

수학 II

정답과 해설



개념편

정답과 해설

I-1 01 함수의 극한

1 함수의 수렴과 발산

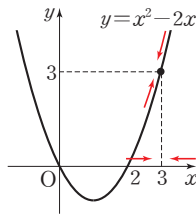
문제

10~11쪽

01-1 답 (1) 3 (2) $2\sqrt{2}$ (3) 2 (4) 3 (5) $-\infty$ (6) ∞

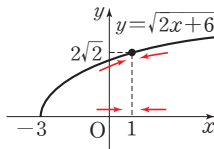
- (1) $f(x) = x^2 - 2x$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 3에 한없이 가까워질 때 $f(x)$ 의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2x) = 3$$



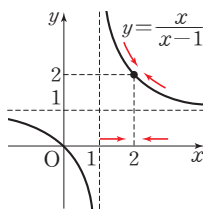
- (2) $f(x) = \sqrt{2x+6}$ 이라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$ 의 값은 $2\sqrt{2}$ 에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{2x+6} = 2\sqrt{2}$$



- (3) $f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1$ 이라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 2에 한없이 가까워질 때 $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-1} = 2$$

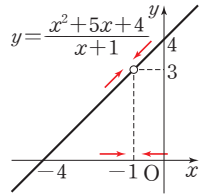


- (4) $f(x) = \frac{x^2+5x+4}{x+1}$ 라 하면 $x \neq -1$ 일 때,

$$f(x) = \frac{(x+1)(x+4)}{x+1} = x+4$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 -1 에 한없이 가까워질 때 $f(x)$ 의 값은 3에 한없이 가까워지므로

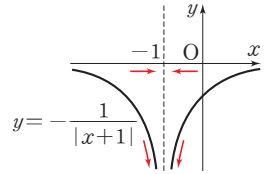
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+5x+4}{x+1} = 3$$



- (5) $f(x) = -\frac{1}{|x+1|}$ 이라

하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 -1 에 한없이 가까워질 때 $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

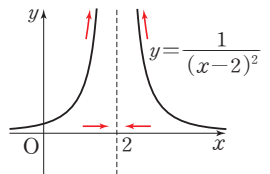
$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(-\frac{1}{|x+1|} \right) = -\infty$$



- (6) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ 이라 하

면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 2에 한없이 가까워질 때 $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로

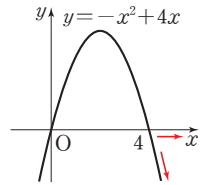
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$



02-1 답 (1) $-\infty$ (2) 0 (3) ∞ (4) $-\infty$ (5) 2 (6) 0

- (1) $f(x) = -x^2 + 4x$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

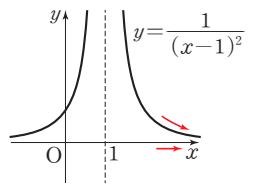
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2 + 4x) = -\infty$$



- (2) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ 이라 하

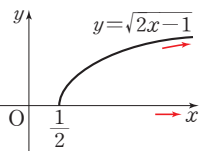
면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$ 의 값은 0에 한없이

$$\text{가까워지므로 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-1)^2} = 0$$



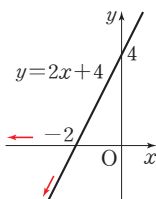
- (3) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ 이라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같고, x 의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$ 의 값도 한없이 커지므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x-1} = \infty$



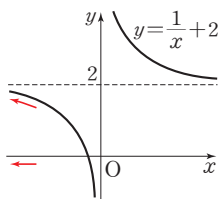
(4) $f(x)=2x+4$ 라 하면 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 $f(x)$ 의 값도 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+4) = -\infty$



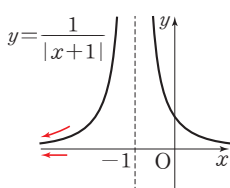
(5) $f(x)=\frac{1}{x}+2$ 라 하면 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x}+2\right) = 2$



(6) $f(x)=\frac{1}{|x+1|}$ 이라 하면

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 $f(x)$ 의



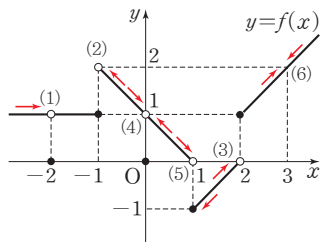
값은 0에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x+1|} = 0$

2 무극한과 좌극한

문제

14~16쪽

03-1 답 (1) 1 (2) 2 (3) 0 (4) 1 (5) 존재하지 않는다. (6) 2



(1) $\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = 1$

(2) $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 2$

(3) $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 0$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

(5) $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 0$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

(6) $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 2 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$

04-1 답 (1) 존재하지 않는다. (2) 존재하지 않는다.

(1) $x > 3$ 일 때, $|x-3| = x-3$ 이므로

$$\frac{x^2-3x}{|x-3|} = \frac{x(x-3)}{x-3} = x$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{x^2-3x}{|x-3|} = \lim_{x \rightarrow 3+} x = 3$$

$x < 3$ 일 때, $|x-3| = -(x-3)$

이므로

$$\frac{x^2-3x}{|x-3|} = \frac{x(x-3)}{-(x-3)} = -x$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{x^2-3x}{|x-3|} = \lim_{x \rightarrow 3-} (-x) = -3$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{x^2-3x}{|x-3|} \neq \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{x^2-3x}{|x-3|}$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x}{|x-3|}$ 의 값은 존재하지 않는다.

(2) 정수 n 에 대하여

$n \leq x < n+1$ 일 때,

$n+1 \leq x+1 < n+2$ 에서

$$[x+1] = n+1$$

$0 < x < 1$ 일 때, $[x+1] = 1$

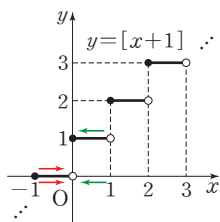
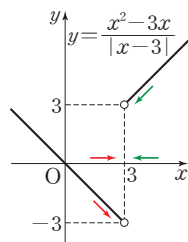
이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} [x+1] = 1$$

$-1 < x < 0$ 일 때, $[x+1] = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0-} [x+1] = 0$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0+} [x+1] \neq \lim_{x \rightarrow 0-} [x+1]$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 0} [x+1]$ 의 값은 존재하지 않는다.



04-2 답 -1

$x > -1$ 일 때, $f(x) = x+1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x+1) = 0$$

$x < -1$ 일 때, $f(x) = -x+k$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (-x+k) = k+1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{의 값이 존재하려면 } \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$$

이어야 하므로

$$0 = k+1 \quad \therefore k = -1$$

05-1 답 (1) 0 (2) 1 (3) -1

(1) $g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1-$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(g(x)) = f(1) = 0$$

(2) $g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

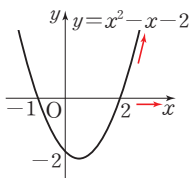
$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = 1$$

(3) $f(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2+$ 일 때 $s \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 1+} g(s) = -1$$

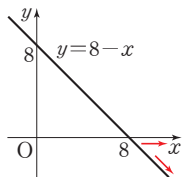
- 1 ④ 2 4 3 ④ 4 ③ 5 8
 6 ⑤ 7 ② 8 ③ 9 9 10 ②
 11 3 12 ㄴ, ㄹ

- 1 ① $f(x)=x^2-x-2$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$ 의 값도 한없이 커지므로



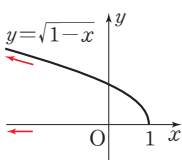
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x - 2) = \infty$$

- ② $f(x)=8-x$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로



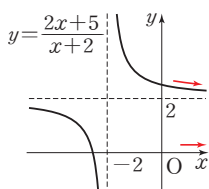
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (8 - x) = -\infty$$

- ③ $f(x)=\sqrt{1-x}$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때 $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로



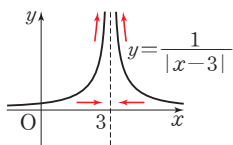
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} = \infty$$

- ④ $f(x)=\frac{2x+5}{x+2}=\frac{1}{x+2}+2$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+5}{x+2} = 2$$

- ⑤ $f(x)=\frac{1}{|x-3|}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 3에 한없이 가까워질 때 $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로



$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x-3|} = \infty$$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ④이다.

- 2 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)=2, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)=0, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)=2$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2+0+2=4$

- 3 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)=2$ 이므로 $a=2$
 $\therefore a + \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 2 + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
 $= 2 + (-1) = 1$

- 4 $x>2$ 일 때, $f(x)=(x-5)^2$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-5)^2 = 9$
 $x<2$ 일 때, $f(x)=x^2$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 9 - 4 = 5$

- 5 $x>1$ 일 때, $|x-1|=x-1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+2x-3}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+3) = 4$

$$\therefore a=4$$

- $x<-3$ 일 때, $|x+3|=-(x+3)$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2+2x-3}{|x+3|} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(x+3)(x-1)}{-(x+3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow -3^-} (-x+1) = 4$

$$\therefore b=4$$

$$\therefore a+b=4+4=8$$

- 6 $-4< x < -3$ 일 때, $-1 < x+3 < 0$ 에서 $[x+3]=-1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} [x+3] = -1$$

$5 < x < 6$ 일 때, $[x]=5$ 에서 $[x]-1=4$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} ([x]-1) = 4$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -3^-} [x+3] + \lim_{x \rightarrow 5^+} ([x]-1) = -1 + 4 = 3$$

- 7 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

ㄴ. $0 < x < 1$ 일 때, $[x]=0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0$$

$-1 < x < 0$ 일 때, $[x]=-1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $x>0$ 일 때, $|x|=x$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$x<0$ 일 때, $|x|=-x$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

ㄹ. $x > 0$ 일 때, $|x| = x$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1$$

$x < 0$ 일 때, $|x| = -x$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} = -1$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 보기의 함수 중 $x=0$ 에서의 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

8 ㄱ. $2 < x < 4$ 일 때, $1 < \frac{x}{2} < 2$ 에서 $\left[\frac{x}{2}\right] = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \left[\frac{x}{2}\right] = 1$$

$0 < x < 2$ 일 때, $0 < \frac{x}{2} < 1$ 에서 $\left[\frac{x}{2}\right] = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \left[\frac{x}{2}\right] = 0$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 2+} \left[\frac{x}{2}\right] \neq \lim_{x \rightarrow 2-} \left[\frac{x}{2}\right]$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $x > 0$ 일 때, $|x| = x$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^3}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} x^2 = 0$$

$x < 0$ 일 때, $|x| = -x$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^3}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^3}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x^2) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{|x|} = 0$$

ㄷ. $\frac{x-9}{\sqrt{x}+3} = \frac{(x-9)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \sqrt{x}-3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}+3} = \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x}-3) = 0$$

ㄹ. $x > 2$ 일 때, $|x-2| = x-2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2-3x+2}{|x-2|} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2-3x+2}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} (x-1) = 1 \end{aligned}$$

$x < 2$ 일 때, $|x-2| = -(x-2)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^2-3x+2}{|x-2|} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^2-3x+2}{-(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x-1)(x-2)}{-(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} (-x+1) = -1 \end{aligned}$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2-3x+2}{|x-2|} \neq \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^2-3x+2}{|x-2|}$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{|x-2|}$ 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 보기 중 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

9 $x > 3$ 일 때, $f(x) = x^2 + 2x - k$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} (x^2 + 2x - k) = -k + 15$$

$x < 3$ 일 때, $f(x) = -x + k$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} (-x + k) = k - 3$$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재하려면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) \text{ 이어야 하므로} \\ -k + 15 &= k - 3 \quad \therefore k = 9 \end{aligned}$$

10 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$ 일 때, $f(x) = -x^2 + ax + b$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (-x^2 + ax + b) = -a + b - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (-x^2 + ax + b) = a + b - 1$$

$-1 < x < 1$ 일 때, $f(x) = x(x-2)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} x(x-2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} x(x-2) = -1$$

모든 실수 x 에서 극한값이 존재하려면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \text{ 이어야 하므로} \\ 3 &= -a + b - 1, \quad a + b - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\therefore a - b = -4, \quad a + b = 0$$

$$\therefore a - b = -4, \quad a + b = 0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -2, b = 2$

$$\therefore ab = -4$$

11 $3-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 3-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(3-x) = \lim_{t \rightarrow 3-} f(t) = 2$$

$x-1=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2+$ 일 때 $s \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x-1) = \lim_{s \rightarrow 1+} f(s) = 1$$

$-x=k$ 로 놓으면 $x \rightarrow -3-$ 일 때 $k \rightarrow 3+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -3-} f(-x) = \lim_{k \rightarrow 3+} f(k) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0+} f(3-x) + \lim_{x \rightarrow 2+} f(x-1) + \lim_{x \rightarrow -3-} f(-x) \\ = 2 + 1 + 0 = 3 \end{aligned}$$

12 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(f(x)) = f(1) = -1$$

ㄷ. $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) = -1$$

ㄹ. $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2-$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = 0$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

I-1 02 함수의 극한에 대한 성질

1 함수의 극한에 대한 성질

개념 CHECK

20쪽

1 답 (1) -1 (2) 15 (3) 5 (4) $\frac{7}{25}$

문제

22~27쪽

01-1 답 4

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} (x^2+1)f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x)}{x+2} \times (x^2+1)(x+2) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x+2} \times \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+1)(x+2) \\ &= \frac{1}{5} \times 5 \times 4 = 4\end{aligned}$$

01-2 답 -1

$x-3=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 3$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x-3)}{x-3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2f(x)}{x+f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{2f(x)}{x}}{1 + \frac{f(x)}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}} \\ &= \frac{1 - 2 \times 2}{1 + 2} = -1\end{aligned}$$

01-3 답 -17

$2f(x)-g(x)=h(x)$ 로 놓으면 $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)=8$

$g(x)=2f(x)-h(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=3$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)-4g(x)}{f(x)+2g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3f(x)-4\{2f(x)-h(x)\}}{f(x)+2\{2f(x)-h(x)\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5f(x)+4h(x)}{5f(x)-2h(x)} \\ &= \frac{-5 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + 4 \lim_{x \rightarrow 2} h(x)}{5 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 2} h(x)} \\ &= \frac{-5 \times 3 + 4 \times 8}{5 \times 3 - 2 \times 8} = -17\end{aligned}$$

01-4 답 $-\frac{5}{6}$

$3f(x)-g(x)=h(x)$ 로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 2$$

$g(x)=3f(x)-h(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)}=0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-2g(x)}{3f(x)+g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-2\{3f(x)-h(x)\}}{3f(x)+3f(x)-h(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5f(x)+2h(x)}{6f(x)-h(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5 + \frac{2h(x)}{f(x)}}{6 - \frac{h(x)}{f(x)}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (-5) + 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{f(x)}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 6 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{f(x)}} \\ &= \frac{-5 + 2 \times 0}{6 - 0} = -\frac{5}{6}\end{aligned}$$

01-5 답 1

$3f(x)+g(x)=h(x)$, $f(x)-g(x)=k(x)$ 로 놓으면

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 8, \lim_{x \rightarrow 1} k(x) = 6$$

이때 $h(x)+k(x)=4f(x)$, $h(x)-3k(x)=4g(x)$ 이

므로

$$f(x) = \frac{h(x)+k(x)}{4}, g(x) = \frac{h(x)-3k(x)}{4}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{h(x)+k(x)}{4} + \frac{h(x)-3k(x)}{4} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)-k(x)}{2} \\ &= \frac{8-6}{2} = 1\end{aligned}$$

02-1 답 (1) 5 (2) -2

(1) 분자를 인수분해하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) = 5\end{aligned}$$

(2) 분모, 분자를 각각 인수분해하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x-1) = -2\end{aligned}$$

02-2 ㉡ (1) $\frac{1}{4}$ (2) 16

(1) 분자를 유리화하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

(2) 분모를 유리화하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)(\sqrt{x+2}+2) \\ &= 4(2+2) = 16\end{aligned}$$

03-1 ㉡ (1) 4 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 0 (4) ∞

(1) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 x^2 으로 각각 나누면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-3x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = 4$$

(2) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 x^2 으로 각각 나누면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)(3x-1)}{2x^2+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(3-\frac{1}{x}\right)}{2+\frac{3}{x^2}} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

(3) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 x^2 으로 각각 나누면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{2x^2+x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}} = 0$$

(4) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 x 로 각각 나누면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}} = \infty$$

03-2 ㉡ $-\frac{2}{5}$

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}-4x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2t}{\sqrt{t^2+1}+4t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}+4} \\ &= -\frac{2}{5}\end{aligned}$$

04-1 ㉡ (1) 0 (2) 3 (3) -2 (4) -4

(1) 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = 0\end{aligned}$$

(2) 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x})(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x})}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-3x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}} = 3\end{aligned}$$

(3) 분모를 유리화하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-x+1}+x}{(\sqrt{x^2-x+1}-x)(\sqrt{x^2-x+1}+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-x+1}+x}{-x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}{-1+\frac{1}{x}} = -2\end{aligned}$$

(4) 분모를 유리화하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{4x^2-3x}-2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3(\sqrt{4x^2-3x}+2x)}{(\sqrt{4x^2-3x}-2x)(\sqrt{4x^2-3x}+2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3(\sqrt{4x^2-3x}+2x)}{-3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2-3x}+2x}{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4-\frac{3}{x}}+2}{-1} = -4\end{aligned}$$

04-2 ㉡ 1

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-2x+2}+x) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2+2t+2}-t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2+2t+2}-t)(\sqrt{t^2+2t+2}+t)}{\sqrt{t^2+2t+2}+t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t+2}{\sqrt{t^2+2t+2}+t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{2}{t}}{\sqrt{1+\frac{2}{t}+\frac{2}{t^2}}+1} = 1\end{aligned}$$

05-1 [답] (1) $\frac{5}{9}$ (2) $\frac{1}{2}$

(1) $\frac{x^2}{x+2} - \frac{1}{3}$ 을 통분한 후 약분하면

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left(\frac{x^2}{x+2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{x-1} \times \frac{3x^2 - x - 2}{3(x+2)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{x-1} \times \frac{(3x+2)(x-1)}{3(x+2)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+2}{3(x+2)} \\ &= \frac{3+2}{3 \times 3} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

(2) $\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1$ 을 통분한 후 분자를 유리화하면

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 - x} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x(x-1)} \times \frac{1 - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x(x-1)} \times \frac{(1 - \sqrt{x+1})(1 + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x(x-1)} \times \frac{-x}{\sqrt{x+1} + x + 1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{(x-1)(\sqrt{x+1} + x + 1)} \\ &= \frac{-1}{-1 \times 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

05-2 [답] $\frac{1}{18}$

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{x}{\sqrt{9x^2 + 3}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{\sqrt{9t^2 + 3}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(t^2 \times \frac{\sqrt{9t^2 + 3} - 3t}{3\sqrt{9t^2 + 3}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ t^2 \times \frac{(\sqrt{9t^2 + 3} - 3t)(\sqrt{9t^2 + 3} + 3t)}{3\sqrt{9t^2 + 3}(\sqrt{9t^2 + 3} + 3t)} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3t^2}{3(9t^2 + 3 + 3t\sqrt{9t^2 + 3})} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{9t^2 + 3 + \sqrt{81t^4 + 27t^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{9 + \frac{3}{t^2} + \sqrt{81 + \frac{27}{t^2}}} \\ &= \frac{1}{18} \end{aligned}$$

06-1 [답] 2

점 Q에서 직선 PR에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{QH} = \sqrt{t+2} - \sqrt{t}$$

$$\overline{PR} = t \text{ 이므로}$$

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{PR} \times \overline{QH} = \frac{t(\sqrt{t+2} - \sqrt{t})}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t}}{S(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t}}{\frac{t(\sqrt{t+2} - \sqrt{t})}{2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{t}(\sqrt{t+2} - \sqrt{t})} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{t+2} + \sqrt{t})}{\sqrt{t}(\sqrt{t+2} - \sqrt{t})(\sqrt{t+2} + \sqrt{t})} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{t+2} + \sqrt{t})}{2\sqrt{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t+2} + \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{2}{t}} + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

06-2 [답] $\frac{1}{2}$

곡선 $y = \frac{1}{8}x^2$ 에 $x=a$ 를 대입하면

$$y = \frac{1}{8}a^2 \quad \therefore A\left(a, \frac{1}{8}a^2\right)$$

원 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ 에 $x=a$ 를 대입하면

$$a^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$(y-1)^2 = 1 - a^2$$

$$y-1 = \pm\sqrt{1-a^2}$$

$$\therefore y = 1 \pm \sqrt{1-a^2}$$

$$\therefore B(a, 1 - \sqrt{1-a^2}), C(a, 1 + \sqrt{1-a^2})$$

$$\text{따라서 } \overline{PA} = \frac{1}{8}a^2, \overline{PB} = 1 - \sqrt{1-a^2}, \overline{PC} = 1 + \sqrt{1-a^2} \text{ 이}$$

므로

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{\overline{PA} \times \overline{PC}}{\overline{PB}} &= \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{8}a^2(1 + \sqrt{1-a^2})}{1 - \sqrt{1-a^2}} \\ &= \frac{1}{8} \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{a^2(1 + \sqrt{1-a^2})^2}{(1 - \sqrt{1-a^2})(1 + \sqrt{1-a^2})} \\ &= \frac{1}{8} \lim_{a \rightarrow 0+} \frac{a^2(2 - a^2 + 2\sqrt{1-a^2})}{a^2} \\ &= \frac{1}{8} \lim_{a \rightarrow 0+} (2 - a^2 + 2\sqrt{1-a^2}) \\ &= \frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

07-1 ㉡ (1) $a=4, b=3$ (2) $a=-12, b=20$

(3) $a=5, b=-2$ (4) $a=8, b=\frac{1}{6}$

(1) $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로
(분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + ax + b) = 0$

$$1 - a + b = 0 \quad \therefore b = a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉡을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + ax + a - 1}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x + a - 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x + a - 1) = a - 2 \end{aligned}$$

즉, $a - 2 = 2$ 이므로 $a = 4$

이를 ㉡에 대입하면

$$b = 4 - 1 = 3$$

(2) $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로
(분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 0$

$$4 + 2a + b = 0 \quad \therefore b = -2a - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉡을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax - 2a - 4}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + a + 2)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + a + 2}{x + 2} = \frac{a + 4}{4} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{a + 4}{4} = -2 \text{이므로}$$

$$a + 4 = -8 \quad \therefore a = -12$$

이를 ㉡에 대입하면

$$b = 24 - 4 = 20$$

(3) $x \rightarrow -1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt{x + a} + b) = 0$

$$\sqrt{-1 + a} + b = 0 \quad \therefore b = -\sqrt{a - 1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉡을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x + a} - \sqrt{a - 1}} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x + a} + \sqrt{a - 1})}{(\sqrt{x + a} - \sqrt{a - 1})(\sqrt{x + a} + \sqrt{a - 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 1)(\sqrt{x + a} + \sqrt{a - 1})}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1)(\sqrt{x + a} + \sqrt{a - 1}) \end{aligned}$$

$$= -2 \times 2\sqrt{a - 1} = -4\sqrt{a - 1}$$

$$\text{즉, } -4\sqrt{a - 1} = -8 \text{이므로}$$

$$\sqrt{a - 1} = 2, a - 1 = 4 \quad \therefore a = 5$$

이를 ㉡에 대입하면

$$b = -\sqrt{5 - 1} = -2$$

(4) $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로
(분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x + a} - 3) = 0$

$$\sqrt{1 + a} - 3 = 0, \sqrt{a + 1} = 3$$

$$a + 1 = 9 \quad \therefore a = 8$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 8} - 3}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x + 8} - 3)(\sqrt{x + 8} + 3)}{(x - 1)(\sqrt{x + 8} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x + 8} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x + 8} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\therefore b = \frac{1}{6}$$

08-1 ㉡ -3

(가)에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 - 3x - 4} = 3$ 이므로 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다. $\dots\dots \textcircled{1}$

(나)에서 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x^2 - 3x - 4} = 2$ 에서 $x \rightarrow 4$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0$

$$\therefore f(4) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉡, ㉢에서 $f(x) = 3(x - 4)(x + a)$ (a 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x^2 - 3x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3(x - 4)(x + a)}{(x + 1)(x - 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3(x + a)}{x + 1} = \frac{3(a + 4)}{5} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{3(a + 4)}{5} = 2 \text{이므로 } a + 4 = \frac{10}{3} \quad \therefore a = -\frac{2}{3}$$

따라서 $f(x) = 3(x - 4)\left(x - \frac{2}{3}\right) = (x - 4)(3x - 2)$ 이므로
 $f(1) = -3 \times 1 = -3$

08-2 ㉡ 14

(가)에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 2x^3}{x^2} = 1$ 이므로 $f(x) - 2x^3$ 은 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다. $\dots\dots \textcircled{1}$

(나)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -3$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

$$\therefore f(0) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉡, ㉢에서 $f(x) - 2x^3 = x^2 + ax$, 즉 $f(x) = 2x^3 + x^2 + ax$ (a 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + x^2 + ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + x + a) = a \\ \therefore a &= -3 \end{aligned}$$

따라서 $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x$ 이므로

$$f(2) = 16 + 4 - 6 = 14$$

09-1 [답] (1) $\frac{1}{3}$ (2) 3 (3) 2 (4) $\frac{4}{3}$

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{3x^2+1} = \frac{1}{3}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+4}{3x^2+1} = \frac{1}{3}$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{3}$

(2) $x > 0$ 일 때, 주어진 부등식의 각 변을 x 로 나누면

$$\frac{3x+1}{x} < \frac{f(x)}{x} < \frac{3x+4}{x}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{x} = 3$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+4}{x} = 3$ 이므로 함수의 극한의

대소 관계에 의하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 3$

(3) $x^2 > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2 으로 나누면

$$\frac{2x^2-5x-3}{x^2} < f(x) < \frac{2x^2+2x-1}{x^2}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-5x-3}{x^2} = 2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+2x-1}{x^2} = 2$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$

(4) $x > 0$ 일 때, $\sqrt{4x+1} > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 제곱하면 $4x+1 < \{f(x)\}^2 < 4x+3$

$3x+2 > 0$ 이므로 각 변을 $3x+2$ 로 나누면

$$\frac{4x+1}{3x+2} < \frac{\{f(x)\}^2}{3x+2} < \frac{4x+3}{3x+2}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+1}{3x+2} = \frac{4}{3}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+3}{3x+2} = \frac{4}{3}$ 이므로 함수의 극한

의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{3x+2} = \frac{4}{3}$

연습문제

32~34쪽

- | | | | | |
|---------------------|---------------------|-------|------------------|-------|
| 1 $\neg, \sqsubset$ | 2 -4 | 3 36 | 4 1 | 5 ② |
| 6 -7 | 7 $\neg, \sqsubset$ | 8 ⑤ | 9 $-\frac{3}{2}$ | 10 2 |
| 11 8 | 12 -1 | 13 13 | 14 ④ | 15 ④ |
| 16 27 | 17 $\frac{9}{2}$ | 18 7 | 19 ④ | 20 -1 |
| 21 ③ | 22 9 | 23 4 | | |

1 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2+} g(x) = 3$,

$\lim_{x \rightarrow 2-} g(x) = -3$ 이므로

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 2+} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2+} g(x)$$

$$= 0 + 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2-} g(x)$$

$$= 0 + (-3) = -3$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 2+} \{f(x) + g(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 2-} \{f(x) + g(x)\}$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) + g(x)\}$ 의 값은 존재하지 않는다.

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2+} g(x)$$

$$= 0 \times 3 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2-} g(x)$$

$$= 0 \times (-3) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) = 0$$

$$\sqsubset. \lim_{x \rightarrow 2+} [\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2+} \{f(x)\}^2 + \lim_{x \rightarrow 2+} \{g(x)\}^2 = 0 + 3^2 = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} [\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2-} \{f(x)\}^2 + \lim_{x \rightarrow 2-} \{g(x)\}^2 = 0 + (-3)^2 = 9$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} [\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2] = 9$$

따라서 보기 중 극한값이 존재하는 것은 $\neg, \sqsubset$ 이다.

$$2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + xf(x)}{2x^2 - xf(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{f(x)}{x}}{2 - \frac{f(x)}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}}$$

$$= \frac{1+3}{2-3} = -4$$

3 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$ 에서 $x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t-1)}{t-2} = 3 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-1)}{x-2} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x-1)}{x} = 4$$
에서 $x-1=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 3$ 일 때

$s \rightarrow 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x-1)}{x} = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{f(s)}{s+1} = 4 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x+1} = 4$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-1)f(x)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x-1)}{x-2} \times \frac{f(x)}{x+1} \times (x+1) \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-1)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x+1} \times \lim_{x \rightarrow 2} (x+1)$$

$$= 3 \times 4 \times 3 = 36$$

4 $f(x) - x = h(x)$ 로 놓으면 $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 2$

$$f(x) = h(x) + x, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$
이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{h(x) + x\}g(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{h(x)g(x)}{x} + g(x) \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ h(x) \times g(x) \times \frac{1}{x} \right\} + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

$$= 2 \times 1 \times 0 + 1 = 1$$

5 $5f(x) - 2g(x) = h(x)$ 로 놓으면 $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 2$

$$g(x) = \frac{5f(x) - h(x)}{2}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5f(x) + 4g(x)}{f(x) + 2g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5f(x) + 4 \times \frac{5f(x) - h(x)}{2}}{f(x) + 2 \times \frac{5f(x) - h(x)}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15f(x) - 2h(x)}{6f(x) - h(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15 - \frac{2h(x)}{f(x)}}{6 - \frac{h(x)}{f(x)}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 15 - 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{f(x)}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 6 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{f(x)}} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

6 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\} = 4$ 에서 $\alpha + \beta = 4$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = -5 \text{에서 } \alpha\beta = -5$$

두 근을 α, β 로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2 - 4x - 5 = 0, (x+1)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 5$$

그런데 $\alpha > \beta$ 이므로 $\alpha = 5, \beta = -1$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5, \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{2g(x) + 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} 2}{2 \lim_{x \rightarrow 1} g(x) + \lim_{x \rightarrow 1} 1} \\ &= \frac{5 + 2}{2 \times (-1) + 1} = -7 \end{aligned}$$

7 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \beta$ (α, β 는 실수)

라 하면

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} [\{f(x) + g(x)\} - f(x)] = \beta - \alpha$$

ㄴ. [반례] $f(x) = x, g(x) = \frac{1}{x}$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 1$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ g(x) \times \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \alpha\beta$$

ㄹ. [반례] $f(x) = g(x) = \begin{cases} 0 & (x \geq 0) \\ 1 & (x < 0) \end{cases}$ 이면

$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) - g(x)\} = 0$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x + 3}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 3)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 3}{x+1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)(x-1)}{3x^2+2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{2}{x^2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1} - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \frac{2}{x}} = 4$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

9 $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} - 2x}{x - \sqrt{x^2 + 1}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-\sqrt{t^2 + t} + 2t}{t + \sqrt{t^2 + 1}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-\sqrt{1 + \frac{1}{t}} + 2}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} \right) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

10 $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - ax + 3} - \sqrt{x^2 + 2x - 3}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 + at + 3} - \sqrt{t^2 - 2t - 3}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2 + at + 3} - \sqrt{t^2 - 2t - 3})(\sqrt{t^2 + at + 3} + \sqrt{t^2 - 2t - 3})}{\sqrt{t^2 + at + 3} + \sqrt{t^2 - 2t - 3}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(a+2)t + 6}{\sqrt{t^2 + at + 3} + \sqrt{t^2 - 2t - 3}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a+2 + \frac{6}{t}}{\sqrt{1 + \frac{a}{t} + \frac{3}{t^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{t} - \frac{3}{t^2}}} = \frac{a+2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{a+2}{2} = 2 \text{이므로 } a+2=4 \quad \therefore a=2$$

- 11 점 $P(a, b)$ ($0 < a < 2$, $0 < b < 2$)는 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 4 \quad \therefore b = \sqrt{4 - a^2} \quad (\because b > 0)$$

$P(a, \sqrt{4 - a^2})$, $A(2, 0)$, $H(a, 0)$ 이므로

$$\overline{AH} = 2 - a, \overline{AO} = 2, \overline{PH} = \sqrt{4 - a^2}$$

$\triangle APH \sim \triangle ABO$ 이므로

$$\overline{AH} : \overline{PH} = \overline{AO} : \overline{BO} \text{에서}$$

$$(2 - a) : \sqrt{4 - a^2} = 2 : \overline{BO} \quad \therefore \overline{BO} = \frac{2\sqrt{4 - a^2}}{2 - a}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{a \rightarrow 2^-} (\overline{BO} \times \overline{PH}) &= \lim_{a \rightarrow 2^-} \left(\frac{2\sqrt{4 - a^2}}{2 - a} \times \sqrt{4 - a^2} \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 2^-} \frac{2(4 - a^2)}{2 - a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 2^-} \frac{2(2 + a)(2 - a)}{2 - a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 2^-} 2(2 + a) = 8 \end{aligned}$$

- 12 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x^2 + 3} + a) = 0$

$$2 + a = 0 \quad \therefore a = -2$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2 + 3} - 2)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 3} + 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore b = \frac{1}{2} \quad \therefore ab = -2 \times \frac{1}{2} = -1$$

- 13 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + ax^2 + bx) = 0$

$$27 + 9a + 3b = 0 \quad \therefore b = -3a - 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^3 + ax^2 - (3a + 9)x} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x(x - 3)(x + a + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x(x + a + 3)} \\ &= \frac{1}{3(a + 6)} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{3(a + 6)} = \frac{1}{12} \text{이므로}$$

$$a + 6 = 4 \quad \therefore a = -2$$

이를 ①에 대입하면 $b = 6 - 9 = -3$

$$\therefore a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$$

- 14 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = 6$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$

$$\therefore f(2) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x + 1}$ 의 값이 존재하고, $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$

이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$

$$\therefore f(-1) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $f(x) = a(x + 1)(x - 2)$ ($a \neq 0$)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x + 1)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} a(x + 1) = 3a$$

즉, $3a = 6$ 이므로 $a = 2$

따라서 $f(x) = 2(x + 1)(x - 2) = 2x^2 - 2x - 4$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x - 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} \right) = 2$$

- 15 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x^2 + x + 1} = 1$ 이므로 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다. $\dots\dots \textcircled{1}$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 - x - 2} = 1$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$

$$\therefore f(2) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $f(x) = 2(x - 2)(x + a)$ (a 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 - x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x - 2)(x + a)}{(x + 1)(x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x + a)}{x + 1} = \frac{2a + 4}{3} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{2a + 4}{3} = 1 \text{이므로}$$

$$2a + 4 = 3 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

따라서 $f(x) = 2(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x - 2)(2x - 1)$ 이므로 $f(3) = 1 \times 5 = 5$

- 16 $|f(x) - 3x| < 3$ 이므로 $-3 < f(x) - 3x < 3$

$$\therefore 3x - 3 < f(x) < 3x + 3$$

$x > 1$ 일 때, $3x - 3 > 0$ 이므로 각 변을 세제곱하면

$$(3x - 3)^3 < \{f(x)\}^3 < (3x + 3)^3$$

또 $x > 1$ 일 때, $x^3 + 1 > 0$ 이므로 각 변을 $x^3 + 1$ 로 나누면

$$\frac{(3x - 3)^3}{x^3 + 1} < \frac{\{f(x)\}^3}{x^3 + 1} < \frac{(3x + 3)^3}{x^3 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x - 3)^3}{x^3 + 1} = 27, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x + 3)^3}{x^3 + 1} = 27 \text{이므로 함수의}$$

극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^3}{x^3 + 1} = 27$$

17 $x > \frac{2}{3}$ 일 때, $\frac{(3x-2)^2}{x} > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변에 $\frac{(3x-2)^2}{x}$ 을 곱하면

$$\frac{(3x-2)^2}{x\sqrt{4x^2+2}} < (3x-2)^2 f(x) < \frac{(3x-2)^2}{2x^2}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-2)^2}{x\sqrt{4x^2+2}} = \frac{9}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x-2)^2}{2x^2} = \frac{9}{2}$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x-2)^2 f(x) = \frac{9}{2}$$

18 정수 n 에 대하여 $n \leq x < n+1$ 일 때, $[x] = n$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow n+} \frac{[x]^2 + 3x}{[x]} = \frac{n^2 + 3n}{n} = n+3$$

$n-1 \leq x < n$ 일 때, $[x] = n-1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow n-} \frac{[x]^2 + 3x}{[x]} = \frac{(n-1)^2 + 3n}{n-1} = \frac{n^2 + n + 1}{n-1}$$

$\lim_{x \rightarrow n} \frac{[x]^2 + 3x}{[x]}$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow n+} \frac{[x]^2 + 3x}{[x]} = \lim_{x \rightarrow n-} \frac{[x]^2 + 3x}{[x]}$$
 에서
$$n+3 = \frac{n^2 + n + 1}{n-1}, \quad n^2 + 2n - 3 = n^2 + n + 1$$

$\therefore n = 4$

따라서 $k = n + 3$ 이므로 $k = 4 + 3 = 7$

19 $\left[\frac{x}{3}\right] = \frac{x}{3} - h$ ($0 \leq h < 1$) 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{x} \left[\frac{x}{3}\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{x} \left(\frac{x}{3} - h\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{12h}{x}\right) = 4$$

20 $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + bx}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 - at - bt}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2 - at - bt})(\sqrt{t^2 - at + bt})}{\sqrt{t^2 - at + bt}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1-b^2)t^2 - at}{\sqrt{t^2 - at + bt}} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때 $\textcircled{1}$ 의 값이 존재하려면 분모와 분자의 차수가 같아야 하므로

$$1-b^2=0, -a \neq 0 \quad \therefore a \neq 0, b=1 \quad (\because b>0)$$

$b=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-at}{\sqrt{t^2 - at + t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-a}{\sqrt{1 - \frac{a}{t} + 1}} = -\frac{a}{2}$$

즉, $-\frac{a}{2} = 1$ 이므로 $a = -2$

$\therefore a+b = -2+1 = -1$

21 (가)에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)g(x)}{x^3} = 2$ 이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이다. $\dots\dots \textcircled{1}$

(나)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = -4$ 이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 x^2 을 인수로 갖는다. $\dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $f(x)g(x) = 2x^2(x+a)$ ($a \neq 0$) 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(x+a)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2(x+a) = 2a$$

즉, $2a = -4$ 이므로 $a = -2$

$\therefore f(x)g(x) = 2x^2(x-2)$

두 함수 $f(x), g(x)$ 의 상수항과 계수가 모두 정수이므로 $f(x) = 2x^2, g(x) = x-2$ 일 때 $f(2)$ 의 값이 최대가 된다. 따라서 $f(2)$ 의 최댓값은 8이다.

22 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$ 에서 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 의 차수가 같고 최고차항의 계수의 비가 2이다.

또 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-g(x)}{x-2} = 3$ 에서 함수 $f(x)-g(x)$ 는 일차함수이므로 $f(x), g(x)$ 는 모두 일차함수이다.

따라서 $f(x) = 2ax+b, g(x) = ax+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$) 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-g(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b-c}{x-2} = 3 \quad \therefore a=3$$

$\therefore f(x) = 6x+b, g(x) = 3x+c$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)+g(x)}{x+1}$ 의 값이 존재하고, $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow -1} \{f(x)+g(x)\} = 0 \quad \therefore f(-1)+g(-1) = 0$$

$$-6+b-3+c = 0 \quad \therefore b+c = 9$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)+g(x)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x+b+3x+c}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{9x+9}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{9(x+1)}{x+1} \\ &= 9 \end{aligned}$$

23 주어진 부등식의 각 변을 $x-2$ 로 나누면

(i) $x > 2$ 일 때, $\frac{x^2-4}{x-2} \leq \frac{f(x)}{x-2} \leq \frac{2x^2-4x}{x-2}$

$$\therefore x+2 \leq \frac{f(x)}{x-2} \leq 2x$$

(ii) $x < 2$ 일 때, $\frac{2x^2-4x}{x-2} \leq \frac{f(x)}{x-2} \leq \frac{x^2-4}{x-2}$

$$\therefore 2x \leq \frac{f(x)}{x-2} \leq x+2$$

$\lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4, \lim_{x \rightarrow 2} 2x = 4$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 4$

I-2 01 함수의 연속

1 함수의 연속

개념 CHECK

37쪽

- 1 답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, \infty)$
(3) $(-\infty, 3]$ (4) $(-\infty, 2), (2, \infty)$

문제

38~42쪽

01-1 답 (1) 연속 (2) 불연속 (3) 불연속 (4) 불연속

- (1) $x=1$ 에서의 함수값은 $f(1)=1$

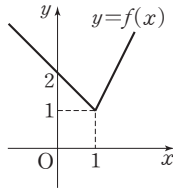
$x \rightarrow 1$ 일 때의 극한값은

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (2x-1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x+2) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.



- (2) $x=1$ 에서의 함수값은 $f(1)=1$

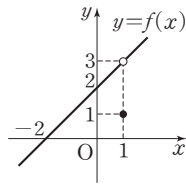
$x \rightarrow 1$ 일 때의 극한값은

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

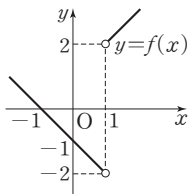
$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.



- (3) 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 정의되지 않으므로 $x=1$ 에서 불연속이다.



- (4) $x=1$ 에서의 함수값은

$$f(1) = 1 - [1] = 0$$

$x \rightarrow 1$ 일 때의 극한값은

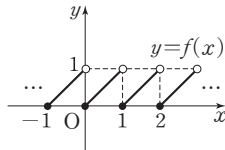
$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x - [x])$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} (x - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x - [x]) = \lim_{x \rightarrow 1-} x = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.



02-1 답 ㄱ, ㄷ

- ㄱ. $x \rightarrow 1$ 일 때의 극한값은

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

- ㄴ. $x \rightarrow 2$ 일 때의 극한값은

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 1$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

- ㄷ. (i) $x=1$ 에서의 함수값은

$$f(1) = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

- (ii) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

- (iii) $x=3$ 에서의 함수값은

$$f(3) = 1$$

$x \rightarrow 3$ 일 때의 극한값은

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이다.

- (i), (ii), (iii)에서 불연속인 x 의 값은 1, 2의 2개이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

03-1 답 ㄴ, ㄷ

- ㄱ. $x \rightarrow -1$ 일 때의 극한값은

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1+} g(x)$$

$$= 0 \times (-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1-} g(x)$$

$$= 1 \times 1 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

- ㄴ. $x=0$ 에서의 함수값은

$$f(g(0)) = f(-1) = 0$$

$g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t=-1$ 이므로 $x \rightarrow 0$ 일 때의 극한값은

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f(-1) = 0$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f(g(0))$ 이므로 함수 $f(g(x))$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄷ. $x=1$ 에서의 함수값은 $g(f(1))=g(2)=0$
 $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow -1-$ 이고,
 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 2-$ 이므로 $x \rightarrow 1$ 일 때의 극한값은
 $\lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1-} g(t) = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2-} g(t) = 0$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x))$
 즉, $\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x))$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수
 $g(f(x))$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

04-1 답 1/6

함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} &= a \\ \therefore a &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+6}+3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

04-2 답 1

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+a}{x-1} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로
 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+x+a) = 0$$

$$1+1+a=0 \quad \therefore a=-2$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3 \end{aligned}$$

$$\therefore b=3$$

$$\therefore a+b=-2+3=1$$

04-3 답 -2

$$f(x) = \begin{cases} x(x-1) & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \\ -x^2+ax+b & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

(i) 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

$$\text{이때 } f(-1) = -1-a+b,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (-x^2+ax+b) = -1-a+b,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} x(x-1) = 2 \text{이므로}$$

$$-1-a+b=2 \quad \therefore a-b=-3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\text{이때 } f(1) = -1+a+b,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} x(x-1) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x^2+ax+b) = -1+a+b \text{이므로}$$

$$-1+a+b=0 \quad \therefore a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-1, b=2$

$$\therefore ab=-2$$

05-1 답 1/2

$$x \neq 4 \text{일 때, } f(x) = \frac{\sqrt{x-3}-1}{x-4}$$

함수 $f(x)$ 가 $x \geq 3$ 인 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=4$ 에
 서 연속이므로 $f(4) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ 에서

$$\begin{aligned} f(4) &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3}-1}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x-3}-1)(\sqrt{x-3}+1)}{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x-3}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x-3}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

05-2 답 4

$$x \neq 3 \text{일 때, } f(x) = \frac{x^2+ax-6}{x-3}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=3$ 에서 연속
 이므로 $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 에서

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+ax-6}{x-3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로
 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2+ax-6) = 0$$

$$9+3a-6=0 \quad \therefore a=-1$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} f(3) &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+2)(x-3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x+2) = 5 \end{aligned}$$

$$\therefore a+f(3) = -1+5=4$$

05-3 답 4

$$x \neq -1, x \neq 1 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{x^4 + ax^3 + b}{x^2 - 1}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x = -1, x = 1$ 에서 연속이므로

(i) $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 에서

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + ax^3 + b}{x^2 - 1}$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^4 + ax^3 + b) = 0$$

$$1 - a + b = 0 \quad \therefore a - b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 에서

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + ax^3 + b}{x^2 - 1}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^4 + ax^3 + b) = 0$$

$$1 + a + b = 0 \quad \therefore a + b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 0, b = -1$$

따라서 $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1) = 2,$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2 \text{ 이므로}$$

$$f(-1) + f(1) = 2 + 2 = 4$$

ㄱ. $f(x), 2g(x)$ 는 각각 모든 실수 x 에서 연속이므로 $f(x) + 2g(x)$ 도 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄴ. $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 $\{f(x)\}^2 = f(x) \times f(x)$ 도 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄷ. $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 5x} = \frac{x^2 - 3}{x(x - 5)}$ 은 $x(x - 5) = 0,$

즉 $x = 0, x = 5$ 에서 정의되지 않으므로 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 $x = 0, x = 5$ 에서 불연속이다.

ㄹ. $\frac{1}{f(x) - g(x)} = \frac{1}{(x^2 - 5x) - (x^2 - 3)} = \frac{1}{-5x + 3}$ 은 $-5x + 3 = 0,$ 즉 $x = \frac{3}{5}$ 에서 정의되지 않으므로

$$\frac{1}{f(x) - g(x)}$$
은 $x = \frac{3}{5}$ 에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수 중 모든 실수 x 에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

06-2 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $3f(x), 5g(x)$ 는 각각 $x = a$ 에서 연속이므로

$3f(x) - 5g(x)$ 도 $x = a$ 에서 연속이다.

ㄴ. $2f(x), g(x)$ 는 각각 $x = a$ 에서 연속이므로

$2f(x)g(x)$ 도 $x = a$ 에서 연속이다.

ㄷ. $g(x)$ 는 $x = a$ 에서 연속이므로

$\{g(x)\}^2 = g(x) \times g(x)$ 도 $x = a$ 에서 연속이다.

ㄹ. $f(a) = 0$ 이면 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 $x = a$ 에서 정의되지 않으므로

$\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 $x = a$ 에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수 중 $x = a$ 에서 항상 연속인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

2 연속함수의 성질

개념 CHECK

44쪽

1 답 (1) $(-\infty, \infty)$

(2) $(-\infty, 0), (0, 1), (1, \infty)$

(3) $(-\infty, \infty)$

문제

45~47쪽

06-1 답 ㄱ, ㄴ

두 함수 $f(x) = x^2 - 5x, g(x) = x^2 - 3$ 은 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

07-1 답 (1) 최댓값: 2, 최솟값: $-\frac{17}{4}$

(2) 최댓값: 3, 최솟값: 1

(3) 최댓값: 2, 최솟값: 0

(4) 최댓값: 3, 최솟값: $\frac{7}{3}$

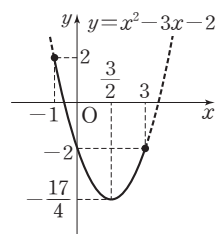
(1) 함수 $f(x) = x^2 - 3x - 2$ 는 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래

프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x = -1$ 일 때 최댓값은 2

$x = \frac{3}{2}$ 일 때 최솟값은 $-\frac{17}{4}$

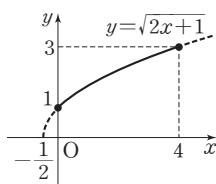


- (2) 함수 $f(x)=\sqrt{2x+1}$ 은 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$x=4$ 일 때 최댓값은 3

$x=0$ 일 때 최솟값은 1



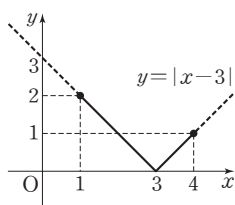
- (3) 함수 $f(x)=|x-3|$ 은 닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

따라서

$x=1$ 일 때 최댓값은 2

$x=3$ 일 때 최솟값은 0



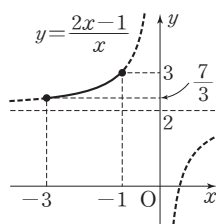
- (4) 함수 $f(x)=\frac{2x-1}{x}=-\frac{1}{x}+2$ 는 닫힌구간

$[-3, -1]$ 에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

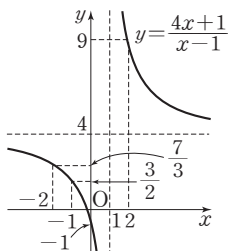
$x=-1$ 일 때 최댓값은 3

$x=-3$ 일 때 최솟값은 $\frac{7}{3}$



07-2 답 ㄱ, ㄷ

함수 $f(x)=\frac{4x+1}{x-1}=\frac{5}{x-1}+4$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



- ㄱ. 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 불연속이고 최댓값과 최솟값은 없다.
- ㄴ. 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.
- ㄷ. 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 최댓값은 -1 , 최솟값은 없다.
- ㄹ. 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 최댓값은 없고, 최솟값은 9이다.
- 따라서 보기의 구간 중 최솟값이 존재하지 않는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

08-1 답 ⑤

$f(x)=x^3+x^2-3x-5$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-3, 2]$ 에서 연속이다.

① $f(-3)=-14, f(-2)=-3$ 이므로

$$f(-3)f(-2)>0$$

② $f(-2)=-3, f(-1)=-2$ 이므로

$$f(-2)f(-1)>0$$

③ $f(-1)=-2, f(0)=-5$ 이므로

$$f(-1)f(0)>0$$

④ $f(0)=-5, f(1)=-6$ 이므로

$$f(0)f(1)>0$$

⑤ $f(1)=-6, f(2)=1$ 이므로

$$f(1)f(2)<0$$

따라서 사잇값의 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 ⑤이다.

08-2 답 3개

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 4]$ 에서 연속이고

$$f(-1)f(0)>0, f(0)f(1)<0, f(1)f(2)>0,$$

$$f(2)f(3)<0, f(3)f(4)<0$$

사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 1), (2, 3), (3, 4)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(-1, 4)$ 에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

연습문제

48~50쪽

- | | | | | |
|----------------|----------|--------|-------------------|-------|
| 1 ④ | 2 6 | 3 ㄴ, ㄷ | 4 ㄴ | 5 ② |
| 6 -1 | 7 2 | 8 3 | 9 ④ | |
| 10 $0 < a < 3$ | 11 ㄱ, ㄴ | 12 ④ | 13 4개 | |
| 14 2 | 15 -3, 3 | 16 4 | 17 $-\frac{1}{2}$ | 18 -4 |
| 19 ⑤ | 20 56 | | | |

1 ①, ②, ③ 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 정의되지 않으므로 $x=1$ 에서 불연속이다.

④ $x=1$ 에서의 함수값은

$$f(1)=3$$

$x \rightarrow 1$ 일 때의 극한값은

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x+2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} 3 = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로 $x=1$ 에서 연속이다.

⑤ $x=1$ 에서의 함수값은

$$f(1)=1$$

$x \rightarrow 1$ 일 때의 극한값은

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $x=1$ 에서 불연속이다.

따라서 $x=1$ 에서 연속인 함수는 ④이다.

2 $x=2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$ 에서

$$3a-2=a+2, 2a=4$$

$$\therefore a=2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 4 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \quad \therefore f(2) = 4$$

$$\therefore a+f(2) = 2+4=6$$

3 ㄱ. $x \rightarrow 1$ 일 때의 극한값은

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $1 < x < 3$ 에서 연속이므로 $1 < a < 3$ 인 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 이다.

ㄷ. (i) $x=0$ 에서의 함수값은

$$f(0)=1$$

$x \rightarrow 0$ 일 때의 극한값은

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 불연속인 x 의 값은 0, 1의 2개이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

4 ㄱ. $x \rightarrow -1$ 일 때의 극한값은

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} \{f(x) - g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow -1+} g(x) \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} \{f(x) - g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) - \lim_{x \rightarrow -1-} g(x) \\ &= -1 - (-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \{f(x) - g(x)\} = 0$$

ㄴ. $x=0$ 에서의 함수값은

$$f(0)g(0) = 0 \times 0 = 0$$

$x \rightarrow 0$ 일 때의 극한값은

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) \\ &= 0 \times (-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) \\ &= 0 \times (-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = f(0)g(0)$ 이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

ㄷ. $x=1$ 에서의 함수값은

$$g(f(1)) = g(-1) = 1$$

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이고,

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로 $x \rightarrow 1$ 일 때의 극한값은

$$\lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} g(t) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} g(t) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x))$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x))$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$(g \circ f)(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

5 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} (a\sqrt{x-1}+b) = 0$$

$$a+b=0 \quad \therefore b=-a$$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a\sqrt{x-1}-a}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{a}{2}\end{aligned}$$

즉, $\frac{a}{2}=2$ 이므로 $a=4$

$\therefore b=-a=-4$

$\therefore ab=4 \times (-4) = -16$

6 함수 $(x-a)f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$(1-a)f(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x-a)f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x-a)f(x)$$

이때 $(1-a)f(1)=2a-2$,

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (x-a)f(x) = (1-a) \times (-2) = 2a-2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} (x-a)f(x) = (1-a) \times 1 = 1-a \text{ 이므로}$$

$$2a-2=1-a \quad \therefore a=1$$

따라서 $f(a)=f(1)=-2$ 이므로

$$a+f(a)=1+(-2)=-1$$

7 $f(x) = \begin{cases} -x+a & (x \geq 0) \\ x+2 & (x < 0) \end{cases}$ 에서

$$f(x-1) = \begin{cases} -x+a+1 & (x \geq 1) \\ x+1 & (x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$g(x) = f(x)f(x-1)$$

$$= \begin{cases} (-x+a)(-x+a+1) & (x \geq 1) \\ (-x+a)(x+1) & (0 \leq x < 1) \\ (x+2)(x+1) & (x < 0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=0$, $x=1$ 에서 연속이므로

$$(i) g(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) \text{에서}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x+a)(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0-} (x+2)(x+1)$$

$$\therefore a=2$$

$$(ii) g(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) \text{에서}$$

$$(-1+a)a = \lim_{x \rightarrow 1+} (-x+a)(-x+a+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x+a)(x+1)$$

$$a(-1+a) = 2(-1+a)$$

$$a^2-3a+2=0, (a-1)(a-2)=0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=2$$

(i), (ii)에서 $a=2$

8 $x \neq 2$ 일 때, $f(x) = \frac{x^2-ax+b}{x-2}$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=2$ 에서 연속
이므로 $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 에서

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-ax+b}{x-2} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-ax+b) = 0$$

$$4-2a+b=0$$

$$\therefore 2a-b=4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 $f(3)=4$ 이므로 $(x-2)f(x)=x^2-ax+b$ 의 양변

에 $x=3$ 을 대입하면

$$(3-2)f(3)=9-3a+b$$

$$9-3a+b=4$$

$$\therefore 3a-b=5 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a=1, b=-2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) \\ &= 3\end{aligned}$$

9 $f(x)=x^2+9$, $g(x)=-6x$ 이므로

$$f(x)+g(x)=x^2-6x+9=(x-3)^2$$

$$\frac{f(x)}{f(x)+g(x)} = \frac{x^2+9}{(x-3)^2} \text{이므로 } (x-3)^2=0, \text{ 즉 } x=3$$

에서 정의되지 않는다.

따라서 함수 $\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}$ 가 연속인 구간은

④ $(-\infty, 3), (3, \infty)$ 이다.

10 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 모든 실수 x 에서

$$g(x)=x^2-2ax+3a>0$$

이차방정식 $x^2-2ax+3a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D<0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = a^2-3a < 0$$

$$a(a-3) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 3$$

- 11 ㄱ. 임의의 실수 a 에 대하여 $g(a)=b$ (b 는 상수)라 하면 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$$

$x=a$ 에서의 함수값은 $f(g(a))=f(b)$

$g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow a$ 일 때 $t \rightarrow b$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x \rightarrow a$ 일 때의 극한값은 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow b} f(t) = f(b)$

$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(g(a))$ 이므로 함수 $f(g(x))$ 는

$x=a$ 에서 연속이다.

즉, 함수 $f(g(x))$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

- ㄴ. $f(x)+g(x)=h(x)$ 로 놓으면 $g(x)=h(x)-f(x)$ 이때 두 함수 $f(x)$, $h(x)$ 가 각각 $x=a$ 에서 연속이므로 함수 $g(x)$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.

- ㄷ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$ 이면 두 함수

$f(x)$, $f(x)g(x)$ 는 각각 $x=0$ 에서 연속이지만 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

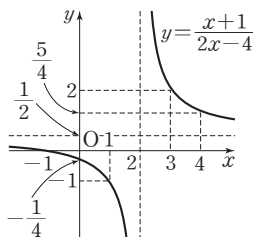
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

- 12 함수 $f(x)=\frac{x+1}{2x-4}$ 의 그래

프는 오른쪽 그림과 같다.

- ① 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.
 ② 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.
 ③ 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 최댓값은 -1 , 최솟값은 없다.
 ④ 닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 최댓값은 없고, 최솟값은 2 이다.
 ⑤ 닫힌구간 $[3, 4]$ 에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.

따라서 최댓값이 존재하지 않는 구간은 ④이다.



- 13 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고, $f(1)f(2)<0$, $f(4)f(5)<0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(1, 2)$, $(4, 5)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)=f(-x)$ 이므로

$$f(-1)f(-2)<0, f(-4)f(-5)<0$$

즉, 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(-5, -4)$, $(-2, -1)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 적어도 4개의 실근을 갖는다.

- 14 $g(x)=f(x)-x^2$ 이라 하면 함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고,

$$g(0)=f(0)-0^2=1-0=1$$

$$g(1)=f(1)-1^2=a^2-a-5-1=a^2-a-6$$

이때 방정식 $g(x)=0$ 이 열린구간 $(0, 1)$ 에서 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 가지려면 $g(0)g(1)<0$ 이어야 하므로

$$a^2-a-6<0$$

$$(a+2)(a-3)<0 \quad \therefore -2<a<3$$

따라서 모든 정수 a 의 값의 합은

$$-1+0+1+2=2$$

- 15 주어진 집합의 원소의 개수 $f(a)$ 는 이차방정식

$$x^2+2(a+2)x+4a+13=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

의 실근의 개수와 같다.

이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+2)^2-(4a+13)$$

$$=a^2-9=(a+3)(a-3)$$

- (i) $f(a)=2$ 일 때, $\frac{D}{4}>0$ 이므로

$$(a+3)(a-3)>0 \quad \therefore a<-3 \text{ 또는 } a>3$$

- (ii) $f(a)=1$ 일 때, $\frac{D}{4}=0$ 이므로

$$(a+3)(a-3)=0 \quad \therefore a=-3 \text{ 또는 } a=3$$

- (iii) $f(a)=0$ 일 때, $\frac{D}{4}<0$ 이므로

$$(a+3)(a-3)<0 \quad \therefore -3<a<3$$

(i), (ii), (iii)에서

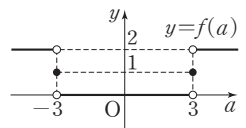
$$f(a)=\begin{cases} 2 & (a<-3 \text{ 또는 } a>3) \\ 1 & (a=-3 \text{ 또는 } a=3) \\ 0 & (-3<a<3) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(a)$ 의 그래

프는 오른쪽 그림과 같으므로

함수 $f(a)$ 가 불연속인 a 의 값

은 $-3, 3$ 이다.



- 16 함수

$$f(x)=\begin{cases} -x+1 & (0 \leq x \leq 2) \\ x^2-4x+3 & (2 < x < 4) \end{cases}$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같

으므로

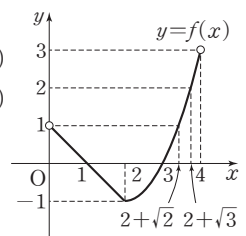
$$0 \leq x \leq 1 \text{ 일 때, } [f(x)] = 0$$

$$1 < x < 3 \text{ 일 때, } [f(x)] = -1$$

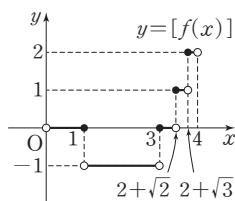
$$3 \leq x < 2+\sqrt{2} \text{ 일 때, } [f(x)] = 0$$

$$2+\sqrt{2} \leq x < 2+\sqrt{3} \text{ 일 때, } [f(x)] = 1$$

$$2+\sqrt{3} \leq x < 4 \text{ 일 때, } [f(x)] = 2$$



따라서 함수 $y=[f(x)]$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 불연속인 x 의 값은 1, 3, $2+\sqrt{2}$, $2+\sqrt{3}$ 의 4개이다.



- 17 $f(x)=f(x+3)$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(3)$$

$$a(-2)^2+b=-2 \times 3+4$$

$$\therefore 4a+b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=2$ 에서 연속이므로 $f(2)=\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 에서

$$\begin{aligned} f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2+} (-2x+4) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \{a(x-2)^2+b\} \end{aligned}$$

$$\therefore b=0$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$4a=-2 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 & (0 \leq x \leq 2) \\ -2x+4 & (2 < x \leq 3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(19) &= f(16) = \dots = f(4) = f(1) \\ &= -\frac{1}{2}(1-2)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

- 18 함수 $g(x)=2x+a$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

함수 $y=\frac{2x+1}{x+1}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$t=2\text{일 때, } f(t)=0$$

$$t \neq 2\text{일 때, } f(t)=1$$

$$\therefore f(x)=\begin{cases} 1 & (x \neq 2) \\ 0 & (x=2) \end{cases}$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=2$ 에서 연속이므로 $f(2)g(2)=\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x)$ 에서

$$0 \times (4+a) = 1 \times (4+a)$$

$$\therefore a=-4$$

- 19 (나)에서 $x \neq -1$ 일 때 $f(x)=\frac{g(x)+3x^2}{x+1}$ 이고, (가)에서

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=2$ 이므로 $g(x)=-3x^2+2x+a$ (a 는 상수)라 하자.

