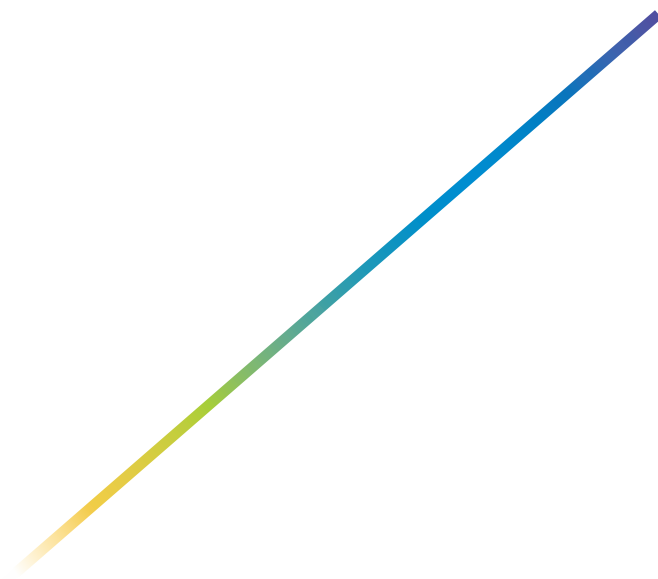


고등 수학(상)

정답과 해설



개념편

정답과 해설

I-1 01 다항식의 연산

1 다항식의 덧셈과 뺄셈

개념 CHECK

8쪽

- 1 답 내림차순: $-3y^2 + (x+1)y + 2x^2 - 5x - 2$
오름차순: $2x^2 - 5x - 2 + (x+1)y - 3y^2$
- 2 답 (1) $3x^2 - x + 5$ (2) $x^2 - 5x - 3$ (3) $x^2 - 12x - 10$

문제

9쪽

01-1 답 $12x^2 - 7x + 3$
 $2(A+B) - 3(B-C)$
 $= 2A - B + 3C$
 $= 2(2x^2 - x + 1) - (x^2 + 2x - 1) + 3(3x^2 - x)$
 $= 4x^2 - 2x + 2 - x^2 - 2x + 1 + 9x^2 - 3x$
 $= 12x^2 - 7x + 3$

01-2 답 $a^2 + 3ab + b^2$
 $A - 2(X - B) = 3A$ 에서
 $A - 2X + 2B = 3A, 2X = -2A + 2B$
 $\therefore X = B - A$
 $= 2a^2 + ab - b^2 - (a^2 - 2ab - 2b^2)$
 $= 2a^2 + ab - b^2 - a^2 + 2ab + 2b^2$
 $= a^2 + 3ab + b^2$

01-3 답 3
 $A + B = 3a^2 - 3ab \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $A - B = a^2 - ab + 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면 $2A = 4a^2 - 4ab + 2$
 $\therefore A = 2a^2 - 2ab + 1$

㉠에서

$$\begin{aligned} B &= 3a^2 - 3ab - A \\ &= 3a^2 - 3ab - (2a^2 - 2ab + 1) \\ &= 3a^2 - 3ab - 2a^2 + 2ab - 1 \\ &= a^2 - ab - 1 \\ \therefore A - 2B &= 2a^2 - 2ab + 1 - 2(a^2 - ab - 1) \\ &= 2a^2 - 2ab + 1 - 2a^2 + 2ab + 2 = 3 \end{aligned}$$

2 다항식의 곱셈

개념 CHECK

11쪽

- 1 답 (1) $32x^5$ (2) $-2a^5b^6$
- 2 답 (1) $2x^3 - 7x^2 + 10x - 8$
(2) $3x^2 + xy - x - 2y^2 + 9y - 10$
- 3 답 (1) $x^2 + 4xy + 4y^2$ (2) $a^2 - ab + \frac{b^2}{4}$
(3) $4x^2 - 9y^2$ (4) $a^2 - 5a - 14$
(5) $6x^2 + 23x + 20$ (6) $2a^2 - 5ab + 2b^2$

문제

12~14쪽

02-1 답 11
 $(x^4 - 2x^2 + x - 3)(x^3 + 4x^2 - 5x + 1)$ 의 전개식에서 x^3 항은
 $(-2x^2) \times (-5x) + x \times 4x^2 + (-3) \times x^3$
 $= 10x^3 + 4x^3 - 3x^3 = 11x^3$
따라서 x^3 의 계수는 11이다.

02-2 답 -5
 $(3x^2 - 4x - 1)(x^2 + kx + 2)$ 의 전개식에서 x 항은
 $(-4x) \times 2 + (-1) \times kx = -8x - kx = -(8+k)x$
이때 x 의 계수가 -3이므로
 $-(8+k) = -3 \quad \therefore k = -5$

02-3 답 2
 $(1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 + x^4)^2$ 의 전개식에서 x^2 항은
 $1 \times (-3x^2) + 2x \times 2x + (-3x^2) \times 1$
 $= -3x^2 + 4x^2 - 3x^2 = -2x^2$
주어진 다항식의 전개식에서 x^3 항은
 $1 \times 4x^3 + 2x \times (-3x^2) + (-3x^2) \times 2x + 4x^3 \times 1$
 $= 4x^3 - 6x^3 - 6x^3 + 4x^3 = -4x^3$
따라서 $a = -2, b = -4$ 이므로 $a - b = 2$

03-1 ㉡ (1) $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

(2) $4x^2+9y^2+z^2-12xy-6yz+4zx$

(3) $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$

(4) $27x^3-54x^2+36x-8$

(5) $8x^3-1$

(6) $64x^3+27$

(7) x^3+5x^2+2x-8

(8) $x^3+4x^2-7x-10$

(1) $(a-b-c)^2$
 $=a^2+(-b)^2+(-c)^2$
 $+2a \times (-b)+2 \times (-b) \times (-c)+2 \times (-c) \times a$
 $=a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

(2) $(2x-3y+z)^2$
 $=(2x)^2+(-3y)^2+z^2$
 $+2 \times 2x \times (-3y)+2 \times (-3y) \times z+2 \times z \times 2x$
 $=4x^2+9y^2+z^2-12xy-6yz+4zx$

(3) $(a+2b)^3=a^3+3 \times a^2 \times 2b+3 \times a \times (2b)^2+(2b)^3$
 $=a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$

(4) $(3x-2)^3=(3x)^3-3 \times (3x)^2 \times 2+3 \times 3x \times 2^2-2^3$
 $=27x^3-54x^2+36x-8$

(5) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$
 $=(2x-1)\{(2x)^2+2x \times 1+1^2\}$
 $=(2x)^3-1^3=8x^3-1$

(6) $(4x+3)(16x^2-12x+9)$
 $=(4x+3)\{(4x)^2-4x \times 3+3^2\}$
 $=(4x)^3+3^3$
 $=64x^3+27$

(7) $(x-1)(x+2)(x+4)$
 $=x^3+(-1+2+4)x^2$
 $+ \{(-1) \times 2+2 \times 4+4 \times (-1)\}x+(-1) \times 2 \times 4$
 $=x^3+5x^2+2x-8$

(8) $(x+1)(x-2)(x+5)$
 $=x^3+(1-2+5)x^2$
 $+ \{1 \times (-2)+(-2) \times 5+5 \times 1\}x+1 \times (-2) \times 5$
 $=x^3+4x^2-7x-10$

03-2 ㉡ (1) $x^3+y^3-z^3+3xyz$ (2) $a^3-b^3+3ab+1$

(3) a^8-1

(4) x^6-16x^3+64

(1) $(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz+zx)$
 $=\{x+y+(-z)\}$
 $\times \{x^2+y^2+(-z)^2-xy-y \times (-z)-(-z) \times x\}$
 $=x^3+y^3+(-z)^3-3xy \times (-z)$
 $=x^3+y^3-z^3+3xyz$

(2) $(a-b+1)(a^2+b^2+ab-a+b+1)$
 $=\{a+(-b)+1\}$
 $\times \{a^2+(-b)^2+1^2-a \times (-b)-(-b) \times 1-1 \times a\}$
 $=a^3+(-b)^3+1^3-3a \times (-b) \times 1$
 $=a^3-b^3+3ab+1$

(3) $(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)$
 $=(a^2-1)(a^2+1)(a^4+1)$
 $=(a^4-1)(a^4+1)$
 $=a^8-1$

(4) $(x-2)^2(x^2+2x+4)^2$
 $=\{(x-2)(x^2+2x+4)\}^2$
 $=(x^3-8)^2$
 $=x^6-16x^3+64$

04-1 ㉡ (1) $x^4-2x^3-2x^2+3x-4$

(2) $x^4+6x^3+13x^2+12x+3$

(3) $a^2-b^2-c^2+2bc$

(4) x^4+3x^2+4

(1) $(x^2-x+1)(x^2-x-4)$
 $=(X+1)(X-4)$ $\blacktriangleleft x^2-x=X$
 $=X^2-3X-4$

$=(x^2-x)^2-3(x^2-x)-4$ $\blacktriangleleft X=x^2-x$
 $=x^4-2x^3+x^2-3x^2+3x-4$
 $=x^4-2x^3-2x^2+3x-4$

(2) $(x^2+3x+1)(x^2+3x+3)$
 $=(X+1)(X+3)$ $\blacktriangleleft x^2+3x=X$
 $=X^2+4X+3$
 $=(x^2+3x)^2+4(x^2+3x)+3$ $\blacktriangleleft X=x^2+3x$
 $=x^4+6x^3+9x^2+4x^2+12x+3$
 $=x^4+6x^3+13x^2+12x+3$

(3) $(a+b-c)(a-b+c)$
 $=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$
 $=(a+X)(a-X)$ $\blacktriangleleft b-c=X$
 $=a^2-X^2$
 $=a^2-(b-c)^2$ $\blacktriangleleft X=b-c$
 $=a^2-b^2-c^2+2bc$

(4) $(x^2-x+2)(x^2+x+2)$
 $=(x^2+2-x)(x^2+2+x)$
 $=(X-x)(X+x)$ $\blacktriangleleft x^2+2=X$
 $=X^2-x^2$
 $=(x^2+2)^2-x^2$ $\blacktriangleleft X=x^2+2$
 $=x^4+4x^2+4-x^2$
 $=x^4+3x^2+4$

04-2 [답] (1) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

$$(2) x^4 + 14x^3 + 41x^2 - 56x - 180$$

$$\begin{aligned} (1) & (x+1)(x+2)(x-2)(x-3) \\ &= \{(x+1)(x-2)\}\{(x+2)(x-3)\} \\ &= (x^2-x-2)(x^2-x-6) \\ &= (X-2)(X-6) \quad \blacktriangleleft x^2-x=X \\ &= X^2-8X+12 \\ &= (x^2-x)^2-8(x^2-x)+12 \quad \blacktriangleleft X=x^2-x \\ &= x^4-2x^3+x^2-8x^2+8x+12 \\ &= x^4-2x^3-7x^2+8x+12 \\ (2) & (x-2)(x+2)(x+5)(x+9) \\ &= \{(x-2)(x+9)\}\{(x+2)(x+5)\} \\ &= (x^2+7x-18)(x^2+7x+10) \\ &= (X-18)(X+10) \quad \blacktriangleleft x^2+7x=X \\ &= X^2-8X-180 \\ &= (x^2+7x)^2-8(x^2+7x)-180 \quad \blacktriangleleft X=x^2+7x \\ &= x^4+14x^3+49x^2-8x^2-56x-180 \\ &= x^4+14x^3+41x^2-56x-180 \end{aligned}$$

3 곱셈 공식의 변형

개념 CHECK

15쪽

1 [답] (1) 7 (2) 18

2 [답] (1) 22 (2) -100

문제

16~18쪽

05-1 [답] (1) 25 (2) 52

$$\begin{aligned} (1) & x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y) \text{이므로} \\ & 37=1^3-3xy \times 1 \quad \therefore xy=-12 \\ & \therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy \\ & \quad =1^2-2 \times (-12)=25 \\ (2) & \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4 \\ & \quad = (2\sqrt{3})^2+4=16 \\ & \text{그런데 } x>0 \text{이므로 } x+\frac{1}{x}=4 \\ & \therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ & \quad =4^3-3 \times 4=52 \end{aligned}$$

05-2 [답] $14\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} x-y &= (2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})=2\sqrt{2} \\ xy &= (2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=4-2=2 \\ \therefore \frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x} &= \frac{x^3-y^3}{xy} = \frac{(x-y)^3+3xy(x-y)}{xy} \\ &= \frac{(2\sqrt{2})^3+3 \times 2 \times 2\sqrt{2}}{2}=14\sqrt{2} \end{aligned}$$

05-3 [답] 36

$$\begin{aligned} x^2-3x-1=0 \text{에서 } x \neq 0 \text{이므로 양변을 } x \text{로 나누면} \\ x-3-\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x-\frac{1}{x}=3 \\ \therefore x^3-\frac{1}{x^3} &= \left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right) \\ &= 3^3+3 \times 3=36 \end{aligned}$$

06-1 [답] (1) 11 (2) 27

$$\begin{aligned} (1) & a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ & \quad =3^2-2 \times (-1)=11 \\ (2) & a^3+b^3+c^3 \\ & \quad = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc \\ & \quad = 3 \times \{11-(-1)\}+3 \times (-3)=27 \end{aligned}$$

06-2 [답] 64

$$\begin{aligned} a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 &= (ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c) \\ &= 0^2-2 \times (-8) \times 4=64 \end{aligned}$$

06-3 [답] 2

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \text{이므로} \\ 9 &= 1^2-2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca=-4 \\ \therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} &= \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{-4}{-2}=2 \end{aligned}$$

07-1 [답] 17

반원에 내접하는 삼각형은 지름을 빗변으로 하는 직각삼각형이다. 빗변을 제외한 삼각형의 두 변의 길이를 각각 a , b 라 하면 피타고라스 정리에 의하여 $a^2+b^2=16^2$
또 삼각형의 둘레의 길이가 34이므로 $a+b+16=34 \quad \therefore a+b=18$
 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 이므로 $16^2=18^2-2ab \quad \therefore ab=34$
따라서 구하는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2} \times 34=17$

07-2 [답] 40

오른쪽 그림과 같이 마름모의 두 대각선의 길이를 각각 a, b ($a > b$)라 하면 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = (\sqrt{41})^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 164$$

두 대각선의 길이의 차이가 2이므로

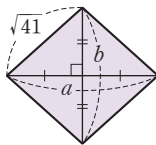
$$a - b = 2$$

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab \text{ 이므로}$$

$$164 = 2^2 + 2ab \quad \therefore ab = 80$$

따라서 구하는 마름모의 넓이는

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 80 = 40$$



07-3 [답] $5\sqrt{2}$

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a, b, c 라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 48이므로

$$4(a + b + c) = 48 \quad \therefore a + b + c = 12$$

또 겉넓이가 94이므로

$$2(ab + bc + ca) = 94 \quad \therefore ab + bc + ca = 47$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) \\ = 12^2 - 2 \times 47 = 50$$

따라서 구하는 직육면체의 대각선의 길이는

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 5\sqrt{2}$$

4 다항식의 나눗셈

개념 CHECK

20쪽

1 [답] (1) $2x, 2x, 9x, 9, 3$, 몫: $2x+9$, 나머지: 3

(2) $3x, 3x^2, 6x, x^2, 12x, x, 2, 11x, 3$,

몫: $3x-1$, 나머지: $-11x-3$

2 [답] (1) $-1, -3, 4, -1$, 몫: x^2-4x+2 , 나머지: -1

(2) $7, 0, 6, -6, -3, -10$,

몫: $2x^3-3x^2-2x-6$, 나머지: -10

문제

21~23쪽

08-1 [답] (1) 몫: x^2-x-2 , 나머지: 5

(2) 몫: x^2+2x-4 , 나머지: $-6x+6$

$$\begin{array}{r} (1) \quad \frac{x^2 - x - 2}{3x - 1} \overline{) 3x^3 - 4x^2 - 5x + 7} \\ \underline{3x^3 - x^2} \\ -3x^2 - 5x \\ \underline{-3x^2 + x} \\ -6x + 7 \\ \underline{-6x + 2} \\ 5 \end{array}$$

몫: x^2-x-2 , 나머지: 5

$$\begin{array}{r} (2) \quad \frac{x^2 + 2x - 4}{x^2 - 3x + 1} \overline{) x^4 - x^3 - 9x^2 + 8x + 2} \\ \underline{x^4 - 3x^3 + x^2} \\ 2x^3 - 10x^2 + 8x \\ \underline{2x^3 - 6x^2 + 2x} \\ -4x^2 + 6x + 2 \\ \underline{-4x^2 + 12x - 4} \\ -6x + 6 \end{array}$$

몫: x^2+2x-4 , 나머지: $-6x+6$

08-2 [답] 10

$$\begin{array}{r} \frac{4x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1} \overline{) 4x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 1} \\ \underline{4x^4 - 4x^3 + 4x^2} \\ -x^3 - x^2 - 4x \\ \underline{-x^3 + x^2 - x} \\ -2x^2 - 3x + 1 \\ \underline{-2x^2 + 2x - 2} \\ -5x + 3 \end{array}$$

$$\therefore Q(x) = 4x^2 - x - 2, R(x) = -5x + 3$$

$$\therefore Q(2) + R(1)$$

$$= (4 \times 2^2 - 2 - 2) + \{(-5) \times 1 + 3\} = 10$$

09-1 [답] $3x^2+1$

$$3x^4 - 5x^2 + 4x - 7 = A(x^2 - 2) + 4x - 5$$

$$A(x^2 - 2) = 3x^4 - 5x^2 - 2$$

$$\therefore A = (3x^4 - 5x^2 - 2) \div (x^2 - 2)$$

$$\begin{array}{r} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 2} \overline{) 3x^4 - 5x^2 - 2} \\ \underline{3x^4 - 6x^2} \\ x^2 - 2 \\ \underline{x^2 - 2} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore A = 3x^2 + 1$$

09-2 **답** -1

$$2x^4 - 5x^3 + x^2 + 1 = A(2x^2 - 3x - 4) - x + 5$$

$$A(2x^2 - 3x - 4) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 + x - 4$$

$$\therefore A = (2x^4 - 5x^3 + x^2 + x - 4) \div (2x^2 - 3x - 4)$$

$$\begin{array}{r} x^2 - x + 1 \\ 2x^2 - 3x - 4 \overline{) 2x^4 - 5x^3 + x^2 + x - 4} \\ \underline{2x^4 - 3x^3 - 4x^2} \\ -2x^3 + 5x^2 + x \\ \underline{-2x^3 + 3x^2 + 4x} \\ 2x^2 - 3x - 4 \\ \underline{2x^2 - 3x - 4} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore A = x^2 - x + 1$$

따라서 다항식 A의 x의 계수는 -1이다.

09-3 **답** 13

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)(2x + 3) + 5x - 2$$

$$= 2x^3 - x^2 + 3x + 4$$

$$\begin{array}{r} 2x - 3 \\ x^2 + x + 3 \overline{) 2x^3 - x^2 + 3x + 4} \\ \underline{2x^3 + 2x^2 + 6x} \\ -3x^2 - 3x + 4 \\ \underline{-3x^2 - 3x - 9} \\ 13 \end{array}$$

따라서 구하는 나머지는 13이다.

10-1 **답** (1) 몫: $x^2 + 3x + 1$, 나머지: 0

(2) 몫: $2x^2 - 4x + 7$, 나머지: -4

(3) 몫: $x^2 + x - 1$, 나머지: -7

(4) 몫: $2x^2 - 2x$, 나머지: 1

(1) $1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & -2 & -1 \\ & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right|$

몫: $x^2 + 3x + 1$, 나머지: 0

(2) $-2 \left| \begin{array}{cccc} 2 & 0 & -1 & 10 \\ & -4 & 8 & -14 \\ 2 & -4 & 7 & -4 \end{array} \right|$

몫: $2x^2 - 4x + 7$, 나머지: -4

(3) $\frac{3}{2} \left| \begin{array}{cccc} 2 & -1 & -5 & -4 \\ & 3 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & -7 \end{array} \right|$

$$2x^3 - x^2 - 5x - 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)(2x^2 + 2x - 2) - 7$$

$$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x^2 + x - 1) - 7$$

$$= (2x - 3)(x^2 + x - 1) - 7$$

몫: $x^2 + x - 1$, 나머지: -7

(4) $\frac{1}{2} \left| \begin{array}{cccc} 4 & -6 & 2 & 1 \\ & 2 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right|$

$$4x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(4x^2 - 4x) + 1$$

$$= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 2x) + 1$$

$$= (2x - 1)(2x^2 - 2x) + 1$$

몫: $2x^2 - 2x$, 나머지: 1

10-2 **답** 21

조립제법을 이용하여 $(2x^3 - 3x^2 - 5x - 6) \div (x - 3)$ 을 하면

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x - 6 \\ x - 3 \overline{) 2x^3 - 3x^2 - 5x - 6} \\ \underline{2x^3 - 6x^2 - 15x - 18} \\ 3x^2 + 10x + 12 \\ \underline{3x^2 - 9x - 18} \\ 19x + 30 \end{array}$$

따라서 $a=3, b=3, c=9, d=6$ 이므로
 $a+b+c+d=21$

연습문제

24~26쪽

- | | |
|-------------|---------------------------|
| 1 ② | 2 $A=3x^2-5, B=-x^2+3x-2$ |
| 3 ① | 4 ④ |
| 5 x^6-y^6 | 6 ⑤ |
| 7 ⑤ | 8 $36\sqrt{5}$ |
| 9 120600 | 10 56 |
| 11 $4x$ | 12 ③ |
| 13 ② | 14 -32 |
| 15 13 | 16 ⑤ |
| 17 ④ | 18 80π |
| 19 ① | |

1 $3X - 5B = 2(X - 2A - B)$ 에서

$$3X - 5B = 2X - 4A - 2B$$

$$\therefore X = -4A + 3B$$

$$= -4(3x^2 - 4xy - y^2) + 3(4x^2 - 3xy - 2y^2)$$

$$= -12x^2 + 16xy + 4y^2 + 12x^2 - 9xy - 6y^2$$

$$= 7xy - 2y^2$$

2 $A+B=2x^2+3x-7$ ㉠

$$A-2B=5x^2-6x-1$$
 ㉡

㉠-㉡을 하면 $3B = -3x^2 + 9x - 6$

$$\therefore B = -x^2 + 3x - 2$$

㉠에서

$$\begin{aligned} A &= 2x^2 + 3x - 7 - B \\ &= 2x^2 + 3x - 7 - (-x^2 + 3x - 2) \\ &= 2x^2 + 3x - 7 + x^2 - 3x + 2 = 3x^2 - 5 \end{aligned}$$

- 3 $(4x^4 + 3x^2 - 2x - 6)(5x^5 - 3x^3 - x^2 + 4x + a)$ 의 전개식에서 x^4 항은

$$\begin{aligned} &4x^4 \times a + 3x^2 \times (-x^2) + (-2x) \times (-3x^3) \\ &= 4ax^4 - 3x^4 + 6x^4 = (4a + 3)x^4 \end{aligned}$$

이때 x^4 의 계수가 -5 이므로

$$4a + 3 = -5 \quad \therefore a = -2$$

주어진 다항식의 전개식에서 x 항은

$$(-2x) \times (-2) + (-6) \times 4x = 4x - 24x = -20x$$

따라서 x 의 계수는 -20 이다.

- 4 $\neg, (a - 2b - 3c)^2$

$$\begin{aligned} &= a^2 + (-2b)^2 + (-3c)^2 + 2 \times a \times (-2b) \\ &\quad + 2 \times (-2b) \times (-3c) + 2 \times (-3c) \times a \\ &= a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 4ab + 12bc - 6ca \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. (a-b)^2(a+b)^2(a^2+b^2)^2 \\ &= \{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)\}^2 \\ &= \{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\}^2 \\ &= (a^4-b^4)^2 = a^8 - 2a^4b^4 + b^8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. (2a-3b)^3 \\ &= (2a)^3 - 3 \times (2a)^2 \times 3b + 3 \times 2a \times (3b)^2 - (3b)^3 \\ &= 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. (a-b-1)(a^2+b^2+ab+a-b+1) \\ &= a^3 + (-b)^3 + (-1)^3 - 3a \times (-b) \times (-1) \\ &= a^3 - b^3 - 3ab - 1 \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

- 5 $(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$
 $= \{(x-y)(x^2+xy+y^2)\} \{(x+y)(x^2-xy+y^2)\}$
 $= (x^3-y^3)(x^3+y^3) = x^6-y^6$

- 6 $(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)$
 $= \{(x+3)(x-4)\} \{(x+1)(x-2)\}$
 $= (x^2-x-12)(x^2-x-2)$
 $= (X-12)(X-2) \quad \blacktriangleleft x^2-x=X$
 $= X^2-14X+24$
 $= (x^2-x)^2-14(x^2-x)+24 \quad \blacktriangleleft X=x^2-x$
 $= x^4-2x^3+x^2-14x^2+14x+24$
 $= x^4-2x^3-13x^2+14x+24$
 따라서 $a = -13, b = 14$ 이므로 $b-a = 27$

- 7 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ 이므로
 $7=3^2-2ab \quad \therefore ab=1$
 $\therefore a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$
 $= 7^2-2 \times 1^2 = 47$

- 8 $x^2-4x-1=0$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면

$$x-4-\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x-\frac{1}{x}=4$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 + 4 = 4^2 + 4 = 20$$

$$\text{그런데 } x > 0 \text{이므로 } x+\frac{1}{x} = 2\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} x^3+\frac{1}{x^3} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x+\frac{1}{x}\right) \\ &= (2\sqrt{5})^3 - 3 \times 2\sqrt{5} = 34\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\therefore x^3+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3} = 34\sqrt{5}+2\sqrt{5} = 36\sqrt{5}$$

- 9 $201^3 - (200+1)(40001-200)$
 $= (200+1)^3 - (200+1)(200^2+1^2-200 \times 1)$
 $= (200+1)^3 - (200^3+1^3)$
 $= 200^3 + 3 \times 200^2 \times 1 + 3 \times 200 \times 1^2 + 1^3 - 200^3 - 1^3$
 $= 120000 + 600 = 120600$

- 10 $\overline{FG}=a, \overline{GH}=b, \overline{DH}=c$ 라 하면 길넓이가 128이므로

$$2(ab+bc+ca)=128 \quad \therefore ab+bc+ca=64$$

세 삼각형 BFG, GHD, BCD는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BG}^2 = a^2 + c^2, \overline{GD}^2 = b^2 + c^2, \overline{BD}^2 = a^2 + b^2$$

이때 $\overline{BG}^2 + \overline{GD}^2 + \overline{BD}^2 = 136$ 이므로

$$(a^2+c^2) + (b^2+c^2) + (a^2+b^2) = 136$$

$$2(a^2+b^2+c^2) = 136 \quad \therefore a^2+b^2+c^2 = 68$$

$$\therefore (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ca)$$

$$= 68 + 2 \times 64 = 196$$

그런데 $a > 0, b > 0, c > 0$ 이므로 $a+b+c = 14$

따라서 구하는 모든 모서리의 길이의 합은

$$4(a+b+c) = 56$$

- 11
$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ x^2-x+2 \overline{) 2x^3-x^2+5x+1} \\ \underline{2x^3-2x^2+4x} \\ x^2+x+1 \\ \underline{x^2-x+2} \\ 2x-1 \end{array}$$

따라서 $Q(x) = 2x+1, R(x) = 2x-1$ 이므로

$$Q(x)+R(x) = 4x$$

12 $12x^3+24x^2-15x+14=A(2x+5)-4x+4$

$$A(2x+5)=12x^3+24x^2-11x+10$$

$$\therefore A=(12x^3+24x^2-11x+10)\div(2x+5)$$

$$\begin{array}{r} 6x^2-3x+2 \\ 2x+5 \overline{) 12x^3+24x^2-11x+10} \\ \underline{12x^3+30x^2} \\ -6x^2-11x \\ \underline{-6x^2-15x} \\ 4x+10 \\ \underline{4x+10} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore A=6x^2-3x+2$$

따라서 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은

$$6-3+2=5$$

13 $f(x)$ 를 $x+3$ 으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로

$$f(x)=(x+3)Q(x)+R$$

$$=\frac{1}{3}\times 3(x+3)Q(x)+R$$

$$=(3x+9)\times\frac{1}{3}Q(x)+R$$

따라서 $f(x)$ 를 $3x+9$ 로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{3}Q(x)$,

나머지는 R 이다.

14 조립제법을 이용하여 $(ax^3+bx^2+cx+d)\div(x-1)$ 을 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & a & b & c & d \\ & & 1 & -1 & 3 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & -5 \end{array}$$

$$a=1, b+1=-1, c+(-1)=3, d+3=-5$$

$$\therefore a=1, b=-2, c=4, d=-8$$

$$\therefore f(x)=x^3-2x^2+4x-8$$

또 조립제법을 이용하여 $(x^3-2x^2+4x-8)\div(x+2)$ 를 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -2 & 4 & -8 \\ & & -2 & 8 & -24 \\ \hline & 1 & -4 & 12 & -32 \end{array}$$

따라서 구하는 나머지는 -32 이다.

15 $a-b=4, b-c=-3$ 을 변끼리 더하면

$$a-c=1$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

$$=\frac{1}{2}\{4^2+(-3)^2+(-1)^2\}=\frac{1}{2}\times 26=13$$

16 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 이므로

$$0=3+2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca=-\frac{3}{2}$$

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$$

$$=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

$$\therefore a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$=3^2-2\times\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$$

17 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$ 이므로

$$7=3^2-2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca=1$$

$$\therefore (a+b)(b+c)(c+a)$$

$$=(3-c)(3-a)(3-b) \quad (\because a+b+c=3)$$

$$=3^3+(-a-b-c)\times 3^2+(ab+bc+ca)\times 3$$

$$+(-a)(-b)(-c)$$

$$=27-9(a+b+c)+3(ab+bc+ca)-abc$$

$$=27-9\times 3+3\times 1-(-1)=4$$

18 서로 외접하는 작은 두 구의 반지름의 길이를 각각 a, b 라 하면 반지름의 길이가 6인 큰 구에 내접하고 있으므로

$$2(a+b)=12 \quad \therefore a+b=6$$

작은 두 구의 부피의 합이 96π 이므로

$$\frac{4}{3}\pi(a^3+b^3)=96\pi \quad \therefore a^3+b^3=72$$

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$
이므로

$$72=6^3-3ab\times 6 \quad \therefore ab=8$$

$$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=6^2-2\times 8=20$$

따라서 구하는 작은 두 구의 겹넓이의 합은

$$4\pi(a^2+b^2)=4\pi\times 20=80\pi$$

19

$$\begin{array}{r} 2x-1 \\ x^2+x-3 \overline{) 2x^3+x^2-7x+7} \\ \underline{2x^3+2x^2-6x} \\ -x^2-x+7 \\ \underline{-x^2-x+3} \\ 4 \end{array}$$

$$\therefore 2x^3+x^2-7x+7=(x^2+x-3)(2x-1)+4$$

이때 $x^2+x-3=0$ 이므로 구하는 식의 값은 4이다.

I-2 01 나머지정리

1 항등식

개념 CHECK

29쪽

1 답 나, 르

2 답 (1) $a=1, b=-2, c=4$ (2) $a=1, b=5, c=3$

3 답 (1) $a=-1, b=2$ (2) $a=-1, b=2$

(1) 주어진 등식의 좌변을 x 에 대하여 정리하면

$$(a+b)x - a + 2b = x + 5$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a+b=1, -a+2b=5$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=2$

(2) 주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$\text{양변에 } x=1 \text{을 대입하면 } 3b=6 \quad \therefore b=2$$

$$\text{양변에 } x=-2 \text{를 대입하면 } -3a=3 \quad \therefore a=-1$$

문제

30~33쪽

01-1 답 $x=-3, y=-1$

주어진 등식의 좌변을 k 에 대하여 정리하면

$$(x-y+2)k - 2x + 3y - 3 = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$x-y+2=0, -2x+3y-3=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-3, y=-1$

01-2 답 $a=4, b=7$

주어진 등식의 좌변을 x, y 에 대하여 정리하면

$$(a-b+3)x + (-3a+2b-2)y = 0$$

이 등식이 x, y 에 대한 항등식이므로

$$a-b+3=0, -3a+2b-2=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4, b=7$

01-3 답 2

이차방정식 $x^2 + (k+1)x - (k+3)m + n = 0$ 이 1을 근으로 가지므로 $x=1$ 을 대입하면

$$1 + (k+1) - (k+3)m + n = 0$$

이 등식의 좌변을 k 에 대하여 정리하면

$$(1-m)k - 3m + n + 2 = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$1-m=0, -3m+n+2=0$$

따라서 $m=1, n=1$ 이므로 $m+n=2$

02-1 답 (1) $a=1, b=2, c=1$

(2) $a=2, b=-2, c=1$

(1) 주어진 등식의 좌변을 전개한 후 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$2x^3 + (2a-3)x^2 + (2b-3a)x - 3b$$

$$= 2x^3 - x^2 + cx - 6$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$2a-3=-1, 2b-3a=c, -3b=-6$$

$$\therefore a=1, b=2, c=1$$

(2) 주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$-2b=4 \quad \therefore b=-2$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$3c=3 \quad \therefore c=1$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$6a=12 \quad \therefore a=2$$

02-2 답 $a=-3, b=2$

주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$0=1+a+b \quad \therefore a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

양변에 $x^2=2$ 를 대입하면

$$0=2^2+2a+b \quad \therefore 2a+b=-4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3, b=2$

02-3 답 64

주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$(2-1+3)^3 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_6$$

$$\therefore a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_6 = 64$$

03-1 답 (1) $a=2, b=3, c=-1$

(2) $a=0, b=-1$

$$(1) x^3 + ax^2 + bx + c = (x^2+2)(x+2) + x - 5$$

$$= x^3 + 2x^2 + 3x - 1$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=2, b=3, c=-1$$

(2) $x^6 + ax^3 + b$ 를 x^2-1 , 즉 $(x+1)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^6 + ax^3 + b = (x+1)(x-1)Q(x)$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$1-a+b=0 \quad \therefore a-b=1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1+a+b=0 \quad \therefore a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면

$$a=0, b=-1$$

03-2 답 8

x^3+ax^2+7x+b 를 x^2+3x+4 로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} x^3+ax^2+7x+b &= (x^2+3x+4)(x+c) \\ &= x^3+(c+3)x^2+(3c+4)x+4c \end{aligned}$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=c+3, 7=3c+4, b=4c$$

따라서 $a=4, b=4, c=1$ 이므로

$$a+b=8$$

04-1 답 -30

다항식 x^3-3x^2-4x+1 을 $x+1$ 로 나누는 조립제법을 몫에 대하여 연속으로 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & -4 & 1 \\ & & -1 & 4 & 0 \\ \hline -1 & 1 & -4 & 0 & 1 \leftarrow d \\ & & -1 & 5 & \\ \hline -1 & 1 & -5 & 5 & \leftarrow c \\ & & -1 & & \\ \hline a \rightarrow 1 & & -6 & \leftarrow b \end{array}$$

$$\therefore x^3-3x^2-4x+1$$

$$= (x+1)^3 - 6(x+1)^2 + 5(x+1) + 1$$

따라서 $a=1, b=-6, c=5, d=1$ 이므로

$$abcd=-30$$

04-2 답 (1) $a=5, b=8, c=8$ (2) 8,851

(1) 다항식 x^3-x^2+4 를 $x-2$ 로 나누는 조립제법을 몫에 대하여 연속으로 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ & & 2 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 2 & 8 \leftarrow c \\ & & 2 & 6 & \\ \hline 2 & 1 & 3 & 8 & \leftarrow b \\ & & 2 & & \\ \hline 1 & & 5 & \leftarrow a \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x-2)^3 + 5(x-2)^2 + 8(x-2) + 8$$

$$\therefore a=5, b=8, c=8$$

$$(2) f(2,1) = 0,1^3 + 5 \times 0,1^2 + 8 \times 0,1 + 8 = 8,851$$

2 나머지정리와 인수정리

개념 CHECK

34쪽

$$1 \quad \text{답 (1) } -34 \quad (2) 1$$

$$2 \quad \text{답 } -4$$

$f(x)=x^3+kx^2+3x+2$ 라 하면 인수정리에 의하여

$$f(2)=0 \text{이므로}$$

$$8+4k+6+2=0 \quad \therefore k=-4$$

문제

35~40쪽

05-1 답 (1) 5 (2) $a=4, b=2$

(1) 나머지정리에 의하여 $f(2)=-1$ 이므로

$$16-8a+12-4a-5=-1$$

$$-12a=-24 \quad \therefore a=2$$

따라서 $f(x)=x^4-2x^3+3x^2-4x-5$ 이므로 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(-1)=1+2+3+4-5=5$$

(2) $f(x)=-x^3+ax^2+bx-3$ 이라 하면 나머지정리에 의하여 $f(1)=2, f(3)=12$

$$f(1)=2 \text{에서 } -1+a+b-3=2$$

$$\therefore a+b=6 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$f(3)=12 \text{에서 } -27+9a+3b-3=12$$

$$\therefore 3a+b=14 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a=4, b=2$

05-2 답 32

$f(x)=x^3+2x^2-ax+2$ 라 하면 나머지정리에 의하여

$$f(-1)=f(2) \text{이므로}$$

$$-1+2+a+2=8+8-2a+2$$

$$3a=15 \quad \therefore a=5$$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-5x+2$ 이므로 $f(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$f(3)=27+18-15+2=32$$

05-3 답 11

나머지정리에 의하여 $f(2)=5, g(2)=-1$

따라서 $3f(x)+4g(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$3f(2)+4g(2)=11$$

06-1 답 1

나머지정리에 의하여 $f(1)=2, f(-1)=4$

$f(x)$ 를 x^2-1 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지

$R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-1)Q(x) + ax+b \\ &= (x-1)(x+1)Q(x) + ax+b \end{aligned}$$

양변에 $x=1, x=-1$ 을 각각 대입하면

$$f(1)=a+b, f(-1)=-a+b$$

$$\therefore a+b=2, -a+b=4$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=3$

따라서 $R(x)=-x+3$ 이므로 $R(2)=1$

06-2 ㉡ $x+11$

나머지정리에 의하여 $f(1)=2, f(-3)=4$

$(x^2+3x+2)f(x)$ 를 x^2+2x-3 으로 나누었을 때의 몫을

$Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} (x^2+3x+2)f(x) &= (x^2+2x-3)Q(x) + ax+b \\ &= (x-1)(x+3)Q(x) + ax+b \end{aligned}$$

양변에 $x=1, x=-3$ 을 각각 대입하면

$$6f(1)=a+b, 2f(-3)=-3a+b$$

$$\therefore a+b=12, -3a+b=8$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=11$

따라서 구하는 나머지는 $x+11$ 이다.

06-3 ㉡ $x+1$

$(x-2)f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$$-4f(-2)=4 \quad \therefore f(-2)=-1$$

$(3x-1)f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 15이므로

$$5f(2)=15 \quad \therefore f(2)=3$$

$f(x)$ 를 x^2-4 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-4)Q(x) + ax+b \\ &= (x+2)(x-2)Q(x) + ax+b \end{aligned}$$

양변에 $x=-2, x=2$ 를 각각 대입하면

$$f(-2)=-2a+b, f(2)=2a+b$$

$$\therefore -2a+b=-1, 2a+b=3$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=1$

따라서 구하는 나머지는 $x+1$ 이다.

07-1 ㉡ $3x^2-5x-7$

$f(x)$ 를 $(x^2-1)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-1)(x-3)Q(x) + ax^2+bx+c \\ &= (x+1)(x-1)(x-3)Q(x) + ax^2+bx+c \end{aligned}$$

$(x+1)(x-3)$ 으로 나누어떨어진다.

..... ㉠

$f(x)$ 를 $(x+1)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 나머지 $x+2$ 는 ax^2+bx+c 를 $(x+1)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 나머지와 같으므로

$$ax^2+bx+c=a(x+1)(x-3)+x+2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x-1)(x-3)Q(x) \\ &\quad + a(x+1)(x-3)+x+2 \end{aligned}$$

한편 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 -9 이므로

나머지정리에 의하여 $f(1)=-9$ 에서

$$-4a+3=-9 \quad \therefore a=3$$

따라서 구하는 나머지는

$$3(x+1)(x-3)+x+2=3x^2-5x-7$$

07-2 ㉡ 7

$f(x)$ 를 $(x+1)(x^2-x+1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

나머지 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x) = \frac{(x+1)(x^2-x+1)Q(x) + ax^2+bx+c}{x^2-x+1 \text{로 나누어떨어진다.}} \quad \dots\dots ㉠$$

$f(x)$ 를 x^2-x+1 로 나누었을 때의 나머지 $2x-3$ 은

ax^2+bx+c 를 x^2-x+1 로 나누었을 때의 나머지와 같으므로

$$ax^2+bx+c=a(x^2-x+1)+2x-3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x^2-x+1)Q(x) \\ &\quad + a(x^2-x+1)+2x-3 \end{aligned}$$

한편 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지가 1이므로

나머지정리에 의하여 $f(-1)=1$ 에서

$$3a-5=1 \quad \therefore a=2$$

따라서 $R(x)=2(x^2-x+1)+2x-3=2x^2-1$ 이므로

$$R(2)=2 \times 2^2 - 1 = 7$$

08-1 ㉡ -4

$f(3-x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여

$$f(3-(-1))=f(4)$$

$f(x)$ 를 $(x+1)(x-4)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $-2x+4$ 이므로

$$f(x) = (x+1)(x-4)Q(x) - 2x+4$$

양변에 $x=4$ 를 대입하면

$$f(4) = -2 \times 4 + 4 = -4$$

따라서 구하는 나머지는 -4 이다.

08-2 [답 15]

$(x^2+1)f(x^2+1)$ 을 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여
 $\{(-2)^2+1\}f((-2)^2+1)=5f(5)$
 $f(x)$ 를 $x-5$ 로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 나머지정리에 의하여 $f(5)=3$
 따라서 구하는 나머지는
 $5f(5)=15$

08-3 [답 -2]

$xf(3x+4)$ 를 $3x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여
 $-\frac{2}{3}f\left(3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)+4\right)=-\frac{2}{3}f(2)$
 $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $2x-1$ 이므로
 $f(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+2x-1$
 양변에 $x=2$ 를 대입하면
 $f(2)=2 \times 2-1=3$
 따라서 구하는 나머지는
 $-\frac{2}{3}f(2)=-2$

09-1 [답 3]

$f(x)$ 를 $x+3$ 으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 -2 이므로
 $f(x)=(x+3)Q(x)-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $Q(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 1이므로
 $Q(2)=1$
 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지는 $f(2)$ 이므로 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면
 $f(2)=5Q(2)-2=5 \times 1-2=3$

09-2 [답 1]

$f(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로
 $f(x)=(x+1)Q(x)+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 4이므로 나머지정리에 의하여 $f(1)=4$
 $Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 $Q(1)$ 이므로 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $f(1)=2Q(1)+2$
 $2Q(1)+2=4 \quad \therefore Q(1)=1$

09-3 [답 -1]

$f(x)=x^{12}+x^4-3x^3+2x$ 라 하면 $f(-1)=3$ 이므로
 $x^{12}+x^4-3x^3+2x=(x+1)Q(x)+3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $Q(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는 $Q(1)$ 이므로 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $1+1-3+2=2Q(1)+3 \quad \therefore Q(1)=-1$

10-1 [답 (1) $a=-2, b=-3$ (2) $a=-6, b=8$]

(1) $f(x)$ 가 $x+1, x-2$ 로 각각 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여 $f(-1)=0, f(2)=0$
 $f(-1)=0$ 에서 $1+a-b-2=0$
 $\therefore a-b=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $f(2)=0$ 에서 $16+4a+2b-2=0$
 $\therefore 2a+b=-7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면
 $a=-2, b=-3$
 (2) $f(x)$ 가 x^2+x-2 , 즉 $(x+2)(x-1)$ 로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여 $f(-2)=0, f(1)=0$
 $f(-2)=0$ 에서 $-8-12-2a+b=0$
 $\therefore 2a-b=-20 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $f(1)=0$ 에서 $1-3+a+b=0$
 $\therefore a+b=2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면
 $a=-6, b=8$

10-2 [답 40]

$f(x)$ 가 $x-3$ 을 인수로 가지므로 $f(3)=0$
 $27-36+3+a=0 \quad \therefore a=6$
 $xf(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여
 $-2f(-2)=-2(-8-16-2+6)=40$

10-3 [답 1]

$f(x)=x^{99}-ax^2+bx-1$ 이라 하면 $f(x)$ 는 x^2-1 , 즉 $(x+1)(x-1)$ 로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여
 $f(-1)=0, f(1)=0$
 $f(-1)=0$ 에서 $-1-a-b-1=0$
 $\therefore a+b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $f(1)=0$ 에서 $1-a+b-1=0$
 $\therefore a-b=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1, b=-1$
 $\therefore ab=1$

연습문제

41~43쪽

- 1 $a=3, b=3$ 2 ③ 3 ② 4 ⑤
 5 19 6 $-2x+4$ 7 ②
 8 $-x^2+2x+5$ 9 ① 10 2 11 -2
 12 $a=-9, b=9$ 13 ② 14 $a=-2, b=-1$
 15 ④ 16 4 17 ④ 18 118 19 ④

- 1 $2x+y=1$ 에서
 $y=1-2x$
 이를 $ax+by=x+2y+1$ 에 대입하면
 $ax+b(1-2x)=x+2(1-2x)+1$
 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면
 $(a-2b)x+b=-3x+3$
 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 $a-2b=-3, b=3$
 $\therefore a=3, b=3$
- 2 주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $2=a \quad \therefore a=2$
 양변에 $x=2$ 를 대입하면
 $12=a+b \quad \therefore b=10$
 양변에 $x=3$ 을 대입하면
 $36=a+2b+2c \quad \therefore c=7$
 이때 우변을 전개한 식에서 x^3 의 계수는 d 이므로
 $d=1$
 $\therefore a+b+c+d=2+10+7+1=20$
- 3 ax^3+2x^2+bx+1 을 $(x-1)(x+2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $3x-1$ 이므로
 $ax^3+2x^2+bx+1=(x-1)(x+2)Q(x)+3x-1$
 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $a+2+b+1=2$
 $\therefore a+b=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$
 양변에 $x=-2$ 를 대입하면
 $-8a+8-2b+1=-7$
 $\therefore 4a+b=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면
 $a=3, b=-4$
 $\therefore ab=-12$

- 4 다항식 $2x^3+x^2-x-1$ 을 $x+1$ 로 나누는 조립제법을 뜻에 대하여 연속으로 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ & & -2 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \quad \leftarrow d \\ & & -2 & 3 & \\ \hline -1 & 2 & -3 & 3 & \quad \leftarrow c \\ & & -2 & & \\ \hline & a & \rightarrow 2 & -5 & \leftarrow b \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2x^3+x^2-x-1 &= 2(x+1)^3-5(x+1)^2+3(x+1)-1 \\ &= 2(x+1)^3-5(x+1)^2+3(x+1)-1 \end{aligned}$$

따라서 $a=2, b=-5, c=3, d=-1$ 이므로
 $a-b-c-d=2-(-5)-3-(-1)=5$

- 5 나머지정리에 의하여
 $f(1)=R_1, f(-1)=R_2$
 $R_1=1+a+3=a+4, R_2=1-a+3=-a+4$
 $R_1-R_2=38$ 이므로
 $a+4-(-a+4)=38 \quad \therefore a=19$
- 6 나머지정리에 의하여
 $f(-1)=2, g(-1)=3, f(3)=1, g(3)=-2$
 $f(x)g(x)$ 를 x^2-2x-3 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $f(x)g(x)=(x^2-2x-3)Q(x)+ax+b$
 $= (x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$
 양변에 $x=-1, x=3$ 을 각각 대입하면
 $f(-1)g(-1)=-a+b, f(3)g(3)=3a+b$
 $\therefore -a+b=6, 3a+b=-2$
 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2, b=4$
 따라서 구하는 나머지는 $-2x+4$ 이다.
- 7 나머지정리에 의하여
 $f(0)=5, f(1)=8, f(-1)=4$
 $f(x)$ 를 $x(x-1)(x+1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면
 $f(x)=x(x-1)(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$
 양변에 $x=0, x=1, x=-1$ 을 각각 대입하면
 $f(0)=c, f(1)=a+b+c, f(-1)=a-b+c$
 $c=5, a+b+c=8, a-b+c=4$
 $\therefore a+b=3, a-b=-1$
 두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=2$
 따라서 구하는 나머지는 x^2+2x+5 이다.

- 8 $f(x)$ 를 $(x^2-1)(x-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면
 $f(x) = \frac{(x^2-1)(x-2)Q(x) + ax^2+bx+c}{x^2-1}$ 로 나누어떨어진다. ㉠
 $f(x)$ 를 x^2-1 로 나누었을 때의 나머지 $2x+4$ 는
 ax^2+bx+c 를 x^2-1 로 나누었을 때의 나머지와 같으므로
 $ax^2+bx+c = a(x^2-1) + 2x+4$ ㉡
 ㉡을 ㉠에 대입하면
 $f(x) = (x^2-1)(x-2)Q(x) + a(x^2-1) + 2x+4$
 한편 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 5이므로
 나머지정리에 의하여 $f(2)=5$ 에서
 $3a+8=5 \quad \therefore a=-1$
 따라서 구하는 나머지는
 $-(x^2-1)+2x+4 = -x^2+2x+5$

- 9 $f(x)$ 를 x^2-3x+2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면
 나머지가 $2x-1$ 이므로
 $f(x) = (x^2-3x+2)Q(x) + 2x-1$
 $= (x-1)(x-2)Q(x) + 2x-1$
 양변에 $x=1, x=2$ 를 각각 대입하면
 $f(1)=1, f(2)=3$
 $xf(x-1)$ 을 x^2-5x+6 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$,
 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $xf(x-1) = (x^2-5x+6)Q_1(x) + ax+b$
 $= (x-2)(x-3)Q_1(x) + ax+b$
 양변에 $x=2, x=3$ 을 각각 대입하면
 $2f(1)=2a+b, 3f(2)=3a+b$
 $\therefore 2a+b=2, 3a+b=9$
 두 식을 연립하여 풀면 $a=7, b=-12$
 따라서 구하는 나머지는 $7x-12$ 이다.

- 10 $f(x)-2$ 가 x^2-5x+6 , 즉 $(x-2)(x-3)$ 으로 나누어떨
 어지므로
 $f(2)-2=0, f(3)-2=0$
 $\therefore f(2)=f(3)=2$
 $f(x+2)$ 를 x^2-x 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머
 지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $f(x+2) = (x^2-x)Q(x) + ax+b$
 $= x(x-1)Q(x) + ax+b$
 양변에 $x=0, x=1$ 을 각각 대입하면
 $f(2)=b, f(3)=a+b$
 $\therefore b=2, a+b=2 \quad \therefore a=0, b=2$
 따라서 구하는 나머지는 2이다.

- 11 $f(x) = x^{20} - 2x^{19} + 4x^2 + 1$ 이라 하면 $f(1)=4$ 이므로
 $x^{20} - 2x^{19} + 4x^2 + 1 = (x-1)Q(x) + 4$ ㉠
 $Q(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-1)$ 이므로
 ㉠의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면
 $1+2+4+1 = -2Q(-1)+4 \quad \therefore Q(-1)=-2$

- 12 $f(x-1)$ 이 $x+2$ 로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여
 $f(-2-1)=f(-3)=0$
 또 $f(x+1)$ 이 $x-2$ 로 나누어떨어지므로 인수정리에 의
 하여
 $f(2+1)=f(3)=0$
 $f(-3)=0$ 에서 $-27-9-3a+b=0$
 $\therefore 3a-b=-36$ ㉠
 $f(3)=0$ 에서 $27-9+3a+b=0$
 $\therefore 3a+b=-18$ ㉡
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-9, b=9$

- 13 (가), (나)에서 $x-2, x^2-2$ 는 $f(x)$ 의 인수이므로 $f(x)$ 를
 $(x-2)(x^2-2)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면
 $x^4+px^2+q = (x-2)(x^2-2)Q(x)$
 양변에 $x=2, x^2=2$ 를 각각 대입하면
 $16+4p+q=0, 4+2p+q=0$
 $\therefore 4p+q=-16, 2p+q=-4$
 두 식을 연립하여 풀면 $p=-6, q=8$
 $\therefore p+q=2$

- 14 $\frac{ax+2y+6}{x+by-3} = k$ (k 는 상수)라 하면
 $ax+2y+6 = kx+bky-3k$
 $\therefore (a-k)x + (2-bk)y + 6+3k = 0$
 이 등식이 x, y 에 대한 항등식이므로
 $a-k=0, 2-bk=0, 6+3k=0$
 $\therefore k=-2, a=-2, b=-1$

- 15 주어진 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $3^3 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_6$ ㉠
 양변에 $x=-1$ 을 대입하면
 $1^3 = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_6$ ㉡
 ㉠+㉡을 하면 $28 = 2(a_0 + a_2 + a_4 + a_6)$
 $\therefore a_0 + a_2 + a_4 + a_6 = 14$

- 16 $f(x)$ 를 $x-5$ 로 나누었을 때의 나머지가 4이므로 $f(5)=4$
 이때 $f(3+x)=f(3-x)$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면
 $f(5)=f(1) \quad \therefore f(1)=f(5)=4$

$f(x)$ 를 $(x-1)(x-5)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면
 $f(x)=(x-1)(x-5)Q(x)+ax+b$
 양변에 $x=1, x=5$ 를 각각 대입하면
 $f(1)=a+b, f(5)=5a+b$
 $\therefore a+b=4, 5a+b=4$
 두 식을 연립하여 풀면 $a=0, b=4$
 따라서 구하는 나머지는 4이다.

- 17 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로

$f(x)=(x-1)Q(x)+2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $Q(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$ 라 하면 나머지가 3이므로
 $Q(x)=(x+1)Q'(x)+3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $f(x)=(x-1)\{(x+1)Q'(x)+3\}+2$
 $= (x-1)(x+1)Q'(x)+3x-1$
 따라서 $R(x)=3x-1$ 이므로 $R(3)=8$

- 18 $120=x$ 로 놓고, $x^{25}+x^{15}+x^5$ 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면

$x^{25}+x^{15}+x^5=(x+1)Q(x)+R \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $R=-3$
 $\textcircled{1}$ 에 $x=120, R=-3$ 을 대입하면
 $120^{25}+120^{15}+120^5=121Q(120)-3$
 그런데 $0 \leq (\text{나머지}) < 121$ 이어야 하므로
 $120^{25}+120^{15}+120^5=121Q(120)-121+121-3$
 $= 121\{Q(120)-1\}+118$
 따라서 구하는 나머지는 118이다.

- 19 $P(a)=P(b)=P(c)=0$ 에서 $P(x)$ 는 $x-a, x-b, x-c$ 를 인수로 갖고, 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식
 이므로

$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$
 또 $P(0)=-6$ 이므로
 $-abc=-6 \quad \therefore abc=6$
 이때 a, b, c 는 서로 다른 세 자연수이므로 각각 1, 2, 3 중 하나의 값을 갖는다.
 따라서 $P(x)$ 를 $x-6$ 으로 나누었을 때의 나머지는
 $P(6)=(6-a)(6-b)(6-c)=5 \times 4 \times 3=60$

I-2 02 인수분해

1 인수분해

개념 CHECK

45쪽

- 1 답 (1) $(a-b)(x-y)$ (2) $(ax+1)(x-1)$
 (3) $(3x+2)^2$ (4) $(4y-1)^2$
 (5) $(a+2b)(a-2b)$ (6) $(2x+3y)(2x-3y)$
 (7) $(a+6b)(a-b)$ (8) $(5x+4y)(3x-2y)$
- 2 답 (1) $-2y, x, 2y$ (2) $2x, 2x, 2x, 2x$
 (3) $3x, 3x, 9x^2-3xy+y^2$

문제

46~47쪽

- 01-1 답 (1) $(a-b-2c)^2$ (2) $(2x+3y-1)^2$
 (3) $(x+2y)^3$ (4) $(-2a+3b)^3$
 (5) $(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$
 (6) $(4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2)$
- (1) $a^2+b^2+4c^2-2ab+4bc-4ca$
 $=a^2+(-b)^2+(-2c)^2+2 \times a \times (-b)$
 $+2 \times (-b) \times (-2c)+2 \times (-2c) \times a$
 $= (a-b-2c)^2$
- (2) $4x^2+9y^2+1+12xy-4x-6y$
 $= (2x)^2+(3y)^2+(-1)^2+2 \times 2x \times 3y$
 $+2 \times 3y \times (-1)+2 \times (-1) \times 2x$
 $= (2x+3y-1)^2$
- (3) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$
 $=x^3+3 \times x^2 \times 2y+3 \times x \times (2y)^2+(2y)^3$
 $= (x+2y)^3$
- (4) $-8a^3+36a^2b-54ab^2+27b^3$
 $= (-2a)^3+3 \times (-2a)^2 \times 3b$
 $+3 \times (-2a) \times (3b)^2+(3b)^3$
 $= (-2a+3b)^3$
- (5) $27a^3+8b^3=(3a)^3+(2b)^3$
 $= (3a+2b)\{(3a)^2-3a \times 2b+(2b)^2\}$
 $= (3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$
- (6) $64x^3-125y^3=(4x)^3-(5y)^3$
 $= (4x-5y)\{(4x)^2+4x \times 5y+(5y)^2\}$
 $= (4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2)$

01-2 ㉔ $(a+b-1)(a^2+b^2+1-ab+a+b)$ 또는

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(a+b-1)\{(a-b)^2+(a+1)^2+(b+1)^2\} \\ & a^3+b^3+3ab-1 \\ & =a^3+b^3+(-1)^3-3\times a\times b\times (-1) \\ & =(a+b-1) \\ & \quad \times \{a^2+b^2+(-1)^2-a\times b-b\times (-1)-(-1)\times a\} \\ & =(a+b-1)(a^2+b^2+1-ab+a+b) \\ & =\frac{1}{2}(a+b-1)\{(a-b)^2+(a+1)^2+(b+1)^2\} \end{aligned}$$

02-1 ㉔ (1) $(z+x-y)(z-x+y)$

(2) $(a+3b+c)(a-b+c)$

(3) $(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

(4) $-8xy(x^2+y^2)$

(1) $2xy+z^2-x^2-y^2$

$$=z^2-(x^2-2xy+y^2)$$

$$=z^2-(x-y)^2$$

$$=(z+x-y)(z-x+y)$$

(2) $a^2-3b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$$=(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)-4b^2$$

$$=(a+b+c)^2-(2b)^2$$

$$=(a+b+c+2b)(a+b+c-2b)$$

$$=(a+3b+c)(a-b+c)$$

(3) a^6-b^6

$$=(a^3)^2-(b^3)^2$$

$$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$$

$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$=(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$$

(4) $(x-y)^4-(x+y)^4$

$$=\{(x-y)^2\}^2-\{(x+y)^2\}^2$$

$$=\{(x-y)^2+(x+y)^2\}\{(x-y)^2-(x+y)^2\}$$

$$=\{(x^2-2xy+y^2)+(x^2+2xy+y^2)\}$$

$$\quad \times \{(x^2-2xy+y^2)-(x^2+2xy+y^2)\}$$

$$=(2x^2+2y^2)(-4xy)$$

$$=-8xy(x^2+y^2)$$

02-2 ㉔ (1) $(a+b)(a-b)^2$

(2) $xy(x+y)(x-y-1)$

(1) $a^3+b^3-ab(a+b)$

$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)$$

$$=(a+b)(a^2-2ab+b^2)$$

$$=(a+b)(a-b)^2$$

(2) $-x^2y-xy^2+x^3y-xy^3$

$$=-xy(x+y)+xy(x^2-y^2)$$

$$=-xy(x+y)+xy(x+y)(x-y)$$

$$=xy(x+y)(x-y-1)$$

2 복잡한 식의 인수분해

개념 CHECK

49쪽

1 ㉔ (1) $(x+2)(x-1)$

(2) $(x^2+4)(x+1)(x-1)$

(1) $(x+1)^2-(x+1)-2$

$$=X^2-X-2$$

$$\blacktriangleleft x+1=X$$

$$=(X+1)(X-2)$$

$$=(x+1+1)(x+1-2)$$

$$\blacktriangleleft X=x+1$$

$$=(x+2)(x-1)$$

(2) x^4+3x^2-4

$$=X^2+3X-4$$

$$\blacktriangleleft x^2=X$$

$$=(X+4)(X-1)$$

$$=(x^2+4)(x^2-1)$$

$$\blacktriangleleft X=x^2$$

$$=(x^2+4)(x+1)(x-1)$$

2 ㉔ $(x^2+z)(y-xz)$

$$x^2y-x^3z+yz-xz^2$$

$$=(x^2+z)y-x^3z-xz^2$$

$$=(x^2+z)y-xz(x^2+z)$$

$$=(x^2+z)(y-xz)$$

3 ㉔ $0, x-1, x^2+x-6, x-2$

문제

50~55쪽

03-1 ㉔ (1) $(x-1)(x-3)(x^2-4x-4)$

(2) $(x+1)^2(2x^2+4x+1)$

(3) $(x+2)^2(x^2+4x-6)$

(1) $(x^2-4x-5)(x^2-4x+4)+8$

$$=(X-5)(X+4)+8$$

$$\blacktriangleleft x^2-4x=X$$

$$=X^2-X-12$$

$$=(X+3)(X-4)$$

$$=(x^2-4x+3)(x^2-4x-4)$$

$$\blacktriangleleft X=x^2-4x$$

$$=(x-1)(x-3)(x^2-4x-4)$$

$$\begin{aligned}
 (2) & 2x^2(x+2)^2 + 3x^2 + 6x + 1 \\
 &= 2\{x(x+2)\}^2 + 3x(x+2) + 1 \\
 &= 2X^2 + 3X + 1 \quad \blacktriangleleft x(x+2)=X \\
 &= (2X+1)(X+1) \\
 &= \{2x(x+2)+1\}\{x(x+2)+1\} \quad \blacktriangleleft X=x(x+2) \\
 &= (2x^2+4x+1)(x^2+2x+1) \\
 &= (x+1)^2(2x^2+4x+1) \\
 (3) & (x-1)(x+1)(x+3)(x+5)-9 \\
 &= \{(x-1)(x+5)\}\{(x+1)(x+3)\}-9 \\
 &= (x^2+4x-5)(x^2+4x+3)-9 \\
 &= (X-5)(X+3)-9 \quad \blacktriangleleft x^2+4x=X \\
 &= X^2-2X-24 \\
 &= (X+4)(X-6) \\
 &= (x^2+4x+4)(x^2+4x-6) \quad \blacktriangleleft X=x^2+4x \\
 &= (x+2)^2(x^2+4x-6)
 \end{aligned}$$

03-2 ㉡ -1

$$\begin{aligned}
 & (x^2+3x+2)(x^2-5x+6)-60 \\
 &= (x+2)(x+1)(x-2)(x-3)-60 \\
 &= \{(x+2)(x-3)\}\{(x+1)(x-2)\}-60 \\
 &= (x^2-x-6)(x^2-x-2)-60 \\
 &= (X-6)(X-2)-60 \quad \blacktriangleleft x^2-x=X \\
 &= X^2-8X-48 \\
 &= (X+4)(X-12) \\
 &= (x^2-x+4)(x^2-x-12) \quad \blacktriangleleft X=x^2-x \\
 &= (x^2-x+4)(x+3)(x-4) \\
 &\text{따라서 } a=-1, b=4, c=-4 \text{이므로} \\
 &a+b+c=-1
 \end{aligned}$$

04-1 ㉡ (1) $(x^2+5)(x+2)(x-2)$

$$(2) (2x^2+3)(x+1)(x-1)$$

$$(3) (x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$$

$$(4) (x^2+x+2)(x^2-x+2)$$

$$\begin{aligned}
 (1) & x^4+x^2-20=X^2+X-20 \quad \blacktriangleleft x^2=X \\
 &= (X+5)(X-4) \\
 &= (x^2+5)(x^2-4) \quad \blacktriangleleft X=x^2 \\
 &= (x^2+5)(x+2)(x-2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & 2x^4+x^2-3=2X^2+X-3 \quad \blacktriangleleft x^2=X \\
 &= (2X+3)(X-1) \\
 &= (2x^2+3)(x^2-1) \quad \blacktriangleleft X=x^2 \\
 &= (2x^2+3)(x+1)(x-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & x^4-6x^2+1=(x^4-2x^2+1)-4x^2 \\
 &= (x^2-1)^2-(2x)^2 \quad \blacktriangleleft A^2-B^2 \text{ 꼴} \\
 &= (x^2+2x-1)(x^2-2x-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) & x^4+3x^2+4=(x^4+4x^2+4)-x^2 \\
 &= (x^2+2)^2-x^2 \quad \blacktriangleleft A^2-B^2 \text{ 꼴} \\
 &= (x^2+x+2)(x^2-x+2)
 \end{aligned}$$

04-2 ㉡ -48

$$\begin{aligned}
 & x^4-x^2y^2+16y^4 \\
 &= (x^4+8x^2y^2+16y^4)-9x^2y^2 \\
 &= (x^2+4y^2)^2-(3xy)^2 \quad \blacktriangleleft A^2-B^2 \text{ 꼴} \\
 &= (x^2+3xy+4y^2)(x^2-3xy+4y^2) \\
 &\text{따라서 } a=4, b=-3, c=4 \text{이므로 } abc=-48
 \end{aligned}$$

05-1 ㉡ (1) $(2y+1)(x+y-1)$

$$(2) (a-b)(a^2+b^2+c^2)$$

$$(3) (x+2y+1)(x+2y-5)$$

$$(4) (a+b)(b+c)(c+a)$$

(1) 주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}
 2y^2+2xy+x-y-1 &= (2y+1)x + (2y^2-y-1) \\
 &= (2y+1)x + (2y+1)(y-1) \\
 &= (2y+1)(x+y-1)
 \end{aligned}$$

(2) 주어진 식을 c 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}
 a^3-a^2b+ab^2+ac^2-b^3-bc^2 \\
 &= (a-b)c^2+a^3-a^2b+ab^2-b^3 \\
 &= (a-b)c^2+a^2(a-b)+b^2(a-b) \\
 &= (a-b)(a^2+b^2+c^2)
 \end{aligned}$$

(3) 주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}
 x^2+4y^2+4xy-4x-8y-5 \\
 &= x^2+(4y-4)x+(4y^2-8y-5) \\
 &= x^2+4(y-1)x+(2y+1)(2y-5) \\
 &= (x+2y+1)(x+2y-5)
 \end{aligned}$$

(4) 주어진 식을 a 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}
 a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc \\
 &= a^2b+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+2abc \\
 &= (b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2 \\
 &= (b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c) \\
 &= (b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\} \\
 &= (b+c)(a+b)(a+c)=(a+b)(b+c)(c+a)
 \end{aligned}$$

05-2 ㉡ -3

주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned}
 x^2+4xy+3y^2+ax-7y+2 \\
 &= x^2+(4y+a)x+(3y^2-7y+2) \\
 &= x^2+(4y+a)x+(y-2)(3y-1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

①이 x, y 에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되므로

$$4y+a=(y-2)+(3y-1) \quad \therefore a=-3$$

06-1 [답] (1) $(x+3)(x-1)^2$

(2) $(x-1)(x+2)(x-3)$

(3) $(x+2)(x+1)(x-1)^2$

(4) $(x-1)(x+1)(2x-1)(x+3)$

(1) $f(x)=x^3+x^2-5x+3$ 이라 하면 $f(1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -5 & 3 \\ & & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3+x^2-5x+3 &= (x-1)(x^2+2x-3) \\ &= (x+3)(x-1)^2 \end{aligned}$$

(2) $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$ 이라 하면 $f(1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^3-2x^2-5x+6 &= (x-1)(x^2-x-6) \\ &= (x-1)(x+2)(x-3) \end{aligned}$$

(3) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-x+2$ 라 하면 $f(1)=0$,

$f(-1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ & & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ & & -1 & -1 & 2 & \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^4+x^3-3x^2-x+2 &= (x-1)(x+1)(x^2+x-2) \\ &= (x+2)(x+1)(x-1)^2 \end{aligned}$$

(4) $f(x)=2x^4+5x^3-5x^2-5x+3$ 이라 하면 $f(1)=0$,

$f(-1)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & 5 & -5 & -5 & 3 \\ & & 2 & 7 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 7 & 2 & -3 & 0 \\ & & -2 & -5 & 3 & \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2x^4+5x^3-5x^2-5x+3 &= (x-1)(x+1)(2x^2+5x-3) \\ &= (x-1)(x+1)(2x-1)(x+3) \end{aligned}$$

06-2 [답] $(x-1)(x+1)(x^2+2x+3)$

$f(x)$ 가 $x-1$, $x+1$ 을 인수로 가지므로

$f(1)=0$, $f(-1)=0$

$f(1)=0$ 에서

$1+a+b-2-3=0$

$\therefore a+b=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$f(-1)=0$ 에서

$1-a+b+2-3=0$

$\therefore a-b=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=2$

따라서 $f(x)=x^4+2x^3+2x^2-2x-3$ 이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & 2 & -2 & -3 \\ & & 1 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 & 3 & 0 \\ & & -1 & -2 & -3 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^4+2x^3+2x^2-2x-3 &= (x-1)(x+1)(x^2+2x+3) \end{aligned}$$

07-1 [답] (1) $\frac{5}{4}$ (2) 52

(1) $x^2+2xy+y^2-x^2y-xy^2$

$= (x+y)^2 - xy(x+y)$

$= (x+y)(x+y-xy) \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$x+y$, xy 의 값을 구하면

$x+y = \frac{1+\sqrt{2}}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2} = 1$

$xy = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \times \frac{1-\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{4}$

이 두 식을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$(x+y)(x+y-xy) = 1 \times \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$

(2) $10^2-9^2+8^2-7^2+6^2-5^2+4^2-3^2$

$= (10+9)(10-9) + (8+7)(8-7)$

$+ (6+5)(6-5) + (4+3)(4-3)$

$= 10+9+8+7+6+5+4+3=52$

07-2 [답] 16

$a-b=4$, $b-c=-2$ 를 변끼리 더하면 $a-c=2$

주어진 식을 a 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$ab^2-a^2b+bc^2-b^2c+ca^2-c^2a$

$= -(b-c)a^2 + (b^2-c^2)a - b^2c + bc^2$

$= -(b-c)a^2 + (b+c)(b-c)a - bc(b-c)$

$= -(b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\}$

$= -(b-c)(a-b)(a-c)$

$= -(-2) \times 4 \times 2 = 16$

08-1 [답] 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형

주어진 조건에서 좌변을 c 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} & a(a^2+ab-c^2)+b(b^2+ab-c^2) \\ &= a^3+a^2b-ac^2+b^3+ab^2-bc^2 \\ &= -(a+b)c^2+a^3+a^2b+b^3+ab^2 \\ &= -(a+b)c^2+a^2(a+b)+b^2(a+b) \\ &= (a+b)(a^2+b^2-c^2)=0 \end{aligned}$$

이때 a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $a+b>0$

$$\therefore a^2+b^2-c^2=0$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

08-2 [답] 정삼각형

$$\begin{aligned} & a^3+b^3+c^3-3abc \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0 \end{aligned}$$

이때 a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로

$$a+b+c>0$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0 \text{이므로}$$

$$a=b, b=c, c=a$$

$$\therefore a=b=c$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 정삼각형이다.

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } & a^6-a^4+2a^3-2a^2 \\ &= a^4(a^2-1)+2a^2(a-1) \\ &= a^4(a+1)(a-1)+2a^2(a-1) \\ &= a^2(a-1)\{a^2(a+1)+2\} \\ &= a^2(a-1)(a^3+a^2+2) \\ \text{ㄹ. } & x^3-8y^3+6xy+1 \\ &= x^3+(-2y)^3+1^3-3 \times x \times (-2y) \times 1 \\ &= (x-2y+1)\{x^2+(-2y)^2+1^2 \\ &\quad -x \times (-2y)-(-2y) \times 1-1 \times x\} \\ &= (x-2y+1)(x^2+4y^2+1+2xy+2y-x) \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

$$\begin{aligned} 2 \quad & a^2b-ab^2-a^3b+ab^3 \\ &= ab(a-b)-ab(a^2-b^2) \\ &= ab(a-b)-ab(a-b)(a+b) \\ &= ab(a-b)(1-a-b) \\ &= -ab(a-b)(a+b-1) \end{aligned}$$

따라서 주어진 다항식의 인수인 것은 ③이다.

$$\begin{aligned} 3 \quad & 9a^2-4b^2+6a+1=(9a^2+6a+1)-4b^2 \\ &= (3a+1)^2-(2b)^2 \\ &= (3a+1+2b)(3a+1-2b) \\ &= (3a+2b+1)(3a-2b+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad & (x^2-2x)^2-2x^2+4x-3 \\ &= (x^2-2x)^2-2(\underline{x^2-2x})-3 \\ &= X^2-2X-3 \quad \leftarrow x^2-2x=X \\ &= (X-3)(X+1) \\ &= (x^2-2x-3)(x^2-2x+1) \quad \leftarrow X=x^2-2x \\ &= (x-3)(x+1)(x-1)^2 \\ \therefore & a=-3, b=1, c=-1 \text{ 또는 } a=1, b=-3, c=-1 \\ \therefore & a+b+c=-3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad & x^4-10x^2+9=X^2-10X+9 \quad \leftarrow x^2=X \\ &= (X-1)(X-9) \\ &= (x^2-1)(x^2-9) \quad \leftarrow X=x^2 \\ &= (x+1)(x-1)(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

따라서 주어진 다항식의 인수가 아닌 것은 ③이다.

$$\begin{aligned} 6 \quad & x^4+5x^2+9=(x^4+6x^2+9)-x^2 \\ &= (x^2+3)^2-x^2 \quad \leftarrow A^2-B^2 \text{ 꼴} \\ &= (x^2+x+3)(x^2-x+3) \end{aligned}$$

따라서 $a=3, b=-1, c=3$ 이므로 $abc=-9$

연습문제

56~58쪽

- 1 ③ 2 ③ 3 $(3a+2b+1)(3a-2b+1)$
 4 -3 5 ③ 6 ① 7 ①
 8 $(x+1)(x-3)(x^2+x+1)$ 9 ② 10 14
 11 ④ 12 ④ 13 9 14 -9 15 ⑤
 16 31 17 ⑤ 18 $a=16, b=10, c=10$

$$\begin{aligned} 1 \quad & \text{ㄱ. } ax-ay+2bx-2by+cx-cy \\ &= a(x-y)+2b(x-y)+c(x-y) \\ &= (x-y)(a+2b+c) \\ & \text{ㄴ. } x^2+2xy+y^2-6x-6y+9 \\ &= (x+y)^2-6(x+y)+9 \\ &= (x+y-3)^2 \end{aligned}$$

7 주어진 식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$2x^2 + xy - 3y^2 + kx + 5y + 2$$

$$= 2x^2 + (y+k)x - 3y^2 + 5y + 2$$

$$= 2x^2 + (y+k)x + (3y+1)(-y+2)$$

이 식이 x, y 에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되므로

$$y+k=2(-y+2)+(3y+1) \quad \therefore k=5$$

8 $f(x)=x^4-x^3+ax^2+bx-3$ 이라 하면 $f(x)$ 가 $x+1$ 로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여 $f(-1)=0$

$$1+1+a-b-3=0 \quad \therefore a-b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 -12 이므로 나머지정리에 의하여 $f(1)=-12$

$$1-1+a+b-3=-12 \quad \therefore a+b=-9 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=-4, b=-5$

따라서 $f(x)=x^4-x^3-4x^2-5x-3$ 이고 $f(-1)=0$,

$f(3)=0$ 이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -1 & -4 & -5 & -3 \\ & & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & -3 & 0 \\ & & 3 & 3 & 3 & \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\therefore x^4-x^3-4x^2-5x-3=(x+1)(x-3)(x^2+x+1)$$

9 직원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면 부피가 $(x^3+x^2-5x+3)\pi$ 이므로

$$\pi r^2 h = (x^3+x^2-5x+3)\pi$$

$$r^2 h = x^3+x^2-5x+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

다항식 x^3+x^2-5x+3 을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -5 & 3 \\ & & 1 & 2 & -3 \\ & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\therefore x^3+x^2-5x+3=(x-1)(x^2+2x-3)$$

$$=(x-1)^2(x+3)$$

$$\textcircled{1}\text{에서 } r^2 h = (x-1)^2(x+3)$$

$$\therefore r=x-1, h=x+3 \quad (\because x>1)$$

따라서 구하는 직원기둥의 겉넓이는

$$2\pi r^2 + 2\pi r h = 2r(r+h)\pi$$

$$= 2(x-1)(2x+2)\pi = 4(x^2-1)\pi$$

$$10 \quad 12^4-7^4=(12^2-7^2)(12^2+7^2)$$

$$=(12-7)(12+7)(12^2+7^2)$$

$$=5 \times 19 \times 193$$

따라서 $a=5, b=19$ 이므로 $b-a=14$

11 $100=x$ 로 놓으면

$$98 \times 99 \times 100 \times 101 + 1$$

$$= (x-2)(x-1)x(x+1) + 1$$

$$= \{(x-2)(x+1)\} \{x(x-1)\} + 1$$

$$= (x^2-x-2)(x^2-x) + 1$$

$$= (X-2)X + 1 \quad \blacktriangleleft x^2-x=X$$

$$= X^2-2X+1$$

$$= (X-1)^2$$

$$= (x^2-x-1)^2 \quad \blacktriangleleft X=x^2-x$$

$$= (100^2-100-1)^2 \quad \blacktriangleleft x=100$$

$$= 9899^2$$

$$\therefore \sqrt{98 \times 99 \times 100 \times 101 + 1} = 9899$$

12 $a+b=4, a+c=3$ 을 변끼리 빼면

$$b-c=1$$

$$\therefore ab(a+b)-ac(a+c)+bc(b-c)$$

$$= a^2b+ab^2-a^2c-ac^2+b^2c-bc^2$$

$$= (b-c)a^2 + (b^2-c^2)a + b^2c-bc^2$$

$$= (b-c)a^2 + (b-c)(b+c)a + bc(b-c)$$

$$= (b-c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$$

$$= (b-c)(a+b)(a+c)$$

$$= 1 \times 4 \times 3 = 12$$

13 $a^3+b^3+c^3=3abc$ 에서

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

$$\therefore a+b+c=0 \text{ 또는 } a=b=c$$

그런데 $a+b+c \neq 0$ 이므로 $a=b=c$

$$\therefore \frac{2b}{a} + \frac{3c}{b} + \frac{4a}{c} = 2+3+4=9$$

14 $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)-a$

$$= \{(x+1)(x-4)\} \{(x-1)(x-2)\} - a$$

$$= (x^2-3x-4)(x^2-3x+2) - a$$

$$= (X-4)(X+2) - a \quad \blacktriangleleft x^2-3x=X$$

$$= X^2-2X-8-a$$

$$= (X-1)^2-a-9$$

이 식이 완전제곱식이 되려면

$$-a-9=0$$

$$\therefore a=-9$$

$$\begin{aligned}
 15 \quad x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 &= x^2 \left(x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \\
 &= x^2 \left\{ x^2 + \frac{1}{x^2} - 5 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 6 \right\} \\
 &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 5 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 4 \right\} \\
 &= x^2 \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right) \left(x + \frac{1}{x} - 4 \right) \\
 &= (x^2 - x + 1)(x^2 - 4x + 1)
 \end{aligned}$$

따라서 두 이차식의 합은

$$(x^2 - x + 1) + (x^2 - 4x + 1) = 2x^2 - 5x + 2$$

16 $31=x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}
 \frac{31^4 + 31^2 + 1}{31^2 + 31 + 1} &= \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \\
 &= \frac{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}{x^2 + x + 1} \\
 &= x^2 - x + 1 = (x-1)^2 + x \\
 &= (31-1)^2 + 31 = 30^2 + 31 \quad \blacktriangleleft x=31
 \end{aligned}$$

$$\therefore k=31$$

17 다항식 $n^3 + 7n^2 + 14n + 8$ 을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|ccc}
 -1 & 1 & 7 & 14 & 8 \\
 & & -1 & -6 & -8 \\
 \hline
 & 1 & 6 & 8 & 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore n^3 + 7n^2 + 14n + 8 &= (n+1)(n^2 + 6n + 8) \\
 &= (n+1)(n+2)(n+4)
 \end{aligned}$$

가로의 길이는 $(n+1)(n+2)(n+4)$

또 세로의 길이는 $n^2 + 4n + 3 = (n+1)(n+3)$

따라서 한 변의 길이가 $n+1$ 인 정사각형 모양의 타일이 가로에 $(n+2)(n+4)$ 개, 세로에 $(n+3)$ 개씩 놓인다.

따라서 필요한 타일의 개수는 $(n+2)(n+3)(n+4)$

18 (가)에서

$$\begin{aligned}
 b^2 + ca - ba - c^2 &= ca - ba + b^2 - c^2 \\
 &= -(b-c)a + (b-c)(b+c) \\
 &= (b-c)(b+c-a) = 0
 \end{aligned}$$

이때 a, b, c 는 삼각형의 세 변의 길이이므로 $b+c > a$

$$\therefore b-c=0$$

즉, $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

한편 (나)에서 $3b+5c=5a$ 이므로 $8b=5a$ ㉠

또 (다)에서 삼각형의 둘레의 길이는 36이므로

$$a+b+c=36 \quad \therefore a+2b=36 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=16, b=10$

$b=c$ 이므로 $c=10$

II-1 01 복소수의 뜻과 사칙연산

1 복소수의 뜻과 사칙연산

개념 CHECK

61쪽

1 답 허수: ㄱ, ㄴ, ㄷ, 순허수: ㄴ

2 답 (1) $x=-5, y=2$ (2) $x=1, y=3$

3 답 (1) $4-2i$ (2) $-1-\sqrt{5}i$ (3) $3i$ (4) -7

문제

62~65쪽

01-1 답 (1) $-5-2i$ (2) $14-8i$ (3) $-2-\sqrt{3}i$ (4) $3+3i$

$$\begin{aligned}
 (1) (2-3i)-(7-i) &= 2-3i-7+i \\
 &= -5-2i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) (2-3i)(4+2i) &= 8+4i-12i-6i^2 \\
 &= 8+4i-12i+6 \\
 &= 14-8i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \frac{2(1+\sqrt{3}i)}{1-\sqrt{3}i} + \frac{2\sqrt{3}-i}{i} \\
 &= \frac{2(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} + \frac{(2\sqrt{3}-i)i}{i^2} \\
 &= \frac{2(1+2\sqrt{3}i+3i^2)}{1-3i^2} + \frac{2\sqrt{3}i-i^2}{-1} \\
 &= \frac{2(-2+2\sqrt{3}i)}{4} - 2\sqrt{3}i - 1 \\
 &= -1+\sqrt{3}i-2\sqrt{3}i-1 = -2-\sqrt{3}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) (2+i)^2 + \frac{2-i}{1+2i} &= 4+4i+i^2 + \frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} \\
 &= 3+4i + \frac{2-4i-i+2i^2}{1-4i^2} \\
 &= 3+4i + \frac{-5i}{5} \\
 &= 3+4i-i = 3+3i
 \end{aligned}$$

01-2 답 30

$$\begin{aligned}
 (1+2i)(\overline{2i+3}) + \frac{2i}{1-i} \\
 &= (1+2i)(3-2i) + \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\
 &= 3-2i+6i-4i^2 + \frac{2i+2i^2}{1-i^2} \\
 &= 7+4i+i-1 \\
 &= 6+5i
 \end{aligned}$$

따라서 $a=6, b=5$ 이므로 $ab=30$

01-3 **답** -2

$$\frac{5}{2-i} = \frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{10+5i}{4-i^2} = 2+i \text{이므로}$$

$$(2+i) \odot (3-2i) = (2+i) + (3-2i) + (2+i)(3-2i)$$

$$= 5-i+6-4i+3i-2i^2$$

$$= 13-2i$$

따라서 허수부분은 -2이다.

02-1 **답** (1) $-\frac{1}{3}$ (2) 1

(1) $(1-3i)(x-i) = (x-3) + (-1-3x)i$

이 복소수가 실수이려면

$$-1-3x=0 \quad \therefore x = -\frac{1}{3}$$

(2) $(1+i)x^2 - (4+5i)x + 3+6i$
 $= (x^2-4x+3) + (x^2-5x+6)i$

이 복소수가 순허수이려면

$$x^2-4x+3=0, \quad x^2-5x+6 \neq 0$$

(i) $x^2-4x+3=0$ 에서 $(x-1)(x-3)=0$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

(ii) $x^2-5x+6 \neq 0$ 에서 $(x-2)(x-3) \neq 0$

$$\therefore x \neq 2, x \neq 3$$

(i), (ii)에 의하여 $x=1$

02-2 **답** 1

$$z = i(x+i)^2 = -2x + (x^2-1)i$$

복소수 z 가 순허수가 되려면 $-2x=0, x^2-1 \neq 0$

$$\therefore x=0, x \neq -1, x \neq 1 \quad \therefore \alpha=0$$

이때 $z = -i$ 이므로 $\beta = -i$

$$\therefore \alpha^2 - \beta^2 = 0 - (-i)^2 = -(-1) = 1$$

02-3 **답** $-\frac{3}{2}, 0$

$$z = 3(k+i) - k(1-i)^2 = 3k + (2k+3)i$$

z^2 이 실수이려면 z 는 실수 또는 순허수이어야 하므로

$$2k+3=0 \text{ 또는 } 3k=0$$

$$\therefore k = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } k=0$$

03-1 **답** (1) $x=-2, y=4$ (2) $x=3, y=1$

(1) $(1+i)x + (1-i)y = 2-6i$ 에서

$$(x+y) + (x-y)i = 2-6i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x+y=2, \quad x-y=-6$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=-2, \quad y=4$$

(2) $\frac{x}{1+i} + \frac{y}{1-i} = \frac{5}{2+i}$ 에서

$$\frac{x(1-i) + y(1+i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$

$$\frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}i = 2-i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{x+y}{2} = 2, \quad \frac{y-x}{2} = -1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=3, \quad y=1$$

03-2 **답** $x=-2, y=3$

$$\overline{1+4i} = 1-4i \text{이므로}$$

$$(x+i)(1-4i) = 2+3yi \text{에서}$$

$$x-4xi+i+4=2+3yi$$

$$(x+4) + (-4x+1)i = 2+3yi$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x+4=2, \quad -4x+1=3y$$

$$\therefore x=-2, \quad y=3$$

04-1 **답** (1) $-\frac{2}{3}$ (2) $1-2i$

(1) $x+y = (1+\sqrt{2}i) + (1-\sqrt{2}i) = 2$

$$xy = (1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i) = 1-2i^2 = 3$$

$$\therefore \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy}$$

$$= \frac{2^2 - 2 \times 3}{3} = -\frac{2}{3}$$

(2) $x = \frac{5}{2-i} = \frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)} = 2+i$

즉, $x-2=i$ 이므로 양변을 제곱하면

$$x^2-4x+4 = -1 \quad \therefore x^2-4x+5=0$$

$$\therefore x^3-4x^2+3x+5 = x(x^2-4x+5) - 2x+5$$

$$= -2x+5$$

$$= -2(2+i)+5$$

$$= 1-2i$$

04-2 **답** 2

$$x = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

즉, $2x+1=\sqrt{3}i$ 이므로 양변을 제곱하면

$$4x^2+4x+1 = -3 \quad \therefore x^2+x+1=0$$

$$\therefore x^4+x^3-x+1 = x^2(x^2+x+1) - x^2-x+1$$

$$= -x^2-x+1$$

$$= -(x^2+x+1)+2$$

$$= 2$$

05-1 [답] 13

$$\begin{aligned} \alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta} &= \alpha(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) - \beta(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \\ &= (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) \\ &= (\alpha - \beta)(\overline{\alpha - \beta}) \end{aligned}$$

이때 $\alpha - \beta = 2 + 3i$ 이므로 $\overline{\alpha - \beta} = 2 - 3i$

$$\therefore (\alpha - \beta)(\overline{\alpha - \beta}) = (2 + 3i)(2 - 3i) = 13$$

05-2 [답] $8 + 5i$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = 1 + 2i \text{이므로}$$

$$z_1 + z_2 = 1 - 2i$$

$$\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2} = 2 + i \text{이므로}$$

$$z_1 z_2 = 2 - i$$

$$\begin{aligned} \therefore (z_1 - 3)(z_2 - 3) &= z_1 z_2 - 3(z_1 + z_2) + 9 \\ &= 2 - i - 3(1 - 2i) + 9 \\ &= 8 + 5i \end{aligned}$$

05-3 [답] $-i$

$$\alpha\bar{\alpha} = 1 \text{에서 } \bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}, \beta\bar{\beta} = 1 \text{에서 } \bar{\beta} = \frac{1}{\beta}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} &= \bar{\alpha} + \bar{\beta} = \overline{\alpha + \beta} \\ &= \bar{-i} = -i \end{aligned}$$

06-1 [답] i

$$z = a + bi \text{ (} a, b \text{는 실수)라 하면 } \bar{z} = a - bi$$

이를 $(1+i)z + 3i\bar{z} = 2+i$ 에 대입하면

$$(1+i)(a+bi) + 3i(a-bi) = 2+i$$

$$(a+2b) + (4a+b)i = 2+i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a + 2b = 2, 4a + b = 1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 0, b = 1$

따라서 구하는 복소수 z 는 i 이다.

06-2 [답] $-2+i, 2+i$

$$z = a + bi \text{ (} a, b \text{는 실수)라 하면 } \bar{z} = a - bi$$

$$z - \bar{z} = 2i \text{에서 } (a+bi) - (a-bi) = 2i$$

$$2bi = 2i \quad \therefore b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$z\bar{z} = 5 \text{에서 } (a+bi)(a-bi) = 5$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } a^2 + 1 = 5, a^2 = 4 \quad \therefore a = \pm 2$$

따라서 구하는 복소수 z 는 $-2+i, 2+i$ 이다.

06-3 [답] $-1-2i, 3-2i$

$$z = a + bi \text{ (} a, b \text{는 실수)라 하면 } \bar{z} = a - bi$$

주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned} z(\bar{z} - 2) &= z\bar{z} - 2z \\ &= (a+bi)(a-bi) - 2(a+bi) \\ &= (a^2 + b^2 - 2a) - 2bi \end{aligned}$$

따라서 주어진 등식은 $(a^2 + b^2 - 2a) - 2bi = 7 + 4i$ 이므로
복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2 + b^2 - 2a = 7, -2b = 4$$

즉, $b = -2$ 이므로 이를 $a^2 + b^2 - 2a = 7$ 에 대입하면

$$a^2 - 2a - 3 = 0, (a+1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 3$$

따라서 구하는 복소수 z 는 $-1-2i, 3-2i$ 이다.

3 i 의 거듭제곱, 음수의 제곱근

개념 CHECK

69쪽

$$1 \quad \text{[답]} (1) i \quad (2) 1 \quad (3) -1$$

$$2 \quad \text{[답]} (1) 2\sqrt{10}i \quad (2) -4 \quad (3) -\frac{6}{5}i$$

문제

70~72쪽

07-1 [답] (1) $1+i$ (2) $-1-i$ (3) i (4) 256

$$\begin{aligned} (1) & 1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{81} \\ &= 1 + (i + i^2 + i^3 + i^4) + i^4(i + i^2 + i^3 + i^4) \\ & \quad + \dots + i^{76}(i + i^2 + i^3 + i^4) + i^{80} \times i \\ &= 1 + (i - 1 - i + 1) + (i - 1 - i + 1) \\ & \quad + \dots + (i - 1 - i + 1) + i \\ &= 1 + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \dots + \frac{1}{i^{102}} \\ &= \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} \right) + \frac{1}{i^4} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} \right) \\ & \quad + \dots + \frac{1}{i^{96}} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} \right) + \frac{1}{i^{100}} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 \right) + \left(\frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 \right) \\ & \quad + \dots + \left(\frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 \right) + \left(\frac{1}{i} - 1 \right) \\ &= -1 - i \end{aligned}$$

$$(3) \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$$\therefore \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{123} = (-i)^{123} = \{(-i)^4\}^{30} \times (-i)^3$$

$$= 1 \times i = i$$

$$(4) (1+i)^2 = 2i \text{ 이므로}$$

$$(1+i)^{16} = \{(1+i)^2\}^8 = (2i)^8 = 2^8 i^8 = 256$$

07-2 [답] 51-50i

$$1+2i+3i^2+4i^3+\cdots+100i^{99}+101i^{100}$$

$$= 1+(2i-3-4i+5)+(6i-7-8i+9)$$

$$+\cdots+(98i-99-100i+101)$$

$$= 1+(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)$$

$$= 1+25(2-2i)=51-50i$$

07-3 [답] 8

$$z^2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2i}{2} = i \text{ 이므로}$$

$$i^4 = (z^2)^4 = z^8 = 1$$

따라서 $z^n = 1$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 8이다.

08-1 [답] -1

$$\sqrt{-3}\sqrt{-12} + \sqrt{-2}\sqrt{2} + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}} + \frac{\sqrt{-50}}{\sqrt{-2}}$$

$$= -\sqrt{36} + \sqrt{-4} - \sqrt{-4} + \sqrt{25} = -6+5 = -1$$

다른 풀이

$$\sqrt{-3}\sqrt{-12} + \sqrt{-2}\sqrt{2} + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}} + \frac{\sqrt{-50}}{\sqrt{-2}}$$

$$= \sqrt{3i}\sqrt{12i} + \sqrt{2i}\sqrt{2} + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3i}} + \frac{\sqrt{50i}}{\sqrt{2i}}$$

$$= \sqrt{36i^2} + 2i + \frac{\sqrt{4}}{i} + \sqrt{25}$$

$$= -6+2i-2i+5 = -1$$

08-2 [답] 6

$$(\sqrt{5}+\sqrt{-5})(2\sqrt{5}-\sqrt{-5}) + \sqrt{-3}\sqrt{-12} + \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{-7}}$$

$$= 2\sqrt{25} - \sqrt{-25} + 2\sqrt{-25} + \sqrt{25} - \sqrt{36} - \sqrt{-4}$$

$$= 10-5i+10i+5-6-2i=9+3i$$

따라서 $9+3i=a+bi$ 이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a=9, b=3 \quad \therefore a-b=6$

08-3 [답] 0

$$\frac{\sqrt{2a}\sqrt{-2a} + \sqrt{-2a}\sqrt{-2a}}{2a} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-a}} + \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{(-a)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{-4a^2} - \sqrt{4a^2}}{2a} - \sqrt{-1} + \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2}}$$

$$= \frac{2ai-2a}{2a} - i + 1 = (i-1) - i + 1 = 0$$

09-1 [답] -b

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{ 이므로}$$

$$a < 0, b < 0 \quad \therefore a+b < 0$$

$$\therefore \sqrt{(a+b)^2} - \sqrt{a^2} = |a+b| - |a|$$

$$= -(a+b) - (-a) = -b$$

09-2 [답] -a-c

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ 이므로 } a < 0, b > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑦에서 $ab < 0$ 이고 $abc > 0$ 이므로 $c < 0$

$$b > 0, c < 0 \text{ 이므로 } b-c > 0$$

$$\therefore |a| - |b| + \sqrt{(b-c)^2} = -a-b + |b-c|$$

$$= -a-b + (b-c)$$

$$= -a-c$$

09-3 [답] 3

$$\frac{\sqrt{4-a}}{\sqrt{1-a}} = -\sqrt{\frac{4-a}{1-a}} \text{ 이므로}$$

(i) $1-a < 0, 4-a > 0$ 인 경우

$$a-1 > 0, a-4 < 0$$

$$\therefore |a-1| + |a-4| = (a-1) - (a-4) = 3$$

(ii) $4-a = 0, 1-a \neq 0$ 인 경우

$$a=4$$

$$\therefore |a-1| + |a-4| = 3+0 = 3$$

(i), (ii)에 의하여 $|a-1| + |a-4| = 3$

연습문제

73~75쪽

1 ⑤	2 ④	3 -1	4 ⑤	5 ①
6 ②	7 -i	8 $-\frac{1}{3}$	9 ⑤	
10 $-\sqrt{3}-i, \sqrt{3}-i$	11 ④	12 -2	13 $-3\sqrt{5}i$	
14 $a-c$	15 ①	16 ③	17 -2	18 ③

1 ⑤ $a=1, b=i$ 이면 $a+bi=1+i^2=1-1=0$

2 ① $3i-(2+5i)=3i-2-5i=-2-2i$

② $(1+3i)-(-2+i)=1+3i+2-i=3+2i$

③ $(4-i)(-2+3i)=-8+12i+2i+3=-5+14i$

⑤ $\frac{1-2i}{1-i} = \frac{(1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i-2i+2}{2} = \frac{3-i}{2}$

- 3 $z=(a+2i)(1+3i)+a(-4+ai)$
 $=-3a-6+(a^2+3a+2)i$
 z^2 이 양의 실수이려면 z 는 실수이고 $z \neq 0$ 이어야 하므로
 $a^2+3a+2=0, -3a-6 \neq 0$
 (i) $a^2+3a+2=0$ 에서 $(a+2)(a+1)=0$
 $\therefore a=-2$ 또는 $a=-1$
 (ii) $-3a-6 \neq 0$ 에서 $a \neq -2$
 (i), (ii)에 의하여 $a=-1$

- 4 $\frac{x}{1-i} + \frac{y}{1+i} = -3+2i$ 에서
 $\frac{x(1+i)+y(1-i)}{(1-i)(1+i)} = -3+2i$
 $\frac{(x+y)+(x-y)i}{2} = -3+2i$
 $\therefore (x+y)+(x-y)i = -6+4i$
 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $x+y=-6, x-y=4$
 두 식을 연립하여 풀면
 $x=-1, y=-5 \quad \therefore xy=5$

- 5 $x+y = \frac{1+\sqrt{7}i}{2} + \frac{1-\sqrt{7}i}{2} = 1$
 $xy = \frac{1+\sqrt{7}i}{2} \times \frac{1-\sqrt{7}i}{2} = 2$
 $\therefore \frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y} = \frac{x^3+y^3}{xy} = \frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$
 $= \frac{1^3-3 \times 2 \times 1}{2} = -\frac{5}{2}$

- 6 $x = \frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+3i}{2}$
 즉, $2x+1=3i$ 이므로 양변을 제곱하면
 $4x^2+4x+1=-9 \quad \therefore 2x^2+2x+5=0$
 $\therefore 2x^3+4x^2+7x+9=x(2x^2+2x+5)+2x^2+2x+9$
 $=2x^2+2x+9$
 $= (2x^2+2x+5)+4$
 $=4$

- 7 $\alpha+\beta=3+2i, \alpha\beta=2-3i$ 이므로
 $\overline{\alpha+\beta}=3-2i, \overline{\alpha\beta}=2+3i$
 $\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\overline{\alpha}+\overline{\beta}}{\alpha\beta} = \frac{\overline{\alpha+\beta}}{\overline{\alpha\beta}}$
 $= \frac{3-2i}{2+3i} = \frac{(3-2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$
 $= \frac{-13i}{13} = -i$

- 8 0이 아닌 복소수 z 에 대하여 $z=-\bar{z}$ 이면 z 는 순허수이
 므로 $3x^2-2x-1=0, x^2-1 \neq 0$
 (i) $3x^2-2x-1=0$ 에서 $(3x+1)(x-1)=0$
 $\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$
 (ii) $x^2-1 \neq 0$ 에서 $(x+1)(x-1) \neq 0$
 $\therefore x \neq -1, x \neq 1$
 (i), (ii)에 의하여 $x=-\frac{1}{3}$

- 9 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$
 ㉠. $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$ ◀ 허수 또는 0
 ㉡. $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ ◀ 실수
 ㉢. $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{a-bi}{a+bi} = \frac{(a-bi)^2}{(a+bi)(a-bi)}$
 $= \frac{a^2-b^2-2abi}{a^2+b^2}$ ◀ 실수 또는 허수
 ㉣. $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a+bi} + \frac{1}{a-bi}$
 $= \frac{(a-bi)+(a+bi)}{(a+bi)(a-bi)}$
 $= \frac{2a}{a^2+b^2}$ ◀ 실수

따라서 보기 중 항상 실수인 것은 ㉡, ㉣이다.

- 10 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$
 이를 $z\bar{z}+3(z-\bar{z})=4-6i$ 에 대입하면
 $(a+bi)(a-bi)+3(a+bi-a+b i)=4-6i$
 $(a^2+b^2)+6bi=4-6i$
 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $a^2+b^2=4, 6b=-6$
 즉, $b=-1$ 이므로 이를 $a^2+b^2=4$ 에 대입하면
 $a^2+1=4, a^2=3 \quad \therefore a=\pm\sqrt{3}$
 따라서 구하는 복소수 z 는 $-\sqrt{3}-i, \sqrt{3}-i$ 이다.

