

확률과 통계

정답과 해설



개념편

정답과 해설

I-1 01 여러 가지 순열

원순열

문제

9~11쪽

01-1 답 (1) 120 (2) 48 (3) 72 (4) 24

- (1) 구하는 경우의 수는 서로 다른 6개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$$(6-1)! = 5! = 120$$

- (2) 선생님 2명을 한 묶음으로 생각하여 학생 4명과 함께 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

선생님끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는 $24 \times 2 = 48$

- (3) 이웃해도 되는 학생 4명이 먼저 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)! = 3! = 6$

학생 사이사이의 4개의 자리에서 2개를 택하여 선생님 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12$

따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 12 = 72$

- (4) 수학 선생님의 자리가 결정되면 영어 선생님의 자리는 마주 보는 자리에 고정된다.

따라서 구하는 경우의 수는 영어 선생님을 제외한 5명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수와 같으므로

$$(5-1)! = 4! = 24$$

01-2 답 12

여학생 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(3-1)! = 2! = 2$$

여학생 사이사이의 3개의 자리에 남학생 3명이 앉는 경우의 수는

$${}_3P_3 = 3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 6 = 12$$

02-1 답 30

가운데 원을 칠하는 경우의 수는 5

나머지 4개의 영역을 칠하는 경우의 수는 가운데 원에 칠한 색을 제외한 나머지 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$$(4-1)! = 3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$5 \times 6 = 30$$

02-2 답 (1) 12 (2) 12

- (1) 빨강과 파랑을 한 묶음으로 생각하여 나머지 3가지 색과 함께 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$(4-1)! = 3! = 6$$

빨강과 파랑이 칠해진 위치를 서로 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 2 = 12$$

- (2) 이웃해도 되는 주황, 노랑, 초록의 3가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수는

$$(3-1)! = 2! = 2$$

그 사이사이의 3개의 자리에서 2개를 택하여 빨강과 파랑을 칠하는 경우의 수는

$${}_3P_2 = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 6 = 12$$

다른 풀이

- (2) 5가지 색을 칠하는 모든 경우의 수는 서로 다른 5개를 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$$(5-1)! = 4! = 24$$

빨간색과 파란색을 서로 이웃한 영역에 칠하는 경우의 수가 12이므로 서로 이웃하지 않은 영역에 칠하는 경우의 수는

$$24 - 12 = 12$$

02-3 답 180

서로 다른 6가지 색 중에서 2개를 택하여 크기가 다른 두 밑면을 칠하는 경우의 수는

$${}_6P_2 = 30$$

옆면을 칠하는 경우의 수는 두 밑면에 칠한 색을 제외한 나머지 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$$(4-1)! = 3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

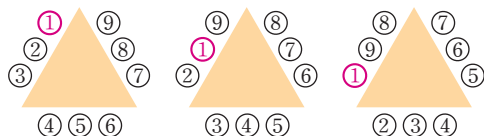
$$30 \times 6 = 180$$

03-1 답 ③

9명이 원형으로 둘러앉은 경우의 수는

$$(9-1)! = 8!$$

원형으로 둘러앉은 한 가지 경우에 대하여 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 기준이 되는 자리에 따라 3가지의 서로 다른 경우가 존재한다.



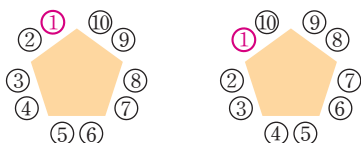
따라서 구하는 경우의 수는 $8! \times 3$

03-2 답 2

10명이 원형으로 둘러앉은 경우의 수는

$$(10-1)! = 9!$$

원형으로 둘러앉은 한 가지 경우에 대하여 정오각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 기준이 되는 자리에 따라 2가지의 서로 다른 경우가 존재한다.



따라서 정오각형 모양의 탁자에 10명이 둘러앉은 경우의 수는 $9! \times 2$

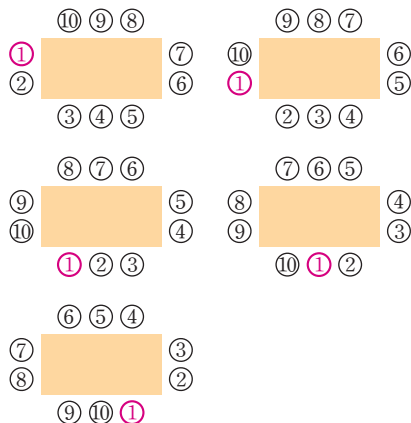
$$\therefore a = 2$$

03-3 답 ③

10명이 원형으로 둘러앉은 경우의 수는

$$(10-1)! = 9!$$

원형으로 둘러앉은 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 기준이 되는 자리에 따라 5가지의 서로 다른 경우가 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는 $9! \times 5$

2 중복순열

개념 CHECK

12쪽

1 답 (1) 64 (2) 32 (3) 25 (4) 4

$$(1) {}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

$$(2) {}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$$

$$(3) {}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$$

$$(4) {}_4\Pi_1 = 4^1 = 4$$

2 답 (1) 20 (2) 3 (3) 6 (4) 4

$$(1) {}_n\Pi_2 = 400 \text{에서 } n^2 = 20^2 \therefore n = 20$$

$$(2) {}_n\Pi_4 = 81 \text{에서 } n^4 = 3^4 \therefore n = 3$$

$$(3) {}_2\Pi_r = 64 \text{에서 } 2^r = 2^6 \therefore r = 6$$

$$(4) {}_5\Pi_r = 625 \text{에서 } 5^r = 5^4 \therefore r = 4$$

문제

13~15쪽

04-1 답 (1) 729 (2) 64

(1) 구하는 경우의 수는 중복이 가능한 서로 다른 3개의 우체통에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_6 = 3^6 = 729$$

(2) 구하는 경우의 수는 ○, ×의 2개에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_6 = 2^6 = 64$$

04-2 답 250

A가 택할 수 있는 수업은 2가지

나머지 3명의 학생이 수업을 택하는 경우의 수는 중복이 가능한 5개의 수업에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$

따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times 125 = 250$

04-3 답 665

3개의 문자에서 6개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_3\Pi_6 = 3^6 = 729$$

a를 포함하지 않는 경우의 수는 a를 제외한 2개의 문자에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_6 = 2^6 = 64$$

따라서 구하는 경우의 수는 $729 - 64 = 665$

04-4 답 62

2가지 깃발 중에서 깃발을 1번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 ${}_2\Pi_1 = 2$

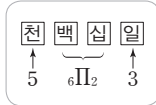
2가지 깃발 중에서 깃발을 2번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 ${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$

2가지 깃발 중에서 깃발을 3번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 ${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$

2가지 깃발 중에서 깃발을 4번 들어 올려서 만들 수 있는
신호의 개수는 ${}_2\Pi_4=2^4=16$
2가지 깃발 중에서 깃발을 5번 들어 올려서 만들 수 있는
신호의 개수는 ${}_2\Pi_5=2^5=32$
따라서 깃발을 1번 이상 5번 이하로 들어 올려서 만들 수
있는 신호의 개수는
 $2+4+8+16+32=62$

05-1 답 (1) 540 (2) 647

- (1) 짝수는 일의 자리의 숫자가 0 또는
짝수이므로 일의 자리에 올 수 있는
숫자의 개수는 3



천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수
있는 숫자의 개수는 5

백의 자리, 십의 자리에는 6개의 숫자 중에서 중복을 허
용하여 2개를 택하여 나열하면 되므로 그 경우의 수는
 ${}_6\Pi_2=6^2=36$

따라서 구하는 짝수의 개수는

$$3 \times 5 \times 36 = 540$$

- (2) $3\square\square\square$, $4\square\square\square$, $5\square\square\square$ 꼴일 때, 각각의 경우
에 대하여 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 6개의
숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 나열하면
되므로 그 경우의 수는

$$3 \times {}_6\Pi_3 = 3 \times 6^3 = 648$$

그런데 3000이 만들어지는 경우는 제외해야 하므로 구
하는 자연수의 개수는 $648 - 1 = 647$

05-2 답 81

만의 자리와 일의 자리의 숫자의 합이 4인 다섯 자리의 자
연수는 $1\square\square\square 3$, $2\square\square\square 2$, $3\square\square\square 1$ 꼴이다.

각각의 경우에 대하여 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에
3개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 나열하
면 되므로 그 경우의 수는

$$3 \times {}_3\Pi_3 = 3 \times 3^3 = 81$$

06-1 답 185

X 에서 Y 로의 함수는 집합 Y 의 원소 a, b, c, d, e 의 5
개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 X 의 원소 1,
2, 3에 대응시키면 되므로 함수의 개수는

$$m = {}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$$

X 에서 Y 로의 일대일함수는 집합 Y 의 원소 $a, b, c, d,$
 e 의 5개에서 서로 다른 3개를 택하여 집합 X 의 원소 1,
2, 3에 대응시키면 되므로 일대일함수의 개수는

$$n = {}_5P_3 = 60$$

$$\therefore m + n = 125 + 60 = 185$$

06-2 답 81

$f(1)=0$ 이므로 집합 Y 의 원소 $-1, 0, 1$ 의 3개에서 중
복을 허용하여 4개를 택하여 집합 X 의 원소 2, 3, 4, 5에
대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

06-3 답 192

$f(1) \neq 1$ 이므로 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4의
3가지

또 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여
3개를 택하여 집합 X 의 원소 2, 3, 4에 대응시키는 경우
의 수는 ${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$

따라서 구하는 함수의 개수는

$$3 \times 64 = 192$$

같은 것이 있는 순열

문제

17~20쪽

07-1 답 (1) 1260 (2) 60 (3) 360 (4) 630

- (1) 7개의 문자 c, o, l, l, e, g, e를 일렬로 나열하는 경
우의 수는

$$\frac{7!}{2! \times 2!} = 1260$$

- (2) 양 끝에 l을 고정시키고 그 사이에 c, o, e, g, e의 5개
의 문자를 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

- (3) 2개의 e를 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자 c, o, l, l,
g와 함께 일렬로 나열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!} = 360$$

- (4) c, o를 모두 X로 바꾸어 생각하여 X, X, l, l, e, g, e
의 7개의 문자를 일렬로 나열한 후 첫 번째 X는 c로,
두 번째 X는 o로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2! \times 2! \times 2!} = 630$$

07-2 답 7560

모음 a, i, e를 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자 h, p,
p, n, s, s와 함께 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2! \times 2!} = 1260$$

모음 a, i, e끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 구하는 경우의 수는 $1260 \times 6 = 7560$

07-3 [답] 168

자음 d, l, g, n, t를 모두 X로 바꾸어 생각하여 X, i, X, i, X, e, X, X의 8개의 문자를 일렬로 나열한 후 5개의 X를 앞에서부터 순서대로 d, g, l, n, t로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{5! \times 2!} = 168$$

08-1 [답] (1) 150 (2) 7

(1) 맨 앞자리에 올 수 있는 숫자는 1 또는 2이다.

(i) 1□□□□□□ 꼴의 자연수

나머지 자리에 0, 0, 1, 2, 2, 2의 6개의 숫자를 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 3!} = 60$$

(ii) 2□□□□□□ 꼴의 자연수

나머지 자리에 0, 0, 1, 1, 2, 2의 6개의 숫자를 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = 90$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$60 + 90 = 150$$

(2) 2, 2, 2, 3, 3에서 3개의 숫자를 택하는 경우는

(2, 2, 2) 또는 (2, 2, 3) 또는 (2, 3, 3)

(i) 2, 2, 2를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 자연수의

$$\text{개수는 } \frac{3!}{3!} = 1$$

(ii) 2, 2, 3을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 자연수의

$$\text{개수는 } \frac{3!}{2!} = 3$$

(iii) 2, 3, 3을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 자연수의

$$\text{개수는 } \frac{3!}{2!} = 3$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$1 + 3 + 3 = 7$$

08-2 [답] 78

짝수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 짝수이어야 한다.

(i) □□□□□0 꼴의 자연수

나머지 자리에 1, 1, 2, 2, 3의 5개의 숫자를 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

(ii) □□□□□2 꼴의 자연수

나머지 자리에 0, 1, 1, 2, 3의 5개의 숫자를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

맨 앞자리에 0이 오고 나머지 자리에 1, 1, 2, 3을 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$

따라서 □□□□□2 꼴의 자연수의 개수는

$$60 - 12 = 48$$

(i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는 $30 + 48 = 78$

09-1 [답] (1) 56 (2) 24 (3) 32

(1) 오른쪽으로 5칸, 위쪽으로 3칸 가야 하므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{5! \times 3!} = 56$$

(2) A 지점에서 P 지점까지는 오른쪽으로 2칸, 위쪽으로 2칸 가야 하므로 그 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

P 지점에서 B 지점까지는 오른쪽으로 3칸, 위쪽으로 1칸 가야 하므로 그 경우의 수는

$$\frac{4!}{3! \times 1!} = 4$$

따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 4 = 24$

(3) 구하는 경우의 수는 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

$$56 - 24 = 32$$

09-2 [답] 102

(i) A 지점에서 Y 지점까지는 오른쪽으로 4칸, 위쪽으로 4칸 가야 하므로 그 경우의 수는

$$\frac{8!}{4! \times 4!} = 70$$

A 지점에서 X 지점까지는 오른쪽으로 2칸, 위쪽으로 2칸 가야 하므로 그 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

X 지점에서 Y 지점까지는 오른쪽으로 2칸, 위쪽으로 2칸 가야 하므로 그 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

따라서 A 지점에서 X 지점을 거치지 않고 Y 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$70 - 6 \times 6 = 34$$

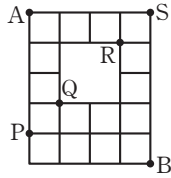
(ii) Y 지점에서 B 지점까지는 오른쪽으로 2칸, 위쪽으로 1칸 가야 하므로 그 경우의 수는

$$\frac{3!}{2! \times 1!} = 3$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $34 \times 3 = 102$

10-1 **답 66**

오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 P, Q, R, S 중에서 어느 한 지점은 반드시 거치지만 P, Q, R, S 중에서 두 지점 이상을 동시에 거쳐 최단 거리로 가는 경우는 없으므로 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는



$A \rightarrow P \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow Q \rightarrow B$
또는 $A \rightarrow R \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow S \rightarrow B$

(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times \frac{5!}{4! \times 1!} = 5$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{1! \times 3!} \times \frac{5!}{3! \times 2!} = 4 \times 10 = 40$$

(iii) $A \rightarrow R \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3! \times 1!} \times \frac{5!}{1! \times 4!} = 4 \times 5 = 20$$

(iv) $A \rightarrow S \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

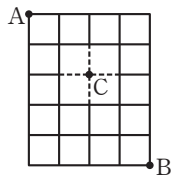
$$1 \times 1 = 1$$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$5 + 40 + 20 + 1 = 66$$

다른 풀이

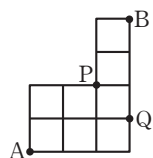
오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하여 그 교점을 C라 하면 구하는 경우의 수는 $A \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수에서 $A \rightarrow C \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로



$$\frac{9!}{4! \times 5!} - \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 126 - 6 \times 10 = 66$$

10-2 **답 22**

오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면 P, Q 중에서 어느 한 지점은 반드시 거치지만 P, Q를 동시에 거쳐 최단 거리로 가는 경우는 없으므로 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는 $A \rightarrow P \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow Q \rightarrow B$



(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{3!}{1! \times 2!} = 6 \times 3 = 18$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3! \times 1!} \times 1 = 4$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$18 + 4 = 22$$

연습문제

21~23쪽

1 ④	2 48	3 ②	4 840	5 360
6 ⑤	7 8	8 ③	9 30	10 192
11 ⑤	12 33	13 22	14 45	15 4200
16 ⑤	17 ⑤	18 ④	19 152	20 42

1 할머니, 할아버지, 연우를 한 묶음으로 생각하여 나머지 4명과 함께 원탁에 둘러앉는 경우의 수는

$$(5-1)! = 4! = 24$$

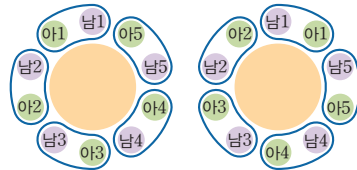
할머니와 할아버지가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 2 = 48$$

2 각 부부를 한 묶음으로 생각하면 5쌍의 부부가 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(5-1)! = 4! = 24$

이때 남편과 아내가 교대로 앉으므로 다음 그림과 같이 모든 아내들이 자기 남편의 왼쪽에 앉거나 오른쪽에 앉는 2가지 경우가 있다.



따라서 구하는 경우의 수는

$$24 \times 2 = 48$$

3 가운데 정오각형을 칠하는 경우의 수는 6

나머지 5개의 영역을 칠하는 경우의 수는 가운데 영역에 칠한 색을 제외한 나머지 5가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$$(5-1)! = 4! = 24$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 24 = 144$$

4 밑면을 칠하는 경우의 수는 7

나머지 6개의 옆면을 칠하는 경우의 수는 밑면에 칠한 색을 제외한 나머지 6가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로

$$(6-1)! = 5! = 120$$

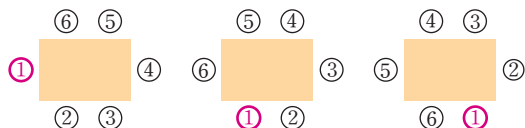
따라서 구하는 경우의 수는

$$7 \times 120 = 840$$

5 6명이 원형으로 둘러앉는 경우의 수는

$$(6-1)! = 5! = 120$$

원형으로 둘러앉은 한 가지 경우에 대하여 직사각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 기준이 되는 자리에 따라 3가지의 서로 다른 경우가 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는 $120 \times 3 = 360$

- 6 그릇 A에 담을 과일 2개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

나머지 과일을 담는 경우의 수는 중복이 가능한 2개의 그릇 B, C에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 8 = 80$$

- 7 두 기호 $\cdot$ 와 $-$ 를 n 개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는 ${}_2\Pi_n = 2^n$

만들 수 있는 서로 다른 신호가 200개 이상이므로

$$2^n \geq 200 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $2^7 = 128$, $2^8 = 256$ 이므로 $\textcircled{7}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값은 8이다.

- 8 5의 배수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 5의 1가지이고, 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에는 5개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 나열하면 되므로 구하는 5의 배수의 개수는

$$1 \times {}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$$

- 9 맨 앞자리에는 0이 올 수 없으므로 0, 1, 2, 3으로 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$$3 \times {}_4\Pi_2 = 3 \times 4^2 = 48$$

숫자 1을 포함하지 않는 자연수, 즉 0, 2, 3으로 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$$2 \times {}_3\Pi_2 = 2 \times 3^2 = 18$$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $48 - 18 = 30$

- 10 $f(2)=0$ 으로 정해지고, $f(3) \neq 0$ 에서 $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3가지

또 집합 Y 의 원소 0, 1, 2, 3의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 X 의 원소 1, 4, 5에 대응시키는 경우의 수는 ${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$

따라서 구하는 함수의 개수는 $3 \times 64 = 192$

- 11 w, n, s, y를 모두 X로 바꾸어 생각하여 X, e, d, X, e, X, d, a, X의 9개의 문자를 일렬로 나열한 후 4개의 X를 앞에서부터 순서대로 w, n, s, y로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{9!}{4! \times 2! \times 2!} = 3780$$

- 12 (i) a 를 2개 택하고 b, c 에서 2개를 택하는 경우

a, a, b, b 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

a, a, b, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

a, a, c, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

따라서 문자 a 가 두 번 나오는 경우의 수는

$$6 + 12 + 6 = 24$$

- (ii) a 를 3개 택하고 b, c 에서 1개를 택하는 경우

a, a, a, b 를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!} = 4$

a, a, a, c 를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!} = 4$

따라서 문자 a 가 세 번 나오는 경우의 수는

$$4 + 4 = 8$$

- (iii) a 를 4개 택하는 경우

a, a, a, a 를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{4!} = 1$ 이므로 문자 a 가 네 번 나오는 경우의 수는 1

- (i), (ii), (iii)에서 문자 a 가 두 번 이상 나오는 경우의 수는

$$24 + 8 + 1 = 33$$

- 13 3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이다.

1, 1, 2, 2, 2, 3, 3에서 4개의 숫자를 택하여 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

(1, 1, 2, 2) 또는 (1, 2, 3, 3) 또는 (2, 2, 2, 3)

- (i) 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 자연수의

$$\text{개수는 } \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

- (ii) 1, 2, 3, 3을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 자연수의

$$\text{개수는 } \frac{4!}{2!} = 12$$

- (iii) 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 자연수의

$$\text{개수는 } \frac{4!}{3!} = 4$$

- (i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$6 + 12 + 4 = 22$$

- 14 A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{4! \times 2!} = 15$$

P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2! \times 1!} = 3$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \times 3 = 45$$

- 15 가로, 세로, 높이의 방향으로 각각 3칸, 3칸, 4칸 가야 하므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{10!}{3! \times 3! \times 4!} = 4200$$

- 16 정삼각형에 내접하는 원을 3등분 한 3개의 영역에 9가지 색 중에서 3개를 택하여 칠하는 경우의 수는

$${}_9C_3 \times (3-1)! = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} \times 2 \times 1 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3}$$

정삼각형에서 내접하는 원을 제외한 3개의 영역에 나머지 6가지 색 중에서 3개를 택하여 칠하는 경우의 수는

$${}_6C_3 \times 3! = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \times 5 \times 4$$

나머지 3개의 영역에 나머지 3가지 색을 칠하는 경우의 수는

$$3! = 3 \times 2 \times 1$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{9 \times 8 \times 7}{3} \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \frac{9!}{3}$$

다른 풀이

서로 다른 9개의 영역을 9가지 색으로 칠하는 경우의 수는 9!

그런데 주어진 도형에서는 회전하여 일치하는 경우가 3가지 있으므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{9!}{3}$$

- 17 맨 앞자리에 올 수 있는 숫자는 1 또는 2이다.

- (i) 1이 나오지 않는 경우

맨 앞자리에 올 수 있는 숫자는 2의 1가지이고 나머지 자리에 0, 2에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$$1 \times {}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$$

- (ii) 1이 한 번 나오는 경우

맨 앞자리에 1이 오면 나머지 자리에 0, 2에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$$1 \times {}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$$

맨 앞자리에 2가 오면 나머지 4개의 자리 중에서 1이 들어갈 자리를 택하고, 남은 3개의 자리에 0, 2에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 나열하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_4C_1 \times {}_2\Pi_3 = 4 \times 2^3 = 32$

따라서 1이 한 번 나오는 자연수의 개수는

$$16 + 32 = 48$$

- (iii) 1이 두 번 나오는 경우

맨 앞자리에 1이 오면 이웃한 천의 자리를 제외한 나머지 3개의 자리 중에서 1이 들어갈 자리를 택하고, 남은 3개의 자리에 0, 2에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_2\Pi_3 = 3 \times 2^3 = 24$$

맨 앞자리에 2가 오면 나머지 자리에 1끼리 서로 이웃하지 않도록 나열하는 경우는 $21\square 1\square$, $21\square\square 1$, $2\square 1\square 1$ 꼴의 3가지이고, 남은 2개의 자리에 0, 2에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$$3 \times {}_2\Pi_2 = 3 \times 2^2 = 12$$

따라서 1이 두 번 나오는 자연수의 개수는

$$24 + 12 = 36$$

- (iv) 1이 세 번 나오는 경우

$1\square 1\square 1$ 꼴의 자연수이므로 나머지 2개의 자리에 0, 2에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 나열하면 된다.

따라서 1이 세 번 나오는 자연수의 개수는

$${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$$

- (i) ~ (iv)에서 구하는 자연수의 개수는

$$16 + 48 + 36 + 4 = 104$$

- 18 지역과 공역이 같은 함수의 개수는 모든 함수의 개수에서 지역과 공역이 같지 않은 함수의 개수를 뺀 것과 같다.

- (i) X에서 Y로의 함수의 개수는

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

- (ii) 지역의 원소가 1개인 함수

지역이 $\{a\}$ 또는 $\{b\}$ 또는 $\{c\}$ 인 함수의 개수는 3

- (iii) 지역의 원소가 2개인 함수

지역이 $\{a, b\}$ 인 함수의 개수는 공역이 $\{a, b\}$ 인 함수의 개수에서 지역이 $\{a\}$ 또는 $\{b\}$ 인 함수의 개수를 뺀 것과 같으므로

$${}_2\Pi_4 - 2 = 2^4 - 2 = 14$$

같은 방법으로 지역이 $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ 인 함수의 개수도 각각 14이므로 지역의 원소가 2개인 함수의 개수는

$$14 \times 3 = 42$$

- (i), (ii), (iii)에서 구하는 함수의 개수는

$$81 - (3 + 42) = 36$$

19 (가)에서 $f(4)=2$ 또는 $f(4)=3$ 또는 $f(4)=5$

(i) $f(4)=2$ 인 경우

(나)에서 $f(1)=f(2)=f(3)=1$ 로 정해진다.

(다)에서 $f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4, 5, 6의 4개의 원소에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_2=4^2=16$$

따라서 $f(4)=2$ 인 함수의 개수는

$$1 \times 16 = 16$$

(ii) $f(4)=3$ 인 경우

(나)에서 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2의 2개의 원소에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_3=2^3=8$

(다)에서 $f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 4, 5, 6의 3개의 원소에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_2=3^2=9$

따라서 $f(4)=3$ 인 함수의 개수는

$$8 \times 9 = 72$$

(iii) $f(4)=5$ 인 경우

(나)에서 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4의 4개의 원소에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

(다)에서 $f(5)=f(6)=6$ 으로 정해진다.

따라서 $f(4)=5$ 인 함수의 개수는

$$64 \times 1 = 64$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수의 개수는

$$16 + 72 + 64 = 152$$

20 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

A → P → B

또는 A → Q → B

또는 A → R → B

또는 A → P → B

또는 A → Q → B

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

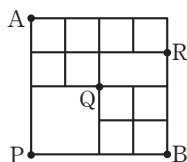
$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \times 6 = 36$$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{4! \times 1!} \times 1 = 5$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$1 + 36 + 5 = 42$$



I-1 02 중복조합과 이항정리

1 중복조합

개념 CHECK

24쪽

1 답 (1) 20 (2) 5 (3) 5 (4) 126

$$(1) {}_4H_3 = {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

$$(2) {}_2H_4 = {}_{2+4-1}C_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

$$(3) {}_5H_1 = {}_{5+1-1}C_1 = {}_5C_1 = 5$$

$$(4) {}_5H_5 = {}_{5+5-1}C_5 = {}_9C_5 = {}_9C_4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

문제

25~28쪽

01-1 답 (1) 45 (2) 21

(1) 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

(2) 각 색깔의 장미를 한 송이씩 먼저 사고 나머지 5송이를 사면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

01-2 답 220

구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_9 = {}_{12}C_9 = {}_{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

01-3 답 165

바둑통 A, B에 각각 3개, 2개의 바둑돌을 먼저 담고 나머지 8개의 바둑돌을 나누어 담으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

02-1 답 286

$(x+y+z+w)^{10}$ 의 전개식에서 각 항은 4개의 문자 x, y, z, w 에서 중복을 허용하여 10개를 택하여 곱한 것이므로 구하는 항의 개수는

$${}_4H_{10} = {}_{13}C_{10} = {}_{13}C_3 = \frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} = 286$$

02-2 [답 84]

$(x+y)^3(a+b+c)^5$ 의 전개식에서 각 항은 $(x+y)^3$ 의 항과 $(a+b+c)^5$ 의 항을 곱한 것이다.

$(x+y)^3$ 의 전개식에서 각 항은 2개의 문자 x, y 에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 곱한 것이므로 항의 개수는

$${}_2H_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

$(a+b+c)^5$ 의 전개식에서 각 항은 3개의 문자 a, b, c 에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 곱한 것이므로 항의 개수는

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

따라서 구하는 항의 개수는

$$4 \times 21 = 84$$

02-3 [답 15]

$(x+y+z)^{14}$ 의 전개식에서 x 를 포함하지 않는 항은 x 를 제외한 2개의 문자 y, z 에서 중복을 허용하여 14개를 택하여 곱한 것이므로 구하는 항의 개수는

$${}_2H_{14} = {}_{15}C_{14} = {}_{15}C_1 = 15$$

02-4 [답 10]

$(x+y+z)^n$ 의 전개식에서 각 항은 3개의 문자 x, y, z 에서 중복을 허용하여 n 개를 택하여 곱한 것이고, 항의 개수가 66이므로

$${}_3H_n = 66, {}_{n+2}C_n = 66, {}_{n+2}C_2 = 66$$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2 \times 1} = 66$$

$$(n+2)(n+1) = 132 = 12 \times 11$$

$$\therefore n = 10 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

03-1 [답 (1) 220 (2) 56]

(1) 구하는 해의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w 에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_9 = {}_{12}C_9 = {}_{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

(2) $x-1=a, y-1=b, z-1=c, w-1=d$ 라 하면

$$x=a+1, y=b+1, z=c+1, w=d+1$$

이를 방정식 $x+y+z+w=9$ 에 대입하면

$$(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1)=9$$

$$\therefore a+b+c+d=5 \quad (\text{단, } a, b, c, d \text{는 음이 아닌 정수})$$

..... ㉠

따라서 구하는 해의 개수는 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수인 해의 개수, 즉 4개의 문자 a, b, c, d 에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

03-2 [답 91]

$$x+1=a, y+1=b, z+1=c \text{라 하면}$$

$$x=a-1, y=b-1, z=c-1$$

이를 방정식 $x+y+z=9$ 에 대입하면

$$(a-1)+(b-1)+(c-1)=9$$

$$\therefore a+b+c=12 \quad (\text{단, } a, b, c \text{는 음이 아닌 정수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 구하는 해의 개수는 방정식 ㉠의 음이 아닌 정수인 해의 개수, 즉 3개의 문자 a, b, c 에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_{12} = {}_{14}C_{12} = {}_{14}C_2 = \frac{14 \times 13}{2 \times 1} = 91$$

04-1 [답 (1) 840 (2) 35 (3) 210]

(1) 주어진 조건을 만족시키는 함수는 일대일함수이다.

따라서 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7에서 서로 다른 4개를 택하여 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

$${}_7P_4 = 840$$

(2) 주어진 조건에 의하여

$$f(1) < f(2) < f(3) < f(4)$$

따라서 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7에서 서로 다른 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

$${}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

(3) 주어진 조건에 의하여

$$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4)$$

따라서 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례대로 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

$${}_7H_4 = {}_{10}C_4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

04-2 [답 63]

주어진 조건에 의하여

$$f(1) \leq f(2) \leq f(3) = 6 \leq f(4)$$

집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례대로 집합 X 의 원소 1, 2에 대응시키는 경우의 수는

$${}_6H_2 = {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

또 집합 Y 의 원소 6, 7, 8에서 1개를 택하여 집합 X 의 원소 4에 대응시키는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

따라서 구하는 함수의 개수는

$$21 \times 3 = 63$$

1 [답] (1) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

(2) $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

(1) $(x+2y)^3 = {}_3C_0x^3 + {}_3C_1x^2(2y) + {}_3C_2x(2y)^2 + {}_3C_3(2y)^3$
 $= x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

(2) $(x-1)^5 = {}_5C_0x^5 + {}_5C_1x^4(-1) + {}_5C_2x^3(-1)^2$
 $+ {}_5C_3x^2(-1)^3 + {}_5C_4x(-1)^4 + {}_5C_5(-1)^5$
 $= x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

문제

30~31쪽

05-1 [답] (1) 60 (2) 250

(1) $\left(2x - \frac{1}{y}\right)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r(2x)^{6-r}\left(-\frac{1}{y}\right)^r = {}_6C_r 2^{6-r}(-1)^r \frac{x^{6-r}}{y^r}$$

 $\frac{x^2}{y^4}$ 항은 $6-r=2$, $r=4$ 일 때이다.따라서 구하는 $\frac{x^2}{y^4}$ 의 계수는

$${}_6C_4 2^2(-1)^4 = 15 \times 4 \times 1 = 60$$

(2) $\left(x^2 + \frac{5}{x}\right)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r(x^2)^{5-r}\left(\frac{5}{x}\right)^r = {}_5C_r 5^r \frac{x^{10-2r}}{x^r}$$

 x^4 항은 $10-2r-r=4$ 일 때이므로

$$r=2$$

따라서 구하는 x^4 의 계수는

$${}_5C_2 5^2 = 10 \times 25 = 250$$

05-2 [답] 2

 $(2x+a)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r(2x)^{6-r}a^r = {}_6C_r 2^{6-r}a^r x^{6-r}$$

 x^2 항은 $6-r=2$ 일 때이므로

$$r=4$$

따라서 x^2 의 계수는

$${}_6C_4 2^2 a^4 = 15 \times 4 \times a^4 = 60a^4$$

한편 x^4 항은 $6-r=4$ 일 때이므로

$$r=2$$

따라서 x^4 의 계수는

$${}_6C_2 2^4 a^2 = 15 \times 16 \times a^2 = 240a^2$$

이때 x^2 의 계수와 x^4 의 계수가 같으므로

$$60a^4 = 240a^2, a^4 - 4a^2 = 0$$

$$a^2(a+2)(a-2)=0 \quad \therefore a=2 (\because a>0)$$

05-3 [답] -2

 $\left(ax - \frac{1}{x}\right)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r(ax)^{4-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}_4C_r a^{4-r}(-1)^r \frac{x^{4-r}}{x^r}$$

 x^2 항은 $4-r-r=2$ 일 때이므로

$$r=1$$

이때 x^2 의 계수가 32이므로

$${}_4C_1 a^3(-1)=32$$

$$-4a^3=32, a^3=-8$$

$$\therefore a=-2 (\because a \text{는 실수})$$

06-1 [답] (1) 16 (2) -10

(1) $(x+1)^3$ 의 전개식의 일반항은 ${}_3C_r x^{3-r}$ $(x-2)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_s x^{4-s}(-2)^s = {}_4C_s (-2)^s x^{4-s}$$

따라서 $(x+1)^3(x-2)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r x^{3-r} \times {}_4C_s (-2)^s x^{4-s} = {}_3C_r \times {}_4C_s (-2)^s x^{7-r-s}$$

..... ㉠

 x 항은 $7-r-s=1$ (r, s 는 $0 \leq r \leq 3, 0 \leq s \leq 4$ 인 정수)일 때이므로 $r+s=6$ 에서

$$r=2, s=4 \text{ 또는 } r=3, s=3$$

(i) $r=2, s=4$ 일 때, ㉠에서

$${}_3C_2 \times {}_4C_4 (-2)^4 x = 48x$$

(ii) $r=3, s=3$ 일 때, ㉠에서

$${}_3C_3 \times {}_4C_3 (-2)^3 x = -32x$$

(i), (ii)에서 구하는 x 의 계수는

$$48 + (-32) = 16$$

(2) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}_5C_r (-1)^r \frac{x^{5-r}}{x^r} \quad \dots\dots ㉡$$

이때 $(x^2 - x)\left(x - \frac{1}{x}\right)^5 = x^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^5 - x\left(x - \frac{1}{x}\right)^5$ 이므로 전개식에서 x^2 항은(i) x^2 과 ㉡의 상수항의 곱(ii) $-x$ 와 ㉡의 x 항의 곱

일 때 나타난다.

(i) ㉡의 상수항은 $5-r=r$ 일 때이므로 $r=\frac{5}{2}$ 그런데 r 는 $0 \leq r \leq 5$ 인 정수이므로 ㉡의 상수항은 존재하지 않는다.(ii) ㉡의 x 항은 $5-r-r=1$ 일 때이므로 $r=2$

$$\text{㉡에서 } {}_5C_2(-1)^2 x = 10x$$

(i), (ii)에서 x^2 항은

$$-x \times 10x = -10x^2$$

따라서 구하는 x^2 의 계수는 -10 이다.

$(1+x)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^r$$

$(x^3+a)^2$ 의 전개식의 일반항은

$${}_2C_s (x^3)^{2-s} a^s = {}_2C_s a^s x^{6-3s}$$

따라서 $(1+x)^4(x^3+a)^2$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^r \times {}_2C_s a^s x^{6-3s} = {}_4C_r \times {}_2C_s a^s x^{r-3s+6} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

x^6 항은 $r-3s+6=6$ (r, s 는 $0 \leq r \leq 4, 0 \leq s \leq 2$ 인 정수)

일 때이므로 $r-3s=0$ 에서

$r=0, s=0$ 또는 $r=3, s=1$

(i) $r=0, s=0$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서

$${}_4C_0 \times {}_2C_0 a^0 x^6 = x^6$$

(ii) $r=3, s=1$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서

$${}_4C_3 \times {}_2C_1 a^1 x^6 = 8ax^6$$

(i), (ii)에서 x^6 의 계수는 $1+8a$ 이므로

$$1+8a = -23$$

$$\therefore a = -3$$

3 이항계수의 성질

개념 CHECK

33쪽

1 답 2, 3, 6, 10, 10

$$(1) x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(2) a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

파스칼의 삼각형의 각 행에서 이웃하는 두 수의 합은 그 다음 행에서 두 수의 중앙에 있는 수와 같으므로 파스칼의 삼각형을 완성하면 다음과 같다.

		1		1	
	1		2		1
	1	3		3	1
	1	4	6	4	1
1	5	10	10	5	1

(1) 파스칼의 삼각형에서 4행의 수는 1, 4, 6, 4, 1이므로

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

(2) 파스칼의 삼각형에서 5행의 수는 1, 5, 10, 10, 5, 1이므로

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

문제

34~37쪽

07-1 답 ④

$$\begin{aligned} & {}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \dots + {}_{10}C_2 \\ &= {}_3C_3 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \dots + {}_{10}C_2 \\ &= {}_4C_3 + {}_4C_2 + \dots + {}_{10}C_2 \\ &= {}_5C_3 + \dots + {}_{10}C_2 \\ &\vdots \\ &= {}_{10}C_3 + {}_{10}C_2 = {}_{11}C_3 \end{aligned}$$

07-2 답 (1) 35 (2) 70

$$\begin{aligned} (1) & {}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + {}_6C_4 \\ &= {}_3C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + {}_6C_4 \\ &= {}_4C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + {}_6C_4 \\ &= {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_6C_4 \\ &= {}_6C_3 + {}_6C_4 \\ &= {}_7C_4 = {}_7C_3 = 35 \\ (2) & {}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + {}_6C_3 + {}_7C_3 \\ &= {}_4C_4 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + {}_6C_3 + {}_7C_3 \\ &= {}_5C_4 + {}_5C_3 + {}_6C_3 + {}_7C_3 \\ &= {}_6C_4 + {}_6C_3 + {}_7C_3 \\ &= {}_7C_4 + {}_7C_3 \\ &= {}_8C_4 = 70 \end{aligned}$$

08-1 답 ④

$(1+x)^n$ 의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^r$

x^2 항은 $(1+x)^2$ 의 전개식에서부터 나오므로

$(1+x)^2$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는 ${}_2C_2$

$(1+x)^3$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는 ${}_3C_2$

$\vdots$

$(1+x)^7$ 의 전개식에서 x^2 의 계수는 ${}_7C_2$

따라서 구하는 x^2 의 계수는

$$\begin{aligned} & {}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + {}_6C_2 + {}_7C_2 \\ &= {}_3C_3 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + {}_6C_2 + {}_7C_2 \\ &= {}_4C_3 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + {}_6C_2 + {}_7C_2 \\ &= {}_5C_3 + {}_5C_2 + {}_6C_2 + {}_7C_2 \\ &= {}_6C_3 + {}_6C_2 + {}_7C_2 \\ &= {}_7C_3 + {}_7C_2 = {}_8C_3 \end{aligned}$$

다른 풀이 수학 I을 학습한 학생은 등비수열의 합을 이용하여 다음과 같이 풀 수 있습니다.

$$\begin{aligned} & (1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^7 \\ &= \frac{(1+x)\{(1+x)^7 - 1\}}{(1+x) - 1} \\ &= \frac{(1+x)^8 - (1+x)}{x} \end{aligned}$$

전개식에서 x^2 의 계수는 $(1+x)^8$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 같다.

$(1+x)^8$ 의 전개식의 일반항은

$${}_8C_r x^r$$

따라서 $(1+x)^8$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 ${}_8C_3$ 이므로 구하는 x^2 의 계수도 ${}_8C_3$ 이다.

08-2 답 210

$(1+x^2)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r x^{2r}$$

x^6 항은 $(1+x^2)^3$ 의 전개식에서부터 나오므로

$(1+x^2)^3$ 의 전개식에서 x^6 의 계수는 ${}_3C_3$

$(1+x^2)^4$ 의 전개식에서 x^6 의 계수는 ${}_4C_3$

⋮

$(1+x^2)^9$ 의 전개식에서 x^6 의 계수는 ${}_9C_3$

따라서 구하는 x^6 의 계수는

$${}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \cdots + {}_9C_3$$

$$= {}_4C_4 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \cdots + {}_9C_3$$

$$= {}_5C_4 + {}_5C_3 + \cdots + {}_9C_3$$

$$= {}_6C_4 + \cdots + {}_9C_3$$

⋮

$$= {}_9C_4 + {}_9C_3$$

$$= {}_{10}C_4 = 210$$

09-1 답 (1) 8 (2) 1

(1) ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$ 이므로

$$\begin{aligned} {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n &= 2^n - {}_nC_0 \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

$$200 < {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n < 300 \text{에서}$$

$$200 < 2^n - 1 < 300$$

$$\therefore 201 < 2^n < 301$$

이때 $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^9 = 512$ 이므로

$$n = 8$$

(2) ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 0$ 이므로

$${}_{30}C_0 - {}_{30}C_1 + {}_{30}C_2 - \cdots - {}_{30}C_{29} + {}_{30}C_{30} = 0$$

$${}_{30}C_0 - ({}_{30}C_1 - {}_{30}C_2 + \cdots + {}_{30}C_{29} - {}_{30}C_{30}) = 0$$

$$\therefore {}_{30}C_1 - {}_{30}C_2 + \cdots + {}_{30}C_{29} - {}_{30}C_{30} = -{}_{30}C_0 = -1$$

09-2 답 9

${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$ 이므로

$$\begin{aligned} {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_{n-1} &= 2^n - ({}_nC_0 + {}_nC_n) \\ &= 2^n - 2 \end{aligned}$$

즉, $2^n - 2 = 510$ 이므로

$$2^n = 512 = 2^9$$

$$\therefore n = 9$$

09-3 답 7

$${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots = 2^{n-1} \text{이므로}$$

$${}_{16}C_0 + {}_{16}C_2 + {}_{16}C_4 + \cdots + {}_{16}C_{16} = 2^{16-1} = 2^{15}$$

또 ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$ 이므로

$${}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2 + \cdots + {}_9C_9 = 2^9$$

이때 ${}_9C_0 = {}_9C_9$, ${}_9C_1 = {}_9C_8$, $\cdots$, ${}_9C_4 = {}_9C_5$ 이므로

$$({}_9C_0 + {}_9C_1 + \cdots + {}_9C_4) + ({}_9C_5 + {}_9C_6 + \cdots + {}_9C_9) = 2^9 \text{에서}$$

$$2({}_9C_0 + {}_9C_1 + \cdots + {}_9C_4) = 2^9$$

$$\therefore {}_9C_0 + {}_9C_1 + \cdots + {}_9C_4 = 2^8$$

$$\text{따라서 } \frac{{}_{16}C_0 + {}_{16}C_2 + {}_{16}C_4 + \cdots + {}_{16}C_{16}}{{}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2 + {}_9C_3 + {}_9C_4} = \frac{2^{15}}{2^8} = 2^7 \text{이므로}$$

$$n = 7$$

다른 풀이

$${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots = 2^{n-1} \text{이므로}$$

$${}_{16}C_0 + {}_{16}C_2 + {}_{16}C_4 + \cdots + {}_{16}C_{16} = 2^{16-1} = 2^{15}$$

$${}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots = 2^{n-1} \text{이므로}$$

$${}_9C_1 + {}_9C_3 + {}_9C_5 + {}_9C_7 + {}_9C_9 = 2^{9-1} = 2^8$$

이때 ${}_9C_0 = {}_9C_9$, ${}_9C_2 = {}_9C_7$, ${}_9C_4 = {}_9C_5$ 이므로

$${}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2 + {}_9C_3 + {}_9C_4 = {}_9C_9 + {}_9C_1 + {}_9C_7 + {}_9C_3 + {}_9C_5$$

$$\therefore {}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2 + {}_9C_3 + {}_9C_4 = 2^8$$

$$\text{따라서 } \frac{{}_{16}C_0 + {}_{16}C_2 + {}_{16}C_4 + \cdots + {}_{16}C_{16}}{{}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2 + {}_9C_3 + {}_9C_4} = \frac{2^{15}}{2^8} = 2^7 \text{이므로}$$

$$n = 7$$

10-1 답 (1) 4^{10} (2) 21

(1) $(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n$ 의 양변에 $x=3$, $n=10$ 을 대입하면

$$(1+3)^{10} = {}_{10}C_0 + 3{}_{10}C_1 + 3^2{}_{10}C_2 + \cdots + 3^{10}{}_{10}C_{10}$$

$$\therefore {}_{10}C_0 + 3{}_{10}C_1 + 3^2{}_{10}C_2 + \cdots + 3^{10}{}_{10}C_{10} = 4^{10}$$

(2) $(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n$ 의 양변에 $x=20$, $n=21$ 을 대입하면

$$21^{21} = {}_{21}C_0 + 20{}_{21}C_1 + 20^2{}_{21}C_2 + 20^3{}_{21}C_3 + \cdots + 20^{21}{}_{21}C_{21}$$

$$= 1 + 20 \times 21 + 20^2({}_{21}C_2 + {}_{21}C_3 + \cdots + {}_{21}C_{21})$$

$$= 21 + 400 + 400({}_{21}C_2 + {}_{21}C_3 + \cdots + {}_{21}C_{21})$$

$$= 21 + 400(1 + {}_{21}C_2 + {}_{21}C_3 + \cdots + {}_{21}C_{21})$$

따라서 21^{21} 을 400으로 나누었을 때의 나머지는 21이다.