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=-1$ 에서 연속이므로 $f(-1)=\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 에서

$$\begin{aligned} f(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)+3x^2}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x^2+2x+a+3x^2}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+a}{x+1} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x+a)=0$$

$$-2+a=0 \quad \therefore a=2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$f(-1)=\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+2}{x+1}=\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)}{x+1}=2$$

따라서 $g(x)=-3x^2+2x+2$ 이므로

$$g(1)=-3+2+2=1$$

$$\therefore f(-1)+g(1)=2+1=3$$

- 20 함수 $f(x)=x^2-8x+a$ 에서

$$\begin{aligned} f(x+4) &= (x+4)^2-8(x+4)+a \\ &= x^2+a-16 \end{aligned}$$

$$\therefore g(x)=\begin{cases} 2x+5a & (x \geq a) \\ x^2+a-16 & (x < a) \end{cases}$$

(가)에서 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가지므로

$$f(0)f(2) < 0, \quad a(a-12) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 12$$

(나)에서 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로

$$f(a)g(a)=\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$$

$$f(a)g(a)=(a^2-8a+a)(2a+5a)=7a^2(a-7)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x)=\lim_{x \rightarrow a+} (x^2-8x+a)(2x+5a)$$

$$=(a^2-8a+a)(2a+5a)$$

$$=7a^2(a-7)$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x)=\lim_{x \rightarrow a-} (x^2-8x+a)(x^2+a-16)$$

$$=a(a-7)(a^2+a-16)$$

즉, $7a^2(a-7)=a(a-7)(a^2+a-16)$ 이므로

$$a(a-7)(a^2-6a-16)=0$$

$$a(a+2)(a-7)(a-8)=0$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=0 \text{ 또는 } a=7 \text{ 또는 } a=8$$

그런데 $0 < a < 12$ 이므로

$$a=7 \text{ 또는 } a=8$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$7 \times 8 = 56$$

1 미분계수

개념 CHECK

54쪽

1 답 (1) -2 (2) -1

$$(1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - 5}{2} = -2$$

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{0 - 2}{2} = -1$$

2 답 (1) -4 (2) 7

$$\begin{aligned} (1) f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{-4(2 + \Delta x) + 1\} - (-7)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-4) = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(2 + \Delta x)^2 + 3(2 + \Delta x)\} - 10}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 + 7\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 7) = 7 \end{aligned}$$

3 답 (1) -4 (2) 4

(1) $f(x) = x^2 - 2x + 5$ 라 하면 구하는 접선의 기울기는 함수 $f(x)$ 의 $x = -1$ 에서의 미분계수와 같으므로

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(-1 + \Delta x)^2 - 2(-1 + \Delta x) + 5\} - 8}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 - 4\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x - 4) = -4 \end{aligned}$$

(2) $f(x) = x^3 + x$ 라 하면 구하는 접선의 기울기는 함수 $f(x)$ 의 $x = 1$ 에서의 미분계수와 같으므로

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(1 + \Delta x)^3 + (1 + \Delta x)\} - 2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + 4\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{(\Delta x)^2 + 3\Delta x + 4\} = 4 \end{aligned}$$

문제

55~59쪽

01-1 답 3

함수 $f(x)$ 에 대하여 x 의 값이 a 에서 $a+1$ 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a+1) - f(a)}{a+1 - a} \\ &= \{(a+1)^2 - 5(a+1) + 4\} - (a^2 - 5a + 4) \\ &= 2a - 4 \end{aligned}$$

평균변화율이 2이므로

$$2a - 4 = 2 \quad \therefore a = 3$$

01-2 답 2

함수 $f(x)$ 에 대하여 x 의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{2 - 0}{2} = 1$$

함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(a + \Delta x)^2 - 3(a + \Delta x) + 2\} - (a^2 - 3a + 2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 + (2a - 3)\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2a - 3) \\ &= 2a - 3 \end{aligned}$$

평균변화율과 미분계수가 같으므로

$$1 = 2a - 3 \quad \therefore a = 2$$

01-3 답 -12

함수 $f(x)$ 에 대하여 x 의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \\ &= \frac{(2a + 8) - 4}{2} = a + 2 \end{aligned}$$

평균변화율이 -2이므로

$$a + 2 = -2 \quad \therefore a = -4$$

따라서 $f(x) = x^2 - 4x + 4$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 $x = -4$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned} f'(-4) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-4 + \Delta x) - f(-4)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(-4 + \Delta x)^2 - 4(-4 + \Delta x) + 4\} - 36}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 - 12\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x - 12) \\ &= -12 \end{aligned}$$

02-1 ㉡ (1) 3 (2) 10

$$\begin{aligned}
 (1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{3h} \times \frac{3}{2} \\
 &= \frac{3}{2} f'(a) \\
 &= \frac{3}{2} \times 2 = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a-2h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a) + f(a) - f(a-2h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h) - f(a)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{3h} \times 3 \\
 &\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h) - f(a)}{-2h} \times (-2) \\
 &= 3f'(a) + 2f'(a) \\
 &= 5f'(a) \\
 &= 5 \times 2 = 10
 \end{aligned}$$

02-2 ㉡ 3

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1+h)}{4h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) + f(1) - f(1+h)}{4h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{4h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{4h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times \frac{1}{2} \\
 &\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \times \frac{1}{4} \\
 &= \frac{1}{2} f'(1) - \frac{1}{4} f'(1) \\
 &= \frac{1}{4} f'(1)
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{4} f'(1) = \frac{3}{4}$ 이므로
 $f'(1) = 3$

03-1 ㉡ (1) $\frac{1}{4}$ (2) 3 (3) -8

$$\begin{aligned}
 (1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{(x-2)(x+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \frac{1}{x+2} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} \\
 &= f'(2) \times \frac{1}{4} \\
 &= 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{f(x) - f(2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)}{f(x) - f(2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\frac{f(x) - f(2)}{(x+1)(x-2)}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{1}{\frac{f(x) - f(2)}{x-2}} \times (x+1) \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\frac{f(x) - f(2)}{x-2}} \times \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) \\
 &= \frac{1}{f'(2)} \times 3 \\
 &= 1 \times 3 = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(2) - 4f(x)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(2) - 4f(2) + 4f(2) - 4f(x)}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)f(2) - 4\{f(x) - f(2)\}}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)f(2)}{x-2} - 4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)f(2) - 4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \\
 &= 4f(2) - 4f'(2) \\
 &= 4 \times (-1) - 4 \times 1 \\
 &= -8
 \end{aligned}$$

04-1 ㉡ -4

$f(x+y) = f(x) + f(y) - 3xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0)$$

$$\therefore f(0) = 0$$

미분계수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}
 f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(2) + f(h) - 6h\} - f(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 6h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} 6 \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} 6 \\
 &= f'(0) - 6 \\
 &= 2 - 6 = -4
 \end{aligned}$$

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)-1$$

$$\therefore f(0)=1$$

미분계수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(1)+f(h)+2h-1\}-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+2h-1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} 2 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} 2 \\ &= f'(0) + 2 \end{aligned}$$

따라서 $1=f'(0)+2$ 이므로

$$f'(0)=-1$$

05-1 답 ㄱ, ㄷ

함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 $x=a$ 인 점을 $A(a, f(a))$, $x=b$ 인 점을 $B(b, f(b))$ 라 하자.

ㄱ. 직선 OA의 기울기는 $\frac{f(a)}{a}$

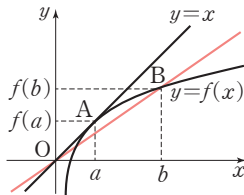
직선 OB의 기울기는 $\frac{f(b)}{b}$

오른쪽 그림에서 직선

OA의 기울기는 직선 OB

의 기울기보다 크므로

$$\frac{f(a)}{a} > \frac{f(b)}{b}$$



ㄴ. 직선 $y=x$ 가 $x=a$ 인 점에서 접하므로 $f'(a)$ 는 직선 $y=x$ 의 기울기와 같다.

$$\therefore f'(a)=1$$

ㄷ. $f'(b)$ 는 점 B에서의 접선의 기울기이고,

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 는 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기이다.

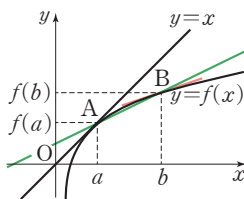
오른쪽 그림에서 두 점

A, B를 지나는 직선의

기울기는 점 B에서의 접

선의 기울기보다 크므로

$$f'(b) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

06-1 답 (1) $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

(2) $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하다.

(1) (i) $f(0)=2$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x^2 - 3x + 2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (x^2 + 3x + 2) = 2$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(h^2 - 3h + 2) - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2 - 3h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} (h - 3) = -3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(h^2 + 3h + 2) - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h^2 + 3h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} (h + 3) = 3$$

즉, $f'(0)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

(2) (i) $f(0)=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (x^2 + x) = 0$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h-0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h^2 + h - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} (h + 1) = 1$$

즉, $f'(0)$ 의 값이 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하다.

07-1 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$$

- ㄴ, ㄷ, ㄹ. (i) $x=-1$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq f(-1)$ 이므로
함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이고, 미분가능하지 않다.
- (ii) $x=1$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이고, 미분가능하지 않다.
- (iii) $x=2$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 2$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.
이때 $x=2$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 꺾여 있으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.
- (iv) $x=3$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 2$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이다.
이때 $x=3$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 꺾여 있으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 미분가능하지 않다.
- (i)~(iv)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극한값이 존재하지 않고, $x=-1$, $x=1$ 에서 불연속이며 $x=-1$, $x=1$, $x=2$, $x=3$ 에서 미분가능하지 않으므로 극한값이 존재하지 않는 x 의 값은 1개, 불연속인 x 의 값은 2개, 미분가능하지 않은 x 의 값은 4개이다.
- 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

연습문제

63~64쪽

- | | | | | |
|-----------------|------------------|---------|------|------|
| 1 $\frac{5}{6}$ | 2 ④ | 3 ③ | 4 8 | 5 ① |
| 6 -8 | 7 ② | 8 ⑤ | 9 12 | 10 ④ |
| 11 ④ | 12 $\frac{1}{2}$ | 13 ㄱ, ㄴ | | |

- 1 $f(0)=3$, $f(5)=9$ 에서
 $g(3)=0$, $g(9)=5$
따라서 함수 $g(x)$ 에 대하여 x 의 값이 3에서 9까지 변할 때의 평균변화율은
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(9)-g(3)}{9-3} = \frac{5-0}{6} = \frac{5}{6}$$
- 2 함수 $f(x)$ 에 대하여 x 의 값이 0에서 a 까지 변할 때의 평균변화율은
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a)-f(0)}{a-0} = \frac{(a^2+3a+2)-2}{a} = \frac{a^2+3a}{a} = a+3$$

함수 $f(x)$ 의 $x=5$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(5+\Delta x) - f(5)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(5+\Delta x)^2 + 3(5+\Delta x) + 2\} - 42}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 + 13\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 13) \\ &= 13 \end{aligned}$$

따라서 $a+3=13$ 이므로

$$a=10$$

- 3 $f(1+a)-f(1)=\sqrt{a+1}-1$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(1+a) - f(1)}{a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+1} - 1}{a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{a+1} - 1)(\sqrt{a+1} + 1)}{a(\sqrt{a+1} + 1)} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{a(\sqrt{a+1} + 1)} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a+1} + 1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- 4 $\frac{1}{t}=h$ 로 놓으면 $t \rightarrow \infty$ 일 때, $h \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow \infty} 2t \left\{ f\left(2 + \frac{1}{t}\right) - f(2) \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \{ f(2+h) - f(2) \} \\ &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= 2f'(2) \\ &= 2 \times 4 = 8 \end{aligned}$$

- 5
$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-3h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) + f(1) - f(1-3h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 \\ &\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3h) - f(1)}{-3h} \times (-3) \\ &= 2f'(1) + 3f'(1) \\ &= 5f'(1) \end{aligned}$$

따라서 $5f'(1)=15$ 이므로
 $f'(1)=3$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^2) - f(1)}{(x-1)(x+1)} \times (x+1) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2 - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \\ &= f'(1) \times 2 \\ &= 3 \times 2 = 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6 \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}f(4) - 2f(x)}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}f(4) - 2f(4) + 2f(4) - 2f(x)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(4)(\sqrt{x} - 2) - 2\{f(x) - f(4)\}}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(4)(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} - 2 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(4)}{\sqrt{x} + 2} - 2 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} \\ &= \frac{f(4)}{4} - 2f'(4) \\ &= \frac{8}{4} - 2 \times 5 = -8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1) + g(x)}{x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x^3 - 1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x^3 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x-1)}{x-1} \times \frac{1}{x^2 + x + 1} \right\} \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{g(x)}{x-1} \times \frac{1}{x^2 + x + 1} \right\} \quad \dots\dots \textcircled{7}\end{aligned}$$

$x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x-1)}{x-1} \times \frac{1}{x^2 + x + 1} \right\} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(t)}{t} \times \frac{1}{t^2 + 3t + 3} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2 + 3t + 3} \\ &= f'(0) \times \frac{1}{3} \\ &= 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{g(x)}{x-1} \times \frac{1}{x^2 + x + 1} \right\} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 + x + 1} \\ &= g'(1) \times \frac{1}{3} \\ &= 3 \times \frac{1}{3} = 1\end{aligned}$$

따라서 $\textcircled{7}$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1) + g(x)}{x^3 - 1} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$

8 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 3 \quad \therefore f(0) = -3$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(10) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(10+h) - f(10)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(10) + f(h) + 3 - f(10)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= f'(0) = 3\end{aligned}$$

9 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 기울기가 4이므로

$$f'(1) = 4$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-4h)}{2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) + f(1) - f(1-4h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-4h) - f(1)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \\ &\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-4h) - f(1)}{-4h} \times (-2) \\ &= f'(1) + 2f'(1) = 3f'(1) \\ &= 3 \times 4 = 12\end{aligned}$$

10 $\neg$. $0 \leq x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ 이므로 $x[x] = 0$

$-1 < x < 0$ 일 때, $[x] = -1$ 이므로 $x[x] = -x$

(i) $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x) = 0$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{0}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h}{h} = -1$$

즉, $f'(0)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

$\neg$. (i) $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x^2) = 0$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} h = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} (-h) = 0$$

즉, $f'(0)$ 의 값이 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

ㄷ. (i) $f(0)=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x^2 + 2x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} 4x = 0$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} (h + 2) = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{4h}{h} = 4$$

즉, $f'(0)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 보기의 함수 중 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11 ① $f'(4)$ 는 점 $(4, f(4))$ 에서의 접선의 기울기와 같으므로 $f'(4) < 0$

② $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 2$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$

③ 불연속인 x 의 값은 3, 5의 2개이다.

④ $f'(x) = 0$, 즉 접선의 기울기가 0인 x 의 값은 1의 1개이다.

⑤ $x=3, x=5$ 에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

또 $x=2$ 에서 연속이지만 그래프가 꺾여 있으므로 미분가능하지 않다.

즉, 미분가능하지 않은 x 의 값은 2, 3, 5의 3개이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

12 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 1$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 2\} = 0$$

$$f(1) - 2 = 0 \quad \therefore f(1) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 1$$

$$g(1) = 2f(1) \text{이므로 } g(1) = 2 \times 2 = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - xf(1)}{g(x) - xg(1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{g(x) - 4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2 + 2 - 2x}{g(x) - 4 + 4 - 4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2 - 2(x-1)}{g(x) - 4 - 4(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - 2 - 2(x-1)}{x-1} \times \frac{x-1}{g(x) - 4 - 4(x-1)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - 2}{x-1} - 2 \right\} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{g(x) - 4}{x-1} - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x-1} - 2 \right\} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{g(x) - g(1)}{x-1} - 4} \\ &= \{f'(1) - 2\} \times \frac{1}{g'(1) - 4} \\ &= (1 - 2) \times \frac{1}{2 - 4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

13 ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 이차함수

$y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=x$

와 점 $(-1, -1)$ 에서 접하므로

$$f'(-1) = 1$$

또 $a < 0$ 일 때, 두 점 $(0, 0),$

$(a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기는 1보다 작거나 같으므로

$$\frac{f(a)}{a} \leq 1$$

ㄴ. $-1 < a < 0$ 일 때, 오른쪽 그림에

서 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의

기울기는 직선 $y=x$ 의 기울기보

다 크므로

$$f'(a) > 1$$

ㄷ. $a < -1$ 일 때, 두 점 $(a, f(a)), (-1, -1)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-1 - f(a)}{-1 - a} = \frac{f(a) + 1}{a + 1}$$

오른쪽 그림에서 두 점

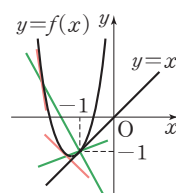
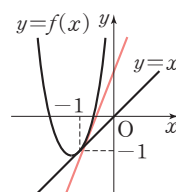
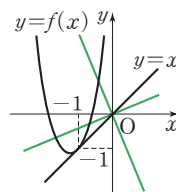
$(a, f(a)), (-1, -1)$ 을 지나는

직선의 기울기는 점 $(a, f(a))$ 에

서의 접선의 기울기보다 크므로

$$\frac{f(a) + 1}{a + 1} > f'(a)$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.



II-1 02 도함수

1 도함수

개념 CHECK

67쪽

1 [답] (가) $4xh$ (나) $4x$ (다) $4x-1$

2 [답] (1) $y' = 24x - 16$ (2) $y' = -6x^2 + 2x$
(3) $y' = x^2 - 4x$ (4) $y' = 4x^3 + 4x - 2$

(1) $y = 12x^2 - 16x + 8$ 에서
 $y' = 12(x^2)' - 16(x)' + (8)'$
 $= 12 \times 2x - 16 \times 1 + 0$
 $= 24x - 16$

(2) $y = -2x^3 + x^2 - 3$ 에서
 $y' = -2(x^3)' + (x^2)' - (3)'$
 $= -2 \times 3x^2 + 2x - 0$
 $= -6x^2 + 2x$

(3) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{5}$ 에서
 $y' = \frac{1}{3}(x^3)' - 2(x^2)' + \left(\frac{3}{5}\right)'$
 $= \frac{1}{3} \times 3x^2 - 2 \times 2x + 0$
 $= x^2 - 4x$

(4) $y = x^4 + 2x^2 - 2x + 5$ 에서
 $y' = (x^4)' + 2(x^2)' - 2(x)' + (5)'$
 $= 4x^3 + 2 \times 2x - 2 \times 1 + 0$
 $= 4x^3 + 4x - 2$

3 [답] (1) $y' = 12x + 1$ (2) $y' = 3x^2 - 4x + 3$
(3) $y' = 3x^2 - 6x + 2$ (4) $y' = (3x-1)(9x+17)$

(1) $y = (2x+1)(3x-1)$ 에서
 $y' = (2x+1)'(3x-1) + (2x+1)(3x-1)'$
 $= 2(3x-1) + (2x+1) \times 3$
 $= 6x - 2 + 6x + 3 = 12x + 1$

(2) $y = (x^2+3)(x-2)$ 에서
 $y' = (x^2+3)'(x-2) + (x^2+3)(x-2)'$
 $= 2x(x-2) + (x^2+3) \times 1$
 $= 2x^2 - 4x + x^2 + 3 = 3x^2 - 4x + 3$

(3) $y = x(x-1)(x-2)$ 에서
 $y' = (x)'(x-1)(x-2) + x(x-1)'(x-2)$
 $\quad \quad \quad + x(x-1)(x-2)'$
 $= (x-1)(x-2) + x(x-2) + x(x-1)$
 $= x^2 - 3x + 2 + x^2 - 2x + x^2 - x$
 $= 3x^2 - 6x + 2$

(4) $y = (x+3)(3x-1)^2$ 에서
 $y' = (x+3)'(3x-1)^2 + (x+3)\{(3x-1)^2\}'$
 $= (3x-1)^2 + (x+3) \times 2(3x-1) \times 3$
 $= (3x-1)\{3x-1+6(x+3)\}$
 $= (3x-1)(9x+17)$

문제

68~73쪽

01-1 [답] $f'(x) = 2x - 2$

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy + 1$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 1 \quad \therefore f(0) = -1$$

미분계수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) + f(h) + 4h + 1 - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 4h + 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h) - f(0)}{h} + 4 \right\} \\ &= f'(0) + 4 \end{aligned}$$

즉, $f'(0) + 4 = 2$ 이므로 $f'(0) = -2$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + 2xh + 1 - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 2xh + 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h) - f(0)}{h} + 2x \right\} \\ &= f'(0) + 2x \\ &= 2x - 2 \end{aligned}$$

02-1 [답] (1) -8 (2) 5

(1) $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - 1$ 을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4(x^3)' + 2(x^2)' - (1)' \\ &= -4 \times 3x^2 + 2 \times 2x - 0 \\ &= -12x^2 + 4x \end{aligned}$$

$$\therefore f'(1) = -12 + 4 = -8$$

(2) $f(x) = (x+1)(x^2-3x+4)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)'(x^2-3x+4) + (x+1)(x^2-3x+4)' \\ &= 1 \times (x^2-3x+4) + (x+1)(2x-3) \\ &= x^2 - 3x + 4 + 2x^2 - x - 3 = 3x^2 - 4x + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(2) = 12 - 8 + 1 = 5$$

02-2 ㉡ -3

$f(x)=ax^2+bx-1$ 을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2ax+b$$

$$f(2)=-1 \text{에서 } 4a+2b-1=-1$$

$$\therefore 2a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f'(-1)=4 \text{에서 } -2a+b=4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a=-1, b=2 \quad \therefore a-b=-3$$

02-3 ㉡ 1

$g(x)=(x^3+2x)f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x)=(3x^2+2)f(x)+(x^3+2x)f'(x)$$

$$\therefore g'(1)=(3+2)f(1)+(1+2)f'(1)$$

$$=5f(1)+3f'(1)$$

$$=5 \times (-1) + 3 \times 2$$

$$=-5+6=1$$

03-1 ㉡ 10

$f(x)=-3x^2-2x-1$ 이라 하고 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=-6x-2$$

따라서 점 $(-2, -9)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(-2)=12-2=10$$

03-2 ㉡ 70

$f(x)=x^2+ax+b$ 라 하고 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2x+a$$

점 $(-1, 4)$ 에서의 접선의 기울기가 5이므로 $f'(-1)=5$ 에서

$$-2+a=5 \quad \therefore a=7$$

점 $(-1, 4)$ 는 곡선 $y=x^2+7x+b$ 위의 점이므로

$$4=1-7+b \quad \therefore b=10$$

$$\therefore ab=7 \times 10=70$$

03-3 ㉡ $\frac{2}{3}$

$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ 라 하고 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$$

점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(2)=2$ 에서 $(2-b)(2-c)+(2-a)(2-c)+(2-a)(2-b)=2$

점 $(2, 3)$ 은 곡선 $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ 위의 점이므로

$$3=(2-a)(2-b)(2-c)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \\ &= \frac{(2-b)(2-c) + (2-a)(2-c) + (2-a)(2-b)}{(2-a)(2-b)(2-c)} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

04-1 ㉡ (1) 10 (2) 40

(1) $f(1)=2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2)-2}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^2)-f(1)}{(x-1)(x+1)} \times (x+1) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \\ &= 2f'(1) \end{aligned}$$

$f(x)=x^3+2x-1$ 에서 $f'(x)=3x^2+2$ 이므로

$$2f'(1)=2(3+2)=10$$

(2) $f(x)=x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6$ 이라 하면 $f(1)=5$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6-5}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= f'(1)$$

$f'(x)=10x^9+9x^8+8x^7+7x^6+6x^5$ 이므로

$$f'(1)=10+9+8+7+6=40$$

04-2 ㉡ 36

$h(x)=f(x)g(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} \\ &= h'(1) \end{aligned}$$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 이므로

$$h'(x)=(-x^2+2x+3)'(2x^3+x^2+x-1)$$

$$+(-x^2+2x+3)(2x^3+x^2+x-1)'$$

$$=(-2x+2)(2x^3+x^2+x-1)$$

$$+(-x^2+2x+3)(6x^2+2x+1)$$

$$\therefore h'(1)=(-1+2+3)(6+2+1)=36$$

04-3 ㉡ -1

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}=2$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이

존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=0 \quad \therefore f(1)=0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)=2$$

$$f(x)=x^4+ax^2+b \text{에서 } f'(x)=4x^3+2ax$$

$$f'(1)=2 \text{에서 } 4+2a=2 \quad \therefore a=-1$$

$$f(x)=x^4-x^2+b \text{이므로 } f(1)=0 \text{에서}$$

$$1-1+b=0 \quad \therefore b=0$$

$$\therefore a-b=-1$$

05-1 답 9

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 연속이고 미분계수 $f'(1)$ 이 존재한다.

(i) $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)=f(1)$ 에서

$$b+1=1+a \quad \therefore a=b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\{(1+h)^3+a(1+h)^2\}-(1+a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^3+(a+3)h^2+(2a+3)h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \{h^2+(a+3)h+2a+3\}$$

$$= 2a+3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\{b(1+h)+1\}-(1+a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{bh}{h} (\because \textcircled{7})$$

$$= b$$

$$\therefore 2a+3=b \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a=-3, b=-3 \quad \therefore ab=9$$

다른 풀이

$$g(x)=x^3+ax^2, h(x)=bx+1 \text{이라 하면}$$

$$g'(x)=3x^2+2ax, h'(x)=b$$

(i) $x=1$ 에서 연속이므로 $g(1)=h(1)$ 에서

$$1+a=b+1 \quad \therefore a=b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $x=1$ 에서의 미분계수가 존재하므로 $g'(1)=h'(1)$ 에서

$$3+2a=b \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a=-3, b=-3 \quad \therefore ab=9$$

05-2 답 -3

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 $x=a$ 에서 연속이고 미분계수 $f'(a)$ 가 존재한다.

(i) $x=a$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=f(a)$ 에서

$$3a+b=a^2-3a \quad \therefore b=a^2-6a \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) 미분계수 $f'(a)$ 가 존재하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\{(a+h)^2-3(a+h)\}-(a^2-3a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2+(2a-3)h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} (h+2a-3)$$

$$= 2a-3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\{3(a+h)+b\}-(a^2-3a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3h}{h} (\because \textcircled{7})$$

$$= 3$$

즉, $2a-3=3$ 이므로 $a=3$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$b=9-18=-9$$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^2-3x & (x \geq 3) \\ 3x-9 & (x < 3) \end{cases}$ 이므로

$$f(2)=6-9=-3$$

다른 풀이

$$g(x)=x^2-3x, h(x)=3x+b \text{라 하면}$$

$$g'(x)=2x-3, h'(x)=3$$

(i) $x=a$ 에서 연속이므로 $g(a)=h(a)$ 에서

$$a^2-3a=3a+b \quad \therefore b=a^2-6a \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $x=a$ 에서의 미분계수가 존재하므로 $g'(a)=h'(a)$ 에서

$$2a-3=3 \quad \therefore a=3$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$b=9-18=-9$$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x^2-3x & (x \geq 3) \\ 3x-9 & (x < 3) \end{cases}$ 이므로

$$f(2)=6-9=-3$$

06-1 답 199

$x^{100}+ax+b$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 0이므로

$$x^{100}+ax+b=(x+1)^2Q(x) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$1-a+b=0 \quad \therefore a-b=1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$100x^{99}+a=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$-100+a=0 \quad \therefore a=100$$

이를 ㉔에 대입하면
 $100-b=1 \quad \therefore b=99$
 $\therefore a+b=100+99=199$

06-2 ㉔ 10

x^8-x+3 을 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $x^8-x+3=(x-1)^2Q(x)+ax+b \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $1-1+3=a+b$
 $\therefore a+b=3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $8x^7-1=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$
 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $8-1=a \quad \therefore a=7$
 이를 ㉔에 대입하면
 $7+b=3 \quad \therefore b=-4$
 따라서 $R(x)=7x-4$ 이므로
 $R(2)=14-4=10$

06-3 ㉔ 4

$x^{10}+ax+b$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $2x-3$ 이므로
 $x^{10}+ax+b=(x-1)^2Q(x)+2x-3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $1+a+b=2-3$
 $\therefore a+b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $10x^9+a=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+2$
 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $10+a=2 \quad \therefore a=-8$
 이를 ㉔에 대입하면
 $-8+b=-2 \quad \therefore b=6$
 $\therefore a+2b=-8+12=4$

연습문제

74~76쪽

- | | | | |
|----------------|-------|-------|------|
| 1 $f'(x)=3x-1$ | 2 ⑤ | 3 ② | 4 9 |
| 5 ① | 6 3 | 7 ③ | 8 ① |
| 10 2 | 11 ② | 12 -2 | 13 ④ |
| 15 ② | 16 15 | 17 ③ | 18 ④ |
| 20 7 | | | 19 9 |

- $f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면
 $f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$
 $\therefore f'(x)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
 $=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+3xh-f(x)}{h}$
 $=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+3xh}{h}$
 $=\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)-f(0)}{h} + 3x \right\}$
 $=f'(0)+3x=3x-1$
- $f(x)=(x^2-3x)(-2x+k)$ 에서
 $f'(x)=(2x-3)(-2x+k)+(x^2-3x) \times (-2)$
 $f'(1)=3$ 에서
 $-(-2+k)+(-2) \times (-2)=3, 6-k=3$
 $\therefore k=3$
- $g(x)=(3x^2-12x+1)f(x)$ 에서
 $g'(x)=(6x-12)f(x)+(3x^2-12x+1)f'(x)$
 $\therefore g'(2)=(12-24+1)f'(2)=-11f'(2)$
 $g'(2)=11$ 에서
 $11=-11f'(2) \quad \therefore f'(2)=-1$
- $f'(1)=a$ (a 는 상수)로 놓으면 $f(x)=2x^3-2x^2-ax$ 이므로
 $f'(x)=6x^2-4x-a$
 $\therefore f'(1)=6-4-a=2-a$
 즉, $a=2-a$ 이므로 $a=1$
 따라서 $f'(x)=6x^2-4x-1$ 이므로
 $f'(-1)=6+4-1=9$
- $f(x)=ax^2+b$ 에서 $f'(x)=2ax$
 $4f(x)=\{f'(x)\}^2+x^2+4$ 에서
 $4(ax^2+b)=(2ax)^2+x^2+4$
 $4ax^2+4b=(4a^2+1)x^2+4$
 $\therefore 4a=4a^2+1, 4b=4$
 $4a^2-4a+1=0$ 에서
 $(2a-1)^2=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$
 $4b=4$ 에서 $b=1$
 따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$ 이므로
 $f(2)=2+1=3$

6 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고,
 $f(a)=f(3)=f(5)$ 이므로
 $f(x)=(x-a)(x-3)(x-5)+b$ (b 는 상수)라 하면
 $f'(x)=(x-3)(x-5)+(x-a)(x-5)+(x-a)(x-3)$
 $f'(1)=14$ 에서
 $(-2) \times (-4) + (1-a) \times (-4) + (1-a) \times (-2) = 14$
 $6a+2=14 \quad \therefore a=2$
 $\therefore f'(2)=(-1) \times (-3)=3$

7 두 일차함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(0)=4$, $g(0)=1$ 이므로 $f(x)=ax+4$, $g(x)=bx+1$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$)이라 하면
 $f'(x)=a$, $g'(x)=b$
 $\{f(x)+g(x)\}'=1$ 에서
 $a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 $\{f(x)g(x)\}'=-4x-2$ 에서
 $a(bx+1)+(ax+4) \times b=-4x-2$
 $2abx+a+4b=-4x-2$
 $\therefore 2ab=-4$, $a+4b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$
 $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면
 $a=2$, $b=-1$
따라서 $f(x)=2x+4$, $g(x)=-x+1$ 이므로
 $f(1)+g(2)=6+(-1)=5$

8 $f(x)=x(x-1)(x-2)$ 라 하면
 $f'(x)=(x-1)(x-2)+x(x-2)+x(x-1)$
점 P의 x 좌표를 a 라 하면 점 P에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(a)=1$ 에서
 $(a-1)(a-2)+a(a-2)+a(a-1)=1$
 $\therefore 3a^2-6a+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{9}$
따라서 점 P의 모든 x 좌표의 합은 이차방정식 $\textcircled{9}$ 의 모든 근의 합이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $-\frac{-6}{3}=2$

9 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ 라 하면
 $f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$
점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f'(0)=3$ 에서
 $bc+ac+ab=3$
점 $(0, 1)$ 은 곡선 $y=(x-a)(x-b)(x-c)$ 위의 점이므로
 $1=-abc \quad \therefore abc=-1$
 $\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{3}{-1}=-3$

10 $f(x)=x^2-3x-2$, $g(x)=x^3-5$ 에서
 $f'(x)=2x-3$, $g'(x)=3x^2$
 $f(1)=g(1)=-4$ 이므로
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-g(1-h)}{h}$
 $=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)+4-4-g(1-h)}{h}$
 $=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)+g(1)-g(1-h)}{h}$
 $=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1-h)-g(1)}{-h} \times (-1)$
 $=f'(1)+g'(1)=-1+3=2$

11 $f(x)=x^{100}-x^{99}+x^{98}$ 이라 하면 $f(1)=1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100}-x^{99}+x^{98}-1}{x-1}=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$
 $f'(x)=100x^{99}-99x^{98}+98x^{97}$ 이므로
 $f'(1)=100-99+98=99$

12 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-2}{x-3}=4$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서
 $\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x)-2\}=0$
 $f(3)-2=0 \quad \therefore f(3)=2$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-2}{x-3}=\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=4$
같은 방법으로 하면 $g(3)=1$, $g'(3)=-3$
따라서 함수 $f(x)g(x)$ 의 $x=3$ 에서의 미분계수는
 $f'(3)g(3)+f(3)g'(3)=4 \times 1+2 \times (-3)$
 $=4-6=-2$

13 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서
 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x+1)-2\}=0$
 $f(2)-2=0 \quad \therefore f(2)=2$
 $x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 2$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1)-2}{x^3-1}=\lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t)-2}{(t-1)^3-1}$
 $=\lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t)-f(2)}{t^3-3t^2+3t-2}$
 $=\lim_{t \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(t)-f(2)}{t-2} \times \frac{1}{t^2-t+1} \right\}$
 $=\frac{1}{3}f'(2)$

즉, $\frac{1}{3}f'(2)=-4$ 이므로 $f'(2)=-12$
 $f(x)=x^4+ax+b$ 에서 $f'(x)=4x^3+a$
 $f'(2)=-12$ 에서 $32+a=-12 \quad \therefore a=-44$

$$f(x) = x^4 - 44x + b \text{ 이므로 } f(2) = 2 \text{에서}$$

$$16 - 88 + b = 2 \quad \therefore b = 74$$

$$\therefore a + b = -44 + 74 = 30$$

14 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = 7$ 이므로 $f(x) - x^3 = 7x^2 + ax + b$, 즉 $f(x) = x^3 + 7x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하자.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 18$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad \therefore f(1) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 18$$

$f'(x) = 3x^2 + 14x + a$ 이므로 $f'(1) = 18$ 에서

$$3 + 14 + a = 18 \quad \therefore a = 1$$

$f(x) = x^3 + 7x^2 + x + b$ 이므로 $f(1) = 0$ 에서

$$1 + 7 + 1 + b = 0 \quad \therefore b = -9$$

따라서 $f(x) = x^3 + 7x^2 + x - 9$, $f'(x) = 3x^2 + 14x + 1$ 이므로

$$f(-1) + f'(-1) = -4 + (-10) = -14$$

15 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이고 미분계수 $f'(0)$ 이 존재한다.

(i) $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$ 에서

$$b = 1$$

(ii) 미분계수 $f'(0)$ 이 존재하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{ah + b - b}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{ah}{h} = a$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{ah^2 - 2h + 1 - b}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{ah^2 - 2h}{h} \quad (\because b = 1)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} (ah - 2) = -2$$

$$\therefore a = -2$$

$$\therefore a + b = -2 + 1 = -1$$

다른 풀이

$g(x) = ax + b$, $h(x) = ax^2 - 2x + 1$ 이라 하면

$$g'(x) = a, h'(x) = 2ax - 2$$

(i) $x=0$ 에서 연속이므로 $g(0) = h(0)$ 에서

$$b = 1$$

(ii) $x=0$ 에서의 미분계수가 존재하므로 $g'(0) = h'(0)$ 에서

$$a = -2$$

$$\therefore a + b = -2 + 1 = -1$$

16 $x^6 + x^5 + x^2 + 3$ 을 $x^2(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$x^6 + x^5 + x^2 + 3 = x^2(x-1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

..... ㉠

양변에 $x=0$, $x=1$ 을 각각 대입하면

$$3 = c, 6 = a + b + c$$

$$\therefore a + b = 3, c = 3$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$6x^5 + 5x^4 + 2x = 2x(x-1)Q(x) + x^2Q'(x) + x^2Q'(x) + 2ax + b$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면 $0 = b$

$$a + b = 3 \text{ 이므로 } a = 3$$

따라서 $R(x) = 3x^2 + 3$ 이므로

$$R(2) = 12 + 3 = 15$$

17 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, $f(1) = f'(1) = 0$ 이므로 $f(x)$, $f'(x)$ 는 모두 $x-1$ 을 인수로 갖는다.

즉, $f(x) = (x-1)^2(x+a)$ (a 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 2(x-1)(x+a) + (x-1)^2$$

$$= 3x^2 + 2(a-2)x - 2a + 1$$

이때 $f'(x)$ 는 이차함수이고 $f'(2+x) = f'(2-x)$ 에서

함수 $y = f'(x)$ 의 그래프의 축이 직선 $x=2$ 이므로

$$-\frac{2(a-2)}{2 \times 3} = 2, a-2 = -6$$

$$\therefore a = -4$$

따라서 $f(x) = (x-1)^2(x-4)$ 이므로

$$f(2) = 1 \times (-2) = -2$$

다른 풀이

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$f'(2+x) = f'(2-x)$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(3) = f'(1)$$

$$f'(1) = 0 \text{에서 } 3 + 2a + b = 0$$

$$\therefore 2a + b = -3 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$f'(3) = 0 \text{에서 } 27 + 6a + b = 0$$

$$\therefore 6a + b = -27 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -6, b = 9$$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + c$ 이므로 $f(1) = 0$ 에서

$$1 - 6 + 9 + c = 0 \quad \therefore c = -4$$

따라서 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ 이므로

$$f(2) = 8 - 24 + 18 - 4 = -2$$

- 18 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로
(분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \quad \therefore f(2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \frac{1}{\{f'(x)\}^2} \right]$$

$$= f'(2) \times \frac{1}{\{f'(2)\}^2}$$

$$= \frac{1}{f'(2)}$$

$$\therefore \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$f'(2) = 4$$

한편 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고

$$f(1) = 0, f(2) = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = (x-a)(x-1)(x-2) \text{ (} a \text{는 상수)라 하면}$$

$$f'(x) = (x-1)(x-2) + (x-a)(x-2) + (x-a)(x-1)$$

$$f'(2) = 4 \text{이므로}$$

$$(2-a) \times 1 = 4 \quad \therefore a = -2$$

$$\text{따라서 } f(x) = (x+2)(x-1)(x-2) \text{이므로}$$

$$f(3) = 5 \times 2 \times 1 = 10$$

- 19 $f(x)$ 가 일차식이면 $f'(x)$ 는 상수이므로 주어진 식의 좌변은 상수이고 우변은 이차식이 되어 모순이다.

$f(x)$ 가 이차식이면 $f'(x)$ 는 일차식이므로 주어진 식의 좌변은 이차식이고 우변은 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이 아닐 때 이차식이다.

따라서 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0, a \neq 1$)라 하면

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(x)\{f'(x)-2\} = 16f(x) - 16x^2 - 45 \text{에서}$$

$$(2ax+b)(2ax+b-2) = 16(ax^2+bx+c) - 16x^2 - 45$$

$$4a^2x^2 + (4ab-4a)x + b^2-2b$$

$$= (16a-16)x^2 + 16bx + 16c - 45$$

$$\therefore 4a^2 = 16a - 16, 4ab - 4a = 16b, b^2 - 2b = 16c - 45$$

$$4a^2 = 16a - 16 \text{에서}$$

$$a^2 - 4a + 4 = 0, (a-2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

이를 $4ab - 4a = 16b$ 에 대입하면

$$8b - 8 = 16b, 8b = -8$$

$$\therefore b = -1$$

이를 $b^2 - 2b = 16c - 45$ 에 대입하면

$$1 + 2 = 16c - 45, 16c = 48$$

$$\therefore c = 3$$

따라서 $f(x) = 2x^2 - x + 3$ 이므로

$$f(2) = 8 - 2 + 3 = 9$$

- 20 (ㄴ)에서 $g(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 5이므로
 $g(2) = 5$

(ㄷ)에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로
(분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - g(x)\} = 0$$

$$f(2) - g(2) = 0$$

$$\therefore f(2) = g(2)$$

$$g(2) = 5 \text{이므로}$$

$$f(2) = 5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - g(x)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5 + 5 - g(x)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2) + g(2) - g(x)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2}$$

$$= f'(2) - g'(2) = 3$$

(ㄹ)에서 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫이 $g(x)$ 이므로 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x-1)^2 g(x) + ax + b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(2) = g(2) + 2a + b$$

$$f(2) = g(2) = 5 \text{이므로}$$

$$5 = 5 + 2a + b$$

$$\therefore b = -2a \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2(x-1)g(x) + (x-1)^2 g'(x) + a$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f'(2) = 2g(2) + g'(2) + a$$

$$\therefore a = f'(2) - g'(2) - 2g(2)$$

$$f'(2) - g'(2) = 3, g(2) = 5 \text{이므로}$$

$$a = 3 - 10 = -7$$

이를 ②에 대입하면

$$b = 14$$

따라서 $f(x) = (x-1)^2 g(x) - 7x + 14$ 이므로

$$f(1) = -7 + 14 = 7$$

II-2 01 접선의 방정식과 평균값 정리

1 접선의 방정식

문제

80~84쪽

01-1 ㉠ (1) $y=6x-4$ (2) $y=-13x-11$

(1) $f(x)=x^2+4x-3$ 이라 하면 $f'(x)=2x+4$

점 (1, 2)에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=2+4=6$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-2=6(x-1)$$

$$\therefore y=6x-4$$

(2) $f(x)=-x^3-x+5$ 라 하면 $f'(x)=-3x^2-1$

점 (-2, 15)에서의 접선의 기울기는

$$f'(-2)=-12-1=-13$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-15=-13(x+2)$$

$$\therefore y=-13x-11$$

01-2 ㉠ -6

$f(x)=-2x^3+5x+1$ 이라 하면 $f'(x)=-6x^2+5$

점 (-1, a)가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(-1)=a$ 에서

$$2-5+1=a \quad \therefore a=-2$$

점 (-1, -2)에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1)=-6+5=-1$$

즉, 점 (-1, -2)에서의 접선의 방정식은

$$y+2=-(x+1) \quad \therefore y=-x-3$$

따라서 $m=-1$, $n=-3$ 이므로

$$amn=-2 \times (-1) \times (-3)=-6$$

01-3 ㉠ $y=-3x-13$

점 (-1, 2)가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(-1)=2$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (-1, 2)에서의 접선의 기울기가
3이므로 $f'(-1)=3$

$$g(x)=(x^3+3x-1)f(x) \text{라 하면}$$

$$g'(x)=(3x^2+3)f(x)+(x^3+3x-1)f'(x)$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=-1$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$g'(-1)=6f(-1)-5f'(-1)=12-15=-3$$

곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=-1$ 인 점의 y 좌표는

$$g(-1)=-5f(-1)=-10$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y+10=-3(x+1) \quad \therefore y=-3x-13$$

02-1 ㉠ (1) $y=7x+19$ 또는 $y=7x-13$

(2) $y=4x-14$

(1) $f(x)=x^3-5x+3$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2-5$

점점의 좌표를 (t, t^3-5t+3) 이라 하면 이 점에서의
접선의 기울기가 7이므로 $f'(t)=7$ 에서

$$3t^2-5=7, t^2=4$$

$$\therefore t=-2 \text{ 또는 } t=2$$

따라서 점점의 좌표는 (-2, 5) 또는 (2, 1)이므로 구
하는 접선의 방정식은

$$y-5=7(x+2) \text{ 또는 } y-1=7(x-2)$$

$$\therefore y=7x+19 \text{ 또는 } y=7x-13$$

(2) $x+4y-4=0$ 에서 $y=-\frac{1}{4}x+1$ 이므로 이 직선에 수

직인 직선의 기울기는 4이다.

$$f(x)=x^2-4x+2 \text{라 하면 } f'(x)=2x-4$$

점점의 좌표를 (t, t^2-4t+2) 라 하면 이 점에서의 접
선의 기울기가 4이므로 $f'(t)=4$ 에서

$$2t-4=4 \quad \therefore t=4$$

따라서 점점의 좌표는 (4, 2)이므로 구하는 직선의 방
정식은

$$y-2=4(x-4)$$

$$\therefore y=4x-14$$

02-2 ㉠ 6

$f(x)=-x^3+5x+6$ 이라 하면 $f'(x)=-3x^2+5$

점점의 좌표를 $(t, -t^3+5t+6)$ 이라 하면 이 점에서의
접선의 기울기가 5이므로 $f'(t)=5$ 에서

$$-3t^2+5=5, t^2=0$$

$$\therefore t=0$$

따라서 점점의 좌표는 (0, 6)이므로 접선의 방정식은

$$y=5x+6 \quad \therefore k=6$$

02-3 ㉠ $y=-2x+9$

두 점 (0, 5), (4, -3)을 지나는 직선과 평행한 직선의

$$\text{기울기는 } \frac{-3-5}{4-0}=-2$$

$$f(x)=-x^2+2x+5 \text{라 하면 } f'(x)=-2x+2$$

점점의 좌표를 $(t, -t^2+2t+5)$ 라 하면 이 점에서의 접
선의 기울기가 -2이므로 $f'(t)=-2$ 에서

$$-2t+2=-2 \quad \therefore t=2$$

따라서 점점의 좌표는 (2, 5)이므로 구하는 직선의 방정
식은

$$y-5=-2(x-2)$$

$$\therefore y=-2x+9$$

02-4 [답] $y=12x-4$

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 + 4 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x$$

$$= -3(x-2)^2 + 12$$

즉, 접선의 기울기는 $x=2$ 일 때 최댓값이 12이다.

이때 접점의 좌표는 $(2, 20)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-20=12(x-2)$$

$$\therefore y=12x-4$$

03-1 [답] (1) $y=2x-1$ 또는 $y=-2x+7$

$$(2) y=3x+2$$

$$(1) f(x) = -x^2 + 4x - 2 \text{라 하면 } f'(x) = -2x + 4$$

접점의 좌표를 $(t, -t^2 + 4t - 2)$ 라 하면 이 점에서의

접선의 기울기는 $f'(t) = -2t + 4$

점 $(t, -t^2 + 4t - 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (-t^2 + 4t - 2) = (-2t + 4)(x - t)$$

$$\therefore y = (-2t + 4)x + t^2 - 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(2, 3)$ 을 지나므로

$$3 = -4t + 8 + t^2 - 2$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

따라서 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=2x-1 \text{ 또는 } y=-2x+7$$

$$(2) f(x) = x^3 + 4 \text{라 하면 } f'(x) = 3x^2$$

접점의 좌표를 $(t, t^3 + 4)$ 라 하면 이 점에서의 접선의

기울기는 $f'(t) = 3t^2$

점 $(t, t^3 + 4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (t^3 + 4) = 3t^2(x - t)$$

$$\therefore y = 3t^2x - 2t^3 + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2 = -2t^3 + 4, t^3 = 1$$

$$\therefore t=1 (\because t \text{는 실수})$$

따라서 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=3x+2$$

03-2 [답] 4

$$f(x) = x^3 - 2x \text{라 하면 } f'(x) = 3x^2 - 2$$

접점의 좌표를 $(t, t^3 - 2t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기

울기는 $f'(t) = 3t^2 - 2$

점 $(t, t^3 - 2t)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (t^3 - 2t) = (3t^2 - 2)(x - t)$$

$$\therefore y = (3t^2 - 2)x - 2t^3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$3 = 3t^2 - 2 - 2t^3, 2t^3 - 3t^2 + 5 = 0$$

$$(t+1)(2t^2 - 5t + 5) = 0 \quad \therefore t = -1 (\because t \text{는 실수})$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 접선의 방정식은 $y = x + 2$

따라서 이 직선이 점 $(k, 6)$ 을 지나므로

$$6 = k + 2 \quad \therefore k = 4$$

03-3 [답] $2\sqrt{2}$

$$f(x) = x^4 + 12 \text{라 하면 } f'(x) = 4x^3$$

접점의 좌표를 $(t, t^4 + 12)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기

울기는 $f'(t) = 4t^3$

점 $(t, t^4 + 12)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (t^4 + 12) = 4t^3(x - t)$$

$$\therefore y = 4t^3x - 3t^4 + 12$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = -3t^4 + 12, t^4 - 4 = 0$$

$$(t + \sqrt{2})(t - \sqrt{2})(t^2 + 2) = 0$$

$$\therefore t = -\sqrt{2} \text{ 또는 } t = \sqrt{2} (\because t \text{는 실수})$$

따라서 접점의 좌표는 $(-\sqrt{2}, 16)$ 또는 $(\sqrt{2}, 16)$ 이므로

$$\overline{AB} = 2\sqrt{2}$$

04-1 [답] -1

$$f(x) = -x^3 + ax + 1, g(x) = bx^2 + 2 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = -3x^2 + a, g'(x) = 2bx$$

$x=1$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(1) = g(1)$ 에서

$$-1 + a + 1 = b + 2 \quad \therefore a - b = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$x=1$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1) = g'(1)$ 에서

$$-3 + a = 2b \quad \therefore a - 2b = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=-1$

$$\therefore ab = -1$$

04-2 [답] -5

$$f(x) = x^3 + ax, g(x) = bx^2 + cx + 4 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + a, g'(x) = 2bx + c$$

두 곡선이 점 $(-1, 6)$ 을 지나므로

$$f(-1) = 6 \text{에서 } -1 - a = 6 \quad \therefore a = -7$$

$$g(-1) = 6 \text{에서 } b - c + 4 = 6 \quad \therefore b - c = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 $(-1, 6)$ 에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(-1) = g'(-1) \text{에서 } 3 + a = -2b + c$$

$a = -7$ 을 대입하면

$$-4 = -2b + c \quad \therefore 2b - c = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $b=2, c=0$

$$\therefore a + b + c = -7 + 2 + 0 = -5$$

04-3 ㉮ 3

$f(x)=x^3-4x+2$, $g(x)=-2x^2-5x+2$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-4, g'(x)=-4x-5$$

두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하자.

$x=t$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$ 에서

$$t^3-4t+2=-2t^2-5t+2, t^3+2t^2+t=0$$

$$t(t+1)^2=0 \quad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$x=t$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(t)=g'(t)에서$$

$$3t^2-4=-4t-5, 3t^2+4t+1=0$$

$$(t+1)(3t+1)=0 \quad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=-\frac{1}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $t=-1$

즉, 접점의 x 좌표가 -1 이므로 접점의 좌표는 $(-1, 5)$

이고 접선의 기울기는 -1 이다.

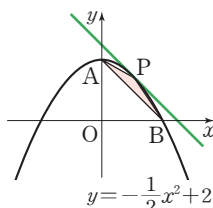
이때 접선의 방정식은

$$y-5=-(x+1) \quad \therefore y=-x+4$$

따라서 $m=-1$, $n=4$ 이므로 $m+n=3$

05-1 ㉮ $\frac{1}{2}$

삼각형 PAB에서 밑변을 $\overline{AB}$ 로 생각하면 높이는 점 P와 직선 AB 사이의 거리와 같으므로 곡선에 접하고 직선 AB에 평행한 접선의 접점이 P일 때 삼각형 PAB의 넓이가 최대이다.



$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2라 하면 f'(x)=-x$$

직선 AB의 기울기는 $\frac{0-2}{2-0}=-1$ 이므로 직선 AB의 방정식은

$$y=-x+2 \quad \therefore x+y-2=0$$

기울기가 -1 인 접선의 접점의 좌표를 $(t, -\frac{1}{2}t^2+2)$ 라

$$하면 f'(t)=-1에서 -t=-1 \quad \therefore t=1$$

즉, 삼각형 PAB의 넓이가 최대일 때의 점 P의 좌표는

$(1, \frac{3}{2})$ 이므로 이 점과 직선 $x+y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1+\frac{3}{2}-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$변 AB의 길이는 \overline{AB}=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}$$

2 평균값 정리

문제

87~88쪽

06-1 ㉮ (1) $\frac{1}{2}$ (2) 0

(1) 함수 $f(x)=2x^2-2x+1$ 은 닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, 3)$ 에서 미분가능하며 $f(-2)=f(3)=13$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-2, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=4x-2이므로 f'(c)=0에서$$

$$4c-2=0 \quad \therefore c=\frac{1}{2}$$

(2) 함수 $f(x)=x^3+3x^2-4$ 는 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, 1)$ 에서 미분가능하며 $f(-2)=f(1)=0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-2, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=3x^2+6x이므로 f'(c)=0에서$$

$$3c^2+6c=0, 3c(c+2)=0$$

$$\therefore c=0 (\because -2 < c < 1)$$

06-2 ㉮ $a=2, c=1$

함수 $f(x)=-x^2+ax$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$ 에서 미분가능하다.

이때 $f(0)=f(2)$ 이면

$$0=-4+2a \quad \therefore a=2$$

즉, $f(x)=-x^2+2x$ 에서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=-2x+2이므로 f'(c)=0에서$$

$$-2c+2=0 \quad \therefore c=1$$

06-3 ㉮ 1

함수 $f(x)=x^4-2x^2+3$ 은 닫힌구간 $[-1, a]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, a)$ 에서 미분가능하다.

이때 $f(-1)=f(a)$ 이면

$$2=a^4-2a^2+3, a^4-2a^2+1=0$$

$$(a+1)^2(a-1)^2=0 \quad \therefore a=1 (\because a > -1)$$

즉, 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간

$(-1, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=4x^3-4x이므로 f'(c)=0에서$$

$$4c^3-4c=0, 4c(c+1)(c-1)=0$$

$$\therefore c=0 (\because -1 < c < 1)$$

따라서 롤의 정리를 만족시키는 상수 c 는 1개이다.

07-1 ㉡ (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\sqrt{3}$

- (1) 함수 $f(x)=2x^2+x-3$ 은 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(-2, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=4x+1 \text{이므로 } \frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=f'(c) \text{에서}$$

$$\frac{0-3}{3}=4c+1 \quad \therefore c=-\frac{1}{2}$$

- (2) 함수 $f(x)=x^3-4x$ 는 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(0, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=3x^2-4 \text{이므로 } \frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c) \text{에서}$$

$$\frac{15-0}{3}=3c^2-4, c^2=3 \quad \therefore c=\sqrt{3} (\because 0 < c < 3)$$

07-2 ㉡ -1

- 함수 $f(x)=x^2-3x+4$ 는 닫힌구간 $[a, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(a, 2)$ 에서 미분가능하며 평균값 정리를 만족시키는 상수 c 의 값이 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{f(2)-f(a)}{2-a}=f'\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f'(x)=2x-3 \text{이므로}$$

$$\frac{2-(a^2-3a+4)}{2-a}=-2$$

$$a^2-a-2=0, (a+1)(a-2)=0$$

$$\therefore a=-1 \left(\because a < \frac{1}{2} \right)$$

1 $f(x)=-2x^3+5x-1$ 이라 하면 $f'(x)=-6x^2+5$

점 $(-1, -4)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1)=-6+5=-1$$

점 $(-1, -4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y+4=-(x+1) \quad \therefore y=-x-5$$

따라서 $a=-1, b=-5$ 이므로 $ab=5$

2 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1}=2$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-1\}=0$

$$\therefore f(1)=1$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) \text{이므로}$$

$$f'(1)=2$$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-1=2(x-1) \quad \therefore y=2x-1$$

따라서 $a=2, b=-1$ 이므로 $a-b=3$

3 $f(x)=-x^3+2x^2-1$ 이라 하면 $f'(x)=-3x^2+4x$

점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(2)=-12+8=-4$$

점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y+1=-4(x-2) \quad \therefore y=-4x+7$$

곡선 $y=-x^3+2x^2-1$ 과 직선 $y=-4x+7$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$-x^3+2x^2-1=-4x+7, x^3-2x^2-4x+8=0$$

$$(x+2)(x-2)^2=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

이때 점 $(2, -1)$ 은 접점이므로 $A(-2, 15)$

점 $A(-2, 15)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(-2)=-12-8=-20$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-15=-20(x+2) \quad \therefore y=-20x-25$$

4 $h(x)=f(x)g(x)$ 라 하면

$$h(1)=f(1)g(1)=1 \times 1=1$$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $h'(1)$

이때 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 이고

$$f'(x)=2x+1, g'(x)=-3x^2-2x \text{이므로}$$

$$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$$

$$=3 \times 1 + 1 \times (-5) = -2$$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-1=-2(x-1) \quad \therefore y=-2x+3$$

따라서 이 접선이 점 $(k, 9)$ 를 지나므로

$$9=-2k+3 \quad \therefore k=-3$$

연습문제

89~91쪽

- | | | | |
|----------------|-------|------------------|--------------------------|
| 1 ④ | 2 3 | 3 $y=-20x-25$ | 4 -3 |
| 5 -13 | 6 ④ | 7 3 | 8 ③ |
| 9 -63 | | | |
| 10 ④ | 11 3 | 12 -1 | 13 $-\frac{1}{11}$ |
| | | | 14 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ |
| 15 ① | 16 2 | 17 $\frac{1}{6}$ | 18 ② |
| | | | 19 6 |
| 20 $2\sqrt{3}$ | 21 12 | 22 ⑤ | |

5 $f(x)=x^2+ax+b$ 라 하면 $f'(x)=2x+a$
 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(2, 4)$ 를 지나므로 $f(2)=4$ 에서
 $4+2a+b=4 \quad \therefore 2a+b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 점 $(2, 4)$ 에서의 접선의 기울기가 7이므로 $f'(2)=7$ 에서
 $4+a=7 \quad \therefore a=3$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $6+b=0 \quad \therefore b=-6$
 점 $(2, 4)$ 에서의 접선의 방정식은
 $y-4=7(x-2) \quad \therefore y=7x-10$
 $\therefore c=-10$
 $\therefore a+b+c=3+(-6)+(-10)=-13$

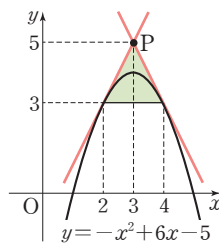
6 $f(x)=-2x^2+4x+3$ 이라 하면 $f'(x)=-4x+4$
 접점의 좌표를 $(t, -2t^2+4t+3)$ 이라 하면 직선
 $y=\frac{1}{4}x-3$ 에 수직인 접선의 기울기는 -4 이므로
 $f'(t)=-4$ 에서
 $-4t+4=-4 \quad \therefore t=2$
 즉, 접점의 좌표는 $(2, 3)$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-3=-4(x-2) \quad \therefore y=-4x+11$
 따라서 구하는 y 절편은 11이다.

7 $f(x)=x^3-3x^2+2$ 라 하면
 $f'(x)=3x^2-6x$
 $=3(x-1)^2-3$
 즉, 접선의 기울기는 $x=1$ 일 때 최솟값이 -3 이다.
 이때 접점의 좌표는 $(1, 0)$ 이므로 접선의 방정식은
 $y=-3(x-1) \quad \therefore y=-3x+3$
 따라서 $m=-3, n=3$ 이므로
 $m+2n=-3+6=3$

8 $f(x)=-x^3+3$ 이라 하면 $f'(x)=-3x^2$
 접점의 좌표를 $(t, -t^3+3)$ 이라 하면 직선
 $3x+y-15=0$ 에 평행한 접선의 기울기는 -3 이므로
 $f'(t)=-3$ 에서
 $-3t^2=-3, t^2=1 \quad \therefore t=-1$ 또는 $t=1$
 즉, 접점의 좌표는 $(-1, 4)$ 또는 $(1, 2)$ 이므로 접선의
 방정식은
 $y-4=-3(x+1)$ 또는 $y-2=-3(x-1)$
 $\therefore 3x+y-1=0$ 또는 $3x+y-5=0$
 따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x+y-1=0$
 위의 점 $(0, 1)$ 과 직선 $3x+y-5=0$ 사이의 거리와 같
 으므로
 $\frac{|1-5|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

9 $f(x)=2x^2-x+2$ 라 하면 $f'(x)=4x-1$
 접점의 좌표를 $(t, 2t^2-t+2)$ 라 하면 이 점에서의 접
 선의 기울기는 $f'(t)=4t-1$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(2t^2-t+2)=(4t-1)(x-t)$
 $\therefore y=(4t-1)x-2t^2+2$
 이 직선이 점 $(0, -6)$ 을 지나므로
 $-6=-2t^2+2, t^2=4$
 $\therefore t=-2$ 또는 $t=2$
 따라서 구하는 두 접선의 기울기의 곱은
 $f'(-2)f'(2)=-9 \times 7=-63$

10 $f(x)=-x^2+6x-5$ 라 하면 $f'(x)=-2x+6$
 접점의 좌표를 $(t, -t^2+6t-5)$ 라 하면 이 점에서의 접
 선의 기울기는 $f'(t)=-2t+6$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(-t^2+6t-5)=(-2t+6)(x-t)$
 $\therefore y=(-2t+6)x+t^2-5$
 이 직선이 점 $(3, 5)$ 를 지나므로
 $5=-6t+18+t^2-5$
 $t^2-6t+8=0$
 $(t-2)(t-4)=0$
 $\therefore t=2$ 또는 $t=4$
 따라서 접점의 좌표는 $(2, 3)$
 또는 $(4, 3)$ 이므로 삼각형
 PAB의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 2 \times 2=2$



11 $f(x)=-x^3+ax+b, g(x)=x^2+2$ 라 하면
 $f'(x)=-3x^2+a, g'(x)=2x$
 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로 $f(-1)=3$ 에서
 $1-a+b=3 \quad \therefore a-b=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 점 $(-1, 3)$ 에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로
 $f'(-1)=g'(-1)$ 에서
 $-3+a=-2 \quad \therefore a=1$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $1-b=-2 \quad \therefore b=3$
 $\therefore ab=1 \times 3=3$

12 $f(x)=x^3+ax+4, g(x)=-x^2+4x+1$ 이라 하면
 $f'(x)=3x^2+a, g'(x)=-2x+4$
 두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 접한다고 하자.
 $x=t$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$ 에서
 $t^3+at+4=-t^2+4t+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$x=t$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(t)=g'(t) \text{에서}$$

$$3t^2+a=-2t+4 \quad \therefore a=-3t^2-2t+4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 ⑤에 대입하면

$$t^3+(-3t^2-2t+4)t+4=-t^2+4t+1$$

$$2t^3+t^2-3=0, (t-1)(2t^2+3t+3)=0$$

$$\therefore t=1 (\because t \text{는 실수})$$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } a=-3-2+4=-1$$

- 13** $f(x)=x^2-3$, $g(x)=ax^2$ 이라 하면

$$f'(x)=2x, g'(x)=2ax$$

두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 만난다고 하면 $f(t)=g(t)$ 에서

$$t^2-3=at^2 \quad \therefore t^2=\frac{3}{1-a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x=t$ 인 점에서의 두 접선이 서로 수직이므로

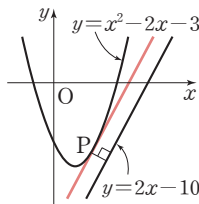
$$f'(t)g'(t)=-1 \text{에서}$$

$$2t \times 2at = -1 \quad \therefore t^2 = -\frac{1}{4a} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{3}{1-a} = -\frac{1}{4a} \text{이므로}$$

$$-12a=1-a \quad \therefore a=-\frac{1}{11}$$

- 14** 곡선 $y=x^2-2x-3$ 에 접하고 직선 $y=2x-10$ 과 기울기가 같은 접선의 접점을 $P(t, t^2-2t-3)$ 이라 하면 구하는 거리의 최솟값은 점 P와 직선 $y=2x-10$ 사이의 거리와 같다.



$$f(x)=x^2-2x-3 \text{이라 하면 } f'(x)=2x-2$$

점 P에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(t)=2$ 에서

$$2t-2=2 \quad \therefore t=2 \quad \therefore P(2, -3)$$

따라서 점 $P(2, -3)$ 과 직선 $y=2x-10$, 즉

$$2x-y-10=0 \text{ 사이의 거리는}$$

$$\frac{|4+3-10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

- 15** 함수 $f(x)=x^2+ax-10$ 은 모든 실수에서 연속이고 미분가능하다.

$$\text{이때 } f(-5)=f(2) \text{이면}$$

$$25-5a-10=4+2a-10 \quad \therefore a=3$$

즉, 함수 $f(x)=x^2+3x-10$ 에서 롤의 정리에 의하여

$f'(c_1)=0$ 인 c_1 이 열린구간 $(-5, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=2x+3 \text{이므로 } f'(c_1)=0 \text{에서}$$

$$2c_1+3=0 \quad \therefore c_1=-\frac{3}{2}$$

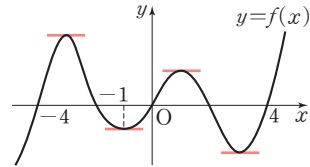
또 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)}=f'(c_2)$ 인 c_2 가

열린구간 $(-3, 1)$ 에 적어도 하나 존재하므로

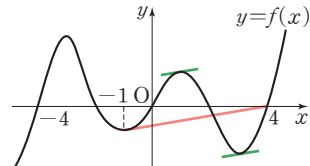
$$\frac{-6+10}{4}=2c_2+3 \quad \therefore c_2=-1$$

$$\therefore c_1+c_2=-\frac{3}{2}+(-1)=-\frac{5}{2}$$

- 16** 다항함수 $f(x)$ 는 모든 실수에서 연속이고 미분가능하다. $f(-4)=f(4)=0$ 이므로 닫힌구간 $[-4, 4]$ 에서 롤의 정리를 만족시키는 상수 c_1 의 개수는 기울기가 0인 접선의 개수와 같다. $\therefore m=4$



닫힌구간 $[-1, 4]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c_2 의 개수는 두 점 $(-1, f(-1))$, $(4, f(4))$ 를 지나는 직선과 기울기가 같은 접선의 개수와 같다. $\therefore n=2$



$$\therefore m-n=4-2=2$$

- 17** $f(x)=x^3+1$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2$

점 $P(t, t^3+1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3+1)=3t^2(x-t) \quad \therefore y=3t^2x-2t^3+1$$

이 접선이 y 축과 만나는 점 Q의 좌표는 $(0, -2t^3+1)$

또 점 $P(t, t^3+1)$ 을 지나고 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3t^2}$ 이므로 직선의 방정식은

$$y-(t^3+1)=-\frac{1}{3t^2}(x-t)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{3t^2}x+\frac{1}{3t}+t^3+1$$

이 직선이 y 축과 만나는 점 R의 좌표는 $(0, \frac{1}{3t}+t^3+1)$

$$\therefore \overline{QR} = \left| \left(\frac{1}{3t}+t^3+1 \right) - (-2t^3+1) \right| = \left| \frac{1}{3t}+3t^3 \right|$$

따라서 삼각형 PQR의 넓이 $S(t)$ 는

$$S(t) = \frac{1}{2} \times \left| \frac{1}{3t}+3t^3 \right| \times |t| = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}+3t^4 \right)$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} S(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}+3t^4 \right) = \frac{1}{6}$$

18 $f(x)=2x^2+k$ 라 하면 $f'(x)=4x$

점점의 좌표를 $(t, 2t^2+k)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=4t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(2t^2+k)=4t(x-t)$$

$$\therefore y=4tx-2t^2+k \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

서로 수직인 두 접선의 교점이 항상 x 축 위에 있으므로 교점의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면 직선 $\textcircled{7}$ 이 이 점을 지나므로

$$0=4at-2t^2+k \quad \therefore 2t^2-4at-k=0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이 이차방정식의 두 실근을 α, β 라 하면 α, β 는 두 점점의 x 좌표이므로 그 점에서의 접선의 기울기는 각각

$$f'(\alpha)=4\alpha, f'(\beta)=4\beta$$

이때 두 접선이 서로 수직이므로

$$4\alpha \times 4\beta = -1 \quad \therefore \alpha\beta = -\frac{1}{16}$$

$\textcircled{8}$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{k}{2} = -\frac{1}{16} \quad \therefore k = \frac{1}{8}$$

19 $f(x)=x^3-2x+2$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-2$

점 $A(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-1=x-1 \quad \therefore y=x$$

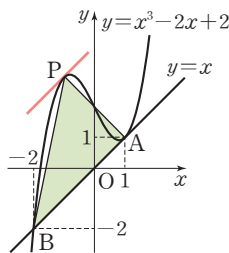
곡선 $y=x^3-2x+2$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^3-2x+2=x, x^3-3x+2=0$$

$$(x+2)(x-1)^2=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

$$\therefore B(-2, -2)$$

삼각형 ABP 에서 밑변을 $\overline{AB}$ 로 생각하면 높이는 점 P 와 직선 AB 사이의 거리와 같으므로 곡선에 접하고 직선 AB , 즉 $y=x$ 에 평행한 직선의 접점이 P 일 때 삼각형 ABP 의 넓이가 최대이다.



