



정답과 해설

공통수학1

정답과 해설

I. 다항식

I-1. 다항식의 연산

01 다항식의 연산

개념 확인

9쪽

001 ㉠ (1) $x^3+3y^2x^2-2y^3x-4y+5$
(2) $x^3+5-4y+3x^2y^2-2xy^3$

002 ㉠ (1) $3x^2+2xy+2y^2$
(2) $-x^2-4xy+4y^2$
(3) $4x^2+xy+5y^2$
(4) $-5x^2-10xy+6y^2$

유제

11쪽

003 ㉠ $12x^3-20x^2-11x+33$
 $2(A+B)-3(2B-C)$
 $=2A+2B-6B+3C$
 $=2A-4B+3C$
 $=2(x^3-x+3)-4(-x^3+2x^2-6)$
 $\quad +3(2x^3-4x^2-3x+1)$
 $=2x^3-2x+6+4x^3-8x^2+24$
 $\quad +6x^3-12x^2-9x+3$
 $=12x^3-20x^2-11x+33$

004 ㉠ $5x^2-7xy+16y^2$
 $4A-(X-2B)=A$ 에서
 $4A-X+2B=A$
 $\therefore X=3A+2B$
 $=3(3x^2-3xy+6y^2)+2(-2x^2+xy-y^2)$
 $=9x^2-9xy+18y^2-4x^2+2xy-2y^2$
 $=5x^2-7xy+16y^2$

005 ㉠ $-4x^2+11x+14$

두 식의 양변을 각각 더하면

$2A=2x^2+2x+2$

$\therefore A=x^2+x+1$

$A+B=3x^2-2x-3$ 에서

$B=3x^2-2x-3-(x^2+x+1)=2x^2-3x-4$

$\therefore 2A-3B=2(x^2+x+1)-3(2x^2-3x-4)$
 $=2x^2+2x+2-6x^2+9x+12$
 $=-4x^2+11x+14$

006 ㉠ $-x^2+9xy-4y^2+1$

$[x^2+3xy-2y^2, 2x^2-y^2]$
 $=3(x^2+3xy-2y^2)-2(2x^2-y^2)+1$
 $=3x^2+9xy-6y^2-4x^2+2y^2+1$
 $=-x^2+9xy-4y^2+1$

개념 확인

15쪽

007 ㉠ (1) $-8x^5y^7$ (2) $27a^7$ (3) $x^5y^3z^3$ (4) $64b^3$

008 ㉠ (1) x^3-x^2-x-2
(2) $3x^4-6x^3+10x^2-2x+3$
(3) $2x^3-8xy^2+3xy+6y^2$
(4) $3x^2+y^2-4xy-5x+y-2$

009 ㉠ (1) $x^2+xy+\frac{y^2}{4}$ (2) $4a^2-b^2$
(3) $x^2+3xy-18y^2$ (4) $6a^2+5ab-6b^2$

010 ㉠ (1) 7 (2) 5 (3) -18
(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(-3)^2-2\times 1=7$
(2) $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(-3)^2-4\times 1=5$
(3) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
 $=(-3)^3-3\times 1\times (-3)=-18$

011 ㉠ (1) 27 (2) 29 (3) 140

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=5^2+2=27$
(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4=5^2+4=29$
(3) $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$
 $=5^3+3\times 5=140$

유제

17-27쪽

012 ㉠ (1) -4 (2) 13, -4

(1) 주어진 식에서 x^2 항이 나오는 부분만 전개하면

$x^2\times(-2)-x\times x+1\times(-x^2)$

$=-2x^2-x^2-x^2=-4x^2$

따라서 x^2 의 계수는 -4이다.

(2) $(2x^2-x+3)^2 = (2x^2-x+3)(2x^2-x+3)$ 에서
 x^2 항이 나오는 부분만 전개하면
 $2x^2 \times 3 + (-x) \times (-x) + 3 \times 2x^2$
 $= 6x^2 + x^2 + 6x^2 = 13x^2$
 따라서 x^2 의 계수는 13이다.
 x^3 항이 나오는 부분만 전개하면
 $2x^2 \times (-x) + (-x) \times 2x^2 = -2x^3 - 2x^3$
 $= -4x^3$
 따라서 x^3 의 계수는 -4이다.

013 ㉡ 2

주어진 식에서 x^2 항이 나오는 부분만 전개하면
 $2x^2 \times 2a - 3x \times (-6x) + a \times 5x^2 = (9a+18)x^2$
 이때 x^2 의 계수가 36이므로
 $9a+18=36, 9a=18$
 $\therefore a=2$

014 ㉡ 274

주어진 식에서 x^4 항이 나오는 부분만 전개하면
 $x \times 2x \times 3x \times 4x \times 1 + x \times 2x \times 3x \times 1 \times 5x$
 $+ x \times 2x \times 1 \times 4x \times 5x + x \times 1 \times 3x \times 4x \times 5x$
 $+ 1 \times 2x \times 3x \times 4x \times 5x$
 $= 24x^4 + 30x^4 + 40x^4 + 60x^4 + 120x^4$
 $= 274x^4$
 따라서 x^4 의 계수는 274이다.

015 ㉡ 5

주어진 식에서 x^2 항이 나오는 부분만 전개하면
 $x^2 \times bx + ax \times 2x^2 = (2a+b)x^3$
 이때 x^3 의 계수가 11이므로
 $2a+b=11 \quad \therefore b=11-2a \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 주어진 식에서 x^2 항이 나오는 부분만 전개하면
 $x^2 \times 3 + ax \times bx + (-3) \times 2x^2 = (ab-3)x^2$
 이때 x^2 의 계수가 11이므로
 $ab-3=11 \quad \therefore ab=14 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면
 $a(11-2a)=14, 2a^2-11a+14=0$
 $(2a-7)(a-2)=0$
 $\therefore a=\frac{7}{2}$ 또는 $a=2$
 그런데 a 는 정수이므로 $a=2$
 이를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면 $b=7$
 $\therefore b-a=5$

016 ㉡ (1) $x^2+4y^2+9z^2-4xy-12yz+6zx$

$$(2) 64x^3+48x^2y+12xy^2+y^3$$

$$(3) a^3+2a^2b-11ab^2-12b^3$$

$$(4) x^4+9x^2y^2+81y^4 \quad (5) x^6-1$$

$$(6) a^3+8b^3-c^3+6abc$$

(1) $(x-2y+3z)^2$
 $= x^2 + (-2y)^2 + (3z)^2 + 2 \times x \times (-2y)$
 $+ 2 \times (-2y) \times 3z + 2 \times 3z \times x$
 $= x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy - 12yz + 6zx$
 (2) $(4x+y)^3 = (4x)^3 + 3 \times (4x)^2 \times y + 3 \times 4x \times y^2 + y^3$
 $= 64x^3 + 48x^2y + 12xy^2 + y^3$
 (3) $(a-3b)(a+b)(a+4b)$
 $= a^3 + (-3b+b+4b)a^2$
 $+ \{(-3b) \times b + b \times 4b + 4b \times (-3b)\}a$
 $+ (-3b) \times b \times 4b$
 $= a^3 + 2a^2b - 11ab^2 - 12b^3$
 (4) $(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2)$
 $= \{x^2+x \times 3y + (3y)^2\} \{x^2-x \times 3y + (3y)^2\}$
 $= x^4 + x^2 \times (3y)^2 + (3y)^4$
 $= x^4 + 9x^2y^2 + 81y^4$
 (5) $(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
 $= (x+1)(x^2-x \times 1 + 1^2)(x-1)(x^2+x \times 1 + 1^2)$
 $= (x^3+1)(x^3-1) = (x^3)^2 - 1^2 = x^6 - 1$
 (6) $(a+2b-c)(a^2+4b^2+c^2-2ab+2bc+ac)$
 $= \{a+2b+(-c)\}$
 $\times \{a^2+(2b)^2+(-c)^2-a \times 2b$
 $-2b \times (-c)-(-c) \times a\}$
 $= a^3 + (2b)^3 + (-c)^3 - 3 \times a \times 2b \times (-c)$
 $= a^3 + 8b^3 - c^3 + 6abc$

017 ㉡ (1) x^8-1 (2) a^6+16a^3+64

$$(3) x^6-3x^4y^2+3x^2y^4-y^6 \quad (4) a^6-b^6$$

(1) $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$
 $= (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)$
 $= (x^4-1)(x^4+1) = x^8-1$
 (2) $(a+2)^2(a^2-2a+4)^2$
 $= \{(a+2)(a^2-a \times 2 + 2^2)\}^2 = (a^3+2^3)^2$
 $= (a^3+8)^2 = a^6 + 16a^3 + 64$
 (3) $(x+y)^3(x-y)^3$
 $= \{(x+y)(x-y)\}^3 = (x^2-y^2)^3$
 $= (x^2)^3 - 3(x^2)^2y^2 + 3x^2(y^2)^2 - (y^2)^3$
 $= x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$

$$\begin{aligned}
 (4) & (a+b)(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4) \\
 &= (a^2-b^2)\{(a^2)^2+a^2b^2+(b^2)^2\} \\
 &= (a^2)^3-(b^2)^3=a^6-b^6
 \end{aligned}$$

018 ㉔ ⑤

$$\begin{aligned}
 (1) & (a-3b-c)^2 \\
 &= a^2+(-3b)^2+(-c)^2+2 \times a \times (-3b) \\
 &\quad +2 \times (-3b) \times (-c)+2 \times (-c) \times a \\
 &= a^2+9b^2+c^2-6ab+6bc-2ca \\
 (2) & (x+5)(x-3)(x-1) \\
 &= x^3+(5-3-1)x^2 \\
 &\quad +\{5 \times (-3)+(-3) \times (-1)+5 \times (-1)\}x \\
 &\quad +5 \times (-3) \times (-1) \\
 &= x^3+x^2-17x+15
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & (4a-3b)(16a^2+12ab+9b^2)=(4a)^3-(3b)^3 \\
 &= 64a^3-27b^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) & (x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2) \\
 &= x^4+x^2 \times (2y)^2+(2y)^4 \\
 &= x^4+4x^2y^2+16y^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) & (x-y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+yz-zx) \\
 &= x^3+(-y)^3+z^3-3 \times x \times (-y) \times z \\
 &= x^3-y^3+z^3+3xyz
 \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

$$\begin{aligned}
 019 \text{ ㉔ (1) } & x^2+9y^2-4z^2+6xy+9yz+3zx \\
 (2) & x^4+10x^3+7x^2-90x-144
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1) & x+3y=X \text{로 놓으면} \\
 & (x+3y-z)(x+3y+4z) \\
 &= (X-z)(X+4z) \\
 &= X^2+3zX-4z^2 \\
 &= (x+3y)^2+3z(x+3y)-4z^2 \\
 &= x^2+6xy+9y^2+3xz+9yz-4z^2 \\
 &= x^2+9y^2-4z^2+6xy+9yz+3zx \\
 (2) & (x-3)(x+3)(x+2)(x+8) \\
 &= \{(x-3)(x+8)\}\{(x+3)(x+2)\} \\
 &= (x^2+5x-24)(x^2+5x+6) \\
 & x^2+5x=X \text{로 놓으면} \\
 & (x-3)(x+3)(x+2)(x+8) \\
 &= (X-24)(X+6) \\
 &= X^2-18X-144 \\
 &= (x^2+5x)^2-18(x^2+5x)-144 \\
 &= x^4+10x^3+25x^2-18x^2-90x-144 \\
 &= x^4+10x^3+7x^2-90x-144
 \end{aligned}$$

020 ㉔ ⑤

$a+b=A$ 로 놓으면 주어진 식은
 $(A-1)(A^2+A+1)=8$
 $A^3-1=8 \quad \therefore A^3=9$
 따라서 $(a+b)^3$ 의 값은 9이다.

021 ㉔ ㉔ $b+d$ ㉔ $b^2+2bd+d^2$

$$\begin{aligned}
 (㉔) & a^2-b^2+c^2-d^2+2ac-2bd \\
 (a+b+c+d)(a-b+c-d) \\
 &= \{(a+c)+(b+d)\}\{(a+c)-(\overbrace{b+d}^{㉔})\} \\
 &= (a+c)^2-(\overbrace{b+d}^{㉔})^2 \\
 &= a^2+2ac+c^2-(\overbrace{b^2+2bd+d^2}^{㉔}) \\
 &= \overbrace{a^2-b^2+c^2-d^2+2ac-2bd}^{㉔}
 \end{aligned}$$

022 ㉔ 46

$$\begin{aligned}
 & (x-6)(x-2)(x+1)(x+3) \\
 &= \{(x-6)(x+1)\}\{(x-2)(x+3)\} \\
 &= (x^2-5x-6)(x^2+x-6) \\
 & x^2-6=X \text{로 놓으면} \\
 & (x-6)(x-2)(x+1)(x+3) \\
 &= (X-5x)(X+x) \\
 &= X^2-4xX-5x^2 \\
 &= (x^2-6)^2-4x(x^2-6)-5x^2 \\
 &= x^4-12x^2+36-4x^3+24x-5x^2 \\
 &= x^4-4x^3-17x^2+24x+36
 \end{aligned}$$

따라서 $a=-4, b=-17, c=24$ 이므로
 $3a-2b+c=46$

023 ㉔ (1) $\sqrt{17}$ (2) 45

$$\begin{aligned}
 (x+y)^2 &= x^2+y^2+2xy \text{이므로} \\
 3^2 &= 13+2xy, 2xy=-4 \quad \therefore xy=-2 \\
 (1) & (x-y)^2=(x+y)^2-4xy \\
 &= 3^2-4 \times (-2)=17 \\
 & \therefore |x-y|=\sqrt{17} \quad (\because |x-y|>0) \\
 (2) & x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y) \\
 &= 3^3-3 \times (-2) \times 3=45
 \end{aligned}$$

024 ㉔ (1) $10\sqrt{2}$ (2) 140

$$\begin{aligned}
 (1) & \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=6+2=8 \text{이므로} \\
 & x+\frac{1}{x}=2\sqrt{2} \quad (\because x>0) \\
 & \therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \\
 &= (2\sqrt{2})^3-3 \times 2\sqrt{2}=10\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

(2) $x^2 - 5x - 1 = 0$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면

$$\begin{aligned} x - 5 - \frac{1}{x} &= 0 \quad \therefore x - \frac{1}{x} = 5 \\ \therefore x^3 - \frac{1}{x^3} &= \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) \\ &= 5^3 + 3 \times 5 = 140 \end{aligned}$$

025 ㉠ $-4\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= (x+y)^2 - xy \text{이므로} \\ 4 &= (\sqrt{2})^2 - xy \quad \therefore xy = -2 \\ \therefore \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} &= \frac{x^3 + y^3}{xy} = \frac{(x+y)^3 - 3xy(x+y)}{xy} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^3 - 3 \times (-2) \times \sqrt{2}}{-2} = -4\sqrt{2} \end{aligned}$$

026 ㉠ 194

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 1 &= 0 \text{에서 } x \neq 0 \text{이므로 양변을 } x \text{로 나누면} \\ x - 4 + \frac{1}{x} &= 0 \quad \therefore x + \frac{1}{x} = 4 \\ x^2 + \frac{1}{x^2} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 4^2 - 2 = 14 \text{이므로} \\ x^4 + \frac{1}{x^4} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 14^2 - 2 = 194 \end{aligned}$$

027 ㉠ (1) 1 (2) 183

$$\begin{aligned} (1) \quad a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{이므로} \\ 34 &= 6^2 - 2(ab+bc+ca) \\ \therefore ab+bc+ca &= 1 \\ (2) \quad a^3 + b^3 + c^3 &= (a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\} \\ &\quad + 3abc \\ &= 6 \times (34 - 1) + 3 \times (-5) = 183 \end{aligned}$$

028 ㉠ (1) 7 (2) 8

$$\begin{aligned} (1) \quad b+c &= 1 - \sqrt{2}, \quad a+b = 1 + \sqrt{2} \text{의 변끼리 빼면} \\ c-a &= (1 - \sqrt{2}) - (1 + \sqrt{2}) = -2\sqrt{2} \\ \therefore a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc - ca &= \frac{1}{2}\{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c-a)^2\} \\ &= \frac{1}{2}\{(1+\sqrt{2})^2 + (1-\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2\} \\ &= \frac{1}{2}(3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}+8) = 7 \\ (2) \quad a^3 + b^3 + c^3 &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + 3abc \\ \text{이므로} \\ -24 &= 0 + 3abc \quad \therefore abc = -8 \end{aligned}$$

$a+b+c=0$ 에서

$$\begin{aligned} (a+b)(b+c)(c+a) &= (-c)(-a)(-b) \\ &= -abc \\ &= 8 \end{aligned}$$

029 ㉠ 4

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{bc+ac+ab}{abc} = 2 \text{에서} \\ abc &= \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \text{이므로} \\ 9 &= 5^2 - 2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca = 8 \\ \textcircled{1} \text{에서 } abc &= \frac{1}{2}(ab+bc+ca) = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \end{aligned}$$

030 ㉠ 17

$$\begin{aligned} a+b+c &= 3 \text{에서} \\ (a+b)(b+c)(c+a) &= (3-c)(3-a)(3-b) \\ &= 3^3 + (-c-a-b) \times 3^2 + (ca+ab+bc) \times 3 - abc \\ &= 27 - 9(a+b+c) + 3(ab+bc+ca) - abc \\ \text{이므로} \\ -8 &= 27 - 9 \times 3 + 3(ab+bc+ca) + 4 \\ 3(ab+bc+ca) &= -12 \quad \therefore ab+bc+ca = -4 \\ \therefore a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= 3^2 - 2 \times (-4) = 17 \end{aligned}$$

031 ㉠ 33

직육면체의 가로, 세로의 길이와 높이를 각각 a, b, c 라 하면 직육면체의 겹넓이는 $2(ab+bc+ca)$ 이다.
이때 모든 모서리의 길이의 합이 28이므로
 $4(a+b+c) = 28 \quad \therefore a+b+c = 7$
또 대각선의 길이가 4이므로
 $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 4 \quad \therefore a^2+b^2+c^2 = 16$
 $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$ 이므로
 $2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$
 $= 7^2 - 16 = 33$
따라서 직육면체의 겹넓이는 33이다.

032 ㉠ 10

직사각형 ODCE에서 $\overline{DE} = \overline{OC} = 6$
 $\overline{OD} = a, \overline{OE} = b$ 라 하면
 $\overline{AD} + \overline{DE} + \overline{EB} = (6-a) + 6 + (6-b)$
 $= 18 - (a+b) \quad \dots\dots \textcircled{1}$

직사각형 ODCE의 대각선의 길이가 6이므로

$$\sqrt{a^2+b^2}=6 \quad \therefore a^2+b^2=36$$

또 직사각형 ODCE의 넓이가 14이므로

$$ab=14$$

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=36+2 \times 14=64 \text{이므로}$$

$$a+b=8 \quad (\because a>0, b>0)$$

따라서 ㉠에서

$$\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EB}=18-(a+b)=18-8=10$$

033 ㉡ 240

$\overline{AC}=a$, $\overline{BC}=b$ 라 하면 두 정육면체의 겹넓이의 합은 $6(a^2+b^2)$ 이다.

$$\text{이때 } \overline{AB}=8 \text{이므로 } a+b=8$$

또 두 정육면체의 부피의 합이 224이므로

$$a^3+b^3=224$$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b) \text{이므로}$$

$$224=8^3-3ab \times 8, 24ab=288 \quad \therefore ab=12$$

$$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=8^2-2 \times 12=40$$

따라서 두 정육면체의 겹넓이의 합은

$$6(a^2+b^2)=6 \times 40=240$$

034 ㉡ 112

$\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$ 라 하면

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$$

$$=(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2)+(\overline{OB}^2+\overline{OC}^2)+(\overline{OC}^2+\overline{OA}^2)$$

$$=(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)$$

$$=2(a^2+b^2+c^2)$$

$$(가)에서 a+b+c=14$$

$$(나)에서 \frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}ca=35$$

$$\therefore ab+bc+ca=70$$

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$

$$=14^2-2 \times 70=56$$

이므로

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=2(a^2+b^2+c^2)$$

$$=2 \times 56=112$$

개념 확인

29쪽

035 ㉡ (1) x^2 , $6x$, 19

$$\text{몫: } 2x^2+x+6, \text{ 나머지: } 19$$

$$(2) 1, 6x, -5x$$

$$\text{몫: } 3x+1, \text{ 나머지: } -5x+1$$

036 ㉡ (1) $-1, -1, 2, -3$

$$\text{몫: } x^2-2x+1, \text{ 나머지: } -3$$

$$(2) 0, 22, 3, 8, 21$$

$$\text{몫: } 3x^3+4x^2+8x+11, \text{ 나머지: } 21$$

유제

31~35쪽

037 ㉡ (1) 몫: $x^2-4x+14$, 나머지: -59

$$(2) \text{ 몫: } x^2+6x+11, \text{ 나머지: } -x-32$$

$$\begin{array}{r} (1) \quad x^2-4x+14 \\ x+4 \overline{) x^3 \quad \quad -2x-3} \\ \underline{x^3+4x^2} \\ -4x^2-2x \\ \underline{-4x^2-16x} \\ 14x-3 \\ \underline{14x+56} \\ -59 \end{array}$$

따라서 몫은 $x^2-4x+14$, 나머지는 -59 이다.

$$\begin{array}{r} (2) \quad x^2+6x+11 \\ x^2-2x+3 \overline{) x^4+4x^3+2x^2-5x+1} \\ \underline{x^4-2x^3+3x^2} \\ 6x^3-x^2-5x \\ \underline{6x^3-12x^2+18x} \\ 11x^2-23x+1 \\ \underline{11x^2-22x+33} \\ -x-32 \end{array}$$

따라서 몫은 $x^2+6x+11$, 나머지는 $-x-32$ 이다.

038 ㉡ x^2+x+1

$$2x^3-x^2+4x+3=A(2x-3)+5x+6 \text{이므로}$$

$$A(2x-3)=2x^3-x^2-x-3$$

$$\therefore A=(2x^3-x^2-x-3) \div (2x-3)$$

$$\begin{array}{r} x^2+x+1 \\ 2x-3 \overline{) 2x^3-x^2-x-3} \\ \underline{2x^3-3x^2} \\ 2x^2-x \\ \underline{2x^2-3x} \\ 2x-3 \\ \underline{2x-3} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore A=x^2+x+1$$

039 ㉮ 12

$$\begin{array}{r} 4x+6 \\ x^2-x+2 \overline{) 4x^3+2x^2-5x+3} \\ \underline{4x^3-4x^2+8x} \\ 6x^2-13x+3 \\ \underline{6x^2-6x+12} \\ -7x-9 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=4x+6$, $R(x)=-7x-9$ 이므로
 $Q(1)-R(-1)=(4+6)-(7-9)=12$

040 ㉮ -12

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+2x-2)(3x+1)+x-1 \\ &= 3x^3+7x^2-3x-3 \end{aligned}$$

다항식 $f(x)$ 를 $3x^2-2x+3$ 으로 나누면

$$\begin{array}{r} x+3 \\ 3x^2-2x+3 \overline{) 3x^3+7x^2-3x-3} \\ \underline{3x^3-2x^2+3x} \\ 9x^2-6x-3 \\ \underline{9x^2-6x+9} \\ -12 \end{array}$$

따라서 구하는 나머지는 -12 이다.

041 ㉮ ③

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{3}{2}x-1\right)Q(x)+R \\ &= \frac{3}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R \\ &= \left(x-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{2}Q(x)+R \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 를 $x-\frac{2}{3}$ 로 나누었을 때의 몫은
 $\frac{3}{2}Q(x)$, 나머지는 R 이다.

042 ㉮ $a=2, b=1, c=-2$

$$f(x)=(2x+4)Q(x)+R$$

양변에 x 를 곱하면

$$\begin{aligned} xf(x) &= x(2x+4)Q(x)+Rx \\ &= 2x(x+2)Q(x)+R(x+2)-2R \\ &= (x+2)\{2xQ(x)+R\}-2R \end{aligned}$$

따라서 $xf(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 몫은
 $2xQ(x)+R$, 나머지는 $-2R$ 이므로
 $a=2, b=1, c=-2$

043 ㉮ x^2+3x-2

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x-\frac{1}{4}\right)(4x^2+12x-8)+5 \\ &= \left(x-\frac{1}{4}\right)\times 4(x^2+3x-2)+5 \\ &= (4x-1)(x^2+3x-2)+5 \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 를 $4x-1$ 로 나누었을 때의 몫은
 x^2+3x-2 이다.

044 ㉮ ④

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)Q(x)+R \text{이므로} \\ x^2f(x) &= x^2(x+1)Q(x)+Rx^2 \\ x^2f(x) \text{를 } x+1 \text{로 나누었을 때의 나머지가 } R \text{이므로} \\ x^2f(x) &= x^2(x+1)Q(x)+Rx^2 \\ &= x^2(x+1)Q(x)+R(x^2-1)+R \\ &= x^2(x+1)Q(x)+R(x+1)(x-1)+R \\ &= (x+1)\{x^2Q(x)+R(x-1)\}+R \end{aligned}$$

따라서 구하는 몫은 $x^2Q(x)+R(x-1)$ 이다.

045 ㉮ (1) 몫: x^2+x-4 , 나머지: -10

(2) 몫: x^2+2x+1 , 나머지: 1

$$(1) \begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -5 & -6 \\ & & 1 & 1 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & -4 & -10 \end{array}$$

따라서 몫은 x^2+x-4 이고 나머지는 -10 이다.

$$(2) \begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{3} & 3 & 7 & 5 & 2 \\ & & -1 & -2 & -1 \\ \hline & 3 & 6 & 3 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3x^3+7x^2+5x+2 &= \left(x+\frac{1}{3}\right)(3x^2+6x+3)+1 \\ &= 3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x^2+2x+1)+1 \\ &= (3x+1)(x^2+2x+1)+1 \end{aligned}$$

따라서 몫은 x^2+2x+1 이고 나머지는 1 이다.

046 ㉮ -5

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & 0 & -3 \\ & & -1 & 3 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & 3 & -6 \end{array}$$

따라서 $a=-1, b=0, c=-1, d=3, e=-6$ 이므로
 $a+b+c+d+e=-5$

047 ㉔ ③

주어진 조립제법을 식으로 나타내면

$$\begin{aligned} 3x^3 - 4x^2 + 2x + 1 &= \left(x + \frac{2}{3}\right)(3x^2 - 6x + 6) - 3 \\ &= 3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x^2 - 2x + 2) - 3 \\ &= (3x + 2)(x^2 - 2x + 2) - 3 \end{aligned}$$

따라서 몫은 $x^2 - 2x + 2$ 이고 나머지는 -3 이다.

048 ㉔ $x^2 + 2x + 3$

주어진 조립제법에서 $P(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 몫이 $x^2 + x - 2$, 나머지가 5이므로

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-3)(x^2 + x - 2) + 5 \\ &= x^3 - 2x^2 - 5x + 11 \end{aligned}$$

따라서 $P(x)$ 를 $x-4$ 로 나누었을 때의 몫을 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 구하면 $x^2 + 2x + 3$ 이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & -2 & -5 & 11 \\ & & 4 & 8 & 12 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 23 \end{array}$$

연습문제

36~38쪽

049 ㉔ -25

$$\begin{aligned} 2(A+B) - 3(B-2C) &= 2A + 2B - 3B + 6C \\ &= 2A - B + 6C \\ &= 2(3x^3 + x^2 - 2x + 1) - (x^3 - x - 3) \\ &\quad + 6(-x^2 + 5x - 2) \\ &= 6x^3 + 2x^2 - 4x + 2 - x^3 + x + 3 - 6x^2 + 30x - 12 \\ &= 5x^3 - 4x^2 + 27x - 7 \end{aligned}$$

따라서 $a=5, b=-4, c=27, d=-7$ 이므로

$$a - b - c + d = -25$$

050 ㉔ $-3x^2 - 8xy + 4y^2$

$$\begin{aligned} 3(X-2A) &= X-4B \text{에서} \\ 3X-6A &= X-4B \\ 2X &= 6A-4B \\ \therefore X &= 3A-2B \\ &= 3(x^2 - 4xy + 2y^2) - 2(3x^2 - 2xy + y^2) \\ &= 3x^2 - 12xy + 6y^2 - 6x^2 + 4xy - 2y^2 \\ &= -3x^2 - 8xy + 4y^2 \end{aligned}$$

051 ㉔ 3

$$\begin{aligned} (x+a)^3 + x(x-4) &= (x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3) + x^2 - 4x \\ &= x^3 + (3a+1)x^2 + (3a^2-4)x + a^3 \end{aligned}$$

이때 x^2 의 계수가 10이므로

$$3a+1=10 \quad \therefore a=3$$

052 ㉔ ①

$$\begin{aligned} x^2 - 3x &= X \text{로 놓으면} \\ (x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x - 4) + 2 &= (X+1)(X-4) + 2 = X^2 - 3X - 2 \\ &= (x^2 - 3x)^2 - 3(x^2 - 3x) - 2 \\ &= x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 3x^2 + 9x - 2 \\ &= x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 9x - 2 \end{aligned}$$

053 ㉔ $-10\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} x-y &= (1+\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \\ xy &= (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 1^2 - (\sqrt{2})^2 = -1 \\ \therefore \frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} &= \frac{x^3-y^3}{xy} = \frac{(x-y)^3 + 3xy(x-y)}{xy} \\ &= \frac{(2\sqrt{2})^3 + 3 \times (-1) \times 2\sqrt{2}}{-1} = -10\sqrt{2} \end{aligned}$$

054 ㉔ 64

$$\begin{aligned} a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &= (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \\ &= (ab+bc+ca)^2 - 2(ab^2c + bc^2a + ca^2b) \\ &= (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c) \\ &= (-2)^2 - 2 \times 6 \times (-5) = 64 \end{aligned}$$

055 ㉔ ③

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 2x - 1 \\ 3x^2 + 3x - 1 \overline{) 6x^4 - 11x^2 + 3x + 2} \\ \underline{6x^4 + 6x^3 - 2x^2} \\ -6x^3 - 9x^2 + 3x \\ \underline{-6x^3 - 6x^2 + 2x} \\ -3x^2 + x + 2 \\ \underline{-3x^2 - 3x + 1} \\ 4x + 1 \end{array}$$

따라서 몫은 $2x^2 - 2x - 1$ 이고 나머지는 $4x + 1$ 이므로

$$a=-2, b=-1, c=4, d=1$$

$$\therefore ad + bc = -6$$

056 ㉓ ③

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 2x + 2 \\
 x^2 + x + 2 \overline{) x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + k} \\
 \underline{x^4 + x^3 + 2x^2} \\
 -2x^3 - 2x \\
 \underline{-2x^3 - 2x^2 - 4x} \\
 2x^2 + 2x + k \\
 \underline{2x^2 + 2x + 4} \\
 k - 4
 \end{array}$$

이때 나머지가 0이므로

$$k - 4 = 0 \quad \therefore k = 4$$

057 ㉓ ③

$$2AB - BA + CA \quad \blacktriangle BA = AB$$

$$\begin{aligned}
 &= AB + CA = A(B + C) \\
 &= (x^2 - 2xy + 3y^2) \{ (x^2 + xy) + (y^2 - xy) \} \\
 &= (x^2 - 2xy + 3y^2)(x^2 + y^2) \\
 &= x^4 + x^2y^2 - 2x^3y - 2xy^3 + 3x^2y^2 + 3y^4 \\
 &= x^4 - 2x^3y + 4x^2y^2 - 2xy^3 + 3y^4
 \end{aligned}$$

058 ㉓ 30

$$\begin{aligned}
 &(1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + 10x^{10})^2 \\
 &= (1 + x + 2x^2 + \cdots + 10x^{10})(1 + x + 2x^2 + \cdots + 10x^{10}) \\
 &\text{에서 } x^5 \text{ 항이 나오는 부분만 전개하면} \\
 &1 \times 5x^5 + x \times 4x^4 + 2x^2 \times 3x^3 + 3x^3 \times 2x^2 \\
 &\quad + 4x^4 \times x + 5x^5 \times 1 \\
 &= 5x^5 + 4x^5 + 6x^5 + 6x^5 + 4x^5 + 5x^5 = 30x^5 \\
 &\text{따라서 } x^5 \text{의 계수는 30이다.}
 \end{aligned}$$

059 ㉓ 82

$$\begin{aligned}
 x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \text{이므로} \\
 14 &= 2^3 - 3xy \times 2, \quad 6xy = -6 \quad \therefore xy = -1 \\
 x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \times (-1) = 6 \text{이고} \\
 (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) &= x^5 + y^5 + x^2y^2(x + y) \text{이므로} \\
 6 \times 14 &= x^5 + y^5 + (-1)^2 \times 2 \\
 \therefore x^5 + y^5 &= 84 - 2 = 82
 \end{aligned}$$

060 ㉓ 2

$$\begin{aligned}
 &\left(x - \frac{4}{x}\right)^2 + \left(4x + \frac{1}{x}\right)^2 \\
 &= x^2 + \frac{16}{x^2} - 8 + 16x^2 + \frac{1}{x^2} + 8 \\
 &= 17x^2 + \frac{17}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 17x^2 + \frac{17}{x^2} = 34 \text{이므로 } x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 2 + 2 = 4$$

이때 $x > 0$ 이므로

$$x + \frac{1}{x} = 2$$

061 ㉓ ②

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면

$$x - 2 - \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x - \frac{1}{x} = 2$$

$$\begin{aligned}
 \therefore 2x^2 - x - 8 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \\
 &= 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x - \frac{1}{x}\right) - 8 \\
 &= 2\left\{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\right\} - \left(x - \frac{1}{x}\right) - 8 \\
 &= 2 \times (2^2 + 2) - 2 - 8 = 2
 \end{aligned}$$

062 ㉓ 64

$$\begin{aligned}
 &a^3 + b^3 + c^3 \\
 &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\
 &\text{이고 } a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \text{이므로} \\
 &(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0 \\
 &\text{이때 } a + b + c = 12 \text{이므로} \\
 &a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \\
 &\frac{1}{2} \{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \} = 0 \\
 &\text{즉, } a - b = 0, b - c = 0, c - a = 0 \text{이므로} \\
 &a = b = c \\
 &\text{이때 } a + b + c = 12 \text{이므로 } a = b = c = 4 \\
 &\therefore abc = 4^3 = 64
 \end{aligned}$$

063 ㉓ ④

$$\begin{aligned}
 \overline{AB} &= a, \overline{AD} = b, \overline{AE} = c \text{라 하면} \\
 \overline{BG}^2 &= b^2 + c^2, \overline{GD}^2 = a^2 + c^2, \overline{DB}^2 = a^2 + b^2 \\
 &\text{이때 직육면체의 겹넓이가 148이므로} \\
 2(ab + bc + ca) &= 148 \quad \therefore ab + bc + ca = 74 \\
 &\text{또 모든 모서리의 길이의 합이 60이므로} \\
 4(a + b + c) &= 60 \quad \therefore a + b + c = 15 \\
 \therefore \overline{BG}^2 + \overline{GD}^2 + \overline{DB}^2 \\
 &= 2(a^2 + b^2 + c^2) \\
 &= 2\{ (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) \} \\
 &= 2 \times (15^2 - 2 \times 74) = 154
 \end{aligned}$$

064 ㉑ 9

| 접근 방법 | 주어진 다항식을 $2x^2+x+1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하여 등식으로 나타낸다.

$$\begin{array}{r} x^2+2x-5 \\ 2x^2+x+1 \overline{) 2x^4+5x^3-7x^2-3x+4} \\ \underline{2x^4+x^3+x^2} \\ 4x^3-8x^2-3x \\ \underline{4x^3+2x^2+2x} \\ -10x^2-5x+4 \\ \underline{-10x^2-5x-5} \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2x^4+5x^3-7x^2-3x+4 \\ = (2x^2+x+1)(x^2+2x-5)+9 \\ = 9 \quad (\because 2x^2+x+1=0) \end{aligned}$$

065 ㉑ $\frac{7}{6}$

$$\begin{aligned} f(x) &= (6x-3)A(x)+R_1 \\ &= 6\left(x-\frac{1}{2}\right)A(x)+R_1 \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right) \times 6A(x)+R_1 \end{aligned}$$

따라서 $B(x)=6A(x)$, $R_2=R_1$ 이므로

$$\frac{A(x)}{B(x)} + \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6}$$

066 ㉑ 11

주어진 조립제법을 식으로 나타내면

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(x-\frac{2}{3}\right)(6x^2+3x+9)+5 \\ &= 3\left(x-\frac{2}{3}\right)(2x^2+x+3)+5 \\ &= (3x-2)(2x^2+x+3)+5 \end{aligned}$$

$$\therefore Q(x)=2x^2+x+3, R=5$$

$$\therefore Q(1)+R=(2+1+3)+5=11$$

067 ㉑ 12

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{yz+zx+xy}{xyz} = \frac{xy+yz+zx}{6} = 2$$

이므로 $xy+yz+zx=12$

$x+y+z=k$ (k 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} (x+y)(y+z)(z+x) \\ &= (k-z)(k-x)(k-y) \\ &= k^3 - (x+y+z)k^2 + (xy+yz+zx)k - xyz \\ &= k^3 - k \times k^2 + 12k - 6 = 12k - 6 \end{aligned}$$

즉, $12k-6=66$ 이므로 $k=6$

$$\therefore x+y+z=6$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)$$

$$= 6^2 - 2 \times 12 = 12$$

단계	채점 기준	비율
①	$xy+yz+zx$ 의 값 구하기	40%
②	$x+y+z$ 의 값 구하기	40%
③	$x^2+y^2+z^2$ 의 값 구하기	20%

068 ㉑ ②

| 접근 방법 | $\overline{PH}=a$, $\overline{PI}=b$ 로 놓고 내접원의 성질과 직각삼각형의 넓이 관계를 이용하여 a, b 에 대한 식을 세운다.

직각삼각형 OHPI에서 $\overline{HI}=\overline{OP}=4$

$\overline{PH}=a$, $\overline{PI}=b$ 라 하면 직각삼각형 OHPI의 대각선의 길이가 4이므로

$$\sqrt{a^2+b^2}=4 \quad \therefore a^2+b^2=16 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

삼각형 PIH에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 삼각형 PIH의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PH} \times \overline{PI} = \frac{1}{2} \times r \times (\overline{PH} + \overline{PI} + \overline{HI})$$

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}r(a+b+4)$$

$$\therefore ab = r(a+b+4) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 삼각형 PIH에 내접하는 원의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\pi r^2 = \frac{\pi}{4}, r^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore r = \frac{1}{2} \quad (\because r > 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } ab = \frac{1}{2}(a+b+4)$$

$$a+b=2ab-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$a^2+2ab+b^2=4a^2b^2-16ab+16$$

$$\textcircled{1} \text{을 대입하면 } 16+2ab=4a^2b^2-16ab+16$$

$$4a^2b^2-18ab=0, 2ab(2ab-9)=0$$

$$\therefore ab = \frac{9}{2} \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{3} \text{에 대입하면 } a+b=2 \times \frac{9}{2}-4=5$$

$$\therefore \overline{PH}^3 + \overline{PI}^3 = a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$= 5^3 - 3 \times \frac{9}{2} \times 5 = \frac{115}{2}$$

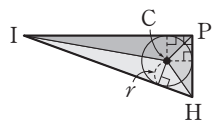
| 참고 | 삼각형 PIH에 내접하는

원의 중심을 C라 하면 삼각형 PIH

의 넓이는 세 삼각형 CIH, CHP,

CPI의 넓이의 합과 같으므로

$$\triangle PIH = \frac{1}{2} \times r \times (\overline{PH} + \overline{PI} + \overline{HI})$$



01 항등식과 나머지 정리

개념 확인

41쪽

069 ㉠ ㄷ, ㄹ, ㅂ

070 ㉠ (1) $a=-1, b=-1, c=2$ (2) $a=-1, b=-6, c=2$ 071 ㉠ (1) $a=-2, b=3$ (2) $a=-2, b=3$ (1) 주어진 등식의 좌변을 x 에 대하여 정리하면

$$(a+b)x+2a=x-4$$

$$a+b=1, 2a=-4 \text{이므로}$$

$$a=-2, b=3$$

(2) 주어진 등식의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$-2b=-6 \quad \therefore b=3$$

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$2a=-4 \quad \therefore a=-2$$

유제

43-51쪽

072 ㉠ (1) $a=2, k=-2$ (2) $a=2, x=-2$ (1) 주어진 등식의 좌변을 x 에 대하여 정리하면

$$(k+2)x+3a-ak+4k-2=0$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$k+2=0, 3a-ak+4k-2=0$$

$$\therefore a=2, k=-2$$

(2) 주어진 등식의 좌변을 k 에 대하여 정리하면

$$(x-a+4)k+2x+3a-2=0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$x-a+4=0, 2x+3a-2=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=2, x=-2$$

073 ㉠ $a=2, b=1, c=2$ 주어진 등식의 좌변을 x, y 에 대하여 정리하면

$$(a+b-3)x+(a-b-1)y-c+2=0$$

이 등식이 x, y 에 대한 항등식이므로

$$a+b-3=0, a-b-1=0, -c+2=0$$

$$\therefore c=2$$

 $a+b-3=0, a-b-1=0$ 을 연립하여 풀면

$$a=2, b=1$$

074 ㉠ 10

주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a+b-6=0, ab-4=0$$

즉, $a+b=6, ab=4$ 이므로

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}=6+2\sqrt{4}=10$$

075 ㉠ -7

 $x+2y=1$ 에서 $x=1-2y$ 를 주어진 등식에 대입하면

$$2a(1-2y)+by-4=(1-b)(1-2y)+ay$$

양변을 y 에 대하여 정리하면

$$(-4a+b)y+2a-4=(a+2b-2)y+1-b$$

이 등식이 y 에 대한 항등식이므로

$$-4a+b=a+2b-2, 2a-4=1-b$$

$$\therefore 5a+b=2, 2a+b=5$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=7$

$$\therefore ab=-7$$

076 ㉠ (1) $a=1, b=-2, c=8$

$$(2) a=-2, b=-1, c=1$$

(1) 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$$3ax^3+(-a+3b)x^2+(6-b)x-2$$

$$=3x^3-7x^2+cx-2$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$3a=3, -a+3b=-7, 6-b=c$$

$$\therefore a=1, b=-2, c=8$$

(2) 주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$\text{양변에 } x=0 \text{을 대입하면 } c \times (-1) \times 2 = -2$$

$$-2c=-2 \quad \therefore c=1$$

양변에 $x=-2$ 를 대입하면

$$b \times (-2) \times (-3) = -8+4-2$$

$$6b=-6 \quad \therefore b=-1$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면 $a \times 1 \times 3 = -2-2-2$

$$3a=-6 \quad \therefore a=-2$$

| 다른 풀이 |

(2) 주어진 등식의 좌변을 전개하면

$$(a+b+c)x^2+(2a-b+c)x-2c$$

$$=-2x^2-2x-2$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a+b+c=-2, 2a-b+c=-2, -2c=-2$$

$$c=1 \text{이므로 } a+b=-3, 2a-b=-3$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=-1$$

077 ㉠ -1

주어진 등식의 최고차항을 비교하면 $a=1$
 $x^2-3x+3=(x-1)^2+b(x-1)+c$ 가 x 에 대한 항
 등식이므로 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $1-3+3=c \quad \therefore c=1$
 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $3=1-b+c \quad \therefore b=-1$
 $\therefore abc=1 \times (-1) \times 1 = -1$

| 다른 풀이 |

주어진 등식의 우변을 전개하면
 $x^2-3x+3=ax^2+(-2a+b)x+a-b+c$
 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 $1=a, -3=-2a+b, 3=a-b+c$
 $\therefore a=1, b=-1, c=1$
 $\therefore abc=-1$

078 ㉠ ①

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $1-5+a+1=-1 \quad \therefore a=2$
 따라서 양변에 $x=2$ 를 대입하면
 $8-20+2a+1=Q(2)-1$
 $\therefore Q(2)=Q(a)=-6$

079 ㉠ -2

$f(x)=x^2+px+q$ (p, q 는 상수)라 하면
 $(x^2-x+1)(x^2+px+q)=x^4+3x^3+ax+b$
 좌변을 전개하면
 $x^4+(p-1)x^3+(1-p+q)x^2+(p-q)x+q$
 $=x^4+3x^3+ax+b$
 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 $p-1=3, 1-p+q=0, p-q=a, q=b$
 따라서 $p=4, q=3$ 이므로 $a=1, b=3$
 $\therefore a-b=-2$

080 ㉠ (1) -1 (2) 27 (3) 13 (4) -14

(1) 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $(1+2-3-1)^3=a_0+a_1+a_2+a_3+\dots+a_9$
 $\therefore a_0+a_1+a_2+a_3+\dots+a_9=-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 (2) 주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면
 $(-1+2+3-1)^3=a_0-a_1+a_2-a_3+\dots-a_9$
 $\therefore a_0-a_1+a_2-a_3+\dots-a_9=27 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

(3) $\textcircled{1}+\textcircled{2}$ 을 하면

$$2(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)=26$$

$$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6+a_8=13$$

(4) $\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면

$$2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)=-28$$

$$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-14$$

081 ㉠ 1

주어진 등식의 양변에 $x=-\frac{1}{3}$ 을 대입하면
 $\left\{3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)+2\right\}^8=a_0-\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{3^2}a_2-\dots+\frac{1}{3^8}a_8$
 $\therefore a_0-\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}-\dots+\frac{a_8}{3^8}=1^8=1$

082 ㉠ 0

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $(2-1)^{10}=a_0+a_1+a_2+\dots+a_{10}$
 $\therefore a_0+a_1+a_2+\dots+a_{10}=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $(-1)^{10}=a_0 \quad \therefore a_0=1$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $1+a_1+a_2+a_3+\dots+a_{10}=1$
 $\therefore a_1+a_2+a_3+\dots+a_{10}=0$

083 ㉠ 0

주어진 등식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면
 $(4-4-1)^5=a_0+a_1+a_2+\dots+a_{10}$
 $\therefore a_0+a_1+a_2+\dots+a_{10}=-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $(-1)^5=a_0-a_1+a_2-\dots+a_{10}$
 $\therefore a_0-a_1+a_2-\dots+a_{10}=-1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면
 $2(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)=0$
 $\therefore a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=0$

084 ㉠ (1) $a=4, b=-4$ (2) $a=2, b=4$

(1) x^3+ax^2+b 를 x^2+x-2 , 즉 $(x+2)(x-1)$ 로
 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가
 $-x+2$ 이므로
 $x^3+ax^2+b=(x+2)(x-1)Q(x)-x+2$
 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 양변에 $x=-2$ 를 대입하면
 $-8+4a+b=2+2$
 $\therefore 4a+b=12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1+a+b=-1+2$$

$$\therefore a+b=0 \quad \cdots \textcircled{A}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면

$$a=4, b=-4$$

(2) $2x^3+ax+b$ 를 x^2-x+2 로 나누었을 때의 몫은 최고차항의 계수가 2인 일차식이다.

따라서 몫을 $2x+c$ (c 는 상수)라 하면 나머지가 0 이므로

$$2x^3+ax+b=(x^2-x+2)(2x+c)$$

이 등식의 우변을 전개하면

$$2x^3+ax+b=2x^3+(c-2)x^2+(4-c)x+2c$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$0=c-2, a=4-c, b=2c$$

$$\therefore a=2, b=4, c=2$$

085 ㉠ -2

$$x^4+3x^3-2x^2+ax$$

$$=(x^2+3x+b)(x^2+1)-4x+3$$

이 등식의 우변을 전개하면

$$x^4+3x^3-2x^2+ax$$

$$=x^4+3x^3+(b+1)x^2-x+b+3$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$-2=b+1, a=-1, 0=b+3$$

따라서 $a=-1, b=-3$ 이므로

$$b-a=-2$$

086 ㉠ $k=-1$, 나머지: $-4x+7$

x^3+kx^2-3x+1 을 x^2+x+3 으로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면 몫이 $x-2$ 이므로

$$x^3+kx^2-3x+1=(x^2+x+3)(x-2)+ax+b$$

이 등식의 우변을 전개하면

$$x^3+kx^2-3x+1=x^3-x^2+(a+1)x+b-6$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$k=-1, -3=a+1, 1=b-6$$

$$\therefore k=-1, a=-4, b=7$$

따라서 나머지는 $-4x+7$ 이다.

087 ㉠ 4

$x^{10}+1$ 을 x^2-x 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하고

$R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$x^{10}+1=(x^2-x)Q(x)+ax+b$$

$$=x(x-1)Q(x)+ax+b$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$b=1$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$2=a+b \quad \therefore a=1$$

따라서 $R(x)=x+1$ 이므로

$$R(3)=3+1=4$$

088 ㉠ $a=1, b=-6, c=14, d=-7$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ & & -2 & 4 & -12 \\ \hline -2 & 1 & -2 & 6 & -7 \\ & & -2 & 8 & \\ \hline -2 & 1 & -4 & 14 & \\ & & -2 & & \\ \hline & 1 & & -6 & \end{array}$$

위의 조립제법을 이용하면

$$x^3+2x+5$$

$$=(x+2)(x^2-2x+6)-7$$

$$=(x+2)\{(x+2)(x-4)+14\}-7$$

$$=(x+2)^2(x-4)+14(x+2)-7$$

$$=(x+2)^2\{(x+2)-6\}+14(x+2)-7$$

$$=(x+2)^3-6(x+2)^2+14(x+2)-7$$

$$\therefore a=1, b=-6, c=14, d=-7$$

089 ㉠ 10

$(x-2)^3=x^3-6x^2+12x-8$ 이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -6 & 12 & -8 \\ & & -1 & 7 & -19 \\ \hline -1 & 1 & -7 & 19 & -27 \\ & & -1 & 8 & \\ \hline -1 & 1 & -8 & 27 & \\ & & -1 & & \\ \hline & 1 & & -9 & \end{array}$$

위의 조립제법을 이용하면

$$(x-2)^3=(x+1)(x^2-7x+19)-27$$

$$=(x+1)\{(x+1)(x-8)+27\}-27$$

$$=(x+1)^2(x-8)+27(x+1)-27$$

$$=(x+1)^2\{(x+1)-9\}+27(x+1)-27$$

$$=(x+1)^3-9(x+1)^2+27(x+1)-27$$

따라서 $a=1, b=-9, c=27, d=-27$ 이므로

$$a-b+c+d=10$$

090 ㉔ -8

$$p-2=1 \text{에서 } p=3$$

$$q-1=1 \text{에서 } q=2$$

주어진 조립제법을 이용하면

$$\begin{aligned} 2x^2+3x+2 &= (x+1)(2x+1)+1 \\ &= (x+1)\{2(x+1)-1\}+1 \\ &= 2(x+1)^2-(x+1)+1 \end{aligned}$$

따라서 $a=2, b=-1, c=1$ 이므로

$$abc-pq=2 \times (-1) \times 1 - 3 \times 2 = -8$$

091 ㉔ $a=1, b=2, c=-4, d=2$

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{3} & 27 & -9 & -15 & 7 \\ & & 9 & 0 & -5 \\ \hline \frac{1}{3} & 27 & 0 & -15 & 2 \\ & & 9 & 3 & \\ \hline \frac{1}{3} & 27 & 9 & -12 & \\ & & 9 & & \\ \hline & 27 & 18 & & \end{array}$$

위의 조립제법을 이용하면

$$\begin{aligned} 27x^3-9x^2-15x+7 &= \left(x-\frac{1}{3}\right)(27x^2-15)+2 \\ &= \left(x-\frac{1}{3}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{3}\right)(27x+9)-12\right\}+2 \\ &= \left(x-\frac{1}{3}\right)^2(27x+9)-12\left(x-\frac{1}{3}\right)+2 \\ &= \left(x-\frac{1}{3}\right)^2\left\{27\left(x-\frac{1}{3}\right)+18\right\}-12\left(x-\frac{1}{3}\right)+2 \\ &= 27\left(x-\frac{1}{3}\right)^3+18\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-12\left(x-\frac{1}{3}\right)+2 \\ &= (3x-1)^3+2(3x-1)^2-4(3x-1)+2 \\ \therefore a=1, b=2, c=-4, d=2 \end{aligned}$$

개념 확인

53쪽

092 ㉔ (1) -29 (2) $\frac{5}{9}$

$f(x)=6x^3+3x^2-3x+1$ 이라 하면 나머지 정리에 의하여

$$(1) f(-2) = -48 + 12 + 6 + 1 = -29$$

$$(2) f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{5}{9}$$

093 ㉔ 2

$f(x)=ax^3-3x^2+x-1$ 이라 하면 나머지 정리에 의하여 $f(1)=-1$ 이므로

$$a-3+1-1=-1 \quad \therefore a=2$$

094 ㉔ ㄴ

$f(x)=x^3-x^2-2x+2$ 라 하자.

$$\neg. f(-1) = -1 - 1 + 2 + 2 \neq 0 \text{이므로 } x+1 \text{은}$$

$f(x)$ 의 인수가 아니다.

$$\neg. f(1) = 1 - 1 - 2 + 2 = 0 \text{이므로 } x-1 \text{은 } f(x) \text{의 인수이다.}$$

$$\neg. f(-2) = -8 - 4 + 4 + 2 \neq 0 \text{이므로 } x+2 \text{는}$$

$f(x)$ 의 인수가 아니다.

따라서 보기에서 $f(x)$ 의 인수인 것은 ㄴ이다.

095 ㉔ (1) -5 (2) -11

$f(x)=2x^3+3x^2+kx-6$ 이라 하자.

$$(1) \text{ 인수 정리에 의하여 } f(-2)=0 \text{이므로}$$

$$-16+12-2k-6=0$$

$$2k=-10 \quad \therefore k=-5$$

$$(2) \text{ 인수 정리에 의하여 } f\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \text{이므로}$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}k - 6 = 0$$

$$\frac{1}{2}k = -\frac{11}{2} \quad \therefore k = -11$$

유제

55~65쪽

096 ㉔ (1) -35 (2) $a=-4, b=-4$

$$(1) \text{ 나머지 정리에 의하여 } f(1)=7 \text{이므로}$$

$$2-1+a-1=7 \quad \therefore a=7$$

따라서 $f(x)=2x^3-x^2+7x-1$ 이므로

$f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(-2) = -16 - 4 - 14 - 1 = -35$$

$$(2) f(x)=x^3-ax^2+3x+b \text{라 하면 나머지 정리에 의하여}$$

$$f(-1) = -4, f(-2) = -2$$

$$f(-1) = -4 \text{에서 } -1-a-3+b = -4$$

$$\therefore a-b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(-2) = -2 \text{에서 } -8-4a-6+b = -2$$

$$\therefore 4a-b = -12 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -4, b = -4$$

097 ㉢ 27

$f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 1$ 이라 하면 나머지 정리에 의하여

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 2, f(-1) = -6$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \text{에서 } \frac{1}{9} + \frac{1}{9}a + \frac{1}{3}b + 1 = 2$$

$$\therefore a + 3b = 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f(-1) = -6 \text{에서 } -3 + a - b + 1 = -6$$

$$\therefore a - b = -4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 3$

따라서 $f(x) = 3x^3 - x^2 + 3x + 1$ 이므로 $f(x)$ 를

$x - 2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(2) = 24 - 4 + 6 + 1 = 27$$

098 ㉢ ⑤

$f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면 나머지 정리에 의하여 $f(1) = f(3) = 6$ 이므로

$$1 + a + b = 6, 9 + 3a + b = 6$$

$$\therefore a + b = 5, 3a + b = -3$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -4, b = 9$

따라서 $f(x) = x^2 - 4x + 9$ 이므로 $f(x)$ 를 $x - 4$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(4) = 16 - 16 + 9 = 9$$

099 ㉢ -11

$f(x), g(x)$ 를 $x + 2$ 로 나누었을 때의 나머지가 각각 $-3, 1$ 이므로 나머지 정리에 의하여

$$f(-2) = -3, g(-2) = 1$$

따라서 $3f(x) - 2g(x)$ 를 $x + 2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$3f(-2) - 2g(-2) = 3 \times (-3) - 2 \times 1 = -11$$

100 ㉢ $-6x + 1$

나머지 정리에 의하여

$$f(-1) = 7, f\left(\frac{2}{3}\right) = -3$$

$f(x)$ 를 $3x^2 + x - 2$, 즉 $(x + 1)(3x - 2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x + 1)(3x - 2)Q(x) + ax + b \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

㉠의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$f(-1) = -a + b$$

$$\therefore -a + b = 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠의 양변에 $x = \frac{2}{3}$ 를 대입하면

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}a + b$$

$$\therefore \frac{2}{3}a + b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = -6, b = 1$

따라서 구하는 나머지는 $-6x + 1$ 이다.

101 ㉢ $3x - 3$

나머지 정리에 의하여

$$f(-3) = 4, f\left(\frac{1}{2}\right) = -3$$

$xf(x)$ 를 $(x + 3)(2x - 1)$ 로 나누었을 때의 몫을

$Q(x)$, 나머지를 $ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$xf(x) = (x + 3)(2x - 1)Q(x) + ax + b \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

㉠의 양변에 $x = -3$ 을 대입하면

$$-3f(-3) = -3a + b$$

$$\therefore -3a + b = -12 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠의 양변에 $x = \frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a + b$$

$$\therefore a + 2b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 3, b = -3$

따라서 구하는 나머지는 $3x - 3$ 이다.

102 ㉢ $-x - 3$

$f(x)$ 를 $x^2 + 3x + 2$, 즉 $(x + 1)(x + 2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면 나머지가 $2x$ 이므로

$$f(x) = (x + 1)(x + 2)Q_1(x) + 2x \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$f(x)$ 를 $x^2 + 5x + 6$, 즉 $(x + 2)(x + 3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면 나머지가 $-4x - 12$ 이므로

$$f(x) = (x + 2)(x + 3)Q_2(x) - 4x - 12 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$f(x)$ 를 $x^2 + 4x + 3$, 즉 $(x + 1)(x + 3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x + 1)(x + 3)Q(x) + ax + b \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉢의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$f(-1) = -a + b$$

㉠에서 $f(-1) = -2$ 이므로
 $-a + b = -2$ ㉡
 ㉡의 양변에 $x = -3$ 을 대입하면
 $f(-3) = -3a + b$
 ㉠에서 $f(-3) = 0$ 이므로 $-3a + b = 0$ ㉢
 ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = -1, b = -3$
 따라서 구하는 나머지는 $-x - 3$ 이다.

103 ㉡ -5

나머지 정리에 의하여
 $f(3) = -3, f(-2) = 7$
 $f(x)$ 를 $(x-3)(x+2)$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $f(x) = (x-3)(x+2)(ax+b) + ax + b$ ㉠
 ㉠의 양변에 $x = 3$ 을 대입하면
 $f(3) = 3a + b$
 $\therefore 3a + b = -3$ ㉡
 ㉠의 양변에 $x = -2$ 를 대입하면
 $f(-2) = -2a + b$
 $\therefore -2a + b = 7$ ㉢
 ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = -2, b = 3$
 이를 ㉠에 대입하면
 $f(x) = (x-3)(x+2)(-2x+3) - 2x + 3$
 $\therefore f(1) = (-2) \times 3 \times 1 - 2 + 3 = -5$

104 ㉡ $2x^2 + x + 1$

$f(x)$ 를 $(x^2+1)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면
 $f(x) = (x^2+1)(x-1)Q(x) + ax^2 + bx + c$
 이때 $(x^2+1)(x-1)Q(x)$ 는 x^2+1 로 나누어떨어지므로 $f(x)$ 를 x^2+1 로 나누었을 때의 나머지는 $ax^2 + bx + c$ 를 x^2+1 로 나누었을 때의 나머지와 같다.
 즉, $ax^2 + bx + c$ 를 x^2+1 로 나누었을 때의 나머지가 $x-1$ 이므로
 $ax^2 + bx + c = a(x^2+1) + x - 1$ ㉠
 $\therefore f(x) = (x^2+1)(x-1)Q(x) + a(x^2+1) + x - 1$ ㉡

한편 나머지 정리에 의하여 $f(1) = 4$ 이므로 ㉡의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면
 $4 = 2a \quad \therefore a = 2$
 따라서 ㉠에서 구하는 나머지는
 $2(x^2+1) + x - 1 = 2x^2 + x + 1$

105 ㉡ -8

나머지 정리에 의하여
 $f(0) = 2, f(2) = 4, f(-3) = -16$
 $f(x)$ 를 $x(x-2)(x+3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x), R(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면
 $f(x) = x(x-2)(x+3)Q(x) + ax^2 + bx + c$ ㉠

㉠의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면 $f(0) = c$
 $f(0) = 2$ 이므로 $c = 2$
 ㉠의 양변에 $x = 2$ 를 대입하면 $f(2) = 4a + 2b + c$
 $f(2) = 4$ 이므로 $4a + 2b + 2 = 4$
 $\therefore 2a + b = 1$ ㉡
 ㉠의 양변에 $x = -3$ 을 대입하면
 $f(-3) = 9a - 3b + c$
 $f(-3) = -16$ 이므로 $9a - 3b + 2 = -16$
 $\therefore 3a - b = -6$ ㉢
 ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 3$
 따라서 $R(x) = -x^2 + 3x + 2$ 이므로
 $R(-2) = -4 - 6 + 2 = -8$

106 ㉡ $x^2 - 3x + 4$

$f(x)$ 를 $x(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면 나머지가 $-2x + 4$ 이므로
 $f(x) = x(x-1)Q_1(x) - 2x + 4$
 양변에 $x = 0, x = 1$ 을 각각 대입하면
 $f(0) = 4, f(1) = 2$
 $f(x)$ 를 $(x+2)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면 나머지가 $-4x + 6$ 이므로
 $f(x) = (x+2)(x-1)Q_2(x) - 4x + 6$
 양변에 $x = -2$ 를 대입하면
 $f(-2) = 14$
 $f(x)$ 를 $x(x+2)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면
 $f(x) = x(x+2)(x-1)Q(x) + ax^2 + bx + c$ ㉠

㉠의 양변에 $x = 0$ 을 대입하면 $f(0) = c$
 $f(0) = 4$ 이므로 $c = 4$
 ㉠의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면
 $f(1) = a + b + c$
 $f(1) = 2$ 이므로 $a + b + 4 = 2$
 $\therefore a + b = -2$ ㉡

㉠의 양변에 $x = -2$ 를 대입하면

$$f(-2) = 4a - 2b + c$$

$$f(-2) = 14 \text{이므로 } 4a - 2b + c = 14$$

$$\therefore 2a - b = 5 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = -3$$

따라서 구하는 나머지는 $x^2 - 3x + 4$ 이다.

107 ㉡ 4

$f(x)$ 를 $(x+1)^2(x+3)$ 으로 나누었을 때의 몫을

$Q(x)$, $R(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x+1)^2(x+3)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

이때 $(x+1)^2(x+3)Q(x)$ 는 $(x+1)^2$ 으로 나누어 떨어지므로 $f(x)$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $ax^2 + bx + c$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

즉, $ax^2 + bx + c$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $x+5$ 이므로

$$R(x) = ax^2 + bx + c = a(x+1)^2 + x + 5 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\therefore f(x) = (x+1)^2(x+3)Q(x) + a(x+1)^2 + x + 5 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$f(x)$ 를 $(x+3)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$ 라 하면 나머지가 $x+4$ 이므로

$$f(x) = (x+3)^2Q'(x) + x + 4$$

양변에 $x = -3$ 을 대입하면

$$f(-3) = 1$$

㉡의 양변에 $x = -3$ 을 대입하면

$$1 = 4a - 3 + 5 \quad \therefore a = -\frac{1}{4}$$

㉠에서 $R(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^2 + x + 5$ 이므로

$$R(3) = -4 + 3 + 5 = 4$$

108 ㉡ -21

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -1 이므로

$$f(x) = (x-2)Q(x) - 1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

나머지 정리에 의하여 $Q(-3) = 4$

$f(x)$ 를 $x+3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $f(-3)$ 이므로 ㉠의 양변에 $x = -3$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} f(-3) &= -5Q(-3) - 1 \\ &= -5 \times 4 - 1 = -21 \end{aligned}$$

따라서 구하는 나머지는 -21 이다.

109 ㉡ -1

나머지 정리에 의하여 $f(-2) = 2$

$f(x)$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $-2x + 1$ 이므로

$$f(x) = (x^2 + x + 1)Q(x) - 2x + 1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이때 $Q(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$Q(-2)$ 이므로 ㉠의 양변에 $x = -2$ 를 대입하면

$$f(-2) = (4 - 2 + 1)Q(-2) + 4 + 1$$

$$2 = 3Q(-2) + 5$$

$$\therefore Q(-2) = -1$$

따라서 구하는 나머지는 -1 이다.

110 ㉡ 3

$f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 4 이므로

$$f(x) = (x-3)Q(x) + 4 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

나머지 정리에 의하여 $f(-1) = -8$

이때 $Q(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$Q(-1)$ 이므로 ㉠의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$f(-1) = -4Q(-1) + 4$$

$$-8 = -4Q(-1) + 4$$

$$\therefore Q(-1) = 3$$

따라서 구하는 나머지는 3 이다.

111 ㉡ -3

$f(x) = x^{30} + 2x^{16} - 3x + 1$ 이라 하면

$$f(-1) = 1 + 2 + 3 + 1 = 7$$

$f(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$ 이므로

$$x^{30} + 2x^{16} - 3x + 1 = (x+1)Q(x) + 7 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이때 $Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 $Q(1)$

이므로 ㉠의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$1 + 2 - 3 + 1 = 2Q(1) + 7$$

$$2Q(1) = -6$$

$$\therefore Q(1) = -3$$

따라서 구하는 나머지는 -3 이다.

112 ㉡ -4

$f(x)$ 를 $3x^2 - x - 2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $x-5$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x^2 - x - 2)Q(x) + x - 5 \\ &= (3x+2)(x-1)Q(x) + x - 5 \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

$f(x+3)$ 을 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여

$$f(-2+3)=f(1)$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면 구하는 나머지는

$$f(1)=1-5=-4$$

113 ㉠ (1) 1 (2) 7

(1) $8=x$ 로 놓으면 $7=x-1$ 이다.

x^{30} 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$x^{30}=(x-1)Q(x)+R$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면 $R=1^{30}=1$

따라서 구하는 나머지는 1이다.

(2) $22=x$ 로 놓으면 $25=x+3$ 이다.

x^5 을 $x+3$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$x^5=(x+3)Q(x)+R$$

양변에 $x=-3$ 을 대입하면

$$(-3)^5=R \quad \therefore R=-243$$

$$\therefore 22^5=25Q(22)-243=25\{Q(22)-10\}+7$$

따라서 구하는 나머지는 7이다.

114 ㉠ 16

$f(x)$ 를 $3x^2-5x-2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $x+2$ 이므로

$$f(x)=(3x^2-5x-2)Q(x)+x+2$$

$$=(3x+1)(x-2)Q(x)+x+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$(x+2)f(3x-4)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여

$$(2+2)f(3 \times 2-4)=4f(2)$$

㉠의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(2)=2+2=4$$

따라서 구하는 나머지는

$$4f(2)=4 \times 4=16$$

115 ㉠ 28

$2020=x$ 로 놓으면 $2017=x-3$ 이다.

$$(2020+1)(2020^2-2020+1)$$

$$=(x+1)(x^2-x+1)$$

$$=x^3+1$$

이므로 x^3+1 을 $x-3$ 으로 나누었을 때의 몫을

$Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$x^3+1=(x-3)Q(x)+R$$

양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$R=3^3+1=28$$

따라서 구하는 나머지는 28이다.

116 ㉠ (1) -2 (2) $a=2, b=3$

(1) $f(x)=x^3+ax^2-2x-3$ 이라 하면 $f(x)$ 가 $x-3$ 을 인수로 가지므로 인수 정리에 의하여

$$f(3)=0$$

$$27+9a-6-3=0, 18+9a=0$$

$$\therefore a=-2$$

(2) $f(x)=2x^3-7x^2+ax+b$ 라 하면 $f(x)$ 가

$$x^2-4x+3, \text{ 즉 } (x-1)(x-3) \text{으로 나누어떨어}$$

지므로 $f(x)$ 는 $x-1, x-3$ 으로 각각 나누어떨어진다.

따라서 인수 정리에 의하여

$$f(1)=0, f(3)=0$$

$$f(1)=0 \text{에서 } 2-7+a+b=0$$

$$\therefore a+b=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(3)=0 \text{에서 } 54-63+3a+b=0$$

$$\therefore 3a+b=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=2, b=3$$

117 ㉠ 2

$f(x+2)$ 가 $x+1$ 로 나누어떨어지므로 인수 정리에 의하여

$$f(-1+2)=0, \text{ 즉 } f(1)=0$$

$$2-5+a+1=0 \quad \therefore a=2$$

118 ㉠ -9

$f(x)=x^3+ax^2-6x+b$ 라 하면 $f(x)$ 가 $x+1,$

$x-2$ 를 인수로 가지므로 인수 정리에 의하여

$$f(-1)=0, f(2)=0$$

$$f(-1)=0 \text{에서 } -1+a+6+b=0$$

$$\therefore a+b=-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(2)=0 \text{에서 } 8+4a-12+b=0$$

$$\therefore 4a+b=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=3, b=-8$$

$x^3+3x^2-6x-8=(x+1)(x-2)(x-c)$ 가 x 에 대

한 항등식이므로 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$-8=2c \quad \therefore c=-4$$

$$\therefore a+b+c=3+(-8)+(-4)=-9$$

119 ㉔ 16

$f(3x+1)$ 이 x^2-1 , 즉 $(x+1)(x-1)$ 로 나누어떨어지므로 $f(3x+1)$ 은 $x+1$, $x-1$ 로 각각 나누어떨어진다.

따라서 인수 정리에 의하여

$$f(3 \times (-1) + 1) = 0, f(3 \times 1 + 1) = 0$$

$$\therefore f(-2) = 0, f(4) = 0$$

$$f(-2) = 0 \text{에서 } -8 + 4a - 2b + 16 = 0$$

$$\therefore 2a - b = -4 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$f(4) = 0 \text{에서 } 64 + 16a + 4b + 16 = 0$$

$$\therefore 4a + b = -20 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

$$\textcircled{㉔}, \textcircled{㉕} \text{을 연립하여 풀면 } a = -4, b = -4$$

$$\therefore ab = 16$$

연습문제

66~68쪽

120 ㉔ ④

ㄱ. $x=2$ 일 때만 등식이 성립한다.

ㄴ. $x^2-6x+9=x^2+9$ 이므로 $x=0$ 일 때만 등식이 성립한다.

따라서 보기에서 항등식인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

121 ㉔ 9

주어진 등식의 좌변을 x, y 에 대하여 정리하면
 $(a+2b)x + (-2a+b)y + a + 3 = -9x + 3y$

이 등식이 x, y 에 대한 항등식이므로

$$a+2b=-9, -2a+b=3, a+3=0$$

$$\text{따라서 } a=-3, b=-3 \text{이므로 } ab=9$$

122 ㉔ 5

주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$3 \times (-2) + 8 = b \times (-2)$$

$$-2b = 2 \quad \therefore b = -1$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$8 = 2c \quad \therefore c = 4$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$5 \times (-1) + 8 = a \times 1 \times (-1) + b \times (-1) + c \times 1$$

$$-a + 1 + 4 = 3 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore a+b+c = 2 + (-1) + 4 = 5$$

|다른 풀이|

주어진 등식을 전개하면

$$2x^2 - x + 2 = ax^2 + (-2a+b+c)x - 2b$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$2=a, -1=-2a+b+c, 2=-2b$$

$$\therefore a=2, b=-1, c=4$$

$$\therefore a+b+c=5$$

123 ㉔ ⑤

x^3+ax+b 를 x^2+x+2 로 나누었을 때의 몫은 최고차항의 계수가 1인 일차식이다.