10-2 답 ⑤

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(10)$$

$$= {}_{10}C_1 4^9 + {}_{10}C_2 4^8 + \cdots + {}_{10}C_{10} 4^0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$(x+1)^n = {}_nC_0 x^n + {}_nC_1 x^{n-1} + {}_nC_2 x^{n-2} + \cdots + {}_nC_n x^0$ 의 양변에 $x=4$, $n=10$ 을 대입하면

$$5^{10} = {}_{10}C_0 4^{10} + {}_{10}C_1 4^9 + {}_{10}C_2 4^8 + \cdots + {}_{10}C_{10} 4^0$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + \cdots + f(10) &= 5^{10} - {}_{10}C_0 4^{10} \\ &= 5^{10} - 4^{10} \end{aligned}$$

1 ②	2 25	3 36	4 ④	5 35
6 ④	7 ①	8 80	9 ②	10 ㄴ, ㄷ
11 ②	12 81	13 ④	14 126	15 ㄴ
16 ⑤	17 0	18 ①	19 ③	20 120
21 44	22 8			

- 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
 ${}_4H_{12} = {}_{15}C_{12} = {}_{15}C_3 = 455$
- 파란색 카드가 1장이므로 파란색 카드를 택하지 않는 경우와 택하는 경우로 나누어 생각한다.
 (i) 파란색 카드를 택하지 않는 경우
 빨간색, 노란색, 초록색 카드의 3종류의 카드에서 중복을 허용하여 4장을 택하면 되므로 그 경우의 수는
 ${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$
 (ii) 파란색 카드를 1장 택하는 경우
 빨간색, 노란색, 초록색 카드의 3종류의 카드에서 중복을 허용하여 나머지 3장을 택하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$
 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $15 + 10 = 25$
- (i) 사과를 택하지 않는 경우
 감, 배, 귤을 각각 1개씩 먼저 택하고 이 3종류의 과일에서 나머지 5개도 택하면 되므로 그 경우의 수는
 ${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$
 (ii) 사과를 1개 택하는 경우
 사과, 감, 배, 귤을 각각 1개씩 먼저 택하고 감, 배, 귤의 3종류의 과일에서 나머지 4개를 택하면 되므로 그 경우의 수는
 ${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$
 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $21 + 15 = 36$
- $(a+b+c+d)^8$ 의 전개식에서 각 항은 4개의 문자 a, b, c, d 에서 중복을 허용하여 8개를 택하여 곱한 것이므로 모든 항의 개수는
 ${}_4H_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = 165$
 $(a+b+c+d)^8$ 의 전개식에서 a 를 포함하지 않는 항은 a 를 제외한 3개의 문자 b, c, d 에서 중복을 허용하여 8개를 택하여 곱한 것이므로 항의 개수는
 ${}_3H_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$
 따라서 a 를 포함하는 항의 개수는 $165 - 45 = 120$

다른 풀이

$(a+b+c+d)^8$ 의 전개식에서 a 를 포함하는 항은 a 를 먼저 하나 택하고 남은 7개의 문자를 택하여 곱한 것이므로 구하는 항의 개수는

$${}_4H_7 = {}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 = 120$$

- x, y, z, w 가 음이 아닌 정수이므로
 $x+y+z+w=0$ 또는 $x+y+z+w=1$
 또는 $x+y+z+w=2$ 또는 $x+y+z+w=3$
 (i) $x+y+z+w=0$ 을 만족시키는 순서쌍은
 $(0, 0, 0, 0)$ 의 1개
 (ii) $x+y+z+w=1$ 을 만족시키는 순서쌍의 개수는
 ${}_4H_1 = {}_4C_1 = 4$
 (iii) $x+y+z+w=2$ 를 만족시키는 순서쌍의 개수는
 ${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$
 (iv) $x+y+z+w=3$ 을 만족시키는 순서쌍의 개수는
 ${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$
 (i)~(iv)에서 구하는 순서쌍의 개수는
 $1 + 4 + 10 + 20 = 35$

다른 풀이

$x+y+z+w=k$ ($k=0, 1, 2, 3$)를 만족시키는 순서쌍의 개수는

$$\begin{aligned} {}_4H_0 + {}_4H_1 + {}_4H_2 + {}_4H_3 &= {}_3C_0 + {}_4C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3 \\ &= {}_4C_0 + {}_4C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3 \\ &= {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3 \\ &= {}_6C_2 + {}_6C_3 \\ &= {}_7C_3 = 35 \end{aligned}$$

- 네 자리의 자연수의 각 자리의 숫자를 a, b, c, d 라 하면
 $a+b+c+d=7$ ㉠
 a, b, c, d 는 한 자리의 자연수이므로
 $a-1=x, b-1=y, c-1=z, d-1=w$ 라 하면
 $a=x+1, b=y+1, c=z+1, d=w+1$
 이를 ㉠에 대입하면
 $(x+1)+(y+1)+(z+1)+(w+1)=7$
 $\therefore x+y+z+w=3$ (단, x, y, z, w 는 음이 아닌 정수)
 이 방정식을 만족시키는 해의 개수는
 ${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$
 따라서 구하는 자연수의 개수는 20이다.
- $2 \leq a \leq b \leq 5$ 에서 a, b 는 자연수이므로 2, 3, 4, 5의 4개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례대로 a, b 의 값으로 정하는 경우의 수는
 ${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$

$5 \leq c < 8$ 에서 c 는 자연수이므로 c 의 값이 될 수 있는 수는 5, 6, 7의 3가지
따라서 구하는 순서쌍의 개수는
 $10 \times 3 = 30$

- 8 $(1+2x)^n$ 의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r(2x)^r = {}_nC_r 2^r x^r$
 x^4 의 계수가 80이므로
 ${}_nC_4 2^4 = 80, {}_nC_4 = 5 \quad \therefore n = 5$
따라서 구하는 x^3 의 계수는
 ${}_5C_3 2^3 = 10 \times 8 = 80$
- 9 $(1+5x)^2$ 의 전개식의 일반항은 ${}_2C_r(5x)^r = {}_2C_r 5^r x^r$
 $(1-x)^5$ 의 전개식의 일반항은 ${}_5C_s(-x)^s = {}_5C_s(-1)^s x^s$
따라서 $(1+5x)^2(1-x)^5$ 의 전개식의 일반항은
 ${}_2C_r 5^r x^r \times {}_5C_s(-1)^s x^s = {}_2C_r \times {}_5C_s 5^r (-1)^s x^{r+s} \dots\dots \textcircled{1}$
 x^2 항은 $r+s=2$ (r, s 는 $0 \leq r \leq 2, 0 \leq s \leq 5$ 인 정수)일 때
이므로
 $r=0, s=2$ 또는 $r=1, s=1$ 또는 $r=2, s=0$
(i) $r=0, s=2$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서
 ${}_2C_0 \times {}_5C_2 5^0 (-1)^2 x^2 = 10x^2$
(ii) $r=1, s=1$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서
 ${}_2C_1 \times {}_5C_1 5^1 (-1)^1 x^2 = -50x^2$
(iii) $r=2, s=0$ 일 때, $\textcircled{1}$ 에서
 ${}_2C_2 \times {}_5C_0 5^2 (-1)^0 x^2 = 25x^2$
(i), (ii), (iii)에서 구하는 x^2 의 계수는
 $10 + (-50) + 25 = -15$

- 10 $\neg. \left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{10}$ 의 전개식의 일반항은
 ${}_{10}C_r x^{10-r} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r = {}_{10}C_r \frac{x^{10-r}}{x^{2r}}$
이때 상수항은 $10-r=2r$ 일 때이므로 $r = \frac{10}{3}$
그런데 r 는 $0 \leq r \leq 10$ 인 정수이므로 상수항은 존재하지 않는다.
- $\neg. \left(x^2 + \frac{4}{x}\right)^{10}$ 의 전개식의 일반항은
 ${}_{10}C_r (x^2)^{10-r} \left(\frac{4}{x}\right)^r = {}_{10}C_r 4^r \frac{x^{20-2r}}{x^r} \dots\dots \textcircled{1}$
이때 $(1+x) \left(x^2 + \frac{4}{x}\right)^{10} = \left(x^2 + \frac{4}{x}\right)^{10} + x \left(x^2 + \frac{4}{x}\right)^{10}$
이므로 전개식에서 상수항은
(i) 1과 $\textcircled{1}$ 의 상수항의 곱
(ii) x 와 $\textcircled{1}$ 의 $\frac{1}{x}$ 항의 곱
일 때 나타난다.

- (i) $\textcircled{1}$ 의 상수항은 $20-2r=r$ 일 때이므로 $r = \frac{20}{3}$
그런데 r 는 $0 \leq r \leq 10$ 인 정수이므로 $\textcircled{1}$ 에서 상수항은 존재하지 않는다.

- (ii) $\textcircled{1}$ 의 $\frac{1}{x}$ 항은 $r-(20-2r)=1$ 일 때이므로 $r=7$

즉, $\frac{1}{x}$ 항이 존재한다.

따라서 주어진 식의 전개식에서 상수항이 존재한다.

- $\neg. \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$ 의 전개식의 일반항은

$${}_8C_r (x^2)^{8-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}_8C_r (-1)^r \frac{x^{16-2r}}{x^r} \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{이때} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^8 = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^8 + \frac{1}{x} \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$$

이므로 전개식에서 상수항은

- (i) 1과 $\textcircled{1}$ 의 상수항의 곱

- (ii) $\frac{1}{x}$ 과 $\textcircled{1}$ 의 x 항의 곱

일 때 나타난다.

- (i) $\textcircled{1}$ 의 상수항은 $16-2r=r$ 일 때이므로 $r = \frac{16}{3}$

그런데 r 는 $0 \leq r \leq 8$ 인 정수이므로 $\textcircled{1}$ 에서 상수항은 존재하지 않는다.

- (ii) $\textcircled{1}$ 의 x 항은 $16-2r-r=1$ 일 때이므로 $r=5$

즉, x 항이 존재한다.

따라서 주어진 식의 전개식에서 상수항이 존재한다.

따라서 보기 중 상수항이 존재하는 것은 $\neg, \neg$ 이다.

- 11 $\left(x + \frac{a}{x^2}\right)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^{4-r} \left(\frac{a}{x^2}\right)^r = {}_4C_r a^r \frac{x^{4-r}}{x^{2r}} \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{이때} \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) \left(x + \frac{a}{x^2}\right)^4 = x^2 \left(x + \frac{a}{x^2}\right)^4 - \frac{1}{x} \left(x + \frac{a}{x^2}\right)^4$$

이므로 전개식에서 x^3 항은

- (i) x^2 과 $\textcircled{1}$ 의 x 항의 곱

- (ii) $-\frac{1}{x}$ 과 $\textcircled{1}$ 의 x^4 항의 곱

일 때 나타난다.

- (i) $\textcircled{1}$ 의 x 항은 $4-r-2r=1$ 일 때이므로 $r=1$

$$\textcircled{1} \text{에서 } {}_4C_1 a^1 x = 4ax$$

- (ii) $\textcircled{1}$ 의 x^4 항은 $4-r-2r=4$ 일 때이므로 $r=0$

$$\textcircled{1} \text{에서 } {}_4C_0 a^0 x^4 = x^4$$

- (i), (ii)에서 x^3 항은

$$x^2 \times 4ax + \left(-\frac{1}{x}\right) \times x^4 = 4ax^3 - x^3 = (4a-1)x^3$$

이때 x^3 의 계수가 7이므로

$$4a-1=7 \quad \therefore a=2$$

$$\begin{aligned}
12 \quad & {}_1C_0 + {}_2C_1 + {}_3C_2 + \cdots + {}_7C_6 \\
&= {}_2C_0 + {}_2C_1 + {}_3C_2 + \cdots + {}_7C_6 \\
&= {}_3C_1 + {}_3C_2 + \cdots + {}_7C_6 \\
&= {}_4C_2 + \cdots + {}_7C_6 \\
&\vdots \\
&= {}_7C_5 + {}_7C_6 \\
&= {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28 \\
&{}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_7C_2 \\
&= {}_3C_3 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_7C_2 \\
&= {}_4C_3 + {}_4C_2 + \cdots + {}_7C_2 \\
&= {}_5C_3 + \cdots + {}_7C_2 \\
&\vdots \\
&= {}_7C_3 + {}_7C_2 = {}_8C_3 = 56 \\
&\text{따라서 색칠한 부분에 있는 모든 수의 합은} \\
&({}_1C_0 + {}_2C_1 + {}_3C_2 + \cdots + {}_7C_6) \\
&\quad + ({}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_7C_2) - {}_3C_2 \\
&= 28 + 56 - 3 = 81
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
13 \quad & {}_{2022}C_{20} + {}_{2021}C_{19} + {}_{2020}C_{18} + {}_{2019}C_{17} + {}_{2018}C_{16} + {}_{2018}C_{15} \\
&= {}_{2022}C_{20} + {}_{2021}C_{19} + {}_{2020}C_{18} + {}_{2019}C_{17} + {}_{2019}C_{16} \\
&= {}_{2022}C_{20} + {}_{2021}C_{19} + {}_{2020}C_{18} + {}_{2020}C_{17} \\
&= {}_{2022}C_{20} + {}_{2021}C_{19} + {}_{2021}C_{18} \\
&= {}_{2022}C_{20} + {}_{2022}C_{19} \\
&= {}_{2023}C_{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
14 \quad & (1+x)^n \text{의 전개식의 일반항은 } {}_nC_r x^r \\
& x^4 \text{항은 } (1+x)^4 \text{의 전개식에서부터 나오므로} \\
& (1+x)^4 \text{의 전개식에서 } x^4 \text{의 계수는 } {}_4C_4 \\
& (1+x)^5 \text{의 전개식에서 } x^4 \text{의 계수는 } {}_5C_4 \\
&\vdots \\
& (1+x)^8 \text{의 전개식에서 } x^4 \text{의 계수는 } {}_8C_4 \\
&\text{따라서 구하는 } x^4 \text{의 계수는} \\
&{}_4C_4 + {}_5C_4 + {}_6C_4 + {}_7C_4 + {}_8C_4 \\
&= {}_5C_5 + {}_5C_4 + {}_6C_4 + {}_7C_4 + {}_8C_4 \\
&= {}_6C_5 + {}_6C_4 + {}_7C_4 + {}_8C_4 \\
&= {}_7C_5 + {}_7C_4 + {}_8C_4 \\
&= {}_8C_5 + {}_8C_4 \\
&= {}_9C_5 = 126
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
15 \quad & \neg. {}_{50}C_0 - {}_{50}C_1 + {}_{50}C_2 - \cdots - {}_{50}C_{49} + {}_{50}C_{50} = 0 \text{이므로} \\
& {}_{50}C_0 - ({}_{50}C_1 - {}_{50}C_2 + \cdots + {}_{50}C_{49} - {}_{50}C_{50}) = 0 \\
&\therefore {}_{50}C_1 - {}_{50}C_2 + \cdots + {}_{50}C_{49} - {}_{50}C_{50} = {}_{50}C_0 = 1 \\
&\neg. {}_{13}C_1 + {}_{13}C_3 + {}_{13}C_5 + \cdots + {}_{13}C_{13} = 2^{13-1} = 2^{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \neg. {}_{30}C_0 + {}_{30}C_2 + {}_{30}C_4 + \cdots + {}_{30}C_{30} = 2^{30-1} = 2^{29} \text{이므로} \\
& {}_{30}C_2 + {}_{30}C_4 + \cdots + {}_{30}C_{30} = 2^{29} - {}_{30}C_0 = 2^{29} - 1 \\
&\text{따라서 보기 중 옳은 것은 } \neg \text{이다.}
\end{aligned}$$

16 집합 A 의 부분집합 중 두 원소 1, 2를 모두 포함하고 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는 집합 $\{3, 4, 5, \dots, 25\}$ 의 부분집합 중 원소의 개수가 홀수인 것의 개수와 같다.

집합 $\{3, 4, 5, \dots, 25\}$ 에 대하여

원소가 1개인 부분집합의 개수는 ${}_{23}C_1$

원소가 3개인 부분집합의 개수는 ${}_{23}C_3$

$\vdots$

원소가 23개인 부분집합의 개수는 ${}_{23}C_{23}$

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$${}_{23}C_1 + {}_{23}C_3 + \cdots + {}_{23}C_{23} = 2^{23-1} = 2^{22}$$

$$17 \quad (1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=4$, $n=10$ 을 대입하면

$$5^{10} = {}_{10}C_0 + {}_{10}C_1 4 + {}_{10}C_2 4^2 + \cdots + {}_{10}C_{10} 4^{10}$$

$$\therefore A = 5^{10}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=-6$, $n=10$ 을 대입하면

$$(-5)^{10} = {}_{10}C_0 + (-6)_{10}C_1 + (-6)^2_{10}C_2 + \cdots + (-6)^{10}_{10}C_{10}$$

$$5^{10} = {}_{10}C_0 - {}_{10}C_1 6 + {}_{10}C_2 6^2 - \cdots + {}_{10}C_{10} 6^{10}$$

$$\therefore B = 5^{10}$$

$$\therefore A - B = 5^{10} - 5^{10} = 0$$

$$18 \quad (1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n \text{의 양변에}$$

$x=50$, $n=99$ 를 대입하면

$$51^{99} = {}_{99}C_0 + {}_{99}C_1 50 + {}_{99}C_2 50^2 + \cdots + {}_{99}C_{99} 50^{99}$$

$$= 1 + 2 \times 25({}_{99}C_1 + {}_{99}C_2 50 + \cdots + {}_{99}C_{99} 50^{98})$$

따라서 51^{99} 을 25로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

$$19 \quad \textcircled{7} \text{에서 } a+b+c=9+d \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{4}$ 에서 $d \leq 4$ 이고 d 는 음이 아닌 정수이므로

(i) $d=0$ 인 경우

$\textcircled{4}$ 에서 $c \geq d=0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$a+b+c=9 \text{ (단, } a, b, c \text{는 음이 아닌 정수)}$$

이 방정식을 만족시키는 순서쌍의 개수는

$${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$$

(ii) $d=1$ 인 경우

$\textcircled{4}$ 에서 $c \geq d=1$ 이므로 $c-1=c'$ 이라 하면 $\textcircled{1}$ 에서

$$a+b+(c'+1)=9+1$$

$$\therefore a+b+c'=9 \text{ (단, } a, b, c' \text{은 음이 아닌 정수)}$$

이 방정식을 만족시키는 순서쌍의 개수는

$${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$$

(iii) $d=2$ 인 경우

(ㄴ)에서 $c \geq d=2$ 이므로 $c-2=c'$ 이라 하면 ㉠에서

$$a+b+(c'+2)=9+2$$

$$\therefore a+b+c'=9 \text{ (단, } a, b, c' \text{은 음이 아닌 정수)}$$

이 방정식을 만족시키는 순서쌍의 개수는

$${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$$

(iv) $d=3$ 인 경우

(ㄴ)에서 $c \geq d=3$ 이므로 $c-3=c'$ 이라 하면 ㉠에서

$$a+b+(c'+3)=9+3$$

$$\therefore a+b+c'=9 \text{ (단, } a, b, c' \text{은 음이 아닌 정수)}$$

이 방정식을 만족시키는 순서쌍의 개수는

$${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$$

(v) $d=4$ 인 경우

(ㄴ)에서 $c \geq d=4$ 이므로 $c-4=c'$ 이라 하면 ㉠에서

$$a+b+(c'+4)=9+4$$

$$\therefore a+b+c'=9 \text{ (단, } a, b, c' \text{은 음이 아닌 정수)}$$

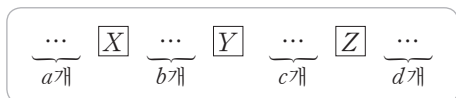
이 방정식을 만족시키는 순서쌍의 개수는

$${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$$

(i)~(v)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$55+55+55+55+55=275$$

- 20** 8개의 레인 번호 중 어느 두 번호도 연속되지 않도록 택한 3개의 번호를 각각 X, Y, Z ($X < Y < Z$)라 하자.



이때 X 보다 작은 번호의 개수를 a , X 보다 크고 Y 보다 작은 번호의 개수를 b , Y 보다 크고 Z 보다 작은 번호의 개수를 c , Z 보다 큰 번호의 개수를 d 라 하자. 예를 들어 X, Y, Z 를 각각 2, 5, 8로 택하면 $a=1, b=2, c=2, d=0$ 이다.

택하고 남은 번호가 5개이고, 택한 어느 두 번호도 연속되지 않으려면 $b \geq 1, c \geq 1$ 이어야 하므로

$$a+b+c+d=5 \text{ (단, } a \geq 0, b \geq 1, c \geq 1, d \geq 0)$$

이때 $b-1=b', c-1=c'$ 이라 하면

$$a+(b'+1)+(c'+1)+d=5$$

$$\therefore a+b'+c'+d=3 \text{ (단, } a, b', c', d \text{는 음이 아닌 정수)}$$

이 방정식을 만족시키는 해의 개수는

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

즉, 어느 두 번호도 연속되지 않도록 레인 번호 X, Y, Z 를 정하는 경우의 수는 20이다.

이때 3명의 학생이 레인 번호 X, Y, Z 를 택하는 경우의 수는

$${}_3P_3 = 3! = 6$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 \times 6 = 120$$

- 21** (ㄴ)에서 $f(1)+f(3)=5$ 이고 (ㄷ)에서

$$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5) \text{ 이므로}$$

$$f(1)=1, f(3)=4 \text{ 또는 } f(1)=2, f(3)=3$$

(i) $f(1)=1, f(3)=4$ 인 경우

$$1 \leq f(2) \leq 4 \leq f(4) \leq f(5)$$

$1 \leq f(2) \leq 4$ 에서 $f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4가지

$4 \leq f(4) \leq f(5)$ 에서 $f(4), f(5)$ 의 값은 4, 5, 6의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례대로 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

따라서 $f(1)=1, f(3)=4$ 인 함수의 개수는

$$4 \times 6 = 24$$

(ii) $f(1)=2, f(3)=3$ 인 경우

$$2 \leq f(2) \leq 3 \leq f(4) \leq f(5)$$

$2 \leq f(2) \leq 3$ 에서 $f(2)$ 의 값이 될 수 있는 것은 2, 3의 2가지

$3 \leq f(4) \leq f(5)$ 에서 $f(4), f(5)$ 의 값은 3, 4, 5, 6의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례대로 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

따라서 $f(1)=2, f(3)=3$ 인 함수의 개수는

$$2 \times 10 = 20$$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$24+20=44$$

- 22** $(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$ 의 양변에 $x=10, n=11$ 을 대입하면

$$11^{11} = {}_{11}C_0 + 10 {}_{11}C_1 + 10^2 {}_{11}C_2 + 10^3 {}_{11}C_3 + \cdots + 10^{11} {}_{11}C_{11}$$

$$= 1 + 10 \times 11 + 100 \times 55$$

$$+ 10^3 ({}_{11}C_3 + 10 {}_{11}C_4 + \cdots + 10^8 {}_{11}C_{11})$$

$$= 611 + 5000 + 1000 ({}_{11}C_3 + 10 {}_{11}C_4 + \cdots + 10^8 {}_{11}C_{11})$$

$$= 611 + \frac{1000(5 + {}_{11}C_3 + 10 {}_{11}C_4 + \cdots + 10^8 {}_{11}C_{11})}{\text{㉠}}$$

㉠

이때 ㉠은 1000의 배수이므로 11^{11} 의 백의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자, 일의 자리의 숫자는 각각 6, 1, 1이다.

따라서 $a=6, b=1, c=1$ 이므로

$$a+b+c=8$$

II-1 01 확률의 뜻과 활용

1 시행과 사건

개념 CHECK

42쪽

- 1 답 (1) $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
(2) $A = \{1, 3\}$

문제

43쪽

01-1 답 ㄱ, ㄴ

세 사건 A, B, C 에 대하여

$$A = \{8, 16\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$$

$$C = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

ㄱ. $A \cap B = \emptyset$ 이므로 A 와 B 는 서로 배반사건이다.

ㄴ. $A \cap C = \emptyset$ 이므로 A 와 C 는 서로 배반사건이다.

ㄷ. $B \cap C = \{1, 3, 9\}$ 이므로 B 와 C 는 서로 배반사건이 아니다.

따라서 보기 중 서로 배반사건인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

01-2 답 4

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 한 개의 동전을 2번 던질 때, 표본공간을 S 라 하면

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

2번 모두 같은 면이 나오는 사건 A 는

$$A = \{HH, TT\}$$

사건 A 의 여사건 A^c 은

$$A^c = \{HT, TH\}$$

사건 A 와 서로 배반인 사건은 A^c 의 부분집합이고, A^c 의 원소가 2개이므로 구하는 사건의 개수는

$$2^2 = 4$$

01-3 답 2

사건 A 와 서로 배반인 사건은 A^c 의 부분집합이고, 사건 B 와 서로 배반인 사건은 B^c 의 부분집합이므로 두 사건 A, B 와 모두 배반인 사건은 $A^c \cap B^c$ 의 부분집합이다.

이때 $A^c = \{1, 3, 5, 7\}$, $B^c = \{2, 5, 8\}$ 이므로

$$A^c \cap B^c = \{5\}$$

따라서 $A^c \cap B^c$ 의 원소가 1개이므로 구하는 사건의 개수는

$$2^1 = 2$$

2 확률의 뜻과 기본 성질

개념 CHECK

45쪽

- 1 답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{200}$

(1) 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

서로 같은 수의 눈이 나오는 경우는 (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)의 6가지이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(2) 1000개당 5개꼴로 불량품이 있으므로 구하는 확률은

$$\frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$$

- 2 답 (1) $\frac{3}{8}$ (2) 1 (3) 0

문제

46~49쪽

- 02-1 답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{11}{36}$

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

(1) 나오는 두 눈의 수의 차가 3인 경우는 (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)의 6가지이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(2) 나오는 두 눈의 수의 곱이 5의 배수인 경우는

(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 1), (5, 2),

(5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5)의 11가지이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{11}{36}$$

- 02-2 답 $\frac{1}{2}$

집합 A 의 원소가 4개이므로 집합 A 의 모든 부분집합의 개수는

$$2^4 = 16$$

원소 3이 포함되어 있는 집합 A 의 부분집합의 개수는

$$2^{4-1} = 2^3 = 8$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

02-3 $\frac{7}{18}$

서로 다른 두 개의 주사위 A, B를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

이차방정식 $x^2 - 2ax + 5b = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = a^2 - 5b > 0 \quad \therefore a^2 > 5b$$

$a^2 > 5b$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$(3, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)$ 의 14개이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

03-1 $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{10}$

(1) 6명이 일렬로 서는 경우의 수는 6!

A, B가 서로 이웃하지 않게 서려면 이웃해도 되는 나머지 4명이 먼저 일렬로 서고 그 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중에서 2개를 택하여 A, B가 서면 되므로 그 경우의 수는

$$4! \times {}_5P_2 = 4! \times 20$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{4! \times 20}{6!} = \frac{2}{3}$$

(2) 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(6-1)! = 5!$

남녀가 교대로 앉으려면 남자 3명이 먼저 원탁에 둘러앉은 후 그 사이사이의 3개의 자리에 여자 3명이 앉으면 되므로 그 경우의 수는

$$(3-1)! \times {}_3P_3 = 2! \times 3!$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{2! \times 3!}{5!} = \frac{1}{10}$$

03-2 $\frac{3}{5}$

다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5로 중복을 허용하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$${}_5\Pi_3 = 5^3$$

홀수는 일의 자리에 올 수 있는 숫자가 1, 3, 5의 3가지이므로 홀수의 개수는

$${}_5\Pi_2 \times 3 = 5^2 \times 3$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{5^2 \times 3}{5^3} = \frac{3}{5}$$

03-3 $\frac{1}{10}$

m, e, r, r, y를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

양 끝에 m, y를 고정시키고 그 사이에 나머지 문자 e, r, r를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

m과 y의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{3 \times 2}{60} = \frac{1}{10}$$

04-1 $\frac{1}{70}$ (2) $\frac{5}{21}$

10개의 사탕 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}C_4 = 210$$

(1) 포도맛 사탕 3개 중에서 2개를 꺼내고, 딸기맛 사탕 2개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times {}_2C_2 = 3 \times 1 = 3$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{3}{210} = \frac{1}{70}$$

(2) 복숭아맛 사탕 5개 중에서 1개를 꺼내고, 포도맛 사탕과 딸기맛 사탕 5개 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_5C_1 \times {}_5C_3 = 5 \times 10 = 50$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{50}{210} = \frac{5}{21}$$

04-2 $\frac{3}{22}$

방정식 $x+y+z=10$ 을 만족시키는 순서쌍의 개수는

$${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = 66$$

$x=2$ 이면 $x+y+z=10$ 에서

$$y+z=8$$

이 방정식을 만족시키는 순서쌍의 개수는

$${}_2H_8 = {}_9C_8 = {}_9C_1 = 9$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{9}{66} = \frac{3}{22}$$

04-3 $\frac{4}{5}$

6개의 구슬 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_6C_2 = 15$$

주머니에 들어 있는 빨간 구슬의 개수를 n 이라 하면 n 개의 빨간 구슬 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_nC_2$ 이고,

모두 빨간 구슬이 나올 확률은 $\frac{2}{5}$ 이므로

$$\frac{{}_nC_2}{15} = \frac{2}{5}, \quad \frac{n(n-1)}{30} = \frac{2}{5}$$

$$n(n-1) = 12 = 4 \times 3$$

$$\therefore n = 4 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

따라서 빨간 구슬의 개수는 4이다.

05-1 답 $\frac{21}{80}$

전체 학생 400명 중에서 B 통신사를 이용하고 있는 학생은 105명이므로 구하는 확률은

$$\frac{105}{400} = \frac{21}{80}$$

05-2 답 $\frac{11}{50}$

수면 시간이 7시간 이상 9시간 미만인 학생 수가

$24 + 20 = 44$ 이므로 구하는 확률은

$$\frac{44}{200} = \frac{11}{50}$$

05-3 답 6개

주머니에 들어 있는 당첨 제비의 개수를 n 이라 하면 10개의 제비 중에서 2개를 꺼낼 때, 모두 당첨 제비일 확률은

$$\frac{{}_nC_2}{{}_{10}C_2} = \frac{n(n-1)}{90} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이 시행에서 3번에 1번꼴로 모두 당첨 제비를 꺼냈으므로

통계적 확률은 $\frac{1}{3}$ $\dots\dots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에서

$$\frac{n(n-1)}{90} = \frac{1}{3}$$

$$n(n-1) = 30 = 6 \times 5$$

$\therefore n = 6$ ($\because n$ 은 자연수)

따라서 주머니에 당첨 제비는 6개가 들어 있다고 볼 수 있다.

3 확률의 덧셈정리

문제

52~55쪽

06-1 답 $\frac{1}{4}$

두 사건 A , B 가 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\frac{3}{4} = 2P(B) + P(B)$$

$$3P(B) = \frac{3}{4}$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{4}$$

06-2 답 $\frac{1}{5}$

$P(B^c) = \frac{7}{10}$ 에서 여사건의 확률에 의하여

$$1 - P(B) = \frac{7}{10}$$

$$\therefore P(B) = \frac{3}{10}$$

따라서 확률의 덧셈정리에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{9}{20} = P(A) + \frac{3}{10} - \frac{1}{20}$$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{5}$$

06-3 답 $\frac{3}{4}$

$P(A^c) = \frac{1}{2}$ 에서 여사건의 확률에 의하여

$$1 - P(A) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{2}$$

$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ 이므로 $P(A^c \cup B^c) = \frac{5}{6}$ 에서

$$P((A \cap B)^c) = \frac{5}{6}$$

이때 여사건의 확률에 의하여

$$1 - P(A \cap B) = \frac{5}{6}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

따라서 확률의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{5}{12} - \frac{1}{6} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

07-1 답 $\frac{11}{12}$

요리 강좌를 듣는 사람을 택하는 사건을 A , 미술 강좌를 듣는 사람을 택하는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{11}{12} \end{aligned}$$

07-2 답 $\frac{5}{6}$

6의 약수의 눈이 나오는 사건을 A 라 하면

$$A = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{4}{6}$$

짝수의 눈이 나오는 사건을 B 라 하면

$$B = \{2, 4, 6\}$$

$$\therefore P(B) = \frac{3}{6}$$

$$A \cap B = \{2, 6\} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

07-3 $\boxed{\frac{7}{9}}$

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 네 개의 숫자 0, 1, 4, 5를 모두 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는 $3 \times 3! = 18$

네 자리의 자연수가 홀수인 사건을 A , 5의 배수인 사건을 B 라 하자.

이때 홀수는 일의 자리의 숫자가 1 또는 5이고, 5의 배수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이다.

(i) $\square\square\square 1$ 꼴의 자연수

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 자연수의 개수는 $2 \times 2! = 4$

(ii) $\square\square\square 5$ 꼴의 자연수

천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 자연수의 개수는 $2 \times 2! = 4$

(iii) $\square\square\square 0$ 꼴의 자연수의 개수는

$$3! = 6$$

(i), (ii)에서 홀수의 개수는 $4 + 4 = 8$ 이므로

$$P(A) = \frac{8}{18}$$

(ii), (iii)에서 5의 배수의 개수는 $4 + 6 = 10$ 이므로

$$P(B) = \frac{10}{18}$$

$A \cap B$ 는 홀수이고 5의 배수인 수, 즉 일의 자리의 숫자가 5인 수인 사건이므로

$$P(A \cap B) = \frac{4}{18}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{8}{18} + \frac{10}{18} - \frac{4}{18} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

08-1 $\boxed{\frac{4}{9}}$

두 수의 합이 짝수이려면 두 수가 모두 짝수 또는 모두 홀수이어야 한다.

공에 적힌 두 수가 모두 짝수인 사건을 A , 모두 홀수인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{{}^5C_2}{{}^{10}C_2} = \frac{10}{45}$$

$$P(B) = \frac{{}^5C_2}{{}^{10}C_2} = \frac{10}{45}$$

두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{10}{45} + \frac{10}{45} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

08-2 $\boxed{\frac{3}{7}}$

t, e, n, s, i, o, n을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2!}$$

맨 앞에 t가 오는 사건을 A , 맨 앞에 n이 오는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{\frac{6!}{2!}}{\frac{7!}{2!}} = \frac{1}{7}, \quad P(B) = \frac{\frac{6!}{2!}}{\frac{7!}{2!}} = \frac{2}{7}$$

두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

08-3 $\boxed{\frac{13}{66}}$

1학년 학생이 2학년 학생보다 많이 뽑히려면 뽑은 4명 중에서 1학년 학생이 3명 또는 4명이어야 한다.

1학년 학생 3명과 2학년 학생 1명을 뽑는 사건을 A , 1학년 학생 4명을 뽑는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{{}^5C_3 \times {}^6C_1}{{}^{11}C_4} = \frac{60}{330}$$

$$P(B) = \frac{{}^5C_4}{{}^{11}C_4} = \frac{5}{330}$$

두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{60}{330} + \frac{5}{330} = \frac{13}{66} \end{aligned}$$

09-1 $\boxed{\frac{8}{15}}$

적어도 한 개가 당첨 제비인 사건을 A 라 하면 A^c 은 모두 당첨 제비가 아닌 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}^7C_2}{{}^{10}C_2} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) \\ &= 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

09-2 **답** $\frac{5}{6}$

나오는 두 눈의 수의 곱이 10의 배수가 아닌 사건을 A 라 하면 A^c 은 10의 배수인 사건이다.

서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나오는 두 눈의 수의 곱이 10의 배수인 경우는 (2, 5), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 5)의 6가지이므로

$$P(A^c) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) \\ = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

09-3 **답** $\frac{19}{20}$

네 자리의 자연수가 1300 이상인 사건을 A 라 하면 A^c 은 1300 미만인 사건이다.

5개의 숫자 중에서 서로 다른 4개를 택하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$${}_5P_4 = 120$$

1300 미만인 네 자리의 자연수는 12□□ 꼴의 자연수이므로 그 개수는

$${}_3P_2 = 6$$

$$\therefore P(A^c) = \frac{{}_3P_2}{{}_5P_4} \\ = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) \\ = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

09-4 **답** 6

여학생이 1명 이하로 뽑히는 사건을 A 라 하면 A^c 은 여학생이 2명 뽑히는 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_{10}C_2}{n+10C_2} \\ = \frac{90}{(n+10)(n+9)}$$

이때 $P(A) = \frac{5}{8}$ 이므로 $P(A^c) = 1 - P(A)$ 에서

$$\frac{90}{(n+10)(n+9)} = 1 - \frac{5}{8}$$

$$\frac{90}{(n+10)(n+9)} = \frac{3}{8}$$

$$(n+10)(n+9) = 240 = 16 \times 15$$

$$\therefore n = 6 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

연습문제

56~58쪽

1 ④	2 $\frac{1}{9}$	3 $\frac{1}{2}$	4 ④	5 $\frac{15}{64}$
6 ②	7 $\frac{1}{21}$	8 $\frac{2}{5}$	9 $\frac{59}{256}$	10 ③
11 ①	12 $\frac{2}{15}$	13 ②	14 $\frac{8}{15}$	15 $\frac{11}{36}$
16 $\frac{34}{55}$	17 $\frac{11}{21}$	18 ⑤	19 $\frac{1}{3}$	20 $\frac{7}{15}$
21 $\frac{5}{12}$	22 $\frac{43}{100}$			

- 1 사건 A 와 서로 배반인 사건은 A^c 의 부분집합이고 A^c 은 두 눈의 수의 합이 10 이상인 사건이므로

$$A^c = \{ \underbrace{(4, 6), (5, 5), (6, 4)}_{\text{합이 10}}, \underbrace{(5, 6), (6, 5)}_{\text{합이 11}}, \underbrace{(6, 6)}_{\text{합이 12}} \}$$

따라서 A^c 의 원소가 6개이므로 구하는 사건의 개수는 $2^6 = 64$

- 2 한 개의 주사위를 2번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

두 직선 $ax + 6y - 1 = 0$, $x + by - 3 = 0$ 이 평행하기 위한 조건은

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{6} \neq \frac{-3}{-1}$$

$$\therefore ab = 6 \quad \left(\text{단, } a \neq \frac{1}{3}, b \neq 18 \right)$$

$ab = 6$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 은 (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)의 4개이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

- 3 6개의 숫자 중에서 서로 다른 4개를 택하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$${}_6P_4 = 360$$

짝수는 일의 자리에 올 수 있는 숫자가 2, 4, 6의 3가지이므로 짝수의 개수는

$$3 \times {}_5P_3 = 180$$

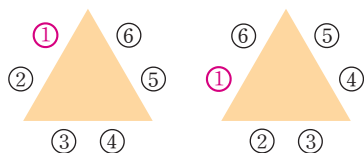
따라서 구하는 확률은

$$\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$$

- 4 6명이 원형으로 둘러앉은 경우의 수는

$$(6-1)! = 5! = 120$$

원형으로 둘러앉은 한 경우에 대하여 정삼각형 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.



따라서 6명이 정삼각형 모양의 탁자에 둘러앉은 경우의 수는 $120 \times 2 = 240$

이때 탁자의 같은 변에 어른 1명, 아이 1명이 앉으려면 먼저 어른 3명을 탁자의 세 변에 각각 앉힌 후 아이 3명을 남은 3개의 자리에 앉히고 각 변에서 어른과 아이의 자리를 바꾸는 경우를 생각하면 되므로 그 경우의 수는 $(3-1)! \times {}_3P_3 \times 2^3 = 96$

따라서 구하는 확률은 $\frac{96}{240} = \frac{2}{5}$

- 5 2개의 문자에서 중복을 허용하여 6개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_2\Pi_6 = 2^6 = 64$$

a 가 2번 나오면 b 는 4번 나오므로 a, a, b, b, b, b 를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 4!} = 15$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{15}{64}$

- 6 A, A, A, B, B, C가 적혀 있는 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$$

양 끝에 A가 적힌 카드를 고정시키고 그 사이에 나머지 A, B, B, C가 적힌 카드를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{60} = \frac{1}{5}$

- 7 9개의 공 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_9C_4 = 126$$

꺼낸 공에 적힌 수 중 가장 작은 수가 3, 가장 큰 수가 8 이려면 3이 적힌 공과 8이 적힌 공은 반드시 꺼내고, 4, 5, 6, 7이 적힌 4개의 공 중에서 나머지 2개를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{126} = \frac{1}{21}$

- 8 남자 6명 중에서 3명, 여자 4명 중에서 2명을 뽑아서 일렬로 세우는 경우의 수는

$${}_6C_3 \times {}_4C_2 \times 5!$$

이때 여자끼리 이웃하는 경우의 수는

$${}_6C_3 \times {}_4C_2 \times 4! \times 2!$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_6C_3 \times {}_4C_2 \times 4! \times 2!}{{}_6C_3 \times {}_4C_2 \times 5!} = \frac{2}{5}$$

- 9 X 에서 Y 로의 함수의 개수는

$${}_4\Pi_4 = 4^4 = 256$$

이때 $i \neq j$ 이면 $f(i) \neq f(j)$ 인 함수의 개수는

$${}_4P_4 = 4! = 24 \quad \therefore a = \frac{24}{256}$$

또 $i < j$ 이면 $f(i) \leq f(j)$ 인 함수의 개수는

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = 35 \quad \therefore b = \frac{35}{256}$$

$$\therefore a + b = \frac{24}{256} + \frac{35}{256} = \frac{59}{256}$$

- 10 상자에 들어 있는 흰 바둑돌의 개수를 n 이라 하면 8개의 바둑돌 중에서 3개를 꺼낼 때, 모두 흰 바둑돌이 나올 확률은

$$\frac{{}_nC_3}{{}_8C_3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{336} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 시행에서 14번에 1번꼴로 모두 흰 바둑돌이 나왔으므로 통계적 확률은 $\frac{1}{14} \quad \dots\dots \textcircled{8}$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{336} = \frac{1}{14}$$

$$n(n-1)(n-2) = 24 = 4 \times 3 \times 2$$

$$\therefore n = 4 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

따라서 상자에 흰 바둑돌은 4개가 들어 있다고 볼 수 있다.

- 11 $\neg, \emptyset \subset (A \cup B) \subset S$ 이므로

$$P(\emptyset) \leq P(A \cup B) \leq P(S)$$

$$\therefore 0 \leq P(A \cup B) \leq 1$$

ㄴ. [반례] $S = \{1, 2, 3\}, A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$ 이면

$$A \cup B = S \text{이지만}$$

$$P(A) + P(B) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

ㄷ. [반례] $S = \{1, 2, 3, 4\}, A = \{1, 2\}, B = \{2, 3\}$ 이면

$$P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{이지만}$$

$A \cap B = \{2\} \neq \emptyset$ 이므로 두 사건 A, B 는 서로 배반 사건이 아니다.

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$ 이다.

