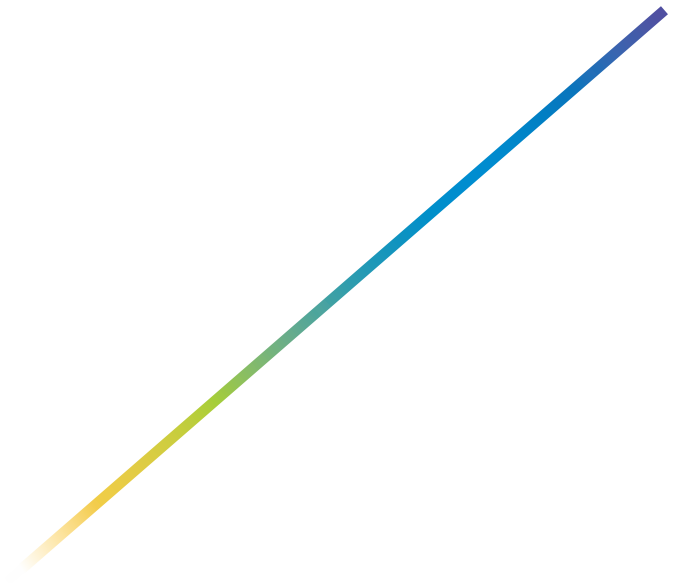


고등 수학(하)

정답과 해설



개념편

정답과 해설

IV-1 01 집합의 뜻과 집합 사이의 포함 관계

1 집합의 뜻과 표현

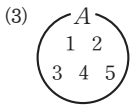
개념 CHECK

9쪽

1 답 (1) 1, 2, 3 (2) 1, 3, 5, 7, 9

2 답 (1) $\notin$ (2) $\in$ (3) $\notin$ (4) $\in$

3 답 (1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
(2) 예 $A = \{x | x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}$



4 답 (1) $\cap$, $\cup$, $\subset$, $\supset$ (2) $\subset$, $\supset$ (3) $\subset$
 $\cap$. $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \Rightarrow$ 유한집합
 $\cup$. $x^2 + 2 = 0$ 인 실수 x 는 존재하지 않는다.
 $\Rightarrow$ 공집합, 유한집합
 $\subset$. $\{11, 13, 15, 17, \dots\} \Rightarrow$ 무한집합
 $\supset$. $\{2\} \Rightarrow$ 유한집합
 $\supset$. 1과 2 사이의 유리수는 무수히 많다.
 $\Rightarrow$ 무한집합
 $\supset$. $\{3, 6, 9\} \Rightarrow$ 유한집합

문제

10~13쪽

01-1 답 3

$\cap$, $\cup$, $\supset$. '잘생긴', '아름다운', '잘하는'은 기준이 명확하지 않아 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
 $\cup$. 원소가 105, 112, 119, 126, ...인 집합이다.

$\subset$. 원소가 국어, 영어, 수학, ...인 집합이다.
 $\supset$. 원소가 월, 화, 수, 목, 금, 토, 일인 집합이다.
따라서 보기 중 집합인 것은 $\cup$, $\subset$, $\supset$ 의 3개이다.

01-2 답 ⑤

① 원소가 1인 집합이다.
② $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ 이므로 원소가 2, 3, 7인 집합이다.
③ $x^2 - 3x = 0$ 에서 $x(x-3) = 0$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 3$
따라서 원소가 0, 3인 집합이다.
④ 원소가 하나도 없으므로 공집합이다.
⑤ '작은'은 기준이 명확하지 않아 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
따라서 집합이 아닌 것은 ⑤이다.

02-1 답 (1) 예 $A = \{x | x \text{는 } 4 \text{로 나누었을 때의 나머지가 } 1 \text{인 } 100 \text{ 이하의 자연수}\}$

(2) 예 $B = \{x | x \text{는 모음인 알파벳 소문자}\}$

(3) $C = \{1, 3, 5, 7, \dots, 49\}$

(4) $D = \{-2, 4\}$

(4) $x^2 - 2x - 8 = 0$ 에서 $(x+2)(x-4) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 4$

02-2 답 원소나열법: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

조건제시법: 예 $A = \{x | x \text{는 } 10 \text{보다 작은 홀수}\}$

02-3 답 $\cap$, $\cup$, $\subset$

$\cap$, $\cup$, $\subset$. $\{1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$

$\supset$. $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$

따라서 보기 중 주어진 집합을 조건제시법으로 바르게 나타낸 것은 $\cap$, $\cup$, $\subset$ 이다.

03-1 답 (1) $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

(2) $D = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

$x^2 = 1$ 에서 $x = \pm 1 \therefore B = \{-1, 1\}$

이때 두 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 1\}$ 에 대하여

(1) 집합 A 의 원소 a 와 집합 B 의 원소 b 에 대하여 $a-b$ 의 값은 오른쪽 표와 같으므로
 $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$a \backslash b$	-1	1
1	2	0
2	3	1
3	4	2

(2) 집합 A 의 원소 a 와 집합 B 의 원소 b 에 대하여 $\frac{a}{b}$ 의 값은 오른쪽 표와 같으므로
 $D = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

$a \backslash b$	-1	1
1	-1	1
2	-2	2
3	-3	3

03-2 답 -7

집합 B 의 원소 b 와 집합 A 의 원소 a 에 대하여 ba 의 값은 오른쪽 표와 같으므로

$b \backslash a$	1	2
-1	-1	-2
0	0	0

$$B \otimes A = \{-2, -1, 0\}$$

집합 A 의 원소 a 와 집합

$B \otimes A$ 의 원소 ba 에 대하여

$a \times ba$ 의 값은 오른쪽 표와

같으므로

$a \backslash ba$	-2	-1	0
1	-2	-1	0
2	-4	-2	0

$$A \otimes (B \otimes A) = \{-4, -2, -1, 0\}$$

따라서 집합 $A \otimes (B \otimes A)$ 의 모든 원소의 합은

$$-4 + (-2) + (-1) + 0 = -7$$

04-1 답 ㄱ, ㄴ

$$\neg. n(\emptyset) = 0$$

$$\neg. n(\{2\}) = n(\{\emptyset\}) = 1$$

$$\neg. n(\{1, 2, 3\}) - n(\{1, 3\}) = 3 - 2 = 1$$

$$\neg. A = \{1, 3, 5, 15\} \text{이므로 } n(A) = 4$$

$$\neg. A = \emptyset \text{이므로 } n(A) = 0$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

04-2 답 11

$$A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\} \text{이므로 } n(A) = 10$$

$$B = \{\emptyset\} \text{에서 } n(B) = 1$$

집합 C 에서 $x^2 + x + 1 = 0$ 인 실수 x 는 없으므로

$$C = \emptyset \quad \therefore n(C) = 0$$

$$\therefore n(A) + n(B) + n(C) = 10 + 1 + 0 = 11$$

2 집합 사이의 포함 관계

개념 CHECK

15쪽

1 답 (1) $\subset$, $\not\subset$ (2) $\not\subset$, $\subset$ (3) $\subset$, $\not\subset$ (4) $\not\subset$, $\not\subset$

2 답 (1) $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$
 (2) $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$,
 $\{0, 1, 2\}$

3 답 (1) $=$ (2) $\neq$ (3) $\neq$ (4) $=$
 (1) $B = \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로 $A = B$
 (2) $B = \{1, 5, 25\}$ 이므로 $A \neq B$
 (3) $A = \{-1, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 이므로 $A \neq B$
 (4) $A = \{1, 2, \dots, 9\}$, $B = \{1, 2, \dots, 9\}$ 이므로 $A = B$

4 답 $a=9, b=5$

$A=B$ 이므로 $9 \in A$, $5 \in B$ 이어야 한다.

$$9 \in A \text{에서 } a=9$$

$$5 \in B \text{에서 } b=5$$

5 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $A \subset B$, $A \neq B$ 이므로 A 는 B 의 진부분집합이다.

ㄴ. $A = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ 이므로
 $A \not\subset B$

따라서 A 는 B 의 진부분집합이 아니다.

ㄷ. $A = \{-1, 1\}$ 이므로 $A = B$

따라서 A 는 B 의 진부분집합이 아니다.

ㄹ. $B = \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로 $A \subset B$, $A \neq B$

따라서 A 는 B 의 진부분집합이다.

ㅁ. $A \not\subset B$ 이므로 A 는 B 의 진부분집합이 아니다.

따라서 보기 중 A 가 B 의 진부분집합인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

6 답 $\emptyset$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$

문제

16~17쪽

05-1 답 ㄴ, ㄷ

$$A = \{1, 3, 7, 21\}$$

ㄱ. $\emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset A$

ㄴ. 7은 집합 A 의 원소이므로 $7 \in A$, $\{7\} \subset A$

ㄷ. 3, 7은 집합 A 의 원소이므로 $\{3, 7\} \subset A$

ㄹ. 1, 21은 집합 A 의 원소이므로 $\{1, 21\} \subset A$

ㅁ. 14는 집합 A 의 원소가 아니므로 $\{3, 14\} \not\subset A$

ㅂ. $A \subset A$ 이므로 $\{1, 3, 7, 21\} \subset A$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

05-2 답 ②

집합 A 의 원소는

$$0, \{1\}, \{1, 2\}, 3$$

① 2는 집합 A 의 원소가 아니므로 $2 \notin A$

② $\{1, 2\}$ 는 집합 A 의 원소이지만 2는 집합 A 의 원소가 아니므로 $\{1, 2\} \in A$, $\{1, 2\} \not\subset A$

③ 1은 집합 A 의 원소가 아니므로 $\{0, 1\} \not\subset A$

④ $\{1\}$ 은 집합 A 의 원소이므로 $\{1\} \in A$

⑤ 0은 집합 A 의 원소이므로 $\{0\} \subset A$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

집합 S 의 원소는

$\emptyset, 1, 2, \{1, 2\}$

ㄱ. $\emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset S$

ㄴ. ㄷ. $\{1, 2\}$ 는 집합 S 의 원소이므로

$\{1, 2\} \in S, \{\{1, 2\}\} \subset S$

ㄷ. 1, 2는 집합 S 의 원소이므로 $\{1, 2\} \subset S$

ㄹ. $\emptyset$ 은 집합 S 의 원소이므로 $\{\emptyset\} \subset S$

ㅂ. 1은 집합 S 의 원소이므로 $1 \in S, \{1\} \subset S$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅂ의 5개이다.

06-1 답 (1) 1 (2) 3

(1) $1 \in A$ 이므로 $A \subset B$ 이라면 $1 \in B$ 에서

$$a+4=1 \text{ 또는 } 2a-1=1$$

$$\therefore a=-3 \text{ 또는 } a=1$$

(i) $a=-3$ 일 때,

$$A=\{-1, 1\}, B=\{-7, 1, 3\} \quad \therefore A \not\subset B$$

(ii) $a=1$ 일 때,

$$A=\{1, 3\}, B=\{1, 3, 5\} \quad \therefore A \subset B$$

(i), (ii)에 의하여 $a=1$

(2) $A \subset B, B \subset A$ 이면 $A=B$

$1 \in B$ 이므로 $A=B$ 이라면 $1 \in A$ 에서

$$a^2+1=1, a^2=0 \quad \therefore a=0$$

$$\therefore A=\{-1, 1, 2\}, B=\{-1, 1, b-1\}$$

$2 \in A$ 이므로 $A=B$ 이라면 $2 \in B$ 에서

$$b-1=2 \quad \therefore b=3$$

$$\therefore a+b=0+3=3$$

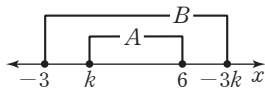
06-2 답 $-3 \leq k \leq -2$

$A \subset B$ 이도록 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로

$$-3 \leq k \leq 6, -3k \geq 6$$

$$\therefore -3 \leq k \leq -2$$



3 부분집합의 개수

개념 CHECK

18쪽

1 답 (1) 64 (2) 63 (3) 16 (4) 4

$$(1) 2^6=64$$

$$(2) 2^6-1=63$$

$$(3) 2^{6-2}=2^4=16$$

$$(4) 2^{6-4}=2^2=4$$

07-1 답 (1) 8 (2) 56

(1) 구하는 부분집합의 개수는 집합 A 에서 1, 3, 4를 제외한 집합 $\{2, 5, 6\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{6-3}=2^3=8$$

(2) 집합 A 의 부분집합의 개수에서 소수 2, 3, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같으므로

$$2^6-2^{6-3}=64-8=56$$

07-2 답 32

$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 이므로 집합 A 의 부분집합 중에서 1, 2는 반드시 원소로 갖고 8은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 집합 $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

따라서 구하는 집합 X 의 개수는

$$2^{8-3}=2^5=32$$

07-3 답 55

$$A=\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

(i) 집합 A 의 진부분집합의 개수는

$$2^6-1=63$$

(ii) 홀수 1, 3, 9를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{6-3}=2^3=8$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 부분집합의 개수는

$$63-8=55$$

08-1 답 8

구하는 집합 X 의 개수는 집합 $\{a, b, c, d, e\}$ 의 부분집합 중에서 a, b 를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{5-2}=2^3=8$$

08-2 답 4

$$A \subset X \subset B \text{에서 } \{3, 5\} \subset X \subset \{2, 3, 5, 7\}$$

따라서 집합 X 의 개수는 집합 B 의 부분집합 중에서 3, 5를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{4-2}=2^2=4$$

08-3 답 12

$$B \subset X \subset A \text{에서}$$

$$\{3, 6, 9, 12, 15, 18\} \subset X \subset \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

따라서 집합 X 의 개수는 집합 A 의 부분집합 중에서 3, 6, 9, 12, 15, 18을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{n-6}=64, 2^{n-6}=2^6 \quad \therefore n=12$$

연습문제

21~23쪽

1 4	2 ②	3 ④	4 ⑤	5 3
6 ⑤	7 ㄱ, ㄷ, ㅅ	8 ㄱ, ㄷ	9 ③	
10 2	11 4	12 4	13 24	14 9
15 ③	16 8	17 3	18 48	19 ③

1 ㄱ, ㄴ, '큰', '아주 작은'은 기준이 명확하지 않아 대상을 분명하게 정할 수 없으므로 집합이 아니다.
따라서 보기 중 집합인 것은 ㄷ, ㄹ, ㅁ, ㅅ의 4개이다.

2 주어진 각 집합의 원소를 확인해 보면

- ① $x^2 \leq 1$ 에서 $-1 \leq x \leq 1$ 이므로 원소가 무수히 많다.
- ② $|x| < 2$ 에서 $-2 < x < 2$ 이므로 정수 x 는 $-1, 0, 1$
- ③ $y^3 + y = 0$ 에서 $y(y^2 + 1) = 0 \quad \therefore y = 0$
- ④ $-1, 0, 1$ 은 1 이하의 정수 중 가장 큰 세 수이다.
- ⑤ x 는 $-2, -1, 0$

따라서 바르게 나타낸 것은 ②이다.

3 집합 A 는 소인수가 2와 5뿐인 자연수의 집합이다.
주어진 수를 소인수분해하면

- ① $10 = 2 \times 5$
- ② $50 = 2 \times 5^2$
- ③ $100 = 2^2 \times 5^2$
- ④ $150 = 2 \times 3 \times 5^2$
- ⑤ $200 = 2^3 \times 5^2$

따라서 집합 A 의 원소가 아닌 것은 ④이다.

4 ⑤ $x^2 - 4x - 5 = 0$ 에서
 $(x+1)(x-5) = 0$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 5$$

따라서 주어진 집합은 $\{-1, 5\}$ 이므로 유한집합이다.

따라서 유한집합인 것은 ⑤이다.

5 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 이므로 $n(A) = 6$

$$B = \{0\} \text{이므로 } n(B) = 1$$

$$C = \{10, 20, 30, 40\} \text{이므로 } n(C) = 4$$

$$\therefore n(A) + n(B) - n(C) = 6 + 1 - 4 = 3$$

6 ① $n(\{\emptyset\}) = 1$

$$\textcircled{2} n(\{1\}) = n(\{2\}) = 1$$

③ $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ 일 때, $n(A) = n(B) = 2$ 이지만 $A \neq B$ 이다.

④ $A \subset B$ 이면 A 는 B 의 진부분집합이거나 $A = B$ 이므로 $n(A) \leq n(B)$

$$\textcircled{5} n(\{0\}) + n(\emptyset) + n(\{0, \emptyset\}) = 1 + 0 + 2 = 3$$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

7 집합 A 의 원소는 $\emptyset, \{\emptyset\}, 1, \{2, 3\}$

ㄱ. $\emptyset$ 은 집합 A 의 원소이므로 $\emptyset \in A$

ㄴ. 2는 집합 A 의 원소가 아니므로 $2 \notin A$

ㄷ. $\emptyset, \{\emptyset\}$ 은 집합 A 의 원소이므로 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subset A$

ㄹ. $\{1, 2\}$ 는 집합 A 의 원소가 아니므로 $\{1, 2\} \notin A$

ㅁ. $\{2, 3\}$ 은 집합 A 의 원소이므로 $\{2, 3\} \in A$

ㅂ. $\emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset A$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㅂ이다.

8 ㄱ. $A = \{4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$, $B = \{4, 8, 12, \dots\}$ 이므로

$$B \subset A, A \not\subset B$$

ㄴ. $A = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$, $B = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$ 이므로

$$B \subset A, A \subset B$$

ㄷ. $B \subset A, A \not\subset B$

따라서 보기 중 $B \subset A$ 이지만 $A \not\subset B$ 인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

9 집합 A 의 임의의 두 원소 x, y

에 대하여 $x+y$ 의 값은 오른쪽 표와 같으므로

$$B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

집합 A 의 임의의 두 원소 x, y

에 대하여 xy 의 값은 오른쪽 표와 같으므로

$$C = \{-1, 0, 1\}$$

$$\therefore A = C \subset B$$

따라서 세 집합 A, B, C 사이의 포함 관계를 바르게 나타낸 것은 ③이다.

$x \backslash y$	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

$x \backslash y$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

10 $1 \in A$ 이므로 $A \subset B$ 이라면 $1 \in B$ 에서

$$a-1=1 \text{ 또는 } a-3=1$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=4$$

(i) $a=2$ 일 때,

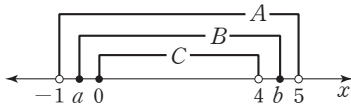
$$A = \{1, 4\}, B = \{-1, 1, 4\} \quad \therefore A \subset B$$

(ii) $a=4$ 일 때,

$$A = \{1, 6\}, B = \{1, 3, 4\} \quad \therefore A \not\subset B$$

(i), (ii)에 의하여 $a=2$

- 11 $C \subset B \subset A$ 이도록 세 집합 A, B, C 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\therefore -1 < a \leq 0, 4 \leq b < 5$$

이때 a, b 는 정수이므로

$$a=0, b=4 \quad \therefore a+b=4$$

- 12 집합 A 의 부분집합 중에서 1, 3은 반드시 원소로 갖고 2는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 집합 A 에서 1, 2, 3을 제외한 집합 $\{4, 5\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.
따라서 구하는 집합 X 의 개수는
 $2^{5-3}=2^2=4$

- 13 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

(i) 집합 A 의 부분집합의 개수는

$$2^5=32$$

(ii) 집합 A 의 부분집합 중에서 2, 8을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 집합 A 에서 2, 8을 제외한 집합 $\{4, 6, 10\}$ 의 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{5-2}=2^3=8$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 부분집합의 개수는

$$32-8=24$$

- 14 집합 A 는 원소의 개수가 n 인 집합이고, 집합 A 의 부분집합 중에서 1, 2는 반드시 원소로 갖고 3, 4, n 은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수가 16이므로
 $2^{n-2-3}=16, 2^{n-5}=2^4 \quad \therefore n=9$

- 15 $A \subset X \subset B$ 에서

$$\{-1, 0, 1\} \subset X \subset \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

따라서 구하는 집합 X 의 개수는 집합 B 의 부분집합 중에서 $-1, 0, 1$ 을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{7-3}=2^4=16$$

- 16 집합 A 의 원소 x 와 집합 B 의 원소 y 에 대하여 $x+y$ 의 값은 다음 표와 같다.

$y \backslash x$	1	2	3	4	a
1	2	3	4	5	$a+1$
3	4	5	6	7	$a+3$
5	6	7	8	9	$a+5$

즉, 집합 X 의 원소는

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a+1, a+3, a+5$$

이때 $n(X)=10$ 이라면 자연수 a 에 대하여

$$a+1 \leq 9, a+3 > 9$$

$$\therefore 6 < a \leq 8$$

따라서 자연수 a 는 7, 8이므로 최댓값은 8이다.

- 17 $5 \in A$ 이면

$$\frac{1}{1-5} \in A \quad \therefore -\frac{1}{4} \in A$$

$$-\frac{1}{4} \in A \text{이면}$$

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} \in A \quad \therefore \frac{4}{5} \in A$$

$$\frac{4}{5} \in A \text{이면}$$

$$\frac{1}{1-\frac{4}{5}} \in A \quad \therefore 5 \in A$$

집합 A 는 $-\frac{1}{4}, \frac{4}{5}, 5$ 를 반드시 원소로 가지므로 원소의 개수가 가장 적은 집합은

$$A=\left\{-\frac{1}{4}, \frac{4}{5}, 5\right\}$$

따라서 $n(A)$ 의 최솟값은 3이다.

- 18 $\sqrt{25}=5$ 이므로

$$A_{25}=\{1, 3, 5\}$$

$$A_n \subset A_{25} \text{ 이라면 } 1 \leq \sqrt{n} < 7 \text{ 이어야 하므로}$$

$$1 \leq n < 49$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 48이다.

- 19 집합 $A=\{-1, 0, 1, 2\}$ 의 부분집합 중에서 -1 을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$$2^{4-1}=2^3=8$$

0을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$$2^{4-1}=2^3=8$$

1을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$$2^{4-1}=2^3=8$$

2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수는

$$2^{4-1}=2^3=8$$

따라서 부분집합 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{16}$ 에는 원소 $-1, 0, 1, 2$ 가 각각 8번씩 들어간다.

따라서 구하는 값은

$$a_1+a_2+a_3+\dots+a_{16}=8(-1+0+1+2)=16$$

IV-1 02 집합의 연산

1 집합의 연산

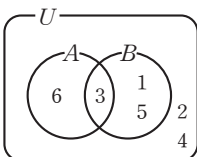
개념 CHECK

26쪽

- 1 답 (1) $A \cup B = \{a, b, c\}$, $A \cap B = \{b\}$
 (2) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{1, 2\}$
 (3) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$
 (4) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,
 $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$
- 2 답 (1) 서로소가 아니다. (2) 서로소이다.
 (1) $A \cap B = \{x | 2 < x < 3\}$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소가 아니다.
 (2) $x^2 + 5x + 4 = 0$ 에서 $(x+4)(x+1) = 0$
 $\therefore x = -4$ 또는 $x = -1$
 $\therefore A = \{-4, -1\}$
 $x^2 - 4 = 0$ 에서 $(x+2)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 2$
 $\therefore B = \{-2, 2\}$
 따라서 $A \cap B = \emptyset$ 이므로 두 집합 A, B 는 서로소이다.

- 3 답 (1) $\{1, 2, 4, 5\}$ (2) $\{2, 4, 6\}$ (3) $\{6\}$
 (4) $\{1, 5\}$ (5) $\{1, 2, 4, 5, 6\}$ (6) $\{2, 4\}$

전체집합 U 와 두 집합 A, B 를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



- (1) $A^c = \{1, 2, 4, 5\}$
 (2) $B^c = \{2, 4, 6\}$
 (3) $A - B = \{6\}$
 (4) $B - A = \{1, 5\}$
 (5) $(A \cap B)^c = \{1, 2, 4, 5, 6\}$
 (6) $(A \cup B)^c = \{2, 4\}$

4 답 ⑤

- ⑤ $A^c \cap B = B - A$

문제

27~31쪽

01-1 답 (1) 16 (2) 6

- (1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ 이므로 모든 원소의 합은
 $1+2+3+4+6=16$
 (2) $A \cap B = \{2, 4\}$ 이므로 모든 원소의 합은
 $2+4=6$

01-2 답 (1) $\{1, 2, 3, 4\}$ (2) $\{1, 2, 3, 4, 5, 10, 20\}$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, B = \{1, 3, 5, 15\},$$

$$C = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$$

(1) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20\}$ 이므로

$$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\}$$

(2) $A \cap B = \{1, 3\}$ 이므로

$$(A \cap B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 20\}$$

01-3 답 $\{1, 3, 4, 5, 8\}$

벤다이어그램을 그려

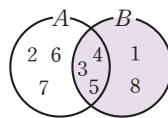
$$A \cap B = \{3, 4, 5\},$$

$$A = \{2, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, 6, 7\},$$

$$A \cup B = \{1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, \cancel{7}, 8\}$$

의 순서로 원소를 써넣으면 위의 그림과 같다.

$$\therefore B = \{1, 3, 4, 5, 8\}$$



02-1 답 (1) $\{2, 4\}$ (2) $\{1, 3, 6, 12\}$ (3) $\{6, 12\}$

$$(4) \{2, 4, 6, 12\}$$

$$U = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$
이므로

$$A = \{2, 4, 6, 12\}, B = \{3, 6, 12\}$$

$$A^c = \{1, 3\}, B^c = \{1, 2, 4\}$$

$$(1) A \cap B^c = \{2, 4\}$$

$$(2) A^c \cup B = \{1, 3, 6, 12\}$$

$$(3) A - B^c = \{6, 12\}$$

$$(4) U - A^c = \{2, 4, 6, 12\}$$

02-2 답 $\{b, f, g\}$

벤다이어그램을 그려

$$A \cap B = \{c\},$$

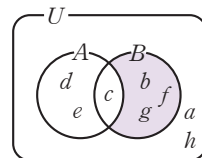
$$A \cap B^c = A - B = \{d, e\},$$

$$(A \cup B)^c = \{a, h\},$$

$$U = \{a, b, \cancel{c}, \cancel{d}, \cancel{e}, f, g, h\}$$

의 순서로 원소를 써넣으면 위의 그림과 같다.

$$\therefore B - A = \{b, f, g\}$$



02-3 답 9

벤다이어그램을 그려

$$A - B = \{2, 3\},$$

$$B - A = \{5\},$$

$$(A \cap B)^c = \{1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{5}, 6\},$$

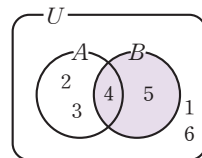
$$U = \{\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, 4, \cancel{5}, \cancel{6}\}$$

의 순서로 원소를 써넣으면 위의 그림과 같다.

$$\therefore B = \{4, 5\}$$

따라서 집합 B 의 모든 원소의 합은

$$4+5=9$$



03-1 답 $a=4, b=2$

$A = \{-3, 0, 2, 2a-b\}$, $A-B = \{2\}$ 에서
 $A \cap B = \{-3, 0, 2a-b\}$
 즉, $0 \in B$, $2a-b \in B$ 이므로
 $a-2b=0$, $2a-b=6$
 따라서 두 식을 연립하여 풀면
 $a=4, b=2$

03-2 답 {1}

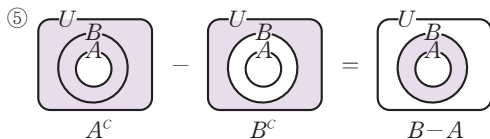
$A \cap B = \{2, 6\}$ 에서 $6 \in A$ 이므로
 $a^2 - a = 6$, $a^2 - a - 6 = 0$
 $(a+2)(a-3) = 0$
 $\therefore a = -2$ 또는 $a = 3$
 (i) $a = -2$ 일 때, $A = \{2, 3, 6\}$, $B = \{1, 2, 11\}$
 이때 $A \cap B = \{2\}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.
 (ii) $a = 3$ 일 때, $A = \{2, 3, 6\}$, $B = \{1, 2, 6\}$
 이때 $A \cap B = \{2, 6\}$ 이므로 조건을 만족시킨다.
 (i), (ii)에 의하여 $a = 3$ 이므로 $B - A = \{1\}$

03-3 답 7

$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ 에서 $6 \in A$ 또는 $6 \in B$ 이므로
 $a = 6$ 또는 $a + 1 = 6$
 $\therefore a = 5$ 또는 $a = 6$
 (i) $a = 5$ 일 때, $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$
 이때 $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ 이므로 조건을 만족시킨다.
 (ii) $a = 6$ 일 때, $A = \{1, 2, 6\}$, $B = \{2, 4, 5, 7\}$
 이때 $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.
 (i), (ii)에 의하여 $a = 5$ 이므로 $A \cap B = \{2, 5\}$
 따라서 집합 $A \cap B$ 의 모든 원소의 합은
 $2 + 5 = 7$

04-1 답 ⑤

- ① $B^c \subset A^c$ 이면 $A \subset B$
 ② $A \subset B$ 이면 $A \cup B = B$ 이므로
 $(A \cup B) - B = B - B = \emptyset$
 ③, ④ $A \subset B$ 이면
 $A^c \cup B = U$, $A \cap B = A$

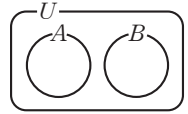


$\therefore A^c - B^c \neq \emptyset$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

04-2 답 $\neg, \perp, \supset, \equiv$

A, B 가 서로소이므로 $A \cap B = \emptyset$
 $\neg, A - B = A$
 $\perp, B - A = B$
 $\supset, (A \cap B)^c = \emptyset^c = U$
 $\equiv, A \cup B \neq A$
 $\square, A \cup B^c = B^c$
 $\vdash, B - A = B$ 이므로 A 와 $B - A$ 는 서로소이다.
 따라서 보기 중 항상 옳은 것은 $\neg, \perp, \supset, \vdash$ 이다.



05-1 답 4

$A \cup B = U$ 에서 $\{1, 5\} \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
 따라서 집합 B 의 개수는 전체집합 U 의 부분집합 중에서
 0, 2, 3, 4를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으
 므로
 $2^{6-4} = 2^2 = 4$

05-2 답 8

$A - X = A$ 에서 $A \cap X = \emptyset \quad \therefore \{2, 4, 6\} \cap X = \emptyset$
 $B - X = \emptyset$ 에서 $B \subset X \quad \therefore \{1, 8\} \subset X$
 따라서 집합 X 의 개수는 전체집합 U 의 부분집합 중에서
 2, 4, 6은 원소로 갖지 않고 1, 8은 반드시 원소로 갖는
 부분집합의 개수와 같으므로
 $2^{8-3-2} = 2^3 = 8$

05-3 답 8

$A \cup X = X$ 에서 $A \subset X \quad \therefore \{1, 2, 3\} \subset X$
 $(B - A) \cap X = \{5, 6\}$ 에서 $\{4, 5, 6\} \cap X = \{5, 6\}$ 이므로
 $4 \notin X, 5 \in X, 6 \in X$
 따라서 집합 X 의 개수는 전체집합 U 의 부분집합 중에서
 1, 2, 3, 5, 6은 반드시 원소로 갖고 4는 원소로 갖지 않
 는 부분집합의 개수와 같으므로
 $2^{9-5-1} = 2^3 = 8$

2 집합의 연산 법칙

문제

33~36쪽

06-1 답 ①

$(A - B^c) \cap (B^c - C)^c$
 $= (A \cap B) \cap (B^c \cap C^c)^c$
 $= (A \cap B) \cap (B \cup C)$
 $= A \cap B (\because (A \cap B) \subset (B \cup C))$

◀ 차집합의 성질

◀ 드모르간 법칙

따라서 주어진 집합과 항상 같은 집합은 ①이다.

06-2 [답] (1) A (2) $A \cap B$

$$\begin{aligned}
 (1) (A \cup B) \cap (B - A)^c & \\
 &= (A \cup B) \cap (B \cap A^c)^c \\
 &= (A \cup B) \cap (B^c \cup A) \\
 &= (A \cup B) \cap (A \cup B^c) \\
 &= A \cup (B \cap B^c) \\
 &= A \cup \emptyset \\
 &= A
 \end{aligned}$$

◀ 차집합의 성질
 ◀ 드모르간 법칙
 ◀ 교환법칙
 ◀ 분배법칙
 ◀ 여집합의 성질
 ◀ 합집합의 성질

$$\begin{aligned}
 (2) (A - B)^c \cap A & \\
 &= (A \cap B^c)^c \cap A \\
 &= (A^c \cup B) \cap A \\
 &= (A^c \cap A) \cup (B \cap A) \\
 &= \emptyset \cup (B \cap A) \\
 &= A \cap B
 \end{aligned}$$

◀ 차집합의 성질
 ◀ 드모르간 법칙
 ◀ 분배법칙
 ◀ 여집합의 성질
 ◀ 합집합의 성질, 교환법칙

06-3 [답] 풀이 참조

$B \cap (A \cup B)$ 를 간단히 하면

$$B \cap (A \cup B) = B$$

$A - (A \cap C^c)$ 을 간단히 하면

$$\begin{aligned}
 A - (A \cap C^c) & \\
 &= A \cap (A \cap C^c)^c \\
 &= A \cap (A^c \cup C) \\
 &= (A \cap A^c) \cup (A \cap C) \\
 &= \emptyset \cup (A \cap C) \\
 &= A \cap C
 \end{aligned}$$

◀ 차집합의 성질
 ◀ 드모르간 법칙
 ◀ 분배법칙
 ◀ 여집합의 성질
 ◀ 합집합의 성질

$$\begin{aligned}
 \therefore \{B \cap (A \cup B)\} \cap \{A - (A \cap C^c)\} & \\
 &= B \cap (A \cap C) \\
 &= (B \cap A) \cap C \\
 &= (A \cap B) \cap C \\
 &= A \cap B \cap C
 \end{aligned}$$

◀ 결합법칙
 ◀ 교환법칙

07-1 [답] ⑤

$$\begin{aligned}
 (A \cup B) - (A^c \cap B) & \\
 &= (A \cup B) \cap (A^c \cap B)^c \\
 &= (A \cup B) \cap (A \cup B^c) \\
 &= A \cup (B \cap B^c) \\
 &= A \cup \emptyset \\
 &= A
 \end{aligned}$$

◀ 차집합의 성질
 ◀ 드모르간 법칙
 ◀ 분배법칙
 ◀ 여집합의 성질
 ◀ 합집합의 성질

즉, $A = A \cup B$ 이므로 $B \subset A$

이때 $B \subset A$ 이면

$$\textcircled{3} A \cap B = B$$

$$\textcircled{4} A - B \neq \emptyset$$

$$\textcircled{5} B - A = \emptyset$$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

07-2 [답] ④

$$\begin{aligned}
 (A - B)^c - B & \\
 &= (A \cap B^c)^c \cap B^c \\
 &= (A^c \cup B) \cap B^c \\
 &= (A^c \cap B^c) \cup (B \cap B^c) \\
 &= (A^c \cap B^c) \cup \emptyset \\
 &= A^c \cap B^c \\
 &= (A \cup B)^c
 \end{aligned}$$

◀ 차집합의 성질
 ◀ 드모르간 법칙
 ◀ 분배법칙
 ◀ 여집합의 성질
 ◀ 합집합의 성질
 ◀ 드모르간 법칙

즉, $(A \cup B)^c = \emptyset$ 이므로 $A \cup B = U$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

◀ 여집합의 성질

08-1 [답] $\neg, \perp$

$$\begin{aligned}
 \neg, A \triangle B &= (A - B) \cup (B - A) \\
 &= (B - A) \cup (A - B) \\
 &= B \triangle A \\
 \perp, A^c \triangle B^c &= (A^c - B^c) \cup (B^c - A^c) \\
 &= (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A) \\
 &= (B \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \\
 &= (B - A) \cup (A - B) \\
 &= (A - B) \cup (B - A) \\
 &= A \triangle B
 \end{aligned}$$

◀ 교환법칙
 ◀ 차집합의 성질
 ◀ 교환법칙
 ◀ 차집합의 성질
 ◀ 교환법칙

$$\begin{aligned}
 \sqsubset, A \triangle U &= (A - U) \cup (U - A) \\
 &= \emptyset \cup A^c \\
 &= A^c
 \end{aligned}$$

◀ 차집합의 성질
 ◀ 여집합의 성질

$\therefore A \triangle U \neq \emptyset$

따라서 보기 중 항상 옳은 것은 $\neg, \perp$ 이다.

08-2 [답] $A \cup B$

$$\begin{aligned}
 A \odot B &= (A \cup B)^c \cup B \\
 &= (A^c \cap B^c) \cup B \\
 &= (A^c \cup B) \cap (B^c \cup B) \\
 &= (A^c \cup B) \cap U \\
 &= A^c \cup B
 \end{aligned}$$

◀ 드모르간 법칙
 ◀ 분배법칙
 ◀ 여집합의 성질

$$\begin{aligned}
 \therefore (A \odot B) \odot B & \\
 &= (A^c \cup B) \odot B \\
 &= \{(A^c \cup B) \cup B\}^c \cup B \\
 &= \{A^c \cup (B \cup B)\}^c \cup B \\
 &= (A^c \cup B)^c \cup B \\
 &= (A \cap B^c) \cup B \\
 &= (A \cup B) \cap (B^c \cup B) \\
 &= (A \cup B) \cap U \\
 &= A \cup B
 \end{aligned}$$

◀ 결합법칙
 ◀ 합집합의 성질
 ◀ 드모르간 법칙
 ◀ 분배법칙
 ◀ 여집합의 성질

09-1 답 (1) 6 (2) 36

$$(1) (A_2 \cap A_3) \cup A_{12} = A_6 \cup A_{12} = A_6$$

즉, $A_n \subset A_6$ 에서 n 은 6의 배수이므로 자연수 n 의 최소값은 6이다.

$$(2) (A_{18} \cup A_{36}) \cap (A_{24} \cup A_{36}) = (A_{18} \cap A_{24}) \cup A_{36} \\ = A_{72} \cup A_{36} = A_{36}$$

$$\therefore n=36$$

09-2 답 12

$$(A_2 \cup A_3) \cap A_8 = (A_2 \cap A_8) \cup (A_3 \cap A_8) \\ = A_8 \cup A_{24} = A_8$$

전체집합 U 의 원소 중 8의 배수는 12개이므로 구하는 집합의 원소의 개수는 12이다.

3 유한집합의 원소의 개수

개념 CHECK

37쪽

1 답 (1) 45 (2) 8

$$(1) n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ = 20 + 35 - 10 = 45$$

$$(2) n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ = 17 + 23 - 32 = 8$$

2 답 (1) 17 (2) 15 (3) 10 (4) 12

$$(1) n(A^c) = n(U) - n(A) = 30 - 13 = 17$$

$$(2) n(B^c) = n(U) - n(B) = 30 - 15 = 15$$

$$(3) n(A - B) = n(A \cup B) - n(B) \\ = 25 - 15 = 10$$

$$(4) n(B - A) = n(A \cup B) - n(A) \\ = 25 - 13 = 12$$

문제

38~40쪽

10-1 답 53

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \text{이므로}$$

$$n((A \cup B)^c) = 15$$

$$n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) \text{이므로}$$

$$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c) \\ = 50 - 15 = 35$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{이므로}$$

$$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B) \\ = 35 + 18 = 53$$

10-2 답 17

$$n(B - A) = n(A \cup B) - n(A) \text{이므로}$$

$$n(A \cup B) = n(B - A) + n(A) = 11 + 42 = 53$$

$$\therefore n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) \\ = n(U) - n(A \cup B) \\ = 70 - 53 = 17$$

10-3 답 19

$$A \cap C = \emptyset \text{에서}$$

$$A \cap B \cap C = (A \cap C) \cap B = \emptyset \cap B = \emptyset \text{이므로}$$

$$n(A \cap C) = 0, n(A \cap B \cap C) = 0$$

$$\text{한편 } n(A \cap B), n(B \cap C) \text{를 구하면}$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ = 11 + 10 - 16 = 5$$

$$n(B \cap C) = n(B) + n(C) - n(B \cup C) \\ = 10 + 8 - 13 = 5$$

$$\therefore n(A \cup B \cup C) \\ = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) \\ - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ = 11 + 10 + 8 - 5 - 5 - 0 + 0 = 19$$

11-1 답 24

만 전체 학생의 집합을 U , 여행지 A에 가 본 학생의 집합을 A , 여행지 B에 가 본 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 50, n(A) = 28, n(A \cap B) = 11,$$

$$n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = 9$$

$$n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) \text{이므로}$$

$$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c) \\ = 50 - 9 = 41$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{이므로}$$

$$n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B) - n(A) \\ = 41 + 11 - 28 = 24$$

따라서 구하는 학생 수는 24이다.

11-2 답 23

컴퓨터를 신청한 학생의 집합을 A , 논술을 신청한 학생의 집합을 B 라 하면 $U = A \cup B$ 이므로

$$n(A \cup B) = 35, n(A) = 21, n(B) = 26$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{이므로}$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ = 21 + 26 - 35 = 12$$

컴퓨터와 논술 중에서 한 가지만 신청한 학생의 집합은

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$\therefore n(A \cup B) - n(A \cap B) = 35 - 12 = 23$$

따라서 구하는 학생 수는 23이다.

12-1 [답 24]

$n(A \cap B)$ 가 최대이려면 $n(A \cup B)$ 가 최소이어야 한다.

이때 $n(A) > n(B)$ 이므로 $B \subset A$ 이어야 한다.

따라서 $n(A \cap B)$ 의 최댓값은

$$M = n(A \cap B)$$

$$= n(B)$$

$$= 19$$

$n(A \cap B)$ 가 최소이려면 $n(A \cup B)$ 가 최대이어야 한다.

즉, $A \cup B = U$ 이어야 하므로 $n(A \cap B)$ 의 최솟값은

$$m = n(A \cap B)$$

$$= n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= n(A) + n(B) - n(U)$$

$$= 26 + 19 - 40 = 5$$

$$\therefore M + m = 19 + 5 = 24$$

12-2 [답] 최댓값: 26, 최솟값: 9

학생 전체의 집합을 U , A 사이트에 가입한 학생의 집합을 A , B 사이트에 가입한 학생의 집합을 B 라 하면

$$n(U) = 50, n(A) = 33, n(B) = 26$$

$n(A \cap B)$ 가 최대이려면 $n(A \cup B)$ 가 최소이어야 한다.

이때 $n(A) > n(B)$ 이므로 $B \subset A$ 이어야 한다.

따라서 $n(A \cap B)$ 의 최댓값은

$$n(A \cap B) = n(B)$$

$$= 26$$

$n(A \cap B)$ 가 최소이려면 $n(A \cup B)$ 가 최대이어야 한다.

즉, $A \cup B = U$ 이어야 하므로 $n(A \cap B)$ 의 최솟값은

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= n(A) + n(B) - n(U)$$

$$= 33 + 26 - 50 = 9$$

따라서 구하는 학생 수의 최댓값은 26, 최솟값은 9이다.

$$1 \quad A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\},$$

$$B = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \dots\},$$

$$C = \{1, 2, 4, 8\} \text{이므로}$$

$$A \cap B = \{2, 8, 14, 20\}$$

$$\therefore (A \cap B) \cup C = \{1, 2, 4, 8, 14, 20\}$$

따라서 집합 $(A \cap B) \cup C$ 의 원소가 아닌 것은 ③이다.

2 벤다이어그램을 그려

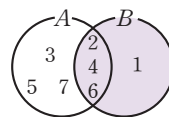
$$A \cap B = \{2, 4, 6\},$$

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

$$A \cup B = U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

의 순서로 원소를 써넣으면 위의 그림과 같다.

$$\therefore B = \{1, 2, 4, 6\}$$



3 ④ $B = \{1, 2, 3, 6\}$ 이므로 $A - B^c = \{1, 3\}$

4 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 3, 9\}$ 이므로

$$A - B = \{5, 7\} \quad \therefore a = 5$$

5 벤다이어그램을 그려

$$A \cap B = \{3\}$$

$$A^c \cap B = B \cap A^c$$

$$= B - A$$

$$= \{2, 5, 8\}$$

$$A^c \cap B^c = \{1, 9, 10\}$$

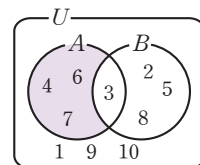
$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

의 순서로 원소를 써넣으면 위의 그림과 같다.

$$\therefore A - B = \{4, 6, 7\}$$

따라서 구하는 집합의 모든 원소의 합은

$$4 + 6 + 7 = 17$$



6 $A \cap B = \{2\}$ 에서 $2 \in B$ 이므로

$$a^2 - 2a - 1 = 2, a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a+1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 3$$

(i) $a = -1$ 일 때,

$$A = \{2, 3, 5\}, B = \{2, 3\}$$

이때 $A \cap B = \{2, 3\}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a = 3$ 일 때,

$$A = \{1, 2, 15\}, B = \{2, 3\}$$

이때 $A \cap B = \{2\}$ 이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $a = 3$ 이므로

$$(A - B) \cup (B - A) = \{1, 15\} \cup \{3\} = \{1, 3, 15\}$$

따라서 구하는 집합의 모든 원소의 합은

$$1 + 3 + 15 = 19$$

연습문제

41~44쪽

- | | | | |
|-------|----------------|-----------------------------|-------|
| 1 ③ | 2 {1, 2, 4, 6} | 3 ④ | 4 5 |
| 5 ① | 6 19 | 7 ④ | 8 ⑤ |
| 10 8 | 11 ④ | 12 $\neg, \subset, \supset$ | 13 ② |
| 14 ③ | 15 ② | 16 ② | 17 2 |
| 18 7 | 19 36 | 20 ③ | 21 16 |
| 22 ④ | 23 16 | | |
| 24 33 | | | |

- 7 ① $A - (A \cap B) = A - B$
 ② $(A \cap B) - (B^c)^c = (A \cap B) - B = \emptyset$
 ③ $A \cap (A \cup A^c) = A \cap U = A$
 ④ $B \cup (B \cap B^c) = B \cup \emptyset = B$
 ⑤ $\emptyset^c \cap (A - B) = U \cap (A - B) = A - B$
 따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

- 8 $A \cap B = A$ 에서 $A \subset B$
 ② $A \subset B$ 이면 $B^c \subset A^c$ 이므로 $A^c \cap B^c = B^c$
 ⑤ $A^c \cap B = B - A$ 이므로 $A^c \cap B \neq \emptyset$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

- 9 $\{1, 2, 3\} \cap A = \emptyset$ 이면 집합 $\{1, 2, 3\}$ 과 집합 A 는 서로 소이다.
 따라서 집합 A 의 개수는 전체집합 U 의 부분집합 중에서 1, 2, 3을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로 $2^{6-3} = 2^3 = 8$

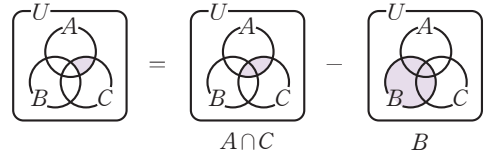
- 10 $X \cup A = X$ 에서 $A \subset X$ ㉠
 $X \cap B^c = X$ 에서 $X \subset B^c$ ㉡
 ㉠, ㉡에 의하여 $A \subset X \subset B^c$
 $\therefore \{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 6, 7, 8\}$
 따라서 집합 X 의 개수는 집합 $\{1, 2, 6, 7, 8\}$ 의 부분집합 중에서 1, 2를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로 $2^{5-2} = 2^3 = 8$

- 11 ① $(A \cup B) \cap (A^c \cap B^c) = (A \cup B) \cap (A \cup B)^c$
 $= (A \cup B) - (A \cup B)$
 $= \emptyset$
 ② $A \cap (A \cap B)^c = A \cap (A^c \cup B^c)$
 $= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)$
 $= \emptyset \cup (A \cap B^c)$
 $= A \cap B^c = A - B$
 ③ $(A \cup B) - C = (A \cup B) \cap C^c$
 $= (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c)$
 $= (A - C) \cup (B - C)$
 ④ $(A \cap B) - (A \cap C)$
 $= (A \cap B) \cap (A \cap C)^c$
 $= (A \cap B) \cap (A^c \cup C^c)$
 $= \{(A \cap B) \cap A^c\} \cup \{(A \cap B) \cap C^c\}$
 $= \emptyset \cup \{(A \cap B) \cap C^c\}$
 $= A \cap (B \cap C^c)$
 $= A \cap (B - C) \neq A - (B \cap C)$

$$\begin{aligned} ⑤ A - (B - C) &= A \cap (B \cap C^c)^c \\ &= A \cap (B^c \cup C) \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C) \\ &= (A - B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

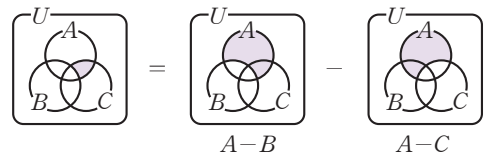
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

- 12 ㄱ, ㄴ, 섷칠한 부분을 나타내는 집합은 다음 그림과 같이 집합 $A \cap C$ 에서 집합 B 의 원소를 제외한 집합이므로



$$\begin{aligned} (A \cap C) - B &= (A \cap C) \cap B^c \\ &= (A \cap B^c) \cap C \end{aligned}$$

- ㄴ, 섷칠한 부분을 나타내는 집합은 다음 그림과 같이 집합 $A - B$ 에서 집합 $A - C$ 의 원소를 제외한 집합이므로



$$(A - B) - (A - C)$$

따라서 보기 중 섷칠한 부분을 나타내는 집합인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄴ이다.

- 13 $(A - B)^c \cap B = (A \cap B^c)^c \cap B$
 $= (A^c \cup B) \cap B$
 $= (A^c \cap B) \cup (B \cap B)$
 $= (B - A) \cup B$
 $= B$

$$\therefore B = \{1, 3, 5, 6, 7\}$$

$$\begin{aligned} A^c - B^c &= A^c \cap (B^c)^c \\ &= A^c \cap B = B - A \end{aligned}$$

$$\therefore B - A = \{1, 5\}$$

따라서 집합 A 의 개수는 전체집합 U 의 부분집합 중에서 3, 6, 7은 반드시 원소로 갖고 1, 5는 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로

$$2^{7-3-2} = 2^2 = 4$$

- 14 $A \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap (A \cup B)$
 $= U \cap (A \cup B)$
 $= A \cup B$
 $B \cup (B^c \cap A^c)^c = B \cup (B \cup A)$
 $= A \cup B$

$$\begin{aligned} \therefore \{A \cup (A^c \cap B)\} \cap \{B \cup (B^c \cap A^c)\} \\ = (A \cup B) \cap (A \cup B) \\ = A \cup B \end{aligned}$$

즉, $A \cup B = A$ 이므로 $B \subset A$

따라서 집합 B 는 집합 A 의 부분집합이므로 그 개수는 $2^4=16$

$$\begin{aligned} 15 \quad n(B-A) &= n(B) - n(A \cap B) \text{이므로} \\ n(A \cap B) &= n(B) - n(B-A) \\ &= 25 - 6 = 19 \\ \therefore n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 40 + 25 - 19 = 46 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16 \quad A \cap B^c = A \text{에서 } A - B = A \text{이므로} \\ A \cap B = \emptyset \quad \therefore n(A \cap B) = 0 \\ \therefore n(A \cup B) &= n(A) + n(B) \\ &= 9 + 14 = 23 \\ \therefore n(A^c \cap B^c) &= n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) \\ &= 30 - 23 = 7 \end{aligned}$$

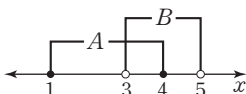
$$\begin{aligned} 17 \quad \text{조사한 학생 전체의 집합을 } U, A \text{ 영화를 관람한 학생의} \\ \text{집합을 } A, B \text{ 영화를 관람한 학생의 집합을 } B \text{라 하면} \\ n(U) = 30, n(A) = 16, n(B) = 22, n((A \cup B)^c) = 6 \\ n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) \text{이므로} \\ n(A \cup B) &= n(U) - n((A \cup B)^c) \\ &= 30 - 6 = 24 \end{aligned}$$

A 영화는 보았지만 B 영화는 보지 않은 학생의 집합은 $A - B$ 이므로

$$n(A - B) = n(A \cup B) - n(B) = 24 - 22 = 2$$

따라서 구하는 학생 수는 2이다.

$$\begin{aligned} 18 \quad x^2 - 5x + 4 \leq 0 \text{에서} \\ (x-1)(x-4) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq x \leq 4 \\ \therefore A = \{x \mid 1 \leq x \leq 4\} \\ A \cap B = \{x \mid 3 < x \leq 4\}, A \cup B = \{x \mid 1 \leq x < 5\} \text{를 만족} \\ \text{시키도록 두 집합 } A, B \text{를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.} \end{aligned}$$

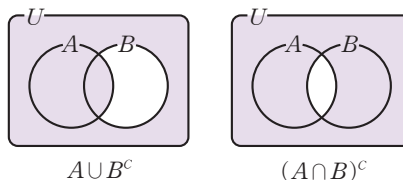


$$\begin{aligned} \therefore B &= \{x \mid 3 < x < 5\} \\ &= \{x \mid (x-3)(x-5) < 0\} \\ &= \{x \mid x^2 - 8x + 15 < 0\} \end{aligned}$$

따라서 $a = -8, b = 15$ 이므로 $a + b = 7$

$$\begin{aligned} 19 \quad B - A = \{3, 11\} \text{이고} \\ (A \cup B) \cap B^c = (A \cup B) - B = A - B = \{19\} \text{이므로} \\ \text{집합 } B \text{는 전체집합 } U \text{의 부분집합 중에서 } 3, 11 \text{은 반드시} \\ \text{원소로 갖고 } 19 \text{는 원소로 갖지 않는 부분집합이다.} \\ \text{따라서 원소의 개수가 최대인 집합 } B \text{는} \\ B = \{3, 7, 11, 15\} \text{이므로 모든 원소의 합은} \\ 3 + 7 + 11 + 15 = 36 \end{aligned}$$

20 두 집합 $A \cup B^c, (A \cap B)^c$ 을 각각 벤다이어그램으로 나타내면 다음 그림의 색칠한 부분과 같다.



ㄱ. 위의 벤다이어그램에서 $(A \cup B^c) \cup (A \cap B)^c = U$ 이므로

$$\begin{aligned} U &= \{2, 4, 5, 8, 12\} \cup \{1, 3, 5, 9\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 12\} \end{aligned}$$

ㄴ. 위의 벤다이어그램에서

$$\begin{aligned} (A \cup B^c) - (A \cap B)^c &= A \cap B \text{이므로} \\ A \cap B &= \{2, 4, 5, 8, 12\} - \{1, 3, 5, 9\} \\ &= \{2, 4, 8, 12\} \end{aligned}$$

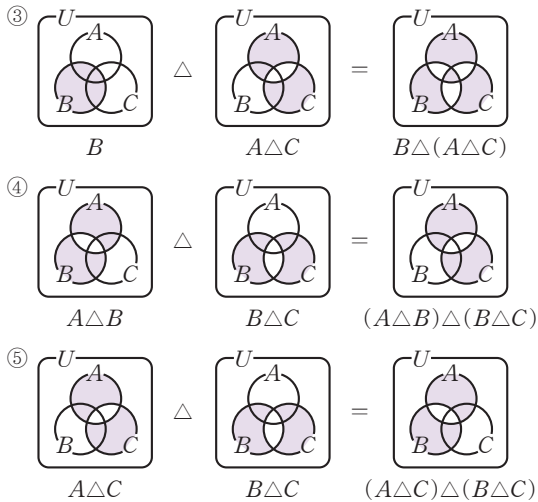
$$\begin{aligned} ㄷ. A^c \cap B &= (A \cup B^c)^c = U - (A \cup B^c) \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 12\} - \{2, 4, 5, 8, 12\} \\ &= \{1, 3, 9\} \end{aligned}$$

따라서 집합 $A^c \cap B$ 의 원소의 개수는 3이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

$$\begin{aligned} 21 \quad \text{전체집합 } U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \text{에 대하여} \\ \{2, 3\} \cup X = \{-2, 0, 2\} \cup X \text{를 만족시키는 집합 } X \text{는} \\ A \cap B = \{2\} \text{의 원소 } 2 \text{는 갖거나 갖지 않아도 상관없지만} \\ -2, 0, 3 \text{은 반드시 원소로 가져야 한다.} \\ \text{따라서 구하는 집합 } X \text{의 개수는 } 2^{7-3} = 2^4 = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22 \quad ① \quad (A \triangle B) \triangle C &= A \triangle (B \triangle C) \\ ② \quad A &= B \triangle (A \triangle B) \end{aligned}$$



따라서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ④이다.

- 23 $A_4 \cap A_6$ 은 4와 6의 공배수, 즉 12의 배수의 집합이므로 $(A_4 \cap A_6) \cup A_{36} = A_{12} \cup A_{36} = A_{12}$
 $\therefore n=12$
 $(A_8 \cup A_{12}) \subset A_m$ 에서 $A_8 \subset A_m$, $A_{12} \subset A_m$ 이므로 8은 m 의 배수이고 12도 m 의 배수이다.
 즉, m 의 최솟값은 8과 12의 최대공약수인 4이다.
 따라서 구하는 값은 $12+4=16$

- 24 조사한 손님 전체의 집합을 U , A 작품을 읽은 사람의 집합을 A , B 작품을 읽은 사람의 집합을 B 라 하면 $n(U)=100$, $n(A)=54$, $n(B)=67$
 B 작품만 읽은 사람의 집합은 $B-A$ 이므로 $n(B-A)=n(A \cup B)-n(A)$
 $=n(A \cup B)-54 \dots\dots ㉠$
 $n(B-A)$ 가 최대이려면 $n(A \cup B)$ 도 최대이어야 한다.
 즉, $A \cup B = U$ 이어야 하므로 $n(B-A)$ 의 최댓값은 ㉠에서
 $M=n(B-A)=n(A \cup B)-54$
 $=n(U)-54$
 $=100-54=46$
 $n(B-A)$ 가 최소이려면 $n(A \cup B)$ 도 최소이어야 한다.
 이때 $n(A) < n(B)$ 이므로 $A \subset B$ 이어야 한다.
 $n(B-A)$ 의 최솟값은 ㉠에서
 $m=n(B-A)=n(A \cup B)-54$
 $=n(B)-54$
 $=67-54=13$
 따라서 구하는 값은 $M-m=46-13=33$

IV-2 01 명제와 조건

1 명제와 조건

문제

47~49쪽

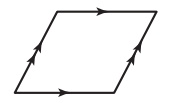
01-1 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅂ

- ㄱ. '아름답다.'는 참, 거짓의 기준이 분명하지 않으므로 명제가 아니다.
 ㄴ. 3은 소수이므로 참인 명제이다.
 ㄷ. 8의 양의 약수는 1, 2, 4, 8의 4개이므로 거짓인 명제이다.
 ㄹ. x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
 ㅁ, ㅅ. 거짓인 명제이다.
 따라서 보기 중 명제인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅂ이다.

01-2 답 (1) 참인 명제 (2) 참인 명제 (3) 거짓인 명제 (4) 명제가 아니다.

- (1) 정삼각형은 이등변삼각형이므로 참인 명제이다.
 (2) 주어진 식을 정리하면 $0 > -5$ 이므로 참인 명제이다.
 (3) 6은 3의 배수이지만 9의 배수가 아니므로 거짓인 명제이다.
 (4) $2(x-2)=x(x-3)$ 에서 $x^2-5x+4=0$
 x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.