- 11 $\frac{1}{i} + \frac{2}{i^2} + \frac{3}{i^3} + \frac{4}{i^4} + \dots + \frac{20}{i^{20}}$
 $= \left(\frac{1}{i} - 2 - \frac{3}{i} + 4 \right) + \left(\frac{5}{i} - 6 - \frac{7}{i} + 8 \right)$
 $+ \dots + \left(\frac{17}{i} - 18 - \frac{19}{i} + 20 \right)$
 $= \left(2 - \frac{2}{i} \right) + \left(2 - \frac{2}{i} \right) + \dots + \left(2 - \frac{2}{i} \right)$
 $= 5(2+2i) = 10+10i$
 따라서 $10+10i=a+bi$ 이므로 복소수가 서로 같을 조건
 에 의하여
 $a=10, b=10 \quad \therefore a+b=20$

$$\begin{aligned}
 12 \quad \frac{1-i}{1+i} &= \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i \\
 \frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \\
 \therefore f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) &= f(-i) + f(i) \\
 &= (-i)^{999} - 1 + i^{999} - 1 \\
 &= \{(-i)^4\}^{249} \times (-i)^3 + \{i^4\}^{249} \times i^3 - 2 \\
 &= i + (-i) - 2 = -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13 \quad \sqrt{-1}\sqrt{-5} + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-2}} \times \sqrt{(-3)^2} + \frac{\sqrt{-15}}{\sqrt{-3}} \\
 = -\sqrt{5} + (-\sqrt{-5}) \times 3 + \sqrt{5} \\
 = -3\sqrt{5}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14 \quad \sqrt{a}\sqrt{b} &= -\sqrt{ab} \text{이므로 } a < 0, b < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\
 \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} &= -\sqrt{\frac{c}{b}} \text{이므로 } b < 0, c > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\
 \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에 의하여} \\
 a+b < 0, c-b > 0, 2a < 0 \\
 \therefore \sqrt{(a+b)^2} - |c-b| - |2a| \\
 &= -(a+b) - (c-b) - (-2a) \\
 &= -a-b-c+b+2a = a-c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15 \quad \alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta} = 4 \text{에서 } \alpha = \frac{4}{\alpha}, \beta = \frac{4}{\beta} \\
 \text{이 두 식을 } \alpha + \beta = i \text{에 대입하면 } \frac{4}{\alpha} + \frac{4}{\beta} = i \\
 \frac{4(\bar{\alpha} + \bar{\beta})}{\alpha \times \beta} = i, \frac{4(\bar{\alpha} + \bar{\beta})}{\alpha\beta} = i \\
 \therefore \frac{\bar{\alpha}\beta}{i} = \frac{4(\bar{\alpha} + \bar{\beta})}{i} = \frac{4 \times (-i)}{i} = -4 \\
 \therefore \alpha\beta = -4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16 \quad z = a+bi \text{ (} a, b \text{는 실수)라 하면 } \bar{z} = a-bi \\
 \textcircled{㉢} \text{에서 } z + (1-2i), \text{ 즉 } a+1 + (b-2)i \text{는 양의 실수이므로} \\
 a+1 > 0, b-2 = 0 \quad \therefore a > -1, b = 2 \\
 \textcircled{㉣} \text{에서 } z\bar{z} = 7 \text{이므로 } (a+bi)(a-bi) = 7 \\
 a^2 + b^2 = 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉤} \\
 b=2 \text{를 } \textcircled{㉤} \text{에 대입하면} \\
 a^2 + 4 = 7, a^2 = 3 \quad \therefore a = \pm\sqrt{3} \\
 \text{그런데 } a > -1 \text{이므로 } a = \sqrt{3} \\
 \text{따라서 } z = \sqrt{3} + 2i \text{이므로 } \bar{z} = \sqrt{3} - 2i \\
 \therefore \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2i + \sqrt{3} - 2i) = \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17 \quad z = a+ai \text{이므로 } \bar{z} = a-ai \\
 \text{주어진 등식의 좌변을 정리하면} \\
 \frac{(z+2)(\bar{z}-1) + 3\bar{z} + 2}{(z+2)(\bar{z}-1) + 3\bar{z} + 2} \\
 = \frac{(z+2)(z-1) + 3\bar{z} + 2}{(\bar{z}+2)(z-1) + 3\bar{z} + 2} \\
 = \frac{z\bar{z} - \bar{z} + 2z - 2 + 3\bar{z} + 2}{z\bar{z} + 2(z+\bar{z})} \\
 = \frac{2a^2 + 4a}{2a^2 + 4a} = 1 \text{이므로 } 2a(a+2) = 0 \\
 \therefore a = -2 \text{ 또는 } a = 0 \\
 \text{그런데 복소수 } z \text{는 } 0 \text{이 아니므로 } a = -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18 \quad z = \frac{3+\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-3i} &= \frac{(3+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}+3i)}{(\sqrt{2}-3i)(\sqrt{2}+3i)} \\
 &= \frac{3\sqrt{2}+9i+2i-3\sqrt{2}}{2+9} = \frac{11i}{11} = i \\
 \omega &= \frac{z(1-\bar{z})}{\sqrt{2}} = \frac{i(1+i)}{\sqrt{2}} = \frac{i-1}{\sqrt{2}} \text{이므로} \\
 \omega^2 &= \left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{-2i}{2} = -i \\
 \omega^4 &= (\omega^2)^2 = (-i)^2 = -1 \\
 \omega^8 &= (\omega^4)^2 = (-1)^2 = 1 \\
 \text{즉, } n \text{이 8의 배수일 때, } \omega^n &= 1 \text{이므로 100 이하의 자연수} \\
 n &\text{은 8, 16, 24, } \cdots, 96 \\
 \text{따라서 구하는 자연수 } n \text{의 개수는 } &12 \text{이다.}
 \end{aligned}$$

II-1 02 이차방정식의 판별식

1 이차방정식

개념 CHECK

76쪽

$$\begin{aligned}
 1 \quad \textcircled{답} \quad (1) x=3 \text{ 또는 } x=5 \quad (2) x=\frac{1}{3} \text{ (중근)} \\
 (3) x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \quad (4) x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}
 \end{aligned}$$

문제

77~79쪽

$$\begin{aligned}
 01-1 \quad \textcircled{답} \quad (1) x = -2 \pm \sqrt{7}i \\
 (2) x = -1 \text{ 또는 } x = 3 + \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

(1) $3(x+2)(x+3)=2x^2+11x+7$ 에서

$$3x^2+15x+18=2x^2+11x+7$$

$$x^2+4x+11=0$$

$$\therefore x=-2\pm\sqrt{2^2-1\times 11}=-2\pm\sqrt{7}i$$

(2) 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{3}+2$ 를 곱하면

$$(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)x^2+(\sqrt{3}+2)x+(3-\sqrt{3})(\sqrt{3}+2)=0$$

$$x^2-(\sqrt{3}+2)x-(3+\sqrt{3})=0$$

$$(x+1)\{x-(3+\sqrt{3})\}=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3+\sqrt{3}$$

01-2 ㉡ 5

$$2x-7=(2-x)^2\text{에서}$$

$$2x-7=x^2-4x+4, x^2-6x+11=0$$

$$\therefore x=-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\times 11}=3\pm\sqrt{2}i$$

$$\text{따라서 } p=3, q=2\text{이므로 } p+q=5$$

01-3 ㉡ 1

$$\text{주어진 방정식의 양변에 } \sqrt{2}-1\text{을 곱하면}$$

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2-(\sqrt{2}-1)(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=0$$

$$x^2+(1-2\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=0$$

$$(x-\sqrt{2})\{x-(\sqrt{2}-1)\}=0$$

$$\therefore x=\sqrt{2} \text{ 또는 } x=\sqrt{2}-1$$

$$\alpha>\beta\text{이므로 } \alpha=\sqrt{2}, \beta=\sqrt{2}-1$$

$$\therefore \alpha-\beta=1$$

02-1 ㉡ (1) $-\frac{4}{3}$ (2) $m=2$, 다른 한 근: $-\frac{3}{2}$

(1) 이차방정식 $3x^2-2x+k=0$ 의 한 근이 2이므로 $x=2$ 를 대입하면

$$12-4+k=0 \quad \therefore k=-8$$

$$k=-8\text{을 주어진 이차방정식에 대입하면}$$

$$3x^2-2x-8=0, (3x+4)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-\frac{4}{3} \text{ 또는 } x=2$$

$$\text{따라서 다른 한 근은 } -\frac{4}{3}\text{이다.}$$

(2) 이차방정식 $mx^2-3x-4m-1=0$ 의 한 근이 3이므로 $x=3$ 을 대입하면

$$9m-9-4m-1=0 \quad \therefore m=2$$

$$m=2\text{를 주어진 이차방정식에 대입하면}$$

$$2x^2-3x-9=0, (2x+3)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-\frac{3}{2} \text{ 또는 } x=3$$

$$\text{따라서 다른 한 근은 } -\frac{3}{2}\text{이다.}$$

02-2 ㉡ -3

$$(m+2)x^2+x-(m^2-3)=0\text{이 이차방정식이므로}$$

$$m+2\neq 0 \quad \therefore m\neq -2$$

$$\text{이 이차방정식의 한 근이 1이므로 } x=1\text{을 대입하면}$$

$$m+2+1-(m^2-3)=0$$

$$m^2-m-6=0$$

$$(m+2)(m-3)=0$$

$$\therefore m=-2 \text{ 또는 } m=3$$

$$\text{그런데 } m\neq -2\text{이므로 } m=3$$

$$m=3\text{을 주어진 이차방정식에 대입하면}$$

$$5x^2+x-6=0, (5x+6)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-\frac{6}{5} \text{ 또는 } x=1$$

$$\therefore n=-\frac{6}{5}$$

$$\therefore m+5n=3+5\times\left(-\frac{6}{5}\right)=-3$$

03-1 ㉡ (1) $x=-2$ 또는 $x=2$

(2) $x=-5$ 또는 $x=4$

(1) (i) $x<0$ 일 때

$$x^2-x-6=0, (x+2)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=3$$

$$\text{그런데 } x<0\text{이므로 } x=-2$$

(ii) $x\geq 0$ 일 때

$$x^2+x-6=0, (x+3)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

$$\text{그런데 } x\geq 0\text{이므로 } x=2$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

(2) (i) $x<1$ 일 때

$$x^2+3(x-1)-7=0\text{에서}$$

$$x^2+3x-10=0$$

$$(x+5)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-5 \text{ 또는 } x=2$$

$$\text{그런데 } x<1\text{이므로 } x=-5$$

(ii) $x\geq 1$ 일 때

$$x^2-3(x-1)-7=0\text{에서}$$

$$x^2-3x-4=0$$

$$(x+1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=4$$

$$\text{그런데 } x\geq 1\text{이므로 } x=4$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x=-5 \text{ 또는 } x=4$$

03-2 답 -2

(i) $x < -1$ 일 때

$$\{-(x+1)\}^2 + 3(x+1) - 4 = 0$$

$$x^2 + 5x = 0, x(x+5) = 0$$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 0$$

그런데 $x < -1$ 이므로 $x = -5$

(ii) $x \geq -1$ 일 때

$$(x+1)^2 - 3(x+1) - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0, (x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

그런데 $x \geq -1$ 이므로 $x = 3$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = -5 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 모든 근의 합은 $-5 + 3 = -2$

다른 풀이

$$|x+1| = t \text{라 하면 } t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$(t+1)(t-4) = 0 \quad \therefore t = 4 \quad (\because t \geq 0)$$

$$|x+1| = 4 \text{에서 } x+1 = \pm 4$$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 모든 근의 합은 $-5 + 3 = -2$

2 이차방정식의 판별식

개념 CHECK

81쪽

1 답 (1) 서로 다른 두 실근 (2) 중근

(3) 서로 다른 두 허근

문제

82~83쪽

04-1 답 (1) $a < 1$ (2) $a = 1$ (3) $a > 1$

이차방정식 $x^2 - 2ax + a^2 + a - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - (a^2 + a - 1) = -a + 1$$

(1) $D > 0$ 이어야 하므로

$$-a + 1 > 0 \quad \therefore a < 1$$

(2) $D = 0$ 이어야 하므로

$$-a + 1 = 0 \quad \therefore a = 1$$

(3) $D < 0$ 이어야 하므로

$$-a + 1 < 0 \quad \therefore a > 1$$

04-2 답 $a \geq 2$

이차방정식 $x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{-(a+1)\}^2 - (a^2 + 5) \geq 0$$

$$2a - 4 \geq 0 \quad \therefore a \geq 2$$

04-3 답 $k < -2$ 또는 $-2 < k < -\frac{2}{3}$

$(k+2)x^2 + 2kx + k+1 = 0$ 이 이차방정식이므로

$$k+2 \neq 0 \quad \therefore k \neq -2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

이차방정식 $(k+2)x^2 + 2kx + k+1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = k^2 - (k+2)(k+1) > 0$$

$$-3k - 2 > 0 \quad \therefore k < -\frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 을 동시에 만족시키는 실수 k 의 값의 범위는

$$k < -2 \text{ 또는 } -2 < k < -\frac{2}{3}$$

05-1 답 (1) -1, 3 (2) $a = 1, b = -2$

(1) 주어진 이차식이 완전제곱식이려면 이차방정식

$$x^2 - (k+3)x + 2k+3 = 0 \text{이 중근을 가져야 한다.}$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$D = \{-(k+3)\}^2 - 4(2k+3) = 0$$

$$k^2 - 2k - 3 = 0, (k+1)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 3$$

(2) 이차방정식 $x^2 - 2(k+a)x + (k+1)^2 + a^2 - b - 3 = 0$

이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 한다. 즉,

$$\frac{D}{4} = \{-(k+a)\}^2 - \{(k+1)^2 + a^2 - b - 3\} = 0$$

$$2(a-1)k + b + 2 = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$a-1=0, b+2=0 \quad \therefore a=1, b=-2$$

05-2 답 1

주어진 이차식이 $3(x-k)^2$ 으로 인수분해되려면 이차방정식 $3x^2 - 2(a+3)x + a^2 + 2a - 3 = 0$ 이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-(a+3)\}^2 - 3(a^2 + 2a - 3) = 0$$

$$a^2 - 9 = 0 \quad \therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 3$$

그런데 a 는 양수이므로 $a = 3$

따라서 주어진 이차식은 $3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2$ 이므로 $k = 2$

$$\therefore a - k = 3 - 2 = 1$$

연습문제

84~85쪽

- 1 ③ 2 3 3 ① 4 1
 5 $x=-1$ 또는 $x=2$ 6 ⑤ 7 ②
 8 서로 다른 두 실근 9 ① 10 $-2+\sqrt{2}$
 11 10 12 6

- 1 이차방정식 $2x^2+4x+3=0$ 의 해는

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 2 \times 3}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}i}{2}$$

 따라서 $a=-2$, $b=2$ 이므로
 $a+b=0$
- 2 $(a-1)x^2-(a^2+1)x+2(a+1)=0$ 이 이차방정식이므로
 $a-1 \neq 0 \quad \therefore a \neq 1$
 이 이차방정식의 한 근이 2이므로 $x=2$ 를 대입하면
 $4(a-1)-2(a^2+1)+2(a+1)=0$
 $a^2-3a+2=0$, $(a-1)(a-2)=0$
 $\therefore a=1$ 또는 $a=2$
 그런데 $a \neq 1$ 이므로 $a=2$
 $a=2$ 를 주어진 이차방정식에 대입하면
 $x^2-5x+6=0$, $(x-2)(x-3)=0$
 $\therefore x=2$ 또는 $x=3$
 따라서 다른 한 근은 3이다.
- 3 이차방정식 $ax^2-2x+b=0$ 의 한 근이 -1 이므로 $x=-1$ 을 대입하면
 $a+2+b=0 \quad \therefore a+b=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 이차방정식 $bx^2-2x+a=0$ 의 한 근이 $\frac{1}{3}$ 이므로 $x=\frac{1}{3}$ 을 대입하면
 $\frac{b}{9}-\frac{2}{3}+a=0 \quad \therefore 9a+b=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$
 $a=1$, $b=-3$ 을 $ax^2-2x+b=0$ 에 대입하면
 $x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$
 $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$
 $\therefore m=3$
 $a=1$, $b=-3$ 을 $bx^2-2x+a=0$ 에 대입하면
 $-3x^2-2x+1=0$, $(3x-1)(x+1)=0$
 $\therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=-1$
 $\therefore n=-1$
 $\therefore mn=3 \times (-1)=-3$

- 4 $x=1$ 을 $3x^2+(2k+1)x+(k+3)m+n-1=0$ 에 대입하면
 $3+(2k+1)+(k+3)m+n-1=0$
 $(m+2)k+3m+n+3=0$
 이 등식이 k 에 대한 항등식이므로
 $m+2=0$, $3m+n+3=0$
 $\therefore m=-2$, $n=3$
 $\therefore m+n=1$
- 5 $x \odot x = |2 \odot x|$ 에서
 $x^2-x-x=|2x-2-x|$
 $x^2-2x-|x-2|=0$
 (i) $x < 2$ 일 때
 $x^2-2x+(x-2)=0$
 $x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$
 $\therefore x=-1$ 또는 $x=2$
 그런데 $x < 2$ 이므로 $x=-1$
 (ii) $x \geq 2$ 일 때
 $x^2-2x-(x-2)=0$
 $x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$
 $\therefore x=1$ 또는 $x=2$
 그런데 $x \geq 2$ 이므로 $x=2$
 (i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는
 $x=-1$ 또는 $x=2$
- 6 $\neg$. $x^2-x+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D=(-1)^2-4 \times 1 \times 1=-3 < 0$
 $\sqcup$. $2x^2+6x+5=0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=3^2-2 \times 5=-1 < 0$
 $\sqsubset$. $3x^2+5x+2=0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D=5^2-4 \times 3 \times 2=1 > 0$
 $\sqsupset$. $3x^2+2\sqrt{6}x+2=0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=(\sqrt{6})^2-3 \times 2=0$
 따라서 보기 중 실근을 갖는 것은 $\sqsubset$, $\sqsupset$ 이다.
- 7 이차방정식 $x^2-2(a-1)x+a^2-3=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-(a^2-3) < 0$
 $-2a+4 < 0 \quad \therefore a > 2$
 따라서 정수 a 의 최솟값은 3이다.

- 8 이차방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 1 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1 = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D_1}{4} = (-a)^2 - (b^2 + 1) = 0$$

$$a^2 - b^2 - 1 = 0 \quad \therefore a^2 = b^2 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이차방정식 $x^2 + 4ax + 2b + 1 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (2a)^2 - (2b + 1)$$

$$= 4a^2 - 2b - 1$$

$$= 4(b^2 + 1) - 2b - 1 \quad (\because \textcircled{7})$$

$$= 4b^2 - 2b + 3$$

$$= 4\left(b - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0$$

따라서 이차방정식 $x^2 + 4ax + 2b + 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

- 9 이차방정식 $4x^2 + 2(2k + m)x + k^2 - k + n = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (2k + m)^2 - 4(k^2 - k + n) = 0$$

$$4km + m^2 + 4k - 4n = 0$$

$$4(m + 1)k + m^2 - 4n = 0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$m + 1 = 0, \quad m^2 - 4n = 0$$

$$\therefore m = -1, \quad n = \frac{1}{4}$$

$$\therefore m + n = -\frac{3}{4}$$

- 10 $x^2 = \sqrt{x^2} + |x - 1| + 2$ 에서

$$x^2 - |x| - |x - 1| - 2 = 0$$

(i) $x < 0$ 일 때

$$x^2 + x + (x - 1) - 2 = 0, \quad x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0 \quad \therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -3$

(ii) $0 \leq x < 1$ 일 때

$$x^2 - x + (x - 1) - 2 = 0, \quad x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3 \quad \therefore x = \pm\sqrt{3}$$

그런데 $0 \leq x < 1$ 이므로 해는 없다.

(iii) $x \geq 1$ 일 때

$$x^2 - x - (x - 1) - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \therefore x = 1 \pm \sqrt{2}$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 1 + \sqrt{2}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = -3 \text{ 또는 } x = 1 + \sqrt{2}$$

따라서 모든 근의 합은

$$-3 + (1 + \sqrt{2}) = -2 + \sqrt{2}$$

- 11 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = a^2 - 4b > 0 \quad \therefore a^2 > 4b$

이때 a, b 가 5 이하의 자연수이므로

$b = 1$ 일 때, $a^2 > 4$ 이므로

$a = 3$ 또는 $a = 4$ 또는 $a = 5$

$b = 2$ 일 때, $a^2 > 8$ 이므로

$a = 3$ 또는 $a = 4$ 또는 $a = 5$

$b = 3$ 일 때, $a^2 > 12$ 이므로

$a = 4$ 또는 $a = 5$

$b = 4$ 일 때, $a^2 > 16$ 이므로 $a = 5$

$b = 5$ 일 때, $a^2 > 20$ 이므로 $a = 5$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는 10이다.

- 12 $b(x^2 + 1) - 2ax + c(x^2 - 1)$ 을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(b + c)x^2 - 2ax + b - c \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(가)에서 ⑦이 완전제곱식이려면 이차방정식

$(b + c)x^2 - 2ax + b - c = 0$ 이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - (b + c)(b - c) = 0$$

$$a^2 - b^2 + c^2 = 0 \quad \therefore a^2 + c^2 = b^2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

즉, 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형이다.

(나)에서 $a^2 + b^2 + c^2 = 50$ 이므로 ⑧을 대입하면

$$b^2 + b^2 = 50, \quad b^2 = 25 \quad \therefore b = \pm 5$$

그런데 b 는 자연수이므로 $b = 5$

$a^2 + c^2 = 25$ 이고 a, c 도 자연수이므로

$a = 3, c = 4$ 또는 $a = 4, c = 3$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

II-1 03 이차방정식의 근과 계수의 관계

1 이차방정식의 근과 계수의 관계

개념 CHECK

87쪽

1 [답] (1) 2, -2 (2) $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$

2 [답] (1) $x^2 + x - 6 = 0$ (2) $x^2 - 4x + 5 = 0$

3 [답] (1) $(x-1+i)(x-1-i)$

(2) $(x-1+\sqrt{3}i)(x-1-\sqrt{3}i)$

(1) 이차방정식 $x^2-2x+2=0$ 의 해는 $x=1\pm i$

$$\therefore x^2-2x+2=(x-1+i)(x-1-i)$$

(2) 이차방정식 $x^2-2x+4=0$ 의 해는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

$$\therefore x^2-2x+4=(x-1+\sqrt{3}i)(x-1-\sqrt{3}i)$$

문제

88~93쪽

01-1 [답] (1) 1 (2) 12 (3) -20 (4) -4

이차방정식 $x^2+2x-2=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=-2$

(1) $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$
 $=-2-(-2)+1=1$

(2) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
 $=(-2)^2-4\times(-2)=12$

(3) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
 $=(-2)^3-3\times(-2)\times(-2)=-20$

(4) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$
 $=\frac{(-2)^2-2\times(-2)}{-2}=-4$

01-2 [답] (1) $\sqrt{5}$ (2) $\sqrt{5}$ 이차방정식 $x^2-3x+1=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3, \alpha\beta=1$

(1) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=3^2-4\times1=5$
 $\alpha>\beta$ 이므로 $\alpha-\beta>0 \quad \therefore \alpha-\beta=\sqrt{5}$

(2) 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D=(-3)^2-4=5>0$ 이므로 α, β 는 모두 실근이다.
또 $\alpha+\beta>0, \alpha\beta>0$ 이므로 $\alpha>0, \beta>0$
 $\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$
 $=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta} (\because \alpha>0, \beta>0)$
 $=3+2\times1=5$
 $\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{5} (\because \alpha>0, \beta>0)$

01-3 [답] 15

 α, β 가 이차방정식 $x^2-5x+1=0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2-5\alpha+1=0, \beta^2-5\beta+1=0$$

$$\therefore \alpha^2=5\alpha-1, \beta^2=5\beta-1$$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=5, \alpha\beta=1$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha^2-3\alpha+2)(\beta^2-3\beta+2) \\ &= (5\alpha-1-3\alpha+2)(5\beta-1-3\beta+2) \\ &= (2\alpha+1)(2\beta+1) \\ &= 4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1 \\ &= 4\times1+2\times5+1=15 \end{aligned}$$

02-1 [답] (1) $\frac{1}{2}$ (2) $a=-1, b=-3$ (1) 이차방정식 $ax^2+x+b=0$ 의 두 근이 $-1, 2$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+2=-\frac{1}{a}, -1\times2=\frac{b}{a}$$

$$\therefore a=-1, b=2$$

따라서 이차방정식 $bx^2+ax+a+b=0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{a+b}{b}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$$

(2) 이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a, \alpha\beta=b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2-(a-3)x+a+4=0$ 의 두 근이 $\alpha+\beta, \alpha\beta$ 이므로

$$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=a-3, (\alpha+\beta)\alpha\beta=a+4$$

이 두 식에 $\textcircled{1}$ 을 각각 대입하면

$$a+b=a-3, ab=a+4$$

$$\therefore a=-1, b=-3$$

02-2 [답] $a=1, b=2$ 이차방정식 $x^2+bx+a=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-b, \alpha\beta=a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2-bx-a+2=0$ 의 두 근이 $\alpha+2, \beta+2$ 이므로

$$(\alpha+2)+(\beta+2)=b, (\alpha+2)(\beta+2)=-a+2$$

$$\alpha+\beta+4=b, \alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4=-a+2$$

이 두 식에 $\textcircled{1}$ 을 각각 대입하면

$$-b+4=b, a-2b+4=-a+2$$

$$\therefore a=1, b=2$$

03-1 [답] 2, 12

이차방정식 $x^2-(a+5)x+6a=0$ 의 두 근을 $\alpha, \alpha+1$ 이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(\alpha+1)=a+5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha(\alpha+1)=6a \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1}$ 에서 $\alpha=\frac{a}{2}+2$ 이므로 이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\left(\frac{a}{2}+2\right)\left(\frac{a}{2}+3\right)=6a, a^2-14a+24=0$$

$$(a-2)(a-12)=0 \quad \therefore a=2 \text{ 또는 } a=12$$

다른 풀이

이차방정식 $x^2 - (a+5)x + 6a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = a + 5, \alpha\beta = 6a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 근이 연속인 정수이면 두 근의 차는 1이므로

$$|\alpha - \beta| = 1$$

양변을 제곱하면 $(\alpha - \beta)^2 = 1$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$$

①을 대입하면

$$(a+5)^2 - 4 \times 6a = 1, a^2 - 14a + 24 = 0$$

$$(a-2)(a-12) = 0 \quad \therefore a=2 \text{ 또는 } a=12$$

03-2 답 24

이차방정식 $x^2 + mx + 135 = 0$ 의 두 근을 $5k, 3k (k \neq 0)$

라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$5k + 3k = -m \quad \therefore 8k = -m \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$5k \times 3k = 135, k^2 = 9$$

$$\therefore k = -3 \text{ 또는 } k = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$k = -3 \text{ 일 때 } m = 24, k = 3 \text{ 일 때 } m = -24$$

그런데 m 은 자연수이므로 $m = 24$

03-3 답 -3

이차방정식 $2x^2 + 3x + a = 0$ 의 두 근을 $k, 2k (k \neq 0)$ 라
하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$k + 2k = -\frac{3}{2} \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$$

$$k \times 2k = \frac{a}{2} \quad \therefore k^2 = \frac{a}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$k = -\frac{1}{2}$ 을 ①에 대입하면

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{a}{4} \quad \therefore a = 1$$

따라서 이차방정식 $x^2 + 3ax - 2a + 1 = 0$ 의 두 근의 합은
 $-3a = -3$

04-1 답 두 근의 합: 3, 두 근의 곱: $\frac{3}{4}$

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = 6, \alpha\beta = 3, f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0 \text{ 이므로}$$

$f(2x) = 0$ 의 두 근은 $2x = \alpha$ 또는 $2x = \beta$

$$\therefore x = \frac{\alpha}{2} \text{ 또는 } x = \frac{\beta}{2}$$

이차방정식 $f(2x) = 0$ 의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

이차방정식 $f(2x) = 0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha}{2} \times \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha\beta}{4} = \frac{3}{4}$$

04-2 답 2

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = 6, f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0 \text{ 이므로}$$

$f(4x-1) = 0$ 의 두 근은

$$4x-1 = \alpha \text{ 또는 } 4x-1 = \beta$$

$$\therefore x = \frac{\alpha+1}{4} \text{ 또는 } x = \frac{\beta+1}{4}$$

따라서 이차방정식 $f(4x-1) = 0$ 의 두 근의 합은

$$\begin{aligned} \frac{\alpha+1}{4} + \frac{\beta+1}{4} &= \frac{\alpha+\beta+2}{4} \\ &= \frac{8}{4} = 2 \end{aligned}$$

04-3 답 $\frac{7}{9}$

이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 2, f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0 \text{ 이므로}$$

$f(3x-1) = 0$ 의 두 근은

$$3x-1 = \alpha \text{ 또는 } 3x-1 = \beta$$

$$\therefore x = \frac{\alpha+1}{3} \text{ 또는 } x = \frac{\beta+1}{3}$$

따라서 이차방정식 $f(3x-1) = 0$ 의 두 근의 곱은

$$\begin{aligned} \frac{\alpha+1}{3} \times \frac{\beta+1}{3} &= \frac{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}{9} \\ &= \frac{2+4+1}{9} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

05-1 답 (1) $x^2 - 3x + 4 = 0$ (2) $2x^2 + 3x + 2 = 0$

이차방정식 $x^2 - x + 2 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계
수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 2$$

(1) 두 근 $1+\alpha, 1+\beta$ 에 대하여

$$(1+\alpha) + (1+\beta) = 2 + \alpha + \beta = 2 + 1 = 3$$

$$(1+\alpha)(1+\beta) = 1 + \alpha + \beta + \alpha\beta = 1 + 1 + 2 = 4$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

(2) 두 근 $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{1^2 - 2 \times 2}{2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} \times \frac{\alpha}{\beta} = 1$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + 1\right) = 0$$

$$\therefore 2x^2 + 3x + 2 = 0$$

05-2 ㉡ -50

이차방정식 $x^2+2x+3=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=3$$

두 근 α^3+1, β^3+1 에 대하여

$$\begin{aligned} (\alpha^3+1)+(\beta^3+1) &= \alpha^3+\beta^3+2 \\ &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+2 \\ &= (-2)^3-3\times 3\times (-2)+2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha^3+1)(\beta^3+1) &= \alpha^3\beta^3+\alpha^3+\beta^3+1 \\ &= (\alpha\beta)^3+(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+1 \\ &= 3^3+(-2)^3-3\times 3\times (-2)+1 \\ &= 38 \end{aligned}$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$x^2-12x+38=0$$

$$\therefore a=-12, b=38$$

$$\therefore a-b=-50$$

06-1 ㉡ (1) $a=-6, b=-1$ (2) $a=-6, b=10$

(1) 계수가 유리수이므로 $3+2\sqrt{2}$ 가 근이면 다른 한 근은 $3-2\sqrt{2}$ 이다.

이차방정식 $x^2+ax-b=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=-a \quad \therefore a=-6$$

$$(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=-b \quad \therefore b=-1$$

(2) 계수가 실수이므로 $3+i$ 가 근이면 다른 한 근은 $3-i$ 이다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(3+i)+(3-i)=-a \quad \therefore a=-6$$

$$(3+i)(3-i)=b \quad \therefore b=10$$

06-2 ㉡ $p=-4, q=2$

계수가 유리수이므로 $q-\sqrt{3}$ 이 근이면 다른 한 근은 $q+\sqrt{3}$ 이다.

이차방정식 $x^2+px+1=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(q-\sqrt{3})(q+\sqrt{3})=1$$

$$q^2=4 \quad \therefore q=\pm 2$$

그런데 $q>0$ 이므로 $q=2$

즉, 두 근은 $2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}$ 이므로

$$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-p$$

$$\therefore p=-4$$

06-3 ㉡ $x=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

$$\frac{3}{1+\sqrt{2}i}=\frac{3(1-\sqrt{2}i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}=1-\sqrt{2}i$$

계수가 실수이므로 $1-\sqrt{2}i$ 가 근이면 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}i$ 이다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1-\sqrt{2}i)+(1+\sqrt{2}i)=-a \quad \therefore a=-2$$

$$(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)=b \quad \therefore b=3$$

$a=-2, b=3$ 을 이차방정식 $x^2+(2-b)x-a=0$ 에 대입하면 $x^2-x+2=0$

따라서 이차방정식 $x^2-x+2=0$ 의 해는

$$x=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

연습문제

94~96쪽

1 ⑤	2 ①	3 3	4 5	5 ③
6 ①	7 ⑤	8 $x=2$ 또는 $x=3$	9 ①	
10 ③	11 ④	12 ②	13 ④	
14 x^2-2x-1	15 14	16 ④	17 ②	

1 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$ (①), $\alpha\beta=-2$

$$\begin{aligned} \text{② } (\alpha-1)(\beta-1) &= \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1 \\ &= -2-3+1=-4 \end{aligned}$$

$$\text{③ } (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=3^2-4\times(-2)=17$$

$$\begin{aligned} \text{④ } \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= 3^3-3\times(-2)\times 3=45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{⑤ } \frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta} \\ &= \frac{3^2-2\times(-2)}{-2}=-\frac{13}{2} \end{aligned}$$

2 α, β 가 이차방정식 $x^2+x-1=0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2+\alpha-1=0, \beta^2+\beta-1=0$$

$$\therefore \alpha^2+\alpha=1, \beta^2+\beta=1$$

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=-1$

$$\begin{aligned} \therefore (1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)(1+\beta+\beta^2+\beta^3) &= \{1+\alpha+\alpha(\alpha+\alpha^2)\}\{1+\beta+\beta(\beta+\beta^2)\} \\ &= (1+\alpha+\alpha)(1+\beta+\beta) \\ &= (1+2\alpha)(1+2\beta) \\ &= 1+2(\alpha+\beta)+4\alpha\beta \\ &= 1+2\times(-1)+4\times(-1)=-5 \end{aligned}$$

- 3 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 두 근이 $-6, 2$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-6 + 2 = a, \quad -6 \times 2 = b \quad \therefore a = -4, \quad b = -12$$

따라서 이차방정식 $ax^2 + 2x + b = 0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{b}{a} = \frac{-12}{-4} = 3$$

- 4 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -a, \quad \alpha\beta = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 이차방정식 $x^2 - (2a+1)x + 2 = 0$ 의 두 근이 $\alpha-1, \beta-1$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\alpha-1) + (\beta-1) = 2a+1, \quad (\alpha-1)(\beta-1) = 2$$

$$\alpha + \beta - 2 = 2a+1, \quad \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = 2$$

이 두 식에 $\textcircled{1}$ 을 각각 대입하면

$$-a - 2 = 2a+1, \quad b + a + 1 = 2$$

$$\therefore a = -1, \quad b = 2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$$

- 5 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2a, \quad \alpha\beta = 4a-1$$

이 두 식을 $a^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 9$, 즉 $(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = 9$ 에 대입하면

$$(-2a)^2 - (4a-1) = 9, \quad 4a^2 - 4a - 8 = 0$$

$$\therefore a^2 - a - 2 = 0$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은 1이다.

- 6 이차방정식 $x^2 + (k^2 - 5k + 4)x - k + 2 = 0$ 의 두 근을 $\alpha, -\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + (-\alpha) = -(k^2 - 5k + 4)$$

$$k^2 - 5k + 4 = 0, \quad (k-1)(k-4) = 0$$

$$\therefore k = 1 \text{ 또는 } k = 4$$

그런데 $k = 1$ 일 때 주어진 방정식은 $x^2 + 1 = 0$ 이므로 실근을 갖지 않는다. $\therefore k = 4$

따라서 이차방정식 $x^2 + (k+3)x + 3 = 0$ 의 두 근의 합은 $-(k+3) = -7$

- 7 두 근을 α, α^2 ($\alpha \neq 0$)이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \alpha^2 = k^2 - 4k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha \times \alpha^2 = 27, \quad \alpha^3 = 27 \quad \therefore \alpha = 3$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$k^2 - 4k = 12, \quad k^2 - 4k - 12 = 0$$

$$(k+2)(k-6) = 0 \quad \therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 6$$

그런데 k 는 양수이므로 $k = 6$

- 8 태윤이는 c 를 잘못 보고 풀었지만 a, b 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$$-1 + 6 = -\frac{b}{a}$$

$$\therefore b = -5a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

혜영이는 b 를 잘못 보고 풀었지만 a, c 는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$$(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3}) = \frac{c}{a}$$

$$\therefore c = 6a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 $ax^2 + bx + c = 0$ 에 대입하면

$$ax^2 - 5ax + 6a = 0$$

$a \neq 0$ 이므로 양변을 a 로 나누면

$$x^2 - 5x + 6 = 0, \quad (x-2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

- 9 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$f(\alpha) = 0, \quad f(\beta) = 0$$

이차방정식 $f(2x+3) = 0$ 의 두 근은

$$2x+3 = \alpha \text{ 또는 } 2x+3 = \beta$$

$$\therefore x = \frac{\alpha-3}{2} \text{ 또는 } x = \frac{\beta-3}{2}$$

따라서 이차방정식 $f(2x+3) = 0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha-3}{2} \times \frac{\beta-3}{2} = \frac{\alpha\beta - 3(\alpha + \beta) + 9}{4}$$

$$= \frac{6 - 3 \times (-3) + 9}{4}$$

$$= 6$$

- 10 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 6, \quad \alpha\beta = -1$$

두 근 $\alpha^2 + \frac{1}{\beta}, \beta^2 + \frac{1}{\alpha}$ 에 대하여

$$\left(\alpha^2 + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta^2 + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha^2 + \beta^2 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

$$= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}$$

$$= 6^2 - 2 \times (-1) + \frac{6}{-1}$$

$$= 32$$

$$\left(\alpha^2 + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta^2 + \frac{1}{\alpha}\right) = (\alpha\beta)^2 + (\alpha + \beta) + \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$= (-1)^2 + 6 + \frac{1}{-1}$$

$$= 6$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$x^2 - 32x + 6 = 0$$

11 이차방정식 $x^2-2x+5=0$ 의 해는
 $x = -(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 1 \times 5} = 1 \pm 2i$
 $\therefore x^2-2x+5 = (x-1+2i)(x-1-2i)$

12 $\frac{3+i}{1+i} = \frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$
 계수가 실수이므로 $2-i$ 가 근이면 다른 한 근은 $2+i$ 이다.
 이차방정식 $x^2-ax+b=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여
 $(2-i) + (2+i) = a \quad \therefore a=4$
 $(2-i)(2+i) = b \quad \therefore b=5$
 $\therefore ab=20$

13 계수가 실수이므로 $-1+2i$ 가 근이면 다른 한 근은 $-1-2i$ 이다.
 이차방정식 $x^2+mx+n=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여
 $(-1+2i) + (-1-2i) = -m \quad \therefore m=2$
 $(-1+2i)(-1-2i) = n \quad \therefore n=5$
 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = -a \quad \therefore a = -\frac{7}{10}$
 $\frac{1}{m} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = b \quad \therefore b = \frac{1}{10}$
 $\therefore a+b = -\frac{3}{5}$

14 $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$, a, b, c 는 상수)라 하자.
 이차방정식 $x^2-2x-4=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta=2, \alpha\beta=-4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 또 $f(\alpha)=f(\beta)=3$ 이므로
 $f(\alpha)-3=0, f(\beta)-3=0$
 따라서 이차방정식 $f(x)-3=0$, 즉 $ax^2+bx+c-3=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c-3}{a}$
 이 두 식에 $\textcircled{1}$ 을 각각 대입하면
 $2 = -\frac{b}{a}, -4 = \frac{c-3}{a}$
 $\therefore b = -2a, c = -4a+3$
 $\therefore f(x) = ax^2 - 2ax - 4a + 3$
 이때 $f(1) = -2$ 이므로
 $a - 2a - 4a + 3 = -2 \quad \therefore a = 1$
 $\therefore f(x) = x^2 - 2x - 1$

15 이차방정식 $x^2+(a-4)x-1=0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta = -a+4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\alpha\beta = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 α, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\gamma = -a \quad \dots\dots \textcircled{3}$
 $\alpha\gamma = b \quad \dots\dots \textcircled{4}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{3}$ 을 하면 $\beta - \gamma = 4$
 이때 $2\alpha = \beta - \gamma$ 이므로
 $2\alpha = 4 \quad \therefore \alpha = 2$
 이를 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4}$ 에 대입하여 풀면
 $\beta = -\frac{1}{2}, \gamma = -\frac{9}{2}, a = \frac{5}{2}, b = -9$
 $\therefore 2a - b = 2 \times \frac{5}{2} - (-9) = 14$

16 두 실근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta=2, \alpha\beta=\frac{k}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $|\alpha| + |\beta| = 4$ 이므로 양변을 제곱하면
 $\alpha^2 + 2|\alpha\beta| + \beta^2 = 16$
 $(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta + 2|\alpha\beta| = 16$
 이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면
 $2^2 - 2 \times \frac{k}{2} + 2 \left| \frac{k}{2} \right| = 16$
 $\therefore |k| - k = 12 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 그런데 $k \geq 0$ 이면 $k - k = 12$ 이므로 이를 만족시키는 k 의 값은 없다.
 따라서 $k < 0$ 이므로 $\textcircled{2}$ 에서
 $-2k = 12 \quad \therefore k = -6$

17 $\overline{AE} = \alpha, \overline{AH} = \beta$ 라 하면

$\overline{PF} = \overline{EB} = 10 - \alpha$

$\overline{PG} = \overline{HD} = 10 - \beta$

이때 직사각형 PFCG의 둘레의 길이가 28이므로

$2\{(10-\alpha) + (10-\beta)\} = 28$

$20 - (\alpha + \beta) = 14 \quad \therefore \alpha + \beta = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

또 직사각형 PFCG의 넓이가 46이므로

$(10-\alpha)(10-\beta) = 46$

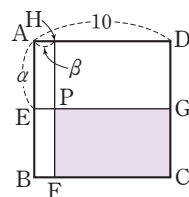
$100 - 10(\alpha + \beta) + \alpha\beta = 46$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$100 - 10 \times 6 + \alpha\beta = 46 \quad \therefore \alpha\beta = 6$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2 - 6x + 6 = 0$



II-2 01 이차방정식과 이차함수의 관계

1 이차방정식과 이차함수의 관계

개념 CHECK

98쪽

1 답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다.(접한다.)

(3) 만나지 않는다.

2 답 (1) 2 (2) 1 (3) 0

(1) $-x^2+x-1=2x-3$ 에서 $x^2+x-2=0$

$$D=1^2-4 \times 1 \times (-2)=9>0 \Rightarrow \text{교점은 2개}$$

(2) $-x^2+x-1=-5x+8$ 에서 $x^2-6x+9=0$

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-1 \times 9=0 \Rightarrow \text{교점은 1개}$$

(3) $-x^2+x-1=x+4$ 에서 $x^2+5=0$

$$\frac{D}{4}=0^2-1 \times 5=-5<0 \Rightarrow \text{교점은 0개}$$

문제

99~102쪽

01-1 답 5

이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-1, 2$ 이므로 $-1, 2$ 는 이차방정식 $-x^2+ax+b=0$, 즉 $x^2-ax-b=0$ 의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+2=a, -1 \times 2=-b \quad \therefore a=1, b=2$$

$$\therefore a+2b=5$$

01-2 답 -18

이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-2, 1$ 이므로 $-2, 1$ 은 이차방정식 $3x^2+ax+b=0$ 의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+1=-\frac{a}{3}, -2 \times 1=\frac{b}{3} \quad \therefore a=3, b=-6$$

$$\therefore ab=-18$$

01-3 답 -2, 2

이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표를 α, β 라 하면 α, β 는 이차방정식 $x^2+ax-3=0$ 의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-a, \alpha\beta=-3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 점 사이의 거리가 4이므로 $|\alpha-\beta|=4$

$$\text{양변을 제곱하면 } (\alpha-\beta)^2=16$$

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16$$

\textcircled{1}을 대입하면

$$(-a)^2-4 \times (-3)=16, a^2=4$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=2$$

다른 풀이

이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표를 $\alpha, \alpha+4$ 라 하면 $\alpha, \alpha+4$ 는 이차방정식 $x^2+ax-3=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+(\alpha+4)=-a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\alpha(\alpha+4)=-3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2}에서 \alpha^2+4\alpha+3=0$$

$$(\alpha+1)(\alpha+3)=0 \quad \therefore \alpha=-1 \text{ 또는 } \alpha=-3$$

이를 각각 \textcircled{1}에 대입하면

$$a=-2 \text{ 또는 } a=2$$

02-1 답 (1) $k<1$ (2) $k=1$ (3) $k>1$

$y=x^2-2x+k$ 와 $y=0$ 을 연립한 이차방정식은

$$x^2-2x+k=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-k=1-k$$

$$(1) D>0 \text{ 이어야 하므로 } 1-k>0 \quad \therefore k<1$$

$$(2) D=0 \text{ 이어야 하므로 } 1-k=0 \quad \therefore k=1$$

$$(3) D<0 \text{ 이어야 하므로 } 1-k<0 \quad \therefore k>1$$

02-2 답 4

이차방정식 $x^2-kx+k=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$D_1=0$ 이어야 하므로

$$D_1=(-k)^2-4k=0, k(k-4)=0$$

$$\therefore k=0 \text{ 또는 } k=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $-2x^2+3x-k=0$, 즉 $2x^2-3x+k=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2<0$ 이어야 하므로

$$D_2=(-3)^2-8k<0, 9-8k<0$$

$$\therefore k>\frac{9}{8} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}에서 k=4$$

03-1 답 2

이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2+ax-5=x+b$, 즉 $x^2+(a-1)x-b-5=0$ 의 근과 같다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$3=-(a-1), -4=-b-5$$

$$\therefore a=-2, b=-1 \quad \therefore ab=2$$

03-2 ㉮ 6

이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x 좌표가 $-\frac{1}{2}$, 1이므로 $-\frac{1}{2}$, 1은 이차방정식 $2x^2 - ax + 2 = -2x + b$, 즉 $2x^2 - (a-2)x - b + 2 = 0$ 의 두 근이다.
근과 계수의 관계에 의하여
 $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{a-2}{2}$, $-\frac{1}{2} \times 1 = \frac{-b+2}{2}$
 $\therefore a=3, b=3 \quad \therefore a+b=6$

03-3 ㉮ (3, 2)

점 B의 x 좌표를 a 라 하면 이차방정식 $-2x^2 + x + k = -x + 5$, 즉 $2x^2 - 2x - k + 5 = 0$ 의 두 근은 -2 , a 이다.
근과 계수의 관계에 의하여
 $-2 + a = 1 \quad \therefore a = 3$
점 B의 x 좌표가 3이므로 점 B의 y 좌표는 $-3 + 5 = 2$
따라서 점 B의 좌표는 (3, 2)

04-1 ㉮ (1) $k > -\frac{9}{4}$ (2) $k = \frac{1}{4}$ (3) $k < -\frac{3}{2}$

(1) $y = -x^2 + 2x + k$ 와 $y = 3x - 2$ 를 연립한 이차방정식은 $-x^2 + 2x + k = 3x - 2 \quad \therefore x^2 + x - k - 2 = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$D = 1^2 - 4(-k-2) > 0, 4k+9 > 0 \quad \therefore k > -\frac{9}{4}$$

(2) $y = -x^2 + 2x + k$ 와 $y = x + 2k$ 를 연립한 이차방정식은 $-x^2 + 2x + k = x + 2k \quad \therefore x^2 - x + k = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$D = (-1)^2 - 4k = 0, 1 - 4k = 0 \quad \therefore k = \frac{1}{4}$$

(3) $y = -x^2 + 2x + k$ 와 $y = -2x - k + 1$ 을 연립한 이차방정식은 $-x^2 + 2x + k = -2x - k + 1$
 $\therefore x^2 - 4x - 2k + 1 = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (-2)^2 - (-2k+1) < 0$$

$$2k+3 < 0 \quad \therefore k < -\frac{3}{2}$$

04-2 ㉮ $a \geq -3$

$x^2 + 4x - a = 2x + 2$, 즉 $x^2 + 2x - a - 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 1^2 - (-a-2) \geq 0, a+3 \geq 0 \quad \therefore a \geq -3$$

연습문제

103~104쪽

- 1 ④ 2 ⑤ 3 -4 4 $k < -\frac{1}{2}$
5 ③ 6 ④ 7 1 8 $m < \frac{5}{2}$ 9 ①
10 4 11 ④ 12 ②

- 1 이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 -3 , b 이므로 -3 , b 는 이차방정식 $2x^2 + ax - 3 = 0$ 의 두 근이다.
근과 계수의 관계에 의하여
 $-3 + b = -\frac{a}{2}$, $-3 \times b = -\frac{3}{2} \quad \therefore a=5, b=\frac{1}{2}$
 $\therefore 2ab=5$
- 2 이차함수의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표를 α , β 라 하면 α , β 는 이차방정식 $x^2 - 4x + k - 2 = 0$ 의 두 근이다.
근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = 4$, $\alpha\beta = k - 2 \quad \dots\dots ㉠$
두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{3}$ 이므로 $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{3}$
양변을 제곱하면 $(\alpha - \beta)^2 = 12$
 $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 12$
㉠을 대입하면
 $4^2 - 4(k-2) = 12, -4k = -12 \quad \therefore k=3$
- 3 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 -4 , 2 이므로 -4 , 2 는 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이다.
 $\therefore f(-4) = 0, f(2) = 0$
따라서 방정식 $f(x+1) = 0$ 의 두 근은
 $x+1 = -4$ 또는 $x+1 = 2 \quad \therefore x = -5$ 또는 $x = 1$
따라서 모든 실근의 합은 -4 이다.
- 4 $x^2 - 2(k+1)x + k^2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4} = \{-(k+1)\}^2 - k^2 < 0, 2k+1 < 0 \quad \therefore k < -\frac{1}{2}$
- 5 $x^2 + 2ax + am + m + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4} = a^2 - (am + m + b) = 0$
 $\therefore a^2 - b - m(a+1) = 0$
이 등식이 m 에 대한 항등식이므로
 $a^2 - b = 0, a+1 = 0 \quad \therefore a = -1, b = 1$
 $\therefore a+b = 0$

- 6 이차함수의 그래프와 직선의 교점의 x 좌표가 $-2, 3$ 이므로 $-2, 3$ 은 이차방정식 $2x^2+3x+1=ax+b$, 즉 $2x^2+(3-a)x+1-b=0$ 의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+3=-\frac{3-a}{2}, -2 \times 3=\frac{1-b}{2}$$

$$\therefore a=5, b=13 \quad \therefore a+b=18$$

- 7 이차함수의 그래프와 직선의 한 교점의 x 좌표 $3+\sqrt{5}$ 는 이차방정식 $x^2+px+q=2x+1$, 즉 $x^2+(p-2)x+q-1=0$ 의 근이다.

이때 p, q 가 유리수이므로 다른 한 근은 $3-\sqrt{5}$ 이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})=-p+2, (3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=q-1$$

$$\therefore p=-4, q=5 \quad \therefore p+q=1$$

- 8 $y=2x^2+3x$ 와 $y=x+m-3$ 을 연립한 이차방정식은

$$2x^2+3x=x+m-3, \text{ 즉 } 2x^2+2x-m+3=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=1^2-2(-m+3)<0, 2m-5<0 \quad \therefore m<\frac{5}{2}$$

- 9 $y=x^2+ax+a+2$ 와 $y=-x+1$ 을 연립한 이차방정식은 $x^2+ax+a+2=-x+1 \quad \therefore x^2+(a+1)x+a+1=0$ 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1=0$ 이어야 하므로

$$D_1=(a+1)^2-4(a+1)=0$$

$$a^2-2a-3=0, (a+1)(a-3)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$y=x^2+ax+a+2$ 와 $y=5x+4$ 를 연립한 이차방정식은

$$x^2+ax+a+2=5x+4 \quad \therefore x^2+(a-5)x+a-2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2=0$ 이어야 하므로

$$D_2=(a-5)^2-4(a-2)=0$$

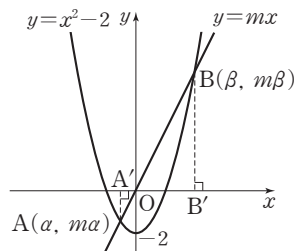
$$a^2-14a+33=0, (a-3)(a-11)=0$$

$$\therefore a=3 \text{ 또는 } a=11 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 $a=3$

- 10 오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B의 x 좌표를 각각 α, β ($\alpha < 0 < \beta$)라 하면 α, β 는 이차방정식 $x^2-2=mx$, 즉 $x^2-mx-2=0$ 의 두 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=m$



$\overline{AA'} = -m\alpha, \overline{BB'} = m\beta$ 이고 선분 AA' 과 선분 BB' 의 길이의 차가 16이므로

$$|\overline{AA'} - \overline{BB'}| = |-m\alpha - m\beta| = |m(\alpha + \beta)| = m^2 = 16$$

그런데 $m > 0$ 이므로 $m=4$

- 11 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 지면과 가로등을 각각 x 축, y 축으로 놓으면 지점 A는 원점이 된다.

이때 포물선의 방정식을

$$y=ax(x-4) \quad (a < 0) \text{로 놓으}$$

면 이 포물선이 점 $(2, 4)$ 를 지나므로

$$4=2a(2-4) \quad \therefore a=-1$$

$$\therefore y=-x(x-4)=-x^2+4x \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

또 가로등의 불빛이 나타내는 직선의 기울기를 m 이라 하면 직선의 방정식은

$$y=mx+\frac{25}{4} \quad (m < 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{10}$$

$\textcircled{9}, \textcircled{10}$ 을 연립한 이차방정식은

$$-x^2+4x=mx+\frac{25}{4} \quad \therefore x^2+(m-4)x+\frac{25}{4}=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$D=(m-4)^2-4 \times \frac{25}{4}=0, m^2-8m-9=0$$

$$(m+1)(m-9)=0 \quad \therefore m=-1 \text{ 또는 } m=9$$

그런데 $m < 0$ 이므로 $m=-1$

$$\therefore y=-x+\frac{25}{4} \quad \therefore C\left(\frac{25}{4}, 0\right)$$

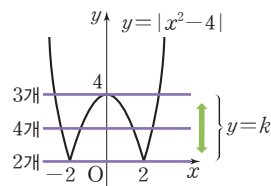
따라서 두 지점 A, C 사이의 거리는 $\frac{25}{4}$ m이다.

- 12 방정식 $|x^2-4|=k$ 의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-4|$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-4|$ 에서 $x=-2, x=2$ 를 기준으로 범위를 나누어 함수의 식을 구하면

$$y=|x^2-4|=\begin{cases} x^2-4 & (x < -2 \text{ 또는 } x > 2) \\ -(x^2-4) & (-2 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

이때 교점이 4개이라면 다음 그림과 같이 직선 $y=k$ 가 원점을 지나는 직선과 점 $(0, 4)$ 를 지나는 직선 사이에 있어야 한다.



따라서 $0 < k < 4$ 이므로 정수 k 는 1, 2, 3의 3개이다.

II-2 02 이차함수의 최대, 최소

1 이차함수의 최대, 최소

개념 CHECK

105쪽

- 1 답 (1) 최댓값: 없다., 최솟값: 0
 (2) 최댓값: 1, 최솟값: 없다.
 (3) 최댓값: 2, 최솟값: -2
 (4) 최댓값: 14, 최솟값: -1

문제

106~111쪽

- 01-1 답 (1) 최댓값: $-\frac{5}{2}$, 최솟값: 없다.
 (2) 최댓값: 8, 최솟값: -4
 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 3 = -\frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{5}{2}$
 따라서 $x=1$ 일 때 최댓값은 $-\frac{5}{2}$ 이고, 최솟값은 없다.
 (2) $y = 3x^2 + 6x - 1 = 3(x+1)^2 - 4$
 따라서 꼭짓점의 x 좌표가 $-2 \leq x \leq 1$ 에 포함되므로
 $x=1$ 일 때, 최댓값 8
 $x=-1$ 일 때, 최솟값 -4

- 01-2 답 -8
 $y = -2x^2 + 4x - 5 = -2(x-1)^2 - 3$
 꼭짓점의 x 좌표가 $-2 \leq x \leq 4$ 에 포함되므로
 $x=1$ 일 때, 최댓값 $a = -3$
 꼭짓점의 x 좌표가 $-3 \leq x \leq 0$ 에 포함되지 않으므로
 $x=0$ 일 때, 최댓값 $b = -5$
 $\therefore a+b = -3-5 = -8$

- 01-3 답 7
 $y = x^2 - 2ax + 4a + 3 = (x-a)^2 - a^2 + 4a + 3$
 이 이차함수는 $x=a$ 일 때 최솟값이 $-a^2 + 4a + 3$ 이므로
 $f(a) = -a^2 + 4a + 3 = -(a-2)^2 + 7$
 따라서 $f(a)$ 의 최댓값은
 $f(2) = 7$

- 02-1 답 12
 이차함수 $y = x^2 - 6ax + b$ 는 $x=3$ 에서 최솟값 2를 가지므로
 $y = (x-3)^2 + 2 = x^2 - 6x + 11$
 이 식은 $y = x^2 - 6ax + b$ 와 일치하므로 $a=1, b=11$
 $\therefore a+b=12$

- 02-2 답 $-\frac{4}{3}$

$$y = -x^2 + 2x - 3k + 1 = -(x-1)^2 - 3k + 2$$

주어진 이차함수는 $x=1$ 에서 최댓값 6을 가지므로

$$-3k + 2 = 6 \quad \therefore k = -\frac{4}{3}$$

- 02-3 답 3

이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x=1$ 에서 최댓값 5를 가지므로

$$f(x) = a(x-1)^2 + 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(3) = -3 \text{이므로 } -3 = 4a + 5 \quad \therefore a = -2$$

이를 ①에 대입하면

$$f(x) = -2(x-1)^2 + 5 = -2x^2 + 4x + 3$$

따라서 $a = -2, b = 4, c = 3$ 이므로 $a + 2b - c = 3$

- 03-1 답 -3

$$f(x) = 2x^2 - 12x + k = 2(x-3)^2 + k - 18$$

꼭짓점의 x 좌표 3이 $1 \leq x \leq 4$ 에 포함되므로 $x=3$ 에서 최솟값 -11을 갖는다.

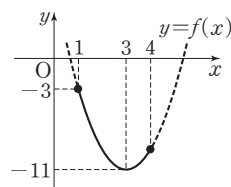
즉, $f(3) = -11$ 에서

$$k - 18 = -11 \quad \therefore k = 7$$

따라서 $f(x) = 2(x-3)^2 - 11$

의 최댓값은

$$f(1) = 8 - 11 = -3$$



- 03-2 답 10

이차함수 $y=f(x)$ 는 x^2 의 계수가 1이고 그래프의 꼭짓점의 x 좌표가 2이므로

$$f(x) = (x-2)^2 + a \quad (\text{단, } a \text{는 상수})$$

꼭짓점의 x 좌표 2가 $3 \leq x \leq 5$ 에 포함되지 않으므로 $x=3$ 에서 최솟값 2를 갖는다.

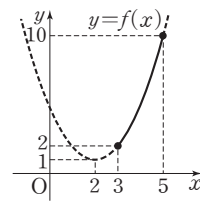
즉, $f(3) = 2$ 에서

$$1 + a = 2 \quad \therefore a = 1$$

따라서 $f(x) = (x-2)^2 + 1$ 의 최댓값은

값은

$$f(5) = 9 + 1 = 10$$



- 03-3 답 11

$$f(x) = -3x^2 + 12x - 5 = -3(x-2)^2 + 7$$

꼭짓점의 x 좌표 2가 $1 \leq x \leq a (a > 2)$ 에 포함되므로

$x=2$ 에서 최댓값 7을 갖는다. $\therefore b=7$

최솟값이 -5이고 $f(1) = 4$ 이므로 $x=a$ 에서 최솟값을 갖는다. 즉, $f(a) = -5$ 이므로

$$-3a^2 + 12a - 5 = -5, a(a-4) = 0$$

그런데 $a > 2$ 이므로 $a=4$

$$\therefore a+b = 4+7 = 11$$

04-1 [답] (1) 최댓값: 없다., 최솟값: -2

(2) 최댓값: 10, 최솟값: -54

(1) $y = (x^2 + 4x + 1)^2 - 2(x^2 + 4x + 1) - 1$ 에서

$x^2 + 4x + 1 = t$ 로 놓으면

$$t = (x+2)^2 - 3$$

이 식은 $x = -2$ 일 때 최솟값이 -3이므로 t 의 값의 범위는 $t \geq -3$

주어진 함수는

$$y = t^2 - 2t - 1 = (t-1)^2 - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 $t \geq -3$ 에서 $\textcircled{1}$ 의 최댓값은 없고, $t = 1$ 일 때 최솟값은 -2이다.

(2) $y = -2(x^2 - 6x + 12)^2 + 4(x^2 - 6x + 12) + 16$ 에서

$x^2 - 6x + 12 = t$ 로 놓으면

$$t = (x-3)^2 + 3$$

이 식은 $1 \leq x \leq 3$ 에서 $x = 1$ 일 때 최댓값이 7, $x = 3$ 일 때 최솟값이 3이므로 t 의 값의 범위는 $3 \leq t \leq 7$

주어진 함수는

$$y = -2t^2 + 4t + 16$$

$$= -2(t-1)^2 + 18 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 $3 \leq t \leq 7$ 에서 $\textcircled{1}$ 은

$t = 3$ 일 때, 최댓값 10

$t = 7$ 일 때, 최솟값 -54

04-2 [답] 3

$y = (x^2 - 2x)^2 + 6(x^2 - 2x + 1) + 2$ 에서

$x^2 - 2x = t$ 로 놓으면

$$t = (x-1)^2 - 1$$

이 식은 $x = 1$ 일 때 최솟값이 -1이므로 t 의 값의 범위는 $t \geq -1$

주어진 함수는

$$y = t^2 + 6t + 8 = (t+3)^2 - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

따라서 $t \geq -1$ 에서 $\textcircled{1}$ 은 $t = -1$ 일 때 최솟값이 3이다.

$t = -1$ 에서 $x^2 - 2x = -1$, $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$(x-1)^2 = 0 \quad \therefore x = 1$$

따라서 $a = 1$, $b = 3$ 이므로 $ab = 3$

05-1 [답] (1) $\frac{2}{3}$ (2) 4

(1) $x + y = 1$ 에서 $y = 1 - x$ 이므로

$$2x^2 + y^2 = 2x^2 + (1-x)^2$$

$$= 3x^2 - 2x + 1$$

$$= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$$

따라서 $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ 일 때 최솟값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

$$(2) 2x^2 + y^2 - 4x + 2y + 7$$

$$= 2(x^2 - 2x + 1) - 2 + (y^2 + 2y + 1) - 1 + 7$$

$$= 2(x-1)^2 + (y+1)^2 + 4$$

이때 $(x-1)^2 \geq 0$, $(y+1)^2 \geq 0$ 이므로

$$2x^2 + y^2 - 4x + 2y + 7 \geq 4$$

따라서 $x = 1$, $y = -1$ 일 때 최솟값은 4이다.

05-2 [답] 8

$x + y = 2$ 에서 $y = 2 - x$

이때 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 이므로 $x \geq 0$, $2 - x \geq 0$

$$\therefore 0 \leq x \leq 2$$

$$2x^2 - y^2 = 2x^2 - (2-x)^2 = x^2 + 4x - 4 = (x+2)^2 - 8$$

따라서 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $x = 2$ 일 때 최댓값은 8이다.

05-3 [답] 13

$$6x - 8y - 3x^2 - 2y^2 + 3$$

$$= -3(x^2 - 2x + 1) + 3 - 2(y^2 + 4y + 4) + 8 + 3$$

$$= -3(x-1)^2 - 2(y+2)^2 + 14$$

이때 $(x-1)^2 \geq 0$, $(y+2)^2 \geq 0$ 이므로

$$6x - 8y - 3x^2 - 2y^2 + 3 \leq 14$$

따라서 $x = 1$, $y = -2$ 에서 최댓값 14를 가지므로

$$a = 1, b = -2, c = 14$$

$$\therefore a + b + c = 13$$

06-1 [답] 9

점 P는 직선 $y = -x + 6$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를

$(a, -a + 6)$ ($0 < a < 6$)이라 하면

$$\overline{OQ} = a, \overline{PQ} = -a + 6$$

직사각형 ROQP의 넓이를 S라 하면

$$S = a(-a + 6) = -a^2 + 6a = -(a-3)^2 + 9$$

$0 < a < 6$ 에서 $a = 3$ 일 때 최댓값은 9이다.

따라서 직사각형 ROQP의 넓이의 최댓값은 9이다.

06-2 [답] 98 m^2

오른쪽 그림과 같이 닭장의 세로

의 길이를 $x \text{ m}$ ($0 < x < 14$)라

하면 철망 전체의 길이가 28 m

이므로 가로 길이는

$$(28 - 2x) \text{ m}$$

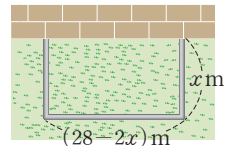
닭장의 넓이를 $S \text{ m}^2$ 라 하면

$$S = x(28 - 2x) = -2x^2 + 28x$$

$$= -2(x-7)^2 + 98$$

$0 < x < 14$ 에서 $x = 7$ 일 때 최댓값은 98이다.

따라서 닭장의 최대 넓이는 98 m^2 이다.



연습문제

112~114쪽

- 1 ④ 2 ③ 3 20 4 ① 5 ②
6 ① 7 ⑤ 8 ③ 9 -27 10 ①
11 48 12 ⑤ 13 18 14 $2\sqrt{2}$ 15 ②
16 9 17 12

- 1 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 5$
주어진 이차함수는 $x=2$ 에서 최댓값 5를 가지므로
 $a=2, b=5 \quad \therefore a+b=7$
- 2 $f(x) = -x^2 + 4x + a = -(x-2)^2 + 4 + a$
이 함수의 최댓값은 $4+a$ 이므로
 $4+a=6 \quad \therefore a=2$
 $g(x) = x^2 - 2ax + b = (x-a)^2 - a^2 + b$
이 함수의 최솟값은 $-a^2+b$ 이므로
 $-a^2+b=-3$
이 식에 $a=2$ 를 대입하면
 $-4+b=-3 \quad \therefore b=1$
 $\therefore ab=2 \times 1=2$
- 3 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 x 축 위의 두 점
 $(-1, 0), (2, 0)$ 을 지나므로
 $y=a(x^2-x-2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $=a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}a$
이 함수의 최솟값은 $-\frac{9}{4}a$ 이므로
 $-\frac{9}{4}a=-9 \quad \therefore a=4$
이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $y=4(x^2-x-2)=4x^2-4x-8$
 $\therefore b=-4, c=-8$
 $\therefore a+2b-3c=4+2 \times (-4)-3 \times (-8)=20$
- 4 함수 $f(x)$ 는 이차항의 계수가 -1 인 이차함수이고 함수
 $g(x)$ 는 일차함수이므로 함수 $h(x)$ 는 이차항의 계수가
 -1 인 이차함수이다. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직
선 $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표가 2, 6이므로 이차방정식
 $f(x)-g(x)=0$, 즉 $h(x)=0$ 의 두 근이 2, 6이다.
 $\therefore h(x)=-(x^2-8x+12)$
 $=-(x-4)^2+4$
따라서 함수 $h(x)$ 는 $x=4$ 에서 최댓값 4를 가지므로
 $p=4, q=4 \quad \therefore p+q=8$

- 5 $f(x)=3x^2-6x+k$
 $=3(x-1)^2-3+k$
꼭짓점의 x 좌표 1이 $0 \leq x \leq 3$ 에
포함되므로 $x=1$ 에서 최솟값 -8
을 갖는다.
즉, $f(1)=-8$ 에서
 $-3+k=-8 \quad \therefore k=-5$
따라서 $f(x)=3(x-1)^2-8$ 의
최댓값은
 $f(3)=12-8=4$
- 6 $f(x)=x^2-4x+a=(x-2)^2-4+a$
꼭짓점의 x 좌표 2가 $-3 \leq x \leq 3$ 에 포함되므로 $x=-3$ 에
서 최댓값을 갖고, $x=2$ 에서 최솟값을 갖는다.
이때 최댓값과 최솟값의 합은 25이므로
 $f(-3)+f(2)=25, (a+21)+(a-4)=25 \quad \therefore a=4$
- 7 $f(x)=x^2-2ax+5a$
 $= (x-a)^2 - a^2 + 5a$
이므로 $A(a, -a^2+5a)$
이때 $\overline{OB}=a, \overline{AB}=-a^2+5a$
이므로 $\overline{OB}+\overline{AB}=g(a)$ 라 하
면
 $g(a)=a+(-a^2+5a)=-a^2+6a$
 $=-(a-3)^2+9$
그런데 $0 < a < 5$ 이므로 $a=3$ 일 때 최댓값은 9이다.
따라서 $\overline{OB}+\overline{AB}$ 의 최댓값은 9이다.
- 8 $y=-(x^2-4x+1)^2-4(x^2-4x+1)+3$ 에서
 $x^2-4x+1=t$ 로 놓으면 $t=(x-2)^2-3$
이 식은 $1 \leq x \leq 4$ 에서 $x=4$ 일 때 최댓값이 1, $x=2$ 일 때
최솟값이 -3 이므로 t 의 값의 범위는 $-3 \leq t \leq 1$
주어진 함수는
 $y=-t^2-4t+3=-(t+2)^2+7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
따라서 $-3 \leq t \leq 1$ 에서 $\textcircled{1}$ 은 $t=-2$ 일 때 최댓값이 7,
 $t=1$ 일 때 최솟값이 -2 이므로 그 합은 5이다.
- 9 $2x+y=3$ 에서 $y=-2x+3$ 이므로
 $y^2-x^2=(-2x+3)^2-x^2$
 $=3x^2-12x+9=3(x-2)^2-3$
꼭짓점의 x 좌표 2가 $1 \leq x \leq 4$ 에 포함되므로 주어진 식은
 $x=4, y=-5$ 에서 최댓값 9를 갖고, $x=2, y=-1$ 에서
최솟값 -3 을 갖는다.
따라서 $M=9, m=-3$ 이므로
 $Mm=-27$

- 10 $4x+6y-x^2-3y^2+k=-(x-2)^2-3(y-1)^2+k+7$
 $(x-2)^2 \geq 0, (y-1)^2 \geq 0$ 이므로
 $4x+6y-x^2-3y^2+k \leq k+7$
주어진 식은 $x=2, y=1$ 일 때 최댓값이 5이므로
 $k+7=5 \quad \therefore k=-2$

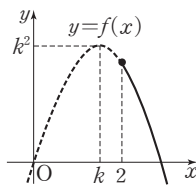
- 11 $y=30x-5x^2=-5(x-3)^2+45$
이 공은 쏘아 올린 지 3초 후에 가장 높이 올라갔고, 이때
의 지면으로부터의 높이는 45m이다.
따라서 $a=3, b=45$ 이므로 $a+b=48$

- 12 현재의 가격 100원에서 x 원을 올린 가격은 $(100+x)$ 원
이고, 이때의 판매량은 $(400-2x)$ 개 ($0 < x < 200$)이다.
하루 총 판매 금액을 y 원이라 하면
 $y=(100+x)(400-2x)=-2x^2+200x+40000$
 $=-2(x-50)^2+45000$
 $0 < x < 200$ 에서 $x=50$ 일 때 최댓값은 45000이다.
따라서 하루 총 판매 금액이 최대 되도록 하는 사탕 한
개의 가격은
 $100+50=150$ (원)

- 13 새로 만든 직사각형의 가로의 길이가 $12+2x$, 세로의 길
이가 $12-x$ ($0 < x < 12$)이므로 직사각형의 넓이를 S 라
하면
 $S=(12+2x)(12-x)=-2x^2+12x+144$
 $=-2(x-3)^2+162$
 $0 < x < 12$ 에서 $x=3$ 일 때 최댓값은 162이다.
따라서 직사각형의 넓이가 최대일 때의 가로의 길이는
 $12+2 \times 3=18$

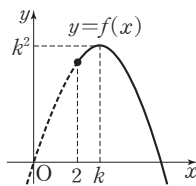
- 14 $f(x)=-x^2+2kx=-(x-k)^2+k^2$ 에서 그래프의 꼭짓
점의 좌표는 (k, k^2)

- (i) $k < 2$ 일 때, 꼭짓점의 x 좌표가
 $x \geq 2$ 에 포함되지 않으므로
 $x=2$ 일 때 최댓값이 8이다.
즉, $f(2)=8$ 에서
 $-4+4k=8 \quad \therefore k=3$



그런데 $k < 2$ 이므로 $k=3$ 은 조건을 만족시키지 않는다.

- (ii) $k \geq 2$ 일 때, 꼭짓점의 x 좌표가
 $x \geq 2$ 에 포함되므로 $x=k$ 일 때
최댓값이 8이다.
즉, $f(k)=8$ 에서 $k^2=8$
 $\therefore k=-2\sqrt{2}$ 또는 $k=2\sqrt{2}$



그런데 $k \geq 2$ 이므로 $k=2\sqrt{2}$

- (i), (ii)에 의하여 $k=2\sqrt{2}$

- 15 $y=x^2-2|x|-1$ ($-2 \leq x \leq 3$)에서 $x=0$ 을 기준으로 범
위를 나누어 함수의 식을 구하면

$$y = \begin{cases} x^2+2x-1=(x+1)^2-2 & (-2 \leq x < 0) \\ x^2-2x-1=(x-1)^2-2 & (0 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

이때 주어진 함수의 그래

프는 오른쪽 그림과 같으

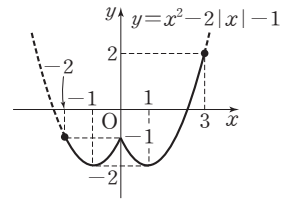
므로

$x=3$ 일 때, 최댓값 $M=2$

$x=-1$ 또는 $x=1$ 일 때,

최솟값 $m=-2$

$$\therefore Mm=-4$$



- 16 점 $P(a, b)$ 는 이차함수 $y=x^2-3x+2$ 의 그래프 위의 점
이므로

$$b=a^2-3a+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 $A(0, 2), B(1, 0), C(2, 0)$ 이고 점 $P(a, b)$ 가 점 A
에서 점 B 를 거쳐 점 C 까지 움직이므로 $0 \leq a \leq 2$

$a+b+3$ 에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} a+b+3 &= a+(a^2-3a+2)+3=a^2-2a+5 \\ &= (a-1)^2+4 \end{aligned}$$

$0 \leq a \leq 2$ 에서 $a=0$ 또는 $a=2$ 일 때 최댓값은 5이고,

$a=1$ 일 때 최솟값은 4이다.

따라서 $a+b+3$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 9이다.

- 17 오른쪽 그림에서

$\overline{BQ}=x$ ($0 < x < 3\sqrt{2}$)라 하면

$\triangle PBQ$ 는 직각이등변삼각형이

므로

$$\overline{PQ}=x, \overline{BP}=\sqrt{2}x$$

$\triangle APR$ 는 $\overline{AP}=\overline{AB}-\overline{BP}=6-\sqrt{2}x$ 인 직각이등변삼각
형이므로

$$\overline{PR}=\sqrt{2}\overline{AP}=\sqrt{2}(6-\sqrt{2}x)=6\sqrt{2}-2x$$

또 $\triangle ABC$ 는 $\overline{AB}=6$ 인 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{BC}=6\sqrt{2}$$

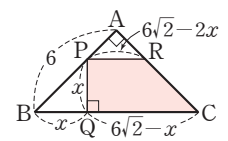
$$\therefore \overline{CQ}=\overline{BC}-\overline{BQ}=6\sqrt{2}-x$$

사각형 $PQCR$ 의 넓이는

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \times (\overline{PR}+\overline{CQ}) \times \overline{PQ} \\ &= \frac{1}{2} \{ (6\sqrt{2}-2x) + (6\sqrt{2}-x) \} \times x \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + 6\sqrt{2}x \\ &= -\frac{3}{2}(x-2\sqrt{2})^2 + 12 \end{aligned}$$

$0 < x < 3\sqrt{2}$ 에서 $x=2\sqrt{2}$ 일 때 최댓값은 12이다.

따라서 사각형 $PQCR$ 의 넓이의 최댓값은 12이다.



II-3 01 삼차방정식과 사차방정식

1 삼차방정식과 사차방정식

개념 CHECK

116쪽

- 1 답 (1) $x = -2$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$
 (2) $x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 3$
 (3) $x = -1$ 또는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
 (4) $x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$

문제

117~123쪽

- 01-1 답 (1) $x = -1$ 또는 $x = -3 \pm \sqrt{15}$
 (2) $x = 2$ 또는 $x = 2 \pm i$
 (3) $x = 1$ (중근) 또는 $x = -1 \pm \sqrt{2}i$
 (4) $x = -2$ (중근) 또는 $x = 1$ 또는 $x = 3$

- (1) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 6$ 이라 하면

$$f(-1) = -1 + 7 - 6 = 0$$

$x+1$ 은 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 7 & 0 & -6 \\ & & -1 & -6 & 6 \\ \hline & 1 & 6 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x+1)(x^2+6x-6)$$

주어진 방정식은

$$(x+1)(x^2+6x-6) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = -3 \pm \sqrt{15}$$

- (2) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 10$ 이라 하면

$$f(2) = 8 - 24 + 26 - 10 = 0$$

$x-2$ 는 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -6 & 13 & -10 \\ & & 2 & -8 & 10 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x-2)(x^2-4x+5)$$

주어진 방정식은

$$(x-2)(x^2-4x+5) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 2 \pm i$$

- (3) $f(x) = x^4 - 4x + 3$ 이라 하면

$$f(1) = 1 - 4 + 3 = 0$$

$x-1$ 은 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ & & 1 & 1 & 1 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ & & 1 & 2 & 3 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x-1)^2(x^2+2x+3)$$

주어진 방정식은

$$(x-1)^2(x^2+2x+3) = 0$$

$$\therefore x = 1(\text{중근}) \text{ 또는 } x = -1 \pm \sqrt{2}i$$

- (4) $f(x) = x^4 - 9x^2 - 4x + 12$ 라 하면

$$f(1) = 1 - 9 - 4 + 12 = 0$$

$$f(-2) = 16 - 36 + 8 + 12 = 0$$

$x-1$, $x+2$ 는 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & -9 & -4 & 12 \\ & & 1 & 1 & -8 & -12 \\ \hline -2 & 1 & 1 & -8 & -12 & 0 \\ & & -2 & 2 & 12 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x-1)(x+2)(x^2-x-6) \\ = (x+2)^2(x-1)(x-3)$$

주어진 방정식은

$$(x+2)^2(x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2(\text{중근}) \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

01-2 답 5

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \text{이라 하면}$$

$$f(-1) = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$$

$x+1$ 은 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x+1)(x^2+x-6)$$

$$= (x+3)(x+1)(x-2)$$

주어진 방정식은 $(x+3)(x+1)(x-2) = 0$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 $\alpha = 2$, $\beta = -3$ 이므로

$$\alpha - \beta = 5$$

02-1 **답** (1) $x = -4$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = \frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2}$

(2) $x = -1 \pm \sqrt{2}$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{2}i$

(3) $x = -5$ 또는 $x = -1$ 또는 $x = -3 \pm \sqrt{6}$

(4) $x = -4$ 또는 $x = 3$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

(1) $(x^2 + 3x + 4)(x^2 + 3x - 3) = 8$ 에서

$x^2 + 3x = t$ 로 놓으면 $(t+4)(t-3) = 8$

$t^2 + t - 20 = 0, (t+5)(t-4) = 0$

$\therefore t = -5$ 또는 $t = 4$

(i) $t = -5$ 일 때

$x^2 + 3x + 5 = 0$

$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2}$

(ii) $t = 4$ 일 때

$x^2 + 3x - 4 = 0, (x+4)(x-1) = 0$

$\therefore x = -4$ 또는 $x = 1$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는

$x = -4$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = \frac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2}$

(2) $(x^2 + 2x)^2 + 2x^2 + 4x - 3 = 0$ 에서

$x^2 + 2x = t$ 로 놓으면

$t^2 + 2t - 3 = 0, (t+3)(t-1) = 0$

$\therefore t = -3$ 또는 $t = 1$

(i) $t = -3$ 일 때

$x^2 + 2x + 3 = 0$

$\therefore x = -1 \pm \sqrt{2}i$

(ii) $t = 1$ 일 때

$x^2 + 2x - 1 = 0$

$\therefore x = -1 \pm \sqrt{2}$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는

$x = -1 \pm \sqrt{2}$ 또는 $x = -1 \pm \sqrt{2}i$

(3) $x(x+2)(x+4)(x+6) + 15 = 0$ 에서

$\{x(x+6)\}\{(x+2)(x+4)\} + 15 = 0$

$(x^2 + 6x)(x^2 + 6x + 8) + 15 = 0$

$x^2 + 6x = t$ 로 놓으면 $t(t+8) + 15 = 0$

$t^2 + 8t + 15 = 0, (t+5)(t+3) = 0$

$\therefore t = -5$ 또는 $t = -3$

(i) $t = -5$ 일 때

$x^2 + 6x + 5 = 0, (x+5)(x+1) = 0$

$\therefore x = -5$ 또는 $x = -1$

(ii) $t = -3$ 일 때

$x^2 + 6x + 3 = 0$

$\therefore x = -3 \pm \sqrt{6}$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는

$x = -5$ 또는 $x = -1$ 또는 $x = -3 \pm \sqrt{6}$

(4) $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3) = 60$ 에서

$\{(x-1)(x+2)\}\{(x-2)(x+3)\} - 60 = 0$

$(x^2 + x - 2)(x^2 + x - 6) - 60 = 0$

$x^2 + x = t$ 로 놓으면 $(t-2)(t-6) - 60 = 0$

$t^2 - 8t - 48 = 0, (t+4)(t-12) = 0$

$\therefore t = -4$ 또는 $t = 12$

(i) $t = -4$ 일 때

$x^2 + x + 4 = 0 \quad \therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

(ii) $t = 12$ 일 때

$x^2 + x - 12 = 0, (x+4)(x-3) = 0$

$\therefore x = -4$ 또는 $x = 3$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는

$x = -4$ 또는 $x = 3$ 또는 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

02-2 **답** 2

$(x^2 - x - 1)^2 - 2(x^2 - x) - 13 = 0$ 에서 $x^2 - x = t$ 로 놓으면

$(t-1)^2 - 2t - 13 = 0, t^2 - 4t - 12 = 0$

$(t+2)(t-6) = 0 \quad \therefore t = -2$ 또는 $t = 6$

(i) $t = -2$ 일 때, $x^2 - x + 2 = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1 < 0$

(ii) $t = 6$ 일 때, $x^2 - x - 6 = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2 > 0$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 두 허근은 이차방정식

$x^2 - x + 2 = 0$ 의 두 근이므로 그 곱은 2이다.

03-1 **답** (1) $x = \pm\sqrt{3}$ 또는 $x = \pm i$

(2) $x = -1 \pm \sqrt{2}$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}$

(1) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ 에서 $x^2 = t$ 로 놓으면

$t^2 - 2t - 3 = 0, (t-3)(t+1) = 0$

$\therefore t = 3$ 또는 $t = -1$

따라서 $x^2 = 3$ 또는 $x^2 = -1$ 이므로

$x = \pm\sqrt{3}$ 또는 $x = \pm i$

(2) $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$ 에서 $x^4 - 2x^2 + 1 - 4x^2 = 0$

$(x^2 - 1)^2 - (2x)^2 = 0, (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$

$\therefore x = -1 \pm \sqrt{2}$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}$

03-2 **답** $2\sqrt{2}$

$x^4 + 5x^2 - 14 = 0$ 에서 $x^2 = t$ 로 놓으면

$t^2 + 5t - 14 = 0, (t-2)(t+7) = 0$

$\therefore t = 2$ 또는 $t = -7$

즉, $x^2 = 2$ 또는 $x^2 = -7$ 이므로

$x = \pm\sqrt{2}$ 또는 $x = \pm\sqrt{7}i$

따라서 $\alpha = \sqrt{2}, \beta = -\sqrt{2}$ 이므로 $\alpha - \beta = 2\sqrt{2}$

03-3 ㉡ $x = -1 \pm i$ 또는 $x = 1 \pm i$

$x^4 + 4 = 0$ 에서

$$(x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = 0$$

$$(x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = 0$$

$$(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \pm i \text{ 또는 } x = 1 \pm i$$

04-1 ㉡ $x = -2 \pm \sqrt{3}$ 또는 $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x \neq 0$ 이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 + 7x + 14 + \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 + 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 7t + 12 = 0, (t+4)(t+3) = 0$$

$$\therefore t = -4 \text{ 또는 } t = -3$$

(i) $t = -4$ 일 때

$$x + \frac{1}{x} = -4 \text{에서 } x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\therefore x = -2 \pm \sqrt{3}$$

(ii) $t = -3$ 일 때

$$x + \frac{1}{x} = -3 \text{에서 } x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는

$$x = -2 \pm \sqrt{3} \text{ 또는 } x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

04-2 ㉡ $\frac{3}{2}$

$x \neq 0$ 이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2 으로 나누면

$$2x^2 - 7x + 10 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 = 0$$

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 = 0$$

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 로 놓으면

$$2t^2 - 7t + 6 = 0, (2t-3)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = \frac{3}{2} \text{ 또는 } t = 2$$

(i) $t = \frac{3}{2}$ 일 때

$$x + \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \text{에서 } 2x^2 - 3x + 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1 < 0$

(ii) $t = 2$ 일 때

$$x + \frac{1}{x} = 2 \text{에서 } x^2 - 2x + 1 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2 = 0$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 두 허근은 이차방정식 $2x^2 - 3x + 2 = 0$ 의 두 근이므로 그 합은 $\frac{3}{2}$ 이다.

05-1 ㉡ $1 - 2i, 1 + 2i$

삼차방정식 $x^3 + kx^2 - (3k+2)x - 5 = 0$ 의 한 근이 1이므로 $x=1$ 을 대입하면

$$1 + k - (3k+2) - 5 = 0, 2k + 6 = 0$$

$$\therefore k = -3$$

주어진 방정식은 $x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$

이 방정식의 한 근이 1이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 7 & -5 \\ & & 1 & -2 & 5 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & 0 \end{array}$$

$$\therefore (x-1)(x^2 - 2x + 5) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 1 \pm 2i$$

따라서 나머지 두 근은 $1 - 2i, 1 + 2i$

05-2 ㉡ 3

사차방정식 $x^4 + ax^3 + 2x^2 - 5x - b = 0$ 의 두 근이 $-1, 1$ 이므로 $x = -1, x = 1$ 을 각각 대입하면

$$1 - a + 2 + 5 - b = 0 \quad \therefore a + b = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$1 + a + 2 - 5 - b = 0 \quad \therefore a - b = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 5, b = 3$

주어진 방정식은 $x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 5x - 3 = 0$

이 방정식의 두 근이 $-1, 1$ 이므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 5 & 2 & -5 & -3 \\ & & -1 & -4 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 4 & -2 & -3 & 0 \\ & & 1 & 5 & 3 & \\ \hline & 1 & 5 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$\therefore (x+1)(x-1)(x^2 + 5x + 3) = 0$$

따라서 주어진 방정식의 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2 + 5x + 3 = 0$ 의 두 근이므로 그 곱은 3이다.

06-1 **답** $k > \frac{1}{4}$

$f(x) = x^3 + (1-k)x^2 - k^2$ 이라 하면

$$f(k) = k^3 + (1-k)k^2 - k^2 = 0$$

$x-k$ 는 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$k \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1-k & 0 & -k^2 \\ & k & k & k^2 \\ \hline 1 & 1 & k & 0 \end{array} \right.$$

$$\therefore f(x) = (x-k)(x^2+x+k)$$

이때 k 는 실수이므로 주어진 방정식이 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+x+k=0$ 이 허근을 가져야 한다.

따라서 $x^2+x+k=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1 - 4k < 0 \quad \therefore k > \frac{1}{4}$$

06-2 **답** $a \leq \frac{25}{4}$

$f(x) = x^3 - 7x^2 + (a+10)x - 2a$ 라 하면

$$f(2) = 8 - 28 + 2a + 20 - 2a = 0$$

$x-2$ 는 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$2 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -7 & a+10 & -2a \\ & 2 & -10 & 2a \\ \hline 1 & -5 & a & 0 \end{array} \right.$$

$$\therefore f(x) = (x-2)(x^2-5x+a)$$

이때 주어진 방정식의 근이 모두 실수하려면 이차방정식 $x^2-5x+a=0$ 이 두 실근을 가져야 한다.

따라서 $x^2-5x+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 25 - 4a \geq 0 \quad \therefore a \leq \frac{25}{4}$$

06-3 **답** $-\frac{7}{8}$

$f(x) = x^3 + (2m-1)x + 2m$ 이라 하면

$$f(-1) = -1 - 2m + 1 + 2m = 0$$

$x+1$ 은 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$-1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2m-1 & 2m \\ & -1 & 1 & -2m \\ \hline 1 & -1 & 2m & 0 \end{array} \right.$$

$$\therefore f(x) = (x+1)(x^2-x+2m)$$

이때 주어진 방정식이 중근과 다른 한 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2-x+2m=0$ 이 -1 을 근으로 갖거나 -1 이 아닌 중근을 가져야 한다.

(i) $x^2-x+2m=0$ 이 -1 을 근으로 갖는 경우

$$1 + 1 + 2m = 0 \quad \therefore m = -1$$

(ii) $x^2-x+2m=0$ 이 -1 이 아닌 중근을 갖는 경우

$x^2-x+2m=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1 - 8m = 0 \quad \therefore m = \frac{1}{8} \quad \leftarrow \text{근은 } x = \frac{1}{2} \text{ (중근)}$$

(i), (ii)에 의하여 m 의 값의 합은

$$-1 + \frac{1}{8} = -\frac{7}{8}$$

07-1 **답** 3

뚜껑 없는 직육면체 모양의 상자의 부피가 420 cm^3 이므로 $(20-2x)(16-2x)x = 420$

$$x^3 - 18x^2 + 80x - 105 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(x) = x^3 - 18x^2 + 80x - 105$ 라 하면

$$f(3) = 27 - 162 + 240 - 105 = 0$$

$x-3$ 은 $f(x)$ 의 인수이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$ 를 인수분해하면

$$3 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -18 & 80 & -105 \\ & 3 & -45 & 105 \\ \hline 1 & -15 & 35 & 0 \end{array} \right.$$

$$\therefore f(x) = (x-3)(x^2-15x+35)$$

따라서 $\textcircled{1}$ 은 $(x-3)(x^2-15x+35)=0$

그런데 x 는 자연수이므로 $x=3$

07-2 **답** 10cm

정사각형인 밑면의 한 변의 길이를 $x \text{ cm}$ 라 하면 꽃병의 부피가 $500 \times 4 = 2000 (\text{cm}^3)$ 이므로

$$x \times x \times 2x = 2000, \quad x^3 - 1000 = 0$$

$$(x-10)(x^2+10x+100) = 0$$

그런데 x 는 양의 실수이므로 $x=10$

따라서 꽃병의 밑면의 한 변의 길이는 10 cm 이다.

2 삼차방정식의 근과 계수의 관계

문제

125~127쪽

08-1 **답** (1) $\frac{3}{2}$ (2) 5 (3) 14 (4) $-\frac{5}{2}$

삼차방정식 $x^3+x^2+3x-2=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta + \gamma = -1, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3, \quad \alpha\beta\gamma = 2$$

$$(1) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1) \\
 & = \alpha\beta\gamma + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha + \beta + \gamma) + 1 \\
 & = 2 + 3 + (-1) + 1 = 5 \\
 (3) & \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \\
 & = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma \\
 & = (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} \\
 & \quad + 3\alpha\beta\gamma \\
 & = (-1) \times \{(-1)^2 - 3 \times 3\} + 3 \times 2 = 14 \\
 (4) & \frac{\gamma}{\alpha\beta} + \frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{\beta}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha\beta\gamma} \\
 & = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma} \\
 & = \frac{(-1)^2 - 2 \times 3}{2} = -\frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

08-2 ㉡ -2

삼차방정식 $x^3 - 2x^2 - 2 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}
 \alpha + \beta + \gamma & = 2, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \quad \alpha\beta\gamma = 2 \\
 \therefore (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) & = (2 - \gamma)(2 - \alpha)(2 - \beta) \\
 & = 8 - 4(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma \\
 & = 8 - 4 \times 2 + 2 \times 0 - 2 = -2
 \end{aligned}$$

08-3 ㉡ $a=14, b=-8$

삼차방정식 $x^3 - 7x^2 + ax + b = 0$ 의 세 근을 $\alpha, 2\alpha, 4\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}
 \alpha + 2\alpha + 4\alpha & = 7, \quad 7\alpha = 7 \quad \therefore \alpha = 1 \\
 \text{따라서 세 근이 } 1, 2, 4 \text{이므로} \\
 1 \times 2 + 2 \times 4 + 4 \times 1 & = a \quad \therefore a = 14 \\
 1 \times 2 \times 4 & = -b \quad \therefore b = -8
 \end{aligned}$$

09-1 ㉡ $3x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$

삼차방정식 $x^3 + 2x^2 - x + 3 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}
 \alpha + \beta + \gamma & = -2, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1, \quad \alpha\beta\gamma = -3 \\
 \text{세 근 } \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma} \text{에 대하여} \\
 \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} & = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{3} \\
 \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} & = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{2}{3} \\
 \frac{1}{\alpha\beta\gamma} & = -\frac{1}{3} \\
 \text{따라서 구하는 삼차방정식은} \\
 3\left(x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) & = 0 \\
 \therefore 3x^3 - x^2 + 2x + 1 & = 0
 \end{aligned}$$

09-2 ㉡ $x^3 + x + 3 = 0$

삼차방정식 $x^3 + x - 3 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}
 \alpha + \beta + \gamma & = 0, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1, \quad \alpha\beta\gamma = 3 \\
 \alpha + \beta + \gamma & = 0 \text{에서} \\
 \alpha + \beta & = -\gamma, \quad \beta + \gamma = -\alpha, \quad \gamma + \alpha = -\beta \\
 \text{즉, } \alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha \text{를 세 근으로 하는 삼차방정식은} \\
 -\gamma, -\alpha, -\beta \text{를 세 근으로 하는 삼차방정식과 같다.} \\
 \text{세 근 } -\alpha, -\beta, -\gamma \text{에 대하여} \\
 -(\alpha + \beta + \gamma) & = 0, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1, \quad -\alpha\beta\gamma = -3 \\
 \text{따라서 구하는 삼차방정식은} \\
 x^3 + x + 3 & = 0
 \end{aligned}$$

10-1 ㉡ $2 + \sqrt{3}, -3$

계수가 유리수이므로 $2 - \sqrt{3}$ 이 근이면 $2 + \sqrt{3}$ 도 근이다.

삼차방정식 $x^3 - x^2 + ax + b = 0$ 의 나머지 한 근을 α 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 합은 1이므로

$$(2 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3}) + \alpha = 1 \quad \therefore \alpha = -3$$

따라서 나머지 두 근은 $2 + \sqrt{3}, -3$

10-2 ㉡ $a=5, b=-26$

계수가 실수이므로 $-2 + 3i$ 가 근이면 $-2 - 3i$ 도 근이다.

삼차방정식 $x^3 + 2x^2 + ax + b = 0$ 의 나머지 한 근을 α 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 합은 -2 이므로

$$(-2 + 3i) + (-2 - 3i) + \alpha = -2 \quad \therefore \alpha = 2$$

즉, 세 근이 $-2 + 3i, -2 - 3i, 2$ 이고 두 근끼리의 곱의 합은 a 이므로

$$\begin{aligned}
 (-2 + 3i)(-2 - 3i) + (-2 - 3i) \times 2 + 2 \times (-2 + 3i) & = a \\
 \therefore a & = 5 \\
 \text{세 근의 곱은 } -b \text{이므로} \\
 (-2 + 3i)(-2 - 3i) \times 2 & = -b \quad \therefore b = -26
 \end{aligned}$$

10-3 ㉡ 0

계수가 유리수이므로 $1 + \sqrt{3}$ 이 근이면 $1 - \sqrt{3}$ 도 근이다.

삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + 4 = 0$ 의 나머지 한 근이 c 이므로 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 곱은

$$(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) \times c = -4 \quad \therefore c = 2$$

즉, 세 근이 $1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}, 2$ 이고 세 근의 합은 $-a$ 이므로

$$(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3}) + 2 = -a \quad \therefore a = -4$$

두 근끼리의 곱의 합은 b 이므로

$$\begin{aligned}
 (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3}) \times 2 + 2 \times (1 + \sqrt{3}) & = b \\
 \therefore b & = 2 \\
 \therefore a + b + c & = -4 + 2 + 2 = 0
 \end{aligned}$$

3 방정식 $x^3=1$ 의 허근의 성질

개념 CHECK

128쪽

1 답 (1) 1 (2) 0 (3) 0 (4) -1

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$ 이므로

(1) $\omega^{12}=(\omega^3)^4=1$

(2) $\omega^5+\omega^4+\omega^3=\omega^3(\omega^2+\omega+1)=0$

(3) $\omega^{100}+\omega^{50}+1=(\omega^3)^{33}\times\omega+(\omega^3)^{16}\times\omega^2+1$
 $=\omega^2+\omega+1=0$

(4) $\frac{\omega^2}{1+\omega}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$

문제

129쪽

11-1 답 (1) 2 (2) -1

$x^3-1=0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω 는 $x^3-1=0$ 의 한 허근이므로 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로 다른 한 근은 $\bar{\omega}$ 이다.

$\therefore \omega+\bar{\omega}=-1$, $\omega\bar{\omega}=1$

(1) $(1+\omega^{1000})(1+\omega^{1001})(1+\omega^{1002})$
 $=\{1+(\omega^3)^{333}\times\omega\}\{1+(\omega^3)^{333}\times\omega^2\}\{1+(\omega^3)^{334}\}$
 $=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+1)$
 $=(-\omega^2)\times(-\omega)\times 2=2\omega^3=2$

(2) $\frac{\omega}{1-\omega}+\frac{\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}}=\frac{\omega(1-\bar{\omega})+\bar{\omega}(1-\omega)}{(1-\omega)(1-\bar{\omega})}$
 $=\frac{\omega+\bar{\omega}-2\omega\bar{\omega}}{1-(\omega+\bar{\omega})+\omega\bar{\omega}}$
 $=\frac{-1-2\times 1}{1-(-1)+1}=-1$

11-2 답 2

$x^3=-1$, 즉 $x^3+1=0$ 에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

ω 는 $x^3+1=0$ 의 한 허근이므로 $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\therefore \frac{\omega^{17}}{1+\omega^{16}}-\frac{\omega^{16}}{1-\omega^{17}}=\frac{(\omega^3)^5\times\omega^2}{1+(\omega^3)^5\times\omega}-\frac{(\omega^3)^5\times\omega}{1-(\omega^3)^5\times\omega^2}$
 $=\frac{-\omega^2}{1-\omega}-\frac{-\omega}{1+\omega^2}=\frac{-\omega^2}{-\omega^2}-\frac{-\omega}{\omega}$
 $=1-(-1)=2$

11-3 답 ②

$x^3+1=0$ 에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

ω 는 $x^3+1=0$ 의 한 허근이므로 $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

① $x^2-x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로 다른 한 근은 $\bar{\omega}$ 이다. 따라서 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega\bar{\omega}=1$

② $\omega^2-\omega+1=0$ 의 양변을 ω 로 나누면

$\omega-1+\frac{1}{\omega}=0 \quad \therefore \omega+\frac{1}{\omega}=1$

③ $\omega^5-\omega^4-1=\omega^3\times\omega^2-\omega^3\times\omega-1=-\omega^2+\omega-1$
 $=-(\omega^2-\omega+1)=0$

④ $\frac{\omega^{100}+1}{\omega^{101}}=\frac{(\omega^3)^{33}\times\omega+1}{(\omega^3)^{33}\times\omega^2}=\frac{-\omega+1}{-\omega^2}=\frac{-\omega^2}{-\omega^2}=1$

⑤ $\omega\bar{\omega}=1$ 에서 $\bar{\omega}=\frac{1}{\omega}=\frac{-\omega^3}{\omega}=-\omega^2$

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

연습문제

130~132쪽

1 ⑤ 2 -2 3 ① 4 ⑤ 5 -4

6 ① 7 $1+\sqrt{2}$ 8 $k\geq 4$

9 $k<-2$ 또는 $-2<k<0$ 또는 $0<k<\frac{1}{4}$ 10 ④

11 36 12 ③ 13 ② 14 -18 15 ③

16 ③ 17 ① 18 -21 19 -10

1 $f(x)=2x^4+x^3-9x^2-4x+4$ 라 하면

$f(-1)=2-1-9+4+4=0$

$f(2)=32+8-36-8+4=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 2 & 1 & -9 & -4 & 4 \\ & & -2 & 1 & 8 & -4 \\ \hline 2 & 2 & -1 & -8 & 4 & 0 \\ & & 4 & 6 & -4 & \\ \hline & 2 & 3 & -2 & 0 & \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-2)(2x^2+3x-2)$
 $=(x+2)(x+1)(x-2)(2x-1)$

주어진 방정식은 $(x+2)(x+1)(x-2)(2x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

따라서 모든 양의 근의 합은 $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

2 $f(x)=x^4-2x^3+2x^2+2x-3$ 이라 하면

$f(-1)=1+2+2-2-3=0$

$f(1)=1-2+2+2-3=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -2 & 2 & 2 & -3 \\ & & -1 & 3 & -5 & 3 \\ \hline 1 & 1 & -3 & 5 & -3 & 0 \\ & & 1 & -2 & 3 & \\ \hline & 1 & -2 & 3 & 0 & \end{array}$$

$\therefore f(x)=(x+1)(x-1)(x^2-2x+3)$

주어진 방정식은 $(x+1)(x-1)(x^2-2x+3)=0$
 이 방정식의 두 허근 α, β 는 이차방정식 $x^2-2x+3=0$ 의
 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha+\beta=2, \alpha\beta=3$
 $\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times 3=-2$

3 $f(x)=2x^3+x^2+2x+3$ 이라 하면

$$f(-1)=-2+1-2+3=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ & & -2 & 1 & -3 \\ \hline & 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x+1)(2x^2-x+3)$$

주어진 방정식은 $(x+1)(2x^2-x+3)=0$

이 방정식의 한 허근 α 는 이차방정식 $2x^2-x+3=0$ 의
 근이므로 $2\alpha^2-\alpha+3=0$

$$\therefore 4\alpha^2-2\alpha+7=2(2\alpha^2-\alpha+3)+1=2\times 0+1=1$$

4 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-8=0$ 에서

$$\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}-8=0$$

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-8=0$$

$x^2+5x=t$ 로 놓으면

$$(t+4)(t+6)-8=0$$

$$t^2+10t+16=0, (t+8)(t+2)=0$$

$$\therefore t=-8 \text{ 또는 } t=-2$$

(i) $t=-8$ 일 때, $x^2+5x+8=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1<0$

(ii) $t=-2$ 일 때, $x^2+5x+2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2>0$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 모든 실근은
 $x^2+5x+2=0$ 의 두 근이므로 그 곱은 2이다.

5 $x^4-5x^2+4=0$ 에서 $x^2=t$ 로 놓으면

$$t^2-5t+4=0, (t-1)(t-4)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=4$$

즉, $x^2=1$ 또는 $x^2=4$ 이므로

$$x=\pm 1 \text{ 또는 } x=\pm 2$$

따라서 네 근 중 가장 큰 근은 2, 가장 작은 근은 -2 이므로
 그 곱은 -4 이다.

6 $x\neq 0$ 이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$x+\frac{1}{x}=t \text{로 놓으면}$$

$$t^2+2t-3=0, (t+3)(t-1)=0$$

$$\therefore t=-3 \text{ 또는 } t=1$$

(i) $t=-3$ 일 때, $x+\frac{1}{x}=-3$ 에서 $x^2+3x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1>0$

(ii) $t=1$ 일 때, $x+\frac{1}{x}=1$ 에서 $x^2-x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2<0$

(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 한 허근 α 는 방정식
 $x^2-x+1=0$ 의 근이므로

$$\alpha^2-\alpha+1=0$$

양변을 α 로 나누면

$$\alpha-1+\frac{1}{\alpha}=0 \quad \therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=1$$

7 삼차방정식 $x^3+ax^2-3x-1=0$ 의 한 근이 -1 이므로

$x=-1$ 을 대입하면

$$-1+a+3-1=0 \quad \therefore a=-1$$

주어진 방정식은 $x^3-x^2-3x-1=0$

이 방정식의 한 근이 -1 이므로 조립제법을 이용하여 좌
 변을 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -1 & -3 & -1 \\ & & -1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\therefore (x+1)(x^2-2x-1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1\pm\sqrt{2}$$

따라서 나머지 두 근 중 큰 근은 $1+\sqrt{2}$ 이다.

8 $f(x)=x^3-6x^2+(k+8)x-2k$ 라 하면

$$f(2)=8-24+2k+16-2k=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -6 & k+8 & -2k \\ & & 2 & -8 & 2k \\ \hline & 1 & -4 & k & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-2)(x^2-4x+k)$$

이때 주어진 방정식이 오직 한 개의 실근을 가지려면 이차
 방정식 $x^2-4x+k=0$ 이 2를 중근으로 갖거나 허근을 가
 져야 한다.