따라서 몫을 $x+c$ (c 는 상수)라 하면 나머지가 0이므로

$$x^3+ax+b=(x^2+x+2)(x+c)$$

이 등식의 우변을 전개하면

$$x^3+ax+b=x^3+(c+1)x^2+(c+2)x+2c$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$0=c+1, a=c+2, b=2c$$

$$\text{따라서 } a=1, b=-2, c=-1 \text{이므로}$$

$$a-b=3$$

124 ㉔ 11

나머지 정리에 의하여

$$f(1)=3, f(2)=6$$

$$f(1)=3 \text{이므로 } 1+a+b=3$$

$$\therefore a+b=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$f(2)=6 \text{이므로 } 4+2a+b=6$$

$$\therefore 2a+b=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

$\textcircled{㉔}, \textcircled{㉕}$ 을 연립하여 풀면

$$a=0, b=2$$

$$\text{따라서 } f(x)=x^2+2 \text{이므로}$$

$$f(3)=9+2=11$$

125 ㉔ ④

$f(x)$ 를 $3x^2+7x+2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $x+6$ 이므로

$$f(x)=(3x^2+7x+2)Q(x)+x+6$$

$$=(3x+1)(x+2)Q(x)+x+6 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$f(x+2)$ 를 $x+4$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여

$$f(-4+2)=f(-2)$$

$\textcircled{㉔}$ 의 양변에 $x=-2$ 를 대입하면 구하는 나머지는

$$f(-2)=-2+6=4$$

126 ㉔ 4

주어진 방정식의 근이 1이므로 $x=1$ 을 대입하면

$$1+k(4p-5)-(p^2-1)k+q-3=0$$

이 등식의 좌변을 k 에 대하여 정리하면

$$(-p^2+4p-4)k+q-2=0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$-p^2+4p-4=0, q-2=0 \quad \therefore q=2$$

$$-p^2+4p-4=0 \text{에서 } p^2-4p+4=0$$

$$(p-2)^2=0 \quad \therefore p=2$$

$$\therefore p+q=2+2=4$$

127 ㉡ ①

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$(2-1-1)^{10}=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}$$

$$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{20}=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

주어진 등식의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$(2+1-1)^{10}=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{20}$$

$$\therefore a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{20}=2^{10} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}+\textcircled{㉡}$ 을 하면

$$2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20})=2^{10}$$

$$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{20}=2^9$$

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$(-1)^{10}=a_0 \quad \therefore a_0=1$$

$$\therefore a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}=2^9-a_0=2^9-1$$

128 ㉡ (1) $a=3, b=6, c=3, d=2$ (2) 2.363

$$\begin{array}{r|rrrr} (1) & 1 & 3 & -3 & 0 & 2 \\ & & & 3 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ & & & 3 & 3 & \\ \hline & 1 & 3 & 3 & 3 & \\ & & & 3 & & \\ \hline & & 3 & & & 6 \end{array}$$

위의 조립제법을 이용하면

$$f(x)=3x^3-3x^2+2$$

$$=3(x-1)^3+6(x-1)^2+3(x-1)+2$$

$$\therefore a=3, b=6, c=3, d=2 \quad \gggggg \textcircled{1}$$

$$(2) f(1.1)=3 \times 0.1^3+6 \times 0.1^2+3 \times 0.1+2$$

$$=0.003+0.06+0.3+2$$

$$=2.363 \quad \gggggg \textcircled{2}$$

단계	채점 기준	비율
①	a, b, c, d 의 값 구하기	50%
②	$f(1.1)$ 의 값 구하기	50%

129 ㉡ ③

$f(x)=x^5+ax^2+(a+1)x+2$ 라 하면 나머지 정리에 의하여 $f(1)=6$ 이므로

$$1+a+a+1+2=6, 2a=2 \quad \therefore a=1$$

따라서 $x^5+x^2+2x+2=(x-1)Q(x)+6$ 이므로

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$32+4+4+2=Q(2)+6$$

$$\therefore Q(2)=36$$

$$\therefore a+Q(2)=1+36=37$$

130 ㉡ ③

$f(x)$ 를 x^2-4 , 즉 $(x+2)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면 나머지가 $-2x+1$ 이므로

$$f(x)=(x+2)(x-2)Q_1(x)-2x+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$f(x)$ 를 x^2-9 , 즉 $(x+3)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면 나머지가 $x+5$ 이므로

$$f(x)=(x+3)(x-3)Q_2(x)+x+5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$f(x)$ 를 x^2-5x+6 , 즉 $(x-2)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉢}$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $f(2)=2a+b$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } f(2)=-3 \text{이므로 } 2a+b=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉢}$ 의 양변에 $x=3$ 을 대입하면 $f(3)=3a+b$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } f(3)=8 \text{이므로 } 3a+b=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉤}$$

$\textcircled{㉣}, \textcircled{㉤}$ 을 연립하여 풀면 $a=11, b=-25$

따라서 구하는 나머지는 $11x-25$ 이다.

131 ㉡ 0

$f(x)$ 를 $(x-1)^2(x+2)$ 로 나누었을 때의 몫을

$Q(x), R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x-1)^2(x+2)Q(x)+ax^2+bx+c$$

이때 $(x-1)^2(x+2)Q(x)$ 는 $(x-1)^2$ 으로 나누어 떨어지므로 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지는 ax^2+bx+c 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

즉, ax^2+bx+c 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $-x+3$ 이므로

$$R(x)=ax^2+bx+c=a(x-1)^2-x+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\therefore f(x)$$

$$=(x-1)^2(x+2)Q(x)+a(x-1)^2-x+3$$

$$\cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

한편 나머지 정리에 의하여 $f(-2) = -4$ 이므로

㉠의 양변에 $x = -2$ 를 대입하면

$$-4 = 9a + 5 \quad \therefore a = -1$$

따라서 ㉠에서 $R(x) = -(x-1)^2 - x + 3$ 이므로

$$R(2) = -1 - 2 + 3 = 0$$

132 ㉠ 8

$f(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지는 5이므로 나머지 정리에 의하여 $f(-1) = 5$ 이고

$$f(x) = (x+1)Q(x) + 5 \quad \dots\dots ㉠$$

$Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 8이므로 나머지 정리에 의하여

$$Q(2) = 8$$

㉠의 양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$f(2) = 3Q(2) + 5 = 3 \times 8 + 5 = 29$$

$f(x)$ 를 $(x+1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$ 라 하면 나머지가 $ax+b$ 이므로

$$f(x) = (x+1)(x-2)Q'(x) + ax + b \quad \dots\dots ㉡$$

㉡의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$f(-1) = -a + b$$

$$\therefore -a + b = 5 \quad \dots\dots ㉢$$

㉡의 양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$f(2) = 2a + b$$

$$\therefore 2a + b = 29 \quad \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$$a = 8, b = 13$$

$$\therefore f(2) - a - b = 29 - 8 - 13 = 8$$

133 ㉠ -6

$f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + 3$ 이라 하면 나머지 정리에 의하여 $f(-2) = 7$ 이므로

$$-8 - 8 - 2a + 3 = 7$$

$$-2a = 20 \quad \therefore a = -10$$

$f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$ 이므로

$$x^3 - 2x^2 - 10x + 3 = (x+2)Q(x) + 7 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 $Q(2)$

이므로 ㉠의 양변에 $x = 2$ 를 대입하면

$$8 - 8 - 20 + 3 = 4Q(2) + 7$$

$$-17 = 4Q(2) + 7$$

$$\therefore Q(2) = -6$$

따라서 구하는 나머지는 -6 이다.

134 ㉠ ④

$f(x) + 8$ 이 $(x+2)^2$ 으로 나누어떨어지므로

$f(x) + 8 = (x+2)^2(ax+b)$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x+2)^2(ax+b) - 8$$

$$\therefore 10 - f(x) = 10 - \{(x+2)^2(ax+b) - 8\}$$

$$= 18 - (x+2)^2(ax+b) \quad \dots\dots ㉠$$

$10 - f(x)$ 가 $x^2 - 1$, 즉 $(x+1)(x-1)$ 로 나누어떨어지므로 $10 - f(x)$ 는 $x+1, x-1$ 로 각각 나누어떨어진다.

따라서 인수 정리에 의하여

$$10 - f(-1) = 0, 10 - f(1) = 0$$

㉠의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$0 = 18 - (-a+b)$$

$$\therefore a - b = -18 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$0 = 18 - 9(a+b)$$

$$\therefore a + b = 2 \quad \dots\dots ㉢$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a = -8, b = 10$$

따라서 $f(x) = (x+2)^2(-8x+10) - 8$ 이고, $f(x)$ 를 x 로 나누었을 때의 나머지는 $f(0)$ 이므로 구하는 나머지는

$$f(0) = 4 \times 10 - 8 = 32$$

135 ㉠ 128

x^7 을 $x+2$ 로 나누었을 때의 몫이

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_6x^6$ 이므로 나머지를 R 라 하면

$$x^7 = (x+2)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_6x^6) + R$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

양변에 $x = -2$ 를 대입하면

$$(-2)^7 = R \quad \therefore R = -128$$

$$\therefore x^7 = (x+2)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_6x^6) - 128 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$1 = 3(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_6) - 128$$

$$3(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_6) = 129$$

$$\therefore a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 43 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$-1 = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_6 - 128$$

$$\therefore a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_6 = 127 \quad \dots\dots ㉢$$

㉡ + ㉢을 하면

$$2a_0 + 2a_2 + 2a_4 + 2a_6 = 170$$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + a_6 = 85$$

$$\begin{aligned} \therefore 2a_0 + a_1 + 2a_2 + a_3 + 2a_4 + a_5 + 2a_6 \\ = (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_6) + (a_0 + a_2 + a_4 + a_6) \\ = 43 + 85 = 128 \end{aligned}$$

136 ㉡ 74

▶ 접근 방법 나머지의 차수는 나누는 식의 차수보다 낮음을 이용하여 나머지 $g(x) - 2x^2$ 에서 $g(x)$ 의 최고차항을 추론한다.

(가)에서 $f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나누었을 때의 나머지가 $g(x) - 2x^2$ 이므로 $g(x)$ 의 최고차항은 $2x^2$ 이다. 따라서 $g(x) = 2x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면 $f(x) = g(x)\{g(x) - 2x^2\} + g(x) - 2x^2$

$$= (2x^2 + ax + b)(ax + b) + ax + b$$

이때 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$2a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \left(2x^2 + \frac{1}{2}x + b\right)\left(\frac{1}{2}x + b\right) + \frac{1}{2}x + b \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

(나)에서 나머지 정리에 의하여 $f(1) = -\frac{9}{4}$ 이므로 $\textcircled{7}$

의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = \left(2 + \frac{1}{2} + b\right)\left(\frac{1}{2} + b\right) + \frac{1}{2} + b$$

$$b^2 + 4b + \frac{7}{4} = -\frac{9}{4}, \quad b^2 + 4b + 4 = 0$$

$$(b+2)^2 = 0 \quad \therefore b = -2$$

즉, $f(x) = \left(2x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right)\left(\frac{1}{2}x - 2\right) + \frac{1}{2}x - 2$ 이므로

$$f(6) = (72 + 3 - 2)(3 - 2) + 3 - 2 = 74$$

137 ㉡ 13

$$3^{99} + 3^{100} + 3^{101} = 3^{99}(1 + 3 + 3^2) = 13 \times 3^{99}$$

$$3^3 = x \text{로 놓으면 } 13 \times 3^{99} = 13 \times (3^3)^{33} = 13x^{33} \text{이고}$$

$26 = x - 1$ 이다.

$13x^{33}$ 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$$13x^{33} = (x-1)Q(x) + R$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$R = 13$$

따라서 구하는 나머지는 13이다.

02 인수분해

개념 확인

69쪽

$$138 \text{ ㉡ (1) } (x+2)(ax-1)$$

$$(2) (4a+1)^2$$

$$(3) (3a-4b)^2$$

$$(4) (x+5)(x-5)$$

$$(5) (x-1)(x-3)$$

$$(6) (3x-2y)(2x+y)$$

유제

71쪽

$$139 \text{ ㉡ (1) } (x+2y+z)^2$$

$$(2) (2a-b)^3$$

$$(3) (a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$$

$$(4) (2x+y-1)(4x^2+y^2-2xy+2x+y+1)$$

$$(5) (x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$$

$$(6) (z+x-y)(z-x+y)$$

$$(7) (x-2y)(x+y)(x+4y)$$

$$(1) x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 4yz + 2zx$$

$$= x^2 + (2y)^2 + z^2 + 2 \times x \times 2y$$

$$+ 2 \times 2y \times z + 2 \times z \times x$$

$$= (x+2y+z)^2$$

$$(2) 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$$

$$= (2a)^3 - 3 \times (2a)^2 \times b + 3 \times 2a \times b^2 - b^3$$

$$= (2a-b)^3$$

$$(3) a^3 + 27b^3 = a^3 + (3b)^3$$

$$= (a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$$

$$(4) 8x^3 + y^3 + 6xy - 1$$

$$= (2x)^3 + y^3 + (-1)^3 - 3 \times 2x \times y \times (-1)$$

$$= (2x+y-1)\{(2x)^2 + y^2 + (-1)^2 - 2x \times y$$

$$- y \times (-1) - (-1) \times 2x\}$$

$$= (2x+y-1)(4x^2+y^2-2xy+2x+y+1)$$

$$(5) x^4 + 9x^2 + 81 = x^4 + x^2 \times 3^2 + 3^4$$

$$= (x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$$

$$(6) 2xy + z^2 - x^2 - y^2 = z^2 - (x^2 + y^2 - 2xy)$$

$$= z^2 - (x-y)^2$$

$$= (z+x-y)(z-x+y)$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & x^3 - 8y^3 + 3xy(x-2y) \\
 &= (x-2y)(x^2+2xy+4y^2) + 3xy(x-2y) \\
 &= (x-2y)(x^2+2xy+4y^2+3xy) \\
 &= (x-2y)(x^2+5xy+4y^2) \\
 &= (x-2y)(x+y)(x+4y)
 \end{aligned}$$

140 ㉡ ④

$$\begin{aligned}
 ④ \quad & 4x^2 + 9y^2 + 12xy - 4x - 6y + 1 \\
 &= (2x)^2 + (3y)^2 + (-1)^2 + 2 \times 2x \times 3y \\
 &\quad + 2 \times 3y \times (-1) + 2 \times (-1) \times 2x \\
 &= (2x+3y-1)^2
 \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

141 ㉡ ㄹ, ㄱ

$$\begin{aligned}
 & (a^2 - b^2 + c^2)^2 - 4a^2c^2 \\
 &= (a^2 - b^2 + c^2)^2 - (2ac)^2 \\
 &= (a^2 - b^2 + c^2 + 2ac)(a^2 - b^2 + c^2 - 2ac) \\
 &= \{(a+c)^2 - b^2\} \{(a-c)^2 - b^2\} \\
 &= (a+c+b)(a+c-b)(a-c+b)(a-c-b) \\
 &= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)
 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 인수가 아닌 것은 ㄹ, ㄱ이다.

유제

75-85쪽

$$\begin{aligned}
 142 \quad & ① (x^2+3x+3)(x+4)(x-1) \\
 & ② (x^2-x+1)(3x^2-3x-1) \\
 & ③ (x^2-4x+2)(x^2-4x-4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & x^2+3x=X \text{로 놓으면} \\
 & (x^2+3x+1)(x^2+3x-2)-10 \\
 &= (X+1)(X-2)-10 \\
 &= X^2-X-12 \\
 &= (X+3)(X-4) \\
 &= (x^2+3x+3)(x^2+3x-4) \\
 &= (x^2+3x+3)(x+4)(x-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & x(x-1)=X \text{로 놓으면} \\
 & 3x^2(x-1)^2+2x^2-2x-1 \\
 &= 3\{x(x-1)\}^2+2x(x-1)-1 \\
 &= 3X^2+2X-1 \\
 &= (X+1)(3X-1) \\
 &= \{x(x-1)+1\}\{3x(x-1)-1\} \\
 &= (x^2-x+1)(3x^2-3x-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & (x+1)(x-1)(x-3)(x-5)+7 \\
 &= \{(x+1)(x-5)\}\{(x-1)(x-3)\}+7 \\
 &= (x^2-4x-5)(x^2-4x+3)+7 \\
 & \quad x^2-4x=X \text{로 놓으면} \\
 & (x^2-4x-5)(x^2-4x+3)+7 \\
 &= (X-5)(X+3)+7 \\
 &= X^2-2X-8 \\
 &= (X+2)(X-4) \\
 &= (x^2-4x+2)(x^2-4x-4)
 \end{aligned}$$

143 ㉡ ④

$$\begin{aligned}
 & x^2+x=X \text{로 놓으면} \\
 & (x^2+x)(x^2+x+1)-6 \\
 &= X(X+1)-6 \\
 &= X^2+X-6 \\
 &= (X+3)(X-2) \\
 &= (x^2+x+3)(x^2+x-2) \\
 &= (x+2)(x-1)(x^2+x+3)
 \end{aligned}$$

따라서 $a=1$, $b=3$ 이므로 $a+b=4$

144 ㉡ ㄱ, ㄴ, ㄹ

$$\begin{aligned}
 & x^2-5x=X \text{로 놓으면} \\
 & (x^2-5x)^2-4x^2+20x-12 \\
 &= (x^2-5x)^2-4(x^2-5x)-12 \\
 &= X^2-4X-12 \\
 &= (X+2)(X-6) \\
 &= (x^2-5x+2)(x^2-5x-6) \\
 &= (x^2-5x+2)(x+1)(x-6)
 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 인수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

145 ㉡ 24

$$\begin{aligned}
 & (x^2+4x+3)(x^2+12x+35)+15 \\
 &= (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15 \\
 &= \{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+15 \\
 &= (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15 \\
 & \quad x^2+8x=X \text{로 놓으면} \\
 & (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15 \\
 &= (X+7)(X+15)+15 \\
 &= X^2+22X+120 \\
 &= (X+10)(X+12) \\
 &= (x^2+8x+10)(x^2+8x+12) \\
 &= (x+2)(x+6)(x^2+8x+10)
 \end{aligned}$$

따라서 $a=6, b=8, c=10$ 이므로
 $a+b+c=24$

146 ㉮ (1) $(2x^2+1)(x+2)(x-2)$
 (2) $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
 (3) $(x^2+3xy-3y^2)(x^2-3xy-3y^2)$

(1) $x^2=X$ 로 놓으면
 $2x^4-7x^2-4=2X^2-7X-4$
 $= (2X+1)(X-4)$
 $= (2x^2+1)(x^2-4)$
 $= (2x^2+1)(x+2)(x-2)$
 (2) $x^4+4x^2+16=(x^4+8x^2+16)-4x^2$
 $= (x^2+4)^2-(2x)^2$
 $= (x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
 (3) $x^4-15x^2y^2+9y^4$
 $= (x^4-6x^2y^2+9y^4)-9x^2y^2$
 $= (x^2-3y^2)^2-(3xy)^2$
 $= (x^2+3xy-3y^2)(x^2-3xy-3y^2)$

147 ㉮ ②
 $x^2=X$ 로 놓으면
 $x^4-x^2-12=X^2-X-12$
 $= (X-4)(X+3)$
 $= (x^2-4)(x^2+3)$
 $= (x-2)(x+2)(x^2+3)$

따라서 $a=2, b=3$ 이므로
 $a+b=5$

148 ㉮ ㄴ, ㄷ, ㄹ
 $a^2=A, b^2=B$ 로 놓으면
 $a^4-11a^2b^2+18b^4=A^2-11AB+18B^2$
 $= (A-2B)(A-9B)$
 $= (a^2-2b^2)(a^2-9b^2)$
 $= (a^2-2b^2)(a+3b)(a-3b)$

따라서 보기에서 인수인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

149 ㉮ $2x^2+36$
 $x^4+324=(x^4+36x^2+324)-36x^2$
 $= (x^2+18)^2-(6x)^2$
 $= (x^2+6x+18)(x^2-6x+18)$

따라서 구하는 두 이차식의 합은
 $x^2+6x+18+(x^2-6x+18)=2x^2+36$

150 ㉮ (1) $(x+y+1)(x^2-x-y+1)$
 (2) $(x-3y+2)(x-y-1)$
 (3) $(a+b)(b+c)(a-c)$

(1) y 에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면
 $x^3+x^2y-y^2-2xy+1$
 $= -y^2+(x^2-2x)y+x^3+1$
 $= -y^2+(x^2-2x)y+(x+1)(x^2-x+1)$
 $= \{y+(x+1)\}\{-y+(x^2-x+1)\}$
 $= (x+y+1)(x^2-x-y+1)$
 (2) x 에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면
 $x^2+3y^2-4xy+x+y-2$
 $= x^2+(1-4y)x+3y^2+y-2$
 $= x^2+(1-4y)x+(3y-2)(y+1)$
 $= \{x-(3y-2)\}\{x-(y+1)\}$
 $= (x-3y+2)(x-y-1)$

(3) a 에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면
 $ab(a+b)-bc(b+c)-ca(c-a)$
 $= a^2b+ab^2-b^2c-bc^2-c^2a+ca^2$
 $= (b+c)a^2+(b^2-c^2)a-b^2c-bc^2$
 $= (b+c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b+c)$
 $= (b+c)\{a^2+(b-c)a-bc\}$
 $= (b+c)(a+b)(a-c)$
 $= (a+b)(b+c)(a-c)$

151 ㉮ 0
 x 에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면
 $x^2-y^2-z^2+2yz+x-y+z$
 $= x^2+x-y^2-z^2+2yz-y+z$
 $= x^2+x-(y^2-2yz+z^2)-(y-z)$
 $= x^2+x-(y-z)^2-(y-z)$
 $= x^2+x-(y-z)(y-z+1)$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad} & -(y-z) \\ x & \xrightarrow{\quad} & y-z+1 \end{array} \quad \begin{array}{c} -(y-z)x \\ + (y-z+1)x \\ \hline x \end{array}$$

$= \{x-(y-z)\}\{x+(y-z+1)\}$
 $= (x-y+z)(x+y-z+1)$

따라서 $a=-1, b=1, c=1, d=-1$ 이므로
 $ab-cd=-1-(-1)=0$

152 ㉠ ㉡, ㉢

a 에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$\begin{aligned} & a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\ &= (b-c)a^2 - (b^2-c^2)a + b^2c - bc^2 \\ &= (b-c)a^2 - (b-c)(b+c)a + bc(b-c) \\ &= (b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\} \\ &= (b-c)(a-b)(a-c) \end{aligned}$$

따라서 보기에서 인수인 것은 ㉡, ㉢이다.

153 ㉠ 2

주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} & x^2 + kxy - 3y^2 + x + 11y - 6 \\ &= x^2 + (ky+1)x - 3y^2 + 11y - 6 \\ &= x^2 + (ky+1)x - (3y-2)(y-3) \end{aligned}$$

이때 x 의 계수가 $ky+1$ 이므로 x 에 대한 상수항을 두 일차식으로 인수분해했을 때 두 일차식의 합이 $ky+1$ 이어야 한다.

즉, $(3y-2) + \{-(y-3)\} = ky+1$ 이므로

$$2y+1 = ky+1 \quad \therefore k=2$$

154 ㉠ (1) $(x-2)(x+3)(x-3)$

$$(2) (x+3)(3x-1)(x-5)$$

$$(3) (x+1)(x-2)(2x^2-3x+2)$$

(1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ 이라 하면

$$f(2) = 8 - 8 - 18 + 18 = 0$$

$x-2$ 는 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & -9 & 18 \\ & & 2 & 0 & -18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 9x + 18 &= (x-2)(x^2-9) \\ &= (x-2)(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

(2) $f(x) = 3x^3 - 7x^2 - 43x + 15$ 라 하면

$$f(-3) = -81 - 63 + 129 + 15 = 0$$

$x+3$ 은 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 3 & -7 & -43 & 15 \\ & & -9 & 48 & -15 \\ \hline & 3 & -16 & 5 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3x^3 - 7x^2 - 43x + 15 &= (x+3)(3x^2-16x+5) \\ &= (x+3)(3x-1)(x-5) \end{aligned}$$

(3) $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x - 4$ 라 하면

$$f(-1) = 2 + 5 + 1 - 4 - 4 = 0$$

$$f(2) = 32 - 40 + 4 + 8 - 4 = 0$$

$x+1, x-2$ 는 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 2 & -5 & 1 & 4 & -4 \\ & & -2 & 7 & -8 & 4 \\ \hline 2 & 2 & -7 & 8 & -4 & 0 \\ & & 4 & -6 & 4 & \\ \hline & 2 & -3 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} & 2x^4 - 5x^3 + x^2 + 4x - 4 \\ &= (x+1)(x-2)(2x^2-3x+2) \end{aligned}$$

❏ 참고 $f(a)=0$ 을 만족시키는 상수 a 의 값은

$\pm \frac{(f(x) \text{의 상수항의 양의 약수})}{(f(x) \text{의 최고차항의 계수의 양의 약수})}$ 중에서 찾는다.

(1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ 에서 $f(a)=0$ 을 만족시키는 상수 a 의 값은 $\pm(18 \text{의 양의 약수})$, 즉 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm 18$ 을 x 에 대입하여 찾는다.

(2) $f(x) = 3x^3 - 7x^2 - 43x + 15$ 에서 $f(a)=0$ 을 만족시키는 상수 a 의 값은 $\pm \frac{(15 \text{의 양의 약수})}{(3 \text{의 양의 약수})}$, 즉 $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$ 를 x 에 대입하여 찾는다.

155 ㉠ ㉡, ㉢, ㉤

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 이라 하면

$$f(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

$x-1$ 은 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 &= (x-1)(x^2-5x+6) \\ &= (x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

따라서 보기에서 인수인 것은 ㉡, ㉢, ㉤이다.

156 ㉠ $(x-2)(x+1)(x+4)(x-1)$

$f(x)$ 가 $x-2$ 를 인수로 가지므로 $f(2)=0$ 에서

$$16 + 8a + 4b - 4 + 8 = 0$$

$$\therefore 2a + b = -5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$f(x)$ 가 $x+1$ 을 인수로 가지므로 $f(-1)=0$ 에서

$$1 - a + b + 2 + 8 = 0$$

$$\therefore a - b = 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2, b=-9$

따라서 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8$ 이고, $x-2$, $x+1$ 은 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 2 & -9 & -2 & 8 \\ & & 2 & 8 & -2 & -8 \\ \hline -1 & 1 & 4 & -1 & -4 & 0 \\ & & -1 & -3 & 4 & \\ \hline & 1 & 3 & -4 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8 \\ &= (x-2)(x+1)(x^2+3x-4) \\ &= (x-2)(x+1)(x+4)(x-1) \end{aligned}$$

157 ㉡ 13

$h(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 6$ 이라 하면

$$h(-1) = 1 + 2 + 2 + 1 - 6 = 0$$

$$h(2) = 16 - 16 + 8 - 2 - 6 = 0$$

$x+1$, $x-2$ 는 $h(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $h(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -2 & 2 & -1 & -6 \\ & & -1 & 3 & -5 & 6 \\ \hline 2 & 1 & -3 & 5 & -6 & 0 \\ & & 2 & -2 & 6 & \\ \hline & 1 & -1 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 6 \\ &= (x+1)(x-2)(x^2-x+3) \\ &= (x^2-x-2)(x^2-x+3) \end{aligned}$$

이때 $f(0) > 0$ 이므로

$$f(x) = x^2 - x + 3, g(x) = x^2 - x - 2$$

$$\therefore f(-2) + g(-2) = (4 + 2 + 3) + (4 + 2 - 2) = 13$$

158 ㉡ (1) 1600 (2) 9500

(1) $40 = x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} &\frac{40^8 + 40^4 + 1}{40^4 - 40^2 + 1} - \frac{40^8 - 1}{40^4 - 1} \\ &= \frac{x^8 + x^4 + 1}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{x^8 - 1}{x^4 - 1} \\ &= \frac{(x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{(x^4 + 1)(x^4 - 1)}{x^4 - 1} \\ &= (x^4 + x^2 + 1) - (x^4 + 1) \\ &= x^2 \\ &= 40^2 \quad \blacktriangleleft x=40 \text{ 대입} \\ &= 1600 \end{aligned}$$

(2) $100 = x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} &94 \times 97 \times 98 \times 101 + 36 \\ &= (x-6)(x-3)(x-2)(x+1) + 36 \\ &= \{(x-6)(x+1)\} \{(x-3)(x-2)\} + 36 \\ &= (x^2 - 5x - 6)(x^2 - 5x + 6) + 36 \\ &x^2 - 5x = X \text{로 놓고 인수분해하면} \\ &(x^2 - 5x - 6)(x^2 - 5x + 6) + 36 \\ &= (X-6)(X+6) + 36 = X^2 \\ &= (x^2 - 5x)^2 \\ &= (10000 - 500)^2 \quad \blacktriangleleft x=100 \text{ 대입} \\ &= 9500^2 \\ &\therefore \sqrt{94 \times 97 \times 98 \times 101 + 36} = \sqrt{9500^2} = 9500 \end{aligned}$$

159 ㉡ 2007

$\sqrt{4011} = x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} &\frac{(1+\sqrt{4011})^3 - (1-\sqrt{4011})^3}{(1+\sqrt{4011})^2 - (1-\sqrt{4011})^2} \\ &= \frac{(1+x)^3 - (1-x)^3}{(1+x)^2 - (1-x)^2} \\ &= \frac{(1+3x+3x^2+x^3) - (1-3x+3x^2-x^3)}{(1+2x+x^2) - (1-2x+x^2)} \\ &= \frac{6x+2x^3}{4x} = \frac{2x(3+x^2)}{4x} \\ &= \frac{3+x^2}{2} \\ &= \frac{3+4011}{2} \quad \blacktriangleleft x=\sqrt{4011} \text{ 대입} \\ &= 2007 \end{aligned}$$

160 ㉡ 20

$23 = x$ 로 놓으면

$$23^3 + 3 \times 23^2 - 4 = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \text{라 하면 } f(1) = 1 + 3 - 4 = 0$$

$x-1$ 은 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ & & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x^2+4x+4) \\ &= (x-1)(x+2)^2 \end{aligned}$$

$x=23$ 을 대입하면

$$(23-1) \times (23+2)^2 = 22 \times 25^2 = 2 \times 5^4 \times 11$$

따라서 구하는 양의 약수의 개수는

$$(1+1) \times (4+1) \times (1+1) = 20$$

161 ㉡ (1) $f(x)=(x-1)^2(x+4)$ (2) 1050000

(1) 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 2 & -7 & 4 \\ & & 1 & 3 & -4 \\ \hline & 1 & 3 & -4 & 0 \end{array}$$

$$f(x)=x^3+2x^2-7x+4$$

$$=(x-1)(x^2+3x-4)$$

$$=(x-1)^2(x+4)$$

(2) $f(101)=100^2 \times 105=1050000$

162 ㉡ $6\sqrt{5}$

$x^2y+xy^2+x+y=xy(x+y)+(x+y)$

$$=(x+y)(xy+1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x+y=(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})=2\sqrt{5},$$

$$xy=(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=2$$

㉠에 식의 값을 대입하면

$$(x+y)(xy+1)=2\sqrt{5} \times 3=6\sqrt{5}$$

163 ㉡ 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형

주어진 식의 좌변을 b 에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$a^3+a^2c-ab^2-ac^2-b^2c-c^3$$

$$=-(a+c)b^2+a^3+a^2c-ac^2-c^3$$

$$=-(a+c)b^2+a^2(a+c)-c^2(a+c)$$

$$=(a+c)(a^2-b^2-c^2)$$

$$\therefore (a+c)(a^2-b^2-c^2)=0$$

이때 a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a+c>0$
 즉, $a^2-b^2-c^2=0$ 이므로 $a^2=b^2+c^2$
 따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

164 ㉡ 42

주어진 식을 b 에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$b^2(c+a)-a^2(c+b)-c^2(a-b)$$

$$=(c+a)b^2+(c^2-a^2)b-a^2c-ac^2$$

$$=(c+a)b^2+(c+a)(c-a)b-ac(a+c)$$

$$=(c+a)\{b^2+(c-a)b-ac\}$$

$$=(c+a)(b+c)(b-a) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$b-a=3+\sqrt{2}, a+c=3-\sqrt{2}$ 를 각 변끼리 더하면
 $b+c=6$

㉠에 식의 값을 대입하면

$$(c+a)(b+c)(b-a)=(3-\sqrt{2}) \times 6 \times (3+\sqrt{2})$$

$$=42$$

165 ㉡ $\sqrt{3}$

$a^3+b^3+c^3=3abc$ 에서 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

이 식의 좌변을 인수분해하면

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

$$\therefore \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

이때 a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$$a+b+c>0$$

$$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

즉, $a-b=0, b-c=0, c-a=0$ 이므로 $a=b=c$

$3abc=24$ 에서 $a=b=c$ 이므로

$$3a^3=24, a^3=8 \quad \therefore a=b=c=2$$

따라서 이 삼각형은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로 구하는 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2=\sqrt{3}$$

|참고| 한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 이다.

연습문제

86~88쪽

166 ㉡ ③

ㄱ. $2ax-2ay-bx+by+cx-cy$

$$=2a(x-y)-b(x-y)+c(x-y)$$

$$=(x-y)(2a-b+c)$$

ㄴ. $a^2-b^2-c^2+2bc$

$$=a^2-(b^2-2bc+c^2)=a^2-(b-c)^2$$

$$=(a+b-c)(a-b+c)$$

ㄷ. $x^3-x^2y-xz^2+yz^2=x^2(x-y)-z^2(x-y)$

$$=(x-y)(x^2-z^2)$$

$$=(x-y)(x+z)(x-z)$$

ㄹ. $a^3-8b^3+c^3+6abc$

$$=a^3+(-2b)^3+c^3-3 \times a \times (-2b) \times c$$

$$=(a-2b+c)(a^2+4b^2+c^2+2ab+2bc-ca)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

167 ㉡ 7

$$4x^2+9y^2-12xy-8x+12y+4$$

$$=(2x)^2+(-3y)^2+(-2)^2+2 \times 2x \times (-3y)$$

$$+2 \times (-3y) \times (-2)+2 \times (-2) \times 2x$$

$$=(2x-3y-2)^2$$

따라서 $a=2, b=-3, n=2$ 이므로
 $a-b+n=7$

168 ㉠ ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅁ

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) \\ &= (x+y)(x^2 - xy + y^2)(x-y)(x^2 + xy + y^2) \end{aligned}$$

따라서 보기에서 인수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ, ㅁ이다.

|참고| $(x+y)(x^2 - xy + y^2)(x-y)(x^2 + xy + y^2)$
 $= (x+y)(x-y)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$

이므로 $x^4 + x^2y^2 + y^4$ 은 인수가 될 수 있지만 $x^4 - x^2y^2 + y^4$ 은 인수가 될 수 없다.

169 ㉠ ④

$$\begin{aligned} x^2 + x &= X \text{로 놓으면} \\ (x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) - 3 &= X^2 + 2X - 3 = (X-1)(X+3) \\ &= (x^2 + x - 1)(x^2 + x + 3) \end{aligned}$$

따라서 $a=1, b=3$ 이므로 $a+b=4$

170 ㉠ 6

$$\begin{aligned} x^4 - 12x^2 + 16 &= (x^4 - 8x^2 + 16) - 4x^2 \\ &= (x^2 - 4)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2x - 4)(x^2 - 2x - 4) \end{aligned}$$

따라서 $a=2, b=4$ 이므로
 $a+b=6$

171 ㉠ ③

x 에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$$\begin{aligned} x^2 - xy - 2y^2 + 2x + 5y - 3 &= x^2 + (-y+2)x - 2y^2 + 5y - 3 \\ &= x^2 + (-y+2)x - (2y-3)(y-1) \\ &= \{x + (y-1)\}\{x - (2y-3)\} \\ &= (x+y-1)(x-2y+3) \end{aligned}$$

172 ㉠ -24

$$\begin{aligned} x^3y + xy^3 - x^2 - y^2 &= xy(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2) \\ &= (x^2 + y^2)(xy - 1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$x+y = (1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3}) = 2,$$

$$xy = (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) = -2 \text{이므로}$$

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \times (-2) = 8$$

①에 식의 값을 대입하면

$$(x^2 + y^2)(xy - 1) = 8 \times (-3) = -24$$

173 ㉠ ③

$$\begin{aligned} (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 6x + 5) - 9 &= (x+3)(x-1)(x+5)(x+1) - 9 \\ &= \{(x+3)(x+1)\}\{(x-1)(x+5)\} - 9 \\ &= (x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x - 5) - 9 \\ x^2 + 4x &= X \text{로 놓으면} \\ (x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x - 5) - 9 &= (X+3)(X-5) - 9 \\ &= X^2 - 2X - 24 = (X+4)(X-6) \\ &= (x^2 + 4x + 4)(x^2 + 4x - 6) \\ &= (x+2)^2(x^2 + 4x - 6) \end{aligned}$$

174 ㉠ ⑤

$$\begin{aligned} (x-1)(x-4)(x-5)(x-8) + a &= \{(x-1)(x-8)\}\{(x-4)(x-5)\} + a \\ &= (x^2 - 9x + 8)(x^2 - 9x + 20) + a \\ x^2 - 9x &= X \text{로 놓으면} \\ (x^2 - 9x + 8)(x^2 - 9x + 20) + a &= (X+8)(X+20) + a \\ &= X^2 + 28X + 160 + a \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이 식이 $(x+b)^2(x+c)^2$, 즉 $\{(x+b)(x+c)\}^2$ 으로
 인수분해되려면 ①이 완전제곱식이어야 하므로

$$160 + a = \left(\frac{28}{2}\right)^2 \quad \therefore a = 196 - 160 = 36$$

①에서

$$\begin{aligned} X^2 + 28X + 160 + a &= X^2 + 28X + 196 \\ &= (X+14)^2 = (x^2 - 9x + 14)^2 \\ &= \{(x-2)(x-7)\}^2 \\ &= (x-2)^2(x-7)^2 \end{aligned}$$

따라서 $b=-2, c=-7$ 또는 $b=-7, c=-2$ 이므로
 $a+b+c = 36 + (-2) + (-7) = 27$

|참고| 이차식 $x^2 + Ax + B$ 가 완전제곱식이면 $B = \left(\frac{A}{2}\right)^2$

175 ㉠ (1) 1 (2) $(x-4y+2)(x-y-1)$

(1) 주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 - 5xy + ax + 2y - 2 &= x^2 + (a-5y)x + 4y^2 + 2y - 2 \\ &= x^2 + (a-5y)x + 2(2y-1)(y+1) \end{aligned}$$

이때 x 의 계수가 $a-5y$ 이므로 x 에 대한 상수항을
 두 일차식으로 인수분해했을 때 두 일차식의 합이
 $a-5y$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } -2(2y-1) + \{-(y+1)\} = a-5y \text{이므로}$$

$$1-5y = a-5y \quad \therefore a=1$$

▶▶▶▶▶ ①

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & x^2 + (a-5y)x + 2(2y-1)(y+1) \\
 &= x^2 + (1-5y)x + 2(2y-1)(y+1) \\
 &= \{x-2(2y-1)\}\{x-(y+1)\} \\
 &= (x-4y+2)(x-y-1) \quad \text{..... ②}
 \end{aligned}$$

단계	채점 기준	비율
①	a의 값 구하기	50%
②	주어진 식을 인수분해하기	50%

176 ㉡

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^4 + ax^3 - 7x^2 - 20x - 12 \text{라 하면} \\
 f(-2) &= 0 \text{이므로 } 16 - 8a - 28 + 40 - 12 = 0 \\
 8a &= 16 \quad \therefore a = 2
 \end{aligned}$$

즉, $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 20x - 12$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 -2 & 1 & 2 & -7 & -20 & -12 \\
 & & -2 & 0 & 14 & 12 \\
 \hline
 -1 & 1 & 0 & -7 & -6 & 0 \\
 & & -1 & 1 & 6 & \\
 \hline
 & 1 & -1 & -6 & 0 &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 20x - 12 \\
 &= (x+2)(x+1)(x^2-x-6) \\
 &= (x+2)(x+1)(x+2)(x-3) \\
 &= (x+2)^2(x+1)(x-3)
 \end{aligned}$$

따라서 인수가 아닌 것은 ② $x-2$ 이다.

177 ㉢

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 + 8x^2 + 20x + 16 \text{이라 할 때,} \\
 f(-2) &= -8 + 32 - 40 + 16 = 0 \text{이므로 조립제법을} \\
 & \text{이용하여 } f(x) \text{를 인수분해하면}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -2 & 1 & 8 & 20 & 16 \\
 & & -2 & -12 & -16 \\
 \hline
 & 1 & 6 & 8 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 x^3 + 8x^2 + 20x + 16 &= (x+2)(x^2+6x+8) \\
 &= (x+2)^2(x+4)
 \end{aligned}$$

따라서 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $x+2$, 높이는 $x+4$ 이므로 원기둥의 겉넓이는

$$\begin{aligned}
 & 2 \times \pi(x+2)^2 + 2\pi(x+2) \times (x+4) \\
 &= 4\pi(x+2)(x+3)
 \end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=2$ 이므로 $ab=6$

|참고| 밑면의 반지름의 길이가 r , 높이가 h 인 원기둥의 겉넓이는 $2\pi r^2 + 2\pi rh$ 이다.

178 ㉣

$f(x) = 2x^3 + ax^2 - (2a-2)x - 20$ 이라 하면
 $f(2) = 16 + 4a - 2(2a-2) - 20 = 0$ 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
 2 & 2 & a & -2a+2 & -20 \\
 & & 4 & 2a+8 & 20 \\
 \hline
 & 2 & a+4 & 10 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x^3 + ax^2 - (2a-2)x - 20 \\
 &= (x-2)\{2x^2 + (a+4)x + 10\}
 \end{aligned}$$

$f(x)$ 가 세 일차식의 곱으로 인수분해되므로
 $2x^2 + (a+4)x + 10$ 이 두 일차식의 곱으로 인수분해된다.

이때 $10 = 1 \times 10$ 또는 $10 = 2 \times 5$ 이므로 $a+4$ 의 값이 될 수 있는 것은

$$\begin{aligned}
 & 2 \times 10 + 1 \times 1 \text{ 또는 } 2 \times 1 + 1 \times 10 \text{ 또는 } 2 \times 5 + 1 \times 2 \\
 & \text{또는 } 2 \times 2 + 1 \times 5
 \end{aligned}$$

즉, $a+4=21$ 또는 $a+4=12$ 또는 $a+4=9$ 이므로
 $a=5$ 또는 $a=8$ 또는 $a=17$

따라서 자연수 a 의 최댓값은 17이다.

179 ㉤

$101=a$, $99=b$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}
 & \frac{101^3 - 99^3}{101^2 + 99 \times 101 + 99^2} \times \frac{99^2 + 2 \times 101}{101^3 + 99^3} \\
 &= \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \times \frac{b^2 + (a-b)a}{a^3 + b^3} \\
 &= \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{a^2 + ab + b^2} \times \frac{a^2 - ab + b^2}{(a+b)(a^2 - ab + b^2)} \\
 &= \frac{a-b}{a+b} = \frac{101-99}{101+99} = \frac{1}{100}
 \end{aligned}$$

180 ㉥

$$\begin{aligned}
 & a^2b + 2ab + a^2 + 2a + b + 1 \\
 &= (a^2 + 2a + 1)b + (a^2 + 2a + 1) \\
 &= (a+1)^2(b+1)
 \end{aligned}$$

이때 $245 = 7^2 \times 5$ 이므로 $a+1=7$, $b+1=5$

따라서 $a=6$, $b=4$ 이므로 $a+b=10$

181 ㉦

|접근 방법| 주어진 다항식이 $(x-2)^2$ 을 인수로 가지므로 $x-2$ 로 나누는 조립제법을 두 번 이용한다.

$$\begin{aligned}
 g(x) &= 2x^4 + ax^3 - 6x^2 + bx - 8 \text{이라 하면 } g(2) = 0 \\
 & \text{이므로}
 \end{aligned}$$

$$32 + 8a - 24 + 2b - 8 = 0$$

$$4a+b=0 \quad \therefore b=-4a \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

즉, $g(x)=2x^4+ax^3-6x^2-4ax-8$ 이므로 조립제법을 이용하여 $g(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 2 & a & -6 & -4a & -8 \\ & & 4 & 2a+8 & 4a+4 & 8 \\ \hline 2 & 2 & a+4 & 2a+2 & 4 & 0 \\ & & 4 & 2a+16 & 8a+36 & \\ \hline & 2 & a+8 & 4a+18 & 8a+40 & \end{array}$$

$g(x)$ 가 $(x-2)^2$ 을 인수로 가지므로

$$8a+40=0 \quad \therefore a=-5$$

이를 ⑦에 대입하면 $b=20$

따라서 $f(x)=2x^2+3x-2$ 이므로

$$a+b+f(-1)=-5+20+(2-3-2)=12$$

182 ㉮ 62

$$\begin{aligned} 7^6-1 &= (7^3)^2-1^2 = (7^3+1)(7^3-1) \\ &= (7+1)(7^2-7+1)(7-1)(7^2+7+1) \\ &= 8 \times 43 \times 6 \times 57 \\ &= 2^3 \times 43 \times 2 \times 3 \times 3 \times 19 \\ &= 2^4 \times 3^2 \times 19 \times 43 \end{aligned}$$

이므로 7^6-1 을 나누었을 때 나누어떨어지는 소수인

두 자리의 자연수 n 은 19, 43이다.

따라서 구하는 합은 $19+43=62$

183 ㉮ 12

(가)에서 좌변을 인수분해하면

$$\begin{aligned} (a-b)c^2 + (2a^2-ab-b^2)c + a^3-ab^2 \\ &= (a-b)c^2 + (a-b)(2a+b)c + a(a-b)(a+b) \\ &= (a-b)\{c^2 + (2a+b)c + a(a+b)\} \\ &= (a-b)(c+a)(c+a+b) \end{aligned}$$

즉, $(a-b)(c+a)(c+a+b)=0$ 이므로

$$a=b \quad (\because c+a>0, c+a+b>0)$$

이때 (나)에서 $2a+4a=5c$

$$\therefore 6a=5c \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(다)에서 $a+b+c=16$ 이므로

$$2a+c=16 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

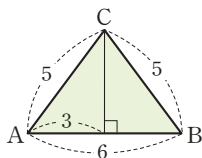
⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $a=5, c=6$

따라서 삼각형 ABC는 오른

쪽 그림과 같으므로 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$

$$\sqrt{5^2-3^2} = \sqrt{16} = 4$$



II. 방정식과 부등식

II-1. 복소수

01 복소수의 뜻과 사칙연산

개념 확인

91쪽

184 ㉮ (1) 1, 2 (2) 0, -2 (3) $\sqrt{2}, 0$

185 ㉮ 실수: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$

허수: $\mathbb{I}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{I}$

순허수: $\mathbb{I}$, $\mathbb{I}$

186 ㉮ (1) $4-i$ (2) $\frac{1}{3}i$ (3) $1+\sqrt{2}$

개념 확인

93쪽

187 ㉮ (1) $-2i$ (2) $-4i$

(3) $-1+3i$ (4) $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

$$\begin{aligned} (4) i \times \frac{1}{2-i} &= i \times \frac{2+i}{(2-i)(2+i)} = i \times \frac{2+i}{5} \\ &= \frac{2i+i^2}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \end{aligned}$$

유제

95~103쪽

188 ㉮ (1) $3+5i$ (2) $38+8i$

(3) $-11+10i$ (4) $24-8i$

(1) $(9+i)-(6-4i)=9+i-6+4i$
 $=3+5i$

(2) $(5-i)(7+3i)=35+15i-7i-3i^2$
 $=38+8i$

(3) $(1+2i)^2-(3-i)^2=1+4i+4i^2-(9-6i+i^2)$
 $=-3+4i-8+6i$
 $=-11+10i$

(4) $(5-i)^2 + \frac{2+2i}{1-i}$
 $=25-10i+i^2 + \frac{(2+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$
 $=24-10i + \frac{2+2i+2i+2i^2}{1-i^2}$
 $=24-10i + \frac{4i}{2}$
 $=24-10i+2i$
 $=24-8i$

189 ㉡ 6+5i

$$\begin{aligned}
 & (2+i)(\overline{3-2i}) + \frac{4}{1+i} \\
 &= (2+i)(3+2i) + \frac{4(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\
 &= 6+4i+3i+2i^2 + \frac{4-4i}{1-i^2} \\
 &= 4+7i + \frac{4-4i}{2} \\
 &= 4+7i+2-2i \\
 &= 6+5i
 \end{aligned}$$

190 ㉡ $\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{2}+i}{i} + \frac{1+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i} \\
 &= \frac{i(\sqrt{2}+i)}{i \times i} + \frac{(1+\sqrt{2}i)^2}{(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)} \\
 &= \frac{\sqrt{2}i+i^2}{i^2} + \frac{1+2\sqrt{2}i+2i^2}{1-2i^2} \\
 &= -\sqrt{2}i+1 + \frac{-1+2\sqrt{2}i}{3} \\
 &= \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i
 \end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ 이므로

$$a^2+b^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

191 ㉡ ④

$$\begin{aligned}
 \frac{a+3i}{2-i} &= \frac{(a+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\
 &= \frac{2a+ai+6i+3i^2}{4-i^2} \\
 &= \frac{2a-3+(a+6)i}{5}
 \end{aligned}$$

즉, 실수부분이 $\frac{2a-3}{5}$, 허수부분이 $\frac{a+6}{5}$ 이므로

$$\frac{2a-3}{5} + \frac{a+6}{5} = 3$$

$$3a+3=15, 3a=12 \quad \therefore a=4$$

192 ㉡ (1) -3, 3 (2) 10

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & x(x-1+xi) - 9(1+i) \\
 &= (x^2-x-9) + (x^2-9)i \\
 &\text{이 복소수가 실수이므로} \\
 &x^2-9=0, (x+3)(x-3)=0 \\
 &\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & x^2 - (i-3)^2 x - 20 + 12i \\
 &= x^2 - (i^2 - 6i + 9)x - 20 + 12i \\
 &= (x^2 - 8x - 20) + (6x + 12)i \\
 &\text{이 복소수가 순허수이므로} \\
 &x^2 - 8x - 20 = 0, 6x + 12 \neq 0 \\
 &x^2 - 8x - 20 = 0 \text{에서 } (x+2)(x-10)=0 \\
 &\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\
 &6x + 12 \neq 0 \text{에서 } 6x \neq -12 \\
 &\therefore x \neq -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\
 &\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } x = 10
 \end{aligned}$$

193 ㉡ 2

$$\begin{aligned}
 z &= (1+i)x^2 + (1-i)x - 6 - 12i \\
 &= (x^2+x-6) + (x^2-x-12)i \\
 z^2 \text{이 음의 실수이려면 } z \text{가 순허수이어야 하므로} \\
 x^2+x-6=0, x^2-x-12 \neq 0 \\
 x^2+x-6=0 \text{에서 } (x+3)(x-2)=0 \\
 \therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\
 x^2-x-12 \neq 0 \text{에서 } (x+3)(x-4) \neq 0 \\
 \therefore x \neq -3, x \neq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\
 \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } x = 2
 \end{aligned}$$

194 ㉡ -2, 2

$$\begin{aligned}
 z_1 - z_2 &= (2-3i)x^2 + x - i - \{(1-2i)x^2 - 3x + 12 - 5i\} \\
 &= (x^2 + 4x - 12) - (x^2 - 4)i \\
 z_1 - z_2 \text{가 실수이므로} \\
 x^2 - 4 = 0, (x+2)(x-2) = 0 \\
 \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 2
 \end{aligned}$$

195 ㉡ 9

$$\begin{aligned}
 z &= x^2 - (7-2i)x + 6 - 4i \\
 &= (x^2 - 7x + 6) + (2x - 4)i \\
 z^2 \text{이 실수이려면 } z \text{가 실수 또는 순허수이어야 하므로} \\
 x^2 - 7x + 6 = 0 \text{ 또는 } 2x - 4 = 0 \\
 x^2 - 7x + 6 = 0 \text{에서 } (x-1)(x-6) = 0 \\
 \therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\
 2x - 4 = 0 \text{에서 } x = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\
 \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = 6 \text{이므로 구하} \\
 \text{는 합은} \\
 1+2+6=9
 \end{aligned}$$

196 ㉔ (1) $x=2, y=1$ (2) $x=15, y=5$

(1) $(1+2i)x + (3-i)y = 5+3i$ 에서

$$(x+3y) + (2x-y)i = 5+3i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x+3y=5, 2x-y=3$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=2, y=1$$

(2) $\frac{x}{1+2i} + \frac{y}{1-2i} = 4-4i$ 에서

$$\frac{x(1-2i) + y(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)} = 4-4i$$

$$\frac{x-2xi+y+2yi}{1+4} = 4-4i$$

$$\frac{x+y}{5} - \frac{2x-2y}{5}i = 4-4i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{x+y}{5} = 4, -\frac{2x-2y}{5} = -4$$

$$\therefore x+y=20, x-y=10$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=15, y=5$$

197 ㉔ 18

$(3+ai)(2-i) = 13+bi$ 에서

$$6-3i+2ai+a=13+bi$$

$$(a+6) + (2a-3)i = 13+bi$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a+6=13, 2a-3=b \quad \therefore a=7, b=11$$

$$\therefore a+b=18$$

198 ㉔ 24

$(4+xi)^2 = \overline{y-16i}$ 에서

$$16+8xi-x^2=y+16i$$

$$(16-x^2) + 8xi = y+16i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$16-x^2=y, 8x=16 \quad \therefore x=2, y=12$$

$$\therefore xy=24$$

199 ㉔ 5

$(x+i)(y-i) = \frac{10}{3+i}$ 에서

$$xy-xi+yi+1 = \frac{10(3-i)}{(3+i)(3-i)}$$

$$(xy+1) - (x-y)i = \frac{10(3-i)}{9+1}$$

$$(xy+1) - (x-y)i = 3-i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$xy+1=3, x-y=1$$

$$\therefore xy=2, x-y=1$$

$$\begin{aligned} \therefore x^2+y^2 &= (x-y)^2 + 2xy \\ &= 1^2 + 2 \times 2 = 5 \end{aligned}$$

200 ㉔ 4

$z=1+\sqrt{3}i$ 에서 $z-1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면

$$z^2-2z+1=-3$$

$$\therefore z^2-2z+4=0$$

$$\begin{aligned} \therefore 3z^2-6z+16 &= 3(z^2-2z+4) + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

201 ㉔ 30

$$x+y = (2-\sqrt{2}i) + (2+\sqrt{2}i) = 4$$

$$xy = (2-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}i) = 4+2=6$$

$$\begin{aligned} \therefore x^2y+xy^2+xy &= xy(x+y+1) \\ &= 6 \times (4+1) = 30 \end{aligned}$$

202 ㉔ 10

$$\begin{aligned} z &= \frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{2+2i+i-1}{1+1} = \frac{1+3i}{2} \end{aligned}$$

즉, $2z-1=3i$ 이므로 양변을 제곱하면

$$4z^2-4z+1=-9 \quad \therefore 2z^2-2z+5=0$$

$$\begin{aligned} \therefore 4z^3-6z^2+12z+5 &= 2z(2z^2-2z+5) - 2z^2 + 2z + 5 \\ &= -2z^2 + 2z + 5 \\ &= -(2z^2-2z+5) + 10 \\ &= 10 \end{aligned}$$

203 ㉔ $\frac{1}{2}$

$$x+y = \left(\frac{1+i}{2i}\right) + \left(\frac{1-i}{2i}\right) = \frac{2}{2i} = -i$$

$$xy = \left(\frac{1+i}{2i}\right) \left(\frac{1-i}{2i}\right) = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^2-xy+y^2 &= (x+y)^2 - 3xy \\ &= (-i)^2 - 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

204 ㉔ 8

$$\begin{aligned}\alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}&=\alpha(\bar{\alpha}-\bar{\beta})-\beta(\bar{\alpha}-\bar{\beta}) \\&=(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta}) \\&=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})\end{aligned}$$

이때 $\alpha-\beta=(-1+4i)-(1+2i)=-2+2i$ 이므로

$$\begin{aligned}\alpha\bar{\alpha}-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+\beta\bar{\beta}&=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta}) \\&=(-2+2i)(-2-2i) \\&=4+4=8\end{aligned}$$

205 ㉔ 3-2i

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

이를 $\frac{z}{i}+3i\bar{z}=-8+6i$ 에 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{i}+3i(a-bi)&=-8+6i \\ \frac{i(a+bi)}{i \times i}+3ai+3b&=-8+6i \\ \frac{ai-b}{-1}+3ai+3b&=-8+6i\end{aligned}$$

$$4b+2ai=-8+6i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$4b=-8, 2a=6$$

$$\therefore a=3, b=-2$$

따라서 구하는 복소수 z 는 $3-2i$ 이다.

206 ㉔ 11-3i

$$\bar{\alpha}+\bar{\beta}=3+i \text{에서 } \overline{\alpha+\beta}=3+i$$

$$\therefore \alpha+\beta=\overline{(\alpha+\beta)}=3-i$$

$$\bar{\alpha} \times \bar{\beta}=1+i \text{에서 } \overline{\alpha\beta}=1+i$$

$$\therefore \alpha\beta=\overline{(\alpha\beta)}=1-i$$

$$\begin{aligned}\therefore (\alpha+2)(\beta+2)&=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4 \\&=(1-i)+2(3-i)+4 \\&=11-3i\end{aligned}$$

207 ㉔ -2-3i, -2+3i

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$$z+\bar{z}=-4 \text{에서 } a+bi+a-bi=-4$$

$$2a=-4 \quad \therefore a=-2$$

$$z\bar{z}=13 \text{에서 } (a+bi)(a-bi)=13$$

$$a^2+b^2=13$$

$$a=-2 \text{를 대입하면 } b^2=9$$

$$\therefore b=-3 \text{ 또는 } b=3$$

따라서 구하는 복소수 z 는 $-2-3i, -2+3i$ 이다.

개념 확인

105쪽

208 ㉔ (1) -i (2) -i (3) 1

$$(1) i^{15}=(i^4)^3 \times i^3=-i$$

$$(2) (-i)^{101}=(-1)^{101} \times (i^4)^{25} \times i=-i$$

$$(3) i^{200}=(i^4)^{50}=1^{50}=1$$

209 ㉔ (1) ± 2 (2) $\pm \sqrt{7}i$ (3) $\pm \frac{1}{4}i$

210 ㉔ (1) $\sqrt{21}i$ (2) $-2\sqrt{2}$ (3) $-\sqrt{5}i$

$$(1) \sqrt{3}\sqrt{-7}=\sqrt{3 \times (-7)}=\sqrt{-21}=\sqrt{21}i$$

$$(2) \sqrt{-2}\sqrt{-4}=-\sqrt{(-2) \times (-4)}=-\sqrt{8}=-2\sqrt{2}$$

$$(3) \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{-4}}=-\sqrt{\frac{20}{-4}}=-\sqrt{-5}=-\sqrt{5}i$$

유제

107~113쪽

211 ㉔ (1) $i+1$ (2) 1 (3) 0

$$(1) i^{45}+i^{60}=(i^4)^{11} \times i+(i^4)^{15}=i+1$$

$$\begin{aligned}(2) i+i^2+i^3+i^4&=i-1-i+1=0 \text{이므로} \\&1+i+i^2+i^3+\cdots+i^{2048} \\&=1+(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4) \\&\quad +\cdots+i^{2044}(i+i^2+i^3+i^4) \\&=1+0+0+\cdots+0=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}&=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1=0 \text{이므로} \\&\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{500}} \\&=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right) \\&\quad +\cdots+\frac{1}{i^{496}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right) \\&=0\end{aligned}$$

212 ㉔ 6-6i

$$i+2i^2+3i^3+\cdots+12i^{12}$$

$$\begin{aligned}&=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+i^4(5i+6i^2+7i^3+8i^4) \\&\quad +i^8(9i+10i^2+11i^3+12i^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8) \\&\quad +(9i-10-11i+12)\end{aligned}$$

$$=(2-2i)+(2-2i)+(2-2i)$$

$$=6-6i$$

213 ㉠ 40

$$\begin{aligned} & \frac{2}{i} + \frac{4}{i^2} + \frac{6}{i^3} + \cdots + \frac{40}{i^{20}} \\ &= \left(\frac{2}{i} + \frac{4}{i^2} + \frac{6}{i^3} + \frac{8}{i^4} \right) + \frac{1}{i^4} \left(\frac{10}{i} + \frac{12}{i^2} + \frac{14}{i^3} + \frac{16}{i^4} \right) \\ & \quad + \cdots + \frac{1}{i^{16}} \left(\frac{34}{i} + \frac{36}{i^2} + \frac{38}{i^3} + \frac{40}{i^4} \right) \\ &= (-2i - 4 + 6i + 8) + (-10i - 12 + 14i + 16) \\ & \quad + \cdots + (-34i - 36 + 38i + 40) \\ &= (4 + 4i) + (4 + 4i) + \cdots + (4 + 4i) \\ &= 5 \times (4 + 4i) \\ &= 20 + 20i \end{aligned}$$

따라서 $a=20$, $b=20$ 이므로

$$a+b=40$$

214 ㉠ -2

$$\begin{aligned} i+i^2+i^3+i^4 &= i-1-i+1=0, \\ \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} &= \frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 = 0 \text{이므로} \\ \left(i + \frac{1}{i} \right) + \left(i^2 + \frac{1}{i^2} \right) + \left(i^3 + \frac{1}{i^3} \right) + \cdots + \left(i^{50} + \frac{1}{i^{50}} \right) \\ &= (i+i^2+i^3+\cdots+i^{50}) + \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \cdots + \frac{1}{i^{50}} \right) \\ &= (i+i^2+i^3+i^4) + i^4(i+i^2+i^3+i^4) \\ & \quad + \cdots + i^{44}(i+i^2+i^3+i^4) + i^{48}(i+i^2) \\ & \quad + \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} \right) + \frac{1}{i^4} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} \right) \\ & \quad + \cdots + \frac{1}{i^{44}} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} \right) + \frac{1}{i^{48}} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} \right) \\ &= i+i^2+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2} \\ &= i-1-i-1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

215 ㉠ (1) $-i$ (2) -1024

$$\begin{aligned} (1) \frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{1+1} = i \text{이므로} \\ \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{135} &= i^{135} = (i^4)^{33} \times i^3 = -i \\ (2) (1-i)^2 &= 1-2i-1 = -2i \text{이므로} \\ (1-i)^{20} &= \{ (1-i)^2 \}^{10} = (-2i)^{10} \\ &= (-2)^{10} \times i^{10} \\ &= 1024 \times (i^4)^2 \times i^2 \\ &= -1024 \end{aligned}$$

216 ㉠ $-64+128i$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i}{i} \right)^2 &= \frac{1+2i-1}{-1} = -2i, \\ \left(\frac{1-i}{i} \right)^2 &= \frac{1-2i-1}{-1} = 2i \text{이므로} \\ \left(\frac{1+i}{i} \right)^{12} - \left(\frac{1-i}{i} \right)^{14} &= \left\{ \left(\frac{1+i}{i} \right)^2 \right\}^6 - \left\{ \left(\frac{1-i}{i} \right)^2 \right\}^7 \\ &= (-2i)^6 - (2i)^7 \\ &= (-2)^6 \times i^6 - 2^7 \times i^7 \\ &= 64 \times i^4 \times i^2 - 128 \times i^4 \times i^3 \\ &= -64 + 128i \end{aligned}$$

217 ㉠ -2

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i} \right)^2 &= \frac{2}{1+2i-1} = \frac{1}{i} = -i, \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i} \right)^2 &= \frac{2}{1-2i-1} = -\frac{1}{i} = i \text{이므로} \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i} \right)^{4n} + \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i} \right)^{4n} &= \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i} \right)^2 \right\}^{2n} + \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i} \right)^2 \right\}^{2n} \\ &= (-i)^{2n} + i^{2n} \\ &= \{ (-i)^2 \}^n + (i^2)^n \\ &= (-1)^n + (-1)^n \\ &= -1 - 1 \quad (\because n \text{은 홀수}) \\ &= -2 \end{aligned}$$

218 ㉠ 8

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}i} \right)^2 = \frac{1-2i-1}{-2} = i \text{이므로} \\ z^4 &= (z^2)^2 = i^2 = -1, \quad z^8 = (z^4)^2 = (-1)^2 = 1, \dots \\ \text{따라서 } z^n &= 1 \text{을 만족시키는 자연수 } n \text{의 최솟값은 8이다.} \end{aligned}$$

219 ㉠ (1) $-18+14i$ (2) $3i$

$$\begin{aligned} (1) & \sqrt{-6} \sqrt{6} + \sqrt{9} \sqrt{-18} \sqrt{-2} + \sqrt{-64} \\ &= \sqrt{-36} + 3 \times (-\sqrt{36}) + 8i \\ &= 6i + 3 \times (-6) + 8i = -18 + 14i \\ (2) & \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} + \sqrt{-16} + \frac{\sqrt{-28}}{\sqrt{7}} \\ &= -\sqrt{\frac{27}{-3}} + 4i + \sqrt{\frac{-28}{7}} \\ &= -\sqrt{-9} + 4i + \sqrt{-4} = -3i + 4i + 2i = 3i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{[참고]} \quad & \sqrt{9} \sqrt{-18} \sqrt{-2} = \sqrt{9} \times (\sqrt{-18} \times \sqrt{-2}) \\ &= 3 \times (-\sqrt{36}) = 3 \times (-6) = -18 \\ & \sqrt{9} \sqrt{-18} \sqrt{-2} = (\sqrt{9} \times \sqrt{-18}) \times \sqrt{-2} = \sqrt{-162} \times \sqrt{-2} \\ &= -\sqrt{324} = -18 \end{aligned}$$

위와 같이 곱셈에 대한 결합법칙이 성립한다.

|다른 풀이|

$$\begin{aligned}
 (1) & \sqrt{-6} \sqrt{6} + \sqrt{9} \sqrt{-18} \sqrt{-2} + \sqrt{-64} \\
 &= \sqrt{6}i \times \sqrt{6} + \sqrt{9} \times \sqrt{18}i \times \sqrt{2}i + \sqrt{64}i \\
 &= 6i - 18 + 8i = -18 + 14i \\
 (2) & \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}} + \sqrt{-16} + \frac{\sqrt{-28}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}i} + 4i + \frac{\sqrt{28}i}{\sqrt{7}} \\
 &= -3i + 4i + 2i = 3i
 \end{aligned}$$

220 ㉠ -3

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{-2} \times \left(\sqrt{-32} - \frac{\sqrt{-25}}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= \sqrt{-2} \times \sqrt{-32} - \sqrt{-2} \times \frac{\sqrt{-25}}{\sqrt{2}} \\
 &= -\sqrt{64} - \sqrt{-2} \times \sqrt{-\frac{25}{2}} \\
 &= -8 + \sqrt{25} = -8 + 5 = -3
 \end{aligned}$$

|다른 풀이|

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{-2} \times \left(\sqrt{-32} - \frac{\sqrt{-25}}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2}i \left(4\sqrt{2}i - \frac{5i}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= \sqrt{2}i \left(4\sqrt{2}i - \frac{5\sqrt{2}}{2}i \right) \\
 &= \sqrt{2}i \times \frac{3\sqrt{2}}{2}i \\
 &= 3i^2 = -3
 \end{aligned}$$

221 ㉠ $a=-1, b=2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{-2} \sqrt{-8} + \sqrt{(-3)^2} + \frac{\sqrt{-4} \sqrt{-6}}{\sqrt{-3}} \\
 &= -\sqrt{16} + 3 - \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}} \\
 &= -4 + 3 + \sqrt{-8} = -1 + 2\sqrt{2}i \\
 & \text{따라서 } -1 + 2\sqrt{2}i = a + bi \text{이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\
 & a = -1, b = 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

222 ㉠ $-3+2i$

$$\begin{aligned}
 & (1+3i)x + (1-i)y = -4 \text{에서} \\
 & (x+y) + (3x-y)i = -4 \\
 & \text{복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\
 & x+y = -4, 3x-y = 0 \\
 & \text{두 식을 연립하여 풀면 } x = -1, y = -3 \\
 & \therefore \sqrt{x} \sqrt{3y} - \frac{\sqrt{-12x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{-1} \sqrt{-9} - \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}} \\
 &= -\sqrt{9} + \sqrt{-4} = -3 + 2i
 \end{aligned}$$

223 ㉠ $2a-2b$

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{a} \sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{에서 } a < 0, b < 0 \\
 & \therefore \sqrt{a^2} = |a| = -a, |b| = -b \\
 & a < 0, b < 0 \text{이면 } a+b < 0 \text{ 이므로} \\
 & \sqrt{(a+b)^2} = |a+b| = -(a+b) \\
 & \therefore \sqrt{(a+b)^2} - 3\sqrt{a^2} + |b| \\
 &= -(a+b) - 3(-a) - b \\
 &= -a - b + 3a - b \\
 &= 2a - 2b
 \end{aligned}$$

224 ㉠ $-2b+1$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}} \text{에서 } a > 0, b < 0 \\
 & a > 0, b < 0 \text{ 이면 } a-b > 0 \text{ 이므로} \\
 & \sqrt{(a-b)^2} = |a-b| = a-b \\
 & \text{또 } b-2 < 0, a+1 > 0 \text{ 이므로} \\
 & |b-2| = -(b-2) \\
 & \sqrt{(a+1)^2} = |a+1| = a+1 \\
 & \therefore \sqrt{(a-b)^2} + |b-2| - \sqrt{(a+1)^2} \\
 &= a-b-(b-2)-(a+1) \\
 &= -2b+1
 \end{aligned}$$

225 ㉠ 10

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{-3} \sqrt{2a-9} = -\sqrt{27-6a} \text{에서} \\
 & 2a-9 \leq 0 \quad \therefore a \leq \frac{9}{2} \\
 & \text{따라서 자연수 } a \text{는 } 1, 2, 3, 4 \text{ 이므로 구하는 합은} \\
 & 1+2+3+4=10
 \end{aligned}$$

226 ㉠ $a+b+2$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{b-1}}{\sqrt{3-a}} = -\sqrt{\frac{b-1}{3-a}} \text{에서 } b-1 > 0, 3-a < 0 \\
 & \text{즉, } 1-a = (3-a) - 2 < 0 \text{ 이므로} \\
 & \sqrt{(1-a)^2} = |1-a| = -(1-a) \\
 & \text{또 } b+3 = (b-1) + 4 > 0 \text{ 이므로} \\
 & |b+3| = b+3 \\
 & \therefore \sqrt{(1-a)^2} + |b+3| = -(1-a) + b+3 = a+b+2
 \end{aligned}$$

연습문제

114~116쪽

227 ㉠ ④

④ $3+2i$ 의 허수부분은 2이다.
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

228 ㉮ ⑤

$$\begin{aligned}\bar{z} &= 2-i \text{ 이므로} \\ z+i\bar{z} &= 2+i+i(2-i) \\ &= 2+i+2i+1 \\ &= 3+3i\end{aligned}$$

229 ㉮ 4

$$\begin{aligned}z &= (1-i)(1+i)x^2 + (2i-8)x + 4i - 24 \\ &= 2x^2 + 2xi - 8x + 4i - 24 \\ &= (2x^2 - 8x - 24) + (2x+4)i \\ z \text{가 실수이면 } 2x+4 &= 0 \\ 2x &= -4 \quad \therefore x = -2 \quad \therefore a = -2 \\ z \text{가 순허수이면} \\ 2x^2 - 8x - 24 &= 0, 2x+4 \neq 0 \\ 2x^2 - 8x - 24 &= 0 \text{에서 } 2(x+2)(x-6) = 0 \\ \therefore x &= -2 \text{ 또는 } x = 6 \quad \cdots \cdots ㉠ \\ 2x+4 \neq 0 \text{에서 } x &\neq -2 \quad \cdots \cdots ㉡ \\ ㉠, ㉡ \text{에서 } x &= 6 \quad \therefore b = 6 \\ \therefore a+b &= (-2)+6 = 4\end{aligned}$$

230 ㉮ $\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}\frac{2x}{1-i} - 4y &= \frac{5}{2+i} \text{에서} \\ \frac{2x(1+i)}{(1-i)(1+i)} - 4y &= \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} \\ x(1+i) - 4y &= 2-i \\ \therefore (x-4y) + xi &= 2-i \\ \text{복소수가 서로 같을 조건에 의하여} \\ x-4y &= 2, x = -1 \quad \therefore y = -\frac{3}{4} \\ \therefore xy &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

231 ㉮ 10

$$\begin{aligned}\overline{\alpha+\beta} &= 3+i \text{에서 } \alpha+\beta = \overline{\overline{\alpha+\beta}} = 3-i \\ \therefore \alpha\bar{\alpha} + \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\beta} &= \alpha(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) + \beta(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) \\ &= (\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) \\ &= (\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta}) \\ &= (3-i)(3+i) \\ &= 10\end{aligned}$$

232 ㉮ 12

$$\begin{aligned}i+2i^2+3i^3+4i^4+5i^5 &= a+bi \text{에서} \\ i-2-3i+4+5i \times i &= a+bi \\ -2i+2+5i &= a+bi \quad \therefore 2+3i = a+bi\end{aligned}$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\begin{aligned}a &= 2, b = 3 \\ \therefore 3a+2b &= 3 \times 2 + 2 \times 3 = 12\end{aligned}$$

233 ㉮ ①

$$\begin{aligned}(1-i)^2 &= 1-2i-1 = -2i, \\ (1+i)^2 &= 1+2i-1 = 2i \text{ 이므로} \\ (1-i)^{60} + (1+i)^{60} &= \{(1-i)^2\}^{30} + \{(1+i)^2\}^{30} \\ &= (-2i)^{30} + (2i)^{30} \\ &= (-2)^{30} \times i^{30} + 2^{30} \times i^{30} \\ &= 2^{30} \times (i^4)^7 \times i^2 + 2^{30} \times (i^4)^7 \times i^2 \\ &= -2^{30} - 2^{30} = -2 \times 2^{30} \\ &= -2^{31}\end{aligned}$$

234 ㉮ ㄱ, ㄷ

$$\begin{aligned}\text{ㄴ. } \sqrt{-2}\sqrt{3} &= \sqrt{(-2) \times 3} = \sqrt{-6} = \sqrt{6}i \\ \text{ㄷ. } \frac{\sqrt{(-3)^2}}{\sqrt{-2}} &= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{-2}} = -\sqrt{-\frac{9}{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}i\end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

235 ㉮ ④

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} &= -\sqrt{\frac{a}{b}} \text{에서 } a > 0, b < 0 \\ ① \quad ab < 0 \text{이므로 } |ab| &= -ab \\ ② \quad \sqrt{a^2} &= |a| = a \\ ③ \quad \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} &= \sqrt{\frac{b}{a}} \\ ⑤ \quad -a < 0, -b > 0 \text{이므로 } \sqrt{-a}\sqrt{-b} &= \sqrt{ab}\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ④이다.