01-3 답 ㄴ, ㄷ

- ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 평행사변형이더라도 직사각형이 아닐 수 있으므로 거짓인 명제이다. 
 ㄴ. 5의 양의 약수인 1, 5는 10의 양의 약수이므로 참인 명제이다.
 ㄷ. (홀수)+(홀수)=(짝수)이므로 참인 명제이다.
 ㄹ. $3+4=7$ 이므로 주어진 세 선분으로 삼각형을 만들 수 없다. 즉, 거짓인 명제이다.
 따라서 보기 중 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

02-1 답 (1) 6은 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.

- (2) $x < -3$ 또는 $x > 5$ 이다.

02-2 답 ㉠

- $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$ 에서
 $a-b=0$ 이고 $b-c=0$ 이고 $c-a=0 \therefore a=b=c$
 따라서 $a=b=c$ 의 부정은
 $a \neq b$ 또는 $b \neq c$ 또는 $c \neq a$
 이와 같은 표현은
 ㉠ a, b, c 중에서 서로 다른 것이 적어도 하나 있다.

02-3 [답] $\neg, \wedge, \vee$

주어진 명제의 부정을 구하고 참, 거짓을 판별하면

$\neg$. ' $2 \geq \sqrt{3}$ '이므로 참이다.

$\wedge$. ' $x+2 \neq x+3$ '이고 이 식을 정리하면 $2 \neq 3$ 이므로 참이다.

$\vee$. '10은 소수가 아니다.'이므로 참이다.

$\neg$. '4는 2의 배수가 아니다.'이므로 거짓이다.

따라서 보기 중 그 부정이 참인 명제인 것은 $\neg, \wedge, \vee$ 이다.

다른 풀이

명제가 거짓이면 그 명제의 부정은 참이므로 거짓인 명제를 찾으면 $\neg, \wedge, \vee$ 이다.

03-1 [답] (1) {1, 2, 4, 8} (2) {3, 6}

(3) {3, 4, 5, 6, 7, 8}

전체집합 $U = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ 에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$P = \{1, 2, 3, 6\}, Q = \{1, 2, 4, 8\}$

(1) ' $\sim(\sim q)$ '의 진리집합은

$$(Q^c)^c = Q = \{1, 2, 4, 8\}$$

(2) ' p 그리고 $\sim q$ '의 진리집합은

$$P \cap Q^c = P - Q = \{3, 6\}$$

(3) ' $\sim p$ 또는 $\sim q$ '의 진리집합은

$$P^c \cup Q^c = (P \cap Q)^c = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

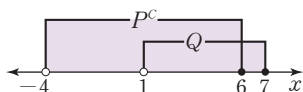
03-2 [답] $\{x | -4 < x \leq 7\}$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$P = \{x | x \leq -4 \text{ 또는 } x > 6\}, Q = \{x | 1 < x \leq 7\}$

이때 ' $\sim p$ 또는 q '의 진리집합은 $P^c \cup Q$ 이고

$P^c = \{x | -4 < x \leq 6\}$ 이므로 다음 그림에서



$$P^c \cup Q = \{x | -4 < x \leq 7\}$$

03-3 [답] ③

$P = \{x | x \geq 4\}, Q = \{x | x < -1\}$

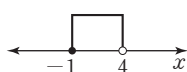
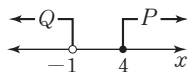
이므로 두 집합 P, Q 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

또 조건 ' $-1 \leq x < 4$ '의 진리집합

$\{x | -1 \leq x < 4\}$ 를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 집합은

$$P^c \cap Q^c = (P \cup Q)^c$$



2 명제 $p \rightarrow q$ 의 참, 거짓

문제

51~53쪽

04-1 [답] (1) 참 (2) 거짓 (3) 거짓

(1) $x^2 > 1$ 에서 $x^2 - 1 > 0$

$$(x+1)(x-1) > 0 \quad \therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 1$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x | x > 1\},$$

$$Q = \{x | x < -1 \text{ 또는 } x > 1\}$$

따라서 $P \subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이다.

(2) 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{(x, y) | x = 0 \text{ 또는 } y = 0\},$$

$$Q = \{(x, y) | x = 0 \text{이고 } y = 0\}$$

따라서 $P \not\subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 거짓이다.

(3) [반례] $x = 3, y = 2, z = -1$ 이면 $x > y$ 이지만

$$xz < yz \text{이다.}$$

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

04-2 [답] $\neg, \vee$

$\neg$. 주어진 명제에서 가정을 p , 결론을 q 라 하고 두 조건

p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{4, 8, 12, \dots\},$$

$$Q = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

따라서 $P \subset Q$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

$\wedge$. [반례] $x = 2$ 이면 x 는 소수이지만 짝수이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

$\vee$. [반례] $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ 이면 $x+y$ 와 xy 는 정수이지만 x, y 는 정수가 아니다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

$\neg$. $x^2 - 1 = 0$ 에서 $x = \pm 1$ 이고 $|\pm 1| = 1$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

따라서 보기 중 참인 명제인 것은 $\neg, \vee$ 이다.

05-1 [답] 5

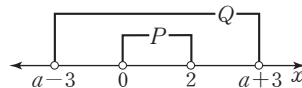
주어진 명제에서 가정을 p , 결론을 q 라 하면

$p: 0 < x < 2, q: a-3 < x < a+3$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x | 0 < x < 2\}, Q = \{x | a-3 < x < a+3\}$$

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q$ 이어야 한다.



위의 그림에서 $a-3 \leq 0, a+3 \geq 2$ 이어야 하므로

$$-1 \leq a \leq 3$$

따라서 정수 a 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

05-2 [답 2]

$$|x-3| < k \text{에서 } -k < x-3 < k \text{ (}\because k > 0\text{)}$$

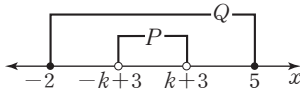
$$\therefore -k+3 < x < k+3$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x | -k+3 < x < k+3\},$$

$$Q = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$$

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q$ 이어야 한다.



위의 그림에서 $-k+3 \geq -2, k+3 \leq 5$ 이어야 하므로 $k \leq 2$

그런데 $k > 0$ 이므로 $0 < k \leq 2$

따라서 양수 k 의 최댓값은 2이다.

05-3 [답 4]

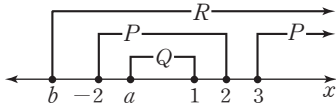
세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P = \{x | -2 \leq x \leq 2 \text{ 또는 } x \geq 3\},$$

$$Q = \{x | a \leq x \leq 1\}, R = \{x | x \geq b\}$$

명제 $q \rightarrow p$ 가 참이 되려면 $Q \subset P$ 이어야 하고, 명제

$p \rightarrow r$ 가 참이 되려면 $P \subset R$ 이어야 한다.



위의 그림에서 $-2 \leq a \leq 1, b \leq -2$

따라서 a 의 최솟값은 $-2, b$ 의 최댓값은 -2 이므로 그 곱은 4이다.

06-1 [답 ①]

① $P \not\subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 거짓이다.

②, ④ $P \subset R^c, R \subset P^c$ 이므로 두 명제 $p \rightarrow \sim r, r \rightarrow \sim p$ 는 참이다.

③, ⑤ $R \subset Q, Q^c \subset R^c$ 이므로 두 명제 $r \rightarrow q, \sim q \rightarrow \sim r$ 는 참이다.

따라서 거짓인 명제는 ①이다.

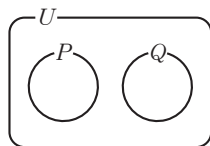
06-2 [답 ④]

①, ② $P \not\subset Q, Q \not\subset P$ 이므로 두 명제 $p \rightarrow q, q \rightarrow p$ 는 거짓이다.

③, ⑤ $P^c \not\subset Q, Q^c \not\subset P$ 이므로 두 명제 $\sim p \rightarrow q, \sim q \rightarrow p$ 는 거짓이다.

④ $P \subset Q^c$ 이므로 명제 $p \rightarrow \sim q$ 는 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ④이다.



3 '모든'이나 '어떤'을 포함한 명제

개념 CHECK

54쪽

1 [답] (1) 거짓 (2) 참

(1) $p: |x| > 0$ 이라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면 $P = \{x | x \neq 0 \text{인 실수}\}$

따라서 $P \neq U$ 이므로 이 명제는 거짓이다.

(2) $p: |x| \leq 0$ 이라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면 $P = \{0\}$

따라서 $P \neq \emptyset$ 이므로 이 명제는 참이다.

문제

55쪽

07-1 [답] ㄱ, ㄴ

ㄱ. $x = -\frac{1}{2}$ 이면 $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} > 0$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄴ. 가장 작은 자연수 1에 대하여도 $1^2 > 0$ 이므로 모든 자연수 x 에 대하여 $x^2 > 0$ 이다.

따라서 주어진 명제는 참이다.

ㄷ. 모든 자연수 x, y 에 대하여 $x^2 \geq 1, y^2 \geq 1$ 이므로 $x^2 + y^2 \geq 2$

즉, $x^2 + y^2 = 1$ 인 자연수 x, y 가 존재하지 않으므로 주어진 명제는 거짓이다.

따라서 보기 중 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

07-2 [답] (1) 어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 + 1 < 0$ 이다. (거짓)

(2) 모든 실수 x 에 대하여 $2x^2 + 1 \neq 0$ 이다. (참)

(3) 어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 + x + 1 \leq 0$ 이다. (거짓)

(1) 주어진 명제의 부정은

‘어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 + 1 < 0$ 이다.’

이때 실수 x 에 대하여 $x^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 + 1 > 0$

따라서 주어진 명제의 부정은 거짓이다.

(2) 주어진 명제의 부정은

‘모든 실수 x 에 대하여 $2x^2 + 1 \neq 0$ 이다.’

이때 실수 x 에 대하여 $x^2 \geq 0$ 이므로 $2x^2 + 1 \geq 1$

즉, $2x^2 + 1 \neq 0$ 이므로 주어진 명제의 부정은 참이다.

(3) 주어진 명제의 부정은

‘어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 + x + 1 \leq 0$ 이다.’

이때 실수 x 에 대하여

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

따라서 주어진 명제의 부정은 거짓이다.

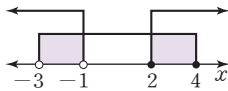
연습문제

56~57쪽

- 1 ② 2 ④ 3 2 4 ① 5 ④
6 3 7 ⑤ 8 ⑤ 9 ㄴ, ㄷ 10 ㄷ
11 ③ 12 ③ 13 81

- 1 ① 주어진 식을 정리하면 $-2=1$ 이므로 거짓인 명제이다.
② x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
③ 10은 15의 약수가 아니므로 거짓인 명제이다.
④ 3은 3의 배수이지만 6의 배수가 아니므로 거짓인 명제이다.
⑤ 넓이가 같아도 모양이 다를 수 있으므로 거짓인 명제이다.
따라서 명제가 아닌 것은 ②이다.

- 2 조건 ' $\sim p$ 또는 q '의 부정은 ' p 그리고 $\sim q$ '
이때 $p: -3 < x \leq 4$, $\sim q: x < -1$ 또는 $x \geq 2$ 이므로
오른쪽 그림에서 조건 ' $\sim p$ 또는 q '의 부정은
 $-3 < x < -1$ 또는 $2 \leq x \leq 4$

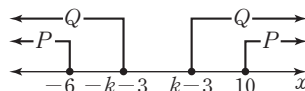


- 3 전체집합 $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.
 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 에서
 $(x-1)(x-2) = 0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=2$
 $\therefore P = \{1, 2\}$
 $x^3 - 4x = 0$ 에서
 $x(x+2)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 2$
 $\therefore Q = \{-2, 0, 2\}$
이때 조건 ' $\sim p$ 그리고 $\sim q$ '의 진리집합은 $P^c \cap Q^c$ 이므로
 $P^c \cap Q^c = (P \cup Q)^c = \{-3, -1\}$
따라서 구하는 원소의 개수는 2이다.

- 4 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 거짓이라면 $P \not\subset Q^c$ 이어야 하므로 집합 P 의 원소이지만 집합 Q^c 의 원소가 아닌 원소를 찾으면 된다. 따라서 반례를 원소로 갖는 집합은
 $P - Q^c = P \cap Q$

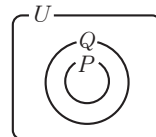
- 5 $x=a$ 를 $x^2 - 3x - 4 \leq 0$ 에 대입하면
 $a^2 - 3a - 4 \leq 0$, $(a+1)(a-4) \leq 0$
 $\therefore -1 \leq a \leq 4$
따라서 a 의 최댓값은 4이다.

- 6 주어진 명제에서 가정을 p , 결론을 q 라 하면
 $p: |x-2| \geq 8$, $q: |x+3| \geq k$
 $|x-2| \geq 8$ 에서
 $x-2 \leq -8$ 또는 $x-2 \geq 8 \quad \therefore x \leq -6$ 또는 $x \geq 10$
 $|x+3| \geq k$ 에서
 $x+3 \leq -k$ 또는 $x+3 \geq k \quad (\because k > 0)$
 $\therefore x \leq -k-3$ 또는 $x \geq k-3$
두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{x | x \leq -6 \text{ 또는 } x \geq 10\}$,
 $Q = \{x | x \leq -k-3 \text{ 또는 } x \geq k-3\}$
주어진 명제가 참이 되려면 $P \subset Q$ 이어야 한다.



- 위의 그림에서 $-k-3 \geq -6$, $k-3 \leq 10$ 이어야 하므로
 $k \leq 3$
그런데 $k > 0$ 이므로 $0 < k \leq 3$
따라서 양수 k 의 최댓값은 3이다.

- 7 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P \subset Q$
① $Q - P \neq \emptyset$ ② $P \cap Q = P$
③ $P \cup Q = Q$ ④ $P - Q = \emptyset$
⑤ $P^c \cup Q = U$
따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.



- 8 ① [반례] $x = -1$, $y = -2$ 이면 $xy > 0$ 이지만 $x < 0$ 이고 $y < 0$ 이다. (거짓)
② [반례] $x = 0$ 이면 $x^2 = 0$ 이다. (거짓)
③ [반례] $x = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ 이면 $x+y$ 는 유리수이다. (거짓)
④ 모든 실수 x 에 대하여
 $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$ (거짓)
⑤ $3x - 2 = x + 2(x-3) + 4$ 에서 $3x - 2 = 3x - 2$
즉, $0 \times x = 0$ 꼴이므로 모든 실수 x 에 대하여 성립한다. (참)
따라서 참인 명제는 ⑤이다.

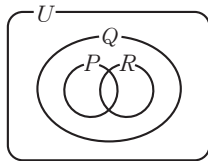
- 9 $\neg p: x^2 > 4$ 라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면
 $x^2 > 4$ 에서 $x^2 - 4 > 0$, $(x+2)(x-2) > 0$
 $\therefore x < -2$ 또는 $x > 2 \quad \therefore P = \emptyset$
따라서 주어진 명제는 거짓이다.
 $\neg p: 2x - 3 \leq 1$ 이라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면
 $2x - 3 \leq 1$ 에서 $2x \leq 4 \quad \therefore x \leq 2$
 $\therefore P = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
따라서 $P = U$ 이므로 주어진 명제는 참이다.

ㄷ. $p: x^2+x-2>0$ 이라 하고 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면 $x^2+x-2>0$ 에서 $(x+2)(x-1)>0$
 $\therefore x<-2$ 또는 $x>1 \quad \therefore P=\{2\}$
 따라서 $P \neq \emptyset$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
 따라서 보기 중 참인 명제인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

- 10 주어진 명제가 거짓이므로 명제의 부정
 'K 휴대폰을 구입하는 어떤 고객에게는 사은품으로 휴대폰 케이스를 주지 않는다.'
 가 참이다.
 따라서 보기 중 참인 명제인 것은 ㄷ이다.

- 11 ①, ② 유리수의 제곱, 유리수의 세제곱도 유리수이므로 x 가 유리수이면 x^2, x^3 도 유리수이다.
 ③ [반례] $x=\sqrt{2}$ 이면 x^2 , 즉 2는 유리수이지만 x^3 , 즉 $2\sqrt{2}$ 는 무리수이다.
 ④ $x \neq 0$ 일 때, 유리수의 나눗셈의 몫은 유리수이므로 x^2 과 x^3 이 유리수이면 $\frac{x^3}{x^2}=x$ 는 유리수이다.
 ⑤ 유리수와 유리수의 곱은 유리수이므로 유리수 x 와 유리수 x^2 의 곱인 x^3 도 유리수이다.
 따라서 거짓인 명제는 ③이다.

- 12 $P \cap Q = P$ 에서 $P \subset Q$
 $R^c \cup Q = U$ 에서 $(R^c \cup Q)^c = \emptyset$
 $R \cap Q^c = \emptyset, R - Q = \emptyset$
 $\therefore R \subset Q$
 $\neg, P \subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이다.
 $\neg, R \subset Q$ 이므로 명제 $r \rightarrow q$ 는 참이다.
 $\neg, P \cap R \neq \emptyset$ 이면 $P \not\subset R^c$ 이므로 명제 $p \rightarrow r$ 는 거짓이다.
 따라서 보기 중 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다.



- 13 주어진 명제의 부정은
 '모든 실수 x 에 대하여 $x^2-18x+k \geq 0$ '
 즉, 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2-18x+k \geq 0$ 이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2-18x+k=0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (-9)^2 - k \leq 0$
 $\therefore k \geq 81$
 따라서 k 의 최솟값은 81이다.

IV-2 02 명제의 역과 대우

1 명제의 역과 대우

개념 CHECK

58쪽

- 1 답 (1) 역: 이등변삼각형은 정삼각형이다.
 대우: 이등변삼각형이 아니면 정삼각형이 아니다.
 (2) 역: 홀수는 소수이다.
 대우: 홀수가 아니면 소수가 아니다.
 (3) 역: $x^2=9$ 이면 $x=3$ 이다.
 대우: $x^2 \neq 9$ 이면 $x \neq 3$ 이다.

문제

59~61쪽

- 01-1 답 (1) 역: x 가 8의 양의 약수이면 x 는 4의 양의 약수이다. (거짓)
 대우: x 가 8의 양의 약수가 아니면 x 는 4의 양의 약수가 아니다. (참)
 (2) 역: $5-2x < 1$ 이면 $x > -3$ 이다. (참)
 대우: $5-2x \geq 1$ 이면 $x \leq -3$ 이다. (거짓)
 (1) 역: [반례] $x=8$ 은 8의 양의 약수이지만 4의 양의 약수는 아니다.
 (2) 대우: [반례] $x=0$ 이면 $5-2x \geq 1$ 이지만 $x > -3$ 이다.

01-2 답 ㄴ

- $\neg$. 역: $x=y$ 이면 $x^2-y^2=0$ 이다. (참)
 대우: $x \neq y$ 이면 $x^2-y^2 \neq 0$ 이다. (거짓)
 [반례] $x=1, y=-1$ 이면 $x \neq y$ 이지만 $x^2-y^2=0$ 이다.
 $\neg$. 역: $x^2-1=0$ 이면 $x-1=0$ 이다. (거짓)
 [반례] $x=-1$ 이면 $x^2-1=0$ 이지만 $x-1 \neq 0$ 이다.
 대우: $x^2-1 \neq 0$ 이면 $x-1 \neq 0$ 이다. (참)
 $\neg$. 역: $x+y > 0$ 이면 $x > 0$ 이고 $y > 0$ 이다. (거짓)
 [반례] $x=3, y=-2$ 이면 $x+y > 0$ 이지만 $x > 0$ 이고 $y < 0$ 이다.
 대우: $x+y \leq 0$ 이면 $x \leq 0$ 또는 $y \leq 0$ 이다. (참)
 $\neg$. 역: $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이면 $xy \neq 0$ 이다. (참)
 대우: $x=0$ 또는 $y=0$ 이면 $xy=0$ 이다. (참)
 따라서 보기 중 명제의 역과 대우가 모두 참인 명제인 것은 ㄴ이다.

02-1 [답] -5

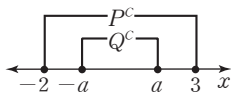
주어진 명제가 참이므로 그 대우 ' $x=4$ 이면 $x^2+kx+4=0$ 이다.'도 참이다.
 $x=4$ 를 $x^2+kx+4=0$ 에 대입하면
 $16+4k+4=0 \quad \therefore k=-5$

02-2 [답] -2

주어진 명제가 참이므로 그 대우 ' $x \leq k$ 이고 $y \leq 5$ 이면 $x+y \leq 3$ 이다.'도 참이다.
 $x \leq k$ 이고 $y \leq 5$ 에서 $x+y \leq k+5$
 대우가 참이려면
 $k+5 \leq 3 \quad \therefore k \leq -2$
 따라서 k 의 최댓값은 -2 이다.

02-3 [답] 2

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.
 $\sim q: |x| \leq a$ 에서 $-a \leq x \leq a$ ($\therefore a$ 는 자연수)
 $\sim p: x^2-x-6 \leq 0$ 에서 $(x+2)(x-3) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq x \leq 3$
 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P^c = \{x | -2 \leq x \leq 3\}, Q^c = \{x | -a \leq x \leq a\}$
 명제 $\sim q \rightarrow \sim p$ 가 참이려면
 $Q^c \subset P^c$ 이어야 하므로 오른쪽 그림에서
 $-a \geq -2, a \leq 3$
 $\therefore a \leq 2$
 따라서 자연수 a 는 1, 2의 2개이다.



03-1 [답] ②

명제 $p \rightarrow r$ 가 참이면 그 대우도 참이므로
 ⑤ 명제 $\sim r \rightarrow \sim p$ 가 참
 명제 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이면 그 대우도 참이므로
 ④ 명제 $r \rightarrow \sim q$ 가 참
 두 명제 $p \rightarrow r$ 와 $r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로
 ① 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참
 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이면 그 대우도 참이므로
 ③ 명제 $q \rightarrow \sim p$ 가 참
 따라서 항상 참이라 할 수 없는 것은 ②이다.

03-2 [답] ㄷ, ㄹ

ㄱ. 명제 $s \rightarrow q$ 가 참이면 그 대우도 참이므로
 명제 $\sim q \rightarrow \sim s$ 가 참이다.
 두 명제 $p \rightarrow \sim q$ 와 $\sim q \rightarrow \sim s$ 가 참이므로
 명제 $p \rightarrow \sim s$ 가 참이다.
 따라서 명제 $p \rightarrow s$ 는 거짓이다.

ㄴ, ㄷ. 두 명제 $r \rightarrow p$ 와 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이므로
 명제 $r \rightarrow \sim q$ 와 그 대우 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이다.
 따라서 명제 $q \rightarrow r$ 는 거짓이다.
 ㄹ. 명제 $p \rightarrow \sim q$ 가 참이면 그 대우도 참이므로
 명제 $q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.
 두 명제 $s \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow \sim p$ 가 참이므로
 명제 $s \rightarrow \sim p$ 도 참이다.
 따라서 보기 중 항상 참인 명제인 것은 ㄷ, ㄹ이다.

03-3 [답] ③

명제 ㉞, ㉟에서
 p : 기온이 높다.,
 q : 제품 A가 잘 팔린다.,
 r : 제품 B가 잘 팔린다.
 라 하자.
 ㉞에서 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이고 ㉟에서 명제 $r \rightarrow \sim q$ 와
 그 대우 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이다.
 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 명제 $p \rightarrow \sim r$
 와 그 대우 $r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.
 ① $q \rightarrow p$ ② $q \rightarrow r$
 ③ $p \rightarrow \sim r$ ④ $\sim p \rightarrow r$
 ⑤ $r \rightarrow p$
 따라서 항상 참인 명제는 ③이다.

2 충분조건과 필요조건

개념 CHECK

62쪽

1 [답] (1) 충분 (2) 필요 (3) 필요충분

문제

63~65쪽

04-1 [답] (1) 충분조건 (2) 필요조건 (3) 필요조건

(4) 필요충분조건

(1) 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{a | a > 1\}, Q = \{a | a > 0\}$
 $\therefore P \subset Q$
 따라서 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
 (2) 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P = \{(a, b) | a = b \text{ 또는 } a = -b\},$
 $Q = \{(a, b) | a = b\}$
 $\therefore Q \subset P$
 따라서 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

(3) 명제 $p \rightarrow q$: [반례] $a=1, b=-1$ 이면 $a+b=0$ 이지만 $a^2+b^2 \neq 0$ 이다. (거짓)

명제 $q \rightarrow p$: $a^2+b^2=0$ 이면 $a=0, b=0$ 이므로 $a+b=0$ 이다. (참)

따라서 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

(4) 명제 $p \rightarrow q$: $abc \neq 0$ 이면 $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$ 이고 $c \neq 0$ 이므로 a, b, c 는 모두 0이 아니다. (참)

명제 $q \rightarrow p$: a, b, c 가 모두 0이 아니면 $abc \neq 0$ 이다. (참)

따라서 $p \Leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

04-2 답 ㄱ

ㄱ. 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 $P \subset Q$ 따라서 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{(x, y) | x=y \text{ 또는 } x=-y\},$$

$$Q = \{(x, y) | x=y \text{ 또는 } x=-y\} \quad \therefore P=Q$$

따라서 $p \Leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

ㄷ. 명제 $p \rightarrow q$: [반례] $x=2, y=10$ 이면 $xy=20$ 이지만 $x \neq 5, y \neq 4$ 이다. (거짓)

명제 $q \rightarrow p$: $x=5, y=4$ 이면 $xy=20$ 이다. (참)

따라서 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

ㄹ. 명제 $p \rightarrow q$: [반례] $x=1, y=-2$ 이면 $x > 0$ 이지만 $x+y < 0$ 이다. (거짓)

명제 $q \rightarrow p$: $x+y > 0$ 이면 $x > 0$ 또는 $y > 0$ 이다.

(참)

따라서 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

따라서 보기 중 p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닌 것은 ㄱ이다.

05-1 답 $a < -1, b \geq 3$

세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P = \{x | -1 \leq x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3\},$$

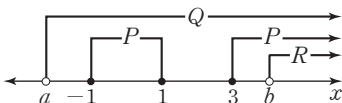
$$Q = \{x | x > a\}, R = \{x | x > b\}$$

q 가 p 이기 위한 필요조건이라면 $p \Rightarrow q$ 에서 $P \subset Q$

r 가 p 이기 위한 충분조건이라면 $r \Rightarrow p$ 에서 $R \subset P$

$$\therefore R \subset P \subset Q$$

세 집합 P, Q, R 를 수직선 위에 나타내면



$$\therefore a < -1, b \geq 3$$

05-2 답 2

$p: x^2+ax-3 \neq 0, q: x-1 \neq 0$ 이라 하자.

p 가 q 이기 위한 충분조건이라면 $p \Rightarrow q$

참인 명제의 대우는 참이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$

즉, $x-1=0$ 이면 $x^2+ax-3=0$ 이어야 하므로

$$1+a-3=0 \quad \therefore a=2$$

05-3 답 -4

p 가 q 이기 위한 필요충분조건이라면 $p \Leftrightarrow q$

즉, 이차방정식 $(x-1)^2=a$ 의 두 근이 $x=3$ 또는 $x=b$

이어야 하므로 $(x-1)^2=a$ 에 $x=3$ 을 대입하면 $a=4$

$$(x-1)^2=4 \text{에서 } x-1=\pm 2 \quad \therefore x=3 \text{ 또는 } x=-1$$

따라서 $b=-1$ 이므로

$$ab=4 \times (-1)=-4$$

06-1 답 ④

p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow \sim q$ 에서

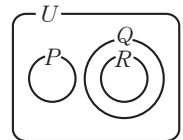
$$P \subset Q^c \quad \dots\dots ㉠$$

$\sim r$ 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이므로 $\sim q \Rightarrow \sim r$ 에서

$$Q^c \subset R^c \quad \therefore R \subset Q \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 만족시키는 세 집합 P, Q, R 사이의 관계를 벤다이어그램으로

나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$$\textcircled{1} P \not\subset R$$

$$\textcircled{2} P^c \cup Q = P^c \text{이므로 } R \subset (P^c \cup Q)$$

$$\textcircled{3} Q^c \not\subset R$$

$$\textcircled{4} P \cap R = \emptyset$$

$$\textcircled{5} (P \cup R) \not\subset Q^c$$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

06-2 답 ⑤

$$P \cup Q = P \text{에서 } Q \subset P \quad \dots\dots ㉠$$

$$Q \cap R = R \text{에서 } R \subset Q \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여 $R \subset Q \subset P$

① $Q \subset P$ 에서 $q \Rightarrow p$ 이므로 q 는 p 이기 위한 충분조건이다.

② $R \subset Q$ 에서 $r \Rightarrow q$ 이므로 q 는 r 이기 위한 필요조건이다.

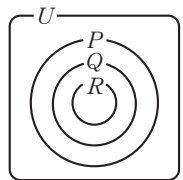
③ $R \subset P$ 에서 $r \Rightarrow p$ 이므로 r 는 p 이기 위한 충분조건이다.

$$\textcircled{4} R \subset Q \text{이므로 } Q^c \subset R^c$$

따라서 $\sim q \Rightarrow \sim r$ 이므로 $\sim r$ 는 $\sim q$ 이기 위한 필요조건이다.

⑤ $Q \not\subset P^c$ 이므로 q 는 $\sim p$ 이기 위한 충분조건이 아니다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.



연습문제

66~68쪽

- 1 ② 2 ② 3 ② 4 ① 5 ㄷ
 6 ③ 7 ⑤ 8 4 9 3 10 ③
 11 ㄱ, ㄴ 12 ④ 13 ⑤ 14 ㄴ, ㄷ 15 ⑤
 16 ③

2 ① 역: 두 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.
 (거짓)

[반례] 등변사다리꼴은 두 대각선의 길이가 같지만 직사각형이 아니다.

대우: 두 대각선의 길이가 같지 않으면 직사각형이 아니다. (참)

② 역: $a > 1$ 이고 $b > 1$ 이면 $a + b > 2$ 이다. (참)

대우: $a \leq 1$ 또는 $b \leq 1$ 이면 $a + b \leq 2$ 이다. (거짓)

[반례] $a = -1$, $b = 4$ 이면 $a \leq 1$ 이지만 $a + b > 2$ 이다.

③ 역: $|ab| = ab$ 이면 $a > 0$, $b > 0$ 이다. (거짓)

[반례] $a = -2$, $b = -3$ 이면 $|ab| = ab$ 이지만 $a < 0$, $b < 0$ 이다.

대우: $|ab| \neq ab$ 이면 $a \leq 0$ 또는 $b \leq 0$ 이다. (참)

④ 역: ab 가 유리수이면 a , b 도 유리수이다. (거짓)

[반례] $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ 이면 ab 는 유리수이지만 a , b 는 유리수가 아니다.

대우: ab 가 무리수이면 a 또는 b 가 무리수이다. (참)

⑤ 역: $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이면 $a > b$ 이다. (거짓)

[반례] $a = -1$, $b = 2$ 이면 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 이지만 $a < b$ 이다.

대우: $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ 이면 $a \leq b$ 이다. (거짓)

[반례] $a = 1$, $b = -2$ 이면 $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ 이지만 $a > b$ 이다.

따라서 역은 참이고 대우는 거짓인 명제는 ②이다.

3 명제 $\sim p \rightarrow \sim q$ 의 역이 참이므로 명제 $\sim q \rightarrow \sim p$ 가 참이다.

즉, $Q^c \subset P^c$ 이므로

$P \subset Q$

① $P \cap Q = P$

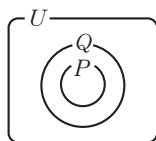
② $P \cap Q^c = P - Q = \emptyset$

③ $P^c \cap Q = Q - P$

④ $P^c \cap Q^c = Q^c$

⑤ $P \neq Q$

따라서 항상 옳은 것은 ②이다.



4 주어진 명제가 참이므로 그 대우 ' $x - a = 0$ 이면 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 이다.'도 참이다.

$x = a$ 를 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 에 대입하면

$a^2 - 6a + 5 = 0$, $(a - 1)(a - 5) = 0$

$\therefore a = 1$ 또는 $a = 5$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은 $1 + 5 = 6$

5 명제 $r \rightarrow \sim q$ 가 참이면 그 대우도 참이므로 명제 $q \rightarrow \sim r$ 도 참이다.

두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 명제 $p \rightarrow \sim r$

와 그 대우 $r \rightarrow \sim p$ 가 참이다.

따라서 보기 중 항상 참인 명제는 ㄷ이다.

6 명제 (가), (나)에서

p : 날씨가 맑다.,

q : 기온이 올라간다.,

r : 빨래가 잘 마른다.

라 하자.

(가)에서 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이고 (나)에서 명제 $q \rightarrow r$ 가 참이다.

따라서 명제 $p \rightarrow r$ 와 그 대우 $\sim r \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

① $p \rightarrow \sim r$

② $\sim p \rightarrow r$

③ $\sim r \rightarrow \sim p$

④ $r \rightarrow p$

⑤ $\sim q \rightarrow \sim r$

따라서 항상 참인 명제는 ③이다.

7 ① 두 조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라 하면

$P = \{\sqrt{3}\}$, $Q = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

$\therefore P \subset Q$

따라서 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

② 명제 $p \rightarrow q$: $y < 0$ 이면 $|x| > y$ 이다. (참)

명제 $q \rightarrow p$: [반례] $x = 3$, $y = 2$ 이면 $|x| > y$ 이지만 $y > 0$ 이다. (거짓)

따라서 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

③ 명제 $p \rightarrow q$: $|x| \geq 0$, $|y| \geq 0$ 이므로

$|x| + |y| = 0$ 이면 $x = 0$, $y = 0$ 이다. (참)

명제 $q \rightarrow p$: $x = 0$, $y = 0$ 이면 $|x| + |y| = 0$ 이다.

(참)

따라서 $p \Leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ 두 조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라 하면 $P \subset Q$

따라서 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

⑤ 명제 $p \rightarrow q$: [반례] $x=\sqrt{2}, y=-\sqrt{2}$ 이면 $x+y, xy$ 는 유리수이지만 x, y 는 유리수가 아니다. (거짓)
 명제 $q \rightarrow p$: x, y 가 유리수이면 $x+y, xy$ 는 유리수이다. (참)

따라서 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
 따라서 p 가 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 ⑤이다.

8 p 는 q 이기 위한 충분조건이므로

$$p \Rightarrow q \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

p 는 s 이기 위한 필요조건이므로

$$s \Rightarrow p \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

q 는 s 이기 위한 충분조건이므로

$$q \Rightarrow s \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

r 는 q 이기 위한 필요조건이므로

$$q \Rightarrow r \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$\neg, \textcircled{1}, \textcircled{3}$ 에서 $p \Rightarrow r$

$\neg, \textcircled{2}, \textcircled{4}$ 에서 $q \Rightarrow p$

$\square, \textcircled{2}, \textcircled{1}$ 에서 $s \Rightarrow q$

$\square, \textcircled{3}, \textcircled{4}, \textcircled{2}$ 에서 $s \Rightarrow r$

따라서 보기 중 항상 참인 명제는 $\neg, \neg, \square, \square$ 의 4개이다.

9 $p: x+3 \neq 0, q: x^2+4x+a \neq 0$ 이라 하자.

p 가 q 이기 위한 필요조건이라면 $q \Rightarrow p$

참인 명제의 대우는 참이므로 $\sim p \Rightarrow \sim q$

즉, $x+3=0$ 이면 $x^2+4x+a=0$ 이어야 하므로

$$9-12+a=0 \quad \therefore a=3$$

10 $\sim p: x^2-4x+3 \leq 0$ 에서

$$(x-1)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq x \leq 3$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P^c = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}, Q = \{x \mid x \leq a\}$$

$\sim p$ 가 q 이기 위한 충분조건이

려면 $\sim p \Rightarrow q$, 즉 $P^c \subset Q$ 이

여야 하므로 오른쪽 그림에서

$$a \geq 3$$

따라서 a 의 최솟값은 3이다.

11 $\neg, Q \subset P$ 이므로 $q \Rightarrow p$

따라서 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

$\neg, R \subset Q^c$ 이므로 $r \Rightarrow \sim q$

따라서 r 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

$$\square, Q \subset P \text{이므로 } P^c \subset Q^c$$

$$\therefore \sim p \Rightarrow \sim q$$

따라서 $\sim p$ 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

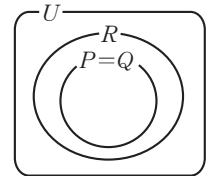
12 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이므로 $p \Leftrightarrow q$ 에서

$$P=Q \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

r 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow r$ 에서

$$Q \subset R \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 만족시키는 세 집합 P, Q, R 사이의 관계를 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



$$\textcircled{1} R \not\subset P$$

$$\textcircled{2} P \cap Q \neq \emptyset$$

$$\textcircled{3} Q \cup R = R \text{이므로 } P \subset (Q \cup R), (Q \cup R) \not\subset P$$

$$\textcircled{4} (P \cup Q) \subset R$$

$$\textcircled{5} R - P \neq Q$$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

13 주어진 규칙인 명제

‘카드의 한쪽 면에 홀수가 적혀 있으면 다른 쪽 면에는 식물이 그려져 있다.’

가 참이면 그 대우인 명제

‘카드의 한쪽 면에 동물이 그려져 있으면 다른 쪽 면에는 짝수가 적혀 있다.’

도 참이다.

따라서 주어진 규칙에 맞는지 다른 쪽 면을 반드시 확인할 필요가 있는 카드는 홀수가 적혀 있는 카드와 동물이 그려진 카드이므로 3, 토끼, 사자이다.

14 참인 두 명제에서

p : 성격이 급하지 않은 사람이다.,

q : 신중한 사람이다.,

r : 수학을 잘하는 사람이다.,

s : 머리가 좋은 사람이다.

라 하자.

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이고 명제 $r \rightarrow s$ 가 참이므로 명제

$r \rightarrow q$ 가 참이 되는 경우는 삼단논법에 의하여 다음과 같은 경우가 있을 수 있다.

(i) 두 명제 $r \rightarrow p, p \rightarrow q$ 가 참이면

명제 $r \rightarrow q$ 가 참

(ii) 두 명제 $r \rightarrow s, s \rightarrow q$ 가 참이면

명제 $r \rightarrow q$ 가 참

(iii) 세 명제 $r \rightarrow s$, $s \rightarrow p$, $p \rightarrow q$ 가 참이면

명제 $r \rightarrow q$ 가 참

즉, 필요한 참인 명제는

명제 $r \rightarrow p$ 또는 그 대우인 명제 $\sim p \rightarrow \sim r$

명제 $s \rightarrow q$ 또는 그 대우인 명제 $\sim q \rightarrow \sim s$

명제 $s \rightarrow p$ 또는 그 대우인 명제 $\sim p \rightarrow \sim s$

주어진 보기에서

ㄱ. $p \rightarrow r$

ㄴ. $\sim p \rightarrow \sim r$

ㄷ. $\sim p \rightarrow \sim s$

ㄹ. $\sim r \rightarrow \sim p$

따라서 필요한 명제가 될 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

15 $p: |a| + |b| = 0$ 에서 $a=0$ 이고 $b=0$

$q: a^2 - 2ab + b^2 = 0$ 에서

$(a-b)^2 = 0 \quad \therefore a=b$

$r: |a+b| = |a-b|$ 에서

$a+b = a-b$ 또는 $a+b = -(a-b)$

$\therefore a=0$ 또는 $b=0$

세 조건 p , q , r 의 진리집합을 각각 P , Q , R 라 하면

$P = \{(a, b) | a=0 \text{이고 } b=0\}$,

$Q = \{(a, b) | a=b\}$,

$R = \{(a, b) | a=0 \text{ 또는 } b=0\}$

ㄱ. $P \subset Q$ 이므로 $p \Rightarrow q$

따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

ㄴ. $P \subset R$ 이므로 $R^c \subset P^c$

$\therefore \sim r \Rightarrow \sim p$

따라서 $\sim p$ 는 $\sim r$ 이기 위한 필요조건이다.

ㄷ. $Q \cap R = \{(a, b) | a=0 \text{이고 } b=0\}$ 이므로

$Q \cap R = P$

$\therefore (q \text{이고 } r) \Leftrightarrow p$

따라서 q 이고 r 는 p 이기 위한 필요충분조건이다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

16 p 가 q 이기 위한 충분조건이라면 $p \Rightarrow q$ 이어야 한다.

ㄱ. 명제 $p \rightarrow q$: [반례] $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$ 이면

$n(A) \leq n(B)$ 이지만 $A \not\subset B$ 이다. (거짓)

ㄴ. 명제 $p \rightarrow q$: [반례] $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ 이면

$A - B = \emptyset$ 이므로 $n(A - B) = 0$ 이지만

$n(A) \neq n(B)$ 이다. (거짓)

ㄷ. $A = B^c$ 이면

$A \cup B = B^c \cup B = U$

따라서 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

따라서 보기 중 p 가 q 이기 위한 충분조건인 것은 ㄷ이다.

IV-2 03 명제의 증명

1 명제의 증명

개념 CHECK

69쪽

1 답 (가) 자연수 a , b 에 대하여 a , b 가 모두 홀수이면 $a+b$ 는 짝수이다.

(나) $m+n-1$

문제

70~71쪽

01-1 답 풀이 참조

주어진 명제의 대우 '자연수 m , n 에 대하여 mn 이 홀수이면 m^2+n^2 은 짝수이다.'가 참임을 보이면 된다.

mn 이 홀수이면 m 과 n 은 모두 홀수이므로

$m=2k-1$, $n=2l-1$ (k, l 은 자연수)

로 나타낼 수 있다.

$m^2+n^2=(2k-1)^2+(2l-1)^2$

$=2(2k^2-2k+2l^2-2l+1)$

이때 m^2+n^2 은 짝수이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

01-2 답 (가) 짝수 (나) 서로소 (다) 2

주어진 명제의 대우 '자연수 m , n 에 대하여 m 과 n 이 모두 짝수'이면 m 과 n 은 서로소가 아니다.'가 참임을 보이면 된다.

m 과 n 이 모두 짝수이면 $m=2k$, $n=2l$ (k, l 은 자연수)

로 나타낼 수 있다.

이때 2는 m 과 n 의 공약수이므로 m 과 n 이 모두

짝수이면 m 과 n 은 서로소가 아니다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

02-1 답 풀이 참조

주어진 명제의 결론을 부정하여 $\sqrt{5}$ 가 유리수라 가정하면

$\sqrt{5} = \frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소인 자연수) ㉠

으로 나타낼 수 있다.

㉠의 양변을 제곱하면

$5 = \frac{n^2}{m^2} \quad \therefore n^2 = 5m^2$ ㉡

이때 n^2 이 5의 배수이므로 n 도 5의 배수이다.

04-3 답 2

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{2}{ab} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

이때 $a + b = 2$ 이므로

$$2 \geq 2\sqrt{ab} \quad \therefore \sqrt{ab} \leq 1 \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

양변을 제곱하면

$$ab \leq 1, \frac{2}{ab} \geq 2$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2 \quad (\because \textcircled{1})$$

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

05-1 답 (1) 16 (2) 5

(1) $x > 0, y > 0$ 에서 $3xy > 0, \frac{3}{xy} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} \left(3x + \frac{1}{y}\right)\left(y + \frac{3}{x}\right) &= 10 + 3xy + \frac{3}{xy} \\ &\geq 10 + 2\sqrt{3xy \times \frac{3}{xy}} \\ &= 10 + 6 = 16 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $xy=1$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 16이다.

(2) $x > 1$ 에서 $x-1 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} x + \frac{4}{x-1} &= x-1 + \frac{4}{x-1} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{(x-1) \times \frac{4}{x-1}} + 1 \\ &= 4 + 1 = 5 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $x-1 = \frac{4}{x-1}$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 5이다.

05-2 답 2

$x > 0, y > 0$ 에서 $\frac{9x}{y} > 0, \frac{4y}{x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} (9x+2y)\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right) &= 20 + \frac{9x}{y} + \frac{4y}{x} \\ &\geq 20 + 2\sqrt{\frac{9x}{y} \times \frac{4y}{x}} \\ &= 20 + 12 = 32 \end{aligned}$$

이때 $9x+2y=16$ 이므로

$$16\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 32$$

$$\therefore \frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 2 \quad (\text{단, 등호는 } 3x=2y \text{ 일 때 성립})$$

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

06-1 답 (1) -14 (2) 10

(1) a, b, x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$$

이때 $a^2+b^2=28, x^2+y^2=7$ 이므로

$$28 \times 7 \geq (ax+by)^2, 14^2 \geq (ax+by)^2$$

$$\therefore -14 \leq ax+by \leq 14$$

(단, 등호는 $ay=bx$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 -14이다.

(2) x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(3^2+4^2)(x^2+y^2) \geq (3x+4y)^2$

이때 $x^2+y^2=4$ 이므로

$$25 \times 4 \geq (3x+4y)^2, 10^2 \geq (3x+4y)^2$$

$$\therefore -10 \leq 3x+4y \leq 10$$

(단, 등호는 $3y=4x$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최댓값은 10이다.

06-2 답 13

x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(2^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (2x+3y)^2$$

이때 $2x+3y=13$ 이므로

$$13(x^2+y^2) \geq 13^2$$

$$\therefore x^2+y^2 \geq 13 \quad (\text{단, 등호는 } 2y=3x \text{ 일 때 성립})$$

따라서 구하는 최솟값은 13이다.

06-3 답 $\pm\sqrt{10}$

a, b 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(1^2+3^2)(a^2+b^2) \geq (a+3b)^2$$

이때 $a^2+b^2=100$ 이므로

$$10 \times 100 \geq (a+3b)^2 \quad \therefore (a+3b)^2 \leq 1000$$

따라서 $(a+3b)^2$ 은 등호가 성립할 때, 즉 $b=3a$ 일 때 최댓값 1000을 갖는다.

$a^2+b^2=100$ 에 $b=3a$ 를 대입하면

$$a^2+9a^2=100, a^2=10 \quad \therefore a=\pm\sqrt{10}$$

07-1 답 25m^2

직각삼각형의 빗변이 아닌 두 변의 길이를 $x\text{m}, y\text{m}$ 라 하면
 $x^2+y^2=100$

$x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $x^2+y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2} = 2xy$

$$100 \geq 2xy \quad \therefore xy \leq 50 \quad (\text{단, 등호는 } x=y \text{ 일 때 성립})$$

이때 직각삼각형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}xy \leq 25$$

따라서 구하는 밭의 넓이의 최댓값은 25m^2 이다.

07-2 **답** $8\sqrt{2}$

직사각형의 가로 길이 x , 세로 길이 y 라 하면 직사각형의 대각선은 원의 지름과 같으므로

$$x^2 + y^2 = 16$$

직사각형의 둘레의 길이는 $2x + 2y$ 이고 x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(2^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (2x + 2y)^2$$

$$8 \times 16 \geq (2x + 2y)^2$$

이때 $2x + 2y > 0$ 이므로

$$0 < 2x + 2y \leq 8\sqrt{2} \quad (\text{단, 등호는 } x=y \text{ 일 때 성립})$$

따라서 구하는 둘레의 길이의 최댓값은 $8\sqrt{2}$ 이다.

연습문제

78~80쪽

1 (가) 자연수 m, n 에 대하여 m 과 n 이 모두 홀수이면 mn 은 홀수이다.

(나) 홀수 (다) 홀수

- 2 풀이 참조 3 ② 4 4
5 ㄱ, ㄷ, ㄹ 6 ⑤ 7 40 8 ③
9 -2 10 33 11 ③ 12 15 13 $4\sqrt{2}$
14 ② 15 $10\sqrt{2}$

1 주어진 명제의 대우

‘(가) 자연수 m, n 에 대하여 m 과 n 이 모두 홀수이면 mn 은 홀수이다.’

가 참임을 보이면 된다.

m 과 n 이 모두 (가) 홀수 이면

$$m = 2k - 1, n = 2l - 1 \quad (k, l \text{ 은 자연수})$$

로 나타낼 수 있으므로

$$mn = (2k - 1)(2l - 1)$$

$$= 2(2kl - k - l) + 1$$

이때 $2kl - k - l$ 은 0 또는 자연수이므로 mn 은 (가) 홀수

이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

2 주어진 명제의 결론을 부정하여 a, b 가 모두 홀수이거나 모두 짝수라 가정하자.

(i) a, b 가 모두 홀수이면

$$a = 2k - 1, b = 2l - 1 \quad (k, l \text{ 은 자연수})$$

로 나타낼 수 있으므로

$$a + b = (2k - 1) + (2l - 1) = 2(k + l - 1)$$

이때 $k + l - 1$ 은 자연수이므로 $a + b$ 는 짝수이다.

(ii) a, b 가 모두 짝수이면

$$a = 2m, b = 2n \quad (m, n \text{ 은 자연수})$$

으로 나타낼 수 있으므로

$$a + b = 2m + 2n = 2(m + n)$$

이때 $m + n$ 은 자연수이므로 $a + b$ 는 짝수이다.

(i), (ii) 에 의하여 $a + b$ 는 짝수이므로 $a + b$ 가 홀수라는 가정에 모순이다.

따라서 명제 ‘자연수 a, b 에 대하여 $a + b$ 가 홀수이면 a, b 중에서 하나는 짝수이고 다른 하나는 홀수이다.’는 참이다.

3 양의 실수 a, b, c 에 대하여

$$(a + b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab$$

$$= a^2 - 2ab + b^2$$

$$= \text{(가)} (a - b)^2 \geq 0$$

이므로 $4ab \leq (a + b)^2$ 이고, 같은 방법으로

$$4bc \leq (b + c)^2, 4ca \leq (c + a)^2 \text{ 이므로}$$

$$4abc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

$$= \frac{4ab}{a+b} \times c + \frac{4bc}{b+c} \times a + \frac{4ca}{c+a} \times b$$

$$\leq \frac{(a+b)^2}{a+b} \times c + \frac{(b+c)^2}{b+c} \times a + \frac{(c+a)^2}{c+a} \times b$$

$$= (a+b) \times c + (b+c) \times a + (c+a) \times b$$

$$= \text{(나)} 2(ab + bc + ca) \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이다.

한편, $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$ 에서

$$(a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca) \geq 0$$

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{\text{(나)} 3} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

이다.

따라서 ㉠, ㉡ 으로부터

$$4abc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \leq \frac{2}{3} (a + b + c)^2 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

이다.

이때 ㉢ 의 양변을 $4abc$ 로 나누면

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{(a+b+c)^2}{6abc}$$

이다.

4 ㄱ. $x < -3$ 일 때만 성립하므로 절대부등식이 아니다.

$$\text{ㄴ. } x^2 > x^2 - 2 \text{ 에서 } 0 > -2$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

$$\text{ㄷ. } x \geq 0 \text{ 일 때, } |x| + x = 2x \geq 0$$

$$x < 0 \text{ 일 때, } |x| + x = -x + x = 0 \geq 0$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

$$\text{ㄹ. } x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

ㄹ. 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

ㅂ. $x=2$ 이면 $-(x-2)^2=0$

따라서 $x=2$ 일 때 성립하지 않는다.

따라서 보기 중 절대부등식은 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ의 4개이다.

$$\begin{aligned} 5 \quad \neg. (\sqrt{ab})^2 - \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 &= ab - \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \\ &= \frac{ab\{(a+b)^2 - 4ab\}}{(a+b)^2} \\ &= \frac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2} \geq 0 \\ &\quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

$$\therefore (\sqrt{ab})^2 \geq \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2$$

그런데 $\sqrt{ab} > 0$, $\frac{2ab}{a+b} > 0$ 이므로

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

$$\begin{aligned} \neg. \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 - (\sqrt{a^2+1})^2 &= a^2 + \frac{1}{4a^2} + 1 - (a^2+1) \\ &= \frac{1}{4a^2} > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 > (\sqrt{a^2+1})^2$$

그런데 $a + \frac{1}{2a} > 0$, $\sqrt{a^2+1} > 0$ 이므로

$$a + \frac{1}{2a} > \sqrt{a^2+1}$$

$$\begin{aligned} \neg. \frac{b}{a} + \frac{a}{b} - 2 &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{ab} \\ &= \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0 \\ &\quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$$

$$\begin{aligned} \neg. a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geq 0 \\ &\quad (\text{단, 등호는 } a=b=c \text{ 일 때 성립}) \end{aligned}$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

$$\begin{aligned} 6 \quad 9a > 0, b > 0 \text{이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여} \\ 9a + b &\geq 2\sqrt{9a \times b} = 6\sqrt{ab} \\ \text{이때 } ab &= 9 \text{이므로} \\ 9a + b &\geq 18 \quad (\text{단, 등호는 } 9a=b \text{ 일 때 성립}) \\ \text{따라서 } 9a+b \text{의 최솟값은 } m &= 18 \end{aligned}$$

$9a=b$ 일 때 최솟값을 가지므로 $b=9a$ 를 $ab=9$ 에 대입하면

$$a \times 9a = 9, a^2 = 1$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$

$$a=1 \text{을 } ab=9 \text{에 대입하면 } b=9$$

$$\therefore \alpha = 1, \beta = 9$$

$$\therefore m + \alpha + \beta = 18 + 1 + 9 = 28$$

$$7 \quad \text{직선 } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{이 점 } (2, 5) \text{를 지나므로}$$

$$\frac{2}{a} + \frac{5}{b} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$a > 0$, $b > 0$ 에서 $\frac{2}{a} > 0$, $\frac{5}{b} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2}{a} + \frac{5}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2}{a} \times \frac{5}{b}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{ab}}$$

$$1 \geq \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{ab}} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore \sqrt{ab} \geq 2\sqrt{10} \quad (\text{단, 등호는 } 5a=2b \text{ 일 때 성립})$$

양변을 제곱하면

$$ab \geq 40$$

따라서 구하는 최솟값은 40이다.

$$8 \quad \text{주어진 식을 전개하여 정리하면}$$

$$(x-2y)\left(\frac{2}{x} - \frac{4}{y}\right) = 10 - 4\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

즉, 주어진 식의 값은 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ 의 값이 최소일 때 최대이다.

$x > 0$, $y > 0$ 에서 $\frac{x}{y} > 0$, $\frac{y}{x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \times \frac{y}{x}} = 2 \quad (\text{단, 등호는 } x=y \text{ 일 때 성립})$$

①에서

$$\begin{aligned} (x-2y)\left(\frac{2}{x} - \frac{4}{y}\right) &= 10 - 4\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \\ &\leq 10 - 4 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

따라서 구하는 최댓값은 2이다.

$$9 \quad x \neq 2 \text{에서 } (x-2)^2 > 0 \text{이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여}$$

$$x^2 - 4x + \frac{1}{(x-2)^2} = (x-2)^2 + \frac{1}{(x-2)^2} - 4$$

$$\geq 2\sqrt{(x-2)^2 \times \frac{1}{(x-2)^2}} - 4$$

$$= 2 - 4 = -2$$

(단, 등호는 $x=1$ 또는 $x=3$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 -2이다.

- 10 $x^2 - x + y^2 - 2y + 3$
 $= x^2 + y^2 + 3 - (x + 2y)$
 $= 23 - (x + 2y) \quad (\because x^2 + y^2 = 20) \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 즉, 주어진 식의 값은 $x + 2y$ 의 값이 최소일 때 최대이다.
 x, y 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 2y)^2$
 이때 $x^2 + y^2 = 20$ 이므로
 $5 \times 20 \geq (x + 2y)^2$
 $\therefore -10 \leq x + 2y \leq 10$ (단, 등호는 $y = 2x$ 일 때 성립)
 $\textcircled{1}$ 에서 $13 \leq 23 - (x + 2y) \leq 33$
 $\therefore 13 \leq x^2 - x + y^2 - 2y + 3 \leq 33$
 따라서 구하는 최댓값은 33이다.

- 11 $\sqrt{n^2 - 1}$ 이 유리수라고 가정하면
 $\sqrt{n^2 - 1} = \frac{q}{p} \quad (p, q \text{는 서로소인 자연수})$
 로 놓을 수 있다.
 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면
 $p^2(n^2 - 1) = q^2$ 이다.
 p 는 q^2 의 약수이고 p, q 는 서로소인 자연수이므로 $p = 1$
 이다. 즉, $n^2 - 1 = q^2$ 이므로 $n^2 = \boxed{q^2 + 1}$ 이다.
 자연수 k 에 대하여
 (i) $q = 2k$ 일 때, $n^2 = (2k)^2 + 1$
 따라서 $(2k)^2 < n^2 < \boxed{(2k+1)^2}$ 이고 이를 만족하는
 자연수 n 이 존재하지 않는다.
 (ii) $q = 2k + 1$ 일 때, $n^2 = (2k + 1)^2 + 1$
 따라서 $\boxed{(2k+1)^2} < n^2 < (2k + 2)^2$ 이고 이를 만족
 하는 자연수 n 이 존재하지 않는다.
 (i), (ii)에 의하여 $\sqrt{n^2 - 1} = \frac{q}{p} \quad (p, q \text{는 서로소인 자연수})$ 를
 만족하는 자연수 n 은 존재하지 않는다.
 따라서 $\sqrt{n^2 - 1}$ 은 무리수이다.
 이때 $f(q) = q^2 + 1, g(k) = (2k + 1)^2$ 이므로
 $f(2) + g(3) = 5 + 49 = 54$

- 12 주어진 부등식을 x 에 대하여 정리하면
 $x^2 + 2(y + 3)x + y^2 + my + n \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로 이차방정식
 $x^2 + 2(y + 3)x + y^2 + my + n = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (y + 3)^2 - (y^2 + my + n) \leq 0$
 $(6 - m)y + 9 - n \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 이 모든 실수 y 에 대하여 성립하므로
 $6 - m = 0, 9 - n \leq 0 \quad \therefore m = 6, n \geq 9$
 따라서 $m + n$ 의 최솟값은 $6 + 9 = 15$

- 13 $\sqrt{3x} + \sqrt{2y}$ 를 제공하면
 $(\sqrt{3x} + \sqrt{2y})^2 = 3x + 2y + 2\sqrt{6xy}$
 $= 16 + 2\sqrt{6xy} \quad (\because 3x + 2y = 16) \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 한편 $3x > 0, 2y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계
 에 의하여
 $3x + 2y \geq 2\sqrt{6xy}$
 이때 $3x + 2y = 16$ 이므로
 $16 \geq 2\sqrt{6xy}$
 $\therefore \sqrt{6xy} \leq 8$ (단, 등호는 $3x = 2y$ 일 때 성립)
 $\textcircled{1}$ 에서
 $(\sqrt{3x} + \sqrt{2y})^2 = 16 + 2\sqrt{6xy} \leq 16 + 2 \times 8 = 32$
 $\therefore 0 < \sqrt{3x} + \sqrt{2y} \leq 4\sqrt{2} \quad (\because \sqrt{3x} + \sqrt{2y} > 0)$
 따라서 구하는 최댓값은 $4\sqrt{2}$ 이다.
다른 풀이 코시-슈바르츠의 부등식 이용
 $\sqrt{3x}, \sqrt{2y}$ 가 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(1^2 + 1^2)(3x + 2y) \geq (\sqrt{3x} + \sqrt{2y})^2$
 $2 \times 16 \geq (\sqrt{3x} + \sqrt{2y})^2$
 $\therefore 0 < \sqrt{3x} + \sqrt{2y} \leq 4\sqrt{2} \quad (\because \sqrt{3x} + \sqrt{2y} > 0)$
 (단, 등호는 $\sqrt{3x} = \sqrt{2y}$, 즉 $3x = 2y$ 일 때 성립)
 따라서 구하는 최댓값은 $4\sqrt{2}$ 이다.