기울기가 1인 접선의 점점의 좌표를 (t, t^3-2t+2) 라 하면 $f'(t)=1$ 에서

$$3t^2-2=1, t^2=1 \quad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=1$$

즉, 점점의 좌표는 $(-1, 3)$ 또는 $(1, 1)$ 이므로 삼각형 ABP 의 넓이가 최대일 때의 점 P 의 좌표는 $(-1, 3)$

점 $(-1, 3)$ 과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}$$

$$\text{변 } AB \text{의 길이는 } \overline{AB} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-1)^2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 ABP 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 6$$

20 $f(x)=x^2$ 이라 하면 $f'(x)=2x$

원의 중심을 $C(0, a)$, 점점을

$P(t, t^2)$ 이라 하면 점 P 에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$ 이고, 직선 CP 의 기울기는 $\frac{t^2-a}{t}$ 이다.

$$\therefore \frac{t^2-a}{t} = -\frac{1}{2t} \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

이때 접선과 직선 CP 는 서로 수직이므로

$$2t \times \frac{t^2-a}{t} = -1$$

$$\therefore t^2-a = -\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$$\text{또 } \overline{CP}=1 \text{이므로 } \sqrt{t^2+(t^2-a)^2}=1$$

$\textcircled{10}$ 을 대입하면

$$\sqrt{t^2+\frac{1}{4}}=1, t^2+\frac{1}{4}=1$$

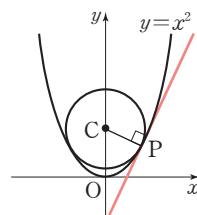
$$t^2=\frac{3}{4} \quad \therefore t=-\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } t=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

두 점점에서의 접선의 기울기는 각각

$$f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}, f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}$$

따라서 두 접선의 기울기의 차는

$$\sqrt{3}-(-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$$

21 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[x-3, x+3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(x-3, x+3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x+3)-f(x-3)}{(x+3)-(x-3)}=f'(c) \text{인 } c \text{가 열린구간}$$

$(x-3, x+3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x-3 < c < x+3$ 에서 $x \rightarrow \infty$ 이면 $c \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x+3)-f(x-3)\} &= 6 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+3)-f(x-3)}{(x+3)-(x-3)} \\ &= 6 \lim_{c \rightarrow \infty} f'(c) \\ &= 6 \times 2 \quad (\because \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)=2) \\ &= 12 \end{aligned}$$

22 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c) \text{인 } c \text{가 열린구간 } (0, 1) \text{에 적어도 하나 존재한다.}$$

이때 $\textcircled{a}$ 에서 $0 < c < 1$ 인 c 에 대하여 $|f'(c)| \leq 2$ 이므로

평균값 정리에 의하여

$$\left| \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \right| \leq 2$$

$$|f(1)-4| \leq 2 \quad (\because \textcircled{b})$$

$$\therefore 2 \leq f(1) \leq 6$$

따라서 $f(1)$ 의 최댓값은 6, 최솟값은 2이므로 구하는 합은 $6+2=8$

II-2 02 함수의 증가, 감소와 극대, 극소

1 함수의 증가와 감소

개념 CHECK

93쪽

1 답 (1) 증가 (2) 감소

(1) 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$x_1 < x_2$ 일 때,

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + 1) - (x_2 + 1)$$

$$= x_1 - x_2 < 0$$

$$\therefore f(x_1) < f(x_2)$$

따라서 함수 $f(x) = x + 1$ 은 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가한다.

(2) 구간 $(0, \infty)$ 에서 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$0 < x_1 < x_2$ 일 때,

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} > 0$$

$$\therefore f(x_1) > f(x_2)$$

따라서 함수 $f(x) = \frac{1}{x}$ 은 구간 $(0, \infty)$ 에서 감소한다.

문제

94~95쪽

01-1 답 (1) 구간 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$ 에서 증가,

구간 $[-1, 1]$ 에서 감소

(2) 구간 $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$ 에서 증가,

구간 $[-1, 0]$, $[1, \infty)$ 에서 감소

(1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $[-1, 1]$ 에서 감소한다.

(2) $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 4$ 에서

$$f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$ 에서 증가하고, 구간 $[-1, 0]$, $[1, \infty)$ 에서 감소한다.

01-2 답 -2

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 7 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	3	$\nearrow$	7	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[1, 3]$ 에서 증가하므로

$$\alpha = 1, \beta = 3$$

$$\therefore \alpha - \beta = -2$$

02-1 답 $-3\sqrt{2} \leq a \leq 3\sqrt{2}$

$$f(x) = -x^3 + ax^2 - 6x + 5 \text{에서 } f'(x) = -3x^2 + 2ax - 6$$

함수 $f(x)$ 가 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) > f(x_2)$ 를 만족시키려면 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = a^2 - 18 \leq 0$$

$$(a + 3\sqrt{2})(a - 3\sqrt{2}) \leq 0$$

$$\therefore -3\sqrt{2} \leq a \leq 3\sqrt{2}$$

02-2 답 $a \geq \frac{3}{2}$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + ax + 3 \text{에서 } f'(x) = 6x^2 + 6x + a$$

함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 역함수가 존재하려면 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 9 - 6a \leq 0$$

$$\therefore a \geq \frac{3}{2}$$

02-3 답 $a \geq 3$

$$f(x) = -x^3 + 2ax^2 - 3ax + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 4ax - 3a$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $[1, 2]$ 에서 증가하려면 $1 \leq x \leq 2$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$f'(1) \geq 0, f'(2) \geq 0$$

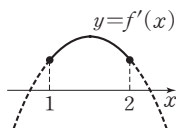
$$f'(1) \geq 0 \text{에서}$$

$$-3 + 4a - 3a \geq 0 \quad \therefore a \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f'(2) \geq 0 \text{에서}$$

$$-12 + 8a - 3a \geq 0 \quad \therefore a \geq \frac{12}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a \geq 3$$



2 함수의 극대와 극소

개념 CHECK

97쪽

1 답 극댓값: 1, 극솟값: -2

문제

98~100쪽

03-1 답 (1) 극댓값: -2, 극솟값: -34 (2) 극솟값: 5

$$(1) f(x) = x^3 - 6x^2 - 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=4$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	-2 극대	$\searrow$	-34 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 -2, $x=4$ 에서 극솟값 -34를 갖는다.

$$(2) f(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 8x^2 + 4x = 4x(x-1)^2$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	$\searrow$	5 극소	$\nearrow$	$\frac{16}{3}$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극솟값 5를 갖는다.

03-2 답 1

$$f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 18x - 12 = -6(x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-6 극소	$\nearrow$	-5 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값 -5, $x=1$ 에서 극솟값 -6을 가지므로 그 차는 $-5 - (-6) = 1$

04-1 답 7

$$f(x) = -2x^3 - 6x^2 + a \text{에서}$$

$$f'(x) = -6x^2 - 12x = -6x(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$a-8$ 극소	$\nearrow$	a 극대	$\searrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극소이므로 $b=-2$

이때 극솟값은 $a-8$ 이므로 $a-8=1 \quad \therefore a=9$

$$\therefore a+b=9+(-2)=7$$

04-2 답 -39

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx \text{에서 } f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$x=-1$ 에서 극댓값 5를 가지므로

$$f'(-1)=0, f(-1)=5 \text{에서}$$

$$3-2a+b=0, -1+a-b=5$$

$$\therefore 2a-b=3, a-b=6$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3, b=-9$

즉, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ 이므로

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	-27 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극솟값 -27을 가지므로

$$m=-27$$

$$\therefore a+b+m=-3+(-9)+(-27)=-39$$

04-3 [답 6]

$f(x) = -2x^3 + ax^2 + bx + c$ 에서
 $f'(x) = -6x^2 + 2ax + b$
 $x = -1, x = 1$ 에서 극값을 가지므로
 $f'(-1) = 0, f'(1) = 0$ 에서
 $-6 - 2a + b = 0, -6 + 2a + b = 0$
 $\therefore 2a - b = -6, 2a + b = 6$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a = 0, b = 6$
 함수 $f(x) = -2x^3 + 6x + c$ 가 $x = -1$ 에서 극솟값 -2 를 가지므로 $f(-1) = -2$ 에서
 $2 - 6 + c = -2 \quad \therefore c = 2$
 함수 $f(x) = -2x^3 + 6x + 2$ 는 $x = 1$ 에서 극대이므로 구하는 극댓값은
 $f(1) = -2 + 6 + 2 = 6$

05-1 [답 -1]

함수 $y = f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 $b, c, 0, d$ 이므로 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	0	$\cdots$	d	$\cdots$	e
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = c$ 에서 극대이고, $x = b, x = d$ 에서 극소이므로
 $m = 1, n = 2$
 $\therefore m - n = -1$

05-2 [답 3]

함수 $y = f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 $1, 3$ 이므로 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에서
 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
 주어진 그래프에서 $f'(1) = 0, f'(3) = 0$ 이므로
 $3 + 2a + b = 0, 27 + 6a + b = 0$
 $\therefore 2a + b = -3, 6a + b = -27$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a = -6, b = 9$

함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + c$ 는 $x = 3$ 에서 극소이고 극솟값이 -1 이므로 $f(3) = -1$ 에서
 $27 - 54 + 27 + c = -1 \quad \therefore c = -1$
 함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ 은 $x = 1$ 에서 극대이므로 구하는 극댓값은
 $f(1) = 1 - 6 + 9 - 1 = 3$

연습문제

101~102쪽

- 1 ③ 2 ④ 3 $a \geq 3$ 4 3 5 ④
 6 ③ 7 ② 8 ① 9 1 10 ②
 11 ㄹ 12 32 13 ③ 14 -27

- 1 $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 3$ 에서
 $f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = -6(x+1)(x-2)$
 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	23	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-1, 2]$ 에서 증가한다.

- 2 $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + 7$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - 12x + a$
 함수 $f(x)$ 가 감소하는 x 의 값의 범위가 $1 \leq x \leq b$ 이므로
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

따라서 이차방정식 $f'(x) = 0$, 즉 $3x^2 - 12x + a = 0$ 의 두 근이 $1, b$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$1 + b = -\frac{-12}{3}, 1 \times b = \frac{a}{3}$$

$$\therefore b = 3, a = 9 \quad \therefore a + b = 12$$

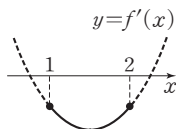
다른 풀이

$f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + 7$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - 12x + a$
 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 두 근이 $1, b$ 이므로
 $f'(1) = 0$ 에서 $3 - 12 + a = 0 \quad \therefore a = 9$
 $f'(b) = 0$ 에서 $3b^2 - 12b + a = 0$
 $3b^2 - 12b + 9 = 0, 3(b-1)(b-3) = 0$
 $\therefore b = 3 (\because b > 1)$
 $\therefore a + b = 9 + 3 = 12$

- 3 $f(x)=x^3+3x^2+ax$ 에서 $f'(x)=3x^2+6x+a$
 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가해야 하므로 모든
 실수 x 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.
 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 이어
 야 하므로

$$\frac{D}{4} = 9 - 3a \leq 0 \quad \therefore a \geq 3$$

- 4 $f(x)=x^3-(a+1)x^2+ax-4$ 에서
 $f'(x)=3x^2-2(a+1)x+a$
 함수 $f(x)$ 가 구간 $[1, 2]$ 에서 감소
 하려면 $1 \leq x \leq 2$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어
 야 하므로 $f'(1) \leq 0, f'(2) \leq 0$



$$f'(1) \leq 0 \text{에서}$$

$$3 - 2(a+1) + a \leq 0 \quad \therefore a \geq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f'(2) \leq 0 \text{에서}$$

$$12 - 4(a+1) + a \leq 0 \quad \therefore a \geq \frac{8}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a \geq \frac{8}{3}$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 3이다.

- 5 $f(x)=2x^3-9x^2-24x+3$ 에서
 $f'(x)=6x^2-18x-24=6(x+1)(x-4)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=4$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대, $x=4$ 에서 극소
 이므로

$$a=-1, b=4 \quad \therefore b-a=5$$

- 6 $f(x)=x^3-3x+6$ 에서
 $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	8 극대	$\searrow$	4 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값 8, $x=1$ 에서 극
 소값 4를 가지므로 모든 극값의 합은
 $8+4=12$

- 7 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값 -1 을 가지므로
 $f'(2)=0, f(2)=-1$
 $g(x)=(x^2-3)f(x)$ 라 하면
 $g'(x)=2xf(x)+(x^2-3)f'(x)$
 $\therefore g(2)=f(2)=-1, g'(2)=4f(2)+f'(2)=-4$
 따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 기
 율기가 -4 이므로 구하는 접선의 방정식은
 $y+1=-4(x-2)$
 $\therefore y=-4x+7$

- 8 $f(x)=-x^4+8a^2x^2-1$ 에서
 $f'(x)=-4x^3+16a^2x=-4x(x^2-4a^2)$
 $=-4x(x+2a)(x-2a)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은
 $x=-2a$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2a$
 $a>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=-2a$ 와 $x=2a$ 에서 극대이다.

$$\text{한편 } b>1 \text{에서 } -2b<-2 \quad \therefore 2-2b<0$$

따라서 $2-2b<b$ 이므로

$$-2a=2-2b, 2a=b$$

$$\therefore a-b=-1, 2a-b=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=2$$

$$\therefore a+b=3$$

- 9 $f(x)=x^3-3kx^2-9k^2x$ 에서
 $f'(x)=3x^2-6kx-9k^2=3(x^2-2kx-3k^2)$
 $=3(x+k)(x-3k)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-k$ 또는 $x=3k$
 $k>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-k$	$\cdots$	$3k$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$5k^3$ 극대	$\searrow$	$-27k^3$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-k$ 에서 극댓값 $5k^3$, $x=3k$ 에
 서 극솟값 $-27k^3$ 을 갖고, 그 합이 -22 이므로

$$5k^3-27k^3=-22, k^3=1$$

$$\therefore k=1 (\because k>0)$$

- 10 $f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$ 에서
 $f'(x)=3x^2-6ax+3(a^2-1)$
 $=3\{x^2-2ax+(a-1)(a+1)\}$
 $=3\{x-(a-1)\}\{x-(a+1)\}$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=a-1$ 또는 $x=a+1$
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$a-1$	...	$a+1$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

- 이때 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 4이므로 $f(a-1)=4$ 에서
 $(a-1)^3-3a(a-1)^2+3(a^2-1)(a-1)=4$
 $a^3-3a-2=0, (a+1)^2(a-2)=0$
 $\therefore a=-1$ 또는 $a=2$
(i) $a=-1$ 일 때, $f(x)=x^3+3x^2$ 이므로
 $f(-2)=-8+12=4>0$
(ii) $a=2$ 일 때, $f(x)=x^3-6x^2+9x$ 이므로
 $f(-2)=-8-24-18=-50<0$
따라서 $f(-2)>0$ 을 만족시키는 함수 $f(x)$ 는
 $f(x)=x^3+3x^2 \quad \therefore f(-1)=-1+3=2$

- 11 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 $-6, 0, 6$ 이므로 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-6	...	0	...	6	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗		↗

- ㄱ. 구간 $[-3, 0]$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 감소한다.
ㄴ. 구간 $[3, 6]$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다.
ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x=-6$ 에서 극대이다.
ㄹ. 함수 $f(x)$ 는 $x=-6$ 에서 극댓값을 갖고, $x=0$ 에서 극솟값을 가지므로 극값은 2개이다.
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄹ이다.

- 12 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 $-4, 0$ 이므로 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-4	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

- 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로
 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면
 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
주어진 그래프에서 $f'(-4)=0, f'(0)=0$ 이므로
 $48-8a+b=0, b=0$
 $\therefore a=6$
따라서 함수 $f(x)=x^3+6x^2+c$ 의 극댓값은 $f(-4)$,
극솟값은 $f(0)$ 이므로 극댓값과 극솟값의 차는
 $|f(-4)-f(0)|=|(-64+96+c)-c|$
 $=32$

- 13 $f'(x)=0$ 은 이차방정식이고 두 실근이 α, β 이므로
 $f'(\alpha)=0, f'(\beta)=0$
즉, 함수 $f(x)$ 의 극값은 $f(\alpha), f(\beta)$
(ㄴ)에서
 $\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2}=26 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
(ㄷ)에서 $(\beta-\alpha)^2=100$ 이므로 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $\sqrt{100+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2}=26$
 $100+\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=676$
 $\therefore \{f(\beta)-f(\alpha)\}^2=576$
따라서 극댓값과 극솟값의 차는
 $|f(\beta)-f(\alpha)|=\sqrt{\{f(\beta)-f(\alpha)\}^2}$
 $=\sqrt{576}=24$

- 14 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로
 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하자.
(ㄴ)에서 원점을 지나므로 $f(0)=0$ 에서 $c=0$
 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 이므로
 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
(ㄷ)에서 $f'(-1)=0$ 이므로
 $3-2a+b=0 \quad \therefore 2a-b=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
(ㄹ)에서 $f'(1-x)=f'(1+x)$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면
 $f'(-1)=f'(3)$
즉, $f'(3)=0$ 이므로
 $27+6a+b=0 \quad \therefore 6a+b=-27 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면
 $a=-3, b=-9$
 $\therefore f(x)=x^3-3x^2-9x$
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	5 극대	↘	-27 극소	↗

- 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극솟값 -27 을 갖는다.

II-2 03 함수의 그래프

1 함수의 그래프

문제

106~109쪽

01-1 답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $f(x) = -x^3 + 3x + 1$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

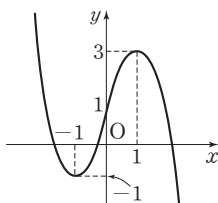
x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$	3 극대	$\searrow$

또 $f(0) = 1$ 이므로 y 축과 만

나는 점의 좌표는 $(0, 1)$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그

래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ 에서

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

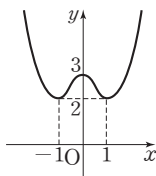
$$x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	2 극소	$\nearrow$	3 극대	$\searrow$	2 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.



02-1 답 $a < -3$ 또는 $a > 3$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 4 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로

다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D

라 하면 $D > 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = a^2 - 9 > 0, (a+3)(a-3) > 0$$

$$\therefore a < -3 \text{ 또는 } a > 3$$

02-2 답 $1 \leq a \leq 4$

$$f(x) = 3x^3 + (a+2)x^2 + ax + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 9x^2 + 2(a+2)x + a$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x) = 0$ 이

중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x) = 0$ 의 판별식을

D 라 하면 $D \leq 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = (a+2)^2 - 9a \leq 0, a^2 - 5a + 4 \leq 0$$

$$(a-1)(a-4) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq a \leq 4$$

02-3 답 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 또는 $0 < a < 4$

$f(x)$ 는 삼차함수이므로 $a \neq 0$ ㉠

$$f(x) = ax^3 + (a+2)x^2 + (a-1)x - 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2(a+2)x + a - 1$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식

$f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = (a+2)^2 - 3a(a-1) > 0, 2a^2 - 7a - 4 < 0$$

$$(2a+1)(a-4) < 0 \quad \therefore -\frac{1}{2} < a < 4 \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } -\frac{1}{2} < a < 0 \text{ 또는 } 0 < a < 4$$

03-1 답 (1) $a > \frac{7}{4}$ (2) $\sqrt{3} < a < 2$

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 9x - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6ax + 9$$

(1) 함수 $f(x)$ 가 $-2 < x < 2$ 에서

극댓값을 갖고, $x > 2$ 에서 극

솟값을 가지려면 방정식

$f'(x) = 0$ 이 $-2 < x < 2$ 에서

한 실근을 갖고, $x > 2$ 에서 다른 한 실근을 가져야 한다.

$f'(-2) > 0$ 이어야 하므로

$$12 + 12a + 9 > 0 \quad \therefore a > -\frac{7}{4} \quad \dots\dots ㉠$$

$f'(2) < 0$ 이어야 하므로

$$12 - 12a + 9 < 0 \quad \therefore a > \frac{7}{4} \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } a > \frac{7}{4}$$

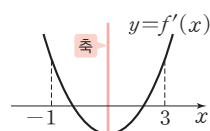
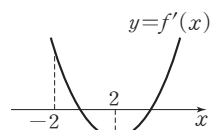
(2) 함수 $f(x)$ 가 $-1 < x < 3$ 에서

극댓값과 극솟값을 모두 가지

려면 방정식 $f'(x) = 0$ 이

$-1 < x < 3$ 에서 서로 다른 두

실근을 가져야 한다.



방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D>0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=9a^2-27>0, (a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})>0$$

$$\therefore a<-\sqrt{3} \text{ 또는 } a>\sqrt{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$f'(-1)>0$ 이어야 하므로

$$3+6a+9>0 \quad \therefore a>-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$f'(3)>0$ 이어야 하므로

$$27-18a+9>0 \quad \therefore a<2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉓}$$

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=a$ 이므로

$$-1<a<3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉔}$$

$$\textcircled{㉑} \sim \textcircled{㉔} \text{에서 } \sqrt{3}<a<2$$

04-1 답 $-1<a<0$ 또는 $a>0$

$$f(x)=3x^4+8x^3-6ax^2 \text{에서}$$

$$f'(x)=12x^3+24x^2-12ax=12x(x^2+2x-a)$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $12x(x^2+2x-a)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 방정식 $x^2+2x-a=0$ 은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x=0$ 이 방정식 $x^2+2x-a=0$ 의 근이 아니어야 하므로

$$a \neq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉕}$$

방정식 $x^2+2x-a=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D>0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=1+a>0 \quad \therefore a>-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉖}$$

$$\textcircled{㉕}, \textcircled{㉖} \text{에서 } -1<a<0 \text{ 또는 } a>0$$

04-2 답 $a=-2$ 또는 $a \geq \frac{1}{4}$

$$f(x)=x^4+2(a-1)x^2+4ax+3 \text{에서}$$

$$f'(x)=4x^3+4(a-1)x+4a=4\{x^3+(a-1)x+a\} \\ =4(x+1)(x^2-x+a)$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 하나만 가지려면 방정식

$4(x+1)(x^2-x+a)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 방정식 $x^2-x+a=0$ 의 한 근이 -1 이거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 방정식 $x^2-x+a=0$ 의 한 근이 -1 이면

$$1+1+a=0 \quad \therefore a=-2$$

(ii) 방정식 $x^2-x+a=0$ 이 중근 또는 허근을 가지려면 판별식을 D 라 할 때, $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$D=1-4a \leq 0 \quad \therefore a \geq \frac{1}{4}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a=-2 \text{ 또는 } a \geq \frac{1}{4}$$

2 함수의 최댓값과 최솟값

문제

111~114쪽

05-1 답 (1) 최댓값: 20, 최솟값: 0

(2) 최댓값: 7, 최솟값: -6

(1) $f(x)=-x^3+3x^2$ 에서

$$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$$

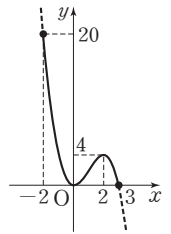
$f'(x)=0$ 인 x 의 값은

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	0	...	2	...	3
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	20	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$	4 극대	$\searrow$	0

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 20, 최솟값은 0이다.



(2) $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+7$ 에서

$$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$$

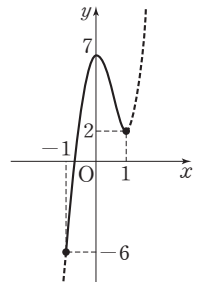
$f'(x)=0$ 인 x 의 값은

$$x=0 \text{ 또는 } x=1 \quad (\because -1 \leq x \leq 1)$$

구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	-6	$\nearrow$	7 극대	$\searrow$	2

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 7, 최솟값은 -6이다.



06-1 답 -11

$$f(x)=-x^3+3x^2+a \text{에서}$$

$$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	a	$\nearrow$	$a+4$ 극대	$\searrow$	$a-16$

이때 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $a+4$ 이므로

$$a+4=9 \quad \therefore a=5$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$a-16=5-16=-11$$

06-2 ㉡ 5

$$f(x)=x^3-3x^2-9x+a \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

구간 $[-2, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	3	...	4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$a-2$	$\nearrow$	$a+5$ 극대	$\searrow$	$a-27$ 극소	$\nearrow$	$a-20$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $M=a+5$, 최솟값은

$$m=a-27 \text{이므로 } M+m=-12 \text{에서}$$

$$a+5+a-27=-12$$

$$\therefore a=5$$

06-3 ㉡ 3

$$f(x)=ax^4-4ax^3+b \text{에서}$$

$$f'(x)=4ax^3-12ax^2=4ax^2(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=3 \text{ (} \because 1 \leq x \leq 4 \text{)}$$

$a>0$ 이므로 구간 $[1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	3	...	4
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-3a+b$	$\searrow$	$-27a+b$ 극소	$\nearrow$	b

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 b , 최솟값은 $-27a+b$ 이므로

$$b=9, -27a+b=0 \quad \therefore a=\frac{1}{3}$$

$$\therefore ab=\frac{1}{3} \times 9=3$$

07-1 ㉡ 8

오른쪽 그림과 같이 직사각형의

꼭짓점을 A, B, C, D라 하고 점

A의 x 좌표를 a 라 하면

$$A(a, -a^2+3),$$

$$D(a, a^2-3) \text{ (단, } 0 < a < \sqrt{3} \text{)}$$

$$\overline{AB}=2a, \overline{AD}=-2a^2+6 \text{이므로}$$

로 직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a)=2a(-2a^2+6)=-4a^3+12a$$

$$\therefore S'(a)=-12a^2+12=-12(a+1)(a-1)$$

$$S'(a)=0 \text{인 } a \text{의 값은 } a=1 \text{ (} \because 0 < a < \sqrt{3} \text{)}$$

$0 < a < \sqrt{3}$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	1	...	$\sqrt{3}$
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$	8 극대	$\searrow$	

따라서 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 8이다.

07-2 ㉡ 8

점 P의 x 좌표를 a 라 하면

$$P(a, a(a-4)^2) \text{ (단, } 0 < a < 4 \text{)}$$

$\overline{OH}=a, \overline{PH}=a(a-4)^2$ 이므로 삼각형 POH의 넓이를

$S(a)$ 라 하면

$$S(a)=\frac{1}{2} \times a \times a(a-4)^2$$

$$=\frac{1}{2}a^4-4a^3+8a^2$$

$$\therefore S'(a)=2a^3-12a^2+16a=2a(a-2)(a-4)$$

$$S'(a)=0 \text{인 } a \text{의 값은 } a=2 \text{ (} \because 0 < a < 4 \text{)}$$

$0 < a < 4$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	2	...	4
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$	8 극대	$\searrow$	

따라서 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 8이다.

08-1 ㉡ 32

오른쪽 그림과 같이 잘라 내는 사

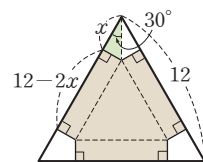
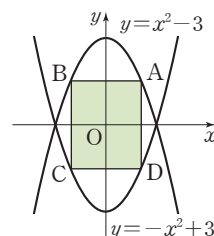
각형의 긴 변의 길이를 x 라 하면

상자의 밑면인 정삼각형의 한 변

의 길이는 $12-2x$ 이므로

$$x>0, 12-2x>0$$

$$\therefore 0 < x < 6$$



또 삼각기둥의 높이를 h 라 하면

$$h = x \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

상자의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(12-2x)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}x = x^3 - 12x^2 + 36x$$

$$\therefore V'(x) = 3x^2 - 24x + 36 = 3(x-2)(x-6)$$

$$V'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=2 \text{ } (\because 0 < x < 6)$$

$0 < x < 6$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	6
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	32 극대	↘	

따라서 부피 $V(x)$ 의 최댓값은 32이다.

08-2 [답 6]

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면

$$r+h=9 \quad \therefore h=9-r$$

이때 $r>0$, $h>0$ 이므로

$$0 < r < 9$$

원기둥의 부피를 $V(r)$ 라 하면

$$V(r) = \pi r^2(9-r) = \pi(9r^2 - r^3)$$

$$\therefore V'(r) = \pi(18r - 3r^2) = 3\pi r(6-r)$$

$$V'(r)=0 \text{인 } r \text{의 값은 } r=6 \text{ } (\because 0 < r < 9)$$

$0 < r < 9$ 에서 함수 $V(r)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	...	6	...	9
$V'(r)$		+	0	-	
$V(r)$		↗	108π 극대	↘	

따라서 부피 $V(r)$ 는 $r=6$ 일 때 최대이다.

- 1 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 a , b 이므로 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...	b	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$		↘	극소	↗	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다.

- 2 $f(x) = x^3 + ax^2 + ax + 1$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3a \leq 0, \quad a(a-3) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 3$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

- 3 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3x$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-1, 2)$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$ 이

$-1 < x < 2$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 9a^2 - 9 > 0, \quad (a+1)(a-1) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$f'(-1) > 0$ 이어야 하므로

$$3 - 6a + 3 > 0 \quad \therefore a < 1 \quad \dots\dots ㉡$$

$f'(2) > 0$ 이어야 하므로

$$12 + 12a + 3 > 0 \quad \therefore a > -\frac{5}{4} \quad \dots\dots ㉢$$

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=-a$ 이므로 $-1 < -a < 2 \quad \therefore -2 < a < 1 \quad \dots\dots ㉣$

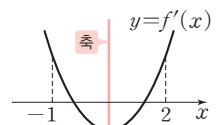
㉠~㉣에서

$$-\frac{5}{4} < a < -1$$

- 4 $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 8$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + 1 = -(3x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \text{ } (\because 0 \leq x \leq 2)$$



연습문제

115~116쪽

1 ④ 2 ③ 3 $-\frac{5}{4} < a < -1$ 4 ②

5 21 6 12 7 11 8 8 9 $\frac{16}{3}\pi$

10 16 11 0 12 ⑤ 13 $\frac{256}{3}\pi$

구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	8	↗	9 극대	↘	6

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 9, 최솟값은 6이므로 구하는 합은

$$9+6=15$$

5 $f(x) = -ax^3 + 3ax^2 + b$ 에서

$$f'(x) = -3ax^2 + 6ax = -3ax(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

$a>0$ 이므로 구간 $[-1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	2	...	4
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$4a+b$	↘	b 극소	↗	$4a+b$ 극대	↘	$-16a+b$

함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $4a+b$, 최솟값은 $-16a+b$ 이므로
 $4a+b=24$, $-16a+b=4$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=20$

$$\therefore a+b=21$$

6 $f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x + 2$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - a^2 = (x+a)(3x-a)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x=-a \text{ 또는 } x=\frac{a}{3}$$

구간 $[-a, a]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-a$	...	$\frac{a}{3}$	...	a
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	a^3+2	↘	$-\frac{5}{27}a^3+2$ 극소	↗	a^3+2

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-\frac{5}{27}a^3+2$ 이므로

$$-\frac{5}{27}a^3+2=\frac{14}{27}, a^3=8$$

$$\therefore a=2 (\because a>0)$$

함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$M=a^3+2=8+2=10$$

$$\therefore a+M=2+10=12$$

7 점 P의 x 좌표를 a 라 하면 $P(a, a^2+1)$ 이므로

$$\overline{AP}^2 = a^2 + (a^2-1)^2 = a^4 - a^2 + 1$$

$$\overline{BP}^2 = (a-4)^2 + a^4 = a^4 + a^2 - 8a + 16$$

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = l(a) \text{라 하면}$$

$$l(a) = 2a^4 - 8a + 17$$

$$\therefore l'(a) = 8a^3 - 8 = 8(a-1)(a^2+a+1)$$

$$l'(a)=0 \text{인 } a \text{의 값은 } a=1 (\because a \text{는 실수})$$

함수 $l(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	...	1	...
$l'(a)$	-	0	+
$l(a)$	↘	11 극소	↗

따라서 $l(a) = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값은 11이다.

8 $f(x) = x^2 - 6x + 9$ 라 하면 $f'(x) = 2x - 6$

접점의 좌표는 $(a, a^2 - 6a + 9)$ 이고 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(a) = 2a - 6$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (a^2 - 6a + 9) = (2a - 6)(x - a)$$

$$\therefore y = (2a - 6)x - a^2 + 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①에 $y=0$ 을 대입하면

$$(2a - 6)x - a^2 + 9 = 0$$

$$\therefore x = \frac{(a+3)(a-3)}{2(a-3)} = \frac{a+3}{2}$$

①에 $x=0$ 을 대입하면 $y = -a^2 + 9$

접선 ①과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a) = \frac{1}{2} \times \frac{a+3}{2} \times (-a^2 + 9)$$

$$= -\frac{1}{4}(a^3 + 3a^2 - 9a - 27)$$

$$\therefore S'(a) = -\frac{1}{4}(3a^2 + 6a - 9) = -\frac{3}{4}(a+3)(a-1)$$

$S'(a)=0$ 인 a 의 값은 $a=1 (\because 0 < a < 3)$

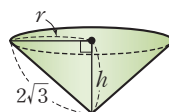
$0 < a < 3$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	1	...	3
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		↗	8 극대	↘	

따라서 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 8이다.

9 모선의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면

$$r^2 + h^2 = 12 \quad \therefore r^2 = 12 - h^2$$



이때 $h > 0$, $12 - h^2 > 0$ 이므로 $0 < h < 2\sqrt{3}$

원뿔의 부피를 $V(h)$ 라 하면

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}(12 - h^2)h = \frac{\pi}{3}(12h - h^3)$$

$$\therefore V'(h) = \frac{\pi}{3}(12 - 3h^2) = -\pi(h+2)(h-2)$$

$$V'(h) = 0 \text{인 } h \text{의 값은 } h = 2 \quad (\because 0 < h < 2\sqrt{3})$$

$0 < h < 2\sqrt{3}$ 에서 함수 $V(h)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	0	...	2	...	$2\sqrt{3}$
$V'(h)$		+	0	-	
$V(h)$		$\nearrow$	$\frac{16}{3}\pi$ 극대	$\searrow$	

따라서 부피 $V(h)$ 의 최댓값은 $\frac{16}{3}\pi$ 이다.

10 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + k$ 에서

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

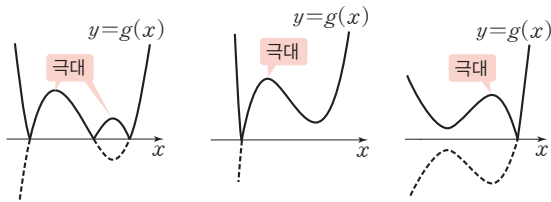
$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$k+7$ 극대	$\searrow$	$k-20$ 극소	$\nearrow$

한편 함수 $f(x)$ 의 두 극값의 부호에 따라 함수

$g(x) = |f(x)|$ 의 그래프의 개형은 다음과 같이 세 가지 경우가 있다.



따라서 함수 $g(x)$ 가 2개의 극댓값을 가지려면 함수 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값의 부호가 서로 반대이어야 하므로 $(k+7)(k-20) < 0$

$$\therefore -7 < k < 20 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{또 } g(a) = |k+7| = k+7, \quad g(b) = |k-20| = -k+20$$

$$\text{이므로 } |g(a) - g(b)| > 9 \text{에서}$$

$$|k+7+k-20| > 9, \quad |2k-13| > 9$$

$$2k-13 < -9 \text{ 또는 } 2k-13 > 9$$

$$\therefore k < 2 \text{ 또는 } k > 11 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } -7 < k < 2 \text{ 또는 } 11 < k < 20$$

따라서 정수 k 는 $-6, -5, \dots, 1, 12, 13, \dots, 19$ 의 16개이다.

11 $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - (k-1)x^2 + 2kx$ 에서

$$f'(x) = -2x^3 - 2(k-1)x + 2k$$

$$= -2(x-1)(x^2+x+k)$$

함수 $f(x)$ 가 극솟값을 가지려면 방정식

$-2(x-1)(x^2+x+k) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 방정식 $x^2+x+k=0$ 은 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x=1$ 이 방정식 $x^2+x+k=0$ 의 근이 아니어야 하므로

$$1+1+k \neq 0 \quad \therefore k \neq -2 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

방정식 $x^2+x+k=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$D = 1 - 4k > 0 \quad \therefore k < \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{9}, \textcircled{10}$ 에서

$$k < -2 \text{ 또는 } -2 < k < \frac{1}{4}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 0이다.

12 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \therefore c = \frac{1}{2}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ f'(x) & (x > 0) \end{cases} \text{이고 } g(x) \text{가 } x=0 \text{에서 미분가}$$

능하므로

$$f'(0) = 0 \quad \therefore b = 0$$

$$\therefore f(x) = x^3 + ax^2 + \frac{1}{2}$$

$$\neg. g(0) + g'(0) = f(0) + f'(0) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$\neg. f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x+2a) \text{이므로 } f'(x) = 0 \text{인}$$

$$x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x = -\frac{2}{3}a$$

함수 $g(x)$ 의 최솟값이 $\frac{1}{2}$ 보다 작으므로 $x \geq 0$ 에서 함

수 $f(x)$ 의 최솟값이 $\frac{1}{2}$ 보다 작다.

그런데 $-\frac{2}{3}a < 0$ 이면 $x > 0$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다. 즉, $x \geq 0$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값이 $f(0) = \frac{1}{2}$ 이 되므로 이는 조건에 모순이다.

따라서 $-\frac{2}{3}a > 0$ 이므로 $a < 0$

$$\therefore g(1) = f(1) = 1 + a + \frac{1}{2} = a + \frac{3}{2} < \frac{3}{2}$$

ㄷ. 함수 $g(x)$ 의 최솟값이 0이면 $x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0이다.

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$-\frac{2}{3}a$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{4}{27}a^3 + \frac{1}{2}$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $\frac{4}{27}a^3 + \frac{1}{2}$ 이므로

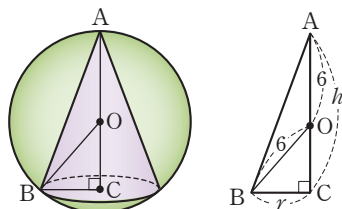
$$\frac{4}{27}a^3 + \frac{1}{2} = 0, a^3 = -\frac{27}{8} \quad \therefore a = -\frac{3}{2} (\because a < 0)$$

따라서 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ 이므로

$$g(2) = f(2) = 8 - 6 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

- 13 다음 그림과 같이 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하자.



삼각형 OBC는 직각삼각형이므로

$$r^2 + (h-6)^2 = 6^2$$

$$\therefore r^2 = -h^2 + 12h$$

$$h > 0, h-6 < 6 \text{ 이므로 } 0 < h < 12$$

원뿔의 부피를 $V(h)$ 라 하면

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}(-h^2 + 12h)h$$

$$= \frac{\pi}{3}(-h^3 + 12h^2)$$

$$\therefore V'(h) = \frac{\pi}{3}(-3h^2 + 24h) = -\pi h(h-8)$$

$$V'(h) = 0 \text{ 인 } h \text{ 의 값은 } h = 8 (\because 0 < h < 12)$$

$0 < h < 12$ 에서 함수 $V(h)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	0	...	8	...	12
$V'(h)$		+	0	-	
$V(h)$		$\nearrow$	$\frac{256}{3}\pi$ 극대	$\searrow$	

따라서 부피 $V(h)$ 의 최댓값은 $\frac{256}{3}\pi$ 이다.

II-2 04 방정식과 부등식에의 활용

방정식에의 활용

개념 CHECK

118쪽

1 답 (1) 1 (2) 3 (3) 3

문제

119~121쪽

01-1 답 (1) 2 (2) 1

(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

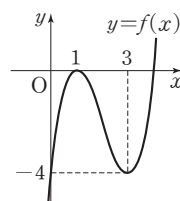
$$f'(x) = 0 \text{ 인 } x \text{ 의 값은}$$

$$x=1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



다른 풀이

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{ 인 } x \text{ 의 값은}$$

$$x=1 \text{ 또는 } x=3$$

극값이 $f(1), f(3)$ 이므로

$$f(1)f(3) = 0 \times (-4) = 0$$

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(2) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

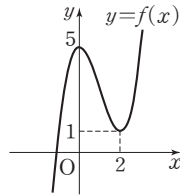
$$f'(x) = 0 \text{ 인 } x \text{ 의 값은}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	1 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



다른 풀이

$$f(x)=x^3-3x^2+5 \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

극값이 $f(0), f(2)$ 이므로

$$f(0)f(2)=5 \times 1 > 0$$

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

01-2 답 (1) 4 (2) 2

(1) $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+3$ 이라 하면

$$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12$$

$$=4(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

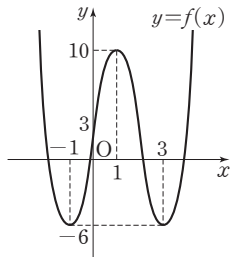
$$x=-1 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-6 극소	$\nearrow$	10 극대	$\searrow$	-6 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 네 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



(2) $f(x)=x^4-2x^2-1$ 이라 하면

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$$

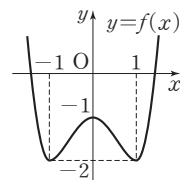
$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-2 극소	$\nearrow$	-1 극대	$\searrow$	-2 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



02-1 답 (1) $-2 < a < 2$

(2) $a=-2$ 또는 $a=2$

(3) $a < -2$ 또는 $a > 2$

주어진 방정식에서 $x^3-3x=a$ 이므로 이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=x^3-3x$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 개수와 같다.

$$f(x)=x^3-3x \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2 극대	$\searrow$	-2 극소	$\nearrow$

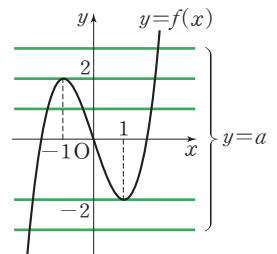
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로 교점이 각각 3개, 2개, 1개가 되도록 직선 $y=a$ 를 그어 보면 구하는 a 의 값의 범위는

(1) $-2 < a < 2$

(2) $a=-2$ 또는 $a=2$

(3) $a < -2$ 또는 $a > 2$



다른 풀이

$$f(x)=x^3-3x-a \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 극값은

$$f(-1)=-a+2, f(1)=-a-2$$

(1) 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f(-1)f(1)<0$ 이어야 하므로

$$(-a+2)(-a-2)<0$$

$$(a-2)(a+2)<0$$

$$\therefore -2 < a < 2$$

(2) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $f(-1)f(1)=0$ 이어야 하므로

$$(-a+2)(-a-2)=0$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=2$$

(3) 한 개의 실근을 가지려면 $f(-1)f(1)>0$ 이어야 하므로 $(-a+2)(-a-2)>0$

$$(a-2)(a+2)>0$$

$$\therefore a < -2 \text{ 또는 } a > 2$$

03-1 [답] (1) $2 < a < 7$

(2) $-25 < a < 2$

주어진 방정식에서 $x^3 - 3x^2 - 9x + 2 = a$ 이므로 이 방정식의 실근은 함수 $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

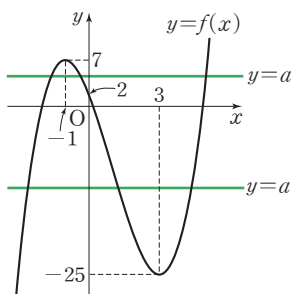
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	7 극대	↘	-25 극소	↗

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y = a$ 를 그어 보면 구하는 a 의 값의 범위는

(1) $2 < a < 7$

(2) $-25 < a < 2$



03-2 [답] (1) $a = -2$ 또는 $a > 0$

(2) $-2 < a < 0$

주어진 방정식에서 $2x^4 - 4x^2 = a$ 이므로 이 방정식의 실근은 함수 $y = 2x^4 - 4x^2$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

$$f(x) = 2x^4 - 4x^2 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 8x^3 - 8x = 8x(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

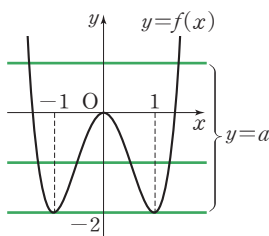
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-2 극소	↗	0 극대	↘	-2 극소	↗

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y = a$ 를 그어 보면 구하는 a 의 값의 범위는

(1) $a = -2$ 또는 $a > 0$

(2) $-2 < a < 0$



2 부등식의 활용

문제

123~124쪽

04-1 [답] 풀이 참조

$$f(x) = x^4 - 4x + 3 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2 + x + 1)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 1$ ($\because x$ 는 실수)

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	0 극소	↗

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 0이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이다.

따라서 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^4 - 4x + 3 \geq 0$ 이 성립한다.

04-2 [답] $a \leq 0$

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - a \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x-1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 0$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-a 극소	↗	-a+1 극대	↘	-a 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-a$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-a \geq 0 \quad \therefore a \leq 0$$

04-3 [답] $a < -6$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 함수 $y = g(x)$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > g(x)$, 즉 $f(x) - g(x) > 0$ 이어야 한다.

$$h(x) = f(x) - g(x) \text{라 하면}$$

$$h(x) = x^4 + 2x^2 - 5x - (-x^2 - 15x + a)$$

$$= x^4 + 3x^2 + 10x - a$$

$$\therefore h'(x) = 4x^3 + 6x + 10 = 2(x+1)(2x^2 - 2x + 5)$$

$h'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ ($\because x$ 는 실수)

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	↘	-a-6 극소	↗

따라서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $-a-6$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $h(x)=f(x)-g(x)>0$ 이 성립하려면
 $-a-6>0 \quad \therefore a<-6$

05-1 [답] (1) $a \geq 4$ (2) $a \leq -16$

(1) $f(x)=x^3-3x^2+a$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=2 (\because x \geq 1)$$

$x \geq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$a-2$	$\searrow$	$a-4$ 극소	$\nearrow$

따라서 $x \geq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $a-4$ 이므로
 $x \geq 1$ 일 때 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$a-4 \geq 0 \quad \therefore a \geq 4$$

(2) $x^3+x^2-4x < x^2+8x-a$ 에서 $x^3-12x+a < 0$

$$f(x)=x^3-12x+a \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

$2 < x < 4$ 일 때, $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는
 $2 < x < 4$ 에서 증가한다.

따라서 $2 < x < 4$ 일 때 $f(x) < 0$ 이 성립하려면

$$f(4) \leq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$64-48+a \leq 0 \quad \therefore a \leq -16$$

05-2 [답] $a < 1$

구간 $[0, 2]$ 에서 $f(x) < g(x)$ 이라면 $f(x)-g(x) < 0$ 이어야 한다.

$$h(x)=f(x)-g(x) \text{라 하면}$$

$$h(x)=-2x^2+2x+a-(x^3-2x^2-x+3)$$

$$=-x^3+3x+a-3$$

$$\therefore h'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$$

$$h'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 (\because 0 \leq x \leq 2)$$

구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$h'(x)$		+	0	-	
$h(x)$	$a-3$	$\nearrow$	$a-1$ 극대	$\searrow$	$a-5$

따라서 구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최댓값은 $a-1$ 이므로 구간 $[0, 2]$ 에서 $f(x) < g(x)$, 즉 $h(x) < 0$ 이 성립하려면

$$a-1 < 0 \quad \therefore a < 1$$

연습문제

125~126쪽

- 1 1 2 ③ 3 27 4 ① 5 ④
 6 $0 < k < 20$ 7 11 8 3 9 ②
 10 $-4 < k < 4$ 11 3 12 ② 13 ⑤

1 $f(x)=2x^3+5x^2-4x+1$ 이라 하면

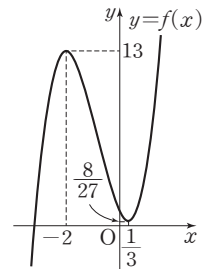
$$f'(x)=6x^2+10x-4=2(x+2)(3x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-2 \text{ 또는 } x=\frac{1}{3}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	$\frac{1}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	13 극대	$\searrow$	$\frac{8}{27}$ 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



다른 풀이

$$f(x)=2x^3+5x^2-4x+1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=6x^2+10x-4=2(x+2)(3x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-2 \text{ 또는 } x=\frac{1}{3}$$

$$\text{극값이 } f(-2), f\left(\frac{1}{3}\right) \text{이므로}$$

$$f(-2)f\left(\frac{1}{3}\right)=13 \times \frac{8}{27} > 0$$

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

2 주어진 방정식에서 $3x^4+4x^3-12x^2=-a$ 이므로 이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=3x^4+4x^3-12x^2$ 의 그래프와 직선 $y=-a$ 의 교점의 개수와 같다.

$$f(x)=3x^4+4x^3-12x^2 \text{이라 하면}$$

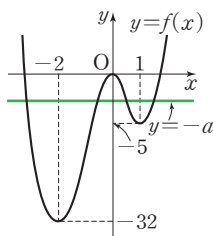
$$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-2 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-32 극소	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$	-5 극소	$\nearrow$

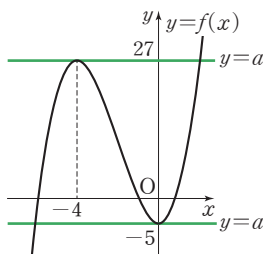
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 교점이 4개가 되도록 직선 $y=-a$ 를 그어 보면 a 의 값의 범위는 $-5 < -a < 0$
 $\therefore 0 < a < 5$
 따라서 정수 a 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.



- 3 두 곡선 $y=x^3+3x^2-x-5$, $y=-3x^2-x+a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $x^3+3x^2-x-5=-3x^2-x+a$, 즉 $x^3+6x^2-5=a$ 가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
 $f(x)=x^3+6x^2-5$ 라 하면
 $f'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-4$ 또는 $x=0$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	27 극대	$\searrow$	-5 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 교점이 2개가 되도록 직선 $y=a$ 를 그어 보면 $a=-5$ 또는 $a=27$
 따라서 양수 a 의 값은 27이다.



다른 풀이

$x^3+3x^2-x-5=-3x^2-x+a$ 에서
 $x^3+6x^2-a-5=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $f(x)=x^3+6x^2-a-5$ 라 하면
 $f'(x)=3x^2+12x=3x(x+4)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-4$ 또는 $x=0$
 함수 $f(x)$ 의 극값은 $f(-4)=-a+27$, $f(0)=-a-5$
 방정식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $f(-4)f(0)=0$ 이어야 하므로
 $(-a+27)(-a-5)=0$
 $\therefore a=27$ ($\because a>0$)

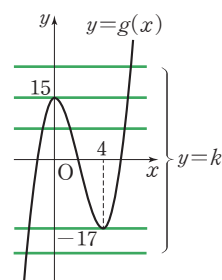
- 4 방정식 $x^3-6x^2+15=k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=x^3-6x^2+15$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같다.
 $g(x)=x^3-6x^2+15$ 라 하면
 $g'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$
 $g'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=4$
 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	15 극대	$\searrow$	-17 극소	$\nearrow$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 k 의 값에 따른 실근의 개수 $f(k)$ 는

$$f(k)=\begin{cases} 1 & (k < -17 \text{ 또는 } k > 15) \\ 2 & (k = -17 \text{ 또는 } k = 15) \\ 3 & (-17 < k < 15) \end{cases}$$

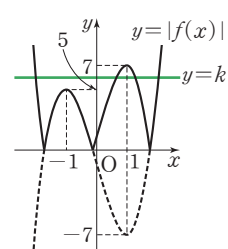
따라서 함수 $f(k)$ 는 $k=-17$, $k=15$ 에서 불연속이므로 모든 a 의 값의 합은 $-17+15=-2$



- 5 방정식 $|f(x)|=k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같다.
 $f(x)=3x^3-9x-1$ 에서
 $f'(x)=9x^2-9=9(x+1)(x-1)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	-7 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 교점이 4개가 되도록 직선 $y=k$ 를 그어 보면 k 의 값의 범위는 $5 < k < 7$
 따라서 정수 k 의 값은 6이다.



- 6 $5x^3+2x^2-8x=3x^3-x^2+4x+k$ 에서
 $2x^3+3x^2-12x=k$
 이 방정식의 세 실근 α, β, γ 에 대하여 $\alpha < \beta < 0 < \gamma$ 이려면 서로 다른 두 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근을 가져야 한다.

$$f(x)=2x^3+3x^2-12x \text{라 하면}$$

$$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$$

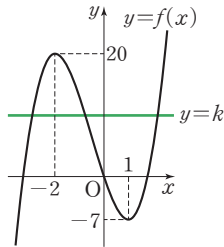
$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	20 극대	$\searrow$	-7 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 조건을 만족시키도록 직선 $y=k$ 를 그어 보면 구하는 k 의 값의 범위는
 $0 < k < 20$



- 7 $x^4+6x^3-x^2-9x \geq 2x^3-x^2+7x-a$ 에서
 $x^4+4x^3-16x+a \geq 0$
 $f(x)=x^4+4x^3-16x+a$ 라 하면
 $f'(x)=4x^3+12x^2-16=4(x+2)^2(x-1)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-2$ 또는 $x=1$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$a+16$	$\searrow$	$a-11$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $a-11$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면
 $a-11 \geq 0 \quad \therefore a \geq 11$
 따라서 상수 a 의 최솟값은 11이다.

- 8 $f(x) \geq 3g(x)$ 에서
 $x^3+3x^2-k \geq 3(2x^2+3x-10)$
 $\therefore x^3-3x^2-9x-k+30 \geq 0$
 $h(x)=x^3-3x^2-9x-k+30$ 이라 하면
 $h'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
 $h'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

구간 $[-1, 4]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	$-k+35$	$\searrow$	$-k+3$ 극소	$\nearrow$	$-k+10$

구간 $[-1, 4]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $-k+3$ 이므로 구간 $[-1, 4]$ 에서 $h(x) \geq 0$ 이 성립하려면
 $-k+3 \geq 0$
 $\therefore k \leq 3$
 따라서 실수 k 의 최댓값은 3이다.

- 9 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+k$ 라 하면
 $f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은
 $x=-1$ 또는 $x=0$ ($\because -2 \leq x \leq 0$)
 $-2 \leq x \leq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$k+32$	$\searrow$	$k-5$ 극소	$\nearrow$	k

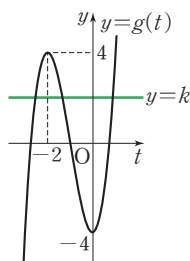
따라서 $-2 \leq x \leq 0$ 일 때, $|f(x)| < 20$, 즉
 $-20 < f(x) < 20$ 이 성립하려면
 $(f(x) \text{의 최솟값}) > -20, (f(x) \text{의 최댓값}) < 20$
 $k-5 > -20, k+32 < 20$
 $\therefore -15 < k < -12$
 따라서 정수 k 는 $-14, -13$ 의 2개이다.

- 10 $f(x)=-x^3+2x$ 라 하면 $f'(x)=-3x^2+2$
 점점의 좌표를 $(t, -t^3+2t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-3t^2+2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(-t^3+2t)=(-3t^2+2)(x-t)$
 $\therefore y=(-3t^2+2)x+2t^3$
 이 직선이 점 $(-2, k)$ 를 지나므로
 $k=(-3t^2+2)(-2)+2t^3$
 $\therefore 2t^3+6t^2-4=k \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$
 서로 다른 세 접선을 그을 수 있으려면 방정식 $\textcircled{7}$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.
 $g(t)=2t^3+6t^2-4$ 라 하면
 $g'(t)=6t^2+12t=6t(t+2)$
 $g'(t)=0$ 인 t 의 값은
 $t=-2$ 또는 $t=0$

함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	-2	...	0	...
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$	↗	4 극대	↘	-4 극소	↗

함수 $y=g(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 교점이 3개가 되도록 직선 $y=k$ 를 그어 보면 구하는 k 의 값의 범위는 $-4 < k < 4$



다른 풀이

㉠에서 $g(t)=2t^3+6t^2-4-k$ 라 하면
 $g'(t)=6t^2+12t=6t(t+2)$
 $g'(t)=0$ 인 t 의 값은 $t=-2$ 또는 $t=0$
 극값은 $g(-2)$, $g(0)$ 이고 방정식 $g(t)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 $g(-2)g(0)<0$ 에서
 $(4-k)(-4-k)<0$, $(k-4)(k+4)<0$
 $\therefore -4 < k < 4$

11 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

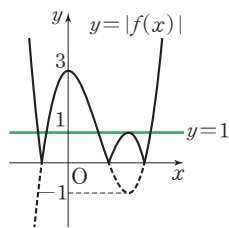
$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

(㉠)에서 $f'(0)=0$, $f(0)=3$ 이므로

$$b=0, c=3$$

$$\therefore f(x)=x^3+ax^2+3$$

(㉡)에서 함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가지므로 극솟값도 반드시 갖고, (㉢)에서 방정식 $|f(x)|=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 개수와 같으므로 오른쪽 그림과 같이 5개의 점에서 만나려면 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 -1 이어야 한다.



$f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$ 이므로 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2a}{3}$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=-\frac{2a}{3}$ 에서 극솟값 -1 을 가지므로

$$f\left(-\frac{2a}{3}\right)=-1 \text{에서}$$

$$-\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{9}a^3+3=-1, a^3=-27$$

$$\therefore a=-3 \quad (\because a \text{는 실수})$$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3$ 이므로

$$f(3)=27-27+3=3$$

12 $h(x)=f(x)-g(x)$ 에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

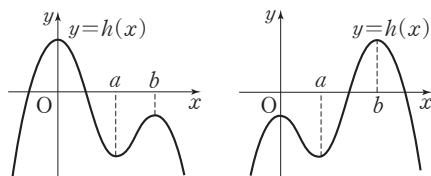
주어진 그래프에서 $h'(x)=0$ 인 x 의 값은 $0, a, b$ 이므로 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	a	...	b	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

ㄱ. $0 < x < a$ 에서 $h'(x) < 0$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 감소한다.

ㄴ. 함수 $h(x)$ 는 $x=b$ 에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $h(0)h(b) < 0$ 에서 두 극댓값의 부호가 서로 반대이므로 함수 $y=h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $h(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.

13 (㉠)에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

(㉡)에서 $f(0)=f'(0)$ 이므로 $c=b$

$g(x)=f(x)-f'(x)$ 라 하면

$$g(x)=x^3+ax^2+bx+b-(3x^2+2ax+b)$$

$$=x^3+(a-3)x^2+(-2a+b)x$$

$g(0)=0$ 이고 (㉢)에서 $x \geq -1$ 인

모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq 0$ 이

므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개

형은 오른쪽 그림과 같다. 즉, 함수

$g(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이다.

$$\therefore g'(0)=0$$

$$g'(x)=3x^2+2(a-3)x-2a+b$$

이므로 $g'(0)=0$ 에서

$$-2a+b=0 \quad \therefore b=2a$$

$g(x)=x^3+(a-3)x^2$ 이고 (㉣)에서 $g(-1) \geq 0$ 이므로

$$-1+a-3 \geq 0 \quad \therefore a \geq 4$$

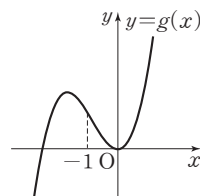
$f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$ 이므로

$$f(2)=8+4a+4a+2a=10a+8$$

$$a \geq 4 \text{이므로 } 10a+8 \geq 48$$

$$\therefore f(2) \geq 48$$

따라서 구하는 $f(2)$ 의 최솟값은 48이다.



II-2 05 속도와 가속도

1 속도와 가속도

개념 CHECK

128쪽

1 [답] (1) 속도: -5, 가속도: -6 (2) 속도: 0, 가속도: 8

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하자.

$$(1) v = \frac{dx}{dt} = -6t + 7, a = \frac{dv}{dt} = -6$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 속도는

$$v = -12 + 7 = -5$$

$t=2$ 에서의 점 P의 가속도는

$$a = -6$$

$$(2) v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 4t - 4, a = \frac{dv}{dt} = 6t - 4$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 속도는

$$v = 12 - 8 - 4 = 0$$

$t=2$ 에서의 점 P의 가속도는

$$a = 12 - 4 = 8$$

2 [답] (1) 3 (2) 1

(1) 위치가 0이면 $x=0$ 에서

$$-2t^2 + 4t + 6 = 0, t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$(t+1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 3 (\because t > 0)$$

따라서 점 P의 위치가 0이 되는 시각은 3이다.

(2) 시간 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -4t + 4$$

속도가 0이면 $v=0$ 에서

$$-4t + 4 = 0 \quad \therefore t = 1$$

따라서 점 P의 속도가 0이 되는 시각은 1이다.