236 ㉮ $-6i$

$$\begin{aligned}z &= (1+i)x^2 + (1-i)x - (2+6i) \\ &= (x^2+x-2) + (x^2-x-6)i \quad \text{▶▶▶▶▶ ①} \\ z^2 \text{이 음의 실수이려면 } z &\text{가 순허수이어야 하므로} \\ x^2+x-2 &= 0, x^2-x-6 \neq 0 \\ x^2+x-2 &= 0 \text{에서 } (x+2)(x-1) = 0 \\ \therefore x &= -2 \text{ 또는 } x = 1 \quad \cdots \cdots ㉠ \\ x^2-x-6 \neq 0 \text{에서 } (x+2)(x-3) &\neq 0 \\ \therefore x &\neq -2, x \neq 3 \quad \cdots \cdots ㉡ \\ ㉠, ㉡ \text{에서 } x &= 1 \quad \text{▶▶▶▶▶ ②} \\ \therefore z &= -6i \\ \therefore xz &= -6i \quad \text{▶▶▶▶▶ ③}\end{aligned}$$

단계	채점 기준	비율
①	z 를 $a+bi$ 꼴로 나타내기	20%
②	x 의 값 구하기	60%
③	z 의 값과 xz 의 값 구하기	20%

237 ㉡ 13

$$z = \frac{1-\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i} = \frac{(1-\sqrt{2}i)^2}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}$$

$$= \frac{1-2\sqrt{2}i-2}{3} = \frac{-1-2\sqrt{2}i}{3}$$

즉, $3z+1=-2\sqrt{2}i$ 이므로 양변을 제곱하면

$$9z^2+6z+1=-8 \quad \therefore 3z^2+2z+3=0$$

$$\therefore 6z^3+z^2+4z+10$$

$$=2z(3z^2+2z+3)-3z^2-2z+10$$

$$=-3z^2-2z+10$$

$$=-(3z^2+2z+3)+13=13$$

238 ㉡ 2-4i

$$\bar{z}^2 = -1+4i \text{에서 } z^2 = -1+4i$$

$$\therefore z^2 = -1-4i$$

즉, $z^2+1=-4i$ 이므로 양변을 제곱하면

$$z^4+2z^2+1=-16 \quad \therefore z^4+2z^2+17=0$$

$$\therefore z^4+3z^2+20=(z^4+2z^2+17)+z^2+3$$

$$=z^2+3=-1-4i+3=2-4i$$

239 ㉡ -2

$$x+y = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$$

$$= \frac{1-i+1+i}{(1+i)(1-i)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$xy = \left(\frac{1}{1+i}\right)\left(\frac{1}{1-i}\right) = \frac{1}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2} = \frac{x^3+y^3}{x^2y^2} = \frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{(xy)^2}$$

$$= \frac{1^3-3 \times \frac{1}{2} \times 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -2$$

240 ㉡ -2i

$$\alpha\bar{\alpha}=1, \beta\bar{\beta}=1 \text{에서 } \bar{\alpha}=\frac{1}{\alpha}, \bar{\beta}=\frac{1}{\beta}$$

$$\therefore \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = 2\bar{\alpha}+2\bar{\beta}=2(\bar{\alpha}+\bar{\beta})$$

$$=2(\overline{\alpha+\beta})=2 \times (-i) (\because \alpha+\beta=i)$$

$$=-2i$$

| 다른 풀이 |

$\alpha=a+bi, \beta=c+di$ (a, b, c, d 는 실수)라 하면

$$\alpha\bar{\alpha}=1, \beta\bar{\beta}=1 \text{에서}$$

$$(a+bi)(a-bi)=1, (c+di)(c-di)=1$$

$$\therefore a^2+b^2=1, c^2+d^2=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha+\beta=i \text{에서 } (a+bi)+(c+di)=i$$

$$(a+c)+(b+d)i=i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a+c=0, b+d=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\therefore \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} = \frac{2}{a+bi} + \frac{2}{c+di}$$

$$= \frac{2(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} + \frac{2(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$= \frac{2a-2bi}{a^2+b^2} + \frac{2c-2di}{c^2+d^2}$$

$$= 2(a+c) - 2(b+d)i (\because \textcircled{㉠})$$

$$= -2i (\because \textcircled{㉡})$$

241 ㉡ ⑤

$z=1+ai$ (a 는 실수)라 하면 $\bar{z}=1-ai$

$$\frac{z}{2+i} + \frac{\bar{z}}{2-i} = 2 \text{에서 } \frac{1+ai}{2+i} + \frac{1-ai}{2-i} = 2$$

$$\frac{(1+ai)(2-i) + (1-ai)(2+i)}{(2+i)(2-i)} = 2$$

$$\frac{2a+4}{5} = 2, 2a+4=10 \quad \therefore a=3$$

따라서 $z=1+3i$ 이므로

$$z\bar{z}=(1+3i)(1-3i)=10$$

242 ㉡ ⑤

$z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$

$$\neg. z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2 \text{이므로}$$

$z\bar{z}$ 는 실수이다.

$$\neg. \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a+bi} + \frac{1}{a-bi}$$

$$= \frac{(a-bi) + (a+bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{2a}{a^2+b^2}$$

이므로 $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}$ 은 실수이다.

$$\neg. z=-\bar{z} \text{에서 } a+bi=-a+bi \quad \therefore a=0$$

이때 z 는 0이 아닌 복소수이므로 $b \neq 0$

즉, z 는 순허수이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

243 ㉮ 10

$\sqrt{x}\sqrt{y} = -\sqrt{xy}$ 에서 $x < 0, y < 0$ ㉮

$x(x-2) + y(y+3)i = 8 + 10i$ 에서

$(x^2 - 2x) + (y^2 + 3y)i = 8 + 10i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x^2 - 2x = 8, y^2 + 3y = 10$$

$$\therefore x^2 - 2x - 8 = 0, y^2 + 3y - 10 = 0$$

$x^2 - 2x - 8 = 0$ 에서

$$(x+2)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -2 (\because \text{㉮})$$

$y^2 + 3y - 10 = 0$ 에서

$$(y+5)(y-2) = 0$$

$$\therefore y = -5 (\because \text{㉮})$$

$$\therefore xy = 10$$

244 ㉮ ①

| 접근 방법 | 복소수 $z^2 + 2z$ 가 실수이면 (허수부분)=0임을 이용한다.

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면

$$z^2 + 2z = (a + bi)^2 + 2(a + bi)$$

$$= a^2 + 2abi - b^2 + 2a + 2bi$$

$$= (a^2 - b^2 + 2a) + (2ab + 2b)i$$

$z^2 + 2z$ 가 실수이므로

$$2ab + 2b = 0, 2b(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } b = 0$$

$$\therefore z = -1 + bi \text{ } (b \neq 0) \text{ 또는 } z = a$$

ㄱ. $z^2 + 2z$ 가 실수이므로

$$\overline{z^2 + 2z} = \overline{z^2 + 2z}$$

ㄴ. $z = -1 + bi$ 일 때,

$$z + \bar{z} = (-1 + bi) + (-1 - bi) = -2$$

$$z = a \text{ 일 때, } z + \bar{z} = a + a = 2a$$

즉, $z + \bar{z} = -2$ 는 $a = -1$ 일 때만 성립한다.

ㄷ. $z = -1 + bi$ 일 때,

$$z\bar{z} = (-1 + bi)(-1 - bi)$$

$$= 1 + b^2 > 1 (\because b^2 > 0)$$

$$z = a \text{ 일 때, } z\bar{z} = a^2$$

그런데 $-1 \leq a \leq 1$ 이면 $z\bar{z} > 1$ 은 성립하지 않는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

245 ㉮ 12

| 접근 방법 | i^n 의 규칙성을 이용하여 주어진 식의 값의 규칙성을 파악한다.

음이 아닌 정수 k 에 대하여

$$i^n = \begin{cases} i & (n=4k+1) \\ -1 & (n=4k+2) \\ -i & (n=4k+3) \\ 1 & (n=4k+4) \end{cases}$$

이므로

$$\frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{i^n}$$

$$= -i + 1 + i - 1 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{i^n}$$

$$= \begin{cases} -i & (n=4k+1) \\ -i+1 & (n=4k+2) \\ 1 & (n=4k+3) \\ 0 & (n=4k+4) \end{cases}$$

즉, 주어진 등식을 만족시키는 n 의 값은 $n=4k+3$ 꼴이다.

따라서 50 이하의 자연수 n 은 3, 7, 11, ..., 47의 12개이다.

246 ㉮ -1

| 접근 방법 | z^n 의 규칙성을 파악하여 $z + z^2 + z^3 + \dots + z^{39}$ 을 간단히 한다.

$$z^2 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1-2i-1}{2} = -i \text{ 이므로}$$

$$z^3 = z^2 \times z = -i \times \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{-i-1}{\sqrt{2}}$$

$$z^4 = (z^2)^2 = (-i)^2 = -1$$

$$z^5 = z^4 \times z = (-1) \times \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

$$z^6 = z^4 \times z^2 = (-1) \times (-i) = i$$

$$z^7 = z^4 \times z^3 = (-1) \times \left(\frac{-i-1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{i+1}{\sqrt{2}}$$

$$z^8 = (z^4)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$\therefore z + z^2 + z^3 + \dots + z^8$$

$$= z + z^2 + z^3 + z^4 + z^4(z + z^2 + z^3 + z^4)$$

$$= z + z^2 + z^3 + z^4 - (z + z^2 + z^3 + z^4) (\because z^4 = -1)$$

$$= 0$$

$$\therefore z + z^2 + z^3 + \dots + z^{39}$$

$$= (z + z^2 + z^3 + \dots + z^8) + z^8(z + z^2 + z^3 + \dots + z^8)$$

$$+ \dots + z^{32}(z + z^2 + z^3 + \dots + z^7 + z^8) - z^{32} \times z^8$$

$$= -1$$

01 이차방정식의 판별식

개념 확인

121쪽

247 ㉠ (1) $x = \pm 4i$, 허근 (2) $x = \pm 2\sqrt{6}$, 실근
(3) $x = 1$ (중근), 실근 (4) $x = \pm \sqrt{3}i$, 허근

(1) $x^2 + 16 = 0$ 에서 $x^2 = -16$

$$\therefore x = \pm \sqrt{-16} = \pm 4i$$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

(2) $x^2 - 24 = 0$ 에서 $x^2 = 24$

$$\therefore x = \pm \sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}$$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

(3) $(x-1)^2 = 0$ 에서

$$x = 1 \text{ (중근)}$$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

(4) $2x^2 + 6 = 0$ 에서 $x^2 = -3$

$$\therefore x = \pm \sqrt{3}i$$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

248 ㉠ (1) $x = -5$ 또는 $x = 0$

$$(2) x = -3 \text{ 또는 } x = 4$$

$$(3) x = -8 \text{ 또는 } x = 4$$

$$(4) x = -2 \text{ 또는 } x = 6$$

$$(5) x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 3$$

$$(6) x = -\frac{1}{2} \text{ (중근)}$$

(1) $x^2 + 5x = 0$ 에서 $x(x+5) = 0$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 0$$

(2) $x^2 - x - 12 = 0$ 에서 $(x+3)(x-4) = 0$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 4$$

(3) $x^2 + 4x - 32 = 0$ 에서 $(x+8)(x-4) = 0$

$$\therefore x = -8 \text{ 또는 } x = 4$$

(4) $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$ 의 양변에 2를 곱하면

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x+2)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 6$$

(5) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ 에서 $(2x-1)(x-3) = 0$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 3$$

(6) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ 에서 $(2x+1)^2 = 0$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \text{ (중근)}$$

249 ㉠ (1) $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ (2) $x = -1 \pm 2i$

$$(3) x = 4 \pm 2\sqrt{3} \quad (4) x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$(5) x = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{3}$$

$$(6) x = \frac{-\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i}{4}$$

(1) $x^2 - x - 3 = 0$ 에서

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} \\ = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

(2) $x^2 + 2x + 5 = 0$ 에서

$$x = -1 \pm \sqrt{1^2 - 1 \times 5} = -1 \pm 2i$$

(3) $x^2 - 8x + 4 = 0$ 에서

$$x = -(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 1 \times 4} = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

(4) $2x^2 - 5x + 1 = 0$ 에서

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

(5) $3x^2 + 6x - 2 = 0$ 에서

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 3 \times (-2)}}{3} = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{3}$$

(6) $4x^2 + 2\sqrt{2}x + 5 = 0$ 에서

$$x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 4 \times 5}}{4} = \frac{-\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i}{4}$$

유제

123-130쪽

250 ㉠ (1) $x = \frac{-3 \pm \sqrt{53}}{2}$

$$(2) x = 1 \text{ 또는 } x = 11$$

(1) $3(x-1)(x+5) = x(x+6) + 7$ 에서

$$3x^2 + 12x - 15 = x^2 + 6x + 7$$

$$2x^2 + 6x - 22 = 0, x^2 + 3x - 11 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-11)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{53}}{2}$$

(2) 주어진 이차방정식의 양변에 24를 곱하면

$$9x^2 + 3 - 12x = 8x^2 - 8$$

$$x^2 - 12x + 11 = 0, (x-1)(x-11) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 11$$

251 ㉔ (1) $x=1$ 또는 $x=2\sqrt{2}-2$

(2) $x=-1$ 또는 $x=2-\sqrt{3}$

(1) 주어진 이차방정식의 양변에 $\sqrt{2}-1$ 을 곱하면
 $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2-(\sqrt{2}-1)(3+\sqrt{2})x$
 $+2(\sqrt{2}-1)=0$

$$x^2-(2\sqrt{2}-1)x+(2\sqrt{2}-2)=0$$

$$(x-1)\{x-(2\sqrt{2}-2)\}=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2\sqrt{2}-2$$

(2) 주어진 이차방정식의 양변에 $2-\sqrt{3}$ 을 곱하면
 $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})x^2+(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})x$
 $-(2-\sqrt{3})=0$

$$x^2+(\sqrt{3}-1)x-(2-\sqrt{3})=0$$

$$(x+1)\{x-(2-\sqrt{3})\}=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2-\sqrt{3}$$

252 ㉔ 29

$$4(x-5)=(3-x)^2 \text{에서}$$

$$4x-20=x^2-6x+9$$

$$x^2-10x+29=0$$

$$\therefore x=-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-1\times 29}=5\pm 2i$$

따라서 $a=5$, $b=-2$ 또는 $b=2$ 이므로

$$a^2+b^2=25+4=29$$

253 ㉔ $\sqrt{3}-2$

주어진 이차방정식의 양변에 $\sqrt{3}+1$ 을 곱하면

$$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)x^2+(\sqrt{3}+1)(3-\sqrt{3})x$$

$$+(\sqrt{3}+1)(4-2\sqrt{3})=0$$

$$2x^2+2\sqrt{3}x+(2\sqrt{3}-2)=0$$

$$x^2+\sqrt{3}x+(\sqrt{3}-1)=0$$

$$(x+1)\{x+(\sqrt{3}-1)\}=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=-\sqrt{3}+1$$

따라서 $\alpha=-1$, $\beta=-\sqrt{3}+1$ 이므로

$$\alpha-\beta=-1-(-\sqrt{3}+1)=\sqrt{3}-2$$

254 ㉔ 2, $\frac{1}{2}$

이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 한 근이 2이므로

$x=2$ 를 대입하면

$$8-10+k=0 \quad \therefore k=2$$

이를 주어진 이차방정식에 대입하면

$$2x^2-5x+2=0, (2x-1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=2$$

따라서 다른 한 근은 $\frac{1}{2}$ 이다.

255 ㉔ $-5, -\frac{23}{6}$

$(k-1)x^2-(k^2+4)x+3k-8=0$ 이 x 에 대한 이차
 방정식이므로

$$k-1\neq 0 \quad \therefore k\neq 1$$

이 이차방정식의 한 근이 -1 이므로 $x=-1$ 을 대입
 하면

$$k-1+k^2+4+3k-8=0$$

$$k^2+4k-5=0, (k+5)(k-1)=0$$

$$\therefore k=-5 \text{ 또는 } k=1$$

그런데 $k\neq 1$ 이므로

$$k=-5$$

이를 주어진 이차방정식에 대입하면

$$-6x^2-29x-23=0$$

$$6x^2+29x+23=0, (6x+23)(x+1)=0$$

$$\therefore x=-\frac{23}{6} \text{ 또는 } x=-1$$

따라서 다른 한 근은 $-\frac{23}{6}$ 이다.

256 ㉔ 4

이차방정식 $x^2+ax-4=0$ 의 한 근이 -4 이므로

$x=-4$ 를 대입하면

$$16-4a-4=0 \quad \therefore a=3$$

이를 주어진 이차방정식에 대입하면

$$x^2+3x-4=0, (x+4)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-4 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 $b=1$ 이므로

$$a+b=3+1=4$$

257 ㉔ $x=-7$ 또는 $x=2$

이차방정식 $x^2-(k+3)x+3k=0$ 의 한 근이 5이므
 로 $x=5$ 를 대입하면

$$25-5k-15+3k=0 \quad \therefore k=5$$

이를 이차방정식 $x^2+kx-k^2+11=0$ 에 대입하면

$$x^2+5x-14=0, (x+7)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-7 \text{ 또는 } x=2$$

258 ㉡ (1) $x=1-2\sqrt{2}$ 또는 $x=-1+2\sqrt{2}$

(2) $x=-2$ 또는 $x=4$

(1) (i) $x < 0$ 일 때,

$$|x| = -x \text{이므로}$$

$$x^2 - 2x - 7 = 0$$

$$\therefore x = 1 \pm 2\sqrt{2}$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = 1 - 2\sqrt{2}$

(ii) $x \geq 0$ 일 때,

$$|x| = x \text{이므로}$$

$$x^2 + 2x - 7 = 0$$

$$\therefore x = -1 \pm 2\sqrt{2}$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x = -1 + 2\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = 1 - 2\sqrt{2} \text{ 또는 } x = -1 + 2\sqrt{2}$$

(2) (i) $x < -2$ 일 때,

$$|x+2| = -(x+2) \text{이므로}$$

$$x^2 - x - 2 = 3x + 10$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0, (x+2)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 6$$

그런데 $x < -2$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x \geq -2$ 일 때,

$$|x+2| = x+2 \text{이므로}$$

$$x^2 + x + 2 = 3x + 10$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0, (x+2)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 4$$

그런데 $x \geq -2$ 이므로 $x = -2$ 또는 $x = 4$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 4$$

|다른 풀이|

(1) $x^2 = |x|^2$ 이므로 $x^2 + 2|x| - 7 = 0$ 에서

$$|x|^2 + 2|x| - 7 = 0$$

$$\therefore |x| = -1 \pm 2\sqrt{2}$$

그런데 $|x| \geq 0$ 이므로 $|x| = -1 + 2\sqrt{2}$

$$\therefore x = 1 - 2\sqrt{2} \text{ 또는 } x = -1 + 2\sqrt{2}$$

259 ㉡ 2

(i) $x < 0$ 일 때,

$$|2x| = -2x \text{이므로}$$

$$x^2 - 2x = 3x + 6$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0, (x+1)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 6$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -1$

(ii) $x \geq 0$ 일 때,

$$|2x| = 2x \text{이므로}$$

$$x^2 + 2x = 3x + 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0, (x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x = 3$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 모든 근의 합은 $-1 + 3 = 2$

260 ㉡ -24

(i) $x < 1$ 일 때,

$$|x-1| = -(x-1) \text{이므로}$$

$$\{-(x-1)\}^2 + 4(x-1) - 5 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 + 4x - 4 - 5 = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0, (x+4)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $x = -4$

(ii) $x \geq 1$ 일 때,

$$|x-1| = x-1 \text{이므로}$$

$$(x-1)^2 - 4(x-1) - 5 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - 4x + 4 - 5 = 0$$

$$x^2 - 6x = 0, x(x-6) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 6$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 6$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -4 \text{ 또는 } x = 6$$

따라서 모든 근의 곱은 $-4 \times 6 = -24$

261 ㉡ -1

(i) $x < \frac{5}{3}$ 일 때,

$$|3x-5| = -(3x-5) \text{이므로}$$

$$x^2 + (3x-5) - 5 = 0$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0, (x+5)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $x < \frac{5}{3}$ 이므로 $x = -5$

(ii) $x \geq \frac{5}{3}$ 일 때,

$$|3x-5| = 3x-5 \text{이므로}$$

$$x^2 - (3x-5) - 5 = 0$$

267 ㉡ (1) 중근

- (2) 서로 다른 두 실근
- (3) 서로 다른 두 허근
- (4) 중근
- (5) 서로 다른 두 허근
- (6) 서로 다른 두 실근

각 이차방정식의 판별식을 D 라 하자.

- (1) $\frac{D}{4} = (-\sqrt{3})^2 - 1 \times 3 = 0$ 이므로 중근을 갖는다.
- (2) $D = (-5)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 37 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- (3) $\frac{D}{4} = 1^2 - (-1) \times (-7) = -6 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.
- (4) $\frac{D}{4} = 2^2 - \frac{1}{2} \times 8 = 0$ 이므로 중근을 갖는다.
- (5) $D = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 1 = -7 < 0$ 이므로 서로 다른 두 허근을 갖는다.
- (6) $D = 1^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 25 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

268 ㉡ ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

각 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0$ 이어야 한다.

- ㄱ. $D = 3^2 - 4 \times 1 \times 6 = -15 < 0$
- ㄴ. $\frac{D}{4} = 2^2 - 1 \times (-5) = 9 > 0$
- ㄷ. $D = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 17 > 0$
- ㄹ. $\frac{D}{4} = (-6)^2 - 4 \times 9 = 0$
- ㅁ. $\frac{D}{4} = 1^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-4) = -\frac{1}{3} < 0$
- ㅂ. $D = 5^2 - 4 \times \frac{3}{4} \times (-1) = 28 > 0$

따라서 보기에서 실근을 갖는 이차방정식은 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅂ이다.

269 ㉡ (1) $k < 14$ (2) $k = 14$ (3) $k > 14$

이차방정식 $x^2 + 6x + k - 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 3^2 - (k - 5) = -k + 14$$

- (1) $D > 0$ 이어야 하므로 $-k + 14 > 0 \quad \therefore k < 14$

- (2) $D = 0$ 이어야 하므로

$$-k + 14 = 0 \quad \therefore k = 14$$

- (3) $D < 0$ 이어야 하므로

$$-k + 14 < 0 \quad \therefore k > 14$$

유제

270 ㉡ (1) $k < \frac{13}{4}$ (2) $k = \frac{13}{4}$ (3) $k > \frac{13}{4}$

이차방정식 $x^2 - (2k+1)x + k^2 + 2k - 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(2k+1)\}^2 - 4(k^2 + 2k - 3) = -4k + 13$$

- (1) $D > 0$ 이어야 하므로

$$-4k + 13 > 0 \quad \therefore k < \frac{13}{4}$$

- (2) $D = 0$ 이어야 하므로

$$-4k + 13 = 0 \quad \therefore k = \frac{13}{4}$$

- (3) $D < 0$ 이어야 하므로

$$-4k + 13 < 0 \quad \therefore k > \frac{13}{4}$$

271 ㉡ 7

이차방정식 $x^2 + 2ax + a^2 + 4a - 28 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = a^2 - (a^2 + 4a - 28) \geq 0$$

$$-4a + 28 \geq 0$$

$$4a \leq 28 \quad \therefore a \leq 7$$

따라서 자연수 a 는 1, 2, 3, ..., 7의 7개이다.

272 ㉡ $-\frac{5}{4} < k < -1$ 또는 $k > -1$

$(k+1)x^2 + 2kx + k - 5 = 0$ 이 이차방정식이므로 $k+1 \neq 0 \quad \therefore k \neq -1$

이차방정식 $(k+1)x^2 + 2kx + k - 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k+1)(k-5) > 0$$

$$4k + 5 > 0$$

$$4k > -5 \quad \therefore k > -\frac{5}{4}$$

그런데 $k \neq -1$ 이므로

$$-\frac{5}{4} < k < -1 \text{ 또는 } k > -1$$

273 ㉔ -4

이차방정식 $x^2 - 2(k+4)x + k^2 + 7 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1 < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D_1}{4} = \{-(k+4)\}^2 - (k^2 + 7) < 0$$

$$8k + 9 < 0, 8k < -9 \quad \therefore k < -\frac{9}{8}$$

또 이차방정식 $x^2 + 4x + k^2 - 12 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2 = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D_2}{4} = 2^2 - (k^2 - 12) = 0$$

$$-k^2 + 16 = 0, k^2 = 16 \quad \therefore k = -4 \text{ 또는 } k = 4$$

그런데 $k < -\frac{9}{8}$ 이므로 $k = -4$

274 ㉔ $m=3, n=\frac{9}{2}$

이차방정식 $x^2 - 2(m+a)x + a^2 + 6a + 2n = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = \{-(m+a)\}^2 - (a^2 + 6a + 2n) = 0$$

$$(2m-6)a + m^2 - 2n = 0$$

이 등식이 a 에 대한 항등식이므로

$$2m-6=0, m^2-2n=0 \quad \therefore m=3, n=\frac{9}{2}$$

275 ㉔ -3, 5

주어진 이차식이 완전제곱식이면 이차방정식

$$x^2 - (k+1)x + k + 4 = 0 \text{이 중근을 갖는다.}$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이므로

$$D = \{-(k+1)\}^2 - 4(k+4) = 0$$

$$k^2 - 2k - 15 = 0, (k+3)(k-5) = 0$$

$$\therefore k = -3 \text{ 또는 } k = 5$$

276 ㉔ $x=-1$ 또는 $x=2$

$mn > 0$ 이므로

$$m > 0, n > 0 \text{ 또는 } m < 0, n < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2 - 2(k+2m)x + k^2 - 4k + n^2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = \{-(k+2m)\}^2 - (k^2 - 4k + n^2) = 0$$

$$(4m+4)k + 4m^2 - n^2 = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$4m+4=0, 4m^2-n^2=0$$

$$\therefore m=-1, n=-2 \quad (\because \textcircled{1})$$

이차방정식 $x^2 + mx + n = 0$, 즉 $x^2 - x - 2 = 0$ 에서

$$(x+1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

277 ㉔ 6

$(2k-1)x^2 + (4k-2)x + k+1$ 이 이차식이므로

$$2k-1 \neq 0 \quad \therefore k \neq \frac{1}{2}$$

이 이차식이 완전제곱식이면 이차방정식

$$(2k-1)x^2 + (4k-2)x + k+1 = 0 \text{이 중근을 갖는다.}$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1 = 0$ 이므로

$$\frac{D_1}{4} = (2k-1)^2 - (2k-1)(k+1) = 0$$

$$2k^2 - 5k + 2 = 0, (2k-1)(k-2) = 0$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 $k \neq \frac{1}{2}$ 이므로 $k = 2$

또 $x^2 + (a+k)x + 3a-3$, 즉

$x^2 + (a+2)x + 3a-3 = 0$ 도 완전제곱식이므로 이차방정식 $x^2 + (a+2)x + 3a-3 = 0$ 이 중근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2 = 0$ 이므로

$$D_2 = (a+2)^2 - 4(3a-3) = 0$$

$$a^2 - 8a + 16 = 0, (a-4)^2 = 0$$

$$\therefore a = 4$$

$$\therefore k+a = 2+4 = 6$$

연습문제

138~139쪽

278 ㉔ ③

$$x^2 + 2\sqrt{3}x - 6 = 0 \text{에서}$$

$$x = -\sqrt{3} \pm \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1 \times (-6)} = -\sqrt{3} \pm 3$$

279 ㉔ 9

주어진 이차방정식의 양변에 $3+\sqrt{2}$ 를 곱하면

$$(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})x^2 - 7(3+\sqrt{2})x$$

$$+ (3+\sqrt{2})(4\sqrt{2}+2) = 0$$

$$7x^2 - 7(3+\sqrt{2})x + 14\sqrt{2} + 14 = 0$$

$$x^2 - (3+\sqrt{2})x + 2(1+\sqrt{2}) = 0$$

$$(x-2)\{x-(1+\sqrt{2})\} = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 1+\sqrt{2}$$

따라서 $a=2, b=1, c=2$ 이므로

$$a^2 + b^2 + c^2 = 9$$

280 ㉔ 44

이차방정식 $x^2 + 8x - a = 0$ 의 한 근이 3이므로 $x=3$ 을 대입하면

$$9 + 24 - a = 0 \quad \therefore a = 33$$

이를 주어진 이차방정식에 대입하면

$$x^2 + 8x - 33 = 0, (x+11)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -11 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 $b = -11$ 이므로

$$a - b = 33 - (-11) = 44$$

281 ㉮ -1

(i) $x < -\frac{2}{3}$ 일 때,

$$|3x+2| = -(3x+2) \text{ 이므로}$$

$$x^2 - (3x+2) = 2$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0, (x+1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 4$$

그런데 $x < -\frac{2}{3}$ 이므로 $x = -1$

(ii) $x \geq -\frac{2}{3}$ 일 때,

$$|3x+2| = 3x+2 \text{ 이므로}$$

$$x^2 + 3x + 2 = 2$$

$$x^2 + 3x = 0, x(x+3) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 0$$

그런데 $x \geq -\frac{2}{3}$ 이므로 $x = 0$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 0$$

따라서 모든 근의 합은 $-1+0 = -1$

282 ㉮ 3

이차방정식 $x^2 - 5x + a + 4 = 0$ 이 실근을 갖지 않으려면 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

즉, 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$D = (-5)^2 - 4(a+4) < 0$$

$$-4a + 9 < 0, 4a > 9 \quad \therefore a > \frac{9}{4}$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 3이다.

283 ㉮ -5

주어진 이차식이 완전제곱식이면 이차방정식

$$x^2 - (2a+6)x + a+9 = 0 \text{이 중근을 갖는다.}$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = \{-(a+3)\}^2 - (a+9) = 0$$

$$a^2 + 5a = 0, a(a+5) = 0 \quad \therefore a = -5 \text{ 또는 } a = 0$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 $-5+0 = -5$

284 ㉮ 48

$$(x * x) - (2x * 6) = 0 \text{에서}$$

$$(x+x) + x^2 - \{(2x+6) + 12x\} = 0$$

$$x^2 - 12x - 6 = 0$$

$$\therefore x = -(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 1 \times (-6)} = 6 \pm \sqrt{42}$$

따라서 $p = 6, q = 42$ 이므로

$$p+q = 48$$

285 ㉮ ①

이차방정식 $2x^2 - 2x + 1 = 0$ 의 한 근이 α 이므로

$x = \alpha$ 를 대입하면

$$2\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \quad \therefore \alpha^2 = \alpha - \frac{1}{2}$$

양변을 제곱하면

$$\alpha^4 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 = \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{4}$$

$$\therefore \alpha^4 - \alpha^2 + \alpha = \frac{1}{4}$$

286 ㉮ 12

$$x^2 - 5 + \sqrt{x^2} = |x-3| \text{에서}$$

$$x^2 - 5 + |x| = |x-3|$$

(i) $x < 0$ 일 때,

$$|x| = -x, |x-3| = -(x-3) \text{이므로}$$

$$x^2 - 5 - x = -(x-3)$$

$$x^2 = 8 \quad \therefore x = -2\sqrt{2} \text{ 또는 } x = 2\sqrt{2}$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -2\sqrt{2}$

(ii) $0 \leq x < 3$ 일 때,

$$|x| = x, |x-3| = -(x-3) \text{이므로}$$

$$x^2 - 5 + x = -(x-3)$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0, (x+4)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $0 \leq x < 3$ 이므로 $x = 2$

(iii) $x \geq 3$ 일 때,

$$|x| = x, |x-3| = x-3 \text{이므로}$$

$$x^2 - 5 + x = x-3$$

$$x^2 = 2 \quad \therefore x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$

그런데 $x \geq 3$ 이므로 해는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -2\sqrt{2} \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 $\alpha = -2\sqrt{2}, \beta = 2$ 또는 $\alpha = 2, \beta = -2\sqrt{2}$ 이

므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = 8 + 4 = 12$$

287 ㉡ 15 cm

처음 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 새로 만들어진 직사각형의 가로 길이는 $(x-5)$ cm, 세로의 길이는 $(x+3)$ cm이므로 직사각형의 넓이는

$$(x-5)(x+3) = \frac{4}{5}x^2$$

$$x^2 - 2x - 15 = \frac{4}{5}x^2$$

$$x^2 - 10x - 75 = 0, (x+5)(x-15) = 0$$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 15$$

그런데 가로의 길이에서 $x > 5$ 이므로

$$x = 15$$

따라서 처음 정사각형의 한 변의 길이는 15 cm이다.

288 ㉡ ②

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}} \text{ 에서 } a > 0, b < 0$$

ㄱ. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 4b > 0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. 이차방정식 $-x^2 + ax + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 + 4b$$

$a^2 + 4b$ 의 값의 부호는 알 수 없으므로 이 이차방정식의 근은 판별할 수 없다.

ㄷ. 이차방정식 $ax^2 + x - b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1 + 4ab$$

$1 + 4ab$ 의 값의 부호는 알 수 없으므로 이 이차방정식의 근은 판별할 수 없다.

ㄹ. 이차방정식 $bx^2 + 2ax - b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 + b^2 > 0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 보기에서 항상 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄹ이다.

289 ㉡ 9

이차방정식 $kx^2 + 2(a+3)x + a+1 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1 = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D_1}{4} = (a+3)^2 - k(a+1) = 0$$

$$a^2 + (6-k)a + 9 - k = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \gggggg \textcircled{1}$$

주어진 이차방정식이 중근을 갖도록 하는 실수 a 가 오직 하나뿐이므로 $\textcircled{1}$ 은 중근을 갖는다.

$\textcircled{1}$ 의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2 = 0$ 이므로

$$D_2 = (6-k)^2 - 4(9-k) = 0$$

$$k^2 - 8k = 0, k(k-8) = 0$$

$$\therefore k = 8 \quad (\because k \neq 0) \quad \gggggg \textcircled{2}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a^2 - 2a + 1 = 0$

$$(a-1)^2 = 0 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore k + a = 8 + 1 = 9 \quad \gggggg \textcircled{3}$$

단계	채점 기준	비율
①	a 에 대한 이차방정식 구하기	30%
②	k 의 값 구하기	40%
③	$k+a$ 의 값 구하기	30%

290 ㉡ ①

| 접근 방법 | 실수 m 의 값에 관계없이 성립하는 등식은 m 에 대한 항등식임을 이용한다.

이차방정식 $x^2 - 2(m+a)x + m^2 + m + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이므로

$$\frac{D}{4} = \{-(m+a)\}^2 - (m^2 + m + b) = 0$$

$$(2a-1)m + a^2 - b = 0$$

이 등식이 m 에 대한 항등식이므로

$$2a-1=0, a^2-b=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{4}$$

$$\therefore 12(a+b) = 9$$

291 ㉡ ②

| 접근 방법 | 이차식이 완전제곱식이면 (이차식)=0이 중근을 가짐을 이용한다.

주어진 두 이차식이 완전제곱식이면 두 이차방정식

$$(a-b)x^2 + 2cx + a+b = 0,$$

$$x^2 + 2(a+c)x + (a+b)^2 = 0 \text{ 이 각각 중근을 갖는다.}$$

이차방정식 $(a-b)x^2 + 2cx + a+b = 0$ 의 판별식을

D_1 이라 하면 $D_1 = 0$ 이므로

$$\frac{D_1}{4} = c^2 - (a-b)(a+b) = 0$$

$$c^2 - a^2 + b^2 = 0 \quad \therefore b^2 + c^2 = a^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2 + 2(a+c)x + (a+b)^2 = 0$ 의 판별식을

D_2 라 하면 $D_2 = 0$ 이므로

$$\frac{D_2}{4} = (a+c)^2 - (a+b)^2 = 0$$

$$2ac + c^2 - 2ab - b^2 = 0$$

$$2a(c-b) + (c-b)(c+b) = 0$$

$$(c-b)(2a+c+b) = 0$$

이때 a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$$2a+c+b > 0$$

$$\text{즉, } c-b=0 \text{에서 } b=c \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{C}$ 에서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 $b=c$ 이고 빗변의 길이가 a 인 직각이등변삼각형이다.

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}b^2$$

II-2. 이차방정식

02 이차방정식의 근과 계수의 관계

개념 확인

143쪽

$$292 \text{ ㉠ (1) } -2, 2 \text{ (2) } \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$$

$$293 \text{ ㉠ (1) } -4 \text{ (2) } -6 \text{ (3) } 2\sqrt{10}$$

$$(4) -9 \text{ (5) } \frac{2}{3} \text{ (6) } 28$$

$$(4) (\alpha+1)(\beta+1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 \\ = -6 + (-4) + 1 = -9$$

$$(5) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$(6) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta \\ = (-4)^2 - 2 \times (-6) = 28$$

$$294 \text{ ㉠ (1) } x^2 - x - 6 = 0 \text{ (2) } x^2 + 11x + 30 = 0$$

$$(3) x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ (4) } x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$295 \text{ ㉠ (1) } \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$(2) (x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})$$

$$(3) (x+1+\sqrt{2}i)(x+1-\sqrt{2}i)$$

$$(4) (x+4i)(x-4i)$$

$$(1) \text{ 이차방정식 } x^2 - x - 1 = 0 \text{의 해는 } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{이}$$

므로

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$(2) \text{ 이차방정식 } x^2 - 4x + 2 = 0 \text{의 해는 } x = 2 \pm \sqrt{2} \text{이}$$

므로

$$x^2 - 4x + 2 = (x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})$$

$$(3) \text{ 이차방정식 } x^2 + 2x + 3 = 0 \text{의 해는}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{2}i \text{이므로}$$

$$x^2 + 2x + 3 = (x+1+\sqrt{2}i)(x+1-\sqrt{2}i)$$

$$(4) \text{ 이차방정식 } x^2 + 16 = 0 \text{의 해는 } x = \pm 4i \text{이므로}$$

$$x^2 + 16 = (x+4i)(x-4i)$$

$$296 \text{ ㉠ (1) } -\sqrt{3}-1 \text{ (2) } 2-4i$$

유제

145~153쪽

$$297 \text{ ㉠ (1) } 20 \text{ (2) } -76 \text{ (3) } 44$$

이차방정식 $x^2 - 4x - 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = -1$$

$$(1) (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ = 4^2 - 4 \times (-1) = 20$$

$$(2) \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} \\ = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} \\ = \frac{4^3 - 3 \times (-1) \times 4}{-1} = -76$$

$$(3) \alpha, \beta \text{가 이차방정식 } x^2 - 4x - 1 = 0 \text{의 두 근이므로}$$

$$\alpha^2 - 4\alpha - 1 = 0, \beta^2 - 4\beta - 1 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 = 4\alpha + 1, \beta^2 = 4\beta + 1$$

$$\therefore (2\alpha^2 - 7\alpha + 3)(2\beta^2 - 7\beta + 3) \\ = (8\alpha + 2 - 7\alpha + 3)(8\beta + 2 - 7\beta + 3) \\ = (\alpha + 5)(\beta + 5) \\ = \alpha\beta + 5(\alpha + \beta) + 25 \\ = -1 + 5 \times 4 + 25 = 44$$

$$298 \text{ ㉠ } \sqrt{13}$$

이차방정식 $x^2 - 7x + 9 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 7, \alpha\beta = 9$$

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-7)^2 - 4 \times 9 = 13 > 0$$

이므로 α, β 는 모두 실수이다.

$$\text{또 } \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0 \text{이므로}$$

$$\alpha > 0, \beta > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$\therefore (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \\ = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \quad (\because \textcircled{A}) \\ = 7 + 2 \times 3 = 13$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} > 0 \text{이므로 } \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{13}$$

299 ㉓ ③

α, β 가 이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2+2\alpha+3=0, \beta^2+2\beta+3=0$$

$$\therefore \alpha^2=-2\alpha-3, \beta^2=-2\beta-3$$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=3$ 이므로

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha^2+3\alpha+3} + \frac{1}{\beta^2+3\beta+3} \\ &= \frac{1}{-2\alpha-3+3\alpha+3} + \frac{1}{-2\beta-3+3\beta+3} \\ &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

300 ㉓ 30

α 는 이차방정식 $x^2+6x+3=0$ 의 한 근이므로

$$\alpha^2+6\alpha+3=0$$

$$\therefore \alpha^2=-6\alpha-3$$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-6, \alpha\beta=3$ 이므로

$$\begin{aligned} (\alpha^2-9)(\beta+2) &= (-6\alpha-3-9)(\beta+2) \\ &= (-6\alpha-12)(\beta+2) \\ &= -6(\alpha+2)(\beta+2) \\ &= -6\{\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4\} \\ &= -6 \times \{3+2 \times (-6)+4\} \\ &= 30 \end{aligned}$$

301 ㉓ 5

이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 두 근이 $-2, 4$ 이므로
근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+4=a, -2 \times 4=b$$

$$\therefore a=2, b=-8$$

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+a-b=0$, 즉

$$2x^2-8x+10=0$$
의 두 근의 곱은

$$\frac{10}{2}=5$$

302 ㉓ $a=-8, b=-24$

이차방정식 $x^2+ax-3=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-a, \alpha\beta=-3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2-5x+b=0$ 의 두 근이 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\alpha\beta=5, \alpha\beta(\alpha+\beta)=b$$

①을 각각 대입하면

$$-a-3=5, (-3) \times (-a)=b$$

$$\therefore a=-8, b=-24$$

303 ㉓ 28

이차방정식 $x^2-10x+a=0$ 의 두 근이 α, β 이므로
근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$\alpha+\beta=10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2+4x+b=0$ 의 두 근이 α, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$\alpha+\gamma=-4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①+②을 하면

$$2\alpha+\beta+\gamma=6$$

이때 $\alpha=\beta+\gamma$ 이므로

$$3\alpha=6 \quad \therefore \alpha=2$$

$\alpha=2$ 를 ①에 대입하면

$$\beta=8$$

$$\therefore a=\alpha\beta=2 \times 8=16$$

$\alpha=2$ 를 ②에 대입하면

$$\gamma=-6$$

$$\therefore b=\alpha\gamma=2 \times (-6)=-12$$

$$\therefore a-b=16-(-12)=28$$

304 ㉓ -2

a 를 잘못 보고 풀었을 때 b 는 바르게 보고 풀었으므로
두 근의 곱은

$$-1 \times 3 = \frac{b}{2} \quad \therefore b=-6$$

b 를 잘못 보고 풀었을 때 a 는 바르게 보고 풀었으므로
두 근의 합은

$$-4+2 = -\frac{a}{2} \quad \therefore a=4$$

$$\therefore a+b=4+(-6)=-2$$

305 ㉓ -3, 4

주어진 이차방정식의 두 근을 $3\alpha, 4\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라 하면
근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$3\alpha+4\alpha=2k-1$$

$$\therefore \alpha = \frac{2k-1}{7} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 근의 곱은 $3\alpha \times 4\alpha = k^2 - k$

①을 대입하면

$$\frac{3(2k-1)}{7} \times \frac{4(2k-1)}{7} = k^2 - k$$

$$12(4k^2-4k+1) = 49k^2-49k$$

$$k^2-k-12=0, (k+3)(k-4)=0$$

$$\therefore k=-3 \text{ 또는 } k=4$$

306 ㉡ -3

주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, \alpha + \frac{7}{2}$ 이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$\alpha + \left(\alpha + \frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2} \quad \therefore \alpha = -\frac{1}{2}$$

두 근의 곱은 $\alpha\left(\alpha + \frac{7}{2}\right) = \frac{a}{2}$

$\alpha = -\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$-\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{7}{2}\right) = \frac{a}{2}$$

$$\therefore a = -3$$

|다른 풀이|

이차방정식 $2x^2 - 5x + a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2}, \alpha\beta = \frac{a}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 근의 차가 $\frac{7}{2}$ 이므로 $|\alpha - \beta| = \frac{7}{2}$

양변을 제곱하면 $(\alpha - \beta)^2 = \frac{49}{4}$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{49}{4}, \frac{25}{4} - 2a = \frac{49}{4} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$2a = -6 \quad \therefore a = -3$$

307 ㉡ 1

주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha, \alpha + 1$ 이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$\alpha + (\alpha + 1) = -2k - 3$$

$$\therefore k = -\alpha - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 근의 곱은 $\alpha(\alpha + 1) = 4k + 22$

①을 대입하면 $\alpha^2 + \alpha = -4\alpha - 8 + 22$

$$\alpha^2 + 5\alpha - 14 = 0, (\alpha + 7)(\alpha - 2) = 0$$

$$\therefore \alpha = -7 \text{ 또는 } \alpha = 2$$

이를 ①에 대입하면

$$\alpha = -7 \text{ 일 때 } k = 5, \alpha = 2 \text{ 일 때 } k = -4$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은

$$5 + (-4) = 1$$

308 ㉡ 5

주어진 이차방정식의 두 실근을 $\alpha, -\alpha (\alpha \neq 0)$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$\alpha + (-\alpha) = -(a^2 - 4a - 5)$$

$$a^2 - 4a - 5 = 0, (a + 1)(a - 5) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 5$$

이때 두 근의 곱은 $-a + 3$ 이고, 두 실근의 부호가 서로 다르면 두 근의 곱이 음수이므로 $-a + 3 < 0$ 에서 $a > 3 \quad \therefore a = 5$

309 ㉡ $4x^2 - 28x + 25 = 0$

이차방정식 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = -5$

두 근 $\frac{\alpha^2}{2}, \frac{\beta^2}{2}$ 의 합과 곱은 각각

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2} &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{2} \\ &= \frac{(-2)^2 - 2 \times (-5)}{2} = 7 \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha^2}{2} \times \frac{\beta^2}{2} = \left(\frac{\alpha\beta}{2}\right)^2 = \left(\frac{-5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

따라서 $\frac{\alpha^2}{2}, \frac{\beta^2}{2}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 4인

이차방정식은

$$4\left(x^2 - 7x + \frac{25}{4}\right) = 0 \quad \therefore 4x^2 - 28x + 25 = 0$$

310 ㉡ 28

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0, \alpha + \beta = 16$$

이차방정식 $f(120 - 8x) = 0$ 의 두 근을 구하면

$$120 - 8x = \alpha \text{ 또는 } 120 - 8x = \beta$$

$$\therefore x = \frac{120 - \alpha}{8} \text{ 또는 } x = \frac{120 - \beta}{8}$$

따라서 이차방정식 $f(120 - 8x) = 0$ 의 두 근의 합은

$$\begin{aligned} \frac{120 - \alpha}{8} + \frac{120 - \beta}{8} &= \frac{240 - (\alpha + \beta)}{8} \\ &= \frac{240 - 16}{8} = 28 \end{aligned}$$

311 ㉡ 7

이차방정식 $x^2 - 3x - 2 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = -2$

두 근 $\frac{\alpha+1}{\beta}, \frac{\beta+1}{\alpha}$ 의 합과 곱은 각각

$$\begin{aligned} \frac{\alpha+1}{\beta} + \frac{\beta+1}{\alpha} &= \frac{\alpha^2 + \alpha + \beta^2 + \beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + (\alpha + \beta)}{\alpha\beta} \\ &= \frac{3^2 - 2 \times (-2) + 3}{-2} = -8 \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha+1}{\beta} \times \frac{\beta+1}{\alpha} = \frac{\alpha\beta + (\alpha+\beta) + 1}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{-2+3+1}{-2} = -1$$

따라서 $\frac{\alpha+1}{\beta}$, $\frac{\beta+1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가

1인 이차방정식은

$$x^2 + 8x - 1 = 0$$

따라서 $a=8$, $b=-1$ 이므로

$$a+b=7$$

312 ㉡ 4

이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 α , β 이므로

$$f(\alpha)=0, f(\beta)=0$$

이차방정식 $f(5x-2)=0$ 의 두 근을 구하면

$$5x-2=\alpha \text{ 또는 } 5x-2=\beta$$

$$\therefore x = \frac{\alpha+2}{5} \text{ 또는 } x = \frac{\beta+2}{5}$$

따라서 이차방정식 $f(5x-2)=0$ 의 두 근의 합은

$$a = \frac{\alpha+2}{5} + \frac{\beta+2}{5} = \frac{(\alpha+\beta)+4}{5} = \frac{6+4}{5} = 2$$

두 근의 곱은

$$b = \frac{\alpha+2}{5} \times \frac{\beta+2}{5} = \frac{\alpha\beta + 2(\alpha+\beta) + 4}{25}$$

$$= \frac{34 + 2 \times 6 + 4}{25} = 2$$

$$\therefore ab = 2 \times 2 = 4$$

313 ㉡ (1) $a=2$, $b=-4$ (2) $a=14$, $b=50$

(1) 주어진 이차방정식의 계수가 유리수이므로 $1+\sqrt{5}$ 가 근이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{5}$ 이다.

이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1+\sqrt{5}) + (1-\sqrt{5}) = a, (1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5}) = b$$

$$\therefore a=2, b=-4$$

(2) 주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $7-i$ 가 근이면 다른 한 근은 $7+i$ 이다.

이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(7-i) + (7+i) = a, (7-i)(7+i) = b$$

$$\therefore a=14, b=50$$

314 ㉡ 4

주어진 이차방정식의 계수가 유리수이므로 $2+b\sqrt{2}$ 가 근이면 다른 한 근은 $2-b\sqrt{2}$ 이다.

이차방정식 $x^2 + ax - 2b = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$(2+b\sqrt{2}) + (2-b\sqrt{2}) = -a \quad \therefore a = -4$$

두 근의 곱은

$$(2+b\sqrt{2})(2-b\sqrt{2}) = -2b$$

$$4 - 2b^2 = -2b$$

$$2b^2 - 2b - 4 = 0, b^2 - b - 2 = 0$$

$$(b+1)(b-2) = 0 \quad \therefore b = -1 \text{ 또는 } b = 2$$

그런데 $b < 0$ 이므로 $b = -1$

$$\therefore ab = -4 \times (-1) = 4$$

315 ㉡ ③

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $\frac{b}{2} + i$ 가 근

이면 다른 한 근은 $\frac{b}{2} - i$ 이다.

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$\left(\frac{b}{2} + i\right) + \left(\frac{b}{2} - i\right) = -a$$

$$\therefore b = -a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 근의 곱은

$$\left(\frac{b}{2} + i\right)\left(\frac{b}{2} - i\right) = b$$

$$\frac{b^2}{4} + 1 = b, b^2 - 4b + 4 = 0$$

$$(b-2)^2 = 0 \quad \therefore b = 2$$

따라서 ①에서 $a = -2$

$$\therefore ab = -4$$

316 ㉡ $\frac{3}{2}$

$$\frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ 가

근이면 다른 한 근은 $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ 이다.

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) = -a,$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right) = b$$

$$\therefore a = -1, b = \frac{5}{2}$$

$$\therefore a+b = \frac{3}{2}$$

317 ㉔ ④

이차방정식 $x^2-5x+8=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=5, \alpha\beta=8$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} (\alpha-1)(\beta-1) &= \alpha\beta - (\alpha+\beta) + 1 \\ &= 8-5+1=4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 &= \alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= 8 \times 5 = 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta \\ &= 5^2 - 3 \times 8 = 1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{5}{8}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

318 ㉔ -20

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 1, 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$1+4=-a, 1 \times 4=b$$

$$\therefore a=-5, b=4$$

따라서 이차방정식 $(a+b)x^2+ax-ab=0$, 즉 $-x^2-5x+20=0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{20}{-1} = -20$$

319 ㉔ $\frac{9}{2}$

이차방정식 $x^2+6x+a=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-6, \alpha\beta=a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2+3bx+2=0$ 의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -3b, \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = 2$$

$$\therefore \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = -3b, \frac{1}{\alpha\beta} = 2$$

①을 각각 대입하면

$$\frac{-6}{a} = -3b, \frac{1}{a} = 2$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = 4$$

$$\therefore a+b = \frac{9}{2}$$

320 ㉔ ④

이차방정식 $x^2+2x+k=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=k$$

이때 $\alpha^2+\beta^2=8$ 이므로

$$(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 8$$

$$(-2)^2 - 2k = 8$$

$$2k = -4 \quad \therefore k = -2$$

321 ㉔ ②

이차방정식 $x^2-4x-3=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4, \alpha\beta=-3$$

두 근 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 의 합과 곱은 각각

$$(\alpha+\beta) + \alpha\beta = 4-3=1$$

$$(\alpha+\beta) \times \alpha\beta = 4 \times (-3) = -12$$

따라서 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은 $x^2-x-12=0$

322 ㉔ ②

이차방정식 $9x^2-6x+4=0$ 의 해는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} 9x^2-6x+4 &= 9\left(x - \frac{1-\sqrt{3}i}{3}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{3}i}{3}\right) \\ &= \{3x - (1-\sqrt{3}i)\}\{3x - (1+\sqrt{3}i)\} \\ &= (3x-1+\sqrt{3}i)(3x-1-\sqrt{3}i) \end{aligned}$$

따라서 주어진 이차식의 인수인 것은 ②이다.

323 ㉔ 36

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $2-i$ 가 근이면 다른 한 근은 $2+i$ 이다.

이차방정식 $x^2-(a+b)x-ab=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(2-i) + (2+i) = a+b, (2-i)(2+i) = -ab$$

$$\therefore a+b=4, ab=-5$$

$$\therefore (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 4^2 - 4 \times (-5) = 36$$

324 ㉔ 6

α, β 가 이차방정식 $x^2+4x-6=0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2+4\alpha-6=0, \beta^2+4\beta-6=0$$

$$\therefore \alpha^2 = -4\alpha+6, \beta^2 = -4\beta+6$$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -4$, $\alpha\beta = -6$ 이므로

$$\begin{aligned} & (\alpha^2 + 3\alpha - 4)(2\beta^2 + 7\beta - 10) \\ &= (-4\alpha + 6 + 3\alpha - 4)(-8\beta + 12 + 7\beta - 10) \\ &= (-\alpha + 2)(-\beta + 2) \\ &= \alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4 \\ &= -6 - 2 \times (-4) + 4 = 6 \end{aligned}$$

325 ㉡ ④

이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이 α , β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2 - 4(a+2)x + b + 2 = 0$ 의 두 근이

α^2 , β^2 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= 4a + 8, \alpha^2\beta^2 = b + 2 \\ \therefore (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta &= 4a + 8, (\alpha\beta)^2 = b + 2 \end{aligned}$$

①을 각각 대입하면

$$\alpha^2 - 2b = 4a + 8, b^2 = b + 2$$

$$b^2 = b + 2 \text{에서 } b^2 - b - 2 = 0$$

$$(b+1)(b-2) = 0 \quad \therefore b = -1 \text{ 또는 } b = 2$$

그런데 $b > 0$ 이므로 $b = 2$

$$\alpha^2 - 2b = 4a + 8, \text{ 즉 } \alpha^2 - 4a - 12 = 0 \text{에서}$$

$$(a+2)(a-6) = 0 \quad \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 6$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 6$

따라서 ①에서 $\alpha + \beta = 6$, $\alpha\beta = 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \\ &= 6^3 - 3 \times 2 \times 6 = 180 \end{aligned}$$

326 ㉡ 6

이차방정식 $x^2 - 3x + k = 0$ 의 두 근이 α , β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 α , β 가 이차방정식 $x^2 - 3x + k = 0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2 - 3\alpha + k = 0, \beta^2 - 3\beta + k = 0$$

$$\therefore \alpha^2 = 3\alpha - k, \beta^2 = 3\beta - k$$

이를 주어진 등식에 대입하면

$$\frac{1}{3\alpha - k - \alpha + k} + \frac{1}{3\beta - k - \beta + k} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{4} \quad \therefore \frac{\alpha + \beta}{2\alpha\beta} = \frac{1}{4}$$

①을 대입하면

$$\frac{3}{2k} = \frac{1}{4}, 2k = 12 \quad \therefore k = 6$$

327 ㉡ ①

한 근이 다른 한 근의 3배보다 1만큼 크고, 두 근 중 작은 근이 α 이므로 다른 한 근은 $3\alpha + 1$ 이다.

이차방정식 $x^2 + px - 2p + 4 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$\alpha + (3\alpha + 1) = -p \quad \therefore p = -4\alpha - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 근의 곱은 $\alpha(3\alpha + 1) = -2p + 4$

$$\textcircled{1} \text{을 대입하면 } 3\alpha^2 + \alpha = -2(-4\alpha - 1) + 4$$

$$3\alpha^2 - 7\alpha - 6 = 0, (3\alpha + 2)(\alpha - 3) = 0$$

$$\therefore \alpha = -\frac{2}{3} \text{ 또는 } \alpha = 3$$

그런데 $\alpha > 0$ 이므로 $\alpha = 3$

이를 ①에 대입하면 $p = -13$

$$\therefore \alpha + p = -10$$

328 ㉡ ③

▶ 접근 방법 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 두 근의 부호를 먼저 확인한 후 두 근을 한 문자를 사용하여 나타내고, 식을 세워서 두 근을 구한다.

이차방정식 $2ax^2 - 2(a+1)x - 5a = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $\frac{-5a}{2a} = -\frac{5}{2} < 0$

이므로 두 실근의 부호는 서로 다르다.

이때 두 실근의 절댓값의 비가 $5:2$ 이므로 두 실근을 5α , -2α ($\alpha \neq 0$)라 하면 두 근의 곱은

$$5\alpha \times (-2\alpha) = -\frac{5}{2}$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore \alpha = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \alpha = \frac{1}{2}$$

(i) $\alpha = -\frac{1}{2}$ 일 때,

두 실근은 $-\frac{5}{2}$, 1 이므로 두 근의 합은

$$-\frac{5}{2} + 1 = -\frac{-2(a+1)}{2a}$$

$$-\frac{3}{2} = \frac{a+1}{a}$$

$$-3a = 2a + 2, -5a = 2 \quad \therefore a = -\frac{2}{5}$$

(ii) $\alpha = \frac{1}{2}$ 일 때,

두 실근은 $\frac{5}{2}$, -1 이므로 두 근의 합은

$$\frac{5}{2} + (-1) = -\frac{-2(a+1)}{2a}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{a+1}{a}$$

$$3a = 2a + 2 \quad \therefore a = 2$$

(i), (ii)에서 $a = -\frac{2}{5}$ 또는 $a=2$ 이므로 구하는 합은

$$-\frac{2}{5} + 2 = \frac{8}{5}$$

329 ㉡ 4

이차방정식 $f(2x)=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$f(2\alpha)=0, f(2\beta)=0, \alpha+\beta=10, \alpha\beta=5$$

이차방정식 $f(4x-2)=0$ 의 두 근을 구하면

$$4x-2=2\alpha \text{ 또는 } 4x-2=2\beta$$

$$\therefore x = \frac{\alpha+1}{2} \text{ 또는 } x = \frac{\beta+1}{2}$$

따라서 이차방정식 $f(4x-2)=0$ 의 두 근의 곱은

$$\begin{aligned} \frac{\alpha+1}{2} \times \frac{\beta+1}{2} &= \frac{\alpha\beta + (\alpha+\beta) + 1}{4} \\ &= \frac{5+10+1}{4} = 4 \end{aligned}$$

330 ㉡ 47

$$\frac{1}{4-\sqrt{15}} = \frac{4+\sqrt{15}}{(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})} = 4+\sqrt{15}$$

주어진 이차방정식의 계수가 유리수이므로 $4+\sqrt{15}$ 가 근이면 다른 한 근은 $4-\sqrt{15}$ 이다.

이차방정식 $x^2-mx+n=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(4+\sqrt{15}) + (4-\sqrt{15}) = m,$$

$$(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15}) = n$$

$$\therefore m=8, n=1$$

$$\therefore m+n=9, m-n=7$$

즉, $m+n, m-n$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2-(9+7)x+9 \times 7=0$$

$$\therefore x^2-16x+63=0$$

따라서 $a=-16, b=63$ 이므로

$$a+b=47$$

331 ㉡ (1) -4 (2) 5 (3) $2 \pm i$

(1) 이차방정식의 계수가 실수이므로 $2-3i$ 가 근이면 다른 한 근은 $2+3i$ 이다.

b 를 잘못 보고 풀었을 때 a 는 바르게 보고 풀었으므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$(2-3i) + (2+3i) = -a$$

$$\therefore a = -4$$

▶▶▶▶▶ ①

(2) 이차방정식의 계수가 실수이므로 $1+2i$ 가 근이면 다른 한 근은 $1-2i$ 이다.

a 를 잘못 보고 풀었을 때 b 는 바르게 보고 풀었으므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$$(1+2i)(1-2i)=b$$

$$\therefore b=5$$

▶▶▶▶▶ ②

(3) 주어진 이차방정식은 $x^2-4x+5=0$ 이므로

$$x = -(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \times 5} = 2 \pm i \quad \text{▶▶▶▶▶ ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	a 의 값 구하기	40%
②	b 의 값 구하기	40%
③	올바른 근 구하기	20%

332 ㉡ 120

|접근 방법| $|\alpha-\beta|$ 를 a, b 에 대한 식으로 나타낸 후 a 에 1, 2, 3, ...을 차례대로 대입하여 부등식을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구한다.

이차방정식 $x^2+2ax-b=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2a, \alpha\beta=-b$$

$$\begin{aligned} \therefore |\alpha-\beta| &= \sqrt{(\alpha-\beta)^2} \\ &= \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{(-2a)^2 - 4 \times (-b)} = \sqrt{4a^2 + 4b} \\ &= 2\sqrt{a^2 + b} \end{aligned}$$

이때 $|\alpha-\beta| < 12$ 에서 $2\sqrt{a^2+b} < 12$ 이므로

$$\sqrt{a^2+b} < 6 \quad \therefore a^2+b < 36 \quad (\because a, b \text{는 자연수})$$

(i) $a=1$ 일 때, $b < 35$ 이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 34이다. (1, 1), (1, 2), ..., (1, 34)

(ii) $a=2$ 일 때, $b < 32$ 이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 31이다. (2, 1), (2, 2), ..., (2, 31)

(iii) $a=3$ 일 때, $b < 27$ 이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 26이다. (3, 1), (3, 2), ..., (3, 26)

(iv) $a=4$ 일 때, $b < 20$ 이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 19이다. (4, 1), (4, 2), ..., (4, 19)

(v) $a=5$ 일 때, $b < 11$ 이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 10이다. (5, 1), (5, 2), ..., (5, 10)

(vi) $a \geq 6$ 일 때, 자연수 b 는 존재하지 않는다.

(i)~(vi)에서 모든 순서쌍 (a, b) 의 개수는

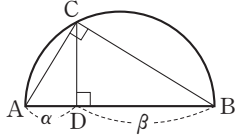
$$34+31+26+19+10=120$$

▶ **접근 방법** ▶ 삼각형 ABC에서 $\angle C$ 는 지름에 대한 원주각이므로 $\angle C=90^\circ$ 이다. 따라서 두 직각삼각형 ADC와 CDB가 서로 닮음임을 이용하여 식을 세운다.

이차방정식 $x^2-8x+4=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=8, \alpha\beta=4$$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ 를 그으면 $\angle ACB$ 는 지름에 대한 원주각이므로 삼각형 ABC는



$\angle ACB=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

즉, $\triangle ADC$ 와 $\triangle CDB$ 는 서로 닮음이므로

$$\overline{AD}:\overline{CD}=\overline{CD}:\overline{BD}$$

$$\overline{CD}^2=\overline{AD}\times\overline{BD}=\alpha\beta=4$$

$$\therefore \overline{CD}=2 \quad (\because \overline{CD}>0)$$

또 점 D는 선분 AB 위의 점이므로

$$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{BD}=\alpha+\beta=8$$

따라서 $\frac{1}{\overline{AB}}, \frac{1}{\overline{CD}}$, 즉 $\frac{1}{8}, \frac{1}{2}$ 을 두 근으로 하고 x^2

의 계수가 16인 이차방정식은

$$16\left\{x^2-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}\right\}=0$$

$$\therefore 16x^2-10x+1=0$$

따라서 $a=-10, b=1$ 이므로 $ab=-10$

334 ㉔ 41

▶ **접근 방법** ▶ 나머지 정리와 켈레근의 성질을 이용하여 p, q 에 대한 식을 세운다.

(가)에서 나머지 정리에 의하여 $f(1)=2$

$$\text{즉, } 1+p+q=2 \text{에서 } p+q=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(나)에서 이차방정식의 계수가 실수이므로 $a+i$ 가 근이면 다른 한 근은 $a-i$ 이다.

이차방정식 $x^2+px+q=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a+i)+(a-i)=-p, (a+i)(a-i)=q$$

$$\therefore p=-2a, q=a^2+1$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-2a+a^2+1=1$$

$$a^2-2a=0, a(a-2)=0$$

$$\therefore a=2 \quad (\because a \neq 0)$$

따라서 $p=-4, q=5$ 이므로 $p^2+q^2=41$

01 이차방정식과 이차함수의 관계

개념 확인

161쪽

335 ㉔ (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다(접한다).

(3) 만나지 않는다.

(1) 이차방정식 $-x^2+3x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=9+16=25>0$$

따라서 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 이차방정식 $x^2-2x+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=1-1=0$$

따라서 x 축과 한 점에서 만난다(접한다).

(3) 이차방정식 $x^2+4x+8=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4-8=-4<0$$

따라서 x 축과 만나지 않는다.

336 ㉔ (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다(접한다).

(3) 만나지 않는다.

(1) $x^2+2x-4=x$ 에서 $x^2+x-4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=1+16=17>0$$

따라서 직선과 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $x^2+2x-4=-2x-8$ 에서 $x^2+4x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4-4=0$$

따라서 직선과 한 점에서 만난다(접한다).

(3) $x^2+2x-4=-x-7$ 에서 $x^2+3x+3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=9-12=-3<0$$

따라서 직선과 만나지 않는다.

유제

163~169쪽

337 ㉔ $a=5, b=-4$

이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-4, -1$

이므로 $-4, -1$ 은 이차방정식 $-x^2-ax+b=0$, 즉 $x^2+ax-b=0$ 의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$-4 + (-1) = -a, \quad -4 \times (-1) = -b$$

$$\therefore a=5, b=-4$$

338 ㉡ -4, 16

이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표를 α, β 라 하면 α, β 는 이차방정식 $x^2 - kx + 3k + 9 = 0$ 의 두 근
이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = k, \quad \alpha\beta = 3k + 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{7}$ 이므로

$$|\alpha - \beta| = 2\sqrt{7}$$

양변을 제곱하면 $(\alpha - \beta)^2 = 28$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 28$$

$$\textcircled{1} \text{을 대입하면 } k^2 - 4(3k + 9) = 28$$

$$k^2 - 12k - 64 = 0, \quad (k + 4)(k - 16) = 0$$

$$\therefore k = -4 \text{ 또는 } k = 16$$

339 ㉡ (-3, 0), (1, 0)

이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-6, 3$ 이므로 $-6, 3$ 은 이차방정식 $-x^2 + ax + b = 0$, 즉 $x^2 - ax - b = 0$ 의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$-6 + 3 = a, \quad -6 \times 3 = -b$$

$$\therefore a = -3, b = 18$$

이때 이차함수 $y = x^2 + \frac{b}{9}x + a$ 의 그래프와 x 축의 교

점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 + \frac{b}{9}x + a = 0$, 즉

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \text{의 두 근이므로}$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0 \quad \therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 구하는 두 점의 좌표는 $(-3, 0), (1, 0)$ 이다.

340 ㉡ -3

이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $a, 2b$ 이므로 $a, 2b$ 는 이차방정식 $-x^2 + 5ax - 4 = 0$, 즉 $x^2 - 5ax + 4 = 0$ 의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$a + 2b = 5a, \quad a \times 2b = 4$$

$$\therefore b = 2a, ab = 2$$

$b = 2a$ 를 $ab = 2$ 에 대입하면

$$2a^2 = 2, a^2 = 1 \quad \therefore a = -1 (\because a < 0)$$

이를 $b = 2a$ 에 대입하면 $b = -2$

$$\therefore a + b = -3$$

341 ㉡ (1) $k < 6$ (2) $k = 6$ (3) $k > 6$

이차방정식 $2x^2 - 8x + k + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 16 - 2(k + 2) = -2k + 12$$

$$(1) D > 0 \text{이어야 하므로 } -2k + 12 > 0$$

$$\therefore k < 6$$

$$(2) D = 0 \text{이어야 하므로 } -2k + 12 = 0$$

$$\therefore k = 6$$

$$(3) D < 0 \text{이어야 하므로 } -2k + 12 < 0$$

$$\therefore k > 6$$

342 ㉡ 1

이차방정식 $x^2 + (2m - 3)x + m^2 + m - 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$D = (2m - 3)^2 - 4(m^2 + m - 5) \geq 0$$

$$-16m + 29 \geq 0 \quad \therefore m \leq \frac{29}{16} = 1 + \frac{13}{16}$$

따라서 정수 m 의 최댓값은 1이다.

343 ㉡ -2

이차방정식 $x^2 + 3kx - 3k + 3 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1 = 0$ 이어야 하므로

$$D_1 = (3k)^2 - 4(-3k + 3) = 0$$

$$9k^2 + 12k - 12 = 0, \quad 3k^2 + 4k - 4 = 0$$

$$(k + 2)(3k - 2) = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = \frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 $-x^2 + x + k + 1 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2 < 0$ 이어야 하므로

$$D_2 = 1 + 4(k + 1) < 0$$

$$4k + 5 < 0 \quad \therefore k < -\frac{5}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } k = -2$$

344 ㉡ 2

이차방정식 $x^2 - 2(a + k)x + k^2 - 4k - b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{-(a + k)\}^2 - (k^2 - 4k - b) = 0$$

$$(2a + 4)k + a^2 + b = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$2a + 4 = 0, a^2 + b = 0 \quad \left[k \text{의 값에 관계없이 항상 성립한다.} \right]$$

$$\therefore a = -2, b = -4 \quad \therefore a - b = 2$$

345 ㉠ -1

이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x 좌표가 $-1, 2$ 이므로 $-1, 2$ 는 이차방정식 $-4x^2+ax+2=x+b$, 즉 $4x^2+(1-a)x+b-2=0$ 의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+2=\frac{a-1}{4}, -1 \times 2=\frac{b-2}{4}$$

$$\therefore a=5, b=-6$$

$$\therefore a+b=-1$$

346 ㉠ 16

이차함수의 그래프와 직선의 한 교점의 x 좌표가

$4-\sqrt{3}$ 이므로 $4-\sqrt{3}$ 은 이차방정식

$$x^2+ax-6=5x+b, \text{ 즉}$$

$$x^2+(a-5)x-6-b=0 \text{의 한 근이다.}$$

이때 a, b 가 유리수이므로 다른 한 근은 $4+\sqrt{3}$ 이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$(4-\sqrt{3})+(4+\sqrt{3})=-a+5,$$

$$(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=-6-b$$

$$\therefore a=-3, b=-19$$

$$\therefore a-b=16$$

347 ㉠ 120

이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x 좌표는 이차방

정식 $3x^2-x-6=ax+b$, 즉

$3x^2-(1+a)x-6-b=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-3=\frac{1+a}{3}, 2=\frac{-6-b}{3}$$

$$\therefore a=-10, b=-12$$

$$\therefore ab=120$$

348 ㉠ (6, 7)

점 B의 x 좌표를 a 라 하면 $-4, a$ 는 이차방정식

$-x^2+6x+7=4x+k$, 즉 $x^2-2x+k-7=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-4+a=2, -4 \times a=k-7$$

$$\therefore a=6, k=-17$$

즉, 점 B의 x 좌표는 6이고 점 B는 직선 $y=4x-17$ 위의 점이므로 점 B의 y 좌표는

$$y=4 \times 6-17=7$$

따라서 점 B의 좌표는 (6, 7)이다.

|다른 풀이|

이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $-x^2+6x+7=4x+k$, 즉

$$x^2-2x+k-7=0 \text{의 두 근이다.}$$

즉, 이차방정식 $x^2-2x+k-7=0$ 의 한 근이 -4 이므로 $x=-4$ 를 대입하면

$$16+8+k-7=0 \quad \therefore k=-17$$

이를 $x^2-2x+k-7=0$ 에 대입하면

$$x^2-2x-24=0, (x+4)(x-6)=0$$

$$\therefore x=-4 \text{ 또는 } x=6$$

즉, 점 B의 x 좌표는 6이고 점 B는 직선 $y=4x-17$ 위의 점이므로 점 B의 y 좌표는

$$y=4 \times 6-17=7$$

따라서 점 B의 좌표는 (6, 7)이다.