- 14 $x - y - 2z = -3$ 에서 $y + 2z = x + 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 에서 $y^2 + z^2 = 9 - x^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 y, z 는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(1^2 + 2^2)(y^2 + z^2) \geq (y + 2z)^2$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 대입하면
 $5(9 - x^2) \geq (x + 3)^2, 45 - 5x^2 \geq x^2 + 6x + 9$
 $x^2 + x - 6 \leq 0, (x + 3)(x - 2) \leq 0$
 $\therefore -3 \leq x \leq 2$ (단, 등호는 $2y = z$ 일 때 성립)
 따라서 구하는 최댓값은 2이다.
- 15 네 옆면을 이루는 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이가 각각 a, b 라 하면
 $a^2 + b^2 = 10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 이때 직육면체의 밑면의 한 변의 길이는 $\frac{a}{4}$, 높이는 b 이
 므로 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은
 $\frac{a}{4} \times 8 + 4b = 2a + 4b$
 a, b 는 실수이므로 코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(2^2 + 4^2)(a^2 + b^2) \geq (2a + 4b)^2$
 $20 \times 10 \geq (2a + 4b)^2 \quad (\because \textcircled{1})$
 이때 $2a + 4b > 0$ 이므로
 $0 < 2a + 4b \leq 10\sqrt{2}$ (단, 등호는 $b = 2a$ 일 때 성립)
 따라서 구하는 최댓값은 $10\sqrt{2}$ 이다.

V-1 01 함수의 뜻과 그래프

1 함수의 뜻

개념 CHECK

83쪽

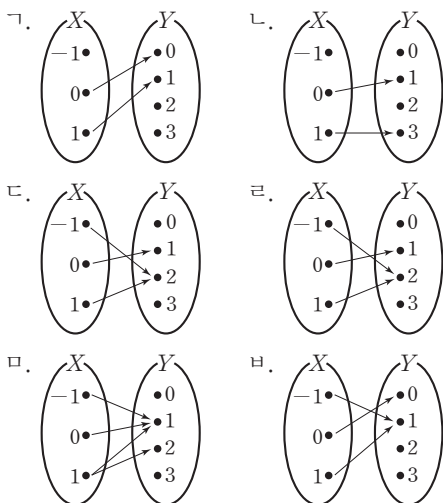
- 1 답 ㄱ, ㄷ
- 2 답 (1) 정의역: {1, 2, 3}, 공역: {4, 5, 6}, 치역: {5}
(2) 정의역: {1, 2, 3, 4}, 공역: {a, b, c}, 치역: {a, b}
- 3 답 (1) {0, 1, 2} (2) {0, 1} (3) {2, 3} (4) {0}
(1) $f(-1)=0, f(0)=1, f(1)=2$ 이므로 치역은 {0, 1, 2}
(2) $f(-1)=0, f(0)=1, f(1)=0$ 이므로 치역은 {0, 1}
(3) $f(-1)=3, f(0)=2, f(1)=3$ 이므로 치역은 {2, 3}
(4) $f(-1)=0, f(0)=0, f(1)=0$ 이므로 치역은 {0}

문제

84~86쪽

01-1 답 ㄷ, ㄴ, ㄹ

주어진 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



- ㄱ, ㄴ. 집합 X 의 원소 -1 에 대응하는 집합 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
- ㄷ, ㄹ, ㅁ. 집합 X 의 각 원소에 집합 Y 의 원소가 오직 하나씩 대응하므로 함수이다.
- ㅂ. 집합 X 의 원소 1 에 대응하는 집합 Y 의 원소가 2개이므로 함수가 아니다.
- 따라서 보기 중 X 에서 Y 로의 함수인 것은 ㄷ, ㄹ, ㅁ이다.

02-1 답 2

$\sqrt{2}$ 는 무리수이므로
 $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 = 2$
 1 은 유리수이므로
 $f(1) = -1 + 1 = 0$
 $\therefore f(\sqrt{2}) + f(1) = 2 + 0 = 2$

02-2 답 9

1 의 양의 약수는 1 의 1 개이므로
 $f(1) = 1$
 $2^2 = 4$ 의 양의 약수는 $1, 2, 4$ 의 3 개이므로
 $f(2) = 3$
 $3^2 = 9$ 의 양의 약수는 $1, 3, 9$ 의 3 개이므로
 $f(3) = 3$
 $4^2 = 16$ 의 양의 약수는 $1, 2, 4, 8, 16$ 의 5 개이므로
 $f(4) = 5$
 $5^2 = 25$ 의 양의 약수는 $1, 5, 25$ 의 3 개이므로
 $f(5) = 3$
따라서 함수 f 의 치역은 $\{1, 3, 5\}$ 이므로 치역의 모든 원소의 합은
 $1 + 3 + 5 = 9$

02-3 답 1

함수 $f(x) = -ax^2 + ax + 1$ 이 X 에서 X 로의 함수이므로 $f(1) \in X, f(0) \in X, f(-1) \in X$ 이어야 한다.
이때 $f(1) = 1 \in X, f(0) = 1 \in X$ 이므로
 $f(-1) = -1$ 또는 $f(-1) = 0$ 또는 $f(-1) = 1$
(i) $f(-1) = -1$ 일 때,
 $-2a + 1 = -1 \quad \therefore a = 1$
(ii) $f(-1) = 0$ 일 때,
 $-2a + 1 = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$
(iii) $f(-1) = 1$ 일 때,
 $-2a + 1 = 1 \quad \therefore a = 0$
(i), (ii), (iii)에서 a 는 자연수이므로 $a = 1$

03-1 답 ㄷ, ㄴ

정의역 X 의 모든 원소 $-1, 0, 1$ 에 대하여 두 함수 f, g 의 함수값을 구하면
ㄱ. $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$
 $g(-1) = 1, g(0) = 0, g(1) = 1$
 $\therefore f \neq g$
ㄴ. $f(-1) = -2, f(0) = -1, f(1) = 0$
 $g(-1) = 0, g(0) = 1, g(1) = 2$
 $\therefore f \neq g$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } f(-1) &= 1, f(0) = 0, f(1) = 1 \\ g(-1) &= 1, g(0) = 0, g(1) = 1 \\ \therefore f &= g \\ \text{ㄹ. } f(-1) &= -1, f(0) = 0, f(1) = 1 \\ g(-1) &= -1, g(0) = 0, g(1) = 1 \\ \therefore f &= g \end{aligned}$$

따라서 보기 중 $f=g$ 인 것은 ㄷ, ㄹ이다.

03-2 [답 1]

$$\begin{aligned} f &= g \text{에서 } f(0) = g(0), f(1) = g(1) \\ f(0) &= g(0) \text{에서 } b = a \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ f(1) &= g(1) \text{에서} \\ a + b &= 1 + a \quad \therefore b = 1 \\ \text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a &= 1 \\ \therefore ab &= 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

03-3 [답 7]

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \text{이어야 하므로 } 2x^2 - 2 = x^3 - x \\ x^3 - 2x^2 - x + 2 &= 0, (x+1)(x-1)(x-2) = 0 \\ \therefore x &= -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2 \\ \text{따라서 집합 } X &\text{는 공집합이 아닌 집합 } \{-1, 1, 2\} \text{의 부} \\ \text{분집합이어야 하므로 구하는 집합 } X &\text{의 개수는} \\ 2^3 - 1 &= 7 \end{aligned}$$

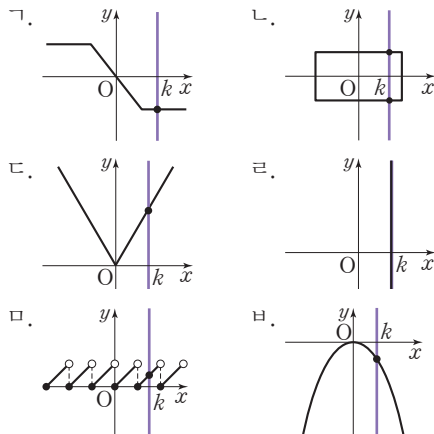
2 함수의 그래프

문제

88쪽

04-1 [답 ㄱ, ㄷ, ㄴ, ㅅ]

주어진 그래프 위에 직선 $x=k$ (k 는 상수)를 그어 교점을 나타내면 다음과 같다.



따라서 보기 중 함수의 그래프인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄴ, ㅅ이다.

3 여러 가지 함수

개념 CHECK

90쪽

1 [답] (1) ㄷ, ㄴ, ㅅ (2) ㄴ, ㅅ (3) ㄴ (4) ㄴ

문제

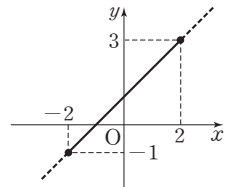
91~94쪽

05-1 [답] (1) ㄴ, ㄷ (2) ㄴ (3) ㄱ

- (1) ㄱ. $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) = f(x_2) = -3$ 이므로 일대일 대응이 아니다.
 ㄴ. 항등함수이고 일대일대응이다.
 ㄷ. $1 \neq -1$ 이지만 $f(1) = f(-1)$ 이므로 일대일대응이 아니다.
 ㄹ. $x_1 \neq x_2$ 일 때, $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이고, 공역과 치역이 모두 실수 전체의 집합이므로 일대일대응이다.
 (2) 항등함수는 $f(x) = x$ 이므로 ㄴ이다.
 (3) 상수함수는 $f(x) = c$ (c 는 상수) 꼴이므로 ㄱ이다.

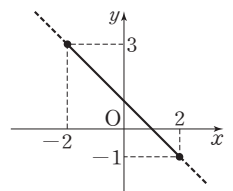
06-1 [답 2]

- (i) $a > 0$ 일 때, 함수 f 가 일대일 대응이려면 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(-2, -1)$, $(2, 3)$ 을 지나야 한다.



$$\begin{aligned} f(-2) &= -1 \text{에서} \\ -2a + b &= -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ f(2) &= 3 \text{에서} \\ 2a + b &= 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면} \\ a &= 1, b = 1 \\ \therefore a^2 + b^2 &= 1^2 + 1^2 = 2 \end{aligned}$$

- (ii) $a < 0$ 일 때, 함수 f 가 일대일 대응이려면 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(-2, 3)$, $(2, -1)$ 을 지나야 한다.



$$\begin{aligned} f(-2) &= 3 \text{에서} \\ -2a + b &= 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \\ f(2) &= -1 \text{에서} \\ 2a + b &= -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4} \\ \textcircled{3}, \textcircled{4} \text{을 연립하여 풀면} \\ a &= -1, b = 1 \\ \therefore a^2 + b^2 &= (-1)^2 + 1^2 = 2 \end{aligned}$$

(i), (ii)에 의하여 $a^2 + b^2 = 2$

06-2 ㉡ -1

함수 f 가 일대일대응이라면 오른쪽 그림과 같이 $y=f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(a, 3), (3, -2)$ 를 지나야 한다.

$f(a)=3$ 에서

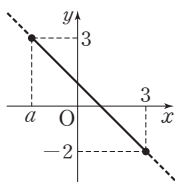
$$-a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$f(3)=-2$ 에서

$$-3+b=-2 \quad \therefore b=1$$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-2$

$$\therefore a+b=-2+1=-1$$

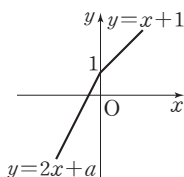


06-3 ㉡ 1

함수 f 가 일대일대응이라면 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉, 직선 $y=2x+a$ 가 점 $(0, 1)$ 을 지나야 하므로

$$a=1$$



07-1 ㉡ 7

함수 f 는 항등함수이므로

$$f(x)=x \quad \therefore f(5)=5$$

$f(2)=g(2)=2$ 이고 함수 g 는 상수함수이므로

$$g(x)=2 \quad \therefore g(5)=2$$

$$\therefore f(5)+g(5)=5+2=7$$

07-2 ㉡ 50

$f(50)=1$ 이고 함수 f 는 상수함수이므로

$$f(x)=1$$

따라서 $f(1)=f(3)=f(5)=\cdots=f(99)=1$ 이므로

$$f(1)+f(3)+f(5)+\cdots+f(99)=1 \times 50=50$$

07-3 ㉡ 0

함수 g 는 항등함수이므로 $g(x)=x$

$$\therefore g(-1)=-1, g(0)=0, g(1)=1$$

$f(0)=g(1)=h(1)$ 에서

$$f(0)=h(1)=1$$

$f(1)g(0)=f(-1)$ 에서 $g(0)=0$ 이므로

$$f(-1)=0$$

이때 함수 f 는 일대일대응이므로

$$f(1)=-1$$

또 함수 h 는 상수함수이므로 $h(1)=1$ 에서

$$h(x)=1 \quad \therefore h(-1)=1$$

$$\therefore f(1)+g(0)+h(-1)=-1+0+1=0$$

08-1 ㉡ 125, 60, 5

정의역의 원소가 3개, 공역의 원소가 5개이므로

$$\text{함수의 개수는 } 5^3=125$$

$$\text{일대일함수의 개수는 } 5 \times 4 \times 3=60$$

$$\text{상수함수의 개수는 } 5$$

08-2 ㉡ 285

정의역과 공역의 원소가 4개이므로

$$\text{함수의 개수는 } a=4^4=256$$

$$\text{일대일대응의 개수는 } b=4 \times 3 \times 2 \times 1=24$$

$$\text{항등함수의 개수는 } c=1$$

$$\text{상수함수의 개수는 } d=4$$

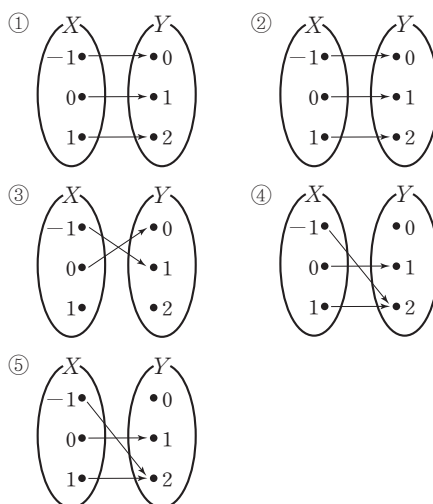
$$\therefore a+b+c+d=256+24+1+4=285$$

연습문제

95~97쪽

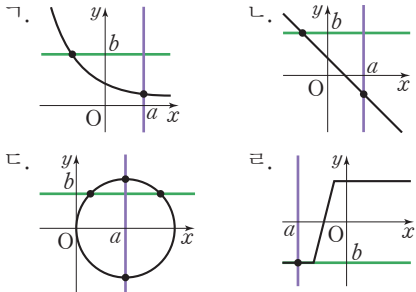
1 ㉢	2 ㉠	3 ㉢	4 ㉠	5 $0 \leq a \leq \frac{3}{5}$
6 ㉡	7 ㉡	8 ㉡	9 6	10 ㉢
11 ㉣	12 10	13 24	14 ㉡	15 12
16 ㉤	17 ㉢	18 ㉢		

1 주어진 대응을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 X 에서 Y 로의 함수가 아닌 것은 ㉢이다.

- 2 $\sqrt{2}+1$ 은 무리수이므로
 $f(\sqrt{2}+1)=(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$
 8은 유리수이므로
 $f(8)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
 $\therefore f(\sqrt{2}+1)-f(8)=3+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=3$
- 3 정의역이 $\{-1, 0, 1\}$ 이므로
 $f(-1)=|-1-1|=2$
 $f(0)=|0-1|=1$
 $f(1)=|1-1|=0$
 따라서 함수 f 의 치역이 $\{0, 1, 2\}$ 이므로 치역의 모든 원소의 합은
 $0+1+2=3$
- 4 주어진 함수는 일차함수이고 공역과 치역이 서로 같으므로
 $f(-3)=-3, f(4)=4$ 또는 $f(-3)=4, f(4)=-3$ 이어야 한다.
 (i) $a>0$ 일 때, $f(-3)=-3, f(4)=4$ 이므로
 $-3a+b=-3, 4a+b=4$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a=1, b=0$
 그런데 $ab=0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.
 (ii) $a<0$ 일 때, $f(-3)=4, f(4)=-3$ 이므로
 $-3a+b=4, 4a+b=-3$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a=-1, b=1$
 따라서 $ab=-1$ 이므로 조건을 만족시킨다.
 (i), (ii)에 의하여
 $a-b=-1-1=-2$
- 5 함수 $f(x)=ax+1$ 의 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지나고 공역이 $Y=\{y|1\leq y\leq 4\}$ 이므로
 $a\geq 0, f(1)\leq f(5)$
 함수 f 의 함수값이 공역에 속해야 하므로
 $1\leq f(1)\leq f(5)\leq 4$
 (i) $1\leq f(1)$ 에서
 $1\leq a+1 \quad \therefore a\geq 0$
 (ii) $f(1)\leq f(5)$ 에서
 $a+1\leq 5a+1 \quad \therefore a\geq 0$
 (iii) $f(5)\leq 4$ 에서
 $5a+1\leq 4 \quad \therefore a\leq \frac{3}{5}$
 (i), (ii), (iii)에 의하여
 $0\leq a\leq \frac{3}{5}$

- 6 정의역 X 의 모든 원소 $-1, 0, 1$ 에 대하여 네 함수 f, g, h, k 의 함수값을 구하면
 $f(-1)=-1, f(0)=0, f(1)=1$
 $g(-1)=1, g(0)=0, g(1)=1$
 $h(-1)=1, h(0)=0, h(1)=-1$
 $k(-1)=-1, k(0)=0, k(1)=1$
 $\therefore f=k$
- 7 $f=g$ 에서
 $f(0)=g(0), f(a)=g(a), f(a+3)=g(a+3)$
 (i) $f(a)=g(a)$ 에서
 $a^2+2a=a^3, a^3-a^2-2a=0$
 $a(a+1)(a-2)=0$
 $\therefore a=-1$ 또는 $a=0$ 또는 $a=2$
 (ii) $f(a+3)=g(a+3)$ 에서
 $(a+3)^2+2(a+3)=(a+3)^3$
 $(a+3)\{(a+3)^2-(a+3)-2\}=0$
 $(a+3)(a+4)(a+1)=0$
 $\therefore a=-4$ 또는 $a=-3$ 또는 $a=-1$
 (i), (ii)에 의하여 $a=-1$
- 8 $f(x)=g(x)$ 이어야 하므로
 $x^2+2=4x-1$
 $x^2-4x+3=0$
 $(x-1)(x-3)=0$
 $\therefore x=1$ 또는 $x=3$
 따라서 집합 X 는 공집합이 아닌 집합 $\{1, 3\}$ 의 부분집합이어야 하므로 구하는 집합 X 의 개수는
 $2^2-1=3$
- 9 주어진 그래프 위에 두 직선 $x=a, y=b$ (a, b 는 상수)를 그어 교점을 나타내면 다음 그림과 같다.
- 
- 함수의 그래프는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이므로 $p=3$
 일대일함수의 그래프는 ㄱ, ㄴ이므로 $q=2$
 일대일대응의 그래프는 ㄴ이므로 $r=1$
 $\therefore p+q+r=3+2+1=6$

- 10 주어진 조건을 모두 만족시키려면 함수 f 는 일대일대응이어야 한다.

③ [반례] $x_1 = -2, x_2 = 2$ 일 때, $-2 \neq 2$ 이지만

$$f(-2) = f(2) = -2$$

따라서 함수 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ 은 일대일대응이 아니다.

따라서 조건을 만족시키는 함수가 아닌 것은 ③이다.

- 11 일대일대응이라면 $x < 0, x \geq 0$ 일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

따라서 두 직선의 기울기의 곱은 항상 양수이므로

$$(a+3)(2-a) > 0, (a+3)(a-2) < 0$$

$$\therefore -3 < a < 2$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0, 1$ 의 4개이다.

- 12 함수 f 는 항등함수이므로

$$f(x) = x \quad \therefore f(4) = 4$$

$g(4) = f(6) = 6$ 이고 함수 g 는 상수함수이므로

$$g(x) = 6 \quad \therefore g(1) = 6$$

$$\therefore f(4) + g(1) = 4 + 6 = 10$$

- 13 ' $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$ '의 대우는

$$'x_1 \neq x_2 \text{이면 } f(x_1) \neq f(x_2)'$$

즉, 주어진 조건을 만족시키는 함수 f 는 일대일함수이다.

이때 정의역의 원소가 3개, 공역의 원소가 4개이므로 구하는 함수의 개수는

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

- 14 $f(ab) = f(a) + f(b)$ 의 양변에 $a=2, b=1$ 을 대입하면

$$f(2) = f(2) + f(1)$$

$$\therefore f(1) = 0$$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ 의 양변에 $a=2, b=\frac{1}{2}$ 을 대입하면

$$f(1) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right), 0 = 1 + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\therefore f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 + (-1) = -1$$

- 15 $3 \leq n \leq 5$ 인 자연수 n 에 대하여 $f(n)f(n+2)$ 의 값이 짝수이므로 $f(3) \times f(5), f(4) \times f(6), f(5) \times f(7)$ 의 값은 모두 짝수이다.

$f(4)$ 의 값과 $f(6)$ 의 값 중 적어도 하나는 짝수이고, 집합 X 의 원소 중 짝수인 것은 4, 6의 2개이므로 $f(3) \times f(5)$ 의 값과 $f(5) \times f(7)$ 의 값이 모두 짝수이려면 $f(5)$ 의 값은 짝수가 되어야 한다.

따라서 $f(3), f(7)$ 의 값은 모두 홀수이고 $f(3) + f(7)$ 의 최댓값은 $f(3) = 5, f(7) = 7$ 또는 $f(3) = 7, f(7) = 5$ 일 때이므로

$$5 + 7 = 12$$

- 16 $f(x) = 2ax + |4x + 1| - 3$ 에서

(i) $x \geq -\frac{1}{4}$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2ax + 4x + 1 - 3 \\ &= (2a + 4)x - 2 \end{aligned}$$

(ii) $x < -\frac{1}{4}$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2ax - (4x + 1) - 3 \\ &= (2a - 4)x - 4 \end{aligned}$$

(i), (ii)에 의하여

$$f(x) = \begin{cases} (2a+4)x-2 & (x \geq -\frac{1}{4}) \\ (2a-4)x-4 & (x < -\frac{1}{4}) \end{cases}$$

이때 일대일대응이라면 $x \geq -\frac{1}{4}, x < -\frac{1}{4}$ 일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

따라서 두 직선의 기울기의 곱은 항상 양수이므로

$$(2a+4)(2a-4) > 0$$

$$(a+2)(a-2) > 0$$

$$\therefore a < -2 \text{ 또는 } a > 2$$

- 17 함수 f 가 항등함수이므로

$$f(-2) = -2, f(-1) = -1, f(3) = 3$$

$$x \geq 0 \text{ 일 때, } f(3) = 3$$

$$x < 0 \text{ 일 때, } f(-2) = -2, f(-1) = -1 \text{ 에서}$$

$$4a - 2b - 2 = -2, a - b - 2 = -1$$

$$\therefore 4a - 2b = 0, a - b = 1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -1, b = -2$$

$$\therefore a + b = -3$$

- 18 X 의 원소 중 소수는 2, 3이고, Y 의 원소 중 소수가 아닌 것은 4, 6이다.

함수 f 가 일대일대응이므로

(i) $f(2) = 4, f(3) = 6$ 인 경우

X 의 나머지 두 원소 1, 4에 대하여

$$f(1) = 2, f(4) = 5 \text{ 또는 } f(1) = 5, f(4) = 2$$

(ii) $f(2) = 6, f(3) = 4$ 인 경우

X 의 나머지 두 원소 1, 4에 대하여

$$f(1) = 2, f(4) = 5 \text{ 또는 } f(1) = 5, f(4) = 2$$

(i), (ii)에 의하여 함수 f 의 개수는 $2 + 2 = 4$

1 합성함수

개념 CHECK

99쪽

1 답 (1) 2 (2) a

2 답 (1) -4, 11 (2) 7, 23

3 답 (1) $(f \circ g)(x) = -2x + 4$

$$(2) (g \circ h)(x) = 2x^2 - 1$$

$$(3) ((f \circ g) \circ h)(x) = 2x^2$$

$$(4) (f \circ (g \circ h))(x) = 2x^2$$

$$(1) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-2x + 3) \\ = (-2x + 3) + 1 = -2x + 4$$

$$(2) (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(-x^2 + 2) \\ = -2(-x^2 + 2) + 3 = 2x^2 - 1$$

$$(3) ((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) \\ = (f \circ g)(-x^2 + 2) \\ = -2(-x^2 + 2) + 4 = 2x^2$$

$$(4) (f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(2x^2 - 1) \\ = (2x^2 - 1) + 1 = 2x^2$$

문제

100~104쪽

01-1 답 6

$$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(1) = 3$$

$$(f \circ f \circ f)(3) = f(f(f(3))) = f(f(2)) = f(1) = 3$$

$$\therefore (f \circ f)(2) + (f \circ f \circ f)(3) = 3 + 3 = 6$$

01-2 답 1

$$(f \circ g)(\sqrt{3}) = f(g(\sqrt{3})) = f(2) = 1$$

$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(-1) = 0$$

$$\therefore (f \circ g)(\sqrt{3}) + (g \circ f)(4) = 1 + 0 = 1$$

01-3 답 6

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = 1 \text{이고 } f(1) = 2 \text{이므로}$$

$$g(2) = 1$$

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = 1 \text{이고 } g(3) = 2 \text{이므로}$$

$$f(2) = 1$$

$$\text{이때 두 함수 } f, g \text{는 } X \text{에서 } X \text{로의 일대일대응이므로}$$

$$f(3) = 3, g(1) = 3$$

$$\therefore f(3) + g(1) = 6$$

02-1 답 64

$$f(x) = 2x \text{에서}$$

$$f^2(x) = (f \circ f^1)(x) = f(f(x))$$

$$= f(2x) = 2 \times 2x = 2^2x$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$$

$$= f(2^2x) = 2 \times 2^2x = 2^3x$$

$$f^4(x) = (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x))$$

$$= f(2^3x) = 2 \times 2^3x = 2^4x$$

⋮

$$\therefore f^n(x) = 2^n x$$

$$\text{따라서 } f^7(x) = 2^7 x \text{이므로}$$

$$f^7\left(\frac{1}{2}\right) = 2^7 \times \frac{1}{2} = 64$$

02-2 답 1

$$f(x) = 1 - x \text{에서}$$

$$f^2(x) = (f \circ f^1)(x) = f(f(x))$$

$$= f(1 - x) = 1 - (1 - x) = x$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$$

$$= f(x) = 1 - x$$

$$f^4(x) = (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x))$$

$$= f(1 - x) = 1 - (1 - x) = x$$

⋮

$$\therefore f^n(x) = \begin{cases} 1 - x & (n \text{은 홀수}) \\ x & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$\text{따라서 } f^{1000}(x) = x, f^{1001}(x) = 1 - x \text{이므로}$$

$$f^{1000}(3) + f^{1001}(3) = 3 + (-2) = 1$$

02-3 답 6

$$f(1) = 2, f(2) = 1 \text{이므로}$$

$$f^2(1) = (f \circ f^1)(1) = f(f(1)) = f(2) = 1$$

$$f^3(1) = (f \circ f^2)(1) = f(f^2(1)) = f(1) = 2$$

$$f^4(1) = (f \circ f^3)(1) = f(f^3(1)) = f(2) = 1$$

⋮

$$\text{즉, } f^n(1) \text{의 값은 2, 1이 반복된다.}$$

$$\therefore f^{101}(1) = 2$$

$$f(4) = 3, f(3) = 4 \text{이므로}$$

$$f^2(4) = (f \circ f^1)(4) = f(f(4)) = f(3) = 4$$

$$f^3(4) = (f \circ f^2)(4) = f(f^2(4)) = f(4) = 3$$

$$f^4(4) = (f \circ f^3)(4) = f(f^3(4)) = f(3) = 4$$

⋮

$$\text{즉, } f^n(4) \text{의 값은 3, 4가 반복된다.}$$

$$\therefore f^{104}(4) = 4$$

$$\therefore f^{101}(1) + f^{104}(4) = 2 + 4 = 6$$

03-1 ㉮ 3

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(ax+b) \\ = ax+b+c$$

즉, $ax+b+c=3x-2$ 이므로

$$a=3, b+c=-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 $f(x)=3x+b$ 이므로 $f(1)=2$ 에서

$$3+b=2 \quad \therefore b=-1$$

이를 ㉮에 대입하여 풀면 $c=-1$

$$\therefore a-b+c=3-(-1)+(-1)=3$$

03-2 ㉮ 3

$f(1)=3$ 에서

$$a+1=3 \quad \therefore a=2$$

따라서 $f(x)=2x+1$ 이므로

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x+b) \\ = 2(2x+b)+1 = 4x+2b+1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) \\ = 2(2x+1)+b = 4x+b+2$$

이때 $f \circ g = g \circ f$ 에서

$$4x+2b+1 = 4x+b+2$$

따라서 $2b+1=b+2$ 이므로 $b=1$

$$\therefore a+b=2+1=3$$

03-3 ㉮ 1

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax+b) \\ = a(ax+b)+b = a^2x+b(a+1)$$

이때 $f \circ f = f$ 이므로

$$a^2x+b(a+1) = ax+b$$

$$\therefore a^2=a, b(a+1)=b$$

$$a^2=a \text{에서 } a(a-1)=0 \quad \therefore a=0 \text{ 또는 } a=1$$

그런데 $f(x)=ax+b$ 가 일차함수이므로 $a=1$

$a=1$ 을 $b(a+1)=b$ 에 대입하면

$$2b=b \quad \therefore b=0$$

$$\therefore a-b=1-0=1$$

04-1 ㉮ $f(x)=4x-5$

$$f\left(\frac{x+3}{2}\right) = 2x+1 \text{에서 } \frac{x+3}{2}=t \text{로 놓으면 } x=2t-3$$

$$\therefore f(t) = 2(2t-3)+1 = 4t-5$$

$$\therefore f(x) = 4x-5$$

04-2 ㉮ (1) $h(x)=x+1$ (2) $h(x)=x+3$

$$(1) (f \circ h)(x) = f(h(x)) = 3h(x)-1$$

이때 $f \circ h = g$ 에서

$$3h(x)-1 = 3x+2$$

$$\therefore h(x) = x+1$$

$$(2) (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(3x-1)$$

이때 $h \circ f = g$ 에서

$$h(3x-1) = 3x+2$$

$$3x-1=t \text{로 놓으면 } x=\frac{t+1}{3}$$

$$\therefore h(t) = 3 \times \frac{t+1}{3} + 2 = t+3$$

$$\therefore h(x) = x+3$$

04-3 ㉮ $h(x)=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$

$$(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))) \\ = h(g(-x)) = h(-4x-3)$$

이때 $h \circ g \circ f = f$ 에서 $h(-4x-3) = -x$

$$-4x-3=t \text{로 놓으면 } x=-\frac{t+3}{4}$$

$$\therefore h(t) = -\left(-\frac{t+3}{4}\right) = \frac{1}{4}t + \frac{3}{4}$$

$$\therefore h(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$$

05-1 ㉮ 풀이 참조

주어진 그래프에서

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x < 1) \\ 3 & (x \geq 1) \end{cases}, g(x) = x+2$$

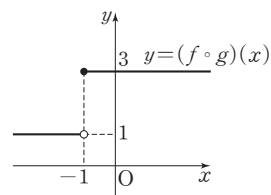
$$\therefore (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= \begin{cases} 1 & (x+2 < 1) \\ 3 & (x+2 \geq 1) \end{cases} = \begin{cases} 1 & (x < -1) \\ 3 & (x \geq -1) \end{cases}$$

따라서 합성함수

$y=(f \circ g)(x)$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같다.



05-2 ㉮ 풀이 참조

주어진 그래프에서

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x < 0) \\ -x+1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$\therefore (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \begin{cases} f(x)+1 & (f(x) < 0) \\ -f(x)+1 & (f(x) \geq 0) \end{cases}$$

이때 $f(0)=1$ 이므로 $f(x)$ 의 값이 0, 1이 되는 x 의 값을 기준으로 구간을 나누어 $f \circ f$ 의 식을 구하면

(i) $x < -1$ 일 때, $f(x) < 0$ 이므로

$$(f \circ f)(x) = f(x)+1 = (x+1)+1 = x+2$$

(ii) $-1 \leq x < 0$ 일 때, $f(x) \geq 0$ 이므로

$$(f \circ f)(x) = -f(x)+1 = -(x+1)+1 = -x$$

(iii) $0 \leq x < 1$ 일 때, $f(x) \geq 0$ 이므로

$$(f \circ f)(x) = -f(x)+1 = -(-x+1)+1 = x$$

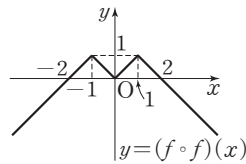
(iv) $x \geq 1$ 일 때, $f(x) < 0$ 이므로

$$(f \circ f)(x) = f(x) + 1 = (-x + 1) + 1 = -x + 2$$

(i)~(iv)에 의하여 합성함수

$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.



연습문제

105~106쪽

- 1 ① 2 5 3 ① 4 7 5 6
6 ④ 7 ② 8 ① 9 ③ 10 ②
11 ㄱ, ㄴ, ㄷ 12 6

1 $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = 2$
 $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(1) = 1$
 $\therefore (f \circ g)(1) + (g \circ f)(3) = 2 + 1 = 3$

2 $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(2) = 1$
 $(f \circ f)(6) = f(f(6)) = f(3) = 4$
 $\therefore (f \circ f)(1) + (f \circ f)(6) = 1 + 4 = 5$

3 $(f \circ g \circ f)(\sqrt{3}) = f(g(f(\sqrt{3})))$
 $= f(g(3)) = f(-2) = -4$

4 $f(a) = b$ (b 는 상수)라 하면
 $(f \circ f)(a) = f(f(a)) = f(b) = 2$
주어진 그래프에서 $f(b) = 2$ 를 만족시키는 b 의 값은
 $b = 2$ 또는 $b = 4$
 $\therefore f(a) = 2$ 또는 $f(a) = 4$
 $f(a) = 2$ 를 만족시키는 a 의 값은 $a = 2$ 또는 $a = 4$
 $f(a) = 4$ 를 만족시키는 a 의 값은 $a = 1$
따라서 모든 a 의 값의 합은 $2 + 4 + 1 = 7$

5 $f(x) = x + 3$ 에서
 $f^2(x) = (f \circ f^1)(x) = f(f(x))$
 $= f(x + 3) = x + 3 + 3 = x + 3 \times 2$
 $f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$
 $= f(x + 3 \times 2) = x + 3 \times 2 + 3 = x + 3 \times 3$
 $f^4(x) = (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x))$
 $= f(x + 3 \times 3) = x + 3 \times 3 + 3 = x + 3 \times 4$
 $\vdots$
 $\therefore f^n(x) = x + 3n$
이때 $f^k(2) = 20$ 에서 $2 + 3k = 20 \quad \therefore k = 6$

6 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(bx - 5)$
 $= 2(bx - 5) + a = 2bx - 10 + a$

즉, $2bx - 10 + a = -4x - 7$ 이므로

$2b = -4, -10 + a = -7$

$\therefore a = 3, b = -2$

따라서 $f(x) = 2x + 3, g(x) = -2x - 5$ 이므로

$(g \circ f)(-4) = g(f(-4)) = g(-5) = 5$

7 $f(-1) = -8$ 에서
 $-a - 6 = -8 \quad \therefore a = 2$

따라서 $f(x) = 2x - 6$ 이므로

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2}x + b\right)$
 $= 2\left(\frac{1}{2}x + b\right) - 6 = x + 2b - 6$
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 6)$
 $= \frac{1}{2}(2x - 6) + b = x - 3 + b$

이때 $f \circ g = g \circ f$ 에서

$x + 2b - 6 = x - 3 + b$

따라서 $2b - 6 = -3 + b$ 이므로 $b = 3$

$\therefore a - b = 2 - 3 = -1$

8 $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = \frac{1}{2}h(x) + 1$

이때 $f \circ h = g$ 이므로

$\frac{1}{2}h(x) + 1 = -x^2 + 5$

$\therefore h(x) = -2x^2 + 8$

$\therefore h(3) = -18 + 8 = -10$

9 $(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$
 $= (h \circ g)(f(x))$
 $= -f(x) + 3$

즉, $-f(x) + 3 = x^2 + 3x - 2$ 이므로

$f(x) = -x^2 - 3x + 5$

10 $f(2x - 1) = x + 3$ 에서 $2x - 1 = t$ 로 놓으면
 $x = \frac{t+1}{2}$

$\therefore f(t) = \frac{t+1}{2} + 3 = \frac{1}{2}t + \frac{7}{2}$

t 대신 $\frac{1}{2}x - 1$ 을 대입하면

$f\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x - 1\right) + \frac{7}{2} = \frac{1}{4}x + 3$

따라서 $a = \frac{1}{4}, b = 3$ 이므로 $ab = \frac{3}{4}$

11 $\neg$. $f(g(2))=f(2)=2$

ㄴ. 함수 $g \circ f$ 에서

$$x > 2 \text{ 일 때, } g(f(x)) = g(2) = 2$$

$$|x| \leq 2 \text{ 일 때, } g(f(x)) = g(x) = x^2 - 2$$

$$x < -2 \text{ 일 때, } g(f(x)) = g(-2) = 2$$

$$\therefore (g \circ f)(x) = \begin{cases} 2 & (|x| > 2) \\ x^2 - 2 & (|x| \leq 2) \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $(g \circ f)(-x)$ 를 구하면

$$(g \circ f)(-x) = \begin{cases} 2 & (|-x| > 2) \\ (-x)^2 - 2 & (|-x| \leq 2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2 & (|x| > 2) \\ x^2 - 2 & (|x| \leq 2) \end{cases}$$

$$\therefore (g \circ f)(x) = (g \circ f)(-x)$$

ㄷ. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$= \begin{cases} 2 & (x^2 - 2 > 2) \\ x^2 - 2 & (|x^2 - 2| \leq 2) \\ -2 & (x^2 - 2 < -2) \end{cases}$$

$$x^2 - 2 > 2 \text{ 에서 } x^2 > 4 \text{ 이므로 } |x| > 2$$

$$|x^2 - 2| \leq 2 \text{ 에서 } -2 \leq x^2 - 2 \leq 2$$

$$0 \leq x^2 \leq 4 \quad \therefore |x| \leq 2$$

$x^2 - 2 < -2$ 에서 $x^2 < 0$ 이므로 이를 만족시키는 x 의 값은 존재하지 않는다.

$$\text{따라서 } (f \circ g)(x) = \begin{cases} 2 & (|x| > 2) \\ x^2 - 2 & (|x| \leq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \quad (\because \textcircled{7})$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, ㄴ , ㄷ 이다.

12 $f(x) = \begin{cases} -x+3 & (0 \leq x \leq 3) \\ 3x-9 & (3 < x \leq 4) \end{cases}$ 이므로

$$(f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= \begin{cases} -f(x)+3 & (0 \leq f(x) \leq 3) \\ 3f(x)-9 & (3 < f(x) \leq 4) \end{cases}$$

그런데 주어진 그래프에서 항상 $0 \leq f(x) \leq 3$ 이므로

$$(f \circ f)(x) = -f(x) + 3 \quad (0 \leq f(x) \leq 3)$$

이때 $f(x)$ 의 값이 0, 3이 되는 x 의 값을 기준으로 구간을 나누어 $f \circ f$ 의 식을 구하면

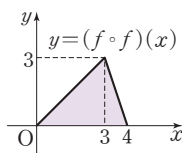
$$(f \circ f)(x) = \begin{cases} -(-x+3)+3 & (0 \leq x \leq 3) \\ -(3x-9)+3 & (3 < x \leq 4) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 3) \\ -3x+12 & (3 < x \leq 4) \end{cases}$$

따라서 $0 \leq x \leq 4$ 에서 함수

$y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$



V-1 03 역함수

1 역함수

개념 CHECK

108쪽

1 답 (1) 1 (2) 3 (3) 3 (4) 8

2 답 (1) 2 (2) 1

문제

109~114쪽

01-1 답 (1) $a=3$, $b=-3$ (2) -1

$$(1) f^{-1}(5)=2, g^{-1}(-1)=1 \text{ 에서}$$

$$f(2)=5, g(1)=-1$$

$$f(2)=5 \text{ 에서 } 2a-1=5 \quad \therefore a=3$$

$$g(1)=-1 \text{ 에서 } 2+b=-1 \quad \therefore b=-3$$

$$(2) f^{-1}(8)=k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면 } f(k)=8 \text{ 이므로}$$

$$-5k+3=8 \quad \therefore k=-1$$

$$\therefore f^{-1}(8)=-1$$

01-2 답 1

$$g^{-1}(1)=2 \text{ 에서 } g(2)=1 \text{ 이므로}$$

$$2+a=1 \quad \therefore a=-1$$

$$\therefore f(x)=-x+1, g(x)=x-1$$

$$f^{-1}(2)=k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면 } f(k)=2 \text{ 이므로}$$

$$-k+1=2 \quad \therefore k=-1$$

$$\therefore f^{-1}(2)=-1$$

$$\therefore f^{-1}(2)+g(3)=-1+2=1$$

02-1 답 $a=5$, $b=-3$

함수 f 의 역함수가 존재하려면 함수 f 는 일대일대응이어야 한다.

직선 $y=f(x)$ 의 기울기가 양수이므로 직선 $y=f(x)$ 가 두 점 $(2, b)$, $(a, 3)$ 을 지나야 한다.

$$\therefore f(2)=b, f(a)=3$$

$$f(2)=b \text{ 에서 } b=-3$$

$$f(a)=3 \text{ 에서 } 2a-7=3 \quad \therefore a=5$$

02-2 답 $a < -1$

함수 f 의 역함수가 존재하려면 함수 f 는 일대일대응이어야 한다.

따라서 $x \geq 1$, $x < 1$ 일 때의 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 하므로

$$a+1 < 0 \quad \therefore a < -1$$

02-3 [답] $a < -2$ 또는 $a > 2$

$$f(x) = |x-1| + \frac{a}{2}x - 2 \text{에서}$$

(i) $x \geq 1$ 일 때,

$$f(x) = x - 1 + \frac{a}{2}x - 2 = \left(\frac{a}{2} + 1\right)x - 3$$

(ii) $x < 1$ 일 때,

$$f(x) = -x + 1 + \frac{a}{2}x - 2 = \left(\frac{a}{2} - 1\right)x - 1$$

(i), (ii)에서 함수 f 의 역함수가 존재하려면 함수 f 는 일대일 대응이어야 하므로 두 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.

$$\text{따라서 } \left(\frac{a}{2} + 1\right)\left(\frac{a}{2} - 1\right) > 0 \text{이므로}$$

$$(a+2)(a-2) > 0 \quad \therefore a < -2 \text{ 또는 } a > 2$$

03-1 [답] -1

$y = -2x + 4$ 를 x 에 대하여 풀면

$$2x = -y + 4 \quad \therefore x = -\frac{1}{2}y + 2$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = -\frac{1}{2}x + 2$

따라서 $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$ 이므로 $ab = -1$

03-2 [답] $h^{-1}(x) = \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} h(x) &= (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-2) \\ &= 2(3x-2) + 7 = 6x+3 \end{aligned}$$

$y = 6x+3$ 이라 하고 x 에 대하여 풀면

$$6x = y - 3 \quad \therefore x = \frac{1}{6}y - \frac{1}{2}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}$

$$\therefore h^{-1}(x) = \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}$$

03-3 [답] $g(x) = 2x - \frac{7}{3}$

$y = 3x+1$ 이라 하고 x 에 대하여 풀면

$$3x = y - 1 \quad \therefore x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$g\left(\frac{1}{3}x+1\right) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \text{이므로 } \frac{1}{6}x+1=t \text{로 놓으면}$$

$$x = 6t - 6 \quad \therefore g(t) = \frac{1}{3}(6t-6) - \frac{1}{3} = 2t - \frac{7}{3}$$

$$\therefore g(x) = 2x - \frac{7}{3}$$

04-1 [답] 12

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g)^{-1}(3) &= (g^{-1} \circ f)(3) \\ &= g^{-1}(f(3)) \\ &= g^{-1}(5) \end{aligned}$$

이때 $g^{-1}(5) = k$ (k 는 상수)라 하면 $g(k) = 5$ 이므로

$$\frac{1}{2}k - 1 = 5 \quad \therefore k = 12$$

$$\therefore (f^{-1} \circ g)^{-1}(3) = g^{-1}(5) = 12$$

04-2 [답] -8

$$\begin{aligned} (g \circ (g \circ f)^{-1} \circ g)(1) \\ &= (g \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ g)(1) \\ &= (g \circ f^{-1})(1) \quad \blacktriangleleft g \circ g^{-1} = I \\ &= g(f^{-1}(1)) \end{aligned}$$

이때 $f^{-1}(1) = k$ (k 는 상수)라 하면 $f(k) = 1$ 이므로

$$-4k - 7 = 1 \quad \therefore k = -2$$

$$\therefore f^{-1}(1) = -2$$

$$\begin{aligned} \therefore (g \circ (g \circ f)^{-1} \circ g)(1) &= g(f^{-1}(1)) \\ &= g(-2) = -8 \end{aligned}$$

04-3 [답] -1

$$f = f^{-1} \text{이면 } (f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$$

$$f(x) = ax + 5 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(ax+5) \\ &= a(ax+5) + 5 = a^2x + 5a + 5 \end{aligned}$$

따라서 $a^2x + 5a + 5 = x$ 이므로

$$a^2 = 1, 5a + 5 = 0 \quad \therefore a = -1$$

05-1 [답] 4

$$\begin{aligned} (f \circ f)^{-1}(2) &= (f^{-1} \circ f^{-1})(2) \\ &= f^{-1}(f^{-1}(2)) \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$f^{-1}(2) = k$ (k 는 상수)라 하면

$$f(k) = 2$$

오른쪽 그림에서 $f(3) = 2$ 이므로

$k = 3$

$$\therefore f^{-1}(2) = 3$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} (f \circ f)^{-1}(2) &= f^{-1}(f^{-1}(2)) \\ &= f^{-1}(3) \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

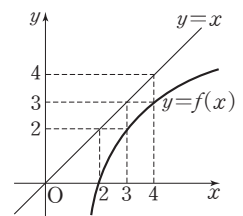
또 $f^{-1}(3) = l$ (l 은 상수)이라 하면 $f(l) = 3$

위의 그림에서 $f(4) = 3$ 이므로 $l = 4$

$$\therefore f^{-1}(3) = 4$$

이를 ②에 대입하면

$$(f \circ f)^{-1}(2) = f^{-1}(3) = 4$$



05-2 ㉔ ③

$$h(c) = (f \circ g \circ f^{-1})(c) = f(g(f^{-1}(c))) \quad \dots\dots ㉔$$

$f^{-1}(c) = k$ (k 는 상수)라 하면

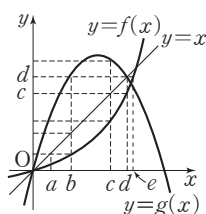
$$f(k) = c$$

오른쪽 그림에서 $f(d) = c$ 이므로

$$k = d \quad \therefore f^{-1}(c) = d$$

이를 ㉔에 대입하면

$$\begin{aligned} h(c) &= f(g(f^{-1}(c))) \\ &= f(g(d)) = f(d) = c \end{aligned}$$



06-1 ㉔ -2

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

$$\begin{aligned} 2x+k &= x \text{에서 교점의 } x \text{좌표가 } 2 \text{이므로 } x=2 \text{를 대입하면} \\ 4+k &= 2 \quad \therefore k = -2 \end{aligned}$$

06-2 ㉔ -16

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.

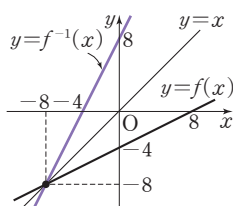
두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같으므로

$$\frac{1}{2}x - 4 = x \text{에서 } x = -8$$

따라서 교점의 좌표는 $(-8, -8)$ 이므로

$$a = -8, b = -8 \quad \therefore a + b = -16$$



06-3 ㉔ $\sqrt{2}$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.

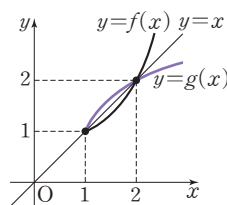
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같으므로

$$(x-1)^2 + 1 = x \text{에서 } x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 두 교점의 좌표는 $(1, 1)$, $(2, 2)$ 이므로 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$$



연습문제

115~116쪽

1 ①	2 ②	3 ④	4 ④	5 3
6 ⑤	7 ④	8 ②	9 (2, 2)	10 5
11 ④	12 40			

1 $f^{-1}(5) = 2$ 에서 $f(2) = 5$ 이므로

$$2a + b = 5 \quad \dots\dots ㉔$$

$f^{-1}(6) = 3$ 에서 $f(3) = 6$ 이므로

$$3a + b = 6 \quad \dots\dots ㉕$$

㉔, ㉕을 연립하여 풀면 $a = 1, b = 3$

$$\therefore ab = 3$$

2 $(f^{-1} \circ g)(4) = f^{-1}(g(4))$

$$= f^{-1}(3)$$

$f^{-1}(3) = k$ (k 는 상수)라 하면 $f(k) = 3$

$$\therefore k = 2$$

$$\therefore (f^{-1} \circ g)(4) = f^{-1}(3) = 2$$

3 $(f \circ g^{-1})(a) = f(g^{-1}(a))$

$$= 3g^{-1}(a) + 1$$

즉, $3g^{-1}(a) + 1 = 1$ 이므로

$$g^{-1}(a) = 0$$

$g^{-1}(a) = 0$ 에서 $g(0) = a$ 이므로

$$a = 2$$

4 함수 f 의 역함수가 존재하려면 함수 f 는 일대일대응이어야 한다.

직선 $y=f(x)$ 의 기울기가 양수이므로 직선 $y=f(x)$ 가 두 점 $(1, 1)$, $(4, 3)$ 을 지나야 한다.

$$f(1) = 1 \text{에서 } a + b = 1 \quad \dots\dots ㉔$$

$$f(4) = 3 \text{에서 } 4a + b = 3 \quad \dots\dots ㉕$$

㉔, ㉕을 연립하여 풀면

$$a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a - b = \frac{1}{3}$$

5 $f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$

함수 f 의 역함수가 존재하려면 함수 f 는 일대일대응이어야 하므로

$$a \geq 1, f(a) = a$$

$$f(a) = a \text{에서 } a^2 - 2a = a$$

$$a^2 - 3a = 0, a(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 3 (\because a \geq 1)$$

6 $y=x-3$ 이라 하고 x 에 대하여 풀면 $x=y+3$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=x+3$

$$\therefore g^{-1}(x)=x+3$$

$$\begin{aligned}\therefore (f \circ g^{-1})(x) &= f(g^{-1}(x)) \\ &= f(x+3) \\ &= 2(x+3)+1 \\ &= 2x+7\end{aligned}$$

따라서 $a=2, b=7$ 이므로

$$ab=14$$

7 $(g^{-1} \circ (f \circ g^{-1})^{-1} \circ g)(x)$

$$= (g^{-1} \circ g \circ f^{-1} \circ g)(x)$$

$$= (f^{-1} \circ g)(x) \quad \blacktriangleleft g^{-1} \circ g = I$$

$$= f^{-1}(g(x))$$

$$= f^{-1}(2x+3) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(x)=x-1$ 에서 $y=x-1$ 이라 하고 x 에 대하여 풀면

$$x=y+1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=x+1$

$$\therefore f^{-1}(x)=x+1$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } f^{-1}(2x+3) = (2x+3)+1 = 2x+4$$

따라서 $a=2, b=4$ 이므로

$$a+b=6$$

8 $f^{-1}(k)=p$ (p 는 상수)라 하면

$$f(p)=k$$

오른쪽 그림에서 $f(c)=k$ 이

므로

$$p=c \quad \therefore f^{-1}(k)=c$$

$$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(k)$$

$$= f^{-1}(f^{-1}(k))$$

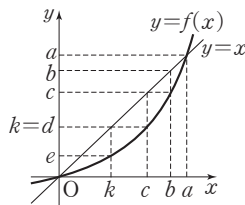
$$= f^{-1}(c)$$

$f^{-1}(c)=q$ (q 는 상수)라 하면 $f(q)=c$

위의 그림에서 $f(b)=c$ 이므로

$$q=b \quad \therefore f^{-1}(c)=b$$

$$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(k) = f^{-1}(c) = b$$



9 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

$$x^2-x=x \text{에서 } x^2-2x=0, x(x-2)=0$$

$$\therefore x=2 \left(\because x \geq \frac{1}{2} \right)$$

따라서 교점의 좌표는 $(2, 2)$ 이다.