12 $P(B^c) = \frac{1}{3}$ 에서

$$1 - P(B) = \frac{1}{3} \quad \therefore P(B) = \frac{2}{3}$$

$$P(A^c \cap B^c) = \frac{2}{15} \text{에서}$$

$$P((A \cup B)^c) = \frac{2}{15}$$

$$1 - P(A \cup B) = \frac{2}{15} \quad \therefore P(A \cup B) = \frac{13}{15}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{이므로}$$

$$\frac{13}{15} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{2}{15}$$

13 $P(A^c \cap B) = \frac{1}{6}$ 에서

$$P((A \cup B^c)^c) = \frac{1}{6}$$

$$1 - P(A \cup B^c) = \frac{1}{6} \quad \therefore P(A \cup B^c) = \frac{5}{6}$$

이때 두 사건 A, B^c 이 서로 배반사건이므로

$$P(A \cup B^c) = P(A) + P(B^c)$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + P(B^c)$$

$$P(B^c) = \frac{1}{2}$$

$$1 - P(B) = \frac{1}{2} \quad \therefore P(B) = \frac{1}{2}$$

다른 풀이

두 사건 A, B^c 이 서로 배반사건이므로

$$A \cap B^c = \emptyset$$

$$\text{즉, } A \subset B \text{이므로 } B = A \cup (A^c \cap B)$$

이때 $A \cap (A^c \cap B) = \emptyset$, 즉 A 와 $A^c \cap B$ 는 서로 배반사건이므로

$$P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

14 m, e, m, b, e, r를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 2!} = 180$$

m끼리 서로 이웃하는 사건을 A, e끼리 서로 이웃하는 사건을 B라 하자.

(i) 2개의 m을 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자 e, b, e, r와 함께 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

$$\therefore P(A) = \frac{60}{180}$$

(ii) 2개의 e를 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자 m, m, b, r와 함께 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

$$\therefore P(B) = \frac{60}{180}$$

(iii) 2개의 m을 한 묶음으로, 2개의 e를 다른 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자 b, r와 함께 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{24}{180}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{60}{180} + \frac{60}{180} - \frac{24}{180} = \frac{8}{15}$$

15 두 눈의 수의 합이 6인 사건을 A, 차가 3인 사건을 B라 하자.

두 눈의 수의 합이 6인 경우는 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지이므로

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

두 눈의 수의 차가 3인 경우는 (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)의 6가지이므로

$$P(B) = \frac{6}{36}$$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{11}{36}$$

16 적어도 한 개의 검정 볼펜을 꺼내는 사건을 A라 하면 A^c 은 검정 볼펜을 꺼내지 않는 사건, 즉 검정이 아닌 색의 볼펜 9개 중에서 3개를 꺼내는 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_9C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{21}{55}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= 1 - \frac{21}{55} = \frac{34}{55}$$

17 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{9!}{5! \times 4!} = 126$$

A 지점에서 P 지점을 거치지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 사건을 A라 하면 A^c 은 A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 사건이다.

A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 60$$

$$\therefore P(A^c) = \frac{60}{126} = \frac{10}{21}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{10}{21} = \frac{11}{21}$$

- 18 (가), (나)를 만족시키는 점 (a, b) 의 개수는 $4 \times 3 = 12$ 이므로 12개의 점 중에서 서로 다른 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_{12}C_2 = 66$

두 점 사이의 거리가 1보다 큰 사건을 A라 하면 A^c 은 두 점 사이의 거리가 1인 사건이다.

두 점 사이의 거리가 1이려면 두 점의 x 좌표가 같고 y 좌표가 연속하는 두 자연수이거나, y 좌표가 같고 x 좌표가 연속하는 두 자연수이어야 한다.

두 점의 x 좌표가 같고 y 좌표가 연속하는 두 자연수인 경우는 $4 \times 2 = 8$ 가지, y 좌표가 같고 x 좌표가 연속하는 두 자연수인 경우는 $3 \times 3 = 9$ 가지이므로

$$P(A^c) = \frac{8+9}{66} = \frac{17}{66}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{17}{66} = \frac{49}{66}$$

- 19 방정식 $x+y+z=8$ 을 만족시키는 순서쌍의 개수는

$${}_3H_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$$

$$(x-y)(y-z)(z-x)=0 \text{에서}$$

$$x=y \text{ 또는 } y=z \text{ 또는 } z=x$$

$x=y$ 를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z) 는 $(0, 0, 8)$,

$(1, 1, 6)$, $(2, 2, 4)$, $(3, 3, 2)$, $(4, 4, 0)$ 의 5개이다.

$y=z$ 와 $z=x$ 를 만족시키는 순서쌍도 각각 5개이므로

$(x-y)(y-z)(z-x)=0$ 을 만족시키는 순서쌍의 개수는 $5 \times 3 = 15$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

- 20 $15x^2 - 8nx + n^2 = 0$ 에서

$$(5x-n)(3x-n)=0$$

$$\therefore x = \frac{n}{5} \text{ 또는 } x = \frac{n}{3}$$

이때 이차방정식이 정수인 해를 가지려면 자연수 n 이 5의 배수 또는 3의 배수이어야 한다.

n 이 5의 배수인 사건을 A, 3의 배수인 사건을 B라 하면 $A \cap B$ 는 n 이 5와 3의 공배수, 즉 15의 배수인 사건이므로

$$P(A) = \frac{6}{30}, P(B) = \frac{10}{30}, P(A \cap B) = \frac{2}{30}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{30} + \frac{10}{30} - \frac{2}{30} = \frac{7}{15}$$

- 21 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 이므로

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - P(A \cup B)$$

$$= \frac{13}{12} - P(A \cup B)$$

즉, $P(A \cup B)$ 가 최소일 때 $P(A \cap B)$ 가 최대이고

$P(A \cup B)$ 가 최대일 때 $P(A \cap B)$ 가 최소이다.

이때 $P(A \cup B) \geq P(A)$, $P(A \cup B) \geq P(B)$,

$P(A \cup B) \leq 1$ 이므로

$$P(A \cup B) \geq \frac{3}{4}, P(A \cup B) \geq \frac{1}{3}, P(A \cup B) \leq 1$$

$$\text{즉, } \frac{3}{4} \leq P(A \cup B) \leq 1 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{12} \leq \frac{13}{12} - P(A \cup B) \leq \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } M = \frac{1}{3}, m = \frac{1}{12} \text{이므로}$$

$$M + m = \frac{5}{12}$$

- 22 $14 = 2 \times 7$ 이므로 14와 서로소이려면 2의 배수도 아니고 7의 배수도 아니어야 한다.

카드에 적힌 수가 2의 배수인 사건을 A, 7의 배수인 사건을 B라 하면 2의 배수도 아니고 7의 배수도 아닌 사건은 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이다.

이때 $P(A) = \frac{50}{100}$, $P(B) = \frac{14}{100}$ 이고, $A \cap B$ 는 카드에 적힌 수가 2와 7의 공배수, 즉 14의 배수인 사건이므로

$$P(A \cap B) = \frac{7}{100}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{50}{100} + \frac{14}{100} - \frac{7}{100} = \frac{57}{100}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c)$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{57}{100} = \frac{43}{100}$$

II-2 01 조건부확률

1 조건부확률

개념 CHECK

61쪽

1 답 (1) 0.75 (2) 0.6

$$(1) P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$$

$$(2) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$$

2 답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{2}{3}$

$$(1) P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$(2) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

문제

62~66쪽

01-1 답 (1) $\frac{3}{4}$ (2) 0.5

$$(1) P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{5} \text{에서 } P((A \cup B)^c) = \frac{1}{5}$$

$$1 - P(A \cup B) = \frac{1}{5}$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{4}{5}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{이므로}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{7}{10} + \frac{2}{5} - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{4}$$

$$(2) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{이므로}$$

$$0.7 = 0.5 + P(B) - 0.2$$

$$\therefore P(B) = 0.4$$

$$\therefore P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \text{이므로}$$

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - 0.7 = 0.3$$

$$\therefore P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)}$$

$$= \frac{0.3}{0.6} = 0.5$$

01-2 답 $\frac{1}{5}$

$$P(B|A) = \frac{1}{4} \text{에서 } \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A) = 4P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{이므로}$$

$$\frac{4}{5} = 4P(A \cap B) + \frac{1}{2} - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

02-1 답 0.3

혈액형이 A형인 학생을 뽑는 사건을 A, 여학생을 뽑는 사건을 B라 하면

$$P(A) = 0.4, P(A \cap B) = 0.12$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.12}{0.4} = 0.3$$

다른 풀이

전체 학생 수가 a일 때 구하는 확률은

$$\frac{(A \text{형인 여학생의 수})}{(A \text{형인 학생의 수})} = \frac{0.12a}{0.4a} = 0.3$$

02-2 답 $\frac{4}{7}$

남학생을 뽑는 사건을 A, B 책을 선택한 학생을 뽑는 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{14}{30}, P(A \cap B) = \frac{8}{30}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{30}}{\frac{14}{30}} = \frac{4}{7}$$

02-3 답 $\frac{2}{5}$

두 눈의 수의 합이 8인 사건을 A, 두 눈의 수의 곱이 홀수인 사건을 B라 하면

$$A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$$

$$A \cap B = \{(3, 5), (5, 3)\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{5}{36}, P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

03-1 **답** $\frac{21}{55}$

첫 번째에 불량품을 꺼내지 않는 사건을 A , 두 번째에 불량품을 꺼내지 않는 사건을 B 라 하자.

첫 번째에 불량품을 꺼내지 않을 확률은

$$P(A) = \frac{7}{11}$$

첫 번째에 꺼낸 제품이 불량품이 아니었을 때 두 번째에도 불량품을 꺼내지 않을 확률은

$$P(B|A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{7}{11} \times \frac{3}{5} = \frac{21}{55}$$

03-2 **답** $\frac{24}{95}$

대표로 여자 회원을 뽑는 사건을 A , 부대표로 남자 회원을 뽑는 사건을 B 라 하자.

대표로 여자 회원을 뽑을 확률은

$$P(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

대표로 뽑은 회원이 여자 회원이었을 때 부대표로 남자 회원을 뽑을 확률은

$$P(B|A) = \frac{8}{19}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{3}{5} \times \frac{8}{19} = \frac{24}{95}$$

03-3 **답** 13

첫 번째에 파란 구슬을 꺼내는 사건을 A , 두 번째에 빨간 구슬을 꺼내는 사건을 B 라 하자.

첫 번째에 파란 구슬을 꺼낼 확률은

$$P(A) = \frac{n}{n+6}$$

첫 번째에 꺼낸 구슬이 파란 구슬이었을 때 두 번째에 빨간 구슬을 꺼낼 확률은

$$P(B|A) = \frac{6}{n+5}$$

첫 번째는 파란 구슬, 두 번째는 빨간 구슬을 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{n}{n+6} \times \frac{6}{n+5} \\ &= \frac{6n}{(n+6)(n+5)} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{6n}{(n+6)(n+5)} = \frac{1}{4} \text{ 이므로}$$

$$n^2 - 13n + 30 = 0, (n-3)(n-10) = 0$$

$$\therefore n=3 \text{ 또는 } n=10$$

따라서 모든 n 의 값의 합은 $3+10=13$

04-1 **답** 0.54

토요일에 비가 오는 사건을 A , 경기에서 이기는 사건을 B 라 하자.

(i) 토요일에 비가 오고 경기에서 이길 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= 0.3 \times 0.4 = 0.12 \end{aligned}$$

(ii) 토요일에 비가 오지 않고 경기에서 이길 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= (1-0.3) \times 0.6 = 0.42 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= 0.12 + 0.42 = 0.54 \end{aligned}$$

04-2 **답** $\frac{3}{10}$

A , B 가 당첨 제비를 뽑는 사건을 각각 A , B 라 하자.

(i) A 가 당첨 제비를 뽑고 B 도 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

(ii) A 가 당첨 제비를 뽑지 않고 B 가 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{7}{30} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{1}{15} + \frac{7}{30} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

04-3 **답** $\frac{53}{140}$

A 주머니를 택하는 사건을 A , 2개 모두 파란 공을 꺼내는 사건을 B 라 하자.

(i) A 주머니를 택하고 A 주머니에서 2개의 파란 공을 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{{}_5C_2}{{}_8C_2} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{14} = \frac{5}{28} \end{aligned}$$

(ii) B 주머니를 택하고 B 주머니에서 2개의 파란 공을 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{5}{28} + \frac{1}{5} = \frac{53}{140} \end{aligned}$$

05-1 답 $\frac{7}{19}$

A 구장에서 경기를 치르는 사건을 A, 경기에서 승리하는 사건을 B라 하자.

(i) A 구장에서 승리할 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \\ = 0.2 \times 0.7 = 0.14$$

(ii) 타 구장에서 승리할 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) \\ = (1 - 0.2) \times 0.3 = 0.24$$

(i), (ii)에서 이 팀이 승리할 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ = 0.14 + 0.24 = 0.38$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.14}{0.38} = \frac{7}{19}$$

05-2 답 $\frac{6}{13}$

꽃무늬 상자를 택하는 사건을 A, 2개 모두 흰 공을 꺼내는 사건을 B라 하자.

(i) 꽃무늬 상자를 택하고 꽃무늬 상자에서 2개의 흰 공을 꺼낼 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \\ = \frac{1}{2} \times \frac{{}_4C_2}{{}_9C_2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

(ii) 별무늬 상자를 택하고 별무늬 상자에서 2개의 흰 공을 꺼낼 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) \\ = \frac{1}{2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_7C_2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{14}$$

(i), (ii)에서 2개 모두 흰 공을 꺼낼 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{1}{12} + \frac{1}{14} = \frac{13}{84}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A^c|B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{13}{84}} = \frac{6}{13}$$

2 사건의 독립과 종속

개념 CHECK

68쪽

1 답 (1) 종속 (2) 독립

(1) $P(A)P(B) = 0.2 \times 0.5 = 0.1$ 이므로

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

(2) $P(A)P(B) = 0.4 \times 0.55 = 0.22$ 이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

2 답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{6}$

$$(1) P(A|B) = P(A) = \frac{1}{3}$$

$$(2) P(B|A) = P(B) = \frac{1}{2}$$

$$(3) P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

문제

69~71쪽

06-1 답 ㄴ, ㄷ

표본공간 S는 $S = \{1, 2, 3, \dots, 29, 30\}$ 이므로

$$A = \{1, 3, 5, \dots, 27, 29\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$$

$$C = \{11, 12, 13, \dots, 19, 20\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{3}$$

ㄱ. $A \cap B = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ 이므로

$$P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$

$$P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

따라서 A와 B는 서로 종속이다.

ㄴ. $A \cap C = \{11, 13, 15, 17, 19\}$ 이므로

$$P(A \cap C) = \frac{1}{6}$$

$$P(A)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{이므로}$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

따라서 A와 C는 서로 독립이다.

ㄷ. ㄴ에 의하여 A와 C가 서로 독립이므로 A^c 과 C^c 도 서로 독립이다.

ㄹ. $B^c \cap C = \{12, 14, 15, 16, 18, 20\}$ 이므로

$$P(B^c \cap C) = \frac{1}{5}$$

$$P(B^c)P(C) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \text{이므로}$$

$$P(B^c \cap C) \neq P(B^c)P(C)$$

따라서 B^c 과 C는 서로 종속이다.

따라서 보기 중 서로 독립인 사건은 ㄴ, ㄷ이다.

06-2 [답] ㄴ

표본공간 S 는

$$S = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ 라 하면

$$P(A) = \frac{2}{3}$$

ㄱ. $B = \{1, 4\}$ 라 하면 $P(B) = \frac{1}{3}$

$$\therefore P(A)P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$A \cap B = \{1, 4\}$ 이므로

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A, B 는 서로 종속이다.

ㄴ. $C = \{3, 4, 12\}$ 라 하면 $P(C) = \frac{1}{2}$

$$\therefore P(A)P(C) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$A \cap C = \{3, 4\}$ 이므로

$$P(A \cap C) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

따라서 두 사건 A, C 는 서로 독립이다.

ㄷ. $D = \{1, 3, 6, 12\}$ 라 하면 $P(D) = \frac{2}{3}$

$$\therefore P(A)P(D) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$A \cap D = \{1, 3\}$ 이므로

$$P(A \cap D) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A \cap D) \neq P(A)P(D)$$

따라서 두 사건 A, D 는 서로 종속이다.

ㄹ. $E = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ 이라 하면 $P(E) = \frac{5}{6}$

$$\therefore P(A)P(E) = \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{9}$$

$A \cap E = \{1, 2, 3, 4\}$ 이므로

$$P(A \cap E) = \frac{2}{3}$$

$$\therefore P(A \cap E) \neq P(A)P(E)$$

따라서 두 사건 A, E 는 서로 종속이다.

따라서 보기 중 사건 $\{1, 2, 3, 4\}$ 와 서로 독립인 사건은 ㄴ이다.

07-1 [답] $\frac{1}{2}$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A|B) = P(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{에서}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{4} + P(B) - \frac{1}{4}P(B)$$

$$\frac{3}{4}P(B) = \frac{3}{8}$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{2}$$

07-2 [답] $\frac{1}{3}$

$$P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$P((A \cup B)^c) = \frac{1}{2}$$

$$1 - P(A \cup B) = \frac{1}{2} \quad \therefore P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B^c) = \frac{1}{4} \text{에서}$$

$$P(A \cup B) - P(B) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} - P(B) = \frac{1}{4} \quad \therefore P(B) = \frac{1}{4}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{에서}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$\frac{1}{2} = P(A) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}P(A), \quad \frac{3}{4}P(A) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{3}$$

07-3 [답] $\frac{1}{16}$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A) = P(B|A) = P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{에서}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$\frac{7}{16} = P(A) + P(A) - P(A)P(A)$$

이때 $P(A) = k$ 라 하면

$$\frac{7}{16} = k + k - k^2$$

$$16k^2 - 32k + 7 = 0, \quad (4k - 1)(4k - 7) = 0$$

$$\therefore k = \frac{1}{4} \text{ 또는 } k = \frac{7}{4}$$

그런데 $0 \leq P(A) \leq 1$ 이므로

$$k = P(A) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$= P(A)P(A)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

A, B가 10점에 명중시키는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

(1) 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.7 \times 0.5 = 0.35$$

(2) A만 10점에 명중시키는 사건은 $A \cap B^c$ 이고 두 사건 A, B^c 은 서로 독립이므로

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = 0.7 \times (1 - 0.5) = 0.35$$

B만 10점에 명중시키는 사건은 $A^c \cap B$ 이고 두 사건 A^c , B는 서로 독립이므로

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B) = (1 - 0.7) \times 0.5 = 0.15$$

따라서 구하는 확률은 $0.35 + 0.15 = 0.5$

(3) 적어도 한 선수는 10점에 명중시킬 확률은

1 - (모두 10점에 명중시키지 못할 확률)

A, B 모두 10점에 명중시키지 못하는 사건은

$A^c \cap B^c$ 이고 두 사건 A^c , B^c 은 서로 독립이므로

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$$

$$= (1 - 0.7) \times (1 - 0.5) = 0.15$$

따라서 구하는 확률은

$$1 - P(A^c \cap B^c) = 1 - 0.15 = 0.85$$

08-2 답 $\frac{2}{3}$

A, B가 승부차기를 성공하는 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

이때 A만 성공할 확률은

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = \frac{3}{4} \times (1 - p)$$

$$\text{즉, } \frac{3}{4}(1 - p) = \frac{1}{4} \text{ 이므로 } 1 - p = \frac{1}{3} \quad \therefore p = \frac{2}{3}$$

3 독립시행의 확률

개념 CHECK

72쪽

1 답 (1) $\frac{15}{128}$ (2) $\frac{40}{243}$

(1) 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로

구하는 확률은

$${}_{10}C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{15}{128}$$

(2) 한 개의 주사위를 던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률

$$\text{은 } \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ 이므로 구하는 확률은}$$

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}$$

문제

73~75쪽

09-1 답 (1) 0.972 (2) 0.999

(1) (i) 2번 성공할 확률은 ${}_3C_2 0.9^2 0.1^1 = 0.243$

(ii) 3번 성공할 확률은 ${}_3C_3 0.9^3 0.1^0 = 0.729$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$0.243 + 0.729 = 0.972$$

(2) 적어도 1번 성공할 확률은

1 - (모두 성공하지 못할 확률)

모두 성공하지 못할 확률은

$${}_3C_0 0.9^0 0.1^3 = 0.001$$

따라서 구하는 확률은

$$1 - 0.001 = 0.999$$

09-2 답 $\frac{112}{243}$

(i) 4문제를 맞힐 확률은 ${}_5C_4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{80}{243}$

(ii) 5문제를 맞힐 확률은 ${}_5C_5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{32}{243}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{80}{243} + \frac{32}{243} = \frac{112}{243}$$

09-3 답 $\frac{1}{8}$

A 팀이 5번째 경기에서 우승하려면 4번째 경기까지 3번 이기고, 5번째 경기에서 이겨야 하므로 구하는 확률은

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

10-1 답 $\frac{7}{144}$

한 개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나

올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이고, 한 개의 주사위를 던져서 1의 눈이 나

올 확률은 $\frac{1}{6}$ 이다.

(i) 동전의 앞면이 나오고 한 개의 주사위를 2번 던져서 1의 눈이 2번 나올 확률은

$$\frac{1}{2} \times {}_2C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{72}$$

(ii) 동전의 뒷면이 나오고 한 개의 주사위를 3번 던져서 1의 눈이 2번 나올 확률은

$$\frac{1}{2} \times {}_3C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{144}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{72} + \frac{5}{144} = \frac{7}{144}$$

10-2 $\frac{61}{224}$

상자에서 2개의 공을 꺼낼 때 흰 공이 나오지 않는 경우는 2개 모두 검은 공이 나오는 경우이므로 흰 공이 나오지 않을 확률은

$$\frac{{}_5C_2}{{}_8C_2} = \frac{5}{14}$$

흰 공이 적어도 한 개 나올 확률은

$$1 - (\text{모두 검은 공이 나올 확률}) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$$

한 개의 주사위를 던져서 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

(i) 흰 공이 적어도 한 개 나오고 한 개의 주사위를 4번 던져서 짝수의 눈이 3번 나올 확률은

$$\frac{9}{14} \times {}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{9}{56}$$

(ii) 흰 공이 나오지 않고 한 개의 주사위를 5번 던져서 짝수의 눈이 3번 나올 확률은

$$\frac{5}{14} \times {}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{224}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{9}{56} + \frac{25}{224} = \frac{61}{224}$

11-1 $\frac{3}{8}$

한 개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

동전을 3번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 x , 뒷면이 나오는 횟수를 y 라 하면

$$x + y = 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

또 동전을 3번 던져서 점 P가 점 A로 돌아오려면 정사각형의 네 변의 길이의 합인 4만큼 움직여야 하므로

$$2x + y = 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $x=1, y=2$

따라서 구하는 확률은 동전을 3번 던져서 앞면이 1번, 뒷면이 2번 나올 확률과 같으므로

$${}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

11-2 $\frac{5}{16}$

한 개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

동전을 5번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 x , 뒷면이 나오는 횟수를 y 라 하자. 점 P가 점 O에서 점 A까지 이동하려면 오른쪽으로 4칸, 위쪽으로 3칸 이동해야 하므로

$$2x = 4, y = 3 \quad \therefore x = 2, y = 3$$

따라서 구하는 확률은 동전을 5번 던져서 앞면이 2번, 뒷면이 3번 나올 확률과 같으므로

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

연습문제

76~78쪽

1 ④	2 $\frac{3}{4}$	3 ③	4 10	5 ⑤
6 $\frac{5}{16}$	7 47	8 6	9 8	10 $\perp, \sqsubset$
11 ③	12 $\frac{24}{625}$	13 $\frac{13}{125}$	14 137	15 $\frac{19}{45}$
16 $\frac{2}{3}$	17 ⑤	18 $\frac{25}{81}$		

- $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$
 $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$
 $= 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$
 $\therefore P(B^c | A^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(A^c)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}$
- $P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$
 $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$
 $\therefore P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A \cap B^c)}{1 - P(B)}$
 $= \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{3}{4}$
- A를 희망한 학생을 택하는 사건을 A, B를 희망한 학생을 택하는 사건을 B라 하면

 $P(A) = \frac{250}{300}, P(A \cap B) = \frac{180}{300}$
따라서 구하는 확률은
 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{180}{300}}{\frac{250}{300}} = \frac{18}{25}$
- 여자 회원을 뽑는 사건을 A, 프라하를 선호하는 회원을 뽑는 사건을 B라 하면 전체 동호회 회원 수는 $x+20$ 이므로

 $P(A) = \frac{x+8}{x+20}, P(A \cap B) = \frac{x}{x+20}$
 $\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{x}{x+20}}{\frac{x+8}{x+20}} = \frac{x}{x+8}$
즉, $\frac{x}{x+8} = \frac{5}{9}$ 이므로
 $9x = 5x + 40 \quad \therefore x = 10$

- 5 A가 당첨 제비를 뽑는 사건을 A , B가 당첨 제비를 뽑는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, P(B|A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

- 6 첫 번째에 검사한 마우스가 불량품인 사건을 A , 두 번째에 검사한 마우스가 불량품인 사건을 B 라 하자.

- (i) 첫 번째에 검사한 마우스가 불량품이고, 두 번째에 검사한 마우스도 불량품일 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{5}{16} \times \frac{4}{15} = \frac{1}{12}$$

- (ii) 첫 번째에 검사한 마우스가 정상품이고, 두 번째에 검사한 마우스가 불량품일 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{11}{16} \times \frac{5}{15} = \frac{11}{48}$$

- (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{1}{12} + \frac{11}{48} = \frac{5}{16}$$

- 7 임의로 선택한 한 명이 점심에 한식을 선택한 학생인 사건을 A , 저녁에 양식을 선택한 학생인 사건을 B 라 하자.

- (i) 점심에 한식을 선택하고 저녁에 양식을 선택한 학생일 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= 0.6 \times (1 - 0.3) = 0.42 \end{aligned}$$

- (ii) 점심에 양식을 선택하고 저녁에 양식을 선택한 학생일 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= (1 - 0.6) \times 0.25 = 0.1 \end{aligned}$$

- (i), (ii)에서 저녁에 양식을 선택한 학생일 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = 0.42 + 0.1 = 0.52$$

따라서 임의로 선택한 한 명이 저녁에 양식을 선택한 학생일 때, 이 학생이 점심에 한식을 선택했을 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.42}{0.52} = \frac{21}{26}$$

즉, $p=26$, $q=21$ 이므로 $p+q=47$

- 8 A 회사의 제품을 택하는 사건을 A , USB 메모리에서 오류가 발생하는 사건을 B 라 하자.

- (i) A 회사 제품을 택하고, 그 USB 메모리에서 오류가 발생할 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{20}{50} \times \frac{5}{100} = \frac{1}{50}$$

- (ii) B 회사 제품을 택하고, 그 USB 메모리에서 오류가 발생할 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= \frac{30}{50} \times \frac{x}{100} = \frac{3x}{500} \end{aligned}$$

- (i), (ii)에서 USB 메모리에서 오류가 발생할 확률은

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{1}{50} + \frac{3x}{500} = \frac{10+3x}{500} \end{aligned}$$

따라서 USB 메모리에서 오류가 발생하였을 때, 그것이 A 회사의 제품일 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{50}}{\frac{10+3x}{500}} = \frac{10}{10+3x}$$

$$\text{즉, } \frac{10}{10+3x} = \frac{5}{14} \text{ 이므로}$$

$$50 + 15x = 140$$

$$\therefore x = 6$$

- 9 표본공간 S 는 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A = \{1, 3, 5\} \text{ 이므로 } P(A) = \frac{1}{2}$$

- (i) $m=1$ 이면 $B = \{1\}$, $A \cap B = \{1\}$ 이므로

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{1}{6}, P(A \cap B) = \frac{1}{6} \\ \therefore P(A)P(B) &= P(A \cap B) \end{aligned}$$

- (ii) $m=2$ 이면 $B = \{1, 2\}$, $A \cap B = \{1\}$ 이므로

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{6} \\ \therefore P(A)P(B) &= P(A \cap B) \end{aligned}$$

- (iii) $m=3$ 이면 $B = \{1, 3\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$ 이므로

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{3} \\ \therefore P(A)P(B) &\neq P(A \cap B) \end{aligned}$$

- (iv) $m=4$ 이면 $B = \{1, 2, 4\}$, $A \cap B = \{1\}$ 이므로

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{1}{6} \\ \therefore P(A)P(B) &\neq P(A \cap B) \end{aligned}$$

- (v) $m=5$ 이면 $B = \{1, 5\}$, $A \cap B = \{1, 5\}$ 이므로

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{3} \\ \therefore P(A)P(B) &\neq P(A \cap B) \end{aligned}$$

- (vi) $m=6$ 이면 $B = \{1, 2, 3, 6\}$, $A \cap B = \{1, 3\}$ 이므로

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{2}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{3} \\ \therefore P(A)P(B) &= P(A \cap B) \end{aligned}$$

- (i)~(vi)에서 두 사건 A 와 B 가 서로 독립이 되도록 하는 m 의 값은 2, 6이므로 그 합은

$$2+6=8$$

- 10 $\neg$. A, B 가 서로 배반사건이면 $P(A \cap B) = 0$

이때 $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ 이므로

$$P(A)P(B) \neq 0$$

$$\therefore P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A, B 는 서로 종속이다.

- ㄴ. A, B 가 서로 배반사건이면 $P(A \cap B) = 0$ 이므로

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0$$

$$\therefore P(A|B) = P(B|A)$$

- ㄷ. A, B 가 서로 독립이면 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이므로

$$\begin{aligned} & \{1 - P(A)\} \{1 - P(B)\} \\ &= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A)P(B)\} \\ &= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\ &= 1 - P(A \cup B) \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

- 11 $P(A^c) = \frac{2}{3}$ 에서 $1 - P(A) = \frac{2}{3}$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{3}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{3}P(B), \quad \frac{2}{3}P(B) = \frac{7}{15}$$

$$\therefore P(B) = \frac{7}{10}$$

- 12 A 가 이긴 경기를 ○, 진 경기를 ×로 나타내면 4번째 경기에서 A 가 우승하는 경우는 ○×○○이다.

이때 한 경기에서 A 가 B 를 이길 확률이 $\frac{2}{5}$ 이므로 구하는

확률은

$$\frac{2}{5} \times \left(1 - \frac{2}{5}\right) \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{24}{625}$$

- 13 (i) 3경기 중 1경기만 이길 확률은

$${}_3C_1 \left(\frac{4}{5}\right)^1 \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{12}{125}$$

- (ii) 3경기 중 1경기도 이기지 못할 확률은

$${}_3C_0 \left(\frac{4}{5}\right)^0 \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$$

- (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{12}{125} + \frac{1}{125} = \frac{13}{125}$$

- 14 $a - b = 3$ 에서 $0 \leq a \leq 5, 0 \leq b \leq 4$ 이므로

$$a = 3, b = 0 \text{ 또는 } a = 4, b = 1 \text{ 또는 } a = 5, b = 2$$

한 개의 주사위를 던져서 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 한

개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

- (i) $a = 3, b = 0$ 인 경우

$a = 3$ 일 확률은 주사위를 5번 던져서 홀수의 눈이 3번 나올 확률이므로

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$$

$b = 0$ 일 확률은 동전을 4번 던져서 앞면이 나오지 않을 확률이므로

$${}_4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$\text{따라서 } a = 3, b = 0 \text{일 확률은 } \frac{5}{16} \times \frac{1}{16} = \frac{5}{256}$$

- (ii) $a = 4, b = 1$ 인 경우

$a = 4$ 일 확률은 주사위를 5번 던져서 홀수의 눈이 4번 나올 확률이므로

$${}_5C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}$$

$b = 1$ 일 확률은 동전을 4번 던져서 앞면이 1번 나올 확률이므로

$${}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } a = 4, b = 1 \text{일 확률은 } \frac{5}{32} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{128}$$

- (iii) $a = 5, b = 2$ 인 경우

$a = 5$ 일 확률은 주사위를 5번 던져서 홀수의 눈이 5번 나올 확률이므로

$${}_5C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}$$

$b = 2$ 일 확률은 동전을 4번 던져서 앞면이 2번 나올 확률이므로

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$\text{따라서 } a = 5, b = 2 \text{일 확률은 } \frac{1}{32} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{256}$$

- (i), (ii), (iii)에서 $a - b = 3$ 일 확률은

$$\frac{5}{256} + \frac{5}{128} + \frac{3}{256} = \frac{9}{128}$$

따라서 $p = 128, q = 9$ 이므로

$$p + q = 137$$

- 15 A 주머니에서 흰 구슬 2개를 꺼내는 사건을 A_1 , A 주머니에서 흰 구슬 1개와 검은 구슬 1개를 꺼내는 사건을 A_2 , A 주머니에서 검은 구슬 2개를 꺼내는 사건을 A_3 , B 주머니에서 흰 구슬 1개를 꺼내는 사건을 B 라 하자.

(i) A 주머니에서 흰 구슬 2개를 꺼낸 경우

흰 구슬 2개를 B 주머니에 더 넣었으므로 B 주머니에는 흰 구슬 5개와 검은 구슬 4개가 들어 있다.

A 주머니에서 흰 구슬 2개를 꺼내고 B 주머니에서 흰 구슬 1개를 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap B) &= P(A_1)P(B|A_1) \\ &= \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

(ii) A 주머니에서 흰 구슬 1개, 검은 구슬 1개를 꺼낸 경우
흰 구슬 1개와 검은 구슬 1개를 B 주머니에 더 넣었으므로 B 주머니에는 흰 구슬 4개와 검은 구슬 5개가 들어 있다.

A 주머니에서 흰 구슬 1개와 검은 구슬 1개를 꺼내고 B 주머니에서 흰 구슬 1개를 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned} P(A_2 \cap B) &= P(A_2)P(B|A_2) \\ &= \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} \times \frac{4}{9} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

(iii) A 주머니에서 검은 구슬 2개를 꺼낸 경우

검은 구슬 2개를 B 주머니에 더 넣었으므로 B 주머니에는 흰 구슬 3개와 검은 구슬 6개가 들어 있다.

A 주머니에서 검은 구슬 2개를 꺼내고 B 주머니에서 흰 구슬 1개를 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned} P(A_3 \cap B) &= P(A_3)P(B|A_3) \\ &= \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} \times \frac{3}{9} = \frac{3}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) \\ &= \frac{1}{18} + \frac{4}{15} + \frac{1}{10} = \frac{19}{45} \end{aligned}$$

16 카드 A를 뽑는 사건을 A, 카드 B를 뽑는 사건을 B, 카드 C를 뽑는 사건을 C, 보이는 면에 가 그려져 있는 사건을 D라 하면

$$P(A \cap D) = P(A)P(D|A) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$$

$$P(B \cap D) = P(B)P(D|B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(C \cap D) = P(C)P(D|C) = \frac{1}{3} \times 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

17 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자의 합이 소수인 사건을 A, 동전의 앞면이 2번 나오는 사건을 B라 하자.

2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자의 합이 소수인 경우는 (1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4)의 4가지이므로

$$P(A) = \frac{4}{{}_4C_2} = \frac{2}{3}$$

동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

(i) 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자의 합이 소수이고, 동전을 2번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{2}{3} \times {}_2C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(ii) 꺼낸 공에 적혀 있는 숫자의 합이 소수가 아니고, 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 동전의 앞면이 2번 나올 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{24}} = \frac{4}{7}$$

18 정육면체를 던져서 1, 3이 나올 확률은 각각 $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$

정육면체를 6번 던질 때, 1, 3이 나오는 횟수를 각각 a, b라 하면 $a+b=6$

a, b는 6 이하의 음이 아닌 정수이고 점 P가 처음 출발한 위치로 다시 돌아오려면 움직인 거리가 6의 배수이어야 하므로 $a+3b=6$ 또는 $a+3b=12$ 또는 $a+3b=18$

(i) $a+b=6, a+3b=6$ 을 연립하여 풀면 $a=6, b=0$

따라서 정육면체를 6번 던져서 1이 6번 나올 확률은

$${}_6C_6 \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{64}{729}$$

(ii) $a+b=6, a+3b=12$ 를 연립하여 풀면 $a=3, b=3$

따라서 정육면체를 6번 던져서 1이 3번 나올 확률은

$${}_6C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{160}{729}$$

(iii) $a+b=6, a+3b=18$ 을 연립하여 풀면 $a=0, b=6$

따라서 정육면체를 6번 던져서 1이 나오지 않을 확률은

$${}_6C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{64}{729} + \frac{160}{729} + \frac{1}{729} = \frac{25}{81}$$

III-1 01 이산확률변수와 이항분포

1 이산확률변수와 확률질량함수

개념 CHECK

81쪽

1 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

2 답 (1) 0, 1, 2 (2) 풀이 참조 (3) 풀이 참조

(1) 한 개의 주사위를 2번 던지므로 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

(2) 한 개의 주사위를 던져서 소수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 그 외의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(3)

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

3 답 (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{5}{8}$

(1) 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{4} + a + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{8}$$

(2) $P(X=1 \text{ 또는 } X=3) = P(X=1) + P(X=3)$

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

(3) $P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3)$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

문제

82~83쪽

01-1 답 (1) 10 (2) $\frac{3}{10}$

(1) 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{k}$	$\frac{2}{k}$	$\frac{3}{k}$	$\frac{4}{k}$	1

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \frac{3}{k} + \frac{4}{k} = 1 \quad \therefore k=10$$

(2) $P(X \leq 2) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$

01-2 답 $\frac{5}{8}$

확률은 0에서 1까지의 값을 가지므로

$$0 \leq a^2 \leq 1, 0 \leq \frac{a}{2} \leq 1$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + a^2 + \frac{a}{2} = 1, 2a^2 + a - 1 = 0$$

$$(a+1)(2a-1)=0 \quad \therefore a = \frac{1}{2} (\because \textcircled{1})$$

$X^2 - X - 2 < 0$ 에서

$$(X+1)(X-2) < 0 \quad \therefore -1 < X < 2$$

$$\therefore P(X^2 - X - 2 < 0) = P(-1 < X < 2)$$

$$= P(X=0) + P(X=1)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

01-3 답 $\frac{9}{8}$

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + \dots + P(X=9) = 1$$

$$\frac{k}{2 \times 1} + \frac{k}{3 \times 2} + \frac{k}{4 \times 3} + \dots + \frac{k}{9 \times 8} = 1$$

$$k \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) \right\} = 1$$

$$k \left(1 - \frac{1}{9}\right) = 1, \frac{8}{9}k = 1$$

$$\therefore k = \frac{9}{8}$$

02-1 답 (1) $P(X=x) = \frac{{}_3C_x \times {}_4C_{3-x}}{{}_7C_3} \quad (x=0, 1, 2, 3)$

(2) 풀이 참조 (3) $\frac{16}{35}$

(1) 3명의 대표를 뽑으므로 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

이때 7명 중에서 3명의 대표를 뽑는 경우의 수는 ${}_7C_3$ 이고,

뽑힌 여학생이 x 명인 경우의 수는 ${}_3C_x \times {}_4C_{3-x}$ 이다.

따라서 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = \frac{{}_3C_x \times {}_4C_{3-x}}{{}_7C_3} \quad (x=0, 1, 2, 3)$$

(2) 확률변수 X 가 가질 수 있는 각 값에 대한 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_3C_0 \times {}_4C_3}}{{}_7C_3} = \frac{4}{35}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_3C_1 \times {}_4C_2}}{{}_7C_3} = \frac{18}{35}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_3C_2 \times {}_4C_1}}{{}_7C_3} = \frac{12}{35}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_3C_3 \times {}_4C_0}}{{}_7C_3} = \frac{1}{35}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

(3) 구하는 확률은

$$P(X=0 \text{ 또는 } X=2) = P(X=0) + P(X=2) \\ = \frac{4}{35} + \frac{12}{35} = \frac{16}{35}$$

02-2 답 $\frac{1}{3}$

$$X^2 - 6X + 5 = 0 \text{에서 } (X-1)(X-5) = 0$$

$$\therefore X=1 \text{ 또는 } X=5$$

$$\therefore P(X^2 - 6X + 5 = 0)$$

$$= P(X=1 \text{ 또는 } X=5)$$

$$= P(X=1) + P(X=5) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(i) $X=1$ 인 경우

(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3),
(4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)의 10가지이므로

$$P(X=1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

(ii) $X=5$ 인 경우

(1, 6), (6, 1)의 2가지이므로

$$P(X=5) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

따라서 $\textcircled{7}$ 에서

$$P(X^2 - 6X + 5 = 0) = \frac{5}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{3}$$

2 이산확률변수의 기댓값과 표준편차

개념 CHECK

85쪽

1 답 (1) 9 (2) 3

$$(1) V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ = 13 - 2^2 = 9$$

$$(2) \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{9} = 3$$

2 답 (1) 2 (2) 5 (3) 1 (4) 1

$$(1) E(X) = 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{8} = 2$$

$$(2) E(X^2) = 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} + 4^2 \times \frac{1}{8} = 5$$

$$(3) V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ = 5 - 2^2 = 1$$

$$(4) \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1} = 1$$

문제

86~87쪽

03-1 답 (1) $a=2$, $b=\frac{1}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{11}}{2}$

(1) 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{2} + b + \frac{1}{4} = 1 \quad \therefore b = \frac{1}{4}$$

$$E(X) = -\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$-a \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4} + a \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \quad \therefore a = 2$$

$$(2) E(X^2) = (-2)^2 \times \frac{1}{2} + 0^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} = 3 \text{이므로}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

03-2 답 1

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{4}{a} + \frac{3}{a} + \frac{2}{a} + \frac{1}{a} = 1 \quad \therefore a = 10$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = 1$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{2}{5} + 1^2 \times \frac{3}{10} + 2^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{1}{10} = 2$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 2 - 1^2 = 1$$

04-1 답 $\frac{28}{75}$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 각각의 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}^3C_0 \times {}^7C_2}{{}^{10}C_2} = \frac{7}{15}$$

$$P(X=1) = \frac{{}^3C_1 \times {}^7C_1}{{}^{10}C_2} = \frac{7}{15}$$

$$P(X=2) = \frac{{}^3C_2 \times {}^7C_0}{{}^{10}C_2} = \frac{1}{15}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{7}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{3}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{7}{15} + 1^2 \times \frac{7}{15} + 2^2 \times \frac{1}{15} = \frac{11}{15}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{11}{15} - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{28}{75}$$

04-2 답 2/3

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 각각의 확률은

$$P(X=0) = {}_2C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$P(X=1) = {}_2C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{4}{9}$$

$$P(X=2) = {}_2C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{9}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{4}{9} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{4}{9} + 1^2 \times \frac{4}{9} + 2^2 \times \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\begin{aligned} \therefore V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{8}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

3 이산확률변수 $aX+b$ 의 평균, 분산, 표준편차

개념 CHECK

88쪽

1 답 (1) 평균: 10, 분산: 36, 표준편차: 6

(2) 평균: 11, 분산: 81, 표준편차: 9

$$E(X)=5, V(X)=9, \sigma(X)=\sqrt{9}=3 \text{이므로}$$

$$(1) E(2X) = 2E(X) = 2 \times 5 = 10$$

$$V(2X) = 2^2 V(X) = 4 \times 9 = 36$$

$$\sigma(2X) = |2| \sigma(X) = 2 \times 3 = 6$$

$$(2) E(3X-4) = 3E(X) - 4 = 3 \times 5 - 4 = 11$$

$$V(3X-4) = 3^2 V(X) = 9 \times 9 = 81$$

$$\sigma(3X-4) = |3| \sigma(X) = 3 \times 3 = 9$$

문제

89~91쪽

05-1 답 32

$$E(X)=5, E(X^2)=27 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= 27 - 5^2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore V(-4X+5) &= (-4)^2 V(X) \\ &= 16 \times 2 = 32 \end{aligned}$$

05-2 답 1

$$E(Y)=-1 \text{에서 } E(3X+2)=-1$$

$$3E(X)+2=-1 \quad \therefore E(X)=-1$$

$$V(Y)=36 \text{에서 } V(3X+2)=36$$

$$3^2 V(X)=36 \quad \therefore V(X)=4$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4} = 2$$

$$\therefore E(X) + \sigma(X) = -1 + 2 = 1$$

05-3 답 70

$$E(Y)=30 \text{에서 } E(aX+b)=30$$

$$aE(X)+b=30$$

$$\text{이때 } E(X)=1 \text{이므로 } a+b=30 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } V(Y)=1600 \text{에서 } V(aX+b)=1600$$

$$a^2 V(X)=1600$$

$$\text{이때 } V(X)=4 \text{이므로}$$

$$4a^2=1600, a^2=400 \quad \therefore a=-20 (\because a<0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$-20+b=30 \quad \therefore b=50$$

$$\therefore b-a=50-(-20)=70$$

06-1 답 평균: 2, 분산: 13, 표준편차: $\sqrt{13}$

확률의 총합은 1이므로

$$a + \frac{1}{8} + 2a + \frac{1}{8} = 1, 3a = \frac{3}{4} \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

확률변수 X 의 확률분포를 나타낸 표를 완성하면

X	-2	0	1	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = -2 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = (-2)^2 \times \frac{1}{4} + 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 4^2 \times \frac{1}{8} = \frac{7}{2}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{7}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

따라서 $Y=2X+1$ 의 평균 $E(Y)$, 분산 $V(Y)$, 표준편차 $\sigma(Y)$ 는

$$E(Y) = E(2X+1) = 2E(X) + 1$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 2$$

$$V(Y) = V(2X+1) = 2^2 V(X)$$

$$= 4 \times \frac{13}{4} = 13$$

$$\sigma(Y) = \sigma(2X+1) = |2| \sigma(X)$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}$$

06-2 [답] -13

확률의 총합은 1이므로

$$k+2k+3k+4k=1, 10k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{10}$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

$$E(X)=2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{3}{10} + 5 \times \frac{2}{5} = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore E(-5X+7) &= -5E(X)+7 \\ &= -5 \times 4 + 7 = -13 \end{aligned}$$

07-1 [답] 평균: 8, 분산: 3

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 각각의 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_2C_0 \times {}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{2}{3}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_2C_2 \times {}_2C_0}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = 1$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{2}{3} + 2^2 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{4}{3} - 1^2 = \frac{1}{3}$$

따라서 $Y=3X+5$ 의 평균 $E(Y)$ 와 분산 $V(Y)$ 는

$$E(Y) = E(3X+5) = 3E(X) + 5 = 3 \times 1 + 5 = 8$$

$$V(Y) = V(3X+5) = 3^2 V(X) = 9 \times \frac{1}{3} = 3$$

07-2 [답] $\frac{11}{3}$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 각각의 확률은

$$P(X=0) = \frac{1}{6}, P(X=1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(X=3) = \frac{1}{6}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$$

$$\begin{aligned} \therefore V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{19}{6} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{11}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore V(-2X+4) &= (-2)^2 V(X) \\ &= 4 \times \frac{11}{12} = \frac{11}{3} \end{aligned}$$

4 이항분포

개념 CHECK

94쪽

1 [답] (1) $B(10, 0.4)$ (2) 이항분포를 따르지 않는다.