(i) $x^2-4x+k=0$ 이 2를 중근으로 갖는 경우

$$4-8+k=0 \quad \therefore k=4$$

(ii) $x^2-4x+k=0$ 이 허근을 갖는 경우

$$x^2-4x+k=0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$\frac{D}{4}=4-k<0 \quad \therefore k>4$$

(i), (ii)에 의하여 k 의 값의 범위는 $k\geq 4$

- 9 $f(x)=x^4+x^3+(k-1)x^2-x-k$ 라 하면

$$f(1)=1+1+k-1-1-k=0$$

$$f(-1)=1-1+k-1+1-k=0$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 1 & k-1 & -1 & -k \\ & & 1 & 2 & k+1 & k \\ -1 & 1 & 2 & k+1 & k & 0 \\ & & -1 & -1 & -k & \\ \hline & 1 & 1 & k & & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+x+k)$$

이때 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 이차 방정식 $x^2+x+k=0$ 이 1이 아니고 -1 도 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

따라서 $Q(x)=x^2+x+k$ 라 하면

$$(i) Q(1) \neq 0 \text{이므로 } 1+1+k \neq 0 \quad \therefore k \neq -2$$

$$(ii) Q(-1) \neq 0 \text{이므로 } 1-1+k \neq 0 \quad \therefore k \neq 0$$

(iii) $x^2+x+k=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=1-4k>0 \quad \therefore k<\frac{1}{4}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 k 의 값의 범위는

$$k<-2 \text{ 또는 } -2<k<0 \text{ 또는 } 0<k<\frac{1}{4}$$

- 10 삼차방정식 $x^3+2x^2+5x+3=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=-2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5, \alpha\beta\gamma=-3$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} + \frac{\alpha+\beta}{\gamma} &= \frac{-2-\alpha}{\alpha} + \frac{-2-\beta}{\beta} + \frac{-2-\gamma}{\gamma} \\ &= -\frac{2}{\alpha} - \frac{2}{\beta} - \frac{2}{\gamma} - 3 \\ &= -2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) - 3 \\ &= \frac{-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma} - 3 \\ &= \frac{-2 \times 5}{-3} - 3 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- 11 $f(a)=f(b)=f(c)=-3$ 에서

$f(a)+3=f(b)+3=f(c)+3=0$ 이므로 a, b, c 는 삼차 방정식 $f(x)+3=0$, 즉 $x^3-4x^2-10x+4=0$ 의 세 근이다.

근과 계수의 관계에 의하여

$$a+b+c=4, ab+bc+ca=-10$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2$$

$$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$

$$=4^2-2 \times (-10)=36$$

- 12 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-48=0$ 의 세 근을 $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$ ($\alpha \neq 0$)라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha \times 2\alpha \times 3\alpha = 48, \alpha^3 = 8$$

$$(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4)=0$$

그런데 α 는 실수이므로 $\alpha=2$

따라서 세 근이 2, 4, 6이므로

$$2+4+6=-a \quad \therefore a=-12$$

$$2 \times 4 + 4 \times 6 + 6 \times 2 = b \quad \therefore b=44$$

$$\therefore a+b=-12+44=32$$

- 13 삼차방정식 $x^3-2x^2+4x+3=0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+\gamma=2, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4, \alpha\beta\gamma=-3$$

세 근 $\alpha-2, \beta-2, \gamma-2$ 에 대하여

$$(\alpha-2)+(\beta-2)+(\gamma-2)$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)-6$$

$$=2-6=-4$$

$$(\alpha-2)(\beta-2)+(\beta-2)(\gamma-2)+(\gamma-2)(\alpha-2)$$

$$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-4(\alpha+\beta+\gamma)+12$$

$$=4-4 \times 2+12=8$$

$$(\alpha-2)(\beta-2)(\gamma-2)$$

$$=\alpha\beta\gamma-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+4(\alpha+\beta+\gamma)-8$$

$$=-3-2 \times 4+4 \times 2-8=-11$$

따라서 구하는 삼차방정식은

$$a(x^3+4x^2+8x+11)=0 \quad (a \neq 0) \text{ 풀이므로 } \textcircled{2} \text{이다.}$$

- 14 계수가 유리수이므로 $3-2\sqrt{2}$ 가 근이면 $3+2\sqrt{2}$ 도 근이다.

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+2=0$ 의 세 근이 $-1, 3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-1) \times (3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = -\frac{2}{a} \quad \therefore a=2$$

$$(-1) + (3-2\sqrt{2}) + (3+2\sqrt{2}) = -\frac{b}{2} \quad \therefore b=-10$$

$$\begin{aligned} (-1) \times (3-2\sqrt{2}) + (3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) \\ + (3+2\sqrt{2}) \times (-1) = \frac{c}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore c=-10$$

$$\therefore a+b+c=2+(-10)+(-10)=-18$$

- 15 $x^3=1$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω 는 $x^3=1$ 의 한 허근이므로

$$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$$

$x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이므로 다른 한 근은 $\bar{\omega}$ 이다.

$$\therefore \omega+\bar{\omega}=-1, \omega\bar{\omega}=1$$

$$\textcircled{1} (1+\omega)^3=(-\omega^2)^3=-\omega^6=-(\omega^3)^2=-1$$

$$\textcircled{2} \omega^2\bar{\omega}+\omega\bar{\omega}^2=\omega\bar{\omega}(\omega+\bar{\omega})=-1$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega+1}{\omega^2} = \frac{-\omega^2}{\omega^2} = -1$$

$$\textcircled{4} \quad \omega^{500} = (\omega^3)^{166} \times \omega^2 = \omega^2 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{\omega^{500}} = \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^3}{\omega^2} = \omega$$

$$\therefore \omega^{500} + \frac{1}{\omega^{500}} = \omega^2 + \omega = -1$$

$$\textcircled{5} \quad \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \cdots + \omega^{101}$$

$$= \omega + \omega^2 + \omega^3(1 + \omega + \omega^2) + \cdots + \omega^{99}(1 + \omega + \omega^2)$$

$$= \omega + \omega^2 = -1$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

16 주어진 전개도로 오각기둥을 만

들면 오른쪽 그림과 같다. 이

오각기둥의 부피가 108이므로

$$(x+3)(x+2)(x+1)$$

$$- \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 3 \right) \times (x+1) = 108$$

$$x^3 + 6x^2 + 8x - 105 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 8x - 105 \text{라 하면}$$

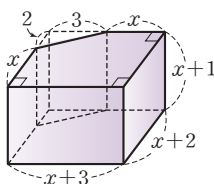
$$f(3) = 27 + 54 + 24 - 105 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & 6 & 8 & -105 \\ & & 3 & 27 & 105 \\ \hline & 1 & 9 & 35 & 0 \end{array}$$

$$\therefore f(x) = (x-3)(x^2 + 9x + 35)$$

$$\text{따라서 } \textcircled{1} \text{은 } (x-3)(x^2 + 9x + 35) = 0$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 3$



17 삼차방정식 $x^3 - 4x^2 + (k+3)x - k = 0$ 의 세 근이 1, α , β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$1 + \alpha + \beta = 4, \alpha + \alpha\beta + \beta = k + 3, \alpha\beta = k$$

$$\therefore \alpha + \beta = 3, \alpha\beta = k$$

1, α , β 는 직각삼각형의 세 변의 길이이므로 빗변의 길이가 1, α , β 인 경우로 나누어 생각하자.

(i) 빗변의 길이가 1인 경우

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \text{에서 } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \text{이므로}$$

$$1 = 3^2 - 2k \quad \therefore k = 4$$

$$\text{따라서 } x^3 - 4x^2 + 7x - 4 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)(x^2 - 3x + 4) = 0$$

이때 α , β 는 이차방정식 $x^2 - 3x + 4 = 0$ 의 근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = 3^2 - 4 \times 4 = -7 < 0$$

즉, α , β 는 실수가 아니므로 1, α , β 는 직각삼각형의 세 변의 길이가 될 수 없다.

(ii) 빗변의 길이가 α 인 경우

$$1 + \beta^2 = \alpha^2 \text{에서 } \alpha^2 - \beta^2 = 1, (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = 1$$

$$3(\alpha - \beta) = 1 \quad \therefore \alpha - \beta = \frac{1}{3}$$

이를 $\alpha + \beta = 3$ 과 연립하여 풀면

$$\alpha = \frac{5}{3}, \beta = \frac{4}{3} \quad \therefore k = \alpha\beta = \frac{20}{9}$$

(iii) 빗변의 길이가 β 인 경우

$$(ii) \text{와 같은 방법으로 } k = \frac{20}{9}$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에 의하여 } k = \frac{20}{9}$$

따라서 $m = 9$, $n = 20$ 이므로 $m + n = 29$

18 (가)에서 계수가 실수이므로 $1-i$ 가 근이면 $1+i$ 도 근이다.

삼차방정식 $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ 의 나머지 한 근을 α 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1-i) + (1+i) + \alpha = a \quad \therefore a = \alpha + 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(1-i)(1+i) + (1+i) \times \alpha + \alpha \times (1-i) = b$$

$$\therefore b = 2\alpha + 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$(1-i)(1+i) \times \alpha = c \quad \therefore c = 2\alpha \quad \cdots \textcircled{3}$$

(나)에서 $f(1) = 6$ 이므로

$$1 - a + b - c = 6 \quad \therefore a - b + c = -5$$

이 식에 ①, ②, ③을 대입하면

$$(\alpha + 2) - (2\alpha + 2) + 2\alpha = -5 \quad \therefore \alpha = -5$$

따라서 $a = -3$, $b = -8$, $c = -10$ 이므로

$$a + b + c = -21$$

19 $x^3 = 1$ 에서 $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

ω 는 $x^3 = 1$ 의 한 허근이므로 $\omega^3 = 1$, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

(i) $n = 3k + 1$ (k 는 음이 아닌 정수)일 때

$$\omega^n = \omega^{3k+1} = (\omega^3)^k \times \omega = \omega, \omega^{2n} = (\omega^n)^2 = \omega^2$$

$$\therefore f(n) = \frac{\omega^n}{1 + \omega^{2n}} = \frac{\omega}{1 + \omega^2} = \frac{\omega}{-\omega} = -1$$

(ii) $n = 3k + 2$ (k 는 음이 아닌 정수)일 때

$$\omega^n = \omega^{3k+2} = (\omega^3)^k \times \omega^2 = \omega^2, \omega^{2n} = (\omega^n)^2 = \omega^4 = \omega$$

$$\therefore f(n) = \frac{\omega^n}{1 + \omega^{2n}} = \frac{\omega^2}{1 + \omega} = \frac{\omega^2}{-\omega^2} = -1$$

(iii) $n = 3k + 3$ (k 는 음이 아닌 정수)일 때

$$\omega^n = \omega^{3k+3} = (\omega^3)^{k+1} = 1, \omega^{2n} = (\omega^n)^2 = 1$$

$$\therefore f(n) = \frac{\omega^n}{1 + \omega^{2n}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

따라서 주어진 식의 값은

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(19)$$

$$= \{f(1) + f(2) + f(3)\} + \{f(4) + f(5) + f(6)\}$$

$$+ \cdots + \{f(16) + f(17) + f(18)\} + f(19)$$

$$= 6 \left\{ (-1) + (-1) + \frac{1}{2} \right\} + (-1) = -10$$

II-3 02 연립이차방정식

미지수가 2개인 연립이차방정식

개념 CHECK

133쪽

1 답 (1) $y=2x-1$

(2) $x=0$ 또는 $x=2$

(3) $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

문제

134~138쪽

01-1 답 (1) $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

(1) ㉠에서 $y=2x-1$ 을 ㉡에 대입하면

$$3x^2 - (2x-1)^2 = 2, x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0 \quad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=3$$

이를 각각 $y=2x-1$ 에 대입하면

$$x=1 \text{ 일 때 } y=1, x=3 \text{ 일 때 } y=5$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

(2) ㉠에서 $y=x-3$ 을 ㉡에 대입하면

$$x^2 + 2x(x-3) + (x-3)^2 = 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0, (x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

이를 각각 $y=x-3$ 에 대입하면

$$x=1 \text{ 일 때 } y=-2, x=2 \text{ 일 때 } y=-1$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

01-2 답 6

㉠에서 $x=2y+3$ 을 ㉡에 대입하면

$$(2y+3)^2 + 2y^2 = 99, y^2 + 2y - 15 = 0$$

$$(y+5)(y-3) = 0 \quad \therefore y=-5 \text{ 또는 } y=3$$

이를 각각 $x=2y+3$ 에 대입하면

$$y=-5 \text{ 일 때 } x=-7, y=3 \text{ 일 때 } x=9$$

그런데 x, y 는 양수이므로 $x=9, y=3$

$$\therefore |y-x| = 6$$

01-3 답 15

㉠에서 $y=3x-1$ 을 ㉡에 대입하면

$$x^2 - 3x(3x-1) + (3x-1)^2 = 5$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0, (x+1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=4$$

이를 각각 $y=3x-1$ 에 대입하면

$$x=-1 \text{ 일 때 } y=-4, x=4 \text{ 일 때 } y=11$$

$$\therefore x+y=-5 \text{ 또는 } x+y=15$$

따라서 $x+y$ 의 최댓값은 15이다.

02-1 답 (1) $\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$

$$\text{또는 } \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

(2) $\begin{cases} x=-2\sqrt{3}i \\ y=\sqrt{3}i \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2\sqrt{3}i \\ y=-\sqrt{3}i \end{cases}$

$$\text{또는 } \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

(1) ㉠의 좌변을 인수분해하면

$$(x+y)(x-3y) = 0$$

$$\therefore x=-y \text{ 또는 } x=3y$$

(i) $x=-y$ 를 ㉡에 대입하면

$$y^2 + y^2 = 10, y^2 = 5$$

$$\therefore y=-\sqrt{5} \text{ 또는 } y=\sqrt{5}$$

$$x=-y \text{ 이므로}$$

$$y=-\sqrt{5} \text{ 일 때 } x=\sqrt{5}, y=\sqrt{5} \text{ 일 때 } x=-\sqrt{5}$$

(ii) $x=3y$ 를 ㉡에 대입하면

$$9y^2 + y^2 = 10, y^2 = 1$$

$$\therefore y=-1 \text{ 또는 } y=1$$

$$x=3y \text{ 이므로}$$

$$y=-1 \text{ 일 때 } x=-3, y=1 \text{ 일 때 } x=3$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=-\sqrt{5} \\ y=\sqrt{5} \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=\sqrt{5} \\ y=-\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{또는 } \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

(2) ㉠의 좌변을 인수분해하면

$$(x+2y)(x-2y) = 0$$

$$\therefore x=-2y \text{ 또는 } x=2y$$

(i) $x=-2y$ 를 ㉡에 대입하면

$$4y^2 - 2y^2 - 3y^2 = 3, y^2 = -3$$

$$\therefore y=-\sqrt{3}i \text{ 또는 } y=\sqrt{3}i$$

$$x=-2y \text{ 이므로}$$

$$y=-\sqrt{3}i \text{ 일 때 } x=2\sqrt{3}i, y=\sqrt{3}i \text{ 일 때 } x=-2\sqrt{3}i$$

(ii) $x=2y$ 를 ㉠에 대입하면

$$4y^2 + 2y^2 - 3y^2 = 3, y^2 = 1$$

$$\therefore y = -1 \text{ 또는 } y = 1$$

$$x = 2y \text{이므로}$$

$$y = -1 \text{일 때 } x = -2, y = 1 \text{일 때 } x = 2$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x = -2\sqrt{3}i \\ y = \sqrt{3}i \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 2\sqrt{3}i \\ y = -\sqrt{3}i \end{cases}$$

$$\text{또는 } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

02-2 ㉡ $(-2, -2), (2, 2)$

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x+2y)(x-y)=0$

$$\therefore x = -2y \text{ 또는 } x = y$$

(i) $x = -2y$ 를 ㉠에 대입하면

$$4y^2 - 4y^2 - y^2 = 8, y^2 = -8$$

$$\therefore y = -2\sqrt{2}i \text{ 또는 } y = 2\sqrt{2}i$$

$$x = -2y \text{이므로}$$

$$y = -2\sqrt{2}i \text{일 때 } x = 4\sqrt{2}i, y = 2\sqrt{2}i \text{일 때 } x = -4\sqrt{2}i$$

(ii) $x = y$ 를 ㉠에 대입하면

$$y^2 + 2y^2 - y^2 = 8, y^2 = 4$$

$$\therefore y = -2 \text{ 또는 } y = 2$$

$$x = y \text{이므로 } y = -2 \text{일 때 } x = -2, y = 2 \text{일 때 } x = 2$$

(i), (ii)에 의하여 실수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는

$$(-2, -2), (2, 2)$$

02-3 ㉡ -3

㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x-y)(x-2y)=0$

$$\therefore x = y \text{ 또는 } x = 2y$$

(i) $x = y$ 를 ㉠에 대입하면

$$y^2 + y^2 + 3y + 1 = 0, 2y^2 + 3y + 1 = 0$$

$$(y+1)(2y+1)=0 \quad \therefore y = -1 \text{ 또는 } y = -\frac{1}{2}$$

$$x = y \text{이므로}$$

$$y = -1 \text{일 때 } x = -1, y = -\frac{1}{2} \text{일 때 } x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x + y = -2 \text{ 또는 } x + y = -1$$

(ii) $x = 2y$ 를 ㉠에 대입하면

$$4y^2 + y^2 + 6y + 1 = 0, 5y^2 + 6y + 1 = 0$$

$$(y+1)(5y+1)=0 \quad \therefore y = -1 \text{ 또는 } y = -\frac{1}{5}$$

$$x = 2y \text{이므로}$$

$$y = -1 \text{일 때 } x = -2, y = -\frac{1}{5} \text{일 때 } x = -\frac{2}{5}$$

$$\therefore x + y = -3 \text{ 또는 } x + y = -\frac{3}{5}$$

(i), (ii)에 의하여 $x+y$ 의 최솟값은 -3 이다.

$$03-1 \text{ ㉡ } \begin{cases} x=1-2i \\ y=1+2i \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1+2i \\ y=1-2i \end{cases}$$

주어진 연립방정식에서 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$\begin{cases} u+v=7 \\ 3u-v=1 \end{cases}$$

이를 연립하여 풀면 $u=2, v=5$

$$\therefore x+y=2, xy=5$$

x, y 는 이차방정식 $t^2-2t+5=0$ 의 두 근이다.

$$\therefore t=1-2i \text{ 또는 } t=1+2i$$

따라서 주어진 연립방정식의 해는

$$\begin{cases} x=1-2i \\ y=1+2i \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=1+2i \\ y=1-2i \end{cases}$$

$$03-2 \text{ ㉡ } \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

주어진 연립방정식에서 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=u^2-2v \text{이므로}$$

$$\begin{cases} v+u=11 & \cdots \cdots \text{㉠} \\ u^2-2v=13 & \cdots \cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $v=11-u$ 를 ㉡에 대입하면

$$u^2-2(11-u)=13, u^2+2u-35=0$$

$$(u+7)(u-5)=0 \quad \therefore u = -7 \text{ 또는 } u = 5$$

이를 각각 $v=11-u$ 에 대입하면

$$u = -7 \text{일 때 } v = 18, u = 5 \text{일 때 } v = 6$$

(i) $u = -7, v = 18$, 즉 $x+y = -7, xy = 18$ 일 때

x, y 는 이차방정식 $t^2+7t+18=0$ 의 두 근이므로

$$t = \frac{-7 \pm \sqrt{23}i}{2}$$

그런데 x, y 는 정수이므로 해가 없다.

(ii) $u = 5, v = 6$, 즉 $x+y = 5, xy = 6$ 일 때

x, y 는 이차방정식 $t^2-5t+6=0$ 의 두 근이므로

$$(t-2)(t-3)=0 \quad \therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 3$$

$$\therefore x = 2, y = 3 \text{ 또는 } x = 3, y = 2$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 정수인 해는

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$

04-1 ㉡ 2

$$\text{㉠을 ㉡에 대입하면 } x^2 + (x+a)^2 = a$$

$$2x^2 + 2ax + a^2 - a = 0 \quad \cdots \cdots \text{㉢}$$

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 ㉢

이 중근을 가져야 하므로 ㉢의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2(a^2 - a) = 0, a^2 - 2a = 0$$

$$a(a-2) = 0 \quad \therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 2$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 2이다.

04-2 답 0

㉠에서 $y=1-x$ 를 ㉡에 대입하면
 $x^2+2x(1-x)+a=2, x^2-2x-a+2=0 \dots\dots \textcircled{B}$
 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 ㉡
 이 중근을 가져야 하므로 ㉡의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=1-(-a+2)=0, a-1=0 \therefore a=1$
 이를 ㉡에 대입하면 $x^2-2x+1=0, (x-1)^2=0$
 $\therefore x=1 \therefore a=1$
 $x=1$ 을 $y=1-x$ 에 대입하면 $y=0 \therefore \beta=0$
 $\therefore a\beta=0$

04-3 답 $-\frac{1}{2}$

㉠에서 $y=x-2$ 를 ㉡에 대입하면
 $x^2+x(x-2)-a=0, 2x^2-2x-a=0 \dots\dots \textcircled{B}$
 연립방정식이 실근을 가지려면 이차방정식 ㉡이 실근을
 가져야 하므로 ㉡의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=1+2a \geq 0 \therefore a \geq -\frac{1}{2}$
 따라서 실수 a 의 최솟값은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

05-1 답 27

처음 자연수의 십의 자리 숫자를 x , 일의 자리 숫자를 y 라
 하면 각 자리의 숫자의 제곱의 합이 53이므로
 $x^2+y^2=53 \dots\dots \textcircled{A}$
 각 자리의 숫자의 순서를 바꾼 자연수와 처음 자연수의 합
 이 99이므로 $(10x+y)+(10y+x)=99$
 $\therefore y=9-x \dots\dots \textcircled{B}$
 ㉡을 ㉠에 대입하면
 $x^2+(9-x)^2=53, x^2-9x+14=0$
 $(x-2)(x-7)=0 \therefore x=2 \text{ 또는 } x=7$
 이를 각각 ㉡에 대입하면
 $x=2$ 일 때 $y=7, x=7$ 일 때 $y=2$
 그런데 $x < y$ 이므로 처음 자연수는 27이다.

05-2 답 10 m

긴 철사의 길이를 x m, 짧은 철사의 길이를 y m라 하면
 두 철사의 길이의 차가 12 m이므로
 $x-y=12 \therefore x=y+12 \dots\dots \textcircled{A}$
 각 철사로 만든 정사각형에서 그 넓이의 차이가 24 m^2 이므로
 $\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 24 \therefore x^2 - y^2 = 384 \dots\dots \textcircled{B}$
 ㉡을 ㉠에 대입하면 $(y+12)^2 - y^2 = 384$
 $24y = 240 \therefore y = 10$
 따라서 짧은 철사의 길이는 10 m이다.

부정방정식

개념 CHECK

140쪽

1 답 (4, 3)

$3x+4y=24$ 에서 $x=\frac{24-4y}{3}$
 x, y 는 자연수이므로 $y=3$ 일 때, $x=4$
 따라서 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는 (4, 3)

2 답 (-2, 0), (0, 2), (2, -4), (4, -2)

x, y 는 정수이므로 $x-1, y+1$ 도 정수이다.
 따라서 $(x-1)(y+1)=-3$ 인 경우는
 (i) $x-1=-3, y+1=1$ 일 때
 $x=-2, y=0$
 (ii) $x-1=-1, y+1=3$ 일 때
 $x=0, y=2$
 (iii) $x-1=1, y+1=-3$ 일 때
 $x=2, y=-4$
 (iv) $x-1=3, y+1=-1$ 일 때
 $x=4, y=-2$
 (i)~(iv)에 의하여 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는
 (-2, 0), (0, 2), (2, -4), (4, -2)

3 답 $x=-2, y=3$

$(x+2)^2+(y-3)^2=0$ 에서 x, y 는 실수이므로
 $x+2=0, y-3=0$
 $\therefore x=-2, y=3$

문제

141~142쪽

06-1 답 (1) 10 (2) -4 또는 -2

(1) $xy-3x-3y+6=0$ 에서
 $x(y-3)-3(y-3)-3=0$
 $\therefore (x-3)(y-3)=3$
 x, y 가 자연수이므로 $x-3, y-3$ 은 $x-3 \geq -2,$
 $y-3 \geq -2$ 인 정수이다.
 따라서 $(x-3)(y-3)=3$ 인 경우는
 (i) $x-3=1, y-3=3$ 일 때
 $x=4, y=6$
 (ii) $x-3=3, y-3=1$ 일 때
 $x=6, y=4$
 (i), (ii)에 의하여 $x+y=10$

(2) 정수인 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha \leq \beta)$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = m + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta = -m - 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $m = \alpha + \beta - 1$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\alpha\beta = -(\alpha + \beta - 1) - 4, \alpha(\beta + 1) + (\beta + 1) = -2$$

$$\therefore (\alpha + 1)(\beta + 1) = -2$$

α, β 가 정수이므로 $\alpha + 1, \beta + 1$ 도 정수이다.

따라서 $(\alpha + 1)(\beta + 1) = -2$ 인 경우는

(i) $\alpha + 1 = -2, \beta + 1 = 1$ 일 때, $\alpha = -3, \beta = 0$

(ii) $\alpha + 1 = -1, \beta + 1 = 2$ 일 때, $\alpha = -2, \beta = 1$

$\textcircled{1}$ 에서 $m = \alpha + \beta - 1$ 이므로

$$m = -4 \text{ 또는 } m = -2$$

06-2 ㉡ 3

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \text{에서 } \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2}$$

$$xy - 2x - 2y = 0, x(y - 2) - 2(y - 2) = 4$$

$$\therefore (x - 2)(y - 2) = 4$$

x, y 가 자연수이므로 $x - 2, y - 2$ 는 $x - 2 \geq -1,$

$y - 2 \geq -1$ 인 정수이다.

따라서 $(x - 2)(y - 2) = 4$ 인 경우는

(i) $x - 2 = 1, y - 2 = 4$ 일 때, $x = 3, y = 6$

(ii) $x - 2 = 2, y - 2 = 2$ 일 때, $x = 4, y = 4$

(iii) $x - 2 = 4, y - 2 = 1$ 일 때, $x = 6, y = 3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 는

$(3, 6), (4, 4), (6, 3)$ 의 3개이다.

07-1 ㉡ (1) $x = 6, y = 3$ (2) $x = -1, y = -2$

(1) $x^2 + 5y^2 - 4xy - 6y + 9 = 0$ 에서

$$(x^2 - 4xy + 4y^2) + (y^2 - 6y + 9) = 0$$

$$\therefore (x - 2y)^2 + (y - 3)^2 = 0$$

x, y 가 실수이므로 $x - 2y = 0, y - 3 = 0$

$$\therefore x = 6, y = 3$$

(2) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ 에서

$$\{x^2 - 2x(y + 1) + y^2 + 2y + 1\} + (y^2 + 4y + 4) = 0$$

$$\{x^2 - 2x(y + 1) + (y + 1)^2\} + (y^2 + 4y + 4) = 0$$

$$\therefore (x - y - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$$

x, y 가 실수이므로 $x - y - 1 = 0, y + 2 = 0$

$$\therefore x = -1, y = -2$$

다른 풀이

(1) 좌변을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 - 4xy + 5y^2 - 6y + 9 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

x 가 실수이므로 x 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4y^2 - (5y^2 - 6y + 9) \geq 0$$

$$y^2 - 6y + 9 \leq 0 \quad \therefore (y - 3)^2 \leq 0$$

y 도 실수이므로 $y = 3$

$y = 3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x^2 - 12x + 36 = 0$

$$(x - 6)^2 = 0 \quad \therefore x = 6$$

(2) 좌변을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 - 2(y + 1)x + 2y^2 + 6y + 5 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

x 가 실수이므로 x 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (y + 1)^2 - (2y^2 + 6y + 5) \geq 0$$

$$y^2 + 4y + 4 \leq 0 \quad \therefore (y + 2)^2 \leq 0$$

y 도 실수이므로 $y = -2$

$y = -2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$(x + 1)^2 = 0 \quad \therefore x = -1$$

연습문제

143~144쪽

1 ③	2 ②	3 $3\sqrt{2}$	4 ⑤	5 ①
6 ①	7 5	8 ④	9 ③	10 1
11 ②				

1 $\textcircled{1}$ 에서 $x = y + 4$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$(y + 4)^2 + 2(y + 4)y + y^2 = 4$$

$$y^2 + 4y + 3 = 0, (y + 3)(y + 1) = 0$$

$$\therefore y = -3 \text{ 또는 } y = -1$$

이를 각각 $x = y + 4$ 에 대입하면

$$y = -3 \text{일 때 } x = 1, y = -1 \text{일 때 } x = 3 \quad \therefore xy = -3$$

2 두 연립방정식의 해가 일치하므로 그 해는 연립방정식

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2 - y^2 = -1 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases} \text{의 해와 같다.}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $y = \frac{1}{2} - x$ 를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$x^2 - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = -1 \quad \therefore x = -\frac{3}{4}$$

이를 $y = \frac{1}{2} - x$ 에 대입하면 $y = \frac{5}{4}$

$x = -\frac{3}{4}, y = \frac{5}{4}$ 를 $3x + y = a, x - y = b$ 에 각각 대입하면

$$-\frac{9}{4} + \frac{5}{4} = a, -\frac{3}{4} - \frac{5}{4} = b$$

$$\therefore a = -1, b = -2 \quad \therefore ab = 2$$

3 ㉠의 좌변을 인수분해하면

$$(x-2y)(2x-y)=0$$

$$\therefore x=2y \text{ 또는 } y=2x$$

(i) $x=2y$ 를 ㉠에 대입하면

$$4y^2-6y^2+2y^2=6, 0 \times y^2=6$$

그런데 y 는 실수이므로 해는 없다.

(ii) $y=2x$ 를 ㉠에 대입하면

$$x^2-6x^2+8x^2=6, x^2=2$$

$$\therefore x=-\sqrt{2} \text{ 또는 } x=\sqrt{2}$$

그런데 $x>0, y>0$ 이므로

$$x=\sqrt{2}, y=2\sqrt{2}$$

(i), (ii)에 의하여 $x+y=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

4 ㉠의 좌변을 인수분해하면

$$(x-y)(x-4y)=0$$

$$\therefore x=y \text{ 또는 } x=4y$$

(i) $x=y$ 를 ㉠에 대입하면

$$y^2+2y^2=18, y^2=6$$

$$\therefore y=-\sqrt{6} \text{ 또는 } y=\sqrt{6}$$

그런데 y 는 정수이므로 해는 없다.

(ii) $x=4y$ 를 ㉠에 대입하면

$$16y^2+2y^2=18, y^2=1$$

$$\therefore y=-1 \text{ 또는 } y=1$$

$$x=4y \text{ 이므로}$$

$$y=-1 \text{ 일 때 } x=-4, y=1 \text{ 일 때 } x=4$$

$$\therefore xy=4$$

(i), (ii)에 의하여 xy 의 값은 4이다.

5 주어진 연립방정식에서 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면

$$x^2y+xy^2=xy(x+y) \text{ 이므로}$$

$$\begin{cases} u-v=1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ uv=6 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

㉠에서 $u=v+1$ 을 ㉡에 대입하면

$$(v+1)v=6, v^2+v-6=0$$

$$(v+3)(v-2)=0$$

$$\therefore v=-3 \text{ 또는 } v=2$$

그런데 v 는 양수이므로 $v=2$

이를 $u=v+1$ 에 대입하면 $u=3$

$$\therefore x+y=3, xy=2$$

x, y 는 이차방정식 $t^2-3t+2=0$ 의 두 근이므로

$$(t-1)(t-2)=0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=2$$

$$\therefore x=1, y=2 \text{ 또는 } x=2, y=1$$

그런데 $x>y$ 이므로

$$x-y=2-1=1$$

6 ㉠에서 $y=k-x$ 를 ㉡에 대입하면

$$x^2+2x+(k-x)=1$$

$$x^2+x+k-1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

주어진 연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면 이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 ㉢의 판별식을 D 라 하면

$$D=1-4(k-1)=0 \quad \therefore k=\frac{5}{4}$$

이를 ㉢에 대입하면 $x^2+x+\frac{1}{4}=0$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0 \quad \therefore x=-\frac{1}{2} \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

$k=\frac{5}{4}, x=-\frac{1}{2}$ 을 $y=k-x$ 에 대입하면

$$y=\frac{5}{4}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4} \quad \therefore \beta=\frac{7}{4}$$

$$\therefore k+\alpha-\beta=\frac{5}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{7}{4}=-1$$

7 오른쪽 그림과 같이 A의 한 변의 길이를 x , D의 한 변의 길이를 y 라 하면 B의 한 변의 길이는 $8-x$, C의 한 변의 길이는 $8-x-y$ 이다. B와 C의 한 변의 길이의 합이 A의 한 변의 길이와 같으므로

$$(8-x)+(8-x-y)=x$$

$$\therefore y=16-3x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

A, D의 넓이의 차가 24이므로

$$x^2-y^2=24 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠을 ㉡에 대입하여 풀면

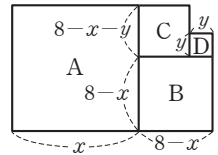
$$x^2-(16-3x)^2=24, x^2-12x+35=0$$

$$(x-5)(x-7)=0$$

$$\therefore x=5 \text{ 또는 } x=7$$

그런데 $0<x<\frac{16}{3}$ 이므로 $x=5$

따라서 정사각형 A의 한 변의 길이는 5이다.



8 $xy+2x+2y+3=0$ 에서

$$x(y+2)+2(y+2)-1=0$$

$$\therefore (x+2)(y+2)=1$$

x, y 가 정수이므로 $x+2, y+2$ 도 정수이다.

따라서 $(x+2)(y+2)=1$ 인 경우는

(i) $x+2=-1, y+2=-1$ 일 때

$$x=-3, y=-3$$

(ii) $x+2=1, y+2=1$ 일 때

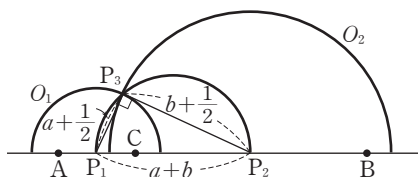
$$x=-1, y=-1$$

(i), (ii)에 의하여 $x-y=0$

9 $2x^2+9y^2+6xy-2x+1=0$ 에서
 $(x^2+6xy+9y^2)+(x^2-2x+1)=0$
 $(x+3y)^2+(x-1)^2=0$
 x, y 가 실수이므로
 $x+3y=0, x-1=0$
 $\therefore x=1, y=-\frac{1}{3}$
 $\therefore 3xy=-1$

10 $x^2+y^2=2a^2-16a+16$ 에서
 $(x+y)^2-2xy=2a^2-16a+16$
 이때 $xy=a^2$ 이므로
 $(x+y)^2-2a^2=2a^2-16a+16$
 $(x+y)^2=4a^2-16a+16$
 $=4(a-2)^2$
 $\therefore x+y=2(a-2)$ 또는 $x+y=-2(a-2)$
 두 실수 x, y 는 이차방정식 $t^2-2(a-2)t+a^2=0$ 또는
 $t^2+2(a-2)t+a^2=0$ 의 두 근이므로 이 이차방정식의 판
 별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=(a-2)^2-a^2\geq 0, -4a+4\geq 0$
 $\therefore a\leq 1$
 그런데 a 는 자연수이므로 $a=1$

11 $\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}$ 이므로
 $6=2a+2b \quad \therefore a+b=3$
 $\therefore \overline{P_1P_2}=a+b=3$
 두 반원 O_1 과 O_2 의 교점을 P_3 이라 하면 반원에 대한 원주
 각의 크기는 90° 이므로 삼각형 $P_1P_2P_3$ 은 $\angle P_1P_3P_2=90^\circ$
 인 직각삼각형이다.



따라서 삼각형 $P_1P_2P_3$ 에서 피타고라스 정리에 의하여
 $\overline{P_1P_2}^2=\overline{P_1P_3}^2+\overline{P_2P_3}^2$ 이므로
 $(a+b)^2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2$
 $a^2+2ab+b^2=a^2+a+\frac{1}{4}+b^2+b+\frac{1}{4}$
 $2ab=a+b+\frac{1}{2}$
 이때 $a+b=3$ 이므로
 $2ab=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$
 $\therefore ab=\frac{7}{4}$

II-4 01 연립일차부등식

1 일차부등식

개념 CHECK

146쪽

- 1 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ
 ㄱ. $a>b$ 의 양변에 1을 더하면
 $a+1>b+1$
 ㄴ. $a>b$ 의 양변에서 3을 빼면
 $a-3>b-3$
 ㄷ. $a>0$ 이므로 $a>b$ 의 양변에 a 를 곱하면
 $a^2>ab$
 ㄹ. $b<0$ 이므로 $a>b$ 의 양변을 b 로 나누면
 $\frac{a}{b}<1$
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

문제

147쪽

- 01-1 답 $\begin{cases} a>4\text{일 때, } x\leq 2 \\ a=4\text{일 때, 모든 실수} \\ a<4\text{일 때, } x\geq 2 \end{cases}$
 $ax-2a\leq 4x-8$ 에서 $(a-4)x\leq 2(a-4)$
 (i) $a-4>0$, 즉 $a>4$ 일 때
 $x\leq 2$
 (ii) $a-4=0$, 즉 $a=4$ 일 때
 $0\times x\leq 0$ 이므로 해는 모든 실수이다.
 (iii) $a-4<0$, 즉 $a<4$ 일 때
 $x\geq 2$
 따라서 부등식의 해는
 $\begin{cases} a>4\text{일 때, } x\leq 2 \\ a=4\text{일 때, 모든 실수} \\ a<4\text{일 때, } x\geq 2 \end{cases}$

01-2 답 -5

$ax+1>a^2-x$ 에서 $(a+1)x>a^2-1$
 $\therefore (a+1)x>(a+1)(a-1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 이 부등식의 해가 $x<-6$ 이므로
 $a+1<0$
 $\textcircled{1}$ 의 양변을 $a+1$ 로 나누면
 $x<a-1$
 따라서 $a-1=-6$ 이므로 $a=-5$

01-3 답 $x \leq -1$

$(a+2b)x+a-b \geq 0$ 에서

$$(a+2b)x \geq b-a \quad \dots \textcircled{㉠}$$

이 부등식의 해가 $x \leq 2$ 이므로 $a+2b < 0 \quad \dots \textcircled{㉡}$

①의 양변을 $a+2b$ 로 나누면 $x \leq \frac{b-a}{a+2b}$

따라서 $\frac{b-a}{a+2b} = 2$ 이므로

$$b-a = 2a+4b \quad \therefore a = -b \quad \dots \textcircled{㉢}$$

③을 ①에 대입하면

$$-b+2b < 0 \quad \therefore b < 0$$

③을 $b(2x-1) \geq 3a$ 에 대입하면

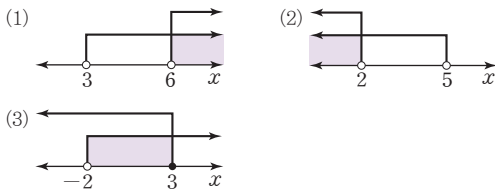
$$2bx-b \geq -3b, 2bx \geq -2b \quad \therefore x \leq -1 (\because 2b < 0)$$

2 연립일차부등식

개념 CHECK

148쪽

1 답 (1) $x > 6$ (2) $x < 2$ (3) $-2 < x \leq 3$



문제

149~154쪽

02-1 답 (1) $x < 1$ (2) $-5 \leq x < -2$

(1) $3x-1 < 5$ 를 풀면

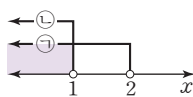
$$3x < 6 \quad \therefore x < 2 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$5x-4 < 3x-2$ 를 풀면

$$2x < 2 \quad \therefore x < 1 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

①, ②을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $x < 1$



(2) $2(x+1) \geq x-3$ 을 풀면

$$2x+2 \geq x-3 \quad \therefore x \geq -5 \quad \dots \textcircled{㉢}$$

$3x-2 < -2(x+6)$ 을 풀면

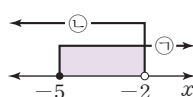
$$3x-2 < -2x-12, 5x < -10$$

$$\therefore x < -2 \quad \dots \textcircled{㉣}$$

③, ④을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는

$$-5 \leq x < -2$$



02-2 답 (1) $x \geq -5$ (2) $7 < x \leq 9$

(1) $5x-6(x-3) > 3(1-x)-1$ 을 풀면

$$5x-6x+18 > 3-3x-1, 2x > -16$$

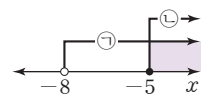
$$\therefore x > -8 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$0.2x \leq 0.3x + \frac{1}{2}$ 을 풀면

$$2x \leq 3x+5, -x \leq 5 \quad \therefore x \geq -5 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

①, ②을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $x \geq -5$



(2) $\frac{x+2}{3} - \frac{x-3}{4} > 2$ 를 풀면

$$4(x+2)-3(x-3) > 24$$

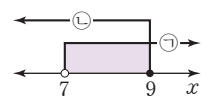
$$4x+8-3x+9 > 24 \quad \therefore x > 7 \quad \dots \textcircled{㉢}$$

$\frac{3x-2}{5} \leq 5$ 를 풀면

$$3x-2 \leq 25, 3x \leq 27 \quad \therefore x \leq 9 \quad \dots \textcircled{㉣}$$

③, ④을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $7 < x \leq 9$



02-3 답 0

$\frac{2x+1}{3} - 1 \leq \frac{3x+2}{2}$ 를 풀면

$$2(2x+1)-6 \leq 3(3x+2)$$

$$4x+2-6 \leq 9x+6, -5x \leq 10$$

$$\therefore x \geq -2 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$0.4x+1 > 0.5(x+1)+0.2$ 를 풀면

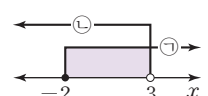
$$4x+10 > 5(x+1)+2$$

$$4x+10 > 5x+5+2, -x > -3$$

$$\therefore x < 3 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

①, ②을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $-2 \leq x < 3$



따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 이므로 구하는 합은

$$-2+(-1)+0+1+2=0$$

03-1 답 (1) $-2 < x \leq 1$ (2) $1 \leq x < 2$

(1) 주어진 부등식은 $\begin{cases} 5x-4 \leq 3x-2 \\ 3x-2 < 10x+12 \end{cases}$ 로 나타낼 수 있다.

$5x-4 \leq 3x-2$ 를 풀면

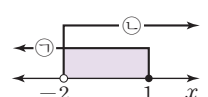
$$2x \leq 2 \quad \therefore x \leq 1 \quad \dots \textcircled{㉠}$$

$3x-2 < 10x+12$ 를 풀면

$$-7x < 14 \quad \therefore x > -2 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

①, ②을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등식의 해는 $-2 < x \leq 1$



(2) 주어진 부등식은 $\begin{cases} 2(x-4)+x < -x \\ -x \leq x-2 \end{cases}$ 로 나타낼 수 있다.

다.

$$2(x-4)+x < -x \text{를 풀면}$$

$$2x-8+x < -x, 4x < 8$$

$$\therefore x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

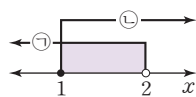
$$-x \leq x-2 \text{를 풀면}$$

$$-2x \leq -2 \quad \therefore x \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진

부등식의 해는 $1 \leq x < 2$



03-2 ㉮ 5

주어진 부등식은 $\begin{cases} \frac{-2x+3}{2} \leq \frac{x}{2}+3 \\ \frac{x}{2}+3 < -x+9 \end{cases}$ 로 나타낼 수 있다.

$$\frac{-2x+3}{2} \leq \frac{x}{2}+3 \text{를 풀면}$$

$$-2x+3 \leq x+6, -3x \leq 3$$

$$\therefore x \geq -1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\frac{x}{2}+3 < -x+9 \text{를 풀면}$$

$$x+6 < -2x+18, 3x < 12$$

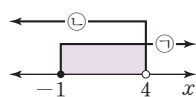
$$\therefore x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진 부등

식의 해는 $-1 \leq x < 4$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.



04-1 ㉮ (1) $x=1$ (2) 해는 없다.

(3) $x=-1$ (4) 해는 없다.

(1) $3x-2 \leq 1$ 을 풀면

$$3x \leq 3 \quad \therefore x \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

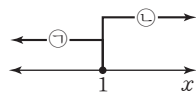
$$2x+5 \leq 4x+3 \text{를 풀면}$$

$$-2x \leq -2 \quad \therefore x \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진

연립부등식의 해는 $x=1$



(2) $x-3 < 4x+3$ 을 풀면

$$-3x < 6 \quad \therefore x > -2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

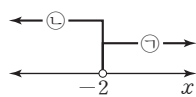
$$6x+7 < x-3 \text{를 풀면}$$

$$5x < -10 \quad \therefore x < -2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진

연립부등식의 해는 없다.



(3) $5x-1 \geq 6x$ 를 풀면

$$-x \geq 1 \quad \therefore x \leq -1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

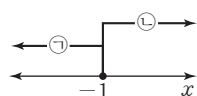
$$13x+1 \geq 2x-10 \text{를 풀면}$$

$$11x \geq -11 \quad \therefore x \geq -1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진

연립부등식의 해는 $x=-1$



(4) $8x+3 \leq 6x+1$ 을 풀면

$$2x \leq -2 \quad \therefore x \leq -1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$2x-5 \geq 1-x \text{를 풀면}$$

$$3x \geq 6 \quad \therefore x \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진

연립부등식의 해는 없다.



04-2 ㉮ (1) 해는 없다. (2) $x=2$

(1) $2(x+1) \geq 5x-7$ 을 풀면

$$2x+2 \geq 5x-7, -3x \geq -9 \quad \therefore x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

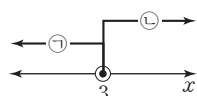
$$0.7x+1 > 3.1 \text{를 풀면}$$

$$7x+10 > 31, 7x > 21 \quad \therefore x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진

연립부등식의 해는 없다.



(2) 주어진 부등식은 $\begin{cases} x+5 \leq 4x-1 \\ 4x-1 \leq 2x+3 \end{cases}$ 로 나타낼 수 있다.

$$x+5 \leq 4x-1 \text{를 풀면}$$

$$-3x \leq -6 \quad \therefore x \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

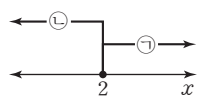
$$4x-1 \leq 2x+3 \text{를 풀면}$$

$$2x \leq 4 \quad \therefore x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진

부등식의 해는 $x=2$



05-1 ㉮ -8

$$5x+a > x-11 \text{를 풀면}$$

$$4x > -a-11 \quad \therefore x > -\frac{a+11}{4}$$

$$-2(2+x) \geq x+a \text{를 풀면}$$

$$-4-2x \geq x+a, -3x \geq a+4$$

$$\therefore x \leq -\frac{a+4}{3}$$

주어진 연립부등식의 해가 $b < x \leq 1$ 이므로

$$-\frac{a+11}{4} = b, -\frac{a+4}{3} = 1 \quad \therefore a = -7, b = -1$$

$$\therefore a+b = -8$$

05-2 [답 7]

$6x-13 \geq 4x+a$ 를 풀면

$$2x \geq a+13 \quad \therefore x \geq \frac{a+13}{2}$$

$2(x-2) \leq x+b$ 를 풀면

$$2x-4 \leq x+b \quad \therefore x \leq b+4$$

주어진 연립부등식의 해가 $x=3$ 이므로

$$\frac{a+13}{2}=3, b+4=3 \quad \therefore a=-7, b=-1$$

$$\therefore ab=7$$

05-3 [답 8]

주어진 부등식은 $\begin{cases} 3x-a < 2x-7 \\ 2x-7 \leq 4x-b \end{cases}$ 로 나타낼 수 있다.

$3x-a < 2x-7$ 을 풀면

$$x < a-7$$

$2x-7 \leq 4x-b$ 를 풀면

$$-2x \leq 7-b \quad \therefore x \geq \frac{b-7}{2}$$

주어진 부등식의 해가 $-3 \leq x < 2$ 이므로

$$a-7=2, \frac{b-7}{2}=-3 \quad \therefore a=9, b=1$$

$$\therefore a-b=8$$

06-1 [답 $a \geq 2$]

$x+1 \geq \frac{2x+a}{3}$ 를 풀면

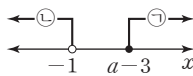
$$3x+3 \geq 2x+a \quad \therefore x \geq a-3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$5x-2 < 3x-4$ 를 풀면

$$2x < -2 \quad \therefore x < -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않도록 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$a-3 \geq -1 \quad \therefore a \geq 2$$



06-2 [답 -13]

$3(4-x) > -x$ 를 풀면

$$12-3x > -x, -2x > -12 \quad \therefore x < 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$2x+4 \leq 5x+a$ 를 풀면

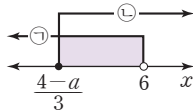
$$-3x \leq a-4 \quad \therefore x \geq \frac{4-a}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

주어진 연립부등식이 해를 갖도록

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$\frac{4-a}{3} < 6, 4-a < 18 \quad \therefore a > -14$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 -13이다.



06-3 [답 $-4 \leq a < -3$]

주어진 부등식은 $\begin{cases} 3x-2 < x+4 \\ x+4 < 2x-a \end{cases}$ 로 나타낼 수 있다.

$3x-2 < x+4$ 를 풀면

$$2x < 6 \quad \therefore x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x+4 < 2x-a$ 를 풀면

$$-x < -a-4 \quad \therefore x > a+4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

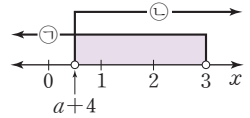
주어진 부등식을 만족시키는

정수 x 가 2개가 되도록 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$

을 수직선 위에 나타내면 오른쪽

쪽 그림과 같으므로

$$0 \leq a+4 < 1 \quad \therefore -4 \leq a < -3$$



07-1 [답 20 cm 이상 25 cm 이하]

세로의 길이를 x cm라 하면 가로 길이는 $(2x-5)$ cm
이므로

$$110 \leq 2\{x + (2x-5)\} \leq 140$$

$$110 \leq 6x-10 \leq 140$$

$$120 \leq 6x \leq 150$$

$$\therefore 20 \leq x \leq 25$$

따라서 세로의 길이는 20 cm 이상 25 cm 이하이다.

07-2 [답 10]

연속하는 세 정수를 $x-1, x, x+1$ 이라 하면

$$\begin{cases} (x-1)+x+(x+1) > 30 \\ (x-1)+x-(x+1) \leq 9 \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 풀면

$$3x > 30 \quad \therefore x > 10 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 을 풀면

$$x \leq 11 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

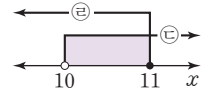
x 의 값의 범위는 $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ 의 공통부

분이므로

$$10 < x \leq 11$$

이때 x 는 정수이므로 $x=11$

따라서 연속하는 세 정수는 10, 11, 12이므로 가장 작은 수는 10이다.



07-3 [답 7]

만들 수 있는 아이스크림 A의 개수를 x 라 하면 아이스크림 B의 개수는 $10-x$ 이므로

$$\begin{cases} 70x+50(10-x) \leq 640 \\ 10x+15(10-x) \leq 130 \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\dots\dots \textcircled{2}$$

㉠을 풀면

$$70x + 500 - 50x \leq 640, 20x \leq 140$$

$$\therefore x \leq 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

㉡을 풀면

$$10x + 150 - 15x \leq 130, -5x \leq -20$$

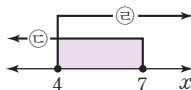
$$\therefore x \geq 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

x 의 값의 범위는 ㉠, ㉡의 공통부

분이므로

$$4 \leq x \leq 7$$

따라서 만들 수 있는 아이스크림 A의 최대 개수는 7이다.



3 절댓값 기호를 포함한 일차부등식

개념 CHECK

155쪽

1 답 (1) $-3 < x < 3$

(2) $x \leq -5$ 또는 $x \geq 5$

(3) $-3 < x < 7$

(4) $x < -3$ 또는 $x > 7$

(3) $|x-2| < 5$ 에서

$$-5 < x-2 < 5$$

$$\therefore -3 < x < 7$$

(4) $|x-2| > 5$ 에서

$$x-2 < -5 \text{ 또는 } x-2 > 5$$

$$\therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 7$$

문제

156쪽

08-1 답 (1) $x < 1$ 또는 $x > \frac{7}{5}$

$$(2) -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } 2 < x < 3$$

$$(3) x < 1$$

$$(4) -\frac{8}{3} < x < 2$$

(1) $|6-5x| > 1$ 에서

$$6-5x < -1 \text{ 또는 } 6-5x > 1$$

$$(i) 6-5x < -1 \text{에서 } -5x < -7 \quad \therefore x > \frac{7}{5}$$

$$(ii) 6-5x > 1 \text{에서 } -5x > -5 \quad \therefore x < 1$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$x < 1 \text{ 또는 } x > \frac{7}{5}$$

(2) $5 < |4x-3| < 9$ 에서

$$-9 < 4x-3 < -5 \text{ 또는 } 5 < 4x-3 < 9$$

(i) $-9 < 4x-3 < -5$ 에서

$$-6 < 4x < -2 \quad \therefore -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}$$

(ii) $5 < 4x-3 < 9$ 에서

$$8 < 4x < 12 \quad \therefore 2 < x < 3$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } 2 < x < 3$$

(3) (i) $x < -\frac{3}{2}$ 일 때, $|2x+3| = -(2x+3)$ 이므로

$$3x+2 < -(2x+3)$$

$$5x < -5 \quad \therefore x < -1$$

$$\text{그런데 } x < -\frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$x < -\frac{3}{2}$$

(ii) $x \geq -\frac{3}{2}$ 일 때, $|2x+3| = 2x+3$ 이므로

$$3x+2 < 2x+3 \quad \therefore x < 1$$

$$\text{그런데 } x \geq -\frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$-\frac{3}{2} \leq x < 1$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$x < 1$$

(4) (i) $x < -1$ 일 때

$$|x+1| = -(x+1), |x-1| = -(x-1) \text{이므로}$$

$$-2(x+1) - (x-1) < 7$$

$$-3x < 8 \quad \therefore x > -\frac{8}{3}$$

$$\text{그런데 } x < -1 \text{이므로}$$

$$-\frac{8}{3} < x < -1$$

(ii) $-1 \leq x < 1$ 일 때

$$|x+1| = x+1, |x-1| = -(x-1) \text{이므로}$$

$$2(x+1) - (x-1) < 7 \quad \therefore x < 4$$

$$\text{그런데 } -1 \leq x < 1 \text{이므로}$$

$$-1 \leq x < 1$$

(iii) $x \geq 1$ 일 때

$$|x+1| = x+1, |x-1| = x-1 \text{이므로}$$

$$2(x+1) + (x-1) < 7$$

$$3x < 6 \quad \therefore x < 2$$

$$\text{그런데 } x \geq 1 \text{이므로}$$

$$1 \leq x < 2$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$-\frac{8}{3} < x < 2$$

08-2 [답 16]

(i) $x < 7$ 일 때

$$|7-x|=7-x, |x-9|=-(x-9) \text{이므로}$$

$$(7-x)-(x-9) < 20, -2x < 4 \quad \therefore x > -2$$

그런데 $x < 7$ 이므로 $-2 < x < 7$

(ii) $7 \leq x < 9$ 일 때

$$|7-x|=-(7-x), |x-9|=-(x-9) \text{이므로}$$

$$-(7-x)-(x-9) < 20$$

$$0 \times x < 18 \text{이므로 해는 모든 실수이다.}$$

그런데 $7 \leq x < 9$ 이므로 $7 \leq x < 9$

(iii) $x \geq 9$ 일 때

$$|7-x|=-(7-x), |x-9|=x-9 \text{이므로}$$

$$-(7-x)+(x-9) < 20, 2x < 36$$

$$\therefore x < 18$$

그런데 $x \geq 9$ 이므로 $9 \leq x < 18$

(i), (ii), (iii)에 의하여 부등식의 해는

$$-2 < x < 18$$

따라서 $M=17, m=-1$ 이므로

$$M+m=16$$

연습문제

157~159쪽

- | | | | | |
|--------------------------------|------|--------|------|------|
| 1 $x < -1$ | 2 ④ | 3 ① | 4 ③ | 5 3 |
| 6 ① | 7 6 | 8 -1 | 9 ⑤ | 10 3 |
| 11 ③ | 12 ③ | 13 ② | 14 ② | 15 ② |
| 16 $\frac{1}{4} \leq x \leq 2$ | 17 ⑤ | 18 ② | | |

1 $ax < 2a+bx$ 에서 $(a-b)x < 2a$ ㉠

이 부등식의 해가 $x > 1$ 이므로

$$a-b < 0 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠의 양변을 } a-b \text{로 나누면 } x > \frac{2a}{a-b}$$

따라서 $\frac{2a}{a-b}=1$ 이므로

$$2a=a-b \quad \therefore a=-b \quad \text{..... ㉢}$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$-b-b < 0 \quad \therefore b > 0$$

㉢을 $(a-b)x+3a+b > 0$ 에 대입하면

$$-2bx-2b > 0, -2bx > 2b$$

$$\therefore x < -1 \quad (\because -2b < 0)$$

2 $a^2x-1 > x+3a$ 에서 $(a^2-1)x > 3a+1$

이 부등식의 해가 존재하지 않으므로

$$a^2-1=0, 3a+1 \geq 0$$

$$a^2-1=0 \text{에서 } (a+1)(a-1)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=1 \quad \text{..... ㉠}$$

$$3a+1 \geq 0 \text{에서 } 3a \geq -1$$

$$a \geq -\frac{1}{3} \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } a=1$$

3 $3(x-2) \geq -15$ 를 풀면

$$3x-6 \geq -15, 3x \geq -9 \quad \therefore x \geq -3 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\frac{4-x}{2} \leq 4-x \text{를 풀면}$$

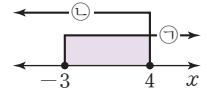
$$4-x \leq 8-2x \quad \therefore x \leq 4 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오

른쪽 그림과 같으므로 주어진 연

립부등식의 해는 $-3 \leq x \leq 4$

따라서 $a=-3, b=4$ 이므로 $ab=-12$



4 $-6 < -x+4$ 를 풀면 $x < 10$ ㉠

$$-x+4 \leq -\frac{x}{2}+1 \text{을 풀면}$$

$$-2x+8 \leq -x+2, -x \leq -6 \quad \therefore x \geq 6 \quad \text{..... ㉡}$$

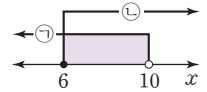
㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오

른쪽 그림과 같으므로 주어진 부

등식의 해는 $6 \leq x < 10$

따라서 정수 x 는 6, 7, 8, 9이므로 구하는 합은

$$6+7+8+9=30$$



5 $x-1 \leq 2(1-x)$ 를 풀면

$$x-1 \leq 2-2x, 3x \leq 3 \quad \therefore x \leq 1 \quad \text{..... ㉠}$$

$$9x-2 \geq 4x+3 \text{을 풀면}$$

$$5x \geq 5 \quad \therefore x \geq 1 \quad \text{..... ㉡}$$

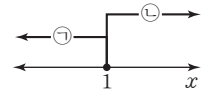
㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오

른쪽 그림과 같으므로 주어진 연

립부등식의 해는 $x=1$

$x=1$ 을 $ax+5=8$ 에 대입하면

$$a+5=8 \quad \therefore a=3$$



6 $x+a > 2x-3$ 을 풀면

$$-x > -a-3 \quad \therefore x < a+3$$

$$2x+4 > 6 \text{을 풀면}$$

$$2x > 2 \quad \therefore x > 1$$

주어진 연립부등식의 해가 $b < x < 5$ 이므로

$$a+3=5, 1=b \quad \therefore a=2, b=1$$

$$\therefore a-b=1$$

7 $3x-4 < \frac{x+a}{2}$ 를 풀면

$$6x-8 < x+a, 5x < a+8$$

$$\therefore x < \frac{a+8}{5}$$

$4x+b \leq 3-2x$ 를 풀면

$$6x \leq 3-b \quad \therefore x \leq \frac{3-b}{6}$$

주어진 그림에서 $x < 1, x \leq -1$ 이므로

$$\frac{a+8}{5} = 1, \frac{3-b}{6} = -1$$

$$\therefore a = -3, b = 9$$

$$\therefore a+b = 6$$

8 $x+3 \leq 3a$ 를 풀면

$$x \leq 3a-3 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

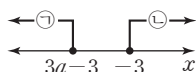
$$-3x+1 \leq 2x+16 \text{을 풀면}$$

$$-5x \leq 15 \quad \therefore x \geq -3 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않도록 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$3a-3 < -3 \quad \therefore a < 0$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 -1 이다.



9 $x+2 > a$ 를 풀면

$$x > a-2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$7-x \geq 2(x-1) \text{을 풀면}$$

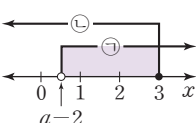
$$7-x \geq 2x-2, -3x \geq -9$$

$$\therefore x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 가 3개가 되도록 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로

$$0 \leq a-2 < 1$$

$$\therefore 2 \leq a < 3$$



10 어떤 자연수를 x 라 하면

$$\begin{cases} 5(x-1) > 5 \\ x-4 < 4-x \end{cases}$$

$$5(x-1) > 5 \text{를 풀면}$$

$$5x-5 > 5, 5x > 10 \quad \therefore x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$x-4 < 4-x \text{를 풀면}$$

$$2x < 8 \quad \therefore x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 의 공통부분은 $2 < x < 4$

따라서 주어진 두 조건을 모두 만족시키는 자연수는 3이다.

11 섞어야 하는 5%의 소금물의 양을 x g이라 하면

$$(200+x) \times \frac{10}{100} \leq 200 \times \frac{20}{100} + x \times \frac{5}{100} < (200+x) \times \frac{15}{100}$$

$$2000+10x \leq 4000+5x < 3000+15x$$

$$2000+10x \leq 4000+5x \text{를 풀면}$$

$$5x \leq 2000 \quad \therefore x \leq 400 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$4000+5x < 3000+15x \text{를 풀면}$$

$$-10x < -1000 \quad \therefore x > 100 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 의 공통부분은 $100 < x \leq 400$

따라서 섞어야 하는 5%의 소금물의 양은 100g 초과 400g 이하이다.

12 $|x-a| < 5$ 에서 $-5 < x-a < 5$

$$\therefore a-5 < x < a+5 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

주어진 부등식을 만족시키는

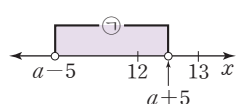
정수 x 의 최댓값이 12가 되도록

$\textcircled{A}$ 을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로

$$12 < a+5 \leq 13 \quad \therefore 7 < a \leq 8$$

따라서 정수 a 의 값은 8이다.



13 (i) $x < \frac{2}{3}$ 일 때, $|3x-2| = -(3x-2)$ 이므로

$$-(3x-2) \leq x+10, -4x \leq 8 \quad \therefore x \geq -2$$

$$\text{그런데 } x < \frac{2}{3} \text{이므로 } -2 \leq x < \frac{2}{3}$$

(ii) $x \geq \frac{2}{3}$ 일 때, $|3x-2| = 3x-2$ 이므로

$$3x-2 \leq x+10, 2x \leq 12 \quad \therefore x \leq 6$$

$$\text{그런데 } x \geq \frac{2}{3} \text{이므로 } \frac{2}{3} \leq x \leq 6$$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는 $-2 \leq x \leq 6$

따라서 $M=6, m=-2$ 이므로 $M+m=4$

14 (i) $x < -3$ 일 때

$$|x+3| = -(x+3), |x-5| = -(x-5) \text{이므로}$$

$$-(x+3)-2(x-5) < 10$$

$$-3x < 3 \quad \therefore x > -1$$

그런데 $x < -3$ 이므로 해는 없다.

(ii) $-3 \leq x < 5$ 일 때

$$|x+3| = x+3, |x-5| = -(x-5) \text{이므로}$$

$$(x+3)-2(x-5) < 10$$

$$-x < -3 \quad \therefore x > 3$$

그런데 $-3 \leq x < 5$ 이므로 $3 < x < 5$

(iii) $x \geq 5$ 일 때

$$|x+3|=x+3, |x-5|=x-5 \text{이므로}$$

$$(x+3)+2(x-5)<10$$

$$3x<17 \quad \therefore x<\frac{17}{3}$$

$$\text{그런데 } x \geq 5 \text{이므로 } 5 \leq x < \frac{17}{3}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$3 < x < \frac{17}{3}$$

따라서 정수 x 는 4, 5의 2개이다.

15 $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}$ 이므로 주어진 부등식은

$$2|x-1|+|x+1|\leq 6$$

(i) $x < -1$ 일 때

$$|x-1|=-(x-1), |x+1|=-(x+1) \text{이므로}$$

$$-2(x-1)-(x+1)\leq 6$$

$$-3x\leq 5 \quad \therefore x\geq -\frac{5}{3}$$

$$\text{그런데 } x < -1 \text{이므로 } -\frac{5}{3} \leq x < -1$$

(ii) $-1 \leq x < 1$ 일 때

$$|x-1|=-(x-1), |x+1|=x+1 \text{이므로}$$

$$-2(x-1)+(x+1)\leq 6$$

$$-x\leq 3 \quad \therefore x\geq -3$$

$$\text{그런데 } -1 \leq x < 1 \text{이므로 } -1 \leq x < 1$$

(iii) $x \geq 1$ 일 때

$$|x-1|=x-1, |x+1|=x+1 \text{이므로}$$

$$2(x-1)+(x+1)\leq 6$$

$$3x\leq 7 \quad \therefore x\leq \frac{7}{3}$$

$$\text{그런데 } x \geq 1 \text{이므로 } 1 \leq x \leq \frac{7}{3}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$$-\frac{5}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$$

16 $4x-b \leq x+2a$ 를 풀면

$$3x \leq 2a+b \quad \therefore x \leq \frac{2a+b}{3}$$

$4x-b \leq 5x+a$ 를 풀면

$$-x \leq a+b \quad \therefore x \geq -a-b$$

연립부등식의 해가 $-5 \leq x \leq 2$ 이므로

$$\frac{2a+b}{3}=2, -a-b=-5$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=4$

따라서 처음 부등식은 $4x-4 \leq x+2 \leq 5x+1$ 이므로

$$4x-4 \leq x+2 \text{를 풀면}$$

$$3x \leq 6 \quad \therefore x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$x+2 \leq 5x+1 \text{을 풀면}$$

$$-4x \leq -1 \quad \therefore x \geq \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 의 공통부분인 처음 부등식의 해는

$$\frac{1}{4} \leq x \leq 2$$

17 의자의 개수를 x 라 하면 학생 수는 $7x+5$ 이고 한 의자에 8명씩 앉으면 마지막 의자에는 최소 1명, 최대 8명이 앉을 수 있으므로

$$8(x-6)+1 \leq 7x+5 \leq 8(x-6)+8$$

$$8(x-6)+1 \leq 7x+5 \text{를 풀면}$$

$$8x-48+1 \leq 7x+5 \quad \therefore x \leq 52 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$$7x+5 \leq 8(x-6)+8 \text{을 풀면}$$

$$7x+5 \leq 8x-48+8, -x \leq -45$$

$$\therefore x \geq 45 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$$\textcircled{9}, \textcircled{10} \text{의 공통부분은 } 45 \leq x \leq 52$$

따라서 의자의 개수가 될 수 없는 것은 $\textcircled{5}$ 이다.

18 $|ax+1| < b$ 의 해가 존재하므로 $b > 0$

$$|ax+1| < b \text{를 풀면}$$

$$-b < ax+1 < b \quad \therefore -b-1 < ax < b-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 부등식의 해가 $-1 < x < 5$ 이므로 $a \neq 0$ 이다.

따라서 $a > 0, a < 0$ 인 경우로 나누어 해를 구하면

(i) $a > 0$ 일 때

$$\textcircled{1} \text{을 풀면 } \frac{-b-1}{a} < x < \frac{b-1}{a}$$

주어진 부등식의 해가 $-1 < x < 5$ 이므로

$$\frac{-b-1}{a} = -1, \frac{b-1}{a} = 5$$

$$a-b=1, 5a-b=-1$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{3}{2}$$

그런데 $a > 0, b > 0$ 이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a < 0$ 일 때

$$\textcircled{1} \text{을 풀면 } \frac{b-1}{a} < x < \frac{-b-1}{a}$$

주어진 부등식의 해가 $-1 < x < 5$ 이므로

$$\frac{b-1}{a} = -1, \frac{-b-1}{a} = 5$$

$$a+b=1, 5a+b=-1$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a=-\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}$$

이때 $a < 0, b > 0$ 이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여

$$ab = -\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}$$

II-4 02 이차부등식

1 이차부등식

개념 CHECK

161쪽

- 1 답 (1) $-1 < x < 2$ (2) $-1 \leq x \leq 2$
 (3) $x < -1$ 또는 $x > 2$ (4) $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$
- 2 답 (1) 해는 없다. (2) $x=1$
 (3) $x \neq 1$ 인 모든 실수 (4) 모든 실수
- 3 답 (1) 해는 없다. (2) 해는 없다.
 (3) 모든 실수 (4) 모든 실수

문제

162~164쪽

- 01-1 답 (1) $-1 \leq x \leq 5$
 (2) $-3 < x < 0$ 또는 $4 < x < 6$
- (1) 부등식 $f(x) \leq g(x)$ 의 해는 $y=f(x)$ 의 그래프가 $y=g(x)$ 의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x 의 값의 범위이므로 $-1 \leq x \leq 5$
- (2) $f(x)g(x) > 0$ 이면
 $f(x) > 0, g(x) > 0$ 또는 $f(x) < 0, g(x) < 0$
 (i) $f(x) > 0, g(x) > 0$ 일 때
 $f(x) > 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $x < -3$ 또는 $x > 4$ ㉠
 $g(x) > 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $0 < x < 6$ ㉡
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분은 $4 < x < 6$
- (ii) $f(x) < 0, g(x) < 0$ 일 때
 $f(x) < 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $-3 < x < 4$ ㉢
 $g(x) < 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $x < 0$ 또는 $x > 6$ ㉣
 $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ 의 공통부분은 $-3 < x < 0$
- (i), (ii)에 의하여 부등식의 해는
 $-3 < x < 0$ 또는 $4 < x < 6$

01-2 답 $x < -2$ 또는 $x > 2$

$ax^2 + (b-m)x + c-n < 0$ 에서 $ax^2 + bx + c < mx + n$
 따라서 이 부등식의 해는 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 직선 $y=mx+n$ 보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로
 $x < -2$ 또는 $x > 2$

02-1 답 (1) $x \leq 3$ 또는 $x \geq 4$ (2) $-1 < x < 7$

(3) $x \neq -4$ 인 모든 실수 (4) $x = \frac{3}{2}$

(5) 모든 실수 (6) 해는 없다.

(1) $x^2 - 7x + 12 \geq 0$ 에서

$(x-3)(x-4) \geq 0$

$\therefore x \leq 3$ 또는 $x \geq 4$

(2) $-x^2 + 7 > -6x$ 에서

$x^2 - 6x - 7 < 0$

$(x+1)(x-7) < 0$

$\therefore -1 < x < 7$

(3) $x^2 + 8x + 16 > 0$ 에서

$(x+4)^2 > 0$

따라서 주어진 부등식의 해는

$x \neq -4$ 인 모든 실수이다.

(4) $4x^2 \leq 12x - 9$ 에서

$4x^2 - 12x + 9 \leq 0$

$(2x-3)^2 \leq 0$

$\therefore x = \frac{3}{2}$

(5) $x^2 + 4x + 6 > 0$ 에서

$(x+2)^2 + 2 > 0$

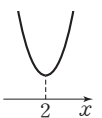
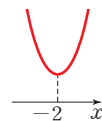
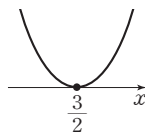
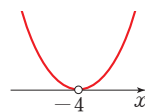
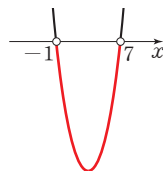
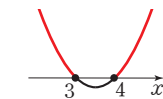
따라서 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

(6) $-2x^2 + 8x \geq 9$ 에서

$2x^2 - 8x + 9 \leq 0$

$2(x-2)^2 + 1 \leq 0$

따라서 주어진 부등식의 해는 없다.



02-2 답 (1) $x \leq -3$ 또는 $x \geq 3$ (2) $x < -3$ 또는 $x > 5$

(1) (i) $x < 0$ 일 때, $|x| = -x$ 이므로

$x^2 + 2x - 3 \geq 0, (x+3)(x-1) \geq 0$

$\therefore x \leq -3$ 또는 $x \geq 1$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x \leq -3$

(ii) $x \geq 0$ 일 때, $|x| = x$ 이므로

$x^2 - 2x - 3 \geq 0, (x+1)(x-3) \geq 0$

$\therefore x \leq -1$ 또는 $x \geq 3$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x \geq 3$

(i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는

$x \leq -3$ 또는 $x \geq 3$

(2) (i) $x < 1$ 일 때, $|x-1| = -(x-1)$ 이므로

$x^2 - 2x - 3 > -3(x-1), x^2 + x - 6 > 0$

$(x+3)(x-2) > 0 \therefore x < -3$ 또는 $x > 2$

그런데 $x < 1$ 이므로 $x < -3$

(ii) $x \geq 1$ 일 때, $|x-1|=x-1$ 이므로
 $x^2-2x-3 > 3(x-1)$, $x^2-5x > 0$
 $x(x-5) > 0$
 $\therefore x < 0$ 또는 $x > 5$
 그런데 $x > 1$ 이므로 $x > 5$
 (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는
 $x < -3$ 또는 $x > 5$

03-1 [답] 4초

물체의 높이가 60m 이상이면
 $40t - 5t^2 \geq 60$
 $-5t^2 + 40t - 60 \geq 0$
 $t^2 - 8t + 12 \leq 0$
 $(t-2)(t-6) \leq 0$
 $\therefore 2 \leq t \leq 6$
 따라서 물체의 높이가 60m 이상인 시간은 $6-2=4$ (초)
 동안이다.

03-2 [답] 25

새로 만든 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각
 $(40-x)$ cm, $(30+x)$ cm
 이 직사각형의 넓이가 825cm^2 이상이 되어야 하므로
 $(40-x)(30+x) \geq 825$
 $-x^2 + 10x + 1200 \geq 825$
 $x^2 - 10x - 375 \leq 0$
 $(x+15)(x-25) \leq 0$
 $\therefore -15 \leq x \leq 25$
 그런데 $x > 0$ 이므로 $0 < x \leq 25$
 따라서 x 의 최댓값은 25이다.

03-3 [답] 최댓값: 20만 원, 최솟값: 15만 원

자전거 한 대의 가격을 x 만 원 인상했을 때, 자전거 한 대
 의 가격은
 $(10+x)$ 만 원
 이때 판매량은 $4x$ 대가 줄어들므로 한 달 판매량은
 $(100-4x)$ 대
 한 달 판매액이 1200만 원 이상이 되어야 하므로
 $(10+x)(100-4x) \geq 1200$
 $x^2 - 15x + 50 \leq 0$
 $(x-5)(x-10) \leq 0$
 $\therefore 5 \leq x \leq 10$
 따라서 자전거 한 대의 가격의
 최댓값은 $10+10=20$ (만 원)
 최솟값은 $10+5=15$ (만 원)

2 이차부등식의 해의 조건

개념 CHECK

166쪽

1 [답] (1) $x^2+x-6 < 0$ (2) $x^2-3x-4 > 0$

(1) 해가 $-3 < x < 2$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x+3)(x-2) < 0 \quad \therefore x^2+x-6 < 0$
 (2) 해가 $x < -1$ 또는 $x > 4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부
 등식은
 $(x+1)(x-4) > 0 \quad \therefore x^2-3x-4 > 0$

문제

167~169쪽

04-1 [답] 1

해가 $x \leq b$ 또는 $x \geq 5$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x-b)(x-5) \geq 0 \quad \therefore x^2-(b+5)x+5b \geq 0$
 이 부등식이 $x^2+ax-15 \geq 0$ 과 일치하므로
 $a = -(b+5)$, $-15 = 5b$
 $\therefore a = -2$, $b = -3 \quad \therefore a-b = 1$

04-2 [답] -5

해가 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 6$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등
 식은
 $(x+1)(x-6) \geq 0 \quad \therefore x^2-5x-6 \geq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 과 $ax^2+bx+6 \leq 0$ 의 부등호의 방향이 다르므로 $a < 0$
 $\textcircled{1}$ 의 양변에 a 를 곱하면 $ax^2-5ax-6a \leq 0$
 이 부등식이 $ax^2+bx+6 \leq 0$ 과 일치하므로
 $b = -5a$, $6 = -6a \quad \therefore a = -1$, $b = 5$
 $\therefore ab = -5$

04-3 [답] $-1 < x < \frac{1}{3}$

해가 $-1 < x < 3$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x+1)(x-3) < 0 \quad \therefore x^2-2x-3 < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 과 $ax^2+bx+c > 0$ 의 부등호의 방향이 다르므로 $a < 0$
 $\textcircled{1}$ 의 양변에 a 를 곱하면 $ax^2-2ax-3a > 0$
 이 부등식이 $ax^2+bx+c > 0$ 과 일치하므로
 $b = -2a$, $c = -3a$
 이를 $cx^2+bx+a < 0$ 에 대입하면
 $-3ax^2-2ax+a < 0$
 양변을 $-a$ 로 나누면
 $3x^2+2x-1 < 0 \quad (\because -a > 0)$
 $(x+1)(3x-1) < 0 \quad \therefore -1 < x < \frac{1}{3}$

05-1 **답** $a \leq -1$

모든 실수 x 에 대하여 주어진 이차부등식이 성립하려면

$$a < 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 이차방정식 $ax^2+6x+a-8=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - a(a-8) \leq 0$$

$$a^2 - 8a - 9 \geq 0$$

$$(a+1)(a-9) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -1 \text{ 또는 } a \geq 9 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 의 공통부분은 $a \leq -1$

05-2 **답** $4 \leq a \leq 5$

(i) $a-4=0$, 즉 $a=4$ 일 때

$0 \times x^2 + 0 \times x + 1 \geq 0$ 에서 $1 \geq 0$ 이므로 주어진 부등식은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

(ii) $a-4 \neq 0$, 즉 $a \neq 4$ 일 때

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면

$$a-4 > 0 \quad \therefore a > 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 이차방정식 $(a-4)x^2+2(a-4)x+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-4)^2 - (a-4) \leq 0$$

$$a^2 - 9a + 20 \leq 0$$

$$(a-4)(a-5) \leq 0$$

$$\therefore 4 \leq a \leq 5 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 의 공통부분은 $4 < a \leq 5$

(i), (ii)에 의하여 $4 \leq a \leq 5$

05-3 **답** $a < -1$ 또는 $a > 4$

이차함수 $y=x^2-2ax+a$ 의 그래프가 직선 $y=4x-2a^2$ 보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식

$$x^2-2ax+a > 4x-2a^2, \text{ 즉 } x^2-2(a+2)x+2a^2+a > 0 \text{이 성립해야 한다.}$$

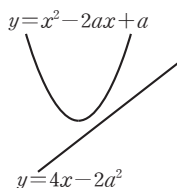
따라서 이차방정식 $x^2-2(a+2)x+2a^2+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+2)^2 - (2a^2+a) < 0$$

$$a^2 - 3a - 4 > 0$$

$$(a+1)(a-4) > 0$$

$$\therefore a < -1 \text{ 또는 } a > 4$$



06-1 **답** $-3 \leq a \leq 3$

$f(x)=x^2-8x-a^2+25$ 라 하면

$$f(x)=(x-4)^2+9-a^2$$

$-1 \leq x \leq 6$ 에서 이차부등식

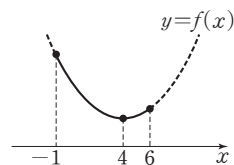
$$f(x) \geq 0 \text{이 항상 성립하려면}$$

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가

오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$f(4)=9-a^2 \geq 0, a^2-9 \leq 0$$

$$(a+3)(a-3) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq a \leq 3$$



06-2 **답** 3

$x^2+ax < 16-a^2$ 에서 $x^2+ax+a^2-16 < 0$

$f(x)=x^2+ax+a^2-16$ 이라 할

때, $0 \leq x \leq 4$ 에서 이차부등식

$f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 이차

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽

그림과 같아야 하므로 $f(0) < 0, f(4) < 0$

(i) $f(0) < 0$ 에서 $a^2-16 < 0$

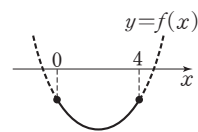
$$(a+4)(a-4) < 0 \quad \therefore -4 < a < 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $f(4) < 0$ 에서 $16+4a+a^2-16 < 0$

$$a(a+4) < 0 \quad \therefore -4 < a < 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 의 공통부분은 $-4 < a < 0$

따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1$ 의 3개이다.



연습문제

170~171쪽

- 1 $x < -2$ 또는 $x > 3$ 2 ② 3 ④ 4 ②
5 5m 6 ④ 7 $-\frac{4}{3} < x < \frac{5}{3}$ 8 5
9 ① 10 $1 \leq a \leq 9$ 11 ② 12 ③
13 $k \leq 2$

1 부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해는 $y=f(x)$ 의 그래프가 $y=g(x)$ 의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로 $x < -2$ 또는 $x > 3$

2 $-2x^2+5x \geq 4x-10$ 에서
 $2x^2-x-10 \leq 0, (x+2)(2x-5) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq x \leq \frac{5}{2}$

따라서 $\alpha = -2, \beta = \frac{5}{2}$ 이므로

$$\alpha\beta = -5$$

- 3 ① $x^2-2x-35<0$ 에서
 $(x+5)(x-7)<0 \quad \therefore -5<x<7$
 ② $x^2-6x+9>0$ 에서 $(x-3)^2>0$
 따라서 주어진 부등식의 해는 $x \neq 3$ 인 모든 실수이다.
 ③ $2x^2-2x+5>0$ 에서
 $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}>0$
 따라서 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.
 ④ $-4x^2+4x-1>0$ 에서
 $4x^2-4x+1<0, (2x-1)^2<0$
 따라서 주어진 부등식의 해는 없다.
 ⑤ $-9x^2+6x-1\geq 0$ 에서
 $9x^2-6x+1\leq 0, (3x-1)^2\leq 0$
 $\therefore x=\frac{1}{3}$
 따라서 해가 없는 것은 ④이다.

- 4 (i) $x<1$ 일 때, $|x-1|=-(x-1)$ 이므로
 $x^2-2x-5<-(x-1), x^2-x-6<0$
 $(x+2)(x-3)<0$
 $\therefore -2<x<3$
 그런데 $x<1$ 이므로 $-2<x<1$
 (ii) $x\geq 1$ 일 때, $|x-1|=x-1$ 이므로
 $x^2-2x-5<x-1, x^2-3x-4<0$
 $(x+1)(x-4)<0$
 $\therefore -1<x<4$
 그런데 $x\geq 1$ 이므로 $1\leq x<4$
 (i), (ii)에 의하여 주어진 부등식의 해는
 $-2<x<4$
 따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

- 5 도로의 폭을 x m ($0<x<15$)라 하면 도로를 제외한 땅
 의 넓이는 가로, 세로의 길이가 각각 $(25-x)$ m,
 $(15-x)$ m인 직사각형의 넓이와 같고, 그 넓이가
 200 m^2 이상이 되어야 하므로
 $(25-x)(15-x)\geq 200$
 $x^2-40x+375\geq 200$
 $x^2-40x+175\geq 0$
 $(x-5)(x-35)\geq 0$
 $\therefore x\leq 5$ 또는 $x\geq 35$
 그런데 $0<x<15$ 이므로
 $0<x\leq 5$
 따라서 도로의 최대 폭은 5 m이다.

- 6 해가 $2<x<3$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x-2)(x-3)<0$
 $\therefore x^2-5x+6<0 \quad \dots\dots ㉠$
 ㉠과 $ax^2+5x+b>0$ 의 부등호의 방향이 다르므로
 $a<0$
 ㉠의 양변에 a 를 곱하면
 $ax^2-5ax+6a>0$
 이 부등식이 $ax^2+5x+b>0$ 과 일치하므로
 $5=-5a, b=6a$
 $\therefore a=-1, b=-6$
 이를 $bx^2+ax+1<0$ 에 대입하면
 $-6x^2-x+1<0, 6x^2+x-1>0$
 $(2x+1)(3x-1)>0$
 $\therefore x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>\frac{1}{3}$

- 7 $f(x)<0$ 의 해가 $-3<x<6$ 이므로
 $f(x)=a(x+3)(x-6)$ ($a>0$)
 이라 하면
 $f(3x+1)=a(3x+1+3)(3x+1-6)$
 $=a(3x+4)(3x-5)$
 따라서 $f(3x+1)<0$, 즉 $a(3x+4)(3x-5)<0$ 에서
 $(3x+4)(3x-5)<0$ ($\because a>0$)
 $\therefore -\frac{4}{3}<x<\frac{5}{3}$

- 8 (i) $a-1=0$, 즉 $a=1$ 일 때
 $0\times x^2-0\times x+5>0$ 에서 $5>0$ 이므로 주어진 부등식
 은 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
 (ii) $a-1\neq 0$, 즉 $a\neq 1$ 일 때
 모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면
 $a-1>0 \quad \therefore a>1 \quad \dots\dots ㉠$
 또 이차방정식 $(a-1)x^2-2(a-1)x+5=0$ 의 판별
 식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=(a-1)^2-5(a-1)<0$
 $(a-1)(a-6)<0 \quad \therefore 1<a<6 \quad \dots\dots ㉡$
 ㉠, ㉡의 공통부분은 $1<a<6$
 (i), (ii)에 의하여 $1\leq a<6$
 따라서 정수 a 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

- 9 이차함수 $y=-x^2-x+2m$ 의 그래프가 직선
 $y=x+m-3$ 보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x
 에 대하여 이차부등식 $-x^2-x+2m<x+m-3$, 즉
 $x^2+2x-m-3>0$ 이 성립해야 한다.

따라서 이차방정식 $x^2+2x-m-3=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=1^2+(m+3)<0$$

$$\therefore m<-4$$

- 10 이차부등식 $ax^2-2(a-3)x+4<0$ 의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식

$$ax^2-2(a-3)x+4\geq 0$$

이 성립해야 하므로

$$a>0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 이차방정식 $ax^2-2(a-3)x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(a-3)^2-4a\leq 0$$

$$a^2-10a+9\leq 0$$

$$(a-1)(a-9)\leq 0$$

$$\therefore 1\leq a\leq 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분은

$$1\leq a\leq 9$$

- 11 $f(x)=x^2-4x-4k+3$ 이라 하면

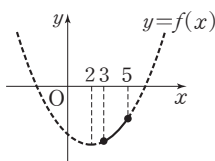
$$f(x)=(x-2)^2-4k-1$$

$3\leq x\leq 5$ 에서 이차부등식

$f(x)\leq 0$ 이 항상 성립하려면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$f(5)=8-4k\leq 0 \quad \therefore k\geq 2$$

따라서 k 의 최솟값은 2이다.



- 12 원래의 수강료를 p 원, 그때의 회원 수를 q 명이라 하면 원래의 수강료보다 $x\%$ 인상한 가격은

$$p\left(1+\frac{x}{100}\right)(\text{원})$$

$0.5x\%$ 감소한 회원 수는

$$q\left(1-\frac{x}{200}\right)(\text{명})$$

이때의 한 달 수입은

$$pq\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{200}\right)(\text{원})$$

한 달 수입이 8% 이상 증가하려면

$$pq\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{200}\right)\geq pq\left(1+\frac{8}{100}\right)$$

$$x^2-100x+1600\leq 0 \quad (\because pq>0)$$

$$(x-20)(x-80)\leq 0$$

$$\therefore 20\leq x\leq 80$$

따라서 x 의 최댓값과 최솟값의 합은

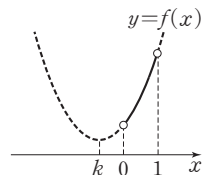
$$80+20=100$$

- 13 $f(x)=x^2-2kx+3$

$$=(x-k)^2-k^2+3$$

$x=k$ 가 위치할 수 있는 k 의 값의 구간을 $0< x < 1$ 을 기준으로 나누어 생각하면

(i) $k\leq 0$ 일 때



$0< x < 1$ 에서 이차부등식 $f(x)>0$ 이 항상 성립하려면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 위의 그림과 같아야 하므로

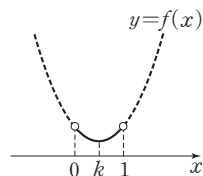
$$f(0)=3\geq 0$$

즉, k 의 값에 관계없이 $0< x < 1$ 에서 $f(x)>0$ 이다.

그런데 $k\leq 0$ 이므로

$$k\leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $0< k < 1$ 일 때



$0< x < 1$ 에서 이차부등식 $f(x)>0$ 이 항상 성립하려면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 위의 그림과 같아야 하므로

$$f(k)=-k^2+3>0$$

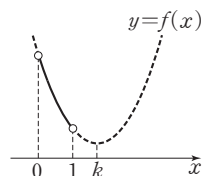
$$(k+\sqrt{3})(k-\sqrt{3})<0$$

$$\therefore -\sqrt{3}< k < \sqrt{3}$$

그런데 $0< k < 1$ 이므로

$$0< k < 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(iii) $k\geq 1$ 일 때



$0< x < 1$ 에서 이차부등식 $f(x)>0$ 이 항상 성립하려면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 위의 그림과 같아야 하므로

$$f(1)=1-2k+3\geq 0$$

$$\therefore k\leq 2$$

그런데 $k\geq 1$ 이므로

$$1\leq k\leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $k\leq 2$

II-4 03 연립이차부등식

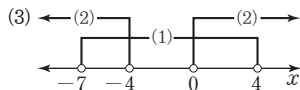
1 연립이차부등식

개념 CHECK

172쪽

1 답 (1) $-7 < x < 4$

(2) $x < -4$ 또는 $x > 0$



(4) $-7 < x < -4$ 또는 $0 < x < 4$

2 답 (1) $-5 < x < -3$ 또는 $x > 2$

(2) $x < -2$ 또는 $-1 < x < 2$

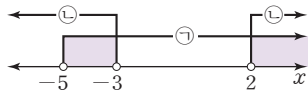
(1) $3x+2 < 5x+12$ 를 풀면

$$-2x < 10 \quad \therefore x > -5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$2x^2+2x > 12$ 를 풀면

$$x^2+x-6 > 0, (x+3)(x-2) > 0$$

$$\therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$



$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같으므로
주어진 연립부등식의 해는

$$-5 < x < -3 \text{ 또는 } x > 2$$

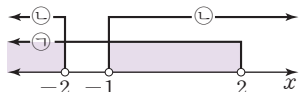
(2) $2(x-1) < -x+4$ 를 풀면

$$3x < 6 \quad \therefore x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$-x^2 < 3x+2$ 를 풀면

$$x^2+3x+2 > 0, (x+2)(x+1) > 0$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$



$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같으므로
주어진 연립부등식의 해는

$$x < -2 \text{ 또는 } -1 < x < 2$$

문제

173~175쪽

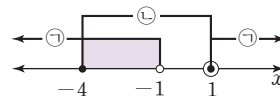
01-1 답 (1) $-4 \leq x < -1$ (2) $3 < x \leq 6$

(1) $x^2 > 1$ 을 풀면 $x^2-1 > 0, (x+1)(x-1) > 0$

$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x^2+3x \leq 4 \text{를 풀면 } x^2+3x-4 \leq 0$$

$$(x+4)(x-1) \leq 0 \quad \therefore -4 \leq x \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$



$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같으므로
주어진 연립부등식의 해는

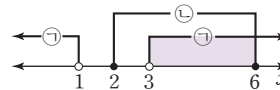
$$-4 \leq x < -1$$

(2) $x-3 < x(x-3)$ 을 풀면 $x^2-4x+3 > 0$

$$(x-1)(x-3) > 0 \quad \therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x(x-3) \leq 5x-12$ 를 풀면 $x^2-8x+12 \leq 0$

$$(x-2)(x-6) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq x \leq 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$



$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같으므로
주어진 부등식의 해는

$$3 < x \leq 6$$

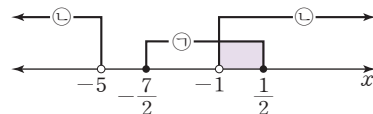
01-2 답 (1) $-1 < x \leq \frac{1}{2}$ (2) $-1 < x \leq 2$

(1) $|2x+3| \leq 4$ 를 풀면 $-4 \leq 2x+3 \leq 4$

$$-7 \leq 2x \leq 1 \quad \therefore -\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x^2+6x+5 > 0$ 을 풀면 $(x+5)(x+1) > 0$

$$\therefore x < -5 \text{ 또는 } x > -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$



$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같으므로
주어진 연립부등식의 해는

$$-1 < x \leq \frac{1}{2}$$

(2) $x^2+8x+7 > 0$ 을 풀면 $(x+7)(x+1) > 0$

$$\therefore x < -7 \text{ 또는 } x > -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x^2+|x|-6 \leq 0$ 을 풀면

(i) $x < 0$ 일 때, $|x| = -x$ 이므로

$$x^2-x-6 \leq 0, (x+2)(x-3) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 3$$

그런데 $x < 0$ 이므로

$$-2 \leq x < 0$$

(ii) $x \geq 0$ 일 때, $|x| = x$ 이므로

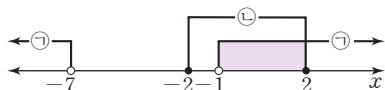
$$x^2+x-6 \leq 0, (x+3)(x-2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 2$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로

$$0 \leq x \leq 2$$

(i), (ii)에 의하여 $-2 \leq x \leq 2$ ㉔



㉑, ㉒을 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같으므로
주어진 연립부등식의 해는

$$-1 < x \leq 2$$

02-1 답 $a \geq 0$

$$\begin{cases} x^2 - 3x \leq 0 & \dots\dots ㉑ \\ x^2 + (a-1)x - a > 0 & \dots\dots ㉒ \end{cases}$$

㉑을 풀면

$$x(x-3) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq x \leq 3$$

㉒을 풀면

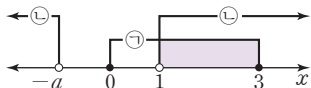
$$(x-1)(x+a) > 0$$

$\therefore -a < 1$ 일 때, $x < -a$ 또는 $x > 1$

$-a = 1$ 일 때, $x \neq 1$ 인 모든 실수

$-a > 1$ 일 때, $x < 1$ 또는 $x > -a$

㉑, ㉒의 해의 공통부분이 $1 < x \leq 3$ 이 되도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같아야 한다.



즉, ㉒의 해는 $x < -a$ 또는 $x > 1$

따라서 a 의 값의 범위는

$$-a \leq 0 \quad \therefore a \geq 0$$

02-2 답 $-2 < a \leq 3$

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 & \dots\dots ㉑ \\ 2x^2 + (2a+7)x + 7a \leq 0 & \dots\dots ㉒ \end{cases}$$

㉑을 풀면

$$(x+2)(x-1) > 0 \quad \therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 1$$

㉒을 풀면

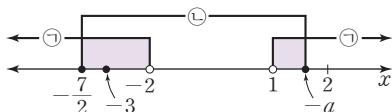
$$(2x+7)(x+a) \leq 0$$

$$\therefore -a < -\frac{7}{2} \text{ 일 때, } -a \leq x \leq -\frac{7}{2}$$

$$-a = -\frac{7}{2} \text{ 일 때, } x = -\frac{7}{2}$$

$$-a > -\frac{7}{2} \text{ 일 때, } -\frac{7}{2} \leq x \leq -a$$

㉑, ㉒의 해의 공통부분에 속하는 정수 x 가 -3 뿐이도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



$$\text{즉, ㉒의 해는 } -\frac{7}{2} \leq x \leq -a$$

따라서 a 의 값의 범위는

$$-3 \leq -a < 2 \quad \therefore -2 < a \leq 3$$

02-3 답 $a \leq -\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 14 < 0 & \dots\dots ㉑ \\ 3|x-a| < 8 & \dots\dots ㉒ \end{cases}$$

㉑을 풀면

$$(x-2)(x-7) < 0 \quad \therefore 2 < x < 7$$

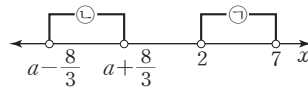
㉒을 풀면

$$|x-a| < \frac{8}{3}, \quad -\frac{8}{3} < x-a < \frac{8}{3}$$

$$\therefore a - \frac{8}{3} < x < a + \frac{8}{3}$$

이때 a 가 음수이므로 $a - \frac{8}{3} < 0$

㉑, ㉒의 해의 공통부분이 존재하지 않도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 a 의 값의 범위는

$$a + \frac{8}{3} \leq 2 \quad \therefore a \leq -\frac{2}{3}$$

03-1 답 2cm 이상 8cm 이하

직사각형 모양의 선반의 짧은 변의 길이를 x cm라 하면
긴 변의 길이는

$$\frac{40-2x}{2} = 20-x(\text{cm})$$

그런데 $x < 20-x$ 이므로

$$2x < 20 \quad \therefore x < 10 \quad \dots\dots ㉑$$

선반의 넓이가 36cm^2 이상 96cm^2 이하이므로

$$36 \leq x(20-x) \leq 96$$

$36 \leq x(20-x)$ 를 풀면

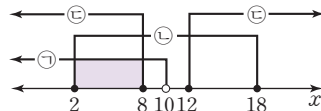
$$x^2 - 20x + 36 \leq 0, \quad (x-2)(x-18) \leq 0$$

$$\therefore 2 \leq x \leq 18 \quad \dots\dots ㉒$$

$x(20-x) \leq 96$ 을 풀면

$$x^2 - 20x + 96 \geq 0, \quad (x-8)(x-12) \geq 0$$

$$\therefore x \leq 8 \text{ 또는 } x \geq 12 \quad \dots\dots ㉓$$



x 의 값의 범위는 ㉑, ㉒, ㉓의 공통부분이므로

$$2 \leq x \leq 8$$

따라서 짧은 변의 길이는 2cm 이상 8cm 이하이다.

03-2 답 3

$x-1, x, x+1$ 이 삼각형의 변의 길이이므로

$$x-1 > 0 \quad \therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

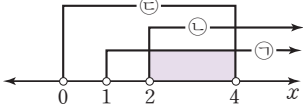
삼각형의 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로

$$x+1 < (x-1)+x \quad \therefore x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

둔각삼각형이 되려면

$$(x+1)^2 > (x-1)^2 + x^2, x^2 - 4x < 0$$

$$x(x-4) < 0 \quad \therefore 0 < x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$



x 의 값의 범위는 ㉠, ㉡, ㉢의 공통부분이므로 $2 < x < 4$

따라서 정수 x 의 값은 3이다.

2 이차방정식의 실근의 조건

문제

177~178쪽

04-1 답 (1) $k \geq \frac{1}{4}$ (2) $-2 < k \leq -1$ (3) $k < -2$

이차방정식 $x^2 - 2(2k+1)x + k+2 = 0$ 의 두 실근을 α, β , 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (2k+1)^2 - (k+2) = 4k^2 + 3k - 1 \\ &= (k+1)(4k-1) \end{aligned}$$

(1) (i) $D \geq 0$ 에서 $(k+1)(4k-1) \geq 0$

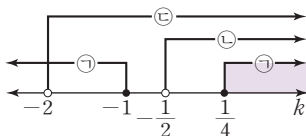
$$\therefore k \leq -1 \text{ 또는 } k \geq \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

(ii) $\alpha + \beta > 0$ 에서 $2(2k+1) > 0$

$$\therefore k > -\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

(iii) $\alpha\beta > 0$ 에서 $k+2 > 0$

$$\therefore k > -2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$



k 의 값의 범위는 ㉠, ㉡, ㉢의 공통부분이므로

$$k \geq \frac{1}{4}$$

(2) (i) $D \geq 0$ 에서 $(k+1)(4k-1) \geq 0$

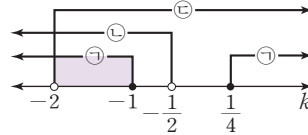
$$\therefore k \leq -1 \text{ 또는 } k \geq \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

(ii) $\alpha + \beta < 0$ 에서 $2(2k+1) < 0$

$$\therefore k < -\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

(iii) $\alpha\beta > 0$ 에서 $k+2 > 0$

$$\therefore k > -2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$



k 의 값의 범위는 ㉠, ㉡, ㉢의 공통부분이므로

$$-2 < k \leq -1$$

(3) $\alpha\beta < 0$ 에서 $k+2 < 0$

$$\therefore k < -2$$

04-2 답 2

이차방정식 $x^2 + (a^2-4)x + a^2-2a-3 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$$\alpha\beta < 0 \text{에서 } a^2 - 2a - 3 < 0$$

$$(a+1)(a-3) < 0 \quad \therefore -1 < a < 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 두 근의 절댓값이 같으므로

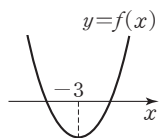
$$\alpha + \beta = 0 \text{에서 } -(a^2-4) = 0$$

$$a^2 = 4 \quad \therefore a = \pm 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 a 의 값은 2이다.

05-1 답 $-2 < a < -1$

$f(x) = x^2 - (a-2)x + a^2 - 1$ 이라 할 때, 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근 사이에 -3 이 있으려면 오른쪽 그림과 같이 $f(-3) < 0$ 이어야 하므로



$$9 + 3(a-2) + a^2 - 1 < 0$$

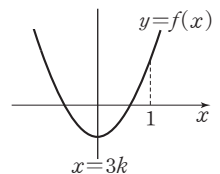
$$a^2 + 3a + 2 < 0$$

$$(a+2)(a+1) < 0$$

$$\therefore -2 < a < -1$$

05-2 답 $k \leq -1$

$f(x) = x^2 - 6kx - 4k + 5$ 라 할 때, 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이 모두 1보다 작으려면 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-3k)^2-(-4k+5)\geq 0$$

$$9k^2+4k-5\geq 0$$

$$(k+1)(9k-5)\geq 0$$

$$\therefore k\leq -1 \text{ 또는 } k\geq \frac{5}{9} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

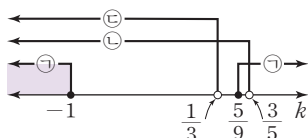
(ii) $f(1)>0$ 에서

$$1-6k-4k+5>0$$

$$-10k+6>0$$

$$\therefore k<\frac{3}{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

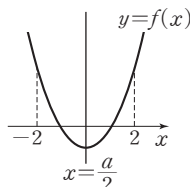
(iii) $3k<1$ 에서 $k<\frac{1}{3}$ $\cdots \cdots \textcircled{㉢}$



k 의 값의 범위는 ㉠, ㉡, ㉢의 공통부분이므로 $k\leq -1$

05-3 ㉠ $-3< a\leq -2\sqrt{2}$ 또는 $2\sqrt{2}\leq a<3$

$f(x)=x^2-ax+2$ 라 할 때, 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 모두 -2 와 2 사이에 있으려면 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=a^2-8\geq 0, (a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})\geq 0$$

$$\therefore a\leq -2\sqrt{2} \text{ 또는 } a\geq 2\sqrt{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) $f(-2)>0$ 에서

$$4+2a+2>0, 2a+6>0$$

$$\therefore a>-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$f(2)>0$ 에서

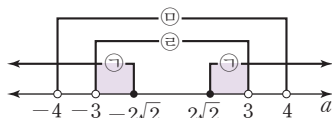
$$4-2a+2>0, -2a+6>0$$

$$\therefore a<3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

a 의 값은 ㉡, ㉢의 공통부분이므로

$$-3< a<3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

(iii) $-2<\frac{a}{2}<2$ 에서 $-4<a<4$ $\cdots \cdots \textcircled{㉤}$



a 의 값의 범위는 ㉠, ㉣, ㉤의 공통부분이므로 $-3< a\leq -2\sqrt{2}$ 또는 $2\sqrt{2}\leq a<3$

연습문제

179~180쪽

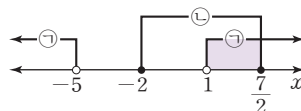
- 1 ㉠ 2 9 3 ㉣ 4 ㉣ 5 $1< a\leq 2$
 6 ㉢ 7 $x>3$ 8 -1 9 $2< a<6$
 10 3 11 $-1\leq a<0$ 또는 $a>2$ 12 18
 13 $10< a<14$

1 $x^2+4x-5>0$ 을 풀면 $(x+5)(x-1)>0$

$$\therefore x<-5 \text{ 또는 } x>1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$2x^2-3x-14\leq 0$ 을 풀면 $(x+2)(2x-7)\leq 0$

$$\therefore -2\leq x\leq \frac{7}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$



㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $1< x\leq \frac{7}{2}$

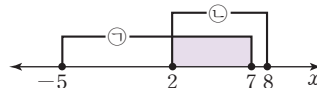
따라서 정수 x 는 2, 3이므로 그 합은 5이다.