349 ㉠ (1) $k < 21$ (2) $k = 21$ (3) $k > 21$

이차방정식 $-x^2-8x-2k=4x-6$, 즉

$x^2+12x+2k-6=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=36-(2k-6)=-2k+42$$

(1) $D > 0$ 이어야 하므로

$$-2k+42 > 0 \quad \therefore k < 21$$

(2) $D = 0$ 이어야 하므로

$$-2k+42=0 \quad \therefore k=21$$

(3) $D < 0$ 이어야 하므로

$$-2k+42 < 0 \quad \therefore k > 21$$

350 ㉠ 3

이차방정식 $x^2-2ax-a=-6x-a^2+5$, 즉

$x^2-2(a-3)x+a^2-a-5=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=\{-(a-3)\}^2-(a^2-a-5)<0$$

$$-5a+14<0 \quad \therefore a>\frac{14}{5}=2+\frac{4}{5}$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 3이다.

351 ㉠ 4

이차방정식 $-x^2+x-k=-x-3$, 즉

$x^2-2x+k-3=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=1-(k-3) \geq 0$$

$$-k+4 \geq 0 \quad \therefore k \leq 4$$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

352 ㉔ ④

점 $(-1, 0)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은 $y=m(x+1) \quad \therefore y=mx+m$

이차방정식 $x^2+x+4=mx+m$, 즉

$x^2+(1-m)x+4-m=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D=0$ 이므로

$$D=(1-m)^2-4(4-m)=0$$

$$m^2+2m-15=0, (m+5)(m-3)=0$$

$$\therefore m=-5 \text{ 또는 } m=3$$

그런데 m 은 양수이므로 $m=3$

연습문제

170~171쪽

353 ㉔ ⑤

이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표를 α, β 라 하면 α, β 는 이차방정식 $2x^2+ax-1=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{a}{2}$$

따라서 $-\frac{a}{2}=-1$ 이므로 $a=2$

354 ㉔ ④

① 이차방정식 $-2x^2-6x-3=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=9-6=3>0$$

이므로 x 축과의 교점의 개수는 2이다.

② 이차방정식 $-x^2-5x+9=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=25+36=61>0$$

이므로 x 축과의 교점의 개수는 2이다.

③ 이차방정식 $x^2-5x+2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=25-8=17>0$$

이므로 x 축과의 교점의 개수는 2이다.

④ 이차방정식 $2x^2+3x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=9-32=-23<0$$

이므로 x 축과의 교점의 개수는 0이다.

⑤ 이차방정식 $3x^2+4x-1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4+3=7>0$$

이므로 x 축과의 교점의 개수는 2이다.

따라서 x 축과의 교점의 개수가 나머지 넷과 다른 것은

④이다.

355 ㉔ 12

점 $(-1, -3)$ 이 이차함수 $y=x^2+ax+b$ 의 그래프 위의 점이므로 $x=-1, y=-3$ 을 대입하면

$$-3=1-a+b \quad \therefore b=a-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2+ax+a-4=4x+1$, 즉

$x^2+(a-4)x+a-5=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D=0$ 이므로

$$D=(a-4)^2-4(a-5)=0$$

$$a^2-12a+36=0, (a-6)^2=0$$

$$\therefore a=6$$

이를 ①에 대입하면 $b=2$

$$\therefore ab=12$$

356 ㉔ 6

두 이차함수의 그래프의 교점의 x 좌표는 이차방정식

$$-\frac{1}{2}x^2+2x+k=\frac{1}{2}x^2-4x+6, \text{ 즉}$$

$x^2-6x+6-k=0$ 의 두 근이다.

즉, 이차방정식 $x^2-6x+6-k=0$ 의 한 근이 1이므로

$x=1$ 을 대입하면

$$1-6+6-k=0 \quad \therefore k=1$$

이를 $x^2-6x+6-k=0$ 에 대입하면

$$x^2-6x+5=0, (x-1)(x-5)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=5$$

따라서 $\alpha=5$ 이므로

$$k+\alpha=1+5=6$$

|참고| 두 이차함수 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나면 두 교점의 x 좌표는 방정식 $f(x)-g(x)=0$ 의 실근과 같다.

357 ㉔ -3

(가)에서 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은

$$x=\frac{-3+1}{2}=-1$$

따라서 $f(x)=(x+1)^2+k$ (k 는 상수)라 하자.

▶▶▶▶▶ ①

(나)에서 이차방정식 $(x+1)^2+k=-4$, 즉

$x^2+2x+k+5=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어

야 하므로

$$\frac{D}{4}=1-(k+5)=0 \quad \therefore k=-4$$

$$\therefore f(x)=(x+1)^2-4$$

$$=x^2+2x-3$$

▶▶▶▶▶ ②

따라서 이차방정식 $x^2+2x-3=0$ 에서 근과 계수의
 $\frac{D}{4}=1+3=4>0$
 관계에 의하여 두 근의 곱은 -3 이므로 함수 $y=f(x)$
 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표의 곱은 -3
 이다. ▶▶▶▶▶ ㉔

단계	채점 기준	비율
①	그래프의 축을 이용하여 $f(x)$ 의 식 세우기	30%
②	$f(x)$ 구하기	40%
③	이차함수의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표의 곱 구하기	30%

358 ㉔ ③

이차함수 $y=x^2+ax+b$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$ 에서
 x 축에 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 은 $x=1$
 을 중근으로 갖는다.

즉, $x^2+ax+b=(x-1)^2$ 이므로

$$x^2+ax+b=x^2-2x+1$$

$$\therefore a=-2, b=1$$

이차함수 $y=x^2+bx+a$, 즉 $y=x^2+x-2$ 의 그래프
 가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표는 이차방정식

$$x^2+x-2=0$$
의 두 근이므로

$$(x+2)(x-1)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 두 점 $(-2, 0)$, $(1, 0)$ 사이의 거리는

$$1-(-2)=3$$

359 ㉔ $\frac{3}{2}$

α , β 는 이차방정식 $x^2+(2k-3)x+k=-kx+1$,
 즉 $x^2+(3k-3)x+k-1=0$ 의 두 근이므로 근과 계
 수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-3k+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta=k-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\alpha=2\beta$ 를 ①에 대입하면

$$3\beta=-3k+3$$

$$\therefore \beta=-k+1$$

이를 ②에 대입하면 $\alpha(-k+1)=k-1$

이때 $k \neq 1$ 이므로 $\alpha=-1$

$$\alpha=2\beta \text{이므로 } \beta=-\frac{1}{2}$$

따라서 ②에서

$$k=\alpha\beta+1$$

$$=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

360 ㉔ 20

이차방정식 $x^2-2ax+a^2-5a=mx+n$, 즉

$$x^2-(2a+m)x+a^2-5a-n=0$$
의 판별식을 D 라

하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$D=\{-(2a+m)\}^2-4(a^2-5a-n)=0$$

$$(4m+20)a+m^2+4n=0$$

이 등식이 a 에 대한 항등식이므로

$$4m+20=0, m^2+4n=0$$

$$\therefore m=-5, n=-\frac{25}{4}$$

$$\therefore m-4n=-5+25=20$$

361 ㉔ 9

이차방정식 $x^2-2ax+a^2-11=6x-4k$, 즉

$$x^2-2(a+3)x+a^2+4k-11=0$$
의 판별식을 D 라

하면 $D<0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=\{-(a+3)\}^2-(a^2+4k-11)<0$$

$$6a-4k+20<0 \quad \therefore a<\frac{2k-10}{3}$$

$k=10$ 일 때, $a<\frac{10}{3}$ 이므로 자연수 a 는 1, 2, 3의 3
 개이다.

$$\therefore f(10)=3$$

$k=15$ 일 때, $a<\frac{20}{3}$ 이므로 자연수 a 는 1, 2, 3, 4,
 5, 6의 6개이다.

$$\therefore f(15)=6$$

$$\therefore f(10)+f(15)=3+6=9$$

362 ㉔ ②

| 접근 방법 | 선분 BC의 길이를 α , β 를 이용하여 나타낸 후
 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$ 의 값을 구한다.

이차함수 $y=ax^2$ 의 그래프와 직선 $y=x+6$ 이 만나
 는 두 점의 x 좌표가 α , β 이므로 α , β 는 이차방정식
 $ax^2=x+6$, 즉 $ax^2-x-6=0$ 의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{1}{a}, \alpha\beta=-\frac{6}{a} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 두 점 A, B는 직선 $y=x+6$ 위의 점이므로

$$A(\alpha, \alpha+6), B(\beta, \beta+6)$$

즉, C(β , $\alpha+6$)이므로

$$\overline{BC}=(\beta+6)-(\alpha+6)=\frac{7}{2}$$

$$\therefore \alpha-\beta=-\frac{7}{2}$$

양변을 제곱하면 $(\alpha - \beta)^2 = \frac{49}{4}$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \frac{49}{4}$$

㉠을 대입하면

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{6}{a}\right) = \frac{49}{4}$$

$$49a^2 - 96a - 4 = 0 \quad (\because a > 0)$$

$$(49a + 2)(a - 2) = 0 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

따라서 $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$, $\alpha\beta = -3$ 이므로

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times (-3) = \frac{25}{4} \end{aligned}$$

363 $\frac{9}{2}$ m

| 접근 방법 | 조형물을 이차함수의 그래프, 불빛을 직선으로 생각하여 이차함수의 그래프와 직선이 접하는 경우를 이용한다.

A 지점을 원점, 지면을 x 축, 조명을 y 축으로 하여 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

이때 포물선의 방정식을

$$y = ax(x-4) \quad (a < 0)$$

라 하면 이 포물선이 점 (2, 4)를 지나므로

$$4 = -4a \quad \therefore a = -1$$

즉, 포물선의 방정식은

$$y = -x(x-4) = -x^2 + 4x$$

한편 포물선의 접선의 y 절편이 9이므로 직선의 방정식을 $y = bx + 9$ ($b < 0$)라 하면

$$-x^2 + 4x = bx + 9 \text{에서}$$

$$x^2 + (b-4)x + 9 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$D = (b-4)^2 - 36 = 0$$

$$b^2 - 8b - 20 = 0, (b+2)(b-10) = 0$$

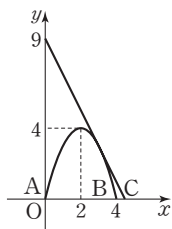
$$\therefore b = -2 \text{ 또는 } b = 10$$

그런데 $b < 0$ 이므로 $b = -2$

즉, 직선의 방정식은 $y = -2x + 9$

이 직선의 x 절편은 $\frac{9}{2}$ 이므로 $\overline{AC} = \frac{9}{2}$

따라서 두 지점 A, C 사이의 거리는 $\frac{9}{2}$ m이다.



02 이차함수의 최대, 최소

개념 확인

173쪽

364  (1) 최댓값: 11, 최솟값: 없다.

(2) 최댓값: 없다., 최솟값: $-\frac{13}{2}$

(3) 최댓값: 32, 최솟값: 없다.

(4) 최댓값: 없다., 최솟값: -17

(1) $y = -x^2 + 4x + 7 = -(x-2)^2 + 11$ 이므로 최솟값은 없고, $x=2$ 일 때 최댓값 11을 갖는다.

(2) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2 = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{13}{2}$ 이므로 최댓값은 없고, $x=-3$ 일 때 최솟값 $-\frac{13}{2}$ 을 갖는다.

(3) $y = -3x^2 - 18x + 5 = -3(x+3)^2 + 32$ 이므로 최솟값은 없고, $x=-3$ 일 때 최댓값 32를 갖는다.

(4) $y = 2x^2 - 8x - 9 = 2(x-2)^2 - 17$ 이므로 최댓값은 없고, $x=2$ 일 때 최솟값 -17을 갖는다.

365  3

$y = -(x-p)^2 + q$ 는 $x=p$ 일 때 최댓값 q 를 갖는다.

따라서 $p=1$, $q=2$ 이므로

$$p+q=3$$

유제

175-182쪽

366  (1) 최댓값: 4, 최솟값: -8

(2) 최댓값: 13, 최솟값: 1

$$(1) y = -3x^2 - 6x + 1$$

$$= -3(x+1)^2 + 4$$

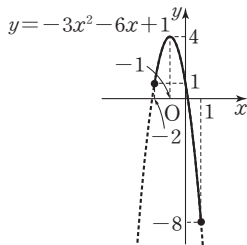
꼭짓점의 x 좌표 -1이

$$-2 \leq x \leq 1 \text{에}$$

포함되므로

$x=-1$ 일 때, 최댓값 4

$x=1$ 일 때, 최솟값 -8



$$(2) y = x^2 + 2x - 2$$

$$= (x+1)^2 - 3$$

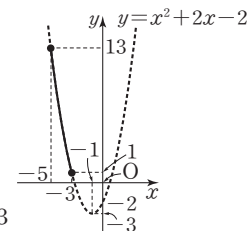
꼭짓점의 x 좌표 -1이

$$-5 \leq x \leq -3 \text{에}$$

포함되지 않으므로

$x=-5$ 일 때, 최댓값 13

$x=-3$ 일 때, 최솟값 1



367 ㉨ 28

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{11}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}(x-5)^2 + 18$$

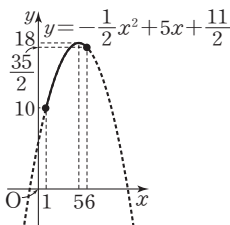
꼭짓점의 x 좌표 5가

$1 \leq x \leq 6$ 에 포함되므로

$x=5$ 일 때, 최댓값 $M=18$

$x=1$ 일 때, 최솟값 $m=10$

$$\therefore M+m=28$$



368 ㉨ -4

$$y = x^2 - 2x + k = (x-1)^2 + k - 1$$

꼭짓점의 x 좌표 1이 $0 \leq x \leq 3$ 에 포함되므로

$x=3$ 일 때, 최댓값 $M=k+3$

$x=1$ 일 때, 최솟값 $m=k-1$

$$\therefore Mm = (k+3)(k-1) = k^2 + 2k - 3 = (k+1)^2 - 4$$

따라서 Mm 은 $k=-1$ 일 때 최솟값 -4 를 갖는다.

369 ㉨ 9

$$f(x) = x^2 - 4mx + 3m^2 + 6m + 1$$

$$= (x-2m)^2 - m^2 + 6m + 1$$

따라서 $f(x)$ 는 $x=2m$ 일 때 최솟값 $-m^2 + 6m + 1$ 을 가지므로

$$g(m) = -m^2 + 6m + 1 = -(m-3)^2 + 10$$

따라서 꼭짓점의 m 좌표 3이 $-5 \leq m \leq 2$ 에 포함되지 않으므로 $m=2$ 일 때 최댓값 9를 갖는다.

370 ㉨ (1) 14 (2) -14

$$(1) y = 3x^2 - 12x + k = 3(x-2)^2 + k - 12$$

꼭짓점의 x 좌표 2가 $0 \leq x \leq 3$ 에 포함되므로 $x=2$ 일 때 최솟값 $k-12$ 를 갖는다.

이때 주어진 조건에서 최솟값이 2이므로

$$k-12=2 \quad \therefore k=14$$

따라서 $y=3(x-2)^2+2$ 는 $x=0$ 일 때 최댓값 14를 갖는다.

$$(2) y = -x^2 - 2x + k = -(x+1)^2 + k + 1$$

꼭짓점의 x 좌표 -1 이 $-6 \leq x \leq -3$ 에 포함되지 않으므로 $x=-3$ 일 때 최댓값 $k-3$ 을 갖는다.

이때 주어진 조건에서 최댓값이 7이므로

$$k-3=7 \quad \therefore k=10$$

따라서 $y=-(x+1)^2+11$ 은 $x=-6$ 일 때 최솟값 -14 를 갖는다.

371 ㉨ 5

$$y = x^2 - 4x + a = (x-2)^2 + a - 4$$

꼭짓점의 x 좌표 2가 $-2 \leq x \leq 4$ 에 포함되므로

$x=-2$ 일 때 최댓값 $a+12$, $x=2$ 일 때 최솟값 $a-4$ 를 갖는다.

이때 주어진 조건에서 최댓값과 최솟값의 합이 18이므로

$$(a+12) + (a-4) = 18, 2a=10$$

$$\therefore a=5$$

372 ㉨ 2

$$y = ax^2 - 8ax + b = a(x-4)^2 - 16a + b$$

꼭짓점의 x 좌표 4가 $2 \leq x \leq 5$ 에 포함되고 $a < 0$ 이므로 $x=4$ 일 때 최댓값 $-16a+b$, $x=2$ 일 때 최솟값 $-12a+b$ 를 갖는다.

이때 주어진 조건에서 최댓값이 17, 최솟값이 13이므로

$$-16a+b=17, -12a+b=13$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-1, b=1$$

$$\therefore b-a=2$$

373 ㉨ 6

$$y = x^2 - 6x + a = (x-3)^2 + a - 9$$

(i) $0 < a < 3$ 일 때,

꼭짓점의 x 좌표 3은 $0 \leq x \leq a$ 에 포함되지 않으므로 $x=a$ 일 때 최솟값 a^2-5a 를 갖는다.

이때 주어진 조건에서 최솟값이 -4 이므로

$$a^2-5a=-4$$

$$a^2-5a+4=0$$

$$(a-1)(a-4)=0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=4$$

그런데 $0 < a < 3$ 이므로 $a=1$

(ii) $a \geq 3$ 일 때,

꼭짓점의 x 좌표 3은 $0 \leq x \leq a$ 에 포함되므로 $x=3$ 일 때 최솟값 $a-9$ 를 갖는다.

이때 주어진 조건에서 최솟값이 -4 이므로

$$a-9=-4$$

$$\therefore a=5$$

(i), (ii)에서 $a=1$ 또는 $a=5$

따라서 모든 양수 a 의 값의 합은

$$1+5=6$$

374 ㉔ (1) -7 (2) 최댓값: -9, 최솟값: -41

(1) $y = (x^2 + x)^2 - 4(x^2 + x) - 3$ 에서

$x^2 + x = t$ 로 놓으면

$$t = x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$x = -\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 $-\frac{1}{4}$ 을 가지므로 t 의 값의 범위는

$$t \geq -\frac{1}{4}$$

주어진 함수는

$$y = t^2 - 4t - 3 = (t - 2)^2 - 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 $t \geq -\frac{1}{4}$ 에서 $\textcircled{1}$ 은 $t = 2$ 일 때 최솟값 -7을 갖는다.

(2) $y = -(x^2 + 4x - 1)^2 + 2(x^2 + 4x - 1) - 6$ 에서

$x^2 + 4x - 1 = t$ 로 놓으면

$$t = x^2 + 4x - 1 = (x + 2)^2 - 5$$

$-4 \leq x \leq -1$ 에서 $x = -4$ 일 때 최댓값 -1,

$x = -2$ 일 때 최솟값 -5를 가지므로 t 의 값의 범위는

$$-5 \leq t \leq -1$$

주어진 함수는

$$y = -t^2 + 2t - 6 = -(t - 1)^2 - 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 $-5 \leq t \leq -1$ 에서 $\textcircled{1}$ 은 $t = -1$ 일 때 최댓값 -9, $t = -5$ 일 때 최솟값 -41을 갖는다.

375 ㉔ 최댓값: 36, 최솟값: -24

$4x + y = 6$ 에서 $y = -4x + 6$ 이므로

$$x^2 - 2y = x^2 - 2(-4x + 6)$$

$$= x^2 + 8x - 12$$

$$= (x + 4)^2 - 28 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 $-2 \leq x \leq 4$ 에서 $\textcircled{1}$ 은 $x = 4$ 일 때 최댓값 36, $x = -2$ 일 때 최솟값 -24를 갖는다.

376 ㉔ -6

$y = 2(x^2 - 2x + 3)^2 - 8(x^2 - 2x + 3) + 1$ 에서

$x^2 - 2x + 3 = t$ 로 놓으면

$$t = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$$

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 $x = -2$ 일 때 최댓값 11, $x = 1$ 일 때 최솟값 2를 갖는다. $\dots\dots \textcircled{1}$

t 의 값의 범위는

$$2 \leq t \leq 11$$

주어진 함수는

$$y = 2t^2 - 8t + 1 = 2(t - 2)^2 - 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$2 \leq t \leq 11$ 에서 $\textcircled{1}$ 은 $t = 2$ 일 때 최솟값 -7을 갖는다.

$$\therefore b = -7$$

이때 $\textcircled{1}$ 에서 $x = 1$ 일 때 $t = 2$ 이므로 $a = 1$

$$\therefore a + b = -6$$

377 ㉔ 50

이차방정식 $x^2 + 2mx + m^2 - m + 5 = 0$ 의 판별식을

D 라 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

두 실근 α, β 가 같을 수 있으므로 $D = 0$ 까지 생각한다.

$$\frac{D}{4} = m^2 - (m^2 - m + 5) \geq 0$$

$$m - 5 \geq 0 \quad \therefore m \geq 5$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2m$$

$$\alpha\beta = m^2 - m + 5$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= (-2m)^2 - 2(m^2 - m + 5)$$

$$= 2m^2 + 2m - 10$$

$$= 2\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{21}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$m \geq 5$ 에서 $\textcircled{1}$ 은 $m = 5$ 일 때 최솟값 50을 갖는다.

378 ㉔ 10

$$y = -x^2 + 4x = -(x - 2)^2 + 4$$

점 A의 좌표를 $(a, 0)$ ($0 < a < 2$)이라 하면

$$B(4 - a, 0), D(a, -a^2 + 4a)$$

두 선분 AB, AD의 길이는

$$\overline{AB} = 4 - 2a$$

$$\overline{AD} = -a^2 + 4a$$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 l 이라 하면

$$l = 2(\overline{AB} + \overline{AD})$$

$$= 2(4 - 2a - a^2 + 4a)$$

$$= -2a^2 + 4a + 8$$

$$= -2(a - 1)^2 + 10$$

따라서 $0 < a < 2$ 에서 $a = 1$ 일 때 최댓값 10을 가지므로 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 10이다.

|참고| 이차함수 $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프의 축이 $x = 2$ 이므로 점 A를 $(a, 0)$ 이라 하면 $0 < a < 2$ 이다.

379 ㉡ 110 m

$$y = -5t^2 + 40t + 30$$

$$= -5(t-4)^2 + 110$$

따라서 $0 \leq t \leq 8$ 에서 $t=4$ 일 때 최댓값 110을 가지므로 폭죽이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이는 110 m이다.

380 ㉡ 4

직사각형의 가로에 필요한 철사의 개수를 x 라 하면 가로와 세로의 합에 필요한 철사의 개수가 8개이므로 세로에 필요한 철사의 개수는 $8-x$ ($0 < x < 8$)이다.

직사각형의 넓이를 S 라 하면

$$S = 3x \times 3(8-x)$$

$$= -9(x^2 - 8x)$$

$$= -9(x-4)^2 + 144$$

따라서 $0 < x < 8$ 에서 $x=4$ 일 때 최댓값 144를 갖는다.

즉, 직사각형의 가로에 필요한 철사의 개수는 4이다.

381 ㉡ 48

$\triangle ABC \sim \triangle DFC$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DF} : \overline{FC} \quad \therefore \overline{DF} : \overline{FC} = 3 : 4$$

$$\overline{DF} = 3x, \overline{FC} = 4x \text{라 하면}$$

$$\overline{BF} = 16 - 4x \quad (0 < x < 4)$$

직사각형 DEBF의 넓이를 S 라 하면

$$S = (16 - 4x) \times 3x$$

$$= -12x^2 + 48x$$

$$= -12(x-2)^2 + 48$$

따라서 $0 < x < 4$ 에서 $x=2$ 일 때 최댓값 48을 가지므로 직사각형 DEBF의 넓이의 최댓값은 48이다.

|참고| $\triangle ABC, \triangle DFC$ 에서

$$\angle ABC = \angle DFC = 90^\circ, \angle ACB = \angle DCF$$

이므로 두 삼각형은 AA 닮음이다.

382 ㉡ (1) -10 (2) 22

$$(1) 2x^2 + 8x + y^2 + 3y + \frac{1}{4}$$

$$= 2(x+2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - 10$$

이때 x, y 가 실수이므로

$$2(x+2)^2 \geq 0, \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0$$

따라서 주어진 식은 $x=-2, y=-\frac{3}{2}$ 일 때 최솟값 -10을 갖는다.

$$(2) 16x - 4x^2 + 12y - 3y^2 - 6$$

$$= -4(x-2)^2 - 3(y-2)^2 + 22$$

이때 x, y 는 실수이므로

$$-4(x-2)^2 \leq 0, -3(y-2)^2 \leq 0$$

따라서 주어진 식은 $x=2, y=2$ 일 때 최댓값 22를 갖는다.

연습문제

183~184쪽

383 ㉡ 3

$$y = x^2 - 4x + 1$$

$$= (x-2)^2 - 3$$

꼭짓점의 x 좌표 2가 $-1 \leq x \leq 3$ 에 포함되므로

$x=-1$ 일 때, 최댓값 6

$x=2$ 일 때, 최솟값 -3

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$$6 + (-3) = 3$$

384 ㉡ 2

$$y = -x^2 - 4ax + 3 = -(x+2a)^2 + 4a^2 + 3 \text{이므로}$$

$x=-2a$ 일 때 최댓값 $4a^2 + 3$ 을 갖는다.

이때 주어진 조건에서 최댓값은 7이므로

$$4a^2 + 3 = 7, a^2 = 1$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 1$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 1$

$y = 2x^2 + 4x - 5 = 2(x+1)^2 - 7$ 이고, 꼭짓점의 x 좌표 -1이 $1 \leq x \leq 3$ 에 포함되지 않으므로 $x=1$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.

따라서 $a=1, m=1$ 이므로

$$a+m=2$$

385 ㉡ 2

$$y = x^2 - 2x + 10$$

$$= (x-1)^2 + 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x=1$ 일 때 $y=9$ 이므로 꼭짓점의 x 좌표 1은

$a \leq x \leq 4$ 에 포함되지 않는다.

$$\therefore a > 1$$

따라서 $a \leq x \leq 4$ 에서 ㉠은 $x=a$ 일 때 최솟값

$a^2 - 2a + 10$ 을 갖는다.

이때 최솟값이 10이므로

$$a^2 - 2a + 10 = 10$$

$$a^2 - 2a = 0, a(a-2) = 0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=2$$

그런데 $a > 1$ 이므로 $a=2$

386 ㉡ 56

$6x + 2y = 4$ 에서 $y = -3x + 2$ 이므로

$$\begin{aligned} 5x^2 + xy - y^2 &= 5x^2 + x(-3x+2) - (-3x+2)^2 \\ &= -7x^2 + 14x - 4 \\ &= -7(x-1)^2 + 3 \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

따라서 $2 \leq x \leq 4$ 에서 ㉠은 $x=2$ 일 때 최댓값

$M = -4$, $x=4$ 일 때 최솟값 $m = -60$ 을 가지므로

$$M - m = 56$$

387 ㉡ $\frac{13}{2}$

(i) $-3 \leq x < 0$ 일 때,

$$|x| = -x \text{이므로}$$

$$y = 2x^2 + 6x + 5$$

$$= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

따라서 꼭짓점의 x 좌표 $-\frac{3}{2}$ 이 $-3 \leq x < 0$ 에 포

함되므로

$x = -3$ 일 때, 최댓값 5

$x = -\frac{3}{2}$ 일 때, 최솟값 $\frac{1}{2}$

(ii) $0 \leq x \leq 4$ 일 때,

$$|x| = x \text{이므로}$$

$$y = 2x^2 - 6x + 5$$

$$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

따라서 꼭짓점의 x 좌표 $\frac{3}{2}$ 이 $0 \leq x \leq 4$ 에 포함되

므로

$x = 4$ 일 때, 최댓값 13

$x = \frac{3}{2}$ 일 때, 최솟값 $\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 최댓값은 13, 최솟값은 $\frac{1}{2}$ 이므로 구하는

$$13 \times \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$$

| 다른 풀이 |

$y = 2x^2 - 6|x| + 5$ 에서 $x^2 = |x|^2$ 이므로

$|x| = t$ 로 놓으면 $-3 \leq x \leq 4$ 에서 t 의 값의 범위는

$$0 \leq t \leq 4$$

주어진 함수는

$$y = 2x^2 - 6|x| + 5$$

$$= 2t^2 - 6t + 5$$

$$= 2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

따라서 $0 \leq t \leq 4$ 에서 y 는 $t=4$ 일 때 최댓값 13,

$t = \frac{3}{2}$ 일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$ 을 가지므로 구하는 곱은 $\frac{13}{2}$

388 ㉡ 11

(가)에서 이차방정식 $x^2 + ax + b = -ax + 1$, 즉

$x^2 + 2ax + b - 1 = 0$ 의 두 근의 합이 4이므로

$$4 = -2a \quad \therefore a = -2$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 2x + b$$

$$= (x-1)^2 + b-1$$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최댓값 $b+3$ 을 갖

고, (나)에서 최댓값은 16이므로

$$b+3=16 \quad \therefore b=13$$

$$\therefore a+b = -2+13=11$$

389 ㉡ 18

$$f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 = (x-a)^2 + a^2$$

(i) $0 < a \leq 2$ 일 때,

$f(x)$ 는 $x=a$ 일 때 최솟값 a^2 을 가지므로

$$a^2 = 10$$

$$\therefore a = -\sqrt{10} \text{ 또는 } a = \sqrt{10}$$

그런데 $0 < a \leq 2$ 이므로 조건을 만족시키는 a 는 존
재하지 않는다.

(ii) $a > 2$ 일 때,

$f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최솟값 $2a^2 - 4a + 4$ 를 가지므
로

$$2a^2 - 4a + 4 = 10$$

$$2a^2 - 4a - 6 = 0$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a+1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 3$$

그런데 $a > 2$ 이므로 $a=3$

(i), (ii)에서 $a=3$

따라서 $f(x) = (x-3)^2 + 9$ 이므로 $x=0$ 일 때 최댓값
18을 갖는다.

390 ㉮ 14

$$y = (x^2 - 6x + 9)^2 - 8(x^2 - 6x + 9) + 10 \text{에서}$$

$$x^2 - 6x + 9 = t \text{로 놓으면}$$

$$t = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

$0 \leq x \leq 4$ 에서 $x=0$ 일 때 최댓값 9, $x=3$ 일 때 최솟값 0을 갖는다. ㉮

t 의 값의 범위는

$$0 \leq t \leq 9$$

주어진 함수는

$$y = t^2 - 8t + 10$$

$$= (t - 4)^2 - 6 \quad \dots\dots \textcircled{\text{L}}$$

$0 \leq t \leq 9$ 에서 ㉮은 $t=4$ 일 때 최솟값 -6 , $t=9$ 일 때 최댓값 19를 갖는다.

$$t=4 \text{에서 } x^2 - 6x + 9 = 4$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 5$$

그런데 $0 \leq x \leq 4$ 이므로

$$x = 1$$

$$\therefore \alpha = 1$$

㉮에서 $x=0$ 일 때 $t=9$ 이므로

$$\beta = 0$$

따라서 $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $m = -6$, $M = 19$ 이므로

$$\alpha + \beta + m + M = 14$$

391 ㉮ 30

이차함수의 그래프가 y 축과 만나는 점은

$$A(0, 6)$$

이차함수의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \text{에서}$$

$$(x - 1)(x - 6) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 6$$

$$\therefore B(1, 0), C(6, 0)$$

점 $P(a, b)$ 가 점 A 에서 점 B 를 거쳐 점 C 까지 움직이므로 $0 \leq a \leq 6$

점 $P(a, b)$ 는 이차함수 $y = x^2 - 7x + 6$ 의 그래프 위의 점이므로

$$b = a^2 - 7a + 6$$

$$\therefore 5a + b = 5a + (a^2 - 7a + 6)$$

$$= a^2 - 2a + 6$$

$$= (a - 1)^2 + 5$$

따라서 $0 \leq a \leq 6$ 에서 $a=6$ 일 때 최댓값 30을 갖는다.

392 ㉮ 44

㉮ 접근 방법 1 $\triangle APS$ 와 $\triangle ABC$ 가 닮음을 이용하여 직사각형 PQRS의 가로의 길이와 세로의 길이를 변수로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 점 A 에

서 두 선분 PS , BC 에 내린

수선의 발을 각각 D , E 라

하면 $\triangle APS \sim \triangle ABC$

(AA 닮음)이므로

$$\overline{AD} : \overline{PS} = \overline{AE} : \overline{BC} = 8 : 12 = 2 : 3$$

$$\overline{AD} = 2x, \overline{PS} = 3x \text{라 하면}$$

$$\overline{PQ} = \overline{DE} = 8 - 2x \text{ (단, } 0 < x < 4 \text{)}$$

직사각형 PQRS의 넓이를 S 라 하면

$$S = 3x \times (8 - 2x)$$

$$= -6(x^2 - 4x)$$

$$= -6(x - 2)^2 + 24$$

따라서 $0 < x < 4$ 에서 $x=2$ 일 때 최댓값 24를 가지므로 직사각형 PQRS의 넓이의 최댓값은 $m=24$

▶▶▶▶▶ ①

이때 $\overline{PS}=6$, $\overline{PQ}=4$ 이므로 직사각형 PQRS의 둘레의 길이는

$$n = 2 \times (6 + 4) = 20$$

▶▶▶▶▶ ②

$$\therefore m + n = 24 + 20 = 44$$

▶▶▶▶▶ ③

단계	채점 기준	비율
①	m 의 값 구하기	60%
②	n 의 값 구하기	30%
③	$m+n$ 의 값 구하기	10%

393 ㉮ ②

점 P 는 이차함수 $y = 2x^2 + 1$ 의 그래프 위의 점이고, 점 Q 는 이차함수 $y = -(x - 3)^2 + 1$ 의 그래프 위의 점이므로

$$P(t, 2t^2 + 1), Q(t, -(t - 3)^2 + 1)$$

$$\therefore \overline{PQ} = (2t^2 + 1) - \{-(t - 3)^2 + 1\}$$

$$= 3t^2 - 6t + 9$$

사각형 PAQB의 넓이를 S 라 하면 두 삼각형 APQ, BPQ의 넓이의 합과 같으므로

$$S = \frac{1}{2} \times t \times (3t^2 - 6t + 9) + \frac{1}{2} \times (3 - t) \times (3t^2 - 6t + 9)$$

$$= \frac{9}{2} (t^2 - 2t + 3)$$

$$= \frac{9}{2} (t - 1)^2 + 9$$

따라서 $0 < t < 3$ 에서 $t=1$ 일 때 최솟값 9를 가지므로
사각형 PAQB의 넓이의 최솟값은 9이다.

394 ㉠ -5

| 접근 방법 | 공통부분을 t 로 치환한 후 a 의 값의 범위에 따라
경우를 나누어 최솟값을 구한다.

$$y = (x^2 + 2x)^2 - 2a(x^2 + 2x) \text{에서}$$

$$x^2 + 2x = t \text{로 놓으면}$$

$$t = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$$

$-3 \leq x \leq 2$ 에서 $x=2$ 일 때 최댓값 8, $x=-1$ 일 때
최솟값 -1 을 가지므로 t 의 값의 범위는

$$-1 \leq t \leq 8$$

주어진 함수는

$$y = t^2 - 2at$$

$$= (t-a)^2 - a^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $a < -1$ 일 때,

꼭짓점의 t 좌표 a 가 $-1 \leq t \leq 8$ 에 포함되지 않으
므로 $\textcircled{1}$ 은 $t=-1$ 일 때 최솟값 $1+2a$ 를 갖는다.

이때 주어진 조건에서 최솟값이 -4 이므로

$$1+2a = -4$$

$$\therefore a = -\frac{5}{2}$$

(ii) $-1 \leq a \leq 8$ 일 때,

꼭짓점의 t 좌표 a 가 $-1 \leq t \leq 8$ 에 포함되므로 $\textcircled{1}$
은 $t=a$ 일 때 최솟값 $-a^2$ 을 갖는다.

이때 주어진 조건에서 최솟값이 -4 이므로

$$-a^2 = -4, \quad a^2 = 4$$

$$\therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 2$$

그런데 $-1 \leq a \leq 8$ 이므로 $a=2$

(iii) $a > 8$ 일 때,

꼭짓점의 t 좌표 a 가 $-1 \leq t \leq 8$ 에 포함되지 않으
므로 $\textcircled{1}$ 은 $t=8$ 일 때 최솟값 $64-16a$ 를 갖는다.

이때 주어진 조건에서 최솟값이 -4 이므로

$$64-16a = -4$$

$$\therefore a = \frac{17}{4}$$

그런데 $a > 8$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a = -\frac{5}{2}$ 또는 $a = 2$

따라서 구하는 모든 상수 a 의 값의 곱은

$$-\frac{5}{2} \times 2 = -5$$

01 삼차방정식과 사차방정식

개념 확인

187쪽

395 ㉠ (1) $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

(2) $x=-4$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$

(3) $x=-4$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

$$\text{또는 } x = \frac{7}{2}$$

(4) $x = \pm 3$ 또는 $x = \pm 3i$

유제

189~199쪽

396 ㉠ (1) $x=2$ 또는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$

(2) $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}i}{3}$

(1) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + 8$ 이라 하면

$$f(2) = 16 - 20 - 4 + 8 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} x-2 & 2 & -5 & -2 & 8 \\ & & 4 & -2 & -8 \\ \hline & 2 & -1 & -4 & 0 \end{array}$$

이므로 조립제법을 이
용하여 $f(x)$ 를 인수
분해하면

$$f(x) = (x-2)(2x^2 - x - 4)$$

주어진 방정식은

$$(x-2)(2x^2 - x - 4) = 0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$$

(2) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 3$ 이라 하면

$$f(1) = 3 - 2 + 2 - 3 = 0$$

$$f(-1) = 3 + 2 - 2 - 3 = 0$$

$x-1$, $x+1$ 은 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이
용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & -3 \\ & & 3 & 1 & 1 & 3 \\ \hline -1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ & & -3 & 2 & -3 & \\ \hline & 3 & -2 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = (x-1)(x+1)(3x^2 - 2x + 3)$$

주어진 방정식은

$$(x+1)(x-1)(3x^2 - 2x + 3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}i}{3}$$

397 ㉔ -3

$f(x)=x^3+4x^2+x-6$ 이라 하면

$$f(1)=1+4+1-6=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} x-1 \text{은 } f(x) \text{의 인수이므로} & 1 & 1 & 4 & 1 & -6 \\ \text{로 조립제법을 이용하여} & & & 1 & 5 & 6 \\ f(x) \text{를 인수분해하면} & 1 & 5 & 6 & & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x^2+5x+6) \\ &= (x-1)(x+2)(x+3) \end{aligned}$$

주어진 방정식은

$$(x+3)(x+2)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

이때 $\alpha < \beta < \gamma$ 이므로 $\alpha=-3, \beta=-2, \gamma=1$

$$\therefore \alpha+5\beta+10\gamma=-3$$

398 ㉔ $-4+4\sqrt{2}$

$f(x)=x^4-13x^2+14x+8$ 이라 하면

$$f(2)=16-52+28+8=0$$

$$f(-4)=256-208-56+8=0$$

$x-2, x+4$ 는 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 1 & 0 & -13 & 14 & 8 \\ & & 2 & 4 & -18 & -8 \\ -4 & 1 & 2 & -9 & -4 & 0 \\ & & -4 & 8 & 4 & \\ 1 & 1 & -2 & -1 & & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x-2)(x+4)(x^2-2x-1)$$

주어진 방정식은

$$(x+4)(x-2)(x^2-2x-1)=0$$

$$\therefore x=-4 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=1\pm\sqrt{2}$$

따라서 모든 음의 근의 곱은

$$-4 \times (1-\sqrt{2}) = -4+4\sqrt{2}$$

399 ㉔ ③

$f(x)=x^3+x-2$ 라 하면

$$f(1)=1+1-2=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} x-1 \text{은 } f(x) \text{의 인수이므로} & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ \text{로 조립제법을 이용하여} & & & 1 & 1 & 2 \\ f(x) \text{를 인수분해하면} & 1 & 1 & 2 & & 0 \end{array}$$

$$f(x)=(x-1)(x^2+x+2)$$

주어진 방정식은

$$(x-1)(x^2+x+2)=0$$

즉, 주어진 방정식의 두 허근은 이차방정식

$x^2+x+2=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{(-1)^2-2 \times 2}{2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

400 ㉔ (1) $x=-4$ 또는 $x=-1$ (중근) 또는 $x=2$

$$(2) x=-1 \text{ 또는 } x=6 \text{ 또는 } x=\frac{5\pm\sqrt{23}i}{2}$$

(1) $(x^2+2x)(x^2+2x-7)-8=0$ 에서

$$x^2+2x=X \text{로 놓으면}$$

$$X(X-7)-8=0$$

$$X^2-7X-8=0, (X+1)(X-8)=0$$

$$\therefore X=-1 \text{ 또는 } X=8$$

(i) $X=-1$ 일 때,

$$x^2+2x+1=0, (x+1)^2=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ (중근)}$$

(ii) $X=8$ 일 때,

$$x^2+2x-8=0, (x+4)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-4 \text{ 또는 } x=2$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x=-4 \text{ 또는 } x=-1 \text{ (중근) 또는 } x=2$$

(2) $x(x-2)(x-3)(x-5)=72$ 에서

$$\{x(x-5)\}\{(x-2)(x-3)\}=72$$

$$(x^2-5x)(x^2-5x+6)=72$$

$$x^2-5x=X \text{로 놓으면}$$

$$X(X+6)=72$$

$$X^2+6X-72=0, (X+12)(X-6)=0$$

$$\therefore X=-12 \text{ 또는 } X=6$$

(i) $X=-12$ 일 때,

$$x^2-5x+12=0$$

$$\therefore x=\frac{5\pm\sqrt{23}i}{2}$$

(ii) $X=6$ 일 때,

$$x^2-5x-6=0, (x+1)(x-6)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=6$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x=-1 \text{ 또는 } x=6 \text{ 또는 } x=\frac{5\pm\sqrt{23}i}{2}$$

401 ㉡ 4

$(x^2-4x)^2-2(x^2-4x)-15=0$ 에서

$x^2-4x=X$ 로 놓으면

$$X^2-2X-15=0, (X+3)(X-5)=0$$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=5$

(i) $X=-3$ 일 때,

$$x^2-4x+3=0, (x-1)(x-3)=0$$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

(ii) $X=5$ 일 때,

$$x^2-4x-5=0, (x+1)(x-5)=0$$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=5$

따라서 $M=5, m=-1$ 이므로

$$M+m=4$$

402 ㉡ 1

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=15$ 에서

$$\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}=15$$

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=15$$

$x^2+5x=X$ 로 놓으면

$$(X+4)(X+6)=15$$

$$X^2+10X+9=0, (X+9)(X+1)=0$$

$\therefore X=-9$ 또는 $X=-1$

(i) $X=-9$ 일 때,

$x^2+5x+9=0$ 이므로 이 이차방정식의 판별식을

D_1 이라 하면

$$D_1=25-36=-11<0$$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=-1$ 일 때,

$x^2+5x+1=0$ 이므로 이 이차방정식의 판별식을

D_2 라 하면

$$D_2=25-4=21>0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 실근은 이차방정식

$x^2+5x+1=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 곱은 1이다.

403 ㉡ -2

$(x^2-x)^2-4(x^2-x)-12=0$ 에서

$x^2-x=X$ 로 놓으면

$$X^2-4X-12=0, (X+2)(X-6)=0$$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=6$

(i) $X=-2$ 일 때,

$x^2-x+2=0$ 이므로 이 이차방정식의 판별식을

D_1 이라 하면

$$D_1=1-8=-7<0$$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=6$ 일 때,

$x^2-x-6=0$ 이므로 이 이차방정식의 판별식을

D_2 라 하면

$$D_2=1+24=25>0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 한 허근 α 는 이차방정식

$x^2-x+2=0$ 의 한 근이므로 $x=\alpha$ 를 대입하면

$$\alpha^2-\alpha+2=0$$

$$\therefore \alpha^2-\alpha=-2$$

404 ㉡ (1) $x=\pm\sqrt{2}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{5}$

$$(2) x=-2\pm 2i \text{ 또는 } x=2\pm 2i$$

(1) $x^4-3x^2-10=0$ 에서 $x^2=X$ 로 놓으면

$$X^2-3X-10=0, (X+2)(X-5)=0$$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=5$

즉, $x^2=-2$ 또는 $x^2=5$ 이므로

$$x=\pm\sqrt{2}i \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{5}$$

(2) $x^4+64=0$ 에서 $(x^2+16x^2+64)-16x^2=0$

$$(x^2+8)^2-(4x)^2=0$$

$$(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)=0$$

$$\therefore x=-2\pm 2i \text{ 또는 } x=2\pm 2i$$

405 ㉡ $x=-2\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$x\neq 0$ 이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2+3x-2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-2=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$$

$$x+\frac{1}{x}=X \text{로 놓으면}$$

$$X^2+3X-4=0, (X+4)(X-1)=0$$

$\therefore X=-4$ 또는 $X=1$

(i) $X=-4$ 일 때,

$$x+\frac{1}{x}+4=0, x^2+4x+1=0$$

$$\therefore x=-2\pm\sqrt{3}$$

(ii) $X=1$ 일 때,

$$x + \frac{1}{x} - 1 = 0, x^2 - x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -2 \pm \sqrt{3} \text{ 또는 } x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

406 ㉡ 10

$x^4 - 2x^2 - 24 = 0$ 에서 $x^2 = X$ 로 놓으면

$$X^2 - 2X - 24 = 0, (X+4)(X-6) = 0$$

$$\therefore X = -4 \text{ 또는 } X = 6$$

즉, $x^2 = -4$ 또는 $x^2 = 6$ 이므로

$$x = \pm 2i \text{ 또는 } x = \pm \sqrt{6}$$

따라서 서로 다른 두 실근의 곱은 -6 , 서로 다른 두 허근의 곱은 4 이므로

$$a = -6, b = 4$$

$$\therefore b - a = 10$$

407 ㉡ 3

$x \neq 0$ 이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2 으로 나누면

$$2x^2 - 5x + 1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = X \text{로 놓으면}$$

$$2X^2 - 5X - 3 = 0, (2X+1)(X-3) = 0$$

$$\therefore X = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } X = 3$$

(i) $X = -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} = 0, \text{ 즉 } 2x^2 + x + 2 = 0 \text{이므로 이 이}$$

차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = 1 - 16 = -15 < 0$$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X = 3$ 일 때,

$$x + \frac{1}{x} - 3 = 0, \text{ 즉 } x^2 - 3x + 1 = 0 \text{이므로 이 이차}$$

방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = 9 - 4 = 5 > 0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 한 실근 a 는 방정식

$$x + \frac{1}{x} - 3 = 0 \text{의 한 근이므로 } x = a \text{를 대입하면}$$

$$a + \frac{1}{a} - 3 = 0$$

$$\therefore a + \frac{1}{a} = 3$$

408 ㉡ (1) $\frac{3-\sqrt{7}i}{2}, \frac{3+\sqrt{7}i}{2}$ (2) $-2, 6$

(1) 삼차방정식 $x^3 - x^2 + ax + 8 = 0$ 의 한 근이 -2 이

므로 $x = -2$ 를 대입하면

$$-8 - 4 - 2a + 8 = 0$$

$$-2a - 4 = 0 \quad \therefore a = -2$$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^3 - x^2 - 2x + 8 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} \text{이 방정식의 한 근이 } -2 & 1 & -1 & -2 & 8 \\ -2 \text{이므로 조립제} & & -2 & 6 & -8 \end{array}$$

법을 이용하여 좌변

을 인수분해하면

$$(x+2)(x^2 - 3x + 4) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

따라서 나머지 두 근은 $\frac{3-\sqrt{7}i}{2}, \frac{3+\sqrt{7}i}{2}$ 이다.

(2) 사차방정식 $x^4 - 3x^3 + ax^2 + 12x + b = 0$ 의 두 근

이 $-3, 2$ 이므로 $x = -3, x = 2$ 를 각각 대입하면

$$81 + 81 + 9a - 36 + b = 0,$$

$$16 - 24 + 4a + 24 + b = 0$$

$$\therefore 9a + b = -126, 4a + b = -16$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -22, b = 72$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^4 - 3x^3 - 22x^2 + 12x + 72 = 0$$

이 방정식의 두 근이 $-3, 2$ 이므로 조립제법을 이

용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & -3 & -22 & 12 & 72 \\ & & -3 & 18 & 12 & -72 \\ 2 & 1 & -6 & -4 & 24 & 0 \\ & & 2 & -8 & -24 & \\ 1 & 1 & -4 & -12 & 0 & \end{array}$$

$$(x+3)(x-2)(x^2 - 4x - 12) = 0$$

$$(x+3)(x-2)(x+2)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = -2 \text{ 또는 } x = 6$$

따라서 나머지 두 근은 $-2, 6$ 이다.

409 ㉔ 2

삼차방정식 $x^3 - (k-2)x^2 + kx - 10 = 0$ 의 한 근이 2
이므로 $x=2$ 를 대입하면

$$8 - 4(k-2) + 2k - 10 = 0$$

$$-2k + 6 = 0 \quad \therefore k = 3$$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^3 - x^2 + 3x - 10 = 0$$

이 방정식의 한 근이 2이므로 $2 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 3 & -10 \\ & 2 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right|$
 2로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$(x-2)(x^2+x+5)=0$$

따라서 나머지 두 근 α, β 는 이차방정식

$x^2+x+5=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -1$$

$$\therefore k + \alpha + \beta = 3 + (-1) = 2$$

410 ㉔ ①

삼차방정식 $x^3 + (k+1)x^2 + (4k-3)x + k+7=0$
의 한 근이 1이므로 $x=1$ 을 대입하면

$$1 + k + 1 + 4k - 3 + k + 7 = 0$$

$$6k + 6 = 0 \quad \therefore k = -1$$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

이 방정식의 한 근이 1이므로 $1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -7 & 6 \\ & 1 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \end{array} \right|$
 1로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$(x-1)(x^2+x-6)=0$$

$$(x-1)(x+3)(x-2)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 $\alpha = -3, \beta = 2$ 또는 $\alpha = 2, \beta = -3$ 이므로

$$|\alpha - \beta| = 5$$

411 ㉔ -5

사차방정식 $x^4 - x^3 - ax^2 + bx - 9 = 0$ 의 두 근이
 $-1, 3$ 이므로 $x = -1, x = 3$ 을 각각 대입하면

$$1 + 1 - a - b - 9 = 0, 81 - 27 - 9a + 3b - 9 = 0$$

$$\therefore a + b = -7, 3a - b = 15$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, b = -9$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^4 - x^3 - 2x^2 - 9x - 9 = 0$$

이 방정식의 두 근이 $-1, 3$ 이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -1 & -2 & -9 & -9 \\ & & -1 & 2 & 0 & 9 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & -9 & 0 \\ & & 3 & 3 & 9 & \\ & 1 & 1 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$(x+1)(x-3)(x^2+x+3)=0$$

따라서 나머지 두 근 α, β 는 이차방정식 $x^2+x+3=0$

의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 3$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2 \times 3 = -5$$

412 ㉔ $-20, 0, \frac{1}{4}$

$$f(x) = x^3 + (k-1)x^2 - 6kx + 5k$$

$$f(1) = 1 + k - 1 - 6k + 5k = 0$$

$x-1$ 은 $f(x)$ 의 인수 $1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & k-1 & -6k & 5k \\ & 1 & k & -5k \\ 1 & k & -5k & 0 \end{array} \right|$
 이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x) = (x-1)(x^2+kx-5k)$$

이때 주어진 방정식이 중근을 가지려면 이차방정식 $x^2+kx-5k=0$ 이 1을 근으로 갖거나 중근을 가져야 한다.

(i) $x^2+kx-5k=0$ 이 1을 근으로 갖는 경우

$$x=1 \text{을 대입하면 } 1+k-5k=0 \quad \therefore k=\frac{1}{4}$$

(ii) $x^2+kx-5k=0$ 이 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+kx-5k=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = k^2 + 20k = 0, k(k+20) = 0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=-20$$

(i), (ii)에서 $k = -20$ 또는 $k = 0$ 또는 $k = \frac{1}{4}$

413 ㉔ -1

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - (4k-2)x + 8k$$

$$f(2) = 8 - 12 - 8k + 4 + 8k = 0$$

$x-2$ 는 $f(x)$ 의 인수 $2 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -3 & -4k+2 & 8k \\ & 2 & -2 & -8k \\ 1 & -1 & -4k & 0 \end{array} \right|$
 수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x) = (x-2)(x^2-x-4k)$$

이때 주어진 방정식이 한 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2 - x - 4k = 0$ 이 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2 - x - 4k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1 + 16k < 0 \quad \therefore k < -\frac{1}{16}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -1 이다.

414 ㉮ 5

$f(x) = 2x^3 + 11x^2 + (k+14)x + 2k$ 라 하면

$$f(-2) = -16 + 44 - 2k - 28 + 2k = 0$$

$x+2$ 는 $f(x)$ 의 인수로이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x) = (x+2)(2x^2 + 7x + k)$$

이때 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $2x^2 + 7x + k = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2 + 7x + k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 49 - 8k > 0 \quad \therefore k < \frac{49}{8}$$

그런데 이차방정식 $2x^2 + 7x + k = 0$ 이 $x = -2$ 를 근으로 가지면 안 되므로

$$8 - 14 + k \neq 0 \quad \therefore k \neq 6$$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

415 ㉮ 7

$f(x) = x^3 - 5x^2 + (a+4)x - a$ 라 하면

$$f(1) = 1 - 5 + a + 4 - a = 0$$

$x-1$ 은 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x) = (x-1)(x^2 - 4x + a)$$

이때 주어진 방정식의 서로 다른 실근이 2개가 되려면 중근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2 - 4x + a = 0$ 이 1과 다른 한 실근을 갖거나 1이 아닌 중근을 가져야 한다.

(i) $x^2 - 4x + a = 0$ 이 1을 근으로 갖는 경우

$$x=1을 대입하면$$

$$1 - 4 + a = 0 \quad \therefore a = 3$$

(ii) $x^2 - 4x + a = 0$ 이 1이 아닌 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2 - 4x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4 - a = 0 \quad \therefore a = 4 \quad \blacktriangleleft x \neq 1인 중근을 갖는다.$$

(i), (ii)에서 $a=3$ 또는 $a=4$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$3 + 4 = 7$$

416 ㉮ 512 cm³

처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x cm라 하자.

새로 만든 직육면체의 부피가 500 cm³이므로

$$(x+2)(x+2)(x-3) = 500$$

$$x^3 + x^2 - 8x - 512 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 512$ 라 하면

$$f(8) = 512 + 64 - 64 - 512 = 0$$

$x-8$ 은 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x) = (x-8)(x^2 + 9x + 64)$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서

$$(x-8)(x^2 + 9x + 64) = 0$$

$$\therefore x=8 \text{ 또는 } x = \frac{-9 \pm 5\sqrt{7}i}{2}$$

그런데 $x > 3$ 이므로 $x=8$

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 8 cm이므로 부피는 $8^3 = 512(\text{cm}^3)$ 이다.

417 ㉮ 2

직육면체 모양의 상자의 부피가 120 cm³이므로

$$(14-2x)(10-2x)x = 120$$

$$x^3 - 12x^2 + 35x - 30 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$f(x) = x^3 - 12x^2 + 35x - 30$ 이라 하면

$$f(2) = 8 - 48 + 70 - 30 = 0$$

$x-2$ 는 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x) = (x-2)(x^2 - 10x + 15)$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서

$$(x-2)(x^2 - 10x + 15) = 0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=5 \pm \sqrt{10}$$

그런데 $0 < x < 5$ 이고 x 는 자연수이므로 $x=2$

418 ㉡ 10 m

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x m 라 하면 높이는 $2x$ m이다.

175π m³의 물을 부었을 때 물의 높이가 $(2x-3)$ m 이므로

$$\pi x^2(2x-3)=175\pi$$

$$2x^3-3x^2-175=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(x)=2x^3-3x^2-175$ 라 하면

$$f(5)=250-75-175=0$$

$x-5$ 는 $f(x)$ 의 인수	5	2	-3	0	-175
이므로 조립제법을 이			10	35	175
용하여 $f(x)$ 를 인수	2	7	35		0

분해하면

$$f(x)=(x-5)(2x^2+7x+35)$$

따라서 ㉠에서

$$(x-5)(2x^2+7x+35)=0$$

$$\therefore x=5 \text{ 또는 } x=\frac{-7\pm\sqrt{231}i}{4}$$

그런데 $x>\frac{3}{2}$ 이므로 $x=5$

따라서 수족관의 높이는 10 m이다.

419 ㉡ 10

작은 구의 반지름의 길이를 x 라 하자.

큰 구의 반지름의 길이는 $2x+1$ 이고 두 구의 부피의

차가 $\frac{1264}{3}\pi$ 이므로

$$\frac{4}{3}\pi(2x+1)^3-\frac{4}{3}\pi x^3=\frac{1264}{3}\pi$$

$$7x^3+12x^2+6x-315=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(x)=7x^3+12x^2+6x-315$ 라 하면

$$f(3)=189+108+18-315=0$$

$x-3$ 은 $f(x)$ 의 인수	3	7	12	6	-315
이므로 조립제법을 이			21	99	315
용하여 $f(x)$ 를 인수분	7	33	105		0

해하면

$$f(x)=(x-3)(7x^2+33x+105)$$

따라서 ㉠에서

$$(x-3)(7x^2+33x+105)=0$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=\frac{-33\pm\sqrt{1851}i}{14}$$

그런데 $x>0$ 이므로 $x=3$

$$\therefore \overline{AB}=x+2x+1$$

$$=3x+1=10$$

개념 확인

201쪽

420 ㉡ (1) 6 (2) 12 (3) 20

$$(1) \alpha+\beta+\gamma=-\frac{-6}{1}=6$$

$$(2) \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{12}{1}=12$$

$$(3) \alpha\beta\gamma=-\frac{-20}{1}=20$$

421 ㉡ (1) $-\frac{1}{2}$ (2) 0 (3) 4

$$(1) \alpha+\beta+\gamma=-\frac{1}{2}$$

$$(2) \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{0}{2}=0$$

$$(3) \alpha\beta\gamma=-\frac{-8}{2}=4$$

422 ㉡ (1) $x^3-3x^2-6x+8=0$

$$(2) x^3-19x-30=0$$

$$(3) x^3-7x^2+13x-3=0$$

$$(4) x^3-3x^2+x+5=0$$

(1) 세 근이 $-2, 1, 4$ 이므로

$$(\text{세 근의 합})=-2+1+4=3$$

(두 근끼리의 곱의 합)

$$=-2\times 1+1\times 4+4\times (-2)=-6$$

$$(\text{세 근의 곱})=-2\times 1\times 4=-8$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$$x^3-3x^2-6x+8=0$$

(2) 세 근이 $-3, -2, 5$ 이므로

$$(\text{세 근의 합})=-3+(-2)+5=0$$

(두 근끼리의 곱의 합)

$$=-3\times (-2)+(-2)\times 5+5\times (-3)=-19$$

$$(\text{세 근의 곱})=-3\times (-2)\times 5=30$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$$x^3-19x-30=0$$

(3) 세 근이 $3, 2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$ 이므로

$$(\text{세 근의 합})=3+(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=7$$

(두 근끼리의 곱의 합)

$$=3\times (2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$$

$$+(2-\sqrt{3})\times 3$$

$$=13$$

$$(\text{세 근의 곱})=3\times (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=3$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$$x^3-7x^2+13x-3=0$$

(4) 세 근이 $-1, 2+i, 2-i$ 이므로
 (세 근의 합) $= -1 + (2+i) + (2-i) = 3$
 (두 근끼리의 곱의 합)
 $= -1 \times (2+i) + (2+i)(2-i)$
 $\quad\quad\quad + (2-i) \times (-1)$
 $= 1$
 (세 근의 곱) $= -1 \times (2+i) \times (2-i) = -5$
 따라서 구하는 삼차방정식은
 $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$

유제

203-205쪽

423 ㉮ (1) 27 (2) $-\frac{5}{6}$ (3) $\frac{3}{2}$

삼차방정식 $x^3 + x^2 + 5x + 6 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = -1, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 5, \alpha\beta\gamma = -6$$

$$(1) (\alpha+3)(\beta+3)(\gamma+3) \\ = \alpha\beta\gamma + 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 9(\alpha + \beta + \gamma) + 27 \\ = -6 + 3 \times 5 + 9 \times (-1) + 27 = 27$$

$$(2) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} = \frac{5}{-6} = -\frac{5}{6}$$

$$(3) \frac{\gamma}{\alpha\beta} + \frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{\beta}{\gamma\alpha} \\ = \frac{\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta\gamma} \\ = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma} \\ = \frac{(-1)^2 - 2 \times 5}{-6} = \frac{3}{2}$$

424 ㉮ 13

삼차방정식 $x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3, \alpha\beta\gamma = -1$$

$$\therefore \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 \\ = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2(\alpha\beta^2\gamma + \alpha\beta\gamma^2 + \alpha^2\beta\gamma) \\ = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \\ = 3^2 - 2 \times (-1) \times 2 = 13$$

425 ㉮ -1

삼차방정식 $x^3 + (m+2)x^2 - x + 3m = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = -m - 2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1,$$

$$\alpha\beta\gamma = -3m$$

$$\frac{3}{\alpha\beta} + \frac{3}{\beta\gamma} + \frac{3}{\gamma\alpha} = -1 \text{에서 } \frac{3(\alpha + \beta + \gamma)}{\alpha\beta\gamma} = -1 \\ \frac{3(-m-2)}{-3m} = -1 \\ -3m - 6 = 3m \quad \therefore m = -1$$

426 ㉮ 33

삼차방정식 $x^3 - ax^2 + 26x - b = 0$ 의 세 근을

$\alpha - 1, \alpha, \alpha + 1$ ($\alpha > 1$)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 두 근끼리의 곱의 합은

$$(\alpha - 1)\alpha + \alpha(\alpha + 1) + (\alpha + 1)(\alpha - 1) = 26$$

$$3\alpha^2 = 27, \alpha^2 = 9$$

$$\therefore \alpha = 3 \quad (\because \alpha > 1)$$

따라서 세 근이 2, 3, 4이므로 세 근의 합은

$$2 + 3 + 4 = a \quad \therefore a = 9$$

세 근의 곱은

$$2 \times 3 \times 4 = b \quad \therefore b = 24$$

$$\therefore a + b = 33$$

427 ㉮ (1) $x^3 + 6x^2 - 81 = 0$

$$(2) 9x^3 - 6x^2 + 1 = 0$$

삼차방정식 $x^3 - 6x + 9 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -6, \alpha\beta\gamma = -9$$

(1) 세 근 $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$ 에 대하여

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -6$$

$$\alpha\beta \times \beta\gamma + \beta\gamma \times \gamma\alpha + \gamma\alpha \times \alpha\beta = \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \\ = -9 \times 0 = 0$$

$$\alpha\beta \times \beta\gamma \times \gamma\alpha = (\alpha\beta\gamma)^2 = (-9)^2 = 81$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$$x^3 + 6x^2 - 81 = 0$$

(2) 세 근 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ 에 대하여

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \times \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} \\ = \frac{0}{-9} = 0$$

$$\frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} \times \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{-9} = -\frac{1}{9}$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$$9\left(x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right) = 0$$

$$\therefore 9x^3 - 6x^2 + 1 = 0$$

428 ㉡ (1) $a=-9, b=4$

(2) $a=-1, b=10$

- (1) 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $1+\sqrt{2}$ 가 근이면 $1-\sqrt{2}$ 도 근이다.

나머지 한 근을 α 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 합은

$$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})+\alpha=-2$$

$$\therefore \alpha=-4$$

즉, 세 근이 $1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, -4$ 이므로 두 근끼리의 곱의 합은

$$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\times(-4) \\ +(-4)\times(1+\sqrt{2})=a$$

$$\therefore a=-9$$

세 근의 곱은

$$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\times(-4)=b$$

$$\therefore b=4$$

- (2) 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $1-3i$ 가 근이면 $1+3i$ 도 근이다.

나머지 한 근을 α 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근끼리의 곱의 합은

$$(1-3i)(1+3i)+(1+3i)\times\alpha+\alpha(1-3i)=8$$

$$\therefore \alpha=-1$$

즉, 세 근이 $1-3i, 1+3i, -1$ 이므로 세 근의 합은

$$(1-3i)+(1+3i)+(-1)=-a$$

$$\therefore a=-1$$

세 근의 곱은

$$(1-3i)(1+3i)\times(-1)=-b$$

$$\therefore b=10$$

429 ㉡ 2

삼차방정식 $x^3+x^2-5x+2=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-1, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5, \alpha\beta\gamma=-2$$

세 근 $\frac{1}{\alpha\beta}, \frac{1}{\beta\gamma}, \frac{1}{\gamma\alpha}$ 에 대하여

$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}\times\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\times\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\gamma\alpha}\times\frac{1}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(\alpha\beta\gamma)^2}=\frac{-5}{(-2)^2}=-\frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}\times\frac{1}{\beta\gamma}\times\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{1}{(\alpha\beta\gamma)^2}=\frac{1}{(-2)^2}=\frac{1}{4}$$

따라서 $\frac{1}{\alpha\beta}, \frac{1}{\beta\gamma}, \frac{1}{\gamma\alpha}$ 을 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 4인 삼차방정식은

$$4\left(x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x-\frac{1}{4}\right)=0$$

$$\therefore 4x^3-2x^2-5x-1=0$$

따라서 $a=-2, b=-5, c=-1$ 이므로

$$a-b+c=2$$

430 ㉡ 11

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $-1-2i$ 가 근이면 $-1+2i$ 도 근이다.

나머지 한 근이 α 이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 곱은

$$(-1-2i)(-1+2i)\alpha=-10$$

$$\therefore \alpha=-2$$

즉, 세 근이 $-1-2i, -1+2i, -2$ 이므로 세 근의 합은

$$(-1-2i)+(-1+2i)+(-2)=-a$$

$$\therefore a=4$$

두 근끼리의 곱의 합은

$$(-1-2i)(-1+2i)+(-1+2i)\times(-2) \\ +(-2)\times(-1-2i)=b$$

$$\therefore b=9$$

$$\therefore a+a+b=-2+4+9=11$$

개념 확인

207쪽

431 ㉡ (1) 1 (2) 3 (3) 0 (4) -1

$$x^3=1\text{에서 }x^3-1=0, (x-1)(x^2+x+1)=0$$

ω 는 방정식 $x^3=1$ 의 한 허근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로 다른 한 근은 $\bar{\omega}$ 이다.

$$\therefore \omega+\bar{\omega}=-1, \omega\bar{\omega}=1$$

$$(1) \omega^{48}=(\omega^3)^{16}=1$$

$$(2) \omega^6+\omega^9+\omega^{12}=(\omega^3)^2+(\omega^3)^3+(\omega^3)^4 \\ =1+1+1=3$$

$$(3) \omega+\bar{\omega}+\omega\bar{\omega}=-1+1=0$$

$$(4) \omega^2+\omega=-1$$

432 ㉠ (1) 64 (2) 0 (3) 3

$x^3=1$ 에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω 는 방정식 $x^3=1$ 의 한 허근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

$$(1) (1-\omega+\omega^2)^6 = (-2\omega)^6 = 64\omega^6 \quad \blacktriangleleft \omega^2+\omega+1=0 \text{ 이용}$$

$$= 64(\omega^3)^2 = 64 \quad \blacktriangleleft \omega^3=1 \text{ 이용}$$

$$(2) 1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^8$$

$$= (1+\omega+\omega^2) + \omega^3(1+\omega+\omega^2) + \omega^6(1+\omega+\omega^2)$$

$$= 0 \quad \blacktriangleleft \omega^2+\omega+1=0 \text{ 이용}$$

(3) 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로 다른 한 근은 $\bar{\omega}$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega + \bar{\omega} = -1 \quad \therefore \bar{\omega} = -1 - \omega$$

$$\therefore (2+\omega^{10})(2+\bar{\omega})$$

$$= \{2+(\omega^3)^3 \times \omega\} \{2+(-1-\omega)\}$$

$$= (2+\omega)(1-\omega) \quad \blacktriangleleft \omega^3=1 \text{ 이용}$$

$$= 2-\omega-\omega^2$$

$$= 2+1=3 \quad \blacktriangleleft \omega^2+\omega+1=0 \text{ 이용}$$

433 ㉠ 1

$x^3=-1$ 에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

ω 는 방정식 $x^3=-1$ 의 한 허근이므로

$$\omega^3=-1, \omega^2-\omega+1=0$$

이때 $\omega^2-\omega+1=0$ 에서 $\omega^2=\omega-1$

$$\therefore 2\omega^3-4\omega^2+3\omega = -2-4\omega^2+3\omega$$

$$= -2-4(\omega-1)+3\omega = -\omega+2$$

따라서 $a=-1$, $b=2$ 이므로 $a+b=1$

434 ㉠ -2

$x^3+1=0$ 에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

ω 는 방정식 $x^3+1=0$ 의 한 허근이므로

$$\omega^3=-1, \omega^2-\omega+1=0$$

또 방정식 $x^3+1=0$ 의 한 허근이 ω 이면 다른 한 근은 $\bar{\omega}$ 이므로

$$\bar{\omega}^3=-1, \bar{\omega}^2-\bar{\omega}+1=0$$

$$\therefore \frac{\omega^{100}}{1+\omega^{50}} + \frac{\bar{\omega}^{100}}{1+\bar{\omega}^{50}}$$

$$= \frac{(\omega^3)^{33} \times \omega}{1+(\omega^3)^{16} \times \omega^2} + \frac{(\bar{\omega}^3)^{33} \times \bar{\omega}}{1+(\bar{\omega}^3)^{16} \times \bar{\omega}^2}$$

$$= \frac{-\omega}{1+\omega^2} + \frac{-\bar{\omega}}{1+\bar{\omega}^2} = \frac{-\omega}{\omega} + \frac{-\bar{\omega}}{\bar{\omega}}$$

$$= -1-1=-2$$

435 ㉠ 8

$x^3-1=0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω 는 방정식 $x^3-1=0$ 의 한 허근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

또 이차방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로 다른 한 근은 $\bar{\omega}$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega + \bar{\omega} = -1, \omega\bar{\omega} = 1$$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 계수가 실수이므로 한 근이 2ω 이면 다른 한 근은 $2\bar{\omega}$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2\omega + 2\bar{\omega} = -a, 2(\omega + \bar{\omega}) = -a \quad \therefore a = 2$$

$$2\omega \times 2\bar{\omega} = b, 4\omega\bar{\omega} = b \quad \therefore b = 4$$

$$\therefore ab = 8$$

연습문제

210~212쪽

436 ㉠ 0

$x^3+27=0$ 의 좌변을 인수분해하면

$$(x+3)(x^2-3x+9)=0 \quad \blacktriangleleft a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \text{ 이용}$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = \frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 $a=-3$, $b=\frac{3}{2}$, $c=\frac{3}{2}$ 이므로

$$a+b+c=0$$

437 ㉠ ②

$f(x)=2x^4-9x^3+6x^2+11x-6$ 이라 하면

$$f(-1)=2+9+6-11-6=0$$

$$f(2)=32-72+24+22-6=0$$

$x+1$, $x-2$ 는 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & -9 & 6 & 11 & -6 \\ & & -2 & 11 & -17 & 6 \\ \hline 2 & 2 & -11 & 17 & -6 & 0 \\ & & 4 & -14 & 6 & \\ \hline & 2 & -7 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$f(x) = (x+1)(x-2)(2x^2-7x+3)$$

$$= (x+1)(x-2)(2x-1)(x-3)$$

주어진 방정식은

$$(x+1)(2x-1)(x-2)(x-3)=0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 사차방정식 $2x^4 - 9x^3 + 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 의 근이 아닌 것은 ②이다.