10 함수 f 의 역함수가 존재하려면

함수 f 는 일대일대응이어야 하므로

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

따라서 $y=a(x-2)^2+b$ 의 그래프가 점 $(2, 4)$ 를 지나야 하므로

$$b=4$$

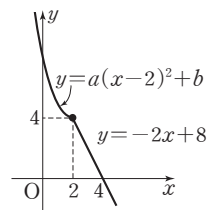
$x \geq 2$ 에서 직선 $y=-2x+8$ 의 기울기가 음수이므로

$x < 2$ 에서 곡선 $y=a(x-2)^2+b$ 의 x^2 의 계수가 양수이어야 한다.

$$\therefore a > 0$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 1이므로 $a+b$ 의 최솟값은

$$1+4=5$$



11 함수 $y=f(2x+3)$ 에서 $h(x)=2x+3$ 이라 하면 함수

$$y=f(h(x))=(f \circ h)(x) \text{의 역함수는}$$

$$(f \circ h)^{-1}(x) = (h^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

$$= h^{-1}(f^{-1}(x))$$

$$= h^{-1}(g(x)) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$h(x)=2x+3$ 에서 $y=2x+3$ 이라 하고 x 에 대하여 풀면

$$2x=y-3 \quad \therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

$$\therefore h^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

$\textcircled{1}$ 에서

$$(f \circ h)^{-1}(x) = h^{-1}(g(x))$$

$$= \frac{1}{2}g(x) - \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } a=\frac{1}{2}, b=-\frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$a+b=-1$$

12 함수 $y=f(x)$ 의 역함수

$y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와

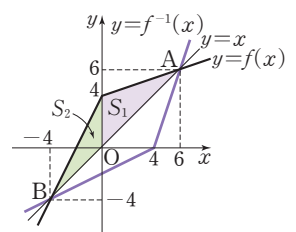
직선 $y=x$ 에 대하여

대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면 S 는 $-4 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이므로

$S_1 = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12, S_2 = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

$$\therefore S = 2(S_1 + S_2) = 2(12 + 8) = 40$$



V-2 01 유리함수

1 유리식

개념 CHECK

118쪽

- 1 답 (1) $\frac{a^2}{abc} \cdot \frac{b^2}{abc} \cdot \frac{c^2}{abc}$
 (2) $\frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-1)(x-2)} \cdot \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$
- 2 답 (1) $\frac{2xy^2}{5a}$ (2) $\frac{x+4}{2x-3}$

문제

119~122쪽

- 01-1 답 (1) $\frac{2}{x-1}$ (2) 1
- (1) $\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{2x^2+x}{x^3-1}$
 $= \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+x+1)(x-1)}$
 $+ \frac{2x^2+x}{(x-1)(x^2+x+1)}$
 $= \frac{x^2+x+1-(x^2-1)+2x^2+x}{(x-1)(x^2+x+1)}$
 $= \frac{2(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$
 $= \frac{2}{x-1}$
- (2) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4} \div \frac{x^2-4x+3}{2x^2+3x+1} \times \frac{x^2+3x-4}{2x^2-3x-2}$
 $= \frac{(x-2)(x-3)}{(x+4)(x+1)} \times \frac{(x+1)(2x+1)}{(x-1)(x-3)}$
 $\times \frac{(x+4)(x-1)}{(2x+1)(x-2)}$
 $= 1$

- 01-2 답 $\frac{8}{x^8-1}$
- $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1}$
 $= \frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1}$
 $= \frac{2}{x^2-1} - \frac{2}{x^2+1} - \frac{4}{x^4+1}$
 $= \frac{2(x^2+1)-2(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} - \frac{4}{x^4+1}$
 $= \frac{4}{x^4-1} - \frac{4}{x^4+1}$
 $= \frac{4(x^4+1)-4(x^4-1)}{(x^4-1)(x^4+1)}$
 $= \frac{8}{x^8-1}$

02-1 답 a=1, b=-2

주어진 식의 좌변을 통분하여 정리하면

$$\frac{a}{x+1} - \frac{bx+a}{x^2-x+1} = \frac{a(x^2-x+1)-(bx+a)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{(a-b)x^2-(2a+b)x}{x^3+1}$$

이때 $\frac{(a-b)x^2-(2a+b)x}{x^3+1} = \frac{3x^2}{x^3+1}$ 이 x에 대한 항등식

이므로 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$$a-b=3, 2a+b=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, b=-2$$

02-2 답 a=2, b=1, c=2

주어진 식의 좌변을 통분하여 정리하면

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$$

$$= \frac{ax(x+1)+b(x-1)(x+1)+cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{(a+b+c)x^2+(a-c)x-b}{x(x^2-1)}$$

이때 $\frac{(a+b+c)x^2+(a-c)x-b}{x(x^2-1)} = \frac{5x^2-1}{x(x^2-1)}$ 이 x에 대

한 항등식이므로 분자의 동류항의 계수를 비교하면

$$a+b+c=5, a-c=0, b=1$$

즉, a+c=4, a-c=0이므로 두 식을 연립하여 풀면

$$a=2, c=2$$

- 03-1 답 (1) $\frac{16(x+3)}{x(x+2)(x+4)(x+6)}$
 (2) a+1
 (3) $\frac{3}{(x+1)(x+7)}$

(1) $\frac{x+1}{x} - \frac{x+3}{x+2} - \frac{x+5}{x+4} + \frac{x+7}{x+6}$
 $= \frac{x+1}{x} - \frac{(x+2)+1}{x+2} - \frac{(x+4)+1}{x+4} + \frac{(x+6)+1}{x+6}$
 $= 1 + \frac{1}{x} - \left(1 + \frac{1}{x+2}\right) - \left(1 + \frac{1}{x+4}\right) + 1 + \frac{1}{x+6}$
 $= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+6}$
 $= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}\right) - \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6}\right)$
 $= \frac{x+2-x}{x(x+2)} - \frac{x+6-(x+4)}{(x+4)(x+6)}$
 $= \frac{2}{x(x+2)} - \frac{2}{(x+4)(x+6)}$
 $= \frac{2(x+4)(x+6)-2x(x+2)}{x(x+2)(x+4)(x+6)}$
 $= \frac{16(x+3)}{x(x+2)(x+4)(x+6)}$

$$(2) \frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{a}}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\frac{a+1}{a}}} = \frac{1}{1-\frac{a}{a+1}} \\ = \frac{1}{\frac{a+1-a}{a+1}} = a+1$$

$$(3) \frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+7)} \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} \right) \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+7} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+7} \right) \\ = \frac{1}{2} \times \frac{x+7-(x+1)}{(x+1)(x+7)} \\ = \frac{3}{(x+1)(x+7)}$$

03-2 $\frac{10}{x(x+10)}$

$$\frac{1}{x^2+x} + \frac{2}{x^2+4x+3} + \frac{3}{x^2+9x+18} + \frac{4}{x^2+16x+60} \\ = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{3}{(x+3)(x+6)} \\ + \frac{4}{(x+6)(x+10)} \\ = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) + 2 \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) \\ + 3 \times \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+6} \right) + 4 \times \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+10} \right) \\ = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} = \frac{x+10-x}{x(x+10)} \\ = \frac{10}{x(x+10)}$$

04-1 $\frac{13}{6}$ (1) $\frac{50}{47}$

$x:y:z=3:4:5$ 이므로 $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$

$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k (k \neq 0)$ 로 놓으면

$x=3k, y=4k, z=5k$

이를 주어진 식에 대입하면

$$(1) \frac{x+2y+3z}{x+y+z} = \frac{3k+2 \times 4k+3 \times 5k}{3k+4k+5k} \\ = \frac{26k}{12k} = \frac{13}{6}$$

$$(2) \frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx} = \frac{(3k)^2+(4k)^2+(5k)^2}{3k \times 4k+4k \times 5k+5k \times 3k} \\ = \frac{50k^2}{47k^2} = \frac{50}{47}$$

04-2 $\frac{1}{6}$

$(x+y):(y+z):(z+x)=3:5:4$ 이므로

$$\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{5} = \frac{z+x}{4}$$

$\frac{x+y}{3} = \frac{y+z}{5} = \frac{z+x}{4} = k (k \neq 0)$ 로 놓으면

$x+y=3k \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$y+z=5k \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$z+x=4k \quad \dots\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}$ 을 하면 $2(x+y+z)=12k$

$\therefore x+y+z=6k \quad \dots\dots \textcircled{4}$

$\textcircled{4}$ 에서 $\textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{1}$ 을 각각 빼면

$x=k, y=2k, z=3k$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\frac{(x+y+z)^3}{x^3+y^3+z^3} = \frac{(k+2k+3k)^3}{k^3+(2k)^3+(3k)^3} = \frac{216k^3}{36k^3} = 6$$

2 유리함수의 그래프

개념 CHECK

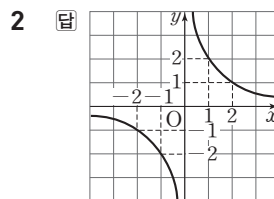
125쪽

1 $\textcircled{1} \{x|x \neq -2 \text{인 실수}\}$

$\textcircled{2} \{x|x \neq -4 \text{인 실수}\}$

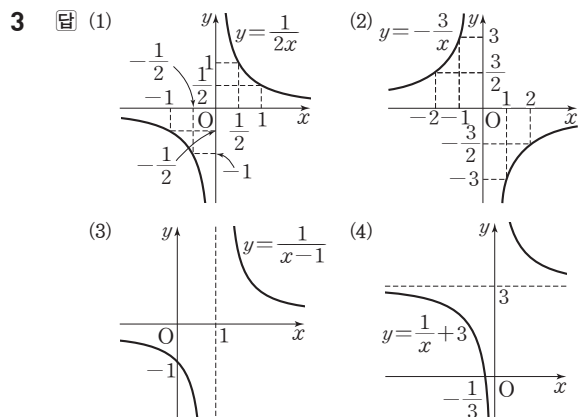
$\textcircled{3} \{x|x \neq -5, x \neq 5 \text{인 실수}\}$

$\textcircled{4} \{x|x \text{는 모든 실수}\}$



$\textcircled{1} \{x|x \neq 0 \text{인 실수}\} \quad \textcircled{2} \{y|y \neq 0 \text{인 실수}\}$

$\textcircled{3} x=0, y=0$



4 [답] (1) $y = -\frac{7}{x+2} + 2$ (2) $y = \frac{3}{x+1} - 1$
 (3) $y = \frac{3}{x-1} + 2$ (4) $y = -\frac{7}{x-3} - 3$

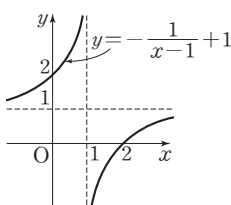
문제

126~133쪽

05-1 [답] (1)~(4) 풀이 참조

(1) $y = -\frac{1}{x-1} + 1$ 의 그래프

는 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



∴ 정의역: $\{x | x \neq 1 \text{인 실수}\}$,

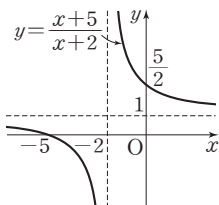
치역: $\{y | y \neq 1 \text{인 실수}\}$,

점근선의 방정식: $x=1, y=1$

(2) $y = \frac{x+5}{x+2} = \frac{(x+2)+3}{x+2} = \frac{3}{x+2} + 1$

따라서 $y = \frac{x+5}{x+2}$ 의 그래프

는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



∴ 정의역: $\{x | x \neq -2 \text{인 실수}\}$,

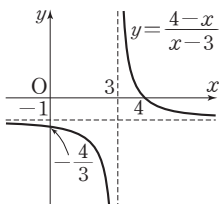
치역: $\{y | y \neq 1 \text{인 실수}\}$,

점근선의 방정식: $x=-2, y=1$

(3) $y = \frac{4-x}{x-3} = \frac{-(x-3)+1}{x-3} = \frac{1}{x-3} - 1$

따라서 $y = \frac{4-x}{x-3}$ 의 그래프

는 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



∴ 정의역: $\{x | x \neq 3 \text{인 실수}\}$,

치역: $\{y | y \neq -1 \text{인 실수}\}$,

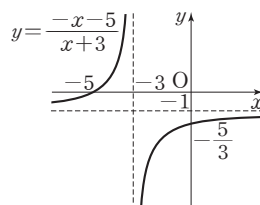
점근선의 방정식: $x=3, y=-1$

(4) $y = \frac{-x-5}{x+3} = \frac{-(x+3)-2}{x+3}$
 $= -\frac{2}{x+3} - 1$

따라서 $y = \frac{-x-5}{x+3}$ 의

그래프는 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그

래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



∴ 정의역: $\{x | x \neq -3 \text{인 실수}\}$,

치역: $\{y | y \neq -1 \text{인 실수}\}$,

점근선의 방정식: $x=-3, y=-1$

06-1 [답] (1) 최댓값: 1, 최솟값: $-\frac{3}{2}$

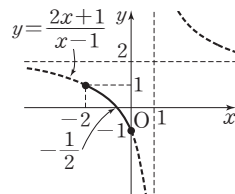
(2) 최댓값: 1, 최솟값: $-\frac{3}{2}$

(1) $y = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1}$
 $= \frac{3}{x-1} + 2$

$y = \frac{2x+1}{x-1}$ 의 그래프는 $y = \frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이고 $x=-2$ 일 때 $y=1$, $x=0$ 일 때 $y=-1$ 이다.

따라서 $-2 \leq x \leq 0$ 에서

$y = \frac{2x+1}{x-1}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 1이고 최솟값은 -1 이다.

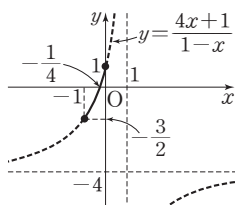


(2) $y = \frac{4x+1}{1-x} = \frac{4(x-1)+5}{-(x-1)}$
 $= -\frac{5}{x-1} - 4$

$y = \frac{4x+1}{1-x}$ 의 그래프는 $y = -\frac{5}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이고 $x=-1$ 일 때 $y=-\frac{3}{2}$, $x=0$ 일 때 $y=1$ 이다.

따라서 $-1 \leq x \leq 0$ 에서

$y = \frac{4x+1}{1-x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 최댓값은 1이고 최솟값은 $-\frac{3}{2}$ 이다.



06-2 [답] $a=0, b=-4$

$$y = \frac{x+b}{x-2} = \frac{x-2+2+b}{x-2} = \frac{2+b}{x-2} + 1$$

따라서 $y = \frac{x+b}{x-2}$ 의 그래프는

$y = \frac{2+b}{x}$ ($b < -2$)의 그래프를

x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것

이므로 $a \leq x \leq 1$ 에서 $y = \frac{x+b}{x-2}$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

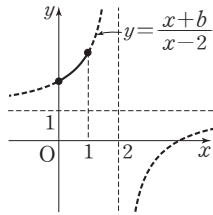
함수 $y = \frac{x+b}{x-2}$ 가 $x=1$ 에서 최댓값 3을 가지므로

$$\frac{1+b}{-1} = 3 \quad \therefore b = -4$$

함수 $y = \frac{x-4}{x-2}$ 가 $x=a$ 에서 최솟값 2를 가지므로

$$\frac{a-4}{a-2} = 2, 2a-4 = a-4$$

$$\therefore a = 0$$



06-3 [답] $\frac{3}{2}$

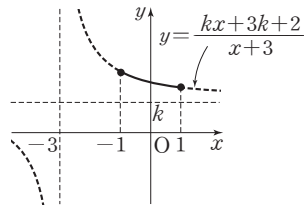
$$y = \frac{kx+3k+2}{x+3} = \frac{k(x+3)+2}{x+3} = \frac{2}{x+3} + k$$

따라서 $y = \frac{kx+3k+2}{x+3}$ 의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $-1 \leq x \leq 1$ 에서

$$\text{함수 } y = \frac{kx+3k+2}{x+3}$$

의 최댓값이 2이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



함수 $y = \frac{kx+3k+2}{x+3}$ 는 $x=-1$ 에서 최댓값 2를 가지므로

$$\frac{-k+3k+2}{2} = 2, 2k+2=4 \quad \therefore k=1$$

함수 $y = \frac{x+5}{x+3}$ 는 $x=1$ 에서 최솟값을 가지므로 최솟값은

$$\frac{1+5}{1+3} = \frac{3}{2}$$

07-1 [답] 3

$$y = \frac{ax+5}{x+1} = \frac{a(x+1)-a+5}{x+1} = \frac{-a+5}{x+1} + a$$

따라서 $y = \frac{ax+5}{x+1}$ 의 그래프는 $y = \frac{-a+5}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y = \frac{ax+5}{x+1}$ 의 그래프를 평행이동하면 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프와 겹치므로

$$-a+5=2 \quad \therefore a=3$$

07-2 [답] 3

$$y = \frac{2x+3}{x+1} = \frac{2(x+1)+1}{x+1} = \frac{1}{x+1} + 2$$

의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$y-b = \frac{1}{(x-a)+1} + 2$$

$$\therefore y = \frac{1}{x-a+1} + 2 + b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$y = \frac{3x-2}{x-1} = \frac{3(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 3$$

의 그래프는 ⑦의 그래프와 같으므로

$$-a+1=-1, 2+b=3$$

$$\therefore a=2, b=1 \quad \therefore a+b=3$$

07-3 [답] ㄱ, ㄴ, ㄹ

$$\text{ㄱ. } y = \frac{1}{3x-3} = \frac{1}{3(x-1)}$$

따라서 $y = \frac{1}{3x-3}$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{ㄴ. } y = \frac{9x+1}{3x} = \frac{3 \times 3x + 1}{3x} = \frac{1}{3x} + 3$$

따라서 $y = \frac{9x+1}{3x}$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{3x}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{ㄷ. } y = \frac{6x+4}{3x+3} = \frac{2(3x+3)-2}{3x+3} = -\frac{2}{3(x+1)} + 2$$

따라서 $y = \frac{6x+4}{3x+3}$ 의 그래프는 $y = -\frac{2}{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{ㄹ. } y = \frac{x-2}{3-3x} = \frac{(x-1)-1}{-3(x-1)} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3}$$

따라서 $y = \frac{x-2}{3-3x}$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 보기의 함수 중 그 그래프가 평행이동에 의하여 $y = \frac{1}{3x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

08-1 [답] 1

$$y = \frac{3x+1}{2x+1} = \frac{3\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{2}$$

따라서 $y = \frac{3x+1}{2x+1}$ 의 그래프는 $y = -\frac{1}{4x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼 평행이동한 것이므로 점 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 에 대하여 대칭이다.

즉, $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$ 이므로 $a+b=1$

08-2 [답] 10

$$y = \frac{5x+2}{x-1} = \frac{5(x-1)+7}{x-1} = \frac{7}{x-1} + 5$$

따라서 $y = \frac{5x+2}{x-1}$ 의 그래프는 $y = \frac{7}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y = \frac{7}{x}$ 의 그래프는 두 직선 $y=x$, $y=-x$ 에 대하여

대칭이므로 $y = \frac{5x+2}{x-1}$ 의 그래프는 두 직선 $y=x$,

$y=-x$ 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 두 직선에 대하여 대칭이다.

직선 $y=x$ 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동하면

$$y-5=x-1 \quad \therefore y=x+4$$

직선 $y=-x$ 를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동하면

$$y-5=-(x-1) \quad \therefore y=-x+6$$

이때 $a > m$ 이므로

$$a=1, b=4, m=-1, n=6$$

$$\therefore ab-mn=1 \times 4 - (-1) \times 6 = 10$$

08-3 [답] $a=2, b=-1$

$$y = \frac{ax+1}{x+b} = \frac{a(x+b)-ab+1}{x+b} = \frac{-ab+1}{x+b} + a$$

따라서 $y = \frac{ax+1}{x+b}$ 의 그래프는 $y = \frac{-ab+1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-b$ 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이므로 점 $(-b, a)$ 에 대하여 대칭이다.

이때 두 직선 $y=x+1$, $y=-x+3$ 이 점 $(-b, a)$ 를 지나야 하므로 $a=-b+1$, $a=b+3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=-1$

09-1 [답] $a=9, b=-36, c=-6$

주어진 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=6$, $y=9$ 이므로 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x-6} + 9 \quad (k > 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(4, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{k}{4-6} + 9 \quad \therefore k = 18$$

이를 ①에 대입하여 정리하면

$$y = \frac{18}{x-6} + 9 = \frac{18+9(x-6)}{x-6} = \frac{9x-36}{x-6}$$

$$\therefore a=9, b=-36, c=-6$$

09-2 [답] 5

$y = \frac{ax-b}{x+c}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1$,

$y=2$ 이므로 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x+1} + 2 \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \frac{k}{1+1} + 2 \quad \therefore k = -4$$

이를 ①에 대입하여 정리하면

$$y = \frac{-4}{x+1} + 2 = \frac{-4+2(x+1)}{x+1} = \frac{2x-2}{x+1}$$

따라서 $a=2, b=2, c=1$ 이므로

$$a+b+c=5$$

09-3 [답] 3

$$y = \frac{ax+1}{x+b} = \frac{a(x+b)-ab+1}{x+b} = \frac{-ab+1}{x+b} + a$$

따라서 함수 $y = \frac{ax+1}{x+b}$ 의 정의역은 $\{x | x \neq -b \text{인 실수}\}$,

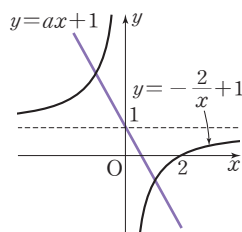
치역은 $\{y | y \neq a \text{인 실수}\}$ 이므로 $a=1, b=3$

$$\therefore ab=3$$

10-1 [답] $a < 0$

$y = -\frac{2}{x} + 1$ 의 그래프는 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=ax+1$ 은 a 의 값에 관계없이 점 $(0, 1)$ 을 지난다.

이때 $y = -\frac{2}{x} + 1$ 의 그래프와 직선 $y=ax+1$ 이 만나려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $a < 0$

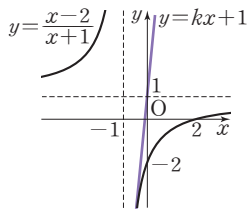


10-2 [답] 12

$$y = \frac{x-2}{x+1} = \frac{x+1-3}{x+1} = -\frac{3}{x+1} + 1$$

따라서 $y = \frac{x-2}{x+1}$ 의 그래프는 $y = -\frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=kx+1$ 은 k 의 값에 관계없이 점 $(0, 1)$ 을 지난다.

이때 $y = \frac{x-2}{x+1}$ 의 그래프와 직선 $y = kx+1$ 이 한 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) $k=0$ 일 때, 직선 $y=1$ 은

점근선이므로 $y = \frac{x-2}{x+1}$

의 그래프와 만나지 않는다.

(ii) $k \neq 0$ 일 때, $\frac{x-2}{x+1} = kx+1$ 에서

$$x-2 = (kx+1)(x+1)$$

$$x-2 = kx^2 + kx + x + 1$$

$$\therefore kx^2 + kx + 3 = 0$$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$D = k^2 - 12k = 0, k(k-12) = 0$$

$$\therefore k = 12 \quad (\because k \neq 0)$$

(i), (ii)에 의하여 $k=12$

11-1 [답] 31

$$f(x) = \frac{2x}{x+1} \text{에서}$$

$$f^2(x) = (f \circ f^1)(x) = f(f(x))$$

$$= f\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \frac{2 \times \frac{2x}{x+1}}{\frac{2x}{x+1} + 1}$$

$$= \frac{\frac{4x}{x+1}}{\frac{2x + (x+1)}{x+1}} = \frac{4x}{3x+1}$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$$

$$= f\left(\frac{4x}{3x+1}\right) = \frac{2 \times \frac{4x}{3x+1}}{\frac{4x}{3x+1} + 1}$$

$$= \frac{\frac{8x}{3x+1}}{\frac{4x + (3x+1)}{3x+1}} = \frac{8x}{7x+1}$$

$$f^4(x) = (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x))$$

$$= f\left(\frac{8x}{7x+1}\right) = \frac{2 \times \frac{8x}{7x+1}}{\frac{8x}{7x+1} + 1}$$

$$= \frac{\frac{16x}{7x+1}}{\frac{8x + (7x+1)}{7x+1}} = \frac{16x}{15x+1}$$

따라서 $a=16, b=0, c=15$ 이므로

$$a+b+c=31$$

11-2 [답] $\frac{2021}{2020}$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \text{에서}$$

$$f^2(x) = (f \circ f^1)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x - (x-1)}{x-1}} = x$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$$

$$= f(x) = \frac{x}{x-1}$$

따라서 자연수 n 에 대하여

$$f^2(x) = f^4(x) = f^6(x) = \dots = f^{2n}(x) = x$$

는 항등함수이므로

$$f^{2021}(x) = f^{1010 \times 2 + 1}(x) = f(x) = \frac{x}{x-1}$$

$$\therefore f^{2021}(2021) = \frac{2021}{2020}$$

12-1 [답] $g(x) = \frac{x+2}{2x-1}$

$(f \circ g)(x) = x$ 에서 $g(x) = f^{-1}(x)$ 이므로 함수 g 는 함수 f 의 역함수이다.

$$y = \frac{x+2}{2x-1} \text{라 하고 } x \text{에 대하여 풀면}$$

$$y(2x-1) = x+2, x(2y-1) = y+2$$

$$\therefore x = \frac{y+2}{2y-1}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{x+2}{2x-1} \quad \therefore g(x) = \frac{x+2}{2x-1}$$

12-2 [답] -1

$$y = \frac{-x+a+2}{x-a} \text{라 하고 } x \text{에 대하여 풀면}$$

$$y(x-a) = -x+a+2, x(y+1) = ay+a+2$$

$$\therefore x = \frac{ay+a+2}{y+1}$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \frac{ax+a+2}{x+1}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{ax+a+2}{x+1}$$

이때 $f = f^{-1}$ 에서

$$\frac{-x+a+2}{x-a} = \frac{ax+a+2}{x+1} \quad \therefore a = -1$$

12-3 [답] 7

$f(x) = \frac{ax-1}{bx+2}$ 의 그래프가 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$f(2) = 1 \text{에서 } \frac{2a-1}{2b+2} = 1 \quad \therefore 2a-2b=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $y=f(x)$ 의 역함수의 그래프가 점 $(2, 1)$ 을 지나므로
 $f^{-1}(2)=1$ 에서 $f(1)=2$

$$\frac{a-1}{b+2}=2 \quad \therefore a-2b=5 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=-2, b=-\frac{7}{2} \quad \therefore ab=7$$

연습문제

134~136쪽

- | | | | | |
|------------------|------|--------------------|-------------------|------------------|
| 1 0 | 2 ① | 3 $\frac{99}{100}$ | 4 7 | 5 $\frac{3}{23}$ |
| 6 ④ | 7 ① | 8 1 | 9 ① | 10 ⑤ |
| 11 ③ | 12 ⑤ | 13 ① | 14 4 | 15 3 |
| 16 ② | 17 ⑤ | 18 $\frac{3}{5}$ | 19 $0 \leq k < 1$ | |
| 20 $\frac{4}{3}$ | 21 3 | | | |

$$\begin{aligned} 1 \quad & \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{-a}{(a-b)(c-a)} + \frac{-b}{(a-b)(b-c)} + \frac{-c}{(c-a)(b-c)} \\ &= \frac{-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{-ab+ca-bc+ab-ca+bc}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0 \end{aligned}$$

2 주어진 식의 좌변을 통분하여 정리하면

$$\begin{aligned} & \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3} \\ &= \frac{a(x+1)^2 + b(x+1) + c}{(x+1)^3} \\ &= \frac{ax^2 + (2a+b)x + a+b+c}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

이때 $\frac{ax^2 + (2a+b)x + a+b+c}{(x+1)^3} = \frac{x^2+4x+2}{(x+1)^3}$ 가 x 에 대한 항등식이므로

$$a=1, 2a+b=4, a+b+c=2$$

$$\therefore a=1, b=2, c=-1 \quad \therefore abc=-2$$

3 $f(x)=x^2+x$ 에서

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x)} &= \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \\ \therefore \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \dots + \frac{1}{f(99)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad & 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1+x+1}{1+x}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1+x}{2+x}} \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{2+x+1+x}{2+x}} = 1 + \frac{2+x}{3+2x} \\ &= \frac{3+2x+2+x}{3+2x} = \frac{5+3x}{3+2x} \end{aligned}$$

이때 $\frac{5+3x}{3+2x} = \frac{3x+a}{bx+3}$ 가 x 에 대한 항등식이므로

$$a=5, b=2 \quad \therefore a+b=7$$

5 $(x+y):(y+z):(z+x)=4:7:5$ 에서

$$\frac{x+y}{4} = \frac{y+z}{7} = \frac{z+x}{5}$$

$$\frac{x+y}{4} = \frac{y+z}{7} = \frac{z+x}{5} = k (k \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$x+y=4k \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$y+z=7k \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$z+x=5k \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

①+②+③을 하면

$$2(x+y+z)=16k$$

$$\therefore x+y+z=8k \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

④에서 ②, ③, ①을 각각 빼면

$$x=k, y=3k, z=4k$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{xyz}{x^3+y^3+z^3} &= \frac{k \times 3k \times 4k}{k^3 + (3k)^3 + (4k)^3} \\ &= \frac{12k^3}{92k^3} = \frac{3}{23} \end{aligned}$$

$$6 \quad y = \frac{3x+1}{x-1} = \frac{3(x-1)+4}{x-1} = \frac{4}{x-1} + 3$$

따라서 $y = \frac{3x+1}{x-1}$ 의 그래프는 $y = \frac{4}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$x=a$ 일 때 $y=5$ 라 하면

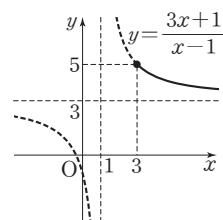
$$5 = \frac{3a+1}{a-1}, 5a-5=3a+1 \quad \therefore a=3$$

따라서 $3 < y \leq 5$ 에서

$y = \frac{3x+1}{x-1}$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로 정의역은

$\{x | x \geq 3\}$ 이다.



- 7 $y = \frac{5}{x-p} + 2$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p, y=2$ 이다.

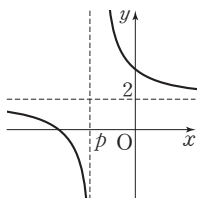
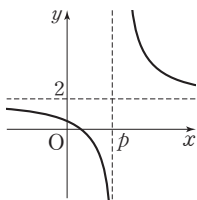
(i) $p > 0$ 일 때,

$y = \frac{5}{x-p} + 2$ 의 그래프가 제 3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$ 에서의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 하므로

$$\frac{5}{-p} + 2 \geq 0 \quad \therefore p \geq \frac{5}{2}$$

(ii) $p \leq 0$ 일 때,

$y = \frac{5}{x-p} + 2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 p 의 값에 관계없이 항상 제3사분면을 지난다.



(i), (ii)에 의하여 $p \geq \frac{5}{2}$

따라서 정수 p 의 최솟값은 3이다.

- 8 $y = \frac{1}{x-1} + k$ 의 그래프는 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 에서 함

수 $y = \frac{1}{x-1} + k$ 의 최댓값

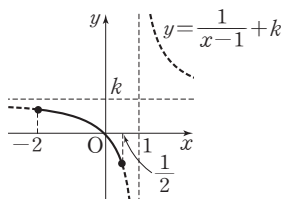
이 $\frac{2}{3}$ 이라면 $y = \frac{1}{x-1} + k$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

함수 $y = \frac{1}{x-1} + k$ 는 $x = -2$ 에서 최댓값 $\frac{2}{3}$ 를 가지므로

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{-2-1} + k$$

$$\therefore k = 1$$



- 9 $y = \frac{1}{x+1} - 3$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동하면

$$y - a = \frac{1}{x+1} - 3$$

$$\therefore y = \frac{1}{x+1} - 3 + a$$

이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$$0 = 1 - 3 + a \quad \therefore a = 2$$

$$10 \text{ ① } y = \frac{2x+2}{x} = \frac{2}{x} + 2$$

$$\text{② } y = \frac{2x}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 2$$

$$\text{③ } y = \frac{3x-1}{x-1} = \frac{3(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 3$$

$$\text{④ } y = \frac{-x+3}{x-1} = \frac{-(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} - 1$$

$$\text{⑤ } y = \frac{-2x+3}{x-1} = \frac{-2(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} - 2$$

따라서 ①, ②, ③, ④의 그래프는 $y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이므로 평행이동하여 서로 겹쳐질 수 있지만 ⑤의 그래프는 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이므로 겹쳐질 수 없다.

$$11 \text{ } y = \frac{3x+1}{x+2} = \frac{3(x+2)-5}{x+2} = -\frac{5}{x+2} + 3$$

따라서 $y = \frac{3x+1}{x+2}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

① 그래프의 점근선의 방정식은

$$x = -2, y = 3 \text{이다.}$$

② 정의역은 $\{x \mid x \neq -2 \text{인 실수}\}$

이다.

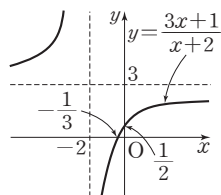
③ $x = -1$ 일 때 $y = -2$, $x = 3$ 일 때 $y = 2$ 이므로

$-1 \leq x \leq 3$ 에서 최솟값 -2 를 갖는다.

④ $y = -\frac{5}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

⑤ 그래프는 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면을 지나지만 제4사분면은 지나지 않는다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.



$$12 \text{ } y = \frac{2x+1}{x+1} = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} + 2$$

따라서 $y = \frac{2x+1}{x+1}$ 의 그래프는 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

이때 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프는 두 직선 $y=x, y=-x$ 에 대하여 대칭이므로

$y = \frac{2x+1}{x+1}$ 의 그래프는 두 직선 $y=x,$

$y=-x$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 두 직선에 대하여 대칭이다.

$a > 0$ 이므로 직선 $y=x$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면

$$y - 2 = x + 1 \quad \therefore y = x + 3$$

따라서 $a = 1, b = 3$ 이므로 $a + b = 4$

- 13 주어진 그래프에서 점근선의 방정식이 $x=2$, $y=3$ 이므로 함수의 식을

$$y = \frac{k}{x-2} + 3 \quad (k < 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$4 = \frac{k}{0-2} + 3 \quad \therefore k = -2$$

이를 ①에 대입하여 정리하면

$$y = \frac{-2}{x-2} + 3 = \frac{-2+3(x-2)}{x-2} = \frac{3x-8}{x-2}$$

따라서 $a=3$, $b=-8$, $c=-2$ 이므로 $a+b+c=-7$

- 14 $f(x) = 1 - \frac{1}{2x} = \frac{2x-1}{2x}$ 에서

$$f^2(x) = (f \circ f^1)(x) = f(f(x))$$

$$= f\left(\frac{2x-1}{2x}\right) = \frac{2 \times \frac{2x-1}{2x} - 1}{2 \times \frac{2x-1}{2x}}$$

$$= \frac{\frac{2x-1-x}{x}}{\frac{2x-1}{x}} = \frac{x-1}{2x-1}$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$$

$$= f\left(\frac{x-1}{2x-1}\right) = \frac{2 \times \frac{x-1}{2x-1} - 1}{2 \times \frac{x-1}{2x-1}}$$

$$= \frac{\frac{2x-2-(2x-1)}{2x-1}}{\frac{2x-2}{2x-1}} = \frac{-1}{2x-2}$$

$$f^4(x) = (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x))$$

$$= f\left(\frac{-1}{2x-2}\right) = \frac{2 \times \frac{-1}{2x-2} - 1}{2 \times \frac{-1}{2x-2}}$$

$$= \frac{\frac{-1-(x-1)}{x-1}}{\frac{-1}{x-1}} = x$$

따라서 $f^k(x) = x$ 를 만족시키는 자연수 k 의 최솟값은 4이다.

- 15 $(f^{-1} \circ g)^{-1}(5) = (g^{-1} \circ f)(5)$

$$= g^{-1}(f(5))$$

$$= g^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$g^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면 } g(k) = \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$\frac{k+1}{2k} = \frac{2}{3}, 3k+3=4k \quad \therefore k=3$$

$$\therefore (f^{-1} \circ g)^{-1}(5) = g^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = 3$$

- 16 $y = \frac{2x-1}{x-a}$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 일치하려면

$y = \frac{2x-1}{x-a}$ 의 그래프의 두 점근선의 교점이 직선 $y=x$ 위에 있어야 한다.

$$y = \frac{2x-1}{x-a} = \frac{2(x-a)+2a-1}{x-a} = \frac{2a-1}{x-a} + 2 \text{이므로 점}$$

근선의 방정식은 $x=a$, $y=2$ 이다.

따라서 두 점근선의 교점의 좌표가 $(a, 2)$ 이므로

$$a=2$$

다른 풀이

$y = \frac{2x-1}{x-a}$ 을 x 에 대하여 풀면

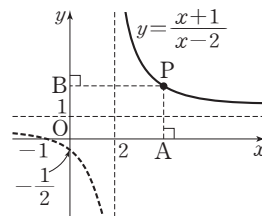
$$y(x-a) = 2x-1, (y-2)x = ay-1 \quad \therefore x = \frac{ay-1}{y-2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{ax-1}{x-2}$$

함수 $y = \frac{2x-1}{x-a}$ 과 그 역함수 $y = \frac{ax-1}{x-2}$ 의 그래프가 일치하므로 $a=2$

- 17 $y = \frac{x+1}{x-2} = \frac{(x-2)+3}{x-2} = \frac{3}{x-2} + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$x > 2$ 에서 ①의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 ①의 그래프 위의 점 P의 좌표를

$$\left(a, \frac{3}{a-2} + 1\right) \quad (a > 2) \text{이라 하면}$$

$$A(a, 0), B\left(0, \frac{3}{a-2} + 1\right)$$

$$\text{즉, } \overline{PA} = \frac{3}{a-2} + 1, \overline{PB} = a \text{이므로}$$

$$\overline{PA} + \overline{PB} = \frac{3}{a-2} + 1 + a$$

$$= a - 2 + \frac{3}{a-2} + 3$$

이때 $a-2 > 0$, $\frac{3}{a-2} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{PA} + \overline{PB} = a - 2 + \frac{3}{a-2} + 3$$

$$\geq 2\sqrt{(a-2) \times \frac{3}{a-2}} + 3 = 2\sqrt{3} + 3$$

$$\left(\text{단, 등호는 } a-2 = \frac{3}{a-2} \text{일 때 성립}\right)$$

따라서 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 $2\sqrt{3} + 3$ 이다.

$$18 \quad y = \frac{2x+3}{x+a} = \frac{2(x+a)-2a+3}{x+a} \\ = \frac{-2a+3}{x+a} + 2 \quad (\text{단, } a > 0)$$

따라서 $y = \frac{2x+3}{x+a}$ 의 그래프는 $y = \frac{-2a+3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$$(i) -2a+3 > 0, \text{ 즉 } 0 < a < \frac{3}{2}$$

일 때, $0 \leq x \leq 2$ 에서

$y = \frac{2x+3}{x+a}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y = \frac{2x+3}{x+a}$ 은

$x=0$ 에서 최댓값 1을 가지므로

$$\frac{3}{a} = 1 \quad \therefore a = 3$$

그런데 $0 < a < \frac{3}{2}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$(ii) -2a+3 < 0, \text{ 즉 } a > \frac{3}{2}$$

일 때, $0 \leq x \leq 2$ 에서

$y = \frac{2x+3}{x+a}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y = \frac{2x+3}{x+a}$

은 $x=2$ 에서 최댓값 1을 가지므로

$$\frac{7}{2+a} = 1 \quad \therefore a = 5$$

(iii) $-2a+3=0$, 즉 $a = \frac{3}{2}$ 일 때 주어진 함수는 $y=2$ 로 상수함수이고, 최댓값이 1이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $a=5$

따라서 함수 $y = \frac{2x+3}{x+5}$ ($0 \leq x \leq 2$)은 $x=0$ 에서 최솟값을 가지므로 최솟값은 $\frac{3}{5}$ 이다.

$$19 \quad y = \frac{1-x}{x-2} = \frac{-(x-2)-1}{x-2} \\ = -\frac{1}{x-2} - 1$$

따라서 $y = \frac{1-x}{x-2}$ 의 그래프는 $y = -\frac{1}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=kx-1$ 은 k 의 값에 관계없이 점 $(0, -1)$ 을 지난다.

이때 $y = \frac{1-x}{x-2}$ 의 그래프

와 직선 $y=kx-1$ 이 만나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.

(i) $k=0$ 일 때, 직선

$y=-1$ 은 점근선이므로

로 $y = \frac{1-x}{x-2}$ 의 그래프와 만나지 않는다.

(ii) $k \neq 0$ 일 때, $\frac{1-x}{x-2} = kx-1$ 에서

$$1-x = (kx-1)(x-2)$$

$$1-x = kx^2 - 2kx - x + 2$$

$$\therefore kx^2 - 2kx + 1 = 0$$

이 이차방정식의 실근이 존재하지 않아야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - k < 0, \quad k(k-1) < 0$$

$$\therefore 0 < k < 1$$

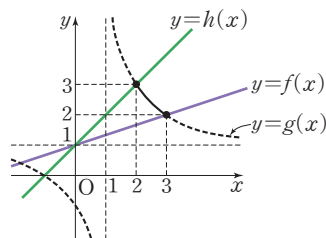
(i), (ii)에 의하여 $0 \leq k < 1$

20 $f(x)=ax+1$, $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$, $h(x)=bx+1$ 이라 할 때, $2 \leq x \leq 3$ 에서 부등식 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ 가 항상 성립해야 하므로 직선 $y=f(x)$ 는 $y=g(x)$ 의 그래프보다 아래쪽에, 직선 $y=h(x)$ 는 $y=g(x)$ 의 그래프보다 위쪽에 있어야 한다.

$$g(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1$$

$x=2$ 일 때 $g(2)=3$, $x=3$ 일 때 $g(3)=2$ 이므로

$2 \leq x \leq 3$ 에서 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 직선 $y=f(x)$ 는 a 의 값에 관계없이 점 $(0, 1)$ 을 지나고, a 의 값이 최대가 될 때는 직선 $f(x)=ax+1$ 이 점 $(3, 2)$ 를 지날 때이므로 $a = \frac{1}{3}$

또 직선 $y=h(x)$ 도 b 의 값에 관계없이 점 $(0, 1)$ 을 지나고, b 의 값이 최소가 될 때는 직선 $h(x)=bx+1$ 이 점 $(2, 3)$ 을 지날 때이므로 $b=1$

따라서 구하는 합은

$$\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

21 주어진 그래프에서 $f^{-1}(0)=3, f^{-1}(3)=0$ 이므로

$$f(3)=0, f(0)=3$$

$$f^2(3)=(f \circ f^1)(3)=f(f(3))$$

$$=f(0)=3$$

$$f^3(3)=(f \circ f^2)(3)=f(f^2(3))$$

$$=f(3)=0$$

$$f^4(3)=(f \circ f^3)(3)=f(f^3(3))$$

$$=f(0)=3$$

$\vdots$

$$\therefore f^n(3) = \begin{cases} 0 & (n \text{은 홀수}) \\ 3 & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$$

$$\therefore f^{1002}(3)=3$$

V-2 02 무리함수

1 무리식

개념 CHECK

137쪽

1 [답] (1) $-2 \leq x \leq 1$ (2) $-3 < x \leq 2$

(1) $\sqrt{1-x}$ 의 값이 실수가 되려면

$$1-x \geq 0 \quad \therefore x \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\sqrt{2x+4}$ 의 값이 실수가 되려면

$$2x+4 \geq 0 \quad \therefore x \geq -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여

$$-2 \leq x \leq 1$$

(2) $\sqrt{2-x}$ 의 값이 실수가 되려면

$$2-x \geq 0 \quad \therefore x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\frac{1}{\sqrt{x+3}}$ 의 값이 실수가 되려면

$$x+3 > 0 \quad \therefore x > -3 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}, \textcircled{4}$ 에 의하여

$$-3 < x \leq 2$$

2 [답] 3

$$\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2+4x+4}$$

$$= \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+2)^2}$$

$$= |x-1| + |x+2|$$

$$= -(x-1) + (x+2) \quad (\because -2 < x < 1)$$

$$= 3$$

문제

138쪽

01-1 [답] $\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x}}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x}-\sqrt{x+2})}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+2}}{-2}$$

$$= \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}} = \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4})}$$

$$= \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+4}}{-2}$$

$$= \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+6}} = \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+6}}{(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+6})(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+6})}$$

$$= \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+6}}{-2}$$

$$= \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x+4}}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+4}} + \frac{1}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+6}}$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}+\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}-\sqrt{x+4})$$

$$= \frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x}}{2}$$

01-2 [답] $2+2\sqrt{2}$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1 \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{2(x+1)}{x-1}$$

$$= \frac{2(\sqrt{2}+1+1)}{\sqrt{2}+1-1} \quad \leftarrow x=\sqrt{2}+1 \text{ 대입}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}} = 2+2\sqrt{2}$$

01-3 [답] $\sqrt{2}$

$\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 를 제공하면

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = x+y-2\sqrt{xy} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x = \frac{4}{3-\sqrt{5}} = \frac{4(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = 3+\sqrt{5},$$

$$y = \frac{4}{3+\sqrt{5}} = \frac{4(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = 3-\sqrt{5}$$

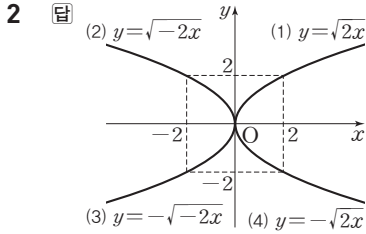
$$\text{이므로 } x+y=6, xy=4$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 = 6-2 \times 2 = 2$$

$$\therefore \sqrt{x}-\sqrt{y} = \sqrt{2} \quad (\because x > y)$$

- 1 답 (1) $\{x|x \geq 0\}$ (2) $\{x|x \geq 3\}$
(3) $\{x|x \leq 0\}$ (4) $\left\{x \middle| x \leq \frac{1}{2}\right\}$



- (1) 정의역: $\{x|x \geq 0\}$, 치역: $\{y|y \geq 0\}$
(2) 정의역: $\{x|x \leq 0\}$, 치역: $\{y|y \geq 0\}$
(3) 정의역: $\{x|x \leq 0\}$, 치역: $\{y|y \leq 0\}$
(4) 정의역: $\{x|x \geq 0\}$, 치역: $\{y|y \leq 0\}$

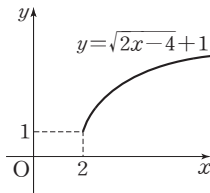
문제

141~147쪽

02-1 답 (1)~(4) 풀이 참조

(1) $y = \sqrt{2x-4}+1 = \sqrt{2(x-2)}+1$

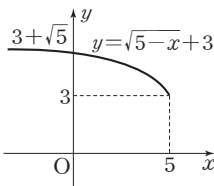
따라서 $y = \sqrt{2x-4}+1$ 의 그래프는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x|x \geq 2\}$, 치역: $\{y|y \geq 1\}$

(2) $y = \sqrt{5-x}+3 = \sqrt{-(x-5)}+3$

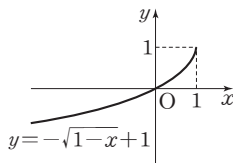
따라서 $y = \sqrt{5-x}+3$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x|x \leq 5\}$, 치역: $\{y|y \geq 3\}$

(3) $y = -\sqrt{1-x}+1 = -\sqrt{-(x-1)}+1$

따라서 $y = -\sqrt{1-x}+1$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore$ 정의역: $\{x|x \leq 1\}$, 치역: $\{y|y \leq 1\}$

(4) $y = -\sqrt{2x-6}+2 = -\sqrt{2(x-3)}+2$

따라서 $y = -\sqrt{2x-6}+2$

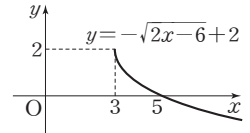
의 그래프는 $y = -\sqrt{2x}$ 의

그래프를 x 축의 방향으로

3만큼, y 축의 방향으로 2

만큼 평행이동한 것이므로 위의 그림과 같다.

$\therefore$ 정의역: $\{x|x \geq 3\}$, 치역: $\{y|y \leq 2\}$



02-2 답 ㄴ, ㄷ

$y = \sqrt{-4x+4}-2 = \sqrt{-4(x-1)}-2$

따라서 $y = \sqrt{-4x+4}-2$ 의

그래프는 $y = \sqrt{-4x}$ 의 그래

프를 x 축의 방향으로 1만큼,

y 축의 방향으로 -2만큼 평

행이동한 것이므로 오른쪽

그림과 같다.

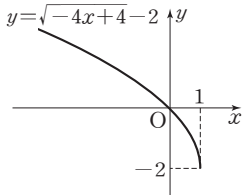
ㄱ. 정의역은 $\{x|x \leq 1\}$ 이다.

ㄴ. 치역은 $\{y|y \geq -2\}$ 이다.

ㄷ. 그래프는 원점을 지난다.

ㄹ. 그래프는 제2사분면, 제4사분면을 지난다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.



03-1 답 (1) 최댓값: -1, 최솟값: -3

(2) 최댓값: -1, 최솟값: -4

(1) $y = -\sqrt{2x+4}+1 = -\sqrt{2(x+2)}+1$

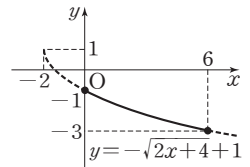
$y = -\sqrt{2x+4}+1$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고 $x=0$ 일 때 $y=-1$, $x=6$ 일 때 $y=-3$ 이다.

따라서 $0 \leq x \leq 6$ 에서 그래

프는 오른쪽 그림과 같으

므로 최댓값은 -1, 최솟

값은 -3이다.



(2) $y = -\sqrt{-3x+3}-1 = -\sqrt{-3(x-1)}-1$

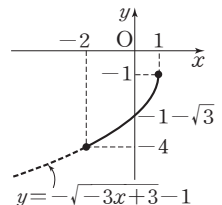
$y = -\sqrt{-3x+3}-1$ 의 그래프는 $y = -\sqrt{-3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고 $x=-2$ 일 때 $y=-4$, $x=1$ 일 때 $y=-1$ 이다.

따라서 $-2 \leq x \leq 1$ 에서 그래

프는 오른쪽 그림과 같으므로

최댓값은 -1, 최솟값은 -4

이다.

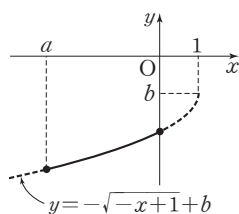


03-2 ㉔ $a=-3, b=-1$

$$y = -\sqrt{-x+1} + b = -\sqrt{-(x-1)} + b$$

$y = -\sqrt{-x+1} + b$ 의 그래프

는 $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



함수 $y = -\sqrt{-x+1} + b$ 가

$x=0$ 에서 최댓값 -2 를 가지므로

$$-2 = -1 + b \quad \therefore b = -1$$

함수 $y = -\sqrt{-x+1} - 1$ 이 $x=a$ 에서 최솟값 -3 을 가지므로

$$-3 = -\sqrt{-a+1} - 1, \quad \sqrt{-a+1} = 2$$

$$-a+1=4 \quad \therefore a=-3$$

04-1 ㉔ -3

$y = \sqrt{-x+1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동하면

$$y+1 = \sqrt{-(x-2)+1} \quad \therefore y = \sqrt{-x+3} - 1$$

이 함수의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면

$$-y = \sqrt{-x+3} - 1 \quad \therefore y = -\sqrt{-x+3} + 1$$

이 함수의 그래프가 $y = -\sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프와 겹쳐지므로

$$a=-1, b=3, c=1 \quad \therefore abc=-3$$

04-2 ㉔ -1

$y = \sqrt{ax+1}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동하면

$$y+3 = \sqrt{a(x+1)+1} \quad \therefore y = \sqrt{a(x+1)} - 2$$

이 함수의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면

$$-y = \sqrt{a(-x+1)} - 2 \quad \therefore y = -\sqrt{-a(x-1)} + 2$$

이 함수의 그래프가 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$1 = -\sqrt{-a} + 2, \quad \sqrt{-a} = 1$$

$$\therefore a = -1$$

04-3 ㉔ ㄱ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $y = -\sqrt{-x}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

$$\therefore y = \sqrt{-2x+4} = \sqrt{-2(x-2)}$$

따라서 $y = \sqrt{-2x+4}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y = \sqrt{x+3} + 2$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$$\therefore y = -\sqrt{2-x} + 1 = -\sqrt{-(x-2)} + 1$$

따라서 $y = -\sqrt{2-x} + 1$ 의 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 보기의 함수 중 그 그래프가 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

05-1 ㉔ 5

주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{ax}(a>0)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$$y = -\sqrt{a(x+2)} - 1 \quad \cdots \cdots ㉠$$

이라 하면 이 함수의 그래프가 점 $(0, -3)$ 을 지나므로

$$-3 = -\sqrt{2a} - 1, \quad \sqrt{2a} = 2, \quad 2a = 4 \quad \therefore a = 2$$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$y = -\sqrt{2(x+2)} - 1 = -\sqrt{2x+4} - 1$$

따라서 $a=2, b=4, c=-1$ 이므로

$$a+b+c=5$$

05-2 ㉔ 2

주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{ax}(a>0)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 함수의 식을

$$y = \sqrt{a(x+1)} - 2$$

라 하면 이 함수의 그래프가 원점을 지나므로

$$0 = \sqrt{a} - 2, \quad \sqrt{a} = 2 \quad \therefore a = 4$$

따라서 $y = \sqrt{4(x+1)} - 2$ 의 그래프가 점 $(3, k)$ 을 지나므로 $k=2$

05-3 ㉔ $a=2, b=3$

함수 $y = \sqrt{-2x+a} + b$ 의 정의역은 $\{x | x \leq \frac{a}{2}\}$, 치역은 $\{y | y \geq b\}$ 이므로

$$\frac{a}{2} = 1, b = 3 \quad \therefore a = 2$$

06-1 ㉔ (1) $2 \leq k < \frac{5}{2}$ (2) $k < 2$ 또는 $k = \frac{5}{2}$ (3) $k > \frac{5}{2}$

$$y = \sqrt{4-2x} = \sqrt{-2(x-2)}$$

의 그래프는 $y = \sqrt{-2x}$ 의

그래프를 x 축의 방향으로

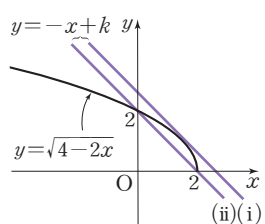
2만큼 평행이동한 것이고,

직선 $y = -x+k$ 는 기울기

가 -1 이고 y 절편이 k 이므로

위치 관계는 오른쪽 그

림의 (i), (ii)를 기준으로 나누어 생각할 수 있다.



(i) 직선 $y = -x + k$ 와 $y = \sqrt{4-2x}$ 의 그래프가 접할 때,

$$-x + k = \sqrt{4-2x} \text{에서}$$

$$x^2 - 2kx + k^2 = 4 - 2x$$

$$\therefore x^2 - 2(k-1)x + k^2 - 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (k^2 - 4) = 0$$

$$-2k + 5 = 0 \quad \therefore k = \frac{5}{2}$$

(ii) 직선 $y = -x + k$ 가 점 $(2, 0)$ 을 지날 때,

$$0 = -2 + k \quad \therefore k = 2$$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $2 \leq k < \frac{5}{2}$

(2) 한 점에서 만나려면 $k < 2$ 또는 $k = \frac{5}{2}$

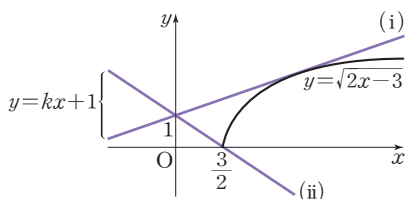
(3) 만나지 않으려면 $k > \frac{5}{2}$

06-2 ▣ $-\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{1}{3}$

$y = \sqrt{2x-3} = \sqrt{2(x-\frac{3}{2})}$ 의 그래프는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프

를 x 축의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼 평행이동한 것이고, 직선

$y = kx + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로 위치 관계는 다음 그림의 (i), (ii)를 기준으로 나누어 생각할 수 있다.



(i) 직선 $y = kx + 1$ 과 $y = \sqrt{2x-3}$ 의 그래프가 접할 때,

$$kx + 1 = \sqrt{2x-3} \text{에서}$$

$$k^2x^2 + 2kx + 1 = 2x - 3$$

$$\therefore k^2x^2 + 2(k-1)x + 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 4k^2 = 0, \quad 3k^2 + 2k - 1 = 0$$

$$(k+1)(3k-1) = 0 \quad \therefore k = -1 \text{ 또는 } k = \frac{1}{3}$$

그런데 위의 그림에서 $k > 0$ 이므로 $k = \frac{1}{3}$

(ii) 직선 $y = kx + 1$ 이 점 $(\frac{3}{2}, 0)$ 을 지날 때,

$$0 = \frac{3}{2}k + 1 \quad \therefore k = -\frac{2}{3}$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 무리함수의 그래프와 직선이 만나려면 $-\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{1}{3}$

07-1 ▣ $\frac{5}{2}$

$y = -\sqrt{2x-4} + 1$ 의 치역이 $\{y | y \leq 1\}$ 이므로 역함수의 정의역은 $\{x | x \leq 1\}$ 이다.

$$y = -\sqrt{2x-4} + 1 \text{에서 } y-1 = -\sqrt{2x-4}$$

양변을 제곱하여 x 에 대하여 풀면

$$y^2 - 2y + 1 = 2x - 4 \quad \therefore x = \frac{1}{2}y^2 - y + \frac{5}{2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2} \quad (x \leq 1)$$

따라서 $a = -1, b = \frac{5}{2}, c = 1$ 이므로

$$a + b + c = \frac{5}{2}$$

07-2 ▣ 7

$$(g^{-1} \circ f)^{-1}(13) = (f^{-1} \circ g)(13) = f^{-1}(g(13)) = f^{-1}(3)$$

$$f^{-1}(3) = k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면 } f(k) = 3$$

$$\sqrt{2k+2} - 1 = 3, \quad \sqrt{2k+2} = 4$$

$$2k + 2 = 16 \quad \therefore k = 7$$

$$\therefore (g^{-1} \circ f)^{-1}(13) = f^{-1}(3) = 7$$

07-3 ▣ -12

$$f^{-1}(1) = 3 \text{에서 } f(3) = 1 \text{이므로}$$

$$-\sqrt{-3-a} + 2 = 1, \quad \sqrt{-3-a} = 1$$

$$-3-a = 1 \quad \therefore a = -4$$

$$\therefore f(x) = -\sqrt{-x+4} + 2$$

$$f^{-1}(-2) = k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면 } f(k) = -2 \text{이므로}$$

$$-\sqrt{-k+4} + 2 = -2, \quad \sqrt{-k+4} = 4$$

$$-k + 4 = 16 \quad \therefore k = -12$$

$$\therefore f^{-1}(-2) = -12$$

08-1 ▣ (1, 1)

$f(x) = \sqrt{x+3} - 1$ 이라 하면 함수

$y = f(x)$ 의 그래프와 그 역

함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는

직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로

오른쪽 그림과 같다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직

선 $y = x$ 의 교점은 두 함수 $y = f(x), y = f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점과 같으므로

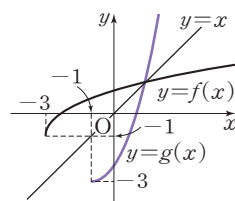
$$\sqrt{x+3} - 1 = x, \quad \sqrt{x+3} = x + 1$$

$$x + 3 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + x - 2 = 0, \quad (x+2)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 1 \quad (\because x \geq -1)$$

따라서 교점의 좌표는 $(1, 1)$ 이다.



08-2 ㉔ 4

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.

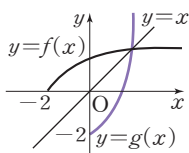
함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점과 같으므로

$$\sqrt{x+2}=x, x+2=x^2, x^2-x-2=0$$

$$(x+1)(x-2)=0 \quad \therefore x=2 (\because x \geq 0)$$

따라서 교점의 좌표는 (2, 2)이므로

$$a=2, b=2 \quad \therefore a+b=4$$



08-3 ㉔ $\sqrt{2}$

$f(x)=\sqrt{x-4}+4$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점은 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점과 같으므로

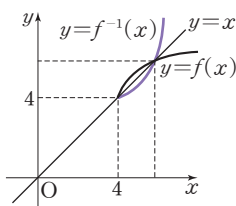
$$\sqrt{x-4}+4=x, \sqrt{x-4}=x-4$$

$$x-4=x^2-8x+16, x^2-9x+20=0$$

$$(x-4)(x-5)=0 \quad \therefore x=4 \text{ 또는 } x=5$$

따라서 두 교점의 좌표는 (4, 4), (5, 5)이므로 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(5-4)^2+(5-4)^2}=\sqrt{2}$$



연습문제

148~150쪽

- | | | | | |
|-----------------------------|------------------|--------------------------|------|------|
| 1 ④ | 2 ⑤ | 3 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ | 4 ① | 5 ② |
| 6 3 | 7 ⑤ | 8 ④ | 9 ① | 10 ③ |
| 11 ④ | 12 7 | 13 ① | 14 ③ | 15 ⑤ |
| 16 $1 \leq k < \frac{3}{2}$ | 17 $\frac{1}{8}$ | 18 1 | 19 ② | |

1 $x+1 \geq 0, 3-x > 0$

$$\therefore -1 \leq x < 3$$

따라서 정수 x 는 -1, 0, 1, 2의 4개이다.

2
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{x - (x+1)} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{-1} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(99)$$

$$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})$$

$$+\cdots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})$$

$$=-\sqrt{1}+\sqrt{100}=9$$

3
$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$$

 $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = (2\sqrt{5})^2 - 4 \times 1 = 16$ 이므로
 $x-y=4 (\because x>y)$
 $\therefore \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y} = \frac{2\sqrt{5}-2}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

4 점근선의 방정식이 $x=1, y=-3$ 인 유리함수의 식을

$$y = \frac{k}{x-1} - 3 \quad (k \text{는 상수}) \text{이라 하면}$$

$$y = \frac{k}{x-1} - 3 = \frac{-3x+k+3}{x-1}$$

따라서 $a=-3, b=-1, k=1$ 이므로

$$y = \sqrt{bx+a} = \sqrt{-x-3}$$

이 함수의 정의역은 $\{x|x \leq -3\}$

따라서 무리함수의 정의역에 속하는 정수의 최댓값은 -3이다.

5 $y = -\sqrt{4-2x}+1 = -\sqrt{-2(x-2)}+1$

ㄱ. $y = -\sqrt{4-2x}+1$ 의 그래프는

$y = -\sqrt{-2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

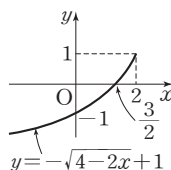
ㄴ. $y=0$ 일 때, $0 = -\sqrt{4-2x}+1$ 에서

$$\sqrt{4-2x}=1, 4-2x=1 \quad \therefore x=\frac{3}{2}$$

따라서 x 축과 점 $(\frac{3}{2}, 0)$ 에서 만난다.

ㄷ. 제2사분면을 지나지 않는다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.



6 $y = -\sqrt{5x+10}+a = -\sqrt{5(x+2)}+a$ 이므로 $y = -\sqrt{5x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

$y = -\sqrt{5x+10}+a$ 의 그래프가 제2, 3, 4사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.

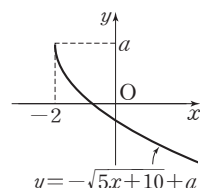
즉, $a > 0$ 이어야 하고, $x=0$ 일 때

$$y < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$-\sqrt{10}+a < 0$$

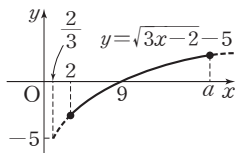
$$\therefore 0 < a < \sqrt{10}$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 3이다.



- 7 $y = \sqrt{3x-2} - 5 = \sqrt{3\left(x - \frac{2}{3}\right)} - 5$ 의 그래프는 $y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{2}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $2 \leq x \leq a$ 에서
 $y = \sqrt{3x-2} - 5$ 의 그래프는
 오른쪽 그림과 같다.



