (x^2+x-2)(x^2+x-12)+21 = (X-2)(X-12)+21 \\
 &= X^2-14X+45 \\
 &= (X-5)(X-9) \\
 &= (x^2+x-5)(x^2+x-9)
 \end{aligned}$$

따라서 $a=1, b=-5, c=-9$ 또는 $a=1, b=-9, c=-5$ 이므로
 $abc=45$

0213 [답] 12

$$\begin{aligned}
 & x^2 = X \text{로 놓으면} \\
 & x^4 - 13x^2 + 36 = X^2 - 13X + 36 \\
 &= (X-4)(X-9) \\
 &= (x^2-4)(x^2-9) \\
 &= (x+2)(x-2)(x+3)(x-3)
 \end{aligned}$$

이때 $a < b < c < d$ 이므로 $a=-3, b=-2, c=2, d=3$
 $\therefore ab+cd=6+6=12$

0214 [답] ①

$$\begin{aligned}
 & x^4 + 7x^2 + 16 = (x^4 + 8x^2 + 16) - x^2 \\
 &= (x^2+4)^2 - x^2 \\
 &= (x^2+x+4)(x^2-x+4)
 \end{aligned}$$

따라서 $a=1, b=4$ 이므로 $a+b=5$

0215 [답] ③

$$\begin{aligned}
 & x^2 = X, y^2 = Y \text{로 놓으면} \\
 & x^4 - 2x^2y^2 - 8y^4 = X^2 - 2XY - 8Y^2 \\
 &= (X-4Y)(X+2Y) \\
 &= (x^2-4y^2)(x^2+2y^2) \\
 &= (x+2y)(x-2y)(x^2+2y^2)
 \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

0216 [답] x^2-4x+8

$$\begin{aligned}
 & x^4 + 64 = (x^4 + 16x^2 + 64) - 16x^2 \\
 &= (x^2+8)^2 - (4x)^2 \\
 &= (x^2+4x+8)(x^2-4x+8) \\
 \therefore Q(x) &= x^2-4x+8
 \end{aligned}$$

0217 [답] ③

$$\begin{aligned}
 & x \text{에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면} \\
 & x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 3y - 2 = x^2 + (3y-1)x + 2y^2 - 3y - 2 \\
 &= x^2 + (3y-1)x + (y-2)(2y+1) \\
 &= \{x+(y-2)\}\{x+(2y+1)\} \\
 &= (x+y-2)(x+2y+1)
 \end{aligned}$$

따라서 $a=1, b=2, c=1$ 이므로
 $a+b+c=4$

0218 답 ④

차수가 가장 낮은 c 에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned} a^2 - abc + ab - b^2c &= -(ab + b^2)c + a^2 + ab \\ &= -(a+b)bc + a(a+b) \\ &= (a+b)(a-bc) \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다.

0219 답 ⑤

주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} x^2 + xy - 2y^2 + ax + 7y - 3 &= x^2 + (y+a)x - (2y^2 - 7y + 3) \\ &= x^2 + (y+a)x - (2y-1)(y-3) \end{aligned}$$

이 식이 x, y 에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되므로
 $y+a = (2y-1) - (y-3) \quad \leftarrow \text{(주어진 식)} = \{x + (2y-1)\} \{x - (y-3)\}$
 $y+a = y+2 \quad \therefore a=2$

0220 답 ㄴ, ㄷ

a 에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned} a^2(b-c) - b^2(c+a) - c^2(a-b) + 2abc \\ &= a^2(b-c) - b^2c - b^2a - c^2a + c^2b + 2abc \\ &= (b-c)a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)a - b^2c + bc^2 \\ &= (b-c)a^2 - (b-c)^2a - bc(b-c) \\ &= (b-c)\{a^2 - (b-c)a - bc\} \\ &= (b-c)(a-b)(a+c) \end{aligned}$$

따라서 보기에서 주어진 식의 인수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0221 답 14

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \text{이라 할 때, } -1 \mid \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & -6 \\ & -1 & -1 & 6 \\ \hline 1 & 1 & -6 & 0 \end{array} \\ f(-1) &= 0 \text{이므로 조립제법을 이용하여} \\ \text{인수분해하면} & \\ x^3 + 2x^2 - 5x - 6 &= (x+1)(x^2 + x - 6) \\ &= (x+1)(x+3)(x-2) \\ \therefore a^2 + b^2 + c^2 &= 1^2 + 3^2 + (-2)^2 = 14 \end{aligned}$$

0222 답 $(x+1)(x+2)(x-3)$

다항식 $f(x) = x^3 + ax - 6$ 이 $x+1$ 로 나누어떨어지므로
 $f(-1) = 0$ 에서

$$\begin{aligned} -1 - a - 6 &= 0 \quad \therefore a = -7 \quad \dots\dots \text{ㄱ} \\ \text{따라서 } f(x) &= x^3 - 7x - 6 \text{이므로 조립} \quad -1 \mid \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & -6 \\ & -1 & 1 & 6 \\ \hline 1 & -1 & -6 & 0 \end{array} \\ \text{제법을 이용하여 인수분해하면} & \\ x^3 - 7x - 6 &= (x+1)(x^2 - x - 6) \\ &= (x+1)(x+2)(x-3) \quad \dots\dots \text{ㄴ} \end{aligned}$$

채점 기준

ㄱ a 의 값 구하기	40 %
ㄴ $f(x)$ 를 인수분해하기	60 %

0223 답 ⑤

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ 라 할 때, $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ & & -1 & 3 & -1 & -2 \\ \hline 2 & 1 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ & & 2 & -2 & -2 & \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x-2)(x^2 - x - 1)$$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ⑤이다.

참고 $(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$ 이므로 $x^2 - x - 2$ 도 주어진 식의 인수이다.

0224 답 2

$f(x) = x^3 - (a+1)x^2 - a(2a-1)x + 2a^2$ 이라 할 때, $f(1) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -a-1 & -2a^2+a & 2a^2 \\ & & 1 & -a & -2a^2 \\ \hline & 1 & -a & -2a^2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3 - (a+1)x^2 - a(2a-1)x + 2a^2 &= (x-1)(x^2 - ax - 2a^2) \\ &= (x-1)(x+a)(x-2a) \end{aligned}$$

이때 세 일차식의 상수항의 합이 -3 이므로 상수항

$$-1 + a - 2a = -3 \quad \therefore a = 2$$

0225 답 ②

$f(x) = x^4 + 3x^3 + ax^2 + bx + 2$ 라 할 때, $f(x)$ 가 $x-1$, $x+2$ 를 인수로 가지므로 $f(1) = 0$, $f(-2) = 0$

$$f(1) = 0 \text{에서 } 1 + 3 + a + b + 2 = 0$$

$$\therefore a + b = -6 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$f(-2) = 0 \text{에서 } 16 - 24 + 4a - 2b + 2 = 0$$

$$\therefore 2a - b = 3 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -1$, $b = -5$

$f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 5x + 2$ 이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 3 & -1 & -5 & 2 \\ & & 1 & 4 & 3 & -2 \\ \hline -2 & 1 & 4 & 3 & -2 & 0 \\ & & -2 & -4 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & -1 & 0 & \end{array}$$

$$x^4 + 3x^3 - x^2 - 5x + 2 = (x-1)(x+2)(x^2 + 2x - 1)$$

따라서 $Q(x) = x^2 + 2x - 1$ 이므로 $Q(-2) = 4 - 4 - 1 = -1$

0226 답 -2

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 &= x^2 \left(x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \\ &= x^2 \left\{ x^2 + \frac{1}{x^2} - 5 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 6 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 5 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 4 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right) - 1 \right\} \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right) - 4 \right\} \\ &= (x^2 - x + 1)(x^2 - 4x + 1) \end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=-4$, $c=1$ 이므로 $a+b+c = -2$

0227 [답] ④

$$\begin{aligned}
 x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 &= x^2 \left(x^2 - 4x + 5 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \\
 &= x^2 \left\{ x^2 + \frac{1}{x^2} - 4 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 5 \right\} \\
 &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 4 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 3 \right\} \\
 &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right) - 1 \right\} \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right) - 3 \right\} \\
 &= (x^2 - x + 1)(x^2 - 3x + 1)
 \end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다.

0228 [답] ④

$386=a$, $14=b$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}
 \frac{386^3 + 14^3}{386 \times 372 + 14^2} &= \frac{a^3 + b^3}{a(a-b) + b^2} = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2 - ab + b^2} \\
 &= a + b = 400
 \end{aligned}$$

0229 [답] ①

$20=a$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}
 18 \times 19 \times 20 \times 21 + 1 &= (a-2)(a-1)a(a+1) + 1 \\
 &= \{(a-2)(a+1)\} \{a(a-1)\} + 1 \\
 &= (a^2 - a - 2)(a^2 - a) + 1
 \end{aligned}$$

$a^2 - a = X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}
 (a^2 - a - 2)(a^2 - a) + 1 &= (X - 2)X + 1 = X^2 - 2X + 1 \\
 &= (X - 1)^2 = (a^2 - a - 1)^2 \\
 &= (400 - 20 - 1)^2 = 379^2
 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{18 \times 19 \times 20 \times 21 + 1} = \sqrt{379^2} = 379$$

[참고] 18, 19, 21 중 하나를 a 로 놓고 풀어도 같은 결과가 나온다. $20=a$ 로 놓으면 a 에 대한 식을 인수분해한 후 값을 구할 때 계산을 쉽게 할 수 있다.

0230 [답] ③

$f(1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
 1 & 1 & 5 & 3 & -9 \\
 & & 1 & 6 & 9 \\
 \hline
 & 1 & 6 & 9 & 0
 \end{array}$$

$$f(x) = (x-1)(x^2 + 6x + 9) = (x-1)(x+3)^2$$

$$\therefore f(97) = 96 \times 100^2 = 960000$$

0231 [답] ③

$14=t$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}
 (14^2 + 2 \times 14)^2 - 18 \times (14^2 + 2 \times 14) + 45 \\
 = (t^2 + 2t)^2 - 18(t^2 + 2t) + 45
 \end{aligned}$$

$t^2 + 2t = X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}
 (t^2 + 2t)^2 - 18(t^2 + 2t) + 45 &= X^2 - 18X + 45 \\
 &= (X-3)(X-15) \\
 &= (t^2 + 2t - 3)(t^2 + 2t - 15) \\
 &= (t+3)(t-1)(t+5)(t-3) \\
 &= (t-3)(t-1)(t+3)(t+5) \\
 &= 11 \times 13 \times 17 \times 19
 \end{aligned}$$

$$\therefore a+b+c+d = 11+13+17+19 = 60$$

0232 [답] ③

$$\begin{aligned}
 a^4 + a^2b^2 + b^4 &= (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) \\
 &= \{(a+b)^2 - ab\} \{(a+b)^2 - 3ab\} \\
 &= \{2^2 - (-2)\} \{2^2 - 3 \times (-2)\} = 60
 \end{aligned}$$

0233 [답] ④

$$x^2y + xy^2 + x + y = xy(x+y) + (x+y) = (xy+1)(x+y)$$

$$\text{이때 } xy = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1,$$

$$x + y = (\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{3} \text{이므로 구하는 식의 값은}$$

$$(xy+1)(x+y) = (1+1) \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

0234 [답] ④

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \text{에서}$$

$$a+b+c=0 \text{이므로}$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \quad \therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\therefore \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} = \frac{3abc}{abc} = 3$$

0235 [답] -4

$$a-b=2-\sqrt{3}, c-a=2+\sqrt{3} \text{을 변끼리 더하면}$$

$$c-b=4 \quad \therefore b-c=-4$$

$$\therefore ab^2 - a^2b + bc^2 - b^2c - ac^2 + a^2c$$

$$= -(b-c)a^2 + (b^2 - c^2)a + bc^2 - b^2c$$

$$= -(b-c)a^2 + (b+c)(b-c)a - bc(b-c)$$

$$= -(b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\}$$

$$= -(b-c)(a-b)(a-c)$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$= (2-\sqrt{3}) \times (-4) \times (2+\sqrt{3})$$

$$= -4$$

0236 [답] ③

주어진 등식의 좌변을 a 에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$b^2 + c^2 + ab - 2bc - ac = (b-c)a + b^2 + c^2 - 2bc$$

$$= (b-c)a + (b-c)^2$$

$$= (b-c)(a+b-c)$$

$$\therefore (b-c)(a+b-c) = 0$$

그런데 $a+b > c$ 에서 $a+b-c > 0$ 이므로

$$b-c=0 \quad \therefore b=c$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

0237 [답] 정삼각형

주어진 등식의 좌변을 인수분해하면

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$$

..... ①

$$\therefore (a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0$$

그런데 $a+b+c>0$ 이므로

↳ a, b, c 가 세 변의 길이이므로 모두 양수이다.

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \quad \dots \text{ii}$$

즉, $a-b=0, b-c=0, c-a=0$ 이므로 $a=b=c$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 정삼각형이다. $\dots \text{iii}$

채점 기준

i 주어진 식을 인수분해하기	30 %
ii a, b, c 에 대한 관계식 구하기	40 %
iii 어떤 삼각형인지 말하기	30 %

0238 답 ⑤

주어진 등식의 좌변을 b 에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned} & a^3-ab^2+ac^2+a^2c-b^2c+c^3 \\ &= -(a+c)b^2+a^3+a^2c+ac^2+c^3 \\ &= -(a+c)b^2+a^2(a+c)+c^2(a+c) \\ &= (a+c)(a^2-b^2+c^2) \\ &\therefore (a+c)(a^2-b^2+c^2)=0 \end{aligned}$$

그런데 $a+c>0$ 이므로

$$a^2-b^2+c^2=0 \quad \therefore a^2+c^2=b^2$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 b 인 직각 삼각형이다.

AB 유형 점검

40~42쪽

0239 답 ⑤

ㄴ. $x^2-2x-3=x^2-2x$ 에서 $-3=0$ 이므로 성립하지 않는 등식이다.

ㄷ. $x^2+5x-1=x^2+5x-1$ (항등식)

ㄹ. $4x^2-2x+1=4x^2-2x+1$ (항등식)

따라서 보기에서 항등식인 것은 ㄷ, ㄹ이다.

0240 답 4

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0=-6c \quad \therefore c=0$$

주어진 등식의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$15=15b \quad \therefore b=1$$

주어진 등식의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$30=10a \quad \therefore a=3$$

$$\therefore a+b+c=3+1+0=4$$

0241 답 64

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$2^6=a_0+a_1+a_2+\dots+a_{12} \quad \dots \text{㉠}$$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$2^6=a_0-a_1+a_2-\dots+a_{12} \quad \dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠}+\text{㉡} \text{을 하면 } 2 \times 2^6=2(a_0+a_2+a_4+\dots+a_{12})$$

$$\therefore a_0+a_2+a_4+\dots+a_{12}=2^6=64$$

0242 답 ③

다항식 x^3+ax^2+bx+1 을 x^2+x-2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} x^3+ax^2+bx+1 &= (x^2+x-2)Q(x)+2x+3 \\ &= (x+2)(x-1)Q(x)+2x+3 \quad \dots \text{㉠} \end{aligned}$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$a+b+2=5 \quad \therefore a+b=3 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$4a-2b-7=-1 \quad \therefore 2a-b=3 \quad \dots \text{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2, b=1$

$$\therefore a-b=1$$

0243 답 -3

주어진 조립제법에서 $p-1=2, q-2=-1$ 이므로

$$p=3, q=1$$

주어진 조립제법에 의하여

$$\begin{aligned} x^2+3x+1 &= (x+1)(x+2)-1 \\ &= (x+1)\{(x+1)+1\}-1 \\ &= (x+1)^2+(x+1)-1 \end{aligned}$$

따라서 $a=1, b=1, c=-1$ 이므로

$$abcpq=1 \times 1 \times (-1) \times 3 \times 1 = -3$$

0244 답 ②

㉠에서 나머지 정리에 의하여 $P(1)=1$

㉡에서 나머지 정리에 의하여

$$2P(2)=2 \quad \therefore P(2)=1$$

$P(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차다항식이므로

$P(x)=x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$P(1)=1 \text{에서 } 1+a+b=1$$

$$\therefore a+b=0 \quad \dots \text{㉢}$$

$$P(2)=1 \text{에서 } 4+2a+b=1$$

$$\therefore 2a+b=-3 \quad \dots \text{㉣}$$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-3, b=3$

따라서 $P(x)=x^2-3x+3$ 이므로

$$P(4)=16-12+3=7$$

0245 답 7

나머지 정리에 의하여 $f(0)=1, f(1)=3, f(-2)=3$

$f(x)$ 를 x^3+x^2-2x 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3+x^2-2x)Q(x)+ax^2+bx+c \\ &= x(x-1)(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \dots \text{㉠} \end{aligned}$$

㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $f(0)=c$ 에서 $c=1$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1)=a+b+c$ 에서

$$a+b+c=3, a+b+1=3$$

$$\therefore a+b=2 \quad \dots \text{㉡}$$

㉠의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면 $f(-2)=4a-2b+c$ 에서

$$4a-2b+c=3, 4a-2b+1=3$$

$$\therefore 2a-b=1 \quad \dots \text{㉢}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=1$

따라서 $R(x)=x^2+x+1$ 이므로

$$R(2)=4+2+1=7$$

0246 답 ⑤

$$x^3+ax^2-11x+7=(x-1)Q(x)-1$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1+a-11+7=-1 \quad \therefore a=2$$

$x^3+2x^2-11x+7=(x-1)Q(x)-1$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$8+8-22+7=Q(2)-1$$

$$\therefore Q(2)=2$$

따라서 $Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

0247 답 15

$f(x)-5x$ 를 x^2-2x-3 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x)-5x=(x^2-2x-3)Q(x)$$

$$f(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+5x$$

양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$f(3)=15$$

따라서 $f(3x+2)$ 를 $3x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f\left(3 \times \frac{1}{3} + 2\right) = f(3) = 15 \quad \leftarrow x=\frac{1}{3} \text{을 대입}$$

0248 답 ⑤

$46=x$ 로 놓고 x^{15} 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$x^{15}=(x+1)Q(x)+R$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $R=-1$

$$\therefore x^{15}=(x+1)Q(x)-1$$

$x=46$ 이므로

$$46^{15}=47Q(46)-1$$

이때 46^{15} 을 47로 나누었을 때의 나머지를 r 라 하면 $0 \leq r < 47$ 이므로

$$46^{15}=47Q(46)-1$$

$$=47\{Q(46)-1\}+47-1$$

$$=47\{Q(46)-1\}+46$$

따라서 구하는 나머지는 46이다.

0249 답 24

$f(x+2)$ 를 x^2+2x-3 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x+2)=(x^2+2x-3)Q(x)$$

$$=(x+3)(x-1)Q(x)$$

양변에 $x=-3, x=1$ 을 각각 대입하면

$$f(-1)=0, f(3)=0$$

$$f(-1)=0 \text{에서 } -2-3-a+b=0$$

$$\therefore a-b=-5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(3)=0 \text{에서 } 54-27+3a+b=0$$

$$\therefore 3a+b=-27 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a=-8, b=-3$

$$\therefore ab=24$$

0250 답 ④

$$\textcircled{4} x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2$$

$$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$$

$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$=(x^2-y^2)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$$

0251 답 ④

$$a^3+1-a(a+1)=(a+1)(a^2-a+1)-a(a+1)$$

$$=(a+1)(a^2-2a+1)$$

$$=(a+1)(a-1)^2$$

따라서 주어진 식의 인수가 아닌 것은 ④이다.

0252 답 ⑤

$x^2+1=X$ 로 놓으면

$$(x^2+1)^2+3(x^2+1)+2=X^2+3X+2$$

$$=(X+2)(X+1)$$

$$=(x^2+1+2)(x^2+1+1)$$

$$=(x^2+3)(x^2+2)$$

따라서 $a=3, b=2$ 또는 $a=2, b=3$ 이므로

$$a+b=5$$

0253 답 ③

$x^2=X$ 로 놓으면

$$x^4-8x^2+16=X^2-8X+16$$

$$=(X-4)^2$$

$$=(x^2-4)^2$$

$$=(x+2)^2(x-2)^2$$

이때 $a>b$ 이므로 $a=2, b=-2$

$$\therefore a-b=4$$

0254 답 $(x-y-z)(x+y-z-1)$

x 에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$x^2-y^2+z^2-2xz-x+y+z$$

$$=x^2-(2z+1)x-y^2+z^2+y+z$$

$$=x^2-(2z+1)x-(y+z)(y-z)+(y+z)$$

$$=x^2-(2z+1)x-(y+z)(y-z-1)$$

$$=\{x-(y+z)\}\{x+(y-z-1)\}$$

$$=(x-y-z)(x+y-z-1)$$

0255 답 -5

$$x^4-2x^3-5x^2+2x+1=x^2\left(x^2-2x-5+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-5\right\}$$

$$=x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{x}\right)-3\right\}$$

$$=x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)+1\right\}\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)-3\right\}$$

$$=(x^2+x-1)(x^2-3x-1)$$

따라서 $a=-1, b=-3, c=-1$ 이므로

$$a+b+c=-5$$

0256 [답] ②

$f(-1)=0, f(2)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -5 & 6 & 4 & -8 \\ & & -1 & 6 & -12 & 8 \\ 2 & 1 & -6 & 12 & -8 & 0 \\ & & 2 & -8 & 8 & \\ & 1 & -4 & 4 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-2)(x^2-4x+4) \\ &= (x+1)(x-2)^3 \\ \therefore f(2,1) &= (2,1+1)(2,1-2)^3 \\ &= 3,1 \times 0,1^3 = 0,0031 \end{aligned}$$

0257 [답] 12

$$\begin{aligned} x+y &= (1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2 \\ xy &= (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1 \\ \therefore x^3+x^2y+xy^2+y^3 &= x^2(x+y)+y^2(x+y) \\ &= (x+y)(x^2+y^2) \\ &= (x+y)\{(x+y)^2-2xy\} \\ &= 2 \times \{2^2-2 \times (-1)\}=12 \end{aligned}$$

0258 [답] ⑤

주어진 등식의 좌변을 인수분해하면
 $a^4+b^4-c^4+2a^2b^2=(a^2+b^2)^2-(c^2)^2$
 $= (a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)$
 $\therefore (a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)=0$
 그런데 $a^2+b^2+c^2>0$ 이므로
 $a^2+b^2-c^2=0 \quad \therefore a^2+b^2=c^2$
 따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각 삼각형이다.

0259 [답] 4

주어진 방정식에 $x=1$ 을 대입하면
 $a-b(k+2)+a(k-1)=4$
 $\therefore (a-b)k-2b-4=0$ ①
 이 등식이 k 에 대한 항등식이므로
 $a-b=0, -2b-4=0$
 $-2b-4=0$ 에서 $b=-2$
 $a-b=0$ 에서 $a=b=-2$
 $\therefore ab=4$ ②

채점 기준	
① $x=1$ 을 대입하여 k 에 대한 등식으로 정리하기	50 %
② ab 의 값 구하기	50 %

0260 [답] $4x-5$

$f(x+2)-f(x)=2x^2+6x$ ㉠
 ㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면
 $f(1)-f(-1)=-4$
 $\therefore f(1)=f(-1)-4=3-4=-1$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $f(3)-f(1)=8$
 $\therefore f(3)=f(1)+8=-1+8=7$ ①
 $f(x)$ 를 x^2-4x+3 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $f(x)=(x^2-4x+3)Q(x)+ax+b$
 $= (x-1)(x-3)Q(x)+ax+b$ ㉡ ②
 ㉡의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1)=a+b$ 에서
 $a+b=-1$ ㉢
 ㉡의 양변에 $x=3$ 을 대입하면 $f(3)=3a+b$ 에서
 $3a+b=7$ ㉣
 ㉢, ㉣을 연립하여 풀면
 $a=4, b=-5$
 따라서 구하는 나머지는 $4x-5$ 이다. ③

채점 기준	
① $f(1), f(3)$ 의 값 구하기	40 %
② $f(x)$ 에 대한 항등식으로 나타내기	20 %
③ 나머지 구하기	40 %

0261 [답] 12

$f(x)=x^3-2x^2+ax+b$ 라 하면 $f(x)$ 가 $x-1, x+2$ 를 인수로 가지므로
 $f(1)=0, f(-2)=0$
 $f(1)=0$ 에서 $1-2+a+b=0$
 $\therefore a+b=1$ ㉠
 $f(-2)=0$ 에서 $-8-8-2a+b=0$
 $\therefore 2a-b=-16$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $a=-5, b=6$ ①
 따라서 $g(x)=x^2-5x+6$ 이라 하면 $g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는
 $g(-1)=1+5+6=12$ ②

채점 기준	
① a, b 의 값 구하기	50 %
② 나머지 구하기	50 %

0262 [답] x^2+3x+4

$f(x)=x^3+2x^2+ax-4$ 라 하면 $f(x)$ 가 $x-1$ 을 인수로 가지므로
 $f(1)=0$ 에서
 $1+2+a-4=0$
 $\therefore a=1$ ①
 $f(x)=x^3+2x^2+x-4$ 이므로 조립제법
 을 이용하여 인수분해하면
 $x^3+2x^2+x-4=(x-1)(x^2+3x+4)$
 $\therefore Q(x)=x^2+3x+4$ ②

채점 기준	
① a 의 값 구하기	40 %
② $Q(x)$ 구하기	60 %

0263 답 42x-83

$f(x)$ 의 최고차항의 차수를 n 이라 하면 주어진 등식의 좌변의 최고차항의 차수는 $3n$, 우변의 최고차항의 차수는 $n+2$ 이므로

$$3n=n+2$$

$$2n=2 \quad \therefore n=1$$

따라서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 일차식이므로

$f(x)=2x+a$ (a 는 상수)라 하자.

주어진 등식에서

$$(2x+a)^3=(2x+a)(4x^2-12x)+18x-27$$

$$8x^3+12ax^2+6a^2x+a^3=8x^3+4(a-6)x^2-6(2a-3)x-27$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$12a=4(a-6)$$

$$8a=-24 \quad \therefore a=-3$$

$$\therefore f(x)=2x-3$$

이때 $\{f(x)\}^3$ 을 x^2-x-2 , 즉 $(x+1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $bx+c$ (b, c 는 상수)라 하면

$$(2x-3)^3=(x+1)(x-2)Q(x)+bx+c \quad \cdots \textcircled{A}$$

$\textcircled{A}$ 의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$-b+c=-125 \quad \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$2b+c=1 \quad \cdots \textcircled{C}$$

$\textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면

$$b=42, c=-83$$

따라서 $\{f(x)\}^3$ 을 x^2-x-2 로 나누었을 때의 나머지는 $42x-83$ 이다.

0264 답 ④

$$f(1)=3=\frac{3}{1}, f(2)=2=\frac{4}{2}, f(3)=\frac{5}{3}, f(4)=\frac{6}{2}=\frac{6}{4} \text{이므로}$$

$$f(1)=3, 2f(2)=4, 3f(3)=5, 4f(4)=6$$

$$f(1)-3=2f(2)-4=3f(3)-5=4f(4)-6=0 \text{이므로 다항식}$$

$xf(x)-(x+2)$ 는 $x-1, x-2, x-3, x-4$ 를 인수로 갖는다.

이때 $f(x)$ 가 삼차식이면 $xf(x)-(x+2)$ 는 사차식이므로

$$xf(x)-(x+2)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \quad (a \text{는 상수}) \text{라 하자.}$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$-2=24a \quad \therefore a=-\frac{1}{12}$$

$$\therefore xf(x)-(x+2)=-\frac{1}{12}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 $f(-2)$ 이므로 위의 식의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$-2f(-2)=-\frac{1}{12} \times (-3) \times (-4) \times (-5) \times (-6)$$

$$-2f(-2)=-30$$

$$\therefore f(-2)=15$$

따라서 구하는 나머지는 15이다.

0265 답 ③

$x^{10}-x$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$x^{10}-x=(x-1)^2Q(x)+ax+b$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0=a+b$$

$$\therefore b=-a$$

$$\begin{aligned} \therefore x^{10}-x &= (x-1)^2Q(x)+ax-a \\ &= (x-1)\{(x-1)Q(x)+a\} \end{aligned}$$

한편

$$\begin{aligned} x^{10}-x &= x(x^9-1) \\ &= x(x-1)(x^8+x^7+\cdots+x^2+x+1) \end{aligned}$$

이므로

$$x(x-1)(x^8+x^7+\cdots+x^2+x+1)=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$$

$$\therefore x(x^8+x^7+\cdots+x^2+x+1)=(x-1)Q(x)+a$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$a=9$$

따라서 $b=-9$ 이므로

$$R(x)=9x-9$$

$$\therefore R(3)=27-9=18$$

0266 답 40

주어진 등식의 좌변을 c 에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$$\begin{aligned} &a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2 \\ &= -(a+b)c^2+a^3+b^3+a^2b+ab^2 \\ &= -(a+b)c^2+(a+b)(a^2-ab+b^2)+ab(a+b) \\ &= (a+b)(-c^2+a^2-ab+b^2+ab) \\ &= (a+b)(a^2+b^2-c^2) \\ \therefore (a+b)(a^2+b^2-c^2) &= 0 \end{aligned}$$

그런데 $a+b>0$ 이므로

$$a^2+b^2-c^2=0$$

$$\therefore a^2+b^2=c^2$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각

삼각형이고 이 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$ 이므로

$$\frac{1}{2}ab=20$$

$$\therefore ab=40$$

03 / 복소수

A 개념 확인

46~49쪽

0267 답 실수부분: 1, 허수부분: -3

0268 답 실수부분: $\frac{5}{2}$, 허수부분: $-\frac{1}{2}$

0269 답 실수부분: $-\sqrt{2}$, 허수부분: 1

0270 답 실수부분: 0, 허수부분: 6

0271 답 실수부분: 5, 허수부분: 0

0272 답 $\gamma, \epsilon, \kappa, \mu$

복소수 $a+bi$ 에서 $b=0$ 이면 실수이다.

$\kappa, -2i^2=2$

따라서 실수는 $\gamma, \epsilon, \kappa, \mu$ 이다.

0273 답 ι, ν

복소수 $a+bi$ 에서 $b \neq 0$ 이면 허수이므로 허수는 ι, ν 이다.

0274 답 ι

복소수 $a+bi$ 에서 $a=0, b \neq 0$ 이면 순허수이므로 순허수는 ι 이다.

0275 답 $x=5, y=-6$

0276 답 $x=2, y=4$

$2x+(y-1)i=4+3i$ 에서

$2x=4, y-1=3$

$\therefore x=2, y=4$

0277 답 $x=1, y=2$

$(2x-2)+(3y-6)i=0$ 에서

$2x-2=0, 3y-6=0$

$\therefore x=1, y=2$

0278 답 $x=2, y=-1$

$(x+2y)+(4x-y)i=9i$ 에서

$x+2y=0, 4x-y=9$

두 식을 연립하여 풀면

$x=2, y=-1$

0279 답 $-1+5i$

0280 답 $-7-\sqrt{2}i$

0281 답 $-8i$

0282 답 $4\sqrt{3}$

0283 답 $-2-2i$

$(2+3i)+(-4-5i)=(2-4)+(3-5)i=-2-2i$

0284 답 $-4+10i$

$(-1+4i)-(3-6i)=(-1-3)+(4+6)i$
 $=-4+10i$

0285 답 $11-2i$

$(1-2i)(3+4i)=3+4i-6i-8i^2$

$=3-2i+8$

$=11-2i$

0286 답 $-8+6i$

$(-1-3i)^2=1+6i+9i^2=1+6i-9$

$=-8+6i$

0287 답 $5-i$

$\frac{4-6i}{1-i}=\frac{(4-6i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{4+4i-6i-6i^2}{1-i^2}$

$=\frac{4-2i+6}{1+1}=\frac{10-2i}{2}$

$=5-i$

0288 답 $2-5i$

$\overline{(z)}=z=2-5i$

0289 답 4

$z+\bar{z}=(2-5i)+(2+5i)=4$

0290 답 29

$z\bar{z}=(2-5i)(2+5i)=4-25i^2$

$=4+25=29$

0291 답 $\frac{-21+20i}{29}$

$\frac{\bar{z}}{z}=\frac{2+5i}{2-5i}=\frac{(2+5i)^2}{(2-5i)(2+5i)}$

$=\frac{4+20i+25i^2}{4-25i^2}=\frac{4+20i-25}{4+25}$

$=\frac{-21+20i}{29}$

0292 답 -1

$i^{26}=i^{4 \times 6 + 2}=i^2=-1$

0293 답 $-i$

$(-i)^{17}=-i^{17}=-i^{4 \times 4 + 1}=-i$

0294 답 -1

$-i^{12}=-i^{4 \times 3}=-1$

0295 답 $1+i$

$i^{200}+i^{201}=i^{4 \times 50}+i^{4 \times 50 + 1}=1+i$

0296 답 $\sqrt{6}i$

0297 답 $-8i$

$-\sqrt{-64}=-\sqrt{64}i=-8i$

0298 답 $\pm 2\sqrt{3}i$

$$\pm\sqrt{-12}=\pm\sqrt{12}i=\pm 2\sqrt{3}i$$

만렙 Note

실수 a 에 대하여 제공하여 a 가 되는 수를 a 의 제곱근이라 한다. 즉, $x^2=a$ 일 때 x 를 a 의 제곱근이라 한다.

0299 답 $\pm \frac{1}{3}i$

$$\pm\sqrt{-\frac{1}{9}}=\pm\sqrt{\frac{1}{9}}i=\pm\frac{1}{3}i$$

0300 답 -9

$$\sqrt{-3}\sqrt{-27}=\sqrt{3}i\times\sqrt{27}i=\sqrt{81}i^2=-9$$

다른 풀이

$$\sqrt{-3}\sqrt{-27}=-\sqrt{(-3)\times(-27)}=-\sqrt{81}=-9$$

0301 답 $-3i$

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}i}=\frac{\sqrt{9}}{i}=\frac{3i}{i^2}=-3i$$

다른 풀이

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}=-\sqrt{\frac{18}{-2}}=-\sqrt{-9}=-3i$$

B 유형 완성

50~57쪽

0302 답 ③

- ① 0은 실수인 복소수이다.
 ② $b=0$ 이어도 a 가 허수이면 $a+bi$ 는 허수이다.
 ④ $\frac{2-5i}{3}$ 의 허수부분은 $-\frac{5}{3}$ 이다.
 ⑤ $\sqrt{3}i$ 의 실수부분은 0, 허수부분은 $\sqrt{3}$ 이다.
 따라서 옳은 것은 ③이다.

0303 답 ②

$\frac{5i-1}{2}$ 의 실수부분은 $-\frac{1}{2}$, $2-i$ 의 허수부분은 -1 이므로

$$a=-\frac{1}{2}, b=-1 \quad \therefore a+b=-\frac{3}{2}$$

0304 답 3

허수는 $8+\sqrt{-1}=8+i$, $-i$, $\sqrt{5}-9i$ 의 3개이다.

0305 답 $4+i$

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)-\frac{1-2i}{2+i} &= 3+1-\frac{(1-2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \\ &= 4-\frac{2-i-4i-2}{4+1} \\ &= 4-\frac{-5i}{5} \\ &= 4+i \end{aligned}$$

0306 답 ④

$$\textcircled{4} (5-i)^2=25-10i-1=24-10i$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0307 답 ④

$$z_1=(1+i)^2=1+2i-1=2i$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{\sqrt{2}+2i}{\sqrt{2}-2i} = \frac{(\sqrt{2}+2i)^2}{(\sqrt{2}-2i)(\sqrt{2}+2i)} \\ &= \frac{2+4\sqrt{2}i-4}{2+4} = \frac{-1+2\sqrt{2}i}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore z_1 z_2 = 2i \times \frac{-1+2\sqrt{2}i}{3} = -\frac{4\sqrt{2}+2i}{3}$$

따라서 실수부분은 $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$, 허수부분은 $-\frac{2}{3}$ 이므로

$$a=-\frac{4\sqrt{2}}{3}, b=-\frac{2}{3} \quad \therefore a^2+b^2=\frac{32}{9}+\frac{4}{9}=4$$

0308 답 8

$$\begin{aligned} (2+3i) \odot (3+2i) &= (2+3i)(3+2i) - (2+3i) - (3+2i) \\ &= 6+4i+9i-6-2-3i-3-2i \\ &= -5+8i \end{aligned}$$

..... ①

따라서 구하는 허수부분은 8이다.

..... ②

채점 기준

① $(2+3i) \odot (3+2i)$ 를 계산하기	80%
② $(2+3i) \odot (3+2i)$ 의 허수부분 구하기	20%

0309 답 ①

$$z=6+10i-4xi+x=(x+6)+(-4x+10)i$$

z^2 이 음의 실수가 되려면 z 의 실수부분은 0이고 허수부분은 0이 아니어야 하므로

$$x+6=0, -4x+10 \neq 0 \quad \therefore x=-6$$

0310 답 2

$$x(i-x)+1-2i=(-x^2+1)+(x-2)i$$

이 복소수가 실수가 되려면 허수부분이 0이어야 하므로

$$x-2=0 \quad \therefore x=2$$

0311 답 ③

$$\begin{aligned} (1+i)(1-i)a^2+(2i-3)a+1-2i &= 2a^2+2ai-3a+1-2i \\ &= (2a^2-3a+1)+(2a-2)i \end{aligned}$$

이 복소수가 순허수가 되려면 실수부분은 0이고 허수부분은 0이 아니어야 하므로

$$2a^2-3a+1=0, 2a-2 \neq 0$$

$$2a^2-3a+1=0 \text{에서 } (2a-1)(a-1)=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{2} \text{ 또는 } a=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$2a-2 \neq 0 \text{에서 } a \neq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } a=\frac{1}{2}$$

0312 답 1

$$z=x(x+4+i)-5(1+i)=(x^2+4x-5)+(x-5)i \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

z^2 이 실수가 되려면 z 의 실수부분이 0이거나 허수부분이 0이어야 하므로

$$x^2+4x-5=0 \text{ 또는 } x-5=0$$

$$x^2+4x-5=0 \text{에서 } (x+5)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-5 \text{ 또는 } x=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$x-5=0 \text{에서 } x=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

㉠, ㉡에서 $x = -5$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 5$ ㉢
따라서 구하는 x 의 값의 합은 $-5 + 1 + 5 = 1$ ㉢

채점 기준

㉠ z 를 $a+bi$ 꼴로 정리하기	30 %
㉢ z^2 이 실수가 되도록 하는 x 의 값 구하기	50 %
㉢ 모든 실수 x 의 값의 합 구하기	20 %

0313 답 ③

$$\begin{aligned} z &= (a+4i)(a-3i) + a^2(i-2) - 11 \\ &= a^2 - 3ai + 4ai + 12 + a^2i - 2a^2 - 11 \\ &= (-a^2 + 1) + (a^2 + a)i \end{aligned}$$

z^2 이 양의 실수가 되려면 z 의 실수부분은 0이 아니고 허수부분은 0이어야 하므로

$$\begin{aligned} -a^2 + 1 &\neq 0, \quad a^2 + a = 0 \\ -a^2 + 1 &\neq 0 \text{에서 } (1-a)(1+a) \neq 0 \\ \therefore a &\neq -1 \text{이고 } a \neq 1 \quad \dots\dots ㉠ \\ a^2 + a &= 0 \text{에서 } a(a+1) = 0 \\ \therefore a &= -1 \text{ 또는 } a = 0 \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $a = 0$

0314 답 7

$$\begin{aligned} x(1+i) - 2y(3-i) &= 1+9i \text{에서} \\ (x-6y) + (x+2y)i &= 1+9i \\ \text{복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\ x-6y &= 1, \quad x+2y = 9 \\ \text{두 식을 연립하여 풀면 } x &= 7, \quad y = 1 \\ \therefore xy &= 7 \end{aligned}$$

0315 답 ⑤

$$\begin{aligned} \text{복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\ x-2 &= 0, \quad 3x+y-5 = 0 \\ \text{따라서 } x &= 2, \quad y = -1 \text{이므로 } x-y &= 3 \end{aligned}$$

0316 답 -3

$$\begin{aligned} x(2-i)^2 - y(3+i) &= \overline{3y - (5-2x)i} \text{에서} \\ 3(x-y) - (4x+y)i &= 3y - (2x-5)i \\ \text{복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\ x-y &= y, \quad 4x+y = 2x-5 \\ \therefore x-2y &= 0, \quad 2x+y = -5 \\ \text{두 식을 연립하여 풀면 } x &= -2, \quad y = -1 \\ \therefore x+y &= -3 \end{aligned}$$

0317 답 0

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+3i} + \frac{y}{1-3i} &= \frac{6}{1-i} \text{에서} \\ \frac{x(1-3i) + y(1+3i)}{(1+3i)(1-3i)} &= \frac{6(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ \frac{(x+y) - 3(x-y)i}{10} &= 3+3i \\ (x+y) - 3(x-y)i &= 30+30i \end{aligned}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{aligned} x+y &= 30, \quad x-y = -10 \\ \text{두 식을 연립하여 풀면 } x &= 10, \quad y = 20 \\ \therefore 2x-y &= 20-20 = 0 \end{aligned}$$

0318 답 ②

$$\begin{aligned} x = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \text{에서 } 2x+1 &= -\sqrt{3}i \\ \text{양변을 제곱하면} \\ 4x^2+4x+1 &= -3, \quad x^2+x = -1 \\ \therefore 2x^2+2x+1 &= 2(x^2+x)+1 = -2+1 = -1 \end{aligned}$$

0319 답 ①

$$\begin{aligned} x = \frac{25}{3+4i} = \frac{25(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} &= 3-4i \text{이므로 } x-3 = -4i \\ \text{양변을 제곱하면} \\ x^2-6x+9 &= -16, \quad x^2-6x = -25 \\ \therefore x^2-6x+10 &= -25+10 = -15 \end{aligned}$$

0320 답 $-i$

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} &= \frac{2-i}{5} \quad \dots\dots ㉠ \\ x = \frac{2-i}{5} \text{에서 } 5x-2 &= -i \\ \text{양변을 제곱하면} \\ 25x^2-20x+4 &= -1, \quad 5x^2-4x+1 = 0 \quad \dots\dots ㉢ \\ \therefore 5x^3-4x^2+6x-2 &= x(5x^2-4x+1)+5x-2 \\ &= 5x-2 = -i \quad \dots\dots ㉢ \end{aligned}$$

채점 기준

㉠ x 를 $a+bi$ 꼴로 정리하기	30 %
㉢ $5x^2-4x+1$ 의 값 구하기	30 %
㉢ $5x^3-4x^2+6x-2$ 의 값 구하기	40 %

0321 답 -25

$$\begin{aligned} x^2 &= 3+4i \text{에서 } x^2-3 = 4i \\ \text{양변을 제곱하면} \\ x^4-6x^2+9 &= -16, \quad x^4-6x^2+25 = 0 \\ x \neq 0 \text{이므로 양변을 } x \text{로 나누면} &\quad \xrightarrow{x^4-6x^2=-25} \\ x^3-6x+\frac{25}{x} &= 0 \\ \therefore x^4+x^3-6x^2-6x+\frac{25}{x} &= (x^4-6x^2) + \left(x^3-6x+\frac{25}{x}\right) \\ &= -25+0 = -25 \end{aligned}$$

0322 답 16

$$\begin{aligned} z &= \frac{10}{3-i} = \frac{10(3+i)}{(3-i)(3+i)} = 3+i \\ \text{따라서 } \bar{z} &= 3-i \text{이므로} \\ z+\bar{z}+z\bar{z} &= (3+i) + (3-i) + (3+i)(3-i) = 6+10 = 16 \end{aligned}$$

0323 답 -1

$$\begin{aligned} a+b &= (2+2\sqrt{3}i) + (2-2\sqrt{3}i) = 4 \\ ab &= (2+2\sqrt{3}i)(2-2\sqrt{3}i) = 16 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2-2ab}{ab} \\ = \frac{4^2-2 \times 16}{16} = \frac{-16}{16} = -1$$

0324 답 $-\frac{2}{5}$

$\bar{z}=4-2i$ 이므로

$$\frac{1-\bar{z}}{z} = \frac{1-(4-2i)}{4+2i} = \frac{-3+2i}{4+2i} \\ = \frac{(-3+2i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} \\ = \frac{-8+14i}{20} = -\frac{2}{5} + \frac{7}{10}i$$

따라서 구하는 실수부분은 $-\frac{2}{5}$ 이다.

0325 답 -6

$$a = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i,$$

$$b = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+i \text{이므로}$$

$$a+b=(1-i)+(1+i)=2$$

$$ab=(1-i)(1+i)=2$$

$$\therefore a^3+b^3-ab=(a+b)^3-3ab(a+b)-ab \\ = 2^3-3 \times 2 \times 2-2=-6$$

..... ①

..... ②

채점 기준

① $a+b, ab$ 의 값 구하기

40%

② a^3+b^3-ab 의 값 구하기

60%

0326 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$$\text{ㄱ. } z+\bar{z}+z\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)+(a+bi)(a-bi) \\ = 2a+a^2+b^2 \text{ (실수)}$$

$$\text{ㄴ. } z\bar{z}=0 \text{이면 } (a+bi)(a-bi)=0 \\ a^2+b^2=0 \quad \therefore a=0, b=0 \\ \therefore z=0$$

ㄷ. $\bar{z}=a-bi$ 가 순허수이면 $a=0, b \neq 0$ 에서 $z=bi$ 이므로 z 도 순허수이다.

$$\text{ㄹ. } z^2+\bar{z}^2=0 \text{이면 } (a+bi)^2+(a-bi)^2=0 \\ 2a^2-2b^2=0, a^2=b^2 \quad \therefore b=\pm a \\ \therefore z=a \pm ai$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0327 답 ⑤

$z=\bar{z}$ 이면 z 는 실수이므로 ⑤이다.

0328 답 ②

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$$\text{ㄱ. } z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a \text{ (실수)}$$

$$\text{ㄴ. } z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$$

$$\text{ㄷ. } z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2 \text{ (실수)}$$

$$\text{ㄹ. } \frac{z}{\bar{z}} = \frac{a+bi}{a-bi} = \frac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}i$$

$$\text{ㅁ. } \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a+bi} + \frac{1}{a-bi} = \frac{2a}{a^2+b^2} \text{ (실수)}$$

따라서 보기에서 실수인 것은 ㄱ, ㄷ, ㅁ이다.

0329 답 ⑤

$\bar{z}=-z$ 이면 z 는 순허수 또는 0이다.

$$z=x^2-(5-i)x+4-2i=(x^2-5x+4)+(x-2)i$$

(i) z 가 순허수일 때,

$$x^2-5x+4=0, x-2 \neq 0 \text{ 이어야 한다.}$$

$$x^2-5x+4=0 \text{ 에서 } (x-1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$x-2 \neq 0 \text{ 에서 } x \neq 2 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } x=1 \text{ 또는 } x=4$$

(ii) $z=0$ 일 때,

$$x^2-5x+4=0, x-2=0 \text{ 이어야 한다.}$$

$$\text{이때 } x^2-5x+4=0 \text{ 에서 } x=1 \text{ 또는 } x=4 \text{ 이고, } x-2=0 \text{ 에서}$$

$$x=2 \text{ 이므로 동시에 만족시키는 } x \text{ 의 값은 존재하지 않는다.}$$

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=4$ 이므로 그 합은 $1+4=5$

0330 답 25

$$\alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}=\alpha(\bar{\alpha}-\bar{\beta})-\beta(\bar{\alpha}-\bar{\beta}) \\ =(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta}) \\ =(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$$

$$\text{이때 } \alpha-\beta=(4+i)-(7-3i)=-3+4i \text{ 이므로}$$

$$\bar{\alpha}-\bar{\beta}=-3-4i$$

$$\therefore \alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$$

$$=(-3+4i)(-3-4i)=25$$

0331 답 ④

$$\bar{\alpha}\beta=1 \text{ 에서 } \frac{1}{\alpha}=\beta$$

$$\text{또 } \bar{\alpha}\beta=1 \text{ 에서 } \overline{(\alpha\beta)}=\alpha\bar{\beta}=1 \text{ 이므로 } \alpha=\frac{1}{\beta}$$

$$\therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\beta}+\beta=2i$$

0332 답 $3-9i$

$$\overline{z_2-z_1}=\overline{z_2-z_1}=-1-4i \text{ 이므로 } z_2-z_1=-1+4i$$

$$\overline{z_1 \times z_2}=\overline{z_1 z_2}=5+i \text{ 이므로 } z_1 z_2=5-i$$

$$\therefore (z_1-2)(z_2+2)=z_1 z_2-2(z_2-z_1)-4$$

$$=(5-i)-2(-1+4i)-4$$

$$=3-9i$$

0333 답 ④

$$\bar{\alpha}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \text{ 이므로}$$

$$\alpha+\bar{\alpha}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$$

$$\alpha\bar{\alpha}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \times \frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$$

$$\therefore z\bar{z}=\frac{\alpha+2}{\alpha-1} \times \overline{\left(\frac{\alpha+2}{\alpha-1}\right)}=\frac{\alpha+2}{\alpha-1} \times \frac{\bar{\alpha}+2}{\bar{\alpha}-1} \\ =\frac{\alpha\bar{\alpha}+2(\alpha+\bar{\alpha})+4}{\alpha\bar{\alpha}-(\alpha+\bar{\alpha})+1}=\frac{1+2+4}{1-1+1}=7$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} a+2 &= \frac{5+\sqrt{3}i}{2}, \quad a-1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{이므로} \\ z &= \frac{a+2}{a-1} = \frac{5+\sqrt{3}i}{2} \times \frac{2}{-1+\sqrt{3}i} = \frac{5+\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i} \\ &= \frac{(5+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)}{(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)} = \frac{-1-3\sqrt{3}i}{2} \\ \therefore z\bar{z} &= \frac{-1-3\sqrt{3}i}{2} \times \frac{-1+3\sqrt{3}i}{2} \\ &= \frac{1+27}{4} = 7 \end{aligned}$$

0334 답 ②

$$\begin{aligned} z &= a+bi \quad (a, b \text{는 실수}) \text{라 하면 } \bar{z} = a-bi \\ 2z - (i+2)\bar{z} &= 9i-2 \text{에서} \\ 2(a+bi) - (i+2)(a-bi) &= 9i-2 \\ (-a+4b)i - b &= 9i-2 \\ \text{복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\ -a+4b &= 9, \quad -b = -2 \quad \therefore a = -1, b = 2 \\ \therefore z &= -1+2i \end{aligned}$$

0335 답 1±√2i

$$\begin{aligned} z &= a+bi \quad (a, b \text{는 실수}) \text{라 하면 } \bar{z} = a-bi \\ z+\bar{z} &= 2 \text{에서 } (a+bi) + (a-bi) = 2 \\ 2a &= 2 \quad \therefore a = 1 \\ z\bar{z} &= 3 \text{에서 } (1+bi)(1-bi) = 3 \\ 1+b^2 &= 3, \quad b^2 = 2 \\ \therefore b &= \pm\sqrt{2} \\ \therefore z &= 1 \pm \sqrt{2}i \end{aligned}$$

0336 답 3

$$\begin{aligned} z &= a+bi \quad (a, b \text{는 실수}) \text{라 하면 } \bar{z} = a-bi \\ \text{이때 } z &\text{는 실수가 아닌 복소수이므로 } b \neq 0 \\ z^2 &= \bar{z} \text{에서 } (a+bi)^2 = a-bi \\ a^2+2abi-b^2 &= a-bi, \quad (a^2-b^2)+2abi = a-bi \\ \text{복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\ a^2-b^2 &= a, \quad 2ab = -b \\ 2ab &= -b \text{에서 } b \neq 0 \text{이므로 } a = -\frac{1}{2} \\ a^2-b^2 &= a \text{에서 } a = -\frac{1}{2} \text{이므로 } \frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2} \\ b^2 &= \frac{3}{4} \quad \therefore b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore (1-z)(1-\bar{z}) &= 1 - (z+\bar{z}) + z\bar{z} \\ &= 1 - (a+bi+a-bi) + (a+bi)(a-bi) \\ &= 1 - 2a + a^2 + b^2 \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 3 \end{aligned}$$

채점 기준

i $z = a+bi$ 로 놓고 $z^2 = \bar{z}$ 를 a, b 에 대하여 나타내기	30 %
ii a, b 의 값 구하기	40 %
iii $(1-z)(1-\bar{z})$ 의 값 구하기	30 %

0337 답 ③

$$\begin{aligned} z &= a+bi \quad (a, b \text{는 실수}) \text{라 하면 } \bar{z} = a-bi \\ \text{이때 } z &\text{는 실수가 아닌 복소수이므로 } b \neq 0 \\ \bar{z} - \frac{1}{z} &= (a-bi) - \frac{1}{a+bi} \\ &= (a-bi) - \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} \\ &= a \left(1 - \frac{1}{a^2+b^2} \right) - b \left(1 - \frac{1}{a^2+b^2} \right) i \\ \bar{z} - \frac{1}{z} &\text{이 실수이려면 허수부분이 0이어야 하므로} \\ b \left(1 - \frac{1}{a^2+b^2} \right) &= 0 \\ \text{그런데 } b \neq 0 \text{이므로 } \frac{1}{a^2+b^2} &= 1 \quad \therefore a^2+b^2 = 1 \\ \therefore z\bar{z} &= (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = 1 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} \bar{z} - \frac{1}{z} &\text{이 실수이면 복소수와 켤레복소수가 같으므로} \\ \bar{z} - \frac{1}{z} &= \overline{\left(\bar{z} - \frac{1}{z} \right)}, \quad \bar{z} - \frac{1}{z} = z - \frac{1}{z} \\ z - \bar{z} &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z}, \quad z - \bar{z} = \frac{z-\bar{z}}{z\bar{z}} \\ \text{이때 } z &\text{는 허수이므로 } z - \bar{z} \neq 0 \\ \therefore z\bar{z} &= 1 \end{aligned}$$

0338 답 ③

$$\begin{aligned} -i+i^2-i^3+i^4 &= -i-1+i+1=0 \text{이므로} \\ 1-i+i^2-i^3+i^4-\dots+i^{120} \\ &= 1+(-i+i^2-i^3+i^4)+i^4(-i+i^2-i^3+i^4) \\ &\quad +\dots+i^{116}(-i+i^2-i^3+i^4) \\ &= 1+0+0+\dots+0=1 \end{aligned}$$

0339 답 0

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} &= \frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 = 0 \text{이므로} \\ \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{1}{i^{100}} \\ &= \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} \right) + \frac{1}{i^4} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} \right) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{i^{96}} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} \right) \\ &= 0+0+\dots+0=0 \end{aligned}$$

0340 답 60

$$\begin{aligned} i+2i^2+3i^3+4i^4+\dots+59i^{59}+60i^{60} \\ &= (i-2-3i+4) + (5i-6-7i+8) + \dots + (57i-58-59i+60) \\ &= \underbrace{(2-2i) + (2-2i) + \dots + (2-2i)}_{15\text{개}} \\ &= 15 \times (2-2i) = 30-30i \quad \dots \text{ i} \\ 30-30i &= a+bi \text{이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\ a &= 30, \quad b = -30 \quad \dots \text{ ii} \\ \therefore a-b &= 60 \quad \dots \text{ iii} \end{aligned}$$

채점 기준

① 주어진 등식의 좌변을 간단히 하기	60 %
② a, b 의 값 구하기	30 %
③ $a-b$ 의 값 구하기	10 %

0341 답 ④

$$\begin{aligned}
 1+i+i^2+i^3 &= 1+i-1-i=0 \text{이므로} \\
 (1+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{10}+i^{11}) \\
 &= 1+2(i^2+i^3+i^4+i^5)+2(i^6+i^7+i^8+i^9)+2i^{10}+i^{11} \\
 &= 1+2i^2(1+i+i^2+i^3)+2i^6(1+i+i^2+i^3)+2i^{10}+i^{11} \\
 &= 1+2i^{10}+i^{11} \\
 &= 1+2 \times i^{4 \times 2 + 2} + i^{4 \times 2 + 3} \\
 &= 1+2i^2+i^3 \\
 &= 1-2-i=-1-i \\
 -1-i &= a+bi \text{이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\
 a &= -1, b = -1 \\
 \therefore 2ab &= 2
 \end{aligned}$$

0342 답 ①

$$\begin{aligned}
 \frac{1-i}{1+i} &= \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = -i, \\
 \frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = i \text{이므로} \\
 \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50} &= (-i)^{50} + i^{50} = i^{50} + i^{50} \\
 &= 2 \times i^{4 \times 12 + 2} = 2i^2 \\
 &= 2 \times (-1) = -2
 \end{aligned}$$

0343 답 ①

$$\begin{aligned}
 z^2 &= \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{-2i}{2} = -i \text{이므로} \\
 z^2+z^4+z^6+\cdots+z^{100} \\
 &= -i+(-i)^2+(-i)^3+\cdots+(-i)^{50} \\
 &= -i+i^2-i^3+\cdots+i^{50} \\
 \text{이때 } -i+i^2-i^3+i^4 &= -i-1+i+1=0 \text{이므로} \\
 z^2+z^4+z^6+\cdots+z^{100} \\
 &= -i+i^2-i^3+\cdots+i^{50} \\
 &= \underbrace{(-i+i^2-i^3+i^4)}_0 + i^4 \underbrace{(-i+i^2-i^3+i^4)}_0 \\
 &\quad + \cdots + i^{44} \underbrace{(-i+i^2-i^3+i^4)}_0 - i^{49} + i^{50} \\
 &= -i^{49} + i^{50} \\
 &= -i^{4 \times 12 + 1} + i^{4 \times 12 + 2} \\
 &= -i+i^2 = -1-i
 \end{aligned}$$

0344 답 i

$$\begin{aligned}
 \frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \text{이므로 } f(n) = i^n \\
 \therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(25) \\
 &= i+i^2+i^3+\cdots+i^{25} \\
 \text{이때 } i+i^2+i^3+i^4 &= i-1-i+1=0 \text{이므로}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(25) \\
 &= i+i^2+i^3+\cdots+i^{25} \\
 &= \underbrace{(i+i^2+i^3+i^4)}_0 + i^4 \underbrace{(i+i^2+i^3+i^4)}_0 \\
 &\quad + \cdots + i^{20} \underbrace{(i+i^2+i^3+i^4)}_0 + i^{25} \\
 &= i^{25} = i^{4 \times 6 + 1} \\
 &= i
 \end{aligned}$$

채점 기준

① $f(n)$ 을 간단히 하기	30 %
② $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(25)$ 를 i 의 거듭제곱의 합으로 나타내기	20 %
③ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(25)$ 의 값 구하기	50 %

0345 답 ③

$$\begin{aligned}
 \neg. z^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}i}{1-i}\right)^2 = \frac{2i^2}{(1-i)^2} = \frac{-2}{-2i} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i \\
 \sqcup. \neg \text{에서 } z^2 &= -i \text{이므로} \\
 z^6 &= (z^2)^3 = (-i)^3 = -i^3 = i \\
 \therefore z^6 &\neq z^2 \\
 \sqsubset. z^8 &= z^6 \times z^2 = i \times (-i) = 1 \text{이므로} \\
 z^{n+8} &= z^n \times z^8 = z^n \\
 \text{따라서 보기에서 옳은 것은 } \neg, \sqsubset \text{이다.}
 \end{aligned}$$

0346 답 $-\sqrt{3}+\sqrt{5}i$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-2}\sqrt{-6} - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-2}} + \frac{\sqrt{-21}}{\sqrt{-7}} &= \sqrt{2}i \times \sqrt{6}i - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}i} + \frac{\sqrt{21}i}{\sqrt{7}i} \\
 &= 2\sqrt{3}i^2 - \frac{\sqrt{5}}{i} + \sqrt{3} \\
 &= -2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{5}i}{i^2} + \sqrt{3} \\
 &= -2\sqrt{3} + \sqrt{5}i + \sqrt{3} \\
 &= -\sqrt{3} + \sqrt{5}i
 \end{aligned}$$

0347 답 ⑤

$$\begin{aligned}
 ① \sqrt{2}\sqrt{-5} &= \sqrt{2} \times \sqrt{5}i = \sqrt{10}i = \sqrt{-10} \\
 ② \sqrt{-2}\sqrt{-5} &= \sqrt{2}i \times \sqrt{5}i = -\sqrt{10} \\
 ③ \frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{5}} &= \frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}i = \sqrt{-\frac{2}{5}} \\
 ④ \frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-5}} &= \frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{5}i} = \sqrt{\frac{2}{5}} \\
 ⑤ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-5}} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}i} = \frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{5}i^2} = -\sqrt{\frac{2}{5}}i = -\sqrt{-\frac{2}{5}}
 \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

0348 답 ①

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{1+i} + \frac{bi}{1-i} &= \frac{a(1-i)}{2} + \frac{bi(1+i)}{2} = \frac{a-b}{2} + \frac{-a+b}{2}i \\
 1+i &= 1-i \\
 \frac{a-b}{2} + \frac{-a+b}{2}i &= 1-i \text{이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\
 \frac{a-b}{2} &= 1 \quad \therefore a-b=2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{b-a}\sqrt{b-a} + \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{b-a}} &= \sqrt{-2}\sqrt{-2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-2}} \\ &= \sqrt{2}i \times \sqrt{2}i + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}i} \\ &= -2 + \frac{1}{i} \\ &= -2 - i\end{aligned}$$

0349 답 0

$-3 < x < 3$ 이므로 $x+3 > 0$, $x-3 < 0$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} \times \sqrt{\frac{x-3}{x+3}} - \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{-x-3}} \times \sqrt{\frac{-x-3}{x+3}} \\ = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{3-xi}} \times \frac{\sqrt{3-xi}}{\sqrt{x+3}} - \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3i}} \times \frac{\sqrt{x+3i}}{\sqrt{x+3}} \\ = 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

0350 답 $2a+2b$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}} \text{이므로 } a > 0, b < 0$$

이때 $a > b$ 이므로 $a-b > 0$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{(a-b)^2} + |a| - 3\sqrt{b^2} &= (a-b) + a - 3(-b) \\ &= a-b+a+3b \\ &= 2a+2b\end{aligned}$$

0351 답 ④

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{이므로 } a < 0, b < 0$$

$$\textcircled{1} \sqrt{-a}\sqrt{b} = \sqrt{-a} \times \sqrt{-bi} = \sqrt{abi} = \sqrt{-ab}$$

$$\textcircled{2} \sqrt{ab^2} = \sqrt{-ab^2i} = -b\sqrt{-ai} = -b\sqrt{a}$$

$$\textcircled{3} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{-bi}}{\sqrt{-ai}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\textcircled{4} \frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-ai}} = -\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{-a}}i = -\sqrt{\frac{b}{a}}i = -\sqrt{-\frac{b}{a}}$$

⑤ $a+b < 0$ 이므로

$$|a+b| = -(a+b) = -a-b = |a| + |b|$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0352 답 1

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}} \text{에서 } a > 0, b < 0$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = a, \sqrt{b^2} = |b| = -b \text{이므로}$$

$$\sqrt{a^2+2\sqrt{b^2}+(3|a|+|b|)i} = (a-2b) + (3a-b)i$$

즉, $(a-2b) + (3a-b)i = 4+7i$ 이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a-2b=4, 3a-b=7$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=-1$

$$\therefore a+b=1$$

0354 답 ⑤

$$\textcircled{1} (5+3i) + (2-11i) = 7-8i$$

$$\textcircled{2} (6-i) - (3-2i) = 6-i-3+2i = 3+i$$

$$\textcircled{3} (2-i)(3+2i) = 6+4i-3i+2 = 8+i$$

$$\begin{aligned}\textcircled{4} (2-7i) + (2-3i) - (i-4) &= 2-7i+2-3i-i+4 \\ &= 8-11i\end{aligned}$$

$$\textcircled{5} \frac{1}{1+2i} - \frac{1}{1-2i} = \frac{1-2i-(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)} = -\frac{4}{5}i$$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

0355 답 ②

$$z = (1-n+2i)^2 = \{(1-n)+2i\}^2$$

$$= (n^2-2n-3) + 4(1-n)i$$

z^2 이 실수가 되려면 z 의 실수부분이 0이거나 허수부분이 0이어야 하므로

$$n^2-2n-3=0 \text{ 또는 } 4(1-n)=0$$

$$n^2-2n-3=0 \text{에서 } (n+1)(n-3)=0$$

$$\therefore n=3 (\because n>0)$$

$$4(1-n)=0 \text{에서 } n=1$$

따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$3+1=4$$

0356 답 5

$$(2+i)x - 2(1-i)y = \overline{2-7i} \text{에서}$$

$$2(x-y) + (x+2y)i = 2+7i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x-y=1, x+2y=7$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3, y=2$

$$\therefore x+y=5$$

0357 답 ④

$$x = \frac{1-3i}{1+i} = \frac{(1-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{-2-4i}{2} = -1-2i$$

$x+1 = -2i$ 의 양변을 제곱하면

$$x^2+2x+1 = -4, x^2+2x+5 = 0$$

$$\therefore x^3+2x^2+5x+2 = x(x^2+2x+5)+2 = 2$$

0358 답 ③

$$x+y = (2+i) + (2-i) = 4,$$

$$xy = (2+i)(2-i) = 5 \text{이므로}$$

$$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 4^2 - 2 \times 5 = 6$$

$$\begin{aligned}\therefore x^4+x^2y^2+y^4 &= (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \\ &= (6+5) \times (6-5) = 11\end{aligned}$$

0359 답 ①

$$\bar{z} = 1 - \sqrt{3}i \text{이므로}$$

$$z + \bar{z} = (1 + \sqrt{3}i) + (1 - \sqrt{3}i) = 2$$

$$z\bar{z} = (1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) = 4$$

0353 답 ⑤

⑤ $1+\sqrt{3}$ 의 허수부분은 0이다.

$$\begin{aligned}\therefore z^3 + \bar{z}^3 &= (z + \bar{z})^3 - 3z\bar{z}(z + \bar{z}) \\ &= 2^3 - 3 \times 4 \times 2 = -16\end{aligned}$$

0360 답 ⑤

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z} = a - bi$

ㄱ. $z\bar{z} = 0$ 이므로

$$(a + bi)(a - bi) = 0$$

$$a^2 + b^2 = 0 \quad \therefore a = 0, b = 0$$

$$\therefore z = \bar{z} = 0$$

ㄴ. $\overline{z\bar{z}} = \overline{(a + bi)(a - bi)}$

$$= \overline{a^2 + b^2} = a^2 + b^2 \text{ (실수)}$$

ㄷ. $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

z^2 이 허수이므로 $ab \neq 0$

즉, $a \neq 0, b \neq 0$ 이므로 z 는 허수이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0361 답 ②

$$\begin{aligned}a\bar{a} + 2a\bar{\beta} + 2\bar{a}\beta + 4\beta\bar{\beta} &= a(\bar{a} + 2\bar{\beta}) + 2\beta(\bar{a} + 2\bar{\beta}) \\ &= (a + 2\beta)(\bar{a} + 2\bar{\beta}) \\ &= (a + 2\beta)\overline{(a + 2\beta)}\end{aligned}$$

이때 $a + 2\beta = (1 + 3i) + 2(3 - 2i) = 7 - i$ 이므로

$$\overline{a + 2\beta} = 7 + i$$

$$\begin{aligned}\therefore a\bar{a} + 2a\bar{\beta} + 2\bar{a}\beta + 4\beta\bar{\beta} &= (a + 2\beta)\overline{(a + 2\beta)} \\ &= (7 - i)(7 + i) = 50\end{aligned}$$

0362 답 ①

(가)에서 $\bar{z} = -z$ 이므로 z 는 순허수 또는 0이다.

(i) z 가 순허수일 때,

$$\begin{aligned}z &= ai \text{ (} a \text{는 0이 아닌 실수)라 하면 (나)에서} \\ (ai)^2 + (k^2 - 3k - 4)ai + (k^2 + 2k - 8) &= 0 \\ (-a^2 + k^2 + 2k - 8) + a(k^2 - 3k - 4)i &= 0\end{aligned}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$-a^2 + k^2 + 2k - 8 = 0, a(k^2 - 3k - 4) = 0$$

$a(k^2 - 3k - 4) = 0$ 에서 $a \neq 0$ 이므로

$$k^2 - 3k - 4 = 0, (k + 1)(k - 4) = 0$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 4$$

$k = -1$ 을 $-a^2 + k^2 + 2k - 8 = 0$ 에 대입하면

$$-a^2 - 9 = 0, a^2 = -9$$

즉, 조건을 만족시키는 실수 a 는 존재하지 않는다.

$k = 4$ 를 $-a^2 + k^2 + 2k - 8 = 0$ 에 대입하면

$$-a^2 + 16 = 0, a^2 = 16$$

$$\therefore a = -4 \text{ 또는 } a = 4$$

즉, 조건을 만족시키는 실수 a 가 존재하므로 $k = 4$

(ii) $z = 0$ 일 때,

$$(나)에서 k^2 + 2k - 8 = 0$$

$$(k + 4)(k - 2) = 0$$

$$\therefore k = -4 \text{ 또는 } k = 2$$

(i), (ii)에서 $k = 4$ 또는 $k = -4$ 또는 $k = 2$ 이므로 그 곱은

$$4 \times (-4) \times 2 = -32$$

0363 답 ③

$$i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0 \text{이므로}$$

$$1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{200}$$

$$= 1 + \underbrace{(i + i^2 + i^3 + i^4)}_0 + \underbrace{i^4(i + i^2 + i^3 + i^4)}_0 + \dots + \underbrace{i^{196}(i + i^2 + i^3 + i^4)}_0$$

$$= 1 + 0 + 0 + \dots + 0 = 1$$

0364 답 ③

$$\frac{1}{i} - \frac{2}{i^2} + \frac{3}{i^3} - \frac{4}{i^4} + \dots + \frac{21}{i^{21}} - \frac{22}{i^{22}}$$

$$= (-i + 2 + 3i - 4) + (-5i + 6 + 7i - 8)$$

$$+ \dots + (-17i + 18 + 19i - 20) + (-21i + 22)$$

$$= \underbrace{(-2 + 2i) + (-2 + 2i) + \dots + (-2 + 2i)}_{5\text{개}} + (-21i + 22)$$

$$= 5 \times (-2 + 2i) + (-21i + 22)$$

$$= 12 - 11i$$

$12 - 11i = a + bi$ 이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a = 12, b = -11 \quad \therefore a + b = 1$$

0365 답 ③

$$z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$z^2 = (-i)^2 = i^2 = -1$$

$$z^4 = (-1)^2 = 1$$

⋮

따라서 $z^n = 1$ 이 되도록 하는 자연수 n 은 4의 배수이므로 50 이하의 자연수 n 은 4, 8, 12, ..., 48의 12개이다.

0366 답 24

$$\sqrt{-27}\sqrt{-9} + \frac{\sqrt{-18}}{\sqrt{-6}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{-3}} = \sqrt{27}i \times \sqrt{9}i + \frac{\sqrt{18}i}{\sqrt{6}i} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}i}$$

$$= -9\sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{i}$$

$$= -8\sqrt{3} - \sqrt{3}i$$

$-8\sqrt{3} - \sqrt{3}i = a + bi$ 이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a = -8\sqrt{3}, b = -\sqrt{3} \quad \therefore ab = 24$$

0367 답 $b + c$

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{에서 } a < 0, b < 0$$

$$\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{c}{b}} \text{에서 } b < 0, c > 0$$

따라서 $a + b < 0$ 이므로

$$\sqrt{a^2} - |a + b| + \sqrt{c^2} = -a + (a + b) + c = b + c$$

0368 답 4

$$z = x^2 + (i - 4)x + i - 5 = (x^2 - 4x - 5) + (x + 1)i$$

z 가 실수가 되려면 $x + 1 = 0 \quad \therefore x = -1$

$$\therefore a = -1$$

..... ①

z^2 이 음의 실수가 되려면 z 가 순허수이어야 하므로

$$x^2 - 4x - 5 = 0, x + 1 \neq 0$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \text{에서 } (x + 1)(x - 5) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 5 \quad \dots\dots ②$$

$$x + 1 \neq 0 \text{에서 } x \neq -1 \quad \dots\dots ③$$

㉠, ㉡에서 $x=5$

$\therefore b=5$

$\therefore a+b=-1+5=4$

채점 기준

i a의 값 구하기	40 %
ii b의 값 구하기	50 %
iii a+b의 값 구하기	10 %

0369 답 4-2i

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$\frac{z}{3+i} + \frac{\bar{z}}{2} = 3$ 에서

$\frac{a+bi}{3+i} + \frac{a-bi}{2} = 3$

양변에 $2(3+i)$ 를 곱하면

$2(a+bi) + (a-bi)(3+i) = 6(3+i)$

$(5a+b) + (a-b)i = 18+6i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$5a+b=18, a-b=6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4, b=-2$

$\therefore z=4-2i$

채점 기준

i $z=a+bi$ 로 놓고 주어진 식을 나타내기	30 %
ii a, b의 값 구하기	60 %
iii 복소수 z 구하기	10 %

0370 답 1

$z^2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2i}{2} = i$ 이므로

$\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^8} + \dots + \frac{1}{z^{30}} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{1}{i^{15}}$

이때 $\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} = \frac{1}{i} + 1 - \frac{1}{i} - 1 = 0$ 이므로

$\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} - \frac{1}{z^8} + \dots + \frac{1}{z^{30}}$

$= \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{1}{i^{15}}$

$= \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4}\right) + \frac{1}{i^4} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4}\right)$
 $+ \frac{1}{i^8} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4}\right) + \frac{1}{i^{12}} - \frac{1}{i^{14}} + \frac{1}{i^{15}}$

$= \frac{1}{i^{13}} - \frac{1}{i^{14}} + \frac{1}{i^{15}}$

$= \frac{1}{i^{4 \times 3 + 1}} - \frac{1}{i^{4 \times 3 + 2}} + \frac{1}{i^{4 \times 3 + 3}}$

$= \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3}$

$= \frac{1}{i} + 1 - \frac{1}{i} = 1$

채점 기준

i 구하는 식을 i의 거듭제곱으로 나타내기	40 %
ii 식의 값 구하기	60 %

C 실력 향상

61쪽

0371 답 $-32-24i$

$f(1, 3) + f(2, 6) + f(3, 9) + \dots + f(40, 120)$

$= \frac{1-3i}{1+3i} + \frac{2-6i}{2+6i} + \frac{3-9i}{3+9i} + \dots + \frac{40-120i}{40+120i}$

$= \frac{1-3i}{1+3i} + \frac{1-3i}{1+3i} + \frac{1-3i}{1+3i} + \dots + \frac{1-3i}{1+3i}$

$= 40 \times \frac{1-3i}{1+3i} = 40 \times \frac{(1-3i)^2}{(1+3i)(1-3i)}$

$= 40 \times \frac{-8-6i}{10} = -32-24i$

0372 답 $32i$

$\alpha\bar{\beta} = \bar{\alpha}\beta = 1$ 에서 $\frac{1}{\alpha} = \bar{\beta}, \frac{1}{\beta} = \bar{\alpha}$

또 $\alpha + \beta = 1-i$ 에서 $\overline{\alpha + \beta} = 1+i$

$\therefore \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)^{10} = (\bar{\beta} + \bar{\alpha})^{10} = (\overline{\alpha + \beta})^{10}$
 $= (1+i)^{10} = \{(1+i)^2\}^5$
 $= (2i)^5 = 32i^5 = 32i$

0373 답 24

$z = \frac{\sqrt{2}}{1+i}$ 라 하면

$z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2 = \frac{2}{(1+i)^2} = \frac{2}{2i} = -i,$

$z^4 = (z^2)^2 = (-i)^2 = i^2 = -1,$

$z^8 = (z^4)^2 = (-1)^2 = 1, \dots$

$w = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$ 라 하면

$w^2 = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2 = \frac{2+2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2},$

$w^3 = w^2 \times w = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \times \frac{\sqrt{3}+i}{2} = i,$

$w^6 = (w^3)^2 = i^2 = -1, w^{12} = (w^6)^2 = (-1)^2 = 1, \dots$

즉, $z^n + w^n = 2$ 를 만족시키려면 $z^n = 1, w^n = 1$ 이어야 한다.

이때 $z^n = 1$ 이라면 n 은 8의 배수이어야 하고 $w^n = 1$ 이라면 n 은 12의 배수이어야 하므로 구하는 자연수 n 의 최솟값은 8과 12의 최소공배수인 24이다.

0374 답 ①

(가)에서 $a < 0, b > 0$ 이므로 $a < b$

(나)에서 a, b, c 가 모두 실수이므로

$a+c=0, 2a+3b=0$

$a+c=0$ 에서 $c=-a > 0$

$2a+3b=0$ 에서 $-a=\frac{3}{2}b$ 이므로 $c=-a=\frac{3}{2}b$

이때 $b > 0, c > 0$ 이고 $c=\frac{3}{2}b$ 이므로 $b < c$

$\therefore a < b < c$

04 / 이차방정식

A 개념 확인

62~65쪽

0375 답 $x = -6$ 또는 $x = -1$

$$x^2 + 7x + 6 = 0 \text{에서 } (x+6)(x+1) = 0 \\ \therefore x = -6 \text{ 또는 } x = -1$$

0376 답 $x = -4$ 또는 $x = 4$

$$x^2 - 16 = 0 \text{에서 } (x+4)(x-4) = 0 \\ \therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 4$$

0377 답 $x = -\frac{3}{4}$ 또는 $x = \frac{3}{2}$

$$8x^2 - 6x - 9 = 0 \text{에서 } (4x+3)(2x-3) = 0 \\ \therefore x = -\frac{3}{4} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}$$

0378 답 $x = -1 \pm 2\sqrt{2}i$

$$x^2 + 2x + 9 = 0 \text{에서} \\ x = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \times 9} \\ = -1 \pm \sqrt{-8} = -1 \pm 2\sqrt{2}i$$

0379 답 $x = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{2}$

$$x^2 - 3x - 12 = 0 \text{에서} \\ x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1} \\ = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{2}$$

0380 답 $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{4}$

$$4x^2 - 2x + 1 = 0 \text{에서} \\ x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{4} \\ = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{4}$$

0381 답 $x = -\frac{7}{2}$ 또는 $x = 1$, 실근

$$2x^2 + 5x - 7 = 0 \text{에서 } (2x+7)(x-1) = 0 \\ \therefore x = -\frac{7}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

0382 답 $x = \frac{-4 \pm \sqrt{2}i}{3}$, 허근

$$3x^2 + 8x + 6 = 0 \text{에서} \\ x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 3 \times 6}}{3} \\ = \frac{-4 \pm \sqrt{-2}}{3} = \frac{-4 \pm \sqrt{2}i}{3}$$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

0383 답 $x = \pm 3i$, 허근

$$x^2 + 9 = 0 \text{에서} \\ x = \pm \sqrt{-9} = \pm 3i$$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

0384 답 서로 다른 두 허근

$$\text{이차방정식 } x^2 - 2x + 4 = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면} \\ \frac{D}{4} = (-1)^2 - 1 \times 4 = -3 < 0$$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

0385 답 서로 다른 두 실근

$$\text{이차방정식 } x^2 + 5x - 9 = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면} \\ D = 5^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 61 > 0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

0386 답 중근

$$\text{이차방정식 } 2x^2 + 4x + 2 = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면} \\ \frac{D}{4} = 2^2 - 2 \times 2 = 0$$

따라서 중근을 갖는다.

0387 답 (1) ㄴ, ㄷ, ㅅ (2) ㄱ (3) ㄱ, ㄷ

각 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } D &= 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0 \\ \text{ㄴ. } D &= (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 > 0 \\ \text{ㄷ. } \frac{D}{4} &= 3^2 - 3 \times (-8) = 33 > 0 \\ \text{ㄹ. } \frac{D}{4} &= (-2)^2 - 5 \times 3 = -11 < 0 \\ \text{ㅁ. } \frac{D}{4} &= (-4)^2 - 16 \times 1 = 0 \\ \text{ㅂ. } \frac{D}{4} &= 3^2 - 1 \times 2 = 7 > 0 \end{aligned}$$

(1) $D > 0$ 이어야 하므로 보기에서

ㄴ, ㄷ, ㅅ

(2) $D = 0$ 이어야 하므로 보기에서

ㅁ

(3) $D < 0$ 이어야 하므로 보기에서

ㄱ, ㄷ

0388 답 (1) $k > -\frac{1}{12}$ (2) $k = -\frac{1}{12}$ (3) $k < -\frac{1}{12}$

$$\text{이차방정식 } 3x^2 + x - k = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면} \\ D = 1^2 - 4 \times 3 \times (-k) = 12k + 1$$

(1) $D > 0$ 이어야 하므로

$$D = 12k + 1 > 0 \quad \therefore k > -\frac{1}{12}$$

(2) $D = 0$ 이어야 하므로

$$D = 12k + 1 = 0 \quad \therefore k = -\frac{1}{12}$$

(3) $D < 0$ 이어야 하므로

$$D = 12k + 1 < 0 \quad \therefore k < -\frac{1}{12}$$

0389 **답** 두 근의 합: -4, 두 근의 곱: 5이차방정식 $x^2+4x+5=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두 근의 합}) = -\frac{4}{1} = -4, (\text{두 근의 곱}) = \frac{5}{1} = 5$$

0390 **답** 두 근의 합: $-\frac{8}{3}$, 두 근의 곱: -3이차방정식 $3x^2+8x-9=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두 근의 합}) = -\frac{8}{3}, (\text{두 근의 곱}) = \frac{-9}{3} = -3$$

0391 **답** 두 근의 합: -1, 두 근의 곱: 7이차방정식 $-x^2-x-7=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두 근의 합}) = -\frac{-1}{-1} = -1, (\text{두 근의 곱}) = \frac{-7}{-1} = 7$$

0392 **답** (1) 2 (2) -6 (3) $-\frac{1}{3}$ (4) 16이차방정식 $x^2-2x-6=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1) \alpha + \beta = -\frac{-2}{1} = 2$$

$$(2) \alpha\beta = \frac{-6}{1} = -6$$

$$(3) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$$

$$(4) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2^2 - 2 \times (-6) = 16$$

0393 **답** $x^2+2x-3=0$

$$x^2 - (-3+1)x + (-3) \times 1 = 0$$

$$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$$

0394 **답** $x^2-4x+1=0$

$$x^2 - \{(2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})\}x + (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x^2 - 4x + 1 = 0$$

0395 **답** $x^2-6x+13=0$

$$x^2 - \{(3-2i) + (3+2i)\}x + (3-2i)(3+2i) = 0$$

$$\therefore x^2 - 6x + 13 = 0$$

0396 **답** $2x^2+x-1=0$

$$2\left\{x^2 - \left(\frac{1}{2}-1\right)x + \frac{1}{2} \times (-1)\right\} = 0$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \therefore 2x^2 + x - 1 = 0$$

0397 **답** $\left(x + \frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)\left(x + \frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)$

$$x^2 + 3x - 6 = 0 \text{에서}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$\therefore x^2 + 3x - 6 = \left(x + \frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)\left(x + \frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)$$

0398 **답** $(x-9i)(x+9i)$

$$x^2 + 81 = 0 \text{에서 } x = \pm 9i$$

$$\therefore x^2 + 81 = (x-9i)(x+9i)$$

0399 **답** $2\left(x-1-\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)$

$$2x^2 - 4x + 5 = 0 \text{에서}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 2 \times 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-6}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{6}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

$$\therefore 2x^2 - 4x + 5 = 2\left(x-1-\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)$$

0400 **답** $a=-2, b=-1$ 주어진 이차방정식의 계수가 유리수이므로 $1+\sqrt{2}$ 가 근이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = -a$$

$$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = b$$

$$\therefore a = -2, b = -1$$

0401 **답** $a=4, b=-44$ 주어진 이차방정식의 계수가 유리수이므로 $-2+4\sqrt{3}$ 이 근이면 다른 한 근은 $-2-4\sqrt{3}$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-2-4\sqrt{3}) + (-2+4\sqrt{3}) = -a$$

$$(-2-4\sqrt{3})(-2+4\sqrt{3}) = b$$

$$\therefore a = 4, b = -44$$

0402 **답** $a=-2, b=10$ 주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $1-3i$ 가 근이면 다른 한 근은 $1+3i$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1-3i) + (1+3i) = -a$$

$$(1-3i)(1+3i) = b$$

$$\therefore a = -2, b = 10$$

0403 **답** $a=6, b=11$ 주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $-3+\sqrt{2}i$ 가 근이면 $-3-\sqrt{2}i$ 도 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-3+\sqrt{2}i) + (-3-\sqrt{2}i) = -a$$

$$(-3+\sqrt{2}i)(-3-\sqrt{2}i) = b$$

$$\therefore a = 6, b = 11$$

B 유형 완성

66~75쪽

0404 **답** ④

$$x^2 + 4x + 7 = 0 \text{에서}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \times 7} = -2 \pm \sqrt{3}i$$

따라서 $a = -2, b = 3$ 이므로

$$a + b = 1$$

0405 답 ④

$$\begin{aligned}
 x(x+3) &= 3(x^2-1) - 2x \text{에서} \\
 2x^2 - 5x - 3 &= 0, (2x+1)(x-3) = 0 \\
 \therefore x &= -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 3
 \end{aligned}$$

0406 답 5

$$\begin{aligned}
 \{x \odot (x+2)\} + \{(x-1) \odot 2\} &= 7 \text{에서} \\
 \{x(x+2) - x + (x+2)\} + \{(x-1) \times 2 - (x-1) + 2\} - 7 &= 0 \\
 (x^2 + 2x + 2) + (x+1) - 7 &= 0 \\
 x^2 + 3x - 4 &= 0, (x+4)(x-1) = 0 \\
 \therefore x &= -4 \text{ 또는 } x = 1 \\
 \text{따라서 } \alpha &= -4, \beta = 1 \text{ 또는 } \alpha = 1, \beta = -4 \text{이므로} \\
 |\alpha| + |\beta| &= |-4| + |1| = 5
 \end{aligned}$$

0407 답 1

$$\begin{aligned}
 \text{주어진 방정식의 양변에 } \sqrt{2}+1 \text{을 곱하면} \\
 (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2 - (\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})x + (\sqrt{2}+1) \times 3 &= 0 \\
 x^2 - (4+3\sqrt{2})x + 3+3\sqrt{2} &= 0 \\
 (x-1)(x-3-3\sqrt{2}) &= 0 \\
 \therefore x &= 1 \text{ 또는 } x = 3+3\sqrt{2} \\
 \text{따라서 유리수인 근은 } 1 &\text{이다.}
 \end{aligned}$$

0408 답 ①

$$\begin{aligned}
 \text{이차방정식 } 4x^2 + 8x + k &= 0 \text{의 한 근이 } -\frac{1}{2} \text{이므로 } x = -\frac{1}{2} \text{을 대} \\
 \text{입하면} \\
 1 - 4 + k &= 0 \quad \therefore k = 3 \\
 \text{이를 주어진 방정식에 대입하면} \\
 4x^2 + 8x + 3 &= 0, (2x+3)(2x+1) = 0 \\
 \therefore x &= -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x = -\frac{1}{2} \\
 \text{따라서 다른 한 근은 } -\frac{3}{2} &\text{이다.}
 \end{aligned}$$

0409 답 ②

$$\begin{aligned}
 \text{이차방정식 } x^2 - 3x + a &= 0 \text{의 한 근이 } 3+\sqrt{2} \text{이므로 } x = 3+\sqrt{2} \text{를 대} \\
 \text{입하면} \\
 (3+\sqrt{2})^2 - 3(3+\sqrt{2}) + a &= 0 \\
 (11+6\sqrt{2}) - 9 - 3\sqrt{2} + a &= 0 \\
 2 + 3\sqrt{2} + a &= 0 \\
 \therefore a &= -2 - 3\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

0410 답 -2

$$\begin{aligned}
 \text{이차방정식 } x^2 + (2k+1)x + k + 3 &= 0 \text{의 한 근이 } -1 \text{이므로} \\
 x = -1 \text{을 대입하면} \\
 1 - (2k+1) + k + 3 &= 0 \\
 -k + 3 &= 0 \quad \therefore k = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{i} \\
 \text{이를 주어진 방정식에 대입하면} \\
 x^2 + 7x + 6 &= 0, (x+6)(x+1) = 0 \\
 \therefore x &= -6 \text{ 또는 } x = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{ii}
 \end{aligned}$$

따라서 $\alpha = -6$ 이므로

$$\frac{\alpha}{k} = \frac{-6}{3} = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① k 의 값 구하기	40 %
② 주어진 이차방정식의 근 구하기	40 %
③ $\frac{\alpha}{k}$ 의 값 구하기	20 %

0411 답 $x=1$ 또는 $x=4$

$$\begin{aligned}
 \text{이차방정식 } kx^2 + (m+1)x - n(k-2) &= 0 \text{의 한 근이 } 2 \text{이므로} \\
 x = 2 \text{를 대입하면} \\
 4k + 2(m+1) - n(k-2) &= 0 \\
 \therefore (4-n)k + 2m + 2n + 2 &= 0 \\
 \text{이 등식이 } k \text{에 대한 항등식이므로} \\
 4 - n &= 0, 2m + 2n + 2 = 0 \\
 \therefore m &= -5, n = 4 \\
 \text{이를 방정식 } x^2 + mx + n &= 0 \text{에 대입하면} \\
 x^2 - 5x + 4 &= 0, (x-1)(x-4) = 0 \\
 \therefore x &= 1 \text{ 또는 } x = 4
 \end{aligned}$$

0412 답 -45

$$\begin{aligned}
 \text{이차방정식 } x^2 + 3x - 2 &= 0 \text{의 한 근이 } \alpha \text{이므로} \\
 \alpha^2 + 3\alpha - 2 &= 0 \\
 \alpha \neq 0 \text{이므로 양변을 } \alpha \text{로 나누면} \\
 \alpha + 3 - \frac{2}{\alpha} &= 0 \\
 \therefore \alpha - \frac{2}{\alpha} &= -3 \\
 \therefore \alpha^3 - \frac{8}{\alpha^3} &= \left(\alpha - \frac{2}{\alpha}\right)^3 + 3\alpha \times \frac{2}{\alpha} \left(\alpha - \frac{2}{\alpha}\right) \\
 &= (-3)^3 + 6 \times (-3) = -45
 \end{aligned}$$

0413 답 ①

$$\begin{aligned}
 \text{(i) } x < -1 \text{일 때,} \\
 |x+1| &= -(x+1) \text{이므로} \\
 x^2 + (x+1) - 1 &= 0 \\
 x^2 + x &= 0, x(x+1) = 0 \\
 \therefore x &= -1 \text{ 또는 } x = 0 \\
 \text{그런데 } x < -1 \text{이므로 이를 만족시키는 해는 없다.} \\
 \text{(ii) } x \geq -1 \text{일 때,} \\
 |x+1| &= x+1 \text{이므로} \\
 x^2 - (x+1) - 1 &= 0 \\
 x^2 - x - 2 &= 0, (x+1)(x-2) = 0 \\
 \therefore x &= -1 \text{ 또는 } x = 2 \\
 \text{그런데 } x \geq -1 \text{이므로 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2 \\
 \text{(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는} \\
 x = -1 \text{ 또는 } x = 2 \\
 \text{따라서 방정식의 모든 근의 합은} \\
 -1 + 2 &= 1
 \end{aligned}$$

0414 **답** $x=-3$ 또는 $x=3$

(i) $x < 0$ 일 때,

$$x^2 + x - 6 = 0, (x+3)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -3$

(ii) $x \geq 0$ 일 때,

$$x^2 - x - 6 = 0, (x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x = 3$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -3 \text{ 또는 } x = 3$$

다른 풀이

$$x^2 = |x|^2 \text{이므로 } |x|^2 - |x| - 6 = 0$$

$$(|x|+2)(|x|-3) = 0 \quad \therefore |x| = -2 \text{ 또는 } |x| = 3$$

그런데 $|x| \geq 0$ 이므로 $|x| = 3$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 3$$

0415 **답** ③

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \text{이므로}$$

$$x^2 - 8|x| + 4\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 0 \text{에서}$$

$$x^2 - 8|x| + 4|x-1| = 0$$

(i) $x < 0$ 일 때,

$$|x| = -x, |x-1| = -(x-1) \text{이므로}$$

$$x^2 + 8x - 4(x-1) = 0, x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0 \quad \therefore x = -2$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -2$

(ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,

$$|x| = x, |x-1| = -(x-1) \text{이므로}$$

$$x^2 - 8x - 4(x-1) = 0, x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$\therefore x = 6 \pm 4\sqrt{2}$$

그런데 $0 \leq x < 1$ 이므로 $x = 6 - 4\sqrt{2}$

(iii) $x \geq 1$ 일 때,

$$|x| = x, |x-1| = x-1 \text{이므로}$$

$$x^2 - 8x + 4(x-1) = 0, x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$\therefore x = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 2 + 2\sqrt{2}$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 근은

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 6 - 4\sqrt{2} \text{ 또는 } x = 2 + 2\sqrt{2}$$

따라서 유리수가 아닌 모든 근의 합은

$$(6 - 4\sqrt{2}) + (2 + 2\sqrt{2}) = 8 - 2\sqrt{2}$$

$$\text{즉, } a = 8, b = -2 \text{이므로 } a + b = 6$$

0416 **답** 2 m

도로의 폭을 x m라 하면 도로를 제외한 부분의 넓이는

$$(16 - 2x)(10 - x) = 96$$

$$2x^2 - 36x + 160 = 96, x^2 - 18x + 32 = 0$$

$$(x-2)(x-16) = 0 \quad \therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 16$$

그런데 $0 < x < 8$ 이므로 $x = 2$

따라서 도로의 폭은 2 m이다.