2 [답] (1) $P(X=x) = {}_6C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{6-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 6)$

$$(2) \frac{20}{243}$$

$$(2) P(X=4) = {}_6C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20}{243}$$

3 [답] (1) 평균: 180, 분산: 90, 표준편차: $3\sqrt{10}$

(2) 평균: 12, 분산: 9, 표준편차: 3

$$(1) E(X) = 360 \times \frac{1}{2} = 180$$

$$V(X) = 360 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 90$$

$$\sigma(X) = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

$$(2) E(X) = 48 \times \frac{1}{4} = 12$$

$$V(X) = 48 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 9$$

$$\sigma(X) = \sqrt{9} = 3$$

문제

95~97쪽

08-1 [답] (1) $B\left(10, \frac{1}{10}\right)$

$$(2) P(X=x) = {}_{10}C_x \left(\frac{1}{10}\right)^x \left(\frac{9}{10}\right)^{10-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 10)$$

(3) 91

(1) 10개의 제품을 조사하므로 10회의 독립시행이고, 한 개의 제품을 조사할 때 불량품일 확률은 $\frac{1}{10}$ 이므로 확

률변수 X 는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{10}\right)$ 을 따른다.

(3) 불량품이 9개 이상일 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 9) &= P(X=9) + P(X=10) \\ &= {}_{10}C_9 \left(\frac{1}{10}\right)^9 \left(\frac{9}{10}\right)^1 + {}_{10}C_{10} \left(\frac{1}{10}\right)^{10} \left(\frac{9}{10}\right)^0 \\ &= \frac{90}{10^{10}} + \frac{1}{10^{10}} = \frac{91}{10^{10}} \\ \therefore a &= 91 \end{aligned}$$

08-2 **답** $\frac{113}{625}$

타석이 4번이므로 4회의 독립시행이고, 한 번의 타석에서 안타를 칠 확률은 $\frac{1}{5}$ 이므로 안타를 치는 횟수를 X 라 하면

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(4, \frac{1}{5}\right)$ 을 따른다.

이때 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_4C_x \left(\frac{1}{5}\right)^x \left(\frac{4}{5}\right)^{4-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4)$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - \{P(X=0) + P(X=1)\} \\ &= 1 - \left\{ {}_4C_0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^4 + {}_4C_1 \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \right\} \\ &= 1 - \left(\frac{256}{625} + \frac{256}{625} \right) \\ &= \frac{113}{625} \end{aligned}$$

09-1 **답** (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{16}{3}$

(1) $E(X) = 2$ 에서

$$n \times \frac{1}{3} = 2 \quad \therefore n = 6$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(6, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

X 의 분산은

$$V(X) = 6 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

(2) $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} E(X^2) &= V(X) + \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{4}{3} + 2^2 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

09-2 **답** 평균: 20, 표준편차: 2

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(25, \frac{4}{5}\right)$ 를 따르므로 X 의 평균과 표준편차는

$$E(X) = 25 \times \frac{4}{5} = 20$$

$$\sigma(X) = \sqrt{25 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5}} = 2$$

09-3 **답** $n=64, p=\frac{3}{4}$

$E(X) = 48, V(X) = 12$ 이므로

$$E(X) = np = 48 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$V(X) = np(1-p) = 12 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면 } 48(1-p) = 12 \quad \therefore p = \frac{3}{4}$$

$$p = \frac{3}{4} \text{을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } \frac{3}{4}n = 48 \quad \therefore n = 64$$

09-4 **답** $\frac{143}{2048}$

$$V(X) = 3 \text{에서 } n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 3 \quad \therefore n = 12$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(12, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로

X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_{12}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{12-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 12)$$

$$X^2 - 5X + 4 < 0 \text{에서 } (X-1)(X-4) < 0$$

$$\therefore 1 < X < 4$$

$$\therefore P(X^2 - 5X + 4 < 0)$$

$$= P(1 < X < 4)$$

$$= P(X=2) + P(X=3)$$

$$= {}_{12}C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{12}C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$$= \frac{33}{2048} + \frac{55}{1024} = \frac{143}{2048}$$

10-1 **답** (1) 평균: 6, 표준편차: 2

(2) 평균: 1000, 표준편차: 30

(1) 18번 전화를 거므로 18회의 독립시행이고, 한 번 전화를 걸 때 통화가 연결되지 않을 확률은 $\frac{1}{3}$ 이므로 확률변수

X 는 이항분포 $B\left(18, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

따라서 X 의 평균과 표준편차는

$$E(X) = 18 \times \frac{1}{3} = 6$$

$$\sigma(X) = \sqrt{18 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} = 2$$

(2) 씨앗 10000개를 뿌리므로 10000회의 독립시행이고,

한 개의 씨앗이 발아할 확률은 $\frac{1}{10}$ 이므로 확률변수 X

는 이항분포 $B\left(10000, \frac{1}{10}\right)$ 을 따른다.

따라서 X 의 평균과 표준편차는

$$E(X) = 10000 \times \frac{1}{10} = 1000$$

$$\sigma(X) = \sqrt{10000 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10}} = 30$$

10-2 [답 평균: 59, 분산: 108]

한 개의 전구를 꺼내어 확인한 후 다시 넣는 시행을 50회 반복하므로 50회의 독립시행이고, 한 개의 전구를 꺼낼 때 불량인 전구가 나올 확률은 $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ 이므로 확률변수

X 는 이항분포 $B\left(50, \frac{2}{5}\right)$ 를 따른다.

$$\therefore E(X) = 50 \times \frac{2}{5} = 20, V(X) = 50 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = 12$$

따라서 $Y = 3X - 1$ 의 평균 $E(Y)$ 와 분산 $V(Y)$ 는
 $E(Y) = E(3X - 1) = 3E(X) - 1 = 3 \times 20 - 1 = 59$
 $V(Y) = V(3X - 1) = 3^2 V(X) = 9 \times 12 = 108$

10-3 [답 154]

주사위를 n 번 던지므로 n 회의 독립시행이고, 주사위를 한 번 던질 때 2의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$ 이므로 확률변수

X 는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{6}\right)$ 을 따른다.

이때 $E(X) = 12$ 에서

$$n \times \frac{1}{6} = 12 \quad \therefore n = 72$$

$$\therefore V(X) = 72 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 10$$

이때 $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 이므로

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 10 + 12^2 = 154$$

연습문제

98~101쪽

- | | | | | |
|------------------|-----------------------|------------------|--------|------------------------|
| 1 $\frac{1}{15}$ | 2 $\frac{23}{40}$ | 3 ④ | 4 6 | 5 ⑤ |
| 6 $\frac{5}{12}$ | 7 ① | 8 6 | 9 150원 | 10 ④ |
| 11 25 | 12 평균: 50점, 표준편차: 10점 | 13 ⑤ | | |
| 14 ③ | 15 10 | 16 $3\sqrt{5}$ | 17 ② | 18 $\frac{1013}{1024}$ |
| 19 15 | 20 17 | 21 $\frac{3}{5}$ | 22 28 | 23 ③ |
| 24 18 | 25 44000원 | 26 ⑤ | | |

1 확률의 총합은 1이므로

$$k + k + 4k + 9k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{15}$$

2 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{8} + a + \frac{1}{5} + b + \frac{3}{10} = 1 \quad \therefore a + b = \frac{3}{8}$$

$$X^2 - 1 \leq 0 \text{에서 } (X+1)(X-1) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq X \leq 1$$

$$\therefore P(X^2 - 1 \leq 0)$$

$$= P(-1 \leq X \leq 1)$$

$$= P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$= a + \frac{1}{5} + b = \frac{3}{8} + \frac{1}{5} = \frac{23}{40}$$

다른 풀이

$$P(X^2 - 1 \leq 0) = 1 - P(X^2 - 1 > 0)$$

$$= 1 - P(X < -1 \text{ 또는 } X > 1)$$

$$= 1 - \{P(X = -2) + P(X = 2)\}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{10}\right) = \frac{23}{40}$$

3 $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{k}{3}$ 에서

$$P(X=k+1) = \frac{k}{3} P(X=k) \quad \dots\dots ⑦$$

⑦의 양변에 $k=1$ 을 대입하면

$$P(X=2) = \frac{1}{3} P(X=1)$$

이때 $P(X=1) = a$ 라 하면

$$P(X=2) = \frac{1}{3} a$$

⑦의 양변에 $k=2$ 를 대입하면

$$P(X=3) = \frac{2}{3} P(X=2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} a = \frac{2}{9} a$$

⑦의 양변에 $k=3$ 을 대입하면

$$P(X=4) = P(X=3) = \frac{2}{9} a$$

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1$$

$$a + \frac{1}{3} a + \frac{2}{9} a + \frac{2}{9} a = 1, \frac{16}{9} a = 1 \quad \therefore a = \frac{9}{16}$$

$$\therefore P(X=1) = \frac{9}{16}$$

4 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이다.

정사면체를 2번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$4 \times 4 = 16$$

$X=2$ 인 경우는 (1, 1)의 1가지이므로

$$P(X=2) = \frac{1}{16}$$

$X=3$ 인 경우는 (1, 2), (2, 1)의 2가지이므로

$$P(X=3) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$X=4$ 인 경우는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지이므로

$$P(X=4) = \frac{3}{16}$$

$X=5$ 인 경우는 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지
이므로

$$P(X=5) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$X=6$ 인 경우는 (2, 4), (3, 3), (4, 2)의 3가지이므로

$$P(X=6)=\frac{3}{16}$$

$X=7$ 인 경우는 (3, 4), (4, 3)의 2가지이므로

$$P(X=7)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

$X=8$ 인 경우는 (4, 4)의 1가지이므로

$$P(X=8)=\frac{1}{16}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

이때 $P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=\frac{3}{8}$ 이므로

$$P(X \geq 6)=\frac{3}{8} \quad \therefore a=6$$

5 $P(0 \leq X \leq 2)=\frac{7}{8}$ 에서

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{3+a}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \quad \therefore a=2$$

$$\therefore E(X) = -1 \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{5}{8} + 2 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

6 확률의 총합은 1이므로

$$a + \frac{1}{3} + b = 1 \quad \therefore a + b = \frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{한편 } E(X) = 0 \times a + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times b = 1 + 4b,$$

$$E(X^2) = 0^2 \times a + 3^2 \times \frac{1}{3} + 4^2 \times b = 3 + 16b \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 3 + 16b - (1 + 4b)^2 \\ &= -16b^2 + 8b + 2 = -16\left(b - \frac{1}{4}\right)^2 + 3 \end{aligned}$$

따라서 분산 $V(X)$ 는 $b = \frac{1}{4}$ 일 때 최대이므로 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a + \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \quad \therefore a = \frac{5}{12}$$

7 홀수가 적힌 공은 3개, 짝수가 적힌 공은 2개이므로 3개의 공을 꺼낼 때, 홀수가 적힌 공은 적어도 1개 나온다. 즉, 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고 각각의 확률은

$$P(X=1) = \frac{{}^3C_1 \times {}^2C_2}{{}^5C_3} = \frac{3}{10}, \quad P(X=2) = \frac{{}^3C_2 \times {}^2C_1}{{}^5C_3} = \frac{3}{5}$$

$$P(X=3) = \frac{{}^3C_3 \times {}^2C_0}{{}^5C_3} = \frac{1}{10}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{5}$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{3}{10} + 2^2 \times \frac{3}{5} + 3^2 \times \frac{1}{10} = \frac{18}{5}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{18}{5} - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

8 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이다.

8장의 카드 중에서 2장을 택하는 경우의 수는 ${}_8C_2=28$

$X=1$ 인 경우는 (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8)의 7가지이므로

$$P(X=1) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

$X=2$ 인 경우는 (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7), (6, 8)의 6가지이므로

$$P(X=2) = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

$X=3$ 인 경우는 (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8)의 5가지이므로

$$P(X=3) = \frac{5}{28}$$

$X=4$ 인 경우는 (1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8)의 4가지이므로

$$P(X=4) = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

$X=5$ 인 경우는 (1, 6), (2, 7), (3, 8)의 3가지이므로

$$P(X=5) = \frac{3}{28}$$

$X=6$ 인 경우는 (1, 7), (2, 8)의 2가지이므로

$$P(X=6) = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$$

$X=7$ 인 경우는 (1, 8)의 1가지이므로

$$P(X=7) = \frac{1}{28}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{28}$	1

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{3}{14} + 3 \times \frac{5}{28} + 4 \times \frac{1}{7} + 5 \times \frac{3}{28} \\ &\quad + 6 \times \frac{1}{14} + 7 \times \frac{1}{28} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{3}{14} + 3^2 \times \frac{5}{28} + 4^2 \times \frac{1}{7} \\
 &\quad + 5^2 \times \frac{3}{28} + 6^2 \times \frac{1}{14} + 7^2 \times \frac{1}{28} \\
 &= 12 \\
 \therefore V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 12 - 3^2 = 3 \\
 \therefore E(X) + V(X) &= 3 + 3 = 6
 \end{aligned}$$

- 9 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때, 서로 다른 3개의 동전을 동시에 던져서 나오는 각 경우에 따라 받을 수 있는 상금은

HHH → 300원
 HHT, HTH, THH → 200원
 HTT, THT, TTH → 100원
 TTT → 0원

받을 수 있는 상금을 X 원이라 하면 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 100, 200, 300이고 각각의 확률은

$$P(X=0) = \frac{1}{8}, P(X=100) = \frac{3}{8}$$

$$P(X=200) = \frac{3}{8}, P(X=300) = \frac{1}{8}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	100	200	300	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 0 \times \frac{1}{8} + 100 \times \frac{3}{8} + 200 \times \frac{3}{8} + 300 \times \frac{1}{8} \\
 &= 150
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 기댓값은 150원이다.

- 10 $E(X)=3$ 에서

$$E(Y) = E(3X - 12) = 3E(X) - 12$$

$$= 3 \times 3 - 12 = -3$$

$$V(X) = 5 \text{에서}$$

$$V(Y) = V(3X - 12) = 3^2 V(X)$$

$$= 9 \times 5 = 45$$

$$\therefore E(Y) + V(Y) = -3 + 45 = 42$$

- 11 $E(2X-1)=7$ 에서

$$2E(X) - 1 = 7 \quad \therefore E(X) = 4$$

$$\sigma(-2X+4)=6 \text{에서}$$

$$|-2|\sigma(X)| = 6 \quad \therefore \sigma(X) = 3$$

$$\therefore V(X) = \{\sigma(X)\}^2 = 9$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \text{이므로}$$

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2$$

$$= 9 + 4^2 = 25$$

- 12 $E(X)=m, \sigma(X)=\sigma$ 이므로 표준점수 T 의 평균, 표준편차는

$$E(T) = E\left(10 \times \frac{X-m}{\sigma} + 50\right)$$

$$= \frac{10}{\sigma} E(X) - \frac{10m}{\sigma} + 50$$

$$= \frac{10m}{\sigma} - \frac{10m}{\sigma} + 50 = 50 \text{(점)}$$

$$\sigma(T) = \sigma\left(10 \times \frac{X-m}{\sigma} + 50\right)$$

$$= \left|\frac{10}{\sigma}\right| \sigma(X)$$

$$= \frac{10}{\sigma} \times \sigma = 10 \text{(점)}$$

- 13 $Y=10X-2.21$ 이라 하자. 확률변수 Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	-1	0	1	합계
$P(Y=y)$	a	b	$\frac{2}{3}$	1

$$E(X) = 0.271 \text{에서}$$

$$E(Y) = E(10X - 2.21) = 10E(X) - 2.21$$

$$= 10 \times 0.271 - 2.21 = 0.5$$

$$-1 \times a + 0 \times b + 1 \times \frac{2}{3} = 0.5 \text{이므로 } a = \boxed{\frac{1}{6}}$$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{6} + b + \frac{2}{3} = 1 \quad \therefore b = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$E(Y^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{6} + 0^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{2}{3} = \frac{5}{6} \text{이므로}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = \frac{5}{6} - 0.5^2 = \frac{7}{12}$$

한편, $Y=10X-2.21$ 이므로

$$V(Y) = V(10X - 2.21)$$

$$= 10^2 V(X) = \boxed{\frac{100}{12}} \times V(X)$$

$$\therefore V(X) = \frac{1}{\boxed{\frac{100}{12}}} \times \frac{7}{12} \text{이다.}$$

$$\therefore p = \frac{1}{6}, q = \frac{1}{6}, r = 100 \quad \therefore pqr = \frac{25}{9}$$

- 14 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + a + \frac{1}{8} = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{2} \text{이므로}$$

$$E\left(\frac{1}{a}X + 1\right) = E(2X + 1) = 2E(X) + 1$$

$$= 2 \times \frac{5}{2} + 1 = 6$$

- 15 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	-1	0	1	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

$$E(X) = -2 \times \frac{1}{10} + (-1) \times \frac{1}{5} + 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{2}{5} = 0$$

$$E(X^2) = (-2)^2 \times \frac{1}{10} + (-1)^2 \times \frac{1}{5} + 0^2 \times \frac{3}{10} + 1^2 \times \frac{2}{5} = 1$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 1 - 0^2 = 1$$

$$E(Y) = 2 \text{에서 } E(aX+b) = 2$$

$$aE(X) + b = 2 \quad \therefore b = 2$$

$$V(Y) = 6 \text{에서 } V(aX+b) = 6$$

$$a^2 V(X) = 6 \quad \therefore a^2 = 6$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6 + 2^2 = 10$$

- 16 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이다.

$X=1$ 인 경우는 1이 적힌 카드는 반드시 뽑고 2, 3, 4, 5가 적힌 카드 중에서 2장을 뽑으면 되므로

$$P(X=1) = \frac{{}_4C_2}{{}_5C_3} = \frac{3}{5}$$

$X=2$ 인 경우는 2가 적힌 카드는 반드시 뽑고 3, 4, 5가 적힌 카드 중에서 2장을 뽑으면 되므로

$$P(X=2) = \frac{{}_3C_2}{{}_5C_3} = \frac{3}{10}$$

$X=3$ 인 경우는 3이 적힌 카드는 반드시 뽑고 4, 5가 적힌 카드 중에서 2장을 뽑으면 되므로

$$P(X=3) = \frac{{}_2C_2}{{}_5C_3} = \frac{1}{10}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{3}{5} + 2^2 \times \frac{3}{10} + 3^2 \times \frac{1}{10} = \frac{27}{10}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{27}{10} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{20}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{9}{20}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

$$\therefore \sigma(-10X+3) = |-10| \sigma(X) = 10 \times \frac{3\sqrt{5}}{10} = 3\sqrt{5}$$

- 17 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(8, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로 X 의 확률 질량함수는

$$P(X=x) = {}_8C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{8-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 8)$$

$$X^2 - 8X + 7 > 0 \text{에서 } (X-1)(X-7) > 0$$

$$\therefore X < 1 \text{ 또는 } X > 7$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X^2 - 8X + 7 > 0) &= P(X < 1) + P(X > 7) \\ &= P(X=0) + P(X=8) \\ &= {}_8C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}_8C_8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\ &= \frac{1}{256} + \frac{1}{256} = \frac{1}{128} \end{aligned}$$

- 18 10개의 문제에 답하므로 10회의 독립시행이고, 한 개의 문제를 맞힐 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로 맞힌 문제의 개수를 X 라 하

면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

이때 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 10)$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - \{P(X=0) + P(X=1)\} \\ &= 1 - \left\{ {}_{10}C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \right\} \\ &= 1 - \frac{11}{1024} = \frac{1013}{1024} \end{aligned}$$

- 19 $E(X) = 20$ 에서

$$80 \times p = 20 \quad \therefore p = \frac{1}{4}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(80, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = 80 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 15$$

- 20 주사위를 30번 던지므로 30회의 독립시행이고, 주사위를 한 번 던져서 6의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$ 이므로 확률변수

X 는 이항분포 $B\left(30, \frac{1}{6}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore V(X) = 30 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{6}$$

동전을 n 번 던지므로 n 회의 독립시행이고, 동전을 한 번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로 확률변수 Y 는 이항

분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore V(Y) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$$

X 의 분산이 Y 의 분산보다 작으므로

$$\frac{25}{6} < \frac{n}{4} \quad \therefore n > \frac{50}{3}$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 17이다.

21 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6이므로

$$P(X > 4) = P(X=5) + P(X=6)$$

(i) $X=5$ 일 때

4번째 시행까지 새 건전지 1개와 폐건전지 3개를 꺼내고 5번째 시행에서 새 건전지를 꺼내야 하므로

$$P(X=5) = \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_3}{{}_6C_4} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{15}$$

(ii) $X=6$ 일 때

5번째 시행까지 새 건전지 1개와 폐건전지 4개를 꺼내고 6번째 시행에서 새 건전지를 꺼내야 하므로

$$P(X=6) = \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_4}{{}_6C_5} \times 1 = \frac{1}{3}$$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= P(X=5) + P(X=6) \\ &= \frac{4}{15} + \frac{1}{3} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

다른 풀이

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6이다.

새 건전지를 꺼내는 것을 ○, 폐건전지를 꺼내는 것을 ×로 나타내면

(i) $X=5$ 인 경우

○×××○의 순서로 꺼낼 확률은

$$\frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{15}$$

×○××○의 순서로 꺼낼 확률은

$$\frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{15}$$

××○×○의 순서로 꺼낼 확률은

$$\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{15}$$

×××○○의 순서로 꺼낼 확률은

$$\frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{15}$$

$$\therefore P(X=5) = \frac{4}{15}$$

(ii) $X=6$ 인 경우

○××××○의 순서로 꺼낼 확률은

$$\frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{15}$$

같은 방법으로 ×○×××○, ××○××○,

×××○×○, ××××○○의 순서로 꺼낼 확률도

각각 $\frac{1}{15}$ 이므로

$$P(X=6) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned} P(X > 4) &= P(X=5) + P(X=6) \\ &= \frac{4}{15} + \frac{1}{3} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

22 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다고 하자.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	1

$E(X)=4$ 에서

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 = 4$$

$P(Y=k) = \frac{1}{2}P(X=k) + \frac{1}{10}$ 이므로 확률변수 Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	2	3	4	5	합계
$P(Y=y)$	$\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_4 + \frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}p_5 + \frac{1}{10}$	1

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{10} + 2\left(\frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{10}\right) + 3\left(\frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{10}\right) \\ &\quad + 4\left(\frac{1}{2}p_4 + \frac{1}{10}\right) + 5\left(\frac{1}{2}p_5 + \frac{1}{10}\right) \\ &= \frac{1}{2}(p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 5p_5) \\ &\quad + \frac{1}{10}(1+2+3+4+5) \\ &= \frac{1}{2} \times 4 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{7}{2}$ 이므로 $8a = 28$

23 40명이 예약하였으므로 40회의 독립시행이고, 예약 취소율은 0.1이므로 유람선에 탑승할 확률은 0.9이다.

즉, 탑승하는 사람 수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B(40, 0.9)$ 를 따른다.

이때 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_{40}C_x 0.9^x 0.1^{40-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 40)$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X > 38) &= P(X=39) + P(X=40) \\ &= {}_{40}C_{39} 0.9^{39} 0.1^1 + {}_{40}C_{40} 0.9^{40} 0.1^0 \\ &= 40 \times 0.0164 \times 0.1 + 0.0148 \\ &= 0.0656 + 0.0148 = 0.0804 \end{aligned}$$

24 $E(3X)=18$ 에서

$$3E(X)=18, E(X)=6 \quad \therefore np=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$E(3X^2)=120$ 에서

$$3E(X^2)=120 \quad \therefore E(X^2)=40$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 40 - 6^2 = 4$$

$$\therefore np(1-p)=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하면

$$6(1-p)=4 \quad \therefore p=\frac{1}{3}$$

$p = \frac{1}{3}$ 을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{3}n = 6 \quad \therefore n = 18$$

- 25 꺼낸 3개의 공이 한 종류의 색일 확률은 파란 공 3개를 꺼낼 확률과 같으므로

$$\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3} = \frac{1}{35}$$

꺼낸 3개의 공이 세 종류의 색일 확률은 각각의 색의 공을 1개씩 꺼낼 확률과 같으므로

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_7C_3} = \frac{12}{35}$$

따라서 꺼낸 3개의 공이 두 종류의 색일 확률은

$$1 - \left(\frac{1}{35} + \frac{12}{35} \right) = \frac{22}{35}$$

700회의 시행에서 꺼낸 공이 두 종류의 색인 횟수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(700, \frac{22}{35}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 700 \times \frac{22}{35} = 440$$

횟수 당 100원씩 받으므로 받는 금액은 $100X$

따라서 구하는 기댓값은

$$\begin{aligned} E(100X) &= 100E(X) \\ &= 100 \times 440 = 44000(\text{원}) \end{aligned}$$

- 26 주사위를 한 번 던져서 소수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로 A 가 주사위를 60번 던져서 소수의 눈이 나오는 횟수를 A 라 하면 확률변수 A 는 이항분포 $B\left(60, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore V(A) = 60 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 15$$

이때 A 의 점수가 확률변수 X 이므로

$$X = 3A + 2(60 - A) = A + 120$$

$$\therefore V(X) = V(A + 120) = V(A) = 15$$

주사위를 한 번 던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$ 이므로 B 가 주사위를 60번 던져서 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 B 라 하면 확률변수 B 는 이항분포 $B\left(60, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore V(B) = 60 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{40}{3}$$

이때 B 의 점수가 확률변수 Y 이므로

$$Y = 4B + (60 - B) = 3B + 60$$

$$\begin{aligned} \therefore V(Y) &= V(3B + 60) = 3^2 V(B) \\ &= 9 \times \frac{40}{3} = 120 \end{aligned}$$

$$\therefore V(X) + V(Y) = 15 + 120 = 135$$

III-1 02 연속확률변수와 정규분포

1 연속확률변수와 확률밀도함수

개념 CHECK

103쪽

- 1 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

- 2 답 ㄴ, ㄹ

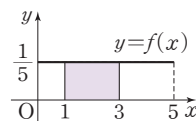
ㄱ. $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이 아니다.

ㄷ. $0 \leq x < 1$ 에서 $f(x) < 0$ 이다.

따라서 보기 중 확률밀도함수가 될 수 있는 것은 ㄴ, ㄹ이다.

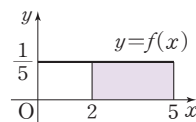
- 3 답 (1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{3}{5}$

- (1) 구하는 확률은 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$$P(1 \leq X \leq 3) = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

- (2) 구하는 확률은 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=2$, $x=5$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



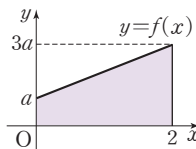
$$P(X \geq 2) = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

문제

104쪽

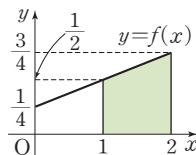
- 01-1 답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{5}{8}$

- (1) $f(x) \geq 0$ 이어야 하므로 $a \geq 0$
 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, y 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로



$$\frac{1}{2} \times (a + 3a) \times 2 = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

- (2) 구하는 확률은 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right) \times 1 \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

01-2 ㉡ $\frac{3}{4}$

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

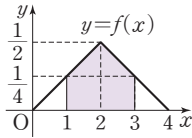
$0 \leq x \leq 2$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 두 점 $(0, 0)$, $(2, \frac{1}{2})$ 을 지나는 직선이므로 그 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x \quad \therefore y = \frac{1}{4}x$$

$$\text{즉, } f(x) = \frac{1}{4}x \quad (0 \leq x \leq 2) \text{이므로 } f(1) = \frac{1}{4}$$

구하는 확률은 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같고, $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(1 \leq X \leq 3) = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4}$$



01-3 ㉡ $\frac{13}{72}$

$f(x) \geq 0$ 이어야 하므로 $a \geq 0$

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, y 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$$2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times a \right) = 1 \quad \therefore a = 1$$

즉, $f(x) = |x-1| \quad (0 \leq x \leq 2)$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{4}{3}\right) = \left| \frac{4}{3} - 1 \right| = \frac{1}{3}$$

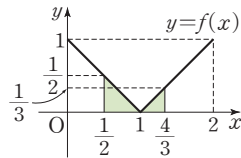
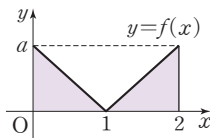
구하는 확률은 $y=f(x)$ 의 그

래프와 x 축 및 두 직선 $x=\frac{1}{2}$,

$x=\frac{4}{3}$ 로 둘러싸인 부분의 넓

이와 같으므로

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{72}$$



2 정규분포

개념 CHECK

108쪽

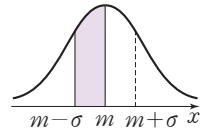
1 ㉡ (1) $N(8, 2^2)$ (2) $N(-10, 5^2)$

2 ㉡ (1) a (2) $0.5-a$ (3) $b-a$ (4) $0.5-b$

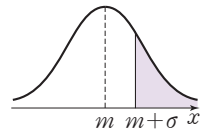
정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 정규분포 곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(X \geq m) = P(X \leq m) = 0.5$$

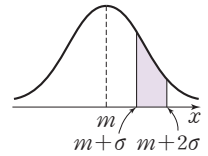
$$\begin{aligned} (1) P(m-\sigma \leq X \leq m) \\ &= P(m \leq X \leq m+\sigma) \\ &= a \end{aligned}$$



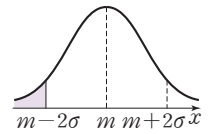
$$\begin{aligned} (2) P(X \geq m+\sigma) \\ &= P(X \geq m) \\ &\quad - P(m \leq X \leq m+\sigma) \\ &= 0.5 - a \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (3) P(m+\sigma \leq X \leq m+2\sigma) \\ &= P(m \leq X \leq m+2\sigma) \\ &\quad - P(m \leq X \leq m+\sigma) \\ &= b - a \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (4) P(X \leq m-2\sigma) \\ &= P(X \geq m+2\sigma) \\ &= P(X \geq m) \\ &\quad - P(m \leq X \leq m+2\sigma) \\ &= 0.5 - b \end{aligned}$$



3 ㉡ (1) 0.0668 (2) 0.9987 (3) 0.0228 (4) 0.2857

(5) 0.1525 (6) 0.1574 (7) 0.8664 (8) 0.9759

$$\begin{aligned} (1) P(Z \geq 1.5) &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 = 0.0668 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) P(Z \leq 3) &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= 0.5 + 0.4987 = 0.9987 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) P(Z \leq -2) &= P(Z \geq 2) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.4772 = 0.0228 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) P(0.5 \leq Z \leq 2) &= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 0.4772 - 0.1915 = 0.2857 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) P(1 \leq Z \leq 2.5) &= P(0 \leq Z \leq 2.5) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.4938 - 0.3413 = 0.1525 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) P(-3 \leq Z \leq -1) &= P(1 \leq Z \leq 3) \\ &= P(0 \leq Z \leq 3) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.4987 - 0.3413 = 0.1574 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (7) P(-1.5 \leq Z \leq 1.5) \\ &= P(-1.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1.5) + P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 1.5) = 2 \times 0.4332 = 0.8664 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (8) P(-2 \leq Z \leq 3) &= P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= 0.4772 + 0.4987 = 0.9759 \end{aligned}$$

4 ㉡ (1) $Z = \frac{X-5}{3}$ (2) $Z = \frac{X+12}{4}$

02-1 답 ③

①, ② 확률변수 X_1 의 정규분포 곡선의 대칭축 $x=x_1$ 보다 확률변수 X_2 의 정규분포 곡선의 대칭축 $x=x_2$ 가 오른쪽에 있으므로

$$E(X_1) < E(X_2)$$

③, ④ 확률변수 X_1 의 정규분포 곡선보다 확률변수 X_2 의 정규분포 곡선이 가운데 부분의 높이가 낮고 양쪽으로 넓게 퍼진 모양이므로

$$\sigma(X_1) < \sigma(X_2)$$

⑤ $E(X_1)=x_1$, $E(X_2)=x_2$ 이므로

$$P(X_1 \leq x_1) = P(X_2 \geq x_2) = 0.5$$

따라서 옳은 것은 ③이다.

02-2 답 7

정규분포 $N(10, 2^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 확률밀도 함수는 $x=10$ 에서 최댓값을 갖고, 정규분포 곡선은 직선 $x=10$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $P(k-1 \leq X \leq k+7)$ 이 최대가 되려면

$$\frac{(k-1)+(k+7)}{2} = 10$$

$$2k+6=20$$

$$\therefore k=7$$

03-1 답 (1) 0.3085 (2) 0.9332 (3) 0.1359 (4) 0.6247

$Z = \frac{X-3}{4}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$(1) P(X \leq 1) = P\left(Z \leq \frac{1-3}{4}\right)$$

$$= P(Z \leq -0.5)$$

$$= P(Z \geq 0.5)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.5)$$

$$= 0.5 - 0.1915 = 0.3085$$

$$(2) P(X \geq -3) = P\left(Z \geq \frac{-3-3}{4}\right)$$

$$= P(Z \geq -1.5)$$

$$= P(Z \leq 1.5)$$

$$= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.5 + 0.4332 = 0.9332$$

$$(3) P(7 \leq X \leq 11) = P\left(\frac{7-3}{4} \leq Z \leq \frac{11-3}{4}\right)$$

$$= P(1 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

$$(4) P(1 \leq X \leq 9) = P\left(\frac{1-3}{4} \leq Z \leq \frac{9-3}{4}\right)$$

$$= P(-0.5 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(-0.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 0.5) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.1915 + 0.4332$$

$$= 0.6247$$

04-1 답 -15

$Z_X = \frac{X-10}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z_X 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(X \geq k) = P\left(Z_X \geq \frac{k-10}{10}\right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $Z_Y = \frac{Y-5}{4}$ 로 놓으면 확률변수 Z_Y 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(Y \leq -k) = P\left(Z_Y \leq \frac{-k-5}{4}\right)$$

$$= P\left(Z_Y \geq \frac{k+5}{4}\right) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$P(X \geq k) = P(Y \leq -k)$ 이므로 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$P\left(Z_X \geq \frac{k-10}{10}\right) = P\left(Z_Y \geq \frac{k+5}{4}\right)$$

따라서 $\frac{k-10}{10} = \frac{k+5}{4}$ 이므로

$$4k-40=10k+50$$

$$\therefore k=-15$$

04-2 답 29

$Z = \frac{X-20}{3}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(17 \leq X \leq k) = 0.84$ 에서

$$P\left(\frac{17-20}{3} \leq Z \leq \frac{k-20}{3}\right) = 0.84$$

$$P\left(-1 \leq Z \leq \frac{k-20}{3}\right) = 0.84$$

$$P(-1 \leq Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-20}{3}\right) = 0.84$$

$$P(0 \leq Z \leq 1) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-20}{3}\right) = 0.84$$

$$0.3413 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-20}{3}\right) = 0.84$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-20}{3}\right) = 0.4987$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 3) = 0.4987$ 이므로

$$\frac{k-20}{3} = 3$$

$$k-20=9$$

$$\therefore k=29$$

05-1 **답 0.927**

생산된 파이프의 지름의 길이를 X mm라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(150, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-150}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 이때 출고 합격을 받는 파이프의 지름의 길이는 $147 \leq X \leq 155$ 이므로 구하는 확률은

$$P(147 \leq X \leq 155)$$

$$= P\left(\frac{147-150}{2} \leq Z \leq \frac{155-150}{2}\right)$$

$$= P(-1.5 \leq Z \leq 2.5)$$

$$= P(-1.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2.5)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.5) + P(0 \leq Z \leq 2.5)$$

$$= 0.4332 + 0.4938 = 0.927$$

05-2 **답 (1) 24.17% (2) 8413명**

학생의 키를 X cm라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(165, 4^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-165}{4}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

(1) 키가 159cm 이상 163cm 이하일 확률은

$$P(159 \leq X \leq 163)$$

$$= P\left(\frac{159-165}{4} \leq Z \leq \frac{163-165}{4}\right)$$

$$= P(-1.5 \leq Z \leq -0.5)$$

$$= P(0.5 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.5) - P(0 \leq Z \leq 0.5)$$

$$= 0.4332 - 0.1915 = 0.2417$$

따라서 구하는 학생은 전체의 24.17%이다.

(2) 키가 169cm 이하일 확률은

$$P(X \leq 169) = P\left(Z \leq \frac{169-165}{4}\right) = P(Z \leq 1)$$

$$= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 + 0.3413 = 0.8413$$

따라서 구하는 학생 수는

$$10000 \times 0.8413 = 8413(\text{명})$$

06-1 **답 209점**

지원자의 시험 점수를 X 점이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(160, 25^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-160}{25}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 전체 지원자 1000명에 대하여 합격자 25명이 차지하는 비율은 $\frac{25}{1000} = 0.025$ 이므로 합격자의 최저 점수를

a 점이라 하면 $P(X \geq a) = 0.025$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{a-160}{25}\right) = 0.025$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-160}{25}\right) = 0.025$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-160}{25}\right) = 0.025$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-160}{25}\right) = 0.475$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.475$ 이므로

$$\frac{a-160}{25} = 1.96, a-160=49 \quad \therefore a=209$$

따라서 구하는 최저 점수는 209점이다.

06-2 **답 156cm**

남학생의 키를 X cm라 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(170, 10^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-170}{10}$ 으로 놓으면 확

률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

키가 작은 쪽에서 80번째인 학생의 키를 a cm라 하면

$$P(X \leq a) = \frac{80}{1000} = 0.08 \text{에서}$$

$$P\left(Z \leq \frac{a-170}{10}\right) = 0.08$$

$$P\left(Z \geq \frac{170-a}{10}\right) = 0.08$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{170-a}{10}\right) = 0.08$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{170-a}{10}\right) = 0.08$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{170-a}{10}\right) = 0.42$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.4) = 0.42$ 이므로

$$\frac{170-a}{10} = 1.4, 170-a=14 \quad \therefore a=156$$

따라서 구하는 학생의 키는 156cm이다.

3 이항분포와 정규분포 사이의 관계

개념 CHECK

114쪽

1 답 (1) $N(50, 5^2)$ (2) $N(150, 10^2)$

$$(1) E(X) = 100 \times 0.5 = 50$$

$$V(X) = 100 \times 0.5 \times 0.5 = 25 = 5^2$$

이때 시행 횟수 $n=100$ 은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(50, 5^2)$ 을 따른다.

$$(2) E(X) = 450 \times \frac{1}{3} = 150$$

$$V(X) = 450 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 100 = 10^2$$

이때 시행 횟수 $n=450$ 은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(150, 10^2)$ 을 따른다.

07-1 답 0.0668

150명의 환자 중 치유되는 환자의 수를 X 라 하면 환자마다 치유될 확률이 $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B(150, \frac{3}{5})$ 를 따른다.

$$\therefore E(X) = 150 \times \frac{3}{5} = 90,$$

$$V(X) = 150 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = 36 = 6^2$$

이때 시행 횟수 $n=150$ 은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(90, 6^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-90}{6}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 99) &= P\left(Z \geq \frac{99-90}{6}\right) \\ &= P(Z \geq 1.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 = 0.0668 \end{aligned}$$

07-2 답 31

관람객 400명 중 초대권으로 입장하는 관람객의 수를 X 라 하면 각 관람객이 초대권으로 입장할 확률이 $\frac{1}{10}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B(400, \frac{1}{10})$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 400 \times \frac{1}{10} = 40,$$

$$V(X) = 400 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = 36 = 6^2$$

이때 시행 횟수 $n=400$ 은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(40, 6^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-40}{6}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(X \leq a) = 0.07$ 에서

$$P\left(Z \leq \frac{a-40}{6}\right) = 0.07$$

$$P\left(Z \geq \frac{40-a}{6}\right) = 0.07$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{40-a}{6}\right) = 0.07$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{40-a}{6}\right) = 0.07$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{40-a}{6}\right) = 0.43$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.43$ 이므로

$$\frac{40-a}{6} = 1.5, 40-a=9 \quad \therefore a=31$$

1 $\frac{5}{6}$	2 ①	3 8	4 3	5 ②
6 0.3085	7 1.65	8 ①	9 16370	10 360점
11 영어	12 0.1587	13 0.1359	14 16	15 $\frac{1}{9}$
16 155	17 ⑤	18 ②	19 ⑤	

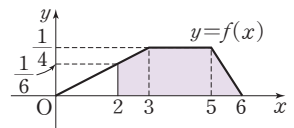
- 1 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$$\frac{1}{2} \times (2+6) \times k = 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{4}$$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 두 점 $(0, 0)$,

$(3, \frac{1}{4})$ 을 지나는 직선이



므로

$$f(x) = \frac{1}{12}x \quad (0 \leq x \leq 3) \quad \therefore f(2) = \frac{1}{6}$$

$$\therefore P(2 \leq X \leq 6) = 1 - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

- 2 $\neg$. $E(X_1) = E(X_2) = m_1$, $E(X_3) = m_2$ 이므로

$$E(X_1) = E(X_2) < E(X_3)$$

$\neg$. 표준편차가 클수록 곡선은 가운데 부분의 높이는 낮아지고 양쪽으로 넓게 퍼진 모양이므로

$$\sigma(X_1) > \sigma(X_2)$$

$\neg$. $P(X_1 > m_1) = 0.5$, $P(X_3 > m_2) = 0.5$ 이므로

$$P(X_1 > m_1) = P(X_3 > m_2)$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$ 이다.