$x=a$ 에서 최댓값 2를 가지므로

$$2 = \sqrt{3a-2} - 5, \sqrt{3a-2} = 7$$

$$3a-2=49 \quad \therefore a=17$$

$x=2$ 에서 최솟값 m 을 가지므로

$$m = 2 - 5 = -3$$

$$\therefore a+m = 17 + (-3) = 14$$

- 8 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$y-b = \sqrt{x-a} \quad \therefore y = \sqrt{x-a} + b$$

이 함수의 그래프가 $y = \sqrt{x+2} + 7$ 의 그래프와 겹쳐지므로

$$a = -2, b = 7 \quad \therefore a+b = 5$$

- 9 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면
 $y = \sqrt{a(x-2)}$

이 함수의 그래프와 $y = \frac{40}{x}$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표가 10이므로 두 그래프가 만나는 점의 y 좌표는

$$y = \frac{40}{10} = 4$$

즉, $y = \sqrt{a(x-2)}$ 의 그래프가 점 (10, 4)를 지나므로

$$4 = \sqrt{8a}, 16 = 8a \quad \therefore a = 2$$

- 10 주어진 함수의 그래프는 $y = \sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$$y = \sqrt{-(x-2)} + 1 = \sqrt{-x+2} + 1$$

$$\text{따라서 } a=2, b=1 \text{이므로 } a+b=3$$

- 11 주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{ax}$ ($a < 0$)의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 것이므로

$$y = -\sqrt{a(x-p)} + q \quad (a < 0)$$

이 함수가 $y = -\sqrt{a(x+b)} + c$ 와 같으므로

$$b = -p, c = q$$

이때 주어진 그래프에서 $p < 0, q < 0$ 이므로

$$a < 0, b > 0, c < 0$$

- 12 $f(x) = \sqrt{ax+b}$ 라 하면 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 두 점 (2, 0), (5, 7)을 지나므로

$$f^{-1}(2) = 0, f^{-1}(5) = 7 \quad \therefore f(0) = 2, f(7) = 5$$

$$f(0) = 2 \text{에서 } \sqrt{b} = 2 \quad \therefore b = 4$$

$$f(7) = 5 \text{에서 } \sqrt{7a+b} = 5 \quad \therefore 7a+b = 25$$

이 식에 $b=4$ 를 대입하면

$$7a+4=25 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore a+b = 3+4 = 7$$

- 13 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3) = (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(3)$

$$= (g^{-1} \circ f)(3)$$

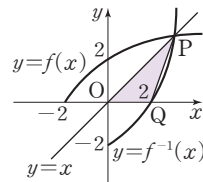
$$= g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(3)$$

이때 $g^{-1}(3) = k$ (k 는 상수)라 하면 $g(k) = 3$ 이므로

$$\sqrt{2k-1} = 3, 2k-1 = 9 \quad \therefore k = 5$$

$$\therefore (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3) = g^{-1}(3) = 5$$

- 14 두 함수 $y = f(x)$, $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림과 같다.



점 P는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같으므로

$$\sqrt{2x+4} = x, 2x+4 = x^2$$

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\therefore x = 1 + \sqrt{5} \quad (\because x \geq 0) \quad \therefore P(1 + \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$$

한편 점 Q의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면 $f^{-1}(a) = 0$ 에서

$$f(0) = a \text{이므로 } \sqrt{4} = a \quad \therefore a = 2 \quad \therefore Q(2, 0)$$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times (1 + \sqrt{5}) = 1 + \sqrt{5}$$

- 15 $y = \sqrt{ax+b} + c = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{a}\right)} + c$ 의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의

그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이므로 주어진 함수의 그래프에서

$$a > 0, -\frac{b}{a} > 0, c > 0$$

$$\therefore a > 0, b < 0, c > 0$$

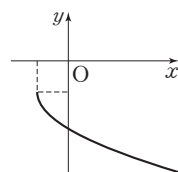
따라서 $y = -\sqrt{cx-b} - a = -\sqrt{c\left(x - \frac{b}{c}\right)} - a$ 의 그래프는

$y = -\sqrt{cx}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{b}{c}$ 만큼, y 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이고

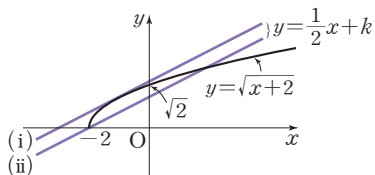
$$c > 0, \frac{b}{c} < 0, -a < 0 \text{이므로}$$

$y = -\sqrt{cx-b} - a$ 의 그래프의 개형

은 오른쪽 그림과 같다.



- 16 $y=\sqrt{x+2}$ 의 그래프는 $y=\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$ 는 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고 y 절편이 k 이므로 위치 관계는 다음 그림의 (i), (ii)를 기준으로 나누어 생각할 수 있다.



- (i) 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$ 와 $y=\sqrt{x+2}$ 의 그래프가 접할 때,

$$\frac{1}{2}x+k=\sqrt{x+2} \text{에서 } \frac{1}{4}x^2+kx+k^2=x+2$$

$$\therefore x^2+4(k-1)x+4(k^2-2)=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4(k-1)^2-4(k^2-2)=0$$

$$-8k+12=0 \quad \therefore k=\frac{3}{2}$$

- (ii) 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$ 가 점 $(-2, 0)$ 을 지날 때,

$$0=-1+k \quad \therefore k=1$$

- (i), (ii)에 의하여 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$1 \leq k < \frac{3}{2}$$

- 17 삼각형 OAP의 넓이는 점 P가 직선 OA와 평행한 접선 위의 접점일 때 최대이다.

직선 OA의 방정식은 $y=x$ 이므로 직선 OA와 평행한 접선의 방정식을 $y=x+k$ (k 는 상수)라 하면

$$\sqrt{x}=x+k \text{에서}$$

$$x=x^2+2kx+k^2$$

$$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(2k-1)^2-4k^2=0$$

$$-4k+1=0 \quad \therefore k=\frac{1}{4}$$

두 직선 $y=x$, $y=x+\frac{1}{4}$ 사이의 거리는 직선 $y=x$ 위의

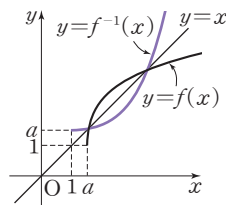
점 $(1, 1)$ 과 직선 $y=x+\frac{1}{4}$, 즉 $4x-4y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|4-4+1|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

이때 $\overline{OA}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 OAP의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{8}$$

- 18 $f(x)=\sqrt{x-a}+1$ 이라 하면 무리함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.



함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직

선 $y=x$ 의 교점은 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점과 같으므로

$$\sqrt{x-a}+1=x, \sqrt{x-a}=x-1$$

$$x-a=x^2-2x+1$$

$$\therefore x^2-3x+a+1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 두 교점을 (a, a) , (β, β) 라 하면 $\textcircled{7}$ 에서

$$a+\beta=3, a\beta=a+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

두 교점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{(a-\beta)^2+(a-\beta)^2}=\sqrt{2}, (a-\beta)^2=1$$

$$\therefore (a+\beta)^2-4a\beta=1$$

$$\text{이 식에 } \textcircled{8} \text{을 대입하면 } 9-4(a+1)=1 \quad \therefore a=1$$

- 19 $f(x)=\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}k$ 는 $x \geq 0$ 에서 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$$y=\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}k \quad (x \geq 0) \text{라 하고 } x \text{에 대하여 풀면}$$

$$\frac{1}{5}x^2=y-\frac{1}{5}k, x^2=5y-k$$

$$\therefore x=\sqrt{5y-k} \quad (\because x \geq 0)$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y=\sqrt{5x-k}$$

$$\text{즉, 두 함수 } f(x)=\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}k \quad (x \geq 0), g(x)=\sqrt{5x-k}$$

는 서로 역함수 관계이므로 두

함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그

래프는 직선 $y=x$ 에 대하여

대칭이다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직

선 $y=x$ 의 교점은 두 함수

$y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점과 같으므로

$$\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}k=x \quad \therefore x^2-5x+k=0$$

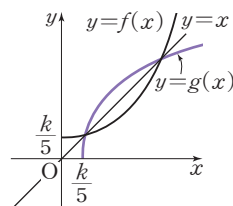
이 이차방정식이 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$(i) D=(-5)^2-4k>0 \quad \therefore k<\frac{25}{4}$$

$$(ii) (\text{두 근의 곱}) \geq 0 \text{에서 } k \geq 0$$

$$(i), (ii) \text{에 의하여 } 0 \leq k < \frac{25}{4}$$

따라서 정수 k 는 0, 1, 2, ..., 6의 7개이다.



VI-1 01 경우의 수

1 경우의 수

개념 CHECK

153쪽

1 답 9

2 답 (1) 5 (2) 6

- (1) (i) 3의 배수가 적힌 카드가 나오는 경우
3, 6, 9의 3가지
(ii) 4의 배수가 적힌 카드가 나오는 경우
4, 8의 2가지
(i), (ii)는 동시에 일어날 수 없으므로 구하는 경우의 수는
 $3+2=5$
- (2) (i) 5의 배수가 적힌 카드가 나오는 경우
5, 10의 2가지
(ii) 홀수가 적힌 카드가 나오는 경우
1, 3, 5, 7, 9의 5가지
(iii) 5의 배수이면서 홀수가 적힌 카드가 나오는 경우
5의 1가지
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는
 $2+5-1=6$

3 답 15

4 답 12

문제

154~160쪽

01-1 답 12

- 나오는 두 눈의 수의 차가 3 이상인 경우는 두 눈의 수의 차가 3 또는 4 또는 5인 경우이다.
- (i) 두 눈의 수의 차가 3인 경우
(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)의 6가지
- (ii) 두 눈의 수의 차가 4인 경우
(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)의 4가지
- (iii) 두 눈의 수의 차가 5인 경우
(1, 6), (6, 1)의 2가지
- (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는
 $6+4+2=12$

01-2 답 10

- 꺼낸 공에 적힌 세 수의 합이 5 이하인 경우는 세 수의 합이 3 또는 4 또는 5인 경우이다.
- (i) 세 수의 합이 3인 경우
(1, 1, 1)의 1가지
- (ii) 세 수의 합이 4인 경우
(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)의 3가지
- (iii) 세 수의 합이 5인 경우
(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)의 6가지
- (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는
 $1+3+6=10$

01-3 답 32

- 1부터 100까지의 자연수 중에서
- (i) 5로 나누어떨어지는 수, 즉 5의 배수는 5, 10, 15, ..., 100의 20개이다.
- (ii) 7로 나누어떨어지는 수, 즉 7의 배수는 7, 14, 21, ..., 98의 14개이다.
- (iii) 5와 7의 최소공배수인 35의 배수는 35, 70의 2개이다.
- (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 자연수의 개수는
 $20+14-2=32$

02-1 답 8

- x, y, z 가 자연수이므로 $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$
- $2x+3y+z=13$ 에서
 $3y < 13$
 $\therefore y=1$ 또는 $y=2$ 또는 $y=3$ 또는 $y=4$
- (i) $y=1$ 일 때, $2x+z=10$ 이므로 순서쌍 (x, z) 는
(1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)의 4개
- (ii) $y=2$ 일 때, $2x+z=7$ 이므로 순서쌍 (x, z) 는
(1, 5), (2, 3), (3, 1)의 3개
- (iii) $y=3$ 일 때, $2x+z=4$ 이므로 순서쌍 (x, z) 는
(1, 2)의 1개
- (iv) $y=4$ 일 때, $2x+z=1$ 이므로 순서쌍 (x, z) 는 없다.
- (i)~(iv)에 의하여 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는
 $4+3+1=8$

02-2 답 4

- x, y 가 자연수이므로 $x \geq 1, y \geq 1$
- $2x+y \leq 5$ 에서
 $2x < 5$
 $\therefore x=1$ 또는 $x=2$

(i) $x=1$ 일 때, $y \leq 3$ 이므로 y 는

1, 2, 3의 3개

(ii) $x=2$ 일 때, $y \leq 1$ 이므로 y 는

1의 1개

(i), (ii)에 의하여 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$$3+1=4$$

02-3 답 16

한 개의 가격이 100원, 500원, 1000원인 학용품을 각각 x 개, y 개, z 개 산다고 할 때, 그 금액의 합이 5000원이므로

$$100x+500y+1000z=5000$$

$$\therefore x+5y+10z=50 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 3종류의 학用品을 적어도 하나씩 사야 하므로 x, y, z 는 자연수이어야 한다.

즉, 구하는 방법의 수는 방정식 ①을 만족시키는 자연수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수와 같다.

①에서 $10z < 50$

$$\therefore z=1 \text{ 또는 } z=2 \text{ 또는 } z=3 \text{ 또는 } z=4$$

(i) $z=1$ 일 때, $x+5y=40$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

$(35, 1), (30, 2), \cdots, (5, 7)$ 의 7개

(ii) $z=2$ 일 때, $x+5y=30$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

$(25, 1), (20, 2), \cdots, (5, 5)$ 의 5개

(iii) $z=3$ 일 때, $x+5y=20$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

$(15, 1), (10, 2), (5, 3)$ 의 3개

(iv) $z=4$ 일 때, $x+5y=10$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

$(5, 1)$ 의 1개

(i)~(iv)에 의하여 구하는 방법의 수는

$$7+5+3+1=16$$

03-1 답 (1) 12 (2) 8

(1) $(a+b)(p+q)(x+y+z)$ 를 전개하면 a, b 에 p, q 를 각각 곱하여 항이 만들어지고, 그것에 다시 x, y, z 를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 구하는 항의 개수는

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

(2) $(a+b)(p+q)$ 를 전개하면 a, b 에 p, q 를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 항의 개수는

$$2 \times 2 = 4$$

$(x+y)(m+n)$ 을 전개하면 x, y 에 m, n 을 각각 곱하여 항이 만들어지므로 항의 개수는

$$2 \times 2 = 4$$

이때 곱해지는 각 항이 모두 서로 다른 문자이므로 구하는 항의 개수는

$$4+4=8$$

03-2 답 16

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 6, 8의 4가지

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 5, 7의 4가지

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$4 \times 4 = 16$$

03-3 답 100

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 5, 7의 4가지

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6, 8의 5가지

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$4 \times 5 \times 5 = 100$$

04-1 답 15

400을 소인수분해 하면 $400=2^4 \times 5^2$

2^4 의 양의 약수는 1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 의 5개

5^2 의 양의 약수는 1, 5, 5^2 의 3개

따라서 2^4 의 양의 약수와 5^2 의 양의 약수에서 각각 하나씩 택하여 곱한 것이 400의 양의 약수이므로 구하는 약수의 개수는

$$5 \times 3 = 15$$

04-2 답 12

120과 420을 각각 소인수분해하면

$$120=2^3 \times 3 \times 5, \quad 420=2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

120과 420의 최대공약수는

$$2^2 \times 3 \times 5$$

2^2 의 양의 약수는 1, 2, 2^2 의 3개

3의 양의 약수는 1, 3의 2개

5의 양의 약수는 1, 5의 2개

따라서 2^2 의 양의 약수와 3의 양의 약수와 5의 양의 약수에서 각각 하나씩 택하여 곱한 것이 120과 420의 양의 공약수이므로 구하는 공약수의 개수는

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

04-3 답 12

2250을 소인수분해하면 $2250=2 \times 3^2 \times 5^3$

이때 2250의 홀수인 양의 약수는 3^2 의 양의 약수와 5^3 의 양의 약수의 곱으로 이루어진다.

3^2 의 양의 약수는 1, 3, 3^2 의 3개

5^3 의 양의 약수는 1, 5, 5^2 , 5^3 의 4개

따라서 3^2 의 양의 약수와 5^3 의 양의 약수에서 각각 하나씩 택하여 곱한 것이 2250의 홀수인 양의 약수이므로 구하는 약수의 개수는

$$3 \times 4 = 12$$

05-1 ㉮ 7

- (i) $A \rightarrow B \rightarrow C$ 를 이용하는 방법의 수는 $2 \times 3 = 6$
 (ii) $A \rightarrow C$ 를 이용하는 방법의 수는 1
 (i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는 $6 + 1 = 7$

05-2 ㉮ 22

- (i) $A \rightarrow C$ 를 이용하는 방법의 수는 2
 (ii) $A \rightarrow B \rightarrow C$ 를 이용하는 방법의 수는
 $3 \times 2 = 6$
 (iii) $A \rightarrow D \rightarrow C$ 를 이용하는 방법의 수는
 $1 \times 3 = 3$
 (iv) $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C$ 를 이용하는 방법의 수는
 $3 \times 1 \times 3 = 9$
 (v) $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C$ 를 이용하는 방법의 수는
 $1 \times 1 \times 2 = 2$
 (i)~(v)에 의하여 구하는 방법의 수는
 $2 + 6 + 3 + 9 + 2 = 22$

05-3 ㉮ 144

- (i) 지원이가 $A \rightarrow P \rightarrow B$ 를 이용하는 방법의 수는
 $2 \times 3 = 6$
 민정이가 $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 를 이용하는 방법의 수는
 $3 \times 4 = 12$
 따라서 지원이는 P 지점을 거쳐서 가고 민정이는 Q 지점을 거쳐서 가는 방법의 수는
 $6 \times 12 = 72$
 (ii) 지원이가 $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 를 이용하는 방법의 수는
 $3 \times 4 = 12$
 민정이가 $A \rightarrow P \rightarrow B$ 를 이용하는 방법의 수는
 $2 \times 3 = 6$
 따라서 지원이는 Q 지점을 거쳐서 가고 민정이는 P 지점을 거쳐서 가는 방법의 수는
 $12 \times 6 = 72$
 (i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는
 $72 + 72 = 144$

06-1 ㉮ 48

- 주어진 그림에서 B 또는 D가 가장 많은 영역과 인접하고 있으므로 D부터 칠한다.
 (i) D에 칠할 수 있는 색은 4가지
 (ii) A에 칠할 수 있는 색은 D에 칠한 색을 제외한
 $4 - 1 = 3$ (가지)
 (iii) B에 칠할 수 있는 색은 A와 D에 칠한 색을 제외한
 $4 - 2 = 2$ (가지)

- (iv) C에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한
 $4 - 2 = 2$ (가지)
 (i)~(iv)에 의하여 구하는 방법의 수는
 $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$

06-2 ㉮ 84

- 같은 색을 중복하여 칠할 수 있으므로 칠하는 방법의 수는 다음과 같이 두 경우로 나누어 구할 수 있다.
 (i) B와 D에 서로 다른 색을 칠하는 경우
 B에 칠할 수 있는 색은 4가지
 A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한
 $4 - 1 = 3$ (가지)
 D에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한
 $4 - 2 = 2$ (가지)
 C에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한
 $4 - 2 = 2$ (가지)
 따라서 B와 D에 서로 다른 색을 칠하는 방법의 수는
 $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$
 (ii) B와 D에 서로 같은 색을 칠하는 경우
 B와 D에 칠할 수 있는 색은 4가지
 A에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한
 $4 - 1 = 3$ (가지)
 C에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한
 $4 - 1 = 3$ (가지)
 따라서 B와 D에 서로 같은 색을 칠하는 방법의 수는
 $4 \times 3 \times 3 = 36$
 (i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는 $48 + 36 = 84$

07-1 ㉮ (1) 47 (2) 31

- (1) 10원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 방법은
 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
 50원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 방법은
 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
 100원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 방법은
 0개, 1개, 2개의 3가지
 이때 0원을 지불하는 1가지 경우를 빼주어야 하므로
 지불할 수 있는 방법의 수는
 $4 \times 4 \times 3 - 1 = 47$
 (2) 50원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 100원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 중복된다.
 따라서 100원짜리 동전 2개를 50원짜리 동전 4개로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 10원짜리 동전 3개와 50원짜리 동전 7개로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.

10원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액은
0원, 10원, 20원, 30원의 4가지
50원짜리 동전 7개로 지불할 수 있는 금액은
0원, 50원, 100원, ..., 350원의 8가지
이때 0원을 지불하는 1가지 경우를 빼주어야 하므로
지불할 수 있는 금액의 수는
 $4 \times 8 - 1 = 31$

07-2 ㉨ 9

- (i) 지불할 수 있는 방법의 수
1000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 방법은
0장, 1장, 2장의 3가지
5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 방법은
0장, 1장, 2장의 3가지
10000원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 방법은
0장, 1장, 2장, 3장의 4가지
이때 0원을 지불하는 1가지 경우를 빼주어야 하므로 지
불할 수 있는 방법의 수는
 $a = 3 \times 3 \times 4 - 1 = 35$
- (ii) 지불할 수 있는 금액의 수
5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액과
10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 중
복된다.
따라서 10000원짜리 지폐 3장을 5000원짜리 지폐 6장
으로 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는
1000원짜리 지폐 2장과 5000원짜리 지폐 8장으로 지
불할 수 있는 금액의 수와 같다.
1000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 1000원, 2000원의 3가지
5000원짜리 지폐 8장으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 5000원, 10000원, ..., 40000원의 9가지
이때 0원을 지불하는 1가지 경우를 빼주어야 하므로 지
불할 수 있는 금액의 수는
 $b = 3 \times 9 - 1 = 26$
- (i), (ii)에 의하여 $a - b = 35 - 26 = 9$

연습문제

161~163쪽

1 ③	2 ②	3 ②	4 14	5 ②
6 ②	7 ②	8 15	9 ②	10 ⑤
11 ③	12 ④	13 36	14 48	15 40
16 20	17 64	18 10000	19 ④	20 6

- 1 나오는 두 눈의 수의 합이 5 미만인 경우는 두 눈의 수의
합이 2 또는 3 또는 4인 경우이다.

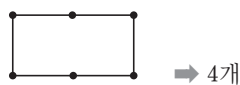
- (i) 두 눈의 수의 합이 2인 경우
(1, 1)의 1가지
(ii) 두 눈의 수의 합이 3인 경우
(1, 2), (2, 1)의 2가지
(iii) 두 눈의 수의 합이 4인 경우
(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는
 $1 + 2 + 3 = 6$

- 2 일정한 간격의 길이를 a 라 하면

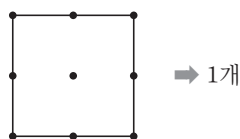
- (i) 네 변의 길이가 모두 a 인 직사각형



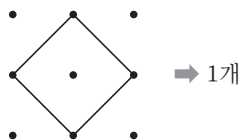
- (ii) 두 변의 길이가 각각 $a, 2a$ 인 직사각형



- (iii) 네 변의 길이가 모두 $2a$ 인 직사각형



- (iv) 네 변의 길이가 모두 $\sqrt{2}a$ 인 직사각형



- (i)~(iv)에 의하여 구하는 직사각형의 개수는
 $4 + 4 + 1 + 1 = 10$

- 3 $f(1)=a, f(2)=b (a \in Y, b \in Y)$ 라 하면 $a+b$ 가 4의
배수가 되도록 하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

- (i) $a+b=4$ 일 때,
(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3개
(ii) $a+b=8$ 일 때,
(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5개
(iii) $a+b=12$ 일 때,
(6, 6)의 1개
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f 의 개수는
 $3 + 5 + 1 = 9$

- 4 $3 \leq x+y \leq 6$ 을 만족시키는 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는
 (i) $x+y=3$ 일 때,
 $(1, 2), (2, 1)$ 의 2개
 (ii) $x+y=4$ 일 때,
 $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ 의 3개
 (iii) $x+y=5$ 일 때,
 $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$ 의 4개
 (iv) $x+y=6$ 일 때,
 $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ 의 5개
 (i)~(iv)에 의하여 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는
 $2+3+4+5=14$
- 5 50원, 100원, 500원짜리 동전을 각각 x 개, y 개, z 개 사용한다고 할 때, 그 금액의 합이 600원이므로
 $50x+100y+500z=600$
 $\therefore x+2y+10z=12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 이때 각 동전은 사용하지 않는 경우도 있으므로 x, y, z 는 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 인 정수이어야 한다.
 즉, 구하는 방법의 수는 방정식 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수와 같다.
 $\textcircled{1}$ 에서
 $10z \leq 12$
 $\therefore z=0$ 또는 $z=1$
 (i) $z=0$ 일 때, $x+2y=12$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(12, 0), (10, 1), (8, 2), (6, 3), (4, 4), (2, 5), (0, 6)$ 의 7개
 (ii) $z=1$ 일 때, $x+2y=2$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(2, 0), (0, 1)$ 의 2개
 (i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는
 $7+2=9$
- 6 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 판별식을 D 라 하면 이 이차방정식이 실근을 가지므로
 $D=a^2-4b \geq 0 \quad \therefore a^2 \geq 4b$
 이 부등식을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는
 (i) $b=0$ 일 때,
 $a^2 \geq 0$, 즉 $a \geq 0$ 이므로
 $(1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (5, 0)$ 의 5개
 (ii) $b=1$ 일 때,
 $a^2 \geq 4$, 즉 $a \geq 2$ 이므로
 $(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)$ 의 4개
 (iii) $b=2$ 일 때,
 $a^2 \geq 8$, 즉 $a \geq 2\sqrt{2}$ 이므로
 $(3, 2), (4, 2), (5, 2)$ 의 3개

- (iv) $b=3$ 일 때,
 $a^2 \geq 12$, 즉 $a \geq 2\sqrt{3}$ 이므로
 $(4, 3), (5, 3)$ 의 2개
 (i)~(iv)에 의하여 구하는 경우의 수는
 $5+4+3+2=14$
- 7 $(a+b+c)(x+y)^2=(a+b+c)(x^2+2xy+y^2)$ 이므로 전개하면 a, b, c 에 $x^2, 2xy, y^2$ 를 각각 곱하여 항이 만들어진다.
 따라서 구하는 항의 개수는
 $3 \times 3=9$
- 8 a 가 될 수 있는 것은 1, 3, 5의 3개
 b 가 될 수 있는 것은 2, 4, 6, 8, 10의 5개
 따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는
 $3 \times 5=15$
 $\therefore n(X)=15$
- 9 십의 자리의 숫자를 a , 일의 자리의 숫자를 b 라 할 때, $a+b$ 가 짝수인 경우는
 (i) a 가 짝수, b 가 0 또는 짝수인 경우
 a 에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 6, 8의 4가지
 b 에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6, 8의 5가지
 $\therefore 4 \times 5=20$
 (ii) a 가 홀수, b 가 홀수인 경우
 a 에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지
 b 에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지
 $\therefore 5 \times 5=25$
 (i), (ii)에 의하여 구하는 자연수의 개수는
 $20+25=45$
- 10 나오는 세 눈의 수의 곱이 짝수인 경우의 수는 모든 경우의 수에서 세 눈의 수가 모두 홀수인 경우의 수를 빼면 된다.
 (i) 서로 다른 세 개의 주사위를 던져 나올 수 있는 모든 경우의 수는
 $6 \times 6 \times 6=216$
 (ii) 주사위에서 홀수인 눈의 수는 1, 3, 5로 3가지이므로 세 눈의 수가 모두 홀수인 경우의 수는
 $3 \times 3 \times 3=27$
 (i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
 $216-27=189$
- 11 150을 소인수분해하면 $150=2 \times 3 \times 5^2$
 이때 150의 홀수인 양의 약수는 3의 양의 약수와 5^2 의 양의 약수의 곱으로 이루어진다.

3의 양의 약수는 1, 3의 2개
 5^2 의 양의 약수는 1, 5, 5^2 의 3개
 따라서 3의 양의 약수와 5^2 의 양의 약수에서 각각 하나씩
 택하여 곱한 것이 150의 홀수인 양의 약수이므로 구하는
 약수의 개수는
 $2 \times 3 = 6$

12 (i) $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ 를 이용하는 방법의 수는
 $3 \times 2 \times 2 = 12$

(ii) $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ 를 이용하는 방법의 수는
 $2 \times 2 \times 3 = 12$

(i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는
 $12 + 12 = 24$

13 주어진 그림에서 C가 가장 많은 영역과 인접하고 있으므로 C부터 칠한다.

(i) C에 칠할 수 있는 색은 4가지

(ii) A에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한
 $4 - 1 = 3$ (가지)

(iii) B에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한
 $4 - 1 = 3$ (가지)

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 방법의 수는
 $4 \times 3 \times 3 = 36$

14 주어진 그림에서 B 또는 D가 가장 많은 영역과 인접하고 있으므로 D부터 칠한다.

(i) D에 칠할 수 있는 색은 4가지

(ii) A에 칠할 수 있는 색은 D에 칠한 색을 제외한
 $4 - 1 = 3$ (가지)

(iii) B에 칠할 수 있는 색은 A와 D에 칠한 색을 제외한
 $4 - 2 = 2$ (가지)

(iv) C에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한
 $4 - 2 = 2$ (가지)

(i)~(iv)에 의하여 구하는 방법의 수는
 $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$

15 (i) 지불할 수 있는 방법의 수

100원짜리 동전 1개로 지불할 수 있는 방법은
 0개, 1개의 2가지

50원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 방법은
 0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

10원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 방법은
 0개, 1개, 2개의 3가지

이때 0원을 지불하는 1가지 경우를 빼주어야 하므로 지
 지불할 수 있는 방법의 수는

$$a = 2 \times 4 \times 3 - 1 = 23$$

(ii) 지불할 수 있는 금액의 수

50원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 100원짜
 리 동전 1개로 지불할 수 있는 금액이 중복된다.

따라서 100원짜리 동전 1개를 50원짜리 동전 2개로
 바꾸어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 50원짜
 리 동전 5개와 10원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는
 금액의 수와 같다.

50원짜리 동전 5개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 50원, 100원, 150원, 200원, 250원의 6가지

10원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액은

0원, 10원, 20원의 3가지

이때 0원을 지불하는 1가지 경우를 빼주어야 하므로
 지불할 수 있는 금액의 수는

$$b = 6 \times 3 - 1 = 17$$

(i), (ii)에 의하여 $a + b = 23 + 17 = 40$

16 (i) 꽃병 A에 장미를 꽂은 경우

꽃병 B에는 카네이션과 백합 중에서 9송이를 꽂아야
 한다.

꽃병 B에 카네이션을 a 송이, 백합을 b 송이 꽂는다고
 하면 $a + b = 9$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 (1, 8),
 (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)의 6개

(ii) 꽃병 A에 카네이션을 꽂은 경우

꽃병 B에는 장미와 백합 중에서 9송이를 꽂아야 한다.

꽃병 B에 장미를 a 송이, 백합을 b 송이 꽂는다고 하면
 $a + b = 9$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 (1, 8), (2, 7),
 (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1)의 8개

(iii) 꽃병 A에 백합을 꽂은 경우

꽃병 B에는 장미와 카네이션 중에서 9송이를 꽂아야
 한다.

꽃병 B에 장미를 a 송이, 카네이션을 b 송이 꽂는다고
 하면 $a + b = 9$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는 (3, 6),
 (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1)의 6개

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$6 + 8 + 6 = 20$$

17 (가)에서

$$f(x) + f(-x) = 1 \text{ 또는 } f(x) + f(-x) = -1$$

(나)에서 $x > 0$ 이면

$$f(x) = 1 \text{ 또는 } f(x) = 2 \text{ 또는 } f(x) = 3$$

(i) $f(1) = 1$ 일 때, $f(-1) = -2$

(ii) $f(1) = 2$ 일 때, $f(-1) = -3$ 또는 $f(-1) = -1$

(iii) $f(1) = 3$ 일 때, $f(-1) = -2$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $f(1)$ 과 $f(-1)$ 의 값을 정하는 방법의 수는

$$1+2+1=4$$

같은 방법으로 $f(2)$ 와 $f(-2)$ 의 값을 정하는 방법의 수가 4, $f(3)$ 과 $f(-3)$ 의 값을 정하는 방법의 수가 4이므로 구하는 함수의 개수는

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

18 10^n 을 소인수분해하면

$$10^n = 2^n \times 5^n$$

2^n 의 양의 약수는 1, 2, 2^2 , ..., 2^n 의 $n+1$ 개

5^n 의 양의 약수는 1, 5, 5^2 , ..., 5^n 의 $n+1$ 개

이때 2^n 의 양의 약수와 5^n 의 양의 약수에서 각각 하나씩 택하여 곱한 것이 10^n 의 양의 약수이고, 10^n 의 양의 약수가 25개이므로

$$(n+1)^2 = 25$$

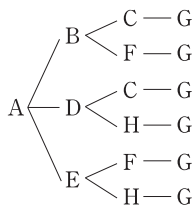
$$n+1=5 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

$$\therefore n=4$$

따라서 구하는 수는

$$10^4 = 10000$$

19 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 G까지 최단 거리로 가는 길을 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 방법의 수는 6이다.

20 B 지점과 D 지점 사이에 x 개의 도로를 추가한다고 하면

(i) $A \rightarrow B \rightarrow C$ 를 이용하는 방법의 수는

$$3 \times 2 = 6$$

(ii) $A \rightarrow D \rightarrow C$ 를 이용하는 방법의 수는

$$2 \times 3 = 6$$

(iii) $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C$ 를 이용하는 방법의 수는

$$3 \times x \times 3 = 9x$$

(iv) $A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C$ 를 이용하는 방법의 수는

$$2 \times x \times 2 = 4x$$

(i)~(iv)에 의하여 A 지점에서 출발하여 C 지점으로 가는 방법의 수는

$$6+6+9x+4x=90$$

$$13x=78 \quad \therefore x=6$$

따라서 추가해야 하는 도로의 개수는 6이다.

VI-1 02 순열

1 순열

개념 CHECK

165쪽

1 답 (1) 3 (2) 90 (3) 360 (4) 1

2 답 (1) 1 (2) 6 (3) 120 (4) 5040

문제

166~172쪽

01-1 답 (1) 5 (2) 3 (3) 6 (4) 6

$$(1) {}_nP_3 = 12n \text{에서 } n(n-1)(n-2) = 12n$$

이때 $n \geq 3$ 이므로 양변을 n 으로 나누면

$$(n-1)(n-2) = 12 = 4 \times 3 \quad \therefore n=5$$

$$(2) {}_7P_r \times 3! = 1260 \text{에서}$$

$${}_7P_r \times 6 = 1260 \quad \therefore {}_7P_r = 210$$

이때 $210 = 7 \times 6 \times 5 = {}_7P_3$ 이므로 $r=3$

$$(3) {}_nP_3 : {}_nP_2 = 4 : 1 \text{에서 } {}_nP_3 = 4 \times {}_nP_2 \text{이므로}$$

$$n(n-1)(n-2) = 4n(n-1)$$

이때 $n \geq 3$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$$n-2=4 \quad \therefore n=6$$

$$(4) {}_nP_3 + 3 \times {}_nP_2 = 5 \times {}_{n+1}P_2 \text{에서}$$

$$n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) = 5(n+1)n$$

이때 $n \geq 3$ 이므로 양변을 n 으로 나누면

$$(n-1)(n-2) + 3(n-1) = 5(n+1)$$

$$n^2 - 5n - 6 = 0, (n+1)(n-6) = 0$$

$$\therefore n=6 \quad (\because n \geq 3)$$

01-2 답 7

$${}_nP_3 + 12 \times {}_{n-1}P_2 - {}_nP_4 < 0 \text{에서}$$

$$n(n-1)(n-2) + 12(n-1)(n-2)$$

$$-n(n-1)(n-2)(n-3) < 0$$

이때 $n \geq 4$ 이므로 양변을 $(n-1)(n-2)$ 로 나누면

$$n+12-n(n-3) < 0, n^2-4n-12 > 0$$

$$(n+2)(n-6) > 0 \quad \therefore n > 6 \quad (\because n \geq 4)$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 7이다.

01-3 답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

$$(1) n \times {}_{n-1}P_{r-1} = n \times \frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} = {}_nP_r$$

$$\therefore {}_nP_r = n \times {}_{n-1}P_{r-1} \quad (\text{단, } 1 \leq r \leq n)$$

$$\begin{aligned}
 (2) {}_{n-1}P_r + r \times {}_{n-1}P_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{\{(n-1)-r\}!} + r \times \frac{(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!} + r \times \frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\
 &= (n-r) \times \frac{(n-1)!}{(n-r)!} + r \times \frac{(n-1)!}{(n-r)!} (\because n-r > 0) \\
 &= (n-r+r) \times \frac{(n-1)!}{(n-r)!} \\
 &= n \times \frac{(n-1)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} \\
 &= {}_nP_r \\
 \therefore {}_nP_r &= {}_{n-1}P_r + r \times {}_{n-1}P_{r-1} \quad (\text{단, } 1 \leq r < n)
 \end{aligned}$$

02-1 ㉡ 210

서로 다른 7개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로
 ${}_7P_3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$

02-2 ㉡ 720

서로 다른 10개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로
 ${}_{10}P_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

02-3 ㉡ 4

서로 다른 n 개를 일렬로 나열하는 방법의 수가 24이므로
 ${}_nP_n = 24$ 에서 $n! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$
 $\therefore n = 4$

03-1 ㉡ 240

모음 e와 i를 한 묶음으로 생각하여 나머지 4개의 문자와 함께 일렬로 나열하는 방법의 수는 $5! = 120$
e와 i의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2! = 2$
따라서 구하는 방법의 수는 $120 \times 2 = 240$

03-2 ㉡ 720

3권의 수학책을 한 묶음으로 생각하여 4권의 영어책과 함께 일렬로 꽂는 방법의 수는 $5! = 120$
수학책 3권의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3! = 6$
따라서 구하는 방법의 수는 $120 \times 6 = 720$

03-3 ㉡ 1728

1반 학생 3명을 한 묶음으로, 2반 학생 4명을 한 묶음으로, 3반 학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 일렬로 세우는 방법의 수는 $3! = 6$
1반 학생 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3! = 6$
2반 학생 4명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $4! = 24$
3반 학생 2명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2! = 2$
따라서 구하는 방법의 수는 $6 \times 6 \times 24 \times 2 = 1728$

03-4 ㉡ 4

여학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 남학생 n 명과 함께 일렬로 세우는 방법의 수는 $(n+1)!$
여학생 2명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2! = 2$
여학생끼리 이웃하도록 세우는 방법의 수가 240이므로
 $(n+1)! \times 2 = 240$
 $(n+1)! = 120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$
 $\therefore n = 4$

04-1 ㉡ (1) 72 (2) 12

(1) 이웃해도 되는 배구 선수 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3! = 6$
배구 선수 사이사이와 양 끝의 4개의 자리 중에서 2개의 자리에 농구 선수 2명을 세우는 방법의 수는
 ${}_4P_2 = 12$
따라서 구하는 방법의 수는 $6 \times 12 = 72$
(2) 농구 선수 2명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $2! = 2$
농구 선수 사이사이와 양 끝의 3개의 자리에 배구 선수 3명을 세우는 방법의 수는 ${}_3P_3 = 3! = 6$
따라서 구하는 방법의 수는 $2 \times 6 = 12$

04-2 ㉡ 480

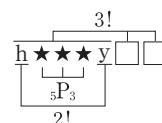
이웃해도 되는 자음 f, r, n, d를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4! = 24$
자음 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중에서 2개의 자리에 모음 i, e를 나열하는 방법의 수는 ${}_5P_2 = 20$
따라서 구하는 방법의 수는 $24 \times 20 = 480$

04-3 ㉡ 144

선생님 3명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $3! = 6$
선생님 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 학생 4명을 세우는 방법의 수는 ${}_4P_4 = 4! = 24$
따라서 구하는 방법의 수는 $6 \times 24 = 144$

05-1 ㉡ (1) 120 (2) 720 (3) 4320

(1) h를 맨 처음에, y를 맨 마지막에 고정시키고 그 사이에 나머지 o, l, i, d, a의 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수이므로 $5! = 120$
(2) o, l, i, d, a의 5개의 문자 중에서 3개를 택하여 h와 y 사이에 일렬로 나열하는 방법의 수는 ${}_5P_3 = 60$
h와 y의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2! = 2$
h★☆☆y를 한 묶음으로 생각하여 나머지 2개의 문자와 함께 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3! = 6$
따라서 구하는 방법의 수는 $60 \times 2 \times 6 = 720$



(3) 적어도 한쪽 끝에 자음이 오도록 나열하는 방법의 수는
7개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수에서 양 끝에
모음만 오도록 나열하는 방법의 수를 빼면 된다.

(i) 7개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$7! = 5040$$

(ii) 양 끝에 모음인 o, i, a의 3개의 문자 중에서 2개를
택하여 나열하는 방법의 수는 ${}_3P_2 = 6$

나머지 자리에 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법
의 수는 $5! = 120$

따라서 양 끝에 모음만 오도록 나열하는 방법의 수
는 $6 \times 120 = 720$

(i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$$5040 - 720 = 4320$$

06-1 답 (1) 96 (2) 36

(1) 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수
있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지

나머지 자리에는 천의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의
숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그
경우의 수는 ${}_4P_3 = 24$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$4 \times 24 = 96$$

(2) 홀수는 일의 자리에 올 수 있는 숫자가 1, 3이다.

각각의 경우에 대하여 천의 자리에는 0과 일의 자리에
온 숫자를 제외한 3개의 숫자가 올 수 있고, 백의 자리
와 십의 자리에는 천의 자리에 온 숫자와 일의 자리에
온 숫자를 제외한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나
열하면 되므로 구하는 홀수의 개수는

$$2 \times 3 \times {}_3P_2 = 2 \times 3 \times 6 = 36$$

06-2 답 (1) 96 (2) 108

(1) 4의 배수는 끝의 두 자리의 수가 4의 배수이므로

$$\square\square 12, \square\square 16, \square\square 24, \square\square 32, \square\square 36, \\ \square\square 52, \square\square 56, \square\square 64$$

각각의 경우에 대하여 천의 자리와 백의 자리에는 끝
의 두 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개
를 택하여 나열하면 되므로 구하는 4의 배수의 개수는

$$8 \times {}_4P_2 = 8 \times 12 = 96$$

(2) 5의 배수는 일의 자리에 올 수 있는 숫자가 0, 5

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

나머지 자리에 0을 제외한 5개의 숫자 중에서 3개
를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_5P_3 = 60$$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에는 0과 일의 자리에 온 숫자를 제외한
4개의 숫자가 올 수 있고, 백의 자리와 십의 자리
에는 천의 자리와 일의 자리에 온 숫자를 제외한 4
개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하면 되므로
그 경우의 수는

$$4 \times {}_4P_2 = 4 \times 12 = 48$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 5의 배수의 개수는

$$60 + 48 = 108$$

07-1 답 54번째

ㄱ□□□□, ㄴ□□□□ 풀인 문자열의 개수는

$$2 \times 4! = 48$$

ㄷㄱㄴ□□, ㄷㄴㄱ□□ 풀인 문자열의 개수는

$$2 \times 2! = 4$$

ㄷㄱㄴㅇ로 시작하는 문자열을 순서대로 나열하면

$$\text{ㄷㄱㄴㅇㄴㄹ}, \text{ㄷㄱㄴㅇㄹㄴ}$$

즉, ㄷㄱㄴ□□ 풀인 문자열에서 ㄷㄱㄴㅇㄹㄴ의 순서는
두 번째이다.

따라서 ㄷㄱㄴㅇㄹㄴ이 나타나는 순서는

$$48 + 4 + 2 = 54(\text{번째})$$

07-2 답 51342

1□□□□ 풀인 자연수의 개수는

$$4! = 24$$

2□□□□ 풀인 자연수의 개수는

$$4! = 24$$

3□□□□ 풀인 자연수의 개수는

$$4! = 24$$

4□□□□ 풀인 자연수의 개수는

$$4! = 24$$

이때 $24 + 24 + 24 + 24 = 96$ 이므로 100번째로 나타나는

수는 5□□□□ 풀인 자연수 중에서 네 번째 수이다.

5로 시작하는 자연수를 순서대로 나열하면

$$51234, 51243, 51324, 51342, \dots$$

따라서 100번째 수는 51342이다.

연습문제

173~174쪽

1 6	2 ③	3 ③	4 2	5 ②
6 1440	7 ⑤	8 ④	9 20	10 84
11 ⑤	12 ①	13 288	14 336	

- 1 ${}_6P_r \geq 4 \times {}_6P_{r-1}$ 에서

$$\frac{6!}{(6-r)!} \geq 4 \times \frac{6!}{\{6-(r-1)\}!}$$

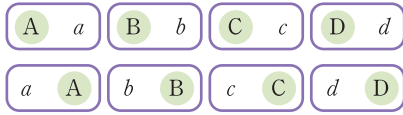
$$\frac{(7-r)!}{(6-r)!} \geq 4$$

$$7-r \geq 4 \quad \therefore r \leq 3$$
따라서 모든 자연수 r 의 값의 합은
 $1+2+3=6$
- 2 서로 다른 5개에서 4개를 택하는 순열의 수와 같으므로
 ${}_5P_4=120$
- 3 여학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 남학생 5명과 함께
 펴를 넘기를 하는 방법의 수는 $6!=720$
 여학생 2명이 순서를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
 따라서 구하는 방법의 수는 $720 \times 2=1440$
- 4 아이 4명을 한 묶음으로 생각하여 어른 n 명과 함께 일렬
 로 서는 방법의 수는 $(n+1)!$
 아이 4명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $4!=24$
 아이들끼리 서로 이웃하여 서는 방법의 수가 144이므로
 $(n+1)! \times 24=144$
 $(n+1)!=6=3 \times 2 \times 1=3!$
 $\therefore n=2$
- 5 한국 선수와 중국 선수의 수가 5명으로 같으므로 교대로
 세우는 방법은 다음과 같은 2가지 경우가 있다.
-
- 한국 선수 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5!$
 중국 선수 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5!$
 따라서 구하는 방법의 수는
 $2 \times 5! \times 5!$
- 6 이웃해도 되는 4개의 문자 d, e, f, g 를 일렬로 나열하는
 방법의 수는 $4!=24$
 그 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중에서 3개의 자리에
 a, b, c 를 나열하는 방법의 수는 ${}_5P_3=60$
 따라서 구하는 방법의 수는 $24 \times 60=1440$
- 7 홀수 번호가 적힌 3개의 의자 중에서 2개의 의자에 아버
 지, 어머니가 앉는 방법의 수는 ${}_3P_2=6$
 나머지 3개의 의자에 할머니, 아들, 딸이 앉는 방법의 수는
 ${}_3P_3=3!=6$
 따라서 구하는 경우의 수는
 $6 \times 6=36$

- 8 (i) 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는
 $5!=120$
 (ii) 양 끝에 자음인 d, r, m 의 3개의 문자 중에서 2개를
 택하여 나열하는 방법의 수는 ${}_3P_2=6$
 나머지 자리에 3개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의
 수는 $3!=6$
 따라서 양 끝에 자음만 오도록 나열하는 방법의 수는
 $6 \times 6=36$
 (i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는
 $120-36=84$
- 9 3의 배수는 모든 자리의 숫자의 합이 3의 배수이므로 5개
 의 숫자 0, 1, 2, 3, 4에서 서로 다른 3개를 택할 때, 그
 합이 3의 배수가 되는 경우는
 (0, 1, 2), (0, 2, 4), (1, 2, 3), (2, 3, 4)
 각각의 경우에서 만들 수 있는 자연수의 개수를 구하면
 (i) (0, 1, 2)의 경우
 백의 자리에 0이 올 수 없으므로 $2 \times 2!=4$
 (ii) (0, 2, 4)의 경우
 백의 자리에 0이 올 수 없으므로 $2 \times 2!=4$
 (iii) (1, 2, 3)의 경우 $3!=6$
 (iv) (2, 3, 4)의 경우 $3!=6$
 (i)~(iv)에 의하여 구하는 3의 배수의 개수는
 $4+4+6+6=20$
- 10 1□□□ 풀인 자연수의 개수는
 ${}_5P_3=60$
 $20□□, 21□□$ 풀인 자연수의 개수는
 $2 \times {}_4P_2=2 \times 12=24$
 따라서 2300보다 작은 자연수의 개수는
 $60+24=84$
- 11 $a□□□□□$ 풀인 문자열의 개수는
 $5!=120$
 $b□□□□□$ 풀인 문자열의 개수는
 $5!=120$
 $c□□□□□$ 풀인 문자열의 개수는
 $5!=120$
 이때 $120+120+120=360$ 이므로 363번째로 나타나는
 문자열은 $d□□□□□$ 풀인 문자열 중 세 번째 문자열
 이다.
 d 로 시작하는 문자열을 순서대로 나열하면
 $dabcef, dabcf, dabecf, \dots$
 따라서 363번째로 나타나는 문자열은 $dabecf$ 이다.

- 12 각각의 부부를 한 묶음으로 생각하여 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4! = 24$

남편 A, B, C, D의 아내를 각각 a, b, c, d 라 할 때, 남편들을 먼저 앉히면 아내들은 모두 자기 남편의 오른쪽 또는 모두 자기 남편의 왼쪽에 앉으면 된다.



즉, 남녀가 교대로 앉는 방법의 수는 2가지
따라서 구하는 방법의 수는 $24 \times 2 = 48$

- 13 6명을 일렬로 세우는 방법의 수에서 교사 사이에 학생을 세우지 않거나 1명만 세우는 방법의 수를 빼면 된다.

(i) 6명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$$6! = 720$$

(ii) 교사 사이에 학생을 세우지 않는 방법은 교사끼리 이웃하도록 세우는 방법과 같다.

교사 2명을 한 묶음으로 생각하여 학생 4명과 함께 일렬로 세우는 방법의 수는 $5! = 120$

교사 2명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2! = 2$

따라서 교사 사이에 학생을 세우지 않는 방법의 수는 $120 \times 2 = 240$

(iii) 교사 사이에 학생 1명만 세우는 방법

학생 4명 중에서 1명을 택하여 교사 사이에 세우는 방법의 수는 ${}_4P_1 = 4$

교사 2명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2! = 2$

교사와 교사 사이의 학생 1명을 한 묶음으로 생각하여 나머지 3명의 학생과 함께 일렬로 세우는 방법의 수는 $4! = 24$

따라서 교사 사이에 학생 1명만 세우는 방법의 수는 $4 \times 2 \times 24 = 192$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$$720 - 240 - 192 = 288$$

- 14 (i) 9개의 숫자 중에서 3개를 택하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는 ${}_9P_3 = 504$

(ii) 합이 9가 되는 두 수의 쌍은

(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5)의 4개

이 4개의 쌍 중 하나를 택하고 이미 택한 2개의 숫자를 제외한 나머지 7개의 숫자 중에서 1개를 택하여 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$$4 \times {}_7P_1 \times 3! = 4 \times 7 \times 6 = 168$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 자연수의 개수는

$$504 - 168 = 336$$

VI-1 03 조합

1 조합

개념 CHECK

175쪽

1 답 (1) 1 (2) 1 (3) 21 (4) 6

문제

176~181쪽

01-1 답 (1) 5 (2) 9 (3) 7 (4) 5

(1) ${}_nC_2 = 10$ 에서

$$\frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 10$$

$$n(n-1) = 20 = 5 \times 4$$

$$\therefore n = 5$$

(2) ${}_nC_5 = {}_nC_{n-5}$ 이므로 ${}_nC_{n-5} = {}_nC_4$ 에서

$$n-5 = 4$$

$$\therefore n = 9$$

(3) ${}_{n+3}C_n = {}_{n+3}C_{(n+3)-n}$ 이므로 ${}_{n+3}C_3 = 120$ 에서

$$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

$$(n+3)(n+2)(n+1) = 720 = 10 \times 9 \times 8$$

$$\therefore n = 7$$

(4) ${}_{n+1}C_{n-1} = {}_{n+1}C_{(n+1)-(n-1)} = {}_{n+1}C_2$ 이므로

$${}_{n+2}C_3 = 2 \times {}_nC_2 + {}_{n+1}C_2$$
에서

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{3 \times 2 \times 1} = 2 \times \frac{n(n-1)}{2 \times 1} + \frac{(n+1)n}{2 \times 1}$$

이때 $n \geq 2$ 이므로 양변을 n 으로 나누면

$$\frac{(n+2)(n+1)}{6} = n-1 + \frac{n+1}{2}$$

$$n^2 - 6n + 5 = 0$$

$$(n-1)(n-5) = 0$$

$$\therefore n = 5 (\because n \geq 2)$$

01-2 답 5

${}_nP_2 + 4 \times {}_nC_3 = {}_nP_3$ 에서

$$n(n-1) + 4 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = n(n-1)(n-2)$$

이때 $n \geq 3$ 이므로 양변을 $n(n-1)$ 로 나누면

$$1 + \frac{2}{3}(n-2) = n-2$$

$$\therefore n = 5$$

01-3 답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

$$\begin{aligned}
 (1) \quad n \times {}_{n-1}C_{r-1} &= n \times \frac{(n-1)!}{(r-1)! \{(n-1)-(r-1)\}!} \\
 &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \\
 &= r \times \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
 &= r \times {}_nC_r \\
 \therefore r \times {}_nC_r &= n \times {}_{n-1}C_{r-1} \quad (\text{단, } 1 \leq r \leq n) \\
 (2) \quad {}_{n-1}C_{r-1} &= \frac{(n-1)!}{(r-1)! \{(n-1)-(r-1)\}!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \\
 {}_{n-1}C_r &= \frac{(n-1)!}{r! \{(n-1)-r\}!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} \\
 \therefore {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} \\
 &= r \times \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!} + (n-r) \times \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!} \\
 &= (r+n-r) \times \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!} \\
 &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
 &= {}_nC_r \quad (\text{단, } 1 \leq r < n)
 \end{aligned}$$

02-1 답 45

꽃 10송이 중에서 8송이를 택하는 방법의 수는

$${}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

02-2 답 280

우유 5가지 중에서 2가지를 구매하는 방법의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

주스 8가지 중에서 2가지를 구매하는 방법의 수는

$${}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$10 \times 28 = 280$$

02-3 답 7

사탕과 초콜릿 $(n+2)$ 개 중에서 3개를 택하는 방법의 수가 84이므로

$${}_{n+2}C_3 = 84$$

$$\frac{(n+2)(n+1)n}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

$$(n+2)(n+1)n = 504 = 9 \times 8 \times 7$$

$$\therefore n = 7$$

03-1 답 (1) 165 (2) 455

(1) 구하는 방법의 수는 특정 여학생 1명을 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 11명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수와 같으므로

$${}_{11}C_3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

(2) (i) 12명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는

$${}_{12}C_4 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

(ii) 4명을 모두 남학생으로만 또는 모두 여학생으로만 뽑는 방법의 수는

$${}_7C_4 + {}_5C_4 = {}_7C_3 + {}_5C_1 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} + 5 = 35 + 5 = 40$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$$495 - 40 = 455$$

03-2 답 112

A와 B 중에서 1명을 뽑고 A, B를 제외한 나머지 8명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$${}_2C_1 \times {}_8C_3 = 2 \times \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 112$$

03-3 답 8

빨간색 볼펜을 이미 택하였다고 생각하고 나머지 $(n-1)$ 자루의 볼펜 중에서 3자루를 택하는 방법의 수가 35이므로

$${}_{n-1}C_3 = 35$$

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

$$(n-1)(n-2)(n-3) = 210 = 7 \times 6 \times 5$$

$$\therefore n = 8$$

04-1 답 (1) 7200 (2) 5760

(1) 어른 4명 중에서 3명, 아이 6명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$${}_4C_3 \times {}_6C_2 = {}_4C_1 \times {}_6C_2 = 4 \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 60$$

뽑은 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5! = 120$

따라서 구하는 방법의 수는

$$60 \times 120 = 7200$$

(2) 어른 4명 중에서 2명, 아이 6명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$${}_4C_2 \times {}_6C_3 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

어른 2명을 한 묶음으로 생각하여 아이 3명과 함께 일렬로 세우는 방법의 수는 $4! = 24$

어른 2명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2! = 2$

따라서 구하는 방법의 수는

$$120 \times 24 \times 2 = 5760$$

04-2 [답 36]

숫자 1을 이미 택하였다고 생각하고 숫자 1, 2를 제외한 나머지 4개의 숫자 3, 4, 5, 6 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

택한 2개의 숫자와 1을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$3! = 6$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$6 \times 6 = 36$$

04-3 [답 180]

혜선이와 미림이를 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 6명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

혜선이와 미림이를 한 묶음으로 생각하여 다른 2명과 함께 일렬로 세우는 방법의 수는

$$3! = 6$$

혜선이와 미림이가 자리를 바꾸는 방법의 수는

$$2! = 2$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$15 \times 6 \times 2 = 180$$

05-1 [답 (1) 36 (2) 110]

(1) 10개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

그런데 한 직선 위에 있는 점으로는 1개의 직선만 만들 수 있으므로 구하는 직선의 개수는

$$45 - 10 + 1 = 36$$

(2) 10개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

그런데 한 직선 위에 있는 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$$120 - 10 = 110$$

05-2 [답 190]

12개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 경우에는 삼각형을 만들지 못하고, 삼각형을 만들지 못하는 직선이 3개 있으므로

$$\begin{aligned} 3 \times {}_5C_3 &= 3 \times {}_5C_2 \\ &= 3 \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 30 \end{aligned}$$

따라서 구하는 삼각형의 개수는

$$220 - 30 = 190$$

05-3 [답 9]

육각형의 6개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하여 이으면 변 또는 대각선이 그려진다.

6개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

육각형의 변의 개수는 6이므로 구하는 대각선의 개수는

$$15 - 6 = 9$$

06-1 [답 60]

두 직선에서 각각 2개의 점을 택하여 4개의 점을 이으면 사각형이 만들어진다.

위쪽 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

아래쪽 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$$6 \times 10 = 60$$

06-2 [답 210]

가로 방향의 평행한 직선 5개 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

세로 방향의 평행한 직선 7개 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

따라서 구하는 평행사변형의 개수는

$$10 \times 21 = 210$$

06-3 [답] (1) 20 (2) 40

(1) 간격 하나의 길이를 a 라 하자.

한 변의 길이가 a 인 정사각형의 개수는

$$4 \times 3 = 12$$

한 변의 길이가 $2a$ 인 정사각형의 개수는

$$3 \times 2 = 6$$

한 변의 길이가 $3a$ 인 정사각형의 개수는

$$2 \times 1 = 2$$

따라서 정사각형의 총 개수는

$$12 + 6 + 2 = 20$$

(2) 4개의 가로줄 중에서 2개를, 5개의 세로줄 중에서 2개를 택하면 하나의 직사각형이 만들어지므로 직사각형의 개수는

$${}_4C_2 \times {}_5C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 60$$

이 중 정사각형이 20개 있으므로 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$$60 - 20 = 40$$

연습문제

183~184쪽

1 11	2 ④	3 ③	4 665	5 144
6 5	7 20	8 122	9 ③	10 96
11 ③	12 72	13 15	14 ②	

1 $2 \times {}_n C_3 = 3 \times {}_n P_2$ 에서

$$2 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 3 \times n(n-1)$$

$$\frac{n-2}{3} = 3 \quad (\because n \geq 3)$$

$$n-2=9 \quad \therefore n=11$$

2 1학년 학생 4명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는

$${}_4 C_3 = {}_4 C_1 = 4$$

2학년 학생 6명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는

$${}_6 C_4 = {}_6 C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$4 \times 15 = 60$$

3 10명 중에서 2명을 뽑아 한 모듬을 만들고, 나머지 8명 중에서 3명을 뽑아 한 모듬을 만든 후, 남은 5명이 한 모듬을 이루면 되므로 구하는 방법의 수는

$${}_{10}C_2 \times {}_8C_3 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} \times \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 2520$$

4 (i) 13명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는

$${}_{13}C_4 = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 715$$

(ii) 4명을 모두 가수로만 또는 모델로만 뽑는 방법의 수는

$${}_7C_4 + {}_6C_4 = {}_7C_3 + {}_6C_2 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} + \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 50$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$$715 - 50 = 665$$

5 부모님 2명을 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 4명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

뽑은 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4! = 24$

따라서 구하는 방법의 수는 $6 \times 24 = 144$

6 주어진 조건을 만족시키려면 공역의 원소 중에서 서로 다른 4개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

7 (가)에서 $f(3) = 3$ 이므로 (나)를 만족시키려면 공역의 원소 4, 5, 6, 7, 8 중에서 서로 다른 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2에 대응시키고, 공역의 원소 1, 2 중에서 1개를 택하여 정의역의 원소 4에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수 f 의 개수는

$${}_5C_2 \times {}_2C_1 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 2 = 20$$

8 (i) 서로 다른 직선의 개수

10개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

위쪽 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$

아래쪽 직선 위에 있는 6개의 점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 ${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$

그런데 한 직선 위에 있는 점으로는 1개의 직선만 만들 수 있으므로 직선의 개수 m 은

$$m = 45 - 6 - 15 + 2 = 26$$

(ii) 삼각형의 개수

10개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는

$${}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

위쪽 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

아래쪽 직선 위에 있는 6개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$

그런데 한 직선 위에 있는 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 삼각형의 개수 n 은

$$n = 120 - 4 - 20 = 96$$

(i), (ii)에 의하여 $m + n = 26 + 96 = 122$

9 팔각형의 8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하여 이으면 변 또는 대각선이 그려진다.