438 ㉡ 54

$$(x^2 + 3x + 4)(x^2 + 3x + 1) = 40 \text{에서}$$

$$x^2 + 3x = X \text{로 놓으면}$$

$$(X + 4)(X + 1) = 40$$

$$X^2 + 5X - 36 = 0, (X + 9)(X - 4) = 0$$

$$\therefore X = -9 \text{ 또는 } X = 4$$

(i) $X = -9$ 일 때,

$$x^2 + 3x + 9 = 0 \text{이므로 이 이차방정식의 판별식을}$$

$$D_1 \text{이라 하면}$$

$$D_1 = 9 - 36 = -27 < 0$$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X = 4$ 일 때,

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \text{이므로 이 이차방정식의 판별식을}$$

$$D_2 \text{라 하면}$$

$$D_2 = 9 + 16 = 25 > 0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 허근 α, β 는 이차방정식 $x^2 + 3x + 9 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -3, \alpha\beta = 9$$

$$\therefore \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= (-3)^3 - 3 \times 9 \times (-3) = 54$$

439 ㉡ 4√3

$$x^4 - 24x^2 + 36 = 0 \text{에서}$$

$$(x^4 + 12x^2 + 36) - 36x^2 = 0$$

$$(x^2 + 6)^2 - (6x)^2 = 0$$

$$(x^2 + 6x + 6)(x^2 - 6x + 6) = 0$$

$$\therefore x = -3 \pm \sqrt{3} \text{ 또는 } x = 3 \pm \sqrt{3}$$

이때 $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ 이므로

$$\alpha = -3 - \sqrt{3}, \beta = -3 + \sqrt{3}, \gamma = 3 - \sqrt{3}, \delta = 3 + \sqrt{3}$$

$$\therefore \delta - \gamma + \beta - \alpha = 4\sqrt{3}$$

440 ㉡ 3

삼차방정식 $x^3 + ax^2 - 11x - 12 = 0$ 의 한 근이 -1 이므로 $x = -1$ 을 대입하면

$$-1 + a + 11 - 12 = 0 \quad \therefore a = 2$$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$$x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$$

$$\begin{array}{l|llll} \text{이 방정식의 한 근이 } -1 & 1 & 2 & -11 & -12 \\ \text{이므로 조립제법} & & -1 & -1 & 12 \\ \text{을 이용하여 좌변을} & 1 & 1 & -12 & 0 \end{array}$$

인수분해하면

$$(x + 1)(x^2 + x - 12) = 0$$

$$(x + 1)(x + 4)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = -4 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 나머지 두 근 중 큰 수는 3이다.

441 ㉡ 4

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + (a - 8)x - 2a \text{라 하면}$$

$$f(2) = 8 + 8 + 2a - 16 - 2a = 0$$

$$\begin{array}{l|llll} x - 2 \text{는 } f(x) \text{의 인수} & 2 & 1 & 2 & a - 8 & -2a \\ \text{이므로 조립제법을 이} & & & 2 & 8 & 2a \\ \text{용하여 } f(x) \text{를 인수} & 1 & 4 & a & 0 \end{array}$$

분해하면

$$f(x) = (x - 2)(x^2 + 4x + a)$$

이때 주어진 방정식이 실근만을 가지려면 이차방정식 $x^2 + 4x + a = 0$ 이 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4 - a \geq 0 \quad \therefore a \leq 4$$

따라서 a 의 최댓값은 4이다.

442 ㉡ ③

삼차방정식 $2x^3 - 8x^2 - 5x - 10 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = 4, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -\frac{5}{2}, \alpha\beta\gamma = 5$$

$$\therefore \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma$$

$$= 4 \times \left\{ 4^2 - 3 \times \left(-\frac{5}{2} \right) \right\} + 3 \times 5 = 109$$

443 ㉡ 10

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $3i$ 가 근이면 $-3i$ 도 근이다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 합은

$$3i + (-3i) + \alpha = 1 \quad \therefore \alpha = 1$$

즉, 세 근이 $3i, -3i, 1$ 이므로 세 근의 곱은

$$3i \times (-3i) \times 1 = k \quad \therefore k = 9$$

$$\therefore k + \alpha = 10$$

444 ㉠ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$$x^3+1=0 \text{에서 } (x+1)(x^2-x+1)=0$$

ω 는 방정식 $x^3+1=0$ 의 한 허근이므로

$$\omega^3=-1, \omega^2-\omega+1=0$$

또 이차방정식 $x^2-x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로 다른 한 근은 $\bar{\omega}$ 이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\omega+\bar{\omega}=1, \omega\bar{\omega}=1$$

$$\text{ㄱ. } \omega^{25}=(\omega^3)^8 \times \omega = (-1)^8 \times \omega = \omega$$

$$\text{ㄴ. } \omega+\bar{\omega}=1, \omega\bar{\omega}=1 \text{이므로 } \omega+\bar{\omega}=\omega\bar{\omega}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } 1-\omega+\omega^2-\omega^3+\omega^4-\omega^5 \\ = (1-\omega+\omega^2)-\omega^3(1-\omega+\omega^2)=0 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

445 ㉠ 18

$$(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)=80 \text{에서}$$

$$\{(x-2)(x-5)\}\{(x-3)(x-4)\}=80$$

$$(x^2-7x+10)(x^2-7x+12)=80$$

$$x^2-7x=X \text{로 놓으면}$$

$$(X+10)(X+12)=80$$

$$X^2+22X+40=0, (X+2)(X+20)=0$$

$$\therefore X=-2 \text{ 또는 } X=-20$$

(i) $X=-2$ 일 때,

$$x^2-7x+2=0 \text{이므로 이 이차방정식의 판별식을}$$

$$D_1 \text{이라 하면}$$

$$D_1=49-8=41>0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $X=-20$ 일 때,

$$x^2-7x+20=0 \text{이므로 이 이차방정식의 판별식을}$$

$$D_2 \text{라 하면}$$

$$D_2=49-80=-31<0$$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 두 실근은 이차방정식 $x^2-7x+2=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 곱은

$$a=2$$

또 주어진 방정식의 서로 다른 두 허근은 이차방정식 $x^2-7x+20=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 허근의 곱은

$$b=20$$

$$\therefore b-a=20-2=18$$

446 ㉠ 8

$$x^4-(2a-1)x^2+a^2-a-12=0 \text{에서}$$

$$x^2=X \text{로 놓으면}$$

$$X^2-(2a-1)X+(a+3)(a-4)=0$$

$$\{X-(a+3)\}\{X-(a-4)\}=0$$

$$\therefore X=a+3 \text{ 또는 } X=a-4$$

$$\text{즉, } x^2=a+3 \text{ 또는 } x^2=a-4 \text{이므로}$$

$$x=\pm\sqrt{a+3} \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{a-4}$$

▶▶▶▶▶ ①

(i) $a=-3$ 일 때,

$$x=0 \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{7}i \text{이므로}$$

$$f(-3)=1$$

(ii) $a=-1$ 일 때,

$$x=\pm\sqrt{2} \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{5}i \text{이므로}$$

$$f(-1)=2$$

(iii) $a=2$ 일 때,

$$x=\pm\sqrt{5} \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{2}i \text{이므로}$$

$$f(2)=2$$

(iv) $a=4$ 일 때,

$$x=\pm\sqrt{7} \text{ 또는 } x=0 \text{이므로}$$

$$f(4)=3$$

▶▶▶▶▶ ②

(i)~(iv)에서

$$f(-3)+f(-1)+f(2)+f(4)=1+2+2+3=8$$

▶▶▶▶▶ ③

단계	채점 기준	비율
①	방정식의 해를 a 에 대한 식으로 나타내기	50%
②	a 의 값에 따른 서로 다른 실근의 개수 구하기	40%
③	$f(-3)+f(-1)+f(2)+f(4)$ 의 값 구하기	10%

447 ㉠ 1

$x \neq 0$ 이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2-7x+8-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$$

$$x+\frac{1}{x}=X \text{로 놓으면}$$

$$X^2-7X+6=0, (X-1)(X-6)=0$$

$$\therefore X=1 \text{ 또는 } X=6$$

(i) $X=1$ 일 때,

$x + \frac{1}{x} - 1 = 0$ 에서 $x^2 - x + 1 = 0$ 이므로 이 이차
방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(ii) $X=6$ 일 때,

$x + \frac{1}{x} - 6 = 0$ 에서 $x^2 - 6x + 1 = 0$ 이므로 이 이차
방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = 9 - 1 = 8 > 0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 두 허근은 이
차방정식 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의
관계에 의하여 두 허근의 합은 1이다.

448 ㉡ ③

$(x-a)\{x^2 + (1-3a)x + 4\} = 0$ 에서

$x=a$ 또는 $x^2 + (1-3a)x + 4 = 0$ ㉠

이때 주어진 방정식의 한 근이 1이므로

(i) $a=1$ 일 때,

㉠의 이차방정식에서 $x^2 - 2x + 4 = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - 4 = -3 < 0$$

따라서 서로 다른 두 허근을 가지므로 조건을 만족
시키지 않는다.

(ii) $a \neq 1$ 일 때,

이차방정식 $x^2 + (1-3a)x + 4 = 0$ 의 한 근이 1이
므로 $x=1$ 을 대입하면

$$1 + 1 - 3a + 4 = 0, -3a + 6 = 0 \quad \therefore a = 2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$x = 2 \text{ 또는 } x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = 2 \text{ 또는 } (x-1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 $\alpha=2, \beta=4$ 또는 $\alpha=4, \beta=2$ 이므로

$$\alpha\beta = 8$$

449 ㉡ ④

$f(x) = x^3 - 7x^2 - 3(k-2)x + 3k$ 라 하면

$$f(1) = 1 - 7 - 3k + 6 + 3k = 0$$

$$x-1 \text{은 } f(x) \text{의 인수이므로 조립제법을 이용하여 } f(x) \text{를 인수분해하면}$$

1	1	-7	-3k+6	3k
		1	-6	-3k
1	-6	-3k		0

$f(x)$ 를 인수분해하면

$$f(x) = (x-1)(x^2 - 6x - 3k)$$

이때 주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면
이차방정식 $x^2 - 6x - 3k = 0$ 이 1을 중근으로 갖거나
허근을 가져야 한다.

(i) $x^2 - 6x - 3k = 0$ 이 1을 중근으로 갖는 경우

$$x=1 \text{을 대입하면 } 1 - 6 - 3k = 0 \quad \therefore k = -\frac{5}{3}$$

이를 방정식 $x^2 - 6x - 3k = 0$ 에 대입하면

$$x^2 - 6x + 5 = 0, (x-1)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 5$$

즉, 1을 중근으로 갖지 않는다.

(ii) $x^2 - 6x - 3k = 0$ 이 허근을 갖는 경우

$x^2 - 6x - 3k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 + 3k < 0 \quad \therefore k < -3$$

(i), (ii)에서 $k < -3$

따라서 정수 k 의 최댓값은 -4 이다.

450 ㉡ 3 mm

I 접근 방법 주어진 캡슐의 부피는 반구 2개의 부피와 원기둥
의 부피의 합과 같다.

반구의 반지름의 길이를 x mm라 하면 주어진 캡슐
의 부피가 90π mm³이므로

$$\frac{4}{3}\pi x^3 + \pi x^2(12-2x) = 90\pi$$

$$x^3 - 18x^2 + 135 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f(x) = x^3 - 18x^2 + 135 \text{라 하면}$$

$$f(3) = 27 - 162 + 135 = 0$$

$$x-3 \text{은 } f(x) \text{의 인 수이므로 조립제법을 이용하여 } f(x) \text{를 인수분해하면}$$

3	1	-18	0	135
		3	-45	-135
1	-15	-45		0

$$f(x) = (x-3)(x^2 - 15x - 45)$$

따라서 ㉠에서

$$(x-3)(x^2 - 15x - 45) = 0$$

$$\therefore x = 3 \text{ 또는 } x = \frac{15 \pm 9\sqrt{5}}{2}$$

그런데 $0 < x < 6$ 이므로 $x = 3$

따라서 반구의 반지름의 길이는 3 mm이다.

451 ㉔ ②

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(0) = 7 \text{이므로 } c = 7$$

$$\therefore f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$$

$$f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 4 \text{에서}$$

$$f(\alpha) - 4 = f(\beta) - 4 = f(\gamma) - 4 = 0$$

따라서 α, β, γ 는 삼차방정식 $f(x) - 4 = 0$, 즉

$x^3 + ax^2 + bx + 3 = 0$ 의 세 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 곱은

$$\alpha\beta\gamma = -3$$

452 ㉔ 2

삼차방정식 $x^3 + 4x^2 - 3x + 2 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ

이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = -4, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3, \alpha\beta\gamma = -2$$

세 근 $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ 에 대하여

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$= (-4)^2 - 2 \times (-3) = 22$$

$$\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2$$

$$= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$= (-3)^2 - 2 \times (-2) \times (-4) = -7$$

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = (\alpha\beta\gamma)^2 = (-2)^2 = 4$$

따라서 $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ 을 세 근으로 하고 x^3 의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3 - 22x^2 - 7x - 4 = 0$$

따라서 $a = 22, b = 7, c = 4$ 이므로 $\frac{a}{b+c} = 2$

453 ㉔ $\frac{3}{2}$

$$x^3 = 1 \text{에서 } x^3 - 1 = 0, (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

ω 는 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근이므로

$$\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

$$\therefore \frac{1}{1+\omega^{20}} + \frac{1}{1+\omega^{21}} + \frac{1}{1+\omega^{22}}$$

$$= \frac{1}{1+(\omega^3)^6 \times \omega^2} + \frac{1}{1+(\omega^3)^7} + \frac{1}{1+(\omega^3)^7 \times \omega}$$

$$= \frac{1}{1+\omega^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1+\omega}$$

$$= \frac{1}{-\omega} + \frac{1}{2} + \frac{1}{-\omega^2} \quad (\because \omega^2 + \omega + 1 = 0)$$

$$= -\frac{\omega+1}{\omega^2} + \frac{1}{2} = -\frac{-\omega^2}{\omega^2} + \frac{1}{2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

454 ㉔ 12

[접근 방법] 주어진 사차방정식의 좌변을 인수분해한 후 이 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 중근을 가져야 함을 이용한다.

$$x^4 + (2a+1)x^3 + (3a+2)x^2 + (a+2)x = 0 \text{에서}$$

$$x\{x^3 + (2a+1)x^2 + (3a+2)x + a+2\} = 0$$

$$f(x) = x^3 + (2a+1)x^2 + (3a+2)x + a+2 \text{라 하면}$$

$$f(-1) = -1 + 2a + 1 - 3a - 2 + a + 2 = 0$$

$x+1$ 은 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여

$f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2a+1 & 3a+2 & a+2 \\ & & -1 & -2a & -a-2 \\ \hline & 1 & 2a & a+2 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = (x+1)(x^2 + 2ax + a+2)$$

주어진 방정식은

$$x(x+1)(x^2 + 2ax + a+2) = 0$$

이때 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2 + 2ax + a+2 = 0$ 이 0 또는 -1을 근으로 갖거나 0, -1이 아닌 중근을 가져야 한다.

(i) $x^2 + 2ax + a+2 = 0$ 이 0을 근으로 갖는 경우

$$x=0 \text{을 대입하면}$$

$$a+2=0 \quad \therefore a=-2$$

이를 $x^2 + 2ax + a+2 = 0$ 에 대입하면

$$x^2 - 4x = 0, x(x-4) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

(ii) $x^2 + 2ax + a+2 = 0$ 이 -1을 근으로 갖는 경우

$$x=-1 \text{을 대입하면}$$

$$1 - 2a + a + 2 = 0$$

$$\therefore a=3$$

이를 $x^2 + 2ax + a+2 = 0$ 에 대입하면

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$(x+1)(x+5) = 0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=-5$$

따라서 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

(iii) $x^2 + 2ax + a+2 = 0$ 이 0, -1이 아닌 중근을 갖는 경우

$x^2 + 2ax + a+2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - a - 2 = 0$$

$(a+1)(a-2)=0 \quad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=2$
 $a=-1$ 을 $x^2+2ax+a+2=0$ 에 대입하면
 $x^2-2x+1=0, (x-1)^2=0 \quad \therefore x=1$ (중근)
 이는 조건을 만족시킨다.
 $a=2$ 를 $x^2+2ax+a+2=0$ 에 대입하면
 $x^2+4x+4=0, (x+2)^2=0 \quad \therefore x=-2$ (중근)
 이는 조건을 만족시킨다.

(i), (ii), (iii)에서

$a=-2$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$

따라서 구하는 곱은

$$-2 \times (-1) \times 2 \times 3 = 12$$

455 $\frac{80}{9}$

| 접근 방법 | 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해한 후 빗변의 길이가 될 수 있는 값을 찾는다.

$f(x)=x^3-8x^2+(12+k)x-2k$ 라 하면

$$f(2)=8-32+24+2k-2k=0$$

$x-2$ 는 $f(x)$ 의 인 2

1	-8	$12+k$	$-2k$
	2	-12	$2k$
1	-6	k	0

 수이므로 조립제법
 을 이용하여 $f(x)$ 를
 인수분해하면

$$f(x)=(x-2)(x^2-6x+k)$$

주어진 방정식은

$$(x-2)(x^2-6x+k)=0$$

이차방정식 $x^2-6x+k=0$ 이 2가 아닌 서로 다른 두 실근을 가지므로

$$4-12+k \neq 0 \quad \therefore k \neq 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

또한 주어진 방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=9-k>0 \quad \therefore k<9 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{에서 } k<8 \text{ 또는 } 8<k<9 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

이차방정식 $x^2-6x+k=0$ 의 두 근을 α, β ($\alpha<\beta$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=6, \alpha\beta=k$$

2, α, β 는 직각삼각형의 세 변의 길이이므로 빗변의 길이가 2 또는 β 인 경우로 나누어 생각하자.

(i) 빗변의 길이가 2인 경우

$$\alpha^2+\beta^2=4 \text{이므로}$$

$$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4$$

$$6^2-2k=4$$

$$\therefore k=16$$

이는 $\textcircled{C}$ 을 만족시키지 않는다.

(ii) 빗변의 길이가 β 인 경우

$$\alpha^2+4=\beta^2 \text{이므로}$$

$$\alpha^2-\beta^2=-4$$

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=-4$$

$$6(\alpha-\beta)=-4$$

$$\therefore \alpha-\beta=-\frac{2}{3}$$

$$\alpha+\beta=6, \alpha-\beta=-\frac{2}{3} \text{를 연립하여 풀면}$$

$$\alpha=\frac{8}{3}, \beta=\frac{10}{3}$$

$$\therefore k=\frac{8}{3} \times \frac{10}{3}=\frac{80}{9}$$

(i), (ii)에서 $k=\frac{80}{9}$  $\textcircled{C}$ 을 만족시킨다.

| 참고 | 2, α, β 가 직각삼각형의 세 변의 길이이고, $\alpha<\beta$ 일 때 $\alpha+\beta=6$ 이면

$$6-\beta<\beta \quad \therefore \beta>3$$

따라서 β 가 세 값 중 가장 크므로 빗변의 길이는 β 이다.

456 8

| 접근 방법 | $\omega^3=-1, \omega^2-\omega+1=0$ 임을 이용하여 $\omega^m+\omega^n$ 이 될 수 있는 음수의 값을 찾는다.

$$x^3=-1 \text{에서 } x^3+1=0, (x+1)(x^2-x+1)=0$$

ω 는 방정식 $x^3=-1$ 의 한 허근이므로

$$\omega^3=-1, \omega^2-\omega+1=0$$

$\omega^m+\omega^n$ 의 값이 음수가 되려면 $\omega^m+\omega^n=-1$ 또는

$\omega^m+\omega^n=-2$ 이어야 한다.

$\omega^2-\omega=-1$ 이므로 $\omega^m+\omega^n=-1$ 을 만족시키는 자연수 m, n 은 $m=6k-4, n=6l-2$ 또는 $m=6k-2, n=6l-4$ (k, l 은 자연수) 꼴이고,

$\omega^3+\omega^3=-2$ 이므로 $\omega^m+\omega^n=-2$ 를 만족시키는 자연수 m, n 은 $m=6k-3, n=6l-3$ (k, l 은 자연수) 꼴이다.

(i) $m=6k-4, n=6l-2$ 또는 $m=6k-2,$

$n=6l-4$ (k, l 은 자연수) 꼴인 경우

조건을 만족시키는 9 이하의 자연수 m, n 의 순서쌍 (m, n) 은 $(2, 4), (4, 2), (4, 8), (8, 4)$ 의 4개이다.

(ii) $m=6k-3, n=6l-3$ (k, l 은 자연수) 꼴인 경우

조건을 만족시키는 9 이하의 자연수 m, n 의 순서쌍 (m, n) 은 $(3, 3), (3, 9), (9, 3), (9, 9)$ 의 4개이다.

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$4+4=8$$

02 연립이차방정식

유제

217~229쪽

457 ㉡ (1) $\begin{cases} x=10 \\ y=-9 \end{cases}$
 (2) $\begin{cases} x=-23 \\ y=-9 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}$

(1) $x+y=1$ 에서

$$y=-x+1$$

이를 $x^2-y^2=19$ 에 대입하면

$$x^2-(-x+1)^2=19$$

$$2x-1=19$$

$$\therefore x=10$$

이를 $y=-x+1$ 에 대입하면

$$y=-9$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=10 \\ y=-9 \end{cases}$$

(2) $x-3y=4$ 에서

$$x=3y+4$$

이를 $x^2-3xy+y^2=-11$ 에 대입하면

$$(3y+4)^2-3(3y+4)y+y^2=-11$$

$$y^2+12y+27=0$$

$$(y+9)(y+3)=0$$

$$\therefore y=-9 \text{ 또는 } y=-3$$

이를 각각 $x=3y+4$ 에 대입하면

$$y=-9 \text{ 일 때 } x=-23, y=-3 \text{ 일 때 } x=-5$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=-23 \\ y=-9 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}$$

| 다른 풀이 |

(1) $x^2-y^2=14$ 에서 $(x+y)(x-y)=14$

$x+y=1$ 을 대입하면

$$x-y=14$$

$x-y=14$ 와 $x+y=1$ 을 연립하여 풀면

$$x=\frac{15}{2}, y=-\frac{13}{2}$$

458 ㉡ ①

$2x-y=1$ 에서 $y=2x-1$

이를 $4x^2-x-y^2=5$ 에 대입하면

$$4x^2-x-(2x-1)^2=5$$

$$3x-6=0 \quad \therefore x=2$$

이를 $y=2x-1$ 에 대입하면

$$y=3$$

따라서 $\alpha=2, \beta=3$ 이므로

$$\alpha\beta=6$$

459 ㉡ 1

$x-y=3$ 에서 $y=x-3$

이를 $x^2-5xy-y^2=13$ 에 대입하면

$$x^2-5x(x-3)-(x-3)^2=13$$

$$5x^2-21x+22=0$$

$$(x-2)(5x-11)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=\frac{11}{5}$$

그런데 x 는 정수이므로 $x=2$

이를 $y=x-3$ 에 대입하면 $y=-1$

$$\therefore x+y=1$$

460 ㉡ 100

$x+y=2$ 에서 $y=-x+2$

이를 $x^2+xy-y^2=-20$ 에 대입하면

$$x^2+x(-x+2)-(-x+2)^2=-20$$

$$x^2-6x-16=0$$

$$(x+2)(x-8)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=8$$

이를 각각 $y=-x+2$ 에 대입하면

$$x=-2 \text{ 일 때 } y=4,$$

$$x=8 \text{ 일 때 } y=-6$$

$$\therefore x^2+y^2=20 \text{ 또는 } x^2+y^2=100$$

따라서 x^2+y^2 의 최댓값은 100이다.

461 ㉡ (1) $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=2\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-2\sqrt{2} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{6} \\ y=-\sqrt{6} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{6} \\ y=\sqrt{6} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x=-2\sqrt{6} \\ y=\sqrt{6} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{6} \\ y=-\sqrt{6} \end{cases}$

$$(1) 2x^2 - xy - y^2 = 0 \text{에서 } (2x+y)(x-y)=0$$

$$\therefore y = -2x \text{ 또는 } y = x$$

$$(i) y = -2x \text{ 일 때,}$$

이를 $x^2 + 2y^2 = 18$ 에 대입하면

$$x^2 + 8x^2 = 18, x^2 = 2$$

$$\therefore x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x = \sqrt{2}$$

이를 각각 $y = -2x$ 에 대입하면

$$x = -\sqrt{2} \text{ 일 때 } y = 2\sqrt{2},$$

$$x = \sqrt{2} \text{ 일 때 } y = -2\sqrt{2}$$

$$(ii) y = x \text{ 일 때,}$$

이를 $x^2 + 2y^2 = 18$ 에 대입하면

$$x^2 + 2x^2 = 18, x^2 = 6$$

$$\therefore x = -\sqrt{6} \text{ 또는 } x = \sqrt{6}$$

이를 각각 $y = x$ 에 대입하면

$$x = -\sqrt{6} \text{ 일 때 } y = -\sqrt{6},$$

$$x = \sqrt{6} \text{ 일 때 } y = \sqrt{6}$$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{또는 } \begin{cases} x = -\sqrt{6} \\ y = -\sqrt{6} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = \sqrt{6} \\ y = \sqrt{6} \end{cases}$$

$$(2) x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \text{에서 } (x+y)(x+2y)=0$$

$$\therefore x = -y \text{ 또는 } x = -2y$$

$$(i) x = -y \text{ 일 때,}$$

이를 $x^2 + 2xy - y^2 = -6$ 에 대입하면

$$y^2 - 2y^2 - y^2 = -6, y^2 = 3$$

$$\therefore y = -\sqrt{3} \text{ 또는 } y = \sqrt{3}$$

이를 각각 $x = -y$ 에 대입하면

$$y = -\sqrt{3} \text{ 일 때 } x = \sqrt{3},$$

$$y = \sqrt{3} \text{ 일 때 } x = -\sqrt{3}$$

$$(ii) x = -2y \text{ 일 때,}$$

이를 $x^2 + 2xy - y^2 = -6$ 에 대입하면

$$4y^2 - 4y^2 - y^2 = -6, y^2 = 6$$

$$\therefore y = -\sqrt{6} \text{ 또는 } y = \sqrt{6}$$

이를 각각 $x = -2y$ 에 대입하면

$$y = -\sqrt{6} \text{ 일 때 } x = 2\sqrt{6}$$

$$y = \sqrt{6} \text{ 일 때 } x = -2\sqrt{6}$$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{또는 } \begin{cases} x = -2\sqrt{6} \\ y = \sqrt{6} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 2\sqrt{6} \\ y = -\sqrt{6} \end{cases}$$

462 4

$$x^2 + xy - 12y^2 = 0 \text{에서 } (x+4y)(x-3y)=0$$

$$\therefore x = -4y \text{ 또는 } x = 3y$$

$$(i) x = -4y \text{ 일 때,}$$

이를 $x^2 + 4xy - 3y^2 = 24$ 에 대입하면

$$16y^2 - 16y^2 - 3y^2 = 24$$

$$y^2 = -8$$

$$\therefore y = -2\sqrt{2}i \text{ 또는 } y = 2\sqrt{2}i$$

이를 각각 $x = -4y$ 에 대입하면

$$y = -2\sqrt{2}i \text{ 일 때 } x = 8\sqrt{2}i,$$

$$y = 2\sqrt{2}i \text{ 일 때 } x = -8\sqrt{2}i$$

$$(ii) x = 3y \text{ 일 때,}$$

이를 $x^2 + 4xy - 3y^2 = 24$ 에 대입하면

$$9y^2 + 12y^2 - 3y^2 = 24$$

$$y^2 = \frac{4}{3}$$

$$\therefore y = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

이를 각각 $x = 3y$ 에 대입하면

$$y = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 일 때 } x = -2\sqrt{3},$$

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 일 때 } x = 2\sqrt{3}$$

(i), (ii)에서 양의 실수 x, y 는 $x = 2\sqrt{3}, y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이

므로

$$xy = 4$$

463 10

$$3x^2 - 4xy - 4y^2 = 0 \text{에서 } (3x+2y)(x-2y)=0$$

$$\therefore y = -\frac{3}{2}x \text{ 또는 } y = \frac{1}{2}x$$

이때 $xy < 0$ 에서 x, y 의 부호가 서로 다르므로

$$y = -\frac{3}{2}x$$

이를 $x^2 - y - 10 = 0$ 에 대입하면

$$x^2 + \frac{3}{2}x - 10 = 0$$

$$2x^2 + 3x - 20 = 0$$

$$(x+4)(2x-5)=0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = \frac{5}{2}$$

그런데 x 는 정수이므로 $x = -4$

$$\text{이를 } y = -\frac{3}{2}x \text{에 대입하면 } y = 6$$

$$\therefore |x-y| = 10$$

464 ㉠ 3√2

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \text{에서 } (x-2y)(x-3y) = 0$$

$$\therefore x=2y \text{ 또는 } x=3y$$

(i) $x=2y$ 일 때,

$$\text{이를 } 2x^2 + xy + y^2 = 22 \text{에 대입하면}$$

$$8y^2 + 2y^2 + y^2 = 22, y^2 = 2$$

$$\therefore y = -\sqrt{2} \text{ 또는 } y = \sqrt{2}$$

$$\text{이를 각각 } x=2y \text{에 대입하면}$$

$$y = -\sqrt{2} \text{일 때 } x = -2\sqrt{2},$$

$$y = \sqrt{2} \text{일 때 } x = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore x+y = -3\sqrt{2} \text{ 또는 } x+y = 3\sqrt{2}$$

(ii) $x=3y$ 일 때,

$$\text{이를 } 2x^2 + xy + y^2 = 22 \text{에 대입하면}$$

$$18y^2 + 3y^2 + y^2 = 22, y^2 = 1$$

$$\therefore y = -1 \text{ 또는 } y = 1$$

$$\text{이를 각각 } x=3y \text{에 대입하면}$$

$$y = -1 \text{일 때 } x = -3, y = 1 \text{일 때 } x = 3$$

$$\therefore x+y = -4 \text{ 또는 } x+y = 4$$

(i), (ii)에서 $x+y$ 의 최댓값은 $3\sqrt{2}$ 이다.

465 ㉠ (1) $\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

$$\text{또는 } \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$$

(2) $\begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases}$

$$\text{또는 } \begin{cases} x=1-\sqrt{15} \\ y=1+\sqrt{15} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1+\sqrt{15} \\ y=1-\sqrt{15} \end{cases}$$

(1) $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ 이므로 주어진 연립방정식에서 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} v=8 \\ u^2-2v=20 \end{cases}$$

$$v=8 \text{을 } u^2-2v=20 \text{에 대입하면 } u^2-16=20$$

$$u^2=36 \quad \therefore u=-6 \text{ 또는 } u=6$$

(i) $u=-6, v=8$, 즉 $x+y=-6, xy=8$ 일 때,

x, y 는 이차방정식 $t^2+6t+8=0$ 의 두 근이므로

$$(t+4)(t+2)=0 \quad \therefore t=-4 \text{ 또는 } t=-2$$

(ii) $u=6, v=8$, 즉 $x+y=6, xy=8$ 일 때,

x, y 는 이차방정식 $t^2-6t+8=0$ 의 두 근이므로

$$(t-2)(t-4)=0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=4$$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\text{또는 } \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$$

(2) $x^2 + y^2 - 3(x+y) = (x+y)^2 - 2xy - 3(x+y)$

이므로 주어진 연립방정식에서 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} 2u+v=-10 \\ u^2-2v-3u=26 \end{cases}$$

$$2u+v=-10 \text{에서 } v=-2u-10$$

이를 $u^2-2v-3u=26$ 에 대입하면

$$u^2-2(-2u-10)-3u=26$$

$$u^2+u-6=0, (u+3)(u-2)=0$$

$$\therefore u=-3 \text{ 또는 } u=2$$

이를 각각 $v=-2u-10$ 에 대입하면

$$u=-3 \text{일 때 } v=-4, u=2 \text{일 때 } v=-14$$

(i) $u=-3, v=-4$, 즉 $x+y=-3, xy=-4$ 일 때,

x, y 는 이차방정식 $t^2+3t-4=0$ 의 두 근이므로

$$(t+4)(t-1)=0 \quad \therefore t=-4 \text{ 또는 } t=1$$

(ii) $u=2, v=-14$, 즉 $x+y=2, xy=-14$ 일 때,

x, y 는 이차방정식 $t^2-2t-14=0$ 의 두 근이므로

$$t=1 \pm \sqrt{15}$$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1-\sqrt{15} \\ y=1+\sqrt{15} \end{cases}$$

$$\text{또는 } \begin{cases} x=1+\sqrt{15} \\ y=1-\sqrt{15} \end{cases}$$

466 ㉠ ①

주어진 연립방정식에서 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u+v=8 \\ 2u-v=4 \end{cases}$$

두 식을 연립하여 풀면 $u=4, v=4$

$$\therefore x+y=4, xy=4$$

x, y 는 이차방정식 $t^2-4t+4=0$ 의 두 근이므로

$$(t-2)^2=0 \quad \therefore t=2$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는 $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ 이므로

$$\alpha=2, \beta=2 \quad \therefore \alpha^2+\beta^2=8$$

467 ㉡ (1, 3), (3, 1)

$x^2 + y^2 - (x+y) = (x+y)^2 - 2xy - (x+y)$ 이므로
주어진 연립방정식에서 $x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u-2v=-2 \\ u^2-2v-u=6 \end{cases}$$

$$u-2v=-2 \text{에서 } v=\frac{u}{2}+1$$

이를 $u^2-2v-u=6$ 에 대입하면

$$u^2-2\left(\frac{u}{2}+1\right)-u=6, u^2-2u-8=0$$

$$(u+2)(u-4)=0$$

$$\therefore u=-2 \text{ 또는 } u=4$$

$$\text{이를 각각 } v=\frac{u}{2}+1 \text{에 대입하면}$$

$$u=-2 \text{일 때 } v=0, u=4 \text{일 때 } v=3$$

(i) $u=-2$, $v=0$, 즉 $x+y=-2$, $xy=0$ 일 때,

x, y 는 이차방정식 $t^2+2t=0$ 의 두 근이므로

$$t(t+2)=0$$

$$\therefore t=-2 \text{ 또는 } t=0$$

(ii) $u=4$, $v=3$, 즉 $x+y=4$, $xy=3$ 일 때,

x, y 는 이차방정식 $t^2-4t+3=0$ 의 두 근이므로

$$(t-1)(t-3)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

따라서 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는

$$(1, 3), (3, 1)$$

468 ㉡ 4

$x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy$ 이므로 주어진 연립방정식에서 $x+y=u$, $xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u-v=5 \\ u^2-3v=13 \end{cases}$$

$$u-v=5 \text{에서 } v=u-5$$

이를 $u^2-3v=13$ 에 대입하면

$$u^2-3(u-5)=13, u^2-3u+2=0$$

$$(u-1)(u-2)=0 \quad \therefore u=1 \text{ 또는 } u=2$$

이를 각각 $v=u-5$ 에 대입하면

$$u=1 \text{일 때 } v=-4, u=2 \text{일 때 } v=-3$$

(i) $u=1$, $v=-4$, 즉 $x+y=1$, $xy=-4$ 일 때,

x, y 는 이차방정식 $t^2-t-4=0$ 의 두 근이므로

$$t=\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{즉, } x=\frac{1-\sqrt{17}}{2}, y=\frac{1+\sqrt{17}}{2} \text{ 또는}$$

$$x=\frac{1+\sqrt{17}}{2}, y=\frac{1-\sqrt{17}}{2} \text{이므로}$$

$$|x-y|=\sqrt{17}$$

(ii) $u=2$, $v=-3$, 즉 $x+y=2$, $xy=-3$ 일 때,

x, y 는 이차방정식 $t^2-2t-3=0$ 의 두 근이므로

$$(t+1)(t-3)=0 \quad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=3$$

즉, $x=-1$, $y=3$ 또는 $x=3$, $y=-1$ 이므로

$$|x-y|=4$$

(i), (ii)에서 $|x-y|$ 의 최솟값은 4이다.

469 ㉡ -16

$$4x+y=k \text{에서 } y=-4x+k$$

이를 $x^2-3y=12$ 에 대입하면

$$x^2-3(-4x+k)=12$$

$$x^2+12x-3k-12=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 이 중근을 가져야 하므로 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=36+3k+12=0 \quad \therefore k=-16$$

470 ㉡ $k=5$, 공통근: 1

두 이차방정식의 공통근을 α 라 하면

$$\begin{cases} \alpha^2+k\alpha-6=0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \alpha^2-6\alpha+k=0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\alpha^2+k\alpha-6=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha^2-6\alpha+k=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{을 하면 } (k+6)\alpha-(k+6)=0$$

$$(k+6)(\alpha-1)=0$$

$$\therefore k=-6 \text{ 또는 } \alpha=1$$

(i) $k=-6$ 일 때,

두 이차방정식이 모두 $x^2-6x-6=0$ 이므로 공통

근은 2개이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha=1$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에 } \alpha=1 \text{을 대입하면}$$

$$1+k-6=0 \quad \therefore k=5$$

(i), (ii)에서 $k=5$ 이고, 이때의 공통근은 1이다.

471 ㉡ 1

$$x+y=2k \text{에서 } y=-x+2k$$

이를 $x^2+y^2=2k^2-3k+5$ 에 대입하면

$$x^2+(-x+2k)^2=2k^2-3k+5$$

$$2x^2-4kx+2k^2+3k-5=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

주어진 연립방정식이 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠
이 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4k^2 - 2(2k^2 + 3k - 5) \geq 0$$

$$-6k + 10 \geq 0 \quad \therefore k \leq \frac{5}{3}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 1이다.

472 ㉡ $\frac{13}{6}$

두 이차방정식의 공통근을 a 라 하면

$$\begin{cases} a^2 + (k-4)a - 5k = 0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a^2 + (k-2)a - 9k = 0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면 } -2a + 4k = 0 \quad \therefore a = 2k$$

이를 ㉠에 대입하면

$$4k^2 + (k-4) \times 2k - 5k = 0$$

$$6k^2 - 13k = 0, \quad k(6k-13) = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ 또는 } k = \frac{13}{6}$$

$$\text{그런데 } k > 0 \text{이므로 } k = \frac{13}{6}$$

473 ㉡ $a=12, b=18$

두 정사각형의 둘레의 길이의 합이 120 cm이므로

$$4a + 4b = 120, \quad a + b = 30$$

$$\therefore b = -a + 30 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 정사각형의 넓이의 차가 180 cm²이므로

$$b^2 - a^2 = 180$$

㉠을 대입하면

$$(-a+30)^2 - a^2 = 180$$

$$-60a + 720 = 0 \quad \therefore a = 12$$

이를 ㉠에 대입하면 $b = 18$

| 다른 풀이 |

두 정사각형의 둘레의 길이의 합이 120 cm이므로

$$4a + 4b = 120$$

$$\therefore a + b = 30 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 정사각형의 넓이의 차가 180 cm²이므로

$$b^2 - a^2 = 180$$

$$(b-a)(b+a) = 180$$

㉠을 대입하면

$$30(b-a) = 180$$

$$\therefore b-a = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 12, \quad b = 18$$

474 ㉡ ㉤

$$r+2h=8 \text{에서 } r=-2h+8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

㉠을 $r^2 - 2h^2 = 8$ 에 대입하면

$$(-2h+8)^2 - 2h^2 = 8$$

$$h^2 - 16h + 28 = 0, \quad (h-2)(h-14) = 0$$

$$\therefore h = 2 \text{ 또는 } h = 14$$

그런데 $0 < h < 4$ 이므로 $h = 2$

이를 ㉠에 대입하면

$$r = 4$$

따라서 용기의 부피는

$$\pi \times 4^2 \times 2 = 32\pi$$

475 ㉡ 18

직육면체 모양의 상자의 가로의 길이를 x , 세로의 길

이를 y 라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 104이므로

$$4x + 4y + 4x = 104$$

$$\therefore y = -2x + 26 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

옆면의 넓이의 합이 288이므로

$$2x^2 + 2xy = 288$$

$$\therefore x^2 + xy = 144$$

㉠을 대입하면

$$x^2 + x(-2x+26) = 144$$

$$x^2 - 26x + 144 = 0$$

$$(x-8)(x-18) = 0 \quad \therefore x = 8 \text{ 또는 } x = 18$$

그런데 $0 < x < 13$ 이므로 $x = 8$

이를 ㉠에 대입하면

$$y = 10$$

따라서 상자의 가로, 세로의 길이는 각각 8, 10이므로

구하는 합은

$$8 + 10 = 18$$

476 ㉡ 53

십의 자리의 숫자를 x , 일의 자리의 숫자를 y 라 하면

각 자리의 숫자의 제곱의 합이 34이므로

$$x^2 + y^2 = 34 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

처음 자연수와 각 자리의 숫자의 순서를 바꾼 자연수

의 합이 88이므로

$$(10x+y) + (x+10y) = 88, \quad x+y = 8$$

$$\therefore y = -x + 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$x^2 + (-x+8)^2 = 34$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0, \quad (x-3)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = 3 \text{ 또는 } x = 5$$

이를 ㉔에 대입하면

$$x=3\text{일 때 } y=5, x=5\text{일 때 } y=3$$

이때 $x > y$ 이므로 $x=5, y=3$

따라서 처음 자연수는 53이다.

| 다른 풀이 |

십의 자리의 숫자를 x , 일의 자리의 숫자를 y 라 하면
각 자리의 숫자의 제곱의 합이 34이므로

$$x^2 + y^2 = 34 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

처음 자연수와 각 자리의 숫자의 순서를 바꾼 자연수
의 합이 88이므로

$$(10x + y) + (x + 10y) = 88$$

$$\therefore x + y = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \text{이므로 } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서}$$

$$x + y = u, xy = v \text{로 놓으면}$$

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 34 \\ u = 8 \end{cases}$$

$$u = 8 \text{을 } u^2 - 2v = 34 \text{에 대입하면}$$

$$64 - 2v = 34 \quad \therefore v = 15$$

$$\therefore x + y = 8, xy = 15$$

x, y 는 이차방정식 $t^2 - 8t + 15 = 0$ 의 두 근이므로

$$(t - 3)(t - 5) = 0 \quad \therefore t = 3 \text{ 또는 } t = 5$$

$$\therefore x = 5, y = 3 \quad (\because x > y)$$

따라서 처음 자연수는 53이다.

$$477 \quad \begin{cases} x = -13 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = -3 \\ y = -10 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = -1 \\ y = 12 \end{cases}$$

$$\text{또는 } \begin{cases} x = 9 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$xy - x + 2y = 13 \text{에서}$$

$$x(y - 1) + 2(y - 1) = 11$$

$$(x + 2)(y - 1) = 11$$

x, y 가 정수이므로 $x + 2, y - 1$ 도 정수이다.

따라서 $(x + 2)(y - 1) = 11$ 인 경우는

(i) $x + 2 = 1, y - 1 = 11$ 일 때,

$$x = -1, y = 12$$

(ii) $x + 2 = 11, y - 1 = 1$ 일 때,

$$x = 9, y = 2$$

(iii) $x + 2 = -1, y - 1 = -11$ 일 때,

$$x = -3, y = -10$$

(iv) $x + 2 = -11, y - 1 = -1$ 일 때,

$$x = -13, y = 0$$

(i)~(iv)에서 구하는 정수 x, y 는

$$\begin{cases} x = -13 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = -3 \\ y = -10 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = -1 \\ y = 12 \end{cases}$$

$$\text{또는 } \begin{cases} x = 9 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$478 \quad \begin{cases} x = 2, y = -4 \end{cases}$$

$$3x^2 + y^2 - 12x + 8y + 28 = 0 \text{에서}$$

$$3(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 8y + 16) = 0$$

$$3(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 0$$

$$x, y \text{가 실수이므로 } x - 2 = 0, y + 4 = 0$$

$$\therefore x = 2, y = -4$$

| 다른 풀이 |

주어진 방정식의 좌변을 y 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$y^2 + 8y + 3x^2 - 12x + 28 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

y 에 대한 이차방정식 ㉑이 실근을 가져야 하므로 ㉑의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 16 - (3x^2 - 12x + 28) \geq 0$$

$$x^2 - 4x + 4 \leq 0, (x - 2)^2 \leq 0 \quad \therefore x = 2$$

이를 ㉑에 대입하면 $y^2 + 8y + 16 = 0$

$$(y + 4)^2 = 0 \quad \therefore y = -4$$

$$479 \quad \begin{matrix} 4 \\ 4 \end{matrix}$$

정수인 두 근을 α, β ($\alpha \leq \beta$)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -a \quad \therefore a = -\alpha - \beta \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta = a + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } \alpha\beta = -\alpha - \beta + 2$$

$$\alpha\beta + \alpha + \beta = 2, \alpha(\beta + 1) + (\beta + 1) = 3$$

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 3$$

α, β 가 정수이므로 $\alpha + 1, \beta + 1$ 도 정수이고

$\alpha + 1 \leq \beta + 1$ 이다.

따라서 $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 3$ 인 경우는

(i) $\alpha + 1 = 1, \beta + 1 = 3$ 일 때,

$$\alpha = 0, \beta = 2 \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$a = -2$$

(ii) $\alpha + 1 = -3, \beta + 1 = -1$ 일 때,

$$\alpha = -4, \beta = -2 \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$a = 6$$

(i), (ii)에서 $a = -2$ 또는 $a = 6$ 이므로 구하는 합은 $-2 + 6 = 4$

480 ㉮ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$$x^2y^2 - 12xy + x^2 + 16y^2 + 4 = 0 \text{에서}$$

$$(x^2y^2 - 4xy + 4) + (x^2 - 8xy + 16y^2) = 0$$

$$(xy - 2)^2 + (x - 4y)^2 = 0$$

x, y 가 실수이므로 $xy - 2 = 0, x - 4y = 0$

$$\therefore xy = 2, x = 4y$$

$x = 4y$ 를 $xy = 2$ 에 대입하면

$$4y^2 = 2, y^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{2}}{2} (\because y > 0)$$

이를 $x = 4y$ 에 대입하면 $x = 2\sqrt{2}$

$$\therefore x + y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

연습문제

230-232쪽

481 ㉮ ③

$$2x - y = 1 \text{에서 } y = 2x - 1$$

이를 $5x^2 - y^2 = -5$ 에 대입하면

$$5x^2 - (2x - 1)^2 = -5$$

$$x^2 + 4x + 4 = 0, (x + 2)^2 = 0$$

$$\therefore x = -2$$

이를 $y = 2x - 1$ 에 대입하면

$$y = -5$$

따라서 $\alpha = -2, \beta = -5$ 이므로

$$\alpha - \beta = 3$$

482 ㉮ ⑤

$$x^2 - 3xy - 4y^2 = 0 \text{에서 } (x + y)(x - 4y) = 0$$

$$\therefore x = -y \text{ 또는 } x = 4y$$

(i) $x = -y$ 일 때,

이를 $x^2 + y^2 = 68$ 에 대입하면

$$y^2 + y^2 = 68, y^2 = 34$$

$$\therefore y = -\sqrt{34} \text{ 또는 } y = \sqrt{34}$$

이를 각각 $x = -y$ 에 대입하면

$$y = -\sqrt{34} \text{일 때 } x = \sqrt{34},$$

$$y = \sqrt{34} \text{일 때 } x = -\sqrt{34}$$

(ii) $x = 4y$ 일 때,

이를 $x^2 + y^2 = 68$ 에 대입하면

$$16y^2 + y^2 = 68, y^2 = 4$$

$$\therefore y = -2 \text{ 또는 } y = 2$$

이를 각각 $x = 4y$ 에 대입하면

$$y = -2 \text{일 때 } x = -8, y = 2 \text{일 때 } x = 8$$

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 양의 정수인 해는

$$x = 8, y = 2$$

따라서 $\alpha = 8, \beta = 2$ 이므로

$$\alpha + \beta = 10$$

483 ㉮ $-4\sqrt{2}$

주어진 연립방정식에서 $x + y = u, xy = v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u + v = -5 \\ uv = -6 \end{cases}$$

$$u + v = -5 \text{에서 } v = -u - 5$$

이를 $uv = -6$ 에 대입하면

$$u(-u - 5) = -6, u^2 + 5u - 6 = 0$$

$$(u + 6)(u - 1) = 0$$

$$\therefore u = -6 \text{ 또는 } u = 1$$

이를 각각 $v = -u - 5$ 에 대입하면

$$u = -6 \text{일 때 } v = 1, u = 1 \text{일 때 } v = -6$$

(i) $u = -6, v = 1$, 즉 $x + y = -6, xy = 1$ 일 때,

x, y 는 이차방정식 $t^2 + 6t + 1 = 0$ 의 두 근이므로

$$t = -3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\text{즉, } x = -3 - 2\sqrt{2}, y = -3 + 2\sqrt{2} \text{ 또는}$$

$$x = -3 + 2\sqrt{2}, y = -3 - 2\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$x - y = -4\sqrt{2} \text{ 또는 } x - y = 4\sqrt{2}$$

(ii) $u = 1, v = -6$, 즉 $x + y = 1, xy = -6$ 일 때,

x, y 는 이차방정식 $t^2 - t - 6 = 0$ 의 두 근이므로

$$(t + 2)(t - 3) = 0 \quad \therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 3$$

$$\text{즉, } x = -2, y = 3 \text{ 또는 } x = 3, y = -2 \text{이므로}$$

$$x - y = -5 \text{ 또는 } x - y = 5$$

(i), (ii)에서 $x - y$ 의 최솟값은 $-4\sqrt{2}$ 이다.

484 ㉮ ④

$$x + y = 2k \text{에서 } y = -x + 2k$$

이를 $xy + 2x - 1 = k^2 + 4$ 에 대입하면

$$x(-x + 2k) + 2x - 1 = k^2 + 4$$

$$x^2 - 2(k + 1)x + k^2 + 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

주어진 연립방정식이 실근을 갖지 않으려면 이차방정식

식 $\textcircled{7}$ 이 실근을 갖지 않아야 하므로 $\textcircled{7}$ 의 판별식을 D

라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(k + 1)\}^2 - (k^2 + 5) < 0$$

$$2k - 4 < 0 \quad \therefore k < 2$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 1이다.

485 ㉮ 6 cm

직사각형의 가로, 세로의 길이를 x cm, y cm라 하면 대각선의 길이가 $2\sqrt{29}$ cm이므로

$$x^2 + y^2 = 116 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직사각형의 넓이가 40 cm^2 이므로

$$xy = 40 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ 이므로 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$x+y=u, xy=v \text{로 놓으면}$$

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 116 \\ v = 40 \end{cases}$$

$v=40$ 을 $u^2 - 2v = 116$ 에 대입하면

$$u^2 - 80 = 116$$

$$u^2 = 196 \quad \therefore u = 14 \quad (\because x+y > 0)$$

$$\therefore x+y=14, xy=40$$

x, y 는 이차방정식 $t^2 - 14t + 40 = 0$ 의 두 근이므로 $(t-4)(t-10) = 0 \quad \therefore t=4$ 또는 $t=10$

$$\therefore x=10, y=4 \quad (\because x > y)$$

따라서 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각 10 cm, 4 cm이므로 구하는 차는

$$10 - 4 = 6 \text{ (cm)}$$

486 ㉮ ④

$$xy + 2x + 2y - 5 = 0 \text{에서}$$

$$x(y+2) + 2(y+2) = 9$$

$$(x+2)(y+2) = 9$$

x, y 가 정수이므로 $x+2, y+2$ 도 정수이다.

따라서 $(x+2)(y+2) = 9$ 인 경우는

(i) $x+2=1, y+2=9$ 일 때,

$$x=-1, y=7 \text{이므로}$$

$$x+y=6$$

(ii) $x+2=3, y+2=3$ 일 때,

$$x=1, y=1 \text{이므로}$$

$$x+y=2$$

(iii) $x+2=9, y+2=1$ 일 때,

$$x=7, y=-1 \text{이므로}$$

$$x+y=6$$

(iv) $x+2=-1, y+2=-9$ 일 때,

$$x=-3, y=-11 \text{이므로}$$

$$x+y=-14$$

(v) $x+2=-3, y+2=-3$ 일 때,

$$x=-5, y=-5 \text{이므로}$$

$$x+y=-10$$

(vi) $x+2=-9, y+2=-1$ 일 때,

$$x=-11, y=-3 \text{이므로}$$

$$x+y=-14$$

(i)~(vi)에서 $x+y$ 의 최댓값은 6이다.

487 ㉮ 2

$$5x^2 - 12xy + 9y^2 - 12x + 36 = 0 \text{에서}$$

$$(4x^2 - 12xy + 9y^2) + (x^2 - 12x + 36) = 0$$

$$(2x-3y)^2 + (x-6)^2 = 0$$

x, y 는 실수이므로 $2x-3y=0, x-6=0$

$$\therefore x=6, y=4$$

$$\therefore x-y=2$$

488 ㉮ 12

1 접근 방법 $x \geq y$ 일 때와 $x < y$ 일 때로 나누어 연립방정식의 해를 구한다.

(i) $x \geq y$ 일 때,

$< x, y > = x, [x, y] = y$ 이므로 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} x+y=2x-1 \\ x^2-xy+y^2=y+10 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x-y=1 \\ x^2-xy+y^2-y=10 \end{cases}$$

$$x-y=1 \text{에서 } y=x-1$$

이를 $x^2-xy+y^2-y=10$ 에 대입하면

$$x^2 - x(x-1) + (x-1)^2 - (x-1) = 10$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0, (x+2)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 4$$

이를 각각 $y=x-1$ 에 대입하면

$$x=-2 \text{일 때 } y=-3, x=4 \text{일 때 } y=3$$

$$\therefore xy=6 \text{ 또는 } xy=12$$

▶▶▶▶▶ ①

(ii) $x < y$ 일 때,

$< x, y > = y, [x, y] = x$ 이므로 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} x+y=2y-1 \\ x^2-xy+y^2=x+10 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x-y=-1 \\ x^2-xy+y^2-x=10 \end{cases}$$

$$x-y=-1 \text{에서 } y=x+1$$

이를 $x^2-xy+y^2-x=10$ 에 대입하면

$$x^2 - x(x+1) + (x+1)^2 - x = 10$$

$$x^2 = 9 \quad \therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 3$$

이를 각각 $y=x+1$ 에 대입하면

$$x=-3\text{일 때 } y=-2, x=3\text{일 때 } y=4$$

$$\therefore xy=6 \text{ 또는 } xy=12 \quad \text{▶▶▶▶▶ ②}$$

(i), (ii)에서 xy 의 최댓값은 12이다. ▶▶▶▶▶ ③

단계	채점 기준	비율
①	$x \geq y$ 일 때, xy 의 값 구하기	40%
②	$x < y$ 일 때, xy 의 값 구하기	40%
③	xy 의 최댓값 구하기	20%

489 ㉡ 17

| 접근 방법 | $x+y=t$ 로 놓고 그 값을 구한 후 $x-y$ 의 값을 구하여 연립한다.

$$x^2-y^2=8 \text{에서 } (x+y)(x-y)=8 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$(x+y)^2-(x+y)=12 \text{에서 } x+y=t \text{로 놓으면}$$

$$t^2-t-12=0, (t+3)(t-4)=0$$

$$\therefore t=-3 \text{ 또는 } t=4$$

$$\therefore x+y=-3 \text{ 또는 } x+y=4$$

(i) $x+y=-3$ 일 때,

이를 ㉠에 대입하면

$$-3(x-y)=8 \quad \therefore x-y=-\frac{8}{3}$$

$$x+y=-3, x-y=-\frac{8}{3} \text{을 연립하여 풀면}$$

$$x=-\frac{17}{6}, y=-\frac{1}{6}$$

(ii) $x+y=4$ 일 때,

이를 ㉠에 대입하면

$$4(x-y)=8 \quad \therefore x-y=2$$

$$x+y=4, x-y=2 \text{를 연립하여 풀면}$$

$$x=3, y=1$$

(i), (ii)에서 음수 x, y 는 $x=-\frac{17}{6}, y=-\frac{1}{6}$ 이므로

$$36xy=17$$

490 ㉡ 5

두 연립방정식의 공통인 해가 존재하므로 그 해는 연

$$\text{립방정식 } \begin{cases} x+y=17 \\ x^2+y^2=145 \end{cases} \text{의 해와 같다.}$$

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy \text{이므로 위의 연립방정식에서}$$

$$x+y=u, xy=v \text{로 놓으면}$$

$$\begin{cases} u=17 \\ u^2-2v=145 \end{cases}$$

$$u=17 \text{을 } u^2-2v=145 \text{에 대입하면}$$

$$289-2v=145 \quad \therefore v=72$$

$$\therefore x+y=17, xy=72$$

x, y 는 이차방정식 $t^2-17t+72=0$ 의 두 근이므로

$$(t-8)(t-9)=0 \quad \therefore t=8 \text{ 또는 } t=9$$

(i) $x=8, y=9$ 일 때,

$$ax-2y=-2 \text{에 대입하면}$$

$$8a-18=-2 \quad \therefore a=2$$

$$bx+y=33 \text{에 대입하면}$$

$$8b+9=33 \quad \therefore b=3$$

(ii) $x=9, y=8$ 일 때,

$$ax-2y=-2 \text{에 대입하면}$$

$$9a-16=-2 \quad \therefore a=\frac{14}{9}$$

$$bx+y=33 \text{에 대입하면}$$

$$9b+8=33 \quad \therefore b=\frac{25}{9}$$

(i), (ii)에서 a, b 는 자연수이므로 $a=2, b=3$

$$\therefore a+b=5$$

491 ㉡ ⑤

$$y-3x=1 \text{에서 } y=3x+1$$

$$\text{이를 } -x^2+y^2=2k \text{에 대입하면}$$

$$-x^2+(3x+1)^2=2k$$

$$8x^2+6x+1-2k=0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이

차방정식 ㉠이 중근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을

D 라 하면

$$\frac{D}{4}=9-8(1-2k)=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{16}$$

$$\text{이를 ㉠에 대입하면 } 8x^2+6x+1+\frac{1}{8}=0$$

$$64x^2+48x+9=0, (8x+3)^2=0$$

$$\therefore x=-\frac{3}{8}$$

$$\text{이를 } y=3x+1 \text{에 대입하면 } y=-\frac{1}{8}$$

$$\text{따라서 } \alpha=-\frac{3}{8}, \beta=-\frac{1}{8} \text{이므로}$$

$$k+\alpha+\beta=-\frac{1}{16}+\left(-\frac{3}{8}\right)+\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{9}{16}$$

492 ㉡ 3

두 이차방정식의 공통근을 α 라 하면

$$\begin{cases} \alpha^2+\alpha^2a+b^2-6a+8=0 & \dots\dots \text{㉠} \\ \alpha^2-6a\alpha+a^2+b^2+8=0 & \dots\dots \text{㉡} \end{cases}$$

$$\text{㉠}-\text{㉡을 하면}$$

$$(a^2+6a)\alpha-(a^2+6a)=0$$

$$(a^2+6a)(a-1)=0, a(a+6)(a-1)=0$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=-6 \text{ 또는 } a=1$$

(i) $a=0$ 일 때,

두 이차방정식이 모두 $x^2+b^2+8=0$ 이므로 공통근이 2개이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=-6$ 일 때,

두 이차방정식이 모두 $x^2+36x+b^2+44=0$ 이므로 공통근이 2개이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a=1$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에 } a=1 \text{을 대입하면 } 1+a^2+b^2-6a+8=0$$

$$(a-3)^2+b^2=0$$

이때 a, b 는 실수이므로 $a-3=0, b=0$

$$\therefore a=3, b=0$$

(i), (ii), (iii)에서 $a=3, b=0$

$$\therefore a+b=3$$

493 ㉡ ㉢

$$\overline{AF}=\overline{AB}+\overline{EF}-\overline{EB} \text{이므로}$$

$$5=a+b-1 \quad \therefore a+b=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직사각형 EBCI의 넓이가 정사각형 EFGH의 넓이의 $\frac{1}{4}$ 이므로

$$1 \times a = \frac{1}{4}b^2 \quad \therefore a = \frac{1}{4}b^2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{1}{4}b^2+b=6, b^2+4b-24=0$$

$$\therefore b=-2 \pm 2\sqrt{7}$$

그런데 $b>0$ 이므로 $b=-2+2\sqrt{7}$

494 ㉡ 41

음의 정수인 두 근을 α, β ($\alpha \leq \beta < 0$)라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$$\alpha+\beta=-k+3$$

$$\therefore k=-\alpha-\beta+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 근의 곱은 $\alpha\beta=4k+1$

$\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$\alpha\beta=-4\alpha-4\beta+13$$

$$\alpha\beta+4\alpha+4\beta=13, \alpha(\beta+4)+4(\beta+4)=29$$

$$(\alpha+4)(\beta+4)=29$$

α, β 가 음의 정수이므로 $\alpha+4, \beta+4$ 도 정수이고

$$\alpha+4 \leq \beta+4 < 4 \text{이다.}$$

따라서 $(\alpha+4)(\beta+4)=29$ 인 경우는 $\alpha+4=-29,$

$$\beta+4=-1 \text{일 때 } \alpha=-33, \beta=-5$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } k=33+5+3=41$$

495 ㉡ 9

x, y 는 실수이므로

$$2x^2+y^2-2y-21=0, x^2-4xy+3y^2=0$$

$$x^2-4xy+3y^2=0 \text{에서 } (x-y)(x-3y)=0$$

$$\therefore x=y \text{ 또는 } x=3y$$

(i) $x=y$ 일 때,

$$2x^2+y^2-2y-21=0 \text{에 대입하면}$$

$$2y^2+y^2-2y-21=0$$

$$3y^2-2y-21=0, (3y+7)(y-3)=0$$

$$\therefore y=-\frac{7}{3} \text{ 또는 } y=3$$

그런데 y 는 정수이므로 $y=3$

이를 $x=y$ 에 대입하면 $x=3$

$$\therefore xy=9$$

(ii) $x=3y$ 일 때,

$$2x^2+y^2-2y-21=0 \text{에 대입하면}$$

$$18y^2+y^2-2y-21=0$$

$$19y^2-2y-21=0, (y+1)(19y-21)=0$$

$$\therefore y=-1 \text{ 또는 } y=\frac{21}{19}$$

그런데 y 는 정수이므로 $y=-1$

이를 $x=3y$ 에 대입하면 $x=-3$

$$\therefore xy=3$$

(i), (ii)에서 xy 의 최댓값은 9이다.

496 ㉡ -3

| 접근 방법 | 주어진 두 이차방정식의 공통근을 α 라 하고 $x=\alpha$ 를 대입한 후 연립방정식을 풀어 조건을 만족시키는 p, q 의 값을 구한다.

두 이차방정식의 공통근을 α 라 하면

$$\begin{cases} \alpha^2-p\alpha+2q=0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \alpha^2-q\alpha+2p=0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^2-p\alpha+2q=0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \alpha^2-q\alpha+2p=0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면

$$(-p+q)\alpha+2(-p+q)=0$$

$$(-p+q)(\alpha+2)=0 \quad \therefore p=q \text{ 또는 } \alpha=-2$$

(i) $p=q$ 일 때,

두 이차방정식이 모두 $x^2-px+2p=0$ 이므로 공통근이 2개이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

- (ii) $a = -2$ 일 때,
 이를 ㉠에 대입하면 $4 + 2p + 2q = 0$
 $\therefore q = -p - 2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$
 ㉠을 $x^2 - px + 2q = 0$ 에 대입하면
 $x^2 - px - 2p - 4 = 0$
 $(x+2)(x-p-2) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = p+2$
 ㉡을 $x^2 - qx + 2p = 0$ 에 대입하면
 $x^2 + (p+2)x + 2p = 0$
 $(x+2)(x+p) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = -p$
 즉, 공통근이 아닌 두 근이 $p+2, -p$ 이므로
 $-p(p+2) = -3, p^2 + 2p - 3 = 0$
 $(p+3)(p-1) = 0 \quad \therefore p = -3$ 또는 $p = 1$
 이를 ㉡에 각각 대입하면
 $p = -3$ 일 때 $q = 1, p = 1$ 일 때 $q = -3$
 (i), (ii)에서 $p = -3, q = 1$ 또는 $p = 1, q = -3$ 이므로
 $pq = -3$

497 ㉠ -15

▶ 접근 방법 ▶ 어떤 정수를 n 으로 놓고 식을 세운 후
 (일차식) $\times$ (일차식) = (정수) 꼴로 나타낸다.

- $m^2 + 2m - 6 = n^2$ (n 은 정수)이라 하면
 $(m^2 + 2m + 1) - n^2 - 7 = 0$
 $(m+1)^2 - n^2 = 7$
 $(m-n+1)(m+n+1) = 7$
 (i) $m-n+1=1, m+n+1=7$ 일 때,
 $m-n=0, m+n=6$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면
 $m=3, n=3$
 (ii) $m-n+1=7, m+n+1=1$ 일 때,
 $m-n=6, m+n=0$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면
 $m=3, n=-3$
 (iii) $m-n+1=-1, m+n+1=-7$ 일 때,
 $m-n=-2, m+n=-8$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면
 $m=-5, n=-3$
 (iv) $m-n+1=-7, m+n+1=-1$ 일 때,
 $m-n=-8, m+n=-2$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면
 $m=-5, n=3$
 (i)~(iv)에서 $m=3$ 또는 $m=-5$ 이므로 구하는 곱은
 $3 \times (-5) = -15$

01 연립일차부등식

개념 확인

237쪽

498 ㉠ (1) $\begin{cases} a > 0 \text{ 일 때, } x \leq 4 \\ a = 0 \text{ 일 때, 모든 실수} \\ a < 0 \text{ 일 때, } x \geq 4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a > 2 \text{ 일 때, } x > \frac{1}{a-2} \\ a = 2 \text{ 일 때, 해는 없다.} \\ a < 2 \text{ 일 때, } x < \frac{1}{a-2} \end{cases}$

499 ㉠ (1) $-2 < x \leq 1$ (2) $-3 \leq x < 4$
 (3) $x > 2$ (4) $x < -3$

500 ㉠ (1) $x = -2$ (2) 해는 없다.
 (3) 해는 없다. (4) 해는 없다.

유제

239~251쪽

501 ㉠ (1) $\begin{cases} a > 2 \text{ 일 때, } x > 3 \\ a = 2 \text{ 일 때, 해는 없다.} \\ a < 2 \text{ 일 때, } x < 3 \end{cases}$ (2) 4

(1) $ax - 3a > 2x - 6$ 에서 $(a-2)x > 3a-6$

$\therefore (a-2)x > 3(a-2)$

(i) $a-2 > 0$, 즉 $a > 2$ 일 때,
 $x > 3$

(ii) $a-2 = 0$, 즉 $a = 2$ 일 때,
 $0 \times x > 0$ 에서 해는 없다.

(iii) $a-2 < 0$, 즉 $a < 2$ 일 때,
 $x < 3$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$\begin{cases} a > 2 \text{ 일 때, } x > 3 \\ a = 2 \text{ 일 때, 해는 없다.} \\ a < 2 \text{ 일 때, } x < 3 \end{cases}$

(2) $ax - a^2 \geq -3x - 9$ 에서 $(a+3)x \geq a^2 - 9$

$\therefore (a+3)x \geq (a+3)(a-3) \quad \dots\dots \textcircled{1}$

이 부등식의 해가 $x \geq 1$ 이므로 $a+3 > 0$

㉠의 양변을 $a+3$ 으로 나누면

$x \geq a-3$

따라서 $a-3=1$ 이므로 $a=4$

502 ㉠ $x < -5$

$ax - 5b > bx - 5a$ 에서 $(a-b)x > -5(a-b)$
 $a < b$ 에서 $a-b < 0$ 이므로 양변을 $a-b$ 로 나누면
 $x < -5$

503 ㉠ -2

$a^2x + 3 < 4x + 2a$ 에서 $(a^2-4)x < 2a-3$
 이 부등식이 해를 갖지 않으므로
 $a^2-4=0$, $2a-3 \leq 0$

(i) $a^2-4=0$ 에서

$$(a+2)(a-2)=0 \quad \therefore a=-2 \text{ 또는 } a=2$$

(ii) $2a-3 \leq 0$ 에서

$$2a \leq 3 \quad \therefore a \leq \frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서 $a=-2$

504 ㉠ $x \geq -2$

$(2a+b)x + b - a \leq 0$ 에서

$$(2a+b)x \leq a-b \quad \dots\dots ㉠$$

이 부등식의 해가 $x \geq 2$ 이므로

$$2a+b < 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠의 양변을 $2a+b$ 로 나누면 $x \geq \frac{a-b}{2a+b}$

따라서 $\frac{a-b}{2a+b} = 2$ 이므로

$$a-b = 4a+2b \quad \therefore a = -b \quad \dots\dots ㉢$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$-2b+b < 0 \quad \therefore b > 0$$

㉢을 $b(x-2) \geq 4a$ 에 대입하면

$$b(x-2) \geq -4b$$

양변을 b 로 나누면 $x-2 \geq -4$

$$\therefore x \geq -2$$

505 ㉠ (1) $x > 1$ (2) $-3 \leq x < -2$

(1) $x+2 < 3x$ 를 풀면

$$-2x < -2 \quad \therefore x > 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$-(3-4x) \geq 2x-5$ 를 풀면

$$-3+4x \geq 2x-5$$

$$2x \geq -2 \quad \therefore x \geq -1 \quad \dots\dots ㉡$$

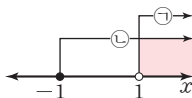
㉠, ㉡을 수직선 위에 나

타내면 오른쪽 그림과 같으

므로 주어진 연립부등식의

해는

$$x > 1$$



(2) $6x+2 \geq 3(x-1)-4$ 를 풀면

$$6x+2 \geq 3x-3-4$$

$$3x \geq -9 \quad \therefore x \geq -3 \quad \dots\dots ㉠$$

$1-(x+2) > 4x+9$ 를 풀면

$$1-x-2 > 4x+9$$

$$-5x > 10 \quad \therefore x < -2 \quad \dots\dots ㉡$$

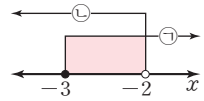
㉠, ㉡을 수직선 위에 나

타내면 오른쪽 그림과 같

으므로 주어진 연립부등식

의 해는

$$-3 \leq x < -2$$



506 ㉠ (1) $5 \leq x < 6$ (2) $x < 5$

(1) $\frac{1}{4}x+2 \leq \frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$ 을 풀면

$$x+8 \leq 2x+3$$

$$-x \leq -5 \quad \therefore x \geq 5 \quad \dots\dots ㉠$$

$3(x+1) > 4x-3$ 을 풀면

$$3x+3 > 4x-3$$

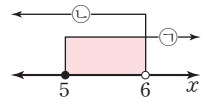
$$-x > -6 \quad \therefore x < 6 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나

타내면 오른쪽 그림과 같

으므로 주어진 연립부등식

의 해는 $5 \leq x < 6$



(2) $\frac{x-1}{4} > \frac{x+1}{3}-1$ 을 풀면

$$3(x-1) > 4(x+1)-12$$

$$3x-3 > 4x+4-12$$

$$-x > -5 \quad \therefore x < 5 \quad \dots\dots ㉠$$

$0.9(x-2) < 0.5x+1$ 을 풀면

$$9(x-2) < 5x+10$$

$$9x-18 < 5x+10$$

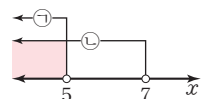
$$4x < 28 \quad \therefore x < 7 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나

타내면 오른쪽 그림과 같으

므로 주어진 연립부등식의

해는 $x < 5$



507 ㉠ 7

$\frac{2}{3}x+2 > x-4$ 를 풀면

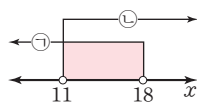
$$2x+6 > 3x-12$$

$$-x > -18 \quad \therefore x < 18 \quad \dots\dots ㉠$$

$4x-5>3(x+2)$ 를 풀면

$$4x-5>3x+6 \quad \therefore x>11 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$\textcircled{L}$, $\textcircled{L}$ 을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$$11 < x < 18$$

따라서 $a=11$, $b=18$ 이므로

$$b-a=7$$

508 ㉡ 4

$$\frac{x+3}{3} > \frac{3-x}{6} \text{를 풀면}$$

$$2(x+3) > 3-x, 2x+6 > 3-x$$

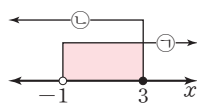
$$3x > -3 \quad \therefore x > -1 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$0.4x-0.6 \leq 0.1x+0.3 \text{을 풀면}$$

$$4x-6 \leq x+3$$

$$3x \leq 9 \quad \therefore x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$\textcircled{L}$, $\textcircled{L}$ 을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$$-1 < x < 3$$

따라서 정수 x 는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

509 ㉡ (1) $x \geq 3$ (2) $1 \leq x \leq 5$

(1) 주어진 부등식은 $\begin{cases} 2x+1 < 4x-3 \\ 4x-3 \leq 5x-6 \end{cases}$ 으로 나타낼 수

있다.