2 $|x-1|\leq 6$ 을 풀면 $-6\leq x-1\leq 6$

$$\therefore -5\leq x\leq 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$(x-2)(x-8)\leq 0$ 을 풀면

$$2\leq x\leq 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$



㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 위의 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는 $2\leq x\leq 7$

따라서 $\alpha=2, \beta=7$ 이므로

$$\alpha+\beta=9$$

3 $x-1\geq 2$ 를 풀면 $x\geq 3$ $\cdots \cdots \textcircled{㉠}$

$x^2-7x\leq -10$ 을 풀면

$$x^2-7x+10\leq 0$$

$$(x-2)(x-5)\leq 0 \quad \therefore 2\leq x\leq 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면

오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는

$$3\leq x\leq 5$$

해가 $3\leq x\leq 5$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은

$$(x-3)(x-5)\leq 0 \quad \therefore x^2-8x+15\leq 0$$

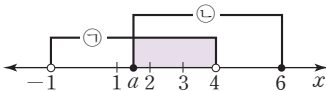
양변에 -1 을 곱하면 $-x^2+8x-15\geq 0$

이 부등식이 $ax^2+bx-15\geq 0$ 과 일치하므로

$$a=-1, b=8 \quad \therefore a+b=7$$

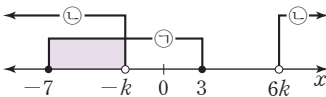
- 4 $x^2-8x+a>0$ 은 해가 $x<3$ 또는 $x>5$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식이므로
 $(x-3)(x-5)>0$
 $\therefore x^2-8x+15>0$
 $\therefore a=15$
 $x^2-9x+b\leq 0$ 은 해가 $2\leq x\leq 7$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식이므로
 $(x-2)(x-7)\leq 0$
 $\therefore x^2-9x+14\leq 0$
 $\therefore b=14$
 $\therefore a-b=1$

- 5 $\begin{cases} x^2-3x-4<0 & \dots\dots \textcircled{1} \\ x^2-(a+6)x+6a\leq 0 & \dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$
 $\textcircled{1}$ 을 풀면
 $(x+1)(x-4)<0$
 $\therefore -1<x<4$
 $\textcircled{2}$ 을 풀면
 $(x-a)(x-6)\leq 0$
 $\therefore a<6$ 일 때, $a\leq x\leq 6$
 $a=6$ 일 때, $x=6$
 $x>6$ 일 때, $6\leq x<a$
 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 해의 공통부분에 속하는 정수 x 가 2개가 되도록 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



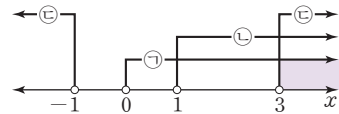
즉, $\textcircled{2}$ 의 해는 $a\leq x\leq 6$
따라서 a 의 값의 범위는
 $1<a\leq 2$

- 6 $x^2+4x-21\leq 0$ 을 풀면
 $(x+7)(x-3)\leq 0$
 $\therefore -7\leq x\leq 3$ $\textcircled{1}$
 $x^2-5kx-6k^2>0$ 을 풀면
 $(x+k)(x-6k)>0$
 $x<-k$ 또는 $x>6k$ ($\because k>0$) $\textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서 해가 존재하려면 다음 그림과 같아야 한다.



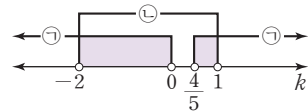
따라서 k 의 값의 범위는
 $-7<-k<0 \quad \therefore 0<k<7$
즉, 양의 정수 k 는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

- 7 $x, x+1, x+2$ 가 삼각형의 세 변의 길이이므로
 $x>0$ $\textcircled{1}$
삼각형의 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로
 $x+2<x+(x+1) \quad \therefore x>1$ $\textcircled{2}$
예각삼각형이 되려면
 $(x+2)^2<x^2+(x+1)^2$
 $x^2-2x-3>0, (x+1)(x-3)>0$
 $\therefore x<-1$ 또는 $x>3$ $\textcircled{3}$



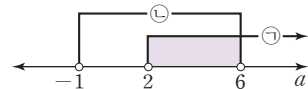
x 의 값의 범위는 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 의 공통부분이므로
 $x>3$

- 8 이차방정식 $x^2-kx-k(k-1)=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면
 $D_1=k^2+4k(k-1)>0$
 $5k^2-4k>0, k(5k-4)>0$
 $\therefore k<0$ 또는 $k>\frac{4}{5}$ $\textcircled{1}$
한편 $(2-k)x^2+2kx+1=0$ 이 이차방정식이므로 $k\neq 2$ 이고, 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면
 $\frac{D_2}{4}=k^2-(2-k)<0$
 $k^2+k-2<0, (k+2)(k-1)<0$
 $\therefore -2< k < 1$ $\textcircled{2}$



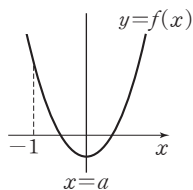
k 의 값의 범위는 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분이므로
 $-2< k < 0$ 또는 $\frac{4}{5}< k < 1$
따라서 정수 k 는 -1 이다.

- 9 이차방정식 $x^2-(a^2-5a-6)x-a+2=0$ 의 두 실근을 α, β 라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로
 $\alpha\beta<0$ 에서 $-a+2<0 \quad \therefore a>2$ $\textcircled{1}$
음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크므로
 $\alpha+\beta<0$ 에서 $a^2-5a-6<0$
 $(a+1)(a-6)<0 \quad \therefore -1<a<6$ $\textcircled{2}$



a 의 값의 범위는 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분이므로
 $2<a<6$

- 10 $f(x)=x^2-2ax+9$ 라 할 때, 이
차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근이 모두
-1보다 크려면 이차함수 $y=f(x)$
의 그래프가 오른쪽 그림과 같아
야 한다.



- (i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-9 \geq 0$$

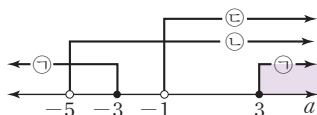
$$(a+3)(a-3) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -3 \text{ 또는 } a \geq 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

- (ii) $f(-1) > 0$ 에서 $1+2a+9 > 0$

$$\therefore a > -5 \quad \cdots \textcircled{2}$$

- (iii) $a > -1 \quad \cdots \textcircled{3}$



a 의 값의 범위는 ①, ②, ③의 공통부분이므로

$$a \geq 3$$

따라서 실수 a 의 최솟값은 3이다.

- 11 $\begin{cases} x^2-x-6 < 0 & \cdots \textcircled{1} \\ x^2-(a+1)x+a < 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$

①을 풀면

$$(x+2)(x-3) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 3$$

②을 풀면

$$(x-a)(x-1) < 0$$

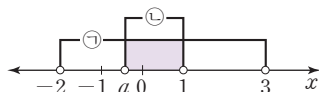
$$\therefore a < 1 \text{ 일 때, } a < x < 1$$

$$a=1 \text{ 일 때, 해는 없다.}$$

$$a > 1 \text{ 일 때, } 1 < x < a$$

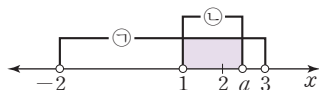
①, ②의 해의 공통부분에 속하는 정수 x 가 단 하나 존재
하도록 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.

- (i) ②의 해가 $a < x < 1$ 인 경우



$$\therefore -1 \leq a < 0$$

- (ii) ②의 해가 $1 < x < a$ 인 경우



$$\therefore a > 2$$

(i), (ii)에 의하여 a 의 값의 범위는

$$-1 \leq a < 0 \text{ 또는 } a > 2$$

- 12 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC$,
 $\triangle APR$, $\triangle PBQ$ 는 모두
직각이등변삼각형이다.

$$\overline{QC}=a \text{ 이므로}$$

$$0 < a < 12$$

$$\overline{PR}=a, \overline{BQ}=12-a \text{ 이므로}$$

$$\overline{AR}=\overline{PR}=a,$$

$$\overline{PQ}=\overline{BQ}=12-a$$

$$\therefore \square PQCR = a(12-a),$$

$$\triangle APR = \frac{1}{2}a^2, \triangle PBQ = \frac{1}{2}(12-a)^2$$

이때 $\square PQCR > \triangle APR$, $\square PQCR > \triangle PBQ$ 이므로

$$\begin{cases} a(12-a) > \frac{1}{2}a^2 & \cdots \textcircled{1} \\ a(12-a) > \frac{1}{2}(12-a)^2 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①을 풀면

$$a^2-8a < 0, a(a-8) < 0$$

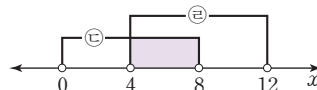
$$\therefore 0 < a < 8 \quad \cdots \textcircled{3}$$

②을 풀면

$$12a-a^2 > \frac{1}{2}(144-24a+a^2)$$

$$a^2-16a+48 < 0, (a-4)(a-12) < 0$$

$$\therefore 4 < a < 12 \quad \cdots \textcircled{4}$$



a 의 값의 범위는 ③, ④의 공통부분이므로

$$4 < a < 8$$

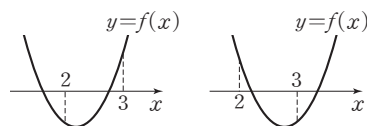
따라서 자연수 a 는 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$$5+6+7=18$$

- 13 $x^2-5x+6=0$ 을 풀면

$$(x-2)(x-3)=0 \quad \therefore x=2 \text{ 또는 } x=3$$

즉, $x^2-(a-1)x+a+8=0$ 의 한 근만이 2와 3 사이에
있어야 하므로 $f(x)=x^2-(a-1)x+a+8$ 이라 하면 이
차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(2)f(3) < 0$ 이므로

$$\{4-2(a-1)+a+8\}\{9-3(a-1)+a+8\} < 0$$

$$(-a+14)(-2a+20) < 0$$

$$(a-14)(a-10) < 0$$

$$\therefore 10 < a < 14$$

III-1 01 두 점 사이의 거리

1 두 점 사이의 거리

개념 CHECK

182쪽

1 답 (1) 6 (2) 3 (3) $2\sqrt{13}$ (4) $2\sqrt{5}$

문제

183~187쪽

01-1 답 -10, 2

$$\overline{AB} = 3\sqrt{5} \text{이므로}$$

$$\sqrt{(6-3)^2 + (-4-a)^2} = 3\sqrt{5}$$

양변을 제곱하면

$$9 + (a+4)^2 = 45, a^2 + 8a - 20 = 0$$

$$(a+10)(a-2) = 0 \quad \therefore a = -10 \text{ 또는 } a = 2$$

01-2 답 12

$$\overline{AC} = 2\overline{BC} \text{이므로}$$

$$\sqrt{\{3 - (-5)\}^2 + (6-a)^2} = 2\sqrt{(3-1)^2 + (6-2)^2}$$

양변을 제곱하면

$$64 + (6-a)^2 = 80, a^2 - 12a + 20 = 0$$

$$(a-2)(a-10) = 0 \quad \therefore a = 2 \text{ 또는 } a = 10$$

따라서 모든 a 의 값의 합은 $2 + 10 = 12$

01-3 답 1

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(a-5)^2 + (-3-a)^2} = \sqrt{2a^2 - 4a + 34} \\ &= \sqrt{2(a-1)^2 + 32} \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AB}$ 는 $a=1$ 일 때 최솟값 $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ 를 갖는다.

02-1 답 $\frac{4\sqrt{26}}{5}$

점 P의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서

$$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$(a-4)^2 + \{0 - (-1)\}^2 = (a-3)^2 + (0-4)^2$$

$$a^2 - 8a + 17 = a^2 - 6a + 25$$

$$2a = -8 \quad \therefore a = -4$$

$$\therefore P(-4, 0)$$

점 Q의 좌표를 $(0, b)$ 라 하면 $\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서 $\overline{AQ}^2 = \overline{BQ}^2$ 이므로

$$(0-4)^2 + \{b - (-1)\}^2 = (0-3)^2 + (b-4)^2$$

$$b^2 + 2b + 17 = b^2 - 8b + 25$$

$$10b = 8 \quad \therefore b = \frac{4}{5}$$

$$\therefore Q\left(0, \frac{4}{5}\right)$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{\{0 - (-4)\}^2 + \left(\frac{4}{5} - 0\right)^2} = \frac{4\sqrt{26}}{5}$$

02-2 답 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

점 P의 좌표를 $(a, a-1)$ 이라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서

$$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$\{a - (-3)\}^2 + (a-1-1)^2$$

$$= \{a - (-1)\}^2 + (a-1-2)^2$$

$$2a^2 + 2a + 13 = 2a^2 - 4a + 10$$

$$6a = -3 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

02-3 답 4

점 P에서 세 꼭짓점 A(2, 3), B(1, 0), C(5, 4)에 이르는 거리가 같으므로

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$(a-2)^2 + (b-3)^2 = (a-1)^2 + (b-0)^2$$

$$-2a - 6b = -12 \quad \therefore a + 3b = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\overline{BP} = \overline{CP} \text{에서 } \overline{BP}^2 = \overline{CP}^2 \text{이므로}$$

$$(a-1)^2 + (b-0)^2 = (a-5)^2 + (b-4)^2$$

$$8a + 8b = 40 \quad \therefore a + b = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = \frac{9}{2}, b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a - b = 4$$

03-1 답 $\frac{75}{2}, \left(0, \frac{3}{2}\right)$

점 P의 좌표를 $P(0, a)$ 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$$

$$= (0-6)^2 + (a-1)^2 + \{0 - (-1)\}^2 + (a-2)^2$$

$$= 2a^2 - 6a + 42 = 2\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{75}{2}$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은 $a = \frac{3}{2}$ 일 때 최솟값 $\frac{75}{2}$ 를 갖고,

그때의 점 P의 좌표는 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 이다.

03-2 답 (3, 3)

점 P의 좌표를 (a, a) 라 하면

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$$

$$= (a-1)^2 + (a-2)^2 + (a-3)^2 + (a-6)^2$$

$$= 4a^2 - 24a + 50 = 4(a-3)^2 + 14$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은 $a=3$ 일 때 최솟값 14를 갖고, 그때의 점 P의 좌표는 (3, 3)이다.

03-3 [답] 40

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 &= (a-3)^2 + (b-5)^2 + (a-2)^2 + (b-4)^2 \\ &\quad + (a-1)^2 + \{b-(-3)\}^2 \\ &= 3a^2 - 12a + 3b^2 - 12b + 64 \\ &= 3(a-2)^2 + 3(b-2)^2 + 40\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 은 $a=2, b=2$ 일 때 최솟값 40을 갖는다.

04-1 [답] (1) $\angle B=90^\circ$ 인 직각삼각형

(2) 정삼각형

$$\begin{aligned}(1) \overline{AB} &= \sqrt{(1-4)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \\ \overline{BC} &= \sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \overline{CA} &= \sqrt{(4-3)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{26} \\ \text{이때 } \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 &= \overline{CA}^2 \text{이므로 } \triangle ABC \text{는 } \angle B=90^\circ \text{인 직각삼각형이다.} \\ (2) \overline{AB} &= \sqrt{(1+1)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \\ \overline{BC} &= \sqrt{(-3\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}-3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \\ \overline{CA} &= \sqrt{(-1+3\sqrt{3})^2 + (-3-\sqrt{3})^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \\ \text{이때 } \overline{AB} &= \overline{BC} = \overline{CA} \text{이므로 } \triangle ABC \text{는 정삼각형이다.}\end{aligned}$$

04-2 [답] 2

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(-1-2)^2 + (a-8)^2} = \sqrt{a^2 - 16a + 73} \\ \overline{BC} &= \sqrt{(5+1)^2 + (-1-a)^2} = \sqrt{a^2 + 2a + 37} \\ \text{이때 } \overline{AB} &= \overline{BC} \text{에서 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{이므로} \\ a^2 - 16a + 73 &= a^2 + 2a + 37 \\ 18a &= 36 \\ \therefore a &= 2\end{aligned}$$

04-3 [답] -2, 3

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(2+1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{25} = 5 \\ \overline{BC} &= \sqrt{(a-2)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{a^2 - 4a + 8} \\ \overline{CA} &= \sqrt{(-1-a)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{a^2 + 2a + 5} \\ \text{이때 삼각형 } ABC &\text{는 } \angle C=90^\circ \text{인 직각삼각형이므로} \\ \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 &= \overline{AB}^2 \text{에서} \\ a^2 - 4a + 8 + a^2 + 2a + 5 &= 25 \\ a^2 - a - 6 &= 0 \\ (a+2)(a-3) &= 0 \\ \therefore a &= -2 \text{ 또는 } a=3\end{aligned}$$

05-1 [답] 풀이 참조

오른쪽 그림과 같이 직선

BC를 x 축, 점 D를 지나고

직선 BC에 수직인 직선을

y 축으로 하는 좌표평면을 잡

으면 점 D는 원점이 된다.

$A(a, b), C(c, 0)$ 이라 하면

$B(-2c, 0)$ 이므로

$$\overline{AB}^2 = (-2c-a)^2 + (-b)^2 = a^2 + 4ac + 4c^2 + b^2$$

$$\overline{AC}^2 = (c-a)^2 + (-b)^2 = a^2 - 2ac + c^2 + b^2$$

$$\overline{AD}^2 = a^2 + b^2$$

$$\overline{CD}^2 = c^2$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 = 3(a^2 + b^2 + 2c^2) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\overline{AD}^2 + 2\overline{CD}^2 = a^2 + b^2 + 2c^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여

$$\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 = 3(\overline{AD}^2 + 2\overline{CD}^2)$$

05-2 [답] 풀이 참조

오른쪽 그림과 같이 직선

BC를 x 축, 점 B를 지나고

직선 BC에 수직인 직선을

y 축으로 하는 좌표평면을 잡

으면 점 B는 원점이 된다.

$A(a, b), C(c, 0)$ 이라 하면 $D(a+c, b)$ 이므로

$$\overline{AC}^2 = (c-a)^2 + (-b)^2 = a^2 - 2ac + c^2 + b^2$$

$$\overline{BD}^2 = (a+c)^2 + b^2 = a^2 + 2ac + c^2 + b^2$$

$$\overline{AB}^2 = a^2 + b^2$$

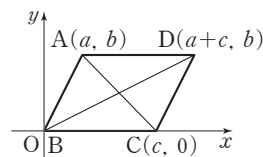
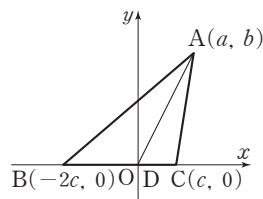
$$\overline{BC}^2 = c^2$$

$$\therefore \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 2(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2)$$



연습문제

188~189쪽

- 1 ③ 2 12 3 ③ 4 (0, -2) 5 ⑤
6 30 7 180 8 8 9 $(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
10 (가) B (나) a (다) b (라) $(x-a)^2 + y^2$
 (마) $(x-a)^2 + (y-b)^2$
11 13 12 $\sqrt{5}$ 13 52 14 2시간 후, 5km

1 $\overline{AB}=\sqrt{13}$ 이므로 $\sqrt{(-2)^2+a^2}=\sqrt{13}$
양변을 제곱하면
 $a^2+4=13, a^2-9=0$
 $(a+3)(a-3)=0 \quad \therefore a=3 (\because a>0)$

2 $\overline{AB}=\overline{BC}$ 이므로
 $\sqrt{(6-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{(a-6)^2+4^2}$
양변을 제곱하면
 $17=(a-6)^2+16, a^2-12a+35=0$
 $(a-5)(a-7)=0$
 $\therefore a=5$ 또는 $a=7$
따라서 모든 a 의 값의 합은
 $5+7=12$

3 $\overline{AB}=\sqrt{(1-a)^2+(a+3)^2}=\sqrt{2a^2+4a+10}$
 $=\sqrt{2(a+1)^2+8}$
따라서 $\overline{AB}$ 는 $a=-1$ 일 때 최솟값 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ 를 갖는다.

4 점 P의 좌표를 $(a, a-2)$ 라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서
 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로
 $(a+3)^2+(a-2-2)^2=(a-4)^2+(a-2-1)^2$
 $2a^2-2a+25=2a^2-14a+25$
 $12a=0 \quad \therefore a=0$
 $\therefore P(0, -2)$

5 점 P(1, 2)에서 세 꼭짓점 A(a, 7), B(-3, 5), C(5, b)
에 이르는 거리가 같으므로
 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$
 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로
 $(1-a)^2+(2-7)^2=(1+3)^2+(2-5)^2$
 $a^2-2a+1=0, (a-1)^2=0$
 $\therefore a=1$
 $\overline{BP}=\overline{CP}$ 에서 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$ 이므로
 $(1+3)^2+(2-5)^2=(1-5)^2+(2-b)^2$
 $b^2-4b-5=0, (b+1)(b-5)=0$
 $\therefore b=5 (\because b>0)$
 $\therefore ab=5$

6 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로
 $(a-4)^2+b^2=a^2+(b-2)^2$
 $a^2-8a+16+b^2=a^2+b^2-4b+4$
 $-8a+4b=-12$
 $\therefore 2a-b=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
점 P가 직선 l 위에 있으므로
 $2a+3b=12 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

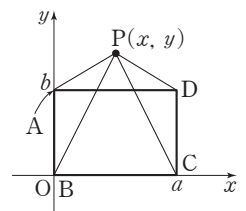
$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=\frac{21}{8}, b=\frac{9}{4}$
 $\therefore 8a+4b=8\times\frac{21}{8}+4\times\frac{9}{4}=30$

7 점 P의 좌표를 $(a, a-1)$ 이라 하면
 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$
 $=(a-8)^2+(a-1+7)^2+(a-12)^2+(a-1-5)^2$
 $=4a^2-40a+280$
 $=4(a-5)^2+180$
따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 은 $a=5$ 일 때 최솟값 180을 갖는다.

8 $\overline{AB}=\sqrt{(1+1)^2+(3-1)^2}$
 $=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
 $\overline{BC}=\sqrt{(5-1)^2+(-1-3)^2}$
 $=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$
 $\overline{CA}=\sqrt{(-1-5)^2+(1+1)^2}$
 $=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$
이때 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$ 이므로 $\triangle ABC$ 는 $\angle B=90^\circ$ 인
직각삼각형이다.
따라서 $\triangle ABC$ 의 넓이는
 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=8$

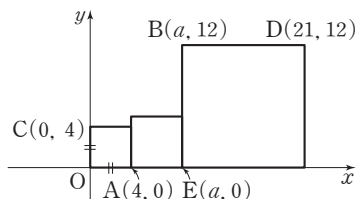
9 점 C의 좌표를 (a, b) 라 하면 $\overline{AB}=\overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$
이므로
 $(1+1)^2+(2+2)^2=(a-1)^2+(b-2)^2$
 $a^2-2a+b^2-4b-15=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\overline{BC}=\overline{CA}$ 에서 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$ 이므로
 $(a-1)^2+(b-2)^2=(-1-a)^2+(-2-b)^2$
 $4a+8b=0 \quad \therefore a=-2b \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $4b^2+4b+b^2-4b-15=0$
 $5b^2=15, b^2=3 \quad \therefore b=\pm\sqrt{3}$
그런데 점 C가 제2사분면 위의 점이므로
 $b=\sqrt{3}$
따라서 점 C의 좌표는 $(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 이다.

10 오른쪽 그림과 같이 직선 BC
를 x 축, 점 B를 지나고 직선
BC에 수직인 직선을 y 축으로
하는 좌표평면을 잡으면 점 B
는 원점이 된다.



이때 $A(0, b)$, $C(a, 0)$, $D(\boxed{a}, \boxed{b})$, $P(x, y)$ 라 하면
 $\overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 = x^2 + (y-b)^2 + \boxed{(x-a)^2 + y^2}$
 $= x^2 + y^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2$
 $\overline{BP}^2 + \overline{DP}^2 = x^2 + y^2 + \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2}$
 $\therefore \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{DP}^2$

- 11 점 $C(0, 4)$ 이고, $\overline{OA} = \overline{OC} = 4$ 이므로
 $A(4, 0)$

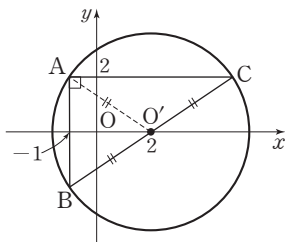


위의 그림과 같이 점 E를 잡고, 점 E의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면 $D(21, 12)$ 이므로
 $B(a, 12)$
 이때 $\overline{BD} = 21 - a$, $\overline{BE} = 12$ 이고, $\overline{BD} = \overline{BE}$ 이므로
 $21 - a = 12 \quad \therefore a = 9$
 $\therefore B(9, 12)$
 $\therefore \overline{AB} = \sqrt{(9-4)^2 + 12^2} = 13$

- 12 $O(0, 0)$, $P(x, y)$, $Q(2, -1)$ 이라 하면
 $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \overline{OP} + \overline{PQ}$
 $\geq \overline{OQ}$
 $= \sqrt{2^2 + (-1)^2}$
 $= \sqrt{5}$

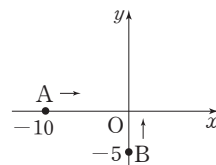
따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{5}$ 이다.

- 13 삼각형 ABC의 외심을 $O'(2, 0)$ 이라 하면 점 O' 에서 각 꼭짓점까지의 거리가 같으므로 점 O' 은 $\overline{BC}$ 의 중점이다.



따라서 $\overline{BC}$ 는 $\triangle ABC$ 의 외접원의 지름이므로 $\triangle ABC$ 는 $\overline{BC}$ 를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.
 $\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 = (2\overline{AO'})^2 = 4\overline{AO'}^2$
 $= 4\{(2+1)^2 + (-2)^2\} = 52$

- 14 오른쪽 그림과 같이 직선 OA를 x 축, 직선 OB를 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 O는 원 점이 된다. A, B의 출발점의 위치를 각각 $(-10, 0)$, $(0, -5)$



로 놓고 t 시간 후의 A, B의 위치를 각각 P, Q라 하면

$P(-10+3t, 0)$, $Q(0, -5+4t)$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PQ} &= \sqrt{(10-3t)^2 + (4t-5)^2} \\ &= \sqrt{25t^2 - 100t + 125} \\ &= \sqrt{25(t-2)^2 + 25} \end{aligned}$$

따라서 $\overline{PQ}$ 는 $t=2$ 일 때 최솟값 $\sqrt{25}=5$ 를 갖는다.

즉, A와 B 사이의 거리가 최소가 되는 것은 2시간 후이고, 그때의 거리는 5 km이다.

III-1 02 선분의 내분점과 외분점

1 선분의 내분점과 외분점

개념 CHECK

192쪽

- 1 답 (1) B (2) D (3) 2, 1 (4) 1, 3

- 2 답 풀이 참조

내분점 P	$P\left(\frac{2 \times \boxed{3} + 3 \times (\boxed{-2})}{2 + \boxed{3}}\right)$ $\therefore P(\boxed{0})$
외분점 Q	$Q\left(\frac{2 \times \boxed{3} - 3 \times (\boxed{-2})}{2 - \boxed{3}}\right)$ $\therefore Q(\boxed{-12})$

- 3 답 (1) 2 (2) $\frac{1}{2}$ (3) -22

- 4 답 (1) $\left(5, \frac{7}{3}\right)$ (2) $\left(\frac{9}{2}, 1\right)$ (3) $\left(-\frac{3}{2}, -15\right)$

01-1 [답] $12\sqrt{5}$

선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 + 3 \times 8}{2+3}, \frac{2 \times 9 + 3 \times (-1)}{2+3} \right) \quad \therefore (6, 3)$$

선분 AB를 2 : 3으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 - 3 \times 8}{2-3}, \frac{2 \times 9 - 3 \times (-1)}{2-3} \right) \quad \therefore (18, -21)$$

$$\therefore PQ = \sqrt{(18-6)^2 + (-21-3)^2} = 12\sqrt{5}$$

01-2 [답] (10, -41)

선분 AB를 1 : b로 내분하는 점의 좌표가 (2, -1)이므로

$$\frac{1 \times a + b \times 1}{1+b} = 2, \quad \frac{1 \times (-11) + b \times 4}{1+b} = -1$$

$$a+b=2(1+b), \quad -11+4b=-(1+b)$$

$$a-b=2, \quad 5b=10$$

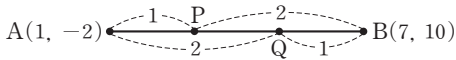
$$\therefore a=4, \quad b=2$$

따라서 A(1, 4), B(4, -11)이므로 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 4 - 2 \times 1}{3-2}, \frac{3 \times (-11) - 2 \times 4}{3-2} \right) \quad \therefore (10, -41)$$

01-3 [답] (3, 2), (5, 6)

다음 그림과 같이 선분 AB를 삼등분하는 두 점 P, Q라 하면 점 P는 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이고, 점 Q는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이다.



따라서 두 점 P, Q의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 7 + 2 \times 1}{1+2}, \frac{1 \times 10 + 2 \times (-2)}{1+2} \right) \quad \therefore (3, 2)$$

$$\left(\frac{2 \times 7 + 1 \times 1}{2+1}, \frac{2 \times 10 + 1 \times (-2)}{2+1} \right) \quad \therefore (5, 6)$$

즉, 선분 AB를 삼등분하는 두 점의 좌표는 (3, 2), (5, 6)이다.

02-1 [답] $\frac{2}{3}$

$(1-t) : t$ 에서 $1-t > 0, t > 0$ 이므로

$$0 < t < 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 AB를 $(1-t) : t$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{(1-t) \times (-6) + t \times (-3)}{(1-t)+t}, \frac{(1-t) \times 4 + t \times (-2)}{(1-t)+t} \right)$$

$$\therefore (3t-6, -6t+4)$$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$$3t-6 < 0, \quad -6t+4 > 0 \quad \therefore t < \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

t 의 값의 범위는 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 공통부분이므로

$$0 < t < \frac{2}{3}$$

$$\text{따라서 } \alpha=0, \beta=\frac{2}{3} \text{ 이므로 } \alpha+\beta=\frac{2}{3}$$

02-2 [답] 3

선분 AB를 $k : 2$ 로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{k \times (-2) - 2 \times 1}{k-2}, \frac{k \times (-5) - 2 \times 3}{k-2} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{-2k-2}{k-2}, \frac{-5k-6}{k-2} \right)$$

이 점이 직선 $y=2x-5$ 위에 있으므로

$$\frac{-5k-6}{k-2} = 2 \times \frac{-2k-2}{k-2} - 5$$

$$-5k-6 = 2(-2k-2) - 5(k-2)$$

$$4k=12 \quad \therefore k=3$$

02-3 [답] 3

선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{m \times 3 + n \times (-2)}{m+n}, \frac{m \times (-2) + n \times 4}{m+n} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{3m-2n}{m+n}, \frac{-2m+4n}{m+n} \right)$$

이 점이 x 축 위에 있으므로

$$\frac{-2m+4n}{m+n} = 0, \quad -2m+4n=0 \quad \therefore m=2n$$

이때 m, n 은 서로소인 자연수이므로 $m=2, n=1$

$$\therefore m+n=3$$

03-1 [답] (-9, 11)

$$3\overline{AB} = 2\overline{BC} \text{ 이므로 } \overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 3$$

점 C는 선분 AB를 5 : 3으로

외분하는 점이므로 점 C

의 좌표는

$$\left(\frac{5 \times 0 - 3 \times 6}{5-3}, \frac{5 \times 5 - 3 \times 1}{5-3} \right)$$

$$\therefore (-9, 11)$$

[다른 풀이]

$C(a, b)$ 라 하면 점 B는 선

분 AC를 2 : 3으로 내분하

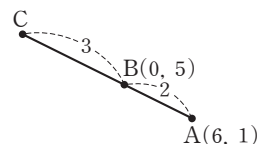
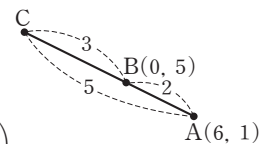
는 점이므로

$$\frac{2 \times a + 3 \times 6}{2+3} = 0,$$

$$\frac{2 \times b + 3 \times 1}{2+3} = 5$$

$$\therefore a = -9, b = 11$$

따라서 점 C의 좌표는 (-9, 11)이다.



03-2 답 4

$\overline{AB} = 4\overline{BC}$ 이므로

$$\overline{AB} : \overline{BC} = 4 : 1$$

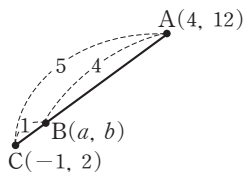
점 C는 선분 AB를 5 : 1로 외분하는 점이고 점 C의 좌표가 $(-1, 2)$ 이므로

$$\frac{5 \times a - 1 \times 4}{5 - 1} = -1,$$

$$\frac{5 \times b - 1 \times 12}{5 - 1} = 2$$

$$\therefore a = 0, b = 4$$

$$\therefore a + b = 4$$



04-1 답 (6, 8)

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 $\overline{AC}$ 의 중점과 $\overline{BD}$ 의 중점이 일치한다.

$\overline{AC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+5}{2}, \frac{4+3}{2} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 D의 좌표를 (a, b) 라 하면 $\overline{BD}$ 의 중점의 좌표는

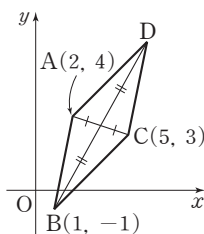
$$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{-1+b}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 일치하므로

$$\frac{7}{2} = \frac{1+a}{2}, \frac{7}{2} = \frac{-1+b}{2}$$

$$\therefore a = 6, b = 8$$

따라서 점 D의 좌표는 (6, 8)이다.



04-2 답 C(6, -4), D(7, 2)

두 대각선 AC, BD의 교점은 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ 각각의 중점과 일치한다.

$\overline{AC}$ 의 중점의 좌표가 (3, 0)이

므로 점 C의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\frac{0+a}{2} = 3, \frac{4+b}{2} = 0$$

$$\therefore a = 6, b = -4$$

$$\therefore C(6, -4)$$

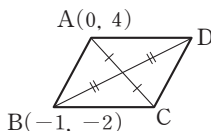
$\overline{BD}$ 의 중점의 좌표도 (3, 0)이므로 점 D의 좌표를 (c, d)

라 하면

$$\frac{-1+c}{2} = 3, \frac{-2+d}{2} = 0$$

$$\therefore c = 7, d = 2$$

$$\therefore D(7, 2)$$



04-3 답 -4

마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 $\overline{AC}$ 의 중점과 $\overline{BD}$ 의 중점이 일치한다.

$\overline{AC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+b}{2}, \frac{3-3}{2} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{b-2}{2}, 0 \right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overline{BD}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+2}{2}, \frac{-1+1}{2} \right) \quad \therefore \left(\frac{a+2}{2}, 0 \right) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 일치하므로

$$\frac{b-2}{2} = \frac{a+2}{2} \quad \therefore b = a + 4 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

또한 마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로

$$\overline{AB} = \overline{AD}, \text{ 즉 } \overline{AB}^2 = \overline{AD}^2$$

$$(a+2)^2 + (-1-3)^2 = (2+2)^2 + (1-3)^2$$

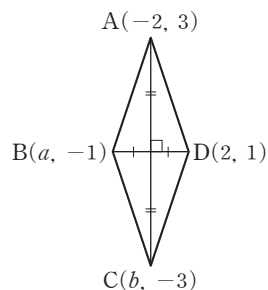
$$a^2 + 4a + 4 + 16 = 16 + 4$$

$$a^2 + 4a = 0, a(a+4) = 0$$

$$\therefore a = -4 (\because a < 0)$$

이를 $\textcircled{3}$ 에 대입하면 $b = 0$

$$\therefore a + b = -4$$



05-1 답 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$\overline{AD}$ 가 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-7-5)^2 + 5^2} = 13$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(2-5)^2 + (-4)^2} = 5$$

$$\therefore \overline{BD} : \overline{CD} = 13 : 5$$

따라서 점 D는 변 BC를 13 : 5로 내분하는 점이므로 점

D의 좌표는

$$\left(\frac{13 \times 2 + 5 \times (-7)}{13 + 5}, \frac{13 \times (-4) + 5 \times 5}{13 + 5} \right)$$

$$\therefore \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

05-2 답 13 : 10

$\overline{AD}$ 가 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-8+3)^2 + (-14+2)^2} = 13$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(5+3)^2 + (4+2)^2} = 10$$

$$\therefore \overline{BD} : \overline{CD} = 13 : 10$$

높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같으므로

$$\triangle ABD : \triangle ACD = \overline{BD} : \overline{CD} = 13 : 10$$

1 답 (1) (4, 3) (2) (2, 2)

문제

06-1 답 (-1, -4)

$C(a, b)$ 라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (1, 1)

이므로

$$\frac{4+0+a}{3}=1, \frac{2+5+b}{3}=1$$

$$4+a=3, 7+b=3$$

$$\therefore a=-1, b=-4$$

따라서 점 C의 좌표는 (-1, -4)이다.

06-2 답 $(-\frac{5}{2}, 2)$

$B(a, b)$, $C(c, d)$ 라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (-1, 3)이므로

$$\frac{2+a+c}{3}=-1, \frac{5+b+d}{3}=3$$

$$2+a+c=-3, 5+b+d=9$$

$$\therefore a+c=-5, b+d=4$$

따라서 BC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right) \therefore \left(-\frac{5}{2}, 2\right)$$

06-3 답 (2, -1)

삼각형 DEF의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{6+3-3}{3}, \frac{-1-4+2}{3}\right) \therefore (2, -1)$$

다른 풀이

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 D의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times 6}{2+1}, \frac{2 \times (-4) + 1 \times (-1)}{2+1}\right) \therefore (4, -3)$$

선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점 E의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-3) + 1 \times 3}{2+1}, \frac{2 \times 2 + 1 \times (-4)}{2+1}\right) \therefore (-1, 0)$$

선분 CA를 2 : 1로 내분하는 점 F의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 6 + 1 \times (-3)}{2+1}, \frac{2 \times (-1) + 1 \times 2}{2+1}\right) \therefore (3, 0)$$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{4-1+3}{3}, \frac{-3+0+0}{3}\right) \therefore (2, -1)$$

연습문제

1 (5, 10) 2 ③ 3 (6, 4) 4 $\left(\frac{19}{4}, -\frac{15}{4}\right)$

5 ② 6 ③ 7 4 8 (3, 6) 9 ④

10 $\frac{16}{3}$ 11 ⑤ 12 ③ 13 (3, 2) 14 36

15 $8\sqrt{5}$ 16 ④ 17 19 18 ⑤

19 $3x-6y-13=0$

1 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 6 + 1 \times (-3)}{2+1}, \frac{2 \times 11 + 1 \times 2}{2+1}\right) \therefore (3, 8)$$

선분 PB를 4 : 1로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{4 \times 6 - 1 \times 3}{4-1}, \frac{4 \times 11 - 1 \times 8}{4-1}\right) \therefore (7, 12)$$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+7}{2}, \frac{8+12}{2}\right) \therefore (5, 10)$$

2 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표가 (-14, -3)

이므로

$$\frac{3 \times (-2) - 2 \times a}{3-2} = -14, \frac{3 \times b - 2 \times 6}{3-2} = -3$$

$$-6 - 2a = -14, 3b - 12 = -3$$

$$\therefore a = 4, b = 3$$

$$\therefore a + b = 7$$

3 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표가 (0, 0)이므로

$$\frac{1 \times (b+1) + 2 \times (-1)}{1+2} = 0, \frac{1 \times 2 + 2 \times (a+1)}{1+2} = 0$$

$$\therefore a = -2, b = 1$$

따라서 A(-1, -1), B(2, 2), C(0, 1)이므로 선분 BC

를 2 : 3로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 0 - 3 \times 2}{2-3}, \frac{2 \times 1 - 3 \times 2}{2-3}\right) \therefore (6, 4)$$

4 선분 AB를 2 : b로 외분하는 점의 좌표가 (2, -1)이므로

$$\frac{2 \times 5 - b \times 4}{2-b} = 2, \frac{2 \times a - b \times (-3)}{2-b} = -1$$

$$10 - 4b = 2(2-b), 2a + 3b = -(2-b)$$

$$2b = 6, a + b = -1$$

$$\therefore a = -4, b = 3$$

따라서 A(4, -3), B(5, -4)이므로 선분 AB를 3 : 1

로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 5 + 1 \times 4}{3+1}, \frac{3 \times (-4) + 1 \times (-3)}{3+1}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{19}{4}, -\frac{15}{4}\right)$$

- 5 $t : (1-t)$ 에서 $t > 0, 1-t > 0$ 이므로

$$0 < t < 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

선분 AB를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{t \times 6 + (1-t) \times (-3)}{t + (1-t)}, \frac{t \times 3 + (1-t) \times 5}{t + (1-t)} \right)$$

$$\therefore (9t-3, -2t+5)$$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$$9t-3 < 0, -2t+5 > 0$$

$$t < \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

t 의 값의 범위는 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 의 공통부분이므로

$$0 < t < \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } \alpha = 0, \beta = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$\alpha + \beta = \frac{1}{3}$$

- 6 선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{m \times 3 + n \times (-4)}{m+n}, \frac{m \times 1 + n \times 5}{m+n} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{3m-4n}{m+n}, \frac{m+5n}{m+n} \right)$$

이 점이 y 축 위에 있으므로

$$\frac{3m-4n}{m+n} = 0, 3m-4n=0 \quad \therefore 3m=4n$$

이때 m, n 은 서로소인 자연수이므로

$$m=4, n=3 \quad \therefore m+n=7$$

- 7 $2\overline{AB} = 3\overline{BC}$ 이므로

$$\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 2$$

점 C는 선분 AB를 5 : 2

로 외분하는 점이므로

$$a = \frac{5 \times (-1) - 2 \times 2}{5-2} = -3, b = \frac{5 \times (-3) - 2 \times 3}{5-2} = -7$$

$$\therefore a-b=4$$

- 8 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로

$\overline{AC}$ 의 중점과 $\overline{BD}$ 의 중점이 일치한다.

$\overline{AC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+11}{2}, \frac{5-1}{2} \right) \quad \therefore (5, 2) \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

점 D의 좌표를 (a, b) 라 하면 $\overline{BD}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{7+a}{2}, \frac{-2+b}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{9}, \textcircled{10}$ 이 일치하므로

$$5 = \frac{7+a}{2}, 2 = \frac{-2+b}{2}$$

$$\therefore a=3, b=6$$

따라서 점 D의 좌표는 (3, 6)이다.

- 9 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로

$\overline{AC}$ 의 중점과 $\overline{BD}$ 의 중점이 일치한다.

$\overline{AC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+2}{2}, \frac{0+8}{2} \right) \quad \therefore \left(\frac{a+2}{2}, 4 \right) \quad \dots\dots \textcircled{11}$$

$\overline{BD}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+b}{2}, \frac{2+6}{2} \right) \quad \therefore \left(\frac{4+b}{2}, 4 \right) \quad \dots\dots \textcircled{12}$$

$\textcircled{11}, \textcircled{12}$ 이 일치하므로

$$\frac{a+2}{2} = \frac{4+b}{2} \quad \therefore b=a-2 \quad \dots\dots \textcircled{13}$$

또한 마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로

$$\overline{AB} = \overline{BC}, \text{ 즉 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$$

$$(4-a)^2 + 2^2 = (2-4)^2 + (8-2)^2$$

$$a^2 - 8a - 20 = 0, (a+2)(a-10) = 0$$

$$\therefore a=10 (\because a > 0)$$

이를 $\textcircled{13}$ 에 대입하면 $b=8$

$$\therefore a+b=18$$

- 10 $\overline{AD}$ 가 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3-3)^2 + (-2-6)^2} = 10$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(6-3)^2 + (2-6)^2} = 5$$

$$\therefore \overline{BD} : \overline{CD} = 10 : 5 = 2 : 1$$

따라서 점 D는 변 BC를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점

D의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 6 + 1 \times (-3)}{2+1}, \frac{2 \times 2 + 1 \times (-2)}{2+1} \right)$$

$$\therefore \left(3, \frac{2}{3} \right)$$

$$\therefore \overline{AD} = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$$

- 11 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 (4, 0)이므로

$$\frac{a-1+4}{3} = 4, \frac{3+b-5}{3} = 0$$

$$a+3=12, b-2=0$$

$$\therefore a=9, b=2$$

$$\therefore a+b=11$$

- 12 B(a, b), C(c, d)라 하면

변 BC의 중점의 좌표가 (-1, -1)이므로

$$\frac{a+c}{2} = -1, \frac{b+d}{2} = -1$$

$$\therefore a+c=-2, b+d=-2$$

따라서 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표가 (m, n)이므로

$$\frac{2+a+c}{3} = m, \frac{5+b+d}{3} = n$$

$$\therefore m=0, n=1 \quad \therefore m+n=1$$

- 13 D(1, -1), E(3, 1), F(5, 6)이라 하면 삼각형 ABC의 무게중심은 삼각형 DEF의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+3+5}{3}, \frac{-1+1+6}{3}\right) \quad \therefore (3, 2)$$

- 14 점 A는 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위의 점이고, 점 B는 직선 $y=3x$ 위의 점이므로 A(2a, a), B(b, 3b)라 하자.

삼각형 OAB의 무게중심의 좌표가 (11, 13)이므로

$$\frac{2a+b}{3}=11, \frac{a+3b}{3}=13$$

$$\therefore 2a+b=33, a+3b=39$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=12, b=9$$

따라서 직선 $y=-x+k$ 가 점 A(24, 12)를 지나므로

$$12=-24+k \quad \therefore k=36$$

- 15 (㉠)에서 점 C는 선분 BD를 2:3으로 내분하는 점이므로

$$C\left(\frac{2 \times 1 + 3 \times (-4)}{2+3}, \frac{2 \times 6 + 3 \times (-4)}{2+3}\right)$$

$$\therefore C(-2, 0)$$

(㉡)에서 점 B는 선분 AC의 중점이므로 A(a, b)라 하면

$$\frac{a-2}{2}=-4, \frac{b}{2}=-4$$

$$\therefore a=-6, b=-8$$

$$\therefore A(-6, -8)$$

(㉢)에서 점 E는 선분 AC를 2:1로 외분하는 점이므로

$$E\left(\frac{2 \times (-2) - 1 \times (-6)}{2-1}, \frac{2 \times 0 - 1 \times (-8)}{2-1}\right)$$

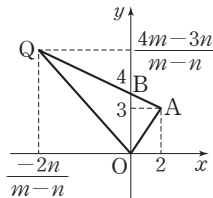
$$\therefore E(2, 8)$$

$$\therefore \overline{AE}=\sqrt{(2+6)^2+(8+8)^2}=8\sqrt{5}$$

- 16 선분 AB를 $m:n$ 으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{m \times 0 - n \times 2}{m-n}, \frac{m \times 4 - n \times 3}{m-n}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{-2n}{m-n}, \frac{4m-3n}{m-n}\right)$$



위의 그림에서 $\triangle OAQ = \triangle OAB + \triangle OBQ$ 이므로

$$16 = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 + \frac{1}{2} \times 4 \times \left| \frac{-2n}{m-n} \right|$$

$$\therefore \left| \frac{-2n}{m-n} \right| = 6$$

이때 $m > n > 0$ 이므로

$$\frac{2n}{m-n}=6, 2n=6m-6n$$

$$8n=6m \quad \therefore \frac{n}{m}=\frac{3}{4}$$

- 17 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 외각의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-8)^2 + (-3-3)^2} = 10$$

$$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

$$\therefore \overline{BD} : \overline{CD} = 10 : 5 = 2 : 1$$

따라서 점 D는 변 BC를 2:1로 외분하는 점이므로

$$a = \frac{2 \times 4 - 1 \times (-8)}{2-1} = 16, b = \frac{2 \times 0 - 1 \times (-3)}{2-1} = 3$$

$$\therefore a+b=19$$

- 18 $\triangle ABC$ 에서 변 BC의 중점을

M(a, b)라 하면 무게중심은 $\overline{AM}$ 을

2:1로 내분하는 점이다.

이때 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표가 (0, 0)이므로

$$\frac{2 \times a + 1 \times 4}{2+1} = 0, \frac{2 \times b + 1 \times 4}{2+1} = 0$$

$$\therefore a=-2, b=-2$$

따라서 중점 M의 좌표는 (-2, -2)이다.

또 정삼각형의 한 내각의 이등분선은 밑변을 수직이등분하므로

$$\angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$$

즉, $\triangle ABM$ 은 $\angle ABM = 60^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{AB} : \overline{AM} = 2 : \sqrt{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

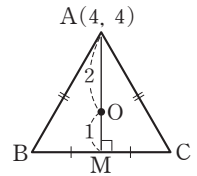
$$\overline{AM} = \sqrt{(-2-4)^2 + (-2-4)^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\overline{AM} = 6\sqrt{2} \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$\overline{AB} : 6\sqrt{2} = 2 : \sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{AB} = 4\sqrt{6}$$

따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 $4\sqrt{6}$ 이다.



- 19 P(a, b)라 하면 점 P는 직선 $x-2y+1=0$ 위에 있으므로

$$a-2b+1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

선분 AP를 1:2로 내분하는 점의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x = \frac{1 \times a + 2 \times 3}{1+2} = \frac{a+6}{3},$$

$$y = \frac{1 \times b + 2 \times (-2)}{1+2} = \frac{b-4}{3}$$

$$\therefore a=3x-6, b=3y+4$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$3x-6-2(3y+4)+1=0$$

$$\therefore 3x-6y-13=0$$

III-2 01 직선의 방정식

1 직선의 방정식

개념 CHECK

205쪽

1 답 (1) $y=x+8$ (2) $y=-3x+3$ (3) $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$

2 답 (1) $x=-4$ (2) $y=3$

문제

206~209쪽

01-1 답 -1

$$3x+y-1=0 \text{에서 } y=-3x+1$$

즉, 점 $(-1, 7)$ 을 지나고 기울기가 -3 인 직선의 방정식은 $y-7=-3\{x-(-1)\}$

$$\therefore 3x+y-4=0$$

따라서 $a=3, b=-4$ 이므로

$$a+b=-1$$

01-2 답 $y=-x+5$

선분 AB를 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times (-3)}{2+1}, \frac{2 \times 5 + 1 \times 2}{2+1}\right) \therefore (1, 4)$$

따라서 점 $(1, 4)$ 를 지나고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y-4=-(x-1) \therefore y=-x+5$$

01-3 답 12

점 $(-2, 0)$ 을 지나고 기울기가 $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}\{x - (-2)\}$$

$$\therefore \sqrt{3}x - 3y + 2\sqrt{3} = 0$$

따라서 $m=\sqrt{3}, n=-3$ 이므로

$$m^2 + n^2 = 3 + 9 = 12$$

02-1 답 $y=5x-10$

$\triangle ABC$ 의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{3-4+7}{3}, \frac{5-2-3}{3}\right) \therefore (2, 0)$$

따라서 무게중심 G(2, 0)과 점 A(3, 5)를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{5}{3-2}(x-2) \therefore y=5x-10$$

02-2 답 -16

두 점 $(4, 2), (1, -4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2 = \frac{-4-2}{1-4}(x-4) \therefore y=2x-6$$

이 직선이 두 점 $(a, -2), (-1, b)$ 를 지나므로

$$-2=2a-6, b=-2-6$$

$$\therefore a=2, b=-8$$

$$\therefore ab=-16$$

02-3 답 $\frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1$

직선의 x 절편을 $a(a \neq 0)$ 라 하면 y 절편은 $2a$ 이므로 직선의 방정식은

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{2a} = 1 \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$\frac{3}{a} + \frac{2}{2a} = 1, \frac{4}{a} = 1 \therefore a=4$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1$$

03-1 답 1

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

(직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)

$$\frac{4-1}{3-0} = \frac{2-4}{k-3}, 1 = \frac{-2}{k-3}$$

$$k-3=-2 \therefore k=1$$

다른 풀이

두 점 A(0, 1), B(3, 4)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-1 = \frac{4-1}{3-0}(x-0) \therefore y=x+1$$

이 직선이 점 C(k, 2)를 지나므로

$$2=k+1 \therefore k=1$$

03-2 답 $y=-2x-1$

세 점 A, B, C가 한 직선 l 위에 있으므로

(직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)

$$\frac{k-1-3}{-1-(-2)} = \frac{1-3k-3}{2-(-2)}$$

$$k-4 = \frac{-3k-2}{4}, 4k-16 = -3k-2$$

$$7k=14 \therefore k=2$$

즉, 직선 l 은 두 점 A(-2, 3), B(-1, 1)을 지나는 직선이므로

$$y-3 = \frac{1-3}{-1-(-2)}\{x-(-2)\}$$

$$\therefore y=-2x-1$$

03-3 [답] -4

세 점이 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 하므로

(직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)

$$\frac{k+3-5}{1-(-2k-1)} = \frac{k-1-(k+3)}{-3-1}$$

$$\frac{k-2}{2k+2} = 1, k-2=2k+2$$

$$\therefore k=-4$$

04-1 [답] $\frac{2}{3}$

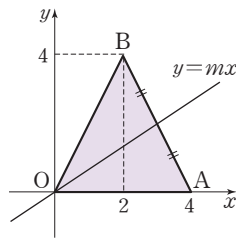
직선 $y=mx$ 가 원점 O를 지나므로 $\triangle OAB$ 의 넓이를 이등분하려면 $\overline{AB}$ 의 중점을 지나야 한다.

$\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+2}{2}, \frac{0+4}{2}\right) \therefore (3, 2)$$

따라서 직선 $y=mx$ 가 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$2=3m \therefore m=\frac{2}{3}$$



04-2 [답] $y=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$

점 A를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면

$\overline{BC}$ 의 중점을 지나야 한다.

$\overline{BC}$ 의 중점의 좌표는

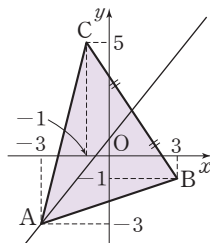
$$\left(\frac{3-1}{2}, \frac{-1+5}{2}\right)$$

$$\therefore (1, 2)$$

따라서 두 점 $(-3, -3)$, $(1, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-3)=\frac{2-(-3)}{1-(-3)}\{x-(-3)\}$$

$$\therefore y=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$$



04-3 [답] $y=x+2$

직선이 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

직사각형의 두 대각선의 교점은 두 점 $A(3, 8)$, $C(7, 6)$

을 이은 선분 AC의 중점이므로

$$\left(\frac{3+7}{2}, \frac{8+6}{2}\right) \therefore (5, 7)$$

따라서 두 점 $(-4, -2)$, $(5, 7)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-2)=\frac{7-(-2)}{5-(-4)}\{x-(-4)\} \therefore y=x+2$$

2 일차방정식 $ax+by+c=0$ 이 나타내는 도형

문제

211~213쪽

05-1 [답] (1) 제1사분면, 제2사분면

(2) 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면

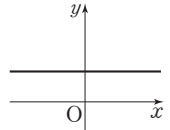
$$(1) ab=0, bc<0 \text{ 이므로 } b \neq 0 \therefore a=0$$

이를 $ax+by+c=0$ 에 대입하면

$$by+c=0 \therefore y=-\frac{c}{b}$$

이때 $bc<0$ 에서 $\frac{c}{b}<0$ 이므로 $-\frac{c}{b}>0$

따라서 주어진 직선은 y 절편이 양수이면서 x 축에 평행하므로 오른쪽 그림과 같고 제1사분면, 제2사분면을 지난다.



$$(2) bc>0 \text{ 에서 } b \neq 0 \text{ 이므로 } ax+by+c=0 \text{ 를 변형하면}$$

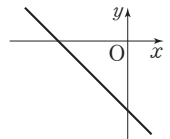
$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b} \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $ac>0, bc>0$ 에서 a, b 의 부호가 서로 같으므로 $ab>0$

$$ab>0 \text{ 에서 } \frac{a}{b}>0 \text{ 이므로 } -\frac{a}{b}<0$$

$$bc>0 \text{ 에서 } \frac{c}{b}>0 \text{ 이므로 } -\frac{c}{b}<0$$

따라서 주어진 직선은 기울기와 y 절편이 모두 음수이므로 오른쪽 그림과 같고 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면을 지난다.



05-2 [답] 제3사분면

$$b \neq 0 \text{ 이므로 } ax+by+c=0 \text{ 을 변형하면 } y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

주어진 그림에서 직선의 기울기는 양수이고 y 절편은 음수이므로

$$-\frac{a}{b}>0, -\frac{c}{b}<0 \therefore ab<0, bc>0$$

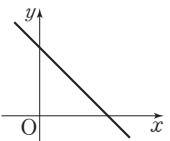
즉, $a>0, b<0, c<0$ 또는 $a<0, b>0, c>0$ 이므로 $ac<0$

$$c \neq 0 \text{ 이므로 } bx+cy+a=0 \text{ 을 변형하면 } y=-\frac{b}{c}x-\frac{a}{c}$$

$$bc>0 \text{ 에서 } \frac{b}{c}>0 \text{ 이므로 } -\frac{b}{c}<0$$

$$ac<0 \text{ 에서 } \frac{a}{c}<0 \text{ 이므로 } -\frac{a}{c}>0$$

따라서 직선 $bx+cy+a=0$ 의 기울기는 음수이고 y 절편은 양수이므로 오른쪽 그림과 같고 제3사분면을 지나지 않는다.



06-1 **답** $\frac{\sqrt{10}}{5}$

$(k+2)x - (2k-1)y + k - 1 = 0$ 을 k 에 대하여 정리하면
 $(2x+y-1) + k(x-2y+1) = 0$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$2x+y-1=0, x-2y+1=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $x = \frac{1}{5}, y = \frac{3}{5}$

따라서 $P\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$ 이므로 점 P와 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

06-2 **답** 3

두 직선 $2x+y-4=0, x-y+1=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$(2x+y-4) + k(x-y+1) = 0 \quad (\text{단, } k \text{는 실수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로

$$-5 - k = 0 \quad \therefore k = -5$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$(2x+y-4) - 5(x-y+1) = 0 \quad \therefore x - 2y + 3 = 0$$

따라서 $a=1, b=3$ 이므로 $ab=3$

다른 풀이

$2x+y-4=0, x-y+1=0$ 을 연립하여 풀면

$$x=1, y=2$$

따라서 주어진 두 직선의 교점의 좌표가 $(1, 2)$ 이므로 두 점 $(1, 2), (-1, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-2 = \frac{1-2}{-1-1}(x-1) \quad \therefore x-2y+3=0$$

따라서 $a=1, b=3$ 이므로 $ab=3$

07-1 **답** $m < 1$ 또는 $m > 3$

$mx-y+m+1=0$ 을 m 에 대하여 정리하면

$$(x+1)m - y + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 식이 m 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+1=0, -y+1=0 \quad \therefore x=-1, y=1$$

즉, 직선 $\textcircled{1}$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직선

$\textcircled{1}$ 이 직선 $2x-y+4=0$ 과

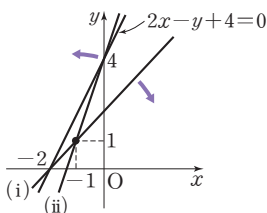
제2사분면에서 만나도록

직선 $\textcircled{1}$ 을 움직여 보면

(i) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(-2, 0)$

을 지날 때

$$-m+1=0 \quad \therefore m=1$$



(ii) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(0, 4)$ 를 지날 때

$$m-3=0 \quad \therefore m=3$$

(i), (ii)에 의하여 m 의 값의 범위는 $m < 1$ 또는 $m > 3$

07-2 **답** $-\frac{1}{4} \leq k \leq 1$

$y=k(x+2)+2$ 를 k 에 대하여 정리하면

$$k(x+2) - y + 2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+2=0, -y+2=0 \quad \therefore x=-2, y=2$$

즉, 직선 $\textcircled{1}$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 2)$ 를 지난다.

오른쪽 그림과 같이 직선 $\textcircled{1}$ 이

AB와 만나도록 직선 $\textcircled{1}$ 을 움직

여 보면

(i) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 A(2, 1)을 지

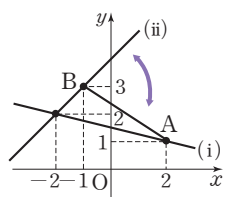
날 때

$$4k+1=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{4}$$

(ii) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 B(-1, 3)을 지날 때

$$k-1=0 \quad \therefore k=1$$

(i), (ii)에 의하여 k 의 값의 범위는 $-\frac{1}{4} \leq k \leq 1$



연습문제

214~216쪽

- | | | | |
|------------------|------|---------------------------------------|------|
| 1 $y = -2x - 31$ | 2 ⑤ | 3 ① | 4 ④ |
| 5 $y = 2$ | 6 ③ | 7 ④ | 8 ⑤ |
| 10 제4사분면 | 11 ④ | 12 $y = -2x - 6$ | 9 3 |
| 13 ④ | 14 3 | 15 $y = \frac{10}{3}x - \frac{31}{3}$ | 16 ② |
| 17 (1, 2) | 18 2 | | |

1 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-2) - 2 \times 4}{3-2}, \frac{3 \times 3 - 2 \times 6}{3-2} \right) \quad \therefore (-14, -3)$$

따라서 점 $(-14, -3)$ 을 지나고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$$y - (-3) = -2\{x - (-14)\} \quad \therefore y = -2x - 31$$

2 $3x - 2y + 1 = 0$ 에서 $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

즉, 점 $(-3, 1)$ 을 지나고 기울기가 $\frac{3}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y - 1 = \frac{3}{2}\{x - (-3)\} \quad \therefore 3x - 2y + 11 = 0$$

따라서 $a=3, b=11$ 이므로 $b-a=8$

- 3 주어진 직선의 기울기가 $\tan 45^\circ = 1$ 이고 y 절편이 14이므로

$$m-2=1, -n+3=14$$

$$\therefore m=3, n=-11$$

$$\therefore m+n=-8$$

- 4 두 점 $(-2, -3), (2, 5)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-3)=\frac{5-(-3)}{2-(-2)}\{x-(-2)\}$$

$$\therefore y=2x+1$$

이 직선이 점 $(a, 7)$ 을 지나므로

$$7=2a+1 \quad \therefore a=3$$

- 5 두 점 $(3, 6), (-5, -2)$ 를 이은 선분의 중점의 좌표는

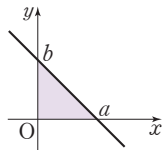
$$\left(\frac{3-5}{2}, \frac{6-2}{2}\right) \quad \therefore (-1, 2)$$

따라서 두 점 $(-1, 2), (1, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y=2$

- 6 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 의 x 절편은 a , y 절편은 b 이고, 제3사분면을 지나지 않으므로 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같다.

이때 색칠한 부분의 넓이가 5이므로

$$\frac{1}{2} \times a \times b = 5 \quad \therefore ab=10$$



- 7 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로
(직선 AC의 기울기)=(직선 BC의 기울기)

$$\frac{11-k}{5-1} = \frac{11-7}{5-k}, \frac{11-k}{4} = \frac{4}{5-k}$$

$$(11-k)(5-k)=16, k^2-16k+39=0$$

$$(k-3)(k-13)=0 \quad \therefore k=3 \text{ 또는 } k=13$$

따라서 모든 k 의 값의 합은

$$3+13=16$$

- 8 서로 다른 세 점이 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 하므로

(직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)

$$\frac{4-1}{(a-2)-3} = \frac{a-1}{7-3}, \frac{3}{a-5} = \frac{a-1}{4}$$

$$12=(a-5)(a-1), a^2-6a-7=0$$

$$(a+1)(a-7)=0 \quad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=7$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=7$

- 9 점 A를 지나는 직선이 삼각형 ABC의 넓이를 이등분하려면 그 직선은 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나야 한다.

$\overline{BC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) \quad \therefore (1, 4)$$

즉, 두 점 $(-1, 2), (1, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=\frac{4-2}{1-(-1)}\{x-(-1)\}$$

$$\therefore y=x+3$$

따라서 $m=1, n=3$ 이므로

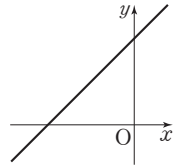
$$mn=3$$

- 10 $b \neq 0$ 이므로 $ax+by+c=0$ 에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

$$ab < 0 \text{에서 } \frac{a}{b} < 0 \text{이므로 } -\frac{a}{b} > 0$$

$$bc < 0 \text{에서 } \frac{c}{b} < 0 \text{이므로 } -\frac{c}{b} > 0$$

따라서 주어진 직선은 기울기와 y 절편이 모두 양수이므로 오른쪽 그림과 같고 제4사분면을 지나지 않는다.



- 11 $b \neq 0$ 이므로 $ax+by+c=0$ 에서 $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

주어진 그림에서 직선의 기울기는 음수이고 y 절편은 양수이므로

$$-\frac{a}{b} < 0, -\frac{c}{b} > 0$$

$$b \neq 0 \text{이므로 } cx-by-a=0 \text{에서 } y=\frac{c}{b}x-\frac{a}{b}$$

$\frac{c}{b} < 0, -\frac{a}{b} < 0$ 이므로 직선 $cx-by-a=0$ 의 기울기와 y 절편은 모두 음수이다.

따라서 직선 $cx-by-a=0$ 의 그래프의 개형은 ④이다.

- 12 $(k-1)x+(2k+1)y+k-5=0$ 을 k 에 대하여 정리하면
 $(-x+y-5)+k(x+2y+1)=0$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$-x+y-5=0, x+2y+1=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=-\frac{11}{3}, y=\frac{4}{3}$$

따라서 $P\left(-\frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 이므로 기울기가 -2 이고 점 P를

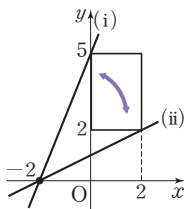
지나는 직선의 방정식은

$$y-\frac{4}{3}=-2\left\{x-\left(-\frac{11}{3}\right)\right\}$$

$$\therefore y=-2x-6$$

- 13** 두 직선 $x-2y+2=0$, $2x+y-6=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은
 $(x-2y+2)+k(2x+y-6)=0$ (단, k 는 실수) ㉠
 직선 ㉠이 점 $(4, 0)$ 을 지나므로
 $6+2k=0 \quad \therefore k=-3$
 이를 ㉠에 대입하면
 $(x-2y+2)-3(2x+y-6)=0$
 $\therefore x+y-4=0$
 따라서 구하는 y 절편은 4이다.

- 14** $y=mx+2m$ 을 m 에 대하여 정리하면
 $m(x+2)-y=0$ ㉠
 이 식이 m 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
 $x+2=0, -y=0$
 $\therefore x=-2, y=0$
 즉, 직선 ㉠은 m 의 값에 관계없이 점 $(-2, 0)$ 을 지난다.
 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 직사각형과 만나도록 직선 ㉠을 움직여 보면
 (i) 직선 ㉠이 점 $(0, 5)$ 를 지날 때
 $2m-5=0 \quad \therefore m=\frac{5}{2}$
 (ii) 직선 ㉠이 점 $(2, 2)$ 를 지날 때
 $4m-2=0 \quad \therefore m=\frac{1}{2}$
 (i), (ii)에 의하여 m 의 값의 범위는
 $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{5}{2}$
 따라서 $a=\frac{1}{2}, b=\frac{5}{2}$ 이므로
 $a+b=3$



- 15** $\triangle ABP : \triangle ACP = 2 : 1$ 이므로
 $\overline{BP} : \overline{CP} = 2 : 1$
 따라서 점 P는 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는
 $\left(\frac{2 \times 5 + 1 \times (-1)}{2+1}, \frac{2 \times (-1) + 1 \times 1}{2+1} \right)$
 $\therefore \left(3, -\frac{1}{3} \right)$
 두 점 $A(4, 3)$ 과 $P\left(3, -\frac{1}{3} \right)$ 을 지나는 직선의 방정식은
 $y-3 = \frac{-\frac{1}{3}-3}{3-4}(x-4)$
 $\therefore y = \frac{10}{3}x - \frac{31}{3}$

- 16** 마름모와 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 마름모의 두 대각선의 교점과 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나는 직선이다.
 마름모의 두 대각선의 교점은 두 점 $(-2, -1)$, $(2, -1)$ 을 이은 선분의 중점이므로
 $\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{-1-1}{2} \right) \quad \therefore (0, -1)$
 또 직사각형의 두 대각선의 교점은 두 점 $(2, 4)$, $(6, 2)$ 를 이은 선분의 중점이므로
 $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2} \right) \quad \therefore (4, 3)$
 즉, 두 점 $(0, -1)$, $(4, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은
 $y-(-1) = \frac{3-(-1)}{4-0}(x-0) \quad \therefore y=x-1$
 따라서 구하는 x 절편은 1이다.

- 17** 점 (a, b) 가 직선 $x+2y=1$ 위에 있으므로
 $a+2b=1 \quad \therefore a=1-2b$ ㉠
 ㉠을 $ax+by=1$ 에 대입하면
 $(1-2b)x+by=1$
 이 식을 b 에 대하여 정리하면
 $(y-2x)b+x-1=0$
 이 식이 b 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
 $y-2x=0, x-1=0$
 $\therefore x=1, y=2$
 따라서 직선 $ax+by=1$ 은 a, b 의 값에 관계없이 항상 점 $(1, 2)$ 를 지나므로 구하는 점의 좌표는 $(1, 2)$ 이다.

- 18** 두 직선
 $(a-1)x+(4-3a)y+10=0$ ㉠
 $ax+(3-a)y-10=0$ ㉡
 은 원점을 지나지 않으므로 두 직선 ㉠, ㉡의 교점은 원점이 아니다.
 따라서 직선 $y=3x$ 는 두 직선 ㉠, ㉡의 교점과 원점을 지나는 직선이다.
 두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 지나는 직선의 방정식은
 $(a-1)x+(4-3a)y+10$
 $+k\{ax+(3-a)y-10\}=0$ (단, k 는 실수)
 ㉢

직선 ㉢이 원점을 지나므로
 $10-10k=0 \quad \therefore k=1$
 이를 ㉢에 대입하면
 $(a-1)x+(4-3a)y+10+ax+(3-a)y-10=0$
 $\therefore (2a-1)x+(7-4a)y=0$
 이 직선이 직선 $y=3x$, 즉 $3x-y=0$ 과 일치하므로
 $2a-1=3, 7-4a=-1 \quad \therefore a=2$

III-2 02 두 직선의 위치 관계

1 두 직선의 평행과 수직

개념 CHECK

218쪽

1 답 (1) 2 (2) $-\frac{1}{2}$

2 답 (1) 6 (2) $-\frac{3}{2}$

(1) $\frac{a}{2} = \frac{3}{1} \neq \frac{-1}{4} \quad \therefore a=6$

(2) $a \times 2 + 3 \times 1 = 0 \quad \therefore a = -\frac{3}{2}$

문제

219~222쪽

01-1 답 (1) $y = \frac{1}{2}x$ (2) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

(1) 직선 $x - 2y + 4 = 0$ 에서 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 이므로 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고 원점을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x$$

(2) 직선 $y = 2x + 1$ 의 기울기는 2이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면

$$2m = -1 \quad \therefore m = -\frac{1}{2}$$

따라서 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고 점 (3, 2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

01-2 답 $y = x + 1$

직선 AB의 기울기는

$$\frac{8-3}{6-1} = 1$$

이므로 직선 AB에 평행한 직선의 기울기는 1이다.

따라서 기울기가 1이고 점 (-1, 0)을 지나는 직선의 방정식은

$$y = x - (-1)$$

$$\therefore y = x + 1$$

01-3 답 $y = \frac{3}{2}x + 2$

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times (-2)}{2+1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times 3}{2+1} \right) \quad \therefore (2, 5)$$

$$2x + 3y - 6 = 0 \text{에서 } y = -\frac{2}{3}x + 2$$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{3}{2}$ 이다.

따라서 기울기가 $\frac{3}{2}$ 이고 점 (2, 5)를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 5 = \frac{3}{2}(x - 2) \quad \therefore y = \frac{3}{2}x + 2$$

02-1 답 $-\frac{1}{12}$

두 직선 $2x + (2k+1)y + 3 = 0$, $2kx + y - 1 = 0$ 이

(i) 서로 평행하려면

$$\frac{2}{2k} = \frac{2k+1}{1} \neq \frac{3}{-1}$$

$$4k^2 + 2k - 2 = 0, 2k^2 + k - 1 = 0$$

$$(k+1)(2k-1) = 0 \quad \therefore k = -1 \text{ 또는 } k = \frac{1}{2}$$

(ii) 서로 수직이라면

$$2 \times 2k + (2k+1) \times 1 = 0 \quad \therefore k = -\frac{1}{6}$$

(i), (ii)에 의하여 $\alpha = \frac{1}{2}$ ($\because \alpha > 0$), $\beta = -\frac{1}{6}$ 이므로

$$\alpha\beta = -\frac{1}{12}$$

02-2 답 -88

두 직선 $2x + ay + 3 = 0$, $x + by - 1 = 0$ 이 서로 수직이므로

$$2 \times 1 + a \times b = 0 \quad \therefore ab = -2$$

또 두 직선 $2x + ay + 3 = 0$, $2x - (b+4)y - 3 = 0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{2}{2} = \frac{a}{-(b+4)} \neq \frac{3}{-3}$$

$$-b-4 = a \quad \therefore a+b = -4$$

$$\therefore a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$= (-4)^3 - 3 \times (-2) \times (-4) = -88$$

02-3 답 19

두 직선 $x + ay + 1 = 0$, $ax + (a+2)y + b = 0$ 이 서로 수직이므로

$$1 \times a + a(a+2) = 0$$

$$a^2 + 3a = 0, a(a+3) = 0$$

$$\therefore a = -3 (\because a < 0)$$

따라서 두 직선은 $x-3y+1=0$, $-3x-y+b=0$ 이고
 두 직선의 교점의 좌표가 $(c, 2)$ 이므로
 $c-6+1=0$, $-3c-2+b=0$
 $\therefore b=17, c=5$
 $\therefore a+b+c=19$

03-1 **답** $\frac{7}{4}$

직선 AB의 기울기는

$$\frac{6-(-4)}{-2-3} = -2$$

이므로 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

한편 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3-2}{2}, \frac{-4+6}{2}\right) \therefore \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

따라서 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고 점 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1 = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

이 직선이 점 $(2, a)$ 를 지나므로

$$a = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

03-2 **답** $y = -2x + 3$

직선 $x-2y-4=0$ 의 x 절편은 4, y 절편은 -2 이므로

A(4, 0), B(0, -2)

$x-2y-4=0$ 에서 $y = \frac{1}{2}x - 2$ 이므로 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선의 기울기는 -2 이다.

한편 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+0}{2}, \frac{0-2}{2}\right) \therefore (2, -1)$$

따라서 기울기가 -2 이고 점 $(2, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - (-1) = -2(x - 2)$$

$$\therefore y = -2x + 3$$

03-3 **답** $a=8, b=-4$

직선 AB의 기울기는

$$\frac{b-a}{4-(-2)} = \frac{b-a}{6}$$

$\overline{AB}$ 의 수직이등분선 $x-2y+3=0$, 즉 $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 의 기

울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{b-a}{6} = -2 \therefore a-b=12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{a+b}{2}\right) \therefore \left(1, \frac{a+b}{2}\right)$$

이 점이 직선 $x-2y+3=0$ 위에 있으므로

$$1 - 2 \times \frac{a+b}{2} + 3 = 0$$

$$\therefore a+b=4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=8, b=-4$$

04-1 **답** $-1, 1, 2$

$$2x-y-3=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x+y-3=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$ax-y-1=0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

(i) 세 직선이 모두 평행할 때

두 직선 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 기울기는 각각 2, -1 이므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 없다.

(ii) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때

두 직선 $\textcircled{1}, \textcircled{3}$ 이 서로 평행하면

$$\frac{2}{a} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-3}{-1} \therefore a=2$$

두 직선 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 이 서로 평행하면

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{-1} \neq \frac{-3}{-1} \therefore a=-1$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$x=2, y=1$$

직선 $\textcircled{3}$ 이 점 $(2, 1)$ 을 지나야 하므로

$$2a-1-1=0 \therefore a=1$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 상수 a 의 값은 $-1, 1, 2$ 이다.

04-2 **답** 1

$$x+ay+2=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$2x+y-6=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$3x-y+2=0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

서로 다른 세 직선으로 둘러싸인 삼각형이 직각삼각형이려면 두 직선이 서로 수직이고 다른 한 직선은 두 직선과 평행하지 않아야 한다.

직선 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 의 기울기는 각각 $-2, 3$ 이므로 두 직선 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 은 서로 수직이 아니다.

(i) 두 직선 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 서로 수직일 때

$$1 \times 2 + a \times 1 = 0 \therefore a = -2$$

(ii) 두 직선 $\textcircled{1}, \textcircled{3}$ 이 서로 수직일 때

$$1 \times 3 + a \times (-1) = 0 \therefore a = 3$$

(i), (ii)에 의하여 모든 상수 a 의 값의 합은 $-2+3=1$

05-1 [답 3]

점 $(3, -1)$ 과 직선 $4x+ay+1=0$ 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|4 \times 3 + a \times (-1) + 1|}{\sqrt{4^2 + a^2}} = 2$$

$$|13 - a| = 2\sqrt{16 + a^2}$$

양변을 제곱하면

$$a^2 - 26a + 169 = 4(16 + a^2)$$

$$3a^2 + 26a - 105 = 0$$

$$(3a + 35)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{35}{3} \text{ 또는 } a = 3$$

그런데 a 는 정수이므로 $a = 3$

05-2 [답 $x-2y-5=0$ 또는 $x-2y+5=0$]

직선 $x-2y-1=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이므로

로 구하는 직선의 방정식을 $y=\frac{1}{2}x+a$, 즉 $x-2y+2a=0$

이라 하자.

점 $(2, 1)$ 과 직선 $x-2y+2a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|1 \times 2 - 2 \times 1 + 2a|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}$$

$$|2a| = 5 \quad \therefore 2a = \pm 5$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$x-2y-5=0 \text{ 또는 } x-2y+5=0$$

05-3 [답 $\sqrt{13}$]

$(4+2k)x + (3-k)y - 18 - 4k = 0$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$(4x + 3y - 18) + k(2x - y - 4) = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$4x + 3y - 18 = 0, 2x - y - 4 = 0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x = 3, y = 2$$

즉, 점 P의 좌표는 $(3, 2)$ 이므로 점 P $(3, 2)$ 와 직선

$3x + 2y = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times 3 + 2 \times 2|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \sqrt{13}$$

06-1 [답 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$]

두 직선 사이의 거리는 직선 $2x+y-3=0$ 위의 한 점 $(0, 3)$ 과 직선 $2x+y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3+1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

06-2 [답 10]

두 직선 사이의 거리는 직선 $x+y+5=0$ 위의 한 점 $(-5, 0)$ 과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-5+k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2}$$

$$|k-5| = 6, k-5 = \pm 6$$

$$\therefore k = -1 \text{ 또는 } k = 11$$

따라서 모든 상수 k 의 값의 합은

$$-1 + 11 = 10$$

06-3 [답 $\frac{2\sqrt{5}}{15}$]

두 직선이 서로 평행하므로

$$\frac{2}{a} = \frac{-1}{3} \neq \frac{2}{-4} \quad \therefore a = -6$$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x-y+2=0$ 위의 한 점 $(0, 2)$ 과 직선 $-6x+3y-4=0$ 사이의 거리와 같으므로

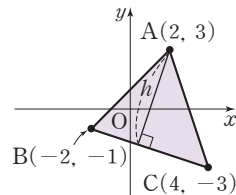
$$\frac{|3 \times 2 - 4|}{\sqrt{(-6)^2 + 3^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$$

07-1 [답 16]

$$\overline{BC} = \sqrt{(4+2)^2 + (-3+1)^2} = 2\sqrt{10}$$

직선 BC의 방정식은

$$y+1 = \frac{-3+1}{4+2}(x+2) \quad \therefore x+3y+5=0$$



점 A $(2, 3)$ 과 직선 $x+3y+5=0$ 사이의 거리를 h 라 하면

$$h = \frac{|2+3 \times 3+5|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{16}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times h$$

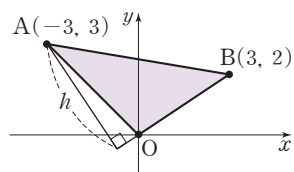
$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{10} \times \frac{16}{\sqrt{10}} = 16$$

07-2 [답 $\frac{15}{2}$]

$$\overline{OB} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

직선 OB의 방정식은

$$y = \frac{2}{3}x \quad \therefore 2x-3y=0$$



점 A(-3, 3)과 직선 $2x-3y=0$ 사이의 거리를 h 라 하면

$$h = \frac{|2 \times (-3) - 3 \times 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{15}{\sqrt{13}}$$

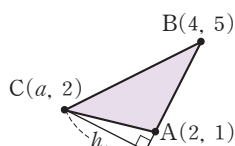
$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times h \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \frac{15}{\sqrt{13}} = \frac{15}{2} \end{aligned}$$

07-3 ㉮ 5

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-2)^2 + (5-1)^2} = 2\sqrt{5}$$

직선 AB의 방정식은

$$y-1 = \frac{5-1}{4-2}(x-2) \quad \therefore 2x-y-3=0$$



점 C(a, 2)와 직선 $2x-y-3=0$ 사이의 거리를 h 라 하면

$$h = \frac{|2a-2-3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2a-5|}{\sqrt{5}}$$

이때 $\triangle ABC$ 의 넓이가 9이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{|2a-5|}{\sqrt{5}} = 9$$

$$|2a-5|=9, 2a-5=\pm 9$$

$$\therefore a=7 \text{ 또는 } a=-2$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$7 + (-2) = 5$$

08-1 ㉮ $2x+2y+5=0$ 또는 $4x-4y-7=0$

P(x, y)라 하면

$$\frac{|3x-y-1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|x-3y-6|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}}$$

$$|3x-y-1| = |x-3y-6|$$

$$3x-y-1 = \pm(x-3y-6)$$

$$\therefore 2x+2y+5=0 \text{ 또는 } 4x-4y-7=0$$

08-2 ㉮ $3x-y=0$

두 직선 $x-2y+1=0$, $2x+y-1=0$ 이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 P(x, y)라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x-2y+1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|2x+y-1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$|x-2y+1| = |2x+y-1|$$

$$x-2y+1 = \pm(2x+y-1)$$

$$\therefore x+3y-2=0 \text{ 또는 } 3x-y=0$$

따라서 기울기가 양수인 직선의 방정식은

$$3x-y=0$$

연습문제

228~230쪽

- | | | | |
|------------------------------|---------------|----------|---------------------------------|
| 1 $y=-2x-8$ | 2 ② | 3 (2, 2) | 4 $-\frac{1}{3}$ |
| 5 5 | 6 ③ | 7 -20 | 8 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ |
| 9 ① | 10 -2 | 11 ③ | |
| 12 $3x-y+2=0$ 또는 $3x-y+22=0$ | 13 ⑤ | | |
| 14 -1 | 15 11 | 16 0 | 17 (4, 3) |
| 18 ④ | | | |
| 19 ① | 20 $3x+y-8=0$ | | |

- 두 점 $(-1, 2)$, $(3, -6)$ 을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{-6-2}{3-(-1)} = -2$
따라서 기울기가 -2 이고 점 $(-2, -4)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y-(-4) = -2\{x-(-2)\}$
 $\therefore y = -2x-8$
- $5x+2y+1=0$, $2x-y+4=0$ 을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=2$
즉, 두 직선의 교점의 좌표는 $(-1, 2)$ 이다.
직선 $x-3y+1=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ 의 기울기는 $\frac{1}{3}$ 이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 -3 이다.
따라서 기울기가 -3 이고 점 $(-1, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y-2 = -3\{x-(-1)\}$ $\therefore 3x+y+1=0$
따라서 $a=3$, $b=1$ 이므로 $a+b=4$
- 원점에서 직선 $x+y-4=0$ 에 내린 수선의 발이 H이므로 직선 $x+y-4=0$ 은 직선 OH와 수직이다.
이때 직선 $x+y-4=0$, 즉 $y=-x+4$ 의 기울기가 -1 이므로 직선 OH의 기울기는 1 이다.
기울기가 1 이고 원점을 지나는 직선의 방정식은 $y=x$
점 H는 두 직선 $y=x$, $x+y-4=0$ 의 교점이므로 두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=2$
따라서 점 H의 좌표는 $(2, 2)$ 이다.

4 두 직선 $x-ky+2=0$, $(k-1)x-2y+k=0$ 이

(i) 서로 평행하려면

$$\frac{1}{k-1} = \frac{-k}{-2} \neq \frac{2}{k}$$

$$\frac{1}{k-1} = \frac{-k}{-2} \text{에서 } k(k-1)=2$$

$$k^2-k-2=0, (k+1)(k-2)=0$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } k=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{-k}{-2} \neq \frac{2}{k} \text{에서 } k^2 \neq 4$$

$$\therefore k \neq \pm 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } k=-1$$

(ii) 서로 수직이라면

$$1 \times (k-1) - k \times (-2) = 0 \quad \therefore k = \frac{1}{3}$$

(i), (ii)에 의하여 $a=-1$, $b=\frac{1}{3}$ 이므로

$$ab = -\frac{1}{3}$$

5 두 직선 $x+ay+1=0$, $2x-by+1=0$ 이 서로 수직이므로

$$1 \times 2 + a \times (-b) = 0 \quad \therefore ab = 2$$

두 직선 $x+ay+1=0$, $x-(b-3)y-1=0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{1}{1} = \frac{a}{-(b-3)} \neq \frac{1}{-1}$$

$$-(b-3)=a \quad \therefore a+b=3$$

$$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab \\ = 3^2-2 \times 2 = 5$$

6 ㄱ. $a=0$ 일 때, $l: y=2$, $m: x=-2$ 이므로 두 직선 l 과 m 은 서로 수직이다.

ㄴ. 직선 l 의 방정식을 a 에 대하여 정리하면

$$a(x+1)-y+2=0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+1=0, -y+2=0$$

$$\therefore x=-1, y=2$$

따라서 직선 l 은 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(-1, 2)$ 를 지난다.

ㄷ. $a=0$ 일 때, ㄱ에 의하여 두 직선은 서로 수직이다.

$a \neq 0$ 일 때, 두 직선 l , m 의 기울기는 각각 a , $-\frac{4}{a}$

이때 $a = -\frac{4}{a}$, 즉 $a^2 = -4$ 를 만족시키는 실수 a 의 값은 존재하지 않으므로 두 직선 l 과 m 이 평행이 되기 위한 a 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

7 직선 AB의 기울기는

$$\frac{-9-15}{b-a} = \frac{24}{a-b}$$

$\overline{AB}$ 의 수직이등분선 $y=\frac{1}{2}x+1$ 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{24}{a-b} = -2 \quad \therefore a-b = -12 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

한편 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{15-9}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{a+b}{2}, 3\right)$$

이 점이 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$ 위에 있으므로

$$3 = \frac{1}{2} \times \frac{a+b}{2} + 1 \quad \therefore a+b = 8 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -2, b = 10$$

$$\therefore ab = -20$$

8 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 직선 AC는 $\overline{BD}$ 의 수직이등분선이다.

직선 BD의 기울기는

$$\frac{7-(-5)}{4-(-2)} = 2$$

이므로 직선 AC의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이다.

한편 $\overline{BD}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-5+7}{2}\right) \quad \therefore (1, 1)$$

따라서 두 점 A, C를 지나는 직선은 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이고

점 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$y-1 = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$9 \quad ax-y=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$x+y-2=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$2x-y-1=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

(i) 세 직선이 모두 평행할 때

두 직선 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉢}$ 의 기울기는 각각 -1 , 2 이므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 없다.

(ii) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때

두 직선 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 이 서로 평행하면

$$\frac{a}{1} = \frac{-1}{1} \neq \frac{0}{-2} \quad \therefore a = -1$$

두 직선 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉢}$ 이 서로 평행하면

$$\frac{a}{2} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{-1} \quad \therefore a = 2$$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때

㉔, ㉕을 연립하여 풀면

$$x=1, y=1$$

직선 ㉖이 점 (1, 1)을 지나야 하므로

$$a-1=0 \quad \therefore a=1$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 상수 a 의 값의 곱은

$$-1 \times 1 \times 2 = -2$$

- 10 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 4개의 영역으로 나누려면 오른쪽 그림과 같이 세 직선이 모두 평행해야 한다.



두 직선 $ax-y+3=0$, $3x+y+1=0$ 이 서로 평행하면

$$\frac{a}{3} = \frac{-1}{1} \neq \frac{3}{1}$$

$$\therefore a = -3$$

두 직선 $3x+by+4=0$, $3x+y+1=0$ 이 서로 평행하면

$$\frac{3}{3} = \frac{b}{1} \neq \frac{4}{1}$$

$$\therefore b=1$$

$$\therefore a+b=-2$$

- 11 두 점 $(-1, 5)$, $(3, -7)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-5 = \frac{-7-5}{3-(-1)}\{x-(-1)\}$$

$$\therefore 3x+y-2=0$$

따라서 점 $(5, -3)$ 과 직선 $3x+y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times 5 + 1 \times (-3) - 2|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \sqrt{10}$$

- 12 직선 $x+3y-5=0$, 즉 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ 의 기울기는 $-\frac{1}{3}$

이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=3x+a$, 즉

$$3x-y+a=0$$
이라 하자.

점 $(-2, 6)$ 과 직선 $3x-y+a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이

므로

$$\frac{|3 \times (-2) - 1 \times 6 + a|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}$$

$$|a-12|=10$$

$$a-12=\pm 10$$

$$\therefore a=2 \text{ 또는 } a=22$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$3x-y+2=0 \text{ 또는 } 3x-y+22=0$$

- 13 점 $(0, k)$ 에서 두 직선 $2x-y+1=0$, $x-2y-2=0$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|-k+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|-2k-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$$|1-k|=|2k+2|$$

$$1-k=\pm(2k+2)$$

$$\therefore k=-3 \text{ 또는 } k=-\frac{1}{3}$$

따라서 모든 k 의 값의 곱은

$$-3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1$$

- 14 두 직선 $x-2y-1=0$, $2x+ay+b=0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{1}{2} = \frac{-2}{a} \neq \frac{-1}{b} \quad \therefore a=-4$$

두 직선 사이의 거리는 직선 $x-2y-1=0$ 위의 한 점 $(1, 0)$ 과 직선 $2x-4y+b=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2 \times 1 + b|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$|b+2|=5, b+2=\pm 5$$

$$\therefore b=3 (\because b>0)$$

$$\therefore a+b=-1$$

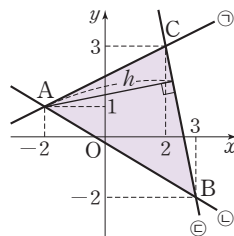
- 15 $x-2y+4=0$ ㉔

$$3x+5y+1=0 \quad \text{..... ㉕}$$

$$5x+y-13=0 \quad \text{..... ㉖}$$

두 직선 ㉔과 ㉕, ㉕과 ㉖, ㉖과 ㉔의 교점을 각각 A, B, C라 하면

$$A(-2, 1), B(3, -2), C(2, 3)$$



선분 BC의 길이는

$$BC = \sqrt{(2-3)^2 + \{3-(-2)\}^2} = \sqrt{26}$$

점 A $(-2, 1)$ 과 직선 ㉖ 사이의 거리를 h 라 하면

$$h = \frac{|5 \times (-2) + 1 \times 1 - 13|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{22}{\sqrt{26}}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times h$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{26} \times \frac{22}{\sqrt{26}}$$

$$= 11$$

- 16 주어진 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점 $(a, -1)$ 에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로
- $$\frac{|3a+4+8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|4a-3+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}$$
- $$|3a+12| = |4a+9|$$
- $$3a+12 = \pm(4a+9)$$
- $$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 3$$
- 따라서 모든 a 의 값의 합은
- $$-3+3=0$$

- 17 직선 BC의 기울기는

$$\frac{2-0}{7-1} = \frac{1}{3}$$

이므로 점 A에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 D라 하면 직선 AD의 기울기는 -3 이다.

이때 직선 AD의 방정식은

$$y-6 = -3(x-3)$$

$$\therefore y = -3x + 15 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 AC의 기울기는

$$\frac{2-6}{7-3} = -1$$

이므로 점 B에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선의 발을 E라 하면 직선 BE의 기울기는 1이다.

이때 직선 BE의 방정식은

$$y = x - 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$x = 4, y = 3$$

따라서 구하는 세 수선의 교점의 좌표는 $(4, 3)$ 이다.

- 18 $x-y-3+k(x+y)=0$ 에서

$$(k+1)x + (k-1)y - 3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원점과 직선 ① 사이의 거리 $f(k)$ 는

$$f(k) = \frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2 + (k-1)^2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2(k^2+1)}}$$

$f(k)$ 의 분모가 최소일 때 $f(k)$ 의 값은 최대가 된다.

$\sqrt{2(k^2+1)}$ 에서 $k^2 \geq 0$ 이므로 $k=0$ 일 때 분모는 최솟값 $\sqrt{2}$ 를 갖는다.

따라서 $f(k)$ 의 최댓값은

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

- 19 세 점 $O(0, 0)$, $A(8, 4)$, $B(7, a)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{0+8+7}{3}, \frac{0+4+a}{3}\right) \quad \therefore \left(5, \frac{4+a}{3}\right)$$

$G(5, b)$ 이므로

$$b = \frac{4+a}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 직선 OA의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x \quad \therefore x - 2y = 0$$

점 $G(5, b)$ 와 직선 $x - 2y = 0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|5-2b|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \sqrt{5}, |5-2b| = 5$$

$$5-2b = \pm 5 \quad \therefore b = 0 \text{ 또는 } b = 5$$

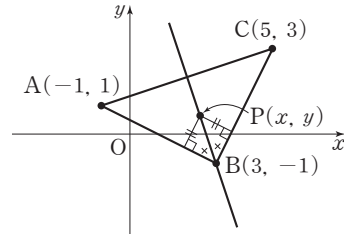
이를 ①에 대입하여 풀면

$$a = -4, b = 0 \text{ 또는 } a = 11, b = 5$$

그런데 $a > 0$ 이므로

$$a = 11, b = 5 \quad \therefore a + b = 16$$

- 20 삼각형의 내심은 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이므로 점 B와 $\triangle ABC$ 의 내심을 지나는 직선은 다음 그림과 같이 $\angle B$ 의 이등분선과 같다.



직선 AB의 방정식은

$$y-1 = \frac{-1-1}{3-(-1)}\{x-(-1)\}$$

$$\therefore x+2y-1=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 BC의 방정식은

$$y-(-1) = \frac{3-(-1)}{5-3}(x-3)$$

$$\therefore 2x-y-7=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 두 직선 ①, ②이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|2x-y-7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$|x+2y-1| = |2x-y-7|$$

$$x+2y-1 = \pm(2x-y-7)$$

$$\therefore x-3y-6=0 \text{ 또는 } 3x+y-8=0$$

그런데 $\angle B$ 의 이등분선의 y 절편은 양수이어야 하므로 구하는 직선의 방정식은 $3x+y-8=0$

III-3 01 원의 방정식

1 원의 방정식(1)

개념 CHECK

232쪽

- 1 답 (1) (0, 0), $2\sqrt{3}$ (2) (1, -4), 4
(3) (0, 1), 3 (4) (-3, 0), 5
2 답 (1) $x^2 + y^2 = 4$ (2) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$

문제

233~234쪽

- 01-1 답 (1) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 18$
(2) $(x+1)^2 + y^2 = 4$
(1) 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은
 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = r^2$
이 원이 점 (1, 6)을 지나므로
 $(1+2)^2 + (6-3)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 18$
따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 18$
(2) 원의 중심은 $\overline{AB}$ 의 중점과 같으므로 원의 중심의 좌표는
 $(\frac{-3+1}{2}, \frac{0+0}{2}) \quad \therefore (-1, 0)$
또 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 와 같으므로
 $\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(1+3)^2} = 2$
따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x+1)^2 + y^2 = 4$

- 01-2 답 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$
원의 중심의 좌표는 (3, 1)이고, 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은
 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = r^2$
이 원이 점 (0, -3)을 지나므로
 $(0-3)^2 + (-3-1)^2 = r^2 \quad \therefore r^2 = 25$
따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$

01-3 답 2

원의 중심은 $\overline{AB}$ 의 중점과 같으므로 원의 중심의 좌표는
 $(\frac{-1+1}{2}, \frac{-3+1}{2}) \quad \therefore (0, -1)$
또 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{AB}$ 와 같으므로
 $\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{(1+1)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{5}$

따라서 두 점 A, B를 양 끝 점으로 하는 원의 방정식은
 $x^2 + (y+1)^2 = 5$
이 원이 점 (k, 0)을 지나므로
 $k^2 + 1 = 5, k^2 = 4 \quad \therefore k = 2 (\because k > 0)$

02-1 답 (1) $(x+1)^2 + y^2 = 16$ (2) $x^2 + (y-2)^2 = 13$

- (1) 원의 중심이 x 축 위에 있으므로 중심의 좌표를
(a, 0), 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은
 $(x-a)^2 + y^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
원 $\textcircled{1}$ 이 점 (-1, 4)를 지나므로
 $(-1-a)^2 + 4^2 = r^2$
 $\therefore a^2 + 2a + 17 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
원 $\textcircled{1}$ 이 점 (3, 0)을 지나므로
 $(3-a)^2 = r^2$
 $\therefore a^2 - 6a + 9 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$
 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면 $a = -1, r^2 = 16$
따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x+1)^2 + y^2 = 16$
(2) 원의 중심이 y 축 위에 있으므로 중심의 좌표를
(0, a), 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은
 $x^2 + (y-a)^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{4}$
원 $\textcircled{4}$ 이 점 (2, -1)을 지나므로
 $2^2 + (-1-a)^2 = r^2$
 $\therefore a^2 + 2a + 5 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{5}$
원 $\textcircled{4}$ 이 점 (3, 4)를 지나므로
 $3^2 + (4-a)^2 = r^2$
 $\therefore a^2 - 8a + 25 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{6}$
 $\textcircled{5}, \textcircled{6}$ 을 연립하여 풀면 $a = 2, r^2 = 13$
따라서 구하는 원의 방정식은
 $x^2 + (y-2)^2 = 13$

다른 풀이

- (1) 원의 중심의 좌표를 (a, 0)이라 하면 이 점과 두 점
(-1, 4), (3, 0) 사이의 거리가 서로 같으므로
 $\sqrt{(-1-a)^2 + 4^2} = \sqrt{(3-a)^2}$
양변을 제곱하여 풀면 $a = -1$
즉, 원의 중심의 좌표는 (-1, 0)
원의 반지름의 길이는 두 점 (-1, 0), (-1, 4) 사이의
거리와 같으므로 4이다.
따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x+1)^2 + y^2 = 16$
(2) 원의 중심의 좌표를 (0, a)라 하면 이 점과 두 점
(2, -1), (3, 4) 사이의 거리가 서로 같으므로
 $\sqrt{2^2 + (-1-a)^2} = \sqrt{3^2 + (4-a)^2}$
양변을 제곱하여 풀면 $a = 2$

즉, 원의 중심의 좌표는 (0, 2)

원의 반지름의 길이는 두 점 (0, 2), (2, -1) 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{2^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{13}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + (y-2)^2 = 13$$

02-2 $\textcircled{\text{답}} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

원의 중심이 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로 중심의 좌표를

$(a, a+2)$, 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-a-2)^2 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$$

원 $\textcircled{\text{㉠}}$ 이 점 $(-3, 2)$ 를 지나므로

$$(-3-a)^2 + (-a)^2 = r^2$$

$$\therefore 2a^2 + 6a + 9 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$$

원 $\textcircled{\text{㉠}}$ 이 점 $(1, 6)$ 을 지나므로

$$(1-a)^2 + (4-a)^2 = r^2$$

$$\therefore 2a^2 - 10a + 17 = r^2 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉢}}$$

$\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$ 을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{2}, r^2 = \frac{25}{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

2 좌표축에 접하는 원의 방정식

개념 CHECK

235쪽

1 $\textcircled{\text{답}} (1) (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$

(2) $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 4$

(3) $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$

2 $\textcircled{\text{답}} (1) (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

(2) $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 25$

(3) $(x+4)^2 + (y+4)^2 = 16$

문제

236~237쪽

03-1 $\textcircled{\text{답}} (1) (x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$

(2) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ 또는

$(x-10)^2 + (y-7)^2 = 100$

(1) 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라 하면 반지름의 길이는

$|b|$ 이므로 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$$

원 $\textcircled{\text{㉠}}$ 이 점 $(-2, -3)$ 을 지나므로

$$(-2-a)^2 + (-3-b)^2 = b^2$$

$$\therefore a^2 + 4a + 6b + 13 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$$

원 $\textcircled{\text{㉠}}$ 이 점 $(4, -3)$ 을 지나므로

$$(4-a)^2 + (-3-b)^2 = b^2$$

$$\therefore a^2 - 8a + 6b + 25 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉢}}$$

$\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=-3$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$$

(2) 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라 하면 반지름의 길이는

$|a|$ 이므로 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$$

원 $\textcircled{\text{㉠}}$ 이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$(2-a)^2 + (1-b)^2 = a^2, b^2 - 2b - 4a + 5 = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{4}(b^2 - 2b + 5) \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$$

원 $\textcircled{\text{㉠}}$ 이 점 $(4, -1)$ 을 지나므로

$$(4-a)^2 + (-1-b)^2 = a^2$$

$$\therefore b^2 + 2b - 8a + 17 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉢}}$$

$\textcircled{\text{㉡}}$ 을 $\textcircled{\text{㉢}}$ 에 대입하면

$$b^2 + 2b - 8 \times \frac{1}{4}(b^2 - 2b + 5) + 17 = 0$$

$$b^2 - 6b - 7 = 0, (b+1)(b-7) = 0$$

$$\therefore b = -1 \text{ 또는 } b = 7$$

이를 $\textcircled{\text{㉡}}$ 에 대입하면

$$b = -1 \text{ 일 때 } a = 2, b = 7 \text{ 일 때 } a = 10$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4 \text{ 또는 } (x-10)^2 + (y-7)^2 = 100$$

03-2 $\textcircled{\text{답}} (x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$ 또는

$$(x-12)^2 + (y-10)^2 = 100$$

원의 중심이 직선 $y=x-2$ 위에 있으므로 중심의 좌표를

$(a, a-2)$ 라 하면 반지름의 길이는 $|a-2|$ 이다.