0417 **답** ④

처음 직사각형의 가로, 세로의 길이를 x cm라 하면 세로의 길이는

$(14 - x)$ cm이므로 새로 만들어진 직사각형의 가로, 세로의 길이는

각각 $(x - 2)$ cm, $(17 - x)$ cm이다.

즉, 새로 만들어진 직사각형의 넓이는

$$(x-2)(17-x) = \frac{9}{8}x(14-x)$$

$$-x^2 + 19x - 34 = \frac{9}{8}(-x^2 + 14x), x^2 + 26x - 272 = 0$$

$$(x+34)(x-8) = 0 \quad \therefore x = -34 \text{ 또는 } x = 8$$

그런데 $2 < x < 14$ 이므로 $x = 8$

따라서 처음 직사각형의 가로, 세로의 길이는 8 cm이다.

0418 **답** ④

미술관의 입장료가 a 원일 때 관람객 수를 b 라 하면

할인된 입장료는 $a\left(1 - \frac{x}{100}\right)$ 원, 관람객 수는 $b\left(1 + \frac{3x}{100}\right)$ 이므로

총수입은

$$ab\left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{3x}{100}\right) = ab\left(1 + \frac{28}{100}\right)$$

$$1 + \frac{2x}{100} - \frac{3x^2}{10000} = 1 + \frac{28}{100}, 3x^2 - 200x + 2800 = 0$$

$$(x-20)(3x-140) = 0 \quad \therefore x = 20 \text{ 또는 } x = \frac{140}{3}$$

그런데 x 는 자연수이므로 $x = 20$

0419 **답** $k < -4$

$$x^2 + 2kx + k^2 = 2x - 9 \text{에서}$$

$$x^2 + 2(k-1)x + k^2 + 9 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k^2 + 9) > 0$$

$$-2k - 8 > 0 \quad \therefore k < -4$$

0420 **답** ②

각 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\neg. D = 1^2 - 4 \times 1 \times 4 = -15 < 0$$

즉, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$$\neg. D = 3^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 17 > 0$$

즉, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$$\neg. \frac{D}{4} = (-2)^2 - 1 \times 5 = -1 < 0$$

즉, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$$\neg. \frac{D}{4} = 3^2 - 1 \times 9 = 0$$

즉, 중근을 갖는다.

따라서 보기에서 허근을 갖는 이차방정식은 $\neg$, $\neg$ 이다.

0421 **답** ②

$$x^2 + 4kx + 3k = 2kx - 4 \text{에서}$$

$$x^2 + 2kx + 3k + 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - (3k + 4) = 0$$

$k^2 - 3k - 4 = 0, (k+1)(k-4) = 0$
 $\therefore k = -1$ 또는 $k = 4$
 따라서 모든 실수 k 의 값의 합은
 $-1 + 4 = 3$

0422 답 ③

x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(k+1)x + k^2 - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{-(k+1)\}^2 - (k^2 - 1) < 0$$

$$2k + 2 < 0 \quad \therefore k < -1$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -2 이다.

0423 답 ②

$$x^2 + 4x + k^2 = 2kx + 8 \text{에서}$$

$$x^2 - 2(k-2)x + k^2 - 8 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{-(k-2)\}^2 - (k^2 - 8) \geq 0$$

$$-4k + 12 \geq 0 \quad \therefore k \leq 3$$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3의 3개이다.

0424 답 1

이차방정식 $x^2 - x - 2k = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1 \geq 0$ 이어야 하므로

$$D_1 = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2k) \geq 0$$

$$1 + 8k \geq 0 \quad \therefore k \geq -\frac{1}{8} \quad \dots\dots \textcircled{i} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

이차방정식 $x^2 + (k+1)x + 1 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2 = 0$ 이어야 하므로

$$D_2 = (k+1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$$

$$k^2 + 2k - 3 = 0, (k+3)(k-1) = 0$$

$$\therefore k = -3 \text{ 또는 } k = 1 \quad \dots\dots \textcircled{ii} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

$$\textcircled{i}, \textcircled{ii} \text{에서 } k = 1 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 이차방정식 $x^2 - x - 2k = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 k 의 값의 범위 구하기	40 %
② 이차방정식 $x^2 + (k+1)x + 1 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 k 의 값 구하기	40 %
③ 조건을 만족시키는 k 의 값 구하기	20 %

0425 답 ④

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 - 4k + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (k-a)^2 - (k^2 - 4k + b) = 0$$

$$\therefore 2(2-a)k + a^2 - b = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$2-a=0, a^2-b=0 \quad \therefore a=2, b=4$$

$$\therefore ab=8$$

0426 답 실근

$$2a = bc + 1 \text{에서 } bc = 2a - 1$$

이차방정식 $x^2 + 2ax + bc = 0$, 즉 $x^2 + 2ax + 2a - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - (2a - 1) = a^2 - 2a + 1$$

$$= (a-1)^2 \geq 0$$

따라서 이차방정식 $x^2 + 2ax + bc = 0$ 은 실근을 갖는다.

0427 답 서로 다른 두 허근

x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx + k^2 - k + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - (k^2 - k + 3) = k - 3$$

$$\text{이때 } k < 3 \text{이므로 } k - 3 < 0$$

따라서 이차방정식 $x^2 - 2kx + k^2 - k + 3 = 0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

0428 답 서로 다른 두 실근

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1 > 0$ 이어야 하므로

$$D_1 = a^2 - 4b > 0$$

이차방정식 $x^2 + 2(a+1)x + 2(a+2b) = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (a+1)^2 - 2(a+2b) = a^2 - 4b + 1$$

$$\text{이때 } a^2 - 4b > 0 \text{이므로 } a^2 - 4b + 1 > 1$$

따라서 이차방정식 $x^2 + 2(a+1)x + 2(a+2b) = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

0429 답 ③

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}} \text{에서 } a < 0, b > 0$$

$$\therefore ab < 0$$

각 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\textcircled{1} D = a^2 + 4b > 0 \text{이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.}$$

$$\textcircled{2} D = b^2 - 4a > 0 \text{이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.}$$

$$\textcircled{3} D = b^2 + 4a \text{의 부호를 정할 수 없으므로 근을 판별할 수 없다.}$$

$$\textcircled{4} \frac{D}{4} = 4 - ab > 0 \text{이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.}$$

$$\textcircled{5} D = 1 - 4ab > 0 \text{이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.}$$

따라서 항상 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식이 아닌 것은 ③이다.

0430 답 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형

이차방정식 $x^2 + 2cx + a^2 - b^2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = c^2 - (a^2 - b^2) = 0$$

$$b^2 + c^2 - a^2 = 0 \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

0431 [답] ③

이차방정식 $x^2+2(a+b)x+2ab+c^2=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D<0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(a+b)^2-(2ab+c^2)<0$$

$$a^2+b^2-c^2<0 \quad \therefore a^2+b^2<c^2$$

따라서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 가장 긴 변의 길이가 c 인 둔각삼각형이다.

0432 [답] ②

이차방정식 $(a+c)x^2+2bx+a-c=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D>0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=b^2-(a+c)(a-c)>0$$

$$b^2-a^2+c^2>0 \quad \therefore b^2+c^2>a^2$$

따라서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 예각삼각형이다.

0433 [답] ①

이차식 $x^2-2kx+k^2-3k+1$ 이 완전제곱식이면 x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+k^2-3k+1=0$ 이 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k^2-3k+1)=0$$

$$3k-1=0 \quad \therefore k=\frac{1}{3}$$

0434 [답] ②

$(k-1)x^2+2(k-1)x-3$ 이 이차식이므로

$$k-1 \neq 0 \quad \therefore k \neq 1$$

이차식 $(k-1)x^2+2(k-1)x-3$ 이 완전제곱식이면 이차방정식 $(k-1)x^2+2(k-1)x-3=0$ 이 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2+3(k-1)=0$$

$$k^2+k-2=0, (k+2)(k-1)=0 \quad \therefore k=-2 \text{ 또는 } k=1$$

그런데 $k \neq 1$ 이므로 $k=-2$

0435 [답] ⑤

이차식 $x^2-(4k-a)x+4k^2+k+b$ 가 완전제곱식이 되려면 x 에 대한 이차방정식 $x^2-(4k-a)x+4k^2+k+b=0$ 이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$D=\{-(4k-a)\}^2-4(4k^2+k+b)=0$$

$$\therefore -4(2a+1)k+a^2-4b=0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$2a+1=0, a^2-4b=0 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}, b=\frac{1}{16}$$

$$\therefore b-a=-\frac{9}{16}$$

0436 [답] -3

이차식 $2x^2+2kx+k^2+3k+4$ 가 $2(x+a)^2$ 으로 인수분해되려면 x 에 대한 이차방정식 $2x^2+2kx+k^2+3k+4=0$ 이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2+3k+4)=0$$

$$k^2+6k+8=0, (k+4)(k+2)=0$$

$$\therefore k=-4 \text{ 또는 } k=-2$$

그런데 $k>-3$ 이므로 $k=-2$

이를 주어진 이차식에 대입하면

$$2x^2-4x+2=2(x-1)^2$$

따라서 $a=-1$ 이므로

$$k+a=-2+(-1)=-3$$

0437 [답] 22

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=5$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= (-2)^3-3 \times 5 \times (-2)=22 \end{aligned}$$

0438 [답] ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3, \alpha\beta=\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha-\beta)^2 &= (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\ &= 3^2-4 \times \frac{3}{2}=3 \end{aligned}$$

그런데 $\alpha>\beta$ 이므로 $\alpha-\beta=\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2-\beta^2 &= (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) \\ &= 3 \times \sqrt{3}=3\sqrt{3} \end{aligned}$$

0439 [답] $\sqrt{5}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3, \alpha\beta=1$$

이때 $\alpha+\beta>0, \alpha\beta>0$ 에서 $\alpha>0, \beta>0$ 이므로

$$\begin{aligned} (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2 &= \alpha+2\sqrt{\alpha\beta}+\beta \\ &= \alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta} \\ &= 3+2 \times 1=5 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{5}$$

채점 기준

① $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 의 값 구하기	30 %
② $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 의 값 구하기	50 %
③ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ 의 값 구하기	20 %

0440 [답] ⑤

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4, \alpha\beta=-1$$

$$\textcircled{1} \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{4}{-1}=-4$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} (\alpha+2)(\beta+2) &= \alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4 \\ &= -1+2 \times 4+4=11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-\alpha\beta \\ &= 4^2-(-1)=17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \quad \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} &= \frac{(1+\alpha)(1-\beta) + (1+\beta)(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)} \\
 &= \frac{2(1-\alpha\beta)}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta} \\
 &= \frac{2 \times (1+1)}{1-4-1} = -1 \\
 \textcircled{5} \quad \frac{\beta}{\alpha-3} + \frac{\alpha}{\beta-3} &= \frac{\beta(\beta-3) + \alpha(\alpha-3)}{(\alpha-3)(\beta-3)} \\
 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 3(\alpha+\beta)}{\alpha\beta - 3(\alpha+\beta) + 9} \\
 &= \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta - 3(\alpha+\beta)}{\alpha\beta - 3(\alpha+\beta) + 9} \\
 &= \frac{4^2 - 2 \times (-1) - 3 \times 4}{-1 - 3 \times 4 + 9} = -\frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

0441 답 ④

α, β 가 주어진 방정식의 근이므로

$$\alpha^2 - 3\alpha + 4 = 0, \beta^2 - 3\beta + 4 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 - \alpha + 1 = 2\alpha - 3, \beta^2 - \beta + 1 = 2\beta - 3$$

$x^2 - 3x + 4 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 4$$

$$\begin{aligned}
 \therefore (\alpha^2 - \alpha + 1)(\beta^2 - \beta + 1) &= (2\alpha - 3)(2\beta - 3) \\
 &= 4\alpha\beta - 6(\alpha + \beta) + 9 \\
 &= 4 \times 4 - 6 \times 3 + 9 = 7
 \end{aligned}$$

0442 답 9

β 가 주어진 방정식의 근이므로

$$\beta^2 - 2\beta - 5 = 0 \quad \therefore \beta^2 = 2\beta + 5$$

$x^2 - 2x - 5 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2$$

$$\begin{aligned}
 \therefore 2\alpha + \beta^2 &= 2\alpha + (2\beta + 5) = 2(\alpha + \beta) + 5 \\
 &= 2 \times 2 + 5 = 9
 \end{aligned}$$

0443 답 ②

α, β 가 주어진 방정식의 근이므로

$$\alpha^2 + 2\alpha + 3 = 0, \beta^2 + 2\beta + 3 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + \alpha + 3 = -\alpha, \beta^2 + \beta + 3 = -\beta$$

$x^2 + 2x + 3 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = 3$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{\beta}{\alpha^2 + \alpha + 3} + \frac{\alpha}{\beta^2 + \beta + 3} &= \frac{\beta}{-\alpha} + \frac{\alpha}{-\beta} = -\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\
 &= -\frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\
 &= -\frac{(-2)^2 - 2 \times 3}{3} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

0444 답 ④

α, β 가 주어진 이차방정식의 근이므로

$$3\alpha^2 - \alpha - 9 = 0, 3\beta^2 - \beta - 9 = 0$$

$$\therefore 3\alpha^2 = \alpha + 9, 3\beta^2 = \beta + 9$$

$3x^2 - x - 9 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{1}{3}, \alpha\beta = -3$$

$$\begin{aligned}
 \therefore (3\alpha^2 + 2\alpha)(6\beta^2 + \beta - 9) &= \{(\alpha + 9) + 2\alpha\} \{2(\beta + 9) + \beta - 9\} \\
 &= (3\alpha + 9)(3\beta + 9) \\
 &= 9\{\alpha\beta + 3(\alpha + \beta) + 9\} \\
 &= 9 \times \left(-3 + 3 \times \frac{1}{3} + 9\right) = 63
 \end{aligned}$$

0445 답 10

$x^2 + ax + b = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$x^2 + bx + a = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}
 (\alpha - 1) + (\beta - 1) &= -b, (\alpha - 1)(\beta - 1) = a \\
 \therefore (\alpha + \beta) - 2 &= -b, \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = a \quad \dots\dots \textcircled{8}
 \end{aligned}$$

⑦을 ⑧에 대입하면

$$-a - 2 = -b, b + a + 1 = a$$

$$\therefore a = -3, b = -1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-3)^2 + (-1)^2 = 10$$

0446 답 ②

$x^2 - ax + b = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1 + 2 = a, -1 \times 2 = b \quad \therefore a = 1, b = -2$$

따라서 이차방정식 $2ax^2 + (a+b)x + b = 0$, 즉 $2x^2 - x - 2 = 0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{-2}{2} = -1$$

0447 답 10

$x^2 - x + a = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = a \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$x^2 + bx + 4 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 + \beta^2 &= -b, \alpha^2\beta^2 = 4 \\
 \therefore (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta &= -b, (\alpha\beta)^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}
 \end{aligned}$$

⑦을 ⑧에 대입하면

$$1 - 2a = -b, a^2 = 4$$

이때 $a < 0$ 이므로 $a = -2, b = -5$

$$\therefore ab = 10$$

0448 답 ⑤

$x^2 - ax + b = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$2x^2 + ax + a + b = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} &= -\frac{a}{2}, \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{a+b}{2} \\
 \therefore \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} &= -\frac{a}{2}, \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{a+b}{2} \quad \dots\dots \textcircled{8}
 \end{aligned}$$

⑦을 ⑧에 대입하면

$$\frac{a}{b} = -\frac{a}{2}, \frac{1}{b} = \frac{a+b}{2}$$

이때 $a \neq 0$ 이므로 $a = 1, b = -2$

$$\therefore a - b = 3$$

0449 답 ③

원래의 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$ (a, b 는 상수)이라 하자.
가민이는 x^2 의 계수와 b 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은
 $3 \times 4 = b \quad \therefore b=12$

예지는 x^2 의 계수와 a 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은
 $(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})=-a \quad \therefore a=-2$

따라서 원래의 이차방정식은

$$x^2-2x+12=0$$

0450 답 1

준희는 a 와 c 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$$\frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \quad \therefore c = -\frac{3}{2}a \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

서진이는 a 와 b 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$$-\frac{b}{a} = -\frac{1}{2} \quad \therefore b = \frac{1}{2}a \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$ 에 대입하면

$$ax^2 + \frac{1}{2}ax - \frac{3}{2}a = 0$$

$a \neq 0$ 이므로 양변을 a 로 나누면

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0, \quad 2x^2 + x - 3 = 0$$

$$(2x+3)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 이 이차방정식의 두 근 중 양수인 근은 1이다.

0451 답 17

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에서 근의 공식을 $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 로

잘못 알고 풀어서 얻은 두 근이 $-1, 2$ 이므로

$$\frac{b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -1 + 2$$

$$\frac{2b}{2a} = 1 \quad \therefore b = a \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = -1 \times 2$$

$$\frac{b^2 - (b^2-4ac)}{4a^2} = -2, \quad \frac{c}{4a} = -2$$

$$\therefore c = -8a \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$ 에 대입하면

$$ax^2 + ax - 8a = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{a}{a} = -1, \quad \alpha\beta = \frac{-8a}{a} = -8$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-1)^2 - 2 \times (-8) = 17 \end{aligned}$$

0452 답 -3

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3k, \quad \alpha\beta = k^2 - 3k$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= (3k)^2 - 4(k^2 - 3k) = 5k^2 + 12k \end{aligned}$$

이때 $(\alpha - \beta)^2 = 9$ 이므로

$$5k^2 + 12k = 9, \quad 5k^2 + 12k - 9 = 0$$

$$(k+3)(5k-3) = 0 \quad \therefore k = -3 \text{ 또는 } k = \frac{3}{5}$$

그런데 k 는 정수이므로 $k = -3$

0453 답 ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = -4$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{a^2 + 8}{-4} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = -6 \text{이므로}$$

$$\frac{a^2 + 8}{-4} = -6, \quad a^2 + 8 = 24$$

$$a^2 = 16 \quad \therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$

0454 답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = b$$

$$\alpha + \beta - 2\alpha\beta - 7 = 0 \text{에서}$$

$$a - 2b - 7 = 0 \quad \therefore a - 2b = 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$(\alpha + 2)(\beta + 2) = 8 \text{에서}$$

$$\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) = 4 \quad \therefore 2a + b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 3, b = -2$

$$\therefore a + b = 1$$

0455 답 $\frac{1}{3}$

주어진 이차방정식의 두 근을 $3\alpha, 5\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$3\alpha + 5\alpha = 8k \quad \therefore \alpha = k \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$3\alpha \times 5\alpha = -k + 2 \quad \therefore 15\alpha^2 + k - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $15k^2 + k - 2 = 0$

$$(5k+2)(3k-1) = 0$$

$$\therefore k = -\frac{2}{5} \text{ 또는 } k = \frac{1}{3}$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = \frac{1}{3}$

0456 답 ②

주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, 2\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + 2\alpha = 6k \quad \therefore \alpha = 2k \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha \times 2\alpha = 7k + 1 \quad \therefore 2\alpha^2 - 7k - 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $8k^2 - 7k - 1 = 0$

$$(8k+1)(k-1) = 0 \quad \therefore k = -\frac{1}{8} \text{ 또는 } k = 1$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = 1$

0457 답 ①

주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, \alpha+1$ 이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (\alpha + 1) = 2k + 1 \quad \therefore \alpha = k \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha(\alpha+1)=3k \quad \therefore \alpha^2+\alpha-3k=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉔}$$

$$\textcircled{㉔} \text{을 } \textcircled{㉓} \text{에 대입하면 } k^2+k-3k=0$$

$$k^2-2k=0, k(k-2)=0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=2$$

$$\text{그런데 } k>0 \text{ 이므로 } k=2$$

0458 답 2

이차방정식 $x^2-(2k+5)x-k-5=0$ 의 두 근을 α , $\alpha+3$ 이라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(\alpha+3)=2k+5 \quad \therefore \alpha=k+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$$\alpha(\alpha+3)=-k-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$$\textcircled{㉑} \text{을 } \textcircled{㉒} \text{에 대입하면 } (k+1)(k+4)=-k-5$$

$$k^2+6k+9=0, (k+3)^2=0$$

$$\therefore k=-3$$

$$\text{이를 } x^2+(k+1)x+2k=0 \text{에 대입하면}$$

$$x^2-2x-6=0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 2이다.

0459 답 3

주어진 이차방정식의 두 근을 α , $-\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라 하면 이차방정식의
근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(-\alpha)=-(m^2-2m-3) \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$$\alpha \times (-\alpha)=-4m+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$$\textcircled{㉑} \text{에서 } m^2-2m-3=0, (m+1)(m-3)=0$$

$$\therefore m=-1 \text{ 또는 } m=3$$

$$\text{이때 두 근의 부호가 서로 다르면 } \textcircled{㉒} \text{에서 } -4m+2<0 \text{ 이므로}$$

$$m>\frac{1}{2}$$

$$\therefore m=3$$

0460 답 $x^2+x+4=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=4$$

구하는 이차방정식의 두 근이 $\alpha-1$, $\beta-1$ 이므로

$$(\alpha-1)+(\beta-1)=(\alpha+\beta)-2$$

$$=1-2=-1$$

$$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$$

$$=4-1+1=4$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2+x+4=0$

0461 답 ⑤

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-5, \alpha\beta=2$$

구하는 이차방정식의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ 이므로

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{5}{2}, \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{2}$$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0 \quad \therefore 2x^2+5x+1=0$$

0462 답 $5x^2-7x+1=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3, \alpha\beta=-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{i}$$

구하는 이차방정식의 두 근이 $1+\frac{1}{\alpha}$, $1+\frac{1}{\beta}$ 이므로

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(1+\frac{1}{\beta}\right)=2+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=2+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$

$$=2+\frac{3}{-5}=\frac{7}{5}$$

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)=\frac{\alpha+1}{\alpha} \times \frac{\beta+1}{\beta}=\frac{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{-5+3+1}{-5}=\frac{1}{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{ii}$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$5\left(x^2-\frac{7}{5}x+\frac{1}{5}\right)=0 \quad \therefore 5x^2-7x+1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ 의 값 구하기	20%
② $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$, $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$ 의 값 구하기	60%
③ 이차방정식 구하기	20%

0463 답 ②

$f(x)=0$ 의 두 근이 α , β 이므로 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

$f(3x-5)=0$ 이라면 $3x-5=\alpha$ 또는 $3x-5=\beta$

$$\therefore x=\frac{\alpha+5}{3} \text{ 또는 } x=\frac{\beta+5}{3}$$

따라서 이차방정식 $f(3x-5)=0$ 의 두 근의 합은

$$\begin{aligned} \frac{\alpha+5}{3}+\frac{\beta+5}{3} &= \frac{(\alpha+\beta)+10}{3} \\ &= \frac{-1+10}{3}=3 \end{aligned}$$

0464 답 ②

$f(x)=0$ 의 두 근을 α , β 라 하면 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=4$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$ 이므로 $f(2x+1)=0$ 이라면

$$2x+1=\alpha \text{ 또는 } 2x+1=\beta$$

$$\therefore x=\frac{\alpha-1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\beta-1}{2}$$

따라서 이차방정식 $f(2x+1)=0$ 의 두 근의 곱은

$$\begin{aligned} \frac{\alpha-1}{2} \times \frac{\beta-1}{2} &= \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{4} \\ &= \frac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}{4} \\ &= \frac{4+1+1}{4}=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

0465 답 ①

$f(3-4x)=0$ 의 두 근이 α , β 이므로

$$f(3-4\alpha)=0, f(3-4\beta)=0$$

$f(2x)=0$ 이라면 $2x=3-4\alpha$ 또는 $2x=3-4\beta$

$$\therefore x=\frac{3-4\alpha}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3-4\beta}{2}$$

따라서 이차방정식 $f(2x)=0$ 의 두 근의 곱은

$$\begin{aligned}\frac{3-4\alpha}{2} \times \frac{3-4\beta}{2} &= \frac{(3-4\alpha)(3-4\beta)}{4} \\ &= \frac{9-12(\alpha+\beta)+16\alpha\beta}{4} \\ &= \frac{9-12 \times \left(-\frac{1}{4}\right)+16 \times (-2)}{4} \\ &= -5\end{aligned}$$

0466 답 ④

이차방정식 $x^2+2x+5=0$ 의 근이 $x=-1\pm 2i$ 이므로
 $x^2+2x+5=\{x-(-1+2i)\}\{x-(-1-2i)\}$
 $= (x+1-2i)(x+1+2i)$

0467 답 ②

이차방정식 $4x^2-4x+3=0$ 의 근이 $x=\frac{1\pm\sqrt{2}i}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}4x^2-4x+3 &= 4\left(x-\frac{1+\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{2}i}{2}\right) \\ &= (2x-1-\sqrt{2}i)(2x-1+\sqrt{2}i)\end{aligned}$$

따라서 주어진 식의 인수인 것은 ②이다.

0468 답 $\frac{1}{2}$

$x^2+2xy+6x+ky^2+2y+1$ 에서

$$x^2+2(y+3)x+ky^2+2y+1 \quad \dots\dots ㉠$$

x 에 대한 이차방정식 $x^2+2(y+3)x+ky^2+2y+1=0$ 의 근을 구하면

$$\begin{aligned}x &= -(y+3) \pm \sqrt{(y+3)^2 - (ky^2+2y+1)} \\ &= -y-3 \pm \sqrt{(1-k)y^2+4y+8}\end{aligned}$$

이때 $D=(1-k)y^2+4y+8$ 이라 하면 $x=-y-3\pm\sqrt{D}$ 이므로 ㉠은
 $(x+y+3-\sqrt{D})(x+y+3+\sqrt{D})$ 로 인수분해가 된다.

따라서 ㉠이 두 일차식의 곱으로 인수분해가 되기 위해서는 D 가 완전제곱식이어야 한다.

y 에 대한 이차방정식 $D=0$, 즉 $(1-k)y^2+4y+8=0$ 의 판별식을
 D' 이라 하면 $D'=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D'}{4}=2^2-8(1-k)=0$$

$$8k-4=0 \quad \therefore k=\frac{1}{2}$$

0469 답 ⑤

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $-2+\sqrt{3}i$ 가 근이면 다른 한
 근은 $-2-\sqrt{3}i$ 이다.

두 근의 합은

$$(-2+\sqrt{3}i)+(-2-\sqrt{3}i)=-a \quad \therefore a=4$$

두 근의 곱은

$$(-2+\sqrt{3}i)(-2-\sqrt{3}i)=b \quad \therefore b=7$$

$$\therefore a+b=11$$

0470 답 -5

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $a-2i$ 가 근이면 다른 한 근
 은 $a+2i$ 이다.

$$\text{두 근의 합은 } (a-2i)+(a+2i)=-2$$

$$2a=-2 \quad \therefore a=-1$$

두 근의 곱은 $(a-2i)(a+2i)=b$

$$a^2+4=b \quad \therefore b=5$$

$$\therefore ab=-5$$

0471 답 76

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 계수가 유리수이므로 $2-\sqrt{3}i$ 가 근이면
 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}i$ 이다.

두 근의 합은

$$(2-\sqrt{3}i)+(2+\sqrt{3}i)=-a \quad \therefore a=-4$$

두 근의 곱은

$$(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)=b \quad \therefore b=7$$

따라서 이차방정식 $x^2+2abx+a+b=0$, 즉 $x^2-8x-3=0$ 에서 근
 과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=8, \alpha\beta=-3$$

$$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=8^2-4 \times (-3)=76$$

0472 답 ④

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $1+\sqrt{3}i$ 가 근이면 다른 한
 근은 $1-\sqrt{3}i$ 이다.

$ax^2+6x+b=0$ 에서 두 근의 합과 곱은 $-\frac{6}{a}, \frac{b}{a}$ 이다.

두 근의 합은

$$(1+\sqrt{3}i)+(1-\sqrt{3}i)=-\frac{6}{a} \quad \therefore a=-3$$

두 근의 곱은

$$(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=\frac{b}{a} \quad \therefore b=-12$$

$$\therefore 2a-b=6, ab-40=-4$$

따라서 6, -4를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-(6-4)x+6 \times (-4)=0$$

$$\therefore x^2-2x-24=0$$

AB 유형 점검

76~78쪽

0473 답 ④

$x^2+5x+8=0$ 에서

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4 \times 1 \times 8}}{2 \times 1}=\frac{-5\pm\sqrt{7}}{2}$$

따라서 $a=-5, b=7$ 이므로

$$a+b=2$$

0474 답 ①

이차방정식 $x^2+2x+a=0$ 의 한 근이 -3이므로 $x=-3$ 을 대입하면

$$9-6+a=0 \quad \therefore a=-3$$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^2+2x-3=0, (x+3)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 $b=1$ 이므로

$$a+b=-3+1=-2$$

0475 답 ③

(i) $x < 1$ 일 때,

$$|x-1| = -(x-1) \text{이므로}$$

$$x^2 + 3(x-1) - 1 = 0, x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x+4)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 1$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $x = -4$ (ii) $x \geq 1$ 일 때,

$$|x-1| = x-1 \text{이므로}$$

$$x^2 - 3(x-1) - 1 = 0, x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 1$ 또는 $x = 2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -4 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 방정식의 모든 근의 합은 $-4 + 1 + 2 = -1$

0476 답 ②

x 분 후의 직사각형의 가로의 길이는 $(19+5x)$ cm, 세로의 길이는 $(12-3x)$ cm이므로 넓이는

$$(19+5x)(12-3x) = 19 \times 12, 228 + 3x - 15x^2 = 228$$

$$5x^2 - x = 0, x(5x-1) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{1}{5}$$

그런데 $0 < x < 4$ 이므로 $x = \frac{1}{5}$

따라서 새로 만들어진 직사각형의 넓이가 처음 직사각형의 넓이와 같아지는 것은 $\frac{1}{5}$ 분 후, 즉 $60 \times \frac{1}{5} = 12$ (초) 후이다.

0477 답 -5

이차방정식 $kx^2 + 2(k+2)x + k+3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k+2)^2 - k(k+3) < 0$$

$$k+4 < 0 \quad \therefore k < -4$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -5 이다.

0478 답 ③

ㄱ. a 와 c 의 부호가 서로 다르면 $ac < 0$ 이차방정식 $ax^2 - 2bx + c = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = b^2 - ac > 0$$

즉, 이차방정식 $ax^2 - 2bx + c = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.ㄴ. $b = a + c$ 를 $ax^2 + bx + c = 0$ 에 대입하면

$$ax^2 + (a+c)x + c = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2 \geq 0$$

즉, 이차방정식 $ax^2 + (a+c)x + c = 0$ 은 실근을 갖는다.ㄷ. 이차방정식 $ax^2 - 2bx + c = 0$ 이 허근을 가지므로

$$\frac{D_1}{4} = b^2 - ac < 0$$

이때 $b^2 > 0$ 이므로 $0 < b^2 < ac \quad \therefore ac > 0$ 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D_3 이라 하면

$$D_3 = b^2 - 4ac < b^2 - ac < 0$$

즉, 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 도 허근을 갖는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0479 답 ③

이차방정식 $x^2 + 2ax + b^2 + c^2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - (b^2 + c^2) > 0$$

$$\therefore a^2 > b^2 + c^2$$

따라서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 가장 긴 변의 길이가 a 인 둔각삼각형이다.

0480 답 1

이차식 $x^2 + 2ax - b(a-2b)$ 가 완전제곱식이면 이차방정식 $x^2 + 2ax - b(a-2b) = 0$ 이 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - \{-b(a-2b)\} = 0$$

$$a^2 + ab - 2b^2 = 0, (a+2b)(a-b) = 0$$

$$\therefore a = -2b \text{ 또는 } a = b$$

그런데 $a > 0, b > 0$ 이므로 $a = b$

$$\therefore \frac{b}{a} = 1$$

0481 답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \alpha^3 + \beta^3 - 3\alpha\beta = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) - 3\alpha\beta$$

$$= 2^3 - 3 \times \frac{2}{3} \times 2 - 3 \times \frac{2}{3} = 2$$

0482 답 ①

 α, β 가 주어진 방정식의 근이므로

$$\alpha^2 + \alpha + 2 = 0, \beta^2 + \beta + 2 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + 2\alpha + 2 = \alpha, \beta^2 + 2\beta + 2 = \beta$$

 $x^2 + x + 2 = 0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 2$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha^2 + 2\alpha + 2} + \frac{1}{\beta^2 + 2\beta + 2} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}$$

0483 답 4

이차방정식 $x^2 + ax + 3 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = 3 \quad \dots\dots ㉠$$

이차방정식 $x^2 + 2x + b = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha+1) + (\beta+1) = -2, (\alpha+1)(\beta+1) = b$$

$$\therefore \alpha + \beta = -4, \alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 = b \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$-a = -4, 3 - a + 1 = b$$

$$\therefore a = 4, b = 0$$

$$\therefore a - b = 4$$

0484 답 ②

$$(p+2qi)^2 = -16i \text{에서 } p^2 - 4q^2 + 4pqi = -16i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$p^2 - 4q^2 = 0, 4pq = -16$$

$$(p+2q)(p-2q)=0, pq=-4$$

$$\therefore p=-2q \text{ 또는 } p=2q$$

$$\text{이때 } pq<0 \text{이고, } p>0 \text{이므로 } p=-2q$$

$$\text{이를 } pq=-4 \text{에 대입하면}$$

$$-2q^2=-4, q^2=2 \quad \therefore q=-\sqrt{2} (\because q<0)$$

$$\therefore p=-2 \times (-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 $2\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$2\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=-a, 2\sqrt{2} \times (-\sqrt{2})=b$$

$$\therefore a=-\sqrt{2}, b=-4$$

$$\therefore a^2+b^2=(-\sqrt{2})^2+(-4)^2=18$$

참고 $x^2-\sqrt{2}x-4=0$ 의 계수는 유리수가 아니므로 한 근이 $2\sqrt{2}$ 일 때, 다른 한 근이 반드시 $-2\sqrt{2}$ 인 것은 아니다.

0485 답 ③

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2k+2, \alpha\beta=4k+3$$

$$\therefore \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=(2k+2)^2-(4k+3) \\ =4k^2+4k+1$$

$$\text{이때 } \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=9 \text{이므로 } 4k^2+4k+1=9$$

$$k^2+k-2=0, (k+2)(k-1)=0$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=1$$

$$\text{따라서 모든 상수 } k \text{의 값의 합은 } -2+1=-1$$

0486 답 3

주어진 방정식의 두 근을 $\alpha, \alpha+2$ 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(\alpha+2)=-2(k-1) \quad \therefore \alpha=-k \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha(\alpha+2)=-k+6 \quad \therefore \alpha^2+2\alpha+k-6=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면 } k^2-k-6=0$$

$$(k+2)(k-3)=0 \quad \therefore k=-2 \text{ 또는 } k=3$$

$$\text{그런데 } k>0 \text{이므로 } k=3$$

0487 답 ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3, \alpha\beta=-1$$

$$\text{구하는 이차방정식의 두 근이 } \frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{\beta+1} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}=\frac{(\beta+1)+(\alpha+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)}=\frac{(\alpha+\beta)+2}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1} \\ =\frac{3+2}{-1+3+1}=\frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{\alpha+1} \times \frac{1}{\beta+1}=\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}=\frac{1}{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1} \\ =\frac{1}{-1+3+1}=\frac{1}{3}$$

따라서 $\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{\beta+1}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 3인 이차방정식은

$$3\left(x^2-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}\right)=0 \quad \therefore 3x^2-5x+1=0$$

0488 답 ③

$$f(2x+1)=0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta \text{이므로}$$

$$f(2\alpha+1)=0, f(2\beta+1)=0$$

$$f(x-2)=0 \text{이려면}$$

$$x-2=2\alpha+1 \text{ 또는 } x-2=2\beta+1$$

$$\therefore x=2\alpha+3 \text{ 또는 } x=2\beta+3$$

따라서 이차방정식 $f(x-2)=0$ 의 두 근의 곱은

$$(2\alpha+3)(2\beta+3)=4\alpha\beta+6(\alpha+\beta)+9 \\ =4 \times (-5)+6 \times 4+9=13$$

0489 답 ⑤

$$\text{이차방정식 } 5x^2-4x+4=0 \text{의 근이 } x=\frac{2 \pm 4i}{5} \text{이므로}$$

$$5x^2-4x+4=5\left(x-\frac{2+4i}{5}\right)\left(x-\frac{2-4i}{5}\right) \\ =\frac{1}{5}(5x-2-4i)(5x-2+4i)$$

$$\text{따라서 } a=-2, b=-4, c=-2, d=4 \text{이므로}$$

$$ab-cd=8-(-8)=16$$

0490 답 0

x 에 대한 이차방정식 $x^2+2(k+a)x+k^2+6k-3b=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(k+a)^2-(k^2+6k-3b)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{i}$$

$$\therefore 2(a-3)k+a^2+3b=0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$a-3=0, a^2+3b=0 \quad \therefore a=3, b=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{ii}$$

$$\therefore a+b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 판별식을 k 에 대한 식으로 나타내기	40 %
② a, b 의 값 구하기	50 %
③ $a+b$ 의 값 구하기	10 %

0491 답 $x=2 \pm \sqrt{2}i$

민지는 a 와 b 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$$-\frac{b}{a}=-1+5$$

$$\therefore b=-4a \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

선영이는 a 와 c 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$$\frac{c}{a}=(1+\sqrt{5}i)(1-\sqrt{5}i)$$

$$\therefore c=6a \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \quad \cdots \cdots \textcircled{i}$$

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$ 에 대입하면

$$ax^2-4ax+6a=0$$

$a \neq 0$ 이므로 양변을 a 로 나누면 원래의 이차방정식은

$$x^2-4x+6=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{ii}$$

$$\therefore x=-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2-1 \times 6}=2 \pm \sqrt{2}i \quad \cdots \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① b, c 를 a 에 대한 식으로 나타내기	40 %
② 원래의 이차방정식 구하기	30 %
③ 원래의 이차방정식의 근 구하기	30 %

0492 [답] $6x^2+x-1=0$

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $1+\sqrt{2}i$ 가 근이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}i$ 이다. ①

두 근의 합은

$$(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)=-a \quad \therefore a=-2$$

두 근의 곱은

$$(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=b \quad \therefore b=3 \quad \dots\dots \text{②}$$

이때 구하는 이차방정식의 두 근이 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ 이므로

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$6\left(x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}\right)=0$$

$$\therefore 6x^2+x-1=0 \quad \dots\dots \text{③}$$

채점 기준

① 주어진 이차방정식의 다른 한 근 구하기	30 %
② a, b 의 값 구하기	30 %
③ 새롭게 정의된 이차방정식 구하기	40 %

C 실력 향상

79쪽

0493 [답] 2

이차식 $kx^2+(3k+1)x+a(k+1)$ 이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $kx^2+(3k+1)x+a(k+1)=0$ 이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1=0$ 이어야 하므로

$$D_1=(3k+1)^2-4\times k\times a(k+1)=0$$

$$\therefore (9-4a)k^2+2(3-2a)k+1=0 \quad \dots\dots \text{①}$$

(i) $9-4a\neq 0$ 일 때,

k 의 값이 오직 한 개뿐이라면 k 에 대한 이차방정식 ①의 판별식을 D_2 라 할 때, $D_2=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D_2}{4}=(3-2a)^2-(9-4a)=0$$

$$4a^2-8a=0, 4a(a-2)=0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } a=2$$

그런데 a 는 자연수이므로 $a=2$

(ii) $9-4a=0$ 일 때,

$$a=\frac{9}{4}$$

그런데 a 는 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 자연수 a 의 값은 2이다.

0494 [답] 4

이차방정식 $x^2-ax-3a=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\alpha\beta=-3a \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이차방정식 $x^2-2ax+3a=0$ 의 두 근이 $|\alpha|, |\beta|$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$|\alpha|+|\beta|=2a, |\alpha||\beta|=3a$$

$\alpha>\beta$ 라 하면 $\alpha>0, \beta<0$ 이므로

$$|\alpha|+|\beta|=\alpha-\beta=2a \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$\text{㉠, ㉢을 연립하여 풀면 } \alpha=\frac{3}{2}a, \beta=-\frac{1}{2}a$$

$$\text{이를 ㉡에 대입하면 } \frac{3}{2}a\times\left(-\frac{1}{2}a\right)=-3a$$

$$\frac{3}{4}a^2-3a=0, \frac{3}{4}a(a-4)=0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=4$$

그런데 a 는 양수이므로 $a=4$

0495 [답] ①

이차방정식 $x^2-6x+6=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=6, \alpha\beta=6$$

$$\therefore \overline{AC}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}=\sqrt{6^2-2\times 6}=2\sqrt{6}$$

또 $\overline{AB}\times\overline{BC}=\overline{AC}\times\overline{BH}$ 에서

$$6=2\sqrt{6}\times\overline{BH} \quad \therefore \overline{BH}=\frac{6}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

따라서 $\overline{AC}=2\sqrt{6}$, $\overline{BH}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 2인 이차방정식은

$$2\left\{x^2-\left(2\sqrt{6}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)x+2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}=0$$

$$\therefore 2x^2-5\sqrt{6}x+12=0$$

$$\text{즉, } m=-5\sqrt{6}, n=12 \text{이므로 } mn=-60\sqrt{6}$$

0496 [답] 10

이차방정식 $x^2-x+1=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또 이차방정식 $x^2-x+1=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha^2-\alpha+1=0, \beta^2-\beta+1=0$$

$$\therefore \alpha=\alpha^2+1, \beta=\beta^2+1$$

$$f(\alpha^2)=-4\alpha+2, f(\beta^2)=-4\beta+2 \text{에서}$$

$$f(\alpha^2)=-4(\alpha^2+1)+2, f(\beta^2)=-4(\beta^2+1)+2$$

$$\therefore f(\alpha^2)=-4\alpha^2-2, f(\beta^2)=-4\beta^2-2$$

따라서 이차방정식 $f(x)=-4x-2$, 즉 $x^2+px+q=-4x-2$ 의 두 근이 α^2, β^2 이다.

㉠에 의하여

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\times 1=-1$$

$$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=1^2=1$$

따라서 α^2, β^2 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2+x+1=0$

$$\text{이때 } x^2+px+q=-4x-2, \text{ 즉 } x^2+(p+4)x+q+2=0 \text{이}$$

$$x^2+x+1=0 \text{과 같으므로}$$

$$p+4=1, q+2=1$$

$$\therefore p=-3, q=-1$$

$$\therefore p^2+q^2=(-3)^2+(-1)^2=10$$

05 / 이차방정식과 이차함수

A 개념 확인

80~83쪽

0497 답 -1, 4

이차방정식 $x^2-3x-4=0$ 에서

$$(x+1)(x-4)=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=4$$

0498 답 $-\frac{7}{2}, 1$

이차방정식 $2x^2+5x-7=0$ 에서

$$(2x+7)(x-1)=0 \quad \therefore x=-\frac{7}{2} \text{ 또는 } x=1$$

0499 답 4

이차방정식 $-x^2+8x-16=0$ 에서

$$-(x-4)^2=0 \quad \therefore x=4$$

0500 답 2

이차방정식 $x^2+3x-7=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=9+28=37>0$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 개수는 2이다.

0501 답 1

이차방정식 $4x^2+8x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=16-16=0$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 개수는 1이다.

0502 답 0

이차방정식 $-2x^2+x-1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=1-8=-7<0$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x 축의 교점은 없다.

0503 답 (1) $k<1$ (2) $k=1$ (3) $k>1$

이차방정식 $x^2-2x+k=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=1-k$$

(1) $D>0$ 이어야 하므로

$$1-k>0 \quad \therefore k<1$$

(2) $D=0$ 이어야 하므로

$$1-k=0 \quad \therefore k=1$$

(3) $D<0$ 이어야 하므로

$$1-k<0 \quad \therefore k>1$$

0504 답 -3, -1

$x^2+x+3=-3x$ 에서 $x^2+4x+3=0$

$$(x+3)(x+1)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=-1$$

0505 답 2

$-x^2+3x+5=-x+9$ 에서 $x^2-4x+4=0$

$$(x-2)^2=0 \quad \therefore x=2$$

0506 답 -3, 2

$-3x^2-2x+12=x-6$ 에서 $3x^2+3x-18=0$

$$x^2+x-6=0, (x+3)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

0507 답 2

$x^2-2x-5=4x+7$, 즉 $x^2-6x-12=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=9+12=21>0$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 2이다.

0508 답 0

$-2x^2+3x+1=-2x+5$, 즉 $2x^2-5x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=25-32=-7<0$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점은 없다.

0509 답 1

$-4x^2-x-2=-5x-1$, 즉 $4x^2-4x+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4-4=0$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수는 1이다.

0510 답 (1) $k>-5$ (2) $k=-5$ (3) $k<-5$

$x^2-2x+4=4x+k$, 즉 $x^2-6x+4-k=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=9-(4-k)=5+k$$

(1) $D>0$ 이어야 하므로

$$5+k>0 \quad \therefore k>-5$$

(2) $D=0$ 이어야 하므로

$$5+k=0 \quad \therefore k=-5$$

(3) $D<0$ 이어야 하므로

$$5+k<0 \quad \therefore k<-5$$

0511 답 최댓값: 없다., 최솟값: 3

$$y=x^2+2x+4=(x+1)^2+3$$

따라서 $x=-1$ 일 때 최솟값은 3이고, 최댓값은 없다.

0512 답 최댓값: 없다., 최솟값: $\frac{11}{2}$

$$y=\frac{1}{2}x^2-3x+10=\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{11}{2}$$

따라서 $x=3$ 일 때 최솟값은 $\frac{11}{2}$ 이고, 최댓값은 없다.

0513 답 최댓값: 3, 최솟값: 없다.

$$y=-x^2+4x-1=-(x-2)^2+3$$

따라서 $x=2$ 일 때 최댓값은 3이고, 최솟값은 없다.

0514 답 최댓값: 11, 최솟값: 없다.

$$y=-2x^2-8x+3=-2(x+2)^2+11$$

따라서 $x=-2$ 일 때 최댓값은 11이고, 최솟값은 없다.

0515 **답** $a=2, b=6$

x^2 의 계수가 1이고 $x=-1$ 에서 최솟값 5를 갖는 이차함수는

$$y=(x+1)^2+5=x^2+2x+6$$

$$\therefore a=2, b=6$$

0516 **답** $a=4, b=-6$

x^2 의 계수가 -1 이고 $x=2$ 에서 최댓값 -2 를 갖는 이차함수는

$$y=-(x-2)^2-2=-x^2+4x-6$$

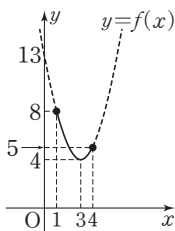
$$\therefore a=4, b=-6$$

0517 **답** 최댓값: 8, 최솟값: 4

$1 \leq x \leq 4$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

$$f(1)=8, f(3)=4, f(4)=5$$

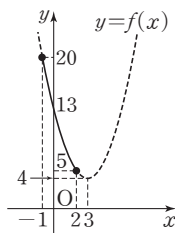
따라서 $f(x)$ 의 최댓값은 8, 최솟값은 4이다.

**0518** **답** 최댓값: 20, 최솟값: 5

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

$$f(-1)=20, f(2)=5$$

따라서 $f(x)$ 의 최댓값은 20, 최솟값은 5이다.

**0519** **답** 최댓값: 2, 최솟값: -2

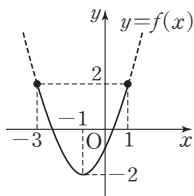
$$f(x)=x^2+2x-1$$

$$=(x+1)^2-2$$

$-3 \leq x \leq 1$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

$$f(-3)=2, f(-1)=-2, f(1)=2$$

따라서 $f(x)$ 의 최댓값은 2, 최솟값은 -2 이다.

**0520** **답** 최댓값: 8, 최솟값: 4

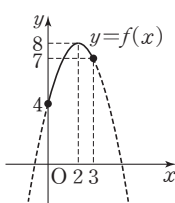
$$f(x)=-x^2+4x+4$$

$$=-(x-2)^2+8$$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

$$f(0)=4, f(2)=8, f(3)=7$$

따라서 $f(x)$ 의 최댓값은 8, 최솟값은 4이다.

**0521** **답** 최댓값: 16, 최솟값: 6

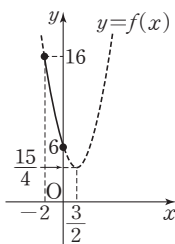
$$f(x)=x^2-3x+6$$

$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$$

$-2 \leq x \leq 0$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

$$f(-2)=16, f(0)=6$$

따라서 $f(x)$ 의 최댓값은 16, 최솟값은 6이다.

**0522** **답** 최댓값: -2 , 최솟값: -16

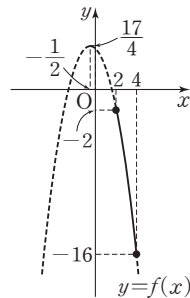
$$f(x)=-x^2-x+4$$

$$=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{17}{4}$$

$2 \leq x \leq 4$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

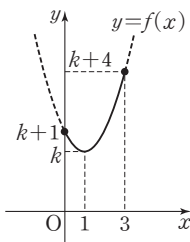
$$f(2)=-2, f(4)=-16$$

따라서 $f(x)$ 의 최댓값은 -2 , 최솟값은 -16 이다.

**0523** **답** 3

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최솟값 k 를 가지므로 $k=3$

**0524** **답** -10

$$f(x)=2x^2-2x+k$$

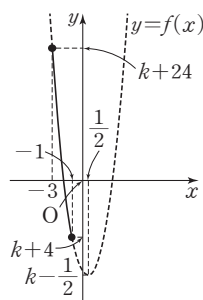
$$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+k-\frac{1}{2}$$

$-3 \leq x \leq -1$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$f(x)$ 는 $x=-3$ 일 때 최댓값 $k+24$ 를 가지므로

$$k+24=14$$

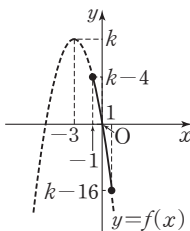
$$\therefore k=-10$$

**0525** **답** 9

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최솟값 $k-16$ 을 가지므로 $k-16=-7$

$$\therefore k=9$$

**0526** **답** 7

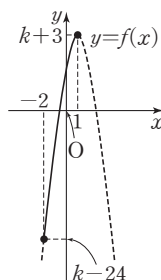
$$f(x)=-3x^2+6x+k$$

$$=-3(x-1)^2+k+3$$

$-2 \leq x \leq 1$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최댓값 $k+3$ 을 가지므로 $k+3=10$

$$\therefore k=7$$



0527 답 ①

이차함수 $y=2x^2+ax+b$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 -2 , 3 이므로 -2 , 3 은 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+3=-\frac{a}{2}, -2 \times 3=\frac{b}{2} \quad \therefore a=-2, b=-12$$

$$\therefore ab=24$$

0528 답 ④

이차함수 $y=x^2-ax+a+5$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 2 , b 이므로 2 , b 는 이차방정식 $x^2-ax+a+5=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2+b=a, 2 \times b=a+5 \quad \therefore a-b=2, a-2b=-5$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=9, b=7$

$$\therefore a+b=16$$

0529 답 2

이차방정식 $x^2-(k+1)x-2k=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=k+1, \alpha\beta=-2k$$

이때 주어진 이차함수의 그래프와 x 축이 만나는 두 점 사이의 거리가 5 이므로 $|\alpha-\beta|=5$

$$\text{양변을 제곱하면 } (\alpha-\beta)^2=25$$

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=25, (k+1)^2+8k=25$$

$$k^2+10k-24=0, (k+12)(k-2)=0$$

$$\therefore k=-12 \text{ 또는 } k=2$$

그런데 $k>0$ 이므로 $k=2$

0530 답 ③

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 -1 , 4 이므로 -1 , 4 는 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이다.

즉, $f(-1)=0, f(4)=0$ 이므로 $f(2x+1)=0$ 이라면

$$2x+1=-1 \text{ 또는 } 2x+1=4 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}$$

따라서 이차방정식 $f(2x+1)=0$ 의 두 근의 합은

$$-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

0531 답 1

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 점 $(0, -2)$ 를 지나므로

$$c=-2 \quad \therefore y=ax^2+bx-2$$

이차함수 $y=ax^2+bx-2$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가

$-1+\sqrt{3}$ 이므로 $-1+\sqrt{3}$ 은 이차방정식 $ax^2+bx-2=0$ 의 근이다.

이때 이차방정식 $ax^2+bx-2=0$ 의 계수가 유리수이므로 $-1+\sqrt{3}$ 이 근이면 $-1-\sqrt{3}$ 도 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-1+\sqrt{3})+(-1-\sqrt{3})=-\frac{b}{a}, (-1+\sqrt{3})(-1-\sqrt{3})=-\frac{2}{a}$$

$$\therefore a=1, b=2$$

$$\therefore a+b+c=1+2+(-2)=1$$

0532 답 ⑤

이차방정식 $x^2+2(k+1)x+k^2+k+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(k^2+k+4)>0$$

$$k-3>0 \quad \therefore k>3$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 4 이다.

0533 답 ④

이차방정식 $x^2+kx+k=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=k^2-4k=0$$

$$k(k-4)=0 \quad \therefore k=0 \text{ 또는 } k=4$$

그런데 $k>0$ 이므로 $k=4$

0534 답 $k \leq \frac{5}{4}$

이차방정식 $x^2-(4k+1)x+4k^2+3k-1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=\{-(4k+1)\}^2-4(4k^2+3k-1) \geq 0$$

$$-4k+5 \geq 0 \quad \therefore k \leq \frac{5}{4}$$

0535 답 -4

이차방정식 $x^2+4x-3k+5=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=4-(-3k+5)<0$$

$$3k-1<0 \quad \therefore k<\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $2x^2+2kx-k+4=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=k^2-2(-k+4)=0$$

$$k^2+2k-8=0, (k+4)(k-2)=0$$

$$\therefore k=-4 \text{ 또는 } k=2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $k=-4$

$\dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① $y=x^2+4x-3k+5$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않도록 하는 k 의 값의 범위 구하기	40 %
② $y=2x^2+2kx-k+4$ 의 그래프가 x 축과 접하도록 하는 k 의 값 구하기	40 %
③ k 의 값 구하기	20 %

0536 답 ②

이차방정식 $x^2+(3a+4k)x+2bk^2+2k+\frac{1}{4}=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=(3a+4k)^2-4\left(2bk^2+2k+\frac{1}{4}\right)=0$$

$$\therefore 8(2-b)k^2+8(3a-1)k+9a^2-1=0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$2-b=0, 3a-1=0 \quad \therefore a=\frac{1}{3}, b=2$$

$$\therefore \frac{b}{a}=6$$

0537 답 ①

이차함수 $y=x^2+3x+a$ 의 그래프와 직선 $y=bx-1$ 의 교점의 x 좌표가 -3 , 1 이므로 -3 , 1 은 이차방정식 $x^2+3x+a=bx-1$, 즉

$x^2-(b-3)x+a+1=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $-3+1=b-3$, $-3 \times 1=a+1$ $\therefore a=-4$, $b=1$
 $\therefore a+b=-3$

0538 ㉔ ②

$2+\sqrt{5}$ 가 이차방정식 $-x^2+ax+3=-2x+b$, 즉
 $x^2-(a+2)x+b-3=0$ 의 근이다.
 이때 이차방정식의 계수가 유리수이므로 $2+\sqrt{5}$ 가 근이면 $2-\sqrt{5}$ 도
 근이다.
 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=a+2$, $(2+\sqrt{5}) \times (2-\sqrt{5})=b-3$
 $\therefore a=2$, $b=2$ $\therefore ab=4$

0539 ㉔ 4

이차함수 $y=x^2+ax-1$ 의 그래프와 직선 $y=2x-5$ 의 교점의 x 좌
 표를 α , β 라 하면 α , β 는 이차방정식 $x^2+ax-1=2x-5$, 즉
 $x^2+(a-2)x+4=0$ 의 두 근이다.
 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta=-(a-2)$, $\alpha\beta=4$ ㉔
 이때 이차함수의 그래프와 직선의 두 교점의 x 좌표의 차이가 3이므로
 $|\alpha-\beta|=3$
 양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=9$ 이므로 $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9$
 ㉔을 대입하면 $(a-2)^2-16=9$
 $a^2-4a-21=0$, $(a+3)(a-7)=0$
 $\therefore a=-3$ 또는 $a=7$
 따라서 모든 상수 a 의 값의 합은 $-3+7=4$

0540 ㉔ ④

$-x^2+kx-k^2=-kx+k-3$ 에서
 $x^2-2kx+k^2+k-3=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=(-k)^2-(k^2+k-3)>0$
 $-k+3>0$ $\therefore k<3$
 따라서 정수 k 의 최댓값은 2이다.

0541 ㉔ ②

$x^2+ax+a^2=-x$ 에서
 $x^2+(a+1)x+a^2=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D=(a+1)^2-4a^2=0$
 $3a^2-2a-1=0$, $(3a+1)(a-1)=0$
 $\therefore a=-\frac{1}{3}$ 또는 $a=1$
 그런데 $a>0$ 이므로 $a=1$

0542 ㉔ $k>5$

$x^2+2kx+k^2-1=4x+3k$ 에서
 $x^2+2(k-2)x+k^2-3k-1=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2-3k-1)<0$
 $-k+5<0$ $\therefore k>5$

0543 ㉔ 1

$-x^2-(k-3)x+k+1=k(x+k)$ 에서
 $x^2+(2k-3)x+k^2-k-1=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D=(2k-3)^2-4(k^2-k-1)\geq 0$ ㉔
 $-8k+13\geq 0$ $\therefore k\leq \frac{13}{8}$ ㉔
 따라서 정수 k 의 최댓값은 1이다. ㉔

채점 기준

㉔ 이차함수의 그래프와 직선이 적어도 한 점에서 만날 조건 구하기	60 %
㉔ k 의 값의 범위 구하기	20 %
㉔ 정수 k 의 최댓값 구하기	20 %

0544 ㉔ 3

이차함수 $y=x^2-3x+4$ 의 그래프가 직선 $y=-x+b$ 에 접하므로
 $x^2-3x+4=-x+b$ 에서 $x^2-2x+4-b=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면
 $\frac{D_1}{4}=1-(4-b)=0$, $b-3=0$ $\therefore b=3$
 이차함수 $y=-2x^2+3x+a$ 의 그래프가 직선 $y=-x+3$ 에 접하므
 로 $-2x^2+3x+a=-x+3$ 에서 $2x^2-4x+3-a=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면
 $\frac{D_2}{4}=4-2(3-a)=0$, $2a-2=0$ $\therefore a=1$
 $\therefore ab=1 \times 3=3$

0545 ㉔ ②

직선 $y=-x+7$ 에 평행한 직선의 기울기는 -1 이다.
 기울기가 -1 인 직선의 방정식을 $y=-x+b$ (b 는 상수)라 하면
 $x^2-5x-3=-x+b$ 에서 $x^2-4x-b-3=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=(-2)^2-(-b-3)=0$, $b+7=0$ $\therefore b=-7$
 따라서 직선의 방정식은 $y=-x-7$ 이므로 y 절편은 -7 이다.

0546 ㉔ 16

점 $(-3, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $y=m(x+3)+1$ (m 은 상수)
 이라 하면
 $-x^2+2x+3=m(x+3)+1$, $x^2+(m-2)x+3m-2=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면
 $D_1=(m-2)^2-4(3m-2)=0$ $\therefore m^2-16m+12=0$
 이차방정식 $m^2-16m+12=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면
 $\frac{D_2}{4}=64-12=52>0$
 이므로 이 이차방정식의 서로 다른 두 실근이 직선의 기울기이다.
 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 두 직선의
 기울기의 합은 16이다.

0547 ㉔ 2

기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+b$ (b 는 상수)라 하면
 $x^2=2x+b$ 에서 $x^2-2x-b=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = 1 + b = 0 \quad \therefore b = -1$$

$$\therefore y = 2x - 1$$

$$-2x^2 + kx + k - 3 = 2x - 1 \text{에서}$$

$$2x^2 - (k-2)x - k + 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = (k-2)^2 - 8(-k+2) = 0$$

$$k^2 + 4k - 12 = 0, (k+6)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = -6 \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = 2$

0548 답 $y = -2x$

구하는 직선의 방정식을 $y = mx + n$ (m, n 은 상수)이라 하면

$$x^2 + 2ax + (a+1)^2 = mx + n \text{에서}$$

$$x^2 + (2a-m)x + a^2 + 2a + 1 - n = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (2a-m)^2 - 4(a^2 + 2a + 1 - n) = 0$$

$$(-4m-8)a + m^2 + 4n - 4 = 0$$

이 등식이 a 에 대한 항등식이므로

$$-4m-8=0, m^2+4n-4=0$$

$$\therefore m = -2, n = 0$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = -2x$$

0549 답 ②

$$f(x) = -3x^2 + 6x + k - 1 \\ = -3(x-1)^2 + k + 2$$

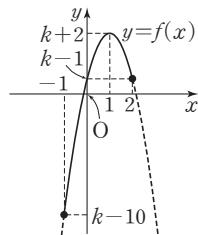
이므로 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$x=1$ 에서 최댓값 $k+2$ 를 가지므로

$$k+2=4 \quad \therefore k=2$$

따라서 $f(x) = -3(x-1)^2 + 4$ 의 최솟값은

$$f(-1) = -12 + 4 = -8$$

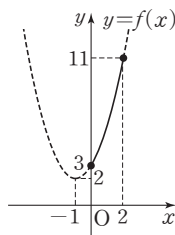


0550 답 14

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \text{라 하면}$$

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=2$ 에서 최댓값 11을 갖고, $x=0$ 에서 최솟값 3을 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은 $11+3=14$



0551 답 27

$f(x) = 2x^2 - 4x - a = 2(x-1)^2 - a - 2$ 라 하면 $a > 1$ 이므로 $-a \leq x \leq a$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

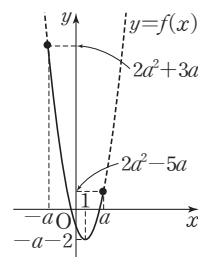
$x=1$ 에서 최솟값 $-a-2$ 를 가지므로

$$-a-2 = -5 \quad \therefore a = 3$$

따라서 $-3 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x) = 2(x-1)^2 - 5$

이므로 구하는 최댓값은

$$f(-3) = 32 - 5 = 27$$



0552 답 7

$$f(x) = -x^2 + 4x - 1 = -(x-2)^2 + 3 \text{이라}$$

하면 $f(2) = 3$ 이므로 $a < 2$

즉, $-1 \leq x \leq a$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$x=-1$ 에서 최솟값 b 를 가지므로

$$b = -9 + 3 = -6$$

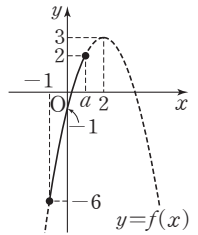
또 $x=a$ 에서 최댓값 2를 가지므로

$$2 = -a^2 + 4a - 1$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0, (a-1)(a-3) = 0 \quad \therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 3$$

그런데 $a < 2$ 이므로 $a = 1$

$$\therefore a - b = 1 - (-6) = 7$$



0553 답 ②

$$y = x^2 - 2kx - 4 = (x-k)^2 - k^2 - 4$$

(i) $0 < k < 4$ 일 때,

$x=k$ 에서 최솟값 $-k^2-4$ 를 가지므로

$$-k^2 - 4 = -8, k^2 = 4$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 $0 < k < 4$ 이므로 $k = 2$

(ii) $k \geq 4$ 일 때,

$x=4$ 에서 최솟값 $-8k+12$ 를 가지므로

$$-8k + 12 = -8 \quad \therefore k = \frac{5}{2}$$

그런데 $k \geq 4$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 k 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $k = 2$

0554 답 ②

$$x^2 + 4x = t \text{로 놓으면 } t = (x+2)^2 - 4$$

$-3 \leq x \leq 0$ 에서 $x=0$ 일 때 최댓값은 0이고, $x=-2$ 일 때 최솟값은 -4 이므로 $-4 \leq t \leq 0$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 + 2(t+2) - 3 = (t+1)^2$$

따라서 $-4 \leq t \leq 0$ 에서 $t=-4$ 일 때 최댓값은 9이고, $t=-1$ 일 때 최솟값은 0이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$$9 + 0 = 9$$

0555 답 ④

$$x^2 + 2x + 3 = t \text{로 놓으면}$$

$$t = (x+1)^2 + 2 \quad \therefore t \geq 2$$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - 2t + 5 = (t-1)^2 + 4$$

따라서 $t \geq 2$ 에서 $t=2$ 일 때 최솟값은 5이다.

0556 답 3

$$x^2 - 4x = t \text{로 놓으면 } t = (x-2)^2 - 4$$

$-2 \leq x \leq 1$ 에서 $x=-2$ 일 때 최댓값은 12이고, $x=1$ 일 때 최솟값은 -3 이므로 $-3 \leq t \leq 12$

이때 주어진 함수는

$$y = \frac{1}{2}t^2 + t + k = \frac{1}{2}(t+1)^2 + k - \frac{1}{2}$$

따라서 $-3 \leq t \leq 12$ 에서 $t = -1$ 일 때 최솟값은 $k - \frac{1}{2}$ 이므로

$$k - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore k = 3$$

0557 답 4

$x^2 - 6x = t$ 로 놓으면

$$t = (x-3)^2 - 9 \quad \therefore t \geq -9$$

이때 주어진 함수는

$$y = (t+2)^2 + 4t + k = t^2 + 8t + 4 + k = (t+4)^2 + k - 12$$

따라서 $t \geq -9$ 에서 $t = -4$ 일 때 최솟값은 $k - 12$ 이므로

$$k - 12 = -8$$

$$\therefore k = 4$$

0558 답 ⑤

$$\begin{aligned} -x^2 - y^2 + 2x - 8y + 3 &= -(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 8y + 16) + 20 \\ &= -(x-1)^2 - (y+4)^2 + 20 \end{aligned}$$

이때 x, y 가 실수이므로

$$-(x-1)^2 \leq 0, -(y+4)^2 \leq 0$$

$$\therefore -x^2 - y^2 + 2x - 8y + 3 \leq 20$$

따라서 구하는 최댓값은 20이다.

0559 답 20

$$\begin{aligned} 2x^2 + \frac{1}{3}y^2 - 4x + 2y + k &= 2(x^2 - 2x + 1) + \frac{1}{3}(y^2 + 6y + 9) + k - 5 \\ &= 2(x-1)^2 + \frac{1}{3}(y+3)^2 + k - 5 \end{aligned}$$

이때 x, y 가 실수이므로

$$(x-1)^2 \geq 0, (y+3)^2 \geq 0$$

$$\therefore 2x^2 + \frac{1}{3}y^2 - 4x + 2y + k \geq k - 5$$

따라서 $k - 5 = 15$ 이므로

$$k = 20$$

0560 답 4

$$\begin{aligned} x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy - 4y + 2z + 9 \\ &= (x^2 + 4xy + 4y^2) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 + 2z + 1) + 4 \\ &= (x+2y)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 + 4 \end{aligned}$$

이때 x, y, z 가 실수이므로

$$(x+2y)^2 \geq 0, (y-2)^2 \geq 0, (z+1)^2 \geq 0$$

$$\therefore x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy - 4y + 2z + 9 \geq 4$$

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

0561 답 1

$x - y = 3$ 에서 $x = y + 3$ 이므로 이를 $x^2 + y^2 + 2y$ 에 대입하면

$$x^2 + y^2 + 2y = (y+3)^2 + y^2 + 2y$$

$$= 2y^2 + 8y + 9$$

$$= 2(y+2)^2 + 1$$

따라서 $-3 \leq y \leq 0$ 에서 $y = -2$ 일 때 최솟값은 1이다.

0562 답 ②

$2x + y = 8$ 에서 $y = -2x + 8$ 이므로 이를 xy 에 대입하면

$$xy = x(-2x + 8) = -2x^2 + 8x$$

$$= -2(x-2)^2 + 8$$

따라서 $1 \leq x \leq 4$ 에서 $x = 2$ 일 때 최댓값은 8이고, $x = 4$ 일 때 최솟

값은 0이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $8 + 0 = 8$

0563 답 1

$$x + y^2 = 1 \text{에서 } y^2 = 1 - x$$

$$\text{이때 } y^2 \geq 0 \text{이므로 } 1 - x \geq 0 \quad \therefore x \leq 1$$

$y^2 = 1 - x$ 를 $x^2 + 4y^2$ 에 대입하면

$$x^2 + 4y^2 = x^2 + 4(1 - x) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

따라서 $x \leq 1$ 에서 $x = 1$ 일 때 최솟값은 1이다.

0564 답 20

점 A의 좌표를 $(a, a^2 - 6a)$ ($0 < a < 3$)라 하면

$$\overline{AD} = -a^2 + 6a, \overline{CD} = 6 - 2a$$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 l 이라 하면

$$l = 2\{(-a^2 + 6a) + (6 - 2a)\} = -2a^2 + 8a + 12$$

$$= -2(a-2)^2 + 20$$

따라서 $0 < a < 3$ 에서 $a = 2$ 일 때 최댓값이 20이므로 직사각형

ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 20이다.

참고 이차함수 $y = x^2 - 6x$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = 3$ 이므로 $0 < a < 3$ 이어야 한다.

0565 답 ④

$$y = -5x^2 + 6x + 5 = -5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{34}{5}$$

따라서 $1 \leq x \leq 2$ 에서 $x = 1$ 일 때 최댓값이 6이므로 수면으로부터의 높이는 6 m이다.

0566 답 ③

핫도그 한 개의 가격을 $100x$ 원 올릴 때, 핫도그 한 개의 가격은

$(1000 + 100x)$ 원이고, 하루 판매량은 $(200 - 10x)$ ($0 < x < 20$)개

이므로 하루 판매액을 y 원이라 하면

$$y = (1000 + 100x)(200 - 10x) = -1000(x-5)^2 + 225000$$

따라서 $0 < x < 20$ 에서 $x = 5$ 일 때 하루 판매액이 최대이므로 이때의 핫도그 한 개의 가격은

$$1000 + 100 \times 5 = 1500(\text{원})$$

0567 답 32 m²

꽃밭의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m라 하면

$$x + 2y = 16 \quad \therefore x = 16 - 2y \quad (\text{단, } 0 < y < 8)$$

꽃밭의 넓이를 S 라 하면

$$S = xy = (16 - 2y) \times y = -2y^2 + 16y = -2(y-4)^2 + 32 \quad \cdots \cdots \textcircled{i}$$

따라서 $0 < y < 8$ 에서 $y = 4$ 일 때 최댓값이 32이므로 꽃밭의 넓이의 최댓값은 32 m²이다. \cdots \cdots \textcircled{ii}

채점 기준

① 꽃밭의 넓이를 이차식으로 나타내기

70 %

② 꽃밭의 넓이의 최댓값 구하기

30 %

0568 **답** 225

t 초 후 $\overline{AP} = \overline{CR} = t$, $\overline{AS} = \overline{CQ} = 2t$

이므로

$$\overline{BP} = \overline{DR} = 20 - t$$

$$\overline{BQ} = \overline{DS} = 20 - 2t \quad (\text{단, } 0 < t \leq 10)$$

두 직각삼각형 APS, CRQ의 넓이가

같으므로 각각의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times t \times 2t = t^2$$

또 두 직각삼각형 BPQ, DRS의 넓이가 같으므로 각각의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (20 - t) \times (20 - 2t) = t^2 - 30t + 200$$

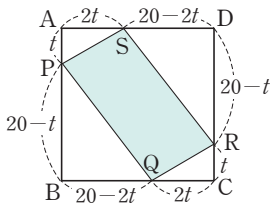
이때 사각형 PQRS의 넓이를 S 라 하면

$$S = 20^2 - 2\{t^2 + (t^2 - 30t + 200)\}$$

$$= -4t^2 + 60t = -4\left(t - \frac{15}{2}\right)^2 + 225$$

따라서 $0 < t \leq 10$ 에서 $t = \frac{15}{2}$ 일 때 최댓값이 225이므로 사각형

PQRS의 넓이의 최댓값은 225이다.



AB 유형 점검

90~92쪽

0569 **답** ④

이차함수 $y = -2x^2 + ax + 3$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 1,

b 이므로 1, b 는 이차방정식 $-2x^2 + ax + 3 = 0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1 + b = \frac{a}{2}, 1 \times b = -\frac{3}{2} \quad \therefore a = -1, b = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore ab = \frac{3}{2}$$

0570 **답** -4

$y = x^2 + ax + 2a - 5$ 가 a 에 대한 항등식이면

$$(x+2)a + x^2 - y - 5 = 0 \text{에서 } x+2=0, x^2 - y - 5=0$$

$x = -2, y = -1$ 이므로 이차함수 $y = x^2 + ax + 2a - 5$ 의 그래프는

a 의 값에 관계없이 항상 점 $P(-2, -1)$ 을 지난다.

점 P 가 이 이차함수의 그래프의 꼭짓점이므로

이차함수 $y = (x+2)^2 - 1$, 즉 $y = x^2 + 4x + 3$ 의 그래프와 x 축이 만

나는 점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 + 4x + 3 = 0$ 의 두 근과 같다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 x 좌표의 합은 -4이다.

0571 **답** ㄱ, ㄷ

ㄱ. 주어진 이차함수의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = b^2 - 4ac > 0$$

ㄴ. -3, 1은 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수

의 관계에 의하여

$$-3 + 1 = -\frac{b}{a}, -3 \times 1 = \frac{c}{a}$$

$$\therefore b = 2a, c = -3a \quad \dots\dots ㉠$$

$$\therefore \frac{bc}{a^2} = \frac{2a \times (-3a)}{a^2} = -6$$

ㄷ. 이차방정식 $bx^2 + cx + a = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = c^2 - 4ab = (-3a)^2 - 4a \times 2a = a^2 \quad (\because ㉠)$$

$$\text{이때 } a > 0 \text{이므로 } a^2 > 0 \quad \therefore D_2 > 0$$

따라서 이차함수 $y = bx^2 + cx + a$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른

두 점에서 만난다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0572 **답** ④

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x - 3$ 의 교점의 x 좌표가 1,

5이므로 1, 5는 이차방정식 $f(x) - (x - 3) = 0$ 의 두 근이다.

이때 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x) - (x - 3) = (x - 1)(x - 5)$$

$$\therefore f(x) = (x - 1)(x - 5) + (x - 3) = x^2 - 5x + 2$$

$$\therefore f(2) = 4 - 10 + 2 = -4$$

0573 **답** -21

이차방정식 $2x^2 + (2k+1)x + k = -x + k^2$ 에서

$$2x^2 + 2(k+1)x - k^2 + k = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 두 근이 α, β 이고, $\alpha + \beta = 5$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{2(k+1)}{2} = 5 \quad \therefore k = -6$$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면 $x^2 - 5x - 21 = 0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta = -21$$

0574 **답** ②

이차함수 $y = \frac{1}{2}(x - k)^2$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 두 교점 A, B의

x 좌표를 α, β 라 하면 α, β 는 이차방정식 $\frac{1}{2}(x - k)^2 = x$, 즉

$x^2 - 2(k+1)x + k^2 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2(k+1), \alpha\beta = k^2 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 두 점 A, B의 x 좌표가 α, β 이면 두 점 C, D의 x 좌표도 α, β

이고, 선분 CD의 길이가 6이므로 $|\alpha - \beta| = 6$

양변을 제곱하면 $(\alpha - \beta)^2 = 36$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 36$$

$$㉠ \text{을 대입하면 } 4(k+1)^2 - 4k^2 = 36$$

$$8k + 4 = 36 \quad \therefore k = 4$$

0575 **답** 1

$x^2 - 2kx + k + 3 = 2x - k^2$ 에서 $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + k + 3 = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(k+1)\}^2 - (k^2 + k + 3) < 0$$

$$k - 2 < 0 \quad \therefore k < 2$$

따라서 자연수 k 의 값은 1이다.

0576 **답** ①

이차방정식 $x^2 + 2ax + b = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - b = 0 \quad \therefore b = a^2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2+2ax+b=4x+2 \text{에서 } x^2+2(a-2)x+b-2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(a-2)^2-(b-2)\geq 0$$

$$a^2-4a-b+6\geq 0$$

$$\textcircled{1} \text{을 대입하면 } -4a+6\geq 0 \quad \therefore a\leq \frac{3}{2}$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 1이다.

0577 답 1

점 (1, 0)을 지나는 직선의 방정식을 $y=m(x-1)$ (m 은 상수)이라 하면 $-x^2+4x-3=m(x-1)$ 에서 $x^2+(m-4)x-m+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1=(m-4)^2-4(-m+3)=0$$

$$(m-2)^2=0 \quad \therefore m=2$$

$$\therefore y=2x-2$$

$$x^2+ax+b=2x-2 \text{에서 } x^2+(a-2)x+b+2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2=(a-2)^2-4(b+2)=0$$

$$a^2-4a-4b-4=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편 점 (1, 0)은 이차함수 $y=x^2+ax+b$ 의 그래프 위에 있으므로

$$0=1+a+b \quad \therefore b=-a-1$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면 $a^2=0$

따라서 $a=0$, $b=-1$ 이므로 $a^2+b^2=1$

0578 답 ①

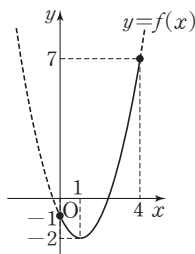
$$f(x)=x^2-2x-1=(x-1)^2-2 \text{라 하면}$$

$0\leq x\leq 4$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x=4$ 일 때 최댓값은 7이고, $x=1$ 일 때 최솟값은 -2이므로

$$M=7, m=-2$$

$$\therefore Mm=-14$$



0579 답 3

$$f(x)=ax^2+bx+5=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+5$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+5$$

(가)에서 $a<0$, $b<0$ 이므로 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 위로 볼록하고 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}+5\right)$ 이다.

이때 $-\frac{b}{2a}<0$ 이므로 $1\leq x\leq 2$ 에 꼭짓점의 x 좌표가 포함되지 않는다.

따라서 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(1)$ 이고 (나)에서 $f(1)=3$ 이므로

$$a+b+5=3 \quad \therefore a+b=-2$$

이때 a , b 는 음의 정수이므로 $a=-1$, $b=-1$

따라서 $f(x)=-x^2-x+5$ 이므로

$$f(-2)=-4+2+5=3$$

0580 답 ②

$$x^2-2x=t \text{로 놓으면 } t=(x-1)^2-1$$

$1\leq x\leq 4$ 에서 $x=4$ 일 때 최댓값은 8이고, $x=1$ 일 때 최솟값은 -1

이므로 $-1\leq t\leq 8$

이때 주어진 함수는

$$y=t^2-6t+4=(t-3)^2-5$$

따라서 $-1\leq t\leq 8$ 에서 $t=8$ 일 때 최댓값은 20이므로

$$a=4, b=20$$

$$\therefore a+b=24$$

0581 답 ③

$$x^2+6y^2-4xy-8y+10$$

$$=(x^2-4xy+4y^2)+2(y^2-4y+4)+2$$

$$=(x-2y)^2+2(y-2)^2+2$$

이때 x , y 가 실수이므로 $(x-2y)^2\geq 0$, $(y-2)^2\geq 0$

$$\therefore x^2+6y^2-4xy-8y+10\geq 2$$

$x-2y=0$, $y-2=0$ 일 때, 즉 $x=4$, $y=2$ 일 때 최솟값은 2이므로

$$p=4, q=2, m=2 \quad \therefore p+q+m=8$$

0582 답 16

$$x+y=4 \text{에서 } y=4-x \text{이고 } y\geq 0 \text{이므로 } 4-x\geq 0 \quad \therefore x\leq 4$$

이때 $x\geq 0$ 이므로 $0\leq x\leq 4$

$y=4-x$ 를 $2x^2-y^2$ 에 대입하면

$$2x^2-y^2=2x^2-(4-x)^2=x^2+8x-16$$

$$=(x+4)^2-32$$

따라서 $0\leq x\leq 4$ 에서 $x=4$ 일 때 최댓값은 32이고, $x=0$ 일 때 최솟값은 -16이므로

$$M=32, m=-16 \quad \therefore M+m=16$$

0583 답 ④

두 점 A, B의 좌표는 각각 A(0, 1), B(4, 0)이고, 점 P(a, b)가 점 A에서 직선을 따라 점 B까지 움직이므로 $0\leq a\leq 4$

점 P(a, b)가 직선 $y=-\frac{1}{4}x+1$ 위의 점이므로

$$b=-\frac{1}{4}a+1$$

$$\therefore a^2+8b=a^2+8\left(-\frac{1}{4}a+1\right)$$

$$=a^2-2a+8=(a-1)^2+7$$

따라서 $0\leq a\leq 4$ 에서 $a=1$ 일 때 최솟값은 7이다.

0584 답 ③

t 초 후 밑면의 넓이는 $(t+4)\pi$ 이고 높이는 $8-t$ ($0<t<8$)이므로 원뿔의 부피를 V 라 하면

$$V=\frac{1}{3}\times(t+4)\pi\times(8-t)=\frac{\pi}{3}(-t^2+4t+32)$$

$$=\frac{\pi}{3}\{-(t-2)^2+36\}=-\frac{\pi}{3}(t-2)^2+12\pi$$

따라서 $0<t<8$ 에서 $t=2$ 일 때 최댓값이 12π 이므로 원뿔의 부피의 최댓값은 12π 이다.

0585 **답 6**

$$x^2 + 2kx + a = 2bx - k^2 + 4k \text{에서}$$

$$x^2 + 2(k-b)x + k^2 - 4k + a = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k-b)^2 - (k^2 - 4k + a) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$-2(b-2)k + b^2 - a = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$b-2=0, b^2-a=0 \quad \therefore a=4, b=2 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore a+b=6 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 이차함수의 그래프와 직선이 접할 조건 구하기	40 %
② 항등식의 성질을 이용하여 a, b 의 값 구하기	40 %
③ $a+b$ 의 값 구하기	20 %

0586 **답 2**

$$x^2 - 2x + 2 = t \text{로 놓으면 } t = (x-1)^2 + 1$$

$1 \leq x \leq 3$ 에서 $x=1$ 일 때 최솟값은 1이고 $x=3$ 일 때 최댓값은 5이므로

$$1 \leq t \leq 5 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이때 주어진 함수는

$$f(t) = -t^2 + 6t + k = -(t-3)^2 + k + 9$$

$1 \leq t \leq 5$ 에서 $t=1$ 또는 $t=5$ 일 때 최솟값은 $k+5$ 이므로

$$k+5 = -2 \quad \therefore k = -7 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 $t=3$ 일 때 $f(x)$ 의 최댓값은 $k+9=2$ 이다. $\dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① $x^2 - 2x + 2 = t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기	40 %
② k 의 값 구하기	40 %
③ $f(x)$ 의 최댓값 구하기	20 %

0587 **답 4**

점 P의 좌표를 $(a, -a+4)$ ($0 < a < 4$)라 하면

$$\overline{OQ} = a, \overline{PQ} = -a+4$$

사각형 ROQP의 넓이를 S 라 하면

$$S = a(-a+4) = -a^2 + 4a = -(a-2)^2 + 4 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

따라서 $0 < a < 4$ 에서 $a=2$ 일 때 최댓값이 4이므로 사각형 ROQP의 넓이의 최댓값은 4이다. $\dots\dots \textcircled{ii}$

채점 기준

① 점 P의 x 좌표를 a 로 놓고 사각형 ROQP의 넓이를 a 에 대한 식으로 나타내기	70 %
② 사각형 ROQP의 넓이의 최댓값 구하기	30 %

C 실력 향상

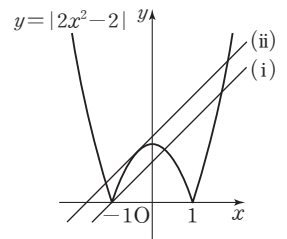
93쪽

0588 **답 ⑤**

$|2x^2 - 2| - x - k = 0$ 에서 $|2x^2 - 2| = x + k$ 이므로 방정식의 실근의 개수는 함수 $y = |2x^2 - 2|$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$ 의 교점의 개수와 같다.

$$y = |2x^2 - 2| = \begin{cases} 2x^2 - 2 & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \\ -(2x^2 - 2) & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

이때 교점이 3개인 경우는 오른쪽 그림과 같이 $y = |2x^2 - 2|$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$ 가 (i) 또는 (ii)와 같이 만나는 경우이다.



(i) 직선 $y = x + k$ 가 점 $(-1, 0)$ 을 지날 때,

$$0 = -1 + k \quad \therefore k = 1$$

(ii) 직선 $y = x + k$ 가 이차함수 $y = -2x^2 + 2$ 의 그래프에 접할 때,

$$x + k = -2x^2 + 2 \text{에서 } 2x^2 + x + k - 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1 - 8(k - 2) = 0$$

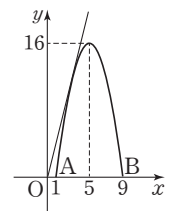
$$8k = 17 \quad \therefore k = \frac{17}{8}$$

(i), (ii)에서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$1 + \frac{17}{8} = \frac{25}{8}$$

0589 **답 12 m**

레이저를 쏘아 올린 지점을 원점, A, B 지점이 있는 직선을 x 축으로 하여 좌표평면에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



A(1, 0), B(9, 0)이므로 이차함수의 그래프의 축의 방정식은 $x=5$ 이다.

따라서 포물선의 꼭짓점의 좌표가 (5, 16)이므로

포물선의 방정식을 $y = a(x-5)^2 + 16$ ($a < 0$)이라 하면 이 포물선이 점 A(1, 0)을 지나므로

$$0 = 16a + 16 \quad \therefore a = -1$$

즉, 포물선의 방정식은

$$y = -(x-5)^2 + 16 = -x^2 + 10x - 9$$

한편 레이저가 나타내는 직선의 방정식을 $y = mx$ ($m > 0$)라 하면

$$-x^2 + 10x - 9 = mx \text{에서}$$

$$x^2 + (m-10)x + 9 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$D = (m-10)^2 - 36 = 0$$

$$m^2 - 20m + 64 = 0, (m-4)(m-16) = 0$$

$$\therefore m = 4 \text{ 또는 } m = 16$$

(i) $m=4$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } x^2 - 6x + 9 = 0 \text{이므로 } (x-3)^2 = 0$$

$$\therefore x = 3$$

따라서 점점의 좌표는 (3, 12)이다.

(ii) $m=16$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } x^2 + 6x + 9 = 0 \text{이므로 } (x+3)^2 = 0$$

$$\therefore x = -3$$

이때 점점의 x 좌표가 음수이므로 $x > 0$ 에서 이차함수의 그래프와 접할 수 없다.

(i), (ii)에서 점점의 좌표는 (3, 12)이고, 구하는 높이는 점점의 y 좌표이므로 12 m이다.

0590 [답] ③

두 점 A, B를 지나는 직선과 평행한 직선이 점 C에서 이차함수 $y=x^2-3x-10$ 의 그래프와 접할 때 삼각형 ABC의 넓이가 최대가 된다.

두 점 A(-2, 0), B(3, -10)을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-10-0}{3-(-2)} = -2 \text{ 이므로 이차함수 } y=x^2-3x-10 \text{의 그래프와 접하는 직선의 방정식을 } y=-2x+k(k \text{는 상수}) \text{라 하자.}$$

$x^2-3x-10=-2x+k$ 에서 $x^2-x-k-10=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=1-4(-k-10)=0$$

$$4k=-41 \quad \therefore k=-\frac{41}{4}$$

따라서 $x^2-x+\frac{1}{4}=0$ 에서

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0 \quad \therefore x=\frac{1}{2} \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

점 C($\frac{1}{2}$, b)는 직선 $y=-2x-\frac{41}{4}$ 위의 점이므로

$$b=-2 \times \frac{1}{2} - \frac{41}{4} = -\frac{45}{4}$$

$$\therefore 2a-4b=2 \times \frac{1}{2} - 4 \times \left(-\frac{45}{4}\right) = 46$$

0591 [답] -3

(가)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로 $f(x)=a(x-2)^2+b$ 라 하자.

(i) $a>0$ 일 때,

$$(나)에서 f(5)=21, f(2)=-6$$

$$9a+b=21, b=-6 \quad \therefore a=3, b=-6$$

$$\therefore f(x)=3(x-2)^2-6=3x^2-12x+6$$

이때 (다)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=-6x+3$ 과 접해야 한다.

$$3x^2-12x+6=-6x+3 \text{에서 } x^2-2x+1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=1-1=0$$

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-6x+3$ 은 접하므로 (다)를 만족시킨다.