- 3 정규분포 $N(m, 4)$ 를 따르는 확률변수 X 의 확률밀도함수는 $x=m$ 에서 최댓값을 갖고, 정규분포 곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $g(k) = P(k-8 \leq X \leq k)$ 가 최대가 되려면

$$\frac{(k-8)+k}{2} = m$$

$k=12$ 일 때 최댓값을 가지므로

$$m = \frac{4+12}{2} = 8$$

- 4 $Z_X = \frac{X-72}{6}$ 로 놓으면 확률변수 Z_X 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(X \leq 78) = P\left(Z_X \leq \frac{78-72}{6}\right) = P(Z_X \leq 1) \quad \dots\dots ①$$

$Z_Y = \frac{Y-80}{\sigma}$ 으로 놓으면 확률변수 Z_Y 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(Y \leq 83) = P\left(Z_Y \leq \frac{83-80}{\sigma}\right) = P\left(Z_Y \leq \frac{3}{\sigma}\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{L}$$

$P(X \leq 78) = P(Y \leq 83)$ 이므로 $\textcircled{I}$, $\textcircled{L}$ 에서

$$P(Z_X \leq 1) = P\left(Z_Y \leq \frac{3}{\sigma}\right)$$

따라서 $1 = \frac{3}{\sigma}$ 이므로 $\sigma = 3$

5 $Z_X = \frac{X-40}{a}$, $Z_Y = \frac{Y-40}{b}$ 으로 각각 놓으면 확률변수

Z_X , Z_Y 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$p = P(X \geq 50) = P\left(Z_X \geq \frac{50-40}{a}\right) = P\left(Z_X \geq \frac{10}{a}\right)$$

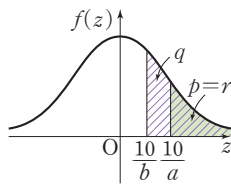
$$q = P(Y \geq 50) = P\left(Z_Y \geq \frac{50-40}{b}\right) = P\left(Z_Y \geq \frac{10}{b}\right)$$

$$\begin{aligned} r = P(X \leq 30) &= P\left(Z_X \leq \frac{30-40}{a}\right) = P\left(Z_X \leq -\frac{10}{a}\right) \\ &= P\left(Z_X \geq \frac{10}{a}\right) \end{aligned}$$

이때 $0 < a < b$ 에서 $\frac{10}{b} < \frac{10}{a}$

이므로

$$p = r < q$$



6 $E(X) = 50$, $\sigma(X) = 10$ 이므로

$$E(Y) = E(2X-1) = 2E(X) - 1 = 2 \times 50 - 1 = 99$$

$$\sigma(Y) = \sigma(2X-1) = |2| \sigma(X) = 2 \times 10 = 20$$

따라서 확률변수 Y 는 정규분포 $N(99, 20^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{Y-99}{20}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P(Y \leq 89) = P\left(Z \leq \frac{89-99}{20}\right)$$

$$= P(Z \leq -0.5) = P(Z \geq 0.5)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.5)$$

$$= 0.5 - 0.1915 = 0.3085$$

다른 풀이

$Z = \frac{X-50}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르고, $Y = 2X-1$ 이므로

$$P(Y \leq 89) = P(2X-1 \leq 89) = P(X \leq 45)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{45-50}{10}\right) = P(Z \leq -0.5)$$

$$= P(Z \geq 0.5) = P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.5)$$

$$= 0.5 - 0.1915 = 0.3085$$

7 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(m-k\sigma \leq X \leq m+k\sigma) = 0.901$ 에서

$$P\left(\frac{m-k\sigma-m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{m+k\sigma-m}{\sigma}\right) = 0.901$$

$$P(-k \leq Z \leq k) = 0.901$$

$$2P(0 \leq Z \leq k) = 0.901$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq k) = 0.4505$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.65) = 0.4505$ 이므로

$$k = 1.65$$

8 수하물의 무게를 X kg이라 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(18, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-18}{2}$ 로 놓으면 확률변수

Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$P(X \geq 21) = P\left(Z \geq \frac{21-18}{2}\right)$$

$$= P(Z \geq 1.5)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.5 - 0.4332 = 0.0668$$

9 제품의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(170, 5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-170}{5}$ 으로 놓으면 확률

변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 합격품일 확률은

$$P(165 \leq X \leq 180) = P\left(\frac{165-170}{5} \leq Z \leq \frac{180-170}{5}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$$

따라서 구하는 합격품의 개수는

$$20000 \times 0.8185 = 16370$$

10 응시생의 성적을 X 점이라 하면 확률변수 X 는 정규분포

$N(278, 41^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-278}{41}$ 로 놓으면 확률

변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 전체 응시생 5000명에 대하여 합격자 114명이 차지

하는 비율은 $\frac{114}{5000} = 0.0228$ 이므로 합격자의 최저 점수를

a 점이라 하면 $P(X \geq a) = 0.0228$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{a-278}{41}\right) = 0.0228$$

$$P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq \frac{a-278}{41}) = 0.0228$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-278}{41}\right) = 0.0228$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-278}{41}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{a-278}{41} = 2, a-278=82 \quad \therefore a=360$$

따라서 구하는 최저 점수는 360점이다.

- 11** 학생들의 영어, 수학, 과학 성적을 각각 X_1 점, X_2 점, X_3 점이라 하면 확률변수 X_1, X_2, X_3 은 각각 정규분포 $N(60, 20^2), N(70, 20^2), N(63, 16^2)$ 을 따르므로 $Z_1 = \frac{X_1-60}{20}, Z_2 = \frac{X_2-70}{20}, Z_3 = \frac{X_3-63}{16}$ 으로 놓으면 확률변수 Z_1, Z_2, Z_3 은 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

A보다 영어, 수학, 과학 성적이 낮을 확률은 각각

$$P(X_1 < 82) = P\left(Z_1 < \frac{82-60}{20}\right) = P(Z_1 < 1.1)$$

$$P(X_2 < 90) = P\left(Z_2 < \frac{90-70}{20}\right) = P(Z_2 < 1)$$

$$P(X_3 < 75) = P\left(Z_3 < \frac{75-63}{16}\right) = P(Z_3 < 0.75)$$

이때 $P(Z_1 < 1.1) > P(Z_2 < 1) > P(Z_3 < 0.75)$ 이므로

$$P(X_1 < 82) > P(X_2 < 90) > P(X_3 < 75)$$

따라서 A의 성적이 상대적으로 가장 높은 과목은 영어이다.

- 12** 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(100, \frac{9}{10}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 100 \times \frac{9}{10} = 90, V(X) = 100 \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = 9$$

이때 시행 횟수가 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(90, 3^2)$ 을 따른다.

$$Z = \frac{X-90}{3} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(X \leq 87) &= P\left(Z \leq \frac{87-90}{3}\right) = P(Z \leq -1) \\ &= P(Z \geq 1) = P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 = 0.1587 \end{aligned}$$

- 13** 한 개의 주사위를 720번 던져서 1의 눈이 나오는 횟수를 X 라 하면 주사위를 던져서 1의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{6}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(720, \frac{1}{6}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 720 \times \frac{1}{6} = 120,$$

$$V(X) = 720 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 100$$

이때 시행 횟수가 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(120, 10^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-120}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(130 \leq X \leq 140) &= P\left(\frac{130-120}{10} \leq Z \leq \frac{140-120}{10}\right) \\ &= P(1 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359 \end{aligned}$$

- 14** 100번의 숫 블록을 시도하여 성공하는 횟수를 X 라 하면 숫 블록을 성공할 확률이 $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 100 \times \frac{1}{5} = 20,$$

$$V(X) = 100 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 16$$

이때 시행 횟수가 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(20, 4^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-20}{4}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(X \leq k) = 0.1587$ 에서

$$P\left(Z \leq \frac{k-20}{4}\right) = 0.1587, P\left(Z \geq \frac{20-k}{4}\right) = 0.1587$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{20-k}{4}\right) = 0.1587$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{20-k}{4}\right) = 0.3413$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{20-k}{4} = 1, 20-k=4 \quad \therefore k=16$$

- 15** 연속확률변수 X 가 갖는 값의 범위가 $0 \leq X \leq 3$ 이고 확률의 총합은 1이므로

$$P(0 \leq X \leq 3) = 1$$

$$P(x \leq X \leq 3) = a(3-x) \text{의 양변에 } x=0 \text{을 대입하면}$$

$$P(0 \leq X \leq 3) = 3a$$

$$\text{즉, } 1 = 3a \text{이므로 } a = \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } P(x \leq X \leq 3) = \frac{1}{3}(3-x) \quad (0 \leq x \leq 3) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq a) &= P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{3}\right) \\ &= P(0 \leq X \leq 3) - P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq 3\right) \\ &= 1 - \frac{1}{3}\left(3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

- 16 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$P(X \leq 3) = 0.3$ 에서

$$P\left(Z \leq \frac{3-m}{\sigma}\right) = 0.3, P\left(Z \geq \frac{m-3}{\sigma}\right) = 0.3$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-3}{\sigma}\right) = 0.3$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-3}{\sigma}\right) = 0.2$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 0.52) = 0.2$ 이므로

$$\frac{m-3}{\sigma} = 0.52 \quad \therefore m-3 = 0.52\sigma \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

한편 $P(X \leq 3) + P(3 \leq X \leq 80) = P(X \leq 80)$ 이므로

$$P(X \leq 80) = 0.3 + 0.3 = 0.6$$

$$P\left(Z \leq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.6$$

$$0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.6$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.1$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 0.25) = 0.1$ 이므로

$$\frac{80-m}{\sigma} = 0.25 \quad \therefore 80-m = 0.25\sigma \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면

$$m = 55, \sigma = 100$$

$$\therefore m + \sigma = 155$$

- 17 직원들의 출근 시간을 X 분이라 하면 확률변수 X 는 정규

분포 $N(66.4, 15^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-66.4}{15}$ 로 놓으면

확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

출근 시간이 73분 이상일 확률은

$$P(X \geq 73) = P\left(Z \geq \frac{73-66.4}{15}\right)$$

$$= P(Z \geq 0.44)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.44)$$

$$= 0.5 - 0.17 = 0.33$$

출근 시간이 73분 이상인 사건을 A , 지하철을 이용하는 사건을 B 라 하면

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$= 0.33 \times 0.4 = 0.132$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c)$$

$$= (1 - 0.33) \times 0.2 = 0.134$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

$$= 0.132 + 0.134 = 0.266$$

- 18 휴대폰 케이스의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X 는 정

규분포 $N(30, 5^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-30}{5}$ 으로 놓으면

확률변수 Z_X 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 불량품일 확률은

$$P(X \geq 40) = P\left(Z_X \geq \frac{40-30}{5}\right) = P(Z_X \geq 2)$$

$$= P(Z_X \geq 0) - P(0 \leq Z_X \leq 2)$$

$$= 0.5 - 0.48 = 0.02$$

생산된 휴대폰 케이스 2500개 중에서 불량품의 개수를 Y 라 하면 불량품일 확률이 0.02이므로 확률변수 Y 는 이항분포 $B(2500, 0.02)$ 를 따른다.

$$\therefore E(Y) = 2500 \times 0.02 = 50,$$

$$V(Y) = 2500 \times 0.02 \times 0.98 = 49$$

이때 시행 횟수가 충분히 크므로 확률변수 Y 는 근사적으로 정규분포 $N(50, 7^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z_Y = \frac{Y-50}{7}$ 으로 놓으면 확률변수 Z_Y 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$P(Y \geq 57) = P\left(Z_Y \geq \frac{57-50}{7}\right) = P(Z_Y \geq 1)$$

$$= P(Z_Y \geq 0) - P(0 \leq Z_Y \leq 1)$$

$$= 0.5 - 0.34 = 0.16$$

- 19 1600회의 게임에서 흰 바둑돌이 나오는 횟수를 X 라 하

면 흰 바둑돌이 나올 확률이 $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ 이므로 확률변수 X

는 이항분포 $B\left(1600, \frac{1}{5}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 1600 \times \frac{1}{5} = 320,$$

$$V(X) = 1600 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 256$$

이때 시행 횟수가 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(320, 16^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-320}{16}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

한편 검은 바둑돌이 나오는 횟수는 $1600 - X$ 이므로 점수가 1024점 이하이려면

$$10 \times X + (-2) \times (1600 - X) \leq 1024$$

$$12X - 3200 \leq 1024$$

$$\therefore X \leq 352$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X \leq 352) = P\left(Z \leq \frac{352-320}{16}\right) = P(Z \leq 2)$$

$$= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.5 + 0.4772 = 0.9772$$

III-2 01 통계적 추정

1 모평균과 표본평균

개념 CHECK

123쪽

1 답 ㄷ

2 답 (1) 216 (2) 120 (3) 20

(1) 한 개씩 복원추출하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_6\Pi_3 = 6^3 = 216$$

(2) 한 개씩 비복원추출하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 서로 다른 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_6P_3 = 120$$

(3) 동시에 추출하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 서로 다른 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_6C_3 = 20$$

3 답 (1) 0, 1, 2, 3, 4 (2) 풀이 참조

(3) 평균: 2, 분산: $\frac{4}{3}$, 표준편차: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(1) 모집단 {0, 2, 4}에서 크기가 2인 표본 X_1, X_2 를 임의추출할 때, 표본평균 $\bar{X}$ 는 $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$ 이므로 추출한 표본에 따른 표본평균 $\bar{X}$ 는 다음 표와 같다.

$X_2 \backslash X_1$	0	2	4
0	0	1	2
2	1	2	3
4	2	3	4

따라서 $\bar{X}$ 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이다.

(2) 표본평균 $\bar{X}$ 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$\bar{X}$	0	1	2	3	4	합계
$P(\bar{X}=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(3) $E(\bar{X}) = 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} = 2$

$$V(\bar{X}) = 0^2 \times \frac{1}{9} + 1^2 \times \frac{2}{9} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{2}{9} + 4^2 \times \frac{1}{9} - 2^2$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$\sigma(\bar{X}) = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

4 답 (1) 평균: 30, 분산: 25, 표준편차: 5

(2) 평균: 30, 분산: 4, 표준편차: 2

(3) 평균: 30, 분산: 1, 표준편차: 1

모평균 $m=30$, 모표준편차 $\sigma=10$ 이므로

$$(1) E(\bar{X}) = m = 30$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{10^2}{4} = 25$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{4}} = 5$$

$$(2) E(\bar{X}) = m = 30$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{10^2}{25} = 4$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$$

$$(3) E(\bar{X}) = m = 30$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{10^2}{100} = 1$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{100}} = 1$$

5 답 (1) $E(\bar{X})=7, V(\bar{X})=4, \sigma(\bar{X})=2$

(2) $N(7, 2^2)$

(1) 모평균 $m=7$, 모표준편차 $\sigma=6$ 이고, 표본의 크기 $n=9$ 이므로

$$E(\bar{X}) = m = 7$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{6^2}{9} = 4$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = 2$$

문제

124~127쪽

01-1 답 12

모평균 $m=15$, 모표준편차 $\sigma=4$, 표본의 크기 $n=25$ 이므로

$$E(\bar{X}) = m = 15$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore E(\bar{X})\sigma(\bar{X}) = 15 \times \frac{4}{5} = 12$$

01-2 답 908

모평균 $m=30$, 모표준편차 $\sigma=16$, 표본의 크기 $n=32$ 이므로

$$E(\bar{X}) = m = 30$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{16^2}{32} = 8$$

$$\therefore E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + \{E(\bar{X})\}^2 = 8 + 30^2 = 908$$

01-3 [답 110]

모평균 $m=10$, 모표준편차 $\sigma=8$ 이므로

$$E(\bar{X})=m=10$$

$$V(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{64}{n}$$

$$\text{즉, } \frac{64}{n}=\frac{16}{25} \text{이므로}$$

$$n=100$$

$$\therefore E(\bar{X})+n=10+100=110$$

01-4 [답 400]

모표준편차 $\sigma=10$ 이므로

$$\sigma(\bar{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{10}{\sqrt{n}}$$

$$\text{즉, } \frac{10}{\sqrt{n}} \leq 0.5 \text{이므로}$$

$$\sqrt{n} \geq 20 \quad \therefore n \geq 400$$

따라서 n 의 최소값은 400이다.

02-1 [답 평균: 1, 분산: $\frac{1}{12}$]

모평균과 모분산을 구하면

$$m=0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 1$$

$$\sigma^2=0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} - 1^2 = \frac{1}{2}$$

이때 표본의 크기 $n=6$ 이므로

$$E(\bar{X})=m=1$$

$$V(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\frac{1}{2}}{6}=\frac{1}{12}$$

02-2 [답 4]

상자에서 한 장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X 라 하고, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

모평균과 모분산을 구하면

$$m=2 \times \frac{2}{5} + 4 \times \frac{3}{10} + 6 \times \frac{1}{5} + 8 \times \frac{1}{10} = 4$$

$$\sigma^2=2^2 \times \frac{2}{5} + 4^2 \times \frac{3}{10} + 6^2 \times \frac{1}{5} + 8^2 \times \frac{1}{10} - 4^2 = 4$$

이때 표본의 크기 $n=4$ 이므로

$$E(\bar{X})=m=4$$

$$\sigma(\bar{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{4}}=1$$

$$\therefore E(\bar{X})\sigma(\bar{X})=4 \times 1=4$$

03-1 [답 0.8413]

모집단이 정규분포 $N(84, 14^2)$ 을 따르고 표본의 크기

$n=4$ 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(84, \frac{14^2}{4}\right)$, 즉

$N(84, 7^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\bar{X}-84}{7}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$P(\bar{X} \leq 91) = P\left(Z \leq \frac{91-84}{7}\right) = P(Z \leq 1)$$

$$= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 + 0.3413 = 0.8413$$

03-2 [답 0.2857]

모집단이 정규분포 $N(71, 16^2)$ 을 따르고 표본의 크기

$n=64$ 이므로 64명의 하루 TV 시청 시간의 평균을 $\bar{X}$ 분

이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(71, \frac{16^2}{64}\right)$, 즉

$N(71, 2^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\bar{X}-71}{2}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$P(72 \leq \bar{X} \leq 75) = P\left(\frac{72-71}{2} \leq Z \leq \frac{75-71}{2}\right)$$

$$= P(0.5 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 0.5)$$

$$= 0.4772 - 0.1915 = 0.2857$$

04-1 [답 81]

모집단이 정규분포 $N(80, 12^2)$ 을 따르고 표본의 크기가

n 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(80, \frac{12^2}{n}\right)$, 즉

$N\left(80, \left(\frac{12}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z=\frac{\bar{X}-80}{\frac{12}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규

분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(\bar{X} \geq 82) = 0.0668$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{82-80}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right) = 0.0668$$

$$P\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}}{6}\right) = 0.0668$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{6}\right) = 0.0668$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{6}\right) = 0.4332$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{6} = 1.5, \sqrt{n} = 9 \quad \therefore n = 81$$

04-2 답 296

모집단이 정규분포 $N(300, 40^2)$ 을 따르고 표본의 크기 $n=100$ 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(300, \frac{40^2}{100}\right)$, 즉 $N(300, 4^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X} - 300}{4}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(\bar{X} \geq a) = 0.8413$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{a-300}{4}\right) = 0.8413$$

$$P\left(Z \leq \frac{300-a}{4}\right) = 0.8413$$

$$0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{300-a}{4}\right) = 0.8413$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{300-a}{4}\right) = 0.3413$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{300-a}{4} = 1$$

$$\therefore a = 296$$

2 모평균의 추정

개념 CHECK

129쪽

1 답 (1) $7.02 \leq m \leq 8.98$ (2) $6.71 \leq m \leq 9.29$

표본의 크기 $n=16$, 표본평균 $\bar{x}=8$, 모표준편차 $\sigma=2$ 이므로

(1) 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$8 - 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{16}} \leq m \leq 8 + 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{16}}$$

$$8 - 0.98 \leq m \leq 8 + 0.98$$

$$\therefore 7.02 \leq m \leq 8.98$$

(2) 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$8 - 2.58 \times \frac{2}{\sqrt{16}} \leq m \leq 8 + 2.58 \times \frac{2}{\sqrt{16}}$$

$$8 - 1.29 \leq m \leq 8 + 1.29$$

$$\therefore 6.71 \leq m \leq 9.29$$

2 답 (1) 1.47 (2) 1.935

표본의 크기 $n=64$, 모표준편차 $\sigma=3$ 이므로

(1) 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{64}} = 1.47$$

(2) 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2.58 \times \frac{3}{\sqrt{64}} = 1.935$$

문제

130~132쪽

05-1 답 (1) $492.16 \leq m \leq 507.84$

(2) $489.68 \leq m \leq 510.32$

표본의 크기 $n=100$, 표본평균 $\bar{x}=500$ 이고, n 은 충분히 크므로 모표준편차 σ 대신 표본표준편차 40을 이용하면

(1) 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$500 - 1.96 \times \frac{40}{\sqrt{100}} \leq m \leq 500 + 1.96 \times \frac{40}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore 492.16 \leq m \leq 507.84$$

(2) 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$500 - 2.58 \times \frac{40}{\sqrt{100}} \leq m \leq 500 + 2.58 \times \frac{40}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore 489.68 \leq m \leq 510.32$$

05-2 답 $3.51 \leq m \leq 4.49$

표본의 크기 $n=64$, 표본평균 $\bar{x}=4$, 모표준편차 $\sigma=2$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$4 - 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{64}} \leq m \leq 4 + 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{64}}$$

$$\therefore 3.51 \leq m \leq 4.49$$

06-1 답 64

표본평균 $\bar{x}=167$, 모표준편차 $\sigma=16$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$167 - 1.96 \times \frac{16}{\sqrt{n}} \leq m \leq 167 + 1.96 \times \frac{16}{\sqrt{n}}$$

이때 $163.08 \leq m \leq 170.92$ 에서

$$1.96 \times \frac{16}{\sqrt{n}} = 3.92$$

$$\sqrt{n} = 8 \quad \therefore n = 64$$

06-2 답 74.71

표본평균 $\bar{x}=12$, 모표준편차 $\sigma=4$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$12 - 2.58 \times \frac{4}{\sqrt{n}} \leq m \leq 12 + 2.58 \times \frac{4}{\sqrt{n}}$$

이때 $a \leq m \leq 13.29$ 에서

$$2.58 \times \frac{4}{\sqrt{n}} = 1.29$$

$$\sqrt{n} = 8 \quad \therefore n = 64$$

$$a = 12 - 2.58 \times \frac{4}{\sqrt{n}} = 12 - 1.29 = 10.71 \text{이므로}$$

$$n + a = 64 + 10.71 = 74.71$$

07-1 답 12.4

표본의 크기 $n=25$, 모표준편차 $\sigma=50$ 이므로 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$a = 2 \times 1.96 \times \frac{50}{\sqrt{25}} = 39.2$$

신뢰도 99%의 신뢰구간의 길이는

$$b = 2 \times 2.58 \times \frac{50}{\sqrt{25}} = 51.6$$

$$\therefore b - a = 51.6 - 39.2 = 12.4$$

07-2 ㉡ 4

표본의 크기를 n 이라 할 때, 모표준편차 $\sigma = 2$ 이고 신뢰도 99%의 신뢰구간의 길이가 5.16이므로

$$2 \times 2.58 \times \frac{2}{\sqrt{n}} = 5.16, \sqrt{n} = 2 \quad \therefore n = 4$$

07-3 ㉡ 16

표본의 크기가 n , 모표준편차 $\sigma = 5$ 이므로 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}}$$

이때 신뢰구간의 길이가 4.9mg 이하가 되어야 하므로

$$2 \times 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \leq 4.9, \sqrt{n} \geq 4 \quad \therefore n \geq 16$$

따라서 구하는 n 의 최솟값은 16이다.

연습문제

133~135쪽

- 1 ① 2 81 3 ④ 4 $\frac{1}{3}$ 5 ②
 6 ③ 7 0.0062 8 252 9 $2560.2 \leq m \leq 2579.8$
 10 ② 11 400 12 ⑤ 13 10 14 64
 15 528 16 25 17 98 18 144

- 1 크기가 3인 표본 X_1, X_2, X_3 을 추출할 때, 표본평균 $\bar{X}$ 가 $\bar{X} = 1$ 이라면

$$\frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} = 1 \quad \therefore X_1 + X_2 + X_3 = 3$$

이를 만족시키려면 $X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1$ 을 추출해야 하므로 구하는 확률은

$$P(\bar{X} = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

- 2 모표준편차가 3이므로

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{3}{\sqrt{n}} = \frac{1}{3}, \sqrt{n} = 9 \quad \therefore n = 81$$

- 3 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{6} + a + b = 1 \quad \therefore a + b = \frac{5}{6} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$E(X^2) = \frac{16}{3} \text{에서 } 0^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times a + 4^2 \times b = \frac{16}{3}$$

$$\therefore a + 4b = \frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{6}$$

따라서 $E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{2}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = 2$ 이므로 모분

산을 구하면

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{16}{3} - 2^2 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

표본의 크기 $n = 20$ 이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{4}{3}}{20} = \frac{1}{15}$$

- 4 주머니에서 한 장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X 라 하고 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

모평균과 모분산을 구하면

$$m = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} = 2$$

$$\sigma^2 = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{4} - 2^2 = \frac{1}{2}$$

이때 표본의 크기 $n = 3$ 이므로

$$E(\bar{X}) = m = 2$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore E(\bar{X})V(\bar{X}) = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

- 5 주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X 라 하고 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	a	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	1

$$E(X) = E(\bar{X}) = 3 \text{이므로}$$

$$1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{2} + a \times \frac{3}{10} = 3$$

$$\frac{3}{10}a = \frac{9}{5} \quad \therefore a = 6$$

따라서 모분산을 구하면

$$\sigma^2 = 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{1}{2} + 6^2 \times \frac{3}{10} - 3^2 = 4$$

표본의 크기 $n = 4$ 이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\therefore a + V(\bar{X}) = 6 + 1 = 7$$

- 6 모집단이 정규분포 $N(0, 4^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 9인 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(0, \frac{4^2}{9}\right)$, 즉 $N\left(0, \left(\frac{4}{3}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}}{\frac{4}{3}}$ 로 놓으면 확률변수 $Z_{\bar{X}}$ 는 표준정규분포

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(\bar{X} \geq 1) = P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{3}{4}\right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 모집단이 정규분포 $N(3, 2^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 16인 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(3, \frac{2^2}{16}\right)$, 즉

$N\left(3, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z_{\bar{Y}} = \frac{\bar{Y}-3}{\frac{1}{2}}$ 으로 놓으면 확률변수 $Z_{\bar{Y}}$ 는 표준정규분포

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(\bar{Y} \leq a) = P\left(Z_{\bar{Y}} \leq \frac{a-3}{\frac{1}{2}}\right) = P(Z_{\bar{Y}} \leq 2a-6)$$

$$= P(Z_{\bar{Y}} \geq 6-2a) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$P(\bar{X} \geq 1) = P(\bar{Y} \leq a)$ 이므로 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{3}{4}\right) = P(Z_{\bar{Y}} \geq 6-2a)$$

따라서 $\frac{3}{4} = 6-2a$ 이므로

$$a = \frac{21}{8}$$

- 7 모집단이 정규분포 $N(320, 32^2)$ 을 따르고 표본의 크기 $n=64$ 이므로 64명의 한 달 급여의 평균을 $\bar{X}$ 만 원이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(320, \frac{32^2}{64}\right)$, 즉 $N(320, 4^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X}-320}{4}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 310) &= P\left(Z \leq \frac{310-320}{4}\right) \\ &= P(Z \leq -2.5) \\ &= P(Z \geq 2.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= 0.5 - 0.4938 = 0.0062 \end{aligned}$$

- 8 모집단이 정규분포 $N(m, 40^2)$ 을 따르고 표본의 크기 $n=100$ 이므로 100명의 소스의 용량의 평균을 $\bar{X}$ mL라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \frac{40^2}{100}\right)$, 즉 $N(m, 4^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X}-m}{4}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(\bar{X} \geq 246) = 0.9332$ 에서 $P\left(Z \geq \frac{246-m}{4}\right) = 0.9332$, $P\left(Z \leq \frac{m-246}{4}\right) = 0.9332$

$$0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-246}{4}\right) = 0.9332$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{m-246}{4}\right) = 0.4332$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$\frac{m-246}{4} = 1.5 \quad \therefore m = 252$$

- 9 표본의 크기 $n=100$, 표본평균 $\bar{x}=2570$ 이고, n 은 충분히 크므로 모표준편차 σ 대신 표본표준편차 50을 이용하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $2570 - 1.96 \times \frac{50}{\sqrt{100}} \leq m \leq 2570 + 1.96 \times \frac{50}{\sqrt{100}}$
 $\therefore 2560.2 \leq m \leq 2579.8$

- 10 표본의 크기 $n=49$, 모표준편차 $\sigma=1.4$ 이므로 표본평균의 값을 $\bar{x}$ 라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{1.4}{\sqrt{49}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{1.4}{\sqrt{49}}$$

$$\therefore \bar{x} - 0.392 \leq m \leq \bar{x} + 0.392$$

이때 $a \leq m \leq 7.992$ 에서

$$\bar{x} + 0.392 = 7.992 \quad \therefore \bar{x} = 7.6$$

$$\therefore a = 7.6 - 0.392 = 7.208$$

다른 풀이

표본의 크기 $n=49$, 모표준편차 $\sigma=1.4$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 1.96 \times \frac{1.4}{\sqrt{49}} = 0.784$$

즉, $7.992 - a = 0.784$ 이므로 $a = 7.208$

- 11 표본의 크기가 n , 표본평균 $\bar{x}=50$, 모표준편차 $\sigma=10$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$50 - 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq m \leq 50 + 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$$

이때 $48.71 \leq m \leq 51.29$ 에서

$$2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 1.29$$

$$\sqrt{n} = 20 \quad \therefore n = 400$$

- 12 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출하여 신뢰도 α %로 추정한 모평균 m 에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \left(\text{단, } P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100} \right)$$

- ㄱ. 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기를 크게 하면 $\sqrt{n}$ 의 값이 커지므로 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 의 값은 작아진다. 즉, 신뢰구간의 길이는 짧아진다.
- ㄴ. 신뢰도를 높이면 k 의 값이 커지고 표본의 크기를 작게 하면 $\sqrt{n}$ 의 값이 작아지므로 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 의 값은 커진다. 즉, 신뢰구간의 길이는 길어진다.
- ㄷ. 신뢰도를 낮추면 k 의 값이 작아지고 표본의 크기를 크게 하면 $\sqrt{n}$ 의 값이 커지므로 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 의 값은 작아진다. 즉, 신뢰구간의 길이는 짧아진다.
- 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

- 13** 표본의 크기 $n=64$, 모표준편차가 σ 이고, 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이가 4.9이므로
- $$2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{64}} = 4.9 \quad \therefore \sigma = 10$$

- 14** 표본의 크기를 n 이라 하면 모표준편차 $\sigma=40$ 이므로 신뢰도 99%의 신뢰구간의 길이가 25.8 이하가 되려면
- $$2 \times 2.58 \times \frac{40}{\sqrt{n}} \leq 25.8$$
- $$\sqrt{n} \geq 8 \quad \therefore n \geq 64$$
- 따라서 구하는 표본의 크기의 최솟값은 64이다.

- 15** 모집단이 정규분포 $N(30, 8^2)$ 을 따르고 표본의 크기 $n=16$ 이므로 16개의 화물의 무게의 평균을 $\bar{X}$ kg이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(30, \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $N(30, 2^2)$ 을 따른다.
- 따라서 $Z = \frac{\bar{X}-30}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.
- 16개의 화물의 무게의 합이 a kg 이상이면 경고음이 울리므로 경고음이 울리려면 $16\bar{X} \geq a$, 즉 $\bar{X} \geq \frac{a}{16}$ 이어야 한다. 이때 경고음이 울릴 확률이 0.07이므로
- $$P\left(\bar{X} \geq \frac{a}{16}\right) = 0.07 \text{에서}$$
- $$P\left(Z \geq \frac{\frac{a}{16} - 30}{2}\right) = 0.07, P\left(Z \geq \frac{a}{32} - 15\right) = 0.07$$
- $$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a}{32} - 15\right) = 0.07$$
- $$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a}{32} - 15\right) = 0.43$$
- 이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.43$ 이므로
- $$\frac{a}{32} - 15 = 1.5 \quad \therefore a = 528$$

- 16** 모집단이 정규분포 $N(8, 1.2^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 n 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(8, \frac{1.2^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(8, \left(\frac{1.2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.
- 따라서 $Z = \frac{\bar{X}-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(7.76 \leq \bar{X} \leq 8.24) \geq 0.6826$ 에서
- $$P\left(\frac{7.76-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq \frac{8.24-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\right) \geq 0.6826$$
- $$P(-0.2\sqrt{n} \leq Z \leq 0.2\sqrt{n}) \geq 0.6826$$
- $$2P(0 \leq Z \leq 0.2\sqrt{n}) \geq 0.6826$$
- $$\therefore P(0 \leq Z \leq 0.2\sqrt{n}) \geq 0.3413$$
- 이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로
- $$0.2\sqrt{n} \geq 1, \sqrt{n} \geq 5 \quad \therefore n \geq 25$$
- 따라서 구하는 n 의 최솟값은 25이다.

- 17** 표본의 크기 $n=64$, 표본평균 $\bar{x}=5$ 이고 n 이 충분히 크므로 모표준편차 σ 대신 표본표준편차 1을 이용한다.
- $$P(-k \leq Z \leq k) = \frac{\alpha}{100} \text{라 하면 모평균 } m \text{에 대한 신뢰도 } \alpha\% \text{의 신뢰구간은}$$
- $$5 - k \times \frac{1}{\sqrt{64}} \leq m \leq 5 + k \times \frac{1}{\sqrt{64}}$$
- $$\therefore 5 - \frac{k}{8} \leq m \leq 5 + \frac{k}{8}$$
- 이때 $4.7 \leq m \leq 5.3$ 에서
- $$\frac{k}{8} = 0.3 \quad \therefore k = 2.4$$
- 이때 $P(0 \leq Z \leq 2.4) = 0.49$ 이므로
- $$P(-2.4 \leq Z \leq 2.4) = 2P(0 \leq Z \leq 2.4)$$
- $$= 2 \times 0.49 = 0.98$$
- 따라서 $\frac{\alpha}{100} = 0.98$ 이므로
- $$\alpha = 98$$

- 18** 표본의 크기가 n , 모표준편차 $\sigma=4$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은
- $$\bar{x} - 2.58 \times \frac{4}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{4}{\sqrt{n}}$$
- $$-2.58 \times \frac{4}{\sqrt{n}} \leq m - \bar{x} \leq 2.58 \times \frac{4}{\sqrt{n}}$$
- $$\therefore |m - \bar{x}| \leq 2.58 \times \frac{4}{\sqrt{n}}$$
- 이때 모평균 m 과 표본평균 $\bar{x}$ 의 차가 0.86 이하가 되려면
- $$2.58 \times \frac{4}{\sqrt{n}} \leq 0.86, \sqrt{n} \geq 12 \quad \therefore n \geq 144$$
- 따라서 구하는 n 의 최솟값은 144이다.

유형편

정답과 해설

I-1 01 여러 가지 순열

기초 문제 Training

4쪽

- 1 (1) 120 (2) 720
- 2 (1) 24 (2) 12
- 3 6
- 4 (1) 5 (2) 16 (3) 64 (4) 81
- 5 (1) 6 (2) 5
- 6 128
- 7 64
- 8 (1) 630 (2) 180
- 9 210

핵심 유형 Training

5~10쪽

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|---------|
| 1 96 | 2 ② | 3 ③ | 4 480 | 5 30 |
| 6 40 | 7 240 | 8 ② | 9 720 | 10 2304 |
| 11 81 | 12 ⑤ | 13 234 | 14 ⑤ | 15 ④ |
| 16 ③ | 17 6 | 18 540 | 19 162 | 20 ③ |
| 21 102 | 22 88 | 23 ① | 24 232 | 25 90 |
| 26 60 | 27 120 | 28 180 | 29 ② | 30 ① |
| 31 105 | 32 144 | 33 ③ | 34 360 | 35 ③ |
| 36 ② | 37 10 | 38 40 | 39 ⑤ | 40 44 |
| 41 53 | 42 50 | 43 ② | | |

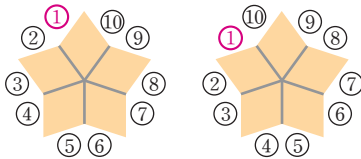
- 1 같은 반 학생을 각각 한 묶음으로 생각하여 4묶음을 원형으로 배열하는 경우의 수는
 $(4-1)! = 3! = 6$
 같은 반 회장, 부회장끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는
 $2! \times 2! \times 2! \times 2! = 16$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $6 \times 16 = 96$
- 2 이웃해도 되는 여학생 4명이 먼저 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)! = 3! = 6$
 여학생 사이사이의 4개의 자리에서 3개를 택하여 남학생 3명이 앉는 경우의 수는 ${}_4P_3 = 24$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $6 \times 24 = 144$
- 3 부모님 중 한 명의 자리가 결정되면 다른 한 명의 자리는 마주 보는 자리에 고정된다.
 따라서 구하는 경우의 수는 7명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수와 같으므로
 $(7-1)! = 6! = 720$
- 4 어른 4명과 어린이 5명 중에서 어른 3명과 어린이 3명을 택하는 경우의 수는
 ${}_4C_3 \times {}_5C_3 = 40$
 어른 3명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는
 $(3-1)! = 2! = 2$
 어른 사이사이의 3개의 자리에 어린이 3명이 앉는 경우의 수는
 ${}_3P_3 = 3! = 6$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $40 \times 2 \times 6 = 480$
- 5 가운데 사각형을 칠하는 경우의 수는 5
 나머지 4개의 영역을 칠하는 경우의 수는 가운데 사각형에 칠한 색을 제외한 나머지 4가지 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같으므로
 $(4-1)! = 3! = 6$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $5 \times 6 = 30$
- 6 서로 다른 두 밑면을 칠하는 경우의 수는 ${}_5P_2 = 20$
 두 밑면에 칠한 색을 제외한 나머지 3가지 색으로 3개의 옆면을 칠하는 경우의 수는
 $(3-1)! = 2! = 2$
 따라서 구하는 경우의 수는 $20 \times 2 = 40$

- 7 작은 원을 3등분 한 영역에 6가지 색 중에서 3가지 색을 택하여 칠하는 경우의 수는 ${}_6C_3 \times (3-1)! = 40$
나머지 영역에 3가지 색을 칠하는 경우의 수는 $3! = 6$
따라서 구하는 경우의 수는 $40 \times 6 = 240$

다른 풀이

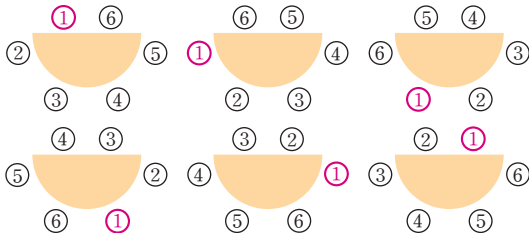
서로 다른 6개의 영역을 6가지 색으로 칠하는 경우의 수는 $6! = 720$
이때 주어진 도형에서는 회전하여 일치하는 경우가 3가지 있으므로 구하는 경우의 수는 $\frac{720}{3} = 240$

- 8 10명이 원형으로 둘러앉은 경우의 수는 $(10-1)! = 9!$
원형으로 둘러앉은 한 가지 경우에 대하여 별 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 2가지의 서로 다른 경우가 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는 $9! \times 2$

- 9 6명이 원형으로 둘러앉은 경우의 수는 $(6-1)! = 5! = 120$
원형으로 둘러앉은 한 가지 경우에 대하여 반원 모양의 탁자에서는 다음 그림과 같이 6가지의 서로 다른 경우가 존재한다.



따라서 구하는 경우의 수는 $120 \times 6 = 720$

- 10 남자 대표 4명이 정사각형 모양의 탁자의 각 변에 1명씩 앉은 경우의 수는 $(4-1)! = 3! = 6$
나머지 4개의 자리에 여자 대표 4명이 앉은 경우의 수는 ${}_4P_4 = 4! = 24$
이때 각 변에 앉은 남녀끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! \times 2! \times 2! \times 2! = 16$
따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 24 \times 16 = 2304$

- 11 구하는 경우의 수는 중복이 가능한 서로 다른 3가지 아이스크림에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$

- 12 두 꽃병 A, B에 꽃을 꽂을 택하는 경우의 수는 ${}_5P_2 = 20$
나머지 꽃을 꽂는 경우의 수는 중복이 가능한 2개의 꽃병 C, D에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$
따라서 구하는 경우의 수는 $20 \times 8 = 160$

- 13 공을 상자에 넣는 모든 경우의 수는 중복이 가능한 서로 다른 3개의 상자에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$$

한 상자에 넣은 공에 적힌 수의 합이 13보다 큰 경우는 (1, 2, 3, 4, 5) 또는 (2, 3, 4, 5)

(i) (1, 2, 3, 4, 5)인 경우

3개의 상자에서 1개를 택하여 모든 공을 넣으면 되므로 그 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

(ii) (2, 3, 4, 5)인 경우

3개의 상자에서 1개를 택하여 2, 3, 4, 5가 적힌 공을 넣고, 나머지 2개의 상자에서 1개를 택하여 1이 적힌 공을 넣으면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_2C_1 = 3 \times 2 = 6$$

(i), (ii)에서 한 상자에 넣은 공에 적힌 수의 합이 13보다 큰 경우의 수는

$$3 + 6 = 9$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$243 - 9 = 234$$

- 14 두 집합 A, B가 서로소이므로 집합 $A \cup B$ 의 6개의 원소는 A, B 중에서 하나에만 속해야 한다.

즉, 구하는 순서쌍의 개수는 두 집합 A, B에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_6 = 2^6 = 64$$

- 15 5개의 전구를 각각 켜거나 끄는 경우의 수는

$${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$$

이때 전구가 모두 꺼진 경우는 제외해야 하므로 구하는 신호의 개수는 $32 - 1 = 31$

- 16 기호 2개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

기호 3개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

기호 4개를 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_4\Pi_4=4^4=256$$

따라서 구하는 신호의 개수는

$$16+64+256=336$$

- 17 깃발을 1번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_3\Pi_1=3$$

깃발을 2번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_3\Pi_2=3^2=9$$

깃발을 3번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_3\Pi_3=3^3=27$$

같은 방법으로 깃발을 4번, 5번, 6번, ... 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각

$${}_3\Pi_4, {}_3\Pi_5, {}_3\Pi_6, \dots$$

깃발을 합해서 5번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_3\Pi_1+{}_3\Pi_2+{}_3\Pi_3+{}_3\Pi_4+{}_3\Pi_5$$

$$=3+9+27+81+243=363<1000$$

깃발을 합해서 6번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_3\Pi_1+{}_3\Pi_2+{}_3\Pi_3+{}_3\Pi_4+{}_3\Pi_5+{}_3\Pi_6$$

$$=3+9+27+81+243+729=1092>1000$$

따라서 n 의 최솟값은 6이다.

- 18 천의 자리에는 0이 올 수 없고, 일의 자리에는 홀수가 와야 하므로 구하는 홀수의 개수는

$$5 \times {}_6\Pi_2 \times 3 = 5 \times 6^2 \times 3 = 540$$

- 19 4의 배수는 끝의 두 자리의 수가 00이거나 4의 배수이어야 하므로 $\square\square\square\square 00$, $\square\square\square\square 12$, $\square\square\square\square 20$ 꼴이다.

각각의 경우에 맨 앞자리에는 0이 올 수 없으므로 구하는 4의 배수의 개수는

$$3 \times (2 \times {}_3\Pi_3) = 3 \times 2 \times 3^3 = 162$$

- 20 맨 앞자리에는 0이 올 수 없다.

(i) 한 자리의 자연수의 개수는 4

(ii) 두 자리의 자연수의 개수는 $4 \times {}_5\Pi_1 = 4 \times 5 = 20$

(iii) 세 자리의 자연수의 개수는 $4 \times {}_5\Pi_2 = 4 \times 5^2 = 100$

(iv) 네 자리의 자연수의 개수는 $4 \times {}_5\Pi_3 = 4 \times 5^3 = 500$

(v) 다섯 자리의 자연수 중에서 만의 자리의 숫자가 1 또는 2인 자연수의 개수는

$$2 \times {}_5\Pi_4 = 2 \times 5^4 = 1250$$

(i)~(v)에서 30000보다 작은 자연수의 개수는

$$4+20+100+500+1250=1874$$

따라서 30000은 1875번째 수이다.

- 21 0부터 9까지의 10개의 숫자 중에서 3, 6, 9를 제외한 나머지 숫자 7개로 중복을 허용하여 만들 수 있는 200 이하의 자연수의 개수는 다음과 같다.

(i) 한 자리의 자연수의 개수는 6

(ii) 두 자리의 자연수의 개수는 $6 \times {}_7\Pi_1 = 6 \times 7 = 42$

(iii) 백의 자리의 숫자가 1인 세 자리의 자연수의 개수는

$${}_7\Pi_2=7^2=49$$

(iv) 백의 자리의 숫자가 2인 세 자리의 자연수는 200뿐이므로 그 개수는 1

(i)~(iv)에서 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 6 또는 9의 숫자가 들어 있지 않은 수의 개수는

$$6+42+49+1=98$$

따라서 박수를 치는 횟수는 $200-98=102$

- 22 X 에서 Y 로의 함수의 개수는

$$m={}_4\Pi_3=4^3=64$$

X 에서 Y 로의 일대일함수의 개수는

$$n={}_4P_3=24$$

$$\therefore m+n=64+24=88$$

- 23 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4가지

따라서 구하는 함수의 개수는

$$4 \times {}_5\Pi_2 = 4 \times 5^2 = 100$$

다른 풀이

X 에서 Y 로의 함수의 개수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

X 에서 Y 로의 함수 중에서 $f(1)=5$ 인 함수의 개수는

$${}_5\Pi_2=5^2=25$$

따라서 구하는 함수의 개수는

$$125-25=100$$

- 24 $f(x_1)=f(x_2)$ 인 서로 다른 x_1, x_2 가 존재하면 함수 f 는 일대일함수가 아니다.