문제

129~134쪽

01-1 [답] 30

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 8t - 5$$

점 P가 원점을 지나면 위치가 0이므로 $x=0$ 에서

$$t^3 - 4t^2 - 5t = 0, t(t+1)(t-5) = 0$$

$$\therefore t = 5 (\because t > 0)$$

따라서 원점을 지나는 시각은 $t=5$ 이므로 그때의 속도는

$$v = 75 - 40 - 5 = 30$$

01-2 [답] -24

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -3t^2 + 20, a = \frac{dv}{dt} = -6t$$

점 P의 속도가 -28이면 $v = -28$ 에서

$$-3t^2 + 20 = -28, t^2 - 16 = 0$$

$$(t+4)(t-4) = 0 \quad \therefore t = 4 (\because t > 0)$$

따라서 $t=4$ 에서의 가속도는

$$a = -24$$

01-3 [답] 54

시간 t 에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$$f'(t) = 9t^2 - 4t - 8, g'(t) = 3t^2 + 8t + 10$$

두 점 P, Q의 속도가 같으면 $f'(t) = g'(t)$ 에서

$$9t^2 - 4t - 8 = 3t^2 + 8t + 10$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0, (t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = 3 (\because t > 0)$$

$t=3$ 에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$$f(3) = 81 - 18 - 24 = 39$$

$$g(3) = 27 + 36 + 30 = 93$$

따라서 구하는 두 점 사이의 거리는

$$|93 - 39| = 54$$

02-1 [답] -12

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -3t^2 + 12t, a = \frac{dv}{dt} = -6t + 12$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$-3t^2 + 12t = 0, -3t(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 4 (\because t > 0)$$

따라서 $t=4$ 에서의 가속도는

$$a = -24 + 12 = -12$$

02-2 [답] $2 < t < 4$

시간 t 에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$$f'(t) = 6t^2 - 12t, g'(t) = 2t - 8$$

두 점이 서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호는 서로 반대이므로 $f'(t)g'(t) < 0$ 에서

$$(6t^2 - 12t)(2t - 8) < 0$$

$$12t(t-2)(t-4) < 0$$

이때 $t > 0$ 이므로 $(t-2)(t-4) < 0$

$$\therefore 2 < t < 4$$

02-3 ㉡ -2

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 2at + b$$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때, 즉 $t=1$ 에서의 속도는 0이므로

$$3 + 2a + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 $t=1$ 에서의 위치는 0이므로

$$1 + a + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -2$, $b = 1$

$$\therefore v = 3t^2 - 4t + 1$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$3t^2 - 4t + 1 = 0, (3t-1)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{3} \text{ 또는 } t = 1$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도는 $\frac{dv}{dt} = 6t - 4$ 이므로 $t = \frac{1}{3}$

에서의 가속도는 $2 - 4 = -2$

03-1 ㉡ (1) 45 m (2) -30 m/s

물 로켓의 t 초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 20 - 10t$$

(1) 물 로켓이 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$$v = 0 \text{에서}$$

$$20 - 10t = 0 \quad \therefore t = 2$$

따라서 $t=2$ 에서의 높이는

$$x = 25 + 40 - 20 = 45(\text{m})$$

(2) 물 로켓이 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로 $x=0$ 에서

$$25 + 20t - 5t^2 = 0, t^2 - 4t - 5 = 0$$

$$(t+1)(t-5) = 0 \quad \therefore t = 5 (\because t > 0)$$

따라서 $t=5$ 에서의 속도는

$$v = 20 - 50 = -30(\text{m/s})$$

03-2 ㉡ -150

물체의 t 초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = a + 2bt$$

물체가 최고 높이에 도달할 때, 즉 $t=3$ 에서의 속도는 0이므로

$$a + 6b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 $t=3$ 에서의 높이가 75 m이므로

$$30 + 3a + 9b = 75 \quad \therefore a + 3b = 15 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 30$, $b = -5$

$$\therefore ab = -150$$

04-1 ㉡ ㄴ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $0 < t < 2$ 에서 t 의 값이 커질수록 그 점에서의 접선의 기울기는 점점 작아지므로 속도는 감소한다.

ㄴ. $t=2$ 에서의 위치는 3, $t=5$ 에서의 위치는 -2 이므로 위치의 변화량은

$$-2 - 3 = -5$$

ㄷ. $t=4$ 에서 $x=0$ 이므로 원점을 지난다.

ㄹ. $t=2$, $t=5$ 인 점에서의 접선의 기울기는 0이고 좌우에서 접선의 기울기의 부호가 바뀌므로 $0 < t < 6$ 에서 운동 방향을 두 번 바꾼다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

05-1 ㉡ (1) 5 m/s (2) 3 m/s

이 사람이 2 m/s의 속도로 움직이므로 t 초 동안 움직이는 거리는 $2t$ m

t 초 후 가로등 바로 밑에

서 이 사람의 그림자 끝까지

지의 거리를 x m라 하면

오른쪽 그림에서

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ 이므로

$$2.5 : x = 1.5 : (x - 2t)$$

$$1.5x = 2.5x - 5t$$

$$\therefore x = 5t$$

(1) 그림자 끝이 움직이는 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 5(\text{m/s})$$

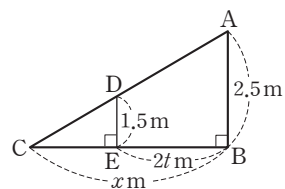
(2) 그림자의 길이를 l m라 하면 $l = \overline{CE}$ 이므로

$$l = \overline{CB} - \overline{EB} = x - 2t$$

$$= 5t - 2t = 3t$$

따라서 그림자의 길이의 변화율은

$$\frac{dl}{dt} = 3(\text{m/s})$$



06-1 ㉡ (1) 88π (2) 480π

시각 t 에서의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $10+t$

밑면의 반지름의 길이가 12가 될 때의 시각은

$$10 + t = 12 \quad \therefore t = 2$$

(1) 원기둥의 겉넓이를 S 라 하면

$$S = 2\pi(10+t)^2 + 2\pi(10+t) \times 20$$

$$= 2\pi(10+t)(30+t)$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = 2\pi(30+t) + 2\pi(10+t)$$

따라서 $t=2$ 에서의 겉넓이의 변화율은

$$2\pi \times 32 + 2\pi \times 12 = 88\pi$$

(2) 원기둥의 부피를 V 라 하면

$$V = \pi(10+t)^2 \times 20 = 20\pi(10+t)^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dV}{dt} &= 20\pi \times 2(10+t) \\ &= 40\pi(10+t) \end{aligned}$$

따라서 $t=2$ 에서의 부피의 변화율은

$$40\pi \times 12 = 480\pi$$

06-2 130

t 초 후의 점 A의 위치는 $(3t, 0)$, 점 B의 위치는 $(0, 2t)$

이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{9t^2 + 4t^2} = \sqrt{13}t$$

선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 S 라 하면

$$S = (\sqrt{13}t)^2 = 13t^2$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = 26t$$

따라서 $t=5$ 에서의 넓이의 변화율은 130이다.

연습문제

135~136쪽

- | | | | | |
|------|--------|---------|---------------------------------|-----|
| 1 2 | 2 ④ | 3 7 | 4 ④ | 5 ① |
| 6 ③ | 7 ㄷ, ㄹ | 8 1 m/s | 9 $16\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ | |
| 10 ① | 11 5 | 12 ① | 13 -20 m/s | |

1 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -3t^2 + 12t + 3 = -3(t-2)^2 + 15$$

따라서 속도 v 는 $t=2$ 일 때 최대이다.

2 t 초 후의 자동차의 속도를 $v \text{ m/s}$ 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 24 - 6t$$

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로

$$24 - 6t = 0 \quad \therefore t = 4$$

따라서 4초 동안 자동차가 움직인 거리는

$$x = 96 - 48 = 48(\text{m})$$

3 시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$$f'(t) = -2t + 6, \quad g'(t) = 3t^2 + 7t - 6$$

두 점 P, Q의 속도가 같으면

$$-2t + 6 = 3t^2 + 7t - 6, \quad t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$(t+4)(t-1) = 0 \quad \therefore t = 1 (\because t > 0)$$

$$\therefore a = 1$$

$t=1$ 에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$$f(1) = -1 + 6 = 5$$

$$g(1) = 1 + \frac{7}{2} - 6 + \frac{1}{2} = -1$$

이때 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$b = |-1 - 5| = 6$$

$$\therefore a + b = 1 + 6 = 7$$

4 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 24t + 36$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$3t^2 - 24t + 36 = 0, \quad (t-2)(t-6) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 6$$

따라서 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 6이다.

5 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 2at + b$$

점 P가 $t=1$ 에서 운동 방향을 바꾸므로 $t=1$ 에서의 속도는 0이다.

$$\therefore 3 + 2a + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도는 $\frac{dv}{dt} = 6t + 2a$ 이고 $t=2$ 에

서의 가속도가 0이므로

$$12 + 2a = 0 \quad \therefore a = -6$$

이를 ①에 대입하면

$$3 - 12 + b = 0 \quad \therefore b = 9$$

$$\therefore a + b = -6 + 9 = 3$$

6 물체의 t 초 후의 속도를 $v \text{ m/s}$ 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 30 - 10t$$

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$$30 - 10t = 0 \quad \therefore t = 3 \quad \therefore a = 3$$

$t=3$ 에서의 높이는

$$x = 90 - 45 = 45 \quad \therefore b = 45$$

$$\therefore b - a = 45 - 3 = 42$$

7 ㄱ. $t=1, t=3, t=5$ 인 점에서의 접선의 기울기는 0이고 좌우에서 접선의 기울기의 부호가 바뀌므로 운동 방향을 처음으로 바꾸는 시각은 $t=1$ 이다.

ㄴ. $t=4$ 인 점에서의 접선의 기울기는 음수이므로 속도는 0이 아니다.

ㄷ. $t=6$ 일 때 위치는 0이므로 원점을 지난다.

르. $0 < t < 1$ 과 $3 < t < 5$ 인 점에서의 접선의 기울기는 음수이므로 출발할 때와 같은 방향으로 움직이는 총 시간은 $1+2=3$ 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

- 8 이 사람이 t 초 동안 움직이는 거리는 $1.5t$ m

그림자의 길이를 l m라 하면

오른쪽 그림에서

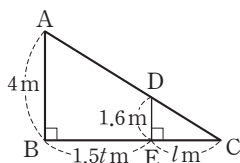
$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ 이므로

$$4 : (1.5t + l) = 1.6 : l$$

$$2.4t + 1.6l = 4l$$

$$2.4l = 2.4t \quad \therefore l = t$$

따라서 길이의 변화율은 $\frac{dl}{dt} = 1$ (m/s)



- 9 오른쪽 그림과 같이 t 초 후의

수면의 높이를 h cm, 반지름

의 길이를 x cm라 하면 매초

1 cm씩 높아지므로 $h = t$

직각삼각형 OAB에서 $OA = 10 - t$ (cm)이므로

$$x^2 + (10 - t)^2 = 10^2 \quad \therefore x^2 = -t^2 + 20t$$

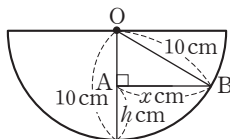
수면의 넓이를 S cm²라 하면

$$S = \pi x^2 = \pi(-t^2 + 20t)$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = \pi(-2t + 20)$$

따라서 $t=2$ 에서의 넓이의 변화율은

$$\pi(-4 + 20) = 16\pi \text{ (cm}^2/\text{s)}$$



- 10 오른쪽 그림과 같이 t 초 후의 수

면의 높이를 h cm, 반지름의 길

이를 x cm라 하면 매초 1 cm의

속도로 수면이 상승하므로

$$h = t$$

$\triangle OAB \sim \triangle O'AB'$ 이므로

$$30 : 10 = t : x$$

$$10t = 30x \quad \therefore x = \frac{t}{3}$$

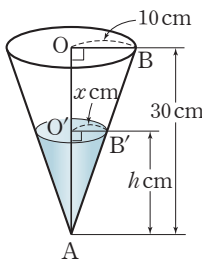
물의 부피를 V cm³라 하면

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{t}{3}\right)^2 \times t = \frac{\pi}{27}t^3 \quad \therefore \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{9}t^2$$

따라서 수면의 높이가 6 cm가 될 때의 시각은 $t=6$ 이므로

$t=6$ 에서의 부피의 변화율은

$$\frac{\pi}{9} \times 36 = 4\pi \text{ (cm}^3/\text{s)}$$



- 11 두 점 P, Q의 시각 t 에서의 속도를 각각 v_P , v_Q , 가속도를 각각 a_P , a_Q 라 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = 4t^3 - 12t^2, \quad v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = 2kt$$

$$a_P = \frac{dv_P}{dt} = 12t^2 - 24t, \quad a_Q = \frac{dv_Q}{dt} = 2k$$

가속도가 서로 같으면

$$12t^2 - 24t = 2k$$

$$\therefore 6t^2 - 12t - k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$t > 0$ 에서 가속도가 같아지는 순간이 2번이려면 이차방정

식 $\textcircled{1}$ 이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 가져야 한다.

$\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 36 + 6k > 0$$

$$\therefore k > -6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 두 근의 합과 곱이 모두 양수이어야 하므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$2 > 0, \quad -\frac{k}{6} > 0$$

$$\therefore k < 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 에서

$$-6 < k < 0$$

따라서 정수 k 는 $-5, -4, -3, -2, -1$ 의 5개이다.

- 12 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 10t + a = 3\left(t - \frac{5}{3}\right)^2 + a - \frac{25}{3}$$

점 P가 움직이는 방향이 바뀌지 않으려면 $t \geq 0$ 에서 $v \geq 0$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } a - \frac{25}{3} \geq 0 \text{ 이어야 하므로 } a \geq \frac{25}{3}$$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 9이다.

- 13 오른쪽 그림과 같이 공이 경사면에 충돌

할 때 공의 중심과 바닥 사이의 거리를

x m라 하면

$$x \sin 30^\circ = 0.5$$

$$\frac{1}{2}x = 0.5 \quad \therefore x = 1$$

즉, 공과 경사면이 만날 때의 높이가 1 m이므로

$$21 - 5t^2 = 1, \quad t^2 = 4$$

$$\therefore t = 2 \quad (\because t > 0)$$

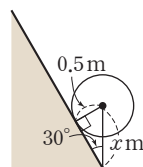
즉, $t=2$ 일 때 공이 경사면과 충돌한다.

t 초 후의 속도는

$$h'(t) = -10t$$

따라서 $t=2$ 에서의 속도는

$$h'(2) = -20 \text{ (m/s)}$$



III-1 01 부정적분

1 부정적분

개념 CHECK

139쪽

1 답 (1) $2x+C$ (2) x^3+C (3) x^4+C (4) $-x^6+C$

2 답 (1) $f(x)=5$ (2) $f(x)=x-3$
(3) $f(x)=3x^2+1$ (4) $f(x)=10x^4-6x$

3 답 (1) x^4-2x^3 (2) x^4-2x^3+C

문제

140~141쪽

01-1 답 0

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C \right)' = x^2 - x$$

$$\therefore f(1) = 1 - 1 = 0$$

01-2 답 2

$$3x^2 + 4x + a = (bx^3 + cx^2 - x + 1)'$$

$$= 3bx^2 + 2cx - 1$$

즉, $3=3b$, $4=2c$, $a=-1$ 이므로
 $a=-1$, $b=1$, $c=2$
 $\therefore a+b+c=2$

01-3 답 18

$$(x-2)f(x) = (2x^3 - 6x^2 + C)'$$

$$= 6x^2 - 12x$$

$$= 6x(x-2)$$

따라서 $f(x)=6x$ 이므로 $f(3)=18$

01-4 답 -1

$$f(x) = (x^3 + ax^2 + bx)'$$

$$= 3x^2 + 2ax + b$$

이때 $f(0) = -3$ 에서 $b = -3$
 또 $f'(x) = 6x + 2a$ 이므로 $f'(0) = 4$ 에서
 $2a = 4 \quad \therefore a = 2$
 $\therefore a+b = 2 + (-3) = -1$

02-1 답 32

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int f(x) dx \right\} = f(x) \text{이므로}$$

$$f(x) = 5x^3 - 2x^2$$

$$\therefore f(2) = 40 - 8 = 32$$

02-2 답 -1

$$f(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2) \right\} dx$$

$$= x^3 - 3x^2 + C$$

이때 $f(1) = 1$ 에서
 $1 - 3 + C = 1 \quad \therefore C = 3$
 따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ 이므로
 $f(-1) = -1 - 3 + 3 = -1$

02-3 답 9

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int (2x^2 - 3x) dx \right\} = 2x^2 - 3x,$$

$$\int \left\{ \frac{d}{dx}(3x^2) \right\} dx = 3x^2 + C \text{이므로}$$

$$f(x) = (2x^2 - 3x) + (3x^2 + C) = 5x^2 - 3x + C$$

이때 $f(0) = 1$ 에서 $C = 1$
 따라서 $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$ 이므로
 $f(-1) = 5 + 3 + 1 = 9$

02-4 답 $f(x)=x^2-4x+9$

$$f(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx}(x^2 - 4x) \right\} dx$$

$$= x^2 - 4x + C$$

$$= (x-2)^2 + C - 4$$

이때 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 5이므로
 $C - 4 = 5 \quad \therefore C = 9$
 $\therefore f(x) = x^2 - 4x + 9$

2 부정적분의 계산

개념 CHECK

143쪽

1 답 (1) $-3x+C$ (2) $\frac{1}{5}x^5+C$
(3) $\frac{1}{10}x^{10}+C$ (4) $\frac{1}{21}x^{21}+C$

2 답 (1) $2x^3+C$ (2) $\frac{1}{2}x^2+3x+C$
(3) $\frac{2}{3}x^3-2x^2+2x+C$ (4) $\frac{1}{4}x^4-x^2+x+C$

03-1 [답] (1) $\frac{3}{2}x^4 + x^3 - \frac{9}{2}x^2 + C$

(2) $y + \frac{1}{2}xy^2 + x^2y^3 + C$

(3) $\frac{1}{3}x^3 + x + C$

(4) $x^2 + 8x + C$

$$\begin{aligned} (1) & \int 3x(x-1)(2x+3) dx \\ &= \int (6x^3 + 3x^2 - 9x) dx \\ &= 6 \int x^3 dx + 3 \int x^2 dx - 9 \int x dx \\ &= \frac{3}{2}x^4 + x^3 - \frac{9}{2}x^2 + C \end{aligned}$$

(2) 적분변수가 y 이므로 x 를 상수로 보고 y 에 대하여 적분하면

$$\begin{aligned} & \int (1 + xy + 3x^2y^2) dy \\ &= \int dy + x \int y dy + 3x^2 \int y^2 dy \\ &= y + \frac{1}{2}xy^2 + x^2y^3 + C \\ (3) & \int \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} dx = \int \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 - 1} dx \\ &= \int (x^2 + 1) dx \\ &= \int x^2 dx + \int dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) & \int (2 + \sqrt{x})^2 dx + \int (2 - \sqrt{x})^2 dx \\ &= \int \{(2 + \sqrt{x})^2 + (2 - \sqrt{x})^2\} dx \\ &= \int (2x + 8) dx \\ &= 2 \int x dx + 8 \int dx \\ &= x^2 + 8x + C \end{aligned}$$

04-1 [답] 22

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (2x + 4) dx \\ &= x^2 + 4x + C \end{aligned}$$

이때 $f(0) = 1$ 에서 $C = 1$

따라서 $f(x) = x^2 + 4x + 1$ 이므로

$$f(3) = 9 + 12 + 1 = 22$$

04-2 [답] 5

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가 $3x^2 - 2x + 1$ 이므로

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (3x^2 - 2x + 1) dx \\ &= x^3 - x^2 + x + C \end{aligned}$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로 $f(-1) = 1$ 에서

$$-1 - 1 - 1 + C = 1 \quad \therefore C = 4$$

따라서 $f(x) = x^3 - x^2 + x + 4$ 이므로

$$f(1) = 1 - 1 + 1 + 4 = 5$$

04-3 [답] 8

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가 $3x^2 - 6x + 12$ 이므로

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 12$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (3x^2 - 6x + 12) dx \\ &= x^3 - 3x^2 + 12x + C \end{aligned}$$

이때 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, -2)$ 를 지나므로 $f(1) = -2$ 에서

$$1 - 3 + 12 + C = -2 \quad \therefore C = -12$$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 12x - 12$ 이고 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(2, k)$ 를 지나므로 $f(2) = k$ 에서

$$8 - 12 + 24 - 12 = k$$

$$\therefore k = 8$$

05-1 [답] $f(x) = 3x^2 - 8x + 6$

$xf(x) - F(x) = 2x^3 - 4x^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) - F'(x) = 6x^2 - 8x$$

$$f(x) + xf'(x) - f(x) = 6x^2 - 8x$$

$$xf'(x) = 6x^2 - 8x = x(6x - 8)$$

$$\therefore f'(x) = 6x - 8$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (6x - 8) dx \\ &= 3x^2 - 8x + C \end{aligned}$$

이때 $f(2) = 2$ 에서

$$12 - 16 + C = 2 \quad \therefore C = 6$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 - 8x + 6$$

05-2 **답 -6**

$\int f(x) dx = (x+1)f(x) - 3x^4 - 4x^3$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + (x+1)f'(x) - 12x^3 - 12x^2$$

$$(x+1)f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1)$$

$$\therefore f'(x) = 12x^2$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int 12x^2 dx$$

$$= 4x^3 + C$$

$$\text{이때 } f(1) = 2 \text{에서 } 4 + C = 2 \quad \therefore C = -2$$

$$\text{따라서 } f(x) = 4x^3 - 2 \text{이므로}$$

$$f(-1) = -4 - 2 = -6$$

06-1 **답 2**

$$\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} = 6x^2 + 6x - 2 \text{에서}$$

$$f(x) + g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x + C_1$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} = 6x^2 - 6x - 4 \text{에서}$$

$$f(x) - g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + C_2$$

$$\text{이때 } f(0) = 0, g(0) = 1 \text{에서}$$

$$f(0) + g(0) = C_1 \quad \therefore C_1 = 1$$

$$f(0) - g(0) = C_2 \quad \therefore C_2 = -1$$

$$\text{따라서 } f(x) + g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1,$$

$$f(x) - g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x - 1 \text{이므로 두 식을 연립하여 풀면}$$

$$f(x) = 2x^3 - 3x, g(x) = 3x^2 + x + 1$$

$$\therefore f(1) + g(-1) = (2 - 3) + (3 - 1 + 1) = 2$$

06-2 **답 2**

$$\frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} = 2x - 1 \text{에서}$$

$$f(x) - g(x) = x^2 - x + C_1$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = 6x^2 + 8x - 6 \text{에서}$$

$$f(x)g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 6x + C_2$$

$$\text{이때 } f(1) = -2, g(1) = 4 \text{에서}$$

$$f(1) - g(1) = 1 - 1 + C_1 \quad \therefore C_1 = -6$$

$$f(1)g(1) = 2 + 4 - 6 + C_2 \quad \therefore C_2 = -8$$

$$\therefore f(x) - g(x) = x^2 - x - 6,$$

$$f(x)g(x) = 2x^3 + 4x^2 - 6x - 8 = 2(x+1)(x^2 + x - 4)$$

$$\text{그런데 } f(1) = -2, g(1) = 4 \text{이므로}$$

$$f(x) = x^2 + x - 4, g(x) = 2x + 2$$

$$\therefore f(0) + g(2) = -4 + (4 + 2) = 2$$

07-1 **답 2**

(i) $x \geq 0$ 일 때,

$$f(x) = \int (2x - 2) dx = x^2 - 2x + C_1$$

(ii) $x < 0$ 일 때,

$$f(x) = \int (-2x - 2) dx = -x^2 - 2x + C_2$$

$$(i), (ii) \text{에서 } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + C_1 & (x \geq 0) \\ -x^2 - 2x + C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\text{이때 } f(-2) = 1 \text{에서 } -4 + 4 + C_2 = 1 \quad \therefore C_2 = 1$$

$$\text{함수 } f(x) \text{는 } x=0 \text{에서 연속이므로 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \text{에서}$$

$$C_2 = C_1 \quad \therefore C_1 = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 0) \\ -x^2 - 2x + 1 & (x < 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(-1) + f(1) = (-1 + 2 + 1) + (1 - 2 + 1) = 2$$

07-2 **답 21**

(i) $x \geq 1$ 일 때,

$$f(x) = \int (3x^2 - 1) dx = x^3 - x + C_1$$

(ii) $x < 1$ 일 때,

$$f(x) = \int (4x - 2) dx = 2x^2 - 2x + C_2$$

$$(i), (ii) \text{에서 } f(x) = \begin{cases} x^3 - x + C_1 & (x \geq 1) \\ 2x^2 - 2x + C_2 & (x < 1) \end{cases}$$

$$\text{이때 곡선 } y=f(x) \text{가 점 } (-1, 1) \text{을 지나므로 } f(-1) = 1 \text{에서}$$

$$2 + 2 + C_2 = 1 \quad \therefore C_2 = -3$$

$$\text{함수 } f(x) \text{는 } x=1 \text{에서 연속이므로 } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \text{에서}$$

$$2 - 2 + C_2 = 1 - 1 + C_1 \quad \therefore C_1 = -3$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x^3 - x - 3 & (x \geq 1) \\ 2x^2 - 2x - 3 & (x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(3) = 27 - 3 - 3 = 21$$

연습문제

149~151쪽

1 ④	2 ④	3 ①	4 25	5 -11
6 ①	7 -1	8 ③	9 -10	10 ②
11 -22	12 ③	13 -11	14 ②	15 -2
16 ⑤	17 ①	18 -7	19 1	20 ⑤

1 $f(x)=F'(x)=x^2+a$
 이때 $f(1)=2$ 에서 $1+a=2 \quad \therefore a=1$
 따라서 $f(x)=x^2+1$ 이므로 $f(2)=4+1=5$

2 $g(x)=\{x^4f(x)+2\}'=4x^3f(x)+x^4f'(x)$
 $\therefore g(1)=4f(1)+f'(1)$
 $=-4+5=1$

3 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$
 $=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}$
 $=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{-h} \times (-1)$
 $=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$
 $f(x)=\int (x^2-3x+4)dx$ 에서 $f'(x)=x^2-3x+4$ 이므로
 $f'(2)=4-6+4=2$
 따라서 구하는 값은 $2f'(2)=2 \times 2=4$

4 $(x-1)f(x)=4x^3-x^2+k$ 이므로 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $0=4-1+k \quad \therefore k=-3$
 $\therefore (x-1)f(x)=4x^3-x^2-3$
 $= (x-1)(4x^2+3x+3)$
 따라서 $f(x)=4x^2+3x+3$ 이므로
 $f(2)=16+6+3=25$

5 $f(x)=\int \left\{ \frac{d}{dx}(2x^4-ax^2) \right\} dx$
 $=2x^4-ax^2+C$
 이때 $f(0)=2$ 에서 $C=2$
 즉, $f(x)=2x^4-ax^2+2$ 이므로
 $f'(x)=8x^3-2ax$
 $f'(2)=4$ 에서 $64-4a=4 \quad \therefore a=15$
 따라서 $f(x)=2x^4-15x^2+2$ 이므로
 $f(1)=2-15+2=-11$

6 $f(x)=\int \left(\frac{1}{3}x^2+3x+2 \right) dx - \int \left(\frac{1}{3}x^2+x \right) dx$
 $=\int (2x+2) dx$
 $=x^2+2x+C$
 이때 $f(-1)=2$ 에서 $1-2+C=2 \quad \therefore C=3$
 따라서 $f(x)=x^2+2x+3$ 이므로
 $f(2)=4+4+3=11$

7 $f(x)=\int \frac{2x^2}{x+2} dx + \int \frac{x-6}{x+2} dx$
 $=\int \frac{2x^2+x-6}{x+2} dx$
 $=\int \frac{(x+2)(2x-3)}{x+2} dx$
 $=\int (2x-3) dx = x^2-3x+C$

이때 $f(0)=-5$ 에서 $C=-5$
 따라서 $f(x)=x^2-3x-5$ 이므로
 $f(-1)=1+3-5=-1$

8 $f'(x)=6x+8$ 이므로
 $f(x)=\int f'(x) dx = \int (6x+8) dx = 3x^2+8x+C_1$
 이때 $f(1)=8$ 에서
 $3+8+C_1=8 \quad \therefore C_1=-3$
 따라서 $f(x)=3x^2+8x-3$ 이므로 $f(x)$ 를 적분하면
 $\int (3x^2+8x-3) dx = x^3+4x^2-3x+C$

9 $f(x)=\int f'(x) dx = \int 6x dx = 3x^2+C_1$
 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분이 $F(x)$ 이므로
 $F(x)=\int f(x) dx = \int (3x^2+C_1) dx$
 $=x^3+C_1x+C_2$
 이때 $f(0)=F(0)$ 에서 $C_1=C_2$
 또 $f(1)=F(1)$ 에서
 $3+C_1=1+C_1+C_2 \quad \therefore C_2=2$
 따라서 $C_1=2, C_2=2$ 이므로
 $F(x)=x^3+2x+2$
 $\therefore F(-2)=-8-4+2=-10$

10 $f(x)=\int f'(x) dx = \int (3x^2-3) dx = x^3-3x+C$
 $f'(x)=3(x+1)(x-1)$ 이므로 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은
 $x=-1$ 또는 $x=1$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

이때 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이므로 $f(1)=-1$ 에서
 $1-3+C=-1 \quad \therefore C=1$
 $\therefore f(x)=x^3-3x+1$
 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대이므로 구하는 극
 댓값은
 $f(-1)=-1+3+1=3$

$$\begin{aligned}
11 \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h)-f(x+2h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h)-f(x)+f(x)-f(x+2h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \times (-1) \\
&\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h)-f(x)}{2h} \times 2 \\
&= -f'(x) - 2f'(x) = -3f'(x) \\
&\text{즉, } -3f'(x) = 9x^2 - 3x + 6 \text{ 이므로} \\
&f'(x) = -3x^2 + x - 2 \\
&\therefore f(x) = \int f'(x) dx \\
&= \int (-3x^2 + x - 2) dx \\
&= -x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C \\
&\text{이때 } f(-2) = 2 \text{에서} \\
&8 + 2 + 4 + C = 2 \quad \therefore C = -12 \\
&\text{따라서 } f(x) = -x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 12 \text{ 이므로} \\
&f(2) = -8 + 2 - 4 - 12 = -22
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12 \quad & \text{곡선 } y=f(x) \text{ 위의 점 } (x, f(x)) \text{에서의 접선의 기울기} \\
&\text{가 } -8x+k \text{ 이므로} \\
&f'(x) = -8x+k \\
&\therefore f(x) = \int f'(x) dx \\
&= \int (-8x+k) dx \\
&= -4x^2 + kx + C \\
&\text{이때 곡선 } y=f(x) \text{가 점 } (0, 3) \text{을 지나므로 } f(0)=3 \text{에서} \\
&C=3 \\
&\therefore f(x) = -4x^2 + kx + 3 \\
&\text{방정식 } f(x)=0 \text{의 모든 근의 합이 } \frac{3}{2} \text{이므로 이차방정식} \\
&\text{의 근과 계수의 관계에 의하여} \\
&-\frac{k}{-4} = \frac{3}{2} \quad \therefore k=6 \\
&\text{따라서 } f(x) = -4x^2 + 6x + 3 \text{ 이므로} \\
&f(-1) = -4 - 6 + 3 = -7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
13 \quad & \int f(x) dx = (x-1)f(x) + x^3 - 3x \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\
&f(x) = f(x) + (x-1)f'(x) + 3x^2 - 3 \\
&(x-1)f'(x) = -3x^2 + 3 = (x-1)(-3x-3) \\
&\therefore f'(x) = -3x-3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore f(x) = \int f'(x) dx \\
&= \int (-3x-3) dx \\
&= -\frac{3}{2}x^2 - 3x + C \\
&\text{이때 } f(0)=1 \text{에서 } C=1 \\
&\text{따라서 } f(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 3x + 1 \text{ 이므로} \\
&f(2) = -6 - 6 + 1 = -11
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
14 \quad & F(x) = xf(x) - 2x^3 + 3x^2 + 5 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\
&F'(x) = f(x) + xf'(x) - 6x^2 + 6x \\
&f(x) = f(x) + xf'(x) - 6x^2 + 6x \\
&xf'(x) = 6x^2 - 6x = x(6x-6) \\
&\therefore f'(x) = 6x-6 \\
&\therefore f(x) = \int f'(x) dx \\
&= \int (6x-6) dx \\
&= 3x^2 - 6x + C \\
&= 3(x-1)^2 + C-3 \\
&\text{이때 함수 } f(x) \text{의 최솟값이 } 1 \text{이므로} \\
&C-3=1 \quad \therefore C=4 \\
&\text{따라서 } f(x) = 3x^2 - 6x + 4 \text{ 이므로} \\
&f(2) = 12 - 12 + 4 = 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
15 \quad & \frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+3 \text{에서} \\
&f(x)+g(x)=x^2+3x+C_1 \\
&\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2+8x-1 \text{에서} \\
&f(x)g(x)=x^3+4x^2-x+C_2 \\
&\text{이때 } f(0)=2, g(0)=-5 \text{에서} \\
&f(0)+g(0)=C_1 \quad \therefore C_1=-3 \\
&f(0)g(0)=C_2 \quad \therefore C_2=-10 \\
&\therefore f(x)+g(x)=x^2+3x-3, \\
&\quad f(x)g(x)=x^3+4x^2-x-10=(x+2)(x^2+2x-5) \\
&\text{그런데 } f(0)=2, g(0)=-5 \text{이므로} \\
&f(x)=x+2, g(x)=x^2+2x-5 \\
&\therefore f(2)+g(-1)=(2+2)+(1-2-5)=-2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
16 \quad & \text{(i) } x \geq 1 \text{일 때,} \\
&\quad f(x) = \int (3x^2-2) dx = x^3 - 2x + C_1 \\
&\text{(ii) } x < 1 \text{일 때,} \\
&\quad f(x) = \int (2x-1) dx = x^2 - x + C_2
\end{aligned}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + C_1 & (x \geq 1) \\ x^2 - x + C_2 & (x < 1) \end{cases}$$

이때 $f(-3) = 10$ 에서

$$9 + 3 + C_2 = 10 \quad \therefore C_2 = -2$$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ 에서

$$1 - 1 + C_2 = 1 - 2 + C_1$$

$$-2 = -1 + C_1 \quad \therefore C_1 = -1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x - 1 & (x \geq 1) \\ x^2 - x - 2 & (x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(3) = 27 - 6 - 1 = 20$$

- 17** $f(x+y) = f(x) + f(y) - xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) \quad \therefore f(0) = 0$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) - xh - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - xh}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h) - f(0)}{h} - x \right\} \\ &= f'(0) - x \\ &= -x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (-x + 4) dx \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 4x + C \end{aligned}$$

이때 $f(0) = 0$ 에서 $C = 0$

$$\text{따라서 } f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x \text{이므로}$$

$$f(2) = -2 + 8 = 6$$

- 18** (나)에서 함수 $f(x)$ 는 삼차함수이므로

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a, b, c, d \text{는 상수, } a \neq 0) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

이를 (다)의 등식에 대입하면

$$ax^3 + bx^2 + cx + d + x(3ax^2 + 2bx + c)$$

$$= 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1$$

$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1$$

$$\text{즉, } 4a = 4, 3b = -3, 2c = -2, d = 1 \text{이므로}$$

$$a = 1, b = -1, c = -1, d = 1$$

$$\therefore f(x) = x^3 - x^2 - x + 1, f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

이를 (다)의 등식에 대입하면

$$3x^2 - 2x - 1 - g'(x) = 3x^2 + x$$

$$\therefore g'(x) = -3x - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore g(x) &= \int g'(x) dx \\ &= \int (-3x - 1) dx \\ &= -\frac{3}{2}x^2 - x + C \end{aligned}$$

$$f(0) = 1 \text{이므로 (가)에서 } g(0) = 1$$

$$\therefore C = 1$$

$$\text{따라서 } g(x) = -\frac{3}{2}x^2 - x + 1 \text{이므로}$$

$$g(2) = -6 - 2 + 1 = -7$$

$$\begin{aligned} \textbf{19} \quad f(x) &= \int f'(x) dx = \int (6x^2 + 12x + 5) dx \\ &= 2x^3 + 6x^2 + 5x + C \end{aligned}$$

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = -x + 1$ 의 접점의 좌표를

(a, b) 라 하면 $f'(a) = -1$ 이므로

$$6a^2 + 12a + 5 = -1, 6a^2 + 12a + 6 = 0$$

$$6(a+1)^2 = 0 \quad \therefore a = -1$$

점 $(-1, b)$ 는 직선 $y = -x + 1$ 위의 점이므로

$$b = 1 + 1 \quad \therefore b = 2$$

점 $(-1, 2)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로 $f(-1) = 2$ 에서

$$-2 + 6 - 5 + C = 2 \quad \therefore C = 3$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 5x + 3 \text{이므로}$$

$$f(-2) = -16 + 24 - 10 + 3 = 1$$

$$\textbf{20} \quad f(x) = \int xg(x) dx \text{에서}$$

$$f'(x) = xg(x)$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} = 4x^3 + 2x \text{에서}$$

$$f'(x) - g'(x) = 4x^3 + 2x$$

$$\therefore xg(x) - g'(x) = 4x^3 + 2x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

즉, 함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 4인 이차함수이므로

$$g(x) = 4x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$g'(x) = 8x + a$$

이를 ①에 대입하면

$$x(4x^2 + ax + b) - (8x + a) = 4x^3 + 2x$$

$$4x^3 + ax^2 + (b-8)x - a = 4x^3 + 2x$$

$$\text{즉, } a = 0, b - 8 = 2 \text{이므로}$$

$$a = 0, b = 10$$

$$\text{따라서 } g(x) = 4x^2 + 10 \text{이므로}$$

$$g(1) = 4 + 10 = 14$$

III-1 02 정적분(1)

정적분

개념 CHECK

154쪽

1 답 (1) 1 (2) 1 (3) 4 (4) $\frac{33}{5}$

$$(1) \int_0^1 2x dx = \left[x^2 \right]_0^1 = 1$$

$$(2) \int_{-1}^0 3x^2 dx = \left[x^3 \right]_{-1}^0 = -(-1) = 1$$

$$(3) \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 = 4$$

$$(4) \int_{-1}^2 x^4 dx = \left[\frac{1}{5}x^5 \right]_{-1}^2 = \frac{32}{5} - \left(-\frac{1}{5} \right) = \frac{33}{5}$$

2 답 (1) -2 (2) $\frac{9}{2}$ (3) $-\frac{5}{3}$ (4) 24

$$(1) \int_{-1}^0 (2x-1) dx = \left[x^2 - x \right]_{-1}^0 = -(1+1) = -2$$

$$(2) \int_1^2 (x+3) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_1^2 = (2+6) - \left(\frac{1}{2} + 3 \right) = \frac{9}{2}$$

$$(3) \int_0^1 (x^2-2) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$$

$$(4) \int_{-1}^3 (x^3+x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^3 = \left(\frac{81}{4} + \frac{9}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = 24$$

문제

155~158쪽

01-1 답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) 16 (3) $\frac{7}{6}$ (4) $\frac{44}{3}$

$$(1) \int_0^2 (x+3)(x-1) dx = \int_0^2 (x^2+2x-3) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right]_0^2 = \frac{8}{3} + 4 - 6 = \frac{2}{3}$$

$$(2) \int_{-2}^2 y(y^2+3y+4) dy = \int_{-2}^2 (y^3+3y^2+4y) dy = \left[\frac{1}{4}y^4 + y^3 + 2y^2 \right]_{-2}^2 = (4+8+8) - (4-8+8) = 16$$

$$(3) \int_0^{-1} (x^2+3x) dx = -\int_{-1}^0 (x^2+3x) dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 = -\left\{ -\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \right) \right\} = \frac{7}{6}$$

$$(4) \int_1^3 \frac{x^3+27}{x+3} dx = \int_1^3 \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3} dx = \int_1^3 (x^2-3x+9) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x \right]_1^3 = \left(9 - \frac{27}{2} + 27 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 9 \right) = \frac{44}{3}$$

01-2 답 2

$$\int_0^k (2x-1) dx = \left[x^2 - x \right]_0^k = k^2 - k$$

즉, $k^2 - k = 2$ 이므로
 $k^2 - k - 2 = 0, (k+1)(k-2) = 0$
 $\therefore k = 2 (\because k > 0)$

02-1 답 (1) 9 (2) $\frac{11}{2}$

$$(1) \int_{-1}^2 (x^2+2x+1) dx - \int_{-1}^2 (2x-1) dx = \int_{-1}^2 \{ (x^2+2x+1) - (2x-1) \} dx = \int_{-1}^2 (x^2+2) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_{-1}^2 = \left(\frac{8}{3} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 2 \right) = 9$$

$$(2) \int_2^3 \frac{x^2}{x-1} dx - \int_3^2 \frac{2x-3}{x-1} dx = \int_2^3 \frac{x^2}{x-1} dx + \int_2^3 \frac{2x-3}{x-1} dx = \int_2^3 \left(\frac{x^2}{x-1} + \frac{2x-3}{x-1} \right) dx = \int_2^3 \frac{x^2+2x-3}{x-1} dx = \int_2^3 \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} dx = \int_2^3 (x+3) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_2^3 = \left(\frac{9}{2} + 9 \right) - (2+6) = \frac{11}{2}$$

02-2 답 1

$$\int_1^3 (2x+k)^2 dx - \int_1^3 (2x-k)^2 dx = \int_1^3 \{ (2x+k)^2 - (2x-k)^2 \} dx = \int_1^3 8kx dx = \left[4kx^2 \right]_1^3 = 36k - 4k = 32k$$

즉, $32k = 32$ 이므로 $k = 1$

03-1 ㉡ (1) 12 (2) $\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}
 (1) & \int_{-1}^1 (3x^2+2x) dx - \int_2^1 (3x^2+2x) dx \\
 &= \int_{-1}^1 (3x^2+2x) dx + \int_1^2 (3x^2+2x) dx \\
 &= \int_{-1}^2 (3x^2+2x) dx \\
 &= \left[x^3 + x^2 \right]_{-1}^2 \\
 &= (8+4) - (-1+1) \\
 &= 12 \\
 (2) & \int_2^4 (x^2-2x) dx - \int_3^4 (x^2-2x) dx + \int_1^2 (x^2-2x) dx \\
 &= \int_1^2 (x^2-2x) dx + \int_2^4 (x^2-2x) dx \\
 &\quad - \int_3^4 (x^2-2x) dx \\
 &= \int_1^4 (x^2-2x) dx - \int_3^4 (x^2-2x) dx \\
 &= \int_1^4 (x^2-2x) dx + \int_4^3 (x^2-2x) dx \\
 &= \int_1^3 (x^2-2x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_1^3 \\
 &= (9-9) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

03-2 ㉡ 6

$$\begin{aligned}
 \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx &= \int_1^5 f(x) dx \text{ 이므로} \\
 \int_1^3 f(x) dx &= \int_1^5 f(x) dx - \int_3^5 f(x) dx \\
 &= 8 - 2 = 6
 \end{aligned}$$

04-1 ㉡ $-\frac{1}{3}$

적분 구간 $[0, 3]$ 을 $x=1$ 을 기준으로 나누면

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \\
 &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^3 (-x^2+2x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_1^3 \\
 &= \frac{1}{3} + (-9+9) - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) \\
 &= -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

04-2 ㉡ $\frac{34}{3}$

절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값을 구하면
 $4-x=0 \quad \therefore x=4$
 $x|4-x| = \begin{cases} x^2-4x & (x \geq 4) \\ -x^2+4x & (x \leq 4) \end{cases}$ 이므로
 $\int_1^5 x|4-x| dx$
 $= \int_1^4 (-x^2+4x) dx + \int_4^5 (x^2-4x) dx$
 $= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_1^4 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \right]_4^5$
 $= \left(-\frac{64}{3} + 32 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 2 \right) + \left(\frac{125}{3} - 50 \right) - \left(\frac{64}{3} - 32 \right)$
 $= \frac{34}{3}$

2 여러 가지 정적분

문제

160~161쪽

05-1 ㉡ -48

$$\begin{aligned}
 & \int_{-3}^3 (4x^3-3x^2+2x+1) dx \\
 &= \int_{-3}^3 (4x^3+2x) dx + \int_{-3}^3 (-3x^2+1) dx \\
 &= 0 + 2 \int_0^3 (-3x^2+1) dx \\
 &= 2 \left[-x^3 + x \right]_0^3 \\
 &= 2(-27+3) = -48
 \end{aligned}$$

05-2 ㉡ 8

$f(-x)=f(x)$ 이므로
 $(-x)^3 f(-x) = -x^3 f(x)$
 $-x f(-x) = -x f(x)$
 $\therefore \int_{-4}^4 (2x^3-3x+2) f(x) dx$
 $= 2 \int_{-4}^4 x^3 f(x) dx - 3 \int_{-4}^4 x f(x) dx + 2 \int_{-4}^4 f(x) dx$
 $= 2 \times 0 - 3 \times 0 + 2 \times 2 \int_0^4 f(x) dx$
 $= 4 \times 2 = 8$

06-1 ㉔ 20

$f(x+3)=f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_2^5 f(x) dx = \int_5^8 f(x) dx \\ &= \int_8^{11} f(x) dx \\ \therefore \int_{-1}^{11} f(x) dx &= \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx \\ &\quad + \int_5^8 f(x) dx + \int_8^{11} f(x) dx \\ &= 4 \int_{-1}^2 f(x) dx \\ &= 4 \times 5 = 20\end{aligned}$$

06-2 ㉔ 12

$f(x+4)=f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 f(x) dx &= \int_3^7 f(x) dx = \int_7^{11} f(x) dx \\ &= \int_{11}^{15} f(x) dx \\ \therefore \int_7^{15} f(x) dx &= \int_7^{11} f(x) dx + \int_{11}^{15} f(x) dx \\ &= 2 \int_{-1}^3 f(x) dx \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

이때 $\int_{-1}^3 f(x) dx$ 의 값을 구하면

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 f(x) dx &= \int_{-1}^0 (3x+3) dx + \int_0^3 (-x+3) dx \\ &= \left[\frac{3}{2}x^2 + 3x \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_0^3 \\ &= -\left(\frac{3}{2}-3\right) + \left(-\frac{9}{2}+9\right) = 6\end{aligned}$$

따라서 ㉔에서

$$\begin{aligned}\int_7^{15} f(x) dx &= 2 \int_{-1}^3 f(x) dx \\ &= 2 \times 6 = 12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 \quad & \int_1^{-2} 4(x+3)(x-1) dx + \int_3^3 (3y-1)(2y+5) dy \\ &= \int_1^{-2} (4x^2+8x-12) dx + 0 \\ &= \left[\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 12x \right]_1^{-2} \\ &= \left(-\frac{32}{3} + 16 + 24 \right) - \left(\frac{4}{3} + 4 - 12 \right) = 36\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \quad & \int_1^a (x+1)^2 dx + \int_a^1 (x-1)^2 dx \\ &= \int_1^a (x+1)^2 dx - \int_1^a (x-1)^2 dx \\ &= \int_1^a \{ (x+1)^2 - (x-1)^2 \} dx \\ &= \int_1^a 4x dx \\ &= \left[2x^2 \right]_1^a \\ &= 2a^2 - 2 \\ \text{즉, } 2a^2 - 2 &= 6 \text{이므로 } a^2 = 4 \\ \therefore a &= 2 \quad (\because a \text{는 자연수})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3 \quad & f(x) = \int_1^3 (t-x)^2 dt - \int_3^1 (2t^2+3) dt \\ &= \int_1^3 (t-x)^2 dt + \int_1^3 (2t^2+3) dt \\ &= \int_1^3 \{ (t^2-2xt+x^2) + (2t^2+3) \} dt \\ &= \int_1^3 (3t^2-2xt+x^2+3) dt \\ &= \left[t^3 - xt^2 + x^2t + 3t \right]_1^3 \\ &= (27-9x+3x^2+9) - (1-x+x^2+3) \\ &= 2x^2-8x+32 \\ &= 2(x-2)^2+24\end{aligned}$$

따라서 $a=2$, $b=24$ 이므로 $a+b=26$

$$\begin{aligned}4 \quad & \int_{-1}^2 f(x) dx - \int_4^2 f(y) dy \\ &= \int_{-1}^2 f(x) dx - \int_4^2 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^4 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^4 (2x+1) dx \\ &= \left[x^2+x \right]_{-1}^4 \\ &= (16+4) - (1-1) = 20\end{aligned}$$

연습문제

162~163쪽

1 36	2 2	3 ③	4 20	5 4
6 -8	7 ②	8 2	9 $\frac{1}{6}$	10 $\frac{20}{3}$
11 ③	12 3	13 -16	14 ①	

$$\begin{aligned}
 5 \quad & \int_{-1}^0 f(x) dx \\
 &= \int_{-1}^5 f(x) dx + \int_5^0 f(x) dx \\
 &= \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx + \int_5^0 f(x) dx \\
 &= 3 + 7 + (-5) = 5 \\
 &\therefore \int_{-1}^0 \{f(x) - 3x^2\} dx = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_{-1}^0 3x^2 dx \\
 &= 5 - \left[x^3 \right]_{-1}^0 \\
 &= 5 - 1 = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6 \quad & \text{함수 } y=f(x) \text{의 그래프에서 } f(x) = \begin{cases} -3x+6 & (x \geq 0) \\ 6 & (x \leq 0) \end{cases} \\
 & \text{이므로} \\
 & xf(x) = \begin{cases} -3x^2+6x & (x \geq 0) \\ 6x & (x \leq 0) \end{cases} \\
 & \therefore \int_{-2}^2 xf(x) dx = \int_{-2}^0 6x dx + \int_0^2 (-3x^2+6x) dx \\
 &= \left[3x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-x^3+3x^2 \right]_0^2 \\
 &= -12 + (-8+12) = -8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7 \quad & \int_{-a}^a f(x) dx \\
 &= \int_{-a}^0 (2x+2) dx + \int_0^a (-x^2+2x+2) dx \\
 &= \left[x^2+2x \right]_{-a}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+2x \right]_0^a \\
 &= -(a^2-2a) + \left(-\frac{1}{3}a^3+a^2+2a \right) \\
 &= -\frac{1}{3}a^3+4a \\
 & F(a) = -\frac{1}{3}a^3+4a \text{라 하면} \\
 & F'(a) = -a^2+4 = -(a+2)(a-2) \\
 & F'(a)=0 \text{인 } a \text{의 값은} \\
 & a=2 \quad (\because a>0) \\
 & a>0 \text{에서 함수 } F(a) \text{의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.}
 \end{aligned}$$

a	0	...	2	...
$F'(a)$		+	0	-
$F(a)$		$\nearrow$	$\frac{16}{3}$ 극대	$\searrow$

따라서 함수 $F(a)$ 의 최댓값은 $\frac{16}{3}$ 이다.

$$\begin{aligned}
 8 \quad & x^2-x=0 \text{에서} \\
 & x(x-1)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=1 \\
 & \therefore |x^2-x| = \begin{cases} x^2-x & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -x^2+x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases} \\
 & \text{이때 } a>1 \text{이므로} \\
 & \int_0^a |x^2-x| dx \\
 &= \int_0^1 (-x^2+x) dx + \int_1^a (x^2-x) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2 \right]_1^a \\
 &= \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2 \right) - \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3} \\
 & \text{즉, } \frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}=1 \text{이므로} \\
 & 2a^3-3a^2-4=0 \\
 & (a-2)(2a^2+a+2)=0 \\
 & \therefore a=2 \quad (\because a>1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9 \quad & \int_{-1}^1 f(x) dx = 1 \text{에서} \\
 & \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (x^2+ax+b) dx \\
 &= 2 \int_0^1 (x^2+b) dx \\
 &= 2 \left[\frac{1}{3}x^3+bx \right]_0^1 \\
 &= 2 \left(\frac{1}{3}+b \right) \\
 &= 2b+\frac{2}{3} \\
 & \text{즉, } 2b+\frac{2}{3}=1 \text{이므로 } b=\frac{1}{6} \\
 & \int_{-1}^1 xf(x) dx = 2 \text{에서} \\
 & \int_{-1}^1 xf(x) dx = \int_{-1}^1 (x^3+ax^2+bx) dx \\
 &= 2 \int_0^1 ax^2 dx \\
 &= 2 \left[\frac{a}{3}x^3 \right]_0^1 \\
 &= \frac{2}{3}a
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{2}{3}a=2 \text{이므로 } a=3$$

$$\text{따라서 } f(x)=x^2+3x+\frac{1}{6} \text{이므로}$$

$$f(-3)=9-9+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

10 $f(x+4)=f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{2022}^{2026} f(x) dx &= \int_{2018}^{2022} f(x) dx = \cdots = \int_2^6 f(x) dx \\ &= \int_{-2}^2 f(x) dx \\ &= \int_{-2}^0 (2x+4) dx + \int_0^2 (x^2-4x+4) dx \\ &= \left[x^2+4x \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x \right]_0^2 \\ &= -(4-8) + \left(\frac{8}{3}-8+8 \right) = \frac{20}{3}\end{aligned}$$

11 (가)에서 $f(-x)=f(x)$ 이므로

$$-xf(-x) = -xf(x)$$

(다)에서

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (x+3)f(x) dx &= \int_{-1}^1 xf(x) dx + 3 \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= 3 \int_{-1}^1 f(x) dx\end{aligned}$$

$$\text{즉, } 3 \int_{-1}^1 f(x) dx = 9 \text{이므로}$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 3$$

(나)에서 $f(x+2)=f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_1^3 f(x) dx = \int_3^5 f(x) dx = \int_5^7 f(x) dx \\ \therefore \int_{-1}^7 f(x) dx &= \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \\ &\quad + \int_3^5 f(x) dx + \int_5^7 f(x) dx \\ &= 4 \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= 4 \times 3 = 12\end{aligned}$$

12 (나)에서

$$\begin{aligned}\int_n^{n+2} f(x) dx &= \int_n^{n+1} 2x dx \\ &= \left[x^2 \right]_n^{n+1} \\ &= (n+1)^2 - n^2 = 2n+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^6 f(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx + \int_4^6 f(x) dx \\ &= 1+5+9=15\end{aligned}$$

(가)에서 $\int_0^1 f(x) dx = 2$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^5 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx \\ &= 2+3+7=12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_5^6 f(x) dx &= \int_0^6 f(x) dx - \int_0^5 f(x) dx \\ &= 15-12=3\end{aligned}$$

13 $f(x)=x^3-12x$ 에서

$$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	16 극대	$\searrow$	-16 극소	$\nearrow$

(i) $-2 \leq t \leq 2$ 일 때, $-2 \leq x \leq t$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(t)$ 이므로

$$g(t)=t^3-12t$$

(ii) $t \geq 2$ 일 때, $-2 \leq x \leq t$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(2)$ 이므로

$$g(t)=-16$$

(i), (ii)에서 $g(t)=\begin{cases} t^3-12t & (-2 \leq t \leq 2) \\ -16 & (t \geq 2) \end{cases}$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-2}^3 g(t) dt &= \int_{-2}^2 (t^3-12t) dt + \int_2^3 (-16) dt \\ &= 0 + \left[-16t \right]_2^3 \\ &= -48 - (-32) \\ &= -16\end{aligned}$$

14 모든 실수 x 에 대하여

$$h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$$

즉, 함수 $h(x)$ 는 홀수 차수의 항만 있으므로 함수 $h'(x)$ 는 짝수 차수의 항 또는 상수항만 있고 $xh'(x)$ 는 홀수 차수의 항만 있다.

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-3}^3 (x+5)h'(x) dx &= \int_{-3}^3 xh'(x) dx + 5 \int_{-3}^3 h'(x) dx \\ &= 0 + 10 \int_0^3 h'(x) dx \\ &= 10 \left[h(x) \right]_0^3 \\ &= 10 \{ h(3) - h(0) \} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

이때 $f(0)=-f(0)$ 에서 $f(0)=0$ 이므로

$$h(0)=f(0)g(0)=0$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서 $10h(3)=10$ 이므로

$$h(3)=1$$

III-1 03 정적분(2)

1 적분과 미분의 관계

개념 CHECK

165쪽

1 (1) x^2+2x (2) $3x^2+2x+1$

2 (1) $f(x)=2x+3$ (2) $f(x)=3x^2-2x+1$

문제

166~170쪽

01-1 ㉡ (1) $f(x)=3x^2-2x-4$ (2) $f(x)=x^2-x-\frac{5}{3}$

(3) $f(x)=x^2+2x+\frac{11}{6}$ (4) $f(x)=3x^2-4x$

(1) $\int_0^2 f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$f(x)=3x^2-2x+k$

이를 $\int_0^2 f(t) dt = k$ 에 대입하면

$\int_0^2 (3t^2-2t+k) dt = k, \left[t^3 - t^2 + kt \right]_0^2 = k$

$8-4+2k=k \quad \therefore k=-4$

$\therefore f(x)=3x^2-2x-4$

(2) $\int_{-1}^0 f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$f(x)=x^2-x+2k$

이를 $\int_{-1}^0 f(t) dt = k$ 에 대입하면

$\int_{-1}^0 (t^2-t+2k) dt = k, \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2kt \right]_{-1}^0 = k$

$-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-2k\right)=k \quad \therefore k=-\frac{5}{6}$

$\therefore f(x)=x^2-x-\frac{5}{3}$

(3) $\int_0^1 tf(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$f(x)=x^2+2x+k$

이를 $\int_0^1 tf(t) dt = k$ 에 대입하면

$\int_0^1 (t^3+2t^2+kt) dt = k, \left[\frac{1}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + \frac{k}{2}t^2 \right]_0^1 = k$

$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{k}{2} = k \quad \therefore k = \frac{11}{6}$

$\therefore f(x)=x^2+2x+\frac{11}{6}$

(4) $\int_0^1 f(t) dt = a, \int_0^2 f(t) dt = b$ (a, b 는 상수)로 놓으면

$f(x)=3x^2+4ax+b \quad \dots\dots \textcircled{A}$

$\textcircled{A}$ 을 $\int_0^1 f(t) dt = a$ 에 대입하면

$\int_0^1 (3t^2+4at+b) dt = a$

$\left[t^3 + 2at^2 + bt \right]_0^1 = a$

$1+2a+b=a \quad \therefore a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{B}$

$\textcircled{A}$ 을 $\int_0^2 f(t) dt = b$ 에 대입하면

$\int_0^2 (3t^2+4at+b) dt = b$

$\left[t^3 + 2at^2 + bt \right]_0^2 = b$

$8+8a+2b=b \quad \therefore 8a+b=-8 \quad \dots\dots \textcircled{C}$

$\textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1, b=0$

$\therefore f(x)=3x^2-4x$

02-1 ㉡ $f(x)=3x^2-10$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx} \int_3^x f(t) dt = \frac{d}{dx} (x^3 - ax + 3)$

$\therefore f(x)=3x^2-a$

주어진 등식의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$\int_3^3 f(t) dt = 27 - 3a + 3$

$0 = -3a + 30 \quad \therefore a = 10$

$\therefore f(x)=3x^2-10$

02-2 ㉡ 14

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = \frac{d}{dx} (3x^3 + 5x^2 - 2x)$

$\therefore f(x)=9x^2+10x-2$

주어진 등식의 양변에 $x=a$ 를 대입하면

$\int_a^a f(t) dt = 3a^3 + 5a^2 - 2a$

$0 = 3a^3 + 5a^2 - 2a, a(3a^2 + 5a - 2) = 0$

$a(a+2)(3a-1) = 0$

$\therefore a = -2 \quad (\because a < 0)$

$\therefore f(a) = f(-2) = 36 - 20 - 2 = 14$

02-3 ㉡ 11

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$f(x) + xf'(x) = 6x^2 - 6x + f(x)$

$xf'(x) = 6x^2 - 6x = x(6x - 6)$

$\therefore f'(x) = 6x - 6$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (6x-6) dx \\ &= 3x^2 - 6x + C \quad \dots\dots \textcircled{㉑}\end{aligned}$$

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = 2 - 3 + \int_1^1 f(t) dt \quad \therefore f(1) = -1$$

㉑에서 $f(1) = -3 + C$ 이므로

$$-3 + C = -1 \quad \therefore C = 2$$

따라서 $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ 이므로

$$f(-1) = 3 + 6 + 2 = 11$$

03-1 [답] 30

$$\int_{-1}^x (x-t)f(t) dt = x^3 + 6x^2 + 9x + 4 \text{에서}$$

$$x \int_{-1}^x f(t) dt - \int_{-1}^x tf(t) dt = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_{-1}^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 3x^2 + 12x + 9$$

$$\therefore \int_{-1}^x f(t) dt = 3x^2 + 12x + 9$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 6x + 12 \quad \therefore f(3) = 18 + 12 = 30$$

03-2 [답] 6

$$\int_2^x (x-t)f(t) dt = x^4 + ax^3 - 20x + 32 \text{에서}$$

$$x \int_2^x f(t) dt - \int_2^x tf(t) dt = x^4 + ax^3 - 20x + 32$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_2^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 4x^3 + 3ax^2 - 20$$

$$\therefore \int_2^x f(t) dt = 4x^3 + 3ax^2 - 20 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 12x^2 + 6ax$$

㉑의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$\int_2^2 f(t) dt = 32 + 12a - 20$$

$$0 = 12a + 12 \quad \therefore a = -1$$

따라서 $f(x) = 12x^2 - 6x$ 이므로 $f(1) = 12 - 6 = 6$

03-3 [답] 2

$$\int_1^x (x-t)f(t) dt = x^3 - ax^2 + bx \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

에서

$$x \int_1^x f(t) dt - \int_1^x tf(t) dt = x^3 - ax^2 + bx$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 3x^2 - 2ax + b$$

$$\therefore \int_1^x f(t) dt = 3x^2 - 2ax + b \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

㉑의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\int_1^1 (x-t)f(t) dt = 1 - a + b$$

$$0 = 1 - a + b$$

$$\therefore a - b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

㉒의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\int_1^1 f(t) dt = 3 - 2a + b$$

$$0 = 3 - 2a + b$$

$$\therefore 2a - b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

㉓, ㉔을 연립하여 풀면

$$a = 2, b = 1 \quad \therefore ab = 2$$

04-1 [답] 극댓값: 4, 극솟값: 0

주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -2$ 또는 $x = 0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$$\begin{aligned}f(-2) &= \int_0^{-2} (3t^2 + 6t) dt \\ &= \left[t^3 + 3t^2 \right]_0^{-2} = -8 + 12 = 4\end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$$f(0) = \int_0^0 (3t^2 + 6t) dt = 0$$

[다른 풀이]

주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (3x^2 + 6x) dx$$

$$= x^3 + 3x^2 + C$$

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $f(0) = 0$ 이므로

$$C = 0 \quad \therefore f(x) = x^3 + 3x^2$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -2$ 또는 $x = 0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	4 극대	↘	0 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값 4, $x=0$ 에서 극솟값 0을 갖는다.

05-1 ㉡ (1) 9 (2) -4

(1) $f(t)=3t^2-2t+1$ 이라 하고 함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x (3t^2-2t+1) dt \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} [F(t)]_2^x \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x)-F(2)}{x-2} \\ = F'(2) = f(2) = 12-4+1=9 \end{aligned}$$

(2) $f(x)=x^4-x^3-x^2-1$ 이라 하고 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+2h} (x^4-x^3-x^2-1) dx \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+2h} f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [F(x)]_1^{1+2h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h)-F(1)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h)-F(1)}{2h} \times 2 \\ = 2F'(1) = 2f(1) = 2(1-1-1-1) = -4 \end{aligned}$$

05-2 ㉡ 2

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2-4} \int_2^x f(t) dt \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2-4} [F(t)]_2^x = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x)-F(2)}{(x+2)(x-2)} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x)-F(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} \\ = \frac{1}{4} F'(2) = \frac{1}{4} f(2) = \frac{1}{4} (-4+10+2) = 2 \end{aligned}$$

연습문제

171~172쪽

- | | | | | |
|------|------|-------|-----|--------|
| 1 4 | 2 19 | 3 ⑤ | 4 ④ | 5 -28 |
| 6 1 | 7 ③ | 8 0 | 9 ① | 10 -10 |
| 11 7 | 12 ⑤ | 13 -4 | | |

1 $\int_0^1 f'(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면
 $f(x) = x^3 + x + k \quad \therefore f'(x) = 3x^2 + 1$

이를 $\int_0^1 f'(t) dt = k$ 에 대입하면

$$\int_0^1 (3t^2+1) dt = k, \quad \left[t^3+t \right]_0^1 = k$$

$$1+1=k \quad \therefore k=2$$

따라서 $f(x) = x^3 + x + 2$ 이므로

$$f(1) = 1+1+2=4$$

2 $f(x) = 6x^2 + x \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 tf(t) dt$ 이므로

$$\int_0^1 f(t) dt = a, \quad \int_0^1 tf(t) dt = b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{로 놓으면}$$

$$f(x) = 6x^2 + ax + b \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

①을 $\int_0^1 f(t) dt = a$ 에 대입하면

$$\int_0^1 (6t^2 + at + b) dt = a, \quad \left[2t^3 + \frac{a}{2}t^2 + bt \right]_0^1 = a$$

$$2 + \frac{1}{2}a + b = a \quad \therefore a - 2b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①을 $\int_0^1 tf(t) dt = b$ 에 대입하면

$$\int_0^1 (6t^3 + at^2 + bt) dt = b, \quad \left[\frac{3}{2}t^4 + \frac{a}{3}t^3 + \frac{b}{2}t^2 \right]_0^1 = b$$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = b \quad \therefore 2a - 3b = -9 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

②, ③을 연립하여 풀면 $a = -30, b = -17$

따라서 $f(x) = 6x^2 - 30x - 17$ 이므로

$$f(-1) = 6 + 30 - 17 = 19$$

3 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 1 + a - 2 \quad \therefore a = 1$$

따라서 $f'(x) = 3x^2 + 2x$ 이므로

$$f'(a) = f'(1) = 3 + 2 = 5$$

4 $\int_0^1 f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$\int_0^x f(t) dt = x^3 + x^2 - kx$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 3x^2 + 2x - k$$

이를 $\int_0^1 f(t) dt = k$ 에 대입하면

$$\int_0^1 (3t^2 + 2t - k) dt = k, \quad \left[t^3 + t^2 - kt \right]_0^1 = k$$

$$1 + 1 - k = k \quad \therefore k = 1$$

따라서 $f(x)=3x^2+2x-1$ 이므로
 $f(2)=12+4-1=15$

- 5 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=1+6x^2-2x=6x^2-2x+1$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (6x^2 - 2x + 1) dx \\ &= 2x^3 - x^2 + x + C\end{aligned}$$

주어진 등식의 양변에 $x=3$ 을 대입하면 $f(3)=3$ 이므로
 $54-9+3+C=3 \quad \therefore C=-45$

$$\therefore f(x)=2x^3-x^2+x-45$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(2)+f(-1) &= (24-4+1)+(-2-1-1-45) \\ &= -28\end{aligned}$$

- 6 (i) $x \geq a$ 일 때,

$$\int_a^x f(t) dt = (x-1)(x-a)$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = (x-a) + (x-1) = 2x-a-1$$

- (ii) $x < a$ 일 때,

$$\int_a^x f(t) dt = -(x-1)(x-a)$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = -(x-a) - (x-1) = -2x+a+1$$

- (i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} 2x-a-1 & (x \geq a) \\ -2x+a+1 & (x < a) \end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 $x=a$ 에서 연속이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} (2x-a-1) = \lim_{x \rightarrow a-} (-2x+a+1)$$

$$2a-a-1 = -2a+a+1$$

$$\therefore a=1$$

- 7 $\int_1^x (x-t)f(t) dt = ax^2+2x-1$ 에서

$$x \int_1^x f(t) dt - \int_1^x tf(t) dt = ax^2+2x-1$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 2ax+2$$

$$\therefore \int_1^x f(t) dt = 2ax+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=2a$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0=2a+2 \quad \therefore a=-1$$

따라서 $f(x)=-2$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 f(x) dx &= \int_{-1}^2 (-2) dx \\ &= \left[-2x \right]_{-1}^2 = -4-2 = -6\end{aligned}$$

- 8 $F(x)=\int_1^x x(2t+3) dt$ 에서

$$F(x)=x \int_1^x (2t+3) dt$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=\int_1^x (2t+3) dt + x(2x+3)$$

$$\therefore f(x)=2x^2+3x+\int_1^x (2t+3) dt$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=4x+3+2x+3=6x+6$$

$$\therefore f'(-1)=-6+6=0$$

- 9 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}f'(x) &= \{(x+a)^2-2(x+a)\} - (x^2-2x) \\ &= 2ax+a^2-2a\end{aligned}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(-2)=0 \text{에서}$$

$$-4a+a^2-2a=0, \quad a^2-6a=0$$

$$a(a-6)=0 \quad \therefore a=6 \quad (\because a>0)$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은

$$f(-2)=\int_{-2}^4 (t^2-2t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3-t^2 \right]_{-2}^4$$

$$= \left(\frac{64}{3} - 16 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 4 \right) = 12$$

$$\therefore b=12$$

$$\therefore a+b=6+12=18$$

- 10 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하고 $f(x)$ 의

한 부정적분을 $F(x)$ 라 하자.