8개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

팔각형의 변의 개수는 8이므로 구하는 대각선의 개수는 $28 - 8 = 20$

10 (가)에서 $n(A \cap B) = 2$ 이므로 집합 B 는 집합 A 의 원소 중에서 2개만을 원소로 갖는다.

집합 A 의 원소 4개 중에서 집합 B 에 속하는 원소 2개를 택하는 방법의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

한편 (가), (나)에서 집합 B 는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 부분집합 중에서 집합 A 의 원소 1, 3, 5, 7 중 2개는 반드시 원소로 갖고 나머지 2개는 원소로 갖지 않는 집합이므로 그 개수는

$$2^{8-2-2} = 2^4 = 16$$

따라서 구하는 집합 B 의 개수는 $6 \times 16 = 96$

11 (i) 첫째 날 2팀, 둘째 날 3팀이 공연하는 경우

5개의 팀 중에서 첫째 날 공연하는 2팀을 택하고, 둘째 날 공연하는 3팀을 택하는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_3 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 1 = 10$$

각각의 경우에 대하여 각 팀이 공연 순서를 정하는 경우의 수는

$$2! \times 3! = 2 \times 6 = 12$$

따라서 첫째 날 2팀, 둘째 날 3팀이 공연하도록 순서를 정하는 경우의 수는

$$10 \times 12 = 120$$

(ii) 첫째 날 3팀, 둘째 날 2팀이 공연하는 경우

5개의 팀 중에서 첫째 날 공연하는 3팀을 택하고, 둘째 날 공연하는 2팀을 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3 \times {}_2C_2 = {}_5C_2 \times {}_2C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 1 = 10$$

각각의 경우에 대하여 각 팀이 공연 순서를 정하는 경우의 수는

$$3! \times 2! = 6 \times 2 = 12$$

따라서 첫째 날 3팀, 둘째 날 2팀이 공연하도록 순서를 정하는 경우의 수는

$$10 \times 12 = 120$$

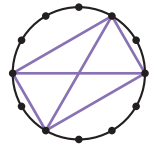
(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$120 + 120 = 240$$

12 평행사변형이 아닌 사다리꼴은 서로 평행한 2개의 직선과 평행하지 않은 2개의 직선을 택하면 만들어지므로 구하는 사다리꼴의 개수는

$${}_4C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 + {}_3C_2 \times {}_4C_1 \times {}_2C_1 + {}_2C_2 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1 \\ = 36 + 24 + 12 = 72$$

13 오른쪽 그림과 같이 서로 다른 원의 지름 2개가 직사각형의 대각선이 되도록 하는 원 위의 4개의 점을 이으면 직사각형을 만들 수 있다.



따라서 원의 지름 6개 중에서 2개를 택하면 이를 두 대각선으로 하는 직사각형이 만들어지므로 구하는 직사각형의 개수는

$${}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

14 주어진 삼각형을 포함하는 사각형을 만들려면 원점 $(0, 0)$ 을 반드시 꼭짓점으로 택해야 한다.

이때 원점을 제외한 나머지 세 꼭짓점은 각각 다음과 같은 점 중에서 택해야 한다.

(i) x 축 위의 점 $(4, 0), (8, 0)$ 중에서 1개

(ii) y 축 위의 점 $(0, 4), (0, 8)$ 중에서 1개

(iii) 제1사분면 위의 점 $(4, 4), (4, 8), (8, 4), (8, 8)$ 중에서 1개

(i), (ii), (iii)에서 원점을 제외한 나머지 세 꼭짓점을 택하는 방법의 수는

$${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_4C_1 = 16$$

그런데 네 점 $(0, 0), (8, 0), (4, 4), (0, 8)$ 을 꼭짓점으로 택하면 사각형을 만들 수 없으므로 구하는 사각형의 개수는

$$16 - 1 = 15$$

유형편

정답과 해설

IV-1 01 집합의 뜻과 집합 사이의 포함 관계

기초 문제 Training

4쪽

- (1) ○ (2) × (3) ○
- (1) ∈ (2) ∈ (3) ∈ (4) ∉
- (1) 예 $\{x|x \text{는 자연수}\}$ (2) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$
(3) $\{4, 8, 12, 16, \dots\}$
- (1) ㄷ, ㄹ (2) ㄱ, ㄴ, ㄷ
- (1) $A \subset B$ (2) $B \subset A$
- (1) = (2) ≠
- (1) $\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{9\}, \{1, 3\}, \{1, 9\}, \{3, 9\},$
 $\{1, 3, 9\}$
(2) $\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{9\}, \{1, 3\}, \{1, 9\}, \{3, 9\}$
- (1) 16 (2) 15 (3) 8 (4) 8

핵심 유형 Training

5~8쪽

- ④
- 2
- ⑤
- ⑤
- ③
- ④
- $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
- 1
- $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$
- 13
- ③
- 2
- ④
- ④
- ①
- 2
- ⑤
- 2
- 1
- ③
- 8
- 120
- 16
- ②
- ③
- ③

- ①, ②, ③, ⑤ ‘아름다운’, ‘잘하는’, ‘많이’, ‘좋은’은 기준이 명확하지 않아 대상을 분명하게 정할 수 없다.
따라서 집합인 것은 ④이다.
- ㄴ, ㄷ, ㄹ ‘잘하는’, ‘잘 치는’, ‘인기가 많은’은 기준이 명확하지 않아 대상을 분명하게 정할 수 없다.
따라서 보기 중 집합인 것은 ㄱ, ㄴ의 2개이다.
- ④ 5에 가장 가까운 자연수는 4, 6이므로 집합이다.
⑤ ‘가까운’은 기준이 명확하지 않아 대상을 분명하게 정할 수 없다.
따라서 집합이 아닌 것은 ⑤이다.
- $A = \{1, 2, 4, 8\}$ 에 대하여 원소 1, 2, 4, 8은 8의 양의 약수이므로 조건제시법으로 나타내면 ⑤이다.
- ③ $\{10, 9, 8, \dots, 0, -1, -2, \dots\}$
따라서 나머지 넷과 다른 것은 ③이다.
- ④ $\{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$

- 집합 A 의 원소 a 와 집합 B 의 원소 b 에 대하여 $a+b$ 의 값은 오른쪽 표와 같으므로 구하는 집합은 $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

$a \setminus b$	-1	0	1
1	0	1	2
2	1	2	3
3	2	3	4

- $B = \{1, 2, 4\}$
집합 A 의 원소 x 와 집합 B 의 원소 y 에 대하여 xy 의 값은 오른쪽 표와 같으므로
 $-4, -2, -1, 2, 4, 8, a, 2a, 4a$
이때 $C = \{-4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$ 이므로
 $a=1$

$x \setminus y$	1	2	4
-1	-1	-2	-4
2	2	4	8
a	a	$2a$	$4a$

- 집합 A 의 원소 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은 오른쪽 표와 같다.
이때 $a+b$ 의 값 중에서 소수는 2, 3, 5이므로
 $B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$

$a \setminus b$	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

- $A = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ 이므로 $n(A)=7$
 $B = \{13, 26, 39, 52, 65, 78\}$ 이므로 $n(B)=6$
 $\therefore n(A)+n(B)=7+6=13$

11 ③ $n(\{20\}) - n(\{17\}) = 1 - 1 = 0$

④ $A = \{1, 7, 49\}$ 이므로 $n(A) = 3$

⑤ $B = \{2\}$ 이므로 $n(B) = 1$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

12 $\neg. n(\{0\}) = 1$

$\neg. n(\{1\}) = 1, n(\{\emptyset\}) = 1$ 이므로 $n(\{1\}) = n(\{\emptyset\})$

$\neg. n(\{0, 1, 2\}) - n(\{1, 2\}) = 3 - 2 = 1$

즉, $x^2 - 8x - 9 = 0$ 에서 $(x+1)(x-9) = 0$

$\therefore x = -1$ 또는 $x = 9$

$\therefore n(\{x | x^2 - 8x - 9 = 0\}) = n(\{-1, 9\}) = 2$

따라서 $n(\{3, 4, 5\}) = 3, n(\{-3, -2, -1\}) = 3$ 이므로

$n(\{3, 4, 5\}) = n(\{-3, -2, -1\})$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg.$, $\neg$ 의 2개이다.

13 ① $\emptyset \subset A, \emptyset \notin A$ ② $\{1\} \subset A, \{1\} \notin A$

③ $\{2\} \subset A, \{2\} \notin A$ ⑤ $\{1, 2\} \subset A$

따라서 옳은 것은 ④이다.

14 ④ $\{\emptyset\} \subset A, \{\emptyset\} \notin A$

15 $\neg. \emptyset \subset A$ 이므로 $\emptyset \in X(A)$

$\neg. \emptyset$ 은 모든 집합의 부분집합이므로 $\emptyset \subset X(A)$

$\neg. \{\emptyset\} \subset A$ 이므로 $\{\emptyset\} \notin X(A)$

즉, $\{\{\emptyset\}\} \subset A$ 이므로 $\{\{\emptyset\}\} \in X(A)$

$\{\emptyset\} \notin X(A)$ 이므로 $\{\{\emptyset\}\} \subset X(A)$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg.$, $\neg$ 이다.

16 $2 \in A$ 이므로 $A = B$ 이라면 $2 \in B$ 에서

$a^2 - a = 2, a^2 - a - 2 = 0$

$(a+1)(a-2) = 0 \quad \therefore a = -1$ 또는 $a = 2$

(i) $a = -1$ 일 때,

$A = \{-5, 0, 2\}, B = \{2, 3, 4\} \quad \therefore A \neq B$

(ii) $a = 2$ 일 때,

$A = \{2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 4\} \quad \therefore A = B$

(i), (ii)에 의하여 $a = 2$

17 $A \subset B, B \subset A$ 에서 $A = B$

$4 \in A$ 이므로 $A = B$ 이라면 $4 \in B$ 에서

$2a - 4 = 4$ 또는 $3a + 4 = 4 \quad \therefore a = 0$ 또는 $a = 4$

(i) $a = 0$ 일 때,

$A = \{0, 4\}, B = \{-4, 4, 8\} \quad \therefore A \neq B$

(ii) $a = 4$ 일 때,

$A = \{4, 8, 16\}, B = \{4, 8, 16\} \quad \therefore A = B$

(i), (ii)에 의하여 $a = 4$

18 $A \subset B$ 이도록 두 집합 A, B

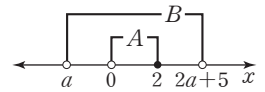
를 수직선 위에 나타내면 오

른쪽 그림과 같으므로

$a \leq 0, 2a + 5 > 2$

$\therefore -\frac{3}{2} < a \leq 0$

따라서 정수 a 는 $-1, 0$ 의 2개이다.



19 $-2 \in A$ 이므로 $A \subset B$ 이라면 $-2 \in B$ 에서

$a - 3 = -2$ 또는 $a = -2$ 또는 $a + 1 = -2$

$\therefore a = -3$ 또는 $a = -2$ 또는 $a = 1$

(i) $a = -3$ 일 때,

$A = \{-2, 1, 8\}, B = \{-6, -3, -2, 0\}$

$\therefore A \not\subset B$

(ii) $a = -2$ 일 때,

$A = \{-2, 1, 3\}, B = \{-5, -2, -1, 0\}$

$\therefore A \not\subset B$

(iii) $a = 1$ 일 때,

$A = \{-2, 0, 1\}, B = \{-2, 0, 1, 2\} \quad \therefore A \subset B$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $B = \{-2, 0, 1, 2\}$

따라서 집합 B 의 모든 원소의 합은

$-2 + 0 + 1 + 2 = 1$

20 $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ 이므로 진부분집합의 개수는

$2^6 - 1 = 63$

21 1은 반드시 원소로 갖고 4, 6은 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는

$2^{6-1-2} = 2^3 = 8$

22 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 의 부분집합의 개수에서 홀수 1, 3, 5, 7을 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수를 뺀 것과 같으므로

$2^7 - 2^{7-4} = 2^7 - 2^3 = 128 - 8 = 120$

23 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여

(i) 1을 반드시 원소로 갖고, 원소가 2개 이상인 부분집합의 개수는 $2^{4-1} - 1 = 7$

(ii) 1은 원소로 갖지 않고 2는 반드시 원소로 갖는, 원소가 2개 이상인 부분집합의 개수는 $2^{4-2} - 1 = 3$

(iii) 1, 2는 원소로 갖지 않고 3은 반드시 원소로 갖는, 원소가 2개 이상인 부분집합의 개수는 $2^{4-3} - 1 = 1$

(i), (ii), (iii)에 의하여 각 집합의 가장 작은 원소를 모두 더한 값은

$1 \times 7 + 2 \times 3 + 3 \times 1 = 16$

24 집합 X 의 개수는 집합 B 의 부분집합 중에서 1, 2, 3을 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로
 $2^{5-3}=2^2=4$

25 $x^2-4x+3=0$ 에서
 $(x-1)(x-3)=0$
 $\therefore x=1$ 또는 $x=3$
 $A=\{1, 3\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ 이므로 집합 X 는 1, 3을 반드시 원소로 갖는 집합 B 의 부분집합 중에서 집합 A 와 집합 B 를 제외한 것과 같다.
 따라서 구하는 집합 X 의 개수는
 $2^{6-2}-2=2^4-2=14$

26 집합 X 의 개수는 집합 B 의 부분집합 중에서 1, 2, 3, 4를 반드시 원소로 갖는 부분집합의 개수와 같으므로
 $2^{k-4}=8=2^3$
 $k-4=3 \quad \therefore k=7$

IV-1 02 집합의 연산

기초 문제 Training

9쪽

- 1 (1) $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$, $A \cap B = \{a, c\}$
 (2) $A \cup B = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$,
 $A \cap B = \{8, 16, 24, 32, \dots\}$
 (3) $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 10\}$, $A \cap B = \{1, 2\}$
- 2 (1) A (2) A (3) A (4) $\emptyset$
- 3 (1) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ (2) $\{3, 5, 6, 7, 9, 10\}$
 (3) $\{3, 5, 7, 9\}$ (4) $\{2, 4, 8\}$
- 4 (1) U (2) $\emptyset$ (3) U (4) A
- 5 (1) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (2) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (3) $\{6\}$ (4) $\{6\}$
- 6 4
- 7 4
- 8 (1) 23 (2) 28
- 9 (1) 36 (2) 4

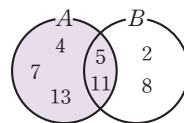
핵심 유형 Training

10~16쪽

- | | | | |
|---------------------------|-------------------------|-----------------------|-------------------|
| 1 $\{1, 3\}$ | 2 $\{4, 5, 7, 11, 13\}$ | 3 ③ | 4 8 |
| 5 17 | 6 ④ | 7 $\neg, \cup$ | 8 ② |
| 10 ④ | 11 $a=3, b=1$ | 12 2 | 13 3 |
| 14 ⑤ | 15 ⑤ | 16 $\neg, \cap, \cup$ | 17 ③ |
| 18 $\frac{2}{3}$ | 19 ④ | 20 8 | 21 4 |
| 22 2 | 23 ⑤ | 24 ③ | 25 ⑤ |
| 26 ⑤ | 27 $\{5, 6, 9\}$ | 28 ③ | 29 $\cap$ |
| 30 최댓값: -7 , 최솟값: -11 | 31 $\neg, \cup, \cap$ | 32 ② | 33 ② |
| 34 ④ | 35 8 | 36 ④ | 37 12 |
| 38 15 | 39 25 | 40 50 | 41 6 |
| 42 16 | 43 23 | 44 30 | 45 최댓값: 9, 최솟값: 2 |
| 46 ④ | 47 ③ | | |

- 1 $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$,
 $B = \{1, 3, 9\}$,
 $C = \{1, 2, 3, 6\}$
 따라서 $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ 이므로
 $(A \cup C) \cap B = \{1, 3\}$

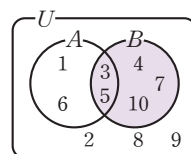
- 2 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
 $A = \{4, 5, 7, 11, 13\}$



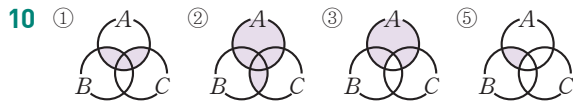
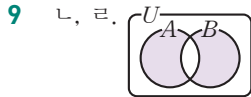
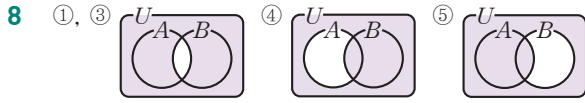
- 3 집합 B 는 1, 3, 4는 반드시 원소로 갖고 2, 5는 원소로 갖지 않아야 한다.
 따라서 집합 B 가 될 수 없는 것은 ③이다.
- 4 구하는 집합의 개수는 집합 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중에서 1, 2를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로
 $2^{5-2}=2^3=8$

- 5 $A^c = \{4, 5\}$ 이므로
 $A^c \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$
 따라서 집합 $A^c \cup B$ 의 모든 원소의 합은
 $2+4+5+6=17$

- 6 주어진 조건을 벤다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로
 $B = \{3, 4, 5, 7, 10\}$



- 7 $A=\{2, 5, 8\}, B=\{2, 4, 6, 8\}$
 $\neg, A \cap B = \{2, 8\} = \{x | x=6k-4, k \text{는 자연수}\}$
 $\neg, A-B = \{5\} = \{x | x=5k, k \text{는 자연수}\}$
 $\neg, A^c = \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}, B^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이므로
 $A^c \cap B^c = \{1, 3, 7, 9\}$
따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.



- 11 $A \cap B = \{2, 3\}$ 에서
 $3 \in A$ 이므로 $2a-3=3 \quad \therefore a=3$
 $2 \in B$ 이므로 $b+1=2 \quad \therefore b=1$
- 12 $x^2-5x+6=0$ 에서 $(x-2)(x-3)=0$
 $\therefore x=2$ 또는 $x=3$
 $\therefore A=\{2, 3\}$
 $x^2-ax-a-1=0$ 에서 $(x+1)\{x-(a+1)\}=0$
 $\therefore x=-1$ 또는 $x=a+1$
 $\therefore B=\{-1, a+1\}$
이때 $A-B=\{2\}$ 에서 $3 \in B$ 이므로
 $a+1=3 \quad \therefore a=2$

- 13 $2, 5, 2a+4b$ 는 집합 A 의 원소이므로
 $3a-b=5, 2a+4b=8$
두 식을 연립하여 풀면
 $a=2, b=1 \quad \therefore a+b=3$

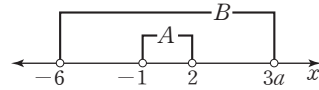
- 14 $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 7\}$ 에서 $1 \in A$ 또는 $1 \in B$ 이므로
 $a^2+1=1$ 또는 $a-1=1$ 또는 $a+2=1$
 $\therefore a=-1$ 또는 $a=0$ 또는 $a=-2$
(i) $a=-1$ 일 때, $A=\{2, 4\}, B=\{-2, 1, 7\}$
 $\therefore A \cup B = \{-2, 1, 2, 4, 7\}$
(ii) $a=0$ 일 때, $A=\{1, 2, 4\}, B=\{-1, 2, 7\}$
 $\therefore A \cup B = \{-1, 1, 2, 4, 7\}$
(iii) $a=2$ 일 때, $A=\{2, 4, 5\}, B=\{1, 4, 7\}$
 $\therefore A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 7\}$
(i), (ii), (iii)에 의하여 $a=2$

- 15 $A^c \subset B^c$ 에서 $B \subset A$
⑤ $A^c \cup B \neq U$

- 16 $A-B=A$ 에서 두 집합 A, B 는 서로소이므로
 $A \cap B = \emptyset, A \subset B^c, B \subset A^c$
따라서 보기 중 항상 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

- 17 ①, ②, ④, ⑤ 두 집합 A, B 는 서로소이다.
③ $B \subset A$
따라서 포함 관계가 나머지 넷과 다른 것은 ③이다.

- 18 $x^2-x-2 < 0$ 에서 $(x+1)(x-2) < 0$
 $\therefore -1 < x < 2$
 $\therefore A = \{x | -1 < x < 2\}$
 $x^2-3(a-2)x-18a < 0$ 에서 $(x+6)(x-3a) < 0$
 $\therefore B = \{x | (x+6)(x-3a) < 0\}$
 $A \cap B = A$ 에서 $A \subset B$
 $A \subset B$ 를 만족시키도록 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$3a \geq 2 \quad \therefore a \geq \frac{2}{3}$$

따라서 a 의 최솟값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

- 19 $X-A=X$ 에서 $X \cap A = \emptyset$
따라서 집합 X 의 개수는 전체집합 U 의 부분집합 중에서
1, 4, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수와 같으므로
 $2^{7-3} = 2^4 = 16$

- 20 $A-X=A$ 에서 $A \cap X = \emptyset$
 $B \cup X = X$ 에서 $B \subset X$
따라서 집합 X 의 개수는 전체집합 U 의 부분집합 중에서
 a, c, e 는 원소로 갖지 않고 b, h 는 반드시 원소로 갖는
부분집합의 개수와 같으므로
 $2^{8-3-2} = 2^3 = 8$

- 21 $A-X=\emptyset$ 에서 $A \subset X$
 $(B-A) \cap X = \{1, 5\}$ 에서 $\{1, 5, 6\} \cap X = \{1, 5\}$ 이므로
 $1 \in X, 5 \in X, 6 \notin X$
따라서 집합 X 의 개수는 전체집합 U 의 부분집합 중에서
1, 2, 3, 4, 5는 반드시 원소로 갖고 6은 원소로 갖지 않는
부분집합의 개수와 같으므로
 $2^{8-5-1} = 2^2 = 4$

- 22 $A \cap X = X$ 에서 $X \subset A$ ㉠
 $(A \cap B) \cup X = X$ 에서 $(A \cap B) \subset X$ ㉡
 ㉠, ㉡에 의하여 $(A \cap B) \subset X \subset A$
 즉, 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중에서 집합 $A \cap B$ 의 원소를 모두 원소로 갖는 집합이다.
 이때 $n(A \cap B) = k$ 라 하면 집합 X 의 개수가 8이므로
 $2^{5-k} = 8 = 2^3, 5-k=3 \quad \therefore k=2$
 $\therefore n(A \cap B) = 2$
 그런데 a 는 자연수이므로 집합 B 의 원소는 연속하는 네 자연수이다.
 따라서 $B = \{4, 5, 6, 7\}$ 이므로
 $a+2=4 \quad \therefore a=2$
- 23 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $= \{3, 4, 5\} \cup \{3, 8, 9, 10\}$
 $= \{3, 4, 5, 8, 9, 10\}$
- 24 $\neg, (A \cap B) \cup (A^c \cup B)^c = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$
 $= A \cap (B \cup B^c)$
 $= A \cap U = A$
 $\therefore A - (B - C) = A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cup C)$
 $= (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$
 $= (A - B) \cup (A \cap C)$
 $\therefore (A - B) - C = (A \cap B^c) \cap C^c = B^c \cap (A \cap C^c)$
 $= B^c \cap (A - C)$
 따라서 보기 중 항상 옳은 것은 $\neg, \therefore$ 이다.
- 25 $\{A \cup (A^c \cap B)\} \cap \{B \cap (B \cup C)\}$
 $= \{(A \cup A^c) \cap (A \cup B)\} \cap B$
 $= \{U \cap (A \cup B)\} \cap B = (A \cup B) \cap B = B$
 따라서 주어진 집합을 나타내는 것은 ⑤이다.
- 26 $\{(A \cap B) \cup (A^c \cap B)\} \cup \{(B^c \cap C) \cup (B \cup C)^c\}$
 $= \{(A \cup A^c) \cap B\} \cup \{(B^c \cap C) \cup (B^c \cap C^c)\}$
 $= (U \cap B) \cup \{B^c \cap (C \cup C^c)\}$
 $= B \cup (B^c \cap U) = B \cup B^c = U$
- 27 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이므로
 $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c = \{2, 4, 5, 6, 8, 9\}$
 $\{(A \cap B^c) \cup (B - A^c)\} \cap B^c$
 $= \{(A \cap B^c) \cup (B \cap A)\} \cap B^c$
 $= \{A \cap (B^c \cup B)\} \cap B^c$
 $= (A \cap U) \cap B^c = A \cap B^c = A - B$
 따라서 $A - B = \{2, 4, 8\}$ 이므로
 $B = (A \cup B) - (A - B) = \{5, 6, 9\}$

$$\begin{aligned} 28 \quad \{(A^c \cup B^c) \cap (A \cup B^c)\} \cap A &= \{(A^c \cap A) \cup B^c\} \cap A \\ &= (\emptyset \cup B^c) \cap A \\ &= B^c \cap A = A \cap B^c \\ &= A - B \end{aligned}$$

즉, $A - B = \emptyset$ 이므로 $A \subset B$

이때 $A \subset B$ 이면 $A \cap B = A, A \cup B = B$ 이므로 항상 옳은 것은 ③이다.

$$\begin{aligned} 29 \quad \{(A - B^c) \cup (A \cap B^c)\} \cup B \\ &= \{(A \cap B) \cup (A \cap B^c)\} \cup B \\ &= \{A \cap (B \cup B^c)\} \cup B \\ &= (A \cap U) \cup B = A \cup B \end{aligned}$$

즉, $A \cup B = A$ 이므로 $B \subset A$

$\neg, B \subset A$ 이면 $A \cap B = B$

$\therefore, B \subset A$ 이면 $A \cup B = A$

$\therefore, B \subset A$ 이면 $A^c \subset B^c$

$\therefore, B \subset A$ 이면 $A = B$ 인 경우를 제외하고 $A - B \neq \emptyset$

따라서 보기 중 항상 옳은 것은 $\therefore$ 이다.

$$30 \quad x^2 + 16x + 60 \leq 0 \text{에서 } (x+10)(x+6) \leq 0$$

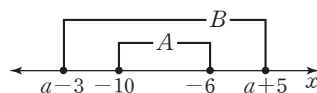
$$\therefore -10 \leq x \leq -6$$

$$\therefore A = \{x \mid -10 \leq x \leq -6\}$$

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap A^c) &= (A \cup B) \cap (A \cup A^c) \\ &= (A \cup B) \cap U = A \cup B \end{aligned}$$

즉, $A \cup B = B$ 이므로 $A \subset B$

$A \subset B$ 를 만족시키도록 두 집합 A, B 를 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$a-3 \leq -10, a+5 \geq -6$$

$$\therefore -11 \leq a \leq -7$$

따라서 a 의 최댓값은 -7 , 최솟값은 -11 이다.

$$31 \quad \neg, \emptyset \odot A = A - \emptyset = A$$

$$\therefore, U \odot A = U - A = A^c$$

$$\therefore, \emptyset \odot U = U - \emptyset = U$$

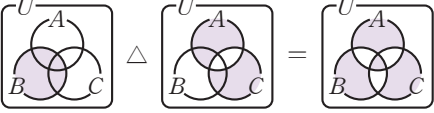
$$\begin{aligned} \therefore, A \odot B &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (B \cup A) - (B \cap A) = B \odot A \end{aligned}$$

따라서 보기 중 항상 옳은 것은 $\neg, \therefore, \therefore$ 이다.

$$32 \quad A \star B = (A \cup B) \cap (B^c \cup A)$$

$$= A \cup (B \cap B^c) = A \cup \emptyset = A$$

$$\begin{aligned} \therefore (A \star B) \star A &= A \star A = (A \cup A) \cap (A^c \cup A) \\ &= A \cap U = A \end{aligned}$$

33 
 $B \Delta (A \Delta C) = B \Delta (A \Delta C)$

34 $(A_2 \cap A_3) \cap (A_6 \cup A_{12}) = A_6 \cap A_6 = A_6$

35 $A_4 \cap (A_3 \cup A_6) = A_4 \cap A_3 = A_{12}$
 따라서 100 이하의 자연수 중에서 12의 배수는 8개이므로 구하는 집합의 원소의 개수는 8이다.

36 $\neg, A_8 = \{1, 2, 4, 8\}, A_4 = \{1, 2, 4\}$ 이므로 $A_4 \subset A_8$
 $\neg, A_{24} \cap A_{36} = A_{12}$
 $\neg, A_n - A_8 = \emptyset$ 이면 $A_n \subset A_8$
 즉, n 은 8의 약수이므로 자연수 n 은 1, 2, 4, 8의 4개이다.
 따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

37 $n(A \cap B) = n(B) - n(B - A) = 15 - 10 = 5$
 $\therefore n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
 $= 17 - 5 = 12$

38 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이므로
 $n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c)$
 $= n(U) - n(A^c \cap B^c)$
 $= 40 - 5 = 35$
 $\therefore n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
 $= 20 + 30 - 35 = 15$

39 $A \cap B = \emptyset$ 에서 $n(A \cap B) = 0, n(A \cap B \cap C) = 0$ 이고
 $n(C \cap A) = n(C) + n(A) - n(C \cup A)$
 $= 13 + 12 - 18 = 7$
 이므로
 $n(A \cup B \cup C)$
 $= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C)$
 $\quad - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$
 $= 12 + 10 + 13 - 0 - 3 - 7 + 0 = 25$

40 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= n((A - B) \cup (B - A)) + n(A \cap B)$
 즉, $30 + 40 - n(A \cap B) = 30 + n(A \cap B)$ 이므로
 $n(A \cap B) = 20$
 $\therefore n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= 30 + 40 - 20 = 50$

41 사과를 산 사람의 집합을 A , 복숭아를 산 사람의 집합을 B 라 하면
 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
 $= 26 + 20 - 40 = 6$
 따라서 구하는 사람 수는 6이다.

42 반 학생 전체의 집합을 U , 전주에 가 본 학생의 집합을 A , 경주에 가 본 학생의 집합을 B 라 하면
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
 $= 17 + 5 - 3 = 19$
 $\therefore n(A^c \cap B^c) = n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B)$
 $= 35 - 19 = 16$
 따라서 구하는 학생 수는 16이다.

43 운문을 제출한 학생의 집합을 A , 산문을 제출한 학생의 집합을 B 라 하면
 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
 $= 30 + 17 - 40 = 7$
 $\therefore n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
 $= 30 - 7 = 23$
 따라서 구하는 학생 수는 23이다.

44 체험 학습에 참가한 학생 전체의 집합을 U , 버스를 타고 온 학생의 집합을 A , 지하철을 타고 온 학생의 집합을 B 라 하면
 $n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c)$
 $= n(U) - n(A^c \cap B^c) = 50 - 9 = 41$
 $n(A - B) = n(A \cup B) - n(B)$ 이므로
 $11 = 41 - n(B) \quad \therefore n(B) = 30$
 따라서 구하는 학생 수는 30이다.

45 $B \subset A$ 일 때, $n(A \cap B)$ 가 최대이므로 최댓값은
 $n(A \cap B) = n(B) = 9$
 $A \cup B = U$ 일 때, $n(A \cap B)$ 가 최소이므로 최솟값은
 $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
 $= n(A) + n(B) - n(U) = 15 + 9 - 22 = 2$
 따라서 최댓값은 9, 최솟값은 2이다.

46 $n(A \cap B) \leq n(A), n(A \cap B) \leq n(B)$ 이므로
 $4 \leq n(A \cap B) \leq 8$
 $4 \leq n(A) + n(B) - n(A \cup B) \leq 8$
 $4 \leq 8 + 10 - n(A \cup B) \leq 8$
 $\therefore 10 \leq n(A \cup B) \leq 14$
 따라서 최댓값은 14, 최솟값은 10이므로 그 합은
 $14 + 10 = 24$

- 47 조사한 사람 전체의 집합을 U , A 제품을 구매한 사람의 집합을 A , B 제품을 구매한 사람의 집합을 B 라 하면
 $n(U)=30, n(A)=18, n(B)=27$
 $A \subset B$ 일 때, $n(A \cap B)$ 가 최대이므로 최댓값은
 $n(A \cap B)=n(A)=18$
 따라서 A, B 두 제품을 모두 구매한 사람은 최대 18명이다.

IV-2 01 명제와 조건

기초 문제 Training

18쪽

1. $\neg, \perp, \square, \vdash$
2. (1) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (2) $\{1, 3\}$
3. (1) $\sqrt{3}$ 은 유리수가 아니다. (2) 2는 소수이다.
4. (1) 부정: x 는 6의 약수가 아니다.
진리집합: $\{4, 5\}$
(2) 부정: $x^2 - 6x + 5 \neq 0$
진리집합: $\{2, 3, 4, 6\}$
5. (1) 가정: 4의 배수이다.
결론: 8의 배수이다.
(2) 가정: $x=2$ 이다.
결론: $2x-4=0$ 이다.
6. (1) 참 (2) 참 (3) 참 (4) 거짓
7. (1) 거짓 (2) 참 (3) 거짓 (4) 거짓
8. (1) 어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 \neq 16$ 이다.
(2) 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 \leq 8$ 이다.

핵심 유형 Training

19~22쪽

- | | | | | |
|------|------|------------------|----------------|---------------------|
| 1 ① | 2 4 | 3 ① | 4 ④ | 5 $2 \leq x \leq 3$ |
| 6 ④ | 7 ③ | 8 ⑤ | 9 16 | 10 ⑤ |
| 11 ① | 12 ① | 13 ⑤ | 14 $\neg$ | 15 ③ |
| 16 3 | 17 5 | 18 ③ | 19 ④ | 20 $\neg, \perp$ |
| 21 ① | 22 ⑤ | 23 $\neg, \perp$ | 24 $2\sqrt{6}$ | |

1. ① x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
2. $\neg$, $\perp$. 거짓인 명제
 $\perp$, $\vdash$. 참인 명제
 $\perp$, $\square$. x 의 값에 따라 참, 거짓이 달라지므로 명제가 아니다.
따라서 보기 중 명제인 것은 $\neg$, $\perp$, $\vdash$, $\vdash$ 의 4개이다.
3. $\perp$, $\vdash$. 거짓인 명제
 $\perp$. 명제가 아니다.
따라서 보기 중 참인 명제인 것은 $\neg$ 이다.
4. ① 부정: -3의 제곱은 9가 아니다. (거짓)
② 부정: $\sqrt{3}-1$ 은 무리수가 아니다. (거짓)
③ 부정: 5는 소수가 아니다. (거짓)
④ 부정: 3은 집합 $\{1, 2\}$ 의 원소가 아니다. (참)
⑤ 부정: 6의 양의 약수의 합은 12가 아니다. (거짓)
따라서 부정이 참인 명제인 것은 ④이다.
5. 조건 ' $\sim p$ 또는 q '의 부정은 ' p 그리고 $\sim q$ '
 $p: 0 < x \leq 3, \sim q: x \geq 2$ 이므로 구하는 조건의 부정은
 $2 \leq x \leq 3$
6. $\perp$. $p: x^2=y^2$ 에서 $x=-y$ 또는 $x=y$
따라서 $\sim p$ 는 $x \neq -y$ 그리고 $x \neq y$
따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \perp$ 이다.
7. 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.
 $|x-2|=2$ 에서 $x-2=-2$ 또는 $x-2=2$
 $\therefore x=0$ 또는 $x=4 \quad \therefore P=\{0, 4\}$
 $x^2-4x+3 \leq 0$ 에서 $(x-1)(x-3) \leq 0$
 $\therefore 1 \leq x \leq 3 \quad \therefore Q=\{1, 2, 3\}$
따라서 조건 ' p 또는 q '의 진리집합은
 $P \cup Q = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
8. $P=\{x|x \geq 3\}, Q=\{x|x < -2\}$ 이므로
 $P^c=\{x|x < 3\}, Q^c=\{x|x \geq -2\}$
 $\therefore \{x|-2 \leq x < 3\} = P^c \cap Q^c = (P \cup Q)^c$
따라서 구하는 진리집합은 $(P \cup Q)^c$ 이다.
9. $x^3+3x^2-10x=0$ 에서 $x(x+5)(x-2)=0$
 $\therefore x=-5$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
 $U=\{1, 2, 5, 10\}$ 이므로 조건 p 의 진리집합을 P 라 하면
 $P=\{2\}$
이때 조건 $\sim p$ 의 진리집합은 P^c 이므로 $P^c=\{1, 5, 10\}$
따라서 구하는 원소의 합은 $1+5+10=16$

- 10 주어진 명제에서 가정을 p , 결론은 q 라 하고 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{3, 6, 9, \dots, 48\}, Q = \{4, 8, 12, \dots, 48\}$$

따라서 명제 ' p 이면 q 이다.'가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $P - Q$ 의 원소이므로 반례가 아닌 것은 48이다.

- 11 명제 ' q 이면 $\sim p$ 이다.'가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $Q - P^c$ 의 원소이다.

$$\therefore Q - P^c = Q \cap (P^c)^c = P \cap Q$$

- 12 명제 ' p 이면 q 또는 r 이다.'가 거짓임을 보이는 반례는 집합 $P - (Q \cup R)$ 의 원소이므로 구하는 원소는 a 이다.

- 13 ⑤ $x(x+4)=8$ 에서 $x^2+4x-8=0$

$$\therefore x = -2 \pm 2\sqrt{3}$$

따라서 x 는 유리수가 아니므로 거짓인 명제이다.

- 14 ㄱ. [반례] $a=b=\sqrt{2}$ 이면 ab 는 정수이지만 a, b 는 정수가 아니다.

ㄴ. [반례] $a=\sqrt{3}, b=-\sqrt{3}$ 이면 $a+b$ 는 유리수이지만 a, b 는 모두 유리수가 아니다.

따라서 보기 중 참인 명제인 것은 ㄷ이다.

- 15 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$\neg, P = \{x | x > 2\}, Q = \{x | x < -2 \text{ 또는 } x > 2\}$$

따라서 $P \subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이다.

$$\neg, P = \{(x, y) | x=0, y=0\},$$

$$Q = \{(x, y) | x=0, y=0\}$$

따라서 $P=Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이다.

$$\neg, P = \{3\}, Q = \{-3, 1\}$$

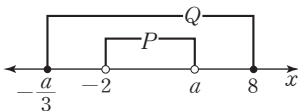
따라서 $P \not\subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 거짓이다.

따라서 보기 중 명제 $p \rightarrow q$ 가 참인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

- 16 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P = \{x | -2 < x < a\}, Q = \left\{x \mid -\frac{a}{3} \leq x \leq 8\right\}$$

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P \subset Q$ 이어야 하므로



$$-\frac{a}{3} \leq -2, -2 < a \leq 8$$

$$\therefore 6 \leq a \leq 8$$

따라서 자연수 a 는 6, 7, 8의 3개이다.

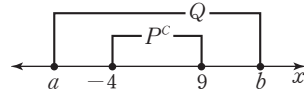
- 17 $x^2 - (a+b)x + ab \leq 0$ 에서 $(x-a)(x-b) \leq 0$

$$\therefore a \leq x \leq b \quad (\because a < b)$$

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면

$$P^c = \{x | -4 \leq x \leq 9\}, Q = \{x | a \leq x \leq b\}$$

명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 $P^c \subset Q$ 이어야 하므로



$$a \leq -4, b \geq 9$$

따라서 a 의 최댓값은 -4 , b 의 최솟값은 9 이므로 그 합은 5 이다.

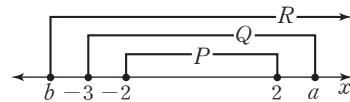
- 18 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P = \{x | -2 \leq x \leq 2\}, Q = \{x | -3 \leq x \leq a\},$$

$$R = \{x | x \geq b\}$$

두 명제 $p \rightarrow q, q \rightarrow r$ 가 모두 참이 되려면 $P \subset Q,$

$Q \subset R$ 이어야 하므로



$$a \geq 2, b \leq -3$$

따라서 a 의 최솟값은 2 , b 의 최댓값은 -3 이므로 그 곱은 -6 이다.

- 19 명제 $q \rightarrow p$ 가 참이므로 $Q \subset P$ 이다.

$$\textcircled{1} P \cup Q = P$$

$$\textcircled{2} P \cap Q = Q$$

$$\textcircled{3} P \cap Q^c \neq P$$

$$\textcircled{5} P^c \cap Q^c = P^c$$

따라서 항상 옳은 것은 ④이다.

- 20 ㄱ. $P \subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 는 참이다.

ㄴ. $Q \subset R^c$ 이므로 명제 $q \rightarrow \sim r$ 는 참이다.

따라서 보기 중 항상 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

- 21 $P \cup Q = Q$ 에서 $P \subset Q$ 이므로 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이다.

$P \cap R^c = P$ 에서 $P \subset R^c$ 이므로 명제 $p \rightarrow \sim r$ 가 참이다.

따라서 항상 참인 명제는 ①이다.

- 22 ⑤ $3x-1=4x+(1-x)$ 를 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않으므로 거짓인 명제이다.

- 23 ㄴ. [반례] $x=1$ 이면 $x^2-1=0$ 이다.

따라서 보기 중 참인 명제인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

- 24 주어진 명제의 부정은

'모든 실수 x 에 대하여 $x^2+ax+6 \geq 0$ 이다.'

이차방정식 $x^2+ax+6=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 24 \leq 0, a^2 \leq 24 \quad \therefore -2\sqrt{6} \leq a \leq 2\sqrt{6}$$

따라서 a 의 최댓값은 $2\sqrt{6}$ 이다.

IV-2 02 명제의 역과 대우

기초 문제 Training

23쪽

- 1 (1) $\sim q \rightarrow p$ (2) $p \rightarrow \sim q$ (3) $q \rightarrow p$
(4) $\sim p \rightarrow \sim q$
- 2 (1) 역: x 가 6의 배수이면 x 는 3의 배수이다.
대우: x 가 6의 배수가 아니면 x 는 3의 배수가 아니다.
(2) 역: x 가 정수이면 x 는 자연수이다.
대우: x 가 정수가 아니면 x 는 자연수가 아니다.
(3) 역: $x^2=4$ 이면 $x=2$ 이다.
대우: $x^2 \neq 4$ 이면 $x \neq 2$ 이다.
(4) 역: $x > 6$ 이면 $x > 4$ 이다.
대우: $x \leq 6$ 이면 $x \leq 4$ 이다.
(5) 역: $x=0$ 또는 $y=0$ 이면 $xy=0$ 이다.
대우: $x \neq 0$ 이고 $y \neq 0$ 이면 $xy \neq 0$ 이다.
(6) 역: 두 삼각형의 넓이가 같으면 두 삼각형은 합동이다.
대우: 두 삼각형의 넓이가 같지 않으면 두 삼각형은 합동이 아니다.
- 3 (1) $\subset, \subset$, 충분조건
(2) $\subset, \subset$, 필요조건
(3) $\subset, \subset$, 충분조건
(4) $\subset, \subset$, 필요조건
(5) $\subset, \subset$, 충분조건
(6) $\subset, \subset$, 필요충분조건
- 4 (1) 필요조건 (2) 필요조건 (3) 필요충분조건
(4) 충분조건

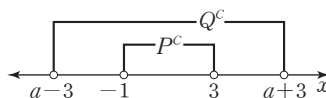
핵심 유형 Training

24~27쪽

- | | | | | |
|------|------|--------------------------|-------|---------------------|
| 1 ④ | 2 ④ | 3 $\neg, \perp$ | 4 ③ | 5 ④ |
| 6 3 | 7 ② | 8 $\neg, \perp, \supset$ | | 9 ⑤ |
| 10 ④ | 11 ① | 12 ③ | 13 ② | 14 $\perp, \supset$ |
| 15 ① | 16 ④ | 17 4 | 18 -8 | 19 15 |
| 20 ③ | 21 ③ | 22 ⑤ | | |

- 1 ④ 역: $ab > b$ 이면 $a < 0$ 이고 $b < 0$ 이다. (거짓)
[반례] $a=2, b=1$

- 2 ① 대우: $x \neq 2$ 이면 $x^2 \neq 4$ 이다. (거짓)
[반례] $x=-2$
② 대우: $x \leq 1$ 이면 $x^2 \leq 1$ 이다. (거짓)
[반례] $x=-2$
③ 대우: $x \neq 0$ 이면 $x^2 \neq 3x$ 이다. (거짓)
[반례] $x=3$
⑤ 대우: $\triangle ABC$ 가 정삼각형이 아니면 $\triangle ABC$ 의 두 내각의 크기는 같지 않다. (거짓)
[반례] $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형
따라서 대우가 참인 명제는 ④이다.
- 3 $\neg$. 역: $a < 0$ 이고 $b < 0$ 이면 $a+b < 0$ 이다. (참)
대우: $a \geq 0$ 또는 $b \geq 0$ 이면 $a+b \geq 0$ 이다. (거짓)
[반례] $a=1, b=-2$
 $\supset$. 역: $c-a < c-b$ 이면 $a < b$ 이다. (거짓)
대우: $c-a \geq c-b$ 이면 $a \geq b$ 이다. (거짓)
따라서 보기 중 역과 대우가 모두 참인 명제인 것은 $\neg, \perp$ 이다.
- 4 주어진 명제의 대우 ' $x=2$ 이면 $x^2+4x-a=0$ 이다.'도 참이므로
 $4+8-a=0$
 $\therefore a=12$
- 5 주어진 명제의 대우 ' $a \geq k$ 이고 $b \geq 3$ 이면 $a+b \geq 6$ 이다.'도 참이다.
 $a \geq k$ 이고 $b \geq 3$ 에서 $a+b \geq k+3$ 이므로
 $k+3 \geq 6$
 $\therefore k \geq 3$
따라서 상수 k 의 최솟값은 3이다.
- 6 명제 $q \rightarrow p$ 가 참이면 그 대우 $\sim p \rightarrow \sim q$ 도 참이다.
 $\sim p$: $|x-1| < 2$ 에서 $-2 < x-1 < 2$
 $\therefore -1 < x < 3$
 $\sim q$: $|x-a| < 3$ 에서 $-3 < x-a < 3$
 $\therefore a-3 < x < a+3$
두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 $P^c = \{x | -1 < x < 3\}, Q^c = \{x | a-3 < x < a+3\}$
명제 $\sim p \rightarrow \sim q$ 가 참이려면 $P^c \subset Q^c$ 이어야 하므로



- $a-3 \leq -1, a+3 \geq 3$
 $\therefore 0 \leq a \leq 2$
따라서 정수 a 는 0, 1, 2의 3개이다.

7 명제 $p \rightarrow q$ 와 명제 $\sim r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 각각의 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$ 와 $q \rightarrow r$ 도 참이다.
두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow r$ 가 참이므로 명제 $p \rightarrow r$ 와 그 대우 $\sim r \rightarrow \sim p$ 가 참이다.
따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ②이다.

8 명제 $\sim s \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 그 대우 $r \rightarrow s$ 도 참이다.
세 명제 $p \rightarrow r$ 와 $r \rightarrow s$ 와 $s \rightarrow q$ 가 참이므로 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이다.
두 명제 $p \rightarrow r$ 와 $r \rightarrow s$ 가 참이므로 명제 $p \rightarrow s$ 가 참이다.
따라서 보기 중 참인 명제인 것은 $\neg$, $\wedge$, $\vee$ 이다.

9 명제 $\sim r \rightarrow s$ 가 참이므로 그 대우 $\sim s \rightarrow r$ 도 참이다.
두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $\sim s \rightarrow r$ 가 참이므로 $q \rightarrow \sim s$ 또는 그 대우 $s \rightarrow \sim q$ 가 참이어야 $p \rightarrow r$ 가 참이다.
따라서 필요한 참인 명제는 ⑤이다.

10 명제 (가), (나)에서
 p : 과학을 좋아한다., q : 실험을 좋아한다.,
 r : 호기심이 있다.
라 하자.
(가)에서 명제 $p \rightarrow q$ 가 참이고 (나)에서 명제 $\sim p \rightarrow \sim r$ 와 그 대우 $r \rightarrow p$ 가 참이다.
두 명제 $r \rightarrow p$ 와 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 명제 $r \rightarrow q$ 가 참이다.
따라서 항상 참인 명제는 ④이다.

11 (i) a 가 양수일 때, (나)에 의하여 b 도 양수이다.
 b 가 양수이면 (다)에 의하여 c 도 양수이다.
즉, a, b, c 는 모두 양수이다.
(ii) a 가 음수일 때, (나)에 의하여 b 도 음수이다.
 b 가 음수이면 (다)에 의하여 c 도 음수이다.
그런데 세 정수 a, b, c 가 모두 음수이면 (가)를 만족시키지 않는다.
(i), (ii)에 의하여 $a > 0, b > 0, c > 0$

12 $p \Rightarrow q, r \Rightarrow \sim q$ 이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p, q \Rightarrow \sim r$
 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow \sim r$ 에서 $p \Rightarrow \sim r, r \Rightarrow \sim p$
따라서 보기 중 항상 참인 명제는 $\neg, \wedge, \vee$ 의 3개이다.

13 ① q 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$
 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
② p 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$
 q 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$
 $p \Leftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

③ p 에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$
 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
④ q 에서 $x < -1$ 또는 $x > 1$
 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
⑤ p 에서 $x > 0$ 또는 $x < 0$
 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
따라서 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은 ②이다.

14 $\neg$. p 에서 $x - 3 = -1$ 또는 $x - 3 = 1$
 $\therefore x = 2$ 또는 $x = 4$
 q 에서 $x(x - 2)(x - 4) = 0$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 4$
 $p \Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
 $\wedge$. p 에서 $-4 \leq 2x \leq 6 \quad \therefore -2 \leq x \leq 3$
 q 에서 $(x + 2)(x - 1) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq x \leq 1$
 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
 $\cup$. 명제 $p \rightarrow q$: [반례] $x = -2, y = 1$ (거짓)
 $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
따라서 보기 중 p 가 q 이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것은 $\wedge, \cup$ 이다.

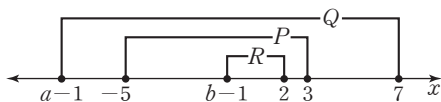
15 $|a| + |b| = 0$ 에서 $a = b = 0$
 $a^2 - b^2 = 0$ 에서 $(a + b)(a - b) = 0$
 $\therefore a = -b$ 또는 $a = b$
따라서 $|a| + |b| = 0$ 은 $a^2 - b^2 = 0$ 이기 위한 (가) 충분 조건이다.
 $ab = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $b = 0$
 $a + bi = 0$ 에서 $a = b = 0$
따라서 $ab = 0$ 은 $a + bi = 0$ 이기 위한 (나) 필요 조건이다.

16 p 에서 $x = y$ 또는 $y = z$
 q 에서 $x = y = z$
 r 에서 $x^2 + y^2 = 2xz + 2yz - 2z^2, (x - z)^2 + (y - z)^2 = 0$
 $\therefore x = y = z$
 $\neg$. $q \Rightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
 $\wedge$. $r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.
 $\cup$. $q \Leftrightarrow r$ 이므로 q 는 r 이기 위한 필요충분조건이다.
따라서 보기 중 옳은 것은 $\wedge, \cup$ 이다.

17 p 가 q 이기 위한 필요조건이라면 $q \Rightarrow p$
즉, $4x + a = 0$ 이면 $x^2 - x - 2 = 0$ 이어야 하므로
 $\left(-\frac{a}{4}\right)^2 - \left(-\frac{a}{4}\right) - 2 = 0, a^2 + 4a - 32 = 0$
 $(a + 8)(a - 4) = 0 \quad \therefore a = -8$ 또는 $a = 4$
그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 4$

- 18 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하자.
 p 가 q 이기 위한 충분조건이려면 $p \Rightarrow q$ 에서 $P \subset Q$
 p 가 r 이기 위한 필요조건이려면 $r \Rightarrow p$ 에서 $R \subset P$
 $\therefore R \subset P \subset Q$

세 집합 P, Q, R 를 수직선 위에 나타내면

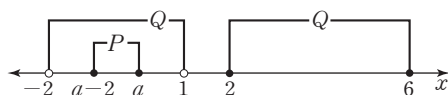


$$a-1 \leq -5, -5 \leq b-1 \leq 2$$

$$\therefore a \leq -4, -4 \leq b \leq 3$$

따라서 a 의 최댓값은 -4 , b 의 최솟값은 -4 이므로 그 합은 -8 이다.

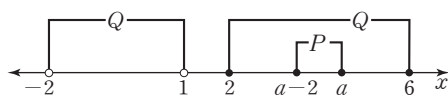
- 19 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하자.
 p 가 q 이기 위한 충분조건이려면 $p \Rightarrow q$ 에서 $P \subset Q$
 (i) 다음 그림에서



$$a-2 > -2, a < 1$$

$$\therefore 0 < a < 1$$

(ii) 다음 그림에서



$$a-2 \geq 2, a \leq 6$$

$$\therefore 4 \leq a \leq 6$$

(i), (ii)에 의하여 정수 a 는 4, 5, 6이므로 그 합은 $4+5+6=15$

- 20 p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$ 에서 $Q \subset P$
 p 는 r 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow r$ 에서 $P \subset R$
 $\therefore Q \subset P \subset R$
- 21 p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로 $p \Rightarrow \sim q$ 에서 $P \subset Q^c$
 따라서 두 집합 P, Q 는 서로소이므로 항상 옳은 것은 ③이다.
- 22 ①, ② $R \subset P$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이고, r 는 p 이기 위한 충분조건이다.
 ③ $Q \subset R^c$ 이므로 q 는 $\sim r$ 이기 위한 충분조건이다.
 ④ $R \subset Q^c$ 이므로 $\sim q$ 는 r 이기 위한 필요조건이다.
 ⑤ $R \subset P$, 즉 $P^c \subset R^c$ 이므로 $\sim r$ 는 $\sim p$ 이기 위한 필요조건이다.
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

IV-2 03 명제의 증명

기초 문제 Training

28쪽

- 1 (가) n (나) n^2 (다) $5k^2$
 2 (가) 홀수 (나) $2k^2-2k$
 3 다, 리
 4 (가) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (나) $a=b$ (또는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$)
 5 (가) $ay-bx$ (나) $ay=bx$

핵심 유형 Training

29~32쪽

- 1 ⑤ 2 풀이 참조
 3 (가) 유리수 (나) $3m^2$ (다) $3k^2$ 4 풀이 참조
 5 ④ 6 (가) $b(1+a)$ (나) $a-b$
 7 (가) $a-b$ (나) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 8 ④ 9 ②
 10 ④ 11 ① 12 ④ 13 14 14 6
 15 ① 16 25 17 16 18 ② 19 2
 20 160 m^2 21 ② 22 $\frac{6}{5}$

- 1 주어진 명제의 대우 '자연수 a, b 에 대하여 a, b 가 모두 홀수 또는 모두 짝수이면 a^2+b^2 은 짝수이다.'가 참임을 보이면 된다.
 (i) a, b 가 모두 홀수일 때,
 $a=2k-1, b=2l-1$ (k, l 은 자연수)이라 하면
 $a^2+b^2=(2k-1)^2+(2l-1)^2$
 $=2(\text{㉞} 2k^2-2k+2l^2-2l+1 \text{ ㉞})$
 이때 $\text{㉞} 2k^2-2k+2l^2-2l+1 \text{ ㉞}$ 은 자연수이므로 a^2+b^2 은 ㉞ 짝수 ㉞이다.
 (ii) a, b 가 모두 짝수일 때,
 $a=2k, b=2l$ (k, l 은 자연수)이라 하면
 $a^2+b^2=(2k)^2+(2l)^2$
 $=2(\text{㉞} 2k^2+2l^2 \text{ ㉞})$
 이때 $\text{㉞} 2k^2+2l^2 \text{ ㉞}$ 은 자연수이므로 a^2+b^2 은 ㉞ 짝수 ㉞이다.
 (i), (ii)에 의하여 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

2 주어진 명제의 대우 '실수 a, b 에 대하여 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이면 $a^2 + b^2 \neq 0$ 이다.'가 참임을 보이려면 된다.

(i) $a \neq 0$ 일 때, $a^2 > 0, b^2 \geq 0$ 이므로

$$a^2 + b^2 > 0$$

(ii) $b \neq 0$ 일 때, $a^2 \geq 0, b^2 > 0$ 이므로

$$a^2 + b^2 > 0$$

(i), (ii)에 의하여 $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$, 즉 $a^2 + b^2 \neq 0$ 이다.

따라서 주어진 명제의 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

3 주어진 명제의 결론을 부정하여 $\sqrt{3}$ 이 $\boxed{\text{유리수}}$ 라 가정하면

$$\sqrt{3} = \frac{n}{m} \quad (m, n \text{은 서로소인 자연수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

으로 나타낼 수 있다.

$\textcircled{1}$ 의 양변을 제곱하면

$$3 = \frac{n^2}{m^2} \quad \therefore n^2 = \boxed{3m^2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 n^2 이 3의 배수이므로 n 도 3의 배수이다.

$n = 3k$ (k 는 자연수)라 하고 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$9k^2 = 3m^2 \quad \therefore m^2 = \boxed{3k^2}$$

이때 m^2 이 3의 배수이므로 m 도 3의 배수이다.

그런데 m, n 이 모두 3의 배수이므로 m, n 이 서로소라는 가정에 모순이다.

따라서 $\sqrt{3}$ 은 무리수이다.

4 주어진 명제의 결론을 부정하여 a, b 가 모두 양수라 가정하면

$$a > 0, b > 0 \quad \therefore a + b > 0$$

그런데 $a + b > 0$ 이므로 $a + b < 0$ 이라는 가정에 모순이다.