X 에서 X 로의 함수의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4=256$

X 에서 X 로의 일대일함수의 개수는 ${}_4P_4=24$

따라서 구하는 함수의 개수는

$$256-24=232$$

- 25 (가), (나)에서 치역이 될 수 있는 집합은

$\{1, 3\}$ 또는 $\{1, 5\}$ 또는 $\{3, 5\}$

치역이 $\{1, 3\}$ 인 함수의 개수는 공역이 $\{1, 3\}$ 인 함수의 개수에서 치역이 $\{1\}$ 또는 $\{3\}$ 인 함수의 개수를 뺀 것과 같으므로 ${}_2\Pi_5-2=2^5-2=30$

같은 방법으로 치역이 $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$ 인 함수의 개수도

각각 30이므로 구하는 함수의 개수는

$$30 \times 3 = 90$$

26 좌우 대칭이 되려면 가운데를 기준으로 한쪽에 빨간 공 1개, 파란 공 2개, 흰 공 3개를 일렬로 나열하고 반대쪽은 대칭이도록 공의 순서가 정해지므로 구하는 경우의 수는 $\frac{6!}{2! \times 3!} = 60$

27 p와 i를 양 끝에 고정시키고 그 사이에 a, s, s, o, n을 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!} = 60$
p와 i의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$
따라서 구하는 경우의 수는 $60 \times 2 = 120$

28 모음 e, a, e를 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자 m, s, s, g와 함께 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!} = 60$
모음 e, a, e끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!} = 3$
따라서 구하는 경우의 수는 $60 \times 3 = 180$

29 집합 X의 원소 중에서 중복을 허용하여 5개를 택할 때 그 곱이 9인 경우는 (1, 1, 1, 1, 9) 또는 (1, 1, 1, 3, 3)
(i) 합숫값이 1, 1, 1, 1, 9인 함수의 개수는 $\frac{5!}{4!} = 5$
(ii) 합숫값이 1, 1, 1, 3, 3인 함수의 개수는 $\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$
(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는 $5 + 10 = 15$

30 a, b를 모두 X로 바꾸어 생각하여 X, X, c, d, e를 일렬로 나열한 후 첫 번째 X는 a로, 두 번째 X는 b로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!} = 60$

31 4, 6을 모두 X로, 1, 3, 5, 7을 모두 Y로 바꾸어 생각하여 Y, 2, Y, X, Y, X, Y를 일렬로 나열한 후 첫 번째 X는 4로, 두 번째 X는 6으로, 4개의 Y는 앞에서부터 순서대로 1, 3, 5, 7로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는 $\frac{7!}{2! \times 4!} = 105$

32 모음을 한 묶음, 자음을 다른 한 묶음으로 생각하면 모음이 자음보다 앞에 오게 나열하는 경우는 1가지이다.
모음 a, i, o, a끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$
자음 n, t, n, l끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$
따라서 구하는 경우의 수는 $1 \times 12 \times 12 = 144$

33 A, B를 제외한 나머지 6가지 업무 중에서 오늘 할 업무 2가지를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_2 = 15$

이때 택한 업무를 A, B, C, D라 하면 A와 B는 순서가 정해져 있으므로 X로 바꾸어 생각하여 X, X, C, D를 일렬로 나열한 후 첫 번째 X는 A로, 두 번째 X는 B로 바꾸면 되므로 택한 업무의 순서를 정하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$
따라서 구하는 경우의 수는 $15 \times 12 = 180$

34 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{7!}{3! \times 2!} = 420$
이때 맨 앞자리에 0이 오고 나머지 자리에 1, 1, 1, 2, 2, 3을 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$
따라서 구하는 자연수의 개수는 $420 - 60 = 360$

35 (i) $\square\square\square\square\square$ 1 꼴의 자연수
나머지 자리에 2, 2, 3, 3, 4를 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$
(ii) $\square\square\square\square\square$ 3 꼴의 자연수
나머지 자리에 1, 2, 2, 3, 4를 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!} = 60$
(i), (ii)에서 구하는 홀수의 개수는 $30 + 60 = 90$

36 십의 자리와 일의 자리의 숫자의 합이 4인 일곱 자리의 자연수는 $\square\square\square\square\square\square\square$ 13 또는 $\square\square\square\square\square\square\square$ 22 또는 $\square\square\square\square\square\square\square$ 31
(i) $\square\square\square\square\square\square\square$ 13 꼴의 자연수
나머지 자리에 0, 1, 1, 2, 2를 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$
맨 앞자리에 0이 오고 나머지 자리에 1, 1, 2, 2를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$
따라서 $\square\square\square\square\square\square\square$ 13 꼴의 자연수의 개수는 $30 - 6 = 24$

(ii) $\square\square\square\square\square 22$ 꼴의 자연수

나머지 자리에 0, 1, 1, 1, 3을 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!}=20$$

맨 앞자리에 0이 오고 나머지 자리에 1, 1, 1, 3을 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

따라서 $\square\square\square\square\square 22$ 꼴의 자연수의 개수는

$$20+4=24$$

(iii) $\square\square\square\square\square 31$ 꼴의 자연수

(i)과 같은 방법으로 자연수의 개수는 24

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$24+16+24=64$$

37 3의 배수는 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이다.

4, 4, 4, 5, 5, 6에서 4개의 숫자를 택하여 그 합이 3의 배수가 되는 경우는

(4, 4, 4, 6) 또는 (4, 4, 5, 5)

(i) 4, 4, 4, 6을 일렬로 나열하여 만들 수 있는 자연수의

$$\text{개수는 } \frac{4!}{3!}=4$$

(ii) 4, 4, 5, 5를 일렬로 나열하여 만들 수 있는 자연수의

$$\text{개수는 } \frac{4!}{2! \times 2!}=6$$

(i), (ii)에서 구하는 3의 배수의 개수는 $4+6=10$

38 A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!}=10$$

P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3! \times 1!}=4$$

따라서 구하는 경우의 수는 $10 \times 4=40$

39 꼭짓점 A에서 모서리 CD를 거쳐 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{1! \times 2!} \times 1 \times \frac{5!}{1! \times 3! \times 1!}=60$$

40 (i) A 지점에서 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 3!}=20$$

A 지점에서 P 지점을 거쳐 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2! \times 1!} \times \frac{3!}{1! \times 2!}=9$$

따라서 A 지점에서 P 지점을 거치지 않고 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $20-9=11$

(ii) Q 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{1! \times 3!}=4$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$11 \times 4=44$$

41 오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면

(i) A $\rightarrow$ P $\rightarrow$ B로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!}=36$$

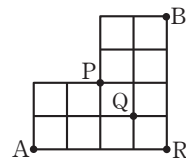
(ii) A $\rightarrow$ Q $\rightarrow$ B로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3! \times 1!} \times \frac{4!}{1! \times 3!}=16$$

(iii) A $\rightarrow$ R $\rightarrow$ B로 가는 경우의 수는 $1 \times 1=1$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$36+16+1=53$$



42 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면

(i) A $\rightarrow$ P $\rightarrow$ B로 가는 경우의 수는 $1 \times 1=1$

(ii) A $\rightarrow$ Q $\rightarrow$ B로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{1! \times 3!} \times \frac{6!}{5! \times 1!}=24$$

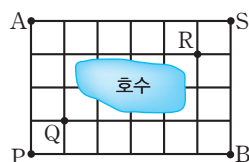
(iii) A $\rightarrow$ R $\rightarrow$ B로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{5! \times 1!} \times \frac{4!}{1! \times 3!}=24$$

(iv) A $\rightarrow$ S $\rightarrow$ B로 가는 경우의 수는 $1 \times 1=1$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$1+24+24+1=50$$



43 오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면

(i) A $\rightarrow$ P $\rightarrow$ B로 가는 경우의 수는 $1 \times 1=1$

(ii) A $\rightarrow$ Q $\rightarrow$ B로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 3!} \times \frac{4!}{2! \times 2!}=120$$

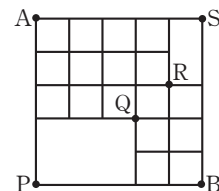
(iii) A $\rightarrow$ R $\rightarrow$ B로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{4! \times 2!} \times \frac{4!}{1! \times 3!}=60$$

(iv) A $\rightarrow$ S $\rightarrow$ B로 가는 경우의 수는 $1 \times 1=1$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$1+120+60+1=182$$



I-1 02 중복조합과 이항정리

기초 문제 Training

11쪽

1 (1) 35 (2) 56 (3) 1 (4) 3

2 (1) 9 (2) 6 (3) 3 (4) 6

3 84

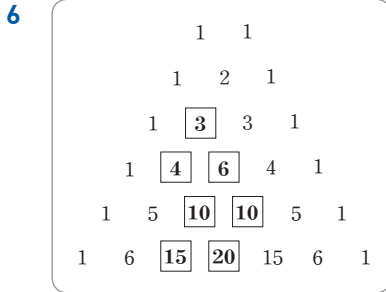
4 (1) $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$

(2) $a^5 - 10a^4 + 40a^3 - 80a^2 + 80a - 32$

(3) $16x^4 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8xy^3 + y^4$

(4) $x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$

5 (1) 135 (2) 160



$$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

7 (1) 6 (2) 8

8 (1) 64 (2) 0 (3) 128 (4) 256

핵심 유형 Training

12~16쪽

1 165	2 18	3 21	4 6	5 ②
6 105	7 ②	8 8	9 94	10 ⑤
11 ③	12 45	13 126	14 36	15 17
16 1	17 5	18 ②	19 176	20 ②
21 ③	22 ③	23 ④	24 ③	25 216
26 ⑤	27 462	28 ④	29 ①	30 ③
31 ④	32 1024	33 ③	34 ⑤	35 30
36 ④				

1 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = 165$$

2 서로 다른 4개의 숫자에서 3개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$

이때 세 수의 곱이 200보다 큰 경우는

(8, 8, 8), (8, 8, 4)의 2가지

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 - 2 = 18$$

3 서로 다른 인형 3개를 각각 1개씩 상자에 담으면 상자는 서로 구별되므로 서로 다른 3개의 상자에 사탕을 한 개씩 먼저 담고 나머지 5개의 사탕을 나누어 담으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

4 3종류의 공에서 k 개를 사는 경우의 수가 21이므로

$${}_3H_k = 21, {}_{k+2}C_k = 21, {}_{k+2}C_2 = 21$$

$$\frac{(k+2)(k+1)}{2 \times 1} = 21$$

$$(k+2)(k+1) = 42 = 7 \times 6$$

$\therefore k=5$ ($\because k$ 는 자연수)

3종류의 공을 적어도 하나씩 포함하여 5개의 공을 사려면

3종류의 공을 각각 하나씩 먼저 사고 나머지 2개의 공을 사면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

5 구하는 항의 개수는 5개의 문자 a, b, c, d, e 에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_6 = {}_{10}C_6 = {}_{10}C_4 = 210$$

6 2개의 문자 x, y 에서 2개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

4개의 문자 a, b, c, d 에서 4개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$$

따라서 구하는 항의 개수는

$$3 \times 35 = 105$$

7 3개의 문자 x, y, z 에서 x 를 먼저 하나 택하고 나머지 2개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

3개의 문자 a, b, c 에서 a 를 제외한 2개의 문자 b, c 에서 4개를 택하는 중복조합의 수는

$${}_2H_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

따라서 구하는 항의 개수는

$$6 \times 5 = 30$$

- 8 3개의 문자 x, y, z 에서 n 개를 택하는 중복조합의 수가 45이므로

$${}_3H_n = 45$$

$${}_{n+2}C_n = 45$$

$${}_{n+2}C_2 = 45$$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2 \times 1} = 45$$

$$(n+2)(n+1) = 90 = 10 \times 9$$

$$\therefore n = 8 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

- 9 $m = {}_4H_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = 84$

한편 x, y, z, w 가 모두 자연수일 때,

$$x-1=a, y-1=b, z-1=c, w-1=d \text{라 하면}$$

$$x=a+1, y=b+1, z=c+1, w=d+1$$

이를 방정식 $x+y+z+w=6$ 에 대입하면

$$(a+1)+(b+1)+(c+1)+(d+1)=6$$

$$\therefore a+b+c+d=2 \quad (\text{단, } a, b, c, d \text{는 음이 아닌 정수})$$

이 방정식을 만족시키는 순서쌍의 개수는

$$n = {}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

$$\therefore m+n = 84+10 = 94$$

- 10 x, y, z 가 음이 아닌 정수이므로

$$x+y+z=0 \text{ 또는 } x+y+z=1$$

$$\text{또는 } x+y+z=2 \text{ 또는 } x+y+z=3$$

(i) $x+y+z=0$ 을 만족시키는 순서쌍은

$$(0, 0, 0) \text{의 1개}$$

(ii) $x+y+z=1$ 을 만족시키는 순서쌍의 개수는

$${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$$

(iii) $x+y+z=2$ 를 만족시키는 순서쌍의 개수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

(iv) $x+y+z=3$ 을 만족시키는 순서쌍의 개수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$1+3+6+10=20$$

- 11 $4x+y+z+w=6$ 에서 x, y, z, w 는 음이 아닌 정수이므로

$$x=0 \text{ 또는 } x=1$$

(i) $x=0$ 인 경우

$y+z+w=6$ 을 만족시키는 순서쌍의 개수는

$${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

(ii) $x=1$ 인 경우

$y+z+w=2$ 를 만족시키는 순서쌍의 개수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$28+6=34$$

- 12 x, y, z 가 모두 홀수이므로 음이 아닌 정수 a, b, c 에 대하여

$$x=2a+1, y=2b+1, z=2c+1$$

이라 하고 이를 방정식 $x+y+z=19$ 에 대입하면

$$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)=19$$

$$\therefore a+b+c=8 \quad (\text{단, } a, b, c \text{는 음이 아닌 정수})$$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$${}_3H_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$$

- 13 주어진 조건에 의하여

$$f(1) \geq f(2) \geq f(3) \geq f(4)$$

즉, 집합 Y 의 원소 6개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 크거나 같은 수부터 차례대로 집합 X 의 원소 1, 2, 3,

4에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

$${}_6H_4 = {}_9C_4 = 126$$

- 14 (가), (나)에서

$$f(1) \leq 2 \leq f(5) \leq 4 \leq f(9) \leq f(11)$$

$f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2의 2가지

$f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은 2, 3, 4의 3가지

$f(9), f(11)$ 의 값은 4, 5, 6의 3개에서 중복을 허용하여

2개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례대로 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

따라서 구하는 함수의 개수는

$$2 \times 3 \times 6 = 36$$

- 15 (나)에서

$$f(2)=3, f(6) \neq 7 \text{ 또는 } f(2) \neq 3, f(6)=7$$

(i) $f(2)=3, f(6) \neq 7$ 인 경우

$$f(2)=3 \text{이면 (가)에서}$$

$$3 \leq f(4) \leq f(6) \leq f(8)$$

이때 $f(4), f(6), f(8)$ 의 값은 3, 7, 11, 15의 4개에서

중복을 허용하여 3개를 택하여 작거나 같은 수부터

차례대로 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

그런데 $f(2)=3, f(6)=7$ 이면 (가)에서

$$3 \leq f(4) \leq 7 \leq f(8)$$

이때 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은 3, 7의 2가지, $f(8)$

의 값이 될 수 있는 것은 7, 11, 15의 3가지이므로

$$2 \times 3 = 6$$

따라서 $f(2)=3, f(6) \neq 7$ 인 함수의 개수는

$$20 - 6 = 14$$

(ii) $f(2) \neq 3$, $f(6)=7$ 인 경우

$f(6)=7$ 이면 $(\textcircled{7})$ 에서

$$f(2) \leq f(4) \leq 7 \leq f(8)$$

이때 $f(2) \neq 3$ 이면 $f(2)=f(4)=7$ 로 정해진다.

이때 $f(8)$ 의 값이 될 수 있는 것은 7, 11, 15의 3가지

이므로 $f(2) \neq 3$, $f(6)=7$ 인 함수의 개수는 3

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$14+3=17$$

16 $(2x^2 + \frac{a}{x})^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r (2x^2)^{4-r} \left(\frac{a}{x}\right)^r = {}_4C_r 2^{4-r} a^r \frac{x^{8-2r}}{x^r}$$

x^5 항은 $8-2r-r=5$ 일 때이므로 $r=1$

이때 x^5 의 계수가 32이므로

$${}_4C_1 2^3 a^1 = 32, 32a = 32$$

$$\therefore a = 1$$

17 $(1+x^3)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r (x^3)^r = {}_nC_r x^{3r}$$

x^6 항은 $3r=6$ 일 때이므로 $r=2$

이때 x^6 의 계수가 10이므로

$${}_nC_2 = 10$$

$$\frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 10$$

$$n(n-1) = 20 = 5 \times 4$$

$$\therefore n = 5 (\because n \text{은 자연수})$$

18 $(x - \frac{3}{x^n})^8$ 의 전개식의 일반항은

$${}_8C_r x^{8-r} \left(-\frac{3}{x^n}\right)^r = {}_8C_r (-3)^r \frac{x^{8-r}}{x^{nr}}$$

상수항은 $8-r=nr$ 일 때이므로

$$r(n+1) = 8$$

이때 r 는 $0 \leq r \leq 8$ 인 정수이고, n 은 자연수이므로

$$r=1, n=7 \text{ 또는 } r=2, n=3 \text{ 또는 } r=4, n=1$$

따라서 구하는 자연수 n 의 개수는 3이다.

19 $(\sqrt{5} + x)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r (\sqrt{5})^{5-r} x^r$$

이때 r 는 $0 \leq r \leq 5$ 인 정수이므로 계수 ${}_5C_r (\sqrt{5})^{5-r}$ 이 정수가 되려면

$$5-r=0 \text{ 또는 } 5-r=2 \text{ 또는 } 5-r=4$$

$$\therefore r=5 \text{ 또는 } r=3 \text{ 또는 } r=1$$

따라서 계수가 정수인 모든 항의 계수의 합은

$${}_5C_1 (\sqrt{5})^4 + {}_5C_3 (\sqrt{5})^2 + {}_5C_5 (\sqrt{5})^0 = 125 + 50 + 1 = 176$$

20 $(1-x)^3$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r (-x)^r = {}_3C_r (-1)^r x^r$$

$(1+2x^2)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_s (2x^2)^s = {}_5C_s 2^s x^{2s}$$

따라서 $(1-x)^3(1+2x^2)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r (-1)^r x^r \times {}_5C_s 2^s x^{2s} = {}_3C_r \times {}_5C_s (-1)^r 2^s x^{r+2s}$$

x^3 항은 $r+2s=3$ (r, s 는 $0 \leq r \leq 3, 0 \leq s \leq 5$ 인 정수)일

때이므로

$$r=1, s=1 \text{ 또는 } r=3, s=0$$

따라서 구하는 x^3 의 계수는

$${}_3C_1 \times {}_5C_1 (-1)^1 2^1 + {}_3C_3 \times {}_5C_0 (-1)^3 2^0 = -30 - 1 = -31$$

21 $(x + \frac{1}{x})^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^{4-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_4C_r \frac{x^{4-r}}{x^r} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $(ax^2+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^4 = ax^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^4 + \left(x+\frac{1}{x}\right)^4$ 이므

로 전개식에서 x^2 항은

(i) ax^2 과 $\textcircled{1}$ 의 상수항의 곱

(ii) 1과 $\textcircled{1}$ 의 x^2 항의 곱

일 때 나타난다.

(i) $\textcircled{1}$ 의 상수항은 $4-r=r$ 일 때이므로 $r=2$

$$\textcircled{1} \text{에서 } {}_4C_2 = 6$$

(ii) $\textcircled{1}$ 의 x^2 항은 $4-r-r=2$ 일 때이므로 $r=1$

$$\textcircled{1} \text{에서 } {}_4C_1 x^2 = 4x^2$$

(i), (ii)에서 x^2 항은

$$ax^2 \times 6 + 1 \times 4x^2 = (6a+4)x^2$$

이때 x^2 의 계수가 16이므로

$$6a+4=16$$

$$\therefore a=2$$

22 $(1+x)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^r$$

$(1+x^3)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_s x^{3s}$$

따라서 $(1+x)^5(1+x^3)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r x^r \times {}_nC_s x^{3s} = {}_5C_r \times {}_nC_s x^{r+3s}$$

x^4 항은 $r+3s=4$ (r, s 는 $0 \leq r \leq 5, 0 \leq s \leq n$ 인 정수)일

때이므로

$$r=1, s=1 \text{ 또는 } r=4, s=0$$

이때 x^4 의 계수가 35이므로

$${}_5C_1 \times {}_nC_1 + {}_5C_4 \times {}_nC_0 = 35$$

$$5n+5=35$$

$$\therefore n=6$$

$$\begin{aligned}
 23 \quad {}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{12}C_2 &= {}_3C_3 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{12}C_2 \\
 &= {}_4C_3 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{12}C_2 \\
 &= {}_5C_3 + \cdots + {}_{12}C_2 \\
 &\vdots \\
 &= {}_{12}C_3 + {}_{12}C_2 = {}_{13}C_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 24 \quad {}_{10}C_0 + {}_{11}C_1 + {}_{12}C_2 + \cdots + {}_{30}C_{20} \\
 &= {}_{11}C_0 + {}_{11}C_1 + {}_{12}C_2 + \cdots + {}_{30}C_{20} \\
 &= {}_{12}C_1 + {}_{12}C_2 + \cdots + {}_{30}C_{20} \\
 &= {}_{13}C_2 + \cdots + {}_{30}C_{20} \\
 &\vdots \\
 &= {}_{30}C_{19} + {}_{30}C_{20} = {}_{31}C_{20} \\
 \therefore n &= 31
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 25 \quad {}_3C_1 + {}_4C_1 + \cdots + {}_{10}C_1 \\
 &= ({}_2C_2 + {}_2C_1) + {}_3C_1 + {}_4C_1 + \cdots + {}_{10}C_1 - ({}_2C_2 + {}_2C_1) \\
 &= {}_3C_2 + {}_3C_1 + {}_4C_1 + \cdots + {}_{10}C_1 - (1+2) \\
 &= {}_4C_2 + {}_4C_1 + \cdots + {}_{10}C_1 - 3 \\
 &\vdots \\
 &= {}_{10}C_2 + {}_{10}C_1 - 3 \\
 &= {}_{11}C_2 - 3 \\
 &= 55 - 3 = 52 \\
 {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{10}C_2 \\
 &= {}_3C_3 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{10}C_2 - {}_3C_3 \\
 &= {}_4C_3 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{10}C_2 - 1 \\
 &= {}_5C_3 + \cdots + {}_{10}C_2 - 1 \\
 &\vdots \\
 &= {}_{10}C_3 + {}_{10}C_2 - 1 \\
 &= {}_{11}C_3 - 1 \\
 &= 165 - 1 = 164 \\
 \text{따라서 색칠한 부분에 있는 모든 수의 합은} \\
 52 + 164 &= 216
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 26 \quad (1+x)^n \text{의 전개식의 일반항은 } {}_nC_r x^r \\
 x^6 \text{항은 } (1+x)^6 \text{의 전개식에서부터 나오므로} \\
 (1+x)^6 \text{의 전개식에서 } x^6 \text{의 계수는 } {}_6C_6 \\
 (1+x)^7 \text{의 전개식에서 } x^6 \text{의 계수는 } {}_7C_6 \\
 \vdots \\
 (1+x)^{20} \text{의 전개식에서 } x^6 \text{의 계수는 } {}_{20}C_6 \\
 \text{따라서 구하는 } x^6 \text{의 계수는} \\
 {}_6C_6 + {}_7C_6 + {}_8C_6 + \cdots + {}_{20}C_6 = {}_7C_7 + {}_7C_6 + {}_8C_6 + \cdots + {}_{20}C_6 \\
 = {}_8C_7 + {}_8C_6 + \cdots + {}_{20}C_6 \\
 = {}_9C_7 + \cdots + {}_{20}C_6 \\
 \vdots \\
 = {}_{20}C_7 + {}_{20}C_6 = {}_{21}C_7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 27 \quad (1+x^2)^n \text{의 전개식의 일반항은 } {}_nC_r x^{2r} \\
 x^8 \text{항은 } (1+x^2)^4 \text{의 전개식에서부터 나오므로} \\
 (1+x^2)^4 \text{의 전개식에서 } x^8 \text{의 계수는 } {}_4C_4 \\
 (1+x^2)^5 \text{의 전개식에서 } x^8 \text{의 계수는 } {}_5C_4 \\
 \vdots \\
 (1+x^2)^{10} \text{의 전개식에서 } x^8 \text{의 계수는 } {}_{10}C_4 \\
 \text{따라서 구하는 } x^8 \text{의 계수는} \\
 {}_4C_4 + {}_5C_4 + {}_6C_4 + \cdots + {}_{10}C_4 = {}_5C_5 + {}_5C_4 + {}_6C_4 + \cdots + {}_{10}C_4 \\
 = {}_6C_5 + {}_6C_4 + \cdots + {}_{10}C_4 \\
 = {}_7C_5 + \cdots + {}_{10}C_4 \\
 \vdots \\
 = {}_{10}C_5 + {}_{10}C_4 \\
 = {}_{11}C_5 = 462
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 28 \quad \text{주어진 다항식의 전개식에서 } x^5 \text{항은 } x^3 \text{과 } (1+x)^n \text{의 } x^2 \\
 \text{항의 곱일 때 나타나므로 } x^5 \text{의 계수는 } (1+x)^n \text{의 전개식} \\
 \text{에서 } x^2 \text{의 계수와 같다.} \\
 (1+x)^n \text{의 전개식의 일반항은 } {}_nC_r x^r \\
 x^2 \text{항은 } (1+x)^2 \text{의 전개식에서부터 나오므로} \\
 (1+x)^2 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_2C_2 \\
 (1+x)^3 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_3C_2 \\
 \vdots \\
 (1+x)^6 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_6C_2 \\
 \text{따라서 구하는 계수는} \\
 {}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + {}_6C_2 = {}_3C_3 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + {}_6C_2 \\
 = {}_4C_3 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + {}_6C_2 \\
 = {}_5C_3 + {}_5C_2 + {}_6C_2 \\
 = {}_6C_3 + {}_6C_2 \\
 = {}_7C_3 = 35
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 29 \quad {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n \text{이므로} \\
 {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-1} = 2^n - {}_nC_n \\
 = 2^n - 1 \\
 300 < {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_{n-1} < 3000 \text{에서} \\
 300 < 2^n - 1 < 3000 \\
 \therefore 301 < 2^n < 3001 \\
 \text{이때 } 2^8 = 256, 2^9 = 512, 2^{10} = 1024, 2^{11} = 2048, 2^{12} = 4096 \\
 \text{이므로 부등식을 만족시키는 자연수 } n \text{의 값은} \\
 9, 10, 11 \\
 \text{따라서 구하는 합은 } 9 + 10 + 11 = 30
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 30 \quad {}_{22}C_0 - {}_{22}C_1 + {}_{22}C_2 - \cdots - {}_{22}C_{21} + {}_{22}C_{22} = 0 \text{이므로} \\
 {}_{22}C_0 - ({}_{22}C_1 - {}_{22}C_2 + \cdots + {}_{22}C_{21}) + {}_{22}C_{22} = 0 \\
 \therefore {}_{22}C_1 - {}_{22}C_2 + {}_{22}C_3 - \cdots + {}_{22}C_{21} = {}_{22}C_0 + {}_{22}C_{22} \\
 = 1 + 1 = 2
 \end{aligned}$$

31 ${}_{17}C_0 = {}_{17}C_{17}, {}_{17}C_1 = {}_{17}C_{16}, \dots, {}_{17}C_8 = {}_{17}C_9$ 이고
 ${}_{17}C_0 + {}_{17}C_1 + {}_{17}C_2 + \dots + {}_{17}C_{17} = 2^{17}$ 이므로
 $({}_{17}C_0 + {}_{17}C_1 + {}_{17}C_2 + \dots + {}_{17}C_8)$
 $+ ({}_{17}C_9 + {}_{17}C_{10} + {}_{17}C_{11} + \dots + {}_{17}C_{17}) = 2^{17}$
 $2({}_{17}C_0 + {}_{17}C_1 + {}_{17}C_2 + \dots + {}_{17}C_8) = 2^{17}$
 $\therefore {}_{17}C_0 + {}_{17}C_1 + {}_{17}C_2 + \dots + {}_{17}C_8 = 2^{16}$

32 원소의 개수가 1인 부분집합의 개수는 ${}_1C_1$
 원소의 개수가 3인 부분집합의 개수는 ${}_1C_3$
 원소의 개수가 5인 부분집합의 개수는 ${}_1C_5$
 $\vdots$
 원소의 개수가 11인 부분집합의 개수는 ${}_1C_{11}$
 $\therefore {}_1C_1 + {}_1C_3 + {}_1C_5 + \dots + {}_1C_{11} = 2^{11-1} = 2^{10} = 1024$

33 $9 {}_{30}C_0 + 9^2 {}_{30}C_1 + 9^3 {}_{30}C_2 + \dots + 9^{31} {}_{30}C_{30}$
 $= 9({}_{30}C_0 + 9 {}_{30}C_1 + 9^2 {}_{30}C_2 + \dots + 9^{30} {}_{30}C_{30})$
 $= 9(1+9)^{30}$
 $= 9 \times 10^{30}$

34 $31^{100} = (1+30)^{100}$
 $= {}_{100}C_0 + 30 {}_{100}C_1 + 30^2 {}_{100}C_2 + 30^3 {}_{100}C_3$
 $+ \dots + 30^{100} {}_{100}C_{100}$
 $= 1 + 30 \times 100 \quad \blacktriangleleft 3001 = 301 + 900 \times 3$
 $+ 30^2({}_{100}C_2 + {}_{100}C_3 + \dots + {}_{100}C_{100})$
 $= 301 + 900(3 + {}_{100}C_2 + {}_{100}C_3 + \dots + {}_{100}C_{100})$
 따라서 구하는 나머지는 301이다.

35 $11^{15} = (1+10)^{15}$
 $= {}_{15}C_0 + 10 {}_{15}C_1 + 10^2 {}_{15}C_2 + 10^3 {}_{15}C_3 + \dots + 10^{15} {}_{15}C_{15}$
 $= 1 + 10 \times 15 + 100 \times 105 \quad \blacktriangleleft 10651 = 651 + 1000 \times 10$
 $+ 10^3({}_{15}C_3 + {}_{15}C_4 + \dots + {}_{15}C_{15})$
 $= 651 + 1000(10 + {}_{15}C_3 + {}_{15}C_4 + \dots + {}_{15}C_{15})$
 ㉠

이때 ㉠은 1000의 배수이므로 11^{15} 의 백의 자리의 숫자, 십의 자리의 숫자, 일의 자리의 숫자는 각각 6, 5, 1이다.
 따라서 $a=6, b=5, c=1$ 이므로 $abc=30$

36 $n(U)=10$ 이므로 집합 B 의 원소의 개수를 k ($0 \leq k \leq 10$)
 라 하면 집합 B 를 정하는 경우의 수는 ${}_{10}C_k$
 또 $A \subset B$ 이므로 집합 A 를 정하는 경우의 수는 2^k
 즉, 집합 B 의 원소의 개수가 k 일 때, 두 집합 A, B 를 정하는 경우의 수는
 ${}_{10}C_k \times 2^k$
 따라서 구하는 모든 경우의 수는
 ${}_{10}C_0 \times 2^0 + {}_{10}C_1 \times 2^1 + {}_{10}C_2 \times 2^2 + \dots + {}_{10}C_{10} \times 2^{10}$
 $= (1+2)^{10} = 3^{10}$

II-1 01 확률의 뜻과 활용

기초 문제 Training

18쪽

- (1) {1, 2, 3, 4} (2) {1}, {2}, {3}, {4} (3) {1, 2, 4}
- (1) {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10} (2) {6}
(3) {1, 3, 5, 7, 9} (4) {1, 2, 4, 5, 7, 8, 10}
- $\neg, \cup$
- (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{9}$
- $\frac{2}{5}$
- (1) $\frac{3}{5}$ (2) 1 (3) 0
- $\frac{5}{12}$
- $\frac{11}{20}$
- (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{2}{5}$

핵심 유형 Training

19~26쪽

- | | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|-------------------|------------------------|
| 1 ㉢ | 2 ㉢ | 3 16 | 4 $\frac{1}{4}$ | 5 ㉣ |
| 6 $\frac{11}{49}$ | 7 $\frac{2}{9}$ | 8 $\frac{3}{28}$ | 9 $\frac{1}{10}$ | 10 $\frac{7}{20}$ |
| 11 ㉣ | 12 $\frac{3}{10}$ | 13 $\frac{1}{35}$ | 14 ㉤ | 15 $\frac{1}{5}$ |
| 16 $\frac{12}{25}$ | 17 $\frac{21}{64}$ | 18 ㉢ | 19 $\frac{1}{3}$ | 20 $\frac{3}{10}$ |
| 21 ㉢ | 22 $\frac{1}{6}$ | 23 $\frac{5}{21}$ | 24 $\frac{4}{15}$ | 25 $\frac{1}{4}$ |
| 26 1 | 27 $\frac{3}{7}$ | 28 ㉢ | 29 $\frac{5}{12}$ | 30 ㉡ |
| 31 $\frac{3}{25}$ | 32 C | 33 6개 | 34 $\frac{5}{8}$ | 35 $1 - \frac{\pi}{8}$ |
| 36 $\frac{7}{8}$ | 37 ㉣ | 38 ㉢ | 39 $\frac{1}{6}$ | 40 ㉣ |
| 41 ㉢ | 42 ㉤ | 43 $\frac{23}{50}$ | 44 $\frac{2}{3}$ | 45 $\frac{7}{16}$ |
| 46 ㉣ | 47 $\frac{1}{3}$ | 48 $\frac{5}{84}$ | 49 $\frac{9}{14}$ | 50 $\frac{11}{12}$ |
| 51 $\frac{4}{5}$ | 52 ㉤ | 53 $\frac{10}{21}$ | 54 5 | 55 ㉢ |
| 56 ㉡ | | | | |

- 1 $A=\{1, 3, 5, 6, 8, 10\}$, $B=\{6, 8, 10\}$, $C=\{3, 5\}$,
 $D=\{3, 6\}$ 이므로
 ① $A \cap B = \{6, 8, 10\}$
 ② $A \cap C = \{3, 5\}$
 ③ $B \cap C = \emptyset$
 ④ $B \cap D = \{6\}$
 ⑤ $C \cap D = \{3\}$
 따라서 서로 배반사건인 것은 ③이다.
- 2 표본공간을 S 라 하면 $S=\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 이므로
 $A=\{1, 2, 5, 10\}$
 사건 A 와 서로 배반인 사건은 A^c 의 부분집합이고, A^c 의
 원소가 6개이므로 구하는 사건의 개수는
 $2^6=64$
- 3 $S=\{1, 2, 3, \dots, 12\}$ 이므로
 $A=\{3, 6, 9, 12\}$, $B=\{2, 3, 5, 7, 11\}$
 사건 A 와 서로 배반인 사건은 A^c 의 부분집합이고, 사건
 B 와 서로 배반인 사건은 B^c 의 부분집합이므로 두 사건
 A, B 와 모두 배반인 사건은 $A^c \cap B^c$ 의 부분집합이다.
 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{1, 4, 8, 10\}$
 따라서 $A^c \cap B^c$ 의 원소가 4개이므로 구하는 사건의 개수
 는 $2^4=16$
- 4 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^5=32$
 원소 b, c 가 모두 포함된 집합 A 의 부분집합의 개수는
 $2^{5-2}=2^3=8$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$
- 5 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든
 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$
 나오는 두 눈의 수의 합이 5 이하인 경우는 $(1, 1), (1, 2),$
 $(1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2),$
 $(4, 1)$ 의 10가지이다.
 따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$
- 6 $x+y=50$ 을 만족시키는 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는
 $(1, 49), (2, 48), (3, 47), \dots, (49, 1)$ 의 49개이다.
 이때 $y=50-x$ 이므로 $xy \geq 600$ 에서
 $x(50-x) \geq 600$, $x^2-50x+600 \leq 0$
 $(x-20)(x-30) \leq 0 \quad \therefore 20 \leq x \leq 30$
 즉, $xy \geq 600$ 을 만족시키는 순서쌍 (x, y) 는 $(20, 30),$
 $(21, 29), (22, 28), \dots, (30, 20)$ 의 11개이다.
 따라서 구하는 확률은 $\frac{11}{49}$

- 7 한 개의 주사위를 2번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
 $6 \times 6 = 36$
 $f(a)f(b) > 0$ 에서
 $f(a) > 0, f(b) > 0$ 또는 $f(a) < 0, f(b) < 0$
 (i) $f(a) > 0, f(b) > 0$ 인 경우
 $a^2-7a+10 > 0$ 에서 $(a-2)(a-5) > 0$
 $\therefore a < 2$ 또는 $a > 5$
 $b^2-7b+10 > 0$ 에서 $(b-2)(b-5) > 0$
 $\therefore b < 2$ 또는 $b > 5$
 즉, a, b 는 각각 1 또는 6이므로 순서쌍 (a, b) 의 개
 수는 $2 \times 2 = 4$
 (ii) $f(a) < 0, f(b) < 0$ 인 경우
 $a^2-7a+10 < 0$ 에서 $(a-2)(a-5) < 0$
 $\therefore 2 < a < 5$
 $b^2-7b+10 < 0$ 에서 $(b-2)(b-5) < 0$
 $\therefore 2 < b < 5$
 즉, a, b 는 각각 3 또는 4이므로 순서쌍 (a, b) 의 개
 수는 $2 \times 2 = 4$
 (i), (ii)에서 $f(a)f(b) > 0$ 을 만족시키는 경우의 수는
 $4+4=8$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$
- 8 8명이 일렬로 서는 경우의 수는 8!
 맨 앞과 맨 뒤에 남자 3명 중에서 2명이 서고 그 사이에
 나머지 6명이 일렬로 서는 경우의 수는 ${}_3P_2 \times 6!$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{{}_3P_2 \times 6!}{8!}=\frac{3}{28}$
- 9 안내문 6장을 일렬로 붙이는 경우의 수는 6!
 교내, 교외 대회의 순서로 번갈아 붙이는 경우의 수는
 $3! \times 3!$
 교외, 교내 대회의 순서로 번갈아 붙이는 경우의 수는
 $3! \times 3!$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{3! \times 3! + 3! \times 3!}{6!}=\frac{1}{10}$
- 10 3, 4, 5, 6, 7을 모두 사용하여 만들 수 있는 다섯 자리의
 자연수의 개수는 $5! = 120$
 (i) $64\square\square\square, 65\square\square\square, 67\square\square\square$ 꼴의 자연수의 개
 수는 각각 3!이므로
 $3! \times 3 = 18$
 (ii) $7\square\square\square\square$ 꼴의 자연수의 개수는 $4! = 24$
 (i), (ii)에서 64000보다 큰 자연수의 개수는
 $18+24=42$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{42}{120}=\frac{7}{20}$

- 11 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $7!$
 s 와 t 사이에 나머지 5개의 문자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_5P_3=60$
 나열된 $s\Box\Box\Box t$ 를 한 묶음으로 생각하여 남은 2개의 문자와 함께 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$
 s 와 t 의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{60 \times 6 \times 2}{7!} = \frac{1}{7}$
- 12 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(6-1)!=5!$
 제과제빵반 학생 3명을 한 묶음으로 생각하여 나머지 3명과 함께 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)!=3!$
 제과제빵반 학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{3! \times 3!}{5!} = \frac{3}{10}$
- 13 8명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(8-1)!=7!$
 남자 4명이 먼저 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)!=3!$
 남자 4명 사이사이의 4개의 자리에 여자 4명이 앉는 경우의 수는 ${}_4P_4=4!$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{3! \times 4!}{7!} = \frac{1}{35}$
- 14 6명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(6-1)!=5!$
 이웃해도 되는 2학년 학생 4명이 원탁에 둘러앉는 경우의 수는 $(4-1)!=3!$
 2학년 학생 사이사이의 4개의 자리 중에서 2개의 자리에 1학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_4P_2$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{3! \times {}_4P_2}{5!} = \frac{3}{5}$
- 15 6가지 색을 원형으로 배열하는 경우의 수는 $(6-1)!=5!$
 빨간색을 칠할 영역이 결정되면 노란색을 칠할 영역은 고정되므로 그 경우의 수는 $(5-1)!=4!$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$
- 16 5가지의 놀이 기구 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_5\Pi_3=125$
 5가지의 놀이 기구 중에서 서로 다른 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_5P_3=60$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{125} = \frac{12}{25}$
- 17 0, 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는 $3 \times {}_4\Pi_3=192$

2000보다 큰 짝수는 천의 자리에는 2 또는 3이 오고, 일의 자리에는 0 또는 2가 와야 하고, 이때 2000은 제외해야 하므로 그 개수는

$$2 \times {}_4\Pi_2 \times 2 - 1 = 64 - 1 = 63$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{63}{192} = \frac{21}{64}$$

- 18 X 에서 Y 로의 함수의 개수는 ${}_4\Pi_4=256$
 X 에서 Y 로의 일대일대응의 개수는 ${}_4P_4=24$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{256} = \frac{3}{32}$
- 19 세 사람이 가위바위보를 한 번 할 때, 나오는 모든 경우의 수는 ${}_3\Pi_3=27$
 이기는 한 명을 정하는 경우의 수는 3이고, 그 각각에 대하여 이기는 경우는 (가위, 보, 보), (바위, 가위, 가위), (보, 바위, 바위)의 3가지이므로 이긴 사람이 한 명인 경우의 수는 $3 \times 3=9$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$
- 20 1, 1, 2, 2, 2, 3을 모두 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수의 개수는 $\frac{6!}{2! \times 3!} = 60$
 (i) $\Box\Box\Box\Box 12$ 꼴의 자연수
 나머지 자리에 1, 2, 2, 3을 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$
 (ii) $\Box\Box\Box\Box 32$ 꼴의 자연수
 나머지 자리에 1, 1, 2, 2를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$
 (i), (ii)에서 4의 배수의 개수는 $12+6=18$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{18}{60} = \frac{3}{10}$
- 21 X 에서 Y 로의 함수의 개수는 ${}_2\Pi_3=8$
 $f(a)+f(b)+f(c)=11$ 인 함수의 개수는 3, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2!}=3$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{8}$
- 22 h, a, p, p, i, n, e, s, s를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{9!}{2! \times 2!} = \frac{9!}{4}$
 모음을 알파벳 순서대로 나열하려면 a, i, e를 모두 X 로 바꾸어 생각하여 h, X, p, p, X, n, X, s, s를 일렬로 나열한 후 3개의 X 를 앞에서부터 순서대로 a, e, i로 바꾸면 되므로 그 경우의 수는 $\frac{9!}{3! \times 2! \times 2!} = \frac{9!}{24}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{9!}{24}}{\frac{9!}{4}} = \frac{1}{6}$$

- 23** A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{10!}{6! \times 4!} = 210$$

A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} \times \frac{5!}{4! \times 1!} = 50$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{50}{210} = \frac{5}{21}$

- 24** 6장의 사진 중에서 2장을 택하는 경우의 수는

$${}_6C_2 = 15$$

B는 반드시 택하고 D는 택하지 않으려면 B를 먼저 뽑아 놓고, B와 D를 제외한 나머지 4장 중에서 1장을 택하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_4C_1 = 4$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{15}$

- 25** 10개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = 120$$

모두 다른 색의 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_5C_1 = 30$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{30}{120} = \frac{1}{4}$

- 26** 남학생의 수를 x 라 하면 여학생의 수는 $9-x$ 이므로

$$\frac{x C_1 \times (9-x) C_1}{{}_9C_2} = \frac{5}{9}, \quad \frac{x(9-x)}{36} = \frac{5}{9}$$

$$x^2 - 9x + 20 = 0, \quad (x-4)(x-5) = 0$$

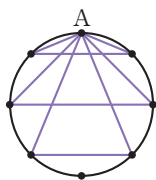
$$\therefore x=4 \text{ 또는 } x=5$$

따라서 남학생이 4명, 여학생이 5명 또는 남학생이 5명, 여학생이 4명이므로 구하는 학생 수의 차는 1이다.