(ii) $a<0$ 일 때,

$$(나)에서 f(2)=21, f(5)=-6$$

$$b=21, 9a+b=-6 \quad \therefore a=-3, b=21$$

$$\therefore f(x)=-3(x-2)^2+21=-3x^2+12x+9$$

이때 (다)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-6x+3$ 이 접해야 한다.

$$-3x^2+12x+9=-6x+3 \text{에서 } x^2-6x-2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=9+2=11>0$$

즉, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-6x+3$ 은 서로 다른 두 점에서 만나므로 (다)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $f(x)=3x^2-12x+6$ 이므로

$$f(1)=3-12+6=-3$$

06 / 여러 가지 방정식

A 개념 확인

94~97쪽

0592 [답] $x=4$ 또는 $x=-2 \pm 2\sqrt{3}i$

$x^3-64=0$ 의 좌변을 인수분해하면

$$(x-4)(x^2+4x+16)=0$$

$$\therefore x=4 \text{ 또는 } x=-2 \pm 2\sqrt{3}i$$

0593 [답] $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

$x^3-x^2-6x=0$ 의 좌변을 인수분해하면

$$x(x^2-x-6)=0, x(x+2)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

0594 [답] $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-1 \pm \sqrt{3}i$

$x^4-8x=0$ 의 좌변을 인수분해하면

$$x(x^3-8)=0, x(x-2)(x^2+2x+4)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=-1 \pm \sqrt{3}i$$

0595 [답] $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$x^4-2x^3+x-2=0$ 의 좌변을 인수분해하면

$$x^3(x-2)+(x-2)=0$$

$$(x-2)(x^3+1)=0, (x-2)(x+1)(x^2-x+1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

0596 [답] $x=1$ 또는 $x=1 \pm \sqrt{2}$

$f(x)=x^3-3x^2+x+1$ 이라 할 때,

$$f(1)=1-3+1+1=0 \text{이므로 조립제법}$$

을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x-1)(x^2-2x-1)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x-1)(x^2-2x-1)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=1 \pm \sqrt{2}$$

0597 [답] $x=-2$ 또는 $x=1 \pm \sqrt{5}i$

$f(x)=x^3+2x+12$ 라 할 때,

$$f(-2)=-8-4+12=0 \text{이므로 조}$$

립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해

하면

$$f(x)=(x+2)(x^2-2x+6)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x+2)(x^2-2x+6)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1 \pm \sqrt{5}i$$

0598 [답] $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1 \pm \sqrt{3}i$

$f(x)=x^4-3x^3+4x^2-8$ 이라 할 때,

$$f(-1)=1+3+4-8=0, f(2)=16-24+16-8=0$$

조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -3 & 4 & 0 & -8 \\ & & -1 & 4 & -8 & 8 \\ 2 & 1 & -4 & 8 & -8 & 0 \\ & & 2 & -4 & 8 & \\ & 1 & -2 & 4 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = (x+1)(x-2)(x^2-2x+4)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x+1)(x-2)(x^2-2x+4)=0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = 1 \pm \sqrt{3}i$$

0599 답 $x = -1$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 2 \pm \sqrt{7}$

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 4x + 3 \text{이라 할 때,}$$

$$f(1) = 1 - 4 - 4 + 4 + 3 = 0, f(-1) = 1 + 4 - 4 - 4 + 3 = 0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -4 & -4 & 4 & 3 \\ & & 1 & -3 & -7 & -3 \\ -1 & 1 & -3 & -7 & -3 & 0 \\ & & -1 & 4 & 3 & \\ & 1 & -4 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = (x-1)(x+1)(x^2-4x-3)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x+1)(x-1)(x^2-4x-3)=0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2 \pm \sqrt{7}$$

0600 답 $x = \pm 2$ 또는 $x = \pm \sqrt{5}$

$$x^2 - 1 = t \text{로 놓으면 주어진 방정식은}$$

$$t^2 - 7t + 12 = 0$$

$$(t-3)(t-4)=0 \quad \therefore t=3 \text{ 또는 } t=4$$

(i) $t=3$ 일 때,

$$x^2 - 1 = 3 \text{에서 } x^2 = 4 \quad \therefore x = \pm 2$$

(ii) $t=4$ 일 때,

$$x^2 - 1 = 4 \text{에서 } x^2 = 5 \quad \therefore x = \pm \sqrt{5}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = \pm 2 \text{ 또는 } x = \pm \sqrt{5}$$

0601 답 $x = -4$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 3$

$$x^2 + x = t \text{로 놓으면 주어진 방정식은}$$

$$t^2 - 14t + 24 = 0$$

$$(t-2)(t-12)=0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=12$$

(i) $t=2$ 일 때,

$$x^2 + x = 2 \text{에서 } x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1)=0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

(ii) $t=12$ 일 때,

$$x^2 + x = 12 \text{에서 } x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x+4)(x-3)=0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 3$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -4 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

0602 답 $x = \pm \sqrt{2}$ 또는 $x = \pm \sqrt{3}$

$$x^2 = t \text{로 놓으면 주어진 방정식은}$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t-2)(t-3)=0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=3$$

즉, $x^2 = 2$ 또는 $x^2 = 3$ 이므로

$$x = \pm \sqrt{2} \text{ 또는 } x = \pm \sqrt{3}$$

0603 답 $x = \pm 2$ 또는 $x = \pm \sqrt{7}$

$$x^2 = t \text{로 놓으면 주어진 방정식은}$$

$$t^2 - 11t + 28 = 0$$

$$(t-4)(t-7)=0 \quad \therefore t=4 \text{ 또는 } t=7$$

즉, $x^2 = 4$ 또는 $x^2 = 7$ 이므로

$$x = \pm 2 \text{ 또는 } x = \pm \sqrt{7}$$

0604 답 (1) -2 (2) -3 (3) 8

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1) \alpha + \beta + \gamma = -\frac{2}{1} = -2$$

$$(2) \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{-3}{1} = -3$$

$$(3) \alpha\beta\gamma = -\frac{-8}{1} = 8$$

0605 답 (1) $-\frac{1}{9}$ (2) $-\frac{4}{9}$ (3) $-\frac{1}{3}$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 3, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 4, \alpha\beta\gamma = -9$$

$$(1) \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{-9} = -\frac{1}{9}$$

$$(2) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{4}{-9} = -\frac{4}{9}$$

$$(3) \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}$$

0606 답 $x^3 + x^2 - 7x - 3 = 0$

x^3 의 계수가 1이고 세 근이 $-3, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$ 인 삼차방정식은

$$\begin{aligned} x^3 - \{-3 + (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})\}x^2 \\ + \{-3 \times (1+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2}) \times (1-\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) \times (-3)\}x \\ - (-3) \times (1+\sqrt{2}) \times (1-\sqrt{2}) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x^3 + x^2 - 7x - 3 = 0$$

0607 답 $x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0$

x^3 의 계수가 1이고 세 근이 $1, 2+3i, 2-3i$ 인 삼차방정식은

$$\begin{aligned} x^3 - \{1 + (2+3i) + (2-3i)\}x^2 \\ + \{1 \times (2+3i) + (2+3i) \times (2-3i) + (2-3i) \times 1\}x \\ - 1 \times (2+3i) \times (2-3i) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0$$

0608 **답** $8x^3 - 14x^2 + x + 5 = 0$

x^3 의 계수가 8이고 세 근이 $-\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}$ 인 삼차방정식은

$$8\left[x^3 - \left(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{5}{4}\right)x^2 + \left\{-\frac{1}{2} \times 1 + 1 \times \frac{5}{4} + \frac{5}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}x - \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 \times \frac{5}{4}\right] = 0$$

$$8\left(x^3 - \frac{7}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{5}{8}\right) = 0 \quad \therefore 8x^3 - 14x^2 + x + 5 = 0$$

0609 **답** $a = -15, b = -4$

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $-2 + \sqrt{3}$ 이 근이면 $-2 - \sqrt{3}$ 도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 $4, -2 + \sqrt{3}, -2 - \sqrt{3}$ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$4 \times (-2 + \sqrt{3}) + (-2 + \sqrt{3})(-2 - \sqrt{3}) + (-2 - \sqrt{3}) \times 4 = a$$

$$4 \times (-2 + \sqrt{3})(-2 - \sqrt{3}) = -b$$

$$\therefore a = -15, b = -4$$

0610 **답** $a = 1, b = -4$

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $1 - i$ 가 근이면 $1 + i$ 도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 $-3, 1 - i, 1 + i$ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-3 + (1 - i) + (1 + i) = -a$$

$$-3 \times (1 - i) + (1 - i)(1 + i) + (1 + i) \times (-3) = b$$

$$\therefore a = 1, b = -4$$

0611 **답** (1) 0 (2) -1 (3) 1 (4) 1 (5) -1 (6) 0

$x^3 = 1$ 에서 $x^3 - 1 = 0$

$$\therefore (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

ω 는 $x^3 = 1$ 의 한 허근이므로 $\omega^3 = 1$

(1) ω 는 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 허근이므로 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

(2), (3) 이차방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 계수가 실수이므로 ω 가 근이면 켈레복소수 $\bar{\omega}$ 도 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega + \bar{\omega} = -1, \omega \bar{\omega} = 1$$

(4) $\omega^{24} = (\omega^3)^8 = 1^8 = 1$

(5) $\omega + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^2 + 1}{\omega} = \frac{-\omega}{\omega} = -1$

(6) $\omega^{10} + \omega^5 + 1 = (\omega^3)^3 \times \omega + \omega^3 \times \omega^2 + 1$

$$= 1^3 \times \omega + 1 \times \omega^2 + 1$$

$$= \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

0612 **답** (1) 0 (2) 1 (3) 1 (4) -1 (5) 1 (6) 0

$x^3 = -1$ 에서 $x^3 + 1 = 0$

$$\therefore (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

ω 는 $x^3 = -1$ 의 한 허근이므로 $\omega^3 = -1$

(1) ω 는 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 한 허근이므로 $\omega^2 - \omega + 1 = 0$

(2), (3) 이차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 계수가 실수이므로 ω 가 근이면 켈레복소수 $\bar{\omega}$ 도 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega + \bar{\omega} = 1, \omega \bar{\omega} = 1$$

(4) $\omega^{33} = (\omega^3)^{11} = (-1)^{11} = -1$

(5) $\omega + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^2 + 1}{\omega} = \frac{\omega}{\omega} = 1$

(6) $\omega^{16} + \omega^8 + 1 = (\omega^3)^5 \times \omega + (\omega^3)^2 \times \omega^2 + 1$

$$= (-1)^5 \times \omega + (-1)^2 \times \omega^2 + 1$$

$$= \omega^2 - \omega + 1 = 0$$

0613 **답** $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$

$x - y = 1$ 에서 $y = x - 1$ ㉠

이를 $x^2 + y^2 = 13$ 에 대입하면

$$x^2 + (x - 1)^2 = 13, 2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0, (x + 2)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

이를 각각 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

0614 **답** $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

$x + y = 3$ 에서 $y = -x + 3$ ㉠

이를 $x^2 + xy + y^2 = 7$ 에 대입하면

$$x^2 + x(-x + 3) + (-x + 3)^2 = 7$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0, (x - 1)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

이를 각각 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

0615 **답** $\begin{cases} x = -3\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = 3\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$

$(x + 3y)(x - 2y) = 0$ 에서 $x = -3y$ 또는 $x = 2y$

(i) $x = -3y$ 를 $x^2 + y^2 = 20$ 에 대입하면

$$9y^2 + y^2 = 20, 10y^2 = 20$$

$$y^2 = 2 \quad \therefore y = \pm\sqrt{2}$$

$$\therefore y = -\sqrt{2} \text{ 일 때 } x = 3\sqrt{2}, y = \sqrt{2} \text{ 일 때 } x = -3\sqrt{2}$$

(ii) $x = 2y$ 를 $x^2 + y^2 = 20$ 에 대입하면

$$4y^2 + y^2 = 20, 5y^2 = 20$$

$$y^2 = 4 \quad \therefore y = \pm 2$$

$$\therefore y = -2 \text{ 일 때 } x = -4, y = 2 \text{ 일 때 } x = 4$$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x = -3\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 3\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

0616 **답** $\begin{cases} x=-2\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$
 또는 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$

$(x+2y)(x-2y)=0$ 에서 $x=-2y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-2y$ 를 $x^2-xy+3y^2=45$ 에 대입하면

$$4y^2+2y^2+3y^2=45, 9y^2=45$$

$$y^2=5 \quad \therefore y=\pm\sqrt{5}$$

$$\therefore y=-\sqrt{5} \text{일 때 } x=2\sqrt{5}, y=\sqrt{5} \text{일 때 } x=-2\sqrt{5}$$

(ii) $x=2y$ 를 $x^2-xy+3y^2=45$ 에 대입하면

$$4y^2-2y^2+3y^2=45, 5y^2=45$$

$$y^2=9 \quad \therefore y=\pm 3$$

$$\therefore y=-3 \text{일 때 } x=-6, y=3 \text{일 때 } x=6$$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=-2\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-6 \\ y=-3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$$

0617 **답** $\begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$

$x+y=4, xy=-5$ 이므로 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2-4t-5=0$$

$$(t+1)(t-5)=0 \quad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=5$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$$

0618 **답** $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

$x+y=5$ 이므로 $x+xy+y=11$ 에서

$$5+xy=11 \quad \therefore xy=6$$

$x+y=5, xy=6$ 이므로 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2-5t+6=0$$

$$(t-2)(t-3)=0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=3$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

0619 **답** (2, 4), (4, 1)

$3x+2y=14$ 에서 $3x<14$ 이므로 자연수 x 의 값은 1, 2, 3, 4이다.

$$x=1 \text{일 때, } 2y=11 \quad \therefore y=\frac{11}{2}$$

$$x=2 \text{일 때, } 2y=8 \quad \therefore y=4$$

$$x=3 \text{일 때, } 2y=5 \quad \therefore y=\frac{5}{2}$$

$$x=4 \text{일 때, } 2y=2 \quad \therefore y=1$$

따라서 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 (2, 4), (4, 1)이다.

0620 **답** $x=4, y=-1$

x, y 는 실수이므로 $x-4=0, y+1=0 \quad \therefore x=4, y=-1$

B 유형 완성

98~107쪽

0621 **답** 2

$f(x)=x^4-7x^3+16x^2-14x+4$ 라 할 때, $f(1)=0, f(2)=0$ 이므로
 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -7 & 16 & -14 & 4 \\ & & 1 & -6 & 10 & -4 \\ \hline 2 & 1 & -6 & 10 & -4 & 0 \\ & & 2 & -8 & 4 & \\ \hline & 1 & -4 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x^2-4x+2)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x-2)(x^2-4x+2)=0$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=2\pm\sqrt{2}$$

따라서 $\alpha=2+\sqrt{2}, \beta=2-\sqrt{2}$ 이므로

$$\alpha\beta=(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=2$$

0622 **답** -4

$$f(x)=x^3-2x^2-2x+1 \text{이라 할 때, } \begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ & & -1 & 3 & -1 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}$$

여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x+1)(x^2-3x+1)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x^2-3x+1)=0$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{이때 } \alpha<\beta<\gamma \text{이므로 } \alpha=-1, \beta=\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \gamma=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \alpha-\beta-\gamma=-4$$

0623 **답** 1

$f(x)=x^4+x^3-x^2-7x-6$ 이라 할 때, $f(-1)=0, f(2)=0$ 이므로
 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 1 & -1 & -7 & -6 \\ & & -1 & 0 & 1 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -1 & -6 & 0 \\ & & 2 & 4 & 6 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)=0$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=-1\pm\sqrt{2}i$$

따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$$-1+2=1$$

0624 **답** ③

$$f(x)=x^3+2x^2-3x-10 \text{이라 할 때, } \begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & -3 & -10 \\ & & 2 & 8 & 10 \\ \hline & 1 & 4 & 5 & 0 \end{array}$$

$f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x-2)(x^2+4x+5)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2+4x+5)=0$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x^2+4x+5=0$$

따라서 두 허근 α, β 는 이차방정식 $x^2 + 4x + 5 = 0$ 의 두 근이므로
근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -4, \alpha\beta = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= (-4)^3 - 3 \times 5 \times (-4) = -4 \end{aligned}$$

0625 [답] ③

$x^2 + 2x = t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2 - 3t = 0$$

$$t(t-3) = 0 \quad \therefore t = 0 \text{ 또는 } t = 3$$

(i) $t = 0$ 일 때,

$$x^2 + 2x = 0 \text{에서 } x(x+2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

(ii) $t = 3$ 일 때,

$$x^2 + 2x = 3 \text{에서 } x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 음의 근의 합은

$$-2 + (-3) = -5$$

0626 [답] $-2 + 3\sqrt{2}$

$x^2 + 4x = t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$(t-21)(t-5) + 63 = 0$$

$$t^2 - 26t + 168 = 0, (t-12)(t-14) = 0$$

$$\therefore t = 12 \text{ 또는 } t = 14$$

(i) $t = 12$ 일 때,

$$x^2 + 4x = 12 \text{에서 } x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$(x+6)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -6 \text{ 또는 } x = 2$$

(ii) $t = 14$ 일 때,

$$x^2 + 4x = 14 \text{에서 } x^2 + 4x - 14 = 0$$

$$\therefore x = -2 \pm 3\sqrt{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 가장 큰 근은 $-2 + 3\sqrt{2}$ 이다.

0627 [답] 10

$$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4) - 14 = 0 \text{에서}$$

$$\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\} - 14 = 0$$

$$(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x - 8) - 14 = 0$$

$$x^2 + 2x = t \text{로 놓으면}$$

$$(t-3)(t-8) - 14 = 0$$

$$t^2 - 11t + 10 = 0, (t-1)(t-10) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 10$$

(i) $t = 1$ 일 때,

$$x^2 + 2x = 1 \text{에서 } x^2 + 2x - 1 = 0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 -1 이다.

(ii) $t = 10$ 일 때,

$$x^2 + 2x = 10 \text{에서 } x^2 + 2x - 10 = 0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 -10 이다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 근의 곱은 $-1 \times (-10) = 10$

0628 [답] -5

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 4x + 3) = 24 \text{에서}$$

$$x(x-2)(x-1)(x-3) = 24$$

$$\{x(x-3)\}\{(x-2)(x-1)\} - 24 = 0$$

$$(x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 2) - 24 = 0$$

$$x^2 - 3x = t \text{로 놓으면}$$

$$t(t+2) - 24 = 0$$

$$t^2 + 2t - 24 = 0, (t+6)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = -6 \text{ 또는 } t = 4$$

(i) $t = -6$ 일 때,

$$x^2 - 3x = -6 \text{에서 } x^2 - 3x + 6 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = 9 - 24 = -15 < 0$$

즉, 이차방정식 $x^2 - 3x + 6 = 0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $t = 4$ 일 때,

$$x^2 - 3x = 4 \text{에서 } x^2 - 3x - 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = 9 + 16 = 25 > 0$$

즉, 이차방정식 $x^2 - 3x - 4 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 a 는 이차방정식 $x^2 - 3x + 6 = 0$ 의 근이므로

$$a^2 - 3a + 6 = 0$$

$$\therefore a^2 - 3a + 1 = -5$$

0629 [답] ①

$x^2 = t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2 + 3t - 18 = 0$$

$$(t+6)(t-3) = 0 \quad \therefore t = -6 \text{ 또는 } t = 3$$

즉, $x^2 = -6$ 또는 $x^2 = 3$ 이므로

$$x = \pm\sqrt{6}i \text{ 또는 } x = \pm\sqrt{3}$$

따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 곱은

$$-\sqrt{3} \times \sqrt{3} = -3$$

0630 [답] 12

$x^2 = t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2 - 13t + 36 = 0$$

$$(t-4)(t-9) = 0 \quad \therefore t = 4 \text{ 또는 } t = 9$$

즉, $x^2 = 4$ 또는 $x^2 = 9$ 이므로

$$x = \pm 2 \text{ 또는 } x = \pm 3$$

이때 $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ 이므로 $\alpha = -3, \beta = -2, \gamma = 2, \delta = 3$

$$\therefore \alpha\beta + \gamma\delta = 12$$

0631 [답] ③

$$x^4 - 3x^2 + 1 = 0 \text{에서 } (x^4 - 2x^2 + 1) - x^2 = 0$$

$$(x^2 - 1)^2 - x^2 = 0, (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

따라서 주어진 방정식의 모든 양의 근의 합은

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

0632 [답] ①

$x^4+2x^2+9=0$ 에서 $(x^4+6x^2+9)-4x^2=0$
 $(x^2+3)^2-(2x)^2=0, (x^2+2x+3)(x^2-2x+3)=0$
 이때 이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 두 근을 α, β 라 하고 이차방정식 $x^2-2x+3=0$ 의 두 근을 γ, δ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=3, \gamma+\delta=2, \gamma\delta=3$
 $\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0$

0633 [답] ②

$x \neq 0$ 이므로 양변을 x^2 으로 나누면
 $x^2+5x+6+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$
 $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$
 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0$
 $x+\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면
 $t^2+5t+4=0$
 $(t+4)(t+1)=0 \quad \therefore t=-4 \text{ 또는 } t=-1$
 (i) $t=-4$ 일 때,
 $x+\frac{1}{x}=-4$ 에서 $x^2+4x+1=0 \quad \therefore x=-2 \pm \sqrt{3}$
 (ii) $t=-1$ 일 때,
 $x+\frac{1}{x}=-1$ 에서 $x^2+x+1=0 \quad \therefore x=\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
 (i), (ii)에서 주어진 방정식의 실근은 $-2 \pm \sqrt{3}$ 이다.

0634 [답] ①

$x \neq 0$ 이므로 양변을 x^2 으로 나누면
 $2x^2-9x-1-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}=0$
 $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$
 $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-9\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$
 $x+\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면
 $2t^2-9t-5=0$
 $(2t+1)(t-5)=0 \quad \therefore t=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } t=5$
 (i) $t=-\frac{1}{2}$ 일 때,
 $x+\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}$ 에서 $2x^2+x+2=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면
 $D_1=1-16=-15<0$
 즉, 이차방정식 $2x^2+x+2=0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
 (ii) $t=5$ 일 때,
 $x+\frac{1}{x}=5$ 에서 $x^2-5x+1=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면
 $D_2=25-4=21>0$
 즉, 이차방정식 $x^2-5x+1=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 α, β 는 이차방정식 $2x^2+x+2=0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-\frac{1}{2}, \alpha\beta=\frac{2}{2}=1$
 $\therefore \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-1=-\frac{3}{4}$

0635 [답] 4

$x \neq 0$ 이므로 양변을 x^2 으로 나누면
 $x^2-3x-2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$
 $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$
 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$
 $x+\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $t^2-3t-4=0$
 $(t+1)(t-4)=0 \quad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=4$ i
 (i) $t=-1$ 일 때,
 $x+\frac{1}{x}=-1$ 에서 $x^2+x+1=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면
 $D_1=1-4=-3<0$
 즉, 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
 ii
 (ii) $t=4$ 일 때,
 $x+\frac{1}{x}=4$ 에서 $x^2-4x+1=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면
 $\frac{D_2}{4}=4-1=3>0$
 즉, 이차방정식 $x^2-4x+1=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
 iii

(i), (ii)에서 α 는 이차방정식 $x^2-4x+1=0$, 즉 방정식 $x+\frac{1}{x}=4$ 의 근이므로 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=4$ iv

채점 기준

① $x+\frac{1}{x}=t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 풀기	40 %
② $t=-1$ 일 때 근 판별하기	20 %
③ $t=4$ 일 때 근 판별하기	20 %
④ $\alpha+\frac{1}{\alpha}$ 의 값 구하기	20 %

0636 [답] ④

주어진 방정식의 한 근이 1이므로 $x=1$ 을 대입하면
 $1+k+3+1=0 \quad \therefore k=-5$
 이를 주어진 방정식에 대입하면 $x^3-5x^2+3x+1=0$
 $f(x)=x^3-5x^2+3x+1$ 이라 할 때, $\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & 1 \\ & 1 & -4 & -1 \\ \hline & 1 & -4 & -1 & 0 \end{array}$
 $f(1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여
 $f(x)$ 를 인수분해하면
 $f(x)=(x-1)(x^2-4x-1)$
 즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-4x-1)=0$
 이때 1이 아닌 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2-4x-1=0$ 의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 4이다.

0637 **답 1**

주어진 방정식의 두 근이 $-2, 3$ 이므로 $x=-2, x=3$ 을 각각 대입하면

$$-8+4a-2(2a-b)+6b=0, 27+9a+3(2a-b)+6b=0$$

$$8b=8, 5a+b=-9 \quad \therefore a=-2, b=1$$

이를 주어진 방정식에 대입하면 $x^3-2x^2-5x+6=0$

$$f(x)=x^3-2x^2-5x+6 \text{이라 할 때,}$$

-2	1	-2	-5	6
		-2	8	-6
3	1	-4	3	0
		3	-3	
	1	-1		0

$$f(x)=(x+2)(x-3)(x-1)$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 방정식의 나머지 한 근은 1이다.

0638 **답 $-\frac{3}{2}$**

주어진 방정식의 두 근이 $-1, 2$ 이므로 $x=-1, x=2$ 를 각각 대입하면

$$2+a+b-3+a+4=0, 32-8a+4b+6+a+4=0$$

$$\therefore 2a+b=-3, 7a-4b=42$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=-7$

이를 주어진 방정식에 대입하면 $2x^4-2x^3-7x^2+3x+6=0$

$$f(x)=2x^4-2x^3-7x^2+3x+6 \text{이라 할 때, } f(-1)=0, f(2)=0$$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

-1	2	-2	-7	3	6
		-2	4	3	-6
2	2	-4	-3	6	0
		4	0	-6	
	2	0	-3		0

$$f(x)=(x+1)(x-2)(2x^2-3)$$

$$\therefore \text{주어진 방정식은 } (x+1)(x-2)(2x^2-3)=0$$

따라서 주어진 방정식의 나머지 두 근은 이차방정식 $2x^2-3=0$ 의 근

이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $-\frac{3}{2}$ 이다.

0639 **답 7**

주어진 방정식의 한 근이 1이므로 $x=1$ 을 대입하면

$$1+k+2+k^2-4-5=0$$

$$k^2+k-6=0, (k+3)(k-2)=0$$

$$\therefore k=-3 \text{ 또는 } k=2$$

(i) $k=-3$ 일 때,

주어진 방정식에 대입하면 $x^3-x^2+5x-5=0$

$$f(x)=x^3-x^2+5x-5 \text{라 할 때,}$$

1	1	-1	5	-5
		1	0	5
	1	0	5	0

$$f(x)=(x-1)(x^2+5)$$

$$\therefore \text{주어진 방정식은 } (x-1)(x^2+5)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{5}i$$

따라서 허근을 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k=2$ 일 때,

주어진 방정식에 대입하면 $x^3+4x^2-5=0$

$$g(x)=x^3+4x^2-5 \text{라 할 때,}$$

1	1	4	0	-5
		1	5	5
	1	5	5	0

$$g(x)=(x-1)(x^2+5x+5)$$

$$\therefore \text{주어진 방정식은 } (x-1)(x^2+5x+5)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$$

따라서 세 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서

$$k=2, \alpha+\beta=\frac{-5-\sqrt{5}}{2}+\frac{-5+\sqrt{5}}{2}=-5$$

$$\therefore k-\alpha-\beta=k-(\alpha+\beta)=2-(-5)=7$$

0640 **답 ④**

$$f(x)=x^3+(k+1)x^2+2kx+k \text{라 할 때, } f(-1)=0 \text{이므로 조립제법을 이용하여 } f(x) \text{를 인수분해하면}$$

-1	1	k+1	2k	k
		-1	-k	-k
	1	k	k	0

$$f(x)=(x+1)(x^2+kx+k)$$

$$\therefore \text{주어진 방정식은 } (x+1)(x^2+kx+k)=0$$

이 방정식이 중근을 가지려면 이차방정식 $x^2+kx+k=0$ 이 중근을 갖거나 $x=-1$ 을 근으로 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2+kx+k=0$ 이 중근을 가질 때,

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=k^2-4k=0, k(k-4)=0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=4$$

(ii) 이차방정식 $x^2+kx+k=0$ 이 $x=-1$ 을 근으로 가질 때,

$$1-k+k=0 \text{에서 } 1\neq 0 \text{이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

(i), (ii)에서 모든 k 의 값의 합은

$$0+4=4$$

0641 **답 -1**

$$f(x)=x^3-4x^2+(4-k)x+2k \text{라 할 때, } f(2)=0 \text{이므로 조립제법을 이용하여 } f(x) \text{를 인수분해하면}$$

2	1	-4	4-k	2k
		2	-4	-2k
	1	-2	-k	0

$$f(x)=(x-2)(x^2-2x-k)$$

$$\therefore \text{주어진 방정식은 } (x-2)(x^2-2x-k)=0 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이 방정식의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-2x-k=0$ 이 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=1+k\geq 0$$

$$\therefore k\geq -1 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 k 의 최솟값은 -1 이다. $\dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하기	30 %
② k 의 값의 범위 구하기	50 %
③ k 의 최솟값 구하기	20 %

0642 답 ①

$f(x) = x^3 - x^2 - (k+2)x + 2k$ 라 할 때, $f(2) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면
 $f(x) = (x-2)(x^2 + x - k)$
 즉, 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2 + x - k) = 0$
 이 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2 + x - k = 0$ 이 허근을 가져야 한다.
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D = 1 + 4k < 0$
 $\therefore k < -\frac{1}{4}$

0643 답 ②

$f(x) = x^3 + 4x^2 - (k+5)x + k$ 라 할 때, $f(1) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면
 $f(x) = (x-1)(x^2 + 5x - k)$
 즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2 + 5x - k) = 0$
 이 방정식의 서로 다른 실근이 한 개뿐이라면 이차방정식 $x^2 + 5x - k = 0$ 이 허근을 갖거나 $x=1$ 을 중근으로 가져야 한다.
 (i) 이차방정식 $x^2 + 5x - k = 0$ 이 허근을 가질 때,
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D = 25 + 4k < 0$
 $\therefore k < -\frac{25}{4}$
 (ii) 이차방정식 $x^2 + 5x - k = 0$ 이 $x=1$ 을 중근으로 가질 때,
 $1 + 5 - k = 0 \quad \therefore k = 6$
 즉, $x^2 + 5x - 6 = 0$ 이므로
 $(x+6)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -6$ 또는 $x = 1$
 따라서 이차방정식 $x^2 + 5x - k = 0$ 은 $x=1$ 을 중근으로 갖지 않는다.
 (i), (ii)에서 $k < -\frac{25}{4}$
 따라서 정수 k 의 최댓값은 -7 이다.

0644 답 ③

처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x 라 하면 직육면체의 부피는
 $(x-1)(x+2)^2 = 108$
 $x^3 + 3x^2 - 112 = 0$
 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 112$ 라 할 때,
 $f(4) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면
 $f(x) = (x-4)(x^2 + 7x + 28)$
 즉, 방정식은 $(x-4)(x^2 + 7x + 28) = 0$
 $\therefore x = 4$ 또는 $x = \frac{-7 \pm 3\sqrt{7}i}{2}$
 그런데 $x > 1$ 이므로 $x = 4$
 따라서 처음 정육면체의 부피는
 $x^3 = 4^3 = 64$

0645 답 ④

처음 원기둥 모양의 물탱크의 밑면의 반지름의 길이를 x m라 하면 지름의 길이와 높이는 모두 $2x$ m이므로 처음 물탱크의 부피는
 $\pi x^2 \times 2x = 2\pi x^3 (\text{m}^3)$
 또 새로 만든 물탱크의 부피는
 $\pi(x+1)^2 \times (2x+4) = 2\pi(x+2)(x+1)^2 (\text{m}^3)$
 새로 만든 물탱크의 부피가 처음 물탱크의 부피의 4.5배가 되려면
 $2\pi(x+2)(x+1)^2 = 2\pi x^3 \times \frac{9}{2}$
 $7x^3 - 8x^2 - 10x - 4 = 0$
 $f(x) = 7x^3 - 8x^2 - 10x - 4$ 라 할 때,
 $f(2) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면
 $f(x) = (x-2)(7x^2 + 6x + 2)$
 즉, 방정식은 $(x-2)(7x^2 + 6x + 2) = 0$
 $\therefore x = 2$ 또는 $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}i}{7}$
 그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 2$
 따라서 새로운 물탱크의 높이는
 $2x + 4 = 2 \times 2 + 4 = 8 (\text{m})$

0646 답 3

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x 라 하면 원기둥의 높이는 $4-x$ 이므로 조각상의 부피는
 $\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi x^3 + \pi x^2(4-x) = 27\pi$
 $x^3 - 12x^2 + 81 = 0$
 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 81$ 이라 할 때,
 $f(3) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면
 $f(x) = (x-3)(x^2 - 9x - 27)$
 즉, 방정식은 $(x-3)(x^2 - 9x - 27) = 0$
 $\therefore x = 3$ 또는 $x = \frac{9 \pm 3\sqrt{21}}{2}$
 그런데 $0 < x < 4$ 이므로 $x = 3$
 따라서 구하는 반지름의 길이는 3이다.

0647 답 0

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta + \gamma = 7, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 10, \alpha\beta\gamma = -6$
 $\therefore (3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma)$
 $= 3^3 - (\alpha + \beta + \gamma) \times 3^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \times 3 - \alpha\beta\gamma$
 $= 27 - 7 \times 9 + 10 \times 3 - (-6) = 0$

0648 답 ②

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta + \gamma = -2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3$
 $\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$
 $= (-2)^2 - 2 \times 3 = -2$

0649 답 -2

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -6, \alpha\beta\gamma = -3$$

이때 $\alpha + \beta + \gamma = 0$ 에서

$$\beta + \gamma = -\alpha, \gamma + \alpha = -\beta, \alpha + \beta = -\gamma$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\beta + \gamma}{\alpha^2} + \frac{\gamma + \alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha + \beta}{\gamma^2} &= \frac{-\alpha}{\alpha^2} + \frac{-\beta}{\beta^2} + \frac{-\gamma}{\gamma^2} \\ &= -\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} \\ &= -\frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \\ &= -\frac{-6}{-3} = -2 \end{aligned}$$

..... ①

..... ②

채점 기준

① $\alpha + \beta + \gamma, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \alpha\beta\gamma$ 의 값 구하기	40 %
② $\frac{\beta + \gamma}{\alpha^2} + \frac{\gamma + \alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha + \beta}{\gamma^2}$ 의 값 구하기	60 %

0650 답 84

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 3, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = a, \alpha\beta\gamma = -8$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{3}{4} \text{에서 } \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{a}{-8} = \frac{3}{4} \quad \therefore a = -6$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 &= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \\ &= (-6)^2 - 2 \times (-8) \times 3 = 84 \end{aligned}$$

0651 답 ③

이차방정식 $x^2 - 2x + a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = a \quad \text{..... ㉠}$$

이때 α, β 가 삼차방정식 $x^3 - 3x^2 + bx + 2 = 0$ 의 근이므로 나머지를 γ 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 3, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b, \alpha\beta\gamma = -2 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 + \gamma = 3 \quad \therefore \gamma = 1$$

$$\alpha\beta\gamma = a\gamma = -2 \quad \therefore a = -2$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta) = -2 + 1 \times 2 = b \quad \therefore b = 0$$

$$\therefore a - b = -2$$

0652 답 ①

주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha, 3\alpha, 5\alpha (\alpha \neq 0)$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + 3\alpha + 5\alpha = 3 \quad \therefore \alpha = \frac{1}{3}$$

따라서 세 근이 $\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}$ 이므로

$$\frac{1}{3} \times 1 + 1 \times \frac{5}{3} + \frac{5}{3} \times \frac{1}{3} = a, \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{5}{3} = -b$$

$$\therefore a = \frac{23}{9}, b = -\frac{5}{9}$$

$$\therefore a + b = 2$$

0653 답 ⑤

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = -2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3, \alpha\beta\gamma = -4$$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\alpha - 2, \beta - 2, \gamma - 2$ 이므로

$$(\alpha - 2) + (\beta - 2) + (\gamma - 2) = (\alpha + \beta + \gamma) - 6 = -2 - 6 = -8$$

$$(\alpha - 2)(\beta - 2) + (\beta - 2)(\gamma - 2) + (\gamma - 2)(\alpha - 2)$$

$$= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - 4(\alpha + \beta + \gamma) + 12$$

$$= -3 - 4 \times (-2) + 12 = 17$$

$$(\alpha - 2)(\beta - 2)(\gamma - 2)$$

$$= \alpha\beta\gamma - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 4(\alpha + \beta + \gamma) - 8$$

$$= -4 - 2 \times (-3) + 4 \times (-2) - 8 = -14$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$$x^3 + 8x^2 + 17x + 14 = 0$$

0654 답 ②

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 4, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -2, \alpha\beta\gamma = -5$$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 이므로

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \times \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$$

즉, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 을 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 5인 삼차방정식은

$$5\left(x^3 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}\right) = 0$$

$$\therefore 5x^3 - 2x^2 - 4x + 1 = 0$$

따라서 $a = -2, b = -4, c = 1$ 이므로 $a + 2b + 3c = -7$

0655 답 ④

$$f(1) = f(2) = f(3) = 4 \text{에서}$$

$$f(1) - 4 = 0, f(2) - 4 = 0, f(3) - 4 = 0$$

즉, 방정식 $f(x) - 4 = 0$ 의 근은 1, 2, 3이다.

$$f(x) - 4 = a(x - 1)(x - 2)(x - 3) \quad (a \text{는 상수}) \text{이라 하면}$$

$$f(x) = a(x - 1)(x - 2)(x - 3) + 4$$

이때 $f(4) = 10$ 이므로

$$a \times 3 \times 2 \times 1 + 4 = 10 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) + 4$$

$$= x^3 - 6x^2 + 11x - 2$$

따라서 방정식 $f(x) = 0$, 즉 $x^3 - 6x^2 + 11x - 2 = 0$ 의 모든 근의 합은 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 6이다.

0656 답 -2

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 $1 + 2i$ 이면 $1 - 2i$ 도 근이다.

나머지 한 근을 α 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1 + 2i)(1 - 2i)\alpha = -10$$

$$\therefore \alpha = -2$$

따라서 구하는 실근은 -2이다.

0657 [답] 14

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $3+\sqrt{3}$ 이면 $3-\sqrt{3}$ 도 근이다.
 따라서 세 근이 $1, 3+\sqrt{3}, 3-\sqrt{3}$ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $1+(3+\sqrt{3})+(3-\sqrt{3})=-a$
 $1\times(3+\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(3-\sqrt{3})\times 1=b$
 $1\times(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})=-c$
 $\therefore a=-7, b=12, c=-6$
 $\therefore \frac{ab}{c}=\frac{-7\times 12}{-6}=14$

0658 [답] -6

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $2-\sqrt{2}$ 이면 $2+\sqrt{2}$ 도 근이다.
 나머지 한 근을 α 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $(2-\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})+\alpha=a+2$
 $(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})\alpha+\alpha(2-\sqrt{2})=b$
 $(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})\alpha=-4$
 $\therefore \alpha=-2, a=0, b=-6$
 $\therefore a+b=-6$

0659 [답] ①

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 $a+bi$ 이면 $a-bi$ 도 근이다.
 이때 $f(x)=x^3+2x-3$ 이라 하면 $f(1)=0$ 이므로 $x=1$ 은 나머지 한 근이다.
 따라서 세 근이 $1, a+bi, a-bi$ 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $1+(a+bi)+(a-bi)=0$
 $(a+bi)+(a+bi)(a-bi)+(a-bi)=2$
 $(a+bi)(a-bi)=3$
 $\therefore a=-\frac{1}{2}, b=\pm\frac{\sqrt{11}}{2}$
 $\therefore a^2b^2=\frac{1}{4}\times\frac{11}{4}=\frac{11}{16}$

0660 [답] ②

$x^3+1=0$ 에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$
 이때 ω 는 이차방정식 $x^2-x+1=0$ 의 한 허근이므로 $\bar{\omega}$ 도 이 방정식의 근이다.
 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\omega+\bar{\omega}=1, \omega\bar{\omega}=1$
 $\therefore \frac{1}{\omega-1}+\frac{1}{\bar{\omega}-1}=\frac{\bar{\omega}-1+\omega-1}{(\omega-1)(\bar{\omega}-1)}$
 $=\frac{(\omega+\bar{\omega})-2}{\omega\bar{\omega}-(\omega+\bar{\omega})+1}$
 $=\frac{1-2}{1-1+1}=-1$

0661 [답] ②

$x^3=-1$ 에서 $x^3+1=0, (x+1)(x^2-x+1)=0$

이때 ω 는 이차방정식 $x^2-x+1=0$ 의 한 허근이므로
 $\omega^3=-1, \omega^2-\omega+1=0$
 $\therefore \omega^{1000}+\frac{1}{\omega^{1000}}=(\omega^3)^{333}\times\omega+\frac{1}{(\omega^3)^{333}\times\omega}$
 $=-\omega-\frac{1}{\omega}=-\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)$
 $=-\frac{\omega^2+1}{\omega}=-\frac{\omega}{\omega}=-1$

0662 [답] 0

$x^3-1=0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$
 이때 ω 는 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이므로
 $\omega^2+\omega+1=0$ i
 $\omega\neq 0$ 이므로 양변을 ω 로 나누면
 $\omega+1+\frac{1}{\omega}=0 \quad \therefore \omega+\frac{1}{\omega}=-1$ ii
 $\therefore \left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^4+\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^3+\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2+\omega+\frac{1}{\omega}$
 $=(-1)^4+(-1)^3+(-1)^2+(-1)=0$ iii

채점 기준

i $\omega^2+\omega+1=0$ 임을 확인하기	40 %
ii $\omega+\frac{1}{\omega}$ 의 값 구하기	40 %
iii 주어진 식의 값 구하기	20 %

0663 [답] ④

이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로
 $\omega^2+\omega+1=0$
 양변에 $\omega-1$ 을 곱하면
 $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0, \omega^3-1=0 \quad \therefore \omega^3=1$
 $\therefore 1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{120}$
 $= (1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{117}(1+\omega+\omega^2)+\omega^{120}$
 $= (\omega^3)^{40}=1$

0664 [답] ③

$x^3-1=0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$
 이때 ω 는 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이므로
 $\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$
 또 ω 는 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이므로 $\bar{\omega}$ 도 이 방정식의 근이다.
 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\omega+\bar{\omega}=-1, \omega\bar{\omega}=1$
 ㄱ. $\omega\bar{\omega}=1$
 ㄴ. $\omega^2+\omega+1=0$ 에서 $\omega^2=-\omega-1$
 $\omega+\bar{\omega}=-1$ 에서 $\bar{\omega}=-\omega-1$
 $\therefore \omega^2=\bar{\omega}$
 ㄷ. $\frac{1}{\omega+1}+\frac{1}{\omega^2+1}+\frac{1}{\omega^3+1}=\frac{1}{-\omega^2}+\frac{1}{-\omega}+\frac{1}{1+1}$
 $=-\frac{1+\omega}{\omega^2}+\frac{1}{2}=-\frac{-\omega^2}{\omega^2}+\frac{1}{2}$
 $=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0665 답 ⑤

$x^3-1=0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$
 이때 ω 는 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이므로
 $\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$
 따라서
 $f(1)=\omega^2+\omega+1=0,$
 $f(2)=\omega^4+\omega^2+1=\omega+\omega^2+1=0,$
 $f(3)=\omega^6+\omega^3+1=1+1+1=3,$
 $f(4)=\omega^8+\omega^4+1=\omega^2+\omega+1=0,$
 $f(5)=\omega^{10}+\omega^5+1=\omega+\omega^2+1=0,$
 $f(6)=\omega^{12}+\omega^6+1=1+1+1=3,$
 $\vdots$
 이므로
 $f(1)=f(4)=f(7)=f(10)=f(13)=0,$
 $f(2)=f(5)=f(8)=f(11)=f(14)=0,$
 $f(3)=f(6)=f(9)=f(12)=f(15)=3$
 $\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(15)$
 $=0+0+3+0+0+3+\cdots+0+0+3$
 $=3 \times 5 = 15$

0666 답 $2\sqrt{2}$

$x-y=2$ 에서 $y=x-2$ ㉠
 이를 $x^2+4xy+y^2=10$ 에 대입하면
 $x^2+4x(x-2)+(x-2)^2=10$
 $x^2-2x-1=0 \quad \therefore x=1 \pm \sqrt{2}$
 이를 각각 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는
 $x=1-\sqrt{2}, y=-1-\sqrt{2}$ 또는 $x=1+\sqrt{2}, y=-1+\sqrt{2}$
 $\therefore |x+y|=2\sqrt{2}$

0667 답 ③

$2x+y=3$ 에서 $y=-2x+3$ ㉠
 이를 $4x^2-y^2=27$ 에 대입하면
 $4x^2-(-2x+3)^2=27$
 $12x-36=0 \quad \therefore x=3$
 이를 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는
 $x=3, y=-3$
 따라서 $\alpha=3, \beta=-3$ 이므로 $\alpha-\beta=6$

0668 답 4

$x+2y=5$ 에서 $x=-2y+5$ ㉠
 이를 $2x^2+xy=21$ 에 대입하면
 $2(-2y+5)^2+(-2y+5)y=21, 6y^2-35y+29=0$
 $(y-1)(6y-29)=0 \quad \therefore y=1$ 또는 $y=\frac{29}{6}$
 이를 각각 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는
 $x=3, y=1$ 또는 $x=-\frac{14}{3}, y=\frac{29}{6}$
 따라서 $\alpha=3, \beta=1$ 이므로 $\alpha+\beta=4$

0669 답 54

두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식 $\begin{cases} 3x+y=4 \\ x^2-y^2=-48 \end{cases}$ 의 해와 같다.
 $3x+y=4$ 에서 $y=-3x+4$ ㉠
 이를 $x^2-y^2=-48$ 에 대입하면
 $x^2-(-3x+4)^2=-48, x^2-3x-4=0$
 $(x+1)(x-4)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=4$
 이를 각각 ㉠에 대입하면 위의 연립방정식의 해는
 $x=-1, y=7$ 또는 $x=4, y=-8$ ㉡
 (i) $x=-1, y=7$ 을 $ax^2-y^2=-1, x+y=b$ 에 각각 대입하면
 $a-49=-1, -1+7=b \quad \therefore a=48, b=6$
 (ii) $x=4, y=-8$ 을 $ax^2-y^2=-1, x+y=b$ 에 각각 대입하면
 $16a-64=-1, 4-8=b$
 $\therefore a=\frac{63}{16}, b=-4$ ㉢
 (i), (ii)에서 정수 a, b 의 값은 $a=48, b=6$ 이므로
 $a+b=54$ ㉣

채점 기준

㉡ 주어진 연립방정식의 공통인 해 구하기	40 %
㉢ a, b 의 값 구하기	50 %
㉣ $a+b$ 의 값 구하기	10 %

0670 답 ①

$x^2+xy-2y^2=0$ 에서 $(x+2y)(x-y)=0$
 $\therefore x=-2y$ 또는 $x=y$
 (i) $x=-2y$ 를 $x^2+y^2=20$ 에 대입하면
 $4y^2+y^2=20, y^2=4 \quad \therefore y=\pm 2$
 $\therefore y=-2$ 일 때 $x=4, y=2$ 일 때 $x=-4$
 (ii) $x=y$ 를 $x^2+y^2=20$ 에 대입하면
 $y^2+y^2=20, y^2=10 \quad \therefore y=\pm\sqrt{10}$
 $\therefore y=-\sqrt{10}$ 일 때 $x=-\sqrt{10}, y=\sqrt{10}$ 일 때 $x=\sqrt{10}$
 (i), (ii)에서 정수 x, y 는 $x=-4, y=2$ 또는 $x=4, y=-2$ 이므로
 $xy=-8$

0671 답 $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$
 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{3} \\ y=-2\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{3} \\ y=2\sqrt{3} \end{cases}$

$x^2-y^2=0$ 에서 $(x+y)(x-y)=0$
 $\therefore y=-x$ 또는 $y=x$
 (i) $y=-x$ 를 $x^2-xy+y^2=12$ 에 대입하면
 $x^2+x^2+x^2=12, x^2=4 \quad \therefore x=\pm 2$
 $\therefore x=-2$ 일 때 $y=2, x=2$ 일 때 $y=-2$
 (ii) $y=x$ 를 $x^2-xy+y^2=12$ 에 대입하면
 $x^2-x^2+x^2=12, x^2=12 \quad \therefore x=\pm 2\sqrt{3}$
 $\therefore x=-2\sqrt{3}$ 일 때 $y=-2\sqrt{3}, x=2\sqrt{3}$ 일 때 $y=2\sqrt{3}$
 (i), (ii)에서 구하는 해는
 $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{3} \\ y=-2\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{3} \\ y=2\sqrt{3} \end{cases}$

0672 [답 6]

$x^2 + 3xy - 10y^2 = 0$ 에서 $(x+5y)(x-2y)=0$
 $\therefore x = -5y$ 또는 $x = 2y$
 이때 x, y 가 모두 양수이려면 $x = 2y$
 이를 $x^2 + 2xy - y^2 = 28$ 에 대입하면
 $4y^2 + 4y^2 - y^2 = 28, y^2 = 4 \quad \therefore y = \pm 2$
 그런데 x, y 는 양수이므로 $x = 4, y = 2$
 $\therefore x + y = 6$

0673 [답 ①]

$x^2 - 2xy - 3y^2 = 0$ 에서 $(x+y)(x-3y)=0$
 $\therefore x = -y$ 또는 $x = 3y$
 (i) $x = -y$ 를 $x^2 - 3xy + y^2 = 16$ 에 대입하면
 $y^2 + 3y^2 + y^2 = 16, y^2 = \frac{16}{5} \quad \therefore y = \pm \frac{4\sqrt{5}}{5}$
 $\therefore y = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 일 때 $x = \frac{4\sqrt{5}}{5}, y = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 일 때 $x = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$
 (ii) $x = 3y$ 를 $x^2 - 3xy + y^2 = 16$ 에 대입하면
 $9y^2 - 9y^2 + y^2 = 16, y^2 = 16 \quad \therefore y = \pm 4$
 $\therefore y = -4$ 일 때 $x = -12, y = 4$ 일 때 $x = 12$
 (i), (ii)에서 $\alpha\beta$ 의 최댓값은 $M = 48$ 이고, 최솟값은 $m = -\frac{16}{5}$ 이므로
 $\frac{M}{m} = 48 \times \left(-\frac{5}{16}\right) = -15$

0674 [답 $(-2, 2), (2, -2)$]

주어진 연립방정식을 변형하면

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 8 \\ xy = -4 \end{cases}$$

 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 8 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ v = -4 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

 $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $u^2 + 8 = 8, u^2 = 0 \quad \therefore u = 0, v = -4$
 즉, $x+y=0, xy=-4$ 이므로 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은
 $t^2 - 4 = 0, t^2 = 4 \quad \therefore t = \pm 2$
 $\therefore x = -2, y = 2$ 또는 $x = 2, y = -2$
 따라서 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 $(-2, 2), (2, -2)$ 이다.

0675 [답 5]

주어진 연립방정식을 변형하면

$$\begin{cases} x + y - xy = 7 \\ (x+y)^2 - 2xy = 13 \end{cases}$$

 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u - v = 7 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ u^2 - 2v = 13 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

 $\textcircled{1}$ 에서 $v = u - 7$ $\cdots \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{3}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $u^2 - 2(u-7) = 13, u^2 - 2u + 1 = 0$
 $(u-1)^2 = 0 \quad \therefore u = 1$
 이를 $\textcircled{3}$ 에 대입하면 $v = -6$
 즉, $x+y=1, xy=-6$ 이므로
 $(y-x)^2 = (x+y)^2 - 4xy$
 $= 1^2 - 4 \times (-6) = 25$
 이때 $x < y$ 이므로 $y-x=5$

0676 [답 ④]

주어진 연립방정식을 변형하면

$$\begin{cases} xy + (x+y) = 11 \\ xy(x+y) = 30 \end{cases}$$

 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u + v = 11 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ uv = 30 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

 $\textcircled{1}$ 에서 $v = -u + 11$ $\cdots \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{3}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $u(-u+11) = 30, u^2 - 11u + 30 = 0$
 $(u-5)(u-6) = 0 \quad \therefore u = 5$ 또는 $u = 6$
 이를 각각 $\textcircled{3}$ 에 대입하면
 $u = 5, v = 6$ 또는 $u = 6, v = 5$
 (i) $u = 5, v = 6$, 즉 $x+y=5, xy=6$ 일 때,
 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은
 $t^2 - 5t + 6 = 0, (t-2)(t-3) = 0$
 $\therefore t = 2$ 또는 $t = 3$
 $\therefore x = 2, y = 3$ 또는 $x = 3, y = 2$
 (ii) $u = 6, v = 5$, 즉 $x+y=6, xy=5$ 일 때,
 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은
 $t^2 - 6t + 5 = 0, (t-1)(t-5) = 0$
 $\therefore t = 1$ 또는 $t = 5$
 $\therefore x = 1, y = 5$ 또는 $x = 5, y = 1$
 (i), (ii)에서 $x+2y$ 의 최댓값은
 $1 + 2 \times 5 = 11$

0677 [답 3]

$x+y=a$ 에서 $y=-x+a$ 이므로 이를 $x^2 - 2xy = -3$ 에 대입하면
 $x^2 - 2x(-x+a) = -3$
 $3x^2 - 2ax + 3 = 0$
 이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = a^2 - 9 = 0$
 $a^2 = 9 \quad \therefore a = \pm 3$
 그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 3$

0678 [답 ④]

$x-y=2a$ 에서 $y=x-2a$ 이므로 이를 $2x^2 - xy = -a^2 - a + 1$ 에 대입하면
 $2x^2 - x(x-2a) = -a^2 - a + 1$
 $x^2 + 2ax + a^2 + a - 1 = 0$

이 이차방정식이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - (a^2 + a - 1) < 0$$

$$-a + 1 < 0 \quad \therefore a > 1$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 2이다.

0679 [답] ③

주어진 연립방정식에서 $x+y=3$, $xy=a-3$ 이므로 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2 - 3t + a - 3 = 0$$

이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D = 9 - 4(a - 3) \geq 0$$

$$-4a + 21 \geq 0 \quad \therefore a \leq \frac{21}{4}$$

따라서 상수 a 의 최댓값은 $\frac{21}{4}$ 이다.

0680 [답] ③

주어진 두 이차방정식의 공통근이 α 이므로

$$\alpha^2 + (2k+1)\alpha + 6 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha^2 - (k+1)\alpha - 3k + 4 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$(3k+2)\alpha + (3k+2) = 0, (3k+2)(\alpha+1) = 0$$

$$\therefore k = -\frac{2}{3} \text{ 또는 } \alpha = -1$$

(i) $k = -\frac{2}{3}$ 일 때,

두 이차방정식이 모두 $x^2 - \frac{1}{3}x + 6 = 0$ 이므로 서로 다른 두 이차방정식이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha = -1$ 일 때,

$\alpha = -1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$1 - (2k+1) + 6 = 0, 2k = 6 \quad \therefore k = 3$$

(i), (ii)에서 $k=3$, $\alpha=-1$ 이므로

$$\alpha + k = 2$$

0681 [답] ⑤

주어진 두 이차방정식의 공통근을 α 라 하면

$$\alpha^2 - k - 3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha^2 - (k+1)\alpha + 2k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$(k+1)\alpha - 3(k+1) = 0, (k+1)(\alpha-3) = 0$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } \alpha = 3$$

(i) $k = -1$ 일 때,

두 이차방정식이 모두 $x^2 - 2 = 0$ 이므로 $x = \pm 2$ 따라서 공통근을 2개 갖는다.

(ii) $\alpha = 3$ 일 때,

$\alpha = 3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$9 - k - 3 = 0 \quad \therefore k = 6$$

(i), (ii)에서 $k=6$

0682 [답] 18

처음 땅의 가로 길이를 x , 세로 길이를 y 라 하면

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (3\sqrt{5})^2 \\ (x-1)(y+1) = xy + 2 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x^2 + y^2 = 45 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ x - y = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{2}$ 에서 $y = x - 3$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x^2 + (x-3)^2 = 45, x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$(x+3)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 6$$

그런데 $1 < x < 3\sqrt{5}$ 이므로 $x = 6, y = 3$

따라서 처음 땅의 넓이는

$$6 \times 3 = 18$$

0683 [답] 5

두 원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2 라 하면

$$\begin{cases} 2\pi r_1 + 2\pi r_2 = 12\pi \\ \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = 26\pi \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} r_1 + r_2 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ r_1^2 + r_2^2 = 26 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $r_2 = -r_1 + 6$ $\dots\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$r_1^2 + (-r_1 + 6)^2 = 26, r_1^2 - 6r_1 + 5 = 0$$

$$(r_1 - 1)(r_1 - 5) = 0 \quad \therefore r_1 = 1 \text{ 또는 } r_1 = 5$$

이를 각각 $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$r_1 = 1, r_2 = 5 \text{ 또는 } r_1 = 5, r_2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 두 원 중 큰 원의 반지름의 길이는 5이다. $\dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① 연립이차방정식 세우기	40 %
② 두 원의 반지름의 길이 구하기	50 %
③ 큰 원의 반지름의 길이 구하기	10 %

0684 [답] ③

직각삼각형의 빗변이 아닌 두 변의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10^2 \\ \frac{1}{2}xy = 24 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ xy = 48 \end{cases}$$

이 연립방정식을 변형하면

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 100 \\ xy = 48 \end{cases}$$

$x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 100 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ v = 48 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$u^2 - 96 = 100, u^2 = 196 \quad \therefore u = \pm 14$$

그런데 $x+y > 10$, 즉 $u > 10$ 이므로 $u = 14$

따라서 빗변이 아닌 두 변의 길이의 합은 14 cm이다.

0685 [답] 27

삼의 자리의 숫자를 x , 일의 자리의 숫자를 y 라 하면

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ (x-y)^2 = 9 \end{cases}$$

이 연립방정식을 변형하면

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 65 \\ (x+y)^2 - 4xy = 9 \end{cases}$$

$x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 65 & \cdots \cdots \textcircled{7} \\ u^2 - 4v = 9 & \cdots \cdots \textcircled{8} \end{cases}$$

$$\textcircled{7} - \textcircled{8} \text{을 하면 } 2v = 56 \quad \therefore v = 28$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$u^2 - 56 = 65, u^2 = 121 \quad \therefore u = \pm 11$$

그런데 $x+y > 0$, 즉 $u > 0$ 이므로 $u = 11$

즉, $x+y=11$, $xy=28$ 이므로 x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차 방정식은

$$t^2 - 11t + 28 = 0, (t-4)(t-7) = 0$$

$$\therefore t = 4 \text{ 또는 } t = 7$$

$$\therefore x = 4, y = 7 \text{ 또는 } x = 7, y = 4$$

따라서 두 자리의 자연수 중 가장 큰 수는 74, 가장 작은 수는 47이므로 그 차는

$$74 - 47 = 27$$

0686 답 ④

$$xy - x - y - 1 = 0 \text{에서}$$

$$x(y-1) - (y-1) - 2 = 0$$

$$\therefore (x-1)(y-1) = 2$$

$$(i) x-1 = -2, y-1 = -1 \text{일 때, } x = -1, y = 0$$

$$(ii) x-1 = -1, y-1 = -2 \text{일 때, } x = 0, y = -1$$

$$(iii) x-1 = 1, y-1 = 2 \text{일 때, } x = 2, y = 3$$

$$(iv) x-1 = 2, y-1 = 1 \text{일 때, } x = 3, y = 2$$

(i)~(iv)에서 xy 의 최댓값은

$$2 \times 3 = 6$$

0687 답 3

$$x^2 - xy + y + 3 = 0 \text{에서}$$

$$xy - y - x^2 - 3 = 0, y(x-1) - (x-1)(x+1) = 4$$

$$\therefore (x-1)(y-x-1) = 4$$

x, y 가 자연수이므로 $x-1 \geq 0$

$$(i) x-1 = 1, y-x-1 = 4 \text{일 때, } x = 2, y = 7$$

$$(ii) x-1 = 2, y-x-1 = 2 \text{일 때, } x = 3, y = 6$$

$$(iii) x-1 = 4, y-x-1 = 1 \text{일 때, } x = 5, y = 7$$

(i), (ii), (iii)에서 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 (2, 7), (3, 6), (5, 7)의 3개이다.

0688 답 -4

[방법 1] $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 10 = 0$ 에서

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = 0$$

$$\therefore (x+1)^2 + (y+3)^2 = 0$$

x, y 가 실수이므로 $x+1=0, y+3=0$

$$\therefore x = -1, y = -3$$

$$\therefore x+y = -4$$

[방법 2] 방정식의 좌변을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 + 2x + y^2 + 6y + 10 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

x 가 실수이므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - (y^2 + 6y + 10) \geq 0$$

$$-y^2 - 6y - 9 \geq 0 \quad \therefore (y+3)^2 \leq 0$$

$$\text{이때 } y \text{는 실수이므로 } y+3=0 \quad \therefore y = -3$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$(x+1)^2 = 0 \quad \therefore x = -1$$

$$\therefore x+y = -4$$

0689 답 5

[방법 1] $5x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 1 = 0$ 에서

$$(4x^2 - 4xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\therefore (2x-y)^2 + (x-1)^2 = 0$$

x, y 가 실수이므로 $2x-y=0, x-1=0$

$$\therefore x = 1, y = 2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 1 + 4 = 5$$

[방법 2] 방정식의 좌변을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$5x^2 - 2(2y+1)x + y^2 + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

x 가 실수이므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2y+1)^2 - 5(y^2 + 1) \geq 0$$

$$-y^2 + 4y - 4 \geq 0 \quad \therefore (y-2)^2 \leq 0$$

$$\text{이때 } y \text{는 실수이므로 } y-2=0 \quad \therefore y = 2$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $5x^2 - 10x + 5 = 0$

$$x^2 - 2x + 1 = 0, (x-1)^2 = 0 \quad \therefore x = 1$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 1 + 4 = 5$$

AB 유형 점검

108~110쪽

0690 답 ①

$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ 라 할 때,

$f(1) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여

$f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x) = (x-1)(x^2 - 4)$$

$$= (x-1)(x+2)(x-2)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+2)(x-1)(x-2) = 0$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 주어진 방정식의 모든 양의 근의 합은 $1+2=3$

0691 답 -4

$$(x^2 - 2x)^2 = 2x^2 - 4x + 8 \text{에서}$$

$$(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 8 = 0$$

$x^2 - 2x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 2t - 8 = 0, (t+2)(t-4) = 0 \quad \therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 4$$

(i) $t = -2$ 일 때,

$$x^2 - 2x = -2 \text{에서 } x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\therefore x = 1 \pm i$$

(ii) $t=4$ 일 때,

$$x^2-2x=4 \text{에서 } x^2-2x-4=0$$

$$\therefore x=1 \pm \sqrt{5}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 곱은

$$(1-\sqrt{5}) \times (1+\sqrt{5}) = -4$$

0692 답 ①

$$x^4-14x^2+25=0 \text{에서 } (x^4-10x^2+25)-4x^2=0$$

$$(x^2-5)^2-(2x)^2=0, (x^2+2x-5)(x^2-2x-5)=0$$

$$\therefore x=-1 \pm \sqrt{6} \text{ 또는 } x=1 \pm \sqrt{6}$$

따라서 주어진 방정식의 근인 것은 ①이다.

0693 답 -8

$x \neq 0$ 이므로 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2+7x-6+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+7\left(x+\frac{1}{x}\right)-8=0$$

$$x+\frac{1}{x}=t \text{로 놓으면 } t^2+7t-8=0$$

$$(t+8)(t-1)=0 \quad \therefore t=-8 \text{ 또는 } t=1$$

(i) $t=-8$ 일 때,

$$x+\frac{1}{x}=-8 \text{에서 } x^2+8x+1=0 \quad \therefore x=-4 \pm \sqrt{15}$$

(ii) $t=1$ 일 때,

$$x+\frac{1}{x}=1 \text{에서 } x^2-x+1=0 \quad \therefore x=\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$$(-4-\sqrt{15})+(-4+\sqrt{15})=-8$$

0694 답 ②

$f(x)=x^3-(2a+1)x^2+(a+1)^2x-(a^2+1)$ 이라 할 때,

$f(1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2a-1 & a^2+2a+1 & -a^2-1 \\ & & 1 & -2a & a^2+1 \\ \hline & 1 & -2a & a^2+1 & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x^2-2ax+a^2+1)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-2ax+a^2+1)=0$

따라서 α, β 는 이차방정식 $x^2-2ax+a^2+1=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2a, \alpha\beta=a^2+1$$

$$\text{이때 } \alpha+\beta=8 \text{이므로 } 2a=8 \quad \therefore a=4$$

이를 $\alpha\beta=a^2+1$ 에 대입하면

$$\alpha\beta=4^2+1=17$$

0695 답 4

상자 밑면의 가로 길이가 $(20-2x)$ cm, 세로 길이가

$(10-2x)$ cm이므로

$$(20-2x) \times (10-2x) \times x = 96$$

$$x^3-15x^2+50x-24=0$$

$$f(x)=x^3-15x^2+50x-24 \text{라 할 때, } f(4)=0 \text{이므로 조립제법을 이용하여 } f(x) \text{를 인수분해하면}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & -15 & 50 & -24 \\ & & 4 & -44 & 24 \\ \hline & 1 & -11 & 6 & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x-4)(x^2-11x+6)$$

즉, 방정식은 $(x-4)(x^2-11x+6)=0$

$$\therefore x=4 \text{ 또는 } x=\frac{11 \pm \sqrt{97}}{2}$$

그런데 x 는 자연수이므로 $x=4$

0696 답 ④

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3, \alpha\beta\gamma=-1$$

$$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

$$=(-2-\gamma)(-2-\alpha)(-2-\beta)$$

$$=(-2)^3-(\alpha+\beta+\gamma) \times (-2)^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \times (-2)$$

$$=-\alpha\beta\gamma$$

$$=-8-(-2) \times 4+(-3) \times (-2)-(-1)=7$$

0697 답 24

주어진 삼차방정식의 세 근을 $\alpha, 2\alpha, \beta (\alpha \neq 0)$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+2\alpha+\beta=3 \quad \therefore \beta=3-3\alpha$$

즉, 세 근이 $\alpha, 2\alpha, 3-3\alpha$ 이므로

$$\alpha \times 2\alpha + 2\alpha \times (3-3\alpha) + (3-3\alpha) \times \alpha = -10$$

$$7\alpha^2-9\alpha-10=0, (7\alpha+5)(\alpha-2)=0$$

$$\therefore \alpha=-\frac{5}{7} \text{ 또는 } \alpha=2$$

그런데 α 는 정수이므로 $\alpha=2$

따라서 주어진 삼차방정식의 세 근은 2, 4, -3이므로

$$2 \times 4 \times (-3) = -k \quad \therefore k=24$$

0698 답 ②

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3, \alpha\beta\gamma=1$$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 이므로

$\alpha+\beta+\gamma=2$ 에서

$$\alpha+\beta=2-\gamma, \beta+\gamma=2-\alpha, \gamma+\alpha=2-\beta$$

세 근 $2-\gamma, 2-\alpha, 2-\beta$ 에 대하여

$$(2-\gamma)+(2-\alpha)+(2-\beta)=6-(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$=6-2=4$$

$$(2-\gamma)(2-\alpha)+(2-\alpha)(2-\beta)+(2-\beta)(2-\gamma)$$

$$=12-4(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

$$=12-4 \times 2+3=7$$

$$(2-\gamma)(2-\alpha)(2-\beta)$$

$$=8-4(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$$

$$=8-4 \times 2+2 \times 3-1=5$$

따라서 구하는 삼차방정식은 $x^3-4x^2+7x-5=0$

0699 답 ②

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 $-1+\sqrt{3}i$ 이면

$-1-\sqrt{3}i$ 도 근이다.

나머지 한 근이 c 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $(-1+\sqrt{3}i)+(-1-\sqrt{3}i)+c=3$
 $(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)+(-1-\sqrt{3}i)c+c(-1+\sqrt{3}i)=a$
 $(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)c=-b$
 $\therefore a=-6, b=-20, c=5$
 $\therefore a+b+c=-21$

0700 답 ④

$x^3-1=0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$
 이때 ω 는 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이고 $\bar{\omega}$ 도 이 방정식의 근이므로
 $\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0, \bar{\omega}^3=1, \bar{\omega}^2+\bar{\omega}+1=0$
 또 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\bar{\omega}=-1, \omega\bar{\omega}=1$
 $\therefore \frac{\bar{\omega}^2}{1+\omega}+\frac{\omega^2}{1+\bar{\omega}}=\frac{\bar{\omega}^2}{-\omega^2}+\frac{\omega^2}{-\bar{\omega}^2}=-\frac{\bar{\omega}^4+\omega^4}{\omega^2\bar{\omega}^2}$
 $=-\frac{\bar{\omega}+\omega}{(\omega\bar{\omega})^2}=-\frac{-1}{1^2}=1$

0701 답 ③

$3x-y=10$ 에서 $y=3x-10$ ㉠
 이를 $x^2-2y=12$ 에 대입하면
 $x^2-2(3x-10)=12, x^2-6x+8=0$
 $(x-2)(x-4)=0 \therefore x=2$ 또는 $x=4$
 이를 각각 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는
 $x=2, y=-4$ 또는 $x=4, y=2$
 따라서 $\alpha=4, \beta=2$ 이므로 $\alpha+\beta=6$

0702 답 ④

$2x^2+xy-y^2=0$ 에서 $(x+y)(2x-y)=0$
 $\therefore y=-x$ 또는 $y=2x$
 이때 x, y 가 모두 음의 정수이려면 $y=2x$
 이를 $x^2-2xy+2y^2=5$ 에 대입하면
 $x^2-4x^2+8x^2=5, x^2=1 \therefore x=\pm 1$
 이때 x, y 는 음의 정수이므로 $x=-1, y=-2$
 $\therefore x+y=-3$

0703 답 ⑤

$2x+y=a$ 에서 $y=-2x+a$ 이므로 이를 $x^2+y^2=4$ 에 대입하면
 $x^2+(-2x+a)^2=4$
 $5x^2-4ax+a^2-4=0$
 이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=(-2a)^2-5(a^2-4)=0$
 $-a^2+20=0, a^2=20 \therefore a=\pm 2\sqrt{5}$
 그런데 $a>0$ 이므로 $a=2\sqrt{5}$

0704 답 6

주어진 두 이차방정식의 공통근을 α 라 하면
 $\alpha^2-(k+2)\alpha+2k=0$ ㉠
 $\alpha^2-(3k+2)\alpha+4k=0$ ㉡

㉠-㉡을 하면

$$2ka-2k=0, 2k(\alpha-1)=0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } \alpha=1$$

(i) $k=0$ 일 때,

두 이차방정식이 모두 $x^2-2x=0$ 이므로 서로 다른 두 이차방정식이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha=1$ 일 때,

$\alpha=1$ 을 ㉠에 대입하면
 $1-k-2+2k=0 \therefore k=1$
 이를 주어진 이차방정식에 각각 대입하면
 $x^2-3x+2=0$ 에서 $(x-1)(x-2)=0$
 $\therefore x=1$ 또는 $x=2$
 $x^2-5x+4=0$ 에서 $(x-1)(x-4)=0$
 $\therefore x=1$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서 공통근이 아닌 나머지 근의 합은
 $2+4=6$

0705 답 ④

직사각형의 가로와 세로의 길이를 x cm, y cm라 하면

$$\begin{cases} 2x+2y=34 \\ x^2+y^2=13^2 \end{cases} \therefore \begin{cases} x+y=17 \\ x^2+y^2=169 \end{cases} \begin{matrix} \cdots \cdots \text{㉠} \\ \cdots \cdots \text{㉡} \end{matrix}$$

㉠에서 $y=-x+17$ 을 ㉡에 대입하면

$$x^2+(-x+17)^2=169, x^2-17x+60=0$$

$$(x-5)(x-12)=0 \therefore x=5 \text{ 또는 } x=12$$

이를 각각 ㉠에 대입하면

$$x=5, y=12 \text{ 또는 } x=12, y=5$$

그런데 $x>y$ 이므로 $x=12, y=5$

따라서 직사각형의 가로와 세로의 길이는 12 cm이다.

0706 답 ⑤

$x^2-xy-2x+2y-3=0$ 에서
 $x(x-y)-2(x-y)-3=0 \therefore (x-2)(x-y)=3$
 (i) $x-2=-3, x-y=-1$ 일 때, $x=-1, y=0$
 (ii) $x-2=-1, x-y=-3$ 일 때, $x=1, y=4$
 (iii) $x-2=1, x-y=3$ 일 때, $x=3, y=0$
 (iv) $x-2=3, x-y=1$ 일 때, $x=5, y=4$
 (i)~(iv)에서 xy 의 최댓값은
 $5 \times 4 = 20$

0707 답 ①

방정식의 좌변을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2-2(y-1)x+2y^2+2=0 \cdots \cdots \text{㉠}$$

x 가 실수이므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(y-1)^2-(2y^2+2)\geq 0$$

$$-y^2-2y-1\geq 0 \therefore (y+1)^2\leq 0$$

이때 y 는 실수이므로 $y+1=0 \therefore y=-1$

이를 ㉠에 대입하면

$$x^2+4x+4=0, (x+2)^2=0 \therefore x=-2$$

$$\therefore x+y=-3$$

0708 답 1

주어진 방정식의 두 근이 $-1, 1$ 이므로 $x=-1, x=1$ 을 각각 대입하면

$$1-a-7-1+b=0, 1+a-7+1+b=0$$

$$\therefore a-b=-7, a+b=5$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=6$ ①

이를 주어진 방정식에 대입하면 $x^4-x^3-7x^2+x+6=0$

$f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$ 이라 할 때, $f(-1)=0, f(1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 & \\ & & -1 & 2 & 5 & -6 & \\ \hline 1 & 1 & -2 & -5 & 6 & 0 & \\ & & 1 & -1 & -6 & & \\ & 1 & -1 & -6 & 0 & & \end{array}$$

$$f(x)=(x+1)(x-1)(x^2-x-6) \\ = (x+1)(x-1)(x+2)(x-3)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)=0$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3 \text{ ②}$$

이때 $-1, 1$ 이 아닌 나머지 두 근은 $-2, 3$ 이므로 $\alpha\beta=-6$

$$\therefore \frac{\alpha\beta}{ab} = \frac{-6}{-1 \times 6} = 1 \text{ ③}$$

채점 기준

① a, b 의 값 구하기	30 %
② 주어진 방정식의 근 구하기	50 %
③ $\frac{\alpha\beta}{ab}$ 의 값 구하기	20 %

0709 답 2√2

$$f(x)=x^3-2kx^2+(k^2+2)x-2k \quad k \begin{array}{r|rrrr} 1 & -2k & k^2+2 & -2k & \\ & k & -k^2 & 2k & \\ \hline 1 & -k & 2 & 0 & \end{array}$$

라 할 때, $f(k)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x)=(x-k)(x^2-kx+2)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x-k)(x^2-kx+2)=0 \text{ ①}$$

이 방정식이 중근을 가지려면 이차방정식 $x^2-kx+2=0$ 이 중근을 갖거나 $x=k$ 를 근으로 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2-kx+2=0$ 이 중근을 가질 때,

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-k)^2-8=0$$

$$k^2=8 \quad \therefore k=\pm 2\sqrt{2}$$

(ii) 이차방정식 $x^2-kx+2=0$ 이 $x=k$ 를 근으로 가질 때,

$$k^2-k^2+2=0 \text{에서 } 2 \neq 0 \text{이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

..... ②

(i), (ii)에서 양수 k 의 값은 $2\sqrt{2}$ 이다.

..... ③

채점 기준

① 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하기	40 %
② 중근을 갖도록 하는 k 의 값 구하기	50 %
③ 양수 k 의 값 구하기	10 %

0710 답 2

$$\begin{cases} (x+y)^2+(x+y)-2xy=2 \\ (x+y)^2-xy=1 \end{cases}$$

$$x+y=u, xy=v \text{로 놓으면 } \begin{cases} u^2+u-2v=2 & \text{..... ①} \\ u^2-v=1 & \text{..... ②} \end{cases}$$

①에서 $v=u^2-1$ 을 ②에 대입하면

$$u^2+u-2(u^2-1)=2, u^2-u=0$$

$$u(u-1)=0 \quad \therefore u=0 \text{ 또는 } u=1$$

이를 각각 ②에 대입하면 $u=0, v=-1$ 또는 $u=1, v=0$ ④

(i) $u=0, v=-1$, 즉 $x+y=0, xy=-1$ 일 때,

x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2-1=0 \quad \therefore t=\pm 1$$

$$\therefore x=-1, y=1 \text{ 또는 } x=1, y=-1$$

(ii) $u=1, v=0$, 즉 $x+y=1, xy=0$ 일 때,

x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2-t=0, t(t-1)=0 \quad \therefore t=0 \text{ 또는 } t=1$$

$$\therefore x=0, y=1 \text{ 또는 } x=1, y=0 \text{ ⑤}$$

(i), (ii)에서 $x+2y$ 의 최댓값은 $0+2 \times 1=2$ ⑥

채점 기준

① $x+y=u, xy=v$ 로 놓고 u, v 의 값 구하기	40 %
② x, y 의 값 구하기	40 %
③ $x+2y$ 의 최댓값 구하기	20 %

C 실력 향상

111쪽

0711 답 ⑤

$x^2=t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2+(3-2a)t+(a+2)(a-5)=0$$

$$\{t-(a+2)\}\{t-(a-5)\}=0 \quad \therefore t=a+2 \text{ 또는 } t=a-5$$

즉, $x^2=a+2$ 또는 $x^2=a-5$ 이므로

$$x=\pm\sqrt{a+2} \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{a-5}$$

이때 주어진 사차방정식이 실근과 허근을 모두 가지므로 실근은

$$x=\pm\sqrt{a+2}, \text{ 허근은 } x=\pm\sqrt{a-5} \text{이다.}$$

ㄱ. $a=1$ 이면 실근은 $x=\pm\sqrt{3}$ 이므로 모든 실근의 곱은

$$-\sqrt{3} \times \sqrt{3} = -3$$

ㄴ. 모든 실근의 곱이 -4 이면 $-\sqrt{a+2} \times \sqrt{a+2} = -4$

$$-a-2=-4 \quad \therefore a=2$$

$$\text{따라서 허근은 } x=\pm\sqrt{3}i \text{이므로 그 곱은 } -\sqrt{3}i \times \sqrt{3}i = 3$$

ㄷ. 주어진 방정식이 정수인 근을 가지려면 $\pm\sqrt{a+2}$ 가 정수이어야 하므로 $a+2$ 가 어떤 정수의 제곱 꼴이어야 한다.

한편 주어진 방정식이 실근과 허근을 모두 가지려면 $a+2 \geq 0,$

$$a-5 < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$0 \leq a+2 < 7$$

따라서 $a+2$ 의 값이 될 수 있는 것은 $0^2, 1^2, 2^2$, 즉 $0, 1, 4$ 이므로

$$a=-2 \text{ 또는 } a=-1 \text{ 또는 } a=2 \text{이고 그 합은}$$

$$-2+(-1)+2=-1$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0712 답 4

(가)에서 $f(2)=0$ 이므로 $x=2$ 는 삼차방정식 $f(x)=0$ 의 근이다.
삼차방정식 $f(x)=0$ 의 계수가 실수이고 (나)에서 한 근이 $-4i$ 이므로 $4i$ 도 근이다.

삼차방정식 $f(2x)=0$ 에서 $2x=2$ 또는 $2x=-4i$ 또는 $2x=4i$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-2i$ 또는 $x=2i$

따라서 구하는 세 근의 곱은 $1 \times (-2i) \times 2i = 4$

0713 답 26

$f(x)=ax^3+(-a+b)x^2+(-5a-2b)x+6a$ 라 할 때,
 $f(2)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & a & -a+b & -5a-2b & 6a \\ & & 2a & 2a+2b & -6a \\ \hline & a & a+b & -3a & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x-2)\{ax^2+(a+b)x-3a\}$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-2)\{ax^2+(a+b)x-3a\}=0$

이때 주어진 삼차방정식이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지므로 이차방정식 $ax^2+(a+b)x-3a=0$ 은 $x \neq 2$ 인 서로 다른 두 정수를 근으로 가져야 한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $\frac{-3a}{a}=-3$

이므로 가능한 두 근은

1, -3 또는 -1, 3

따라서 두 근의 합은 -2 또는 2이어야 하므로

$$-\frac{a+b}{a}=-2 \text{ 또는 } -\frac{a+b}{a}=2$$

$\therefore b=a$ 또는 $b=-3a$

(i) $b=a$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(-10, -10), (-9, -9), \dots, (-1, -1),$

$(1, 1), (2, 2), \dots, (10, 10)$ 의 20개이다.

(ii) $b=-3a$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(-3, 9), (-2, 6), (-1, 3), (1, -3),$

$(2, -6), (3, -9)$ 의 6개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $20+6=26$

0714 답 30

이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로 $\omega^2+\omega+1=0$
양변에 $\omega-1$ 을 곱하면

$$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0, \omega^3-1=0 \quad \therefore \omega^3=1$$

따라서 ω 는 방정식 $x^3-1=0$ 의 한 허근이므로 $\bar{\omega}$ 도 근이다.

$$\therefore \bar{\omega}^3=1, \bar{\omega}^2+\bar{\omega}+1=0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\bar{\omega}=-1, \omega\bar{\omega}=1 \quad \therefore \bar{\omega}=\frac{1}{\omega}=\omega^2$$

$$\therefore (\omega^2+1)^{3n} \times (\bar{\omega}+1)^n = \{(-\omega)^3 \times (-\omega)\}^n \\ = \{-\omega^3 \times (-\omega)\}^n = \omega^n$$

따라서 ω^n 의 값이 양의 실수가 되려면 n 은 3의 배수이어야 하므로 두 자리의 자연수 n 은 12, 15, 18, ..., 99의 30개이다.

07 / 연립일차부등식

A 개념 확인

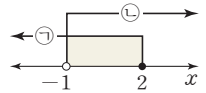
112~113쪽

0715 답 $-1 < x \leq 2$

$$\begin{cases} x \leq 2 & \dots\dots \textcircled{1} \\ x > -1 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는

$$-1 < x \leq 2$$

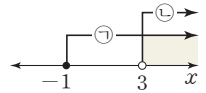


0716 답 $x > 3$

$$\begin{cases} x \geq -1 & \dots\dots \textcircled{1} \\ x > 3 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는

$$x > 3$$



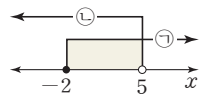
0717 답 $-2 \leq x < 5$

$$4x+5 \geq 3x+3 \text{에서 } x \geq -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2x < 10 \text{에서 } x < 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는

$$-2 \leq x < 5$$



0718 답 $x < -1$

$$-x > x+2 \text{에서 } -2x > 2$$

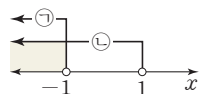
$$\therefore x < -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$3x-5 < -2x \text{에서 } 5x < 5$$

$$\therefore x < 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는

$$x < -1$$

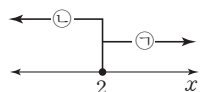


0719 답 $x=2$

$$\begin{cases} x \geq 2 & \dots\dots \textcircled{1} \\ x \leq 2 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는

$$x=2$$



0720 답 해는 없다.

$$\begin{cases} x > 1 & \dots\dots \textcircled{1} \\ x \leq -2 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 없다.



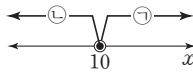
0721 답 해는 없다.

$$2x-4 > x+6 \text{에서 } x > 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x \leq -x+20 \text{에서}$$

$$2x \leq 20 \quad \therefore x \leq 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 없다.



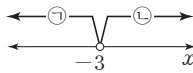
0722 답 해는 없다.

$$6x+3 < 2x-9 \text{에서}$$

$$4x < -12 \quad \therefore x < -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$5x > -15 \text{에서 } x > -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 없다.



0723 답 $x < 2$

$$2x-9 < x-7 \text{에서 } x < 2$$

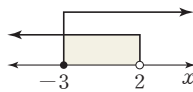
0724 답 $x \geq -3$

$$x-7 \leq 3x-1 \text{에서}$$

$$-2x \leq 6 \quad \therefore x \geq -3$$

0725 답 $-3 \leq x < 2$

$x < 2$, $x \geq -3$ 을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 부등식의 해는 $-3 \leq x < 2$



0726 답 $-2 \leq x \leq 2$

0727 답 $x < -3$ 또는 $x > 3$

0728 답 $-1 < x < 5$

$$|x-2| < 3 \text{에서 } -3 < x-2 < 3$$

$$\therefore -1 < x < 5$$

0729 답 $x \leq -8$ 또는 $x \geq 2$

$$|x+3| \geq 5 \text{에서 } x+3 \leq -5 \text{ 또는 } x+3 \geq 5$$

$$\therefore x \leq -8 \text{ 또는 } x \geq 2$$

0730 답 $x > 2$

$$|x|+2x > 6 \text{에서 } x=0 \text{을 기준으로 구간을 나누면}$$

(i) $x < 0$ 일 때,

$$-x+2x > 6 \text{에서 } x > 6$$

그런데 $x < 0$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x \geq 0$ 일 때,

$$x+2x > 6, 3x > 6 \quad \therefore x > 2$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x > 2$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x > 2$

0731 답 $x \geq \frac{1}{3}$

$$|x-1| \leq 2x \text{에서 } x-1=0, \text{ 즉 } x=1 \text{을 기준으로 구간을 나누면}$$

(i) $x < 1$ 일 때,

$$-(x-1) \leq 2x \text{에서 } -3x \leq -1$$

$$\therefore x \geq \frac{1}{3}$$

$$\text{그런데 } x < 1 \text{이므로 } \frac{1}{3} \leq x < 1$$

(ii) $x \geq 1$ 일 때,

$$x-1 \leq 2x, -x \leq 1$$

$$\therefore x \geq -1$$

$$\text{그런데 } x \geq 1 \text{이므로 } x \geq 1$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x \geq \frac{1}{3}$

B 유형 완성

114~119쪽

0732 답 ⑤

$$3(x-1) < 2x+3 \text{에서 } 3x-3 < 2x+3$$

$$\therefore x < 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

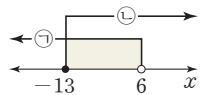
$$2+2(x-2) \leq 3x+11 \text{에서 } 2+2x-4 \leq 3x+11$$

$$-x \leq 13 \quad \therefore x \geq -13 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는

$$-13 \leq x < 6$$

$$\text{따라서 } a=-13, b=6 \text{이므로 } b-a=19$$



0733 답 ④

$$\frac{1}{5}x+1 > \frac{3}{10}(x-2) \text{에서 } 10\left(\frac{1}{5}x+1\right) > 3(x-2)$$

$$2x+10 > 3x-6, -x > -16$$

$$\therefore x < 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{x-1}{4} < \frac{1}{2}x-1 \text{에서 } x-1 < 4\left(\frac{1}{2}x-1\right)$$

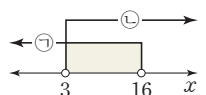
$$x-1 < 2x-4, -x < -3$$

$$\therefore x > 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는

$$3 < x < 16$$

$$\text{따라서 정수 } x \text{는 } 4, 5, 6, \dots, 15 \text{의 } 12 \text{개이다.}$$



0734 답 -3

$$1.5x+1 < 0.6x-0.8 \text{에서 } 15x+10 < 6x-8$$

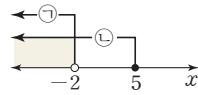
$$9x < -18 \quad \therefore x < -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{x+3}{4} \geq x + \frac{1-2x}{3} \text{에서 } 3(x+3) \geq 12x+4(1-2x)$$

$$3x+9 \geq 12x+4-8x, -x \geq -5$$

$$\therefore x \leq 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉗, ㉘을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 $x < -2$
따라서 정수 x 의 최댓값은 -3 이다.



0735 답 ③

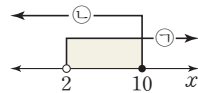
$$2(x+1) < 4x-2 \text{에서 } 2x+2 < 4x-2$$

$$-2x < -4 \quad \therefore x > 2 \quad \dots\dots ㉗$$

$$4x-2 \leq 3(x+2)+2 \text{에서 } 4x-2 \leq 3x+6+2$$

$$\therefore x \leq 10 \quad \dots\dots ㉘$$

㉗, ㉘을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 부등식의 해는 $2 < x \leq 10$



0736 답 ②

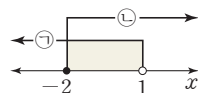
$$0.4x - 0.6 < -\frac{1}{2}x + 0.3 \text{에서 } 4x - 6 < -5x + 3$$

$$9x < 9 \quad \therefore x < 1 \quad \dots\dots ㉗$$

$$-\frac{1}{2}x + 0.3 \leq \frac{3}{10}x + 1.9 \text{에서 } -5x + 3 \leq 3x + 19$$

$$-8x \leq 16 \quad \therefore x \geq -2 \quad \dots\dots ㉘$$

㉗, ㉘을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 부등식의 해는 $-2 \leq x < 1$



따라서 $a = -2$, $b = 1$ 이므로 $ab = -2$

0737 답 -3

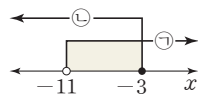
$$\frac{1+2x}{3} < \frac{3x+5}{4} \text{에서 } 4(1+2x) < 3(3x+5)$$

$$4+8x < 9x+15, -x < 11 \quad \therefore x > -11 \quad \dots\dots ㉗$$

$$\frac{3x+5}{4} \leq \frac{x+1}{2} \text{에서 } 3x+5 \leq 2(x+1)$$

$$3x+5 \leq 2x+2 \quad \therefore x \leq -3 \quad \dots\dots ㉘$$

㉗, ㉘을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 부등식의 해는 $-11 < x \leq -3$



따라서 x 의 최댓값은 -3 이다.

채점 기준

㉗ 부등식의 해 구하기

70 %

㉘ x 의 최댓값 구하기

30 %

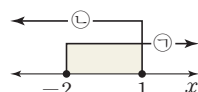
0738 답 ④

$$① x \geq -2 \quad \dots\dots ㉗$$

$$2x+1 \leq 3 \text{에서 } 2x \leq 2$$

$$\therefore x \leq 1 \quad \dots\dots ㉘$$

㉗, ㉘을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 $-2 \leq x \leq 1$



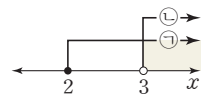
$$② 1 \leq x-1 \text{에서 } -x \leq -2$$

$$\therefore x \geq 2 \quad \dots\dots ㉙$$

$$3x < 5x-6 \text{에서 } -2x < -6$$

$$\therefore x > 3 \quad \dots\dots ㉚$$

㉗, ㉘을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 $x > 3$

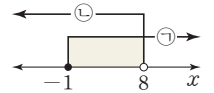


$$③ 3x-2 \geq 2x-3 \text{에서 } x \geq -1 \quad \dots\dots ㉗$$

$$2x+5 > 3(x-1) \text{에서 } 2x+5 > 3x-3$$

$$-x > -8 \quad \therefore x < 8 \quad \dots\dots ㉘$$

㉗, ㉘을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 $-1 \leq x < 8$



$$④ \frac{x+1}{4} - 1 \geq \frac{x-2}{3} \text{에서 } 3(x+1) - 12 \geq 4(x-2)$$

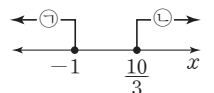
$$3x+3-12 \geq 4x-8, -x \geq -1$$

$$\therefore x \leq -1 \quad \dots\dots ㉗$$

$$10x-20 \geq x+10 \text{에서 } 9x \geq 30$$

$$\therefore x \geq \frac{10}{3} \quad \dots\dots ㉘$$

㉗, ㉘을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 없다.



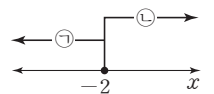
$$⑤ 4x+10 \leq -2(x+1) \text{에서 } 4x+10 \leq -2x-2$$

$$6x \leq -12 \quad \therefore x \leq -2 \quad \dots\dots ㉗$$

$$0.5x - 0.6 \geq 0.4x - 0.8 \text{에서 } 5x - 6 \geq 4x - 8$$

$$\therefore x \geq -2 \quad \dots\dots ㉘$$

㉗, ㉘을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 $x = -2$



따라서 해가 없는 것은 ④이다.

0739 답 해는 없다.

$$0.2(x-1) \leq 1 \text{에서 } 2(x-1) \leq 10$$

$$2x-2 \leq 10, 2x \leq 12$$

$$\therefore x \leq 6 \quad \dots\dots ㉗$$

$$2x-12 > x-4 \text{에서 } x > 8 \quad \dots\dots ㉘$$

㉗, ㉘을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 없다.



0740 답 ③

$$x-2 \leq \frac{3x-1}{2} \text{에서 } 2(x-2) \leq 3x-1$$

$$2x-4 \leq 3x-1, -x \leq 3$$

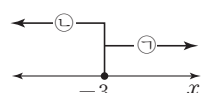
$$\therefore x \geq -3 \quad \dots\dots ㉗$$

$$\frac{3x-1}{2} \leq \frac{1}{3}x-4 \text{에서 } 3(3x-1) \leq 6\left(\frac{1}{3}x-4\right)$$

$$9x-3 \leq 2x-24, 7x \leq -21$$

$$\therefore x \leq -3 \quad \dots\dots ㉘$$

㉗, ㉘을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 부등식의 해는 $x = -3$

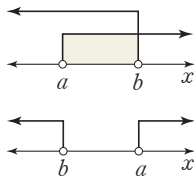


0741 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ, ㄴ. $a < b$ 이면 연립부등식의 해는
 $a < x < b$

ㄴ, ㄷ. $a > b$ 이면 연립부등식의 해는 없다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.



0742 답 ①

$5x - a \leq 4x$ 에서 $x \leq a$

$x + 1 < 2x + 2$ 에서 $-x < 1 \quad \therefore x > -1$

주어진 연립부등식의 해가 $b < x \leq 2$ 이므로

$a = 2, b = -1 \quad \therefore ab = -2$

0743 답 ③

$2x - 1 \leq 5$ 에서 $2x \leq 6 \quad \therefore x \leq 3$

$3x + 2a + 2 > 5$ 에서 $3x > -2a + 3 \quad \therefore x > \frac{-2a+3}{3}$

주어진 그림에서 연립부등식의 해가 $-1 < x \leq 3$ 이므로

$\frac{-2a+3}{3} = -1, -2a = -6 \quad \therefore a = 3$

0744 답 4

$2x + b \geq x - 1 + a$ 에서 $x \geq a - b - 1$

$3x - a \leq 5 + b$ 에서 $3x \leq a + b + 5 \quad \therefore x \leq \frac{a+b+5}{3} \quad \dots\dots \textcircled{i}$

주어진 연립부등식의 해가 $x = -4$ 이므로

$a - b - 1 = -4, \frac{a+b+5}{3} = -4$ 에서

$a - b = -3, a + b = -17$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -10, b = -7 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$

$\therefore a - 2b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① 각 일차부등식의 해 구하기	30%
② a, b의 값 구하기	50%
③ $a - 2b$ 의 값 구하기	20%

0745 답 ⑤

$3x - a < 2x$ 에서 $x < a$

$2x < bx + 2$ 에서 $(2-b)x < 2$

이때 주어진 부등식의 해가 $-1 < x < 3$ 이므로

$a = 3$ 이고, $2 - b < 0$ 이면서 $\frac{2}{2-b} = -1$ 이다.

따라서 $a = 3, b = 4$ 이므로 $a + b = 7$

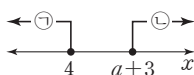
0746 답 ③

$3x - 7 \leq 5$ 에서 $3x \leq 12 \quad \therefore x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$x - 3 \geq a$ 에서 $x \geq a + 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서

$4 < a + 3 \quad \therefore a > 1$



0747 답 ⑤

$\frac{3-2x}{2} - a \leq 0$ 에서 $3 - 2x - 2a \leq 0$

$-2x \leq 2a - 3 \quad \therefore x \geq \frac{3-2a}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$3x - 4 > 5x - 10$ 에서

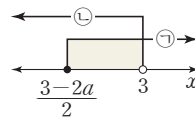
$-2x > -6 \quad \therefore x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서

$\frac{3-2a}{2} < 3, 3 - 2a < 6$

$-2a < 3 \quad \therefore a > -\frac{3}{2}$

따라서 정수 a의 최솟값은 -1이다.