(가)에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^{2x} f'(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[f(t) \right]_0^{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)-f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)-f(0)}{2x} \times 2 \\ &= 2f'(0)\end{aligned}$$

즉, $2f'(0)=-4$ 에서 $f'(0)=-2$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \text{이므로}$$

$$b=-2$$

$$\therefore f(x)=x^3+ax^2-2x+c$$

(나)에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} [F(t)]_2^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x-2} \\ &= F'(2) = f(2)\end{aligned}$$

즉, $f(2) = -2$ 이므로

$$8 + 4a - 4 + c = -2 \quad \therefore 4a + c = -6 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(다)에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_{1-x}^{1+x} f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [F(t)]_{1-x}^{1+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(1+x) - F(1-x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(1+x) - F(1) + F(1) - F(1-x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(1+x) - F(1)}{x} \\ &\quad - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(1-x) - F(1)}{-x} \times (-1) \\ &= F'(1) + F'(1) = 2F'(1) = 2f(1)\end{aligned}$$

즉, $2f(1) = 16$ 에서 $f(1) = 8$ 이므로

$$1 + a - 2 + c = 8 \quad \therefore a + c = 9 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a = -5$, $c = 14$

따라서 $f(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 14$ 이므로

$$f(3) = 27 - 45 - 6 + 14 = -10$$

- 11 (가)에서 $\int_1^x f(t) dt = \frac{x-1}{2} \{f(x) + f(1)\}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \frac{1}{2} \{f(x) + f(1)\} + \frac{x-1}{2} f'(x)$$

$$\therefore f(x) = xf'(x) - f'(x) + f(1)$$

$f(x)$ 의 최고차항을 ax^n ($a \neq 0$)이라 하면

$xf'(x) - f'(x) + f(1)$ 의 최고차항은 $x \times nax^{n-1}$, 즉

nax^n 이므로 $a = na \quad \therefore n = 1$ ($\because a \neq 0$)

즉, $f(x) = ax + b$ (b 는 상수)라 하면 $f(0) = 1$ 에서

$$b = 1 \quad \therefore f(x) = ax + 1$$

(나)의 좌변에서

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (ax+1) dx = \left[\frac{a}{2} x^2 + x \right]_0^2 = 2a + 2$$

(나)의 우변에서

$$\begin{aligned}5 \int_{-1}^1 xf(x) dx &= 5 \int_{-1}^1 (ax^2 + x) dx = 10 \int_0^1 ax^2 dx \\ &= 10 \left[\frac{a}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{10}{3} a\end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2a + 2 = \frac{10}{3} a \text{이므로 } a = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{3}{2}x + 1 \text{이므로 } f(4) = 6 + 1 = 7$$

- 12 $\neg$. $g(x) = \int_0^x tf(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = xf(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore g'(0) = 0$$

- $\neg$. $g(x) = \int_0^x tf(t) dt$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$g(0) = 0$$

함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고 미분가능하며 $g(0) = g(a) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의하여

$g'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, a)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$g'(x) = xf(x) \text{이므로 } g'(c) = 0 \text{에서}$$

$$cf(c) = 0 \quad \therefore f(c) = 0 \quad (\because 0 < c < a)$$

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(0, a)$ 에서 적어도 하나의 실근 c 를 갖는다.

- $\neg$. 함수 $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이므로 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수인 사차함수이다.

$g(0) = 0, g'(0) = 0$ 이므로 $g(x)$ 는 x^2 을 인수로 갖는다.

또 $f(\beta) = g(\beta) = 0$ 이고 $\textcircled{1}$ 에서 $g'(\beta) = \beta f(\beta) = 0$ 이므로 $g(x)$ 는 $(x-\beta)^2$ 을 인수로 갖는다.

따라서 $g(x) = kx^2(x-\beta)^2$ ($k > 0$)이라 하면 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq 0$

$$\therefore \int_{\beta}^x tf(t) dt = \int_0^x tf(t) dt - \int_0^{\beta} tf(t) dt$$

$$= g(x) - g(\beta) = g(x) \geq 0$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

- 13 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x)$$

구간 $[0, 3]$ 에서 $F'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$x = 1$ 또는 $x = 3$

구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $F(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3
$F'(x)$		+	0	-	
$F(x)$		↗	극대	↘	

이때 $F(0), F(1), F(3)$ 의 값을 구하면

$$F(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0, \quad F(1) = \int_0^1 f(t) dt = 2,$$

$$F(3) = \int_0^3 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^3 f(t) dt$$

$$= 2 - 4 = -2$$

따라서 함수 $F(x)$ 의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이므로 구하는 곱은 $2 \times (-2) = -4$

III-2 01 정적분의 활용

넓이

문제

177~182쪽

01-1 [답] (1) $\frac{32}{3}$ (2) $\frac{9}{2}$ (3) 8 (4) $\frac{37}{12}$

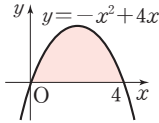
- (1) 곡선 $y = -x^2 + 4x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$-x^2 + 4x = 0, x(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 4$$

$0 \leq x \leq 4$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^4 \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$



- (2) 곡선 $y = x^2 - x - 2$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

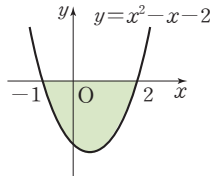
$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$



- (3) 곡선 $y = x^3 - 4x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

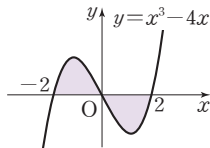
$$x^3 - 4x = 0$$

$$x(x+2)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

$-2 \leq x \leq 0$ 에서 $y \geq 0$ 이고, $0 \leq x \leq 2$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx - \int_0^2 (x^3 - 4x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_{-2}^0 - \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_0^2 = 8 \end{aligned}$$



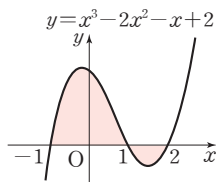
- (4) 곡선 $y = x^3 - 2x^2 - x + 2$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$(x+1)(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

$$\text{또는 } x = 2$$



$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $y \geq 0$, $1 \leq x \leq 2$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \\ &\quad - \int_1^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \\ &= 2 \int_0^1 (-2x^2 + 2) dx - \int_1^2 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \\ &= 2 \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_1^2 \\ &= \frac{37}{12} \end{aligned}$$

01-2 [답] (1) $\frac{13}{6}$ (2) 24

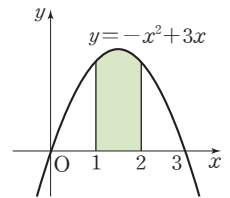
- (1) 곡선 $y = -x^2 + 3x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$-x^2 + 3x = 0, x(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

$1 \leq x \leq 2$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 (-x^2 + 3x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_1^2 = \frac{13}{6} \end{aligned}$$



- (2) 곡선 $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

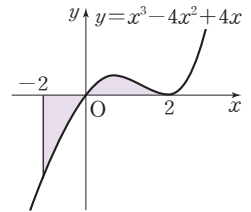
$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0$$

$$x(x-2)^2 = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

$-2 \leq x \leq 0$ 에서 $y \leq 0$ 이고, $0 \leq x \leq 2$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-2}^0 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx + \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx \\ &= -\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 \\ &= 24 \end{aligned}$$



02-1 [답] $\frac{9}{2}$

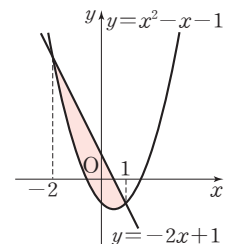
곡선 $y = x^2 - x - 1$ 과 직선

$y = -2x + 1$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\begin{aligned} x^2 - x - 1 &= -2x + 1 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$



$-2 \leq x \leq 1$ 에서 $-2x+1 \geq x^2-x-1$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 \{(-2x+1) - (x^2-x-1)\} dx \\ &= \int_{-2}^1 (-x^2-x+2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

02-2 $\frac{8}{3}$

두 곡선 $y=x^2-4x$,

$y=-x^2+4x-6$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2-4x = -x^2+4x-6$$

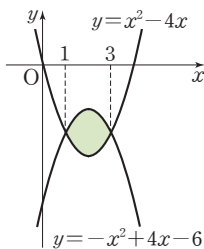
$$2x^2-8x+6=0$$

$$(x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

$1 \leq x \leq 3$ 에서 $-x^2+4x-6 \geq x^2-4x$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \{(-x^2+4x-6) - (x^2-4x)\} dx \\ &= \int_1^3 (-2x^2+8x-6) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 6x \right]_1^3 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$



03-1 $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{16}{3}$

(1) $f(x)=x^3-x^2+2$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-2x$

점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$ 이므로 접선의 방정식은 $y-2=x-1 \quad \therefore y=x+1$

곡선 $y=x^3-x^2+2$ 와 직선 $y=x+1$ 의 교점의 x

좌표를 구하면

$$x^3-x^2+2=x+1$$

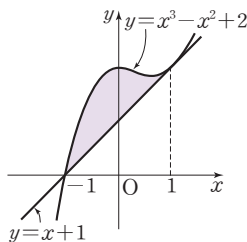
$$x^3-x^2-x+1=0$$

$$(x+1)(x-1)^2=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $x^3-x^2+2 \geq x+1$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \{(x^3-x^2+2) - (x+1)\} dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^3-x^2-x+1) dx = 2 \int_0^1 (-x^2+1) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



(2) $f(x)=-x^2-4$ 라 하면 $f'(x)=-2x$

점점의 좌표를 $(t, -t^2-4)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (-t^2-4) = -2t(x-t)$$

$$\therefore y = -2tx + t^2 - 4$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = t^2 - 4, \quad t^2 = 4$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 2$$

따라서 접선의 방정식은

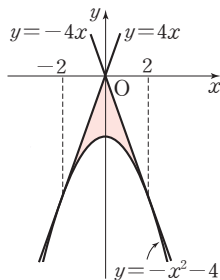
$$y = 4x \text{ 또는 } y = -4x$$

곡선과 두 접선으로 둘러싸인 도형이 y 축에 대하여 대칭이고, $0 \leq x \leq 2$ 에서

$$-4x \geq -x^2 - 4 \text{이므로 구}$$

하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^2 \{-4x - (-x^2-4)\} dx \\ &= 2 \int_0^2 (x^2-4x+4) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right]_0^2 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$



04-1 $\frac{1}{2}$

곡선 $y=x(x-a)(x-1)$ 과 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x(x-a)(x-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=a \text{ 또는 } x=1$$

따라서 곡선 $y=x(x-a)(x-1)$ 과 x 축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

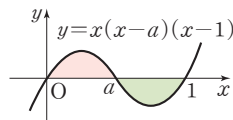
$$\int_0^1 x(x-a)(x-1) dx = 0$$

$$\int_0^1 \{x^3 - (a+1)x^2 + ax\} dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^1 = 0$$

$$\frac{1}{4} - \frac{a+1}{3} + \frac{a}{2} = 0, \quad 3-4(a+1)+6a=0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$



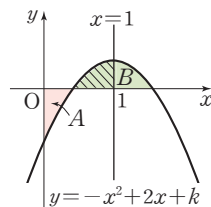
04-2 $-\frac{2}{3}$

$A : B = 1 : 2$ 이고 곡선

$$y = -x^2 + 2x + k \text{는 직선 } x=1$$

에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}B = A$$



따라서 곡선 $y = -x^2 + 2x + k$ 와 x 축, y 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^1 (-x^2 + 2x + k) dx = 0$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + kx \right]_0^1 = 0$$

$$-\frac{1}{3} + 1 + k = 0 \quad \therefore k = -\frac{2}{3}$$

05-1 [답] 32

곡선 $y = x^2 - 4x$ 와 직선 $y = ax$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2 - 4x = ax$$

$$x\{x - (a+4)\} = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=a+4$$

곡선 $y = x^2 - 4x$ 와 x 축의 교점의

x 좌표를 구하면

$$x^2 - 4x = 0, x(x-4) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=4$$

$0 \leq x \leq 4$ 에서 $x^2 - 4x \leq 0$ 이므로 곡선 $y = x^2 - 4x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = -\int_0^4 (x^2 - 4x) dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \right]_0^4 = \frac{32}{3}$$

$0 \leq x \leq a+4$ 에서 $ax \geq x^2 - 4x$ 이므로 곡선 $y = x^2 - 4x$ 와 직선 $y = ax$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \int_0^{a+4} \{ax - (x^2 - 4x)\} dx$$

$$= \int_0^{a+4} \{-x^2 + (a+4)x\} dx$$

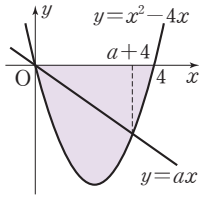
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a+4}{2}x^2 \right]_0^{a+4}$$

$$= \frac{(a+4)^3}{6}$$

주어진 조건에서 $S_1 = 2S_2$ 이므로

$$\frac{32}{3} = 2 \times \frac{(a+4)^3}{6}$$

$$\therefore (a+4)^3 = 32$$



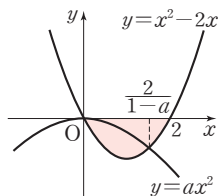
05-2 [답] $1-\sqrt{2}$

두 곡선 $y = x^2 - 2x$, $y = ax^2$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2 - 2x = ax^2$$

$$x\{(1-a)x - 2\} = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x = \frac{2}{1-a}$$



곡선 $y = x^2 - 2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2 - 2x = 0, x(x-2) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $x^2 - 2x \leq 0$ 이므로 곡선 $y = x^2 - 2x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = -\int_0^2 (x^2 - 2x) dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_0^2$$

$$= \frac{4}{3}$$

$0 \leq x \leq \frac{2}{1-a}$ 에서 $ax^2 \geq x^2 - 2x$ 이므로 두 곡선

$y = x^2 - 2x$, $y = ax^2$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \int_0^{\frac{2}{1-a}} \{ax^2 - (x^2 - 2x)\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{2}{1-a}} \{(a-1)x^2 + 2x\} dx$$

$$= \left[\frac{a-1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^{\frac{2}{1-a}}$$

$$= \frac{4}{3(a-1)^2}$$

주어진 조건에서 $S_1 = 2S_2$ 이므로

$$\frac{4}{3} = 2 \times \frac{4}{3(a-1)^2}$$

$$(a-1)^2 = 2$$

$$a^2 - 2a - 1 = 0$$

$$\therefore a = 1 - \sqrt{2} \quad (\because a < 0)$$

06-1 [답] (1) $\frac{3}{5}$ (2) 17

(1) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선

$y=x$ 의 교점의 x 좌표를

구하면

$$x^4 = x$$

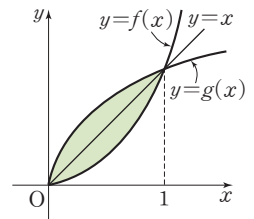
$$x(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

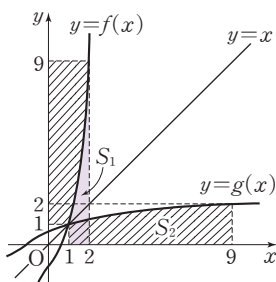
$0 \leq x \leq 1$ 에서 $x \geq x^4$ 이므로

구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = 2 \int_0^1 (x - x^4) dx = 2 \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{3}{5}$$



- (2) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.



$\int_1^2 f(x) dx = S_1$, $\int_1^9 g(x) dx = S_2$ 라 하면 위의 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 값은

$$\int_1^2 f(x) dx + \int_1^9 g(x) dx = S_1 + S_2 \\ = 2 \times 9 - 1 \times 1 = 17$$

2 속도와 거리

문제

185~188쪽

- 07-1 [답] (1) $\frac{22}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) 2

$$(1) 2 + \int_0^4 (t^2 - 6t + 8) dt = 2 + \left[\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t \right]_0^4 = \frac{22}{3}$$

$$(2) \int_3^5 (t^2 - 6t + 8) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t \right]_3^5 = \frac{2}{3}$$

$$(3) \int_3^5 |t^2 - 6t + 8| dt \\ = \int_3^4 (-t^2 + 6t - 8) dt + \int_4^5 (t^2 - 6t + 8) dt \\ = \left[-\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 8t \right]_3^4 + \left[\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t \right]_4^5 = 2$$

- 07-2 [답] $\frac{31}{6}$

$$0 + \int_0^3 v(t) dt = \int_0^1 (t^2 - t) dt + \int_1^3 (-t^2 + 6t - 5) dt \\ = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t \right]_1^3 \\ = \frac{31}{6}$$

- 08-1 [답] (1) $\frac{11}{2}$ (2) 9

- (1) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v(t)=0$ 에서

$$3t - t^2 = 0, t(3-t) = 0$$

$$\therefore t = 3 (\because t > 0)$$

따라서 좌표가 1인 점을 출발하여 $t=3$ 일 때 운동 방향을 바꾸므로 $t=3$ 에서의 점 P의 위치는

$$1 + \int_0^3 (3t - t^2) dt = 1 + \left[\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^3 = \frac{11}{2}$$

- (2) 점 P가 좌표가 1인 점을 출발하여 좌표가 1인 점으로 다시 돌아오는 시각을 $t=a$ 라 하면 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P의 위치의 변화량은 0이므로

$$\int_0^a (3t - t^2) dt = 0, \left[\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^a = 0$$

$$\frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{3}a^3 = 0, a^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}a \right) = 0$$

$$\therefore a = \frac{9}{2} (\because a > 0)$$

따라서 점 P가 좌표가 1인 점으로 다시 돌아올 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{9}{2}} |3t - t^2| dt \\ = \int_0^3 (3t - t^2) dt + \int_3^{\frac{9}{2}} (-3t + t^2) dt \\ = \left[\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^3 + \left[-\frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \right]_3^{\frac{9}{2}} \\ = 9$$

- 09-1 [답] (1) 40 m (2) 45 m (3) 65 m

- (1) 물체를 쏘아 올린 후 2초 동안 물체의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 (30 - 10t) dt = \left[30t - 5t^2 \right]_0^2 = 40(\text{m})$$

- (2) 물체가 최고 지점에 도달할 때의 속도는 0이므로

$$v(t) = 0 \text{에서}$$

$$30 - 10t = 0 \quad \therefore t = 3$$

따라서 지면에서 출발하여 $t=3$ 일 때 최고 지점에 도달하므로 $t=3$ 에서의 물체의 높이는

$$0 + \int_0^3 (30 - 10t) dt = \left[30t - 5t^2 \right]_0^3 = 45(\text{m})$$

- (3) 물체를 쏘아 올린 후 5초 동안 물체가 움직인 거리는

$$\int_0^5 |30 - 10t| dt \\ = \int_0^3 (30 - 10t) dt + \int_3^5 (-30 + 10t) dt \\ = \left[30t - 5t^2 \right]_0^3 + \left[-30t + 5t^2 \right]_3^5 = 65(\text{m})$$

09-2 [답] 25 m

물체가 지면으로부터 45 m의 높이에 도달하는 시각을 $t=a$ 라 하면

$$30 + \int_0^a (20 - 10t) dt = 45$$

$$\left[20t - 5t^2 \right]_0^a = 15, \quad 20a - 5a^2 = 15$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0, \quad (a-1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=3$$

따라서 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 물체가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |20 - 10t| dt$$

$$= \int_0^2 (20 - 10t) dt + \int_2^3 (-20 + 10t) dt$$

$$= \left[20t - 5t^2 \right]_0^2 + \left[-20t + 5t^2 \right]_2^3 = 25(\text{m})$$

따라서 구하는 거리는 25 m이다.

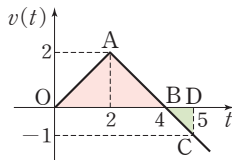
10-1 [답] (1) $\frac{7}{2}$ (2) 4

$$(1) 0 + \int_0^5 v(t) dt$$

$$= \int_0^4 v(t) dt + \int_4^5 v(t) dt$$

$$= \triangle AOB - \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{7}{2}$$



$$(2) v(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=4$$

따라서 점 P가 출발 후 $t=4$ 에서 처음으로 운동 방향을 바꾸므로 구하는 거리는

$$\int_0^4 |v(t)| dt = \triangle AOB = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$

10-2 [답] 8

$t=a$ 일 때 원점으로 다시 돌아온다고 하면

$$\int_0^a v(t) dt = 0 \text{이어야 한다.}$$

오른쪽 그림에서 속도

$v(t)$ 의 그래프와 t 축이

이루는 각 부분의 넓이

를 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5

라 하면

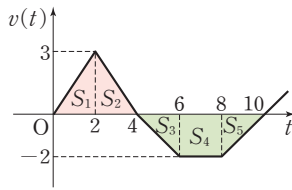
$$S_1=3, S_2=3, S_3=2, S_4=4, S_5=2$$

이때 $S_1+S_2=S_3+S_4$ 이므로

$$S_1+S_2-(S_3+S_4)=0$$

$$\therefore \int_0^8 v(t) dt = 0$$

따라서 $t=8$ 일 때 물체가 원점으로 다시 돌아온다.



연습문제

189~192쪽

1 ③	2 ③	3 0	4 $\frac{8}{19}$	5 14
6 $\frac{37}{12}$	7 ③	8 $\frac{5}{6}$	9 ①	10 ④
11 $\frac{7}{6}$	12 ④	13 $\frac{1}{6}$	14 ③	15 ③
16 2회	17 12	18 160	19 $\neg$	20 $\frac{4}{5}$
21 $\frac{16}{3}$	22 8	23 ③	24 ⑤	

1 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = xf'(x) + x^2 - 2x - 3$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 2x - 3$$

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축의 교점의

x 좌표를 구하면

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

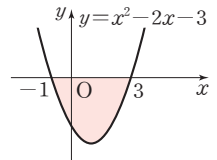
$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

$-1 \leq x \leq 3$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = - \int_{-1}^3 (x^2 - 2x - 3) dx$$

$$= - \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \right]_{-1}^3$$

$$= \frac{32}{3}$$



2 $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $y \leq 0$ 이고,

$0 \leq x \leq a$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 곡선

$y=2x^3$ 과 x 축 및 두 직선 $x=-1$,

$x=a$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라

하면

$$S = - \int_{-1}^0 2x^3 dx + \int_0^a 2x^3 dx$$

$$= - \left[\frac{1}{2}x^4 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}x^4 \right]_0^a$$

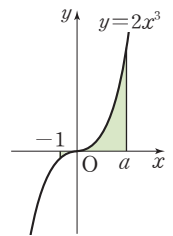
$$= \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2} = 41 \text{이므로}$$

$$a^4 = 81$$

$$(a+3)(a-3)(a^2+9) = 0$$

$$\therefore a = 3 (\because a > 0)$$



3 곡선 $y = -x^2 + kx$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$-x^2 + kx = 0, \quad x(x-k) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = k$$

곡선 $y = -x^2 + kx$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하자.

(i) $k > 0$ 일 때,

$0 \leq x \leq k$ 에서 $y \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} S &= \int_0^k (-x^2 + kx) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2 \right]_0^k \\ &= \frac{k^3}{6} \end{aligned}$$

즉, $\frac{k^3}{6} = 36$ 이므로

$k = 6$ ($\because k > 0$)

(ii) $k < 0$ 일 때,

$k \leq x \leq 0$ 에서 $y \geq 0$ 이므로

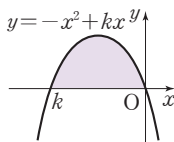
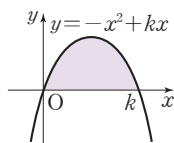
$$\begin{aligned} S &= \int_k^0 (-x^2 + kx) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2 \right]_k^0 \\ &= -\frac{k^3}{6} \end{aligned}$$

즉, $-\frac{k^3}{6} = 36$ 이므로

$k = -6$ ($\because k < 0$)

(i), (ii)에서 모든 k 의 값의 합은

$6 + (-6) = 0$



4 곡선 $y = -x^2 + 3x$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$-x^2 + 3x = x, \quad x(x-2) = 0$$

$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $-x^2 + 3x \geq x$ 이므로

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^2 \{(-x^2 + 3x) - x\} dx \\ &= \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $-x^2 + 3x \geq 0$ 이고 곡선 $y = -x^2 + 3x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 $S_1 + S_2$ 이므로

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore S_2 = (S_1 + S_2) - S_1$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{4}{3} = \frac{19}{6}$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{19}{6}} = \frac{8}{19}$$

5 $g(x) = \begin{cases} x-2 & (x \geq 1) \\ -x & (x \leq 1) \end{cases}$

$x \geq 1$ 일 때, 곡선

$y = \frac{1}{3}x(4-x)$ 와 직선

$y = x-2$ 의 교점의 x 좌표를

구하면

$$\frac{1}{3}x(4-x) = x-2$$

$$x^2 - x - 6 = 0, \quad (x+2)(x-3) = 0$$

$\therefore x = 3$ ($\because x \geq 1$)

$x \leq 1$ 일 때, 곡선 $y = \frac{1}{3}x(4-x)$ 와 직선 $y = -x$ 의 교점

의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{3}x(4-x) = -x, \quad x^2 - 7x = 0$$

$$x(x-7) = 0 \quad \therefore x = 0 \quad (\because x \leq 1)$$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $\frac{1}{3}x(4-x) \geq -x$ 이고, $1 \leq x \leq 3$ 에서

$$\frac{1}{3}x(4-x) \geq x-2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left\{ \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^2 \right) - (-x) \right\} dx \\ &\quad + \int_1^3 \left\{ \left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^2 \right) - (x-2) \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x \right) dx + \int_1^3 \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{7}{6}x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + 2x \right]_1^3 \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore 4S = 4 \times \frac{7}{2} = 14$$

6 두 곡선 $y = x^3 - 2x$, $y = x^2$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

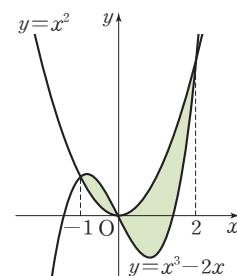
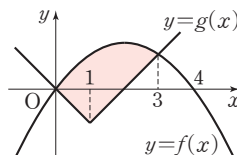
$$x^3 - 2x = x^2$$

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

$$x(x+1)(x-2) = 0$$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = 0$

또는 $x = 2$



$-1 \leq x \leq 0$ 에서 $x^3 - 2x \geq x^2$ 이고, $0 \leq x \leq 2$ 에서 $x^2 \geq x^3 - 2x$ 이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 \{(x^3 - 2x) - x^2\} dx + \int_0^2 \{x^2 - (x^3 - 2x)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (-x^3 + x^2 + 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{37}{12} \end{aligned}$$

7 $f(x) = x^2 - 2x$ 이므로

$$\begin{aligned} y &= -f(x-1) - 1 = -\{(x-1)^2 - 2(x-1)\} - 1 \\ &= -x^2 + 4x - 4 \end{aligned}$$

두 곡선 $y=f(x)$,

$y=-f(x-1)-1$ 의 교점의

x 좌표를 구하면

$$x^2 - 2x = -x^2 + 4x - 4$$

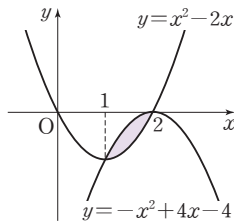
$$2x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

$1 \leq x \leq 2$ 에서 $-x^2 + 4x - 4 \geq x^2 - 2x$ 이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \{(-x^2 + 4x - 4) - (x^2 - 2x)\} dx \\ &= \int_1^2 (-2x^2 + 6x - 4) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x \right]_1^2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



8 $f(x) = -x^2 + 5x - 4$ 라 하면 $f'(x) = -2x + 5$

점 (2, 2)에서의 접선의 기울기는 $f'(2) = 1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 2 = x - 2 \quad \therefore y = x$$

곡선 $y = -x^2 + 5x - 4$ 와 x 축의

교점의 x 좌표를 구하면

$$-x^2 + 5x - 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

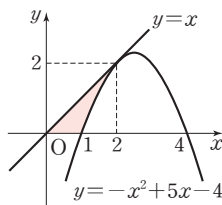
$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $x \geq 0$ 이고,

$1 \leq x \leq 2$ 에서 $x \geq -x^2 + 5x - 4$

이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 x dx + \int_1^2 \{x - (-x^2 + 5x - 4)\} dx \\ &= \int_0^1 x dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right]_1^2 = \frac{5}{6} \end{aligned}$$



9 $f(x) = x^2$ 이라 하면 $f'(x) = 2x$

접점의 좌표를 (t, t^2) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울

기는 $f'(t) = 2t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - t^2 = 2t(x - t) \quad \therefore y = 2tx - t^2$$

이 직선이 점 (0, -1)을 지나므로

$$-1 = -t^2, t^2 = 1$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 1$$

따라서 접선의 방정식은

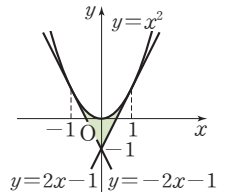
$$y = -2x - 1 \text{ 또는 } y = 2x - 1$$

이때 곡선과 두 접선으로 둘러싸

인 도형이 y 축에 대하여 대칭이고, $0 \leq x \leq 1$ 에서

$x^2 \geq 2x - 1$ 이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^1 \{x^2 - (2x - 1)\} dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$



10 곡선 $y = x(x+1)$ 과 x 축 및 직선 $x = k$ 로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{-1}^k x(x+1) dx = 0, \int_{-1}^k (x^2 + x) dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^k = 0, \frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{6} = 0$$

$$2k^3 + 3k^2 - 1 = 0, (k+1)^2(2k-1) = 0$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} (\because k > 0)$$

11 두 곡선과 y 축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2 \{a(x-2)^2 - (-x^2 + 2x)\} dx = 0$$

$$\int_0^2 \{(a+1)x^2 - 2(2a+1)x + 4a\} dx = 0$$

$$\left[\frac{a+1}{3}x^3 - (2a+1)x^2 + 4ax \right]_0^2 = 0$$

$$\frac{8}{3}(a+1) - 4 = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

두 곡선 $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$, $y = -x^2 + 2x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{2}(x-2)^2 = -x^2 + 2x, 3x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$(3x-2)(x-2) = 0 \quad \therefore x = \frac{2}{3} \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 $k = \frac{2}{3}$ 이므로 $a+k = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$

- 12 $0 \leq x \leq 1$ 에서 $-x^4 + x \geq x^4 - x^3$ 이므로 두 곡선 $y = -x^4 + x$, $y = x^4 - x^3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 \{(-x^4 + x) - (x^4 - x^3)\} dx \\ &= \int_0^1 (-2x^4 + x^3 + x) dx \\ &= \left[-\frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{7}{20} \end{aligned}$$

- $0 \leq x \leq 1$ 에서 $ax(1-x) \geq x^4 - x^3$ 이므로 두 곡선 $y = ax(1-x)$, $y = x^4 - x^3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^1 \{(ax - ax^2) - (x^4 - x^3)\} dx \\ &= \int_0^1 (-x^4 + x^3 - ax^2 + ax) dx \\ &= \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{a}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}a + \frac{1}{20} \end{aligned}$$

주어진 조건에서 $S_1 = 2S_2$ 이므로

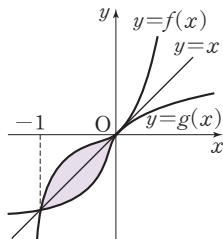
$$\begin{aligned} \frac{7}{20} &= 2 \left(\frac{1}{6}a + \frac{1}{20} \right) \\ \therefore a &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

- 13 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

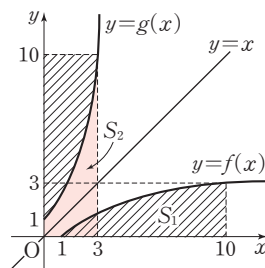
곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + x &= x \\ x^2(x+1) &= 0 \\ \therefore x &= -1 \text{ 또는 } x=0 \\ -1 \leq x \leq 0 \text{에서} \\ x^3 + x^2 + x &\geq x \text{이므로 구하는} \\ \text{넓이를 } S \text{라 하면} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{-1}^0 \{(x^3 + x^2 + x) - x\} dx \\ &= 2 \int_{-1}^0 (x^3 + x^2) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$



- 14 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.



$$\begin{aligned} \int_1^{10} f(x) dx &= S_1, \int_0^3 g(x) dx = S_2 \text{라 하면 위의 그림} \\ \text{에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로} \\ \int_1^{10} f(x) dx + \int_0^3 g(x) dx &= S_1 + S_2 \\ &= 3 \times 10 = 30 \end{aligned}$$

- 15 점 P가 원점을 출발하여 원점으로 다시 돌아오는 시각을 $t=a$ 라 하면 점 P의 위치의 변화량이 0이므로

$$\begin{aligned} \int_0^a (-3t^2 + 4t + 15) dt &= 0 \\ \left[-t^3 + 2t^2 + 15t \right]_0^a &= 0 \\ -a^3 + 2a^2 + 15a &= 0 \\ a(a+3)(a-5) &= 0 \\ \therefore a &= 5 (\because a > 0) \end{aligned}$$

따라서 점 P가 원점으로 다시 돌아오는 시각은 $t=5$

- 16 두 점 P, Q의 $t=a$ 에서의 위치를 각각 $x_P(a)$, $x_Q(a)$ 라 하면

$$\begin{aligned} x_P(a) &= 0 + \int_0^a (6t^2 - 6t + 4) dt \\ &= \left[2t^3 - 3t^2 + 4t \right]_0^a \\ &= 2a^3 - 3a^2 + 4a \\ x_Q(a) &= 0 + \int_0^a (3t^2 + 2t + 1) dt \\ &= \left[t^3 + t^2 + t \right]_0^a \\ &= a^3 + a^2 + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이때 두 점 P, Q가 만날 때는 } x_P(a) &= x_Q(a) \text{이므로} \\ 2a^3 - 3a^2 + 4a &= a^3 + a^2 + a \\ a^3 - 4a^2 + 3a &= 0 \\ a(a-1)(a-3) &= 0 \\ \therefore a &= 1 \text{ 또는 } a=3 (\because a > 0) \end{aligned}$$

따라서 출발 후 두 점 P, Q가 만나는 횟수는 2회이다.

- 17 출발 후 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간은

$$v_1(t) = v_2(t) \text{에서}$$

$$3t^2 + t = 2t^2 + 3t, \quad t^2 - 2t = 0$$

$$t(t-2) = 0 \quad \therefore t = 2 \quad (\because t > 0)$$

두 점 P, Q의 $t=2$ 에서의 위치를 각각 x_1, x_2 라 하면

$$x_1 = 0 + \int_0^2 (3t^2 + t) dt$$

$$= \left[t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^2 = 10$$

$$x_2 = 0 + \int_0^2 (2t^2 + 3t) dt$$

$$= \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 \right]_0^2 = \frac{34}{3}$$

따라서 $t=2$ 일 때 두 점 P, Q 사이의 거리 a 는

$$a = |x_2 - x_1|$$

$$= \left| \frac{34}{3} - 10 \right| = \frac{4}{3}$$

$$\therefore 9a = 9 \times \frac{4}{3} = 12$$

18 $a = \int_0^5 (40 - 10t) dt$

$$= \left[40t - 5t^2 \right]_0^5 = 75$$

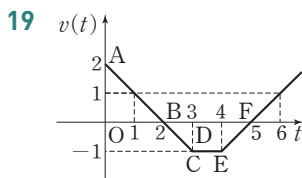
$$b = \int_0^5 |40 - 10t| dt$$

$$= \int_0^4 (40 - 10t) dt + \int_4^5 (-40 + 10t) dt$$

$$= \left[40t - 5t^2 \right]_0^4 + \left[-40t + 5t^2 \right]_4^5$$

$$= 85$$

$$\therefore a + b = 75 + 85 = 160$$



ㄱ. $v(t)=0$ 인 t 의 값은

$$t=2 \text{ 또는 } t=5$$

따라서 운동 방향을 두 번 바꾼다.

ㄴ. $t=3$ 까지 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)| dt = \triangle OAB + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1$$

$$= \frac{5}{2}$$

ㄷ. $t=5$ 에서의 위치는

$$0 + \int_0^5 v(t) dt = \int_0^2 v(t) dt + \int_2^5 v(t) dt$$

$$= \triangle OAB - \square BCEF$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1$$

$$= 0$$

따라서 $t=5$ 일 때 원점에 있다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.

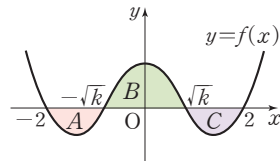
- 20 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$(x^2 - 4)(x^2 - k) = 0$$

$$(x+2)(x-2)(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k}) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = -\sqrt{k} \text{ 또는 } x = \sqrt{k} \text{ 또는 } x = 2$$

이때 $0 < k < 4$ 에서 $0 < \sqrt{k} < 2$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



주어진 조건에서 $A+C=B$ 이므로

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = 0$$

$$\int_{-2}^2 (x^2 - 4)(x^2 - k) dx = 0$$

$$\int_{-2}^2 \{x^4 - (k+4)x^2 + 4k\} dx = 0$$

$$2 \int_0^2 \{x^4 - (k+4)x^2 + 4k\} dx = 0$$

$$\int_0^2 \{x^4 - (k+4)x^2 + 4k\} dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{k+4}{3}x^3 + 4kx \right]_0^2 = 0$$

$$\frac{16}{3}k - \frac{64}{15} = 0 \quad \therefore k = \frac{4}{5}$$

- 21 $-2 \leq x \leq 0$ 에서 $a^2x^2 \geq -x^2$ 이

므로

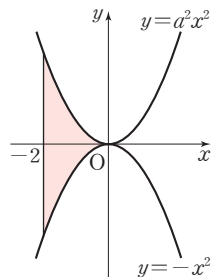
$$S(a) = \int_{-2}^0 \{a^2x^2 - (-x^2)\} dx$$

$$= \int_{-2}^0 (a^2 + 1)x^2 dx$$

$$= \left[\frac{a^2 + 1}{3}x^3 \right]_{-2}^0$$

$$= \frac{8}{3}(a^2 + 1)$$

$$\therefore \frac{S(a)}{a} = \frac{8(a^2 + 1)}{3a} = \frac{8}{3} \left(a + \frac{1}{a} \right)$$



이때 $a > 0$, $\frac{1}{a} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \times \frac{1}{a}} = 2 \quad (\text{단, 등호는 } a=1 \text{ 일 때 성립})$$

$$\therefore \frac{S(a)}{a} = \frac{8}{3} \left(a + \frac{1}{a} \right) \geq \frac{8}{3} \times 2 = \frac{16}{3}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{16}{3}$ 이다.

- 22** 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 두 직선 $x=3$, $y=3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 두 직선 $y=x$, $y=3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$

의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^3 + x + 1 = x, \quad x^3 + 1 = 0$$

$$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \quad (\because x \text{는 실수})$$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=3$

의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^3 + x + 1 = 3, \quad x^3 + x - 2 = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 1 \quad (\because x \text{는 실수})$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $x^3 + x + 1 \geq x$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 와 두 직선 $y=x$, $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_{-1}^1 \{(x^3 + x + 1) - x\} dx$$

$$= \int_{-1}^1 (x^3 + 1) dx$$

$$= 2 \int_0^1 dx = 2 \left[x \right]_0^1 = 2$$

$1 \leq x \leq 3$ 에서 세 직선 $y=x$, $x=1$, $y=3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

따라서 구하는 넓이는

$$2(S_1 + S_2) = 2(2 + 2) = 8$$

- 23** 시각 t 에서의 엘리베이터의 속도를 $v(t)$ m/s라 하면

(i) $0 \leq t \leq 2$ 일 때, 가속도가 2 m/s^2 이므로

$$v(t) = \int_0^t 2 dt = \left[2t \right]_0^t = 2t$$

(ii) $2 \leq t \leq 7$ 일 때, 등속 운동을 하고 $v(2) = 4$ 이므로

$$v(t) = 4$$

(iii) $t \geq 7$ 일 때, 가속도가 -2 m/s^2 이고 $v(7) = 4$ 이므로

$$v(t) = 4 + \int_7^t (-2) dt = 4 + \left[-2t \right]_7^t = -2t + 18$$

엘리베이터가 멈출 때의 속도는 0이므로 $v(t) = 0$ 에서

$$-2t + 18 = 0 \quad \therefore t = 9$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } v(t) = \begin{cases} 2t & (0 \leq t \leq 2) \\ 4 & (2 \leq t \leq 7) \\ -2t + 18 & (7 \leq t \leq 9) \end{cases}$$

따라서 구하는 높이를 h m라 하면 h 는 엘리베이터가 움직인 거리와 같으므로

$$\begin{aligned} h &= \int_0^9 |v(t)| dt \\ &= \int_0^2 2t dt + \int_2^7 4 dt + \int_7^9 (-2t + 18) dt \\ &= \left[t^2 \right]_0^2 + \left[4t \right]_2^7 + \left[-t^2 + 18t \right]_7^9 \\ &= 28 \end{aligned}$$

- 24** ㄱ. 지면으로부터 x_0 의 높이에서 쏘아 올린 후 $t=a$ 일 때, A와 B의 높이는 각각

$$x_0 + \int_0^a f(t) dt, \quad x_0 + \int_0^a g(t) dt$$

이때 $\int_0^a f(t) dt > \int_0^a g(t) dt$ 이므로 A의 위치가 B의 위치보다 높다.

ㄴ. $t=x$ 일 때, A와 B의 높이의 차를 $h(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x f(t) dt - \int_0^x g(t) dt \\ &= \int_0^x \{f(t) - g(t)\} dt \end{aligned}$$

$$\therefore h'(x) = f(x) - g(x)$$

$$h'(x) = 0, \text{ 즉 } f(x) = g(x) \text{인 } x \text{의 값은 } x=b$$

$0 \leq x < c$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	b	...	c
$h'(x)$		+	0	-	
$h(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $t=b$ 일 때, $h(x)$ 는 최대이므로 A와 B의 높이의 차가 최대이다.

ㄷ. 지면으로부터 x_0 의 높이에서 쏘아 올린 후 $t=c$ 일 때, A와 B의 높이는 각각

$$x_0 + \int_0^c f(t) dt, \quad x_0 + \int_0^c g(t) dt$$

이때 $\int_0^c f(t) dt = \int_0^c g(t) dt$ 이므로 A와 B의 높이가 같다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

유형편

정답과 해설

I-1 01 함수의 극한

기초 문제 Training

4쪽

- 1 (1) 2 (2) $-\infty$ (3) $-\infty$
- 2 (1) -1 (2) 0 (3) 0
- 3 (1) 1 (2) ∞
- 4 (1) 0 (2) 0 (3) 1 (4) -1 (5) 0 (6) 존재하지 않는다.
- 5 (1) 0 (2) 0 (3) 0

핵심 유형 Training

5~7쪽

1 ④	2 ②	3 ⑤	4 ⑤	5 ②
6 ①	7 ②	8 ③	9 ⑤	10 ④
11 $\neg$	12 -3	13 -3	14 3	15 $\neg, \sqsubset$

- 1 ① $\lim_{x \rightarrow 1} (2x+3)=5$
 ② $\lim_{x \rightarrow 2} (-x^2+7)=3$
 ③ $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+2x-1)=2$
 ④ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-2}=6$
 ⑤ $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{-x+3}=2$
 따라서 극한값이 가장 큰 것은 ④이다.
- 2 $\neg, \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{2-3x}=\sqrt{2}$
 $\sqsubset, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^2}=\infty$

$$\sqsubset, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$$

$$\kappa, \lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{1}{|x-2|} \right) = -\infty$$

따라서 보기 중 수렴하는 것은 $\neg, \sqsubset$ 이다.

- 3 ① $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-3}=0$
 ② $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{4}{x+1} \right) = 2$
 ③ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x-1} + 1 \right) = 1$
 ④ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{|x-1|} - 1 \right) = -1$
 ⑤ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-3x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{x+1} - 3 \right) = -3$

따라서 극한값이 가장 작은 것은 ⑤이다.

- 4 $\neg, \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2+2x) = -\infty$
 $\sqsubset, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{3}{4x+2} + \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2}$
 $\sqsubset, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x+1|} = 0$
 $\kappa, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+5} = 0$
 따라서 보기 중 수렴하는 것은 $\sqsubset, \sqsubset, \kappa$ 이다.

- 5 ② $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 0$
 따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

$$6 f(0) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 0 + (-1) + (-1) = -2$$

$$7 \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x+1)^2 - \lim_{x \rightarrow 1-} x^2 = 4 - 1 = 3$$

$$8 \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+} (x-3) = -1$$

$$\therefore a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^2-5x+6}{-(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2-} (-x+3) = 1$$

$$\therefore b = 1$$

$$\therefore ab = -1 \times 1 = -1$$

$$\begin{aligned}
 & 9 \quad \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) + \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2-} \left\{ \frac{2x^2 - x - 1}{-(x-1)} + \frac{-(x+2)}{x+2} \right\} \\
 &\quad + \lim_{x \rightarrow -1+} \left(\frac{2x^2 - x - 1}{x-1} + \frac{x+2}{x+2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2-} \left\{ \frac{(2x+1)(x-1)}{-(x-1)} - 1 \right\} \\
 &\quad + \lim_{x \rightarrow -1+} \left\{ \frac{(2x+1)(x-1)}{x-1} + 1 \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2-} (-2x-2) + \lim_{x \rightarrow -1+} (2x+2) \\
 &= 2+4=6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 10 \quad ① \quad \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x-x) = 0 \\
 & \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \{x - (-x)\} = \lim_{x \rightarrow 0-} 2x = 0 \\
 & \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ② \quad \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x^2 + x) = 0 \\
 & \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (x^2 - x) = 0 \\
 & \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ③ \quad \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x \times x) = 0 \\
 & \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \{x \times (-x)\} = 0 \\
 & \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ④ \quad \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1 \\
 & \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{-x} = -1 \\
 & \quad \text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{의 값은 존재하지 않는다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & ⑤ \quad \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0 \\
 & \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} x^2 = 0 \\
 & \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0
 \end{aligned}$$

따라서 $x=0$ 에서의 극한값이 존재하지 않는 것은 ④이다.

$$\begin{aligned}
 & 11 \quad \neg. \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-2)^2}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-2)^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+} (x-2) = 0 \\
 & \quad \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x-2)^2}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x-2)^2}{-(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2-} (-x+2) = 0 \\
 & \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{|x-2|} = 0 \\
 & \quad \neg. \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 - x}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} x = 1 \\
 & \quad \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2 - x}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x(x-1)}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x) = -1 \\
 & \quad \text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{|x-1|} \text{의 값은 존재하지 않는다.}
 \end{aligned}$$

$$\neg. -1 < x < -\frac{1}{2} \text{일 때, } -2 < 2x < -1 \text{에서 } [2x] = -2$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1+} [2x] = -2$$

$$-\frac{3}{2} < x < -1 \text{일 때, } -3 < 2x < -2 \text{에서 } [2x] = -3$$

$$\text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1-} [2x] = -3$$

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} [2x]$ 의 값은 존재하지 않는다.

$$\begin{aligned}
 \text{예. } \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x^2 + 3x + 2}{|x+1|} &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(x+1)(x+2)}{x+1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1+} (x+2) = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^2 + 3x + 2}{|x+1|} &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{(x+1)(x+2)}{-(x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1-} (-x-2) = -1
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{|x+1|} \text{의 값은 존재하지 않는다.}$$

따라서 보기 중 극한값이 존재하는 것은 ㄱ이다.

$$12 \quad \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2 - 4x + 3) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x+k) = k+2$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하려면

$$-1 = k+2 \quad \therefore k = -3$$

$$13 \quad f(x) = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 0+ \text{일 때 } t = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(f(x)) = f(2) = 2$$

$$x \rightarrow -1- \text{일 때 } t \rightarrow -3- \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -3-} f(t) = -5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} f(f(x)) + \lim_{x \rightarrow -1-} f(f(x)) = 2 + (-5) = -3$$

$$14 \quad x+1 = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 0- \text{일 때 } t \rightarrow 1- \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x+1) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = 1$$

$$x-1 = s \text{로 놓으면 } x \rightarrow 0- \text{일 때 } s \rightarrow -1- \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x-1) = \lim_{s \rightarrow -1-} f(s) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} f(x+1) + \lim_{x \rightarrow 0-} f(x-1) = 1 + 2 = 3$$

$$15 \quad \neg. \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 0$$

$$\neg. f(x) = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 2- \text{일 때 } t = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(f(x)) = f(1) = 1$$

$$\neg. f(x) = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 3+ \text{일 때 } t \rightarrow 2- \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2-} f(t) = 1$$

$$\neg. f(x) = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 4- \text{일 때 } t \rightarrow 1+ \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) = 1$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

I-1 02 함수의 극한에 대한 성질

기초 문제 Training

8쪽

- 1 (1) 3 (2) 5 (3) -2 (4) 4 (5) -3 (6) 5
- 2 (1) 1 (2) 14 (3) 2 (4) 5 (5) 2 (6) -1
- 3 (1) 3 (2) 2
- 4 0
- 5 2

핵심 유형 Training

9~14쪽

1 ㄴ, ㄷ	2 3	3 $\frac{5}{6}$	4 $\frac{5}{3}$	5 -3
6 1	7 ㄱ	8 ㉓	9 ㉔	10 6
11 ㄴ, ㄷ	12 -2	13 ㉔	14 -1	15 ㉔
16 ㉑	17 ㉓	18 ㉓	19 6	20 1
21 $\frac{1}{2}$	22 $\frac{1}{2}$	23 -4	24 ㉔	25 8
26 3	27 -4	28 ㉓	29 ㉔	30 ㉔
31 4	32 5	33 10	34 ㉔	35 ㉓
36 ㉔	37 3	38 ㉑		

- 1 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -2, \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = 2,$
 $\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = -2$ 이므로
 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = 4$
 $\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = -4$
 즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\}$ 의 값은 존재하지 않는다.
 ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = 4$
 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = 4$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = 4$
 ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1+} g(x)} = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1-} g(x)} = 1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
 따라서 보기 중 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

- 2 $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 - 5)f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x)}{x-1} \times (x-1)(2x^2 - 5) \right\}$
 $= 1 \times 1 \times 3 = 3$
- 3 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로
 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 3 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3f(x)}{3x^2+4f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\frac{3f(x)}{x}}{3x+\frac{4f(x)}{x}}$
 $= \frac{1+3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{5}{6}$
- 4 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{f(x-1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t+1)^2+3(t+1)-4}{f(t)}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2+5t}{f(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{t}{f(t)} \times (t+5) \right\}$
 $= \frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{3}$
- 5 $2f(x)-g(x)=h(x)$ 로 놓으면 $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 3$
 $g(x) = 2f(x) - h(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6f(x)-3g(x)}{f(x)+4g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6f(x)-3\{2f(x)-h(x)\}}{f(x)+4\{2f(x)-h(x)\}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3h(x)}{9f(x)-4h(x)}$
 $= \frac{3 \times 3}{9 \times 1 - 4 \times 3} = -3$
- 6 $f(x)-g(x)=h(x)$ 로 놓으면 $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 3$
 $g(x) = f(x) - h(x), \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3f(x)-2g(x)}{2f(x)-g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3f(x)-2\{f(x)-h(x)\}}{2f(x)-\{f(x)-h(x)\}}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)+2h(x)}{f(x)+h(x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2h(x)}{f(x)}}{1+\frac{h(x)}{f(x)}} = 1$
- 7 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = \beta$
 $(\alpha, \beta \text{는 실수})$ 라 하면
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\{f(x) + g(x)\} - \{f(x) - g(x)\}}{2}$
 $= \frac{\alpha - \beta}{2}$

ㄴ. [반례] $f(x)=x-1$, $g(x)=x$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=0$,

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x)=1$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)}$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. [반례] $f(x)=\frac{1}{x-2}$, $g(x)=x+1$ 이면

$$f(g(x))=\frac{1}{x-1}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=-1$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)=2$ 이지만

$\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x))$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄹ. [반례] $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, $g(x)=\frac{x-3}{x-1}$ 이면 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 와

$\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ 의 값은 존재하지 않지만

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-3}{x-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2 = 2\end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ이다.

8 ① $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} x = 3$

② $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x-1)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (2x-1) = -3$

③ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+2x+4) = 12$

④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1}+1) = 2$

⑤ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{2-x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{2-x})(1+\sqrt{2-x})}{(x-1)(1+\sqrt{2-x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(1+\sqrt{2-x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+\sqrt{2-x}} = \frac{1}{2}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

9 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-2x}-\sqrt{4+x}}{\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-x}}$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4-2x}-\sqrt{4+x})(\sqrt{4-2x}+\sqrt{4+x})(\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-x})}{(\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-x})(\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-x})(\sqrt{4-2x}+\sqrt{4+x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x \times (\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-x})}{3x \times (\sqrt{4-2x}+\sqrt{4+x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\sqrt{3+2x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{4-2x}+\sqrt{4+x}} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

10 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)f(x)}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)f(x)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)f(x)}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}f(1)$

즉, $\frac{2}{3}f(1)=4$ 이므로 $f(1)=6$

11 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{x^2+2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}} = 0$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2-2x+4}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = -5$

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x}{\sqrt{4x^2-x}+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 3$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

12 $x=-t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x-3x}}{x-\sqrt{x^2+1}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2+2t+3t}}{-t-\sqrt{t^2+1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{t}+3}}{-1-\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -2\end{aligned}$$

13 $x < 0$ 일 때, $f(x) = \frac{-x-1}{3x+2}$

$x=-t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-1}{3x+2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t-1}{-3t+2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{t}}{-3+\frac{2}{t}} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

14 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x}\sqrt{x-2}-x)$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x})(\sqrt{x-2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1} = -1\end{aligned}$$

- 15 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 4x - 1}}$
- $$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 4x - 1}}{(x - \sqrt{x^2 + 4x - 1})(x + \sqrt{x^2 + 4x - 1})}$$
- $$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 4x - 1}}{-4x + 1}$$
- $$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}}{-4 + \frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}$$
- 16 $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로
- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} + x) = \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2 - 4t} - t)$$
- $$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2 - 4t} - t)(\sqrt{t^2 - 4t} + t)}{\sqrt{t^2 - 4t} + t}$$
- $$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-4t}{\sqrt{t^2 - 4t} + t}$$
- $$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-4}{\sqrt{1 - \frac{4}{t}} + 1} = -2$$
- 17 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{(x+1)^2} \right\}$
- $$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{x-1} \times \frac{(x+1)^2 - 4}{4(x+1)^2} \right\}$$
- $$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{x-1} \times \frac{(x+3)(x-1)}{4(x+1)^2} \right\}$$
- $$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{4(x+1)^2} = \frac{1}{4}$$
- 18 $\lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} - 3) \left(1 - \frac{3}{x-9} \right)$
- $$= \lim_{x \rightarrow 9} \left\{ (\sqrt{x} - 3) \times \frac{x-12}{x-9} \right\}$$
- $$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)(x-12)}{(x-9)(\sqrt{x} + 3)}$$
- $$= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(x-12)}{(x-9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-12}{\sqrt{x} + 3} = -\frac{1}{2}$$
- 19 $n > 0$ 일 때, $\frac{n+3}{n} = 1 + \frac{3}{n} > 0$, $\frac{-2n-3}{n} = -2 - \frac{3}{n} < 0$
- 이므로
- $$f\left(\frac{n+3}{n}\right) = \left(\frac{n+3}{n}\right)^2 + \frac{n+3}{n} = \frac{2n^2 + 9n + 9}{n^2}$$
- $$f\left(\frac{-2n-3}{n}\right) = -\frac{-2n-3}{n} = \frac{2n+3}{n}$$
- $$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ f\left(\frac{n+3}{n}\right) - f\left(\frac{-2n-3}{n}\right) \right\}$$
- $$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2n^2 + 9n + 9}{n^2} - \frac{2n+3}{n} \right)$$
- $$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \times \frac{6n+9}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n+9}{n} = 6$$

- 20 $A(2, 1), B\left(t, \frac{2}{t}\right), C\left(2, \frac{2}{t}\right)$ 이고 $t > 2$ 이므로
- $$\overline{AB} = \sqrt{(t-2)^2 + \left(\frac{2}{t} - 1\right)^2} = \sqrt{(t-2)^2 + \left(\frac{2-t}{t}\right)^2}$$
- $$= \sqrt{(t-2)^2 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)} = (t-2) \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}$$
- $$\overline{BC} = t - 2$$
- $$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t-2) \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}}{t-2}$$
- $$= \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} = 1$$
- 21 삼각형 OAB에서 변 AB의 길이는
- $$\overline{AB} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} = \sqrt{t^2 + 16}$$
- 내접원의 반지름의 길이 r 에 대하여
- $$\triangle OAB = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{r}{2} (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{AB})$$
- 이므로
- $$\frac{1}{2} \times t \times 4 = \frac{r}{2} (t + 4 + \sqrt{t^2 + 16})$$
- $$\therefore \frac{r}{t} = \frac{4}{t + 4 + \sqrt{t^2 + 16}}$$
- $$\therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{r}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{4}{t + 4 + \sqrt{t^2 + 16}} = \frac{1}{2}$$
- 22 $P(a, a^2), C(0, b)$ ($a \neq 0, b \neq 0$)라 하면
- $$\overline{CO} = \overline{CP}$$
- 에서 $\overline{CO}^2 = \overline{CP}^2$
- $$b^2 = a^2 + (a^2 - b)^2, b^2 = a^2 + a^4 - 2a^2b + b^2$$
- $$2a^2b = a^2(a^2 + 1)$$
- $$\therefore b = \frac{a^2 + 1}{2} \quad (\because a \neq 0)$$
- 점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $a \rightarrow 0$ 이므로
- $$\lim_{a \rightarrow 0} b = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2 + 1}{2} = \frac{1}{2}$$
- 따라서 원의 중심 C가 한없이 가까워지는 점의 y 좌표는 $\frac{1}{2}$ 이다.
- 23 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + ax - 2) = 0$
- $$1 - a - 2 = 0 \quad \therefore a = -1$$
- 이를 주어진 식의 좌변에 대입하면
- $$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1}$$
- $$= \lim_{x \rightarrow -1} (x-2) = -3$$
- $$\therefore b = -3$$
- $$\therefore a + b = -1 + (-3) = -4$$

24 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

$$(\text{분자}) \rightarrow 0 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - ax + b) = 0$$

$$4 - 2a + b = 0 \quad \therefore b = 2a - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - ax + 2a - 4}{x^2 - x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - a + 2)(x - 2)}{(x + 1)(x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - a + 2}{x + 1} = \frac{4 - a}{3} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{4 - a}{3} = 2 \text{이므로 } a = -2$$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } b = -4 - 4 = -8$$

$$\therefore ab = -2 \times (-8) = 16$$

25 $x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

$$(\text{분자}) \rightarrow 0 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow -2} (a\sqrt{x+3} + b) = 0$$

$$a + b = 0 \quad \therefore b = -a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{a\sqrt{x+3} - a}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{a(\sqrt{x+3} - 1)}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{a(\sqrt{x+3} - 1)(\sqrt{x+3} + 1)}{(x + 2)(\sqrt{x+3} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{a(x + 2)}{(x + 2)(\sqrt{x+3} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{a}{\sqrt{x+3} + 1} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{a}{2} = 1 \text{이므로 } a = 2$$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } b = -2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 4 + 4 = 8$$

26 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

$$(\text{분자}) \rightarrow 0 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + ax^2 + bx) = 0$$

$$1 + a + b = 0 \quad \therefore b = -a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax^2 + (-a - 1)x}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)(x + a + 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x(x + a + 1) \\ &= a + 2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } a + 2 = 3 \text{이므로 } a = 1$$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } b = -1 - 1 = -2$$

$$\therefore a - b = 1 - (-2) = 3$$

$$\begin{aligned} \textbf{27} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x - 2} \left(\frac{a}{x + 1} - 2 \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{1}{x - 2} \times \frac{a - 2(x + 1)}{x + 1} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x + a - 2}{(x - 2)(x + 1)} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

$$(\text{분자}) \rightarrow 0 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 2} (-2x + a - 2) = 0$$

$$-4 + a - 2 = 0 \quad \therefore a = 6$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x + 4}{(x - 2)(x + 1)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x - 2)}{(x - 2)(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{x + 1} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore b = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore ab = 6 \times \left(-\frac{2}{3} \right) = -4$$

$$\textbf{28} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - 2x - 3} = 2 \text{이므로 } a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + bx + c}{x^2 - 2x - 3} = 2 \text{에서 } x \rightarrow -1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고,}$$

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + bx + c) &= 0 \\ 2 - b + c &= 0 \quad \therefore c = b - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + bx + c}{x^2 - 2x - 3} = 2 \text{의 좌변에 대입하면}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + bx + b - 2}{x^2 - 2x - 3} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(2x + b - 2)}{(x + 1)(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + b - 2}{x - 3} = \frac{4 - b}{4} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{4 - b}{4} = 2 \text{이므로 } b = -4$$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } c = -4 - 2 = -6$$

$$\therefore a + b + c = 2 + (-4) + (-6) = -8$$

$$\begin{aligned} \textbf{29} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax + 1} - \sqrt{ax^2 + 1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + ax + 1} - \sqrt{ax^2 + 1})(\sqrt{x^2 + ax + 1} + \sqrt{ax^2 + 1})}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + \sqrt{ax^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - a)x^2 + ax}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + \sqrt{ax^2 + 1}} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

극한값이 존재하려면 분자와 분모의 차수가 같아야 하므로

$$1 - a = 0, a \neq 0 \quad \therefore a = 1$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 4ab = 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = 2$$

- 30 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 8$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

$$\therefore f(1) = 0 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)}{x+3}$ 의 값이 존재하고, $x \rightarrow -3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 0$

$$\therefore f(-3) = 0 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $f(x) = a(x-1)(x+3)$ ($a \neq 0$)이라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)(x+3)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} a(x+3) = 4a \end{aligned}$$

즉, $4a = 8$ 이므로 $a = 2$

따라서 $f(x) = 2(x-1)(x+3)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x-1)(x+3)}{x^2} = 2$$

- 31 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x^2+x+1} = 1$ 에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다. $\dots \textcircled{㉢}$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2+x-6} = \frac{2}{5}$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$

$$\therefore f(2) = 0 \quad \dots \textcircled{㉣}$$

㉢, ㉣에서 $f(x) = 2(x-2)(x+a)$ (a 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2+x-6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x+a)}{x^2+x-6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x+a)}{(x+3)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+a)}{x+3} = \frac{2a+4}{5} \end{aligned}$$

즉, $\frac{2a+4}{5} = \frac{2}{5}$ 이므로 $a = -1$

따라서 $f(x) = 2(x-2)(x-1)$ 이므로

$$f(3) = 2 \times 1 \times 2 = 4$$

- 32 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0$ 에서 $f(x)$ 는 이차 이하의 함수이다. $\dots \textcircled{㉤}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

$$\therefore f(0) = 0 \quad \dots \textcircled{㉥}$$

㉤, ㉥에서 $f(x) = ax^2 + bx$ (a, b 는 상수)라 하면 방정식 $f(x) = x$ 의 한 근이 -1 이므로 $f(-1) = -1$ 에서

$$a - b = -1 \quad \therefore b = a + 1$$

즉, $f(x) = ax^2 + (a+1)x$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + (a+1)x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (ax + a + 1) = a + 1 \end{aligned}$$

즉, $a + 1 = 3$ 이므로 $a = 2$

따라서 $f(x) = 2x^2 + 3x$ 이므로

$$f(1) = 2 + 3 = 5$$

- 33 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = 2$ 에서 함수 $f(x) - x^3$ 은 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다. $\dots \textcircled{㉦}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -3$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

$$\therefore f(0) = 0 \quad \dots \textcircled{㉧}$$

㉦, ㉧에서 $f(x) - x^3 = 2x^2 + ax$, 즉 $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax$ (a 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 + ax}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2x + a) = a \end{aligned}$$

$$\therefore a = -3$$

따라서 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ 이므로

$$f(2) = 8 + 8 - 6 = 10$$

- 34 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -2$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

$$\therefore f(0) = 0 \quad \dots \textcircled{㉨}$$

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2} = 6$ 에서 $x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$

$$\therefore f(-2) = 0 \quad \dots \textcircled{㉩}$$

㉨, ㉩에서 $f(x) = ax(x+2)(x+b)$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax(x+2)(x+b)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} a(x+2)(x+b) = 2ab \end{aligned}$$

즉, $2ab = -2$ 이므로

$$ab = -1 \quad \dots \textcircled{㉪}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax(x+2)(x+b)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} ax(x+b) = 4a - 2ab \end{aligned}$$

즉, $4a - 2ab = 6$ 이므로

$$2a - ab = 3 \quad \dots \textcircled{㉫}$$

㉪, ㉫을 연립하여 풀면 $a = 1, b = -1$

따라서 $f(x) = x(x+2)(x-1)$ 이므로

$$f(-1) = -1 \times 1 \times (-2) = 2$$

35 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 3$ 에서 두 다항함수 $f(x), g(x)$ 의 차수가 같고 최고차항의 계수의 비가 3이다.