- 27** 8개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_8C_3 = 56$$

이때 오른쪽 그림과 같이 원 위의 한 점 A에 대하여 $\angle A$ 를 꼭지각으로 하는 이등변삼각형은 3개이고, 점은 모두 8개이므로 이등변삼각형의 개수는 $3 \times 8 = 24$



따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{56} = \frac{3}{7}$

- 28** 한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

$a \geq b \geq c$ 를 만족시키려면 주사위를 던져서 나오는 눈의 수 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크거나 같은 수부터 차례대로 a, b, c 의 값으로 정하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_6H_3 = {}_8C_3 = 56$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{56}{216} = \frac{7}{27}$

- 29** 방정식 $x+y+z=7$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수의 순서쌍의 개수는

$${}_3H_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

한편 $x-1=a, y-1=b, z-1=c$ 라 하면 $x+y+z=7$ 에서

$$(a+1)+(b+1)+(c+1)=7$$

$$\therefore a+b+c=4 \text{ (단, } a, b, c \text{는 음이 아닌 정수)}$$

즉, x, y, z 가 모두 자연수인 순서쌍의 개수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

- 30** X 에서 X 로의 함수의 개수는 ${}_5\Pi_5 = 5^5$

(가), (나)에서 $f(3) \leq f(5)$ 이고 $f(3)+f(5)=9$ 이므로

$$f(3)=4, f(5)=5$$

$$\text{즉, (가)에서 } f(1) \leq f(2) \leq 4 \leq f(4) \leq 5$$

$f(1), f(2)$ 의 값은 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례대로 대응시키고, $f(4)$ 의 값은 4, 5의 2개에서 1개를 택하여 대응시키면 되므로 주어진 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$${}_4H_2 \times {}_2C_1 = {}_5C_2 \times {}_2C_1 = 10 \times 2 = 20$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{20}{5^5} = \frac{4}{625}$$

- 31** 전체 100일 중에서 B가 가장 먼저 온 날은 12일이므로 구하는 확률은

$$\frac{12}{100} = \frac{3}{25}$$

- 32** 세 선수가 각각 자유투를 한 번씩 던질 때, 성공할 확률은 각각 다음과 같다.

$$A: \frac{65}{120} = \frac{13}{24}, \quad B: \frac{104}{200} = \frac{13}{25}, \quad C: \frac{84}{150} = \frac{14}{25}$$

$\frac{13}{25} < \frac{13}{24} < \frac{14}{25}$ 이므로 자유투에 성공할 확률이 가장 큰 선수는 C이다.

33 파란 구슬의 개수를 n 이라 하면

$$\frac{nC_2}{10C_2} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{n(n-1)}{90} = \frac{2}{15}$$

$$n(n-1) = 12 = 4 \times 3$$

$$\therefore n = 4 (\because n \text{은 자연수})$$

따라서 파란 구슬은 4개가 들어 있다고 볼 수 있으므로 노란 구슬은 6개가 들어 있다고 볼 수 있다.

34 반지름의 길이가 1, 2, 3, 4인 네 원의 넓이는 각각

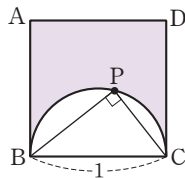
$$\pi, 4\pi, 9\pi, 16\pi$$

이때 색칠한 부분의 넓이는

$$(16\pi - 9\pi) + (4\pi - \pi) = 10\pi$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{10\pi}{16\pi} = \frac{5}{8}$$

35 점 P가 변 BC를 지름으로 하는 반원 위에 있을 때 삼각형 PBC는 직각삼각형이 되므로 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 점 P를 잡으면 삼각형 PBC는 예각삼각형이 된다.



따라서 구하는 확률은

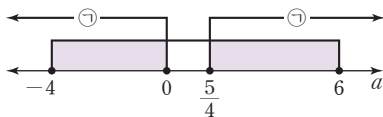
$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square ABCD \text{의 넓이})} = \frac{1 - \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1} = 1 - \frac{\pi}{8}$$

36 이차방정식 $x^2 + 4ax + 5a = 0$ 이 실근을 가지려면 판별식 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (2a)^2 - 5a \geq 0, 4a^2 - 5a \geq 0$$

$$a(4a - 5) \geq 0 \quad \therefore a \leq 0 \text{ 또는 } a \geq \frac{5}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $-4 \leq a \leq 6$ 과 $\textcircled{1}$ 을 수직선 위에 나타내면



$$\therefore -4 \leq a \leq 0 \text{ 또는 } \frac{5}{4} \leq a \leq 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\textcircled{2} \text{의 구간의 길이})}{(\text{전체 구간의 길이})} = \frac{\{0 - (-4)\} + \left(6 - \frac{5}{4}\right)}{6 - (-4)} = \frac{7}{8}$$

37 표본공간을 S 라 하면 $S = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 이므로

$$A = \{2\}, B = \emptyset, C = \{2, 4, 6, 8, 10\}, D = \emptyset$$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = 0, P(C) = 1, P(D) = 0$$

따라서 보기 중 확률이 0인 사건은 $\neg$, $\cap$ 이다.

38 $\neg$, $P(\emptyset) = 0, P(S) = 1$ 이므로

$$P(\emptyset) + P(S) = 1$$

$$\neg, 0 \leq P(A) \leq 1, 0 \leq P(B) \leq 1 \text{이므로}$$

$$0 \leq P(A) + P(B) \leq 2$$

$$\cap, [\text{반례}] P(S) = 1 \text{이고 } P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{2} \text{이면}$$

$$P(A) + P(B) = \frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$P(A) + P(B) < P(S)$$

$$\cup, 0 \leq P(A) \leq 1, 0 \leq P(B) \leq 1 \text{이므로}$$

$$P(A) + P(B) = 2 \text{이면 } P(A) = 1, P(B) = 1$$

$$\therefore A = B = S$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, $\cup$, $\cap$ 이다.

39 $P(B^c) = \frac{1}{2}$ 에서

$$1 - P(B) = \frac{1}{2} \quad \therefore P(B) = \frac{1}{2}$$

$$\text{또 } P(B \cap A^c) = \frac{1}{6} \text{에서}$$

$$P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B) \text{이므로}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - P(A \cap B) \quad \therefore P(A \cap B) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \text{이므로}$$

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c)$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

40 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이므로 $P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{3}$ 에서

$$P((A \cup B)^c) = \frac{1}{3}, 1 - P(A \cup B) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

A, B 가 서로 배반사건이므로

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\frac{2}{3} = P(A) + P(B)$$

$$\therefore P(A) = \frac{2}{3} - P(B)$$

$$\text{이때 } \frac{1}{5} \leq P(A) \leq \frac{1}{4} \text{에서}$$

$$\frac{1}{5} \leq \frac{2}{3} - P(B) \leq \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{5}{12} \leq P(B) \leq \frac{7}{15}$$

따라서 $P(B)$ 의 최댓값은 $\frac{7}{15}$ 이다.

- 41 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 이므로

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - P(A \cap B) \\ &= \frac{7}{12} - P(A \cap B) \end{aligned}$$

즉, $P(A \cap B)$ 가 최소일 때 $P(A \cup B)$ 는 최대이고

$P(A \cap B)$ 가 최대일 때 $P(A \cup B)$ 는 최소이다.

이때 $P(A \cap B) \leq P(A)$, $P(A \cap B) \leq P(B)$,

$P(A \cap B) \geq 0$ 이므로

$$P(A \cap B) \leq \frac{1}{4}, P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}, P(A \cap B) \geq 0$$

$$\text{즉, } 0 \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$-\frac{1}{4} \leq -P(A \cap B) \leq 0$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{7}{12} - P(A \cap B) \leq \frac{7}{12}$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq P(A \cup B) \leq \frac{7}{12}$$

$$\text{따라서 } M = \frac{7}{12}, m = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$M + m = \frac{11}{12}$$

- 42 게임을 좋아하는 학생을 택하는 사건을 A , 웹툰을 좋아하는 학생을 택하는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = 0.6, P(B) = 0.5, P(A \cap B) = 0.3$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.6 + 0.5 - 0.3 = 0.8 \end{aligned}$$

- 43 카드에 적힌 수가 3으로 나누어떨어지는 수, 즉 3의 배수인 사건을 A , 5로 나누어떨어지는 수, 즉 5의 배수인 사건을 B 라 하면 $A \cap B$ 는 15의 배수인 사건이므로

$$P(A) = \frac{16}{50}, P(B) = \frac{10}{50}, P(A \cap B) = \frac{3}{50}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{16}{50} + \frac{10}{50} - \frac{3}{50} = \frac{23}{50} \end{aligned}$$

- 44 A 가 뽑히는 사건을 A , B 가 뽑히는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{{}^9C_3}{{}^{10}C_4} = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{{}^9C_3}{{}^{10}C_4} = \frac{2}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{{}^8C_2}{{}^{10}C_4} = \frac{2}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \frac{2}{15} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- 45 $f(1)=2$ 인 사건을 A , $f(3)=1$ 인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{{}_4\Pi_2}{{}_4\Pi_3} = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{{}_4\Pi_2}{{}_4\Pi_3} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = \frac{{}_4\Pi_3}{{}_4\Pi_3} = \frac{1}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16} \end{aligned}$$

- 46 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

두 눈의 수의 합이 3인 사건을 A , 차가 3인 사건을 B 라 하면

$$A = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

$$B = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}, P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = \frac{2}{9}$$

- 47 h, o, r, r, o, r를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 3!} = 60$$

h 가 맨 앞에 오는 사건을 A , h 가 맨 뒤에 오는 사건을 B 라 하자.

h 를 맨 앞에 고정시키고 나머지 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} = 10 \quad \therefore P(A) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$

h 를 맨 뒤에 고정시키고 나머지 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} = 10 \quad \therefore P(B) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$

두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

- 48 검정 볼펜은 2개 들어 있으므로 3개 모두 검정 볼펜이 나올 수는 없다.

따라서 3개 모두 빨강 볼펜이 나오는 사건을 A , 모두 파랑 볼펜이 나오는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{{}_4C_3}{{}_9C_3} = \frac{1}{21}, P(B) = \frac{{}_3C_3}{{}_9C_3} = \frac{1}{84}$$

두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{21} + \frac{1}{84} = \frac{5}{84}$$

- 49 남학생이 여학생보다 많이 뽑히려면 뽑은 6명 중에서 남학생이 4명 또는 5명이어야 한다.

남학생 4명과 여학생 2명을 뽑는 사건을 A , 남학생 5명과 여학생 1명을 뽑는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{{}_5C_4 \times {}_3C_2}{{}_8C_6} = \frac{15}{28}, P(B) = \frac{{}_5C_5 \times {}_3C_1}{{}_8C_6} = \frac{3}{28}$$

두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \\ = \frac{15}{28} + \frac{3}{28} = \frac{9}{14}$$

- 50 두 눈의 수의 합이 10 이하인 사건을 A 라 하면 A^c 은 두 눈의 수의 합이 11 이상인 사건이다.

$A^c = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$ 이므로

$$P(A^c) = \frac{3}{6 \times 6} = \frac{1}{12}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

- 51 적어도 한쪽 끝에 남학생이 서는 사건을 A 라 하면 A^c 은 양쪽 끝에 모두 여학생이 서는 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_3P_2 \times 4!}{6!} = \frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

- 52 3명의 대표 중에서 적어도 한 명이 여학생인 사건을 A 라 하면 A^c 은 3명 모두 남학생인 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_5C_3}{{}_8C_3} = \frac{5}{28}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5}{28} = \frac{23}{28}$$

- 53 7개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 7!

m 과 n 사이에 2개 이상의 문자가 오는 사건을 A 라 하면 A^c 은 m 과 n 사이에 1개 이하의 문자가 오는 사건이다.

(i) m 과 n 이 서로 이웃할 확률은

$$\frac{6! \times 2!}{7!} = \frac{2}{7}$$

(ii) m 과 n 사이에 1개의 문자가 올 확률은

$$\frac{{}_5P_1 \times 5! \times 2!}{7!} = \frac{5}{21}$$

(i), (ii)에서

$$P(A^c) = \frac{2}{7} + \frac{5}{21} = \frac{11}{21}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{11}{21} = \frac{10}{21}$$

- 54 적어도 한 개가 당첨 예비인 사건을 A 라 하면 A^c 은 모두 당첨 예비가 아닌 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_{15-n}C_2}{{}_{15}C_2} \\ = \frac{(15-n)(14-n)}{210}$$

이때 $P(A) = \frac{4}{7}$ 이므로

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\text{즉, } \frac{(15-n)(14-n)}{210} = \frac{3}{7} \text{이므로}$$

$$(15-n)(14-n) = 90 = 10 \times 9$$

$$\therefore n = 5 (\because n \text{은 자연수})$$

- 55 세 수를 택하여 만들 수 있는 삼각형의 개수는

$${}_6C_3 = 20$$

정삼각형이 아닌 사건을 A 라 하면 A^c 은 정삼각형인 사건이다.

정삼각형이 되는 경우는 (1, 3, 5) 또는 (2, 4, 6)을 붙인 꼭짓점을 연결하는 경우의 2가지이므로

$$P(A^c) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

- 56 같은 숫자가 적힌 카드는 3이 적힌 카드와 4가 적힌 카드이므로 3이 적힌 카드가 서로 이웃하는 사건을 A , 4가 적힌 카드가 서로 이웃하는 사건을 B 라 하면 같은 숫자가 적힌 카드가 서로 이웃하지 않는 사건은 $A^c \cap B^c$ 이다.

8장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 8!

3이 적힌 카드가 서로 이웃할 확률은

$$P(A) = \frac{7! \times 2!}{8!} = \frac{1}{4}$$

4가 적힌 카드가 서로 이웃할 확률은

$$P(B) = \frac{7! \times 2!}{8!} = \frac{1}{4}$$

3이 적힌 카드가 서로 이웃하고, 4가 적힌 카드도 서로 이웃할 확률은

$$P(A \cap B) = \frac{6! \times 2! \times 2!}{8!} = \frac{1}{14}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{14} = \frac{3}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

II-2 01 조건부확률

기초 문제 Training

28쪽

- 1 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{3}$
- 2 (1) $\frac{1}{36}$ (2) $\frac{1}{9}$
- 3 (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{3}{7}$ (3) 종속
- 4 (1) 독립 (2) 종속
- 5 (1) 0.07 (2) 0.28 (3) 0.2 (4) 0.65
- 6 0.48
- 7 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{8}$
- 8 $\frac{2}{9}$

핵심 유형 Training

29~34쪽

- | | | | | |
|-------------------|-------------------|-----------------------|--------------------|--------------------|
| 1 ② | 2 $\frac{7}{15}$ | 3 $\frac{5}{12}$ | 4 $\frac{1}{3}$ | 5 $\frac{2}{5}$ |
| 6 $\frac{1}{3}$ | 7 $\frac{6}{25}$ | 8 $\frac{1}{3}$ | 9 ① | 10 11 |
| 11 $\frac{2}{5}$ | 12 4 | 13 ① | 14 $\frac{3}{7}$ | 15 $\frac{9}{17}$ |
| 16 ② | 17 ⑤ | 18 $\neg, \cup, \cap$ | 19 12 | |
| 20 ⑤ | 21 $\frac{1}{6}$ | 22 ③ | 23 ④ | 24 ⑤ |
| 25 $\frac{4}{15}$ | 26 $\frac{8}{15}$ | 27 ③ | 28 25 | 29 $\frac{63}{64}$ |
| 30 ⑤ | 31 ④ | 32 ④ | 33 $\frac{11}{72}$ | 34 $\frac{6}{31}$ |
| 35 $\frac{1}{32}$ | 36 $\frac{8}{81}$ | 37 $\frac{1}{2}$ | | |

$$\begin{aligned}
 1 \quad P(B|A^c) &= \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} \\
 &= \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} \\
 &= \frac{0.7 - 0.5}{1 - 0.5} = 0.4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad P(A^c \cap B^c) &= \frac{2}{5} \text{에서 } P((A \cup B)^c) = \frac{2}{5} \\
 1 - P(A \cup B) &= \frac{2}{5} \quad \therefore P(A \cup B) = \frac{3}{5} \\
 P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{이므로} \\
 \frac{3}{5} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - P(A \cap B) \quad \therefore P(A \cap B) = \frac{7}{30} \\
 \therefore P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{30}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad \text{두 사건 } A, B \text{가 서로 배반사건이면 } A \cap B &= \emptyset \text{이므로} \\
 A \subset B^c \quad \therefore A \cap B^c &= A \\
 \therefore P(A|B^c) &= \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A)}{1 - P(B)} \\
 &= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4 \quad P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{이므로 } \frac{1}{4} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{3}} \\
 \therefore P(A \cap B) &= \frac{1}{12} \\
 P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{이므로 } \frac{1}{5} = \frac{\frac{1}{12}}{P(A)} \\
 \therefore P(A) &= \frac{5}{12} \\
 \therefore P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) = \frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

- 5 여학생을 뽑는 사건을 A , T 영화를 관람한 학생을 뽑는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{5}{8}, P(A \cap B) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}} = \frac{2}{5}$$

- 6 온라인 사이트 회원인 학생을 뽑는 사건을 A , 남학생을 뽑는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{27}{50}, P(A \cap B) = \frac{9}{50}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{50}}{\frac{27}{50}} = \frac{1}{3}$$

- 7 한 개의 주사위를 2번 던져서 6의 눈이 한 번도 나오지 않는 사건을 A , 나온 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{5 \times 5}{6 \times 6} = \frac{25}{36}$$

$A \cap B$ 는 6을 제외한 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 사건이고 이때 합이 4인 경우는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지, 합이 8인 경우는 (3, 5), (4, 4), (5, 3)의 3가지이므로

$$P(A \cap B) = \frac{6}{6 \times 6} = \frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{25}{36}} = \frac{6}{25}$$

- 8 B 상자를 택하는 사건을 A , 흰 공을 꺼내는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B|A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

- 9 A가 당첨권을 뽑는 사건을 A , B가 당첨권을 뽑는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{4}{25}, P(B|A) = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{4}{25} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{50}$$

- 10 첫 번째에 흰 바둑돌을 꺼내는 사건을 A , 두 번째에 검은 바둑돌을 꺼내는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{n}{n+6}, P(B|A) = \frac{6}{n+5}$$

첫 번째는 흰 바둑돌, 두 번째는 검은 바둑돌을 꺼낼 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{n}{n+6} \times \frac{6}{n+5} = \frac{6n}{(n+6)(n+5)}$$

$$\text{즉, } \frac{6n}{(n+6)(n+5)} = \frac{3}{11} \text{ 이므로}$$

$$(n+6)(n+5) = 22n, n^2 - 11n + 30 = 0$$

$$(n-5)(n-6) = 0$$

$$\therefore n=5 \text{ 또는 } n=6$$

따라서 모든 n 의 값의 합은 $5+6=11$

- 11 갑, 을이 당첨 제비를 뽑는 사건을 각각 A, B 라 하면

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{2}{5}$$

- 12 첫 번째에 불량품이 아닌 제품을 꺼내는 사건을 A , 두 번째에 불량품이 아닌 제품을 꺼내는 사건을 B 라 하면

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{15-n}{15} \times \frac{14-n}{14}$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{n}{15} \times \frac{15-n}{14}$$

따라서 두 번째에 꺼낸 제품이 불량품이 아닐 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{(15-n)(14-n)}{15 \times 14} + \frac{n(15-n)}{15 \times 14} = \frac{(15-n)(14-n+n)}{15 \times 14} = \frac{15-n}{15}$$

$$\text{즉, } \frac{15-n}{15} = \frac{11}{15} \text{ 이므로 } n=4$$

- 13 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나오는 사건을 A , 주사위를 던져서 나오는 눈의 수의 합이 4인 사건을 B 라 하자.

$$(i) \text{ 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 } P(A) = \frac{1}{2}$$

서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수의 합이 4인 경우는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지이므로

$$P(B|A) = \frac{3}{6 \times 6} = \frac{1}{12}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{24}$$

$$(ii) \text{ 동전을 던져서 뒷면이 나올 확률은 } P(A^c) = \frac{1}{2}$$

서로 다른 세 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수의 합이 4인 경우는 (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)의 3가지이므로

$$P(B|A^c) = \frac{3}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{72}$$

$$\therefore P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{72} = \frac{1}{144}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{1}{24} + \frac{1}{144} = \frac{7}{144}$$

- 14** 물품이 항공편으로 배송되는 사건을 A , 일주일 이내에 배송되는 사건을 B 라 하면

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) = 0.3 \times 0.7 = 0.21 \\ P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) = (1-0.3) \times 0.4 = 0.28 \\ \therefore P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= 0.21 + 0.28 = 0.49 \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.21}{0.49} = \frac{3}{7}$$

- 15** A 상자를 택하는 사건을 A , 노란 카드 1장, 빨간 카드 1장을 꺼내는 사건을 B 라 하면

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1}{{}_6C_2} = \frac{3}{10} \\ P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) = \frac{1}{2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} = \frac{4}{15} \\ \therefore P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{3}{10} + \frac{4}{15} = \frac{17}{30} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{17}{30}} = \frac{9}{17}$$

- 16** 독감에 걸린 사건을 A , 독감이라 진단받는 사건을 B 라 하면

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) = \frac{1}{10} \times \frac{96}{100} = \frac{96}{1000} \\ P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= \left(1 - \frac{1}{10}\right) \times \frac{x}{100} = \frac{9x}{1000} \\ \therefore P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{96}{1000} + \frac{9x}{1000} = \frac{9x+96}{1000} \end{aligned}$$

따라서 독감이라 진단받은 사람이 실제로 독감에 걸린 사람일 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{96}{1000}}{\frac{9x+96}{1000}} = \frac{96}{9x+96}$$

$$\text{즉, } \frac{96}{9x+96} = \frac{32}{47} \text{ 이므로 } 9x+96=141 \quad \therefore x=5$$

- 17** 동전의 앞면을 H , 뒷면을 T 라 하면 표본공간 S 는 $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

$$A = \{HHH, HHT, HTH, HTT\},$$

$$B = \{HHH, HHT, HTH, THH\},$$

$$C = \{HHH, TTT\} \text{ 이므로}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{4}$$

$$\neg, A \cap B = \{HHH, HHT, HTH\} \text{ 이므로}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

$$\therefore P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

따라서 A 와 B 는 서로 종속이다.

$$\neg, A \cap C = \{HHH\} \text{ 이므로 } P(A \cap C) = \frac{1}{8}$$

$$\therefore P(A \cap C) = P(A)P(C)$$

따라서 A 와 C 는 서로 독립이다.

$$\neg, B \cap C = \{HHH\} \text{ 이므로 } P(B \cap C) = \frac{1}{8}$$

$$\therefore P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

따라서 B 와 C 는 서로 독립이다.

따라서 보기 중 서로 독립인 사건은 $\neg, \neg$ 이다.

- 18** 두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\begin{aligned} \neg, P(A^c \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(B) - P(A)P(B) \\ &= \{1 - P(A)\}P(B) \\ &= P(A^c)P(B) \end{aligned}$$

따라서 두 사건 A^c, B 는 서로 독립이다.

$$\neg, A, B \text{가 서로 독립이므로 } P(A|B) = P(A)$$

$\neg$ 에서 A^c, B 도 서로 독립이므로

$$P(A^c|B) = P(A^c)$$

$$\therefore 1 - P(A|B) = 1 - P(A^c) = P(A)$$

$$\therefore P(A|B) = 1 - P(A^c|B)$$

$$\begin{aligned} \neg, 1 - P(A \cup B) &= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= \{1 - P(A)\}\{1 - P(B)\} \\ &= P(A^c)P(B^c) \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

- 19** $A = \{1, 2, 4\}, B_n = \{n-1, n\}$ (n 은 $2 \leq n \leq 6$ 인 자연수) 이므로

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(B_n) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

두 사건 A, B_n 이 서로 독립이려면

$$P(A \cap B_n) = P(A)P(B_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore n(A \cap B_n) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $B_2 = \{1, 2\}, B_3 = \{2, 3\}, B_4 = \{3, 4\}, B_5 = \{4, 5\},$

$B_6 = \{5, 6\}$ 이므로

$$A \cap B_2 = \{1, 2\}, A \cap B_3 = \{2\}, A \cap B_4 = \{4\},$$

$$A \cap B_5 = \{4\}, A \cap B_6 = \emptyset$$

따라서 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 n 의 값은 3, 4, 5이므로 그 합은 $3+4+5=12$

- 20 두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2}P(A \cup B) \text{에서 } P(A \cup B) = 2P(A \cap B)$$

이를 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 에 대입하면

$$2P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$3P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

$$3P(A)P(B) = P(A) + P(B) \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\frac{9}{4}P(B) = \frac{3}{4} + P(B)$$

$$\frac{5}{4}P(B) = \frac{3}{4} \quad \therefore P(B) = \frac{3}{5}$$

- 21 두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3}P(B)$$

$$\therefore P(B) = \frac{3}{4}$$

두 사건 B, C 가 서로 배반사건이므로

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C)$$

$$\frac{11}{12} = \frac{3}{4} + P(C)$$

$$\therefore P(C) = \frac{1}{6}$$

- 22 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A^c, B 도 서로 독립이므로

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$$

$$= \{1 - P(A)\}P(B)$$

$$= \{1 - P(A)\} \times \frac{1}{4}P(A)$$

$$P(A) = x \text{라 하면 } P(A^c \cap B) = \frac{1}{16} \text{에서}$$

$$(1-x) \times \frac{1}{4}x = \frac{1}{16}, \quad 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(2x-1)^2 = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{2} \quad \therefore P(A) = \frac{1}{2}$$

- 23 두 식물 A, B가 1년 동안 죽지 않는 사건을 각각 A, B 라 하면 두 사건 A, B 는 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.8 \times 0.6 = 0.48$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0.8 + 0.6 - 0.48 = 0.92$$

다른 풀이

식물 A가 죽을 확률은 $1 - 0.8 = 0.2$

식물 B가 죽을 확률은 $1 - 0.6 = 0.4$

따라서 구하는 확률은 $1 - 0.2 \times 0.4 = 0.92$

- 24 지용이와 재호가 이번 달에 독서록을 제출하는 사건을 각각 A, B 라 하면 두 사건 A, B 는 서로 독립이다.

(i) 지용이만 독서록을 제출할 확률은

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

(ii) 재호만 독서록을 제출할 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

- 25 민아와 현서가 영어 단어 시험에 통과하는 사건을 각각 A, B 라 하면 두 사건 A, B 는 서로 독립이다.

이때 두 사람 모두 시험에 통과하지 못할 확률은

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$$

$$= \left(1 - \frac{3}{5}\right)(1-p) = \frac{2}{5}(1-p)$$

$$\text{즉, } \frac{2}{5}(1-p) = \frac{2}{15} \text{이므로}$$

$$1-p = \frac{1}{3} \quad \therefore p = \frac{2}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$$

- 26 두 수의 합이 짝수이려면 두 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다. 두 주머니 A, B에서 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수인 사건을 각각 A, B 라 하면 두 사건 A, B 는 서로 독립이다.

(i) A, B에서 모두 짝수가 적힌 공을 꺼낼 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

(ii) A, B에서 모두 홀수가 적힌 공을 꺼낼 확률은

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{2}{15} + \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$$

- 27 세 스위치 A, B, C가 닫히는 사건을 각각 A, B, C 라 하면 전구에 불이 켜지는 사건은 $A \cap (B \cup C)$ 이다.

두 사건 B, C 는 서로 독립이므로

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$

$$= P(B) + P(C) - P(B)P(C)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

또 두 사건 $A, B \cup C$ 는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$P(A \cap (B \cup C)) = P(A)P(B \cup C)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

28 두 동아리 A, B에서 택한 학생이 보육원에서 봉사활동을 한 사건을 각각 A, B라 하면 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

(i) 두 학생이 보육원에서 봉사활동을 하였을 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{a}{100} \times \frac{100-2a}{100}$$

(ii) 두 학생이 요양원에서 봉사활동을 하였을 확률은

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c) = \frac{100-a}{100} \times \frac{2a}{100}$$

(i), (ii)에서 두 학생이 같은 장소에서 봉사활동을 하였을 확률은

$$\frac{a}{100} \times \frac{100-2a}{100} + \frac{100-a}{100} \times \frac{2a}{100}$$

$$\text{즉, } \frac{a(100-2a) + 2a(100-a)}{10000} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$a^2 - 75a + 1250 = 0, (a-25)(a-50) = 0$$

$$\therefore a = 25 \text{ 또는 } a = 50$$

그런데 $a < 50$ 이므로 $a = 25$

29 서브를 한 번 이상 성공할 확률은

1 - (모두 성공하지 못할 확률)

따라서 구하는 확률은

$$1 - {}_3C_0 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

30 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

$$(i) \text{ 앞면이 나온 횟수가 4일 확률은 } {}_6C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64}$$

$$(ii) \text{ 앞면이 나온 횟수가 5일 확률은 } {}_6C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{32}$$

$$(iii) \text{ 앞면이 나온 횟수가 6일 확률은 } {}_6C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{64}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{15}{64} + \frac{3}{32} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32}$$

31 4명의 학생 중 적어도 2명의 학생이 A 대학을 택하는 사건을 A라 하면 A^c 은 모두 A 대학을 택하지 않거나 한 명만 A 대학을 택하는 사건이다.

(i) 모두 A 대학을 택하지 않을 확률은

$${}_4C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

(ii) 4명의 학생 중 한 명만 A 대학을 택할 확률은

$${}_4C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } P(A^c) = \frac{16}{81} + \frac{32}{81} = \frac{16}{27}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{16}{27} = \frac{11}{27}$$

32 한 개의 주사위를 던져서 6의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$

(i) 빨간 구슬이 나오고 주사위를 3번 던져서 6의 눈이 1번 나올 확률은

$$\frac{1}{4} \times {}_3C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{288}$$

(ii) 파란 구슬이 나오고 주사위를 2번 던져서 6의 눈이 1번 나올 확률은

$$\frac{3}{4} \times {}_2C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{24}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{25}{288} + \frac{5}{24} = \frac{85}{288}$$

33 한 개의 동전을 던져서 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

1이 적힌 공을 꺼내면 동전을 2번 던지므로 뒷면이 3번 나올 수 없다.

(i) 2가 적힌 공을 꺼내고 동전을 3번 던져서 뒷면이 3번 나올 확률은

$$\frac{1}{3} \times {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{24}$$

(ii) 3이 적힌 공을 꺼내고 동전을 4번 던져서 뒷면이 3번 나올 확률은

$$\frac{4}{9} \times {}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{9}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{9} = \frac{11}{72}$$

34 서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나온 눈의 수가 서로 같을 확률은 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

한 개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

(i) 주사위의 두 눈의 수가 서로 같고 동전을 4번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{1}{6} \times {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

(ii) 주사위의 두 눈의 수가 서로 다르고 동전을 6번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$$\frac{5}{6} \times {}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{25}{96}$$

(i), (ii)에서 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같을 확률은

$$\frac{1}{16} + \frac{25}{96} = \frac{31}{96}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{16} = \frac{6}{96}$$

35 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

동전을 8번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 x , 뒷면이 나오는 횟수를 y 라 하면 $x+y=8$ ㉠

앞면이 나오면 30점, 뒷면이 나오면 20점을 얻으므로 170점이 되려면 $30x+20y=170$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1, y=7$

따라서 구하는 확률은 ${}_8C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{1}{32}$

36 한 개의 주사위를 던져서 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$

주사위를 4번 던져서 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 x , 6의 약수가 아닌 눈이 나오는 횟수를 y 라 하면

$x+y=4$ ㉠

시계 반대 방향을 양의 방향으로 생각하면 점 P가 움직이는 거리는 $3x-y$ 이고 주사위를 4번 던지므로

$-4 \leq 3x-y \leq 12$

이때 점 P가 꼭짓점 A로 돌아오려면 $3x-y$ 의 값이 0 또는 5의 배수이어야 하므로

$3x-y=0$ 또는 $3x-y=5$ 또는 $3x-y=10$

이를 각각 ㉠과 연립하여 풀면

$x=1, y=3$ 또는 $x=\frac{9}{4}, y=\frac{7}{4}$ 또는 $x=\frac{7}{2}, y=\frac{1}{2}$

그런데 x, y 는 4 이하의 음이 아닌 정수이므로

$x=1, y=3$

따라서 구하는 확률은 ${}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$

37 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던져서 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$

서로 다른 두 개의 동전을 4번 던져서 모두 앞면이 나오는 횟수를 x , 적어도 하나는 뒷면이 나오는 횟수를 y 라 하면 점 P의 좌표는 $(x, 2y)$ 이므로 점 $(2, 4)$ 에 도착하려면

$x=2, 2y=4 \quad \therefore x=2, y=2$

점 P가 점 $(2, 4)$ 에 도착할 확률은

${}_4C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{128}$

점 P가 점 $(1, 0)$ 을 지나려면 첫 번째로 동전을 던져서 모두 앞면이 나와야 하고, 점 $(1, 0)$ 에서 점 $(2, 4)$ 에 도착하려면 $x=1, y=2$ 이어야 하므로 점 P가 점 $(1, 0)$ 을 지나서 점 $(2, 4)$ 에 도착할 확률은

$\frac{1}{4} \times {}_3C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{256}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{\frac{27}{128}}{\frac{27}{256}}=\frac{1}{2}$

III-1 01 이산확률변수와 이항분포

기초 문제 Training

36쪽

1 L, R

2 (1) 0, 1, 2

(2) $P(X=0)=\frac{2}{5}, P(X=1)=\frac{8}{15}, P(X=2)=\frac{1}{15}$

(3)

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

3 평균: 3, 분산: 1, 표준편차: 1

(1)

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2) $E(X)=\frac{2}{3}, V(X)=\frac{4}{9}, \sigma(X)=\frac{2}{3}$

5 (1) 평균: 7, 분산: 12, 표준편차: $2\sqrt{3}$

(2) 평균: 1, 분산: $\frac{1}{3}$, 표준편차: $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6 평균: 4, 분산: 13, 표준편차: $\sqrt{13}$

7 (1) $B\left(20, \frac{1}{5}\right)$

(2) 이항분포를 따르지 않는다.

8 (1) $P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4, 5)$

(2) $\frac{5}{32}$

9 (1) 평균: 120, 분산: 40, 표준편차: $2\sqrt{10}$

(2) 평균: 90, 분산: 36, 표준편차: 6

1 ②	2 $\frac{7}{6}$	3 ④	4 ③	5 ④
6 ④	7 $\frac{13}{35}$	8 $\frac{5}{8}$	9 $\neg$	10 3
11 $\frac{7}{24}$	12 $\frac{\sqrt{11}}{4}$	13 ①	14 $\frac{4}{3}$	15 $\frac{3}{4}$
16 $\frac{\sqrt{6}}{3}$	17 3	18 2600원	19 ②	
20 10000원	21 ②	22 3	23 52	
24 ①	25 ③	26 32	27 $\sqrt{11}$	28 $\frac{28}{3}$
29 $3\sqrt{3}$	30 π	31 224	32 ①	33 $\neg, \perp$
34 ①	35 15	36 12	37 $\frac{6}{7}$	38 40
39 $\frac{75}{8}$	40 215	41 10		

1 확률의 총합은 1이므로

$$P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$$

$$\left(k+\frac{2}{12}\right)+\left(k+\frac{1}{12}\right)+k+\left(k+\frac{1}{12}\right)+\left(k+\frac{2}{12}\right)=1$$

$$5k+\frac{1}{2}=1 \quad \therefore k=\frac{1}{10}$$

2 확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+\cdots+P(X=6)=1$$

$$\frac{k}{1 \times 2}+\frac{k}{2 \times 3}+\frac{k}{3 \times 4}+\cdots+\frac{k}{6 \times 7}=1$$

$$k\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)\right\}=1$$

$$k\left(1-\frac{1}{7}\right)=1, \frac{6}{7}k=1 \quad \therefore k=\frac{7}{6}$$

3 확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=1$$

$$\frac{k}{30}+\frac{2k}{30}+\frac{3k}{30}+\frac{4k}{30}+\frac{5k}{30}=1, \frac{15k}{30}=1$$

$$\therefore k=2$$

$$\therefore P(X \leq 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$

$$=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

4 확률의 총합은 1이므로

$$3a+a+2a+a+3a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{10}$$

$$\therefore P(X^2=1)=P(X=-1)+P(X=1)$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$$

5 $0 \leq a^2 \leq 1, 0 \leq \frac{a}{4} \leq 1$ 이므로 $0 \leq a \leq 1$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{4}+a^2+\frac{3}{8}+\frac{a}{4}=1, 8a^2+2a-3=0$$

$$(4a+3)(2a-1)=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2} (\because 0 \leq a \leq 1)$$

$$3X^2-7X+2 \leq 0 \text{에서 } (3X-1)(X-2) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq X \leq 2$$

$$\therefore P(3X^2-7X+2 \leq 0)=P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq 2\right)$$

$$=P(X=1)+P(X=2)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

6 확률의 총합은 1이므로 $p_1+p_2+p_3=1$ ㉠

$$\frac{p_1+p_2}{3}=p_3 \text{에서 } p_1+p_2=3p_3 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉡을 ㉠에 대입하면 } 3p_3+p_3=1 \quad \therefore p_3=\frac{1}{4}$$

$$\therefore P(X \leq 0)=P(X=-2)+P(X=0)$$

$$=p_1+p_2=3p_3=3 \times \frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

7 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이므로

$$P(X \geq 2)=P(X=2)+P(X=3) \quad \text{..... ㉠}$$

7개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는 7C_3 이고, 빨간 공이 x 개 나오는 경우의 수는 ${}_3C_x \times {}_4C_{3-x}$ 이므로

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2 \times {}_4C_1}{{}_7C_3}=\frac{12}{35}$$

$$P(X=3)=\frac{{}_3C_3 \times {}_4C_0}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}$$

따라서 ㉠에서

$$P(X \geq 2)=\frac{12}{35}+\frac{1}{35}=\frac{13}{35}$$

8 $X^2-3X+2=0$ 에서 $(X-1)(X-2)=0$

$$\therefore X=1 \text{ 또는 } X=2$$

$$\therefore P(X^2-3X+2=0)=P(X=1)+P(X=2)$$

..... ㉠

두 수의 차가 1인 경우는 (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)의 6가지이므로

$$P(X=1)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

두 수의 차가 2인 경우는 (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)의 4가지이므로

$$P(X=2)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$$

따라서 ㉠에서

$$P(X^2-3X+2=0)=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$$

9. 가. X 는 0, 1, 2의 값을 가질 수 있으므로 이산확률변수이다.

나. 8명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_8C_2$ 이고, 남자가 x 명 뽑히는 경우의 수는 ${}_5C_x \times {}_3C_{2-x}$ 이므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = \frac{{}_5C_x \times {}_3C_{2-x}}{{}_8C_2} \quad (x=0, 1, 2)$$

다. 남자가 적어도 한 명 뽑힐 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0) \\ &= 1 - \frac{{}_5C_0 \times {}_3C_2}{{}_8C_2} = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28} \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 가이다.

10. 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고 각각의 확률은

$$P(X=1) = \frac{{}_7C_1 \times {}_3C_3}{{}_{10}C_4} = \frac{1}{30}, \quad P(X=2) = \frac{{}_7C_2 \times {}_3C_2}{{}_{10}C_4} = \frac{3}{10}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_7C_3 \times {}_3C_1}{{}_{10}C_4} = \frac{1}{2}, \quad P(X=4) = \frac{{}_7C_4 \times {}_3C_0}{{}_{10}C_4} = \frac{1}{6}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

이때 $P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{5}{6}$ 이므로

$$P(X \leq 3) = \frac{5}{6} \quad \therefore k=3$$

11. 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{12} + \frac{5}{12} + a + \frac{1}{12} = 1 \quad \therefore a = \frac{5}{12}$$

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = -1 \times \frac{1}{12} + 0 \times \frac{5}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= (-1)^2 \times \frac{1}{12} + 0^2 \times \frac{5}{12} + 1^2 \times \frac{5}{12} + 2^2 \times \frac{1}{12} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}$$

$$\therefore E(X)V(X) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{12} = \frac{7}{24}$$

12. 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{a}{8} + \frac{a}{8} + \frac{a+2}{8} = 1, \quad \frac{3a+2}{8} = 1$$

$$\therefore a=2$$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{9}{4} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{11}{16}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{11}{16}} = \frac{\sqrt{11}}{4}$$

13. 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{4} + a + b = 1 \quad \therefore a + b = \frac{3}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$E(X) = 2$ 에서

$$1 \times \frac{1}{4} + 2a + 3b = 2 \quad \therefore 2a + 3b = \frac{7}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{을 연립하여 풀면 } a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$$

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} V(X) + \{E(X)\}^2 &= E(X^2) \\ &= 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

14. 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 각각의 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_4C_0 \times {}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{15}$$

$$P(X=1) = \frac{{}_4C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{8}{15}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_4C_2 \times {}_2C_0}{{}_6C_2} = \frac{2}{5}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{3}$$

15. 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 각각의 확률은

$$P(X=0) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \quad P(X=1) = \frac{{}_3C_1}{2^3} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = \frac{{}_3C_2}{2^3} = \frac{3}{8}, \quad P(X=3) = \frac{{}_3C_3}{2^3} = \frac{1}{8}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

- 16 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 각각의 확률은

$$P(X=0) = {}_3C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$P(X=1) = {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$P(X=2) = {}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{9}$$

$$P(X=3) = {}_3C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{8}{27} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{27} = 1$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{8}{27} + 1^2 \times \frac{4}{9} + 2^2 \times \frac{2}{9} + 3^2 \times \frac{1}{27} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{5}{3} - 1^2 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

- 17 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이고 각각의 확률은

$$P(X=1) = \frac{1}{5}, P(X=2) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

$$P(X=3) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

$$P(X=4) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

$$P(X=5) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{5}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{5} + 5 \times \frac{1}{5} = 3$$

- 18 받을 수 있는 상금을 X 원이라 하고 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	10000	50000	100000	300000	합계
$P(X=x)$	$\frac{9}{10}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{250}$	$\frac{3}{500}$	$\frac{1}{500}$	1

따라서 구하는 기댓값은

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{9}{10} + 10000 \times \frac{2}{25} + 50000 \times \frac{3}{250} \\ &\quad + 100000 \times \frac{3}{500} + 300000 \times \frac{1}{500} \\ &= 2600(\text{원}) \end{aligned}$$

- 19 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때, 50원짜리 동전 3개를 동시에 던져서 받을 수 있는 상금은

$$\text{HHH} \rightarrow 150\text{원}$$

$$\text{HHT, HTH, THH} \rightarrow 100\text{원}$$

$$\text{HTT, THT, TTH} \rightarrow 50\text{원}$$

$$\text{TTT} \rightarrow 0\text{원}$$

받을 수 있는 상금을 X 원이라 하고 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	50	100	150	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

따라서 구하는 기댓값은

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 50 \times \frac{3}{8} + 100 \times \frac{3}{8} + 150 \times \frac{1}{8} = 75(\text{원})$$

- 20 받을 수 있는 상금을 X 원이라 하면 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 7000, 10500, 14000이고 각각의 확률은

$$P(X=7000) = \frac{{}_3C_0 \times {}_4C_2}{{}_7C_2} = \frac{2}{7}$$

$$P(X=10500) = \frac{{}_3C_1 \times {}_4C_1}{{}_7C_2} = \frac{4}{7}$$

$$P(X=14000) = \frac{{}_3C_2 \times {}_4C_0}{{}_7C_2} = \frac{1}{7}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	7000	10500	14000	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

따라서 구하는 기댓값은

$$\begin{aligned} E(X) &= 7000 \times \frac{2}{7} + 10500 \times \frac{4}{7} + 14000 \times \frac{1}{7} \\ &= 10000(\text{원}) \end{aligned}$$

- 21 $E(X)=2$, $E(X^2)=8$ 에서

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 8 - 2^2 = 4$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4} = 2$$

$$\therefore \sigma(3X-1) = |3| \sigma(X) = 3 \times 2 = 6$$

- 22 $E(Y)=2$ 에서 $E(3X+1)=2$

$$3E(X)+1=2 \quad \therefore E(X)=\frac{1}{3}$$

$$\sigma(Y)=9\text{에서 } \sigma(3X+1)=9$$

$$|3| \sigma(X)=9 \quad \therefore \sigma(X)=3$$

$$\therefore V(X) = \{\sigma(X)\}^2 = 3^2 = 9$$

$$\therefore E(X)V(X) = \frac{1}{3} \times 9 = 3$$

- 23 $E(2X-10)=4$ 에서 $2E(X)-10=4 \quad \therefore E(X)=7$

$$V(2X)=12\text{에서 } 2^2 V(X)=12 \quad \therefore V(X)=3$$

$$\therefore E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 3 + 7^2 = 52$$

24 $E(Y)=2$ 에서 $E(aX-2)=2$

$$aE(X)-2=2$$

이때 $E(X)=-2$ 이므로

$$-2a-2=2 \quad \therefore a=-2$$

$$V(Y)=b \text{에서 } V(-2X-2)=b$$

$$V(X)=3 \text{이므로}$$

$$b=(-2)^2 V(X)=4 \times 3=12$$

$$\therefore ab=-2 \times 12=-24$$

25 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$$

$$E(X^2)=1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{6} = \frac{10}{3}$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{10}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

따라서 확률변수 $Y=-3X+7$ 에 대하여

$$E(Y)=E(-3X+7)=-3E(X)+7=-3 \times \frac{5}{3}+7=2$$

$$V(Y)=V(-3X+7)=(-3)^2 V(X)=9 \times \frac{5}{9}=5$$

$$\therefore E(Y)+V(Y)=2+5=7$$

26 확률의 총합은 1이므로

$$a+2a+a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=-4 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} = 0$$

$$E(X^2)=(-4)^2 \times \frac{1}{4} + 0^2 \times \frac{1}{2} + 4^2 \times \frac{1}{4} = 8$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=8-0^2=8$$

$$\therefore V(2X-3)=2^2 V(X)=4 \times 8=32$$

27 확률의 총합은 1이므로

$$a+b+a^2=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$E(X)=-\frac{1}{4} \text{에서}$$

$$-1 \times a + 0 \times b + 1 \times a^2 = -\frac{1}{4}$$

$$a^2-a=-\frac{1}{4}, \quad 4a^2-4a+1=0$$

$$(2a-1)^2=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

$$a=\frac{1}{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \frac{1}{2}+b+\frac{1}{4}=1 \quad \therefore b=\frac{1}{4}$$

$$E(X^2)=(-1)^2 \times \frac{1}{2} + 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{11}}{4}$$

$$\therefore \sigma(-4X+10)=|-4|\sigma(X)=4 \times \frac{\sqrt{11}}{4}=\sqrt{11}$$

28 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 각각의 확률은

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0 \times {}_7C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{15}, \quad P(X=1)=\frac{{}_3C_1 \times {}_7C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{15}$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2 \times {}_7C_0}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{15}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$$E(X)=0 \times \frac{7}{15} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{1}{15} = \frac{3}{5}$$

$$E(X^2)=0^2 \times \frac{7}{15} + 1^2 \times \frac{7}{15} + 2^2 \times \frac{1}{15} = \frac{11}{15}$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{11}{15}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{28}{75}$$

$$\therefore V(-5X)=(-5)^2 V(X)=25 \times \frac{28}{75}=\frac{28}{3}$$

29 주사위를 세 번 던져서 받을 수 있는 점수는

(짜, 짜, 짜) $\Rightarrow 2 \times 3 = 6$ (점)

(짜, 짜, 홀), (짜, 홀, 짜), (홀, 짜, 짜)

$\Rightarrow 3 \times 1 + 2 \times 2 = 7$ (점)

(짜, 홀, 홀), (홀, 짜, 홀), (홀, 홀, 짜)

$\Rightarrow 3 \times 2 + 2 \times 1 = 8$ (점)

(홀, 홀, 홀) $\Rightarrow 3 \times 3 = 9$ (점)

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	6	7	8	9	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$E(X)=6 \times \frac{1}{8} + 7 \times \frac{3}{8} + 8 \times \frac{3}{8} + 9 \times \frac{1}{8} = \frac{15}{2},$$

$$E(X^2)=6^2 \times \frac{1}{8} + 7^2 \times \frac{3}{8} + 8^2 \times \frac{3}{8} + 9^2 \times \frac{1}{8} = 57 \text{이므로}$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=57-\left(\frac{15}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sigma(6X-3)=|6|\sigma(X)=6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

30 부채꼴 OAB의 넓이는 $\frac{\pi}{4}$

$$P_1 \text{ 또는 } P_5 \text{를 택할 때 } X = \left| \frac{\pi}{24} - \frac{5\pi}{24} \right| = \frac{\pi}{6}$$

$$P_2 \text{ 또는 } P_4 \text{를 택할 때 } X = \left| \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} \right| = \frac{\pi}{12}$$

$$P_3 \text{을 택할 때 } X = \left| \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{8} \right| = 0$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + \frac{\pi}{12} \times \frac{2}{5} + \frac{\pi}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{\pi}{10}$$

$$\therefore E(20X - \pi) = 20E(X) - \pi = 20 \times \frac{\pi}{10} - \pi = \pi$$

31 주사위를 한 번 던져서 5의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$

이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(9, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

따라서 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_9C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{9-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 9)$$

$$\therefore P(X=6) = {}_9C_6 \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{224}{3^8}$$

$$\therefore a=224$$

32 하자가 있을 확률은 $\frac{1}{10}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포

$B\left(8, \frac{1}{10}\right)$ 을 따른다.