0748 답 a ≤ 6

$2x + a - 6 \leq 3x - 4$ 에서

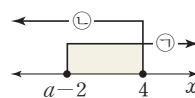
$-x \leq -a + 2 \quad \therefore x \geq a - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$3x - 4 \leq 12 - x$ 에서

$4x \leq 16 \quad \therefore x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서

$a - 2 \leq 4 \quad \therefore a \leq 6$

0749 답 $-4 < a \leq -1$

$1 - x \geq -3$ 에서 $-x \geq -4 \quad \therefore x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$5x + a > 2(x - 2)$ 에서 $5x + a > 2x - 4$

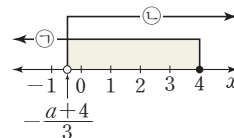
$3x > -a - 4 \quad \therefore x > -\frac{a+4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x

가 5개이려면 오른쪽 그림에서

$-1 \leq -\frac{a+4}{3} < 0, 0 < a + 4 \leq 3$

$\therefore -4 < a \leq -1$



0750 답 ③

$3x + 1 < 2(3 - x)$ 에서 $3x + 1 < 6 - 2x$

$5x < 5 \quad \therefore x < 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$x - a \leq 2x - 3$ 에서 $-x \leq a - 3$

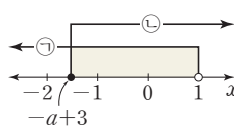
$\therefore x \geq -a + 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x

가 -1과 0뿐이려면 오른쪽 그림에서

$-2 < -a + 3 \leq -1, -5 < -a \leq -4$

$\therefore 4 \leq a < 5$



0751 답 ④

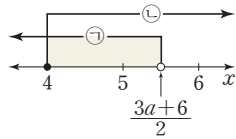
$3(x - a) - 2 < x + 4$ 에서 $3x - 3a - 2 < x + 4$

$2x < 3a + 6 \quad \therefore x < \frac{3a+6}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$x + 4 \leq 4(x - 2)$ 에서 $x + 4 \leq 4x - 8$

$-3x \leq -12 \quad \therefore x \geq 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 값의 합이 9이려면 오른쪽 그림에서 $5 < \frac{3a+6}{2} \leq 6$
 $10 < 3a+6 \leq 12$, $4 < 3a \leq 6$
 $\therefore \frac{4}{3} < a \leq 2$
 따라서 a 의 최댓값은 2이다.



0752 답 15개

과자를 x 개 사면 사탕은 $(20-x)$ 개 살 수 있으므로

$$\begin{cases} x > 20-x \\ 700x + 500(20-x) \leq 13000 \end{cases}$$

 $x > 20-x$ 에서 $2x > 20$
 $\therefore x > 10$ ㉠
 $700x + 500(20-x) \leq 13000$ 에서
 $700x + 10000 - 500x \leq 13000$, $200x \leq 3000$
 $\therefore x \leq 15$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $10 < x \leq 15$
 따라서 과자는 최대 15개까지 살 수 있다.

0753 답 $9 < x < 18$

세 변의 길이는 각각 x cm, x cm, $(36-2x)$ cm이다.
 (i) 가장 긴 변의 길이가 x cm일 때,
 $36-2x \leq x$ 에서 $-3x \leq -36$ $\therefore x \geq 12$ ㉠
 또 $x < x + (36-2x)$ 이어야 하므로
 $2x < 36$ $\therefore x < 18$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $12 \leq x < 18$ i
 (ii) 가장 긴 변의 길이가 $(36-2x)$ cm일 때,
 $x \leq 36-2x$ 에서 $3x \leq 36$ $\therefore x \leq 12$ ㉢
 또 $36-2x < x + x$ 이어야 하므로
 $-4x < -36$ $\therefore x > 9$ ㉣
 ㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $9 < x \leq 12$ ii
 (i), (ii)에서 삼각형을 만들 수 있는 x 의 값의 범위는
 $9 < x < 18$ iii

채점 기준

i 가장 긴 변의 길이가 x cm일 때, x 의 값의 범위 구하기	40 %
ii 가장 긴 변의 길이가 $(36-2x)$ cm일 때, x 의 값의 범위 구하기	40 %
iii 삼각형을 만들 수 있는 x 의 값의 범위 구하기	20 %

만렙 Note

삼각형의 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 짧아야 한다.

0754 답 110 g

식품 A의 섭취량을 x g이라 하면 식품 B의 섭취량은 $(300-x)$ g이므로

$$\begin{cases} \frac{150}{100}x + \frac{200}{100}(300-x) \geq 500 & \text{..... ㉠} \\ \frac{23}{100}x + \frac{13}{100}(300-x) \geq 50 & \text{..... ㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $15x + 20(300-x) \geq 5000$
 $15x + 6000 - 20x \geq 5000$, $-5x \geq -1000$
 $\therefore x \leq 200$ ㉢
 ㉡에서 $23x + 13(300-x) \geq 5000$
 $23x + 3900 - 13x \geq 5000$, $10x \geq 1100$
 $\therefore x \geq 110$ ㉣
 ㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $110 \leq x \leq 200$
 따라서 식품 A의 최소 섭취량은 110 g이다.

0755 답 125

5%의 소금물 200 g에 들어 있는 소금의 양은
 $200 \times \frac{5}{100} = 10$ (g)
 더 넣어야 하는 소금의 양을 x g이라 하면
 $\frac{20}{100} \times (200+x) \leq 10+x \leq \frac{24}{100} \times (200+x)$
 $\frac{20}{100} \times (200+x) \leq 10+x$ 에서
 $200+x \leq 50+5x$
 $-4x \leq -150$ $\therefore x \geq \frac{75}{2}$ ㉠
 $10+x \leq \frac{24}{100} \times (200+x)$ 에서
 $1000+100x \leq 4800+24x$
 $76x \leq 3800$ $\therefore x \leq 50$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{75}{2} \leq x \leq 50$
 따라서 $a = \frac{75}{2}$, $b = 50$ 이므로 $2a+b=125$

만렙 Note

농도가 $a\%$ 인 소금물 A g이 있을 때
 $\rightarrow$ (소금의 양) $= \frac{a}{100}A$ (g)

0756 답 ③

의자의 개수를 x 라 하면 학생은 $(3x+15)$ 명이므로
 $5(x-2)+1 \leq 3x+15 \leq 5(x-2)+5$ 에서
 $5x-9 \leq 3x+15 \leq 5x-5$
 $5x-9 \leq 3x+15$ 에서
 $2x \leq 24$ $\therefore x \leq 12$ ㉠
 $3x+15 \leq 5x-5$ 에서
 $-2x \leq -20$ $\therefore x \geq 10$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $10 \leq x \leq 12$
 따라서 의자의 최대 개수는 12이다.

0757 답 ④

$|2x-3| < 7$ 에서 $-7 < 2x-3 < 7$
 $-4 < 2x < 10$ $\therefore -2 < x < 5$
 따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ 의 6개이다.

0758 답 -5

$3x-6 \leq 0$ 에서 $3x \leq 6$
 $\therefore x \leq 2$ ㉠

$$|x+1| < 5 \text{에서 } -5 < x+1 < 5$$

$$\therefore -6 < x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①, ④의 공통부분을 구하면 $-6 < x \leq 2$

따라서 정수 x 의 최솟값은 -5 이다.

0759 답 ④

$$|x+a| \leq 8 \text{에서 } -8 \leq x+a \leq 8$$

$$\therefore -a-8 \leq x \leq -a+8$$

주어진 부등식의 해가 $b \leq x \leq 2$ 이므로

$$-a-8=b, -a+8=2$$

따라서 $a=6, b=-14$ 이므로

$$a-b=20$$

0760 답 ⑤

$$1 < |x-2| \text{에서 } x-2 < -1 \text{ 또는 } x-2 > 1$$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$|x-2| \leq 3 \text{에서 } -3 \leq x-2 \leq 3$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 5 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①, ④의 공통부분을 구하면

$$-1 \leq x < 1 \text{ 또는 } 3 < x \leq 5$$

따라서 정수 x 의 값은 $-1, 0, 4, 5$ 이므로 구하는 합은

$$-1+0+4+5=8$$

0761 답 3

$b < 0$ 이면 $|ax-1| < b$ 의 해가 존재하지 않으므로 $b > 0$

이때 $ab < 0$ 이므로 $a < 0$

$$|ax-1| < b \text{에서 } -b < ax-1 < b, -b+1 < ax < b+1$$

$$\therefore \frac{b+1}{a} < x < \frac{-b+1}{a} \quad (\because a < 0)$$

주어진 부등식의 해가 $-5 < x < 3$ 이므로

$$\frac{b+1}{a} = -5, \frac{-b+1}{a} = 3$$

$$\therefore 5a+b=-1, 3a+b=1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-1, b=4 \quad \therefore a+b=3$$

0762 답 ②

$|2x-1| < x+4$ 에서 $2x-1=0$, 즉 $x=\frac{1}{2}$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < \frac{1}{2}$ 일 때,

$$-(2x-1) < x+4, -2x+1 < x+4$$

$$-3x < 3 \quad \therefore x > -1$$

$$\text{그런데 } x < \frac{1}{2} \text{이므로 } -1 < x < \frac{1}{2}$$

(ii) $x \geq \frac{1}{2}$ 일 때,

$$2x-1 < x+4 \quad \therefore x < 5$$

$$\text{그런데 } x \geq \frac{1}{2} \text{이므로 } \frac{1}{2} \leq x < 5$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-1 < x < 5$

따라서 정수 x 의 최솟값은 0 이다.

0763 답 ⑤

$x > |3x+1|-7$ 에서 $3x+1=0$, 즉 $x=-\frac{1}{3}$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -\frac{1}{3}$ 일 때,

$$x > -(3x+1)-7, x > -3x-8$$

$$4x > -8 \quad \therefore x > -2$$

$$\text{그런데 } x < -\frac{1}{3} \text{이므로 } -2 < x < -\frac{1}{3}$$

(ii) $x \geq -\frac{1}{3}$ 일 때,

$$x > (3x+1)-7, x > 3x-6$$

$$-2x > -6 \quad \therefore x < 3$$

$$\text{그런데 } x \geq -\frac{1}{3} \text{이므로 } -\frac{1}{3} \leq x < 3$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2 < x < 3$

따라서 정수 x 의 값은 $-1, 0, 1, 2$ 이므로 구하는 합은

$$-1+0+1+2=2$$

0764 답 2

$|2x-4| \leq x+a$ 에서 $2x-4=0$, 즉 $x=2$ 를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 2$ 일 때,

$$-(2x-4) \leq x+a, -2x+4 \leq x+a$$

$$-3x \leq a-4 \quad \therefore x \geq \frac{4-a}{3}$$

$$\text{그런데 } x < 2 \text{이고 } a > 0 \text{에서 } \frac{4-a}{3} < \frac{4}{3} \text{이므로}$$

$$\frac{4-a}{3} \leq x < 2$$

(ii) $x \geq 2$ 일 때,

$$2x-4 \leq x+a \quad \therefore x \leq a+4$$

$$\text{그런데 } x \geq 2 \text{이고 } a > 0 \text{에서 } a+4 > 4 \text{이므로}$$

$$2 \leq x \leq a+4$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $\frac{4-a}{3} \leq x \leq a+4$

이는 $\frac{2}{3} \leq x \leq 6$ 과 같으므로

$$\frac{4-a}{3} = \frac{2}{3}, a+4=6$$

$$\therefore a=2$$

0765 답 ①

$|x-2| + |x+2| < 6$ 에서 $x+2=0$, $x-2=0$, 즉 $x=-2$, $x=2$ 를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -2$ 일 때,

$$-(x-2)-(x+2) < 6, -2x < 6 \quad \therefore x > -3$$

$$\text{그런데 } x < -2 \text{이므로 } -3 < x < -2$$

(ii) $-2 \leq x < 2$ 일 때,

$$-(x-2)+(x+2) < 6 \text{에서 } 0 < x < 2 \text{이므로 해는 모든 실수이다.}$$

$$\text{그런데 } -2 \leq x < 2 \text{이므로 } -2 \leq x < 2$$

(iii) $x \geq 2$ 일 때,

$$(x-2)+(x+2) < 6, 2x < 6 \quad \therefore x < 3$$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 $2 \leq x < 3$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-3 < x < 3$
따라서 $a = -3$, $b = 3$ 이므로 $ab = -9$

0766 [답] $x \leq -\frac{4}{3}$ 또는 $x \geq 0$

$|x-3|+2|x+1| \geq 5$ 에서 $x+1=0$, $x-3=0$, 즉 $x=-1$, $x=3$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -1$ 일 때,

$$\begin{aligned} -(x-3)-2(x+1) &\geq 5, -x+3-2x-2 \geq 5 \\ -3x &\geq 4 \quad \therefore x \leq -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

그런데 $x < -1$ 이므로 $x \leq -\frac{4}{3}$ ①

(ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때,

$$\begin{aligned} -(x-3)+2(x+1) &\geq 5, -x+3+2x+2 \geq 5 \\ \therefore x &\geq 0 \end{aligned}$$

그런데 $-1 \leq x < 3$ 이므로 $0 \leq x < 3$ ②

(iii) $x \geq 3$ 일 때,

$$\begin{aligned} (x-3)+2(x+1) &\geq 5, x-3+2x+2 \geq 5 \\ 3x &\geq 6 \quad \therefore x \geq 2 \end{aligned}$$

그런데 $x \geq 3$ 이므로 $x \geq 3$ ③

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$x \leq -\frac{4}{3} \text{ 또는 } x \geq 0 \quad \text{..... ④}$$

채점 기준

① $x < -1$ 일 때, x 의 값의 범위 구하기	30 %
② $-1 \leq x < 3$ 일 때, x 의 값의 범위 구하기	30 %
③ $x \geq 3$ 일 때, x 의 값의 범위 구하기	30 %
④ 부등식의 해 구하기	10 %

0767 [답] ④

$\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ 이므로 주어진 부등식은
 $|x-2|+|x-1| < 4$

$x-1=0$, $x-2=0$, 즉 $x=1$, $x=2$ 를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} -(x-2)-(x-1) &< 4, -x+2-x+1 < 4 \\ -2x &< 1 \quad \therefore x > -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $-\frac{1}{2} < x < 1$

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} -(x-2)+(x-1) &< 4 \text{에서 } 0 \times x < 3 \text{이므로 해는 모든 실수이다.} \\ \text{그런데 } 1 \leq x < 2 \text{이므로 } 1 \leq x < 2 \end{aligned}$$

(iii) $x \geq 2$ 일 때,

$$(x-2)+(x-1) < 4, 2x < 7 \quad \therefore x < \frac{7}{2}$$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 $2 \leq x < \frac{7}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$

따라서 정수 x 는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

0768 [답] ④

$$||x+2|+\sqrt{x^2-4x+4}| \leq 4 \text{에서}$$

$$||x+2|+\sqrt{(x-2)^2}| \leq 4$$

$$||x+2|+|x-2|| \leq 4$$

$$-4 \leq |x+2|+|x-2| \leq 4$$

$$|x+2| \geq 0, |x-2| \geq 0 \text{이므로}$$

$$0 \leq |x+2|+|x-2| \leq 4$$

$x+2=0$, $x-2=0$, 즉 $x=-2$, $x=2$ 를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -2$ 일 때,

$$0 \leq -(x+2)-(x-2) \leq 4, 0 \leq -x-2-x+2 \leq 4$$

$$0 \leq -2x \leq 4 \quad \therefore -2 \leq x \leq 0$$

그런데 $x < -2$ 이므로 해는 없다.

(ii) $-2 \leq x < 2$ 일 때,

$$0 \leq (x+2)-(x-2) \leq 4, 0 \leq 0 \times x + 4 \leq 4$$

따라서 해는 모든 실수이다.

그런데 $-2 \leq x < 2$ 이므로 $-2 \leq x < 2$

(iii) $x \geq 2$ 일 때,

$$0 \leq (x+2)+(x-2) \leq 4, 0 \leq 2x \leq 4 \quad \therefore 0 \leq x \leq 2$$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 $x=2$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2 \leq x \leq 2$

AB 유형 점검

120~122쪽

0769 [답] ①

$$x+3 < 3x \text{에서 } -2x < -3 \quad \therefore x > \frac{3}{2} \quad \text{..... ㉠}$$

$$3x+4 < 2x+8 \text{에서 } x < 4 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{3}{2} < x < 4$

따라서 $a = \frac{3}{2}$, $b = 4$ 이므로 $ab = 6$

0770 [답] ④

$$3(2x-1) \leq 4x+1 \text{에서 } 6x-3 \leq 4x+1$$

$$2x \leq 4 \quad \therefore x \leq 2 \quad \text{..... ㉠}$$

$$1-0.2x \leq x+2.2 \text{에서 } 10-2x \leq 10x+22$$

$$-12x \leq 12 \quad \therefore x \geq -1 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-1 \leq x \leq 2$

따라서 정수 x 의 값은 $-1, 0, 1, 2$ 이므로 구하는 합은
 $-1+0+1+2=2$

0771 [답] ④

$$0.2x-1 < 0.4x+\frac{3}{5} \text{에서 } 2x-10 < 4x+6$$

$$-2x < 16 \quad \therefore x > -8 \quad \text{..... ㉠}$$

$$0.4x+\frac{3}{5} < 2+0.2x \text{에서 } 4x+6 < 20+2x$$

$$2x < 14 \quad \therefore x < 7 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-8 < x < 7$

따라서 정수 x 는 $-7, -6, -5, \dots, 6$ 의 14개이다.

0772 답 해는 없다.

$$x+3 < 5x-1 \text{에서 } -4x < -4 \quad \therefore x > 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$5x-1 < 4x-3 \text{에서 } x < -2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분은 없으므로 주어진 부등식의 해는 없다.

0773 답 ②

$$5x-2 \geq 4x-8 \text{에서 } x \geq -6 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\frac{x-2}{3} \leq \frac{x}{4} - \frac{7}{6} \text{에서 } 4(x-2) \leq 3x-14$$

$$4x-8 \leq 3x-14 \quad \therefore x \leq -6 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $x = -6$

0774 답 21

$$x-1 > 8 \text{에서 } x > 9$$

$$2x-16 \leq x+a \text{에서 } x \leq a+16$$

주어진 연립부등식의 해가 $b < x \leq 28$ 이므로

$$b=9, a+16=28$$

$$\text{따라서 } a=12, b=9 \text{이므로 } a+b=21$$

0775 답 ④

$$3-5x \leq x+a \text{에서 } -6x \leq a-3 \quad \therefore x \geq \frac{3-a}{6}$$

$$3x+1 \geq 4x+3 \text{에서 } -x \geq 2 \quad \therefore x \leq -2$$

주어진 연립부등식의 해가 $x=b$ 이므로

$$b=-2, \frac{3-a}{6}=-2$$

$$\text{따라서 } a=15, b=-2 \text{이므로 } a+b=13$$

0776 답 -1

$$x+2 \leq 2x-a \text{에서 } -x \leq -a-2$$

$$\therefore x \geq a+2 \quad \dots\dots ㉠$$

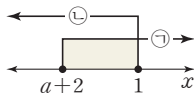
$$3x-2 \leq 5-4x \text{에서 } 7x \leq 7$$

$$\therefore x \leq 1 \quad \dots\dots ㉡$$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서

$$a+2 \leq 1 \quad \therefore a \leq -1$$

따라서 a 의 최댓값은 -1 이다.



0777 답 ⑤

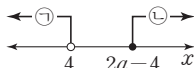
$$0.5x-2 < 0.1x-\frac{2}{5} \text{에서 } 5x-20 < x-4$$

$$4x < 16 \quad \therefore x < 4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$3x+4 \geq 2x+2a \text{에서 } x \geq 2a-4 \quad \dots\dots ㉡$$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서

$$2a-4 \geq 4, 2a \geq 8 \quad \therefore a \geq 4$$



0778 답 -17

$$2x-10 \leq 3(x-2) \text{에서 } 2x-10 \leq 3x-6$$

$$-x \leq 4 \quad \therefore x \geq -4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$3(x-2) < x+a \text{에서 } 3x-6 < x+a$$

$$2x < a+6 \quad \therefore x < \frac{a+6}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 가 3

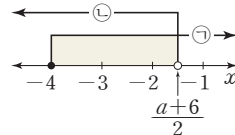
개이려면 오른쪽 그림에서

$$-2 < \frac{a+6}{2} \leq -1$$

$$-4 < a+6 \leq -2 \quad \therefore -10 < a \leq -8$$

따라서 정수 a 의 값은 $-9, -8$ 이므로 구하는 합은

$$(-9) + (-8) = -17$$



0779 답 ①

상자의 개수를 x 라 하면 사과는 $(12x+5)$ 개이므로

$$15(x-3)+1 \leq 12x+5 \leq 15(x-3)+15$$

$$15(x-3)+1 \leq 12x+5 \text{에서 } 15x-44 \leq 12x+5$$

$$3x \leq 49 \quad \therefore x \leq \frac{49}{3} \quad \dots\dots ㉠$$

$$12x+5 \leq 15(x-3)+15 \text{에서 } 12x+5 \leq 15x-30$$

$$-3x \leq -35 \quad \therefore x \geq \frac{35}{3} \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 } \frac{35}{3} \leq x \leq \frac{49}{3}$$

따라서 상자의 개수가 될 수 있는 것은 12, 13, 14, 15, 16이므로 상자의 개수가 될 수 없는 것은 ①이다.

0780 답 ②

$$|x-a| \geq 2 \text{에서 } x-a \leq -2 \text{ 또는 } x-a \geq 2$$

$$\therefore x \leq a-2 \text{ 또는 } x \geq a+2$$

주어진 부등식의 해가 $x \leq b$ 또는 $x \geq 3$ 이므로

$$a-2=b, a+2=3$$

$$\text{따라서 } a=1, b=-1 \text{이므로 } ab=-1$$

0781 답 ③

$$|x-7| \leq a+1 \text{에서 } -a-1 \leq x-7 \leq a+1$$

$$\therefore -a+6 \leq x \leq a+8$$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 가 9개가 되려면

$$(a+8) - (-a+6) + 1 = 9$$

$$2a=6 \quad \therefore a=3$$

0782 답 $a \leq 6$

$|x-1| < 2x-7$ 에서 $x-1=0$, 즉 $x=1$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 1$ 일 때,

$$-(x-1) < 2x-7, -x+1 < 2x-7$$

$$-3x < -8 \quad \therefore x > \frac{8}{3}$$

그런데 $x < 1$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x \geq 1$ 일 때,

$$x-1 < 2x-7, -x < -6 \quad \therefore x > 6$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x > 6$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x > 6$
 따라서 $x > a$ 에 $x > 6$ 이 포함되어야 하므로 $a \leq 6$

0783 답 ③

$|x| + |x+4| < 5$ 에서 $x+4=0$, $x=0$, 즉 $x=-4$, $x=0$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -4$ 일 때,

$$-x - (x+4) < 5, -2x < 9 \quad \therefore x > -\frac{9}{2}$$

$$\text{그런데 } x < -4 \text{이므로 } -\frac{9}{2} < x < -4$$

(ii) $-4 \leq x < 0$ 일 때,

$$-x + (x+4) < 5 \text{에서 } 0 \times x < 1 \text{이므로 해는 모든 실수이다.}$$

$$\text{그런데 } -4 \leq x < 0 \text{이므로 } -4 \leq x < 0$$

(iii) $x \geq 0$ 일 때,

$$x + (x+4) < 5, 2x < 1 \quad \therefore x < \frac{1}{2}$$

$$\text{그런데 } x \geq 0 \text{이므로 } 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-\frac{9}{2} < x < \frac{1}{2}$

$$\text{따라서 } a = -\frac{9}{2}, b = \frac{1}{2} \text{이므로 } a+b = -4$$

0784 답 $\frac{15}{2}$

$$2x+5 \leq 3x+a \text{에서 } -x \leq a-5 \quad \therefore x \geq 5-a$$

$$3x+1 \geq -x+2a+2 \text{에서 } 4x \geq 2a+1$$

$$\therefore x \geq \frac{2a+1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

주어진 연립부등식의 해가 $x \geq 4$ 이므로

$$5-a=4 \text{ 또는 } \frac{2a+1}{4}=4$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=\frac{15}{2} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\text{따라서 모든 } a \text{의 값의 곱은 } 1 \times \frac{15}{2} = \frac{15}{2} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 각 일차부등식의 해 구하기	40 %
② a 의 값 구하기	40 %
③ 모든 a 의 값의 곱 구하기	20 %

0785 답 -18

$$2x+8 > 5x+2 \text{에서}$$

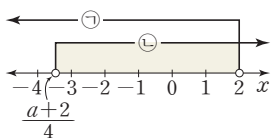
$$-3x > -6 \quad \therefore x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$7x-2 > 3x+a \text{에서}$$

$$4x > a+2 \quad \therefore x > \frac{a+2}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 의 값의 합이 -5이려면 오른쪽 그림에서

$$-4 \leq \frac{a+2}{4} < -3, -16 \leq a+2 < -12$$



$$\therefore -18 \leq a < -14 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 -18이다. $\dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① 각 일차부등식의 해 구하기	40 %
② a 의 값의 범위 구하기	40 %
③ 정수 a 의 최솟값 구하기	20 %

0786 답 35

연속하는 세 홀수를 $x-2$, x , $x+2$ 라 하면

$$93 < (x-2) + x + (x+2) < 102 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$93 < 3x < 102 \quad \therefore 31 < x < 34$$

$$\text{이때 } x \text{는 홀수이므로 } x=33 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 연속하는 세 홀수는 31, 33, 35이므로 가장 큰 수는 35이다.

$\dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① 부등식 세우기	40 %
② 부등식을 만족시키는 홀수 구하기	40 %
③ 가장 큰 홀수 구하기	20 %

C 실력 향상

123쪽

0787 답 ②

$$ax-b \leq 0 \text{에서 } ax \leq b$$

주어진 그림에서 이 부등식의 해가 $x \leq 3$ 이므로

$$a > 0, \frac{b}{a} = 3 \quad \therefore b = 3a$$

$$cx+d > 0 \text{에서 } cx > -d$$

주어진 그림에서 이 부등식의 해가 $x < -4$ 이므로

$$c < 0, -\frac{d}{c} = -4 \quad \therefore d = 4c$$

$bx-a \geq 0$ 에 $b=3a$ 를 대입하면

$$3ax-a \geq 0, 3ax \geq a \quad \therefore x \geq \frac{1}{3} (\because a > 0) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$-cx+d < 2c$ 에 $d=4c$ 를 대입하면

$$-cx+4c < 2c, -cx < -2c \quad \therefore x < 2 (\because c < 0) \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{1}{3} \leq x < 2$

0788 답 $a \leq \frac{1}{2}$

$$2(x-3) < 5(x-4) + 2 \text{에서 } 2x-6 < 5x-20+2$$

$$-3x < -12 \quad \therefore x > 4$$

$$ax-2 \geq x-4 \text{에서 } (a-1)x \geq -2$$

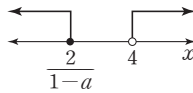
$$(i) a-1 < 0, \text{ 즉 } a < 1 \text{일 때, } x \leq \frac{2}{1-a}$$

$$(ii) a-1 = 0, \text{ 즉 } a=1 \text{일 때,}$$

$$0 \times x \geq -2 \text{이므로 해는 모든 실수이다.}$$

$$(iii) a-1 > 0, \text{ 즉 } a > 1 \text{일 때, } x \geq \frac{2}{1-a}$$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$a < 1$ 이고 $x \leq \frac{2}{1-a}$ 이어야 하므로

$$\frac{2}{1-a} \leq 4, 2 \leq 4(1-a), 2 \leq 4-4a$$

$$4a \leq 2 \quad \therefore a \leq \frac{1}{2}$$

0789 답 6

이번 달까지 매달 저축한 금액과 소비한 금액의 합은 40만 원이다.
6만 원의 $x\%$ 를 늘리고 34만 원의 7% 를 줄이면 40만 원의 5% 이상 줄게 되므로

$$6(1+0.01x) + 34 \times 0.93 \leq 40 \times 0.95$$

$$6(100+x) + 34 \times 93 \leq 40 \times 95, 600 + 6x + 3162 \leq 3800$$

$$6x \leq 38 \quad \therefore x \leq \frac{19}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

6만 원의 5% 를 늘리고 34만 원의 $x\%$ 를 줄이면 40만 원의 4% 이상 줄게 되므로

$$6 \times 1.05 + 34(1-0.01x) \leq 40 \times 0.96$$

$$6 \times 105 + 34(100-x) \leq 40 \times 96, 630 + 3400 - 34x \leq 3840$$

$$-34x \leq -190 \quad \therefore x \geq \frac{95}{17} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{의 공통부분을 구하면 } \frac{95}{17} \leq x \leq \frac{19}{3}$$

따라서 정수 x 의 값은 6이다.

0790 답 ①

$|x-a| + |x| \leq b$ 에 $a=n, b=n+5$ 를 대입하면

$$|x-n| + |x| \leq n+5$$

$x=0, x-n=0$, 즉 $x=0, x=n$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 0$ 일 때,

$$-(x-n) - x \leq n+5, -2x \leq 5 \quad \therefore x \geq -\frac{5}{2}$$

$$\text{그런데 } x < 0 \text{이므로 } -\frac{5}{2} \leq x < 0$$

(ii) $0 \leq x < n$ 일 때,

$$-(x-n) + x \leq n+5$$

$$0 \times x \leq 5 \text{이므로 해는 모든 실수이다.}$$

$$\text{그런데 } 0 \leq x < n \text{이므로 } 0 \leq x < n$$

(iii) $x \geq n$ 일 때,

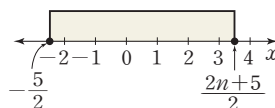
$$(x-n) + x \leq n+5$$

$$2x \leq 2n+5 \quad \therefore x \leq \frac{2n+5}{2}$$

$$\text{그런데 } x \geq n \text{이므로 } n \leq x \leq \frac{2n+5}{2} \left(\because n < \frac{2n+5}{2} \right)$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } -\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{2n+5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(n, n+5)=6$ 에서 ①을 만족시키는 정수 x 가 6개이므로 오른쪽 그림에서



$$3 \leq \frac{2n+5}{2} < 4$$

$$6 \leq 2n+5 < 8, 1 \leq 2n < 3 \quad \therefore \frac{1}{2} \leq n < \frac{3}{2}$$

따라서 자연수 n 의 값은 1이다.

08 / 이차부등식

A 개념 확인

124~127쪽

0791 답 $x < -1$ 또는 $x > 3$

0792 답 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 3$

0793 답 $-1 < x < 3$

0794 답 $-1 \leq x \leq 3$

0795 답 $-1 \leq x \leq 2$

0796 답 $x < -1$ 또는 $x > 1$

0797 답 $-1 < x < 5$

0798 답 $3 \leq x \leq 4$

0799 답 $x < -5$ 또는 $x > -2$

0800 답 $x \leq -3$ 또는 $x \geq 1$

0801 답 $x \neq 3$ 인 모든 실수

0802 답 모든 실수

0803 답 $x = -\frac{1}{2}$

0804 답 해는 없다.

0805 답 모든 실수

0806 답 해는 없다.

0807 답 $x^2 - x - 2 < 0$

해가 $-1 < x < 2$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x+1)(x-2) < 0 \quad \therefore x^2 - x - 2 < 0$

0808 답 $x^2 - 4x - 12 \geq 0$

해가 $x \leq -2$ 또는 $x \geq 6$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x+2)(x-6) \geq 0 \quad \therefore x^2 - 4x - 12 \geq 0$

0809 답 $x^2 - 8x + 16 > 0$

해가 $x \neq 4$ 인 모든 실수이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x-4)^2 > 0 \quad \therefore x^2 - 8x + 16 > 0$

0810 답 $a \geq 2$

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2+2x+a-1 \geq 0$ 이 성립하려면 이차방정식 $x^2+2x+a-1=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4} = 1 - (a-1) \leq 0 \quad \therefore a \geq 2$$

0811 답 $0 < a < 20$

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2-ax+5a > 0$ 이 성립하려면 이차방정식 $x^2-ax+5a=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$D = a^2 - 20a < 0, \quad a(a-20) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 20$$

0812 답 $a \geq \frac{5}{4}$

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $-x^2+x-a+1 \leq 0$ 이 성립하려면 이차방정식 $-x^2+x-a+1=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$D = 1 + 4(-a+1) \leq 0, \quad -4a+5 \leq 0$$

$$\therefore a \geq \frac{5}{4}$$

0813 답 $0 < a < \frac{1}{2}$

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $-2x^2-4ax-a < 0$ 이 성립하려면 이차방정식 $-2x^2-4ax-a=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

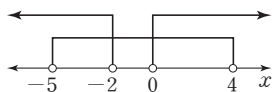
$$\frac{D}{4} = 4a^2 - 2a < 0, \quad 2a(2a-1) < 0$$

$$\therefore 0 < a < \frac{1}{2}$$

0814 답 $-5 < x < 4$

0815 답 $x < -2$ 또는 $x > 0$

0816 답 풀이 참고



0817 답 $-5 < x < -2$ 또는 $0 < x < 4$

0818 답 $-4 \leq x < -2$

$$x+2 < 0 \text{에서 } x < -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x^2+2x-8 \leq 0 \text{에서 } (x+4)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면 $-4 \leq x < -2$

0819 답 $x \geq 3$

$$2x-3 \geq 1 \text{에서 } 2x \geq 4 \quad \therefore x \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2x^2-5x-3 \geq 0 \text{에서 } (2x+1)(x-3) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면 $x \geq 3$

0820 답 $-2 < k \leq 2$

이차방정식 $x^2-4x+k+2=0$ 의 판별식을 D , 두 실근을 α, β 라 하면 두 근이 모두 양수이므로

$$(i) \frac{D}{4} = 4 - (k+2) \geq 0, \quad 2-k \geq 0 \quad \therefore k \leq 2$$

$$(ii) \alpha + \beta = 4 > 0$$

$$(iii) \alpha\beta = k+2 > 0 \quad \therefore k > -2$$

(i), (ii), (iii)에서 $-2 < k \leq 2$

0821 답 $k \geq 3$

이차방정식 $x^2+(k+1)x+4=0$ 의 판별식을 D , 두 실근을 α, β 라 하면 두 근이 모두 음수이므로

$$(i) D = (k+1)^2 - 16 \geq 0, \quad k^2+2k-15 \geq 0$$

$$(k+5)(k-3) \geq 0 \quad \therefore k \leq -5 \text{ 또는 } k \geq 3$$

$$(ii) \alpha + \beta = -(k+1) < 0 \quad \therefore k > -1$$

$$(iii) \alpha\beta = 4 > 0$$

(i), (ii), (iii)에서 $k \geq 3$

0822 답 $k < -3$

이차방정식 $x^2-5x+k+3=0$ 의 두 실근을 α, β 라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$$\alpha\beta = k+3 < 0 \quad \therefore k < -3$$

0823 답 $\geq, >, >$

0824 답 $<$

B 유형 완성

128~139쪽

0825 답 $x \leq \frac{3}{2}$ 또는 $x \geq \frac{7}{2}$

부등식 $f(x) \geq g(x)$ 의 해는 $y=f(x)$ 의 그래프가 $y=g(x)$ 의 그래프보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$x \leq \frac{3}{2} \text{ 또는 } x \geq \frac{7}{2}$$

0826 답 ②

$$ax^2+(b-m)x+c-n < 0 \text{에서 } ax^2+bx+c < mx+n$$

부등식 $ax^2+bx+c < mx+n$ 의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 직선 $y=mx+n$ 보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$-4 < x < \frac{1}{2}$$

0827 답 $-3 < x < -2$ 또는 $1 < x < 2$

$f(x)g(x) > 0$ 에서

$$f(x) > 0, g(x) > 0 \text{ 또는 } f(x) < 0, g(x) < 0$$

- (i) $f(x) > 0, g(x) > 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $-3 < x < -2$
- (ii) $f(x) < 0, g(x) < 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $1 < x < 2$
- (i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는
 $-3 < x < -2$ 또는 $1 < x < 2$

0828 [답] ①

$x^2 + 3x - 13 > x + 2$ 에서 $x^2 + 2x - 15 > 0$
 $(x+5)(x-3) > 0 \quad \therefore x < -5$ 또는 $x > 3$
 따라서 $\alpha = -5, \beta = 3$ 이므로
 $\alpha - \beta = -8$

0829 [답] ④

- ① $-x^2 + 10x - 25 \geq 0$ 에서 $x^2 - 10x + 25 \leq 0$
 $(x-5)^2 \leq 0$
 따라서 이차부등식 $-x^2 + 10x - 25 \geq 0$ 의 해는
 $x = 5$
- ② $-x^2 + x + 12 < 0$ 에서 $x^2 - x - 12 > 0$
 $(x+3)(x-4) > 0$
 $\therefore x < -3$ 또는 $x > 4$
- ③ 이차방정식 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 의 해는 $x = 2 \pm \sqrt{2}$ 이므로 이차부등식
 $x^2 - 4x + 2 \leq 0$ 의 해는
 $2 - \sqrt{2} \leq x \leq 2 + \sqrt{2}$
- ④ $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \geq 2$ 이므로 이차부등식 $x^2 - 2x + 3 < 0$
 의 해는 없다.
- ⑤ $2x^2 - 3x + 2 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8}$ 이므로 이차부등식
 $2x^2 - 3x + 2 \geq 0$ 의 해는 모든 실수이다.
 따라서 이차부등식 중 해가 없는 것은 ④이다.

0830 [답] ③

$x^2 - 2|x| - 8 < 0$ 에서 $x=0$ 을 기준으로 구간을 나누면

- (i) $x < 0$ 일 때,
 $x^2 + 2x - 8 < 0, (x+4)(x-2) < 0$
 $\therefore -4 < x < 2$
 그런데 $x < 0$ 이므로 $-4 < x < 0$
- (ii) $x \geq 0$ 일 때,
 $x^2 - 2x - 8 < 0, (x+2)(x-4) < 0$
 $\therefore -2 < x < 4$
 그런데 $x \geq 0$ 이므로 $0 \leq x < 4$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-4 < x < 4$
 따라서 정수 x 의 최댓값은 3, 최솟값은 -3 이므로 구하는 합은
 $3 + (-3) = 0$

0831 [답] 7

$x^2 - 3x - 4 \leq |x+1|$ 에서 $x+1=0$, 즉 $x=-1$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -1$ 일 때,
 $x^2 - 3x - 4 \leq -(x+1), x^2 - 2x - 3 \leq 0$

$$(x+1)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 3$$

그런데 $x < -1$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x \geq -1$ 일 때,

$$x^2 - 3x - 4 \leq x+1, x^2 - 4x - 5 \leq 0$$

$$(x+1)(x-5) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 5$$

그런데 $x \geq -1$ 이므로 $-1 \leq x \leq 5$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-1 \leq x \leq 5$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, \dots, 5$ 의 7개이다.

0832 [답] ②

둘레의 길이가 20인 직사각형의 가로의 길이를 x 라 하면 세로의 길이는 $10-x$ ($0 < x < 10$)이므로 넓이가 24 이상이라면

$$x(10-x) \geq 24, x^2 - 10x + 24 \geq 0$$

$$(x-4)(x-6) \leq 0 \quad \therefore 4 \leq x \leq 6$$

따라서 직사각형의 가로의 길이의 최솟값은 4이다.

0833 [답] $\frac{2}{5} \leq t \leq 1$

공의 높이가 지면으로부터 3 m 이상이라면

$$-5t^2 + 7t + 1 \geq 3, 5t^2 - 7t + 2 \leq 0$$

$$(5t-2)(t-1) \leq 0 \quad \therefore \frac{2}{5} \leq t \leq 1$$

0834 [답] 80

사용료를 올리기 전의 한 달 사용료를 A 원, 회원 수를 B 라 하면

$x\%$ 만큼 올린 사용료는 $A\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ 원, $0.5x\%$ 만큼 줄어든 회원

수는 $B\left(1 - \frac{x}{200}\right)$ 이므로

$$A\left(1 + \frac{x}{100}\right) \times B\left(1 - \frac{x}{200}\right) \geq AB\left(1 + \frac{8}{100}\right) \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)\left(1 - \frac{x}{200}\right) \geq 1 + \frac{8}{100}$$

$$(100+x)(200-x) \geq 21600, x^2 - 100x + 1600 \leq 0$$

$$(x-20)(x-80) \leq 0 \quad \therefore 20 \leq x \leq 80 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 x 의 최댓값은 80이다. $\dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① 부등식 세우기	40 %
② x 의 값의 범위 구하기	40 %
③ x 의 최댓값 구하기	20 %

0835 [답] ①

이차부등식 $ax^2 - 2x + b > 0$ 의 해가 $x < -2$ 또는 $x > 4$ 이므로
 $a > 0$

해가 $x < -2$ 또는 $x > 4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+2)(x-4) > 0 \quad \therefore x^2 - 2x - 8 > 0$$

양변에 a 를 곱하면 $ax^2 - 2ax - 8a > 0$ ($\because a > 0$)

이 부등식이 $ax^2 - 2x + b > 0$ 과 같으므로

$$-2a = -2, -8a = b \quad \therefore a = 1, b = -8$$

$$\therefore ab = -8$$

0836 [답] ①

해가 $-8 < x < b$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x+8)(x-b) < 0 \quad \therefore x^2 + (8-b)x - 8b < 0$
 이 부등식이 $x^2 + 6x + a < 0$ 과 같으므로
 $8-b=6, -8b=a \quad \therefore a=-16, b=2$
 $\therefore a+b=-14$

0837 [답] ①

해가 $x=1$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x-1)^2 \leq 0 \quad \therefore x^2 - 2x + 1 \leq 0$
 이 부등식이 $x^2 + ax + b \leq 0$ 과 같으므로
 $a=-2, b=1$
 이를 $ax^2 + bx + 1 \geq 0$ 에 대입하면 $-2x^2 + x + 1 \geq 0$
 $2x^2 - x - 1 \leq 0, (2x+1)(x-1) \leq 0 \quad \therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$
 따라서 정수 x 는 0, 1의 2개이다.

0838 [답] $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$

이차부등식 $ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $x < -3$ 또는 $x > 4$ 이므로
 $a < 0$
 해가 $x < -3$ 또는 $x > 4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x+3)(x-4) > 0 \quad \therefore x^2 - x - 12 > 0 \quad \dots\dots \textcircled{i}$
 양변에 a 를 곱하면 $ax^2 - ax - 12a < 0$ ($\because a < 0$)
 이 부등식이 $ax^2 + bx + c < 0$ 과 같으므로
 $b=-a, c=-12a \quad \dots\dots \textcircled{ii}$
 이를 $cx^2 + ax - b < 0$ 에 대입하면 $-12ax^2 + ax + a < 0$
 양변을 $-a$ 로 나누면 $12x^2 - x - 1 < 0$ ($\because a < 0$)
 $(4x+1)(3x-1) < 0 \quad \therefore -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① $x < -3$ 또는 $x > 4$ 를 해로 갖는 이차부등식 구하기	30%
② b, c 를 a 에 대하여 나타내기	30%
③ 이차부등식 $cx^2 + ax - b < 0$ 의 해 구하기	40%

0839 [답] $-1 < x < 0$

이차부등식 $f(x) < 0$ 의 해가 $1 < x < 3$ 이므로
 $f(x) = a(x-1)(x-3)$ ($a > 0$)이라 하면
 $f(2x+3) = a(2x+3-1)(2x+3-3) = 4ax(x+1)$
 따라서 부등식 $f(2x+3) < 0$, 즉 $4ax(x+1) < 0$ 에서
 $x(x+1) < 0$ ($\because a > 0$) $\therefore -1 < x < 0$
다른 풀이 $f(x) < 0$ 의 해가 $1 < x < 3$ 이므로 $f(2x+3) < 0$ 의 해는
 $1 < 2x+3 < 3, -2 < 2x < 0 \quad \therefore -1 < x < 0$

0840 [답] ③

이차부등식 $f(x) \leq 0$ 의 해가 $-5 \leq x \leq -3$ 이므로
 $f(x) = a(x+3)(x+5)$ ($a > 0$)라 하면
 $f(10-2x) = a(10-2x+3)(10-2x+5)$
 $= a(2x-13)(2x-15)$

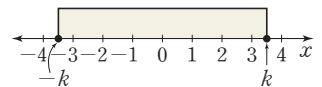
부등식 $f(10-2x) > 0$, 즉 $a(2x-13)(2x-15) > 0$ 에서
 $(2x-13)(2x-15) > 0$ ($\because a > 0$)
 $\therefore x < \frac{13}{2}$ 또는 $x > \frac{15}{2}$
 따라서 부등식 $f(10-2x) > 0$ 의 해가 아닌 것은 ③이다.

0841 [답] ③

주어진 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 두 점 $(-1, 0)$,
 $(2, 0)$ 에서 만나고 위로 볼록하므로
 $f(x) = a(x+1)(x-2)$ ($a < 0$)라 하면
 $f\left(\frac{x+k}{2}\right) = a\left(\frac{x+k}{2}+1\right)\left(\frac{x+k}{2}-2\right)$
 $= \frac{a}{4}(x+k+2)(x+k-4)$
 따라서 부등식 $f\left(\frac{x+k}{2}\right) \geq 0$, 즉 $\frac{a}{4}(x+k+2)(x+k-4) \geq 0$ 에서
 $(x+k+2)(x+k-4) \leq 0$ ($\because a < 0$)
 $\therefore -k-2 \leq x \leq -k+4$
 이때 부등식 $f\left(\frac{x+k}{2}\right) \geq 0$ 의 해가 $-3 \leq x \leq 3$ 이므로
 $-k-2 = -3, -k+4 = 3$
 $\therefore k=1$

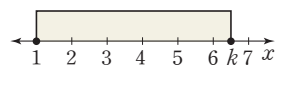
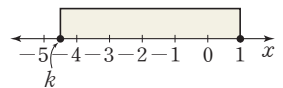
0842 [답] 3

$x^2 - k^2 \leq 0$ 에서 $(x+k)(x-k) \leq 0$
 $\therefore -k \leq x \leq k$ ($\because k > 0$)
 주어진 이차부등식을 만족시키는
 정수 x 가 7개이라면 오른쪽 그
 림에서 $3 \leq k < 4$
 따라서 자연수 k 의 값은 3이다.



0843 [답] ①

$x^2 - (k+1)x + k \leq 0$ 에서 $(x-1)(x-k) \leq 0$
 (i) $k < 1$ 일 때,
 $(x-1)(x-k) \leq 0$ 에서 $k \leq x \leq 1$
 이 이차부등식을 만족시키는 정
 수 x 가 6개이라면 오른쪽 그림에
 서 $-5 < k \leq -4$
 즉, 정수 k 의 값은 -4 이다.
 (ii) $k=1$ 일 때,
 $(x-1)(x-k) \leq 0$ 에서 $(x-1)^2 \leq 0$
 이 이차부등식을 만족시키는 정수 x 의 값은 1뿐이므로 주어진
 조건을 만족시키지 않는다.
 (iii) $k > 1$ 일 때,
 $(x-1)(x-k) \leq 0$ 에서 $1 \leq x \leq k$
 이 이차부등식을 만족시키는 정
 수 x 가 6개이라면 오른쪽 그림에
 서 $6 \leq k < 7$
 즉, 정수 k 의 값은 6이다.
 (i), (ii), (iii)에서 정수 k 의 값은 $-4, 6$ 이므로 구하는 합은
 $-4+6=2$



0844 [답] ②

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $ax^2+6x+a-8 \leq 0$ 이 성립하려면 $a < 0$

또 이차방정식 $ax^2+6x+a-8=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - a(a-8) \leq 0$$

$$a^2 - 8a - 9 \geq 0, (a+1)(a-9) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -1 \text{ 또는 } a \geq 9$$

그런데 $a < 0$ 이므로 $a \leq -1$

따라서 상수 a 의 최댓값은 -1 이다.

0845 [답] ④

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2+(m+2)x+2m+1 > 0$ 이 성립하려면 이차방정식 $x^2+(m+2)x+2m+1=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$D = (m+2)^2 - 4(2m+1) < 0$$

$$m^2 - 4m < 0, m(m-4) < 0$$

$$\therefore 0 < m < 4$$

따라서 정수 m 의 값은 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$$1+2+3=6$$

0846 [답] 1

부등식 $(a-1)x^2+2(a-1)x+4a+2 > 0$ 에서

(i) $a=1$ 일 때,

$0 \times x^2 + 0 \times x + 6 > 0$ 이므로 x 의 값에 관계없이 주어진 부등식이 항상 성립한다. ㉠

(ii) $a \neq 1$ 일 때,

x 의 값에 관계없이 주어진 부등식이 항상 성립하려면 이차함수 $y = (a-1)x^2 + 2(a-1)x + 4a+2$ 의 그래프가 아래로 볼록해야 하므로

$$a-1 > 0 \quad \therefore a > 1 \quad \dots\dots ㉡$$

또 이차방정식 $(a-1)x^2+2(a-1)x+4a+2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - (a-1)(4a+2) < 0$$

$$3a^2 - 3 > 0, (a+1)(a-1) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 1 \quad \dots\dots ㉢$$

$$㉡, ㉢ \text{에서 } a > 1$$

(i), (ii)에서 a 의 값의 범위는 $a \geq 1$

따라서 a 의 최솟값은 1이다. ㉣

채점 기준

㉠ $a=1$ 일 때, 부등식이 항상 성립하는 조건 구하기	30 %
㉡ $a \neq 1$ 일 때, 부등식이 항상 성립하는 조건 구하기	50 %
㉣ a 의 최솟값 구하기	20 %

0847 [답] ③

(i) $a > 0$ 일 때,

이차함수 $y = ax^2 - 2ax - 6$ 의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a < 0$ 일 때,

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식

$ax^2 - 2ax - 6 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 + 6a > 0$$

$$a(a+6) > 0 \quad \therefore a < -6 \text{ 또는 } a > 0$$

그런데 $a < 0$ 이므로 $a < -6$

(i), (ii)에서 a 의 값의 범위는

$$a < -6 \text{ 또는 } a > 0$$

0848 [답] ③

이차부등식 $3x^2 - 3x - a < 0$ 이 해를 가지려면 이차방정식

$3x^2 - 3x - a = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = 9 + 12a > 0 \quad \therefore a > -\frac{3}{4}$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 0이다.

0849 [답] ④

(i) $a > 0$ 일 때,

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식

$ax^2 + 2(a-1)x + 6(a-1) = 0$ 이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - 6a(a-1) \geq 0$$

$$5a^2 - 4a - 1 \leq 0, (5a+1)(a-1) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{5} \leq a \leq 1$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $0 < a \leq 1$

(ii) $a < 0$ 일 때,

이차함수 $y = ax^2 + 2(a-1)x + 6(a-1)$ 의 그래프는 위로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(i), (ii)에서 a 의 값의 범위는

$$a < 0 \text{ 또는 } 0 < a \leq 1$$

0850 [답] 2

이차부등식 $2x^2 + 4x + a \leq 0$ 의 해가 오직 한 개이므로 이차방정식

$2x^2 + 4x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4 - 2a = 0 \quad \therefore a = 2$$

0851 [답] ①

이차부등식 $(k+1)x^2 + 2(k+1)x - 2 \geq 0$ 의 해가 오직 한 개이므로

$$k+1 < 0 \quad \therefore k < -1$$

또 이차방정식 $(k+1)x^2 + 2(k+1)x - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k+1)^2 + 2(k+1) = 0$$

$$k^2 + 4k + 3 = 0, (k+3)(k+1) = 0$$

$$\therefore k = -3 \text{ 또는 } k = -1$$

그런데 $k < -1$ 이므로 $k = -3$

0852 [답] $-6 \leq k \leq -2$

이차부등식 $x^2 - 2(k+2)x - 4(k+2) < 0$ 이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2(k+2)x - 4(k+2) \geq 0$ 이 성립해야 한다.
즉, 이차방정식 $x^2 - 2(k+2)x - 4(k+2) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (k+2)^2 + 4(k+2) \leq 0$
 $k^2 + 8k + 12 \leq 0, (k+6)(k+2) \leq 0$
 $\therefore -6 \leq k \leq -2$

0853 [답] ④

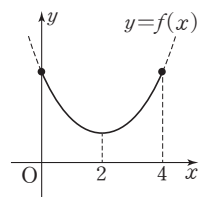
$ax^2 - 2x > -ax + 2$ 에서 $ax^2 + (a-2)x - 2 > 0$
이 이차부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여
 $ax^2 + (a-2)x - 2 \leq 0$ 이 성립해야 하므로 $a < 0$ 이어야 한다.
또 이차방정식 $ax^2 + (a-2)x - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = (a-2)^2 + 8a \leq 0$
 $a^2 + 4a + 4 \leq 0, (a+2)^2 \leq 0$
 $\therefore a = -2$

0854 [답] ④

이차부등식 $ax^2 + 2(a+2)x + 2a + 1 < 0$ 이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + 2(a+2)x + 2a + 1 \geq 0$ 이 성립해야 하므로 $a > 0$ 이어야 한다.
또 이차방정식 $ax^2 + 2(a+2)x + 2a + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (a+2)^2 - a(2a+1) \leq 0$
 $a^2 - 3a - 4 \geq 0, (a+1)(a-4) \geq 0$
 $\therefore a \leq -1$ 또는 $a \geq 4$
그런데 $a > 0$ 이므로 $a \geq 4$

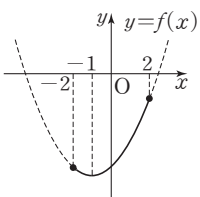
0855 [답] $a < -2$ 또는 $a > 1$

$f(x) = x^2 - 4x + a^2 + a + 2$ 라 하면
 $f(x) = (x-2)^2 + a^2 + a - 2$
 $0 \leq x \leq 4$ 에서 $f(x) > 0$ 이어야 하므로
 $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.
 $0 \leq x \leq 4$ 에서 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최소이므로
 $f(2) > 0$ 에서
 $a^2 + a - 2 > 0, (a+2)(a-1) > 0$
 $\therefore a < -2$ 또는 $a > 1$



0856 [답] ④

$f(x) = 2x^2 + 4x + a^2 + 3a - 20$ 이라 하면
 $f(x) = 2(x+1)^2 + a^2 + 3a - 22$
 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x) < 0$ 이어야 하므로
 $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.
 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최대이므로
 $f(2) < 0$ 에서
 $18 + a^2 + 3a - 22 < 0$



$a^2 + 3a - 4 < 0, (a+4)(a-1) < 0$
 $\therefore -4 < a < 1$
따라서 정수 a 의 최댓값은 0이다.

0857 [답] ⑤

이차함수 $y = x^2 - ax + 7$ 의 그래프가 직선 $y = 2x - 5$ 보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위는
 $x^2 - ax + 7 > 2x - 5$, 즉 $x^2 - (a+2)x + 12 > 0$ ㉠
의 해와 같다.
해가 $x < 3$ 또는 $x > b$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x-3)(x-b) > 0 \therefore x^2 - (3+b)x + 3b > 0$
이 부등식이 ㉠과 같으므로
 $a+2 = 3+b, 12 = 3b \therefore a = 5, b = 4$
 $\therefore a+b = 9$

0858 [답] ②

이차함수 $y = x^2 - 2x + 4$ 의 그래프가 직선 $y = x + 14$ 보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위는 $x^2 - 2x + 4 < x + 14$ 의 해와 같으므로
 $x^2 - 3x - 10 < 0, (x+2)(x-5) < 0$
 $\therefore -2 < x < 5$
따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ 의 6개이다.

0859 [답] 11

이차함수 $y = x^2 - ax - 2$ 의 그래프가 직선 $y = b$ 보다 아래쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위는
 $x^2 - ax - 2 < b$, 즉 $x^2 - ax - b - 2 < 0$ ㉠
의 해와 같다.
해가 $1 < x < 4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x-1)(x-4) < 0 \therefore x^2 - 5x + 4 < 0$
이 부등식이 ㉠과 같으므로
 $-a = -5, -b - 2 = 4 \therefore a = 5, b = -6$
 $\therefore a - b = 11$

0860 [답] $0 < a < 8$

이차함수 $y = 2x^2 + 4x - 1$ 의 그래프가 직선 $y = ax - 3$ 보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 $2x^2 + 4x - 1 > ax - 3$, 즉
 $2x^2 + (4-a)x + 2 > 0$ 이 성립해야 한다.
이차방정식 $2x^2 + (4-a)x + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = (4-a)^2 - 16 < 0$
 $a^2 - 8a < 0, a(a-8) < 0 \therefore 0 < a < 8$

0861 [답] 7

이차함수 $y = -x^2 + (k+1)x - 5$ 의 그래프가 직선 $y = x - 1$ 보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여
 $-x^2 + (k+1)x - 5 < x - 1$, 즉 $x^2 - kx + 4 > 0$ 이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2 - kx + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = k^2 - 16 < 0$
 $(k+4)(k-4) < 0 \therefore -4 < k < 4$
따라서 정수 k 는 $-3, -2, -1, \dots, 3$ 의 7개이다.

0862 [답] ②

함수 $y=ax^2-6x+6$ 의 그래프가 이차함수 $y=-3x^2+2ax-2$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2-6x+6 > -3x^2+2ax-2$, 즉 $(a+3)x^2-2(a+3)x+8 > 0$ 이 성립해야 한다.

(i) $a=-3$ 일 때,

$0 \times x^2 - 0 \times x + 8 > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립한다.

(ii) $a > -3$ 일 때,

이차방정식 $(a+3)x^2-2(a+3)x+8=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - 8(a+3) < 0$$

$$a^2 - 2a - 15 < 0$$

$$(a+3)(a-5) < 0$$

$$\therefore -3 < a < 5$$

(i), (ii)에서 a 의 값의 범위는 $-3 \leq a < 5$

따라서 a 의 최솟값은 -3 이다.

0863 [답] ①

$$x^2+8x+7 \leq 0 \text{에서 } (x+7)(x+1) \leq 0$$

$$\therefore -7 \leq x \leq -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x^2+3x-10 > 0 \text{에서 } (x+5)(x-2) > 0$$

$$\therefore x < -5 \text{ 또는 } x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면 $-7 \leq x < -5$

따라서 $\alpha = -7$, $\beta = -5$ 이므로

$$\alpha - \beta = -2$$

0864 [답] ③

$$3(x-2) \leq 5x-2 \text{에서 } 3x-6 \leq 5x-2, -2x \leq 4$$

$$\therefore x \geq -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$4x^2-7x-15 < 0 \text{에서 } (4x+5)(x-3) < 0$$

$$\therefore -\frac{5}{4} < x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면 $-\frac{5}{4} < x < 3$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2$ 의 4개이다.

0865 [답] ③

$$5x \leq 2x^2+2 \text{에서 } 2x^2-5x+2 \geq 0$$

$$(2x-1)(x-2) \geq 0 \quad \therefore x \leq \frac{1}{2} \text{ 또는 } x \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2x^2+2 < 2x+6 \text{에서 } 2x^2-2x-4 < 0$$

$$x^2-x-2 < 0$$

$$(x+1)(x-2) < 0 \quad \therefore -1 < x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면 $-1 < x \leq \frac{1}{2}$

0866 [답] -3

$$2x^2+3x-14 < 0 \text{에서 } (2x+7)(x-2) < 0$$

$$\therefore -\frac{7}{2} < x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x^2-2x < 3 \text{에서 } x^2-2x-3 < 0$$

$$(x+1)(x-3) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면 $-1 < x < 2$ ①

해가 $-1 < x < 2$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+1)(x-2) < 0 \quad \therefore x^2-x-2 < 0$$

이 부등식이 $x^2+ax+b < 0$ 과 같으므로

$$a = -1, b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore a+b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 연립부등식의 해 구하기	40 %
② a, b 의 값 구하기	40 %
③ $a+b$ 의 값 구하기	20 %

0867 [답] ①

$$|x^2+x-1| < 5 \text{에서 } -5 < x^2+x-1 < 5$$

$$-5 < x^2+x-1 \text{에서 } x^2+x+4 > 0$$

그런데 $x^2+x+4 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \geq \frac{15}{4}$ 이므로 부등식의 해는 모든 실수이다. ①

$$x^2+x-1 < 5 \text{에서 } x^2+x-6 < 0$$

$$(x+3)(x-2) < 0$$

$$\therefore -3 < x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면 $-3 < x < 2$

따라서 $\alpha = -3$, $\beta = 2$ 이므로

$$\alpha\beta = -6$$

0868 [답] ①

$$x^2-2x-15 < 0 \text{에서 } (x+3)(x-5) < 0$$

$$\therefore -3 < x < 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x^2-3|x|-4 < 0 \text{에서 } x=0 \text{을 기준으로 구간을 나누면}$$

(i) $x < 0$ 일 때,

$$x^2+3x-4 < 0$$

$$(x+4)(x-1) < 0 \quad \therefore -4 < x < 1$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $-4 < x < 0$

(ii) $x \geq 0$ 일 때,

$$x^2-3x-4 < 0$$

$$(x+1)(x-4) < 0 \quad \therefore -1 < x < 4$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $0 \leq x < 4$

(i), (ii)에서 $x^2-3|x|-4 < 0$ 의 해는

$$-4 < x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면 $-3 < x < 4$

따라서 정수 x 의 값은 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ 이므로 구하는 합은

$$-2 + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 = 3$$

다른 풀이

$$x^2-3|x|-4 < 0 \text{에서 } |x|^2-3|x|-4 < 0$$

$$(|x|+1)(|x|-4) < 0 \quad \therefore -1 < |x| < 4$$

그런데 $|x| \geq 0$ 이므로 $0 \leq |x| < 4$

즉, $|x| < 4$ 에서 $-4 < x < 4$

0869 답 5

$$x^2 - 4x > 0 \text{에서 } x(x-4) > 0$$

$$\therefore x < 0 \text{ 또는 } x > 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 + (1-a)x - a < 0 \text{에서}$$

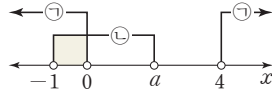
$$(x-a)(x+1) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①과 ②의 해의 공통부분이

$-1 < x < 0$ 이라면 오른쪽 그림에서

$$0 \leq a \leq 4$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.



0870 답 ③

주어진 연립부등식의 해가

$$-2 < x \leq 0 \text{ 또는 } 2 \leq x < 3 \text{이라면 오}$$

른쪽 그림과 같아야 한다.

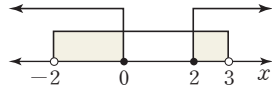
$x^2 - x - a < 0$ 은 해가 $-2 < x < 3$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식
이므로

$$(x+2)(x-3) < 0, x^2 - x - 6 < 0 \quad \therefore a = 6$$

$x^2 - 2x + b \geq 0$ 은 해가 $x \leq 0$ 또는 $x \geq 2$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차
부등식이므로

$$x(x-2) \geq 0, x^2 - 2x \geq 0 \quad \therefore b = 0$$

$$\therefore a - b = 6$$



0871 답 ④

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \text{에서 } (x-1)(x-3) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

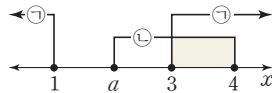
$$(x-4)(x-a) \leq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①과 ②의 해의 공통부분이 $3 \leq x \leq 4$

이라면 오른쪽 그림에서

$$1 < a \leq 3$$

따라서 a 의 최댓값은 3이다.



0872 답 4

$a < b < c$ 이므로

$$(x-a)(x-b) > 0 \text{에서 } x < a \text{ 또는 } x > b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(x-b)(x-c) > 0 \text{에서 } x < b \text{ 또는 } x > c \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분을 구하면 $x < a$ 또는 $x > c$ 이므로

$$a = -3, c = 4$$

즉, 이차부등식 $x^2 + ax - c < 0$ 은 $x^2 - 3x - 4 < 0$ 이므로

$$(x+1)(x-4) < 0 \quad \therefore -1 < x < 4$$

따라서 정수 x 는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

0873 답 ①

$$x^2 - 6x + 8 \leq 0 \text{에서 } (x-2)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq x \leq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

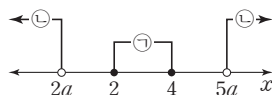
$$x^2 - 7ax + 10a^2 > 0 \text{에서 } (x-2a)(x-5a) > 0$$

$$\therefore x < 2a \text{ 또는 } x > 5a (\because a > 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분이 없으려면 오

른쪽 그림에서

$$2a \leq 2, 5a \geq 4$$



$$\therefore \frac{4}{5} \leq a \leq 1$$

따라서 자연수 a 의 값은 1이다.

0874 답 $a < -1$ 또는 $a > \frac{2}{3}$

$$x^2 - 3x - 18 \geq 0 \text{에서 } (x+3)(x-6) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(x-3a)(x-3a-4) < 0 \text{에서}$$

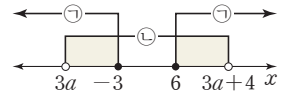
$$3a < x < 3a+4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분이 있으려면 오른

쪽 그림에서

$$3a < -3 \text{ 또는 } 3a+4 > 6$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > \frac{2}{3}$$



0875 답 $-4 \leq a \leq 3$

$$x^2 - x - 20 \geq 0 \text{에서 } (x+4)(x-5) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a < 0 \text{에서 } (x-a)(x-a-2) < 0$$

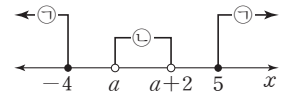
$$\therefore a < x < a+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분이 없으려면 오른

쪽 그림에서

$$a \geq -4, a+2 \leq 5$$

$$\therefore -4 \leq a \leq 3$$



0876 답 $2 < a \leq 3$

$$x^2 - 4x - 5 \leq 0 \text{에서 } (x+1)(x-5) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

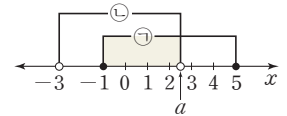
$$x^2 + (3-a)x - 3a < 0 \text{에서}$$

$$(x-a)(x+3) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 동시에 만족시키는 정수 x

가 4개이라면 오른쪽 그림에서

$$2 < a \leq 3$$



0877 답 ①

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \text{에서 } (x-1)(x-2) > 0$$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 - (a+2)x + 2a < 0 \text{에서}$$

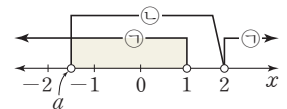
$$(x-a)(x-2) < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 동시에 만족시키는 정수 x

의 값이 -1 과 0 뿐이라면 오른쪽 그

림에서

$$-2 \leq a < -1$$



0878 답 ⑤

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \text{에서 } (x-2)(x-3) > 0$$

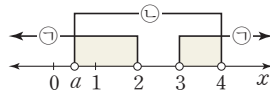
$$\therefore x < 2 \text{ 또는 } x > 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 - (a+4)x + 4a < 0 \text{에서 } (x-a)(x-4) < 0$$

(i) $a < 4$ 일 때,

$$(x-a)(x-4) < 0 \text{에서 } a < x < 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x 가 오직 한 개뿐이라면 오른쪽 그림에서



$$0 \leq a < 1$$

(ii) $a=4$ 일 때,

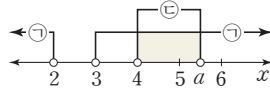
$$(x-a)(x-4) < 0 \text{에서 } (x-4)^2 < 0$$

이 이차부등식을 만족시키는 해는 없다.

(iii) $a > 4$ 일 때,

$$(x-a)(x-4) < 0 \text{에서 } 4 < x < a \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠, ㉢을 동시에 만족시키는 정수 x 가 오직 한 개뿐이라면 오른쪽 그림에서



$$5 < a \leq 6$$

(i), (ii), (iii)에서 $0 \leq a < 1$ 또는 $5 < a \leq 6$

따라서 a 의 최댓값은 6이다.

0879 답 21

$$|x-n| > 2 \text{에서 } x-n < -2 \text{ 또는 } x-n > 2$$

$$\therefore x < n-2 \text{ 또는 } x > n+2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

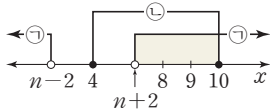
$$x^2 - 14x + 40 \leq 0 \text{에서 } (x-4)(x-10) \leq 0$$

$$\therefore 4 \leq x \leq 10 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

(i) $n-2 < 4$, 즉 $n < 6$ 일 때,

$n+2 < 8$ 이므로 오른쪽 그림에서

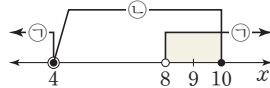
㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 자연수 x 는 3개 이상이다.



(ii) $n-2 \geq 4$, $n+2 \leq 10$, 즉 $6 \leq n \leq 8$ 일 때,

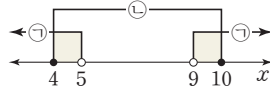
$n=6$ 이면 오른쪽 그림에서 ㉠,

㉡을 동시에 만족시키는 자연수 x 는 9, 10의 2개이다.



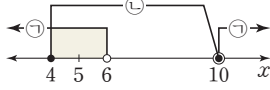
$n=7$ 이면 오른쪽 그림에서 ㉠,

㉡을 동시에 만족시키는 자연수 x 는 4, 10의 2개이다.



$n=8$ 이면 오른쪽 그림에서 ㉠,

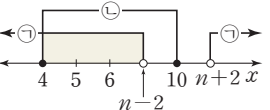
㉡을 동시에 만족시키는 자연수 x 는 4, 5의 2개이다.



(iii) $n+2 > 10$, 즉 $n > 8$ 일 때,

$n-2 > 6$ 이므로 오른쪽 그림에서

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 자연수 x 는 3개 이상이다.



(i), (ii), (iii)에서 n 의 값은 6, 7, 8이므로 구하는 합은

$$6+7+8=21$$

0880 답 ②

변의 길이는 양수이므로

$$x-2 > 0 \quad \therefore x > 2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $x+2$ 이므로

$$x+2 < x+(x-2) \quad \therefore x > 4 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이 삼각형이 둔각삼각형이 되려면

$$(x+2)^2 > x^2 + (x-2)^2$$

$$x^2 + 4x + 4 > x^2 + x^2 - 4x + 4$$

$$x^2 - 8x < 0, x(x-8) < 0 \quad \therefore 0 < x < 8 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $4 < x < 8$

따라서 자연수 x 는 5, 6, 7의 3개이다.

0881 답 $1 \leq x \leq 2$

보행자 통로의 넓이는

$$(2x+30)(2x+20) - 30 \times 20 = 4x^2 + 100x \text{ (m}^2\text{)} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이 통로의 넓이가 104 m^2 이상 216 m^2 이하이므로

$$104 \leq 4x^2 + 100x \leq 216 \quad \therefore 26 \leq x^2 + 25x \leq 54 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$26 \leq x^2 + 25x \text{에서 } x^2 + 25x - 26 \geq 0$$

$$(x+26)(x-1) \geq 0 \quad \therefore x \leq -26 \text{ 또는 } x \geq 1$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x \geq 1 \quad \dots\dots \text{㉢}$

$$x^2 + 25x \leq 54 \text{에서 } x^2 + 25x - 54 \leq 0$$

$$(x+27)(x-2) \leq 0 \quad \therefore -27 \leq x \leq 2$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $0 < x \leq 2 \quad \dots\dots \text{㉣}$

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $1 \leq x \leq 2 \quad \dots\dots \text{㉤}$

채점 기준

㉠ 보행자 통로의 넓이 구하기	20 %
㉡ 부등식 세우기	20 %
㉤ x 의 값의 범위 구하기	60 %

0882 답 $3 \leq x \leq 4$ 또는 $6 \leq x \leq 7$

직사각형의 가로 길이가 x 이므로 세로 길이는 $10-x$ 이다.

이때 이 직사각형의 넓이가 21 이상 24 이하이므로

$$21 \leq x(10-x) \leq 24 \quad \therefore 21 \leq -x^2 + 10x \leq 24$$

$$21 \leq -x^2 + 10x \text{에서 } x^2 - 10x + 21 \leq 0$$

$$(x-3)(x-7) \leq 0 \quad \therefore 3 \leq x \leq 7 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$-x^2 + 10x \leq 24 \text{에서 } x^2 - 10x + 24 \geq 0$$

$$(x-4)(x-6) \geq 0 \quad \therefore x \leq 4 \text{ 또는 } x \geq 6 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$3 \leq x \leq 4 \text{ 또는 } 6 \leq x \leq 7$$

0883 답 ④

이차방정식 $x^2 + 4ax + 3a^2 + 25 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4a^2 - (3a^2 + 25) \geq 0, a^2 - 25 \geq 0$$

$$(a+5)(a-5) \geq 0 \quad \therefore a \leq -5 \text{ 또는 } a \geq 5$$

0884 답 ④

이차방정식 $x^2 + ax - a + 3 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = a^2 - 4(-a+3) > 0, a^2 + 4a - 12 > 0$$

$$(a+6)(a-2) > 0 \quad \therefore a < -6 \text{ 또는 } a > 2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이차방정식 $x^2 + (a+2)x + 2a+1 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = (a+2)^2 - 4(2a+1) < 0, a^2 - 4a < 0$$

$$a(a-4) < 0 \quad \therefore 0 < a < 4 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2 < a < 4$

따라서 정수 a 의 값은 3이다.

0885 [답] ③

이차방정식 $x^2 - ax + a = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = a^2 - 4a \geq 0$$

$$a(a-4) \geq 0 \quad \therefore a \leq 0 \text{ 또는 } a \geq 4 \quad \dots\dots ㉠$$

이차방정식 $x^2 - 2x - a^2 + 5 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = 1 - (-a^2 + 5) \geq 0, \quad a^2 - 4 \geq 0$$

$$(a+2)(a-2) \geq 0 \quad \therefore a \leq -2 \text{ 또는 } a \geq 2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 두 이차방정식 중 적어도 하나가 실근을 가지려면

$$a \leq 0 \text{ 또는 } a \geq 2$$

따라서 정수 a 의 값이 아닌 것은 ③이다.

0886 [답] ③

이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 의 판별식을 D , 두 실근을 α, β 라 하면 두 근이 모두 양수이므로

$$(i) \frac{D}{4} = k^2 - (2k+3) \geq 0, \quad k^2 - 2k - 3 \geq 0$$

$$(k+1)(k-3) \geq 0 \quad \therefore k \leq -1 \text{ 또는 } k \geq 3$$

$$(ii) \alpha + \beta = 2k > 0 \text{에서 } k > 0$$

$$(iii) \alpha\beta = 2k+3 > 0 \text{에서 } k > -\frac{3}{2}$$

(i), (ii), (iii)에서 k 의 값의 범위는 $k \geq 3$

0887 [답] 10

이차방정식 $x^2 + 2(k+1)x - k + 5 = 0$ 의 판별식을 D , 두 실근을 α, β 라 하면 두 근이 모두 음수이므로

$$(i) \frac{D}{4} = (k+1)^2 - (-k+5) \geq 0, \quad k^2 + 3k - 4 \geq 0$$

$$(k+4)(k-1) \geq 0 \quad \therefore k \leq -4 \text{ 또는 } k \geq 1$$

$$(ii) \alpha + \beta = -2(k+1) < 0 \quad \therefore k > -1$$

$$(iii) \alpha\beta = -k+5 > 0 \quad \therefore k < 5$$

(i), (ii), (iii)에서 k 의 값의 범위는 $1 \leq k < 5$

따라서 자연수 k 의 값은 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$$1+2+3+4=10$$

0888 [답] $k < -1$ 또는 $0 < k < 1$

이차방정식 $x^2 - k(k+1)x + k - 1 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$$\alpha\beta = k - 1 < 0$$

$$\therefore k < 1 \quad \dots\dots ㉠$$

또 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 작으므로

$$\alpha + \beta = k(k+1) > 0$$

$$\therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 k 의 값의 범위는 $k < -1$ 또는 $0 < k < 1$

0889 [답] ②

$f(x) = x^2 - 2kx + 25$ 라 할 때

(i) 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 25 \geq 0$$

$$(k+5)(k-5) \geq 0 \quad \therefore k \leq -5 \text{ 또는 } k \geq 5$$

(ii) $f(1) > 0$ 이어야 하므로

$$1 - 2k + 25 > 0, \quad -2k > -26 \quad \therefore k < 13$$

(iii) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = k$ 이므로

$$k > 1$$

(i), (ii), (iii)에서 k 의 값의 범위는 $5 \leq k < 13$

따라서 k 의 최솟값은 5이다.

0890 [답] ①

$f(x) = x^2 - 5x + 2k^2$ 이라 하면 $f(1) < 0$ 이어야 하므로

$$1 - 5 + 2k^2 < 0, \quad k^2 - 2 < 0$$

$$(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2}) < 0 \quad \therefore -\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$$

따라서 $\alpha = -\sqrt{2}, \beta = \sqrt{2}$ 이므로 $\alpha\beta = -2$

0891 [답] 4

$f(x) = x^2 + ax - 6$ 이라 하면 이차함수

$y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아

야 하므로

$$f(-2) < 0, \quad f(1)f(3) < 0$$

$$f(-2) < 0 \text{에서}$$

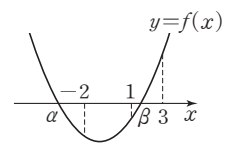
$$4 - 2a - 6 < 0, \quad -2a < 2 \quad \therefore a > -1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f(1)f(3) < 0 \text{에서 } (1+a-6)(9+3a-6) < 0$$

$$(a-5)(a+1) < 0 \quad \therefore -1 < a < 5 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 a 의 값의 범위는 $-1 < a < 5$

따라서 정수 a 의 최댓값은 4이다.



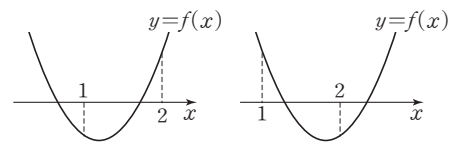
0892 [답] ③

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \text{에서 } (x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

이차방정식 $ax^2 + ax + 2a - 18 = 0$ 의 한 근만이 1과 2 사이에 있어야 하므로 $f(x) = ax^2 + ax + 2a - 18$ 이라 하면 이차함수 $y = f(x)$

의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



즉, $f(1)f(2) < 0$ 이어야 하므로

$$(a+a+2a-18)(4a+2a+2a-18) < 0$$

$$(2a-9)(4a-9) < 0 \quad \therefore \frac{9}{4} < a < \frac{9}{2}$$

따라서 자연수 a 의 값은 3, 4이므로 구하는 합은

$$3+4=7$$

0893 [답] ④

$f(x) = x^2 - 2kx + k + 2$ 라 하면 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 0과 3 사이에 있으므로

(i) 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k+2) > 0, \quad k^2 - k - 2 > 0$$

$$(k+1)(k-2) > 0 \quad \therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 2$$

(ii) $f(0) > 0$ 이어야 하므로 $k+2 > 0 \quad \therefore k > -2$

(iii) $f(3) > 0$ 이어야 하므로 $9 - 6k + k + 2 > 0$

$$-5k > -11 \quad \therefore k < \frac{11}{5}$$

(iv) 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$ 이므로 $0 < k < 3$

(i)~(iv)에서 k 의 값의 범위는 $2 < k < \frac{11}{5}$

0894 답 $m < -10$

$x^4 + mx^2 - 2m + 5 = 0$ 에서 $x^2 = X$ 로 놓으면

$$X^2 + mX - 2m + 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 주어진 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D , 두 실근을 α, β 라 하면

(i) $D = m^2 - 4(-2m + 5) > 0, m^2 + 8m - 20 > 0$

$$(m+10)(m-2) > 0 \quad \therefore m < -10 \text{ 또는 } m > 2$$

(ii) $\alpha + \beta = -m > 0 \quad \therefore m < 0$

(iii) $\alpha\beta = -2m + 5 > 0 \quad \therefore m < \frac{5}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 m 의 값의 범위는 $m < -10$

0895 답 ④

$x^4 - mx^2 + m^2 - 2m - 8 = 0$ 에서 $x^2 = X$ 로 놓으면

$$X^2 - mX + m^2 - 2m - 8 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 주어진 사차방정식이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 양의 실근과 음의 실근을 각각 한 개씩 가져야 한다.

즉, 이차방정식의 $\textcircled{1}$ 의 두 근의 부호가 서로 달라야 하므로 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha\beta = m^2 - 2m - 8 < 0$$

$$(m+2)(m-4) < 0 \quad \therefore -2 < m < 4$$

따라서 정수 m 의 값은 $-1, 0, 1, 2, 3$ 이므로 구하는 합은 $-1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 5$

0896 답 ①

$f(x) = x^3 + (8-a)x^2 + (a^2-8a)x - a^3$ 이라 하면

$f(a) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

a	1	$8-a$	a^2-8a	$-a^3$
		a	$8a$	a^3
	1	8	a^2	0

$$(x-a)(x^2+8x+a^2)=0$$

이 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식

$$x^2+8x+a^2=0$$
이 $x \neq a$ 인 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+8x+a^2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 16 - a^2 > 0, a^2 - 16 < 0$$

$$(a+4)(a-4) < 0 \quad \therefore -4 < a < 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $x \neq a$ 이어야 하므로

$$2a^2 + 8a \neq 0, 2a(a+4) \neq 0$$

$$\therefore a \neq -4, a \neq 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $-4 < a < 0$ 또는 $0 < a < 4$

따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ 의 6개이다.

0897 답 ③

부등식 $f(x) < 0 < g(x)$ 의 해는 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축보다 아래쪽에 있고, $y=g(x)$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$-2 < x < 2$$

0898 답 12

$$x^2 - 4x - 32 \leq 0 \text{에서 } (x+4)(x-8) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq x \leq 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$|x-a| \leq b \text{에서 } -b \leq x-a \leq b$$

$$\therefore a-b \leq x \leq a+b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 서로 같으므로

$$a-b = -4, a+b = 8$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=2, b=6 \quad \therefore ab=12$$

0899 답 $x < -3$ 또는 $x > 5$

$x^2 - 2x - 3 > 3|x-1|$ 에서 $x-1=0$, 즉 $x=1$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 1$ 일 때,

$$x^2 - 2x - 3 > -3(x-1), x^2 + x - 6 > 0$$

$$(x+3)(x-2) > 0 \quad \therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 2$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $x < -3$

(ii) $x \geq 1$ 일 때,

$$x^2 - 2x - 3 > 3(x-1), x^2 - 5x > 0$$

$$x(x-5) > 0 \quad \therefore x < 0 \text{ 또는 } x > 5$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x > 5$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$x < -3 \text{ 또는 } x > 5$$

0900 답 ①

$P(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

(가)의 $P(x) \geq -2x - 3$ 에서 $ax^2 + bx + c \geq -2x - 3$

$$\therefore ax^2 + (b+2)x + c+3 \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차부등식 $\textcircled{1}$ 의 해가 $0 \leq x \leq 1$ 이므로 $a < 0$

해가 $0 \leq x \leq 1$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$x(x-1) \leq 0 \quad \therefore x^2 - x \leq 0$$

양변에 a 를 곱하면 $ax^2 - ax \geq 0$ ($\because a < 0$)

이 부등식이 $\textcircled{1}$ 과 같으므로

$$b+2 = -a, c+3 = 0 \quad \therefore b = -a-2, c = -3$$

$$\therefore P(x) = ax^2 - (a+2)x - 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(나)의 $P(x) = -3x - 2$ 에서

$$ax^2 - (a+2)x - 3 = -3x - 2$$

$$\therefore ax^2 - (a-1)x - 1 = 0$$

이 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D 라 하면

$$D = (a-1)^2 + 4a = 0, a^2 + 2a + 1 = 0$$

$$(a+1)^2=0 \quad \therefore a=-1$$

이를 ㉔에 대입하면 $P(x)=-x^2-x-3$

$$\therefore P(-1)=-1+1-3=-3$$

다른 풀이

(가)에서 $P(x) \geq -2x-3$, 즉 $P(x)+2x+3 \geq 0$ 의 해가 $0 \leq x \leq 1$

이므로 $P(x)+2x+3=ax(x-1)$ ($a < 0$)이라 하면

$$P(x)=ax^2-(a+2)x-3$$

(나)에서 $P(x)=-3x-2$, 즉 $ax^2-(a+1)x-1=0$ 이 증근을 가지

므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(a-1)^2+4a=0, \quad a^2+2a+1=0$$

$$(a+1)^2=0 \quad \therefore a=-1$$

따라서 $P(x)=-x^2-x-3$ 이므로

$$P(-1)=-1+1-3=-3$$

0901 답 $x < -2$ 또는 $x > 0$

이차부등식 $f(x) < 0$ 의 해가 $x < -3$ 또는 $x > 1$ 이므로

$$f(x)=a(x+3)(x-1) \quad (a < 0) \text{이라 하면}$$

$$f(2x+1)=a(2x+1+3)(2x+1-1)$$

$$=4ax(x+2)$$

$$f(1)=0 \text{이므로 } f(2x+1) < f(1) \text{에서}$$

$$4ax(x+2) < 0, \quad x(x+2) > 0 \quad (\because a < 0)$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 0$$

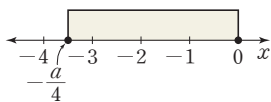
0902 답 30

$$4x^2+ax \leq 0 \text{에서 } x(4x+a) \leq 0 \quad \dots\dots ㉔$$

(i) $-\frac{a}{4} < 0$, 즉 $a > 0$ 일 때,

$$㉔ \text{에서 } -\frac{a}{4} \leq x \leq 0$$

주어진 이차부등식을 만족시키는 정수 x 가 4개이려면 오른쪽 그림에서

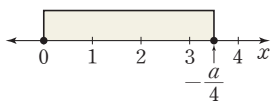


$$-4 < -\frac{a}{4} \leq -3 \quad \therefore 12 \leq a < 16$$

(ii) $-\frac{a}{4} > 0$, 즉 $a < 0$ 일 때,

$$㉔ \text{에서 } 0 \leq x \leq -\frac{a}{4}$$

주어진 이차부등식을 만족시키는 정수 x 가 4개이려면 오른쪽 그림에서



$$3 \leq -\frac{a}{4} < 4 \quad \therefore -16 < a \leq -12$$

(i), (ii)에서 $-16 < a \leq -12$ 또는 $12 \leq a < 16$

따라서 $M=15$, $m=-15$ 이므로 $M-m=30$

0903 답 $0 \leq m < 3$

부등식 $mx^2+2mx+6-m > 0$ 에서

(i) $m=0$ 일 때,

$0 \times x^2 + 0 \times x + 6 > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $m \neq 0$ 일 때,

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수

$y=mx^2+2mx+6-m$ 의 그래프가 아래로 볼록해야 하므로

$$m > 0 \quad \dots\dots ㉔$$

또 이차방정식 $mx^2+2mx+6-m=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=m^2-m(6-m) < 0$$

$$2m^2-6m < 0, \quad 2m(m-3) < 0$$

$$\therefore 0 < m < 3 \quad \dots\dots ㉕$$

$$㉔, ㉕ \text{에서 } 0 < m < 3$$

(i), (ii)에서 m 의 값의 범위는 $0 \leq m < 3$

0904 답 ⑤

(i) $k > 0$ 일 때,

이차함수 $y=kx^2-6x+k-8$ 의 그래프는 아래로 볼록하므로 주

어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $k < 0$ 일 때,

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식

$kx^2-6x+k-8=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이

차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=9-k(k-8) > 0$$

$$k^2-8k-9 < 0, \quad (k+1)(k-9) < 0$$

$$\therefore -1 < k < 9$$

그런데 $k < 0$ 이므로 $-1 < k < 0$

(i), (ii)에서 k 의 값의 범위는 $-1 < k < 0$ 또는 $k > 0$

0905 답 2

이차부등식 $(k-1)x^2+2(k-1)x+1 \leq 0$ 의 해가 오직 한 개이므로

$$k-1 > 0 \quad \therefore k > 1$$

또 이차방정식 $(k-1)x^2+2(k-1)x+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k-1)=0$$

$$k^2-3k+2=0, \quad (k-1)(k-2)=0$$

$$\therefore k=1 \text{ 또는 } k=2$$

그런데 $k > 1$ 이므로 $k=2$

0906 답 ⑤

이차부등식 $x^2-2ax+9a < 0$ 이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에

대하여 $x^2-2ax+9a \geq 0$ 이 성립해야 한다.

즉, 이차방정식 $x^2-2ax+9a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-9a \leq 0, \quad a(a-9) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 9$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, ..., 9의 10개이다.

0907 답 ⑤

$$x^2-4x < 2x^2+a^2-3a \text{에서 } x^2+4x+a^2-3a > 0$$

$$f(x)=x^2+4x+a^2-3a \text{라 하면}$$

$$f(x)=(x+2)^2+a^2-3a-4$$

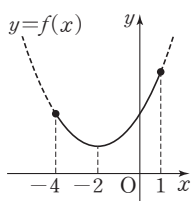
$-4 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) > 0$ 이어야 하므로 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$-4 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x)$ 는 $x=-2$ 일 때 최소
이므로 $f(-2) > 0$ 에서

$$a^2 - 3a - 4 > 0, (a+1)(a-4) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 4$$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 5이다.



0908 답 -5

이차함수 $y=x^2-4x-5$ 의 그래프가 직선 $y=a$ 보다 아래쪽에 있는
부분의 x 의 값의 범위는

$$x^2 - 4x - 5 < a, \text{ 즉 } x^2 - 4x - a - 5 < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

의 해와 같다.

해가 $b < x < 4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-b)(x-4) < 0 \quad \therefore x^2 - (b+4)x + 4b < 0$$

이 부등식이 $\textcircled{1}$ 과 같으므로

$$-4 = -(b+4), -a-5 = 4b \quad \therefore a = -5, b = 0$$

$$\therefore a+b = -5$$

0909 답 -2

두 이차함수의 그래프가 서로 만나지 않으려면 이차함수

$y=x^2-6x+4$ 의 그래프가 이차함수 $y=-x^2+2kx+2$ 의 그래프
보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 모든 실수 x 에 대하여
 $x^2-6x+4 > -x^2+2kx+2$, 즉 $x^2-(k+3)x+1 > 0$ 이 성립해야
한다.

이차방정식 $x^2-(k+3)x+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (k+3)^2 - 4 < 0, k^2 + 6k + 5 < 0$$

$$(k+5)(k+1) < 0 \quad \therefore -5 < k < -1$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -2이다.

0910 답 ①

$$x^2 + 3x + 1 \leq 2x^2 - 2x - 5 \text{에서}$$

$$x^2 - 5x - 6 \geq 0, (x+1)(x-6) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2x^2 - 2x - 5 \leq 3x - 2 \text{에서}$$

$$2x^2 - 5x - 3 \leq 0, (2x+1)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분이 없으므로 주어진 부등식의 해는 없다.

0911 답 ⑤

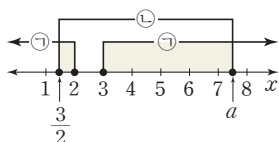
$$(x-2)(x-3) \geq 0 \text{에서 } x \leq 2 \text{ 또는 } x \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(2x-3)(x-a) \leq 0 \text{에서 } \frac{3}{2} \leq x \leq a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 동시에 만족시키는 정수

x 가 6개이려면 오른쪽 그림에서

$$7 \leq a < 8$$



0912 답 4

새로 만든 직육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이와 높이는 각각
 $a-3, a, a+4$ 이므로

$$a-3 > 0 \quad \therefore a > 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직육면체의 부피는 $a(a-3)(a+4) = a^3 + a^2 - 12a$ 이고 처음 정
육면체의 부피는 a^3 이므로

$$a^3 + a^2 - 12a < a^3, a^2 - 12a < 0$$

$$a(a-12) < 0 \quad \therefore 0 < a < 12 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면 $3 < a < 12$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 4이다.

0913 답 ④

이차방정식 $x^2+2ax+a+6=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - (a+6) < 0, a^2 - a - 6 < 0$$

$$(a+2)(a-3) < 0 \quad \therefore -2 < a < 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2-2ax+4=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - 4 \geq 0$$

$$(a+2)(a-2) \geq 0 \quad \therefore a \leq -2 \text{ 또는 } a \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분을 구하면 $2 \leq a < 3$

따라서 정수 a 의 값은 2이다.

0914 답 8

이차방정식 $x^2-2kx-2k+24=0$ 의 판별식을 D , 두 실근을 α, β
라 하면 두 근의 부호가 서로 같으므로

$$(i) \frac{D}{4} = k^2 - (-2k+24) \geq 0, k^2 + 2k - 24 \geq 0$$

$$(k+6)(k-4) \geq 0 \quad \therefore k \leq -6 \text{ 또는 } k \geq 4$$

$$(ii) \alpha\beta = -2k+24 > 0 \text{에서 } k < 12$$

(i), (ii)에서 k 의 값의 범위는 $4 \leq k < 12$

따라서 자연수 k 는 4, 5, 6, ..., 11의 8개이다.

0915 답 ③

$f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + ax - 2a$ 라 하면

$$f(1) = 0 \text{이므로 조립제법을 이용하여 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면}$$

1	1	$a-1$	a	$-2a$
		1	a	$2a$
	1	a	$2a$	0

$$(x-1)(x^2+ax+2a)=0$$

이 방정식이 한 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면 이차방정식
 $x^2+ax+2a=0$ 이 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+ax+2a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 8a < 0, a(a-8) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 8$$

따라서 정수 a 는 1, 2, 3, ..., 7의 7개이다.

0916 답 4

가격을 x 천 원 올리면 양말 한 켤레의 가격은 $(3+x)$ 천 원, 하루 판
매량은 $(50-5x)$ 켤레가 된다.