또 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-g(x)}{3x-2} = 2$ 에서 함수 $f(x)-g(x)$ 는 일차함수이므로 $f(x), g(x)$ 는 모두 일차함수이다.

따라서 $f(x)=3ax+b, g(x)=ax+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-g(x)}{3x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax+b-c}{3x-2} = 2$$

$$\frac{2a}{3} = 2 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore f(x)-g(x)=6x+b-c$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-g(x)}{x-1} \text{의 값이 존재하고, } x \rightarrow 1 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-g(x)\} = 0 \quad \therefore f(1)-g(1) = 0$$

$$6+b-c=0 \quad \therefore b-c=-6$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-g(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x+b-c}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x-6}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 6 = 6 \end{aligned}$$

36 $x > 0$ 일 때, 주어진 부등식의 각 변을 x 로 나누면

$$\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x} < \frac{f(x)}{x} < \frac{\sqrt{4x^2+3}}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x} = 2, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2+3}}{x} = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

37 $x^2+3 > 0$ 이므로 각 변을 x^2+3 으로 나누면

$$\frac{3x^2+1}{x^2+3} < f(x) < \frac{3x^2+4}{x^2+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+1}{x^2+3} = 3, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+4}{x^2+3} = 3 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3$$

38 $x > 0$ 일 때, 주어진 부등식의 각 변을 x 로 나누면

$$-x+1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq x+1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (-x+1) = 1, \lim_{x \rightarrow 0+} (x+1) = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\{f(x)\}^2}{x\{4x+f(x)\}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}{4+\frac{f(x)}{x}} = \frac{1}{5}$$

I-2 01 함수의 연속

기초 문제 Training

16쪽

- (1) $x=0$ 에서 정의되어 있지 않다.
(2) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.
(3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$
- (1) 연속 (2) 연속 (3) 불연속 (4) 연속
- (1) $(-1, 2]$ (2) $(0, 4)$ (3) $[-2, 1)$
(4) $[-3, 5]$ (5) $(-\infty, 3]$ (6) $(-1, \infty)$
- (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $[4, \infty)$ (3) $(-\infty, 1), (1, \infty)$
- (1) $(-\infty, \infty)$
(2) $(-\infty, -2], [2, \infty)$
(3) $(-\infty, -2), (-2, \infty)$
(4) $(-\infty, \infty)$
- 최댓값: 3, 최솟값: 1

핵심 유형 Training

17~20쪽

- | | | | | |
|---------|------------------|---------|------|------|
| 1 L, C | 2 ④ | 3 ⑤ | 4 ③ | 5 L |
| 6 ③ | 7 $-\frac{1}{2}$ | 8 ⑤ | 9 3 | 10 8 |
| 11 -1 | 12 6 | 13 1 | 14 ④ | 15 ⑤ |
| 16 L, C | 17 ③ | 18 L, C | 19 ④ | 20 ④ |
| 21 3개 | 22 $-4 < a < 2$ | 23 4번 | | |

1 $\neg, f(0)=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{-x} = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$$\therefore f(1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (\sqrt{x-1} - 2) = -2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-2) = -2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\text{ㄷ. } f(2) = 4$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

따라서 보기의 함수 중 모든 실수 x 에서 연속인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

$$2 \quad \textcircled{1} f(-1) = 0, \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x+1) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (-x-1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$$\textcircled{2} f(-1) = 6, \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 2x + 3) = 6 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$$\textcircled{3} f(-1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (2x+1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (-1) = -1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$$\textcircled{4} f(-1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (-\sqrt{x+1} + 3) = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} 0 = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이다.

$$\textcircled{5} f(-1) = -3$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x-2) = -3 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

따라서 $x=-1$ 에서 불연속인 함수는 ㉔이다.

$$3 \quad \textcircled{1} f(0) = 0$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

$$\textcircled{4} f(1) = 1, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\textcircled{5} f(2) = 2, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

따라서 옳지 않은 것은 ㉕이다.

$$4 \quad \text{(i)} f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

$$\text{(ii)} f(3) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.

$$\text{(iii)} f(4) = 0, \lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \neq f(4)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 불연속이다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$, $x=3$ 에서 극한값이 존재하지 않고, $x=1$, $x=3$, $x=4$ 에서 불연속이므로

$$a=2, b=3 \quad \therefore a+b=5$$

$$5 \quad \text{ㄴ. } x-1=t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 1+ \text{일 때 } t \rightarrow 0+ \text{이고,}$$

$$x \rightarrow 1- \text{일 때 } t \rightarrow 0- \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x-1) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x-1) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x-1) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x-1)$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x-1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$f(x-1)$ 은 $x=1$ 에서 불연속이다.

$$\text{ㄴ. } f(f(0))=f(1)=0$$

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t=1$ 이고, $x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(f(x))=f(1)=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(f(x))=\lim_{t \rightarrow 0-} f(t)=0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(f(x))=f(f(0))$$

즉, 함수 $f(f(x))$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\text{ㄷ. } f(f(1))=f(0)=1$$

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이고,

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x))=\lim_{t \rightarrow 0+} f(t)=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(f(x))=f(1)=0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(f(x))$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x))$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$f(f(x))$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

$$6. \neg. f(0)-g(0)=1-0=1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)-g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) \\ &= 0-2=-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)-g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) \\ &= 0-(-2)=2 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)-g(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)-g(x)\}$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)-g(x)\}$ 의 값이 존재하지 않으므로 함

수 $f(x)-g(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$$\text{ㄴ. } f(0)g(0)=1 \times 0=0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x)=0 \times 2=0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x)=0 \times (-2)=0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$$

즉, 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\text{ㄷ. } f(g(0))=f(0)=1$$

$g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 2-$ 이고,

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow -2+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(g(x))=\lim_{t \rightarrow 2-} f(t)=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(g(x))=\lim_{t \rightarrow -2+} f(t)=1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))=1$$

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))=f(g(0))$ 이므로 함수 $f(g(x))$ 는

$x=0$ 에서 연속이다.

$$\text{ㄷ. } g(f(0))=g(1)=1$$

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))=\lim_{t \rightarrow 0+} g(t)=2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) \neq g(f(0))$$

즉, 함수 $g(f(x))$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수 중 $x=0$ 에서 연속인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

7 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}+a}{x-1}=b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

$$(\text{분자}) \rightarrow 0 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x+3}+a)=0$$

$$2+a=0 \quad \therefore a=-2$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore b = \frac{1}{4} \quad \therefore ab = -2 \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

8 함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x)=f(-2) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+ax+2}{x+2}=b-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

$$(\text{분자}) \rightarrow 0 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow -2} (x^2+ax+2)=0$$

$$4-2a+2=0 \quad \therefore a=3$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+3x+2}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+1)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (x+1) = -1 \end{aligned}$$

즉, $b-2=-1$ 이므로 $b=1$

$$\therefore a+b=3+1=4$$

9 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=f(2)$ 에서

$$f(2)=2^2-a \times 2+1=5-2a$$

$2 < x < 3$ 일 때, $[x]=2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} ([x]^2 - a[x] + 1) = 2^2 - a \times 2 + 1 = 5 - 2a$$

$1 < x < 2$ 일 때, $[x]=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} ([x]^2 - a[x] + 1) = 1^2 - a \times 1 + 1 = 2 - a$$

즉, $5-2a=2-a$ 이므로 $a=3$

- 10 함수 $f(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이고,
함수 $g(x)$ 는 $\lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x-3) = -2$,

$\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x+1) = 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 $x=1$ 에서 불연속이다.

따라서 함수 $f(g(x))$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = f(g(1))$ 에서

$$f(g(1)) = f(-2) = -2(-2+a)$$

$g(x) = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow -2$ 이고,

$x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow -2+} f(t) = -2(-2+a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = 0$$

즉, $-2(-2+a) = 0$ 이므로 $a = 2$

따라서 $f(x) = x(x+2)$ 이므로

$$f(2) = 2 \times 4 = 8$$

- 11 $x \neq 1$ 일 때, $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}+k}{x-1}$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 에서

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+k}{x-1} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x^2+3}+k) = 0$

$$2+k=0 \quad \therefore k=-2$$

이를 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned} f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore kf(1) = -2 \times \frac{1}{2} = -1$$

- 12 $x \neq -1, x \neq 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1} = \frac{(x+3)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= x+3 \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=-1, x=1$ 에서 연속이므로

$$(i) f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{에서 } f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+3) = 2$$

$$(ii) f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{에서 } f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 4$$

$$\therefore f(-1) + f(1) = 2 + 4 = 6$$

- 13 $x \neq -3, x \neq 2$ 일 때,

$$f(x) = \frac{x^3+ax+b}{x^2+x-6} = \frac{x^3+ax+b}{(x+3)(x-2)}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=-3, x=2$ 에서 연속이므로

$$(i) f(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} f(x) \text{에서}$$

$$f(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+ax+b}{(x+3)(x-2)}$$

$x \rightarrow -3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -3} (x^3+ax+b) = 0$

$$-27-3a+b=0 \quad \therefore 3a-b=-27 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$(ii) f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{에서}$$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+ax+b}{(x+3)(x-2)}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3+ax+b) = 0$

$$8+2a+b=0 \quad \therefore 2a+b=-8 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $a=-7, b=6$

$$\begin{aligned} \therefore f(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-7x+6}{(x+3)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-1)(x-2)}{(x+3)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1 \end{aligned}$$

- 14 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{x^2-2x-3} = \frac{x+1}{(x+1)(x-3)}$ 은 $x=-1, x=3$

에서 정의되지 않으므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 가 연속인 구간은

④ $(-\infty, -1), (-1, 3), (3, \infty)$ 이다.

- 15 두 함수 $f(x)=x, g(x)=x^2-4$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

① $f(x), 2g(x)$ 는 각각 모든 실수 x 에서 연속이므로

$f(x)+2g(x)$ 도 모든 실수 x 에서 연속이다.

② $f(x), g(x)$ 는 각각 모든 실수 x 에서 연속이므로

$f(x)g(x)$ 도 모든 실수 x 에서 연속이다.

③ $g(f(x))=x^2-4$ 이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

④ $f(g(x))=x^2-4$ 이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

⑤ $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x^2-4} = \frac{x}{(x+2)(x-2)}$ 은 $x=-2, x=2$ 에서 정의되지 않으므로 $x=-2, x=2$ 에서 불연속이다.

따라서 모든 실수 x 에서 연속인 함수가 아닌 것은 ⑤이다.

- 16 $\neg$. $f(a)=b$ (b 는 상수)라 하면 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

$|f(a)| = |b|$ 이고, $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow a$ 일 때 $t \rightarrow b$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{t \rightarrow b} |t| = |b|$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |f(a)|$$

즉, 함수 $|f(x)|$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

ㄴ. [반례] $f(x) = \begin{cases} -1 & (x \geq 0) \\ 1 & (x < 0) \end{cases}$ 이면 $\{f(x)\}^2 = 1$ 이므로

$\{f(x)\}^2$ 은 $x=0$ 에서 연속이지만 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

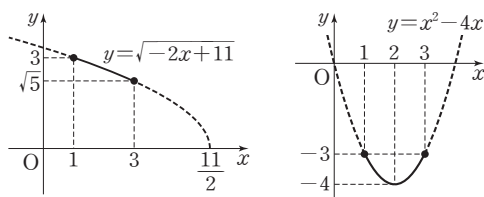
ㄷ. $f(x)+g(x)=h(x)$, $f(x)-g(x)=k(x)$ 라 하면

$$g(x) = \frac{h(x)-k(x)}{2}$$

이때 $h(x)$, $k(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이면 $g(x)$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, ㄷ이다.

- 17 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 두 함수 $f(x) = \sqrt{-2x+11}$, $g(x) = x^2 - 4x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $M=3$, $m=-4$ 이므로 $M+m=-1$

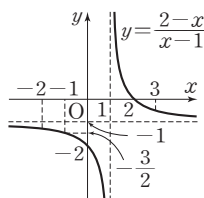
- 18 함수 $f(x) = \frac{2-x}{x-1}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$\neg$, ㄴ. 닫힌구간 $[-2, -1]$, $[2, 3]$ 에서 연속이므로 각 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

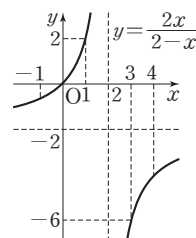
ㄴ. 반열린 구간 $[-1, 0)$ 에서 최댓값은 $-\frac{3}{2}$, 최솟값은 없다.

ㄷ. 반열린 구간 $(0, 1]$ 에서 최댓값과 최솟값은 없다.

ㄹ. 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 최댓값은 없고, 최솟값은 0이다. 따라서 보기의 구간 중 최댓값과 최솟값이 모두 존재하는 것은 $\neg$, ㄹ이다.



- 19 함수 $f(x) = \frac{2x}{2-x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



①, ②, ⑤ 닫힌구간 $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[3, 4]$ 에서 연속이므로 각 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

③ 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 최댓값은 없고, 최솟값은 2이다.

④ 닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 최댓값은 -6 , 최솟값은 없다. 따라서 최솟값이 존재하지 않는 구간은 ④이다.

- 20 $f(x) = x^3 + 2x - 8$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서 연속이고

$$f(-2) = -20, f(-1) = -11, f(0) = -8,$$

$$f(1) = -5, f(2) = 4, f(3) = 25$$

따라서 $f(1)f(2) < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 ④이다.

- 21 $g(x) = f(x) - x^2$ 이라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 연속이고

$$g(1) = f(1) - 1^2 = 3, g(2) = f(2) - 2^2 = -3,$$

$$g(3) = f(3) - 3^2 = 2, g(4) = f(4) - 4^2 = -1$$

이때 $g(1)g(2) < 0$, $g(2)g(3) < 0$, $g(3)g(4) < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $g(x) = 0$ 은 열린구간 $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 열린구간 $(1, 4)$ 에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

- 22 $f(x) = x^2 - 3x + a$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고

$$f(-1) = 1 + 3 + a = a + 4$$

$$f(1) = 1 - 3 + a = a - 2$$

이때 방정식 $f(x) = 0$ 이 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 $f(-1)f(1) < 0$ 이어야 하므로 $(a+4)(a-2) < 0 \quad \therefore -4 < a < 2$

- 23 기차가 A역을 출발한 지 x 시간 후의 기차의 속력을 $f(x)$ km/h라 하고 A역을 출발한 지 각각 b 시간, c 시간 후에 B역, C역에 도착하였다고 하면

$$f(0) = 0, f(b) = 0, f(c) = 0$$

이때 $0 < a < b$, $b < \beta < c$ 이고 $f(a) = 120$, $f(\beta) = 120$ 인 a, β 가 존재하므로 $f(k) = 60$ 인 k 가 열린구간 $(0, a)$, (a, b) , (b, β) , (β, c) 에 각각 적어도 하나씩 존재한다. 따라서 기차의 속력이 60 km/h인 순간은 적어도 4번 있었다.

II-1 01 미분계수

기초 문제 Training

22쪽

- 1 (1) 4 (2) 4 (3) -8 (4) 14
- 2 (1) $-4x-2$ (2) $-2a-2$
- 3 (1) 3 (2) -5 (3) 2 (4) -3
- 4 (1) 8 (2) -6
- 5 (가) 연속 (나) 미분가능하지 않다

핵심 유형 Training

23~26쪽

- | | | | | |
|------|--|-----------------|------|------|
| 1 -3 | 2 1 | 3 ① | 4 3 | 5 -5 |
| 6 12 | 7 ④ | 8 $\frac{1}{6}$ | 9 1 | 10 ③ |
| 11 1 | 12 10 | 13 ⑤ | 14 ④ | 15 2 |
| 16 ㄴ | 17 $f'(b) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(a)$ | 18 ㄴ, ㄷ | | |
| 19 ㄷ | 20 ㄱ, ㄴ | 21 ㄴ, ㄷ | 22 ④ | 23 ④ |
| 24 3 | 25 ⑤ | | | |

- 1 x 의 값이 -1에서 1까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} = \frac{a+3-(-a+3)}{2} = a$$
 $\therefore a = -3$
- 2 x 의 값이 a 에서 $a+2$ 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+2)-f(a)}{a+2-a} = \frac{\{(a+2)^2+(a+2)\}-(a^2+a)}{2} = \frac{4a+6}{2} = 2a+3$$
따라서 $2a+3=5$ 이므로 $a=1$
- 3 x 의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{2-0}{2} = 1$$
 $\therefore a=1$

$x=1$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(1+\Delta x)^2+3(1+\Delta x)\}-2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-\Delta x+1) = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore b=1$$

$$\therefore a+b=1+1=2$$

- 4 x 의 값이 1에서 5까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{4-0}{4} = 1$$

$x=a$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(a+\Delta x)^2-5(a+\Delta x)+4\}-(a^2-5a+4)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2+(2a-5)\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x+2a-5) \\ &= 2a-5 \end{aligned}$$

따라서 $1=2a-5$ 이므로 $a=3$

$$\begin{aligned} 5 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h)-f(1)}{2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h)-f(1)}{5h} \times \frac{5}{2} \\ &= \frac{5}{2} f'(1) = \frac{5}{2} \times (-2) = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1-4h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-4h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times 2 \\ &\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-4h)-f(1)}{-4h} \times (-4) \\ &= 2f'(1)+4f'(1)=6f'(1) \\ &= 6 \times 2 = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+kh)-f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+kh)-f(2)}{kh} \times k \\ &= kf'(2) = 3k \end{aligned}$$

따라서 $3k=9$ 이므로 $k=3$

- 8 $\frac{3}{t}=h$ 로 놓으면 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \left\{ f\left(\frac{2t+3}{t}\right) - 6 \right\} = 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-6}{h} = \frac{1}{2}$$

$h \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로
(분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{f(2+h) - 6\} = 0$$

$$f(2) - 6 = 0 \quad \therefore f(2) = 6$$

$$\begin{aligned} \therefore 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 6}{h} &= 3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= 3f'(2) \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 3f'(2) = \frac{1}{2} \text{이므로 } f'(2) = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} 9 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^2) - f(4)}{x^3 - 8} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x^2) - f(4)}{x^2 - 4} \times \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^2) - f(4)}{x^2 - 4} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} \\ &= f'(4) \times \frac{4}{12} = 3 \times \frac{1}{3} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - x^2 f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1) + f(1) - x^2 f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2 - 1} \times (x+1) \right\} \\ &\quad - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)f(1)}{x-1} \\ &= 2f'(1) - 2f(1) = 2 \times 2 - 2 \times (-1) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{\sqrt{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{\sqrt{f(x)} - 2\} \{\sqrt{f(x)} + 2\} (\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) \{\sqrt{f(x)} + 2\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - 4}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{f(x)} + 2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{f(x)} + 2} \\ &= f'(1) \times \frac{1+1}{\sqrt{f(1)} + 2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9f(x)}{x^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9f(3) + 9f(3) - 9f(x)}{x^2 - 9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 9} - 9 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9} \\ &= 1 - 9 \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \times \frac{1}{x + 3} \right\} \\ &= 1 - 9 \left\{ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x + 3} \right\} \\ &= 1 - 9 \times f'(3) \times \frac{1}{6} = 1 + 9 = 10 \end{aligned}$$

$$13 \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \text{의 양변에 } x=0, y=0 \text{을 대입하면}$$

$$f(0) = f(0) + f(0) \quad \therefore f(0) = 0$$

미분계수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3) + f(h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) = 3 \end{aligned}$$

$$14 \quad f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy + 1 \text{의 양변에 } x=0, y=0 \text{을 대입하면}$$

$$f(0) = f(0) + f(0) + 1 \quad \therefore f(0) = -1$$

미분계수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) + f(h) + 2h + 1 - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 2h + 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} 2 \\ &= f'(0) + 2 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } f'(0) + 2 = 4 \text{이므로 } f'(0) = 2$$

$$15 \quad f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy(x+y) - 1 \text{의 양변에}$$

$$x=0, y=0 \text{을 대입하면}$$

$$f(0) = f(0) + f(0) - 1 \quad \therefore f(0) = 1$$

미분계수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) + f(h) + 6h(2+h) - 1 - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 6h(2+h) - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} 6(2+h) \\ &= f'(0) + 12 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } f'(0) + 12 = 11 \text{이므로 } f'(0) = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) + f(h) + 3h(1+h) - 1 - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 3h(1+h) - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} 3(1+h) \\ &= f'(0) + 3 = -1 + 3 = 2 \end{aligned}$$

16 A(a, f(a)), B(b, f(b))라 하자.

ㄱ. 직선 AB의 기울기는 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

오른쪽 그림에서 직선 AB

의 기울기는 직선 $y=\frac{2}{5}x$

의 기울기보다 작으므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \frac{2}{5}$$

$0 < a < b$ 에서 $b-a > 0$ 이므로

$$5f(b) - 5f(a) < 2b - 2a$$

ㄴ. 원점 O에 대하여 직선 OA의 기울기는 직선 OB의 기울기보다 크므로

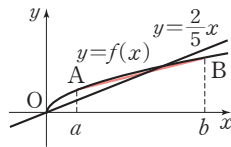
$$\frac{f(a)}{a} > \frac{f(b)}{b}$$

ㄷ. 점 B(b, f(b))에서의 접선의 기울기는 직선 $y=\frac{2}{5}x$

의 기울기보다 작으므로

$$f'(b) < \frac{2}{5}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.



17 두 점 (a, f(a)), (b, f(b))를

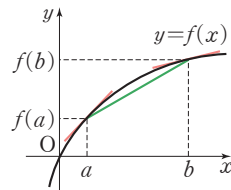
지나는 직선의 기울기는 점

(a, f(a))에서의 접선의 기울

기보다 작고 점 (b, f(b))에서

의 접선의 기울기보다 크므로

$$f'(b) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(a)$$



18 ㄱ. 최고차항의 계수가 양수인 이차

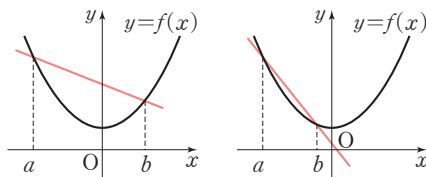
함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직

선 $x=0$ 에 대하여 대칭이므로

$$f'(-2) < 0, f'(2) > 0$$

$$\therefore f'(-2) \neq f'(2)$$

ㄴ. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=0$ 에 대하여 대칭이므로 $a+b < 0$ 인 경우는 다음 2가지가 있다.



즉, $f(a) > f(b)$ 이므로

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0$$

ㄷ. $a+b=0$ 이면 $a=-b$

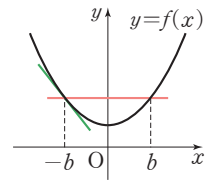
즉, $a < 0, b > 0$ 이므로

$$m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$f'(a) = f'(-b) < 0$$

$$\therefore m > f'(a)$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.



19 ㄱ. $f(x) = |x|^2 = x^2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h = 0 \end{aligned}$$

즉, $f'(0)$ 의 값이 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

ㄴ. $0 \leq x < 1$ 일 때, $[x]=0$ 이므로 $x(1-[x])=x$

$-1 < x < 0$ 일 때, $[x]=-1$ 이므로 $x(1-[x])=2x$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h-0}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{2h-0}{h} = 2$$

즉, $f'(0)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{(2+h)^2 - (2+h) - 2\} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2 + 3h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} (h+3) = 3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\{3(2+h) - 6\} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{3h}{h} = 3$$

즉, $f'(2)$ 의 값이 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.

20 ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{2h-0}{h} = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{0-0}{h} = 0$$

즉, $f'(0)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(h^2-2h)-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (h-2) = -2 \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(h^2+2h)-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} (h+2) = 2\end{aligned}$$

즉, $f'(0)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{-h(h-1)-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (1-h) = 1 \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h(h-1)-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} (1-h) = 1\end{aligned}$$

즉, $f'(0)$ 의 값이 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

따라서 보기의 함수 중 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21 ㄱ. $k(x) = x-1+f(x)$ 라 하면

$$k(x) = \begin{cases} 2x-2 & (x \geq 1) \\ 0 & (x < 1) \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{k(1+h)-k(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{2h-0}{h} = 2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{k(1+h)-k(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{0-0}{h} = 0$$

즉, $k'(1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $k(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $k(x) = (x-1)f(x)$ 라 하면

$$k(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & (x \geq 1) \\ -(x-1)^2 & (x < 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{k(1+h)-k(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^2-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} h = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{k(1+h)-k(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h^2-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} (-h) = 0\end{aligned}$$

즉, $k'(1)$ 의 값이 존재하므로 함수 $k(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

ㄷ. $k(x) = f(x)g(x)$ 라 하면

$$k(x) = \begin{cases} (x-1)(2x-1) & (x \geq 1) \\ x(x-1) & (x < 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{k(1+h)-k(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h(2h+1)-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (2h+1) = 1 \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{k(1+h)-k(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h(1+h)-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} (1+h) = 1\end{aligned}$$

즉, $k'(1)$ 의 값이 존재하므로 함수 $k(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

따라서 보기의 함수 중 $x=1$ 에서 미분가능한 것은 ㄴ, ㄷ이다.

$$22 \quad f(x) = \begin{cases} -1 & (x \geq 1) \\ 2x^2-1 & (-1 < x < 0 \text{ 또는 } 0 < x < 1) \\ 0 & (x=0) \\ 1 & (x \leq -1) \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 1) \\ -x & (-1 < x < 0 \text{ 또는 } 0 < x < 1) \\ -1 & (x=0) \\ -1 & (x \leq -1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$k(x) = f(x)g(x) = \begin{cases} -1 & (x \geq 1) \\ -x(2x^2-1) & (-1 < x < 1) \text{이라} \\ -1 & (x \leq -1) \end{cases}$$

하자.

$$\text{ㄱ. } \lim_{x \rightarrow -1+} k(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \{-x(2x^2-1)\} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} k(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (-1) = -1$$

즉, $\lim_{x \rightarrow -1+} k(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} k(x)$ 이므로 함수 $k(x)$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이다.

$$\begin{aligned}\text{ㄴ. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(h)-k(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h(2h^2-1)-0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (1-2h^2) = 1\end{aligned}$$

즉, $k'(0)$ 의 값이 존재하므로 함수 $k(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

$$\text{ㄷ. } \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{k(1+h)-k(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{-1-(-1)}{h} = 0$$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{k(1+h)-k(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-(1+h)\{2(1+h)^2-1\}-(-1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-2h^3-6h^2-5h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} (-2h^2-6h-5) = -5\end{aligned}$$

즉, $k'(1)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $k(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

23 $f(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 1) \\ -x+1 & (0 < x < 1) \\ x & (x \leq 0) \end{cases}$ 이므로

$$f(-x) = \begin{cases} -x & (x \geq 0) \\ x+1 & (-1 < x < 0) \\ -x-1 & (x \leq -1) \end{cases}$$

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)f(-x) = f(-1)f(1) = 0$ 이므로 함수 $f(x)f(-x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h)f(-h) - f(0)f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(-h+1)(-h) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} (h-1) = -1 \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h)f(-h) - f(0)f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h(h+1) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} (h+1) = 1 \end{aligned}$$

즉, $x=0$ 에서 미분계수가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)f(-x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $x \leq 0$ 일 때, $f(x) = x$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h)f(-2+h) - f(-1)f(-2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)(-2+h) - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 3h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h-3) = -3 \end{aligned}$$

즉, $x = -1$ 에서 미분계수가 존재하므로 함수 $f(x)f(x-1)$ 은 $x = -1$ 에서 미분가능하다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

24 $x=1$ 에서 불연속이므로 $a=1$

$x=0$, $x=1$ 에서 미분가능하지 않으므로 $b=2$

$\therefore a+b=3$

25 ① $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재한다.

② 점 $(3, f(3))$ 에서의 접선의 기울기가 0보다 크므로 $f'(3) > 0$ 이다.

③ 불연속인 x 의 값은 2, 6의 2개이다.

④ $f'(x) = 0$, 즉 접선의 기울기가 0인 x 의 값은 5의 1개이다.

⑤ 미분가능하지 않은 x 의 값은 2, 4, 6의 3개이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

II-1 02 도함수

기초 문제 Training

27쪽

1 (가) $2xh$ (나) $2x$ (다) $2x-2$

2 (1) $y' = 0$ (2) $y' = 3x^2$ (3) $y' = -4x^3$

3 (1) $y' = -4x+4$ (2) $y' = 15x^2+2$
(3) $y' = 6x^2+2x+6$ (4) $y' = -8x^3-6x+2$

4 (1) $y' = 8x+1$ (2) $y' = -9x^2+4x$
(3) $y' = 3x^2+8x-1$ (4) $y' = 9x^2+26x+4$

5 (1) $y' = 3x^2+4x-5$ (2) $y' = 18x^2-62x+44$

6 (1) $y' = 3(2x-1)(x^2-x+2)^2$
(2) $y' = (x+3)(3x-5)$

핵심 유형 Training

28~30쪽

1 $f'(x) = 4x-2$	2 ②	3 8	4 78
5 ③	6 6	7 ②	8 ①
10 15	11 10	12 ③	13 2
15 0	16 ⑤	17 ⑤	18 1
20 ③	21 7	19 ①	

1 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 4xy$ 의 양변에 $x=0$, $y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) \quad \therefore f(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + 4xh - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 4xh}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h) - f(0)}{h} + 4x \right\} \\ &= f'(0) + 4x = 4x - 2 \end{aligned}$$

2 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 2xy + 1$ 의 양변에 $x=0$, $y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 1 \quad \therefore f(0) = -1$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) + f(h) - 2h + 1 - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 2h + 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h) - f(0)}{h} - 2 \right\} = f'(0) - 2 \end{aligned}$$

즉, $f'(0) - 2 = 2$ 이므로 $f'(0) = 4$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) - 2xh + 1 - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 2xh + 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h) - f(0)}{h} - 2x \right\} \\ &= f'(0) - 2x = -2x + 4 \end{aligned}$$

- 3 $f(x+y) = 2f(x)f(y)$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면
 $f(0) = 2f(0)f(0) \quad \therefore f(0) = \frac{1}{2} \quad (\because f(0) > 0)$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(x)f(h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(x) \left\{ f(h) - \frac{1}{2} \right\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ 2f(x) \times \frac{f(h) - f(0)}{h} \right\} \\ &= 2f(x)f'(0) \end{aligned}$$

$$f'(0) = 4 \text{이므로 } f'(x) = 8f(x) \quad \therefore \frac{f'(x)}{f(x)} = 8$$

- 4 $f'(x) = 3(x-1)(x^2+1) + (3x+1)(x^2+1) + (3x+1)(x-1) \times 2x$
 $\therefore f'(2) = 3 \times 1 \times 5 + 7 \times 5 + 7 \times 1 \times 4 = 78$

- 5 $f'(x) = 3x^2 + k$ 이므로 $f'(0) = -2$ 에서 $k = -2$
 따라서 $f(x) = x^3 - 2x - 3$ 이므로
 $f(2) = 8 - 4 - 3 = 1$

- 6 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면
 $f'(x) = 2ax + b$
 $f(0) = 1$ 에서 $c = 1$
 $f'(0) = 2$ 에서 $b = 2$
 $f'(-1) = -4$ 에서 $-2a + b = -4$
 $b = 2$ 를 대입하면 $-2a + 2 = -4 \quad \therefore a = 3$
 따라서 $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ 이므로
 $f(1) = 3 + 2 + 1 = 6$

- 7 $(x^2-1)f(x) = \{g(x)\}^2 - 25$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2xf(x) + (x^2-1)f'(x) = 2g(x)g'(x)$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$2f(1) = 2g(1)g'(1), \quad f(1) = g(1)g'(1)$$

$$\therefore f(1) = 5 \times 2 = 10$$

- 8 $f(x) = -2x^3 + x^2 - 4$ 라 하면 $f'(x) = -6x^2 + 2x$
 따라서 점 $(1, -5)$ 에서의 접선의 기울기는
 $f'(1) = -6 + 2 = -4$

- 9 $f(x) = x^2 - 4x$ 에서 $f'(x) = 2x - 4$
 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기가 6이므로
 $2a - 4 = 6 \quad \therefore a = 5$

- 10 $f(x) = x^3 - ax + b$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - a$
 점 $(1, -1)$ 에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로 $f'(1) = -2$ 에서
 $3 - a = -2 \quad \therefore a = 5$
 점 $(1, -1)$ 은 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로 $f(1) = -1$ 에서
 $-1 = 1 - 5 + b \quad \therefore b = 3$
 $\therefore ab = 5 \times 3 = 15$

- 11 $g(x) = (x^3 - x + 2)f(x)$ 에서
 $g'(x) = (3x^2 - 1)f(x) + (x^3 - x + 2)f'(x)$
 점 $(-1, 2)$ 에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f'(-1) = 3$
 점 $(-1, 2)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로 $f(-1) = 2$
 $\therefore g'(-1) = 2f(-1) + 2f'(-1)$
 $= 2 \times 2 + 2 \times 3 = 10$

- 12 $\frac{1}{t} = h$ 로 놓으면 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow \infty} t \left\{ f\left(1 + \frac{2}{t}\right) - f\left(1 - \frac{1}{t}\right) \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 \\ &\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \times (-1) \\ &= 2f'(1) + f'(1) = 3f'(1) \\ &f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 \text{이므로 } f'(1) = 3 - 2 + 1 = 2 \\ &\therefore 3f'(1) = 3 \times 2 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13 \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1-2h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1) + f(1) - f(1-2h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{3h} \times 3 \\
 &\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} \times (-2) \\
 &= 3f'(1) + 2f'(1) = 5f'(1) \\
 &\text{즉, } 5f'(1) = 35 \text{이므로 } f'(1) = 7 \\
 &f'(x) = 3x^2 + 2ax \text{이므로 } f'(1) = 7 \text{에서} \\
 &3 + 2a = 7 \quad \therefore a = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14 \quad & f(x) = x^n + 3x \text{라 하면 } f(1) = 4 \text{이므로} \\
 & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n + 3x - 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} f'(1) \\
 &\text{즉, } \frac{1}{2} f'(1) = 5 \text{이므로 } f'(1) = 10 \\
 &f'(x) = nx^{n-1} + 3 \text{이므로 } f'(1) = 10 \text{에서} \\
 &n + 3 = 10 \quad \therefore n = 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15 \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -2 \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고,} \\
 & \text{극한값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{에서} \\
 & \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \therefore f(0) = 0 \\
 & \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = -2 \\
 & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{x - 1} = -1 \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고,} \\
 & \text{극한값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{에서} \\
 & \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + 2\} = 0 \quad \therefore f(1) = -2 \\
 & \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = -1 \\
 & f(x) \text{는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로} \\
 & f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{ (} a, b, c \text{는 상수)라 하면} \\
 & f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\
 & f'(0) = -2 \text{에서 } b = -2 \\
 & f'(x) = 3x^2 + 2ax - 2 \text{이므로 } f'(1) = -1 \text{에서} \\
 & 3 + 2a - 2 = -1 \quad \therefore a = -1 \\
 & f(0) = 0 \text{에서 } c = 0 \\
 & \text{따라서 } f(x) = x^3 - x^2 - 2x \text{이므로 } f(2) = 8 - 4 - 4 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16 \quad & \text{함수 } f(x) \text{가 } x=1 \text{에서 미분가능하면 } x=1 \text{에서 연속이} \\
 & \text{고 미분계수 } f'(1) \text{이 존재한다.} \\
 (i) \quad & x=1 \text{에서 연속이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \text{에서} \\
 & b + 2 = 1 + a \quad \therefore a - b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}
 \end{aligned}$$

(ii) 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{(1+h)^3 + a(1+h)^2\} - (1+a)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h^3 + (a+3)h^2 + (2a+3)h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0+} \{h^2 + (a+3)h + 2a+3\} = 2a+3 \\
 & \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\{b(1+h) + 2\} - (1+a)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{bh}{h} \quad (\because \textcircled{7}) \\
 &= b \\
 &\therefore 2a+3=b \quad \dots\dots \textcircled{8}
 \end{aligned}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -4, b = -5 \quad \therefore ab = 20$$

다른 풀이

$g(x) = x^3 + ax^2, h(x) = bx + 2$ 라 하면

$$g'(x) = 3x^2 + 2ax, h'(x) = b$$

(i) $x=1$ 에서 연속이므로 $g(1) = h(1)$ 에서

$$1 + a = b + 2 \quad \therefore a - b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $x=1$ 에서의 미분계수가 존재하므로

$$g'(1) = h'(1) \text{에서 } 3 + 2a = b \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -4, b = -5 \quad \therefore ab = 20$$

$$17 \quad f(x) = \begin{cases} (x+1)(x^2+ax+1) & (x \geq -1) \\ -(x+1)(x^2+ax+1) & (x < -1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하면 $x = -1$ 에서 미분가능하므로 미분계수 $f'(-1)$ 이 존재한다.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h\{(-1+h)^2 + a(-1+h) + 1\} - 0}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0+} \{h^2 + (a-2)h - a + 2\} = -a + 2 \\
 & \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h\{(-1+h)^2 + a(-1+h) + 1\} - 0}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0-} \{-h^2 - (a-2)h + a - 2\} = a - 2
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -a + 2 = a - 2 \text{이므로 } a = 2$$

$$\begin{aligned}
 & \text{따라서 } f(x) = |x+1|(x^2+2x+1) \text{이므로} \\
 & f(1) = 2 \times 4 = 8
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+1)(x^2+ax+1), \\ h(x) &= -(x+1)(x^2+ax+1) \text{이라 하면} \\ g'(x) &= x^2+ax+1+(x+1)(2x+a) \\ h'(x) &= -(x^2+ax+1)-(x+1)(2x+a) \\ x &= -1 \text{에서의 미분계수가 존재하므로} \\ g'(-1) &= h'(-1) \text{에서} \\ 2-a &= a-2 \quad \therefore a=2 \\ \text{따라서 } f(x) &= |x+1|(x^2+2x+1) \text{이므로} \\ f(1) &= 2 \times 4 = 8 \end{aligned}$$

18 $k(x) = f(x)g(x) = \begin{cases} (x+2)(x^2+ax+b) & (x \geq 2) \\ (-x+4)(x^2+ax+b) & (x < 2) \end{cases}$ 라

하자.

함수 $k(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하면 $x=2$ 에서 연속이고 미분계수 $k'(2)$ 가 존재한다.

(i) $x=2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2-} k(x) = k(2)$ 에서

$$\begin{aligned} 8+4a+2b &= 16+8a+4b \\ \therefore 2a+b &= -4 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) 미분계수 $k'(2)$ 가 존재하므로

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{k(2+h)-k(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(4+h)\{(2+h)^2+a(2+h)+b\}-(16+8a+4b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \{h^2+(a+8)h+6a+b+20\} = 6a+b+20 \\ &\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{k(2+h)-k(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(2-h)\{(2+h)^2+a(2+h)+b\}-(16+8a+4b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \{-h^2-(a+2)h-b+4\} (\because \textcircled{1}) \\ &= -b+4 \end{aligned}$$

즉, $6a+b+20 = -b+4$ 이므로

$$3a+b = -8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -4$, $b = 4$

따라서 $g(x) = x^2 - 4x + 4$ 이므로

$$g(1) = 1 - 4 + 4 = 1$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} k(x) &= (x+2)(x^2+ax+b), \\ h(x) &= (-x+4)(x^2+ax+b) \text{라 하면} \\ k'(x) &= x^2+ax+b+(x+2)(2x+a) \\ h'(x) &= -(x^2+ax+b)+(-x+4)(2x+a) \end{aligned}$$

(i) $x=2$ 에서 연속이므로 $k(2) = h(2)$ 에서

$$16+8a+4b = 8+4a+2b$$

$$\therefore 2a+b = -4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x=2$ 에서의 미분계수가 존재하므로

$$k'(2) = h'(2) \text{에서}$$

$$6a+b+20 = -b+4 \quad \therefore 3a+b = -8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -4$, $b = 4$

따라서 $g(x) = x^2 - 4x + 4$ 이므로 $g(1) = 1 - 4 + 4 = 1$

19 $x^{10} - 2x^9 + ax + b$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 0이므로

$$x^{10} - 2x^9 + ax + b = (x-1)^2 Q(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 - 2 + a + b = 0 \quad \therefore a + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$10x^9 - 18x^8 + a = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x)$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$10 - 18 + a = 0 \quad \therefore a = 8$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $8 + b = 1 \quad \therefore b = -7$

$$\therefore a - b = 8 - (-7) = 15$$

20 $x^{12} - x + 1$ 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x) = ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$x^{12} - x + 1 = (x+1)^2 Q(x) + ax + b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$1 + 1 + 1 = -a + b \quad \therefore a - b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$12x^{11} - 1 = 2(x+1)Q(x) + (x+1)^2 Q'(x) + a$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$-12 - 1 = a \quad \therefore a = -13$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$-13 - b = -3 \quad \therefore b = -10$$

따라서 $R(x) = -13x - 10$ 이므로

$$R(-2) = 26 - 10 = 16$$

21 $x^{20} + ax^9 + b$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $-2x+1$ 이므로

$$x^{20} + ax^9 + b = (x+1)^2 Q(x) - 2x + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$1 - a + b = 2 + 1 \quad \therefore a - b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$20x^{19} + 9ax^8 = 2(x+1)Q(x) + (x+1)^2 Q'(x) - 2$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$-20 + 9a = -2 \quad \therefore a = 2$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $2 - b = -2 \quad \therefore b = 4$

따라서 다항식 $x^{20} + 2x^9 + 4$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 $1 + 2 + 4 = 7$

II-2 01 접선의 방정식과 평균값 정리

기초 문제 Training

32쪽

- 1 (1) 4 (2) $y=4x-13$
- 2 (1) 4 (2) $y=5x-21$
- 3 (1) $y=(-3t^2+2)x+2t^3+2$ (2) -1 (3) $y=-x$
- 4 16, $4x^3$, 0
- 5 4, $-4x+1$, $-4c+1$, 2

핵심 유형 Training

33~37쪽

1 ③	2 ③	3 ①	4 ②	5 5
6 ③	7 $y=4x+6$	8 -4	9 ①	
10 ④	11 ⑤	12 ④	13 -3	14 $\frac{1}{4}$
15 $y=12x-2$	16 ⑤	17 $8\sqrt{2}$	18 $-\frac{1}{4}$	
19 0	20 ②	21 ①	22 -2	23 ②
24 $\frac{1}{8}$	25 6	26 ④	27 ②	28 ④
29 ⑤	30 -3	31 ③	32 ④	33 2
34 12				

- 1 곡선 $y=x^2-4x+3$ 이 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 구하면
 $x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$
 $\therefore x=1$ 또는 $x=3$
따라서 곡선이 x 축과 만나는 두 점의 좌표는
 $(1, 0)$, $(3, 0)$
 $f(x)=x^2-4x+3$ 이라 하면 $f'(x)=2x-4$
점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y=-2(x-1) \quad \therefore y=-2x+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
점 $(3, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y=2(x-3) \quad \therefore y=2x-6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-2$
따라서 교점의 좌표는 $(2, -2)$ 이므로
 $a=2$, $b=-2 \quad \therefore a+b=0$

- 2 $f(x)=-x^3+2x+5$ 라 하면 $f'(x)=-3x^2+2$
곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(-1, a)$ 를 지나므로 $f(-1)=a$ 에서
 $1-2+5=a \quad \therefore a=4$
점 $(-1, 4)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-1$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-4=-(x+1) \quad \therefore y=-x+3$
이 접선이 점 $(b, 1)$ 을 지나므로
 $1=-b+3 \quad \therefore b=2$
 $\therefore a-b=4-2=2$

- 3 $f(x)=x^3-5x^2+ax+1$ 이라 하면
 $f'(x)=3x^2-10x+a$
곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, 6)$ 을 지나므로 $f(1)=6$ 에서
 $1-5+a+1=6 \quad \therefore a=9$
점 $(1, 6)$ 에서의 접선의 기울기는
 $f'(1)=-7+a=-7+9=2$
즉, 접선의 방정식은
 $y-6=2(x-1) \quad \therefore y=2x+4$
따라서 $m=2$, $n=4$ 이므로
 $a+m-n=9+2-4=7$

- 4 $f(x)=x^3-4x^2+x-1$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2-8x+1$
점 $(1, -3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-4$ 이므로 접선의 방정식은
 $y+3=-4(x-1) \quad \therefore y=-4x+1$
곡선 $y=x^3-4x^2+x-1$ 과 직선 $y=-4x+1$ 의 교점의 x 좌표를 구하면
 $x^3-4x^2+x-1=-4x+1$, $x^3-4x^2+5x-2=0$
 $(x-1)^2(x-2)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=2$
따라서 교점 중 접점이 아닌 점의 좌표는 $(2, -7)$ 이므로
 $a=2$, $b=-7 \quad \therefore 2a+b=4-7=-3$

- 5 $f(x)=x^3-2x^2+3x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-4x+3$
점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-2=2(x-1) \quad \therefore y=2x$

점 $(1, 2)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이므로 이 직선의 방정식은

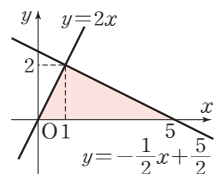
$$y-2=-\frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

따라서 두 직선 $y=2x$,

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \text{ 및 } x\text{축으로 둘러}$$

싸인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$$



- 6 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기가 -2 이므로
 $f(1)=2, f'(1)=-2$
 $g(x)=(2x^3-5x)f(x)$ 라 하면
 $g'(x)=(6x^2-5)f(x)+(2x^3-5x)f'(x)$
 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=1$ 인 점에서의 접선의 기울기는
 $g'(1)=f(1)-3f'(1)=2+6=8$
 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=1$ 인 점의 y 좌표는
 $g(1)=-3f(1)=-6$
 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, -6)$ 에서의 접선의 방정식은
 $y+6=8(x-1) \quad \therefore y=8x-14$
 따라서 $m=8, n=-14$ 이므로 $m-n=22$
- 7 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)+1}{x+2}=3$ 에서 $x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고,
 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서
 $\lim_{x \rightarrow -2} \{f(x)+1\}=0 \quad \therefore f(-2)=-1$
 이때 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = f'(-2)$
 이므로 $f'(-2)=3$
 또 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x)-2}{x+2}=2$ 에서 $x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이
 고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서
 $\lim_{x \rightarrow -2} \{g(x)-2\}=0 \quad \therefore g(-2)=2$
 이때 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x)-2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x)-g(-2)}{x+2} = g'(-2)$
 이므로 $g'(-2)=2$
 $h(x)=f(x)g(x)$ 라 하면
 $h(-2)=f(-2)g(-2)=-2$
 $x=-2$ 인 점에서의 접선의 기울기는
 $h'(-2)=f'(-2)g(-2)+f(-2)g'(-2)=6-2=4$
 따라서 점 $(-2, -2)$ 에서의 접선의 방정식은
 $y+2=4(x+2) \quad \therefore y=4x+6$
- 8 $f(x)=x^3-x+3$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2-1$
 접점의 좌표를 (t, t^3-t+3) 이라 하면 직선 $y=x+2$ 에
 수직인 접선의 기울기는 -1 이므로 $f'(t)=-1$ 에서
 $3t^2-1=-1 \quad \therefore t=0$
 즉, 접점의 좌표는 $(0, 3)$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-3=-x \quad \therefore y=-x+3$
 따라서 $a=-1, b=3$ 이므로 $a-b=-4$
- 9 $f(x)=x^3-18x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-18$
 접점의 좌표를 (t, t^3-18t) 라 하면 직선 $y=9x$ 를 평행이
 동한 접선의 기울기는 9 이므로 $f'(t)=9$ 에서
 $3t^2-18=9, t^2=9 \quad \therefore t=-3$ 또는 $t=3$

즉, 접점의 좌표는 $(-3, 27)$ 또는 $(3, -27)$ 이므로 접선
 의 방정식은

$$y-27=9(x+3) \text{ 또는 } y+27=9(x-3)$$

$$\therefore y=9x+54 \text{ 또는 } y=9x-54$$

이 접선의 방정식이 $y=9(x-m)$ 과 일치하므로

$$-9m=54 \text{ 또는 } -9m=-54$$

$$\therefore m=6 \quad (\because m>0)$$

- 10 $f(x)=x^3-6x^2+10x$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-12x+10$$

ㄱ. 기울기가 -4 인 접선의 접점의 좌표를

$$(t, t^3-6t^2+10t) \text{라 하면 } f'(t)=-4 \text{에서}$$

$$3t^2-12t+10=-4 \quad \therefore 3t^2-12t+14=0$$

그런데 이를 만족시키는 실수 t 가 존재하지 않으므로
 기울기가 -4 인 접선은 존재하지 않는다.

ㄴ. 기울기가 -2 인 접선의 접점의 좌표를

$$(t, t^3-6t^2+10t) \text{라 하면 } f'(t)=-2 \text{에서}$$

$$3t^2-12t+10=-2, 3(t-2)^2=0$$

$$\therefore t=2$$

즉, 접점의 좌표는 $(2, 4)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-4=-2(x-2) \quad \therefore y=-2x+8$$

ㄷ. 기울기가 1 인 접선의 접점의 좌표를

$$(t, t^3-6t^2+10t) \text{라 하면 } f'(t)=1 \text{에서}$$

$$3t^2-12t+10=1, 3(t-1)(t-3)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

즉, 접점의 좌표는 $(1, 5)$ 또는 $(3, 3)$ 이므로 접선의
 방정식은

$$y-5=x-1 \text{ 또는 } y-3=x-3$$

$$\therefore y=x+4 \text{ 또는 } y=x$$

따라서 보기 중 접선의 방정식이 될 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ
 이다.

- 11 $f(x)=-x^3+3x^2+10x+1$ 이라 하면

$$f'(x)=-3x^2+6x+10$$

접점의 좌표를 $(t, -t^3+3t^2+10t+1)$ 이라 하면 접선의
 기울기는 $\tan 45^\circ=1$ 이므로 $f'(t)=1$ 에서

$$-3t^2+6t+10=1, (t+1)(t-3)=0$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=3$$

즉, 접점의 좌표는 $(-1, -5)$ 또는 $(3, 31)$ 이므로 접선
 의 방정식은

$$y+5=x+1 \text{ 또는 } y-31=x-3$$

$$\therefore y=x-4 \text{ 또는 } y=x+28$$

따라서 두 접선이 x 축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(4, 0)$,
 $(-28, 0)$ 이므로

$$\overline{AB}=|-28-4|=32$$

- 12 $f(x)=x^3-3x^2-2x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-6x-2$
 접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2-2t) 라 하면 직선
 $2x+y+3=0$ 에 평행한 접선의 기울기는 -2 이므로
 $f'(t)=-2$ 에서
 $3t^2-6t-2=-2, 3t(t-2)=0$
 $\therefore t=0$ 또는 $t=2$
 즉, 접점의 좌표는 $(0, 0)$ 또는 $(2, -8)$ 이므로 접선의
 방정식은
 $y=-2x$ 또는 $y+8=-2(x-2)$
 $\therefore 2x+y=0$ 또는 $2x+y+4=0$
 따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x+y=0$ 위
 의 점 $(0, 0)$ 과 직선 $2x+y+4=0$ 사이의 거리와 같으
 므로

$$\frac{|4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$
- 13 $f(x)=-2x^3+6x^2+5x-1$ 이라 하면
 $f'(x)=-6x^2+12x+5=-6(x-1)^2+11$
 즉, 접선의 기울기는 $x=1$ 일 때 최댓값이 11이다.
 이때 접점의 좌표는 $(1, 8)$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-8=11(x-1) \quad \therefore y=11x-3$
 따라서 구하는 y 절편은 -3 이다.
- 14 $f(x)=-x^2+3x$ 라 하면 $f'(x)=-2x+3$
 점 $A(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$ 이므로 접
 선 l 의 방정식은
 $y-2=x-1 \quad \therefore y=x+1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 이 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1 이므로
 $B(t, -t^2+3t)$ 라 하면 $f'(t)=-1$ 에서
 $-2t+3=-1 \quad \therefore t=2$
 $\therefore B(2, 2)$
 점 $B(2, 2)$ 에서의 접선 m 의 방정식은
 $y-2=-(x-2) \quad \therefore y=-x+4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$
 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면
 $x=\frac{3}{2}, y=\frac{5}{2} \quad \therefore C\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$
 따라서 삼각형 ABC 의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- 15 $f(x)=x^4+4x^2+5$ 라 하면 $f'(x)=4x^3+8x$
 접점의 좌표를 (t, t^4+4t^2+5) 라 하면 이 점에서의 접선
 의 기울기는 $f'(t)=4t^3+8t$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(t^4+4t^2+5)=(4t^3+8t)(x-t)$
 $\therefore y=(4t^3+8t)x-3t^4-4t^2+5 \quad \dots\dots \textcircled{9}$

이 직선이 점 $(0, -2)$ 를 지나므로
 $-2=-3t^4-4t^2+5, 3t^4+4t^2-7=0$
 $(t+1)(t-1)(3t^2+7)=0$
 $\therefore t=-1$ 또는 $t=1$ ($\because t$ 는 실수)
 이를 $\textcircled{9}$ 에 대입하면 접선의 방정식은
 $y=-12x-2$ 또는 $y=12x-2$
 따라서 기울기가 양수인 접선의 방정식은
 $y=12x-2$

- 16 $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ 라 하면
 $f'(x)=3x^2-12x+9$
 접점의 좌표를 (t, t^3-6t^2+9t-2) 라 하면 이 점에서의
 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-12t+9$ 이므로 접선의 방
 정식은
 $y-(t^3-6t^2+9t-2)=(3t^2-12t+9)(x-t)$
 $\therefore y=(3t^2-12t+9)x-2t^3+6t^2-2$
 이 직선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로
 $0=-2t^3+6t^2-2 \quad \therefore t^3-3t^2+1=0 \quad \dots\dots \textcircled{10}$
 이때 x_1, x_2, x_3 은 삼차방정식 $\textcircled{10}$ 의 세 실근이므로 근과
 계수의 관계에 의하여 $x_1+x_2+x_3=3$
- 17 $f(x)=x^4-2x^2+8$ 이라 하면 $f'(x)=4x^3-4x$
 접점의 좌표를 (t, t^4-2t^2+8) 이라 하면 이 점에서의 접
 선의 기울기는 $f'(t)=4t^3-4t$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(t^4-2t^2+8)=(4t^3-4t)(x-t)$
 $\therefore y=(4t^3-4t)x-3t^4+2t^2+8$
 이 직선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로
 $0=-3t^4+2t^2+8, (t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})(3t^2+4)=0$
 $\therefore t=-\sqrt{2}$ 또는 $t=\sqrt{2}$ ($\because t$ 는 실수)
 따라서 접점의 좌표는 $(-\sqrt{2}, 8)$ 또는 $(\sqrt{2}, 8)$ 이므로 삼
 각형 OAB 의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 8 = 8\sqrt{2}$
- 18 $f(x)=-x^2+2x+a$ 라 하면 $f'(x)=-2x+2$
 접점의 좌표를 $(t, -t^2+2t+a)$ 라 하면 이 점에서의 접
 선의 기울기는 $f'(t)=-2t+2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(-t^2+2t+a)=(-2t+2)(x-t)$
 $\therefore y=(-2t+2)x+t^2+a$
 이 직선이 점 $(-2, 1)$ 을 지나므로
 $1=4t-4+t^2+a \quad \therefore t^2+4t+a-5=0 \quad \dots\dots \textcircled{11}$
 이차방정식 $\textcircled{11}$ 의 두 근을 α, β 라 하면 α, β 는 두 접점의
 x 좌표이므로 접선의 기울기는 각각
 $f'(\alpha)=-2\alpha+2, f'(\beta)=-2\beta+2$

이때 두 접선이 서로 수직이므로
 $(-2\alpha+2)(-2\beta+2)=-1$
 $4\alpha\beta-4(\alpha+\beta)+4=-1$
 이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta=-4, \alpha\beta=a-5$ 이므로
 $4(a-5)+16+4=-1 \quad \therefore a=-\frac{1}{4}$

- 19** $f(x)=ax^3-5x-1, g(x)=2x^2+bx+3$ 이라 하면
 $f'(x)=3ax^2-5, g'(x)=4x+b$
 $x=-1$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(-1)=g(-1)$
 에서
 $-a+5-1=2-b+3 \quad \therefore a-b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $x=-1$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로
 $f'(-1)=g'(-1)$ 에서
 $3a-5=-4+b \quad \therefore 3a-b=1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=2$
 이때 접점의 좌표는 $(-1, 3)$ 이고 접선의 기울기는 -2
 이므로 공통인 접선의 방정식은
 $y-3=-2(x+1) \quad \therefore y=-2x+1$
 따라서 $m=-2, n=1$ 이므로
 $ab+mn=1 \times 2 + (-2) \times 1 = 0$

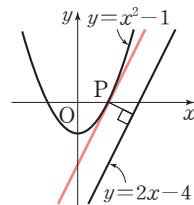
- 20** $f(x)=x^3+ax+1, g(x)=bx^2+c$ 라 하면
 $f'(x)=3x^2+a, g'(x)=2bx$
 두 곡선이 점 $(1, 5)$ 를 지나므로 $f(1)=5$ 에서
 $1+a+1=5 \quad \therefore a=3$
 $g(1)=5$ 에서 $b+c=5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 점 $(1, 5)$ 에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로
 $f'(1)=g'(1)$ 에서
 $3+a=2b, 6=2b \quad \therefore b=3$
 이를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면 $3+c=5 \quad \therefore c=2$
 $\therefore abc=3 \times 3 \times 2 = 18$

- 21** $f(x)=x^3+2, g(x)=3x^2-2$ 라 하면
 $f'(x)=3x^2, g'(x)=6x$
 두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하자.
 $x=t$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$ 에서
 $t^3+2=3t^2-2, t^3-3t^2+4=0$
 $(t+1)(t-2)^2=0$
 $\therefore t=-1$ 또는 $t=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $x=t$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로
 $f'(t)=g'(t)$ 에서
 $3t^2=6t, 3t(t-2)=0$
 $\therefore t=0$ 또는 $t=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $t=2$

이때 접점의 좌표는 $(2, 10)$ 이고 접선의 기울기는 12이
 므로 공통인 접선의 방정식은
 $y-10=12(x-2) \quad \therefore y=12x-14$
 따라서 $a=12, b=-14$ 이므로 $a+b=-2$

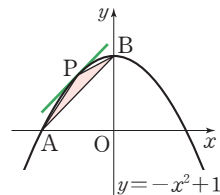
- 22** $f(x)=x^3+3, g(x)=2x^3+x^2+ax+2$ 라 하면
 $f'(x)=3x^2, g'(x)=6x^2+2x+a$
 $x=t$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$ 에서
 $t^3+3=2t^3+t^2+at+2$
 $\therefore t^3+t^2+at-1=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $x=t$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로
 $f'(t)=g'(t)$ 에서
 $3t^2=6t^2+2t+a \quad \therefore a=-3t^2-2t \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉡}$ 을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면
 $t^3+t^2+(-3t^2-2t)t-1=0$
 $2t^3+t^2+1=0, (t+1)(2t^2-t+1)=0$
 $\therefore t=-1 (\because t \text{는 실수})$
 이를 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면 $a=-3+2=-1$
 $\therefore a+t=-1+(-1)=-2$

- 23** 곡선 $y=x^2-1$ 에 접하고 직선
 $y=2x-4$ 와 기울기가 같은 접선
 의 접점을 $P(t, t^2-1)$ 이라 하면
 구하는 거리의 최솟값은 점 P와
 직선 $y=2x-4$ 사이의 거리와 같
 다.
 $f(x)=x^2-1$ 이라 하면 $f'(x)=2x$
 점 P에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(t)=2$ 에서
 $2t=2 \quad \therefore t=1 \quad \therefore P(1, 0)$
 따라서 점 $P(1, 0)$ 과 직선 $y=2x-4$, 즉 $2x-y-4=0$
 사이의 거리는



$$\frac{|2-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

- 24** 곡선에 접하고 직선 AB에 평행
 한 접선의 접점이 P일 때 삼각
 형 PAB의 넓이가 최대이다.
 $f(x)=-x^2+1$ 이라 하면
 $f'(x)=-2x$
 직선 AB의 기울기는
 $\frac{1-0}{0-(-1)}=1$ 이므로 직선 AB의 방정식은
 $y=x+1 \quad \therefore x-y+1=0$



기울기가 1인 접선의 접점의 좌표를 $(t, -t^2+1)$ 이라 하면 $f'(t)=1$ 에서

$$-2t=1 \quad \therefore t=-\frac{1}{2}$$

즉, 삼각형 PAB의 넓이가 최대일 때의 점 P의 좌표는 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ 이므로 이 점과 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+1\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

변 AB의 길이는

$$\overline{AB}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{8}$$

25 $f(x)=-x^3+3x^2-x-3$ 이라 하면

$$f'(x)=-3x^2+6x-1$$

점 A(2, -1)에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y+1=-(x-2) \quad \therefore y=-x+1$$

곡선 $y=-x^3+3x^2-x-3$ 과 직선 $y=-x+1$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$-x^3+3x^2-x-3=-x+1, x^3-3x^2+4=0$$

$$(x+1)(x-2)^2=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

$$\therefore B(-1, 2)$$

곡선에 접하고 직선 AB, 즉

$y=-x+1$ 에 평행한 직선의 접점이 P일 때 삼각형 ABP의 넓이가 최대이다.