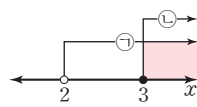
$$2x+1 < 4x-3 \text{을 풀면}$$

$$-2x < -4 \quad \therefore x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$4x-3 \leq 5x-6 \text{을 풀면}$$

$$-x \leq -3 \quad \therefore x \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$\textcircled{L}$, $\textcircled{L}$ 을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$$x \geq 3$$

(2) 주어진 부등식은 $\begin{cases} -x+7 \leq 3(x+2)-3 \\ 3(x+2)-3 \leq 2(x+4) \end{cases}$ 로 나

타낼 수 있다.

$$-x+7 \leq 3(x+2)-3 \text{을 풀면}$$

$$-x+7 \leq 3x+6-3$$

$$-4x \leq -4 \quad \therefore x \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$3(x+2)-3 \leq 2(x+4) \text{를 풀면}$$

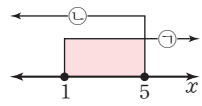
$$3x+6-3 \leq 2x+8 \quad \therefore x \leq 5 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$\textcircled{L}$, $\textcircled{L}$ 을 수직선 위에 나타

내면 오른쪽 그림과 같으므로

주어진 부등식의 해는

$$1 \leq x \leq 5$$



510 ㉡ 1

주어진 부등식은 $\begin{cases} \frac{x-4}{2} < 1-x \\ 1-x \leq -\frac{1}{4}(x-2) \end{cases}$ 로 나타낼 수

있다.

$$\frac{x-4}{2} < 1-x \text{를 풀면}$$

$$x-4 < 2(1-x), x-4 < 2-2x$$

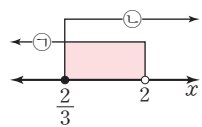
$$3x < 6 \quad \therefore x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$1-x \leq -\frac{1}{4}(x-2) \text{를 풀면}$$

$$4(1-x) \leq -(x-2), 4-4x \leq -x+2$$

$$-3x \leq -2 \quad \therefore x \geq \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$\textcircled{L}$, $\textcircled{L}$ 을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$$\frac{2}{3} \leq x < 2$$

따라서 정수 x 의 값은 1이다.

511 ㉡ -15

주어진 부등식은 $\begin{cases} x-3 < \frac{3}{5}x-1 \\ \frac{3}{5}x-1 < 1.1x+0.5 \end{cases}$ 로 나타낼 수

있다.

$$x-3 < \frac{3}{5}x-1 \text{을 풀면}$$

$$5(x-3) < 3x-5, 5x-15 < 3x-5$$

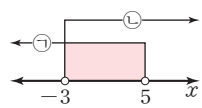
$$2x < 10 \quad \therefore x < 5 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\frac{3}{5}x-1 < 1.1x+0.5 \text{를 풀면}$$

$$6x-10 < 11x+5$$

$$-5x < 15 \quad \therefore x > -3 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$\textcircled{L}$, $\textcircled{L}$ 을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$$-3 < x < 5$$

따라서 $a=-3$, $\beta=5$ 이므로 $a\beta=-15$

512 ㉓ 3

주어진 부등식은 $\begin{cases} 2(x-2) \leq \frac{x+3}{3} \\ \frac{x+3}{3} \leq 0.1x+2.4 \end{cases}$ 로 나타낼 수

있다.

$$2(x-2) \leq \frac{x+3}{3} \text{ 을 풀면}$$

$$6(x-2) \leq x+3$$

$$6x-12 \leq x+3$$

$$5x \leq 15 \quad \therefore x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

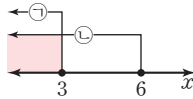
$$\frac{x+3}{3} \leq 0.1x+2.4 \text{ 를 풀면}$$

$$10(x+3) \leq 3x+72$$

$$10x+30 \leq 3x+72$$

$$7x \leq 42 \quad \therefore x \leq 6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉓, ㉔을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$$x \leq 3$$

따라서 x 의 최댓값은 3이다.

513 ㉓ (1) $x = -1$ (2) 해는 없다.

(1) $-3x-2 \geq x+2$ 를 풀면

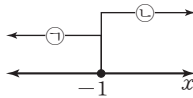
$$-4x \geq 4 \quad \therefore x \leq -1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$x-3 \geq \frac{x-7}{2} \text{ 을 풀면}$$

$$2(x-3) \geq x-7$$

$$2x-6 \geq x-7 \quad \therefore x \geq -1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉓, ㉔을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$$x = -1$$

(2) $4x+7 \geq 3(x+3)$ 을 풀면

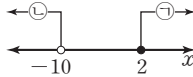
$$4x+7 \geq 3x+9 \quad \therefore x \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$2(x-4) > 3x+2 \text{ 를 풀면}$$

$$2x-8 > 3x+2$$

$$-x > 10 \quad \therefore x < -10 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉓, ㉔을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



514 ㉓ $x=3$

주어진 부등식은 $\begin{cases} 4(x+1) \leq 6x-2 \\ 6x-2 \leq 2(x+5) \end{cases}$ 로 나타낼 수 있다.

$$4(x+1) \leq 6x-2 \text{ 를 풀면}$$

$$4x+4 \leq 6x-2$$

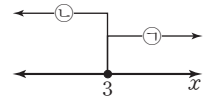
$$-2x \leq -6 \quad \therefore x \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$6x-2 \leq 2(x+5) \text{ 를 풀면}$$

$$6x-2 \leq 2x+10$$

$$4x \leq 12 \quad \therefore x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉓, ㉔을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는



$$x=3$$

515 ㉓ ㉓

$$\frac{1}{2}x-2 < \frac{3x-2}{2} \text{ 를 풀면}$$

$$x-4 < 3x-2$$

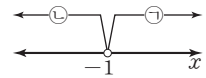
$$-2x < 2 \quad \therefore x > -1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$-x+3 > 0.1x+4.1 \text{ 을 풀면}$$

$$-10x+30 > x+41$$

$$-11x > 11 \quad \therefore x < -1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉓, ㉔을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



516 ㉓ 1

주어진 부등식은 $\begin{cases} \frac{x-4}{6} \leq x+1 \\ x+1 \leq \frac{2x+1}{3} \end{cases}$ 로 나타낼 수 있다.

$$\frac{x-4}{6} \leq x+1 \text{ 을 풀면}$$

$$x-4 \leq 6(x+1), x-4 \leq 6x+6$$

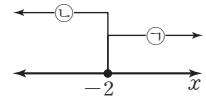
$$-5x \leq 10 \quad \therefore x \geq -2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$x+1 \leq \frac{2x+1}{3} \text{ 을 풀면}$$

$$3(x+1) \leq 2x+1$$

$$3x+3 \leq 2x+1 \quad \therefore x \leq -2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉓, ㉔을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는 $x = -2$



이를 $ax+6=4$ 에 대입하면

$$-2a+6=4, -2a=-2 \quad \therefore a=1$$

517 ㉮ $a=7, b=-3$

$5x+1 < 2x+a$ 를 풀면

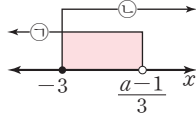
$$3x < a-1 \quad \therefore x < \frac{a-1}{3} \quad \dots\dots ㉠$$

$x+1 \leq 2(x+2)$ 를 풀면

$$x+1 \leq 2x+4$$

$$-x \leq 3 \quad \therefore x \geq -3 \quad \dots\dots ㉡$$

이때 주어진 연립부등식의 해가 존재하므로 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$-3 \leq x < \frac{a-1}{3}$$

이는 $b \leq x < 2$ 와 같으므로

$$b = -3, \frac{a-1}{3} = 2 \quad \therefore a = 7, b = -3$$

518 ㉮ 6

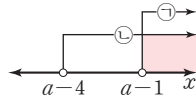
$2x+3a < 4x+a+2$ 를 풀면

$$-2x < -2a+2 \quad \therefore x > a-1 \quad \dots\dots ㉠$$

$5x+a < 6x+4$ 를 풀면

$$-x < -a+4 \quad \therefore x > a-4 \quad \dots\dots ㉡$$

이때 $a-4 < a-1$ 이므로 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$x > a-1$$

이는 $x > 5$ 와 같으므로

$$a-1 = 5 \quad \therefore a = 6$$

519 ㉮ -5

주어진 부등식은 $\begin{cases} \frac{x-a}{2} < x+4 \\ x+4 \leq -x-2a \end{cases}$ 로 나타낼 수 있다.

$$\frac{x-a}{2} < x+4 \text{를 풀면}$$

$$x-a < 2(x+4), x-a < 2x+8$$

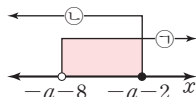
$$-x < a+8 \quad \therefore x > -a-8 \quad \dots\dots ㉠$$

$x+4 \leq -x-2a$ 를 풀면

$$2x \leq -2a-4 \quad \therefore x \leq -a-2 \quad \dots\dots ㉡$$

이때 $-a-8 < -a-2$ 이므로

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



따라서 주어진 부등식의 해는

$$-a-8 < x \leq -a-2$$

이는 $-3 < x \leq 3$ 과 같으므로

$$-a-8 = -3 \quad \therefore a = -5$$

520 ㉮ 8

$3(x-1) \leq a+2$ 를 풀면

$$3x-3 \leq a+2$$

$$3x \leq a+5 \quad \therefore x \leq \frac{a+5}{3}$$

$1.2x-0.8b \geq x$ 를 풀면

$$12x-8b \geq 10x$$

$$2x \geq 8b \quad \therefore x \geq 4b$$

이때 주어진 연립부등식의 해가 $x=4$ 이므로

$$\frac{a+5}{3} = 4, 4b = 4 \quad \therefore a = 7, b = 1$$

$$\therefore a+b = 8$$

521 ㉮ $a \leq -18$

$$\frac{1}{3}x+1 \geq \frac{1}{2}x-1 \text{를 풀면}$$

$$2x+6 \geq 3x-6$$

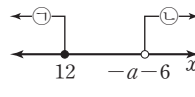
$$-x \geq -12 \quad \therefore x \leq 12 \quad \dots\dots ㉠$$

$3(x-2) < 4x+a$ 를 풀면

$$3x-6 < 4x+a$$

$$-x < a+6 \quad \therefore x > -a-6 \quad \dots\dots ㉡$$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않도록 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$$-a-6 \geq 12$$

$$\therefore a \leq -18$$

522 ㉮ $-5 < a \leq -4$

$2x+3a > 3x+2a$ 를 풀면

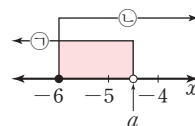
$$-x > -a \quad \therefore x < a \quad \dots\dots ㉠$$

$7x+2 \geq 5(x-2)$ 를 풀면

$$7x+2 \geq 5x-10$$

$$2x \geq -12 \quad \therefore x \geq -6 \quad \dots\dots ㉡$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 가 2개가 되도록 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$$-5 < a \leq -4$$

523 ㉡ 2

주어진 부등식은 $\begin{cases} 2x-5 \leq 6x+7 \\ 6x+7 < 4x+a \end{cases}$ 로 나타낼 수 있다.

$2x-5 \leq 6x+7$ 을 풀면

$$-4x \leq 12 \quad \therefore x \geq -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$6x+7 < 4x+a$ 를 풀면

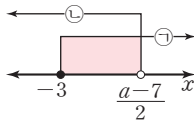
$$2x < a-7 \quad \therefore x < \frac{a-7}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

주어진 부등식이 해를 갖도록

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$\frac{a-7}{2} > -3 \quad \therefore a > 1$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 2이다.



524 ㉡ ⑤

$x+2 > 3$ 을 풀면

$$x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$3x < a+1$ 을 풀면

$$x < \frac{a+1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 의 값의 합이 9가

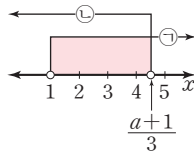
$$2+3+4=9$$

되도록 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$4 < \frac{a+1}{3} \leq 5$$

$$12 < a+1 \leq 15 \quad \therefore 11 < a \leq 14$$

따라서 자연수 a 의 최댓값은 14이다.



525 ㉡ 4

상자의 개수를 x 라 하자.

한 상자에 공을 6개씩 담으면 공이 12개 남으므로 공의 개수는

$$6x+12$$

한 상자에 공을 8개씩 담으면 4개 이상 6개 미만의 공이 남으므로

$$8x+4 \leq 6x+12 < 8x+6$$

이 부등식은 $\begin{cases} 8x+4 \leq 6x+12 \\ 6x+12 < 8x+6 \end{cases}$ 으로 나타낼 수 있다.

$8x+4 \leq 6x+12$ 를 풀면

$$2x \leq 8 \quad \therefore x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$6x+12 < 8x+6$ 을 풀면

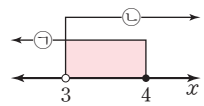
$$-2x < -6 \quad \therefore x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 수직선 위에 나타내

면 오른쪽 그림과 같으므로

$$3 < x \leq 4$$

이때 상자의 개수는 자연수이므로 4이다.



526 ㉡ 12 cm 이상 15 cm 이하

세로의 길이를 x cm라 하면 가로 길이는

$$(3x-4) \text{ cm}$$

직사각형의 둘레의 길이가 88 cm 이상 112 cm 이하이므로

$$88 \leq 2\{(3x-4)+x\} \leq 112$$

$$88 \leq 8x-8 \leq 112$$

$$96 \leq 8x \leq 120$$

$$\therefore 12 \leq x \leq 15$$

따라서 세로의 길이는 12 cm 이상 15 cm 이하이다.

527 ㉡ 9

연속하는 세 정수를 $x-1$, x , $x+1$ 이라 하면

세 정수의 합은 21보다 크므로

$$(x-1)+x+(x+1) > 21$$

$$3x > 21 \quad \therefore x > 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 큰 두 수의 합에서 가장 작은 수를 뺀 값은 10보다 크지 않으므로

$$x+(x+1)-(x-1) \leq 10$$

$$x+2 \leq 10 \quad \therefore x \leq 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 수직선 위에 나타내

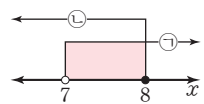
면 오른쪽 그림과 같으므로

$$7 < x \leq 8$$

이때 x 는 정수이므로

$$x=8$$

따라서 연속하는 세 정수는 7, 8, 9이므로 가장 큰 수는 9이다.



528 ㉡ 9

만들 수 있는 음료 A의 개수를 x 라 하면 음료 B의 개수는 $10-x$ 이므로

$$\begin{cases} 50x+100(10-x) \leq 700 \\ 30x+10(10-x) \leq 280 \end{cases}$$

$50x + 100(10 - x) \leq 700$ 을 풀면

$$50x + 1000 - 100x \leq 700$$

$$-50x \leq -300 \quad \therefore x \geq 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$30x + 10(10 - x) \leq 280$ 을 풀면

$$30x + 100 - 10x \leq 280$$

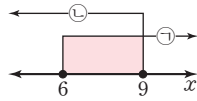
$$20x \leq 180 \quad \therefore x \leq 9 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

㉑, ㉒을 수직선 위에 나타내

면 오른쪽 그림과 같으므로

$$6 \leq x \leq 9$$

따라서 만들 수 있는 음료 A의 최대 개수는 9이다.



개념 확인

253쪽

529 $\textcircled{㉑}$ (1) $-1 \leq x \leq 1$

(2) $x < -2$ 또는 $x > 2$

(3) $x \leq -4$ 또는 $x \geq 4$

(4) $-7 < x < 7$

(5) $-5 \leq x \leq -2$ 또는 $2 \leq x \leq 5$

(6) $-6 \leq x < -1$ 또는 $1 < x \leq 6$

530 $\textcircled{㉑}$ (1) $-2 \leq x \leq 6$

(2) $x < -3$ 또는 $x > 1$

유제

255쪽

531 $\textcircled{㉑}$ (1) $x < -\frac{1}{3}$ 또는 $x > 3$

(2) $-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$ 또는 $1 < x < 2$

(1) $|3x - 4| > 5$ 에서

$$3x - 4 < -5 \text{ 또는 } 3x - 4 > 5$$

(i) $3x - 4 < -5$ 에서

$$3x < -1 \quad \therefore x < -\frac{1}{3}$$

(ii) $3x - 4 > 5$ 에서

$$3x > 9 \quad \therefore x > 3$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$x < -\frac{1}{3} \text{ 또는 } x > 3$$

(2) $3 < |4x - 1| < 7$ 에서

$$-7 < 4x - 1 < -3 \text{ 또는 } 3 < 4x - 1 < 7$$

(i) $-7 < 4x - 1 < -3$ 에서

$$-6 < 4x < -2 \quad \therefore -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$$

(ii) $3 < 4x - 1 < 7$ 에서

$$4 < 4x < 8 \quad \therefore 1 < x < 2$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } 1 < x < 2$$

532 $\textcircled{㉑}$ (1) $-\frac{2}{3} \leq x \leq 4$ (2) $-5 < x < 4$

(1) (i) $x < \frac{1}{2}$ 일 때,

$$|2x - 1| = -(2x - 1) \text{이므로}$$

$$-(2x - 1) \leq x + 3$$

$$-3x \leq 2 \quad \therefore x \geq -\frac{2}{3}$$

그런데 $x < \frac{1}{2}$ 이므로

$$-\frac{2}{3} \leq x < \frac{1}{2}$$

(ii) $x \geq \frac{1}{2}$ 일 때,

$$|2x - 1| = 2x - 1 \text{이므로}$$

$$2x - 1 \leq x + 3 \quad \therefore x \leq 4$$

그런데 $x \geq \frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 4$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$-\frac{2}{3} \leq x \leq 4$$

(2) (i) $x < -2$ 일 때,

$$|x + 2| = -(x + 2), |x - 1| = -(x - 1) \text{이}$$

므로

$$-(x + 2) - (x - 1) < 9$$

$$-2x < 10 \quad \therefore x > -5$$

그런데 $x < -2$ 이므로

$$-5 < x < -2$$

(ii) $-2 \leq x < 1$ 일 때,

$$|x + 2| = x + 2, |x - 1| = -(x - 1) \text{이므로}$$

$$(x + 2) - (x - 1) < 9$$

$$0 \times x < 6 \text{이므로 해는 모든 실수이다.}$$

그런데 $-2 \leq x < 1$ 이므로

$$-2 \leq x < 1$$

(iii) $x \geq 1$ 일 때,
 $|x+2|=x+2, |x-1|=x-1$ 이므로
 $(x+2)+(x-1) < 9$
 $2x < 8 \quad \therefore x < 4$
 그런데 $x \geq 1$ 이므로
 $1 \leq x < 4$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는
 $-5 < x < 4$

533 ㉠ 2

$1 \leq |3x-2| < 4$ 에서
 $-4 < 3x-2 \leq -1$ 또는 $1 \leq 3x-2 < 4$
 (i) $-4 < 3x-2 \leq -1$ 에서
 $-2 < 3x \leq 1 \quad \therefore -\frac{2}{3} < x \leq \frac{1}{3}$

(ii) $1 \leq 3x-2 < 4$ 에서
 $3 \leq 3x < 6 \quad \therefore 1 \leq x < 2$
 (i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는
 $-\frac{2}{3} < x \leq \frac{1}{3}$ 또는 $1 \leq x < 2$

따라서 정수 x 는 0, 1의 2개이다.

534 ㉠ -4

(i) $x < -\frac{1}{2}$ 일 때,
 $|2x+1|=-(2x+1), |x-1|=-(x-1)$ 이
 므로
 $-(2x+1)-(x-1) \leq 6$
 $-3x \leq 6 \quad \therefore x \geq -2$
 그런데 $x < -\frac{1}{2}$ 이므로 $-2 \leq x < -\frac{1}{2}$

(ii) $-\frac{1}{2} \leq x < 1$ 일 때,
 $|2x+1|=2x+1, |x-1|=-(x-1)$ 이므로
 $(2x+1)-(x-1) \leq 6$
 $\therefore x \leq 4$
 그런데 $-\frac{1}{2} \leq x < 1$ 이므로 $-\frac{1}{2} \leq x < 1$

(iii) $x \geq 1$ 일 때,
 $|2x+1|=2x+1, |x-1|=x-1$ 이므로
 $(2x+1)+(x-1) \leq 6$
 $3x \leq 6 \quad \therefore x \leq 2$
 그런데 $x \geq 1$ 이므로 $1 \leq x \leq 2$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2 \leq x \leq 2$
 따라서 x 의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이므로 구하는
 곱은
 $2 \times (-2) = -4$

연습문제

256~258쪽

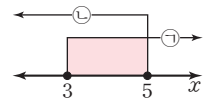
535 ㉠ -5

$a^2x-2 \geq 25x+a$ 에서 $(a^2-25)x \geq a+2$
 이 부등식의 해가 모든 실수이므로
 $a^2-25=0, a+2 \leq 0$
 (i) $a^2-25=0$ 에서
 $(a+5)(a-5)=0 \quad \therefore a=-5$ 또는 $a=5$
 (ii) $a+2 \leq 0$ 에서 $a \leq -2$
 (i), (ii)에서 $a=-5$

536 ㉠ ②

$3x \geq 2x+3$ 을 풀면
 $x \geq 3 \quad \dots\dots ㉠$
 $x-10 \leq -x$ 를 풀면
 $2x \leq 10 \quad \therefore x \leq 5 \quad \dots\dots ㉡$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내
 면 오른쪽 그림과 같으므로 주
 어진 연립부등식의 해는

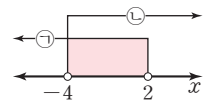


$3 \leq x \leq 5$
 따라서 정수 x 의 값은 3, 4, 5이므로 구하는 합은
 $3+4+5=12$

537 ㉠ ②

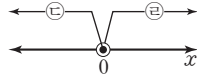
㉠. $4x+1 < 9$ 를 풀면
 $4x < 8 \quad \therefore x < 2 \quad \dots\dots ㉠$
 $2x-3 > x-7$ 을 풀면
 $x > -4 \quad \dots\dots ㉡$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나
 타내면 오른쪽 그림과 같
 으므로 주어진 연립부등식
 의 해는



$-4 < x < 2$
 ㉢. $-3x+1 \geq 1$ 을 풀면
 $-3x \geq 0 \quad \therefore x \leq 0 \quad \dots\dots ㉢$
 $2x-5 > x-5$ 를 풀면
 $x > 0 \quad \dots\dots ㉣$

㉔, ㉕을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



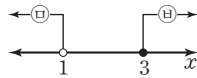
㉔. $\frac{1}{3}x + 2 < \frac{7}{3}$ 을 풀면

$$x + 6 < 7 \quad \therefore x < 1 \quad \dots\dots \text{㉔}$$

$9 - x \leq 2x$ 를 풀면

$$-3x \leq -9 \quad \therefore x \geq 3 \quad \dots\dots \text{㉕}$$

㉔, ㉕을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



㉕. $0.2(x-1) \leq -1$ 을 풀면

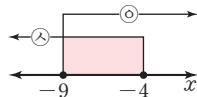
$$2(x-1) \leq -10, 2x-2 \leq -10$$

$$2x \leq -8 \quad \therefore x \leq -4 \quad \dots\dots \text{㉔}$$

$5x + 8 \geq 4x - 1$ 을 풀면

$$x \geq -9 \quad \dots\dots \text{㉕}$$

㉔, ㉕을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$$-9 \leq x \leq -4$$

따라서 해가 없는 것은 ㉔, ㉕이다.

538 ㉔ ㉕

$$\frac{5}{4}x - 2 \leq x + a \text{를 풀면}$$

$$5x - 8 \leq 4x + 4a \quad \therefore x \leq 4a + 8$$

$3x + 12 \geq b - x$ 를 풀면

$$4x \geq b - 12 \quad \therefore x \geq \frac{b-12}{4}$$

주어진 그림에서 $x \leq 4$, $x \geq -4$ 이므로

$$4a + 8 = 4, \frac{b-12}{4} = -4 \quad \therefore a = -1, b = -4$$

$$\therefore a + b = -5$$

539 ㉔ ㉕

$$4(x+2) - 1 \geq a + x \text{를 풀면 } 4x + 8 - 1 \geq a + x$$

$$3x \geq a - 7 \quad \therefore x \geq \frac{a-7}{3}$$

$$3x - 1 \leq x + 5 \text{를 풀면 } 2x \leq 6 \quad \therefore x \leq 3$$

이때 주어진 연립부등식의 해가 $x = 3$ 이므로

$$\frac{a-7}{3} = 3 \quad \therefore a = 16$$

540 ㉔ ㉕

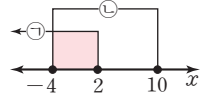
$2x + 5 \leq 9$ 를 풀면

$$2x \leq 4 \quad \therefore x \leq 2 \quad \dots\dots \text{㉔}$$

$|x - 3| \leq 7$ 을 풀면

$$-7 \leq x - 3 \leq 7 \quad \therefore -4 \leq x \leq 10 \quad \dots\dots \text{㉕}$$

㉔, ㉕을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$$-4 \leq x \leq 2$$

따라서 정수 x 는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ 의 7개이다.

541 ㉔ ㉕

(i) $x < -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$|2x + 1| = -(2x + 1) \text{이므로}$$

$$-(2x + 1) > 3x + 5$$

$$-5x > 6 \quad \therefore x < -\frac{6}{5}$$

$$\text{그런데 } x < -\frac{1}{2} \text{이므로 } x < -\frac{6}{5}$$

(ii) $x \geq -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$|2x + 1| = 2x + 1 \text{이므로}$$

$$2x + 1 > 3x + 5$$

$$-x > 4 \quad \therefore x < -4$$

그런데 $x \geq -\frac{1}{2}$ 이므로 이 범위에서 부등식이 해를 갖지 않는다.

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해가 $x < -\frac{6}{5}$ 이므로 이를 만족시키는 정수 x 의 최댓값은 -2 이다.

542 ㉔ ㉕

$$(a-b)x + 3a - 4b \leq 0 \text{에서}$$

$$(a-b)x \leq -3a + 4b$$

이 부등식이 해를 갖지 않으므로

$$a - b = 0, -3a + 4b < 0$$

$$a - b = 0 \text{에서 } a = b \quad \dots\dots \text{㉔}$$

㉔을 $-3a + 4b < 0$ 에 대입하면

$$-3b + 4b < 0 \quad \therefore b < 0$$

㉕을 $2(a+b)x + 9b - a > 0$ 에 대입하면

$$4bx + 8b > 0, 4bx > -8b$$

$b < 0$ 에서 $4b < 0$ 이므로 양변을 $4b$ 로 나누면

$$x < -2$$

543 ㉔ 8

$5x - a < 3x + b$ 를 풀면

$$2x < a + b \quad \therefore x < \frac{a+b}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$-x + \frac{b}{4} > \frac{a-6x}{4}$ 를 풀면

$$-4x + b > a - 6x$$

$$2x > a - b \quad \therefore x > \frac{a-b}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $a > 0, b > 0$ 에서

$$\frac{a-b}{2} < \frac{a+b}{2} \text{이므로}$$

①, ②을 수직선 위에 나타내

면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$$\frac{a-b}{2} < x < \frac{a+b}{2}$$

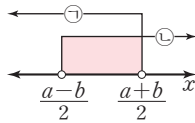
이는 $-1 < x < 3$ 과 같으므로

$$\frac{a-b}{2} = -1, \quad \frac{a+b}{2} = 3$$

$$\therefore a - b = -2, \quad a + b = 6$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 4$

$$\therefore ab = 8$$



544 ㉔ ④

$3x + 5 > 2x - a$ 를 풀면

$$x > -a - 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x - a + 6 > -x + a + 4$ 를 풀면

$$2x > 2a - 2 \quad \therefore x > a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(i) $-a - 5 < a - 1$, 즉 $a > -2$ 일 때,

①, ②을 수직선 위에 나

타내면 오른쪽 그림과 같으

므로 주어진 연립부등식의

해는 $x > a - 1$

이는 $x > 3$ 과 같으므로 $a - 1 = 3 \quad \therefore a = 4$

(ii) $-a - 5 \geq a - 1$, 즉 $a \leq -2$ 일 때,

①, ②을 수직선 위에 나

타내면 오른쪽 그림과 같으

므로 주어진 연립부등식의

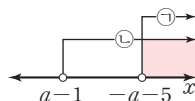
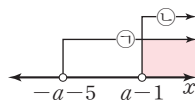
해는 $x > -a - 5$

이는 $x > 3$ 과 같으므로

$$-a - 5 = 3 \quad \therefore a = -8$$

(i), (ii)에서 $a = -8$ 또는 $a = 4$

따라서 모든 a 의 값의 합은 $-8 + 4 = -4$



545 ㉔ 9

주어진 부등식은 $\begin{cases} 5(x+1)+2 \leq 3x+1 \\ 3x+1 \leq \frac{7}{2}x+a-2 \end{cases}$ 로 나타낼

수 있다.

$5(x+1)+2 \leq 3x+1$ 을 풀면

$$5x+5+2 \leq 3x+1$$

$$2x \leq -6 \quad \therefore x \leq -3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$3x+1 \leq \frac{7}{2}x+a-2$ 를 풀면

$$6x+2 \leq 7x+2a-4$$

$$-x \leq 2a-6 \quad \therefore x \geq -2a+6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

주어진 부등식이 해를 갖도록

①, ②을 수직선 위에 나타내

면 오른쪽 그림과 같으므로

$$-2a+6 \leq -3$$

$$-2a \leq -9 \quad \therefore a \geq \frac{9}{2}$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 5이므로 $m = 5$

또 주어진 부등식이 해를 갖지

않도록 ①, ②을 수직선 위에

나타내면 오른쪽 그림과 같으

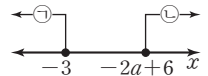
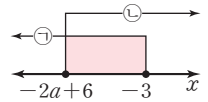
므로

$$-2a+6 > -3$$

$$-2a > -9 \quad \therefore a < \frac{9}{2}$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 4이므로 $M = 4$

$$\therefore M + m = 4 + 5 = 9$$



546 ㉔ 9

주어진 부등식은 $\begin{cases} 3x-1 < 5x+3 \\ 5x+3 \leq 4x+a \end{cases}$ 로 나타낼 수 있

다.

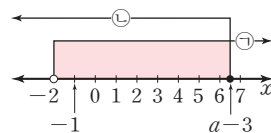
$3x-1 < 5x+3$ 을 풀면

$$-2x < 4 \quad \therefore x > -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$5x+3 \leq 4x+a \text{를 풀면 } x \leq a-3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 가 8개가 되도록

①, ②을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 $6 \leq a-3 < 7$ 이므로 $9 \leq a < 10$

즉, 자연수 a 의 값은 9이다.

547 ㉮ 50 g 이상 300 g 이하

| 접근 방법 | 농도가 $a\%$ 인 소금물 A g이 있을 때

$$(\text{소금의 양}) = \frac{a}{100} A(\text{g})$$

임을 이용하여 소금의 양에 대한 부등식을 세운다.

섞어야 하는 5%의 소금물의 양을 x g이라 하면

$$(200+x) \times \frac{9}{100} \leq 200 \times \frac{15}{100} + x \times \frac{5}{100}$$

$$\leq (200+x) \times \frac{13}{100}$$

$$1800+9x \leq 3000+5x \leq 2600+13x$$

$$1800+9x \leq 3000+5x \text{를 풀면}$$

$$4x \leq 1200 \quad \therefore x \leq 300 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$3000+5x \leq 2600+13x \text{를 풀면}$$

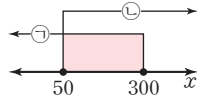
$$-8x \leq -400 \quad \therefore x \geq 50 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내

면 오른쪽 그림과 같으므로

$$50 \leq x \leq 300$$

따라서 섞어야 하는 5%의 소금물의 양은 50 g 이상 300 g 이하이다.



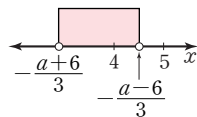
548 ㉮ ①

$$|3x+a| < 6 \text{에서}$$

$$-6 < 3x+a < 6, -a-6 < 3x < -a+6$$

$$\therefore -\frac{a+6}{3} < x < -\frac{a-6}{3}$$

이를 만족시키는 정수 x 의 최댓값이 4이려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$$4 < -\frac{a-6}{3} \leq 5, -15 \leq a-6 < -12$$

$$\therefore -9 \leq a < -6$$

따라서 정수 a 의 값은 $-9, -8, -7$ 이므로 구하는 합은

$$-9 + (-8) + (-7) = -24$$

549 ㉮ ⑤

$$(i) x < \frac{1}{3} \text{일 때,}$$

$$|3x-1| = -(3x-1) \text{이므로}$$

$$-(3x-1) < x+a$$

$$-4x < a-1 \quad \therefore x > -\frac{a-1}{4}$$

$$a > 0 \text{에서 } -\frac{a-1}{4} < \frac{1}{4} \text{이고 } x < \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$-\frac{a-1}{4} < x < \frac{1}{3}$$

$$(ii) x \geq \frac{1}{3} \text{일 때,}$$

$$|3x-1| = 3x-1 \text{이므로}$$

$$3x-1 < x+a$$

$$2x < a+1 \quad \therefore x < \frac{a+1}{2}$$

$$a > 0 \text{에서 } \frac{a+1}{2} > \frac{1}{2} \text{이고 } x \geq \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{3} \leq x < \frac{a+1}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$-\frac{a-1}{4} < x < \frac{a+1}{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{a+1}{2} = 3 \text{이므로 } a+1=6 \quad \therefore a=5$$

550 ㉮ ④

$$\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1| \text{이므로 주어진 부등식은}$$

$$|x-2| + 2|x+1| \leq 9$$

$$(i) x < -1 \text{일 때,}$$

$$|x-2| = -(x-2), |x+1| = -(x+1) \text{이므로}$$

$$-(x-2) - 2(x+1) \leq 9$$

$$-3x \leq 9 \quad \therefore x \geq -3$$

$$\text{그런데 } x < -1 \text{이므로 } -3 \leq x < -1$$

$$(ii) -1 \leq x < 2 \text{일 때,}$$

$$|x-2| = -(x-2), |x+1| = x+1 \text{이므로}$$

$$-(x-2) + 2(x+1) \leq 9 \quad \therefore x \leq 5$$

$$\text{그런데 } -1 \leq x < 2 \text{이므로 } -1 \leq x < 2$$

$$(iii) x \geq 2 \text{일 때,}$$

$$|x-2| = x-2, |x+1| = x+1 \text{이므로}$$

$$(x-2) + 2(x+1) \leq 9$$

$$3x \leq 9 \quad \therefore x \leq 3$$

$$\text{그런데 } x \geq 2 \text{이므로 } 2 \leq x \leq 3$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $-3 \leq x \leq 3$

따라서 정수 x 는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 7개이다.

551 ㉮ 67

| 접근 방법 | 의자의 개수를 미지수로 놓고 마지막 의자에 앉을 수 있는 학생의 수를 이용하여 부등식으로 나타낸다.

의자의 개수를 x 라 하자.

한 의자에 8명씩 앉으면 학생이 5명 남으므로 학생의 수는

$$8x+5$$

한 의자에 9명씩 앉아서 빈 의자 6개가 남으면 의자 $(x-7)$ 개에는 9명씩 앉고 마지막 의자에는 최소 1명, 최대 9명이 앉으므로

$$9(x-7)+1 \leq 8x+5 \leq 9(x-7)+9 \quad \text{..... ①}$$

이 부등식은 $\begin{cases} 9(x-7)+1 \leq 8x+5 \\ 8x+5 \leq 9(x-7)+9 \end{cases}$ 로 나타낼 수 있다.

$$9(x-7)+1 \leq 8x+5 \text{를 풀면}$$

$$9x-63+1 \leq 8x+5 \quad \therefore x \leq 67 \quad \text{..... ⑦}$$

$$8x+5 \leq 9(x-7)+9 \text{를 풀면}$$

$$8x+5 \leq 9x-63+9$$

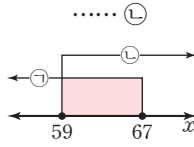
$$-x \leq -59 \quad \therefore x \geq 59 \quad \text{..... ⑧}$$

⑦, ⑧을 수직선 위에 나타내

면 오른쪽 그림과 같으므로

$$59 \leq x \leq 67 \quad \text{..... ②}$$

따라서 의자의 최대 개수는 67이다. ③



단계	채점 기준	비율
①	부등식 세우기	30%
②	의자의 개수의 범위 구하기	50%
③	의자의 최대 개수 구하기	20%

552 ㉡ ⑤

|접근 방법| $3|x-1|+|x+4|$ 의 값의 범위를 구하여 이를 포함하는 a 의 값의 범위를 구한다.

$f(x)=3|x-1|+|x+4|$ 라 하자.

(i) $x < -4$ 일 때,

$$|x-1| = -(x-1), |x+4| = -(x+4) \text{이므로}$$

$$f(x) = -3(x-1) - (x+4) = -4x-1$$

$$\text{그런데 } x < -4 \text{이므로 } -4x-1 > 15$$

$$\therefore f(x) > 15$$

(ii) $-4 \leq x < 1$ 일 때,

$$|x-1| = -(x-1), |x+4| = x+4 \text{이므로}$$

$$f(x) = -3(x-1) + (x+4) = -2x+7$$

$$\text{그런데 } -4 \leq x < 1 \text{이므로 } 5 < -2x+7 \leq 15$$

$$\therefore 5 < f(x) \leq 15$$

(iii) $x \geq 1$ 일 때,

$$|x-1| = x-1, |x+4| = x+4 \text{이므로}$$

$$f(x) = 3(x-1) + (x+4) = 4x+1$$

$$\text{그런데 } x \geq 1 \text{이므로 } 4x+1 \geq 5$$

$$\therefore f(x) \geq 5$$

(i), (ii), (iii)에서 $f(x) \geq 5$

따라서 주어진 부등식이 해를 가지려면 $a \geq 5$

01 이차부등식

개념 확인

263쪽

$$553 \text{ ㉡ (1) } -2 < x < 2 \text{ (2) } -2 \leq x \leq 2$$

$$(3) x < -2 \text{ 또는 } x > 2$$

$$(4) x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2$$

$$554 \text{ ㉡ (1) 해는 없다. (2) } x = -3$$

$$(3) x \neq -3 \text{인 모든 실수 (4) 모든 실수}$$

$$555 \text{ ㉡ (1) 해는 없다. (2) 해는 없다.}$$

$$(3) \text{ 모든 실수 (4) 모든 실수}$$

$$556 \text{ ㉡ (1) } x < 1 \text{ 또는 } x > 3 \text{ (2) } 1 \leq x \leq 3$$

$$(3) x \neq -\frac{1}{3} \text{인 모든 실수}$$

$$(4) x = -\frac{1}{3} \text{ (5) 모든 실수}$$

$$(6) \text{ 해는 없다.}$$

$$557 \text{ ㉡ (1) } x^2 - 5x - 6 < 0$$

$$(2) x^2 + 3x - 4 > 0$$

유제

265-277쪽

$$558 \text{ ㉡ (1) } -4 \leq x \leq 3 \text{ (2) } x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 4$$

$$(3) x < -4 \text{ 또는 } 0 < x < 3 \text{ 또는 } x > 5$$

(1) 부등식 $f(x) \leq 0$ 의 해는 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$-4 \leq x \leq 3$$

(2) 부등식 $f(x) \geq g(x)$ 의 해는 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 이차함수 $y=g(x)$ 의 그래프보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 4$$

(3) $f(x)g(x) < 0$ 이면

$$f(x) > 0, g(x) < 0 \text{ 또는 } f(x) < 0, g(x) > 0$$

(i) $f(x) > 0, g(x) < 0$ 일 때,

$$f(x) > 0 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값의 범위는}$$

$$x < -4 \text{ 또는 } x > 3 \quad \text{..... ⑦}$$

$$g(x) < 0 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값의 범위는}$$

$$x < 0 \text{ 또는 } x > 5 \quad \text{..... ⑧}$$

$$\text{⑦, ⑧의 공통부분은 } x < -4 \text{ 또는 } x > 5$$

(ii) $f(x) < 0, g(x) > 0$ 일 때,

$f(x) < 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$-4 < x < 3 \quad \cdots \textcircled{\text{㉔}}$$

$g(x) > 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$0 < x < 5 \quad \cdots \textcircled{\text{㉕}}$$

$\textcircled{\text{㉔}}, \textcircled{\text{㉕}}$ 의 공통부분은 $0 < x < 3$

(i), (ii)에서 구하는 부등식의 해는

$$x < -4 \text{ 또는 } 0 < x < 3 \text{ 또는 } x > 5$$

559 $\textcircled{\text{㉔}} -2 \leq x \leq \frac{1}{2}$

$f(x) - g(x) \leq 0$ 에서 $f(x) \leq g(x)$

이 부등식의 해는 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=g(x)$ 보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

560 $\textcircled{\text{㉔}} -4 < x < -2 \text{ 또는 } 1 < x < 2$

$\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ 이면

$f(x) > 0, g(x) > 0$ 또는 $f(x) < 0, g(x) < 0$

(i) $f(x) > 0, g(x) > 0$ 일 때,

$f(x) > 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$x < -2 \text{ 또는 } x > 2 \quad \cdots \textcircled{\text{㉔}}$$

$g(x) > 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$-4 < x < 1 \quad \cdots \textcircled{\text{㉕}}$$

$\textcircled{\text{㉔}}, \textcircled{\text{㉕}}$ 의 공통부분은 $-4 < x < -2$

(ii) $f(x) < 0, g(x) < 0$ 일 때,

$f(x) < 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$-2 < x < 2 \quad \cdots \textcircled{\text{㉔}}$$

$g(x) < 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는

$$x < -4 \text{ 또는 } x > 1 \quad \cdots \textcircled{\text{㉕}}$$

$\textcircled{\text{㉔}}, \textcircled{\text{㉕}}$ 의 공통부분은 $1 < x < 2$

(i), (ii)에서 구하는 부등식의 해는

$$-4 < x < -2 \text{ 또는 } 1 < x < 2$$

561 $\textcircled{\text{㉔}} -2 \leq x \leq \frac{5}{2}$

$ax^2 + (b-m)x + c-n \geq 0$ 에서

$$ax^2 + bx + c \geq mx + n$$

이 부등식의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 직선 $y=mx+n$ 보다 위쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위이므로

$$-2 \leq x \leq \frac{5}{2}$$

562 $\textcircled{\text{㉔}} (1) x < 3 \text{ 또는 } x > 4 \quad (2) x = \frac{2}{3}$

(3) 모든 실수

(1) $-x^2 - 12 < -7x$ 에서

$$x^2 - 7x + 12 > 0$$

$$(x-3)(x-4) > 0$$

$$\therefore x < 3 \text{ 또는 } x > 4$$

(2) $9x^2 - 12x + 4 \leq 0$ 에서

$$(3x-2)^2 \leq 0$$

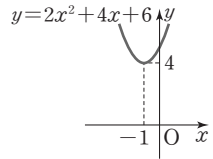
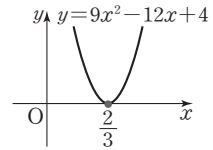
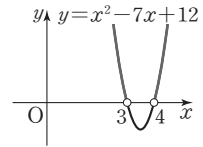
$$\therefore x = \frac{2}{3}$$

(3) $2x^2 + 4x + 6 > 0$ 에서

$$2(x+1)^2 + 4 > 0$$

따라서 주어진 부등식의

해는 모든 실수이다.



563 $\textcircled{\text{㉔}} (1) x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2 \quad (2) -2 < x < 4$

(1) (i) $x < 0$ 일 때,

$$|x| = -x \text{이므로 } x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$(x+2)(x-1) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 1$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x \leq -2$

(ii) $x \geq 0$ 일 때,

$$|x| = x \text{이므로 } x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$(x+1)(x-2) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 2$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x \geq 2$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2$$

(2) (i) $x < 1$ 일 때,

$$|x-1| = -(x-1) \text{이므로}$$

$$x^2 - 2x - 2 < -2(x-1)$$

$$x^2 - 4 < 0, (x+2)(x-2) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 2$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $-2 < x < 1$

(ii) $x \geq 1$ 일 때,

$$|x-1| = x-1 \text{이므로}$$

$$x^2 - 2x - 2 < 2(x-1)$$

$$x^2 - 4x < 0, x(x-4) < 0$$

$$\therefore 0 < x < 4$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $1 \leq x < 4$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2 < x < 4$

| 다른 풀이 |

$$(1) x^2 = |x|^2 \text{이므로 } x^2 - |x| - 2 \geq 0 \text{에서}$$

$$|x|^2 - |x| - 2 \geq 0, (|x| + 1)(|x| - 2) \geq 0$$

$$\therefore |x| \leq -1 \text{ 또는 } |x| \geq 2$$

그런데 $|x| \geq 0$ 이므로 $|x| \geq 2$

$$\therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2$$

564 ㉡ 9

$$3x^2 - 18x + 21 < 0 \text{에서 } 3(x^2 - 6x + 7) < 0$$

이차방정식 $x^2 - 6x + 7 = 0$ 의 해는 $x = 3 \pm \sqrt{2}$ 이므로

$$x^2 - 6x + 7 < 0 \text{의 해는 } 3 - \sqrt{2} < x < 3 + \sqrt{2}$$

따라서 정수 x 의 값은 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$$2 + 3 + 4 = 9$$

| 참고 | $1 < \sqrt{2} < 2$ 이므로 $4 < 3 + \sqrt{2} < 5$, $-2 < -\sqrt{2} < -1$ 이므로 $1 < 3 - \sqrt{2} < 2$ 임을 이용한다.

565 ㉡ 8

(i) $x < \frac{1}{2}$ 일 때,

$$|2x - 1| = -(2x - 1) \text{이므로}$$

$$x^2 + (2x - 1) \leq x + 5$$

$$x^2 + x - 6 \leq 0, (x + 3)(x - 2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 2$$

그런데 $x < \frac{1}{2}$ 이므로 $-3 \leq x < \frac{1}{2}$

(ii) $x \geq \frac{1}{2}$ 일 때,

$$|2x - 1| = 2x - 1 \text{이므로}$$

$$x^2 - (2x - 1) \leq x + 5$$

$$x^2 - 3x - 4 \leq 0, (x + 1)(x - 4) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 4$$

그런데 $x \geq \frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-3 \leq x \leq 4$

따라서 정수 x 는 -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4의 8개이다.

566 ㉡ 10 m

산책로의 폭을 x m라 하면 산책로의 넓이가 1400 m^2 이상이 되어야 하므로

$$(30 + 2x)(20 + 2x) - 30 \times 20 \geq 1400$$

$$x^2 + 25x - 350 \geq 0, (x + 35)(x - 10) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -35 \text{ 또는 } x \geq 10$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x \geq 10$

따라서 산책로의 최소 폭은 10 m이다.

567 ㉡ 2초

물체의 높이가 40 m 이상이면

$$30t - 5t^2 \geq 40$$

$$5t^2 - 30t + 40 \leq 0, t^2 - 6t + 8 \leq 0$$

$$(t - 2)(t - 4) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq t \leq 4$$

따라서 물체의 높이가 40 m 이상인 시간은

$$4 - 2 = 2(\text{초}) \text{ 동안이다.}$$

| 참고 | $h \geq 0$ 이어야 하므로 $30t - 5t^2 \geq 0$

$$5t(t - 6) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq t \leq 6$$

따라서 부등식의 해 $2 \leq t \leq 4$ 는 $0 \leq t \leq 6$ 에 포함된다.

568 ㉡ 9 m 이상 13 m 이하

철문의 가로 길이 x m라 하면 세로 길이는

$$(22 - x) \text{ m}$$

이므로 철문의 넓이가 117 m^2 이상이라면

$$x(22 - x) \geq 117, x^2 - 22x + 117 \leq 0$$

$$(x - 9)(x - 13) \leq 0 \quad \therefore 9 \leq x \leq 13$$

따라서 가로의 길이의 범위는 9 m 이상 13 m 이하이다.

569 ㉡ ③

라면 한 그릇의 가격을 내리는 횟수를 x 라 하자.

라면 한 그릇의 가격을 100x원씩 내릴 때마다 하루 판매량은 20x그릇씩 늘어나므로 하루의 라면 판매액의 합계가 442000원 이상이 되려면

$$(2000 - 100x)(200 + 20x) \geq 442000$$

$$2000x^2 - 20000x + 42000 \leq 0$$

$$x^2 - 10x + 21 \leq 0, (x - 3)(x - 7) \leq 0$$

$$\therefore 3 \leq x \leq 7$$

따라서 라면 한 그릇의 가격의 최댓값은 $x = 3$ 일 때이므로

$$2000 - 100 \times 3 = 1700(\text{원})$$

570 ㉡ (1) $a = 8$, $b = 8$ (2) $3 < x < 7$

(1) 해가 $-2 \leq x \leq 1$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x + 2)(x - 1) \leq 0$$

$$\therefore x^2 + x - 2 \leq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①과 주어진 이차부등식 $ax^2 + bx - 16 \leq 0$ 의 부등호의 방향이 같으므로 $a > 0$

①의 양변에 a 를 곱하면 $ax^2 + ax - 2a \leq 0$

이 부등식이 $ax^2 + bx - 16 \leq 0$ 과 일치하므로

$$b = a, -16 = -2a$$

$$\therefore a = 8, b = 8$$

(2) 해가 $x < 2$ 또는 $x > 5$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차 부등식은

$$(x-2)(x-5) > 0$$

$$\therefore x^2 - 7x + 10 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑦과 주어진 이차부등식 $ax^2 + bx + c < 0$ 의 부등호의 방향이 다르므로 $a < 0$

$$\textcircled{7} \text{의 양변에 } a \text{를 곱하면 } ax^2 - 7ax + 10a < 0$$

이 부등식이 $ax^2 + bx + c < 0$ 과 일치하므로

$$b = -7a, c = 10a \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{8} \text{을 } ax^2 - cx - 3b > 0 \text{에 대입하면}$$

$$ax^2 - 10ax + 21a > 0$$

이때 $a < 0$ 이므로 양변을 a 로 나누면

$$x^2 - 10x + 21 < 0, (x-3)(x-7) < 0$$

$$\therefore 3 < x < 7$$

571 ㉡ ①

해가 $b \leq x \leq 6$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-b)(x-6) \leq 0$$

$$\therefore x^2 - (b+6)x + 6b \leq 0$$

이 부등식이 $x^2 - 8x + a \leq 0$ 과 일치하므로

$$-8 = -(b+6), a = 6b \quad \therefore a = 12, b = 2$$

$$\therefore a + b = 14$$

572 ㉡ -24

$$|x+3| < 4 \text{에서 } -4 < x+3 < 4 \quad \therefore -7 < x < 1$$

해가 $-7 < x < 1$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+7)(x-1) < 0$$

$$\therefore x^2 + 6x - 7 < 0$$

양변에 2를 곱하면 $2x^2 + 12x - 14 < 0$

이 부등식이 $2x^2 + ax + 7b < 0$ 과 일치하므로

$$a = 12, 7b = -14 \quad \therefore a = 12, b = -2$$

$$\therefore ab = -24$$

573 ㉡ $-2 \leq x \leq \frac{3}{2}$

해가 $x = -1$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+1)^2 \leq 0$$

$$\therefore x^2 + 2x + 1 \leq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑦과 주어진 이차부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 의 부등호의 방향이 다르므로 $a < 0$

$$\textcircled{7} \text{의 양변에 } a \text{를 곱하면 } ax^2 + 2ax + a \geq 0$$

이 부등식이 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 과 일치하므로

$$b = 2a, c = a \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{8} \text{을 } 2cx^2 + ax - 3b \geq 0 \text{에 대입하면}$$

$$2ax^2 + ax - 6a \geq 0$$

이때 $a < 0$ 이므로 양변을 a 로 나누면

$$2x^2 + x - 6 \leq 0, (x+2)(2x-3) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

574 ㉡ (1) $-\frac{1}{4} \leq a \leq 1$ (2) $0 \leq a \leq 1$

(1) 이차방정식 $x^2 + 4ax + 3a + 1 \geq 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4a^2 - (3a+1) \leq 0$$

$$4a^2 - 3a - 1 \leq 0, (4a+1)(a-1) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{4} \leq a \leq 1$$

(2) (i) $a = 0$ 일 때,

$$0 \times x^2 + 0 \times x + 4 \geq 0 \text{에서 } 4 \geq 0$$

즉, 부등식 $ax^2 + 2ax - 3a + 4 \geq 0$ 은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때,

모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$ax^2 + 2ax - 3a + 4 \geq 0 \text{이 성립하려면 이차함수}$$

$y = ax^2 + 2ax - 3a + 4$ 의 그래프가 아래로 볼록해야 하므로

$$a > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

또 이차방정식 $ax^2 + 2ax - 3a + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - a(-3a+4) \leq 0$$

$$4a^2 - 4a \leq 0, 4a(a-1) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{10}$$

⑨, ⑩의 공통부분은

$$0 < a \leq 1$$

(i), (ii)에서 a 의 값의 범위는

$$0 \leq a \leq 1$$

575 ㉡ 15

이차부등식 $-x^2 + (a+4)x + 2a - 4 < 0$ 의 해가 모든 실수가 되려면 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립해야 한다.

이차방정식 $-x^2 + (a+4)x + 2a - 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (a+4)^2 + 4(2a-4) < 0$$

$$a^2+16a<0, a(a+16)<0$$

$$\therefore -16<a<0$$

따라서 정수 a 는 $-15, -14, -13, \dots, -1$ 의 15개이다.

576 ㉠ -3

(i) $a+3=0$, 즉 $a=-3$ 일 때,

$$0 \times x^2 - 0 \times x - 1 < 0 \text{에서 } -1 < 0$$

즉, 부등식 $(a+3)x^2 - 2(a+3)x - 1 < 0$ 은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

(ii) $a+3 \neq 0$, 즉 $a \neq -3$ 일 때,

모든 실수 x 에 대하여 부등식

$(a+3)x^2 - 2(a+3)x - 1 < 0$ 이 성립하려면 이차함수 $y = (a+3)x^2 - 2(a+3)x - 1$ 의 그래프가 위로 볼록해야 하므로

$$a+3 < 0 \quad \therefore a < -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 이차방정식 $(a+3)x^2 - 2(a+3)x - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 + (a+3) < 0$$

$$a^2 + 7a + 12 < 0, (a+4)(a+3) < 0$$

$$\therefore -4 < a < -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 의 공통부분은

$$-4 < a < -3$$

(i), (ii)에서 a 의 값의 범위는

$$-4 < a < -3$$

따라서 a 의 최댓값은 -3 이다.

577 ㉠ $a < -1$ 또는 $a > \frac{5}{3}$

이차함수 $y = x^2 - 2ax - 4$ 의 그래프가 직선 $y = 2x - 4a^2$ 보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식

$$x^2 - 2ax - 4 > 2x - 4a^2, \text{ 즉}$$

$$x^2 - 2(a+1)x + 4a^2 - 4 > 0 \text{이 성립해야 한다.}$$

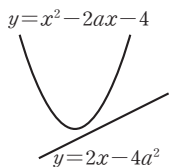
따라서 이차방정식 $x^2 - 2(a+1)x + 4a^2 - 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+1)^2 - (4a^2 - 4) < 0$$

$$-3a^2 + 2a + 5 < 0$$

$$3a^2 - 2a - 5 > 0, (a+1)(3a-5) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > \frac{5}{3}$$



578 ㉠ (1) $a < 0$ 또는 $a > 20$ (2) $a > 9$

(1) 이차부등식 $ax^2 - ax + 5 < 0$ 이 해를 가지려면 이차함수 $y = ax^2 - ax + 5$ 의 그래프가 x 축보다 아래쪽에 있는 부분이 존재해야 한다.

(i) $a > 0$ 일 때,

이차방정식 $ax^2 - ax + 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 20a > 0$$

$$a(a-20) > 0$$

$$\therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 20$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a > 20$

(ii) $a < 0$ 일 때,

주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(i), (ii)에서 a 의 값의 범위는

$$a < 0 \text{ 또는 } a > 20$$

(2) 이차부등식 $ax^2 + 6x - 8 + a \leq 0$ 이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 $ax^2 + 6x - 8 + a > 0$ 이 성립해야 하므로

$$a > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 이차방정식 $ax^2 + 6x - 8 + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - a(-8 + a) < 0$$

$$-a^2 + 8a + 9 < 0$$

$$a^2 - 8a - 9 > 0$$

$$(a+1)(a-9) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 9 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 의 공통부분은 $a > 9$

579 ㉠ 12

이차부등식 $-x^2 + 2(a+3)x + 2a + 3 \geq 0$ 이 해를 가지려면 이차함수 $y = -x^2 + 2(a+3)x + 2a + 3$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있거나 만나는 부분이 존재해야 한다.

이차방정식 $-x^2 + 2(a+3)x + 2a + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 + (2a+3) \geq 0$$

$$a^2 + 8a + 12 \geq 0$$

$$(a+6)(a+2) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -6 \text{ 또는 } a \geq -2$$

따라서 $\alpha = -6, \beta = -2$ 이므로

$$\alpha\beta = 12$$

580 ㉮ 5

이차부등식 $(a-2)x^2+2(a-2)x-5>0$ 이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$(a-2)x^2+2(a-2)x-5\leq 0$ 이 성립해야 하므로

$$a-2<0 \quad \therefore a<2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉮}$$

또 이차방정식 $(a-2)x^2+2(a-2)x-5=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2+5(a-2)\leq 0$$

$$a^2+a-6\leq 0, (a+3)(a-2)\leq 0$$

$$\therefore -3\leq a\leq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉮}$$

㉮, ㉮의 공통부분은

$$-3\leq a<2$$

따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1, 0, 1$ 의 5개이다.

581 ㉮ 4

$ax^2+2x\leq x^2+2ax-3$ 에서

$$(a-1)x^2+2(1-a)x+3\leq 0$$

이차부등식 $(a-1)x^2+2(1-a)x+3\leq 0$ 이 오직 하나의 해를 가지려면 이차함수

$y=(a-1)x^2+2(1-a)x+3$ 의 그래프가 아래로 볼록하면서 x 축과 접해야 하므로

$$a-1>0 \quad \therefore a>1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉮}$$

또 이차방정식 $(a-1)x^2+2(1-a)x+3=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(1-a)^2-3(a-1)=0$$

$$a^2-5a+4=0, (a-1)(a-4)=0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=4$$

그런데 ㉮에서 $a>1$ 이므로

$$a=4$$

582 ㉮ 1) $a>2$ (2) $a\leq -4$ 또는 $a\geq 2$

(1) $f(x)=x^2-2x-3+2a$ 라 하면

$$f(x)=(x-1)^2-4+2a$$

$-2\leq x\leq 3$ 에서 이차부등식

$f(x)>0$ 이 항상 성립하

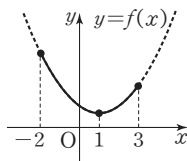
려면 이차함수 $y=f(x)$ 의

그래프가 오른쪽 그림과 같

아야 하므로

$$f(1)>0$$

$$-4+2a>0 \quad \therefore a>2$$



(2) $f(x)=x^2-ax-a^2+4$ 라

할 때, $0\leq x\leq 2$ 에서 이차

부등식 $f(x)\leq 0$ 이 항상 성

립하려면 이차함수

$y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$f(0)\leq 0, f(2)\leq 0$$

$$f(0)\leq 0 \text{에서 } -a^2+4\leq 0$$

$$a^2-4\geq 0, (a+2)(a-2)\geq 0$$

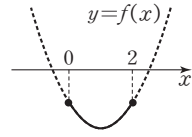
$$\therefore a\leq -2 \text{ 또는 } a\geq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉮}$$

$$f(2)\leq 0 \text{에서 } -a^2-2a+8\leq 0$$

$$a^2+2a-8\geq 0, (a+4)(a-2)\geq 0$$

$$\therefore a\leq -4 \text{ 또는 } a\geq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉮}$$

㉮, ㉮의 공통부분은 $a\leq -4$ 또는 $a\geq 2$



583 ㉮ 10

$-x^2+5x+a^2-5a\leq 0$ 에서

$$x^2-5x-a^2+5a\geq 0$$

$f(x)=x^2-5x-a^2+5a$ 라 하면

$$f(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-a^2+5a-\frac{25}{4}$$

$-1\leq x\leq 1$ 에서 이차부등식

$f(x)\geq 0$ 이 항상 성립하려면

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프

가 오른쪽 그림과 같아야 하

므로

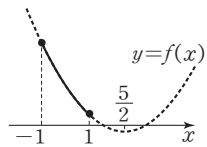
$$f(1)\geq 0$$

$$-a^2+5a-4\geq 0, a^2-5a+4\leq 0$$

$$(a-1)(a-4)\leq 0 \quad \therefore 1\leq a\leq 4$$

따라서 정수 a 는 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$$1+2+3+4=10$$



584 ㉮ $-\frac{1}{2}<a<0$ 또는 $0<a<\frac{1}{5}$

$x^2-3x\leq 0$ 에서 $x(x-3)\leq 0 \quad \therefore 0\leq x\leq 3$

$f(x)=a^2x^2+ax+a^2-1$ 이라

할 때, $0\leq x\leq 3$ 에서 이차부등

식 $f(x)<0$ 이 항상 성립하

면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래

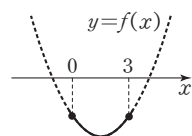
프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$f(0)<0, f(3)<0$$

$$f(0)<0 \text{에서 } a^2-1<0$$

$$(a+1)(a-1)<0$$

$$\therefore -1<a<1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉮}$$



$$f(3) < 0 \text{에서 } 10a^2 + 3a - 1 < 0$$

$$(2a+1)(5a-1) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{5} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{C} \text{의 공통부분은 } -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{5}$$

그런데 $a^2 \neq 0$ 에서 $a \neq 0$ 이므로

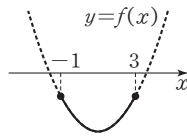
$$-\frac{1}{2} < a < 0 \text{ 또는 } 0 < a < \frac{1}{5}$$

585 ㉓ 3

$-1 \leq x \leq 3$ 에서 이차함수 $y = x^2 - ax - 3a$ 의 그래프가 직선 $y = x - 2$ 보다 아래쪽에 있으려면 $-1 \leq x \leq 3$ 에서 이차부등식 $x^2 - ax - 3a < x - 2$, 즉 $x^2 - (a+1)x - 3a + 2 < 0$ 이 항상 성립해야 한다.

$$f(x) = x^2 - (a+1)x - 3a + 2$$

라 할 때, $-1 \leq x \leq 3$ 에서 이차부등식 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$$f(-1) < 0, f(3) < 0$$

$$f(-1) < 0 \text{에서 } -2a + 4 < 0$$

$$\therefore a > 2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$f(3) < 0 \text{에서 } -6a + 8 < 0$$

$$\therefore a > \frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{C} \text{의 공통부분은 } a > 2$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 3이다.

연습문제

278~280쪽

586 ㉓ $x < -2$ 또는 $1 < x < 5$ 또는 $x > 6$

$$f(x)\{f(x) - g(x)\} > 0 \text{이면}$$

$$f(x) > 0, \frac{f(x) - g(x)}{f(x) - g(x)} > 0$$

$$\text{또는 } f(x) < 0, \frac{f(x) - g(x)}{f(x) - g(x)} < 0$$

$$(i) f(x) > 0, f(x) > g(x) \text{ 일 때,}$$

$$f(x) > 0 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값의 범위는}$$

$$-2 < x < 5 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$f(x) > g(x) \text{를 만족시키는 } x \text{의 값의 범위는}$$

$$1 < x < 6 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{A}, \textcircled{C} \text{의 공통부분은}$$

$$1 < x < 5$$

$$(ii) f(x) < 0, f(x) < g(x) \text{ 일 때,}$$

$$f(x) < 0 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값의 범위는}$$

$$x < -2 \text{ 또는 } x > 5 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$f(x) < g(x) \text{를 만족시키는 } x \text{의 값의 범위는}$$

$$x < 1 \text{ 또는 } x > 6 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$$\textcircled{B}, \textcircled{D} \text{의 공통부분은}$$

$$x < -2 \text{ 또는 } x > 6$$

$$(i), (ii) \text{에서 구하는 부등식의 해는}$$

$$x < -2 \text{ 또는 } 1 < x < 5 \text{ 또는 } x > 6$$

587 ㉓ 4

$$\textcircled{1} x^2 - x - 6 > 0 \text{에서 } (x+2)(x-3) > 0$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 3$$

$$\textcircled{2} x^2 - 8x + 16 \leq 0 \text{에서 } (x-4)^2 \leq 0$$

따라서 주어진 부등식의 해는 $x=4$ 이다.

$$\textcircled{3} 4x + 3 > -2x^2 \text{에서 } 2x^2 + 4x + 3 > 0$$

$$\therefore 2(x+1)^2 + 1 > 0$$

따라서 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

$$\textcircled{4} 3x^2 - 6x < -3 \text{에서 } 3x^2 - 6x + 3 < 0$$

$$\therefore 3(x-1)^2 < 0$$

따라서 주어진 부등식의 해는 없다.

$$\textcircled{5} 4x^2 - x > 3x - 1 \text{에서 } 4x^2 - 4x + 1 > 0$$

$$\therefore (2x-1)^2 > 0$$

따라서 주어진 부등식의 해는 $x \neq \frac{1}{2}$ 인 모든 실수이다.

따라서 해가 없는 것은 ④이다.

588 ㉓ 12

$$(i) x < 0 \text{ 일 때,}$$

$$|x| = -x \text{이므로 } x^2 + 5x - 6 < 0$$

$$(x+6)(x-1) < 0$$

$$\therefore -6 < x < 1$$

$$\text{그런데 } x < 0 \text{이므로 } -6 < x < 0$$

$$(ii) x \geq 0 \text{ 일 때,}$$

$$|x| = x \text{이므로 } x^2 - 5x - 6 < 0$$

$$(x+1)(x-6) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 6$$

$$\text{그런데 } x \geq 0 \text{이므로 } 0 \leq x < 6$$

$$(i), (ii) \text{에서 주어진 부등식의 해는 } -6 < x < 6$$

$$\text{따라서 } \alpha = -6, \beta = 6 \text{이므로}$$

$$\beta - \alpha = 12$$

589 ㉡ 16

해가 $-2 \leq x \leq 4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x+2)(x-4) \leq 0$
 $\therefore x^2 - 2x - 8 \leq 0$
 이 부등식이 $x^2 + ax + b \leq 0$ 과 일치하므로
 $a = -2, b = -8$
 $\therefore ab = 16$

590 ㉡ ③

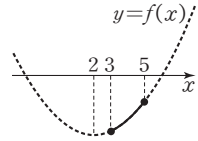
ㄱ. $x^2 - 2x - 48 < 0$ 에서
 $(x+6)(x-8) < 0 \quad \therefore -6 < x < 8$
 따라서 주어진 부등식은 $-6 < x < 8$ 에서만 성립한다.
 ㄴ. $2x - 1 \leq x^2$ 에서 $x^2 - 2x + 1 \geq 0$
 $(x-1)^2 \geq 0$
 따라서 주어진 부등식의 해는 모든 실수이므로 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
 ㄷ. $2x^2 + 3x + 5 > 0$ 에서
 $2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{8} > 0$
 따라서 주어진 부등식의 해는 모든 실수이므로 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
 ㄹ. $-9x^2 + 6x - 1 \geq 0$ 에서 $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$
 $(3x-1)^2 \leq 0$
 따라서 주어진 부등식의 해는 $x = \frac{1}{3}$ 이므로
 $x = \frac{1}{3}$ 에서만 성립한다.
 따라서 보기에서 모든 실수 x 에 대하여 성립하는 부등식인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

591 ㉡ -3

이차부등식 $-x^2 + 2ax + a - 6 > 0$ 이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 $-x^2 + 2ax + a - 6 \leq 0$ 이 성립해야 한다.
 이차방정식 $-x^2 + 2ax + a - 6 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = a^2 + a - 6 \leq 0$
 $(a+3)(a-2) \leq 0$
 $\therefore -3 \leq a \leq 2$
 따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ 이므로 구하는 합은
 $-3 + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 = -3$

592 ㉡ ②

$f(x) = x^2 - 4x - 4k + 3$ 이라 하면
 $f(x) = (x-2)^2 - 4k - 1$
 $3 \leq x \leq 5$ 에서 이차부등식
 $f(x) \leq 0$ 이 항상 성립하려면
 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가
 오른쪽 그림과 같아야 하므로
 $f(5) \leq 0$
 $-4k + 8 \leq 0$
 $\therefore k \geq 2$
 따라서 k 의 최솟값은 2이다.



593 ㉡ ①

$3x^2 + 24 \geq 4x^2 - 2x$ 에서
 $x^2 - 2x - 24 \leq 0$
 $(x+4)(x-6) \leq 0$
 $\therefore -4 \leq x \leq 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $|x+a| \leq b$ 에서
 $-b \leq x+a \leq b \quad (\because b > 0)$
 $\therefore -a-b \leq x \leq -a+b$
 이 부등식이 $\textcircled{1}$ 과 일치하므로
 $-a-b = -4, -a+b = 6$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a = -1, b = 5$
 $\therefore ab = -5$

594 ㉡ $-3 < x < 2$

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 위로 볼록하고, x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $-4, 3$ 이므로
 $f(x) = a(x+4)(x-3) \quad (a < 0)$
 이라 하자.
 이때 $f(0) = 6$ 이므로
 $-12a = 6 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$
 $\therefore f(x) = -\frac{1}{2}(x+4)(x-3)$
 $f(x) > 3$ 에서
 $-\frac{1}{2}(x+4)(x-3) > 3$
 $x^2 + x - 12 < -6$
 $x^2 + x - 6 < 0$
 $(x+3)(x-2) < 0$
 $\therefore -3 < x < 2$

595 ㉔ 25

새로 만든 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각 $(30-x)$ cm, $(15+x)$ cm이므로 넓이가 200 cm^2 이상이 되려면

$$(30-x)(15+x) \geq 200$$

$$x^2 - 15x - 250 \leq 0$$

$$(x+10)(x-25) \leq 0$$

$$\therefore -10 \leq x \leq 25$$

그런데 $0 < x < 30$ 이므로 $0 < x \leq 25$

따라서 x 의 최댓값은 25이다.

596 ㉔ 3

해가 $-2 < x < -1$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+2)(x+1) < 0$$

$$\therefore x^2 + 3x + 2 < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉔과 주어진 이차부등식 $(a+b)x^2 + (b+c)x + c + a > 0$ 의 부등호의 방향이 다르므로

$$a+b < 0$$

㉔의 양변에 $a+b$ 를 곱하면

$$(a+b)x^2 + 3(a+b)x + 2(a+b) > 0$$

이 부등식이 $(a+b)x^2 + (b+c)x + c + a > 0$ 과 일치하므로

$$b+c=3(a+b), c+a=2(a+b)$$

$$\therefore 3a+2b=c, a+2b=c$$

각 변끼리 빼면

$$2a=0 \quad \therefore a=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉔을 $a+2b=c$ 에 대입하면

$$2b=c \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

㉔, ㉔을 $bx^2 + cx + a \geq 0$ 에 대입하면

$$bx^2 + 2bx \geq 0$$

이때 $a+b < 0$, 즉 $b < 0$ 이므로 양변을 b 로 나누면

$$x^2 + 2x \leq 0$$

$$x(x+2) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq x \leq 0$$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0$ 의 3개이다.