즉, 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-a+2)^2 = (a-2)^2$$

이 원이 점 $(4, 4)$ 를 지나므로

$$(4-a)^2 + (6-a)^2 = (a-2)^2, a^2 - 16a + 48 = 0$$

$$(a-4)(a-12) = 0 \quad \therefore a = 4 \text{ 또는 } a = 12$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4 \text{ 또는 } (x-12)^2 + (y-10)^2 = 100$$

03-3 $\textcircled{\text{답}} 6$

원의 중심이 직선 $y=-x+1$ 위에 있으므로 중심의 좌표

를 $(a, -a+1)$ 이라 하면 반지름의 길이는 $|a|$ 이다.

즉, 원의 방정식은 $(x-a)^2 + (y+a-1)^2 = a^2$

이 원이 점 $(1, -1)$ 을 지나므로

$$(1-a)^2 + (a-2)^2 = a^2, \quad a^2 - 6a + 5 = 0$$

$$(a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a=1 \text{ 또는 } a=5$$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은

$$1+5=6$$

04-1 답 8

점 $(2, -2)$ 를 지나고 x 축과 y 축에 동시에 접하는 두 원의 중심이 제4사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r 라 하면 중심의 좌표는 $(r, -r)$ 이다.

즉, 원의 방정식은 $(x-r)^2 + (y+r)^2 = r^2$

이 원이 점 $(2, -2)$ 를 지나므로

$$(2-r)^2 + (-2+r)^2 = r^2$$

$$r^2 - 8r + 8 = 0 \quad \therefore r = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 각각

$$(4+2\sqrt{2}, -4-2\sqrt{2}), (4-2\sqrt{2}, -4+2\sqrt{2})$$

이므로 중심 사이의 거리는

$$\begin{aligned} & \sqrt{\{4-2\sqrt{2}-(4+2\sqrt{2})\}^2 + \{-4+2\sqrt{2}-(-4-2\sqrt{2})\}^2} \\ &= \sqrt{(-4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2} = 8 \end{aligned}$$

04-2 답 $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$

원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심의 좌표는 $(-r, r)$ 이다.

즉, 원의 방정식은 $(x+r)^2 + (y-r)^2 = r^2$

이때 원의 중심 $(-r, r)$ 가 직선 $x-2y+6=0$ 위에 있으므로

$$-r-2r+6=0 \quad \therefore r=2$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$$

3 원의 방정식(2)

개념 CHECK

239쪽

1 답 (1) $(-2, 3)$, 2 (1, -2), 3

2 답 $3x+4y-7=0$

문제

240~243쪽

05-1 답 8

$x^2+y^2+6x-4y+a=0$ 을 변형하면

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 13-a$$

이 원의 중심의 좌표가 $(-3, 2)$ 이므로

$$b=-3, c=2$$

한편 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{13-a}$ 이므로

$$\sqrt{13-a}=2, \quad 13-a=4 \quad \therefore a=9$$

$$\therefore a+b+c=8$$

05-2 답 2

$x^2+y^2-2kx+2y+3k^2-5k-2=0$ 을 변형하면

$$(x-k)^2 + (y+1)^2 = -2k^2+5k+3$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$-2k^2+5k+3 > 0, \quad 2k^2-5k-3 < 0$$

$$(2k+1)(k-3) < 0 \quad \therefore -\frac{1}{2} < k < 3$$

따라서 자연수 k 는 1, 2의 2개이다.

05-3 답 2

$x^2+y^2+2ax-6ay+10a-25=0$ 을 변형하면

$$(x+a)^2 + (y-3a)^2 = 10a^2-10a+25$$

이 방정식이 넓이가 45π 인 원을 나타내려면

$$10a^2-10a+25=45, \quad a^2-a-2=0$$

$$(a+1)(a-2)=0 \quad \therefore a=2 \quad (\because a>0)$$

06-1 답 $x^2+y^2-2x-6y=0$

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 으로 놓으면 이 원이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로 $C=0$

$$\therefore x^2+y^2+Ax+By=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원 $\textcircled{1}$ 이 점 $(2, 6)$ 을 지나므로

$$40+2A+6B=0 \quad \therefore A+3B=-20 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

원 $\textcircled{1}$ 이 점 $(4, 2)$ 를 지나므로

$$20+4A+2B=0 \quad \therefore 2A+B=-10 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면 $A=-2, B=-6$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-2x-6y=0$$

다른 풀이

주어진 세 점을 A(0, 0), B(2, 6), C(4, 2)라 하고 원의 중심을 P(a, b)라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$$

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$a^2+b^2=(a-2)^2+(b-6)^2$$

$$4a+12b=40 \quad \therefore a+3b=10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overline{AP} = \overline{CP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{CP}^2$ 이므로

$$a^2+b^2=(a-4)^2+(b-2)^2$$

$$8a+4b=20 \quad \therefore 2a+b=5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=3$

즉, 원의 중심은 P(1, 3)이므로 반지름의 길이는

$$\overline{AP} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10$$

06-2 [답] 25π

원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$a^2 + (b+4)^2 = (a+1)^2 + (b-3)^2$$

$$-2a + 14b = -6$$

$$\therefore a - 7b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\overline{AP} = \overline{CP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{CP}^2 \text{이므로}$$

$$a^2 + (b+4)^2 = (a+2)^2 + b^2$$

$$-4a + 8b = -12$$

$$\therefore a - 2b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = 3, b = 0$$

즉, 원의 중심은 $P(3, 0)$ 이므로 반지름의 길이는

$$\overline{AP} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times 5^2 = 25\pi$$

07-1 [답] $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 + k(x^2 + y^2 - 18x - 8y + 6) = 0$$

(단, $k \neq -1$)

$\dots\dots \textcircled{㉠}$

이 원이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$-6 + 6k = 0 \quad \therefore k = 1$$

이를 ①에 대입하면

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 + (x^2 + y^2 - 18x - 8y + 6) = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$$

07-2 [답] $\sqrt{14}$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \text{에서}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 8 \text{에서}$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 6 = 0$$

이때 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 - (x^2 + y^2 + 2x + 2y - 6) = 0$$

$$\therefore x + y - 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

두 원의 교점을 각각 A, B라

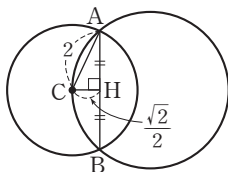
하고, 원

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \text{의 중}$$

심 $C(1, 1)$ 에서 직선 ①에 내

린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH} = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$\overline{CH}$ 는 $\overline{AB}$ 를 수직이등분하므로 $\triangle ACH$ 는 직각삼각형이다.

이때 $\overline{AC} = 2$ 이므로

$$\overline{AH} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

따라서 두 원의 공통인 현의 길이는

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = \sqrt{14}$$

08-1 [답] $x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1 \text{이므로}$$

$$2\overline{BP} = \overline{AP} \quad \therefore 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$

따라서 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$$4\{(x-4)^2 + y^2\} = (x-1)^2 + y^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$$

[다른 풀이] 아폴로니오스의 원 이용

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 C, 외분하는 점을 D라 하면

$$C(3, 0), D(7, 0)$$

점 P가 나타내는 도형은 두 점 C, D를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이므로 중심의 좌표는 $(5, 0)$ 이다.

또 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

따라서 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$$(x-5)^2 + y^2 = 4$$

08-2 [답] 15

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2 \text{이므로}$$

$$3\overline{BP} = 2\overline{AP} \quad \therefore 9\overline{BP}^2 = 4\overline{AP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$$9\{(x-3)^2 + y^2\} = 4\{(x+2)^2 + y^2\}$$

$$x^2 + y^2 - 14x + 13 = 0$$

$$\therefore (x-7)^2 + y^2 = 36$$

즉, 점 P는 중심의 좌표가

$(7, 0)$ 이고 반지름의 길이

가 6인 원 위를 움직이므로

오른쪽 그림과 같이

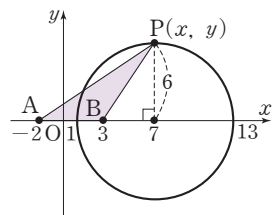
$\triangle PAB$ 의 넓이는 높이가

원의 반지름의 길이와 같을

때 최대이다.

따라서 $\triangle PAB$ 의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$$



연습문제

244~246쪽

- 1 ③ 2 ② 3 $(x-1)^2+(y-2)^2=18$
 4 ㄱ, ㄴ, ㄷ 5 ⑤ 6 -6 7 12
 8 ④ 9 4 10 ② 11 5 12 ②
 13 -1 14 ③ 15 $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ 16 ③ 17 ⑤
 18 $(x-7)^2+(y-6)^2=85$ 19 ① 20 ①

- 1 $x^2+y^2-6x=0$ 을 변형하면
 $(x-3)^2+y^2=9$
 구하는 원의 중심의 좌표는 (3, 0)이고, 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은
 $(x-3)^2+y^2=r^2$
 이 원이 점 (1, 2)를 지나므로
 $(1-3)^2+2^2=r^2 \quad \therefore r^2=8$
 따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x-3)^2+y^2=8$
- 2 선분 AB를 3 : 2로 외분하는 점 C의 좌표는
 $\left(\frac{3 \times 2 - 2 \times 1}{3-2}, \frac{3 \times 1 - 2 \times 3}{3-2}\right)$
 $\therefore (4, -3)$
 이때 점 (a, b) 는 $\overline{BC}$ 의 중점이므로
 $a = \frac{2+4}{2} = 3, b = \frac{1-3}{2} = -1$
 $\therefore a+b=2$
- 3 $x^2+y^2+4x-10y+28=0$ 을 변형하면
 $(x+2)^2+(y-5)^2=1$
 이 원의 중심의 좌표는 (-2, 5)이므로 구하는 원은 두 점 (-2, 5), (4, -1)을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.
 구하는 원의 중심은 두 점 (-2, 5), (4, -1)을 이은 선분의 중점과 같으므로 원의 중심의 좌표는
 $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{5-1}{2}\right)$
 $\therefore (1, 2)$
 원의 반지름의 길이는 두 점 (1, 2), (4, -1) 사이의 거리와 같으므로
 $\sqrt{(4-1)^2+(-1-2)^2}=3\sqrt{2}$
 따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x-1)^2+(y-2)^2=18$
- 4 원의 중심이 x 축 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은
 $(x-a)^2+y^2=r^2 \quad \dots\dots \textcircled{A}$

원 $\textcircled{A}$ 이 점 (0, 1)을 지나므로

$$(-a)^2+1^2=r^2$$

$$\therefore a^2+1=r^2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

원 $\textcircled{A}$ 이 점 (2, -1)을 지나므로

$$(2-a)^2+(-1)^2=r^2$$

$$\therefore a^2-4a+5=r^2 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$\textcircled{B}, \textcircled{C}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, r^2=2$

따라서 원의 방정식은 $(x-1)^2+y^2=2$

ㄱ. 중심의 좌표는 (1, 0)이다.

ㄴ. $(2-1)^2+1^2=2$ 이므로 점 (2, 1)을 지난다.

ㄷ. 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이므로 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{2})^2 = 2\pi$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

- 5 원의 중심이 직선 $y=x+3$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, a+3)$ 이라 하면 반지름의 길이는 $|a+3|$ 이다.

즉, 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(y-a-3)^2=(a+3)^2$$

이 원이 점 (1, 2)를 지나므로

$$(1-a)^2+(-a-1)^2=(a+3)^2, a^2-6a-7=0$$

$$(a+1)(a-7)=0 \quad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=7$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 각각 (-1, 2), (7, 10)이므로 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(7+1)^2+(10-2)^2}=8\sqrt{2}$$

- 6 $x^2+y^2+8x+kx+9=0$ 을 변형하면

$$(x+4)^2+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}+7$$

이 원의 반지름의 길이는 $|-4|=4$ 이므로

$$\sqrt{\frac{k^2}{4}+7}=4, \frac{k^2}{4}+7=16$$

$$k^2=36 \quad \therefore k=\pm 6$$

그런데 원의 중심이 제2사분면 위에 있으므로

$$-\frac{k}{2}>0 \quad \therefore k<0$$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 k 의 값은 -6이다.

- 7 주어진 조건을 만족시키는 두 원의 중심이 제3사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r 라 하면 중심의 좌표는 $(-r, -r)$ 이다.

즉, 원의 방정식은 $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$

이 원이 점 (-3, -3)을 지나므로

$$(-3+r)^2+(-3+r)^2=r^2 \quad \therefore r^2-12r+18=0$$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 두 원의 반지름의 길이의 합은 12이다.

- 8 $x^2+y^2+2kx-4y+2k^2=0$ 을 변형하면
 $(x+k)^2+(y-2)^2=-k^2+4$
 이 방정식이 원을 나타내려면
 $-k^2+4>0, k^2-4<0$
 $(k+2)(k-2)<0 \quad \therefore -2<k<2$
 따라서 정수 k 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다.
- 9 방정식 $x^2+y^2+axy-2x-4y+b=0$ 이 원을 나타내려면 xy 항이 없어야 하므로 $a=0$
 $\therefore x^2+y^2-2x-4y+b=0$
 이 방정식을 변형하면
 $(x-1)^2+(y-2)^2=5-b$
 이때 반지름의 길이가 1이어야 하므로
 $\sqrt{5-b}=1, 5-b=1 \quad \therefore b=4$
 $\therefore a+b=4$
- 10 $x^2+y^2+2(m-1)x-2my+3m^2-2=0$ 을 변형하면
 $(x+m-1)^2+(y-m)^2=-m^2-2m+3$
 이 방정식이 나타내는 도형이 원이므로
 $-m^2-2m+3>0, m^2+2m-3<0$
 $(m+3)(m-1)<0 \quad \therefore -3<m<1$
 이때 이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{-m^2-2m+3}$ 이므로 원의 넓이를 S 라 하면
 $S=\pi(-m^2-2m+3)=\pi\{-(m+1)^2+4\}$
 따라서 $m=-1$ 일 때, S 의 값이 4π 로 최대이므로 구하는 상수 m 의 값은 -1 이다.
- 11 원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면
 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$
 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로
 $(a+2)^2+(b-3)^2=(a+1)^2+b^2$
 $2a-6b=-12 \quad \therefore a-3b=-6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\overline{BP}=\overline{CP}$ 에서 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$ 이므로
 $(a+1)^2+b^2=a^2+(b+1)^2$
 $2a-2b=0 \quad \therefore a=b$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $a=3, b=3$
 즉, 원의 중심은 $P(3, 3)$ 이므로 반지름의 길이는
 $\overline{AP}=|3+2|=5$
- 12 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 으로 놓으면 이 원이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로
 $C=0$
 $\therefore x^2+y^2+Ax+By=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

원 $\textcircled{1}$ 이 점 $(-6, -2)$ 를 지나므로

$$40-6A-2B=0$$

$$\therefore 3A+B=20 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

원 $\textcircled{1}$ 이 점 $(-2, 6)$ 을 지나므로

$$40-2A+6B=0$$

$$\therefore A-3B=20 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면

$$A=8, B=-4$$

즉, 원의 방정식은

$$x^2+y^2+8x-4y=0$$

이 원이 점 $(-8, k)$ 를 지나므로

$$64+k^2-64-4k=0$$

$$k^2-4k=0, k(k-4)=0$$

$$\therefore k=4 (\because k>0)$$

13 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2+y^2-4x-2+k(x^2+y^2-ay-1)=0 \quad (\text{단, } k \neq -1)$$

$\dots\dots \textcircled{1}$

이 원이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$-2-k=0$$

$$\therefore k=-2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$x^2+y^2-4x-2-2(x^2+y^2-ay-1)=0$$

$$x^2+y^2+4x-2ay=0$$

$$\therefore (x+2)^2+(y-a)^2=a^2+4$$

이 방정식이 넓이가 5π 인 원을 나타내려면

$$a^2+4=5, a^2=1$$

$$\therefore a=\pm 1$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 곱은 -1 이다.

14 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2+ax+2y-1-(x^2+y^2-2x+ay-13)=0$$

$$\therefore (a+2)x+(2-a)y+12=0$$

이 직선이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$4(2-a)+12=0 \quad \therefore a=5$$

15 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2+y^2-2y-(x^2+y^2-6x)=0$$

$$\therefore 3x-y=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

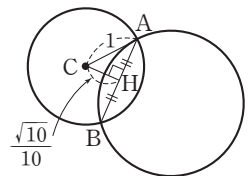
원 $x^2+y^2-2y=0$, 즉

$$x^2+(y-1)^2=1 \text{의 중심}$$

$C(0, 1)$ 에서 직선 $\textcircled{1}$ 에 내린

수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{CH}=\frac{|-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$



$\triangle ACH$ 는 직각삼각형이고 $\overline{AC}=1$ 이므로

$$\overline{AH} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

16 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

$$2\overline{BP} = \overline{AP} \quad \therefore 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$$4\{(x-6)^2 + (y+4)^2\} = x^2 + (y-2)^2$$

$$x^2 + y^2 - 16x + 12y + 68 = 0$$

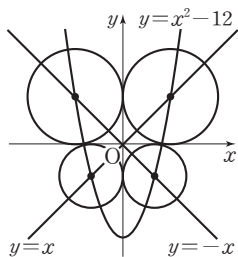
$$\therefore (x-8)^2 + (y+6)^2 = 32$$

이 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ 이므로 구하는 둘레의 길이는

$$2\pi \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}\pi$$

17 x 축과 y 축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.

따라서 주어진 원의 중심은 곡선 $y=x^2-12$ 와 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 의 교점이다.



(i) $x^2 - 12 = x$ 일 때

$$x^2 - x - 12 = 0, (x+3)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 4$$

(ii) $x^2 - 12 = -x$ 일 때

$$x^2 + x - 12 = 0, (x+4)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 3$$

(i), (ii)에 의하여 네 원의 반지름의 길이는 각각 3, 3, 4, 4
이므로 네 원의 넓이의 합은

$$\pi \times 3^2 + \pi \times 3^2 + \pi \times 4^2 + \pi \times 4^2 = 50\pi$$

18 $2x + y = 0$ ㉠

$$3x + 5y = 0 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$x + y - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 A, 두 직선 ㉡, ㉢의 교점을 B,
두 직선 ㉢, ㉠의 교점을 C라 하면

$$A(0, 0), B(5, -3), C(-2, 4)$$

이때 외접원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$a^2 + b^2 = (a-5)^2 + (b+3)^2$$

$$10a - 6b = 34$$

$$\therefore 5a - 3b = 17 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$\overline{AP} = \overline{CP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{CP}^2 \text{이므로}$$

$$a^2 + b^2 = (a+2)^2 + (b-4)^2$$

$$-4a + 8b = 20$$

$$\therefore a - 2b = -5 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\textcircled{B}, \textcircled{C} \text{을 연립하여 풀면 } a=7, b=6$$

즉, 외접원의 중심은 $P(7, 6)$ 이므로 반지름의 길이는

$$\overline{AP} = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{85}$$

따라서 구하는 외접원의 방정식은

$$(x-7)^2 + (y-6)^2 = 85$$

19 원 $x^2 + y^2 + 2ax + 2y - 6 = 0$ 이 원

$x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 의 둘레의 길이를 이등분하므로
두 원의 공통인 현은 원 $x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0$ 의 중심
을 지난다.

주어진 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2y - 6 - (x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2) = 0$$

$$\therefore (a-1)x + (a+1)y - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2ay - 2 = 0 \text{을 변형하면}$$

$$(x+1)^2 + (y-a)^2 = 3 + a^2$$

따라서 직선 ㉠은 점 $(-1, a)$ 를 지나므로

$$-(a-1) + a(a+1) - 2 = 0$$

$$a^2 = 1 \quad \therefore a = 1 (\because a > 0)$$

20 $\overline{OP} : \overline{AP} = 2 : 1$ 이므로

$$2\overline{AP} = \overline{OP} \quad \therefore 4\overline{AP}^2 = \overline{OP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$$4\{(x-3)^2 + y^2\} = x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$$

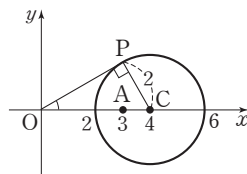
$$\therefore (x-4)^2 + y^2 = 4$$

따라서 점 P는 중심의 좌표가 $(4, 0)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 움직인다.

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OP}$ 가
원에 접할 때, $\angle POA$ 의 크
기는 최대가 된다.

이때 원의 중심을 C라 하면
 $\triangle OCP$ 가 직각삼각형이므로

$$\overline{OP} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$



III-3 02 원과 직선의 위치 관계

1 원과 직선의 위치 관계

개념 CHECK

247쪽

- 1 답 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 한 점에서 만난다.(접한다.)
(3) 만나지 않는다.

문제

248~251쪽

- 01-1 답 (1) $-5 < k < 5$ (2) $k = \pm 5$

(3) $k < -5$ 또는 $k > 5$

$y = 2x + k$ 를 $x^2 + y^2 = 5$ 에 대입하면

$$x^2 + (2x + k)^2 = 5 \quad \therefore 5x^2 + 4kx + k^2 - 5 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 5(k^2 - 5) = -(k+5)(k-5)$$

- (1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$-(k+5)(k-5) > 0$$

$$\therefore -5 < k < 5$$

- (2) 한 점에서 만나려면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$-(k+5)(k-5) = 0$$

$$\therefore k = \pm 5$$

- (3) 만나지 않으려면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$-(k+5)(k-5) < 0$$

$$\therefore k < -5 \text{ 또는 } k > 5$$

다른 풀이

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y = 2x + k$, 즉 $2x - y + k = 0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$$

또 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 $r = \sqrt{5}$

- (1) 서로 다른 두 점에서 만나려면 $d < r$ 이어야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5}, |k| < 5$$

$$\therefore -5 < k < 5$$

- (2) 한 점에서 만나려면 $d = r$ 이어야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}, |k| = 5$$

$$\therefore k = \pm 5$$

- (3) 만나지 않으려면 $d > r$ 이어야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{5}} > \sqrt{5}, |k| > 5$$

$$\therefore k < -5 \text{ 또는 } k > 5$$

- 01-2 답 $k \leq -\frac{4}{3}$ 또는 $k \geq \frac{4}{3}$

$y = kx + 5$ 를 $x^2 + y^2 = 9$ 에 대입하면

$$x^2 + (kx + 5)^2 = 9 \quad \therefore (k^2 + 1)x^2 + 10kx + 16 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (5k)^2 - 16(k^2 + 1) = (3k + 4)(3k - 4)$$

원과 직선이 만나려면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$(3k + 4)(3k - 4) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -\frac{4}{3} \text{ 또는 } k \geq \frac{4}{3}$$

- 02-1 답 $\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 각각 A, B라 하고 원의 중심 O에서 직선 $y = x + 7$ 에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{OH}$ 의 길이는 점 $O(0, 0)$ 과

직선 $y = x + 7$, 즉

$x - y + 7 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

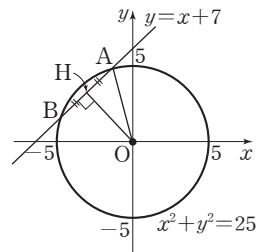
$$\overline{OH} = \frac{|7|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$\triangle OAH$ 는 직각삼각형이고 $\overline{OA} = 5$ 이므로

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 현의 길이는

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = \sqrt{2}$$



- 02-2 답 $3\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 각각 A, B라 하고, 원의 중심 $C(1, 1)$ 에서 직선 $x - y + k = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$$

$\triangle CAH$ 는 직각삼각형이고 $\overline{CA} = 5$ 이므로

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

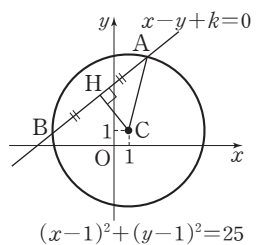
또 $\overline{CH}$ 의 길이는 원의 중심 $C(1, 1)$ 과 직선 $x - y + k = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{CH} = \frac{|1 - 1 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 에서

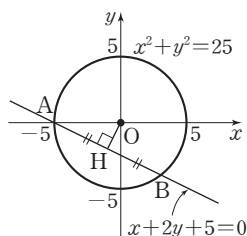
$$3 = \frac{|k|}{\sqrt{2}}, |k| = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore k = 3\sqrt{2} (\because k > 0)$$



02-3 답 20π

오른쪽 그림과 같이 원과 직선의 두 교점을 각각 A, B라 하면 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 원이다.



원의 중심 O(0, 0)에서 직선 $x + 2y + 5 = 0$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{OH} = \frac{|5|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

$\triangle OAH$ 는 직각삼각형이고 $\overline{OA} = 5$ 이므로

$$\overline{AH} = \sqrt{5^2 - (\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{5}$$

따라서 넓이가 최소인 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$ 이므로 구하는 넓이는

$$\pi \times (2\sqrt{5})^2 = 20\pi$$

03-1 답 $\sqrt{21}$

$x^2 + y^2 + 4x = 0$ 을 변형하면

$$(x+2)^2 + y^2 = 4$$

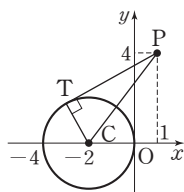
오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면 C(-2, 0)이므로

$$\overline{CP} = \sqrt{(1+2)^2 + 4^2} = 5$$

이때 $\triangle CPT$ 는 직각삼각형이고

$$\overline{CT} = 2$$

$$\overline{PT} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CT}^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$



03-2 답 1

$x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$ 을 변형하면

$$x^2 + (y+3)^2 = 4$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면 C(0, -3)이므로

$$\overline{CP} = \sqrt{(-2)^2 + (a+3)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + 6a + 13} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

접점을 Q라 하면 $\triangle CQP$ 는 직각삼각형이고 $\overline{CQ} = 2$ 이므로

$$\overline{CP} = \sqrt{\overline{CQ}^2 + \overline{PQ}^2}$$

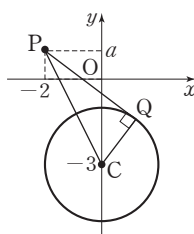
$$= \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$\sqrt{a^2 + 6a + 13} = 2\sqrt{5}, \quad a^2 + 6a + 13 = 20$$

$$a^2 + 6a - 7 = 0, \quad (a+7)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$



03-3 답 $2\sqrt{3}$

오른쪽 그림에서 원의 접선의 성질에 의하여

$$\overline{OA} \perp \overline{AP}, \quad \overline{OB} \perp \overline{BP}$$

이므로 $\triangle AOP$ 는 직각삼각형이다.

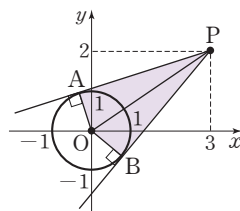
$$\text{이때 } \overline{OA} = 1, \quad \overline{OP} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

이므로 직각삼각형 AOP에서

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{(\sqrt{13})^2 - 1^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\triangle AOP \cong \triangle BOP \text{ (RHS 합동)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \square AOBP &= 2\triangle AOP = 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{OA} \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1 = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$



04-1 답 $\frac{4}{5}$

원의 중심 (0, 0)과 직선 $2x + y - 3 = 0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|-3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

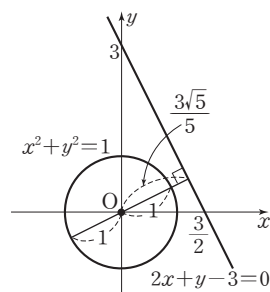
또 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 $r = 1$

오른쪽 그림에서 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값 M 과 최솟값 m 은

$$M = d + r = \frac{3\sqrt{5}}{5} + 1$$

$$m = d - r = \frac{3\sqrt{5}}{5} - 1$$

$$\therefore Mm = \frac{4}{5}$$



04-2 답 3

오른쪽 그림과 같이

$\triangle APB$ 의 넓이가 최대 또는 최소가 될 때는 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대 또는 최소가 될 때이다.

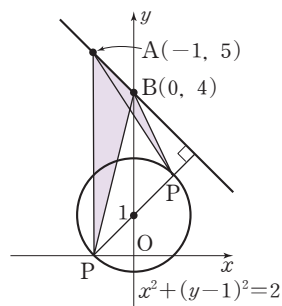
두 점 A(-1, 5),

B(0, 4)를 지나는 직선의 방정식은

$$y - 4 = \frac{4-5}{1}x \quad \therefore x + y - 4 = 0$$

원의 중심 (0, 1)과 직선 $x + y - 4 = 0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|1-4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



또 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 $r=\sqrt{2}$

한편 $\overline{AB}=\sqrt{1^2+(4-5)^2}=\sqrt{2}$ 이므로 $\triangle APB$ 의 넓이의

최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 하면

$$M=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times(d+r)=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\right)=\frac{5}{2}$$

$$m=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times(d-r)=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore M+m=3$$

2 원의 접선의 방정식

개념 CHECK

253쪽

1 [답] (1) $y=3x\pm2\sqrt{10}$ (2) $y=-2x\pm2\sqrt{5}$

(3) $y=2\sqrt{2}x\pm6$

2 [답] (1) $3x-y+10=0$ (2) $2x-\sqrt{6}y-10=0$

문제

254~257쪽

05-1 [답] $y=-2x\pm5$

구하는 직선은 직선 $x-2y-2=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x-1$ 에 수직이므로 기울기는 -2 이다.

원 $x^2+y^2=5$ 의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y=-2x\pm\sqrt{5}\times\sqrt{(-2)^2+1} \quad \therefore y=-2x\pm5$$

[다른 풀이] 판별식 이용

기울기가 -2 인 직선의 방정식을 $y=-2x+n$ 이라 하고 이 식을 $x^2+y^2=5$ 에 대입하면

$$x^2+(-2x+n)^2=5 \quad \therefore 5x^2-4nx+n^2-5=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, 원과 직선이 접하려면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-2n)^2-5(n^2-5)=0$$

$$n^2=25 \quad \therefore n=\pm5$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-2x\pm5$

[다른 풀이] 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용

기울기가 -2 인 직선의 방정식을 $y=-2x+n$, 즉

$2x+y-n=0$ 이라 하면 이 직선과 원의 중심 $(0, 0)$ 사이의

거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같아야 하므로

$$\frac{|-n|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}, |n|=5 \quad \therefore n=\pm5$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y=-2x\pm5$

05-2 [답] 5

기울기가 2인 직선의 방정식을 $y=2x+n$, 즉

$2x-y+n=0$ 이라 하면 이 직선과 원의 중심 $(1, -3)$

사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같아야 하므로

$$\frac{|2+3+n|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2, |n+5|=2\sqrt{5} \quad \therefore n=-5\pm2\sqrt{5}$$

따라서 두 직선의 y 절편의 곱은

$$(-5-2\sqrt{5})(-5+2\sqrt{5})=5$$

06-1 [답] 17

점 $(a, 8)$ 이 원 $x^2+y^2=100$ 위의 점이므로

$$a^2+8^2=100, a^2=36 \quad \therefore a=6 (\because a>0)$$

원 위의 점 $(6, 8)$ 에서의 접선의 방정식은

$$6x+8y=100 \quad \therefore 3x+4y=50$$

이 직선이 점 $(2, b)$ 를 지나므로

$$3\times2+4b=50, 4b=44 \quad \therefore b=11$$

$$\therefore a+b=17$$

06-2 [답] -8

원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$ax+by=20 \quad \therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{20}{b}$$

이 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$-\frac{a}{b}=\frac{1}{2} \quad \therefore b=-2a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (a, b) 는 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=20 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=4 \text{ 또는 } a=2, b=-4 \quad \therefore ab=-8$$

06-3 [답] $2x+3y-14=0$

원의 중심 $(2, -1)$ 과 점 $(4, 2)$ 을 지나는 직선의 기울

$$\text{기는 } \frac{2+1}{4-2}=\frac{3}{2}$$

원의 중심과 점 $(4, 2)$ 을 지나는 직선은 접선에 수직이므로 접

선의 기울기는 $-\frac{2}{3}$ 이다.

따라서 기울기가 $-\frac{2}{3}$ 이고 점 $(4, 2)$ 을 지나는 접선의 방정식은

$$y-2=-\frac{2}{3}(x-4) \quad \therefore 2x+3y-14=0$$

07-1 [답] $y=1$ 또는 $3x-4y-5=0$

점 (x_1, y_1) 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로

$$3x_1+y_1=1 \quad \therefore y_1=-3x_1+1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

또 점점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로
 $x_1^2+y_1^2=1$ ㉔

㉓, ㉔을 연립하여 풀면

$$x_1=0, y_1=1 \text{ 또는 } x_1=\frac{3}{5}, y_1=-\frac{4}{5}$$

이를 ㉑에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=1 \text{ 또는 } 3x-4y-5=0$$

다른 풀이 원의 중심과 직선 사이의 거리 이용

접선의 기울기를 m 이라 하면 점 $(3, 1)$ 을 지나는 접선의 방정식은

$$y-1=m(x-3)$$

$$\therefore mx-y-3m+1=0 \quad \cdots \cdots \text{㉑}$$

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 ㉑ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

$$\frac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, |-3m+1|=\sqrt{m^2+1}$$

$$9m^2-6m+1=m^2+1, 8m^2-6m=0$$

$$m(4m-3)=0$$

$$\therefore m=0 \text{ 또는 } m=\frac{3}{4}$$

이를 ㉑에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=1 \text{ 또는 } 3x-4y-5=0$$

다른 풀이 판별식 이용

접선의 기울기를 m 이라 하면 점 $(3, 1)$ 을 지나는 접선의 방정식은

$$y-1=m(x-3)$$

$$\therefore y=mx-3m+1 \quad \cdots \cdots \text{㉑}$$

이를 $x^2+y^2=1$ 에 대입하면

$$x^2+(mx-3m+1)^2=1$$

$$\therefore (m^2+1)x^2-2(3m^2-m)x+9m^2-6m=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(3m^2-m)^2-(m^2+1)(9m^2-6m)=0$$

$$8m^2-6m=0, m(4m-3)=0$$

$$\therefore m=0 \text{ 또는 } m=\frac{3}{4}$$

이를 ㉑에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=1 \text{ 또는 } 3x-4y-5=0$$

07-2 ㉑ $\frac{8}{3}$

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점점의 방정식은

$$x_1x+y_1y=1 \quad \cdots \cdots \text{㉑}$$

이 직선이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$2x_1+y_1=1 \quad \therefore y_1=-2x_1+1 \quad \cdots \cdots \text{㉒}$$

또 점점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=1 \quad \cdots \cdots \text{㉓}$$

㉒, ㉓을 연립하여 풀면

$$x_1=0, y_1=1 \text{ 또는 } x_1=\frac{4}{5}, y_1=-\frac{3}{5}$$

이를 ㉑에 대입하면 두 점점의 방정식은

$$y=1 \text{ 또는 } y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$$

$$\therefore B(0, 1), C\left(0, -\frac{5}{3}\right)$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC}=\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{8}{3}=\frac{8}{3}$$

07-3 ㉑ 4

접선의 기울기를 m 이라 하면 점 $(1, 2)$ 를 지나는 접선의 방정식은

$$y-2=m(x-1)$$

$$\therefore mx-y-m+2=0 \quad \cdots \cdots \text{㉑}$$

원의 중심 $(3, 5)$ 와 직선 ㉑ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

$$\frac{|3m-5-m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, |2m-3|=\sqrt{m^2+1}$$

$$4m^2-12m+9=m^2+1 \quad \therefore 3m^2-12m+8=0$$

두 점점의 기울기는 이 이차방정식의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 기울기의 합은 4이다.

07-4 ㉑ $2\sqrt{2}$

접선의 기울기를 m 이라 하면 점 $(0, 0)$ 을 지나는 접선의 방정식은

$$y=mx \quad \therefore mx-y=0 \quad \cdots \cdots \text{㉑}$$

원의 중심 $(0, a)$ 와 직선 ㉑ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같아야 하므로

$$\frac{|-a|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2, |-a|=2\sqrt{m^2+1}$$

$$a^2=4m^2+4 \quad \therefore 4m^2+4-a^2=0$$

이 이차방정식의 두 근을 m_1, m_2 라 하면 두 점점이 서로 수직이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{4-a^2}{4}=-1, a^2=8 \quad \therefore a=2\sqrt{2} (\because a>0)$$

연습문제

258~260쪽

- | | | | |
|---|--------------------------|-------------------|----------------|
| 1 ㉓ | 2 $-23 \leq k \leq 27$ | 3 ㉒ | 4 ㉑ |
| 5 $\sqrt{11}$ | 6 ㉓ | 7 ㉑ | 8 ㉑ |
| 10 ㉑ | 11 ㉑ | 12 $\frac{75}{2}$ | |
| 13 $x-\sqrt{3}y-1=0$ 또는 $x+\sqrt{3}y-1=0$ | 14 ㉒ | | |
| 15 ㉑ | 16 $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ | 17 22 | 18 $\sqrt{15}$ |

- 1 $y = -x + k$ 를 $(x-1)^2 + y^2 = 2$ 에 대입하면
 $(x-1)^2 + (-x+k)^2 = 2$
 $\therefore 2x^2 - 2(k+1)x + k^2 - 1 = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (k+1)^2 - 2(k^2 - 1) > 0, -(k+1)(k-3) > 0$
 $(k+1)(k-3) < 0 \quad \therefore -1 < k < 3$
따라서 정수 k 는 0, 1, 2의 3개이다.
- 2 $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ 을 변형하면
 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$
이 원의 중심 (1, 2)와 직선 $4x - 3y + k = 0$ 사이의 거리는
 $\frac{|4-6+k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|k-2|}{5}$
원의 반지름의 길이가 5이므로 원과 직선이 만나려면
 $\frac{|k-2|}{5} \leq 5, |k-2| \leq 25$
 $-25 \leq k-2 \leq 25 \quad \therefore -23 \leq k \leq 27$
- 3 원의 중심 (-1, 3)과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리를 d 라 하면
 $d = \frac{|-1+3+k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|k+2|}{\sqrt{2}}$
또 원의 반지름의 길이를 r 라 하면
 $\pi r^2 = 4\pi \quad \therefore r = 2 (\because r > 0)$
원과 직선이 접하려면 $d = r$ 이어야 하므로
 $\frac{|k+2|}{\sqrt{2}} = 2, |k+2| = 2\sqrt{2}$
 $k+2 = \pm 2\sqrt{2} \quad \therefore k = -2 \pm 2\sqrt{2}$
따라서 모든 상수 k 의 값의 합은
 $(-2-2\sqrt{2}) + (-2+2\sqrt{2}) = -4$
- 4 두 점 (-1, 1), (3, 3)을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는
 $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{1+3}{2}\right) \quad \therefore (1, 2)$
원의 반지름의 길이는
 $\sqrt{(1+1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5}$
원의 중심 (1, 2)와 직선 $y = 2x + k$, 즉 $2x - y + k = 0$ 사이의 거리는
 $\frac{|2-2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{5}}$
원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 원과 직선이 만나지 않으려면
 $\frac{|k|}{\sqrt{5}} > \sqrt{5}, |k| > 5 \quad \therefore k < -5 \text{ 또는 } k > 5$
따라서 자연수 k 의 최솟값은 6이다.

- 5 $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 을 변형하면
 $x^2 + (y-2)^2 = 4$

오른쪽 그림과 같이 원과 직선 $y = mx - 4$ 의 두 교점 P, Q와 원의 중심 C(0, 2)를 세 꼭짓점으로 하는 $\triangle CPQ$ 에서 $\overline{CP}$, $\overline{CQ}$ 는 원의 반지름이므로

$$\overline{CP} = \overline{CQ} = 2$$

따라서 $\triangle CPQ$ 가 정삼각형이려면 $\overline{PQ} = 2$ 이어야 한다.

원의 중심 C에서 $\overline{PQ}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{PH} = \frac{1}{2} \overline{PQ} = 1$$

$\triangle CPH$ 는 직각삼각형이므로

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{PH}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

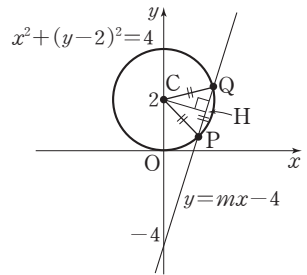
한편 $\overline{CH}$ 는 원의 중심 C(0, 2)와 직선 $mx - y - 4 = 0$ 사이의 거리이므로

$$\overline{CH} = \frac{|-2-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{m^2+1}} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } \sqrt{3} = \frac{6}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\sqrt{3m^2+3} = 6, 3m^2+3=36$$

$$m^2=11 \quad \therefore m=\sqrt{11} (\because m>0)$$



- 6 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ 을 변형하면

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$$

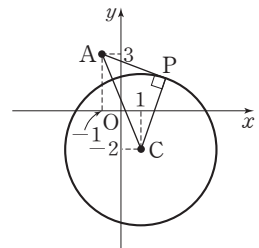
오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면 C(1, -2)이므로

$$\overline{CA} = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{29}$$

이때 $\triangle CPA$ 는 직각삼각형

이고 $\overline{CP} = 4$ 이므로

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2} = \sqrt{29 - 4^2} = \sqrt{13}$$



- 7 $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 7 = 0$ 을 변형하면

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 18$$

원의 중심 (3, -4)와 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3-4+k|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|k-1|}{\sqrt{2}}$$

원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$ 이므로 원 위의 점 P와 직선 사이의 거리의 최댓값은

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2}$$

따라서 최댓값이 $7\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}, |k-1| = 8$$

$$k-1 = \pm 8 \quad \therefore k = 9 \quad (\because k > 0)$$

- 8 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30° 인 직선의 기울기는

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 접선의 방정식은

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \pm r\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1} \quad \blacktriangleleft y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

이 직선이 점 $(2\sqrt{3}, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}r$$

$$\therefore r = \sqrt{3} \quad (\because r > 0)$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{3})^2 = 3\pi$$

- 9 직선 $x+3y-7=0$, 즉 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ 에 수직인 직선의 기울기는 3이므로 접선의 방정식을 $y=3x+n$, 즉 $3x-y+n=0$ 이라 하자.

이 직선과 원의 중심 $(3, 0)$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $2\sqrt{10}$ 과 같아야 하므로

$$\frac{|9+n|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{10}, |9+n| = 20$$

$$9+n = \pm 20 \quad \therefore n = -29 \text{ 또는 } n = 11$$

따라서 $P(0, -29)$, $Q(0, 11)$ 또는 $P(0, 11)$,

$Q(0, -29)$ 이므로

$$PQ = |11+29| = 40$$

- 10 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$ax+by=10 \quad \therefore y = -\frac{a}{b}x + \frac{10}{b}$$

이 접선의 기울기가 2이므로

$$-\frac{a}{b} = 2 \quad \therefore a = -2b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (a, b) 는 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -2\sqrt{2}, b = \sqrt{2} \text{ 또는 } a = 2\sqrt{2}, b = -\sqrt{2}$$

$$\therefore ab = -4$$

- 11 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 방정식은 $2x-y=5$

$$\therefore 2x-y-5=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x^2+y^2+4x-2y=k$ 를 변형하면

$$(x+2)^2+(y-1)^2=k+5$$

이 원의 중심 $(-2, 1)$ 과 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리가 반지름의 길이와 같아야 하므로

$$\frac{|-4-1-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \sqrt{k+5}$$

$$2\sqrt{5} = \sqrt{k+5}, 20 = k+5$$

$$\therefore k = 15$$

- 12 $x^2+y^2-2x-4y-5=0$ 을 변형하면

$$(x-1)^2+(y-2)^2=10$$

원의 중심 $(1, 2)$ 와 점 $(4, 3)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{3-2}{4-1} = \frac{1}{3}$$

구하는 원의 접선은 이 직선과 수직이므로 기울기가 -3 이다.

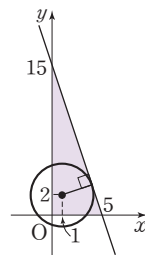
따라서 기울기가 -3 이고 점 $(4, 3)$ 을 지나는 원의 접선의 방정식은

$$y-3 = -3(x-4) \quad \therefore y = -3x+15$$

이 접선의 x 절편은 5, y 절편은 15이므로

구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 15 = \frac{75}{2}$$



- 13 원 $(x-1)^2+y^2=1$ 의 넓이를 이등분하려면 직선은 이 원의 중심 $(1, 0)$ 을 지나야 한다.

따라서 구하는 직선의 기울기를 m 이라 하면 이 직선은 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$y = m(x-1) \quad \therefore mx-y-m=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선과 원 $(x+1)^2+y^2=1$ 의 중심 $(-1, 0)$ 사이의 거리가 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

$$\frac{|-m-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 1, |2m| = \sqrt{m^2+1}$$

$$4m^2 = m^2+1, m^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore m = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x - y - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \text{ 또는 } -\frac{\sqrt{3}}{3}x - y + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$$

$$\therefore x - \sqrt{3}y - 1 = 0 \text{ 또는 } x + \sqrt{3}y - 1 = 0$$

- 14 점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

이 직선이 점 $(6, 0)$ 을 지나므로

$$6x_1 = 9 \quad \therefore x_1 = \frac{3}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

또 점점 (x_1, y_1) 은 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

⑧을 ⑨에 대입하면 풀면

$$x_1 = \frac{3}{2}, y_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } x_1 = \frac{3}{2}, y_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

이를 ⑦에 대입하면 접선의 방정식은

$$\frac{3}{2}x - \frac{3\sqrt{3}}{2}y = 9 \text{ 또는 } \frac{3}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}y = 9$$

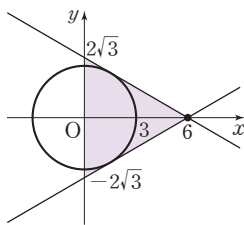
$$\therefore x - \sqrt{3}y - 6 = 0 \text{ 또는 } x + \sqrt{3}y - 6 = 0$$

따라서 두 직선의 y 절편은 각

각 $-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$ 이므로 구하는

넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 6 = 12\sqrt{3}$$



- 15 원의 중심이 직선 $x + y = 6$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, 6-a)$ ($0 < a < 6$)라 하면 반지름의 길이는 $6-a$ 이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 원의 중심 C에서 y 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

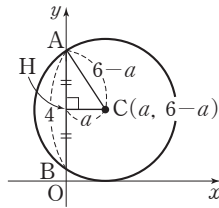
$\triangle AHC$ 는 직각삼각형이므로

$$\overline{AH}^2 + \overline{CH}^2 = \overline{AC}^2$$

$$2^2 + a^2 = (6-a)^2, 12a = 32 \quad \therefore a = \frac{8}{3}$$

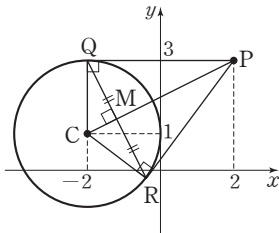
따라서 원의 반지름의 길이는

$$6 - a = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$



- 16 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 을 변형하면

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$$



위의 그림과 같이 원의 중심을 C, 점 P에서 원에 그은 접선의 점점을 Q, R라 하고 $\overline{QR}$ 의 중점을 M이라 하면

$$\overline{CQ} = 2, \overline{CP} = \sqrt{(2+2)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{5}$$

$\triangle CPQ$ 는 직각삼각형이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{CP}^2 - \overline{CQ}^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4$$

이때 $\triangle CPQ$ 의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{CQ} = \frac{1}{2} \times \overline{CP} \times \overline{QM}$$

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \overline{QM}$$

$$\therefore \overline{QM} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

따라서 구하는 두 점점 사이의 거리는

$$\overline{QR} = 2\overline{QM} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

- 17 점 $(3, 4)$ 를 지나면서 원점과의 거리가 최대인 직선 l 은 원점과 점 $(3, 4)$ 를 지나는 직선에 수직이어야 한다.

원점과 점 $(3, 4)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y = \frac{4}{3}x$ 이므로

로 직선 l 의 기울기는 $-\frac{3}{4}$ 이다.

따라서 직선 l 의 방정식은

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$

$$\therefore 3x + 4y - 25 = 0$$

이때 원의 중심 $(7, 5)$ 와 직선 $3x + 4y - 25 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|21 + 20 - 25|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{16}{5}$$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원 위의 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값 m 은

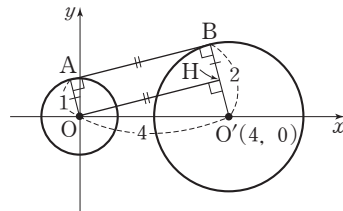
$$m = \frac{16}{5} - 1 = \frac{11}{5}$$

$$\therefore 10m = 22$$

- 18 원 $O: x^2 + y^2 = 1$ 의 중심은 $O(0, 0)$ 이고, 원

$O': (x-4)^2 + y^2 = 4$ 의 중심을 $O'(4, 0)$ 이라 하면

$$\overline{OO'} = 4$$



위의 그림과 같이 중심 O에서 $\overline{O'B}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{OH} = 2 - 1 = 1$$

이때 $\triangle O'HO$ 는 직각삼각형이므로

$$\overline{AB} = \overline{OH} = \sqrt{\overline{OO'}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$$

III-4 01 평행이동

1 평행이동

개념 CHECK

263쪽

- 1 답 (1) (4, -2) (2) (6, -3)
- 2 답 (1) (-4, 7) (2) (-5, 2)
- 3 답 (1) $2x+y-6=0$ (2) $(x-3)^2+(y+2)^2=9$
- 4 답 (1) $(x+2)^2+(y-3)^2=25$ (2) $y=(x+6)^2+7$

문제

264~266쪽

01-1 답 (3, -2)

점 (2, 2)를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표를 $(-1, 4)$ 라 하면
 $2+a=-1, 2+b=4 \quad \therefore a=-3, b=2$
 이 평행이동에 의하여 점 (6, -4)가 옮겨지는 점의 좌표는 $(6-3, -4+2) \quad \therefore (3, -2)$

01-2 답 13

평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+a, y+1)$ 은 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동하는 것이다.
 이 평행이동에 의하여 점 $(-2, 3)$ 이 옮겨지는 점의 좌표는 $(-2+a, 3+1) \quad \therefore (a-2, 4)$
 이 점이 직선 $y=x-7$ 위에 있으므로
 $4=a-2-7 \quad \therefore a=13$

01-3 답 A'(4, 7), C'(6, 5)

$\triangle ABC$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 도형을 $\triangle A'B'C'$ 이라 하면 이 평행이동에 의하여 점 B(-1, 1)이 점 B'(3, 3)으로 옮겨지므로
 $-1+a=3, 1+b=3 \quad \therefore a=4, b=2$
 이 평행이동에 의하여 두 점 A(0, 5), C(2, 3)이 옮겨지는 점은 각각 A'(0+4, 5+2), C'(2+4, 3+2)
 $\therefore A'(4, 7), C'(6, 5)$

02-1 답 -6

평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+p, y+3p)$ 는 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 $3p$ 만큼 평행이동하는 것이다.
 이 평행이동에 의하여 직선 $y=2x+3$ 이 옮겨지는 직선의 방정식은
 $y-3p=2(x-p)+3 \quad \therefore y=2x+p+3$
 이 직선이 직선 $y=2x-3$ 과 일치하므로
 $p+3=-3 \quad \therefore p=-6$

02-2 답 -3

점 (3, 1)을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표를 (2, 4)라 하면
 $3+m=2, 1+n=4$
 $\therefore m=-1, n=3$
 이 평행이동에 의하여 직선 $y=ax+b$ 가 옮겨지는 직선의 방정식은
 $y-3=a(x+1)+b$
 $\therefore y=ax+a+b+3$
 이 직선이 직선 $y=ax+b$ 와 일치하므로
 $a+b+3=b \quad \therefore a=-3$

02-3 답 $4x+y+15=0$

직선 $3x-y+5=0$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $3(x-2)-(y-m)+5=0$
 $\therefore 3x-y+m-1=0$
 이 직선이 직선 $3x-y+7=0$ 과 일치하므로
 $m-1=7 \quad \therefore m=8$
 한편 직선은 평행이동해도 기울기가 변하지 않으므로 구하는 직선의 방정식은
 $4x+y+a=0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 으로 놓을 수 있다.
 이 직선을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 8만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $4(x-2)+(y-8)+a=0$
 $\therefore 4x+y+a-16=0$
 이 직선이 직선 $4x+y-1=0$ 과 일치하므로
 $a-16=-1 \quad \therefore a=15$
 이를 ⑦에 대입하면 구하는 직선의 방정식은
 $4x+y+15=0$

03-1 답 $a=1, b=0, c=1$

점 (1, 1)을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 점의 좌표를 (0, 4)라 하면
 $1+m=0, 1+n=4$
 $\therefore m=-1, n=3$
 이 평행이동에 의하여 원 $x^2+y^2-2x+4y+a=0$, 즉 $(x-1)^2+(y+2)^2=5-a$ 가 옮겨지는 원의 방정식은
 $(x+1-1)^2+(y-3+2)^2=5-a$
 $\therefore x^2+(y-1)^2=5-a$
 따라서 옮겨진 원의 중심의 좌표는 (0, 1)이므로
 $b=0, c=1$
 또 반지름의 길이는 $\sqrt{5-a}$ 이므로
 $\sqrt{5-a}=2, 5-a=4 \quad \therefore a=1$

다른 풀이

원 $x^2+y^2-2x+4y+a=0$, 즉
 $(x-1)^2+(y+2)^2=5-a$ 의 중심 $(1, -2)$ 를 x 축의 방
 향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 점의
 좌표는
 $(1-1, -2+3) \quad \therefore (0, 1)$
 이 점이 옮겨진 원의 중심과 일치하므로
 $b=0, c=1$
 또 원은 평행이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로
 $\sqrt{5-a}=2, 5-a=4 \quad \therefore a=1$

03-2 [답 6]

포물선 $y=x^2$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
 b 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은
 $y-b=(x-a)^2 \quad \therefore y=x^2-2ax+a^2+b$
 이 포물선이 포물선 $y=x^2+6x+7$ 과 일치하므로
 $-2a=6, a^2+b=7 \quad \therefore a=-3, b=-2$
 $\therefore ab=6$

다른 풀이

포물선 $y=x^2$ 의 꼭짓점 $(0, 0)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼,
 y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점의 좌표는
 (a, b)
 이 점이 포물선 $y=x^2+6x+7$, 즉 $y=(x+3)^2-2$ 의 꼭
 짓점 $(-3, -2)$ 와 일치하므로
 $a=-3, b=-2 \quad \therefore ab=6$

연습문제

267~268쪽

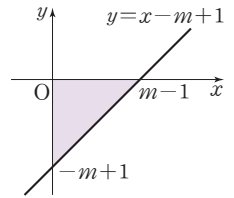
- | | | | |
|-------------|---------------|---------------------|--------------|
| 1 $(-2, 6)$ | 2 $2\sqrt{5}$ | 3 5 | 4 7 |
| 5 ② | 6 14 | 7 $\neg, \sqsubset$ | 8 $(-2, -3)$ |
| 9 ⑤ | 10 ③ | 11 $(7, 3)$ | 12 -2 |
| | | 13 -8 | |

- 1 점 $(-4, 3)$ 을 점 $(1, -2)$ 로 옮기는 평행이동은 x 축의
 방향으로 5 만큼, y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동하는
 것이다.
 이 평행이동에 의하여 점 $(3, 1)$ 로 옮겨지는 점의 좌표는
 (a, b) 라 하면
 $a+5=3, b-5=1 \quad \therefore a=-2, b=6$
 따라서 구하는 점의 좌표는 $(-2, 6)$ 이다.

- 2 $P(a, b)$ 라 하면 $P'(a+2, b-4)$
 $\therefore PP'=\sqrt{(a+2-a)^2+(b-4-b)^2}$
 $=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$

- 3 직선 $3x+y-1=0$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방
 향으로 -5 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $3(x-m)+(y+5)-1=0 \quad \therefore 3x+y-3m+4=0$
 이 직선과 점 $(1, -2)$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로
 $\frac{|3-2-3m+4|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}, |5-3m|=10$
 $5-3m=\pm 10 \quad \therefore m=5 (\because m>0)$

- 4 직선 $x-y-1=0$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방
 향으로 2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $(x-m)-(y-2)-1=0$
 $\therefore y=x-m+1$
 이 직선과 x 축 및 y 축으로 둘러
 싸인 부분은 오른쪽 그림의 색
 칠한 부분과 같고, 그 넓이가 18
 이므로
 $\frac{1}{2} \times |m-1| \times |-m+1|=18$
 $(m-1)^2=36, m-1=\pm 6$
 $\therefore m=7 (\because m>1)$



- 5 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x, y+4)$ 는 y 축의 방향으로 4 만
 큼 평행이동하는 것이다.
 이 평행이동에 의하여 직선 $y=ax+b$ 가 옮겨지는 직선
 의 방정식은
 $y-4=ax+b \quad \therefore y=ax+b+4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 직선 $\textcircled{1}$ 이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 과 수직이므로
 $a \times \left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \quad \therefore a=2$
 또 직선 $\textcircled{1}$ 이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+3$ 과 y 축 위의 점에서 만나
 려면 점 $(0, 3)$ 을 지나야 하므로
 $3=b+4 \quad \therefore b=-1$
 $\therefore ab=-2$

- 6 직선 $y=2x+k$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방
 향으로 -3 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
 $y+3=2(x-2)+k$
 $\therefore 2x-y+k-7=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 이 직선이 원 $x^2+y^2=5$ 와 한 점에서 만나려면 원의 중심
 $(0, 0)$ 과 직선 $\textcircled{1}$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같
 아야 하므로
 $\frac{|k-7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}, |k-7|=5$
 $k-7=\pm 5 \quad \therefore k=2 \text{ 또는 } k=12$
 따라서 모든 상수 k 의 값의 합은 14 이다.

- 7 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 을 변형하면
 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$
 평행이동하여 이 원과 겹쳐지려면 반지름의 길이가 2이어야 한다.
 ㄱ. 반지름의 길이가 2이므로 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 주어진 원과 겹쳐진다.
 ㄴ. 반지름의 길이가 3이므로 평행이동하여 주어진 원과 겹쳐질 수 없다.
 ㄷ. $x^2+y^2+6x+4y+9=0$ 을 변형하면
 $(x+3)^2+(y+2)^2=4$
 즉 반지름의 길이가 2이므로 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동하면 주어진 원과 겹쳐진다.
 따라서 보기 중 평행이동하여 주어진 원과 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

- 8 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하는 것이다.
 이 평행이동에 의하여 원 $x^2+y^2+6x+2y+1=0$, 즉 $(x+3)^2+(y+1)^2=9$ 가 옮겨지는 원의 방정식은 $(x-1+3)^2+(y+2+1)^2=9$
 $\therefore (x+2)^2+(y+3)^2=9$
 따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(-2, -3)$ 이다.

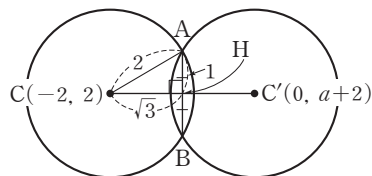
- 9 $x^2+y^2+4x-6y+4=0$ 을 변형하면
 $(x+2)^2+(y-3)^2=9$
 따라서 주어진 평행이동은 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동하는 것이다. 이 평행이동에 의하여 포물선 $y=2x^2+5$ 가 옮겨지는 포물선의 방정식은 $y-3=2(x+2)^2+5 \quad \therefore y=2(x+2)^2+8$
 따라서 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 8)$ 이므로 $m=-2, n=8 \quad \therefore m+n=6$

- 10 점 $(2, m)$ 을 점 $(3, 2m)$ 으로 옮기는 평행이동은 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하는 것이다. 이 평행이동에 의하여 포물선 $y=-x^2+2x$ 가 옮겨지는 포물선의 방정식은 $y-m=-(x-1)^2+2(x-1)$
 $\therefore y=-x^2+4x-3+m$
 이 포물선이 직선 $y=2x+3$ 과 접하므로 이차방정식 $-x^2+4x-3+m=2x+3$, 즉 $x^2-2x+6-m=0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=(-1)^2-(6-m)=0 \quad \therefore m=5$

- 11 점 $C(4, 8)$ 이 점 $G(1, 6)$ 으로 옮겨지므로 $\square DEFG$ 는 $\square OABC$ 를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.
 이 평행이동에 의하여 두 점 $O(0, 0), A(6, -3)$ 이 옮겨지는 점은 각각 $D(0-3, 0-2), E(6-3, -3-2)$
 $\therefore D(-3, -2), E(3, -5)$
 이때 점 F 의 좌표를 (a, b) 라 하면 $\square DEFG$ 는 직사각형이므로 $\overline{DF}$ 의 중점 $(\frac{a-3}{2}, \frac{b-2}{2})$ 와 $\overline{EG}$ 의 중점 $(\frac{3+1}{2}, \frac{-5+6}{2})$ 이 서로 일치한다.
 $\therefore a-3=4, b-2=1 \quad \therefore a=7, b=3$
 따라서 점 F 의 좌표는 $(7, 3)$ 이다.

- 12 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 원의 방정식은 $(x-m-2)^2+(y-n+1)^2=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 이때 직선 $(k-1)x+(k+1)y-2k=0$ 이 실수 k 의 값에 관계없이 항상 원 $\textcircled{1}$ 의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심 $(m+2, n-1)$ 을 지나야 한다. 즉,
 $(k-1)(m+2)+(k+1)(n-1)-2k=0$
 $\therefore (m+n-1)k-m+n-3=0$
 이 식이 k 에 대한 항등식이므로
 $m+n-1=0, -m+n-3=0$
 두 식을 연립하여 풀면
 $m=-1, n=2 \quad \therefore mn=-2$

- 13 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+2, y+a)$ 는 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동하는 것이다.
 이 평행이동에 의하여 원 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$, 즉 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ 가 옮겨지는 원의 방정식은 $x^2+(y-a-2)^2=4$
 이때 다음 그림과 같이 원 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$ 의 중심을 $C(-2, 2)$, 원 $x^2+(y-a-2)^2=4$ 의 중심을 $C'(0, a+2)$ 라 하고, 직선 CC' 과 $\overline{AB}$ 의 교점을 H 라 하면 $\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=1$



직각삼각형 ACH 에서 $\overline{CH}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$
 $\therefore \overline{CC'}=2\overline{CH}=2\sqrt{3}$

즉, 두 점 C, C' 사이의 거리는 $2\sqrt{3}$ 이므로
 $\sqrt{2^2 + (a+2-2)^2} = 2\sqrt{3}$, $a^2 + 4 = 12$
 $a^2 = 8$ $\therefore a = \pm 2\sqrt{2}$
따라서 모든 a의 값의 곱은
 $-2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = -8$

III-4 02 대칭이동

1 대칭이동

개념 CHECK

271쪽

- 1 답 (1) (3, -4) (2) (-3, 4)
(3) (-3, -4) (4) (4, 3)
- 2 답 (1) (-2, -5) (2) (2, 5)
(3) (2, -5) (4) (5, -2)
- 3 답 (1) $x+4y+1=0$ (2) $x+4y-1=0$
(3) $x-4y-1=0$ (4) $4x-y-1=0$
- 4 답 (1) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 7$
(2) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 7$
(3) $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 7$
(4) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 7$
- 5 답 (1) $y = -(x-1)^2 + 6$
(2) $y = (x+1)^2 - 6$
(3) $y = -(x+1)^2 + 6$
(4) $x = (y-1)^2 - 6$

문제

272~274쪽

01-1 답 -4

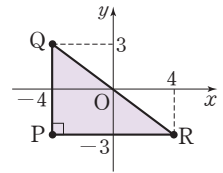
점 $(a, -2)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
 $(-2, a)$
이 점을 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
 $(-2, -a)$
이 점이 점 $(6-a, 4+b)$ 와 일치하므로
 $-2 = 6-a$, $-a = 4+b$
 $\therefore a=8$, $b=-12$
 $\therefore a+b=-4$

01-2 답 5

점 $(2, k)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점 P의 좌표는
 $(-2, -k)$
점 $(2, k)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(k, 2)$
 $PQ = 7\sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{(k+2)^2 + (2+k)^2} = 7\sqrt{2}$
양변을 제곱하여 정리하면
 $2k^2 + 8k + 8 = 98$, $k^2 + 4k - 45 = 0$
 $(k+9)(k-5) = 0$
 $\therefore k=5$ ($\because k > 0$)

01-3 답 24

점 $P(-4, -3)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는
 $(-4, 3)$
점 $P(-4, -3)$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는
 $(4, -3)$
 $\therefore \triangle PQR = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$



02-1 답 9

포물선 $y = x^2 + 2mx + m^2 - 4$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은
 $-y = (-x)^2 + 2m \times (-x) + m^2 - 4$
 $\therefore y = -x^2 + 2mx - m^2 + 4 = -(x-m)^2 + 4$
이 포물선의 꼭짓점의 좌표 $(m, 4)$ 가 $(5, n)$ 과 일치하므로
 $m=5$, $n=4$ $\therefore m+n=9$

다른 풀이

$y = x^2 + 2mx + m^2 - 4 = (x+m)^2 - 4$
이 포물선의 꼭짓점 $(-m, -4)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
 $(m, 4)$
이 점이 점 $(5, n)$ 과 일치하므로
 $m=5$, $n=4$ $\therefore m+n=9$

02-2 답 1

직선 $y=kx+1$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
 $y = -kx+1$
이 직선이 원 $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$, 즉
 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 4$ 의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심 $(3, -2)$ 를 지나야 하므로
 $-2 = -3k+1$
 $\therefore k=1$

02-3 답 18

원 $x^2+y^2=4$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y+4)^2=4$$

이 원을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(-y+4)^2=4$$

$$\therefore (x+1)^2+(y-4)^2=4$$

이 원이 직선 $4x+3y-a=0$ 에 접하려면 원의 중심

$(-1, 4)$ 와 직선 $4x+3y-a=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 2와 같아야 하므로

$$\frac{|-4+12-a|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2, |8-a|=10$$

$$8-a=\pm 10 \quad \therefore a=18 (\because a>0)$$

03-1 답 $\sqrt{37}$

점 $B(3, 5)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면

$B'(5, 3)$

이때 $\overline{BP}=\overline{B'P}$ 이므로

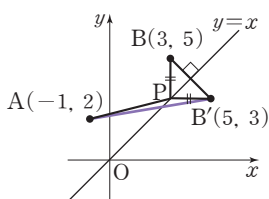
$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$$

$$\geq \overline{AB'}$$

$$=\sqrt{(5+1)^2+(3-2)^2}$$

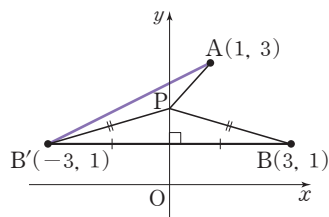
$$=\sqrt{37}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값은 $\sqrt{37}$ 이다.



03-2 답 $(0, \frac{5}{2})$

점 $B(3, 1)$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면 $B'(-3, 1)$



이때 $\overline{BP}=\overline{B'P}$ 이므로

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P} \geq \overline{AB'}$$

즉, $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 값이 최소일 때의 점 P 는 직선 AB' 과 y 축의 교점이다.

두 점 $A(1, 3)$, $B'(-3, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

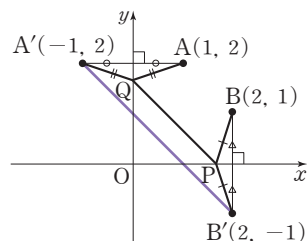
$$y-3=\frac{1-3}{-3-1}(x-1) \quad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

따라서 구하는 점 P 의 좌표는 $(0, \frac{5}{2})$ 이다.

03-3 답 $3\sqrt{2}$

점 $A(1, 2)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면 $A'(-1, 2)$

점 $B(2, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면 $B'(2, -1)$



이때 $\overline{AQ}=\overline{A'Q}$, $\overline{PB}=\overline{PB'}$ 이므로

$$\overline{AQ}+\overline{QP}+\overline{PB}=\overline{A'Q}+\overline{QP}+\overline{PB'}$$

$$\geq \overline{A'B'}$$

$$=\sqrt{(2+1)^2+(-1-2)^2}=3\sqrt{2}$$

따라서 $\overline{AQ}+\overline{QP}+\overline{PB}$ 의 최솟값은 $3\sqrt{2}$ 이다.

2 점과 직선에 대한 대칭이동

문제

276~277쪽

04-1 답 -3

점 $(-1, -1)$ 이 두 점 $(2, a)$, $(b, -3)$ 을 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{2+b}{2}=-1, \frac{a-3}{2}=-1 \quad \therefore a=1, b=-4$$

$$\therefore a+b=-3$$

04-2 답 9

$y=-x^2+2x+3$ 을 변형하면 $y=-(x-1)^2+4$ 이므로 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 4)$ 이다.

따라서 점 (a, b) 가 두 점 $(1, 4)$, $(3, 5)$ 를 이은 선분의 중점이므로

$$a=\frac{1+3}{2}=2, b=\frac{4+5}{2}=\frac{9}{2} \quad \therefore ab=9$$

05-1 답 $a=-2, b=-1$

(i) 두 점 $(-6, 1)$, $(2, 5)$ 를 이은 선분의 중점

$$\left(\frac{-6+2}{2}, \frac{1+5}{2}\right), \text{ 즉 } (-2, 3) \text{이 직선 } y=ax+b$$

$$\text{위의 점이므로 } 3=-2a+b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 두 점 $(-6, 1)$, $(2, 5)$ 를 지나는 직선과 직선

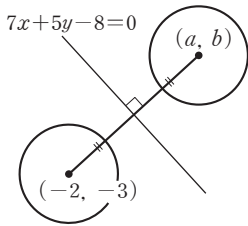
$$y=ax+b \text{는 서로 수직이므로}$$

$$\frac{5-1}{2+6} \times a = -1 \quad \therefore a = -2$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = -1$$

05-2 ㉔ $(x-5)^2+(y-2)^2=4$

원 $(x+2)^2+(y+3)^2=4$ 의 중심 $(-2, -3)$ 을 직선 $7x+5y-8=0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 (a, b) 라 하자.



(i) 두 점 $(-2, -3)$, (a, b) 를 이은 선분의 중점 $\left(\frac{-2+a}{2}, \frac{-3+b}{2}\right)$ 가 직선 $7x+5y-8=0$ 위의 점
이므로

$$7 \times \frac{-2+a}{2} + 5 \times \frac{-3+b}{2} - 8 = 0$$

$$\therefore 7a+5b=45 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) 두 점 $(-2, -3)$, (a, b) 를 지나는 직선과 직선

$7x+5y-8=0$ 은 서로 수직이므로

$$\frac{b+3}{a+2} \times \left(-\frac{7}{5}\right) = -1$$

$$\therefore 5a-7b=11 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=5, b=2$$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표가 $(5, 2)$ 이고 반지름의 길이가 2이므로 구하는 원의 방정식은

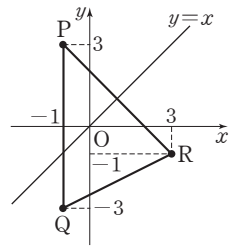
$$(x-5)^2+(y-2)^2=4$$

2 점 $P(-1, 3)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점 Q 의 좌표는 $(-1, -3)$

점 $P(-1, 3)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 R 의 좌표는

$$(3, -1)$$

$$\therefore \triangle PQR = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$



3 점 $(3, 2)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동하면 점 $(-3, 2)$ 로 옮겨지므로 직선 $x-5y+2=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-x-5y+2=0$$

$$\therefore x+5y-2=0$$

4 직선 $y=ax+b$ 가 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$1=2a+b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

직선 $y=ax+b$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$y=-ax+b$$

이 직선이 직선 $3x-y+4=0$, 즉 $y=3x+4$ 와 만나지 않으려면 두 직선은 서로 평행해야 하므로

$$-a=3 \quad \therefore a=-3$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b=7$

$$\therefore a+b=4$$

5 $x^2+y^2-2x+6y+9=0$ 을 변형하면

$$(x-1)^2+(y+3)^2=1$$

이 원을 직선 $y=x$ 에 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x+3)^2+(y-1)^2=1$$

이 원의 중심의 좌표가 $(-3, 1)$ 이고 반지름의 길이가 1
이므로

$$a=-3, b=1, c=1 \quad \therefore abc=-3$$

6 $y=x^2+2x+a=(x+1)^2+a-1$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(-1, a-1)$ 이므로 이 점을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(-1+m, a-1+3) \quad \therefore (m-1, a+2)$$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(1-m, -a-2)$$

이 점이 점 $(-2, 9)$ 와 일치하므로

$$1-m=-2, -a-2=9$$

$$\therefore m=3, a=-11$$

$$\therefore a+m=-8$$

연습문제

278~280쪽

- | | | | | |
|------|--------------|------|------|--------------|
| 1 ③ | 2 ④ | 3 ③ | 4 ④ | 5 -3 |
| 6 -8 | 7 -1 | 8 ① | 9 ③ | 10 ④ |
| 11 ① | 12 ② | 13 ① | 14 ④ | 15 $8\pi-16$ |
| 16 ① | 17 3 m, 25 m | 18 ② | | |

- 1 점 (a, b) 를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a, -b)$
이 점을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-b, -a)$
이 점이 점 $(1, 2)$ 와 일치하므로
 $-b=1, -a=2 \quad \therefore a=-2, b=-1$
 $\therefore ab=2$

- 7 원 $(x+1)^2 + (y-k)^2 = 10$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (-y-k)^2 = 10$$

$$\therefore (x+1)^2 + (y+k)^2 = 10$$

직선 $x-y+2=0$ 이 이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 $(-1, -k)$ 를 지나야 하므로

$$-1+k+2=0$$

$$\therefore k=-1$$

- 8 직선 $x-2y=9$ 를 직선 $y=x$ 에 대칭이동한 도형의 방정식은

$$y-2x=9$$

$$\therefore 2x-y+9=0$$

이 직선이 원 $(x-3)^2 + (y+5)^2 = k$ 에 접하려면 원의 중심 $(3, -5)$ 와 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{k}$ 와 같아야 하므로

$$\frac{|6+5+9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \sqrt{k}, \quad 20 = \sqrt{5k}$$

$$400=5k \quad \therefore k=80$$

- 9 점 $B(4, 4)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면 $B'(4, -4)$

이때 $\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이므로

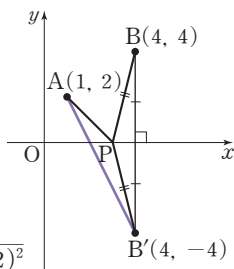
$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P}$$

$$\geq \overline{AB'}$$

$$= \sqrt{(4-1)^2 + (-4-2)^2}$$

$$= 3\sqrt{5}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 $3\sqrt{5}$ 이다.



- 10 주어진 두 포물선의 방정식을 각각 변형하면

$$y = (x-3)^2 + 1, \quad y = -(x-7)^2 - 1$$

두 포물선이 점 P 에 대하여 서로 대칭이므로 두 꼭짓점 $(3, 1), (7, -1)$ 도 점 P 에 대하여 서로 대칭이다.

즉, 점 P 는 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점이므로

$$P\left(\frac{3+7}{2}, \frac{1-1}{2}\right)$$

$$\therefore P(5, 0)$$

- 11 점 $A(-2, 1)$ 을 점 $(3, 2)$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(a, b)$ 라 하면 $\overline{AA'}$ 의 중점의 좌표가 $(3, 2)$ 이므로

$$\frac{-2+a}{2} = 3, \quad \frac{1+b}{2} = 2$$

$$\therefore a=8, b=3$$

따라서 점 $A'(8, 3)$ 이고, 이 점을 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A'' 이라 하면 $A''(-8, 3)$

이때 직선 l 은 두 점 A, A'' 을 지나므로 그 기울기는

$$\frac{3-1}{-8+2} = -\frac{1}{3}$$

- 12 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ 의 중심 $(1, 1)$ 을 직선 $y=x-2$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (a, b) 라 하자.

(i) 두 점 $(1, 1), (a, b)$ 를 이은 선분의 중점

$$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{1+b}{2}\right) \text{가 직선 } y=x-2 \text{ 위의 점이므로}$$

$$\frac{1+b}{2} = \frac{1+a}{2} - 2$$

$$\therefore a-b=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 두 점 $(1, 1), (a, b)$ 를 지나는 직선과 직선 $y=x-2$ 는 서로 수직이므로

$$\frac{b-1}{a-1} \times 1 = -1$$

$$\therefore a+b=2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=3, b=-1$

따라서 대칭이동한 원의 중심의 좌표가 $(3, -1)$ 이고 반지름의 길이가 2이므로 구하는 원의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$$

- 13 (i) 점 $A(4, 1)$ 을 직선 $x-y+1=0$ 에 대하여 대칭이동한 점 C 의 좌표를 (a, b) 라 하면 $\overline{AC}$ 의 중점

$$\left(\frac{4+a}{2}, \frac{1+b}{2}\right) \text{가 직선 } x-y+1=0 \text{ 위의 점이므로}$$

$$\frac{4+a}{2} - \frac{1+b}{2} + 1 = 0$$

$$\therefore a-b=-5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 직선 AC 과 직선 $y=x+1$ 은 서로 수직이므로

$$\frac{b-1}{a-4} \times 1 = -1$$

$$\therefore a+b=5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=0, b=5$

$$\therefore C(0, 5)$$

(ii) 점 $B(5, 1)$ 을 직선 $x-y+1=0$ 에 대하여 대칭이동한 점 D 의 좌표를 (c, d) 라 하면 $\overline{BD}$ 의 중점

$$\left(\frac{5+c}{2}, \frac{1+d}{2}\right) \text{가 직선 } x-y+1=0 \text{ 위의 점이므로}$$

$$\frac{5+c}{2} - \frac{1+d}{2} + 1 = 0$$

$$\therefore c-d=-6 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

또 직선 BD 과 직선 $y=x+1$ 은 서로 수직이므로

$$\frac{d-1}{c-5} \times 1 = -1$$

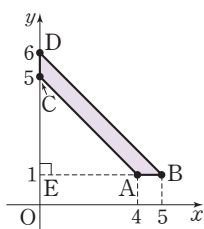
$$\therefore c+d=6 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}, \textcircled{4}$ 을 연립하여 풀면 $c=0, d=6$

$$\therefore D(0, 6)$$

따라서 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$ 의 연장선이 y 축과 만나는 점을 E라 하면

$$\begin{aligned} & \square ABDC \\ &= \triangle BDE - \triangle ACE \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 5 - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$



- 14 점 (3, 2)를 규칙에 따라 이동해 보자.

점 (3, 2)에서 $3 > 2$ 이므로 [규칙 1]에 의하여

$$(3, 2) \longrightarrow (-3, -2)$$

점 (-3, -2)에서 $-3 < -2$ 이므로 [규칙 2]에 의하여

$$(-3, -2) \longrightarrow (-3+1, -2) \quad \therefore (-2, -2)$$

점 (-2, -2)에서 $-2 = -2$ 이므로 [규칙 3]에 의하여

$$(-2, -2) \longrightarrow (-2, -2+1) \quad \therefore (-2, -1)$$

점 (-2, -1)에서 $-2 < -1$ 이므로 [규칙 2]에 의하여

$$(-2, -1) \longrightarrow (-2+1, -1) \quad \therefore (-1, -1)$$

⋮

이와 같이 점 (3, 2)를 규칙에 따라 이동하면 이동된 점의 y 좌표는 x 좌표와 같거나 1만큼 크므로 점 (17, 16)은 지날 수 없다.

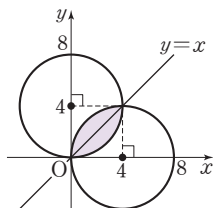
- 15 원 $(x-4)^2 + y^2 = 16$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(y-4)^2 + x^2 = 16$$

$$\therefore x^2 + (y-4)^2 = 16$$

따라서 주어진 원과 대칭이동한 원이 겹쳐지는 부분은 오른쪽 그림의 색칠한 부분과 같으므로 그 넓이는

$$\begin{aligned} & 2\left(\frac{1}{4}\pi \times 4^2 - \frac{1}{2} \times 4 \times 4\right) \\ &= 8\pi - 16 \end{aligned}$$



- 16 점 B(5, 3)을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 B'(3, 5)

이때 $\overline{BP} = \overline{B'P}$ 이므로

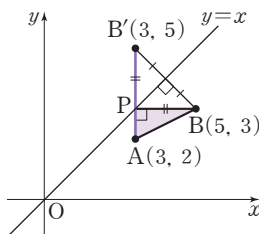
$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{AP} + \overline{B'P} \\ &\geq \overline{AB'} \end{aligned}$$

직선 AB'의 방정식은

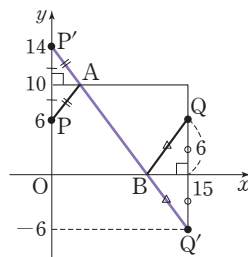
$x=3$ 이므로 점 P의 좌표는

$$(3, 3)$$

$$\therefore \triangle ABP = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$



- 17 전시물 B가 있는 벽면과 입구 P가 있는 벽면을 각각 x 축, y 축으로 하여 전시장을 좌표평면 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



이때 점 P를 직선 $y=10$ 에 대하여 대칭이동한 점을 P', 점 Q를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 Q'이라 하면 선분 P'Q'의 길이가 구하는 최소 이동 거리이다.

- (i) 점 A는 직선 P'Q'와 직선 $y=10$ 의 교점이다.

이때 점 P', Q'은 두 점 P(0, 6), Q(15, 6)을 각각 직선 $y=10$ 과 x 축에 대하여 대칭이동한 점이므로 P'(0, 14), Q'(15, -6)

따라서 두 점 P', Q'을 지나는 직선의 방정식은

$$y-14 = \frac{-6-14}{15}x \quad \therefore y = -\frac{4}{3}x + 14$$

$y=10$ 일 때, x 의 값을 구하면

$$10 = -\frac{4}{3}x + 14 \quad \therefore x = 3$$

따라서 전시물 A는 입구 P가 있는 벽면에서 오른쪽으로 3 m 떨어져 있어야 한다.

- (ii) 선분 P'Q'의 길이를 구하면

$$\overline{P'Q'} = \sqrt{15^2 + (-6-14)^2} = 25(\text{m})$$

따라서 최소 이동 거리는 25 m이다.

- 18 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은

$$f(x, -y)=0$$

이 방정식이 나타내는 도형을 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$$f(x, -(y-1))=0 \quad \therefore f(x, 1-y)=0$$

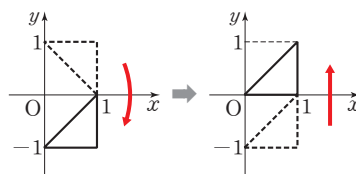
따라서 방정식 $f(x, 1-y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식

$$f(x, y)=0 \text{이 나타내는 도형을}$$

- (i) x 축에 대하여 대칭이동한 후

- (ii) y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것

이므로 ②와 같다.



유형편

정답과 해설

I-1 01 다항식의 연산

기초 문제 Training

4쪽

- 1 (1) $3x^2+2x-4$
 (2) $x^2-4xy+3y^2$
 (3) $x^3+x^2-15x+12$
 (4) $-4x^3+x^2+3x-17$
- 2 (1) $2x+5y$
 (2) $3x^2+xy-4y^2$
 (3) $4x^3+6x^2+4$
 (4) $4a^2+3ab-6b^2$
- 3 (1) $x^2+4y^2+4xy-2x-4y+1$
 (2) $4a^2+9b^2+c^2-12ab+6bc-4ca$
 (3) $27x^3+27x^2+9x+1$
 (4) $8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$
 (5) x^3-8y^3
 (6) $64a^3+27$
- 4 (1) 13 (2) 17 (3) 10 (4) 2 (5) 7 (6) -36
- 5 (1) 몫: x^2+4x+7 , 나머지: 17
 (2) 몫: x^2-2x+3 , 나머지: -2
 (3) 몫: $3x-3$, 나머지: $-6x+4$
- 6 (1) 몫: x^2+3x+4 , 나머지: 1
 (2) 몫: $2x^2+x-3$, 나머지: 2
 (3) 몫: x^2+2x-3 , 나머지: 6

핵심 유형 Training

5~10쪽

- 1 ④ 2 ③ 3 $5a^2+11ab-19b^2$ 4 ④
 5 ④ 6 3 7 18 8 ④ 9 100
 10 $7x^3+28y^3$ 11 ② 12 -13 13 ⑤
 14 ⑤ 15 $30\sqrt{3}$ 16 ① 17 ② 18 ③
 19 ④ 20 ⑤ 21 -18 22 ① 23 6
 24 18 25 16 26 ② 27 6 28 156
 29 ① 30 -8 31 ⑤ 32 4 33 x^2+1
 34 몫: x^2+4x+4 , 나머지: -3 35 $x+1$ 36 ④
 37 몫: $\frac{1}{2}Q(x)$, 나머지: R 38 ④ 39 ①
 40 ①

- 1 $A+B-2(B-2C)$
 $=A-B+4C$
 $=-3x^3-x^2+7-(x^2-3x)+4(3x^3-2x)$
 $=-3x^3-x^2+7-x^2+3x+12x^3-8x$
 $=9x^3-2x^2-5x+7$
- 2 $2(X-2A)=X-3B$ 에서 $2X-4A=X-3B$
 $\therefore X=4A-3B$
 $=4(2x^2+3xy+y^2)-3(x^2+4xy+y^2)$
 $=8x^2+12xy+4y^2-3x^2-12xy-3y^2$
 $=5x^2+y^2$
- 3 $2P+Q=a^2-ab+b^2$ ㉠
 $P-Q=2a^2+4ab-7b^2$ ㉡
 ㉠+㉡을 하면 $3P=3a^2+3ab-6b^2$
 $\therefore P=a^2+ab-2b^2$
 ㉡에서
 $Q=P-(2a^2+4ab-7b^2)$
 $=a^2+ab-2b^2-(2a^2+4ab-7b^2)$
 $=a^2+ab-2b^2-2a^2-4ab+7b^2$
 $=-a^2-3ab+5b^2$
 $\therefore 2P-3Q=2(a^2+ab-2b^2)-3(-a^2-3ab+5b^2)$
 $=2a^2+2ab-4b^2+3a^2+9ab-15b^2$
 $=5a^2+11ab-19b^2$
- 4 $(x^3+5x^2-2x+3)(2x^3-3x^2+2x-1)$ 의 전개식에서 x^5 항은
 $x^3 \times (-3x^2) + 5x^2 \times 2x^3 = -3x^5 + 10x^5 = 7x^5$
 따라서 x^5 의 계수는 7이다.

5 $(x^2-x+2)(x^3+x-3)$ 의 전개식에서 x^4 항은
 $(-x) \times x^3 = -x^4$
 x^2 항은
 $x^2 \times (-3) + (-x) \times x = -3x^2 - x^2 = -4x^2$
 따라서 $a = -1$, $b = -4$ 이므로 $ab = 4$

6 $(x^3+2x^2+kx-1)^2$ 의 전개식에서 x^2 항은
 $2x^2 \times (-1) + kx \times kx + (-1) \times 2x^2 = (k^2-4)x^2$
 이때 x^2 의 계수가 5이므로
 $k^2-4=5$, $k^2=9 \quad \therefore k=3 (\because k>0)$

7 $(1+x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})^2$ 의 전개식에서 x^4 항은
 $1 \times 4x^4 + x \times 3x^3 + 2x^2 \times 2x^2 + 3x^3 \times x + 4x^4 \times 1$
 $= 4x^4 + 3x^4 + 4x^4 + 3x^4 + 4x^4 = 18x^4$
 따라서 x^4 의 계수는 18이다.

8 ① $(x-1)(x^2+x+1) = x^3-1$
 ② $(x-1)(x+2)(x-3)$
 $= x^3 + (-1+2-3)x^2$
 $+ \{(-1) \times 2 + 2 \times (-3) + (-3) \times (-1)\}x$
 $+ (-1) \times 2 \times (-3)$
 $= x^3 - 2x^2 - 5x + 6$
 ③ $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
 $= (x^2+x \times 1 + 1^2)(x^2-x \times 1 + 1^2)$
 $= x^4 + x^2 \times 1^2 + 1^4$
 $= x^4 + x^2 + 1$
 ④ $(x-y-1)^2$
 $= x^2 + (-y)^2 + (-1)^2 + 2 \times x \times (-y)$
 $+ 2 \times (-y) \times (-1) + 2 \times (-1) \times x$
 $= x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y + 1$
 ⑤ $(x-y+2)(x^2+y^2+xy-2x+2y+4)$
 $= \{x + (-y) + 2\}$
 $\times \{x^2 + (-y)^2 + 2^2 - x \times (-y) - (-y) \times 2 - 2 \times x\}$
 $= x^3 + (-y)^3 + 2^3 - 3 \times x \times (-y) \times 2$
 $= x^3 - y^3 + 6xy + 8$
 따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

9 $(3x-4)^3 = 27x^3 - 108x^2 + 144x - 64$
 따라서 $a = -108$, $b = 144$, $c = -64$ 이므로
 $a+b-c = 100$

10 $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2) - (x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$
 $= (2x)^3 + y^3 - \{x^3 - (3y)^3\}$
 $= 8x^3 + y^3 - x^3 + 27y^3$
 $= 7x^3 + 28y^3$

11 $(x-2y+z)(x+2y-z)$
 $= \{x - (2y-z)\} \{x + (2y-z)\}$
 $= (x-X)(x+X) \quad \blacktriangleleft 2y-z=X$
 $= x^2 - X^2$
 $= x^2 - (2y-z)^2 \quad \blacktriangleleft X=2y-z$
 $= x^2 - 4y^2 - z^2 + 4yz$

12 $(x^2-x+1)(x^2-3x+1)$
 $= \{(x^2+1)-x\} \{(x^2+1)-3x\}$
 $= (X-x)(X-3x) \quad \blacktriangleleft x^2+1=X$
 $= X^2 - 4xX + 3x^2$
 $= (x^2+1)^2 - 4x(x^2+1) + 3x^2 \quad \blacktriangleleft X=x^2+1$
 $= x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1$
 따라서 $a = -4$, $b = 5$, $c = -4$ 이므로
 $a-b+c = -13$

13 $(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)$
 $= \{(x-1)(x+5)\} \{(x+1)(x+3)\}$
 $= (x^2+4x-5)(x^2+4x+3)$
 $= (X-5)(X+3) \quad \blacktriangleleft x^2+4x=X$
 $= X^2 - 2X - 15$
 $= (x^2+4x)^2 - 2(x^2+4x) - 15 \quad \blacktriangleleft X=x^2+4x$
 $= x^4 + 8x^3 + 14x^2 - 8x - 15$

14 $x^2+y^2 = (x-y)^2 + 2xy$ 이므로
 $7 = 3^2 + 2xy \quad \therefore xy = -1$
 $\therefore x^3 - y^3 = (x-y)^3 + 3xy(x-y)$
 $= 3^3 + 3 \times (-1) \times 3 = 18$

15 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = 4^2 - 4 = 12$
 그런데 $x > 1$ 이므로 $x - \frac{1}{x} = 2\sqrt{3}$
 $\therefore x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$
 $= (2\sqrt{3})^3 + 3 \times 2\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$

16 $x^2-2x-1=0$ 에서 $x \neq 0$ 이므로 양변을 x 로 나누면
 $x - 2 - \frac{1}{x} = 0 \quad \therefore x - \frac{1}{x} = 2$
 $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 2^2 + 2 = 6$
 $x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = 2^3 + 3 \times 2 = 14$
 $\therefore \frac{1+x^4}{x^2} + \frac{1-x^6}{x^3} = x^2 + \frac{1}{x^2} - \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)$
 $= 6 - 14 = -8$

- 17 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ 이므로
 $14=2^3-3xy \times 2 \quad \therefore xy=-1$
 $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2^2-2 \times (-1)=6$
 $\therefore x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$
 $=6 \times 14 - (-1)^2 \times 2 = 82$
- 18 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = -1$ 이므로
 $ab+bc+ca = -abc = -4$
 $\therefore a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$
 $= (-1)^2 - 2 \times (-4) = 9$
- 19 $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$ 이므로
 $14 = 2^2 - 2(ab+bc+ca) \quad \therefore ab+bc+ca = -5$
 $\therefore a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$
 $= (ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)$
 $= (-5)^2 - 2 \times (-6) \times 2 = 49$
- 20 $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$
 $= 3^2 - 2 \times (-1) = 11$
 $\therefore a^3+b^3+c^3$
 $= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + 3abc$
 $= 3 \times \{11 - (-1)\} + 3 \times (-2) = 30$
- 21 $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$
 $= (-1)^2 - 2 \times (-9) = 19$
 $a^3+b^3+c^3$
 $= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + 3abc$
 이므로
 $-1 = (-1) \times \{19 - (-9)\} + 3abc \quad \therefore abc = 9$
 $\therefore ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$
 $= ab(-1-c) + bc(-1-a) + ca(-1-b)$
 $= -(ab+bc+ca) - 3abc$
 $= -(-9) - 3 \times 9 = -18$
- 22 $511 = a$ 로 놓으면
 $\frac{512(511^2-510)-1}{511^3} = \frac{(a+1)\{a^2-(a-1)\}-1}{a^3}$
 $= \frac{a^3+1-1}{a^3} = \frac{a^3}{a^3} = 1$
- 23 $301^2 + 198 \times 202$
 $= (300+1)^2 + (200-2)(200+2)$
 $= 300^2 + 2 \times 300 \times 1 + 1^2 + 200^2 - 2^2$
 $= 90000 + 600 + 1 + 40000 - 4$
 $= 130597$
 $\therefore n = 6$

- 24 $(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$
 $= \frac{1}{2}(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$
 $= \frac{1}{2}(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$
 $= \frac{1}{2}(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)$
 $= \frac{1}{2}(3^8-1)(3^8+1) = \frac{1}{2}(3^{16}-1)$
 따라서 $a=2, b=16$ 이므로 $a+b=18$
- 25 $3 \times 5 \times 17 \times 257 + 1$
 $= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1) + 1$
 $= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1) + 1$
 $= (2^8-1)(2^8+1) + 1$
 $= (2^{16}-1) + 1 = 2^{16}$
 $\therefore n = 16$
- 26 직사각형 OCDE에서 $\overline{OC} = a, \overline{OE} = b$ 라 하면 둘레의 길이가 14이므로 $a+b=7$
 직사각형 OCDE의 대각선의 길이는 반지름의 길이와 같으므로
 $\sqrt{a^2+b^2} = 5 \quad \therefore a^2+b^2 = 25$
 $a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ 이므로
 $25 = 7^2 - 2ab \quad \therefore ab = 12$
 따라서 구하는 직사각형 OCDE의 넓이는 12이다.
- 27 직육면체의 가로 길이, 세로 길이, 높이를 각각 a, b, c 라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 40이므로
 $4(a+b+c) = 40 \quad \therefore a+b+c = 10$
 또 겉넓이가 64이므로
 $2(ab+bc+ca) = 64 \quad \therefore ab+bc+ca = 32$
 $\therefore a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$
 $= 10^2 - 2 \times 32 = 36$
 따라서 구하는 직육면체의 대각선의 길이는
 $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 6$
- 28 두 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 a, b 라 하면
 $\overline{AB} = 5\sqrt{2}$ 이므로 $a+b = 5\sqrt{2}$
 또 두 정육면체의 부피의 합이 $70\sqrt{2}$ 이므로
 $a^3+b^3 = 70\sqrt{2}$
 $a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ 이므로
 $70\sqrt{2} = (5\sqrt{2})^3 - 3ab \times 5\sqrt{2} \quad \therefore ab = 12$
 따라서 구하는 두 정육면체의 겉넓이의 합은
 $6(a^2+b^2) = 6\{(a+b)^2 - 2ab\}$
 $= 6\{(5\sqrt{2})^2 - 2 \times 12\} = 156$

$$\begin{array}{r}
 29 \quad \frac{x^2-2x+2}{x+1} \overline{) x^3 - x^2 - 4} \\
 \underline{x^3 + x^2} \\
 -2x^2 \\
 \underline{-2x^2 - 2x} \\
 2x - 4 \\
 \underline{2x + 2} \\
 -6
 \end{array}$$

따라서 $a=-2$, $b=-2$, $c=4$, $d=-6$ 이므로
 $a+b+c+d=-6$

$$\begin{array}{r}
 30 \quad \frac{x+1}{x^2+x+2} \overline{) x^3 + 2x^2 - 5x + 3} \\
 \underline{x^3 + x^2 + 2x} \\
 x^2 - 7x + 3 \\
 \underline{x^2 + x + 2} \\
 -8x + 1
 \end{array}$$

따라서 몫은 $x+1$, 나머지는 $-8x+1$ 이므로
 $a=1$, $b=1$, $c=-8$, $d=1$
 $\therefore abcd=-8$

$$\begin{array}{r}
 31 \quad \frac{x^2+x+5}{x^2-x-1} \overline{) x^4 + 3x^2 - 2x + 1} \\
 \underline{x^4 - x^3 - x^2} \\
 x^3 + 4x^2 - 2x \\
 \underline{x^3 - x^2 - x} \\
 5x^2 - x + 1 \\
 \underline{5x^2 - 5x - 5} \\
 4x + 6
 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=x^2+x+5$, $R(x)=4x+6$ 이므로
 $Q(-1)+R(1)=5+10=15$

$$\begin{array}{r}
 32 \quad \frac{x+2}{x^2-x+b} \overline{) x^3 + x^2 + ax + 6} \\
 \underline{x^3 - x^2 + bx} \\
 2x^2 + (a-b)x + 6 \\
 \underline{2x^2 - 2x + 2b} \\
 (a-b+2)x + 6 - 2b
 \end{array}$$

이때 x^3+x^2+ax+6 이 x^2-x+b 로 나누어떨어지므로
 $a-b+2=0$, $6-2b=0$
 따라서 $a=1$, $b=3$ 이므로
 $a+b=4$

$$\begin{array}{r}
 33 \quad 4x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = A(4x-3) + x + 1 \\
 \therefore A = (4x^3 - 3x^2 + 4x - 3) \div (4x-3) \\
 \frac{x^2+1}{4x-3} \overline{) 4x^3 - 3x^2 + 4x - 3} \\
 \underline{4x^3 - 3x^2} \\
 4x - 3 \\
 \underline{4x - 3} \\
 0
 \end{array}$$

$\therefore A=x^2+1$

$$\begin{array}{r}
 34 \quad f(x) = (x^2 - x - 2)(2x + 6) + 2x - 7 \\
 = 2x^3 + 4x^2 - 8x - 19 \\
 \frac{x^2+4x+4}{2x-4} \overline{) 2x^3 + 4x^2 - 8x - 19} \\
 \underline{2x^3 - 4x^2} \\
 8x^2 - 8x \\
 \underline{8x^2 - 16x} \\
 8x - 19 \\
 \underline{8x - 16} \\
 -3
 \end{array}$$

따라서 $f(x)$ 를 $2x-4$ 로 나누었을 때의 몫은 x^2+4x+4 ,
 나머지는 -3 이다.

$$\begin{array}{r}
 35 \quad \text{직육면체의 높이를 } A \text{라 하면} \\
 (x-2)(x+3)A = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \\
 (x^2+x-6)A = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 \\
 \therefore A = (x^3 + 2x^2 - 5x - 6) \div (x^2+x-6) \\
 \frac{x+1}{x^2+x-6} \overline{) x^3 + 2x^2 - 5x - 6} \\
 \underline{x^3 + x^2 - 6x} \\
 x^2 + x - 6 \\
 \underline{x^2 + x - 6} \\
 0
 \end{array}$$

따라서 구하는 직육면체의 높이는 $x+1$ 이다.

$$\begin{array}{r}
 36 \quad \frac{2x+1}{x^2-4x+2} \overline{) 2x^3 - 7x^2 + 5} \\
 \underline{2x^3 - 8x^2 + 4x} \\
 x^2 - 4x + 5 \\
 \underline{x^2 - 4x + 2} \\
 3
 \end{array}$$

$\therefore 2x^3-7x^2+5=(x^2-4x+2)(2x+1)+3$
 이때 $x^2-4x+2=0$ 이므로 구하는 식의 값은 3이다.

- 37 다항식 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)Q(x) + R \\ &= \frac{1}{2} \times 2(x-2)Q(x) + R \\ &= (2x-4) \times \frac{1}{2}Q(x) + R \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 를 $2x-4$ 로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{2}Q(x)$, 나머지는 R 이다.

- 38 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$ 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-1)Q(x) + R \\ \text{양변에 } x \text{를 곱하면} \\ xf(x) &= x(2x-1)Q(x) + Rx \\ &= 2x\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x) + R\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}R \\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\{2xQ(x) + R\} + \frac{1}{2}R \end{aligned}$$

따라서 $xf(x)$ 를 $x-\frac{1}{2}$ 로 나누었을 때의 몫은 $2xQ(x) + R$, 나머지는 $\frac{1}{2}R$ 이다.

- 39 조립제법을 이용하여 $(x^3-2x+5) \div (x+1)$ 을 하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -2 & 5 \\ & & -1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 6 \end{array}$$

따라서 $a=-1, b=0, c=-1, d=-1, e=6$ 이므로 $a+b+c+d+e=3$

- 40 주어진 조립제법에서 다항식 $f(x)$ 를 $x+\frac{2}{3}$ 로 나누었을 때의 몫이 $3x^2-3x+6$, 나머지가 -6 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x+\frac{2}{3}\right)(3x^2-3x+6) - 6 \\ &= 3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x^2-x+2) - 6 \\ &= (3x+2)(x^2-x+2) - 6 \end{aligned}$$

따라서 $f(x)$ 를 $3x+2$ 로 나누었을 때의 몫은 x^2-x+2 , 나머지는 -6 이다.