기울기가 -1인 접선의 접점의 좌표를 $(t, -t^3+3t^2-t-3)$ 이라 하면 $f'(t)=-1$ 에서

$$-3t^2+6t-1=-1, 3t(t-2)=0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=2$$

즉, 접점의 좌표는 (0, -3) 또는 (2, -1)이므로 삼각형 ABP의 넓이가 최대일 때의 점 P의 좌표는 (0, -3)

점 (0, -3)과 직선 $y=-x+1$, 즉 $x+y-1=0$ 사이의 거리는

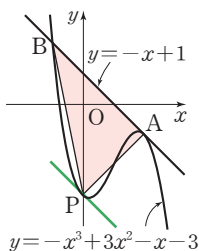
$$\frac{|-3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$$

변 AB의 길이는

$$\overline{AB}=\sqrt{(-1-2)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 6$$



26 함수 $f(x)=x^4-2x^2$ 은 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$ 에서 미분가능하며 $f(-2)=f(2)=8$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-2, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=4x^3-4x \text{ 이므로 } f'(c)=0 \text{ 에서}$$

$$4c^3-4c=0, 4c(c+1)(c-1)=0$$

$$\therefore c=-1 \text{ 또는 } c=0 \text{ 또는 } c=1$$

따라서 상수 c 는 3개이다.

27 함수 $f(x)=-x^3+ax^2-2$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$ 에서 미분가능하다.

이때 $f(0)=f(2)$ 이면

$$-2=-8+4a-2 \quad \therefore a=2$$

즉, $f(x)=-x^3+2x^2-2$ 에서 롤의 정리에 의하여

$f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x)=-3x^2+4x \text{ 이므로 } f'(c)=0 \text{ 에서}$$

$$-3c^2+4c=0, -3c\left(c-\frac{4}{3}\right)=0$$

$$\therefore c=\frac{4}{3} (\because 0 < c < 2)$$

$$\therefore a-c=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$$

28 함수 $f(x)=x^3-ax^2+2$ 는 닫힌구간 $[0, a]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, a)$ 에서 미분가능하며 $f(0)=f(a)=2$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(0, a)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 롤의 정리를 만족시키는 상수 c 의 값이 2이고

$$f'(x)=3x^2-2ax \text{ 이므로 } f'(2)=0 \text{ 에서}$$

$$12-4a=0 \quad \therefore a=3$$

29 함수 $f(x)=x^3-4x+1$ 은 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c) \text{ 인 } c \text{ 가 열린구간 } (-1, 2) \text{ 에 적어도 하나 존재한다.}$$

이때 $f'(x)=3x^2-4$ 이므로

$$\frac{1-4}{3}=3c^2-4, c^2=1$$

$$\therefore c=1 (\because -1 < c < 2)$$

30 함수 $f(x)=x^3+kx+1$ 은 닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-3, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(-3, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x) = 3x^2 + k \text{ 이므로}$$

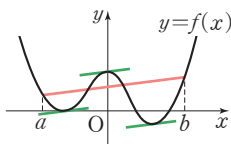
$$\frac{(3k+28) - (-3k-26)}{6} = 3c^2 + k$$

$$k+9 = 3c^2 + k, c^2 = 3$$

$$\therefore c = -\sqrt{3} \text{ 또는 } c = \sqrt{3}$$

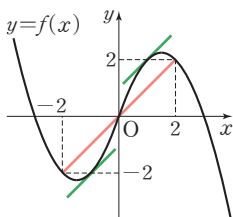
따라서 모든 상수 c 의 값의 곱은 $-\sqrt{3} \times \sqrt{3} = -3$

- 31** 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c 의 개수는 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 를 지나고 직선과 기울기가 같은 접선의 개수와 같으므로 상수 c 는 3개이다.



- 32** ㄱ. $f'(0) < 0, f'(2) > 0$ 이므로 $f'(0) < f'(2)$
 ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = f'(c)$, 즉 $f(2)-f(-1) = 3f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 ㄷ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = 0$ 에서 $f'(c) = 0$
 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$ 에서 미분가능하며 $f(0) = f(2) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

- 33** 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$ 에서 미분가능하며 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c 의 개수는 두 점 $(-2, -2)$, $(2, 2)$ 를 지나고 직선과 기울기가 같은 접선의 개수와 같으므로 상수 c 는 2개이다.



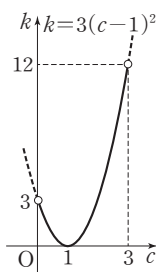
- 34** 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ 은 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 \text{ 이므로}$$

$$k = f'(c) = 3c^2 - 6c + 3 = 3(c-1)^2$$

$$\text{이때 } 0 < c < 3 \text{ 이므로 } 0 \leq k < 12$$

따라서 정수 k 는 0, 1, 2, ..., 11의 12개이다.



II-2 02 함수의 증가, 감소와 극대, 극소

기초 문제 Training

38쪽

- (1) $>$, $>$, 감소 (2) $<$, $<$, 증가
- (1) $[b, d]$ (2) $[0, b]$, $[d, e]$
- ②
- 극댓값: 6, 극솟값: 0
- $a=1, b=3$

핵심 유형 Training

39~41쪽

1 6	2 12	3 ④	4 4	5 3
6 0	7 9	8 5	9 6	10 ④
11 ①	12 11	13 ①	14 $\frac{3}{2}$	15 -15
16 12	17 ④	18 ④	19 ④	20 ③

- 1** $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 24x - 7$ 에서
 $f'(x) = -3x^2 + 6x + 24 = -3(x+2)(x-4)$
 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -2$ 또는 $x = 4$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-35	$\nearrow$	73	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $-2 \leq x \leq 4$ 에서 증가하므로
 $a = -2, b = 4 \therefore b - a = 6$

- 2 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+1$ 에서
 $f'(x)=6x^2+2ax+b$
 함수 $f(x)$ 가 감소하는 구간이 $[-1, 3]$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

따라서 이차방정식 $f'(x)=0$, 즉 $6x^2+2ax+b=0$ 의 두 근이 -1, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+3=-\frac{2a}{6}, \quad -1 \times 3 = \frac{b}{6}$$

$$\therefore a=-6, b=-18 \quad \therefore a-b=12$$

- 3 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 a, b ($a < b$)라 하고 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...	b	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, a], [b, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $[a, b]$ 에서 감소한다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

- 4 $f(x)=-x^3+ax^2+ax-1$ 에서
 $f'(x)=-3x^2+2ax+a$
 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소하려면 모든 실수 x 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.
 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=a^2+3a \leq 0, \quad a(a+3) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq a \leq 0$$

따라서 정수 a 는 -3, -2, -1, 0의 4개이다.

- 5 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+kx^2-(k-2)x+3$ 에서
 $f'(x)=x^2+2kx-(k-2)$
 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.
 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=k^2+k-2 \leq 0, \quad (k+2)(k-1) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq k \leq 1$$

따라서 $M=1, m=-2$ 이므로 $M-m=3$

- 6 $f(x)=-x^3+ax^2+5x-1$ 에서
 $f'(x)=-3x^2+2ax+5$

함수 $f(x)$ 가 구간 $[-1, 1]$ 에서

증가하려면 $-1 \leq x \leq 1$ 에서

$f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$f'(-1) \geq 0, \quad f'(1) \geq 0$$

$f'(-1) \geq 0$ 에서

$$-3-2a+5 \geq 0 \quad \therefore a \leq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

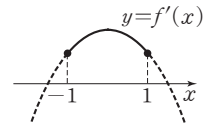
$f'(1) \geq 0$ 에서

$$-3+2a+5 \geq 0 \quad \therefore a \geq -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서

$$-1 \leq a \leq 1$$

따라서 정수 a 는 -1, 0, 1이므로 구하는 합은 0이다.



- 7 $f(x)=ax^3-ax^2+3x+2$ 에서

$$f'(x)=3ax^2-2ax+3$$

(i) $a > 0$ 일 때, $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=a^2-9a \leq 0$$

$$a(a-9) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 9$$

그런데 $a > 0$ 이므로

$$0 < a \leq 9$$

(ii) $a < 0$ 일 때, $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=a^2-9a \leq 0$$

$$a(a-9) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 9$$

그런데 $a < 0$ 이므로 이를 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $a=0$ 일 때, $f(x)=3x+2$ 는 일차함수이므로 역함수가 존재한다.

(i), (ii), (iii)에서

$$0 \leq a \leq 9$$

따라서 상수 a 의 최댓값은 9이다.

- 8 $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$ 에서
 $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x+1)(x-3)$
 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은
 $x = -1$ 또는 $x = 3$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	극소	/	극대	\

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극대이고 $x=-1$ 에서 극소이므로
 $a=3, b=-1$
 $\therefore 2a+b=6-1=5$

- 9 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ 에서
 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$
 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은
 $x=1$ 또는 $x=3$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	5 극대	\	1 극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 5, $x=3$ 에서 극솟값 1을 가지므로
 $M=5, m=1$
 $\therefore M+m=6$

- 10 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ 에서
 $f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x+2)(x-2)$
 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은
 $x = -2$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	-11 극소	/	5 극대	\	-11 극소	/

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이므로 극대인 점 A의 좌표는 (0, 5)
 또 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 와 $x=2$ 에서 극소이므로 극소인 두 점 B, C의 좌표는 (-2, -11), (2, -11)
 따라서 삼각형 ABC의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 4 \times 16 = 32$

- 11 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 9$ 에서
 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
 함수 $f(x)$ 가 감소하는 구간이 $[0, 4]$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	극대	\	극소	/

즉, 이차방정식 $f'(x) = 0$, 즉 $3x^2 + 2ax + b = 0$ 의 두 근이 0, 4이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $0+4 = -\frac{2a}{3}, 0 \times 4 = \frac{b}{3}$
 $\therefore a = -6, b = 0$
 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$ 이므로 극댓값은 $f(0) = 9$, 극솟값은 $f(4) = 64 - 96 + 9 = -23$ 이다.
 따라서 모든 극값의 합은 $9 - 23 = -14$

- 12 $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + k$ 에서
 $f'(x) = -3x^2 - 6x + 9 = -3(x+3)(x-1)$
 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -3$ 또는 $x = 1$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	$k-27$ 극소	/	$k+5$ 극대	\

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 $k+5$, $x=-3$ 에서 극솟값 $k-27$ 을 갖고 극댓값과 극솟값이 절댓값은 같고 부호가 서로 다르므로
 $k+5 + (k-27) = 0 \quad \therefore k = 11$

- 13 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ 에서
 $f'(x) = 6x^2 - 6x + a$
 $x = -1$ 에서 극댓값 5를 가지므로
 $f'(-1) = 0, f(-1) = 5$ 에서
 $6+6+a=0, -2-3-a+b=5$
 $\therefore a = -12, b = -2$
 따라서 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 2$ 이므로
 $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$
 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	5 극대	\	-22 극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값 -22를 갖는다.

- 14 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

$x=-1, x=0$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(-1)=0, f'(0)=0$$

$$3-2a+b=0, b=0$$

$$\therefore a=\frac{3}{2}$$

함수 $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2+c$ 가 $x=-1$ 에서 극댓값 2를 가지므로 $f(-1)=2$ 에서

$$-1+\frac{3}{2}+c=2 \quad \therefore c=\frac{3}{2}$$

함수 $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}$ 은 $x=0$ 에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$$f(0)=\frac{3}{2}$$

- 15 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극값을 가지므로 $g'(2)=0$

즉, $g(x)$ 는 $(x-2)^2$ 을 인수로 갖는다.

또 $f(x)g(x)=(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$ 이고 삼차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 3이므로

$$g(x)=3(x-1)(x-2)^2 \text{ 또는 } g(x)=3(x-2)^2(x-3)$$

(i) $g(x)=3(x-1)(x-2)^2$ 에서

$$g'(x)=3(x-2)^2+6(x-1)(x-2)$$

$$=3(3x-4)(x-2)$$

$$g'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=\frac{4}{3} \text{ 또는 } x=2$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\frac{4}{3}$	...	2	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

그런데 함수 $g(x)$ 가 $x=\frac{4}{3}$ 에서 극대이므로 $x=2$ 에서 극댓값을 갖는다는 조건에 모순이다.

(ii) $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$ 에서

$$g'(x)=6(x-2)(x-3)+3(x-2)^2$$

$$=3(x-2)(3x-8)$$

$$g'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=2 \text{ 또는 } x=\frac{8}{3}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	2	...	$\frac{8}{3}$	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 갖는다.

(i), (ii)에서 $g(x)=3(x-2)^2(x-3)$ 이므로

$$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$$

$$\therefore f(-2)=\frac{1}{3}\times 9\times (-5)=-15$$

- 16 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 0, 2, 4, 6, 8이므로 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	4	...	6	...	8	...	9
$f'(x)$		+	0	+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=4, x=8$ 에서 극대이므로 구하는 모든 x 의 값의 합은

$$4+8=12$$

- 17 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 -2, 0, 3, 5이므로 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...	3	...	5	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, 2]$ 에서 증가한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $4 \leq x \leq 5$ 에서는 감소한다.

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극소이다.

ㄹ. 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극대이므로 구간 $[-1, 4]$ 에서 극댓값이 1개이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

- 18 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 a, c 이므로 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	a	...	c	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

① 함수 $f(x)$ 는 극댓값을 갖지 않는다.

② 함수 $f(x)$ 는 $x=c$ 에서 극소이다.

③ 함수 $f(x)$ 는 극값이 1개이다.

④ 구간 $[a, c]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소하므로 $f(a)>f(b)>f(c)$

⑤ 함수 $f(x)$ 는 구간 $[c, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $(-\infty, c]$ 에서 감소한다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

- 19 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 $-1, 1$ 이므로 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로
 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면
 $f'(x)=3x^2+2ax+b$
 주어진 그래프에서 $f'(-1)=0, f'(1)=0$ 이므로
 $3-2a+b=0, 3+2a+b=0$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a=0, b=-3$
 함수 $f(x)=x^3-3x+c$ 의 극댓값이 5이므로 $f(-1)=5$ 에서
 $-1+3+c=5$
 $\therefore c=3$
 함수 $f(x)=x^3-3x+3$ 은 $x=1$ 에서 극소이므로 구하는 극솟값은
 $f(1)=1-3+3=1$

- 20 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 $0, 2$ 이므로 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d 는 상수, $a<0$)라 하면
 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$
 주어진 그래프에서 $f'(0)=0, f'(2)=0$ 이므로
 $c=0, 12a+4b+c=0$
 $\therefore b=-3a$
 즉, $f(x)=ax^3-3ax^2+d$ 이므로 $f(3)=3$ 에서
 $27a-27a+d=3$
 $\therefore d=3$
 이때 함수 $f(x)=ax^3-3ax^2+3$ 의 극댓값은
 $f(2)=-4a+3$, 극솟값은 $f(0)=3$ 이고 극댓값과 극솟값의 차가 12이므로
 $(-4a+3)-3=12$
 $\therefore a=-3$
 따라서 $f(x)=-3x^3+9x^2+3$ 이므로
 $f(1)=-3+9+3=9$

II-2 03 함수의 그래프

기초 문제 Training

42쪽

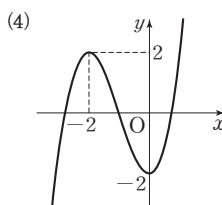
1 (1) $f'(x)=3x^2+6x$

(2) $x=-2$ 또는 $x=0$

(3)

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

극댓값: 2, 극솟값: -2



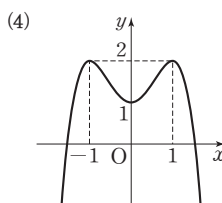
2 (1) $f'(x)=-4x^3+4x$

(2) $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

(3)

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$

극댓값: 2, 극솟값: 1



3 6, 5, 1, 6, 0, 1

4 1, 1, 13, $-3, 4, -1, 13, 0, -4$

핵심 유형 Training

43~46쪽

- | | | | | |
|--------------------|----------------------|-------|----------------------------|------|
| 1 ④ | 2 ㄷ | 3 ⑤ | 4 ② | 5 ③ |
| 6 ② | 7 ⑤ | 8 ① | 9 ④ | 10 4 |
| 11 ② | 12 ③ | 13 6 | 14 3 | 15 ③ |
| 16 ④ | 17 ④ | 18 ④ | 19 32 | 20 1 |
| 21 $\frac{27}{16}$ | 22 $\frac{28}{3}\pi$ | 23 16 | 24 $\frac{16\sqrt{2}}{27}$ | |

1 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 1$ 에서

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	3	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$		1		$-\frac{23}{4}$ 극소	

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다.

- 2 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 0, 2이므로 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	↗	-	↗	+ 극대	↘

$f(0) < 0 < f(2)$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른 쪽 그림과 같다.

ㄱ. $x < 0$ 일 때, $f'(x) > 0$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 증가한다.

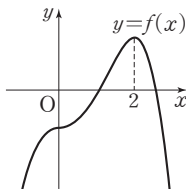
이때 $f(0) < 0$ 이므로

$$f(-1) < 0$$

ㄴ. $x=0$ 의 좌우에서 증가하므로 $x=0$ 에서 극값을 갖지 않는다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 두 점에서 만난다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄷ이다.



3 $f(x) = x^3 + ax^2 + (a^2 - 4a)x + 1$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a^2 - 4a$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3(a^2 - 4a) > 0, a(a-6) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 6$$

따라서 정수 a 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

4 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3(a^2 - 9)x + 6$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 3(a^2 - 9)$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = 9 + 9(a^2 - 9) \leq 0, a^2 \leq 8 \quad \therefore -2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2}$$

따라서 $m = -2\sqrt{2}, n = 2\sqrt{2}$ 이므로 $n - m = 4\sqrt{2}$

5 $f(x)$ 는 삼차함수이므로 $a \neq 0$ ㉠

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 + (a-2)x - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x + a - 2$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식

$f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = 9 - 3a(a-2) > 0, a^2 - 2a - 3 < 0$$

$$(a+1)(a-3) < 0 \quad \therefore -1 < a < 3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $-1 < a < 0$ 또는 $0 < a < 3$

따라서 정수 a 는 1, 2이므로 그 합은 $1+2=3$

6 $f(x) = -x^3 - kx^2 + (k+8)x + 1$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 - 2kx + k + 8$$

함수 $f(x)$ 가 $x < 1$ 에서 극솟값을 갖고, $x > 1$ 에서 극댓값을 가지려면 방정식 $f'(x) = 0$ 이 $x < 1$ 에서 한 실근을 갖고 $x > 1$ 에서 다른 한 실근을 가져야 하므로 $f'(1) > 0$ 에서

$$-3 - 2k + k + 8 > 0 \quad \therefore k < 5$$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

7 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3x + 1$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-2, 2)$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x) = 0$ 이 $-2 < x < 2$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 9a^2 - 9 > 0, (a+1)(a-1) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$f'(-2) > 0$ 이어야 하므로

$$12 + 12a + 3 > 0 \quad \therefore a > -\frac{5}{4} \quad \dots\dots ㉡$$

$f'(2) > 0$ 이어야 하므로

$$12 - 12a + 3 > 0 \quad \therefore a < \frac{5}{4} \quad \dots\dots ㉢$$

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=a$ 이므로

$$-2 < a < 2 \quad \dots\dots ㉣$$

$$\text{㉠} \sim \text{㉣} \text{에서 } -\frac{5}{4} < a < -1 \text{ 또는 } 1 < a < \frac{5}{4}$$

따라서 상수 a 의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

- 8 $f(x)=x^3+3(a-1)x^2-3(a-3)x+5$ 에서
 $f'(x)=3x^2+6(a-1)x-3(a-3)$
 함수 $f(x)$ 가 $x>0$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D>0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=9(a-1)^2+9(a-3)>0$$

$$a^2-a-2>0, (a+1)(a-2)>0$$

$$\therefore a<-1 \text{ 또는 } a>2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

(두 근의 합) >0 이어야 하므로

$$-2(a-1)>0 \quad \therefore a<1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

(두 근의 곱) >0 이어야 하므로

$$-(a-3)>0 \quad \therefore a<3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢} \text{에서 } a<-1$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 -2 이다.

- 9 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^3+kx^2+1$ 에서
 $f'(x)=2x^3-3x^2+2kx=x(2x^2-3x+2k)$
 함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 방정식 $2x^2-3x+2k=0$ 은 0 이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x=0$ 이 방정식 $2x^2-3x+2k=0$ 의 근이 아니어야 하므로 $2k \neq 0 \quad \therefore k \neq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$

방정식 $2x^2-3x+2k=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D>0$ 이어야 하므로

$$D=9-16k>0 \quad \therefore k<\frac{9}{16} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } k<0 \text{ 또는 } 0<k<\frac{9}{16}$$

따라서 $\alpha=0, \beta=0, \gamma=\frac{9}{16}$ 이므로

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{9}{16}$$

- 10 $f(x)=3x^4-4x^3-(a-3)x^2$ 에서
 $f'(x)=12x^3-12x^2-2(a-3)x$
 $=2x(6x^2-6x-a+3)$
 함수 $f(x)$ 가 극값을 하나만 가지려면 방정식 $f'(x)=0$ 이 중근을 갖거나 허근을 가져야 하므로 방정식 $6x^2-6x-a+3=0$ 의 한 근이 0 이거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 방정식 $6x^2-6x-a+3=0$ 의 한 근이 0 이면
 $-a+3=0 \quad \therefore a=3$

(ii) 방정식 $6x^2-6x-a+3=0$ 이 중근 또는 허근을 가지려면 판별식을 D 라 할 때, $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=9-6(-a+3) \leq 0 \quad \therefore a \leq \frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서 $a \leq \frac{3}{2}$ 또는 $a=3$

따라서 자연수 a 는 $1, 3$ 이므로 그 합은 $1+3=4$

- 11 $f(x)=-3x^4+4x^3-6(a-2)x^2-12ax-2$ 에서
 $f'(x)=-12x^3+12x^2-12(a-2)x-12a$
 $=-12(x+1)(x^2-2x+a)$

함수 $f(x)$ 가 극솟값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$ 이 중근을 갖거나 허근을 가져야 하므로 방정식 $x^2-2x+a=0$ 의 한 근이 -1 이거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 방정식 $x^2-2x+a=0$ 의 한 근이 -1 이면

$$1+2+a=0 \quad \therefore a=-3$$

(ii) 방정식 $x^2-2x+a=0$ 이 중근 또는 허근을 가지려면 판별식을 D 라 할 때, $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=1-a \leq 0 \quad \therefore a \geq 1$$

(i), (ii)에서 $a=-3$ 또는 $a \geq 1$

- 12 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$ 에서
 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

구간 $[-2, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-3	$\nearrow$	4 극대	$\searrow$	-28 극소	$\nearrow$	-21

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 4 , 최솟값은 -28 이므로 $M=4, m=-28 \quad \therefore M-m=32$

- 13 $f(x)=2x^3+ax^2+bx+6$ 에서 $f'(x)=6x^2+2ax+b$
 함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 극솟값 1 을 가지므로
 $f'(-1)=0, f(-1)=1$ 에서
 $6-2a+b=0, -2+a-b+6=1$
 $\therefore 2a-b=6, a-b=-3$
 두 식을 연립하여 풀면 $a=9, b=12$

$f(x)=2x^3+9x^2+12x+6$ 에서
 $f'(x)=6x^2+18x+12=6(x+2)(x+1)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-2$ 또는 $x=-1$
구간 $[-2, 0]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	0
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	2	$\searrow$	$\frac{1}{\text{극소}}$	$\nearrow$	6

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 6이다.

- 14** $x^2+y^2=1$ 에서 $y^2=1-x^2$ 이므로
 $x^4+2y^2=x^4+2(1-x^2)=x^4-2x^2+2$
 $y^2=1-x^2\geq 0$ 이므로
 $(x+1)(x-1)\leq 0 \quad \therefore -1\leq x\leq 1$
 $f(x)=x^4-2x^2+2$ 라 하면
 $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은
 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
 $-1\leq x\leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{2}{\text{극대}}$	$\searrow$	1

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 2, 최솟값은 1이므로 그 합은 $2+1=3$

- 15** $x-2=t$ 로 놓으면 $1\leq x\leq 6$ 에서
 $-1\leq t\leq 4$
 $g(t)=t^3-3t^2-3$ 이라 하면
 $g'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$
 $g'(t)=0$ 인 t 의 값은 $t=0$ 또는 $t=2$
 $-1\leq t\leq 4$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	...	0	...	2	...	4
$g'(t)$		+	0	-	0	+	
$g(t)$	-7	$\nearrow$	$\frac{-3}{\text{극대}}$	$\searrow$	$\frac{-7}{\text{극소}}$	$\nearrow$	13

함수 $g(t)$ 는 $t=4$ 일 때 최댓값이 13이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=6$ 일 때 최댓값이 13이다.
따라서 $a=6$, $M=13$ 이므로
 $a+M=19$

- 16** $f(x)=-2x^3+3x^2+a$ 에서
 $f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$
구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	a	$\nearrow$	$\frac{a+1}{\text{극대}}$	$\searrow$	$a-4$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $a-4$ 이므로

$$a-4=-4 \quad \therefore a=0$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은

$$a+1=1$$

- 17** $f(x)=x^3-6x^2+9x+k$ 에서
 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$
구간 $[-1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	1	...	3	...	4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$k-16$	$\nearrow$	$\frac{k+4}{\text{극대}}$	$\searrow$	$\frac{k}{\text{극소}}$	$\nearrow$	$k+4$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $k+4$, 최솟값은 $k-16$ 이므로

$$k+4+k-16=10 \quad \therefore k=11$$

- 18** $f(x)=ax^3-3ax^2+b$ 에서
 $f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$
 $a>0$ 이므로 구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-4a+b$	$\nearrow$	$\frac{b}{\text{극대}}$	$\searrow$	$-4a+b$

함수 $f(x)$ 의 최댓값은 b , 최솟값은 $-4a+b$ 이므로

$$b=5, -4a+b=-15 \quad \therefore a=5$$

$$\therefore a+b=10$$

- 19** 곡선 $y=-x^2+6x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면
 $-x^2+6x=0, x(x-6)=0$
 $\therefore x=0$ 또는 $x=6$
즉, A(6, 0)이므로 $\overline{OA}=6$

점 B의 좌표를 $(a, -a^2+6a)$ ($3 < a < 6$)라 하면
 $C(6-a, -a^2+6a)$ 이므로 $\overline{BC}=2a-6$

사다리꼴 OABC의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a) = \frac{1}{2}(2a-6+6)(-a^2+6a) = -a^3+6a^2$$

$$\therefore S'(a) = -3a^2+12a = -3a(a-4)$$

$$S'(a)=0 \text{인 } a \text{의 값은 } a=4 \quad (\because 3 < a < 6)$$

$3 < a < 6$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	3	...	4	...	6
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		↗	32 극대	↘	

따라서 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 32이다.

- 20** 점 P의 좌표를 $(a, a(a-2)^2)$ ($0 < a < 2$)이라 하고 직사각형 OHPQ의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a) = a \times a(a-2)^2 = a^4 - 4a^3 + 4a^2$$

$$\therefore S'(a) = 4a^3 - 12a^2 + 8a = 4a(a-1)(a-2)$$

$$S'(a)=0 \text{인 } a \text{의 값은 } a=1 \quad (\because 0 < a < 2)$$

$0 < a < 2$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	1	...	2
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		↗	1 극대	↘	

따라서 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 1이다.

- 21** $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 1$ 에서 $f'(x) = 6x^2 - 8x$

점 A(0, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(0) = 0$ 이므로 접선의 방정식은 $y = 1$

곡선 $y = 2x^3 - 4x^2 + 1$ 과 직선 $y = 1$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$2x^3 - 4x^2 + 1 = 1, \quad 2x^2(x-2) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

$$\therefore B(2, 1)$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P의 x 좌표를 a ($0 < a < 2$)라 하면
 $P(a, 2a^3-4a^2+1), H(a, 1)$

삼각형 APH의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a) = \frac{1}{2}a(-2a^3+4a^2) = -a^4+2a^3$$

$$\therefore S'(a) = -4a^3+6a^2 = -2a^2(2a-3)$$

$$S'(a)=0 \text{인 } a \text{의 값은 } a=\frac{3}{2} \quad (\because 0 < a < 2)$$

$0 < a < 2$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	$\frac{3}{2}$	...	2
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		↗	$\frac{27}{16}$ 극대	↘	

따라서 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 $\frac{27}{16}$ 이다.

- 22** 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면

$$r+h=3 \quad \therefore h=3-r$$

$$r>0, 3-r>0 \text{이므로 } 0 < r < 3$$

원기둥의 부피를 $V(r)$ 라 하면

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2(3-r) = \pi(3r^2-r^3)$$

$$\therefore V'(r) = \pi(6r-3r^2) = -3\pi r(r-2)$$

$$V'(r)=0 \text{인 } r \text{의 값은 } r=2 \quad (\because 0 < r < 3)$$

$0 < r < 3$ 에서 함수 $V(r)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	...	2	...	3
$V'(r)$		+	0	-	
$V(r)$		↗	4π 극대	↘	

따라서 원기둥의 부피는 $r=2$ 일 때 최댓값이 4π 이다.

$r=2$ 인 반구의 부피는

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{16}{3} \pi$$

따라서 구하는 전체 입체도형의 부피는

$$4\pi + \frac{16}{3} \pi = \frac{28}{3} \pi$$

- 23** 삼각기둥의 밑면의 한 변의 길이를 x , 높이를 h 라 하면 밑

넓이는 $2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 + 3xh$ 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{2} x^2 + 3xh = 24\sqrt{3} \quad \therefore xh = 8\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} x^2$$

이때 $x > 0, h > 0$ 에서 $xh > 0$ 이므로

$$8\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} x^2 > 0, \quad (x+4\sqrt{3})(x-4\sqrt{3}) < 0$$

$$\therefore 0 < x < 4\sqrt{3} \quad (\because x > 0)$$

삼각기둥의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 h = \frac{\sqrt{3}}{4} x \times xh$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} x \left(8\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} x^2 \right) = 6x - \frac{1}{8} x^3$$

$$\therefore V'(x) = 6 - \frac{3}{8} x^2 = -\frac{3}{8} (x+4)(x-4)$$

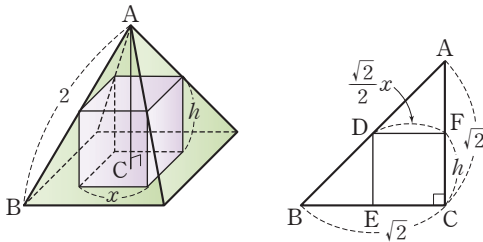
$$V'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=4 \quad (\because 0 < x < 4\sqrt{3})$$

$0 < x < 4\sqrt{3}$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	4	...	$4\sqrt{3}$
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	16 극대	↘	

따라서 부피 $V(x)$ 의 최댓값은 16이다.

- 24** 다음 그림과 같이 정사각뿔에 내접하는 직육면체의 밑면은 정사각형이므로 직육면체의 밑면의 한 변의 길이를 x , 높이를 h 라 하자.



정사각뿔의 밑면의 대각선의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{BC} = \sqrt{2}$$

직육면체의 밑면의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}x$ 이므로

$$\overline{DF} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$

$\triangle ABC \sim \triangle ADF$ 이므로

$$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AF} : \overline{DF}$$

$$\sqrt{2} : \sqrt{2} = (\sqrt{2} - h) : \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$$\sqrt{2} - h = \frac{\sqrt{2}}{2}x \quad \therefore h = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

이때 $x > 0$, $h > 0$ 이므로 $0 < x < 2$

직육면체의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = x^2 h = x^2 \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}x^3 + \sqrt{2}x^2$$

$$\therefore V'(x) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}x^2 + 2\sqrt{2}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}x(3x - 4)$$

$$V'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = \frac{4}{3} \quad (\because 0 < x < 2)$$

$0 < x < 2$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{4}{3}$	...	2
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	$\frac{16\sqrt{2}}{27}$ 극대	↘	

따라서 부피 $V(x)$ 의 최댓값은 $\frac{16\sqrt{2}}{27}$ 이다.

II-2 04 방정식과 부등식에의 활용

기초 문제 Training

47쪽

1 (1) 1 (2) 3 (3) 2 (4) 1 (5) 3

2 (1) 3 (2) 2 (3) 1

3 0, 1, 0, 1, 3, 1, 1

4 2, 2, 0, 0

핵심 유형 Training

48~50쪽

1 3	2 ③	3 2	4 21
5 $k < -4$ 또는 $k > 0$	6 13	7 1, 2	8 ②
9 ②	10 ⑤	11 2	12 18
13 8	14 ④	15 ④	16 3
17 -4	18 ⑤	19 42	20 $k \geq -1$

1 $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5$ 라 하면

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x+2)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

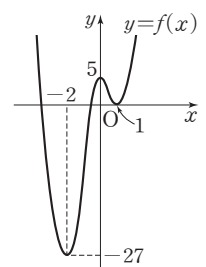
x	...	-2	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-27 극소	↗	5 극대	↘	0 극소	↗

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같이 x 축과 서로 다른 세

점에서 만나므로 주어진 방정식의

서로 다른 실근의 개수는 3이다.



2 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ 이라 하면

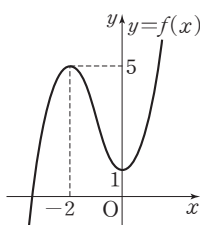
$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗ 5 극대	↘	1 극소	↗

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 한 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



$$\therefore a=1$$

$g(x)=2x^3-6x+1$ 이라 하면

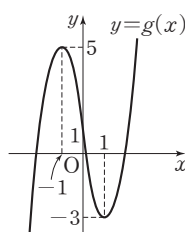
$$g'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$$

$g'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$		↗ 5 극대	↘	-3 극소	↗

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



$$\therefore b=3$$

$$\therefore a+b=1+3=4$$

다른 풀이

$f(x)=x^3+3x^2+1$ 이라 하면

$$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$

극값이 $f(-2)$, $f(0)$ 이므로

$$f(-2)f(0)=5 \times 1 > 0$$

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 한 개의 실근을 가지므로 $a=1$

$g(x)=2x^3-6x+1$ 이라 하면

$$g'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$$

$g'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

극값이 $g(-1)$, $g(1)$ 이므로

$$g(-1)g(1)=5 \times (-3) < 0$$

따라서 방정식 $g(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근을 가지므로

$$b=3 \quad \therefore a+b=1+3=4$$

3 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	3	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$		↘	+	↘ 극소	↗

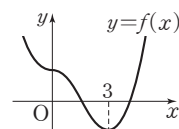
$f(0)>0$, $f(3)<0$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽

그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



4 주어진 방정식에서 $3x^4-8x^3-6x^2+24x=k$

$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$ 라 하면

$$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$$

$$=12(x+1)(x-1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		↘ -19 극소	↗	13 극대	↘	8 극소	↗

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같으므로 교점이 3

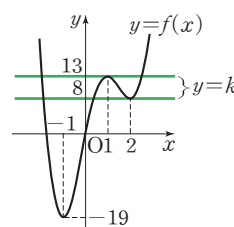
개가 되도록 직선 $y=k$ 를 그어

보면 k 의 값은

$$k=8 \text{ 또는 } k=13$$

따라서 모든 k 의 값의 합은

$$8+13=21$$



5 주어진 곡선과 직선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식

$-x^3+6x^2=9x+k$, 즉 $-x^3+6x^2-9x=k$ 가 한 개의 실근을 가져야 한다.

$f(x)=-x^3+6x^2-9x$ 라 하면

$$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		↘ -4 극소	↗	0 극대	↘

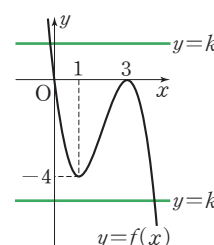
따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같으므로 교점

이 1개가 되도록 직선 $y=k$ 를

그어 보면 k 의 값의 범위는

$$k < -4 \text{ 또는 } k > 0$$



다른 풀이

$$-x^3+6x^2=9x+k \text{에서 } x^3-6x^2+9x+k=0$$

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+k \text{라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

극값이 $f(1), f(3)$ 이므로 방정식 $f(x)=0$ 이 한 개의 실근을 가지려면 $f(1)f(3)>0$ 에서

$$(4+k)k>0$$

$$\therefore k<-4 \text{ 또는 } k>0$$

6 $f(x)=g(x)$ 에서

$$2x^3-2x^2-a=x^2-1$$

$$\therefore 2x^3-3x^2+1=a$$

$$h(x)=2x^3-3x^2+1 \text{이라 하면}$$

$$h'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

$$h'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\nearrow$	1 극대	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

함수 $y=h(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로 직선

$y=a$ 와 만나는 점의 개수는

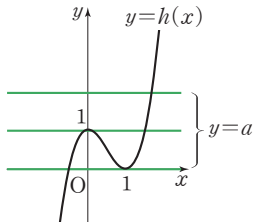
$$n(0)=2, n(1)=2,$$

$$n(2)=\dots=n(10)=1$$

$$\therefore n(0)+n(1)+n(2)$$

$$+\dots+n(10)$$

$$=2 \times 2 + 9 \times 1 = 13$$



7 $y=x^3+1$ 에서 $y'=3x^2$

점 $(1, a)$ 에서 이 곡선에 그은 접선의 접점의 좌표를

(t, t^3+1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$y-(t^3+1)=3t^2(x-t)$$

$$\therefore y=3t^2x-2t^3+1$$

이 직선이 점 $(1, a)$ 를 지나므로

$$a=3t^2-2t^3+1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

서로 다른 두 접선을 그을 수 있으려면 방정식 $\textcircled{7}$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$$f(t)=-2t^3+3t^2+1 \text{이라 하면}$$

$$f'(t)=-6t^2+6t=-6t(t-1)$$

$$f'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=0 \text{ 또는 } t=1$$

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	0	...	1	...
$f'(t)$	-	0	+	0	-
$f(t)$	$\searrow$	1 극소	$\nearrow$	2 극대	$\searrow$

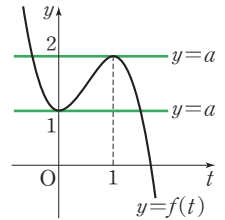
함수 $y=f(t)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로 교점이 2개가

되도록 직선 $y=a$ 를 그어 보면 a

의 값은

$$a=1 \text{ 또는 } a=2$$



다른 풀이

$\textcircled{7}$ 에서 $f(t)=2t^3-3t^2+a-1$ 이라 하면

$$f'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$$

$$f'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은}$$

$$t=0 \text{ 또는 } t=1$$

극값이 $f(0), f(1)$ 이고 방정식 $f(t)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $f(0)f(1)=0$ 에서

$$(a-1)(a-2)=0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=2$$

8 주어진 방정식에서 $2x^3+3x^2-12x=k$

$$f(x)=2x^3+3x^2-12x \text{라 하면}$$

$$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	20 극대	$\searrow$	-7 극소	$\nearrow$

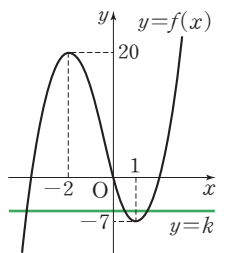
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른

쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$

를 그어 보면 구하는 k 의 값의

범위는

$$-7 < k < 0$$



9 주어진 방정식에서 $-x^3+3x^2+9x+5=a$

$$f(x)=-x^3+3x^2+9x+5 \text{라 하면}$$

$$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

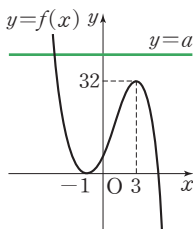
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		↘ 극소	↗	↘ 극대	

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=a$ 를 그어 보면 a 의 값의 범위는

$$a > 32$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 33이다.



10 주어진 방정식에서

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x = k$$

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + 12x^2 - 4x - 12 \\ &= 4(x+3)(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x = -3 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

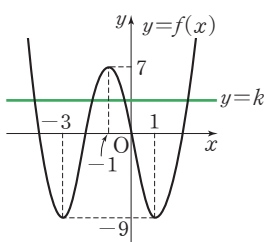
x	...	-3	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		↘ 극소	↗	↘ 극대	↘ 극소	↗	

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y=k$ 를 그어 보면 k 의 값의 범위는

$$0 < k < 7$$

따라서 $\alpha=0, \beta=7$ 이므로

$$\alpha + \beta = 7$$



11 $f(x) = -3x^3 + 9x - 3$ 에서

$$f'(x) = -9x^2 + 9 = -9(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

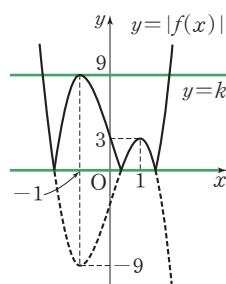
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		↘ 극소	↗	↘ 극대	

따라서 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 교점이 3개가 되도록 직선 $y=k$ 를 그어 보면 k 의 값은

$$k=0 \text{ 또는 } k=9$$

따라서 정수 k 는 2개이다.



12 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

즉, 함수 $f(x)$ 의 두 극값도 원점에 대하여 대칭이다.

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x+a)(x-a) \\ &= x^3 - a^2x \quad (a \text{는 상수}) \end{aligned}$$

라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - a^2$$

이때 방정식 $|f(x)|=2$ 가 서로 다른 네 실근을 가지려면 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 2, 극솟값이 -2이어야 한다.

함수 $f(x)$ 가 $x=k$ 에서 극댓값 2를 갖는다고 하면

$$f'(k)=0 \text{에서 } 3k^2 - a^2 = 0 \quad \therefore a^2 = 3k^2 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f(k)=2 \text{에서 } k^3 - ka^2 = 2 \quad \text{..... ㉡}$$

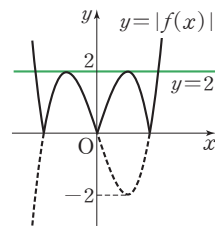
$$\text{㉠을 ㉡에 대입하면 } k^3 - 3k^3 = 2$$

$$k^3 = -1 \quad \therefore k = -1 \quad (\because k \text{는 실수})$$

$$\text{이를 ㉠에 대입하면 } a^2 = 3$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 - 3x \text{이므로}$$

$$f(3) = 27 - 9 = 18$$



13 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

주어진 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서 $f'(0)=0$,

$$f'(1) = -6, f'(2) = 0 \text{이므로}$$

$$c=0, 3a+2b+c=-6, 12a+4b+c=0$$

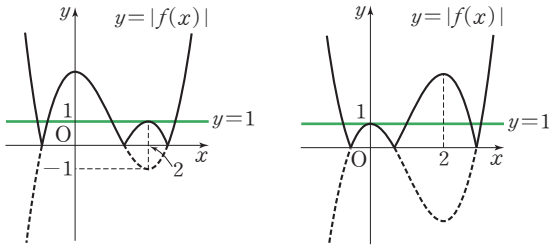
$$\therefore 3a+2b=-6, 3a+b=0$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a=2, b=-6$$

함수 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + d$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗ 극대	↘	↗ 극소	

방정식 $|f(x)|=1$ 이 서로 다른 5개의 실근을 가질 때,
함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프의 개형은 다음과 같이 2가지가 있다.



(i) $f(2)=-1, f(0)>1$ 인 경우

$$d-8=-1, d>1 \quad \therefore d=7$$

(ii) $f(0)=1, f(2)<-1$ 인 경우

$$d=1, d-8<-1 \quad \therefore d=1$$

(i), (ii)에서 $d=1$ 또는 $d=7$

따라서 $f(0)=d$ 이므로 모든 $f(0)$ 의 값의 합은

$$1+7=8$$

14 $f(x)=x^4-4x-k^2+4k$ 라 하면

$$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 (\because x \text{는 실수})$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-k^2+4k-3$ 극소	$\nearrow$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)>0$ 이 성립하려면

$$-k^2+4k-3>0, k^2-4k+3<0$$

$$(k-1)(k-3)<0 \quad \therefore 1<k<3$$

15 $f(x)\geq g(x)$ 에서

$$x^4-4x^2+a\geq 2x^2+8x$$

$$\therefore x^4-6x^2-8x+a\geq 0$$

$$h(x)=x^4-6x^2-8x+a \text{라 하면}$$

$$h'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$$

$$h'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	-	0	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	$a+3$	$\searrow$	$a-24$ 극소	$\nearrow$

구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 $h(x)\geq 0$ 이 성립하려면

$$a-24\geq 0 \quad \therefore a\geq 24$$

따라서 상수 a 의 최솟값은 24이다.

16 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)>g(x)$ 이어야 하므로

$$x^4+12>4k^3x$$

$$\therefore x^4-4k^3x+12>0$$

$$h(x)=x^4-4k^3x+12 \text{라 하면}$$

$$h'(x)=4x^3-4k^3=4(x-k)(x^2+kx+k^2)$$

$$h'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=k (\because x \text{는 실수})$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	k	$\cdots$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	$-3k^4+12$ 극소	$\nearrow$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 $h(x)>0$ 이 성립하려면

$$-3k^4+12>0, k^4-4<0$$

$$(k^2+2)(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})<0$$

$$(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})<0 (\because k^2+2>0)$$

$$\therefore -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$$

따라서 정수 k 는 -1, 0, 1의 3개이다.

17 $f(x)=x^3-6x^2+9x-k-4$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

$x\geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-k-4$	$\nearrow$	$-k$ 극대	$\searrow$	$-k-4$ 극소	$\nearrow$

따라서 $x\geq 0$ 일 때, $f(x)\geq 0$ 이 성립하려면

$$-k-4\geq 0$$

$$\therefore k\leq -4$$

따라서 상수 k 의 최댓값은 -4이다.

18 $f(x)=4x^3-3x^2-6x+a$ 라 하면

$$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 (\because 0\leq x\leq 2)$$

구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	a	$\searrow$	$a-5$ 극소	$\nearrow$	$a+8$

따라서 구간 $[0, 2]$ 에서 $f(x)>0$ 이 성립하려면

$$a-5>0$$

$$\therefore a>5$$

19 주어진 부등식에서 $2x^3 - 2x^2 + x + 3 - k < 0$

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 3 - k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 4x + 1 = 6\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$$

$f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x < 3$ 에서 증가한다.

$x < 3$ 일 때, $f(x) < 0$ 이 성립하려면 $f(3) \leq 0$ 이어야 하므로

$$54 - 18 + 3 + 3 - k \leq 0 \quad \therefore k \geq 42$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 42이다.

20 $f(x) = x^3 + 3kx^2 + 4$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 6kx = 3x(x + 2k)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=-2k$$

(i) $k > 0$ 일 때,

$x \geq k$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

$x \geq k$ 일 때, $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면 $f(k) \geq 0$ 이어야 하므로

$$k^3 + 3k^3 + 4 \geq 0, 4(k+1)(k^2 - k + 1) \geq 0$$

$$k+1 \geq 0 \quad (\because k^2 - k + 1 > 0)$$

$$\therefore k \geq -1$$

그런데 $k > 0$ 이므로 부등식 $f(x) \geq 0$ 이 성립하도록 하는 k 의 값의 범위는 $k > 0$

(ii) $k = 0$ 일 때,

$x > 0$ 에서 $f'(x) > 0$ 이고 $f'(0) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

$x \geq 0$ 일 때, $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면 $f(0) \geq 0$ 이어야 하므로 $4 \geq 0$

즉, 부등식 $f(x) \geq 0$ 이 성립하도록 하는 k 의 값은

$$k = 0$$

(iii) $k < 0$ 일 때,

$x \geq k$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	k	...	0	...	$-2k$	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$4k^3 + 4$	↗	4 극대	↘	$4k^3 + 4$ 극소	↗

$x \geq k$ 일 때, $f(x) \geq 0$ 이려면

$$4k^3 + 4 \geq 0, 4(k+1)(k^2 - k + 1) \geq 0$$

$$k+1 \geq 0 \quad (\because k^2 - k + 1 > 0)$$

$$\therefore k \geq -1$$

그런데 $k < 0$ 이므로 부등식 $f(x) \geq 0$ 이 성립하도록 하는 k 의 값의 범위는 $-1 \leq k < 0$

(i), (ii), (iii)에서 부등식 $f(x) \geq 0$ 이 성립하도록 하는 k 의 값의 범위는

$$k \geq -1$$

II-2 05 속도와 가속도

기초 문제 Training

51쪽

1 (1) 24 (2) 4 (3) -8

2 (1) -3 (2) -2 (3) -8

3 (1) 2 (2) 5

4 (1) 2 (2) 24

5 (1) $\frac{dl}{dt} = 8t + 5$ (2) 37

6 (1) $\frac{dS}{dt} = 2t + 11$ (2) 15

7 (1) $\frac{dV}{dt} = 6(2t + 1)^2$ (2) 54

핵심 유형 Training

52~54쪽

1 7	2 2	3 ③	4 15	5 4
6 ①	7 4	8 ②	9 -20 m/s	
10 ④	11 ③	12 ③	13 ③	14 ④
15 34	16 ⑤	17 192	18 ④	

1 시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$v'(t) = -2t + 14$$

$t = k$ 에서의 가속도가 0이므로

$$-2k + 14 = 0 \quad \therefore k = 7$$

2 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 10t + 6, a = \frac{dv}{dt} = 6t - 10$$

점 P가 원점을 지나면 위치가 0이므로

$$t^3 - 5t^2 + 6t = 0, t(t-2)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 3 \quad (\because t > 0)$$

따라서 처음으로 원점을 지나는 시각은 $t = 2$ 이므로 그때의 가속도는

$$a = 12 - 10 = 2$$

- 3 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 2t^2 + 2kt, \quad a = \frac{dv}{dt} = 4t + 2k$$

$t=2$ 일 때, $v=20$ 이므로

$$8 + 4k = 20 \quad \therefore k = 3$$

따라서 $t=2$ 에서의 가속도는

$$a = 8 + 2k = 8 + 6 = 14$$

- 4 시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$$f'(t) = 4t^3 - 6t^2 + 24t, \quad g'(t) = 18t^2 - 12t + k$$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간이 3번이려면 방정식 $f'(t) = g'(t)$ 가 서로 다른 세 개의 양의 실근을 가져야 한다.

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } 4t^3 - 6t^2 + 24t = 18t^2 - 12t + k$$

$$\therefore 4t^3 - 24t^2 + 36t = k$$

$$h(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t \text{라 하면}$$

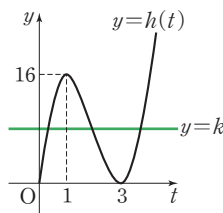
$$h'(t) = 12t^2 - 48t + 36 = 12(t-1)(t-3)$$

$$h'(t) = 0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=1 \text{ 또는 } t=3$$

$t > 0$ 에서 함수 $h(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	1	...	3	...
$h'(t)$		+	0	-	0	+
$h(t)$		↗	16 극대	↘	0 극소	↗

함수 $y=h(t)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 교점이 3개가 되도록 직선 $y=k$ 를 그어 보면 k 의 값의 범위는 $0 < k < 16$ 따라서 정수 k 는 1, 2, ..., 15의 15개이다.



- 5 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -3t^2 + 12t - 9$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$-3t^2 + 12t - 9 = 0, \quad t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-1)(t-3) = 0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

$$t=1 \text{에서의 위치는 } x = -1 + 6 - 9 + 1 = -3$$

$$t=3 \text{에서의 위치는 } x = -27 + 54 - 27 + 1 = 1$$

따라서 $t=1$ 부터 $t=3$ 까지의 위치의 변화량은 $1 - (-3) = 4$

- 6 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 2at + b$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $t=1$ 과 $t=3$ 에서의 속도는 0이다.

$$\therefore 3 + 2a + b = 0, \quad 27 + 6a + b = 0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -6, b = 9$

$$\therefore v = 3t^2 - 12t + 9$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도는 $\frac{dv}{dt} = 6t - 12$ 이므로 가속

도가 0이면

$$6t - 12 = 0 \quad \therefore t = 2$$

즉, $t=2$ 에서의 위치가 9이므로 $x = t^3 - 6t^2 + 9t + c$ 에서

$$9 = 8 - 24 + 18 + c \quad \therefore c = 7$$

$$\therefore a + b + c = -6 + 9 + 7 = 10$$

- 7 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v_P 라 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = 6t^2 - 24t + 18$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$6t^2 - 24t + 18 = 0, \quad t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-1)(t-3) = 0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

즉, 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾸므로 $a=2$

시각 t 에서의 점 Q의 속도를 v_Q 라 하면

$$v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = 12t - 18$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$12t - 18 = 0 \quad \therefore t = \frac{3}{2}$$

즉, 점 Q는 운동 방향을 한 번 바꾸므로 $b=1$

선분 PQ의 중점 M의 위치를 x_M 이라 하면

$$x_M = \frac{(2t^3 - 12t^2 + 18t) + (6t^2 - 18t + 4)}{2} = t^3 - 3t^2 + 2$$

시각 t 에서의 점 M의 속도를 v_M 이라 하면

$$v_M = \frac{dx_M}{dt} = 3t^2 - 6t$$

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$3t^2 - 6t = 0, \quad 3t(t-2) = 0 \quad \therefore t=2 \quad (\because t > 0)$$

즉, 점 M은 운동 방향을 한 번 바꾸므로 $c=1$

$$\therefore a + b + c = 2 + 1 + 1 = 4$$

- 8 물체의 t 초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 30 - 10t$$

최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$$30 - 10t = 0 \quad \therefore t = 3$$

- 9 물체의 t 초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 20 - 10t$$

지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로

$$20t - 5t^2 = 0, -5t(t-4) = 0 \quad \therefore t = 4 (\because t > 0)$$

따라서 $t=4$ 에서의 속도는 $v = 20 - 40 = -20$ (m/s)

- 10** 물체의 t 초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = a + 2bt$$

최고 높이에 도달할 때, 즉 $t=5$ 에서의 속도는 0이므로

$$a + 10b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$t=5$ 에서의 높이가 140 m이므로

$$15 + 5a + 25b = 140 \quad \therefore a + 5b = 25 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=50$, $b=-5$

$x = 15 + 50t - 5t^2$ 이므로 높이가 60 m 이상이라면

$$15 + 50t - 5t^2 \geq 60, t^2 - 10t + 9 \leq 0$$

$$(t-1)(t-9) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq t \leq 9$$

따라서 높이가 60 m 이상인 시간은 8초 동안이다.

- 11** 원점을 지나는 시각은 $t=b$, $t=d$ 이므로 처음으로 원점을 지나는 순간의 속도는 $x'(b)$ 이다.

- 12** ㄱ. $t=1$ 인 점에서의 접선의 기울기는 0이므로 속도와 속력은 0이다. 즉, 속력이 최소이다.

ㄴ. $t=1$, $t=3$, $t=4$, $t=5$ 인 점에서의 접선의 기울기는 0이고 좌우에서 접선의 기울기의 부호가 바뀌므로 운동 방향을 4번 바꾼다.

ㄷ. 출발할 때는 양의 방향으로 움직이고 $2 < t < 3$ 에서는 음의 방향, $3 < t < 4$ 에서는 양의 방향으로 움직인다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

- 13** $\frac{dl}{dt} = 4t + 3$

고무줄의 길이가 2배이면 10 cm이므로

$$2t^2 + 3t + 5 = 10 \text{에서 } 2t^2 + 3t - 5 = 0$$

$$(2t+5)(t-1) = 0 \quad \therefore t = 1 (\because t > 0)$$

따라서 $t=1$ 에서의 고무줄의 길이의 변화율은

$$4 + 3 = 7 \text{ (cm/s)}$$

- 14** 이 사람이 t 초 동안 움직이는 거리는 $1.1t$ m

그림자의 길이를 l m라 하면

오른쪽 그림에서

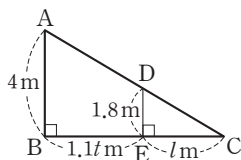
$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ 이므로

$$4 : (1.1t + l) = 1.8 : l$$

$$1.98t + 1.8l = 4l, 2.2l = 1.98t$$

$$\therefore l = 0.9t$$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 $\frac{dl}{dt} = 0.9$ (m/s)



- 15** t 초 후의 점 P의 좌표는 $(t, 0)$, 점 Q의 좌표는 $(0, 2(t-2))$ ($t > 2$)

$$\overline{PQ}^2 = l^2 \text{이라 하면}$$

$$l = t^2 + 4(t-2)^2$$

$$= 5t^2 - 16t + 16$$

$$\therefore \frac{dl}{dt} = 10t - 16$$

따라서 $t=5$ 에서의 l 의 변화율은

$$50 - 16 = 34$$

- 16** t 초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는 $1+2t$

정삼각형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(1+2t)^2$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2(1+2t) \times 2$$

$$= \sqrt{3}(1+2t)$$

따라서 $t=5$ 에서의 정삼각형의 넓이의 변화율은

$$\sqrt{3} \times 11 = 11\sqrt{3}$$

- 17** t 초 후의 정육면체의 한 모서리의 길이는 $5+t$

정육면체의 부피를 V 라 하면

$$V = (t+5)^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = 3(t+5)^2$$

정육면체의 부피가 512이면

$$(t+5)^3 = 512, (t+5)^3 = 8^3$$

$$\therefore t = 3 (\because t \text{는 실수})$$

따라서 $t=3$ 에서의 부피의 변화율은

$$3 \times 64 = 192$$

- 18** t 초 후의 원뿔의 밑면의 반지름의 길이는 $10+t$, 높이는 $20-t$ 이므로

$$0 < t < 20$$

원뿔의 부피를 V 라 하면

$$V = \frac{\pi}{3}(10+t)^2(20-t)$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3} \times 2(10+t)(20-t) + \frac{\pi}{3}(10+t)^2 \times (-1)$$

$$= -\pi(t+10)(t-10)$$

이때 원뿔의 부피가 증가에서 감소로 바뀌는 순간은 $\frac{dV}{dt}$

의 부호가 양에서 음으로 바뀌는 순간이므로 $t=10$

따라서 $t=10$ 일 때 원뿔의 부피는

$$V = \frac{\pi}{3} \times 400 \times 10 = \frac{4000}{3}\pi$$

기초 문제 Training

56쪽

1 ㄱ, ㄴ

2 (1) $f(x)=2$

(2) $f(x)=8x+3$

(3) $f(x)=-x^2+10x-1$

(4) $f(x)=4x^3-6x^2+6x+7$

3 (1) $\frac{1}{2}x^2-3x$ (2) $\frac{1}{2}x^2-3x+C$

4 (1) $4x+C$ (2) $\frac{1}{6}x^6+C$

(3) $\frac{1}{15}x^{15}+C$ (4) $\frac{1}{151}x^{151}+C$

5 (1) $\frac{7}{2}x^2+C$ (2) $-x^2+C$

(3) $\frac{1}{2}x^2-x+C$ (4) $3x^2+2x+C$

(5) x^3-2x^2+x+C (6) $\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+3x+C$

핵심 유형 Training

57~61쪽

1 10 2 ③ 3 -3 4 ③ 5 ③

6 8 7 ② 8 -1 9 ② 10 $\frac{1}{5}$

11 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+4x-5$ 12 -3 13 ③

14 $f(x)=\frac{3}{2}x^2+4x-\frac{11}{2}$

15 $f(x)=-2x^2+4x+3$ 16 ④ 17 ②

18 ① 19 10 20 2 21 ③ 22 -3

23 3 24 6 25 -4 26 3 27 -3

28 6 29 -3 30 -7 31 1 32 ③

1 $f(x)=(x^3-2x^2+3x+C)'=3x^2-4x+3$
 $\therefore f(-1)=3+4+3=10$

2 $f(x)=(x^3+9x^2-6x+2)'=3x^2+18x-6$
 따라서 $f'(x)=6x+18$ 이므로
 $f'(-2)=-12+18=6$

3 $F'(x)=f(x)$ 이므로
 $3x^2+2ax+2=3x^2-6x+2$
 따라서 $2a=-6$ 이므로 $a=-3$

4 $h(x)=\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
 $=2x(3x^2+x)+(x^2-1)(6x+1)$
 $=12x^3+3x^2-6x-1$
 $\therefore h'(x)=36x^2+6x-6$
 $\therefore h(1)+h'(1)=(12+3-6-1)+(36+6-6)$
 $=44$

5 $f(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int(x^3-x^2+1)dx\right\}=x^3-x^2+1$
 $\therefore f(2)=8-4+1=5$

6 $\frac{d}{dx}\left\{\int(2x^2+3x+a)dx\right\}=2x^2+3x+a$ 이므로
 $2x^2+3x+a=bx^2+cx+3$
 따라서 $a=3, b=2, c=3$ 이므로
 $a+b+c=8$

7 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3-2x)\right\}dx$
 $=x^3-2x+C$
 이때 $f(1)=5$ 에서
 $1-2+C=5 \quad \therefore C=6$
 따라서 $f(x)=x^3-2x+6$ 이므로
 $f(-1)=-1+2+6=7$

8 $f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2+4x-1)\right\}dx$
 $=x^2+4x-1+C$
 이때 $f(-1)=-4$ 에서
 $1-4-1+C=-4 \quad \therefore C=0$

$\therefore f(x)=x^2+4x-1$

방정식 $f(x)=0$ 에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 근의 곱은 -1 이다.