이때 하루 판매액이 21만 원 이상이라면

$$(3+x)(50-5x) \geq 210 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$-5x^2 + 35x - 60 \geq 0, x^2 - 7x + 12 \leq 0$$

$$(x-3)(x-4) \leq 0 \quad \therefore 3 \leq x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 x 의 최댓값은 4이다. $\dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① 부등식 세우기	40 %
② x 의 값의 범위 구하기	40 %
③ x 의 최댓값 구하기	20 %

0917 답 13

$$x^2 - 6x + 5 \geq 0 \text{에서 } (x-1)(x-5) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 5$$

연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geq 0 \\ x^2 + ax + b < 0 \end{cases}$ 의 해가 $5 \leq x < 8$ 이므로 이차방정식

$x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$$1 \leq \alpha < 5, \beta = 8 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\text{또 } x^2 - 11x + 24 < 0 \text{에서 } (x-3)(x-8) < 0$$

$$\therefore 3 < x < 8$$

연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 11x + 24 < 0 \\ x^2 + ax + b \geq 0 \end{cases}$ 이 해를 갖지 않으므로

$$\alpha \leq 3 (\because \beta = 8) \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\textcircled{i}, \textcircled{ii} \text{에서 } 1 \leq \alpha \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + 8 = -a, 8\alpha = b \text{이므로}$$

$$a + b = -(\alpha + 8) + 8\alpha = 7\alpha - 8$$

그런데 $1 \leq \alpha \leq 3$ 이므로

$$7 \leq 7\alpha - 8 < 21 \quad \therefore -1 \leq 7\alpha - 8 \leq 13$$

따라서 $a+b$ 의 최댓값은 13이다. $\dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① β 의 값 구하기	30 %
② α 의 값의 범위 구하기	30 %
③ $a+b$ 의 최댓값 구하기	40 %

0918 답 -3

$$f(x) = x^2 - 2kx + 9 \text{라 할 때}$$

(i) 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 9 \geq 0$$

$$(k+3)(k-3) \geq 0 \quad \therefore k \leq -3 \text{ 또는 } k \geq 3$$

(ii) $f(2) > 0$ 이어야 하므로 $4 - 4k + 9 > 0$

$$-4k > -13 \quad \therefore k < \frac{13}{4}$$

(iii) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = k$ 이므로

$$k < 2$$

(i), (ii), (iii)에서 k 의 값의 범위는 $k \leq -3$ $\dots\dots \textcircled{i}$

따라서 k 의 최댓값은 -3 이다. $\dots\dots \textcircled{ii}$

채점 기준

① k 의 값의 범위 구하기	80 %
② k 의 최댓값 구하기	20 %

C 실력 향상

143쪽

0919 답 27

(가)에서 두 이차함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = p$ 이므로

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-p)^2 + m, g(x) = 2(x-p)^2 + n \quad (m, n \text{은 상수})$$

이라 하자.

$$(나)에서 \frac{1}{2}(x-p)^2 + m \geq 2(x-p)^2 + n, \text{ 즉 } \frac{3}{2}(x-p)^2 + n - m \leq 0$$

의 해가 $-1 \leq x \leq 5$ 이므로 해가 $-1 \leq x \leq 5$ 이고 x^2 의 계수가 $\frac{3}{2}$ 인 이차부등식은

$$\frac{3}{2}(x+1)(x-5) \leq 0$$

$$\frac{3}{2}(x^2 - 4x - 5) \leq 0 \quad \therefore \frac{3}{2}(x-2)^2 - \frac{27}{2} \leq 0$$

$$\therefore p = 2, n - m = -\frac{27}{2} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + m, g(x) = 2(x-2)^2 + n \text{이므로}$$

$$f(2) = m, g(2) = n$$

따라서 $\textcircled{i}$ 에서

$$\begin{aligned} p \times \{f(2) - g(2)\} &= 2(m - n) \\ &= 2 \times \frac{27}{2} = 27 \end{aligned}$$

0920 답 ④

$$x^2 - 8x + 12 \geq 0 \text{에서 } (x-2)(x-6) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 2 \text{ 또는 } x \geq 6$$

연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 8x + 12 \geq 0 \\ x^2 + ax + b < 0 \end{cases}$ 의 해가 $-4 < x \leq 2$ 이므로 이차방정

식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$$\alpha = -4, 2 < \beta \leq 6 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$-4 + \beta = -a, -4\beta = b$$

$$\therefore a = 4 - \beta, b = -4\beta$$

이를 $|a| + |b| = 15$ 에 대입하면

$$|4 - \beta| + |-4\beta| = 15$$

$\textcircled{i}$ 에서 $2 < \beta \leq 6$ 이므로

(i) $2 < \beta \leq 4$ 일 때,

$$4 - \beta - (-4\beta) = 15$$

$$3\beta = 11 \quad \therefore \beta = \frac{11}{3}$$

(ii) $4 < \beta \leq 6$ 일 때,

$$-(4 - \beta) - (-4\beta) = 15$$

$$5\beta = 19 \quad \therefore \beta = \frac{19}{5}$$

그런데 $4 < \beta \leq 6$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\beta = \frac{11}{3}$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{3}, b = -\frac{44}{3} \text{이므로 } a - b = 15$$

0921 답 10

$$x^2 - (a^2 - 3)x - 3a^2 < 0 \text{에서}$$

$$(x+3)(x-a^2) < 0$$

$$\therefore -3 < x < a^2 \quad (\because a^2 > 4) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x^2 + (a-9)x - 9a > 0 \text{에서}$$

$$(x+a)(x-9) > 0$$

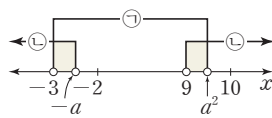
$$\therefore x < -a \text{ 또는 } x > 9 \quad (\because a > 2) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 동시에 만족시키는 정수 x 가 존재하지 않으려면 오른쪽 그림에서

$$a^2 \leq 10, -a \leq -2$$

$$\therefore 2 < a \leq \sqrt{10} \quad (\because a > 2)$$

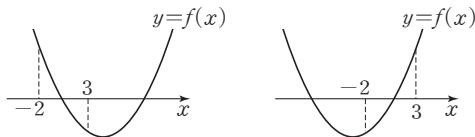
$$\text{따라서 } M = \sqrt{10} \text{이므로 } M^2 = 10$$



0922 답 5

$f(x) = x^2 - 2(m+2)x - m$ 이라 하자.

(i) 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근 중 한 근만 $-2 \leq x \leq 3$ 에 속하는 경우



$$f(-2)f(3) \leq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$\{4 + 4(m+2) - m\} \{9 - 6(m+2) - m\} \leq 0$$

$$(m+4)(7m+3) \geq 0$$

$$\therefore m \leq -4 \text{ 또는 } m \geq -\frac{3}{7}$$

(ii) 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이 모두 $-2 \leq x \leq 3$ 에 속하는 경우

① 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을

D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (m+2)^2 + m \geq 0$$

$$m^2 + 5m + 4 \geq 0$$

$$(m+4)(m+1) \geq 0$$

$$\therefore m \leq -4 \text{ 또는 } m \geq -1$$

② $f(-2) \geq 0$ 이어야 하므로

$$3m + 12 \geq 0 \quad \therefore m \geq -4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(3) \geq 0$ 이어야 하므로

$$-7m - 3 \geq 0 \quad \therefore m \leq -\frac{3}{7} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } -4 \leq m \leq -\frac{3}{7}$$

$$\textcircled{iii} -2 \leq m+2 \leq 3 \text{에서 } -4 \leq m \leq 1$$

$$\textcircled{i}, \textcircled{ii}, \textcircled{iii} \text{에서 } m = -4 \text{ 또는 } -1 \leq m \leq -\frac{3}{7}$$

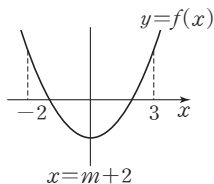
(i), (ii)에서 $m \leq -4$ 또는 $m \geq -1$

그런데 $-6 \leq m \leq 6$ 이므로

$$-6 \leq m \leq -4 \text{ 또는 } -1 \leq m \leq 6$$

따라서 정수 m 의 값은 $-6, -5, -4, -1, 0, 1, \dots, 6$ 이므로 구하는 합은

$$-6 + (-5) + (-4) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 5$$



09 / 경우의 수와 순열

A 개념 확인

146~147쪽

0923 답 6

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 3인 경우는

(1, 2), (2, 1)의 2가지

(ii) 눈의 수의 합이 9인 경우는

(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)의 4가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$2 + 4 = 6$$

0924 답 7

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 곱이 4인 경우는

(1, 4), (2, 2), (4, 1)의 3가지

(ii) 눈의 수의 곱이 6인 경우는

(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)의 4가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$3 + 4 = 7$$

0925 답 9

(i) 꺼낸 공에 적힌 수가 5의 배수인 경우는

5, 10, 15, 20, 25, 30의 6가지

(ii) 꺼낸 공에 적힌 수가 8의 배수인 경우는

8, 16, 24의 3가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$6 + 3 = 9$$

0926 답 10

(i) 꺼낸 공에 적힌 수가 4의 배수인 경우는

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28의 7가지

(ii) 꺼낸 공에 적힌 수가 9의 배수인 경우는

9, 18, 27의 3가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$7 + 3 = 10$$

0927 답 9

홀수의 눈이 나오는 경우는 1, 3, 5의 3가지

소수의 눈이 나오는 경우는 2, 3, 5의 3가지

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 3 = 9$$

0928 답 8

3의 배수의 눈이 나오는 경우는 3, 6의 2가지

6의 약수의 눈이 나오는 경우는 1, 2, 3, 6의 4가지

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 4 = 8$$

0929 [답] 12

A 지점에서 B 지점으로 가는 경우는 3가지

B 지점에서 C 지점으로 가는 경우는 4가지

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 4 = 12$$

0930 [답] 30

$${}_6P_2 = 6 \times 5 = 30$$

0931 [답] 1

$${}_5P_0 = 1$$

0932 [답] 6

$${}_3P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

0933 [답] 2

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

0934 [답] 120

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

0935 [답] 1

$$0! = 1$$

0936 [답] 7

$${}_nP_2 = n(n-1)$$

$$42 = 7 \times 6 \text{이므로}$$

$$n(n-1) = 7 \times 6$$

$$\therefore n = 7 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

0937 [답] 3

$$60 = 5 \times 4 \times 3 \text{이므로}$$

$${}_5P_r = 5 \times 4 \times 3$$

$$\therefore r = 3$$

0938 [답] 3

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 \times 6 \text{이므로}$$

$${}_8P_r = 8 \times 7 \times 6$$

$$\therefore r = 3$$

0939 [답] 6

$$720 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \text{이므로}$$

$${}_nP_n = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore n = 6$$

0940 [답] 12

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$$

0941 [답] 210

$${}_7P_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

B 유형 완성

148~157쪽

0942 [답] ④

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 4인 경우는

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

(ii) 눈의 수의 합이 8인 경우는

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지

(iii) 눈의 수의 합이 12인 경우는

(6, 6)의 1가지

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $3 + 5 + 1 = 9$

0943 [답] 14

(i) 뽑힌 카드에 적힌 수가 6의 배수인 경우는

6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48의 8가지

(ii) 뽑힌 카드에 적힌 수가 7의 배수인 경우는

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49의 7가지

(iii) 뽑힌 카드에 적힌 수가 6과 7의 최소공배수인 42의 배수인 경우는

42의 1가지

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $8 + 7 - 1 = 14$

0944 [답] 9

꺼낸 공에 적힌 세 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 세 수의 곱이 4가 되는 경우는

(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)의 6가지

(ii) 세 수의 곱이 5가 되는 경우는

(1, 1, 5), (1, 5, 1), (5, 1, 1)의 3가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $6 + 3 = 9$

0945 [답] ④

1부터 100까지의 자연수 중에서

(i) 5로 나누어떨어지는 수, 즉 5의 배수는

5, 10, 15, ..., 100의 20개

(ii) 7로 나누어떨어지는 수, 즉 7의 배수는

7, 14, 21, ..., 98의 14개

(iii) 5와 7로 나누어떨어지는 수, 즉 5와 7의 최소공배수인 35의 배수는

35, 70의 2개

(i), (ii), (iii)에서 5 또는 7로 나누어떨어지는 자연수의 개수는

$$20 + 14 - 2 = 32$$

따라서 5와 7로 모두 나누어떨어지지 않는 자연수의 개수는

$$100 - 32 = 68$$

0946 **답 16**

- (i) $y=1$ 일 때, $x+z=8$ 이므로 순서쌍 (x, z) 는
 $(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1)$ 의 7개
 (ii) $y=2$ 일 때, $x+z=6$ 이므로 순서쌍 (x, z) 는
 $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ 의 5개
 (iii) $y=3$ 일 때, $x+z=4$ 이므로 순서쌍 (x, z) 는
 $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ 의 3개
 (iv) $y=4$ 일 때, $x+z=2$ 이므로 순서쌍 (x, z) 는
 $(1, 1)$ 의 1개
 (i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는
 $7+5+3+1=16$

0947 **답 ②**

- x, y 가 자연수이므로 $x+3y$ 가 될 수 있는 값은 4, 5, 6, 7이다.
 (i) $x+3y=4$ 일 때, 순서쌍 (x, y) 는 $(1, 1)$ 의 1개
 (ii) $x+3y=5$ 일 때, 순서쌍 (x, y) 는 $(2, 1)$ 의 1개
 (iii) $x+3y=6$ 일 때, 순서쌍 (x, y) 는 $(3, 1)$ 의 1개
 (iv) $x+3y=7$ 일 때, 순서쌍 (x, y) 는 $(4, 1), (1, 2)$ 의 2개
 (i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는
 $1+1+1+2=5$

0948 **답 10**

- 200원, 500원, 1000원짜리 볼펜을 각각 x 자루, y 자루, z 자루 산다고 하면 그 금액의 합이 3000원이므로
 $200x+500y+1000z=3000$
 $\therefore 2x+5y+10z=30$ ㉠
 따라서 구하는 경우의 수는 방정식 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수와 같다.
 (i) $z=0$ 일 때, $2x+5y=30$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(0, 6), (5, 4), (10, 2), (15, 0)$ 의 4개
 (ii) $z=1$ 일 때, $2x+5y=20$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(0, 4), (5, 2), (10, 0)$ 의 3개
 (iii) $z=2$ 일 때, $2x+5y=10$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(0, 2), (5, 0)$ 의 2개
 (iv) $z=3$ 일 때, $2x+5y=0$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(0, 0)$ 의 1개 ㉡
 (i)~(iv)에서 구하는 방법의 수는
 $4+3+2+1=10$ ㉢

채점 기준

㉠ 방정식 세우기	30%
㉡ z 의 값에 따라 순서쌍 (x, y) 의 개수 구하기	50%
㉢ 볼펜을 사는 방법의 수 구하기	20%

0949 **답 17**

함수 $y=x^2$ 의 그래프와 직선 $y=ax-b$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 $x^2=ax-b$, 즉 $x^2-ax+b=0$ 의 판별식을 D 라 할 때
 $D=a^2-4b>0 \quad \therefore a^2>4b$

- (i) $b=1$ 일 때
 $a^2>4$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는 $(3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)$ 의 4개
 (ii) $b=2$ 일 때
 $a^2>8$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는 $(3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)$ 의 4개
 (iii) $b=3$ 일 때
 $a^2>12$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는 $(4, 3), (5, 3), (6, 3)$ 의 3개
 (iv) $b=4$ 일 때
 $a^2>16$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는 $(5, 4), (6, 4)$ 의 2개
 (v) $b=5$ 일 때
 $a^2>20$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는 $(5, 5), (6, 5)$ 의 2개
 (vi) $b=6$ 일 때
 $a^2>24$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는 $(5, 6), (6, 6)$ 의 2개
 (i)~(vi)에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는
 $4+4+3+2+2+2=17$

0950 **답 ⑤**

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 6, 8의 4개
 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5개
 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 5, 7의 4개
 따라서 구하는 자연수의 개수는 $4 \times 5 \times 4 = 80$

0951 **답 60**

피자를 고를 수 있는 경우는 4가지, 샐러드를 고를 수 있는 경우는 3가지, 음료수를 고를 수 있는 경우는 5가지이므로 구하는 경우의 수는 $4 \times 3 \times 5 = 60$

0952 **답 ⑤**

$(a+b)(p+q+r)(x+y+z)$ 에서 a, b 에 곱해지는 항이 각각 p, q, r 의 3개이고, 그 각각에 대하여 곱해지는 항이 각각 x, y, z 의 3개이므로 구하는 항의 개수는 $2 \times 3 \times 3 = 18$

0953 **답 ③**

눈의 수의 곱이 짝수인 경우의 수는 전체 경우의 수에서 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수를 뺀 것과 같다.
 한 개의 주사위를 잇달아 세 번 던질 때 일어나는 경우의 수는
 $6 \times 6 \times 6 = 216$
 눈의 수의 곱이 홀수가 되는 경우의 수는 세 눈의 수가 모두 홀수인 경우의 수와 같으므로 $3 \times 3 \times 3 = 27$
 따라서 구하는 경우의 수는 $216 - 27 = 189$

0954 **답 72**

지현이와 헤린이가 3가지 식사 메뉴 중 서로 다르게 한 가지씩 주문하는 경우의 수는 $3 \times 2 = 6$
 지현이와 헤린이가 4가지 아이스크림 종류 중 서로 다르게 한 가지씩 주문하는 경우의 수는 $4 \times 3 = 12$
 따라서 지현이와 헤린이가 식사와 후식 종류를 서로 다르게 주문하는 경우의 수는 $6 \times 12 = 72$

0955 답 ⑤

$63=3^2 \times 7$ 이므로 63의 양의 약수의 개수는
 $(2+1)(1+1)=6 \quad \therefore a=6$
 $135=3^3 \times 5$ 이므로 135의 양의 약수의 개수는
 $(3+1)(1+1)=8 \quad \therefore b=8$
 $\therefore a+b=6+8=14$

0956 답 ③

- ① $2^3 \times 3$ 의 양의 약수의 개수는 $(3+1)(1+1)=8$
 ② $2^3 \times 5$ 의 양의 약수의 개수는 $(3+1)(1+1)=8$
 ③ $2^3 \times 6=2^4 \times 3$ 의 양의 약수의 개수는 $(4+1)(1+1)=10$
 ④ $2^3 \times 7$ 의 양의 약수의 개수는 $(3+1)(1+1)=8$
 ⑤ $2^3 \times 16=2^7$ 의 양의 약수의 개수는 $7+1=8$

0957 답 12

$300=2^2 \times 3 \times 5^2$ 과 $360=2^3 \times 3^2 \times 5$ 의 최대공약수는 $2^2 \times 3 \times 5$
 따라서 300과 360의 양의 공약수의 개수는 $2^2 \times 3 \times 5$ 의 양의 약수의
 개수와 같으므로
 $(2+1)(1+1)(1+1)=12$

0958 답 2

$72=2^3 \times 3^2$ 이므로 $72^n=(2^3 \times 3^2)^n=2^{3n} \times 3^{2n}$
 $2^{3n} \times 3^{2n}$ 의 양의 약수의 개수는 $(3n+1)(2n+1)$
 이때 72^n 의 양의 약수의 개수가 35이므로 $(3n+1)(2n+1)=35$
 $6n^2+5n+1=35, 6n^2+5n-34=0$
 $(6n+17)(n-2)=0 \quad \therefore n=2$ ($\because n$ 은 자연수)

0959 답 ④

$700=2^2 \times 5^2 \times 7$
 짝수는 2를 소인수로 가지므로 700의 양의 약수 중 짝수의 개수는
 $2 \times 5^2 \times 7$ 의 양의 약수의 개수와 같다.
 $\therefore a=(1+1)(2+1)(1+1)=12$
 5의 배수는 5를 소인수로 가지므로 700의 양의 약수 중 5의 배수의 개
 수는 $2^2 \times 5 \times 7$ 의 양의 약수의 개수와 같다.
 $\therefore b=(2+1)(1+1)(1+1)=12$
 $\therefore a+b=12+12=24$

0960 답 18

- (i) $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $3 \times 4=12$
 (ii) $A \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 3=6$
 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $12+6=18$

0961 답 ③

- (i) 집 $\rightarrow$ 문구점 $\rightarrow$ 편의점 $\rightarrow$ 집으로 가는 경우의 수는
 $4 \times 2 \times 3=24$
 (ii) 집 $\rightarrow$ 편의점 $\rightarrow$ 문구점 $\rightarrow$ 집으로 가는 경우의 수는
 $3 \times 2 \times 4=24$
 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
 $24+24=48$

0962 답 30

- (i) $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 3=6$
 (ii) $A \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 2=4$
 (iii) $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 2 \times 2=8$
 (iv) $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 2 \times 3=12$
 (i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는 $6+4+8+12=30$

0963 답 4

B 지점과 D 지점을 연결하는 x 개의 도로를 추가한다고 하면

..... ①

- (i) $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 1=2$
 (ii) $A \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $3 \times 2=6$
 (iii) $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times x \times 2=4x$
 (iv) $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $3 \times x \times 1=3x$
 (i)~(iv)에서 A 지점에서 출발하여 C 지점으로 가는 경우의 수는
 $2+6+4x+3x=7x+8$ ②

$$7x+8=36 \text{에서 } 7x=28$$

$$\therefore x=4$$

따라서 추가해야 하는 도로의 개수는 4이다. ③

채점 기준

① 추가해야 하는 도로의 개수를 미지수로 두기	10 %
② A 지점에서 C 지점으로 가는 경우의 수 구하기	60 %
③ 추가해야 하는 도로의 개수 구하기	30 %

0964 답 48

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색
 을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외
 한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지
 이므로 구하는 경우의 수는 $4 \times 3 \times 2 \times 2=48$

0965 답 ②

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색
 을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외
 한 2가지이므로 구하는 경우의 수는 $4 \times 3 \times 2=24$

0966 답 84

- (i) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠
 한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과
 같은 색이므로 1가지, D에 칠할 수 있는 색은 A(C)에 칠한 색
 을 제외한 3가지이므로 칠하는 경우의 수는
 $4 \times 3 \times 1 \times 3=36$

- (ii) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠
 한 색을 제외한 3가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색
 을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제
 외한 2가지이므로 칠하는 경우의 수는
 $4 \times 3 \times 2 \times 2=48$

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $36+48=84$

0967 답 ⑤

A, B, C, D, E의 순서로 칠할 때, A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

(i) B와 D에 같은 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 A와 B(D)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 칠하는 경우의 수는 $5 \times 4 \times 3 \times 1 \times 3 = 180$

(ii) B와 D에 다른 색을 칠하는 경우

D에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, B, D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 칠하는 경우의 수는 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $180 + 240 = 420$

0968 답 49

(i) 지불할 수 있는 방법의 수

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개의 2가지

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는 $2 \times 5 \times 3 - 1 = 29$ $\therefore a = 29$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

50원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 100원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 1개를 50원짜리 동전 2개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 6개, 10원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원, ..., 300원의 7가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원의 3가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는 $7 \times 3 - 1 = 20$ $\therefore b = 20$

(i), (ii)에서 $a + b = 29 + 20 = 49$

0969 답 ⑤

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개의 2가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$4 \times 3 \times 4 \times 2 - 1 = 95$

0970 답 ②

500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 1000원짜리 지폐 1장을 500원짜리 동전 2개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전 5개, 100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 500원, 1000원, ..., 2500원의 6가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원, 300원의 4가지

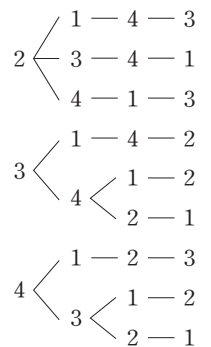
이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 구하는 금액의 수는

$6 \times 4 - 1 = 23$

0971 답 ②

$a_k \neq k (k=1, 2, 3, 4)$ 를 만족시키는 경우를 $a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4$ 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 구하는 자연수는 9개이다.



0972 답 ④

4명의 학생을 A, B, C, D라 하고, 각각의 학생이 준비한 선물을 a, b, c, d라 하자.

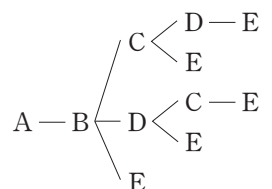
자신이 준비한 선물을 택한 학생을 A라 할 때, B, C, D가 다른 학생이 준비한 선물을 받는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.

같은 방법으로 자신이 준비한 선물을 택한 학생이 B 또는 C 또는 D인 경우도 각각 2가지이므로 구하는 경우의 수는 $2 \times 4 = 8$

0973 답 15

꼭짓점 A에서 출발하여 가장 먼저 꼭짓점 B를 거쳐 꼭짓점 E에 도착하는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.

같은 방법으로 꼭짓점 A에서 출발하여 가장 먼저 꼭짓점 C 또는 D를 거쳐 꼭짓점 E에 도착하는 경우도 각각 5가지이므로 구하는 경우의 수는 $5 \times 3 = 15$



0974 답 7

${}_nP_2 + 4 \times {}_nP_1 = 70$ 에서 $n(n-1) + 4n = 70$

$n^2 + 3n - 70 = 0, (n+10)(n-7) = 0$

$\therefore n = -10$ 또는 $n = 7$

이때 ${}_nP_2$ 에서 $n \geq 2$ 이므로 $n = 7$

0975 **답 11**

${}_nP_3 : {}_nP_2 = 9 : 1$ 에서 $9 \times {}_nP_2 = {}_nP_3$
 $9n(n-1) = n(n-1)(n-2)$
 이때 ${}_nP_3$ 에서 $n \geq 3$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면
 $9 = n-2 \quad \therefore n = 11$

0976 **답 ③**

${}_nP_3 = 60 \times {}_nP_2$ 에서
 $2n(2n-1)(2n-2) = 60n(n-1)$
 $4n(n-1)(2n-1) = 60n(n-1)$
 이때 ${}_nP_2$ 에서 $n \geq 2$ 이므로 양변을 $4n(n-1)$ 로 나누면
 $2n-1 = 15 \quad \therefore n = 18$

0977 **답 ㉠ (n-r)! ㉡ n ㉢ n!**

$$\begin{aligned} {}_{n-1}P_r + r \times {}_{n-1}P_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!} + r \times \frac{(n-1)!}{\boxed{\text{㉠ } (n-r)!}} \\ &\quad \downarrow (n-1)-(r-1)=n-r \\ &= \frac{(n-1)!(n-r)}{(n-r)!} + r \times \frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-r)!} \times \{(n-r) + r\} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-r)!} \times \boxed{\text{㉡ } n} \\ &= \frac{\boxed{\text{㉢ } n!}}{(n-r)!} = {}_nP_r \end{aligned}$$

0978 **답 ⑤**

구하는 경우의 수는 10명의 회원 중에서 3명을 택하여 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로 ${}_{10}P_3 = 720$

0979 **답 ②**

구하는 경우의 수는 5명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로
 $5! = 120$

0980 **답 144**

앞줄에 여학생이 앉을 경우의 수는 $3! = 6$
 뒷줄에 남학생이 앉을 경우의 수는 $4! = 24$
 따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 24 = 144$

0981 **답 8**

${}_nP_2 = 56$ 이므로
 $n(n-1) = 56 = 8 \times 7 \quad \therefore n = 8$

0982 **답 ③**

F와 A를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $5! = 120$
 F와 A의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$
 따라서 구하는 경우의 수는 $120 \times 2 = 240$

0983 **답 720**

2개의 문자 e를 한 문자로 생각하여 6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $6! = 720$
 2개의 문자 e는 같은 문자이므로 자리를 바꾸는 경우의 수는 1
 따라서 구하는 경우의 수는 $720 \times 1 = 720$

0984 **답 3**

고등학생 3명을 한 명으로 생각하여 $(n+1)$ 명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $(n+1)!$
 고등학생 3명의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3! = 6$
 이때 고등학생끼리 이웃하게 세우는 경우의 수가 144이므로
 $(n+1)! \times 6 = 144 \quad \dots \dots \text{㉠}$
 $(n+1)! = 24 = 4! \quad \dots \dots \text{㉡}$
 따라서 $n+1 = 4$ 이므로 $n = 3$

채점 기준

㉠ 고등학생끼리 이웃하게 세우는 경우의 수를 이용하여 식 세우기	50 %
㉡ n의 값 구하기	50 %

0985 **답 480**

자음인 b, s, k, t 4개를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4! = 24$
 자음 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 $\vee \text{㉠} \vee \text{㉡} \vee \text{㉢} \vee \text{㉣} \vee$
 에 모음인 a, e 2개를 배열하는 경우
 의 수는 ${}_5P_2 = 20$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $24 \times 20 = 480$

0986 **답 ⑤**

홀수인 1, 3, 5가 적힌 3장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는
 $3! = 6$
 홀수가 적힌 카드 사이사이와 양 끝의 4개의 $\vee \text{㉠} \vee \text{㉡} \vee \text{㉢} \vee$
 자리에 짝수인 2, 4가 적힌 2장의 카드를 배열하는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$
 따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 12 = 72$

0987 **답 144**

자음은 h, s, n, g의 4개이고 모음은 o, u, i의 3개이므로 자음 4개를 일렬로 배열하고 그 사이사이에 모음 3개를 배열하면 된다.
 따라서 구하는 경우의 수는
 $4! \times 3! = 24 \times 6 = 144$

0988 **답 288**

1과 2를 한 숫자로 생각하여 5, 6, 7을 제외한 3개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $3! = 6$
 1과 2의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$
 3개의 숫자 사이사이와 양 끝의 4개의 자 $\vee \text{㉠} \vee \text{㉡} \vee \text{㉢} \vee$
 리에 5, 6, 7을 배열하는 경우의 수는
 ${}_4P_3 = 24$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $6 \times 2 \times 24 = 288$

0989 답 ⑤

선생님, 학생의 순서로 교대로 서는 경우의 수는

$$2! \times 2! = 2 \times 2 = 4$$

학생, 선생님의 순서로 교대로 서는 경우의 수는

$$2! \times 2! = 2 \times 2 = 4$$

따라서 구하는 경우의 수는 $4 + 4 = 8$

0990 답 ④

6개의 의자 중에서 의자 3개에만 학생이 앉으므로 빈 의자는 3개이다.

빈 의자 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 $\vee \textcircled{\text{빈}} \vee \textcircled{\text{빈}} \vee \textcircled{\text{빈}} \vee$

학생이 앉은 의자 3개를 놓으면 되므로 구하

는 경우의 수는 ${}_4P_3 = 24$

0991 답 720

여학생 3명 중 2명을 양 끝에 세우는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

양 끝의 여학생 2명을 제외한 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$5! = 120$$

따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 120 = 720$

0992 답 ①

구하는 경우의 수는 준형이를 제외한 3명의 학생을 일렬로 세우는

경우의 수와 같으므로 $3! = 6$

0993 답 ②

승하, 선생님, 은서를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경
우의 수는 $3! = 6$

승하와 은서가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 2 = 12$

0994 답 ⑤

모음은 a, e의 2개이므로 2, 4, 6번째 자리 중 두 자리에 모음을 배
열하는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

나머지 네 자리에 자음 4개를 배열하는 경우의 수는 $4! = 24$

따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 24 = 144$

0995 답 960

C와 G 사이에 C와 G를 제외한 5개의 문자 중 2개의 문자를 택하여
일렬로 배열하는 경우의 수는 ${}_5P_2 = 20$

C와 G의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

$C \square \square G$ 를 한 문자로 생각하여 문자 4개를 일렬로 배열하는 경우의
수는 $4! = 24$

따라서 구하는 경우의 수는 $20 \times 2 \times 24 = 960$

0996 답 84

5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$5! = 120$$

자음은 r, t, h의 3개이므로 양 끝에 모두 자음이 오도록 배열하는
경우의 수는 ${}_3P_2 \times 3! = 6 \times 6 = 36$

따라서 구하는 경우의 수는 $120 - 36 = 84$

0997 답 ①

8명의 학생 중에서 대표 1명, 부대표 1명을 뽑는 경우의 수는

$${}_8P_2 = 56$$

대표, 부대표 모두 남학생을 뽑는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$56 - 6 = 50$$

0998 답 ②

5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $5! = 120$

A, C, E 중에서 어느 2개도 이웃하지 않도록 배열하는 경우의 수는

A, C, E를 일렬로 배열하고 그 사이사이에 B, D가 오도록 배열하
는 경우의 수와 같으므로 $3! \times 2! = 6 \times 2 = 12$

따라서 구하는 경우의 수는

$$120 - 12 = 108$$

0999 답 3

7개의 알파벳을 일렬로 배열하는 경우의 수는 $7! = 5040$

모음의 개수를 n 이라 하면 양 끝에 모두 모음이 오도록 배열하는 경
우의 수는

$${}_n P_2 \times 5! = 120 \times {}_n P_2$$

이때 적어도 한쪽 끝에 자음이 오도록 배열하는 경우의 수가 3600이
므로

$$5040 - 120 \times {}_n P_2 = 3600, 120 \times {}_n P_2 = 1440 \quad \therefore {}_n P_2 = 12$$

즉, $n(n-1) = 12 = 4 \times 3$ 이므로 $n = 4$ ($\because n \geq 2$)

따라서 모음의 개수가 4이므로 자음의 개수는 $7 - 4 = 3$

1000 답 ③

5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 5의 배수의 개수

0을 제외한 6개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 배열하는
경우의 수와 같으므로 ${}_6P_3 = 120$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 5를 제외한 5개

백의 자리와 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 천의 자리
와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택
하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_5P_2 = 20$

따라서 일의 자리의 숫자가 5인 5의 배수의 개수는

$$5 \times 20 = 100$$

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$$120 + 100 = 220$$

1001 답 100

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 5개

십의 자리와 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 백의 자리에
오는 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 배열하
는 경우의 수와 같으므로 ${}_5P_2 = 20$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $5 \times 20 = 100$

1002 [답] ③

홀수이려면 일의 자리의 숫자가 1 또는 3 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 1인 홀수의 개수

1을 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_4P_2=12$

(ii) 일의 자리의 숫자가 3인 홀수의 개수

3을 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_4P_2=12$

(iii) 일의 자리의 숫자가 5인 홀수의 개수

5를 제외한 4개의 숫자 중에서도 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_4P_2=12$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 홀수의 개수는

$$12+12+12=36$$

1003 [답] ②

3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 하므로 4개의 숫자 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 3개를 사용하여 3의 배수를 만드는 경우는 (1, 2, 3) 또는 (2, 3, 4)의 두 가지이다.

이때 각 경우마다 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$$3!=6$$

따라서 구하는 3의 배수의 개수는

$$2 \times 6=12$$

1004 [답] ③

각 자리의 숫자들의 합이 짝수이려면 세 자리의 숫자가 모두 짝수 또는 0이거나 두 자리의 숫자는 홀수, 한 자리의 숫자는 짝수 또는 0이어야 한다.

(i) 세 자리의 숫자가 모두 짝수 또는 0인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 짝수 4개

십의 자리와 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 백의 자리에 오는 짝수를 제외한 3개의 짝수와 0 중에서 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4P_2=12$$

따라서 자연수의 개수는 $4 \times 12=48$

(ii) 두 자리의 숫자는 홀수, 한 자리의 숫자는 짝수 또는 0인 경우

① (짝수, 홀수, 홀수)인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 짝수 4개

십의 자리와 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 5개의 홀수 중에서 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5P_2=20$$

따라서 자연수의 개수는 $4 \times 20=80$

② (홀수, 0 또는 짝수, 홀수)인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 홀수 5개

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 0 또는 짝수 5개

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리에 오는 홀수를 제외한 홀수 4개

따라서 자연수의 개수는 $5 \times 5 \times 4=100$

③ (홀수, 홀수, 0 또는 짝수)인 경우

백의 자리와 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 5개의 홀수 중에서 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_5P_2=20$

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0 또는 짝수 5개

따라서 자연수의 개수는 $20 \times 5=100$

①, ②, ③에서 자연수의 개수는 $80+100+100=280$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$48+280=328$$

1005 [답] 79번째

a□□□□ 풀인 문자열의 개수는 $4!=24$

m□□□□ 풀인 문자열의 개수는 $4!=24$

r□□□□ 풀인 문자열의 개수는 $4!=24$

sa□□□ 풀인 문자열의 개수는 $3!=6$

sm□□□ 풀인 문자열에서 smart는 첫 번째이므로 smart가 나타내는 순서는

$$24+24+24+6+1=79(\text{번째})$$

1006 [답] ②

240보다 작은 세 자리의 자연수는 1□□, 20□, 21□, 23□ 풀이다.

1□□ 풀인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$

20□ 풀인 자연수의 개수는 3

21□ 풀인 자연수의 개수는 3

23□ 풀인 자연수의 개수는 3

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$12+3+3+3=21$$

1007 [답] ③

a□□□□□ 풀인 문자열의 개수는 $5!=120$

g□□□□□ 풀인 문자열의 개수는 $5!=120$

ia□□□□ 풀인 문자열의 개수는 $4!=24$

ig□□□□ 풀인 문자열의 개수는 $4!=24$

ina□□□ 풀인 문자열의 $3!=6$

이때 $120+120+24+24+6=294$ 이므로 295번째에 나타나는 문자열은 ingasv이다.

1008 [답] 4523

6□□□ 풀인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$

5□□□ 풀인 자연수의 개수는 ${}_5P_3=60$

46□□ 풀인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$

456□ 풀인 자연수의 개수는 3

453□ 풀인 자연수의 개수는 3

즉, 6543부터 4531까지의 자연수의 개수는

$$60+60+12+3+3=138$$

이때 4531보다 작은 수는 차례대로 4526, 4523, ...이므로 구하는 수는 4523이다.

1009 답 ⑤

- (i) 뽑힌 카드에 적힌 수가 2의 배수인 경우는 15가지
 (ii) 뽑힌 카드에 적힌 수가 3의 배수인 경우는 10가지
 (iii) 뽑힌 카드에 적힌 수가 2와 3의 최소공배수인 6의 배수인 경우는 5가지
 (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $15+10-5=20$

1010 답 6

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 3, 7의 2개
 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 3개
 따라서 구하는 홀수의 개수는 $2 \times 3 = 6$

1011 답 ④

$(a+b+c)(x+y)^2 = (a+b+c)(x^2+2xy+y^2)$ 에서 a, b, c 에 곱해지는 항이 각각 $x^2, 2xy, y^2$ 의 3개이므로 구하는 항의 개수는 $3 \times 3 = 9$

1012 답 ③

$1350 = 2 \times 3^3 \times 5^2$ 이고 홀수는 2를 소인수로 갖지 않으므로 1350의 양의 약수 중 홀수의 개수는 $3^3 \times 5^2$ 의 양의 약수의 개수와 같다.
 따라서 구하는 홀수인 양의 약수의 개수는 $(3+1)(2+1) = 12$

1013 답 ③

- (i) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ 로 가는 경우의 수는 $3 \times 5 \times 2 = 30$
 (ii) $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 5 \times 3 = 30$
 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $30 + 30 = 60$

1014 답 ①

- ㄱ. 1000원짜리 지폐로 지불할 수 있는 방법은
 0장, 1장의 2가지
 500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
 0개, 1개, 2개, 3개, 4개, 5개의 6가지
 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은
 0개, 1개, 2개, ..., 10개의 11가지
 이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는 $2 \times 6 \times 11 - 1 = 131$
 ㄴ. 500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 1000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 같고, 100원짜리 동전 5개로 지불할 수 있는 금액과 500원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 1000원짜리 지폐 1장과 500원짜리 동전 5개를 모두 100원짜리 동전 35개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 100원짜리 동전 45개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
 100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은
 0원, 100원, 200원, ..., 4500원의 46가지
 이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는 $46 - 1 = 45$

- ㄷ. 1000원짜리 지폐 x 장, 500원짜리 동전 y 개, 100원짜리 동전 z 개로 지불한다고 하면 그 금액의 합이 2000원이므로

$$1000x + 500y + 100z = 2000$$

$$\therefore 10x + 5y + z = 20 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 구하는 방법의 수는 방정식 ①을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수와 같다.

- (i) $x=0$ 일 때, $5y+z=20$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는

$(4, 0), (3, 5), (2, 10)$ 의 3개

- (ii) $x=1$ 일 때, $5y+z=10$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는

$(2, 0), (1, 5), (0, 10)$ 의 3개

- (i), (ii)에서 지불하는 방법의 수는

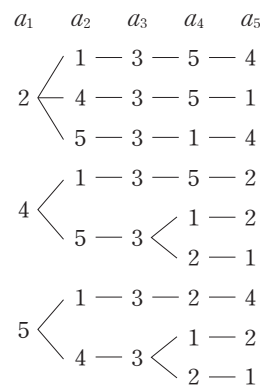
$$3+3=6$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

1015 답 9

$a_3=3, a_k \neq k (k=1, 2, 4, 5)$ 를 만족시키는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 9이다.



1016 답 7

$${}_{n+1}P_3 - 6 \times {}_nP_2 = 14 \times {}_{n-1}P_1 \text{에서}$$

$$(n+1)n(n-1) - 6n(n-1) = 14(n-1)$$

이때 ${}_nP_2$ 에서 $n \geq 2$ 이므로 양변을 $n-1$ 로 나누면

$$n(n+1) - 6n = 14$$

$$n^2 - 5n - 14 = 0$$

$$(n+2)(n-7) = 0$$

$$\therefore n = -2 \text{ 또는 } n = 7$$

그런데 $n \geq 2$ 이므로 $n = 7$

1017 답 336

구하는 경우의 수는 8명의 학생 중에서 3명을 택하여 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

$${}_8P_3 = 336$$

1018 답 ⑤

모음인 u, i, o를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4! = 24$

모음 u, i, o끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 6 = 144$$

1019 **답** ④

팬 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5! = 120$
 팬들 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 가수 2명을 세우는 경우의 수는 ${}_6P_2 = 30$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $120 \times 30 = 3600$

1020 **답** ①

구하는 경우의 수는 F를 제외한 나머지 5곡 중에서 3곡을 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로
 ${}_5P_3 = 60$

1021 **답** ②

현서와 현아를 제외한 나머지 가족 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$
 현서와 현아가 양 끝에 서는 경우의 수는 $2! = 2$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $6 \times 2 = 12$

1022 **답** 288

M과 P 사이에 모음 I, O, E 중 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$
 M과 P의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$
 $M \square \square P$ 를 한 문자로 생각하여 문자 4개를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4! = 24$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $6 \times 2 \times 24 = 288$

1023 **답** 84

5개의 인형을 일렬로 진열하는 경우의 수는 $5! = 120$
 양 끝에 B 회사의 인형이 오도록 진열하는 경우의 수는
 ${}_3P_2 \times 3! = 6 \times 6 = 36$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $120 - 36 = 84$

1024 **답** ⑤

짝수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 2 또는 4이어야 한다.
 (i) 일의 자리의 숫자가 0인 짝수의 개수
 0을 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로
 ${}_4P_2 = 12$
 (ii) 일의 자리의 숫자가 2인 짝수의 개수
 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 2를 제외한 3개, 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리에 오는 숫자와 2를 제외한 3개
 이므로 일의 자리의 숫자가 2인 짝수의 개수는
 $3 \times 3 = 9$
 (iii) 일의 자리의 숫자가 4인 짝수의 개수
 (ii)와 같은 방법으로 $3 \times 3 = 9$
 (i), (ii), (iii)에서 구하는 짝수의 개수는
 $12 + 9 + 9 = 30$

1025 **답** 66

3200보다 큰 네 자리의 자연수는 $32\square\square$, $34\square\square$, $35\square\square$,
 $4\square\square\square$, $5\square\square\square$ 풀이다.
 $32\square\square$ 풀인 자연수의 개수는 ${}_3P_2 = 6$
 $34\square\square$ 풀인 자연수의 개수는 ${}_3P_2 = 6$
 $35\square\square$ 풀인 자연수의 개수는 ${}_3P_2 = 6$
 $4\square\square\square$ 풀인 자연수의 개수는 ${}_4P_3 = 24$
 $5\square\square\square$ 풀인 자연수의 개수는 ${}_4P_3 = 24$
 따라서 구하는 자연수의 개수는 $6 + 6 + 6 + 24 + 24 = 66$

1026 **답** ③

$7\square\square\square$ 풀인 자연수의 개수는 ${}_6P_3 = 120$
 $6\square\square\square$ 풀인 자연수의 개수는 ${}_6P_3 = 120$
 $5\square\square\square$ 풀인 자연수의 개수는 ${}_6P_3 = 120$
 $47\square\square$ 풀인 자연수의 개수는 ${}_5P_2 = 20$
 즉, 7654부터 4712까지의 자연수의 개수는
 $120 + 120 + 120 + 20 = 380$
 이때 4712보다 작은 수는 차례대로 4675, 4673, 4672, 4671, ... 이므로 구하는 수는 4671이다.

1027 **답** 16

x, y, z 가 자연수이므로 $x + 2y + 3z$ 가 될 수 있는 값은 10, 11, 12이다. ①
 (i) $x + 2y + 3z = 10$ 일 때, 순서쌍 (x, y, z) 는
 $(5, 1, 1), (3, 2, 1), (1, 3, 1), (2, 1, 2)$ 의 4개
 (ii) $x + 2y + 3z = 11$ 일 때, 순서쌍 (x, y, z) 는
 $(6, 1, 1), (4, 2, 1), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (1, 2, 2)$ 의 5개
 (iii) $x + 2y + 3z = 12$ 일 때, 순서쌍 (x, y, z) 는
 $(7, 1, 1), (5, 2, 1), (3, 3, 1), (1, 4, 1), (4, 1, 2), (2, 2, 2), (1, 1, 3)$ 의 7개 ②
 (i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는
 $4 + 5 + 7 = 16$ ③

채점 기준

① $x + 2y + 3z$ 가 될 수 있는 값 구하기	20 %
② $x + 2y + 3z$ 의 값이 10, 11, 12일 때, 순서쌍 (x, y, z) 의 개수 구하기	60 %
③ 순서쌍 (x, y, z) 의 개수 구하기	20 %

1028 **답** 540

A에 칠할 수 있는 색은 5가지
 B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지
 C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지
 D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 3가지
 E에 칠할 수 있는 색은 A와 D에 칠한 색을 제외한 3가지 ①
 따라서 구하는 경우의 수는 $5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$ ②

채점 기준

① A, B, C, D, E에 각각 칠할 수 있는 경우의 수 구하기	70 %
② 칠하는 경우의 수 구하기	30 %

1029 답 1584

이웃하지 않는 특정한 남학생 3명을 제외한 남학생 1명과 여학생 3명이 일렬로 앉는 경우의 수는 $4! = 24$

남학생 1명과 여학생 3명의 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 특정한 남학생 3명이 앉는 경우의 수는 ${}_5P_3 = 60$

$$\therefore a = 24 \times 60 = 1440 \quad \dots \textcircled{i}$$

남학생은 4명이고 여학생은 3명이므로 여학생과 남학생이 교대로 앉으려면 남학생 4명이 일렬로 앉고 그 사이사이에 여학생 3명이 앉으면 된다.

$$\therefore b = 4! \times 3! = 24 \times 6 = 144 \quad \dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore a + b = 1440 + 144 = 1584 \quad \dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① a의 값 구하기	40%
② b의 값 구하기	40%
③ a+b의 값 구하기	20%

C 실력 향상

161쪽

1030 답 30

이차함수 $y = x^2 - (a+b)x + ab$ 의 그래프가 직선 $y = -4$ 와 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2 - (a+b)x + ab = -4$, 즉

$$x^2 - (a+b)x + ab + 4 = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 할 때}$$

$$D = (a+b)^2 - 4(ab+4) < 0$$

$$(a-b)^2 - 16 < 0, (a-b)^2 < 16$$

$$\therefore -4 < a-b < 4$$

(i) $a-b = -3$ 일 때

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 4), (2, 5), (3, 6)$ 의 3개

(ii) $a-b = -2$ 일 때

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)$ 의 4개

(iii) $a-b = -1$ 일 때

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)$ 의 5개

(iv) $a-b = 0$ 일 때

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ 의 6개

(v) $a-b = 1$ 일 때

순서쌍 (a, b) 는 $(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$ 의 5개

(vi) $a-b = 2$ 일 때

순서쌍 (a, b) 는 $(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4)$ 의 4개

(vii) $a-b = 3$ 일 때

순서쌍 (a, b) 는 $(4, 1), (5, 2), (6, 3)$ 의 3개

(i)~(vii)에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 = 30$$

1031 답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 각 영역을 A, B, C, D,

E, F라 하자.

C에 칠할 수 있는 색은 n 가지

B에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외

한 $(n-1)$ 가지

A에 칠할 수 있는 색은 B와 C에 칠한 색을 제외한 $(n-2)$ 가지

D에 칠할 수 있는 색은 B와 C에 칠한 색을 제외한 $(n-2)$ 가지

F에 칠할 수 있는 색은 C와 D에 칠한 색을 제외한 $(n-2)$ 가지

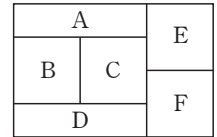
E에 칠할 수 있는 색은 A, C, F에 칠한 색을 제외한 $(n-3)$ 가지

$$\therefore f(n) = n(n-1)(n-2)^3(n-3)$$

$$\text{따라서 } f(4) = 4 \times 3 \times 2^3 \times 1 = 96,$$

$$f(6) = 6 \times 5 \times 4^3 \times 3 = 5760 \text{이므로}$$

$$f(4) + f(6) = 5856$$



1032 답 576

(가)에서 A와 B가 앉는 줄을 고르는 경우의 수는 ${}_3P_1 = 3$

A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 A와 B가 이웃하여 앉는 경우의 수는

$$3 \times 2 = 6$$

A와 B가 앉은 좌석을 제외한 5개의 좌석에 C와 D가 앉는 경우의 수는 ${}_5P_2 = 20$

C와 D가 이웃하여 앉는 경우의 수는

$${}_2P_1 \times 2! = 2 \times 2 = 4$$

따라서 C와 D가 이웃하여 앉지 않는 경우의 수는

$$20 - 4 = 16$$

A, B, C, D가 앉은 좌석을 제외한 나머지 3개의 좌석에 E, F, G가 앉는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 16 \times 6 = 576$$

1033 답 ②

6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $6! = 720$

AB를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $5! = 120$

BC를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $5! = 120$

CA를 한 문자로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $5! = 120$

ABC를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4! = 24$

BCA를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4! = 24$

CAB를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4! = 24$

따라서 구하는 문자열의 개수는

$$720 - \{(120 + 120 + 120) - (24 + 24 + 24)\} = 432$$

10 / 조합

A 개념 확인

162~163쪽

1034 답 15

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

1035 답 36

$${}_9C_7 = {}_9C_2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$$

1036 답 1

1037 답 1

1038 답 7

$${}_nC_3 = {}_nC_{n-3} \text{이므로}$$

$$n-3=4 \quad \therefore n=7$$

1039 답 8

$${}_nC_7 = {}_nC_{n-7} \text{이므로}$$

$$n-7=1 \quad \therefore n=8$$

1040 답 6

$${}_8C_r = {}_8C_{8-r} \text{이므로}$$

$$8-r=2 \quad \therefore r=6$$

1041 답 7

$${}_{10}C_r = {}_{10}C_{10-r} \text{이므로}$$

$$10-r=r-4$$

$$-2r=-14 \quad \therefore r=7$$

1042 답 4

$${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 6$$

$$\text{즉, } n(n-1)=12=4 \times 3 \text{이므로}$$

$$n=4 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

1043 답 7

$${}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

$$\text{즉, } n(n-1)(n-2)=210=7 \times 6 \times 5 \text{이므로}$$

$$n=7 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

1044 답 5

$${}_{n+1}C_2 = \frac{(n+1)n}{2 \times 1} = 15$$

$$\text{즉, } (n+1)n=30=6 \times 5 \text{이므로}$$

$$n=5 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

1045 답 1 또는 11

$${}_{12}C_1 = {}_{12}C_{11} = 12 \text{이므로}$$

$$r=1 \text{ 또는 } r=11$$

1046 답 66

$${}_{12}C_2 = \frac{12 \times 11}{2 \times 1} = 66$$

1047 답 455

$${}_{15}C_3 = \frac{15 \times 14 \times 13}{3 \times 2 \times 1} = 455$$

1048 답 210

학생 10명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{10}C_4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

1049 답 4

여학생 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

1050 답 15

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

1051 답 20

$${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

1052 답 60

$${}_6C_3 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 = {}_6C_3 \times {}_3C_1 \times {}_1C_1 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times 3 \times 1 = 60$$

B 유형 완성

164~169쪽

1053 답 ②

$${}_nC_2 + {}_{n+1}C_2 = {}_{n+3}C_2 \text{에서}$$

$$\frac{n(n-1)}{2 \times 1} + \frac{(n+1)n}{2 \times 1} = \frac{(n+3)(n+2)}{2 \times 1}$$

$$n(n-1) + n(n+1) = (n+3)(n+2)$$

$$n^2 - 5n - 6 = 0, (n+1)(n-6) = 0$$

$$\therefore n = -1 \text{ 또는 } n = 6$$

이때 ${}_nC_2$ 에서 $n \geq 2$ 이므로 $n = 6$

1054 답 ⑤

$${}_{44}C_{n^2} = {}_{44}C_{5n-6} \text{에서}$$

$$n^2 = 5n - 6 \text{ 또는 } 44 - n^2 = 5n - 6$$

(i) $n^2 = 5n - 6$ 에서 $n^2 - 5n + 6 = 0$

$$(n-2)(n-3) = 0$$

$$\therefore n = 2 \text{ 또는 } n = 3$$

(ii) $44 - n^2 = 5n - 6$ 에서 $n^2 + 5n - 50 = 0$

$(n+10)(n-5) = 0 \quad \therefore n = 5 \quad (\because n \text{은 자연수})$

(i), (ii)에서 자연수 n 의 값은 2, 3, 5이므로 구하는 n 의 값의 합은 $2+3+5=10$

1055 답 ③

${}_{n+1}P_2 + {}_{n+1}C_{n-1} = 63$ 에서

$(n+1)n + \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} = 63$

$(n+1)n + \frac{(n+1)n}{2 \times 1} = 63, \quad \frac{3n(n+1)}{2} = 63$

$n(n+1) = 42 = 6 \times 7$

$\therefore n = 6 \quad (\because n \text{은 자연수})$

1056 답 -5

주어진 이차방정식에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = \frac{2 \times {}_nC_3}{{}_nC_2}, \quad \alpha\beta = \frac{-2 \times {}_nC_4}{{}_nC_2} \quad \dots\dots \textcircled{i}$

이때 $\alpha + \beta = 4$ 이므로

$\frac{2 \times {}_nC_3}{{}_nC_2} = 4, \quad {}_nC_3 = 2 \times {}_nC_2$

$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 2 \times \frac{n(n-1)}{2 \times 1}$

${}_nC_4$ 에서 $n \geq 4$ 이므로

$n-2=6 \quad \therefore n=8 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$

$\therefore \alpha\beta = \frac{-2 \times {}_8C_4}{{}_8C_2} = \frac{-2 \times 70}{28} = -5 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① α, β 에 대한 관계식 세우기	20%
② n 의 값 구하기	50%
③ $\alpha\beta$ 의 값 구하기	30%

1057 답 18

장래 희망이 프로그래머인 학생 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2 = 6$

장래 희망이 디자이너인 학생 3명 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_3C_1 = 3$

따라서 구하는 경우의 수는

$6 \times 3 = 18$

1058 답 ④

연극반 학생 8명 중에서 주인공 1명을 뽑는 경우의 수는

${}_8C_1 = 8$

나머지 학생 7명 중에서 주인공 외 출연자 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_7C_2 = 21$

따라서 구하는 경우의 수는

$8 \times 21 = 168$

1059 답 12

${}_nC_2 = 66$ 이므로 $\frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 66$

$n(n-1) = 132 = 12 \times 11 \quad \therefore n = 12 \quad (\because n \geq 2)$

1060 답 ②

선택한 카드에 적혀 있는 수의 합이 짝수이려면 홀수가 적혀 있는 카드 2장, 짝수가 적혀 있는 카드 3장 또는 홀수가 적혀 있는 카드 4장, 짝수가 적혀 있는 카드 1장을 택해야 한다.

(i) 홀수가 적혀 있는 카드 2장, 짝수가 적혀 있는 카드 3장을 택할

경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_4C_3 = {}_4C_2 \times {}_4C_1 = 6 \times 4 = 24$

(ii) 홀수가 적혀 있는 카드 4장, 짝수가 적혀 있는 카드 1장을 택할

경우의 수는 ${}_4C_4 \times {}_4C_1 = 1 \times 4 = 4$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$24 + 4 = 28$

1061 답 21

$2 < a < b \leq 9$ 를 만족시키는 자연수 a, b 는 7개의 자연수 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 서로 다른 2개를 뽑아 크기가 작은 순서대로 a, b 로 정하면 되므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는

${}_7C_2 = 21$

1062 답 450

(㉞)에서 각 바구니에 빨간색 공은 0개 또는 1개 넣을 수 있으므로 빨간색 공을 바구니에 넣는 경우의 수는

${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$

(㉟)에서 각 바구니에 공을 1개씩은 넣어야 하므로 빨간색 공을 넣지 않은 2개의 빈 바구니에 파란색 공을 1개씩 넣으면 남은 4개의 파란색 공을 넣는 경우는 다음과 같다.

(i) 2개의 바구니에 각각 2개씩 넣는 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$

(ii) 3개의 바구니에 각각 2개, 1개, 1개씩 넣는 경우의 수는

${}_5C_3 \times {}_3C_1 = {}_5C_2 \times {}_3C_1 = 10 \times 3 = 30$

(iii) 4개의 바구니에 각각 1개씩 넣는 경우의 수는 ${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$

(i), (ii), (iii)에서 파란색 공을 바구니에 넣는 경우의 수는

$10 + 30 + 5 = 45$

따라서 구하는 경우의 수는

$10 \times 45 = 450$

1063 답 15

구하는 경우의 수는 현수와 정민이를 제외한 6명의 회원 중에서 2명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

${}_6C_2 = 15$

1064 답 ②

구하는 경우의 수는 빨간색, 주황색, 노란색을 제외한 4가지 색 중에서 2가지 색을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_2 = 6$

1065 답 100

특정한 1학년 학생 1명을 제외한 1학년 학생 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$

특정한 2학년 학생 2명을 제외한 2학년 학생 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$

따라서 구하는 경우의 수는 $10 \times 10 = 100$

1066 답 60

연회가 5가지 체험 프로그램 중에서 2가지를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2=10$$

민아가 연회가 택한 2가지 체험 프로그램 중에서 하나를 택하고, 연회가 택하지 않은 3가지 체험 프로그램 중에서 하나를 택하는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_3C_1=2 \times 3=6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10+6=60$$

다른 풀이

5가지 체험 프로그램 중에서 연회와 민아가 공통으로 체험하는 프로그램을 택하는 경우의 수는

$${}_5C_1=5$$

남은 4가지 체험 프로그램 중에서 연회와 민아가 각각 체험할 프로그램을 하나씩 택하는 경우의 수는

$${}_4P_2=12$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$5 \times 12=60$$

1067 답 294

11권의 책 중에서 4권을 택하는 경우의 수는

$${}_{11}C_4=330$$

소설책만 4권을 택하는 경우의 수는

$${}_7C_4={}_7C_3=35$$

수필집만 4권을 택하는 경우의 수는

$${}_4C_4=1$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$330-(35+1)=294$$

1068 답 205

10명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{10}C_4=210$$

남자 5명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_4={}_5C_1=5$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$210-5=205$$

1069 답 ③

11컬레의 신발 중에서 4컬레를 택하는 경우의 수는

$${}_{11}C_4=330$$

(i) 구두를 1컬레도 포함하지 않고 택하는 경우의 수

운동화와 슬리퍼 중에서 4컬레를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6C_4={}_6C_2=15$$

(ii) 구두가 1컬레 포함되도록 택하는 경우의 수

구두 중에서 1컬레를 택하고 운동화와 슬리퍼 중에서 3컬레를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_1 \times {}_6C_3=5 \times 20=100$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $330-(15+100)=215$

1070 답 7명

12명의 학생 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{12}C_3=220$ ①

2학년 학생을 n 명이라 하면 2학년 학생 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_nC_3$

이때 1학년 학생이 적어도 1명 포함되도록 뽑는 경우의 수가 210이므로

$$220-{}_nC_3=210$$

$${}_nC_3=10, \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}=10$$

$$n(n-1)(n-2)=60=5 \times 4 \times 3$$

$$\therefore n=5 (\because n \text{은 자연수})$$

따라서 2학년 학생이 5명이므로 1학년 학생은

$$12-5=7(\text{명})$$

채점 기준

① 모든 경우의 수 구하기	30 %
② 2학년 학생 수 구하기	50 %
③ 1학년 학생 수 구하기	20 %

1071 답 1440

홀수 1, 3, 5, 7, 9의 5개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2=10$$

짝수 2, 4, 6, 8의 4개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2=6$$

4개의 수를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 비밀번호의 개수는

$$10 \times 6 \times 24=1440$$

1072 답 ③

연우와 찬호를 제외한 학생 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_2=10$$

연우와 찬호를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3!=6$

연우와 찬호가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는 $10 \times 6 \times 2=120$

1073 답 11

세 가로줄에 물건을 1개, 2개, 3개의 순서로 넣는 경우의 수를 구해 보자.

6개의 물건 중에서 1개를 뽑고, 한 가로줄에서 물건을 넣을 보관함 1칸을 택하여 배치하는 경우의 수는 ${}_6C_1 \times {}_3P_1=2 \times 3^2$

남은 5개의 물건 중에서 2개를 뽑고, 한 가로줄에서 물건을 넣을 보관함 2칸을 택하여 배치하는 경우의 수는 ${}_5C_2 \times {}_3P_2=2^2 \times 3 \times 5$

남은 3개의 물건 중에서 3개를 뽑고, 한 가로줄에서 물건을 넣을 보관함 3칸을 택하여 배치하는 경우의 수는 ${}_3C_3 \times 3!=2 \times 3$

따라서 세 가로줄에 물건을 1개, 2개, 3개의 순서로 넣는 경우의 수는 $(2 \times 3^2) \times (2^2 \times 3 \times 5) \times (2 \times 3)=2^4 \times 3^4 \times 5$

이때 세 가로줄 중에서 물건을 각각 1개, 2개, 3개 넣는 가로줄을 정하는 경우의 수는 $3!=2 \times 3$

따라서 구하는 경우의 수는 $(2^4 \times 3^4 \times 5) \times (2 \times 3)=2^5 \times 3^5 \times 5$

$$\therefore a+b+c=5+5+1=11$$

1074 **답** ③

구하는 직선의 개수는 6개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로
 ${}_6C_2=15$

1075 **답** 14

평행한 두 직선 위의 점을 하나씩 택하여 만들 수 있는 직선의 개수는
 ${}_3C_1 \times {}_4C_1 = 3 \times 4 = 12$
 이때 주어진 직선 2개를 포함하면 구하는 직선의 개수는
 $12 + 2 = 14$

1076 **답** 41

11개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
 ${}_{11}C_2=55$
 한 직선 위에 있는 6개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
 ${}_6C_2=15$
 이때 한 직선 위에 있는 점으로 만들 수 있는 직선은 1개뿐이므로 구하는 직선의 개수는
 $55 - 15 + 1 = 41$

1077 **답** ①

구하는 대각선의 개수는 10개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 선분의 개수에서 십각형의 변의 개수를 뺀 것과 같으므로
 ${}_{10}C_2 - 10 = 45 - 10 = 35$

1078 **답** ②

n 각형의 대각선의 개수가 65라 하면
 ${}_nC_2 - n = 65$
 $\frac{n(n-1)}{2 \times 1} - n = 65$
 $n^2 - 3n - 130 = 0$
 $(n+10)(n-13) = 0$
 $\therefore n = -10$ 또는 $n = 13$
 이때 $n > 3$ 이므로 $n = 13$
 따라서 구하는 다각형의 꼭짓점의 개수는 13이다.

1079 **답** ④

서로 다른 대각선의 교점은 꼭짓점을 공유하지 않는 두 대각선으로 결정되고, 이 두 대각선은 4개의 꼭짓점으로 결정된다.
 따라서 구하는 대각선의 교점의 최대 개수는 9개의 꼭짓점 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로
 ${}_9C_4=126$

1080 **답** 110

10개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는
 ${}_{10}C_3=120$
 한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는
 ${}_5C_3={}_5C_2=10$

이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는
 $120 - 10 = 110$

1081 **답** ②

구하는 사각형의 개수는 7개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로
 ${}_7C_4={}_7C_3=35$

1082 **답** 72

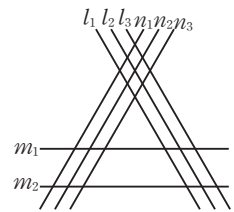
9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는
 ${}_9C_3=84$
 한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는
 ${}_4C_3={}_4C_1=4$
 이때 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 3개이고, 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는
 $84 - 3 \times 4 = 72$

1083 **답** 18

가로 방향의 평행한 직선 4개 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 3개 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정되므로 구하는 평행사변형의 개수는
 ${}_4C_2 \times {}_3C_2 = {}_4C_2 \times {}_3C_1 = 6 \times 3 = 18$

1084 **답** ④

(i) l_1, l_2, l_3 중에서 2개를 택하고, m_1, m_2 를 택하는 경우의 수는
 ${}_3C_2 \times {}_2C_2 = {}_3C_1 \times {}_2C_2 = 3 \times 1 = 3$
 (ii) m_1, m_2 를 택하고, n_1, n_2, n_3 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
 ${}_2C_2 \times {}_3C_2 = {}_2C_2 \times {}_3C_1 = 1 \times 3 = 3$
 (iii) l_1, l_2, l_3 중에서 2개, m_1, m_2, n_3 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
 ${}_3C_2 \times {}_3C_2 = {}_3C_1 \times {}_3C_1 = 3 \times 3 = 9$
 (i), (ii), (iii)에서 구하는 평행사변형의 개수는
 $3 + 3 + 9 = 15$



1085 **답** 10

가로 방향으로 놓인 3개의 선 중에서 2개, 세로 방향으로 놓인 4개의 선 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 결정되므로 직사각형의 개수는
 ${}_3C_2 \times {}_4C_2 = {}_3C_1 \times {}_4C_2$
 $= 3 \times 6 = 18$ ①
 작은 정사각형의 한 변의 길이를 1이라 하면 정사각형의 개수는 한 변의 길이가 1인 것이 6개, 2인 것이 2개이므로
 $6 + 2 = 8$ ②
 따라서 구하는 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는
 $18 - 8 = 10$ ③

채점 기준

i 직사각형의 개수 구하기	40 %
ii 정사각형의 개수 구하기	40 %
iii 정사각형이 아닌 직사각형의 개수 구하기	20 %

1086 답 ⑤

사탕 6개를 똑같은 상자 3개에 빈 상자가 없도록 나누어 담을 때, 각 상자에 담을 수 있는 사탕의 개수는

1, 1, 4 또는 1, 2, 3 또는 2, 2, 2

(i) 1개, 1개, 4개로 나누어 담는 경우의 수는

$${}_6C_1 \times {}_5C_1 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} = 6 \times 5 \times 1 \times \frac{1}{2} = 15$$

(ii) 1개, 2개, 3개로 나누어 담는 경우의 수는

$${}_6C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 = 6 \times 10 \times 1 = 60$$

(iii) 2개, 2개, 2개로 나누어 담는 경우의 수는

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} = 15 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{6} = 15$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$15 + 60 + 15 = 90$$

1087 답 105

10명을 5명, 5명의 두 조로 나누는 경우의 수는

$${}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{2!} = 252 \times 1 \times \frac{1}{2} = 126$$

여학생 3명이 같은 조에 포함되도록 나누는 경우의 수는 남학생 7명을 2명, 5명으로 나누는 경우의 수와 같으므로

$${}_7C_2 \times {}_5C_5 = 21 \times 1 = 21$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$126 - 21 = 105$$

다른 풀이

각 조에 적어도 한 명의 여학생이 포함되려면 남학생 4명과 여학생 1명, 남학생 3명과 여학생 2명의 두 개의 조로 나누어야 한다.

남학생 7명 중에서 4명과 여학생 3명 중에서 1명을 뽑아 한 조가 되는 경우의 수는

$${}_7C_4 \times {}_3C_1 = {}_7C_3 \times {}_3C_3 = 35 \times 3 = 105$$

1088 답 ⑤

7명의 학생을 2명, 2명, 2명, 1명의 4개 조로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{3!} = 21 \times 10 \times 3 \times 1 \times \frac{1}{6} = 105$$

4개 조를 4곳의 봉사 활동 장소에 배정하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$105 \times 24 = 2520$$

1089 답 90

6개의 학급을 3개, 3개의 두 조로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 20 \times 1 \times \frac{1}{2} = 10$$

각 조에서 부전승으로 올라갈 학급을 택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_3C_1 = 3 \times 3 = 9$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 9 = 90$$

1090 답 ③

구하는 경우의 수는 5개의 학급을 3개, 2개의 두 조로 나눈 후 3개의 학급인 조에서 부전승으로 올라갈 한 학급을 택하는 경우의 수와 같으므로

$$({}_5C_3 \times {}_2C_2) \times {}_3C_1 = ({}_5C_2 \times {}_2C_2) \times {}_3C_1 = 10 \times 1 \times 3 = 30$$

1091 답 ④

구하는 경우의 수는 7개의 팀을 4개, 3개의 두 조로 나눈 후 4개인 조를 다시 2개, 2개의 두 조로, 3개인 조를 2개, 1개의 두 조로 나누는 경우의 수와 같다.

(i) 7개의 팀을 4개, 3개로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_4 \times {}_3C_3 = {}_7C_3 \times {}_3C_3 = 35 \times 1 = 35$$

(ii) 4개의 팀을 2개, 2개로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

(iii) 3개의 팀을 2개, 1개로 나누는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times {}_1C_1 = {}_3C_1 \times {}_1C_1 = 3 \times 1 = 3$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$35 \times 3 \times 3 = 315$$

AB 유형 점검

170~172쪽

1092 답 ④

$${}_7C_3 + {}_7C_4 = {}_8C_4$$

1093 답 ③

$${}_nP_3 - {}_{2n}C_2 = 15 \text{에서}$$

$$n(n-1)(n-2) - \frac{2n(2n-1)}{2 \times 1} = 15$$

$$n^3 - 5n^2 + 3n - 15 = 0$$

$$(n-5)(n^2+3)=0$$

$$\therefore n=5 (\because n \text{은 자연수})$$

1094 답 30

(i) A 모둠 학생 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_3 = 20$$

(ii) B 모둠 학생 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$20 + 10 = 30$$

1095 답 ④

2부터 40까지의 짝수 중에서 서로 다른 두 수를 택할 때, 택한 두 수의 합이 3의 배수가 되는 경우는 두 수가 모두 3의 배수인 경우와 두 수를 3으로 나누었을 때 나머지가 각각 1, 2인 경우이다.

(i) 두 수가 모두 3의 배수인 경우

2부터 40까지의 짝수 중에서 3의 배수는 6, 12, 18, 24, 30, 36
이므로 6개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$

(ii) 두 수를 3으로 나누었을 때 나머지가 각각 1, 2인 경우

2부터 40까지의 짝수 중에서 3으로 나누었을 때 나머지가 1인 수는 4, 10, 16, 22, 28, 34, 40

3으로 나누었을 때 나머지가 2인 수는 2, 8, 14, 20, 26, 32, 38

따라서 두 수를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_1 \times {}_7C_1 = 7 \times 7 = 49$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$15 + 49 = 64$$

1096 답 ①

a, b 를 포함하여 택하는 경우의 수는 a, b 를 제외한 5개의 문자 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_2 = 10$$

a, b 를 포함하지 않고 택하는 경우의 수는 a, b 를 제외한 5개의 문자 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

따라서 구하는 합은 $10 + 5 = 15$

1097 답 ⑤

A, B 중에서 한 편을 택하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$

A, B를 제외한 7편의 영화 중에서 4편을 택하는 경우의 수는

$${}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$$

따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times 35 = 70$

1098 답 5자루

9자루 중에서 3자루를 택하는 경우의 수는 ${}_9C_3=84$

연필을 n 자루라 하면 연필만 3자루 택하는 경우의 수는 ${}_nC_3$

이때 볼펜이 적어도 1자루 포함되도록 택하는 경우의 수가 74이므로

$$84 - {}_nC_3 = 74$$

$${}_nC_3 = 10$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

$$n(n-1)(n-2) = 60 = 5 \times 4 \times 3$$

$\therefore n=5$ ($\because n$ 은 자연수)

따라서 연필은 5자루이다.

1099 답 ④

수학 부스 4개 중에서 2개를 고르는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

과학 부스 3개 중에서 1개를 고르는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

3개의 순서를 정하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 3 \times 6 = 108$$

1100 답 ⑤

민수, 현재, 동현이를 제외한 학생 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_3=20$

민수와 현재를 제외한 학생 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$3! = 6$$

3명의 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 민수와 현재를 세우는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 \times 6 \times 12 = 1440$$

1101 답 ①

구하는 직선의 개수는 7개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_7C_2 = 21$$

1102 답 54

구하는 대각선의 개수는 12개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 선분의 개수에서 정십이각형의 변의 개수를 뺀 것과 같으므로

$${}_{12}C_2 - 12 = 66 - 12 = 54$$

1103 답 412

(i) 15개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_{15}C_3 = 455$$

(ii) 가로 방향의 직선은 3개이고 각각에 대하여 한 직선 위에 있는 5개의 점 중 3개를 택하는 경우의 수는

$$3 \times {}_5C_3 = 3 \times {}_5C_2 = 3 \times 10 = 30$$

(iii) 세로 방향의 직선은 5개이고 각각에 대하여 한 직선 위에 있는 3개의 점 중 3개를 택하는 경우의 수는

$$5 \times {}_3C_3 = 5 \times 1 = 5$$

(iv) 3개의 점을 지나는 대각선 방향의 직선은 8개이고 각각에 대하여 한 직선 위에 있는 3개의 점 중 3개를 택하는 경우의 수는

$$8 \times {}_3C_3 = 8 \times 1 = 8$$

(i)~(iv)에서 구하는 삼각형의 개수는

$$455 - 30 - 5 - 8 = 412$$

1104 답 ③

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

한 직선 위에 있는 6개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_2 = 15$$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$$6 \times 15 = 90$$

1105 답 315

가로 방향의 평행한 직선 6개 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 7개 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정되므로 구하는 평행사변형의 개수는

$${}_6C_2 \times {}_7C_2 = 15 \times 21 = 315$$

1106 답 ④

남학생 4명을 세 개의 모둠으로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 6 \times 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 6$$

세 개의 모둠에 여학생 3명을 한 명씩 배치하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

1107 답 315

구하는 경우의 수는 8개의 팀을 4개, 4개의 두 조로 나눈 후 4개의 팀으로 이루어진 각 조를 다시 2개, 2개의 두 조로 나누는 경우의 수와 같다.

(i) 8개의 팀을 4개, 4개의 두 조로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_4 \times {}_4C_4 \times \frac{1}{2!} = 70 \times 1 \times \frac{1}{2} = 35$$

(ii) 4개의 팀을 2개, 2개의 두 조로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$35 \times 3 \times 3 = 315$$

1108 답 75

9개의 자연수 중에서 5개를 택하는 경우의 수는

$${}_9C_5 = {}_9C_4 = 126 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

(i) 9의 약수 1, 3, 9를 1개도 포함하지 않고 택하는 경우의 수는

$${}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

(ii) 9의 약수 1, 3, 9 중에서 1개가 포함되도록 택하는 경우의 수는

$${}_6C_4 \times {}_3C_1 = {}_6C_2 \times {}_3C_1 = 15 \times 3 = 45 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$126 - (6 + 45) = 75 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 모든 경우의 수 구하기	30 %
② 9의 약수가 0개 또는 1개 포함되도록 택하는 경우의 수 구하기	50 %
③ 9의 약수가 적어도 2개 포함되도록 택하는 경우의 수 구하기	20 %

1109 답 90

18개의 점 중에서 서로 다른 두 점을 택하는 경우의 수는

$${}_{18}C_2 = 153 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

서로 다른 두 점을 이어서 만든 선분 중에서 길이가 유리수인 경우는 가로 방향의 직선 위의 점 중에서 2개, 세로 방향의 직선 위의 점 중에서 2개를 택할 때이다.

가로 방향의 직선은 3개이고 각각에 대하여 한 직선 위에 있는 6개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 $3 \times {}_6C_2 = 3 \times 15 = 45$

세로 방향의 직선은 6개이고 각각에 대하여 한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 $6 \times {}_3C_2 = 6 \times 3 = 18$

이때 선분 중에서 길이가 유리수인 것의 개수는

$$45 + 18 = 63 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 선분 중에서 길이가 무리수인 것의 개수는

$$153 - 63 = 90 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 두 점을 택하는 경우의 수 구하기	30 %
② 선분의 길이가 유리수인 것의 개수 구하기	40 %
③ 선분의 길이가 무리수인 것의 개수 구하기	30 %

1110 답 5

$$a = {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 20 \times 1 \times \frac{1}{2} = 10 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$b = {}_6C_2 \times {}_4C_4 = 15 \times 1 = 15 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore b - a = 5 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① a의 값 구하기	40 %
② b의 값 구하기	40 %
③ b-a의 값 구하기	20 %

C 실력 향상

173쪽

1111 답 99

$5 \leq a \leq 7$ 이고 $a < b < c$ 이므로 순서쌍 (a, b, c) 는 $(5, 8, 9)$,

$(6, 7, 8)$, $(6, 7, 9)$, $(6, 8, 9)$, $(7, 8, 9)$ 이다.

(i) 순서쌍 (a, b, c) 가 $(5, 8, 9)$ 일 때,

7개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7 중에서 2개를 택하여 크기가 큰 순서대로 d, e 로 정하면 되므로 순서쌍 (d, e) 의 개수는

$${}_7C_2 = 21$$

(ii) 순서쌍 (a, b, c) 가 $(6, 7, 8)$ 일 때,

6개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5 중에서 2개를 택하여 크기가 큰 순서대로 d, e 로 정하면 되므로 순서쌍 (d, e) 의 개수는

$${}_6C_2 = 15$$

(iii) 순서쌍 (a, b, c) 가 $(6, 7, 9)$ 일 때,

7개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 8 중에서 2개를 택하여 크기가 큰 순서대로 d, e 로 정하면 되므로 순서쌍 (d, e) 의 개수는

$${}_7C_2 = 21$$

(iv) 순서쌍 (a, b, c) 가 $(6, 8, 9)$ 일 때,

7개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7 중에서 2개를 택하여 크기가 큰 순서대로 d, e 로 정하면 되므로 순서쌍 (d, e) 의 개수는

$${}_7C_2 = 21$$

(v) 순서쌍 (a, b, c) 가 $(7, 8, 9)$ 일 때,

7개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 2개를 택하여 크기가 큰 순서대로 d, e 로 정하면 되므로 순서쌍 (d, e) 의 개수는

$${}_7C_2 = 21$$

(i)~(v)에서 구하는 자연수의 개수는

$$21 + 15 + 21 + 21 + 21 = 99$$

1112 답 ③

어떤 2개의 숫자를 선택하더라도 합이 같은 경우는 없으므로 8개의 숫자를 2개, 2개, 2개, 2개의 네 묶음으로 나눈 후 합이 작은 것부터 순서대로 배열하면 된다.

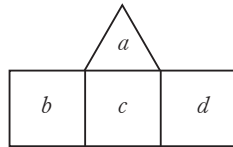
8개의 숫자를 2개, 2개, 2개, 2개의 네 묶음으로 나누는 경우의 수는
 ${}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{4!} = 28 \times 15 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{24} = 105$
 각 묶음의 2개의 숫자가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는
 $2! = 2$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $105 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 1680$

1113 [답] 130

정삼각형에 적힌 수를 a , 정사각형에 적
 힌 수를 각각 b, c, d 라 하면

(가)에서 $a > b, a > c, a > d$ 이고,

(나)에서 $b \neq c, c \neq d$



(i) $b=d$ 일 때,

6개의 숫자 중에서 서로 다른 3개를 택하여 가장 큰 수를 a 로 정
 하고, 나머지 두 수를 $b(d)$ 와 c 에 배열하면 되므로

$${}_6C_3 \times 2! = 20 \times 2 = 40$$

(ii) $b \neq d$ 일 때,

6개의 숫자 중에서 서로 다른 4개를 택하여 가장 큰 수를 a 로 정
 하고, 나머지 세 수를 b, c, d 에 배열하면 되므로

$${}_6C_4 \times 3! = {}_6C_2 \times 3! = 15 \times 6 = 90$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$40 + 90 = 130$$

1114 [답] ④

빈 상자가 3개가 되어야 하므로 상자 3개에 공 5개를 나누어 넣으면
 된다.

서로 다른 상자 6개 중에서 공이 들어 가는 상자 3개를 택하는 경우
 의 수는 ${}_6C_3 = 20$

상자 3개에 공 5개를 나누어 넣을 때, 각 상자에 담을 수 있는 공의
 개수는 1, 1, 3 또는 1, 2, 2이다.

(i) 공을 1개, 1개, 3개의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 5 \times 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = 10$$

세 묶음을 서로 다른 상자 3개에 넣는 경우의 수는

$$3! = 6$$

즉, 공 5개를 1개, 1개, 3개로 나누어 상자 3개에 넣는 경우의 수는

$$10 \times 6 = 60$$

(ii) 공을 1개, 2개, 2개의 세 묶음으로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 5 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 15$$

세 묶음을 서로 다른 상자 3개에 넣는 경우의 수는

$$3! = 6$$

즉, 공 5개를 1개, 2개, 2개로 나누어 상자 3개에 넣는 경우의 수는

$$15 \times 6 = 90$$

(i), (ii)에서 상자 3개에 공 5개를 넣는 경우의 수는

$$60 + 90 = 150$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 \times 150 = 3000$$

11 / 행렬의 연산

A 개념 확인

176~179쪽

1115 [답] 2×1 행렬

1116 [답] 1×3 행렬

1117 [답] 2×3 행렬

1118 [답] 4×1 행렬

1119 [답] (1) 5 (2) 3 (3) 3 (4) 1

(4) $a_{21}=0, a_{12}=-2, a_{31}=-1$ 이므로

$$a_{21} - a_{12} + a_{31} = 0 - (-2) + (-1) = 1$$

1120 [답] $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 5 & 8 & 11 \end{pmatrix}$

1121 [답] $x=4, y=-3$

1122 [답] $x=2, y=-1$

$x-y=3, x+2y=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=2, y=-1$$

1123 [답] $x=3, y=-1$

$x+y=2, -x+2y=-5$ 를 연립하여 풀면

$$x=3, y=-1$$

1124 [답] $\begin{pmatrix} -2 & 7 \end{pmatrix}$

1125 [답] $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

1126 [답] $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$

1127 [답] $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -3 & -4 & -4 \end{pmatrix}$

1128 [답] $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

1129 [답] (1) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$(1) X = B - A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) X = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1130 [답] 풀이 참조

$$(1) A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B+A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A+B=B+A$$

$$(2) (A+B)+C=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$B+C=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$A+(B+C)=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (A+B)+C=A+(B+C)$$

$$1131 \text{ 답 } \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X=O-A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$1132 \text{ 답 } (1) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$$

$$1133 \text{ 답 } (1) \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$(1) 2A-B=\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(2) A+3B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$1134 \text{ 답 } \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1135 \text{ 답 } (15 \quad -12)$$

$$1136 \text{ 답 } \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$1137 \text{ 답 } \begin{pmatrix} 5 & -22 \\ 3 & -30 \end{pmatrix}$$

$$1138 \text{ 답 } \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$1139 \text{ 답 } (1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(1) A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(2) A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$1140 \text{ 답 } (1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(1) A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

⋮

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \text{이므로 } A^{10}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1141 \text{ 답 풀이 참조}$$

$$AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -16 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -7 \\ -8 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\therefore AB \neq BA$$

$$1142 \text{ 답 } (1) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) E^8=E$$

$$(3) (-E)^{99}=-E$$

$$1143 \text{ 답 풀이 참조}$$

$$(1) (A+E)(A-E)=A^2-AE+EA-E^2$$

$$=A^2-A+A-E$$

$$=A^2-E$$

$$(2) (A-E)^2=(A-E)(A-E)$$

$$=A^2-AE-EA+E^2$$

$$=A^2-2A+E$$

B 유형 완성

180~189쪽

$$1144 \text{ 답 } ②$$

$$a_{11}=\frac{1^2-2 \times 1}{1 \times 1}=-1, \quad a_{12}=\frac{1^2-2 \times 2}{1 \times 2}=-\frac{3}{2},$$

$$a_{21}=\frac{2^2-2 \times 1}{2 \times 1}=1, \quad a_{22}=\frac{2^2-2 \times 2}{2 \times 2}=0$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$$-1+\left(-\frac{3}{2}\right)+1+0=-\frac{3}{2}$$

1145 답 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$a_{11}=2 \times 1 - 1 = 1, a_{12}=1, a_{13}=1,$
 $a_{21}=2 \times 2 - 1 = 3, a_{22}=2 \times 2 - 2 = 2, a_{23}=1,$
 $a_{31}=2 \times 3 - 1 = 5, a_{32}=2 \times 3 - 2 = 4, a_{33}=2 \times 3 - 3 = 3$

$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

1146 답 ③

$a_{11}=2 \times 1 \times (1-1)=0, a_{12}=2 \times 1 \times (2-1)=2,$
 $a_{13}=2 \times 1 \times (3-1)=4, a_{21}=2 \times 2 \times (1-2)=-4,$
 $a_{22}=2 \times 2 \times (2-2)=0, a_{23}=2 \times 2 \times (3-2)=4$
 $b_{ij}=a_{ji}$ 이므로
 $b_{11}=a_{11}=0, b_{12}=a_{21}=-4, b_{21}=a_{12}=2, b_{22}=a_{22}=0,$
 $b_{31}=a_{13}=4, b_{32}=a_{23}=4$

$\therefore B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

1147 답 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(가)에서 $a_{11}=0, a_{22}=0, a_{33}=0$

(나)에서

$a_{12}=a_{21}=1, a_{13}=a_{31}=3, a_{23}=a_{32}=2$

$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1148 답 ⑤

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a=x^2, 3x-3y=9, -2xy=-2, b=y^2$

따라서 $x-y=3, xy=1$ 이므로

$a+b=x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$
 $=3^2+2 \times 1=11$

1149 답 2

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3x-5=-2, -3=y-2$

따라서 $x=1, y=-1$ 이므로

$x^2+y^2=1^2+(-1)^2=2$

1150 답 72

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x^2-xz=-4, 2z=8, 4z=2y-x, 5=z+1$

$5=z+1$ 에서 $z=4$

$x^2-xz=-4$ 에 $z=4$ 를 대입하면

$x^2-4x=-4, x^2-4x+4=0, (x-2)^2=0$

$\therefore x=2$

$4z=2y-x$ 에 $x=2, z=4$ 를 대입하면

$16=2y-2, 2y=18 \therefore y=9$

$\therefore xyz=2 \times 9 \times 4=72$

채점 기준

① z 의 값 구하기	30 %
② x 의 값 구하기	30 %
③ y 의 값 구하기	30 %
④ xyz 의 값 구하기	10 %

1151 답 ③

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=-1 \dots\dots \textcircled{A}$

$x+z=5 \dots\dots \textcircled{B}$

$y+z=-2 \dots\dots \textcircled{C}$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 변끼리 더하면

$2(x+y+z)=2 \therefore x+y+z=1$

$\textcircled{A}$ 에서 $z=1-(x+y)=2$

$\textcircled{B}$ 에서 $y=1-(x+z)=-4$

$\textcircled{C}$ 에서 $x=1-(y+z)=3$

$\therefore x^2+y^2+z^2=3^2+(-4)^2+2^2=29$

1152 답 ⑤

$2\left(P-\frac{1}{2}Q\right)-(P-3Q)=2P-Q-P+3Q=P+2Q$

$=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
 $=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
 $=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

1153 답 8

주어진 등식의 좌변을 간단히 하면

$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} x & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2x & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6-2x & 1 \\ 12 & -2 \end{pmatrix}$

즉, $\begin{pmatrix} 6-2x & 1 \\ 12 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 12 & y \end{pmatrix}$ 이므로 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$6-2x=2, -2=y$

따라서 $x=2, y=-2$ 이므로 $x^2+y^2=8$

1154 답 -4

$3(A+B)-(A-2B)=3A+3B-A+2B$

$=2A+5B$
 $=2\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}+5\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$
 $=\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 10 & -25 \end{pmatrix}$
 $=\begin{pmatrix} 4 & 13 \\ 4 & -25 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$4+13+4+(-25)=-4$$

1155 답 ①

$$2A+3X=A+3B+X \text{에서}$$

$$2X=-A+3B$$

$$\begin{aligned} &= -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 14 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 14 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

1156 답 11

$$2A-B = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$A-2B = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①×2-②을 하면

$$\begin{aligned} 3A &= 2\begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 & -14 \\ 24 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 18 & 21 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 18 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

이를 ①에 대입하면

$$2\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - B = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 12 & 14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

따라서 두 행렬 A, B의 모든 성분 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차는

$$7-(-4)=11$$

1157 답

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$X+Y=A-2B \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$X-Y=2A+B \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①+②을 하면

$$2X=3A-B$$

$$\begin{aligned} &= 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

①-②을 하면

$$2Y=-A-3B$$

$$\begin{aligned} &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

..... ②

채점 기준

① 행렬 X 구하기	50 %
② 행렬 Y 구하기	50 %

1158 답 6

$$x_{ij}=i^2-j^2, y_{ij}=2i-j \text{이므로}$$

$$x_{11}=1^2-1^2=0, x_{12}=1^2-2^2=-3$$

$$x_{21}=2^2-1^2=3, x_{22}=2^2-2^2=0$$

$$\therefore X = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y_{11}=2 \times 1 - 1 = 1, y_{12}=2 \times 1 - 2 = 0$$

$$y_{21}=2 \times 2 - 1 = 3, y_{22}=2 \times 2 - 2 = 2$$

$$\therefore Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore 4A+B=2(A+B)+2A-B$$

$$=2X+Y$$

$$=2\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$1+(-6)+9+2=6$$

1159 답 ①

$$xA+yB=C \text{에서}$$

$$x\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5x+4y & -x+5y \\ x+y & 2x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$5x+4y=-1, -x+5y=6$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1, y=1$

$$\therefore x^2+y^2=(-1)^2+1^2=2$$

1160 답 4

$$xA+yB=C \text{에서}$$

$$x\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 & a \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x+3y & x+ay \\ 2y & x-4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

..... ①

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2x+3y=-1, x+ay=2, 2y=2, x-4y=-6$$

$$2y=2 \text{에서 } y=1$$

$$x-4y=-6 \text{에 } y=1 \text{을 대입하면}$$

$$x-4=-6 \quad \therefore x=-2$$

$$x+ay=2 \text{에 } x=-2, y=1 \text{을 대입하면}$$

$$-2+a=2 \quad \therefore a=4$$

1161 답 1

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & y \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -13 \\ -7 & a \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2y-15 \\ -2x+1 & xy-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -13 \\ -7 & a \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2y-15=-13, -2x+1=-7, xy-3=a$$

$$-2x+1=-7 \text{에서 } x=4, 2y-15=-13 \text{에서 } y=1$$

$$\therefore a=xy-3=4 \times 1-3=1$$

1162 답 ⑤

A 는 2×1 행렬, B 는 2×2 행렬, C 는 1×2 행렬이다.

ㄱ. $(2 \times 1 \text{ 행렬}) \times (2 \times 2 \text{ 행렬})$ 은 정의되지 않는다.

ㄴ. $(2 \times 2 \text{ 행렬}) \times (2 \times 1 \text{ 행렬})$ 은 2×1 행렬이 된다.

ㄷ. $(2 \times 2 \text{ 행렬}) \times (1 \times 2 \text{ 행렬})$ 은 정의되지 않는다.

ㄹ. $(1 \times 2 \text{ 행렬}) \times (2 \times 1 \text{ 행렬})$ 은 1×1 행렬이 된다.

ㅁ. $(1 \times 2 \text{ 행렬}) \times (2 \times 2 \text{ 행렬})$ 은 1×2 행렬이 된다.

따라서 보기에서 그 곱이 정의되는 행렬은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다.

1163 답 ②

$$\begin{aligned} 2A-AB &= 2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1164 답 8

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -12 \end{pmatrix},$$

$$CD = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$AB+CD = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}$$

따라서 이 행렬의 $(1, 2)$ 성분과 $(2, 1)$ 성분의 합은

$$-2+10=8$$

1165 답 2

$$XY = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a+1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$YX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2a-1 & -1 \end{pmatrix}$$

$XY=YX$ 가 성립하려면

$$a+1=2a-1 \quad \therefore a=2$$

1166 답 14

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \\ \alpha^2+\beta^2 & -\alpha\beta \end{pmatrix} \text{이므로 주어진 행렬의 모든}$$

성분의 합은 $\alpha^2+\beta^2$ 이다.