따라서 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_8C_x \left(\frac{1}{10}\right)^x \left(\frac{9}{10}\right)^{8-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 8)$$

$$\therefore P(X \leq 7) = 1 - P(X=8)$$

$$= 1 - {}_8C_8 \left(\frac{1}{10}\right)^8 \left(\frac{9}{10}\right)^0 = 1 - \frac{1}{10^8}$$

33 ㄱ. 가위바위보를 한 번 하여 A가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$ 이므로

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(8, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

ㄴ. X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_8C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{8-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 8)$$

ㄷ. $P(X < 2) = P(X=0) + P(X=1)$

$$= {}_8C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^8 + {}_8C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^7$$

$$= \frac{2^8}{3^8} + \frac{8 \times 2^7}{3^8} = 5 \times \frac{2^8}{3^8}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

34 $E(X)=25$ 에서

$$125p=25 \quad \therefore p=\frac{1}{5}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(125, \frac{1}{5}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = 125 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 20$$

$$\therefore E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 20 + 25^2 = 645$$

35 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = n \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3n}{16}$$

$$V(4X-5) = 60 \text{에서}$$

$$4^2 V(X) = 60$$

$$\therefore V(X) = \frac{15}{4}$$

$$\text{즉, } \frac{3n}{16} = \frac{15}{4} \text{이므로}$$

$$n=20$$

따라서 $E(X) = 20 \times \frac{1}{4} = 5$ 이므로

$$E(4X-5) = 4E(X) - 5 = 4 \times 5 - 5 = 15$$

36 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(48, \frac{3}{4}\right)$ 을 따르므로

$$\sigma(X) = \sqrt{48 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}} = 3$$

$$\therefore \sigma(-4X+1) = |-4| \sigma(X) = 4 \times 3 = 12$$

37 $E(X)=3, V(X)=2$ 이므로

$$E(X) = np = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$V(X) = np(1-p) = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$3(1-p) = 2 \quad \therefore p = \frac{1}{3}$$

$$p = \frac{1}{3} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$\frac{1}{3}n = 3 \quad \therefore n = 9$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(9, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_9C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{9-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 9)$$

$$\therefore \frac{P(X=2)}{P(X=3)} = \frac{{}_9C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^7}{{}_9C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^6} = \frac{{}_9C_2 \times 2}{{}_9C_3} = \frac{6}{7}$$

38 가위바위보를 한 번 하여 A가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(18, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 18 \times \frac{1}{3} = 6$$

$$V(X) = 18 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore E(X^2) &= V(X) + \{E(X)\}^2 \\ &= 4 + 6^2 = 40 \end{aligned}$$

39 한 개의 구슬을 꺼낼 때 빨간 구슬이 나올 확률은 $\frac{3}{8}$ 이므로

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(n, \frac{3}{8}\right)$ 을 따른다.

$$E(X) = 15 \text{에서}$$

$$n \times \frac{3}{8} = 15 \quad \therefore n = 40$$

$$\therefore V(X) = 40 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{75}{8}$$

다른 풀이

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(n, \frac{3}{8}\right)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X) \times \left(1 - \frac{3}{8}\right) \\ &= 15 \times \frac{5}{8} = \frac{75}{8} \end{aligned}$$

40 4개의 옷장을 동시에 던져서 개가 나올 확률은

$${}^4C_2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{216}{625}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(125, \frac{216}{625}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 125 \times \frac{216}{625} = \frac{216}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore E(5X - 1) &= 5E(X) - 1 \\ &= 5 \times \frac{216}{5} - 1 = 215 \end{aligned}$$

41 동전을 20번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 Y 라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $20 - Y$ 이므로

$$X = 2Y - (20 - Y) = 3Y - 20$$

한편 동전을 한 번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로

확률변수 Y 는 이항분포 $B\left(20, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

$$\text{따라서 } E(Y) = 20 \times \frac{1}{2} = 10 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= E(3Y - 20) \\ &= 3E(Y) - 20 \\ &= 3 \times 10 - 20 = 10 \end{aligned}$$

III-1 02 연속확률변수와 정규분포

기초 문제 Training

43쪽

1 ㄱ, ㄴ, ㄷ

2 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{8}$

3 $\frac{1}{2}$

4 (1) $N(6, 3^2)$ (2) $N(-2, 5^2)$

5 (1) 0.1359 (2) 0.8185 (3) 0.0228 (4) 0.9332

6 (1) $Z = \frac{X-10}{2}$ (2) $Z = \frac{X+6}{5}$

7 (1) $N(30, 5^2)$ (2) $N(200, 10^2)$

8 (1) $N(120, 10^2)$ (2) $Z = \frac{X-120}{10}$

핵심 유형 Training

44~50쪽

1 ③	2 $\frac{1}{3}$	3 ②	4 $\frac{1}{3}$	5 $\frac{3}{8}$
6 $\frac{1}{3}$	7 ③	8 ⑤	9 ③	10 0.3446
11 0.8185	12 ④	13 ④	14 8	15 ⑤
16 0.9544	17 ①	18 24	19 1.64	20 5
21 ②	22 국어, 수학, 영어	23 C, A, B		
24 13.59%	25 0.2119	26 0.02	27 9544	
28 3	29 1697	30 72.2점	31 77.8점	
32 112.2kg	33 ②	34 ③	35 0.4772	
36 0.1587	37 0.9987	38 0.0228	39 162	40 90
41 56				

- ① $-2 \leq x < 0$ 에서 $f(x) < 0$ 이다.
 ② $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=-2$, $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이 아니다.
 ③ $-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이고 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times \frac{1}{2} = 1$
 ④ $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이 아니다.

⑤ $-1 < x < 1$ 에서 $f(x) < 0$ 이다.

따라서 $f(x)$ 의 그래프가 될 수 있는 것은 ③이다.

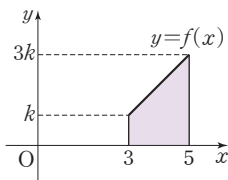
- 2 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$$\frac{1}{2} \times (2+4) \times k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{3}$$

- 3 $f(x) \geq 0$ 이어야 하므로 $k \geq 0$

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=3$, $x=5$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

$$\frac{1}{2} \times (k+3k) \times 2 = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{4}$$



- 4 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

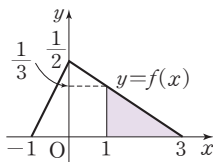
$$\frac{1}{2} \times 4 \times a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프는 두 점 $(0, \frac{1}{2})$, $(3, 0)$ 을 지나는 직선이므로

$$f(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2} \quad (0 \leq x \leq 3)$$

$$\therefore f(1) = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(X \geq 1) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$



- 5 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, y 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이어야 하므로

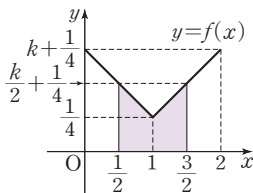
$$2 \times \frac{1}{4} + 1 \times k = 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

즉, $f(x) = \frac{1}{2}|x-1| + \frac{1}{4} \quad (0 \leq x \leq 2)$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = 1 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$



- 6 $f(2-x) = f(2+x)$ 가 성립하므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이고, $P(0 \leq X \leq 4) = 1$ 이므로

$$P(0 \leq X \leq 2) = P(2 \leq X \leq 4) = \frac{1}{2}$$

또 $P(1 \leq X \leq 2) = P(2 \leq X \leq 3)$ 이므로

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 3) &= P(1 \leq X \leq 2) + P(2 \leq X \leq 3) \\ &= 2P(1 \leq X \leq 2) \\ &= 2\{P(0 \leq X \leq 2) - P(0 \leq X \leq 1)\} \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- 7 $y=f(x)$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $x=m$ 이고, $y=g(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $x=10$ 이므로 $m < 10$

표준편차가 클수록 곡선의 가운데 부분의 높이는 낮아지고 양쪽으로 넓게 퍼진 모양이므로 $\sigma > 3$

- 8 정규분포 $N(13, 3^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 확률밀도함수는 $x=13$ 에서 최댓값을 갖고, 정규분포 곡선은 직선 $x=13$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $P(k-2 \leq X \leq k+4)$ 가 최대가 되려면

$$\frac{(k-2) + (k+4)}{2} = 13, \quad 2k+2=26 \quad \therefore k=12$$

- 9 $P(m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma) = 2a$ 에서

$$P(m-2\sigma \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m+2\sigma) = 2a$$

$$2P(m \leq X \leq m+2\sigma) = 2a$$

$$\therefore P(m \leq X \leq m+2\sigma) = a$$

같은 방법으로 $P(m-4\sigma \leq X \leq m+4\sigma) = 4b$ 에서

$$P(m \leq X \leq m+4\sigma) = 2b$$

$$\therefore P(m-4\sigma \leq X \leq m+2\sigma)$$

$$= P(m-4\sigma \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m+2\sigma)$$

$$= P(m \leq X \leq m+2\sigma) + P(m \leq X \leq m+4\sigma)$$

$$= a + 2b$$

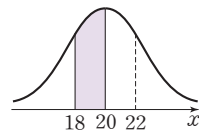
- 10 확률변수 X 의 정규분포 곡선은 직선 $x=20$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(18 \leq X \leq 20) = 0.1554$$

$$P(20 \leq X \leq 22) = 0.1554$$

$$\therefore P(X \geq 22) = P(X \geq 20) - P(20 \leq X \leq 22)$$

$$= 0.5 - 0.1554 = 0.3446$$



- 11 $m=45$, $\sigma=5$ 이므로

$$P(35 \leq X \leq 50)$$

$$= P(45-2 \times 5 \leq X \leq 45+5)$$

$$= P(m-2\sigma \leq X \leq m+\sigma)$$

$$= P(m-2\sigma \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m+\sigma)$$

$$= P(m \leq X \leq m+2\sigma) + P(m \leq X \leq m+\sigma)$$

$$= 0.4772 + 0.3413 = 0.8185$$

12 $Z_X = \frac{X-7}{2}$, $Z_Y = \frac{Y-16}{3}$ 으로 놓으면 확률변수 Z_X ,

Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(X \leq 11) = P(Y \leq k) \text{에서}$$

$$P\left(Z_X \leq \frac{11-7}{2}\right) = P\left(Z_Y \leq \frac{k-16}{3}\right)$$

$$\therefore P(Z_X \leq 2) = P\left(Z_Y \leq \frac{k-16}{3}\right)$$

$$\text{따라서 } 2 = \frac{k-16}{3} \text{이므로}$$

$$k=22$$

13 $Z_X = \frac{X-100}{5}$, $Z_Y = \frac{Y-30}{4}$ 으로 놓으면 확률변수 Z_X ,

Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(X \leq 90) = P(Y \geq k) \text{에서}$$

$$P\left(Z_X \leq \frac{90-100}{5}\right) = P\left(Z_Y \geq \frac{k-30}{4}\right)$$

$$\therefore P(Z_X \leq -2) = P\left(Z_Y \leq \frac{30-k}{4}\right)$$

$$\text{따라서 } -2 = \frac{30-k}{4} \text{이므로}$$

$$k=38$$

14 $Z_X = \frac{X-14}{2}$, $Z_Y = \frac{Y-m}{3}$ 으로 놓으면 확률변수 Z_X ,

Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$2P(10 \leq X \leq 14) = P(2 \leq Y \leq 2m-2) \text{에서}$$

$$2P\left(\frac{10-14}{2} \leq Z_X \leq \frac{14-14}{2}\right)$$

$$= P\left(\frac{2-m}{3} \leq Z_Y \leq \frac{2m-2-m}{3}\right)$$

$$2P(-2 \leq Z_X \leq 0) = P\left(-\frac{m-2}{3} \leq Z_Y \leq \frac{m-2}{3}\right)$$

$$2P(0 \leq Z_X \leq 2) = 2P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{m-2}{3}\right)$$

$$\therefore P(0 \leq Z_X \leq 2) = P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{m-2}{3}\right)$$

$$\text{따라서 } 2 = \frac{m-2}{3} \text{이므로}$$

$$m=8$$

15 $Z = \frac{X-63}{4}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(X \leq 67) = P\left(Z \leq \frac{67-63}{4}\right)$$

$$= P(Z \leq 1)$$

$$= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 + 0.3413$$

$$= 0.8413$$

16 $|X-m| \leq 10$ 에서 $-10 \leq X-m \leq 10$

$$\therefore m-10 \leq X \leq m+10$$

$$Z = \frac{X-m}{5} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(|X-m| \leq 10) = P(m-10 \leq X \leq m+10)$$

$$= P\left(\frac{m-10-m}{5} \leq Z \leq \frac{m+10-m}{5}\right)$$

$$= P(-2 \leq Z \leq 2)$$

$$= 2P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 2 \times 0.4772 = 0.9544$$

17 $E(X) = 70$, $\sigma(X) = 3$ 이므로

$$E(Y) = E(2X+3) = 2E(X) + 3 = 2 \times 70 + 3 = 143$$

$$\sigma(Y) = \sigma(2X+3) = |2|\sigma(X) = 2 \times 3 = 6$$

즉, 확률변수 Y 는 정규분포 $N(143, 6^2)$ 을 따른다.

$$Z = \frac{Y-143}{6} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(140 \leq Y \leq 152)$$

$$= P\left(\frac{140-143}{6} \leq Z \leq \frac{152-143}{6}\right) = P(-0.5 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(-0.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 0.5) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.1915 + 0.4332 = 0.6247$$

다른 풀이

$$Z = \frac{X-70}{3} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(140 \leq Y \leq 152)$$

$$= P(140 \leq 2X+3 \leq 152) = P(68.5 \leq X \leq 74.5)$$

$$= P\left(\frac{68.5-70}{3} \leq Z \leq \frac{74.5-70}{3}\right) = P(-0.5 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(-0.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 0.5) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.1915 + 0.4332 = 0.6247$$

18 $Z = \frac{X-21}{4}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(20 \leq X \leq a) = 0.3721$ 에서

$$P\left(\frac{20-21}{4} \leq Z \leq \frac{a-21}{4}\right) = 0.3721$$

$$P\left(-0.25 \leq Z \leq \frac{a-21}{4}\right) = 0.3721$$

$$P(-0.25 \leq Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-21}{4}\right) = 0.3721$$

$$P(0 \leq Z \leq 0.25) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-21}{4}\right) = 0.3721$$

$$0.0987 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-21}{4}\right) = 0.3721$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-21}{4}\right) = 0.2734$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 0.75) = 0.2734$ 이므로

$$\frac{a-21}{4} = 0.75, a-21=3 \quad \therefore a=24$$

19 $P(|X-1| \leq 3k) = 0.899$ 에서

$$P(-3k \leq X-1 \leq 3k) = 0.899$$

$$\therefore P(-3k+1 \leq X \leq 3k+1) = 0.899 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$Z = \frac{X-1}{3}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$P\left(\frac{-3k+1-1}{3} \leq Z \leq \frac{3k+1-1}{3}\right) = 0.899$$

$$P(-k \leq Z \leq k) = 0.899$$

$$2P(0 \leq Z \leq k) = 0.899 \quad \therefore P(0 \leq Z \leq k) = 0.4495$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.64) = 0.4495$ 이므로 $k=1.64$

20 $Z = \frac{X-65}{\sigma}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(X \geq 55) = 0.9772$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{55-65}{\sigma}\right) = 0.9772, P\left(Z \geq -\frac{10}{\sigma}\right) = 0.9772$$

$$P\left(Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) = 0.9772, 0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) = 0.9772$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{10}{\sigma} = 2 \quad \therefore \sigma = 5$$

21 $Z_W = \frac{W-45}{4}, Z_X = \frac{X-52}{3}, Z_Y = \frac{Y-48}{8}$ 로 놓으면
확률변수 Z_W, Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$p = P(W \geq 46) = P\left(Z_W \geq \frac{46-45}{4}\right) = P(Z_W \geq 0.25)$$

$$q = P(X \geq 46) = P\left(Z_X \geq \frac{46-52}{3}\right) = P(Z_X \geq -2)$$

$$r = P(Y \geq 46) = P\left(Z_Y \geq \frac{46-48}{8}\right) = P(Z_Y \geq -0.25)$$

이때 $P(Z_W \geq 0.25) < P(Z_Y \geq -0.25) < P(Z_X \geq -2)$

이므로 $p < r < q$

22 주영이네 학교 학생의 국어, 수학, 영어 시험 성적을 각각 X_1 점, X_2 점, X_3 점이라 하면 확률변수 X_1, X_2, X_3 은 각각 정규분포 $N(70, 12^2), N(58, 14^2), N(67, 10^2)$ 을 따르므로 $Z_1 = \frac{X_1-70}{12}, Z_2 = \frac{X_2-58}{14}, Z_3 = \frac{X_3-67}{10}$ 로 놓으면 확률변수 Z_1, Z_2, Z_3 은 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

주영이보다 국어, 수학, 영어 시험 성적이 낮을 확률은

$$P(X_1 < 91) = P\left(Z_1 < \frac{91-70}{12}\right) = P(Z_1 < 1.75)$$

$$P(X_2 < 79) = P\left(Z_2 < \frac{79-58}{14}\right) = P(Z_2 < 1.5)$$

$$P(X_3 < 81) = P\left(Z_3 < \frac{81-67}{10}\right) = P(Z_3 < 1.4)$$

이때 $P(Z_1 < 1.75) > P(Z_2 < 1.5) > P(Z_3 < 1.4)$ 이므로

$$P(X_1 < 91) > P(X_2 < 79) > P(X_3 < 81)$$

따라서 주영이의 성적이 상대적으로 높은 과목을 순서대로 나열하면 국어, 수학, 영어이다.

23 1반, 2반, 3반 학생의 몸무게를 각각 X_1 kg, X_2 kg,

X_3 kg이라 하면 확률변수 X_1, X_2, X_3 은 각각 정규분포

$N(52, 6^2), N(54, 5^2), N(55, 8^2)$ 을 따르므로

$$Z_1 = \frac{X_1-52}{6}, Z_2 = \frac{X_2-54}{5}, Z_3 = \frac{X_3-55}{8} \text{로 놓으면}$$

확률변수 Z_1, Z_2, Z_3 은 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

A, B, C보다 각 반 학생의 몸무게가 가벼울 확률은

$$P(X_1 < 55) = P\left(Z_1 < \frac{55-52}{6}\right) = P(Z_1 < 0.5)$$

$$P(X_2 < 56) = P\left(Z_2 < \frac{56-54}{5}\right) = P(Z_2 < 0.4)$$

$$P(X_3 < 60) = P\left(Z_3 < \frac{60-55}{8}\right) = P(Z_3 < 0.625)$$

이때 $P(Z_3 < 0.625) > P(Z_1 < 0.5) > P(Z_2 < 0.4)$ 이므로

$$P(X_3 < 60) > P(X_1 < 55) > P(X_2 < 56)$$

따라서 각자 자기 반에서 상대적으로 몸무게가 무거운 학생을 순서대로 나열하면 C, A, B이다.

24 하루 인터넷 강의 수강 시간을 X 분이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(45, 15^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-45}{15}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 하루 인터넷 강의 수강 시간이 60분 이상 75분 이하 일 확률은

$$P(60 \leq X \leq 75) = P\left(\frac{60-45}{15} \leq Z \leq \frac{75-45}{15}\right)$$

$$= P(1 \leq Z \leq 2)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

따라서 구하는 학생은 전체의 13.59%이다.

25 등교하는 데 걸리는 시간을 X 분이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(20, 5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-20}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

등교하는 데 걸리는 시간이 24분을 초과하면 지각하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X > 24) &= P\left(Z > \frac{24-20}{5}\right) = P(Z > 0.8) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.8) \\ &= 0.5 - 0.2881 = 0.2119 \end{aligned}$$

- 26** 응시자들의 점수를 X 점이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(84, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-84}{\sigma}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

점수가 78점 이상 90점 이하인 학생이 258명이므로

$$P(78 \leq X \leq 90) = \frac{258}{300} = 0.86$$

$$P\left(\frac{78-84}{\sigma} \leq Z \leq \frac{90-84}{\sigma}\right) = 0.86$$

$$P\left(-\frac{6}{\sigma} \leq Z \leq \frac{6}{\sigma}\right) = 0.86, \quad 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{6}{\sigma}\right) = 0.86$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{6}{\sigma}\right) = 0.43$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.43$ 이므로

$$\frac{6}{\sigma} = 1.5 \quad \therefore \sigma = 4$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 92) &= P\left(Z \geq \frac{92-84}{4}\right) = P(Z \geq 2) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.48 = 0.02 \end{aligned}$$

- 27** 망고의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(600, 5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-600}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 망고의 무게가 590g 이상 610g 이하일 확률은

$$\begin{aligned} P(590 \leq X \leq 610) &= P\left(\frac{590-600}{5} \leq Z \leq \frac{610-600}{5}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 2) = 2P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 2 \times 0.4772 = 0.9544 \end{aligned}$$

따라서 구하는 망고의 개수는 $10000 \times 0.9544 = 9544$

- 28** 의복비 지출 금액을 X 만 원이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(30, 4^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-30}{4}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 의복비를 40만 원 이상 지출할 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 40) &= P\left(Z \geq \frac{40-30}{4}\right) = P(Z \geq 2.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= 0.5 - 0.494 = 0.006 \end{aligned}$$

따라서 구하는 사원의 수는 $500 \times 0.006 = 3$

- 29** 보조 배터리의 용량을 X mAh라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(20000, 100^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-20000}{100}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 용량이 19897mAh 이상인 보조 배터리는 불량품이 아니므로 그 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 19897) &= P\left(Z \geq \frac{19897-20000}{100}\right) \\ &= P(Z \geq -1.03) = P(Z \leq 1.03) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.03) \\ &= 0.5 + 0.3485 = 0.8485 \end{aligned}$$

따라서 구하는 보조 배터리의 개수는

$$2000 \times 0.8485 = 1697$$

- 30** 응시자들의 점수를 X 점이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(68, 5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-68}{5}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

상위 20%에 속하는 응시자의 최저 점수를 a 점이라 하면

$$P(X \geq a) = 0.2 \text{에서}$$

$$P\left(Z \geq \frac{a-68}{5}\right) = 0.2$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-68}{5}\right) = 0.2$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-68}{5}\right) = 0.3$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 0.84) = 0.3$ 이므로

$$\frac{a-68}{5} = 0.84, \quad a-68 = 4.2$$

$$\therefore a = 72.2$$

따라서 구하는 최저 점수는 72.2점이다.

- 31** 응시자들의 점수를 X 점이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(65, 10^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-65}{10}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

합격자의 최저 점수를 a 점이라 하면

$$P(X \geq a) = \frac{100}{1000} = 0.1 \text{에서}$$

$$P\left(Z \geq \frac{a-65}{10}\right) = 0.1$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-65}{10}\right) = 0.1$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-65}{10}\right) = 0.4$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.28) = 0.4$ 이므로

$$\frac{a-65}{10} = 1.28, \quad a-65 = 12.8$$

$$\therefore a = 77.8$$

따라서 구하는 최저 점수는 77.8점이다.

- 32** 돼지들의 무게를 X kg이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(120, 15^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-120}{15}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.
무게가 가벼운 쪽에서 60번째인 돼지의 무게를 a kg이라 하면

$$P(X \leq a) = \frac{60}{200} = 0.3$$

$$P\left(Z \leq \frac{a-120}{15}\right) = 0.3, P\left(Z \geq \frac{120-a}{15}\right) = 0.3$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{120-a}{15}\right) = 0.3$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{120-a}{15}\right) = 0.2$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 0.52) = 0.2$ 이므로

$$\frac{120-a}{15} = 0.52, 120-a = 7.8$$

$$\therefore a = 112.2$$

따라서 구하는 돼지의 무게는 112.2 kg이다.

- 33** 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(900, \frac{1}{5}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 900 \times \frac{1}{5} = 180, V(X) = 900 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 144$$

이때 시행 횟수가 충분히 크므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(180, 12^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-180}{12}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(174 \leq X \leq 198)$$

$$= P\left(\frac{174-180}{12} \leq Z \leq \frac{198-180}{12}\right)$$

$$= P(-0.5 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(-0.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 0.5) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.1915 + 0.4332 = 0.6247$$

- 34** 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(450, \frac{2}{3}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 450 \times \frac{2}{3} = 300, V(X) = 450 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 100$$

이때 시행 횟수가 충분히 크므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(300, 10^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-300}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(X \leq 296) = P\left(Z \leq \frac{296-300}{10}\right)$$

$$= P(Z \leq -0.4) = P(Z \geq 0.4)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.4)$$

$$= 0.5 - 0.16 = 0.34$$

- 35** ${}_{48}C_x \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{48-x}$ 은 한 번의 시행에서 일어날 확률이 $\frac{1}{4}$ 인 어떤 사건이 48번의 독립시행에서 x 번 일어날 확률이다.
이 사건이 일어나는 횟수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(48, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 48 \times \frac{1}{4} = 12$$

$$V(X) = 48 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 9$$

이때 시행 횟수가 충분히 크므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(12, 3^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-12}{3}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} & {}_{48}C_{12} \left(\frac{1}{4}\right)^{12} \left(\frac{3}{4}\right)^{36} + {}_{48}C_{13} \left(\frac{1}{4}\right)^{13} \left(\frac{3}{4}\right)^{35} \\ & \quad + \cdots + {}_{48}C_{18} \left(\frac{1}{4}\right)^{18} \left(\frac{3}{4}\right)^{30} \end{aligned}$$

$$= P(X=12) + P(X=13) + \cdots + P(X=18)$$

$$= P(12 \leq X \leq 18)$$

$$= P\left(\frac{12-12}{3} \leq Z \leq \frac{18-12}{3}\right)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$$

- 36** 448회의 시행에서 동전 3개가 모두 앞면이 나오는 횟수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(448, \frac{1}{8}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 448 \times \frac{1}{8} = 56$$

$$V(X) = 448 \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{8} = 49$$

이때 시행 횟수가 충분히 크므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(56, 7^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-56}{7}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$P(X \leq 49) = P\left(Z \leq \frac{49-56}{7}\right) = P(Z \leq -1)$$

$$= P(Z \geq 1) = P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$

- 37** 400명 중에서 예약을 취소하는 승객의 수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{10}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 400 \times \frac{1}{10} = 40$$

$$V(X) = 400 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = 36$$

이때 시행 횟수가 충분히 크므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(40, 6^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-40}{6}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

비행기를 타러 온 승객이 모두 비행기를 타려면 22명 이상 취소해야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 22) &= P\left(Z \geq \frac{22-40}{6}\right) \\ &= P(Z \geq -3) = P(Z \leq 3) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= 0.5 + 0.4987 = 0.9987 \end{aligned}$$

- 38** 192회 중에서 6점을 얻는 횟수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(192, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 192 \times \frac{1}{4} = 48$$

$$V(X) = 192 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 36$$

이때 시행 횟수가 충분히 크므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(48, 6^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-48}{6}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

한편 6점을 얻는 횟수가 X 일 때 2점을 잃는 횟수는 $192 - X$ 이므로 점수가 96점 이상이라면

$$6X - 2(192 - X) \geq 96 \quad \therefore X \geq 60$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 60) &= P\left(Z \geq \frac{60-48}{6}\right) = P(Z \geq 2) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.4772 = 0.0228 \end{aligned}$$

- 39** 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(450, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 450 \times \frac{1}{3} = 150, V(X) = 450 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 100$$

이때 시행 횟수가 충분히 크므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(150, 10^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-150}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(X \geq k) = 0.12$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{k-150}{10}\right) = 0.12$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-150}{10}\right) = 0.12$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-150}{10}\right) = 0.38$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.2) = 0.38$ 이므로

$$\frac{k-150}{10} = 1.2, k-150 = 12 \quad \therefore k = 162$$

- 40** 108개의 화살 중에서 10점에 맞힌 화살의 개수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(108, \frac{3}{4}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 108 \times \frac{3}{4} = 81, V(X) = 108 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{81}{4}$$

이때 시행 횟수가 충분히 크므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N\left(81, \left(\frac{9}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-81}{\frac{9}{2}}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

10점에 맞힌 화살이 k 개 이상일 확률이 0.0228이므로

$$P(X \geq k) = 0.0228 \text{에서}$$

$$P\left(Z \geq \frac{k-81}{\frac{9}{2}}\right) = 0.0228$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{2k-162}{9}\right) = 0.0228$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{2k-162}{9}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{2k-162}{9} = 2 \quad \therefore k = 90$$

- 41** 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{5}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 400 \times \frac{1}{5} = 80, V(X) = 400 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 64$$

이때 시행 횟수가 충분히 크므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(80, 8^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z_X = \frac{X-80}{8}$ 으로 놓으면 확률변수 Z_X 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(X \geq k) = P\left(Z_X \geq \frac{k-80}{8}\right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 확률변수 Y 는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로

$$E(Y) = 400 \times \frac{1}{2} = 200, V(Y) = 400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 100$$

이때 시행 횟수가 충분히 크므로 Y 는 근사적으로 정규분포 $N(200, 10^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z_Y = \frac{Y-200}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z_Y 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(Y \leq 230) &= P\left(Z_Y \leq \frac{230-200}{10}\right) \\ &= P(Z_Y \leq 3) = P(Z_Y \geq -3) \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$P(X \geq k) = P(Y \leq 230)$ 이므로 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$P\left(Z_X \geq \frac{k-80}{8}\right) = P(Z_Y \geq -3)$$

따라서 $\frac{k-80}{8} = -3$ 이므로 $k = 56$

III-2 01 통계적 추정

기초 문제 Training

52쪽

- 1 $\sim, \sim$
- 2 (1) 25 (2) 20 (3) 10
- 3 $\frac{1}{9}$
- 4 평균: 60, 분산: 1, 표준편차: 1
- 5 (1) 평균: 200, 분산: 16
(2) $N(200, 4^2)$
(3) $Z = \frac{\bar{X} - 200}{4}$
(4) 0.9332
- 6 (1) $122.04 \leq m \leq 125.96$
(2) $121.42 \leq m \leq 126.58$
- 7 (1) 1.96 (2) 2.58

핵심 유형 Training

53~56쪽

- | | | | | |
|------------------|-------|------|----------|-----------------|
| 1 19 | 2 90 | 3 ④ | 4 112 | 5 $\frac{9}{8}$ |
| 6 $\frac{15}{8}$ | 7 ③ | 8 ⑤ | 9 0.8185 | 10 ⑤ |
| 11 16 | 12 25 | 13 ④ | 14 21 | 15 ⑤ |
| 16 ③ | 17 ⑤ | 18 ④ | 19 16 | 20 3 |
| 21 ① | 22 ② | | | |

- 1 $E(\bar{X}) = 18, V(\bar{X}) = \frac{2^2}{4} = 1$ 이므로
 $E(\bar{X}) + V(\bar{X}) = 19$
- 2 $E(\bar{X}) = 54$
 $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{n}}$
즉, $\frac{3}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$ 이므로 $\sqrt{n} = 6 \quad \therefore n = 36$
 $\therefore E(\bar{X}) + n = 54 + 36 = 90$

- 3 $\sigma(\bar{X}) = \frac{9}{\sqrt{n}}$ 이므로
 $\frac{9}{\sqrt{n}} \leq 3, \sqrt{n} \geq 3$
 $\therefore n \geq 9$
따라서 구하는 n 의 최솟값은 9이다.

- 4 $E(\bar{X}) = E(X) = 8$ 이므로
 $V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2$
 $= 80 - 8^2 = 16$
그런데 $V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n}$ 이므로
 $16 = \frac{V(X)}{3} \quad \therefore V(X) = 48$
 $\therefore E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2$
 $= 48 + 8^2 = 112$

- 5 확률의 총합은 1이므로
 $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$
따라서 모평균과 모분산을 구하면
 $m = -1 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} = 1$
 $\sigma^2 = (-1)^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{4} - 1^2 = 2$
이때 표본의 크기가 16이므로
 $E(\bar{X}) = m = 1$
 $V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$
 $\therefore E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + \{E(\bar{X})\}^2$
 $= \frac{1}{8} + 1^2 = \frac{9}{8}$

- 6 주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 확률 변수 X 라 하고, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$m = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\sigma^2 = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{4} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

이때 표본의 크기가 2이므로

$$E(\bar{X}) = m = \frac{5}{2}$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{2} = \frac{\frac{5}{4}}{2} = \frac{5}{8}$$

$$\therefore E(\bar{X}) - V(\bar{X}) = \frac{15}{8}$$

- 7 상자에서 한 장의 카드를 꺼낼 때, 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X 라 하고, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	5	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

$$m = 3 \times \frac{2}{7} + 5 \times \frac{3}{7} + 7 \times \frac{2}{7} = 5$$

$$\sigma^2 = 3^2 \times \frac{2}{7} + 5^2 \times \frac{3}{7} + 7^2 \times \frac{2}{7} - 5^2 = \frac{16}{7}$$

표본의 크기가 n 이므로 $V(\bar{X}) = \frac{4}{7}$ 에서

$$\frac{\frac{16}{7}}{n} = \frac{4}{7}$$

$$\therefore n = 4$$

- 8 모집단이 정규분포 $N(20, 4^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 64이므로 64명이 식사하는 데 걸리는 시간의 평균을 $\bar{X}$ 분이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(20, \frac{4^2}{64}\right)$, 즉

$N\left(20, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X} - 20}{\frac{1}{2}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규

분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 21) &= P\left(Z \leq \frac{21-20}{\frac{1}{2}}\right) \\ &= P(Z \leq 2) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 + 0.4772 \\ &= 0.9772 \end{aligned}$$

- 9 모집단이 정규분포 $N(160, 10^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 4이므로 4개의 토마토의 무게의 평균을 $\bar{X}$ g이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(160, \frac{10^2}{4}\right)$, 즉 $N(160, 5^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X} - 160}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(155 \leq \bar{X} \leq 170) &= P\left(\frac{155-160}{5} \leq Z \leq \frac{170-160}{5}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 2) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.3413 + 0.4772 \\ &= 0.8185 \end{aligned}$$

- 10 모집단이 정규분포 $N(200, 32^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 64이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(200, \frac{32^2}{64}\right)$, 즉 $N(200, 4^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X} - 200}{4}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정

규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(\bar{X} \leq k) = 0.0668$ 에서

$$P\left(Z \leq \frac{k-200}{4}\right) = 0.0668$$

$$P\left(Z \geq \frac{200-k}{4}\right) = 0.0668$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{200-k}{4}\right) = 0.0668$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{200-k}{4}\right) = 0.4332$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$\frac{200-k}{4} = 1.5 \quad \therefore k = 194$$

- 11 모집단이 정규분포 $N(183, 24^2)$ 을 따르므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(183, \frac{24^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(183, \left(\frac{24}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X} - 183}{\frac{24}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규

분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(|\bar{X} - 183| \leq 3) = 0.383$ 에서

$$P(-3 \leq \bar{X} - 183 \leq 3) = 0.383$$

$$P(180 \leq \bar{X} \leq 186) = 0.383$$

$$P\left(\frac{180-183}{\frac{24}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq \frac{186-183}{\frac{24}{\sqrt{n}}}\right) = 0.383$$

$$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{8} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{8}\right) = 0.383$$

$$2P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{8}\right) = 0.383$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{8}\right) = 0.1915$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.1915$ 이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{8} = 0.5, \sqrt{n} = 4 \quad \therefore n = 16$$

- 12 모집단이 정규분포 $N(250, 5^2)$ 을 따르므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(250, \frac{5^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(250, \left(\frac{5}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\bar{X} - 250}{\frac{5}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규

분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(\bar{X} \geq 251) = 0.1587$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{251-250}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right) = 0.1587$$

$$P\left(Z \geq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0.1587$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0.1587$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{5}\right) = 0.3413$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{5} = 1, \sqrt{n} = 5 \quad \therefore n = 25$$

- 13** 표본평균 $\bar{x} = 55$, 표본의 크기 $n = 100$ 이고 표본의 크기가 충분히 크므로 모표준편차 σ 대신 표본표준편차 10을 이용하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$55 - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{100}} \leq m \leq 55 + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore 53.04 \leq m \leq 56.96$$

- 14** 표본평균 $\bar{x} = 1000$, 표본의 크기 $n = 16$, 모표준편차 $\sigma = 16$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$1000 - 2.58 \times \frac{16}{\sqrt{16}} \leq m \leq 1000 + 2.58 \times \frac{16}{\sqrt{16}}$$

$$\therefore 989.68 \leq m \leq 1010.32$$

따라서 구하는 자연수는 990, 991, ..., 1010의 21개이다.

- 15** 표본평균 $\bar{x} = 501$, 모표준편차 $\sigma = 4$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$501 - 2.58 \times \frac{4}{\sqrt{n}} \leq m \leq 501 + 2.58 \times \frac{4}{\sqrt{n}}$$

이때 $499.71 \leq m \leq 502.29$ 에서

$$2.58 \times \frac{4}{\sqrt{n}} = 1.29, \sqrt{n} = 8 \quad \therefore n = 64$$

- 16** 표본평균 $\bar{x} = 1480$, 모표준편차 $\sigma = 100$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$1480 - 1.96 \times \frac{100}{\sqrt{n}} \leq m \leq 1480 + 1.96 \times \frac{100}{\sqrt{n}}$$

이때 $1452 \leq m \leq k$ 에서

$$1480 - 1.96 \times \frac{100}{\sqrt{n}} = 1452$$

$$1.96 \times \frac{100}{\sqrt{n}} = 28$$

$$\sqrt{n} = 7 \quad \therefore n = 49$$

$$k = 1480 + 1.96 \times \frac{100}{\sqrt{n}} = 1480 + 28 = 1508 \text{이므로}$$

$$n + k = 49 + 1508 = 1557$$

- 17** 표본의 크기 $n = 100$, 모표준편차 $\sigma = 15$ 이므로 신뢰도 99%의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2.58 \times \frac{15}{\sqrt{100}} = 7.74$$

- 18** 모표준편차 $\sigma = 4$ 이므로 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이가 0.98g이 되려면

$$2 \times 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}} = 0.98, \sqrt{n} = 16$$

$$\therefore n = 256$$

- 19** 표본의 크기를 n 이라 하면 모표준편차 $\sigma = 2$ 이므로 신뢰도 99%의 신뢰구간의 길이가 2.58 이하가 되려면

$$2 \times 2.58 \times \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 2.58$$

$$\sqrt{n} \geq 4 \quad \therefore n \geq 16$$

따라서 구하는 표본의 크기의 최솟값은 16이다.

- 20** 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 n 인 표본을 임의추출하여 추정한 모평균에 대한 신뢰구간의 길이는

$$2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

표본의 크기가 $\frac{1}{9}$ 배, 즉 $\frac{1}{9}n$ 이면 신뢰구간의 길이는

$$2k \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{1}{9}n}} = 3 \times 2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

따라서 신뢰구간의 길이는 3배가 되므로

$$a = 3$$

- 21** $P(-k \leq Z \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라 하면 신뢰도 $\alpha\%$ 로 모평균을 추정할 때, 표본의 크기 $n = 16$, 모표준편차 $\sigma = 20$, 신뢰구간의 길이가 12이므로

$$2 \times k \times \frac{20}{\sqrt{16}} = 12 \quad \therefore k = 1.2$$

따라서 신뢰구간의 길이가 4가 되도록 하는 표본의 크기를 n 이라 하면

$$2 \times 1.2 \times \frac{20}{\sqrt{n}} = 4$$

$$\sqrt{n} = 12 \quad \therefore n = 144$$

- 22** $P(-k \leq Z \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라 하면 신뢰도 $\alpha\%$ 로 모평균을 추정할 때, 표본의 크기 $n = 81$, 모표준편차 $\sigma = 5$, 신뢰구간의 길이가 2분이므로

$$2 \times k \times \frac{5}{\sqrt{81}} = 2 \quad \therefore k = 1.8$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.8) = 0.46$ 이므로

$$P(-1.8 \leq Z \leq 1.8) = 2P(0 \leq Z \leq 1.8)$$

$$= 2 \times 0.46 = 0.92$$

따라서 $\frac{\alpha}{100} = 0.92$ 이므로

$$\alpha = 92$$