9 $f(x)=\int(4x^3+3x^2+2x+1)dx$
 $=x^4+x^3+x^2+x+C$
 이때 $f(-1)=-1$ 에서
 $1-1+1-1+C=-1 \quad \therefore C=-1$
 따라서 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x-1$ 이므로
 $f(2)=16+8+4+2-1=29$

10 $f(x) = \int (x-1)(x+1)(x^2+1) dx$
 $= \int (x^2-1)(x^2+1) dx$
 $= \int (x^4-1) dx$
 $= \frac{1}{5}x^5 - x + C$
 이때 $f(0) = 1$ 에서 $C = 1$
 따라서 $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x + 1$ 이므로
 $f(1) = \frac{1}{5} - 1 + 1 = \frac{1}{5}$

11 $f(x) = \int \frac{x^3}{x-2} dx - \int \frac{8}{x-2} dx$
 $= \int \frac{x^3-8}{x-2} dx$
 $= \int \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} dx$
 $= \int (x^2+2x+4) dx$
 $= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x + C$
 이때 $f(1) = \frac{1}{3}$ 에서
 $\frac{1}{3} + 1 + 4 + C = \frac{1}{3} \quad \therefore C = -5$
 $\therefore f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x - 5$

12 $f(x) = \int f'(x) dx$
 $= \int (-4x+3) dx$
 $= -2x^2 + 3x + C$
 이때 $f(2) = 0$ 에서
 $-8 + 6 + C = 0 \quad \therefore C = 2$
 따라서 $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ 이므로
 $f(-1) = -2 - 3 + 2 = -3$

13 $f'(x) = 6x^2 - 4x + 3$ 이므로
 $f(x) = \int f'(x) dx = \int (6x^2 - 4x + 3) dx$
 $= 2x^3 - 2x^2 + 3x + C_1$
 이때 $f(0) = 2$ 에서 $C_1 = 2$
 따라서 $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ 이므로 $f(x)$ 를 적분하면
 $\int (2x^3 - 2x^2 + 3x + 2) dx$
 $= \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$

14 (나)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로
 (분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$
 $\therefore f(1) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$ 이므로
 $f'(1) = 2a - 1$

(㉠)에서 $f'(1) = 3 + a$ 이므로

$2a - 1 = 3 + a \quad \therefore a = 4$

따라서 $f'(x) = 3x + 4$ 이므로

$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x + 4) dx$
 $= \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$

이때 $f(1) = 0$ 에서

$\frac{3}{2} + 4 + C = 0 \quad \therefore C = -\frac{11}{2}$

$\therefore f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4x - \frac{11}{2}$

15 $f'(x) = -4x + 4$ 이므로

$f(x) = \int f'(x) dx = \int (-4x + 4) dx$
 $= -2x^2 + 4x + C$

이때 곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(-1, -3)$ 을 지나므로

$f(-1) = -3$ 에서

$-2 - 4 + C = -3 \quad \therefore C = 3$

$\therefore f(x) = -2x^2 + 4x + 3$

16 $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ 이므로

$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 2x + 1) dx$
 $= x^3 - x^2 + x + C$

이때 곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(1, 0)$ 을 지나므로 $f(1) = 0$ 에서

$1 - 1 + 1 + C = 0 \quad \therefore C = -1$

따라서 $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ 이므로

$f(3) = 27 - 9 + 3 - 1 = 20$

17 $f(x) = \int (3ax - 4) dx$ 에서

$f'(x) = 3ax - 4$

곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, -2)$ 에서의 접선의 기울기가
 2이므로 $f'(1) = 2$ 에서

$3a - 4 = 2 \quad \therefore a = 2$

즉, $f'(x) = 6x - 4$ 이므로

$f(x) = \int f'(x) dx = \int (6x - 4) dx$
 $= 3x^2 - 4x + C$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, -2)$ 를 지나므로 $f(1)=-2$ 에서
 $3-4+C=-2 \quad \therefore C=-1$
 따라서 $f(x)=3x^2-4x-1$ 이므로
 $f(2)=12-8-1=3$

- 18 $F(x)=xf(x)+3x^4-4x^2+1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) + xf'(x) + 12x^3 - 8x \\ xf'(x) &= -12x^3 + 8x = x(-12x^2 + 8) \\ \therefore f'(x) &= -12x^2 + 8 \\ \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (-12x^2 + 8) dx \\ &= -4x^3 + 8x + C \\ \text{이때 } f(1) &= 4 \text{에서} \\ -4 + 8 + C &= 4 \quad \therefore C = 0 \\ \text{따라서 } f(x) &= -4x^3 + 8x \text{이므로} \\ f(-1) &= 4 - 8 = -4 \end{aligned}$$

- 19 $\int f(x) dx = (x-2)f(x) + x^3 - 12x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) + (x-2)f'(x) + 3x^2 - 12 \\ (x-2)f'(x) &= -3x^2 + 12 = (x-2)(-3x-6) \\ \therefore f'(x) &= -3x-6 \\ \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (-3x-6) dx \\ &= -\frac{3}{2}x^2 - 6x + C \\ \text{이때 } f(0) &= 4 \text{에서 } C = 4 \\ \therefore f(x) &= -\frac{3}{2}x^2 - 6x + 4 = -\frac{3}{2}(x+2)^2 + 10 \\ \text{따라서 } f(x) &\text{는 } x = -2 \text{일 때, 최댓값이 } 10 \text{이다.} \end{aligned}$$

- 20 $\int xf(x) dx = \{f(x)\}^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} xf(x) &= 2f(x)f'(x) \\ f(x)\{2f'(x) - x\} &= 0 \\ \text{이때 } f(x) &\neq 0 \text{이므로} \\ 2f'(x) - x &= 0 \quad \therefore f'(x) = \frac{1}{2}x \\ \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{1}{2}x dx \\ &= \frac{1}{4}x^2 + C \\ \text{이때 } f(0) &= 1 \text{에서 } C = 1 \\ \text{따라서 } f(x) &= \frac{1}{4}x^2 + 1 \text{이므로} \\ f(2) &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

- 21 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = 2x$ 에서

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= x^2 + C \\ \text{이때 } f(3) &= 2, g(3) = 4 \text{에서} \\ f(3)g(3) &= 9 + C \\ 8 &= 9 + C \quad \therefore C = -1 \\ \therefore f(x)g(x) &= x^2 - 1 \\ &= (x+1)(x-1) \\ \text{따라서 } f(x) &= x-1, g(x) = x+1 \text{이므로} \\ f(-1) + g(1) &= (-1-1) + (1+1) = 0 \end{aligned}$$

- 22 $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} = 2x+1$ 에서

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= x^2 + x + C_1 \\ \frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} &= 3x^2 - 4x + 2 \text{에서} \\ f(x)g(x) &= x^3 - 2x^2 + 2x + C_2 \\ \text{이때 } f(0) &= -2, g(0) = 2 \text{에서} \\ f(0) + g(0) &= C_1 \quad \therefore C_1 = 0 \\ f(0)g(0) &= C_2 \quad \therefore C_2 = -4 \\ \therefore f(x) + g(x) &= x^2 + x, \\ f(x)g(x) &= x^3 - 2x^2 + 2x - 4 \\ &= (x-2)(x^2+2) \\ \text{따라서 } f(x) &= x-2, g(x) = x^2+2 \text{이므로} \\ f(2) - g(-1) &= (2-2) - (1+2) = -3 \end{aligned}$$

- 23 $g(x) = \int \{2x - f'(x)\} dx$ 에서

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 - f(x) + C_1 \\ \therefore f(x) + g(x) &= x^2 + C_1 \\ \frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} &= 6x^2 - 6x - 2 \text{에서} \\ f(x)g(x) &= 2x^3 - 3x^2 - 2x + C_2 \\ \text{이때 } f(0) &= 1, g(0) = 0 \text{에서} \\ f(0) + g(0) &= C_1 \quad \therefore C_1 = 1 \\ f(0)g(0) &= C_2 \quad \therefore C_2 = 0 \\ \therefore f(x) + g(x) &= x^2 + 1, \\ f(x)g(x) &= 2x^3 - 3x^2 - 2x \\ &= x(2x+1)(x-2) \\ \text{따라서 } f(x) &= 2x+1, g(x) = x^2-2x \text{이므로} \\ f(1) + g(2) &= (2+1) + (4-4) = 3 \end{aligned}$$

- 24 (i) $x \geq 1$ 일 때,

$$f(x) = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

- (ii) $x < 1$ 일 때,

$$f(x) = \int (3x^2 - 2x) dx = x^3 - x^2 + C_2$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C_1 & (x \geq 1) \\ x^3 - x^2 + C_2 & (x < 1) \end{cases}$$

이때 $f(0)=2$ 에서 $C_2=2$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ 에서

$$1 - 1 + C_2 = \frac{1}{2} + C_1, \quad 2 = \frac{1}{2} + C_1 \quad \therefore C_1 = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} & (x \geq 1) \\ x^3 - x^2 + 2 & (x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(3) = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = 6$$

25 (i) $x > -2$ 일 때,

$$f(x) = \int (x+3) dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x + C_1$$

(ii) $x < -2$ 일 때,

$$f(x) = \int (-2x+k) dx = -x^2 + kx + C_2$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 3x + C_1 & (x > -2) \\ -x^2 + kx + C_2 & (x < -2) \end{cases}$$

이때 $f(0)=1$ 에서 $C_1=1$

$f(-3)=-4$ 에서

$$-9 - 3k + C_2 = -4$$

$$\therefore C_2 = 3k + 5$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 연속이려면

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \text{이어야 하므로}$$

$$2 - 6 + C_1 = -4 - 2k + C_2$$

$$-4 + 1 = -4 - 2k + (3k + 5)$$

$$\therefore k = -4$$

26 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서

$$f'(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

(i) $x \geq 0$ 일 때,

$$f(x) = \int (x-1) dx = \frac{1}{2}x^2 - x + C_1$$

(ii) $x < 0$ 일 때,

$$f(x) = \int (-1) dx = -x + C_2$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + C_1 & (x \geq 0) \\ -x + C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점을 지나므로 $f(0)=0$ 에서 $C_1=0$

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ 에서

$$C_2 = C_1 \quad \therefore C_2 = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(2) + f(-3) = (2-2) + 3 = 3$$

27 $f(x+y)=f(x)+f(y)+1$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 1$$

$$\therefore f(0) = -1$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + 1 - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= f'(0) = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int 2 dx = 2x + C$$

이때 $f(0)=-1$ 에서 $C=-1$

따라서 $f(x)=2x-1$ 이므로

$$f(-1) = -2 - 1 = -3$$

28 $f(x+y)=f(x)+f(y)+x^2y+xy^2$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0)$$

$$\therefore f(0) = 0$$

미분계수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) + f(h) + 4h + 2h^2 - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 4h + 2h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h) - f(0)}{h} + 4 + 2h \right\} \\ &= f'(0) + 4 \end{aligned}$$

즉, $f'(0) + 4 = 3$ 이므로

$$f'(0) = -1$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + x^2h + xh^2 - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + x^2h + xh^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h) - f(0)}{h} + x^2 + xh \right\} \\ &= f'(0) + x^2 = -1 + x^2 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^2 - 1) dx = \frac{1}{3}x^3 - x + C$$

이때 $f(0)=0$ 에서 $C=0$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x \text{ 이므로}$$

$$f(3) = 9 - 3 = 6$$

- 29** $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) \quad \therefore f(0) = 0$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + 2xh - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 2xh}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h) - f(0)}{h} + 2x \right\} \\ &= f'(0) + 2x \end{aligned}$$

이때 $f'(0)=k$ (k 는 상수)로 놓으면 $f'(x) = 2x + k$ 이므로

$$F(x) = \int (x-2)(2x+k) dx$$

$$\therefore F'(x) = (x-2)(2x+k) = 2x^2 + (k-4)x - 2k$$

이때 함수 $F(x)$ 의 극값이 존재하지 않으려면 방정식

$$F'(x) = 0 \text{은 중근 또는 허근을 가져야 한다.}$$

따라서 $F'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$D = (k-4)^2 + 16k \leq 0, \quad k^2 + 8k + 16 \leq 0$$

$$(k+4)^2 \leq 0 \quad \therefore k = -4$$

즉, $f'(x) = 2x - 4$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (2x - 4) dx = x^2 - 4x + C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=0$ 에서 $C=0$

$$\text{따라서 } f(x) = x^2 - 4x \text{ 이므로}$$

$$f(1) = 1 - 4 = -3$$

$$\begin{aligned} \text{30 } f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2x^2 - 6x) dx \\ &= \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + C \end{aligned}$$

$f'(x) = 2x^2 - 6x = 2x(x-3)$ 이므로 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

이때 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이므로 $f(0)=2$ 에서

$$C=2 \quad \therefore f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 2$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극소이므로 구하는 극솟 값은

$$f(3) = 18 - 27 + 2 = -7$$

- 31** $f'(x) = ax(x-2)$ ($a < 0$)라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int ax(x-2) dx \\ &= \int (ax^2 - 2ax) dx = \frac{a}{3}x^3 - ax^2 + C \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소, $x=2$ 에서 극대이므로

$$f(0) = -1 \text{에서 } C = -1$$

$$f(2) = 3 \text{에서 } \frac{8}{3}a - 4a + C = 3$$

$$-\frac{4}{3}a - 1 = 3 \quad \therefore a = -3$$

따라서 $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ 이므로

$$f(1) = -1 + 3 - 1 = 1$$

- 32** $f(x)$ 의 최고차항이 x^3 이므로 $f'(x)$ 의 최고차항은 $3x^2$ 이다.

(나)에서 $f'(2)=0$ 이므로 (가)에서

$$f'(-2) = f'(2) = 0$$

$$f'(x) = 3(x+2)(x-2) = 3x^2 - 12 \text{이므로}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 12) dx = x^3 - 12x + C$$

또 (나)에서 $f(2) = -3$ 이므로

$$8 - 24 + C = -3 \quad \therefore C = 13$$

따라서 $f(x) = x^3 - 12x + 13$ 이므로

$$f(-3) = -27 + 36 + 13 = 22$$

III-1 02 정적분(1)

기초 문제 Training

62쪽

- 1 (1) 2 (2) -3 (3) 2 (4) $\frac{13}{3}$ (5) 12 (6) $\frac{2}{3}$
- 2 (1) 0 (2) 0 (3) $-\frac{11}{6}$ (4) $-\frac{11}{4}$
- 3 (1) 30 (2) 128 (3) 0 (4) 8 (5) $\frac{2}{3}$ (6) 0
- 4 2

핵심 유형 Training

63~66쪽

1 ④	2 24	3 ①	4 ①	5 ③
6 8	7 3	8 12	9 44	10 2
11 -2	12 ①	13 4	14 ④	15 ②
16 $\frac{28}{3}$	17 ②	18 $2\sqrt{2}$	19 ⑤	20 2
21 2	22 9	23 4	24 -20	25 ①
26 4	27 ①	28 $\frac{13}{6}$		

$$\begin{aligned}
 1 \quad & \int_2^2 (5x-2)(x+4) dx + \int_3^1 (x-1)(-3x+1) dx \\
 &= 0 + \int_3^1 (-3x^2+4x-1) dx \\
 &= \left[-x^3+2x^2-x \right]_3^1 \\
 &= (-1+2-1) - (-27+18-3) = 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad & \int_{-1}^3 (x+1)f(x) dx = \int_{-1}^3 (x+1)(x^2-x+1) dx \\
 &= \int_{-1}^3 (x^3+1) dx = \left[\frac{1}{4}x^4+x \right]_{-1}^3 \\
 &= \left(\frac{81}{4}+3 \right) - \left(\frac{1}{4}-1 \right) = 24
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad & \int_0^{-2} f(x) dx = \int_0^{-2} (-2x^3+kx) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{2}x^4+\frac{k}{2}x^2 \right]_0^{-2} = -8+2k \\
 &\text{즉, } -8+2k=k \Rightarrow \text{따라서 } k=8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4 \quad & \int_{-1}^2 (3x^2+x) dx - 3 \int_{-1}^2 (x^2-x) dx \\
 &= \int_{-1}^2 (3x^2+x) dx - \int_{-1}^2 (3x^2-3x) dx \\
 &= \int_{-1}^2 \{ (3x^2+x) - (3x^2-3x) \} dx \\
 &= \int_{-1}^2 4x dx = \left[2x^2 \right]_{-1}^2 = 8-2=6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5 \quad & \int_2^3 \frac{x^3}{x-1} dx + \int_3^2 \frac{1}{t-1} dt \\
 &= \int_2^3 \frac{x^3}{x-1} dx - \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx \\
 &= \int_2^3 \frac{x^3-1}{x-1} dx \\
 &= \int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} dx \\
 &= \int_2^3 (x^2+x+1) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x \right]_2^3 \\
 &= \left(9+\frac{9}{2}+3 \right) - \left(\frac{8}{3}+2+2 \right) = \frac{59}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6 \quad & \int_0^2 (x^2+2x+k) dx - 2 \int_2^0 (x^2-2x) dx \\
 &= \int_0^2 (x^2+2x+k) dx + \int_0^2 (2x^2-4x) dx \\
 &= \int_0^2 (3x^2-2x+k) dx = \left[x^3-x^2+kx \right]_0^2 \\
 &= 8-4+2k=4+2k \\
 &\text{즉, } 4+2k=20 \Rightarrow \text{따라서 } k=8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7 \quad & 2 \int_1^k (x-1) dx - \int_1^k 4 dx \\
 &= \int_1^k (2x-2) dx - \int_1^k 4 dx \\
 &= \int_1^k (2x-6) dx \\
 &= \left[x^2-6x \right]_1^k \\
 &= (k^2-6k) - (1-6) \\
 &= k^2-6k+5 = (k-3)^2-4
 \end{aligned}$$

따라서 주어진 정적분의 값은 $k=3$ 일 때 최소이다.

$$\begin{aligned}
 8 \quad & \int_0^2 (3x^2-4x+1) dx + \int_2^3 (3t^2-4t+1) dt \\
 &= \int_0^2 (3x^2-4x+1) dx + \int_2^3 (3x^2-4x+1) dx \\
 &= \int_0^3 (3x^2-4x+1) dx \\
 &= \left[x^3-2x^2+x \right]_0^3 \\
 &= 27-18+3=12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9 \quad & \int_2^3 (\sqrt{x}-3)^2 dx - \int_2^1 (\sqrt{x}-3)^2 dx + \int_1^3 (\sqrt{x}+3)^2 dx \\
&= \int_2^3 (\sqrt{x}-3)^2 dx + \int_1^2 (\sqrt{x}-3)^2 dx + \int_1^3 (\sqrt{x}+3)^2 dx \\
&= \int_1^3 (\sqrt{x}-3)^2 dx + \int_1^3 (\sqrt{x}+3)^2 dx \\
&= \int_1^3 (2x+18) dx \\
&= \left[x^2 + 18x \right]_1^3 \\
&= (9+54) - (1+18) = 44
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10 \quad & \int_3^4 f(x) dx \\
&= \int_3^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^4 f(x) dx \\
&= -\int_{-2}^3 f(x) dx + \left\{ \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^4 f(x) dx \right\} \\
&= -6 + (3+5) = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
11 \quad & \int_{-2}^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx \text{에서} \\
& \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx \\
& \therefore \int_{-2}^0 f(x) dx = 0 \\
& \therefore \int_0^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx = 0 \\
& f(x) = ax^2 + bx + c \text{ (} a, b, c \text{는 상수, } a \neq 0 \text{)} \text{라 하면} \\
& f(0) = 1 \text{에서 } c = 1 \\
& f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{이므로 } \int_0^2 f(x) dx = 0 \text{에서} \\
& \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (ax^2 + bx + 1) dx \\
&= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + x \right]_0^2 \\
&= \frac{8}{3}a + 2b + 2
\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{8}{3}a + 2b + 2 = 0 \text{이므로}$$

$$4a + 3b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = 0 \text{에서}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^0 f(x) dx &= \int_{-2}^0 (ax^2 + bx + 1) dx \\
&= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + x \right]_{-2}^0 \\
&= -\left(-\frac{8}{3}a + 2b - 2 \right) \\
&= \frac{8}{3}a - 2b + 2
\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{8}{3}a - 2b + 2 = 0 \text{이므로}$$

$$4a - 3b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = -\frac{3}{4}, b = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 1 \text{이므로}$$

$$f(2) = -3 + 1 = -2$$

$$\begin{aligned}
12 \quad & \int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1) dx + \int_1^3 2x dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 + \left[x^2 \right]_1^3 \\
&= \left(\frac{1}{3} + 1 \right) + (9 - 1) \\
&= \frac{28}{3}
\end{aligned}$$

$$13 \quad a > 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-a}^a f(x) dx \\
&= \int_{-a}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^a f(x) dx \\
&= \int_{-a}^{-1} (2x-1) dx + \int_{-1}^a (-x^2+2x) dx \\
&= \left[x^2 - x \right]_{-a}^{-1} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_{-1}^a \\
&= (1-1) - (a^2+a) + \left(-\frac{1}{3}a^3 + a^2 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) \\
&= -\frac{1}{3}a^3 - a - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{1}{3}a^3 - a - \frac{2}{3} = -26 \text{이므로}$$

$$a^3 + 3a - 76 = 0$$

$$(a-4)(a^2+4a+19) = 0$$

$$\therefore a = 4 \text{ (} \because a \text{는 실수)}$$

$$14 \quad f(x) = x^3 - 3x \text{에서}$$

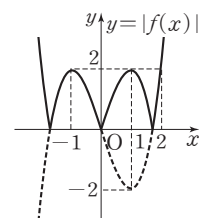
$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{2}{\text{극대}}$	$\searrow$	$\frac{-2}{\text{극소}}$	$\nearrow$

따라서 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 다음과 같다.



(i) $-1 \leq t \leq 2$ 일 때, $-1 \leq x \leq t$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값은

$$g(t) = 2$$

(ii) $t \geq 2$ 일 때, $-1 \leq x \leq t$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값은

$$g(t) = t^3 - 3t$$

$$(i), (ii) \text{에서 } g(t) = \begin{cases} 2 & (-1 \leq t \leq 2) \\ t^3 - 3t & (t \geq 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^4 g(t) dt &= \int_{-1}^2 2 dt + \int_2^4 (t^3 - 3t) dt \\ &= \left[2t \right]_{-1}^2 + \left[\frac{1}{4} t^4 - \frac{3}{2} t^2 \right]_2^4 \\ &= 4 - (-2) + (64 - 24) - (4 - 6) = 48 \end{aligned}$$

$$15 \quad x + |x-3| = \begin{cases} 2x-3 & (x \geq 3) \\ 3 & (x \leq 3) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_1^5 (x + |x-3|) dx &= \int_1^3 3 dx + \int_3^5 (2x-3) dx \\ &= \left[3x \right]_1^3 + \left[x^2 - 3x \right]_3^5 \\ &= (9-3) + (25-15) - (9-9) = 16 \end{aligned}$$

$$16 \quad |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -x^2 + 2x & (0 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 |x^2 - 2x| dx &= \int_{-2}^0 (x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx \\ &\quad + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{1}{3} x^3 + x^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_2^3 \\ &= -\left(-\frac{8}{3} - 4\right) + \left(-\frac{8}{3} + 4\right) + (9-9) - \left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{28}{3} \end{aligned}$$

$$17 \quad |x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \geq 1) \\ -x+1 & (x \leq 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^a |x-1| dx &= \int_0^1 (-x+1) dx + \int_1^a (x-1) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} x^2 + x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2} x^2 - x \right]_1^a \\ &= \left(-\frac{1}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{2} a^2 - a\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{2} a^2 - a + 1 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} a^2 - a + 1 = 5 \text{ 이므로 } a^2 - 2a - 8 = 0$$

$$(a+2)(a-4) = 0 \quad \therefore a = 4 \quad (\because a > 1)$$

$$18 \quad x|x-a| = \begin{cases} x^2 - ax & (x \geq a) \\ -x^2 + ax & (x \leq a) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^4 x|x-a| dx &= \int_0^a (-x^2 + ax) dx + \int_a^4 (x^2 - ax) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3} x^3 + \frac{a}{2} x^2 \right]_0^a + \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{a}{2} x^2 \right]_a^4 \\ &= \left(-\frac{1}{3} a^3 + \frac{1}{2} a^3\right) + \left(\frac{64}{3} - 8a\right) - \left(\frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{2} a^3\right) \\ &= \frac{1}{3} a^3 - 8a + \frac{64}{3} \end{aligned}$$

$$f(a) = \frac{1}{3} a^3 - 8a + \frac{64}{3} \text{라 하면}$$

$$f'(a) = a^2 - 8 = (a + 2\sqrt{2})(a - 2\sqrt{2})$$

$$f'(a) = 0 \text{인 } a \text{의 값은 } a = 2\sqrt{2} \quad (\because 0 < a < 4)$$

$0 < a < 4$ 에서 함수 $f(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	$2\sqrt{2}$	...	4
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(a)$ 는 $a = 2\sqrt{2}$ 일 때 최소이다.

$$\begin{aligned} 19 \quad \int_{-2}^2 (4x^3 + 3x^2 - 2x + 1) dx &= \int_{-2}^2 (4x^3 - 2x) dx + \int_{-2}^2 (3x^2 + 1) dx \\ &= 0 + 2 \int_0^2 (3x^2 + 1) dx \\ &= 2 \left[x^3 + x \right]_0^2 \\ &= 2(8 + 2) = 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20 \quad \int_{-3}^3 \{f(x) - g(x)\} dx &= \int_{-3}^3 f(x) dx - \int_{-3}^3 g(x) dx \\ &= 2 \int_0^3 f(x) dx - 0 \\ &= 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21 \quad \int_{-a}^a (4x^7 + 5x^5 + 3x^2 + x - 2) dx &= \int_{-a}^a (4x^7 + 5x^5 + x) dx + \int_{-a}^a (3x^2 - 2) dx \\ &= 0 + 2 \int_0^a (3x^2 - 2) dx \\ &= 2 \left[x^3 - 2x \right]_0^a \\ &= 2(a^3 - 2a) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2(a^3 - 2a) = 8 \text{이므로}$$

$$a^3 - 2a - 4 = 0, \quad (a-2)(a^2 + 2a + 2) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a \text{는 실수})$$

$$\begin{aligned}
22 \quad \int_{-1}^7 f(x) dx &= \int_{-1}^5 f(x) dx + \int_5^7 f(x) dx \\
&= \int_{-1}^5 f(x) dx - \int_7^5 f(x) dx \\
&= 7 - (-2) = 9 \\
\text{한편 } f(-x) &= -f(x) \text{ 이면} \\
\int_{-1}^1 f(x) dx &= 0 \\
\therefore \int_1^7 f(x) dx &= \int_1^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^7 f(x) dx \\
&= -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^7 f(x) dx \\
&= 0 + 9 = 9
\end{aligned}$$

23 $f(x) = ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 f(x) dx &= -4 \text{에서} \\
\int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (ax + b) dx \\
&= 2 \int_0^1 b dx \\
&= 2 \left[bx \right]_0^1 \\
&= 2b
\end{aligned}$$

즉, $2b = -4$ 이므로 $b = -2$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 xf(x) dx &= 2 \text{에서} \\
\int_{-1}^1 xf(x) dx &= \int_{-1}^1 (ax^2 + bx) dx \\
&= 2 \int_0^1 ax^2 dx \\
&= 2 \left[\frac{a}{3} x^3 \right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3} a
\end{aligned}$$

즉, $\frac{2}{3}a = 2$ 이므로 $a = 3$

따라서 $f(x) = 3x - 2$ 이므로
 $f(2) = 6 - 2 = 4$

$$\begin{aligned}
24 \quad f(-x) + f(x) &= 0 \text{에서 } f(-x) = -f(x) \text{이므로} \\
(-x)^2 f(-x) &= -x^2 f(x) \\
-x f(-x) &= x f(x) \\
\therefore \int_{-1}^1 (3x^2 - 2x + 4) f(x) dx \\
&= 3 \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx - 2 \int_{-1}^1 x f(x) dx + 4 \int_{-1}^1 f(x) dx \\
&= 0 - 4 \int_0^1 x f(x) dx + 0 \\
&= -4 \int_0^1 x f(x) dx \\
&= -4 \times 5 = -20
\end{aligned}$$

25 $f(-x) = -f(x)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 홀수 차수의 항만 있고 함수 $f'(x)$ 는 짝수 차수의 항 또는 상수항만 있다.

$$\begin{aligned}
\therefore \int_{-1}^1 (x+3)f'(x) dx \\
&= \int_{-1}^1 x f'(x) dx + 3 \int_{-1}^1 f'(x) dx \\
&= 0 + 6 \int_0^1 f'(x) dx \\
&= 6 \left[f(x) \right]_0^1 \\
&= 6 \{ f(1) - f(0) \}
\end{aligned}$$

이때 $f(0) = -f(0)$ 에서 $f(0) = 0$ 이므로

$$6f(1) = 6 \quad \therefore f(1) = 1$$

26 $f(x+3) = f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^3 f(x) dx &= \int_3^6 f(x) dx = \int_6^9 f(x) dx = \int_9^{12} f(x) dx \\
\therefore \int_0^{12} f(x) dx &= \int_0^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx \\
&\quad + \int_6^9 f(x) dx + \int_9^{12} f(x) dx \\
&= 4 \int_0^3 f(x) dx = 4 \times 1 = 4
\end{aligned}$$

27 $f(x+2) = f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_1^3 f(x) dx = \int_3^5 f(x) dx \\
\therefore \int_{-1}^5 f(x) dx \\
&= \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx \\
&= 3 \int_{-1}^1 f(x) dx \\
&= 3 \int_{-1}^1 (-x^2) dx = 3 \times 2 \int_0^1 (-x^2) dx \\
&= 6 \left[-\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \\
&= 6 \times \left(-\frac{1}{3} \right) = -2
\end{aligned}$$

28 $f(x+3) = f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_9^{11} f(x) dx &= \int_6^8 f(x) dx \\
&= \int_3^5 f(x) dx \\
&= \int_0^2 f(x) dx \\
&= \int_0^1 2x^2 dx + \int_1^2 (-x+3) dx \\
&= \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2} x^2 + 3x \right]_1^2 \\
&= \frac{2}{3} + (-2+6) - \left(-\frac{1}{2} + 3 \right) = \frac{13}{6}
\end{aligned}$$

III-1 03 정적분(2)

기초 문제 Training

67쪽

- 1 (1) $2x^2 - x$ (2) $x^2 - 1$ (3) 2 (4) $2x + 1$
- 2 (1) $f(x) = 2x - 4$
 (2) $f(x) = 6x^2 - 6x + 5$
 (3) $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$
 (4) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 2$
- 3 (1) $f(1)$ (2) $f(-1)$ (3) $f(1)$ (4) $f(3)$
- 4 (1) $3f(1)$ (2) $-2f(4)$ (3) $f(2)$ (4) $2f(1)$

핵심 유형 Training

68~70쪽

1 ①	2 9	3 ②	4 ③	5 8
6 18	7 $-\frac{1}{2}$	8 -4	9 ⑤	10 ②
11 ②	12 0	13 16	14 0	15 ②
16 $\frac{1}{2}$	17 ⑤	18 ④	19 3	

- 1 $\int_{-1}^1 f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면
 $f(x) = 3x^2 - 2x + k$
 이를 $\int_{-1}^1 f(t) dt = k$ 에 대입하면
 $\int_{-1}^1 (3t^2 - 2t + k) dt = k, 2 \int_0^1 (3t^2 + k) dt = k$
 $2 \left[t^3 + kt \right]_0^1 = k, 2(1+k) = k \quad \therefore k = -2$
 따라서 $f(x) = 3x^2 - 2x - 2$ 이므로
 $f(-2) = 12 + 4 - 2 = 14$
- 2 $\int_0^3 tf'(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면
 $f(x) = 6x + k \quad \therefore f'(x) = 6$
 이를 $\int_0^3 tf'(t) dt = k$ 에 대입하면
 $\int_0^3 6t dt = k, \left[3t^2 \right]_0^3 = k \quad \therefore k = 27$
 따라서 $f(x) = 6x + 27$ 이므로
 $f(-3) = -18 + 27 = 9$

- 3 $f(x) = -12x^2 + 6x \int_0^1 f(t) dt - 6 \int_0^1 tf(t) dt$ 이므로
 $\int_0^1 f(t) dt = a, \int_0^1 tf(t) dt = b$ (a, b 는 상수)로 놓으면
 $f(x) = -12x^2 + 6ax - 6b \quad \dots\dots \textcircled{A}$
 $\textcircled{A}$ 을 $\int_0^1 f(t) dt = a$ 에 대입하면
 $\int_0^1 (-12t^2 + 6at - 6b) dt = a$
 $\left[-4t^3 + 3at^2 - 6bt \right]_0^1 = a$
 $-4 + 3a - 6b = a \quad \therefore a - 3b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}$ 을 $\int_0^1 tf(t) dt = b$ 에 대입하면
 $\int_0^1 (-12t^3 + 6at^2 - 6bt) dt = b$
 $\left[-3t^4 + 2at^3 - 3bt^2 \right]_0^1 = b$
 $-3 + 2a - 3b = b \quad \therefore 2a - 4b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{C}$
 $\textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$
 따라서 $f(x) = -12x^2 + 3x + 3$ 이므로
 $f(1) = -12 + 3 + 3 = -6$

- 4 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x) = 6x + a$
 주어진 등식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면
 $0 = 12 + 2a - 2 \quad \therefore a = -5$
 따라서 $f(x) = 6x - 5$ 이므로
 $f(3) = 18 - 5 = 13$
- 5 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x) = 3x^2 + 2ax + 3$
 주어진 등식의 양변에 $x=a$ 를 대입하면
 $0 = a^3 + a^3 + 3a - 5, 2a^3 + 3a - 5 = 0$
 $(a-1)(2a^2 + 2a + 5) = 0$
 $\therefore a = 1$ ($\because a$ 는 실수)
 따라서 $f(x) = 3x^2 + 2x + 3$ 이므로
 $f(a) = f(1) = 3 + 2 + 3 = 8$

- 6 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면
 $f'(x) = \{(x+1)^3 + (x+1)\} - (x^3 + x)$
 $= 3x^2 + 3x + 2$
 $\therefore \int_0^2 f'(x) dx = \int_0^2 (3x^2 + 3x + 2) dx$
 $= \left[x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_0^2$
 $= 8 + 6 + 4 = 18$

- 7 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x - 2$$

$$\therefore f(x) = \int (x-2) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$$

이때 $f(1) = 0$ 이므로

$$\frac{1}{2} - 2 + C = 0 \quad \therefore C = \frac{3}{2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{1}{2}$$

$1 \leq x \leq 3$ 에서 $f(1) = f(3) = 0$, $f(2) = -\frac{1}{2}$ 이므로 함수

$f(x)$ 의 최댓값은 0, 최솟값은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 구하는 합은 $0 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

- 8 주어진 등식에서

$$x \int_1^x f(t) dt - \int_1^x tf(t) dt = x^3 - 2x^2 + x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$\therefore \int_1^x f(t) dt = 3x^2 - 4x + 1$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 6x - 4$$

$$\therefore f(0) = -4$$

- 9 주어진 등식에서

$$x \int_{-1}^x f(t) dt - \int_{-1}^x tf(t) dt = ax^3 + x^2 + bx - 3$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_{-1}^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 3ax^2 + 2x + b$$

$$\therefore \int_{-1}^x f(t) dt = 3ax^2 + 2x + b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 등식의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$0 = -a + 1 - b - 3$$

$$\therefore a + b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$0 = 3a - 2 + b$$

$$\therefore 3a + b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 2, b = -4 \quad \therefore a - b = 6$$

- 10 주어진 등식에서

$$\int_0^x tf(t) dt - x \int_0^x f(t) dt = x^4 - 2x^3 + 2x^2$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$xf(x) - \int_0^x f(t) dt - xf(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x$$

$$\therefore \int_0^x f(t) dt = -4x^3 + 6x^2 - 4x$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = -12x^2 + 12x - 4 = -12\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값이 -1 이다.

- 11 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-6)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 6$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-1	$\dots$	6	$\dots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$$\begin{aligned} f(-1) &= \int_2^{-1} (t^2 - 5t - 6) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 6t \right]_2^{-1} \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 6 \right) - \left(\frac{8}{3} - 10 - 12 \right) = \frac{45}{2} \end{aligned}$$

- 12 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x^2 + ax + b$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 극댓값 $\frac{4}{3}$ 를 가지므로

$$f'(1) = 0 \text{에서}$$

$$1 + a + b = 0 \quad \therefore a + b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(1) = \frac{4}{3} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^1 (t^2 + at + b) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2 + bt \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}a + b \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{3} + \frac{1}{2}a + b = \frac{4}{3} \text{이므로 } a + 2b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -4$, $b = 3$

$$\therefore f'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 3$ 에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$$\begin{aligned} f(3) &= \int_0^3 (t^2 - 4t + 3) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t \right]_0^3 \\ &= 9 - 18 + 9 = 0 \end{aligned}$$

13 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 에서 $F'(x) = f(x)$

함수 $F(x)$ 가 오직 하나의 극값을 가지려면 방정식 $F'(x) = 0$, 즉 $f(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.
 함수 $f(x) = x^3 - 12x + a$ 에서
 $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$
 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -2$ 또는 $x = 2$
 함수 $f(x)$ 의 극값이 $f(-2)$, $f(2)$ 이므로 방정식 $f(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가지려면 $f(-2)f(2) \geq 0$ 에서
 $(a+16)(a-16) \geq 0$
 $\therefore a \leq -16$ 또는 $a \geq 16$
 그런데 $a > 0$ 이므로 $a \geq 16$
 따라서 양수 a 의 최솟값은 16이다.

14 $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ 에서 $F'(x) = f(x)$

구간 $[0, 4]$ 에서 $F'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 1$ 또는 $x = 4$
 구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $F(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	4
$F'(x)$		+	0	-	
$F(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $F(x)$ 의 최댓값은

$$F(1) = \int_1^1 f(t) dt = 0$$

15 $F(x) = \int_2^x f(t) dt$ 에서 $F'(x) = f(x)$

$F(x) = k(x-2)(x-5) = k(x^2 - 7x + 10)$ ($k < 0$)이라 하면
 $F'(x) = k(2x-7) \quad \therefore f(x) = 2kx - 7k$
 $f(3) = 1$ 에서
 $6k - 7k = 1 \quad \therefore k = -1$
 따라서 $f(x) = -2x + 7$ 이므로 $f(0) = 7$

16 함수 $y = f(x)$ 의 그래프에서 $f(x) = \begin{cases} -x+3 & (x \geq 2) \\ x-1 & (x \leq 2) \end{cases}$

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 에서 $F'(x) = f(x)$
 $F'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 1$ 또는 $x = 3$
 함수 $F(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$F'(x)$	-	0	+	0	-
$F(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $F(x)$ 는 $x = 3$ 에서 극대이므로 구하는 극댓값은

$$\begin{aligned} F(3) &= \int_0^3 f(t) dt \\ &= \int_0^2 (t-1) dt + \int_2^3 (-t+3) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 - t \right]_0^2 + \left[-\frac{1}{2}t^2 + 3t \right]_2^3 \\ &= (2-2) + \left(-\frac{9}{2} + 9 \right) - (-2+6) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

17 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2-9} \int_3^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2-9} \left[F(t) \right]_3^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{F(x) - F(3)}{(x+3)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{F(x) - F(3)}{x-3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{1}{6} F'(3) = \frac{1}{6} f(3) = \frac{1}{6} (27 - 27 + 2) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

18 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left[F(t) \right]_1^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x^2) - F(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x^2) - F(1)}{(x-1)(x+1)} \times (x+1) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x^2) - F(1)}{x^2-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) \\ &= 2F'(1) = 2f(1) = 2(3-2+1) = 4 \end{aligned}$$

19 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{1-3h}^{1+h} f(x) dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[F(x) \right]_{1-3h}^{1+h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1-3h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1) + F(1) - F(1-3h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1-3h) - F(1)}{-3h} \times (-3) \\ &= F'(1) + 3F'(1) = 4F'(1) = 4f(1) \\ &\text{즉, } 4f(1) = 8 \text{이므로 } f(1) = 2 \\ &2 - 3 + a = 2 \quad \therefore a = 3 \end{aligned}$$

III-2 01 정적분의 활용

기초 문제 Training

72쪽

1 $\frac{32}{3}$

2 $\frac{9}{2}$

3 (가) x^2-4x (나) $-x^2+4x$ (다) $\frac{23}{3}$

4 $\frac{9}{2}$

5 $\frac{4}{3}$

6 (1) 4 (2) 1 (3) 1

핵심 유형 Training

73~78쪽

- | | | | | |
|------------------|-------------------|-------------------------|------------------|---------|
| 1 ⑤ | 2 3 | 3 $\frac{4}{3}$ | 4 $\frac{13}{6}$ | 5 9 |
| 6 24 | 7 2 | 8 ③ | 9 $\frac{64}{3}$ | 10 ② |
| 11 $\frac{4}{3}$ | 12 $-\frac{3}{2}$ | 13 $\frac{\sqrt{6}}{9}$ | 14 $\frac{1}{2}$ | 15 16 |
| 16 -16 | 17 4 | 18 1 | 19 $\frac{1}{3}$ | 20 1 |
| 21 ③ | 22 10 | 23 ③ | 24 ② | 25 ④ |
| 26 100 m | 27 8 | 28 $\frac{26}{3}$ | 29 $\frac{7}{2}$ | 30 ③ |
| 31 ④ | 32 ② | 33 4 | 34 L, D | 35 ㄱ, ㄴ |
| 36 4 | | | | |

- 1 곡선 $y=ax-x^2$ 과 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

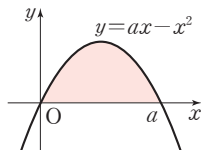
$$ax-x^2=0, x(x-a)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=a$$

$a>0$ 이므로 곡선과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S=\int_0^a (ax-x^2)dx=\left[\frac{a}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{a^3}{6}$$

$$\text{따라서 } \frac{a^3}{6}=\frac{9}{2} \text{이므로 } a^3=27 \quad \therefore a=3 (\because a>0)$$



2 $S_2=\int_0^1 x^3 dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$

$$S_1+S_2=1\times 1=1 \text{이므로}$$

$$S_1=1-S_2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=3$$

3 $\int_0^{2020} f(x)dx=\int_3^{2020} f(x)dx$ 에서

$$\int_0^{2020} f(x)dx-\int_3^{2020} f(x)dx=0$$

$$\therefore \int_0^3 f(x)dx=0$$

이때 $f(x)=-x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\int_0^3 (-x^2+ax+b)dx=0$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_0^3=0$$

$$-9+\frac{9}{2}a+3b=0 \quad \therefore 3a+2b=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

또 $f(3)=0$ 에서

$$-9+3a+b=0 \quad \therefore 3a+b=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $a=4, b=-3$

$$\therefore f(x)=-x^2+4x-3$$

곡선 $y=-x^2+4x-3$ 과 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$-x^2+4x-3=0$$

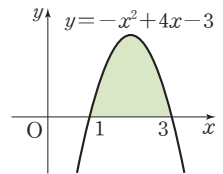
$$(x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S=\int_1^3 (-x^2+4x-3)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3=\frac{4}{3}$$



4 $y=x|x-2|=\begin{cases} x^2-2x & (x\geq 2) \\ -x^2+2x & (x\leq 2) \end{cases}$

(i) $x\geq 2$ 일 때, 곡선 $y=x^2-2x$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2-2x=x, x(x-3)=0$$

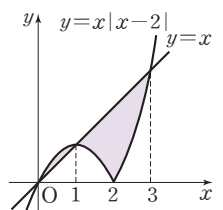
$$\therefore x=3 (\because x\geq 2)$$

(ii) $x\leq 2$ 일 때, 곡선

$y=-x^2+2x$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$-x^2+2x=x, x(x-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 \{(-x^2+2x)-x\} dx \\
 &\quad + \int_1^2 \{x-(-x^2+2x)\} dx \\
 &\quad + \int_2^3 \{x-(x^2-2x)\} dx \\
 &= \int_0^1 (-x^2+x) dx + \int_1^2 (x^2-x) dx \\
 &\quad + \int_2^3 (-x^2+3x) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2 \\
 &\quad + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_2^3 \\
 &= \frac{13}{6}
 \end{aligned}$$

- 5 곡선 $y=x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면

$$y = -x^2$$

이 곡선을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동하면

$$y-5 = -(x-1)^2 \quad \therefore y = -x^2 + 2x + 4$$

$$\therefore g(x) = -x^2 + 2x + 4$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

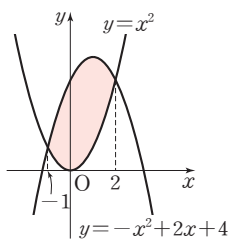
$$x^2 = -x^2 + 2x + 4$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^2 \{(-x^2+2x+4)-x^2\} dx \\
 &= \int_{-1}^2 (-2x^2+2x+4) dx \\
 &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 4x\right]_{-1}^2 = 9
 \end{aligned}$$



- 6 두 삼차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표가 $-1, 0, 1$ 이므로 $f(x)-g(x)=ax(x+1)(x-1)$ (a 는 상수, $a \neq 0$)이라 하자.

$-1 \leq x \leq 0$ 에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^0 \{f(x)-g(x)\} dx \\
 &= \int_{-1}^0 ax(x+1)(x-1) dx \\
 &= \int_{-1}^0 (ax^3-ax) dx = \left[\frac{a}{4}x^4 - \frac{a}{2}x^2\right]_{-1}^0 = \frac{a}{4}
 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{a}{4} = 1 \text{ 이므로 } a = 4$$

따라서 $f(x)-g(x)=4x(x+1)(x-1)$ 이므로

$$f(2)-g(2)=4 \times 2 \times 3 \times 1 = 24$$

- 7 점 $(1, 2)$ 를 지나는 직선의 기울기를 m 이라 하면

$$y-2=m(x-1) \quad \therefore y=mx-m+2$$

곡선 $y=x^2$ 과 직선

$y=mx-m+2$ 의 교점의 x 좌표

를 α, β ($\alpha < \beta$)라 하면 α, β 는

이차방정식 $x^2=mx-m+2$, 즉

$x^2-mx+m-2=0$ 의 두 실근

이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계

에 의하여

$$\alpha + \beta = m, \alpha\beta = m-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

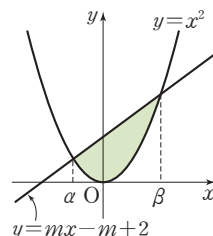
$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(mx-m+2)-x^2\} dx \\
 &= \int_{\alpha}^{\beta} (-x^2+mx-m+2) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{m}{2}x^2 - (m-2)x\right]_{\alpha}^{\beta} \\
 &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \textcircled{1} \text{에서 } \beta-\alpha = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{m^2 - 4m + 8}$$

$$\therefore S = \frac{1}{6}(\sqrt{m^2 - 4m + 8})^3$$

$$= \frac{1}{6}\{\sqrt{(m-2)^2 + 4}\}^3$$

따라서 $m=2$ 일 때 넓이가 최소이다.



- 8 $f(x)=ax^2$ 이라 하면 $f'(x)=2ax$

점 $(1, a)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2a$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-a=2a(x-1)$$

$$\therefore y=2ax-a$$

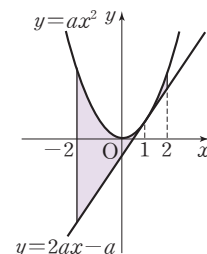
곡선과 접선 및 두 직선

$x=-2, x=2$ 로 둘러싸인 도형

의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^2 \{ax^2-(2ax-a)\} dx \\
 &= 2 \int_0^2 (ax^2+a) dx \\
 &= 2 \left[\frac{a}{3}x^3 + ax\right]_0^2 = \frac{28}{3}a
 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{28}{3}a = 7 \text{ 이므로 } a = \frac{3}{4}$$



- 9 $f(x)=x^3-2x^2+1$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2-4x$
 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=4$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-1=4(x-2)$$

$$\therefore y=4x-7$$

곡선 $y=x^3-2x^2+1$ 과

직선 $y=4x-7$ 의 교점

의 x 좌표를 구하면

$$x^3-2x^2+1=4x-7$$

$$x^3-2x^2-4x+8=0$$

$$(x+2)(x-2)^2=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

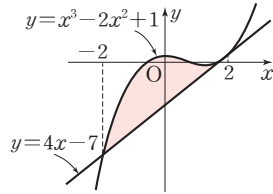
$$S=\int_{-2}^2 \{(x^3-2x^2+1)-(4x-7)\} dx$$

$$=\int_{-2}^2 (x^3-2x^2-4x+8) dx$$

$$=2\int_0^2 (-2x^2+8) dx$$

$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^2$$

$$=\frac{64}{3}$$



- 10 $f(x)=x^2+1$ 이라 하면 $f'(x)=2x$
 접점의 좌표를 (t, t^2+1) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^2+1)=2t(x-t)$$

$$\therefore y=2tx-t^2+1$$

이 직선이 점 $(-1, -2)$ 를 지나므로

$$-2=-2t-t^2+1$$

$$t^2+2t-3=0$$

$$(t+3)(t-1)=0$$

$$\therefore t=-3 \text{ 또는 } t=1$$

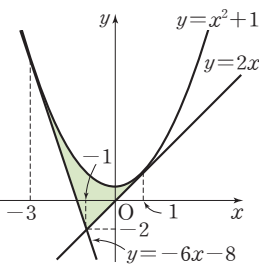
즉, 접선의 방정식은

$$y=-6x-8 \text{ 또는 } y=2x$$

따라서 구하는 넓이를 S 라

하면

$$S=\int_{-3}^{-1} \{(x^2+1)-(-6x-8)\} dx$$



$$+\int_{-1}^1 \{(x^2+1)-2x\} dx$$

$$=\int_{-3}^{-1} (x^2+6x+9) dx + 2\int_0^1 (x^2+1) dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x\right]_{-3}^{-1} + 2\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$

$$=\frac{16}{3}$$

- 11 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2 (x^2-k) dx=0, \left[\frac{1}{3}x^3-kx\right]_0^2=0$$

$$\frac{8}{3}-2k=0 \quad \therefore k=\frac{4}{3}$$

- 12 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^3 \{-x^2(x-3)-ax(x-3)\} dx=0$$

$$\int_0^3 \{-x^3+(3-a)x^2+3ax\} dx=0$$

$$\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3-a}{3}x^3+\frac{3}{2}ax^2\right]_0^3=0$$

$$\frac{9}{2}a+\frac{27}{4}=0 \quad \therefore a=-\frac{3}{2}$$

- 13 $x^3-x+k=0$ 의 근 중에서 가장 큰 값을 α ($\alpha>0$)라 하면

$$\alpha^3-\alpha+k=0 \quad \therefore k=-\alpha^3+\alpha \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 두 도형 A, B 의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^a (x^3-x+k) dx=0, \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+kx\right]_0^a=0$$

$$\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{2}a^2+ka=0, a^4-2a^2+4ka=0$$

①을 대입하여 정리하면

$$3a^4-2a^2=0, a^2(3a^2-2)=0$$

$$\therefore a=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3} (\because a>0)$$

이를 ①에 대입하면

$$k=-\frac{6\sqrt{6}}{27}+\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{9}$$

- 14 곡선 $y=x^2-2x-1$ 과 직선

$y=-x+1$ 의 교점의 x 좌표를 구

하면

$$x^2-2x-1=-x+1$$

$$x^2-x-2=0$$

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

곡선 $y=x^2-2x-1$ 과 직선 $y=-x+1$ 로 둘러싸인 도형

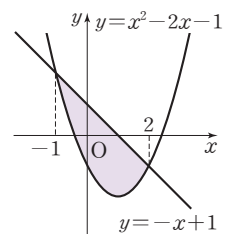
의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1=\int_{-1}^2 \{(-x+1)-(x^2-2x-1)\} dx$$

$$=\int_{-1}^2 (-x^2+x+2) dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2$$

$$=\frac{9}{2}$$



곡선 $y=x^2-2x-1$ 과 두 직선 $y=-x+1$, $x=k$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-1}^k \{(-x+1)-(x^2-2x-1)\} dx \\ &= \int_{-1}^k (-x^2+x+2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^k \\ &= -\frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + 2k + \frac{7}{6} \end{aligned}$$

주어진 조건에서 $S_1=2S_2$ 이므로

$$\frac{9}{2} = 2 \left(-\frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + 2k + \frac{7}{6} \right)$$

$$4k^3 - 6k^2 - 24k + 13 = 0$$

$$(2k-1)(2k^2-2k-13)=0$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} \quad (\because -1 < k < 2)$$

- 15** 곡선 $y=-x^2+4$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$-x^2+4=0, (x+2)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

곡선 $y=-x^2+4$ 와 직선

$y=k$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$-x^2+4=k, x^2=4-k$$

$$\therefore x=\pm\sqrt{4-k}$$

곡선 $y=-x^2+4$ 와 x 축으로

둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-2}^2 (-x^2+4) dx \\ &= 2 \int_0^2 (-x^2+4) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_0^2 \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

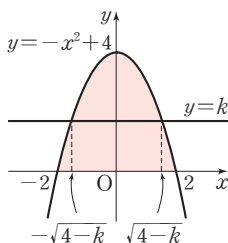
곡선 $y=-x^2+4$ 와 직선 $y=k$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-\sqrt{4-k}}^{\sqrt{4-k}} (-x^2+4-k) dx \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{4-k}} (-x^2+4-k) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + (4-k)x \right]_0^{\sqrt{4-k}} \\ &= \frac{4}{3}(\sqrt{4-k})^3 \end{aligned}$$

주어진 조건에서 $S_1=2S_2$ 이므로

$$\frac{32}{3} = 2 \times \frac{4}{3}(\sqrt{4-k})^3$$

$$(\sqrt{4-k})^3 = 4 \quad \therefore (4-k)^3 = 16$$



- 16** 곡선 $y=x^2+2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2+2x=0, x(x+2)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

곡선 $y=x^2+2x$ 와 직선

$y=ax$ 의 교점의 x 좌표를 구

하면

$$x^2+2x=ax$$

$$x\{x-(a-2)\}=0$$

$$\therefore x=a-2 \text{ 또는 } x=0$$

곡선 $y=x^2+2x$ 와 직선 $y=ax$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{a-2}^0 \{ax-(x^2+2x)\} dx \\ &= \int_{a-2}^0 \{-x^2+(a-2)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a-2}{2}x^2 \right]_{a-2}^0 \\ &= -\frac{(a-2)^3}{6} \end{aligned}$$

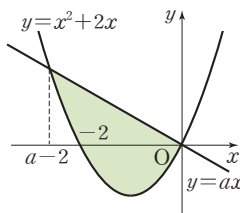
곡선 $y=x^2+2x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = -\int_{-2}^0 (x^2+2x) dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_{-2}^0 = \frac{4}{3}$$

주어진 조건에서 $S_1=2S_2$ 이므로

$$-\frac{(a-2)^3}{6} = 2 \times \frac{4}{3}$$

$$\therefore (a-2)^3 = -16$$



- 17** 곡선 $y=x^2$ 과 직선 $y=1$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2=1 \quad \therefore x=1 \quad (\because x \geq 0)$$

곡선 $y=ax^2$ 과 직선 $y=1$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$ax^2=1 \quad \therefore x=\frac{1}{\sqrt{a}} \quad (\because x \geq 0)$$

곡선 $y=x^2$ 과 y 축 및 직선 $y=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 (1-x^2) dx \\ &= \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

곡선 $y=ax^2$ 과 y 축 및 직선 $y=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} (1-ax^2) dx \\ &= \left[x - \frac{a}{3}x^3 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} = \frac{2}{3\sqrt{a}} \end{aligned}$$

주어진 조건에서 $S_1=2S_2$ 이므로

$$\frac{2}{3} = 2 \times \frac{2}{3\sqrt{a}}, \sqrt{a}=2 \quad \therefore a=4$$

- 18 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는

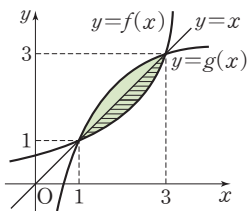
$$\frac{1}{2} \times (1+3) \times 2$$

$$- \int_1^3 f(x) dx$$

$$= 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 빗금 친 부분의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 넓이는

$$2 \times \frac{1}{2} = 1$$



- 19 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$

의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2 - 2x + 2 = x$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

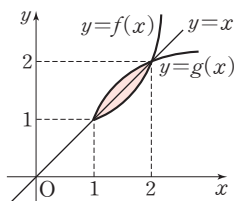
따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = 2 \int_1^2 \{x - (x^2 - 2x + 2)\} dx$$

$$= 2 \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3}$$



- 20 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$

의 교점의 x 좌표를 구하면

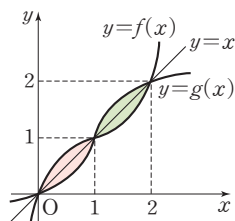
$$x^3 - 3x^2 + 3x = x$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

$$\text{또는 } x=2$$



따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = 2 \left[\int_0^1 \{(x^3 - 3x^2 + 3x) - x\} dx \right.$$

$$\left. + \int_1^2 \{x - (x^3 - 3x^2 + 3x)\} dx \right]$$

$$= 2 \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx + 2 \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right]_0^1 + 2 \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 \right]_1^2 = 1$$

- 21 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

$$\int_2^6 g(x) dx = S_1,$$

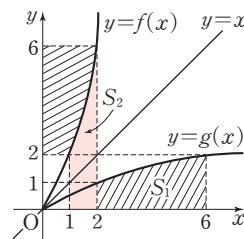
$$\int_1^2 f(x) dx = S_2 \text{라 하면 오}$$

른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$S_1 + S_2 = 2 \times 6 - 1 \times 2 = 10$$

$$\therefore \int_2^6 g(x) dx = S_1 = 10 - S_2 = 10 - \int_1^2 (x^2 + x) dx$$

$$= 10 - \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 = \frac{37}{6}$$



- 22 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

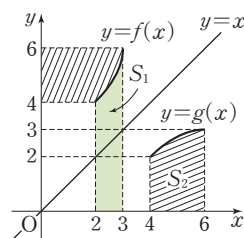
$$\int_2^3 f(x) dx = S_1,$$

$$\int_4^6 g(x) dx = S_2 \text{라 하면 오}$$

른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_2^3 f(x) dx + \int_4^6 g(x) dx = S_1 + S_2$$

$$= 3 \times 6 - 2 \times 4 = 10$$



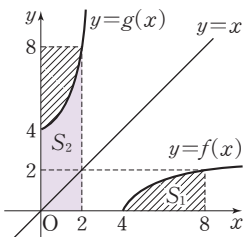
- 23 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

$$\int_4^8 f(x) dx = S_1,$$

$$\int_0^2 g(x) dx = S_2 \text{라 하면 오}$$

른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_4^8 f(x) dx + \int_0^2 g(x) dx = S_1 + S_2 = 2 \times 8 = 16$$



$$\begin{aligned}
 24 \quad & \int_1^3 |2t-t^2| dt \\
 &= \int_1^2 (2t-t^2) dt + \int_2^3 (-2t+t^2) dt \\
 &= \left[t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right]_1^2 + \left[-t^2 + \frac{1}{3}t^3 \right]_2^3 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 25 \quad & \text{ㄱ. } t=1 \text{에서의 위치는} \\
 & 2 + \int_0^1 (12-3t^2) dt = 2 + \left[12t - t^3 \right]_0^1 = 13
 \end{aligned}$$

ㄴ. $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 위치의 변화량은

$$\int_0^3 (12-3t^2) dt = \left[12t - t^3 \right]_0^3 = 9$$

ㄷ. $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
 & \int_1^3 |12-3t^2| dt \\
 &= \int_1^2 (12-3t^2) dt + \int_2^3 (-12+3t^2) dt \\
 &= \left[12t - t^3 \right]_1^2 + \left[-12t + t^3 \right]_2^3 \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

$$\begin{aligned}
 26 \quad & \text{자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로 } v(t)=0 \text{에서} \\
 & 20-2t=0 \quad \therefore t=10
 \end{aligned}$$

따라서 브레이크를 밟고 10초 후까지 자동차가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{10} |20-2t| dt = \int_0^{10} (20-2t) dt \\
 &= \left[20t - t^2 \right]_0^{10} \\
 &= 100(\text{m})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 27 \quad & \text{점 P가 원점을 출발하여 원점으로 다시 돌아오는 시각을} \\
 & t=a \text{라 하면 점 P의 위치의 변화량은 0이므로}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^a (3t^2-6t) dt = 0 \\
 & \left[t^3 - 3t^2 \right]_0^a = 0 \\
 & a^3 - 3a^2 = 0, \quad a^2(a-3) = 0 \\
 & \therefore a = 3 \quad (\because a > 0)
 \end{aligned}$$

따라서 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
 & \int_0^3 |3t^2-6t| dt \\
 &= \int_0^2 (-3t^2+6t) dt + \int_2^3 (3t^2-6t) dt \\
 &= \left[-t^3 + 3t^2 \right]_0^2 + \left[t^3 - 3t^2 \right]_2^3 \\
 &= 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 28 \quad & \text{점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 } v(t)=0 \text{에서} \\
 & -t^2+7t-10=0, \quad t^2-7t+10=0
 \end{aligned}$$

$$(t-2)(t-5)=0 \quad \therefore t=2 \text{ 또는 } t=5$$

따라서 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}
 & \int_0^2 |-t^2+7t-10| dt = \int_0^2 (t^2-7t+10) dt \\
 &= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 10t \right]_0^2 \\
 &= \frac{26}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 29 \quad & \text{두 점 P, Q의 } t=a \text{에서의 위치를 각각 } x_P(a), x_Q(a) \text{라} \\
 & \text{하면}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_P(a) &= 0 + \int_0^a (3t^2-4t-4) dt \\
 &= \left[t^3 - 2t^2 - 4t \right]_0^a \\
 &= a^3 - 2a^2 - 4a \\
 x_Q(a) &= 0 + \int_0^a (3-t) dt \\
 &= \left[3t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^a \\
 &= 3a - \frac{1}{2}a^2
 \end{aligned}$$

이때 두 점 P, Q가 만날 때는 $x_P(a) = x_Q(a)$ 이므로

$$\begin{aligned}
 & a^3 - 2a^2 - 4a = 3a - \frac{1}{2}a^2 \\
 & 2a^3 - 3a^2 - 14a = 0 \\
 & a(a+2)(2a-7) = 0 \\
 & \therefore a = \frac{7}{2} \quad (\because a > 0)
 \end{aligned}$$

따라서 출발 후 두 점 P, Q가 만나는 시각은

$$t = \frac{7}{2}$$

$$\begin{aligned}
 30 \quad & \text{물체가 최고 지점에 도달할 때의 속도는 0이므로 } v(t)=0 \text{에서}
 \end{aligned}$$

$$20-10t=0 \quad \therefore t=2$$

따라서 $t=2$ 일 때 최고 지점에 도달하므로 물체의 높이는

$$10 + \int_0^2 (20-10t) dt = 10 + \left[20t - 5t^2 \right]_0^2 = 30(\text{m})$$

$$\begin{aligned}
 31 \quad & \text{공의 운동 방향이 바뀔 때의 속도는 0이므로 } v(t)=0 \text{에서} \\
 & 5a-10t=0
 \end{aligned}$$

$$\therefore t = \frac{a}{2}$$

따라서 $t = \frac{a}{2}$ 일 때 공의 높이가 80 m이므로

$$\int_0^{\frac{a}{2}} (5a - 10t) dt = 80$$

$$\left[5at - 5t^2 \right]_0^{\frac{a}{2}} = 80$$

$$\frac{5}{2}a^2 - \frac{5}{4}a^2 = 80, a^2 = 64$$

$$\therefore a = 8 \quad (\because a > 0)$$

- 32** 공이 처음 쏘아 올린 위치로 다시 돌아오는 것은 4초 후
이므로

$$\int_0^4 (a - 10t) dt = 0$$

$$\left[at - 5t^2 \right]_0^4 = 0$$

$$4a - 80 = 0 \quad \therefore a = 20$$

공이 지면에 떨어지는 시각을 $t = k$ 라 하면 공이 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로

$$60 + \int_0^k (20 - 10t) dt = 0$$

$$60 + \left[20t - 5t^2 \right]_0^k = 0$$

$$60 + 20k - 5k^2 = 0$$

$$k^2 - 4k - 12 = 0, (k+2)(k-6) = 0$$

$$\therefore k = 6 \quad (\because k > 0)$$

따라서 공이 지면에 떨어질 때까지 걸리는 시간은 6초이다.

- 33** $v(t) = 0$ 인 t 의 값은 $t = 1$ 또는 $t = 4$

따라서 움직인 거리는

$$\int_1^4 |v(t)| dt = \frac{1}{2} \times (1+3) \times 2 = 4$$

- 34** ㄱ. $|v(t)|$ 의 값은 $t = 3$ 일 때 최대이다.

ㄴ. $v(t) = 0$ 인 t 의 값은 $t = 2$

따라서 $t = 2$ 일 때 운동 방향을 바꾼다.

$$\text{ㄷ. } \int_0^2 v(t) dt = \int_2^3 |v(t)| dt \text{에서}$$

$$\int_0^2 v(t) dt = -\int_2^3 v(t) dt$$

$t = 3$ 에서의 점 P의 위치는

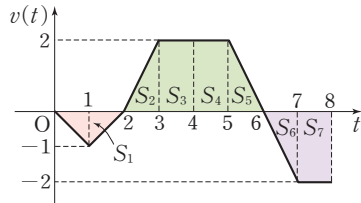
$$\begin{aligned} 0 + \int_0^3 v(t) dt &= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^3 v(t) dt \\ &= -\int_2^3 v(t) dt + \int_2^3 v(t) dt = 0 \end{aligned}$$

따라서 $t = 3$ 일 때 점 P는 원점에 있다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

- 35** 다음 그림에서 속도 $v(t)$ 의 그래프와 t 축이 이루는 각 부분의 넓이를 $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$ 이라 하면

$$S_1 = 1, S_2 = 1, S_3 = 2, S_4 = 2, S_5 = 1, S_6 = 1, S_7 = 2$$



ㄱ. $v(t) = 0$ 인 t 의 값은 $t = 2$ 또는 $t = 6$

따라서 운동 방향을 두 번 바꾼다.

ㄴ. $t = 0$ 에서 $t = 4$ 까지 움직인 거리는

$$\int_0^4 |v(t)| dt = S_1 + S_2 + S_3 = 1 + 1 + 2 = 4$$

ㄷ. $t = 3$ 에서의 위치는

$$0 + \int_0^3 v(t) dt = -S_1 + S_2 = -1 + 1 = 0$$

따라서 $t = 3$ 일 때 원점에 있다.

ㄹ. $t = 4$ 에서의 위치는

$$0 + \int_0^4 v(t) dt = -S_1 + S_2 + S_3 = -1 + 1 + 2 = 2$$

$t = 8$ 에서의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^8 v(t) dt &= -S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 - S_6 - S_7 \\ &= -1 + 1 + 2 + 2 + 1 - 1 - 2 = 2 \end{aligned}$$

따라서 $t = 4$ 일 때와 $t = 8$ 일 때의 위치는 같다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

- 36** $t = 3$ 에서의 위치가 4이므로

$$0 + \int_0^3 v(t) dt = 4$$

$$\int_0^2 v(t) dt + \int_2^3 v(t) dt = 4$$

$$6 + \int_2^3 v(t) dt = 4 \quad \therefore \int_2^3 v(t) dt = -2$$

$$\int_2^5 |v(t)| dt = 6 \text{에서}$$

$$\int_2^3 \{-v(t)\} dt + \int_3^4 \{-v(t)\} dt + \int_4^5 v(t) dt = 6$$

$$2 - \int_3^4 v(t) dt + \int_4^5 v(t) dt = 6$$

$$- \int_3^4 v(t) dt + \int_4^5 v(t) dt = 4$$

$$\int_3^4 |v(t)| dt + \int_4^5 |v(t)| dt = 4$$

$$\therefore \int_3^5 |v(t)| dt = 4$$

따라서 $t = 3$ 에서 $t = 5$ 까지 점 P가 움직인 거리는 4이다.