이차방정식 $x^2-2x-5=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2, \alpha\beta=-5$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &= 2^2-2 \times (-5)=14 \end{aligned}$$

1167 답 ③

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2+4 & 2\alpha+2\beta \\ 2\alpha+2\beta & \beta^2+4 \end{pmatrix} \text{이므로 행렬}$$

A^2 의 모든 성분의 합은

$$\alpha^2+\beta^2+4(\alpha+\beta)+8$$

이차방정식 $x^2+4x+1=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-4, \alpha\beta=1$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$\begin{aligned} \alpha^2+\beta^2+4(\alpha+\beta)+8 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+4(\alpha+\beta)+8 \\ &= (-4)^2-2 \times 1+4 \times (-4)+8 \\ &= 6 \end{aligned}$$

1168 답 $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}+\textcircled{㉡}$ 을 하면

$$2A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$\textcircled{㉠}-\textcircled{㉡}$ 을 하면

$$2B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\begin{aligned} \therefore A^2-B^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{iii} \end{aligned}$$

채점 기준

① 행렬 A 구하기	40%
② 행렬 B 구하기	40%
③ 행렬 A^2-B^2 구하기	20%

$$\text{참고 } (A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 8 & -5 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$A^2-B^2 \neq (A+B)(A-B)$ 임을 알 수 있다.

1169 답 ②

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} a & 3 \\ -2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 3 \\ -2 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-6 & 3a+3b \\ -2a-2b & b^2-6 \end{pmatrix}$$

즉, $\begin{pmatrix} a^2-6 & 3a+3b \\ -2a-2b & b^2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2-6=1, 3a+3b=0, -2a-2b=0, b^2-6=1$$

$$a^2=7, b^2=7 \text{ 이므로}$$

$$a^2b^2=49$$

$$3a+3b=0 \text{ 에서 } a=-b \text{ 이므로}$$

$$ab < 0$$

$$\therefore ab = -7$$

1170 답 31

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & -2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

행렬 A^3 의 모든 성분의 합이 91이므로

$$3a-2=91$$

$$\therefore a=31$$

1171 답 $p=1, q=-4$

$$A^2 = pA + q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 에서}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p+q & 2p \\ -3p & 2p+q \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-p+q=-5, 2p=2, -3p=-3, 2p+q=-2$$

$$\therefore p=1, q=-4$$

1172 답 1016

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 16 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} = 2A$$

$$A^3 = A^2A = 2AA = 2(2A) = 4A$$

$$A^4 = A^3A = 4AA = 4(2A) = 8A$$

$$\vdots$$

따라서 $A^n = 2^{n-1}A$ (n 은 자연수)이므로

$$A + A^2 + A^3 + \cdots + A^7$$

$$= A + 2A + 4A + 8A + 16A + 32A + 64A$$

$$= 127A$$

따라서 행렬 $127A$ 의 (1, 2) 성분은

$$127 \times 8 = 1016$$

1173 답 ④

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\therefore A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (단, } n \text{은 자연수)}$$

따라서 $A^{30} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \times 30 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 60 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로 구하는 모든 성분의 합은 $1+60+0+1=62$

1174 답 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1000 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

따라서 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix}$ (n 은 자연수)이므로

$$A^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1000 & 1 \end{pmatrix}$$

1175 답 -254

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\therefore A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \text{ (단, } n \text{은 자연수)}$$

따라서 $A^8 + A^9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2^8 - 2^9 \end{pmatrix}$ 이므로 구하는 모든 성분의 합은

$$2 + 0 + 0 + 2^8 - 2^9 = 2 - 2^8 = -254$$

1176 답 ②

$$AB = \begin{pmatrix} 1000 & 600 \\ 800 & 450 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1000 \times 3 + 600 \times 4 & 1000 \times 5 + 600 \times 2 \\ 800 \times 3 + 450 \times 4 & 800 \times 5 + 450 \times 2 \end{pmatrix}$$

에서 (1, 2) 성분은 $1000 \times 5 + 600 \times 2$ 이므로 편의점에서 빵 5개와 우유 2개를 산 영지의 지불 금액과 같다.

1177 답 ②

$x = cp + dq$ 이고 $AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + bq \\ cp + dq \end{pmatrix}$
 이므로 x 의 값은 행렬 AB 의 $(2, 1)$ 성분과 같다.

1178 답 ②

A 선물 세트 200개를 만드는 데 필요한 금액은
 $200 \times (2 \times 4500 + 6 \times 1000)$ (원)이므로

$$200 \times (2 \ 6) \begin{pmatrix} 4500 \\ 1000 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

B 선물 세트 300개를 만드는 데 필요한 금액은
 $300 \times (3 \times 4500 + 4 \times 1000)$ (원)이므로

$$300 \times (3 \ 4) \begin{pmatrix} 4500 \\ 1000 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 총금액을 행렬로 나타내면

$$\begin{pmatrix} 200 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4500 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

1179 답 $\begin{pmatrix} -66 & 24 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 - 3AB + 2BA - 6B^2 = A(A - 3B) + 2B(A - 3B) \\ = (A + 2B)(A - 3B)$$

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A - 3B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^2 - 3AB + 2BA - 6B^2 = (A + 2B)(A - 3B) \\ = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 10 & -1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -66 & 24 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$$

1180 답 $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$

$$ABA - CBA = (A - C)BA$$

$$A - C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore ABA - CBA = (A - C)BA \\ = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

1181 답 8

$$A(B + C) - (C + A)B + C(A + B) \\ = AB + AC - CB - AB + CA + CB \\ = AC + CA$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$2 + 0 + 0 + 6 = 8$$

1182 답 5

$$(A - B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 \text{이므로}$$

$$AB + BA = A^2 + B^2 - (A - B)^2$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$5 + (-4) + 2 + 2 = 5$$

1183 답 ④

주어진 식의 좌변을 전개하면

$$(2A - 3B)^2 = (2A - 3B)(2A - 3B)$$

$$= 4A^2 - 6AB - 6BA + 9B^2$$

$$4A^2 - 6AB - 6BA + 9B^2 = 4A^2 - 12AB + 9B^2 \text{이려면}$$

$$AB + BA = 2AB \quad \therefore AB = BA$$

$$\text{즉, } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ x + 2y & 2x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2x & 1 + 2y \\ 2 + 3x & 2 + 3y \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$3 = 1 + 2x, \quad 5 = 1 + 2y$$

따라서 $x = 1, y = 2$ 이므로

$$xy = 2$$

1184 답 -3

주어진 식의 좌변을 전개하면

$$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

$$A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2 \text{이려면}$$

$$-AB + BA = 0 \quad \therefore AB = BA$$

$$\text{즉, } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 4 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 2a + 12 & -2a - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2a & -4 \\ 3 - a & 2 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$8 = 2 - 2a$$

$$\therefore a = -3$$

1185 답 ⑤

주어진 식의 좌변을 전개하면

$$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - AB - BA + B^2$$

$$A^2 - AB - BA + B^2 = A^2 - 2AB + B^2 \text{ 이려면}$$

$$AB + BA = 2AB \quad \therefore AB = BA$$

$$\text{즉, } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\begin{pmatrix} -4+4x & 6+4y \\ -8+2x & 12+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 2x+4y & 4x+2y \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-4+4x=8, 6+4y=-2$$

$$\text{따라서 } x=3, y=-2 \text{ 이므로}$$

$$x-y=5$$

1186 답 -11

$$\begin{pmatrix} 2a-3c \\ 2b-3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3c \\ -3d \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 2a-3c \\ 2b-3d \end{pmatrix} &= 2A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - 3A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$7 + (-18) = -11$$

1187 답 ①

$$A \begin{pmatrix} 5a \\ -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} -3a \\ 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ 을 변끼리 더하면}$$

$$A \begin{pmatrix} 5a \\ -2b \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} -3a \\ 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}, 2A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1188 답 ①

실수 a, b 에 대하여 $a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -2 \end{pmatrix}$ 가 성립한다고 하면

$$\begin{pmatrix} a+3b \\ -2a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -2 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a+3b=15, -2a+b=-2$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3, b=4$

$$\begin{aligned} \therefore A \begin{pmatrix} 15 \\ -2 \end{pmatrix} &= A \left\{ 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= 3A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 4A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 21 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 $p=-1, q=21$ 이므로

$$pq=-21$$

1189 답 3

$$A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = AA \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = AA^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\therefore A^n \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (단, } n \text{은 자연수)}$$

..... ①

따라서 $A^{100} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 이므로 구하는 모든 성분의 합은

$$3+0=3$$

..... ②

채점 기준

① 행렬 $A^n \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 의 규칙 찾기	60%
② 행렬 $A^{100} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 의 모든 성분의 합 구하기	40%

1190 답 ①

$$(A-E)(A^2+A+E) = A^3 - E^2 = A^3 - E$$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -21 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore (A-E)(A^2+A+E) &= A^3 - E \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -21 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -21 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1191 답 -1

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \text{ 이므로}$$

$$(2A+3E)^2 = 4A^2 + 12A + 9E^2$$

$$= 4E + 12A + 9E$$

$$= 12A + 13E$$

따라서 $x=12, y=13$ 이므로

$$x-y=-1$$

1192 답 ④

$$(A+2E)(A-2E) = -3E \text{ 에서}$$

$$A^2 - 4E = -3E \quad \therefore A^2 = E$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & -1+b \\ -a+ab & a+b^2 \end{pmatrix}$$

즉, $\begin{pmatrix} 1+a & -1+b \\ -a+ab & a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$1+a=1, -1+b=0$$

따라서 $a=0, b=1$ 이므로
 $a+b=1$

1193 [답] ③

$$\begin{aligned} A^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= (2A - E) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - E \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1194 [답] ⑤

$A^2 + 2A + 4E = O$ 의 양변에 $A - 2E$ 를 곱하면

$$(A - 2E)(A^2 + 2A + 4E) = O$$

$$A^3 - 8E = O \quad \therefore A^3 = 8E$$

따라서 $A^{24} = (A^3)^8 = (8E)^8 = 8^8 E = 2^{24} E$ 이므로
 $k = 2^{24}$

1195 [답] ④

$$\begin{aligned} A^2 &= AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E \\ \therefore A^{101} &= (A^3)^{33} A^2 = E^{33} A^2 = A^2 \\ A^2 &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로 구하는 모든 성분의 곱은} \\ &= -2 \times (-1) \times 3 \times 1 = 6 \end{aligned}$$

1196 [답] ③

$$\begin{aligned} A^2 &= AA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E \\ A^3 &= A^2 A = (-E)A = -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ A^4 &= (A^2)^2 = (-E)^2 = E^2 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 A^n 은 $A, -E, -A, E$ 가 반복되므로

행렬 A^n 이 될 수 없는 것은 ③ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 이다.

1197 [답] 6

$$\begin{aligned} A^2 &= AA = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E \\ A^4 &= A^3 A = (-E)A = -A \\ A^5 &= A^4 A = (-A)A = -A^2 \\ A^6 &= (A^3)^2 = (-E)^2 = E \end{aligned}$$

따라서 $A^n = E$ 를 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

1198 [답] ②

$$\begin{aligned} A^2 &= AA = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E \end{aligned}$$

$$A^4 = A^3 A = (-E)A = -A$$

$$A^5 = A^4 A = (-A)A = -A^2$$

$$A^6 = (A^3)^2 = (-E)^2 = E$$

따라서 $A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6 = O$ 이므로

$$\begin{aligned} A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{2011} \\ = A + A(\underbrace{A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6}_{O}) \\ + \cdots + A^{2005}(\underbrace{A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6}_{O}) \end{aligned}$$

$$= A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$3 + 7 + (-1) + (-2) = 7$$

1199 [답] ②

$$A + B = E \text{에서 } A = E - B$$

$$AB = E \text{에 } A = E - B \text{를 대입하면}$$

$$(E - B)B = E, B - B^2 = E$$

즉, $B^2 = B - E$ 이므로 양변에 B 를 곱하면

$$B^3 = B^2 - B = (B - E) - B = -E$$

같은 방법으로 하면 $A^3 = -E$

$$\begin{aligned} \therefore A^{30} - B^{30} + E &= (A^3)^{10} - (B^3)^{10} + E \\ &= (-E)^{10} - (-E)^{10} + E \\ &= E^{10} - E^{10} + E = E \end{aligned}$$

1200 [답] ②

$A^2 - A = E$ 의 양변의 오른쪽에 B 를 곱하면

$$(A^2 - A)B = EB \quad \therefore A^2 B - AB = B$$

이 식에 $AB = 2E$ 를 대입하면 $2A - 2E = B$

$$\begin{aligned} \therefore B^2 &= (2A - 2E)^2 = 4(A - E)^2 \\ &= 4(A^2 - 2A + E) \\ &= 4(A + E - 2A + E) \quad (\because A^2 = A + E) \\ &= -4A + 8E \end{aligned}$$

1201 [답] ③

$$A + B = O \text{에서 } B = -A$$

$$AB = E \text{에 } B = -A \text{를 대입하면 } A(-A) = E$$

$$\therefore A^2 = -E, A^4 = E$$

같은 방법으로 하면 $B^2 = -E, B^4 = E$

$$\begin{aligned} \therefore A^{1000} + B^{1002} &= (A^4)^{250} + (B^4)^{250} B^2 \\ &= E + B^2 = E + (-E) = O \end{aligned}$$

1202 [답] 40

$$A + B = E \text{에서 } A = E - B$$

$$A + kB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{에 } A = E - B \text{를 대입하면}$$

$$(E - B) + kB = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, E + (k-1)B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(k-1)B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B = \frac{1}{k-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{단, } k \neq 1)$$

$$B^2 = \frac{1}{(k-1)^2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(k-1)^2} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{이고,}$$

$B^2 = B$ 이므로

$$\frac{1}{(k-1)^2} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{k-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{3}{(k-1)^2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{k-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{3}{(k-1)^2} = \frac{1}{k-1}$$

$$3 = k-1 \quad \therefore k=4$$

$$\therefore 10k=40$$

1203 답 ④

$$\neg. (A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$$

$AB=BA$ 이면 $BA-AB=O$

$$\neg. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{이면}$$

$$\begin{aligned} AB+BA &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \end{aligned}$$

즉, $AB+BA=O$ 이지만 $A \neq O, B \neq O$ 이다.

$$\neg. AB=BA \text{ 이므로 } A+3BA=2AB+E \text{ 에서}$$

$$A+3AB=2AB+E, A+AB=E$$

$$\therefore A(B+E)=E$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

1204 답 ②

$$\neg. (A+E)(A-E) = A^2 - AE + EA - E^2 = A^2 - E$$

$$\neg. A^3 = -E \text{ 이면}$$

$$A^{100} = (A^3)^{33} A = (-E)^{33} A = -EA = -A$$

$$\neg. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 이면}$$

$$A-E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

즉, $(A-E)^2=O$ 이지만 $A \neq E$ 이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

1205 답 ④

$$\neg. A+B=O \text{ 이면 } B=-A \text{ 이므로}$$

$$AB=A(-A)=-A^2, BA=(-A)A=-A^2$$

$$\therefore AB=BA$$

$$\neg. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 이면}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

즉, $AB=O$ 이지만 $A \neq O, B \neq O$ 이다.

$$\neg. AB \neq BA \text{ 이면 } (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \text{ 이 성립하지 않는다.}$$

따라서 보기에서 옳지 않은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

1206 답 ⑤

$$\neg. A^2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 이면}$$

$$a^2-b^2=0, 2ab=0$$

$$2ab=0 \text{ 에서 } a=0 \text{ 또는 } b=0$$

$$a=0 \text{ 이면 } a^2-b^2=0 \text{ 에서 } b=0$$

$$b=0 \text{ 이면 } a^2-b^2=0 \text{ 에서 } a=0$$

따라서 $a=b=0$ 이므로 $A=O$ 이다.

$$\neg. A^2+E = \begin{pmatrix} a^2-b^2+1 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 이면}$$

$$a^2-b^2+1=0, 2ab=0$$

$$2ab=0 \text{ 에서 } a=0 \text{ 또는 } b=0$$

$$a=0 \text{ 이면 } a^2-b^2+1=0 \text{ 에서 } b^2=1 \quad \therefore b=\pm 1$$

$b=0$ 이면 $a^2-b^2+1=0$ 에서 $a^2=-1$ 을 만족시키는 실수 a 의 값이 존재하지 않는다.

$$\text{따라서 } A^2+E=O \text{ 를 만족시키는 행렬 } A \text{ 는 } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ 의 2개이다.}$$

$$\neg. A^2-A = \begin{pmatrix} a^2-b^2-a & -2ab+b \\ 2ab-b & a^2-b^2-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 이면}$$

$$a^2-b^2-a=0, 2ab-b=0$$

$$2ab-b=0 \text{ 에서 } (2a-1)b=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{2} \text{ 또는 } b=0$$

$a=\frac{1}{2}$ 이면 $a^2-b^2-a=0$ 에서 $b^2=-\frac{1}{4}$ 을 만족시키는 실수 b 의 값이 존재하지 않는다.

$$b=0 \text{ 이면 } a^2-b^2-a=0 \text{ 에서}$$

$$a^2-a=0, a(a-1)=0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } a=1$$

$$\text{따라서 } A^2-A=O \text{ 를 만족시키는 행렬 } A \text{ 는 } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 의 2개이다.}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

1207 답 ③

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2 - (3+1)A + \{3 \times 1 - 2 \times (-1)\}E = O$$

$$\text{즉, } A^2 - 4A + 5E = O \text{ 가 성립하므로}$$

$$\begin{aligned} A^3 - 4A^2 + 6A - 2E &= A(A^2 - 4A + 5E) + A - 2E \\ &= A - 2E \end{aligned}$$

1208 답 4

케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2 - (1+4)A + (1 \times 4 - 3 \times 2)E = O$$

$$\text{즉, } A^2 - 5A - 2E = O \text{ 가 성립하므로}$$

$$A^2 - 5A = 2E$$

$$\begin{aligned} \therefore A^3 - 4A^2 - 5A &= A(A^2 - 5A) + A^2 - 5A \\ &= A(2E) + 2E = 2A + 2E \end{aligned}$$

따라서 $p=2, q=2$ 이므로

$$p+q=4$$

1209 답 ③

$$\begin{aligned} a_{11} &= -1 + 3 \times 1 + 5 = 7, \quad a_{12} = -1 + 3 \times 2 + 5 = 10 \\ a_{21} &= (-1)^2 + 3 \times 1 + 5 = 9, \quad a_{22} = (-1)^2 + 3 \times 2 + 5 = 12 \\ b_{ij} &= a_{ji} \text{이므로} \\ b_{11} &= a_{11} = 7, \quad b_{12} = a_{21} = 9, \quad b_{21} = a_{12} = 10, \quad b_{22} = a_{22} = 12 \\ \therefore B &= \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1210 답 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

화살표 방향을 고려하여 도로의 수를 세어 보면
 $a_{11}=1, a_{12}=1, a_{13}=2$
 $a_{21}=1, a_{22}=0, a_{23}=2$
 $a_{31}=0, a_{32}=1, a_{33}=1$

따라서 구하는 행렬은 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 이다.

1211 답 ④

행렬이 서로 같을 조건에 의하여
 $a^2 + a = 2, c + 4 = 6, b = 2c + 2, a^2 - a = b$
 $a^2 + a = 2$ 에서 $a^2 + a - 2 = 0, (a+2)(a-1) = 0$
 $\therefore a = -2$ 또는 $a = 1$ ㉠
 $c + 4 = 6$ 에서 $c = 2$
 $b = 2c + 2$ 에서 $b = 6$
 $a^2 - a = b$ 에서 $a^2 - a - 6 = 0, (a+2)(a-3) = 0$
 $\therefore a = -2$ 또는 $a = 3$ ㉡
 ㉠, ㉡에서 $a = -2$
 $\therefore a + b + c = -2 + 6 + 2 = 6$

1212 답 ②

$4(A - X) = 3(B - X)$ 에서 $4A - 4X = 3B - 3X$ 이므로
 $X = 4A - 3B$

$$\begin{aligned} &= 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은
 $4 + (-6) + 1 + 1 = 0$

1213 답 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$X + 2Y = A$ ㉠
 $2X - Y = B$ ㉡

㉠ + ㉡ $\times 2$ 를 하면

$$\begin{aligned} 5X &= A + 2B \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \\ \therefore X &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이를 ㉡에 대입하면

$$\begin{aligned} 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - Y &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \\ \therefore Y &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \therefore X + Y &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1214 답 ③

$xA + yB = C$ 에서
 $x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} x-y & 2x+3y \\ -2y & -3x+ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$
 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
 $x - y = -5, 2x + 3y = 0, -2y = -4, -3x + ky = 11$
 $-2y = -4$ 에서 $y = 2$
 $x - y = -5$ 에 $y = 2$ 를 대입하면 $x = -3$
 $-3x + ky = 11$ 에 $x = -3, y = 2$ 를 대입하면
 $9 + 2k = 11 \quad \therefore k = 1$
 $\therefore k + x + y = 1 + (-3) + 2 = 0$

1215 답 -36

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & a \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix} \text{에서} \\ \begin{pmatrix} 2a+ab \\ 6a-b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+2a \\ -3+5a \end{pmatrix} \\ \text{행렬이 서로 같을 조건에 의하여} \\ 2a+ab &= 1+2a, \quad 6a-b = -3+5a \\ \text{따라서 } ab &= 1, \quad a-b = -3 \text{이므로} \\ a^3-b^3 &= (a-b)^3 + 3ab(a-b) \\ &= (-3)^3 + 3 \times 1 \times (-3) \\ &= -27 - 9 = -36 \end{aligned}$$

1216 답 ⑤

$AB = O$ 에서 $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 6+xy & -2+x \\ 18+6y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
 $6 + xy = 0, -2 + x = 0, 18 + 6y = 0$

따라서 $x=2, y=-3$ 이므로
 $x-y=5$

1217 답 ①

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2+1 & \alpha+\beta \\ \alpha+\beta & 1+\beta^2 \end{pmatrix} \text{이므로 행렬 } A^2 \text{의}$$

모든 성분의 합은

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha + \beta) + 2$$

이차방정식 $x^2 + 2x - 1 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = -1$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha + \beta) + 2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 2 \\ &= (-2)^2 - 2 \times (-1) + 2 \times (-2) + 2 = 4 \end{aligned}$$

1218 답 4

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} A^2 - 4A + 3E &= \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+b^2-4a+3 & 2ab-4b \\ 2ab-4b & a^2+b^2-4a+3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$A^2 - 4A + 3E = O$ 가 성립하므로

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2-4a+3 & 2ab-4b \\ 2ab-4b & a^2+b^2-4a+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2 + b^2 - 4a + 3 = 0, 2ab - 4b = 0$$

$$2ab - 4b = 0 \text{에서 } 2b(a-2) = 0$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } b=0$$

(i) $a=2$ 일 때,

$$a^2 + b^2 - 4a + 3 = 0 \text{에서}$$

$$4 + b^2 - 8 + 3 = 0, b^2 = 1$$

$$\therefore b = \pm 1$$

(ii) $b=0$ 일 때,

$$a^2 + b^2 - 4a + 3 = 0 \text{에서}$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0, (a-1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=3$$

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b) 는 $(2, 1), (2, -1), (1, 0), (3, 0)$ 의 4개이다.

1219 답 25

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\therefore A^n = \begin{pmatrix} 1 & -4n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 $-4n = -100$ 이므로

$$n=25$$

1220 답 $\begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}$

$$(A+2B)(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$A^2 - AB + 2BA - 2B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{이고}$$

$$A^2 - 2B^2 = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} AB - 2BA &= \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (A-2B)(A+B) &= A^2 + AB - 2BA - 2B^2 \\ &= (A^2 - 2B^2) + (AB - 2BA) \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 11 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1221 답 ③

주어진 식의 좌변을 전개하면

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \text{이려면}$$

$$AB + BA = 2AB \quad \therefore AB = BA$$

$$\text{즉, } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 2y & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 2y & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 2y-6 & 0 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2x=0, 2y-6=0$$

따라서 $x=0, y=3$ 이므로

$$x+y=3$$

1222 답 ②

$$A \begin{pmatrix} 2a \\ 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} \text{을 변끼리 더하면}$$

$$A \begin{pmatrix} 2a \\ 3b \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 4a \\ 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \end{pmatrix}, 4A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1223 답 4

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 4 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 4 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

$$A^3 = A^2A = (-E)A = -A$$

$$A^4 = (A^2)^2 = (-E)^2 = E$$

따라서 $A^n = E$ 를 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

1224 답 ④

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$A^{100} = (A^3)^{33}A = E^{33}A = A \text{ 이므로}$$

$$A^{100} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -50 \end{pmatrix}$$

따라서 $x = -30$, $y = -50$ 이므로
 $x - y = 20$

1225 답 ②

$$A + B = -E \text{ 에서 } B = -A - E$$

$$AB = E \text{ 에 } B = -A - E \text{ 를 대입하면}$$

$$A(-A - E) = E, -A^2 - A = E$$

$$\therefore A^2 + A + E = O$$

같은 방법으로 하면 $B^2 + B + E = O$

$$\therefore (A+B) + (A^2+B^2) + \dots + (A^{2011}+B^{2011})$$

$$= (A+A^2+A^3+\dots+A^{2011}) + (B+B^2+B^3+\dots+B^{2011})$$

$$= A + A^2 \underbrace{(A^2+A+E)}_O + \dots + A^{2009} \underbrace{(A^2+A+E)}_O$$

$$+ B + B^2 \underbrace{(B^2+B+E)}_O + \dots + B^{2009} \underbrace{(B^2+B+E)}_O$$

$$= A + B = -E$$

1226 답 ④

ㄱ. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 이면

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

즉, $A^2 = E$ 이지만 $A \neq E$ 이다.

ㄴ. $(A+2B)^2 = A^2 + 2AB + 2BA + 4B^2$,
 $(A-2B)^2 = A^2 - 2AB - 2BA + 4B^2$ 이므로
 $(A+2B)^2 = (A-2B)^2$ 이면
 $2AB + 2BA = -2AB - 2BA$
 $4AB + 4BA = O$
 $\therefore AB + BA = O$

ㄷ. $AB = A$ 에서 $ABAB = A^2$
 이때 $BA = B$ 이므로 $ABB = A^2$
 또 $AB = A$ 이므로 $AB = A^2$
 $\therefore A^2 = A$
 같은 방법으로 하면 $B^2 = B$ 이므로
 $A^2 + B^2 = A + B$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

1227 답 $\frac{19}{3}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여
 $\alpha = 5 - \beta$, $\beta = \frac{3}{\alpha}$

즉, $\alpha + \beta = 5$, $\alpha\beta = 3$ 이므로

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{5^2 - 2 \times 3}{3} = \frac{19}{3}$$

채점 기준

i $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ 의 값 구하기	50 %
ii $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ 의 값 구하기	50 %

1228 답 3

$$ABC = (x \quad -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= (x+6 \quad -8) \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= (x^2 + 6x + 8)$$

$x^2 + 6x + 8 = (x+3)^2 - 1$ 이므로 행렬 ABC 의 성분은 $x = -3$ 일 때 최솟값 -1 을 갖는다.
 따라서 $a = -3$, $b = -1$ 이므로
 $ab = 3$

채점 기준

i 행렬 ABC 구하기	50 %
ii ab 의 값 구하기	50 %

1229 답 4

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\therefore A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$B^2 = BB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\therefore B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

따라서 $A^n + B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2^n + 3^n \end{pmatrix}$ 이므로 모든 성분의 합은
 $2 + 2^n + 3^n$
 이때 $2 + 2^4 + 3^4 = 99$, $2 + 2^5 + 3^5 = 277$ 이므로 $2 + 2^n + 3^n$ 의 값이 100 이하가 되도록 하는 자연수 n 의 최댓값은 4이다.

채점 기준

i 행렬 A^n 의 규칙 찾기	40 %
ii 행렬 B^n 의 규칙 찾기	40 %
iii 자연수 n 의 최댓값 구하기	20 %

1230 답 12

$$a_{11} = \left[\frac{3-1}{2} \right] = [1] = 1$$

$$a_{12} = \left[\frac{3-2}{2} \right] = \left[\frac{1}{2} \right] = 0$$

$$a_{21} = \left[\frac{6-1}{2} \right] = \left[\frac{5}{2} \right] = 2$$

$$a_{22} = \left[\frac{6-2}{2} \right] = [2] = 2$$

$$a_{31} = \left[\frac{9-1}{2} \right] = [4] = 4$$

$$a_{32} = \left[\frac{9-2}{2} \right] = \left[\frac{7}{2} \right] = 3$$

따라서 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 이므로 구하는 모든 성분의 합은

$$1+0+2+2+4+3=12$$

1231 답 52

직선 $y = -5x + 6$ 과 이차함수 $y = x^2 - 3x - 9$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는 $-5x + 6 = x^2 - 3x - 9$ 에서

$$x^2 + 2x - 15 = 0, (x+5)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 3$$

두 교점의 좌표가 $(-5, 31), (3, -9)$ 이므로

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -5 & 31 \end{pmatrix} (\because a > 0)$$

직선 $y = -5x + 6$ 과 이차함수 $y = 2x^2 - 13x + 6$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는 $-5x + 6 = 2x^2 - 13x + 6$ 에서

$$2x^2 - 8x = 0, 2x(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 4$$

두 교점의 좌표가 $(0, 6), (4, -14)$ 이므로

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -14 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} (\because e > 0)$$

$$\therefore 5A - 3(A+B) = 2A - 3B$$

$$\begin{aligned} &= 2 \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -5 & 31 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 4 & -14 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ -10 & 62 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -42 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 24 \\ -10 & 44 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$-6 + 24 + (-10) + 44 = 52$$

1232 답 ③

$$B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \text{라 하면 (가)에서}$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p-q \\ r-s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$p-q=0, r-s=0$$

즉, $p=q, r=s$ 이므로 $B = \begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix}$ 로 나타낼 수 있다.

(나)의 $AB=2A$ 에서

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2a & 2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p+r & p+r \\ a(p+r) & a(p+r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2a & 2a \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$p+r=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $BA=4B$ 에서

$$\begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4p & 4p \\ 4r & 4r \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p(1+a) & p(1+a) \\ r(1+a) & r(1+a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4p & 4p \\ 4r & 4r \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$p(1+a)=4p, r(1+a)=4r$$

$$pa-3p=0, ra-3r=0$$

$$p(a-3)=0, r(a-3)=0$$

$$\therefore a=3 \text{ 또는 } p=0, r=0$$

이때 $\textcircled{1}$ 에서 $a=3$

$$\text{따라서 } A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & p \\ r & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+p & 1+p \\ 3+r & 3+r \end{pmatrix} \text{이므로 행렬}$$

$A+B$ 의 $(1, 2)$ 성분과 $(2, 1)$ 성분의 합은

$$(1+p) + (3+r) = 4+p+r=6 (\because \textcircled{1})$$

1233 답 ⑤

ㄱ. $A^2+A+E=O$ 에서 양변에 $A-E$ 를 곱하면

$$(A-E)(A^2+A+E)=O, A^3-E^2=O$$

$$\therefore A^3=E$$

ㄴ. $B=A-E$ 이므로

$$AB=A(A-E)=A^2-A$$

$$BA=(A-E)A=A^2-A$$

$$\therefore AB=BA$$

ㄷ. $B=A-E$ 에서 $A-B=E$ 이고 ㄴ에서 $AB=BA$ 가 성립하므로

$$(A+B)(A^2+B^2)(A^4+B^4)$$

$$=(A-B)(A+B)(A^2+B^2)(A^4+B^4)$$

$$=(A^2-B^2)(A^2+B^2)(A^4+B^4)$$

$$=(A^4-B^4)(A^4+B^4)$$

$$=A^8-B^8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ㄱ에서 $A^3=E$ 이므로

$$A^8=(A^3)^2A^2=A^2=-A-E$$

$$B^2=(A-E)^2=A^2-2A+E^2$$

$$=(-A-E)-2A+E=-3A$$

$$B^4=(B^2)^2=(-3A)^2=9A^2$$

$$B^8=(B^4)^2=(9A^2)^2=81A^4=81A^3A=81A$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서

$$(A+B)(A^2+B^2)(A^4+B^4)=A^8-B^8$$

$$=-A-E-81A$$

$$=-82A-E$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

01 / 다항식의 연산

2~7쪽

중단원 기출문제 ①

1 답 -3x²+10xy+5y²

$$\begin{aligned} A-2B &= (x^2+2xy+3y^2)-2(2x^2-4xy-y^2) \\ &= x^2+2xy+3y^2-4x^2+8xy+2y^2 \\ &= -3x^2+10xy+5y^2 \end{aligned}$$

2 답 ④

$$3A-B=x^2-9xy+9y^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$A-B=-x^2+5xy-y^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}-\textcircled{㉡} \text{을 하면 } 2A=2x^2-14xy+10y^2$$

$$\therefore A=x^2-7xy+5y^2$$

㉡에서

$$\begin{aligned} B &= A-(-x^2+5xy-y^2) \\ &= (x^2-7xy+5y^2)-(-x^2+5xy-y^2) \\ &= 2x^2-12xy+6y^2 \end{aligned}$$

이때 $X-A=B$ 에서 $X=A+B$ 이므로

$$\begin{aligned} X &= (x^2-7xy+5y^2)+(2x^2-12xy+6y^2) \\ &= 3x^2-19xy+11y^2 \end{aligned}$$

3 답 -5

$(2x^2+3ax-4)(x^2+x+1)$ 의 전개식에서 x 항은

$$3ax \times 1 + (-4) \times x = 3ax - 4x = (3a-4)x$$

이때 x 의 계수가 -7 이므로

$$3a-4=-7 \quad \therefore a=-1$$

또 주어진 다항식의 전개식에서 x^2 항은

$$2x^2 \times 1 + (-3x) \times x + (-4) \times x^2 = 2x^2 - 3x^2 - 4x^2 = -5x^2$$

따라서 x^2 의 계수는 -5 이다.

4 답 ④

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$ 의 전개식에서 x^4 항은 $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$, $x+5$ 중 4개의 일차식에서 x , 1개의 일차식에서 상수항을 뽑아 곱하면 되므로

$$x^4+2x^4+3x^4+4x^4+5x^4=15x^4$$

따라서 x^4 의 계수는 15 이다.

5 답 ③

$$\textcircled{3} (x+1)(x-2)(x-3)$$

$$\begin{aligned} &= x^3 + \{1+(-2)+(-3)\}x^2 \\ &\quad + \{1 \times (-2) + (-2) \times (-3) + (-3) \times 1\}x \\ &\quad + 1 \times (-2) \times (-3) \\ &= x^3 - 4x^2 + x + 6 \end{aligned}$$

6 답 ③

$$\begin{aligned} &(2x+ay)^3 - (2x-y)(4x^2+2xy+y^2) \\ &= \{(2x)^3 + 3 \times (2x)^2 \times ay + 3 \times 2x \times (ay)^2 + (ay)^3\} \\ &\quad - (2x-y)\{(2x)^2 + 2x \times y + y^2\} \\ &= (8x^3 + 12ax^2y + 6a^2xy^2 + a^3y^3) - (8x^3 - y^3) \\ &= 12ax^2y + 6a^2xy^2 + (a^3+1)y^3 \\ &\text{이때 } y^3 \text{의 계수가 } 2 \text{이므로} \\ &a^3+1=2, a^3=1 \\ &\therefore a=1 \end{aligned}$$

7 답 ③

$$\begin{aligned} &(x^3-2x^2-x+1)(x^3-2x^2+x+1) \\ &= (x^3-2x^2+1)^2 - x^2 \\ &= \{(x^3)^2 + (-2x^2)^2 + 1^2 + 2 \times x^3 \times (-2x^2)\} \\ &\quad + 2 \times (-2x^2) \times 1 + 2 \times 1 \times x^3\} - x^2 \\ &= (x^6 + 4x^4 + 1 - 4x^5 - 4x^2 + 2x^3) - x^2 \\ &= x^6 - 4x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 1 \end{aligned}$$

8 답 ⑤

$$\begin{aligned} (x-y)^2 &= x^2 + y^2 - 2xy = 25 - 2 \times (-10) = 45 \\ \text{그런데 } x > y \text{이므로 } x-y &= 3\sqrt{5} \\ \therefore x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2 + y^2 + xy) \\ &= 3\sqrt{5} \times (25 - 10) = 45\sqrt{5} \end{aligned}$$

9 답 ④

$$\begin{aligned} x+y &= (\sqrt{3}+\sqrt{2}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{3}, \quad xy = (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1 \\ \text{이므로} \\ x^2+y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \\ &= (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 1 = 10 \\ x^3+y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= (2\sqrt{3})^3 - 3 \times 1 \times 2\sqrt{3} = 18\sqrt{3} \\ \therefore x^2+x^3+y^2+y^3 &= (x^2+y^2) + (x^3+y^3) \\ &= 10 + 18\sqrt{3} \end{aligned}$$

10 답 45

$$\begin{aligned} x^2-4x+1=0 \text{에서 } x \neq 0 \text{이므로 양변을 } x \text{로 나누면} \\ x-4+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=4 \\ \therefore x^2+\frac{1}{x^2} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2 \\ &= 4^2 - 2 = 14 \\ x^2-4x+1=0 \text{에서 } 4x=x^2+1 \text{이므로} \\ 12x &= 3x^2+3 \\ \therefore 12x+\frac{3}{x^2} &= (3x^2+3) + \frac{3}{x^2} \\ &= 3\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right) \\ &= 3 \times (14+1) = 45 \end{aligned}$$

11 답 -10

$$\begin{aligned}x+y+z &= -1 \text{이므로} \\(x+y)(y+z)(z+x) \\&= (-1-z)(-1-x)(-1-y) \\&= -(1+x)(1+y)(1+z) \\&= -\{1+(x+y+z)+(xy+yz+zx)+xyz\} \\&= -(1-1-14+24) = -10\end{aligned}$$

12 답 ①

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\&= 1^2 - 2 \times (-4) = 9 \\ \therefore a^3+b^3+c^3 \\&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc \\&= 1 \times \{9 - (-4)\} + 3 \times (-4) = 1\end{aligned}$$

13 답 ⑤

$$\begin{aligned}&2\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right) \\&= 3 \times \frac{2}{3} \times \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right) \\&= 3 \times \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right) \\&= 3 \times \left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right) \\&= 3 \times \left(1-\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right) \\&= 3 \times \left(1-\frac{1}{3^8}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right) = 3 \times \left(1-\frac{1}{3^{16}}\right) = 3 - \frac{1}{3^{15}} \\ \text{따라서 } a=3, b=15 \text{이므로 } \frac{b}{a} &= \frac{15}{3} = 5\end{aligned}$$

14 답 94

$$\begin{aligned}\overline{BC}=a, \overline{CD}=b, \overline{CG}=c \text{라 하면} \\ \text{모든 모서리의 길이의 합이 48이므로} \\ 4(a+b+c) &= 48 \quad \therefore a+b+c=12 \\ \text{삼각형 BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 100이므로} \\ (a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2) &= 100 \\ 2(a^2+b^2+c^2) &= 100 \quad \therefore a^2+b^2+c^2=50 \\ \text{따라서 직육면체의 겉넓이는} \\ 2(ab+bc+ca) &= (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) \\ &= 12^2 - 50 = 94\end{aligned}$$

15 답 ③

$$\begin{aligned}\text{다항식 } 3x^3-4x^2-x+5 \text{를 } 3x+2 \text{로 나누면} \\ \begin{array}{r} x^2-2x+1 \\ 3x+2 \overline{) 3x^3-4x^2-x+5} \\ \underline{3x^3+2x^2} \\ -6x^2-x \\ \underline{-6x^2-4x} \\ 3x+5 \\ \underline{3x+2} \\ 3 \end{array}\end{aligned}$$

따라서 몫은 x^2-2x+1 이고, 나머지는 3이다.

다른 풀이

$$\begin{aligned}\text{조립제법에 의하여} \\ 3x^3-4x^2-x+5 \\ = \left(x+\frac{2}{3}\right)(3x^2-6x+3)+3 \\ = (3x+2)(x^2-2x+1)+3 \\ \text{따라서 다항식 } 3x^3-4x^2-x+5 \text{를 } 3x+2 \text{로 나누었을 때의 몫은} \\ x^2-2x+1 \text{이고, 나머지는 3이다.}\end{aligned}$$

16 답 ②

$$\begin{aligned}\text{다항식 } x^4-8x^2+18x-6 \text{을 } x^2+x+3 \text{으로 나누면} \\ \begin{array}{r} x^2-x-10 \\ x^2+x+3 \overline{) x^4-8x^2+18x-6} \\ \underline{x^4+x^3+3x^2} \\ -x^3-11x^2+18x \\ \underline{-x^3-x^2-3x} \\ -10x^2+21x-6 \\ \underline{-10x^2-10x-30} \\ 31x+24 \end{array}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{따라서 } Q(x) &= x^2-x-10, R(x) = 31x+24 \text{이므로} \\ Q(1)-R(-1) &= -10 - (-7) = -3\end{aligned}$$

17 답 ②

$$\begin{aligned}6x^3-x^2+3x+2 &= P(x)(6x+5)+14x+7 \text{이므로} \\ 6x^3-x^2-11x-5 &= P(x)(6x+5) \\ \therefore P(x) &= (6x^3-x^2-11x-5) \div (6x+5) \\ \begin{array}{r} x^2-x-1 \\ 6x+5 \overline{) 6x^3-x^2-11x-5} \\ \underline{6x^3+5x^2} \\ -6x^2-11x \\ \underline{-6x^2-5x} \\ -6x-5 \\ \underline{-6x-5} \\ 0 \end{array}\end{aligned}$$

$$\therefore P(x) = x^2-x-1$$

18 답 ③

$$\begin{aligned}\text{사다리꼴의 높이를 } P(x) \text{라 하면} \\ \frac{1}{2}\{(2x^2-4x)+(2x+6)\}P(x) &= 3x^4-2x^3+8x^2+3x \\ (x^2-x+3)P(x) &= 3x^4-2x^3+8x^2+3x \\ \therefore P(x) &= (3x^4-2x^3+8x^2+3x) \div (x^2-x+3) \\ \begin{array}{r} 3x^2+x \\ x^2-x+3 \overline{) 3x^4-2x^3+8x^2+3x} \\ \underline{3x^4-3x^3+9x^2} \\ x^3-x^2+3x \\ \underline{x^3-x^2+3x} \\ 0 \end{array}\end{aligned}$$

$$\therefore P(x) = 3x^2+x$$

따라서 사다리꼴의 높이는 $3x^2+x$ 이다.

19 답 ⑤

$$f(x) = (5x+3)Q(x) + R \text{이므로}$$

$$xf(x) = x(5x+3)Q(x) + xR$$

$$= 5x\left(x + \frac{3}{5}\right)Q(x) + \left(x + \frac{3}{5}\right)R - \frac{3}{5}R$$

$$= \left(x + \frac{3}{5}\right)\{5xQ(x) + R\} - \frac{3}{5}R$$

따라서 $xf(x)$ 를 $x + \frac{3}{5}$ 으로 나누었을 때의 몫은 $5xQ(x) + R$, 나머지는 $-\frac{3}{5}R$ 이다.

20 답 9

$$\frac{1}{3} \begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & 0 & 6 \\ & 1 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 9 & 3 & 7 \end{array}$$

조립제법에 의하여 $a=3$, $b=1$ 이고

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)(3x^2 + 9x + 3) + 7$$

$$= (3x-1)(x^2+3x+1) + 7$$

$$\therefore Q(x) = x^2 + 3x + 1, R = 7$$

$$\therefore Q(a) - f(b) + R = Q(3) - f(1) + R \\ = 19 - 17 + 7 = 9$$

중단원 기출문제 2회

1 답 ②

$$5(A-B) - 3(2A-B)$$

$$= 5A - 5B - 6A + 3B = -A - 2B$$

$$= -(4x^2 + 4xy + y^2) - 2(x^2 - xy - 5y^2)$$

$$= -4x^2 - 4xy - y^2 - 2x^2 + 2xy + 10y^2$$

$$= -6x^2 - 2xy + 9y^2$$

2 답 $-10x^2 + 9xy - 13y^2$

$$2X - A = 3(X - 2B) \text{에서 } 2X - A = 3X - 6B$$

$$\therefore X = -A + 6B$$

$$= -(4x^2 - 3xy + y^2) + 6(-x^2 + xy - 2y^2)$$

$$= -4x^2 + 3xy - y^2 - 6x^2 + 6xy - 12y^2$$

$$= -10x^2 + 9xy - 13y^2$$

3 답 ②

두 다항식 A , B 에서 x^3 의 계수를 각각 a , b 라 하면 다항식 $A-2B$ 에서 x^3 의 계수는 $a-2b$ 이다.

$$(x-1)(x^3-3x^2+1) \text{의 전개식에서 } x^3 \text{항은}$$

$$x \times (-3x^2) + (-1) \times x^3 = -3x^3 - x^3 = -4x^3$$

$$\therefore a = -4$$

$$(2x^2-x+1)(x^3-x-2) \text{의 전개식에서 } x^3 \text{항은}$$

$$2x^2 \times (-x) + 1 \times x^3 = -2x^3 + x^3 = -x^3$$

$$\therefore b = -1$$

따라서 다항식 $A-2B$ 의 x^3 의 계수는

$$a-2b = -4 - 2 \times (-1) = -2$$

4 답 ④

$$(2x-3)^3 = (2x)^3 - 3 \times (2x)^2 \times 3 + 3 \times 2x \times 3^2 - 3^3 \\ = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$$

따라서 $a = -36$, $b = 54$, $c = -27$ 이므로

$$a+b-c = 45$$

5 답 ②

$$(x-2)(x^2+2x+4)(x^3+8) = (x^3-2^3)(x^3+2^3)$$

$$= x^6 - 2^6$$

$$= 66 - 64 = 2$$

6 답 141

$$(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

$$= \{(x-1)(x-7)\} \{(x-3)(x-5)\}$$

$$= (x^2-8x+7)(x^2-8x+15)$$

$$= (A+7)(A+15) \rightarrow x^2-8x=A$$

$$= A^2 + 22A + 105$$

$$= (x^2-8x)^2 + 22(x^2-8x) + 105$$

$$= (x^4-16x^3+64x^2) + (22x^2-176x) + 105$$

$$= x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 105$$

따라서 $a = -16$, $b = 86$, $c = -176$, $d = 105$ 이므로

$$a+b-c-d = 141$$

7 답 ④

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -2 \text{에서 } \frac{y-x}{xy} = -2$$

$$\frac{-2}{xy} = -2 \quad \therefore xy = 1$$

$$x^2+y^2 = (x-y)^2 + 2xy = 2^2 + 2 \times 1 = 6 \text{이므로}$$

$$x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2$$

$$= 6^2 - 2 \times 1^2 = 34$$

8 답 31

$$x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) \text{에서}$$

$$7 = 1^3 - 3xy \times 1 \quad \therefore xy = -2$$

$$\therefore x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 1^2 - 2 \times (-2) = 5$$

$$(x^2+y^2)(x^3+y^3) = x^5+y^5+x^3y^2+x^2y^3 \text{이므로}$$

$$x^5+y^5 = (x^2+y^2)(x^3+y^3) - x^2y^2(x+y)$$

$$= 7 \times 5 - (-2)^2 \times 1 = 31$$

9 답 ④

$$x=2-\sqrt{3} \text{에서 } x-2 = -\sqrt{3}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } x^2-4x+4=3 \quad \therefore x^2-4x+1=0$$

$x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면

$$x-4+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=4$$

$$\therefore x^2+x^3+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$$

$$= \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) + \left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$$

$$= \left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\} + \left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$= (4^2-2) + (4^3-3 \times 4) = 66$$

10 **답** ④

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + 4 = (-2\sqrt{3})^2 + 4 = 16$$

그런데 $x^2 > 0$ 이므로

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 4$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \text{에서}$$

$$4 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 6$$

그런데 $x > 0$ 이므로

$$x + \frac{1}{x} = \sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^3} &= x^3 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \\ &= \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= \left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)\right\} + \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= (\sqrt{6})^3 - 2 \times \sqrt{6} = 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

11 **답** $\frac{5}{6}$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{에서}$$

$$14 = 2^2 - 2(ab+bc+ca)$$

$$\therefore ab+bc+ca = -5$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{ab+bc+ca}{abc} \\ &= \frac{-5}{-6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

12 **답** (1) 6 (2) 9 (3) 18

$$\begin{aligned} (1) \ a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= 2^2 - 2 \times (-1) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \ (ab+bc+ca)^2 &= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c) \text{에서} \\ a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c) \\ &= (-1)^2 - 2 \times (-2) \times 2 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \ a^4 + b^4 + c^4 &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ &= 6^2 - 2 \times 9 = 18 \end{aligned}$$

13 **답** ①

$$\begin{aligned} P &= 2^4(5^2+3^2)(5^4+3^4)(5^8+3^8) \\ &= 16(5^2+3^2)(5^4+3^4)(5^8+3^8) \\ &= (5^2-3^2)(5^2+3^2)(5^4+3^4)(5^8+3^8) \\ &= (5^4-3^4)(5^4+3^4)(5^8+3^8) \\ &= (5^8-3^8)(5^8+3^8) \\ &= 5^{16} - 3^{16} \\ \therefore \frac{P+3^{16}}{5^{16}} &= \frac{5^{16}}{5^{16}} = 1 \end{aligned}$$

14 **답** ④

두 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 a , b 라 하면

두 정육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 72이므로

$$12(a+b) = 72 \quad \therefore a+b = 6$$

두 정육면체의 겉넓이의 합이 168이므로

$$6(a^2+b^2) = 168 \quad \therefore a^2+b^2 = 28$$

$$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab \text{에서}$$

$$28 = 6^2 - 2ab \quad \therefore ab = 4$$

따라서 두 정육면체의 부피의 합은

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) \\ &= 6^3 - 3 \times 4 \times 6 = 144 \end{aligned}$$

15 **답** $5\sqrt{2}$

처음 직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 a , b , c 라 하면 한 모퉁이에서 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 모양을 잘라 낸 입체도형에 대하여 겉넓이가 94이므로

$$2(ab+bc+ca) = 94$$

$$\therefore ab+bc+ca = 47$$

모든 모서리의 길이의 합이 54이므로

$$4(a+b+c) + 6 = 54, \quad 4(a+b+c) = 48$$

$$\therefore a+b+c = 12$$

$$\begin{aligned} \therefore a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= 12^2 - 2 \times 47 = 50 \end{aligned}$$

따라서 처음 직육면체 모양의 나무토막의 대각선의 길이는

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

16 **답** ②

다항식 x^4+4x^2+2 를 $x+2$ 로 나누면

$$\begin{array}{r} x^3-2x^2+8x-16 \\ x+2 \overline{) x^4 + 4x^2 + 2} \\ \underline{x^4+2x^3} \\ -2x^3+4x^2 \\ \underline{-2x^3-4x^2} \\ 8x^2 \\ \underline{8x^2+16x} \\ -16x+2 \\ \underline{-16x-32} \\ 34 \end{array}$$

따라서 몫은 $x^3-2x^2+8x-16$, 나머지는 34이므로 몫과 나머지의 합은

$$(x^3-2x^2+8x-16) + 34 = x^3-2x^2+8x+18$$

다른 풀이

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ & & -2 & 4 & -16 & 32 \\ \hline & 1 & -2 & 8 & -16 & 34 \end{array}$$

조립제법에 의하여 몫은 $x^3-2x^2+8x-16$, 나머지는 34이다.

따라서 몫과 나머지의 합은

$$(x^3-2x^2+8x-16) + 34 = x^3-2x^2+8x+18$$

17 답 2

다항식 $x^4 - x^3 + 6x^2 + 2x + 11$ 을 $x^2 + 1$ 로 나누면

$$\begin{array}{r} x^2 - x + 5 \\ x^2 + 1 \overline{) x^4 - x^3 + 6x^2 + 2x + 11} \\ \underline{x^4 \quad + \quad x^2} \\ -x^3 + 5x^2 + 2x \\ \underline{-x^3 \quad - \quad x} \\ 5x^2 + 3x + 11 \\ \underline{5x^2 \quad + \quad 5} \\ 3x + 6 \end{array}$$

따라서 $Q(x) = x^2 - x + 5$, $R(x) = 3x + 6$ 이므로

$$Q(1) - R(-1) = 5 - 3 = 2$$

18 답 8

다항식 $P(x) = x^3 + x^2 + ax + b$ 가 $x^2 + 2x + 3$ 으로 나누어떨어지므로 나머지가 0이어야 한다.

$$\begin{array}{r} x - 1 \\ x^2 + 2x + 3 \overline{) x^3 + x^2 + ax + b} \\ \underline{x^3 + 2x^2 + 3x} \\ -x^2 + (a-3)x + b \\ \underline{-x^2 - 2x - 3} \\ (a-1)x + b + 3 \end{array}$$

즉, 위의 나눗셈에서

$$a-1=0, b+3=0 \quad \therefore a=1, b=-3$$

따라서 $P(x) = x^3 + x^2 + x - 3$ 을 $x^2 - 3$

으로 나누면

$$Q(x) = x + 1, R(x) = 4x$$

$$\therefore Q(3) - R(-1) = 4 - (-4) = 8$$

$$\begin{array}{r} x + 1 \\ x^2 - 3 \overline{) x^3 + x^2 + x - 3} \\ \underline{x^3 \quad - 3x} \\ x^2 + 4x - 3 \\ \underline{x^2 \quad - 3} \\ 4x \end{array}$$

19 답 ⑤

$$f(x) = (2x+4)Q(x) + R \text{이므로}$$

$$(x+4)f(x) = (x+4)(2x+4)Q(x) + (x+4)R$$

$$= 2(x+4)(x+2)Q(x) + (x+2)R + 2R$$

$$= (x+2)\{2(x+4)Q(x) + R\} + 2R$$

따라서 $(x+4)f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 몫은

$(2x+8)Q(x) + R$, 나머지는 $2R$ 이다.

20 답 ④

$$3a=2, b+2=6 \text{이므로 } a=\frac{2}{3}, b=4$$

오른쪽 조립제법에서 $c-2=1$

$$\therefore c=3$$

$$\therefore abc = \frac{2}{3} \times 4 \times 3 = 8$$

$$\begin{array}{l} 3x^3 + 4x^2 - 7x + 3 = \left(x - \frac{2}{3}\right)(3x^2 + 6x - 3) + 1 \\ = (3x - 2)(x^2 + 2x - 1) + 1 \end{array}$$

따라서 구하는 몫은 $x^2 + 2x - 1$ 이다.

02 / 나머지 정리와 인수분해

8~13쪽

중단원 기출문제 1회

1 답 ①

주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$x^3 + (a-9)x + 3a = x^3 + bx - 18$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a-9=b, 3a=-18$$

$$3a=-18 \text{에서 } a=-6$$

$$a-9=b \text{에서 } b=-6-9=-15$$

$$\therefore a+b=-21$$

2 답 ④

$$x^{11} + ax^{10} + bx = (x^2 - 1)f(x) + 2x + 1$$

$$= (x+1)(x-1)f(x) + 2x + 1 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $1+a+b=3$

$$\therefore a+b=2 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $-1+a-b=-1$

$$\therefore a-b=0 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1, b=1$

$$\therefore 2ab=2$$

3 답 ①

주어진 방정식에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 - (k+1) + (k-3)a - b + 1 = 0$$

$$\therefore (a-1)k - 3a - b + 1 = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$a-1=0, -3a-b+1=0$$

$$a-1=0 \text{에서 } a=1$$

$$-3a-b+1=0 \text{에서 } -3-b+1=0 \quad \therefore b=-2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 1 + 4 = 5$$

4 답 ③

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$2^{10} = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$0 = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{10} \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠+㉡을 하면

$$2^{10} = 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10})$$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{10} = 2^9 = 512$$

5 답 20

다항식 $x^3 + ax^2 + bx$ 를 $x^2 - x + 2$ 로 나누었을 때의 몫을

$x+c$ (c 는 상수)라 하면

$$x^3 + ax^2 + bx = (x^2 - x + 2)(x+c) - 6x + 4$$

$$= x^3 + (c-1)x^2 - (c+4)x + 2c + 4$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=c-1, 0=c+4, b=2c+4$$

$$0=c+4 \text{에서 } c=-4$$

$$a=c-1 \text{에서 } a=-4-1=-5$$

$$b=2c+4 \text{에서 } b=-8+4=-4$$

$$\therefore ab=20$$

6 답 ③

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 8 & 21 & 21 \\ & & -2 & -12 & -18 \\ \hline -2 & 1 & 6 & 9 & 3 \\ & & -2 & -8 & \\ \hline -2 & 1 & 4 & 1 & \\ & & -2 & & \\ \hline & 1 & & & 2 \end{array}$$

위의 조립제법에서

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 8x^2 + 21x + 21 \\ &= (x+2)(x^2 + 6x + 9) + 3 \\ &= (x+2)\{(x+2)(x+4) + 1\} + 3 \\ &= (x+2)^2(x+4) + (x+2) + 3 \\ &= (x+2)^2\{(x+2) + 2\} + (x+2) + 3 \\ &= (x+2)^3 + 2(x+2)^2 + (x+2) + 3 \\ \therefore f(98) &= 100^3 + 2 \times 100^2 + 100 + 3 \\ &= 1000000 + 20000 + 100 + 3 \\ &= 1020103 \end{aligned}$$

따라서 각 자리의 숫자의 합은

$$1+0+2+0+1+0+3=7$$

7 답 $2x+1$

나머지 정리에 의하여

$$\begin{aligned} f(-3) &= f(1) = -1 \\ (x^2-4)f(x) &\text{를 } x^2+2x-3 \text{으로 나누었을 때의 몫을 } Q(x), \\ &\text{나머지를 } ax+b (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면} \\ (x^2-4)f(x) &= (x^2+2x-3)Q(x) + ax+b \\ &= (x+3)(x-1)Q(x) + ax+b \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

㉠의 양변에 $x=-3$ 을 대입하면

$$5f(-3) = -3a+b \quad \therefore -3a+b = -5 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$-3f(1) = a+b \quad \therefore a+b = 3 \quad \dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2, b=1$

따라서 구하는 나머지는 $2x+1$ 이다.

8 답 34

$$\begin{aligned} x^{15} + x^{10} + x^5 - 1 &\text{을 } x^3 - x \text{로 나누었을 때의 몫을 } Q(x), \text{ 나머지를} \\ R(x) &= ax^2 + bx + c (a, b, c \text{는 상수}) \text{라 하면} \\ x^{15} + x^{10} + x^5 - 1 &= (x^3 - x)Q(x) + ax^2 + bx + c \\ &= x(x+1)(x-1)Q(x) + ax^2 + bx + c \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

㉠의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $c=-1$

㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} -2 &= a - b + c \\ -2 &= a - b - 1 \quad \therefore a - b = -1 \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} 2 &= a + b + c \\ 2 &= a + b - 1 \quad \therefore a + b = 3 \quad \dots\dots ㉢ \end{aligned}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1, b=2$

따라서 $R(x) = x^2 + 2x - 1$ 이므로

$$R(5) = 25 + 10 - 1 = 34$$

9 답 1

$f(x) = x^{21} - 3x^{16} + 6$ 이라 하면 $f(1) = 4$ 이므로

$$f(x) = (x-1)Q(x) + 4 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $f(-1) = 2$ 이고 $Q(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$Q(-1)$ 이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$2 = -2Q(-1) + 4 \quad \therefore Q(-1) = 1$$

10 답 4

$f(x)$ 를 $(x+2)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$f(x) = (x+2)(x-1)Q(x) + x + 3$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1) = 4$

따라서 $f(3x-5)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(3 \times 2 - 5) = f(1) = 4 \quad \leftarrow x=2 \text{를 대입}$$

11 답 ①

$19=x$ 로 놓고 x^{100} 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$x^{100} = (x+1)Q(x) + R$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $R=1$

$$\therefore x^{100} = (x+1)Q(x) + 1$$

$x=19$ 이므로

$$19^{100} = 20Q(19) + 1$$

따라서 구하는 나머지는 1이다.

12 답 -2

$f(x+1)$ 이 $x+2$ 로 나누어떨어지므로

$$f(-2+1) = f(-1) = 0$$

$$-2 + a + 3 + 1 = 0$$

$$\therefore a = -2$$

13 답 ⑤

$$\begin{aligned} \neg. x^2 - (y-z)^2 &= \{x + (y-z)\}\{x - (y-z)\} \\ &= (x+y-z)(x-y+z) \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

14 답 ①

$x^2 - 2x = X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x)^2 - 2x^2 + 4x - 3 &= (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3 \\ &= X^2 - 2X - 3 \\ &= (X+1)(X-3) \\ &= (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x - 3) \\ &= (x-1)^2(x+1)(x-3) \end{aligned}$$

따라서 $a=-1, b=1, c=-3$ 또는 $a=-1, b=-3, c=1$ 이므로

$$a+bc = -1 + 1 \times (-3) = -4$$

15 답 ⑤

$x^2 = X$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} x^4 - 10x^2 + 9 &= X^2 - 10X + 9 \\ &= (X-1)(X-9) \\ &= (x^2-1)(x^2-9) \\ &= (x+1)(x-1)(x+3)(x-3) \\ \therefore a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= 1^2 + (-1)^2 + 3^2 + (-3)^2 = 20 \end{aligned}$$

16 답 ④

a 에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned} ab(a-b) - bc(b+c) + ca(a+c) \\ &= a^2b - ab^2 - b^2c - bc^2 + ca^2 + c^2a \\ &= (b+c)a^2 - (b^2-c^2)a - b^2c - bc^2 \\ &= (b+c)a^2 - (b+c)(b-c)a - bc(b+c) \\ &= (b+c)\{a^2 - (b-c)a - bc\} \\ &= (b+c)(a-b)(a+c) \\ &= (a-b)(b+c)(c+a) \end{aligned}$$

17 답 ④

$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ 라 할 때, $f(1) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 인

1	1	2	-1	-2
		1	3	2
1	3	2		0

수분해하면

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - x - 2 &= (x-1)(x^2 + 3x + 2) \\ &= (x-1)(x+1)(x+2) \end{aligned}$$

이때 $a < b < c$ 이므로 $a = -1, b = 1, c = 2$

$$\therefore a + b - c = -2$$

18 답 ④

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 &= x^2 \left(x^2 + 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \\ &= x^2 \left\{ x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 1 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 3 \right\} \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right) + 3 \right\} \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right) - 1 \right\} \\ &= (x^2 + 3x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

19 답 ①

2030 = a 로 놓으면

$$\frac{2030^3 - 1}{2030 \times 2031 + 1} = \frac{a^3 - 1}{a(a+1) + 1} = \frac{(a-1)(a^2 + a + 1)}{a^2 + a + 1} = a - 1 = 2029$$

20 답 ③

$$\begin{aligned} a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 &= (a^3 + b^3) - (a^2b + ab^2) \\ &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b) \\ &= (a+b)(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= (a+b)(a-b)^2 \end{aligned}$$

이때 $a + b = (1 + \sqrt{5}) + (1 - \sqrt{5}) = 2$,

$$\begin{aligned} a - b &= (1 + \sqrt{5}) - (1 - \sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \text{이므로 구하는 식의 값은} \\ (a+b)(a-b)^2 &= 2 \times (2\sqrt{5})^2 = 40 \end{aligned}$$

중단원 기출문제 2회

1 답 ②

$$\frac{6x+3a}{x+2} = k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면}$$

$$6x + 3a = kx + 2k$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$k = 6, 3a = 2k$$

$$\therefore a = 4$$

2 답 -2

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$2 = -2c \quad \therefore c = -1$$

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$a + 3 = 0 \quad \therefore a = -3$$

주어진 등식의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$6 - 2a = 6b$$

$$12 = 6b \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore a + b + c = -3 + 2 + (-1) = -2$$

3 답 -12

$x - y = -1$ 에서 $x = y - 1$ 을 주어진 등식에 대입하면

$$(y-1)^2 - 2(y-1) = ay^2 + by + c$$

$$y^2 - 4y + 3 = ay^2 + by + c$$

이 등식이 y 에 대한 항등식이므로

$$a = 1, b = -4, c = 3$$

$$\therefore abc = -12$$

4 답 ②

$$(3x-5)^5 (x^3-4x^2+3x-1)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{23}x^{23} \quad (a_0, a_1, \dots, a_{23} \text{은 상수})$$

이라 하고 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$-32 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{23}$$

따라서 상수항을 포함한 모든 계수의 합은 -32 이다.

5 답 ④

$x^4 + ax^3 - bx^2$ 을 $x^2 + x - 3$ 으로 나누었을 때의 몫을

$x^2 + cx + d$ (c, d 는 상수)라 하면

$$x^4 + ax^3 - bx^2 = (x^2 + x - 3)(x^2 + cx + d) + 2x + 3$$

$$\therefore x^4 + ax^3 - bx^2$$

$$= x^4 + (c+1)x^3 + (c+d-3)x^2 + (-3c+d+2)x + 3-3d$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a = c + 1, -b = c + d - 3, -3c + d + 2 = 0, 3 - 3d = 0$$

$$3 - 3d = 0 \text{에서 } d = 1$$

$$-3c + d + 2 = 0 \text{에서 } -3c + 1 + 2 = 0$$

$$\therefore c = 1$$

$$-b = c + d - 3 \text{에서 } -b = 1 + 1 - 3$$

$$\therefore b = 1$$

$$a = c + 1 \text{에서 } a = 1 + 1 = 2$$

$$\therefore ab = 2$$

6 답 ⑤

오른쪽 조립제법에서

$$x^3 + x^2 - x + 4$$

$$= (x-2)(x^2+3x+5)+14$$

$$= (x-2)\{(x-2)(x+5)+15\}+14$$

$$= (x-2)^2(x+5)+15(x-2)+14$$

$$= (x-2)^2\{(x-2)+7\}$$

$$+15(x-2)+14$$

$$= (x-2)^3+7(x-2)^2+15(x-2)+14$$

따라서 $a=1, b=7, c=15, d=14$ 이므로 $a+b-c+d=7$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ & & 2 & 6 & 10 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 5 & 14 \\ & & 2 & 10 & \\ \hline 2 & 1 & 5 & 15 & \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & 7 & & \end{array}$$

7 답 ④

$f(x)=x^3+ax^2+bx-5$ 라 하면 나머지 정리에 의하여

$$f(1)=2, f(-2)=-1$$

$$f(1)=2 \text{에서 } 1+a+b-5=2$$

$$\therefore a+b=6 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$f(-2)=-1 \text{에서 } -8+4a-2b-5=-1$$

$$\therefore 2a-b=6 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4, b=2$

$$\therefore ab=8$$

8 답 $-2x+6$

(나)의 식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(1)=f(0)$$

$$\textcircled{라} \text{에서 } f(0)=4 \text{이므로 } f(1)=4$$

(나)의 식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(2)=f(1)-2=4-2=2$$

$f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$$

$$= (x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1)=a+b \quad \therefore a+b=4 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠의 양변에 $x=2$ 을 대입하면

$$f(2)=2a+b \quad \therefore 2a+b=2 \quad \cdots \cdots \text{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-2, b=6$

따라서 구하는 나머지는 $-2x+6$ 이다.

9 답 ④

$f(x)$ 를 $x^3-5x^2+8x-4=(x-2)^2(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을

$Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x-2)^2(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $3x-3$ 이므로 ㉠에서

ax^2+bx+c 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $3x-3$ 이다.

$$\therefore ax^2+bx+c=a(x-2)^2+3x-3$$

이를 ㉠에 대입하면

$$f(x)=(x-2)^2(x-1)Q(x)+a(x-2)^2+3x-3$$

이때 나머지 정리에 의하여 $f(1)=2$ 이므로 위의 등식의 양변에

$x=1$ 을 대입하면

$$f(1)=a \quad \therefore a=2$$

따라서 $R(x)=2(x-2)^2+3x-3=2x^2-5x+5$ 이므로

$$R(-1)=2+5+5=12$$

10 답 ①

나머지 정리에 의하여

$$f\left(\frac{1}{2}\right)+3g\left(\frac{1}{2}\right)=7, 2f\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)=4$$

두 식을 연립하여 풀면 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1, g\left(\frac{1}{2}\right)=2$

따라서 $f\left(x-\frac{3}{2}\right)$ 을 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f\left(2-\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

11 답 ①

$f(x)$ 를 x^2+x-1 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $6x+1$ 이

므로

$$f(x)=(x^2+x-1)Q(x)+6x+1 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$Q(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지가 11이므로 $Q(-1)=11$

$xf(x-2)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 $f(-1)$ 이므로 ㉠의

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$f(-1)=-Q(-1)-5=-11-5=-16$$

12 답 2

$3=x$ 로 놓고 $2x^{50}$ 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

R 라 하면

$$2x^{50}=(x+1)Q(x)+R$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $R=2$

$$\therefore 2x^{50}=(x+1)Q(x)+2$$

$$x=3 \text{이므로 } 2 \times 3^{50}=4Q(3)+2$$

따라서 구하는 나머지는 2이다.

13 답 2

$f(x)=ax^3-5x^2+bx+2$ 라 하면 $f(x)$ 가 $x-1, x-2$ 로 각각 나누어떨어지므로

$$f(1)=0, f(2)=0$$

$$f(1)=0 \text{에서 } a-5+b+2=0 \quad \therefore a+b=3 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$f(2)=0 \text{에서 } 8a-20+2b+2=0 \quad \therefore 4a+b=9 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, b=1$

$$\therefore ab=2$$

14 답 ⑤

x^3 의 계수가 1인 삼차식 $P(x)$ 가 $(x+2)^2$ 을 인수로 가지므로

$P(x)=(x+2)^2(x+k)$ (k 는 상수)라 하자.

$$P(-1)=-4 \text{이므로 } -1+k=-4 \quad \therefore k=-3$$

따라서 $P(x)=(x+2)^2(x-3)=x^3+x^2-8x-12$ 이므로

$$a=1, b=-8, c=-12 \quad \therefore ab-c=4$$

15 답 ③

$$\textcircled{3} a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$$

$$=a^2+b^2+(-c)^2+2 \times a \times b+2 \times b \times (-c)+2 \times (-c) \times a$$

$$=(a+b-c)^2$$

16 답 ④

$$\begin{aligned}
 & (x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+6 \\
 & = \{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}+6 \\
 & = (x^2+2x-3)(x^2+2x-8)+6 \\
 & x^2+2x=X \text{로 놓으면} \\
 & (x^2+2x-3)(x^2+2x-8)+6 \\
 & = (X-3)(X-8)+6 \\
 & = X^2-11X+30 \\
 & = (X-5)(X-6) \\
 & = (x^2+2x-5)(x^2+2x-6) \\
 & \text{따라서 주어진 식의 인수인 것은 ④이다.}
 \end{aligned}$$

17 답 ⑤

$$\begin{aligned}
 x^4+x^2+25 &= (x^4+10x^2+25)-9x^2 \\
 &= (x^2+5)^2-(3x)^2 \\
 &= (x^2+3x+5)(x^2-3x+5) \\
 &\text{따라서 } a=3, b=5, c=5 \text{이므로 } a+b-c=3
 \end{aligned}$$

18 답 215

$$\begin{aligned}
 10 &= a \text{로 놓으면} \\
 11 \times 13 \times 17 \times 19 + 36 \\
 &= (a+1)(a+3)(a+7)(a+9) + 36 \\
 &= \{(a+1)(a+9)\}\{(a+3)(a+7)\} + 36 \\
 &= (a^2+10a+9)(a^2+10a+21) + 36 \\
 a^2+10a &= X \text{로 놓으면} \\
 (a^2+10a+9)(a^2+10a+21) + 36 \\
 &= (X+9)(X+21) + 36 \\
 &= X^2+30X+225 = (X+15)^2 \\
 &= (a^2+10a+15)^2 \\
 &= (10^2+10 \times 10+15)^2 = 215^2 \\
 \therefore \sqrt{11 \times 13 \times 17 \times 19 + 36} &= \sqrt{215^2} = 215
 \end{aligned}$$

19 답 ⑤

$$\begin{aligned}
 x^4+x^2y^2+y^4 &= (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \\
 &= \{(x-y)^2+3xy\}\{(x-y)^2+xy\} \\
 &= (2^2+3 \times 1)(2^2+1) = 35
 \end{aligned}$$

20 답 ③

주어진 등식의 좌변을 a 에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해하면

$$\begin{aligned}
 a^2b+ab^2+b^2c-bc^2-c^2a-ca^2 \\
 &= (b-c)a^2+(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2 \\
 &= (b-c)a^2+(b+c)(b-c)a+bc(b-c) \\
 &= (b-c)\{a^2+(b+c)a+bc\} \\
 &= (b-c)(a+b)(a+c) \\
 \therefore (b-c)(a+b)(a+c) &= 0 \\
 \text{그런데 } a+b > 0, a+c > 0 \text{이므로} \\
 b-c &= 0 \quad \therefore b=c \\
 &\text{따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 } b=c \text{인 이등변삼각형이다.}
 \end{aligned}$$

03 / 복소수

14~19쪽

중단원 기출문제 1회

1 답 ⑤

⑤ $\sqrt{2}-i$ 의 실수부분은 $\sqrt{2}$, 허수부분은 -1 이다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

2 답 ③

$$\begin{aligned}
 ① \quad a+\beta &= (1+2i)+(3-i)=4+i \quad \therefore a=4 \\
 ② \quad \beta-\alpha &= (3-i)-(1+2i)=2-3i \quad \therefore a=2 \\
 ③ \quad \frac{\beta}{\alpha} &= \frac{3-i}{1+2i} = \frac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-7i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i \\
 \therefore a &= \frac{1}{5} \\
 ④ \quad (a-1)(\beta-1) &= 2i(2-i)=2+4i \quad \therefore a=2 \\
 ⑤ \quad \beta^2 &= (3-i)^2=8-6i \quad \therefore a=8 \\
 &\text{따라서 } a \text{의 값이 가장 작은 것은 ③이다.}
 \end{aligned}$$

3 답 -16

$$\begin{aligned}
 z &= i(a-4i)^2 + a(6i-1) \\
 &= i(a^2-8ai-16) + (6ai-a) \\
 &= 7a + (a^2+6a-16)i \\
 &\text{이때 } z \text{가 실수가 되려면 } z \text{의 허수부분은 } 0 \text{이어야 하므로} \\
 a^2+6a-16 &= 0, (a+8)(a-2)=0 \\
 \therefore a &= -8 \text{ 또는 } a=2 \\
 &\text{따라서 모든 실수 } a \text{의 값의 곱은 } -8 \times 2 = -16
 \end{aligned}$$

4 답 ⑤

$$\begin{aligned}
 z &= x(1-2i) + 3(i-4) = (x-12) + (-2x+3)i \\
 z^2 \text{이 음의 실수가 되려면 } z \text{의 실수부분은 } 0 \text{이고 허수부분은 } 0 \text{이 아니어야 하므로} \\
 x-12 &= 0, -2x+3 \neq 0 \quad \therefore x=12
 \end{aligned}$$

5 답 4

$$\begin{aligned}
 z &= a(2+i)^2 + b(3+i) - (9+10i) \\
 &= a(3+4i) + b(3+i) - (9+10i) \\
 &= (3a+3b-9) + (4a+b-10)i \\
 z^2 \text{이 실수가 되려면 } z \text{의 실수부분이 } 0 \text{이거나 허수부분이 } 0 \text{이어야 하므로} \\
 3a+3b-9 &= 0 \text{ 또는 } 4a+b-10=0 \\
 3a+3b-9 &= 0 \text{에서 } a+b=3 \\
 \text{이를 만족시키는 순서쌍 } (a, b) &\text{는 } (1, 2), (2, 1) \text{의 2가지} \\
 4a+b-10 &= 0 \text{에서 } 4a+b=10 \\
 \text{이를 만족시키는 순서쌍 } (a, b) &\text{는 } (1, 6), (2, 2) \text{의 2가지} \\
 \text{따라서 순서쌍 } (a, b) \text{의 개수는 } 2+2 &= 4
 \end{aligned}$$

6 답 ⑤

$$\begin{aligned}
 (3+i)(5+ai) &= b-i \text{에서} \\
 (15-a) + (3a+5)i &= b-i
 \end{aligned}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$15-a=b, 3a+5=-1$$

$$\therefore a=-2, b=17$$

$$\therefore b-a=19$$

7 답 ⑤

$$(1+i)+(1+i)^2-xi=xy+yi \text{에서}$$

$$1+i+2i-xi=xy+yi$$

$$1+(3-x)i=xy+yi$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$1=xy, 3-x=y$$

따라서 $x+y=3, xy=1$ 이므로

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

$$=3^3-3 \times 1 \times 3=18$$

8 답 ③

$$\frac{5(a+i)}{1+3i} = \frac{5(a+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{(a+3)+(1-3a)i}{2},$$

$$\frac{bi}{1+i} = \frac{bi(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{b+bi}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{a+b+3}{2} + \frac{1-3a+b}{2}i = 1-2i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{a+b+3}{2}=1, \frac{1-3a+b}{2}=-2$$

$$\therefore a+b=-1, 3a-b=5$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=-2$

$$\therefore a-b=3$$

9 답 -90

$$z = \frac{2+\sqrt{5}i}{2-\sqrt{5}i} = \frac{(2+\sqrt{5}i)^2}{(2-\sqrt{5}i)(2+\sqrt{5}i)} = \frac{-1+4\sqrt{5}i}{9}$$

$$z = \frac{-1+4\sqrt{5}i}{9} \text{에서 } 9z+1=4\sqrt{5}i$$

양변을 제곱하면

$$81z^2+18z+1=-80, 81z^2+18z=-81$$

$$\therefore 81z^2+18z-9=-81-9=-90$$

10 답 3

$$\bar{z}=1-i \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z} + \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}} &= \frac{2+i}{1+i} + \frac{2-i}{1-i} \\ &= \frac{(2+i)(1-i)+(2-i)(1+i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{(3-i)+(3+i)}{2} = 3 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$z+\bar{z}=(1+i)+(1-i)=2$$

$$z\bar{z}=(1+i)(1-i)=2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{z+1}{z} + \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}} &= \frac{z\bar{z}+\bar{z}+z\bar{z}+z}{z\bar{z}} = \frac{(z+\bar{z})+2z\bar{z}}{z\bar{z}} \\ &= \frac{2+2 \times 2}{2} = 3 \end{aligned}$$

11 답 ④

$$x = \frac{7}{2-\sqrt{3}i} = \frac{7(2+\sqrt{3}i)}{(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)} = 2+\sqrt{3}i,$$

$$y = \frac{7}{2+\sqrt{3}i} = \frac{7(2-\sqrt{3}i)}{(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)} = 2-\sqrt{3}i \text{이므로}$$

$$x-y=2\sqrt{3}i, xy=7$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2} &= \frac{x^3-y^3}{x^2y^2} \\ &= \frac{(x-y)^3+3xy(x-y)}{(xy)^2} \\ &= \frac{(2\sqrt{3}i)^3+3 \times 7 \times 2\sqrt{3}i}{7^2} = \frac{18\sqrt{3}i}{49} \end{aligned}$$

12 답 3

$z=-\bar{z}$ 를 만족시키는 복소수 z 는 순허수 또는 0이다.

따라서 $z=-\bar{z}$ 를 만족시키는 복소수 z 가 될 수 있는 것은 $2i, 0, -8i$ 의 3개이다.

13 답 ⑤

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$$\neg. z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi \text{이므로}$$

$z-\bar{z}$ 는 순허수 또는 0이다.

$$\neg. z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=0 \text{에서 } a=0$$

따라서 $z=bi$ 이므로 $z^2=-b^2 \leq 0$

$$\begin{aligned} \neg. \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} &= \frac{1}{a+bi} + \frac{1}{a-bi} \\ &= \frac{a-bi+a+bi}{(a+bi)(a-bi)} \\ &= \frac{2a}{a^2+b^2} \text{ (실수)} \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

14 답 $6+8i$

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$$(2i-3)z+5i\bar{z}=6+18i \text{에서}$$

$$(2i-3)(a+bi)+5i(a-bi)=6+18i$$

$$(-3a+3b)+(7a-3b)i=6+18i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$-3a+3b=6, 7a-3b=18$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=6, b=8$

$$\therefore z=6+8i$$

15 답 16

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} + \frac{3}{i^2} + \frac{5}{i^3} + \cdots + \frac{15}{i^8} \\ &= \left(\frac{1}{i} + \frac{3}{i^2} + \frac{5}{i^3} + \frac{7}{i^4} \right) + \left(\frac{9}{i^5} + \frac{11}{i^6} + \frac{13}{i^7} + \frac{15}{i^8} \right) \\ &= (-i-3+5i+7) + (-9i-11+13i+15) \\ &= (4+4i) + (4+4i) \\ &= 8+8i \end{aligned}$$

따라서 $a=8, b=8$ 이므로

$$\frac{ab}{4} = \frac{8 \times 8}{4} = 16$$

16 답 6

$$i^3+i^6+i^9+i^{12}=i^3+i^{4 \times 1+2}+i^{4 \times 2+1}+i^{4 \times 3}=-i+i^2+i+1$$

$$=-i-1+i+1=0$$

이므로

$$z=i^3+i^6+i^9+\dots+i^{30}$$

$$=(i^3+i^6+i^9+i^{12})+i^{12}(i^3+i^6+i^9+i^{12})+i^{27}+i^{30}$$

$$=i^{27}+i^{30}=i^{4 \times 6+3}+i^{4 \times 7+2}$$

$$=i^3+i^2=-1-i$$

$$z=-1-i \text{에서 } z+1=-i$$

양변을 제곱하면 $z^2+2z+1=-1, z^2+2z+2=0$

$$\therefore z^4+2z^3-z^2-6z=z^2(z^2+2z+2)-3(z^2+2z+2)+6$$

$$=6$$

17 답 ②

$$(1+i)^2=2i, (1-i)^2=-2i \text{이므로}$$

$$(1+i)^{120}-(1-i)^{120}=\{(1+i)^2\}^{60}-\{(1-i)^2\}^{60}$$

$$=(2i)^{60}-(-2i)^{60}$$

$$=2^{60}i^{60}-2^{60}i^{60}=0$$

18 답 ⑤

$$z=\frac{2}{1+\sqrt{3}i}=\frac{2(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2} \text{이므로}$$

$$z^2=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{4}=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$z^3=z^2z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \times \frac{1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$z^6=(z^3)^2=(-1)^2=1$$

따라서 $z^n=-1$ 을 만족시키려면 음이 아닌 정수 k 에 대하여

$n=6k+3$ 이어야 하므로 100 이하의 자연수 n 은 3, 9, 15, ..., 99의 17개이다.

19 답 ①

ㄱ. $x>0$ 이므로

$$\sqrt{x^2}+\sqrt{-x}\sqrt{-x}=\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2}=0$$

ㄴ. $y-x>0$ 이므로

$$\sqrt{(y-x)^2}=|y-x|=y-x$$

ㄷ. $x>0, -y<0$ 이므로

$$\sqrt{x}\sqrt{-y}=\sqrt{-xy}=\sqrt{xy}i$$

ㄹ. $x-y<0, y-x>0$ 이므로

$$\frac{\sqrt{y-x}}{\sqrt{x-y}}=-\sqrt{\frac{y-x}{x-y}}=-\sqrt{-1}=-i$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

20 답 ③

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=-\sqrt{\frac{y}{x}} \text{이므로 } x<0, y>0$$

즉, $x-y<0$ 이므로

$$\sqrt{(x-y)^2}=|x-y|=-x+y$$

$$\text{또 } \sqrt{x}\sqrt{x}=-\sqrt{x^2}=-|x|=x \text{이므로}$$

$$\sqrt{(x-y)^2}+\sqrt{x}\sqrt{x}-|y|=-x+y+x-y=0$$

중단원 기출문제 2회

1 답 ⑤

$$a=3+2i=3-2i, b=3 \text{이므로}$$

$$a(b+3i)=(3-2i)(3+3i)=15+3i$$

2 답 $\frac{7}{5}$

$$\frac{x-yi}{x+yi}=\frac{(x-yi)^2}{(x+yi)(x-yi)}=\frac{x^2-y^2-2xyi}{x^2+y^2}$$

이때 $x+y=1, xy=-2$ 이므로

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1^2-2 \times (-2)=5$$

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=1^2-4 \times (-2)=9 \text{이므로}$$

$$x-y=3 (\because x>y)$$

$$\therefore a=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{(x+y)(x-y)}{x^2+y^2}=\frac{3}{5}, b=-\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore a+b=\frac{7}{5}$$

3 답 ⑤

$$\textcircled{5} \frac{1}{1+i}-\frac{1}{1-i}=\frac{1-i-(1+i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$=\frac{-2i}{2}=-i$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

4 답 ①

$$(z+2)(z-2i)=(3-ai)\{1-(a+2)i\}$$

$$=(-a^2-2a+3)+(-4a-6)i$$

이 복소수가 순허수가 되려면 실수부분이 0이고 허수부분이 0이어야 하므로

$$-a^2-2a+3=0, -4a-6 \neq 0$$

$$a^2+2a-3=0 \text{에서 } (a+3)(a-1)=0$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$-4a-6 \neq 0 \text{에서 } a \neq -\frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } a=-3 \text{ 또는 } a=1$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은 $-3 \times 1 = -3$

5 답 ⑤

$$z=i(x+i)^2-(6+8i)$$

$$=i(x^2+2xi-1)-(6+8i)$$

$$=(-2x-6)+(x^2-9)i$$

z^2 이 양의 실수가 되려면 z 의 실수부분이 0이 아니고 허수부분은 0이어야 하므로

$$-2x-6 \neq 0, x^2-9=0$$

$$-2x-6 \neq 0 \text{에서 } x \neq -3 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$$x^2-9=0 \text{에서 } x=-3 \text{ 또는 } x=3 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$$\textcircled{9}, \textcircled{10} \text{에서 } x=3$$

6 답 1

$(1-ai)^4$ 이 실수가 되려면 $(1-ai)^2 = (1-a^2) - 2ai$ 가 실수 또는 순허수이어야 한다.

(i) $(1-a^2) - 2ai$ 가 실수일 때,

$$-2a=0 \quad \therefore a=0$$

(ii) $(1-a^2) - 2ai$ 가 순허수일 때,

$$1-a^2=0, -2a \neq 0$$

$$1-a^2=0 \text{에서 } a=-1 \text{ 또는 } a=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$-2a \neq 0 \text{에서 } a \neq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a=-1 \text{ 또는 } a=1$$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 양수 a 의 값은 1이다.

7 답 -3

$$x(5+i) - y(4+3i) = 3+5i \text{에서}$$

$$(5x-4y) + (x-3y)i = 3+5i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$5x-4y=3, x-3y=5$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } x=-1, y=-2$$

$$\therefore x+y=-3$$

8 답 -6

$$2x-y+4i = (2+y)i - 5 \text{에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여}$$

$$2x-y=-5, 4=2+y$$

$$\therefore x = -\frac{3}{2}, y=2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{13}{2x-yi} + \frac{13}{2x+yi} &= \frac{13}{-3-2i} + \frac{13}{-3+2i} \\ &= \frac{13(-3+2i) + 13(-3-2i)}{(-3-2i)(-3+2i)} \\ &= -3+2i-3-2i = -6 \end{aligned}$$

9 답 ①

$$x=2+\sqrt{6}i \text{에서 } x-2=\sqrt{6}i$$

양변을 제곱하면

$$x^2-4x+4=-6, x^2-4x=-10$$

$$\therefore x^2-4x+5=-10+5=-5$$

10 답 ④

$$z = \frac{5i}{2+i} = \frac{5i(2-i)}{(2+i)(2-i)} = 1+2i \text{이므로}$$

$$\bar{z} = 1-2i$$

$$\therefore z\bar{z} + z - \bar{z} = (1+2i)(1-2i) + (1+2i) - (1-2i) = 5+4i$$

11 답 ①

$$x = \frac{10}{3+i} = \frac{10(3-i)}{(3+i)(3-i)} = 3-i,$$

$$y = \frac{10}{3-i} = \frac{10(3+i)}{(3-i)(3+i)} = 3+i \text{이므로}$$

$$x-y = -2i, xy = 10$$

$$\begin{aligned} \therefore x^2+x^3+y^2-y^3 &= (x^2+y^2) + (x^3-y^3) \\ &= (x-y)^2 + 2xy + (x-y)^3 + 3xy(x-y) \\ &= (-2i)^2 + 2 \times 10 + (-2i)^3 + 3 \times 10 \times (-2i) \\ &= -4 + 20 + 8i - 60i \\ &= 16 - 52i \end{aligned}$$

12 답 ④

$z_1 = a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면

$$z_2 = -\bar{z}_1 = -(a-bi) = -a+bi$$

$$\neg. z_1 + \bar{z}_2 = a+bi + (-a-bi) = 0 \text{ (실수)}$$

$$\neg. z_1 - z_2 = a+bi - (-a+bi) = 2a \text{ (실수)}$$

$$\begin{aligned} \neg. z_1 z_2 &= \bar{z}_1 \times \bar{z}_2 = (a-bi)(-a-bi) \\ &= -a^2 - b^2 \text{ (실수)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a+bi}{-a+bi} = \frac{(a+bi)(-a-bi)}{(-a+bi)(-a-bi)} \\ &= \frac{-a^2+b^2-2abi}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

따라서 보기에서 항상 실수인 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

다른 풀이

$$\bar{z}_1 = -z_2 \text{이므로 } z_1 = -\bar{z}_2$$

이때 $z_2 = a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 z_2 는 실수가 아닌 복소수이므로 $b \neq 0$

$$z_2 + \bar{z}_2 = (a+bi) + (a-bi) = 2a$$

$$z_2 \bar{z}_2 = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$$

즉, $z_2 + \bar{z}_2, z_2 \bar{z}_2$ 는 실수이다.

$$\neg. z_1 + \bar{z}_2 = -\bar{z}_2 + \bar{z}_2 = 0 \text{이므로 실수이다.}$$

$$\neg. z_1 - z_2 = (-\bar{z}_2) - z_2 = -(z_2 + \bar{z}_2) \text{이고, } z_2 + \bar{z}_2 \text{가 실수이므로 } z_1 - z_2 \text{는 실수이다.}$$

$$\neg. z_1 z_2 = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2 = -z_2 \bar{z}_2 \text{이고, } z_2 \bar{z}_2 \text{가 실수이므로 } z_1 z_2 \text{는 실수이다.}$$

$$\neg. \frac{z_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{-(\bar{z}_2)^2}{z_2 \bar{z}_2} = -\frac{a^2 - 2abi - b^2}{a^2 + b^2}$$

이므로 항상 실수인 것은 아니다.

따라서 보기에서 항상 실수인 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

13 답 ④

$z = a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 z 는 실수가 아닌 복소수이므로 $b \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{z}{2} + \frac{2}{z} &= \frac{z^2+4}{2z} = \frac{(a+bi)^2+4}{2(a+bi)} \\ &= \frac{(a^2-b^2+4)+2abi}{2(a+bi)} \\ &= \frac{\{(a^2-b^2+4)+2abi\}(a-bi)}{2(a^2+b^2)} \\ &= \frac{a(a^2+b^2+4)}{2(a^2+b^2)} + \frac{b(a^2+b^2-4)}{2(a^2+b^2)}i \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

①이 실수이려면 허수부분이 0이어야 하므로

$$\frac{b(a^2+b^2-4)}{2(a^2+b^2)} = 0$$

$$b(a^2+b^2-4)=0 \quad \therefore a^2+b^2=4 \quad (\because b \neq 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore z\bar{z} &= (a+bi)(a-bi) \\ &= a^2+b^2=4 \end{aligned}$$

다른 풀이

$\frac{z}{2} + \frac{2}{z}$ 가 실수이면 복소수와 켤레복소수가 같으므로

$$\frac{z}{2} + \frac{2}{z} = \overline{\frac{z}{2} + \frac{2}{z}}, \quad \frac{z}{2} + \frac{2}{z} = \frac{\bar{z}}{2} + \frac{2}{\bar{z}}$$

$$\frac{z}{2} - \frac{\bar{z}}{2} = \frac{2}{z} - \frac{2}{\bar{z}}, \quad \frac{z-\bar{z}}{2} = \frac{2(z-\bar{z})}{z\bar{z}}$$

이때 z 는 허수이므로 $z-\bar{z} \neq 0$

$$\therefore z\bar{z}=4$$

14 답 ②

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$$2(z-1)-(2+i)\bar{z}+2=-1+i$$

$$2(a+bi-1)-(2+i)(a-bi)+2=-1+i$$

$$-b+(-a+4b)i=-1+i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$-b=-1, -a+4b=1$$

$$\therefore a=3, b=1$$

따라서 $z=3+i$ 이므로

$$\begin{aligned} z+\bar{z}-z\bar{z} &= (3+i)+(3-i)-(3+i)(3-i) \\ &= 6-10=-4 \end{aligned}$$

15 답 -4+2i

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

(가)에서 $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ 이고 $z+\bar{z}<-6$ 이므로

$$2a<-6 \quad \therefore a<-3 \quad \dots\dots \textcircled{가}$$

$$(나)에서 z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi \text{이므로 } \frac{2bi}{4i}=1$$

$$2bi=4i \quad \therefore b=2 \quad \dots\dots \textcircled{나}$$

$$(다)에서 \frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}=\frac{z+\bar{z}}{z\bar{z}}=\frac{2a}{a^2+b^2} \text{이고 } \frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}=-\frac{2}{5} \text{이므로}$$

$$\frac{2a}{a^2+b^2}=-\frac{2}{5}, \quad a^2+4=-5a \quad (\because \textcircled{나})$$

$$a^2+5a+4=0, \quad (a+4)(a+1)=0$$

$$\therefore a=-4 \quad (\because \textcircled{가})$$

$$\therefore z=-4+2i$$

16 답 ③

$$i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0 \text{이므로}$$

$$i+i^2+i^3+i^4+\dots+i^{102}$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{(i+i^2+i^3+i^4)}_0 + i^4 \underbrace{(i+i^2+i^3+i^4)}_0 \\ &\quad + \dots + i^{96} \underbrace{(i+i^2+i^3+i^4)}_0 + i^{101} + i^{102} \end{aligned}$$

$$=i^{101}+i^{102}$$

$$=i^{4 \times 25 + 1} + i^{4 \times 25 + 2}$$

$$=i+i^2=-1+i$$

따라서 $a=-1, b=1$ 이므로

$$a+b=0$$

17 답 12

$$f(1)=i+(-i)=0$$

$$f(2)=i^2+(-i)^2=-1-1=-2$$

$$f(3)=i^3+(-i)^3=-i+i=0$$

$$f(4)=i^4+(-i)^4=1+1=2$$

$$f(5)=i^5+(-i)^5=i-i=0$$

$$f(6)=i^6+(-i)^6=-1-1=-2$$

⋮

따라서 $f(n)=2$ 를 만족시키려면 자연수 k 에 대하여 $n=4k$ 이어야 하므로 50 이하의 자연수 n 은 4, 8, 12, 16, ..., 48의 12개이다.