597 ㉔ (1) $f(x)=a(x-2)(x-6)$ (단, $a < 0$)

$$(2) 1 \leq x \leq \frac{7}{3} \quad (3) 3$$

(1) 해가 $2 < x < 6$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-2)(x-6) < 0$$

이 부등식과 이차부등식 $f(x) > 0$ 의 부등호의 방향이 다르고 이차항의 계수가 a 이므로

$$f(x)=a(x-2)(x-6) \quad (\text{단}, a < 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

▶▶▶▶▶ ①

$$(2) f(3x-1)=a(3x-1-2)(3x-1-6)$$

$$=a(3x-3)(3x-7)$$

$$=3a(x-1)(3x-7)$$

$$\text{즉, } f(3x-1) \geq 0 \text{에서 } 3a(x-1)(3x-7) \geq 0$$

이때 ㉔에서 $a < 0$ 이므로

$$3(x-1)(3x-7) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq x \leq \frac{7}{3}$$

▶▶▶▶▶ ②

$$(3) 1 \leq x \leq \frac{7}{3} \text{을 만족시키는 정수 } x \text{는 } 1, 2 \text{이므로 구}$$

$$\text{하는 합은 } 1+2=3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

단계	채점 기준	비율
①	$f(x)$ 의 식 구하기	30%
②	$f(3x-1) \geq 0$ 의 해 구하기	50%
③	모든 정수 x 의 값의 합 구하기	20%

598 ㉔ ⑤

모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt{x^2 + 2(a-1)x + a + 11}$ 이 실수가 되려면 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2 + 2(a-1)x + a + 11 \geq 0$ 이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2 + 2(a-1)x + a + 11 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - (a+11) \leq 0, a^2 - 3a - 10 \leq 0$$

$$(a+2)(a-5) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq a \leq 5$$

따라서 a 의 최댓값은 5, 최솟값은 -2 이므로 구하는 합은

$$5 + (-2) = 3$$

599 ㉔ ③

$$x^2 + 3x - 4 \leq k(x-a) \text{에서}$$

$$x^2 - (k-3)x + ak - 4 \leq 0$$

이 이차부등식이 항상 해를 가지려면 이차함수

$y = x^2 - (k-3)x + ak - 4$ 의 그래프가 x 축보다 아래 쪽에 있거나 만나는 부분이 존재해야 한다.

이차방정식 $x^2 - (k-3)x + ak - 4 = 0$ 의 판별식을

D_1 이라 하면

$$D_1 = (k-3)^2 - 4(ak-4) \geq 0$$

$$\therefore k^2 - 2(3+2a)k + 25 \geq 0$$

k 의 값에 관계없이 이 부등식이 항상 성립하므로 k 에 대한 이차방정식 $k^2 - 2(3+2a)k + 25 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (3+2a)^2 - 25 \leq 0$$

$$4a^2 + 12a - 16 \leq 0, a^2 + 3a - 4 \leq 0$$

$$(a+4)(a-1) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq a \leq 1$$

따라서 $\alpha = -4, \beta = 1$ 이므로

$$\beta - \alpha = 5$$

600 ㉔ ④

부등식 $(a-2)x^2 - 2(a-2)x + 4 \leq 0$ 이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$(a-2)x^2 - 2(a-2)x + 4 > 0 \text{이 성립해야 한다.}$$

(i) $a=2$ 일 때,

$0 \times x^2 - 0 \times x + 4 > 0$ 에서 $4 > 0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $(a-2)x^2 - 2(a-2)x + 4 > 0$ 이 성립한다.

(ii) $a \neq 2$ 일 때,

모든 실수 x 에 대하여

$$(a-2)x^2 - 2(a-2)x + 4 > 0 \text{이 성립하려면}$$

$$a-2 > 0 \quad \therefore a > 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 이차방정식 $(a-2)x^2 - 2(a-2)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-2)^2 - 4(a-2) < 0$$

$$a^2 - 8a + 12 < 0, (a-2)(a-6) < 0$$

$$\therefore 2 < a < 6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 의 공통부분은 $2 < a < 6$

(i), (ii)에서 $2 \leq a < 6$

따라서 정수 a 는 2, 3, 4, 5의 4개이다.

601 ㉔ ①

$f(x) \leq g(x)$ 에서

$$x^2 - 2ax + 3a - 4 \leq -x^2 + 2ax - a^2$$

$$2x^2 - 4ax + a^2 + 3a - 4 \leq 0$$

$$h(x) = 2x^2 - 4ax + a^2 + 3a - 4$$

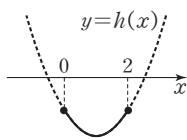
라 할 때, $0 \leq x \leq 2$ 에서 이차부

등식 $h(x) \leq 0$ 이 항상 성립하러

면 이차함수 $y = h(x)$ 의 그래프

가 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$h(0) \leq 0, h(2) \leq 0$$



$h(0) \leq 0$ 에서

$$a^2 + 3a - 4 \leq 0, (a+4)(a-1) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq a \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$h(2) \leq 0$ 에서

$$a^2 - 5a + 4 \leq 0, (a-1)(a-4) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{9}, \textcircled{10}$ 의 공통부분은 $a=1$

602 ㉔ 20

처음 수강료를 p 원, 그때의 학원생의 수를 q 라 하면 한 달 수입은

pq (원)

처음 수강료보다 $x\%$ 인하한 수강료는

$$p\left(1 - \frac{x}{100}\right) \text{(원)}$$

처음 학원생의 수보다 $1.5x\%$ 증가한 학원생의 수는

$$q\left(1 + \frac{3}{200}x\right)$$

$$\text{이때의 한 달 수입은 } \frac{1.5}{100} = \frac{15}{1000} = \frac{3}{200}$$

$$pq\left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{3}{200}x\right) \text{(원)}$$

한 달 수입이 4% 이상 증가하려면

$$pq\left(1 - \frac{x}{100}\right)\left(1 + \frac{3}{200}x\right) \geq pq\left(1 + \frac{4}{100}\right)$$

$$(100-x)(200+3x) \geq 20800 \quad (\because pq > 0)$$

$$3x^2 - 100x + 800 \leq 0, (3x-40)(x-20) \leq 0$$

$$\therefore \frac{40}{3} \leq x \leq 20$$

따라서 x 의 최댓값은 20이다.

603 ㉔ ⑤

1 접근 방법 $f(ax+b) \leq 0$ 의 해가 $\alpha \leq x \leq \beta$ 로 주어지면 $ax+b=t$ 로 놓고 x 에 대한 식으로 정리한 후 $\alpha \leq x \leq \beta$ 에 대입하여 부등식 $f(t) \leq 0$ 의 해를 구한다.

$$(가)에서 \frac{1-x}{4} = t \text{라 하면 } x = 1-4t$$

부등식 $f(t) \leq 0$ 의 해가 $-7 \leq x \leq 9$ 이므로

$$-7 \leq 1-4t \leq 9$$

$$-8 \leq -4t \leq 8 \quad \therefore -2 \leq t \leq 2 \quad \text{「부등식 } f(x) \leq 0 \text{의 해가 } -2 \leq x \leq 2 \text{이다.}$$

해가 $-2 \leq x \leq 2$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x+2)(x-2) \leq 0 \quad \therefore x^2 - 4 \leq 0$$

이 부등식과 이차부등식 $f(x) \leq 0$ 의 부등호의 방향이 같으므로

$$f(x) = a(x^2 - 4) \quad (a > 0)$$

라 하자.

(나)에서 이차부등식 $a(x^2-4) \geq 2x - \frac{13}{3}$, 즉

$ax^2 - 2x - 4a + \frac{13}{3} \geq 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립하고 $a > 0$ 이므로 이차방정식

$ax^2 - 2x - 4a + \frac{13}{3} = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - a\left(-4a + \frac{13}{3}\right) \leq 0$$

$$4a^2 - \frac{13}{3}a + 1 \leq 0$$

$$12a^2 - 13a + 3 \leq 0, (3a-1)(4a-3) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq a \leq \frac{3}{4} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$f(3) = a(9-4) = 5a$ 이므로 $\textcircled{7}$ 에서

$$\frac{5}{3} \leq 5a \leq \frac{15}{4}$$

따라서 $f(3)$ 의 최댓값은 $M = \frac{15}{4}$, 최솟값은 $m = \frac{5}{3}$

이므로

$$M - m = \frac{25}{12}$$

604 ㉡ ㉢

$x^2 - (n+5)x + 5n \leq 0$ 에서

$$(x-n)(x-5) \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(i) $n < 5$ 일 때,

$\textcircled{7}$ 에서 $n \leq x \leq 5$

이를 만족시키는 정수 x 가

3개이려면 오른쪽 그림과

같아야 하므로

$$2 < n \leq 3$$

이때 n 은 자연수이므로

$$n = 3$$

(ii) $n = 5$ 일 때,

$\textcircled{7}$ 에서 $x = 5$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $n > 5$ 일 때,

$\textcircled{7}$ 에서 $5 \leq x \leq n$

이를 만족시키는 정수 x 가

3개이려면 오른쪽 그림과

같아야 하므로

$$7 \leq n < 8$$

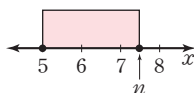
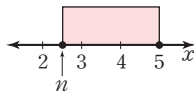
이때 n 은 자연수이므로

$$n = 7$$

(i), (ii), (iii)에서 $n = 3$ 또는 $n = 7$

따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$3 + 7 = 10$$



02 연립이차부등식

개념 확인

281쪽

605 ㉡ $-2 \leq x < 5$

$3x \geq -6$ 을 풀면 $x \geq -2$

$\dots\dots \textcircled{7}$

$(x+3)(x-5) < 0$ 을 풀면 $-3 < x < 5$

$\dots\dots \textcircled{8}$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 의 공통부분을 구하면 $-2 \leq x < 5$

유제

283~293쪽

606 ㉡ (1) $-2 < x < \frac{2}{3}$ (2) $3 < x \leq 4$

(1) $|3x+2| < 4$ 를 풀면

$$-4 < 3x+2 < 4, -6 < 3x < 2$$

$$\therefore -2 < x < \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$x^2 - 6x + 5 \geq 0$ 을 풀면

$$(x-1)(x-5) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 5 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

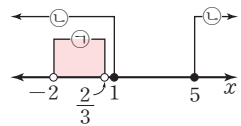
$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 수직선 위에

나타내면 오른쪽 그림

과 같으므로 주어진 연

립부등식의 해는

$$-2 < x < \frac{2}{3}$$



(2) $x^2 - x - 6 > 0$ 을 풀면

$$(x+2)(x-3) > 0$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$3x^2 - 8x - 16 \leq 0$ 을 풀면

$$(3x+4)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{4}{3} \leq x \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

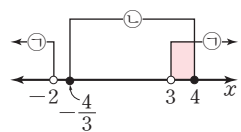
$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 수직선 위에

나타내면 오른쪽 그림

과 같으므로 주어진 연

립부등식의 해는

$$3 < x \leq 4$$



607 ㉡ 5

$3x-2 < x^2+x-5$ 를 풀면

$$x^2 - 2x - 3 > 0, (x+1)(x-3) > 0$$

$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$x^2+x-5 < -x+10 \text{을 풀면}$$

$$x^2+2x-15 < 0, (x+5)(x-3) < 0$$

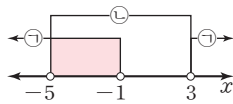
$$\therefore -5 < x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

⑦, ㉠을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같

으므로 주어진 부등식의

해는 $-5 < x < -1$

따라서 $\alpha = -5, \beta = -1$ 이므로 $\alpha\beta = 5$



608 ㉠ 5

$$x^2-3x+2 > 0 \text{을 풀면}$$

$$(x-1)(x-2) > 0$$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$x^2+|x|-12 \leq 0 \text{을 풀면}$$

(i) $x < 0$ 일 때,

$$|x| = -x \text{이므로 } x^2-x-12 \leq 0$$

$$(x+3)(x-4) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq x \leq 4$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $-3 \leq x < 0$

(ii) $x \geq 0$ 일 때,

$$|x| = x \text{이므로 } x^2+x-12 \leq 0$$

$$(x+4)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -4 \leq x \leq 3$$

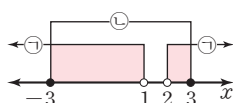
그런데 $x \geq 0$ 이므로 $0 \leq x \leq 3$

(i), (ii)에서 $-3 \leq x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{L}$

⑦, ㉠을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같

으므로 주어진 연립부등식의 해는 $-3 \leq x < 1$ 또는 $2 < x \leq 3$

따라서 정수 x 는 $-3, -2, -1, 0, 3$ 의 5개이다.



609 ㉠ 23

$$x^2-8x+15 \geq 0 \text{을 풀면}$$

$$(x-3)(x-5) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 3 \text{ 또는 } x \geq 5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$x^2-11x+28 \leq 0 \text{을 풀면}$$

$$(x-4)(x-7) \leq 0 \quad \therefore 4 \leq x \leq 7 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

⑦, ㉠을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같

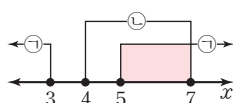
으므로 주어진 연립부등식의 해는 $5 \leq x \leq 7$

해가 $5 \leq x \leq 7$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-5)(x-7) \leq 0 \quad \therefore x^2-12x+35 \leq 0$$

이 부등식이 $x^2+ax+b \leq 0$ 과 일치하므로

$$a = -12, b = 35 \quad \therefore a+b = 23$$



610 ㉠ $-2 \leq a \leq 5$

$$x^2+3x-10 > 0 \text{을 풀면}$$

$$(x+5)(x-2) > 0$$

$$\therefore x < -5 \text{ 또는 } x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$x^2-(4-a)x-4a \leq 0 \text{을 풀면}$$

$$(x+a)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore \begin{cases} -a < 4 \text{ 일 때, } -a \leq x \leq 4 \\ -a = 4 \text{ 일 때, } x = 4 \\ -a > 4 \text{ 일 때, } 4 \leq x \leq -a \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

⑦, ㉠의 공통부분이

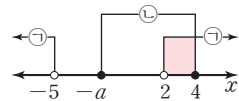
$2 < x \leq 4$ 가 되도록 수직

선 위에 나타내면 오른쪽

그림과 같으므로 ㉠은 $-a \leq x \leq 4$ 이고 a 의 값의 범위는

$$-5 \leq -a \leq 2$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 5$$



611 ㉠ $a \geq 2$

$$x^2-4 \leq 0 \text{을 풀면}$$

$$(x+2)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$2x^2+(2a-3)x-3a > 0 \text{을 풀면}$$

$$(x+a)(2x-3) > 0$$

$$\therefore \begin{cases} -a < \frac{3}{2} \text{ 일 때, } x < -a \text{ 또는 } x > \frac{3}{2} \\ -a = \frac{3}{2} \text{ 일 때, } x \neq \frac{3}{2} \text{ 인 모든 실수} \\ -a > \frac{3}{2} \text{ 일 때, } x < \frac{3}{2} \text{ 또는 } x > -a \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

⑦, ㉠의 공통부분에 속

하는 정수가 2뿐이도록 수

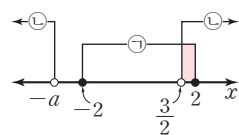
직선 위에 나타내면 오른

쪽 그림과 같으므로 ㉠은

$$x < -a \text{ 또는 } x > \frac{3}{2} \text{ 이고 } a \text{의 값의 범위는}$$

$$-a \leq -2$$

$$\therefore a \geq 2$$



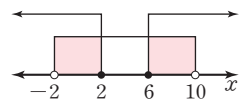
612 ㉠ 4

주어진 연립부등식의 해가

$$-2 < x \leq 2 \text{ 또는 } 6 \leq x < 10$$

이려면 오른쪽 그림과 같

야 한다.



$x^2 - 8x + a \geq 0$ 은 해가 $x \leq 2$ 또는 $x \geq 6$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식이므로

$$(x-2)(x-6) \geq 0 \quad \therefore x^2 - 8x + 12 \geq 0$$

$$\therefore a = 12$$

$x^2 - bx - 20 < 0$ 은 해가 $-2 < x < 10$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식이므로

$$(x+2)(x-10) < 0 \quad \therefore x^2 - 8x - 20 < 0$$

$$\therefore b = 8$$

$$\therefore a - b = 12 - 8 = 4$$

613 ㉠ ㉡

$|x-5| < 1$ 을 풀면

$$-1 < x-5 < 1 \quad \therefore 4 < x < 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$x^2 - 4ax + 3a^2 > 0$ 을 풀면

$$(x-a)(x-3a) > 0$$

이때 a 는 자연수이므로

$$x < a \text{ 또는 } x > 3a \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

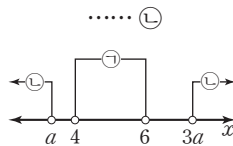
㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$a \leq 4, 3a \geq 6$$

따라서 $a \leq 4, a \geq 2$ 이므로

$$2 \leq a \leq 4$$

따라서 자연수 a 는 2, 3, 4의 3개이다.



614 ㉠ $x > 8$

삼각형의 세 변의 길이는 양수이므로

$$2x-1 > 0 \quad \therefore x > \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

삼각형의 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로

$$2x+1 < x + (2x-1) \quad \therefore x > 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

예각삼각형이 되려면 가장 긴 변의 길이의 제곱이 나머지 두 변의 길이의 제곱의 합보다 작아야 하므로

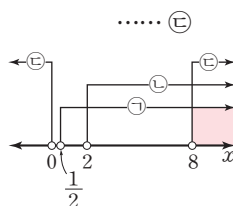
$$(2x+1)^2 < x^2 + (2x-1)^2$$

$$x^2 - 8x > 0, x(x-8) > 0$$

$$\therefore x < 0 \text{ 또는 } x > 8$$

㉠, ㉡, ㉢을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$x > 8$$



615 ㉠ 12 cm

처음 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 직사각형의 가로 길이는 $(x+3)$ cm, 세로 길이는 $(x+5)$ cm이다.

직사각형의 넓이가 35 cm^2 이상 255 cm^2 이하이므로

$$35 \leq (x+3)(x+5) \leq 255$$

$$35 \leq (x+3)(x+5) \text{를 풀면}$$

$$x^2 + 8x - 20 \geq 0, (x+10)(x-2) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -10 \text{ 또는 } x \geq 2$$

$$\text{그런데 } x > 0 \text{이므로 } x \geq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(x+3)(x+5) \leq 255 \text{를 풀면}$$

$$x^2 + 8x - 240 \leq 0, (x+20)(x-12) \leq 0$$

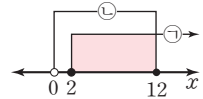
$$\therefore -20 \leq x \leq 12$$

$$\text{그런데 } x > 0 \text{이므로 } 0 < x \leq 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$2 \leq x \leq 12$$

따라서 처음 정사각형의 한 변의 길이의 최댓값은 12 cm이다.



616 ㉠ 3 cm

직육면체의 밑면의 가로 길이를 x cm, 세로 길이를 y cm라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 80 cm이므로

$$4(x+y+10) = 80 \quad \therefore y = 10 - x$$

직육면체의 부피가 210 cm^3 보다 작지 않으므로

$$10x(10-x) \geq 210$$

$$x^2 - 10x + 21 \leq 0, (x-3)(x-7) \leq 0$$

$$\therefore 3 \leq x \leq 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

밑면의 가로 길이가 세로 길이보다 짧으므로

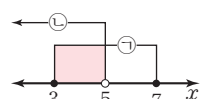
$$x < 10 - x$$

$$2x < 10 \quad \therefore x < 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$3 \leq x < 5$$

따라서 밑면의 가로 길이의 최솟값은 3 cm이다.



617 ㉠ 4 이상 7 이하

$\overline{AE} = x$ 라 하면 색칠한 부분의 둘레의 길이가 46 이하이므로

$$4x + 2(x+2) \leq 46$$

$$6x \leq 42 \quad \therefore x \leq 7$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $0 < x \leq 7$ ㉠

넓이가 24 이상이므로

$$x^2 + 2x \geq 24$$

$$x^2 + 2x - 24 \geq 0, (x+6)(x-4) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -6 \text{ 또는 } x \geq 4$$

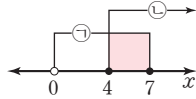
그런데 $x > 0$ 이므로 $x \geq 4$ ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내

면 오른쪽 그림과 같으므로

$$4 \leq x \leq 7$$

따라서 선분 AE의 길이는 4 이상 7 이하이다.



618 ㉠ (1) $k \leq -4$ (2) $2 \leq k < \frac{9}{4}$ (3) $k > \frac{9}{4}$

이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x - 4k + 9 = 0$ 의 두 실근을

α, β , 판별식을 D 라 하면

$$\alpha + \beta = -2(k-1), \alpha\beta = -4k + 9$$

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (-4k+9) = k^2 + 2k - 8$$

$$= (k+4)(k-2)$$

(1) (i) $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$(k+4)(k-2) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -4 \text{ 또는 } k \geq 2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

(ii) $\alpha + \beta > 0$ 이어야 하므로

$$-2(k-1) > 0 \quad \therefore k < 1 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

(iii) $\alpha\beta > 0$ 이어야 하므로

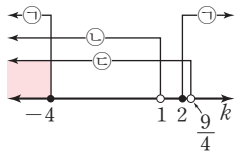
$$-4k + 9 > 0 \quad \therefore k < \frac{9}{4} \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 수직선

위에 나타내면 오른쪽

그림과 같으므로

$$k \leq -4$$



(2) (i) $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$(k+4)(k-2) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -4 \text{ 또는 } k \geq 2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

(ii) $\alpha + \beta < 0$ 이어야 하므로

$$-2(k-1) < 0 \quad \therefore k > 1 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

(iii) $\alpha\beta > 0$ 이어야 하므로

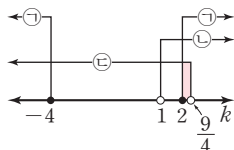
$$-4k + 9 > 0 \quad \therefore k < \frac{9}{4} \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 수직선

위에 나타내면 오른쪽

그림과 같으므로

$$2 \leq k < \frac{9}{4}$$



(3) $\alpha\beta < 0$ 이어야 하므로

$$-4k + 9 < 0 \quad \therefore k > \frac{9}{4}$$

619 ㉠

이차방정식 $x^2 - kx + 3k^2 - 12 = 0$ 의 두 실근을 α, β

라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로 $\alpha\beta < 0$ 에서

$$3k^2 - 12 < 0$$

$$3(k+2)(k-2) < 0$$

$$\therefore -2 < k < 2$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 1이다.

620 ㉢

이차방정식 $x^2 + (k^2 - 9)x + k^2 - 6k + 5 = 0$ 의 두 실

근을 α, β 라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$$\alpha\beta < 0$$
에서

$$k^2 - 6k + 5 < 0$$

$$(k-1)(k-5) < 0$$

$$\therefore 1 < k < 5 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또 두 근의 절댓값이 같으므로 $\alpha + \beta = 0$ 에서

$$-(k^2 - 9) = 0, k^2 = 9$$

$$\therefore k = -3 \text{ 또는 } k = 3$$

그런데 ㉠에서 $k = 3$

621 ㉤

이차방정식 $x^2 + (k^2 - 4k - 12)x + 3k - 28 = 0$ 의 두

실근을 α, β 라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$$\alpha\beta < 0$$
에서

$$3k - 28 < 0$$

$$\therefore k < \frac{28}{3} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

양수인 근이 음수인 근의 절댓값보다 크므로

$$\alpha + \beta > 0$$
에서

$$-(k^2 - 4k - 12) > 0$$

$$k^2 - 4k - 12 < 0, (k+2)(k-6) < 0$$

$$\therefore -2 < k < 6 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

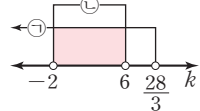
㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내

면 오른쪽 그림과 같으므로 k

의 값의 범위는

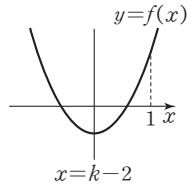
$$-2 < k < 6$$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.



622 ㉔ $k \leq 1$

$f(x) = x^2 - 2(k-2)x + k$ 라 할 때, 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x=k-2$ 이므로 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 모두 1보다 작으려면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - k \geq 0$$

$$k^2 - 5k + 4 \geq 0$$

$$(k-1)(k-4) \geq 0$$

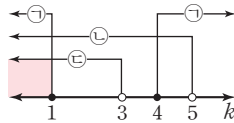
$$\therefore k \leq 1 \text{ 또는 } k \geq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉔}$$

(ii) $f(1) > 0$ 에서

$$1 - 2(k-2) + k > 0 \quad \therefore k < 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉕}$$

(iii) $k-2 < 1$ 에서 $k < 3$

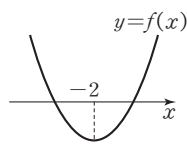
㉔, ㉕, ㉖을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$$k \leq 1$$

623 ㉔ $k < -3$ 또는 $k > 3$

$f(x) = x^2 + 3x - k^2 + 11$ 이라 할 때, 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근 사이에 -2가 있으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(-2) < 0$ 에서

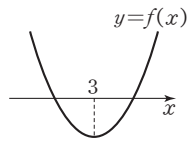
$$4 - 6 - k^2 + 11 < 0$$

$$k^2 - 9 > 0, (k+3)(k-3) > 0$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > 3$$

624 ㉔ 3

$f(x) = x^2 - 2kx + k^2 - 4$ 라 할 때, 이차방정식 $f(x)=0$ 의 한 근은 3보다 크고, 다른 한 근은 3보다 작으려면 두 근 사이에 3이 있어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f(3) < 0$

$$9 - 6k + k^2 - 4 < 0, k^2 - 6k + 5 < 0$$

$$(k-1)(k-5) < 0$$

$$\therefore 1 < k < 5$$

따라서 정수 k 는 2, 3, 4의 3개이다.

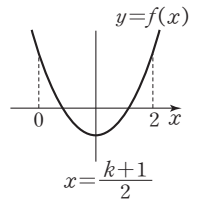
625 ㉔ 1

$f(x) = x^2 - (k+1)x - k + 2$ 라 할 때, 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이

$$x = \frac{k+1}{2} \text{이므로 이차방정식}$$

$f(x)=0$ 의 두 근이 모두 0과 2

사이에 있으려면 $y=f(x)$ 의 그래프는 위의 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (k+1)^2 - 4(-k+2) \geq 0$$

$$k^2 + 6k - 7 \geq 0, (k+7)(k-1) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -7 \text{ 또는 } k \geq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉔}$$

(ii) $f(0) > 0$ 에서

$$-k + 2 > 0 \quad \therefore k < 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉕}$$

$f(2) > 0$ 에서

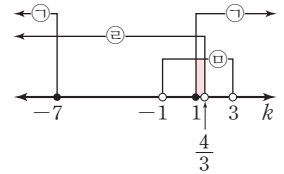
$$4 - 2(k+1) - k + 2 > 0$$

$$-3k > -4 \quad \therefore k < \frac{4}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉖}$$

$$\textcircled{㉕}, \textcircled{㉖} \text{의 공통부분은 } k < \frac{4}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉗}$$

(iii) $0 < \frac{k+1}{2} < 2$ 에서 $-1 < k < 3$ $\cdots \cdots \textcircled{㉘}$

㉔, ㉗, ㉘을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$$1 \leq k < \frac{4}{3}$$

따라서 k 의 최솟값은 1이다.

연습문제

295~296쪽

626 ㉔ 15

$3x - 12 \geq 0$ 을 풀면

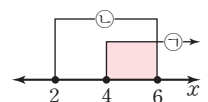
$$3x \geq 12 \quad \therefore x \geq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉔}$$

$x^2 - 8x + 12 \leq 0$ 을 풀면

$$(x-2)(x-6) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq x \leq 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉕}$$

㉔, ㉕을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$$4 \leq x \leq 6$$

따라서 자연수 x 는 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$$4 + 5 + 6 = 15$$

627 ㉓ ③

$$6x^2 - 5x + 1 > 0 \text{을 풀면}$$

$$(3x-1)(2x-1) > 0$$

$$\therefore x < \frac{1}{3} \text{ 또는 } x > \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉑$$

$$x^2 - 5|x| + 6 \leq 0 \text{을 풀면}$$

(i) $x < 0$ 일 때,

$$|x| = -x \text{이므로 } x^2 + 5x + 6 \leq 0$$

$$(x+3)(x+2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq -2 \quad \blacktriangleleft x < 0 \text{을 만족시킨다.}$$

(ii) $x \geq 0$ 일 때,

$$|x| = x \text{이므로 } x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

$$(x-2)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq x \leq 3 \quad \blacktriangleleft x \geq 0 \text{을 만족시킨다.}$$

(i), (ii)에서

$$-3 \leq x \leq -2 \text{ 또는 } 2 \leq x \leq 3 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같

으므로 주어진 연립부등식

의 해는

$$-3 \leq x \leq -2 \text{ 또는 } 2 \leq x \leq 3$$

$$\text{따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 } x \text{의 값이 아}$$

$$\text{닌 것은 ③이다.}$$

628 ㉓ 5

$$x^2 + 4x - 7 < 2x^2 - 4 \text{를 풀면}$$

$$x^2 - 4x + 3 > 0, (x-1)(x-3) > 0$$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 3 \quad \dots\dots ㉑$$

$$2x^2 - 4 < 7x + 18 \text{을 풀면}$$

$$2x^2 - 7x - 22 < 0, (x+2)(2x-11) < 0$$

$$\therefore -2 < x < \frac{11}{2} \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같

으므로 주어진 부등식의

해는

$$-2 < x < 1 \text{ 또는 } 3 < x < \frac{11}{2}$$

$$\text{따라서 정수 } x \text{의 최댓값은 5이다.}$$

629 ㉓ $a \leq 0$

$$x^2 - 5x < 0 \text{을 풀면 } x(x-5) < 0$$

$$\therefore 0 < x < 5 \quad \dots\dots ㉑$$

$$(x-a)(x-1) \geq 0 \text{을 풀면}$$

$$\begin{cases} a < 1 \text{일 때, } x \leq a \text{ 또는 } x \geq 1 \\ a = 1 \text{일 때, 모든 실수} \\ a > 1 \text{일 때, } x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq a \end{cases}$$

$$\dots\dots ㉒$$

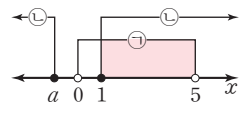
㉑, ㉒의 공통부분이

$1 \leq x < 5$ 가 되도록 수직

선 위에 나타내면 오른쪽

그림과 같으므로 ㉒은 $x \leq a$ 또는 $x \geq 1$ 이고 a 의 값의

범위는 $a \leq 0$



630 ㉓ ④

$$|x-k| \leq 5 \text{를 풀면 } -5 \leq x-k \leq 5$$

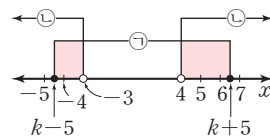
$$\therefore k-5 \leq x \leq k+5 \quad \dots\dots ㉑$$

$$x^2 - x - 12 > 0 \text{을 풀면 } (x+3)(x-4) > 0$$

$$\therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 4 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒의 공통부분에 속하는 정수 x 의 값의 합이 7이

되도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\text{따라서 } -5 < k-5 \leq -4, 6 \leq k+5 < 7 \text{이므로}$$

$$0 < k \leq 1, 1 \leq k < 2 \quad \therefore k=1$$

631 ㉓ 12

주어진 연립부등식의 해가

$$-3 \leq x < 1 \text{ 또는 } 3 < x \leq 4$$

이려면 오른쪽 그림과 같아

야 한다.

$$x^2 + (a+b)x + ab > 0 \text{을 풀면 } (x+b)(x+a) > 0$$

$$\therefore x < -b \text{ 또는 } x > -a \quad (\because -b < -a)$$

이는 $x < 1$ 또는 $x > 3$ 과 같으므로

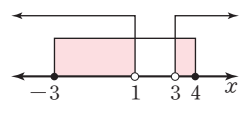
$$-b=1, -a=3 \quad \therefore a=-3, b=-1 \quad \ggggg ①$$

$$x^2 - (a+c)x + ac \leq 0 \text{을 풀면 } (x-a)(x-c) \leq 0$$

$$\therefore a \leq x \leq c \quad (\because a < c)$$

이는 $-3 \leq x \leq 4$ 와 같으므로 $c=4$

$$\therefore abc = -3 \times (-1) \times 4 = 12 \quad \ggggg ③$$



단계	채점 기준	비율
①	a, b 의 값 구하기	50%
②	c 의 값 구하기	40%
③	abc 의 값 구하기	10%

632 ㉔ ④

$x^2 - 2x - 3 \geq 0$ 을 풀면

$$(x+1)(x-3) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

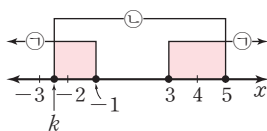
$x^2 - (5+k)x + 5k \leq 0$ 을 풀면

$$(x-k)(x-5) \leq 0$$

$$\therefore \begin{cases} k < 5 \text{ 일 때, } k \leq x \leq 5 \\ k = 5 \text{ 일 때, } x = 5 \\ k > 5 \text{ 일 때, } 5 \leq x \leq k \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

㉔, ㉕의 공통부분에 속하는 정수가 5개가 되려면 다음과 같아야 한다.

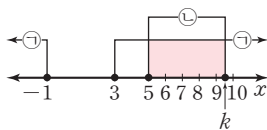
(i) $k < 5$ 일 때,



$$\therefore -3 < k \leq -2$$

이때 k 는 정수이므로 $k = -2$

(ii) $k > 5$ 일 때,



$$\therefore 9 \leq k < 10$$

이때 k 는 정수이므로 $k = 9$

(i), (ii)에서 $k = -2$ 또는 $k = 9$

따라서 모든 정수 k 의 값의 곱은

$$-2 \times 9 = -18$$

633 ㉔ 5

$x^2 - 3x - 40 \geq 0$ 을 풀면

$$(x+5)(x-8) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -5 \text{ 또는 } x \geq 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$x^2 - 4x - k^2 - 4k < 0$ 을 풀면

$$(x+k)(x-k-4) < 0$$

$$\therefore -k < x < k+4 \quad (\because k > 0) \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

㉔, ㉕의 공통부분이 존재하도록 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같

으므로

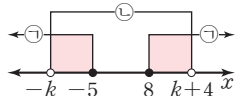
$$-k < -5 \text{ 또는 } k+4 > 8$$

$$-k < -5 \text{ 또는 } k+4 > 8$$

$$-k < -5 \text{ 또는 } k+4 > 8$$

즉, $k > 5$ 또는 $k > 4$ 이므로 $k > 4$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 5이다.



634 ㉔ 15

점 A의 좌표는 $(0, k^2+4)$ 이므로 점 A를 지나고 x 축에 평행한 직선의 방정식은

$$y = k^2 + 4$$

이 직선과 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표는

$$-x^2 + 2kx + k^2 + 4 = k^2 + 4$$

$$x(x-2k) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2k$$

$$\therefore B(2k, k^2+4), C(2k, 0)$$

사각형 OCBA의 둘레의 길이가 $g(k)$ 이므로

$$g(k) = 2\{2k + (k^2+4)\}$$

$$= 2k^2 + 4k + 8$$

$$14 \leq 2k^2 + 4k + 8 \leq 78 \text{에서}$$

$$14 \leq 2k^2 + 4k + 8 \text{을 풀면}$$

$$2k^2 + 4k - 6 \geq 0$$

$$k^2 + 2k - 3 \geq 0$$

$$(k+3)(k-1) \geq 0 \quad \therefore k \leq -3 \text{ 또는 } k \geq 1$$

$$\text{이때 } k > 0 \text{이므로 } k \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$2k^2 + 4k + 8 \leq 78 \text{을 풀면}$$

$$2k^2 + 4k - 70 \leq 0$$

$$k^2 + 2k - 35 \leq 0$$

$$(k+7)(k-5) \leq 0 \quad \therefore -7 \leq k \leq 5$$

$$\text{이때 } k > 0 \text{이므로 } 0 < k \leq 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

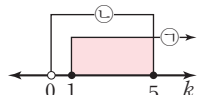
㉔, ㉕을 수직선 위에 나타내

면 오른쪽 그림과 같으므로

$$1 \leq k \leq 5$$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$



635 ㉔ $k > 4$

이차방정식 $x^2 + 2(k+1)x + k^2 + 3 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (k+1)^2 - (k^2+3) \geq 0$$

$$2k - 2 \geq 0 \quad \therefore k \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

한편 $(k-2)x^2 + 2kx + 2k = 0$ 이 이차방정식이므로 $k \neq 2$ 이고, 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

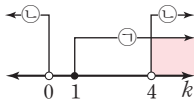
$$\frac{D_2}{4} = k^2 - 2k(k-2) < 0$$

$$-k^2 + 4k < 0$$

$$k(k-4) > 0$$

$$\therefore k < 0 \text{ 또는 } k > 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 $k > 4$



636 ㉡ 5

이차방정식 $x^2 - (k^2 - 3k - 18)x - 5k + 24 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로 $\alpha\beta < 0$ 에서 $-5k + 24 < 0$

$$\therefore k > \frac{24}{5} \quad \dots\dots ㉠$$

음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크므로

$$\alpha + \beta < 0 \text{에서 } k^2 - 3k - 18 < 0$$

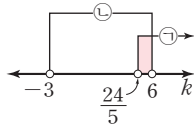
$$(k+3)(k-6) < 0$$

$$\therefore -3 < k < 6 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

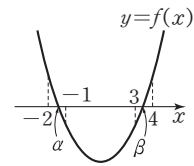
$$\frac{24}{5} < k < 6$$

따라서 정수 k 의 값은 5이다.



637 ㉡ 5

$f(x) = x^2 - kx - 4$ 라 할 때, 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 한 근이 -2 와 -1 사이에 있고 다른 한 근이 3 과 4 사이에 있으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$$f(-2)f(-1) < 0, f(3)f(4) < 0$$

$$f(-2)f(-1) < 0 \text{에서}$$

$$(4+2k-4)(1+k-4) < 0$$

$$2k(k-3) < 0$$

$$\therefore 0 < k < 3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$f(3)f(4) < 0 \text{에서}$$

$$(9-3k-4)(16-4k-4) < 0$$

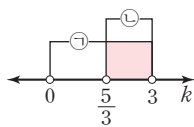
$$4(3k-5)(k-3) < 0$$

$$\therefore \frac{5}{3} < k < 3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$\frac{5}{3} < k < 3$$

따라서 $a = \frac{5}{3}$, $b = 3$ 이므로 $ab = 5$



638 ㉡ $\frac{4}{5} < a \leq 6$

모든 실수 x 에 대하여 $-ax^2 + 2ax < x^2 + 4x + a$, 즉 $(a+1)x^2 - 2(a-2)x + a > 0$ 이 성립해야 한다.

(i) $a = -1$ 일 때,

$$6x - 1 > 0 \text{이므로 } x > \frac{1}{6} \text{일 때만 부등식이 성립한다.}$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립하는 것은 아니다.

(ii) $a \neq -1$ 일 때,

모든 실수 x 에 대하여

$$(a+1)x^2 - 2(a-2)x + a > 0 \text{이 성립하려면}$$

$$a+1 > 0 \quad \therefore a > -1 \quad \dots\dots ㉠$$

또 이차방정식 $(a+1)x^2 - 2(a-2)x + a = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (a-2)^2 - a(a+1) < 0$$

$$-5a + 4 < 0 \quad \therefore a > \frac{4}{5} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $a > \frac{4}{5}$

$$(i), (ii) \text{에서 } a > \frac{4}{5} \quad \dots\dots ㉢$$

또 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4x + a \leq 2x^2 + ax + 7$, 즉 $x^2 + (a-4)x - a + 7 \geq 0$ 이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2 + (a-4)x - a + 7 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2 = (a-4)^2 - 4(-a+7) \leq 0$

$$a^2 - 4a - 12 \leq 0$$

$$(a+2)(a-6) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 6 \quad \dots\dots ㉣$$

$$\therefore -2 \leq a \leq 6$$

㉢, ㉣의 공통부분은 $\frac{4}{5} < a \leq 6$

639 ㉡ 0

접근 방법 이차함수의 그래프의 축의 위치에 따라 경우를 나누어 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위를 구한다.

$$x^2 - 2x = 0 \text{에서}$$

$$x(x-2) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

$$f(x) = x^2 - (a+2)x - a + 1 \text{이라 하면 이차함수}$$

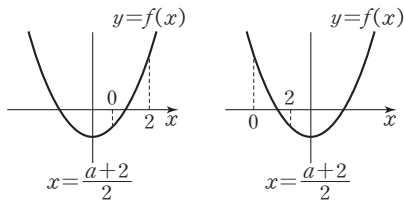
$$y = f(x) \text{의 그래프의 축의 방정식은 } x = \frac{a+2}{2} \text{이므로}$$

축의 위치에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

$$(i) \frac{a+2}{2} \leq 0 \text{ 또는 } \frac{a+2}{2} \geq 2, \text{ 즉 } a \leq -2 \text{ 또는 } a \geq 2$$

일 때,

이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $f(0)f(2) < 0$ 이어야 하므로
 $(-a+1)\{4-2(a+2)-a+1\} < 0$
 $(a-1)(3a-1) < 0$
 $\therefore \frac{1}{3} < a < 1$

그런데 $a \leq -2$ 또는 $a \geq 2$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0 < \frac{a+2}{2} < 1$, 즉 $-2 < a < 0$ 일 때,

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

즉, 이차방정식 $f(x)=0$ 이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D = (a+2)^2 - 4(-a+1) \geq 0$$

$$a^2 + 8a \geq 0, a(a+8) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -8 \text{ 또는 } a \geq 0 \quad \cdots \textcircled{7}$$

또 $f(0) < f(2)$ 이므로 $f(2) > 0$ 에서
 $4-2(a+2)-a+1 > 0$

$$-3a+1 > 0 \quad \therefore a < \frac{1}{3} \quad \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 의 공통부분은 $a \leq -8$ 또는 $0 \leq a < \frac{1}{3}$

그런데 $-2 < a < 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $1 \leq \frac{a+2}{2} < 2$, 즉 $0 \leq a < 2$ 일 때,

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

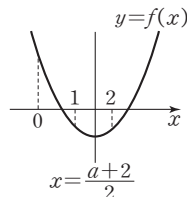
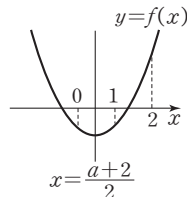
즉, 이차방정식 $f(x)=0$ 이 실근을 가져야 하므로 $\textcircled{7}$ 과 같다.

또 $f(0) \geq f(2)$ 이므로 $f(0) > 0$ 에서
 $-a+1 > 0 \quad \therefore a < 1 \quad \cdots \textcircled{9}$

$\textcircled{7}, \textcircled{9}$ 의 공통부분은 $a \leq -8$ 또는 $0 \leq a < 1$

그런데 $0 \leq a < 2$ 이므로 $0 \leq a < 1$

(i), (ii), (iii)에서 $0 \leq a < 1$
 따라서 a 의 최솟값은 0이다.



III. 경우의 수

III-1. 경우의 수와 순열

01 합의 법칙과 곱의 법칙

개념 확인

299쪽

640 ㉡ (1) 6 (2) 6

641 ㉡ 12

642 ㉡ 8

유제

301~311쪽

643 ㉡ 8

두 눈의 수의 합이 2인 경우는

(1, 1)의 1가지

두 눈의 수의 합이 5인 경우는

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지

두 눈의 수의 합이 10인 경우는

(4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지

따라서 두 눈의 수의 합이 10의 약수인 경우의 수는

$$1+4+3=8$$

644 ㉡ 24

두 눈의 수의 차가 0인 경우는

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)의 6가지

두 눈의 수의 차가 1인 경우는

(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 5),
 (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)의 10가지

두 눈의 수의 차가 2인 경우는

(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (6, 4), (5, 3),
 (4, 2), (3, 1)의 8가지

따라서 두 눈의 수의 차가 3 미만인 경우의 수는

$$6+10+8=24$$

645 ㉡ 22

세 수의 합이 3인 경우는

(1, 1, 1)의 1가지

세 수의 합이 5인 경우는

(1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 3, 1), (2, 1, 2),
 (2, 2, 1), (3, 1, 1)의 6가지

세 수의 합이 7인 경우는

(1, 2, 4), (1, 3, 3), (1, 4, 2), (2, 1, 4),
(2, 2, 3), (2, 3, 2), (2, 4, 1), (3, 1, 3),
(3, 2, 2), (3, 3, 1), (4, 1, 2), (4, 2, 1)의
12가지

세 수의 합이 11인 경우는

(3, 4, 4), (4, 3, 4), (4, 4, 3)의 3가지
따라서 세 수의 합이 소수인 경우의 수는
 $1+6+12+3=22$

646 ㉮ 33

1부터 100까지의 자연수 중에서

(i) 4로 나누어떨어지는 수

4의 배수이므로 4, 8, 12, ..., 100의 25개

(ii) 6으로 나누어떨어지는 수

6의 배수이므로 6, 12, 18, ..., 96의 16개

(iii) 4와 6으로 모두 나누어떨어지는 수

4와 6의 최소공배수인 12의 배수이므로

12, 24, 36, ..., 96의 8개

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$25+16-8=33$ ◀ 8개의 12의 배수를 두 번씩 세었으므로
8을 뺀다.

647 ㉮ 6

x, y, z 가 자연수이므로 $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$

$$x+3y+5z=18 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 z 의 계수가 가장 크므로 z 가 될 수 있는 자연수
를 구하면

$$5z < 18$$

$$\therefore z=1 \text{ 또는 } z=2 \text{ 또는 } z=3$$

(i) $z=1$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } x+3y=13$$

따라서 순서쌍 (x, y) 는 (10, 1), (7, 2),

(4, 3), (1, 4)의 4개

(ii) $z=2$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } x+3y=8$$

따라서 순서쌍 (x, y) 는 (5, 1), (2, 2)의 2개

(iii) $z=3$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } x+3y=3$$

따라서 이를 만족시키는 순서쌍 (x, y) 는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$$4+2=6$$

648 ㉮ 16

x, y, z 가 음이 아닌 정수이므로

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$$

$$4x+2y+z=13 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 x 의 계수가 가장 크므로 x 가 될 수 있는 정수를
구하면

$$4x \leq 13$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=3$$

(i) $x=0$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2y+z=13$$

따라서 순서쌍 (y, z) 는 (0, 13), (1, 11),

(2, 9), (3, 7), (4, 5), (5, 3), (6, 1)의 7개

(ii) $x=1$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2y+z=9$$

따라서 순서쌍 (y, z) 는 (0, 9), (1, 7), (2, 5),

(3, 3), (4, 1)의 5개

(iii) $x=2$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2y+z=5$$

따라서 순서쌍 (y, z) 는 (0, 5), (1, 3), (2, 1)의

3개

(iv) $x=3$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2y+z=1$$

따라서 순서쌍 (y, z) 는 (0, 1)의 1개

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$$7+5+3+1=16$$

649 ㉮ 6

x, y 가 자연수이므로

$$x \geq 1, y \geq 1$$

$$x+2y \leq 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 y 의 계수가 가장 크므로 y 가 될 수 있는 자연수
를 구하면

$$2y < 6$$

$$\therefore y=1 \text{ 또는 } y=2$$

(i) $y=1$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } x \leq 4 \text{이므로 } x \text{는 } 1, 2, 3, 4 \text{의 } 4 \text{개}$$

(ii) $y=2$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } x \leq 2 \text{이므로 } x \text{는 } 1, 2 \text{의 } 2 \text{개}$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$4+2=6$$

650 ㉮ 7

한 개의 가격이 500원, 1000원, 5000원인 과자를 각각 x 개, y 개, z 개 산다고 할 때, 그 금액의 합이 12000원이므로

$$500x + 1000y + 5000z = 12000$$

$$\therefore x + 2y + 10z = 24 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 세 종류의 과자를 적어도 하나씩 사야 하므로 x, y, z 는 $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$ 이어야 한다.

즉, 구하는 경우의 수는 방정식 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 자연수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수와 같다.

$$\textcircled{1} \text{에서 } 10z < 24$$

$$\therefore z = 1 \text{ 또는 } z = 2$$

(i) $z = 1$ 일 때,

$\textcircled{1}$ 에서 $x + 2y = 14$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

$(12, 1), (10, 2), (8, 3), (6, 4), (4, 5),$

$(2, 6)$ 의 6개

(ii) $z = 2$ 일 때,

$\textcircled{1}$ 에서 $x + 2y = 4$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는 $(2, 1)$ 의 1개

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$6 + 1 = 7$$

651 ㉮ 40

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 4, 8의 2가지

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 4, 8의 4가지

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$2 \times 4 \times 5 = 40$$

652 ㉮ (1) 6 (2) 24

(1) $(a+b)(x+y+z)$ 를 전개하면 a, b 에 x, y, z 를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 구하는 항의 개수는 $2 \times 3 = 6$

(2) $(a+b+c+d)(p+q+r)(x+y)$ 를 전개하면 a, b, c, d 에 p, q, r 를 각각 곱하여 항이 만들어지고, 그것에 다시 x, y 를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 구하는 항의 개수는 $4 \times 3 \times 2 = 24$

653 ㉮ 27

나오는 세 눈의 수의 곱이 홀수인 경우는 세 눈의 수가 모두 홀수인 경우이므로 그 경우의 수는

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

654 ㉮ 13

$(a+b+c)(p+q+r)$ 를 전개하면 a, b, c 에 p, q, r 를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 항의 개수는

$$3 \times 3 = 9$$

$(x+y)(m-n)$ 을 전개하면 x, y 에 m, n 을 각각 곱하여 항이 만들어지므로 항의 개수는 $2 \times 2 = 4$

이때 곱해지는 각 항이 모두 서로 다른 문자이므로 구하는 항의 개수는

$$9 + 4 = 13$$

655 ㉮ 24

540을 소인수분해하면

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$$

2^2 의 양의 약수는 1, 2, 2^2 의 3개

3^3 의 양의 약수는 1, 3, 3^2 , 3^3 의 4개

5의 양의 약수는 1, 5의 2개

따라서 구하는 약수의 개수는

$$3 \times 4 \times 2 = 24$$

656 ㉮ 13

A 지점에서 C 지점으로 가는 경우는

$A \rightarrow B \rightarrow C$ 또는 $A \rightarrow D \rightarrow C$

(i) $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$

(ii) $A \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는 $2 \times 2 = 4$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$9 + 4 = 13$$

657 ㉮ 6

90과 252를 각각 소인수분해하면

$$90 = 2 \times 3^2 \times 5, 252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$$

90과 252의 최대공약수는 2×3^2

2의 양의 약수는 1, 2의 2개

3^2 의 양의 약수는 1, 3, 3^2 의 3개

따라서 구하는 공약수의 개수는

$$2 \times 3 = 6$$

658 ㉮ 108

(i) 지민이가 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는

$$3 \times 2 = 6$$

세희가 $A \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는

$$3 \times 3 = 9$$

따라서 지민이는 B 지점을 거쳐서 가고 세희는 D 지점을 거쳐서 가는 경우의 수는

$$6 \times 9 = 54$$

(ii) 지민이가 $A \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는
 $3 \times 3 = 9$
 세희가 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는
 $3 \times 2 = 6$
 따라서 지민이는 D 지점을 거쳐서 가고 세희는 B
 지점을 거쳐서 가는 경우의 수는 $9 \times 6 = 54$
 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
 $54 + 54 = 108$

659 ㉡ 48

가장 많은 영역과 인접하고 있는 영역 D부터 칠하고,
 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 의 순서로 칠하는 경우의 수를 구한다.
 D에 칠할 수 있는 색은 4가지
 A에 칠할 수 있는 색은 D에 칠한 색을 제외한
 $4 - 1 = 3$ (가지)
 B에 칠할 수 있는 색은 A와 D에 칠한 색을 제외한
 $4 - 2 = 2$ (가지)
 C에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한
 $4 - 2 = 2$ (가지)
 따라서 구하는 경우의 수는
 $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$

660 ㉡ 6

주어진 그림에서 A 또는 C가 가장 많은 영역과 인접
 하고 있으므로 영역 A부터 칠하고, $B \rightarrow C \rightarrow D$ 의
 순서로 칠하는 경우의 수를 구한다.
 A에 칠할 수 있는 색은 3가지
 B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한
 $3 - 1 = 2$ (가지)
 C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한
 $3 - 2 = 1$ (가지)
 D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한
 $3 - 2 = 1$ (가지)
 따라서 구하는 경우의 수는
 $3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$

661 ㉡ ②

오른쪽 그림과 같이 5개의 행
 정 구역을 각각 A, B, C, D,
 E로 나타내면 가장 많은 구역
 과 인접하고 있는 구역 B부터
 칠하고, $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D$
 의 순서로 칠하는 경우의 수를 구한다.



B에 칠할 수 있는 색은 4가지
 A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한
 $4 - 1 = 3$ (가지)
 C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한
 $4 - 1 = 3$ (가지)
 E에 칠할 수 있는 색은 B와 C에 칠한 색을 제외한
 $4 - 2 = 2$ (가지)
 D에 칠할 수 있는 색은 B와 E에 칠한 색을 제외한
 $4 - 2 = 2$ (가지)
 따라서 구하는 경우의 수는
 $4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 144$

662 ㉡ 260

같은 색을 중복하여 칠할 수 있으므로 칠하는 경우의
 수는 다음과 같이 두 경우로 나누어 구할 수 있다.

(i) B와 D에 서로 다른 색을 칠하는 경우

B에 칠할 수 있는 색은 5가지
 A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한
 $5 - 1 = 4$ (가지)
 D에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한
 $5 - 2 = 3$ (가지)
 C에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한
 $5 - 2 = 3$ (가지)
 따라서 B와 D에 서로 다른 색을 칠하는 경우의
 수는 $5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$

(ii) B와 D에 서로 같은 색을 칠하는 경우

B에 칠할 수 있는 색은 5가지
 D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색인
 1가지
 A에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한
 $5 - 1 = 4$ (가지)
 C에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한
 $5 - 1 = 4$ (가지)
 따라서 B와 D에 서로 같은 색을 칠하는 경우의
 수는 $5 \times 1 \times 4 \times 4 = 80$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$180 + 80 = 260$$

663 ㉡ (1) 23 (2) 17

(1) 500원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 방법은
 0개, 1개의 2가지

100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
50원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개의 3가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지
불하는 방법의 수는
 $2 \times 4 \times 3 - 1 = 23$

- (2) 500원짜리 동전 1개로 만들 수 있는 금액은
0원, 500원의 2가지
100원짜리 동전 3개로 만들 수 있는 금액은
0원, 100원, 200원, 300원의 4가지 ㉠
50원짜리 동전 2개로 만들 수 있는 금액은
0원, 50원, 100원의 3가지 ㉡
그런데 ㉠, ㉡에서 100원을 만들 수 있는 경우가
중복되므로 100원짜리 동전 3개를 50원짜리 동전
6개로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수
는 500원짜리 동전 1개, 50원짜리 동전 8개로 지
불할 수 있는 금액의 수와 같다.
500원짜리 동전 1개로 만들 수 있는 금액은
0원, 500원의 2가지
50원짜리 동전 8개로 만들 수 있는 금액은
0원, 50원, 100원, 150원, 200원, 250원, 300원,
350원, 400원의 9가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지
불할 수 있는 금액의 수는
 $2 \times 9 - 1 = 17$

664 ㉠ (1) 44 (2) 34

- (1) 1000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 방법은
0장, 1장, 2장의 3가지
500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개의 3가지
100원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지
불하는 방법의 수는
 $3 \times 3 \times 5 - 1 = 44$
(2) 1000원짜리 지폐 2장으로 만들 수 있는 금액은
0원, 1000원, 2000원의 3가지 ㉠
500원짜리 동전 2개로 만들 수 있는 금액은
0원, 500원, 1000원의 3가지 ㉡

100원짜리 동전 4개로 만들 수 있는 금액은
0원, 100원, 200원, 300원, 400원의 5가지
그런데 ㉠, ㉡에서 1000원을 만들 수 있는 경우가
중복되므로 1000원짜리 지폐 2장을 500원짜리 동
전 4개로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의
수는 500원짜리 동전 6개, 100원짜리 동전 4개로
지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
500원짜리 동전 6개로 만들 수 있는 금액은
0원, 500원, 1000원, 1500원, 2000원, 2500원,
3000원의 7가지
100원짜리 동전 4개로 만들 수 있는 금액은
0원, 100원, 200원, 300원, 400원의 5가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지
불할 수 있는 금액의 수는
 $7 \times 5 - 1 = 34$

665 ㉠ 87

500원짜리 동전 1개로 만들 수 있는 금액은
0원, 500원의 2가지 ㉠
100원짜리 동전 5개로 만들 수 있는 금액은
0원, 100원, 200원, 300원, 400원, 500원의 6가지
..... ㉡
50원짜리 동전 1개로 만들 수 있는 금액은
0원, 50원의 2가지
10원짜리 동전 3개로 만들 수 있는 금액은
0원, 10원, 20원, 30원의 4가지
그런데 ㉠, ㉡에서 500원을 만들 수 있는 경우가 중
복되므로 500원짜리 동전 1개를 100원짜리 동전 5개
로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 100
원짜리 동전 10개, 50원짜리 동전 1개, 10원짜리 동
전 3개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
100원짜리 동전 10개로 만들 수 있는 금액은
0원, 100원, 200원, 300원, 400원, 500원, 600원,
700원, 800원, 900원, 1000원의 11가지
50원짜리 동전 1개로 만들 수 있는 금액은
0원, 50원의 2가지
10원짜리 동전 3개로 만들 수 있는 금액은
0원, 10원, 20원, 30원의 4가지
이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할
수 있는 금액의 수는
 $11 \times 2 \times 4 - 1 = 87$

666 ㉡ 39

100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

50원짜리 동전 n 개로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, ..., n 개의 $(n+1)$ 가지

10원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

이때 지불하는 방법의 수가 63이고 0원을 지불하는
경우는 제외해야 하므로

$$4 \times (n+1) \times 4 - 1 = 63 \quad \therefore n=3$$

100원짜리 동전 3개로 만들 수 있는 금액은

0원, 100원, 200원, 300원의 4가지 ㉠

50원짜리 동전 3개로 만들 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원, 150원의 4가지 ㉡

10원짜리 동전 3개로 만들 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원, 30원의 4가지

그런데 ㉠, ㉡에서 100원을 만들 수 있는 경우가 중
복되므로 100원짜리 동전 3개를 50원짜리 동전 6개로
바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜
리 동전 9개, 10원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금
액의 수와 같다.

50원짜리 동전 9개로 만들 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원, 150원, 200원, 250원, 300원, 350
원, 400원, 450원의 10가지

10원짜리 동전 3개로 만들 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원, 30원의 4가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할
수 있는 금액의 수는 $10 \times 4 - 1 = 39$

연습문제

312~314쪽

667 ㉡ 6

두 눈의 수의 차가 4인 경우는

(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)의 4가지

두 눈의 수의 차가 5인 경우는

(1, 6), (6, 1)의 2가지

따라서 두 눈의 수의 차가 4 이상인 경우의 수는

$$4 + 2 = 6$$

668 ㉡ ①

x, y 가 자연수이므로

(i) $x+2y=4$ 일 때,

순서쌍 (x, y) 는 (2, 1)의 1개

(ii) $x+2y=5$ 일 때,

순서쌍 (x, y) 는 (1, 2), (3, 1)의 2개

(iii) $x+2y=6$ 일 때,

순서쌍 (x, y) 는 (2, 2), (4, 1)의 2개

(iv) $x+2y=7$ 일 때,

순서쌍 (x, y) 는 (1, 3), (3, 2), (5, 1)의 3개

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$1 + 2 + 2 + 3 = 8$$

669 ㉡ ②

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 6의 4가지

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6, 8의 5가지

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$4 \times 5 = 20$$

670 ㉡ ⑤

$$(a+b)(p+q+r)(x+y)^2$$

$$= (a+b)(p+q+r)(x^2+2xy+y^2)$$

이므로 전개하면 a, b 에 p, q, r 를 각각 곱하여 항이
만들어지고, 그것에 다시 $x^2, 2xy, y^2$ 를 각각 곱하여
항이 만들어지므로 구하는 항의 개수는

$$2 \times 3 \times 3 = 18$$

671 ㉡ ③

$$2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

2^3 의 양의 약수는 1, 2, 2^2 , 2^3 의 4개

3^2 의 양의 약수는 1, 3, 3^2 의 3개

5의 양의 약수는 1, 5의 2개

7의 양의 약수는 1, 7의 2개

따라서 구하는 약수의 개수는

$$4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$$

672 ㉡ 24

집 $\rightarrow$ 학교 $\rightarrow$ 학원 $\rightarrow$ 집으로 가는 경우의 수는

$$2 \times 4 \times 3 = 24$$

673 ㉡ 16

세 수의 곱이 6인 경우는

(1, 1, 6), (1, 2, 3), (1, 3, 2), (1, 6, 1),

(2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1),

(6, 1, 1)의 9가지

세 수의 곱이 8인 경우는

(1, 2, 4), (1, 4, 2), (2, 1, 4), (2, 2, 2),
(2, 4, 1), (4, 1, 2), (4, 2, 1)의 7가지
따라서 세 수의 곱이 6 또는 8인 경우의 수는
 $9+7=16$

674 ㉡ 57

1부터 100까지의 자연수 중에서

(i) 3으로 나누어떨어지는 수

3의 배수이므로 3, 6, 9, ..., 99의 33개

(ii) 7로 나누어떨어지는 수

7의 배수이므로 7, 14, 21, ..., 98의 14개

(iii) 3과 7로 모두 나누어떨어지는 수

3과 7의 최소공배수인 21의 배수이므로

21, 42, 63, 84의 4개

(i), (ii), (iii)에서 3 또는 7로 나누어떨어지는 수의 개수는
 $33+14-4=43$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $100-43=57$

675 ㉡ 12

$a \leq b \leq c$ 이므로 $c \geq 8$

삼각형의 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의
합보다 작아야 하므로

$c < a+b$ ㉠

$a+b+c=24$ 에서 $a+b=24-c$ 이므로 ㉠에 대입하
면 $c < 24-c$

$2c < 24 \quad \therefore c < 12$

따라서 $8 \leq c < 12$ 이므로 c 가 될 수 있는 자연수를 구
하면

$c=8$ 또는 $c=9$ 또는 $c=10$ 또는 $c=11$

(i) $c=8$ 일 때,

$a+b=16$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는 (8, 8)의 1개

(ii) $c=9$ 일 때,

$a+b=15$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는 (6, 9), (7, 8)
의 2개

(iii) $c=10$ 일 때,

$a+b=14$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는 (4, 10),
(5, 9), (6, 8), (7, 7)의 4개

(iv) $c=11$ 일 때,

$a+b=13$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는 (2, 11),
(3, 10), (4, 9), (5, 8), (6, 7)의 5개

(i)~(iv)에서 구하는 삼각형의 개수는 순서쌍 (a, b, c)
의 개수와 같으므로 $1+2+4+5=12$

676 ㉡ 10

이차방정식 $x^2+ax+2b=0$ 이 실근을 가지므로 이
이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=a^2-8b \geq 0 \quad \therefore a^2 \geq 8b$$

(i) $b=1$ 일 때,

$a^2 \geq 8$, 즉 $a \geq 2\sqrt{2}$ 이므로 a 는 3, 4, 5, 6의 4개

(ii) $b=2$ 일 때,

$a^2 \geq 16$, 즉 $a \geq 4$ 이므로 a 는 4, 5, 6의 3개

(iii) $b=3$ 일 때,

$a^2 \geq 24$, 즉 $a \geq 2\sqrt{6}$ 이므로 a 는 5, 6의 2개

(iv) $b=4$ 일 때,

$a^2 \geq 32$, 즉 $a \geq 4\sqrt{2}$ 이므로 a 는 6의 1개

(v) $b \geq 5$ 일 때,

$a^2 \geq 40$, 즉 $a \geq 2\sqrt{10}$ 이므로 a 의 값은 존재하지 않
는다.

(i)~(v)에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$4+3+2+1=10$$

677 ㉡ ④

A가 먼저 빵과 우유를 각각 하나씩 주문하고, B가 빵과
우유를 각각 하나씩 주문하는 경우의 수가 360이므로

$$n \times 4 \times (n-1) \times 3 = 360$$

$$n(n-1) = 30 = 6 \times 5$$

$$\therefore n = 6$$

678 ㉡ 3

$$1350 = 2 \times 3^3 \times 5^2$$

▶▶▶▶▶ ①

1350의 양의 약수 중에서 홀수는 2를 소인수로 갖지
않는 수이므로 3^3 의 양의 약수와 5^2 의 양의 약수에서
각각 하나씩 택하여 곱한 것과 같다.

3^3 의 양의 약수는 1, 3, 3^2 , 3^3 의 4개

5^2 의 양의 약수는 1, 5, 5^2 의 3개

따라서 홀수의 개수는

$$a = 4 \times 3 = 12$$

▶▶▶▶▶ ②

1350의 양의 약수 중에서 6의 배수는 2×3 을 소인수
로 갖는 수이므로 3^2 의 양의 약수와 5^2 의 양의 약수
에서 각각 하나씩 택하여 곱한 것에 2×3 을 곱한 것과
같다.

3^2 의 양의 약수는 1, 3, 3^2 의 3개

5^2 의 양의 약수는 1, 5, 5^2 의 3개

따라서 6의 배수의 개수는 $b = 3 \times 3 = 9$

▶▶▶▶▶ ③

$$\therefore a - b = 3$$

▶▶▶▶▶ ④

단계	채점 기준	비율
①	1350을 소인수분해하기	10%
②	a 의 값 구하기	40%
③	b 의 값 구하기	40%
④	$a-b$ 의 값 구하기	10%

679 ㉮ 5

B 지점과 D 지점 사이에 x 개의 도로를 추가한다고 하면

(i) $A \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는

$$2 \times 3 = 6$$

(ii) $A \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는

$$4 \times 2 = 8$$

(iii) $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는

$$2 \times x \times 2 = 4x$$

(iv) $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C$ 로 가는 경우의 수는

$$4 \times x \times 3 = 12x$$

(i)~(iv)에서 A 지점에서 출발하여 C 지점으로 가는 경우의 수는

$$6 + 8 + 4x + 12x = 16x + 14$$

이 경우의 수가 94가 되어야 하므로

$$16x + 14 = 94 \quad \therefore x = 5$$

따라서 추가해야 하는 도로의 개수는 5이다.

680 ㉮ 36

오른쪽 그림과 같이 5개의 영역을 A, B, C, D, E라 하자.

(i) C와 D에 서로 다른 색을 칠하는 경우

B에 칠할 수 있는 색은 3가지

A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한

$$3 - 1 = 2(\text{가지})$$

C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한

$$3 - 1 = 2(\text{가지})$$

D에 칠할 수 있는 색은 B와 C에 칠한 색을 제외

$$\text{한 } 3 - 2 = 1(\text{가지})$$

E에 칠할 수 있는 색은 C와 D에 칠한 색을 제외

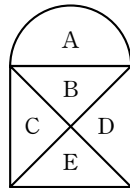
$$\text{한 } 3 - 2 = 1(\text{가지})$$

따라서 C와 D에 서로 다른 색을 칠하는 경우의 수

$$\text{는 } 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 12$$

(ii) C와 D에 서로 같은 색을 칠하는 경우

B에 칠할 수 있는 색은 3가지



A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한

$$3 - 1 = 2(\text{가지})$$

C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한

$$3 - 1 = 2(\text{가지})$$

D에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색과 같은 색인

$$1(\text{가지})$$

E에 칠할 수 있는 색은 C와 D에 칠한 색을 제외

$$\text{한 } 3 - 1 = 2(\text{가지})$$

따라서 C와 D에 서로 같은 색을 칠하는 경우의 수

$$\text{는 } 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 2 = 24$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $12 + 24 = 36$

681 ㉮ 18

(i) 지불하는 방법의 수

10000원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

5000원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 방법은

0장, 1장, 2장, 3장의 4가지

1000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 방법은

0장, 1장, 2장의 3가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불하는 방법의 수는

$$a = 4 \times 4 \times 3 - 1 = 47$$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

10000원짜리 지폐 3장으로 만들 수 있는 금액은

0원, 10000원, 20000원, 30000원의 4가지

..... ㉠

5000원짜리 지폐 3장으로 만들 수 있는 금액은

0원, 5000원, 10000원, 15000원

..... ㉡

1000원짜리 지폐 2장으로 만들 수 있는 금액은

0원, 1000원, 2000원의 3가지

그런데 ㉠, ㉡에서 10000원을 만들 수 있는 경우

가 중복되므로 10000원짜리 지폐 3장을 5000원짜

리 지폐 6장으로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는

금액의 수는 5000원짜리 지폐 9장, 1000원짜리

지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

5000원짜리 지폐 9장으로 만들 수 있는 금액은

0원, 5000원, 10000원, 15000원, 20000원,

25000원, 30000원, 35000원, 40000원, 45000원

의 10가지

1000원짜리 지폐 2장으로 만들 수 있는 금액은

0원, 1000원, 2000원의 3가지

이때 0원을 지불하는 경우는 제외해야 하므로 지불할 수 있는 금액의 수는

$$b = 10 \times 3 - 1 = 29$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a - b = 47 - 29 = 18$$

682 ㉔ ④

| 접근 방법 | 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으면 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식 D 에 대하여 $D < 0$ 임을 이용하여 식을 세운다.

이차함수 $y=x^2+(a-b)x-ab+1$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으므로 이차방정식

$$x^2+(a-b)x-ab+1=0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$D=(a-b)^2-4(-ab+1)<0$$

$$a^2+2ab+b^2-4<0$$

$$(a+b)^2<4 \quad \therefore -2<a+b<2$$

(i) $a+b=-1$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(-2, 1), (-1, 0), (0, -1), (1, -2)$ 의 4개

(ii) $a+b=0$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, -1), (2, -2)$ 의 5개

(iii) $a+b=1$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(-2, 3), (-1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, -1), (3, -2)$ 의 6개

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$4+5+6=15$$

683 ㉔ ③

| 접근 방법 | $a+b+c+abc$ 의 값이 짝수가 되도록 하는 $a+b+c$ 와 abc 의 값을 기준으로 경우를 나눈다.

$a+b+c+abc$ 의 값이 짝수가 되려면 $a+b+c$ 와 abc 의 값의 합이 짝수이어야 한다.

(i) $a+b+c$ 와 abc 의 값이 모두 홀수인 경우

abc 의 값이 홀수이므로 a, b, c 가 모두 홀수이다.

이때 a, b, c 의 값이 모두 홀수이면 $a+b+c$ 의 값도 홀수이므로 그 경우의 수는

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

(ii) $a+b+c$ 와 abc 의 값이 모두 짝수인 경우

abc 의 값이 짝수이므로 a, b, c 중에서 1개 이상이 짝수이다.

이때 $a+b+c$ 의 값이 짝수이므로 a, b, c 의 값이 모두 짝수이거나 a, b, c 중에서 1개만 짝수이어야 한다.

① a, b, c 의 값이 모두 짝수인 경우의 수는

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

② a, b, c 중에서 1개만 짝수인 경우는 세 수 a, b, c 가 각각 짝수, 홀수, 홀수 또는 홀수, 짝수, 홀수 또는 홀수, 홀수, 짝수인 경우이므로

$$3 \times (3 \times 3 \times 3) = 81$$

①, ②에서 경우의 수는 $27+81=108$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $27+108=135$

684 ㉔ 35

각 카드에 적혀 있는 숫자를 곱하여 만들 수 있는 자연수를 N 이라 하면

$$N=1 \times 2^p \times 3^q \times 7^r$$

$$(p=0, 1, 2, q=0, 1, 2, 3, r=0, 1, 2)$$

폴로 나타낼 수 있다.

이때 2장 이상의 카드를 뽑아서 만들 수 있는 자연수는 $2^2 \times 3^3 \times 7^2$ 의 양의 약수 중에서 1을 제외한 것과 같다.

2^2 의 양의 약수는 1, 2, 2^2 의 3개

3^3 의 양의 약수는 1, 3, 3^2 , 3^3 의 4개

7^2 의 양의 약수는 1, 7, 7^2 의 3개

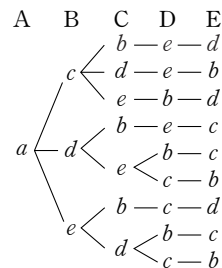
따라서 구하는 자연수의 개수는

$$3 \times 4 \times 3 - 1 = 35$$

685 ㉔ ④

| 접근 방법 | A만 자신의 휴대 전화를 꺼내는 경우의 수를 구한 후 B, C, D, E만 자신의 휴대 전화를 꺼내는 경우로 확장하여 생각한다.