I-2 01 나머지정리

기초 문제 Training

12쪽

- 1 (1) ○ (2) × (3) ○ (4) × (5) ○
- 2 (1) $a=1, b=-4, c=0$ (2) $a=3, b=0, c=-4$
- 3 (1) $a=1, b=-4, c=2$ (2) $a=-1, b=2, c=-2$
- 4 (1) $a=3, b=-1$ (2) $a=3, b=-2$
(3) $a=1, b=-2, c=5$ (4) $a=1, b=3, c=3$
- 5 (1) 1 (2) 3 (3) 1 (4) 31
- 6 (1) -2 (2) -2 (3) -18 (4) 73
- 7 (1) 2 (2) -2
- 8 (1) 1 (2) -1

핵심 유형 Training

13~19쪽

- | | | | | |
|-------|-------|-----------------------------|----------------|------|
| 1 ④ | 2 ② | 3 8 | 4 31 | 5 ② |
| 6 19 | 7 13 | 8 -300 | 9 ⑤ | 10 ① |
| 11 32 | 12 ⑤ | 13 ③ | 14 ④ | 15 ④ |
| 16 ③ | 17 ① | 18 $a=2, b=3, c=4, 1020304$ | | |
| 19 ⑤ | 20 ⑤ | 21 -1 | 22 ① | 23 ① |
| 24 10 | 25 ② | 26 ① | 27 $-x^2-3x-1$ | |
| 28 ④ | 29 ⑤ | 30 ④ | 31 ⑤ | 32 ③ |
| 33 ③ | 34 11 | 35 ① | 36 ② | 37 ⑤ |
| 38 ① | 39 2 | 40 ② | 41 ① | 42 ② |
| 43 13 | | | | |

- 1 ㄱ. $2x-1-x^2=-(x-1)^2$
 $-x^2+2x-1=-x^2+2x-1$
ㄴ. $(x+3)^2-2x+1=(x+1)^2+2x+7$
 $x^2+4x+10=x^2+4x+8$
ㄷ. $(x-4)^2-2x=(x-5)^2-9$
 $x^2-10x+16=x^2-10x+16$
ㄹ. $2(x+1)^2-2x-3=3x^2-(x-1)^2$
 $2x^2+2x-1=2x^2+2x-1$
따라서 보기 중 항등식인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

2 $(2x+3y+5)k+3x-y-9=0$
 이 등식이 k 에 대한 항등식이므로
 $2x+3y+5=0, 3x-y-9=0$
 두 식을 연립하여 풀면 $x=2, y=-3$
 $\therefore x+y=-1$

3 $x=1$ 을 대입하면
 $a+b(k+1)+a(k-2)=4$
 $(a+b)k-a+b-4=0$
 이 등식이 k 에 대한 항등식이므로
 $a+b=0, -a+b-4=0$
 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2, b=2$
 $\therefore a^2+b^2=(-2)^2+2^2=8$

4 $x^3-ax^2-bx+8=x^3+(2-c)x^2-(2c+1)x+c$
 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 $-a=2-c, -b=-2c-1, 8=c$
 $\therefore a=6, b=17, c=8$
 $\therefore a+b+c=31$

5 $x^3+(a+b)x^2+(ab-6)x-6a=x^3+5x^2-6a$
 이 등식이 x 에 대한 항등식이므로
 $a+b=5, ab-6=0$
 $\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
 $=5^2-2 \times 6=13$

6 주어진 등식에 $x=y+1$ 을 대입하면
 $(y+1)^3+3(y+1)-14=y^3+ay^2+by+c$
 $y^3+3y^2+6y-10=y^3+ay^2+by+c$
 이 등식이 y 에 대한 항등식이므로
 $a=3, b=6, c=-10$
 $\therefore a+b-c=19$

7 $\frac{ax+2y+2b}{5x+y+3}=k$ (k 는 상수)라 하면
 $ax+2y+2b=5kx+ky+3k$
 $\therefore (a-5k)x+(2-k)y+2b-3k=0$
 이 등식이 x, y 에 대한 항등식이므로
 $a-5k=0, 2-k=0, 2b-3k=0$
 $\therefore k=2, a=10, b=3$
 $\therefore a+b=13$

8 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $10=c$
 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $5=a+c$
 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $17=a+2b+c$
 $\therefore a=-5, b=6, c=10$
 $\therefore abc=-300$

9 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $3=c$
 양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $5=-2b+c$
 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $8=3a+b+c$
 $\therefore a=2, b=-1, c=3$
 $\therefore a+b+c=4$

10 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $0=1+p+q$
 $\therefore p+q=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 양변에 $x^2=2$ 를 대입하면 $0=2^3+2p+q$
 $\therefore 2p+q=-8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $p=-7, q=6$
 $\therefore pq=-42$

11 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $-16=a_0$
 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $16=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{19}$
 $\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{19}=16-a_0=32$

12 양변에 $x=-1$ 을 대입하면
 $(1+2-1)^5=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{10}$
 $\therefore a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{10}=32$

13 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $-1=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{30} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 양변에 $x=-1$ 을 대입하면
 $1=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{30} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}+\textcircled{㉡}$ 을 하면
 $0=2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{30})$
 $\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{30}=0$

14 x^3+ax+b 를 x^2-3x+2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라
 하면 나머지가 $2x+1$ 이므로
 $x^3+ax+b=(x^2-3x+2)Q(x)+2x+1$
 $= (x-1)(x-2)Q(x)+2x+1$
 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $1+a+b=3$
 $\therefore a+b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 양변에 $x=2$ 를 대입하면 $8+2a+b=5$
 $\therefore 2a+b=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=-5, b=7$
 $\therefore b-a=12$

- 15 x^3+ax^2+bx-8 을 x^2-3x-4 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^3+ax^2+bx-8=(x^2-3x-4)Q(x) \\ = (x+1)(x-4)Q(x)$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $-1+a-b-8=0$

$$\therefore a-b=9 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

양변에 $x=4$ 를 대입하면 $64+16a+4b-8=0$

$$\therefore 4a+b=-14 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-10$

$$\therefore ab=10$$

- 16 $x^3+ax^2+bx+10$ 을 x^2-x+2 로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c 는 상수)라 하면 나머지가 4이므로

$$x^3+ax^2+bx+10=(x^2-x+2)(x+c)+4 \\ =x^3+(c-1)x^2+(2-c)x+2c+4$$

이 등식이 x 에 대한 항등식이므로

$$a=c-1, b=2-c, 10=2c+4$$

따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=3$ 이므로

$$a-b=3$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 17 & 2 & 1 & -8 & 17 & -5 \\ & & 2 & -12 & 10 & \\ \hline & 2 & 1 & -6 & 5 & 5 \triangleleft d \\ & & 2 & -8 & & \\ \hline & 2 & 1 & -4 & -3 & \triangleleft c \\ & & 2 & & & \\ \hline a \triangleright 1 & & -2 & & & \triangleleft b \end{array}$$

$$\therefore x^3-8x^2+17x-5 \\ = (x-2)^3-2(x-2)^2-3(x-2)+5$$

따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=-3$, $d=5$ 이므로

$$ad+bc=11$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 18 & -1 & 1 & 5 & 10 & 10 \\ & & -1 & -4 & -6 & \\ \hline & -1 & 1 & 4 & 6 & 4 \triangleleft c \\ & & -1 & -3 & & \\ \hline & -1 & 1 & 3 & 3 & \triangleleft b \\ & & -1 & & & \\ \hline & 1 & 2 & & & \triangleleft a \end{array}$$

$$\therefore f(x)=(x+1)^3+2(x+1)^2+3(x+1)+4$$

$$\therefore a=2, b=3, c=4$$

$$\therefore f(99)=100^3+2 \times 100^2+3 \times 100+4 \\ =1000000+20000+300+4 \\ =1020304$$

- 19 나머지정리에 의하여 $f(2)=5$

$$\text{따라서 } (x^2+1)f(x) \text{를 } x-2 \text{로 나누었을 때의 나머지는} \\ (2^2+1)f(2)=5 \times 5=25$$

- 20 나머지정리에 의하여 $f(-1)=5$, $g(-1)=4$

$$\text{따라서 } f(x)g(x) \text{를 } x+1 \text{로 나누었을 때의 나머지는} \\ f(-1)g(-1)=5 \times 4=20$$

- 21 $f(x)=x^3+ax^2-2x+1$ 이라 하면 나머지정리에 의하여 $f(-1)=f(2)$ 이므로

$$-1+a+2+1=8+4a-4+1 \\ -3a=3 \quad \therefore a=-1$$

- 22 나머지정리에 의하여 $f(2)=3$ 이므로

$$8+2a-3=3 \quad \therefore a=-1$$

$$\therefore f(x)=x^3-x-3$$

따라서 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(-1)=-1+1-3=-3$$

- 23 나머지정리에 의하여 $f(1)=3$, $f(-3)=7$

$f(x)$ 를 x^2+2x-3 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x^2+2x-3)Q(x)+ax+b \\ = (x-1)(x+3)Q(x)+ax+b$$

양변에 $x=1$, $x=-3$ 을 각각 대입하면

$$f(1)=a+b, f(-3)=-3a+b$$

$$\therefore a+b=3, -3a+b=7$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=4$

따라서 구하는 나머지는 $-x+4$ 이다.

- 24 나머지정리에 의하여 $f(-1)=6$, $f(2)=3$

$x^2f(x)$ 를 x^2-x-2 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$x^2f(x)=(x^2-x-2)Q(x)+ax+b \\ = (x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$$

양변에 $x=-1$, $x=2$ 를 각각 대입하면

$$f(-1)=-a+b, 4f(2)=2a+b$$

$$\therefore -a+b=6, 2a+b=12$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=8$

따라서 $R(x)=2x+8$ 이므로

$$R(1)=2+8=10$$

- 25 $f(x)$ 를 x^2+5x-6 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면 나머지가 $2x+4$ 이므로

$$f(x) = (x^2+5x-6)Q_1(x) + 2x+4 \\ = (x+6)(x-1)Q_1(x) + 2x+4$$

양변에 $x=-6$, $x=1$ 을 각각 대입하면

$$f(-6) = -8, f(1) = 6$$

$f(x)$ 를 x^2-6x+8 로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$ 라 하면

나머지는 $-x+1$ 이므로

$$f(x) = (x^2-6x+8)Q_2(x) - x+1 \\ = (x-2)(x-4)Q_2(x) - x+1$$

양변에 $x=2$, $x=4$ 를 각각 대입하면

$$f(2) = -1, f(4) = -3$$

한편 $f(x)$ 를 x^2-5x+4 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

나머지를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x^2-5x+4)Q(x) + ax+b \\ = (x-1)(x-4)Q(x) + ax+b$$

양변에 $x=1$, $x=4$ 를 각각 대입하면

$$f(1) = a+b, f(4) = 4a+b$$

$$\therefore a+b=6, 4a+b=-3$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=9$

따라서 구하는 나머지는 $-3x+9$ 이다.

- 26 $f(x)$ 를 $x(x-3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$ 라 하면 나머지가 $-2x+2$ 이므로

$$f(x) = x(x-3)Q_1(x) - 2x+2$$

양변에 $x=0$, $x=3$ 을 각각 대입하면

$$f(0) = 2, f(3) = -4$$

$f(x)$ 를 $(x+2)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$

라 하면 나머지가 $-4x+8$ 이므로

$$f(x) = (x+2)(x-3)Q_2(x) - 4x+8$$

양변에 $x=-2$, $x=3$ 을 각각 대입하면

$$f(-2) = 16, f(3) = -4$$

한편 $f(x)$ 를 $x(x+2)(x-3)$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x) = x(x+2)(x-3)Q(x) + ax^2+bx+c$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면 $f(0)=c \quad \therefore c=2$

양변에 $x=-2$ 를 대입하면 $f(-2)=4a-2b+c$

$$4a-2b+c=16 \quad \therefore 2a-b=7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변에 $x=3$ 을 대입하면 $f(3)=9a+3b+c$

$$9a+3b+c=-4 \quad \therefore 3a+b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-5$

따라서 $R(x)=x^2-5x+2$ 이므로

$$R(1)=1-5+2=-2$$

- 27 $f(x)$ 를 $(x+3)(x+2)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x+3)(x+2)(x-1)Q(x) + ax^2+bx+c \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(x)$ 를 $(x+3)(x+2)$ 로 나누었을 때의 나머지 $2x+5$

는 ax^2+bx+c 를 $(x+3)(x+2)$ 로 나누었을 때의 나머지와 같으므로

$$ax^2+bx+c = a(x+3)(x+2) + 2x+5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$f(x) = (x+3)(x+2)(x-1)Q(x) + a(x+3)(x+2) + 2x+5$$

한편 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 -5 이므로

$$f(1) = -5 \text{에서 } 12a+7 = -5 \quad \therefore a = -1$$

따라서 구하는 나머지는

$$-(x+3)(x+2) + 2x+5 = -x^2-3x-1$$

- 28 $f(x)$ 를 $(x^2+1)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f(x) = (x^2+1)(x-1)Q(x) + ax^2+bx+c \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(x)$ 를 x^2+1 로 나누었을 때의 나머지 $x+1$ 은

ax^2+bx+c 를 x^2+1 로 나누었을 때의 나머지와 같으므로

$$ax^2+bx+c = a(x^2+1) + x+1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$f(x) = (x^2+1)(x-1)Q(x) + a(x^2+1) + x+1$$

한편 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$$f(1) = 4 \text{에서 } 2a+2 = 4 \quad \therefore a = 1$$

따라서 $R(x)=x^2+x+2$ 이므로

$$R(2) = 4+2+2=8$$

- 29 나머지정리에 의하여 $f(-1)=3$

따라서 $f(2x-7)$ 을 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$f(2 \times 3 - 7) = f(-1) = 3$$

- 30 나머지정리에 의하여 $f(2)=2$

따라서 $(x^2+2)f(x^2-2)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$\{(-2)^2+2\}f((-2)^2-2) = 6f(2) = 6 \times 2 = 12$$

- 31 $xf(4x+5)$ 를 $2x+3$ 으로 나누었을 때의 나머지는

$$-\frac{3}{2}f\left(4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 5\right) = -\frac{3}{2}f(-1)$$

$f(x)$ 를 x^2-2x-3 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $x-1$ 이므로

$$f(x) = (x^2-2x-3)Q(x) + x-1$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면 $f(-1)=-2$

$$\text{따라서 구하는 나머지는 } -\frac{3}{2}f(-1) = -\frac{3}{2} \times (-2) = 3$$

- 32** $f(x)=(x-2)Q(x)+3$ 이므로
 $f(1)=2$ 에서 $-Q(1)+3=2 \quad \therefore Q(1)=1$
- 33** $f(x)=x^{16}+3x^7-x^3$ 이라 하면 $f(-1)=-1$ 이므로
 $x^{16}+3x^7-x^3=(x+1)Q(x)-1$
 양변에 $x=1$ 을 대입하면
 $1+3-1=2Q(1)-1 \quad \therefore Q(1)=2$
- 34** $f(x)$ 를 x^2-x+1 로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $2x+1$ 이므로
 $f(x)=(x^2-x+1)Q(x)+2x+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $Q(x)$ 를 $x-3$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$ 라 하면 나머지가 2이므로
 $Q(x)=(x-3)Q'(x)+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉡}$ 을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면
 $f(x)=(x^2-x+1)\{(x-3)Q'(x)+2\}+2x+1$
 $= (x^2-x+1)(x-3)Q'(x)+2x^2+3$
 따라서 $R(x)=2x^2+3$ 이므로
 $R(2)=8+3=11$
- 35** $99=x$ 로 놓고, x^{100} 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면
 $x^{100}=(x-1)Q(x)+R$
 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $R=1$
 따라서 구하는 나머지는 1이다.
- 36** $32=x$ 로 놓으면 $2^{501}=2 \times (2^5)^{100}=2x^{100}$
 $2x^{100}$ 을 $x-1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면
 $2x^{100}=(x-1)Q(x)+R$
 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $R=2$
 따라서 구하는 나머지는 2이다.
- 37** $8=x$ 로 놓고, $x^{79}+x^{80}+x^{81}$ 을 $x+1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면
 $x^{79}+x^{80}+x^{81}=(x+1)Q(x)+R \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 양변에 $x=-1$ 을 대입하면
 $(-1)+1+(-1)=R \quad \therefore R=-1$
 $\textcircled{㉠}$ 에 $x=8$, $R=-1$ 을 대입하면
 $8^{79}+8^{80}+8^{81}=9Q(8)-1=9\{Q(8)-1\}+8$
 따라서 구하는 나머지는 8이다.
- 38** $f(x)=x^3+ax^2+bx-12$ 라 하면 인수정리에 의하여
 $f(-1)=0, f(3)=0$
 $f(-1)=0$ 에서 $-1+a-b-12=0$
 $\therefore a-b=13 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$

- $f(3)=0$ 에서 $27+9a+3b-12=0$
 $\therefore 3a+b=-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=2, b=-11$
 $\therefore a+b=-9$
- 39** $f(x)=x^4-3x^2+ax+b$ 라 하면 $f(x)$ 가 $x-1, x+2$ 를 인수로 가지므로
 $f(1)=0, f(-2)=0$
 $f(1)=0$ 에서 $1-3+a+b=0$
 $\therefore a+b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $f(-2)=0$ 에서 $16-12-2a+b=0$
 $\therefore 2a-b=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=2, b=0 \quad \therefore a-b=2$
- 40** $f(x)=x^3+ax^2+bx-8$ 이라 하면 $f(x)$ 가 x^2-x-2 , 즉 $(x+1)(x-2)$ 로 나누어떨어지므로
 $f(-1)=0, f(2)=0$
 $f(-1)=0$ 에서 $-1+a-b-8=0$
 $\therefore a-b=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $f(2)=0$ 에서 $8+4a+2b-8=0$
 $\therefore 2a+b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=3, b=-6 \quad \therefore \frac{b}{a}=-2$
- 41** 인수정리에 의하여 $f(2)=0$
 $8+2a-2=0 \quad \therefore a=-3$
 따라서 $f(x)=x^3-3x-2$ 이므로
 $f(-2)=-8+6-2=-4$
- 42** $f(2x-1)$ 이 x^2-1 , 즉 $(x+1)(x-1)$ 로 나누어떨어지므로
 $f(2 \times (-1)-1)=f(-3)=0, f(2 \times 1-1)=f(1)=0$
 $f(-3)=0$ 에서 $-27+9a-3b+3=0$
 $\therefore 3a-b=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $f(1)=0$ 에서 $1+a+b+3=0$
 $\therefore a+b=-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=1, b=-5 \quad \therefore a-b=6$
- 43** $(x+1)f(x)$ 를 $x+2$ 로 나누었을 때의 나머지가 -5 이므로 $\{(-2)+1\}f(-2)=-5, f(-2)=-5$
 $4-2a+b=5 \quad \therefore 2a-b=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $(x-2)f(x)$ 는 $x-3$ 으로 나누어떨어지므로
 $(3-2)f(3)=0, f(3)=0$
 $9+3a+b=0 \quad \therefore 3a+b=-9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=-2, b=-3$
 $\therefore a^2+b^2=(-2)^2+(-3)^2=13$

기초 문제 Training

20쪽

- 1 (1) $(a-b)(3x-2y)$ (2) $(m+1)(a+b-1)$
(3) $(a-1)(x-1)y$
- 2 (1) $(2a-3b)^2$
(2) $(2a+3b)(2a-3b)(x-y)$
(3) $(2x+3y)(3x-2y)$ (4) $(ax+5)(x+a)$
- 3 (1) $(x+y+2z)^2$ (2) $(a+b-1)^2$
(3) $(3a+1)^3$ (4) $(2x-y)^3$
- 4 (1) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$
(2) $2(2a+5b)(4a^2-10ab+25b^2)$
(3) $(a+b+1)(a^2+b^2+1-ab-a-b)$
(4) $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
- 5 (1) $(x+y+1)(x+y-5)$ (2) $(x+y+2)(x+y+3)$
- 6 (1) $(x+1)(x-1)(x^2+2)$
(2) $(x^2+x-3)(x^2-x-3)$
- 7 (1) $(x+y-2)(y+2)$ (2) $(2x+y+1)(x+y)$

핵심 유형 Training

21~26쪽

1 ⑤	2 ①	3 ①	4 ②	5 ④
6 ②	7 ④	8 ⑤	9 22	10 13
11 6	12 ③	13 ③	14 ⑤	15 ③
16 ②	17 ②	18 ③	19 ①	20 ①
21 26	22 ⑤	23 ⑤	24 ⑤	25 ②
26 ①	27 ⑤	28 ③	29 ④	30 ⑤
31 ④	32 ⑤	33 ①	34 -12	35 ③
36 ①	37 ⑤			

- 1 ⑤ $x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$
- 2 $x^3-12x^2y+48xy^2-64y^3$
 $=x^3+3 \times x^2 \times (-4y)+3 \times x \times (-4y)^2+(-4y)^3$
 $=(x-4y)^3$
 $\therefore a=-4$

- 3 $16x^4+36x^2+81=(2x)^4+(2x)^2 \times 3^2+3^4$
 $=(4x^2+6x+9)(4x^2-6x+9)$
따라서 $a=6, b=-6$ 또는 $a=-6, b=6$ 이므로
 $ab=-36$
- 4 $x(x+2y)-(x^2-1)y^2=x^2+2xy-x^2y^2+y^2$
 $=(x+y)^2-(xy)^2$
 $=(x+xy+y)(x-xy+y)$
- 5 $x^6-64=(x^3)^2-(2^3)^2=(x^3+2^3)(x^3-2^3)$
 $=(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$
따라서 x^6-64 의 인수가 아닌 것은 ④이다.
- 6 $x^3+8y^3-3xy(x+2y)$
 $=x^3+(2y)^3-3xy(x+2y)$
 $=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)-3xy(x+2y)$
 $=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2-3xy)$
 $=(x+2y)(x^2-5xy+4y^2)$
 $=(x+2y)(x-y)(x-4y)$
따라서 $x^3+8y^3-3xy(x+2y)$ 의 인수인 것은 ②이다.
- 7 $(x^2-4x+1)(x^2-4x+7)+8$
 $=(X+1)(X+7)+8$ $\blacktriangleleft x^2-4x=X$
 $=X^2+8X+15=(X+3)(X+5)$
 $=(x^2-4x+3)(x^2-4x+5)$ $\blacktriangleleft X=x^2-4x$
 $=(x-1)(x-3)(x^2-4x+5)$
따라서 $a=-3, b=-4, c=5$ 이므로 $a+b+c=-2$
- 8 $(x+2)(x+3)(x-5)(x-6)+16$
 $=\{(x+2)(x-5)\}\{(x+3)(x-6)\}+16$
 $=(x^2-3x-10)(x^2-3x-18)+16$
 $=(X-10)(X-18)+16$ $\blacktriangleleft x^2-3x=X$
 $=X^2-28X+196$
 $=(X-14)^2$
 $=(x^2-3x-14)^2$ $\blacktriangleleft X=x^2-3x$
따라서 $a=-3, b=-14$ 이므로 $ab=42$
- 9 $(x^2+3x+2)(x^2+9x+20)-10$
 $=(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)-10$
 $=\{(x+1)(x+5)\}\{(x+2)(x+4)\}-10$
 $=(x^2+6x+5)(x^2+6x+8)-10$
 $=(X+5)(X+8)-10$ $\blacktriangleleft x^2+6x=X$
 $=X^2+13X+30=(X+3)(X+10)$
 $=(x^2+6x+3)(x^2+6x+10)$ $\blacktriangleleft X=x^2+6x$
따라서 $a=6, b=6, c=10$ 이므로 $a+b+c=22$

- 10** $x^2=X$ 로 놓으면
 $x^4-13x^2+36=X^2-13X+36=(X-4)(X-9)$
 $= (x^2-4)(x^2-9) \quad \blacktriangleleft X=x^2$
 $= (x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$
 따라서 $a=-2, b=3$ 또는 $a=3, b=-2$ 이므로
 $a^2+b^2=13$
- 11** $x^2=X$ 로 놓으면
 $x^4-18x^2+81=X^2-18X+81=(X-9)^2$
 $= (x^2-9)^2 \quad \blacktriangleleft X=x^2$
 $= (x+3)^2(x-3)^2$
 $a>b$ 이므로 $a=3, b=-3 \quad \therefore a-b=6$
- 12** $x^4+x^2+25=(x^4+10x^2+25)-9x^2$
 $= (x^2+5)^2-(3x)^2$
 $= (x^2-3x+5)(x^2+3x+5)$
 따라서 $a=5, b=3, c=5$ 이므로 $a+b+c=13$
- 13** $x^4+3x^2y^2+4y^4=(x^4+4x^2y^2+4y^4)-x^2y^2$
 $= (x^2+2y^2)^2-(xy)^2$
 $= (x^2+xy+2y^2)(x^2-xy+2y^2)$
 따라서 $x^4+3x^2y^2+4y^4$ 의 인수인 것은 ③이다.
- 14** $2x^2-3xy-2y^2+7x+11y-15$
 $= 2x^2-(3y-7)x-(2y^2-11y+15)$
 $= 2x^2-(3y-7)x-(2y-5)(y-3)$
 $= (2x+y-3)(x-2y+5)$
 따라서 $a=-3, b=-2, c=5$ 이므로 $abc=30$
- 15** $x^2-y^2-z^2+2yz+x+y-z$
 $= x^2+x-(y^2-2yz+z^2)+(y-z)$
 $= x^2+x-(y-z)^2+(y-z)$
 $= x^2+x-(y-z)(y-z-1)$
 $= (x+y-z)(x-y+z+1)$
- 16** $(a+b)c^3-(a^2+ab+b^2)c^2+a^2b^2$
 $= ac^3+bc^3-a^2c^2-abc^2-b^2c^2+a^2b^2$
 $= (b^2-c^2)a^2+(c^3-bc^2)a+bc^3-b^2c^2$
 $= (b-c)(b+c)a^2-c^2(b-c)a-bc^2(b-c)$
 $= (b-c)\{(b+c)a^2-c^2a-bc^2\}$
 $= (b-c)\{(a^2-c^2)b+ac(a-c)\}$
 $= (b-c)(a-c)\{(a+c)b+ac\}$
 $= (b-c)(a-c)(ab+bc+ca)$
 따라서 $(a+b)c^3-(a^2+ab+b^2)c^2+a^2b^2$ 의 인수인 것은 ②이다.

- 17** $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$
 $= ab^2-ac^2+bc^2-ba^2+ca^2-cb^2$
 $= (c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc^2-cb^2$
 $= (c-b)a^2-(c-b)(c+b)a+bc(c-b)$
 $= (c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}$
 $= (c-b)(a-b)(a-c)$
 $= (a-b)(b-c)(c-a)$
 따라서 $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ 의 인수인 것은 ②이다.
- 18** $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc$
 $= a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc$
 $= (b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+b^2c+bc^2$
 $= (b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$
 $= (b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$
 $= (a+b)(b+c)(c+a)$
- 19** $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
 $= (b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$
 $= (b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
 $= (b-c)(a-b)(a-c)$
 $= -(a-b)(b-c)(c-a)$
 $\therefore \frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
 $= \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = -1$
- 20** x^3-2x^2+ax+6 이 $x-1$ 로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여
 $1-2+a+6=0 \quad \therefore a=-5$
 x^3-2x^2-5x+6 1 | 1 -2 -5 6
 $= (x-1)(x^2-x-6)$ 1 -1 -6
 $= (x-1)(x+2)(x-3)$ 1 -1 -6 0
 따라서 $b=2, c=-3$ 또는
 $b=-3, c=2$ 이므로
 $a+b+c=-6$
- 21** $f(x)=6x^3+5x^2-13x-12$ 라 하면 $f(-1)=0$
 $6x^3+5x^2-13x-12$ -1 | 6 5 -13 -12
 $= (x+1)(6x^2-x-12)$ -6 1 12
 $= (x+1)(2x-3)(3x+4)$ 6 -1 -12 0
 따라서 $a=1, b=-3, c=4$ 이므로
 $a^2+b^2+c^2=1^2+(-3)^2+4^2=26$

- 22 $f(x)=x^4+2x^3+x^2-4$ 라 하면 $f(1)=0$, $f(-2)=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & -4 \\ & & 1 & 3 & 4 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 4 & 4 & 0 \\ & & -2 & -2 & -4 & \\ 1 & 1 & 2 & & 0 & \end{array}$$

$$x^4+2x^3+x^2-4=(x-1)(x+2)(x^2+x+2)$$

따라서 $x^4+2x^3+x^2-4$ 의 인수가 아닌 것은 ⑤이다.

- 23 $f(x)=x^3-3ax^2-a^2x+3a^3$ 이라 하면 $f(a)=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} a & 1 & -3a & -a^2 & 3a^3 \\ & & a & -2a^2 & -3a^3 \\ 1 & 1 & -2a & -3a^2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3-3ax^2-a^2x+3a^3 &= (x-a)(x^2-2ax-3a^2) \\ &= (x-a)(x+a)(x-3a) \end{aligned}$$

따라서 세 일차식의 합은

$$\begin{aligned} (x-a)+(x+a)+(x-3a) &= 3x-3a=3x-12 \\ -3a &= -12 \quad \therefore a=4 \end{aligned}$$

- 24 $f(x)=x^3-x^2-8x+12$ 라 하면 $f(2)=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -1 & -8 & 12 \\ & & 2 & 2 & -12 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

그런데 $x>2$ 이므로 원기둥

의 밑면의 반지름의 길이는 $x-2$, 높이는 $x+3$ 이다.

- 25 $h(x)=x^4+3x^3-3x^2-11x-6$ 이라 하면 $h(-1)=0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 3 & -3 & -11 & -6 \\ & & -1 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -5 & -6 & 0 \\ & & -1 & -1 & 6 & \\ 1 & 1 & -6 & & 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^4+3x^3-3x^2-11x-6 &= (x+1)^2(x^2+x-6) \\ &= (x+1)^2(x+3)(x-2) \end{aligned}$$

$f(x)$, $g(x)$ 는 각각 x^2 의 계수가 1인 이차식이고

$f(-3) \neq 0$, $g(2) \neq 0$ 이므로

$$f(x)=(x+1)(x-2), g(x)=(x+1)(x+3)$$

$$\therefore f(1)=2 \times (-1)=-2$$

- 26 $x^4-4x^3-3x^2-4x+1=x^2\left(x^2-4x-3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)-5\right\}$$

$$=x^2\left(x+\frac{1}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-5\right)$$

$$=(x^2+x+1)(x^2-5x+1)$$

따라서 두 이차식의 합은

$$(x^2+x+1)+(x^2-5x+1)=2x^2-4x+2$$

- 27 $x^4+2x^3-x^2+2x+1$

$$\begin{aligned} &=x^2\left(x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \\ &=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\right\} \\ &=x^2\left(x+\frac{1}{x}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right) \\ &=(x^2+3x+1)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

따라서 $x^4+2x^3-x^2+2x+1$ 의 인수인 것은 ⑤이다.

- 28 $x^4+3x^3-2x^2+3x+1$

$$\begin{aligned} &=x^2\left(x^2+3x-2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \\ &=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-4\right\} \\ &=x^2\left(x+\frac{1}{x}+4\right)\left(x+\frac{1}{x}-1\right) \\ &=(x^2+4x+1)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

따라서 $a=4$, $b=1$, $c=-1$

또는 $a=-1$, $b=1$, $c=4$ 이므로

$$a^2+b^2+c^2=18$$

- 29 $x^3-x^2y-xy^2+y^3=x^2(x-y)-y^2(x-y)$

$$=(x-y)(x^2-y^2)$$

$$=(x-y)^2(x+y)$$

이때 $x+y=2$, $x-y=2\sqrt{3}$ 이므로

$$(x-y)^2(x+y)=(2\sqrt{3})^2 \times 2=24$$

- 30 $a-b=2-\sqrt{3}$, $b-c=2+\sqrt{3}$ 을 변끼리 더하면 $a-c=4$

$$\begin{aligned} \therefore bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b) &= (b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c) \\ &= (b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\} \\ &= (b-c)(a-b)(a-c) \\ &= (2+\sqrt{3}) \times (2-\sqrt{3}) \times 4=4 \end{aligned}$$

- 31 $a^3+b^3+c^3=3abc$ 이므로

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

$$\therefore a+b+c=0 \text{ 또는 } a=b=c$$

그런데 $a+b+c=12$ 이므로 $a=b=c$

$$a+b+c=12 \text{에서 } 3a=12$$

$$\therefore a=b=c=4$$

$$\therefore ab+bc+ca=4^2+4^2+4^2=48$$

32 $999=a$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} x &= \frac{999^3+1}{998 \times 999+1} = \frac{a^3+1}{(a-1)a+1} \\ &= \frac{a^3+1}{a^2-a+1} = \frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1} \\ &= a+1 \\ &= 999+1=1000 \\ \therefore \frac{x-1}{x+1} &= \frac{1000-1}{1000+1} = \frac{999}{1001} \end{aligned}$$

33 $f(x)=x^3-3x-2$ $-1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3 & -2 \\ & -1 & 1 & 2 \\ & 1 & -1 & -2 \end{array} \right| \begin{array}{c} -2 \\ 2 \\ 0 \end{array}$

$$\begin{aligned} &= (x+1)(x^2-x-2) \\ &= (x+1)^2(x-2) \\ \therefore f(99) &= (99+1)^2(99-2) \\ &= 100^2 \times 97 = 970000 \end{aligned}$$

34 $11^4-6^4=(11^2)^2-(6^2)^2=(11^2-6^2)(11^2+6^2)$

$$\begin{aligned} &= (11-6)(11+6)(11^2+6^2) \\ &= 5 \times 17 \times 157 \end{aligned}$$

그런데 a, b 는 $a < b$ 이고 1이 아닌 두 자연수이므로
 $a=5, b=17$
 $\therefore a-b=-12$

35 $10=x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} &10 \times 11 \times 12 \times 13 + 1 \\ &= x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 \\ &= \{x(x+3)\} \{(x+1)(x+2)\} + 1 \\ &= (x^2+3x)(x^2+3x+2) + 1 \\ &= (x^2+3x)^2 + 2(x^2+3x) + 1 \\ &= (x^2+3x+1)^2 \\ &= (100+30+1)^2 = 131^2 \\ \therefore \sqrt{10 \times 11 \times 12 \times 13 + 1} &= \sqrt{131^2} = 131 \end{aligned}$$

36 $(b+c)(a^2-bc)-a(b^2-c^2)$

$$\begin{aligned} &= (b+c)\{(a^2-bc)-a(b-c)\} \\ &= (b+c)\{a^2-(b-c)a-bc\} \\ &= (b+c)(a+c)(a-b)=0 \end{aligned}$$

이때 $b+c > 0, a+c > 0$ 이므로 $a-b=0$
 따라서 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

37 $a^3-a^2b+ab^2-b^3-ac^2+bc^2$

$$\begin{aligned} &= a^2(a-b)+b^2(a-b)-c^2(a-b) \\ &= (a-b)(a^2+b^2-c^2)=0 \end{aligned}$$

그런데 $a \neq b$ 이므로 $a^2+b^2-c^2=0$
 따라서 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

II-1 01 복소수의 뜻과 사칙연산

기초 문제 Training

28쪽

- (1) 2, 3 (2) $-1, -\sqrt{3}$ (3) 0, -3 (4) 5, 0
- 실수: $\angle, \square$, 허수: $\angle, \square, \square, \square$, 순허수: $\square, \square$
- (1) $a=1, b=4$ (2) $a=2, b=1$
 (3) $a=-3, b=6$ (4) $a=1, b=4$
- (1) $4+3i$ (2) $-5-2i$ (3) $-6i$ (4) -6
- (1) $9+i$ (2) $-10-2i$ (3) 13 (4) $16+11i$
- (1) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$ (2) $-\frac{7}{25}+\frac{24}{25}i$
- (1) 0 (2) 0
- (1) $2i$ (2) $-3\sqrt{2}i$ (3) $\frac{1}{4}i$ (4) $-\frac{3}{5}i$
- (1) $3\sqrt{2}i$ (2) -6 (3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ (4) 3

핵심 유형 Training

29~34쪽

1 $\square$	2 ③	3 ⑤	4 ②	5 ④
6 $7+2i$	7 3	8 ②	9 ③	10 0, -6
11 ②	12 10	13 ③	14 10	15 ①
16 ②	17 ⑤	18 3	19 $\angle, \square, \square$	
20 ③	21 ⑤	22 ①	23 ②	24 ②
25 ③	26 ⑤	27 5	28 1	29 ①
30 ⑤	31 13	32 ①	33 ④	34 ③
35 8	36 ③	37 6	38 32	39 1
40 $\angle, \square$	41 3	42 $-2b$		

- $\angle$. 실수부분은 a , 허수부분은 b 이다.
 $\square$. $a=0$ 이고 $b=0$ 이면 $a+bi=0$ 이므로 실수이다.
 $\square$. $b=0$ 이면 $a+bi=a$ 이므로 실수이다.
 따라서 보기 중 옳은 것은 $\square$ 이다.

2 실수는 $2-3\sqrt{5}$, 0 , $\frac{\pi}{2}$ -1의 3개이므로 $a=3$
 순허수는 $-7i$, $-\sqrt{35}i$ 의 2개이므로 $b=2$
 순허수가 아닌 허수는 $\sqrt{3}-\frac{i}{2}$, $2-2i$, $-3+\sqrt{3}i$ 의 3개이
 므로 $c=3$
 $\therefore a-b+c=3-2+3=4$

3 ① $(-1+4i)+(3i-1)=-2+7i$
 ② $(-2+3i)-(3+i)=-2+3i-3-i=-5+2i$
 ③ $(2i-3)^2=-4-12i+9=5-12i$
 ④ $(2-3i)(3+i)=6+2i-9i+3=9-7i$
 ⑤ $\frac{7-i}{i-1}=\frac{(7-i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\frac{-8-6i}{2}=-4-3i$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

4
$$\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}i}{\sqrt{6}+2\sqrt{3}i}+\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}i}{\sqrt{6}-2\sqrt{3}i}$$

$$=\frac{(\sqrt{6}-2\sqrt{3}i)^2}{(\sqrt{6}+2\sqrt{3}i)(\sqrt{6}-2\sqrt{3}i)}+\frac{(\sqrt{6}+2\sqrt{3}i)^2}{(\sqrt{6}-2\sqrt{3}i)(\sqrt{6}+2\sqrt{3}i)}$$

$$=\frac{-6-12\sqrt{2}i}{18}+\frac{-6+12\sqrt{2}i}{18}$$

$$=-\frac{12}{18}=-\frac{2}{3}$$

5
$$(1+3i)(1-i)+\frac{1+3i}{1-i}=4+2i+\frac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$=4+2i+\frac{-2+4i}{2}$$

$$=3+4i$$

6
$$(1+i) \odot (2-3i)$$

$$=(1+i)(2-3i)+\{(1+i)+(2-3i)\}i$$

$$=5-i+(3-2i)i$$

$$=5-i+3i+2$$

$$=7+2i$$

7
$$z=i(a-i)^2-8i=2a+(a^2-9)i$$

 복소수 z 가 실수이려면
 $a^2-9=0$, $(a+3)(a-3)=0$
 $\therefore a=3$ ($\because a>0$)

8
$$z=(1+i)a-2a+3-i=(-a+3)+(a-1)i$$

 복소수 z 가 순허수가 되려면 $-a+3=0$, $a-1 \neq 0$
 $\therefore a=3$, $a \neq 1 \quad \therefore z=(3-1)i=2i$
 따라서 $\alpha=3$, $\beta=2i$ 이므로
 $\alpha+\beta^2=3+(2i)^2=-1$

9
$$z=(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$$

$$=(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$$

 복소수 z 가 순허수이려면
 $x^2+4x+3=0$, $x^2+2x-3 \neq 0$
 (i) $x^2+4x+3=0$ 에서 $(x+3)(x+1)=0$
 $\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$
 (ii) $x^2+2x-3 \neq 0$ 에서 $(x+3)(x-1) \neq 0$
 $\therefore x \neq -3$, $x \neq 1$
 (i), (ii)에 의하여 $x=-1$

10 $z=a+bi$ 이므로 $1+i+z=(a+1)+(b+1)i$
 (가)에서 $(1+i+z)^2$ 이 실수이려면 $1+i+z$ 가 실수 또는 순허수이어야 한다.
 (i) $1+i+z$ 가 실수이려면 $b=-1$
 (나)에서 $z^2=(a-i)^2=a^2-1-2ai=c+4i$ 이므로
 $a^2-1=c$, $-2a=4 \quad \therefore a=-2$, $c=3$
 $\therefore a+b+c=-2+(-1)+3=0$
 (ii) $1+i+z$ 가 순허수이려면 $a=-1$, $b \neq -1$
 (나)에서 $z^2=(-1+bi)^2=1-b^2-2bi=c+4i$ 이므로
 $1-b^2=c$, $-2b=4 \quad \therefore b=-2$, $c=-3$
 $\therefore a+b+c=-1+(-2)+(-3)=-6$
 (i), (ii)에 의하여 $a+b+c$ 의 값은 0, -6이다.

11
$$(1+2i)x+(1+i)y=(x+y)+(2x+y)i=1+3i$$

 $x+y=1$, $2x+y=3$
 두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-1$
 $\therefore x^2+y^2=2^2+(-1)^2=5$

12 등식의 양변에 $(2+i)(2-i)$ 를 곱하면
 $x(2-i)+y(2+i)=4i(2+i)(2-i)$
 $2(x+y)+(-x+y)i=20i$
 $x+y=0$, $-x+y=20$
 두 식을 연립하여 풀면 $x=-10$, $y=10$
 $\therefore x+2y=-10+2 \times 10=10$

13
$$x^2+y^2i+2x-2(1+i)-3yi$$

$$=(x^2+2x-2)+(y^2-3y-2)i=1+2i$$

 $x^2+2x-2=1$ 에서 $x^2+2x-3=0$
 $(x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x=-3$ 또는 $x=1$
 $y^2-3y-2=2$ 에서 $y^2-3y-4=0$
 $(y+1)(y-4)=0 \quad \therefore y=-1$ 또는 $y=4$
 따라서 x^2+y^2 의 값은 2 또는 10 또는 17 또는 25이다.

14 주어진 등식을 정리하면

$$\begin{aligned}(a\sqrt{2}+b+c\sqrt{2})+(3a-2b\sqrt{2}+c)i &= 2\sqrt{2} \\ a\sqrt{2}+b+c\sqrt{2} &= 2\sqrt{2} \text{이므로 } b=0, a+c=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ 3a-2b\sqrt{2}+c &= 0 \text{이므로 } 3a+c=0, b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{을 연립하여 풀면 } a &= -1, c=3 \\ \therefore a^2+b^2+c^2 &= (-1)^2+0^2+3^2=10\end{aligned}$$

15 $x+y=(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)+(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)=2\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}xy &= (\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)=5 \\ \therefore x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy=(2\sqrt{3})^2-2\times 5=2 \\ \therefore x^4+x^2y^2+y^4 &= (x^2+y^2)^2-(xy)^2 \\ &= 2^2-5^2=-21\end{aligned}$$

16 $a+b=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$

$$\begin{aligned}ab &= \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \times \frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1 \\ \therefore a^3+b^3-3ab &= (a+b)^3-3ab(a+b)-3ab \\ &= 1^3-3\times 1\times 1-3\times 1=-5\end{aligned}$$

17 $x=\frac{3-i}{1+i}=\frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-2i$

$$\begin{aligned}\text{즉, } x-1 &= -2i \text{이므로 양변을 제곱하면} \\ x^2-2x+1 &= -4, x^2-2x+5=0 \\ \therefore x^3-2x^2+6x+5 &= x(x^2-2x+5)+x+5=x+5 \\ &= (1-2i)+5=6-2i\end{aligned}$$

18 $z=(1+i)a-3a+4-i$

$$\begin{aligned}&= (-2a+4)+(a-1)i \\ z=\bar{z} \text{이면 } z &\text{는 실수이므로 } a-1=0 \\ \therefore a &= 1 \quad \therefore \alpha=1 \\ z=-\bar{z} \text{이면 } z &\text{는 순허수이고 } z \neq 0 \text{이므로} \\ -2a+4 &= 0 \quad \therefore a=2 \quad \therefore \beta=2 \\ \therefore \alpha+\beta &= 1+2=3\end{aligned}$$

19 $\alpha=a+bi, \beta=c+di$ (a, b, c, d 는 실수)라 하자.

$$\begin{aligned}\neg. \alpha\bar{\alpha} &= (a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0 \text{이므로 } a=b=0 \\ \therefore \alpha &= 0 \\ \neg. \frac{1}{\beta}+\frac{1}{\bar{\beta}} &= \frac{\beta+\bar{\beta}}{\beta\bar{\beta}}=\frac{2c}{c^2+d^2} \text{이므로 실수이다.} \\ \neg. \alpha+\beta &= (a+c)+(b+d)i \text{가 실수이면 } b=-d \\ (\alpha-\beta)i &= -(b-d)+(a-c)i \text{가 실수이면 } a=c \\ \text{즉, } \alpha &= a+bi=c-di=\bar{\beta} \text{이므로 } \alpha=\bar{\beta} \text{이다.} \\ \text{따라서 보기 중 옳은 것은 } \neg, \neg, \neg &\text{이다.}\end{aligned}$$

20 $z+\bar{z}, z\bar{z}$ 는 실수이다.

$$\begin{aligned}\textcircled{1} z^2+\bar{z}^2 &= (z+\bar{z})^2-2z\bar{z} \text{이므로 실수이다.} \\ \textcircled{2} z^3+\bar{z}^3 &= (z+\bar{z})^3-3z\bar{z}(z+\bar{z}) \text{이므로 실수이다.} \\ \textcircled{3} (z+1)^2-(\bar{z}+1)^2 &= (z+\bar{z}+2)(z-\bar{z}) \\ z-\bar{z} &\text{는 순허수이므로 주어진 식은 순허수 또는 0이다.} \\ \textcircled{4} (2z+1)(\bar{z}+1)-z &= 2z\bar{z}+(z+\bar{z})+1 \text{이므로 실수이다.} \\ \textcircled{5} (z^2+\bar{z}+1)+(\bar{z}^2+z+1) &= (z^2+\bar{z}+1)+(\bar{z}^2+\bar{z}+1) \\ &\text{이므로 실수이다.}\end{aligned}$$

따라서 실수가 아닌 것은 ③이다.

21 $\alpha+\beta=(3+i)+(1-3i)=4-2i$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta} &= 4+2i \\ \therefore \alpha\bar{\alpha}+\alpha\bar{\beta}+\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\beta} &= (\alpha+\beta)\bar{\alpha}+(\alpha+\beta)\bar{\beta} \\ &= (\alpha+\beta)(\bar{\alpha}+\bar{\beta}) \\ &= (\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta}) \\ &= (4-2i)(4+2i) \\ &= 20\end{aligned}$$

22 $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}=2+5i$ 이므로 $z_1-z_2=2-5i$

$$\begin{aligned}\overline{z_1 \times z_2} &= \overline{z_1 z_2}=6-3i \text{이므로 } z_1 z_2=6+3i \\ \therefore (z_1-2)(z_2+2) &= z_1 z_2+2(z_1-z_2)-4 \\ &= (6+3i)+2(2-5i)-4 \\ &= 6-7i\end{aligned}$$

23 $z\bar{z}=\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{\bar{\alpha}+1}{\bar{\alpha}-1}\right)=\left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)\left(\frac{\bar{\alpha}+1}{\bar{\alpha}-1}\right)$

$$\begin{aligned}&= \frac{\alpha\bar{\alpha}+(\alpha+\bar{\alpha})+1}{\alpha\bar{\alpha}-(\alpha+\bar{\alpha})+1}=\frac{\frac{3}{2}+1+1}{\frac{3}{2}-1+1}=\frac{7}{3}\end{aligned}$$

24 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로

$$\begin{aligned}4i(a+bi)+(2-i)(a-bi) &= 4i-1 \\ (2a-5b)+(3a-2b)i &= -1+4i \\ 2a-5b &= -1, 3a-2b=4 \\ \text{두 식을 연립하여 풀면 } a &= 2, b=1 \\ \therefore z &= 2+i\end{aligned}$$

25 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$ 이므로

$$\begin{aligned}(1+2i)\bar{z}+3(4-zi) &= (1+2i)(a-bi)+3\{4-(a+bi)i\} \\ &= a+2b+(2a-b)i+12+3b-3ai \\ &= (a+5b+12)-(a+b)i=0 \\ a+5b+12 &= 0, a+b=0 \\ \text{두 식을 연립하여 풀면 } a &= 3, b=-3 \\ \therefore z &= 3-3i \\ \therefore z+\bar{z} &= (3-3i)+(3+3i)=6\end{aligned}$$

26 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면

$$\overline{z+iz}=z+1+4i \text{에서}$$

$$\overline{a+bi+i(a+bi)}=(a+bi)+1+4i$$

$$(a-b)-(a+b)i=(a+1)+(b+4)i$$

$$a-b=a+1, -a-b=b+4$$

$$\therefore a=-2, b=-1$$

$$\therefore z\overline{z}=(-2-i)(-2+i)=5$$

27 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$ 이므로

$$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=4 \quad \therefore a=2$$

$$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=5$$

$$a=2 \text{이므로 } b^2=1$$

$$\text{따라서 } z=2+bi \text{에서 } (z-2)^2=(bi)^2$$

$$z^2-4z+4=-b^2=-1 \quad \therefore 4z-z^2=5$$

28 $1-i+i^2-i^3+\dots+i^{100}$

$$=1+(-i-1+i+1)+(-i-1+i+1)$$

$$+\dots+(-i-1+i+1)$$

$$=1$$

29 $2i+4i^2+6i^3+8i^4+\dots+100i^{50}$

$$=(2i-4-6i+8)+(10i-12-14i+16)$$

$$+\dots+(90i-92-94i+96)+98i-100$$

$$=12(4-4i)+98i-100$$

$$=48-48i+98i-100$$

$$=-52+50i$$

$$\text{따라서 } a=-52, b=50 \text{이므로 } a-b=-102$$

30 $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1=0$ 이므로

k 가 음이 아닌 정수일 때

(i) $n=4k+1$ 인 경우

$$1+\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\dots+\frac{1}{i^{4k+1}}\right)=1+\frac{1}{i}=1-i$$

(ii) $n=4k+2$ 인 경우

$$1+\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\dots+\frac{1}{i^{4k+2}}\right)=1+\left(\frac{1}{i}-1\right)=-i$$

(iii) $n=4k+3$ 인 경우

$$1+\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\dots+\frac{1}{i^{4k+3}}\right)=1+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}\right)=0$$

(iv) $n=4k+4$ 인 경우

$$1+\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\dots+\frac{1}{i^{4k+4}}\right)=1+0=1$$

따라서 주어진 식의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

31 $f(1)=i+(-i)=0$

$$f(2)=i^2+(-i)^2=-1-1=-2$$

$$f(3)=i^3+(-i)^3=-i+i=0$$

$$f(4)=i^4+(-i)^4=1+1=2$$

$$f(5)=i^5+(-i)^5=i-i=0$$

$$f(6)=i^6+(-i)^6=-1-1=-2$$

$\vdots$

즉, $f(n)=-2$ 를 만족시키는 자연수 n 은

$$n=4k+2 \text{ (k 는 음이 아닌 정수)}$$

따라서 50 이하의 자연수 n 은 2, 6, 10, 14, ..., 50의 13개이다.

32 $(1+i)^2=2i, (1-i)^2=-2i$ 이므로

$$(1+i)^{30}+(1-i)^{30}=(2i)^{15}+(-2i)^{15}$$

$$=(2i)^{15}-(2i)^{15}$$

$$=0$$

33 $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=i$ 이므로

$$f(n)=i^n$$

$$\therefore 1+f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(96)$$

$$=1+i+i^2+i^3+\dots+i^{96}$$

$$=1+(i-1-i+1)+\dots+(i-1-i+1)$$

$$=1$$

34 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=i, \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2=i$ 이므로

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}-\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}=i^n-i^n=0$$

35 $z=a+bi$ (a, b 는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

$$(1+i)z+i\overline{z}=(1+i)(a+bi)+i(a-bi)$$

$$=a+(2a+b)i$$

$$=1+i$$

$$\therefore a=1, 2a+b=1$$

$$\therefore a=1, b=-1$$

즉, $z=1-i$ 이므로

$$z^2=(1-i)^2=-2i, z^4=(1-i)^4=(-2i)^2=-4$$

$$\therefore z^8=(-4)^2=16$$

따라서 z^n 이 양수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 n 의 값은 8이다.

- 36 ① $\sqrt{-2}\sqrt{5}=\sqrt{2i}\times\sqrt{5}=\sqrt{10i}=\sqrt{-10}$
 ② $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=\sqrt{2i}\times\sqrt{5i}=\sqrt{10i^2}=-\sqrt{10}$
 ③ $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{-2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2i}}=\frac{\sqrt{5}i}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{\frac{5}{2}}i=-\sqrt{-\frac{5}{2}}$
 ④ $\frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}i}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}i=\sqrt{-\frac{5}{2}}$
 ⑤ $\frac{\sqrt{-5}}{\sqrt{-2}}=\frac{\sqrt{5}i}{\sqrt{2i}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$

따라서 옳은 것은 ③이다.

37 $3\sqrt{-3}-\sqrt{-3}\sqrt{-12}+\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{-2}}$
 $=3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i\times\sqrt{12}i+\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{2}i}$
 $=3\sqrt{3}i+6-3\sqrt{3}i=6$

38 $(\sqrt{2}-\sqrt{-8})(2\sqrt{2}-\sqrt{-2})+\sqrt{-2}\sqrt{-8}+\sqrt{-3}\sqrt{12}+\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{-4}}$
 $=(4-2i-8i-4)-4+6i-4i=-4-8i$
 따라서 $a=-4$, $b=-8$ 이므로 $ab=32$

39 $z=\frac{2-\sqrt{-3}}{2+\sqrt{-3}}=\frac{2-\sqrt{3}i}{2+\sqrt{3}i}$
 $=\frac{(2-\sqrt{3}i)^2}{(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)}=\frac{1-4\sqrt{3}i}{7}$
 $\therefore z\bar{z}=\frac{1-4\sqrt{3}i}{7}\times\frac{1+4\sqrt{3}i}{7}=\frac{1+48}{49}=1$

40 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 이므로 $a<0$, $b<0$
 ㄱ. $a<0$ 이므로 $\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}=-a\sqrt{b}$
 ㄴ. $-a>0$, $-b>0$ 이므로
 $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{(-a)(-b)}=\sqrt{ab}$
 ㄷ. $a<0$, $b<0$ 이므로 $\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{-a}{b}}$
 ㄹ. $-a>0$, $b<0$ 이므로 $\sqrt{\frac{-a}{b}}=-\sqrt{\frac{-a}{b}}$
 따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

41 $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}}=-\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$ 이므로
 $x+2>0$, $x-1<0$
 $\therefore |x+2|+\sqrt{(x-1)^2}=(x+2)-(x-1)=3$

42 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 이므로 $a<0$, $b<0$
 $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{c}{b}}$ 이므로 $b<0$, $c>0$
 따라서 $a+b<0$, $b-c<0$, $c-a>0$ 이므로
 $\sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{(b-c)^2}-\sqrt{(c-a)^2}$
 $=-(a+b)-(b-c)-(c-a)=-2b$

II-1 02 이차방정식의 판별식

기초 문제 Training

35쪽

- 1 (1) $x=-2$ 또는 $x=5$ (2) $x=-7$ 또는 $x=2$
 (3) $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=3$ (4) $x=-3$ 또는 $x=\frac{4}{3}$
- 2 (1) $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ (2) $x=2\pm\sqrt{2}i$
 (3) $x=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$ (4) $x=\frac{-3\pm 3i}{2}$
- 3 (1) $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=3$, 실근 (2) $x=\pm 2\sqrt{2}$, 실근
 (3) $x=\frac{1\pm 2\sqrt{6}i}{25}$, 허근 (4) $x=\frac{3\pm\sqrt{2}i}{4}$, 허근
- 4 (1) 서로 다른 두 실근 (2) 중근
 (3) 서로 다른 두 허근 (4) 서로 다른 두 허근
- 5 (1) ㄱ, ㄴ (2) ㄷ, ㄹ (3) ㄱ, ㄷ, ㄴ, ㄹ (4) ㄴ, ㄹ
- 6 (1) $k<3$ (2) $k=3$ (3) $k\leq 3$ (4) $k>3$

핵심 유형 Training

36~38쪽

- 1 ② 2 -1 3 $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ 4 ①
 5 ③ 6 $-\frac{11}{6}$ 7 ① 8 ④
 9 $x=-4$ 또는 $x=1$ 10 $x=0$ 11 ② 12 1
 13 3 14 ④ 15 ④ 16 실근
 17 서로 다른 두 실근 18 ③ 19 ⑤ 20 ③

- 1 $3x^2-3+6=4x^2-2x$, $x^2-2x-3=0$
 $(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=3$
- 2 양변에 $\sqrt{3}+1$ 을 곱하면
 $2x^2-(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)=0$
 $(2x+\sqrt{3}+1)(x-\sqrt{3})=0$
 $\therefore x=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 또는 $x=\sqrt{3}$
 $\alpha>\beta$ 이므로 $\alpha=\sqrt{3}$, $\beta=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
 $\therefore \alpha+2\beta=\sqrt{3}+2\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)=-1$

- 3 $(x \circ x) + (2 \circ x) + 1 = 0$ 에서
 $(x+x-x^2) + (2+x-2x) + 1 = 0$
따라서 $x^2 - x - 3 = 0$ 이므로 $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$
- 4 $x^2 + 2ax - 3a^2 = 0$ 에 $x=1$ 을 대입하면
 $1 + 2a - 3a^2 = 0, (3a+1)(a-1) = 0$
 $\therefore a=1$ ($\because a > 0$)
주어진 이차방정식은
 $x^2 + 2x - 3 = 0, (x+3)(x-1) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = 1$ $\therefore a = -3$
 $\therefore a + a = 1 + (-3) = -2$
- 5 $ax^2 - bx + a = 5$ 에 $x = -1$ 을 대입하면
 $a + b + a = 5 \quad \therefore 2a + b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $bx^2 - ax + b = 1$ 에 $x = 2$ 를 대입하면
 $4b - 2a + b = 1 \quad \therefore 2a - 5b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 1$
 $\therefore a + b = 3$
- 6 $(a-1)x^2 + x + a^2 - 3 = 0$ 이 이차방정식이므로
 $a-1 \neq 0 \quad \therefore a \neq 1$
이 이차방정식의 한 근이 2이므로 $x=2$ 를 대입하면
 $4(a-1) + 2 + a^2 - 3 = 0, a^2 + 4a - 5 = 0$
 $(a+5)(a-1) = 0 \quad \therefore a = -5$ ($\because a \neq 1$)
주어진 이차방정식은 $-6x^2 + x + 22 = 0$
 $(6x+11)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -\frac{11}{6}$ 또는 $x = 2$
따라서 다른 한 근은 $-\frac{11}{6}$ 이다.
- 7 (i) $x < 1$ 일 때
 $x^2 + 2(x-1) - 1 = 0, x^2 + 2x - 3 = 0$
 $(x+3)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -3$ 또는 $x = 1$
그런데 $x < 1$ 이므로 $x = -3$
(ii) $x \geq 1$ 일 때
 $x^2 - 2(x-1) - 1 = 0, x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x-1)^2 = 0 \quad \therefore x = 1$
(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는
 $x = -3$ 또는 $x = 1$
따라서 모든 근의 합은 $-3 + 1 = -2$

- 8 (i) $x < -1$ 일 때
 $\{-(x+1)\}^2 - (x+1) - 6 = 0, x^2 + x - 6 = 0$
 $(x+3)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -3$ 또는 $x = 2$
그런데 $x < -1$ 이므로 $x = -3$
(ii) $x \geq -1$ 일 때
 $(x+1)^2 + (x+1) - 6 = 0, x^2 + 3x - 4 = 0$
 $(x+4)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -4$ 또는 $x = 1$
그런데 $x \geq -1$ 이므로 $x = 1$
(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는
 $x = -3$ 또는 $x = 1$
그런데 $\alpha > \beta$ 이므로 $\alpha = 1, \beta = -3 \quad \therefore \alpha - \beta = 4$
다른 풀이
 $|x+1| = A$ 라 하면 $A^2 + A - 6 = 0$
 $(A+3)(A-2) = 0 \quad \therefore A = |x+1| = 2$ ($\because A \geq 0$)
따라서 $\alpha = 1, \beta = -3$ 이므로 $\alpha - \beta = 4$
- 9 $2|x \odot 1| = x \odot x$ 에서
 $2|x-1| = (x+1)x - 2$
(i) $x < 1$ 일 때
 $-2(x-1) = (x+1)x - 2, x^2 + 3x - 4 = 0$
 $(x+4)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -4$ 또는 $x = 1$
그런데 $x < 1$ 이므로 $x = -4$
(ii) $x \geq 1$ 일 때
 $2(x-1) = (x+1)x - 2, x^2 - x = 0$
 $x(x-1) = 0 \quad \therefore x = 0$ 또는 $x = 1$
그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 1$
(i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 해는
 $x = -4$ 또는 $x = 1$
- 10 $\sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2} = 1 - 2x^2$ 에서
 $|x| + |x-1| = 1 - 2x^2$
(i) $x < 0$ 일 때
 $-x - (x-1) = 1 - 2x^2, 2x^2 - 2x = 0$
 $2x(x-1) = 0 \quad \therefore x = 0$ 또는 $x = 1$
그런데 $x < 0$ 이므로 해는 없다.
(ii) $0 \leq x < 1$ 일 때
 $x - (x-1) = 1 - 2x^2, 2x^2 = 0 \quad \therefore x = 0$
(iii) $x \geq 1$ 일 때
 $x + (x-1) = 1 - 2x^2, x^2 + x - 1 = 0$
 $\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
그런데 $x \geq 1$ 이므로 해는 없다.
(i), (ii), (iii)에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = 0$ 이다.

- 11 이차방정식 $x^2 + 2(1-2m)x + 4m^2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (1-2m)^2 - 4m^2 > 0, -4m+1 > 0 \quad \therefore m < \frac{1}{4}$$

- 12 이차방정식 $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + k + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{-(k+1)\}^2 - (k^2 + k + 2) = 0$$

$$k-1=0 \quad \therefore k=1$$

- 13 이차방정식 $4x^2 + 4(a-1)x + a^2 + a - 8 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{2(a-1)\}^2 - 4(a^2 + a - 8) \geq 0$$

$$-12a + 36 \geq 0 \quad \therefore a \leq 3$$

따라서 자연수 a 는 1, 2, 3의 3개이다.

- 14 이차방정식 $x^2 + (2k-3)x + k^2 - k - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D < 0$ 이어야 하므로

$$D = (2k-3)^2 - 4(k^2 - k - 1) < 0$$

$$-8k + 13 < 0 \quad \therefore k > \frac{13}{8}$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 2이다.

- 15 이차방정식 $x^2 + 2ax + a^2 + 3a - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라

$$\text{하면 } \frac{D}{4} = a^2 - (a^2 + 3a - 1) = -3a + 1$$

그런데 a 는 자연수이므로 $-3a + 1 < 0$

따라서 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

- 16 이차방정식 $4ax^2 + 2bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = b^2 - 4a \times c = b^2 - 4ac$$

이때 $b = a + c$ 이므로

$$b^2 - 4ac = (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2 \geq 0$$

따라서 주어진 이차방정식은 실근을 갖는다.

- 17 이차방정식 $x^2 - ax + \frac{b^2}{4} - 1 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$D_1 = 0$ 이어야 하므로

$$D_1 = (-a)^2 - 4 \times \left(\frac{b^2}{4} - 1\right) = 0$$

$$a^2 - b^2 + 4 = 0 \quad \therefore a^2 = b^2 - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2 + 2ax - 2b - 7 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - (-2b-7)$$

$$= b^2 - 4 + 2b + 7 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= (b+1)^2 + 2 > 0$$

따라서 이차방정식 $x^2 + 2ax - 2b - 7 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

- 18 주어진 이차식이 완전제곱식이려면 이차방정식

$$x^2 - 2(1-k)x + k^2 - 3k + 2 = 0 \text{이 중근을 가져야 한다.}$$

따라서 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = \{-(1-k)\}^2 - (k^2 - 3k + 2) = 0$$

$$k-1=0 \quad \therefore k=1$$

- 19 주어진 이차식이 완전제곱식이려면 이차방정식

$$(a+b)x^2 + 2cx + a-b = 0 \text{이 중근을 가져야 한다.}$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = c^2 - (a+b)(a-b) = 0, c^2 - a^2 + b^2 = 0$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

- 20 이차방정식 $x^2 - (2a+2+m)x + a^2 + 4a - n = 0$ 이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(2a+2+m)\}^2 - 4(a^2 + 4a - n) = 0$$

$$4(m-2)a + m^2 + 4m + 4n + 4 = 0$$

이 등식이 a 에 대한 항등식이므로

$$m-2=0, m^2 + 4m + 4n + 4 = 0$$

$$\therefore m=2, n=-4 \quad \therefore m^2 + n^2 = 20$$

II-1 03 이차방정식의 근과 계수의 관계

기초 문제 Training

39쪽

1 (1) 3, 4 (2) -2, -7 (3) -2, $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{4}{3}$, -3

2 (1) 6 (2) -2 (3) $-\frac{2}{3}$ (4) -7

3 (1) $x^2 - x - 6 = 0$ (2) $x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{9} = 0$
(3) $x^2 - 4x + 1 = 0$ (4) $x^2 - 2x + 26 = 0$

4 (1) $2x^2 - 3x - 2 = 0$ (2) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

5 (1) $(x+2i)(x-2i)$ (2) $(x+1+\sqrt{5}i)(x+1-\sqrt{5}i)$
(3) $(x+2+i)(x+2-i)$ (4) $2\left(x+\frac{3+i}{2}\right)\left(x+\frac{3-i}{2}\right)$

6 (1) $a=-2, b=-2$ (2) $a=-6, b=1$

7 (1) $a=-2, b=2$ (2) $a=-4, b=13$

1 ②	2 ③	3 ①	4 $\sqrt{10}$	5 ⑤
6 ⑤	7 -7	8 ④	9 ①	10 ④
11 ①	12 -4	13 ③	14 2	15 ②
16 ②	17 ⑤	18 ⑤	19 -2	20 ②
21 $x^2-4x+1=0$	22 17	23 ④	24 ①	
25 ①	26 ①	27 $x^2-2x+1=0$		
28 $x^2-10x+16=0$	29 ④	30 ②	31 ④	
32 ⑤	33 10	34 ⑤	35 38	

- 1 $\alpha+\beta=1, \alpha\beta=2$ 이므로

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=1^2-2=-1$$

- 2 $\alpha+\beta=4, \alpha\beta=1$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}&=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} \\&=\frac{4^3-3\times 1\times 4}{1}=52\end{aligned}$$

- 3 $\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=-4$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha-1}+\frac{\alpha}{\beta-1}&=\frac{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)} \\&=\frac{\alpha^2+\beta^2-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1} \\&=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1} \\&=\frac{(-2)^2-2\times(-4)-(-2)}{-4-(-2)+1} \\&=-14\end{aligned}$$

- 4 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\times 4=5>0\text{이므로 } \alpha, \beta \text{는 모두 실근이다.}$$

또 $\alpha+\beta=6>0, \alpha\beta=4>0$ 이므로 $\alpha>0, \beta>0$

$$\begin{aligned}\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2&=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \\&=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta} \quad (\because \alpha>0, \beta>0) \\&=6+2\sqrt{4}=10 \\ \therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}&=\sqrt{10} \quad (\because \alpha>0, \beta>0)\end{aligned}$$

- 5 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-7$

α 는 이차방정식 $x^2+7x+1=0$ 의 근이므로

$$\alpha^2+7\alpha+1=0 \quad \therefore \alpha^2=-7\alpha-1$$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2-7\beta&=-7\alpha-1-7\beta=-7(\alpha+\beta)-1 \\&=-7\times(-7)-1=48\end{aligned}$$

- 6 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3, \alpha\beta=4$

α, β 가 이차방정식 $x^2-3x+4=0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2-3\alpha+4=0, \beta^2-3\beta+4=0$$

$$\therefore \alpha^2-\alpha+1=2\alpha-3, \beta^2-\beta+1=2\beta-3$$

$$\begin{aligned}\therefore (\alpha^2-\alpha+1)(\beta^2-\beta+1)&=(2\alpha-3)(2\beta-3) \\&=4\alpha\beta-6(\alpha+\beta)+9 \\&=4\times 4-6\times 3+9=7\end{aligned}$$

- 7 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1$

α, β 가 이차방정식 $x^2+x-3=0$ 의 두 근이므로

$$\alpha^2+\alpha-3=0, \beta^2+\beta-3=0$$

$$\therefore 3-\alpha^2=\alpha, 3-\beta^2=\beta$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\alpha^2}{3+\beta-\alpha^2}+\frac{\beta^2}{3+\alpha-\beta^2}&=\frac{3-\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{3-\beta}{\alpha+\beta} \\&=\frac{6-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta} \\&=\frac{6-(-1)}{-1}=-7\end{aligned}$$

- 8 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-1=8>0\text{이므로 } \alpha, \beta \text{는 모두 실근이다.}$$

$\alpha+\beta=6>0, \alpha\beta=1>0$ 이므로 $\alpha>0, \beta>0$

$$\alpha^2-6\alpha+1=0, \beta^2-6\beta+1=0\text{이므로}$$

$$\alpha^2+1=6\alpha, \beta^2+1=6\beta$$

$$\begin{aligned}\therefore (\sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1})^2 &=(\sqrt{6\alpha}+\sqrt{6\beta})^2 \\&=6\alpha+6\beta+2\sqrt{6\alpha}\sqrt{6\beta} \\&=6(\alpha+\beta)+12\sqrt{\alpha\beta} \quad (\because \alpha>0, \beta>0) \\&=6\times 6+12\times 1=48 \\ \therefore \sqrt{\alpha^2+1}+\sqrt{\beta^2+1} &=\sqrt{48}=4\sqrt{3} \quad (\because \alpha>0, \beta>0)\end{aligned}$$

- 9 $-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{a}, -1\times\frac{1}{3}=\frac{b}{a}$

$$\therefore a=3, b=-1$$

따라서 이차방정식 $bx^2+ax+a-b=0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{a-b}{b}=\frac{3-(-1)}{-1}=-4$$

- 10 $\alpha+\beta=\frac{1}{4}, \alpha\beta=\frac{a}{8}, (\alpha+\beta)+\alpha\beta=\frac{b}{4}, \alpha\beta(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$

$$\frac{a}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\text{에서 } a=16$$

$$\frac{1}{4}+\frac{a}{8}=\frac{b}{4}\text{에서 } b=9$$

$$\therefore a+b=16+9=25$$

- 11** $\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b, \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = -b, \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{\alpha}{\beta} = 1 = a$
 $\alpha + \beta = a = 1$ 이므로
 $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{1^2 - 2b}{b} = -b$
 $b^2 - 2b + 1 = 0, (b-1)^2 = 0 \quad \therefore b = 1$
 $\therefore \alpha^2 + b^2 = 1^2 + 1^2 = 2$
- 12** $\alpha + \beta = -k, \alpha\beta = 1 - 2k$
 $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 에서 $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 0$
 $(-k)^2 - 2(1 - 2k) = 0, k^2 + 4k - 2 = 0$
따라서 모든 상수 k 의 값의 합은 -4 이다.
- 13** $\alpha + \beta = 3m, \alpha\beta = 2m^2 + 3m$
 $(\alpha - \beta)^2 = 28$ 에서 $(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 28$
 $(3m)^2 - 4(2m^2 + 3m) = 28, m^2 - 12m - 28 = 0$
 $(m+2)(m-14) = 0 \quad \therefore m = -2 \text{ 또는 } m = 14$
따라서 자연수 m 의 값은 14 이다.
- 14** $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = m + 1$
 $\alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \alpha + \beta = 10$ 에서 $(\alpha^2\beta^2 + 1)(\alpha + \beta) = 10$
 $\{(m+1)^2 + 1\} \times 1 = 10, m^2 + 2m - 8 = 0$
 $(m+4)(m-2) = 0 \quad \therefore m = -4 \text{ 또는 } m = 2$
따라서 자연수 m 의 값은 2 이다.
- 15** $\alpha + \beta = a, \alpha\beta = b$
 $(\alpha + 1)(\beta + 1) = 1$ 에서 $\alpha\beta + (\alpha + \beta) + 1 = 1$
 $b + a + 1 = 1 \quad \therefore a = -b \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $(2\alpha + 1)(2\beta + 1) = -1$ 에서 $4\alpha\beta + 2(\alpha + \beta) + 1 = -1$
 $4b + 2a + 1 = -1 \quad \therefore a + 2b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 1, b = -1 \quad \therefore \alpha^2 + b^2 = 2$
- 16** 두 근을 $2\alpha, 3\alpha (\alpha \neq 0)$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
 $5\alpha = k + 1, 6\alpha^2 = k$
두 식을 연립하여 풀면 $\alpha = \frac{1}{2}$ 또는 $\alpha = \frac{1}{3}$
 $\therefore k = \frac{3}{2}$ 또는 $k = \frac{2}{3}$
따라서 모든 상수 k 의 값의 곱은 $\frac{3}{2} \times \frac{2}{3} = 1$
- 17** 두 근을 $\alpha, 3\alpha (\alpha \neq 0)$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
 $4\alpha = -m, 3\alpha^2 = m - 1$
두 식을 연립하여 풀면 $\alpha = -1$ 또는 $\alpha = -\frac{1}{3}$
 $\therefore m = 4$ 또는 $m = \frac{4}{3}$
따라서 정수 m 의 값은 4 이다.

- 18** 두 근을 $\alpha, \alpha + 1$ 이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
 $2\alpha + 1 = m, \alpha(\alpha + 1) = m + 5$
두 식을 연립하여 풀면 $\alpha = -2$ 또는 $\alpha = 3$
 $\therefore m = -3$ 또는 $m = 7$
따라서 양수 m 의 값은 7 이다.
- 19** 두 근을 $\alpha, -\alpha (\alpha \neq 0)$ 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + (-\alpha) = -(m^2 + m - 2), m^2 + m - 2 = 0$
 $(m+2)(m-1) = 0 \quad \therefore m = -2 \text{ 또는 } m = 1$
그런데 $m = 1$ 일 때 주어진 방정식은 $x^2 + 2 = 0$ 이므로 실
근을 갖지 않는다.
 $\therefore m = -2$
- 20** 민지는 b 를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은
 $-2 \times 6 = b \quad \therefore b = -12$
은주는 a 를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은
 $(-2 - 2\sqrt{3}i) + (-2 + 2\sqrt{3}i) = -a \quad \therefore a = 4$
원래의 이차방정식은 $x^2 + 4x - 12 = 0$ 이므로
 $(x+6)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -6 \text{ 또는 } x = 2$
따라서 양수인 근은 2 이다.
- 21** 원래의 이차방정식을 $x^2 + ax + b = 0 (a, b \text{는 상수})$ 이라 하
면 A는 상수항을 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은
 $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = b \quad \therefore b = 1$
B는 x 의 계수를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은
 $-1 + 5 = -a \quad \therefore a = -4$
따라서 원래의 이차방정식은 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 이다.
- 22** 잘못 적용한 근의 공식이 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$ 이고 두 근이
 $-4, 2$ 이므로
 $\frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} = -4 + 2$
 $-\frac{2b}{a} = -2 \quad \therefore b = a \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} = -4 \times 2$
 $\frac{c}{a} = -8 \quad \therefore c = -8a \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 $ax^2 + bx + c = 0$ 에 대입하면
 $ax^2 + ax - 8a = 0$
이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = -8$
 $\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-1)^2 - 2 \times (-8) = 17$

- 23 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha+\beta=4$

이차방정식 $f(4x-2)=0$ 의 두 근은

$$4x-2=\alpha \text{ 또는 } 4x-2=\beta$$

$$\therefore x=\frac{\alpha+2}{4} \text{ 또는 } x=\frac{\beta+2}{4}$$

따라서 이차방정식 $f(4x-2)=0$ 의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha+2}{4} + \frac{\beta+2}{4} = \frac{\alpha+\beta+4}{4} = \frac{4+4}{4} = 2$$

- 24 이차방정식 $f(2x-3)=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha+\beta=3$$

이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근은

$$x=2\alpha-3 \text{ 또는 } x=2\beta-3$$

따라서 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근의 합은

$$(2\alpha-3) + (2\beta-3) = 2(\alpha+\beta) - 6 \\ = 2 \times 3 - 6 = 0$$

- 25 이차방정식 $f(3x+1)=0$ 의 두 근은

$$3x+1=\alpha \text{ 또는 } 3x+1=\beta$$

$$\therefore x=\frac{\alpha-1}{3} \text{ 또는 } x=\frac{\beta-1}{3}$$

이때 $\alpha+\beta=7, \alpha\beta=-3$ 이므로 이차방정식

$f(3x+1)=0$ 의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha-1}{3} \times \frac{\beta-1}{3} = \frac{\alpha\beta - (\alpha+\beta) + 1}{9} \\ = \frac{-3-7+1}{9} = -1$$

- 26 $\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=2$ 이므로

$$(\alpha+\beta) + \alpha\beta = -1 + 2 = 1$$

$$(\alpha+\beta)\alpha\beta = (-1) \times 2 = -2$$

따라서 구하는 이차방정식은 $a(x^2-x-2)=0 (a \neq 0)$ 이므로 ①이다.

- 27 $\alpha+\beta=1, \alpha\beta=1$ 이므로

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = (\alpha+\beta) + \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \alpha\beta + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta} \\ = \frac{\alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 1}{\alpha\beta} \\ = \frac{(\alpha\beta)^2 + (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta + 1}{\alpha\beta} \\ = \frac{1^2 + 1^2 - 2 \times 1 + 1}{1} = 1$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-2x+1=0$ 이다.

- 28 지름에 대한 원주각의 크기는 90° 이므로 $\angle ACB=90^\circ$

$$\text{직각삼각형 AHC에서 } \overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{CH}^2 = a^2 + 16$$

$$\text{직각삼각형 CHB에서 } \overline{BC}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = b^2 + 16$$

$$\text{직각삼각형 ABC에서 } \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \text{이므로}$$

$$(a+b)^2 = (a^2+16) + (b^2+16) \quad \therefore ab=16$$

$$\overline{AB}=10 \text{이므로 } a+b=10$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2-10x+16=0$ 이다.

- 29 이차방정식 $x^2-4x+5=0$ 의 해는 $x=2 \pm i$ 이므로

$$x^2-4x+5 = (x-2+i)(x-2-i)$$

- 30 이차방정식 $x^2+2x+2=0$ 의 해는 $x=-1 \pm i$ 이므로

$$x^2+2x+2 = (x+1+i)(x+1-i)$$

따라서 두 일차식의 합은

$$(x+1+i) + (x+1-i) = 2x+2$$

- 31 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2+3x+6=0$, 즉 $x^2+6x+12=0$ 의 해는

$$x = -3 \pm \sqrt{3}i \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2}x^2+3x+6 = \frac{1}{2}(x+3+\sqrt{3}i)(x+3-\sqrt{3}i)$$

$$\therefore a=3, b=\sqrt{3} (\because b>0)$$

$$\therefore a+b^2=6$$

- 32 다른 한 근은 $1-2i$ 이므로

$$(1+2i) + (1-2i) = a, (1+2i)(1-2i) = b$$

$$\therefore a=2, b=5 \quad \therefore ab=10$$

- 33 다른 한 근은 $b+\sqrt{2}i$ 이므로

$$(b-\sqrt{2}) + (b+\sqrt{2}) = 6, (b-\sqrt{2})(b+\sqrt{2}) = a$$

$$\therefore a=7, b=3 \quad \therefore a+b=10$$

- 34 $\frac{2+4i}{1-i} = \frac{(2+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -1+3i$ 이므로 다른 한 근은

$-1-3i$ 이다.

$$(-1+3i) + (-1-3i) = a+b \quad \therefore a+b=-2$$

$$(-1+3i)(-1-3i) = -ab \quad \therefore ab=-10$$

$$\therefore a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (-2)^2 - 2 \times (-10) = 24$$

- 35 다른 한 근은 $2+i$ 이므로

$$(2-i) + (2+i) = -a \quad \therefore a=-4$$

$$(2-i)(2+i) = b \quad \therefore b=5$$

a, b 를 두 근으로 하는 이차방정식 $2x^2+mx+n=0$ 에서

$$-4+5 = -\frac{m}{2}, -4 \times 5 = \frac{n}{2}$$

$$\therefore m=-2, n=-40 \quad \therefore m-n=38$$

II-2 01 이차방정식과 이차함수의 관계

기초 문제 Training

46쪽

- 1 (1) $(-3, 0), (5, 0)$ (2) $(-\frac{1}{2}, 0), (3, 0)$ (3) $(3, 0)$
- 2 (1) 2 (2) 1 (3) 0
- 3 (1) $k < 1$ (2) $k = 1$ (3) $k > 1$
- 4 (1) $-1, 4$ (2) $-1, \frac{3}{2}$ (3) 1
- 5 (1) 2 (2) 1 (3) 0
- 6 (1) $k > -3$ (2) $k = -3$ (3) $k < -3$

핵심 유형 Training

47~49쪽

- | | | | | |
|------|---------|------|------|---------------|
| 1 ③ | 2 4 | 3 6 | 4 3 | 5 ④ |
| 6 ① | 7 ⑤ | 8 ② | 9 2 | 10 ④ |
| 11 3 | 12 -4 | 13 ③ | 14 ② | 15 $m \geq 1$ |
| 16 ③ | 17 ⑤ | 18 ① | 19 ② | |

- 1 $2x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 $-1, \frac{3}{2}$ 이므로
 $-1+\frac{3}{2}=-\frac{a}{2}, -1 \times \frac{3}{2}=\frac{b}{2}$
 $\therefore a=-1, b=-3 \quad \therefore ab=3$
- 2 $2x^2-ax-3=0$ 의 두 근이 $-1, b$ 이므로
 $-1+b=\frac{a}{2}, -1 \times b=-\frac{3}{2}$
 $\therefore a=1, b=\frac{3}{2}$
 $\therefore a+2b=1+3=4$
- 3 $-x^2+ax+2a-1=0$ 의 두 근의 합이 3이므로
 $a=3$
 이를 $y=x^2-(a-1)x-a^2+1$ 에 대입하면
 $y=x^2-2x-8$
 $x^2-2x-8=0$ 에서 $(x+2)(x-4)=0$
 $\therefore x=-2$ 또는 $x=4$
 따라서 두 점 사이의 거리는
 $|-2-4|=6$

- 4 $x^2+2kx+2k+1=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
 $\alpha+\beta=-2k, \alpha\beta=2k+1$
 이때 $|\alpha-\beta|=2\sqrt{2}$ 이므로 양변을 제곱하면
 $(\alpha-\beta)^2=8, (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=8$
 $(-2k)^2-4(2k+1)=8, k^2-2k-3=0$
 $(k+1)(k-3)=0$
 $\therefore k=-1$ 또는 $k=3$
 그런데 $k>0$ 이므로 $k=3$
- 5 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 점 $(0, -4)$ 를 지나므로
 $c=-4$
 $\therefore y=ax^2+bx-4$
 $ax^2+bx-4=0$ 의 한 근이 $-1-\sqrt{5}$ 이면 다른 한 근은
 $-1+\sqrt{5}$ 이므로
 $(-1-\sqrt{5})+(-1+\sqrt{5})=-\frac{b}{a}$
 $(-1-\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})=-\frac{4}{a}$
 $\therefore a=1, b=2$
 $\therefore a+b+c=-1$
- 6 $f(-1)=0, f(2)=0$ 이므로 $f(x-3)=0$ 에서
 $x-3=-1$ 또는 $x-3=2$
 $\therefore x=2$ 또는 $x=5$
 따라서 모든 실근의 합은 $2+5=7$
- 7 $-x^2+3x-2k=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1<0$ 이어야 하므로
 $D_1=3^2-4 \times (-1) \times (-2k) < 0, 9-8k < 0$
 $\therefore k > \frac{9}{8} \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 $x^2+2kx+4k-3=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2=0$ 이어야 하므로
 $\frac{D_2}{4}=k^2-(4k-3)=0, k^2-4k+3=0$
 $(k-1)(k-3)=0$
 $\therefore k=1$ 또는 $k=3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$
 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 $k=3$
- 8 $y=(a-2)x^2-2ax+a+4$ 가 이차함수이므로
 $a \neq 2 \quad \dots\dots \textcircled{9}$
 $(a-2)x^2-2ax+a+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D>0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4}=(-a)^2-(a-2)(a+4)>0, -2a+8>0$
 $\therefore a < 4 \quad \dots\dots \textcircled{10}$
 $\textcircled{9}, \textcircled{10}$ 에서 자연수 a 는 1, 3의 2개이다.

- 9 $x^2-2ax-k(a+2)+b=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-\{-k(a+2)+b\}=0$$

$$\therefore k(a+2)+a^2-b=0$$

이 등식이 k 에 대한 항등식이므로

$$a+2=0, a^2-b=0$$

$$\therefore a=-2, b=4 \quad \therefore a+b=2$$

- 10 $2x^2+ax-1=3x+b$ 에서

$$2x^2+(a-3)x-b-1=0$$

이 이차방정식의 두 근이 $-1, 3$ 이므로

$$-1+3=-\frac{a-3}{2}, -1 \times 3 = \frac{-b-1}{2}$$

$$\therefore a=-1, b=5 \quad \therefore a+b=4$$

- 11 $x^2-(a+1)x-2=-2x+1$ 에서

$$x^2-(a-1)x-3=0$$

이 이차방정식의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha+\beta=a-1, \alpha\beta=-3$$

이때 $|\alpha-\beta|=4$ 에서 양변을 제곱하면

$$(\alpha-\beta)^2=16, (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16$$

$$(a-1)^2-4 \times (-3)=16, a^2-2a-3=0$$

$$(a+1)(a-3)=0 \quad \therefore a=-1 \text{ 또는 } a=3$$

그런데 $a>0$ 이므로 $a=3$

- 12 $x^2-a=bx$ 에서 $x^2-bx-a=0$

이 이차방정식의 한 근이 $2+\sqrt{3}$ 이면 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$ 이므로

$$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=b, (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=-a$$

$$\therefore a=-1, b=4 \quad \therefore ab=-4$$

- 13 $x^2-3x+2k=2x+k$, 즉 $x^2-5x+k=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D>0$ 이어야 하므로

$$D=(-5)^2-4k>0, 25-4k>0 \quad \therefore k<\frac{25}{4}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 6이다.

- 14 $(x-2)^2-2=-2x+a-b+1$, 즉

$x^2-2x-a+b+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D>0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-a+b+1)>0, a-b>0$$

$$\therefore a>b$$

따라서 항상 옳은 것은 ②이다.

- 15 $x^2+2(m+2)x+m^2=2x-3$, 즉

$x^2+2(m+1)x+m^2+3=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(m+1)^2-(m^2+3) \geq 0, 2m-2 \geq 0 \quad \therefore m \geq 1$$

- 16 $2x^2-x+5=x+m$, 즉 $2x^2-2x-m+5=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D<0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-2(-m+5)<0$$

$$2m-9<0 \quad \therefore m<\frac{9}{2}$$

따라서 자연수 m 은 1, 2, 3, 4의 4개이다.

- 17 직선 $y=bx-6$ 이 직선 $y=2x+3$ 과 평행하면 기울기는 2이므로 $b=2$

$x^2-4x+a=2x-6$, 즉 $x^2-6x+a+6=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-(a+6)=0, 3-a=0 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore a+b=3+2=5$$

- 18 직선 $y=ax+b$ 가 점 $(1, -1)$ 을 지나므로

$$-1=a+b \quad \therefore b=-a-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①을 $y=ax+b$ 에 대입하면 $y=ax-a-1$

$x^2-3x+1=ax-a-1$, 즉 $x^2-(a+3)x+a+2=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$D=\{-(a+3)\}^2-4(a+2)=0, a^2+2a+1=0$$

$$(a+1)^2=0 \quad \therefore a=-1$$

이를 ①에 대입하면 $b=0$

$$\therefore b-a=0-(-1)=1$$

- 19 방정식 $x^2-3|x|-x+k=0$, 즉 $x^2-3|x|-x=-k$ 의 실근의 개수는 함수 $y=x^2-3|x|-x$ 의 그래프와 직선 $y=-k$ 의 교점의 개수와 같다.

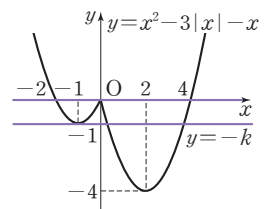
$y=x^2-3|x|-x$ 에서 $x=0$ 을 기준으로 범위를 나누어 함수의 식을 구하면

$$y=x^2-3|x|-x=\begin{cases} x^2+2x & (x<0) \\ x^2-4x & (x\geq 0) \end{cases}$$

서로 다른 세 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-k$ 가 원점을 지나는 직선이거나 점 $(-1, -1)$ 을 지나는 직선이어야 한다.

따라서 $k=0$ 또는 $k=1$ 이

므로 모든 실수 k 의 값의 합은 1이다.



II-2 02 이차함수의 최대, 최소

기초 문제 Training

50쪽

- 1 (1) $y=(x-1)^2+4$ (2) $y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$
(3) $y=-2(x+2)^2+9$ (4) $y=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$
- 2 (1) 최댓값: 없다., 최솟값: -4
(2) 최댓값: 없다., 최솟값: $\frac{5}{4}$
(3) 최댓값: 5 , 최솟값: 없다.
(4) 최댓값: $-\frac{7}{2}$, 최솟값: 없다.
- 3 (1) $y=-(x+1)^2+2$
(2) 최댓값: 2 , 최솟값: 없다.
- 4 (1) 최댓값: 11 , 최솟값: 3
(2) 최댓값: 2 , 최솟값: -2
(3) 최댓값: 19 , 최솟값: 9
(4) 최댓값: -6 , 최솟값: -13
- 5 (1) 최댓값: 15 , 최솟값: 7
(2) 최댓값: 25 , 최솟값: 9
- 6 (1) 최댓값: 13 , 최솟값: -14
(2) 최댓값: 10 , 최솟값: -35

핵심 유형 Training

51~54쪽

- | | | | | |
|------------------|----------|------------------|-----------------|------|
| 1 ③ | 2 9 | 3 $\frac{19}{2}$ | 4 $\frac{1}{2}$ | 5 ④ |
| 6 ⑤ | 7 ⑤ | 8 ② | 9 ③ | 10 4 |
| 11 $\frac{7}{2}$ | 12 2 | 13 12 | 14 ① | 15 ④ |
| 16 ④ | 17 ② | 18 ③ | 19 ⑤ | 20 ① |
| 21 50m | 22 1500원 | 23 162π | 24 ③ | |
| 25 10 | 26 100 | | | |

- 1 $y=2x^2+4x+7=2(x+1)^2+5$
따라서 $x=-1$ 에서 최솟값 5 를 가지므로
 $a=-1, m=5$
 $\therefore a+m=4$

- 2 $y=-2x^2+4x+6=-2(x-1)^2+8$
 $x=1$ 일 때 최댓값이 8 이므로 $M=8$
 $y=4x^2+8x+3=4(x+1)^2-1$
 $x=-1$ 일 때 최솟값이 -1 이므로 $m=-1$
 $\therefore M-m=8-(-1)=9$
- 3 $-\frac{1}{2}x^2+ax+b=0$ 의 두 근이 $-2, 4$ 이므로
 $-2+4=2a, -2 \times 4=-2b \quad \therefore a=1, b=4$
따라서 주어진 이차함수는
 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+4=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{9}{2}$
 $x=1$ 일 때 최댓값이 $\frac{9}{2}$ 이므로 $M=\frac{9}{2}$
 $\therefore a+b+M=1+4+\frac{9}{2}=\frac{19}{2}$
- 4 $y=-2x^2+4ax-6a+5$
 $=-2(x-a)^2+2a^2-6a+5$
 $x=a$ 일 때 최댓값이 $2a^2-6a+5$ 이므로
 $f(a)=2a^2-6a+5=2\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$
따라서 $f(a)$ 의 최솟값은 $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$
- 5 $f(x)=-2x^2+8x-3=-2(x-2)^2+5$
꼭짓점의 x 좌표 2 가 $-1 \leq x \leq 3$ 에 포함되므로
 $M=f(2)=5, m=f(-1)=-13$
 $\therefore M-m=18$
- 6 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+k=\frac{1}{2}(x-1)^2+k-\frac{1}{2}$
꼭짓점의 x 좌표 1 이 $-2 \leq x \leq 2$ 에 포함되므로 최댓값은
 $f(-2)=k+4$, 최솟값은 $f(1)=k-\frac{1}{2}$ 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 차는 $(k+4)-\left(k-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}$
- 7 $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 라 하면 $f(0)=-1$ 이므로
 $f(x)=ax^2+bx-1$
 $f(x-1)-f(x)=-2x+3$ 이므로
 $a(x-1)^2+b(x-1)-1-(ax^2+bx-1)=-2x+3$
 $-2ax+a-b=-2x+3$
이 등식은 x 에 대한 항등식이므로
 $-2a=-2, a-b=3 \quad \therefore a=1, b=-2$
 $\therefore f(x)=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$
 $0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 일 때 최댓값이 7 이고,
 $x=1$ 일 때 최솟값이 -2 이다.
따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.

8 $y = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$ 이므로
 $a = -4, b = 3$
 $\therefore a + b = -1$

9 $y = a(x+1)^2 + 4$ 의 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로
 $3 = a + 4 \quad \therefore a = -1$
 $\therefore y = -(x+1)^2 + 4$
 이 함수의 그래프가 점 $(1, k)$ 를 지나므로
 $k = -4 + 4 = 0$

10 (가)에서 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x = 2$ 이고, (나)에서 최댓값은 5이므로
 $f(x) = -(x-2)^2 + 5 = -x^2 + 4x + 1$
 $\therefore a = 4, b = 1$
 따라서 이차방정식 $-x^2 + 4x + 1 = 0$ 의 두 실근의 합은
 $-\frac{4}{-1} = 4$

11 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2k = \frac{1}{2}(x+1)^2 + 2k - \frac{1}{2}$
 꼭짓점의 x 좌표 -1 이 $-2 \leq x \leq 1$ 에 포함되므로 최솟값은
 $f(-1) = \frac{3}{2}$ 에서 $2k - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \therefore k = 1$
 $\therefore f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{3}{2}$
 따라서 $-2 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은
 $f(1) = \frac{7}{2}$

12 $f(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 3(x-1)^2 - 1$ 에서
 $f(0) = 2, f(1) = -1$
 최댓값이 11이므로 $f(a) = 3a^2 - 6a + 2 = 11$
 $a^2 - 2a - 3 = 0, (a+1)(a-3) = 0$
 그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 3$
 따라서 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은
 $b = f(1) = -1$
 $\therefore a + b = 3 + (-1) = 2$

13 (가)에서 $f(-1) = f(3)$ 이므로
 $1 - a + b = 9 + 3a + b \quad \therefore a = -2$
 $\therefore f(x) = x^2 - 2x + b = (x-1)^2 + b - 1$
 이때 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 최솟값 $b - 1$ 을 갖고, (나)에서 최솟값이 -4 이므로
 $b - 1 = -4 \quad \therefore b = -3$
 $\therefore f(x) = (x-1)^2 - 4$
 따라서 $-2 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은
 $f(5) = 12$

14 $f(x) = x^2 - 2kx = (x-k)^2 - k^2$ 에서 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(k, -k^2)$

(i) $k \leq -1$ 일 때

꼭짓점의 x 좌표가 $x \leq -1$ 에 포함되므로 $x = k$ 일 때 최솟값이 -3 이다.

즉, $f(k) = -3$ 에서
 $-k^2 = -3, k^2 = 3$
 $\therefore k = -\sqrt{3}$ 또는 $k = \sqrt{3}$

그런데 $k \leq -1$ 이므로 $k = -\sqrt{3}$

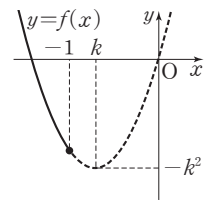
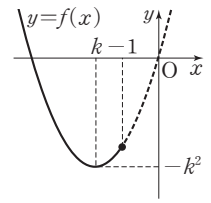
(ii) $k > -1$ 일 때

꼭짓점의 x 좌표가 $x \leq -1$ 에 포함되지 않으므로 $x = -1$ 일 때 최솟값이 -3 이다.

즉, $f(-1) = -3$ 에서
 $1 + 2k = -3$
 $\therefore k = -2$

그런데 $k > -1$ 이므로 $k = -2$ 는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에 의하여 $k = -\sqrt{3}$



15 $x^2 + 2x = t$ 로 놓으면

$t = x^2 + 2x$

$= (x+1)^2 - 1$

이 식은 $x = -1$ 일 때 최솟값이 -1 이므로

$t \geq -1$

주어진 함수는

$y = -t^2 + 2t + 3$

$= -(t-1)^2 + 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$t \geq -1$ 에서 $\textcircled{1}$ 은 $t = 1$ 일 때 최댓값이 4이다.

16 $x^2 - 2x - 1 = t$ 로 놓으면

$t = x^2 - 2x - 1$

$= (x-1)^2 - 2$

이 식은 $0 \leq x \leq 3$ 에서 $x = 3$ 일 때 최댓값이 2, $x = 1$ 일 때 최솟값이 -2 이므로

$-2 \leq t \leq 2$

주어진 함수는

$y = 2t^2 - 4(t+3) - 1$

$= 2t^2 - 4t - 13$

$= 2(t-1)^2 - 15 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$-2 \leq t \leq 2$ 에서 $\textcircled{1}$ 은 $t = -2$ 일 때 최댓값이 3, $t = 1$ 일 때 최솟값이 -15 이다.

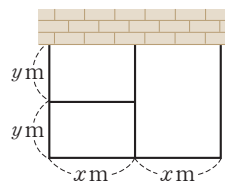
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 -12 이다.

- 17 $4x^2+4x+1=t$ 로 놓으면 $t=(2x+1)^2$
 이 식은 $x=-\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값이 0이므로 $t \geq 0$
 주어진 함수는
 $y=-3t^2+6t+k=-3(t-1)^2+k+3 \dots\dots \textcircled{7}$
 $t \geq 0$ 에서 $\textcircled{7}$ 은 $t=1$ 일 때 최댓값이 $k+3$ 이다.
 즉, $k+3=4$ 이므로 $k=1$
 $t=1$ 에서 최댓값을 가지므로
 $4x^2+4x+1=1, x^2+x=0$
 $x(x+1)=0 \therefore x=0$ 또는 $x=-1$
 $\therefore a=0$ 또는 $a=-1$
 그런데 $a < 0$ 이므로 $a=-1$
 $\therefore a+k=(-1)+1=0$
- 18 $2x+y=2$ 에서 $y=-2x+2$ 이므로
 $2x^2+y^2=2x^2+(-2x+2)^2$
 $=6x^2-8x+4=6\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3}$
 따라서 $x=\frac{2}{3}, y=\frac{2}{3}$ 일 때 최솟값은 $\frac{4}{3}$ 이다.
- 19 $x+y=4$ 에서 $y=4-x$
 이때 $x \geq 0, y \geq 0$ 이므로 $x \geq 0, 4-x \geq 0$
 $\therefore 0 \leq x \leq 4$
 $x^2+xy+y^2=x^2+x(4-x)+(4-x)^2$
 $=x^2-4x+16=(x-2)^2+12$
 $0 \leq x \leq 4$ 에서 $x=0$ 또는 $x=4$ 일 때 최댓값이 16, $x=2$ 일 때 최솟값이 12이다.
 따라서 최댓값과 최솟값의 합은 28이다.
- 20 $x^2+y^2+4x-6y+5=(x+2)^2+(y-3)^2-8$
 이때 $(x+2)^2 \geq 0, (y-3)^2 \geq 0$ 이므로
 $x^2+y^2+4x-6y+5 \geq -8$
 따라서 $x=-2, y=3$ 에서 최솟값 -8 을 가지므로
 $a=-2, b=3, c=-8 \therefore a+b+c=-7$
- 21 $h=-5t^2+30t+5=-5(t-3)^2+50$
 따라서 $t=3$ 일 때 최댓값이 50이므로 가장 높이 올라갔을 때, 지면으로부터의 높이는 50m이다.
- 22 10원 올린 가격은 $(1000+10x)$ 원이고, 이때 판매량은 $(200-x)$ 다발 ($0 < x < 200$)이므로 하루 총 판매 금액을 y 원이라 하면
 $y=(1000+10x)(200-x)$
 $=-10x^2+1000x+200000$
 $=-10(x-50)^2+225000$

$0 < x < 200$ 에서 $x=50$ 일 때 최댓값은 225000이다.
 따라서 $x=50$ 일 때 하루 총 판매 금액이 최대이므로 그때의 바나나 한 다발의 가격은
 $1000+10 \times 50=1500$ (원)

- 23 t 초 후 원기둥의 밑면의 넓이는 $4\pi+2\pi t$ 이고 높이는 $16-t$ ($0 < t < 16$)이므로 원기둥의 부피를 V 라 하면
 $V=(4\pi+2\pi t)(16-t)$
 $=-2\pi(t-7)^2+162\pi$
 $0 < t < 16$ 에서 $t=7$ 일 때 최댓값은 162π 이다.
 따라서 원기둥의 부피의 최댓값은 162π 이다.

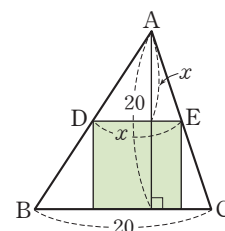
- 24 세 우리의 넓이의 비가
 $1:1:2$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 작은 우리의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m라 하면
 $3x+6y=18$
 $\therefore x=6-2y$ ($0 < y < 3$)
 우리 전체의 넓이는
 $2x \times 2y=4y(6-2y)=-8y^2+24y$
 $=-8\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+18$



$0 < y < 3$ 에서 $y=\frac{3}{2}$ 일 때 최댓값은 18이다.
 따라서 우리 전체의 넓이의 최댓값은 18 m^2 이다.

- 25 점 B의 좌표를 $(a, 0)$ ($0 < a < 2$)이라 하면
 $C(a, 4-a^2)$
 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는
 $2(\overline{AB}+\overline{BC})=2(2a+4-a^2)$
 $=-2(a-1)^2+10$
 $0 < a < 2$ 에서 $a=1$ 일 때 최댓값은 10이다.
 따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 10이다.

- 26 오른쪽 그림에서
 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ 이므로 직사각형의 가로의 길이를
 x ($0 < x < 20$)라 하면 세로의 길이는 $20-x$
 이때 직사각형의 넓이는
 $x(20-x)=-x^2+20x$
 $=-(x-10)^2+100$



$0 < x < 20$ 에서 $x=10$ 일 때 최댓값은 100이다.
 따라서 직사각형의 넓이의 최댓값은 100이다.