18 답 ⑤

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \text{이므로 } z_n = i^n$$

$$\textcircled{1} z_1 = i$$

$$\textcircled{2} z_2 + z_4 = i^2 + i^4 = -1 + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} z_{10} + z_{11} + z_{12} + z_{13} &= i^{10} + i^{11} + i^{12} + i^{13} \\ &= i^{4 \times 2 + 2} + i^{4 \times 2 + 3} + i^{4 \times 3} + i^{4 \times 3 + 1} \\ &= i^2 + i^3 + 1 + i \\ &= (-1) + (-i) + 1 + i \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} z_{40} \times z_{50} = i^{40} \times i^{50} = i^{4 \times 10} \times i^{4 \times 12 + 2} = 1 \times i^2 = -1$$

$$\textcircled{5} \frac{z_{18}}{z_{36}} = \frac{i^{18}}{i^{36}} = \frac{1}{i^{18}} = \frac{1}{i^{4 \times 4 + 2}} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

19 답 $-\frac{51}{2}$

$$\begin{aligned} &\sqrt{-6}\sqrt{-6}\sqrt{8}\sqrt{-8} + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}} + \frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-16}} \\ &= \sqrt{6}i \times \sqrt{6}i \times \sqrt{8} \times \sqrt{8}i + \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}i} + \frac{\sqrt{4}i}{\sqrt{16}i} \end{aligned}$$

$$= -48i + (-3i) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - 51i$$

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{2}, b = -51 \text{이므로 } ab = -\frac{51}{2}$$

20 답 ④

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{이므로 } a < 0, b < 0$$

$$\neg. a+b < 0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{(a+b)^2} = |a+b| = -(a+b)$$

$$\neg. a < 0, b < 0 \text{이므로}$$

$$|a| = -a, |b| = -b$$

$$\therefore |a| - |b| = -a - (-b) = -a + b$$

$$\neg. a < 0, b < 0 \text{이므로 } \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$\neg. -a > 0, -b > 0 \text{이므로}$$

$$\sqrt{-a}\sqrt{-b} = \sqrt{(-a) \times (-b)} = \sqrt{ab}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

중단원 기출문제 ①

1 답 ②

$x^2+3x+5=0$ 에서

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2}$$

따라서 $a = -3$, $b = 11$ 이므로

$$a+b=8$$

2 답 ②

$(a+1)x^2 + (3a^2+a)x - 2(a-1) = 0$ 이 x 에 대한 이차방정식이므로 $a+1 \neq 0 \quad \therefore a \neq -1$

이차방정식 $(a+1)x^2 + (3a^2+a)x - 2(a-1) = 0$ 의 한 근이 -2 이므로 $x = -2$ 를 대입하면

$$4(a+1) - 2(3a^2+a) - 2(a-1) = 0$$

$$-6a^2 + 6 = 0, a^2 - 1 = 0$$

$$(a+1)(a-1) = 0 \quad \therefore a = 1 (\because a \neq -1)$$

이를 주어진 이차방정식에 대입하면

$$2x^2 + 4x = 0, 2x(x+2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = -2$$

따라서 다른 한 근은 0이다.

3 답 ④

(i) $x < 1$ 일 때,

$$|x-1| = -(x-1) \text{이므로}$$

$$x^2 - 2x - 3 = -3(x-1), x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $x = -3$

(ii) $x \geq 1$ 일 때,

$$|x-1| = x-1 \text{이므로}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 3(x-1), x^2 - 5x = 0$$

$$x(x-5) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 5$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 5$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -3 \text{ 또는 } x = 5$$

따라서 방정식의 모든 근의 합은

$$-3 + 5 = 2$$

4 답 13

상자의 밑면은 한 변의 길이가 $(x-6)$ cm인 정사각형 모양이므로 상자의 부피는

$$3(x-6)^2 = 147, (x-6)^2 = 49$$

$$x^2 - 12x - 13 = 0, (x+1)(x-13) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 13$$

그런데 $x > 6$ 이므로 $x = 13$

5 답 ①

ㄱ. 이차방정식 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-1)^2 - 1 \times (-3) = 4 > 0$$

즉, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. 이차방정식 $4x^2 - 4x + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - 4 \times 1 = 0$$

즉, 중근을 갖는다.

ㄷ. 이차방정식 $2x^2 + 3x + 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 3^2 - 4 \times 2 \times 5 = -31 < 0$$

즉, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄹ. 이차방정식 $-x^2 - x - 9 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times (-9) = -35 < 0$$

즉, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

따라서 보기에서 실근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄴ이다.

6 답 ⑤

$$x^2 - 2kx + k^2 = -4x + 5 \text{에서}$$

$$x^2 - 2(k-2)x + k^2 - 5 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{-(k-2)\}^2 - (k^2 - 5) < 0$$

$$-4k + 9 < 0 \quad \therefore k > \frac{9}{4}$$

7 답 ②

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{이므로 } a < 0, b < 0$$

각 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

① $D = a^2 - 4b > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $D = a^2 + 4b$ 에서 D 의 부호를 정할 수 없으므로 근을 판별할 수 없다.

③ $D = b^2 - 4a > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

④ $ab > 0$ 이므로 $D = 1 + 4ab > 0$

즉, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

⑤ $D = b^2 + 4a^2 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 항상 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식이 아닌 것은 ②이다.

8 답 ⑤

이차방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + c^2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - (b^2 + c^2) = 0$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

9 답 $\frac{5}{4}$

$x^2 + (2k+1)x + k^2 + 2k - 1$ 이 완전제곱식이면 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (2k+1)x + k^2 + 2k - 1 = 0$ 이 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$D=(2k+1)^2-4(k^2+2k-1)=0$$

$$-4k+5=0 \quad \therefore k=\frac{5}{4}$$

10 답 20

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4, \alpha\beta=2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} &= \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} \\ &= \frac{4^3 - 3 \times 2 \times 4}{2} = 20 \end{aligned}$$

11 답 ③

이차방정식 $x^2+6x+2=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha^2+6\alpha+2=0, \beta^2+6\beta+2=0$$

$$\therefore \alpha^2+6\alpha=-2, \beta^2+6\beta=-2\beta$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-6$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^3+6\alpha^2+\beta^2+4\beta+2 &= \alpha(\alpha^2+6\alpha)+\beta^2+4\beta+2 \\ &= -2\alpha-2\beta=-2(\alpha+\beta) \\ &= -2 \times (-6) = 12 \end{aligned}$$

12 답 17

$x^2-5x+a=0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=5, \alpha\beta=a \quad \dots\dots ㉠$$

$x^2+bx+30=0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-b, (\alpha+\beta) \times \alpha\beta=30 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $5+a=-b$

$$5a=30 \quad \therefore a=6, b=-11$$

$$\therefore a-b=17$$

13 답 -4

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-(k+2), \alpha\beta=6$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2\beta+\alpha+\beta+\alpha\beta^2 &= \alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta) \\ &= (\alpha+\beta)(\alpha\beta+1) \\ &= -(k+2) \times (6+1) \\ &= -7(k+2) \end{aligned}$$

이때 $\alpha^2\beta+\alpha+\beta+\alpha\beta^2=14$ 이므로

$$-7(k+2)=14, k+2=-2$$

$$\therefore k=-4$$

14 답 ④

주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, \alpha+2$ (α 는 양의 홀수)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(\alpha+2)=-4(k-2)$$

$$\therefore \alpha=3-2k \quad \dots\dots ㉠$$

$$\alpha(\alpha+2)=k^2-16k+42 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$(3-2k)(5-2k)=k^2-16k+42$$

$$3k^2-27=0$$

$$k^2-9=0, (k+3)(k-3)=0$$

$$\therefore k=-3 \text{ 또는 } k=3$$

이때 $\alpha>0$ 이어야 하므로 ㉠에서 $k=-3, \alpha=9$

따라서 두 근의 합은

$$\alpha+(\alpha+2)=2\alpha+2=20$$

15 답 ②

주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, 3\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+3\alpha=-4k \quad \therefore \alpha=-k \quad \dots\dots ㉠$$

$$\alpha \times 3\alpha=-2k+1 \quad \therefore 3\alpha^2+2k-1=0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$3k^2+2k-1=0, (k+1)(3k-1)=0$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } k=\frac{1}{3}$$

그런데 k 는 정수이므로 $k=-1$

16 답 ①

$x^2-8x+1=0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=8, \alpha\beta=1$$

구하는 이차방정식의 두 근이 $\frac{\alpha+1}{\beta}, \frac{\beta+1}{\alpha}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{\alpha+1}{\beta} + \frac{\beta+1}{\alpha} &= \frac{\alpha^2+\alpha+\beta^2+\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} \\ &= \frac{8^2-2 \times 1+8}{1} = 70 \\ \frac{\alpha+1}{\beta} \times \frac{\beta+1}{\alpha} &= \frac{\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1}{\alpha\beta} \\ &= \frac{1+8+1}{1} = 10 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{\alpha+1}{\beta}, \frac{\beta+1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-70x+10=0$ 이므로

$$a=-70, b=10$$

$$\therefore \frac{a}{b}=-7$$

17 답 5

$f(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha+\beta=4$

$f(\alpha)=0, f(\beta)=0$ 이므로 $f(2x-3)=0$ 이려면

$$2x-3=\alpha \text{ 또는 } 2x-3=\beta$$

$$\therefore x=\frac{\alpha+3}{2} \text{ 또는 } x=\frac{\beta+3}{2}$$

따라서 이차방정식 $f(2x-3)=0$ 의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha+3}{2} + \frac{\beta+3}{2} = \frac{(\alpha+\beta)+6}{2} = \frac{4+6}{2} = 5$$

18 답 4

이차방정식 $4x^2 - 4x + 7 = 0$ 의 근이

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 7}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{6}i}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x + 7 &= 4\left(x - \frac{1+\sqrt{6}i}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{6}i}{2}\right) \\ &= (2x-1-\sqrt{6}i)(2x-1+\sqrt{6}i) \end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=-1-\sqrt{6}i$, $c=-1+\sqrt{6}i$ 또는 $a=2$,

$b=-1+\sqrt{6}i$, $c=-1-\sqrt{6}i$ 이므로

$$a-b-c=4$$

다른 풀이

$$4x^2 - 4x + 7 = (ax+b)(ax+c) \text{이므로}$$

$$4x^2 - 4x + 7 = a^2x^2 + a(b+c)x + bc$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a^2=4, a(b+c)=-4, bc=7$$

$$a^2=4 \text{에서 } a=2 \text{ (}\because a>0\text{)}$$

이를 $a(b+c)=-4$ 에 대입하여 정리하면

$$b+c=-2$$

$$\therefore a-b-c=2-(-2)=4$$

19 답 ④

$$\frac{2-\sqrt{3}i}{2+\sqrt{3}i} = \frac{(2-\sqrt{3}i)^2}{(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)} = \frac{1-4\sqrt{3}i}{7}$$

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $\frac{1-4\sqrt{3}i}{7}$ 가 근이면 다른 한 근은 $\frac{1+4\sqrt{3}i}{7}$ 이다.

$$\text{두 근의 합은 } \frac{1-4\sqrt{3}i}{7} + \frac{1+4\sqrt{3}i}{7} = \frac{2}{7}$$

$$\text{두 근의 곱은 } \frac{1-4\sqrt{3}i}{7} \times \frac{1+4\sqrt{3}i}{7} = 1$$

$$7x^2 + ax + b = 0 \text{에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 } -\frac{a}{7}$$

이고 두 근의 곱은 $\frac{b}{7}$ 이다.

$$\text{따라서 } \frac{2}{7} = -\frac{a}{7}, 1 = \frac{b}{7} \text{이므로}$$

$$a=-2, b=7 \quad \therefore a+b=5$$

20 답 -6

실근은 b 를 바르게 보고 풀었고 계수가 실수이므로 $\frac{-3+\sqrt{15}i}{4}$ 가 근

이면 다른 한 근은 $\frac{-3-\sqrt{15}i}{4}$ 이다.

두 근의 곱은

$$\frac{-3+\sqrt{15}i}{4} \times \frac{-3-\sqrt{15}i}{4} = \frac{b}{2} \quad \therefore b=3$$

유정이는 a 를 바르게 보고 풀었고 계수가 실수이므로 $\frac{1-i}{2}$ 가 근이면

다른 한 근은 $\frac{1+i}{2}$ 이다.

두 근의 합은

$$\frac{1-i}{2} + \frac{1+i}{2} = -\frac{a}{2} \quad \therefore a=-2$$

$$\therefore ab=(-2) \times 3 = -6$$

중단원 기출문제 2회

1 답 ④

$$x^2+8=5x \text{에서 } x^2-5x+8=0$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 8}}{2 \times 1} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{7}i}{2} \end{aligned}$$

2 답 -3

이차방정식 $x^2+kx+6=0$ 의 한 근이 -2 이므로 $x=-2$ 를 대입하면

$$4-2k+6=0 \quad \therefore k=5$$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^2+5x+6=0, (x+3)(x+2)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=-2$$

따라서 다른 한 근은 -3 이다.

3 답 ③

$$x^2+\sqrt{(x+1)^2}=|3-x| \text{에서 } x^2+|x+1|=|3-x|$$

(i) $x < -1$ 일 때,

$$|x+1| = -(x+1), |3-x| = 3-x \text{이므로}$$

$$x^2-(x+1)=3-x, x^2-4=0$$

$$(x+2)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

$$\text{그런데 } x < -1 \text{이므로 } x=-2$$

(ii) $-1 \leq x \leq 3$ 일 때,

$$|x+1| = x+1, |3-x| = 3-x \text{이므로}$$

$$x^2+x+1=3-x, x^2+2x-2=0$$

$$\therefore x=-1 \pm \sqrt{3}$$

$$\text{그런데 } -1 \leq x \leq 3 \text{이므로 } x=-1+\sqrt{3}$$

(iii) $x > 3$ 일 때,

$$|x+1| = x+1, |3-x| = -(3-x) \text{이므로}$$

$$x^2+x+1=-(3-x), x^2+4=0$$

$$\text{그런데 } x = \pm 2i \text{이므로 실근을 갖지 않는다.}$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 실근은

$$x=-2 \text{ 또는 } x=-1+\sqrt{3}$$

따라서 방정식의 모든 실근의 합은

$$-2+(-1+\sqrt{3})=-3+\sqrt{3}$$

4 답 10

이차방정식 $3x^2+5x+a-7=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1 > 0$ 이어야 하므로

$$D_1=5^2-4 \times 3 \times (a-7) > 0$$

$$-12a+109 > 0 \quad \therefore a < \frac{109}{12} = 9 + \frac{1}{12}$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 9이므로 $M=9$

또 이차방정식 $x^2-x+b=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2 < 0$ 이어야 하므로

$$D_2=(-1)^2-4 \times 1 \times b < 0$$

$$-4b+1<0 \quad \therefore b>\frac{1}{4}$$

따라서 정수 b 의 최솟값은 1이므로 $m=1$

$$\therefore M+m=9+1=10$$

5 답 ①

x 에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+(k+b)^2-2b^2+5=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(k-a)^2-\{(k+b)^2-2b^2+5\}=0$$

$$\therefore (-2a-2b)k+a^2+b^2-5=0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$-2a-2b=0, \quad a^2+b^2-5=0$$

$$\therefore a+b=0, \quad a^2+b^2=5$$

$$\therefore ab=\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}\times(0^2-5)=-\frac{5}{2}$$

6 답 ⑤

이차방정식 $ax^2+2bx+c=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=b^2-ac$$

ㄱ. $ac>0$ 이면 $\frac{D}{4}=b^2-ac$ 의 부호를 정할 수 없으므로 이차방정식의 근을 판정할 수 없다.

ㄴ. $ac=b^2$ 에서 $\frac{D}{4}=b^2-ac=0$ 이므로 중근을 갖는다.

ㄷ. $a=3, b=4$ 일 때, 서로 다른 두 허근을 가지려면

$$\frac{D}{4}=4^2-3c<0$$

$$16-3c<0 \quad \therefore c>\frac{16}{3}=5+\frac{1}{3}$$

즉, 정수 c 의 최솟값은 6이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

7 답 ⑤

이차식 $3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)$ 가 완전제곱식이면 이차방정식 $3x^2-2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0$ 이 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(a+b+c)\}^2-3(ab+bc+ca)=0$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

$$\therefore a=b=c$$

따라서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

8 답 $-38\sqrt{7}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4, \quad \alpha\beta=-3$$

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4^2-4\times(-3)=28 \quad \therefore \alpha-\beta=\pm 2\sqrt{7}$$

$$\alpha-\beta=-2\sqrt{7} \quad (\because \alpha<\beta)$$

$$\therefore \alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$$

$$=(-2\sqrt{7})^3+3\times(-3)\times(-2\sqrt{7})=-38\sqrt{7}$$

9 답 ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2$$

이차방정식 $x^2-2x+4=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha^2-2\alpha+4=0, \quad \beta^2-2\beta+4=0$$

$$\therefore \alpha^2=2\alpha-4, \quad \beta^2=2\beta-4$$

$$\therefore \alpha^2+2\beta^2-2\beta=(2\alpha-4)+2(2\beta-4)-2\beta$$

$$=2(\alpha+\beta)-12$$

$$=2\times 2-12=-8$$

10 답 7

$x^2+ax+3=0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-a, \quad \alpha\beta=3$$

$x^2-10x+b=0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=10, \quad \frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=b$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=10 \quad \text{에서} \quad \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=10$$

$$\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=10$$

$$\frac{(-a)^2-2\times 3}{3}=10, \quad a^2=36$$

$$\therefore a=6 \quad (\because a>0)$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=b \quad \text{에서} \quad b=1 \quad \text{이므로}$$

$$a+b=7$$

11 답 ②

원래의 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$ (a, b 는 상수)이라 하자.

건우는 x^2 의 계수와 b 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$$-4\times 3=b \quad \therefore b=-12$$

지연이는 x^2 의 계수와 a 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$$(2-\sqrt{5})+(2+\sqrt{5})=-a \quad \therefore a=-4$$

따라서 원래의 이차방정식은 $x^2-4x-12=0$ 이므로

$$(x+2)(x-6)=0$$

$$\therefore x=-2 \quad \text{또는} \quad x=6$$

12 답 ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=m-1, \quad \alpha\beta=\frac{4m-11}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$\alpha+\beta<2$ 에서

$$m-1<2 \quad \therefore m<3 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$|\alpha-\beta|=2$ 의 양변을 제곱하면

$$(\alpha-\beta)^2=4$$

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4$$

㉠을 대입하면

$$(m-1)^2 - (4m-11) = 4$$

$$m^2 - 6m + 8 = 0, (m-2)(m-4) = 0$$

$$\therefore m=2 \text{ 또는 } m=4$$

그런데 ㉠에서 $m=2$

$$\begin{aligned} \therefore 4\alpha\beta &= 4 \times \frac{4m-11}{4} = 4m-11 \\ &= 4 \times 2 - 11 = -3 \end{aligned}$$

13 [답] 11

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = p, \alpha\beta = q$$

이때 네 실수 α, β, p, q 가 서로 다른 30의 약수이고 α, β 는 각각 2개의 약수를 가지므로 α, β 는 소수이다.

30의 약수 중 소수는 2, 3, 5이므로 α, β 가 될 수 있는 것은 2, 3, 5이다.

(i) α, β 가 2, 3일 때,

$$p = \alpha + \beta = 5, q = \alpha\beta = 6 \text{에서 } p, q \text{ 모두 30의 약수이므로 조건을 만족시킨다.}$$

(ii) α, β 가 2, 5일 때,

$$p = \alpha + \beta = 7, q = \alpha\beta = 10 \text{에서 } p \text{는 30의 약수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

(iii) α, β 가 3, 5일 때,

$$p = \alpha + \beta = 8, q = \alpha\beta = 15 \text{에서 } p \text{는 30의 약수가 아니므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

(i), (ii), (iii)에서 $p=5, q=6$

$$\therefore p+q=11$$

14 [답] ③

주어진 이차방정식의 두 근을 $4\alpha, -\alpha (\alpha > 0)$ 라 하면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$4\alpha - \alpha = \frac{2\alpha-3}{2} \quad \therefore \alpha = \frac{6\alpha+3}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

$$4\alpha \times (-\alpha) = \frac{\alpha-5}{2} \quad \therefore -8\alpha^2 = \alpha-5 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$-8\alpha^2 = \frac{6\alpha+3}{2} - 5$$

$$16\alpha^2 + 6\alpha - 7 = 0, (8\alpha+7)(2\alpha-1) = 0$$

$$\therefore \alpha = -\frac{7}{8} \text{ 또는 } \alpha = \frac{1}{2}$$

그런데 $\alpha > 0$ 이므로 $\alpha = \frac{1}{2}$

이를 ㉠에 대입하면 $a=3$

15 [답] 1

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(2-i) + (2+i) = -a, (2-i)(2+i) = b$$

$$\therefore a = -4, b = 5$$

$$\therefore a+b=1$$

16 [답] $x^2-8x+9=0$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}, \overline{BC}$ 를 그으면

$\angle ACB$ 는 지름에 대한 원주각이므로 삼각형 ABC는 $\angle ACB=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$\overline{AD}=a, \overline{BD}=b$ 라 하면 $\triangle ADC \sim \triangle CDB$ (AA 닮음)이므로

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$$

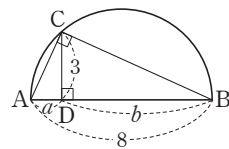
$$\text{즉, } a : 3 = 3 : b \text{이므로 } ab=9$$

따라서 $a+b=8, ab=9$ 이므로 구하는 이차방정식은

$$x^2-8x+9=0$$

[참고] $\triangle ADC$ 와 $\triangle CDB$ 에서

$\angle ADC = \angle CDB = 90^\circ, \angle ACD = \angle CBD = 90^\circ - \angle BCD$ 이므로 $\triangle ADC \sim \triangle CDB$ (AA 닮음)이다.



17 [답] ④

$f(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha+\beta=-3, \alpha\beta=3$

$f(\alpha)=0, f(\beta)=0$ 이므로 $f(2x-1)=0$ 이라면

$$2x-1=\alpha \text{ 또는 } 2x-1=\beta$$

$$\therefore x = \frac{\alpha+1}{2} \text{ 또는 } x = \frac{\beta+1}{2}$$

따라서 이차방정식 $f(2x-1)=0$ 의 두 근의 곱은

$$\begin{aligned} \frac{\alpha+1}{2} \times \frac{\beta+1}{2} &= \frac{\alpha\beta + (\alpha+\beta) + 1}{4} \\ &= \frac{3-3+1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

18 [답] ⑤

이차방정식 $x^2-4x+5=0$ 의 근이 $x=2\pm i$ 이므로

$$\begin{aligned} x^2-4x+5 &= \{x-(2+i)\}\{x-(2-i)\} \\ &= (x-2-i)(x-2+i) \end{aligned}$$

19 [답] ①

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $5-\sqrt{2}i$ 가 근이면 다른 한 근은 $5+\sqrt{2}i$ 이다.

$$\text{두 근의 합은 } (5-\sqrt{2}i) + (5+\sqrt{2}i) = a \quad \therefore a=10$$

$$\text{두 근의 곱은 } (5-\sqrt{2}i)(5+\sqrt{2}i) = -b \quad \therefore b=-27$$

$$\therefore a+b=-17$$

20 [답] 14

이차방정식 $x^2-6x+11=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=6, \alpha\beta=11$$

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 서로 다른 두 허근 α, β 는 서로 켤레복소수이다.

즉, $\bar{\alpha}=\beta, \bar{\beta}=\alpha$ 이므로

$$\begin{aligned} 11\left(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} + \frac{\bar{\beta}}{\beta}\right) &= 11\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right) = 11 \times \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} \\ &= 11 \times \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= 11 \times \frac{6^2 - 2 \times 11}{11} = 14 \end{aligned}$$

중단원 기출문제 ①

1 답 ①

이차함수 $y=x^2+ax+b$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 1, 2이므로 1, 2는 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1+2=-a, 1 \times 2=b$$

$$\therefore a=-3, b=2$$

$$\therefore a-b=-5$$

2 답 ②

꼭짓점의 좌표가 (2, -9)이므로 주어진 이차함수는

$$y=a(x-2)^2-9 \\ =ax^2-4ax+4a-9 \quad \dots\dots ①$$

이때 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=2$ 이고 $\overline{PQ}=6$ 이므로 두 점 P, Q의 x 좌표는 -1, 5이다.

즉, -1, 5는 이차방정식 $ax^2-4ax+4a-9=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$$-1 \times 5 = \frac{4a-9}{a}, 4a-9=-5a$$

$$\therefore a=1$$

이를 ①에 대입하면

$$y=x^2-4x-5$$

따라서 $b=-4, c=-5$ 이므로

$$a+b+c=1+(-4)+(-5)=-8$$

3 답 ③

① 이차방정식 $-x^2+x+5=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=1+20=21>0$$

이므로 이차함수의 그래프와 x 축의 교점은 2개이다.

② 이차방정식 $-\frac{1}{2}x^2-4x+6=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4+3=7>0$$

이므로 이차함수의 그래프와 x 축의 교점은 2개이다.

③ 이차방정식 $x^2+x+2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=1-8=-7<0$$

이므로 이차함수의 그래프와 x 축의 교점은 없다.

④ 이차방정식 $x^2+2x-3=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=1+3=4>0$$

이므로 이차함수의 그래프와 x 축의 교점은 2개이다.

⑤ 이차방정식 $2x^2-6x-4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=9+8=17>0$$

이므로 이차함수의 그래프와 x 축의 교점은 2개이다.

따라서 교점의 개수가 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

4 답 ⑤

이차방정식 $x^2+(a+1)(x-3)=0$, 즉

$x^2+(a+1)x-3(a+1)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=(a+1)^2-4\{-3(a+1)\}=0$$

$$a^2+14a+13=0, (a+13)(a+1)=0$$

$$\therefore a=-13 \text{ 또는 } a=-1$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$-13 \times (-1)=13$$

5 답 2

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1=b^2-4ac<0 \quad \dots\dots ①$$

이차방정식 $bx^2+2(a+c)x+b=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(a+c)^2-b^2=a^2+c^2+2ac-b^2$$

①에서 $-b^2>-4ac$ 이므로

$$\frac{D_2}{4}=a^2+c^2+2ac-b^2 \\ >a^2+c^2+2ac-4ac \\ =(a-c)^2$$

이때 $(a-c)^2 \geq 0$ 이므로 $\frac{D_2}{4} > 0$

따라서 구하는 교점의 개수는 2이다.

6 답 ③

이차함수 $y=x^2+ax-1$ 의 그래프와 직선 $y=2x+b$ 의 교점의 x 좌표가 -2, 4이므로 -2, 4는 이차방정식 $x^2+ax-1=2x+b$,

즉 $x^2+(a-2)x-b-1=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+4=-(a-2), -2 \times 4=-b-1$$

$$\therefore a=0, b=7$$

$$\therefore a+b=7$$

7 답 ④

이차함수 $f(x)$ 의 이차항의 계수가 -2이고, $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 -2, 1이므로

$$f(x)=-2(x+2)(x-1)=-2x^2-2x+4$$

이차함수 $g(x)$ 의 이차항의 계수가 1이고, $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 -1, 3이므로

$$g(x)=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$$

따라서 방정식 $f(x)=g(x)$ 에서

$$-2x^2-2x+4=x^2-2x-3$$

$$\therefore 3x^2-7=0$$

이 이차방정식의 두 실근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=0, \alpha\beta=-\frac{7}{3}$$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\frac{14}{3}$$

8 답 11

두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β ($\beta < 0 < \alpha$)라 하면

$$A(\alpha, \alpha^2), B(\beta, \beta^2)$$

α, β 는 이차방정식 $x^2 = x + 3k$, 즉 $x^2 - x - 3k = 0$ 의 두 근이므로
근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -3k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overline{OC} = \alpha, \overline{AC} = \alpha^2$ 이므로 삼각형 AOC의 넓이는

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \overline{OC} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times \alpha \times \alpha^2 = \frac{1}{2} \alpha^3$$

$\overline{OD} = |\beta| = -\beta, \overline{BD} = \beta^2$ 이므로 삼각형 BOD의 넓이는

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \overline{OD} \times \overline{BD} = \frac{1}{2} \times (-\beta) \times \beta^2 = -\frac{1}{2} \beta^3$$

$$S_1 - S_2 = 50 \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \alpha^3 + \frac{1}{2} \beta^3 = 50, \alpha^3 + \beta^3 = 100$$

$$(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 100$$

①을 대입하면

$$1^3 - 3 \times (-3k) \times 1 = 100$$

$$\therefore k = 11$$

9 답 3

$$(k-2)x^2 - 4x + k = -2kx + 1 \text{에서}$$

$$(k-2)x^2 + 2(k-2)x + k - 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - (k-2)(k-1) < 0$$

$$-k + 2 < 0 \quad \therefore k > 2$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 3이다.

10 답 4

점 $(-3, -15)$ 가 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 의 그래프 위의 점이므로

$$-15 = 9 - 3a + b$$

$$\therefore b = 3a - 24 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x^2 + ax + b = x - 12 \text{에서 } x^2 + (a-1)x + b + 12 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (a-1)^2 - 4(b+12) = 0$$

①을 대입하면

$$(a-1)^2 - 4(3a-12) = 0, a^2 - 14a + 49 = 0$$

$$(a-7)^2 = 0 \quad \therefore a = 7$$

이를 ①에 대입하면 $b = -3$

$$\therefore a + b = 4$$

11 답 ①

기울기가 2인 직선의 방정식을 $y = 2x + b$ (b 는 상수)라 하면

$$x^2 + 3x - 1 = 2x + b \text{에서 } x^2 + x - b - 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1 - 4(-b-1) = 0$$

$$4b + 5 = 0 \quad \therefore b = -\frac{5}{4}$$

따라서 직선의 방정식은 $y = 2x - \frac{5}{4}$ 이므로 y 절편은 $-\frac{5}{4}$ 이다.

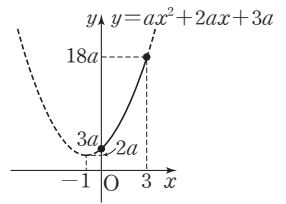
12 답 ①

$$y = ax^2 + 2ax + 3a = a(x+1)^2 + 2a$$

이때 $a > 0$ 이므로 $0 \leq x \leq 3$ 에서 주어진 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$x=0$ 에서 최솟값 $3a$ 를 가지므로

$$3a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$



13 답 ②

(타)에서 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은

$$x = \frac{-6+10}{2} = 2 \text{이다.}$$

(가), (나)에서 이차함수 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 -1 이므로 $x=2$ 일 때 최댓값 6을 갖는다.

$$\therefore f(x) = -(x-2)^2 + 6$$

따라서 $0 \leq x \leq 5$ 에서 $x=5$ 일 때 최솟값 -3 을 갖는다.

14 답 7

$$x^2 - 4x = t \text{로 놓으면 } t = (x-2)^2 - 4$$

$$x=2 \text{일 때 최솟값이 } -4 \text{이므로 } t \geq -4$$

이때 주어진 함수는

$$y = -(t+2)(t+6) + 2t + 10$$

$$= -t^2 - 6t - 2$$

$$= -(t+3)^2 + 7$$

따라서 $t \geq -4$ 에서 $t = -3$ 일 때 최댓값은 7이다.

15 답 ①

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3 = t \text{로 놓으면}$$

$$t = -\frac{1}{2}(x-2)^2 - 1$$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $x=0$ 일 때 최솟값은 -3 이고, $x=2$ 일 때 최댓값은 -1 이므로

$$-3 \leq t \leq -1$$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 + 2t - 1 = (t+1)^2 - 2$$

$-3 \leq t \leq -1$ 에서 $t = -1$ 일 때 최솟값은 -2 이고, $t = -3$ 일 때 최댓값은 2이다.

$$t = -1 \text{일 때, } x=2 \text{이므로 } a=2$$

$$t = -3 \text{일 때, } x=0 \text{이므로 } b=0$$

$$\therefore b - a = -2$$

16 답 5

$$2x + 4y - x^2 - 2y^2 + k = -(x-1)^2 - 2(y-1)^2 + k + 3$$

이때 x, y 가 실수이므로

$$-(x-1)^2 \leq 0, -2(y-1)^2 \leq 0$$

$$\therefore 2x + 4y - x^2 - 2y^2 + k \leq k + 3$$

따라서 $k+3=8$ 이므로 $k=5$

17 답 ③

$$\begin{aligned} 3x+y=3 \text{에서 } y=3-3x \text{이므로 이를 } x^2+y^2+8x \text{에 대입하면} \\ x^2+y^2+8x &= x^2+(3-3x)^2+8x \\ &= 10x^2-10x+9 \\ &= 10\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{2} \end{aligned}$$

따라서 $0 \leq x \leq 1$ 에서 $x=\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값은 $\frac{13}{2}$ 이고, $x=0$ 또는 $x=1$ 일 때 최댓값은 9이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 차는 $9-\frac{13}{2}=\frac{5}{2}$

18 답 ①

$$\begin{aligned} A(0, 3) \text{이고 이차방정식 } x^2-4x+3=0 \text{에서} \\ (x-1)(x-3)=0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=3 \\ \therefore B(1, 0), C(3, 0) \\ \text{점 P가 점 A에서 점 C까지 움직이므로 } 0 \leq a \leq 3 \\ \text{이때 점 P(a, b)가 이차함수 } y=x^2-4x+3 \text{ 위의 점이므로} \\ b=a^2-4a+3 \\ \therefore 2a-b=2a-(a^2-4a+3) \\ = -a^2+6a-3 \\ = -(a-3)^2+6 \end{aligned}$$

따라서 $0 \leq a \leq 3$ 에서 $a=0$ 일 때 최솟값은 -3 이고, $a=3$ 일 때 최댓값은 6이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $6+(-3)=3$

19 답 ④

$$\begin{aligned} \text{작년 이 상품의 판매 가격을 } a \text{원, 판매량을 } b \text{개라 하면 올해 이 상품} \\ \text{의 판매 가격은 } a\left(1-\frac{x}{100}\right) \text{원, 판매량은 } b\left(1+\frac{x}{50}\right) \text{개이다.} \\ \text{이때 올해 이 상품의 총판매 금액을 } y \text{원이라 하면} \\ y &= ab\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{50}\right) \\ &= -\frac{ab}{5000}(x^2-50x-5000) \\ &= -\frac{ab}{5000}\{(x-25)^2-5625\} \quad (\text{단, } 10 \leq x \leq 30) \\ \text{따라서 } 10 \leq x \leq 30 \text{에서 } x=25 \text{일 때 총판매 금액이 최대가 된다.} \end{aligned}$$

20 답 12

$$\begin{aligned} \triangle ABC \sim \triangle DFC \text{이므로 } \overline{DF}=6x, \overline{FC}=8x \text{라 하면} \\ \overline{BF}=8-8x \quad (\text{단, } 0 < x < 1) \\ \text{이때 직사각형 EBFDF의 넓이를 S라 하면} \\ S &= \overline{DF} \times \overline{BF} = 6x(8-8x) \\ &= -48(x^2-x) \\ &= -48\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+12 \\ \text{따라서 } 0 < x < 1 \text{에서 } x=\frac{1}{2} \text{일 때 직사각형 EBFDF의 넓이의 최댓} \\ &\text{값은 12이다.} \end{aligned}$$

중단원 기출 문제 2회

1 답 ①

이차함수 $y=x^2-ax+b$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-3, 1$ 이므로 $-3, 1$ 은 이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $-3+1=a, -3 \times 1=b$
 $\therefore a=-2, b=-3$
 $\therefore a+b=-5$

2 답 ③

이차함수 $y=3x^2+2ax+12a$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $2a, b$ 이므로 $2a, b$ 는 이차방정식 $3x^2+2ax+12a=0$ 의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $2a+b=-\frac{2}{3}a, 2ab=4a$
 $2ab=4a$ 에서 $a \neq 0$ 이므로 $b=2$
이를 $2a+b=-\frac{2}{3}a$ 에 대입하면
 $2a+2=-\frac{2}{3}a \quad \therefore a=-\frac{3}{4}$
 $\therefore ab=-\frac{3}{4} \times 2 = -\frac{3}{2}$

3 답 ②

$A(\alpha, 0), B(\beta, 0)$ 이라 하면 이차방정식
 $4x^2-4(a-1)x+2a-7=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta=a-1, \alpha\beta=\frac{2a-7}{4}$
이때 $\overline{AB}=2$ 이므로 $|\alpha-\beta|=2$
양변을 제곱하면
 $(\alpha-\beta)^2=4$
 $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4$
 $(a-1)^2-(2a-7)=4$
 $a^2-4a+4=0, (a-2)^2=0$
 $\therefore a=2$

4 답 ④

이차방정식 $x^2-2kx+k^2+3k-1=0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=(-k)^2-(k^2+3k-1)<0$
 $-3k+1<0 \quad \therefore k>\frac{1}{3}$
따라서 정수 k 의 최솟값은 1이다.

5 답 ①

이차방정식 $x^2-8x+a+15=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면
 $\frac{D_1}{4}=16-(a+15) \geq 0$
 $-a+1 \geq 0$
 $\therefore a \leq 1$

이차방정식 $x^2 - 2(a-2)x + 9 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = \{-(a-2)\}^2 - 9 = 0$$

$$a^2 - 4a - 5 = 0$$

$$(a+1)(a-5) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 5$$

그런데 $a \leq 1$ 이므로

$$a = -1$$

6 답 ④

이차함수 $y = x^2 + mx$ 의 그래프와 직선 $y = n(x-2)$ 의 교점의 x 좌표가 각각 $-4, 1$ 이므로 $-4, 1$ 은 이차방정식 $x^2 + mx = n(x-2)$, 즉 $x^2 + (m-n)x + 2n = 0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-4 + 1 = -(m-n), \quad -4 \times 1 = 2n$$

$$\therefore m = 1, \quad n = -2$$

$$\therefore m + n = -1$$

7 답 $\sqrt{2}$

두 점 A, B에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 A', B' 이라 하면

$$\overline{OA} : \overline{OB} = 2 : 1 \text{이므로 } \overline{OA'} : \overline{OB'} = 2 : 1$$

즉, 두 점 A', B' 의 x 좌표를 각각 $-2a, a$ ($a > 0$)라 하면 $-2a, a$ 는 이차방정식 $-x^2 + 4 = kx$, 즉 $x^2 + kx - 4 = 0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2a + a = -k, \quad -2a \times a = -4$$

$$k = a, \quad a^2 = 2$$

$$\text{그런데 } a > 0 \text{이므로 } a = \sqrt{2}$$

$$\therefore k = \sqrt{2}$$

8 답 ⑤

$$\textcircled{1} \quad 3x^2 + x - 2 = 5x \text{에서 } 3x^2 - 4x - 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4 + 6 = 10 > 0$$

따라서 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

$$\textcircled{2} \quad 3x^2 + x - 2 = 5x - 1 \text{에서 } 3x^2 - 4x - 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4 + 3 = 7 > 0$$

따라서 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

$$\textcircled{3} \quad 3x^2 + x - 2 = -5x \text{에서 } 3x^2 + 6x - 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 + 6 = 15 > 0$$

따라서 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

$$\textcircled{4} \quad 3x^2 + x - 2 = -5x + 3 \text{에서 } 3x^2 + 6x - 5 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 + 15 = 24 > 0$$

따라서 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

$$\textcircled{5} \quad 3x^2 + x - 2 = -5x - 11 \text{에서 } 3x^2 + 6x + 9 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - 27 = -18 < 0$$

따라서 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

따라서 이차함수 $y = 3x^2 + x - 2$ 의 그래프와 만나지 않는 직선은 ⑤이다.

9 답 ④

이차방정식 $x^2 - 4ax + 4a^2 + 2a = 2x - n$, 즉

$x^2 - 2(2a+1)x + 4a^2 + 2a + n = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(2a+1)\}^2 - (4a^2 + 2a + n) > 0$$

$$2a + 1 - n > 0 \quad \therefore n < 2a + 1$$

$$a = \frac{1}{2} \text{일 때, } n < 2 \text{이므로 } f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$a = \frac{3}{2} \text{일 때, } n < 4 \text{이므로 } f\left(\frac{3}{2}\right) = 3$$

$$a = \frac{5}{2} \text{일 때, } n < 6 \text{이므로 } f\left(\frac{5}{2}\right) = 5$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) = 1 + 3 + 5 = 9$$

10 답 ③

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프가 직선 $y = x + k$ 와 서로 다른 네 점에서 만나려면 직선 $y = x + k$ 는 (i)과 (ii) 사이에 있어야 한다.

(i) 직선 $y = x + k$ 가 이차함수

$y = -x^2 - x + 12$ 의 그래프에 접할 때,

$$-x^2 - x + 12 = x + k \text{에서}$$

$$x^2 + 2x + k - 12 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - (k - 12) = 0$$

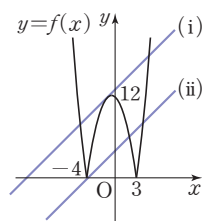
$$13 - k = 0 \quad \therefore k = 13$$

(ii) 직선 $y = x + k$ 가 점 $(-4, 0)$ 을 지날 때,

$$0 = -4 + k \quad \therefore k = 4$$

(i), (ii)에서 k 의 값의 범위는 $4 < k < 13$

따라서 정수 k 는 5, 6, 7, ..., 12의 8개이다.



11 답 ②

점 $(2, -2)$ 를 지나는 직선의 기울기를 m 이라 하면 직선의 방정식은

$$y = m(x-2) - 2 \quad \therefore y = mx - 2m - 2$$

$$-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 3 = mx - 2m - 2 \text{에서}$$

$$x^2 + 2(m+2)x - 4m + 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (m+2)^2 - (-4m+2) = 0$$

$$\therefore m^2 + 8m + 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면 $\frac{D_2}{4} = 16 - 2 = 14 > 0$

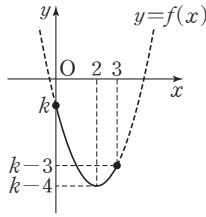
따라서 이차방정식 $m^2 + 8m + 2 = 0$ 의 두 실근이 이차함수의 그래프에 접하는 두 직선의 기울기이므로 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 두 직선의 기울기의 곱은 2이다.

12 답 18

$y = -2x^2 + 8x - 4 = -2(x-2)^2 + 4$
 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $x = -1$ 일 때 최솟값은 -14 이고, $x = 2$ 일 때 최댓값은 4이다.
 $\therefore M - m = 4 - (-14) = 18$

13 답 ②

$f(x) = x^2 - 4x + k = (x-2)^2 + k - 4$ 이므로 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 $x = 2$ 에서 최솟값 $k - 4$ 를 가지므로
 $k - 4 = -5 \quad \therefore k = -1$
 따라서 $f(x) = (x-2)^2 - 5$ 의 최댓값은
 $f(0) = 4 - 5 = -1$



14 답 ①

$y = x^2 + 2mx - m^2 + 4m - 1 = (x+m)^2 - 2m^2 + 4m - 1$ 이므로 $x = -m$ 일 때 최솟값 $-2m^2 + 4m - 1$ 을 갖는다.
 $\therefore g(m) = -2m^2 + 4m - 1$
 $= -2(m-1)^2 + 1$
 따라서 $g(m)$ 은 $-1 \leq m \leq 2$ 에서 $m = 1$ 일 때 최댓값 1을 갖고, $m = -1$ 일 때 최솟값 -7 을 가지므로 최댓값과 최솟값의 합은 $1 + (-7) = -6$

15 답 ①

$x^2 - 2x = t$ 로 놓으면 $t = (x-1)^2 - 1$
 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $x = 3$ 일 때 최댓값은 3이고, $x = 1$ 일 때 최솟값은 -1 이므로 $-1 \leq t \leq 3$
 이때 주어진 함수는
 $y = -2t^2 + 4t - 5$
 $= -2(t-1)^2 - 3$
 따라서 $-1 \leq t \leq 3$ 에서 $t = 1$ 일 때 최댓값은 -3 이고, $t = -1$ 또는 $t = 3$ 일 때 최솟값은 -11 이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $-3 + (-11) = -14$

16 답 5

$x^2 + 4x + 1 = t$ 로 놓으면
 $t = (x+2)^2 - 3 \quad \therefore t \geq -3$
 이때 주어진 함수는
 $y = t^2 + 4(t-1) + k$
 $= (t+2)^2 + k - 8$
 따라서 $t \geq -3$ 에서 $t = -2$ 일 때 최솟값은 $k - 8$ 이므로
 $k - 8 = -3 \quad \therefore k = 5$

17 답 -12

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 1 = (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) - 12 \\ = (x-2)^2 + (y+3)^2 - 12$$

이때 x, y 가 실수이므로
 $(x-2)^2 \geq 0, (y+3)^2 \geq 0$
 $\therefore x^2 + y^2 - 4x + 6y + 1 \geq -12$
 따라서 구하는 최솟값은 -12 이다.

18 답 ②

점 (a, b) 가 직선 $y = x - 3$ 위에 있으므로
 $b = a - 3 \quad \dots\dots ㉠$
 이때 점 (a, b) 가 제1사분면 위에 있으므로
 $a > 0, b > 0 \quad \therefore a > 3$
 ㉠을 $a^2 + b^2 - 8a$ 에 대입하면
 $a^2 + b^2 - 8a = a^2 + (a-3)^2 - 8a$
 $= 2a^2 - 14a + 9$
 $= 2\left(a - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{31}{2}$
 따라서 $a > 3$ 에서 $a = \frac{7}{2}$ 일 때 최솟값은 $-\frac{31}{2}$ 이다.

19 답 44

$(\sqrt{1+5x} + \sqrt{1+4y})^2 = 2 + 5x + 4y + 2\sqrt{(1+5x)(1+4y)}$
 이때 $5x + 4y = 20$ 에서 $4y = 20 - 5x$ 이므로
 $2 + 5x + 4y + 2\sqrt{(1+5x)(1+4y)}$
 $= 2 + 20 + 2\sqrt{(1+5x)(21-5x)}$
 $= 22 + 2\sqrt{-25x^2 + 100x + 21}$
 $= 22 + 2\sqrt{-25(x-2)^2 + 121}$
 따라서 $x > 0$ 에서 $x = 2$ 일 때 최댓값은
 $22 + 2\sqrt{121} = 22 + 22 = 44$

20 답 ②

$-x^2 + 7 = 2x^2 - 2$ 에서 $3x^2 = 9$
 $x^2 = 3 \quad \therefore x = \pm\sqrt{3}$
 따라서 두 이차함수의 그래프의 교점의 x 좌표는 $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$ 이다.
 이때 점 B의 x 좌표를 $a (0 < a < \sqrt{3})$ 라 하면
 $A(-a, -a^2 + 7), B(a, -a^2 + 7), C(-a, 2a^2 - 2),$
 $D(a, 2a^2 - 2)$
 $\therefore \overline{AB} = a - (-a) = 2a$
 $\overline{BD} = -a^2 + 7 - (2a^2 - 2) = -3a^2 + 9$
 직사각형 ACDB의 둘레의 길이를 l 이라 하면
 $l = 2(2a - 3a^2 + 9) = -6a^2 + 4a + 18$
 $= -6\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{56}{3}$
 따라서 $0 < a < \sqrt{3}$ 에서 $a = \frac{1}{3}$ 일 때 직사각형 ACDB의 둘레의 길이의 최댓값은 $\frac{56}{3}$ 이다.

중단원 기출문제 ①

1 답 ③

$f(x)=x^4-x^3-4x^2-5x-3$ 이라 할 때, $f(-1)=0$, $f(3)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & -1 & -4 & -5 & -3 & \\ & & -1 & 2 & 2 & 3 & \\ 3 & 1 & -2 & -2 & -3 & 0 & \\ & & 3 & 3 & 3 & & \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & & \end{array}$$

$$f(x)=(x+1)(x-3)(x^2+x+1)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x+1)(x-3)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3 \text{ 또는 } x=\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

따라서 주어진 방정식의 해가 아닌 것은 ③이다.

2 답 ②

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ & & -1 & 4 & -6 \\ & 1 & -4 & 6 & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x+1)(x^2-4x+6)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x+1)(x^2-4x+6)=0$$

따라서 두 허근 α , β 는 이차방정식 $x^2-4x+6=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4, \alpha\beta=6$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &= 4^2-2 \times 6 = 4 \end{aligned}$$

3 답 5

$x^2+x=t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$(t-1)(t-7)+5=0$$

$$t^2-8t+12=0, (t-2)(t-6)=0$$

$$\therefore t=2 \text{ 또는 } t=6$$

(i) $t=2$ 일 때,

$$x^2+x=2 \text{에서 } x^2+x-2=0$$

$$(x+2)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

(ii) $t=6$ 일 때,

$$x^2+x=6 \text{에서 } x^2+x-6=0$$

$$(x+3)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x=-3 \text{ 또는 } x=-2 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=-3$ 이므로

$$\alpha-\beta=5$$

4 답 ⑤

$x^2=t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$t^2+5t-36=0$$

$$(t+9)(t-4)=0 \quad \therefore t=-9 \text{ 또는 } t=4$$

즉, $x^2=-9$ 또는 $x^2=4$ 이므로

$$x=\pm 3i \text{ 또는 } x=\pm 2$$

따라서 $a=2$, $b=3$ 이므로

$$a+b=5$$

5 답 -5

$x \neq 0$ 이므로 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2+4x-3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$$

$$x+\frac{1}{x}=t \text{로 놓으면}$$

$$t^2+4t-5=0$$

$$(t+5)(t-1)=0 \quad \therefore t=-5 \text{ 또는 } t=1$$

(i) $t=-5$ 일 때,

$$x+\frac{1}{x}=-5 \text{에서 } x^2+5x+1=0 \quad \therefore x=\frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

(ii) $t=1$ 일 때,

$$x+\frac{1}{x}=1 \text{에서 } x^2-x+1=0 \quad \therefore x=\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$$\frac{-5-\sqrt{21}}{2}+\frac{-5+\sqrt{21}}{2}=-5$$

6 답 $\frac{1}{3}$

주어진 방정식의 두 근이 -3 , -2 이므로 $x=-3$, $x=-2$ 를 각각 대입하면

$$81-27a+18-54+b=0, 16-8a+8-36+b=0$$

$$\therefore 27a-b=45, 8a-b=-12$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=36$

이를 주어진 방정식에 대입하면 $x^4+3x^3+2x^2+18x+36=0$

$$f(x)=x^4+3x^3+2x^2+18x+36 \text{이라 할 때, } f(-3)=0,$$

$f(-2)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -3 & 1 & 3 & 2 & 18 & 36 & \\ & & -3 & 0 & -6 & -36 & \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 12 & 0 & \\ & & -2 & 4 & -12 & & \\ & 1 & -2 & 6 & 0 & & \end{array}$$

$$f(x)=(x+3)(x+2)(x^2-2x+6)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x+3)(x+2)(x^2-2x+6)=0$

따라서 두 허근 α , β 는 이차방정식 $x^2-2x+6=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2, \alpha\beta=6$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

7 답 ②

주어진 방정식의 한 근이 $\sqrt{3}$ 이므로 $x=\sqrt{3}$ 을 대입하면
 $9+3\sqrt{3}a+3b+3\sqrt{3}+6=0$, $3(b+5)+3\sqrt{3}(a+1)=0$
 이때 a, b 가 유리수이므로
 $b+5=0$, $a+1=0$ $\therefore a=-1$, $b=-5$
 이를 주어진 방정식에 대입하면 $x^4-x^3-5x^2+3x+6=0$
 $f(x)=x^4-x^3-5x^2+3x+6$ 이라 할 때, $f(-1)=0$, $f(2)=0$ 이므로
 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & -1 & -5 & 3 & 6 & \\ & & -1 & 2 & 3 & -6 & \\ 2 & 1 & -2 & -3 & 6 & 0 & \\ & & 2 & 0 & -6 & & \\ & 1 & 0 & -3 & 0 & & \end{array}$$

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2-3)$
 $= (x+1)(x-2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
 즉, 주어진 방정식은 $(x+\sqrt{3})(x+1)(x-\sqrt{3})(x-2)=0$
 $\therefore x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{3}$ 또는 $x=2$
 따라서 유리수인 두 근은 $-1, 2$ 이므로 두 근의 곱은 $-1 \times 2 = -2$

8 답 ③

$f(x)=x^3+3x^2+(k+2)x+k$ 라 할 때, $f(-1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면
 $f(x)=(x+1)(x^2+2x+k)$
 즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x^2+2x+k)=0$
 이 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2x+k=0$ 이 허근을 가져야 한다.
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=1-k < 0$ $\therefore k > 1$

9 답 6

처음 직육면체에서 직육면체 모양의 구멍을 파낸 후의 도형의 부피는
 $x(x+1)(x+2)-\frac{1}{2}x^3=228$, $x^3+6x^2+4x-456=0$
 $f(x)=x^3+6x^2+4x-456$ 이라 할 때, $f(6)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면
 $f(x)=(x-6)(x^2+12x+76)$
 즉, 방정식은 $(x-6)(x^2+12x+76)=0$
 $\therefore x=6$ 또는 $x=-6 \pm 2\sqrt{10}i$
 그런데 $x > 0$ 이므로 $x=6$

10 답 ③

주어진 삼차방정식의 세 근을 $a-1, a, a+1$ 이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
 $(a-1)+a+(a+1)=6$ $\therefore a=2$
 따라서 세 근이 $1, 2, 3$ 이므로
 $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 1 = a$, $1 \times 2 \times 3 = -b$
 $\therefore a=11$, $b=-6$ $\therefore a-b=17$

11 답 $x^3-8x^2-12x+16=0$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $a+\beta+\gamma=4$, $a\beta+\beta\gamma+\gamma a=-3$, $a\beta\gamma=-2$
 구하는 삼차방정식의 세 근이 $2a, 2\beta, 2\gamma$ 이므로
 $2a+2\beta+2\gamma=2(a+\beta+\gamma)=2 \times 4=8$
 $2a \times 2\beta + 2\beta \times 2\gamma + 2\gamma \times 2a=4(a\beta+\beta\gamma+\gamma a)$
 $=4 \times (-3)=-12$
 $2a \times 2\beta \times 2\gamma=8a\beta\gamma=8 \times (-2)=-16$
 따라서 구하는 삼차방정식은
 $x^3-8x^2-12x+16=0$

12 답 13

이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로
 $\omega^2+\omega+1=0$
 양변에 $\omega-1$ 을 곱하면
 $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$
 $\omega^3-1=0$ $\therefore \omega^3=1$
 $f(1)=\frac{1+\omega}{1+\omega}=1$
 $f(2)=\frac{1+\omega+\omega^2}{1+\omega^2}=0$
 $f(3)=\frac{1+\omega+\omega^2+\omega^3}{1+\omega^3}=\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$
 $f(4)=\frac{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4}{1+\omega^4}=\frac{0+1+\omega}{1+\omega}=f(1)$
 $f(5)=\frac{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5}{1+\omega^5}=\frac{0+1+\omega+\omega^2}{1+\omega^2}=f(2)$
 $f(6)=\frac{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6}{1+\omega^6}$
 $=\frac{0+1+\omega+\omega^2+\omega^3}{1+\omega^3}=f(3)$
 $\vdots$
 이므로

$f(1)=f(4)=f(7)=\dots=f(22)=f(25)=1$,
 $f(2)=f(5)=f(8)=\dots=f(23)=0$,
 $f(3)=f(6)=f(9)=\dots=f(24)=\frac{1}{2}$
 $\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(25)$
 $=8 \times \left(1+0+\frac{1}{2}\right)+1=13$

13 답 ④

(i) $x \geq 2y$ 일 때, $\begin{cases} 2x+3y-1=x \\ x^2-y=x \end{cases}$
 $2x+3y-1=x$ 에서 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ ㉠
 이를 $x^2-y=x$ 에 대입하면
 $x^2-\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)=x$, $3x^2-2x-1=0$
 $(3x+1)(x-1)=0$ $\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$
 이를 각각 ㉠에 대입하면 연립방정식의 해는
 $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{4}{9}$ 또는 $x=1$, $y=0$
 그런데 $x \geq 2y$ 이므로 $a=1$, $\beta=0$

$$(ii) x < 2y \text{ 일 때, } \begin{cases} 2x+3y-1=2y \\ x^2-y=2y \end{cases}$$

$$2x+3y-1=2y \text{ 에서 } y=-2x+1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이를 $x^2-y=2y$ 에 대입하면

$$x^2-(-2x+1)=2(-2x+1)$$

$$x^2+6x-3=0 \quad \therefore x=-3 \pm 2\sqrt{3}$$

이를 각각 $\textcircled{A}$ 에 대입하면 연립방정식의 해는

$$x=-3-2\sqrt{3}, y=7+4\sqrt{3} \text{ 또는 } x=-3+2\sqrt{3}, y=7-4\sqrt{3}$$

그런데 x, y 는 유리수이므로 조건을 만족시키는 해가 존재하지 않는다.

$$(i), (ii) \text{ 에서 } \alpha=1, \beta=0 \text{ 이므로 } \alpha+\beta=1$$

14 답 ④

$$2x^2-3xy+y^2=0 \text{ 에서 } (x-y)(2x-y)=0$$

$$\therefore y=x \text{ 또는 } y=2x$$

$$(i) y=x \text{ 를 } 5x^2-y^2=9 \text{ 에 대입하면}$$

$$5x^2-x^2=9, 4x^2=9 \quad \therefore x=\pm \frac{3}{2}$$

$$\therefore x=-\frac{3}{2} \text{ 일 때 } y=-\frac{3}{2}, x=\frac{3}{2} \text{ 일 때 } y=\frac{3}{2}$$

$$(ii) y=2x \text{ 를 } 5x^2-y^2=9 \text{ 에 대입하면}$$

$$5x^2-4x^2=9, x^2=9 \quad \therefore x=\pm 3$$

$$\therefore x=-3 \text{ 일 때 } y=-6, x=3 \text{ 일 때 } y=6$$

$$(i), (ii) \text{ 에서 자연수 } x, y \text{ 는 } x=3, y=6 \text{ 이므로 } x+y=9$$

15 답 ④

주어진 연립방정식을 변형하면

$$\begin{cases} (x+y)^2-2xy=10 \\ x+y-xy=1 \end{cases}$$

$x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u^2-2v=10 & \dots\dots \textcircled{A} \\ u-v=1 & \dots\dots \textcircled{B} \end{cases}$$

$$\textcircled{B} \text{ 에서 } v=u-1 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{C}$ 을 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$u^2-2(u-1)=10, u^2-2u-8=0$$

$$(u+2)(u-4)=0 \quad \therefore u=-2 \text{ 또는 } u=4$$

이를 각각 $\textcircled{C}$ 에 대입하면

$$u=-2, v=-3 \text{ 또는 } u=4, v=3$$

$$(i) u=-2, v=-3, \text{ 즉 } x+y=-2, xy=-3 \text{ 일 때,}$$

x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2+2t-3=0, (t+3)(t-1)=0$$

$$\therefore t=-3 \text{ 또는 } t=1$$

$$\therefore x=-3, y=1 \text{ 또는 } x=1, y=-3$$

$$(ii) u=4, v=3, \text{ 즉 } x+y=4, xy=3 \text{ 일 때,}$$

x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2-4t+3=0, (t-1)(t-3)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

$$\therefore x=1, y=3 \text{ 또는 } x=3, y=1$$

$$(i), (ii) \text{ 에서 } 2x+y \text{ 의 최댓값은}$$

$$2 \times 3 + 1 = 7$$

16 답 ②

x, y 를 두 근으로 하는 t 에 대한 이차방정식은

$$t^2+2(a+3)t+a^2-14=0$$

이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+3)^2-(a^2-14) \geq 0$$

$$6a+23 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{23}{6}$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 -3 이다.

17 답 ⑤

주어진 두 이차방정식의 공통근을 a 라 하면

$$a^2+(6-k)a+k+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$a^2-2ka-5=0 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}-\textcircled{B}$ 을 하면

$$(k+6)a+k+6=0$$

$$(k+6)(a+1)=0$$

$$\therefore k=-6 \text{ 또는 } a=-1$$

$$(i) k=-6 \text{ 일 때,}$$

두 이차방정식이 모두 $x^2+12x-5=0$ 이므로

$$x=-6 \pm \sqrt{41}$$

따라서 공통근을 2개 갖는다.

$$(ii) a=-1 \text{ 일 때,}$$

$$a=-1 \text{ 을 } \textcircled{B} \text{ 에 대입하면}$$

$$1+2k-5=0 \quad \therefore k=2$$

$$(i), (ii) \text{ 에서 } k=2 \text{ 일 때 공통근은 } x=-1 \text{ 이므로 구하는 합은}$$

$$2+(-1)=1$$

18 답 ④

두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이를 각각

$x, y (x > y)$ 라 하면 정사각형의 대각선

의 길이가 $\sqrt{2}(10+5\sqrt{2})=10(1+\sqrt{2})$

이므로

$$\sqrt{2}x+x+y+\sqrt{2}y=10(1+\sqrt{2})$$

$$x(1+\sqrt{2})+y(1+\sqrt{2})=10(1+\sqrt{2})$$

$$(x+y)(1+\sqrt{2})=10(1+\sqrt{2})$$

$$\therefore x+y=10 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

또 두 원 C_1, C_2 의 넓이의 차가 20π 이므로

$$\pi x^2-\pi y^2=20\pi$$

$$\therefore x^2-y^2=20 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$ 에서 $y=10-x$ 를 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$x^2-(10-x)^2=20$$

$$20x-120=0 \quad \therefore x=6$$

이를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면 $y=4$

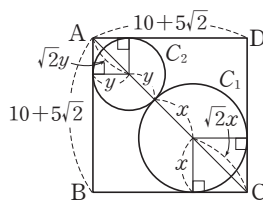
$$\therefore xy=24$$

다른 풀이

두 원 C_1, C_2 의 반지름의 길이를 각각 $x, y (x > y)$ 라 하면

$$\sqrt{2}x+x+y+\sqrt{2}y=\sqrt{2}(10+5\sqrt{2})$$

$$(x+y)(1+\sqrt{2})=10(1+\sqrt{2}) \quad \therefore x+y=10 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$



또 두 원 C_1, C_2 의 넓이의 차가 20π 이므로

$$\pi x^2 - \pi y^2 = 20\pi \quad \therefore (x+y)(x-y) = 20 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\textcircled{A} \text{을 } \textcircled{L} \text{에 대입하면 } 10(x-y) = 20$$

$$\therefore x-y=2 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{E} \text{을 연립하여 풀면 } x=6, y=4 \quad \therefore xy=24$$

19 답 10

이차방정식 $x^2 + (1-m)x + 2m + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{cases} \alpha + \beta = m - 1 & \dots\dots \textcircled{A} \\ \alpha\beta = 2m + 3 & \dots\dots \textcircled{L} \end{cases}$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } m = \alpha + \beta + 1 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

$\textcircled{E}$ 을 $\textcircled{L}$ 에 대입하면

$$\alpha\beta = 2(\alpha + \beta + 1) + 3, \alpha\beta - 2\alpha - 2\beta - 5 = 0$$

$$\alpha(\beta - 2) - 2(\beta - 2) = 9 \quad \therefore (\alpha - 2)(\beta - 2) = 9$$

$$(i) \alpha - 2 = -9, \beta - 2 = -1 \text{일 때,}$$

$$\alpha = -7, \beta = 1 \text{이므로 } \textcircled{E} \text{에서 } m = -5$$

$$(ii) \alpha - 2 = -3, \beta - 2 = -3 \text{일 때,}$$

$$\alpha = -1, \beta = -1 \text{이므로 } \textcircled{E} \text{에서 } m = -1$$

$$(iii) \alpha - 2 = -1, \beta - 2 = -9 \text{일 때,}$$

$$\alpha = 1, \beta = -7 \text{이므로 } \textcircled{E} \text{에서 } m = -5$$

$$(iv) \alpha - 2 = 1, \beta - 2 = 9 \text{일 때,}$$

$$\alpha = 3, \beta = 11 \text{이므로 } \textcircled{E} \text{에서 } m = 15$$

$$(v) \alpha - 2 = 3, \beta - 2 = 3 \text{일 때,}$$

$$\alpha = 5, \beta = 5 \text{이므로 } \textcircled{E} \text{에서 } m = 11$$

$$(vi) \alpha - 2 = 9, \beta - 2 = 1 \text{일 때,}$$

$$\alpha = 11, \beta = 3 \text{이므로 } \textcircled{E} \text{에서 } m = 15$$

(i)~(vi)에서 m 의 최댓값은 15, 최솟값은 -5이므로 구하는 합은 $15 + (-5) = 10$

20 답 4

[방법 1] $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x - 4y + 10 = 0$ 에서

$$x^2 + 2(y+1)x + 2y^2 - 4y + 10 = 0$$

$$x^2 + 2(y+1)x + (y^2 + 2y + 1) + (y^2 - 6y + 9) = 0$$

$$x^2 + 2(y+1)x + (y+1)^2 + (y-3)^2 = 0$$

$$(x+y+1)^2 + (y-3)^2 = 0$$

$$x, y \text{가 실수이므로 } x+y+1=0, y-3=0$$

$$\therefore x = -4, y = 3$$

$$\therefore x + 2y = -4 + 2 \times 3 = 2$$

[방법 2] 방정식의 좌변을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 + 2(y+1)x + 2y^2 - 4y + 10 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

x 가 실수이므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (y+1)^2 - (2y^2 - 4y + 10) \geq 0$$

$$-y^2 + 6y - 9 \geq 0 \quad \therefore (y-3)^2 \leq 0$$

$$\text{이때 } y \text{는 실수이므로 } y-3=0 \quad \therefore y=3$$

이를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$x^2 + 8x + 16 = 0, (x+4)^2 = 0 \quad \therefore x = -4$$

$$\therefore x + 2y = -4 + 2 \times 3 = 2$$

중단원 기출문제 2회

1 답 2

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 8 \text{이라 할 때,}$$

$$f(2) = 0 \text{이므로 조립제법을 이용하여}$$

$$f(x) \text{를 인수분해하면}$$

$$f(x) = (x-2)(x^2 - 2x - 4)$$

즉, 주어진 방정식은

$$(x-2)(x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$\text{따라서 } \alpha = 1 + \sqrt{5}, \beta = 1 - \sqrt{5} \text{이므로}$$

$$\alpha + \beta = 2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 0 & 8 \\ & & 2 & -4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -4 & 0 \end{array}$$

2 답 17

$x^2 + x = t$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$(t+1)(t+3) = 15$$

$$t^2 + 4t - 12 = 0, (t+6)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = -6 \text{ 또는 } t = 2$$

$$(i) t = -6 \text{일 때,}$$

$$x^2 + x = -6 \text{에서 } x^2 + x + 6 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = 1 - 24 = -23 < 0$$

즉, 이차방정식 $x^2 + x + 6 = 0$ 은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$$(ii) t = 2 \text{일 때,}$$

$$x^2 + x = 2 \text{에서 } x^2 + x - 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = 1 + 8 = 9 > 0$$

즉, 이차방정식 $x^2 + x - 2 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 α, β 는 이차방정식 $x^2 + x + 6 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 6$$

$$\therefore \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= (-1)^3 - 3 \times 6 \times (-1) = 17$$

3 답 2

$$x^4 - 13x^2 + 4 = 0 \text{에서 } (x^4 - 4x^2 + 4) - 9x^2 = 0$$

$$(x^2 - 2)^2 - (3x)^2 = 0, (x^2 - 3x - 2)(x^2 + 3x - 2) = 0$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

따라서 모든 양의 근의 곱은

$$\frac{3 + \sqrt{17}}{2} \times \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} = 2$$

4 답 3

$x \neq 0$ 이므로 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 + 4x + 5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = t \text{로 놓으면 } t^2 + 4t + 3 = 0$$

$$(t+3)(t+1)=0 \quad \therefore t = -3 \text{ 또는 } t = -1$$

(i) $t = -3$ 일 때,

$$x + \frac{1}{x} = -3 \text{에서 } x^2 + 3x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(ii) $t = -1$ 일 때,

$$x + \frac{1}{x} = -1 \text{에서 } x^2 + x + 1 = 0 \quad \therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \frac{a + \sqrt{b}i}{2} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{이므로}$$

$$a = -1, b = 3$$

$$\therefore ab = -3$$

5 답 -1

주어진 방정식의 한 근이 2이므로 $x=2$ 를 대입하면

$$8 + 4k + 2(k-2) + 2 = 0 \quad \therefore k = -1$$

이를 주어진 방정식에 대입하면 $x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$

$f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2$ 라 할 때,

$f(2) = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여

$f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x) = (x-2)(x^2 + x - 1)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2 + x - 1) = 0$

이때 2가 아닌 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2 + x - 1 = 0$ 의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 -1 이다.

6 답 ⑤

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + (k+5)x - k \text{라 할 때, } f(1) = 0 \text{이므로 조립제법을 이용하여}$$

$f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x) = (x-1)(x^2 - 5x + k)$$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2 - 5x + k) = 0$

(i) 이차방정식 $x^2 - 5x + k = 0$ 이 $x=1$ 을 근으로 가질 때,

$$x=1 \text{을 } x^2 - 5x + k = 0 \text{에 대입하면 } k = 4$$

$$\text{즉, } x^2 - 5x + 4 = 0 \text{에서 } (x-1)(x-4) = 0$$

따라서 주어진 삼차방정식 $(x-1)^2(x-4) = 0$ 의 세 실근은 1, 1, 4이다.

이는 삼각형의 세 변의 길이가 될 수 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 이차방정식 $x^2 - 5x + k = 0$ 이 중근을 가질 때,

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = 25 - 4k = 0$$

$$\therefore k = \frac{25}{4}$$

$$\text{즉, } x^2 - 5x + \frac{25}{4} \text{에서 } \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 0$$

따라서 주어진 삼차방정식 $(x-1)\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 0$ 의 세 실근은 1, $\frac{5}{2}, \frac{5}{2}$ 이다.

$$(i), (ii) \text{에서 } k = \frac{25}{4}$$

중1 다시보기

삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계는 다음과 같다.

- (1) 삼각형의 한 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작다.
- (2) 세 변의 길이가 주어졌을 때 삼각형이 될 수 있는 조건은 (가장 긴 변의 길이) < (나머지 두 변의 길이의 합)이다.

7 답 ②

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + \beta + \gamma = 3, a\beta + \beta\gamma + \gamma a = 2, a\beta\gamma = 1$$

$$\therefore (1+a)(1+\beta)(1+\gamma)$$

$$= 1 + (a + \beta + \gamma) + (a\beta + \beta\gamma + \gamma a) + a\beta\gamma$$

$$= 1 + 3 + 2 + 1 = 7$$

8 답 $x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + \beta + \gamma = 1, a\beta + \beta\gamma + \gamma a = 2, a\beta\gamma = 1$$

구하는 삼차방정식의 세 근이 $a\beta, \beta\gamma, \gamma a$ 이므로

$$a\beta \times \beta\gamma + \beta\gamma \times \gamma a + \gamma a \times a\beta = a\beta\gamma(a + \beta + \gamma) = 1 \times 1 = 1$$

$$a\beta \times \beta\gamma \times \gamma a = (a\beta\gamma)^2 = 1^2 = 1$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$$x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$$

9 답 ③

직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 a cm, b cm, c cm라 하면

$$4(a+b+c) = 32 \quad \therefore a+b+c = 8$$

$$2(ab+bc+ca) = 34 \quad \therefore ab+bc+ca = 17$$

$$abc = 10$$

이때 a, b, c 를 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$$

$$f(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10 \text{이라 할 때, } f(1) = 0 \text{이므로 조립제법을 이용하여}$$

$f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x) = (x-1)(x^2 - 7x + 10)$$

$$= (x-1)(x-2)(x-5)$$

$$\text{즉, 방정식은 } (x-1)(x-2)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = 5$$

따라서 세 모서리의 길이는 1 cm, 2 cm, 5 cm이므로 가장 긴 모서리의 길이와 가장 짧은 모서리의 길이의 차는

$$5 - 1 = 4(\text{cm})$$

10 답 ④

주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 한 근이 $\sqrt{2}$ 이면 $-\sqrt{2}$ 도 근이다.

나머지 한 근을 a 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) + a = -2$$

$$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) + (-\sqrt{2}) \times a + a \times \sqrt{2} = a$$

$$\sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) \times a = -b$$

$$\therefore a = -2, a = -2, b = -4$$

$$\therefore ab = 8$$

11 답 ①

삼차방정식 $P(x)=0$ 의 계수가 실수이므로 (나)에서 한 근이

$$\frac{2-\sqrt{2}i}{3} \text{ 이면 } \frac{2+\sqrt{2}i}{3} \text{ 도 근이다.}$$

(가)에서 $P(2)=0$ 이므로 나머지 한 근은 2이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2 + \frac{2+\sqrt{2}i}{3} + \frac{2-\sqrt{2}i}{3} = -\frac{a}{3}$$

$$2 \times \frac{2+\sqrt{2}i}{3} + \frac{2+\sqrt{2}i}{3} \times \frac{2-\sqrt{2}i}{3} + \frac{2-\sqrt{2}i}{3} \times 2 = \frac{b}{3}$$

$$2 \times \frac{2+\sqrt{2}i}{3} \times \frac{2-\sqrt{2}i}{3} = -\frac{c}{3}$$

$$\therefore a = -10, b = 10, c = -4$$

$$\therefore \frac{a}{b} + c = \frac{-10}{10} + (-4) = -5$$

12 답 ⑤

$$x^3-1=0 \text{에서 } (x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x^2+x+1=0$$

즉, 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 두 허근은 ω_1, ω_2 이다.

ㄱ. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega_1 + \omega_2 = -1, \omega_1 \omega_2 = 1$$

$$\therefore \omega_1^3 + \omega_2^3 = (\omega_1 + \omega_2)^3 - 3\omega_1 \omega_2 (\omega_1 + \omega_2) \\ = (-1)^3 - 3 \times 1 \times (-1) = 2$$

ㄴ. $\omega_1^2 + \omega_1 + 1 = 0$ 이므로 $\omega_1^2 = -\omega_1 - 1$

$$\text{이때 } \omega_1 + \omega_2 = -1 \text{에서 } -\omega_1 - 1 = \omega_2$$

$$\therefore \omega_1^2 = -\omega_1 - 1 = \omega_2$$

ㄷ. $\omega_1 + \omega_2 = -1$ 에서 $1 + \omega_2 = -\omega_1$

$$\text{이때 } \omega_1^3 - 1 = 0 \text{에서 } \omega_1^3 = 1$$

$$\text{즉, } (1 + \omega_2)^3 = (-\omega_1)^3 = -1 \text{이므로}$$

$$(1 + \omega_2)^{3n} = (-1)^n$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

13 답 5

$$2x+y=1 \text{에서 } y=-2x+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이를 $x^2+y^2=13$ 에 대입하면

$$x^2 + (-2x+1)^2 = 13, 5x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(5x+6)(x-2)=0 \quad \therefore x = -\frac{6}{5} \text{ 또는 } x=2$$

이를 각각 ①에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$$x = -\frac{6}{5}, y = \frac{17}{5} \text{ 또는 } x=2, y=-3$$

따라서 $\alpha=2, \beta=-3$ 이므로

$$\alpha - \beta = 5$$

14 답 ③

$$x^2+5xy+6y^2=0 \text{에서 } (x+3y)(x+2y)=0$$

$$\therefore x = -3y \text{ 또는 } x = -2y$$

(i) $x = -3y$ 를 $x^2 - xy + y^2 = 7$ 에 대입하면

$$9y^2 + 3y^2 + y^2 = 7, y^2 = \frac{7}{13} \quad \therefore y = \pm \frac{\sqrt{91}}{13}$$

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{91}}{13} \text{ 일 때 } x = \frac{3\sqrt{91}}{13}, y = \frac{\sqrt{91}}{13} \text{ 일 때 } x = -\frac{3\sqrt{91}}{13}$$

(ii) $x = -2y$ 를 $x^2 - xy + y^2 = 7$ 에 대입하면

$$4y^2 + 2y^2 + y^2 = 7, y^2 = 1 \quad \therefore y = \pm 1$$

$$\therefore y = -1 \text{ 일 때 } x=2, y=1 \text{ 일 때 } x=-2$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$\begin{cases} x = -\frac{3\sqrt{91}}{13} \\ y = \frac{\sqrt{91}}{13} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{91}}{13} \\ y = -\frac{\sqrt{91}}{13} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

따라서 주어진 연립방정식의 해가 아닌 것은 ③이다.

15 답 ③

$$\text{두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식 } \begin{cases} x+y=\frac{5}{2} \\ xy=\frac{3}{2} \end{cases} \text{의 해와 같다.}$$

$$x, y \text{는 } t \text{에 대한 이차방정식 } t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{3}{2} = 0, \text{ 즉 } 2t^2 - 5t + 3 = 0 \text{의}$$

두 근이므로

$$(t-1)(2t-3)=0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=\frac{3}{2}$$

$$\therefore x=1, y=\frac{3}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}, y=1$$

(i) $x=1, y=\frac{3}{2}$ 을 $x^2 + (ay)^2 = 10, x^2 + 2y = b$ 에 각각 대입하면

$$1 + \frac{9}{4}a^2 = 10, 1 + 3 = b \quad \therefore a = \pm 2, b = 4$$

(ii) $x=\frac{3}{2}, y=1$ 을 $x^2 + (ay)^2 = 10, x^2 + 2y = b$ 에 각각 대입하면

$$\frac{9}{4} + a^2 = 10, \frac{9}{4} + 2 = b \quad \therefore a = \pm \frac{\sqrt{31}}{2}, b = \frac{17}{4}$$

(i), (ii)에서 자연수 a, b 의 값은 $a=2, b=4$ 이므로

$$a+b=6$$

16 답 ③

$2x-y=a$ 에서 $y=2x-a$ 이므로 이를 $x^2+y^2=5$ 에 대입하면

$$x^2 + (2x-a)^2 = 5, 5x^2 - 4ax + a^2 - 5 = 0$$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2a)^2 - 5(a^2 - 5) = 0$$

$$-a^2 + 25 = 0, a^2 = 25 \quad \therefore a = -5 \text{ 또는 } a = 5$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a=5$

17 답 ⑤

주어진 두 이차방정식의 공통근을 α 라 하면

$$\alpha^2 + (a^2+1)\alpha + b^2 + 4a + 2b - 3 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha^2 - 2a\alpha - 2a^2 + b^2 + 2b - 5 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면 } (a+1)^2\alpha + 2(a+1)^2 = 0$$

$$(a+1)^2(\alpha+2)=0 \quad \therefore a=-1 \text{ 또는 } \alpha=-2$$

(i) $a=-1$ 일 때,

두 이차방정식이 모두 $x^2+2x+b^2+2b-7=0$ 이므로 공통근을 2개 갖는다.

(ii) $\alpha=-2$ 일 때,

$$\alpha=-2 \text{를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면}$$

$$4+4a-2a^2+b^2+2b-5=0$$

$$(-2a^2+4a-2)+(b^2+2b+1)=0$$

$$-2(a-1)^2+(b+1)^2=0$$

이때 a, b 는 실수이므로

$$a-1=0, b+1=0 \quad \therefore a=1, b=-1$$

(i), (ii)에서 $a=1, b=-1$ 이므로 $a-b=2$

18 답 ③

마름모의 두 대각선은 서로 수직이등분하므로

마름모의 두 대각선의 길이를 각각

$2x, 2y$ ($x > y > 0$)라 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=10^2 & \cdots \textcircled{1} \\ 2x-2y=4 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

②에서 $y=x-2$ 를 ①에 대입하면

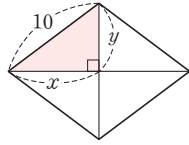
$$x^2+(x-2)^2=100, x^2-2x-48=0$$

$$(x+6)(x-8)=0 \quad \therefore x=-6 \text{ 또는 } x=8$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x=8, y=6$

따라서 구하는 마름모의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2x \times 2y = 2xy = 2 \times 8 \times 6 = 96$$



19 답 5

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{2} \text{에서 } 2y+2x=-xy$$

$$xy+2x+2y+4=4, x(y+2)+2(y+2)=4$$

$$\therefore (x+2)(y+2)=4$$

$$\text{이때 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{2} \text{에서 } x \neq 0, y \neq 0$$

$$(i) x+2=-4, y+2=-1 \text{일 때, } x=-6, y=-3$$

$$(ii) x+2=-2, y+2=-2 \text{일 때, } x=-4, y=-4$$

$$(iii) x+2=-1, y+2=-4 \text{일 때, } x=-3, y=-6$$

$$(iv) x+2=1, y+2=4 \text{일 때, } x=-1, y=2$$

$$(v) x+2=2, y+2=2 \text{일 때, } x=0, y=0$$

$$(vi) x+2=4, y+2=1 \text{일 때, } x=2, y=-1$$

(i)~(vi)에서 순서쌍 (x, y) 는 $(-6, -3), (-4, -4), (-3, -6), (-1, 2), (2, -1)$ 의 5개이다.

20 답 ②

$$[\text{방법 1}] x^2+y^2-4x-2y+5=0 \text{에서}$$

$$(x^2-4x+4)+(y^2-2y+1)=0$$

$$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=0$$

x, y 가 실수이므로 $x-2=0, y-1=0$

$$\therefore x=2, y=1 \quad \therefore xy=2$$

[방법 2] 방정식의 좌변을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2-4x+y^2-2y+5=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

x 가 실수이므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4-(y^2-2y+5) \geq 0$$

$$-y^2+2y-1 \geq 0 \quad \therefore (y-1)^2 \leq 0$$

이때 y 는 실수이므로 $y-1=0 \quad \therefore y=1$

이를 ①에 대입하면 $x^2-4x+4=0$

$$(x-2)^2=0 \quad \therefore x=2$$

$$\therefore xy=2$$

07 / 연립일차부등식

38~43쪽

중단원 기출문제 1회

1 답 ④

$$4x+2 < 6x \text{에서 } -2x < -2 \quad \therefore x > 1$$

$$x-12 > -3x \text{에서 } 4x > 12 \quad \therefore x > 3$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $x > 3$ 이므로 정수 x 의 최솟값은 4이다.

2 답 ①

$$3x+2 \leq x-1 \text{에서 } 2x \leq -3 \quad \therefore x \leq -\frac{3}{2}$$

$$x+1 > 2(2x-1)+1 \text{에서 } x+1 > 4x-1$$

$$-3x > -2 \quad \therefore x < \frac{2}{3}$$

$$\text{따라서 주어진 연립부등식의 해는 } x \leq -\frac{3}{2}$$

3 답 12

$$2x-30 < 5x-3 \text{에서 } -3x < 27 \quad \therefore x > -9$$

$$5x-3 \leq 6(5-x) \text{에서 } 5x-3 \leq 30-6x$$

$$11x \leq 33 \quad \therefore x \leq 3$$

따라서 주어진 부등식의 해는 $-9 < x \leq 3$ 이므로 정수 x 는 $-8, -7, -6, \dots, 3$ 의 12개이다.

4 답 6

$$\frac{2x-3}{5} < x+3 \text{에서 } 2x-3 < 5(x+3)$$

$$2x-3 < 5x+15, -3x < 18 \quad \therefore x > -6$$

$$x+3 \leq 0.5x+2 \text{에서 } 10x+30 \leq 5x+20$$

$$5x \leq -10 \quad \therefore x \leq -2$$

따라서 주어진 부등식의 해는 $-6 < x \leq -2$ 이므로

$$2 \leq -x < 6 \quad \therefore 6 \leq -x+4 < 10$$

따라서 $6 \leq A < 10$ 이므로 A 의 최솟값은 6이다.

5 답 $x=3$

$$\frac{x+1}{4} - \frac{x+2}{5} \geq 0 \text{에서 } 5(x+1)-4(x+2) \geq 0$$

$$5x+5-4x-8 \geq 0 \quad \therefore x \geq 3$$

$$\frac{5-3x}{2} + x \geq 1 \text{에서 } 5-3x+2x \geq 2$$

$$-x \geq -3 \quad \therefore x \leq 3$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $x=3$

6 답 ⑤

$$\frac{x-1}{2} \leq \frac{2x-1}{3} \text{에서 } 3(x-1) \leq 2(2x-1)$$

$$3x-3 \leq 4x-2, -x \leq 1 \quad \therefore x \geq -1$$

$$\frac{2x-1}{3} \leq \frac{3}{5}x-2 \text{에서 } 5(2x-1) \leq 9x-30$$

$$10x-5 \leq 9x-30 \quad \therefore x \leq -25$$

따라서 주어진 부등식의 해는 없다.

7 답 ①

$$-3x-7 < 2 \text{에서 } -3x < 9 \quad \therefore x > -3$$

$$4x+2(x-3) < a \text{에서 } 4x+2x-6 < a$$

$$6x < a+6 \quad \therefore x < \frac{a+6}{6}$$

주어진 그림에서 연립부등식의 해가 $b < x < 2$ 이므로

$$b = -3, \frac{a+6}{6} = 2$$

따라서 $a=6, b=-3$ 이므로

$$ab = -18$$

8 답 $-4 \leq x < 2$

$$2x-a < x+a \text{에서 } x < 2a$$

$$2x-a \leq 3x-b \text{에서 } -x \leq a-b \quad \therefore x \geq b-a$$

주어진 연립부등식의 해가 $-10 \leq x < 2$ 이므로

$$b-a = -10, 2a = 2 \quad \therefore a = 1, b = -9$$

즉, 원래의 부등식은 $2x-1 < x+1 \leq 3x+9$ 이므로

$$2x-1 < x+1 \text{에서 } x < 2$$

$$x+1 \leq 3x+9 \text{에서 } -2x \leq 8 \quad \therefore x \geq -4$$

따라서 원래의 부등식의 해는

$$-4 \leq x < 2$$

9 답 ⑤

$$6x-2 > 3x+10 \text{에서 } 3x > 12 \quad \therefore x > 4$$

$$(a-1)x-5 < x-2 \text{에서 } (a-2)x < 3$$

(i) $a-2 < 0$, 즉 $a < 2$ 일 때,

$$x > \frac{3}{a-2}$$

(ii) $a-2 = 0$, 즉 $a = 2$ 일 때,

$$0 \times x < 3 \text{이므로 해는 모든 실수이다.}$$

(iii) $a-2 > 0$, 즉 $a > 2$ 일 때,

$$x < \frac{3}{a-2}$$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 $a > 2$ 이고 $x < \frac{3}{a-2}$ 이어야 하므로

$$\frac{3}{a-2} \leq 4$$

$$3 \leq 4(a-2), 3 \leq 4a-8$$

$$-4a \leq -11 \quad \therefore a \geq \frac{11}{4}$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 3이므로

$$m = 3$$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 $a \leq 2$ 이어야 하므로 정수 a 의 최댓값은 2이다.

$$\therefore n = 2$$

$$\therefore m+n = 5$$

10 답 $-5 \leq a < -3$

$$3(2x+5) \geq 14(x+1) \text{에서}$$

$$6x+15 \geq 14x+14$$

$$-8x \geq -1 \quad \therefore x \leq \frac{1}{8}$$

..... ㉠

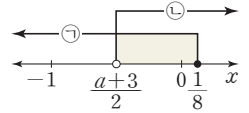
$$2x-5 > a-2 \text{에서 } 2x > a+3 \quad \therefore x > \frac{a+3}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x

가 1개뿐이라면 오른쪽 그림에서

$$-1 \leq \frac{a+3}{2} < 0, -2 \leq a+3 < 0$$

$$\therefore -5 \leq a < -3$$



11 답 11

어떤 자연수를 x 라 하면 (㉠), (㉡)에서

$$\begin{cases} 7x-220 > 60 \\ 3x-150 \leq 3 \end{cases}$$

$$7x-220 > 60 \text{에서 } 7x > 280 \quad \therefore x > 40$$

$$3x-150 \leq 3 \text{에서 } 3x \leq 153 \quad \therefore x \leq 51$$

따라서 연립부등식의 해는 $40 < x \leq 51$ 이므로 조건을 만족시키는 자연수는 41, 42, 43, ..., 51의 11개이다.

12 답 ③

작년 남자 회원 수와 여자 회원 수의 비가 5:4이므로 남자 회원 수와 여자 회원 수를 각각 $5k, 4k$ (k 는 자연수)라 하자.

올해 새로 가입한 남자 회원 수와 여자 회원 수를 각각 a (a 는 자연수)라 하면 올해 남자 회원 수와 여자 회원 수는 각각 $5k+a, 4k+a$ 이다.

올해 남자 회원 수와 여자 회원 수의 비가 11:9이므로

$$(5k+a):(4k+a) = 11:9$$

$$11(4k+a) = 9(5k+a), 44k+11a = 45k+9a$$

$$\therefore k = 2a$$

따라서 작년 전체 회원 수는

$$5k+4k = 9k = 18a$$

또 올해 전체 회원 수는

$$(5k+a)+(4k+a) = 9k+2a = 20a$$

작년 전체 회원 수는 300명 미만이고, 올해 전체 회원 수는 300명 초과이므로

$$\begin{cases} 18a < 300 \\ 20a > 300 \end{cases}$$

$$18a < 300 \text{에서 } a < \frac{50}{3}$$

$$20a > 300 \text{에서 } a > 15$$

$$\therefore 15 < a < \frac{50}{3}$$

이때 a 는 자연수이므로 $a = 16$

따라서 올해 새로 가입한 여자 회원 수는 16이다.

13 답 ④

$$|3x+1| < 8 \text{에서 } -8 < 3x+1 < 8$$

$$-9 < 3x < 7 \quad \therefore -3 < x < \frac{7}{3}$$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.