5명의 학생 A, B, C, D, E의 휴대 전화를 각각 a, b, c, d, e 라 할 때, A만 자신의 휴대 전화를 꺼내는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



이때 B만 자신의 휴대 전화를 꺼내는 경우, C만 자신의 휴대 전화를 꺼내는 경우, D만 자신의 휴대 전화를 꺼내는 경우, E만 자신의 휴대 전화를 꺼내는 경우도 각각 9가지이므로 구하는 경우의 수는 $9 \times 5 = 45$

02 순열

개념 확인

317쪽

686 ㉠ (1) 4 (2) 120 (3) 56

687 ㉠ (1) 1 (2) 6 (3) 720

유제

319~329쪽

688 ㉠ (1) 6 (2) 4 (3) 7

(1) ${}_nP_3 = 20n$ 에서

$$n(n-1)(n-2) = 20n$$

$n \geq 3$ 이므로 양변을 n 으로 나누면

$$(n-1)(n-2) = 20$$

$$20 = 5 \times 4 \text{이므로}$$

$$(n-1)(n-2) = 5 \times 4$$

따라서 $n-1=5$ 이므로

$$n=6$$

(2) ${}_7P_r \times 3! = 5040$ 에서 $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 이므로

$${}_7P_r \times 6 = 5040$$

$$\therefore {}_7P_r = 840$$

$$840 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \text{이므로}$$

$$r=4$$

(3) ${}_{n+2}P_4 = 72 \times {}_nP_2$ 에서

$$(n+2)(n+1)n(n-1) = 72n(n-1)$$

$n \geq 2$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$$(n+2)(n+1) = 72$$

$$72 = 9 \times 8 \text{이므로}$$

$$(n+2)(n+1) = 9 \times 8$$

따라서 $n+2=9$ 이므로

$$n=7$$

689 ㉠ 4

${}_{n+3}P_4 : {}_{n+2}P_3 = 7 : 1$ 에서

$${}_{n+3}P_4 = 7 \times {}_{n+2}P_3$$

$$(n+3)(n+2)(n+1)n = 7(n+2)(n+1)n$$

$n \geq 1$ 이므로 양변을 $(n+2)(n+1)n$ 으로 나누면

$$n+3=7$$

$$\therefore n=4$$

690 ㉠ 10

${}_nP_3 - 4 \times {}_nP_2 = 5 \times {}_{n-1}P_2$ 에서

$$n(n-1)(n-2) - 4n(n-1) = 5(n-1)(n-2)$$

$n \geq 3$ 이므로 양변을 $n-1$ 로 나누면

$$n(n-2) - 4n = 5(n-2)$$

$$n^2 - 11n + 10 = 0$$

$$(n-1)(n-10) = 0$$

$$\therefore n=1 \text{ 또는 } n=10$$

그런데 $n \geq 3$ 이므로

$$n=10$$

691 ㉠ 6

${}_5P_r \geq 3 \times {}_5P_{r-1}$ 에서

$$\frac{5!}{(5-r)!} \geq 3 \times \frac{5!}{\{5-(r-1)\}!}$$

$$\frac{(6-r)!}{(5-r)!} \geq 3, 6-r \geq 3$$

$$\therefore r \leq 3$$

따라서 자연수 r 의 값은 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$$1+2+3=6$$

692 ㉠ (1) 720 (2) 360 (3) 30

(1) 서로 다른 6개에서 6개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_6P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

(2) 서로 다른 6개에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_6P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

(3) 서로 다른 6개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_6P_2 = 6 \times 5 = 30$$

693 ㉠ 990

서로 다른 11개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_{11}P_3 = 11 \times 10 \times 9 = 990$$

694 ㉠ 720

서로 다른 10개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_{10}P_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

695 ㉔ 8

서로 다른 n 개에서 3개를 택하는 순열의 수가 336이므로

$${}_nP_3=336$$

$$336=8 \times 7 \times 6 \text{이므로}$$

$$n(n-1)(n-2)=8 \times 7 \times 6$$

$$\therefore n=8 \text{ (}\because n \text{은 자연수)}$$

696 ㉔ 240

모음 i와 e를 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자 4개와 함께 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$5!=5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1=120$$

i와 e의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2!=2 \times 1=2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$120 \times 2=240$$

697 ㉔ 3600

C, D, E, F, G를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$5!=5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1=120$$

배열한 C, D, E, F, G 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 A, B를 배열하는 경우의 수는

$${}_6P_2=6 \times 5=30$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$120 \times 30=3600$$

698 ㉔ 5

어른 3명을 한 묶음으로 생각하여 아이 n 명과 함께 일렬로 세우는 경우의 수는

$$(n+1)!$$

어른 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$3!=3 \times 2 \times 1=6$$

이때 어른 3명이 서로 이웃하도록 세우는 경우의 수가 4320이므로

$$(n+1)! \times 6=4320$$

$$(n+1)!=720$$

$$720=6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \text{이므로}$$

$$(n+1)!=6!$$

따라서 $n+1=6$ 이므로

$$n=5$$

699 ㉔ 72

남학생과 여학생이 각각 3명으로 같으므로 남학생과 여학생을 교대로 세우는 경우는 다음 그림과 같이 남학생이 맨 앞에 오거나 여학생이 맨 앞에 오는 2가지가 있다.



각각의 경우에 대하여 남학생 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$3!=3 \times 2 \times 1=6$$

여학생 3명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$3!=3 \times 2 \times 1=6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 6 \times 6=72$$

700 ㉔ (1) 12 (2) 24

(1) 양 끝에 남학생 2명을 세우는 경우의 수는

$$2!=2 \times 1=2$$

나머지 자리에 여학생 3명을 세우는 경우의 수는

$$3!=3 \times 2 \times 1=6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 6=12$$

(2) 여학생 3명 중에서 2명을 뽑아 남학생 2명 사이에 일렬로 세우는 경우의 수는

$${}_3P_2=3 \times 2=6$$

남학생 2명과 그 사이의 여학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 나머지 1명의 여학생과 함께 일렬로 세우는 경우의 수는

$$2!=2 \times 1=2$$

남학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2!=2 \times 1=2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 2 \times 2=24$$

701 ㉔ 2640

(i) 7명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$7!=7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1=5040$$

(ii) 양 끝에 1학년 학생 5명 중에서 2명을 뽑아 세우는 경우의 수는

$${}_5P_2=5 \times 4=20$$

나머지 자리에 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$5!=5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1=120$$

따라서 양 끝에 1학년 학생만 오도록 세우는 경우의 수는

$$20 \times 120 = 2400$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$5040 - 2400 = 2640$$

702 ㉮ ⑤

홀수 1, 3, 5가 적힌 3개의 의자 중에서 2개의 의자를 택하여 아버지, 어머니가 앉는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6$$

나머지 3개의 의자에 할머니, 아들, 딸이 앉는 경우의 수는

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

703 ㉮ 3600

(i) 7개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

(ii) 자음인 m, p, r, v의 4개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

자음 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 i, o, e의 모음 3개를 배열하는 경우의 수는

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

따라서 모음끼리 서로 이웃하지 않도록 배열하는 경우의 수는

$$24 \times 60 = 1440$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$5040 - 1440 = 3600$$

704 ㉮ (1) 48 (2) 18

(1) 백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지

나머지 자리에 백의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$4 \times 12 = 48$$

(2) 홀수이려면 일의 자리의 숫자가 홀수이어야 한다. 즉, 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3이다.

(i) 일의 자리의 숫자가 1인 경우

백의 자리에는 0과 1이 올 수 없으므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 4의 3가지

십의 자리에 백의 자리에 온 숫자와 1을 제외한 3개의 숫자 중에서 1개를 택하여 배열하는 경우의 수는

$${}_3P_1 = 3$$

따라서 홀수의 개수는

$$3 \times 3 = 9$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 3인 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 홀수의 개수는 9이다.

(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는

$$9 + 9 = 18$$

705 ㉮ (1) 72 (2) 108

(1) 4의 배수는 끝의 두 자리의 수가 4의 배수이므로

□□04, □□12, □□20, □□24, □□32, □□40, □□52 풀어야 한다.

(i) □□12, □□24, □□32, □□52 풀인 경우

각각의 경우에 대하여 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과

십의 자리, 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3가지 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리와 십의 자리, 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3가지

따라서 4의 배수의 개수는

$$4 \times 3 \times 3 = 36$$

(ii) □□04, □□20, □□40 풀인 경우

나머지 자리에 십의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 4의 배수의 개수는

$$3 \times {}_4P_2 = 3 \times 4 \times 3 = 36$$

(i), (ii)에서 구하는 4의 배수의 개수는

$$36 + 36 = 72$$

(2) 5의 배수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

나머지 자리에 0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 5의 배수의 개수는

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 5를 제외한 4가지

나머지 자리에 천의 자리에 온 숫자와 5를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$$

따라서 5의 배수의 개수는

$$4 \times 12 = 48$$

(i), (ii)에서 구하는 5의 배수의 개수는

$$60 + 48 = 108$$

706 ㉮ 36

(i) 5개의 숫자 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 3개를 택하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

(ii) 3의 배수는 모든 자리의 숫자의 합이 3의 배수이므로 5개의 숫자 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 3개를 택할 때, 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

(2, 3, 4), (2, 4, 6), (3, 4, 5), (4, 5, 6)의 4가지 각각의 경우에 대하여 만들 수 있는 자연수의 개수는 $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

따라서 3의 배수의 개수는

$$4 \times 6 = 24$$

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수가 아닌 것의 개수는

$$60 - 24 = 36$$

707 ㉮ 168

(i) 각 자리의 숫자가 모두 홀수인 경우

홀수 1, 3, 5, 7 중에서 서로 다른 3개를 택하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$${}_4P_3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

(ii) 두 자리의 숫자는 짝수, 한 자리의 숫자는 홀수인 경우

① (짝수, 짝수, 홀수)인 경우

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 홀수 1, 3, 5, 7의 4가지

나머지 자리에 짝수 2, 4, 6, 8 중에서 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$$

따라서 자연수의 개수는 $4 \times 12 = 48$

② (짝수, 홀수, 짝수)인 경우

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 짝수 2, 4, 6, 8의 4가지

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 홀수 1, 3, 5, 7의 4가지

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 일의 자리에 온 숫자를 제외한 3가지

따라서 자연수의 개수는 $4 \times 4 \times 3 = 48$

③ (홀수, 짝수, 짝수)인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 홀수 1, 3, 5, 7의 4가지

나머지 자리에 짝수 2, 4, 6, 8 중에서 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$$

따라서 자연수의 개수는 $4 \times 12 = 48$

①, ②, ③에서 자연수의 개수는

$$48 + 48 + 48 = 144$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$24 + 144 = 168$$

708 ㉮ (1) 424번째 (2) cabefd

(1) $a \square \square \square \square \square$ 꼴인 문자열의 개수는

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$b \square \square \square \square \square$ 꼴인 문자열의 개수는

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$c \square \square \square \square \square$ 꼴인 문자열의 개수는

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$da \square \square \square \square$ 꼴인 문자열의 개수는

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$db \square \square \square \square$ 꼴인 문자열의 개수는

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$dca \square \square \square$ 꼴인 문자열의 개수는

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$dcb \square \square \square$ 꼴인 문자열의 개수는

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$dcea \square \square$ 꼴인 문자열의 개수는

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$dcea \square \square$ 꼴인 문자열을 순서대로 배열하면

$dcebf, dcebfa$

따라서 $dceb \square \square$ 꼴인 문자열에서 $dcebfa$ 는 두 번째이므로 $dcebfa$ 가 나타나는 순서는

$$120 + 120 + 120 + 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 2 = 424(\text{번째})$$

(2) $a□□□□□$ 꼴인 문자열의 개수는

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$b□□□□□$ 꼴인 문자열의 개수는

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

이때 $120 + 120 = 240$ 이므로 244번째로 나타나는 문자열은 $c□□□□□$ 꼴인 문자열 중에서 네 번째이다.

$c□□□□□$ 꼴인 문자열을 순서대로 배열하면 $cabdef, cabdfe, cabedf, cabefd, \dots$

따라서 244번째로 나타나는 문자열은 $cabefd$ 이다.

709 ㉡ 81번째

$\neg□□□□$ 꼴인 문자열의 개수는

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$\neg□□□□$ 꼴인 문자열의 개수는

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$\neg□□□□$ 꼴인 문자열의 개수는

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$\neg\neg□□□$ 꼴인 문자열의 개수는

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$\neg\neg\neg□□$ 꼴인 문자열의 개수는

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$\neg\neg\neg\neg□□$ 꼴인 문자열을 순서대로 배열하면

$\neg\neg\neg\neg\neg\neg, \neg\neg\neg\neg\neg\neg$

따라서 $\neg\neg\neg\neg□□$ 꼴인 문자열에서 $\neg\neg\neg\neg\neg\neg$ 은 첫 번째이므로 $\neg\neg\neg\neg\neg\neg$ 이 나타나는 순서는

$$24 + 24 + 24 + 6 + 2 + 1 = 81(\text{번째})$$

710 ㉡ 31042

$1□□□□$ 꼴인 자연수의 개수는

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$2□□□□$ 꼴인 자연수의 개수는

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$30□□□$ 꼴인 자연수의 개수는

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

이때 $24 + 24 + 6 = 54$ 이므로 56번째 수는 $31□□□$ 꼴인 수 중에서 두 번째 수이다.

$31□□□$ 꼴인 다섯 자리의 자연수를 순서대로 배열하면

$31024, 31042, \dots$

따라서 56번째 수는 31042이다.

711 ㉡ 4135

$1□□□$ 꼴인 자연수의 개수는

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$2□□□$ 꼴인 자연수의 개수는

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$3□□□$ 꼴인 자연수의 개수는

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$40□□$ 꼴인 자연수의 개수는

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$$

이때 $60 + 60 + 60 + 12 = 192$ 이므로 201번째로 작은 수는 $41□□$ 꼴인 수 중에서 9번째 수이다.

$41□□$ 꼴인 네 자리의 자연수를 순서대로 배열하면 4102, 4103, 4105, 4120, 4123, 4125, 4130, 4132, 4135, ...

따라서 201번째로 작은 수는 4135이다.

연습문제

330~332쪽

712 ㉡ ③

$${}_{n+1}P_4 - 3 \times {}_{n+1}P_3 - 7 \times {}_nP_2 \leq 0 \text{에서}$$

$$(n+1)n(n-1)(n-2) - 3(n+1)n(n-1)$$

$$- 7n(n-1) \leq 0$$

$n \geq 3$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$$(n+1)(n-2) - 3(n+1) - 7 \leq 0$$

$$n^2 - 4n - 12 \leq 0, (n+2)(n-6) \leq 0$$

$$\therefore 3 \leq n \leq 6 (\because n \geq 3)$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 6이다.

713 ㉡ ④

서로 다른 n 개에서 2개를 택하는 순열의 수가 210이므로

$${}_nP_2 = 210$$

$$210 = 15 \times 14 \text{이므로}$$

$$n(n-1) = 15 \times 14$$

$$\therefore n = 15 (\because n \text{은 자연수})$$

714 ㉡ 288

같은 성별의 학생을 한 묶음으로 생각하여 2묶음을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

남학생 3명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

여학생 4명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 6 \times 24 = 288$$

715 ㉔ 2880

학생과 부모님을 교대로 세우려면 학생이 맨 앞에 와야 한다.

학생 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

부모님 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$120 \times 24 = 2880$$

716 ㉔ 24

민호가 3등을 하는 경우의 수는 민호를 3등에 고정시키고 민호를 제외한 4명의 학생을 1, 2, 4, 5등에 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

717 ㉔ ④

vis를 한 묶음으로 생각하여 나머지 3개의 문자와 함께 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

v와 s의 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 2 = 48$$

718 ㉔ 240

짝수 2, 4, 6, 8의 4개 중에서 2개를 택하여 천의 자리와 백의 자리에 일렬로 배열하는 경우의 수는

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$$

나머지 자리에 천의 자리와 백의 자리에 온 숫자를 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

$${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$12 \times 20 = 240$$

719 ㉔ 960

농구 선수 2명을 한 묶음으로 생각하여 야구 선수 3명과 함께 일렬로 세우는 경우의 수는

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

농구 선수 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

농구 선수 한 묶음 및 야구 선수 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 축구 선수 2명을 세우는 경우의 수는

$${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 2 \times 20 = 960$$

720 ㉔ ③

2학년 학생 4명이 일렬로 앉는 경우의 수는

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

2학년 학생 사이사이의 3개의 자리에 1학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 $\leftarrow$ 2학년 학생이 양 끝에 앉아야 하므로 사이사이의 자리만 생각한다.

$${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는 $24 \times 6 = 144$

다른 풀이

양 끝에 있는 의자에 2학년 학생 4명 중에서 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$

나머지 4개의 의자에 1학년 학생

1	2	1	2
---	---	---	---

끼리는 서로 이웃하지 않도록 앉

1	2	2	1
---	---	---	---

는 경우는 오른쪽 그림과 같이 3가

2	1	2	1
---	---	---	---

지가 있다.

각각의 경우에 대하여 1학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 $2! = 2 \times 1 = 2$

2학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 $2! = 2 \times 1 = 2$

따라서 구하는 경우의 수는 $12 \times 3 \times 2 \times 2 = 144$

721 ㉔ ⑤

A, B가 앉는 줄을 선택하는 경우의 수는

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

한 줄에 놓인 3개의 좌석 중에서 2개의 좌석을 택하여 A, B가 앉는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 3 \times 2 = 6$$

나머지 세 명이 맞은편 줄의 좌석에 앉는 경우의 수는

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 6 \times 6 = 72$$

722 ㉮ 11

- (i) $(n+4)$ 명의 회원 중에서 회장과 부회장을 각각 한 명씩 뽑는 경우의 수는

$${}_{n+4}P_2 = (n+4)(n+3) \quad \gggggg \textcircled{1}$$

- (ii) 여자 회원 n 명 중에서 회장과 부회장을 각각 한 명씩 뽑는 경우의 수는

$${}_nP_2 = n(n-1) \quad \gggggg \textcircled{2}$$

- (i), (ii)에서 적어도 한 명은 남자 회원을 뽑는 경우의 수가 100이므로

$$(n+4)(n+3) - n(n-1) = 100$$

$$8n + 12 = 100 \quad \therefore n = 11 \quad \gggggg \textcircled{3}$$

단계	채점 기준	비율
①	전체 회원 중에서 회장, 부회장을 뽑는 경우의 수 구하기	30%
②	여자 회원 중에서 회장, 부회장을 뽑는 경우의 수 구하기	30%
③	n 의 값 구하기	40%

723 ㉮ ③

- (i) 7명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

- (ii) 선생님 사이에 학생을 세우지 않는 경우

선생님끼리 이웃하도록 세우는 경우와 같으므로
선생님 2명을 한 묶음으로 생각하여 학생 5명과 함께 일렬로 세우는 경우의 수는

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

선생님 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

따라서 선생님 사이에 학생을 세우지 않는 경우의 수는 $720 \times 2 = 1440$

- (iii) 선생님 사이에 학생 1명만 세우는 경우

학생 5명 중에서 1명을 택하여 선생님 사이에 세우는 경우의 수는 5

선생님 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

선생님과 선생님 사이의 학생 1명을 한 묶음으로 생각하여 나머지 4명의 학생과 함께 일렬로 세우는 경우의 수는 $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

따라서 선생님 사이에 학생 1명만 세우는 경우의 수는 $5 \times 2 \times 120 = 1200$

- (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$5040 - 1440 - 1200 = 2400$$

724 ㉮ ③

- (i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

나머지 자리에 0을 제외한 5개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 자연수의 개수는 ${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$

- (ii) 일의 자리의 숫자가 1인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 4, 5의 4가지
십에 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리에 온 숫자와 1을 제외한 4가지

따라서 자연수의 개수는 $4 \times 4 = 16$

- (iii) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 3, 4, 5의 3가지
십에 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리에 온 숫자와 2를 제외한 4가지

따라서 자연수의 개수는 $3 \times 4 = 12$

- (iv) 일의 자리의 숫자가 3인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 4, 5의 2가지
십에 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리에 온 숫자와 3을 제외한 4가지

따라서 자연수의 개수는 $2 \times 4 = 8$

- (v) 일의 자리의 숫자가 4인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 5의 1가지
십에 자리에 올 수 있는 숫자는 백의 자리에 온 숫자와 4를 제외한 4가지

따라서 자연수의 개수는 $1 \times 4 = 4$

- (i)~(v)에서 구하는 자연수의 개수는

$$20 + 16 + 12 + 8 + 4 = 60$$

725 ㉮ 156

43□□ 풀인 자연수의 개수는

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$$

45□□ 풀인 자연수의 개수는

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$$

46□□ 풀인 자연수의 개수는

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$$

5□□□ 풀인 자연수의 개수는

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

6□□□ 풀인 자연수의 개수는

$${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

따라서 4300보다 큰 수의 개수는

$$12 + 12 + 12 + 60 + 60 = 156$$

726 selmi

s, m, i, l, e를 사전식으로 배열하면 e, i, l, m, s의 순서이다.

e□□□□ 풀인 문자열의 개수는

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

i□□□□ 풀인 문자열의 개수는

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

l□□□□ 풀인 문자열의 개수는

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

m□□□□ 풀인 문자열의 개수는

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

이때 $24 + 24 + 24 + 24 = 96$ 이므로 100번째로 나타나는 문자열은 s□□□□ 풀인 문자열 중에서 네 번째이다.

s□□□□ 풀인 문자열을 순서대로 배열하면

seilm, seiml, selim, selmi, ...

따라서 100번째로 나타나는 문자열은 selmi이다.

727 ③

| 접근 방법 | 어느 2명도 서로 이웃하지 않으려면 학생 사이에 반드시 빈 의자가 있어야 한다.

의자 9개 중에서 4개에 학생이 앉으므로 빈 의자는 5개이다.

빈 의자 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 학생이 앉는 의자 4개를 놓으면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_6P_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

728 336

| 접근 방법 | 모든 경우의 수에서 각 자리의 수 중 두 수의 합이 9가 되는 경우의 수를 뺀다.

(i) 9개의 숫자 중에서 3개를 택하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$${}_9P_3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$$

(ii) 각 자리의 수 중에서 두 수의 합이 9가 되는 경우는 (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5)의 4가지 각각의 경우에 대하여 이미 택한 2개의 숫자를 제외한 나머지 7개의 숫자 중에서 1개를 택하여 일렬로 배열하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$$4 \times {}_7P_1 \times 3! = 4 \times 7 \times (3 \times 2 \times 1) = 168$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$504 - 168 = 336$$

01 조합

개념 확인

337쪽

729  (1) 1 (2) 1 (3) 21 (4) 56

730  (1) 4 (2) 2 (3) 5 (4) 5

731  (가) $n-r$ (나) n

유제

339~347쪽

732  (1) 10 (2) 4 (3) 7

(1) ${}_nC_6 = {}_nC_{n-6}$ 이므로

$${}_nC_{n-6} = {}_nC_4$$

따라서 $n-6=4$ 이므로 $n=10$

(2) ${}_{n+4}C_n = {}_{n+4}C_4$ 이므로

$${}_{n+4}C_4 = 70$$

$$\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

$$(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) = 1680$$

$$1680 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \text{이므로}$$

$$(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) = 8 \times 7 \times 6 \times 5$$

이때 n 은 자연수이므로 $n+4=8$

$$\therefore n=4$$

(3) ${}_{n+2}C_2 = {}_nC_2 + {}_{n-1}C_2$ 에서

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2 \times 1} = \frac{n(n-1)}{2 \times 1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \times 1}$$

$$n^2 + 3n + 2 = n^2 - n + n^2 - 3n + 2$$

$$n^2 - 7n = 0, n(n-7) = 0$$

$$\therefore n=0 \text{ 또는 } n=7$$

그런데 $n \geq 3$ 이므로 $n=7$

$$\text{ }_{n-1}C_2 \text{에서 } n-1 \geq 2 \text{이므로 } n \geq 3$$

733 6

$2 \times {}_nP_2 + 3 \times {}_nC_3 = {}_nP_3$ 에서

$$2n(n-1) + 3 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}$$

$$= n(n-1)(n-2)$$

이때 $n \geq 3$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$$2 + \frac{n-2}{2} = n-2$$

$$\frac{n-2}{2} = n-4, n-2 = 2n-8$$

$$\therefore n=6$$

734 ㉮ 5

$${}_nC_{n-3} + {}_{n+1}C_{n-1} = 5n \text{에서}$$

$${}_nC_3 + {}_{n+1}C_2 = 5n$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} + \frac{(n+1)n}{2 \times 1} = 5n$$

이때 $n \geq 3$ 이므로 양변을 n 으로 나누면

$$\frac{(n-1)(n-2)}{6} + \frac{n+1}{2} = 5$$

$$n^2 - 3n + 2 + 3(n+1) = 30$$

$$n^2 = 25 \quad \therefore n = 5 \quad (\because n \geq 3)$$

735 ㉮ 8

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-6 + 4 = -\frac{{}_nC_r}{5}, \quad -6 \times 4 = -\frac{2}{5} \times {}_nP_r$$

$$\therefore {}_nC_r = 10, \quad {}_nP_r = 60$$

이때 ${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$ 이므로

$$10 = \frac{60}{r!}, \quad r! = 6$$

$$6 = 3 \times 2 \times 1 \text{이므로}$$

$$r! = 3 \times 2 \times 1 \quad \therefore r = 3$$

$${}_nP_3 = 60 \text{에서}$$

$$n(n-1)(n-2) = 60$$

$$60 = 5 \times 4 \times 3 \text{이므로}$$

$$n(n-1)(n-2) = 5 \times 4 \times 3$$

이때 n 은 자연수이므로 $n = 5$

$$\therefore n + r = 5 + 3 = 8$$

|참고| 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 다음이 성립한다.

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

736 ㉮ (1) 220 (2) 350 (3) 22

(1) 12권의 문제집 중에서 3권을 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

(2) 수학 문제집 7권 중에서 4권을 택하는 경우의 수는

$${}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

영어 문제집 5권 중에서 2권을 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$35 \times 10 = 350$$

(3) 수학 문제집 7권 중에서 5권을 택하는 경우의 수는

$${}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

영어 문제집 5권 중에서 5권을 택하는 경우의 수는

$${}_5C_5 = 1$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$21 + 1 = 22$$

737 ㉮ 101

1학년 학생 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

2학년 학생 8명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

3학년 학생 7명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 + 56 + 35 = 101$$

738 ㉮ 4

$(n+3)$ 컬레 중에서 4컬레를 택하는 경우의 수가 35

이므로

$${}_{n+3}C_4 = 35$$

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35$$

$$(n+3)(n+2)(n+1)n = 840$$

$$840 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \text{이므로}$$

$$(n+3)(n+2)(n+1)n = 7 \times 6 \times 5 \times 4$$

이때 n 은 자연수이므로 $n = 4$

739 ㉮ 16

시합에 참가한 선수의 수를 n 이라 하면 선수들끼리 각자 한 번씩 악수를 하는 경우의 수는 n 명 중에서 2명을 택하는 경우의 수와 같다.

즉, ${}_nC_2 = 120$ 이므로

$$\frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 120$$

$$n(n-1) = 240$$

$$240 = 16 \times 15 \text{이므로}$$

$$n(n-1) = 16 \times 15$$

이때 n 은 자연수이므로 $n = 16$

따라서 시합에 참가한 선수의 수는 16이다.

740 ㉠ (1) 28 (2) 56

- (1) 특정한 여자 3명을 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 8명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수이므로

$${}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

- (2) 특정한 남자 3명을 제외하고 나머지 8명 중에서 5명을 뽑는 경우의 수이므로

$${}_8C_5 = {}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

741 ㉠ 63

- (i) 9송이의 꽃 중에서 3송이를 고르는 경우의 수는

$${}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

- (ii) 3송이를 모두 빨간색 꽃만 고르거나 파란색 꽃만 고르는 경우의 수는

$${}_6C_3 + {}_3C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} + 1 \\ = 20 + 1 = 21$$

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$84 - 21 = 63$$

742 ㉠ 140

- A와 B 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

- A, B를 제외한 나머지 8명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_8C_4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

- 따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 70 = 140$$

743 ㉠ 215

- (i) 11명의 학생 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{11}C_4 = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 330$$

- (ii) 4명을 모두 중학생만 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

- (iii) 중학생 중에서 3명, 고등학생 중에서 1명을 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_3 \times {}_5C_1 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times 5 = 100$$

- (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$330 - (15 + 100) = 215$$

744 ㉠ (1) 4800 (2) 7200

- (1) 남학생 5명 중에서 2명을 뽑고 여학생 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_4C_3 = {}_5C_2 \times {}_4C_1 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 4 = 40$$

- 뽑은 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$$5! = 120$$

- 따라서 구하는 경우의 수는

$$40 \times 120 = 4800$$

- (2) 남학생 5명 중에서 4명을 뽑고 여학생 4명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_5C_4 \times {}_4C_2 = {}_5C_1 \times {}_4C_2 = 5 \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 30$$

- 여학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 남학생 4명과 함께 일렬로 세우는 경우의 수는

$$5! = 120$$

- 여학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

- 따라서 구하는 경우의 수는

$$30 \times 120 \times 2 = 7200$$

745 ㉠ 144

- a, b를 이미 택했다고 생각하고 나머지 4개의 문자 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

- 4개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4! = 24$

- 따라서 구하는 문자열의 개수는

$$6 \times 24 = 144$$

746 ㉠ 90

- 1을 택했다고 생각하고 8을 제외한 6개의 숫자 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

- 3개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $3! = 6$

- 따라서 구하는 자연수의 개수는

$$15 \times 6 = 90$$

747 ㉠ 336

- 민규와 지영이를 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 8명의 학생 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

민규와 지영이를 한 묶음으로 생각하여 다른 학생 2명과 함께 일렬로 세우는 경우의 수는

$$3! = 6$$

민규와 지영이가 자리를 바꾸는 경우의 수는

$$2! = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$28 \times 6 \times 2 = 336$$

748 (1) 23 (2) 52

(1) 8개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

그런데 한 직선 위에 있는 점으로는 1개의 직선만 만들 수 있으므로 구하는 직선의 개수는

$$28 - 6 + 1 = 23$$

(2) 8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

그런데 한 직선 위에 있는 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$$56 - 4 = 52$$

749 (1) 150

가로 방향의 5개의 직선 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

세로 방향의 6개의 직선 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

$$10 \times 15 = 150$$

750 (1) 200

12개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

가로 방향의 직선은 3개이고 각각에 대하여 한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$$3 \times {}_4C_3 = 3 \times {}_4C_1 = 3 \times 4 = 12$$

세로 방향의 직선은 4개이고 각각에 대하여 한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$$4 \times {}_3C_3 = 4 \times 1 = 4$$

3개의 점을 지나는 대각선 방향의 직선은 4개이고 각각에 대하여 한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$$4 \times {}_3C_3 = 4 \times 1 = 4$$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$$220 - 12 - 4 - 4 = 200$$

751 (1) 30 (2) 70

(1) 간격 하나의 길이를 1이라 하면

한 변의 길이가 1인 정사각형의 개수는 16

한 변의 길이가 2인 정사각형의 개수는 9

한 변의 길이가 3인 정사각형의 개수는 4

한 변의 길이가 4인 정사각형의 개수는 1

따라서 모든 정사각형의 개수는

$$16 + 9 + 4 + 1 = 30$$

(2) 5개의 가로줄 중에서 2개를 택하고 5개의 세로줄 중에서 2개를 택하면 하나의 직사각형이 만들어지므로 직사각형의 개수는

$${}_5C_2 \times {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 100$$

이 중에서 정사각형이 30개 있으므로 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$$100 - 30 = 70$$

연습문제

349~350쪽

752 (1) 5

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} \text{이므로}$$

$$56 = \frac{336}{r!}, r! = 6$$

$$6 = 3 \times 2 \times 1 \text{이므로}$$

$$r! = 3 \times 2 \times 1 \quad \therefore r = 3$$

$${}_nP_3=336 \text{에서 } n(n-1)(n-2)=336$$

$$336=8 \times 7 \times 6 \text{이므로}$$

$$n(n-1)(n-2)=8 \times 7 \times 6$$

이때 n 은 자연수이므로 $n=8$

$$\therefore n-r=8-3=5$$

753 ㉮ 60

1학년 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

$${}_6C_4={}_6C_2=\frac{6 \times 5}{2 \times 1}=15$$

2학년 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_4C_3={}_4C_1=4$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \times 4=60$$

754 ㉮ 4

4가 적힌 공은 이미 꺼냈다고 생각하고 홀수 1, 3, 5, 7, 9를 제외한 4개의 숫자가 적힌 공 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_4C_3={}_4C_1=4$$

755 ㉮ ⑤

빵 6개 중에서 2개를 택하고 쿠키 5개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_2 \times {}_5C_2=\frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1}=150$$

택한 4개를 일렬로 진열하는 경우의 수는

$$4!=24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$150 \times 24=3600$$

756 ㉮ ④

팔각형의 8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하여 이으면 변 또는 대각선이 그려진다.

8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_8C_2=\frac{8 \times 7}{2 \times 1}=28$$

팔각형의 변의 개수는 8이므로 구하는 대각선의 개수는

$$28-8=20$$

757 ㉮ 155

10개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_{10}C_4=\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1}=210$$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_4={}_5C_1=5$$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하고 한 직선 위에 있지 않은 5개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 ◀ **삼각형인 경우**

$${}_5C_3 \times {}_5C_1={}_5C_2 \times {}_5C_1=\frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 5=50$$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$$210-5-50=155$$

758 ㉮ ④

$$\neg. n \times {}_{n-1}P_{r-1}=n \times \frac{(n-1)!}{\{n-1-(r-1)\}!}$$

$$=\frac{n!}{(n-r)!}={}_nP_r$$

$$\therefore {}_nP_r=n \times {}_{n-1}P_{r-1} \text{ (단, } 1 \leq r \leq n)$$

$$\sqcup. r \times {}_nC_r=r \times \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$$

$$=n \times \frac{(n-1)!}{(r-1)!\{n-1-(r-1)\}!}$$

$$=n \times {}_{n-1}C_{r-1}$$

$$\therefore r \times {}_nC_r=n \times {}_{n-1}C_{r-1} \text{ (단, } 1 \leq r \leq n)$$

$$\sqsubset. {}_nC_k \times {}_{n-k}C_{r-k}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(r-k)!\{n-k-(r-k)\}!}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(r-k)!(n-r)!}$$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!} \times \frac{r!}{k!(r-k)!}$$

$$={}_nC_r \times {}_rC_k$$

$$\therefore {}_nC_r \times {}_rC_k={}_nC_k \times {}_{n-k}C_{r-k} \text{ (단, } 0 \leq k \leq r \leq n)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\sqsubset$ 이다.

759 ㉮ 56

남학생과 여학생의 수를 각각 n 이라 하자.

전체에서 3명을 택하는 경우의 수는 ${}_{2n}C_3$

남학생 중에서 3명을 택하는 경우의 수는 ${}_nC_3$

전체에서 3명을 택하는 경우의 수는 남학생 중에서 3명을 택하는 경우의 수의 10배이므로

$${}_{2n}C_3=10 \times {}_nC_3$$

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3 \times 2 \times 1}=10 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}$$

이때 $n \geq 3$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$$2(2n-1) = 5(n-2)$$

$$\therefore n=8$$

따라서 남학생과 여학생의 수는 각각 8이므로 여학생 중에서 3명을 택하는 경우의 수는

$${}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

760 ㉡ 240

6곳의 학교 중에서 4곳을 택하는 경우의 수는

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

택한 각각의 학교의 학생 2명 중에서 1명을 택하는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 240$$

761 ㉡ ③

(i) $a=5$ 일 때

$c < b < 5$ 이므로 1, 2, 3, 4 중에서 2개를 뽑아 큰 수를 b , 작은 수를 c 로 정하는 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

(ii) $a=6$ 일 때

$c < b < 6$ 이므로 1, 2, 3, 4, 5 중에서 2개를 뽑아 큰 수를 b , 작은 수를 c 로 정하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$6 + 10 = 16$$

762 ㉡ 5

11명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{11}C_3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

여자 선수의 수를 n 이라 할 때, 여자 선수 n 명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

$${}_nC_3$$

따라서 남자 선수를 적어도 1명은 포함하여 뽑는 경우의 수는

$$165 - {}_nC_3 = 145$$

▶▶▶▶▶ ①

$${}_nC_3 = 20 \text{이므로}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

$$n(n-1)(n-2) = 120$$

$$120 = 6 \times 5 \times 4 \text{이므로}$$

$$n(n-1)(n-2) = 6 \times 5 \times 4$$

이때 n 은 자연수이므로 $n=6$

▶▶▶▶▶ ②

따라서 남자 선수의 수는

$$11 - 6 = 5$$

▶▶▶▶▶ ③

단계	채점 기준	비율
①	주어진 경우의 수를 이용하여 식 세우기	50%
②	여자 선수의 수 구하기	40%
③	남자 선수의 수 구하기	10%

763 ㉡ ④

오른쪽 그림과 같이 선분 BC

위의 네 점을 각각 D, E, F,

G라 하자.

또 선분 AB 위의 세 점과 선

분 AC 위의 세 점을 연결하

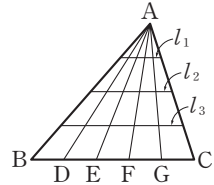
는 3개의 선분을 각각 $l_1, l_2,$

l_3 이라 하자.

이때 이 도형의 선들로 삼각형을 만들려면 점 A를 삼각형의 한 꼭짓점으로 해야 한다.

따라서 꼭짓점 A를 지나는 6개의 선분 AB, AD, AE, AF, AG, AC 중에서 2개를 택하고 4개의 선분 l_1, l_2, l_3, BC 중에서 1개를 택하면 삼각형이 만들어지므로 구하는 삼각형의 개수는

$${}_6C_2 \times {}_4C_1 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times 4 = 60$$



764 ㉡ 34

| 접근 방법 | 계단의 개수는

(두 단씩 오르는 횟수) $\times 2 +$ (한 단씩 오르는 횟수)이므로 두 단씩 오르는 횟수를 정하는 대로 한 단씩 오르는 횟수도 정해진다.

8단의 계단을 한 걸음에 두 단씩 올라가는 횟수는 0, 1, 2, 3, 4의 5가지이고 그 각각에 대하여 나머지는 모두 한 단씩 올라가면 된다.

(i) 두 단씩 올라가는 횟수가 0인 경우

계단을 오르는 8걸음 중에서 두 단을 오르는 경우는 없으므로 경우의 수는 1

(ii) 두 단씩 올라가는 횟수가 1인 경우

계단을 오르는 7걸음 중에서 두 단을 오르는 1걸음을 고르는 경우의 수는

$${}_7C_1=7$$

(iii) 두 단씩 올라가는 횟수가 2인 경우

계단을 오르는 6걸음 중에서 두 단을 오르는 2걸음을 고르는 경우의 수는

$${}_6C_2=\frac{6 \times 5}{2 \times 1}=15$$

(iv) 두 단씩 올라가는 횟수가 3인 경우

계단을 오르는 5걸음 중에서 두 단을 오르는 3걸음을 고르는 경우의 수는

$${}_5C_3={}_5C_2=\frac{5 \times 4}{2 \times 1}=10$$

(v) 두 단씩 올라가는 횟수가 4인 경우

계단을 오르는 4걸음 중에서 두 단을 오르는 경우의 수는 1

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

$$1+7+15+10+1=34$$

765 ㉮ 18

| 접근 방법 | 원주각의 성질을 이용하여 원 위의 점을 꼭짓점으로 하는 직각삼각형과 직사각형을 만드는 방법을 생각한다.

원의 지름과 원 위의 점을 이으면 직각삼각형이므로 직각삼각형의 개수는 원의 지름 4개 중에서 1개를 택하고 지름을 이루는 2개의 점을 제외한 6개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수와 같다.

따라서 직각삼각형의 개수는

$$a={}_4C_1 \times {}_6C_1=4 \times 6=24$$

서로 다른 원의 지름 2개가 직사각형의 대각선이 되도록 하는 원 위의 4개의 점을 이으면 직사각형이므로 직사각형의 개수는 원의 지름 4개 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같다.

따라서 직사각형의 개수는

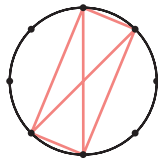
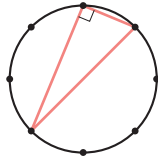
$$b={}_4C_2=\frac{4 \times 3}{2 \times 1}=6$$

$$\therefore a-b=24-6=18$$

| 참고 | 원주각의 성질

(1) 한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

(2) 반원에 대한 원주각의 크기는 90° 이다.



IV. 행렬

IV-1. 행렬의 연산

01 행렬의 덧셈, 뺄셈과 실수배

개념 확인

353쪽

$$766 \text{ ㉮ } (1) 0, -3, -1 \quad (2) 4, 0, 5 \quad (3) 0 \quad (4) 4$$

$$(4) a_{31}-a_{12}=5-1=4$$

$$767 \text{ ㉮ } (1) a=-1, b=3 \quad (2) a=3, b=4$$

$$(1) a+2=1 \text{ 이므로 } a=-1$$

$$5=-1+2b \text{ 이므로 } b=3$$

$$(2) 2a=6 \text{ 이므로 } a=3$$

$$5=b+1 \text{ 이므로 } b=4$$

유제

355-357쪽

$$768 \text{ ㉮ } (1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 3 & 0 & -5 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(1) a_{11}=3 \times 1 - 2 \times 1 = 1$$

$$a_{12}=3 \times 1 - 2 \times 2 = -1$$

$$a_{13}=3 \times 1 - 2 \times 3 = -3$$

$$a_{21}=3 \times 2 - 2 \times 1 = 4$$

$$a_{22}=3 \times 2 - 2 \times 2 = 2$$

$$a_{23}=3 \times 2 - 2 \times 3 = 0$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(2) i=j \text{ 이면 } a_{ij}=0 \text{ 이므로}$$

$$a_{11}=0, a_{22}=0, a_{33}=0$$

$$i \neq j \text{ 이면 } a_{ij}=i^2-j^2 \text{ 이므로}$$

$$a_{12}=1^2-2^2=-3, a_{13}=1^2-3^2=-8$$

$$a_{21}=2^2-1^2=3, a_{23}=2^2-3^2=-5$$

$$a_{31}=3^2-1^2=8, a_{32}=3^2-2^2=5$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 3 & 0 & -5 \\ 8 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$769 \text{ ㉮ } -5$$

$$a_{12}=1^2+2 \times 2-3=2, a_{22}=2^2+2 \times 2-3=5$$

$$a_{32}=3^2+2 \times 2-3=10, a_{33}=3^2+2 \times 3-3=12$$

$$\therefore a_{12}-a_{22}+a_{32}-a_{33}=2-5+10-12=-5$$

770 ㉔ 22

$$a_{11}=2 \times 1+1+1=4, a_{12}=2 \times 1+2+1=5$$

$$a_{21}=2 \times 2+1+1=6, a_{22}=2 \times 2+2+1=7$$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$$a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}=4+5+6+7=22$$

771 ㉔ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

행렬 A는 2×2 행렬이므로

$$a_{11}=(1-1) \times (1+1)=0$$

$$a_{12}=(1-1) \times (2+1)=0$$

$$a_{21}=(2-1) \times (1+1)=2$$

$$a_{22}=(2-1) \times (2+1)=3$$

$b_{ij}=a_{ji}$ 이므로

$$b_{11}=a_{11}=0, b_{12}=a_{21}=2$$

$$b_{21}=a_{12}=0, b_{22}=a_{22}=3$$

$$\therefore B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

772 ㉔ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$a_{11}=0, a_{12}=0, a_{13}=1, a_{21}=1, a_{22}=1, a_{23}=1$$

$$a_{31}=2, a_{32}=1, a_{33}=0$$

따라서 구하는 행렬은

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

773 ㉔ (1) $a=6, b=7, c=-1$

$$(2) a=-3, b=-1, c=4$$

(1) 두 행렬이 서로 같으면 대응하는 성분이 각각 같으므로

$$a+b=13, a-b=c, b-c=8, b+c=5-c$$

$$b-c=8, b+2c=5 \text{를 연립하여 풀면}$$

$$b=7, c=-1$$

$$a+b=13 \text{에서 } a=6$$

(2) 두 행렬이 서로 같으면 대응하는 성분이 각각 같으므로

$$a^2+1=10, c=-4b, b-1=-2,$$

$$a^2+a=bc+10$$

$$a^2+1=10 \text{에서 } a^2=9$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$b-1=-2 \text{에서 } b=-1 \text{이므로}$$

$$c=-4b=-4 \times (-1)=4$$

$$a^2+a=bc+10 \text{에서 } a^2+a=-4+10$$

$$a^2+a-6=0, (a+3)(a-2)=0$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } a=-3$$

774 ㉔ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1번 버스는 S_2 역에만 정차하므로

$$a_{11}=0, a_{12}=1, a_{13}=0$$

2번 버스는 S_2, S_3 역에 정차하므로

$$a_{21}=0, a_{22}=1, a_{23}=1$$

3번 버스는 모든 역에 정차하므로

$$a_{31}=1, a_{32}=1, a_{33}=1$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

775 ㉔ ③

두 행렬이 서로 같으면 대응하는 성분이 각각 같으므로

$$1-x=y-2, x+y=xy+1, xy=4-xy$$

$$1-x=y-2 \text{에서 } x+y=3$$

$$xy=4-xy \text{에서 } xy=2$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3+y^3 &= (x+y)^3-3xy(x+y) \\ &= 3^3-3 \times 2 \times 3=9 \end{aligned}$$

개념 확인

359쪽

776 ㉔ (1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 3 & -2 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}$

777 ㉔ (1) $\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}$

(1) $X=\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$

(2) $X=\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -10 \end{pmatrix}$

778 ㉔ (1) $\begin{pmatrix} 6 & 18 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$779 \text{ ㉠} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2A - 3B - (A - 2B) = A - B$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$780 \text{ ㉠} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2(A + 2B + X) = 5X + 3B \text{에서}$$

$$3X = 2A + B$$

$$\begin{aligned} \therefore X &= \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B \\ &= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -2 \\ -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & 2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$781 \text{ ㉠} \begin{pmatrix} 6 & 26 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2(A + 3B) - 3(A - C) - 3B$$

$$= -A + 3B + 3C$$

$$\begin{aligned} &= - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 26 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$782 \text{ ㉠ 9}$$

$$A - 2B + 3X = 2(A + X) - C \text{에서}$$

$$X = A + 2B - C$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 행렬 X 의 모든 성분의 합은

$$-3 + 3 + 6 + 3 = 9$$

$$783 \text{ ㉠} A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$3A + B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉠}$ 을 하면

$$2A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

이를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$784 \text{ ㉠ } x = -2, y = 1$$

$$x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} x-y & 2x \\ y & x-4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2x = -4, y = 1$$

$$\therefore x = -2, y = 1$$

$$785 \text{ ㉠ ㉡}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$A - 2B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 을 하면

$$3B = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{을 } \textcircled{㉡} \text{의 양변에 더하면}$$

$$A - B = (A - 2B) + B$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $A-B$ 의 모든 성분의 합은

$$-\frac{7}{3} + \frac{10}{3} + \frac{4}{3} + \frac{11}{3} = 6$$

786 ㉮ 1

$$x \begin{pmatrix} 2 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} 2x-y & kx+3y \\ 0 & -x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2x-y=7, -x+3y=-11$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=2, y=-3$

$$kx+3y=-5 \text{이므로 } 2k-9=-5 \quad \therefore k=2$$

$$\therefore k+x+y=2+2+(-3)=1$$

연습문제

364-365쪽

787 ㉮ ④

ㄷ. $j=1$ 인 성분은 $a_{11}=3, a_{21}=-4$ 이므로 그 합은 $3+(-4)=-1$

ㄹ. $i=j$ 인 성분은 $a_{11}=3, a_{22}=5$ 이므로 그 곱은 $3 \times 5 = 15$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

788 ㉮ ③

i 가 홀수이면 $a_{ij}=3i+j$ 이므로

$$a_{11}=3 \times 1 + 1 = 4, a_{12}=3 \times 1 + 2 = 5$$

i 가 짝수이면 $a_{ij}=3i-j$ 이므로

$$a_{21}=3 \times 2 - 1 = 5, a_{22}=3 \times 2 - 2 = 4$$

따라서 행렬 A 의 모든 성분의 합은

$$4+5+5+4=18$$

789 ㉮ -5

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-3x=x^2+2, xy=-6, 4y-3=y^2$$

$$-3x=x^2+2 \text{에서 } x^2+3x+2=0$$

$$(x+1)(x+2)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=-1$$

$$4y-3=y^2 \text{에서 } y^2-4y+3=0$$

$$(y-1)(y-3)=0 \quad \therefore y=1 \text{ 또는 } y=3$$

이때 $xy=-6$ 이므로 $x=-2, y=3$

$$\therefore x-y=-5$$

790 ㉮ -12

$$2(A+3B)-3(3A+B)$$

$$=-7A+3B$$

$$=-7 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & -21 \\ 21 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 & -18 \\ 18 & -5 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$-7+(-18)+18+(-5)=-12$$

791 ㉮ -1

$$x \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} -x+y & -2x-4y \\ x+2y & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x+2y=-3, x-y=3$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1, y=-2$

$$\therefore x+y=-1$$

$$792 \text{ ㉮ } \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 6 & 2 & 4 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

각 도형 P_1, P_2, P_3 에 의하여 정사각형이 나누어지는 영역의 개수는 각각 5, 2, 2이므로

$$a_{11}=5, a_{22}=2, a_{33}=2$$

두 도형 P_1, P_2 에 의하여 정사각형이 나누어지는 영역의 개수는 6이므로

$$a_{12}=6, a_{21}=6$$

두 도형 P_1, P_3 에 의하여 정사각형이 나누어지는 영역의 개수는 8이므로

$$a_{13}=8, a_{31}=8$$

두 도형 P_2, P_3 에 의하여 정사각형이 나누어지는 영역의 개수는 4이므로

$$a_{23}=4, a_{32}=4$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 6 & 2 & 4 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

793 ㉮ ③

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a=4-b, b=\frac{2}{a}$$

따라서 $a+b=4$, $ab=2$ 이므로

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = \frac{a^3+b^3}{ab} = \frac{(a+b)^3 - 3ab(a+b)}{ab} \\ = \frac{4^3 - 3 \times 2 \times 4}{2} = 20$$

794 ㉮ -7

$$\alpha \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 5 \\ 2\alpha\beta & 0 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2 & \alpha + \beta \\ 2\alpha\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 5 \\ 2\alpha\beta & 0 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$\alpha^2 + \beta^2 = 19, \alpha + \beta = 5$$

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \text{이므로}$$

$$5^2 = 19 + 2\alpha\beta, 2\alpha\beta = 6$$

$$\therefore \alpha\beta = 3$$

이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$a = -(\alpha + \beta) = -5, b = \alpha\beta = 3$$

$$\therefore 2a + b = 2 \times (-5) + 3 = -7$$

795 ㉮ $\frac{33}{5}$

$$X - 2Y = A \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2X + Y = B \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + 2 \times \textcircled{2} \text{을 하면}$$

$$5X = A + 2B$$

$$\therefore X = \frac{1}{5}(A + 2B)$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\frac{2}{5}(A + 2B) + Y = B$$

$$\therefore Y = -\frac{2}{5}A + \frac{1}{5}B$$

$$\therefore X + Y = \left(\frac{1}{5}A + \frac{2}{5}B\right) + \left(-\frac{2}{5}A + \frac{1}{5}B\right)$$

$$= -\frac{1}{5}A + \frac{3}{5}B$$

$$= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{8}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{18}{5} & 3 \\ -\frac{6}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{16}{5} & \frac{19}{5} \\ -\frac{14}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 $X+Y$ 의 성분 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차는

$$\frac{19}{5} - \left(-\frac{14}{5}\right) = \frac{33}{5}$$

796 ㉮ -6

$$x \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ z & w \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} x-2y & 2x+y \\ 4x+3y & -2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ z & w \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x-2y=0, 2x+y=5$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=2, y=1$$

$$\text{따라서 } z=4x+3y=4 \times 2 + 3 \times 1=11,$$

$$w=-2x+y=-2 \times 2 + 1=-3 \text{이므로}$$

$$xy-z-w=2 \times 1 - 11 - (-3) \\ = -6$$

797 ㉮ 14

I 접근 방법 두 행렬 A, B 의 성분을 특정 문자로 놓고 주어진 조건을 이용하여 행렬을 완성한다.

$$a_{11}=x, a_{12}=a_{21}=y, a_{22}=z \text{라 하면}$$

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$$

$$b_{11}=-b_{11}, b_{22}=-b_{22} \text{이므로 } b_{11}=b_{22}=0$$

$$b_{12}=-b_{21} \text{이므로 } b_{12}=w \text{라 하면}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & w \\ -w & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y+w \\ y-w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x=8, y+w=15, y-w=-1, z=7$$

$$y+w=15, y-w=-1 \text{을 연립하여 풀면}$$

$$y=7, w=8$$

$$\therefore a_{21}+a_{22}=y+z$$

$$=7+7=14$$

$P(-2, 4), Q(-5, -2), R(3, 2)$ 이므로

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{..... ①}$$

$3X - B = 2(X - A) + 4B$ 에서

$$\begin{aligned} X &= -2A + 5B \\ &= -2 \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ -10 & 20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 19 & 2 \\ 0 & 24 \end{pmatrix} \quad \text{..... ②} \end{aligned}$$

따라서 행렬 X 의 모든 성분의 합은

$$19 + 2 + 24 = 45 \quad \text{..... ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	행렬 A, B 구하기	30%
②	행렬 X 구하기	50%
③	행렬 X 의 모든 성분의 합 구하기	20%

IV-1. 행렬의 연산

02 행렬의 곱셈

개념 확인

367쪽

$$799 \text{ ㉔ (1) } (-14) \text{ (2) } (-15) \text{ (3) } (0 \ 1)$$

$$\begin{aligned} &(4) \begin{pmatrix} 4 & -4 \end{pmatrix} \text{ (5) } \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &(6) \begin{pmatrix} -12 & 2 \\ -18 & 3 \end{pmatrix} \text{ (7) } \begin{pmatrix} -7 \\ -14 \end{pmatrix} \text{ (8) } \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \end{pmatrix} \\ &(9) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -12 & -9 \end{pmatrix} \text{ (10) } \begin{pmatrix} -16 & -17 \\ -5 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$800 \text{ ㉔ (1) } \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ (2) } \begin{pmatrix} 27 & 7 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (1) A^2 &= AA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) A^3 &= A^2A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 27 & 7 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

유제

369-373쪽

$$801 \text{ ㉔ (1) } \begin{pmatrix} 0 & -18 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \text{ (2) } \begin{pmatrix} 12 & -18 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$(1) A+B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

이므로

$$B(A+B) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -18 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$(2) BA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$\therefore BA - AB$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -15 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -18 \\ -8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$802 \text{ ㉔ } -7$$

$$\begin{pmatrix} 3 & a \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+ab & -3+2a \\ 4-2b & -8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ x+1 & y+2 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} 3+ab & -3+2a \\ 4-2b & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ x+1 & y+2 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$3+ab=3, -3+2a=7, 4-2b=x+1,$$

$$-8=y+2$$

$$-3+2a=7 \text{에서 } a=5$$

$$3+ab=3 \text{에서 } ab=0, 5b=0 \quad \therefore b=0$$

$$4-2b=x+1 \text{에서 } 4=x+1 \quad \therefore x=3$$

$$-8=y+2 \text{에서 } y=-10$$

$$\therefore x+y=-7$$

$$803 \text{ ㉔ ②}$$

$X+AB=B$ 에서

$$X=B-AB$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X 의 모든 성분의 합은

$$1+0+2+(-1)=2$$

804 ㉑ 12

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & x \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-y & x-2 \\ 2y-12 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = O \text{ 이므로 } \begin{pmatrix} 3x-y & x-2 \\ 2y-12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x-2=0, 2y-12=0 \quad \therefore x=2, y=6$$

$$\therefore xy=12$$

$$805 \text{ ㉑ } \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} + \textcircled{B}$ 을 하면

$$2A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\textcircled{A} - \textcircled{B}$ 을 하면

$$2B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore B^2 - A^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ -4 & -10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

806 ㉑ -9

$$\begin{aligned} A^2 = AA &= \begin{pmatrix} a & -4 \\ 2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -4 \\ 2 & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2-8 & -4a-4b \\ 2a+2b & b^2-8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} a^2-8 & -4a-4b \\ 2a+2b & b^2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2-8=1, 2a+2b=0, b^2-8=1$$

$$a^2=9, b^2=9 \text{ 이므로 } a^2b^2=81$$

$$\therefore ab=-9 \text{ 또는 } ab=9$$

$$2a+2b=0 \text{ 에서 } a=-b \text{ 이므로 } ab<0$$

$$\therefore ab=-9$$

807 ㉑ -3

$$\begin{aligned} A^2 = AA &= \begin{pmatrix} k & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k^2-3 & 3k+3 \\ -k-1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

행렬 A^2 의 모든 성분의 합이 0이므로

$$(k^2-3) + (3k+3) + (-k-1) - 2 = 0$$

$$k^2+2k-3=0, (k+3)(k-1)=0$$

$$\therefore k=-3 \text{ 또는 } k=1$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$-3 \times 1 = -3$$

808 ㉑ ④

$$\begin{aligned} A^2 = AA &= \begin{pmatrix} a & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2-4 & a-2 \\ -4a+8 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3 = A^2A &= \begin{pmatrix} a^2-4 & a-2 \\ -4a+8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^3-8a+8 & a^2-2a \\ -4a^2+8a & -4a+8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

이때 $A^3=O$ 이므로

$$\begin{pmatrix} a^3-8a+8 & a^2-2a \\ -4a^2+8a & -4a+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-4a+8=0 \quad \therefore a=2$$

|참고| $a=2$ 이면 $a^3-8a+8=0, a^2-2a=0, -4a^2+8a=0$ 이므로 $A^3=O$ 를 만족시킨다.

$$809 \text{ ㉑ } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 250 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 15 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

(2, 1) 성분만 5씩 커지므로 자연수 n 에 대하여

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5n & 1 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 행렬은

$$A^{50} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 \times 50 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 250 & 1 \end{pmatrix}$$

810 ㉔ -5⁹

$$\begin{aligned} A^2 &= AA = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 15 \\ -10 & 30 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \\ &= -5A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 A = (-5A)A = -5A^2 \\ &= -5(-5A) = (-5)^2 A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^4 &= A^3 A = \{(-5)^2 A\}A = (-5)^2 A^2 \\ &= (-5)^2(-5A) = (-5)^3 A \end{aligned}$$

⋮

$$\therefore A^n = (-5)^{n-1} A \quad (\text{단, } n \geq 2 \text{인 자연수})$$

$$\text{따라서 } A^{10} = (-5)^9 A \text{이므로}$$

$$k = -5^9$$

811 ㉔ 8

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^4 \end{pmatrix}$$

⋮

(2, 2) 성분만 2배씩 커지므로 자연수 n 에 대하여

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

행렬 A^n 의 모든 성분의 합이 257이므로

$$1 + 2^n = 257, \quad 2^n = 256 = 2^8$$

$$\therefore n = 8$$

$$812 \text{ ㉔ } \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⋮

$$\therefore A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{단, } n \text{은 자연수})$$

$$\begin{aligned} \therefore A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10} &= (A + A^2) + (A^3 + A^4) + \cdots + (A^9 + A^{10}) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &\quad + \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} + \cdots \\ &\quad + \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

개념 확인

375쪽

$$813 \text{ ㉔ } (1) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3) (-E)^7 = -E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(4) E^{101} + (-E)^{103} = E + (-E) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

유제

377~382쪽

$$814 \text{ ㉔ } (1) \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 50 & 31 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(1) CAC + BAC = (C+B)AC$$

두 행렬 $C+B$, AC 를 각각 구하면

$$C+B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore CAC + BAC = (C+B)AC$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 50 & 31 \end{pmatrix}$$

$$(2) A(B+C) - B(A+C) - (A-B)C$$

$$= AB + AC - BA - BC - AC + BC$$

$$= AB - BA \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

두 행렬 AB , BA 를 각각 구하면

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

따라서 ㉠에서 구하는 행렬은

$$\begin{aligned} AB - BA &= \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

815 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 40 & -29 \\ 40 & -41 \end{pmatrix}$

$$X + 2A^2B = BAB \text{에서}$$

$$\begin{aligned} X &= BAB - 2A^2B = BAB - (2A)AB \\ &= (B - 2A)AB \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B - 2A &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 10 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

따라서 ㉠에서 구하는 행렬은

$$\begin{aligned} X &= (B - 2A)AB = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 10 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 40 & -29 \\ 40 & -41 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

816 $\Rightarrow 20$

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= (A+B)^2 - (AB+BA) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$14 + (-2) + 3 + 5 = 20$$

817 $\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} (2A-B)(3A+2B) &= 6A^2 + 4AB - 3BA - 2B^2 \\ &= 6A^2 - 2B^2 + (4AB - 3BA) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} 4AB - 3BA &= (2A-B)(3A+2B) - (6A^2 - 2B^2) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore (2A+B)(3A-2B) &= 6A^2 - 4AB + 3BA - 2B^2 \\ &= (6A^2 - 2B^2) - (4AB - 3BA) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

818 $\Rightarrow -5$

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \text{에서}$$

$$A^2 - AB - BA + B^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$AB + BA = 2AB \quad \therefore AB = BA \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ y & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+xy & 2+3x \\ 3-y & 3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ y & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & x-2 \\ y+9 & xy-3 \end{pmatrix}$$

$$\text{㉠에서 } \begin{pmatrix} 1+xy & 2+3x \\ 3-y & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & x-2 \\ y+9 & xy-3 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$2+3x = x-2, \quad 3-y = y+9$$

따라서 $x = -2, y = -3$ 이므로

$$x+y = -5$$

819 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 16 \\ 11 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -2a+3c \\ -2b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ -2b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c \\ 3d \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

이므로

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} -2a+3c \\ -2b+3d \end{pmatrix} &= -2A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + 3A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ &= -2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16 \\ 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

820 $\Rightarrow 82$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \text{에서}$$

$$A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$$

$$AB - BA = 0 \quad \therefore AB = BA \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & x \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy+2 & x-3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & x \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -2x \\ 3-y & xy \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } \begin{pmatrix} xy+2 & x-3 \\ -6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -2x \\ 3-y & xy \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$x-3=-2x, -6=3-y$$

따라서 $x=1, y=9$ 이므로

$$x^2+y^2=1^2+9^2=82$$

821 ㉔ ②

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

따라서 $p=0, q=7$ 이므로 $p+q=7$

822 ㉔ 4

$$(A+E)(A^2-A+E)$$

$$= A^3 - A^2 + AE + EA^2 - EA + E^2$$

$$= A^3 - A^2 + A + A^2 - A + E$$

$$= A^3 + E$$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^3 + E = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -12 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -12 & 17 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$5 + (-6) + (-12) + 17 = 4$$

823 ㉔ 4

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

$$A^3 = A^2A = (-E)A = -A$$

$$A^4 = A^3A = (-A)A = -A^2 = E$$

따라서 $A^n = E$ 를 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

824 ㉔ -6

$$(A+E)(A-E) = E \text{에서}$$

$$A^2 - AE + EA - E^2 = E$$

$$A^2 - A + A - E = E$$

$$A^2 - E = E \quad \therefore A^2 = 2E \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2-4 & 2a+2b \\ -2a-2b & b^2-4 \end{pmatrix}$$

이므로 $\textcircled{7}$ 에서

$$\begin{pmatrix} a^2-4 & 2a+2b \\ -2a-2b & b^2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2-4=2, 2a+2b=0, b^2-4=2$$

$$a^2-4=2 \text{에서 } a^2=6$$

$$\therefore a = -\sqrt{6} \text{ 또는 } a = \sqrt{6} \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$b^2-4=2 \text{에서 } b^2=6$$

$$\therefore b = -\sqrt{6} \text{ 또는 } b = \sqrt{6} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$2a+2b=0 \text{에서 } a=-b \text{이므로 } ab < 0$$

$$\text{따라서 } \textcircled{L}, \textcircled{C} \text{에서 } a = -\sqrt{6}, b = \sqrt{6} \text{ 또는 } a = \sqrt{6},$$

$$b = -\sqrt{6} \text{이므로 } ab = -6$$

825 ㉔ -13

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 13 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} -4 & 13 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

이때

$$A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 13 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= O$$

$$\text{이고 } A = A^4 = A^7 = \dots, A^2 = A^5 = A^8 = \dots,$$

$$A^3 = A^6 = A^9 = \dots = E \text{이므로}$$

$$A + A^2 + A^3 + \dots + A^{100}$$

$$= A + A(\underbrace{A + A^2 + A^3}_{O}) + \dots + A^{97}(\underbrace{A + A^2 + A^3}_{O})$$

$$= A = \begin{pmatrix} 3 & -13 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$$3 + (-13) + 1 + (-4) = -13$$

826 $p=7, q=1$

행렬 $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ 에서 케일리-해밀턴 정리에 의하여

$$A^2 - (-7-1)A + \{(-7) \times (-1) - 2 \times 4\}E = O$$

$$\therefore A^2 + 8A - E = O$$

$$A^2 + 8A = E \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} A^3 + 8A^2 + 6A + E &= A(A^2 + 8A) + 6A + E \\ &= AE + 6A + E \\ &= 7A + E \end{aligned}$$

$$\therefore p=7, q=1$$

연습문제

383~384쪽

827 $\neg, \sqcup, \sqcap$

A 는 1×2 행렬, B 는 2×1 행렬, C 는 2×2 행렬이다.

$\neg$, AB 는 1×1 행렬로 정의된다.

$\sqcup$, AC 는 1×2 행렬로 정의된다.

$\sqcap$, BC 는 정의되지 않는다.

$\sqcup$, CA 는 정의되지 않는다.

$\sqcap$, CB 는 2×1 행렬로 정의된다.

따라서 보기에서 연산이 정의되는 행렬은 $\neg, \sqcup, \sqcap$ 이다.

828 $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ x & y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2x & -1-2y \\ -3+x & 3+y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ x-3y & -2x+y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$AB=BA$ 에서

$$\begin{pmatrix} 1-2x & -1-2y \\ -3+x & 3+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ x-3y & -2x+y \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$1-2x=4, -1-2y=-3$$

$$\text{따라서 } x=-\frac{3}{2}, y=1 \text{ 이므로}$$

$$x+y=-\frac{1}{2}$$

829 $\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 23 & -10 \end{pmatrix}$

$$(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2 \text{ 이므로}$$

$$AB + BA = A^2 + B^2 - (A-B)^2$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -18 & 16 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 23 & -10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

830 $\begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \text{ 에서}$$

$$A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B^2$$

$$AB - BA = O \quad \therefore AB = BA \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 & 4 \\ k-3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} k & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 & 2k-6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} \text{ 에서 } \begin{pmatrix} k-2 & 4 \\ k-3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-2 & 2k-6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$k-3=2 \quad \therefore k=5$$

831 $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a+2c \\ b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c \\ 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} a+2c \\ b+2d \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + 2A \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

832 -1

$$\begin{aligned} A^2 = AA &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A^2 = xB + yE \text{ 에서}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x+y & -4x \\ -4x & x+y \end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$$-4x = -8, x+y=5$$

$$-4x = -8 \text{에서 } x=2$$

$$\text{이를 } x+y=5 \text{에 대입하면 } 2+y=5 \quad \therefore y=3$$

$$\therefore x-y=-1$$

833 ㉡ 34

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$$

⋮

(2, 1) 성분만 3씩 커지므로 자연수 n 에 대하여

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}$$

행렬 A^n 의 (2, 1) 성분은 $3n$ 이므로 $a_n = 3n$

$$a_n > 100 \text{에서 } 3n > 100 \quad \therefore n > \frac{100}{3}$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 34이다.

834 ㉡ ②

소설책과 시집의 4월 판매 금액의 총합은

$$c \times x + d \times y$$

$$\text{이때 } AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = (x^2+y^2),$$

$$CA = (x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ax+cy \ bx+dy) \text{이므로}$$

$c \times x + d \times y$ 와 같은 것은 AB 의 (2, 1) 성분이다.

835 ㉡ 3

$$(A^2 - A + E)(A^2 + A + E)$$

$$= A^4 + A^3 + A^2 E - A^3 - A^2 - AE + EA^2 + EA + E^2$$

$$= A^4 + A^3 + A^2 - A^3 - A^2 - A + A^2 + A + E$$

$$= A^4 + A^2 + E$$

▶▶▶▶▶ ①

$$A^4 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & k+2 \\ -k-2 & k^2-1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$A^4 + A^2 + E$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & k+2 \\ -k-2 & k^2-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & k+3 \\ -k-3 & k^2+k \end{pmatrix}$$

▶▶▶▶▶ ②

위의 행렬의 모든 성분의 합이 18이므로

$$6 + (k+3) + (-k-3) + (k^2+k) = 18$$

$$k^2 + k - 12 = 0, (k+4)(k-3) = 0$$

$$\therefore k=3 (\because k>0)$$

▶▶▶▶▶ ③

단계	채점 기준	비율
①	주어진 행렬을 간단히 나타내기	20%
②	주어진 행렬의 성분을 k 에 대하여 나타내기	50%
③	k 의 값 구하기	30%

836 ㉡ ②

$$A+B=E \text{에서 } B=-A+E$$

이를 $AB=E$ 에 대입하면

$$A(-A+E)=E, -A^2+A=E$$

$$\therefore A^2-A+E=O \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

양변에 $A+E$ 를 곱하면

$$(A+E)(A^2-A+E)=O$$

$$A^3+E=O \quad \therefore A^3=-E$$

$$\text{또 } A+B=E \text{에서 } A=-B+E$$

이를 $AB=E$ 에 대입하면

$$(-B+E)B=E, -B^2+B=E$$

$$\therefore B^2-B+E=O \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

양변에 $B+E$ 를 곱하면

$$(B+E)(B^2-B+E)=O$$

$$B^3+E=O \quad \therefore B^3=-E$$

$$\begin{aligned} \therefore A^{2012} + B^{2012} &= (A^3)^{670} A^2 + (B^3)^{670} B^2 \\ &= (-E)^{670} A^2 + (-E)^{670} B^2 \\ &= A^2 + B^2 \end{aligned}$$

이때 ①, ②에서 $A^2=A-E, B^2=B-E$ 이므로

$$A^{2012} + B^{2012} = A^2 + B^2 = (A-E) + (B-E)$$

$$= A+B-2E = E-2E$$

$$= -E$$

|참고| ①에서 $A^2=A-E$ 이므로 다음과 같이 $A^3=-E$ 임을 알 수도 있다.

을 알 수도 있다.

$$A^3 = A^2 A = (A-E)A = A^2 - A$$

$$= (A-E) - A = -E$$

837 ㉡ ③

ㄱ. $A+B=E$ 이면 $B=E-A$ 이므로

$$AB = A(E-A) = -A^2 + A$$

$$BA = (E-A)A = -A^2 + A$$

$$\therefore AB=BA$$

$$\hookrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{이면}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O, B \neq O \text{ 이}$$

지만 $A \neq O$ 이다.

$$\hookrightarrow AB = A, BA = B \text{ 이면}$$

$$B^2 = (BA)(BA) = B(AB)A$$

$$= BAA = (BA)A$$

$$= BA = B$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

838 ㉡ 350

| 접근 방법 | $AB = BA$ 임을 확인한 후, 이를 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$AB = BA \text{ 이므로}$$

$$A^3B^3 = (AB)^3, A^4B^4 = (AB)^4, A^5B^5 = (AB)^5$$

이때

$$(AB)^2 = (AB)(AB) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^3 = (AB)^2(AB) = \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & (-1)^3 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$\therefore (AB)^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \text{ (단, } n \text{은 자연수)}$$

$$\therefore A^3B^3 + A^4B^4 + A^5B^5$$

$$= (AB)^3 + (AB)^4 + (AB)^5$$

$$= \begin{pmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & (-1)^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3^4 & 0 \\ 0 & (-1)^4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3^5 & 0 \\ 0 & (-1)^5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 243 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 351 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

따라서 구하는 행렬의 모든 성분의 합은 350이다.

839 ㉡ 6

| 접근 방법 | 두 행렬 A, B 의 거듭제곱을 차례대로 구하여 단위행렬 E 가 나오는 경우를 먼저 찾는다.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 13 & 4 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$A^2 = AA$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 13 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 13 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 13 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

$$A^4 = A^3A = (-E)A = -A$$

$$A^5 = A^4A = (-A)A = -A^2$$

$$A^6 = (A^3)^2 = (-E)^2 = E$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{에서}$$

$$B^2 = BB$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

$$B^3 = B^2B = (-E)B = -B$$

$$B^4 = (B^2)^2 = (-E)^2 = E$$

$$\text{따라서 } B = B^5 = B^9 = \dots, B^2 = B^6 = B^{10} = \dots = -E$$

$$B^3 = B^7 = B^{11} = \dots = -B,$$

$$B^4 = B^8 = B^{12} = \dots = E \text{ 이므로}$$

$$A + B \neq O$$

$$A^2 + B^2 = A^2 - E \neq O$$

$$A^3 + B^3 = -E - B \neq O$$

$$A^4 + B^4 = -A + E \neq O$$

$$A^5 + B^5 = -A^2 + B$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -13 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\neq O$$

$$A^6 + B^6 = E + (-E) = O$$

따라서 $A^n + B^n = O$ 를 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

Handwriting practice lines consisting of 20 horizontal dotted lines.