II-3 01 삼차방정식과 사차방정식

기초 문제 Training

56쪽

- 1 (1) $x = -1 \pm \sqrt{2}$ 또는 $x = \pm i$
 (2) $x = -2$ 또는 $x = -1$ 또는 $x = 1$
 (3) $x = -2$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 4$
 (4) $x = 0$ (중근) 또는 $x = \pm 2\sqrt{2}$

- 2 (1) $x = -2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{3}i$
 (2) $x = 3$ 또는 $x = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$
 (3) $x = \pm 1$ 또는 $x = \pm i$
 (4) $x = \pm 3$ 또는 $x = \pm 3i$

- 3 (1) -2 (2) -5 (3) -1

- 4 (1) $x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = 0$
 (2) $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$
 (3) $x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0$

- 5 $a = 1, b = 1$

- 6 $a = -2, b = -3, c = 10$

- 7 (1) 0 (2) -1 (3) -1 (4) 1 (5) 0 (6) -1

핵심 유형 Training

57~63쪽

- | | | | | |
|------|-------|-------------------------|------|--------------------|
| 1 ③ | 2 23 | 3 ③ | 4 7 | 5 ② |
| 6 ① | 7 ④ | 8 ② | 9 ② | 10 $4 + 4\sqrt{2}$ |
| 11 0 | 12 ④ | 13 ④ | 14 ① | 15 ② |
| 16 ③ | 17 ④ | 18 $k \leq \frac{1}{2}$ | 19 ③ | 20 ② |
| 21 ③ | 22 6 | 23 3cm | 24 ① | 25 ⑤ |
| 26 2 | 27 ④ | 28 7 | 29 ② | 30 ③ |
| 31 ④ | 32 ③ | 33 4 | 34 ④ | 35 ⑤ |
| 36 5 | 37 ① | 38 ④ | 39 4 | 40 ② |
| 41 ③ | 42 ① | 43 0 | 44 ② | 45 $\frac{3}{7}$ |
| 46 ⑤ | 47 27 | | | |

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -14 & 24 \\ & & 2 & 2 & -24 \\ & 1 & 1 & -12 & 0 \end{array}$$

$$(x-2)(x^2+x-12)=0$$

$$(x+4)(x-2)(x-3)=0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\therefore \text{따라서 } \alpha = 3, \beta = -4 \text{ 이므로 } \alpha - \beta = 7$$

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -9 & 13 & 23 \\ & & -1 & 10 & -23 \\ & 1 & -10 & 23 & 0 \end{array}$$

$$(x+1)(x^2-10x+23)=0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 5 \pm \sqrt{2}$$

$$\therefore \text{따라서 모든 양의 근의 곱은 } (5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})=23$$

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ & & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ & & 1 & 2 & 2 & \\ & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$(x+1)(x-1)(x^2+2x+2)=0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = -1 \pm i$$

$$\therefore \text{따라서 모든 실근의 합은 } -1+1=0$$

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -3 & 3 & 1 & -6 \\ & & -1 & 4 & -7 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & 7 & -6 & 0 \\ & & 2 & -4 & 6 & \\ & 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3)=0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\therefore \text{두 실근은 } -1, 2 \text{ 이므로 } \alpha^2 + \beta^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$$

$$\therefore \text{두 허근 } \gamma, \delta \text{ 는 이차방정식 } x^2 - 2x + 3 = 0 \text{ 의 근이므로}$$

$$\gamma + \delta = 2$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma + \delta = 5 + 2 = 7$$

5 $x^2 - x = t$ 로 놓으면 $t^2 - 5t + 6 = 0$

$$(t-2)(t-3)=0 \quad \therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 3$$

(i) $t = 2$ 일 때, $x^2 - x - 2 = 0$

$$(x+1)(x-2)=0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

(ii) $t = 3$ 일 때, $x^2 - x - 3 = 0 \quad \therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

(i), (ii)에 의하여 모든 실근의 합은

$$-1 + 2 + \frac{1 - \sqrt{13}}{2} + \frac{1 + \sqrt{13}}{2} = 2$$

- 6 $x^2+2x=t$ 로 놓으면 $(t-2)(t-6)+3=0$
 $t^2-8t+15=0, (t-3)(t-5)=0$
 $\therefore t=3$ 또는 $t=5$
 (i) $t=3$ 일 때, $x^2+2x-3=0$
 $(x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x=-3$ 또는 $x=1$
 (ii) $t=5$ 일 때, $x^2+2x-5=0$
 $\therefore x=-1\pm\sqrt{6}$
 (i), (ii)에 의하여 모든 음의 근의 합은
 $-3+(-1-\sqrt{6})=-4-\sqrt{6}$
- 7 $\{(x+1)(x+3)\}(x+2)^2=20$ 에서
 $(x^2+4x+3)(x^2+4x+4)=20$
 $x^2+4x=t$ 로 놓으면 $(t+3)(t+4)=20$
 $t^2+7t-8=0, (t+8)(t-1)=0$
 $\therefore t=-8$ 또는 $t=1$
 (i) $t=-8$ 일 때, $x^2+4x+8=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1<0$
 (ii) $t=1$ 일 때, $x^2+4x-1=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2>0$
 (i), (ii)에 의하여 $a=-1, b=8$ 이므로 $b-a=9$
- 8 $x^2=t$ 로 놓으면 $t^2+9t-36=0$
 $(t+12)(t-3)=0 \quad \therefore t=-12$ 또는 $t=3$
 즉, $x^2=-12$ 또는 $x^2=3$ 이므로
 $x=\pm 2\sqrt{3}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$
 따라서 모든 실근의 곱은 $-\sqrt{3}\times\sqrt{3}=-3$
- 9 $x^4-4x^2+4-4x^2=0, (x^2-2)^2-(2x)^2=0$
 $(x^2+2x-2)(x^2-2x-2)=0$
 $\therefore x=-1\pm\sqrt{3}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}$
 따라서 보기 중 주어진 방정식의 근인 것은 ㄱ, ㄷ이다.
- 10 $x^2=t$ 로 놓으면 $t^2-12t+32=0$
 $(t-4)(t-8)=0 \quad \therefore t=4$ 또는 $t=8$
 즉, $x^2=4$ 또는 $x^2=8$ 이므로
 $x=\pm 2$ 또는 $x=\pm 2\sqrt{2}$
 $\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|=4+4\sqrt{2}$
- 11 $x^4+8x^2+16-4x^2=0, (x^2+4)^2-(2x)^2=0$
 $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)=0$
 이차방정식 $x^2+2x+4=0$ 의 두 근을 α, β , 이차방정식
 $x^2-2x+4=0$ 의 두 근을 γ, δ 라 하면
 $\alpha+\beta=-2, \alpha\beta=4, \gamma+\delta=2, \gamma\delta=4$
 $\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}=\frac{-2}{4}+\frac{2}{4}=0$

- 12 $x\neq 0$ 이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2 으로 나누면
 $x^2-3x+2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0$
 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$
 $x+\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면
 $t^2-3t=0, t(t-3)=0$
 $\therefore t=0$ 또는 $t=3$
 (i) $t=0$ 일 때, $x+\frac{1}{x}=0$ 에서 $x^2+1=0$
 $\therefore x=\pm i$
 (ii) $t=3$ 일 때, $x+\frac{1}{x}=3$ 에서 $x^2-3x+1=0$
 $\therefore x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
 (i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 실근은 $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$
- 13 $x\neq 0$ 이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2 으로 나누면
 $2x^2+3x-1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0$
 $2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$
 $x+\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면
 $2t^2+3t-5=0, (t-1)(2t+5)=0$
 $\therefore t=-\frac{5}{2}$ 또는 $t=1$
 (i) $t=-\frac{5}{2}$ 일 때, $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$ 에서 $2x^2+5x+2=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면 $D_1>0$
 (ii) $t=1$ 일 때, $x+\frac{1}{x}=1$ 에서 $x^2-x+1=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면 $D_2<0$
 (i), (ii)에 의하여 주어진 방정식의 두 허근은 이차방정식
 $x^2-x+1=0$ 의 두 근이므로 그 합은 1이다.

- 14 $x\neq 0$ 이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2 으로 나누면
 $x^2+6x+11+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}=0$
 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+6\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0$
 $x+\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면
 $t^2+6t+9=0, (t+3)^2=0$
 $\therefore t=-3$
 따라서 $x+\frac{1}{x}=-3$ 이므로
 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=-3$

15 $x=1$ 을 주어진 방정식에 대입하면

$$1-(a+1)+2a-1=0 \quad \therefore a=1$$

주어진 방정식은 $x^3-2x+1=0$

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ & & 1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\therefore (x-1)(x^2+x-1)=0$$

따라서 α, β 는 이차방정식 $x^2+x-1=0$ 의 두 근이므로 $\alpha+\beta=-1$

$$\therefore a(\alpha+\beta)=1 \times (-1)=-1$$

16 $x=-2$ 를 주어진 방정식에 대입하면

$$-8+4a-2a+6+b=0 \quad \therefore 2a+b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$x=3$ 을 주어진 방정식에 대입하면

$$27+9a+3a-9+b=0 \quad \therefore 12a+b=-18 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a=-2, b=6$

주어진 방정식은 $x^3-2x^2-5x+6=0$

$$(x+2)(x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 나머지 한 근은 1이다.

17 $x=-1$ 을 주어진 방정식에 대입하면

$$1+6+a-b-2=0 \quad \therefore a-b=-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$x=2$ 를 주어진 방정식에 대입하면

$$16-48+4a+2b-2=0 \quad \therefore 2a+b=17 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a=4, b=9$

주어진 방정식은 $x^4-6x^3+4x^2+9x-2=0$

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & -6 & 4 & 9 & -2 \\ & & -1 & 7 & -11 & 2 \\ \hline 2 & 1 & -7 & 11 & -2 & 0 \\ & & 2 & -10 & 2 & \\ \hline & 1 & -5 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\therefore (x+1)(x-2)(x^2-5x+1)=0$$

따라서 주어진 방정식의 나머지 두 근은 이차방정식 $x^2-5x+1=0$ 의 두 근이므로 그 곱은 1이다.

$$\begin{array}{c|ccc} 18 & 1 & 1 & 2k-2 & -2k \\ & & 1 & 2 & 2k \\ \hline & 1 & 2 & 2k & 0 \end{array}$$

$$\therefore (x-1)(x^2+2x+2k)=0$$

이 방정식의 근이 모두 실수이려면 이차방정식 $x^2+2x+2k=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4}=1-2k \geq 0 \quad \therefore k \leq \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 19 & 2 & 1 & -4 & 3k-1 & -6k+10 \\ & & 2 & -4 & 6k-10 \\ \hline & 1 & -2 & 3k-5 & 0 \end{array}$$

$$\therefore (x-2)(x^2-2x+3k-5)=0$$

이 방정식이 한 실근과 두 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2-2x+3k-5=0$ 의 판별식을 D 라 할 때

$$\frac{D}{4}=1-(3k-5)<0 \quad \therefore k>2$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 3이다.

$$\begin{array}{c|cccc} 20 & -1 & 1 & -2k+2 & -2k+3 & 2 \\ & & & -1 & 2k-1 & -2 \\ \hline & 1 & -2k+1 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\therefore (x+1)\{x^2+(-2k+1)x+2\}=0$$

이 방정식이 중근을 가지려면 이차방정식

$x^2+(-2k+1)x+2=0$ 이 -1 을 근으로 갖거나 -1 이 아닌 중근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식이 -1 을 근으로 갖는 경우

$$1+2k-1+2=0 \quad \therefore k=-1$$

(ii) 이차방정식이 -1 이 아닌 중근을 갖는 경우

$$\text{판별식을 } D \text{라 하면 } D=(-2k+1)^2-8=0$$

$$4k^2-4k-7=0 \quad \therefore k=\frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

(i), (ii)에 의하여 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-1+\frac{1-2\sqrt{2}}{2}+\frac{1+2\sqrt{2}}{2}=0$$

21 그릇 A의 밑면의 반지름의 길이를 x cm라 하면 높이는 $2x$ cm이므로

$$\pi x^2 \times 2x + 16\pi = \frac{1}{2} \times \pi (x+2)^2 \times 2x$$

$$x^3-4x^2-4x+16=0, (x+2)(x-2)(x-4)=0$$

그런데 $x>0$ 이므로 $x=2$ 또는 $x=4$

따라서 그릇 A의 높이는 4cm 또는 8cm이다.

$$22 \quad x^3-5 \times 4 \times x = \frac{1}{2}x^3-12 \text{에서 } x^3-40x+24=0$$

$$(x-6)(x^2+6x-4)=0$$

그런데 $x>5$ 이므로 $x=6$

23 쌓기나무 한 개의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면

$$a=3x^3, b=14x^2$$

$$b-a=45 \text{이므로 } 14x^2-3x^3=45$$

$$3x^3-14x^2+45=0, (x-3)(3x^2-5x-15)=0$$

그런데 x 는 자연수이므로 $x=3$

따라서 쌓기나무 한 개의 한 모서리의 길이는 3cm이다.

24 $\alpha + \beta + \gamma = -1$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2$, $\alpha\beta\gamma = -3$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} + \frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma} + \frac{\gamma+\alpha}{\gamma\alpha} \\ = \frac{2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)}{\alpha\beta\gamma} \\ = \frac{2 \times 2}{-3} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

25 $\alpha + \beta + \gamma = 2$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1$, $\alpha\beta\gamma = -1$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 \\ = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \\ = (-1)^2 - 2 \times (-1) \times 2 = 5 \end{aligned}$$

26 $\alpha + \beta + \gamma = 2$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3$, $\alpha\beta\gamma = 4$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \\ = (2 - \gamma)(2 - \alpha)(2 - \beta) \\ = 8 - 4(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma \\ = 8 - 4 \times 2 + 2 \times 3 - 4 = 2 \end{aligned}$$

27 $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -5$, $\alpha\beta\gamma = 6$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \\ = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma \\ = 0 + 3 \times 6 = 18 \end{aligned}$$

28 $\alpha + \beta + \gamma = -a$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1$, $\alpha\beta\gamma = 2$ ㉠

$$\begin{aligned} (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1) &= 1 \text{에서} \\ \alpha\beta\gamma + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha + \beta + \gamma) + 1 &= 1 \\ \text{이 식에 ㉠을 대입하면} \\ 2 + 1 - a + 1 &= 1 \quad \therefore a = 3 \\ \therefore \alpha + \beta + \gamma &= -3 \\ \therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= (-3)^2 - 2 \times 1 = 7 \end{aligned}$$

29 삼차방정식 $9x^3 - 18x^2 + ax + b = 0$ 의 세 근을 α , 2α , 3α ($\alpha \neq 0$)라 하면

$$\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 2, 6\alpha = 2 \quad \therefore \alpha = \frac{1}{3}$$

따라서 세 근이 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1 이므로

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times 1 + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{a}{9} \quad \therefore a = 11$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 1 = -\frac{b}{9} \quad \therefore b = -2$$

$$\therefore ab = 11 \times (-2) = -22$$

30 $2x^3 - 5x^2 - 2ax + 8 = 0$ 의 세 근을 α , β , γ 라 하고 $x^2 - 2x - 2b = 0$ 의 두 근을 α , β 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{5}{2}, \alpha + \beta = 2 \text{에서 } \gamma = \frac{1}{2}$$

$x = \frac{1}{2}$ 을 주어진 삼차방정식에 대입하면

$$\frac{1}{4} - \frac{5}{4} - a + 8 = 0 \quad \therefore a = 7$$

$$\alpha\beta\gamma = -4, \alpha\beta = -2b \text{에서 } b = 4$$

$$\therefore a - b = 7 - 4 = 3$$

31 $\alpha + \beta + \gamma = -1$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$, $\alpha\beta\gamma = -2$ 이므로

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$$

$$\alpha\beta \times \beta\gamma + \beta\gamma \times \gamma\alpha + \gamma\alpha \times \alpha\beta = \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = 2$$

$$\alpha\beta \times \beta\gamma \times \gamma\alpha = (\alpha\beta\gamma)^2 = 4$$

따라서 삼차방정식은 $x^3 + 2x - 4 = 0$

32 $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2$, $\alpha\beta\gamma = -1$ 이고

$$\frac{\beta + \gamma}{\alpha^2} = \frac{-\alpha}{\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha}, \frac{\gamma + \alpha}{\beta^2} = \frac{-\beta}{\beta^2} = -\frac{1}{\beta},$$

$$\frac{\alpha + \beta}{\gamma^2} = \frac{-\gamma}{\gamma^2} = -\frac{1}{\gamma}$$

따라서 x^3 의 계수가 1인 삼차방정식의 x 의 계수는

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right) + \left(-\frac{1}{\beta}\right)\left(-\frac{1}{\gamma}\right) + \left(-\frac{1}{\gamma}\right)\left(-\frac{1}{\alpha}\right) \\ = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma} = 0 \end{aligned}$$

33 $\alpha + \beta + \gamma = 3$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -2$, $\alpha\beta\gamma = -4$ 이므로

$$(\alpha + 1) + (\beta + 1) + (\gamma + 1) = (\alpha + \beta + \gamma) + 3 = 6$$

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) + (\beta + 1)(\gamma + 1) + (\gamma + 1)(\alpha + 1)$$

$$= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 2(\alpha + \beta + \gamma) + 3$$

$$= -2 + 2 \times 3 + 3 = 7$$

$$(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$$

$$= \alpha\beta\gamma + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha + \beta + \gamma) + 1$$

$$= -4 + (-2) + 3 + 1 = -2$$

즉, $\alpha + 1$, $\beta + 1$, $\gamma + 1$ 을 세 근으로 하는 삼차방정식은

$$a(x^3 - 6x^2 + 7x + 2) = 0$$

이 삼차방정식은 $ax^3 + bx^2 + cx + 4 = 0$ 과 일치하므로

$$-6a = b, 7a = c, 2a = 4$$

$$\therefore a = 2, b = -12, c = 14$$

$$\therefore a + b + c = 4$$

34 계수가 유리수이므로 $2 - \sqrt{3}$ 이 근이면 $2 + \sqrt{3}$ 도 근이다.

나머지 한 근을 α 라 하면 세 근의 합은 5이므로

$$(2 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3}) + \alpha = 5 \quad \therefore \alpha = 1$$

따라서 나머지 두 근의 곱은 $(2 + \sqrt{3}) \times 1 = 2 + \sqrt{3}$

- 35 계수가 유리수이므로 $4-2\sqrt{2}$ 가 근이면 $4+2\sqrt{2}$ 도 근이다.
나머지 한 근을 α 라 하면 세 근의 합은 m 이므로

$$(4-2\sqrt{2})+(4+2\sqrt{2})+\alpha=m$$

$$\therefore \alpha=m-8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$
세 근의 곱은 $2m-4$ 이므로

$$(4-2\sqrt{2})(4+2\sqrt{2})\alpha=2m-4$$

$$\therefore 8\alpha=2m-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $\alpha=2, m=10$

- 36 계수가 유리수이므로 $1-\sqrt{2}$ 가 근이면 $1+\sqrt{2}$ 도 근이다.
나머지 한 근이 2이므로

$$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})\times 2+2\times(1-\sqrt{2})=\frac{b}{a}$$

$$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})\times 2=-\frac{c}{a}$$

$$\therefore \frac{b}{a}=3, \frac{c}{a}=2$$

$$\therefore \frac{b+c}{a}=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=5$$

- 37 계수가 실수이므로 $\frac{1+\sqrt{7}i}{2}$ 가 근이면 $\frac{1-\sqrt{7}i}{2}$ 도 근이다.
세 근의 합은 0이므로

$$\frac{1+\sqrt{7}i}{2}+\frac{1-\sqrt{7}i}{2}+\alpha=0 \quad \therefore \alpha=-1$$
세 근의 곱은 $-k$ 이므로

$$\frac{1+\sqrt{7}i}{2}\times\frac{1-\sqrt{7}i}{2}\times(-1)=-k \quad \therefore k=2$$

$$\therefore k+\alpha=2+(-1)=1$$

- 38 계수가 실수이므로 $2+i$ 가 근이면 $2-i$ 도 근이다.
나머지 한 근을 α 라 하면 세 근의 곱은 15이므로

$$(2+i)(2-i)\alpha=15 \quad \therefore \alpha=3$$
세 근의 합은 $-a$ 이므로

$$(2+i)+(2-i)+3=-a \quad \therefore a=-7$$
두 근끼리의 곱의 합은 b 이므로

$$(2+i)(2-i)+(2-i)\times 3+3\times(2+i)=b \quad \therefore b=17$$

$$\therefore a+b=-7+17=10$$

- 39 계수가 실수이므로 $1-i$ 가 근이면 $1+i$ 도 근이다.
나머지 한 근은 c 이고, 세 근의 합은 4이므로

$$(1-i)+(1+i)+c=4 \quad \therefore c=2$$
두 근끼리의 곱의 합은 a 이므로

$$(1-i)(1+i)+(1+i)\times 2+2\times(1-i)=a \quad \therefore a=6$$
세 근의 곱은 $-b$ 이므로

$$(1-i)(1+i)\times 2=-b \quad \therefore b=-4$$

$$\therefore a+b+c=6+(-4)+2=4$$

- 40 ㉠에서 계수가 실수이므로 $1-3i$ 가 근이면 $1+3i$ 도 근이다.
나머지 한 근을 α 라 하면

$$(1-3i)+(1+3i)+\alpha=-a$$

$$\therefore \alpha=-a-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$(1-3i)(1+3i)+(1+3i)\alpha+\alpha(1-3i)=b$$

$$\therefore b=2\alpha+10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$(1-3i)(1+3i)\alpha=-c \quad \therefore c=-10\alpha \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$
㉡에서 $f(1)=-9$ 이므로

$$1+a+b+c=-9$$
이 식에 $\textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}, \textcircled{㉣}$ 을 대입하면

$$1+(-a-2)+(2\alpha+10)+(-10\alpha)=-9 \quad \therefore \alpha=2$$
따라서 $f(x)=0$ 의 세 근이 $1-3i, 1+3i, 2$ 이므로
 $f(2x)=0$ 에서 $2x=1-3i$ 또는 $2x=1+3i$ 또는 $2x=2$

$$\therefore x=\frac{1-3i}{2} \text{ 또는 } x=\frac{1+3i}{2} \text{ 또는 } x=1$$
따라서 세 근의 곱은

$$\frac{1-3i}{2}\times\frac{1+3i}{2}\times 1=\frac{5}{2}$$

- 41 $\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$
 $\textcircled{1} \omega^2+\omega=-1 \quad \textcircled{2} \omega+\bar{\omega}=-1$
 $\textcircled{3} \omega^2+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^3+1}{\omega}=\frac{2}{\omega}$
 $\textcircled{4} \omega+\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2+1}{\omega}=\frac{-\omega}{\omega}=-1$
 $\textcircled{5} \omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\frac{\omega^4+1}{\omega^2}=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$
따라서 그 값이 다른 하나는 $\textcircled{3}$ 이다.

- 42 $\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$ 이므로

$$(1+\omega)^3+(1+\omega^2)^3+(\omega+\omega^2)^3$$

$$=(-\omega^2)^3+(-\omega)^3+(-1)^3$$

$$=-\omega^6-\omega^3-1$$

$$=-1-1-1=-3$$

- 43 $\omega^3=-1, \omega^2-\omega+1=0$ 이므로

$$\frac{\omega^5}{\omega-1}+\frac{1-\omega}{\omega^5}=\frac{\omega^5}{\omega^2}+\frac{-\omega^2}{\omega^5}=\omega^3-\frac{1}{\omega^3}$$

$$=-1-(-1)=0$$

- 44 $x^2+x+1=0$ 의 양변에 $x-1$ 을 곱하면

$$(x-1)(x^2+x+1)=0 \quad \therefore x^3-1=0$$
즉, ω 는 $x^3=1$ 의 한 허근이므로 $\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$

$$\therefore \omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{23}$$

$$=(\omega+\omega^2+1)\times 7+(\omega+\omega^2)$$

$$=0\times 7-1=-1$$

45 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이면 다른 한 근은 $\bar{\omega}$ 이므로 $\omega+\bar{\omega}=-1$, $\omega\bar{\omega}=1$

$$\begin{aligned}\therefore z\bar{z} &= \left(\frac{2\omega+1}{3\omega+1}\right)\left(\frac{2\bar{\omega}+1}{3\bar{\omega}+1}\right) \\ &= \left(\frac{2\omega+1}{3\omega+1}\right)\left(\frac{2\bar{\omega}+1}{3\bar{\omega}+1}\right) \\ &= \frac{4\omega\bar{\omega}+2(\omega+\bar{\omega})+1}{9\omega\bar{\omega}+3(\omega+\bar{\omega})+1} \\ &= \frac{4-2+1}{9-3+1} = \frac{3}{7}\end{aligned}$$

46 $x^3-1=0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$
 $x^2+x+1=0$ 의 한 허근이 ω 이면 다른 한 근은 $\bar{\omega}$ 이므로 $\omega+\bar{\omega}=-1$, $\omega\bar{\omega}=1$

$$\begin{aligned}\neg. \quad \omega\bar{\omega} &= 1 \\ \neg. \quad \frac{1}{\omega-1} + \frac{1}{\bar{\omega}-1} &= \frac{\bar{\omega}-1+\omega-1}{(\omega-1)(\bar{\omega}-1)} \\ &= \frac{\omega+\bar{\omega}-2}{\omega\bar{\omega}-(\omega+\bar{\omega})+1} \\ &= \frac{-1-2}{1-(-1)+1} = -1\end{aligned}$$

$\neg. \quad \omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$ 이므로
 $(\omega^3+1)(\omega^2+1)(\omega+1)$
 $= 2 \times (-\omega) \times (-\omega^2)$
 $= 2\omega^3 = 2$
따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

47 $\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$
 $\therefore \omega^{4n}+(\omega+1)^{4n}+1=(\omega^4)^n+(-\omega^2)^{4n}+1$
 $= \omega^n+(\omega^8)^n+1$
 $= \omega^n+\omega^{2n}+1$
 $= \omega^{2n}+\omega^n+1$

(i) $n=3k+1$ (k 는 음이 아닌 정수)일 때
 $\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k+2}+\omega^{3k+1}+1$
 $= \omega^2+\omega+1=0$

(ii) $n=3k+2$ (k 는 음이 아닌 정수)일 때
 $\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k+4}+\omega^{3k+2}+1$
 $= \omega^4+\omega^2+1$
 $= \omega+\omega^2+1=0$

(iii) $n=3k+3$ (k 는 음이 아닌 정수)일 때
 $\omega^{2n}+\omega^n+1=\omega^{6k+3}+\omega^{3k+3}+1=3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $\omega^{4n}+(\omega+1)^{4n}+1=0$ 을 만족시키는 자연수 n 은 $n=3k+1$ 또는 $n=3k+2$ (k 는 음이 아닌 정수) 꼴이다.

따라서 40 이하의 자연수 n 의 개수는

$$40 - (40 \text{ 이하의 } 3 \text{의 배수의 개수}) = 40 - 13 = 27$$

II-3 02 연립이차방정식

기초 문제 Training

64쪽

1 (1) $y=2x-6$ (2) $x=\frac{4}{5}$ 또는 $x=4$

(3) $\begin{cases} x=\frac{4}{5} \\ y=-\frac{22}{5} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

3 $x, -\sqrt{5}, -\sqrt{3}, -\sqrt{5}, -\sqrt{3}$

4 (1) $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases}$
또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$
(2) $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=2\sqrt{3} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-2\sqrt{3} \end{cases}$
또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{7} \\ y=-2\sqrt{7} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=\sqrt{7} \\ y=2\sqrt{7} \end{cases}$

5 (1) $(1, 2), (2, 1)$ (2) $(2, 5), (4, 2)$

6 (1) $(-3, 1), (-1, 3), (1, -3), (3, -1)$
(2) $(-2, 3), (0, 1)$

7 (1) $x=4, y=-1$ (2) $x=-3, y=4$

핵심 유형 Training

65~68쪽

1 ②	2 ①	3 (3, 2), (5, 6)	4 ②
5 ④	6 ⑤	7 6	8 ②
9 ④			
10 ③	11 2	12 ③	13 ①
14 ①			
15 ②	16 ④	17 3	18 24 cm
19 39			
20 ②	21 ④	22 ③	23 ②
24 5			
25 ②	26 $x=-1, y=3$		

1 ㉠을 ㉡에 대입하면 $x^2+(x+1)^2=5$, $x^2+x-2=0$
 $(x+2)(x-1)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$
이를 각각 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는
 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$
 $\therefore |x|+|y|=3$

- 2 ㉠에서 $x=2y+1$ 을 ㉡에 대입하면 $(2y+1)y-y^2=6$
 $y^2+y-6=0, (y+3)(y-2)=0$
 $\therefore y=-3$ 또는 $y=2$
 이를 각각 $x=2y+1$ 에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는
 $\begin{cases} x=-5 \\ y=-3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}$
 그런데 $\alpha > 0, \beta > 0$ 이므로 $\alpha\beta=5 \times 2=10$
- 3 ㉠에서 $y=2x-4$ 를 ㉡에 대입하면
 $x^2+2x(2x-4)-2(2x-4)^2=13, x^2-8x+15=0$
 $(x-3)(x-5)=0 \therefore x=3$ 또는 $x=5$
 이를 각각 $y=2x-4$ 에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는
 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$
 따라서 구하는 순서쌍은 $(3, 2), (5, 6)$
- 4 ㉠에서 $x=3y$ 를 ㉡에 대입하면 $9y^2+2y^2=44$
 $y^2=4 \therefore y=-2$ 또는 $y=2$
 이를 각각 $x=3y$ 에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는
 $\begin{cases} x=-6 \\ y=-2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$
 따라서 $x+y$ 의 최솟값은 $-6-2=-8$
- 5 두 연립방정식의 공통인 해는 $\begin{cases} x+2y=5 \\ x^2-4y^2=5 \end{cases}$ 의 해와 같다.
 $x+2y=5$ 에서 $x=5-2y$ 를 $x^2-4y^2=5$ 에 대입하면
 $(5-2y)^2-4y^2=5 \therefore y=1$
 이를 $x=5-2y$ 에 대입하면 $x=3$
 $x=3, y=1$ 을 $ax+y=10, 2x+y=b$ 에 각각 대입하면
 $3a+1=10, 6+1=b \therefore a=3, b=7$
 $\therefore a+b=10$
- 6 (i) $x \geq y$ 일 때, $\langle x, y \rangle = -y$ 이므로
 $\begin{cases} x-y-2=-y & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ x^2+y-4=-y & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$
 ㉠에서 $x=2$
 이를 ㉡에 대입하면 $4+y-4=-y \therefore y=0$
 (ii) $x < y$ 일 때, $\langle x, y \rangle = x$ 이므로
 $\begin{cases} x-y-2=x & \cdots \cdots \textcircled{㉢} \\ x^2+y-4=x & \cdots \cdots \textcircled{㉣} \end{cases}$
 ㉢에서 $y=-2$
 이를 ㉣에 대입하면 $x^2-2-4=x, x^2-x-6=0$
 $(x+2)(x-3)=0 \therefore x=-2$ 또는 $x=3$
 그런데 $x < y$ 이므로 해가 없다.
 (i), (ii)에 의하여 주어진 연립방정식의 해는 $x=2, y=0$
 $\therefore \alpha+\beta=2+0=2$

- 7 ㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x+2y)(2x-y)=0$
 $\therefore x=-2y$ 또는 $y=2x$
 (i) $x=-2y$ 를 ㉡에 대입하면 $4y^2-2y^2=12$
 $y^2=6 \therefore y=-\sqrt{6}$ 또는 $y=\sqrt{6}$
 $x=-2y$ 이므로
 $y=-\sqrt{6}$ 일 때 $x=2\sqrt{6}, y=\sqrt{6}$ 일 때 $x=-2\sqrt{6}$
 (ii) $y=2x$ 를 ㉡에 대입하면 $x^2+2x^2=12$
 $x^2=4 \therefore x=-2$ 또는 $x=2$
 $y=2x$ 이므로
 $x=-2$ 일 때 $y=-4, x=2$ 일 때 $y=4$
 (i), (ii)에 의하여 x, y 는 자연수이므로
 $x+y=2+4=6$
- 8 ㉠의 좌변을 인수분해하면 $(x+y)(x-2y)=0$
 $\therefore x=-y$ 또는 $x=2y$
 (i) $x=-y$ 를 ㉡에 대입하면
 $y^2-2y^2-3y^2=20, y^2=-5$
 $\therefore y=-\sqrt{5}i$ 또는 $y=\sqrt{5}i$
 $x=-y$ 이므로
 $y=-\sqrt{5}i$ 일 때 $x=\sqrt{5}i, y=\sqrt{5}i$ 일 때 $x=-\sqrt{5}i$
 (ii) $x=2y$ 를 ㉡에 대입하면
 $4y^2+4y^2-3y^2=20, y^2=4$
 $\therefore y=-2$ 또는 $y=2$
 $x=2y$ 이므로 $y=-2$ 일 때 $x=-4, y=2$ 일 때 $x=4$
 (i), (ii)에 의하여 x, y 는 실수이므로 $xy=8$
- 9 ㉠의 좌변을 인수분해하면 $(3x+4y)(4x-3y)=0$
 $\therefore x=-\frac{4}{3}y$ 또는 $x=\frac{3}{4}y$
 (i) $x=-\frac{4}{3}y$ 를 ㉡에 대입하면
 $\frac{16}{9}y^2+y^2=25, y^2=9$
 $\therefore y=-3$ 또는 $y=3$
 $x=-\frac{4}{3}y$ 이므로
 $y=-3$ 일 때 $x=4, y=3$ 일 때 $y=-4$
 $\therefore x+y=1$ 또는 $x+y=-1$
 (ii) $x=\frac{3}{4}y$ 를 ㉡에 대입하면
 $\frac{9}{16}y^2+y^2=25, y^2=16$
 $\therefore y=-4$ 또는 $y=4$
 $x=\frac{3}{4}y$ 이므로
 $y=-4$ 일 때 $x=-3, y=4$ 일 때 $y=3$
 $\therefore x+y=-7$ 또는 $x+y=7$
 (i), (ii)에 의하여 $x+y$ 의 최댓값은 7이다.

- 10 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면 $\begin{cases} u^2-2v=17 \\ v=4 \end{cases}$
 $\therefore u=-5$ 또는 $u=5$
 그런데 x, y 가 자연수이면 $u>0$ 이므로 $u=5, v=4$
 x, y 는 이차방정식 $t^2-5t+4=0$ 의 두 근이므로
 $(t-1)(t-4)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=4$
 따라서 (x, y) 는 $(1, 4), (4, 1)$ 의 2개이다.

- 11 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면 $\begin{cases} u^2-2v+u=2 \\ u-v=1 \end{cases}$
 $\therefore u=0$ 일 때 $v=-1, u=1$ 일 때 $v=0$
 (i) $x+y=0, xy=-1$ 인 경우
 x, y 는 이차방정식 $t^2-1=0$ 의 두 근이므로
 $(t+1)(t-1)=0 \quad \therefore t=-1$ 또는 $t=1$
 $\therefore x=-1, y=1$ 또는 $x=1, y=-1$
 $\therefore \alpha-\beta=-2$ 또는 $\alpha-\beta=2$
 (ii) $x+y=1, xy=0$ 인 경우
 x, y 는 이차방정식 $t^2-t=0$ 의 두 근이므로
 $t(t-1)=0 \quad \therefore t=0$ 또는 $t=1$
 $\therefore x=0, y=1$ 또는 $x=1, y=0$
 $\therefore \alpha-\beta=-1$ 또는 $\alpha-\beta=1$
 (i), (ii)에 의하여 $\alpha-\beta$ 의 최댓값은 2이다.

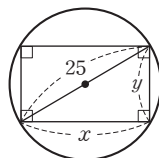
- 12 $x+y=u, xy=v$ 로 놓으면 $\begin{cases} v+u=-5 \\ u^2-v=7 \end{cases}$
 $\therefore u=-2$ 일 때 $v=-3, u=1$ 일 때 $v=-6$
 (i) $x+y=-2, xy=-3$ 인 경우
 x, y 는 이차방정식 $t^2+2t-3=0$ 의 두 근이므로
 $(t+3)(t-1)=0 \quad \therefore t=-3$ 또는 $t=1$
 $\therefore x=-3, y=1$ 또는 $x=1, y=-3$
 $\therefore x-y=-4$ 또는 $x-y=4$
 (ii) $x+y=1, xy=-6$ 인 경우
 x, y 는 이차방정식 $t^2-t-6=0$ 의 두 근이므로
 $(t+2)(t-3)=0 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=3$
 $\therefore x=-2, y=3$ 또는 $x=3, y=-2$
 $\therefore x-y=-5$ 또는 $x-y=5$
 (i), (ii)에 의하여 $x-y$ 의 값은 $-4, 4, -5, 5$ 이다.

- 13 $x-y=k$ 에서 $y=x-k$ 를 $x^2-2y^2=2$ 에 대입하면
 $x^2-2(x-k)^2=2, x^2-4kx+2k^2+2=0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4}=4k^2-(2k^2+2)=0, k^2=1$
 $\therefore k=-1$ 또는 $k=1$
 그런데 $k>0$ 이므로 $k=1$

- 14 x, y 는 이차방정식 $t^2+(2a-1)t+a^2+1=0$ 의 두 근이다.
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D=(2a-1)^2-4(a^2+1)\geq 0 \quad \therefore a\leq -\frac{3}{4}$
 따라서 a 의 값이 될 수 있는 것은 ①이다.

- 15 $x+y=2k-1, xy=k^2-2k-(2k-1)=k^2-4k+1$ 이므로
 x, y 는 이차방정식 $t^2-(2k-1)t+k^2-4k+1=0$ 의 두 근이다. 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D=(2k-1)^2-4(k^2-4k+1)<0 \quad \therefore k<\frac{1}{4}$
 따라서 정수 k 의 최댓값은 0이다.

- 16 오른쪽 그림과 같이 원에 내접하는 직사각형의 가로의 길이를 x , 세로의 길이를 y 라 하면

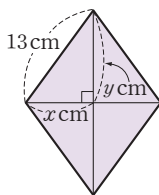


$$\begin{cases} x+y=31 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2+y^2=625 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①에서 $y=31-x$ 를 ②에 대입하면
 $x^2+(31-x)^2=625, x^2-31x+168=0$
 $(x-7)(x-24)=0 \quad \therefore x=7$ 또는 $x=24$
 이를 각각 ①에 대입하면
 $x=7$ 일 때 $y=24, x=24$ 일 때 $y=7$
 그런데 $x>y$ 이므로 $x=24, y=7$
 따라서 가로의 길이는 24이다.

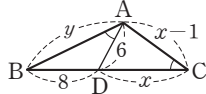
- 17 두 원의 반지름의 길이를 각각 x, y 라 하면 둘레의 길이의 합이 20π 이므로
 $2\pi x+2\pi y=20\pi \quad \therefore x+y=10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 넓이의 합이 58π 이므로
 $\pi x^2+\pi y^2=58\pi \quad \therefore x^2+y^2=58 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 ①에서 $y=10-x$ 를 ②에 대입하면
 $x^2+(10-x)^2=58, x^2-10x+21=0$
 $(x-3)(x-7)=0 \quad \therefore x=3$ 또는 $x=7$
 이를 각각 ①에 대입하면
 $x=3$ 일 때 $y=7, x=7$ 일 때 $y=3$
 따라서 작은 원의 반지름의 길이는 3이다.

- 18 오른쪽 그림과 같이 마름모의 두 대각선의 길이를 각각 $2x$ cm, $2y$ cm라 하면
 $\begin{cases} x^2+y^2=169 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \frac{1}{2}\times 2x\times 2y=120 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$
 ②에서 $xy=60$ 이므로 ①에서
 $(x+y)^2-2xy=169, (x+y)^2=289$
 그런데 $x>0, y>0$ 이므로 $x+y=17$



$x+y=17$, $xy=60$ 에서 x, y 는 이차방정식
 $t^2-17t+60=0$ 의 두 근이므로
 $(t-5)(t-12)=0 \quad \therefore t=5$ 또는 $t=12$
 $\therefore x=5, y=12$ 또는 $x=12, y=5$
 따라서 긴 대각선의 길이는 $2 \times 12=24(\text{cm})$

- 19 오른쪽 그림의 두 삼각형 ABC,
 DBA에서 $\angle BCA = \angle BAD$,
 $\angle B$ 는 공통이므로



$\triangle ABC \sim \triangle DBA$
 $\overline{CD}=x$, $\overline{AB}=y$ 라 하면
 $\overline{AC}=x-1$
 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{AD}$ 이므로 $y : (x-1) = 8 : 6$
 $\therefore x = \frac{3}{4}y + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{BD} : \overline{AB}$ 이므로 $y : (8+x) = 8 : y$
 $\therefore y^2 = 8x + 64 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $y^2 = 8 \times (\frac{3}{4}y + 1) + 64$
 $y^2 - 6y - 72 = 0$, $(y+6)(y-12) = 0$
 그런데 $y > 0$ 이므로 $y = 12$
 $y = 12$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x = 10$
 $\therefore \overline{AB} = 12$, $\overline{BC} = 8 + 10 = 18$, $\overline{AC} = 10 - 1 = 9$
 따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는
 $12 + 18 + 9 = 39$

- 20 $xy - 2x - y + 3 = 0$ 에서 $(x-1)(y-2) = -1$
 x, y 가 자연수이므로 $x-1, y-2$ 는 $x-1 \geq 0$,
 $y-2 \geq -1$ 인 정수이다.
 따라서 $x-1=1, y-2=-1$ 이므로
 $x=2, y=1 \quad \therefore x+y=3$

- 21 $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$ 에서 $\frac{4n+2m}{mn} = 1$
 $mn - 2m - 4n = 0 \quad \therefore (m-4)(n-2) = 8$
 m, n 이 자연수이므로 $m-4, n-2$ 는 $m-4 \geq -3$,
 $n-2 \geq -1$ 인 정수이다.
 (i) $m-4=1, n-2=8$ 일 때, $m=5, n=10$
 $\therefore m+n=15$
 (ii) $m-4=2, n-2=4$ 일 때, $m=6, n=6$
 $\therefore m+n=12$
 (iii) $m-4=4, n-2=2$ 일 때, $m=8, n=4$
 $\therefore m+n=12$
 (iv) $m-4=8, n-2=1$ 일 때, $m=12, n=3$
 $\therefore m+n=15$
 (i)~(iv)에 의하여 $m+n$ 의 최댓값은 15이다.

- 22 자연수인 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha \leq \beta)$ 라 하면 근과 계수의 관계에
 의하여

$$\alpha + \beta = 2p, \alpha\beta = 5p$$

$$p = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{를 } \alpha\beta = 5p \text{에 대입하면}$$

$$\alpha\beta = \frac{5}{2}(\alpha + \beta), 2\alpha\beta - 5\alpha - 5\beta = 0$$

$$\alpha(2\beta - 5) - \frac{5}{2}(2\beta - 5) = \frac{25}{2}$$

$$\therefore (2\alpha - 5)(2\beta - 5) = 25$$

α, β 가 자연수이므로 $2\alpha - 5, 2\beta - 5$ 는 $2\alpha - 5 \geq -3$,
 $2\beta - 5 \geq -3$ 인 정수이다.

(i) $2\alpha - 5 = 1, 2\beta - 5 = 25$ 일 때, $\alpha = 3, \beta = 15$

$$\therefore p = \frac{3+15}{2} = 9$$

(ii) $2\alpha - 5 = 5, 2\beta - 5 = 5$ 일 때, $\alpha = 5, \beta = 5$

$$\therefore p = \frac{5+5}{2} = 5$$

(i), (ii)에 의하여 정수 p 의 최솟값은 5이다.

- 23 x, y 가 실수이므로

$$x + 2y - 1 = 0, x - y + 2 = 0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x = -1, y = 1$$

$$\therefore xy = -1$$

- 24 $(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 0$

$$\therefore (x+1)^2 + (y-2)^2 = 0$$

x, y 가 실수이므로 $x = -1, y = 2$

$$\therefore x^2 + y^2 = 5$$

- 25 $(x^2 + 4y^2 + 4xy) + (x^2 + 2x + 1) = 0$

$$\therefore (x+2y)^2 + (x+1)^2 = 0$$

x, y 가 실수이므로 $x+2y=0, x+1=0$

$$\therefore x = -1, y = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x+y = -\frac{1}{2}$$

- 26 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 + 2(y-2)x + 2y^2 - 10y + 13 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (y-2)^2 - (2y^2 - 10y + 13) \geq 0$$

$$y^2 - 6y + 9 \leq 0, (y-3)^2 \leq 0$$

y 는 실수이므로 $y = 3$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$(x+1)^2 = 0 \quad \therefore x = -1$$

II-4 01 연립일차부등식

기초 문제 Training

70쪽

- 1 (1) $x \leq 3$ (2) $x \leq 2$ (3) $x > 2$ (4) $x > -3$
- 2 (1) $\begin{cases} a > 0 \text{ 일 때, } x \leq 2 \\ a = 0 \text{ 일 때, 모든 실수} \\ a < 0 \text{ 일 때, } x \geq 2 \end{cases}$
 (2) $\begin{cases} a > 1 \text{ 일 때, } x \geq \frac{3}{a-1} \\ a = 1 \text{ 일 때, 해는 없다.} \\ a < 1 \text{ 일 때, } x \leq \frac{3}{a-1} \end{cases}$
- 3 (1) $-1 < x \leq 2$ (2) $-2 \leq x < 5$
 (3) $x > 3$ (4) $x < -1$
- 4 (1) $x < 2$ (2) $x \geq -3$ (3) $-3 \leq x < 2$
- 5 (1) $x = 2$ (2) 해는 없다.
 (3) 해는 없다. (4) 해는 없다.
- 6 (1) $-2 \leq x \leq 2$ (2) $x < -3$ 또는 $x > 3$
 (3) $x \leq -5$ 또는 $x \geq 5$ (4) $-7 < x < 7$
- 7 (1) $x > 2$ (2) $x \geq \frac{1}{3}$

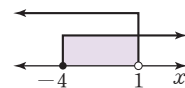
핵심 유형 Training

71~75쪽

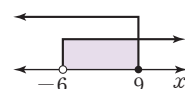
- | | | | | |
|---------------------|------------|---------------------|------------|-------|
| 1 $x < -7$ | 2 $x < -5$ | 3 ③ | 4 $x < 2$ | 5 ② |
| 6 ⑤ | 7 ① | 8 ② | 9 ② | 10 ③ |
| 11 ⑤ | 12 ③ | 13 ② | 14 5 | 15 2 |
| 16 -24 | 17 8 | 18 ① | 19 $a < 2$ | 20 -4 |
| 21 1 | 22 ④ | 23 $-4 \leq a < -2$ | 24 ③ | |
| 25 108cm^2 | 26 ③ | | | |
| 27 120g 이상 175g 이하 | 28 ⑤ | 29 ④ | | |
| 30 2 | 31 15 | 32 2 | 33 5 | 34 1 |
| 35 ③ | | | | |

- 1 $ax - 7b > bx - 7a$ 에서 $(a-b)x > -7(a-b)$
 그런데 $a < b$ 에서 $a-b < 0$ 이므로 양변을 $a-b$ 로 나누면
 $x < -7$

- 2 $(a+b)x + a - b < 0$ 에서
 $(a+b)x < -a+b$ ㉠
 이 부등식의 해가 $x > \frac{1}{2}$ 이므로
 $a+b < 0$ ㉡
 ㉠의 양변을 $a+b$ 로 나누면
 $x > \frac{-a+b}{a+b}$
 따라서 $\frac{-a+b}{a+b} = \frac{1}{2}$ 이므로
 $-2a+2b=a+b \quad \therefore b=3a$ ㉢
 ㉡을 ㉢에 대입하면
 $a+3a < 0 \quad \therefore a < 0$
 ㉢을 $bx+3a+4b > 0$ 에 대입하면
 $3ax+3a+12a > 0, 3ax > -15a$
 $\therefore x < -5$ ($\because 3a < 0$)
- 3 $a^2x - a \geq 16x + 3$ 에서
 $(a^2-16)x \geq a+3$
 이 부등식의 해가 모든 실수이므로
 $a^2-16=0, a+3 \leq 0 \quad \therefore a=-4$
- 4 $(a-b)x + 2a - 3b \leq 0$ 에서
 $(a-b)x \leq -2a+3b$
 이 부등식의 해가 존재하지 않으려면
 $a-b=0, -2a+3b < 0$
 $a-b=0$ 에서 $b=a$ 이므로
 $-2a+3a < 0 \quad \therefore a < 0$
 $b=a$ 를 $2ax-5b+a > 0$ 에 대입하면
 $2ax-5a+a > 0, 2ax > 4a$
 $\therefore x < 2$ ($\because 2a < 0$)
- 5 $2x \leq 3x+4$ 를 풀면
 $-x \leq 4 \quad \therefore x \geq -4$
 $2-4x > x-3$ 을 풀면
 $-5x > -5 \quad \therefore x < 1$
 따라서 주어진 연립부등식의 해는
 $-4 \leq x < 1$



- 6 $3x+8 > x-4$ 를 풀면
 $2x > -12 \quad \therefore x > -6$
 $2(x-3) \leq x+3$ 을 풀면
 $2x-6 \leq x+3 \quad \therefore x \leq 9$
 따라서 주어진 연립부등식의 해는
 $-6 < x \leq 9$ 이므로
 $\alpha = -6, \beta = 9 \quad \therefore \beta - \alpha = 15$



7 $x-3 < \frac{2}{3}x-1$ 을 풀면

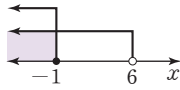
$$3x-9 < 2x-3 \quad \therefore x < 6$$

$$1-0.6x \geq 0.1x+1.7 \text{을 풀면}$$

$$10-6x \geq x+17, -7x \geq 7 \quad \therefore x \leq -1$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x \leq -1$ 이므로 x 의 최댓값은 -1 이다.



8 $5x-4 \leq 3x-2$ 를 풀면

$$2x \leq 2 \quad \therefore x \leq 1$$

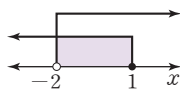
$$3x-2 < 10x+12 \text{를 풀면}$$

$$-7x < 14 \quad \therefore x > -2$$

따라서 주어진 부등식의 해는

$-2 < x \leq 1$ 이므로

$$\alpha = -2, \beta = 1 \quad \therefore \alpha + \beta = -1$$



9 $4x-3 < 6(x-1)$ 을 풀면

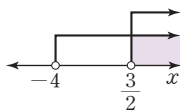
$$4x-3 < 6x-6, -2x < -3 \quad \therefore x > \frac{3}{2}$$

$$6(x-1) < 7x-2 \text{를 풀면}$$

$$6x-6 < 7x-2, -x < 4 \quad \therefore x > -4$$

따라서 주어진 부등식의 해는

$x > \frac{3}{2}$ 이므로 정수 x 의 최솟값은 2이다.



10 $x-1 < 1-\frac{2-x}{2}$ 를 풀면

$$2x-2 < 2-2+x \quad \therefore x < 2$$

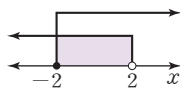
$$1-\frac{2-x}{2} \leq \frac{2x+1}{3} \text{을 풀면}$$

$$6-6+3x \leq 4x+2, -x \leq 2 \quad \therefore x \geq -2$$

따라서 주어진 부등식의 해는

$$-2 \leq x < 2$$

즉, 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1$ 의 4개이다.



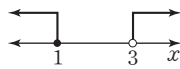
11 $4x+8 \leq 3(x+3)$ 을 풀면

$$4x+8 \leq 3x+9 \quad \therefore x \leq 1$$

$$x-4 > -3x+8 \text{을 풀면}$$

$$4x > 12 \quad \therefore x > 3$$

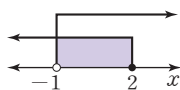
따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



12 $\neg. 2x \leq 4$ 를 풀면 $x \leq 2$

$$x+3 > 2 \text{를 풀면 } x > -1$$

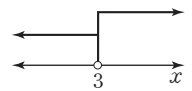
따라서 주어진 연립부등식의 해는 $-1 < x \leq 2$



나. $x-1 < 2$ 를 풀면 $x < 3$

$$-2x+1 < -5 \text{를 풀면 } -2x < -6 \quad \therefore x > 3$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.

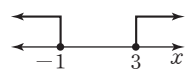


다. $\frac{1}{2}x+3 \leq \frac{5}{2}$ 를 풀면

$$x+6 \leq 5 \quad \therefore x \leq -1$$

$$3+x \leq 2x \text{를 풀면 } -x \leq -3 \quad \therefore x \geq 3$$

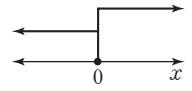
따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



리. $-4x+2 \geq 2$ 를 풀면 $-4x \geq 0 \quad \therefore x \leq 0$

$$2x-9 \geq x-9 \text{를 풀면 } x \geq 0$$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 $x=0$



따라서 보기 중 해가 없는 것은 나, 다이다.

13 $\frac{x-9}{3} \leq x+1$ 을 풀면

$$x-9 \leq 3x+3, -2x \leq 12 \quad \therefore x \geq -6$$

$$x+1 \leq \frac{x}{2}-2 \text{를 풀면}$$

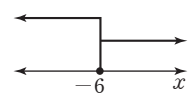
$$2x+2 \leq x-4 \quad \therefore x \leq -6$$

따라서 주어진 부등식의 해는

$$x = -6$$

$x = -6$ 을 $ax-4=2$ 에 대입하면

$$-6a-4=2, -6a=6 \quad \therefore a=-1$$



14 $5x-3 \leq 2x+3$ 을 풀면

$$3x \leq 6 \quad \therefore x \leq 2$$

$$3(x+2) > 2x+a \text{를 풀면}$$

$$3x+6 > 2x+a \quad \therefore x > a-6$$

주어진 그림에서 연립부등식의 해가 $-1 < x \leq 2$ 이므로

$$a-6 = -1 \quad \therefore a = 5$$

15 $6x-5 \leq 2x+7$ 을 풀면 $4x \leq 12 \quad \therefore x \leq 3$

$$x+7 > -3x+a \text{를 풀면 } 4x > a-7 \quad \therefore x > \frac{a-7}{4}$$

$$b=3, \frac{a-7}{4} = -2 \text{이므로 } a = -1$$

$$\therefore a+b=2$$

16 $7x+a < 5(x+2)$ 를 풀면

$$7x+a < 5x+10, 2x < 10-a \quad \therefore x < \frac{10-a}{2}$$

$$5(x+2) < 6x+b \text{를 풀면}$$

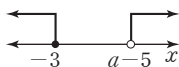
$$5x+10 < 6x+b, -x < b-10 \quad \therefore x > 10-b$$

$$\frac{10-a}{2} = 7, 10-b = 4 \text{이므로 } a = -4, b = 6$$

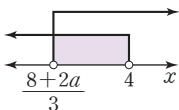
$$\therefore ab = -24$$

17 $\frac{2x+a}{3} \geq \frac{3}{2}x - \frac{5}{3}$ 를 풀면
 $4x+2a \geq 9x-10, -5x \geq -10-2a$
 $\therefore x \leq \frac{10+2a}{5}$
 $7x+14 \leq 9x+b$ 를 풀면
 $-2x \leq b-14 \quad \therefore x \geq \frac{14-b}{2}$
 $\frac{10+2a}{5} = 6, \frac{14-b}{2} = 6$ 이므로
 $a=10, b=2 \quad \therefore a-b=8$

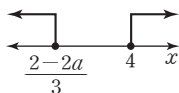
18 $3x+5 > 2x+a$ 를 풀면
 $x > a-5$
 $4x \leq 2x-6$ 을 풀면
 $2x \leq -6 \quad \therefore x \leq -3$
주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서
 $a-5 \geq -3 \quad \therefore a \geq 2$



19 $x+16 > 5x$ 를 풀면
 $-4x > -16 \quad \therefore x < 4$
 $9x-2a > 6x+8$ 을 풀면
 $3x > 8+2a \quad \therefore x > \frac{8+2a}{3}$
주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서
 $\frac{8+2a}{3} < 4, 8+2a < 12$
 $2a < 4 \quad \therefore a < 2$

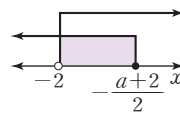


20 $\frac{2-3x}{2} \geq a$ 를 풀면
 $2-3x \geq 2a, -3x \geq 2a-2 \quad \therefore x \leq \frac{2-2a}{3}$
 $4x-5 \geq x+7$ 을 풀면
 $3x \geq 12 \quad \therefore x \geq 4$
주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서
 $\frac{2-2a}{3} < 4, 2-2a < 12$
 $-2a < 10 \quad \therefore a > -5$
따라서 정수 a 의 최솟값은 -4 이다.



21 $5x+a \leq 3x-2$ 를 풀면
 $2x \leq -a-2 \quad \therefore x \leq -\frac{a+2}{2}$
 $3x-2 < 10x+12$ 를 풀면
 $-7x < 14 \quad \therefore x > -2$

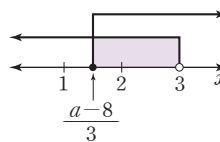
주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서
 $-\frac{a+2}{2} > -2, a+2 < 4$
 $\therefore a < 2$
따라서 정수 a 의 최댓값은 1 이다.



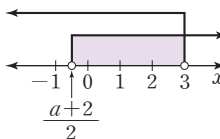
22 $8x-1 < 8+5x$ 를 풀면
 $3x < 9 \quad \therefore x < 3$
 $\frac{a-3x}{2} \leq 4$ 를 풀면

$a-3x \leq 8, -3x \leq 8-a \quad \therefore x \geq \frac{a-8}{3}$

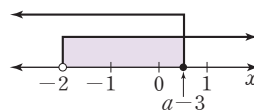
주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 가 1개뿐이려면 오른쪽 그림에서
 $1 < \frac{a-8}{3} \leq 2, 3 < a-8 \leq 6$
 $\therefore 11 < a \leq 14$



23 $2x+a < 4x-2$ 를 풀면
 $-2x < -2-a \quad \therefore x > \frac{a+2}{2}$
 $4x-2 < 3x+1$ 을 풀면 $x < 3$
주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 가 3개이려면 오른쪽 그림에서
 $-1 \leq \frac{a+2}{2} < 0, -2 \leq a+2 < 0$
 $\therefore -4 \leq a < -2$



24 $2x-5 < 5x+1$ 을 풀면
 $-3x < 6 \quad \therefore x > -2$
 $3(x+1) \leq 2x+a$ 를 풀면
 $3x+3 \leq 2x+a \quad \therefore x \leq a-3$
주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x 가 -1 과 0 뿐이려면 오른쪽 그림에서
 $0 \leq a-3 < 1 \quad \therefore 3 \leq a < 4$
따라서 정수 a 의 값은 3 이다.



25 직사각형의 세로의 길이를 x cm라 하면 가로 길이는 $(x+3)$ cm이므로
 $42 \leq 2\{x+(x+3)\} < 50, 21 \leq 2x+3 < 25$
 $18 \leq 2x < 22 \quad \therefore 9 \leq x < 11$
따라서 세로의 길이의 최솟값은 9 cm이므로 구하는 직사각형의 넓이는
 $9 \times (9+3) = 108 (\text{cm}^2)$

26 색연필의 개수를 x 라 하면 볼펜의 개수는 $23-x$ 이므로

$$\begin{cases} x > 23-x & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ 600x + 500(23-x) \leq 13000 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉠을 풀면

$$2x > 23 \quad \therefore x > \frac{23}{2}$$

㉡을 풀면

$$100x + 11500 \leq 13000, 100x \leq 1500$$

$$\therefore x \leq 15$$

$$\therefore \frac{23}{2} < x \leq 15$$

그런데 색연필의 개수는 자연수이므로 살 수 있는 색연필은 12개 이상 15개 이하이다.

27 두 식품 A, B의 1g당 열량과 단백질의 양은 다음과 같다.

식품	열량(kcal)	단백질(g)
A	1.8	0.1
B	3.4	0.05

섭취해야 하는 식품 A의 양을 x g이라 하면 섭취해야 하는 식품 B의 양은 $(200-x)$ g이므로

$$\begin{cases} 1.8x + 3.4(200-x) \geq 400 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ 0.1x + 0.05(200-x) \geq 16 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉠을 풀면

$$18x + 34(200-x) \geq 4000$$

$$-16x + 6800 \geq 4000, -16x \geq -2800$$

$$\therefore x \leq 175$$

㉡을 풀면

$$10x + 5(200-x) \geq 1600$$

$$5x + 1000 \geq 1600, 5x \geq 600$$

$$\therefore x \geq 120$$

$$\therefore 120 \leq x \leq 175$$

따라서 섭취해야 하는 식품 A의 양은 120g 이상 175g 이하이다.

28 $|x-2| > 5$ 에서

$$x-2 < -5 \text{ 또는 } x-2 > 5$$

$$\therefore x < -3 \text{ 또는 } x > 7$$

따라서 $\alpha = -3$, $\beta = 7$ 이므로

$$\alpha + \beta = 4$$

29 $|2x-3| < 4$ 에서

$$-4 < 2x-3 < 4, -1 < 2x < 7$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$$

따라서 정수 x 는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

30 $1 < |2x-1| \leq 5$ 에서

$$-5 \leq 2x-1 < -1 \text{ 또는 } 1 < 2x-1 \leq 5$$

$$-4 \leq 2x < 0 \text{ 또는 } 2 < 2x \leq 6$$

$$\therefore -2 \leq x < 0 \text{ 또는 } 1 < x \leq 3$$

따라서 정수 x 는 -2, -1, 2, 3이므로 구하는 합은

$$-2 + (-1) + 2 + 3 = 2$$

31 $|ax+3| \leq b$ 에서

$$-b \leq ax+3 \leq b \quad (\because b > 0)$$

$$-b-3 \leq ax \leq b-3$$

$$\therefore \frac{-b-3}{a} \leq x \leq \frac{b-3}{a} \quad (\because a > 0)$$

$$\frac{-b-3}{a} = -2, \frac{b-3}{a} = 1 \text{이므로}$$

$$2a-b=3, a-b=-3$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=6, b=9$$

$$\therefore a+b=15$$

32 (i) $x < 1$ 일 때, $-(x-1) > 3x-5$

$$-4x > -6 \quad \therefore x < \frac{3}{2}$$

그런데 $x < 1$ 이므로 $x < 1$

(ii) $x \geq 1$ 일 때, $x-1 > 3x-5$

$$-2x > -4 \quad \therefore x < 2$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $1 \leq x < 2$

(i), (ii)에 의하여 $x < 2$

$$\therefore a=2$$

33 (i) $x < 0$ 일 때, $-x-(x-2) < 6$

$$-2x < 4 \quad \therefore x > -2$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $-2 < x < 0$

(ii) $0 \leq x < 2$ 일 때, $x-(x-2) < 6$

$$\therefore 0 \leq x < 4$$

따라서 해는 모든 실수이다.

그런데 $0 \leq x < 2$ 이므로 $0 \leq x < 2$

(iii) $x \geq 2$ 일 때, $x+(x-2) < 6$

$$2x < 8 \quad \therefore x < 4$$

그런데 $x \geq 2$ 이므로 $2 \leq x < 4$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $-2 < x < 4$

따라서 정수 x 는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

34 (i) $x < -\frac{1}{2}$ 일 때, $-(2x-3)-2(2x+1) \geq 5$

$$-6x \geq 4 \quad \therefore x \leq -\frac{2}{3}$$

$$\text{그런데 } x < -\frac{1}{2} \text{이므로 } x \leq -\frac{2}{3}$$

- (ii) $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}$ 일 때, $-(2x-3)+2(2x+1) \geq 5$
 $2x \geq 0 \quad \therefore x \geq 0$
 그런데 $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}$ 이므로 $0 \leq x < \frac{3}{2}$
- (iii) $x \geq \frac{3}{2}$ 일 때, $(2x-3)+2(2x+1) \geq 5$
 $6x \geq 6 \quad \therefore x \geq 1$
 그런데 $x \geq \frac{3}{2}$ 이므로 $x \geq \frac{3}{2}$
- (i), (ii), (iii)에 의하여 $x \leq -\frac{2}{3}$ 또는 $x \geq 0$
 따라서 자연수 x 의 최솟값은 1이다.

- 35** $\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$ 이므로 주어진 부등식은
 $|x+1|+|x-2| \leq x+3$
 (i) $x < -1$ 일 때, $-(x+1)-(x-2) \leq x+3$
 $-3x \leq 2 \quad \therefore x \geq -\frac{2}{3}$
 그런데 $x < -1$ 이므로 해는 없다.
- (ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때, $(x+1)-(x-2) \leq x+3$
 $-x \leq 0 \quad \therefore x \geq 0$
 그런데 $-1 \leq x < 2$ 이므로 $0 \leq x < 2$
- (iii) $x \geq 2$ 일 때, $(x+1)+(x-2) \leq x+3$
 $\therefore x \leq 4$
 그런데 $x \geq 2$ 이므로 $2 \leq x \leq 4$
- (i), (ii), (iii)에 의하여 $0 \leq x \leq 4$

II-4 02 이차부등식

기초 문제 Training

76쪽

- 1** (1) $x \leq -1$ 또는 $x \geq 3$ (2) $x < -1$ 또는 $x > 3$
 (3) $-1 \leq x \leq 3$ (4) $-1 < x < 3$
- 2** (1) 모든 실수 (2) $x \neq 3$ 인 모든 실수
 (3) $x=3$ (4) 해는 없다.
- 3** (1) 모든 실수 (2) 해는 없다.
- 4** (1) $x < 1$ 또는 $x > 3$ (2) $-1 \leq x \leq 2$
 (3) $x \neq 5$ 인 모든 실수 (4) $x = -\frac{1}{3}$
 (5) 모든 실수 (6) 해는 없다.

- 5** (1) $x^2-x-2 < 0$ (2) $x^2-4x-12 \geq 0$
 (3) $(x-4)^2 > 0$
- 6** (1) $a \geq 2$ (2) $0 < a < 20$
 (3) $a \geq \frac{5}{4}$ (4) $0 < a < \frac{1}{2}$

핵심 유형 Training

77~80쪽

- 1** ① **2** $x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$
3 $1 < x < 2$ 또는 $3 < x < 4$ **4** ③ **5** 8
6 ④ **7** 10 **8** 3초 **9** ④ **10** 15만 원
11 24 **12** ③ **13** ③ **14** $-1 < x < \frac{5}{6}$
15 $-1 < x < \frac{5}{3}$ **16** 6 **17** ③
18 $x \leq -4$ 또는 $x \geq 8$ **19** $0 < a < \frac{16}{9}$ **20** ④
21 $-2 \leq m < 1$ **22** 8 **23** 0
24 $-2 < a < 0$ 또는 $a > 0$ **25** $-6 < a < -1$
26 ④ **27** ① **28** 3 **29** ③

- 1** 부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해는 $y=f(x)$ 의 그래프가
 $y=g(x)$ 의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범
 위이므로
 $x < -1$ 또는 $x > 3$
- 2** $ax^2+(b-m)x+c-n \geq 0$ 에서
 $ax^2+bx+c-(mx+n) \geq 0$
 $\therefore ax^2+bx+c \geq mx+n$
 부등식 $ax^2+bx+c \geq mx+n$ 의 해는 이차함수
 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 직선 $y=mx+n$ 과 만나지
 나 위쪽에 있는 부분의 x 의 값의 범위이므로
 $x \leq -2$ 또는 $x \geq 3$
- 3** $f(x)g(x) > 0$ 에서
 $f(x) > 0, g(x) > 0$ 또는 $f(x) < 0, g(x) < 0$
 (i) $f(x) > 0, g(x) > 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $1 < x < 2$
 (ii) $f(x) < 0, g(x) < 0$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는
 $3 < x < 4$
 (i), (ii)에 의하여 부등식 $f(x)g(x) > 0$ 의 해는
 $1 < x < 2$ 또는 $3 < x < 4$

- 4 $x^2+4x>x+10$ 에서
 $x^2+3x-10>0, (x+5)(x-2)>0$
 $\therefore x<-5$ 또는 $x>2$
따라서 $\alpha=-5, \beta=2$ 이므로
 $\alpha+\beta=-3$
- 5 $(x+2)(x-1)<4x+16$ 에서
 $x^2+x-2<4x+16, x^2-3x-18<0$
 $(x+3)(x-6)<0 \quad \therefore -3<x<6$
따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 는 $-2, -1, 0, \dots, 5$ 의 8개이다.
- 6 ① $x^2+2x+1=(x+1)^2\leq 0$
 $\therefore x=-1$
② $x^2-4x+4=(x-2)^2\geq 0$
따라서 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.
③ $x^2+16>8x$ 에서
 $x^2-8x+16>0, (x-4)^2>0$
따라서 주어진 부등식의 해는 $x\neq 4$ 인 모든 실수이다.
④ $x^2-3x-5>3x^2$ 에서
 $2x^2+3x+5<0$
 $2x^2+3x+5=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{8}\geq\frac{31}{8}$
따라서 주어진 부등식의 해는 없다.
⑤ $9x-2x^2\geq 10$ 에서
 $2x^2-9x+10\leq 0, (x-2)(2x-5)\leq 0$
 $\therefore 2\leq x\leq \frac{5}{2}$
따라서 해가 없는 것은 ④이다.
- 7 (i) $x<0$ 일 때, $x^2+4x-5<0$
 $(x+5)(x-1)<0 \quad \therefore -5<x<1$
그런데 $x<0$ 이므로 $-5<x<0$
(ii) $x\geq 0$ 일 때, $x^2-4x-5<0$
 $(x+1)(x-5)<0 \quad \therefore -1<x<5$
그런데 $x\geq 0$ 이므로 $0\leq x<5$
(i), (ii)에 의하여 $-5<x<5$
따라서 $a=-5, b=5$ 이므로
 $b-a=10$
- 8 $20+25t-5t^2\geq 40$ 에서
 $t^2-5t+4\leq 0, (t-1)(t-4)\leq 0$
 $\therefore 1\leq t\leq 4$
따라서 물체의 높이가 40m 이상인 시간은 $4-1=3$ (초) 동안이다.

- 9 도로의 폭을 x m라 하면 두 직선 도로를 제외한 땅의 넓이는 가로와 세로의 길이가 각각 $(40-x)$ m, $(30-x)$ m인 직사각형의 넓이와 같으므로
 $(40-x)(30-x)\geq 600$
 $x^2-70x+600\geq 0, (x-10)(x-60)\geq 0$
 $\therefore 0\leq x\leq 10 (\because 0\leq x\leq 30)$
따라서 도로의 최대 폭은 10m이다.
- 10 가방 한 개의 가격이 $(10+x)$ 만 원이면 판매량은 $(50-2x)$ 개이므로
 $(10+x)(50-2x)\geq 600$
 $x^2-15x+50\leq 0, (x-5)(x-10)\leq 0$
 $\therefore 5\leq x\leq 10$
따라서 가방 한 개의 최소 가격은
 $10+5=15$ (만 원)
- 11 해가 $x<-5$ 또는 $x>-1$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x+5)(x+1)>0, x^2+6x+5>0$
양변에 2를 곱하면 $2x^2+12x+10>0$
따라서 $a=2, b=12$ 이므로
 $ab=24$
- 12 해가 $-4\leq x\leq a$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x+4)(x-a)\leq 0, x^2+(4-a)x-4a\leq 0$
따라서 $a=4-a, b=-4a$ 이므로 $a=2, b=-8$
 $\therefore a+b=-6$
- 13 해가 $x=-3$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x+3)^2\leq 0 \quad \therefore x^2+6x+9\leq 0$
 $\therefore a=6, b=9$
이를 $bx^2-ax-15<0$ 에 대입하면
 $9x^2-6x-15<0, 3x^2-2x-5<0$
 $(x+1)(3x-5)<0 \quad \therefore -1<x<\frac{5}{3}$
따라서 정수 x 는 0, 1이므로 구하는 합은 1이다.
- 14 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $2<x<3$ 이므로 $a<0$
해가 $2<x<3$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x-2)(x-3)<0 \quad \therefore x^2-5x+6<0$
양변에 a 를 곱하면
 $ax^2-5ax+6a>0 (\because a<0)$
 $\therefore b=-5a, c=6a$
이를 $cx^2+ax+b>0$ 에 대입하면
 $6ax^2+ax-5a>0, 6x^2+x-5<0 (\because a<0)$
 $(x+1)(6x-5)<0 \quad \therefore -1<x<\frac{5}{6}$

- 15 $f(x) < 0$ 의 해가 $-2 < x < 6$ 이므로

$$f(x) = a(x+2)(x-6) \quad (a > 0) \text{이라 하면}$$

$$f(3x+1) = a(3x+1+2)(3x+1-6)$$

$$= 3a(x+1)(3x-5)$$

$$\text{부등식 } f(3x+1) < 0, \text{ 즉 } 3a(x+1)(3x-5) < 0 \text{에서}$$

$$(x+1)(3x-5) < 0 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore -1 < x < \frac{5}{3}$$

다른 풀이

$$f(x) < 0 \text{의 해가 } -2 < x < 6 \text{이므로 } f(3x+1) < 0 \text{의 해는}$$

$$-2 < 3x+1 < 6, -3 < 3x < 5$$

$$\therefore -1 < x < \frac{5}{3}$$

- 16 $f(x) > 0$ 의 해가 $x < -3$ 또는 $x > 4$ 이므로

$$f(x) = a(x+3)(x-4) \quad (a > 0) \text{라 하면}$$

$$f(-x) = a(-x+3)(-x-4)$$

$$= a(x-3)(x+4)$$

$$\text{부등식 } f(-x) < 0, \text{ 즉 } a(x-3)(x+4) < 0 \text{에서}$$

$$(x-3)(x+4) < 0 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore -4 < x < 3$$

따라서 정수 x 는 $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ 의 6개이다.

- 17 $f(x) \geq 0$ 의 해가 $1 \leq x \leq 5$ 이므로

$$f(x) = a(x-1)(x-5) \quad (a < 0) \text{라 하면}$$

$$f(2020-x) = a(2020-x-1)(2020-x-5)$$

$$= a(x-2019)(x-2015)$$

$$\text{부등식 } f(2020-x) \leq 0, \text{ 즉 } a(x-2019)(x-2015) \leq 0$$

에서

$$(x-2019)(x-2015) \geq 0 \quad (\because a < 0)$$

$$\therefore x \leq 2015 \text{ 또는 } x \geq 2019$$

따라서 x 의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

- 18 주어진 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 두 점

$$(-1, 0), (3, 0) \text{에서 만나므로}$$

$$f(x) = a(x+1)(x-3) \quad (a < 0) \text{이라 하면}$$

$$f\left(\frac{x+1}{3}\right) = a\left(\frac{x+1}{3}+1\right)\left(\frac{x+1}{3}-3\right)$$

$$= \frac{a}{9}(x+4)(x-8)$$

$$\text{부등식 } f\left(\frac{x+1}{3}\right) \leq 0, \text{ 즉 } \frac{a}{9}(x+4)(x-8) \leq 0 \text{에서}$$

$$(x+4)(x-8) \geq 0 \quad (\because a < 0)$$

$$\therefore x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 8$$

다른 풀이

$$f\left(\frac{x+1}{3}\right) \leq 0 \text{에서 } \frac{x+1}{3} = t \text{로 놓으면 주어진 그래프에}$$

서 $f(t) \leq 0$ 을 만족시키는 t 의 값의 범위는 $t \leq -1$ 또는 $t \geq 3$ 이므로

$$\frac{x+1}{3} \leq -1 \text{ 또는 } \frac{x+1}{3} \geq 3$$

$$\therefore x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 8$$

- 19 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $ax^2 - 3ax + 4 > 0$ 이 성립해야 하므로

$$a > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $ax^2 - 3ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-3a)^2 - 4 \times a \times 4 < 0$$

$$9a^2 - 16a < 0, a(9a - 16) < 0$$

$$\therefore 0 < a < \frac{16}{9} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 0 < a < \frac{16}{9}$$

- 20 모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt{x^2 + 2kx - k + 2}$ 가 실수가 되려면 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2kx - k + 2 \geq 0$ 이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2 + 2kx - k + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - (-k + 2) \leq 0$$

$$k^2 + k - 2 \leq 0, (k+2)(k-1) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq k \leq 1$$

따라서 상수 k 의 최댓값은 1이다.

- 21 (i) $m = -2$ 일 때

$$0 \times x^2 - 0 \times x + 3 = 3 > 0 \text{이므로 모든 실수 } x \text{에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.}$$

- (ii) $m \neq -2$ 일 때

$$m+2 > 0 \text{이어야 하므로}$$

$$m > -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 이차방정식 $(m+2)x^2 - 2(m+2)x + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (m+2)^2 - 3(m+2) < 0$$

$$m^2 + m - 2 < 0, (m+2)(m-1) < 0$$

$$\therefore -2 < m < 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } -2 < m < 1$$

(i), (ii)에 의하여 $-2 \leq m < 1$

- 22 $x^2+4x+3>mx-1$, 즉 $x^2+(4-m)x+4>0$ 이 항상 성립해야 한다.

$x^2+(4-m)x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=(4-m)^2-16<0$$

$$m^2-8m<0, m(m-8)<0$$

$$\therefore 0<m<8$$

따라서 $a=0$, $b=8$ 이므로

$$b-a=8$$

- 23 이차부등식 $2x^2+x-3a<0$ 이 해를 가지려면 이차방정식 $2x^2+x-3a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=1-4\times 2\times (-3a)>0$$

$$1+24a>0 \quad \therefore a>-\frac{1}{24}$$

따라서 구하는 정수 a 의 최솟값은 0이다.

- 24 (i) $a>0$ 일 때

이차함수 $y=ax^2+4x+a$ 의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

- (ii) $a<0$ 일 때

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+4x+a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4-a^2>0, a^2-4<0$$

$$(a+2)(a-2)<0 \quad \therefore -2<a<2$$

그런데 $a<0$ 이므로 $-2<a<0$

- (i), (ii)에 의하여

$$-2<a<0 \text{ 또는 } a>0$$

- 25 $-x^2+2(a+3)x+a-3\geq 0$ 에서

$$x^2-2(a+3)x-a+3\leq 0$$

이 부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2-2(a+3)x-a+3>0$$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-2(a+3)x-a+3=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+3)^2-(-a+3)<0$$

$$a^2+7a+6<0, (a+6)(a+1)<0$$

$$\therefore -6<a<-1$$

- 26 $ax^2-2ax-3>0$ 이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x 에 대하여

$$ax^2-2ax-3\leq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 성립해야 한다.

- (i) $a=0$ 일 때, $0\times x^2-0\times x-3=-3<0$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

- (ii) $a\neq 0$ 일 때, $a<0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

또 이차방정식 $ax^2-2ax-3=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2+3a\leq 0, a(a+3)\leq 0$$

$$\therefore -3\leq a\leq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{에서 } -3\leq a<0$$

- (i), (ii)에 의하여 $-3\leq a\leq 0$

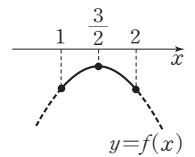
따라서 정수 a 는 $-3, -2, -1, 0$ 의 4개이다.

- 27 $f(x)=-x^2+3x+2k=-(x-\frac{3}{2})^2+2k+\frac{9}{4}$ 라 하자.

$1\leq x\leq 2$ 에서 $f(x)\leq 0$ 이 항상 성립하려면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$f(\frac{3}{2})=2k+\frac{9}{4}\leq 0$$

$$\therefore k\leq -\frac{9}{8}$$



- 28 $x^2-2x\leq 0$ 을 풀면 $x(x-2)\leq 0 \quad \therefore 0\leq x\leq 2$

$$f(x)=x^2-ax+a^2-4 \text{라 하자.}$$

$0\leq x\leq 2$ 에서 $f(x)\leq 0$ 이 항상 성립하려면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로

- (i) $f(0)\leq 0$ 에서 $a^2-4\leq 0, (a+2)(a-2)\leq 0$

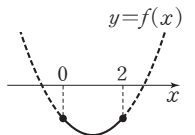
$$\therefore -2\leq a\leq 2$$

- (ii) $f(2)\leq 0$ 에서 $a^2-2a\leq 0, a(a-2)\leq 0$

$$\therefore 0\leq a\leq 2$$

- (i), (ii)에 의하여 $0\leq a\leq 2$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2의 3개이다.



- 29 $-x^2+kx+2k>-x+1$, 즉 $x^2-(k+1)x-2k+1<0$ 이 주어진 범위에서 항상 성립한다.

$$f(x)=x^2-(k+1)x-2k+1 \text{라 하자.}$$

$-1< x < 3$ 에서 $f(x)<0$ 이 항상 성립하려면 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 하므로

- (i) $f(-1)\leq 0$ 에서 $-k+3\leq 0$

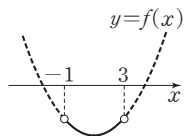
$$\therefore k\geq 3$$

- (ii) $f(3)\leq 0$ 에서 $7-5k\leq 0$

$$\therefore k\geq \frac{7}{5}$$

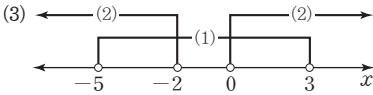
- (i), (ii)에 의하여 $k\geq 3$

따라서 상수 k 의 최솟값은 3이다.



기초 문제 Training

81쪽

- (1) $-5 < x < 3$ (2) $x < -2$ 또는 $x > 0$

 (4) $-5 < x < -2$ 또는 $0 < x < 3$
- (1) $0 < x < 3$ (2) $-3 \leq x < -1$ 또는 $1 < x \leq 2$
 (3) $-4 \leq x < -2$ (4) $x \geq 3$
- (1) $-2 < k \leq 2$ (2) $k \geq 3$ (3) $k < -3$
- (1) $\geq, >, >$ (2) $\geq, >, <$ (3) $<$

핵심 유형 Training

82~84쪽

- | | | | | |
|--|------------------------------|-----------------|------|-----|
| 1 3 | 2 -1 | 3 3 | 4 12 | 5 ① |
| 6 $\frac{1}{6}$ | 7 ② | 8 6cm 이상 9cm 이하 | | |
| 9 6cm | 10 ④ | 11 $-2 < a < 2$ | 12 ⑤ | |
| 13 5 | 14 $a \leq -2$ 또는 $a \geq 1$ | 15 ⑤ | 16 ⑤ | |
| 17 ③ | 18 5 | 19 -3 | 20 ④ | |
| 21 $-\frac{2}{7} < k \leq 1$ 또는 $2 \leq k < \frac{7}{3}$ | 22 1 | | | |

- $2x^2 - 7x + 3 \geq 0$ 을 풀면 $(2x-1)(x-3) \geq 0$
 $\therefore x \leq \frac{1}{2}$ 또는 $x \geq 3$ ㉠
 $x^2 - 8x + 12 < 0$ 을 풀면 $(x-2)(x-6) < 0$
 $\therefore 2 < x < 6$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $3 \leq x < 6$
 따라서 $a=3, \beta=6$ 이므로 $\beta-a=3$
- $2x+1 < x^2-6x+8$ 을 풀면 $x^2-8x+7 > 0$
 $(x-1)(x-7) > 0 \therefore x < 1$ 또는 $x > 7$ ㉠
 $x^2-6x+8 \leq 15$ 를 풀면 $x^2-6x-7 \leq 0$
 $(x+1)(x-7) \leq 0 \therefore -1 \leq x \leq 7$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-1 \leq x < 1$
 따라서 정수 x 는 $-1, 0$ 이므로 구하는 합은 -1 이다.
- $x^2+2x-35 \geq 0$ 을 풀면 $(x+7)(x-5) \geq 0$
 $\therefore x \leq -7$ 또는 $x \geq 5$ ㉠

$$|x-2| < 6 \text{을 풀면 } -6 < x-2 < 6$$

$$\therefore -4 < x < 8 \quad \dots\dots ㉡$$

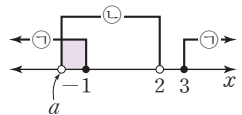
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $5 \leq x < 8$

따라서 정수 x 는 5, 6, 7의 3개이다.

- $3x^2 - 8x - 16 < 0$ 을 풀면 $(3x+4)(x-4) < 0$
 $\therefore -\frac{4}{3} < x < 4 \quad \dots\dots ㉠$
 $x^2+2 < 2x^2+x$ 를 풀면 $x^2+x-2 > 0$
 $(x+2)(x-1) > 0 \therefore x < -2$ 또는 $x > 1 \quad \dots\dots ㉡$
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1 < x < 4$
 해가 $1 < x < 4$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식은
 $(x-1)(x-4) < 0 \therefore x^2-5x+4 < 0$
 양변에 -3 를 곱하면 $-3x^2+15x-12 > 0$
 이 부등식이 $ax^2+bx-12 > 0$ 과 같으므로
 $a=-3, b=15 \therefore a+b=12$

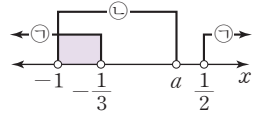
- $$\begin{cases} x^2-2x-3 \geq 0 & \dots\dots ㉠ \\ x^2-(a+2)x+2a < 0 & \dots\dots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 풀면 $(x+1)(x-3) \geq 0 \therefore x \leq -1$ 또는 $x \geq 3$
 ㉡을 풀면 $(x-2)(x-a) < 0$
 $\therefore a < 2$ 일 때, $a < x < 2$
 $a=2$ 일 때, 해는 없다.
 $a > 2$ 일 때, $2 < x < a$
 ㉠, ㉡의 해의 공통부분이
 $-2 < x \leq -1$ 이 되려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로
 $a=-2$

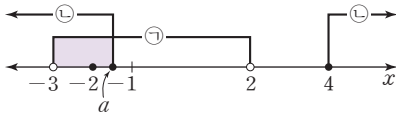


- $$\begin{cases} 6x^2-x-1 > 0 & \dots\dots ㉠ \\ x^2+(1-a)x-a < 0 & \dots\dots ㉡ \end{cases}$$

㉠을 풀면 $(3x+1)(2x-1) > 0$
 $\therefore x < -\frac{1}{3}$ 또는 $x > \frac{1}{2}$
 ㉡을 풀면 $(x+1)(x-a) < 0$
 $\therefore a < -1$ 일 때, $a < x < -1$
 $a=-1$ 일 때, 해는 없다.
 $a > -1$ 일 때, $-1 < x < a$
 $3x^2+4x+1 < 0$ 을 풀면 $(x+1)(3x+1) < 0$
 $\therefore -1 < x < -\frac{1}{3} \quad \dots\dots ㉢$
 ㉠, ㉡의 해의 공통부분이 ㉢이 되려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 $-\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{2}$
 따라서 상수 a 의 최댓값과 최솟값의 합은
 $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$



- 7 $\begin{cases} x^2+x-6 < 0 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ x^2-(a+4)x+4a \geq 0 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$
 ㉠을 풀면
 $(x+3)(x-2) < 0$
 $\therefore -3 < x < 2$
 ㉡을 풀면
 $(x-4)(x-a) \geq 0$
 $\therefore a < 4$ 일 때, $x \leq a$ 또는 $x \geq 4$
 $a = 4$ 일 때, $x = 4$
 $a > 4$ 일 때, $x \leq 4$ 또는 $x \geq a$
 ㉠, ㉡의 해의 공통부분에 속하는 정수가 -2뿐이라면 다음 그림과 같아야 한다.



$$\therefore -2 \leq a < -1$$

- 8 직사각형의 가로 길이를 x cm라 하면 세로 길이는 $(12-x)$ cm이다.
 직사각형의 넓이가 27 cm^2 이상이므로
 $x(12-x) \geq 27$
 $x^2-12x+27 \leq 0$
 $(x-3)(x-9) \leq 0$
 $\therefore 3 \leq x \leq 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 그런데 가로의 길이가 세로의 길이보다 길거나 같으므로
 $x \geq 12-x \quad \therefore x \geq 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
 $6 \leq x \leq 9$
 따라서 가로의 길이의 범위는 6cm 이상 9cm 이하이다.

- 9 $\begin{cases} (5+x)^2 + (9-x)^2 \leq 100 \\ 9-x \leq 5+x \end{cases}$
 $(5+x)^2 + (9-x)^2 \leq 100$ 을 풀면
 $x^2-4x+3 \leq 0$
 $(x-1)(x-3) \leq 0$
 $\therefore 1 \leq x \leq 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $9-x \leq 5+x$ 를 풀면
 $x \geq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
 $2 \leq x \leq 3$
 세로의 길이는 $(9-x)$ cm이므로
 $6 \leq 9-x \leq 7$
 따라서 세로의 길이의 최솟값은 6cm이다.

- 10 $2x-1$, x , $2x+1$ 이 삼각형의 변의 길이이므로
 $2x-1 > 0 \quad \therefore x > \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $2x+1$ 이 세 변 중 가장 긴 변의 길이이므로
 $2x+1 < x + (2x-1) \quad \therefore x > 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 둔각삼각형이 되려면
 $(2x+1)^2 > x^2 + (2x-1)^2$
 $x^2-8x < 0, x(x-8) < 0$
 $\therefore 0 < x < 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 ㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면
 $2 < x < 8$

- 11 이차방정식 $2x^2-2ax+a^2-2=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = a^2 - 2(a^2 - 2) > 0$
 $a^2 - 4 < 0, (a+2)(a-2) < 0$
 $\therefore -2 < a < 2$

- 12 이차방정식 $2x^2+(a-2)x+a-2=0$ 이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $D = (a-2)^2 - 4 \times 2 \times (a-2) < 0$
 $a^2 - 12a + 20 < 0, (a-2)(a-10) < 0$
 $\therefore 2 < a < 10$
 따라서 정수 a 는 3, 4, 5, ..., 9의 7개이다.

- 13 이차방정식 $x^2+ax+a=0$ 이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면
 $D_1 = a^2 - 4a < 0$
 $a(a-4) < 0$
 $\therefore 0 < a < 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 이차방정식 $x^2+ax-a+3=0$ 이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면
 $D_2 = a^2 - 4(-a+3) \geq 0$
 $a^2 + 4a - 12 \geq 0, (a+6)(a-2) \geq 0$
 $\therefore a \leq -6$ 또는 $a \geq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
 $2 \leq a < 4$
 따라서 정수 a 는 2, 3이므로 그 합은 5이다.

- 14 이차방정식 $x^2+2(a+1)x+a+3=0$ 이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면
 $\frac{D_1}{4} = (a+1)^2 - (a+3) \geq 0$
 $a^2 + a - 2 \geq 0, (a+2)(a-1) \geq 0$
 $\therefore a \leq -2$ 또는 $a \geq 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$

이차방정식 $x^2-2x-a^2+5=0$ 이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4}=1-(-a^2+5)\geq 0$$

$$a^2-4\geq 0, (a+2)(a-2)\geq 0$$

$$\therefore a\leq -2 \text{ 또는 } a\geq 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{L}$$

두 이차방정식 중 적어도 하나는 실근을 가지므로 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위는 $\textcircled{I}, \textcircled{L}$ 을 합친 범위이다.

$$\therefore a\leq -2 \text{ 또는 } a\geq 1$$

- 15** 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+4=0$ 의 두 근을 α, β , 판별식을 D 라 하면

$$(i) \frac{D}{4}=(k+1)^2-4>0 \text{에서 } k^2+2k-3>0$$

$$(k+3)(k-1)>0 \quad \therefore k<-3 \text{ 또는 } k>1$$

$$(ii) \alpha+\beta=2(k+1)>0 \text{에서 } k>-1$$

$$(iii) \alpha\beta=4>0$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에 의하여 } k>1$$

- 16** 이차방정식 $x^2+(k-1)x+k+2=0$ 의 두 근을 α, β , 판별식을 D 라 하면

$$(i) D=(k-1)^2-4(k+2)\geq 0 \text{에서}$$

$$k^2-6k-7\geq 0, (k+1)(k-7)\geq 0$$

$$\therefore k\leq -1 \text{ 또는 } k\geq 7$$

$$(ii) \alpha+\beta=-(k-1)<0 \text{에서 } k>1$$

$$(iii) \alpha\beta=k+2>0 \text{에서 } k>-2$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에 의하여 } k\geq 7$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 7이다.

- 17** 이차방정식 $x^2+4(m-1)x+m^2-m-6=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha\beta=m^2-m-6<0$$

$$(m+2)(m-3)<0 \quad \therefore -2<m<3$$

따라서 정수 m 은 $-1, 0, 1, 2$ 의 4개이다.

- 18** 이차방정식 $x^2-(k^2-2k-8)x-k+3=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$(i) \alpha\beta=-k+3<0 \text{에서 } k>3$$

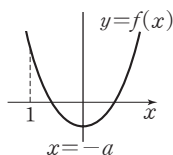
$$(ii) \alpha+\beta=k^2-2k-8>0 \text{에서}$$

$$(k+2)(k-4)>0 \quad \therefore k<-2 \text{ 또는 } k>4$$

$$(i), (ii) \text{에 의하여 } k>4$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 5이다.

- 19** $f(x)=x^2+2ax+6-a$ 라고 하고 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면



$$(i) \frac{D}{4}=a^2-(6-a)\geq 0 \text{에서}$$

$$a^2+a-6\geq 0, (a+3)(a-2)\geq 0$$

$$\therefore a\leq -3 \text{ 또는 } a\geq 2$$

$$(ii) f(1)=a+7>0 \text{에서 } a>-7$$

$$(iii) -a>1 \text{에서 } a<-1$$

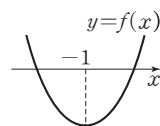
$$(i), (ii), (iii) \text{에 의하여 } -7<a\leq -3$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 -3 이다.

- 20** $f(x)=x^2+(a+2)x+5$ 라 하면

$$f(-1)=-a+4<0$$

$$\therefore a>4$$



- 21** $f(x)=x^2+2(k-2)x-k+2$ 라 하고

이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을

D 라 하면

$$(i) \frac{D}{4}=(k-2)^2-(-k+2)\geq 0$$

에서

$$k^2-3k+2\geq 0, (k-1)(k-2)\geq 0$$

$$\therefore k\leq 1 \text{ 또는 } k\geq 2$$

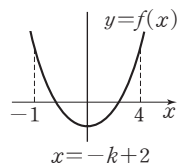
$$(ii) f(-1)=-3k+7>0 \text{에서 } k<\frac{7}{3}$$

$$f(4)=7k+2>0 \text{에서 } k>-\frac{2}{7}$$

$$(iii) -1<-k+2<4 \text{에서 } -2<k<3$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에 의하여}$$

$$-\frac{2}{7}<k\leq 1 \text{ 또는 } 2\leq k<\frac{7}{3}$$



- 22** $f(x)=x^2-(k+1)x-4k$ 라

하면 $f(x)=0$ 의 한 근이 -1

과 0 사이에 있을 조건은

$$f(-1)f(0)<0 \text{이므로}$$

$$(-3k+2)(-4k)<0, 4k(3k-2)<0$$

$$\therefore 0<k<\frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{I}$$

$f(x)=0$ 의 한 근이 2 와 3 사이에 있을 조건은

$$f(2)f(3)<0 \text{이므로}$$

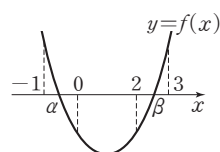
$$(-6k+2)(-7k+6)<0, (6k-2)(7k-6)<0$$

$$\therefore \frac{1}{3}<k<\frac{6}{7} \quad \cdots \cdots \textcircled{L}$$

$$\textcircled{I}, \textcircled{L} \text{에 의하여 } \frac{1}{3}<k<\frac{2}{3}$$

$$\text{따라서 } p=\frac{1}{3}, q=\frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$p+q=1$$



III-1 01 두 점 사이의 거리

기초 문제 Training

86쪽

- (1) 5 (2) 8 (3) 6 (4) 4
- (1) 1, 5 (2) -5, 3
- (1) 5 (2) 4 (3) 6 (4) $4\sqrt{5}$ (5) $\sqrt{13}$
- (1) (3, 0) (2) (10, 0) (3) (2, 0)
- (1) (0, 1) (2) (0, 0) (3) (0, -1)
- (1) $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형
(2) $\angle B=90^\circ$ 인 직각이등변삼각형
(3) $\overline{BC}=\overline{CA}$ 인 이등변삼각형
(4) 정삼각형

핵심 유형 Training

87~89쪽

- | | | | | |
|--|-----------|---------|------------------------------|---------------|
| 1 ③ | 2 2 | 3 2 | 4 ④ | 5 $\sqrt{26}$ |
| 6 8 | 7 (2, -2) | 8 300 m | 9 ④ | |
| 10 ④ | 11 ⑤ | 12 ④ | 13 ③ | 14 77 |
| 15 ② | 16 17 | 17 4 | 18 $(3+\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ | |
| 19 (가) c (나) $2a^2+2b^2+9c^2-6ac$ (다) $2a^2+2b^2+9c^2-6ac$ | | | | |
| 20 풀이 참조 | | | | |

- $\overline{AB}=\sqrt{(3+1)^2+(2a-2)^2}=\sqrt{4a^2-8a+20}=4\sqrt{2}$
 $4a^2-8a+20=32, a^2-2a-3=0$
 $(a+1)(a-3)=0 \quad \therefore a=3 (\because a>0)$
- $\overline{AB}=\sqrt{(a-1+1)^2+(2-a-2)^2}=\sqrt{2a^2}$
 $\overline{BC}=\sqrt{(5-a+1)^2+(4-2+a)^2}=\sqrt{2a^2-8a+40}$
 $2\overline{AB}=\overline{BC}$ 이므로 $2\sqrt{2a^2}=\sqrt{2a^2-8a+40}$
 $8a^2=2a^2-8a+40, 3a^2+4a-20=0$
 $(3a+10)(a-2)=0 \quad \therefore a=2 (\because a \text{는 정수})$
- $\overline{AB} \leq 5$ 이므로
 $\sqrt{(-1-a)^2+(a-6)^2} \leq 5$
 $2a^2-10a+37 \leq 25, a^2-5a+6 \leq 0$
 $(a-2)(a-3) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq a \leq 3$
따라서 정수 a 는 2, 3의 2개이다.

$$\begin{aligned} 4 \quad \overline{AB} &= \sqrt{a^2 + (-2a+4-2)^2} \\ &= \sqrt{5a^2-8a+4} = \sqrt{5\left(a-\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}} \end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{4}{5}$ 일 때 $\overline{AB}$ 의 길이가 최소이므로

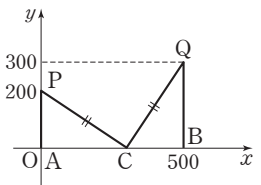
$$\begin{aligned} B\left(\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right) \\ \therefore \overline{OB} &= \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

- $P(a, 0)$ 이라 하면
 $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로
 $(a+3)^2+(-3)^2=(a-2)^2+(-2)^2$
 $10a=-10 \quad \therefore a=-1 \quad \therefore P(-1, 0)$
 $Q(0, b)$ 라 하면
 $\overline{AQ}=\overline{BQ}$ 에서 $\overline{AQ}^2=\overline{BQ}^2$ 이므로
 $3^2+(b-3)^2=(-2)^2+(b-2)^2$
 $-2b=-10 \quad \therefore b=5 \quad \therefore Q(0, 5)$
 $\therefore \overline{PQ}=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$

- $\overline{AP}=\overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 이므로
 $(a+1)^2+(b-1)^2=(a-3)^2+(b+1)^2$
 $a^2+2a+b^2-2b+2=a^2-6a+b^2+2b+10$
 $\therefore 2a-b=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
또 점 $P(a, b)$ 가 직선 $y=-x+4$ 위의 점이므로
 $b=-a+4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면
 $a=2, b=2 \quad \therefore a^2+b^2=8$

- 삼각형 ABC의 외심을 $P(x, y)$ 라 하면
 $\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$
 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$ 에서 $(x-6)^2+(y-1)^2=(x+1)^2+(y-2)^2$
 $\therefore 7x-y=16 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$ 에서 $(x+1)^2+(y-2)^2=(x-2)^2+(y-3)^2$
 $\therefore 3x+y=4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $x=2, y=-2$
따라서 점 P의 좌표는 (2, -2)이다.

- 오른쪽 그림과 같이 A 지점
이 원점, B 지점이 x축 위에
오도록 좌표평면을 잡으면
 $P(0, 200), Q(500, 300)$
 $C(a, 0)$ 이라 하면



- $\overline{PC}=\overline{QC}$ 에서 $\overline{PC}^2=\overline{QC}^2$ 이므로
 $a^2+(-200)^2=(a-500)^2+(-300)^2$
 $1000a=300000 \quad \therefore a=300$
따라서 A 지점과 C 지점 사이의 거리는 300 m이다.

- 9 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값이 최소인 경우는 점 P가 $\overline{AB}$ 위에 있을 때이므로

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{BP} &\geq \overline{AB} \\ &= \sqrt{(5+3)^2 + (2-8)^2} \\ &= \sqrt{100} = 10\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 10이다.

- 10 $O(0, 0)$, $A(x, y)$, $B(5, 12)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-12)^2} &= \overline{OA} + \overline{AB} \\ \overline{OA} + \overline{AB} \text{의 값이 최소인 경우는 점 } A &\text{가 } \overline{OB} \text{ 위에 있을 때이므로}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{OA} + \overline{AB} &\geq \overline{OB} \\ &= \sqrt{5^2 + 12^2} \\ &= \sqrt{169} = 13\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 13이다.

- 11 $\sqrt{x^2 + y^2 + 6x - 10y + 34} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-5)^2}$
 $\sqrt{x^2 + y^2 - 12x + 2y + 37} = \sqrt{(x-6)^2 + (y+1)^2}$

$A(-3, 5)$, $B(x, y)$, $C(6, -1)$ 이라 하면

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+3)^2 + (y-5)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y+1)^2} &= \overline{AB} + \overline{BC} \\ \overline{AB} + \overline{BC} \text{의 값이 최소인 경우는 점 } B &\text{가 } \overline{AC} \text{ 위에 있을 때이므로} \\ \overline{AB} + \overline{BC} &\geq \overline{AC} \\ &= \sqrt{(6+3)^2 + (-1-5)^2} \\ &= \sqrt{117} = 3\sqrt{13}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $3\sqrt{13}$ 이다.

- 12 $P(a, 0)$ 이라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (a+1)^2 + (-2)^2 + (a-3)^2 + (-4)^2 \\ &= 2a^2 - 4a + 30 \\ &= 2(a-1)^2 + 28\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은 $a=1$ 일 때 최솟값 28을 갖는다.

- 13 $P(a, a+2)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (a+2)^2 + (a+2-3)^2 + (a-1)^2 + (a+2-4)^2 \\ &= 4a^2 - 4a + 10 \\ &= 4\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + 9\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 은 $a = \frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 9를 갖고, 그때의 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 이다.

- 14 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$

$$\begin{aligned}&= (a+2)^2 + (b-3)^2 + (a-5)^2 + (b+1)^2 \\ &\quad + (a+6)^2 + (b-4)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 3a^2 + 6a + 3b^2 - 12b + 91 \\ &= 3(a+1)^2 + 3(b-2)^2 + 76\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 은 $a=-1$, $b=2$ 일 때 최솟값 76을 갖고, 그때의 점 P의 좌표는 $(-1, 2)$ 이다.

$$\therefore a = -1, b = 2, m = 76$$

$$\therefore a + b + m = 77$$

- 15 $\overline{AB} = \sqrt{(1-5)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$$\overline{BC} = \sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(5-3)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

이때 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$ 이므로 $\triangle ABC$ 는 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

- 16 $\overline{AB} = \sqrt{(1-3)^2 + (-8)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-1-1)^2 + 9^2} = \sqrt{85}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(3+1)^2 + (8-9)^2} = \sqrt{17}$$

이때 $\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로 $\triangle ABC$ 는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CA} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{17} \times \sqrt{17} = 17$$

- 17 $\overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}$

$$\overline{AC} = \sqrt{(a-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{a^2 - 2a + 2}$$

$$\text{이때 } \overline{AB} = \overline{AC} \text{이므로 } \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2$$

$$10 = a^2 - 2a + 2, a^2 - 2a - 8 = 0$$

$$(a+2)(a-4) = 0 \quad \therefore a = 4 (\because a > 0)$$

- 18 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

$C(a, b)$ 라 하면 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로

$$(5-1)^2 + (-1-1)^2 = (a-5)^2 + (b+1)^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 - 10a + 2b + 6 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 $\overline{BC} = \overline{CA}$ 에서 $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$ 이므로

$$(a-5)^2 + (b+1)^2 = (1-a)^2 + (1-b)^2$$

$$\therefore b = 2a - 6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦을 ⑧에 대입하면

$$a^2 + (2a-6)^2 - 10a + 2(2a-6) + 6 = 0$$

$$a^2 - 6a + 6 = 0 \quad \therefore a = 3 \pm \sqrt{3}$$

이를 ⑧에 대입하면

$$a = 3 - \sqrt{3} \text{일 때 } b = -2\sqrt{3}, a = 3 + \sqrt{3} \text{일 때 } b = 2\sqrt{3}$$

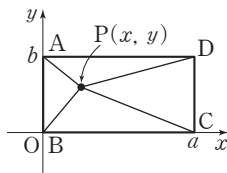
그런데 점 C는 제1사분면 위의 점이므로 $a > 0, b > 0$

따라서 꼭짓점 C의 좌표는 $(3 + \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ 이다.

- 19 $\triangle ABC$ 의 세 꼭짓점을 $A(a, b)$, $B(0, 0)$, $C(3c, 0)$ 이라 하면 $M(\frac{c}{2}, 0)$, $N(2c, 0)$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= (a^2 + b^2) + \{(3c - a)^2 + (-b)^2\} \\ &= (a^2 + b^2) + (9c^2 - 6ac + a^2 + b^2) \\ &= \boxed{2a^2 + 2b^2 + 9c^2 - 6ac} \\ \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 + 4\overline{MN}^2 \\ &= \{(c - a)^2 + (-b)^2\} + \{(2c - a)^2 + (-b)^2\} \\ &\quad + 4(2c - c)^2 \\ &= (c^2 - 2ac + a^2 + b^2) + (4c^2 - 4ac + a^2 + b^2) + 4c^2 \\ &= \boxed{2a^2 + 2b^2 + 9c^2 - 6ac} \\ \therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 &= \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 + 4\overline{MN}^2\end{aligned}$$

- 20 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x 축으로 하고, 점 B를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y 축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이 된다.