따라서 실수 a, b 에 대하여 $a + b < 0$ 이면 a, b 중 적어도 하나는 음수이다.

$$5 \quad a^2 + b^2 - ab = \left(a - \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0$$

$$\therefore a^2 + b^2 \geq ab$$

이때 등호는 $a - \frac{b}{2} = 0, \frac{3}{4}b^2 = 0$, 즉 $\boxed{a = b = 0}$ 일 때 성립한다.

$$6 \quad \frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b} = \frac{a(1+b) - \boxed{b(1+a)}}{(1+a)(1+b)} \\ = \frac{\boxed{a-b}}{(1+a)(1+b)} > 0 \quad (\because a > b > 0)$$

$$\therefore \frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$$

$$7 \quad (\sqrt{a-b})^2 - (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \\ = \boxed{a-b} - (a - 2\sqrt{ab} + b) = 2\sqrt{ab} - 2b \\ = 2\sqrt{b}(\boxed{\sqrt{a-b}}) > 0 \quad (\because a > b > 0) \\ \therefore (\sqrt{a-b})^2 > (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \\ \text{그런데 } \sqrt{a-b} > 0, \sqrt{a}-\sqrt{b} > 0 \text{이므로} \\ \sqrt{a-b} > \sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$8 \quad (|a| + |b|)^2 - (|a+b|)^2 \\ = a^2 + \boxed{2|ab|} + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) \\ = 2(\boxed{|ab| - ab}) \geq 0 \quad (\because |ab| \geq ab) \\ \therefore (|a| + |b|)^2 \geq (|a+b|)^2$$

그런데 $|a| + |b| \geq 0, |a+b| \geq 0$ 이므로

$$|a| + |b| \geq |a+b|$$

이때 등호는 $|ab| = ab$, 즉 $\boxed{ab \geq 0}$ 일 때 성립한다.

9 $a > 0, b > 0$ 이므로

$$2a + 3b \geq 2\sqrt{2a \times 3b} = 2\sqrt{6ab} = 2\sqrt{36} = 12$$

(단, 등호는 $2a = 3b$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 12이다.

10 $3a > 0, b > 0$ 이므로 $3a + b \geq 2\sqrt{3ab}$

$$6 \geq 2\sqrt{3ab} \quad \therefore \sqrt{3ab} \leq 3$$

양변을 제곱하면

$$3ab \leq 9 \quad \therefore ab \leq 3 \quad (\text{단, 등호는 } 3a = b \text{일 때 성립})$$

따라서 ab 의 최댓값은 $M = 3$

$3a = b$ 일 때 최댓값을 가지므로 이를 $3a + b = 6$ 에 대입하여 풀면 $a = 1, b = 3$

$$\text{즉, } \alpha = 1, \beta = 3 \text{이므로 } M + \alpha - \beta = 3 + 1 - 3 = 1$$

$$11 \quad \frac{a^2-1}{a} + \frac{b^2-1}{b} = a - \frac{1}{a} + b - \frac{1}{b} = a + b - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \\ = a + b - \frac{a+b}{ab} = 4 - \frac{4}{ab} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a > 0, b > 0 \text{이므로 } a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$4 \geq 2\sqrt{ab} \quad \therefore \sqrt{ab} \leq 2$$

양변을 제곱하면 $ab \leq 4$ (단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립)

$$\textcircled{1} \text{에서 } \frac{a^2-1}{a} + \frac{b^2-1}{b} \leq 3$$

따라서 구하는 최댓값은 3이다.

12 $a > 0, b > 0$ 이므로

$$\left(a + \frac{4}{b} \right) \left(b + \frac{16}{a} \right) = 20 + ab + \frac{64}{ab} \\ \geq 20 + 2\sqrt{ab \times \frac{64}{ab}} = 20 + 16 = 36$$

(단, 등호는 $ab = 8$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 36이다.

- 13 $a > 4$ 에서 $a - 4 > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} a + \frac{4}{a-4} &= a - 4 + \frac{4}{a-4} + 4 \\ &\geq 2\sqrt{(a-4) \times \frac{4}{a-4}} + 4 = 4 + 4 = 8 \\ &\left(\text{단, 등호는 } a-4 = \frac{4}{a-4}, \text{ 즉 } a=6 \text{일 때 성립} \right) \end{aligned}$$

따라서 $m=8, n=6$ 이므로 $m+n=14$

- 14 $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \\ &= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \\ &\geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{b}{a}} + 2\sqrt{\frac{b}{c} \times \frac{c}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{a} \times \frac{a}{c}} \\ &= 2 + 2 + 2 = 6 \quad (\text{단, 등호는 } a=b=c \text{일 때 성립}) \\ &\text{따라서 구하는 최솟값은 } 6 \text{이다.} \end{aligned}$$

- 15 $x \neq 0$ 이므로 $\frac{x}{x^2+4x+4} = \frac{1}{x+4+\frac{4}{x}} \dots\dots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} \text{이때 } x > 0 \text{이므로 } x+4+\frac{4}{x} &\geq 2\sqrt{x \times \frac{4}{x}} + 4 = 4 + 4 = 8 \\ &\left(\text{단, 등호는 } x = \frac{4}{x}, \text{ 즉 } x=2 \text{일 때 성립} \right) \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \frac{x}{x^2+4x+4} \leq \frac{1}{8}$$

따라서 구하는 최댓값은 $\frac{1}{8}$ 이다.

- 16 x, y 가 실수이므로

$$\begin{aligned} (3^2+4^2)(x^2+y^2) &\geq (3x+4y)^2 \\ 25^2 &\geq (3x+4y)^2 \\ \therefore -25 &\leq 3x+4y \leq 25 \quad (\text{단, 등호는 } 3y=4x \text{일 때 성립}) \\ &\text{따라서 구하는 최댓값은 } 25 \text{이다.} \end{aligned}$$

- 17 x, y 가 실수이므로

$$\begin{aligned} \left(1^2 + \frac{1}{4^2} \right) (x^2 + y^2) &\geq \left(x + \frac{y}{4} \right)^2 \\ \frac{17}{16} (x^2 + y^2) &\geq 17 \\ \therefore x^2 + y^2 &\geq 16 \quad (\text{단, 등호는 } 4y=x \text{일 때 성립}) \\ &\text{따라서 구하는 최솟값은 } 16 \text{이다.} \end{aligned}$$

- 18 x, y 가 실수이므로

$$\begin{aligned} (2^2+3^2)(x^2+y^2) &\geq (2x+3y)^2 \\ 13a &\geq (2x+3y)^2 \\ \therefore -\sqrt{13a} &\leq 2x+3y \leq \sqrt{13a} \\ &\quad (\text{단, 등호는 } 2y=3x \text{일 때 성립}) \\ &\text{따라서 } 2x+3y \text{의 최댓값은 } \sqrt{13a} \text{이므로} \\ \sqrt{13a} &= 13 \quad \therefore a = 13 \end{aligned}$$

- 19 $x+y+z=2$ 에서 $y+z=2-x \dots\dots \textcircled{1}$

$$x^2+y^2+z^2=4 \text{에서 } y^2+z^2=4-x^2 \dots\dots \textcircled{2}$$

y, z 가 실수이므로

$$(1^2+1^2)(y^2+z^2) \geq (y+z)^2$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 대입하면

$$2(4-x^2) \geq (2-x)^2$$

$$8-2x^2 \geq 4-4x+x^2, 3x^2-4x-4 \leq 0$$

$$(3x+2)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{2}{3} \leq x \leq 2 \quad (\text{단, 등호는 } y=z \text{일 때 성립})$$

따라서 구하는 최댓값은 2이다.

- 20 닭장 전체의 가로의 길이를 x m,

세로의 길이를 y m라 하면

$$2x+5y=80$$

이때 $x > 0, y > 0$ 이므로

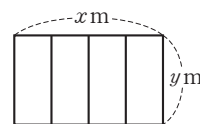
$$2x+5y \geq 2\sqrt{2x \times 5y}$$

$$80 \geq 2\sqrt{10xy} \quad \therefore \sqrt{10xy} \leq 40$$

양변을 제곱하면 $10xy \leq 1600$

$$\therefore xy \leq 160 \quad (\text{단, 등호는 } 2x=5y \text{일 때 성립})$$

따라서 구하는 넓이의 최댓값은 160 m^2 이다.



- 21 빗변의 길이가 8인 직각삼각형의 나머지 두 변의 길이를

각각 a, b 라 하면

$$a^2+b^2=64$$

$a > 0, b > 0$ 이므로

$$a^2+b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2} = 2ab$$

$$64 \geq 2ab \quad \therefore ab \leq 32 \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립})$$

이때 직각삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab$ 이므로

$$\frac{1}{2}ab \leq 16$$

따라서 구하는 넓이의 최댓값은 16이다.

- 22 한 변의 길이가 4인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$$

$\triangle ABC = \triangle ABP + \triangle BCP + \triangle CAP$ 이므로

$$4\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 4 \times a + \frac{1}{2} \times 4 \times b + \frac{1}{2} \times 4 \times 2a$$

$$\therefore 3a+b=2\sqrt{3}$$

a, b 가 실수이므로

$$(3^2+1^2)(a^2+b^2) \geq (3a+b)^2$$

$$10(a^2+b^2) \geq 12$$

$$\therefore a^2+b^2 \geq \frac{6}{5} \quad (\text{단, 등호는 } 3b=a \text{일 때 성립})$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{6}{5}$ 이다.

기초 문제 Training

34쪽

- 1 (2) 정의역: {2, 4, 6, 8}, 공역: {1, 2, 3},
치역: {1, 2, 3}
- (4) 정의역: {1, 2, 3, 4}, 공역: {1, 2, 3, 4},
치역: {1, 2, 3}
- 2 (1) {1, 3, 5} (2) {0, 2, 6} (3) {0, 1, 2}
- 3 (1) 서로 같은 함수이다. (2) 서로 같은 함수이다.
- 4 (1) ㄱ, ㄴ, ㄷ (2) ㄴ, ㄷ (3) ㄴ (4) ㄷ
- 5 (1) ㄱ, ㄴ (2) ㄱ, ㄴ (3) ㄴ (4) ㄷ

핵심 유형 Training

35~39쪽

- | | | | | |
|---------|---------|---------------------|-----------|-------|
| 1 ㄴ, ㄷ | 2 ② | 3 ③ | 4 ③ | 5 -1 |
| 6 ② | 7 -2 | 8 ④ | 9 ㄱ, ㄴ, ㄷ | |
| 10 ④ | 11 ② | 12 {0}, {3}, {0, 3} | 13 ③ | |
| 14 ㄴ, ㄷ | 15 ㄴ, ㄷ | 16 ㄱ, ㄷ | 17 ⑤ | 18 5 |
| 19 ㄱ, ㄴ | 20 ② | 21 $b < 3$ | 22 ① | 23 ① |
| 24 ⑤ | 25 5 | 26 126 | 27 ④ | 28 60 |

- 1 ㄱ. 집합 X 의 원소 -1 에 대응하는 집합 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
ㄴ. 집합 X 의 원소 $-1, 1$ 에 대응하는 집합 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
따라서 보기 중 X 에서 Y 로의 함수인 것은 ㄴ, ㄷ이다.
- 2 ① 집합 X 의 원소 2에 대응하는 집합 X 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
③ 집합 X 의 원소 $-1, 1$ 에 대응하는 집합 X 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
④ 집합 X 의 원소 0에 대응하는 원소가 2개이므로 함수가 아니다.
⑤ 집합 X 의 원소 -2 에 대응하는 집합 X 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
따라서 X 에서 X 로의 함수인 것은 ②이다.

- 3 $X = \{0, 1\}, Y = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
③ 집합 X 의 원소 1에 대응하는 집합 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
- 4 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 이므로
 $f(1)=1, f(2)=2, f(3)=2, f(4)=3, f(5)=2,$
 $f(6)=4, f(7)=2, f(8)=4, f(9)=3$
따라서 함수 f 의 치역은 $\{1, 2, 3, 4\}$ 이므로 치역의 모든 원소의 합은 $1+2+3+4=10$
- 5 $f(1)=f(3)=f(5)=\dots=f(19)=-1$
 $f(2)=f(4)=f(6)=\dots=f(18)=1$
 $\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(19)$
 $=\{f(1)+f(2)\}+\{f(3)+f(4)\}$
 $+\dots+\{f(17)+f(18)\}+f(19)$
 $=f(19)=-1$
- 6 $f(-1)=a-1, f(0)=-1, f(2)=4a-1$ 이므로
 $a-1+(-1)+4a-1=12, 5a=15 \quad \therefore a=3$
- 7 주어진 식의 양변에 $a=1, b=1$ 을 대입하면
 $f(1)=f(1)+f(1) \quad \therefore f(1)=0$
주어진 식의 양변에 $a=6, b=\frac{1}{6}$ 을 대입하면
 $f(1)=f(6)+f(\frac{1}{6}), 0=2+f(\frac{1}{6})$
 $\therefore f(\frac{1}{6})=-2$
- 8 주어진 식의 양변에 $a=1, b=0$ 을 대입하면
 $f(1)=f(1)f(0), 2=2f(0) \quad \therefore f(0)=1$
주어진 식의 양변에 $a=1, b=1$ 을 대입하면
 $f(2)=f(1)f(1) \quad \therefore f(2)=4$
주어진 식의 양변에 $a=2, b=-2$ 를 대입하면
 $f(0)=f(2)f(-2), 1=4f(-2) \quad \therefore f(-2)=\frac{1}{4}$
 $\therefore f(-2)+f(0)=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$
- 9 ㄱ. 주어진 식의 양변에 $a=0, b=0$ 을 대입하면
 $f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$
ㄴ. 주어진 식의 양변에 $a=1, b=1$ 을 대입하면
 $f(2)=f(1)+f(1), 8=2f(1) \quad \therefore f(1)=4$
ㄷ. 주어진 식의 양변에 $a=x, b=x$ 를 대입하면
 $f(2x)=f(x)+f(x) \quad \therefore f(2x)=2f(x)$
주어진 식의 양변에 $a=2x, b=x$ 를 대입하면
 $f(3x)=f(2x)+f(x) \quad \therefore f(3x)=3f(x)$
 $\vdots$
 $\therefore f(kx)=kf(x)$
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 $\neg$. $f(-1)=1, f(1)=-1$

$g(-1)=1, g(1)=-1$

$\therefore f=g$

$\neg$. $f(-1)=-1, f(1)=3$

$g(-1)=-1, g(1)=-3$

$\therefore f \neq g$

$\neg$. $f(-1)=1, f(1)=1$

$g(-1)=1, g(1)=1$

$\therefore f=g$

따라서 보기 중 $f=g$ 인 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

11 $f(1)=g(1)$ 에서 $1-2a=a+b$

$\therefore 3a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$f(2)=g(2)$ 에서 $4-4a=2a+b$

$\therefore 6a+b=4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=-2 \quad \therefore ab=-2$

12 $f(x)=g(x)$ 에서 $2x^2-x=x^2+2x$

$x^2-3x=0, x(x-3)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=3$

따라서 집합 X 는 공집합이 아닌 집합 $\{0, 3\}$ 의 부분집합이어야 하므로

$\{0\}, \{3\}, \{0, 3\}$

13 y 축에 평행한 직선과 한 점에서 만나는 그래프는 ③이다.

14 보기 중 y 축에 평행한 직선과 한 점에서 만나는 그래프는 $\neg$, $\neg$ 이다.

15 보기 중 x 축에 평행한 직선과 한 점에서 만나고 치역이 실수 전체의 집합인 함수의 그래프는 $\neg$, $\neg$ 이다.

16 $\neg$. $1 \neq -1$ 이지만 $f(1)=f(-1)=1$ 이므로 일대일함수가 아니다.

$\neg$. $x_1 \neq x_2$ 일 때 $f(x_1)=f(x_2)=4$ 이므로 일대일함수가 아니다.

따라서 보기 중 일대일함수의 그래프인 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

17 ① $1 \neq -1$ 이지만 $f(1)=f(-1)=-2$ 이므로 일대일대응이 아니다.

② $1 \neq 2$ 이지만 $f(1)=f(2)=0$ 이므로 일대일대응이 아니다.

③ $1 \neq -1$ 이지만 $f(1)=f(-1)=2$ 이므로 일대일대응이 아니다.

④ $1 \neq -2$ 이지만 $f(1)=f(-2)=3$ 이므로 일대일대응이 아니다.

따라서 일대일대응인 것은 ⑤이다.

18 $\neg$. $-1 \rightarrow -1, 0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 1$

$\neg$. $-1 \rightarrow 0, 1 \rightarrow 0$ $\blacktriangleleft$ 0에 대응하는 원소가 없다.

$\neg$. $-1 \rightarrow 0, 0 \rightarrow -1, 1 \rightarrow 0$

$\neg$. $-1 \rightarrow 1, 0 \rightarrow 0, 1 \rightarrow -1$

따라서 보기 중 함수인 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이고 일대일대응인 것은 $\neg$, $\neg$ 이므로

$a=3, b=2 \quad \therefore a+b=5$

19 $\neg$. $f(0)=0, f(1)=1, f(2)=2, f(3)=3$ 이므로 f 는 항등함수이다.

$\neg$. $f(0)=0, f(1)=1, f(2)=2, f(3)=3$ 이므로 f 는 항등함수이다.

$\neg$. $f(0)=0, f(1)=0, f(2)=0, f(3)=0$ 이므로 f 는 상수함수이다.

따라서 보기 중 항등함수인 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

20 $a < 0$ 이므로 $f(-2)=5, f(1)=-1$ 에서

$-2a+b=5, a+b=-1$

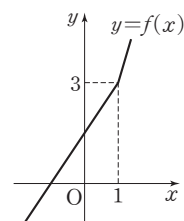
두 식을 연립하여 풀면 $a=-2, b=1 \quad \therefore ab=-2$

21 함수 f 가 일대일대응이라면 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.

즉, 직선 $y=ax+b$ 가 점 $(1, 3)$ 을 지나고 기울기가 양수이어야 하므로

$a+b=3, a>0$

따라서 $a=3-b>0$ 에서 $b<3$



22 $f(x)=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1$

함수 f 가 일대일대응이라면 $f(5)=1$ 이어야 하므로

$15+k=1 \quad \therefore k=-14$

23 함수 f 는 항등함수이므로 $f(x)=x \quad \therefore f(3)=3$

함수 g 는 상수함수이므로 $g(2)=2$ 에서 $g(4)=2$

$\therefore f(3)+g(4)=3+2=5$

24 함수 f 는 상수함수이므로

$f(2)=f(4)=f(6)=\dots=f(50)=f(100)=2$

$\therefore f(2)+f(4)+f(6)+\dots+f(50)=2 \times 25=50$

25 $f(1)=g(3)+h(3)$ 에서 함수 g 는 항등함수이므로

$f(1)=3+h(3)$

$X=\{1, 2, 3, 4\}$ 에서 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 4이므로

$f(1)=4, h(3)=1$

이때 함수 h 는 상수함수이므로 $h(4)=1$

또 $f(4)=f(2)+2$ 에서 $f(4)>2$ 이고 함수 f 는 일대일 대응이므로

$$f(4)=3, f(2)=1$$

따라서 $f(3)=2$ 이므로

$$f(3)+g(2)+h(4)=2+2+1=5$$

26 일대일대응의 개수는 $a=5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1=120$

상수함수의 개수는 $b=5$

항등함수의 개수는 $c=1$

$$\therefore a+b+c=120+5+1=126$$

27 집합 Y 의 원소의 개수를 a 라 하면 일대일함수의 개수는

$$a \times (a-1) \times (a-2) = 24 = 4 \times 3 \times 2 \quad \therefore a=4$$

따라서 상수함수의 개수는 4이다.

28 집합 X 의 원소 x, y 에 대하여

$x+y$ 의 값은 오른쪽 표와 같다.

$$\text{즉, } Y = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$$

이므로 일대일함수의 개수는

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

$x \backslash y$	-2	0	2
-2	-4	-2	0
0	-2	0	2
2	0	2	4

V-1 02 합성함수

기초 문제 Training

40쪽

1 (1) c (2) b

2 (1) 1 (2) 8 (3) d (4) c

3 (1) 2, -5 (2) -2, -4

4 (1) -9 (2) 6 (3) 10 (4) -13

5 (1) $(g \circ f)(x) = x^2 - 2x + 1$

$$(2) (f \circ g)(x) = x^2 - 1$$

$$(3) (f \circ f)(x) = x - 2$$

$$(4) (g \circ g)(x) = x^4$$

6 (1) $(f \circ g)(x) = -x + 5$

$$(2) (g \circ h)(x) = -x^2 + 4$$

$$(3) ((f \circ g) \circ h)(x) = -x^2 + 6$$

$$(4) (f \circ (g \circ h))(x) = -x^2 + 6$$

핵심 유형 Training

41~43쪽

1 ②

2 ①

3 ①

4 6

5 3

6 ①

7 4

8 3000

9 6

10 1

11 1

12 -2

13 ⑤

14 ②

$$15 f(x) = 12x - 13$$

16 ②

$$17 h(x) = \frac{3}{2}x - 8$$

18 -5

19 풀이 참조

20 ⑤

$$1 (f \circ f)(0) = f(f(0)) = f(1) = -1$$

$$(f \circ f \circ f)(0) = f(f(f(0)))$$

$$= f(f(1)) = f(-1) = 0$$

$$\therefore (f \circ f)(0) + (f \circ f \circ f)(0) = -1 + 0 = -1$$

$$2 (f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(1) = 0$$

$$3 (f \circ g)(-3) = f(g(-3)) = f(3) = 8$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(8) = -5$$

$$\therefore (f \circ g)(-3) + (g \circ f)(3) = 8 + (-5) = 3$$

$$4 (h \circ (g \circ f))(3) = ((h \circ g) \circ f)(3)$$

$$= (h \circ g)(f(3))$$

$$= (h \circ g)(12) = 6$$

$$5 (f \circ f)(x) = f(f(x))$$

$$= f(2x+1)$$

$$= 2(2x+1)+1 = 4x+3$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x))$$

$$= f(4x+3)$$

$$= 2(4x+3)+1 = 8x+7$$

따라서 $(f \circ f \circ f)(a) = 31$ 에서

$$8a+7=31 \quad \therefore a=3$$

$$6 (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(3) = 2$$

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(3) = 2$$

이때 두 함수 f, g 는 X 에서 X 로의 일대일대응이므로

$$f(2)=1, g(1)=1 \quad \therefore f(2)+g(1)=2$$

7 $f(a)=b$ (b 는 상수)라 하면

$$(f \circ f)(a) = f(f(a)) = f(b) = 1$$

주어진 그래프에서 $f(b)=1$ 을 만족시키는 b 의 값은

$$b=2 \quad \therefore f(a)=2$$

$f(a)=2$ 를 만족시키는 a 의 값은

$$a=1 \text{ 또는 } a=3$$

따라서 모든 a 의 값의 합은 $1+3=4$

8 $f(x)=x+4$ 에서

$$f^2(x)=(f \circ f^1)(x)=f(f(x))$$

$$=f(x+4)=x+4 \times 2$$

$$f^3(x)=(f \circ f^2)(x)=f(f^2(x))$$

$$=f(x+4 \times 2)=x+4 \times 3$$

⋮

$$\therefore f^n(x)=x+4n$$

따라서 $f^{1000}(x)=x+4000$ 이므로

$$f^{1000}(-1000)=3000$$

9 $f(80)=40$ 이므로

$$f^2(80)=(f \circ f^1)(80)=f(f(80))=f(40)=20$$

$$f^3(80)=(f \circ f^2)(80)=f(f^2(80))=f(20)=10$$

$$f^4(80)=(f \circ f^3)(80)=f(f^3(80))=f(10)=5$$

$$f^5(80)=(f \circ f^4)(80)=f(f^4(80))=f(5)=2$$

$$f^6(80)=(f \circ f^5)(80)=f(f^5(80))=f(2)=1$$

따라서 구하는 자연수 k 의 값은 6이다.

10 $f(2)=1$ 이므로

$$f^2(2)=(f \circ f^1)(2)=f(f(2))=f(1)=3$$

$$f^3(2)=(f \circ f^2)(2)=f(f^2(2))=f(3)=2$$

$$f^4(2)=(f \circ f^3)(2)=f(f^3(2))=f(2)=1$$

⋮

즉, $f^n(2)$ 의 값은 1, 3, 2가 이 순서대로 반복된다.

이때 $2020=3 \times 673+1$ 이므로

$$f^{2020}(2)=f^1(2)=1$$

11 $(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+b)$

$$=a(ax+b)+b$$

$$=a^2x+ab+b$$

따라서 $a^2x+ab+b=9x-8$ 이므로

$$a^2=9, ab+b=-8$$

$$a^2=9\text{에서 } a=3 \text{ (}\because a>0\text{)}$$

$$ab+b=-8\text{에서 } 4b=-8$$

$$\therefore b=-2$$

$$\therefore a+b=3+(-2)=1$$

12 $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-1)$

$$=a(2x-1)+3$$

$$=2ax-a+3$$

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+3)$$

$$=2(ax+3)-1$$

$$=2ax+5$$

이때 $f \circ g=g \circ f$ 에서

$$-a+3=5 \quad \therefore a=-2$$

13 $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(ax+2)$

$$=ax+2-1=ax+1$$

이때 $(f \circ g)(2)=5$ 에서

$$2a+1=5 \quad \therefore a=2$$

따라서 $g(x)=2x+2$ 이므로

$$(g \circ f)(2)=g(f(2))=g(1)=4$$

14 $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(bx+a)$

$$=a(bx+a)+b=abx+a^2+b$$

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(ax+b)$$

$$=b(ax+b)+a=abx+b^2+a$$

이때 $f \circ g=g \circ f$ 에서 $a^2+b=b^2+a$

$$a^2-b^2-a+b=0, (a+b)(a-b)-(a-b)=0$$

$$(a-b)(a+b-1)=0$$

그런데 $a \neq b$ 이므로 $a+b=1$

따라서 $f(1)=a+b=1, g(1)=b+a=1$ 이므로

$$f(1)+g(1)=2$$

15 $\frac{x+4}{3}=t$ 로 놓으면 $x=3t-4$ 이므로

$$f(t)=4(3t-4)+3=12t-13$$

$$\therefore f(x)=12x-13$$

16 $(f \circ h)(x)=f(h(x))=h(x)-1$

이때 $f \circ h=g$ 에서

$$h(x)-1=-x+2$$

$$\therefore h(x)=-x+3$$

17 $(h \circ f)(x)=h(f(x))=h(2x+4)$

이때 $h \circ f=g$ 에서

$$h(2x+4)=3x-2$$

$$2x+4=t \text{로 놓으면 } x=\frac{t-4}{2}$$

$$\therefore h(t)=3 \times \frac{t-4}{2}-2=\frac{3}{2}t-8$$

$$\therefore h(x)=\frac{3}{2}x-8$$

18 $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{3x-2}{4}\right)$

이때 $(g \circ f)(x)=-x-\frac{1}{3}$ 에서

$$g\left(\frac{3x-2}{4}\right)=-x-\frac{1}{3}$$

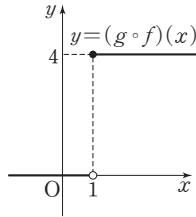
$$\frac{3x-2}{4}=t \text{로 놓으면 } x=\frac{4t+2}{3}$$

$$\therefore g(t)=-\frac{4t+2}{3}-\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}t-1$$

$$\therefore g(3)=-5$$

- 19 (i) $x < 1$ 일 때, $f(x) = 2$ 이므로
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2) = 0$
(ii) $x \geq 1$ 일 때, $f(x) = 1$ 이므로
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1) = 4$
(i), (ii)에 의하여 $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1) \\ 4 & (x \geq 1) \end{cases}$

따라서 합성함수 $y = (g \circ f)(x)$
의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



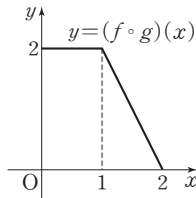
- 20 주어진 그래프에서

$$f(x) = 2x \quad (0 \leq x \leq 2),$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1) \\ -x + 2 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = 2g(x) \\ &= \begin{cases} 2 & (0 \leq x < 1) \\ -2x + 4 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \end{aligned}$$

따라서 합성함수 $y = (f \circ g)(x)$
의 그래프는 오른쪽 그림과 같으
므로 구하는 넓이는
 $\frac{1}{2}(1+2) \times 2 = 3$

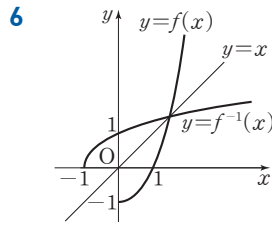


V-1 03 역함수

기초 문제 Training

44쪽

- 1 ㄴ, ㄹ
2 (1) 4 (2) 2 (3) 4 (4) 8
3 (1) 5 (2) 7
4 (1) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ (2) $y = 3x + 3$
5 (1) 1 (2) 3 (3) 1 (4) 4



핵심 유형 Training

45~48쪽

- | | | | | |
|--|------------------------------|------|------|--------|
| 1 ① | 2 ⑤ | 3 ⑤ | 4 ② | 5 ① |
| 6 ① | 7 ④ | 8 ③ | 9 6 | 10 -12 |
| 11 ④ | 12 $g(x) = 2x + \frac{5}{2}$ | 13 1 | 14 8 | |
| 15 ③ | 16 $h(x) = 3x - 1$ | | | |
| 17 $h(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 2) \\ 2x-3 & (x < 2) \end{cases}$ | 18 ① | 19 ① | | |
| 20 ⑤ | 21 ① | 22 ② | 23 ③ | 24 ④ |
| 25 3 | | | | |

- 1 $f^{-1}(6) = 2$ 에서 $f(2) = 6$ 이므로

$$2a + 4 = 6 \quad \therefore a = 1$$

$$g^{-1}(-1) = 4 \text{에서 } g(4) = -1 \text{이므로}$$

$$2 + b = -1 \quad \therefore b = -3$$

$$\therefore a + b = 1 + (-3) = -2$$

- 2 $f^{-1}(-2) = -4, f^{-1}(4) = 8$ 에서 $f(-4) = -2, f(8) = 4$
이므로

$$-4a + b = -2, 8a + b = 4$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a = \frac{1}{2}, b = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2}x \text{이므로 } f(2) = 1$$

- 3 $(f^{-1} \circ g)(a) = f^{-1}(g(a)) = 1$ 에서
 $f(1) = g(a)$

$$2 - 1 = 3a - 2 \quad \therefore a = 1$$

- 4 $\frac{x+2}{5} = t$ 로 놓으면 $x = 5t - 2$ 이므로

$$f(t) = -(5t - 2) + 4 = -5t + 6$$

$$\therefore f(x) = -5x + 6$$

$$\text{이때 } f^{-1}(1) = k (k \text{는 상수}) \text{라 하면 } f(k) = 1$$

$$-5k + 6 = 1 \quad \therefore k = 1$$

$$\therefore f^{-1}(1) = 1$$

5 $f^{-1}(4)=2$ 에서 $f(2)=4$
 함수 f 는 일대일대응이므로 $f(4)=3$
 $(f \circ f)(4)=f(f(4))=f(3)=1$
 $(f \circ f \circ f)(2)=f(f(f(2)))=f(f(4))=f(3)=1$
 $\therefore (f \circ f)(4)+(f \circ f \circ f)(2)=1+1=2$

6 $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+a)$
 $=2x+a+a=2x+2a$
 따라서 $2x+2a=2x+6$ 이므로
 $2a=6 \quad \therefore a=3$
 $\therefore f(x)=x+3, g(x)=2x+3$
 $(g \circ f^{-1})(-1)=g(f^{-1}(-1))$ 에서
 $f^{-1}(-1)=k$ (k 는 상수)라 하면 $f(k)=-1$
 $k+3=-1 \quad \therefore k=-4$
 $\therefore (g \circ f^{-1})(-1)=g(-4)=-5$

7 함수 f 의 역함수가 존재하려면 함수 f 는 일대일대응이어야 한다.
 직선 $y=f(x)$ 의 기울기가 양수이므로
 $f(-1)=a, f(3)=b$
 따라서 $a=-1, b=7$ 이므로
 $a-b=-8$

8 $f(x)=ax+|x-2|$ 에서
 (i) $x \geq 2$ 일 때, $f(x)=ax+x-2=(a+1)x-2$
 (ii) $x < 2$ 일 때, $f(x)=ax-(x-2)=(a-1)x+2$
 (i), (ii)에서 함수 f 의 역함수가 존재하려면 함수 f 는 일대일대응이어야 하므로 두 직선의 기울기의 부호가 서로 같아야 한다.
 따라서 $(a+1)(a-1) > 0$ 이므로
 $a < -1$ 또는 $a > 1$

9 $f(x)=x^2-4x-6=(x-2)^2-2$
 함수 f 의 역함수가 존재하려면 함수 f 는 일대일대응이어야 하므로
 $a \geq 2, f(a)=a$
 $f(a)=a$ 에서 $a^2-4a-6=a$
 $a^2-5a-6=0, (a+1)(a-6)=0$
 $\therefore a=6$ ($\because a \geq 2$)

10 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 에서 $x=-2y+6$ 이므로 역함수는
 $y=-2x+6$
 따라서 $a=-2, b=6$ 이므로
 $ab=-12$

11 $y=3x+a$ 라 하면 $x=\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}a$ 이므로 역함수는
 $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}a$
 따라서 $b=\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}a=-2$ 이므로
 $a=6 \quad \therefore ab=6 \times \frac{1}{3}=2$

12 $y=2x-1$ 이라 하면 $x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$ 이므로 역함수는
 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
 $g\left(\frac{1}{4}x-1\right)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{1}{4}x-1=t$ 로 놓으면
 $x=4t+4 \quad \therefore g(t)=\frac{1}{2}(4t+4)+\frac{1}{2}=2t+\frac{5}{2}$
 $\therefore g(x)=2x+\frac{5}{2}$

13 $h(x)=(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(x+a)$
 $=2(x+a)+4=2x+2a+4$
 $y=2x+2a+4$ 라 하면 $x=\frac{1}{2}y-a-2$ 이므로 역함수는
 $h^{-1}(x)=\frac{1}{2}x-a-2$
 따라서 $-a-2=-3$ 이므로 $a=1$

14 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)=(f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2)$
 $=(g^{-1} \circ f)(2)=g^{-1}(f(2))$
 $=g^{-1}(7)$
 $g^{-1}(7)=a$ (a 는 상수)라 하면 $g(a)=7$
 $a-1=7 \quad \therefore a=8$
 $\therefore (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)=g^{-1}(7)=8$

15 $(g^{-1} \circ f)^{-1}(1)=(f^{-1} \circ g)(1)=f^{-1}(g(1))=f^{-1}(2)$
 $f^{-1}(2)=a$ (a 는 상수)라 하면 $f(a)=2$
 $a+4=2 \quad \therefore a=-2$
 $\therefore (g^{-1} \circ f)^{-1}(1)=f^{-1}(2)=-2$
 $(f \circ g)^{-1}(2)=(g^{-1} \circ f^{-1})(2)=g^{-1}(f^{-1}(2))$
 $=g^{-1}(-2)$
 $g^{-1}(-2)=b$ (b 는 상수)라 하면 $g(b)=-2$
 $3b-1=-2 \quad \therefore b=-\frac{1}{3}$
 $\therefore (f \circ g)^{-1}(2)=g^{-1}(-2)=-\frac{1}{3}$
 $\therefore (g^{-1} \circ f)^{-1}(1)+(f \circ g)^{-1}(2)=-2+\left(-\frac{1}{3}\right)$
 $=-\frac{7}{3}$

16 $f \circ h = g$ 에서
 $f^{-1} \circ f \circ h = f^{-1} \circ g \quad \therefore h = f^{-1} \circ g$
 $\therefore h(x) = (f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(6x+3)$
 $= \frac{6x+3-5}{2} = 3x-1$

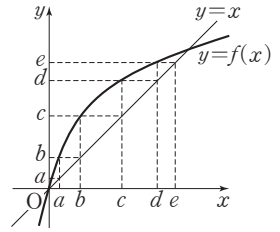
17 $f \circ h = g^{-1}$ 에서
 $f^{-1} \circ f \circ h = f^{-1} \circ g^{-1} \quad \therefore h = (g \circ f)^{-1}$
 (i) $x \geq 1$ 일 때,
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x)$
 $= \frac{1}{2} \times 2x + 1 = x+1$
 $y = x+1$ 이라 하면 $y \geq 2$ 이고 $x = y-1$ 이므로 역함수는
 $(g \circ f)^{-1}(x) = x-1 \quad (x \geq 2)$
 (ii) $x < 1$ 일 때,
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1)$
 $= \frac{1}{2}(x+1) + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
 $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 이라 하면 $y < 2$ 이고 $x = 2y-3$ 이므로 역함수는
 $(g \circ f)^{-1}(x) = 2x-3 \quad (x < 2)$
 (i), (ii)에 의하여 $h(x) = (g \circ f)^{-1}(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 2) \\ 2x-3 & (x < 2) \end{cases}$

18 $(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f(x) = f^{-1}(x)$
 $\therefore f(1) = f^{-1}(1) = -2$

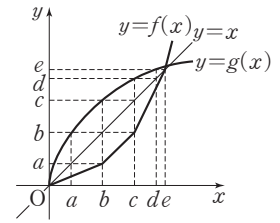
19 $f = f^{-1}$ 이면 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$
 ㉠. $f(x) = -x$ 에서
 $f(f(x)) = f(-x) = -(-x) = x$
 ㉡. $f(x) = -x+4$ 에서
 $f(f(x)) = f(-x+4) = -(-x+4) + 4 = x$
 ㉢. $f(x) = 3x$ 에서
 $f(f(x)) = f(3x) = 3 \times 3x = 9x$
 ㉣. $f(x) = \frac{1}{4}x$ 에서
 $f(f(x)) = f\left(\frac{1}{4}x\right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}x = \frac{1}{16}x$
 따라서 보기 중 $f = f^{-1}$ 를 만족시키는 함수인 것은 ㉠, ㉡이다.

20 $f = f^{-1}$ 이면 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x$
 $f(f(x)) = f(ax+2) = a(ax+2) + 2 = a^2x + 2a + 2$
 즉, $a^2x + 2a + 2 = x$ 이므로
 $a^2 = 1, 2a + 2 = 0 \quad \therefore a = -1$
 따라서 $f(x) = -x + 2$ 이므로
 $f(-1) = 3$

21 $(f^{-1} \circ f^{-1})(c) = f^{-1}(f^{-1}(c))$
 $f^{-1}(c) = k$ (k 는 상수)라
 하면
 $f(k) = c \quad \therefore k = b$
 $f^{-1}(b) = l$ (l 은 상수)이라
 하면
 $f(l) = b \quad \therefore l = a$
 $\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(c)$
 $= f^{-1}(f^{-1}(c))$
 $= f^{-1}(b) = a$



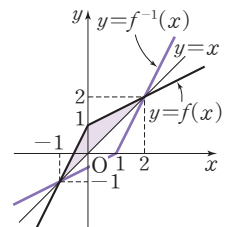
22 $f^{-1}(b) = k$ (k 는 상수)라
 하면
 $f(k) = b \quad \therefore k = c$
 $g^{-1}(c) = l$ (l 은 상수)이라
 하면
 $g(l) = c \quad \therefore l = b$
 $\therefore g^{-1}(f^{-1}(b)) = g^{-1}(c) = b$



23 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.
 $-2x+6=x$ 에서 $x=2$
 따라서 교점의 좌표는 $(2, 2)$ 이므로
 $a=2, b=2$
 $\therefore a+b=4$

24 두 함수 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.
 $x^2-6x+12=x$ 에서 $x^2-7x+12=0$
 $(x-3)(x-4)=0$
 $\therefore x=3$ 또는 $x=4$
 따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(3, 3)$, $(4, 4)$ 이므로
 $AB = \sqrt{(4-3)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}$

25 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 2배이다.
 따라서 구하는 넓이는
 $2\left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2\right) = 3$



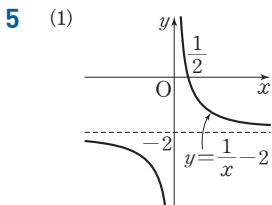
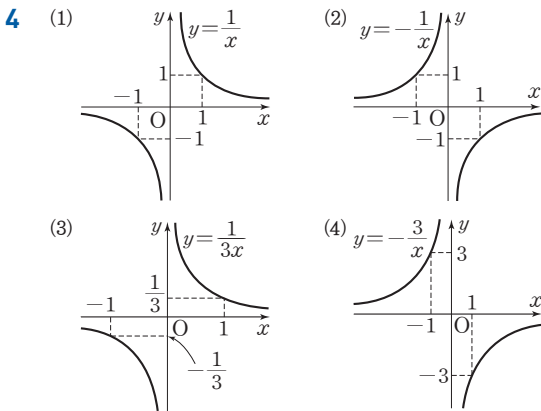
기초 문제 Training

50쪽

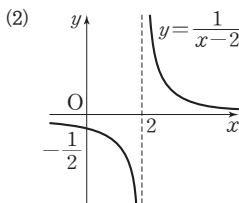
- 1 (1) $\frac{x+1}{x+2}$ (2) $-\frac{1}{x+1}$
 (3) $\frac{x}{(x-1)^2}$ (4) $\frac{x+3}{x-4}$

2 ㄱ, ㄴ, ㄹ

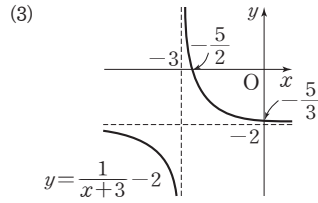
- 3 (1) $\{x|x \neq -3 \text{인 실수}\}$
 (2) $\{x|x \neq 2 \text{인 실수}\}$
 (3) $\{x|x \neq \pm 1 \text{인 실수}\}$
 (4) $\{x|x \text{는 모든 실수}\}$



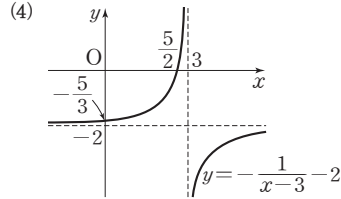
정의역: $\{x|x \neq 0 \text{인 실수}\}$,
 치역: $\{y|y \neq -2 \text{인 실수}\}$



정의역: $\{x|x \neq 2 \text{인 실수}\}$,
 치역: $\{y|y \neq 0 \text{인 실수}\}$



정의역: $\{x|x \neq -3 \text{인 실수}\}$,
 치역: $\{y|y \neq -2 \text{인 실수}\}$



정의역: $\{x|x \neq 3 \text{인 실수}\}$,
 치역: $\{y|y \neq -2 \text{인 실수}\}$

- 6 (1) $y = \frac{2}{x-1} + 1$ (2) $y = \frac{7}{x-2} + 2$
 (3) $y = -\frac{5}{x+2} + 3$ (4) $y = \frac{3}{x+3} - 2$

핵심 유형 Training

51~57쪽

- 1 $\frac{1}{x+1}$ 2 $\frac{x+2}{x+4}$ 3 1 4 ③ 5 -12
 6 ① 7 ④ 8 $\frac{2x+3}{(x+2)(x+1)}$ 9 4
 10 ① 11 $\frac{1}{x}$ 12 22 13 $\frac{20}{41}$ 14 ②
 15 3 16 $\frac{1}{2}$ 17 $\frac{11}{14}$ 18 ③ 19 ④
 20 제3사분면 21 $k < 0$ 22 ① 23 ①
 24 ③ 25 11 26 1 27 ⑤ 28 1
 29 ② 30 ② 31 4 32 ② 33 -1
 34 5 35 ⑤ 36 ③ 37 $k < 0$ 38 ④
 39 ② 40 3 41 3 42 $\frac{2}{21}$ 43 0
 44 -3 45 2 46 -4 47 5

1 $\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x+1} - \frac{2x-2}{x^2-2x-3}$

$$= \frac{x+1+2(x-3)-(2x-2)}{(x-3)(x+1)}$$

$$= \frac{x-3}{(x-3)(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad & \frac{x^2+x-2}{x^2+x-6} \times \frac{x+3}{x+2} \div \frac{x^2+3x-4}{x^2-4} \\
 &= \frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-2)} \times \frac{x+3}{x+2} \times \frac{(x+2)(x-2)}{(x+4)(x-1)} \\
 &= \frac{x+2}{x+4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad & \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \\
 &= \frac{-a^2}{(a-b)(c-a)} + \frac{-b^2}{(a-b)(b-c)} + \frac{-c^2}{(b-c)(c-a)} \\
 &= \frac{-a^2(b-c) - b^2(c-a) - c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
 &\text{분자를 } a \text{에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면} \\
 &= \frac{-a^2(b-c) - b^2(c-a) - c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
 &= \frac{-(b-c)a^2 + (b^2-c^2)a - b^2c + bc^2}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
 &= \frac{-(b-c)a^2 + (b+c)(b-c)a - bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
 &= \frac{-(b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\}}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
 &= \frac{-(b-c)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
 &= \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4 \quad & \frac{a^2+1}{bc} + \frac{b^2+1}{ca} + \frac{c^2+1}{ab} \\
 &= \frac{a(a^2+1) + b(b^2+1) + c(c^2+1)}{abc} \\
 &= \frac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc} \\
 &= \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \quad (\because a+b+c=0) \\
 &= \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + 3abc}{abc} \\
 &= \frac{3abc}{abc} \quad (\because a+b+c=0) \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5 \quad & \text{우변을 통분하여 정리하면} \\
 & \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} = \frac{a(x-2) + b(x-1)}{(x-1)(x-2)} \\
 &= \frac{(a+b)x - 2a - b}{x^2 - 3x + 2} \\
 &\text{이때 } \frac{2x+3}{x^2-3x+2} = \frac{(a+b)x - 2a - b}{x^2-3x+2} \text{가 } x \text{에 대한 항등} \\
 &\text{식이므로} \\
 &a+b=2, -2a-b=3 \\
 &\text{두 식을 연립하여 풀면} \\
 &a=-5, b=7 \\
 &\therefore a-b=-12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6 \quad & \text{좌변을 통분하여 정리하면} \\
 & \frac{a}{x+1} - \frac{b}{x-2} - \frac{c}{x} \\
 &= \frac{ax(x-2) - bx(x+1) - c(x+1)(x-2)}{x(x+1)(x-2)} \\
 &= \frac{(a-b-c)x^2 - (2a+b-c)x + 2c}{x(x+1)(x-2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{이때} \\
 &\frac{(a-b-c)x^2 - (2a+b-c)x + 2c}{x(x+1)(x-2)} = \frac{2-4x}{x(x+1)(x-2)}
 \end{aligned}$$

가 x 에 대한 항등식이므로

$$a-b-c=0, 2a+b-c=4, 2c=2$$

즉, $c=1$ 이므로

$$a-b=1, 2a+b=5$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, b=1$

$$\therefore abc=2 \times 1 \times 1=2$$

$$\begin{aligned}
 7 \quad & \text{좌변을 통분하여 정리하면} \\
 & \frac{2}{x-1} + \frac{ax+1}{x^2+x+1} \\
 &= \frac{2(x^2+x+1) + (ax+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\
 &= \frac{(a+2)x^2 + (3-a)x + 1}{x^3-1}
 \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \frac{(a+2)x^2 + (3-a)x + 1}{x^3-1} = \frac{bx+1}{x^3-1} \text{이 } x \text{에 대한 항}$$

등식이므로

$$a+2=0, 3-a=b$$

따라서 $a=-2, b=5$ 이므로

$$b-a=7$$

$$\begin{aligned}
 8 \quad & \frac{2x^2+4x+1}{x+2} - \frac{2x^2+2x-1}{x+1} \\
 &= \frac{2x(x+2)+1}{x+2} - \frac{2x(x+1)-1}{x+1} \\
 &= 2x + \frac{1}{x+2} - 2x + \frac{1}{x+1} \\
 &= \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x+3}{(x+2)(x+1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9 \quad & \frac{x+1}{x} - \frac{x+2}{x+1} - \frac{x-4}{x-3} + \frac{x-5}{x-4} \\
 &= 1 + \frac{1}{x} - \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{x-3}\right) + 1 - \frac{1}{x-4} \\
 &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} \\
 &= \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x-3)(x-4)} \\
 &= \frac{-8x+12}{x(x+1)(x-3)(x-4)}
 \end{aligned}$$

따라서 $a=-8, b=12$ 이므로

$$a+b=4$$

$$10 \quad 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{x-1}{x}}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\frac{-1}{x-1}} = 1 + x - 1 = x$$

$$11 \quad \frac{1 - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x-1}{x+1}} = \frac{\frac{x+1-(x-1)}{x+1}}{\frac{x+1+x-1}{x+1}} = \frac{2}{2x}$$

$$= \frac{2(x+1)}{2x(x+1)} = \frac{1}{x}$$

다른 풀이

분자, 분모에 $x+1$ 을 각각 곱하면

$$\frac{1 - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x-1}{x+1}} = \frac{x+1-(x-1)}{x+1+x-1} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

$$12 \quad \frac{1}{x(x+1)} + \frac{4}{(x+1)(x+5)} + \frac{6}{(x+5)(x+11)}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+11}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+11}$$

$$= \frac{11}{x(x+11)}$$

따라서 $a=11$, $b=11$ 이므로 $a+b=22$

$$13 \quad f(x) = 4x^2 - 1 = (2x-1)(2x+1) \text{이므로}$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right)$$

$$\therefore \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(3)} + \dots + \frac{1}{f(20)}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right.$$

$$\left. + \dots + \left(\frac{1}{39} - \frac{1}{41} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{41} \right) = \frac{20}{41}$$

$$14 \quad \frac{67}{29} = 2 + \frac{9}{29} = 2 + \frac{1}{\frac{29}{9}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{2}{9}}$$

$$= 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{9}{2}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}$$

따라서 $a=2$, $b=3$, $c=4$, $d=2$ 이므로

$$a+b+c+d=11$$

$$15 \quad x:y:z=2:3:4 \text{이므로}$$

$x=2k$, $y=3k$, $z=4k$ ($k \neq 0$)로 놓으면

$$\frac{xyz}{x^2y-y^2z+xz^2} = \frac{2k \times 3k \times 4k}{(2k)^2 \times 3k - (3k)^2 \times 4k + 2k \times (4k)^2}$$

$$= \frac{24k^3}{8k^3} = 3$$

$$16 \quad 3x=y \text{에서 } x=\frac{1}{3}y$$

$$2y=5z \text{에서 } z=\frac{2}{5}y$$

$$\therefore x:y:z = \frac{1}{3}y:y:\frac{2}{5}y = 5:15:6$$

따라서 $x=5k$, $y=15k$, $z=6k$ ($k \neq 0$)로 놓으면

$$\frac{5x-2y+3z}{x+y+z} = \frac{5 \times 5k - 2 \times 15k + 3 \times 6k}{5k + 15k + 6k}$$

$$= \frac{13k}{26k} = \frac{1}{2}$$

$$17 \quad \frac{a+b}{3} = \frac{b+c}{4} = \frac{c+a}{5} = k \text{ ($k \neq 0$)로 놓으면}$$

$$a+b=3k, b+c=4k, c+a=5k$$

각 변끼리 더하면

$$2(a+b+c)=12k$$

$$\therefore a+b+c=6k$$

따라서 $a=2k$, $b=k$, $c=3k$ 이므로

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2k \times k + k \times 3k + 3k \times 2k}{(2k)^2 + k^2 + (3k)^2}$$

$$= \frac{11k^2}{14k^2} = \frac{11}{14}$$

$$18 \quad 3b+2c=ak, 2c+a=3bk, a+3b=2ck \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

각 변끼리 더하면

$$2(a+3b+2c)=(a+3b+2c)k$$

$$(i) \quad a+3b+2c \neq 0 \text{일 때, } k=2$$

$$(ii) \quad a+3b+2c=0 \text{일 때,}$$

$$3b+2c=-a, 2c+a=-3b, a+3b=-2c$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $k=-1$

$$(i), (ii) \text{에 의하여 모든 } k \text{의 값의 합은}$$

$$2+(-1)=1$$

$$19 \quad y = \frac{1-4x}{2x+2} = \frac{-4(x+1)+5}{2(x+1)}$$

$$= \frac{5}{2(x+1)} - 2$$

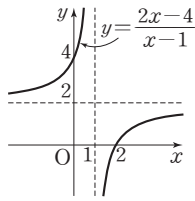
따라서 $y = \frac{1-4x}{2x+2}$ 의 그래프는 $y = \frac{5}{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로 $\textcircled{4}$ 와 같다.

$$20 \quad y = \frac{2x-4}{x-1} = \frac{2(x-1)-2}{x-1} = -\frac{2}{x-1} + 2$$

따라서 $y = \frac{2x-4}{x-1}$ 의 그래프는

$y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 제3사분면을 지나지 않는다.

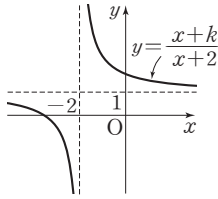


$$21 \quad y = \frac{x+k}{x+2} = \frac{x+2+k-2}{x+2} = \frac{k-2}{x+2} + 1$$

(i) $k-2 > 0$, 즉 $k > 2$ 일 때,

$y = \frac{x+k}{x+2}$ 의 그래프는 오른쪽

쪽 그림과 같으므로 k 의 값에 관계없이 제4사분면을 지나지 않는다.



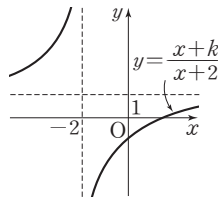
(ii) $k-2 < 0$, 즉 $k < 2$ 일 때,

$y = \frac{x+k}{x+2}$ 의 그래프는 오른쪽

쪽 그림과 같으므로 제4사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$ 에서의 함수값이 0보다 작아야 한다.

$$\frac{k}{2} < 0 \quad \therefore k < 0$$

(i), (ii)에 의하여 $k < 0$



$$22 \quad y = \frac{2x-1}{x+3} = \frac{2(x+3)-7}{x+3} = -\frac{7}{x+3} + 2 \text{이므로}$$

$-2 \leq x \leq 3$ 에서 $x=3$ 일 때 최댓값 $\frac{5}{6}$, $x=-2$ 일 때 최솟값 -5 를 갖는다.

$$\text{따라서 } M = \frac{5}{6}, m = -5 \text{이므로 } \frac{m}{M} = -6$$

$$23 \quad y = \frac{3x+a}{x+1} = \frac{3(x+1)+a-3}{x+1} = \frac{a-3}{x+1} + 3 \text{이고 } a > 3 \text{이}$$

므로 $0 \leq x \leq 1$ 에서 $x=0$ 일 때 최댓값 a 를 갖는다.

$$\therefore a = 4$$

$$24 \quad y = \frac{2x-1}{x-1} = \frac{2(x-1)+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 2 \text{이므로}$$

$2 \leq x \leq a$ 에서 $x=2$ 일 때 최댓값 3, $x=a$ 일 때 최솟값

$$\frac{2a-1}{a-1} \text{을 갖는다.}$$

$$\text{따라서 } b = 3, \frac{2a-1}{a-1} = \frac{7}{3} \text{이므로}$$

$$6a-3=7a-7 \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore a+b=4+3=7$$

$$25 \quad y = \frac{3}{x} \text{의 그래프를 } x \text{축의 방향으로 } -2 \text{만큼, } y \text{축의 방향}$$

으로 2만큼 평행이동하면

$$y = \frac{3}{x+2} + 2 = \frac{2x+7}{x+2}$$

따라서 $a=2, b=7, c=2$ 이므로

$$a+b+c=11$$

$$26 \quad y = \frac{2x+1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} + 2 \text{의 그래프를 } x \text{축의 방향으로 } p$$

만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하면

$$y = -\frac{1}{x-p+1} + 2+q$$

이 함수의 그래프가 $y = \frac{-x+2}{x-3} = -\frac{1}{x-3} - 1$ 의 그래프

와 겹쳐지므로

$$-p+1 = -3, 2+q = -1$$

따라서 $p=4, q=-3$ 이므로

$$p+q=1$$

$$27 \quad \neg. y = \frac{1}{1-x} + 2 = -\frac{1}{x-1} + 2$$

$$\neg. y = \frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{x+1} + 1$$

$$\sqcup. y = \frac{x-2}{x-1} = -\frac{1}{x-1} + 1$$

$$\sqcap. y = \frac{3x-5}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 3$$

따라서 보기의 함수 중 그 그래프가 평행이동에 의하여 유

리함수 $y = \frac{1}{x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은 $\neg, \sqcap$ 이다.

$$28 \quad y = \frac{3x+4}{x+2} = -\frac{2}{x+2} + 3$$

따라서 이 함수의 그래프는 점 $(-2, 3)$ 에 대하여 대칭이므로

$$a = -2, b = 3 \quad \therefore a+b=1$$

$$29 \quad y = \frac{ax+2}{x-1} = \frac{a(x-1)+a+2}{x-1} = \frac{a+2}{x-1} + a$$

따라서 이 함수의 그래프는 점 $(1, a)$ 에 대하여 대칭이므로

$$a = -1, b = 1 \quad \therefore ab = -1$$

$$30 \quad y = \frac{7-6x}{2x-2} = \frac{-6(x-1)+1}{2(x-1)} = \frac{1}{2(x-1)} - 3$$

이 함수의 그래프는 두 직선 $y = (x-1)-3$,

$y = -(x-1)-3$, 즉 두 직선 $y = x-4, y = -x-2$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 $a=-4, b=-1, c=-2$ 이므로

$$a+b+c=-7$$

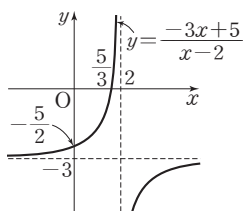
- 31 $y = \frac{ax+4}{x+3} = \frac{a(x+3)-3a+4}{x+3} = \frac{-3a+4}{x+3} + a$
 따라서 이 함수의 그래프는 점 $(-3, a)$ 에 대하여 대칭이므로 두 직선 $y=x+2$, $y=-x+b$ 는 점 $(-3, a)$ 를 지난다.
 $\therefore a=-1, a=3+b$
 따라서 $b=-4$ 이므로
 $ab=-1 \times (-4)=4$

- 32 $y = \frac{k}{x-3} - 1$ ($k \neq 0$)이라 하면 주어진 함수의 그래프가 점 $(4, 2)$ 를 지나므로
 $2 = \frac{k}{4-3} - 1 \quad \therefore k=3$
 따라서 $y = \frac{3}{x-3} - 1 = \frac{-x+6}{x-3}$ 이므로
 $a=-1, b=6, c=-3 \quad \therefore a+b+c=2$

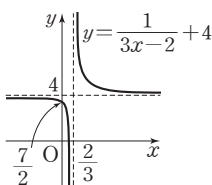
- 33 $y = \frac{k}{x-1} + 1$ ($k > 0$)이라 하면 주어진 함수의 그래프가 점 $(0, -1)$ 을 지나므로
 $-1 = -k + 1 \quad \therefore k=2$
 따라서 $y = \frac{2}{x-1} + 1 = \frac{x+1}{x-1}$ 이므로
 $a=1, b=1, c=-1 \quad \therefore abc=-1$

- 34 $y = \frac{k}{x-2} - 3$ ($k \neq 0$)이라 하면
 $y = \frac{k}{x-2} - 3 = \frac{-3x+6+k}{x-2} = \frac{3x-6-k}{2-x}$
 따라서 $a=3, b=2$ 이므로 $a+b=5$

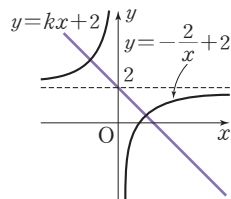
- 35 $y = \frac{-3x+5}{x-2} = -\frac{1}{x-2} - 3$
 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 제1, 3, 4사분면을 지난다.
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.