14 답 5

$$2 \leq |x+4| \leq a \text{에서 } -a \leq x+4 \leq -2 \text{ 또는 } 2 \leq x+4 \leq a$$

$$\therefore -a-4 \leq x \leq -6 \text{ 또는 } -2 \leq x \leq a-4$$

이를 만족시키는 정수 x 가 8개이므로
 $\{-6-(-a-4)+1\}+\{a-4-(-2)+1\}=8$
 $2a=10 \quad \therefore a=5$

15 답 5

$|2x+a| \geq 7$ 에서 $2x+a \leq -7$ 또는 $2x+a \geq 7$

$$\therefore x \leq \frac{-7-a}{2} \text{ 또는 } x \geq \frac{7-a}{2}$$

주어진 부등식의 해가 $x \leq -5$ 또는 $x \geq b$ 이므로

$$\frac{-7-a}{2} = -5, \frac{7-a}{2} = b$$

따라서 $a=3, b=2$ 이므로 $a+b=5$

16 답 ⑤

$|2x-4| \leq k$ 에서 $-k \leq 2x-4 \leq k$

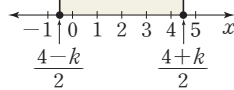
$$4-k \leq 2x \leq 4+k$$

$$\therefore \frac{4-k}{2} \leq x \leq \frac{4+k}{2}$$

이때 $k > 0$ 이므로 $\frac{4-k}{2} < 2, \frac{4+k}{2} > 2$

즉, 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 가 5개이려면 오른쪽 그림에서

$$-1 < \frac{4-k}{2} \leq 0, 4 \leq \frac{4+k}{2} < 5$$



$$-1 < \frac{4-k}{2} \leq 0 \text{에서 } -2 < 4-k \leq 0, -6 < -k \leq -4$$

$$\therefore 4 \leq k < 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$4 \leq \frac{4+k}{2} < 5 \text{에서 } 8 \leq 4+k < 10$$

$$\therefore 4 \leq k < 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분을 구하면 $4 \leq k < 6$

따라서 $a=4, b=6$ 이므로 $a+b=10$

17 답 ②

$|4-x| \leq 6-x$ 에서 $4-x=0$, 즉 $x=4$ 를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 4$ 일 때,

$$4-x \leq 6-x \text{에서 } 0 \times x \leq 2 \text{이므로 해는 모든 실수이다.}$$

$$\text{그런데 } x < 4 \text{이므로 } x < 4$$

(ii) $x \geq 4$ 일 때,

$$-(4-x) \leq 6-x, -4+x \leq 6-x$$

$$2x \leq 10 \quad \therefore x \leq 5$$

$$\text{그런데 } x \geq 4 \text{이므로 } 4 \leq x \leq 5$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x \leq 5$

따라서 자연수 x 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

18 답 ②

$|3x-6| \leq x+a$ 에서 $3x-6=0$, 즉 $x=2$ 를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 2$ 일 때,

$$-(3x-6) \leq x+a$$

$$-3x+6 \leq x+a, -4x \leq a-6$$

$$\therefore x \geq \frac{6-a}{4}$$

그런데 $x < 2$ 이므로 해를 가지려면

$$\frac{6-a}{4} < 2, 6-a < 8 \quad \therefore a > -2$$

(ii) $x \geq 2$ 일 때,

$$3x-6 \leq x+a$$

$$2x \leq a+6 \quad \therefore x \leq \frac{a+6}{2}$$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 해를 가지려면

$$\frac{a+6}{2} \geq 2, a+6 \geq 4 \quad \therefore a \geq -2$$

(i), (ii)에서 $a \geq -2$

19 답 ②

$|x+2| > 4-|x-1|$ 에서 $x+2=0, x-1=0$, 즉 $x=-2, x=1$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -2$ 일 때,

$$-(x+2) > 4+(x-1)$$

$$-x-2 > x+3, -2x > 5$$

$$\therefore x < -\frac{5}{2}$$

$$\text{그런데 } x < -2 \text{이므로 } x < -\frac{5}{2}$$

(ii) $-2 \leq x < 1$ 일 때,

$$x+2 > 4+(x-1) \text{에서 } 0 \times x > 1 \text{이므로 해는 없다.}$$

(iii) $x \geq 1$ 일 때,

$$x+2 > 4-(x-1)$$

$$x+2 > -x+5, 2x > 3$$

$$\therefore x > \frac{3}{2}$$

$$\text{그런데 } x \geq 1 \text{이므로 } x > \frac{3}{2}$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$x < -\frac{5}{2} \text{ 또는 } x > \frac{3}{2}$$

따라서 자연수 x 의 최솟값은 2이다.

20 답 $k > 4$

$$\sqrt{x^2-6x+9}+|x+1| < k \text{에서 } \sqrt{(x-3)^2}+|x+1| < k$$

$$|x-3|+|x+1| < k$$

$x+1=0, x-3=0$, 즉 $x=-1, x=3$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -1$ 일 때,

$$-(x-3)-(x+1) < k$$

$$-2x+2 < k, -2x < k-2 \quad \therefore x > \frac{2-k}{2}$$

그런데 $x < -1$ 이므로 해를 가지려면

$$\frac{2-k}{2} < -1, 2-k < -2$$

$$-k < -4 \quad \therefore k > 4$$

(ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때,

$$-(x-3)+(x+1) < k$$

$$0 \times x+4 < k$$

그런데 $-1 \leq x < 3$ 이므로 해를 가지려면

$$k > 4$$

(iii) $x \geq 3$ 일 때,

$$(x-3) + (x+1) < k$$

$$2x-2 < k, 2x < k+2 \quad \therefore x < \frac{k+2}{2}$$

그런데 $x \geq 3$ 이므로 해를 가지려면

$$\frac{k+2}{2} > 3, k+2 > 6$$

$$\therefore k > 4$$

(i), (ii), (iii)에서 $k > 4$

중단원 기출문제 2회

1 답 ①

$$7x+5 > 2x \text{에서 } 5x > -5$$

$$\therefore x > -1$$

$$2-x \geq 3x-6 \text{에서 } -4x \geq -8$$

$$\therefore x \leq 2$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $-1 < x \leq 2$ 이므로 해에 속하지 않는 것은 ①이다.

2 답 ①

$$4x - (3x-5) < 2x \text{에서 } 4x-3x+5 < 2x$$

$$-x < -5 \quad \therefore x > 5$$

$$5x+6 \geq 7(x-2) \text{에서 } 5x+6 \geq 7x-14$$

$$-2x \geq -20 \quad \therefore x \leq 10$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $5 < x \leq 10$ 이므로 수직선 위에 나타내면 ①과 같다.

3 답 6

$$3-2(x-1) \leq -x+4 \text{에서}$$

$$3-2x+2 \leq -x+4$$

$$-x \leq -1 \quad \therefore x \geq 1$$

$$-x+4 < -4x+21 \text{에서}$$

$$3x < 17 \quad \therefore x < \frac{17}{3}$$

따라서 주어진 부등식의 해는 $1 \leq x < \frac{17}{3}$ 이므로 자연수 x 의 최댓값은 5, 최솟값은 1이고 구하는 합은

$$5+1=6$$

4 답 ③

① 주어진 연립부등식의 해는

$$x=3$$

② $15x \leq 5x+30$ 에서 $10x \leq 30 \quad \therefore x \leq 3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$0 < x \leq 3$$

③ $2(x-1) \leq 4$ 에서 $2x-2 \leq 4$

$$2x \leq 6 \quad \therefore x \leq 3$$

$$x+1 > 4 \text{에서 } x > 3$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.

④ $2x+5 > 5x-7$ 에서 $-3x > -12 \quad \therefore x < 4$

$$6-2(x+2) \geq 3x \text{에서 } 6-2x-4 \geq 3x$$

$$-5x \geq -2 \quad \therefore x \leq \frac{2}{5}$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$x \leq \frac{2}{5}$$

⑤ $\frac{2x+5}{4} + \frac{x-3}{2} > -1$ 에서 $2x+5+2(x-3) > -4$

$$2x+5+2x-6 > -4, 4x > -3 \quad \therefore x > -\frac{3}{4}$$

$$2x-2 \leq 10-x \text{에서 } 3x \leq 12 \quad \therefore x \leq 4$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$-\frac{3}{4} < x \leq 4$$

따라서 해가 없는 것은 ③이다.

5 답 ③

$$\frac{4x+a}{3} < \frac{5}{6}x - \frac{2}{3} \text{에서 } 2(4x+a) < 5x-4$$

$$8x+2a < 5x-4, 3x < -2a-4$$

$$\therefore x < -\frac{2a+4}{3}$$

$$0.2x+1 < 0.1x+2 \text{에서}$$

$$2x+10 < x+20 \quad \therefore x < 10$$

주어진 연립부등식의 해가 $x < 4$ 이므로

$$-\frac{2a+4}{3} = 4$$

$$2a+4 = -12, 2a = -16 \quad \therefore a = -8$$

6 답 5

$$2x+5 \leq 3(x+1) \text{에서 } 2x+5 \leq 3x+3$$

$$-x \leq -2 \quad \therefore x \geq 2$$

$$4x \leq 2x+a+1 \text{에서 } 2x \leq a+1 \quad \therefore x \leq \frac{a+1}{2}$$

주어진 연립부등식의 해가 $b \leq x \leq 4$ 이므로

$$b=2, \frac{a+1}{2}=4$$

따라서 $a=7, b=2$ 이므로 $a-b=5$

7 답 ⑤

$$ax-3 \leq -2x+2 \text{에서 } (a+2)x \leq 5 \quad \dots\dots ㉠$$

$$-2x+2 < bx+3 \text{에서}$$

$$-(b+2)x < 1 \quad \therefore (b+2)x > -1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, 주어진 부등식의 해가 $-\frac{1}{4} \leq x < 2$ 이므로

$$㉠ \text{에서 } a+2 < 0 \quad \therefore a < -2$$

㉡, 주어진 부등식의 해가 $-\frac{1}{4} \leq x < 2$ 이므로

$$㉡ \text{에서 } b+2 < 0 \quad \therefore b < -2$$

㉠, $a < -2, b < -2$ 이므로 ㉠, ㉡에서

$$x \geq \frac{5}{a+2}, x < -\frac{1}{b+2}$$

주어진 부등식의 해가 $-\frac{1}{4} \leq x < 2$ 이므로

$$\frac{5}{a+2} = -\frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{b+2} = 2$$

$$\frac{5}{a+2} = -\frac{1}{4} \text{에서 } a+2 = -20 \quad \therefore a = -22$$

$$-\frac{1}{b+2} = 2 \text{에서 } 2b+4 = -1, \quad 2b = -5 \quad \therefore b = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore ab = 55$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

8 답 a > 15/2

$$3x - 2a < -a \text{에서 } 3x < a \quad \therefore x < \frac{a}{3}$$

$$-2x + 5 < 0 \text{에서 } -2x < -5 \quad \therefore x > \frac{5}{2}$$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면

$$\frac{a}{3} > \frac{5}{2} \quad \therefore a > \frac{15}{2}$$

9 답 9

$$\frac{2}{3}x + 1 < 2x - a \text{에서 } 2x + 3 < 6x - 3a$$

$$-4x < -3a - 3 \quad \therefore x > \frac{3a+3}{4}$$

$$0.3(4-x) \geq 0.1x - 1.6 \text{에서 } 3(4-x) \geq x - 16$$

$$12 - 3x \geq x - 16, \quad -4x \geq -28 \quad \therefore x \leq 7$$

$$\text{주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 } \frac{3a+3}{4} \geq 7$$

$$3a+3 \geq 28, \quad 3a \geq 25 \quad \therefore a \geq \frac{25}{3}$$

따라서 정수 a의 최솟값은 9이다.

10 답 ①

$$x - 3 < a \text{에서 } x < a + 3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$3x + 6 \geq 0 \text{에서 } 3x \geq -6 \quad \therefore x \geq -2 \quad \dots\dots ㉡$$

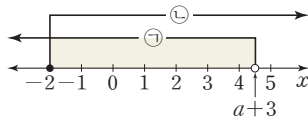
주어진 연립부등식을 만족시키는

정수 x의 값의 합이 7이려면

오른쪽 그림에서

$$4 < a + 3 \leq 5 \quad \therefore 1 < a \leq 2$$

따라서 a의 최댓값은 2이다.



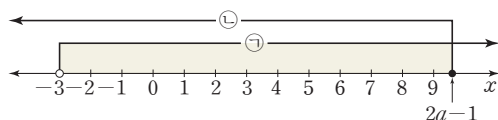
11 답 ④

$$2(x-2) - 1 < 4x + 1 \text{에서 } 2x - 5 < 4x + 1$$

$$-2x < 6 \quad \therefore x > -3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$4x + 1 \leq 3x + 2a \text{에서 } x \leq 2a - 1 \quad \dots\dots ㉡$$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 12개 이상이라면 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $2a - 1 \geq 9$ 이므로

$$2a \geq 10 \quad \therefore a \geq 5$$

12 답 1 ≤ x ≤ 7

색연필을 x자루 사면 연필은 (13-x)자루 살 수 있으므로

$$4100 \leq 500x + 300(13-x) \leq 5300$$

$$4100 \leq 500x + 3900 - 300x \leq 5300$$

$$4100 \leq 200x + 3900 \leq 5300, \quad 200 \leq 200x \leq 1400$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 7$$

13 답 750

섞은 두 소금물의 양은 (300+x) g이므로

$$\frac{14}{100} \times (300+x) \leq \frac{12}{100} \times 300 + \frac{18}{100} \times x \leq \frac{16}{100} \times (300+x)$$

$$\frac{14}{100} \times (300+x) \leq \frac{12}{100} \times 300 + \frac{18}{100} \times x \text{에서}$$

$$14 \times (300+x) \leq 12 \times 300 + 18 \times x$$

$$4200 + 14x \leq 3600 + 18x$$

$$-4x \leq -600 \quad \therefore x \geq 150$$

$$\frac{12}{100} \times 300 + \frac{18}{100} \times x \leq \frac{16}{100} \times (300+x) \text{에서}$$

$$12 \times 300 + 18 \times x \leq 16 \times (300+x)$$

$$3600 + 18x \leq 4800 + 16x$$

$$2x \leq 1200 \quad \therefore x \leq 600$$

$$\therefore 150 \leq x \leq 600$$

따라서 x의 최댓값과 최솟값의 합은

$$600 + 150 = 750$$

14 답 3

$$|x-2a| < 5 \text{에서 } -5 < x-2a < 5$$

$$\therefore 2a-5 < x < 2a+5$$

$$3-2x \leq 7 \text{에서 } -2x \leq 4$$

$$\therefore x \geq -2$$

주어진 연립부등식의 해가 $b \leq x < 7$ 이므로

$$b = -2, \quad 2a+5 = 7$$

따라서 $a=1, b=-2$ 이므로

$$a-b=3$$

15 답 1

$$|6x-3| + a - 1 < 0 \text{에서}$$

$$|6x-3| < 1-a$$

주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면

$$1-a \leq 0 \quad \therefore a \geq 1$$

따라서 a의 최솟값은 1이다.

16 답 ①

$$|x-7| < 3n \text{에서 } -3n < x-7 < 3n$$

$$\therefore 7-3n < x < 7+3n$$

자연수 n에 대하여

$$(i) \quad 7-3n > 0, \quad \text{즉 } n < \frac{7}{3} \text{일 때,}$$

$$f(n) = 7+3n - (7-3n) - 1 = 6n-1 \text{이므로}$$

$$f(1) = 6-1=5, \quad f(2) = 12-1=11$$

(ii) $7-3n < 0$, 즉 $n > \frac{7}{3}$ 일 때,

$$f(n) = 7 + 3n - 1 = 3n + 6 \text{이므로}$$

$$f(3) = 9 + 6 = 15, f(4) = 12 + 6 = 18, f(5) = 15 + 6 = 21$$

(i), (ii)에서

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 5 + 11 + 15 + 18 + 21 = 70$$

17 답 1

$|x-1| < 4x-1$ 에서 $x-1=0$, 즉 $x=1$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 1$ 일 때,

$$-(x-1) < 4x-1$$

$$-x+1 < 4x-1, -5x < -2$$

$$\therefore x > \frac{2}{5}$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $\frac{2}{5} < x < 1$

(ii) $x \geq 1$ 일 때,

$$x-1 < 4x-1$$

$$-3x < 0 \quad \therefore x > 0$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x \geq 1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$x > \frac{2}{5}$$

따라서 정수 x 의 최솟값은 1이다.

18 답 ①

$|4x+6| \leq -3x+8$ 에서 $4x+6=0$, 즉 $x = -\frac{3}{2}$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -\frac{3}{2}$ 일 때,

$$-(4x+6) \leq -3x+8$$

$$-4x-6 \leq -3x+8, -x \leq 14$$

$$\therefore x \geq -14$$

그런데 $x < -\frac{3}{2}$ 이므로 $-14 \leq x < -\frac{3}{2}$

(ii) $x \geq -\frac{3}{2}$ 일 때,

$$4x+6 \leq -3x+8$$

$$7x \leq 2 \quad \therefore x \leq \frac{2}{7}$$

그런데 $x \geq -\frac{3}{2}$ 이므로 $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{2}{7}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$-14 \leq x \leq \frac{2}{7} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$|x-a| \leq b \text{에서 } -b \leq x-a \leq b$$

$$\therefore a-b \leq x \leq a+b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②이 서로 같으므로

$$a-b = -14, a+b = \frac{2}{7}$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$= -14 \times \frac{2}{7} = -4$$

19 답 ②

$|x+1| \geq 2|x-1|$ 에서 $x+1=0$, $x-1=0$, 즉 $x=-1$, $x=1$ 을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -1$ 일 때,

$$-(x+1) \geq -2(x-1)$$

$$-x-1 \geq -2x+2 \quad \therefore x \geq 3$$

그런데 $x < -1$ 이므로 해는 없다.

(ii) $-1 \leq x < 1$ 일 때,

$$x+1 \geq -2(x-1)$$

$$x+1 \geq -2x+2$$

$$3x \geq 1 \quad \therefore x \geq \frac{1}{3}$$

그런데 $-1 \leq x < 1$ 이므로

$$\frac{1}{3} \leq x < 1$$

(iii) $x \geq 1$ 일 때,

$$x+1 \geq 2(x-1)$$

$$x+1 \geq 2x-2$$

$$-x \geq -3 \quad \therefore x \leq 3$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로

$$1 \leq x \leq 3$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$\frac{1}{3} \leq x \leq 3$$

$$\therefore a = \frac{1}{3}$$

20 답 12

$|x| + |x-a| < a+6$ 에서 $x=0$, $x-a=0$, 즉 $x=0$, $x=a$ 를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < 0$ 일 때,

$$-x - (x-a) < a+6$$

$$-2x < 6 \quad \therefore x > -3$$

그런데 $x < 0$ 이므로

$$-3 < x < 0$$

(ii) $0 \leq x < a$ 일 때,

$$x - (x-a) < a+6 \text{에서 } 0 \times x < 6 \text{이므로 해는 모든 실수이다.}$$

그런데 $0 \leq x < a$ 이므로

$$0 \leq x < a$$

(iii) $x \geq a$ 일 때,

$$x + (x-a) < a+6$$

$$2x < 2a+6 \quad \therefore x < a+3$$

그런데 $x \geq a$ 이므로

$$a \leq x < a+3$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$-3 < x < a+3$$

따라서 정수 x 의 개수는

$$N(a) = a+3 - (-3) - 1 = a+5$$

$$\therefore N(5) - N(6) + N(7) - N(8) + N(9)$$

$$= 10 - 11 + 12 - 13 + 14 = 12$$

중단원 기출문제 1회

1 답 $-1 < x < 2$

부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해는 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=g(x)$ 보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로
 $-1 < x < 2$

2 답 ④

$f(x) = a(x+4)(x-2)$ ($a < 0$)라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(0, 4)$ 를 지나므로 $f(0)=4$ 에서

$$-8a=4 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{2}(x+4)(x-2)$$

$$f(x) > -8 \text{에서 } -\frac{1}{2}(x+4)(x-2) > -8$$

$$x^2 + 2x - 8 < 16, x^2 + 2x - 24 < 0$$

$$(x+6)(x-4) < 0 \quad \therefore -6 < x < 4$$

따라서 정수 x 는 $-5, -4, -3, \dots, 3$ 의 9개이다.

3 답 1500원

가격을 $100x$ 원 내리면 쿠키 한 개의 가격은 $(3000-100x)$ 원, 하루 판매량은 $(400+40x)$ 개가 된다.

이때 하루 판매액이 1500000원 이상이라면

$$(3000-100x)(400+40x) \geq 1500000$$

$$(30-x)(x+10) \geq 375, x^2 - 20x + 75 \leq 0$$

$$(x-5)(x-15) \leq 0 \quad \therefore 5 \leq x \leq 15$$

따라서 쿠키 한 개의 최소 가격은 $x=15$ 일 때이므로

$$3000 - 100 \times 15 = 1500(\text{원})$$

4 답 ④

이차부등식 $ax^2+bx+c < 0$ 의 해가 $x < \alpha$ 또는 $x > \beta$ 이므로
 $a < 0$

또 α, β 는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 해이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{b}{a} = -15, \frac{c}{a} = 12$$

$$\therefore b=15a, c=12a$$

이를 $cx^2-bx-18a > 0$ 에 대입하면

$$12ax^2 - 15ax - 18a > 0$$

$$4x^2 - 5x - 6 < 0 \quad (\because a < 0)$$

$$(4x+3)(x-2) < 0 \quad \therefore -\frac{3}{4} < x < 2$$

5 답 $x \leq 0$ 또는 $x \geq \frac{3}{2}$

이차부등식 $f(x) > 0$ 의 해가 $-1 < x < 2$ 이므로

$$f(x) = a(x+1)(x-2) \quad (a < 0) \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} f(2x-1) &= a(2x-1+1)(2x-1-2) \\ &= 2ax(2x-3) \end{aligned}$$

따라서 부등식 $f(2x-1) \leq 0$, 즉 $2ax(2x-3) \leq 0$ 에서
 $x(2x-3) \geq 0 \quad (\because a < 0)$

$$\therefore x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq \frac{3}{2}$$

6 답 ④

$$x^2 - k < 0 \text{에서 } (x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k}) < 0$$

$$\therefore -\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$$

주어진 이차부등식을 만족시키는 정

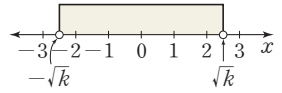
수 x 가 5개이라면 오른쪽 그림에서

$$2 < \sqrt{k} \leq 3 \quad \therefore 4 < k \leq 9$$

따라서 자연수 k 의 최댓값은 9, 최솟값은 5이므로

$$M=9, m=5$$

$$\therefore M+m=14$$



7 답 ⑤

모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt{2x^2+2(a-3)x+a+1}$ 이 실수가 되려면 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $2x^2+2(a-3)x+a+1 \geq 0$ 이 성립해야 한다.

이차방정식 $2x^2+2(a-3)x+a+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-3)^2 - 2(a+1) \leq 0$$

$$a^2 - 8a + 7 \leq 0, (a-1)(a-7) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq a \leq 7$$

따라서 a 의 최댓값은 7이다.

8 답 ③

이차방정식 $x^2-2(a+k)x-4a+6=0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (a+k)^2 - (-4a+6) \geq 0$$

$$k^2 + 2ak + a^2 + 4a - 6 \geq 0$$

이 부등식이 실수 k 의 값에 관계없이 성립하므로 k 에 대한 이차방정식 $k^2+2ak+a^2+4a-6=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - (a^2+4a-6) \leq 0$$

$$-4a+6 \leq 0 \quad \therefore a \geq \frac{3}{2}$$

9 답 10

이차부등식 $2x^2-(k+3)x+2k \leq 0$ 의 해가 오직 한 개이므로 이차방정식 $2x^2-(k+3)x+2k=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (k+3)^2 - 16k = 0$$

$$k^2 - 10k + 9 = 0, (k-1)(k-9) = 0$$

$$\therefore k=1 \text{ 또는 } k=9$$

따라서 모든 k 의 값의 합은

$$1+9=10$$

10 답 9

이차부등식 $-x^2+2(a-4)x-25 \geq 0$, 즉 $x^2-2(a-4)x+25 \leq 0$ 이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2-2(a-4)x+25 > 0 \text{이 성립해야 한다.}$$

즉, 이차방정식 $x^2-2(a-4)x+25=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-4)^2 - 25 < 0$$

$$a^2 - 8a - 9 < 0, (a+1)(a-9) < 0$$

$$\therefore -1 < a < 9$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, ..., 8의 9개이다.

11 답 $k \leq -2$

$f(x) = x^2 - 6x + 5 - 2k$ 라 하면

$$f(x) = (x-3)^2 - 2k - 4$$

$1 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이어야 하므로

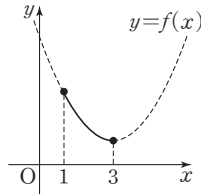
$y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$1 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최소이므로

$$f(3) \geq 0 \text{에서}$$

$$-2k - 4 \geq 0, -2k \geq 4$$

$$\therefore k \leq -2$$



12 답 ②

이차함수 $y = 2x^2 - 3x - 3$ 의 그래프가 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위는

$$2x^2 - 3x - 3 > x^2 + ax + b, \text{ 즉 } x^2 - (3+a)x - 3 - b > 0 \quad \dots\dots ㉠$$

의 해와 같다.

해가 $x < -1$ 또는 $x > 2$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+1)(x-2) > 0$$

$$\therefore x^2 - x - 2 > 0$$

이 부등식이 ㉠과 같으므로

$$-(3+a) = -1, -3-b = -2$$

$$\therefore a = -2, b = -1$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5$$

13 답 ①

이차함수 $y = x^2 + (k+2)x + 2$ 의 그래프가 직선 $y = x + 1$ 보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2 + (k+2)x + 2 > x + 1, \text{ 즉 } x^2 + (k+1)x + 1 > 0 \text{이 성립해야 한다.}$$

이차방정식 $x^2 + (k+1)x + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (k+1)^2 - 4 < 0$$

$$k^2 + 2k - 3 < 0, (k+3)(k-1) < 0$$

$$\therefore -3 < k < 1$$

따라서 $a = -3, b = 1$ 이므로

$$a + b = -2$$

14 답 ②

$$3x^2 - 8x - 16 < 0 \text{에서 } (3x+4)(x-4) < 0$$

$$\therefore -\frac{4}{3} < x < 4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2 + x - 6 \leq 0 \text{에서 } (x+3)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$-\frac{4}{3} < x \leq 2$$

15 답 8

$$x^2 - (a+c)x + ac < 0 \text{에서 } (x-a)(x-c) < 0$$

$$\therefore a < x < c \quad (\because a < c) \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2 + (a+b)x + ab \geq 0 \text{에서 } (x+a)(x+b) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -b \text{ 또는 } x \geq -a \quad (\because -b < -a) \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분이 $-5 < x \leq 2$ 또는 $5 \leq x < 6$ 이므로

$$a = -5, b = -2, c = 6$$

이를 $x^2 - (c-b)x - bc < 0$ 에 대입하면

$$x^2 - 8x + 12 < 0, (x-2)(x-6) < 0$$

$$\therefore 2 < x < 6$$

따라서 $p = 2, q = 6$ 이므로

$$p + q = 8$$

16 답 ④

$$|x-3| > k \text{에서 } x-3 < -k \text{ 또는 } x-3 > k$$

$$\therefore x < 3-k \text{ 또는 } x > 3+k \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2 - x - 12 \leq 0 \text{에서 } (x+3)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분이 없으려면 오른쪽

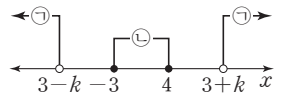
쪽 그림에서

$$3-k \leq -3, 3+k \geq 4$$

$$k \geq 6, k \geq 1$$

$$\therefore k \geq 6$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 6이다.



17 답 $7 < a \leq 8$

$$x^2 - (a+1)x + a < 0 \text{에서}$$

$$(x-a)(x-1) < 0 \quad \dots\dots ㉠$$

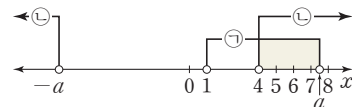
$$x^2 + (a-4)x - 4a > 0 \text{에서}$$

$$(x+a)(x-4) > 0$$

$$\therefore x < -a \text{ 또는 } x > 4 \quad \dots\dots ㉡$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 가 3개이려면 ㉠에서

$1 < x < a$ 이고 다음 그림과 같아야 한다.



$$\therefore 7 < a \leq 8$$

18 답 ⑤

변의 길이는 양수이므로

$$x-3 > 0 \quad \therefore x > 3 \quad \dots\dots ㉠$$

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $x+3$ 이므로

$$x+3 < x+(x-3) \quad \therefore x > 6 \quad \dots\dots ㉡$$

이 삼각형이 예각삼각형이 되려면

$$(x+3)^2 < x^2 + (x-3)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 < x^2 + x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 12x > 0, x(x-12) > 0 \quad \therefore x < 0 \text{ 또는 } x > 12 \quad \dots\dots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $x > 12$

따라서 자연수 x 의 최솟값은 13이다.

19 답 -2

이차방정식 $x^2+2kx-k+2=0$ 의 판별식을 D , 두 실근을 α, β 라 하면 두 근이 모두 양수이므로

- (i) $\frac{D}{4}=k^2-(-k+2)\geq 0, k^2+k-2\geq 0$
 $(k+2)(k-1)\geq 0 \quad \therefore k\leq -2 \text{ 또는 } k\geq 1$
 (ii) $\alpha+\beta=-2k>0$ 에서 $k<0$
 (iii) $\alpha\beta=-k+2>0$ 에서 $k<2$
 (i), (ii), (iii)에서 k 의 값의 범위는 $k\leq -2$
 따라서 k 의 최댓값은 -2 이다.

20 답 ①

$f(x)=x^2-6ax+9$ 라 할 때

(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=9a^2-9\geq 0, (a+1)(a-1)\geq 0$$

$$\therefore a\leq -1 \text{ 또는 } a\geq 1$$

(ii) $f(-2)>0$ 이어야 하므로 $4+12a+9>0$

$$12a>-13 \quad \therefore a>-\frac{13}{12}$$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=3a$ 이므로

$$3a>-2 \quad \therefore a>-\frac{2}{3}$$

(i), (ii), (iii)에서 a 의 값의 범위는 $a\geq 1$

따라서 a 의 최솟값은 1 이다.

중단원 기출문제 2회

1 답 ②

$ax^2+(b-m)x+c-n\geq 0$ 에서

$ax^2+bx+c\geq mx+n$

이 부등식의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 직선 $y=mx+n$ 보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위이므로 $-3\leq x\leq 4$

2 답 ⑤

① $x^2-4x+3>0$ 에서 $(x-1)(x-3)>0$

$$\therefore x<1 \text{ 또는 } x>3$$

② $x^2-2x+4=(x-1)^2+3\geq 3$ 이므로 이차부등식 $x^2-2x+4<0$ 의 해는 없다.

③ $-9x^2+12x-4<0$ 에서 $9x^2-12x+4>0$

$$(3x-2)^2>0$$

따라서 해는 $x\neq \frac{2}{3}$ 인 모든 실수이다.

④ $-2x^2+5x-2\geq 0$ 에서 $2x^2-5x+2\leq 0$

$$(2x-1)(x-2)\leq 0 \quad \therefore \frac{1}{2}\leq x\leq 2$$

⑤ $x^2-6x+9=(x-3)^2\geq 0$ 이므로 이차부등식 $x^2-6x+9\geq 0$ 의 해는 모든 실수이다.

3 답 0 m 초과 4 m 이하

길의 폭을 x m라 하면 길을 제외한 땅의 넓이는 한 변의 길이가 $(12-x)$ m인 정사각형의 넓이와 같다.

이 넓이가 64 m^2 이상이 되어야 하므로

$$(12-x)^2\geq 64$$

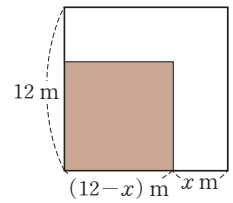
$$x^2-24x+80\geq 0$$

$$(x-4)(x-20)\geq 0$$

$$\therefore x\leq 4 \text{ 또는 } x\geq 20$$

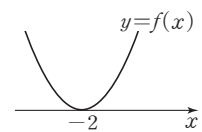
그런데 $0<x<12$ 이므로 $0<x\leq 4$

따라서 길의 폭의 범위는 0 m 초과 4 m 이하이다.



4 답 ②

$f(x)=ax^2+bx+c$ 라 할 때, $f(x)\leq 0$ 의 해가 $x=-2$ 뿐이라면 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $a>0$ 이고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D 라 할 때, $D=0$ 이어야 한다.

ㄱ. $D=0$ 이어야 하므로 $b^2-4ac=0$

ㄴ. $f(1)>0$ 이므로

$$a+b+c>0$$

ㄷ. 해가 $x=-2$ 뿐이므로 $a(x+2)^2\leq 0$

$$\therefore ax^2+4ax+4a\leq 0$$

이 부등식이 $ax^2+bx+c\leq 0$ 과 같으므로

$$b=4a, c=4a$$

이를 $cx^2+2bx-12a\geq 0$ 에 대입하면

$$4ax^2+8ax-12a\geq 0$$

$$x^2+2x-3\geq 0 \quad (\because a>0)$$

$$(x+3)(x-1)\geq 0 \quad \therefore x\leq -3 \text{ 또는 } x\geq 1$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

5 답 ①

$x^2+2(a-3)x+a^2-6a<0$ 에서

$$(x+a)\{x+(a-6)\}<0$$

$$\therefore -a<x<-a+6$$

따라서 정수 x 는 $-a+1, -a+2, -a+3, -a+4, -a+5$ 이고

그 합은 10 이므로

$$-a+1+(-a+2)+(-a+3)+(-a+4)+(-a+5)=10$$

$$-5a+15=10, -5a=-5$$

$$\therefore a=1$$

6 답 $-3< k < -1$

이차부등식 $x^2-2(k+1)x-2k-2>0$ 의 해가 모든 실수이려면 이차방정식 $x^2-2(k+1)x-2k-2=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(-2k-2)<0$$

$$k^2+4k+3<0, (k+3)(k+1)<0$$

$$\therefore -3<k<-1$$

7 답 ③

(i) $a > 0$ 일 때,

이차함수 $y = ax^2 + 2ax - 4$ 의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ii) $a < 0$ 일 때,

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식

$ax^2 + 2ax - 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 + 4a > 0$$

$$a(a+4) > 0 \quad \therefore a < -4 \text{ 또는 } a > 0$$

그런데 $a < 0$ 이므로 $a < -4$

(i), (ii)에서 a 의 값의 범위는

$$a < -4 \text{ 또는 } a > 0$$

8 답 -1

이차부등식 $(2-a)x^2 + 2(a-2)x + 3 > 0$ 을 만족시키지 않는 x 의 값이 오직 한 개이면 이차부등식 $(2-a)x^2 + 2(a-2)x + 3 \leq 0$ 의 해가 오직 한 개이어야 하므로

$$2-a > 0 \quad \therefore a < 2$$

또 이차방정식 $(2-a)x^2 + 2(a-2)x + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-2)^2 - 3(2-a) = 0$$

$$a^2 - a - 2 = 0, (a+1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 2$$

그런데 $a < 2$ 이므로 $a = -1$

9 답 ①

이차부등식 $x^2 - 4(a+2)x - a - 2 < 0$ 이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 4(a+2)x - a - 2 \geq 0$ 이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2 - 4(a+2)x - a - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4(a+2)^2 - (-a-2) \leq 0$$

$$4a^2 + 17a + 18 \leq 0, (4a+9)(a+2) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{9}{4} \leq a \leq -2$$

따라서 정수 a 의 값은 -2이다.

10 답 4

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 부등식 $f(x) < g(x)$ 가 항상 성립하려면

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 이차부등식 $x^2 - 2x + a < -x^2 - 3x + 2a$, 즉

$2x^2 + x - a < 0$ 이 항상 성립해야 한다.

$h(x) = 2x^2 + x - a$ 라 하면

$$h(x) = 2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - a - \frac{1}{8}$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $h(x) < 0$ 이어야 하므로

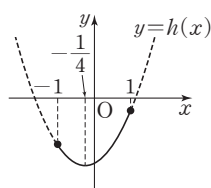
$y = h(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $h(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최대이

므로 $h(1) < 0$ 에서

$$3 - a < 0 \quad \therefore a > 3$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 4이다.



11 답 ②

이차함수 $y = x^2 + ax - 3$ 의 그래프가 직선 $y = x - 11$ 보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위는

$$x^2 + ax - 3 > x - 11, \text{ 즉 } x^2 + (a-1)x + 8 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

의 해와 같다.

해가 $x < 2$ 또는 $x > b$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-2)(x-b) > 0$$

$$\therefore x^2 - (b+2)x + 2b > 0$$

이 부등식이 ①과 같으므로

$$a-1 = -b-2, 8 = 2b$$

$$\therefore a = -5, b = 4$$

$$\therefore b - a = 9$$

12 답 $-4 < k < 0$

이차함수 $y = x^2 + kx - k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으려면 이차함수의 그래프가 항상 x 축보다 위쪽에 있어야 하므로 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + kx - k > 0$ 이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2 + kx - k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = k^2 + 4k < 0, k(k+4) < 0$$

$$\therefore -4 < k < 0$$

13 답 ③

$|x-2| > 1$ 에서 $x-2 < -1$ 또는 $x-2 > 1$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x^2 - 4x - 12 \leq 0$ 에서 $(x+2)(x-6) \leq 0$

$$\therefore -2 \leq x \leq 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분을 구하면

$$-2 \leq x < 1 \text{ 또는 } 3 < x \leq 6$$

따라서 정수 x 는 -2, -1, 0, 4, 5, 6의 6개이다.

14 답 3

$x^2 - 4x + 3 \geq 0$ 에서 $(x-1)(x-3) \geq 0$

$$\therefore x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

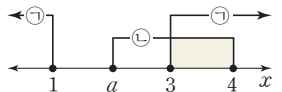
$$(x-4)(x-a) \leq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①과 ②의 해의 공통부분이 $3 \leq x \leq 4$

이려면 오른쪽 그림에서

$$1 < a \leq 3$$

따라서 a 의 최댓값은 3이다.



15 답 $a \geq -4$

$x^2 - 8x + 12 \leq 0$ 에서 $(x-2)(x-6) \leq 0$

$$\therefore 2 \leq x \leq 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$2x^2 + (a-8)x - 4a \leq 0$ 에서

$$(x-4)(2x+a) \leq 0$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} < 4 \text{ 일 때, } -\frac{a}{2} \leq x \leq 4 \\ -\frac{a}{2} = 4 \text{ 일 때, } x = 4 \\ -\frac{a}{2} > 4 \text{ 일 때, } 4 \leq x \leq -\frac{a}{2} \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $x^2 - 6x + 8 \leq 0$ 에서 $(x-2)(x-4) \leq 0$

$$\therefore 2 \leq x \leq 4$$

이 부등식이 ㉠, ㉡의 공통부분과 같으려면

$$-\frac{a}{2} \leq 2 \quad \therefore a \geq -4$$

16 답 ④

$$x^2 + 6x - 16 \leq 0 \text{에서 } (x+8)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -8 \leq x \leq 2 \quad \dots\dots ㉠$$

$$x^2 - 3kx - 4k^2 > 0 \text{에서}$$

$$(x+k)(x-4k) > 0 \quad \dots\dots ㉡$$

(i) $k > 0$ 일 때,

$$㉡ \text{에서 } x < -k \text{ 또는 } x > 4k$$

㉠과 공통부분이 있으려면

$$-k > -8, 4k < 2$$

$$k < 8, k < \frac{1}{2} \quad \therefore k < \frac{1}{2}$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $0 < k < \frac{1}{2}$

(ii) $k = 0$ 일 때,

㉡에서 해는 $x \neq 0$ 인 모든 실수이므로 ㉠과 공통부분이 존재한다.

(iii) $k < 0$ 일 때,

$$㉡ \text{에서 } x < 4k \text{ 또는 } x > -k$$

㉠과 공통부분이 있으려면

$$4k > -8, -k < 2$$

$$\therefore k > -2$$

그런데 $k < 0$ 이므로 $-2 < k < 0$

(i), (ii), (iii)에서 k 의 값의 범위는 $-2 < k < 8$

따라서 정수 k 는 $-1, 0, 1, \dots, 7$ 의 9개이다.

17 답 1

$$x - a \leq 1 \text{에서 } x \leq a + 1 \quad \dots\dots ㉠$$

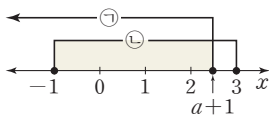
$$x^2 - 2x \leq 3 \text{에서 } x^2 - 2x - 3 \leq 0$$

$$(x+1)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합이 2가 되려면 오른쪽 그림에서

$$2 \leq a + 1 < 3 \quad \therefore 1 \leq a < 2$$

따라서 정수 a 의 값은 1이다.



18 답 -6

이차방정식 $x^2 + 2mx + 4m + 5 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = m^2 - (4m + 5) \geq 0$$

$$m^2 - 4m - 5 \geq 0$$

$$(m+1)(m-5) \geq 0$$

$$\therefore m \leq -1 \text{ 또는 } m \geq 5 \quad \dots\dots ㉠$$

부등식 $(m+3)x^2 - 2(m+3)x + 6 > 0$ 에서

(i) $m = -3$ 일 때,

$0 \times x^2 - 0 \times x + 6 > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $m \neq -3$ 일 때,

$$m+3 > 0 \text{에서 } m > -3 \quad \dots\dots ㉡$$

또 이차방정식 $(m+3)x^2 - 2(m+3)x + 6 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (m+3)^2 - 6(m+3) < 0$$

$$m^2 - 9 < 0, (m+3)(m-3) < 0$$

$$\therefore -3 < m < 3 \quad \dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢에서 $-3 < m < 3$

(i), (ii)에서 m 의 값의 범위는

$$-3 \leq m < 3 \quad \dots\dots ㉣$$

㉠, ㉣의 공통부분은

$$-3 \leq m \leq -1$$

따라서 정수 m 의 값은 $-3, -2, -1$ 이므로 구하는 합은

$$-3 + (-2) + (-1) = -6$$

19 답 ②

이차방정식 $x^2 - 3(k-1)x - k - 5 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$$\alpha\beta = -k - 5 < 0$$

$$\therefore k > -5 \quad \dots\dots ㉠$$

또 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크므로

$$\alpha + \beta = 3(k-1) < 0$$

$$\therefore k < 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 k 의 값의 범위는

$$-5 < k < 1$$

따라서 $a = -5, b = 1$ 이므로

$$b - a = 6$$

20 답 $-3 < m < -2$

$f(x) = x^2 + mx + m + 3$ 이라 하면 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -2 와 3 사이에 있으므로

(i) 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = m^2 - 4(m+3) > 0$$

$$m^2 - 4m - 12 > 0, (m+2)(m-6) > 0$$

$$\therefore m < -2 \text{ 또는 } m > 6$$

(ii) $f(-2) > 0$ 이어야 하므로 $4 - 2m + m + 3 > 0$

$$-m + 7 > 0$$

$$\therefore m < 7$$

(iii) $f(3) > 0$ 이어야 하므로 $9 + 3m + m + 3 > 0$

$$4m + 12 > 0$$

$$\therefore m > -3$$

(iv) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = -\frac{m}{2}$ 이므로

$$-2 < -\frac{m}{2} < 3$$

$$\therefore -6 < m < 4$$

(i)~(iv)에서 m 의 값의 범위는

$$-3 < m < -2$$

중단원 기출문제 ①

1 답 ⑤

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 차가 3인 경우는

(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)의 6가지

(ii) 눈의 수의 차가 4인 경우는

(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)의 4가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $6+4=10$

2 답 13

이차방정식 $3ax^2+12x+b=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=36-3ab<0$$

$$\therefore ab>12$$

따라서 순서쌍 (a, b) 는 (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)의 13개이다.

3 답 12

100원, 300원, 600원짜리 사탕을 각각 x 개, y 개, z 개 산다고 하면
그 금액의 합이 1500원이므로

$$100x+300y+600z=1500$$

$$\therefore x+3y+6z=15 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

따라서 구하는 방법의 수는 방정식 ①을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수와 같다.

(i) $z=0$ 일 때, $x+3y=15$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

(15, 0), (12, 1), (9, 2), (6, 3), (3, 4), (0, 5)의 6개

(ii) $z=1$ 일 때, $x+3y=9$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

(9, 0), (6, 1), (3, 2), (0, 3)의 4개

(iii) $z=2$ 일 때, $x+3y=3$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

(3, 0), (0, 1)의 2개

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$$6+4+2=12$$

4 답 ②

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 6, 8의 4개

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5개

따라서 구하는 자연수의 개수는 $4 \times 5 = 20$

5 답 ④

$(p+q)(x-y+z)$ 를 전개하였을 때 생기는 항의 개수는

$$2 \times 3 = 6$$

$(x+y)^2(a+b+c)$, 즉 $(x^2+2xy+y^2)(a+b+c)$ 를 전개하였을 때 생기는 항의 개수는

$$3 \times 3 = 9$$

따라서 구하는 항의 개수는

$$6+9=15$$

6 답 4

$60=2^2 \times 3 \times 5$ 이므로 60의 양의 약수의 개수는

$$(2+1)(1+1)(1+1)=12 \quad \therefore a=12$$

$168=2^3 \times 3 \times 7$ 이므로 168의 양의 약수의 개수는

$$(3+1)(1+1)(1+1)=16 \quad \therefore b=16$$

$$\therefore b-a=4$$

7 답 72

(i) $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A$ 로 가는 경우의 수는

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$$

(ii) $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ 로 가는 경우의 수는

$$3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$36+36=72$$

8 답 540

A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 3가지, E에 칠할 수 있는 색은 A와 D에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 구하는 경우의 수는

$$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$$

9 답 ④

500원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

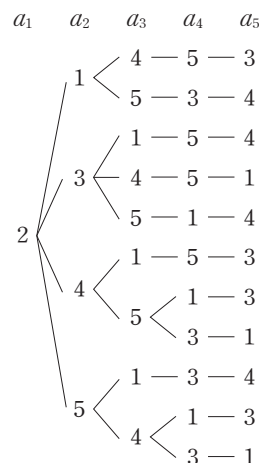
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 구하는 방법의 수는

$$5 \times 3 \times 4 \times 3 - 1 = 179$$

10 답 ④

$a_1=2, a_k \neq k (k=2, 3, 4, 5)$ 를 만족시키는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 11이다.



11 답 6

$2 \times {}_nP_2 + {}_{n+1}P_1 = 67$ 에서
 $2n(n-1) + (n+1) = 67$
 $2n^2 - n - 66 = 0, (2n+11)(n-6) = 0$
 $\therefore n = -\frac{11}{2}$ 또는 $n = 6$
 이때 ${}_nP_2$ 에서 $n \geq 2$ 이므로 $n = 6$

12 답 ⑤

6명의 선수의 승부차기 순서를 정하는 경우의 수는
 $6! = 720$

13 답 ②

찬호와 준형이를 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는
 $3! = 6$
 찬호와 준형이가 자리를 바꾸는 경우의 수는
 $2! = 2$
 따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 2 = 12$

14 답 42

1학년 학생 12명을 일렬로 세우는 경우의 수는 12!
 $\vee (1, 1) \vee (1, 1) \vee (1, 1) \vee (1, 1) \vee (1, 1) \vee (1, 1) \vee$
 이때 1학년 학생을 2명씩 묶어서 사이사이와 양 끝의 7개의 자리에
 2명의 2학년 학생을 세우는 경우의 수는
 ${}_7P_2 = 42$
 따라서 경우의 수는 $42 \times 12!$ 이므로
 $n = 42$

15 답 ④

남자 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는
 $3! = 6$
 남자들 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 여 $\vee (남) \vee (남) \vee (남) \vee$
 자 2명을 세우는 경우의 수는
 ${}_4P_2 = 12$
 따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 12 = 72$

16 답 ⑤

선생님, 유치원생의 순서로 교대로 서는 경우의 수는
 $4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$
 유치원생, 선생님의 순서로 교대로 서는 경우의 수는
 $4! \times 4! = 24 \times 24 = 576$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $576 + 576 = 1152$

17 답 120

8개의 칸 중에서 4개의 칸에만 책을 꽂으므로 빈칸은 4개이다.
 빈칸 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 $\vee (빈) \vee (빈) \vee (빈) \vee (빈) \vee$
 에 서로 다른 책 4권을 꽂으면 되므로
 구하는 경우의 수는 ${}_5P_4 = 120$

18 답 ⑤

$(n+4)$ 명 중 회장 1명, 부회장 1명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{n+4}P_2$
 여자 회원 n 명 중 회장 1명, 부회장 1명을 뽑는 경우의 수는 ${}_nP_2$
 이때 적어도 한 명은 남자 회원을 뽑는 경우의 수가 92이므로
 ${}_{n+4}P_2 - {}_nP_2 = 92$
 $(n+4)(n+3) - n(n-1) = 92$
 $8n + 12 = 92$
 $8n = 80 \quad \therefore n = 10$

19 답 300

홀수이려면 일의 자리의 숫자가 1 또는 3 또는 5이어야 한다.
 (i) 일의 자리의 숫자가 1인 홀수의 개수
 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 1을 제외한 5개
 백의 자리와 십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 천의 자리
 와 일의 자리에 오는 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택
 하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로
 ${}_5P_2 = 20$
 따라서 일의 자리의 숫자가 1인 홀수의 개수는 $5 \times 20 = 100$
 (ii) 일의 자리의 숫자가 3인 홀수의 개수
 (i)과 같은 방법으로 하면 홀수의 개수는 100
 (iii) 일의 자리의 숫자가 5인 홀수의 개수
 (i)과 같은 방법으로 하면 홀수의 개수는 100
 (i), (ii), (iii)에서 구하는 홀수의 개수는
 $100 + 100 + 100 = 300$

20 답 ④

(i) 1□□ 꼴인 경우
 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1을 제외한 홀수 4개
 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1과 일의 자리에 오는 숫자를 제
 외한 8개
 따라서 홀수의 개수는 $4 \times 8 = 32$
 (ii) 2□□ 꼴인 경우
 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 홀수 5개
 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 2와 일의 자리에 오는 숫자를 제
 외한 8개
 따라서 홀수의 개수는 $5 \times 8 = 40$
 (iii) 3□□ 꼴인 경우
 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 3을 제외한 홀수 4개
 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 3과 일의 자리에 오는 숫자를 제
 외한 8개
 따라서 홀수의 개수는 $4 \times 8 = 32$
 (iv) 4□□ 꼴인 경우
 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 홀수 5개
 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 4와 일의 자리에 오는 숫자를 제
 외한 8개
 따라서 홀수의 개수는 $5 \times 8 = 40$
 (i)~(iv)에서 구하는 홀수의 개수는
 $32 + 40 + 32 + 40 = 144$

중단원 기출문제 2회

1 답 ②

$|a-b| < 2$ 에서 $-2 < a-b < 2$

(i) $a-b = -1$ 일 때

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ 의 3개

(ii) $a-b = 0$ 일 때

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$ 의 4개

(iii) $a-b = 1$ 일 때

순서쌍 (a, b) 는 $(2, 1), (3, 2), (4, 3)$ 의 3개

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$3+4+3=10$$

2 답 12

(i) $x=1$ 일 때, $2y+z=12$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는 $(1, 10), (2, 8), (3, 6), (4, 4), (5, 2)$ 의 5개

(ii) $x=2$ 일 때, $2y+z=9$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는 $(1, 7), (2, 5), (3, 3), (4, 1)$ 의 4개

(iii) $x=3$ 일 때, $2y+z=6$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는 $(1, 4), (2, 2)$ 의 2개

(iv) $x=4$ 일 때, $2y+z=3$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는 $(1, 1)$ 의 1개

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$$5+4+2+1=12$$

3 답 40

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, ..., 8

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, 2, ..., 9

십의 자리와 일의 자리의 숫자가 모두 짝수인 자연수의 개수는

$$4 \times 5 = 20$$

십의 자리와 일의 자리의 숫자가 모두 홀수인 자연수의 개수는

$$4 \times 5 = 20$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$20+20=40$$

4 답 ④

수학, 국어 과목의 강의를 수강하는 경우의 수는

$$5 \times 3 = 15$$

국어, 영어 과목의 강의를 수강하는 경우의 수는

$$3 \times 4 = 12$$

수학, 영어 과목의 강의를 수강하는 경우의 수는

$$5 \times 4 = 20$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15+12+20=47$$

5 답 ③

$9^k \times 17^3 = 3^{2k} \times 17^3$ 의 약수의 개수가 44이므로

$$(2k+1)(3+1)=44$$

$$2k+1=11, 2k=10$$

$$\therefore k=5$$

6 답 10

(i) $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는

$$3 \times 2 = 6$$

(ii) $A \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 2

(iii) $A \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times 2 = 2$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$6+2+2=10$$

7 답 ③

(i) B와 D에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, E에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, B에 칠할 수 있는 색은 A(E)에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, C에 칠할 수 있는 색은 B(D)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 칠하는 경우의 수는

$$4 \times 1 \times 3 \times 1 \times 3 = 36$$

(ii) B와 D에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, E에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, B에 칠할 수 있는 색은 A(E)에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 B와 A(E)에 칠한 색을 제외한 2가지, C에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 칠하는 경우의 수는

$$4 \times 1 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$36+48=84$$

8 답 102

(i) 지불할 수 있는 방법의 수

100원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개의 3가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 방법의 수는

$$5 \times 3 \times 4 - 1 = 59$$

$$\therefore a = 59$$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

50원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 100원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 같으므로 100원짜리 동전 4개를 50원짜리 동전 8개로 바꾸면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜리 동전 10개, 10원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

50원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원, ..., 500원의 11가지

10원짜리 동전으로 지불할 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원, 30원의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우를 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$$11 \times 4 - 1 = 43$$

$$\therefore b = 43$$

(i), (ii)에서 $a + b = 59 + 43 = 102$

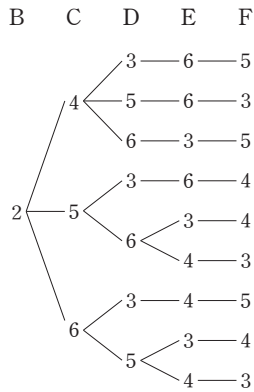
9 답 ①

A를 제외한 5명의 학생을 B, C, D, E, F라 하고, 각 학생의 좌석 번호를 차례대로 1, 2, 3, 4, 5, 6이라 하자.

A는 자신의 좌석 번호인 1을 뽑았다고 생각할 때, B는 자신의 좌석 번호인 2를 뽑고 나머지 학생은 자신의 좌석 번호를 제외한 다른 좌석 번호를 뽑는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.

같은 방법으로 C, D, E, F가 자신의 좌석 번호를 뽑는 경우도 각각 9가지이므로 구하는 경우의 수는

$$9 \times 5 = 45$$



10 답 ②

$${}_6P_r \times 3! = 720 \text{에서}$$

$${}_6P_r \times 6 = 720$$

$${}_6P_r = 120 = 6 \times 5 \times 4$$

$$\therefore r = 3$$

11 답 ①

구하는 경우의 수는 9명의 학생 중에서 2명을 택하여 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

$${}_9P_2 = 72$$

12 답 ③

1반 학생 4명을 한 사람, 2반 학생 2명을 한 사람, 3반 학생 3명을 한 사람으로 생각하여 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $3! = 6$

1반 학생들끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$4! = 24$$

2반 학생들끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

3반 학생들끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 24 \times 2 \times 6 = 1728$$

13 답 8640

14개의 의자 중에서 의자 9개에만 참가자가 앉으므로 빈 의자는 5개이다.

이때 2인 한 팀을 한 사람, 3인 한 팀을 한 사람으로 생각하여 6명을 빈 의자 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 배열하는 경우의 수는

$${}_6P_6 = 720$$

2인 한 팀 안에서 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

3인 한 팀 안에서 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$720 \times 2 \times 6 = 8640$$

14 답 ④

축구 선수는 5명이고 야구 선수는 4명이므로 축구 선수 5명을 일렬로 세우고 그 사이사이에 야구 선수 4명을 세우면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$5! \times 4! = 120 \times 24 = 2880$$

15 답 ④

A, B를 한 사람으로, C, D를 한 사람으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$5! = 120$$

A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

C, D가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 A, B가 서로 이웃하고, C, D가 서로 이웃하는 경우의 수는

$$120 \times 2 \times 2 = 480$$

(가), (나)를 만족시키고 C와 B가 서로 이웃하는 경우는 A, B, C, D 4명을 ABCD, DCBA와 같이 세우는 경우이다.

A, B, C, D를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$4! = 24$$

즉, (가), (나)를 만족시키고 C와 B가 서로 이웃하는 경우의 수는

$$2 \times 24 = 48$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$480 - 48 = 432$$

16 답 ③

2명의 딸 중에서 1명을 택하여 부모님 사이에 세우는 경우의 수는

$${}_2P_1 = 2$$

부모님과 딸 1명을 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$

부모님이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 24 \times 2 = 96$$

17 답 432

6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$6! = 720$$

자음은 f, r, n, d의 4개이므로 양 끝에 모두 자음이 오도록 배열하는 경우의 수는

$${}_4P_2 \times 4! = 12 \times 24 = 288$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$720 - 288 = 432$$

18 답 ①

4로 나누어떨어지는 자연수는 4의 배수이므로 끝의 두 자리의 수가 4의 배수이다.

즉, 끝의 두 자리의 수가 24, 32, 36, 52, 56, 64, 72, 76인 수이다.

이때 각 경우마다 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$${}_4P_2=12$$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $8 \times 12=96$

19 답 108번째

e□□□□ 풀인 문자열의 개수는

$$4!=24$$

h□□□□ 풀인 문자열의 개수는

$$4!=24$$

n□□□□ 풀인 문자열의 개수는

$$4!=24$$

o□□□□ 풀인 문자열의 개수는

$$4!=24$$

pe□□□ 풀인 문자열의 개수는

$$3!=6$$

phe□□ 풀인 문자열의 개수는

$$2!=2$$

phn□□ 풀인 문자열의 개수는

$$2!=2$$

pho□□ 풀인 문자열을 순서대로 나열하면 phoen, phone, ...

즉, pho□□ 풀인 문자열에서 phone는 두 번째이므로 phone가 나타나는 순서는

$$24+24+24+24+6+2+2+2=108(\text{번째})$$

20 답 ⑤

1□□□ 풀인 자연수의 개수는

$${}_6P_3=120$$

2□□□ 풀인 자연수의 개수는

$${}_6P_3=120$$

3□□□ 풀인 자연수의 개수는

$${}_6P_3=120$$

4□□□ 풀인 자연수의 개수는

$${}_6P_3=120$$

50□□ 풀인 자연수의 개수는

$${}_5P_2=20$$

51□□ 풀인 자연수의 개수는

$${}_5P_2=20$$

520□ 풀인 자연수의 개수는 4

521□ 풀인 자연수의 개수는 4

523□ 풀인 자연수의 개수는 4

즉, 1023부터 5236까지의 자연수의 개수는

$$120+120+120+120+20+20+4+4+4=532$$

이때 5236보다 큰 수는 차례대로 5240, 5241, 5243, ...이므로 구하는 수는 5243이다.

10 / 조합

56~61쪽

중단원 기출문제 1회

1 답 6

$${}_{10}C_r={}_{10}C_{r-2}\text{에서}$$

$$10-r=r-2$$

$$-2r=-12 \quad \therefore r=6$$

2 답 ⑤

$${}_nP_2+{}_nC_{n-2}=63\text{에서 }{}_nC_{n-2}={}_nC_2\text{이므로}$$

$${}_nP_2+{}_nC_2=63$$

$$n(n-1)+\frac{n(n-1)}{2 \times 1}=63$$

$$\frac{3}{2}n(n-1)=63$$

$$n(n-1)=42=7 \times 6$$

$$\therefore n=7 (\because n \text{은 자연수})$$

3 답 ③

수학교육과 체험 희망자 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=10$$

통계학과 체험 희망자 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_3={}_4C_1=4$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10+4=14$$

4 답 ④

서로 다른 6가지 토핑 중에서 2개 이상 6개 이하 선택하는 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6 &= {}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_2+{}_6C_1+{}_6C_6 \\ &= 15+20+15+6+1 \\ &= 57 \end{aligned}$$

5 답 ②

(i) $a=4$ 일 때,

3개의 숫자 1, 2, 3 중에서 2개를 택하여 크기가 큰 순서대로 b , c 로 정하면 되므로

$${}_3C_2={}_3C_1=3$$

(ii) $a=5$ 일 때,

4개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 2개를 택하여 크기가 큰 순서대로 b , c 로 정하면 되므로

$${}_4C_2=6$$

(iii) $a=6$ 일 때,

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 2개를 택하여 크기가 큰 순서대로 b , c 로 정하면 되므로

$${}_5C_2=10$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$3+6+10=19$$

6 답 78

구하는 경우의 수는 축구 특기자 2명을 제외한 13명의 학생 중에서 11명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_{13}C_{11} = {}_{13}C_2 = 78$$

7 답 420

(i) 민지와 하준이가 공통으로 가입하는 동아리가 없을 때,

민지가 7개의 동아리 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_2 = 21$$

하준이가 민지가 택한 2개의 동아리를 제외한 5개의 동아리 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = 10$$

따라서 공통으로 가입하는 동아리가 없는 경우의 수는

$$21 \times 10 = 210$$

(ii) 민지와 하준이가 공통으로 가입하는 동아리가 1개일 때,

민지가 7개의 동아리 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_2 = 21$$

하준이가 민지가 택한 2개의 동아리 중에서 1개를 택하고, 민지가 택하지 않은 5개의 동아리 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_2C_1 \times {}_5C_1 = 2 \times 5 = 10$$

따라서 공통으로 가입하는 동아리가 1개인 경우의 수는

$$21 \times 10 = 210$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$210 + 210 = 420$$

8 답 460

12명 중에서 대표 선수 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{12}C_4 = 495$$

남자 7명 중에서 대표 선수 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$$

따라서 여자가 적어도 1명 포함되도록 뽑는 경우의 수는

$$495 - 35 = 460$$

9 답 ②

13명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{13}C_4 = 715$

여학생 8명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는 ${}_8C_4 = 70$

남학생 5명 중에서 1명, 여학생 8명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_8C_3 = 5 \times 56 = 280$$

따라서 남학생을 2명 이상 뽑는 경우의 수는

$$715 - (70 + 280) = 365$$

10 답 ④

소설책 6권 중에서 2권을 택하는 경우의 수는 ${}_6C_2 = 15$

만화책 5권 중에서 2권을 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$

4권의 책을 일렬로 꽂는 경우의 수는 $4! = 24$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \times 10 \times 24 = 3600$$

11 답 10

육상부 선수의 수를 n 이라 하면 특정한 2명을 제외한 $(n-2)$ 명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{n-2}C_2$$

뽑은 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$4! = 24$$

이때 주어진 경우의 수가 672이므로

$${}_{n-2}C_2 \times 24 = 672$$

$${}_{n-2}C_2 = 28$$

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2 \times 1} = 28$$

$$(n-2)(n-3) = 56 = 8 \times 7$$

이때 n 은 자연수이므로 $n-2=8 \quad \therefore n=10$

따라서 육상부 선수의 수는 10이다.

12 답 ③

구하는 직선의 개수는 8개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_8C_2 = 28$$

13 답 ②

12개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_2 = 66$$

이때 12개의 점으로 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수가 57이므로

$$66 - {}_n C_2 + 1 = 57$$

$${}_n C_2 = 10$$

$$\frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 10$$

$$n(n-1) = 20 = 5 \times 4$$

$\therefore n=5$ ($\because n$ 은 자연수)

14 답 ③

구각형의 대각선의 개수는

$${}_9C_2 - 9 = 36 - 9 = 27$$

십일각형의 대각선의 개수는

$${}_{11}C_2 - 11 = 55 - 11 = 44$$

따라서 구각형과 십일각형의 대각선의 개수의 합은

$$27 + 44 = 71$$

15 답 69

9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_9C_3 = 84$$

각 변 위에 있는 3개, 4개, 5개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 = {}_3C_3 + {}_4C_1 + {}_5C_2$$

$$= 1 + 4 + 10 = 15$$

이때 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$$84 - 15 = 69$$

16 답 ③

8개의 점 중에서 3개 이상을 택하여 연결하면 모두 다각형이 만들어 지므로 구하는 다각형의 개수는

$${}_8C_3 + {}_8C_4 + {}_8C_5 + {}_8C_6 + {}_8C_7 + {}_8C_8 = {}_8C_3 + {}_8C_4 + {}_8C_5 + {}_8C_6 + {}_8C_7 + {}_8C_8 \\ = 56 + 70 + 56 + 28 + 8 + 1 = 219$$

17 답 90

가로 방향의 평행한 직선 6개 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 4개 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정되므로 구하는 평행사변형의 개수는

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 = 15 \times 6 = 90$$

18 답 ④

구하는 경우의 수는

$${}_9C_5 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = {}_9C_4 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2} \\ = 126 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 378$$

19 답 150

7명을 3명, 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는

(i) 윤우와 선호가 3명인 조에 포함되는 경우

윤우와 선호를 제외한 5명을 1명, 2명, 2명의 3개 조로 나누는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 5 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 15$$

(ii) 윤우와 선호가 2명인 조에 포함되는 경우

윤우와 선호를 제외한 5명을 3명, 2명의 2개 조로 나누는 경우의 수와 같으므로

$${}_5C_3 \times {}_2C_2 = {}_5C_2 \times {}_2C_2 = 10 \times 1 = 10$$

(i), (ii)에서 7명을 3명, 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는

$$15 + 10 = 25$$

3개의 조를 지하철, 버스, 택시의 3개의 교통수단에 배정하는 경우의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$25 \times 6 = 150$$

20 답 ⑤

구하는 경우의 수는 10개의 학급을 5개, 5개의 두 조로 나누는 후 각 조를 다시 2개, 2개, 1개의 세 조로 나누는 경우의 수와 같다.

(i) 10개의 학급을 5개, 5개로 나누는 경우의 수는

$${}_{10}C_5 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{2!} = 252 \times 1 \times \frac{1}{2} = 126$$

(ii) 5개의 학급을 2개, 2개, 1개로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 10 \times 3 \times 1 \times \frac{1}{2} = 15$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$126 \times 15 \times 15 = 28350$$

중단원 기출문제 2회

1 답 3

$3 \times {}_{n+1}C_3 - 4 \times {}_nC_2 = 0$ 에서

$$3 \times \frac{(n+1)n(n-1)}{3 \times 2 \times 1} - 4 \times \frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 0$$

$$(n+1)n(n-1) - 4n(n-1) = 0$$

${}_nC_2$ 에서 $n \geq 2$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$$n+1-4=0 \quad \therefore n=3$$

2 답 ④

${}_nC_{r+1} : {}_nC_r : {}_nC_{r-1} = 5 : 4 : 3$ 이므로

$$\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} : \frac{n!}{r!(n-r)!} : \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!} \\ = 5 : 4 : 3$$

좌변의 각 항에 $\frac{r!(n-r)!}{n!}$ 을 곱하면

$$\frac{n-r}{r+1} : 1 : \frac{r}{n-r+1} = 5 : 4 : 3$$

$$\frac{4(n-r)}{r+1} : 4 : \frac{4r}{n-r+1} = 5 : 4 : 3 \text{ 이므로}$$

$$\frac{4(n-r)}{r+1} = 5, \frac{4r}{n-r+1} = 3$$

$$4n-4r=5r+5, 4r=3n-3r+3$$

$$4n-9r=5, 3n-7r=-3$$

두 식을 연립하여 풀면 $n=62, r=27$

$$\therefore n-r=35$$

3 답 ④

1학년 학생 7명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_3 = 35$$

2학년 학생 5명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_2 = 10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$35 \times 10 = 350$$

4 답 10

밴드부의 인원수를 n 이라 하면 연극부의 인원수는 $2n$ 이다.

연극부에서 주인공 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{2n}C_3$

밴드부에서 보컬 1명, 드럼 1명, 키보드 1명, 베이스 1명을 뽑는 경우의 수는 ${}_nP_4$

이때 두 경우의 수가 같으므로

$${}_{2n}C_3 = {}_nP_4$$

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3 \times 2 \times 1} = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

${}_nP_4$ 에서 $n \geq 4$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$$\frac{2(2n-1)}{3} = (n-2)(n-3)$$

$$4n-2=3n^2-15n+18$$

$$3n^2-19n+20=0, (3n-4)(n-5)=0$$

$$\therefore n=5 (\because n \geq 4)$$

따라서 연극부의 인원수는 10이다.

5 답 ③

구하는 경우의 수는 민서를 제외한 7명의 학생 중에서 3명을 뽑는 경우의 수와 같으므로 ${}_7C_3=35$

6 답 385

쌍둥이를 모두 초대하는 경우의 수는 쌍둥이 2명을 제외한 11명의 친구 중에서 7명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_{11}C_7 = {}_{11}C_4 = 330$$

쌍둥이를 모두 초대하지 않는 경우의 수는 쌍둥이 2명을 제외한 11명의 친구 중에서 9명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$${}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$$

따라서 구하는 경우의 수는 $330 + 55 = 385$

7 답 ④

6결레의 양말 중에서 짝이 맞는 두 결레를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_2 = 15$$

나머지 4결레의 양말 8짝 중에서 2짝을 택하는 경우의 수는

$${}_8C_2 = 28$$

이때 양말 4결레 중에서 짝이 맞는 한 결레의 양말을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$

즉, 양말 8짝 중에서 짝이 맞지 않는 2짝을 택하는 경우의 수는

$$28 - 4 = 24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \times 24 = 360$$

8 답 70

과자 5개와 아이스크림 4개 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_9C_3 = 84$$

과자만 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$

아이스크림만 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

따라서 구하는 경우의 수는 $84 - (10 + 4) = 70$

9 답 5

전체 $(n+6)$ 송이의 꽃 중에서 4송이를 택하는 경우의 수는 ${}_{n+6}C_4$

초록색 꽃과 보라색 꽃 6송이 중에서 4송이를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

이때 빨간색 꽃이 적어도 1송이 포함되도록 택하는 경우의 수가 315

$${}_{n+6}C_4 - 15 = 315$$

$${}_{n+6}C_4 = 330$$

$$\frac{(n+6)(n+5)(n+4)(n+3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 330$$

$$(n+6)(n+5)(n+4)(n+3) = 7920 = 11 \times 10 \times 9 \times 8$$

$$\text{이때 } n \text{은 자연수이므로 } n+6=11 \quad \therefore n=5$$

10 답 ②

α 를 제외한 4개의 문자 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$

3개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

11 답 ⑤

3학년 학생 5명 중에서 2명을 택하는 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$

1학년 학생 2명과 3학년 학생 2명의 순서를 정하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

1학년 학생 2명과 3학년 학생 2명의 사이사이와 양 끝의 5개의 자리

에 2학년 학생 3명을 배치하면 되므로 ${}_5P_3 = 60$

따라서 구하는 경우의 수는 $10 \times 24 \times 60 = 14400$

12 답 ④

12개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의

$$\text{수는 } {}_{12}C_2 = 66$$

가로 방향의 직선 l_1, l_2 의 각각에 대하

여 한 직선 위에 있는 5개의 점 중 2개

를 택하는 경우의 수는

$$2 \times {}_5C_2 = 2 \times 10 = 20$$

세로 방향의 직선 m_1, m_2 의 각각에 대하여 한 직선 위에 있는 3개의

점 중 2개를 택하는 경우의 수는

$$2 \times {}_3C_2 = 2 \times {}_3C_1 = 2 \times 3 = 6$$

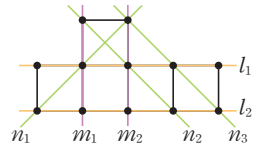
대각선 방향의 직선 n_1, n_2, n_3 의 각각에 대하여 한 직선 위에 있는

3개의 점 중 2개를 택하는 경우의 수는

$$3 \times {}_3C_2 = 3 \times {}_3C_1 = 3 \times 3 = 9$$

따라서 서로 다른 직선의 개수는

$$66 - 20 - 6 - 9 + (2 + 2 + 3) = 38$$



13 답 ④

n 각형의 대각선의 개수가 90이라 하면

$${}_nC_2 - n = 90, \frac{n(n-1)}{2 \times 1} - n = 90$$

$$n^2 - 3n - 180 = 0, (n+12)(n-15) = 0$$

$$\therefore n = -12 \text{ 또는 } n = 15$$

이때 $n > 3$ 이므로 $n = 15$

따라서 구하는 다각형의 꼭짓점의 개수는 15이다.

14 답 206

12개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_{12}C_3 = 220$

부채꼴의 한 변 위의 5개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

부채꼴의 한 변 위의 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

따라서 구하는 삼각형의 개수는 $220 - 10 - 4 = 206$

15 답 ③

10개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_{10}C_4 = 210$

한 변 위의 4개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_4 = 1$

한 변 위의 4개의 점 중에서 3개를 택하고, 다른 변 위의 6개의 점

중에서 한 개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3 \times {}_6C_1 = {}_4C_1 \times {}_6C_1 = 4 \times 6 = 24$$

따라서 구하는 사각형의 개수는 $210 - 2 \times (1 + 24) = 160$

16 답 ①

가로 방향으로 놓인 6개의 선 중에서 2개, 세로 방향으로 놓인 6개의 선 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 결정되므로 직사각형의 개수는 ${}_6C_2 \times {}_6C_2 = 15 \times 15 = 225$

가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 1이라 하면 정사각형의 개수는 한 변의 길이가 1인 것이 25개, 한 변의 길이가 2인 것이 16개, 한 변의 길이가 3인 것이 9개, 한 변의 길이가 4인 것이 4개, 한 변의 길이가 5인 것이 1개이므로 $25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55$

따라서 구하는 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는 $225 - 55 = 170$

17 답 5

$${}_nC_2 \times {}_{n+2}C_2 = 210 \text{이므로 } \frac{n(n-1)}{2 \times 1} \times \frac{(n+2)(n+1)}{2 \times 1} = 210$$

$$n(n-1)(n+2)(n+1) = 840$$

$$(n+2)(n+1)n(n-1) = 7 \times 6 \times 5 \times 4$$

$${}_nC_2 \text{에서 } n \geq 2 \text{이므로 } n+2=7 \quad \therefore n=5$$

18 답 301

공 7개를 똑같은 상자 3개에 빈 상자가 없도록 나누어 담을 때, 각 상자에 담을 수 있는 공의 개수는

1, 1, 5 또는 1, 2, 4 또는 1, 3, 3 또는 2, 2, 3

(i) 1개, 1개, 5개로 나누어 담는 경우의 수는

$${}_7C_1 \times {}_6C_1 \times {}_5C_5 \times \frac{1}{2!} = 7 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 21$$

(ii) 1개, 2개, 4개로 나누어 담는 경우의 수는

$${}_7C_1 \times {}_6C_2 \times {}_4C_4 = 7 \times 15 \times 1 = 105$$

(iii) 1개, 3개, 3개로 나누어 담는 경우의 수는

$${}_7C_1 \times {}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 7 \times 20 \times 1 \times \frac{1}{2} = 70$$

(iv) 2개, 2개, 3개로 나누어 담는 경우의 수는

$${}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2!} = 21 \times 10 \times 1 \times \frac{1}{2} = 105$$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는 $21 + 105 + 70 + 105 = 301$

19 답 ④

10명의 학생을 6인실, 2인실, 2인실인 방에 배치하는 경우의 수는

$$\left({}_{10}C_6 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \right) \times 2! = {}_{10}C_4 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 = 210 \times 6 \times 1 = 1260$$

A, B가 6인실에 함께 배치되는 경우의 수는

$$\left({}_8C_4 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \right) \times 2! = 70 \times 6 \times 1 = 420$$

A, B가 2인실에 함께 배치되는 경우의 수는

$${}_8C_6 \times {}_2C_2 \times 2! = {}_8C_2 \times {}_2C_2 \times 2! = 28 \times 1 \times 2 = 56$$

따라서 구하는 경우의 수는 $1260 - (420 + 56) = 784$

20 답 ③

B 선수가 한 번만 이기고 결승에 진출하려면 부전승 조에 배정받아야 하므로 구하는 경우의 수는 남은 5명의 선수를 1명, 2명, 2명으로 나누는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 5 \times 6 \times 1 \times \frac{1}{2} = 15$$

11 / 행렬의 연산

62~67쪽

중단원 기출문제 1회

1 답 ④

$$a_{12} = a_{21} = \overline{P_1 P_2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$a_{13} = a_{31} = \overline{P_1 P_3} = 3,$$

$$a_{23} = a_{32} = \overline{P_2 P_3} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

이므로, $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ 이므로

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 3 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{5} \\ 3 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$$

2 답 -3

제2행의 모든 성분의 합은

$$\begin{aligned} a_{21} + a_{22} + a_{23} &= (2x - y) + (2x - 2y) + (2x - 3y) \\ &= 6x - 6y \end{aligned}$$

$$6x - 6y = 6 \text{이므로}$$

$$x - y = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

제3열의 모든 성분의 합은

$$\begin{aligned} a_{13} + a_{23} + a_{33} &= (x - 3y) + (2x - 3y) + (3x - 3y) \\ &= 6x - 9y \end{aligned}$$

$$6x - 9y = 12 \text{이므로}$$

$$2x - 3y = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$x = -1, y = -2$$

$$\therefore x + y = -3$$

3 답 5

$$\begin{pmatrix} 4 + a\sqrt{3} & -2 \\ 4 & b\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - \sqrt{3} & -2 \\ b^2 & d + 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{이므로 행렬이 서로 같을 조}$$

건에 의하여

$$4 + a\sqrt{3} = c - \sqrt{3}, 4 = b^2, b\sqrt{3} = d + 2\sqrt{3}$$

$$4 + a\sqrt{3} = c - \sqrt{3} \text{에서 } a, c \text{가 유리수이므로}$$

$$a = -1, c = 4$$

$$b\sqrt{3} = d + 2\sqrt{3} \text{에서 } b, d \text{가 유리수이므로}$$

$$b = 2, d = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore a + b + c + d &= -1 + 2 + 4 + 0 \\ &= 5 \end{aligned}$$

4 답 ⑤

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a - b = 1, 2 + ab = 4$$

따라서 $a - b = 1, ab = 2$ 이므로

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a - b)^2 + 2ab \\ &= 1^2 + 2 \times 2 = 5 \end{aligned}$$

5 답 ②

$$A-3B+2X=X-B \text{에서}$$

$$X=-A+2B$$

$$=-\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X 의 $(1, 2)$ 성분은 -1 이다.

6 답 10

$$2A-2B+4X=3(A+X)-2C \text{에서}$$

$$X=A+2B-2C$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$1+4+5+0=10$$

7 답 4

$$X+Y=A \quad \dots\dots ㉠$$

$$X-2Y=B \quad \dots\dots ㉡$$

㉠ $\times 2$ +㉡을 하면

$$3X=2A+B$$

$$=2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 8 & 20 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 12 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 12 & 25 \end{pmatrix}$$

㉠-㉡을 하면

$$3Y=A-B$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore Y=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X-Y=\frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 12 & 25 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 12 & 20 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $X-Y$ 의 $(2, 1)$ 성분은

$$\frac{1}{3}\times 12=4$$

8 답 ④

$$A+B=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \dots\dots ㉠$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$2A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

㉠-㉡을 하면

$$2B=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{따라서 } AB=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 12 & 12 \end{pmatrix} \text{이므로 구하는 모든 성}$$

분의 합은

$$6+6+12+12=36$$

9 답 ③

A 는 2×2 행렬, B 는 1×2 행렬, C 는 2×1 행렬이다.

ㄱ. $(2\times 2 \text{ 행렬})\times (2\times 1 \text{ 행렬})$ 은 2×1 행렬이 된다.

ㄴ. $(1\times 2 \text{ 행렬})\times (2\times 1 \text{ 행렬})$ 은 1×1 행렬이 된다.

ㄷ. $(2\times 1 \text{ 행렬})\times (2\times 2 \text{ 행렬})$ 은 정의되지 않는다.

ㄹ. A 는 2×2 행렬, BC 는 1×1 행렬이므로

$(2\times 2 \text{ 행렬})\times (1\times 1 \text{ 행렬})$ 은 정의되지 않는다.

따라서 보기에서 그 곱이 정의되는 행렬은 ㄱ, ㄴ이다.

10 답 67

$$2A+B=2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$(2A+B)^2=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -24 & 43 \end{pmatrix}$$

따라서 가장 큰 성분과 가장 작은 성분의 차는

$$43-(-24)=67$$

11 답 ⑤

$$A^2=\begin{pmatrix} -1 & a \\ -3 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a \\ -3 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-3a & -a+ab \\ 3-3b & -3a+b^2 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$A^2-A+E=\begin{pmatrix} 1-3a & -a+ab \\ 3-3b & -3a+b^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & a \\ -3 & b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3-3a & -2a+ab \\ 6-3b & -3a+b^2-b+1 \end{pmatrix}$$

$A^2-A+E=O$ 가 성립하므로

$$\begin{pmatrix} 3-3a & -2a+ab \\ 6-3b & -3a+b^2-b+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$3-3a=0, 6-3b=0$$

$$3-3a=0 \text{에서 } a=1$$

$$6-3b=0 \text{에서 } b=2$$

$$\therefore a+b=1+2=3$$

12 답 (2 0 / 66 2)

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$$

⋮

$$\text{따라서 } A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix} (n \text{은 자연수}) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} A^{10}+A^{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 30 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 36 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 66 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

13 답 ③

A의 원료를 구입하는 데 드는 비용은

$$40 \times (80 \times 20000 + 20 \times 15000) (\text{원}) \text{이므로}$$

$$40 \times (80 \ 20) \begin{pmatrix} 20000 \\ 15000 \end{pmatrix} \dots\dots \textcircled{㉠}$$

B의 원료를 구입하는 데 드는 비용은

$$30 \times (60 \times 20000 + 40 \times 15000) (\text{원}) \text{이므로}$$

$$30 \times (60 \ 40) \begin{pmatrix} 20000 \\ 15000 \end{pmatrix} \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①, ②에서 총비용을 행렬로 나타내면

$$(40 \ 30) \begin{pmatrix} 80 & 20 \\ 60 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20000 \\ 15000 \end{pmatrix}$$

14 답 ③

$$\begin{aligned} ABC &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CBA &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore ABC-CBA &= \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$10+2+(-2)+2=12$$

15 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

ㄱ. 행렬은 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하지 않는다.

따라서 보기에서 항상 성립하는 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ이다.

16 답 ②

주어진 식의 좌변을 전개하면

$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$$

$$A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2 \text{이려면}$$

$$-AB+BA=0 \quad \therefore AB=BA$$

$$\text{즉, } \begin{pmatrix} 4 & a \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ b & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & a \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} 8+ab & 12-a \\ -2+3b & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2a+9 \\ 4b+1 & ab-3 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$12-a=2a+9, \quad -2+3b=4b+1$$

$$12-a=2a+9 \text{에서 } 3a=3 \quad \therefore a=1$$

$$-2+3b=4b+1 \text{에서 } b=-3$$

$$\therefore a^2-b^2=1^2-(-3)^2=-8$$

17 답 (2 -14 / 0 9)

$$(A+E)(A^2-A+E)=A^3+E^2=A^3+E$$

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -14 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (A+E)(A^2-A+E)=A^3+E$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -14 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -14 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

18 답 5

$$A-E=\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$\text{이때 } A+A^2+A^3=\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = O \text{이므로}$$

$$A+A^2+A^3+\dots+A^{100}$$

$$=A+A(A+A^2+A^3)+A^4(A+A^2+A^3)$$

$$+\dots+A^{97}(A+A^2+A^3)$$

$$=A=\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$-3+7+(-1)+2=5$$

19 답 ⑤

$$AB=A \text{에서 } ABAB=A^2$$

$$\text{이때 } BA=B \text{이므로 } ABB=A^2$$

$$\text{또 } AB=A \text{이므로 } AB=A^2 \quad \therefore A^2=A$$

$$\therefore A^2=A^3=A^4=\dots=A^{100}=A$$

같은 방법으로 하면 $B^2=B$
 $\therefore B^2=B^3=B^4=\dots=B^{100}=B$
 $\therefore A^{100}+B^{100}+E^{100}=A+B+E$

20 답 ⑤

ㄱ. $AB=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $BA=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $\therefore AB=BA$
 ㄴ. $A^2=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=A$ 이므로
 $A^3=A^4=A$
 $B^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=-B$ 이므로
 $B^3=B^2B=-B^2=B$
 $B^4=B^3B=B^2=-B$
 $\therefore A^4+B^4=A-B$
 ㄷ. ㄴ에서 $A^3+B^3=A+B$ 이고
 $A+B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ 이므로
 $(A+B)^2=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$
 $(A+B)^3=(A+B)^2(A+B)=E(A+B)=A+B$
 $\therefore A^3+B^3=(A+B)^3$
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

중단원 기출문제 2회

1 답 ②

$a_{11}=-a_{11}, a_{22}=-a_{22}, a_{33}=-a_{33}$ 이므로
 $a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$
 $\therefore a=b=c=0$
 $a_{12}=-a_{21}$ 이므로 $3e=-9 \quad \therefore e=-3$
 $a_{13}=-a_{31}$ 이므로 $-d=-f \quad \therefore d=f$
 $a_{23}=-a_{32}$ 이므로 $d=-(-e) \quad \therefore d=e$
 $\therefore d=e=f=-3$
 $\therefore a+b+c+d+e+f=0+0+0+(-3)+(-3)+(-3)$
 $=-9$

2 답 ①

행렬이 서로 같을 조건에 의하여
 $a+b=4, b+c=3, c+a=9$
 세 식을 변끼리 더하면
 $2(a+b+c)=16$
 $\therefore a+b+c=8$

$a+b=4$ 이므로 $c=4$
 $b+c=3$ 이므로 $a=5$
 $c+a=9$ 이므로 $b=-1$
 $\therefore abc=5 \times (-1) \times 4=-20$

3 답 5

$2\begin{pmatrix} a & 1 \\ 5 & b \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} -2 & a \\ b & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$ 에서
 $\begin{pmatrix} 2a+6 & 2-3a \\ 10-3b & 2b-15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$
 행렬이 서로 같을 조건에 의하여
 $2a+6=4, 10-3b=-2$
 따라서 $a=-1, b=4$ 이므로
 $b-a=5$

4 답 ②

$3(X-B)=A-X$ 에서
 $4X=A+3B$
 $=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
 $=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$
 $=\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}$
 $\therefore X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$\frac{1}{4} \times \{10+2+(-7)+7\}=\frac{1}{4} \times 12=3$

5 답 (9)

$XY=\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2a \\ 4 & 4a \end{pmatrix}$ 의 모든 성분의 합이 10이므로
 $-2-2a+4+4a=10$
 $2a=8 \quad \therefore a=4$
 따라서 $Y=\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$ 이므로
 $YZ=\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=(1+8)=(9)$

6 답 -6

$\begin{pmatrix} x & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=(2x+6 \quad x+2)$
 $(2x+6 \quad x+2)\begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}=(2x^2+6x+2x+4)=(2x^2+8x+4)$
 $2x^2+8x+4=2(x+2)^2-4$ 이므로 성분 $2x^2+8x+4$ 는 $x=-2$ 일 때 최솟값 -4 를 갖는다.
 따라서 $a=-2, k=-4$ 이므로
 $a+k=-6$

7 답 0

$$X+Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$X-Y=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦+⑧을 하면

$$2X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

⑦-⑧을 하면

$$2Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore Y=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore X^2-Y^2$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은 0이다.

8 답 ②

$$A^2+AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -5 & -17 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$$

9 답 7

$$A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⋮

$$\text{따라서 } A^n=\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (n \text{은 자연수}) \text{이므로}$$

$$A^{10}=\begin{pmatrix} 1 & 10a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

행렬 A^{10} 의 모든 성분의 합이 72이므로

$$1+10a+0+1=72 \quad \therefore a=7$$

10 답 ④

$$\begin{pmatrix} 10000 & 6000 \\ 12000 & 8000 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 30 & 15 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

X 동호회 회원들이 평일에 연극을 관람할 때의 금액은

$$10000 \times 30 + 6000 \times 12 = a$$

Y 동호회 회원들이 평일에 연극을 관람할 때의 금액은

$$10000 \times 15 + 6000 \times 6 = b$$

X 동호회 회원들이 주말에 연극을 관람할 때의 금액은

$$12000 \times 30 + 8000 \times 12 = c$$

Y 동호회 회원들이 주말에 연극을 관람할 때의 금액은

$$12000 \times 15 + 8000 \times 6 = d$$

두 동호회의 회원 모두가 평일에 연극을 관람할 때와 주말에 연극을 관람할 때의 관람 금액의 차는

$$(c+d)-(a+b)=c+d-a-b$$

참고 연극 관람료의 주말 가격이 평일 가격보다 비싸므로 관람 금액의 차는 주말 금액에서 평일 금액을 뺀다.

11 답 $\begin{pmatrix} -20 & -16 \\ 16 & -4 \end{pmatrix}$

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2,$$

$$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2 \text{이므로}$$

$$(A+B)^2-(A-B)^2=2AB+2BA=2(AB+BA)$$

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & -8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$AB+BA=\begin{pmatrix} -10 & -8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & -8 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore (A+B)^2-(A-B)^2=2(AB+BA)$$

$$=2\begin{pmatrix} -10 & -8 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -20 & -16 \\ 16 & -4 \end{pmatrix}$$

12 답 1

주어진 식의 좌변을 전개하면

$$(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$$

$$A^2-AB-BA+B^2=A^2-2AB+B^2 \text{이려면}$$

$$-AB-BA=-2AB \quad \therefore AB=BA$$

$$\text{즉, } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} 2+x & 4+y \\ x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2x & x+y \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2+x=2, 4+y=3$$

$$\text{따라서 } x=0, y=-1 \text{이므로}$$

$$x-y=1$$

13 답 20

$$A-B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=3E \text{에서 } A=3E+B \text{이므로}$$

$$AB=(3E+B)B=3B+B^2=B(3E+B)=BA$$

$$\text{즉, } AB=BA \text{이므로}$$

$$A^2+B^2=(A-B)^2+2AB$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 & -6 \\ -4 & 19 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$11+(-6)+(-4)+19=20$$

14 [답] ⑤

$$\begin{aligned}
 & (A^2+A+E)(A^2-A+E) \\
 &= A^4-A^3+A^2+A^3-A^2+A+A^2-A+E \\
 &= A^4+A^2+E \\
 & \text{이때 } A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로} \\
 & (A^2+A+E)(A^2-A+E)=A^4+A^2+E \\
 & \quad =\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \quad =\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

15 [답] ⑤

$$\begin{aligned}
 & a_{11}=a_{22}=0, a_{12}=\frac{1}{3}(1-2)(1+2)=-1, \\
 & a_{21}=\frac{1}{3}(2-1)(2+1)=1 \text{이므로} \\
 & A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & A^2=AA=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E \\
 & A^3=A^2A=(-E)A=-A \\
 & A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E^2=E \\
 & \text{따라서 } A+A^2+A^3+A^4=O \text{이므로} \\
 & A^5+A^6+A^7+\dots+A^{98} \\
 &=A^4(A+A^2+A^3+A^4) \\
 & \quad +\dots+A^{92}(A+A^2+A^3+A^4)+A^{97}+A^{98} \\
 &=O+\dots+O+A+A^2 \\
 &=A-E \\
 &=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

16 [답] ④

$$\begin{aligned}
 & A^2=AA=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E \text{이므로} \\
 & A^{55}=(A^2)^{27}A=(-E)^{27}A=-A \\
 & \therefore A^{55}+E=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \quad =\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

17 [답] ①

$$\begin{aligned}
 & A^2+A^3=-2A-2E \text{이므로} \\
 & A^6+A^7=A^4(A^2+A^3)=A^4(-2A-2E) \\
 & \quad =-2A^5-2A^4=-2A^2(A^2+A^3) \\
 & \quad =-2A^2(-2A-2E)=4A^3+4A^2 \\
 & \quad =4(A^2+A^3)=4(-2A-2E) \\
 & \quad =-8A-8E
 \end{aligned}$$

행렬 A 는 모든 성분의 합이 0이므로 $-8A-8E$ 의 모든 성분의 합은 $-8E$ 의 모든 성분의 합과 같다.

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$-8+0+0+(-8)=-16$$

18 [답] ③

$$\begin{aligned}
 & A(E-A)=E \text{에서 } A-A^2=E \\
 & \text{즉, } A^2-A+E=O \text{이므로 양변에 } A+E \text{를 곱하면} \\
 & (A+E)(A^2-A+E)=O \\
 & A^3+E=O \quad \therefore A^3=-E \\
 & (E-B)B=E \text{에서 } B-B^2=E \\
 & \text{즉, } B^2-B+E=O \text{이므로 양변에 } B+E \text{를 곱하면} \\
 & (B+E)(B^2-B+E)=O \\
 & B^3+E=O \quad \therefore B^3=-E \\
 & \therefore A^{100}+B^{100}=(A^3)^{33}A+(B^3)^{33}B \\
 & \quad =(-E)A+(-E)B \\
 & \quad =-A-B
 \end{aligned}$$

19 [답] ①

$$\begin{aligned}
 & \neg. (A-B)^2=(A-B)(A-B) \\
 & \quad =A^2-AB-BA+B^2 \\
 & \quad =A^2+B^2 (\because AB+BA=O) \\
 & \neg. (AB)^2=(AB)(AB)=A(BA)B \\
 & \quad =A(-AB)B=-A^2B^2 \\
 & \neg. (A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2 \\
 & \quad =A^2-2AB-B^2 \\
 & \text{예. } A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{이면} \\
 & \quad BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \quad CA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \quad \text{즉, } A \neq O \text{이고 } BA=CA \text{이지만 } B \neq C \text{이다.} \\
 & \text{따라서 보기에서 옳은 것은 } \neg, \neg \text{이다.}
 \end{aligned}$$

20 [답] 24

$$\begin{aligned}
 & \text{케일리-해밀턴 정리에 의하여} \\
 & A^2-(1+8)A+(1 \times 8-2 \times 4)E=O \\
 & A^2-9A=O, \text{ 즉 } A^2=9A \text{이므로} \\
 & A^3=A^2A=9AA=9(9A)=9^2A \\
 & A^4=A^3A=9^2AA=9^2(9A)=9^3A \\
 & \quad \vdots \\
 & \therefore A^n=9^{n-1}A \text{ (단, } n \text{은 자연수)} \\
 & A^{10}=9^9A=3^{18}A \text{이고, 행렬 } A \text{의 모든 성분의 합이 15이므로} \\
 & A^{10}=3^{18}A \text{의 모든 성분의 합은} \\
 & 3^{18} \times 15=5 \times 3^{19} \\
 & \text{따라서 } k=5, a=19 \text{이므로} \\
 & k+a=24
 \end{aligned}$$

memo ✨

Handwriting practice lines consisting of 25 horizontal dotted lines.

memo ✨

Handwriting practice lines consisting of 24 horizontal dotted lines.