$A(0, b)$, $C(a, 0)$, $D(a, b)$ 라 하고 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 &= \{x^2 + (y - b)^2\} + \{(x - a)^2 + y^2\} \\ \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2 &= (x^2 + y^2) + \{(x - a)^2 + (y - b)^2\} \\ &= \{x^2 + (y - b)^2\} + \{(x - a)^2 + y^2\} \\ \therefore \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 &= \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2\end{aligned}$$

III-1 02 선분의 내분점과 외분점

기초 문제 Training

90쪽

- 1 (1) E (2) B (3) 1, 2 (4) 4, 3

- 2 (1) 2 (2) 0 (3) 10 (4) -8 (5) 1

- 3 5

- 4 (1) (3, 4) (2) (1, 3) (3) (27, 16)
(4) (-23, -9) (5) $(2, \frac{7}{2})$

- 5 $a=3$, $b=2$

- 6 (1) (2, 2) (2) $(\frac{1}{3}, 1)$ (3) $(0, -\frac{2}{3})$ (4) $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

핵심 유형 Training

91~94쪽

- 1 $8\sqrt{2}$ 2 ④ 3 (11, -4)
4 (-14, 27) 5 $\frac{4}{9} < t < \frac{5}{6}$ 6 ②
7 ① 8 ② 9 ① 10 $(\frac{4}{3}, 2), (-\frac{4}{3}, 6)$
11 $\frac{17}{2}$ 12 $4\sqrt{5}$ 13 4 14 ①
15 C(10, 0), D(5, 4) 16 8, 16
17 $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ 18 $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ 19 1 20 ①
21 $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ 22 2 23 (8, -6)
24 ③ 25 $8x + 6y - 29 = 0$ 26 ②

- 1 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는
 $(\frac{3 \times 3 + 2 \times (-2)}{3 + 2}, \frac{3 \times 6 + 2 \times 1}{3 + 2})$

$$\therefore (1, 4)$$

- 선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점 Q의 좌표는
 $(\frac{1 \times 3 - 2 \times (-2)}{1 - 2}, \frac{1 \times 6 - 2 \times 1}{1 - 2})$

$$\therefore (-7, -4)$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{(-7 - 1)^2 + (-4 - 4)^2} = 8\sqrt{2}$$

- 2 선분 AB를 4 : 3으로 내분하는 점 P의 좌표는
 $(\frac{4 \times 5 + 3 \times (-2)}{4 + 3}, \frac{4 \times 8 + 3 \times 1}{4 + 3})$

$$\therefore (2, 5)$$

- 선분 AB를 4 : 3으로 외분하는 점 Q의 좌표는
 $(\frac{4 \times 5 - 3 \times (-2)}{4 - 3}, \frac{4 \times 8 - 3 \times 1}{4 - 3})$

$$\therefore (26, 29)$$

따라서 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$(\frac{2 + 26}{2}, \frac{5 + 29}{2}) \therefore (14, 17)$$

즉, $a=14$, $b=17$ 이므로

$$b - a = 3$$

- 3 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표가 (0, 0)이므로
 $\frac{2 \times (b+1) + 1 \times 2}{2+1} = 0, \frac{2 \times (-1) + 1 \times (a+1)}{2+1} = 0$

$$\therefore a=1, b=-2$$

따라서 B(-1, -1), C(3, -2)이므로 선분 BC를

3 : 2로 외분하는 점의 좌표는

$$(\frac{3 \times 3 - 2 \times (-1)}{3 - 2}, \frac{3 \times (-2) - 2 \times (-1)}{3 - 2})$$

$$\therefore (11, -4)$$

- 4 선분 AB를 3 : b로 내분하는 점의 좌표가 (-1, 1)이므로
 $\frac{3 \times a + b \times (-4)}{3+b} = -1, \frac{3 \times (-3) + b \times 7}{3+b} = 1$
 $3a - 4b = -3 - b, -9 + 7b = 3 + b$
 $\therefore a = 1, b = 2$

따라서 B(1, -3)이므로 선분 AB를 2 : 3으로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 1 - 3 \times (-4)}{2-3}, \frac{2 \times (-3) - 3 \times 7}{2-3} \right)$$

$$\therefore (-14, 27)$$

- 5 $t > 0, 1-t > 0$ 이므로 $0 < t < 1$ ㉠

선분 AB를 t : (1-t)로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{t \times 5 + (1-t) \times (-4)}{t + (1-t)}, \frac{t \times (-1) + (1-t) \times 5}{t + (1-t)} \right)$$

$$\therefore (9t-4, -6t+5)$$

이 점이 제1사분면 위에 있으므로

$$9t-4 > 0, -6t+5 > 0 \quad \therefore \frac{4}{9} < t < \frac{5}{6} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$$\frac{4}{9} < t < \frac{5}{6}$$

- 6 선분 AB를 m : n으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3m-n}{m+n}, \frac{-m+2n}{m+n} \right)$$

이 점이 y축 위에 있으므로

$$\frac{3m-n}{m+n} = 0 \quad \therefore 3m = n$$

그런데 m, n은 서로소인 자연수이므로

$$m = 1, n = 3 \quad \therefore m + n = 4$$

- 7 선분 AB를 k : 3으로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{5k+15}{k-3}, \frac{6k+6}{k-3} \right)$$

이 점이 직선 $y = x + 4$ 위에 있으므로

$$\frac{6k+6}{k-3} = \frac{5k+15}{k-3} + 4$$

$$6k+6 = 5k+15+4(k-3) \quad \therefore k = 1$$

- 8 $2\overline{AB} = \overline{BC}$ 이므로 $\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$

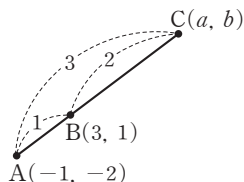
점 C는 선분 AB를 3 : 2로

외분하는 점이므로

$$a = \frac{3 \times 3 - 2 \times (-1)}{3-2} = 11$$

$$b = \frac{3 \times 1 - 2 \times (-2)}{3-2} = 7$$

$$\therefore a - b = 4$$



다른 풀이

점 B는 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$\frac{1 \times a + 2 \times (-1)}{1+2} = 3, \frac{1 \times b + 2 \times (-2)}{1+2} = 1$$

$$\therefore a = 11, b = 7 \quad \therefore a - b = 4$$

- 9 $\overline{AB} = 3\overline{AC}$ 이므로 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 1$

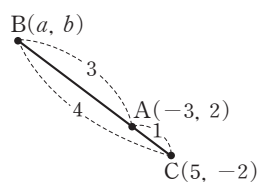
점 B는 선분 AC를 3 : 4로

외분하는 점이므로

$$a = \frac{3 \times 5 - 4 \times (-3)}{3-4} = -27$$

$$b = \frac{3 \times (-2) - 4 \times 2}{3-4} = 14$$

$$\therefore a + b = -13$$



- 10 $2\overline{AB} = 3\overline{BC}$ 이므로 $\overline{AB} : \overline{BC} = 3 : 2$

(i) 점 C가 선분 AB 위에 있을 때

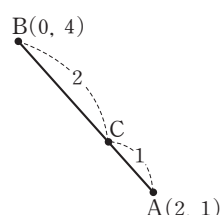
점 C는 선분 AB를 1 : 2로

내분하는 점이므로 점 C의

좌표는

$$\left(\frac{1 \times 0 + 2 \times 2}{1+2}, \frac{1 \times 4 + 2 \times 1}{1+2} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{4}{3}, 2 \right)$$



(ii) 점 C가 선분 AB의 연장선 위에 있을 때

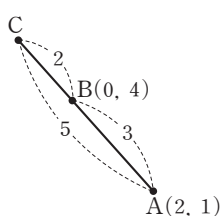
점 C는 선분 AB를 5 : 2로

외분하는 점이므로 점 C의

좌표는

$$\left(\frac{5 \times 0 - 2 \times 2}{5-2}, \frac{5 \times 4 - 2 \times 1}{5-2} \right)$$

$$\therefore \left(-\frac{4}{3}, 6 \right)$$



(i), (ii)에 의하여 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{4}{3}, 2 \right), \left(-\frac{4}{3}, 6 \right)$$

- 11 삼각형 OAP의 넓이가 삼각형 OBP의 넓이의 3배이므로

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1$$

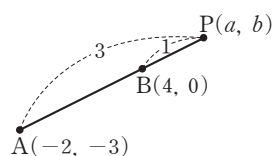
점 P는 선분 AB를 3 : 1로

외분하는 점이므로

$$a = \frac{3 \times 4 - 1 \times (-2)}{3-1} = 7$$

$$b = \frac{3 \times 0 - 1 \times (-3)}{3-1} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a + b = \frac{17}{2}$$



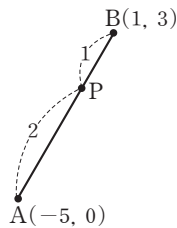
- 12 삼각형 OAP의 넓이가 삼각형 OBP의 넓이의 2배이므로 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$

(i) 점 P가 선분 AB 위에 있을 때

점 P는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 1 + 1 \times (-5)}{2+1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times 0}{2+1} \right)$$

$$\therefore (-1, 2)$$



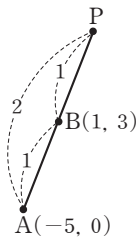
(ii) 점 P가 선분 AB의 연장선 위에 있을 때

점 P는 선분 AB를 2 : 1로 외분하는

점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 1 - 1 \times (-5)}{2-1}, \frac{2 \times 3 - 1 \times 0}{2-1} \right)$$

$$\therefore (7, 6)$$



(i), (ii)에 의하여 $P_1(-1, 2)$, $P_2(7, 6)$

또는 $P_1(7, 6)$, $P_2(-1, 2)$ 이므로

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(7+1)^2 + (6-2)^2} = 4\sqrt{5}$$

- 13 $\triangle ABP$ 에서 $\overline{AP} \parallel \overline{DC}$ 이므로

$$\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{PB} : \overline{PC}$$

$$\text{이때 } \overline{AB} = \sqrt{(-3-2)^2 + (-7-5)^2} = 13,$$

$$\overline{AD} = \overline{AC} = \sqrt{(6-2)^2 + (2-5)^2} = 5 \text{이므로}$$

$$\overline{PB} : \overline{PC} = 13 : 5$$

따라서 점 P는 선분 BC를 13 : 5로 외분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{13 \times 6 - 5 \times (-3)}{13-5}, \frac{13 \times 2 - 5 \times (-7)}{13-5} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{93}{8}, \frac{61}{8} \right)$$

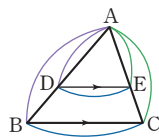
$$\text{즉, } a = \frac{93}{8}, b = \frac{61}{8} \text{이므로 } a - b = 4$$

참고 삼각형 ABC에서 두 점 D, E가 각

각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 위의 점일 때,

$\overline{BC} \parallel \overline{DE}$ 이면

$$\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AC} : \overline{AE} = \overline{BC} : \overline{DE}$$



- 14 $D(a, b)$ 라 하면 $\overline{AC}$ 의 중점과 $\overline{BD}$ 의 중점이 일치하므로

$$\frac{3-1}{2} = \frac{4+a}{2}, \frac{-2+3}{2} = \frac{5+b}{2}$$

$$\therefore a = -2, b = -4$$

따라서 점 D의 좌표는 $(-2, -4)$ 이다.

- 15 $C(a, b)$, $D(c, d)$ 라 하면 두 대각선 AC, BD의 교점은 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ 각각의 중점과 일치한다.

$\overline{AC}$ 의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-2+a}{2}, \frac{3+b}{2} \right)$ 이므로

$$\frac{-2+a}{2} = 4, \frac{3+b}{2} = \frac{3}{2} \quad \therefore a = 10, b = 0$$

$$\therefore C(10, 0)$$

또 $\overline{BD}$ 의 중점의 좌표는 $\left(\frac{3+c}{2}, \frac{-1+d}{2} \right)$ 이므로

$$\frac{3+c}{2} = 4, \frac{-1+d}{2} = \frac{3}{2} \quad \therefore c = 5, d = 4$$

$$\therefore D(5, 4)$$

- 16 $\overline{AC}$ 의 중점과 $\overline{BD}$ 의 중점이 일치하므로 중점의 x좌표는

$$\frac{a+8}{2} = \frac{4+b}{2} \quad \therefore b = a+4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로

$$(4-a)^2 + (6-2)^2 = (8-4)^2 + (4-6)^2$$

$$a^2 - 8a + 12 = 0, (a-2)(a-6) = 0$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = 6$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면

$$a = 2 \text{ 일 때 } b = 6, a = 6 \text{ 일 때 } b = 10$$

$$\therefore a+b = 8 \text{ 또는 } a+b = 16$$

- 17 $\overline{AD}$ 가 $\angle A$ 의 이등분선이므로 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-5)^2 + (-8-4)^2} = 13,$$

$$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + (1-4)^2} = 5 \text{이므로 } \overline{BD} : \overline{CD} = 13 : 5$$

따라서 점 D는 선분 BC를 13 : 5로 내분하는 점이므로

점 D의 좌표는

$$\left(\frac{13 \times 4 + 5 \times (-5)}{13+5}, \frac{13 \times 1 + 5 \times (-8)}{13+5} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

- 18 $\overline{AD}$ 가 $\angle A$ 의 이등분선이므로 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$

$$\overline{AB} = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10, \overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{이므로}$$

$$\overline{BD} : \overline{CD} = 10 : 5 = 2 : 1$$

따라서 점 D는 선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점

D의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times 8}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times (-6)}{2+1} \right) \quad \therefore \left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\therefore \overline{AD} = \sqrt{\left(\frac{14}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

- 19 $\triangle ABD : \triangle ACD = m : n$ 에서 $\overline{BD} : \overline{CD} = m : n$

한편 $\overline{AD}$ 는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-4-2)^2 + (-4-4)^2} = 10,$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(5-2)^2 + (-4)^2} = 5 \text{이므로}$$

$$\overline{BD} : \overline{CD} = 10 : 5 = 2 : 1$$

따라서 $m = 2, n = 1$ 이므로 $m - n = 1$

20 $\frac{4+a+b+5}{3}=4, \frac{-5+b-2-a+1}{3}=1$ 이므로
 $a+b=3, a-b=-9$
 두 식을 연립하여 풀면 $a=-3, b=6$
 $\therefore ab=-18$

21 B(a, b), C(c, d)라 하면
 $\frac{-4+a+c}{3}=-1, \frac{1+b+d}{3}=2$
 $a+c=1, b+d=5$
 $\therefore \frac{a+c}{2}=\frac{1}{2}, \frac{b+d}{2}=\frac{5}{2}$
 따라서 BC의 중점의 좌표는 $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ 이다.

22 $\triangle PQR$ 의 무게중심은 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 일치하므로
 무게중심 G의 좌표는
 $(\frac{2+3-1}{3}, \frac{0+5+1}{3}) \therefore (\frac{4}{3}, 2)$
 따라서 $a=\frac{4}{3}, b=2$ 이므로 $3a-b=3 \times \frac{4}{3}-2=2$

23 B(a, b)라 하면 (가), (나)에 의하여
 $\frac{7+a}{2}=2, \frac{5+b}{2}=0 \therefore a=-3, b=-5$
 $\therefore B(-3, -5)$
 C(c, d)라 하면 (다)에 의하여
 $\frac{7-3+c}{3}=4, \frac{5-5+d}{3}=-2 \therefore c=8, d=-6$
 따라서 점 C의 좌표는 (8, -6)이다.

24 P(x, y)라 하면 $\overline{AP}^2 - \overline{BP}^2 = 2$ 이므로
 $(x-1)^2 + y^2 - \{(x-2)^2 + (y-3)^2\} = 2$
 $x^2 - 2x + 1 + y^2 - (x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9) = 2$
 $2x + 6y - 14 = 0 \therefore x + 3y - 7 = 0$

25 P(x, y)라 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로
 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$
 $x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$
 $\therefore 8x + 6y - 29 = 0$

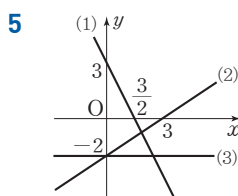
26 P(a, b)라 하면 점 P는 직선 $y = -3x - 2$ 위의 점이므로
 $b = -3a - 2 \dots \dots \textcircled{A}$
 Q(x, y)라 하면 점 Q는 $\overline{AP}$ 의 중점이므로
 $x = \frac{0+a}{2}, y = \frac{4+b}{2} \therefore a = 2x, b = 2y - 4$
 이를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면
 $2y - 4 = -3 \times 2x - 2 \therefore 3x + y - 1 = 0$
 따라서 $a = 3, b = -1$ 이므로 $a + b = 2$

III-2 01 직선의 방정식

기초 문제 Training

96쪽

- 1 (1) $y = -2x + 3$ (2) $y = x + 4$ (3) $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$
 2 (1) $y = 2x + 2$ (2) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ (3) $y = x + 2$
 3 (1) $\frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 1$ (2) $-\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$ (3) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$
 4 (1) $y = 1$ (2) $x = -1$ (3) $x = 3$ (4) $y = 2$



- 6 (1) 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면
 (2) 제1사분면, 제4사분면
 (3) 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면

핵심 유형 Training

97~100쪽

- 1 $y = -2x + 7$ 2 ④ 3 5 4 $y = x + 5$
 5 ② 6 ④ 7 $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ 8 ⑤
 9 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ 10 $\frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1$ 11 6
 12 ③ 13 ④ 14 ② 15 $y = \frac{7}{2}x - 7$
 16 ⑤ 17 $y = \frac{5}{6}x$ 18 $\frac{4}{5}$ 19 ②
 20 제2사분면, 제4사분면 21 제1사분면
 22 -5 23 $\sqrt{5}$ 24 ⑤ 25 (-12, -3)
 26 ③ 27 ④ 28 $0 \leq k \leq 1$

- 1 두 점 (3, -1), (1, 7)을 이은 선분의 중점의 좌표는
 $(\frac{3+1}{2}, \frac{-1+7}{2}) \therefore (2, 3)$
 따라서 점 (2, 3)을 지나고 기울기가 -2인 직선의 방정
 식은
 $y - 3 = -2(x - 2) \therefore y = -2x + 7$

- 2 점 $(-\sqrt{3}, 1)$ 을 지나고 기울기가 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y-1=\sqrt{3}\{x-(-\sqrt{3})\} \quad \therefore y=\sqrt{3}x+4$$

따라서 $a=\sqrt{3}$, $b=4$ 이므로

$$a^2+b^2=(\sqrt{3})^2+4^2=19$$

- 3 $3x+2y-1=0$ 에서 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$

즉, 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 이고 점 $(-1, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=-\frac{3}{2}\{x-(-1)\} \quad \therefore 3x+2y-1=0$$

따라서 $a=3$, $b=2$ 이므로 $a+b=5$

- 4 선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 2 + 2 \times (-4)}{1+2}, \frac{1 \times (-3) + 2 \times 6}{1+2}\right) \quad \therefore (-2, 3)$$

따라서 점 $(-2, 3)$ 을 지나고 기울기가 $\tan 45^\circ = 1$ 인 직선의 방정식은

$$y-3=x-(-2) \quad \therefore y=x+5$$

- 5 두 점 $(-2, 3)$, $(4, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-3=\frac{0-3}{4-(-2)}\{x-(-2)\} \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+2$$

두 점 $(2, a)$, $(b, \frac{7}{2})$ 이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 위의 점이므로

$$a=-1+2, \frac{7}{2}=-\frac{b}{2}+2 \quad \therefore a=1, b=-3$$

$$\therefore a+b=-2$$

- 6 선분 AB를 2:1로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 - 1 \times (-1)}{2-1}, \frac{2 \times (-2) - 1 \times 2}{2-1}\right) \quad \therefore (7, -6)$$

즉, 두 점 $(7, -6)$, $(2, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-6)=\frac{-1-(-6)}{2-7}(x-7) \quad \therefore y=-x+1$$

따라서 x 절편은 1이다.

- 7 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5+2}{3}, \frac{-1-2+6}{3}\right) \quad \therefore (2, 1)$$

따라서 두 점 $A(-1, -1)$, $G(2, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-1)=\frac{1-(-1)}{2-(-1)}\{x-(-1)\} \quad \therefore y=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$$

- 8 x 절편이 3이고 y 절편이 -5인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{3}-\frac{y}{5}=1 \quad \therefore 5x-3y-15=0$$

따라서 $a=5$, $b=15$ 이므로 $a+b=20$

- 9 y 절편을 a ($a \neq 0$)라 하면 x 절편은 $2a$ 이므로 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2a}+\frac{y}{a}=1$$

이 직선이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$\frac{2}{2a}+\frac{1}{a}=1, \frac{2}{a}=1 \quad \therefore a=2$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$$

- 10 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 의 x 절편이 2이므로

$$P(2, 0)$$

직선 $\frac{x}{5}-\frac{y}{4}=1$ 의 y 절편이 -4이므로

$$Q(0, -4)$$

따라서 직선 PQ의 방정식은

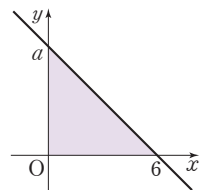
$$\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$$

- 11 직선 $\frac{x}{6}+\frac{y}{a}=1$ 의 x 절편은 6,

y 절편은 a ($a > 0$)이므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times a = 18$$

$$\therefore a=6$$



- 12 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{1-(a+1)}{1-(-1)}=\frac{-2-1}{a-1}, \frac{-a}{2}=\frac{-3}{a-1}$$

$$a^2-a-6=0, (a+2)(a-3)=0$$

$$\therefore a=3 (\because a > 0)$$

- 13 세 점 $(1, 1)$, $(-1, 5)$, $(k-1, -k+2)$ 가 한 직선 위에 있으려면

$$\frac{5-1}{-1-1}=\frac{-k+2-5}{k-1-(-1)}, -2=\frac{-k-3}{k}$$

$$-2k=-k-3 \quad \therefore k=3$$

- 14 세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 한다.

즉, 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{a-(-1)}{1-(-1)}=\frac{-5-(-1)}{-a-(-1)}, \frac{a+1}{2}=\frac{4}{a-1}$$

$$a^2-1=8, a^2=9 \quad \therefore a=\pm 3$$

따라서 모든 a 의 값의 곱은

$$-3 \times 3 = -9$$

- 15** 점 A를 지나고 $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하는 직선은 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나야 한다.

$\overline{BC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) \quad \therefore (2, 0)$$

따라서 두 점 $(2, 0)$, $(4, 7)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{7}{4-2}(x-2) \quad \therefore y = \frac{7}{2}x - 7$$

- 16** 직선 $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ 이 x 축, y 축과 만나는

점을 각각 A, B라 하면 $A(2, 0)$,

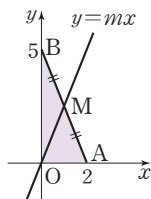
$B(0, 5)$ 이므로 오른쪽 그림의 삼각형

ABO 의 넓이를 이등분하는 직선

$y = mx$ 는 $\overline{AB}$ 의 중점 $M\left(1, \frac{5}{2}\right)$ 를

지난다.

$$\therefore m = \frac{5}{2}$$



- 17** 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선은 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나야 한다.

이때 직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{1+4}{2}\right) \quad \therefore \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

구하는 직선의 방정식을 $y = ax$ 라 하면 이 직선이 점

$\left(3, \frac{5}{2}\right)$ 를 지나므로

$$\frac{5}{2} = 3a \quad \therefore a = \frac{5}{6}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y = \frac{5}{6}x$

- 18** 정사각형과 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 도형의 대각선의 교점을 지나야 한다.

정사각형의 대각선의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{-2+0}{2}\right) \quad \therefore (-1, -1)$$

직사각형의 대각선의 교점의 좌표는

$$\left(\frac{2+6}{2}, \frac{2+4}{2}\right) \quad \therefore (4, 3)$$

따라서 두 점 $(-1, -1)$, $(4, 3)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{3-(-1)}{4-(-1)} = \frac{4}{5}$$

- 19** $b \neq 0$ 이므로 $ax + by + c = 0$ 에서 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

$$ab < 0, bc < 0 \text{에서 } -\frac{a}{b} > 0, -\frac{c}{b} > 0$$

따라서 주어진 직선의 기울기와 y 절편이 모두 양수이므로 직선의 개형은 ㉔이다.

- 20** $ab=0$ 에서 $a=0$ 또는 $b=0$

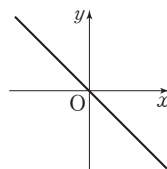
그런데 $ac > 0$ 이므로 $a \neq 0 \quad \therefore b=0$

$$ax + cy - b = 0 \text{에서 } y = -\frac{a}{c}x$$

그런데 $-\frac{a}{c} < 0$ 이므로 직선 $ax + cy - b = 0$ 의 기울기는 음수, y 절편은 0이다.

따라서 직선 $ax + cy - b = 0$ 은 오른

쪽 그림과 같이 제2사분면, 제4사분면을 지난다.



- 21** 직선 $ax + by + c = 0$, 즉 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ 의 기울기는 음수,

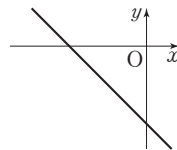
$$y \text{절편은 양수이므로 } -\frac{a}{b} < 0, -\frac{c}{b} > 0 \quad \therefore ac < 0$$

$$c \neq 0 \text{이므로 } bx - cy + a = 0 \text{에서 } y = \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}$$

그런데 $\frac{b}{c} < 0, \frac{a}{c} < 0$ 이므로 직선 $bx - cy + a = 0$ 의 기울기와 y 절편은 모두 음수이다.

따라서 직선 $bx - cy + a = 0$ 은 오른

쪽 그림과 같이 제1사분면을 지나지 않는다.



- 22** 주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$-(x+3y+3) + k(x+2y+4) = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$x+3y+3=0, x+2y+4=0 \quad \therefore x=-6, y=1$$

따라서 $a=-6, b=1$ 이므로 $a+b=-5$

- 23** 주어진 식을 k 에 대하여 정리하면

$$(-x+2y-4) + k(2x+y+3) = 0$$

이 식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로

$$-x+2y-4=0, 2x+y+3=0 \quad \therefore x=-2, y=1$$

따라서 $P(-2, 1)$ 이므로 점 P와 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

- 24** 직선 $(x-2y+1) + k(2x-3y-1) = 0$ (k 는 실수)이 점 $(1, -2)$ 를 지나므로

$$6+7k=0 \quad \therefore k = -\frac{6}{7}$$

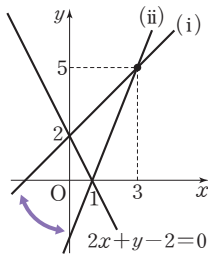
$$(x-2y+1) - \frac{6}{7}(2x-3y-1) = 0$$

$$\therefore 5x-4y-13=0$$

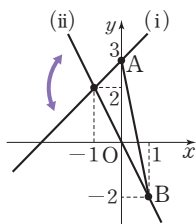
따라서 이 직선 위의 점인 것은 ㉕이다.

- 25** 점 (a, b) 가 직선 $2x - y + 1 = 0$ 위에 있으므로
 $2a - b + 1 = 0 \quad \therefore b = 2a + 1$
 이를 $ax - 2by = 6$ 에 대입하면
 $ax - 2(2a + 1)y = 6$
 $\therefore (x - 4y)a - 2y - 6 = 0$
 이 식이 a 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
 $x - 4y = 0, -2y - 6 = 0$
 $\therefore x = -12, y = -3$
 따라서 직선 $ax - 2by = 6$ 은 항상 점 $(-12, -3)$ 을 지난
 다.

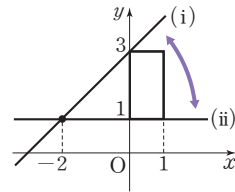
- 26** $mx - y - 3m + 5 = 0$ 을 m 에 대하여 정리하면
 $(x - 3)m - (y - 5) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 직선 $\textcircled{1}$ 은 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(3, 5)$ 를 지난다.
 오른쪽 그림과 같이 직선 $\textcircled{1}$ 이 직
 선 $2x + y - 2 = 0$ 과 제1사분면에
 서 만나도록 움직여 보면
 (i) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(0, 2)$ 를 지날 때
 $-3m + 3 = 0$
 $\therefore m = 1$
 (ii) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(1, 0)$ 을 지날 때
 $-2m + 5 = 0$
 $\therefore m = \frac{5}{2}$
 (i), (ii)에 의하여 m 의 값의 범위는
 $1 < m < \frac{5}{2}$
 따라서 $\alpha = 1, \beta = \frac{5}{2}$ 이므로 $\beta - \alpha = \frac{3}{2}$



- 27** 직선 $y = m(x + 1) + 2$ 는 m 의 값에 관계없이 항상 점
 $(-1, 2)$ 를 지난다.
 오른쪽 그림과 같이 이 직선이 선
 분 AB와 만나도록 움직여 보면
 (i) 직선이 점 $(0, 3)$ 을 지날 때
 $3 = m + 2$
 $\therefore m = 1$
 (ii) 직선이 점 $(1, -2)$ 를 지날 때
 $-2 = 2m + 2$
 $\therefore m = -2$
 (i), (ii)에 의하여 m 의 값의 범위는
 $-2 \leq m \leq 1$
 따라서 정수 m 은 $-2, -1, 0, 1$ 의 4개이다.



- 28** $kx - y + 2k + 1 = 0$ 을 k 에 대하여 정리하면
 $(x + 2)k - (y - 1) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 직선 $\textcircled{1}$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, 1)$ 을 지난
 다.



위의 그림과 같이 직선 $\textcircled{1}$ 이 직사각형과 만나도록 움직여
 보면

- (i) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(0, 3)$ 을 지날 때
 $2k - 2 = 0 \quad \therefore k = 1$
 (ii) 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(1, 1)$ 을 지날 때
 $3k = 0 \quad \therefore k = 0$
 (i), (ii)에 의하여 k 의 값의 범위는
 $0 \leq k \leq 1$

III-2 02 두 직선의 위치 관계

기초 문제 Training

101쪽

- (1) 평행하다. (2) 수직이다. (3) 수직이다. (4) 평행하다.
- (1) 4 (2) $-\frac{1}{4}$
- (1) 2 (2) -8
- (1) $y = 2x - 5$ (2) $y = -3x + 5$
- (1) $x + 3y - 7 = 0$ (2) $5x - 3y + 1 = 0$
- (1) 1 (2) $2\sqrt{2}$ (3) $2\sqrt{5}$ (4) 1
- (1) 2 (2) 12
- 1, 1, $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

- 1 -1 2 $y=-x+5$ 3 ⑤
 4 $(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$ 5 ② 6 ⑤ 7 ⑤
 8 $\frac{22}{7}$ 9 ④ 10 ③ 11 $y=x-4$
 12 $-\frac{5}{8}$ 13 ① 14 -2 15 ③ 16 $-\frac{1}{3}$
 17 $\frac{1}{3}$ 18 1 19 ④ 20 ② 21 ④
 22 $-\frac{20}{3}$ 23 ④ 24 ② 25 $8\sqrt{5}m$ 26 ③
 27 $\sqrt{5}$ 28 10 29 2 30 ③ 31 ⑤
 32 $\frac{7}{2}$ 33 ① 34 ①
 35 $4x-2y-5=0$ 또는 $4x+8y-5=0$

- 1 직선 $2x+y-1=0$, 즉 $y=-2x+1$ 에 평행한 직선의 기울기는 -2이다.
 기울기가 -2이고 점 (2, 1)을 지나는 직선의 방정식은 $y-1=-2(x-2) \quad \therefore y=-2x+5$
 이 직선이 점 (a, 7)을 지나므로 $7=-2a+5 \quad \therefore a=-1$
- 2 두 점 (1, 3), (-3, 7)을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{7-3}{-3-1}=-1$
 따라서 기울기가 -1이고 x절편이 5, 즉 점 (5, 0)을 지나는 직선의 방정식은 $y=-(x-5) \quad \therefore y=-x+5$
- 3 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{6-3}{5-(-1)}=\frac{1}{2}$ 이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 -2이다.
 선분 AB를 2:1로 외분하는 점의 좌표는 $(\frac{2 \times 5 - 1 \times (-1)}{2-1}, \frac{2 \times 6 - 1 \times 3}{2-1}) \quad \therefore (11, 9)$
 즉, 기울기가 -2이고 점 (11, 9)를 지나는 직선의 방정식은 $y-9=-2(x-11) \quad \therefore 2x+y-31=0$
 따라서 $a=2, b=-31$ 이므로 $a-b=33$
- 4 직선 $x-2y-1=0$, 즉, $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 에 수직인 직선의 기울기는 -2이므로 직선 AH의 방정식은 $y-1=-2\{x-(-1)\} \quad \therefore 2x+y+1=0$
 $x-2y-1=0, 2x+y+1=0$ 을 연립하여 풀면 $x=-\frac{1}{5}, y=-\frac{3}{5} \quad \therefore H(-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5})$

- 5 두 직선 $y=ax+2, y=\frac{1}{3}x+5$ 가 서로 수직이므로 $a \times \frac{1}{3} = -1 \quad \therefore a = -3$
 두 직선 $y=ax+2, y=(1-b)x-2$ 가 서로 평행하므로 $a=1-b \quad \therefore b=4$
 $\therefore a-b=-7$
- 6 두 직선이 평행하려면 $\frac{a+3}{a} = \frac{2}{a-2} \neq \frac{-1}{2}$
 $a^2-a-6=0, (a+2)(a-3)=0$
 $\therefore a=-2$ 또는 $a=3$
 그런데 $\frac{2}{a-2} \neq \frac{-1}{2}$ 에서 $a \neq -2$ 이므로 $a=3$
- 7 두 직선 $(k-2)x-y+2=0, kx+3y-1=0$ 이
 (i) 평행하려면 $\frac{k-2}{k} = \frac{-1}{3} \neq \frac{2}{-1}$
 $3k-6=-k \quad \therefore k=\frac{3}{2}$
 (ii) 수직이라면 $(k-2) \times k + (-1) \times 3 = 0$
 $k^2-2k-3=0, (k+1)(k-3)=0$
 $\therefore k=-1$ 또는 $k=3$
 (i), (ii)에 의하여 $\alpha=\frac{3}{2}, \beta=3 (\beta>0)$ 이므로 $\alpha\beta=\frac{9}{2}$
- 8 직선 $2x+ay-4=0$ 이 점 (-1, 2)를 지나므로 $-2+2a-4=0 \quad \therefore a=3$
 두 직선 $2x+3y-4=0, bx+cy+1=0$ 이 서로 수직이므로 $2b+3c=0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 직선 $bx+cy+1=0$ 도 점 (-1, 2)를 지나므로 $-b+2c+1=0 \quad \therefore b-2c=1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$
 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $b=\frac{3}{7}, c=-\frac{2}{7} \quad \therefore a+b+c=\frac{22}{7}$
- 9 두 직선 $x+ay-4=0, 3x-by+1=0$ 이 서로 수직이므로 $3-ab=0 \quad \therefore ab=3$
 두 직선 $x+ay-4=0, x+(b+2)y+2=0$ 이 서로 평행하므로 $\frac{1}{1} = \frac{a}{b+2} \neq \frac{-4}{2}$
 $a=b+2 \quad \therefore a-b=2$
 $\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=2^2+2 \times 3=10$

- 10 $\neg$. $x+ky-k+5=0$ 에서
 $(y-1)k+x+5=0$
 $y-1=0, x+5=0 \quad \therefore x=-5, y=1$
 따라서 직선 l 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-5, 1)$ 을 지난다.
- $\sqcup$. 직선 $x+ky-k+5=0$ 과 직선 $(2k-1)x+y+4=0$ 이 서로 평행하려면
 $\frac{1}{2k-1} = \frac{k}{1} \neq \frac{-k+5}{4}$
 $\frac{1}{2k-1} = \frac{k}{1}$ 에서
 $2k^2-k=1, 2k^2-k-1=0$
 $(2k+1)(k-1)=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{2}$ 또는 $k=1$
 그런데 $\frac{k}{1} \neq \frac{-k+5}{4}$ 에서
 $4k \neq -k+5 \quad \therefore k \neq 1$
 따라서 $k=-\frac{1}{2}$ 일 때 두 직선 l 과 m 은 서로 평행하다.
- $\sqsubset$. 직선 $x+ky-k+5=0$ 과 직선 $(2k-1)x+y+4=0$ 이 수직이라면
 $(2k-1)+k=0 \quad \therefore k=\frac{1}{3}$
 따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg, \sqcup$ 이다.

- 11 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는
 $\frac{-2-2}{6-2} = -1$
 또 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{2-2}{2}\right) \quad \therefore (4, 0)$
 따라서 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선은 기울기가 1이고 점 $(4, 0)$ 을 지나므로 그 방정식은
 $y=x-4$

- 12 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는
 $\frac{1-(-2)}{4-0} = \frac{3}{4}$
 또 $\overline{AB}$ 의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{0+4}{2}, \frac{-2+1}{2}\right) \quad \therefore \left(2, -\frac{1}{2}\right)$
 따라서 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선은 기울기가 $-\frac{4}{3}$ 이고 점 $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ 을 지나므로 그 방정식은
 $y - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{3}(x-2) \quad \therefore y = -\frac{4}{3}x + \frac{13}{6}$
 이 직선이 점 $(a, 3)$ 을 지나므로
 $3 = -\frac{4}{3}a + \frac{13}{6} \quad \therefore a = -\frac{5}{8}$

- 13 직선 $2x+y-2=0$ 이 $\overline{AB}$ 의 중점 $\left(-\frac{2+b}{2}, \frac{a+3}{2}\right)$ 을 지나므로
 $2 \times \frac{-2+b}{2} + \frac{a+3}{2} - 2 = 0$
 $\therefore a+2b=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 또 직선 $2x+y-2=0$ 의 기울기가 -2 이므로
 $\frac{3-a}{b-(-2)} = \frac{1}{2}$
 $\therefore 2a+b=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면
 $a=1, b=2 \quad \therefore ab=2$

- 14 마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분하므로 직선 BD는 선분 AC의 수직이등분선이다.
 직선 AC의 기울기는
 $\frac{0-5}{6-1} = -1$
 또 $\overline{AC}$ 의 중점의 좌표는
 $\left(\frac{1+6}{2}, \frac{5+0}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$
 따라서 직선 BD는 기울기가 1이고 점 $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 를 지나므로 그 방정식은
 $y - \frac{5}{2} = x - \frac{7}{2} \quad \therefore x - y - 1 = 0$
 즉, $a=-1, b=-1$ 이므로 $a+b=-2$

- 15 두 직선 $x-3y=3+a, x+3y=1-a$ 의 교점은
 $\left(2, \frac{-a-1}{3}\right)$ 이고, 이 점이 직선 $3x-y=2a-2$ 위의 점이므로
 $3 \times 2 - \left(\frac{-a-1}{3}\right) = 2a-2 \quad \therefore a=5$

- 16 두 직선 $x+2y-5=0, 2x-3y-4=0$ 이 한 점에서 만나므로 직선 $ax+y=0$ 이 위의 두 직선 중 하나와 평행해야 한다.
- (i) 직선 $ax+y=0$ 이 직선 $2x-3y-4=0$ 에 평행할 때
 $\frac{a}{2} = \frac{1}{-3} \neq \frac{0}{-4}$
 $\therefore a = -\frac{2}{3}$
- (ii) 직선 $ax+y=0$ 이 직선 $x+2y-5=0$ 에 평행할 때
 $\frac{a}{1} = \frac{1}{2} \neq \frac{0}{-5}$
 $\therefore a = \frac{1}{2}$
- (i), (ii)에 의하여 모든 상수 a 의 값의 곱은
 $-\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$

17 $y=x+1$ ㉠, $y=-x-3$ ㉡,
 $y=k(x-1)$ ㉢

(i) 세 직선이 모두 평행할 때

두 직선 ㉠, ㉡이 평행하지 않으므로 세 직선이 모두 평행한 경우는 없다.

(ii) 세 직선 중 두 직선이 평행할 때

두 직선 ㉠, ㉢이 서로 평행하면 $k=1$

두 직선 ㉡, ㉢이 서로 평행하면 $k=-1$

(iii) 세 직선이 한 점에서 만날 때

두 직선 ㉠, ㉡의 교점 $(-2, -1)$ 을 직선 ㉢이 지나면 되므로

$$-1=k \times (-3) \quad \therefore k=\frac{1}{3}$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 상수 k 의 값의 합은

$$1+(-1)+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

18 서로 다른 세 직선이 좌표평면을 4개의 영역으로 나누려면 세 직선이 모두 평행해야 한다.

$$ax+y+1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad x+by+3=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2},$$

$$2x+y+5=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(i) 두 직선 ㉠, ㉡이 서로 평행할 때

$$\frac{a}{2}=\frac{1}{1} \neq \frac{1}{5} \quad \therefore a=2$$

(ii) 두 직선 ㉡, ㉢이 서로 평행할 때

$$\frac{1}{2}=\frac{b}{1} \neq \frac{3}{5} \quad \therefore b=\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에 의하여 $ab=1$

19 $\frac{|1 \times (-1) + a \times 3 + 5|}{\sqrt{1^2 + a^2}} = 2\sqrt{5}$ 이므로

$$|3a+4| = 2\sqrt{5(1+a^2)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$11a^2 - 24a + 4 = 0, (11a-2)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = \frac{2}{11} \text{ 또는 } a = 2$$

그런데 a 는 정수이므로 $a=2$

20 점 $(k, 2)$ 에서 두 직선 $x-2y+1=0$, $2x+y+3=0$ 에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|1 \times k - 2 \times 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|2 \times k + 1 \times 2 + 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$|k-3| = |2k+5|, k-3 = \pm(2k+5)$$

$$\therefore k = -8 \text{ 또는 } k = -\frac{2}{3}$$

그런데 k 는 정수이므로 $k=-8$

21 $(k-2)x + (2k+1)y + 5 = 0$ 에서
 $(x+2y)k + (-2x+y+5) = 0$

$$x+2y=0, -2x+y+5=0$$

$$\therefore x=2, y=-1 \quad \therefore P(2, -1)$$

따라서 점 $P(2, -1)$ 과 직선 $2x+y+2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 \times 2 + 1 \times (-1) + 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

22 직선 $3x-4y-1=0$, 즉 $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$ 에 평행한 직선의

기울기는 $\frac{3}{4}$ 이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=\frac{3}{4}x+a$,

즉 $3x-4y+4a=0$ 이라 하자.

점 $(1, 2)$ 와 이 직선 사이의 거리가 3이므로

$$\frac{|3 \times 1 - 4 \times 2 + 4a|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 3, |4a-5| = 15$$

$$4a-5 = \pm 15 \quad \therefore a = -\frac{5}{2} \text{ 또는 } a = 5$$

따라서 제4사분면을 지나지 않는 직선의 방정식은

$$y = \frac{3}{4}x + 5$$

즉, 구하는 x 절편은 $-\frac{20}{3}$ 이다.

23 직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 이 직선이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로 직선 l 의 방정식은

$$y = mx + 2 \quad \therefore mx - y + 2 = 0$$

점 $(1, 0)$ 과 직선 l 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}, |m+2| = \sqrt{5(m^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4m^2 - 4m + 1 = 0, (2m-1)^2 = 0 \quad \therefore m = \frac{1}{2}$$

24 $f(k) = \frac{|-2|}{\sqrt{(k+1)^2 + (1-k)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+1}}$

따라서 $\sqrt{k^2+1}$ 이 최소일 때, 즉 $k=0$ 일 때 $f(k)$ 가 최대
 이므로 구하는 최댓값은 $f(0) = \sqrt{2}$

25 교차로의 한 지점을 원점으로 하여 주어진 그림을 좌

표평면 위에 나타내면 오른

쪽 그림과 같으므로

$A(0, -20), B(40, 20)$

원점과 점 $B(40, 20)$ 을 지나는 직선의 방정식은

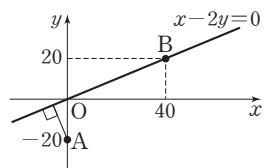
$$y = \frac{20}{40}x \quad \therefore x - 2y = 0$$

가로등을 보기 위하여 움직여야 할 최단 거리는 점

$A(0, -20)$ 과 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리와 같다.

따라서 구하는 최단 거리는

$$\frac{|-2 \times (-20)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{40}{\sqrt{5}} = 8\sqrt{5}(\text{m})$$



- 26 구하는 두 직선 사이의 거리는 직선 $4x-3y+16=0$ 위의 한 점 $(-4, 0)$ 과 직선 $4x-3y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|4 \times (-4) + 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 3$$

- 27 두 직선 $x+2y-1=0$, $x+ay+4=0$ 이 서로 평행하므로

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{a} \neq \frac{-1}{4} \quad \therefore a=2$$

즉, 두 직선은 $x+2y-1=0$, $x+2y+4=0$

따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는 직선 $x+2y-1=0$ 위의 한 점 $(1, 0)$ 과 직선 $x+2y+4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|1 \times 1 + 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$$

- 28 직선 $x-2y+5=0$ 위의 한 점 $(-5, 0)$ 과 직선

$x-2y+a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|1 \times (-5) + a|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}$$

$$|a-5| = 5, a-5 = \pm 5$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=10$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $a=10$

- 29 직선 $y=ax+2$ 위의 한 점 $(0, 2)$ 와 직선 $y=ax+1$, 즉 $ax-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1 \times 2 + 1|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

따라서 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 $\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$ 이므로

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}\right)^2 = \frac{1}{5}, \frac{1}{a^2 + 1} = \frac{1}{5}$$

$$a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 (\because a > 0)$$

- 30 $\overline{AB} = \sqrt{(5-3)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{2}$

직선 AB의 방정식은

$$y-4 = \frac{2-4}{5-3}(x-3)$$

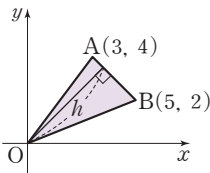
$$\therefore x+y-7=0$$

점 O(0, 0)과 직선 AB 사이의 거리를 h 라 하면

$$h = \frac{|-7|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{7}{\sqrt{2}} = 7$$



- 31 $\overline{AB} = \sqrt{(4-3)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{26}$

직선 AB의 방정식은

$$y-4 = \frac{-1-4}{4-3}(x-3)$$

$$\therefore 5x+y-19=0$$

점 C(a, 2)와 직선 AB 사

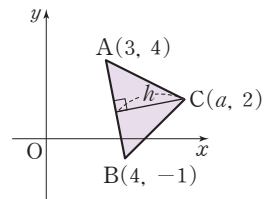
이의 거리를 h 라 하면

$$\frac{|5 \times a + 1 \times 2 - 19|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{|5a - 17|}{\sqrt{26}}$$

$\triangle ABC$ 의 넓이가 9이므로

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{26} \times \frac{|5a-17|}{\sqrt{26}} = 9, |5a-17| = 18$$

$$5a-17 = \pm 18 \quad \therefore a=7 (\because a > 0)$$



- 32 직선 AB와 직선 $2x-3y+4=0$ 의 기울기가 $\frac{2}{3}$ 로 같으므로 두 직선은 서로 평행하다.

삼각형 APB에서 $\overline{AB}$ 를 밑변으로 하면 점 A와 직선

$2x-3y-4=0$ 사이의 거리가 높이가 된다.

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$$

점 A와 직선 $2x-3y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3 \times 1 - 4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$$

$$\therefore \triangle APB = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7}{2}$$

- 33 P(x, y)라 하면

$$\frac{|3x-4y+3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|4x-3y+1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$$

$$|3x-4y+3| = |4x-3y+1|$$

$$3x-4y+3 = \pm(4x-3y+1)$$

$$\therefore x+y-2=0 \text{ 또는 } 7x-7y+4=0$$

따라서 점 (1, 1)을 지나는 도형의 방정식은

$$x+y-2=0$$

- 34 두 직선 $x+2y-3=0$, $2x+y+5=0$ 이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 P(x, y)라 하면

$$\frac{|x+2y-3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|2x+y+5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$|x+2y-3| = |2x+y+5|$$

$$x+2y-3 = \pm(2x+y+5)$$

$$\therefore x-y+8=0 \text{ 또는 } 3x+3y+2=0$$

따라서 보기 중 각의 이등분선의 방정식인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

- 35 x축과 직선 $4x+3y-5=0$ 이 이루는 각의 이등분선 위의 임의의 점을 P(x, y)라 하면

$$|y| = \frac{|4x+3y-5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

$$|4x+3y-5| = 5|y|, 4x+3y-5 = \pm 5y$$

$$\therefore 4x-2y-5=0 \text{ 또는 } 4x+8y-5=0$$

III-3 01 원의 방정식

기초 문제 Training

108쪽

- 1 (1) $(0, 0)$, 2 (2) $(0, -3)$, 5
(3) $(2, 3)$, 3 (4) $(-1, 4)$, $\sqrt{5}$
- 2 (1) $x^2 + y^2 = 9$
(2) $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 10$
- 3 (1) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$
(2) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 9$
(3) $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 25$
- 4 (1) $(2, 0)$, 3 (2) $(-3, 5)$, 6
- 5 (1) $k > -5$
(2) $k < -\sqrt{2}$ 또는 $k > \sqrt{2}$
- 6 (1) $x^2 + y^2 - x - y = 0$
(2) $x^2 + y^2 + x + 3y = 0$
- 7 (1) $x + y - 1 = 0$
(2) $6x + 6y - 13 = 0$

핵심 유형 Training

109~113쪽

- | | | | |
|------|--------------------------------------|------------------------|------------------------|
| 1 3 | 2 ⑤ | 3 ③ | 4 $x^2 + (y+1)^2 = 17$ |
| 5 ④ | 6 ⑤ | 7 $(x-3)^2 + y^2 = 25$ | 8 ③ |
| 9 ④ | 10 ① | 11 ④ | 12 10 |
| 13 ① | 14 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ | 15 ④ | 16 ③ |
| 17 3 | 18 $-2 \leq k < 2$ 또는 $2 < k \leq 6$ | 19 4 | |
| 20 ② | 21 ③ | 22 ④ | 23 ① |
| 24 4 | 25 $\sqrt{7}$ | 26 $\sqrt{11}$ | 27 ③ |
| 28 ② | 29 ③ | 30 ③ | 31 ② |
| 32 ④ | | | |

- 1 중심의 좌표가 $(-1, 0)$ 이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식은
 $(x+1)^2 + y^2 = 4$
 따라서 $a = -1$, $b = 0$, $c = 4$ 이므로
 $a + b + c = 3$

- 2 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 원의 방정식은
 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = r^2$
 이 원이 점 $(2, 3)$ 을 지나므로
 $(2+1)^2 + (3+1)^2 = r^2$, $r^2 = 25$
 $\therefore r = 5$ ($\because r > 0$)
 따라서 원의 둘레의 길이는
 $2\pi \times 5 = 10\pi$
- 3 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는
 $\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2+1}, \frac{2 \times 5 + 1 \times (-4)}{2+1} \right) \therefore (3, 2)$
 따라서 중심의 좌표가 $(3, 2)$ 이고 반지름의 길이가 4인 원의 방정식은
 $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$
- 4 원의 중심의 좌표는
 $\left(\frac{-4+4}{2}, \frac{-2+0}{2} \right) \therefore (0, -1)$
 원의 반지름의 길이는
 $\frac{1}{2} \sqrt{(4+4)^2 + 2^2} = \sqrt{17}$
 따라서 구하는 원의 방정식은
 $x^2 + (y+1)^2 = 17$
- 5 원의 중심의 좌표는
 $\left(\frac{4+2}{2}, \frac{-3+1}{2} \right) \therefore (3, -1)$
 원의 반지름의 길이는
 $\frac{1}{2} \sqrt{(2-4)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{5}$
 따라서 $a = 3$, $b = -1$, $r^2 = 5$ 이므로
 $a + b + r^2 = 7$
- 6 A(6, 0), B(0, 4)이므로 원의 반지름의 길이는
 $\frac{1}{2} \sqrt{(-6)^2 + 4^2} = \sqrt{13}$
 따라서 원의 넓이는
 $\pi \times (\sqrt{13})^2 = 13\pi$
- 7 원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 r 라 하면
 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$
 이 원이 두 점 $(0, 4)$, $(7, 3)$ 을 지나므로
 $a^2 + 4^2 = r^2$, $(7-a)^2 + 3^2 = r^2$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a = 3$, $r^2 = 25$
 따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x-3)^2 + y^2 = 25$

- 8 원의 중심의 좌표를 $(0, a)$, 반지름의 길이를 r 라 하면
 $x^2 + (y-a)^2 = r^2$

이 원이 두 점 $(2, 0)$, $(-2, 4)$ 를 지나므로

$$2^2 + a^2 = r^2, (-2)^2 + (4-a)^2 = r^2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=2, r^2=8$$

즉, 원의 방정식은

$$x^2 + (y-2)^2 = 8$$

ㄱ. 중심의 좌표는 $(0, 2)$ 이다.

ㄴ. 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로 원의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi$$

ㄷ. $2^2 + (4-2)^2 = 8$ 이므로 점 $(2, 4)$ 를 지난다.

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

- 9 원의 중심의 좌표를 $(a, a+1)$, 반지름의 길이를 r 라 하면
 $(x-a)^2 + (y-a-1)^2 = r^2$

이 원이 두 점 $(1, 6)$, $(-3, 2)$ 를 지나므로

$$(1-a)^2 + (6-a-1)^2 = r^2$$

$$(-3-a)^2 + (2-a-1)^2 = r^2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=1, r^2=16$$

따라서 원의 넓이는 16π 이다.

- 10 원의 중심의 좌표가 $(-3, 4)$ 이므로

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$$

이 원이 점 $(a, 1)$ 을 지나므로

$$(a+3)^2 + (1-4)^2 = 9, (a+3)^2 = 0$$

$$\therefore a = -3$$

- 11 중심의 좌표가 $(1, 2a)$ 인 원이 x 축에 접하면 반지름의 길이는 $|2a|$ 이므로

$$\sqrt{4a^2 + b + 1} = |2a|, 4a^2 + b + 1 = 4a^2$$

$$\therefore b = -1$$

따라서 원 $(x-1)^2 + (y-2a)^2 = 4a^2$ 이 점 $(-3, 4)$ 를 지나므로

$$(-3-1)^2 + (4-2a)^2 = 4a^2 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore a+b = 1$$

- 12 원의 중심의 좌표를 $(a, a+3)$ 이라 하면

$$(x-a)^2 + (y-a-3)^2 = (a+3)^2$$

이 원이 점 $(1, 2)$ 를 지나므로

$$(1-a)^2 + (2-a-3)^2 = (a+3)^2$$

$$a^2 - 6a - 7 = 0, (a+1)(a-7) = 0$$

$$\therefore a = 7 (\because a > 0)$$

따라서 원의 반지름의 길이는

$$a+3 = 7+3 = 10$$

- 13 원의 중심의 좌표가 $(5, -5)$ 이므로

$$(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$$

이 원이 점 $(0, a)$ 를 지나므로

$$(0-5)^2 + (a+5)^2 = 25, (a+5)^2 = 0$$

$$\therefore a = -5$$

- 14 원의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심의 좌표는

$$(-r, r)$$

이 점이 직선 $x-2y+3=0$ 위에 있으므로

$$-r-2r+3=0 \quad \therefore r=1$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

- 15 주어진 조건을 만족시키는 원의 중심은 제1사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r 라 하면 중심의 좌표는 (r, r) 이다.

즉, 원의 방정식은

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

이 원이 점 $(4, 2)$ 를 지나므로

$$(4-r)^2 + (2-r)^2 = r^2, r^2 - 12r + 20 = 0$$

$$(r-2)(r-10) = 0$$

$$\therefore r = 2 \text{ 또는 } r = 10$$

따라서 두 원의 넓이의 합은

$$\pi \times 2^2 + \pi \times 10^2 = 104\pi$$

- 16 $x^2 + y^2 - 3x + 4y = 0$ 을 변형하면

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\text{따라서 } a = \frac{3}{2}, b = -2, r = \frac{5}{2} \text{이므로}$$

$$a+b+r = 2$$

- 17 $x^2 + y^2 - 2x + 6y + k^2 - k + 8 = 0$ 을 변형하면

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = -k^2 + k + 2$$

이 방정식이 원을 나타내려면

$$-k^2 + k + 2 > 0$$

$$k^2 - k - 2 < 0, (k+1)(k-2) < 0$$

$$\therefore -1 < k < 2$$

따라서 $\alpha = -1, \beta = 2$ 이므로

$$\beta - \alpha = 3$$

- 18 $x^2 + y^2 + kx - 2y + k = 0$ 을 변형하면

$$\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{k^2}{4} - k + 1$$

이 방정식이 반지름의 길이가 2 이하인 원을 나타내려면

$$0 < \sqrt{\frac{k^2}{4} - k + 1} \leq 2$$

$$\therefore 0 < \frac{k^2}{4} - k + 1 \leq 4$$

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{4} - k + 1 > 0 \text{을 풀면} \\ k^2 - 4k + 4 > 0, (k-2)^2 > 0 \\ \therefore k \neq 2 \text{인 모든 실수} \quad \cdots \cdots \textcircled{7} \\ \frac{k^2}{4} - k + 1 \leq 4 \text{를 풀면} \\ k^2 - 4k + 4 \leq 16, k^2 - 4k - 12 \leq 0 \\ (k+2)(k-6) \leq 0 \\ \therefore -2 \leq k \leq 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{8} \\ \textcircled{7}, \textcircled{8} \text{의 공통부분을 구하면} \\ -2 \leq k < 2 \text{ 또는 } 2 < k \leq 6 \end{aligned}$$

19 $x^2 + y^2 - 4x + k^2 - 6k - 3 = 0$ 을 변형하면
 $(x-2)^2 + y^2 = -k^2 + 6k + 7$
 이 방정식이 원을 나타내려면
 $-k^2 + 6k + 7 > 0$
 $k^2 - 6k - 7 < 0, (k+1)(k-7) < 0$
 $\therefore -1 < k < 7$
 원의 넓이가 최대하려면 반지름의 길이가 최대이어야 하므로
 $-k^2 + 6k + 7 = -(k-3)^2 + 16$
 따라서 $-1 < k < 7$ 에서 $k=3$ 일 때 반지름의 길이는 최대
 이고 그때의 반지름의 길이는 $\sqrt{16}=4$ 이다.

20 원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로
 $c=0$
 즉, 원 $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ 이 두 점 $(-4, 0), (0, 6)$ 을 지나므로
 $16 - 4a = 0, 36 + 6b = 0$
 $\therefore a=4, b=-6$
 $\therefore a+b+c=-2$

21 구하는 원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓으면 이 원이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로
 $C=0$
 즉, 원 $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$ 이 두 점 $(4, -2), (6, 2)$ 를 지나므로
 $20 + 4A - 2B = 0, 40 + 6A + 2B = 0$
 $2A - B = -10, 3A + B = -20$
 $\therefore A = -6, B = -2$
 따라서 원 $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$ 이 점 $(2, k)$ 를 지나므로
 $4 + k^2 - 12 - 2k = 0, k^2 - 2k - 8 = 0$
 $(k+2)(k-4) = 0$
 $\therefore k=4 (\because k > 0)$

22 주어진 세 점을 $A(-3, 3), B(4, 10), C(7, 7)$ 이라 하고 원의 중심을 $P(a, b)$ 라 하면
 $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$
 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로
 $(a+3)^2 + (b-3)^2 = (a-4)^2 + (b-10)^2$
 $14a + 14b = 98 \quad \therefore a+b=7 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$
 $\overline{AP} = \overline{CP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{CP}^2$ 이므로
 $(a+3)^2 + (b-3)^2 = (a-7)^2 + (b-7)^2$
 $20a + 8b = 80 \quad \therefore 5a + 2b = 20 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$
 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a=2, b=5$
 즉, 원의 중심은 $P(2, 5)$ 이므로 반지름의 길이는
 $\overline{AP} = \sqrt{(2+3)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{29}$
 따라서 구하는 원의 넓이는
 $\pi \times (\sqrt{29})^2 = 29\pi$

23 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
 $x^2 + y^2 - 4 + k(x^2 + y^2 - 3x - 6y - 1) = 0$ (단, $k \neq -1$)
 $\cdots \cdots \textcircled{7}$

이 원이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로
 $-4 - k = 0 \quad \therefore k = -4$
 이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면
 $x^2 + y^2 - 4 - 4(x^2 + y^2 - 3x - 6y - 1) = 0$
 $\therefore x^2 + y^2 - 4x - 8y = 0$
 따라서 $a=-4, b=-8$ 이므로
 $a+b=-12$

24 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은
 $x^2 + y^2 - x + 6y + 4 - (x^2 + y^2 - 2x + ay + 1) = 0$
 $\therefore x + (6-a)y + 3 = 0$
 이 직선이 직선 $y=2x-1$, 즉 $2x-y-1=0$ 과 수직이므로
 $1 \times 2 + (6-a) \times (-1) = 0 \quad \therefore a=4$

25 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은
 $x^2 + y^2 - 6x + 2ay + 8 + k(x^2 + y^2 - 4x) = 0$ (단, $k \neq -1$)
 $\cdots \cdots \textcircled{7}$

이 원이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로
 $3 - 3k = 0 \quad \therefore k=1$
 이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면
 $x^2 + y^2 - 6x + 2ay + 8 + (x^2 + y^2 - 4x) = 0$
 $x^2 + y^2 - 5x + ay + 4 = 0$
 $\therefore \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{9}{4}$
 이 원의 넓이가 4π 이므로
 $\frac{a^2}{4} + \frac{9}{4} = 4, a^2 = 7$
 $\therefore a = \sqrt{7} (\because a > 0)$

- 26 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 9$$

$$-(x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16) = 0$$

$$\therefore 6x + 8y - 25 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

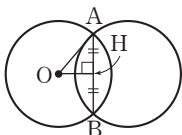
두 원의 교점을 각각 A, B라 하고 원 $x^2 + y^2 = 9$ 의 중심 O(0, 0)에서 직선 ①에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{OH} = \frac{|-25|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{5}{2}$$

직각삼각형 AOH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = \sqrt{11}$$



- 27 $P(x, y)$ 라 하면 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 36$ 에서

$$(x+2)^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 = 36$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 + y^2 = 9$$

- 28 $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 21 = 0$ 을 변형하면

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 4$$

$P(m, n)$ 이라 하면

$$(m+4)^2 + (n-3)^2 = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$Q(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{2+m}{2}, y = \frac{-1+n}{2}$$

$$\therefore m = 2x - 2, n = 2y + 1$$

이를 ①에 대입하면

$$(2x-2+4)^2 + (2y+1-3)^2 = 4$$

$$\therefore (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

따라서 점 Q가 나타내는 도형은 중심이 점 (-1, 1)이고 반지름의 길이가 1인 원이므로

$$a = -1, b = 1, r = 1$$

$$\therefore a + b + r = 1$$

- 29 $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$ 을 변형하면

$$(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$$

$P(a, b)$ 라 하면

$$(a+3)^2 + (b-3)^2 = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$Q(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{2a}{3}, y = \frac{2b}{3}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}x, b = \frac{3}{2}y$$

이를 ①에 대입하면

$$\left(\frac{3}{2}x+3\right)^2 + \left(\frac{3}{2}y-3\right)^2 = 9$$

$$\therefore (x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$$

따라서 점 Q가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 2인 원
이므로 구하는 길이는

$$2\pi \times 2 = 4\pi$$

- 30 $P(x, y)$ 라 하면 $3\overline{BP} = 2\overline{AP}$ 에서

$$9\overline{BP}^2 = 4\overline{AP}^2$$

$$9\{(x-1)^2 + y^2\} = 4\{(x+4)^2 + y^2\}$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 11 = 0$$

$$\therefore (x-5)^2 + y^2 = 36$$

다른 풀이

선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점을 C, 외분하는 점을 D라 하면

$$C(-1, 0), D(11, 0)$$

점 P가 나타내는 도형은 두 점 C, D를 지름의 양 끝 점으로 하는 원이므로 중심의 좌표는

$$(5, 0)$$

또 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{CD} = 6$$

$$\therefore (x-5)^2 + y^2 = 36$$

- 31 $P(x, y)$ 라 하면 $\frac{\overline{OP}}{\overline{AP}} = 2$ 에서 $\overline{OP} = 2\overline{AP}$

$$\therefore \overline{OP}^2 = 4\overline{AP}^2$$

$$x^2 + y^2 = 4\{(x-3)^2 + y^2\}$$

$$x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$$

$$\therefore (x-4)^2 + y^2 = 4$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 2인 원
이므로 구하는 길이는

$$2\pi \times 2 = 4\pi$$

- 32 $P(x, y)$ 라 하면 $\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$ 이므로

$$2\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } 4\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

$$4\{(x-1)^2 + (y+2)^2\} = (x-1)^2 + (y-1)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 (1, -3)이고 반지름의 길이가 2인 원이다.

이때 $\angle PBA$ 의 크기가 최대가

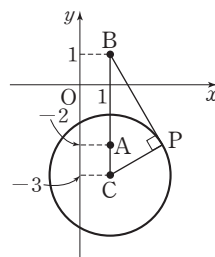
되려면 오른쪽 그림과 같이 직선

BP가 원에 접해야 하므로 원의

중심을 C라 하면 직각삼각형

PBC에서

$$\overline{BP} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$



III-3 02 원과 직선의 위치 관계

기초 문제 Training

114쪽

- 1 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 한 점에서 만난다.(접한다.)
(3) 만나지 않는다.
- 2 (1) 서로 다른 두 점에서 만난다.
(2) 만나지 않는다.
(3) 한 점에서 만난다.(접한다.)
- 3 (1) $-5 < k < 5$
(2) $k = \pm 5$
(3) $k < -5$ 또는 $k > 5$
- 4 (1) $y = x \pm \sqrt{2}$
(2) $y = -3x \pm 2\sqrt{10}$
(3) $y = -x \pm 2$
(4) $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$
- 5 (1) $x + y - 2 = 0$
(2) $x + 2y - 5 = 0$
(3) $3x - 4y + 25 = 0$
(4) $2x + 3y + 13 = 0$
- 6 (1) $x_1x + y_1y = 4$
(2) $x_1 = 0, y_1 = 2$ 또는 $x_1 = \frac{8}{5}, y_1 = \frac{6}{5}$
(3) $y = 2$ 또는 $4x + 3y - 10 = 0$

핵심 유형 Training

115~118쪽

- | | | | | |
|-------------------|--------------|----------------------------|--------------------------|-------|
| 1 ② | 2 $\sqrt{3}$ | 3 ④ | 4 ② | 5 ② |
| 6 ⑤ | 7 ③ | 8 ④ | 9 ③ | 10 ④ |
| 11 4 | 12 2 | 13 ⑤ | 14 $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ | 15 ② |
| 16 ② | 17 ④ | 18 $y = 4x \pm 3\sqrt{17}$ | 19 5 | |
| 20 8 | 21 ⑤ | 22 -2 | 23 8 | 24 -1 |
| 25 $\frac{20}{3}$ | 26 ① | 27 ⑤ | 28 ⑤ | |

- 1 원 $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$, 즉 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 의 중심의 좌표는 $(-1, 1)$, 반지름의 길이는 1이다.
주어진 직선과 원의 중심 사이의 거리를 각각 구하여 반지름의 길이와 비교하면
ㄱ. $\frac{|-1+1+1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ 이므로 서로 다른 두 점에서 만난다.
ㄴ. $\frac{|-1+2+3|}{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}} > 1$ 이므로 만나지 않는다.
ㄷ. $\frac{|-4+3+6|}{\sqrt{16+9}} = 1$ 이므로 한 점에서 만난다.
ㄹ. $\frac{|-3-1-6|}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{10} > 1$ 이므로 만나지 않는다.
따라서 보기 중 원과 만나는 직선은 ㄱ, ㄷ이다.

- 2 $y = kx + 2$ 를 $x^2 + y^2 = 1$ 에 대입하면

$$x^2 + (kx+2)^2 = 1$$

$$\therefore (k^2+1)x^2 + 4kx + 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4k^2 - 3(k^2+1) = 0$$

$$k^2 - 3 = 0, k^2 = 3$$

$$\therefore k = \sqrt{3} (\because k > 0)$$

다른 풀이

원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y = kx + 2$, 즉 $kx - y + 2 = 0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

$$\frac{|2|}{\sqrt{k^2+1}} = 1, 2 = \sqrt{k^2+1}$$

$$k^2 + 1 = 4, k^2 = 3$$

$$\therefore k = \sqrt{3} (\because k > 0)$$

- 3 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $3x - y + k = 0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{10}$ 보다 작아야 하므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{9+1}} < \sqrt{10}$$

$$|k| < 10$$

$$\therefore -10 < k < 10$$

따라서 정수 k 는 $-9, -8, -7, \dots, 9$ 의 19개이다.

- 4 원의 중심 $(1, 0)$ 과 직선 $x - y + n = 0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 2보다 커야 하므로

$$\frac{|1+n|}{\sqrt{1+1}} > 2$$

$$|1+n| > 2\sqrt{2}$$

$$\therefore n < -1 - 2\sqrt{2} \text{ 또는 } n > -1 + 2\sqrt{2}$$

이때 $2 < 2\sqrt{2} < 3$ 이므로 자연수 n 의 최솟값은 2이다.

- 5 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $2x - y - k = 0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같아야 하므로

$$\frac{|-k|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}, |k| = 5$$

$$\therefore k = 5 \quad (\because k > 0)$$

$y = 2x - 5$ 를 $x^2 + y^2 = 5$ 에 대입하면

$$x^2 + (2x - 5)^2 = 5, x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0 \quad \therefore x = 2$$

따라서 교점의 좌표는 $(2, -1)$ 이므로 $a = 2, b = -1$

$$\therefore k + a + b = 6$$

- 6 원의 중심 $(2, k)$ 와 직선 $3x + 4y + 5 = 0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 3보다 작아야 하므로

$$\frac{|6 + 4k + 5|}{\sqrt{9 + 16}} < 3, |4k + 11| < 15$$

$$\therefore -\frac{13}{2} < k < 1$$

따라서 k 의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

- 7 원의 중심의 좌표를 $(a, 2a)$ 라 하면

$$r = \frac{|a + 4a - 3|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|a + 4a - 7|}{\sqrt{1 + 4}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$|5a - 3| = |5a - 7|$$

$$5a - 3 = -(5a - 7)$$

$$\therefore a = 1$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } r = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

따라서 $a = 1, b = 2, r^2 = \frac{4}{5}$ 이므로

$$a + b + r^2 = \frac{19}{5}$$

- 8 원

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

의 중심 $(1, -1)$ 과 직선 $4x + 3y + 9 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4 - 3 + 9|}{\sqrt{16 + 9}} = 2$$

이때 원의 반지름의 길이는 3이므로

$$\overline{AB} = 2\sqrt{3^2 - 2^2} = 2\sqrt{5}$$

- 9 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ 에서 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

원의 중심 $C(2, 3)$ 과

직선 $3x + 4y - 3 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6 + 12 - 3|}{\sqrt{9 + 16}} = 3$$

이때 원의 반지름의 길이는 5이므로

$$\overline{AB} = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 8$$

이때 원의 반지름의 길이는 5이므로

$$\overline{AB} = 2\sqrt{5^2 - 3^2} = 8$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$$

- 10 $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 16 = 0$ 에서 $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 9$

이 원이 직선 $y = 2x - k$ 에

의하여 잘린 현의 길이가 4

이므로 원의 중심과 현 사이의

거리는 $\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$

즉, 원의 중심 $(4, -3)$ 과

직선 $2x - y - k = 0$ 사이의

거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{|8 + 3 - k|}{\sqrt{4 + 1}} = \sqrt{5}, |11 - k| = 5 \quad \therefore k = 6 \text{ 또는 } k = 16$$

따라서 구하는 k 의 값의 합은 $6 + 16 = 22$

- 11 $\overline{OP} = 3$

$$\overline{OA} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

이때 $\triangle AOP$ 는 직각삼각형이

므로

$$\overline{AP} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

- 12 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ 에서 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$

이 원의 중심을 $C(1, -2)$, 점

점을 P 라 하면

$$\overline{CA} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (a + 2)^2} = \sqrt{a^2 + 4a + 13}$$

이때 $\triangle APC$ 는 직각삼각형이

므로

$$\overline{CA}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2, a^2 + 4a + 13 = 3^2 + 4^2$$

$$a^2 + 4a - 12 = 0, (a + 6)(a - 2) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

- 13 $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$ 에서 $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$

이 원의 중심이 $C(3, 4)$ 이므로

$$\overline{OC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

또 반지름의 길이가 3이므로

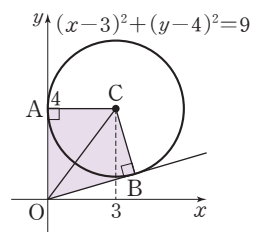
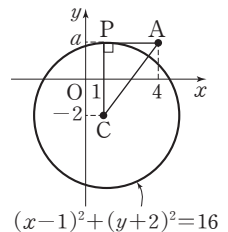
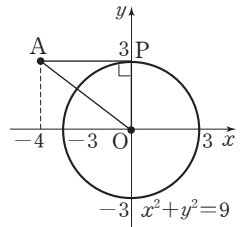
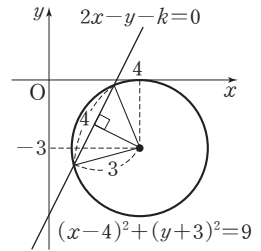
$$\overline{AC} = 3$$

이때 $\triangle OAC$ 는 직각삼각형

이므로

$$\overline{OA} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$\therefore \square OACB = 2\triangle OCA = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 3\right) = 12$$



- 14 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=4$ 이 원의 중심을 $C(-2, 1)$ 이라 하면

$$\overline{CP} = \sqrt{(2+2)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{5}$$

또 반지름의 길이가 2이므로

$$\overline{AC} = 2$$

이때 $\triangle PAC$ 는 직각삼각형이므로

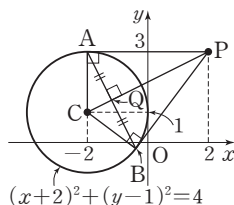
$$\overline{AP} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4$$

$\overline{CP}$ 와 $\overline{AB}$ 의 교점을 Q 라 하면 $\overline{CP} \perp \overline{AB}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times \overline{CP} \times \overline{AQ}$$

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \overline{AQ} \quad \therefore \overline{AQ} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AQ} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$



- 15 원의 중심 $(-1, 3)$ 과 직선 $3x+4y+1=0$ 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|-3+12+1|}{\sqrt{9+16}} = 2$$

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 $r=1$ 이므로

$$M=d+r=2+1=3, m=d-r=2-1=1$$

$$\therefore Mm=3$$

- 16 $x^2+y^2-6x-2y+8=0$ 에서 $(x-3)^2+(y-1)^2=2$ 이 원의 중심 $(3, 1)$ 과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3-1+k|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|k+2|}{\sqrt{2}}$$

한편 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이므로 중심과 직선 사이의 거리는

$$4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{|k+2|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \text{이므로}$$

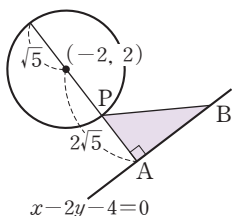
$$|k+2|=6 \quad \therefore k=4 \quad (\because k>0)$$

- 17 두 점 $A(0, -2)$, $B(4, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y+2=\frac{2}{4}x \quad \therefore x-2y-4=0$$

원의 중심 $(-2, 2)$ 와 직선 $x-2y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2-4-4|}{\sqrt{1+4}} = 2\sqrt{5}$$



삼각형 ABP 의 넓이가 최소일 때의 삼각형의 높이를 h 라 하면

$$h=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$$

또 선분 AB 의 길이는

$$\overline{AB} = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}$$

따라서 삼각형 ABP 의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times h = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$$

- 18 직선 $4x-y+1=0$ 의 기울기가 4이므로 기울기가 4이고 원 $x^2+y^2=9$ 에 접하는 직선의 방정식은

$$y=4x \pm 3\sqrt{4^2+1}$$

$$\therefore y=4x \pm 3\sqrt{17}$$

- 19 직선 $x-2y-5=0$ 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로 이 직선에 수직인 직선의 기울기는 -2 이다.

기울기가 -2 이고 원 $x^2+y^2=5$ 에 접하는 직선의 방정식은

$$y=-2x \pm \sqrt{5 \times \sqrt{(-2)^2+1}}$$

$$\therefore y=-2x \pm 5$$

따라서 두 직선의 x 절편은 $-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}$ 이므로

$$\overline{PQ} = \left| \frac{5}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right) \right| = 5$$

- 20 기울기가 3이고 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=5$ 에 접하는 직선의 방정식을 $3x-y+b=0$ 이라 하면

$$\frac{|-3-1+b|}{\sqrt{9+1}} = \sqrt{5}$$

$$|b-4|=5\sqrt{2}$$

$$\therefore b=4 \pm 5\sqrt{2}$$

따라서 두 직선의 y 절편의 합은

$$(4-5\sqrt{2}) + (4+5\sqrt{2}) = 8$$

- 21 기울기가 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 이고 원 $x^2+y^2=12$ 에 접하는 직선의 방정식은

$$y=\sqrt{3}x \pm \sqrt{12 \times \sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}$$

$$\therefore y=\sqrt{3}x \pm 4\sqrt{3}$$

이 직선이 x 축, y 축과

만나는 네 점의 좌표는

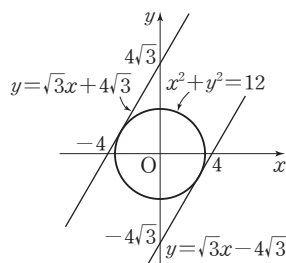
$$(-4, 0), (4, 0),$$

$$(0, -4\sqrt{3}), (0, 4\sqrt{3})$$

따라서 구하는 사각형의

넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 8\sqrt{3} = 32\sqrt{3}$$



- 22 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$ax+by=5 \quad \therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{5}{b}$$

이 접선의 기울기가 2이므로

$$-\frac{a}{b}=2 \quad \therefore a=-2b \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또 점 (a, b) 는 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=-2, b=1 \text{ 또는 } a=2, b=-1$$

$$\therefore ab=-2$$

- 23 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $(1, \sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은

$$x+\sqrt{3}y=4$$

$$\therefore x+\sqrt{3}y-4=0$$

이 직선이 원 $(x-a)^2+y^2=9$ 에 접하므로

$$\frac{|a-4|}{\sqrt{1+3}}=3, |a-4|=6$$

$$\therefore a=-2 \text{ 또는 } a=10$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 합은

$$-2+10=8$$

- 24 원의 중심 $(1, 2)$ 와 점 $(-2, 6)$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{6-2}{-2-1}=-\frac{4}{3}$$

기울기가 $\frac{3}{4}$ 이고 점 $(-2, 6)$ 을 지나는 접선의 방정식은

$$y-6=\frac{3}{4}(x+2)$$

$$\therefore 3x-4y+30=0$$

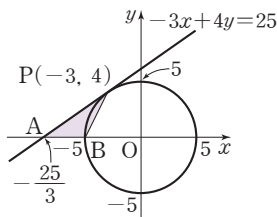
따라서 $a=3, b=-4$ 이므로

$$a+b=-1$$

- 25 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $P(-3, 4)$ 에서의 접선의 방정식은

은 $-3x+4y=25$ 이므로 x 축과 만나는 점은

$$A\left(-\frac{25}{3}, 0\right)$$



점 A에서 가장 가까운 원 위의 점은 $B(-5, 0)$ 이므로

$$\overline{AB}=-5+\frac{25}{3}=\frac{10}{3}$$

$$\therefore \triangle ABP=\frac{1}{2} \times \frac{10}{3} \times 4=\frac{20}{3}$$

- 26 점 $(1, 3)$ 을 지나고 주어진 원에 접하는 직선의 기울기를 m 이라 하면

$$y-3=m(x-1) \quad \therefore mx-y-m+3=0$$

원의 중심 $(2, 0)$ 과 이 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같아야 하므로

$$\frac{|2m-m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}, |m+3|=\sqrt{5(m^2+1)}$$

$$(m+3)^2=5(m^2+1), 2m^2-3m-2=0$$

$$(2m+1)(m-2)=0 \quad \therefore m=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } m=2$$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$$-\frac{1}{2} \times 2=-1$$

- 27 점 $(2, 1)$ 을 지나고 주어진 원에 접하는 직선의 기울기를 m 이라 하면

$$y-1=m(x-2) \quad \therefore mx-y-2m+1=0$$

원의 중심 $(4, 0)$ 과 이 직선 사이의 거리가 반지름의 길이 1과 같아야 하므로

$$\frac{|4m-2m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=1, |2m+1|=\sqrt{m^2+1}$$

$$(2m+1)^2=m^2+1, 3m^2+4m=0$$

$$m(3m+4)=0 \quad \therefore m=-\frac{4}{3} \text{ 또는 } m=0$$

따라서 접선의 방정식은

$$y-1=0 \text{ 또는 } 4x+3y-11=0$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $a=4, b=3$

$$\therefore a+b=7$$

- 28 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=4$$

이 직선이 점 $A(4, -2)$ 를 지나므로

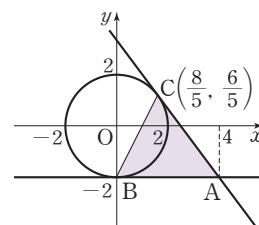
$$4x_1-2y_1=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또 점 (x_1, y_1) 은 원 위의 점이므로

$$x_1^2+y_1^2=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$x_1=0, y_1=-2 \text{ 또는 } x_1=\frac{8}{5}, y_1=\frac{6}{5}$$



따라서 $B(0, -2), C\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$ 이라 하면

$$\triangle ABC=\frac{1}{2} \times 4 \times \left(\frac{6}{5}+2\right)=\frac{32}{5}$$

III-4 01 평행이동

기초 문제 Training

120쪽

- 1 (1) (5, 6) (2) (-2, -2)
- 2 (1) (0, 1) (2) (-8, 6)
(3) (-1, 7) (4) (-5, 2)
- 3 (1) (3, -1) (2) (0, 7)
(3) (-6, -2) (4) (-5, 6)
- 4 (1) $a=5, b=-5$ (2) $a=-4, b=-6$
- 5 (1) $x+y-2=0$ (2) $(x-1)^2+(y+3)^2=4$
- 6 (1) $2x+3y+1=0$ (2) $y=-2(x-1)^2-1$
- 7 (1) $x+2y-6=0$ (2) $(x-2)^2+(y+3)^2=5$
- 8 (1) $a=3, b=-4$ (2) $a=-2, b=-5$

핵심 유형 Training

121~122쪽

- | | | | | |
|-----------|------|------|-------------------|------|
| 1 (5, -1) | 2 ① | 3 ① | 4 1 | 5 ④ |
| 6 -6 | 7 ② | 8 7 | 9 ④ | 10 6 |
| 11 ③ | 12 ⑤ | 13 ② | 14 $-\frac{1}{2}$ | |

- 1 P(a, b)라 하면 평행이동한 점의 좌표는 (a-2, b+3)이므로
 $a-2=3, b+3=2 \quad \therefore a=5, b=-1$
 따라서 점 P의 좌표는 (5, -1)이다.
- 2 주어진 평행이동에 의하여 점 (a, 3)은 점 (a+2, 4)로 옮겨지므로
 $4=3(a+2)+1, 3a=-3 \quad \therefore a=-1$
- 3 주어진 평행이동은 $(x, y) \rightarrow (x+2, y-2)$
 이 평행이동에 의하여 점 (a, b)는 점 (a+2, b-2)로 옮겨지므로
 $a+2=8, b-2=7 \quad \therefore a=6, b=9$
 $\therefore a-b=-3$

- 4 평행이동한 점을 A'이라 하면 A'(4, 1+a)
 $\overline{OA'}=2\overline{OA}$ 에서 $\overline{OA'}^2=4\overline{OA}^2$ 이므로
 $4^2+(1+a)^2=4(2^2+1^2), a^2+2a-3=0$
 $(a+3)(a-1)=0 \quad \therefore a=1 (\because a>0)$
- 5 평행이동한 직선의 방정식은
 $a(x-m)-(y+2)+4=0 \quad \therefore ax-y-am+2=0$
 이 직선이 직선 $3x-y-1=0$ 과 일치하므로
 $a=3, -am+2=-1 \quad \therefore a=3, m=1$
 $\therefore a+m=4$
- 6 주어진 평행이동은 $(x, y) \rightarrow (x+2, y-4)$
 이 평행이동에 의하여 평행이동한 직선의 방정식은
 $2(x-2)+a(y+4)+3=0 \quad \therefore 2x+ay+4a-1=0$
 이 직선이 직선 $2x-y+b=0$ 과 일치하므로
 $a=-1, 4a-1=b \quad \therefore a=-1, b=-5$
 $\therefore a+b=-6$
- 7 평행이동한 직선의 방정식은
 $y+1=a(x-2)+b \quad \therefore y=ax-2a+b-1$
 이 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이고 y절편이 1이므로
 $a=\frac{1}{2}, -2a+b-1=1 \quad \therefore a=\frac{1}{2}, b=3$
 $\therefore 2a-b=2 \times \frac{1}{2}-3=-2$
- 8 직선 $ax+by+2=0$ 이 점 (2, 1)을 지나므로
 $2a+b+2=0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 평행이동한 직선의 방정식은
 $a(x-4)+b(y-3)+2=0$
 $\therefore ax+by-4a-3b+2=0$
 이 직선이 직선 $ax+by+2=0$ 과 일치하므로
 $-4a-3b+2=2 \quad \therefore 4a+3b=0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$
 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면 $a=-3, b=4$
 $\therefore b-a=7$
- 9 평행이동한 원의 방정식은
 $(x-a-2)^2+(y-b+3)^2=4$
 이 원이 원 $x^2+(y-2)^2=4$ 와 일치하므로
 $-a-2=0, -b+3=-2 \quad \therefore a=-2, b=5$
 $\therefore a+b=3$
다른 풀이
 $x^2+y^2-4y=0$ 에서 $x^2+(y-2)^2=4$
 이 원의 중심의 좌표는 (0, 2)이므로
 $2+a=0, -3+b=2 \quad \therefore a=-2, b=5$
 $\therefore a+b=3$

10 $x^2+y^2+2x-4y+a=0$ 에서
 $(x+1)^2+(y-2)^2=5-a$
주어진 평행이동은 $(x, y) \rightarrow (x+3, y-4)$
이 평행이동에 의하여 평행이동한 원의 방정식은
 $(x-3+1)^2+(y+4-2)^2=5-a$
 $\therefore (x-2)^2+(y+2)^2=5-a$
따라서 중심의 좌표가 $(2, -2)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{5-a}$
이므로
 $b=2, \sqrt{5-a}=3 \quad \therefore a=-4, b=2$
 $\therefore b-a=6$

11 평행이동한 원의 방정식은
 $(x-a-2)^2+(y+1)^2=4$
이 원이 직선 $3x+4y-1=0$ 과 접하려면 원의 중심
 $(a+2, -1)$ 과 직선 $3x+4y-1=0$ 사이의 거리가 반지
름의 길이 2와 같아야 하므로
 $\frac{|3(a+2)-4-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$
 $|3a+1|=10 \quad \therefore a=3 (\because a>0)$

12 평행이동한 포물선의 방정식은
 $y+3=(x+2)^2+2(x+2)+a$
 $\therefore y=x^2+6x+a+5$
이 포물선이 포물선 $y=x^2+bx+7$ 과 일치하므로
 $6=b, a+5=7 \quad \therefore a=2, b=6$
 $\therefore ab=12$

13 평행이동한 포물선의 방정식은
 $y+1=(x-2)^2+6(x-2)+13$
 $\therefore y=x^2+2x+4=(x+1)^2+3$
따라서 꼭짓점의 좌표가 $(-1, 3)$ 이므로
 $a=-1, b=3 \quad \therefore a+b=2$

다른 풀이

포물선 $y=x^2+6x+13=(x+3)^2+4$ 의 꼭짓점의 좌표
가 $(-3, 4)$ 이므로
 $a=-3+2=-1, b=4-1=3$
 $\therefore a+b=2$

14 포물선 $y=2x^2+4x+1=2(x+1)^2-1$ 을 평행이동한 포
물선의 방정식은
 $y+a=2(x-a+1)^2-1$
 $\therefore y=2(x-a+1)^2-a-1$
이 포물선의 꼭짓점 $(a-1, -a-1)$ 이 직선 $y=x+1$
위에 있으므로
 $-a-1=a-1+1 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$

III-4 02 대칭이동

기초 문제 Training

123쪽

- (1) $(1, -5)$ (2) $(-1, 5)$
(3) $(-1, -5)$ (4) $(5, 1)$
- (1) $x+2y+1=0$ (2) $x+2y-1=0$
(3) $x-2y-1=0$ (4) $2x-y-1=0$
- (1) $(x-3)^2+(y+4)^2=4$
(2) $(x+3)^2+(y-4)^2=4$
(3) $(x+3)^2+(y+4)^2=4$
(4) $(x-4)^2+(y-3)^2=4$
- (1) $y=-2(x-3)^2-1$
(2) $y=2(x+3)^2+1$
(3) $y=-2(x+3)^2-1$
(4) $x=2(y-3)^2+1$
- (1) $(4, 2)$ (2) $(-5, 6)$ (3) $(1, 0)$
- (1) $(6, -7)$ (2) $(1, 7)$ (3) $(-5, -11)$
- (1) $\left(\frac{a}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$ (2) -1 (3) $(1, 1)$

핵심 유형 Training

124~128쪽

- | | | | |
|----------------|-------|----------------|--|
| 1 $2\sqrt{10}$ | 2 0 | 3 2 | 4 제4사분면 |
| 5 ③ | 6 ④ | 7 $y=2x+9$ | 8 -1 |
| 9 ④ | 10 ④ | 11 ⑤ | 12 ② |
| 13 ④ | 14 ⑤ | 15 ③ | 16 ③ |
| 17 ② | 18 ② | 19 ⑤ | 20 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ |
| 21 ⑤ | 22 12 | 23 ③ | 24 ④ |
| 25 2 | 26 -3 | 27 $(2, 5)$ | 28 ① |
| 29 ⑤ | 30 4 | 31 $\sqrt{17}$ | 32 76 |

- 1 P(2, 4), Q(-4, 2)이므로
 $PQ=\sqrt{(-4-2)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{10}$

- 2 점 $(a+2, 3)$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a-2, 3)$

이 점을 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(a+2, -3)$$

이 점이 점 $(5, b)$ 와 일치하므로 $a+2=5, -3=b$

$$\therefore a=3, b=-3 \quad \therefore a+b=0$$

- 3 점 $A(a, b)$ 가 직선 $y=x+2$ 위에 있으므로

$$b=a+2 \quad \therefore A(a, a+2)$$

점 $A(a, a+2)$ 를 y 축에 대

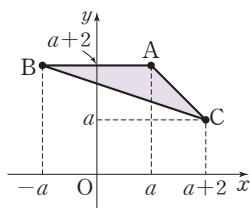
하여 대칭이동한 점은

$$B(-a, a+2)$$

점 $A(a, a+2)$ 를 직선

$y=x$ 에 대하여 대칭이동한

점은 $C(a+2, a)$



$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 2a \times 2 = 2a$$

따라서 $2a=4$ 이므로 $a=2$

- 4 점 (a, b) 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(a, -b)$$

이 점이 제2사분면 위에 있으므로

$$a < 0, -b > 0 \quad \therefore a < 0, b < 0$$

점 $(a+b, ab)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(-a-b, -ab)$$

이때 $a < 0, b < 0$ 이므로 $-a-b > 0, -ab < 0$

따라서 점 $(-a-b, -ab)$ 는 제4사분면 위에 있다.

- 5 점 $(5, -1)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면 점 $(-1, 5)$ 로 옮겨지므로 직선 $2x+y-5=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$2y+x-5=0 \quad \therefore x+2y-5=0$$

- 6 직선 $y=mx+3$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $-y=mx+3 \quad \therefore y=-mx-3$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=mx-3 \quad \therefore y=-mx+3$$

이 직선이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$1=-2m+3 \quad \therefore m=1$$

- 7 직선 $y=\frac{1}{2}x-5$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x-5$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 2이므로 기울기가 2이고 점 $(-4, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-1=2(x+4) \quad \therefore y=2x+9$$

- 8 $x^2+y^2-2x-2ay-25=0$ 에서

$$(x-1)^2+(y-a)^2=a^2+26$$

이 원을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-1)^2+(-y-a)^2=a^2+26$$

$$\therefore (x-1)^2+(y+a)^2=a^2+26$$

이 원의 중심 $(1, -a)$ 가 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으

므로

$$1-2a-3=0 \quad \therefore a=-1$$

- 9 포물선 $y=x^2+ax+b$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y=(-x)^2+a \times (-x)+b$$

$$\therefore y=-x^2+ax-b=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-b$$

이 포물선의 꼭짓점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}-b\right)$ 가 점 $(4, 8)$ 과 일치하

므로

$$\frac{a}{2}=4, \frac{a^2}{4}-b=8 \quad \therefore a=8, b=8$$

$$\therefore a+b=16$$

- 10 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 에서 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$

이 원을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-2)^2=9$$

이때 직선 $y=2x+k$ 가 이 원의 넓이를 이등분하려면 원

의 중심 $(-1, 2)$ 를 지나야 하므로

$$2=-2+k \quad \therefore k=4$$

- 11 포물선 $y=-x^2+x-2$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$-y=-(-x)^2-x-2$$

$$\therefore y=x^2+x+2$$

따라서 이차방정식 $x^2+x+2=kx-2$, 즉

$x^2+(1-k)x+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하므로

$$D=(1-k)^2-16=0, k^2-2k-15=0$$

$$(k+3)(k-5)=0 \quad \therefore k=5 (\because k > 0)$$

- 12 점 $(a, -2)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a, 2)$

이 점을 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(-a+4, -1)$$

이 점이 점 $(1, b)$ 와 일치하므로

$$-a+4=1, -1=b \quad \therefore a=3, b=-1$$

$$\therefore ab=-3$$

- 13 점 $(-3, 1)$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(-3+a, 1)$$

이 점을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(1, -3+a)$$

이 점이 직선 $2x-y-1=0$ 위에 있으므로

$$2-(-3+a)-1=0$$

$$\therefore a=4$$

- 14 원 $(x+2)^2+(y+5)^2=9$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-a+2)^2+(y-b+5)^2=9$$

이 원을 y 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(-x-a+2)^2+(y-b+5)^2=9$$

$$\therefore (x+a-2)^2+(y-b+5)^2=9$$

이 원의 중심 $(2-a, b-5)$ 가 점 $(-3, 2)$ 와 일치하므로

$$2-a=-3, b-5=2$$

$$\therefore a=5, b=7$$

$$\therefore a+b=12$$

- 15 포물선 $y=x^2-x+a$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$y=(-x)^2-(-x)+a=x^2+x+a$$

이 포물선을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-2=(x+1)^2+x+1+a$$

$$\therefore y=x^2+3x+a+4$$

이 포물선이 포물선 $y=x^2+3x+10$ 과 일치하므로

$$a+4=10$$

$$\therefore a=6$$

- 16 직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 직선 l 의 방정식은

$$y-7=m(x-1)$$

$$\therefore y=mx-m+7$$

이 직선을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y+3=m(x-2)-m+7$$

$$\therefore y=mx-3m+4$$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=-mx-3m+4$$

$$\therefore y=mx+3m-4$$

이 직선이 점 $(3, 8)$ 을 지나므로

$$8=3m+3m-4, 6m=12$$

$$\therefore m=2$$

- 17 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=36$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$$(x-a)^2+(-y-b)^2=36$$

$$\therefore (x-a)^2+(y+b)^2=36$$

이 원을 x 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-4-a)^2+(y+b)^2=36$$

이 원이 x 축과 y 축에 동시에 접하므로

$$|a+4|=|-b|=6$$

$$\therefore a=2, b=6 (\because a>0, b>0)$$

$$\therefore a-b=-4$$

- 18 점 $B(6, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면 $B'(6, -1)$ 이므로

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}$$

$$\geq \overline{AB'}$$

$$=\sqrt{(6-2)^2+(-1-3)^2}$$

$$=4\sqrt{2}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값은 $4\sqrt{2}$ 이다.

- 19 점 $A(2, 3)$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면 $A'(-2, 3)$

점 $B(5, 1)$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면 $B'(5, -1)$

$$\therefore \overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}=\overline{A'P}+\overline{PQ}+\overline{QB'}$$

$$\geq \overline{A'B'}$$

$$=\sqrt{(5+2)^2+(-1-3)^2}$$

$$=\sqrt{65}$$

따라서 $\overline{AP}+\overline{PQ}+\overline{QB}$ 의 최솟값은 $\sqrt{65}$ 이다.

- 20 점 $A(6, 2)$ 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면 $A'(2, 6)$ 이고

$$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$$

$$\geq \overline{A'B}$$

직선 $A'B$ 의 방정식은

$$y-6=\frac{-1-6}{3-2}(x-2) \quad \therefore y=-7x+20$$

따라서 점 P 는 두 직선 $y=x, y=-7x+20$ 의 교점이므로

$$x=-7x+20 \quad \therefore x=\frac{5}{2}$$

즉, 점 P 의 좌표는

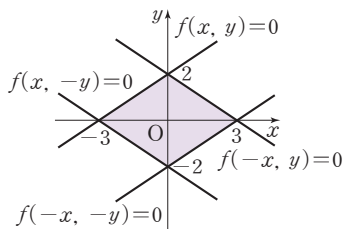
$$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

- 21 방정식 $f(x+1, -y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식

$f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동한

후 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 ⑤이다.

- 22** 방정식 $f(x, -y)=0$, $f(-x, y)=0$, $f(-x, -y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12$$

- 23** [그림 2]의 도형은 [그림 1]의 도형을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것으로 볼 수 있으므로

$$\begin{aligned} f(x, y)=0 &\longrightarrow f(x, -y)=0 \\ &\longrightarrow f(x+1, -(y-2))=0 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x+1, -y+2)=0$$

또 [그림 1]의 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것으로도 볼 수 있으므로

$$\begin{aligned} f(x, y)=0 &\longrightarrow f(-x, -y)=0 \\ &\longrightarrow f(-(x+1), -(y-2))=0 \end{aligned}$$

$$\therefore f(-x-1, -y+2)=0$$

따라서 구하는 방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

- 24** 방정식 $g(x, y)=0$ 이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$ 이 나타내는 도형을 y 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것으로 볼 수 있으므로

$$\begin{aligned} f(x, y)=0 &\longrightarrow f(-x, y)=0 \\ &\longrightarrow f(-x, y+1)=0 \end{aligned}$$

$$\therefore g(x, y)=f(-x, y+1)$$

- 25** 점 $(1, 1)$ 은 두 점 $(a, 3)$, $(4, b)$ 를 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{a+4}{2}=1, \frac{3+b}{2}=1$$

$$\therefore a=-2, b=-1 \quad \therefore ab=2$$

- 26** 점 $(-1, -1)$ 은 두 원의 중심을 이은 선분의 중점이므로

$$\frac{1+a}{2}=-1, \frac{-2+b}{2}=-1$$

$$\therefore a=-3, b=0 \quad \therefore a+b=-3$$

- 27** 포물선 $y=-x^2+6x-2=-(x-3)^2+7$ 의 꼭짓점의 좌표는

$$(3, 7)$$

포물선 $y=x^2-2x+4=(x-1)^2+3$ 의 꼭짓점의 좌표는

$$(1, 3)$$

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 (a, b) 는 두 포물선의 꼭짓점을 이은 선분의 중점이므로

$$a=\frac{3+1}{2}=2, b=\frac{7+3}{2}=5$$

따라서 점 P의 좌표는 $(2, 5)$

- 28** 직선 $y=2x-3$ 위의 점 (x, y) 를 점 $(-2, 1)$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 (x', y') 이라 하면

$$\frac{x+x'}{2}=-2, \frac{y+y'}{2}=1$$

$$\therefore x=-4-x', y=2-y'$$

이를 $y=2x-3$ 에 대입하면

$$2-y'=2(-4-x')-3$$

$$\therefore y'=2x'+13$$

따라서 대칭이동한 직선의 방정식은 $y=2x+13$ 이므로

$$a=2, b=13 \quad \therefore a-b=-11$$

- 29** 두 점 $(7, -3)$, (a, b) 를 이은 선분의 중점

$(\frac{7+a}{2}, \frac{-3+b}{2})$ 가 직선 $x-2y-3=0$ 위의 점이므로

$$\frac{7+a}{2}-2 \times \frac{-3+b}{2}-3=0$$

$$\therefore a-2b=-7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 두 점 $(7, -3)$, (a, b) 를 지나는 직선이 직선

$$x-2y-3=0, \text{ 즉 } y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \text{에 수직이므로}$$

$$\frac{b+3}{a-7} \times \frac{1}{2}=-1$$

$$\therefore 2a+b=11 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a=3, b=5$

$$\therefore ab=15$$

- 30** 두 원의 중심의 좌표가 각각 $(2, -1)$, $(-4, 3)$ 이고 두 원의 중심을 이은 선분의 중점 $(-1, 1)$ 이 직선

$y=ax+b$ 위의 점이므로

$$1=-a+b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 두 점 $(2, -1)$, $(-4, 3)$ 을 지나는 직선이 직선

$y=ax+b$ 에 수직이므로

$$\frac{3+1}{-4-2} \times a=-1 \quad \therefore a=\frac{3}{2}$$

$$\text{이를 ①에 대입하여 풀면 } b=\frac{5}{2}$$

$$\therefore a+b=4$$

- 31 점 A(1, 0)을 직선 $x-y+1=0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A'(a, b)라 하면 $\overline{AA'}$ 의 중점 $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 가 직선 $x-y+1=0$ 위의 점이므로

$$\frac{1+a}{2} - \frac{b}{2} + 1 = 0$$

$$\therefore a-b=-3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 직선 AA'은 직선 $x-y+1=0$, 즉 $y=x+1$ 에 수직이므로

$$\frac{b}{a-1} \times 1 = -1$$

$$\therefore a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a=-1, b=2$$

즉, 점 A'의 좌표는 (-1, 2)이므로

$$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{A'P} + \overline{PB}$$

$$\geq \overline{A'B}$$

$$= \sqrt{(3+1)^2 + (1-2)^2}$$

$$= \sqrt{17}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 $\sqrt{17}$ 이다.

- 32 원 C_1 의 중심의 좌표가 (-1, -2)이고, 원 C_2 의 중심의 좌표를 (a, b)라 하면 두 원의 중심을 이은 선분의 중점 $\left(\frac{-1+a}{2}, \frac{-2+b}{2}\right)$ 가 직선 $x+2y-5=0$ 위의 점이므로

$$\frac{-1+a}{2} + 2 \times \frac{-2+b}{2} - 5 = 0$$

$$\therefore a+2b=15 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 두 점 (-1, -2), (a, b)를 지나는 직선이 직선

$$x+2y-5=0, \text{ 즉 } y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \text{에 수직이므로}$$

$$\frac{b+2}{a+1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\therefore 2a-b=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a=3, b=6$$

따라서 원 C_2 의 중심의 좌표는 (3, 6)이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(3+1)^2 + (6+2)^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore M=4\sqrt{5}+2, m=4\sqrt{5}-2$$

$$\therefore Mm=76$$