- 36 $y = \frac{1}{3x-2} + 4 = \frac{1}{3(x-\frac{2}{3})} + 4$
 $\therefore y = \frac{1}{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{2}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

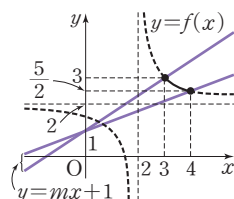


- 37 $y = -\frac{2}{x} + 2$ 의 그래프는 점 $(0, 2)$ 에 대하여 대칭이고, 직선 $y=kx+2$ 는 k 의 값에 관계없이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로 오른쪽 그림과 같이 $y = -\frac{2}{x} + 2$ 의 그래프와 직선 $y=kx+2$ 가 만나려면 $k < 0$



- 38 $-\frac{3}{x} - 1 = 3x + m$ 에서 $3x^2 + (m+1)x + 3 = 0$
 이 이차방정식이 허근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면
 $D = (m+1)^2 - 4 \times 3 \times 3 < 0$
 $m^2 + 2m - 35 < 0, (m+7)(m-5) < 0$
 $\therefore -7 < m < 5$
 따라서 정수 m 의 최댓값은 4이다.

- 39 직선 $y=mx+1$ 은 m 의 값에 관계없이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로 이 직선과 $y=f(x)$ 의 그래프가 만나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 직선 $y=mx+1$ 이 점

$(3, 3)$ 을 지날 때,

$$3 = 3m + 1 \quad \therefore m = \frac{2}{3}$$

(ii) 직선 $y=mx+1$ 이 점 $(4, \frac{5}{2})$ 를 지날 때,

$$\frac{5}{2} = 4m + 1 \quad \therefore m = \frac{3}{8}$$

(i), (ii)에 의하여 $\frac{3}{8} \leq m \leq \frac{5}{2}$ 이므로

$$a = \frac{3}{8}, b = \frac{2}{3} \quad \therefore ab = \frac{1}{4}$$

- 40 $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ 에서

$$f^2(x) = (f \circ f^1)(x) = f(f(x))$$

$$= f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) = \frac{\frac{x-3}{x+1} - 3}{\frac{x-3}{x+1} + 1} = -\frac{x+3}{x-1}$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$$

$$= f\left(-\frac{x+3}{x-1}\right) = \frac{-\frac{x+3}{x-1} - 3}{-\frac{x+3}{x-1} + 1} = x$$

따라서 구하는 자연수 k 의 최솟값은 3이다.

41 $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ 에서

$$f^2(x) = (f \circ f^1)(x) = f(f(x))$$

$$= f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = x$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\vdots$$

따라서 $f^2(x) = f^4(x) = \dots = f^{2n}(x) = x$ 이므로

$$f^{100}(x) = x$$

$$\therefore f^{100}(3) = 3$$

42 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 에서

$$f^2(x) = (f \circ f^1)(x) = f(f(x))$$

$$= f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{2x+1}$$

$$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x))$$

$$= f\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{3x+1}$$

$$f^4(x) = (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x))$$

$$= f\left(\frac{x}{3x+1}\right) = \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{4x+1}$$

$$\vdots$$

따라서 $f^n(x) = \frac{x}{nx+1}$ 이므로

$$f^{10}(x) = \frac{x}{10x+1} \quad \therefore f^{10}(2) = \frac{2}{21}$$

43 주어진 그래프에서 $f(0)=1, f(1)=0$ 이므로

$$f^2(1) = (f \circ f^1)(1) = f(f(1)) = f(0) = 1$$

$$f^3(1) = (f \circ f^2)(1) = f(f^2(1)) = f(1) = 0$$

$$f^4(1) = (f \circ f^3)(1) = f(f^3(1)) = f(0) = 1$$

$$\vdots$$

따라서 $f^n(1) = \begin{cases} 0 & (n \text{은 홀수}) \\ 1 & (n \text{은 짝수}) \end{cases}$ 이므로

$$f^{99}(1) = 0$$

44 $(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f(x) = f^{-1}(x)$ ㉠

$$y = \frac{ax+3}{3-x}$$
이라 하면
$$(3-x)y = ax+3, (y+a)x = 3y-3$$

$$\therefore x = \frac{3y-3}{y+a}$$

따라서 역함수는

$$f^{-1}(x) = \frac{3x-3}{x+a}$$

㉠에서 $\frac{ax+3}{3-x} = \frac{3x-3}{x+a}$ 이므로

$$a = -3$$

45 $(f \circ f^{-1} \circ f^{-1})(1) = ((f \circ f^{-1}) \circ f^{-1})(1)$

$$= f^{-1}(1)$$

$$f^{-1}(1) = k \text{ (} k \text{는 상수)라 하면 } f(k) = 1$$

$$\frac{k+1}{2k-1} = 1, k+1 = 2k-1$$

$$\therefore k = 2$$

$$\therefore (f \circ f^{-1} \circ f^{-1})(1) = f^{-1}(1) = 2$$

46 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로 $f(-1)=2$ 에서

$$\frac{-a+1}{-b+3} = 2 \quad \therefore a-2b = -5 \quad \dots\dots ㉠$$

또 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(2, -1)$ 을 지난다.

$$f(2) = -1 \text{에서}$$

$$\frac{2a+1}{2b+3} = -1 \quad \therefore a+b = -2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -3, b = 1$$

$$\therefore a-b = -4$$

47 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치하므로 점 $(2, c)$ 는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

$$\therefore c = 2$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2, y=2$ 이므로

$$f(x) = \frac{k}{x-2} + 2 \quad (k \neq 0)$$

라 하면

$$f(x) = \frac{k}{x-2} + 2 = \frac{2x-4+k}{x-2}$$

따라서 $\frac{ax+1}{bx-2} = \frac{2x-4+k}{x-2}$ 이므로

$$a = 2, b = 1$$

$$\therefore a+b+c = 2+1+2 = 5$$

기초 문제 Training

58쪽

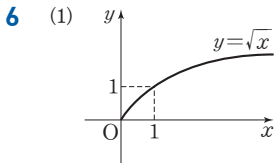
1 1

2 (1) 2 (2) 4

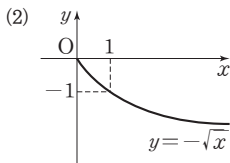
3 (1) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$
(2) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$

4 $\neg, \supset, \sqcap, \sqcup$

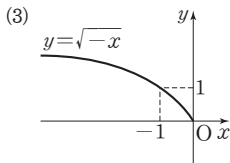
5 (1) $\{x|x \geq 2\}$ (2) $\{x|x \geq \frac{2}{3}\}$
(3) $\{x|x \leq 3\}$ (4) $\{x|-3 \leq x \leq 3\}$



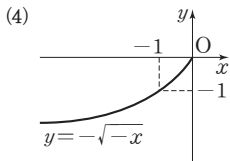
정의역: $\{x|x \geq 0\}$, 치역: $\{y|y \geq 0\}$



정의역: $\{x|x \geq 0\}$, 치역: $\{y|y \leq 0\}$



정의역: $\{x|x \leq 0\}$, 치역: $\{y|y \geq 0\}$



정의역: $\{x|x \leq 0\}$, 치역: $\{y|y \leq 0\}$

7 (1) $y = -\sqrt{-2x}$
(2) $y = \sqrt{2x}$
(3) $y = -\sqrt{2x}$

8 $y = \sqrt{2x-6} - 1$

핵심 유형 Training

59~64쪽

1 -4	2 ④	3 ⑤	4 ②	5 $-x\sqrt{x}$
6 $\frac{2x+2y}{x-y}$	7 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$	8 ②	9 $2\sqrt{2}$	10 $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
11 6	12 ②	13 제4사분면	14 2	
15 ④	16 ①	17 ③	18 -5	19 4
20 $\neg, \supset$	21 2	22 -3	23 ③	24 ②
25 ④	26 ④	27 ⑤	28 ①	
29 $-1 \leq k < -\frac{3}{4}$	30 ③	31 10	32 2	
33 ②	34 ⑤	35 ②	36 6	

1 $6x^2 - 7x - 3 \geq 0$ 이어야 하므로 $(3x+1)(2x-3) \geq 0$
 $\therefore x \leq -\frac{1}{3}$ 또는 $x \geq \frac{3}{2}$

따라서 $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{3}{2}$ 이므로

$$3a - 2b = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - 2 \times \frac{3}{2} = -4$$

2 $4 - x \geq 0$, $x + 2 > 0$ 이어야 하므로
 $-2 < x \leq 4$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ 의 6개이다.

3 $x - 1 \geq 0$, $3 - x \geq 0$ 이어야 하므로
 $1 \leq x \leq 3$

$$\therefore \sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{(x+2)^2} = x+2$$

$$\begin{aligned} 4 \quad \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} &= \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})} \\ &= \frac{x+1 - 2\sqrt{x^2-1} + x-1}{x+1 - (x-1)} \\ &= x - \sqrt{x^2-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad \frac{x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} - \frac{x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}} &= \frac{x(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) - x(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})} \\ &= \frac{x\sqrt{x+2} - x\sqrt{x} - x\sqrt{x+2} - x\sqrt{x}}{x+2 - x} \\ &= -x\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \\ &= \frac{x - 2\sqrt{xy} + y + x + 2\sqrt{xy} + y}{x - y} \\ &= \frac{2x + 2y}{x - y} \end{aligned}$$

7 $\sqrt{2}=1+\frac{1}{1+a_1}$ 에서 $\sqrt{2}-1=\frac{1}{1+a_1}$

즉, $1+a_1=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ 이므로

$1+a_1=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\sqrt{2}+1$

$\therefore a_1=\sqrt{2}$

$1+\frac{1}{1+a_1}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ 에서 $a_1=\frac{1}{a_2}$ 이므로

$\sqrt{2}=\frac{1}{a_2} \quad \therefore a_2=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore a_1+a_2=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

8 $\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1-(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{2}{x-1}$
 $=\frac{2}{(1+\sqrt{3})-1} \quad \leftarrow x=1+\sqrt{3} \text{ 대입}$
 $=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

9 $x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=3+2\sqrt{2}$
 $\therefore \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$
 $=\frac{x-2\sqrt{x}+1+x+2\sqrt{x}+1}{x-1}$
 $=\frac{2x+2}{x-1}$
 $=\frac{2(3+2\sqrt{2})+2}{(3+2\sqrt{2})-1} \quad \leftarrow x=3+2\sqrt{2} \text{ 대입}$
 $=\frac{4\sqrt{2}+8}{2\sqrt{2}+2}=\frac{2\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}+1}$
 $=\frac{(2\sqrt{2}+4)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=2\sqrt{2}$

10 $x+y=2\sqrt{3}, x-y=2, xy=2$ 이므로
 $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}$
 $=\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$
 $=\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

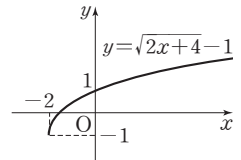
11 $f(n)=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ 이므로
 $\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$
 $=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$
 $\therefore \frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\cdots+\frac{1}{f(48)}$
 $=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{48})$
 $=-\sqrt{1}+\sqrt{49}=6$

12 $y=-\sqrt{3x-9}-2=-\sqrt{3(x-3)}-2$

따라서 $y=-\sqrt{3x-9}-2$ 의 그래프는 $y=-\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 ②와 같다.

13 $y=\sqrt{2x+4}-1=\sqrt{2(x+2)}-1$

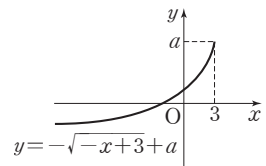
따라서 $y=\sqrt{2x+4}-1$ 의 그래프는 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 제4사분면을 지나지 않는다.

14 $y=-\sqrt{-x+3}+a=-\sqrt{-(x-3)}+a$

이 함수의 그래프가 제1, 2, 3사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, $x=0$ 일 때 $y>0$ 이어야 하므로

$-\sqrt{3}+a>0 \quad \therefore a>\sqrt{3}$

따라서 정수 a 의 최솟값은 2이다.

15 $y=-\sqrt{2x+a}+2$ 는 $-3\leq x\leq 1$ 에서 $x=-3$ 일 때 최댓값을 가지므로

$-\sqrt{-6+a}+2=1, \sqrt{-6+a}=1 \quad \therefore a=7$

따라서 $y=-\sqrt{2x+7}+2$ 는 $x=1$ 에서 최솟값을 가지므로 최솟값은

$-\sqrt{2+7}+2=-1$

16 $y=\sqrt{2x-4}+a=\sqrt{2(x-2)}+a$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 a 를 가지므로

$a=3$

$y=\sqrt{2x-4}+3$ 의 그래프가 점 $(b, 5)$ 를 지나므로

$5=\sqrt{2b-4}+3, \sqrt{2b-4}=2$

$2b-4=4 \quad \therefore b=4$

$\therefore a+b=3+4=7$

17 $y=-\sqrt{4-x}+5$ 는 $a\leq x\leq b$ 에서 $x=b$ 일 때 최댓값을 갖고, $x=a$ 일 때 최솟값을 갖는다.

$-\sqrt{4-b}+5=5$ 에서 $4-b=0 \quad \therefore b=4$

$-\sqrt{4-a}+5=4$ 에서 $4-a=1 \quad \therefore a=3$

$\therefore b^2-a^2=4^2-3^2=7$

- 18 $y = \sqrt{a(x+1)} + 5$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동하면

$$y = \sqrt{a(x-b+1)} + 5 + c$$

이 함수의 그래프가 $y = \sqrt{6-3x} = \sqrt{-3(x-2)}$ 의 그래프와 겹치므로

$$a = -3, b = 3, c = -5$$

$$\therefore a + b + c = -5$$

- 19 $y = \sqrt{-x+2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면

$$y = \sqrt{-(x-3)+2} - 2 = \sqrt{-x+5} - 2$$

이 함수의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면

$$y = \sqrt{x+5} - 2$$

따라서 $a = 1, b = 5, c = -2$ 이므로

$$a + b + c = 4$$

- 20 $\neg$. $y = -\sqrt{2x}$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면

$$y = \sqrt{-2x}$$

$$\neg. y = \sqrt{3-4x} = \sqrt{-4\left(x-\frac{3}{4}\right)}$$

$$\vdash. y = 2\sqrt{1-x} + 2 = \sqrt{-4(x-1)} + 2$$

$$\ddot{\neg}. y = \sqrt{2x-1} - 1 = \sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} - 1 \text{의 그래프를 } x \text{축의}$$

방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동

한 후 y 축에 대하여 대칭이동하면 $y = \sqrt{-2x}$

따라서 보기의 함수 중 그 그래프가 평행이동 또는 대칭이동에 의하여 무리함수 $y = \sqrt{-2x}$ 의 그래프와 겹쳐지는 것은 $\neg$, $\ddot{\neg}$ 이다.

- 21 $y = \sqrt{a(x+2)} - 1$ 이라 하면 주어진 함수의 그래프가 점 $(-1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = \sqrt{a} - 1 \quad \therefore a = 1$$

따라서 $y = \sqrt{x+2} - 1$ 이므로

$$a = 1, b = 2, c = -1$$

$$\therefore a + b + c = 2$$

- 22 $y = -\sqrt{a(x+4)} + 3 (a > 0)$ 이라 하면 주어진 함수의 그래프가 점 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = -\sqrt{4a} + 3, \sqrt{4a} = 4 \quad \therefore a = 4$$

따라서 $y = -\sqrt{4(x+4)} + 3$ 의 그래프가 점 $(5, k)$ 를 지나므로

$$k = -\sqrt{4(5+4)} + 3 = -3$$

- 23 주어진 함수의 정의역은 $\{x | x \leq 5\}$, 치역은 $\{y | y \leq a\}$ 이므로

$$a = 2, b = 5 \quad \therefore a + b = 7$$

- 24 $y = -\sqrt{ax+b} - c = -\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)} - c$ 의 그래프는

$y = -\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$ 만큼, y 축의 방향으로 $-c$ 만큼 평행이동한 것이므로 주어진 그래프에서

$$a > 0, -\frac{b}{a} < 0, -c < 0 \quad \therefore a > 0, b > 0, c > 0$$

$y = \frac{a}{x+b} + c$ 의 그래프는

$y = \frac{a}{x} (a > 0)$ 의 그래프를 x 축의

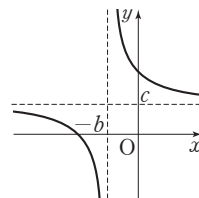
방향으로 $-b$ 만큼, y 축의 방향으로

c 만큼 평행이동한 것이고,

$-b < 0, c > 0$ 이므로 오른쪽 그림

과 같다.

따라서 유리함수 $y = \frac{a}{x+b} + c$ 의 그래프의 개형은 ②이다.



- 25 $y = \sqrt{a(x+b)} + c$ 의 그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-b$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행이동한 것이므로 주어진 그래프에서

$$a < 0, -b > 0, c > 0 \quad \therefore a < 0, b < 0, c > 0$$

$y = \sqrt{b(x+c)} + a$ 의 그래프는

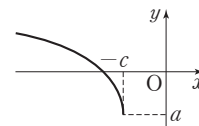
$y = \sqrt{bx} (b < 0)$ 의 그래프를 x 축

의 방향으로 $-c$ 만큼, y 축의 방

향으로 a 만큼 평행이동한 것이

고, $-c < 0, a < 0$ 이므로 위의 그림과 같다.

따라서 $y = \sqrt{b(x+c)} + a$ 의 그래프는 제1, 4사분면을 지나지 않는다.



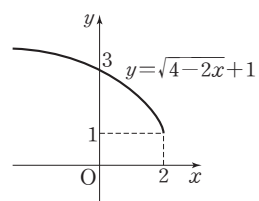
- 26 $y = \sqrt{4-2x} + 1$
 $= \sqrt{-2(x-2)} + 1$

이 함수의 그래프는 오른쪽

그림과 같이 제1, 2사분면

을 지난다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.



- 27 $y = a\sqrt{bx+c} = a\sqrt{b\left(x+\frac{c}{b}\right)}$

$$\neg. a > 0, b < 0, c > 0 \text{이면}$$

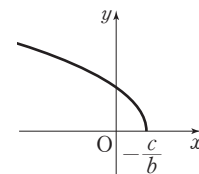
$$-\frac{c}{b} > 0$$

따라서 주어진 함수의 그래프

는 오른쪽 그림과 같이 제1, 2

사분면을 지난다.

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, $\neg$, $\vdash$ 이다.



- 28 직선 $y=ax$ 가 $y=\sqrt{x-4}$ 의 그

래프에 접해야 하므로

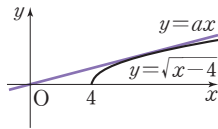
$$ax=\sqrt{x-4} \text{에서 } a^2x^2=x-4$$

$$\therefore a^2x^2-x+4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=1-16a^2=0$$

$$16a^2=1 \quad \therefore a=\frac{1}{4} \quad (\because a>0)$$



- 29 (i) 직선 $y=x+k$ 와 $y=\sqrt{x-1}$

의 그래프가 접할 때,

$$x+k=\sqrt{x-1} \text{에서}$$

$$x^2+2kx+k^2=x-1$$

$$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2+1=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D

라 하면

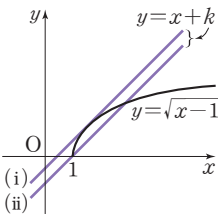
$$D=(2k-1)^2-4(k^2+1)=0, 4k=-3$$

$$\therefore k=-\frac{3}{4}$$

(ii) 직선 $y=x+k$ 가 점 $(1, 0)$ 을 지날 때,

$$0=1+k \quad \therefore k=-1$$

(i), (ii)에 의하여 $-1 \leq k < -\frac{3}{4}$



- 30 $n(A \cap B) = \emptyset$ 이므로

$y=\sqrt{-3x+4}$ 의 그래프와 직선 $y=-x+k$ 는 만나지 않아야 한다.

직선 $y=-x+k$ 와

$y=\sqrt{-3x+4}$ 의 그래프가 접할 때,

$$-x+k=\sqrt{-3x+4} \text{에서 } x^2-2kx+k^2=-3x+4$$

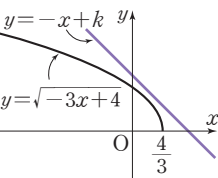
$$\therefore x^2-(2k-3)x+k^2-4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(2k-3)^2-4(k^2-4)=0$$

$$12k=25 \quad \therefore k=\frac{25}{12}$$

따라서 $k > \frac{25}{12}$ 이므로 정수 k 의 최솟값은 3이다.



- 31 무리함수 $y=\sqrt{x+2}+4$ 의 치역은 $\{y|y \geq 4\}$ 이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x \geq 4\}$ 이다.

$$y=\sqrt{x+2}+4 \text{에서 } y-4=\sqrt{x+2}, x+2=(y-4)^2$$

$$\therefore x=(y-4)^2-2$$

따라서 역함수는

$$y=(x-4)^2-2=x^2-8x+14 \quad (x \geq 4)$$

따라서 $a=-8, b=14, c=4$ 이므로 $a+b+c=10$

- 32 $(f \circ g)^{-1}(3) = (g^{-1} \circ f^{-1})(3) = g^{-1}(f^{-1}(3))$

$$f^{-1}(3)=a \text{ (a는 상수)라 하면 } f(a)=3$$

$$\sqrt{2a-4}+1=3 \quad \therefore a=4$$

$$\therefore f^{-1}(3)=4$$

$$g^{-1}(4)=b \text{ (b는 상수)라 하면 } g(b)=4$$

$$\sqrt{b+2}+2=4 \quad \therefore b=2$$

$$\therefore g^{-1}(4)=2$$

$$\therefore (f \circ g)^{-1}(3) = g^{-1}(f^{-1}(3)) = g^{-1}(4) = 2$$

- 33 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(1, 3)$ 을 지나므로 $f(1)=3$ 에서

$$\sqrt{a+b}+1=3$$

$$\therefore a+b=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프가 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(3, 1)$ 을 지난다.

$$f(3)=1 \text{에서 } \sqrt{3a+b}+1=1$$

$$\therefore 3a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-2, b=6$

$$\therefore a-b=-8$$

- 34 함수의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점은 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점과 같다.

$$\sqrt{2x+8}=x \text{에서}$$

$$2x+8=x^2, x^2-2x-8=0$$

$$(x+2)(x-4)=0 \quad \therefore x=4 \quad (\because x \geq 0)$$

따라서 교점의 좌표는 $(4, 4)$ 이므로

$$a=4, b=4 \quad \therefore ab=16$$

- 35 함수의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점은 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점과 같다.

$$\sqrt{x-2}+2=x \text{에서}$$

$$\sqrt{x-2}=x-2, x-2=x^2-4x+4$$

$$x^2-5x+6=0, (x-2)(x-3)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(2, 2), (3, 3)$ 이므로

$$AB=\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$$

- 36 $f(x)=\sqrt{ax+b}$ 의 그래프가 두 점 $(-6, 0), (0, \sqrt{6})$ 을 지나므로

$$\sqrt{-6a+b}=0, \sqrt{b}=\sqrt{6} \quad \therefore a=1, b=6$$

$$\therefore f(x)=\sqrt{x+6}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점은 두 함수

$y=f(x), y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점과 같다.

$$\sqrt{x+6}=x \text{에서 } x+6=x^2, x^2-x-6=0$$

$$(x+2)(x-3)=0 \quad \therefore x=3 \quad (\because x \geq 0)$$

따라서 교점의 좌표는 $(3, 3)$ 이므로

$$c=3, d=3 \quad \therefore c+d=6$$

VI-1 01 경우의 수

기초 문제 Training

66쪽

- 1 (1) 7 (2) 59
- 2 (1) 6 (2) 7
- 3 (1) 9 (2) 10
- 4 (1) 12 (2) 36
- 5 (1) 9 (2) 8
- 6 (1) 4 (2) 16 (3) 8

핵심 유형 Training

67~70쪽

1 6	2 ③	3 9	4 ③	5 ④
6 ①	7 11	8 ②	9 18	10 ②
11 ④	12 ③	13 ①	14 ⑤	15 3
16 ③	17 9	18 ②	19 24	20 18
21 4	22 540	23 84	24 36	25 ⑤
26 35	27 66			

- 1 (i) 두 눈의 수의 합이 6인 경우
(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지
(ii) 두 눈의 수의 합이 12인 경우
(6, 6)의 1가지
(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
 $5+1=6$
- 2 (i) 두 눈의 수의 차가 0인 경우
(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)의 6가지
(ii) 두 눈의 수의 차가 1인 경우
(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3),
(4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5)의 10가지
(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
 $6+10=16$

- 3 (i) 세 수의 곱이 4인 경우
(1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2),
(2, 2, 1)의 6가지
(ii) 세 수의 곱이 5인 경우
(1, 1, 5), (1, 5, 1), (5, 1, 1)의 3가지
(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
 $6+3=9$
- 4 1부터 100까지의 자연수 중에서
(i) 3으로 나누어떨어지는 수, 즉 3의 배수는
3, 6, 9, ..., 99의 33개
(ii) 5로 나누어떨어지는 수, 즉 5의 배수는
5, 10, 15, ..., 100의 20개
(iii) 3과 5의 최소공배수인 15의 배수는
15, 30, 45, 60, 75, 90의 6개
(i), (ii), (iii)에 의하여 3 또는 5로 나누어떨어지는 수의 개
수는
 $33+20-6=47$
따라서 구하는 자연수의 개수는
 $100-47=53$
- 5 x, y, z 가 자연수이므로
 $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$
 $2x+y+z=7$ 에서
 $2x < 7$
 $\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$
(i) $x=1$ 일 때, $y+z=5$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는
(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4개
(ii) $x=2$ 일 때, $y+z=3$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는
(1, 2), (2, 1)의 2개
(iii) $x=3$ 일 때, $y+z=1$ 이므로 순서쌍 (y, z) 는 없다.
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는
 $4+2=6$
- 6 x, y 가 자연수이므로
 $x \geq 1, y \geq 1$
 $2x+5y \leq 15$ 에서
 $5y < 15$
 $\therefore y=1$ 또는 $y=2$
(i) $y=1$ 일 때, $2x+5 \leq 15$ 에서 $x \leq 5$ 이므로 x 는
1, 2, 3, 4, 5의 5개
(ii) $y=2$ 일 때, $2x+10 \leq 15$ 에서 $x \leq \frac{5}{2}$ 이므로 x 는
1, 2의 2개
(i), (ii)에 의하여 구하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는
 $5+2=7$

- 7 한 개의 가격이 200원, 300원, 500원인 볼펜을 각각 x 개, y 개, z 개 산다고 하면

$$200x + 300y + 500z = 3000$$

$$\therefore 2x + 3y + 5z = 30 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

이때 3종류의 볼펜을 적어도 하나씩 사야하므로 x, y, z 는 자연수이어야 한다.

즉, 구하는 방법의 수는 방정식 $\textcircled{7}$ 을 만족시키는 자연수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수와 같다.

$\textcircled{7}$ 에서

$$5z < 30$$

$$\therefore z=1 \text{ 또는 } z=2 \text{ 또는 } z=3 \text{ 또는 } z=4 \text{ 또는 } z=5$$

(i) $z=1$ 일 때, $2x+3y=25$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는 $(11, 1), (8, 3), (5, 5), (2, 7)$ 의 4개

(ii) $z=2$ 일 때, $2x+3y=20$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는 $(7, 2), (4, 4), (1, 6)$ 의 3개

(iii) $z=3$ 일 때, $2x+3y=15$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는 $(6, 1), (3, 3)$ 의 2개

(iv) $z=4$ 일 때, $2x+3y=10$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는 $(2, 2)$ 의 1개

(v) $z=5$ 일 때, $2x+3y=5$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는 $(1, 1)$ 의 1개

(i)~(v)에 의하여 구하는 방법의 수는

$$4+3+2+1+1=11$$

8 $2 \times 2 \times 2 = 8$

- 9 a, b 에 x, y, z 를 각각 곱하여 항이 만들어지고, 그것에 다시 p, q, r 를 각각 곱하여 항이 만들어지므로 구하는 항의 개수는

$$2 \times 3 \times 3 = 18$$

- 10 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 6, 8의 4가지
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5가지
일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 5, 7의 4가지
따라서 구하는 자연수의 개수는

$$4 \times 5 \times 4 = 80$$

- 11 (i) 모든 경우의 수는 $6 \times 6 \times 6 = 216$
(ii) 서로 다른 세 개의 주사위에서 모두 짝수의 눈이 나오는 경우의 수는 $3 \times 3 \times 3 = 27$
(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
 $216 - 27 = 189$

- 12 $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ 이므로 360의 양의 약수의 개수는
 $(3+1)(2+1)(1+1) = 24$

- 13 $120 = 2^3 \times 3 \times 5, 320 = 2^6 \times 5$ 이므로 120과 320의 최대공약수는 $40 = 2^3 \times 5$

따라서 구하는 양의 공약수의 개수는 $2^3 \times 5$ 의 양의 약수의 개수와 같으므로
 $(3+1)(1+1) = 8$

14 $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

이때 짝수는 2를 소인수로 가지므로 180의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는 $2 \times 3^2 \times 5$ 의 양의 약수의 개수와 같다.

$$\therefore a = (1+1)(2+1)(1+1) = 12$$

또 3의 배수는 3을 소인수로 가지므로 180의 양의 약수 중에서 3의 배수의 개수는 $2^2 \times 3 \times 5$ 의 양의 약수의 개수와 같다.

$$\therefore b = (2+1)(1+1)(1+1) = 12$$

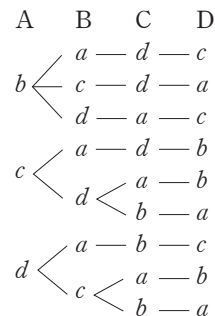
$$\therefore a+b = 12+12 = 24$$

- 15 $2^4 \times 3^3 \times 7^n$ 의 양의 약수의 개수가 80이므로

$$(4+1)(3+1)(n+1) = 80, n+1=4$$

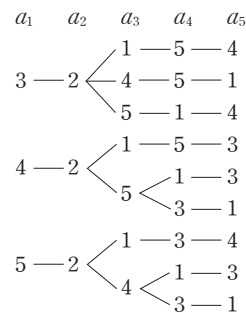
$$\therefore n=3$$

- 16 4명의 학생을 각각 A, B, C, D라 하고, 4명의 학생이 쓴 보고서를 각각 a, b, c, d 라 할 때, 4명의 학생이 보고서를 바꿔 보는 방법을 수형도로 나타내면 다음과 같다.



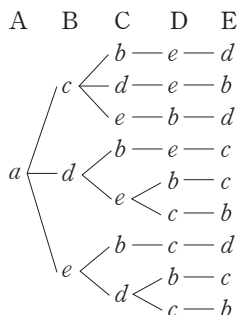
따라서 구하는 방법의 수는 $3+3+3=9$

- 17 $a_2=2, a_k \neq k (k=1, 3, 4, 5)$ 를 만족시키는 경우를 수형도로 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 자연수의 개수는 $3+3+3=9$

- 18 5명의 학생 A, B, C, D, E의 가방을 각각 a, b, c, d, e 라 할 때, A만 자신의 가방을 드는 방법을 수형도로 나타내면 다음과 같다.



이때 B만 자신의 가방을 드는 방법, ..., E만 자신의 가방을 드는 방법도 각각 9가지이므로 구하는 방법의 수는 $9 \times 5 = 45$

- 19 집 $\rightarrow$ 도서관 $\rightarrow$ 편의점 $\rightarrow$ 집으로 가는 방법의 수는 $4 \times 2 \times 3 = 24$

- 20 (i) B $\rightarrow$ A $\rightarrow$ D를 이용하는 방법의 수는 $2 \times 2 = 4$

(ii) B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ D를 이용하는 방법의 수는 $2 \times 1 = 2$

(iii) B $\rightarrow$ A $\rightarrow$ C $\rightarrow$ D를 이용하는 방법의 수는

$$2 \times 2 \times 1 = 4$$

(iv) B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A $\rightarrow$ D를 이용하는 방법의 수는

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

(i)~(iv)에 의하여 구하는 방법의 수는 $4 + 2 + 4 + 8 = 18$

- 21 B 지점과 D 지점 사이에 x 개의 도로를 추가한다고 하면

(i) A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C를 이용하는 방법의 수는 $3 \times 3 = 9$

(ii) A $\rightarrow$ D $\rightarrow$ C를 이용하는 방법의 수는 $2 \times 2 = 4$

(iii) A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ D $\rightarrow$ C를 이용하는 방법의 수는

$$3 \times x \times 2 = 6x$$

(iv) A $\rightarrow$ D $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C를 이용하는 방법의 수는

$$2 \times x \times 3 = 6x$$

(i)~(iv)에 의하여 A 지점에서 D 지점으로 가는 방법의 수는

$$9 + 4 + 6x + 6x = 61$$

$$12x = 48 \quad \therefore x = 4$$

따라서 추가해야 하는 도로의 개수는 4이다.

- 22 B에 칠할 수 있는 색은 5가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 B와 C에 칠한 색을 제외한 3가지, E에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$$

- 23 (i) B와 D에 서로 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 B와 같은 색이므로 1가지, C에 칠할 수 있는 색은 B, D에 칠한 색을 제외한 3가지이다.

따라서 B와 D에 서로 같은 색을 칠하는 방법의 수는

$$4 \times 3 \times 1 \times 3 = 36$$

- (ii) B와 D에 서로 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지, D에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지, C에 칠할 수 있는 색은 B와 D에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

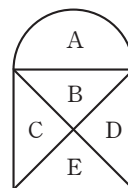
따라서 B와 D에 서로 다른 색을 칠하는 방법의 수는

$$4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$$36 + 48 = 84$$

- 24 오른쪽 그림과 같이 5개의 영역을 A, B, C, D, E라 하자.



- (i) C와 D에 서로 같은 색을 칠하는 경우

B에 칠할 수 있는 색은 3가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 2가지, C에 칠할 수 있는 색은

B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 C와 같은 색이므로 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 C, D에 칠한 색을 제외한 2가지이다.

따라서 C와 D에 서로 같은 색을 칠하는 방법의 수는

$$3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 2 = 24$$

- (ii) C와 D에 서로 다른 색을 칠하는 경우

B에 칠할 수 있는 색은 3가지, A에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 2가지, C에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 2가지, D에 칠할 수 있는 색은 B와 C에 칠한 색을 제외한 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 C와 D에 칠한 색을 제외한 1가지이다.

따라서 C와 D에 서로 다른 색을 칠하는 방법의 수는

$$3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 12$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$$24 + 12 = 36$$

- 25 10원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 방법은

0개, 1개, 2개, 3개의 4가지

500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개의 3가지
이때 0원을 지불하는 1가지 경우를 빼주어야 하므로 구하
는 방법의 수는
 $4 \times 4 \times 3 - 1 = 47$

- 26** 5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액과 10000
원 짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 중복되므로
10000원짜리 지폐 3장을 5000원짜리 지폐 6장으로 바꾸
어 생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 1000원짜리 지
폐 3장과 5000원짜리 지폐 8장으로 지불할 수 있는 금액
의 수와 같다.
1000원짜리 지폐 3장으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 1000원, 2000원, 3000원의 4가지
5000원짜리 지폐 8장으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 5000원, 10000원, ..., 40000원의 9가지
이때 0원을 지불하는 1가지 경우를 빼주어야 하므로 구하
는 금액의 수는
 $4 \times 9 - 1 = 35$

- 27** (i) 지불할 수 있는 방법의 수
1000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 방법은
0장, 1장의 2가지
500원짜리 동전 4개로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개, 4개의 5가지
100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 방법은
0개, 1개, 2개, 3개의 4가지
이때 0원을 지불하는 1가지 경우를 빼주어야 하므로
구하는 방법의 수는
 $a = 2 \times 5 \times 4 - 1 = 39$
(ii) 지불할 수 있는 금액의 수
500원짜리 동전 2개로 지불할 수 있는 금액과 1000원
짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액이 중복되므로
1000원짜리 지폐 1장을 500원짜리 동전 2개로 바꾸어
생각하면 지불할 수 있는 금액의 수는 500원짜리 동전
6개, 100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액의 수
와 같다.
500원짜리 동전 6개로 지불할 수 있는 금액은
0원, 500원, 1000원, ..., 3000원의 7가지
100원짜리 동전 3개로 지불할 수 있는 금액은
0원, 100원, 200원, 300원의 4가지
이때 0원을 지불하는 1가지 경우를 빼주어야 하므로
구하는 금액의 수는
 $b = 7 \times 4 - 1 = 27$
(i), (ii)에 의하여 $a + b = 39 + 27 = 66$

VI-1 02 순열

기초 문제 Training

71쪽

- 1** (1) 24 (2) 30 (3) 1 (4) 6
2 (1) 2 (2) 24 (3) 720 (4) 1
3 (1) 7 (2) 3 (3) 3 (4) 6
4 (1) 12 (2) 210
5 (1) 120 (2) 60 (3) 20
6 (1) 24 (2) 6 (3) 12
7 (1) 24 (2) 12 (3) 12

핵심 유형 Training

72~75쪽

1 3	2 ③	3 5	4 ③	5 564
6 720	7 ②	8 7	9 240	10 720
11 576	12 ①	13 ⑤	14 ③	15 ③
16 2400	17 ④	18 12	19 288	20 150
21 ⑤	22 108	23 3	24 600	25 24
26 60	27 ③	28 40번째	29 ⑤	30 ①

- 1** ${}_5P_r \times 4! = 1440$ 에서
 ${}_5P_r = 60 = 5 \times 4 \times 3$
 $\therefore r = 3$
2 ${}_{2n}P_3 = 52 \times {}_nP_2$ 에서
 $2n(2n-1)(2n-2) = 52n(n-1)$
 $2n-1 = 13$ ($\because n \geq 2$)
 $\therefore n = 7$
3 ${}_{n+1}P_3 - 4 \times {}_nP_2 - 10 \times {}_{n-1}P_1 = 0$ 에서
 $(n+1)n(n-1) - 4n(n-1) - 10(n-1) = 0$
 $n(n+1) - 4n - 10 = 0$ ($\because n \geq 2$)
 $n^2 - 3n - 10 = 0$
 $(n+2)(n-5) = 0$
 $\therefore n = 5$ ($\because n \geq 2$)

- 4 ${}_5P_r \leq 12 \times {}_5P_{r-2}$ 에서

$$\frac{5!}{(5-r)!} \leq 12 \times \frac{5!}{\{5-(r-2)\}!}$$

$$\frac{(7-r)!}{(5-r)!} \leq 12$$

$$(7-r)(6-r) \leq 12$$

$$r^2 - 13r + 30 \leq 0, (r-3)(r-10) \leq 0$$

$$\therefore 3 \leq r \leq 10$$
 그런데 $2 \leq r \leq 5$ 이므로 $3 \leq r \leq 5$
 따라서 자연수 r 는 3, 4, 5의 3개이다.
- 5 $a = {}_9P_3 = 504$, $b = {}_5P_3 = 60$
 $\therefore a + b = 504 + 60 = 564$
- 6 ${}_{10}P_3 = 720$
- 7 문학 영역의 책으로만 골라 순서대로 읽는 방법의 수는
 ${}_5P_2 = 20$
 과학 영역의 책으로만 골라 순서대로 읽는 방법의 수는
 ${}_4P_2 = 12$
 따라서 구하는 방법의 수는
 $20 + 12 = 32$
- 8 ${}_nP_3 = 210$ 이므로
 $n(n-1)(n-2) = 7 \times 6 \times 5$
 $\therefore n = 7$
- 9 t와 d를 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자와 함께 일렬로 나열하는 방법의 수는 $5! = 120$
 t와 d의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2! = 2$
 따라서 구하는 방법의 수는
 $120 \times 2 = 240$
- 10 2학년 학생 3명을 한 묶음으로 생각하여 나머지 학생과 함께 일렬로 세우는 방법의 수는 $5! = 120$
 2학년 학생 3명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $3! = 6$
 따라서 구하는 방법의 수는
 $120 \times 6 = 720$
- 11 같은 종류의 책을 한 묶음으로 생각하여 3묶음을 책꽂이에 일렬로 꽂는 방법의 수는 $3! = 6$
 수학책끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2! = 2$
 영어책끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $4! = 24$
 국어책끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2! = 2$
 따라서 구하는 방법의 수는
 $6 \times 2 \times 24 \times 2 = 576$

- 12 축구 선수 5명을 한 묶음으로 생각하여 $(n+1)$ 명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $(n+1)!$
 축구 선수 5명이 자리를 바꾸는 방법의 수는 $5! = 120$
 따라서 $(n+1)! \times 120 = 2880$ 이므로
 $(n+1)! = 24 = 4!$
 $\therefore n = 3$
- 13 1반 학생 5명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $5! = 120$
 1반 학생 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 2반 학생 3명을 세우는 방법의 수는 ${}_6P_3 = 120$
 따라서 구하는 방법의 수는
 $120 \times 120 = 14400$
- 14 남 여 남 여 남 여의 순서로 교대로 세우는 방법의 수는
 $3! \times 3! = 36$
 여 남 여 남 여 남의 순서로 교대로 세우는 방법의 수는
 $3! \times 3! = 36$
 따라서 구하는 방법의 수는
 $36 + 36 = 72$
- 15 의자 3개에만 학생이 앉으므로 빈 의자는 4개이다.
 빈 의자 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 학생이 앉을 의자 3개를 놓으면 되므로 구하는 방법의 수는
 ${}_5P_3 = 60$
- 16 양 끝에 자음 d, l, g, h, t의 5개 중에서 2개를 택하여 나열하는 방법의 수는 ${}_5P_2 = 20$
 나머지 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는
 $5! = 120$
 따라서 구하는 방법의 수는
 $20 \times 120 = 2400$
- 17 남자 4명 중에서 2명을 뽑아 맨 앞과 맨 뒤에 세우는 방법의 수는 ${}_4P_2 = 12$
 나머지 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는 $4! = 24$
 따라서 구하는 방법의 수는
 $12 \times 24 = 288$
- 18 t, i, s를 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자와 함께 일렬로 나열하는 방법의 수는 $3! = 6$
 t와 s의 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2! = 2$
 따라서 구하는 방법의 수는
 $6 \times 2 = 12$

- 19 모음 a, i, e의 3개 중에서 2개를 택하여 c와 t 사이에 일렬로 나열하는 방법의 수는

$${}_3P_2=6$$

c와 t의 자리를 바꾸는 방법의 수는

$$2!=2$$

c★t를 한 묶음으로 생각하여 나머지 3개의 문자와 함께 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$4!=24$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$6 \times 2 \times 24 = 288$$

- 20 (i) 7장의 카드 중에서 3장을 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수는

$${}_7P_3=210$$

- (ii) 자음인 B, C, D, F, G가 적힌 5장의 카드 중에서 3장을 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수는

$${}_5P_3=60$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$$210 - 60 = 150$$

- 21 (i) 학생 6명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$$6!=720$$

- (ii) 양 끝에 여학생을 세우는 방법의 수는

$${}_3P_2=6$$

나머지 4명을 일렬로 세우는 방법의 수는

$$4!=24$$

따라서 양 끝에 모두 여학생을 세우는 방법의 수는

$$6 \times 24 = 144$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$$720 - 144 = 576$$

- 22 (i) 5장의 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$5!=120$$

- (ii) 짝수가 적힌 카드 2장을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$2!=2$$

짝수가 적힌 카드 사이사이와 양 끝에 홀수가 적힌 카드 3장을 나열하는 방법의 수는

$${}_3P_3=3!=6$$

따라서 홀수가 적힌 카드가 서로 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는

$$2 \times 6 = 12$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 방법의 수는

$$120 - 12 = 108$$

- 23 (i) 6개의 알파벳을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$6!=720$$

- (ii) 모음의 개수를 n 이라 하고 양 끝에 모음을 나열하는 방법의 수는

$${}_nP_2=n(n-1)$$

나머지 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$4!=24$$

따라서 양 끝에 모음만 오도록 나열하는 방법의 수는

$$24n(n-1)$$

- (i), (ii)에 의하여 적어도 한쪽 끝에 자음이 오도록 나열하는 방법의 수는

$$720 - 24n(n-1) = 576$$

$$n(n-1) = 6 = 3 \times 2 \quad \therefore n = 3$$

따라서 모음의 개수가 3이므로 자음의 개수는 3이다.

- 24 만의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

나머지 자리에는 5개의 숫자 중에서 4개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 구하는 자연수의 개수는

$$5 \times {}_5P_4 = 600$$

- 25 3의 배수는 모든 자리의 숫자의 합이 3의 배수이므로 세수의 합이 3의 배수가 되는 경우는

$$(1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)$$

각각의 경우에서 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$3!=6$$

따라서 구하는 3의 배수의 개수는

$$4 \times 6 = 24$$

- 26 (i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

1, 2, 3, 4를 나머지 네 자리에 나열하면 되므로

$$4!=24$$

- (ii) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 4의 3가지이고, 나머지 3개의 자리에는 나머지 3개의 숫자가 올 수 있으므로

$$3 \times 3! = 18$$

- (iii) 일의 자리의 숫자가 4인 경우

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3의 3가지이고, 나머지 3개의 자리에는 나머지 3개의 숫자가 올 수 있으므로

$$3 \times 3! = 18$$

- (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 짝수의 개수는

$$24 + 18 + 18 = 60$$

- 27** (i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우
 1, 2, 3, 4 중에서 2개의 숫자를 택하여 나머지 자리에 나열하면 되므로
 ${}_4P_2=12$
- (ii) 일의 자리의 숫자가 1인 경우
 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1보다 큰 2, 3, 4의 3가지이고, 십의 자리에는 나머지 3개의 숫자가 올 수 있으므로
 $3 \times 3=9$
- (iii) 일의 자리의 숫자가 2인 경우
 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 2보다 큰 3, 4의 2가지이고, 십의 자리에는 나머지 3개의 숫자가 올 수 있으므로
 $2 \times 3=6$
- (iv) 일의 자리의 숫자가 3인 경우
 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 3보다 큰 4의 1가지이고, 십의 자리에는 나머지 3개의 숫자가 올 수 있으므로
 $1 \times 3=3$
- (i)~(iv)에 의하여 구하는 자연수의 개수는
 $12+9+6+3=30$

- 28** 1□□□□ 풀인 자연수의 개수는 $4!=24$
 21□□□□ 풀인 자연수의 개수는 $3!=6$
 23□□□□ 풀인 자연수의 개수는 $3!=6$
 241□□□ 풀인 자연수의 개수는 $2!=2$
 243□□□ 풀인 자연수에서 24351의 순서는 24315, 24351이므로 두 번째이다.
 따라서 24351이 나타나는 순서는
 $24+6+6+2+2=40$ (번째)

- 29** A□□□□□ 풀인 문자열의 개수는 $5!=120$
 B□□□□□ 풀인 문자열의 개수는 $5!=120$
 CA□□□□ 풀인 문자열의 개수는 $4!=24$
 이때 $120+120+24=264$ 이므로 267번째로 나타나는 문자열은 CB□□□□ 풀인 문자열 중 3번째 문자열이다.
 CB로 시작하는 문자열을 순서대로 나열하면
 CBADEF, CBADFE, CBAEDF, ...
 따라서 267번째로 나타나는 문자열은 CBAEDF이다.

- 30** 4□□□□ 풀인 자연수의 개수는 $4!=24$
 3□□□□ 풀인 자연수의 개수는 $4!=24$
 24□□□□ 풀인 자연수의 개수는 $3!=6$
 이때 $24+24+6=54$ 이므로 56번째로 큰 수는 23□□□□ 풀인 자연수 중 두 번째로 큰 수이다.
 따라서 구하는 수는 23410, 23401, ...에서 23401이다.

VI-1 03 조합

기초 문제 Training

76쪽

- 1** (1) 15 (2) 36 (3) 1 (4) 1
2 (1) 7 (2) 8 (3) 2 또는 6 (4) 7
3 (1) 4 (2) 7 (3) 5 (4) 1 또는 11
4 (1) 66 (2) 455
5 (1) 210 (2) 4 (3) 90
6 (1) 84 (2) 12 (3) 10
7 (1) 56 (2) 4 (3) 36

핵심 유형 Training

77~80쪽

- | | | |
|---------------|--|---------------|
| 1 ④ | 2 (가) $n-r-1$ (나) $n-r$ (다) n | 3 10 |
| 4 120 | 5 94 | 6 ④ |
| 7 6 | 10 30 | 11 7 |
| 12 ④ | 13 ④ | |
| 14 226 | 15 5 | 16 ⑤ |
| 17 ① | 18 ③ | |
| 19 20 | 20 45 | 21 120 |
| 22 84 | 23 ① | |
| 24 12 | 25 412 | 26 150 |
| 27 ① | 28 ③ | |

- 1** ${}_nC_2+{}_{n+1}C_3=2 \times {}_nP_2$ 에서
 $\frac{n(n-1)}{2 \times 1} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3 \times 2 \times 1} = 2n(n-1)$
 $3+n+1=12$ ($\because n \geq 2$)
 $\therefore n=8$
- 2** ${}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$
 $=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(\overbrace{n-r-1}^{(가)})!}$
 $=\frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{(\overbrace{n-r}^{(나)})!(n-1)!}{r!(n-r)!}$
 $=\frac{(n-1)!}{r!(n-r)!} \times (r+n-r)$
 $=\frac{\overbrace{n}^{(다)}}{r!(n-r)!} \times (n-1)!$
 $=\frac{n!}{r!(n-r)!} = {}_nC_r$

- 3 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $-4+2=-\frac{nC_r}{5}, (-4) \times 2 = -\frac{2}{5} \times nP_r$
 $\therefore nC_r=10, nP_r=20$
 이때 $nC_r=\frac{nP_r}{r!}$ 이므로 $10=\frac{20}{r!}$
 $r!=2 \quad \therefore r=2$
 또 $nP_2=20$ 에서
 $n(n-1)=20=5 \times 4 \quad \therefore n=5$
 $\therefore nr=5 \times 2=10$
- 4 ${}_2C_1 \times {}_6C_3 \times {}_3C_1=2 \times 20 \times 3=120$
- 5 A 학교 학생으로만 뽑는 방법의 수는 ${}_5C_3=10$
 B 학교 학생으로만 뽑는 방법의 수는 ${}_9C_3=84$
 따라서 구하는 방법의 수는
 $10+84=94$
- 6 $nC_2=120$ 이므로 $\frac{n(n-1)}{2 \times 1}=120$
 $n(n-1)=240=16 \times 15 \quad \therefore n=16$
- 7 세 수의 합이 짝수가 되는 경우는 세 수가 모두 짝수이거나 한 수는 짝수, 두 수는 홀수인 경우이다.
 짝수가 적힌 카드는 2, 4, 6, 8, 10의 5장, 홀수가 적힌 카드는 1, 3, 5, 7, 9의 5장이므로
 (i) 짝수가 적힌 카드 3장을 택하는 경우의 수는 ${}_5C_3=10$
 (ii) 짝수가 적힌 카드 1장과 홀수가 적힌 카드 2장을 택하는 경우의 수는 ${}_5C_1 \times {}_5C_2=5 \times 10=50$
 (i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는
 $10+50=60$
- 8 두 학생 A, B를 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 7명의 학생 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는 ${}_7C_2=21$
- 9 5가 적힌 공은 반드시 꺼내고, 짝수가 적힌 공을 제외한 1, 3, 7, 9가 적힌 공 중에서 나머지 2개를 꺼내는 방법의 수는 ${}_4C_2=6$
- 10 장미와 백합 중에서 1종류를 택하고, 나머지 6종류의 꽃 중에서 4종류를 택하는 방법의 수는
 ${}_2C_1 \times {}_6C_4=2 \times 15=30$
- 11 노란색 색종이를 이미 택하였다고 생각하고 나머지 $(n-1)$ 장의 색종이 중에서 2장을 택하는 방법의 수는
 ${}_{n-1}C_2=15, \frac{(n-1)(n-2)}{2 \times 1}=15$
 $(n-1)(n-2)=30=6 \times 5 \quad \therefore n=7$

- 12 10명 중에서 4명을 뽑는 방법의 수는 ${}_{10}C_4=210$
 남학생만 4명을 뽑는 방법의 수는 ${}_5C_4=5$
 따라서 구하는 방법의 수는
 $210-5=205$
- 13 14명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_{14}C_3=364$
 1학년 학생만 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_6C_3=20$
 2학년 학생만 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_8C_3=56$
 따라서 구하는 방법의 수는
 $364-20-56=288$
- 14 (i) 10장 중에서 5장을 택하는 방법의 수는
 ${}_{10}C_5=252$
 (ii) 홀수가 적힌 카드만 5장을 택하는 방법의 수는
 ${}_5C_5=1$
 (iii) 짝수가 적힌 카드 5장 중에서 1장을 택하고, 홀수가 적힌 카드 5장 중에서 4장을 택하는 방법의 수는
 ${}_5C_1 \times {}_5C_4=5 \times 5=25$
 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 방법의 수는
 $252-1-25=226$
- 15 10명 중에서 3명을 뽑는 방법의 수는
 ${}_{10}C_3=120$
 여자 회원을 n 명이라 하면 여자 회원만 3명을 뽑는 방법의 수는 ${}_nC_3$
 이때 남자 회원을 적어도 1명은 포함하여 뽑는 방법의 수가 110이므로
 $120-{}_nC_3=110, \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}=10$
 $n(n-1)(n-2)=60=5 \times 4 \times 3$
 $\therefore n=5$
 따라서 여자 회원의 수가 5이므로 남자 회원의 수는
 $10-5=5$
- 16 6권의 국어책 중에서 2권을 택하는 방법의 수는 ${}_6C_2=15$
 4권의 수학책 중에서 2권을 택하는 방법의 수는 ${}_4C_2=6$
 4권의 책을 책꽂이에 일렬로 꽂는 방법의 수는 $4!=24$
 따라서 구하는 방법의 수는
 $15 \times 6 \times 24=2160$
- 17 a, b 를 이미 택하였다고 생각하고 나머지 4개의 문자 중에서 2개를 택하는 방법의 수는 ${}_4C_2=6$
 4개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는 $4!=24$
 따라서 구하는 방법의 수는
 $6 \times 24=144$

- 18 A, B를 이미 뽑았다고 생각하고 나머지 6명 중에서 2명을 뽑는 방법의 수는 ${}_6C_2=15$
A, B를 한 묶음으로 생각하여 나머지 2명과 함께 일렬로 세우는 방법의 수는 $3!=6$
A, B가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$
따라서 구하는 방법의 수는
 $15 \times 6 \times 2 = 180$
- 19 주어진 조건을 만족시키려면 공역의 원소 중에서 서로 다른 3개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수 f 의 개수는 ${}_6C_3=20$
- 20 (가)에서 $f(3)=4$ 이므로 (나)를 만족시키려면 공역의 원소 5, 6, 7, 8, 9, 10 중에서 서로 다른 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 정의역의 원소 1, 2에 대응시키고, 공역의 원소 1, 2, 3 중에서 서로 다른 2개를 택하여 큰 수부터 차례대로 정의역의 원소 4, 5에 대응시키면 된다.
따라서 구하는 함수 f 의 개수는
 ${}_6C_2 \times {}_3C_2 = 15 \times 3 = 45$
- 21 $f(2)$ 의 값에 따라 경우를 나누어 생각한다.
(i) $f(2)=1$ 인 경우
 $1 < f(3) < f(4)$ 이려면 공역의 원소 2, 3, 4, 5, 6 중에서 서로 다른 2개를 택하여 작은 수부터 차례대로 정의역의 원소 3, 4에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 ${}_5C_2=10$
일대일함수이려면 남은 공역의 원소 3개 중에서 서로 다른 2개를 택하여 정의역의 원소 1, 5에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 ${}_3P_2=6$
따라서 $f(2)=1$ 인 함수 f 의 개수는
 $10 \times 6 = 60$
- (ii) $f(2)=2$ 인 경우
(i)과 같은 방법으로 함수 f 의 개수는
 ${}_4C_2 \times {}_3P_2 = 6 \times 6 = 36$
- (iii) $f(2)=3$ 인 경우
(i)과 같은 방법으로 함수 f 의 개수는
 ${}_3C_2 \times {}_3P_2 = 3 \times 6 = 18$
- (iv) $f(2)=4$ 인 경우
(i)과 같은 방법으로 함수 f 의 개수는
 ${}_2C_2 \times {}_3P_2 = 1 \times 6 = 6$
(i)~(iv)에 의하여 구하는 함수 f 의 개수는
 $60 + 36 + 18 + 6 = 120$
- 22 9개의 점 중에서 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로 구하는 삼각형의 개수는 ${}_9C_3=84$

- 23 구하는 대각선의 개수는 12개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하는 방법의 수에서 변의 개수를 뺀 것과 같으므로
 ${}_{12}C_2 - 12 = 66 - 12 = 54$
- 24 직선의 개수가 66이므로
 ${}_nC_2 = 66, \frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 66$
 $n(n-1) = 132 = 12 \times 11$
 $\therefore n = 12$
- 25 15개의 점 중에서 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_{15}C_3=455$
(i) 가로 방향으로 한 직선 위에 있는 5개의 점 중 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_5C_3=10$ 이고, 5개의 점이 있는 가로 방향의 직선은 3개이다.
(ii) 세로 방향으로 한 직선 위에 있는 3개의 점 중 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_3C_3=1$ 이고, 3개의 점이 있는 세로 방향의 직선은 5개이다.
(iii) 대각선 방향으로 한 직선 위에 있는 3개의 점 중 3개를 택하는 방법의 수는 ${}_3C_3=1$ 이고, 3개의 점이 있는 대각선은 8개이다.
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 삼각형의 개수는
 $455 - 10 \times 3 - 1 \times 5 - 1 \times 8 = 412$
- 26 가로 방향의 6개의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 5개의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 평행사변형이 만들어지므로 평행사변형의 개수는
 ${}_6C_2 \times {}_5C_2 = 15 \times 10 = 150$
- 27 (i) 9개의 점 중에서 4개를 택하는 방법의 수는 ${}_9C_4=126$
(ii) 한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 4개를 택하는 방법의 수는 ${}_5C_4=5$
(iii) 한 직선 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하고 한 직선 위에 있지 않은 4개의 점 중에서 1개를 택하는 방법의 수는 ${}_5C_3 \times {}_4C_1 = 10 \times 4 = 40$
(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 사각형의 개수는
 $126 - 5 - 40 = 81$
- 28 (i) 가로 방향으로 놓인 4개의 선 중에서 2개, 세로 방향으로 놓인 4개의 선 중에서 2개를 택하면 직사각형이 만들어지므로 직사각형의 개수는 ${}_4C_2 \times {}_4C_2 = 6 \times 6 = 36$
(ii) 작은 정사각형의 한 변의 길이를 a 라 하면 정사각형은 한 변의 길이가 a 인 것이 9개, $2a$ 인 것이 4개, $3a$ 인 것이 1개이므로 정사각형의 개수는 $9 + 4 + 1 = 14$
(i), (ii)에 의하여 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는
 $36 - 14 = 22$

